Rupture des composites tissés 3D : de la caractérisation expérimentale à la simulation robuste des effets d'échelle

Victor Médeau

▶ **To cite this version:**

Victor Médeau. Rupture des composites tissés 3D : de la caractérisation expérimentale à la simulation robuste des effets d'échelle. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, 2019. Français. NNT : . tel-02962865

HAL Id: tel-02962865
https://hal.science/tel-02962865

Submitted on 9 Oct 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Fédérale
Toulouse Midi-Pyrénées

ONERA
THE FRENCH AEROSPACE LAB

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace

Présentée et soutenue par :

Victor MÉDEAU

le lundi 23 septembre 2019

Titre :

Rupture des composites tissés 3D : de la caractérisation expérimentale à la simulation robuste des effets d'échelle

---

École doctorale et discipline ou spécialité :

ED MEGeP : Génie mécanique, mécanique des matériaux

Unité de recherche :

Institut Clément Ader

Directeur(s) de Thèse :

M. Frédéric LACHAUD (directeur de thèse)
M. Frédéric LAURIN (co-directeur de thèse)

Jury :

Mme Nadia BAHLOULI, Professeur Université de Strasbourg - Présidente
M. Frédéric LACHAUD, Professeur ISAE-SUPAERO - Directeur d thèse
M. Frédéric LAURIN Directeur de Recherche ONERA - Co-directeur de thèse
M. Carlos G.DéVILA, ingénieur de Recherche NASA Langley Research Center
M. Rodrigue DESMORAT Professeur ENS Cachan
M. Eric LORENTZ, Ingénieur de Recherche EDF R&D - Rapporteur
M. Silvestre PINHO Professeur Imperial College - Rapporteur
M. Johann RANNOU Ingénieur de Recherche ONERA

Table des matières

Introduction 9

1 Étude expérimentale de la rupture des composites tissés 3D 17

1.1 Contexte de la caractérisation de la rupture des composites tissés 3D à matrice organique 20

1.1.1 Taux de restitution d'énergie 20

1.1.2 Méthodes d'estimation de Gc 22

1.1.3 Méthodes d'instrumentation 25

1.1.4 Éprouvettes à gradient de contrainte et Modes de ruine indésirables 30

1.2 Mise en place de la campagne expérimentale 31

1.2.1 Présentation du matériau étudié 31

1.2.2 Dimensionnement des essais 32

1.2.3 Mise en place de l'instrumentation et réalisation des essais 36

1.3 Méthodes d'analyse des essais 39

1.3.1 Méthodes d'analyse de l'instrumentation 40

1.3.2 Comparaison des méthodes de suivi de fissure 48

1.3.3 Interpolation de la souplesse 48

1.3.4 Analyse critique des méthodes d'estimation de Gc 51

1.4 Résultats de propagation de macro-fissure sur composites tissés 3D 56

1.4.1 Présentation des résultats 57

1.4.2 Analyse des courbes de résistance expérimentales 60

1.4.3 Estimation de G_C : Influence de l'échelle et de géométrie 62

1.4.4 Indications de l'invalidité de la MLER 63

1.4.5 Résultats sur CT avec facteur d'échelle T3 65

1.4.6 Résultats obtenus pour les autres RCT 66

2 Modélisation de la rupture non-linéaire des composites tissés 3D 69

2.1 Modèles de rupture dans la littérature et lois de similitudes associées 71

2.1.1 Exemple d'évolution des grandeurs mécaniques avec la taille de la structure 72

2.1.2 Lois de similitude en mécanique 73

2.1.3 Critères de rupture classiques et lois de similitude associées 75

2.1.4 Modèles à longueur interne de type Bazant 77

2.1.5 Modèles de zones cohésives 80

2.2 Mise en place d'un modèle de rupture à longueurs internes . . . 82
2.2.1 Retour sur l'inégalité de Griffith . . . 82
2.2.2 Interprétations de l'effet d'échelle en présence de longueurs internes . . . 84
2.2.3 Approche en champs lointains et configuration équivalente . . . 86
2.2.4 Loi de similitude de G_C à plusieurs longueurs internes . . . 88
2.3 Application aux matériaux composites tissés 3D . . . 90
2.3.1 Validité de l'application des modèles à longueurs internes . . . 90
2.3.2 Mise en place de moyens expérimentaux complémentaires . . . 93
2.3.3 Mise en évidence d'une longueur de dégradation en avant du front de fissure . . . 94
2.3.4 Mise en évidence d'une épaisseur de fissure . . . 95
2.3.5 Méthode d'identification des longueurs c_x et c_y . . . 97
2.3.6 Identification des paramètres de rupture sur composites tissés 3D RCT1 . . . 100
2.4 Conséquences de la rupture non linéaire sur le comportement . . . 102
2.4.1 Sur les courbes Force/Déplacement . . . 103
2.4.2 Sur la courbe R . . . 103
2.4.3 Sur les champs mécaniques . . . 104
2.4.4 Relation entre les paramètres de rupture et l'architecture du matériau . . . 106
2.4.5 Résumé des principales conséquences pour le dimensionnement de pièces en composite tissé 3D . . . 108

3 Simulation de la rupture dans les modèles d'endommagement . . . 111
3.1 Les modèles d'endommagement continu . . . 113
3.1.1 Présentation du formalisme de l'endommagement continu . . . 113
3.1.2 Les spécificités du modèle ODM-CMO . . . 114
3.1.3 Modèle simplifié utilisé dans ces travaux . . . 117
3.1.4 Conséquences de l'adoucissement . . . 118
3.2 Les méthodes de régularisation numérique . . . 121
3.2.1 Modèle d'endommagement retardé : visco-endommagement et Taux limité . . . 122
3.2.2 Crack Band . . . 125
3.2.3 Modèles Non-Locaux . . . 128
3.2.4 Modèles Phase-Field . . . 131
3.2.5 Calcul des matrices tangentes . . . 133
3.2.6 Similarités entre les méthodes de régularisation . . . 138
3.3 Analyse des méthodes de régularisation . . . 139
3.3.1 Critères de contrôle des simulations numériques . . . 139
3.3.2 Analyse pratique des méthodes de régularisation . . . 142
3.3.3 Description des effets d'échelle des méthodes de régularisation . . . 150
3.4 Étude approfondie des modèles Non-Locaux à gradient . . . 158
3.4.1 Analyse détaillée du comportement Non Local . . . 158
3.4.2 Lien entre les paramètres de rupture et les paramètres du modèle d'endommagement Non-Local . . . 159
3.4.3 Identification des paramètres du modèle Non-Local et comparaison essais/calcul . . . 163
3.4.4 Enrichissement vers un modèle à deux longueurs internes . . . 166

Conclusion 167

A Méthode de calcul des dérivées des déformations positives 173

B Détails de la mise en place des modèles avec endommagement retardé 177

C Détails de la mise en place des modèles Non-locaux 181

D Détails de la mise en place des modèles Phase-Field 187

Notations génerales

Symboles mathématiques

Grandeurs mécaniques locales

$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$	Tenseur des déformations
$\underline{\boldsymbol{\sigma}}$	Tenseur des contraintes
E_i	Module de Young selon la direction i du matériau
E'	Module équivalent perpendiculairement à la surface de fissure
e_{elast}	Densité volumique d'énergie élastique
X_0	Valeur de la grandeur X en début d'essai ou valeur initiale avant endommagement dans les modèles

Grandeurs mécaniques globales

P	Force appliquée à la structure
u	Déplacement appliqué à la structure
$\sigma_N = P/e_pW$	Contrainte nominale appliquée à l'éprouvette
C	souplesse de la structure
K	Rigidité de la structure
$\mathcal{U}$	Énergie élastique de la structure
$\mathcal{G}(u,x)$	Taux de restitution d'énergie pour le déplacement u et la position de fissure x
$\tilde{\mathcal{G}}(u,x,c_f)$	Généralisation du taux $\mathcal{G}$ prenant en compte l'influence des longueurs internes
$\mathcal{K}(u,x)$	Facteur de concentration de contrainte pour le déplacement u et la position de fissure x

Paramètres de la structure

W	Dimension caractéristique de l'éprouvette
e_p	Épaisseur de l'éprouvette
a	Position/longueur de la fissure
$x = a/W$	Position normalisée de la fissure
$y = c_y/W$	Épaisseur normalisée de la fissure
λ	Facteur d'homothétie de taille entre deux éprouvettes W_2/W_1 ou W/W^{ref}
$f^X(W)$	Loi de similitude sur la grandeur X
$g(x)$	Fonction reliant $\mathcal{G}$ et P pour une structure donnée et une position x de la fissure (proportionnelle à la variation de souplesse)
$\tilde{g}(x, y)$	Généralisation de la fonction g prenant en compte l'influence des longueurs c_x et c_y ($\tilde{g}(x, 0) = g(x)$)

Rupture

X_C ou X_{rupt}	Valeur de la grandeur X à rupture
e_{rupt}	Densité volumique d'énergie de rupture
$\mathcal{R}$	Résistance à l'avancée de la fissure ou courbe de résistance au cours de la propagation
G_C	Taux de restitution d'énergie critique à rupture (valeur plateau de la courbe de résistance)
G_f	Paramètre de rupture : taux de restitution d'énergie critique asymptotique
σ_{Nf}	Paramètre de rupture : contrainte nominal à rupture asymptotique, substituable à G_f
c_x, c_y	Paramètres de rupture : longueurs internes dans les directions x (longueur de dégradation en avant du front) et y (épaisseur de fissure)
c_f	Paramètre de rupture : longueur interne dans le cas d'un modèle à une longueur
c_{eq}	Longueur interne équivalente pour une géométrie donnée $c_{eq} = c_x + \partial_y/\partial_x c_y$
$\overline{x} = x/W$	Longueur adimensionnée par la taille de la structure W

Modèles d'endommagement continu

$\underline{\underline{\boldsymbol{K}}}$	Tenseur de rigidité local
$\underline{\underline{\boldsymbol{S}}}$	Tenseur de souplesse local
$\underline{\underline{\boldsymbol{X}}}_0$	Valeur élastique initiale du tenseur $\underline{\underline{\boldsymbol{X}}}$ (rigidité ou souplesse)
d, D	Variables internes d'endommagement
y, Y	Forces motrices des endommagements
$\bar{Y}$	Force motrice délocalisée par méthode non-locale
f, F	Fonctions d'évolution des endommagement d et D
y_0, Y_0	Forces motrices seuils de l'endommagement
y_C, Y_C	Paramètres de cinétique de l'endommagement
p, P	Puissances de la loi d'évolution

Méthodes de régularisation

τ	Temps caractéristique des méthodes avec endommagement retardé
l_c	Longueurs caractéristiques des longueurs non-locales et phase-Field
ψ_0	Densité d'énergie élastique des modèles Phase-Field

Opérateur tangents et éléments finis

$\mathcal{K}$	Matrice tangente du problème discrétisé
$\mathcal{F}^X, \mathcal{R}^X$	Force interne et résidus sur la variable X
$\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}$	Opérateur tangent local
$\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}_{diff}$	Opérateur tangent local estimé par différences
$\epsilon_U, \epsilon^{\bar{Y}}, \epsilon^{stat}$	Critères de convergence relatif sur U, absolu sur $\bar{Y}$ et critère de stationnarité

Abréviations et sigles

MLER Mécanique Linéaire Élastique de la Rupture 13
CMO Composites à Matrice Organique 31
RCT Ratio Chaîne/Trame
VER Volume Élémentaire Représentatif 31
SENB Single Edge Notched Beam 30
CT Compact Tension 30
VCCT Virtual Crack Closure Technique 25
CIN Corrélation d'Images Numériques 26
SO Suivi Optique 58
EA Émission Acoustique 27
TIR Thermographie Infra-Rouge 28
EA Émission Acoustique 27
MCM Méthode de la Compliance Modifiée 24
MZC Modèle de Zones Cohésives 81
ASC Average Stress Criterion 80
ASC Boundary Stress Criterion 80
MEB Microscope Électronique à Balayage 93
CDM Continuum Damage Model 138
ODM-CMO Onera Damage Model pour les Composites à Matrice Organique 114
RDM Résistance Des Matériaux 76

Introduction

L'évolution des matériaux a accompagné de nombreuses périodes de développement : premiers objets pérennes grâce à la céramique, maîtrise du bronze, du fer puis de l'acier durant la révolution industrielle, révolution du plastique dans notre quotidien, jusqu'à l'ère du silicium rendant possible l'incroyable développement des technologies de l'information à la fin du XXème siècle. Il est dès lors attendu que de nouveaux matériaux accompagnent de futures ruptures technologiques. Nouvelles origines des matières premières (matériaux biosourcés, recyclage), nouvelles architectures et échelles d'étude (graphène, nanomatériaux), nouvelles méthodes de production (fabrication additive), intégration des coûts environnementaux, les portes semblent ouvertes pour les matériaux de demain. Ces changements supposent une compréhension et une maîtrise renforcées de leur comportement face à des applications toujours plus spécialisées.

Les matériaux composites et leur utilisation industrielle s'inscrivent dans cette tendance. Ces matériaux sont définis par l'assemblage de plusieurs éléments formant un ensemble hétérogène, mais permettant d'obtenir des propriétés dépassant celles des constituants individuels. En pratique, le terme composite se réfère le plus souvent à un assemblage de deux matériaux :

— **Un renfort**, généralement constitué de fibres allant de quelques millimètres de long à environ un mètre, sélectionné pour ses performances mécaniques : carbone, verre, aramide, fibre végétale, métal

— **Une matrice**, habituellement plus légère, assurant la transmission des efforts et la cohésion du matériau : matrices organiques thermodurcissables ou thermoplastiques, matrices céramiques, métaux

Le développement des composites observé au XXIème siècle est en partie imputable à la diversité des agencements offerts par ces matériaux et des méthodes de fabrication associées. Dans le cadre d'une utilisation mécanique haute performance, les composites sont des candidats idéaux à l'allégement de structures complexes du fait de leurs bonnes propriétés spécifiques.

Le contexte industriel de l'aéronautique

Le secteur de l'aéronautique est en première ligne de ces changements. Historiquement, le développement et la popularisation de l'aviation civile ont reposé sur l'utilisation massive de matériaux métalliques, offrant de bonnes performances mécaniques, une grande reproductibilité et la capacité de produire des pièces à grande échelle. Aujourd'hui encore, l'essentiel des avions en service est composé à 73% de métaux (aluminium, acier, titane), les composites comptant tout de même pour 20% de la masse

[Cinquin, 2002]. Ces derniers promettent en effet de conserver de bonnes propriétés mécaniques tout en procurant un gain de masse de 25% à 30 %.

L'essor de ces matériaux n'est pas guidé par de nouveaux usages mais par de nouveaux défis. Les contraintes environnementales, au premier rang desquelles la maîtrise des émissions de gaz à effet de serre anthropiques, s'imposent de manière accrue. Elles représentent sans doute le plus grand défi du siècle à venir. Or le secteur de l'aéronautique est imputable de 2 à 3% des rejets mondiaux et reste jusqu'à présent exempté de taxe carbone au niveau international. Ce secteur a cependant été le premier à s'autoréguler à travers l'Organisation de l'Aviation Civile Internationale, organisation dépendante de l'ONU. Les engagements pris par l'OACI à l'occasion du plan Corsia [ICAO, 2019] sont ambitieux : réduction de -50% des émissions totales du secteur par rapport aux émissions de 2005, malgré un trafic multiplié par deux tous les quinze ans. L'accord prévoit également un mécanisme de compensation financière carbone en cas de non atteinte des objectifs.

L'incitation à réduire la consommation des appareils est donc forte pour les constructeurs. Un des leviers de cette évolution est l'allégement des structures : (i) par un dimensionnement au plus juste des structures, dans un secteur très réglementé, et (ii) par l'introduction de nouveaux matériaux, tels les composites, en remplacement des pièces métalliques. Cette transition a déjà été partiellement effectuée : le Boeing 787 et l'A350XWB sont dotés de fuselages réalisés en composites, soit plus de 50% de l'avion en masse.

Cette transition reste délicate pour des pièces plus critiques pouvant subir des impacts, en partie du fait des techniques de production utilisées aujourd'hui. En effet, les pièces composites restent encore massivement obtenues par empilement de plis élémentaires possédant une orientation donnée des fibres : on parle de composites stratifiés, illustrés en Fig. 1. Mais cette approche fait apparaître des interfaces entre les plis et peut conduire à des délaminages (séparations des couches), par exemple suite à un choc. Ces délaminages entraînent une perte importante de tenue de la pièce, parfois malgré l'absence de marques détectables visuellement. Cette problématique fut l'un des freins à l'utilisation des composites dans les parties critiques telles que les parties froides des moteurs.

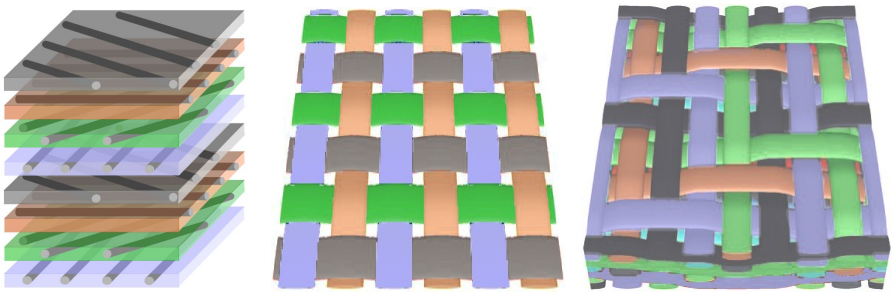


Fig. 1 – Matériaux composites à fibres longues : $a)$ stratifiés de plis unidirectionnels, $b)$ tissés 2D et $c)$ tissés 3D

Les composites tissés 3D

Une solution a émergé avec l'utilisation de matériaux tissés. Ces matériaux sont obtenus en rassemblant plusieurs milliers de fibres pour former des torons, tissés afin de créer une cohésion au sein du matériau (Fig. 1). Ce tissage peut être effectué en trois dimensions afin d'assurer une bonne tenue du matériau dans toutes les directions. Il est

alors possible d'obtenir des pièces massives ne possédant pas d'interfaces internes : on parle de matériau composite tissé 3D. Les composites tissés 3D ici étudiés sont composés de fibres de carbone associées à une matrice organique thermodurcissable époxyde.

La direction principale de tissage, possédant dans notre cas le plus grand nombre de fibres, est appelée la chaîne. La direction transversale correspond à la trame. Un composite tissé 3D est entre autre caractérisé par la quantité de fibres présente selon chacune de ces orientations, appelée Ratio Chaîne-Trame (RCT).

Ces matériaux possèdent de bonnes performances mécaniques après impact et une meilleure tenue hors-plan que les composites stratifiés. Cependant les tissés 3D présentent une tenue réduite en compression dans l'axe des renforts du fait de l'ondulation induite dans les fibres.

De nombreuses variations d'architecture peuvent être réalisées, avec une forte capacité d'optimisation du tissage et des constituants en fonction des comportements recherchés : nombre de fibres, taille des cellules de tissage, RCT et épaisseur variable etc. À ce titre, ces matériaux sont les principaux candidats au remplacement des pièces métalliques complexes et sont étudiés pour la réalisation des aubes et du carter de rétention des moteurs LEAP.

Les problématiques industrielles

Les nouvelles possibilités offertes par ces matériaux induisent de nouveaux défis : les composites tissés possèdent une plus grande complexité des mécanismes de dégradation, devant être conciliée avec le besoin accru des capacités de modélisation pour permettre un dimensionnement au plus juste. Il devient nécessaire d'anticiper l'influence des endommagements tout au long de la durée de vie des structures et être à même de détecter leur criticité.

Sur le plan de la Recherche & Développement, ces problématiques ont fait l'objet de nombreuses études dans le cadre de Plans de Recherche Concertés (PRC) dans le milieu aéronautique français. Cette thèse s'inscrit dans le contexte du PRC mecacomp mené de 2016 à 2019 à la suite du PRC composite (2010-2015), projet faisant interagir le groupe Safran, la DGAC, l'Onera et de nombreux laboratoires de recherche.

Ce projet s'organise autour de trois grands axes :

— **Axe A :** Stratégie de modélisation multiéchelle de pièces composites

— **Axe B :** Modélisation et validation du comportement des interfaces et des liaisons mécaniques

— **Axe C :** Méthodologie robuste de dimensionnement des pièces composites sous sollicitations complexes

Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre de l'axe C, dont les objectifs sont notamment :

> *Développer les techniques expérimentales et numériques dans le but de diminuer les campagnes d'essais coûteuses / Consolider les modèles d'endommagement / Développer une méthodologie d'identification robuste et paramétrée (en fonction des caractéristiques-clés matériaux).*

La transition endommagement-rupture

Ce travail s'attache en particulier à la description de la transition de l'endommagement vers la rupture. Dans ce contexte, l'endommagement est défini comme l'ensemble des mécanismes de dégradation diffus entraînant un affaiblissement progressif et peu

violent des propriétés mécaniques. Au contraire, la rupture est un phénomène plus localisé de forte dégradation des propriétés entraînant l'apparition d'une fissure et un état du matériau ne transmettant plus d'efforts. D'un point de vue du comportement local, la rupture est liée à la notion d'adoucissement : diminution de la contrainte alors que la déformation augmente.

Cette transition endommagement/rupture reste un axe de travail important vis-à-vis des besoins de compréhension et de maîtrise des composites tissés 3D. Elle est notamment essentielle pour :

— Effectuer le juste dimensionnement des pièces à la rupture, en particulier sous sollicitation dynamique. Les aubes et le carter peuvent être soumis à des collisions et leur tenue mécanique, notamment la capacité de rétention des débris par le carter, doit être justifiée. Après l'apparition d'une fissure, l'absence de propagation de celle-ci durant le reste de la durée de vie de la structure doit être assurée et son impact sur le comportement global évalué.

— Permettre de guider et réduire les essais technologiques partiels menés à rupture en réalisant *a priori* des études numériques, afin d'accélérer les campagnes et d'alléger leur coût financier.

Les résultats de cette démarche doivent être applicables à des pièces industrielles et donc s'effectuer avec des coûts de calcul et une complexité maîtrisés.

Les verrous actuels dans la description de la rupture des tissés 3D

La description de la rupture de ces matériaux souffre encore d'un manque de maturité, notamment en comparaison des composites stratifiés classiquement utilisés. Dans le cas d'applications industrielles sensibles telles que l'aéronautique, la démarche adoptée doit en effet justifier de trois caractéristiques essentielles :

— **Représentativité :** Les mécanismes physiques à l'œuvre doivent être compris et intégrés au sein des modèles dans l'espoir que les résultats obtenus restent valides en dehors des cas utilisés pour l'identification : les applications pratiques mettent en jeu des géométries, des tailles et des chargements variés. À ce titre, une étude expérimentale s'avère nécessaire pour justifier les hypothèses effectuées tout au long de la chaîne de modélisation. Un protocole d'identification clair des paramètres doit être défini.

— **Robustesse :** La méthodologie doit amener au bon résultat sans exhiber de sensibilité exacerbée aux paramètres non-physiques. En pratique, lors de l'utilisation de la méthode des éléments finis, le résultat obtenu ne doit pas dépendre de la mise en donnée : choix du maillage, de la méthode d'introduction des conditions limites etc. Deux utilisateurs mettant en données séparément le même calcul doivent obtenir le même résultat (pour autant que les paramètres de simulation appartiennent à un domaine de validité).

— **Performance :** Les coûts expérimentaux et de calcul doivent être maîtrisés afin de permettre leur application à des cas industriels (grande taille, chargements complexes, multiples sollicitations).

Or aujourd'hui, l'utilisation de méthodologies avancées pour prévoir la transition endom magement-rupture dans l'industrie est rendue délicate en raison du manque de robustesse et de performance des modèles.

Un besoin de robustesse des simulations numériques...

Ce manque de robustesse découle principalement de l'utilisation des modèles d'endommagement continu, les plus fréquemment utilisés pour décrire cette transition endom magement-rupture. L'endommagement continu offre, en effet, un cadre de modélisation puissant, compatible avec le formalisme des éléments finis mécaniques classiques, tout en offrant la possibilité de représenter un grand nombre de phénomènes. Ces modèles possèdent de très bonnes capacités de description des premiers endommagements et s'inscrivent dans un cadre thermodynamique rigoureux assurant leur représentativité. Cependant la transition vers la rupture introduit une dépendance anormalement forte au maillage lors de l'utilisation au sein de simulations par éléments finis [Hill, 1958, Benallal et al., 1993, Forest and Lorentz, 2004]. En particulier, les trajets de fissuration se concentrent sur une bande d'éléments et suivent l'orientation des mailles, faisant perdre l'hypothèse de convergence au maillage.

Afin de pallier ce problème, des méthodes dites de régularisation ont été introduites, souvent analysées sous l'angle de la validité mathématique et numérique. Or, elles font intervenir des mécanismes et des paramètres dont les fondements physiques doivent être interrogés.

D'autres approches de simulation peuvent également être considérées : méthode XFEM, zones cohésives etc. Cependant, ces méthodes semblent moins adaptées aux contraintes de l'industrie : elles peuvent entraîner des coûts de calcul importants ; nécessiter un remaillage délicat sur des pièces industrielles à géométrie complexes ; imposer des présuppositions sur la position et la direction de la fissure, peu compatibles pour les contraintes industrielles. Pour ces raisons, les modèles d'endommagement semblent rester les principaux candidats à des applications sur structures en bureau d'études.

... devant reposer sur une modélisation représentative de la rupture ...

Le formalisme utilisé pour modéliser la rupture mérite aussi d'être questionné. Les critères de rupture d'un point de vue industriel reposent généralement sur des calculs linéaires-élastiques utilisant soit des critères en contraintes, soit des critères en énergie, massivement recalés sur des données expérimentales. Dans ce dernier cas, l'approche de Griffith, qui sert de fondement à la Mécanique Linéaire Élastique de la Rupture (MLER), reste la plus courante. Elle repose sur l'identification d'une grandeur énergétique : le taux de restitution d'énergie critique G_C.

Cependant, la description de la rupture par des modèles d'endommagement continu ne fait pas intervenir la même physique. Quand la MLER repose sur des énergies surfaciques, les modèles d'endommagement manipulent des contraintes ou des énergies volumiques. À l'heure actuelle, il n'existe pas de consensus sur une approche robuste et physiquement justifiée pouvant faire dialoguer ces différentes quantités. Une variété d'approches ont ainsi été proposées pour introduire la rupture et G_C au sein de modèles d'endommagement [Bažant, 1982, Maimí et al., 2007, Pinho et al., 2006, Meer and Sluys, 2009]. Cette dichotomie d'approche doit être surmontée, en mettant à jour les parallèles pouvant exister entre les deux démarches ou en justifiant de la meilleure adaptation de l'une d'elle au cas des composites tissés 3D.

... nécessitant une étude expérimentale des mécanismes

La mise en place de modèles représentatifs ne peut reposer que sur des bases expérimentales de propagation de macro-fissure, au sens de la progression des ruptures

des torons dans la structure. Pour les tissés 3D, matériaux encore peu répandus dans la littérature, les données disponibles restent rares. L'apparition et la description du scénario d'endommagement matriciel ont déjà fait l'objet de travaux à l'Onera [Marcin, 2010, Hurmane et al., 2016, Mounien, 2017, Garcia, 2019]. Ils ont permis l'étude des mécanismes d'endommagement jusqu'au pic d'effort sous différents chargements. Ces résultats, obtenus dans le cadre des précédents PRC, sont en application chez SAFRAN. Cependant, le comportement à rupture n'a pas encore été traité et souffre d'un manque de données disponibles.

Ce point fait actuellement défaut pour pouvoir poser les bases des modèles de ruptures des matériaux composites tissés 3D. De plus, la réalisation d'essais de propagation de macro-fissures dans les composites reste sujette à des difficultés de mise en place [Ortega et al., 2014], pouvant entraîner une ruine indésirable des éprouvettes. Ces difficultés peuvent être exacerbées lors de l'étude des composites tissés, du fait de la taille importante de l'architecture et de la tenue mécanique plus faible en compression qu'en traction.

Objectifs et plan de la thèse

Ce travail de thèse cherchera donc à décrire et quantifier les mécanismes de ruptures des composites tissés 3D sous chargement de traction et à mettre en place une méthode de simulation numérique adaptée et robuste, pouvant à terme être appliquée en bureau d'études. Afin d'aborder ces problèmes, le cadre d'application et les objectifs suivants ont été définis :

- **Validation de la chaîne de dimensionnement :** Les méthodes avancées de description de la rupture sont pour l'instant peu transférées à l'industrie, car la validité de la chaîne complète n'est pas nécessairement démontrée. Afin de répondre aux exigences de robustesse du secteur aéronautique, nous essaierons de présenter une progression cohérente tout au long de la chaîne de dimensionnement (expérience, modélisation, simulation). Les méthodes d'identification des paramètres devront être proposées et justifiées.
- **Régime quasi-statique :** Ce besoin de cohérence implique dans un premier temps de se restreindre à l'étude des phénomènes quasi-statiques. Bien qu'un nombre important de cas d'application soient dynamiques, la statique représente une première étape nécessaire au développement des modèles. La maturité de la chaîne complète reste pour l'instant compromise en dynamique, en particulier d'un point de vue expérimental. Cependant, les choix réalisés ne doivent pas entraîner d'incompatibilité avec une future application aux problématiques dynamiques.
- **Échelle macroscopique :** Afin de s'inscrire dans la continuité des travaux précédemment réalisés à l'Onera, une vision macroscopique homogénéisée du matériau est utilisée. Elle promet également un transfert plus simple vers les bureaux d'études, où la taille des pièces considérées permet difficilement une description complète du milieu à l'échelle mésoscopique (échelle des torons dans les composites tissés 3D).
- **Complexité adaptée à une application industrielle :** L'application finale implique de limiter la complexité introduite : le nombre de paramètres, le coût des technologies numériques utilisées, la complexité des méthodes d'identification etc.

Ce travail de thèse s'organisera suivant trois grandes parties : (i) une caractérisation expérimentale de la rupture des composites tissés 3D, (ii) le choix d'un cadre de modé-

lisation adapté rendant compte des phénomènes observés et (iii) l'intégration dans des simulations numériques par éléments finis.

Étude expérimentale de la rupture des composites tissés 3D

La partie expérimentale cherchera à quantifier la propagation de fissures pour différents RCT. Du fait des spécificités du matériau, le dimensionnement des éprouvettes devra être adapté pour prévenir des phénomènes de ruine indésirable. Afin de mettre en place le scenario complet de rupture, un maximum d'informations sera extrait des campagnes à l'aide d'une multi-instrumentation des essais. L'étude sera également effectuée sur des éprouvettes de géométries et de tailles variées pour mettre en évidence une variation éventuelle des grandeurs aux conditions d'essai. Cette démarche est nécessaire pour assurer la transposition des résultats obtenus sur éprouvettes de laboratoire à des structures représentatives des applications industrielle.

Modélisation de la rupture non-linéaire des composites tissés 3D

Un formalisme d'analyse et de modélisation permettant de rendre compte des résultats expérimentaux sera ensuite présenté et adapté aux mécanismes de rupture des composites tissés 3D. On cherchera à donner un sens physique aux quantités introduites, dont les valeurs doivent être, à terme, reliées à l'architecture du matériau. La méthode d'identification des paramètres sera présentée et les conséquences de ces résultats sur le dimensionnement de pièces composites seront discutées.

Prise en compte de la rupture dans les modèles d'endommagement

La dernière partie s'attachera à intégrer ces résultats au sein de simulations numériques. Des méthodes de régularisation des modèles d'endommagement continu seront évaluées à l'aune de leur capacité à assurer la robustesse des résultats à un coût modéré et à retranscrire les phénomènes physiques observés expérimentalement. La prise en compte de ces considérations numériques et physiques amènera à sélectionner des technologies numériques adaptées et à expliciter les valeurs des paramètres numériques en cohérence avec ceux introduits dans le modèle.

Chapitre 1

Étude expérimentale de la rupture des composites tissés 3D

Résumé

Cette section est consacrée à la mise en place d'une campagne expérimentale de caractérisation de la propagation de macro-fissures à travers les matériaux composites tissés 3D.

La première partie présentera les méthodes de caractérisations de la rupture, initialement développées pour le béton et les métaux, ainsi que les transferts ayant été effectués vers les matériaux composites.

Du fait de l'absence de consensus et des spécificités inhérentes aux composites tissés 3D, la deuxième partie présentera la démarche mise en place dans cette thèse. Elle explicitera notamment les précautions prises lors du pré-dimensionnement et du suivi des essais afin de s'affranchir des modes de ruines indésirables pouvant survenir.

Ensuite, la troisième partie s'attachera à présenter les méthodes d'analyse des essais et à vérifier la validité des hypothèses sous-jacentes effectuées, afin de garantir la plus grande robustesse de la méthodologie. Cette démarche amènera à valider la méthodologie de suivi de fissure. Elle exclura certaines méthodes d'estimation de G_C dans le cadre de cette campagne d'essai, jugées non adaptées aux matériaux composites tissés.

Enfin, les résultats seront présentés en quatrième partie. Ceux-ci amèneront notamment à remettre en cause l'usage de la MLER pour les composites tissés 3D. Ces résultats expérimentaux serviront de socle à la mise en place d'un modèle de rupture adapté en Section 2.4.5.

Sommaire

1.1 **Contexte de la caractérisation de la rupture des composites tissés 3D à matrice organique** 20
1.1.1 Taux de restitution d'énergie 20
1.1.2 Méthodes d'estimation de Gc 22
1.1.3 Méthodes d'instrumentation 25
1.1.4 Éprouvettes à gradient de contrainte et Modes de ruine indésirables 30
1.2 **Mise en place de la campagne expérimentale** 31
1.2.1 Présentation du matériau étudié 31
1.2.2 Dimensionnement des essais 32
1.2.3 Mise en place de l'instrumentation et réalisation des essais 36
1.3 **Méthodes d'analyse des essais** 39
1.3.1 Méthodes d'analyse de l'instrumentation 40
1.3.2 Comparaison des méthodes de suivi de fissure 48
1.3.3 Interpolation de la souplesse 48
1.3.4 Analyse critique des méthodes d'estimation de Gc 51
1.4 **Résultats de propagation de macro-fissure sur composites tissés 3D** 56
1.4.1 Présentation des résultats 57
1.4.2 Analyse des courbes de résistance expérimentales 60
1.4.3 Estimation de G_C : Influence de l'échelle et de géométrie 62
1.4.4 Indications de l'invalidité de la MLER 63
1.4.5 Résultats sur CT avec facteur d'échelle T3 65
1.4.6 Résultats obtenus pour les autres RCT 66

Introduction

L'utilisation des composites tissés 3D à matrice organique dans des structures aéronautiques complexes nécessite la mise en place d'un modèle à même de décrire leur comportement. Celui-ci doit décrire le comportement depuis l'apparition des premiers endommagements matriciels jusqu'à la rupture. En effet, la tenue des structures pour un grand nombre de sollicitations multi-axiales doit être garantie. La prévision de la rupture s'avère également nécessaire pour dimensionner correctement des essais du fait de la physique complexe à l'œuvre. Un dimensionnement robuste doit alors pouvoir prévoir l'apparition des endommagements, étudier leur impact sur la réponse globale et leur propagation éventuelle, pouvant entraîner la ruine complète de la structure.

La mise en place d'une modélisation apte à reproduire les phénomènes physiques à l'œuvre requière leur compréhension expérimentale et la mise en place des scenarii d'endommagement. Du fait du développement récent des composites tissés 3D à matrice organique, il existe encore un fort besoin de compréhension de ces mécanismes. Les nombreux endommagements mésoscopiques diffus présents ont déjà fait l'objet d'études [Hurmane et al., 2016], notamment dans le cadre du projet PRC Composite. L'apparition d'une fissure sur des structures sans gradient de contrainte y a également été étudié, permettant d'établir des critères de rupture des torons sous chargement uni-axial. Cependant la propagation de ces fissures dans des structures, l'influence des concentrations de contrainte et l'interaction avec les endommagements matriciels diffus doivent encore faire l'objet de travaux de recherche.

L'absence de donnée expérimentale sur les tissés 3D est due à la relative nouveauté de ces matériaux et aux difficultés expérimentales pouvant être rencontrées lors de la mise en place d'essais de propagation. Le dimensionnement des essais et le choix des méthodes d'analyse associées doit tenir compte les spécificités du matériau. Ce travail a été entamé pour les composites stratifiés d'unidirectionnels. Des travaux ont été menés sur la propagation de délaminages [González et al., 2012, Hongkarnjanakul, 2013], souvent critiques pour les stratifiés car ils entraînent la ruine complète des structures. Du fait de son caractère intrinsèquement localisé et des résistances faibles mise en jeu au regard de la tenue des fibres, un consensus semble se dégager pour l'étude expérimentale de ces délaminages. Cela c'est traduit par la mise en place de normes.

Des travaux ont également été réalisés sur la propagation de macro-fissures, transférant les méthodes utilisés notamment sur les métaux et les bétons aux composites [Laffan et al., 2010a, Ortega et al., 2014, ASTM, 2015]. Contrairement au délaminage, il est ici encore difficile de faire émerger un consensus sur les pratiques expérimentales. Ce constat étant vrai pour les composites stratifiés d'unidirectionnels, il l'est *a fortiori* pour les composites tissés 2D et 3D pour lesquels peu de littérature est disponible.

Un des enjeux des campagnes expérimentales est de dégager des grandeurs physiques clés caractérisant les phénomènes observés. Ces grandeurs doivent être identifiables de façon simple et robuste et servir de base à des modèles prédictifs. L'analyse des essais consiste à identifier ces grandeurs, souvent sous couvert d'hypothèses pré-établies découlant du modèle dans lequel ces grandeurs vont s'inscrire. Pour de nombreux matériaux, dont les composites, l'approche consiste généralement à considérer que la propagation d'une macro-fissure est très énergétique devant les autres endommagements présents dans le matériau. Le comportement est supposé quasi-fragile et l'analyse expérimentale utilise alors des considérations énergétiques généralement réalisées dans le cadre de la MLER. La mise en place d'essais sur des composites tissés 3D ainsi que l'applicabilité des hypothèses de la MLER seront étudiées dans ce chapitre.

1.1 Contexte de la caractérisation de la rupture des composites tissés 3D à matrice organique

1.1.1 Taux de restitution d'énergie

L'étude de la rupture passe généralement par la caractérisation de l'énergie dissipée lors de la propagation d'une fissure macro-fissure. Cette quantification énergétique repose sur l'analyse de Griffith, via l'introduction d'un taux de restitution d'énergie critique G_C.

La notion de taux de restitution d'énergie $\mathcal{G}$ a été introduite par Griffith [Griffith, 1921] et sert de socle à la MLER. Cette théorie, traitant de la présence de fissure, s'applique à une grande variété de matériaux. Elle fait l'hypothèse que le comportement du matériau reste linéaire élastique fragile dans toute la structure, à l'exception d'une zone infinitésimale présente en pointe de fissure. Cette zone en pointe de fissure est la seule source de dissipation. En principe, cette condition amène une singularité du champ de contrainte, si bien qu'une forme d'inélasticité doit se mettre en place au voisinage de la pointe de fissure. La MLER suppose néanmoins que cette zone reste confinée et que son influence sur le comportement global est négligeable.

En MLER, le critère de propagation d'une fissure repose sur un bilan énergétique entre des propriétés structurales dépendantes du chargement et des paramètres matériaux [Chaboche, 2001] :

— à chaque fissure est associée un taux de restitution d'énergie $\mathcal{G}$, correspondant à l'énergie élastique relâchée par la structure lors d'un accroissement virtuel infinitésimale de la fissure, proportionnellement à l'aire créée ;

— la fissure se propage si $\mathcal{G}$ compense l'énergie de surface nécessaire à l'avancée de la fissure (résistance à l'avancement $\mathcal{R}$ ou taux de restitution d'énergie critique G_C). Au contraire, la fissure ne se propage pas si l'énergie élastique restituée n'est pas suffisante pour créer une nouvelle surface de fissure.

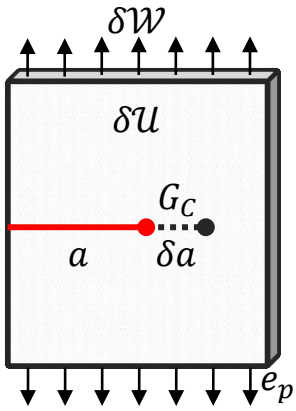


Fig. 1.1 – Schéma de propagation de fissure en théorie de Griffith

En considérant une structure d'épaisseur e_p, possédant une fissure située en a et progressant d'une longueur élémentaire δa (Fig. 1.1), le bilan énergétique peut s'écrire en régime quasi-statique :

$$\mathcal{G} e_p \delta a = \delta\mathcal{W} - \delta\mathcal{U} \tag{1.1}$$

$\delta\mathcal{W}$ est le travail des forces extérieures durant la propagation et $\delta\mathcal{U}$ la variation d'énergie élastique stockée dans la structure. Pour un déplacement imposé u, le travail extérieur s'écrit $\delta\mathcal{W} = P(u,a)\delta u$. L'Éq. 1.1 devient alors :

$$\mathcal{G}(u,a) e_p \delta a = P(u,a)\delta u - \left(\left.\frac{\partial \mathcal{U}(u,a)}{\partial u}\right|_a \delta u + \left.\frac{\partial \mathcal{U}(u,a)}{\partial a}\right|_u \delta a \right) \tag{1.2}$$

En considérant un système sans propagation de fissure on obtient $P(u,a) - \partial\mathcal{U}(u,a)/\partial u|_a = 0$. $\mathcal{G}$ peut alors être exprimé par :

$$\mathcal{G}(u,a) = -\frac{1}{e_p} \left.\frac{\partial \mathcal{U}(u,a)}{\partial a}\right|_u \tag{1.3}$$

La propagation de la fissure intervient lorsque $\mathcal{G}$, *i.e.* l'énergie restituée par la structure pour la création de fissure, devient supérieure à la résistance du matériau à son avancée, $\mathcal{R}$.

— si $\mathcal{G} < \mathcal{R}$: la fissure ne propage pas

— si $\mathcal{G} = \mathcal{R}$: la fissure propage de manière quasi-statique, toute l'énergie élastique restituée est intégralement consommée par la propagation

— si $\mathcal{G} > \mathcal{R}$: la fissure propage de manière dynamique, le surplus d'énergie restitué par la structure est transformé en énergie cinétique $\mathcal{K}$, ce terme apparaissant alors dans le bilan énergétique de l'Éq. 1.1

La résistance à l'avancement $\mathcal{R}$ est généralement considérée caractéristique d'un matériau fragile et justifie les modèles de type Courbe-$\mathcal{R}$. Elle est souvent découpée en deux régimes : (i) un régime de mise en place de la fissure ou d'initiation, durant lequel $\mathcal{R}$ croit et (ii) un régime établi, durant lequel $\mathcal{R}$ est plus élevée et la résistance devient constante (voir Section 1.4.2).

La démarche expérimentale consiste alors à identifier cette valeur plateau de la résistance amenant à la propagation, nommée le taux de restitution d'énergie critique G_C. Dans le cadre de la MLER, cette grandeur est considérée comme un paramètre matériau indépendant de la structure étudiée, de l'historique de la propagation, des chargements appliqués et de la taille et la forme des champs mécaniques présents.

La démarche expérimentale mise en place dans cette section cherchera à estimer le taux de restitution d'énergie critique tel que défini en Éq. 1.1. Cette notion et l'inégalité énergétique associée sont en effet des outils utiles pour décrire la propagation et servir de base à la mise en place de modèles matériau permettant de prévoir la ruine des structures. Cependant, l'analyse s'affranchira des hypothèses de linéarité du comportement et d'indépendance de G_C à la structure étudiée. On étudiera sa potentielle variation avec la structure étudiée, en particulier la taille et la géométrie.

Facteur d'intensité de contrainte

Irwin compléta l'approche proposée par Griffith pour l'exprimer en fonction des champs mécaniques en pointe de fissure [Irwin, 1957, Irwin, 1958]. Dans un matériau élastique fragile en présence d'une fissure parfaite, une singularité de contrainte apparaît en pointe de fissure. Dans un voisinage suffisamment proche de cette pointe, ces concentrations de contrainte possèdent toujours la même distribution indépendamment de la structure étudiée et des conditions limites qui lui sont appliquées. Seule l'intensité de ces singularités de contrainte varie d'une structure à l'autre.

Cette intensité est caractérisée par le facteur d'intensité des contraintes K_I (où I traduit l'ouverture de la fissure en mode de traction normale). La contrainte à une distance r et un angle θ de la pointe de fissure est, dans le cas général, donnée par :

$$\sigma_{ij}(r,\theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} S_{ij}(r,\theta) \tag{1.4}$$

K_I est proportionnel au chargement et les fonctions $S_{ij}(r,\theta)$ sont des fonctions sans dimension, dépendantes de la géométrie et du type de chargement appliqué mais indépendantes de la taille de la structure et de la valeur du chargement.

Une relation peut être établie entre K_I et $\mathcal{G}$ à partir du travail exercé par les efforts intérieurs lors d'une avancée infinitésimale de fissure. Cette démarche amène à la relation d'Irwin :

$$\mathcal{G} = \frac{K_I^2}{E'} \tag{1.5}$$

Le critère de propagation peut ainsi être écrit sur la valeur critique du facteur d'intensité de contrainte K_{IC} plutôt que sur G_C. E' est le module élastique effectif perpendiculairement à la surface de fissure. Sous l'hypothèse de déformations planes, il s'exprime [Tada et al., 2000] :

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \qquad \text{en isotrope} \tag{1.6}$$

$$E' = \frac{\sqrt{2E_xE_y}}{\sqrt{\sqrt{E_x/E_y} + E_x/(2G_{xy}) - \nu_{xy}}} \qquad \text{en orthotrope} \tag{1.7}$$

E_x, E_y sont les modules respectivement selon la direction de chargement et perpendiculairement, G_{xy} le module de cisaillement et ν_{xy} le coefficient de Poisson.

Décompositions de $\mathcal{G}$ et K_I

$\mathcal{G}$ et K_I en fonction des différents paramètres influant sur ces grandeurs [Bažant and Planas, 1997] : le chargement (P ou u), la taille de l'éprouvette W, les propriétés matériau et la forme de la géométrie. De manière générale, l'analyse de K_I met en évidence qu'il doit être proportionnel à la force sur l'épaisseur de l'éprouvette P/e_p. Comme K_C s'exprime en $Force * Longueur^{-3/2}$ et doit faire intervenir une dépendance à la longueur de fissure, il peut être décomposé en :

$$K_I = \frac{P}{e_p\sqrt{W}}k(x) \tag{1.8}$$

k est une fonction sans dimension ne dépendant que de la géométrie et de la manière dont les conditions limites sont introduites. k prend pour paramètre $x = a/W$, position adimensionnée de la fissure (Fig. 1.1). En utilisant l'Éq. 1.5 reliant $\mathcal{K}$ et $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ peut être décomposé en :

$$\mathcal{G} = \frac{P^2}{e_p^2 W E'}g(x) \tag{1.9}$$

La fonction g a les mêmes dépendances que la fonction k. Elle peut être interprétée comme la variation de souplesse de la structure autour de la longueur de fissure a. Ces décompositions offrent l'avantage d'introduire des fonctions k et g caractéristiques de la structure étudiée, mais indépendantes de l'intensité du chargement, des propriétés matériau ou de la taille de la structure. Ces fonctions sont obtenues par interpolation sur des résultats de simulations numériques.

1.1.2 Méthodes d'estimation de Gc

Lors de la démarche expérimentale, on estime le taux de restitution d'énergie de la structure aux instants de propagation de la macro-fissure, afin d'obtenir la courbe de résistance au cours de l'essai et d'identifier G_C. Plusieurs méthodes d'estimation seront présentées dans cette section. La plupart découle de l'Éq. 1.3 ou des décompositions des Éq. 1.8 et 1.9 . L'ASTM a notamment produit des normes pour plusieurs matériaux, dont les métaux et les plastiques [ASTM, 1999, ASTM, 1997], dans lesquelles sont présentées des méthodes d'estimation de G_C. Une norme a également été produite plus récemment pour les matériaux composites stratifiés [ASTM, 2015]. Des méthodes d'estimation sont également présentées en [Laffan et al., 2010a].

Méthode des aires

La méthode des aires est la méthode la plus directe d'estimation du taux de restitution d'énergie critique. Elle estime G_C à partir des taux d'accroissement de l'Éq. 1.3, calculés entre deux instants de propagation 1 et 2 (Fig. 1.2). La variation d'énergie élastique est rapportée à la surface créée par l'avancée de fissure d'une longueur Δa correspondante.

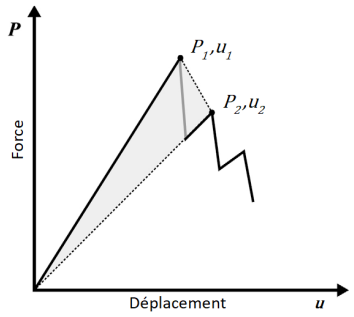


Fig. 1.2 – Interprétation graphique de la méthode des aires [Laffan et al., 2010a]

On obtient alors :

$$G_C = \frac{1}{e_p \Delta a} \frac{P_1 u_2 - P_2 u_1}{2} \tag{1.10}$$

G_C s'interprète graphiquement comme l'aire sous la courbe Force/Déplacement. Cette méthode directe ne repose pas sur de fortes hypothèses et permet de donner une bonne estimation de la validité des résultats quel que soit le cadre d'application. Cependant, elle ne s'affranchit pas d'une rigidité machine, qui peut fausser la valeur des déplacements lorsque ceux-ci sont issus du déplacement de la traverse. L'utilisation de la méthode des aires exhibe également des résultats bruités, particulièrement lors de petites variations de la longueur de fissure.

Méthode de la souplesse

La méthode de la souplesse (ou compliance en anglais) repose sur l'utilisation de la souplesse de la structure, définie par $C = u/P$. Elle est obtenue à partir de l'Éq. 1.3 en notant que :

$$\left.\frac{\partial \mathcal{U}(u,a)}{\partial a}\right|_u = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial (Pu)}{\partial a}\right|_u = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial (u^2/C)}{\partial a}\right|_u \tag{1.11}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{u^2}{C^2}\left.\frac{\partial C}{\partial a}\right|_u = -\frac{P^2}{2}\left.\frac{\partial C}{\partial a}\right|_u \tag{1.12}$$

L'Éq. 1.3 devient :

$$G_C = \frac{P^2}{2e_p}\left.\frac{\partial C}{\partial a}\right|_u \tag{1.13}$$

Cette équation peut également être obtenue par passage à la limite de la méthode des aires $2 \longrightarrow 1$. Une égalité similaire peut être obtenue en utilisant le déplacement et de la rigidité $K = P/u$, en lieu et place de la force et de la souplesse :

$$G_C = \frac{P^2}{2e_p}\left.\frac{\partial K^{-1}}{\partial a}\right|_u = -\frac{P^2}{2e_p}\frac{1}{K^2}\left.\frac{\partial K}{\partial a}\right|_u = \frac{-u^2}{2e_p}\left.\frac{\partial K}{\partial a}\right|_u \tag{1.14}$$

L'utilisation du déplacement est cependant déconseillée puisque que sa valeur peut être perturbée par la rigidité de la machine d'essai.

La mise en place de cette méthode nécessite donc d'exprimer la variation de souplesse en fonction de la longueur de fissure. Généralement, celle-ci est interpolée sous la forme $C = f(a)$, avec a la longueur de fissure. L'interpolation s'effectue soit à partir des données d'essai, soit à partir de résultats de calculs réalisés avec les propriétés élastiques du

matériau. Cette interpolation peut prendre plusieurs formes, celle choisie sera présentée en Section 1.3.3. En faisant apparaître cette fonction d'interpolation de la souplesse f, la méthode de la souplesse devient :

$$G_C = \frac{P^2}{2e_p} f'(a) \tag{1.15}$$

Une fois cette relation mise en place, elle peut également être inversée. La formule $a = f^{-1}(C)$ peut servir de méthode de lissage mécanique de la longueur de fissure mesurée ou de méthode de mesure de cette longueur lorsque l'instrumentation ne permet pas un suivi de la position de la pointe de fissure. En réinjectant $a = f^{-1}(C)$ dans l'Éq. 1.15 on obtient la Méthode de la Compliance Modifiée (MCM).

$$G_C = \frac{P^2}{2e_p} f'\left(f^{-1}(C)\right) \tag{1.16}$$

Méthodes reposant sur l'interpolation de K_I

La décomposition du facteur d'interpolation donnée en Éq. 1.8 offre une méthode d'estimation de K_C et donc de G_C à l'aide de la relation d'Irwin (Éq. 1.5). Comme précisé précédemment, la fonction $k(x)$ dépend de la géométrie et de la façon dont les chargements sont introduits mais pas des propriétés matériau, de la valeur du chargement ou de la taille de la structure. Cette fonction peut donc être interpolée sur la base de calculs linéaires élastiques. Pour les essais classiques, plusieurs interpolations sont disponibles dans les handbooks [Tada et al., 2000] et les normes [ASTM, 1999, ASTM, 1997]. Elles prennent généralement la forme de fractions polynomiales.

Méthode de calibration de l'énergie

Les normes ASTM proposent également des méthodes d'estimation de G_C reposant sur l'utilisation de l'énergie mécanique U_{meca} à rupture calculée à partir de la force et du déplacement expérimentaux. Cette énergie est ensuite corrigée par un coefficient de calibration de l'énergie ϕ (ou *energy calibration factor*), dont l'expression est donnée en fonction de la position normalisée de la fissure $x = a/W$.

$$G_C = \frac{U_{meca}}{e_p W \phi(x)} \tag{1.17}$$

e_p est l'épaisseur de la structure et W sa taille caractéristique. Cette interpolation de ϕ est du même type que celles mises en place dans les interpolations de K_C. Cette méthode offre l'avantage d'utiliser à la fois les informations issues du déplacement et de la force. De ce fait, elle peut théoriquement s'adapter à une faible perte de rigidité avant la propagation. Aucune connaissance des propriétés élastiques n'est nécessaire. Cette méthode est cependant initialement pensée pour une application uniquement au premier point de propagation sans nécessité de suivre la longueur de fissure. En pratique, l'interpolation donnée de ϕ est souvent réduite à un intervalle très faible, par exemple $0.45 \leq x \leq 0.55$ dans la norme ASTM [ASTM, 1999]. Son utilisation s'en retrouve considérablement réduite : dans notre cas, cet intervalle ne comprend que le tout début de la propagation.

Méthodes Virtual Crack Closure Technique (VCCT) et J-integrale

A partir de l'Éq. 1.9, on remarque que pour un matériau, une géométrie et une longueur de fissure a donnés, le taux de restitution d'énergie $\mathcal{G}$ varie avec le carré de la force P si le comportement reste élastique. En connaissant le taux de restitution $\mathcal{G}$ pour une force quelconque P ainsi que la valeur expérimentale de la force à rupture P_C, G_C est estimé par :

$$\frac{G_C}{P_C^2} = \frac{\mathcal{G}(a,P)}{P^2} \tag{1.18}$$

Il faut alors disposer d'une méthode pour déterminer $\mathcal{G}$ sous un chargement donné. Deux méthodologies peuvent être utilisées pour obtenir $\mathcal{G}$, à l'aide de calculs linéaires élastiques par éléments finis effectués sur la géométrie d'intérêt et en utilisant les propriétés élastiques du matériau.

La première méthode est la Virtual Crack Control Technique [Krueger, 2002]. Cette méthode repose sur le calcul de la différence d'énergie entre deux configurations avec des longueurs de fissure différentes : une configuration initiale sans propagation et une configuration après propagation sur la distance d'un élément. La méthode revient en pratique à déboutonner le dernier nœud en pointe de fissure et à calculer $\mathcal{G}$ à l'aide de la formule :

$$\mathcal{G} = \frac{-1}{2\Delta a} Z w_l \tag{1.19}$$

Avec Δa la longueur d'avancée de fissure, Z la force d'ouverture à la nouvelle pointe de la fissure et w_l l'ouverture au niveau des nœuds déboutonnés. Cette méthode est mise en place de manière automatique dans le code de calcul Abaqus/Standard.

L'estimation du taux de restitution peut également être effectuée à l'aide du calcul de l'intégrale-J introduite par Rice [Rice, 1968]. Elle repose sur une intégration d'énergie le long d'un contour Γ entourant la pointe de fissure :

$$\mathcal{J} = \int_\Gamma \left(W dy - (\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\boldsymbol{n}}) . \frac{\partial \underline{\boldsymbol{u}}}{\partial x} ds \right) \tag{1.20}$$

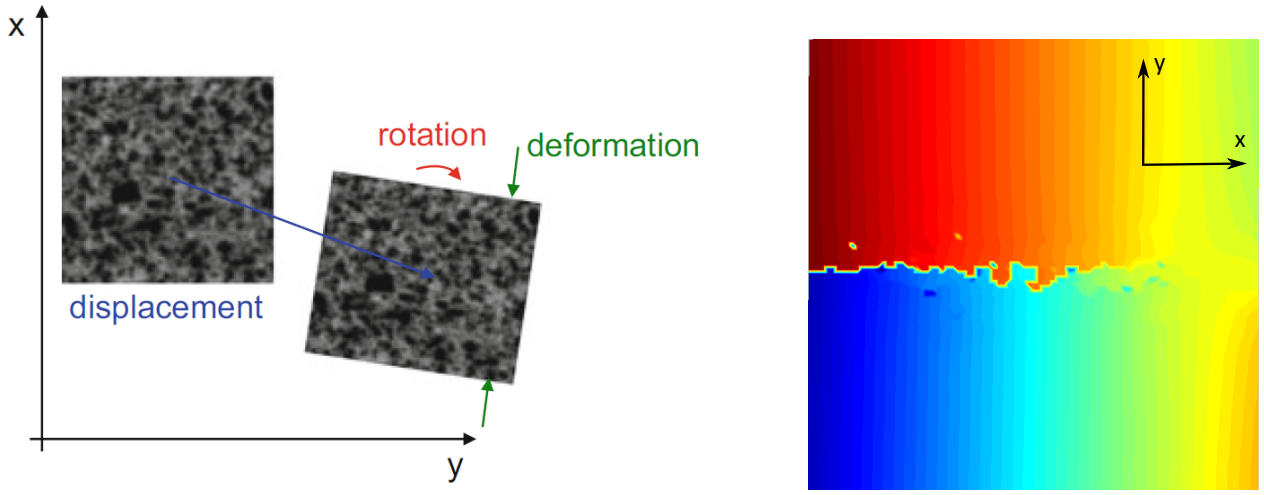
x et y sont les coordonnées du repère, s l'abscisse curviligne, W est la densité volumique d'énergie élastique, $\underline{\boldsymbol{u}}$ le champ de déplacement et $\underline{\boldsymbol{n}}$ le vecteur normal à la surface du contour Γ. Le résultat de cette intégration est indépendant du contour Γ utilisé. $\mathcal{J}$ s'identifie à $\mathcal{G}$ pour des matériaux élastiques isotropes sous chargement en mode I pur. Cette méthode d'analyse a été appliquée aux matériaux composites stratifiés [Pinho et al., 2006, Catalanotti et al., 2010].

1.1.3 Méthodes d'instrumentation

Lors de la réalisation d'essai de propagation en vue de l'estimation de G_C une bonne instrumentation est nécessaire afin d'obtenir un suivi des mécanismes d'endommagement en cours d'essai. La longueur de fissure est en particulier un paramètre clé intervenant dans l'estimation de G_C. Sa mesure au cours de l'essai doit donc être réalisée de la manière la plus robuste possible. A cette fin, plusieurs méthodes d'instrumentation ont été mises en place dans le cadre de la campagne expérimentale réalisée durant la thèse. Cette section présentera les principes généraux des méthodes utilisées ainsi que les utilisations associées.

Corrélation d'Images Numériques

La Corrélation d'Images Numériques (CIN) est une méthode permettant la mesure des champs de déplacements en surface d'éprouvette. Elle repose sur le suivi de motifs en niveau de gris et leurs déplacements relatifs en cours d'essai [Sutton et al., 1983, Husson et al., 2002, Hild and Roux, 2006]. Ces motifs sont généralement obtenus par apposition d'un mouchetis en surface des échantillons, notamment à l'aide de gouttelettes de peinture noires et blanches.



(a) Principe de fonctionnement de la CIN [Sause, 2016]

(b) Champ de déplacement obtenu par CIN

Fig. 1.3 – Principe et mise en place de la CIN

Ces travaux utiliseront la stéréo-corrélation, réalisée à l'aide de deux caméras. Celle-ci permet de suivre les déplacements de la surface en trois dimensions, notamment les déplacements hors-plan non accessibles lors de l'utilisation d'une unique caméra, afin de vérifier l'absence de flambement des échantillons. Les mesures de champ issues de la CIN sont exploitables à différentes fins.

Utilisation en tant qu'extensomètre et jauge virtuels : Les données de déplacement issues de la CIN peuvent être utilisées pour réaliser un extensomètre virtuel, en suivant le déplacement relatif entre deux points au cours de l'essai. La CIN permet également de réaliser des jauges virtuelles : on obtient la déformation moyenne en toutes zones de l'éprouvette. Le résultat peut dépendre de la taille des grilles de jauge utilisées pour le calcul de la déformation moyenne. Ce point doit être pris en compte lors de l'étude de matériaux tels que les composites tissés 3D, afin que les résultats offrent un bon compromis entre l'indépendance au tissage et la précision de la déformation obtenue [Hurmane et al., 2016].

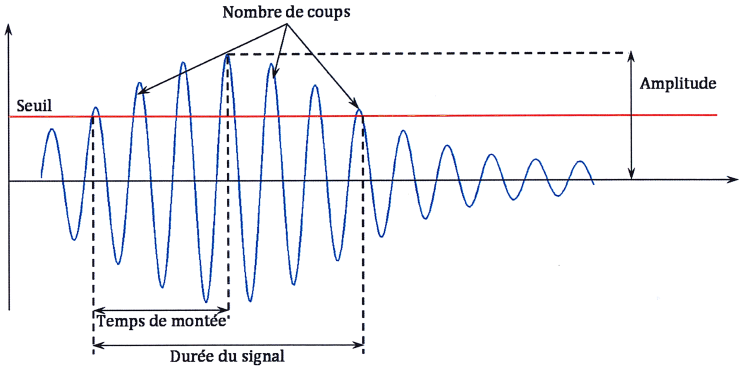
Dialogue essai-calcul et détermination des propriétés matériau : Les champs de déplacement et de déformation mesurés sur la totalité de la surface des échantillons permettent de réaliser des dialogues essai-calcul. Ceux-ci ont notamment été utilisés pour déterminer les propriétés élastiques du matériau [N. Bahlouli and N. Bahlouli, 2009, Pierron, 2008, Garcia, 2019] et valider les capacités prédictives des modèles [Lomov et al., 2008].

Utilisation pour la détection de fissures : L'utilisation de la CIN permet également une détection et un suivi des fissures en surface de l'échantillon. Plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature, pouvant reposer sur la détection de discontinuité des champs [Vanlanduit et al., 2009, Lopez-Crespo et al., 2008, Catalanotti et al., 2010],

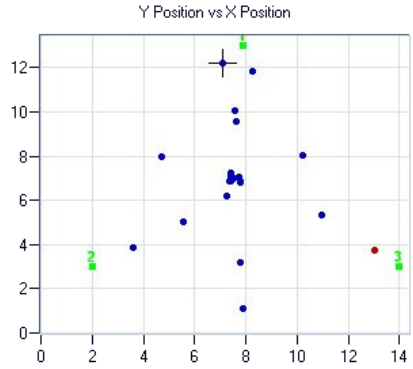
les erreurs de corrélation [Helm, 2008] ou la congruence de phase [Cinar et al., 2017]. La méthode mise en place ici pour le suivi de fissure sera présentée en Section 1.3.1.

Émission acoustique

Le suivi par Émission Acoustique (EA) est réalisé à l'aide d'un ou plusieurs capteurs positionnés à la surface de l'éprouvette. Ceux-ci enregistrent les évènements acoustiques émis lors de l'apparition d'endommagements et de fissures au sein du matériau. Plusieurs grandeurs sont extraites de l'évènement enregistré par les capteurs sonores afin de caractériser la forme d'onde. Les plus importantes de ces grandeurs sont l'amplitude, la durée, le nombre de coups, le temps de montée, le spectre harmonique ou encore l'énergie totale du signal [Godin et al., 2005, Gutkin et al., 2011, Sause, 2016].



(a) Critère de description de l'onde [Hurmane et al., 2016]



(b) Localisation d'évènements acoustiques [Mistras, 2011]

Fig. 1.4 – Principe et mise en place du suivi acoustique

Classification des évènements : Afin de permettre une meilleure différentiation entre les différents mécanismes produisant des évènements acoustiques, une classification peut être effectuée. Dans le cas des matériaux composites, de nombreux mécanismes sont générateurs de bruit : fissures matricielles intra-torons, déchaussements de torons, ruptures de fibres, etc. Les méthodes de classification utilisées reposent sur une clusterisation multi-paramètres [Godin et al., 2005]. Seul un petit nombre de paramètres peut être conservé, afin qu'ils restent indépendants et pertinents pour la classification [Le Gall and Godin, 2017].

Par itérations successives, la classification attribue chaque évènement acoustique à un nombre de groupes prédéfinis. L'évènement est assigné au groupe dont le centroïde est le plus proche. A la fin de chaque itération, la position des centroïdes est actualisée, jusqu'à ce qu'aucun évènement ne soit changé de groupe après deux itérations successives. Si cette méthode converge systématiquement vers une solution, celle-ci peut néanmoins dépendre du point de départ, si bien que plusieurs classifications doivent être réalisées en variant les conditions initiales. L'utilisation d'une classification permet de filtrer de nombreux évènements parasites décorrélés de la rupture : bruits des machines, frottement de l'échantillon sur le montage, frottement des lèvres de fissure, etc.

Détection des premiers endommagements et énergie dissipée cumulée : En supprimant les bruits parasites, l'énergie acoustique a pour seules sources l'endommagement et la

rupture de torons. L'apparition des premiers évènements acoustiques permet de déterminer les seuils d'apparition de ces mécanismes [Camanho et al., 2007, Sause, 2016]. Le suivi de l'énergie cumulée attribuée aux différents groupes offre également une estimation de l'évolution des endommagements. Cette énergie cumulée est en effet généralement fortement corrélée à l'énergie mécanique dissipée par les endommagements et peut servir de méthode de suivi des variables d'endommagement lors de la comparaison avec les résultats de calculs [Hurmane et al., 2016].

Localisation des évènements et mesure de longueur de fissure : Les différences de temps d'arrivée du signal entre les capteurs peuvent servir de base à la localisation spatiale de la source des évènements acoustiques [Sause, 2016, Sengupta et al., 2015]. L'utilisation d'un plus grand nombre de capteurs permet alors une meilleure précision sur l'origine du signal. La perte d'amplitude du signal lors de la propagation de l'onde à travers l'éprouvette peut également être utilisée [Mechraoui et al., 2012]. Lors de l'application à des matériaux composites fortement déséquilibrés, la variation de la vitesse de propagation selon la direction doit cependant être prise en compte [Rosi and Auffray, 2016]. La localisation des évènements attribués à la rupture de torons permet alors une mesure de la position de la fissure au cours de l'essai. La mise en place de ces techniques aux données expérimentales sera présentée en Section 1.3.1.

Thermographie Infra-rouge

La Thermographie Infra-Rouge (TIR) est une méthode d'instrumentation permettant la détection de la chaleur générée par la création de fissures dans le matériau. Les caméras thermiques permettent d'obtenir des cartes d'échauffement à la surface de l'éprouvette tout au long de l'essai. Cette instrumentation peut être utilisée de manière passive (échauffement généré par la propagation de fissure) ou de manière active (apport de chaleur).

Détection de la position de fissure par thermographie passive : La position de fissure peut être obtenue selon deux méthodes grâce aux données thermographiques : (i) à l'aide des forts échauffements transitoires lors de ruptures très énergétiques (type rupture de torons) ou (ii) grâce à la chaleur générée par la friction des lèvres de fissure tout au long de l'essai. Cette seconde méthode est généralement appliquée aux problématiques de fatigue. L'importante énergie dissipée dans le cadre de la rupture des torons permet ici d'utiliser la première approche afin de localiser la pointe de fissure.

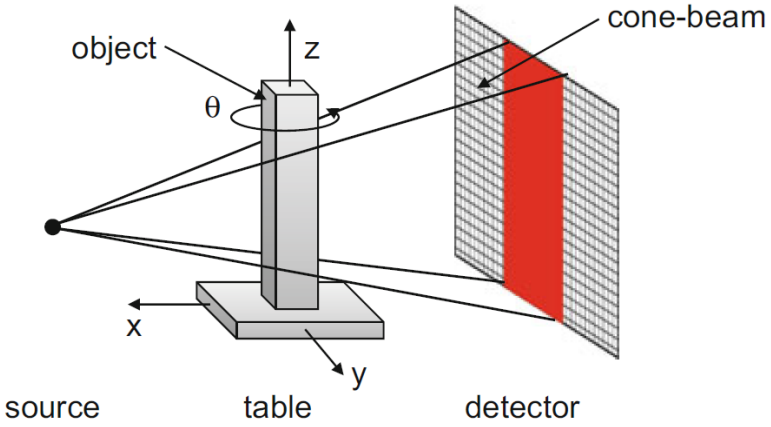
Auto-échaufement : Des approches utilisent l'auto-échauffement obtenu lors de la mise en vibration des pièces dans le but de localiser les défauts dans l'éprouvette [Bai, 2016].

Thermographie active : L'analyse des données de thermographies actives permet également de détecter la présence de défauts initiaux. L'échantillon est alors soumis à des impulsions laser ou flash thermique et des méthodes de reconstruction (Thermographic Signal Reconstruction) sont utilisées sur la réponse thermographique afin de localiser les défauts [Westphal et al., 2011, Roche and Balageas, 2014]. Seule la thermographie passive sera mise en place dans le cadre de cette thèse pour réaliser le suivi de fissure en Section 1.3.1.

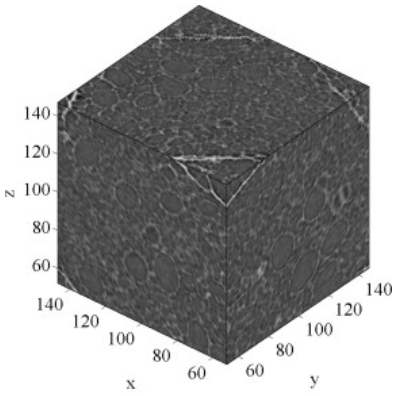
Micro-tomographie par rayons-X

Les méthodes de tomographie par rayons-X permettent d'obtenir des cartes volumiques de densité des échantillons et offrent accès à une information sur l'état à cœur du matériau en trois dimensions. Une source émet un rayonnement X traversant la pièce

étudiée. La quantité d'énergie absorbée est ensuite détectée par un capteur situé derrière l'éprouvette. Cette absorption peut être causée par (i) une plus grande épaisseur de matériau traversée ou par (ii) une densité plus élevée. En utilisant plusieurs images de l'échantillon prises sous différents angles d'orientation, il est possible de reconstituer l'objet dans le volume à l'aide d'algorithmes de reconstruction [McCombe et al., 2012, Zani-Demange, 2008].



(a) Principe de la tomographie par rayons-X [Sause, 2016]



(b) Exemple de tomographie par rayon-X [Roux et al., 2008]

Fig. 1.5 – Principe et mise en place de la tomographie

La micro-tomographie permet d'obtenir une précision de l'ordre du micro-mètre sur les cartes volumiques reconstituées selon la taille des échantillons. Cela nécessite une grande précision sur la source émettrice des rayons-X. Elle est généralement obtenue à partir d'un faisceau d'électrons accélérés et condensés électro-magnétiquement sur une cible émettrice des rayonnements (tungstène ou molybdène). La précision du capteur a également un impact déterminant sur celle des résultats.

Du fait de la complexité des équipements mis en jeux et de la dangerosité associée aux importantes radiations, cette instrumentation demande une mise en place plus importante que celles précédemment présentée. Les tomographies doivent nécessairement être conduites à l'intérieur d'une chambre isolée comportant les équipements nécessaires pilotés à distance. Elles sont donc généralement réalisées *post-mortem* afin de déterminer l'état du matériau en fin d'essai.

Essais in situ et corrélation d'image volumique : Moyennant un équipement adapté, les essais sont également réalisables à l'intérieur du tomographe. Plusieurs images tomographiques sont prises au cours du chargement afin d'observer la progression de la rupture en cours d'essai. Afin d'obtenir une bonne résolution des images, l'éprouvette ne doit pas subir de fluage durant toute la période de scan, ceux-ci pouvant créer des mouvements significatifs au sein du matériau. La réalisation de plusieurs points de tomographie permet également de réaliser une corrélation volumique sur les images obtenues [Roux et al., 2008]. Un essai sous tomographe a été mis en place dans le cadre de ce travail avec la réalisation de scans pour 6 paliers de chargement, mais la corrélation d'images volumiques n'a pas été appliquée.

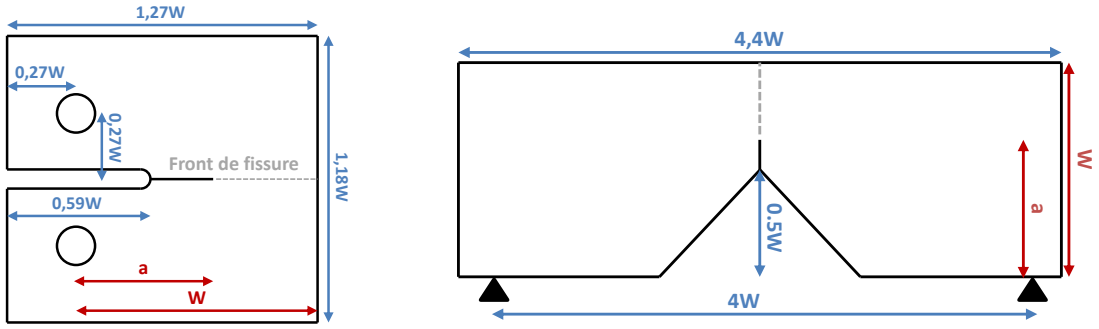
1.1.4 Éprouvettes à gradient de contrainte et Modes de ruine indésirables

Plusieurs géométries d'éprouvette ont été proposées dans la littérature dans le but de caractériser la propagation de la rupture des torons. Ces géométries se regroupent en deux grandes catégories [Laffan et al., 2012, ASTM, 1997] :

— *Éprouvettes avec une propagation dynamique de la fissure à travers toute l'éprouvette :* traction avec entaille centrale, plaque trouée, diabolo, Single Edge Notched Tension (SENT) ou Double Edge Notched Tension (DENT)

— *Éprouvettes avec une propagation stable et progressive de la fissure :* Compact Tension (CT) (Fig. 1.6a), Single Edge Notched Beam (SENB) (Fig. 1.6b), éprouvette entaillée en flexion quatre points etc.

Des essais avec propagation stable seront utilisés dans le cadre de ce travail. Ceux-ci offrent de multiples points de mesure et permettent d'étudier les évolutions du comportement au cours de la propagation de la rupture des torons, notamment l'effet de courbe-$\mathcal{R}$ (variation du taux de restitution d'énergie critique au cours de la propagation). Notons toutefois qu'une méthode de détermination de la courbe-$\mathcal{R}$ a été proposée à partir d' éprouvettes DENT instables, en utilisant des résultats obtenus pour différentes tailles d'éprouvettes [Catalanotti et al., 2014].



(a) Essai CT **(b)** Essai SENB

Fig. 1.6 – Géométries des essais CT et SENB

Les éprouvettes CT et SENB sont cependant sujettes à des modes de ruines indésirables pouvant compromettre le bon déroulement et l'analyse des essais. Ces modes de ruines se révèlent particulièrement critiques pour les composites stratifiés du fait de leur faible tenue en compression [Blanco et al., 2014]. Ces géométries ont ainsi fait l'objet de nombreuses variations visant à pallier les problèmes éventuels : Extended Compact Tension, Disk-Shaped Compact Tension, Arc-Shape Tension, Tapered et Doubly-Tapered Compact Tension en remplacement des CT ; Arc-Shaped Bend Specimen et flexion quatre points en remplacement des SENB.

Synthèse

Cette section a présenté le contexte de la caractérisation de la rupture dans lequel s'inscrit la campagne expérimentale réalisée durant la thèse. La démarche la plus fréquente repose sur l'estimation du taux de restitution d'énergie critique G_C à l'aide

d'éprouvettes à gradient comme les éprouvettes CT ou SENB. Cependant d'autres approches et d'autres éprouvettes ont été proposées dans la littérature. De plus si un transfert partiel des méthodes présentes dans le domaine des métaux ou des bétons a été effectué vers les composites, aucun consensus n'a encore émergé pour ces matériaux. Les résultats sur composites tissés 3D restent pour l'heure rares du fait du récent développement de ces matériaux.

Une grande variété de méthodes d'instrumentation des essais et d'estimation de G_C est également disponible. Du fait des spécificités inhérentes aux composites tissés 3D étudiés (taille de Volume Élémentaire Représentatif (VER) importante, forte anisotropie, haute tenue en traction, dissymétrie traction/compréhension etc.), la mise en place des essais devra faire l'objet d'une attention particulière. La campagne expérimentale sera présentée dans les sections suivantes et suivra la démarche d'estimation de G_C à partir d'essais CT et SENB, en cherchant à s'assurer de la validité des hypothèses effectuées.

1.2 Mise en place de la campagne expérimentale

1.2.1 Présentation du matériau étudié

Le matériau utilisé est un Composites à Matrice Organique (CMO), constitué de fibres de carbone et d'une matrice en résine epoxy. Les fibres ne sont pas ici empilées à partir de plis unidirectionnels comme dans le cas des composites stratifiés, les plus fréquemment rencontrés dans la littérature. En effet, pour pallier les problèmes de délaminage découlant de la mauvaise tenue des interfaces de ces derniers, le matériau est obtenu par tissage de torons, contenant plusieurs milliers de fibres.

Les torons sont orientés selon deux directions orthogonales, la chaîne et la trame. Les tissés 3D possèdent la particularité, contrairement aux stratifiés de tissés 2D, d'avoir des torons de chaîne traversant plusieurs couches dans l'épaisseur de manière à offrir un renfort dans la direction hors-plan. Cet entrelacement entre les différentes couches supprime les interfaces au sein du matériau et augmente les propriétés mécaniques résiduelles après impact. Un exemple d'architecture de tissé 3D générique est donné en Fig. 1.7.

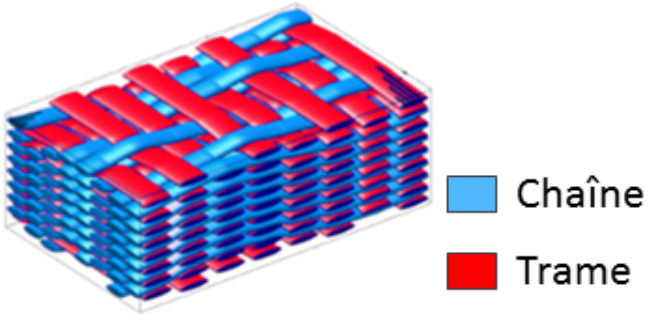


Fig. 1.7 – Exemple générique de matériau composite tissé 3D

Quatre différents RCT ont été étudiés dans le cadre de ce travail de thèse, allant de ratios fortement déséquilibrés jusqu'à des architectures équilibrées (notés RCT1 à

RCT4). Sauf mention du contraire, le matériau principal étudié est le composite RCT1 fortement déséquilibré, utilisé pour la fabrication du carter FAN des moteurs d'avion. Dans toutes les configurations étudiées, la direction principale du matériau, caractérisée par un taux de fibre plus important, correspond à la direction de la chaîne.

La compréhension du comportement mécanique de ces matériaux et de leurs mécanismes d'endommagement et de rupture est fortement liée à leur architecture. Les composites tissés 3D possèdent en effet un VER dont la taille est bien plus importante que pour les composites stratifiés et dont l'influence peut être non-négligeable à l'échelle des structures étudiées. Cette importante taille d'architecture doit être considérée aussi bien lors de la mise en place et de l'analyse des essais que lors de la modélisation du comportement.

Ces matériaux possèdent de bonnes propriétés de résistance en traction. Cependant, les matériaux composites exhibent une dissymétrie de tenue traction/compression, accentuée pour les tissés 3D par l'ondulation des torons. Ces matériaux sont donc principalement utilisés pour des comportements en sollicitation de traction ou hors-plan (carter, pied d'aube etc.). La faible tenue en compression complexifie la bonne mise en place des essais (une ruine indésirable des éprouvettes peut se produire dans les parties en compression). Le travail de thèse se concentrera ainsi sur l'étude de la rupture des torons de trame, qui possèdent une plus faible différence de résistance traction/compression.

1.2.2 Dimensionnement des essais

Ces spécificités de comportement des composites tissés 3D impose des précautions lors du dimensionnement des essais de propagation de fissure. Les normes existantes pour les matériaux bétons et plastiques [ASTM, 1999, ASTM, 1997] ne sont pas directement applicables. Plusieurs éléments doivent être considérés : (i) la propagation stable de la fissure, (ii) l'absence de modes de ruine indésirables et (iii) la propagation rectiligne de la fissure.

Propagation stable de la fissure

Si certains essais utilisent une propagation de fissure instable [Laffan et al., 2012, ASTM, 1997], l'utilisation d'une propagation stable permet d'obtenir plusieurs points de mesure et une plus grande confiance dans les données extraites. On caractérise alors un régime de propagation stabilisé et non uniquement une valeur d'initiation. Cette stabilité peut être obtenue sur les essais CT et SENB utilisés, sous condition d'une longueur de pré-entaille suffisante. Comme présenté en Section 1.1.1, la propagation reste stable si le taux de restitution d'énergie à déplacement imposé diminue lors de l'avancée de fissure. En effet, la fissure ne se propage pas tant que ce taux reste inférieur à d'une valeur critique G_C.

$$\mathcal{G}(u,a) = \frac{-1}{e_p}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial a} \geq G_C \tag{1.21}$$

Une fois ce critère dépassé, pour un déplacement u constant et une position de fissure a, la propagation continue à la nouvelle position $a + \delta a$ si et seulement si :

$$\partial \mathcal{G}/\partial a|_u \geq 0 \tag{1.22}$$

de sorte que le critère soit dépassé sans modification du déplacement appliqué à la structure :

$$\mathcal{G}(u, a+\delta a) = \mathcal{G}(u,a) + \left.\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a}\right|_u \delta a \geq G_C \tag{1.23}$$

Ce type de structure est appelée structure positive [Planas and Elices, 1988]. L'excès d'énergie élastique relâché et non consommé par la création de fissure est alors converti en énergie cinétique et la rupture intervient avec une vitesse croissante non maîtrisée. A l'inverse, pour des structures négatives ($\partial\mathcal{G}/\partial a|_u \leq 0$), le critère n'est pas rempli en $a+\delta a$ et la propagation s'arrête. Le chargement u doit alors être augmenté afin d'atteindre à nouveau la valeur critique de $\mathcal{G}$.

Les essais CT et SENB sont instables à efforts imposés, mais à géométrie négative pour des déplacements imposés (après une longueur critique de fissure). Cette longueur peut être déterminée à l'aide de la méthode VCCT dans un cadre éléments finis : le taux de restitution $\mathcal{G}$ est déterminé pour différentes longueurs de fissures. Le régime est stable dans les zones où $\mathcal{G}$ diminue avec l'avancée de fissure. Le résultat de cette analyse est présenté en Fig. 1.8 pour une éprouvette CT sur un tissé 3D RCT1 .

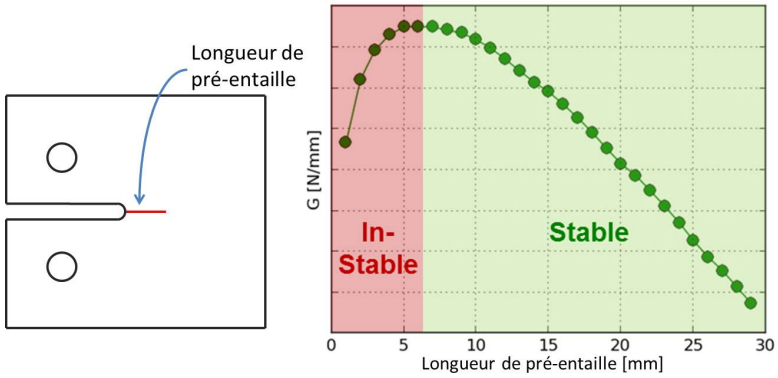


Fig. 1.8 – Détermination de la stabilité de la propagation à l'aide de la méthode VCCT sur éprouvette CT pour un composite tissé 3D RCT1 fortement déséquilibré

Les valeurs de $\mathcal{G}$ obtenues dépendent de l'intensité du chargement imposé, mais pas le régime (augmentation ou diminution de $\mathcal{G}$ avec la longueur de fissure). La pré-entaille est donc choisie pour chaque configuration d'essai CT ou SENB à partir du point d'inversion de la pente, de manière à ce que l'intégralité de l'essai se déroule en régime quasi-statique. Cette longueur dépend en pratique des propriétés élastiques du matériau considéré ainsi que de la géométrie et de la taille de l'éprouvette. L'étude doit donc être conduite pour chacune des configurations testées.

Modes de ruine indésirables des éprouvettes

Lors de la réalisation des essais, plusieurs modes de ruines indésirables peuvent être rencontrés et ont été référencés [Blanco, 2007, Blanco et al., 2014], notamment pour les essais CT (voir Fig. 1.9). Dans le cadre des composites tissés 3D, les mécanismes principaux sont la rupture en compression suivant y en zone FM1 et suivant x en zone FM2, les autres modes étant des ruptures par cisaillement (zone FM3), par flambement (FM6) et par matage et rupture par clivage au niveau des trous (4 et 5). Le phénomène de compression en zone arrière est particulièrement critique dans le cadre de la caractérisation des composites tissés 3D, du fait de la dissymétrie de résistance traction/compression évoquée en section 1.2.1. Lors d'essais de caractérisation pour de forts taux de torons, ce phénomène empêche le bon déroulement de l'essai.

Dans le cas des essais de rupture des torons trame réalisés dans cette thèse, le travail de dimensionnement doit permettre de s'assurer que la rupture en compression

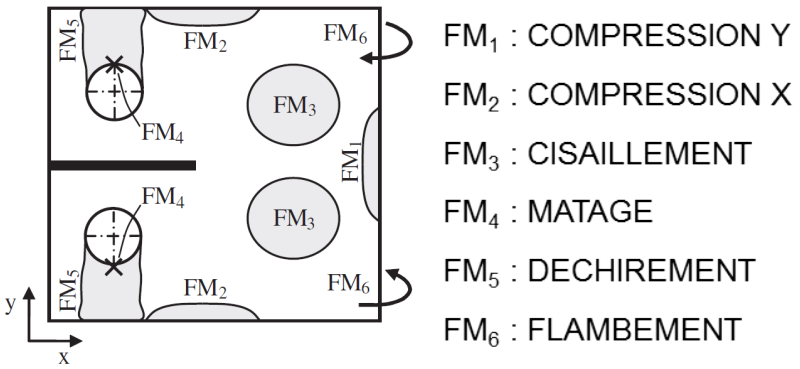


Fig. 1.9 – Modes de ruine des éprouvettes CT tels que proposé par Blanco [Blanco et al., 2014]

n'intervienne pas avant la propagation de la macro-fissure en traction. Usuellement, les critères utilisés pour ces deux phénomènes sont de natures différentes :

— le critère de propagation de rupture de torons en traction est écrit de manière énergétique par le biais d'un taux de restitution d'énergie surfacique G_C tel que décrit en 1.1.1

— le critère de rupture en compression est un critère d'amorçage écrit en contrainte ou en déformation

Une des possibilités pour favoriser la rupture en traction plutôt que celle en compression est d'utiliser la manière dont les quantités $\mathcal{G}$ et $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ varient avec la taille W de l'éprouvette utilisée. En effet, les paramètres associés à ces deux critères ont des dimensions différentes : J/m^2 pour G_C et Pa ou J/m^3 pour σ_C.

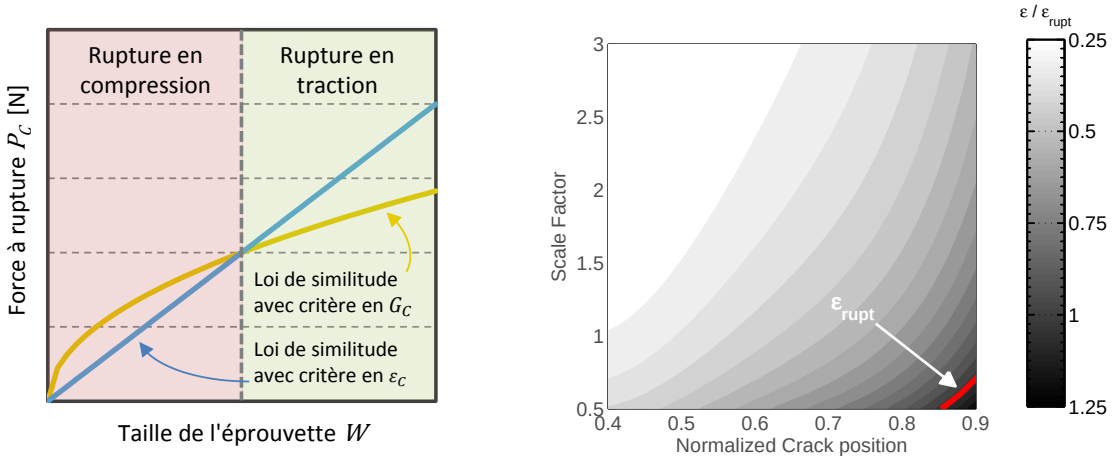
Les valeurs critiques à rupture évoluent donc différemment quand l'éprouvette subit une homothétie de taille dans le plan : la force à rupture F_C s'exprime comme une fonction de la taille de l'éprouvette W. Cette fonction est appelée loi de similitude de F_C et dépend du critère de rupture choisi. Ces lois de similitude ont notamment été étudiées par Bazant [Bažant, 1993] et seront présentées plus en détails en Chapitre 2.4.5. Pour des critères de type MLER et contrainte maximale, ces lois de similitude s'écrivent :

$$P_C(x,W) \sim \sqrt{W} \quad \text{pour un critère type MLER en } G_C \tag{1.24}$$

$$P_C(x,W) \sim W \quad \text{pour un critère en déformation } \varepsilon_C \tag{1.25}$$

Ces évolutions sont présentées en Fig. 1.10a. En dessous d'une taille critique d'éprouvette, le critère de rupture en contrainte sera satisfait avant celui sur G_C, la rupture intervenant alors en compression en arrière d'éprouvette. Au contraire, au dessus de cette taille critique, la propagation de la fissure principale interviendra avant la ruine en compression. Cette taille critique dépend des valeurs de G_C^{trac}, ε_C^{comp}, de la taille de l'éprouvette W et de la position normalisée $x = a/W$ de la pointe de fissure (voir Fig. 1.6a), mais également des propriétés élastiques du matériau, de la géométrie et des conditions limites. En estimant *a priori* la valeur de G_C (prise suffisamment élevée pour être conservative), cette taille critique peut être déterminée pour toutes les positions x de la pointe de fissure couvertes durant la propagation. On utilise pour cela les valeurs $\mathcal{G}^{trac}(x,W,P)$ et $\varepsilon^{comp}(x,W,P)$ issues du calcul VCCT déjà mis en place.

Les résultats de cette analyse sont présentés en Fig. 1.10b. Elle présente la déformation maximale de compression dans l'éprouvette lorsque le critère $\mathcal{G} = G_C$ est atteint pour une valeur de G_C majorée *a priori*. Les niveaux de gris représentent le ratio $\varepsilon_{max}^{comp}/\varepsilon_C^{comp}$ en fonction de la position de la fissure et du facteur d'échelle de l'éprouvette CT. Celui-ci est défini par rapport à la taille standard utilisée notamment par Laffan [Laffan et al., 2010a].



(a) Loi de similitude de la force à rupture pour un critère en contrainte et en G_C

(b) Déformation en arrière d'éprouvette lors de la propagation de la macro-fissure en fonction de x et W

Fig. 1.10 – Étude de la compétition entre les mécanismes de rupture sur éprouvette CT

On observe que pour des tailles d'éprouvettes supérieures à 0.75 fois la taille du standard, l'intégralité de la propagation s'effectue avant que le critère en déformation en arrière d'éprouvette soit atteint. Pour les tailles inférieures, une rupture en compression peut apparaître avec la propagation de macro-fissures en fin de propagation. Plus l'éprouvette est de petite taille, plus ce mode de ruine se manifeste tôt et est susceptible de perturber fortement le bon déroulement de l'essai.

Dans tous les cas, l'augmentation de la taille de l'éprouvette permet d'amoindrir les problèmes de compression en face arrière et s'avère utile lors du dimensionnement d'éprouvettes CT et SENB en matériaux composites. L'analyse mise en place possède de nombreuses hypothèses non représentatives : choix *a priori* d'une valeur de G_C, comportement restant linéaire élastique etc. Cependant elle offre un aperçu qualitatif de la compétition ayant lieu entre ces deux mécanismes de ruine.

La ruine par flambement peut être étudiée en déterminant les charges limites de flambement. Cette analyse a été mise en place à l'aide du logiciel de calcul Abaqus/Standard. Ce mode de ruine est ici évité en raison de l'épaisseur importante des éprouvettes. Cependant, l'augmentation de la taille de l'éprouvette à épaisseur constante tend à favoriser ce phénomène. Il peut alors être nécessaire de trouver un compromis entre une taille minimum et maximum, afin d'éviter simultanément les ruines en compression en face arrière et en flambement structural global.

Propagation rectiligne de la fissure

L'estimation de G_C repose sur la notion de surface de fissure et son application fait en pratique l'hypothèse que la rupture des torons est localement contenue dans un plan rectiligne (même si la forme du front dans l'épaisseur peut être courbe ou le trajet fissure dévié au cours de la propagation). Cette propagation en ligne droite est en pratique souvent compromise pour les composites tissés 2D et 3D, la fissure étant déviée par le motif du tissage. Ce phénomène complexifie la caractérisation des plus forts taux de fibre (à partir du RCT4 dans les essais réalisés) et compromet :

— La bonne réalisation des essais, pour lesquels on cherche à obtenir une direction de propagation qui reste contrôlée et répétable

— L'interprétation de ce profil chahuté et la prise en compte de ce mode de propagation dans les modèles. On peut en effet supposer que ce phénomène est représentatif de la rupture du matériau en conditions réelles. Ce sujet sera évoqué au Chapitre 2.4.5.

Dans le cas des RCT fortement déséquilibrés tels que ceux principalement utilisés dans le cadre de ce travail, la propagation rectiligne est facilitée par les torons de chaîne, qui servent de guide à la macro-fissure.

1.2.3 Mise en place de l'instrumentation et réalisation des essais

En prenant en compte toutes ces contraintes de dimensionnement, plusieurs éprouvettes ont été réalisées. En plus de permettre de s'affranchir des éventuels modes de ruines indésirables, la réalisation de plusieurs tailles d'éprouvettes et de deux types de géométries (CT et SENB) a permis d'étudier l'éventuelle dépendance des résultats à la structure étudiée (taille et géométrie).

Sur le RCT1 principalement étudié, les configurations suivantes ont été réalisées, avec une épaisseur constante de 8mm :

— Des éprouvettes CT avec effet d'échelle homothétique dans le plan de 0.75 à 3 par rapport à la référence (Fig. 1.6a).

— Des éprouvettes SENB de taille unique (Fig. 1.6b).

Deux configurations distinctes ont été réalisées pour chacun des autres RCT testés, en fonction de la disponibilité des matériaux. Au moins deux éprouvettes ont été testées pour chacune des configurations afin d'estimer la dispersion sur les résultats. Le récapitulatif de tous les essais est présenté dans le tableau 1.1.

Préparation des éprouvettes

Les éprouvettes sont découpées au jet d'eau à partir des mêmes plaques. La longueur de pré-entaille, déterminée en Section 1.2.2 afin d'assurer la stabilité, est réalisée à l'aide d'un fil de découpe en diamant de 0.2mm de diamètre et finalisé par un coup de scalpel en fond d'entaille (Fig. 1.11a) afin d'obtenir une bonne initiation de la fissure (Fig. 1.11b).

(a) Découpe par scie à fil

(b) Fond d'entaille sur éprouvette CT

Fig. 1.11 – Préparation des pré-entailles sur éprouvettes CT

RCT	Essai	Taille	N	Pré-Entaille	x_0	SO	CIN	EA	TIR	TPM	TIS
RCT1	CT	T0.75	1	4mm	0.458	x	x	2		x	
		T0.75	1	4mm	0.458	x					x
		T1	2	5mm	0.451	x	x	2		x	
		T1.5	2	6mm	0.431	x	x	4	x	x	
		T2	2	8mm	0.431	x	x	4	x	x	
		T2.5	3	10mm	0.431	x	x	4		x	
		T3	2	12mm	0.431	x	x	4		x	
RCT1	SENB	T1	2	0mm	0.500	x	x				
		T1	1	7 mm	0.588	x	x	2			
RCT2	SENB	T0.95	2	4mm	0.553	x	x	2			
		T1.8	2	7mm	0.549	x	x	2		x	
RCT3	CT	T1.85	2	10mm	0.459	x	x	4		x	
		T2	2	10mm	0.451	x	x	4		x	
RCT3	SENB	T1.1	2	4mm	0.545	x	x	2		x	
RCT4	SENB	T1.33	2	6mm	0.558	x	x	2		x	

Table 1.1 – Récapitulatif des essais réalisés

Un mouchetis est réalisé sur l'une des faces afin d'utiliser une méthode de CIN, l'autre face étant recouverte de peinture blanche et de papier millimétré pour permettre un suivi optique de la fissure. Les éprouvettes CT avec différents facteurs d'échelles sont présentées en Fig. 1.12.

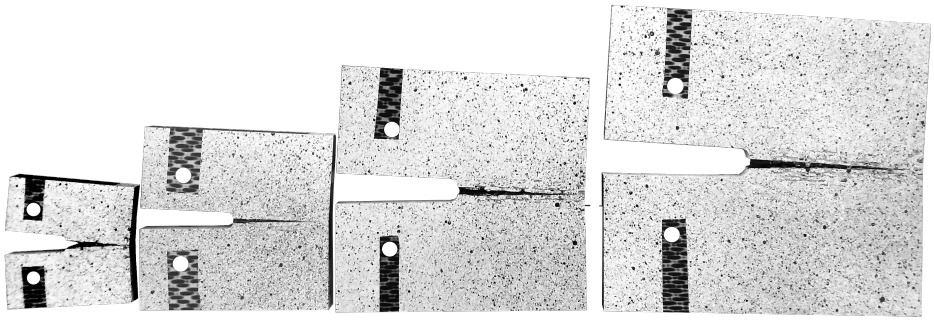


Fig. 1.12 – Éprouvettes CT homothétiques après rupture : Tailles 1, 1.5, 2 et 2.5

Mise en place de l'instrumentation

La mise en place de plusieurs méthodes d'instrumentation permet un suivi complet en cours d'essai. Afin de déterminer une éventuelle dépendance des résultats à la méthode d'instrumentation choisie (notamment lors de la détermination de la longueur de fissure présentée en Section 1.3.1) et de tirer parti de la pluralité d'origine de données disponibles, les instrumentations suivantes ont été utilisées :

— Stéréo-Corrélation d'Images Numériques (CIN) en face avant de l'éprouvette, utilisée pour le suivi de propagation de la macro-fissure et la récupération des champs de déplacement pour des comparaisons essai-calcul. La corrélation est sur deux caméras CDD de résolution 4M pixels à une fréquence de 5Hz grâce au logiciel commercial Vic3D© ;

— Suivi Optique (SO) de chaque côté de l'éprouvette, utilisé pour le suivi de fissure, à l'aide de caméras CDD de résolution 4Mpixels à une fréquence de 5Hz ;

— Émission Acoustique (EA) utilisant 2 ou 4 capteurs (selon la taille de l'éprouvette) utilisée pour le suivi de l'évolution de l'endommagement et de l'énergie acoustique dissipée, à l'aide du système PCI-2 et du logiciel commercial AEWin© fourni par Mistras ;

— Thermographie Infra-Rouge (TIR) passive, utilisé pour le suivi de fissure et l'estimation des énergies thermiques dissipées (mis en place sur deux essais). Les acquisition sont réalisées à l'aide d'une caméra thermique FLIR X6540sc à une fréquence de 50Hz avec une résolution de 640 pixels par 512 pixels ;

— Tomographie à rayon X post-mortem (TOM), utilisée pour la validation (i) d'un profil de fissuration droit à travers l'épaisseur de l'éprouvette, (ii) de la longueur finale de fissure et (iii) pour l'analyse précise des mécanismes d'endommagement. Les images ont été obtenues sur le micro-tomographe de Safran Aircraft Engines avec une résolution de 30μm.

Une éprouvette CT de facteur d'échelle 0.75 a également testée *in situ* au sein du tomographe de Safran Aircraft Engines (TIS). 6 paliers de tomographie ont été réalisés au cours de l'essai (à déplacement imposé) afin d'obtenir une visualisation volumique de l'avancée de la macro-fissure. Cet essai a nécessité le dimensionnement d'un montage adapté permettant la réalisation d'essai CT au sein d'un tomographe. Le montage doit être capable de transmettre des efforts suffisants sans perturber le bon déroulement des scans au niveau de la zone de propagation.

Réalisation des essais

Les essais ont été réalisés à l'Onera par Anne MAVEL, à l'exception de l'essai de tomographie in-situ, effectué à Safran Aircraft Engines Villaroche par Romain BUI. Ils sont effectués sur une machine électromécanique de traction de marque Zwick, de capacité maximale de 150kN en déplacement imposé avec une vitesse de chargement de 0.5mm/min. Le même montage a été utilisé pour toutes les configurations, à l'exception des CT tailles T0.75 et T3, pour lesquels le diamètre des trous a été modifié. Les essais SENB sont réalisés sur un montage avec des rouleaux de 60mm de diamètre. La mise en place de l'essai et d'une partie des méthodes d'instrumentation est présentée en Fig. 1.13.

Pour les essais sur la configuration la plus déséquilibrée RCT1 , aucune compression en face arrière n'a été observée sur les éprouvettes SENB. De faibles endommagements en compression ont été observés en fin d'essai sur les éprouvettes CT T1, mais aucun n'est visible pour les autres tailles d'éprouvette (notamment les T0.75). Sur les essais RCT2, aucune compression ne semble visible sur les essais T1.8, le constat n'est pas évident pour la T0.95. A partir des ratios RCT3 ou plus élevés, des endommagements de compression en face arrière sont systématiquement observés. La distance de propagation de la macro-fissure exploitable devient faible (les endommagements en compression se développent au fur et à mesure que la fissure avance).

La quantification exacte de leur influence est difficile. Des études numériques ont été réalisées autorisant la rupture en compression en arrière de manière cohérente avec les essais afin de quantifier sa contribution dans le total de l'énergie dissipée. Sur les différents cas étudiés, l'énergie dissipée par la compression restait largement inférieure à celle dissipée par la propagation en traction de la fissure principale. En première approximation, on peut donc considérer que la majorité de l'énergie dissipée est consommée par la propagation de la fissure principale en traction.

Néanmoins, il paraît prudent de ne pas utiliser les estimations de G_C obtenues une

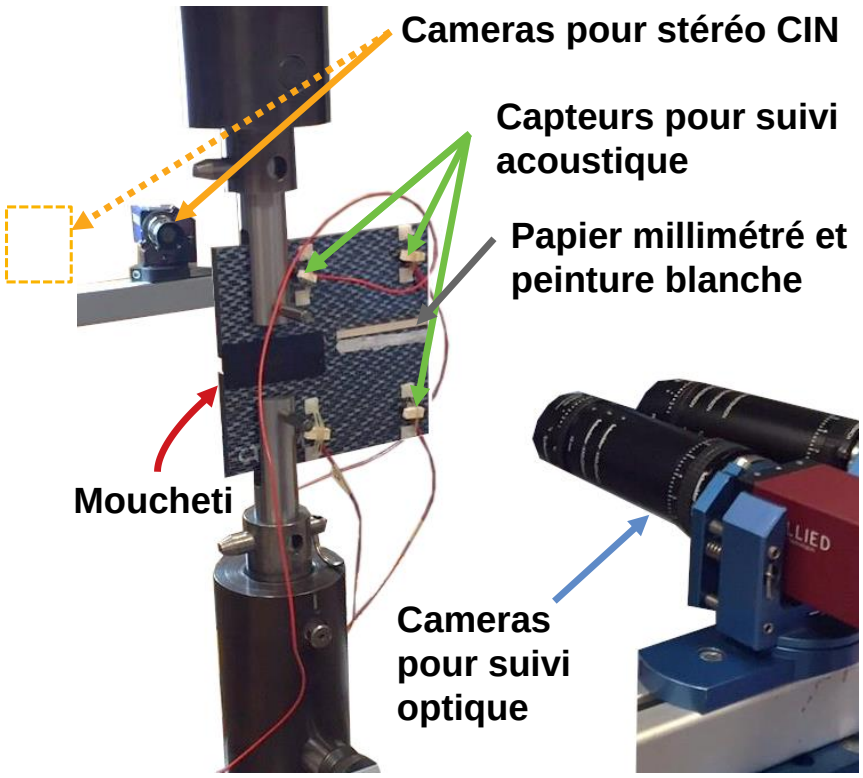


Fig. 1.13 – Mise en place des essais CT et des techniques d'instrumentation associées

fois la compression en face arrière mise en place. Les résultats présentés par la suite sur les taux de torons les plus élevés doivent donc être considérés avec prudence.

Synthèse

Dans cette section, nous avons présenté la démarche mise en place pour caractériser la propagation d'une macro-fissure causée par la rupture des torons de trame dans des matériaux composites tissés 3D. L'accent a notamment été mis sur le prédimensionnement des éprouvettes prenant en compte les spécificités du matériau. Plusieurs mécanismes critiques peuvent compromettre le bon déroulement de la campagne : (i) la rupture en compression en arrière d'éprouvette, (ii) le flambement global de l'éprouvette, (iii) la propagation dynamique de la fissure à travers la majeure partie de l'échantillon ou encore (iv) un profil de fissure trop chahuté pour permettre une bonne analyse.

Les essais ont été réalisés pour différentes géométries (CT et SENB) et différents facteurs d'homothétie dans le plan, allant de 0.75 à 3 par rapport à une taille de référence. Cette démarche vise à tester la dépendance des résultats à la structure et à étudier la présence éventuelle d'un effet d'échelle et de géométrie sur la valeur de G_C estimée. Cet effet serait en opposition avec le comportement attendu dans le cadre, classiquement utilisé, de la Mécanique Linéaire Élastique de la Rupture, qui considère G_C comme une propriété matériau.

1.3 Méthodes d'analyse des essais

L'estimation du taux de restitution d'énergie critique à partir des données d'essais nécessite la mise en place d'une méthode d'analyse adaptée aux caractéristiques du

matériau. Dans cette section nous présenterons la démarche mise en œuvre pour caractériser la rupture des composites tissés 3D. Elle cherchera notamment à expliciter les hypothèses d'analyse et à s'assurer de leur validité pour une application aux composites tissés 3D.

Des éprouvettes de taille et géométrie différentes a été testées afin d'étudier une variation éventuelle du G_C mesuré aux conditions d'essai. Un tel résultat sur les composites tissés 3D remettrait en cause l'utilisation de la MLER, G_C ne pouvant plus être considéré comme un paramètre matériau. La démarche appliquée devra ainsi ne pas reposer implicitement sur les hypothèses de la MLER.

Nous présenterons tout d'abord les méthodes d'analyse de la multi-instrumentation, afin d'en extraire des grandeurs pertinentes dont la principale est la position du front de fissure. Enfin, les méthodes de réduction de données permettant, à partir des mesures, d'estimer le taux de restitution d'énergie critique G_C seront étudiées.

1.3.1 Méthodes d'analyse de l'instrumentation

La détermination de la longueur de macro-fissure en cours d'essai est un paramètre clé de l'estimation de G_C. La dépendance des résultats à cette valeur peut être forte, d'où la nécessité de confronter les données entre elles afin d'assurer l'indépendance des résultats obtenus aux méthodes choisies. De plus ces méthodes doivent pouvoir être automatisées afin de permettre un traitement facile et rapide de toutes les données d'essai. Pour rappel, les méthodes d'instrumentation disponibles sur tout ou partie des essais sont :

— Suivi optique de l'avancée de fissure (SO)

— Stéréo-Corrélation d'images numériques (CIN)

— Émission acoustique (EA)

— Thermographie infrarouge passive (TIR)

— Tomographie-X post-mortem et in-situ (TPM et TIS)

Méthodes de détection de fissure par Suivi Optique

Deux méthodes d'analyse optique ont été développées, utilisant les images issues de la caméra optique (face arrière) et des caméras de corrélation d'image (face avant).

Dans la première méthode semi-automatique, les instants de propagation de la macro-fissure sont déterminés à partir des chutes de rigidité de la courbe force / déplacement. Les images correspondantes sont alors affichées et l'utilisateur renseigne à la souris la base et l'extrémité de la fissure. La longueur est déterminée par une calibration définie par l'utilisateur pour la première image avec l'aide du papier millimétré.

Afin d'éviter une trop forte dépendance à l'utilisateur, une méthode automatique a également été mise en place. Dans une zone réduite autour du plan de fissuration, la fissure est détectée par segmentation de l'image par niveaux de gris, détection des formes connexes et conservation du plus grand objet(Fig. 1.14). Les longueurs sont obtenues à partir de la conversion pixels/mm fournie par le papier millimétré en face avant ou les informations de stéréo-corrélation d'image (calibration avec les mires). Cette méthode ne peut néanmoins être appliquée de manière robuste que lorsque le profil de fissure est suffisamment rectiligne et continu. Elle est similaire à celle appliquée par Bak [Bak and Lindgaard, 2017] et par Panin [Panin et al., 2017]. Cependant elle peut se révéler

dépendante du choix du seuil de segmentation, pouvant compromettre la bonne détection si la luminosité varie en cours d'essai. Ce cas de figure n'a pas été rencontré durant la campagne expérimentale. Ce problème pourrait être contourné par une détermination automatique du seuil de segmentation à partir de l'histogramme de l'image [Otsu, 1979], l'analyse ne requérant alors aucun choix de la part de l'utilisateur.

La confrontation des deux méthodes et des résultats obtenus sur chacune des faces de l'éprouvette permet d'estimer la dispersion sur les résultats. La mise en place de la détection par suivi optique est présentée en Fig. 1.14.

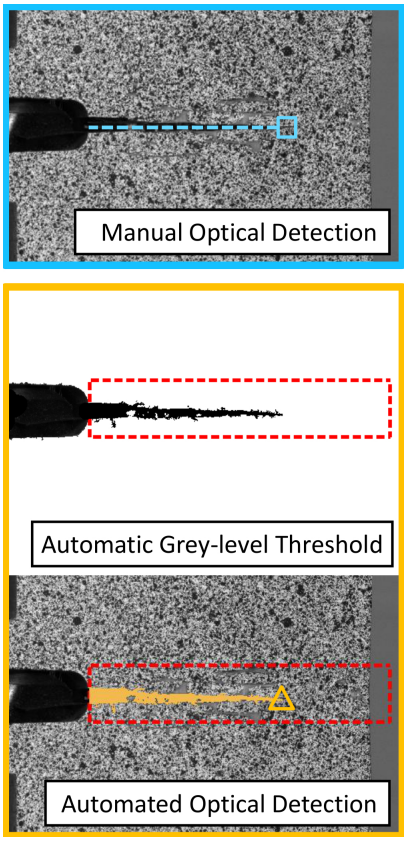


Fig. 1.14 – Mise en place du suivi optique de fissure

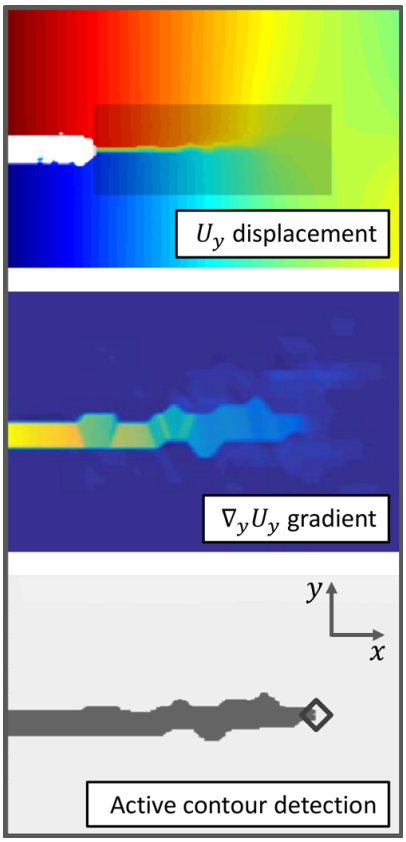


Fig. 1.15 – Mise en place du suivi de fissure par CIN

Méthodes de détection de fissure par CIN

Les données de stéréo-corrélation d'images, obtenues à l'aide du logiciel Correli [Cor, 2019], donnent accès aux champs de déplacement dans les trois directions en face avant sur toutes les éprouvettes. Ces champs peuvent servir à la comparaison entre essais et simulations mais fournissent également un moyen de suivi du front de fissure automatisable.

On utilise pour cela le champ de déplacement parallèlement au plan de fissure u_Y (voir Fig. 1.15). Le déplacement possède l'avantage d'être la grandeur primaire mesurée lors de la corrélation d'images, contrairement à la déformation. Cette dernière peut souffrir d'erreurs dans les zones d'intérêt du fait de la présence de nombreuses décorrélations. La détection de la fissure est réalisée à partir des discontinuités du champs de déplacement, à l'aide de la procédure suivante :

1. Le champs u_y (perpendiculaire à la direction de la fissure) est interpolé sur une grille régulière autour de la fissure afin d'atténuer l'influence des décohésions
2. Le gradient du champ $\nabla_y u_y$ est ensuite calculé suivant la direction y

3. Le gradient est segmenté afin de détecter la présence d'une discontinuité
4. La longueur de la discontinuité est mesurée et la longueur de fissure est mise à jour si une augmentation a été observée

Deux méthodes de segmentation sont utilisées en parallèle. Dans la première, la segmentation utilise une valeur seuil définie manuellement par l'utilisateur. Cette approche peut être considérée comme une application des méthodes de détection de contour de type Sobel [Lopez-Crespo et al., 2008] où de la detection de discontinuité à partir d'un seuil [Catalanotti et al., 2010]. D'autres auteurs ont également utilisé un seuillage directement sur l'indice de corrélation fourni par le logiciel [Helm, 2008]. Dans notre cas, cette méthode n'offre pas de résultats concluants du fait de la présence de nombreuses décorrélations au voisinage de la fissure.

La deuxième méthode de segmentation utilise la méthode active contour ou méthode Chan-Veese [Chan and Vese, 2001, Matlab, 2017]. Cette méthode ne nécessite pas d'intervention de l'utilisateur et détermine de manière itérative la position du contour plutôt que d'utiliser les valeurs locales des gradients.

L'application en parallèle des deux méthodes de segmentation permet de corriger tout dysfonctionnement local de l'une des deux. De plus, ces deux méthodes sont complémentaires : la méthode de seuillage sous-estime parfois la longueur de fissure en début d'essais (lorsque la valeur des champs reste faible), alors que la méthode active contour peut la sous-estimer en fin de propagation. Cette méthode de détermination de la longueur de fissure, résumée en Fig. 1.15, est appliquée de manière automatique sur un grand nombre d'images pour chacune des configurations réalisées.

Méthodes d'analyse de l'émission acoustique

Le suivi de l'endommagement par émission acoustique est réalisé à l'aide de 4 capteurs positionnés dans les coins de l'éprouvette (Fig. 1.16) sur la plupart des configurations. Pour les essais T0.75 et T1 seuls deux capteurs ont été utilisés du fait des faibles dimensions des éprouvettes. La détection des évènements acoustiques s'effectue grâce au logiciel AEWin de Mistras. Pour chaque salve détectée, le logiciel fournit de nombreuses informations : temps, capteur d'acquisition, amplitude, durée, énergie, temps de montée etc.

Deux types d'analyses sont notamment possibles : un suivi de l'endommagement (détection des premiers endommagements, évolution qualitative de l'énergie, etc.) et une localisation de certains des évènements pour déterminer la position de la pointe de fissure.

Classification des évènements

Une première étape du suivi de l'endommagement par émission acoustique consiste à classifier (clusteriser) les évènements en groupes associés à différents mécanismes d'endommagement. Cette classification s'effectue par la méthode des nuées dynamiques (K-means) [Godin et al., 2005] telle que présentée en Section 1.1.3.

Les quantités choisies pour la classification sont la durée, l'énergie et le temps de montée du signal. L'amplitude du signal n'est pas utilisée car sur les évènements de rupture fibre ou les ruptures matricielles de forte énergie, les capteurs saturent et l'amplitude est systématiquement égale à la valeur 100 maximale.

La classification distribue les évènements acoustiques dans quatre groupes, associés respectivement, du groupe le plus énergique au groupe le moins énergétique, à :

— Groupe 1 : la rupture des torons

— Groupe 2 : les endommagements matriciels de forte énergie ou ruptures de fibres seules

— Groupe 3 et 4 : les endommagements microscopiques peu énergétiques et du bruit non classifié (groupes non utilisés)

L'approche n'est pas d'obtenir une classification exhaustive et exacte de tous les évènements, mais d'extraire les plus énergétiques, en particulier ceux associés à la rupture de torons. La classification obtenue est présentée en figure 1.17, dans l'espace Durée / Temps de montée et Énergie.

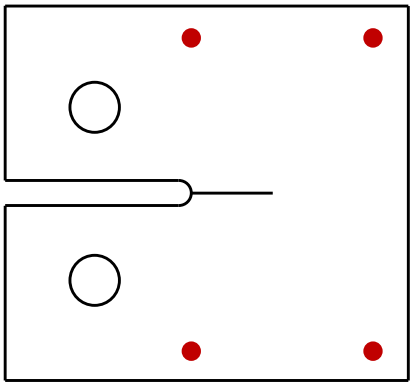


Fig. 1.16 – Position approximative des capteurs d'émission acoustique

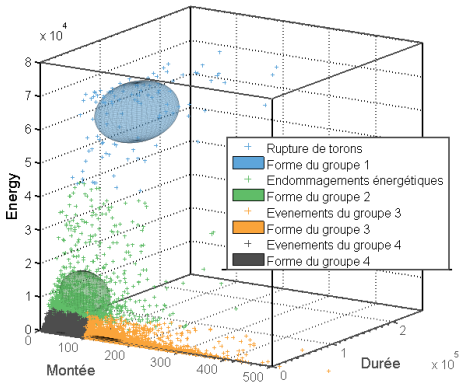


Fig. 1.17 – Visualisation de la classification des évènements acoustiques sur essai CT

La correspondance entre les évènements attribués à chaque groupe et la courbe force / temps est présentée en Fig. 1.18. Les énergies dissipées sont représentées par la taille des cercles et l'appartenance aux groupes par la couleur. Les évènements associés à la rupture de torons coïncident avec les fortes chutes de rigidité et possèdent une énergie bien supérieure aux autres évènements. La synchronicité entre les chutes de rigidité et ces évènements valide leur assimilation à des ruptures de torons.

Suivi des énergies dissipées

L'analyse de l'émission acoustique permet de plus d'estimer l'évolution des énergies acoustiques cumulées dissipées par chacun des mécanismes. Cette énergie cumulée permet de déterminer l'instant d'apparition des premiers endommagements et est utilisée comme indice de leur progression.

L'application aux données d'essai est présentée en Fig. 1.18. Une part importante de l'énergie est dissipée par le groupe 2, assimilé aux évènements de matriciels mésoscopiques, nombreux et relativement énergétiques. L'énergie dissipée par le groupe 1 (ruptures de torons) est cependant probablement sous-estimée du fait de la saturation des capteurs, mais reste conséquente au vu du peu d'évènements détectés. Leur affiliation probable avec la rupture des torons justifie qu'ils soient utilisés comme indicateurs de la progression de la fissure. De plus, leur faible nombre et leur détection aisée en font des candidats à une tentative de localisation.

Localisation d'évènements en vue de la détection de la pointe de fissure

La localisation des évènements les plus énergétiques repose sur les différences de temps d'arrivée entre les différents capteurs. A cette fin, la vitesse de propagation dans

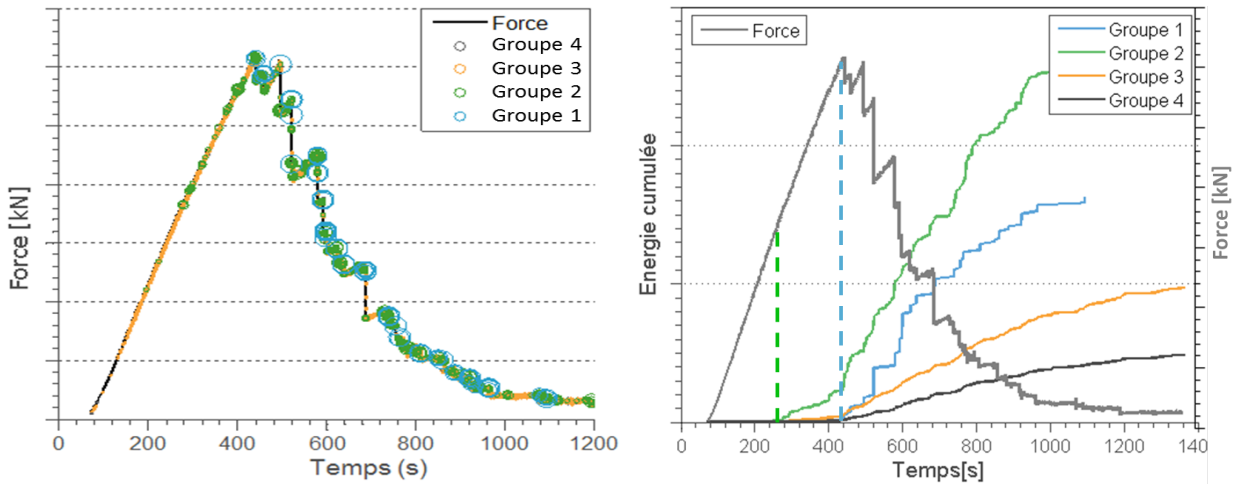


Fig. 1.18 – Comparaison des évènements acoustiques avec les courbes force/temps et énergies dissipées

le matériau a été mesurée en fonction de l'angle de propagation (Fig. 1.19), à l'aide de données obtenues par cassés de mines. Une forte dispersion sur les temps d'arrivée est observée, bien que les conditions de mesure aient été contrôlées. Ce temps de dispersion semble être indépendant de l'angle et de la distance de propagation et relève peut-être de la précision de mesure des capteurs utilisés et de la forte hétérogénéité des propriétés élastique du matériau. La Fig. 1.19 présente une tentative d'approximation de cette dispersion d'arrivée par une distribution gaussienne.

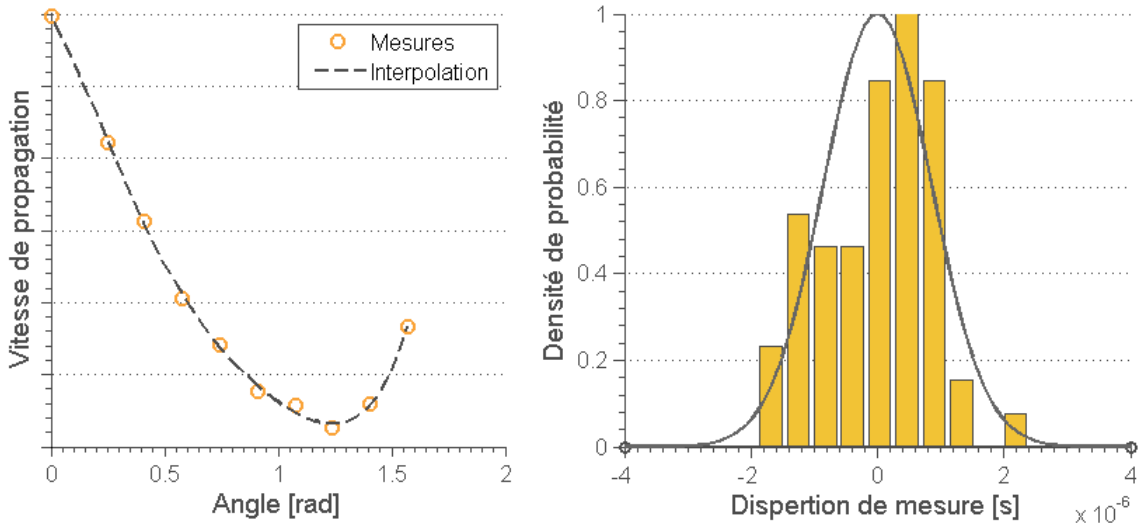


Fig. 1.19 – Mesure de la vitesse de la propagation en fonction de l'angle et de la dispersion à la mesure

La forte dépendance de la vitesse de propagation à l'angle (due à l'anisotropie du matériau) et les dispersions sur les temps d'arrivée (due à l'hétérogénéité et la précision des capteurs) complique la mise en place de la localisation à l'aide des méthodes classiques. En particulier, le problème de localisation inverse peut admettre plusieurs solutions car l'évolution de la vitesse n'est pas monotone en fonction de l'angle, comme observé en Fig. 1.19. Une approche probabiliste a donc été mise en place : pour chaque point de l'éprouvette, on estime la probabilité qu'il soit la source de l'évènement acoustique enregistré.

Un maillage régulier est appliqué sur l'éprouvette, comme reporté en Fig. 1.20. Pour chaque nœud du maillage, considéré comme point source d'un évènement, l'écart de temps théorique vu par chaque couple de 2 capteurs a et b est calculé. En supposant les vitesses de propagation déterminées en Fig. 1.19, cet écart est donné par :

$$\Delta t_{ab} = \frac{d_a}{v(\theta_a)} - \frac{d_b}{v(\theta_b)} \tag{1.26}$$

avec $d_i = \sqrt{(x_i - x_s)^2 + (y_i - y_s)^2}$ la distance entre la source supposée (x_s, y_s) et le capteur i de coordonnées (x_i, y_i), $\theta_i = arcos((x_i - x_s)/d_i)$ l'angle de propagation et $v(\theta_b)$ la vitesse de propagation dans la direction θ_b (voir Fig. 1.20). Ce temps de retard théorique perçu par les 2 capteurs peut être comparé au temps réel Δt_{ab}^{exp} mesuré sur ces 2 capteurs. Sur la base de la distribution probabiliste obtenue en Fig. 1.19, une probabilité d'occurrence est attribuée à chaque nœud. L'utilisation des temps d'arrivée pour chaque couple de capteurs (4 capteurs, 6 couples) permet d'affiner ces calculs de probabilité.

Un exemple de carte de probabilité obtenue est présenté en Fig. 1.20. La source de l'évènement est le point possédant la plus haute probabilité (représenté par la croix). La carte de probabilité possède un étalement permettant de quantifier l'erreur possible sur la localisation. Malgré les précautions prises lors de la mise en place de cette méthode, la stratégie a pu se heurter dans notre cas à de nombreux problèmes, dont potentiellement :

— Les très grandes vitesses de propagation (en particulier dans la direction chaîne) entraînent des temps de propagation faibles au vu des différences mesurables sur les temps d'arrivée. Cela compromet la localisation dans la direction x, pourtant utile au suivi de fissure ;

— Les vitesses sont mesurées à partir des cassés de mines, non représentatifs des signaux acoustiques générés par la rupture des torons. Des évènements acoustiques possédant un contenu fréquentiel différent peuvent posséder des vitesses de groupe différentes ;

— Le matériau possédant une forte hétérogénéité, des variations locales importantes peuvent apparaître dans les vitesses de propagation ;

— Les mesures ont été réalisées sur un matériau sain, l'impact de l'endommagement sur les vitesses de propagation et leur dispersion est difficile à quantifier ;

— Les capteurs possèdent des temps de relâche et n'enregistrent pas certains évènements. La présence de réflexions d'ondes en bord d'éprouvette peut également fausser l'analyse. Les temps d'arrivée des évènements peuvent donc être faux ou incomplets.

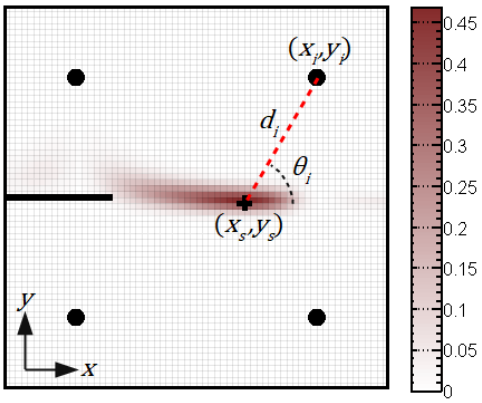


Fig. 1.20 – Carte de densité de probabilité d'un évènement acoustique

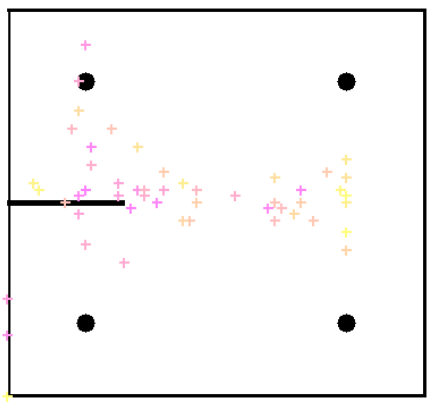


Fig. 1.21 – Exemple de localisation d'évènements acoustiques

L'application de cette méthodologie à la totalité des évènements associés à la rupture fibre au cours d'un essai est néanmoins présentée en Fig. 1.21. Les couleurs des points correspondent aux résultats de localisation au cours du temps. Du fait de la forte dispersion des résultats et de la taille des zones de probabilité, cette méthode n'offre pas en l'état une précision suffisante pour servir de détection de pointe de fissure. Une mise en place plus précise passerait probablement par l'amélioration du matériel d'acquisition afin d'améliorer la précision des capteurs sur les temps d'arrivée et de réduire leur temps de relâche. Une meilleure caractérisation des vitesses de propagation peut aussi être nécessaire pour des évènements représentatifs de la rupture des torons, ainsi qu'une prise en compte de l'endommagement sur ces vitesses en cours d'essai.

Méthodes d'analyse de la thermographie infrarouge passive

Deux éprouvettes ont été suivies par thermographie infrarouge passive (voir Tableau 1.1). L'étude des énergies thermiques dissipées peut permettre de suivre les sources d'échauffement au cours de l'essai afin de déterminer la position de la rupture des torons.

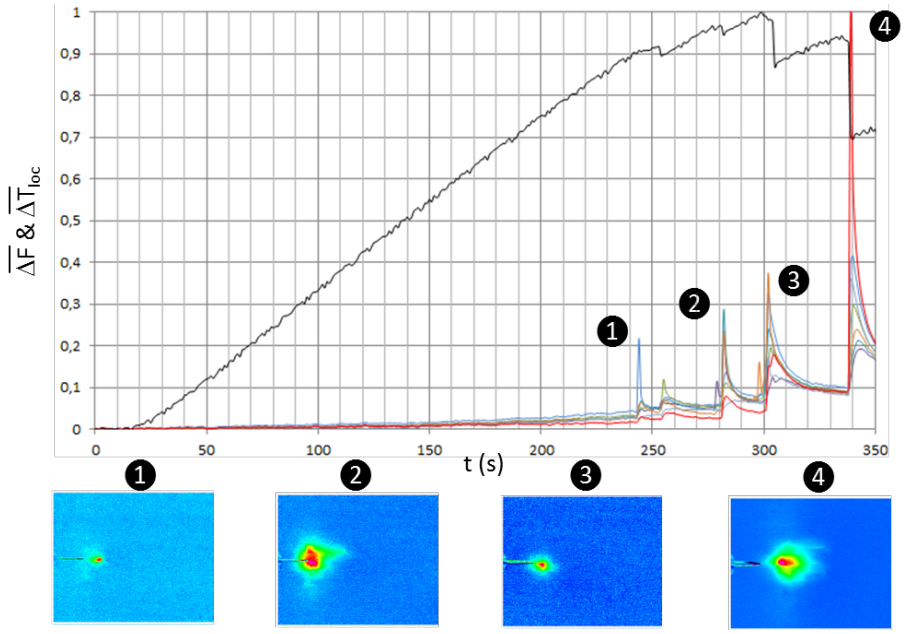


Fig. 1.22 – Évolution de l'échauffement en cours d'essai et comparaison avec la courbe force/déplacement

Pour cela, les instants de propagation de la macro-fissure sont détectés à partir des images contenant d'importants pics moyens d'échauffement, observés en surface de l'éprouvette (Fig. 1.22). Ces échauffements peuvent être comparés avec les chutes de rigidité dans les courbes force/déplacement pour confirmer qu'ils interviennent bien durant une avancée de la macro-fissure. Pour chacun de ces instants, un champ d'échauffement est obtenu par différence des cartes de température pré et post-propagation. Ces champs exhibent des zones de forte concentration d'échauffement, comme présenté en Fig. 1.23. La position du toron ayant rompu est alors définie par le point correspondant à l'échauffement maximal.

Les énergies thermiques dissipées par la rupture des torons sont suffisantes pour que cette détection ne soit pas perturbée par l'éclairage et l'échauffement moyen de l'éprouvette au cours de l'essai. Cette détection peut néanmoins être perturbée par des fissurations matricielles au voisinage de la fissure principale.

La méthode a été mise en place de manière automatique pour les deux éprouvettes ayant bénéficié d'une instrumentation thermique. Contrairement aux méthodes utilisant la CIN et le suivi optique, l'information de longueur de fissure n'est ici disponible qu'aux instants de macro-propagation. Cependant, contrairement aux autres méthodes, elle ne nécessite aucun choix de la part de l'utilisateur et donne un accès direct à la position dans l'éprouvette de la rupture de torons.

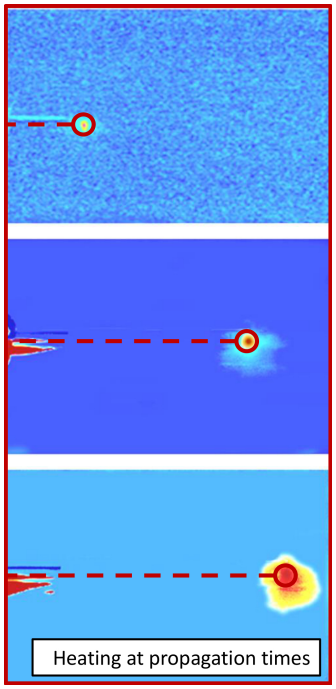


Fig. 1.23 – Mise en place du suivi de la fissure par thermographie infrarouge passive

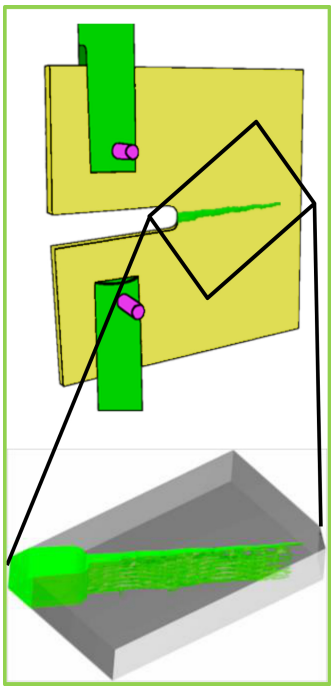


Fig. 1.24 – Contrôle du profil de fissure post-mortem par analyse des tomographies

Méthodes d'analyse des tomographies

Les tomographies ont été, pour la majorité, réalisées *post-mortem* dans le but de contrôler la longueur de fissure obtenue en fin d'essai et la forme du profil de fissure. En effet, les autres méthodes d'estimation de la longueur de fissure reposent sur des données de surface. Afin de correctement estimer la surface de fissure créée, il est important que la longueur de fissure mesurée au bord soit représentative de celle présente à cœur.

La détection de la fissure est effectuée par segmentation de l'image. Les méthodologies utilisées sont similaires à celles appliquées aux images de suivi optique ou à la segmentation du gradient de déplacement issu de la corrélation d'image. Seule la fissure principale est considérée, les fissures matricielles avoisinantes étant supprimées de l'analyse. L'étude des tomographies, pour lesquelles les niveaux de gris permettent de distinguer la matrice des fibres de carbone, permet ainsi d'identifier précisément la macro-fissure, définie comme une fissure continue découpant complètement les torons de trame.

Un exemple d'application de la détermination de fissure post-mortem à partir des données de tomographies est présenté en Fig. 1.24. Un essai a également été réalisé sous tomographe sur éprouvettes CT de taille T0.75. Des images ont été obtenues pour 6 niveaux de déplacement. L'analyse de cet essai permet une compréhension plus précise

des mécanismes de rupture et de leur développement. Celle-ci sera présentée en Section 2.4.5.

1.3.2 Comparaison des méthodes de suivi de fissure

La comparaison des différentes méthodes de suivi de la fissure est présentée en Fig. 1.25. L'évolution de la souplesse C de l'éprouvette (ou *Compliance*, définie par le rapport du déplacement u et de la force P) est représentée en fonction de la longueur de fissure estimée par chacune des méthodes présentées précédemment. Les résultats obtenus sont cohérents entre les différentes méthodes. Les variations locales constatées sont du même ordre de grandeur que celles pouvant être observées visuellement entre les deux faces de l'éprouvette. De plus, l'évolution globale de la longueur de fissure tout au long de l'essai reste comparable pour chacune des méthodes d'instrumentation. Les méthodes choisies pour l'estimation de G_C (voir section 1.3.4) reposent sur la variation de la longueur de fissure plutôt que sur sa valeur absolue. Lors de l'estimation de G_C, il a été confirmé que le choix de l'une des méthodes de suivi n'induisait aucune différence sur la valeur obtenue.

Ce bon résultat est obtenu malgré l'utilisation de paramètres définis par l'utilisateur dans certaines des méthodes (valeur de seuil, définition optique de la pointe de fissures etc.). Cette équivalence entre les méthodes utilisées est d'autant plus significative que les données exploitées pour chacune des méthodes d'instrumentation reposent sur des quantités physiques différentes :

— des informations visuelles de surface pour le suivi optique et de volume pour les tomographies

— des informations mécaniques sur les champs de déplacement pour la CIN

— des informations thermiques sur la rupture des torons pour la thermographie infrarouge

Cette analyse valide la robustesse du suivi de fissure réalisé et permet de s'assurer qu'il n'existe pas de biais lié au choix de la méthode de suivi. Pour les études futures, il peut être suffisant d'utiliser des méthodes faciles d'installation et permettant un traitement rapide et automatique d'un grand nombre d'images, telles que les méthodes de suivi optique et d'analyse de la CIN. La conservation de deux méthodes augmente la robustesse des résultats en permettant de détecter facilement des dysfonctionnements locaux.

1.3.3 Interpolation de la souplesse

L'interpolation mécanique de la souplesse peut être utilisée (i) afin d'obtenir un lissage mécanique de la longueur de fissure ou (ii) pour la mise en place de la méthode de la souplesse modifiée lors de l'estimation de G_C, telle que présentée en Section 1.1.2. Cette interpolation s'effectue sur la souplesse de la structure $C = u/P$, en fonction de la position adimensionnée de la pointe de fissure $x = a/W$. Cette interpolation nécessite le choix d'une forme de fonction dont les paramètres seront à identifier.

Afin d'obtenir une régularisation ayant un sens mécanique, la forme de cette fonction est choisie sur la base des variations prévues par la mécanique. On peut remarquer que, dans les estimations de facteurs d'intensité de contrainte reposant sur la MLER [Tada et al., 2000, ASTM, 1999, ASTM, 1997], les handbooks et les normes fournissent une

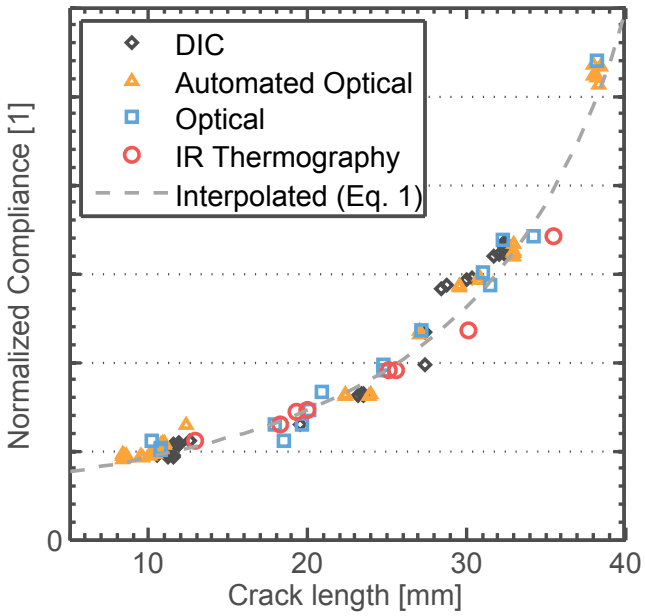


Fig. 1.25 – Comparaison des suivis de fissure effectués à l'aide de différentes méthodes d'instrumentation sur éprouvette T1.5

fonction g telle que :

$$G_C = \frac{F^2}{E' e_p W} g(x) \tag{1.27}$$

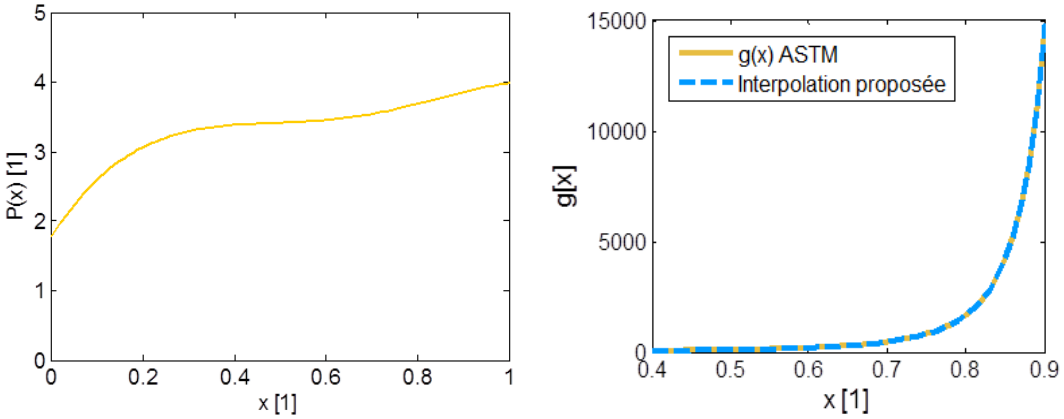
Par identification avec la formule de la méthode de la souplesse (Eq. 1.15), on en déduit que la fonction g s'interprète comme la variation de souplesse avec la longueur de fissure a, a un facteur multiplicatif prêt. Les fonctions $g(x)$ et $\partial C/\partial x$ doivent donc avoir la même forme. Dans les normes ASTM [ASTM, 1999, ASTM, 1997] ou les handbooks [Tada et al., 2000], g s'exprime sous la forme générale :

$$g(x) = \frac{P(x)}{(1-x)^3} \tag{1.28}$$

$P(x)$ est généralement un polynôme (ou une fraction polynomiale), qui varie faiblement sur intervalle de $x \in [0.55; 0.9]$ considéré (Fig. 1.26a). De plus, la souplesse devient infinie en $x = 1$, ce qui correspond à une structure complètement traversée par une macrofissure et donc ne transmettant plus d'effort. La fonction à identifier lors de l'interpolation, faisant intervenir trois paramètres (x_m, χ, C_0), a été choisie de la forme :

$$C(x) = \frac{C_0}{(x_m - x)^\chi} \tag{1.29}$$

Cette expression est une forme approchée de la primitive de la fonction g fournie dans les handbooks si $x_m \approx 1$ et $\chi \approx 2$ (Fig. 1.26b). Ces deux paramètres sont cependant laissés libres autour de ces valeurs pour permettre une meilleure prise en compte des résultats réels et des éventuelles non linéarités qui induisent un écart à la MLER. L'écriture sous cette forme est simple d'identification (seulement 3 paramètres) et justifiée par une base physique. De plus, si l'une des valeurs identifiées est légèrement modifiée ou inexacte, l'impact sur le comportement reste réduit, ce qui rend l'interpolation plus robuste.



(a) Variation du polynôme $P(x)$ de la norme ASTM **(b)** Comparaison avec la forme g issue de l'ASTM

Fig. 1.26 – Interpolation de la souplesse en fonction de l'avancée de fissure

Pour des critères de rupture n'introduisant pas de longueur interne (MLER, critère local en contrainte, plasticité, endommagement etc.), la force et le déplacement évoluent simultanément avec la taille W de la structure [Bažant, 1993] (ce point sera démontré en Section 2.1.2). La souplesse $C = u/P$ n'est donc pas modifiée quand on réalise une homothétie des éprouvettes dans le plan. Pour une même position adimensionnée x de la fissure, on s'attend à ce qu'elle soit identique quelle que soit la taille W de la structure. L'identification de l'Eq. 1.29 peut ainsi s'effectuer sur toutes les données d'essais pour une meilleure robustesse de l'interpolation, afin de s'affranchir des erreurs potentielles lors de la mesure de la longueur de fissure.

Cependant, afin de ne pas préjuger du résultat, cette interpolation a été réalisée séparément pour chaque groupe d'éprouvettes de même configuration (même géométrie et même taille soit au moins 2 éprouvettes à chaque fois). En pratique, peu de variations avec la taille de l'éprouvette ont été observées. L'interpolation est effectuée sur une plage de valeur x réduite, correspondant à la plage sur laquelle G_C sera identifié par la suite. Cette plage de valeur est choisie dans le but de s'affranchir de l'effet de mise en place de la fissure en début d'essai et des effets de bords en fin de propagation. Elle correspond généralement à $x \in [0.55, 0.9]$ pour les éprouvettes testées

L'application sur les données d'essai est disponible en Fig 1.25. L'interpolation effectuée permet de représenter correctement l'évolution de la souplesse observée expérimentalement. *A contrario*, l'utilisation directe d'interpolations issues de handbooks ou de calculs VCCT ne reproduit pas la bonne évolution, probablement du fait de l'incertitude sur les données matériau et de la non-représentativité des calculs linéaires élastiques réalisés sur des matériaux isotropes.

Utilisation de l'interpolation $C = f(a)$ comme méthode de mesure de la longueur de fissure

Dans les cas où la mesure de longueur de fissure est difficile ou que le nombre important d'éprouvette rend difficile la mise en place de l'instrumentation, cette interpolation peut servir de méthode d'estimation à partir des données Force/Déplacement. Les paramètres x_m, χ et C_0 sont identifiés sur un essai pour lequel la longueur de fissure a été

Essais	T0.75	T1	T1.5	T2	T2.5
R^2	0.9945	0.9849	0.96123	0.9512	0.9752

Table 1.2 – Valeurs du coefficient de détermination R^2 lors de l'interpolation par la souplesse pour les différentes configurations d'essai

mesurée. L'Eq. 1.29 peut alors être inversée pour obtenir :

$$x_{interp} = x_m - \left(\frac{C_0}{C}\right)^{1/\chi} \tag{1.30}$$

Dans certains cas, l'interpolation peut être effectuée sur des résultats de calculs lorsqu'ils sont suffisamment représentatifs du comportement réel, permettant ainsi de s'affranchir d'une partie de l'instrumentation des essais. Pour les composites tissés 3D, cette représentativité peut être compromise même dans le cas de structures simples (comportement non linéaire élastique, profil de fissure complexe). La détermination des paramètres de l'Eq. 1.29 doit donc être réalisée à partir des données expérimentales.

Utilisation de l'interpolation $C = f(a)$ comme régularisation mécanique de la longueur de fissure mesurée

Lorsqu'une mesure de la longueur de fissure est disponible, l'Eq. 1.30 peut tout de même être utilisée pour obtenir une régularisation mécanique de cette longueur. L'identification sur les données d'essais puis l'utilisation de la formule inverse (Eq. 1.30) permet de lisser les erreurs locales à partir de l'information de Force/Déplacement associée. La méthode de la souplesse modifiée, présentée en Éq. 1.16, utilise ce principe. x_{interp} peut également être utilisé dans toutes les méthodes d'estimation de G_C à la place de la valeur mesurée x_{mesure} afin de réduire la dispersion sur l'estimation de G_C

La validité de l'interpolation peut être estimée à partir d'un coefficient de détermination R^2 [Colin Cameron and Windmeijer, 1997], calculé pour chaque configuration et traduisant la corrélation entre les longueurs de fissure mesurées x_{mesure} et celles déterminées par l'Eq. 1.30. Ce coefficient est défini par l'Eq. 1.31, où la notation $\bar{x}$ représente la moyenne. Les valeurs obtenues sont présentées dans le Tableau 1.2. Ce coefficient étant supérieur à 0.95 dans tous les cas, on considère que la forme choisie pour l'interpolation est adaptée.

$$R^2 = \frac{\left[\sum(x_{mesure} - \bar{x}_{mesure})(x_{interp} - \bar{x}_{interp})\right]^2}{\sum(x_{mesure} - \bar{x}_{mesure})^2 \sum(x_{interp} - \bar{x}_{interp})^2} \tag{1.31}$$

1.3.4 Analyse critique des méthodes d'estimation de Gc

Différentes méthodologies d'estimation de G_C ont été présentées en Section 1.1.2. Ces méthodes découlent généralement de l'équation de définition du taux de restitution d'énergie $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G}(u,a) = -\frac{1}{e_p}\frac{\partial U(u,a)}{\partial a} \tag{1.32}$$

Ce taux de restitution est calculé aux instants de propagation de la fissure afin d'obtenir G_C. Cependant en fonction de la méthode choisie, plusieurs hypothèses sont réalisées.

Hypothèses des méthodes d'estimation de G_C

Toutes les méthodes utilisées ici supposent par exemple que la propagation s'effectue dans un cadre quasi-statique et que la rupture des torons en traction est la seule source de dissipation d'énergie mécanique durant l'essai. La présence d'endommagements en compression n'est pas prise en compte.

Les méthodes passent généralement par une forme d'approximation de l'énergie potentielle de la structure à partir des données de Force/Déplacement obtenues en cours d'essai. Si le déplacement utilisé est issu de la traverse, la valeur peut être faussée par la présence d'une rigidité du montage compromettant la précision des calculs. Cette source d'erreur n'est pas présente pour les méthodes utilisant la valeur de force à rupture plutôt que de déplacement (interpolation des facteurs d'intensité de contrainte, VCCT recalé sur l'effort). La méthode de la souplesse permet également de s'affranchir de la rigidité du montage : la souplesse $C = u/P$ est dérivée dans l'équation, supprimant l'influence d'une rigidité constante. Dans les autres méthodes, cette influence reste présente. Dans notre cas elle a été corrigée par l'utilisation du déplacement mesuré par corrélation d'image lorsque cela était possible. Cependant, du fait de la présence du montage, u n'est pas mesurée directement au niveau du trou où sont introduits les efforts et est obtenue par interpolation à partir des zones visibles avoisinantes.

La méthode des aires réalise une approximation de la dérivée par le taux d'accroissement fini, approximation pouvant être grossière lorsqu'elle est appliquée entre des points de propagation trop éloignés. Cependant, si les points sont trop rapprochés, l'erreur réalisée sur les mesures (longueur de fissure, force et déplacement) peut entraîner des variations importantes. La courbe $\mathcal{R}$ obtenue est donc bruitée. Ce bruit peut-être diminué par l'utilisation de la longueur de fissure régularisée mécaniquement x_{interp} (voir Section 1.3.3).

Certaines méthodes reposent sur le choix d'une fonction d'interpolation. C'est le cas de la méthode de la souplesse (Section 1.3.3), des méthodes par interpolation du facteur d'intensité de contrainte ou encore de la méthode de correction de l'énergie disponible dans les normes [ASTM, 1997, ASTM, 1999].

De plus, le comportement du matériau est parfois considéré linéaire élastique. C'est le cas des méthodes reposant sur une comparaison avec des valeurs de calculs par éléments finis. C'est le cas des méthodes d'interpolation du facteur d'intensité de contrainte, des normes, de la méthode VCCT de la méthode de la souplesse, si son interpolation est réalisée sur des données de calcul. Ces méthodes utilisent également les valeurs des propriétés élastiques du matériau, les incertitudes associées pouvant accroître l'erreur d'estimation.

Enfin certaines méthodes reposant sur une interpolation proposée dans les normes ou les handbooks possèdent un intervalle de validité sur x réduit. C'est en particulier le cas pour l'interpolation utilisant le facteur de calibration de l'énergie fournie dans la norme ASTM [ASTM, 1999], pour laquelle l'interpolation est donnée pour $x \in [0.45; 0.55]$. Or, le plateau de la courbe $\mathcal{R}$ n'est pas encore atteint pour ces valeurs.

La présence de ces différentes hypothèses peut compromettre plus ou moins fortement la validité des résultats obtenus. Le récapitulatif des hypothèses pour chacune des méthodes est présenté dans le Tableau 1.3.

Comparaison des résultats des méthodes d'estimation de G_C

L'application des différentes méthodes pour l'estimation de G_C sur une éprouvette de facteur d'échelle 1.5 est présentée en Fig. 1.27. On observe des valeurs cohérentes

Méthode d'estimation	Méthode des aires	MCM (interpolation essai)	MCM (interpolation calcul)	Interpolation facteur de contrainte	Interpolation calibration énergie	VCCT
Énergie dissipée uniquement par la macro-fissure	X	X	X	X	X	X
Approximation par accroissements finis	X					
Influencé par la rigidité du montage	X				X	
Choix d'une fonction d'interpolation		X	X	X		
Intervalle d'interpolation limité				X	X	
Comportement matériau linéaire élastique			X	X	X	X
Valeur des paramètres élastiques			X	X		X
Comportement faiblement anisotrope				X	X	

Table 1.3 – Récapitulatif des conditions d'application des méthodes d'estimation de G_C

entre la méthode des aires et la MCM avec l'obtention d'un plateau après la phase de montée présente en début de propagation. Ces méthodes présentent peu d'hypothèses pouvant compromettre leur validité d'application. En particulier, elles ne nécessitent pas la connaissance du comportement mécanique du composite tissé 3D (linéaire élastique, paramètres élastiques). La valeur identifiée à partir de ces méthodes sur la phase de plateau est utilisée comme valeur de référence et sert à normaliser les valeurs de G_C obtenues à l'aide des autres méthodes.

Les résultats obtenus à l'aide des autres méthodes diffèrent de manière importante de ceux obtenus à l'aide des méthodes des aires et MCM. Les valeurs obtenues à l'aide des interpolations fournies pour le facteur d'intensité des contraintes diffèrent le plus fortement de la valeur de référence. C'est en effet la méthode reposant sur le plus d'hypothèses discutables pour notre cas d'application. En particulier, l'interpolation est effectuée sur des calculs isotropes et la validité du transfert des résultats à des matériaux fortement anisotropes ne semble pas fondée. Ces calculs sont de plus réalisés avec un comportement restant linéaire élastique et l'application de la méthode nécessite une connaissance précise des paramètres élastiques du matériau. Les résultats obtenus divergent ainsi fortement de la valeur de référence au fur et à mesure de l'avancée de la macro-fissure et sont largement inférieurs. Aucun plateau n'est atteint.

Le même type de comportement est observé pour les valeurs obtenues par la méthode VCCT. Les valeurs obtenues sont cependant un peu plus proches de la valeur de référence en particulier en début de propagation. Cela tient au fait que, bien que le VCCT

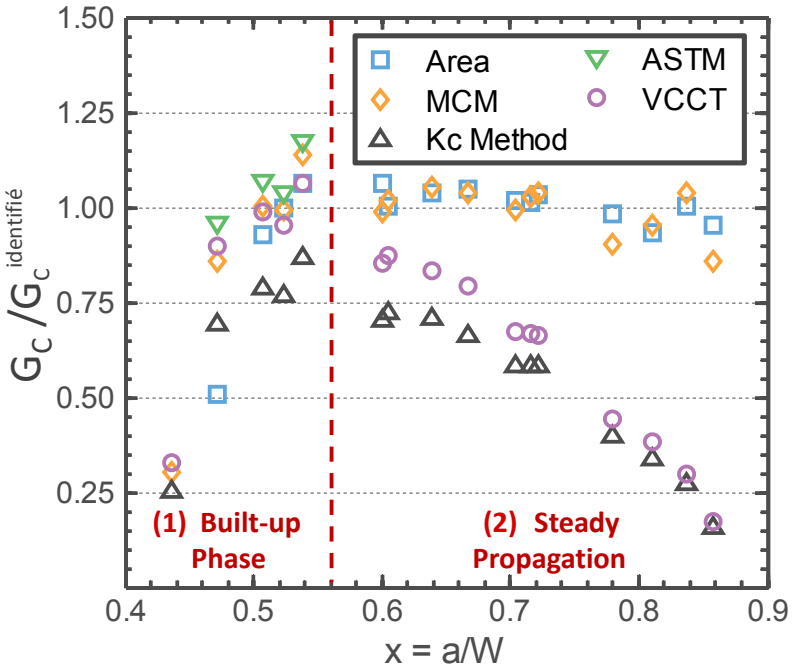


Fig. 1.27 – Évolution de G_C obtenue par les différentes méthodes d'estimation

reprenne la majorité des hypothèses de l'interpolation de K_C, les calculs sont effectués directement avec le matériau étudié et prennent en compte l'anisotropie. On observe toutefois une chute du G_C estimé de plus en plus forte avec la progression de la fissure.

La méthode d'interpolation reposant sur la calibration du facteur d'énergie ϕ présentée dans les normes ASTM possède des valeurs cohérentes en début de propagation. Elle s'affranchit en effet de la connaissance des propriétés élastiques du matériau et utilise les données de force et déplacement pour estimer l'énergie dissipée, contrairement aux méthodes VCCT et d'interpolation de K_C qui ne prennent en compte que la force à rupture et utilisent implicitement la rigidité obtenue par calcul. Cependant le domaine de validité de l'interpolation de cette méthode est très réduit et permet au mieux de saisir la zone de mise en place de la fissure sans atteindre une stabilisation de la valeur de G_C.

Application sur un cas test numérique

Ces tendances peuvent être confirmées par la réalisation d'un cas test numérique avec une énergie dissipée contrôlée, sur une éprouvette SENB. Le comportement matériau utilisé pour les simulations, issu du composite tissés 3D le plus déséquilibré (RCT1), est fortement anisotropique. Des éléments de zone cohésive bilinéaires sont introduits le long du profil de fissure afin de contrôler la dissipation liée à la propagation de la fissure. Une valeur arbitraire de G_C de 100 kJ/m^2 est utilisé à titre d'exemple au sein des éléments de zone cohésive. Ceux-ci introduisent un comportement non linéaire, dû à la présence d'une process zone en avant du front de fissure. Bien que de taille réduite vis-à-vis de la taille de la structure, cette process zone fait dévier le comportement du cadre de la MLER.

L'estimation de G_C est effectuée à l'aide des mêmes outils qu'utilisés dans les essais. Les évolutions de G_C obtenues sont présentées en Fig. 1.28. Les résultats corroborent ceux obtenus sur les données d'essai. Les méthodes des aires et MCM permettent

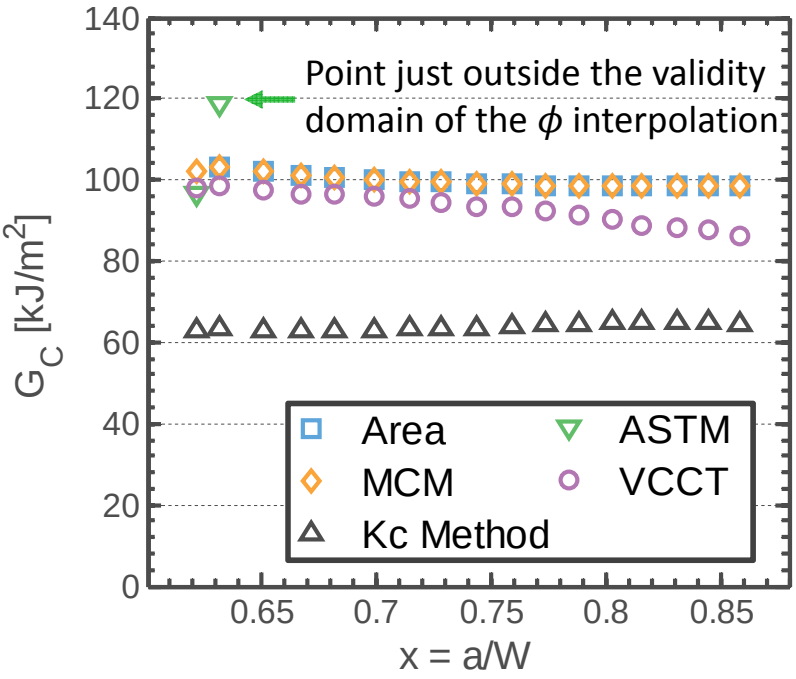


Fig. 1.28 – Application des méthodes d'estimation de G_C sur un cas test numérique utilisant des zones cohésives avec une valeur arbitraire de G_C = 100 kJ/m^2

d'identifier correctement le G_C de 100 kJ/m^2 introduit dans les zones cohésives. La méthode des normes reposant sur la correction de l'énergie offre des résultats s'écartant de quelques pourcents dans le domaine de validité de l'interpolation, mais fortement incohérents lorsque l'on s'écarte de ce domaine. La méthode VCCT offre de meilleurs résultats que sur les essais. Cependant même sur un cas test contrôlé avec une faible process zone et les propriétés élastiques exactes du matériau, une divergence apparaît au fur et à mesure de la propagation de la fissure, atteignant 15% en fin de simulation. Enfin la méthode utilisant l'interpolation de K_C offre ici aussi les plus mauvais résultats, avec une erreur de presque 40% sur la valeur estimée, probablement due à la mauvaise prise en compte de l'anisotropie.

Cette étude numérique, confortée par les résultats obtenus sur les données expérimentales et l'étude des hypothèses sous-jacentes à chaque méthode, permet de confirmer l'invalidité de certaines méthodes dans le cas de l'étude des composites tissés 3D. C'est le cas des méthodes utilisant une interpolation de K_C, la correction de l'énergie utilisée dans les normes, des calculs VCCT et probablement la MCM lorsque l'interpolation de la souplesse est effectuée sur des résultats de calculs. Ces méthodes ne seront donc pas utilisées par la suite pour l'estimation du taux de restitution d'énergie.

La méthode des aires et la MCM (avec interpolation de la souplesse sur les données d'essais) donnent des résultats cohérents et semblent adaptées à une application aux composites tissés 3D. Des précautions peuvent être prises pour minimiser l'impact des hypothèses inhérentes à leur utilisation :

— Étude de la validité de la fonction d'interpolation choisie pour la MCM (Section 1.3.3)

— Utilisation du déplacement de corrélation d'image pour supprimer l'influence de la souplesse du montage sur la méthode des aires

— Régularisation mécanique de la longueur de fissure mesurée pour réduire la dispersion de la méthode des aires (Section 1.3.3)

— Vérification de l'absence d'autres mécanismes de dissipation d'énergie, notamment en compression, ou de leur faible influence sur l'énergie dissipée (Section 1.2.2)

— Utilisation simultanée des deux méthodes devant offrir des résultats cohérents

Synthèse

L'étude des méthodes d'analyse des essais a permis d'évaluer la validité des méthodologies utilisées. Pour la mesure de la longueur de fissure, l'analyse des méthodologies appliquées aux différentes données issues de l'instrumentation a démontré que dans les conditions d'application actuelles, toutes les méthodes offrent des résultats cohérents, à l'exception de la localisation des évènements acoustiques. Celle-ci souffre en effet d'une précision de localisation trop faible. L'utilisation de l'une ou l'autre des méthodes n'introduit pas de biais notable lors de l'estimation de G_C. Le choix s'est donc porté sur l'utilisation systématique du suivi optique et de la CIN de manière automatique.

L'étude du choix d'une fonction d'interpolation de la souplesse a permis de dégager un choix de formule avec un nombre réduit de paramètres. Cette forme est inspirée par le comportement mécanique et permet une interpolation facile et robuste de tous les comportements rencontrés dans les essais.

Enfin l'étude des méthodes d'estimation de G_C a démontré la présence d'hypothèses trop restrictives pour une application aux composites tissés 3D. Des valeurs non cohérentes entre elles et déviant fortement de celle introduite dans un cas test numérique ont été observées lors de l'utilisation des méthodes d'interpolation de K_C et de correction de l'énergie proposées dans les normes ASTM [ASTM, 1997, ASTM, 1999], ainsi que lors de l'utilisation de la méthode VCCT. Ces erreurs sont probablement imputables aux hypothèses effectuées sur le comportement matériau (linéaire élastique, valeurs des paramètres élastiques etc.). Les méthodes des aires et MCM sont quant à elles jugées adaptées à l'estimation de G_C sur les composites tissés 3D et sont utilisées conjointement pour assurer une plus grande robustesse des résultats. Des précautions supplémentaires peuvent être prises pour améliorer la validité de cette estimation.

L'étude réalisée dans cette section valide la mise en place d'une méthodologie robuste et adaptée à l'analyse d'essais de propagation d'une macro-fissure dans des composites tissés 3D. Cette méthodologie sera appliquée dans la section suivante afin d'estimer le taux de restitution d'énergie critique G_C au cours des essais et de comparer les résultats obtenus en fonction des configurations des éprouvettes utilisées (taille, géométrie) et du RCT du matériau considéré.

1.4 Résultats de propagation de macro-fissure sur composites tissés 3D

Cette section présente les résultats de la campagne expérimentale mise en place en Section 1.2.3. L'analyse de la longueur de fissure et l'estimation de G_C sont effectués selon la méthodologie présentée en Section 1.3.4. Les résultats sont principalement fournis pour le RCT le plus déséquilibré sauf précisions contraires, les résultats pour les autres architectures matériaux sont récapitulés en Section 1.4.6.

Éprouvette CT	T0.75	T1	T1.5	T2	T2.5
Force critique P_C / $P_C^{2.5}$	0.4	0.43	0.64	0.78	1.

Table 1.4 – Valeurs expérimentales de la force critique sur éprouvette CT de facteur d'échelle 0.75 à 2

1.4.1 Présentation des résultats

Conformément au pré-dimensionnement mis en place en Section 1.2.2, les essais exhibent une propagation stable de la fissure pour toutes les configurations, à l'exception de deux éprouvettes SENB pour lesquelles l'étude de stabilité n'avait pas été conduite et aucune pré-entaille n'avait été réalisée. Ces éprouvettes ont subi une unique propagation à travers la majeure partie de la zone utile de propagation, rendant impossible la mise en place d'une méthode d'analyse robuste de l'essai. Ce point a justifié la réalisation d'une pré-entaille.

Aucun flambement global n'a été clairement identifié sur les essais réalisés, ni matage du trou entraînant son ovalisation. Ces mécanismes de ruine indésirables auraient compromis la qualité des résultats.

Résultats Force / Déplacement

Les courbes force/déplacement pour les différents facteurs d'échelle d'essais CT sont présentées en figure 1.29 pour le tissé 3D le plus déséquilibré. Elles exhibent une bonne répétabilité, contrairement à ce qui est parfois observé sur d'autres composites tels que les tissés 2D. Cette cohérence des résultats est probablement améliorée grâce aux précautions prises lors du dimensionnement et à l'utilisation d'éprouvettes de taille importante. Les différences de rigidité initiale observées pour les facteurs d'échelle sont liées aux différences sur la position initiale normalisée de la fissure x_0 (Tableau 1.1). Pour rappel, celle-ci est calculée afin d'assurer une propagation stable telle que présenté en Section 1.2.2.

Comme attendu, on observe une augmentation de la force à rupture avec la taille de l'éprouvette. Les valeurs des forces moyennes à rupture sont données en Tableau 1.4. Les valeurs sont adimensionnées par la force à rupture la plus élevée obtenue pour l'éprouvette de facteur d'échelle 2.5.

La propagation est en pratique stable par morceaux du fait de l'influence importante de l'architecture : la présence locale d'un toron entraîne un surplus de résistance à la propagation. Lorsque celle-ci intervient, elle entraîne alors la fissure d'une colonne de torons, voire de plusieurs. Elle retrouve ensuite une position d'équilibre durant laquelle seule une faible avancée est observée avec l'augmentation du chargement, jusqu'à une nouvelle valeur de déplacement entraînant une importante propagation à travers des torons. Ce mécanisme ne compromet pas l'analyse de G_C car les chutes de rigidité observées restent suffisamment faibles et de nombreux points de propagation sont disponibles. Lorsque la taille de l'éprouvette augmente, l'augmentation du nombre de points de propagation durant la chute de rigidité rapproche le comportement apparent d'une propagation continue.

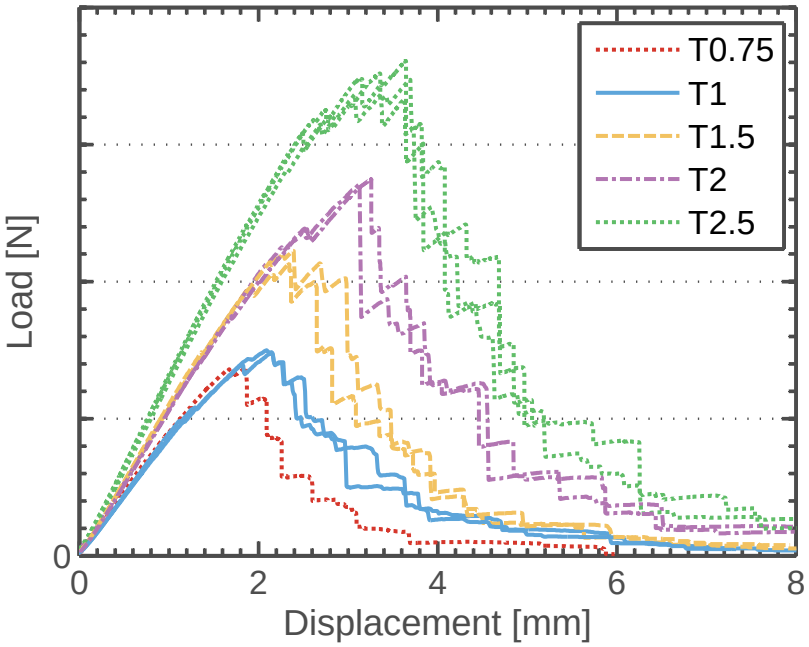


Fig. 1.29 – Courbe force/déplacement sur essais CT RCT1 pour différentes tailles homothétiques d'éprouvettes

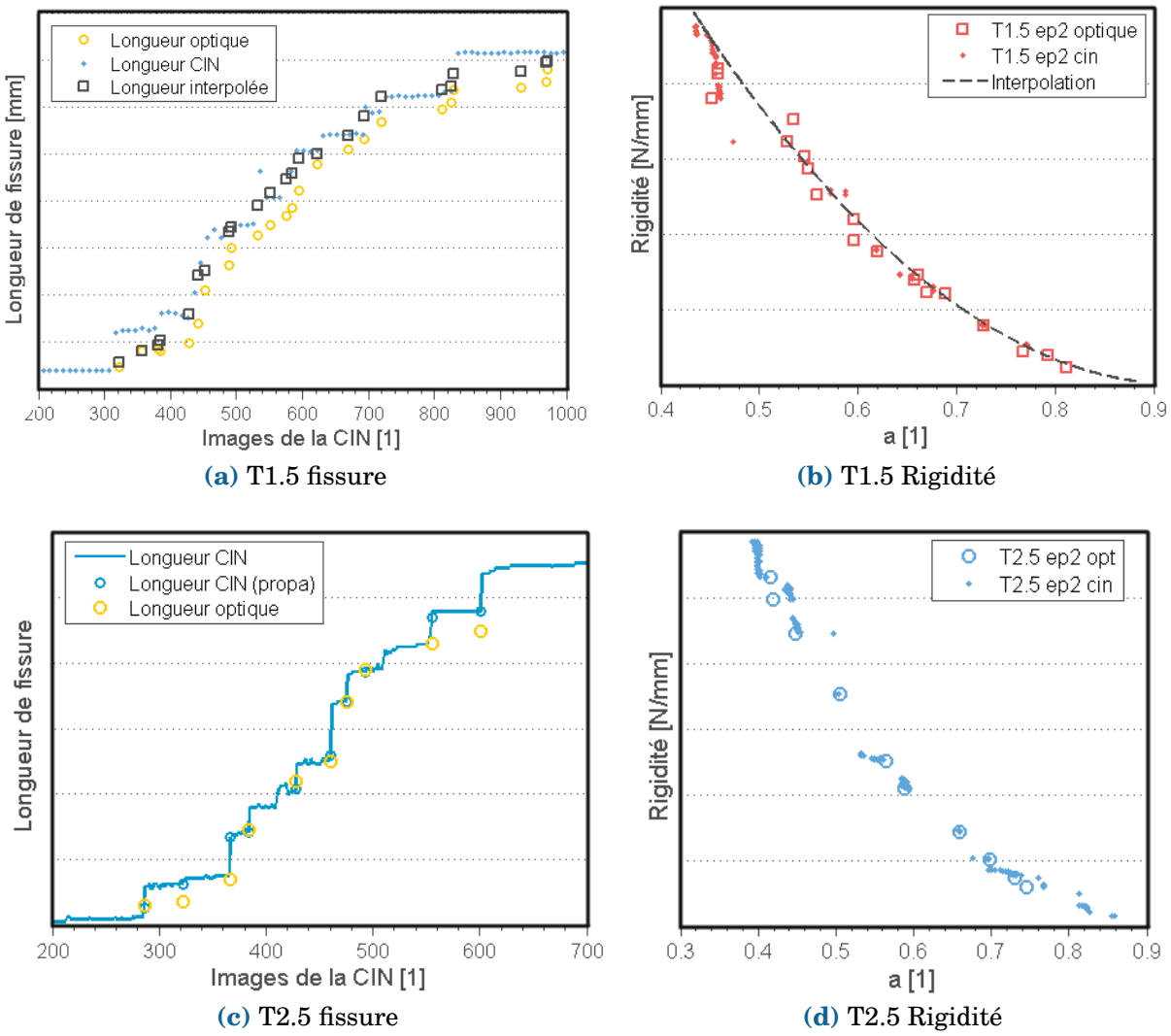
Résultats Souplesse / Longueur de fissure

La méthodologie de détection de position de la pointe de fissure présentée en Section 1.3.1 est appliquée aux données d'essai. Les résultats obtenus n'exhibant pas de biais lié au choix de l'une des méthodes, l'analyse repose principalement sur l'utilisation des données de CIN et de Suivi Optique, disponibles sur tous les essais. Ces méthodes sont automatisées et permettent de traiter un grand nombre de points.

Comme précisé en Section 1.3.1, les détections utilisant ces données d'instrumentation donnent des évolutions de longueur de fissure cohérentes, présentées en Fig. 1.30. Des différences de valeurs peuvent apparaître sur certains essais (par exemple la CT T1.5 présentée). Elles peuvent être dues à des différences de calibration de la longueur initiale utilisée par chacune des méthodes. La variation de longueur de fissure en cours d'essai reste cependant cohérente dans les deux cas, ce qui n'entraîne donc pas de variation sur le G_C estimé.

Lors de l'utilisation de la méthode reposant sur la CIN, applicable automatiquement à chaque image, une évolution par palier est observée. Elle correspond à la progression discontinue de la fissure déjà observée sur la courbe force/déplacement. Les avancées de fissure observées pourraient théoriquement être reliées à des multiples de la distance inter-colonne du tissage afin de confirmer que la rupture progresse localement d'une ou plusieurs colonnes de torons. Cependant l'imprécision des mesures et la dispersion sur l'architecture du matériau ne permettent pas de déterminer précisément une taille caractéristique de ces sauts de propagation de la macro-fissure.

L'interpolation de la souplesse ou de la rigidité est également appliquée selon la méthodologie présentée en Section 1.3.3. Les courbes de rigidité en fonction de la longueur de fissure mesurée par CIN et Suivi Optique (SO) sont présentées en Fig. 1.30 pour des éprouvettes de facteur d'échelle T1.5 et T2.5. L'interpolation issue de l'Eq. 1.29 est également présentée. Celle-ci permet une bonne description du comportement observé. Elle peut également être utilisée pour lisser mécaniquement les longueurs de fissure



(a) T1.5 fissure **(b)** T1.5 Rigidité

(c) T2.5 fissure **(d)** T2.5 Rigidité

Fig. 1.30 – Comparaison des longueurs de fissures mesurées par méthode optique et corrélation d'images numériques

mesurées, tel que présenté pour l'éprouvette T1.5.

Comme évoqué en Section 1.3.3 et démontré en Section 2.1.2, on s'attend à ce que le déplacement et la force à rupture évoluent similairement quand la taille de l'éprouvette W varie. Pour une même position adimensionnée de la fissure x, l'homothétie dans le plan ne modifie donc pas la souplesse $C = u/P$. La Fig. 1.31 présente les valeurs expérimentales de souplesse et de rigidité en fonction de la position x. Une bonne superposition des courbes est observée pour les différentes tailles d'éprouvette. Elle laisse supposer que u_C et P_C évolue bien simultanément quand W varie. Des variations peuvent être observées mais sont mises sur le compte de la variabilité expérimentale, aucune tendance claire ne semblant se dégager sur une éventuelle évolution de la souplesse avec W.

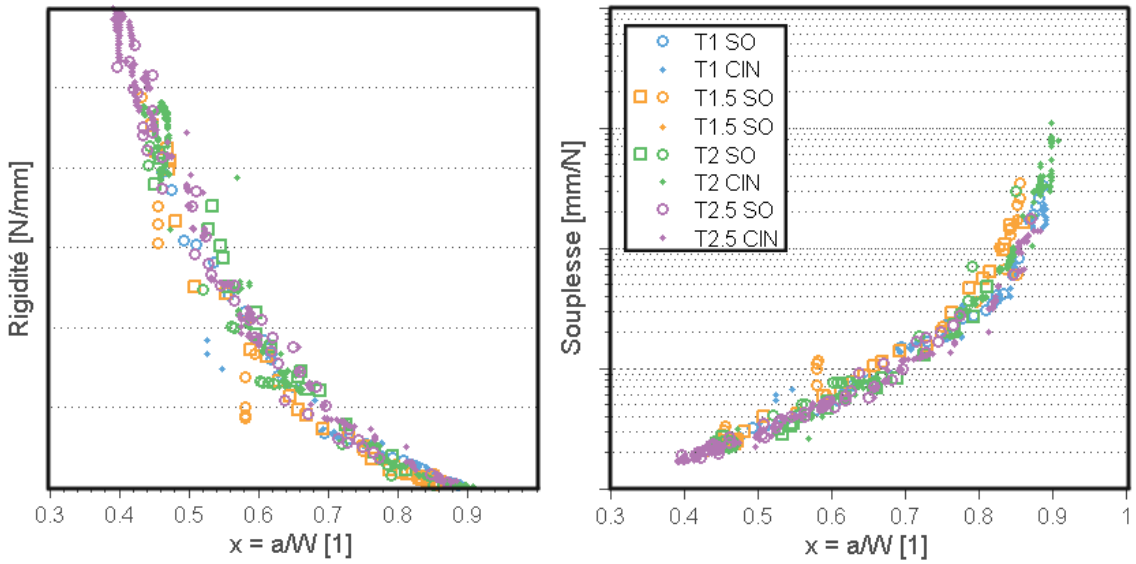


Fig. 1.31 – Superposition des courbes Rigidité/x et Souplesse/x sur éprouvettes CT pour différents facteurs d'échelle

1.4.2 Analyse des courbes de résistance expérimentales

La Méthode des aires et la MCM sont appliquées telles que présenté en Sections 1.1.2 et 1.3.4, à partir des données de force, déplacement et longueur de fissure mesurée. Leur application permet d'estimer la résistance à l'avancement $\mathcal{R}$ au cours de l'essai et donc la valeur de G_C aux points de propagation. Son évolution au cours de l'avancée de la position de fissure x forme une courbe appelée courbe de résistance ou courbe-$\mathcal{R}$ ($\mathcal{R}$-curve). Un exemple d'une telle courbe est donné en Fig. 1.32.

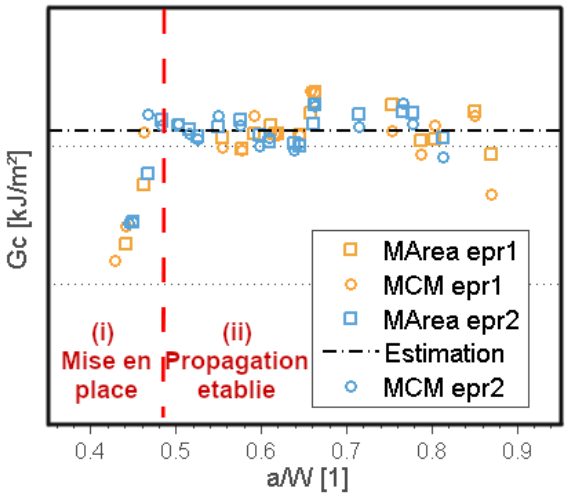


Fig. 1.32 – Courbe de résistance obtenue par méthode des aires et MCM sur CT T1.5

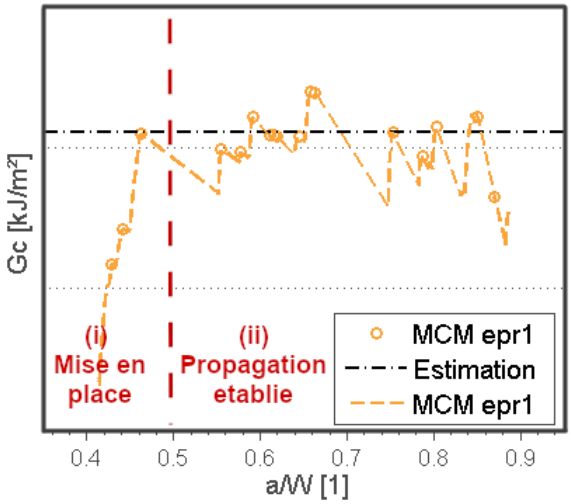


Fig. 1.33 – MCM appliquée en tout point sur CT T1.5

Cette courbe de résistance exhibe deux régimes, fréquemment rencontrés dans la litterature [Laffan et al., 2010a, Catalanotti et al., 2010] :

— (i) Une première phase d'augmentation du G_C, jusqu'à une certaine longueur de propagation : Elle s'interprète comme une phase de mise en place de la fissure, la pré-entaille réalisée n'étant pas représentative de la fissure se propageant par la suite

— (ii) Une deuxième phase de régime établi : Durant cette phase, G_C atteint généra-

lement un plateau. Le profil de fissure est alors développé et se propage en conservant le même aspect. C'est à partir de ce régime établi qu'est estimée la valeur de G_C.

Ces deux régimes sont facilement identifiables sur la Fig. 1.32 qui donne l'estimation de G_C aux points de propagation de la fissure obtenue sur deux éprouvettes de facteur d'échelle T1.5. On remarque que les essais possèdent une bonne répétabilité pour l'estimation de G_C et que les deux méthodes d'analyse des données fournissent des résultats similaires. Dans tous les essais réalisés, le régime établi a été atteint bien avant la fin de la propagation, permettant une estimation acceptable de G_C.

Contrairement à la méthode des aires, la MCM peut être appliquée à tous les instants de l'essai et non aux seuls instants de propagation. La courbe obtenue (en pointillés sur la Fig. 1.33) permet de mieux appréhender la propagation par avancées successives et la notion de valeur critique du taux de restitution d'énergie. En effet, après une avancée, le taux de restitution d'énergie $\mathcal{G}$ à la nouvelle position x est inférieur à la valeur G_C nécessaire pour la propagation et celle-ci s'arrête. Le chargement en déplacement et $\mathcal{G}$ augmentent alors de nouveau (phases de montées verticales sur la figure) jusqu'à atteindre la valeur critique entraînant une nouvelle rupture de torons (points ronds).

Analyse de la phase de mise en place de la courbe-$\mathcal{R}$

Dans certaines théories de la rupture, la courbe-R est considérée comme une propriété matériau. Dans ce cas, la phase de montée et la valeur du plateau sont indépendants de la structure étudiée. La longueur de propagation de la fissure avant d'atteindre le régime établi devient un paramètre matériau identifiable, éventuellement reliée à l'architecture du matériau.

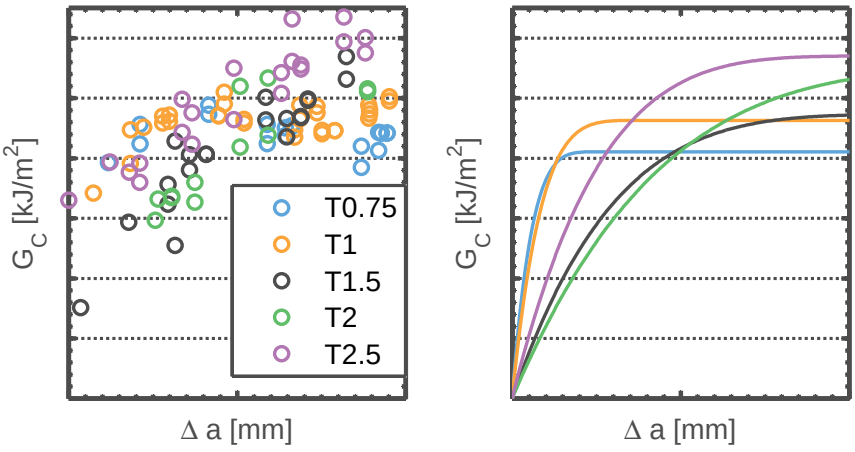


Fig. 1.34 – Valeurs plateau des courbes de résistance sur essais CT

Sur la base des données d'essai une identification a été effectuée à partir des courbes-$\mathcal{R}$ afin de déterminer la longueur de mise en place. La Fig. 1.34 présente la phase de montée de G_C pour les différentes tailles d'essais CT. Une identification est effectuée afin de décrire au plus près les données expérimentales par la formule :

$$\mathcal{R}(\Delta a) = G_C\,[1-(1-\Delta a/c_f)^n] \qquad \text{si } \Delta a < c_f \tag{1.33}$$

$$\mathcal{R}(\Delta a) = G_C \qquad \text{si } \Delta a > c_f \tag{1.34}$$

Les paramètres G_C et c_f représentent respectivement la valeur du plateau et la longueur de propagation avant stabilisation. On cherche à déterminer si c_f est potentiellement indépendante de W ou si les phases de montée se superposent pour les différentes tailles (jusqu'à atteindre la valeur plateau $G_C(W)$ de chaque configuration). Les courbes-$\mathcal{R}$ issues de l'identification sont présentées en Fig. 1.34. Elles exhibent une forte variation, notation de la longueur de propagation avant stabilisation. Si la tendance générale est à l'augmentation de c_f avec la taille de la structure, cette augmentation n'est pas formellement réalisée et aucun lien évident ne semble apparaître entre c_f et G_C ou W. Le caractère matériau de la courbe-$\mathcal{R}$, en particulier de la longueur de propagation avant stabilisation, devrait alors faire l'objet de plus amples études afin d'être confirmé sur les composites tissés 3D.

1.4.3 Estimation de G_C : Influence de l'échelle et de géométrie

Une fois le régime établi identifié sur la courbe-$\mathcal{R}$, une valeur du taux de restitution d'énergie critique est estimée à partir du plateau. Les valeurs de G_C obtenues aux points de propagation sur chaque éprouvette à l'aide de la méthode des aires et la MCM sont présentées en Fig. 1.35, pour le RCT1 le plus déséquilibré. La phase de mise en place de la fissure a été supprimée des courbes pour plus de clarté. Les graphiques sont à la même échelle et adimensionnés à l'aide de la valeur moyenne identifiée sur le facteur d'échelle 2.5.

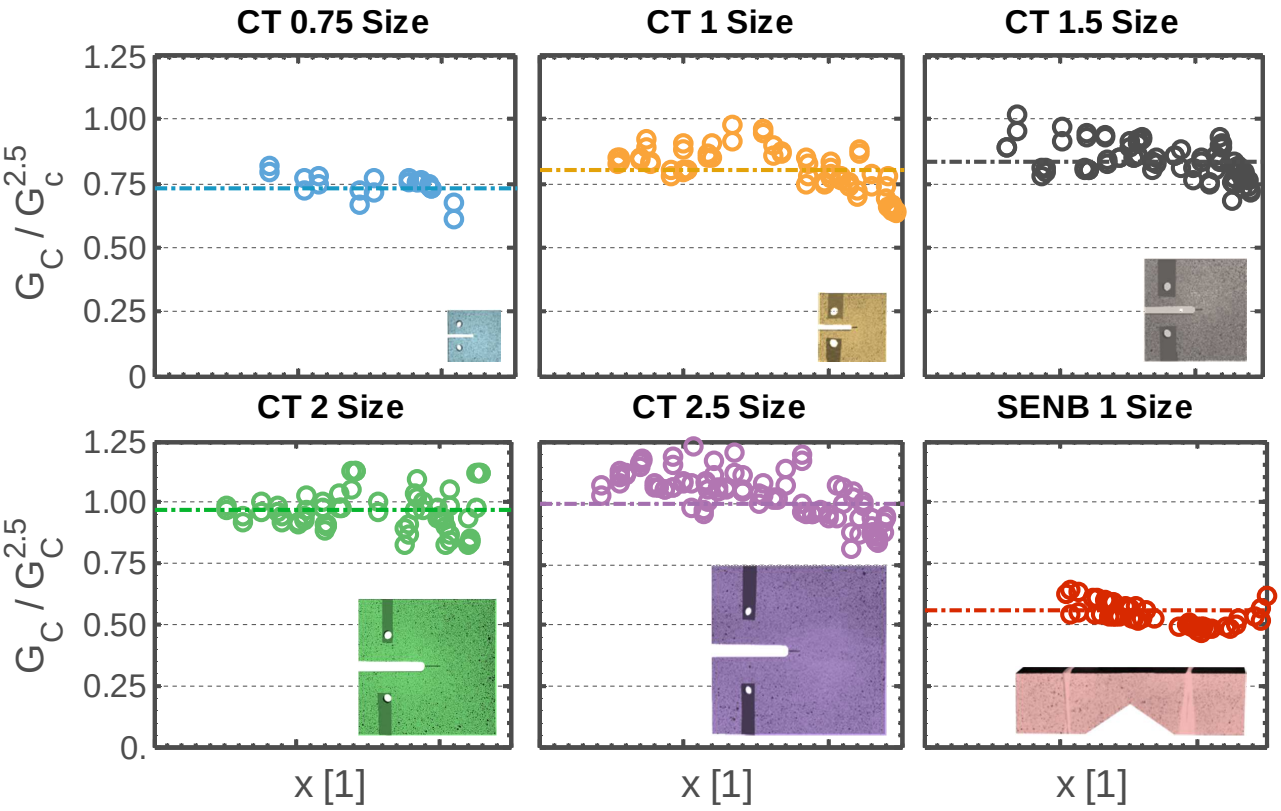


Fig. 1.35 – Valeurs plateau des courbes de résistance sur essais CT et SENB

Les valeurs de G_C identifiées pour chaque configuration à partir du plateau sont présentées dans le Tableau 1.5. Elles sont adimensionnées à l'aide de la valeur la plus

Éprouvette	T0.75	T1	T1.5	T2	T2.5	SENB
G_C / $G_C^{2.5}$	0.73	0.8	0.83	0.93	1.	0.56

Table 1.5 – Valeurs expérimentales moyenne de G_C obtenues sur éprouvettes CT et SENB pour différents facteurs d'échelle (normalisées par les résultats sur éprouvette T2.5)

élevée obtenue sur l'éprouvette T2.5. Une forte variation est observée avec la taille de l'éprouvette considérée et la géométrie testée. Sur les éprouvettes CT homothétiques, G_C augmente avec la taille caractéristique de la structure testée. Un facteur 1.4 est observé sur la valeur moyenne de G_C entre la plus petite et la plus grande taille d'éprouvette CT. Une différence importante est également observée avec la configuration SENB réalisée, avec presque un facteur 2 entre le G_C identifié sur ces éprouvettes et celui sur l'éprouvette CT T2.5.

Le niveau de dispersion expérimental observé sur les valeurs à rupture en cours d'essais et entre les différents essais reste en deçà des variations de valeurs observées entre les différentes configurations. Les variations observées ne peuvent donc pas être attribuées à la dispersion expérimentale. Celle-ci reste notamment faible vis-à-vis de ce qui peut être obtenu sur d'autres matériaux composites. De plus les précautions prises lors de la mise en place de la méthodologie d'analyse des données préviennent de toutes variations liées au choix de la méthode utilisée. L'évolution de G_C avec la taille W de l'éprouvette est représentée en Fig. 1.36, adimensionnée par la valeur G_{max} maximale obtenue sur tous les points de mesure. Une dispersion est également fournie à partir des valeurs maximales et minimales du plateau observées expérimentalement.

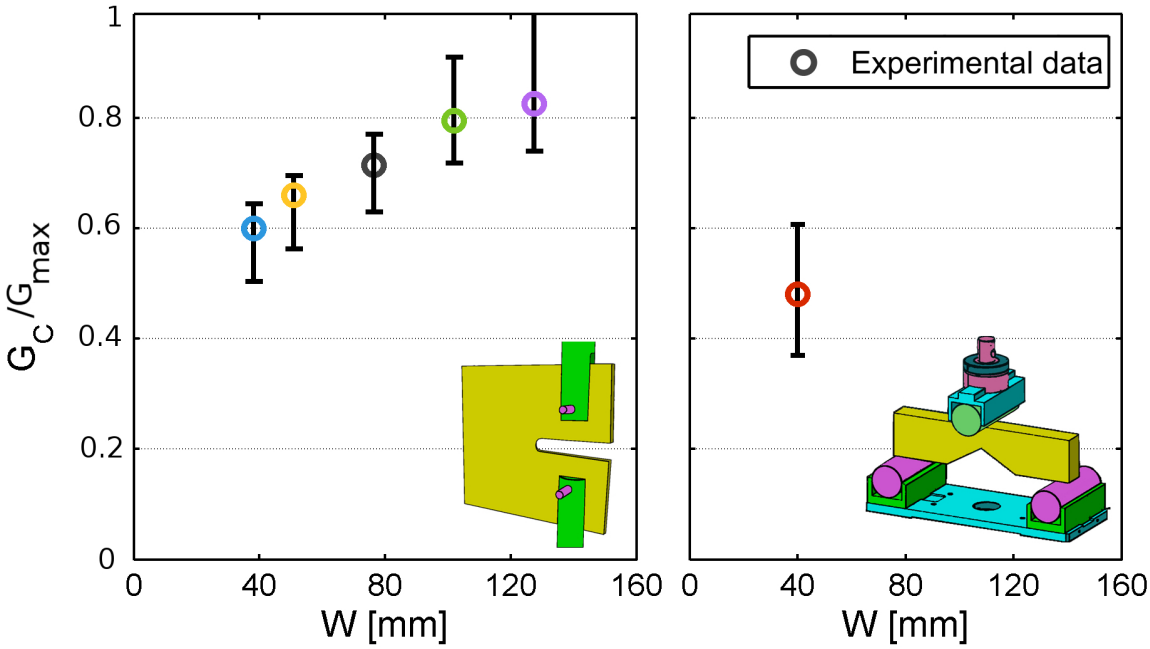


Fig. 1.36 – Valeur moyenne de G_C et dispersion expérimentale sur éprouvettes CT et SENB

1.4.4 Indications de l'invalidité de la MLER

La dépendance observée de G_C à la structure considérée remet en cause son utilisation en tant que paramètre matériau caractérisant la propagation de la macro-fissure.

Le comportement mécanique observé s'écarte donc du cadre de la MLER, qui prend comme postulat l'indépendance G_C à la structure et aux conditions de chargement. Il est également utile de remarquer sur la Fig. 1.36 que G_C n'évolue pas linéairement avec la taille W de l'éprouvette.

Cet écart à la MLER peut être étudié à travers l'analyse des lois de similitude. Ces lois décrivent l'évolution des grandeurs à rupture avec W et seront introduites plus en détail en Section 2.1.2. Elles peuvent notamment porter sur le déplacement et la force à rupture u_C et P_C. Ces grandeurs mécaniques offrent l'avantage d'être facilement accessibles expérimentalement. Dans le cadre de la MLER, u_C et P_C, à position normalisée de la fissure x équivalente, évoluent avec la racine carrée de W (voir Sections 2.1.2 et 2.1.3 pour la démonstration). Pour deux éprouvettes de taille caractéristique W_1 et W_2 :

$$\frac{P_C(x,W_1)}{\sqrt{W_1}} = \frac{P_C(x,W_2)}{\sqrt{W_2}}; \quad \frac{u_C(x,W_1)}{\sqrt{W_1}} = \frac{u_C(x,W_2)}{\sqrt{W_2}}; \tag{1.35}$$

$P_C/\sqrt{W}$ et $u_C/\sqrt{W}$ sont tracés en Fig. 1.37. Dans le cadre de la MLER, une superposition des deux courbes serait observable, les points superposés correspondant à des positions de fissure x équivalentes. La mise à l'échelle par $\sqrt{W}$ ne permet pas, dans notre cas, de faire coïncider les courbes pour les deux tailles d'éprouvette. Les points de référence pour lesquels la position de la fissure atteint $x = 0.5$, 0.6, 0.7 et 0.8 sont également donnés pour les deux éprouvettes. Cela confirme le décalage présent entre les deux courbes. Ce décalage n'est pas observé dans les essais avec facteur d'échelle réalisés sur composite stratifié [Laffan et al., 2010b], ces essais ayant conduit à une valeur constante de G_C sur les trois configurations étudiées.

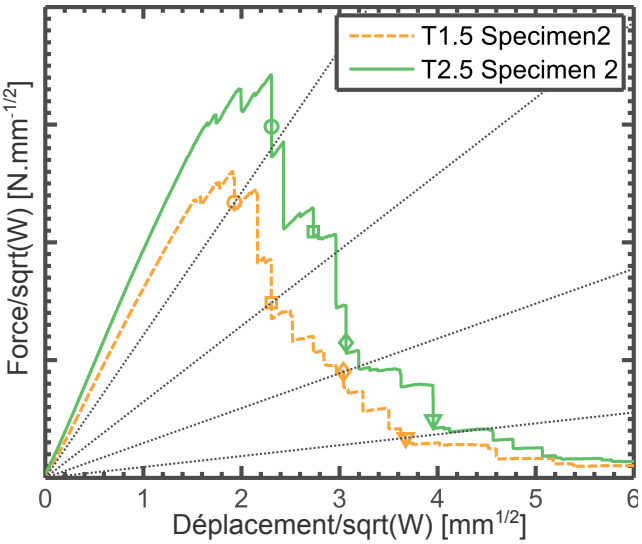


Fig. 1.37 – Comparaison des forces et déplacements expérimentaux divisés par $\sqrt{W}$ pour deux tailles d'éprouvettes CT

Cette étude, qui repose uniquement sur les courbes force/déplacement, invalide la capacité de la MLER à décrire la rupture des composites tissés 3D, confirmant la variation importante de G_C observée. Les endommagements présents en avant du front de fissure, le pull-out des torons et la tortuosité du profil de fissure remettent en effet en question l'hypothèse de la MLER d'un comportement matériau restant linéaire

élastique. Ces mécanismes de rupture peuvent également être analysés à l'aide des tomographies réalisées *post-mortem* ou grâce à l'essai réalisé *in situ*. Ils seront étudiés en détail en Section 2.4.5.

Bien que ces phénomènes soient présents au voisinage de la pointe de fissure, la taille caractéristique de ces phénomènes n'est pas négligeable vis-à-vis de la taille des structures étudiées et la notion de voisinage confiné peut être remise en cause. L'influence de ces mécanismes sur la réponse globale du matériau et leur évolution avec la taille de l'éprouvette doivent donc être étudiées et modélisées. Cette étude doit également identifier des grandeurs physiques permettant de caractériser la propagation de macrofissures dans les composites tissés 3D, G_C ne pouvant plus être considéré comme un paramètre matériau.

1.4.5 Résultats sur CT avec facteur d'échelle T3

Afin de confirmer les évolutions observées et de mettre en évidence une éventuelle saturation de G_C avec la taille de la structure, un test sur éprouvette CT avec un facteur d'échelle de 3 a été réalisé (voir Tableau 1.1 pour le récapitulatif des essais réalisés).

Les deux éprouvettes ont été découpées dans la même plaque que celles précédemment réalisées, suivant la méthodologie de préparation et d'analyse présentée précédemment. Afin de pouvoir supporter la force à rupture plus importante due à l'augmentation des dimensions de l'éprouvette, la taille des pions utilisés pour transmettre les efforts a été modifiée ainsi que le montage d'essai associé.

Les résultats Force/Déplacement pour le facteur d'échelle 3 sont présentés en Fig. 1.38, ceux obtenus pour les autres facteurs d'échelle sont donnés pour référence. Alors qu'il est attendu que la force et le déplacement à rupture augmentent avec la taille de l'éprouvette, les résultats obtenus pour l'essai T3 sont confondus avec ceux des éprouvettes T2.5. Les deux éprouvettes testées exhibent des résultats cohérents entre eux avec peu de dispersion expérimentale. Le comportement obtenu est significativement différent de celui observé sur les éprouvettes précédemment présentées. Il en résulte une baisse importante de G_C par rapport à l'éprouvette T2.5, avec $G_C^{T3} \approx 0.75 G_C^{T2.5}$, soit une valeur de G_C proche de celle obtenue sur les éprouvettes T1. Cette valeur, bien qu'identique sur les deux éprouvettes T3 réalisées, semble incohérente avec l'évolution de G_C précédemment observée et n'est pas décrite par le cadre de modélisation présenté en Section 2.4.5.

Plusieurs pistes peuvent être évoquées pour expliquer cette différence de comportement :

— La modification du montage et des pions utilisés pour la transmission des efforts peut introduire un changement dans la transmission des efforts et donc des conditions aux limites vues par l'éprouvette. Une variation de rigidité du montage, et donc une erreur sur le déplacement fourni par la machine, semble écartée du fait de l'utilisation du déplacement issu de la corrélation d'images et du fait que la force ait aussi été affectée. A noter qu'une réduction du diamètre des rouleaux a été appliquée sur l'éprouvette T0.75 sans conséquence apparente sur l'estimation de G_C.

— La découpe a été réalisée proche des bords de l'éprouvette, le tissage pouvant alors ne pas être représentatif de celui au cœur de la plaque. Cependant aucun fil de marquage ne semble visible au sein des éprouvettes.

— L'analyse de la CIN montre des déplacement hors-plan plus importants que sur les éprouvettes précédentes. Ces déplacements pourraient être à l'origine d'un léger

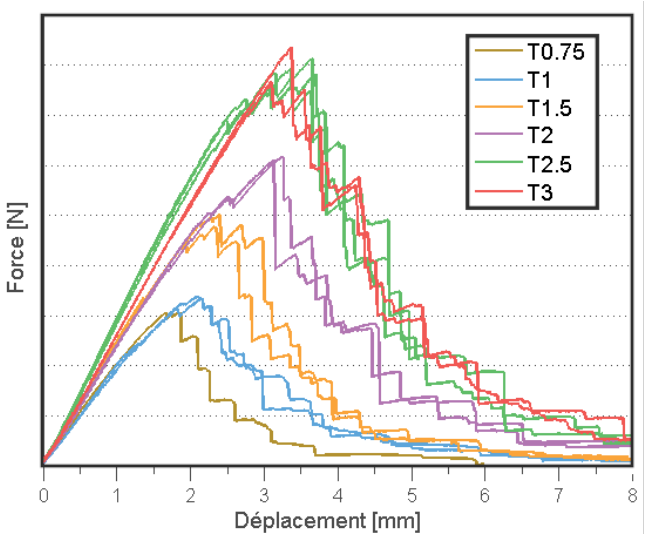


Fig. 1.38 – Courbes Force/Déplacement obtenues pour un facteur d'échelle T3 et comparaison avec les courbes précédentes

flambement de l'éprouvette, entraînant une mixité de mode lors de la propagation. Les déplacements hors-plan semblent évoluer relativement linéairement avec W sur toutes les configurations si bien que l'angle d'ouverture en mode III de la fissure ne devrait pas être beaucoup plus important que ceux observés sur les plus petits facteurs d'échelle. L'analyse des déplacements au bord de la fissure reste cependant délicate, des décorrélations pouvant apparaitre et l'éprouvette pouvant avoir dépassé la valeur critique de flambement.

La réalisation de nouvelles éprouvettes, dans une autre plaque et éventuellement avec une épaisseur plus importante, pourrait permettre de confirmer ou d'infirmer les résultats obtenus pour ce facteur d'échelle. L'utilisation d'essai SENB, non sujet au flambement, peut également être une alternative.

Si ces résultats étaient confirmés, ils pourraient révéler un changement de comportement à partir d'une certaine taille critique. En l'état, ce résultat n'est pas expliqué par le modèle et est considéré comme étant dû aux différences lors de la réalisation des essais.

1.4.6 Résultats obtenus pour les autres RCT

Les résultats de variation de G_C observés sur l'architecture déséquilibrée RCT1 peuvent être confirmés sur les autres RCT étudiés avec plusieurs configurations différentes (taille ou géométrie). Ces résultats restent partiels du fait du nombre plus faible de configurations testées pour les autres RCT (deux au maximum), de la rupture partielle en compression en arrière des éprouvettes et de la forte tortuosité du profil de fissure (Fig. 1.39). Les courbes force/déplacement exhibent également une plus forte non-linéarité que celle observée sur le RCT plus faible (Fig. 1.40)

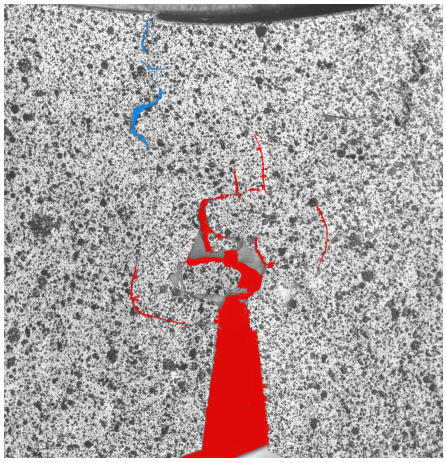


Fig. 1.39 – Profil de fissure sur composite tissé 3D sur RCT4 équilibré. Rouge : macro-fissure en traction, Bleu : rupture en compression

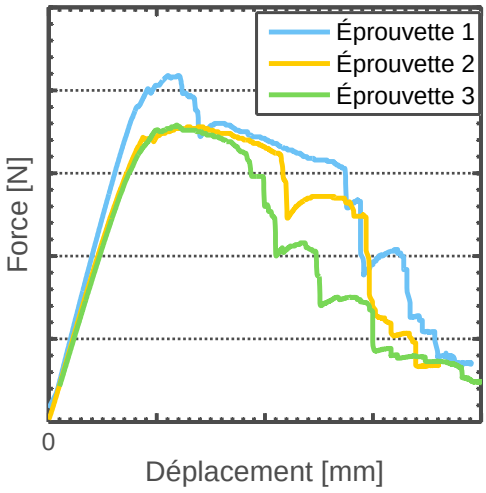


Fig. 1.40 – Courbes Force / Déplacement obtenues sur composite tissé 3D avec RCT équilibré

Les valeurs de G_C estimées sont présentées en Tableau 1.6. Elles sont adimensionnées par la valeur maximale, obtenue sur la configuration CT avec un RCT3 (RCT4).

RCT	Géométrie	Facteur d'échelle	$G_C^{moy}/G_C^{CT1-RCT3}$	$G_C^{min}/G_C^{CT1-RCT3}$	$G_C^{max}/G_C^{CT1-RCT3}$
RCT2	SENB	0.95	0.34	0.23	0.43
		1.875	0.44	0.36	0.48
RCT3	SENB	1.1	0.49	0.36	0.55
	CT	1	1.	0.9	1.25
RCT4	SENB	1.3	0.89	0.65	1.13

Table 1.6 – Valeurs de G_C obtenues pour différents RCT et configurations d'essai sur composites tissés 3D

Les valeurs identifiées augmentent avec la taille des éprouvettes pour des géométries similaires et avec le RCT. Une plus forte dispersion est présente entre les valeurs minimales et maximales ayant amené à la propagation durant les essais, cette dispersion augmentant avec le RCT. Elle atteint un facteur 1.74 entre la plus faible et la plus importante valeur observée sur le RCT4 équilibré et confirme la recul à adopter vis-à-vis des valeurs obtenues sur ces essais. Néanmoins, la tendance semble confirmer celle présentée précédemment. Les variations de G_C observées en fonction de l'éprouvette étudiée, parfois bien supérieures à la dispersion expérimentale, remettent en cause l'utilisation de G_C comme paramètre matériau et de manière générale l'utilisation de la MLER pour les matériaux composites tissés 3D.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la campagne expérimentale mise en place afin de caractériser la propagation d'une macro-fissure due à la rupture des torons de trame au sein de matériaux composites tissés 3D à matrice organique. Elle repose sur l'estimation de l'énergie surfacique G_C dissipée par la propagation de la fissure. Cette grandeur a été estimée à partir d'éprouvettes à gradient de contrainte et à propagation stable CT et SENB. Des modes de ruines indésirables peuvent apparaître sur ces éprouvettes, compromettant le bon déroulement et l'analyse des essais.

La première partie du travail a donc consisté à réaliser un dimensionnement des éprouvettes prenant en compte les spécificités des composites tissés 3D. Ce dimensionnement a pour but de s'assurer (i) de l'absence d'endommagement en compression en arrière de l'éprouvette, (ii) de l'absence de flambement, (iii) d'une propagation de fissure stable tout au long de l'essai, (iv) d'une propagation rectiligne de la fissure et (v) d'un suivi de l'essai suffisant pour en permettre la bonne analyse grâce à la multi-instrumentation. Des éprouvettes de géométrie et de facteurs d'échelle différents (de 0.75 à 3 par rapport à une configuration de référence) ont été réalisées, afin d'investiguer l'indépendance de G_C à la structure étudiée.

Les méthodes d'analyse des essais ont ensuite été analysées afin de déterminer leur validité d'application. Concernant la mesure de la longueur de fissure en cours d'essai, les différentes stratégies mises en place se sont révélées cohérentes et leur utilisation simultanée a permis d'augmenter la confiance dans les valeurs obtenues. Le choix final s'est porté sur l'utilisation automatique d'une détection de la macro-fissure à partir des images optiques du profil de fissure et des résultats de CIN. Les méthodes d'estimation de G_C ont au contraire exhibé de grandes différences de comportement. Certaines méthodes (interpolation de K_C, VCCT, méthodes des normes) ont ainsi été jugées inadaptées pour une application aux matériaux composites tissés 3D du fait de leurs hypothèses trop restrictives. Le choix s'est porté sur l'utilisation simultanée de la méthode de la souplesse modifiée et de la méthode des aires.

Cette stratégie d'analyse des données expérimentales a été appliquée aux structures CT et SENB, pour les différentes tailles d'éprouvettes et pour quatre RCT, allant d'un tissage très déséquilibré à équilibré. Pour les faibles taux de fibres, les essais exhibent une bonne répétabilité et un profil de fissure aisément détectable. Les résultats d'estimation du taux de restitution d'énergie critique G_C exhibent une importante variation avec la taille de la structure (x1.4 entre la plus petite et la plus grande CT) et le type d'essai (x1.8 entre la SENB et la plus grande CT). Ce constat va à l'encontre du cadre de la MLER, dans lequel G_C est un paramètre physique caractéristique du matériau. Cette conclusion est également soutenue par l'analyse des courbes force/déplacement. Les résultats sur les RCT plus élevés présentent aussi des variations de G_C avec la structure étudiée. Cependant, les valeurs obtenues doivent être prises avec plus de prudence, du fait de la forte dispersion expérimentale, du profil chahuté de la macro-fissure et d'une rupture partielle des torons en compression en arrière d'éprouvette.

L'importance de ces effets d'échelle et de géométrie remet en cause l'utilisation de la MLER pour les matériaux composites tissés 3D. Un modèle adapté doit alors être mis en place, reposant sur l'introduction de longueurs internes au matériau, afin de retranscrire les résultats expérimentaux. La mise en place d'un tel modèle et l'étude des mécanismes physiques de rupture sous-jacents seront présentées dans le Chapitre 2.4.5.

Chapitre 2

Modélisation de la rupture non-linéaire des composites tissés 3D

Résumé

Dans ce chapitre, le cadre théorique employé afin de décrire le comportement à la rupture des matériaux composites tissés 3D sera présenté. Celui-ci intégrera les effets d'échelle et de géométrie mis en évidence lors de la campagne expérimentale de la Section 1.4.6.

Dans la première partie, nous présenterons, à travers l'étude de la littérature disponible sur d'autres matériaux, un cadre adapté pour décrire ces phénomènes : celui des modèles à longueurs internes.

Après avoir présenté plusieurs exemples de modèles et l'impact de ces longueurs sur les effets d'échelle, on s'attachera dans la deuxième partie à mettre en place un modèle à plusieurs longueurs internes. Ce modèle reposera sur la notion de configuration équivalente à la configuration réelle de la fissure à travers une approximation en champs lointain.

Ensuite, la troisième partie s'attachera à préciser les mécanismes physiques associés à longueurs internes intervenant lors de la propagation de fissure au sein des matériaux étudiés à partir d'analyse expérimentale des profils de fissure. Les méthodes d'identification des paramètres du modèle seront présentées.

Finalement, la dernière section étudiera de manière plus approfondie les conséquences de ces résultats sur le comportement à rupture des composites tissés 3D et leur impact pour le dimensionnement de pièces composites tissées 3D.

Sommaire

2.1 **Modèles de rupture dans la littérature et lois de similitudes associées** 71

2.1.1 Exemple d'évolution des grandeurs mécaniques avec la taille de la structure . 72

2.1.2 Lois de similitude en mécanique 73

2.1.3 Critères de rupture classiques et lois de similitude associées 75

2.1.4 Modèles à longueur interne de type Bazant 77

2.1.5 Modèles de zones cohésives 80

2.2 **Mise en place d'un modèle de rupture à longueurs internes** 82

2.2.1 Retour sur l'inégalité de Griffith 82

2.2.2 Interprétations de l'effet d'échelle en présence de longueurs internes 84

2.2.3 Approche en champs lointains et configuration équivalente 86

2.2.4 Loi de similitude de G_C à plusieurs longueurs internes 88

2.3 **Application aux matériaux composites tissés 3D** 90

2.3.1 Validité de l'application des modèles à longueurs internes 90

2.3.2 Mise en place de moyens expérimentaux complémentaires 93

2.3.3 Mise en évidence d'une longueur de dégradation en avant du front de fissure 94

2.3.4 Mise en évidence d'une épaisseur de fissure 95

2.3.5 Méthode d'identification des longueurs c_x et c_y 97

2.3.6 Identification des paramètres de rupture sur composites tissés 3D RCT1 . . . 100

2.4 **Conséquences de la rupture non linéaire sur le comportement** 102

2.4.1 Sur les courbes Force/Déplacement 103

2.4.2 Sur la courbe R 103

2.4.3 Sur les champs mécaniques 104

2.4.4 Relation entre les paramètres de rupture et l'architecture du matériau 106

2.4.5 Résumé des principales conséquences pour le dimensionnement de pièces en composite tissé 3D 108

Introduction

L'étude expérimentale de la propagation de macro-fissures au sein de matériaux composites tissés 3D a mis en évidence l'importance de la géométrie et de la taille de la structure sur le comportement à rupture. En effet, le taux de restitution d'énergie critique G_C estimé exhibe d'importantes variations selon la configuration étudiée. Afin d'assurer la représentativité des modèles, ces effets doivent être correctement compris et pris en compte. Les modèles utilisés, identifiés sur des éprouvettes élémentaires de petites dimensions, doivent prévoir le comportement sur des structures de taille plus importante. Dans le contexte industriel de l'aéronautique, les structures réelles (aubes, carters etc.) sont significativement plus grandes que celles utilisées lors des campagnes d'identification, les pièces réelles étant trop coûteuses et trop complexes pour permettre la réalisation de campagnes expérimentales extensives.

Dans le sens étudié ici, le phénomène de rupture désigne localement une dégradation totale du matériau à la suite de la rupture des torons de fibres, entraînant l'apparition ou la propagation d'une macro-fissure. L'exercice de modélisation amène alors à comparer des grandeurs mécaniques locales (contrainte, déformation) ou globales (force, déplacement, taux de restitution) à un critère faisant intervenir des quantités caractéristiques du matériau.

L'effet d'échelle observé au Chapitre 1.4.6 a une conséquence directe sur les choix de modélisation de la rupture : la Mécanique Linéaire Élastique de la Rupture (MLER), usuellement utilisée, ne peut pas s'appliquer aux composites tissés 3D. En effet, G_C est considéré comme un paramètre matériau caractéristique de la rupture, qui ne doit pas dépendre de la structure étudiée. Les résultats expérimentaux obtenus amènent donc à reconsidérer le cadre de modélisation et les hypothèses sous-jacentes. En particulier, les différentes approches possibles pour décrire la rupture doivent être analysées sous l'angle des effets d'échelle potentiellement produits. Dans ce but, les effets d'échelle découlant des critères de rupture classiques seront étudiés en Section 2.1.5.

Le choix d'un critère de rupture doit également reposer sur l'identification de mécanismes physiques justifiant les hypothèses prises. Cette identification peut être menée par la détermination du scénario de rupture et l'analyse des profils de fissure (Section 2.3.6). Cet exercice de modélisation doit permettre de dégager des quantités physiques clés du matériau, associées à des mécanismes précis et intégrés au sein de modèles permettant, de manière la plus simple, leur mise en œuvre.

2.1 Modèles de rupture dans la littérature et lois de similitudes associées

La mécanique de la rupture peut être étudiée à travers l'influence qu'exerce la taille de la structure considérée sur les résultats. Cette approche reste peu fréquente, mais les conclusions en résultant peuvent être d'importance lorsqu'il s'agit de réaliser le pont entre des essais effectués en laboratoire sur des structures de petite taille et des pièces industrielles dont la taille est guidée par des cas d'applications réelles.

La question a été extensivement étudiée dans le domaine de l'aérodynamisme, mais reste principalement portée, en mécanique, par le génie civil et les travaux de Bažant [Bažant, 1993, Bažant and Planas, 1997]. L'outil principal d'analyse réside dans l'étude des lois de similitude, c'est à dire l'évolution des valeurs à rupture avec la taille des structures.

2.1.1 Exemple d'évolution des grandeurs mécaniques avec la taille de la structure

À des fins pédagogiques, un exemple académique est présenté permettant d'illustrer les variations des quantités mécaniques avec la taille de la structure. Considérons la structure présentée en Fig. 2.1, constituée d'une plaque de largeur W et d'épaisseur e_p possédant en son centre une entaille de demi-longueur a.

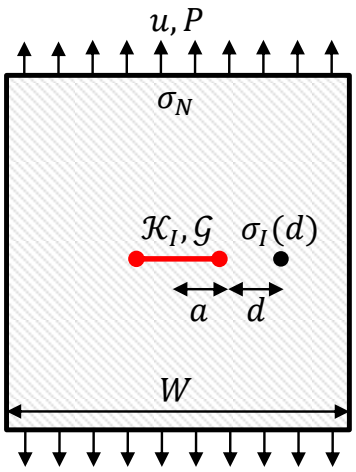


Fig. 2.1 – Exemple de structure et quantités mécaniques associées

Lorsque la taille W varie, on cherche à déterminer les évolutions des quantités mécaniques suivantes :

- La force et le déplacement appliqués, notés respectivement P et u
- La contrainte et la déformation $\underline{\boldsymbol{\sigma}}^d$ et $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^d$ en un point donné de l'éprouvette, situé à une distance d de la pointe de fissure.
- La contrainte nominale σ_N. Celle-ci représente une contrainte équivalente loin de la fissure et s'exprime dans ce cas $\sigma_N = \dfrac{P}{e_p W}$
- Le facteur de concentration de contrainte $\mathcal{K}$ et le taux de restitution associé $\mathcal{G}$

Considérons une homothétie dans le plan de la structure, permettant d'obtenir deux éprouvettes de tailles W_1 et W_2. Les quantités mécaniques correspondantes à chaque configuration seront respectivement notées X_1 et X_2 et le ratio entre les deux tailles est noté $\lambda = W_2/W_1$. Afin de conserver la même géométrie et de pouvoir comparer les résultats, les longueurs a et d subissent également l'homothétie : $a_2 = \lambda a_1$ et $d_2 = \lambda d_1$.

En imposant la même force $P_1 = P_2$ aux deux structures, le but est d'expliciter le rapport X_2/X_1 pour chacune des quantités mécaniques en fonction de λ. Par exemple, en ce qui concerne la contrainte nominale, il est possible d'écrire directement :

$$\sigma_{N2} = \frac{P_2}{e_p W_2} = \frac{1}{\lambda}\frac{P_1}{e_p W_1} = \frac{1}{\lambda}\sigma_{N1} \tag{2.1}$$

La contrainte nominale σ_N diminue donc proportionnellement au ratio de taille λ entre les deux éprouvettes. On suppose que la longueur de l'entaille a est suffisamment faible devant la largeur de la structure W. Dans ce cas, la contrainte en mode I à la distance d σ^d est correctement approximée par celle obtenue dans un milieu infini. Elle s'exprime :

$$\sigma_2^d = \frac{\sigma_{N2} d_2}{\sqrt{a_2^2 + d_2^2}} = \frac{\sigma_{N1}}{\lambda}\frac{\lambda d_1}{\lambda\sqrt{a_1^2 + d_1^2}} = \frac{1}{\lambda}\sigma_1^d \tag{2.2}$$

La contrainte en d évolue de la même manière que la contrainte nominale. La variation de déformation est donnée par $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 = C\sigma_2 = 1/\lambda C\underline{\boldsymbol{\sigma}}_1 = 1/\lambda\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_1$. Pour le facteur d'intensité de contrainte, l'approximation au cas du milieu infini donne :

$$\mathcal{K}_{I2} = \sigma_{N1}\sqrt{\pi a_2} = \frac{1}{\lambda}\sigma_{N1}\sqrt{\pi\lambda a_1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\mathcal{K}_{I1} \tag{2.3}$$

Et finalement pour le taux de restitution d'énergie, la relation entre $\mathcal{K}$ et $\mathcal{G}$ (voir Section 1.1.1) permet d'obtenir :

$$\mathcal{G}_2 = \frac{\mathcal{K}_{I2}^2}{E'} = \frac{1}{\lambda}\frac{\mathcal{K}_{I1}^2}{E'} = \frac{1}{\lambda}\mathcal{G}_1 \tag{2.4}$$

E' est un module équivalent dans la direction de sollicitation, dont l'expression a été donnée en Eq. 1.7.

Cet exemple met en évidence que les quantités mécaniques varient de manière non-coordonnée avec la taille de l'éprouvette : à force égale, les contraintes, déformations et le taux de restitution d'énergie $\mathcal{G}$ diminuent avec le ratio des tailles $1/\lambda$, tandis que le facteur d'intensité en contrainte évolue en $1/\sqrt{\lambda}$.

Évidemment, les évolutions observées dépendent du choix qui a été fait de charger les deux structures avec le même niveau de force. Il est également possible de comparer les grandeurs mécaniques pour un même niveau de contrainte, de taux de restitution d'énergie etc. Les variations des paramètres mécaniques avec W se seraient alors avérées différentes.

L'étude de ces grandeurs s'avérant nécessaire lors du dimensionnement de pièces, il devient important de savoir prévoir leur évolution dans un cas plus général. Ceci peut être fait à partir de la recherche des lois de similitude.

2.1.2 Lois de similitude en mécanique

Cette section a pour objectif de généraliser et de formaliser les évolutions observées dans l'exemple précédent. Elle offre un cadre d'analyse des lois de similitude et permettra de mettre en évidence plusieurs grandes familles de comportement, telles que proposées par [Bažant, 1993].

Les lois de similitudes sont les règles donnant l'évolution des grandeurs mécaniques avec la taille de la structure. Considérons une éprouvette de géométrie donnée, dont la taille caractéristique W est considérée comme taille de référence W^{ref}. Les grandeurs mécaniques X possèdent pour la taille de référence des valeurs notées X^{ref}. Pour une autre taille de structure W, on cherche la loi de similitude sur la grandeur X sous la forme d'une fonction f^X prenant comme argument le facteur d'échelle entre les deux tailles $\lambda = W/W_{ref}$:

$$\frac{X(W)}{X^{ref}} = f^X(\lambda) \tag{2.5}$$

Le passage de l'éprouvette de référence à l'éprouvette de taille W est réalisé par transformation homothétique. Cette homothétie peut être réalisée selon les trois dimensions (augmentation de l'épaisseur avec les autres dimensions) ou uniquement dans le plan avec épaisseur constante (homothétie dans le plan). C'est ce dernier cas, utilisé dans la campagne expérimentale, qui sera étudié bien que les mécanismes présentés puissent être étendus au cas tridimensionnel.

Deux grands types de comportement peuvent être observés, selon que les équations mécaniques fassent intervenir ou non des longueurs internes caractéristiques du matériau (des exemples seront donnés par la suite).

Loi de similitude en absence de longueur interne

De nombreux modèles n'introduisent pas de paramètres de longueur interne directement dans les équations : MLER, plasticité, endommagement etc. Dans ce cas, les longueurs du problème deviennent définies de manière relative. La loi de similitude devient indépendante du choix de la taille de référence W^{ref}. En inversant le choix de la

taille de référence dans l'équation 2.5, on en déduit que :

$$\frac{X^{ref}}{X(W)} = f^X\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{2.6}$$

$$\frac{1}{f^X(\lambda)} = f^X\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{2.7}$$

On admet ici que les solutions de ce problème sont de la forme (se référer à [Bažant, 1993]) :

$$f^X(\lambda) = \lambda^p \tag{2.8}$$

Cette forme en puissance est valable quelle que soit la grandeur X, la structure, le matériau ou le modèle étudié (tant que ce dernier n'introduit pas de longueurs internes). Observons que ce résultat est cohérent avec l'exemple précédent. La valeur de p dépend par contre des conditions de chargement considérées et de la grandeur mécanique : des paramètres p différents peuvent être obtenus pour chacune des grandeurs X étudiées.

Il est cependant possible de se ramener à un seul paramètre en exhibant les relations existantes entre les puissances des différentes lois de similitude. Celles-ci peuvent être obtenues à partir des équations reliant les grandeurs entre elles. Remarquons tout d'abord que pour une intégration sur un contour Γ, la longueur d'intégration évolue proportionnellement à λ soit :

$$\int_\Gamma X(W)dx = \int_{\Gamma^{ref}} X(W)\lambda dx^{ref} = \lambda f^X(\lambda)\int_{\Gamma^{ref}} X^{ref}dx^{ref} \tag{2.9}$$

De la même manière, lors de l'utilisation d'une dérivée :

$$\frac{\partial}{\partial x}X(W) = \frac{\partial}{\lambda\partial x^{ref}}X(W) = \frac{f^X(\lambda)}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x^{ref}}X^{ref} \tag{2.10}$$

À partir de ces observations, il est possible de relier l'évolution des grandeurs entre elles à partir de quelques équations constitutives de la mécanique :

- $P = \int_\Gamma \underline{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}}dx \Rightarrow f^P(\lambda) = \lambda f^{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(\lambda)$
- $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla_S u \Rightarrow f^{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\lambda) = f^u(\lambda)/\lambda$
- $\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\underline{\boldsymbol{K}}}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \Rightarrow f^{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\lambda) = f^{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(\lambda)$, la rigidité locale $\underline{\underline{\boldsymbol{K}}}$ ne dépendant pas de la taille W
- $\mathcal{G} \sim \mathcal{J} \sim \int \frac{1}{2}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}\underline{\boldsymbol{\sigma}}dx$ (voir l'Éq. 1.20 présentée au premier chapitre) donc $f^{\mathcal{G}}(\lambda) = \lambda f^{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\lambda) f^{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(\lambda) = \lambda f^{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\lambda)^2$

Il est possible d'en déduire que les grandeurs mécaniques évoluent suivant les lois de similitude suivantes, faisant apparaître un unique exposant m :

$$\frac{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{ref}} = \frac{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}{\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{ref}} = \frac{\sigma_N}{\sigma_N^{ref}} = \lambda^m \tag{2.11}$$

$$\frac{u}{u^{ref}} = \frac{P}{P^{ref}} = \lambda^{m+1} \tag{2.12}$$

$$\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}^{ref}} = \lambda^{2m+1} \tag{2.13}$$

Ces résultats coïncident avec l'exemple de la Section 2.1.1, pour lequel $m = -1$. Il est important de noter que ces relations sont valables quelle que soit la structure, le matériau et le modèle considérés, même si le comportement mécanique devient non-linéaire, tant qu'aucun paramètre de longueur n'intervient dans les équations. Des exemples explicitant la valeur de m seront donnés en Section 2.1.3, lors de l'étude des lois de similitude introduites par la rupture.

Loi de similitude en présence de longueur interne

D'un point de vue expérimental, la notion de longueur interne traduit l'influence que peut avoir sur la réponse mécanique l'architecture d'un matériau, qui possède une taille caractéristique. Ce phénomène se traduit par l'introduction dans les modèles de paramètres matériaux assimilables à des longueurs c_f.

Il en résulte que les équations dépendent de la taille du problème et que la loi de similitude n'est plus indépendante de la taille de référence choisie. La même fonction f^X ne peut plus être utilisée pour décrire la loi de similitude quelle que soit la taille W^{ref} choisie.

$$\frac{X(W)}{X^{ref}} = f^X(\lambda) \text{ mais } \frac{X^{ref}}{X(W)} \neq f^X\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{2.14}$$

Il faudrait en théorie faire apparaître cette dépendance à la référence choisie, en notant par exemple $f^{X,W^{ref}}$. Les lois en puissance obtenues précédemment ne s'appliquent plus. Une autre possibilité pour faire apparaître la dépendance à la taille est de prendre comme argument de f^X non plus λ mais le ratio avec une taille caractéristique W^0 devant être définie ou directement avec la longueur caractéristique c_f.

$$X(W) = f^X\left(\frac{W}{W^0}\right) \text{ ou } f^X\left(\frac{W}{c_f}\right) \tag{2.15}$$

Il n'y a, dans ce cas, pas de formule générale pouvant être obtenue et celle-ci doit être dérivée au cas par cas en fonction du matériau, modèle, géométrie, chargement etc. Cependant dans le cas de la rupture en présence de longueurs internes, une loi représentative d'un grand nombre de situations peut être obtenue et sera présentée en Section 2.1.4.

2.1.3 Critères de rupture classiques et lois de similitude associées

Comme précisé précédemment, la loi de similitude (qui se résume à la valeur de m en absence de longueur interne) dépend de l'état de chargement pour lequel sont comparées les éprouvettes homothétiques. Nous avions par exemple fait le choix de charger les structures à un même niveau de force en Section 2.1.1. Utilisées ainsi, les lois de similitude offrent un éclairage intéressant sur l'évolution relative des grandeurs avec la taille. Toutefois, elles ne caractérisent pas le matériau ou le modèle utilisé et leur usage reste limité.

Au contraire, ces lois fournissent un outil particulièrement utile lors de l'étude de la rupture. En effet, plutôt que de considérer l'évolution des grandeurs mécaniques pour un niveau de chargement donné, on cherche à déterminer leur évolution au moment de la fissuration de l'éprouvette. En observant l'évolution d'une seule des grandeurs à rupture, notée X_C, sur une structure donnée, il devient possible de déterminer la valeur de toutes les grandeurs sur une autre structure à partir du comportement sur une taille de référence W^{ref}.

Cette approche peut être considérée sous l'aspect expérimental et de modélisation. L'adéquation des comportements entre l'expérience et les modèles est nécessaire pour assurer la représentativité des calculs. D'un point de vue expérimental, cela revient à identifier la loi de similitude sur les résultats expérimentaux de rupture d'éprouvettes homothétiques : cette loi est bien une propriété intrinsèque du matériau, permettant de

caractériser son comportement à rupture. D'un point de vue de la modélisation, le choix d'un critère de rupture entraîne intrinsèquement un choix d'une loi de similitude. Cet aspect doit être intégré dans le choix de modélisation : les évolutions des grandeurs à rupture avec W peuvent fortement différer en fonction du critère choisi. Il convient alors de vérifier que le choix effectué ne va pas à l'encontre des résultats expérimentaux. Dans le cas contraire, la représentativité du modèle serait perdue et l'identification du modèle sur une structure donnée ne permettrait en aucun cas de prévoir la rupture pour une taille et *a fortiori* une géométrie différente.

Classiquement, la rupture des matériaux est décrite par deux approches :

— la MLER, reposant sur une valeur critique G_C ou K_C

— des critères de contrainte ou de déformation à rupture, obtenus dans le cadre de calculs en Résistance Des Matériaux (RDM), de modèles élasto-plastiques ou d'endommagement

Aucune de ces approches n'introduit de paramètres internes assimilables à des longueurs dans les équations. Les lois de similitude en découlant rentrent donc dans le cadre des lois en puissance et se résument à l'identification de la valeur m.

Règles de similitude en MLER

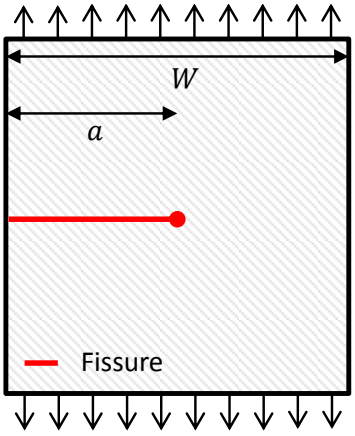


Fig. 2.2 – Fissure en MLER

Dans le cadre de la MLER, la rupture intervient quand $\mathcal{G}(x, u_C, W) = G_C$, cette valeur critique étant indépendante de la structure considérée (Fig. 2.2). On déduit donc des Éq. 2.13 que $m = -1/2$, soit :

$$\frac{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_C}{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_C^{ref}} = \frac{\underline{\boldsymbol{\sigma}}_C}{\underline{\boldsymbol{\sigma}}_C^{ref}} = \frac{\sigma_{NC}}{\sigma_{NC}^{ref}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \tag{2.16}$$

$$\frac{u_C}{u_C^{ref}} = \frac{P_C}{P_C^{ref}} = \sqrt{\lambda} \tag{2.17}$$

$$\frac{G_C}{G_C^{ref}} = 1 \tag{2.18}$$

La valeur critique G_C, considérée comme un paramètre matériau, peut être déterminée sur n'importe quelle configuration. La validité de ce cadre de modélisation pour un matériau donné peut être évaluée directement en traçant les courbes Force/$\sqrt{W}$ en fonction du Déplacement/$\sqrt{W}$: pour des essais homothétiques, ces courbes doivent se superposer.

Il est intéressant de remarquer que les contraintes à rupture dans l'éprouvette diminuent lorsque la taille de l'éprouvette augmente. Cette propriété a été utilisée en Section 1.2.3 afin d'éviter la ruine en compression à l'arrière des éprouvettes CT.

Règles de similitude des modèles avec critère en contrainte

Les calculs de RDM, plasticité et endommagement reposent sur la détermination des états locaux de contrainte ou de déformation. Pour ce type de modèle, le critère de rupture peut être réécrit sous la forme :

$$\phi(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \phi_C \tag{2.19}$$

$$\text{en général } \phi(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) = \sigma_C \tag{2.20}$$

$$\text{ou } \phi(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \varepsilon_C \tag{2.21}$$

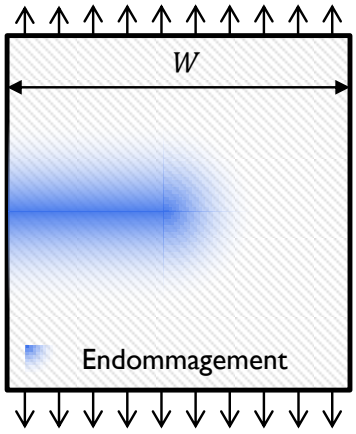


Fig. 2.3 – Fissure pour un modèle d'endommagement en contrainte

La fonction ϕ peut être non-linéaire, notamment si le comportement ne reste pas élastique. Cependant pour des éprouvettes homothétiques, les champs de déformation et de contrainte amenant à la rupture restent égaux. Le paramètre m est donc nul et les Éq.2.12 à 2.13 deviennent :

$$\frac{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_C}{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_C^{ref}} = \frac{\underline{\boldsymbol{\sigma}}_C}{\underline{\boldsymbol{\sigma}}_C^{ref}} = \frac{\sigma_{NC}}{\sigma_{NC}^{ref}} = 1 \tag{2.22}$$

$$\frac{u_C}{u_C^{ref}} = \frac{P_C}{P_C^{ref}} = \lambda \tag{2.23}$$

$$\frac{G_C}{G_C^{ref}} = \lambda \tag{2.24}$$

Ce comportement peut être confirmé expérimentalement en vérifiant que les valeurs de déformation à rupture obtenues par CIN ou la contrainte nominale σ_N restent constantes. On peut également vérifier que les courbes Force/W en fonction du Déplacement/W se superposent. Dans ce cadre, G_C n'est pas un paramètre matériau. On constate l'apparition d'un taux de restitution d'énergie critique apparent à rupture $\mathcal{G}(W) = G_C(W)$. $G_C(W)$ évolue alors proportionnellement à la taille de la structure.

2.1.4 Modèles à longueur interne de type Bazant

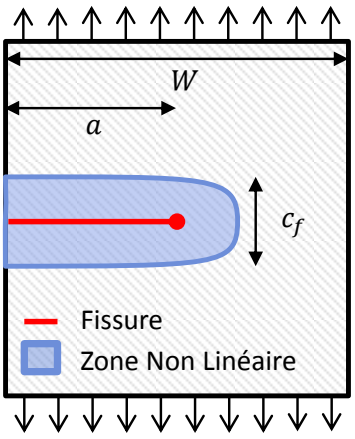


Fig. 2.4 – Présence d'une longueur interne au sein du matériau

Comme précisé précédemment, les lois de similitude générales présentées en Éq. 2.12 à 2.13 ne sont valides que lorsqu'aucun paramètre de longueur n'intervient dans les équations. En pratique, cette longueur peut intervenir par le biais d'une zone de non-linéarités de taille caractéristique c_f. Comme illustré en Fig. 2.4, cette taille est reliée à l'architecture du matériau : taille des grains dans les métaux, tissage dans les tissés 3D, agrégats ou armature dans les bétons etc.

En MLER, on fait l'hypothèse que les non-linéarités restent confinées dans une zone infinitésimale en pointe de fissure. En plasticité ou en endommagement, la zone de non-linéarité varie homothétiquement avec la taille de la structure. Dans les cas de matériaux à longueurs internes, la taille de cette zone non-linéaire n'est pas négligeable et reste relativement indépendante de la taille de la structure. Contrairement au cas précédent, l'homothétie des champs mécaniques à rupture avec la taille de l'éprouvette est brisée et des redistributions plus ou moins importantes sont observées selon la taille de la structure.

En théorie, la plupart des matériaux introduisent des longueurs internes. Cependant leur influence n'est détectable qu'à une échelle proche de celle de leur architecture. Une analyse asymptotique du comportement peut être réalisée et semble adaptée à la plupart des matériaux :

— Pour des structures de taille très grande ($c_f \ll W$), l'influence de c_f devient faible et l'hypothèse de confinement des non-linéarités en pointe de fissure redevient valide. Le comportement se rapproche alors de celui de la MLER

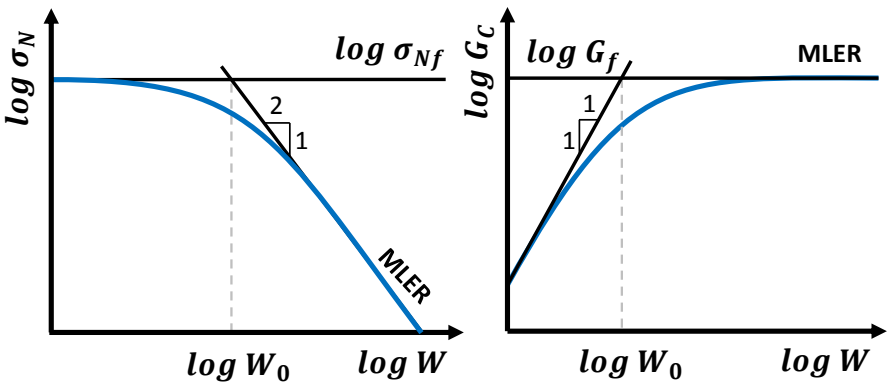


Fig. 2.5 – Évolution de la contrainte nominale et du taux de restitution d'énergie avec la taille W pour des éprouvettes homothétiques

— Pour des structures de taille très petite ($c_f > W$), l'architecture a une forte influence sur la réponse mécanique et redistribue les contraintes. Le comportement tend vers un problème de rupture homogène, guidé par un critère en contrainte ou en déformation

Ces deux comportements asymptotiques sont représentés par les lignes noires en Fig. 2.5 sur l'évolution de σ_{NC} et G_C. Ces deux comportements asymptotiques peuvent être conciliés par une loi de similitude générale écrite sur G_C ou σ_{NC}, valide dans un grand nombre de cas :

$$\begin{cases} G_C(x,W) = \dfrac{G_f}{1+\dfrac{W_0(x,c_f)}{W}} \\ \sigma_{NC}(x,W) = \dfrac{\sigma_{Nf}}{\sqrt{1+\dfrac{W}{W_0(x,c_f)}}} \end{cases} \tag{2.25}$$

Pour l'obtention de cette forme générale, le lecteur peut se référer à Bazant [Bažant and Planas, 1997], une démonstration sera également proposée en Section 2.2.1. Ces fonctions sont présentées en bleu en Fig. 2.5, en diagramme log/log. La rupture est caractérisée par 2 paramètres (contre un seul dans la théorie de Griffith) :

— c_f la longueur interne du matériau caractérisant la taille des phénomènes non-linéaires et faisant apparaître pour une structure donnée la taille de transition W_0. Cette taille de transition dépend de c_f mais également de la géométrie considérée et en particulier de la position adimensionnée de la fissure $x = a/W$

— G_f le taux de restitution d'énergie critique asymptotique pour des structures dont la taille des gradients est grande devant c_f. Cette valeur correspond à celle observée lorsque le cadre de la MLER s'applique

— si l'on s'intéresse à la contrainte nominale, le paramètre devient la valeur asymptotique σ_{Nf}, égale à la contrainte à rupture sur plaque lisse.

Les trois paramètres c_f, G_f et σ_{Nf} ne sont pas indépendants. Il existe une relation entre σ_{Nf} et les deux autres paramètres et celle-ci peut être déterminée en fonction du modèle considéré. Deux modèles, exhibant une évolution de G_C cohérente avec l'Éq. 2.25 et offrant des éclairages différents sur le phénomène de longueur interne, sont présentés ci-dessous.

Interprétation géométrique d'une bande de fissuration

Bazant *et al.* [Bažant and Planas, 1997] ont proposé une interprétation géométrique de l'effet d'échelle appliqué aux bétons afin de décrire la présence d'une bande de micro-fissures plutôt que d'une unique fissure. La rupture de ces matériaux peut en effet être décrite par l'apparition d'un réseau de micro-fissures parallèles qui amène à la désagrégation du matériau sur une épaisseur c_f. Ce phénomène entraîne l'apparition d'une longueur interne perpendiculairement à la direction de propagation des fissures, la largeur c_f de cette bande de fissures étant guidée par la structure du matériau (Fig. 2.6).

L'évolution des paramètres à rupture peut alors être déterminée à travers des considérations énergétiques et géométriques. Un schéma du mécanisme de propagation est proposé en Fig. 2.6 : la zone verte hachurée correspondant à la zone déchargée élastiquement avant propagation et la zone bleue au matériau rompu au sein de la bande de fissures. La ligne rouge représente la position simplifiée de la macro-fissure.

Lors d'une propagation de la macro-fissure d'une distance Δa depuis la pointe de fissure, le front de la zone relâchée se déplace et l'énergie élastique auparavant contenue dans la zone verte est restituée (schéma de droite). En première approche, il est possible d'approximer la densité d'énergie élastique contenue dans cette zone par une valeur moyenne $\sigma_N^2/2E'$, avec E' le module équivalent (déjà définit en Éq. 1.7). En notant k la pente des bords de la zone déchargée, la surface de l'aire verte créée est égale à $c_f\Delta a + 2ka_0\Delta a$. Si toute l'énergie dissipée l'est par la création de fissure, le bilan énergétique s'écrit :

$$(c_f + 2ka_0)e_p\Delta a\frac{\sigma_N^2}{2E'} = G_f e_p \Delta a \tag{2.26}$$

G_f est le taux de restitution d'énergie critique attribué à la création de la bande de fissuration, considéré comme une propriété matériau. En conservant uniquement la contrainte nominale à rupture du côté gauche de l'équation, on obtient la loi de similitude de σ_{NC} :

$$\sigma_{NC}(W) = \frac{\sqrt{\dfrac{2E'G_f}{c_f}}}{\sqrt{1+\dfrac{2ka_0}{c_f}}} = \frac{\sigma_{Nf}}{\sqrt{1+\dfrac{2kx_0W}{c_f}}} \tag{2.27}$$

Cette relation s'identifie à l'Éq. 2.25 pour $W_0(x, c_f) = c_f/(2kx_0)$ et $\sigma_{Nf} = \sqrt{2E'G_f/c_f}$ (on a bien une relation entre G_f et σ_{Nf}). σ_{Nf} ne dépend bien que du matériau considéré mais W_0 fait intervenir une dépendance à la structure considérée à travers x_0 et k. Ces équations peuvent être réécrites pour obtenir la loi d'évolution de G_C.

$$G_C = \frac{G_f}{1+\dfrac{c_f}{2kxW}} \tag{2.28}$$

Process zone et Average Stress Criterion

La présence d'une longueur interne peut également se manifester par une zone de pré-dégradation (endommagement, plasticité, micro-fissures) en avant de la pointe de la macro-fissure. Dans cette zone, le comportement quitte le domaine élastique. Cette perte de linéarité est en pratique physiquement nécessaire afin d'éviter les contraintes infinies prévues par la MLER en pointe d'une fissure singulière.

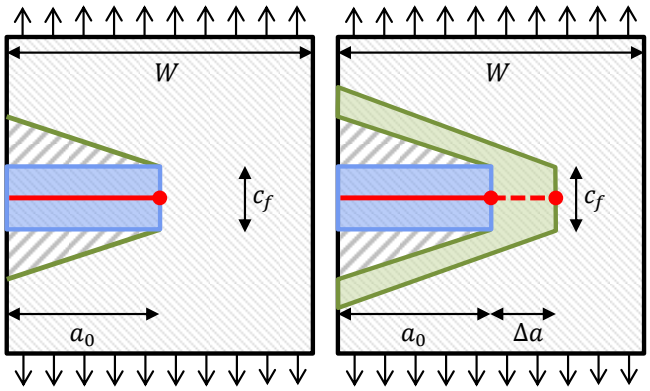


Fig. 2.6 – Présence et propagation d'une bande de fissure

Une approche consiste donc à considérer valide les champs mécaniques prévus par la MLER tant que le point considéré est suffisamment loin de la pointe de fissure. En deçà d'une distance c_f de la pointe de fissure (taille de cette *process zone*), le comportement quitte le domaine élastique. En première hypothèse, cette longueur de process zone est supposée indépendante de la géométrie et du chargement appliqué. Cette approche a donné lieu à des théories pour lesquelles la rupture intervient lorsqu'une valeur critique est atteinte :

— Average Stress Criterion (ASC) : contrainte moyenne entre la pointe de fissure et la distance c_f : $< \sigma(x) >_{c_f} = \sigma_f$

— Boundary Stress Criterion (ASC) : contrainte à la distance c_f de la pointe de fissure $\sigma(c_f) = \sigma_f$, utilisée dans la méthode Point Stress

$< . >$ dénote l'opérateur de moyenne géométrique sur la longueur c_f. Les effets d'échelle sur G_C produit par ces mécanismes ont été étudiés par Dyskin et $al.$ [Dyskin, 1997] pour différentes configurations. Par exemple, dans le cas d'une fissure de longueur $2a$ dans un milieu infini chargé uniformément avec une contrainte nominale σ_N, la distribution de contrainte de traction dans le plan de la fissure est donnée par :

$$\sigma(x) = \frac{\sigma_N x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \tag{2.29}$$

En utilisant l'ASC, le critère de rupture s'écrit alors :

$$< \sigma_C(x) >_{c_f} = \sigma_{NC} \sqrt{1 + 2a/c_f} = \sigma_f \tag{2.30}$$

On retrouve la loi de similitude en :

$$\sigma_{NC} = \frac{\sigma_f}{\sqrt{1 + \frac{2a}{c_f}}} = \frac{\sigma_f}{\sqrt{1 + \frac{2xW}{c_f}}} \tag{2.31}$$

Les lois de similitudes peuvent également être déterminées pour d'autres géométries ainsi que pour le ASC. Pour tous les cas considérés, les développements au premier ordre de ces lois sont cohérents avec la formule générale proposée par Bazant en Éq. 2.25 (ici $W_0 = c_f/2x$).

2.1.5 Modèles de zones cohésives

Les exemples précédents font intervenir directement un paramètre de longueur comme paramètre du modèle. Cependant, certaines approches introduisent des longueurs in-

ternes de manière indirecte. C'est le cas du Modèle de Zones Cohésives (MZC), fréquemment utilisé pour décrire la rupture.

Les modèles de cette famille décrivent une zone d'élaboration de la fissure, le long de laquelle le processus de rupture est entamé, mais où seulement une partie de la contrainte continue à être transmise. Ce scénario est représenté en Fig. 2.7 [Ortega et al., 2017] : la zone $c-d$ correspond à la zone de dissipation intrinsèque observée notamment pour les métaux ; la zone $b-c$, située en arrière de la pointe de fissure, correspond à la zone de diminution progressive de la contrainte cohésive et la zone $a-b$ correspond à la fissure complètement installée et ne transmettant plus d'effort. Les MZC sont caractérisés par une relation entre le saut de déplacement ω de part et d'autre des lèvres de la fissure et la contrainte cohésive σ. Plusieurs formulations peuvent être choisies pour cette relation (Fig. 2.7), parmi lesquelles les formulations constantes, linéaires ou multi-linéaires, exponentielles décroissantes etc.

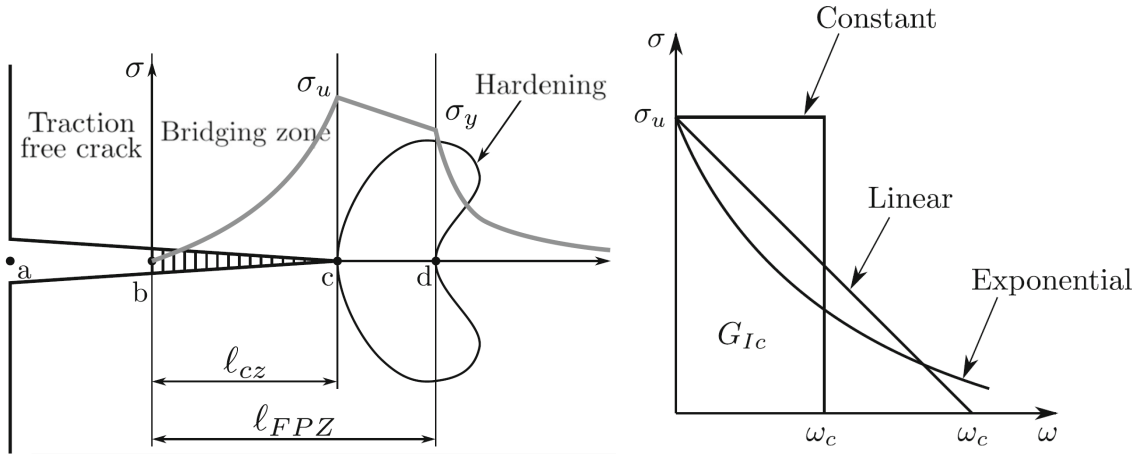


Fig. 2.7 – Mise en place d'un modèle de zone cohésive [Ortega et al., 2017]

Ces modèles exhibent généralement des zones d'élaboration dont la taille caractéristique l_{FPZ} peut être importante. Hillerborg [Hillerborg et al., 1976] a ainsi démonté la présence d'une longueur matériau apparaissant à partir des paramètres introduits dans le modèle :

$$c_f = \frac{G_C E'}{\sigma_C^2} \tag{2.32}$$

avec E' le module effectif. c_f joue le rôle de longueur interne et contrôle la taille de zone d'élaboration l_{FPZ} en fonction du type de loi choisie, mais n'est pas directement égale à la longueur de *process zone* . Certains auteurs ont reproduit l'effet d'échelle à l'aide de zones cohésives : Morel et Dourado [Morel and Dourado, 2011] à l'aide d'un modèle bilinéaire, tandis qu'Ortega et *al* [Ortega et al., 2017] ont utilisé des formulations linéaires ou constantes. Les lois de similitude obtenues sont présentées en Fig. 2.8. Cependant dans le cas de l'utilisation de MZC, il est difficile d'exprimer *a priori* les lois de similitude directement à partir des paramètres matériau. Celles-ci semblent généralement obtenues par des campagnes numériques sur des éprouvettes de différentes tailles.

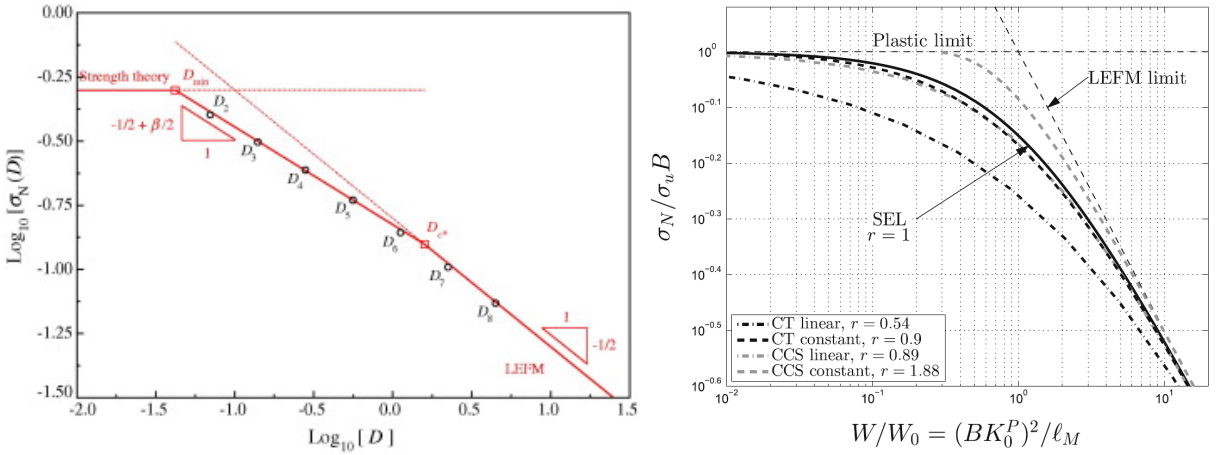


Fig. 2.8 – Effet d'échelle sur σ_N obtenu à l'aide de MZC par [Morel and Dourado, 2011] et [Ortega et al., 2017]

Synthèse

Les lois de similitude sont un outil riche pour l'analyse des mécanismes de rupture et exhibent d'importantes différences de comportement selon que les modèles introduisent ou non des longueurs internes au sein des équations. Les variations de G_C observées en Section 1.4.6 semblent dénoter la présence de mécanismes de longueur interne influençant le processus de rupture pour les matériaux composites tissés 3D, qui seront confirmés en Section 2.3.6. Ce type de phénomène a été généralisé par Bazant et offre un cadre d'analyse appliqué et validé sur un grand nombre de matériaux et de structures homothétiques. Ce type de loi de similitude décrit notamment le comportement de nombreux modèles (parmi lesquels les modèles ASC, MZC, ou les modèles de longueur équivalente non évoqués ici [Elices and Planas, 1993, Planas et al., 1993]). Cette approche est également supportée par de nombreuses données expérimentales sur une importante variété de matériaux, bien que le phénomène soit rarement observé dans les composites stratifiés à l'échelle des structures ou des éprouvettes de laboratoire habituellement étudiées.

Le cadre général proposé par Bazant doit maintenant être précisé afin de pouvoir être appliqué au cas des composites tissés 3D. La démarche cherchera donc à expliciter la dépendance de W_0 (Éq. 2.25) à la structure étudiée et à la ou les longueurs internes. Cette démarche reposera sur un nombre d'hypothèses le plus faible possible et ne présupposera pas, dans un premier temps, du comportement en pointe fissure.

2.2 Mise en place d'un modèle de rupture à longueurs internes

2.2.1 Retour sur l'inégalité de Griffith

La démarche appliquée au Chapitre 1.4.6 repose sur l'estimation du taux de restitution d'énergie $\mathcal{G}$ d'après la définition qui en est faite en Éq. 1.1. Celui-ci s'interprète comme l'énergie mécanique relâchée par la structure lors d'une avancée du front de la macro-fissure. La campagne expérimentale s'est attachée à estimer la valeur critique

de cette quantité amenant à la rupture. Dans le cadre de la MLER, il est attendu que cette valeur, notée G_C, soit identique quelles que soient les conditions dans lesquelles la fissure se propage et varie uniquement avec le matériau. Cependant, bien que cette hypothèse soit valide pour un grand nombre d'applications, rien ne présuppose que cette valeur soit constante. On parle alors de G_C variable ou apparent ou de résistance à l'avancement de la fissure $\mathcal{R}$ pour décrire la valeur critique de $\mathcal{G}$ observée sur une configuration donnée. Les fortes variations observées expérimentalement amènent à adopter ce cadre d'analyse et à revenir sur l'inégalité de Griffith caractérisant la propagation :

$$\mathcal{G}(P, x, W) \leq \mathcal{R}(x, W) \tag{2.33}$$

Comme précédemment, $\mathcal{G}$ dépend de la structure étudiée, notamment à travers la position normalisée de la fissure x, la taille de l'éprouvette W, ainsi que des niveaux de chargements à travers la force P (ou le déplacement u, les deux étant dépendants). La résistance à l'avancement de la macro-fissure peut dépendre elle aussi *a priori* de la configuration étudiée à travers x et W. Cependant, comme il s'agit d'une valeur à rupture, elle ne fait pas intervenir u et P. Comme précédemment, ces dépendances sur $\mathcal{G}$ peuvent être explicitées à l'aide de la décomposition :

$$\mathcal{G}(P, x, W) = \frac{P^2}{e_p^2 W E'} g(x) \tag{2.34}$$

Comme évoqué en Section 1.1.1, la fonction g est une fonction adimensionnée de la géométrie, mais indépendante de l'intensité du chargement, des propriétés matériau ou de la taille de la structure. Elle s'interprète comme la variation de souplesse de la structure pour une propagation de la macro-fissure autour de la position normalisée x. Des valeurs de ces fonctions sont fournies dans les Handbooks et les normes ASTM [Tada et al., 2000, ASTM, 1997, ASTM, 2015].

Lorsque les mécanismes de rupture introduisent des longueurs internes, les phénomènes dissipatifs ne sont plus réduits à une simple surface mais interviennent dans un voisinage autour de la pointe de la macro-fissure (Fig. 2.4). Le critère de l'Éq. 2.33 pourrait alors être réécrit à partir d'une définition plus générale du taux de restitution d'énergie prenant en compte la progression de tous les phénomènes dissipatifs. Ce taux rapporterait l'énergie dissipée à toute la zone non-linéaire créée (caractérisée par la longueur c_f) plutôt qu'à la simple surface de la macro-fissure. La définition d'un tel taux serait difficile à donner dans le cas général et son expression nécessiterait une connaissance des mécanismes précis de rupture. Cependant, dans l'hypothèse qu'un tel taux $\tilde{\mathcal{G}}$ puisse être défini, il possède les mêmes arguments que $\mathcal{G}$, plus la longueur interne c_f. Celle-ci est introduite dans la fonction g, alors notée $\tilde{g}$ ($\tilde{g}(x, 0) = g(x)$). Afin de conserver le caractère adimensionné de g, cette dépendance est introduite à travers le paramètre adimensionné $\overline{c_f} = c_f/W$:

$$\tilde{\mathcal{G}}(P, x, W, c_f) = \frac{P^2}{e_p^2 W E'} \tilde{g}\left(x, \overline{c_f}\right) \tag{2.35}$$

La définition de $\tilde{\mathcal{G}}$ coïncide avec $\mathcal{G}$ dans le cas $c_f = 0$ où toutes les non-linéarités sont réduites à la pointe de fissure : la rupture se ramène effectivement à la création d'une surface de fissure ($\tilde{\mathcal{G}}(P, x, W, 0) = \mathcal{G}(P, x, W)$). En réalisant un développement au premier ordre de $\tilde{g}$, on obtient :

$$\tilde{\mathcal{G}}(P, x, W, 0 + c_f) = \frac{P^2}{e_p^2 W E'} \left(\tilde{g}(x, 0) + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \overline{c_f}}(x, 0) \overline{c_f} \right) \tag{2.36}$$

$$= \frac{P^2}{e_p^2 W E'} g(x) \left(1 + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \overline{c_f}}(x, 0) \frac{\overline{c_f}}{g(x)} \right) = \mathcal{G}(P, x, W) \left(1 + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \overline{c_f}}(x, 0) \frac{\overline{c_f}}{g(x)} \right) \tag{2.37}$$

Le critère de rupture peut alors s'écrire non-plus à travers une égalité sur $\mathcal{G}$ mais sur $\tilde{\mathcal{G}}$ et une résistance généralisée $\tilde{\mathcal{R}}$ correspondante. $\tilde{\mathcal{G}}$ caractérisant la création de toute la macro-fissure, cette quantité est supposée constante quelle que soit la configuration étudiée. Cette résistance devient alors un paramètre matériau, noté ici G_f :

$$\tilde{\mathcal{G}} < \tilde{\mathcal{R}} = G_f \tag{2.38}$$

Comme le terme en parenthèse dans l'Éq. 2.37 ne dépend pas du chargement, il peut être transféré de l'autre côté de l'inégalité. Le critère de rupture devient alors :

$$\mathcal{G}(P, x, W) < \frac{G_f}{1 + \frac{\partial_{\overline{c_f}} \tilde{g}}{g(x)} \frac{c_f}{W}} = \mathcal{R}(x, W) \text{ ou } G_C(x, W) \tag{2.39}$$

Cette analyse fournit une démonstration de la loi de similitude des modèles avec longueur interne de type Bazant présentée en Éq. 2.25. On a explicité l'inégalité de Griffith (Éq. 2.33) dans un cadre général, cette démarche faisant apparaître naturellement une courbe de résistance variable ou G_C apparent lorsque des longueurs internes interviennent dans les équations.

2.2.2 Interprétations de l'effet d'échelle en présence de longueurs internes

Les exemples présentés dans les sections précédentes permettent d'éclairer sous différents angles les mécanismes à l'œuvre dans l'apparition des effets d'échelle. Quelques réflexions supplémentaires peuvent être proposées afin de mieux appréhender la nature de ce phénomène.

Taux de restitution apparent et longueur caractéristique

L'obtention de l'inégalité 2.39 fait apparaître une des origines de l'effet d'échelle : l'analyse de G_C ramène la dissipation d'énergie à une surface de macro-fissure fictive. En réalité, cette dissipation a lieu dans un voisinage de la pointe de macro-fissure, caractérisé par la longueur c_f. Lors de l'estimation de G_C, cette zone non-linéaire est projetée sur le plan fictif de la macro-fissure, amenant à une quantification imparfaite de l'énergie nécessaire à la propagation.

En réalité, il existe une interaction entre les mécanismes de dégradation, intervenant sur une distance non négligeable, et les gradients mécaniques en pointe de fissure. En effet, si la zone non-linéaire reste suffisamment confinée en pointe de fissure, les champs mécaniques restent constants sur toute la zone de dégradation. Au contraire si la longueur c_f sur laquelle interviennent les mécanismes est grande, les champs mécaniques varient significativement dans cette zone. Une double interaction se crée entre les champs mécaniques et le profil de macro-fissure :

— Toute la zone de dégradation ne voit pas le même chargement local. Cette variation, et donc son effet, est d'autant plus forte que les gradients sont importants sur la distance c_f et donc que l'éprouvette est petite. En fonction de la structure considérée, la forme des gradients mécaniques peut modifier le profil de la macro-fissure.

— La présence de cette zone de non-linéarité entraîne elle-même une redistribution des contraintes au voisinage de la pointe de fissure. L'existence d'une longueur caractéristique de macro-fissure c_f peut modifier la forme des gradients mécaniques.

La longueur caractéristique c_f ne décrit pas formellement la géométrie de la zone dissipative mais la caractérise, comme dans le cas des zones cohésives présentées en Section 2.1.5. Dans cet exemple, $c_f = G_C E'/\sigma_C^2$ est une longueur interne caractéristique du modèle, mais n'est pas strictement égale à la longueur d'élaboration l_{FPZ}. Cette dernière varie légèrement en fonction de c_f et de la structure considérée, du fait de cette interaction entre champs mécaniques et mécanismes de mise en place de la fissure.

Influence de la variation des champs mécaniques sur la zone de rupture

Cette interaction est complexe à appréhender dans le cas général. Cependant dans un but didactique, faisons l'hypothèse que pour la structure considérée, les champs mécaniques $\underline{\varepsilon}, \underline{\sigma}$ ne sont pas modifiés par rapport à un problème sans longueur interne. Cette approximation reste valide tant que $c_f \ll W$ et que la forme des champs mécaniques est majoritairement pilotée par la géométrie. La forme de ces champs mécaniques (contrainte, déformation ou densité volumique d'énergie élastique) est donc la même quelle que soit la taille de la structure. Leur intensité est représentée en niveaux de gris sur la Fig. 2.9.

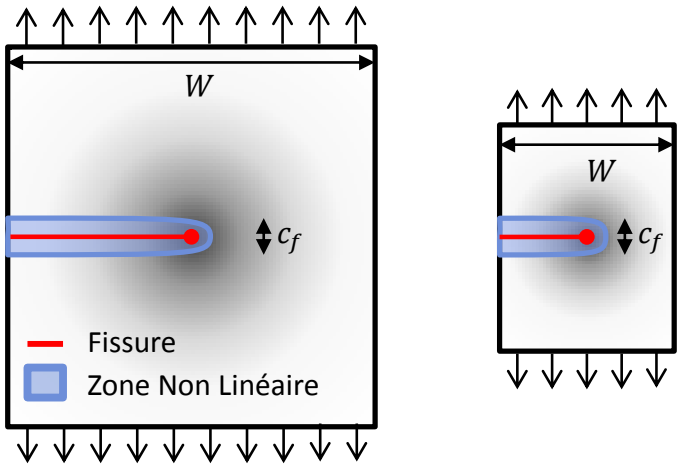


Fig. 2.9 – Variation des champs mécaniques sur la zone de rupture et effet d'échelle

La rupture revient à dissiper l'énergie contenue dans la zone de non-linéarités constituant la macro-fissure.

L'énergie nouvellement dissipée par la rupture est égale à l'intégrale de la densité d'énergie élastique e_{elast} contenue dans le volume bleu nouvellement créé. Pour des structures suffisamment grandes, e_{elast} varie peu sur la distance c_f. Toute la zone a alors une densité d'énergie égale à la valeur de rupture $e_{elast} = e_{rupt}$ et on obtient un taux de restitution d'énergie macroscopique :

$$G_C = \frac{e_{elast} V}{S} \approx e_{rupt} c_f = G_f \tag{2.40}$$

avec V le volume de la zone dissipative et S la surface correspondante de la macro-fissure.

Pour des structures plus petites, la densité d'énergie e_{elast} devient inférieure à e_{rupt} en s'éloignant de la pointe de fissure et l'énergie dissipée s'en trouve réduite.

$$G_C = \frac{1}{S} \int_V e_{elast} d\Omega < e_{rupt} c_f = G_f \tag{2.41}$$

On peut tirer de cette approximation quelques évolutions générales déjà mises en évidence :

— $G_C(W) \to G_f = e_{rupt} c_f$ constant quand $W \to \infty$

— $G_C(W) \searrow$ quand $W \searrow$ car une partie du volume rompu se retrouve peu chargé

— l'effet d'échelle sera d'autant plus important que les gradients mécaniques induits par la fissure seront importants. Ainsi des géométries quasi-homogènes exhiberont un faible effet d'échelle alors que l'effet sera plus facilement observable pour des gradients importants.

2.2.3 Approche en champs lointains et configuration équivalente

La configuration réelle de la fissure (distribution de la contrainte et de l'endommagement en pointe de fissure) est difficile à obtenir par des mesures directes. D'un point de vue expérimental, cette région coïncide avec les zones de forte décorrélation des méthodes de CIN. L'analyse ne peut donc pas reposer sur un accès précis aux champs de déformation. D'un point de vue théorique, l'hétérogénéité du matériau à cette échelle compromet la bonne description des mécanismes à l'échelle macroscopique et nécessiterait la mise en place de techniques d'homogénéisation adaptées, la séparabilité des échelles pouvant être remise en question.

Plutôt que de reposer sur la description fine des champs en pointe de fissure, la modélisation de la rupture s'appuie alors sur l'influence qu'opère ces mécanismes sur la réponse globale de l'éprouvette. On adopte alors une approche en champs lointains : cette approche permet de faire des hypothèses fortes sur le profil de fissure, tant que les résultats obtenus permettent de décrire correctement l'effet sur les champs mécaniques loin de la fissure, pour tous les cas de chargement. La pertinence des hypothèses effectuées est alors évaluée par comparaison avec les champs de déplacement obtenus par CIN sur les parties saines de l'éprouvette et avec la réponse macroscopique (force, déplacement, énergie à rupture). Ces différentes grandeurs globales peuvent être extraites des données expérimentales avec une plus grande fiabilité que les grandeurs locales au voisinage de la pointe de fissure.

Le modèle général pour décrire la rupture en présence de longueurs internes repose sur le choix d'une configuration équivalente facilement manipulable. Cette configuration équivalente doit *a priori* respecter plusieurs critères :

— Respecter l'égalité en champs lointains avec la configuration réelle dans tous les cas d'utilisation

— Faire intervenir de manière directe les longueurs internes influant sur les mécanismes de rupture

— Avoir un nombre limité de paramètres matériau et un protocole d'identification expérimental facilement applicable

— Être la plus simple possible afin d'offrir une facilité de calcul et d'analyse permettant d'appréhender les évolutions sur la configuration réelle

Dans le but de satisfaire ce dernier point, il est utile de conserver un comportement linéaire élastique. Les calculs nécessitent ainsi uniquement la connaissance des coefficients élastiques du matériau, généralement déjà connus, et le chargement extérieur. Cela permet d'avoir une relation linéaire entre le chargement et la valeur des champs mécaniques facilitant les calculs et l'analyse.

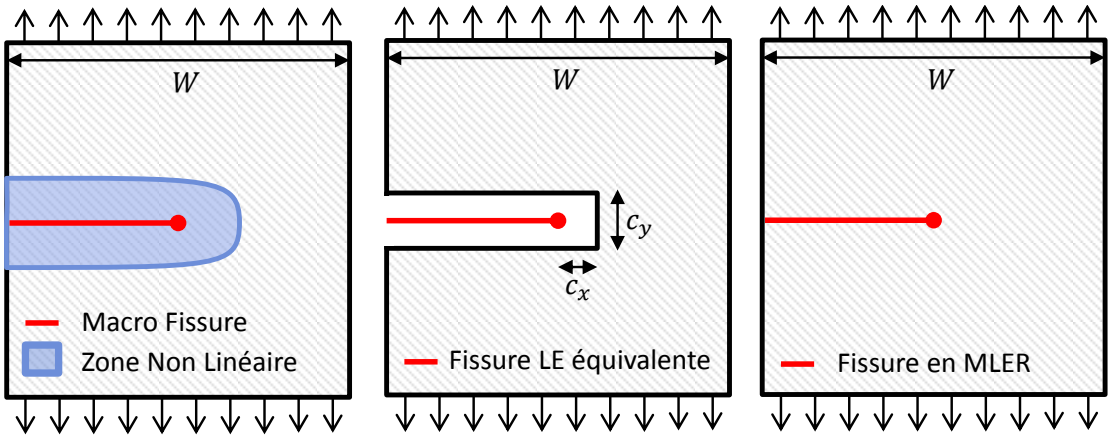
Afin de satisfaire le deuxième point, les longueurs internes sont introduites par une description géométrique du profil de la zone dégradée. Une forme simple jugée représentative doit être choisie, ces dimensions étant paramétrées par les longueurs internes correspondantes. Dans le cas général, le profil devrait pouvoir être décrit à l'aide de trois paramètres uniquement, intervenant selon les trois axes liés à la fissure :

— dans la direction de propagation (ici l'axe x) : représente une dégradation en avant du front de la macro-fissure sur une longueur c_x

— perpendiculairement à la surface de fissure (ici l'axe y) : représente une épaisseur de fissure ou tortuosité de la surface sur une longueur c_y

— dans l'axe du front de fissure (ici l'axe z) : représente une courbure du front de fissure ou une tortuosité dans la profondeur pilotée par une longueur c_z

Les effets de l'épaisseur de l'éprouvette n'ayant pas été étudiés dans le cadre de ce travail, aucune longueur interne c_z ne sera considérée par la suite. Cependant la démarche et les résultats présentés s'étendent facilement au cas où trois longueurs internes sont introduites (voire plus si l'on souhaite distinguer plusieurs mécanismes agissant dans la même direction). Les longueurs c_x et c_y sont donc utilisées dans la suite de ce travail et l'existence de mécanismes de rupture leur étant associés sera étudiée en Section 2.3.6.



(a) Configuration réelle **(b)** Configuration linéaire élastique équivalente **(c)** Fissure en MLER

Fig. 2.10 – Configurations réelle, élastique linéaire équivalente et MLER

Les critères de modélisation en champs lointains ayant été exposés, une description simplifiée de la rupture peut maintenant être proposée : le comportement non-linéaire complexe réel (Fig. 2.10a) y est approximé par une configuration linéaire élastique équivalente (Fig. 2.10b). La zone de dégradation due à la macro-fissure y est décrite géométriquement par un décalage c_x du front et une épaisseur c_y.

Cette approche, bien que très simplifiée, satisfait de manière correcte l'hypothèse d'égalité en champs lointains pour les géométries disponibles. Le champ de déplacement U_y issu de la CIN est présenté en Fig. 2.11 et comparé à celui extrait d'un calcul linéaire élastique effectué sur la configuration équivalente. Cette égalité en champs lointains doit être valable dans tous les cas de chargement, avec des valeurs de c_x et c_y fixées (paramètres matériaux liés à l'architecture). Dans les cas étudiés, les résultats obtenus à l'aide de cette configuration simplifiée sont jugés satisfaisants. Notons que la forme du profil de fissure pourrait faire l'objet d'améliorations si l'équivalence en champs lointains se trouvait invalidée sur d'autres géométries.

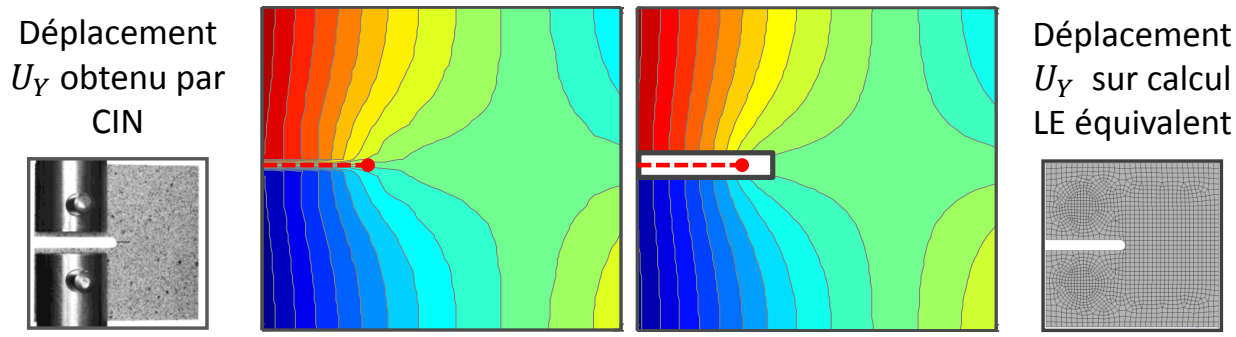


Fig. 2.11 – Comparaison des champs de déplacement normal au plan de fissure U_y obtenus expérimentalement par CIN et par calcul sur la configuration LE équivalente (même échelle)

Reprécisons que les longueurs caractéristiques c_x et c_y ne sont pas directement définies par la mesure de la zone non-linéaire (par exemple l'étendue maximale ou moyenne de cette zone), mesure par ailleurs complexe d'un point de vue expérimental. c_x et c_y sont liées à la taille des mécanismes mais sont définies à travers leur influence sur la réponse globale.

2.2.4 Loi de similitude de G_C à plusieurs longueurs internes

La mise en place de cette configuration linéaire élastique équivalente permet de déterminer la loi de similitude sur le taux de restitution d'énergie critique apparent G_C. Dans le cas de la configuration réelle (config a) et linéaire élastique équivalente (b) présentées en Fig. 2.10, la présence des longueurs internes modifie la réponse globale. Les taux de restitution (notés respectivement $\mathcal{G}^a$ et $\mathcal{G}^b$) font apparaître c_x et c_y dans leur décomposition (Éq. 2.35). Comme précédemment, les longueurs sont introduites via la fonction $\tilde{g}$ grâce aux paramètres adimensionnés $\overline{c_x} = c_x/W$ et $\overline{c_y} = c_y/W$ afin de conserver l'indépendance de g à la taille du problème. Le taux de restitution d'énergie s'exprime alors :

$$\mathcal{G}^a = \mathcal{G}^b = \frac{P^2}{e_p^2 W E'} \tilde{g}\left(x, \overline{c_x}, \overline{c_y}\right) \tag{2.42}$$

La fonction de 3 paramètres $\tilde{g}(x, \overline{c_x}, \overline{c_y})$ peut se réduire à 2 paramètres, $\overline{c_x}$ agissant comme un décalage de la position de la pointe de fissure de x à $x + \overline{c_x}$.

$$\mathcal{G}^a = \mathcal{G}^b = \frac{P^2}{e_p^2 W E'} \tilde{g}\left(x + \overline{c_x}, \overline{c_y}\right) \tag{2.43}$$

La configuration c (Fig. 2.10), cohérente avec la MLER, correspond à l'estimation du taux de restitution d'énergie tel qu'effectuée au Chapitre 1.4.6. Dans ce cas, seule la surface de la macro-fissure est considérée : le taux de restitution d'énergie critique de cette configuration est obtenu en considérant $c_x = c_y = 0$:

$$\mathcal{G}^c = \frac{P^2}{e_p^2 W E'} \tilde{g}\left(x, 0\right) \tag{2.44}$$

A rupture, $\mathcal{G}^a = \mathcal{G}^b$ atteint une valeur critique G_f, correspondant au $\tilde{\mathcal{G}}$ de la Section 2.2.1 et considérée comme une grandeur matériau. La configuration c se ramène quant à elle à la valeur $\mathcal{G}^c = G_C$, mesurée dans le Chapitre 1.4.6. Du fait de l'égalité de la force à

rupture P_C dans les Éq. 2.43 et 2.44, il est possible d'écrire une relation sur ces taux :

$$\frac{G_f}{\tilde{g}\left(x+\overline{c_x},\overline{c_y}\right)} = \frac{G_C}{\tilde{g}(x,0)} \tag{2.45}$$

Soit :

$$G_C = \frac{G_f \tilde{g}(x,0)}{\tilde{g}\left(x+\overline{c_x},\overline{c_y}\right)} \tag{2.46}$$

Si $\overline{c_x}$ et $\overline{c_y}$ restent petits, $\tilde{g}(x+\overline{c_x},\overline{c_y})$ peut être approximé par ses dérivées au premier ordre (notées $\partial_x g$ par rapport à la première variable et $\partial_y g$ par rapport à la deuxième). On obtient ainsi la loi de similitude :

$$\begin{cases} G_C = \dfrac{G_f}{1+\dfrac{\partial_x\tilde{g}(x,0)c_x}{\tilde{g}(x,0)W}+\dfrac{\partial_y\tilde{g}(x,0)c_y}{\tilde{g}(x,0)W}} \\ \sigma_{NC} = \dfrac{\sigma_{Nf}}{\sqrt{1+\dfrac{\tilde{g}(x,0)W}{\partial_x\tilde{g}(x,0)c_x+\partial_y\tilde{g}(x,0)c_y}}} \end{cases} \tag{2.47}$$

Celle-ci est compatible avec le cadre général proposé par Bazant et permet d'expliciter W_0 pour toutes les structures dans un cadre général à deux longueurs internes :

$$G_C = \frac{G_f}{1+\dfrac{W_0(x,c_x,c_y)}{W}} \Rightarrow W_0(x,c_x,c_y) = \frac{\partial_x\tilde{g}(x,0)c_x+\partial_y\tilde{g}(x,0)c_y}{\tilde{g}(x,0)} \tag{2.48}$$

Les évolutions asymptotiques de G_C et σ_{NC} restent également conservées : G_C devient constant quand la taille de la structure devient suffisamment grande devant W_0 et proportionnel à W pour des éprouvettes petites devant W_0.

En présence de deux longueurs internes, plusieurs comportements peuvent être observés en fonction de la géométrie considérée :

— si $\partial_x\tilde{g}(x,0) \ll \partial_y\tilde{g}(x,0)$ (ou inversement), l'influence d'une des longueurs devient négligeable devant l'autre, quelle que soit la taille de la structure. Cela correspond à des géométries pour lesquelles le gradient des champs mécaniques est plus important suivant une direction que l'autre. C'est par exemple le cas d'éprouvettes entaillées en traction suivant la direction y, pour les lesquelles $\partial_x\tilde{g}$ est plus important que $\partial_y\tilde{g}$.

— si $\partial_x\tilde{g}(x,0) \approx \partial_y\tilde{g}(x,0)$, l'influence des deux longueurs internes est comparable et le comportement se ramène à la présence d'une unique longueur $\partial_x\tilde{g}(x,0)c_x + \partial_y\tilde{g}(x,0)c_y$ donnant la bonne évolution pour toutes les structures validant cette condition. Ce cas de figure est rencontré pour des structures dont les gradients mécaniques sont équivalents selon les 2 directions (champs radiaux) pour la majeure partie des positions de la fissure x. Les éprouvettes CT et SENB, utilisées lors de la campagne expérimentale, se situent plutôt dans cette catégorie.

Synthèse

Dans cette section, l'étude de l'influence de longueurs internes liées à l'architecture sur les mécanismes de rupture a amené à la proposition d'un cadre général permettant

d'obtenir les lois de similitude. Ce cadre introduit une ou plusieurs longueurs internes caractérisant la taille de la zone non-linéaire en pointe de fissure et reliées aux caractéristiques géométriques de l'architecture. Ces longueurs ne sont ici pas définies directement à partir de paramètres de taille de l'architecture ou par la mesure directe de la zone de non-linéarité, mais à travers leur influence sur le comportement mécanique global et l'énergie dissipée par la propagation de la macro-fissure. Les conditions critiques entraînant cette propagation sont complètement décrites à l'aide de :

— paramètres matériaux indépendants de la structure G_f, c_x et c_y, identifiables sur les essais (le processus d'identification sera présenté en Section 2.3.6)

— paramètres d'essais, W et fonction $\tilde{g}$, indépendants du matériau et obtenus par calcul linéaire élastique

Cette démarche a été présentée en présence de deux longueurs internes, ce nombre pouvant être adapté afin de décrire au mieux les mécanismes de rupture rencontrés expérimentalement. La configuration Linéaire Élastique Équivalente (LEE) utilisée doit alors être adaptée à la réalité du matériau et l'hypothèse d'équivalence en champs lointains vérifiée. L'identification des mécanismes et la vérification de la validité de ce cadre d'analyse seront présentées dans la section suivante.

2.3 Application aux matériaux composites tissés 3D

2.3.1 Validité de l'application des modèles à longueurs internes

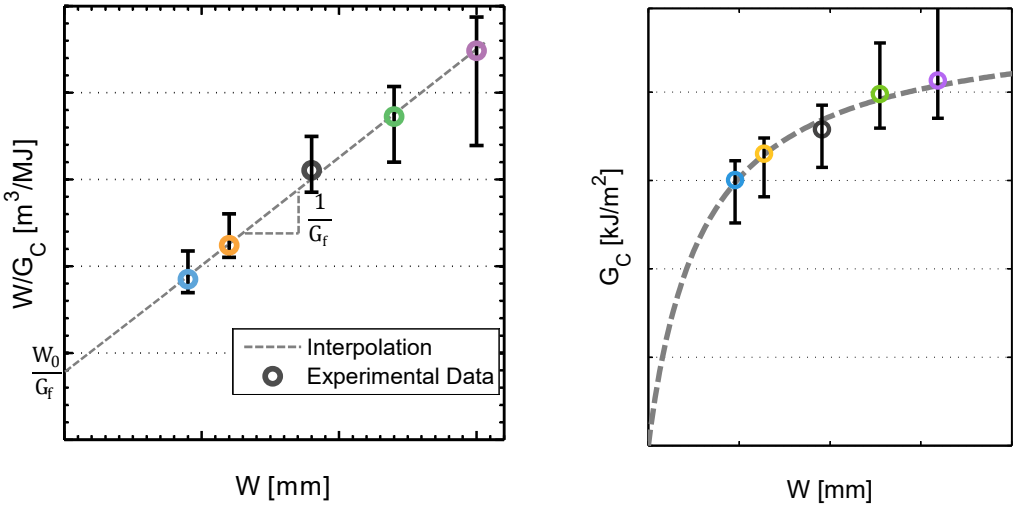
Avant d'appliquer la démarche présentée précédemment aux composites tissés 3D il convient de vérifier que le cadre des modèles à longueurs internes est adapté à ces matériaux. Une validation peut être effectuée à travers l'identification de la loi générale proposée par Bazant pour des éprouvettes homothétiques (Éq. 2.25). Les paramètres G_f et la taille de transition W_0 peuvent être identifiés par linéarisation à partir de la réécriture de l'Éq. 2.25 :

$$\frac{W}{G_C} = \frac{1}{G_f} W + \frac{W_0}{G_f} \tag{2.49}$$

La Fig. 2.12 présente le résultat de cette linéarisation sur les données expérimentales. L'évolution générale de G_C est cohérente avec la valeur moyenne identifiée sur éprouvettes CT homothétiques et la dispersion observée (obtenue à partir des plus petites et plus grandes valeurs identifiées à propagation). Elles permettent de déterminer pour les essais CT sur composite tissé 3D RCT1 désiquilibré une première estimation de $G_f$et $W_0 = 27$ mm (valeur spécifique à la géométrie CT) et confirment la validité du cadre introduit précédemment.

Observation de zones d'écart à la linéarité par CIN

L'étude de zones non-linéaires de taille importante en pointe de fissure peut être effectuée grâce à l'analyse des données issues de la CIN. Du fait de la progression discrète de la fissure, des cartes d'écart à la linéarité peuvent être obtenues entre deux points a et b, durant la période de recharge amenant à une nouvelle propagation (voir Fig. 2.13).



(a) Interpolation linéaire sur données expérimentales CT (Éq. 2.49)

(b) Évolution de G_C sur éprouvettes CT (Éq. 2.25)

Fig. 2.12 – Identification des paramètres de rupture sur éprouvettes CT

À cette fin, le champ de déplacement en fin de recharge est comparé à la prévision obtenue par évolution linéaire du champ en début de recharge. En effet, si le comportement reste linéaire élastique, la forme des champs de déplacement reste inchangée lors des périodes de charge et la valeur du déplacement en tout point évolue proportionnellement à la force appliquée. Une prévision du champ de déplacement u_b^{LE} est alors réalisée en fin de recharge à partir des données obtenues par CIN en début de recharge u_a^{CIN} dans le cas où le comportement resterait élastique entre les deux points :

$$u_b^{LE} = u_a^{CIN} \frac{P_b}{P_a} \tag{2.50}$$

La carte d'erreur à la linéarité est obtenue par comparaison de cette prévision au champ de déplacement effectivement observé à l'instant b. Afin de pouvoir comparer les cartes obtenues, l'erreur est adimensionnée à partir de la valeur maximale du déplacement observée sur la fenêtre considérée.

$$erreur_{ab}(x) = \left| \frac{u_b^{CIN}(x) - u_b^{LE}(x)}{\max\limits_x _u_b^{CIN}(x)} \right| \tag{2.51}$$

Cette démarche a été appliquée aux données expérimentales. Certains de ces résultats sont présentés pour deux éprouvettes CT de facteur d'échelle 1.5 et 2.5. Des instants de comparaison avant et après la première propagation ont été choisis : ils correspondent à la mise en place des non-linéarités en pointe de fissure et à la propagation d'une fissure déjà établie. Ces points sont représentés par les zones rouges en Fig. 2.13.

Les cartes d'erreur obtenues par cette approche sont présentées en Fig. 2.14 pour le déplacement u_x (direction de propagation de la fissure). Elles mettent en évidence des écarts à la linéarité, principalement situés en pointe de fissure. Cette zone semble être de forme oblongue, particulièrement pour la carte obtenue sur l'éprouvette de facteur d'échelle 1.5 avant la première propagation. Ces résultats sont néanmoins soumis à une forte variabilité et les résultats sont faiblement répétables selon les configurations étudiées.

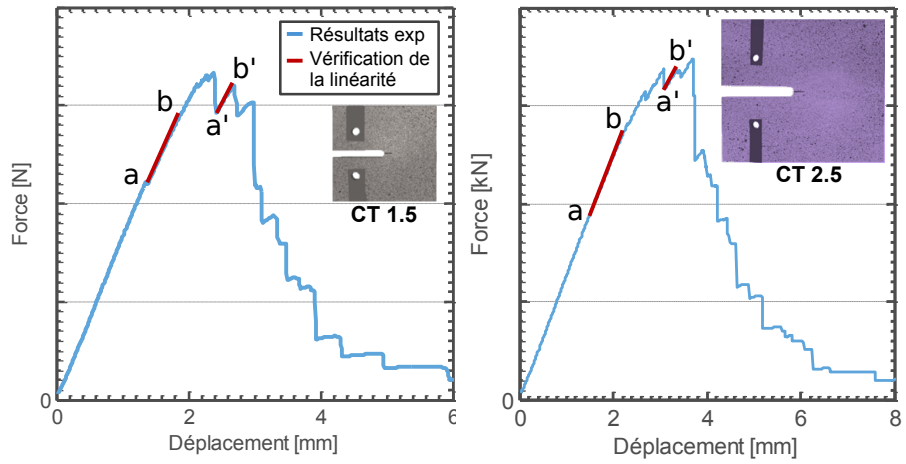


Fig. 2.13 – Zones de mesure de l'écart à la linéarité sur éprouvettes CT T1.5 et T2.5

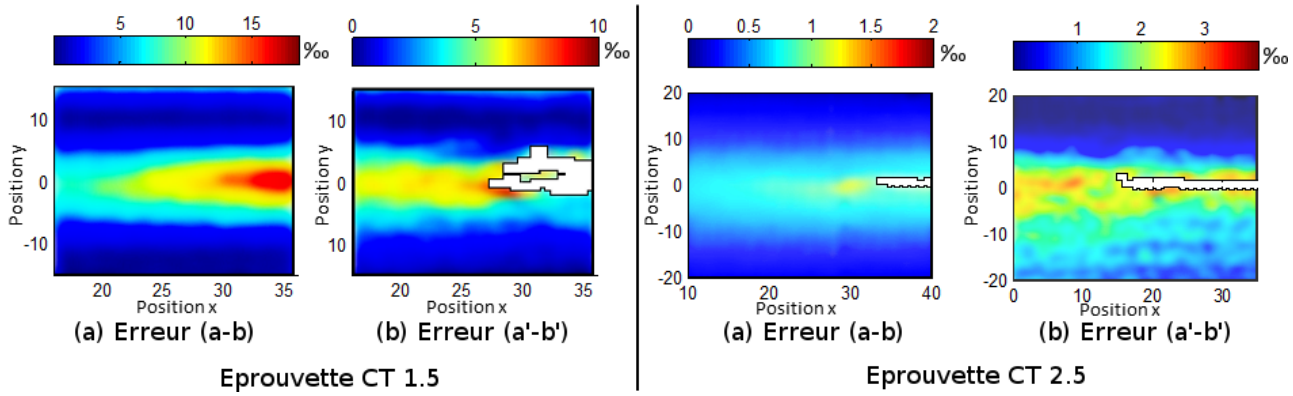


Fig. 2.14 – Écart à la linéarité sur u_x lors des phases de rechargement

Bien que cette étude mette en évidence la présence de non-linéarités en pointe de fissure, son analyse plus précise se heurte à de nombreuses difficultés :

— La détermination de ces cartes d'erreur repose sur les valeurs des champs de déplacement obtenus pas CIN aux alentours de la fissure. Or les données obtenues dans cette zone peuvent pâtir de difficultés de corrélation et doivent être manipulées avec prudence. Ces difficultés nous ont amenés à adopter une approche en champs lointains dans la section précédente.

— La mise en place de non-linéarités peut entraîner de fortes redistributions des contraintes entre les points a et b, les champs de déplacement différant alors trop pour fournir des cartes d'erreurs exploitables. Les intervalles $[ab]$ ont donc été choisis suffisamment réduits pour éviter ce phénomène. Cependant l'analyse manque de robustesse et les cartes présentées ici correspondent à celles offrant les meilleurs résultats.

— Du fait de ces redistributions, l'application au déplacement u_y n'offre pas de résultats facilement exploitables, la forme des champs variant plus fortement que pour u_x lors du développement de la zone non-linéaire. Bien que les valeurs de u_y soient plus importantes et donc possiblement moins sensibles aux imprécisions de mesures, son analyse ne permet pas de déterminer une taille de zone non-linéaire

En l'état, les conclusions doivent donc se limiter à la mise en évidence de non-linéarités en pointe de fissure et éventuellement à remarquer (avec beaucoup de précautions) que la zone de non-linéarité semble plus développée dans la direction x (direction de propagation) que la direction y (direction normale à la fissure). L'identification de mécanismes

de longueurs internes directement à partir de ces cartes de déplacement semble compromise et des analyses expérimentales complémentaires ont été mises en place afin d'obtenir des informations plus précises sur les profils de fissure.

2.3.2 Mise en place de moyens expérimentaux complémentaires

Imagerie macroscopique du profil de fissure

Afin d'étudier plus en détail la géométrie du profil de fissure, des images de ce profil après essai ont été obtenues sur des éprouvettes de facteur d'échelle 1, 1.5 et 2. Ces éprouvettes ont été rechargées sur la machine de traction et l'essai a été poursuivi jusqu'à rupture complète des échantillons en deux parties séparées. Le profil de fissure ainsi révélé a été l'objet d'une série de photographies macroscopiques. Un papier millimètre a été placé sur chaque face de l'éprouvette (plan (xOy)) afin d'offrir une méthode de calibration des longueurs.

Les images obtenues tout le long du profil ont ensuite été assemblées afin d'obtenir une vue d'ensemble. L'assemblage a été réalisé à l'aide d'un algorithme d'assemblage de panoramas, reposant sur la détermination de points communs aux images et permettant de corriger la distorsion de la lentille.

Imagerie par microscopie électronique à balayage du profil de fissure

Les caméras macroscopiques possédant une résolution limitée, des détails plus précis de la rupture des torons ont également été obtenus à l'aide d'un Microscope Électronique à Balayage (MEB). Les profils de fissure révélés par l'ouverture complète des éprouvettes ont subi un dépôt de carbone à leur surface afin d'augmenter les niveaux de contraste.

Ces images permettent d'obtenir une précision pouvant descendre à l'échelle des fibres individuelles et d'étudier les mécanismes de rupture au sein même des torons.

Réalisation d'un essai de tomographie *in situ*

Afin d'examiner le développement de la macro-fissure au cours du processus de rupture, un essai a été mis en place au sein d'un micro-tomographe à rayon X, avec l'aide de Romain Bui et Joseph Henry de Safran Aircraft Engines.

Afin de pouvoir effectuer l'essai, un montage adapté a été développé pour les éprouvettes CT afin de satisfaire aux contraintes inhérentes au tomographe. Le montage repose sur une machine de traction précédemment utilisée pour la réalisation d'essais de traction sur éprouvettes lisses

Du fait des dimensions réduites de la chambre cylindrique accueillant l'essai, seule une éprouvette de facteur d'échelle 0.75 a été testée. Afin d'assurer la qualité de l'imagerie électronique, le montage transmettant l'effort ne peut pas être constitué d'acier dans les zones proches de la mesure, la densité trop élevée de ce matériau perturbant les résultats. De plus, pour ne pas bloquer le passage des rayons-X vers la zone d'intérêt, l'axe doit également occulter au minimum la zone centrale de l'éprouvette et ne pas posséder d'arêtes marquées ou de surfaces planes pouvant induire des réflexions parasites.

Un premier dimensionnement, réalisé à l'aide d'un alliage d'aluminium courant a

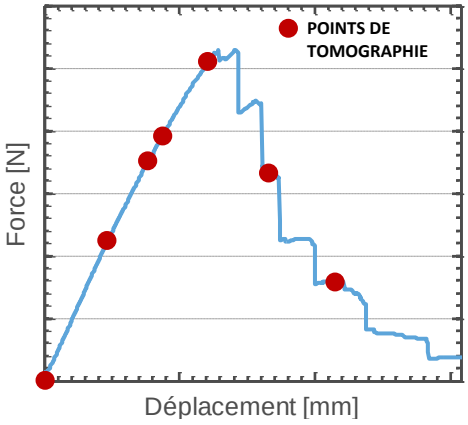


Fig. 2.15 – Points de tomographie in-situ réalisés sur éprouvette CT T0.75

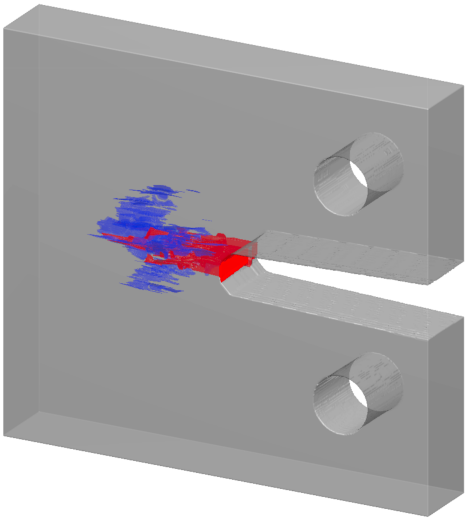


Fig. 2.16 – Vue volumique de la macro-fissure (rouge) et des fissurations mésoscopiques (bleu) obtenues par tomographie sur éprouvette CT T0.75

mis en évidence des concentrations de contraintes trop importantes dans le pion et en bord de trou au niveau d'effort devant être transmis, entraînant la plastification du montage d'essai. La décision a dont été prise de réaliser le montage avec un alliage aluminium 7449 de qualité aéronautique, possédant une limite d'élasticité supérieure à la contrainte maximale de 600 MPa rencontrée dans le montage .

La réalisation d'une tomographie sur la fenêtre voulue avec une résolution de 30μm par voxel nécessitant une acquisition de plus d'une heure, 7 acquisitions à différents niveaux de déplacement imposé ont été planifiées, étalées sur deux jours, comprenant une image de référence avant l'essai et des acquisitions durant la phase de charge initiale, au pic d'effort et au cours de la propagation. Cependant, du fait des difficultés d'accès à l'intérieur du tomographe et de l'absence d'affichage graphique permettant de suivre l'évolution de la force et du déplacement en temps réel, l'essai a subi un problème de glissement du montage , non identifié en début d'essai. Les premières tomographies ont donc été réalisées avant la première propagation. Après interruption de l'essai et resserrage des mors, un point a été obtenu au pic d'effort et deux durant la propagation de la fissure. Les positions relevées à la main des tomographies obtenues sont représentées en Fig. 2.15 et superposées à la courbe Force/Déplacement de l'autre éprouvette CT T0.75 testée en condition normale (la courbe Force/Déplacement de l'essai sous tomographe n'ayant pas pu être récupérée suite à un problème technique).

2.3.3 Mise en évidence d'une longueur de dégradation en avant du front de fissure

L'analyse des reconstitutions obtenues par tomographies-X permet d'observer la mise en place volumique des mécanismes de fissuration et de préciser le scénario de rupture. Les résultats de tomographie-Xe ont été traités à l'aide d'un filtre non-linéaire, de type Block-Matching and 3D filtering (BM3D) [Luo et al., 2015], permettant de filtrer le bruit et d'uniformiser les niveaux de luminosité de l'image. Une segmentation est ensuite réalisée dans chaque plan (xOy) permettant d'identifier la macro-fissure ainsi que les

fissures matricielles et décohésions adjacentes. Cette analyse confirme la présence d'une zone de non-linéarités autour de la fissure principale, représentée en Fig. 2.16.

L'observation de coupes dans le plan (yOz) (épaisseur de l'éprouvette) au fur et à mesure du passage de la fissure permet de mettre en évidence l'historique de fissuration suivant (Fig 2.17 et 2.18) :

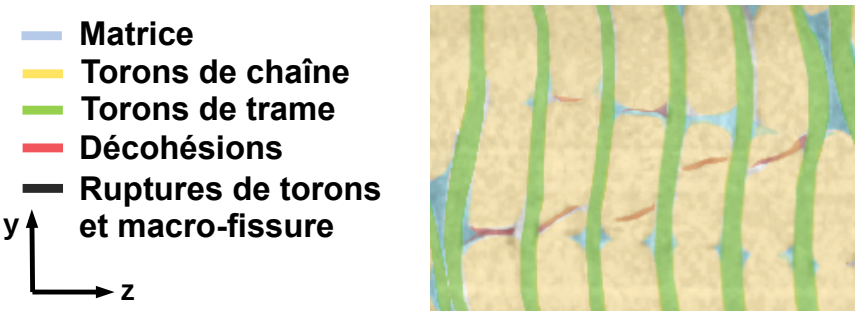
1. Plusieurs colonnes en avant du front de fissure : Apparition de décohésions diffuses intra-torons et dans les poches de matrice (sans rupture de fibres) bien en avant du front de fissure
2. Deux colonnes en avant du front de fissure : Décohésions d'interface entre les torons de trame et de chaîne ou les torons de trame et les poches de matrices, suite au réalignement de la trame. Ces décohésions apparaissent initialement dans les zones de forte courbure des torons et amènent à l'apparition d'un réseau de fissures en biais connectant les principales décohésions mais n'affectant pas les torons de trame
3. Une colonne de torons de trame en avant du front de fissure : Des ruptures prématurées de torons apparaissent une fois le réseau de décohésions installé. Une partie importante des torons transmet encore la charge et la macro-fissure n'est pas complètement établie
4. Après le front de fissure : Tous les torons sont rompus et un chemin de fissuration traverse toute l'éprouvette dans l'épaisseur. Ce chemin se forme à partir du réseau de fissures matricielles et de la position des ruptures prématurées de torons. Les torons de trame sont extraits de la matrice les entourant (Pull-out) et les fissures matricielles de part et d'autre de la fissure principale sont déchargées et se referment . Cette refermeture d'une partie des fissures justifie de l'intérêt d'un essai de tomographie *in situ*.

Les fissures matricielles et les fissures transverses dans les torons de chaîne sont peu énergétiques et diffuses. Les ruptures de torons de trame prématurées sont quant à elles fortement énergétiques et peuvent entraîner d'importantes redistributions de contraintes. De plus, elles sont intimement guidées par l'architecture du matériau : ces ruptures partielles ne sont observées qu'au sein de la première colonne en avant du front de la macro-fissure. Du fait de la tenue d'une partie des torons, les colonnes de torons de trame situées plus en avant ne subissent pas un chargement suffisant pour faire apparaître des ruptures partielles.

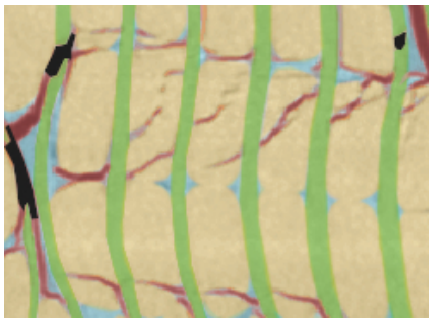
Ces observations mettent en évidence un phénomène de longueur interne tel qu'introduit en Section 2.4.5, lié à une dégradation progressive en avant du front de fissure (Fig. 2.18). La longueur interne c_x sur laquelle intervient cette dégradation semble en lien avec la distance entre les colonnes de torons.

2.3.4 Mise en évidence d'une épaisseur de fissure

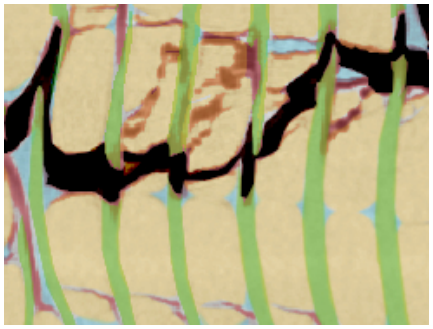
L'analyse des profils obtenus par imagerie macroscopique et MEB permet également d'exhiber la présence d'une longueur matériau perpendiculaire au profil de fissure, interprétable comme une notion d'épaisseur de fissure. Cette longueur se traduit par une rupture des torons sur une distance caractéristique de part à d'autre du plan moyenet leur pull-out de la matrice les entourant. Cette distance peut être caractérisée par la mesure de la longueur maximale de pull-out des torons observables sur les images macroscopiques du profil. Ces distances mesurées pour chaque toron et les distributions correspondantes sont présentées en Fig. 2.19 pour des éprouvettes CT de facteur d'échelle 1, 1.5, et 2.



(a) Fissurations matricielles et des torons de chaîne, décohésions toron/matrice



(b) Chemins de fissurations matricielles et premières ruptures de fibres



(c) Rupture complète des torons, coalescence et création de la macro-fissure

Fig. 2.17 – Scénario de rupture des composites tissés 3D obtenu par μ-tomographie sur éprouvette CT

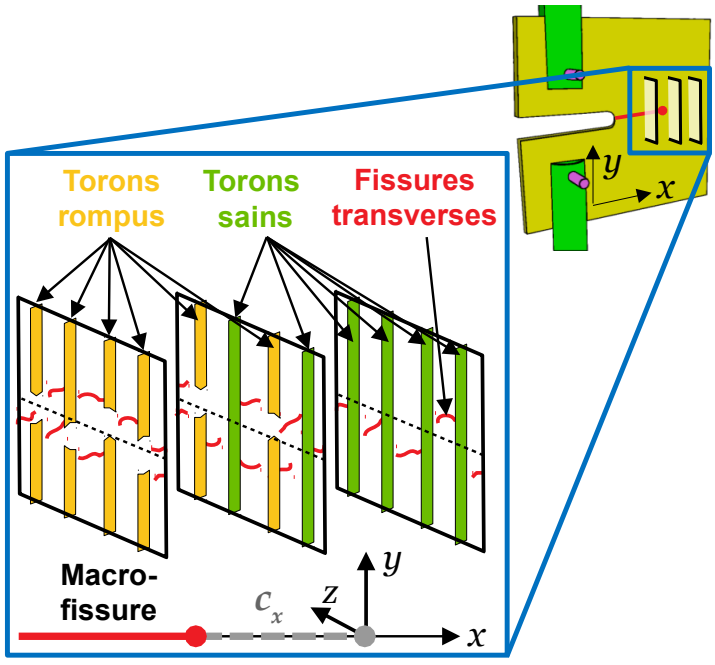


Fig. 2.18 – Principe schématique du scénario de rupture et longueur interne associée

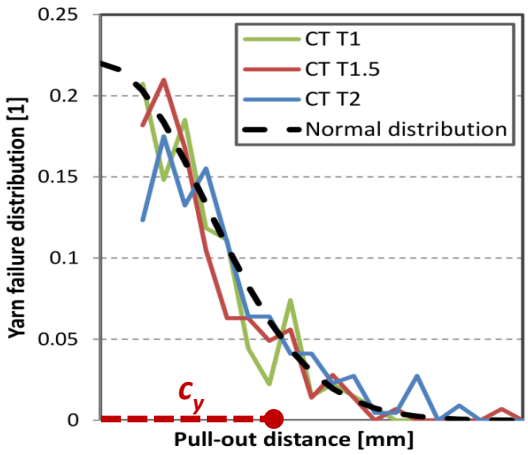


Fig. 2.19 – Distribution de la distance de pull-out des torons sur des éprouvettes CT de taille T1, T1.5 et T2

Les longueurs mesurées s'étalent sur des distances relativement importantes de part et d'autre du profil moyen de fissure. Les moyennes obtenues ainsi que la distribution sont indépendantes de la taille de l'éprouvette considérée et dénotent la présence d'un phénomène guidé par une longueur matériau liée à l'architecture. La distribution semble bien décrite par une distribution gaussienne pour les trois tailles analysées.

On observe que la distance au plan moyen de rupture des fibres varie fortement au sein d'un même toron (Fig. 2.20a et2.20b), le profil de fissure obtenu est donc complexe et posséde plusieurs niveaux d'architecture : forme de la surface moyenne de fissure, rupture des torons, ruptures des fibres individuelles au sein des torons. Le profil architecturé résultant de ce mécanisme peut être comparé à ceux observés dans certains cas sur composites stratifiés de carbone-epoxy [Pimenta and Pinho, 2014]. Ce caractère architecturé, quasi-fractal, a été corrélé à l'apparition d'effets d'échelle (principalement des effets d'épaisseur des plis pour les stratifiés) et des valeurs élevées de G_C lorsque la complexité de l'architecture de fissure augmente [Bullegas et al., 2016]. La bonne tenue en traction (taux asymptotique G_f élevé) des composites tissés 3D étudiés ici pourrait donc résulter de ce profil de fissure architecturé apparaissant naturellement du fait de la micro-structure de ces matériaux.

2.3.5 Méthode d'identification des longueurs c_x et c_y

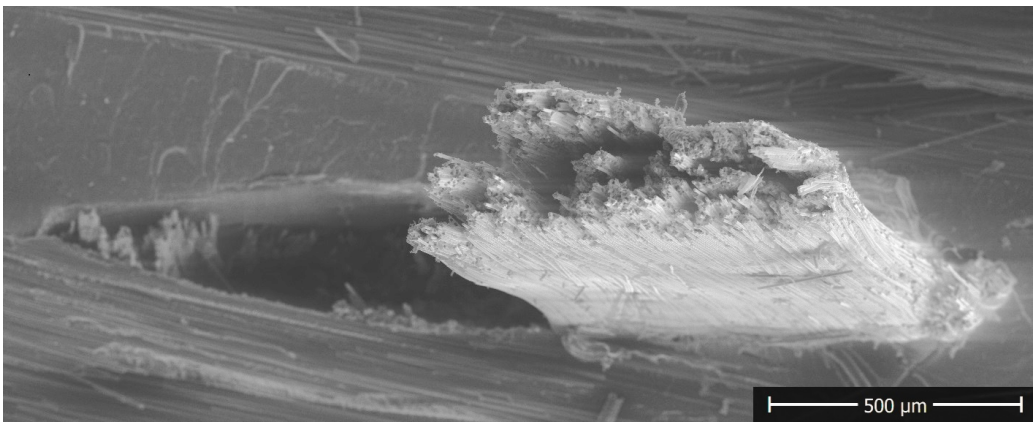
Les longueurs internes maintenant mises en évidence doivent faire l'objet d'une identification afin (i) de comparer leur valeur d'un matériau à l'autre et éventuellement préciser leur variation avec l'architecture du matériau et (ii) de permettre l'utilisation des modèles tels que présentés en Section 2.2 pour prévoir la rupture.

Deux approches sont possibles pour cette identification :

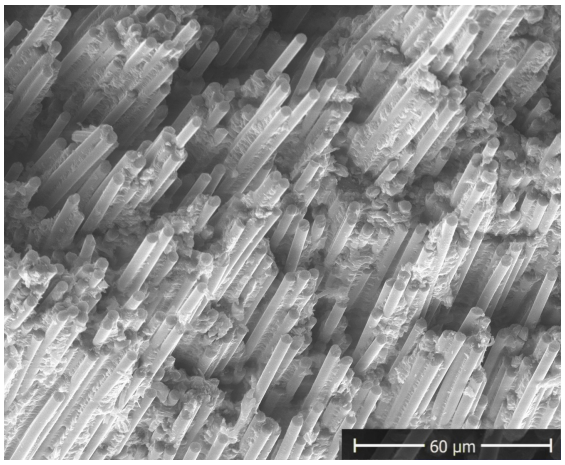
— Par mesure directe : Identifier les longueurs à partir de données mesurées expérimentalement sur les profils de fissure

— Par identification inverse : Identifier les longueurs à travers leur influence sur le comportement au sein d'un modèle décrivant la rupture (tel que celui introduit en Section 2.2.4)

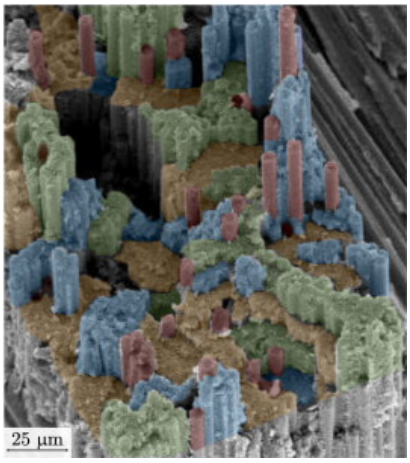
Les valeurs obtenues suivant ces méthodes sont *a priori* différentes mais devraient idéalement être liées par une relation bijective, bien que celle-ci ne soit pas évidente dans le cas général. L'application de ces méthodes d'identifications aux données d'essais est discutée ci-dessous.



(a) Vue MEB d'un toron rompu sur composite tissé 3D



(b) Rupture des fibres au sein d'un toron sur composites tissés 3D



(c) Profil de rupture d'un stratifié 0-90 carbone-epoxy [Pimenta and Pinho, 2014]

Fig. 2.20 – Comparaison du profil de rupture d'un toron et de la rupture d'un stratifié 0-90 de carbon-epoxy

Identification par mesure directe

L'identification par mesure directe peut être effectuée de plusieurs façons :

— Par mesure des mécanismes de rupture observés, tel que présenté précédemment : Les longueurs c_x et c_y peuvent ainsi être définies respectivement par la distance entre colonnes de torons sur laquelle intervient la rupture progressive et l'écart type de la distribution gaussienne décrivant la distance de pull-out des torons.

— À l'aide de la localisation des positions de rupture obtenue par émission acoustique : Les méthodes de localisation d'évènements acoustiques ont été présentées au Chapitre 1.4.6. Si le résultat possède une précision suffisante, les localisations de ruptures de torons peuvent fournir une base à l'identification de longueurs internes [Saliba et al., 2016], notamment à travers l'utilisation de fonction de Ripley [Gregoire et al., 2016]. La précision expérimentale insuffisante obtenue sur la localisation dans cette thèse ne nous a pas permis d'appliquer ces méthodes.

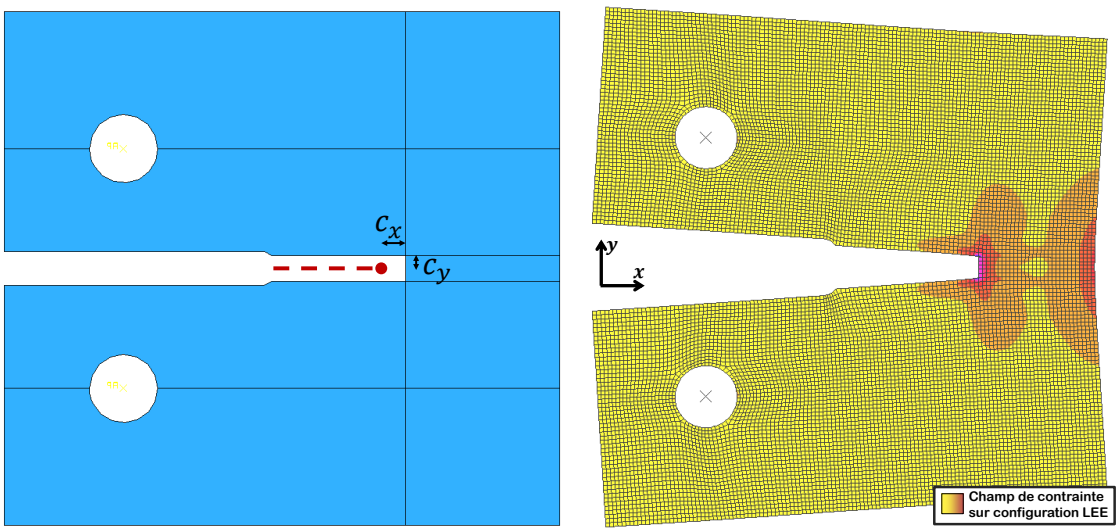
— À partir des données de corrélation d'images : l'identification des longueurs internes peut reposer sur les champs de déplacements obtenus par CIN [Wu et al., 2011]. Si les résultats sont satisfaisants, la taille des zones d'écart à la linéarité telle que déterminée en 2.3.1 peut être utilisée. Dans le cadre de ce travail, les

données exhibent cependant une trop importante variabilité pour permettre l'application de cette mesure.

Seule la mesure à partir de l'analyse des tomographies et des images MEB a été mise en place dans le cadre de ce travail. Cependant, du fait de la démarche de modélisation choisie et présentée en Section 2.4.5, les valeurs ainsi obtenues ne sont pas directement utilisables dans les modèles ou dans les simulations numériques qui seront présentés au Chapitre 3.4.4. Afin de pouvoir introduire ces longueurs dans les modèles, une méthode d'identification inverse nous a semblé préférable.

Identification inverse : détermination de la fonction $\tilde{g}$ à partir de la configuration équivalente

L'identification des longueurs internes c_x et c_y est effectuée sur la base du modèle présenté précédemment. Celui-ci introduit la notion de configuration Linéaire Élastique Équivalente (Section 2.2.3) et la fonction $\tilde{g}$ intervenant dans l'Eq. 2.47. On rappelle que cette fonction est une généralisation à deux variables de la fonction g intervenant dans la décomposition de $\mathcal{G}$. Elle traduit l'influence de la géométrie et des longueurs internes dans la relation entre la force appliquée à l'éprouvette et le taux de restitution d'énergie. Elle s'interprète également comme la variation de souplesse avec la position de la fissure et les longueurs internes. Avant de pouvoir identifier les longueurs c_x et c_y, les valeurs de $\tilde{g}$ et de ces dérivées doivent être obtenues par rapport à chacune des variables (x ou $x + c_x/W$ et $y = c_y/W$).



(a) Mise en place du calcul

(b) Champ contrainte obtenue par calcul linéaire élastique

Fig. 2.21 – Mise en place d'un calcul sur la configuration équivalente pour l'interpolation de la fonction g

Ces fonctions peuvent être interpolées sur des résultats numériques Force/Déplacement obtenus pour plusieurs valeurs de x et y (c'est à dire de x, c_x et c_y) sur la configuration LEE (présentée également en Fig. 2.21). L'énergie élastique de la structure $\mathcal{U}$, le taux de restitution d'énergie $\tilde{\mathcal{G}}$, la fonction $\tilde{g}$ et ses dérivées sont alors respectivement obtenus

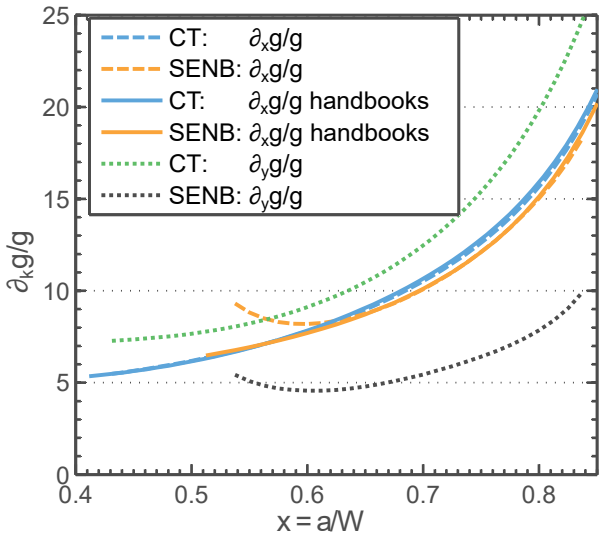


Fig. 2.22 – Détermination des dérivées de la fonction $\tilde{g}$ par rapport aux paramètres de position x et d'épaisseur y

par :

$$\mathcal{U}(x,y) = \frac{1}{2}u(x,y)F(x,y) \tag{2.52}$$

$$\tilde{\mathcal{G}}(x,y) = \frac{-1}{e_p W}\frac{\Delta_x \mathcal{U}(x,y)}{\Delta x} \quad \text{(à partir de l'Éq. 1.3)} \tag{2.53}$$

$$\tilde{g}(x,y) = E' W e_p \frac{\tilde{\mathcal{G}}(x,y)}{F^2(x,y)} \quad \text{(à partir de l'Éq. 2.35)} \tag{2.54}$$

$$\frac{\partial_k \tilde{g}(x,0)}{\tilde{g}(x,0)} = \frac{\Delta_k \tilde{g}(x,y)}{\tilde{g}(x,0)\Delta k} \quad \text{avec } k = x \text{ ou } y \tag{2.55}$$

Les résultats de l'interpolation sont présentés en Fig. 2.22, pour la géométrie CT et pour la géométrie SENB. Ces données sont comparées à celles issues des handbook, qui permettent de remonter à la variation de la fonction $\tilde{g}$ avec la position de la fissure x [Tada et al., 2000]. Les résultats obtenus sont en accord avec ceux de la littérature et permettent de valider la méthode de calcul. La variation de $\tilde{g}$ en fonction la longueur $\overline{c}_x$ est similaire pour les CT et SENB. La variation de $\tilde{g}$ avec l'épaisseur $\overline{c}_y$ est du même ordre de grandeur pour les deux configurations, mais supérieure à celle en $\overline{c}_x$ dans le cas de l'essai CT et inférieure dans celui de l'essai SENB. Cette différence entraîne une variation plus importante du G_C apparent avec la longueur interne c_y sur les éprouvettes CT que sur les éprouvettes SENB (Éq. 2.47).

Une fois les valeurs de $\tilde{g}$ déterminées, les longueurs c_x et c_y et le taux de restitution asymptotique G_f peuvent être identifiés sur les données d'essai à partir de la formule de la loi de similitude (Éq. 2.47), comme présenté dans la section suivante sur le composite tissé 3D RCT1.

2.3.6 Identification des paramètres de rupture sur composites tissés 3D RCT1

L'identification des paramètres de rupture c_x, c_y et G_f peut être réalisée par le biais d'une minimisation entre les valeurs de G_C apparent mesurées expérimentalement pour

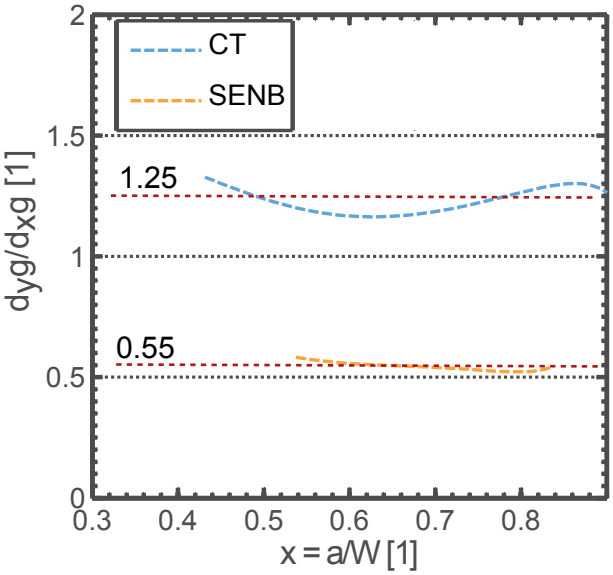


Fig. 2.23 – Variation du ratio $\partial_y g/\partial_x g$ avec x pour les essais CT et SENB

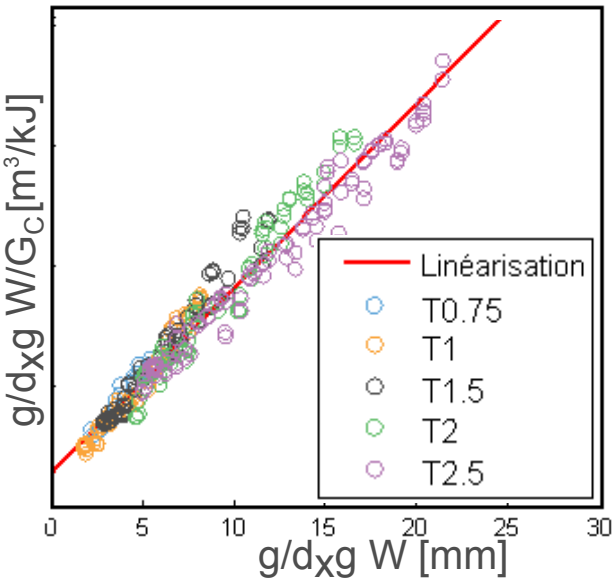


Fig. 2.24 – Identification des paramètres de rupture sur CT par linéarisation (Éq. 2.57)

chaque configuration et celles obtenues à l'aide de l'équation l'Éq. 2.47.a. L'identification peut également être effectuée à partir d'une régression linéaire sur les données expérimentales. Cette approche possède l'avantage d'assurer l'unicité du jeu de paramètres identifiés. Pour le cas du modèle à plusieurs longueurs internes, l'Éq. 2.47 peut être réécrite sous une forme linéaire, suivant la même approche qu'en Section 2.3.1.

$$\left(\frac{\tilde{g}(x,0)W}{\partial_x\tilde{g}G_C}\right) = \frac{1}{G_f}\left(\frac{\tilde{g}(x,0)W}{\partial_x\tilde{g}}\right) + \frac{c_x + c_y\,\partial_y\tilde{g}/\partial_x\tilde{g}}{G_f} \tag{2.56}$$

$$Y(x) = \frac{1}{G_f}X(x) + \frac{c_{eq}(x)}{G_f} \tag{2.57}$$

La longueur c_{eq} est une longueur équivalente définie à partir de c_x et c_y en fonction de la géométrie de l'éprouvette étudiée (à travers la fonction $\tilde{g}$) : $c_{eq} = c_x + c_y\,\partial_y\tilde{g}/\partial_x\tilde{g}$. Elle permet de ramener le comportement à celui d'un modèle à une variable pour une géométrie donnée. Notons que cette longueur dépend également de la position x de la fissure car le ratio des dérivées partielles de $\tilde{g}$ est, sauf cas particulier, une fonction de x. Cependant pour les géométries CT et SENB étudiées ici, ce ratio reste relativement constant au cours de la propagation (Fig. 2.23). La valeur de ce ratio dépend de l'essai, avec une valeur d'environ 1.25 pour les CT et 0.55 pour les SENB.

La linéarisation est alors appliquée aux données de chaque essai. La pente de la régression doit être identique pour les deux géométries et permet de déterminer G_f et les pentes à l'origine égales à c_{eq}/G_f. L'utilisation des données expérimentales sur deux géométries différentes permet de séparer les valeurs c_x et c_y par résolution du système :

$$c_{eq}^{CT} = c_x + 1.25c_y \tag{2.58}$$

$$c_{eq}^{SENB} = c_x + 0.55c_y \tag{2.59}$$

$$\tag{2.60}$$

À l'aide des paramètres identifiés, les évolutions de G_C prévues par le modèle sont présentées en Fig. 2.25 et comparées avec les données d'essai. De plus, ces valeurs sont du même ordre de grandeur que les longueurs caractéristiques observées en Section 2.3.6.

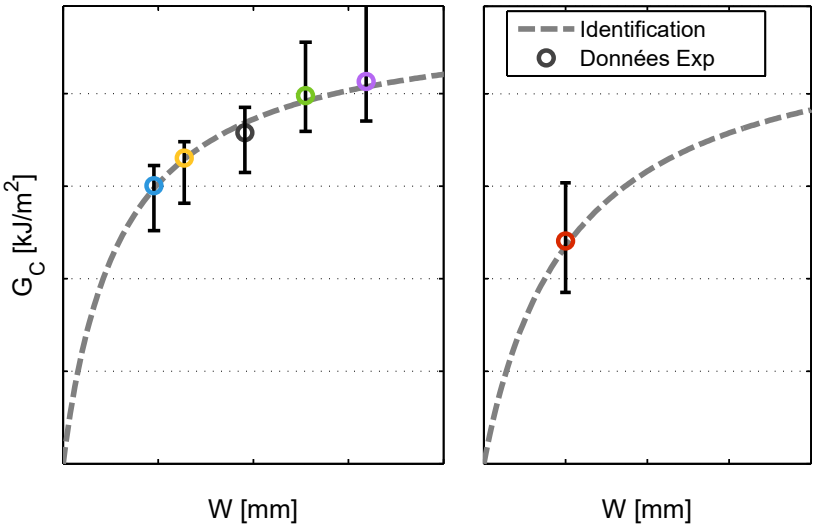


Fig. 2.25 – Comparaison du G_C apparent expérimental et obtenu à l'aide de l'Éq. 2.47 après identification

Synthèse

Dans cette section, nous avons mis en évidence la validité du cadre des modèles à longueurs internes pour décrire la rupture des composites tissés 3D. Une étude plus précise des mécanismes à l'œuvre, notamment à l'aide de l'imagerie du profil de fissure et d'un essai sous tomographe, a permis de mettre en évidence la présence de deux longueurs internes. Les mécanismes associés à celles-ci sont conformes avec le cadre théorique introduit en Section 2.4.5. Les paramètres de longueurs internes c_x et c_y identifiées sur les données expérimentales sont proches des distances mesurées grâce à l'analyse des profils de fissure. Le modèle reproduit bien les évolutions de G_C observées au cours de la campagne expérimentale.

Cette analyse confirme l'importance de l'influence des longueurs internes sur le comportement des composites tissés 3D à l'échelle considérée. Les conséquences de cette influence seront étudiées plus en détail dans la section suivante.

2.4 Conséquences de la rupture non linéaire sur le comportement

L'influence des longueurs internes sur la valeur apparente de G_C a été étudiée dans les sections précédentes et remet notamment en cause son indépendance à la géométrie et la taille de la structure et donc son caractère matériau. Mais l'influence de ces longueurs internes peut également être étudiée à partir des autres grandeurs mécaniques : Force/Déplacement, champs mécaniques, courbe-$\mathcal{R}$, relation à l'architecture du matériau. La compréhension et la prise en compte de ces comportements peut permettre d'obtenir une meilleure robustesse des futures méthodologies de dimensionnement en composite tissé 3D ou, de manière plus générale, de déceler si des longueurs internes influencent ou non la rupture.

2.4.1 Sur les courbes Force/Déplacement

Comme précisé en Section 2.1.3, dans le cadre de la MLER, les résultats Force/Déplacement sur des éprouvettes de tailles différentes peuvent être obtenus par homothétie des courbes, avec un facteur d'homothétie égal à la racine carrée du ratio de la taille des deux éprouvettes. En présence de longueurs internes, cette loi de similitude n'est plus vérifiée et les courbes Force/Déplacement à rupture ne sont plus aussi facilement déterminées à partir de celles obtenues sur une taille d'éprouvette donnée.

Une loi de similitude sur la force P peut cependant être trouvée à partir de la loi de similitude sur G_C et de la formule de la MCM (utilisée pour l'estimation de G_C en Section 1.1.2), qui fait intervenir la force à rupture P_C :

$$G_C(x,W) = \frac{G_f}{1 + \dfrac{\partial_x \tilde{g}}{g(x)}\dfrac{c_x}{W} + \dfrac{\partial_y \tilde{g}}{g(x)}\dfrac{c_y}{W}} = \frac{P_C^2}{2We_p}\frac{dS}{dx}(x) \tag{2.61}$$

La formule de la souplesse fait intervenir sa dérivée par rapport à la position x de la fissure dS/dx. La détermination de cette dérivée nécessite une interpolation de la souplesse, dont la formulation choisie en Section 1.3.3 est rappelée ici :

$$S(x) = \frac{S_0}{(x_m - x)^\chi} \quad \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\chi S_0}{(x_m - x)^{\chi-1}} \tag{2.62}$$

Les observations expérimentales sur la souplesse ont permis de déterminer que celle-ci variait peu avec la taille de la structure (Section 1.4.1). L'interpolation est donc effectuée à partir de n'importe quelle taille d'éprouvette ou obtenue par calculs éléments finis. En isolant P_C dans l'équation l'Éq. 2.61, on détermine alors les valeurs à rupture de la force P et du déplacement u de géométrie et de taille quelconque.

$$P_C(x,W) = \sqrt{\frac{2We_pG_f(x_m - x)^{\chi-1}}{S_0\chi\left(1 + \dfrac{\partial_x \tilde{g}}{g(x)}\dfrac{c_x}{W} + \dfrac{\partial_y \tilde{g}}{g(x)}\dfrac{c_y}{W}\right)}} \tag{2.63}$$

$$u_C(x,W) = S(x)P_C(x,W) = \sqrt{\frac{2We_pG_fS_0(x_m - x)^{-\chi-1}}{\chi\left(1 + \dfrac{\partial_x \tilde{g}}{g(x)}\dfrac{c_x}{W} + \dfrac{\partial_y \tilde{g}}{g(x)}\dfrac{c_y}{W}\right)}} \tag{2.64}$$

Les courbes Force/Déplacement ainsi obtenues à partir de G_f, c_x et c_y identifiés précédemment sont présentées en Fig. 2.26 et comparées avec les données issues de la campagne expérimentale. Une bonne cohérence est observée avec les essais. Cette approche permet donc d'estimer les valeurs de force à rupture à partir de la connaissance des paramètres de rupture et de la souplesse de la structure.

2.4.2 Sur la courbe R

Dans la loi de similitude sur G_C (Éq. 2.47), le taux de restitution d'énergie critique dépend des propriétés matériau (G_f, c_x, c_y), de l'essai réalisé (W et fonction $\tilde{g}$), mais également de la position de la pointe de fissure au sein de l'éprouvette (grandeur adimensionnée $x = a/W$). Il est probable que la valeur de G_C estimée ne soit pas constante mais évolue au fur et à mesure de l'essai. Cette évolution prend en compte, de manière

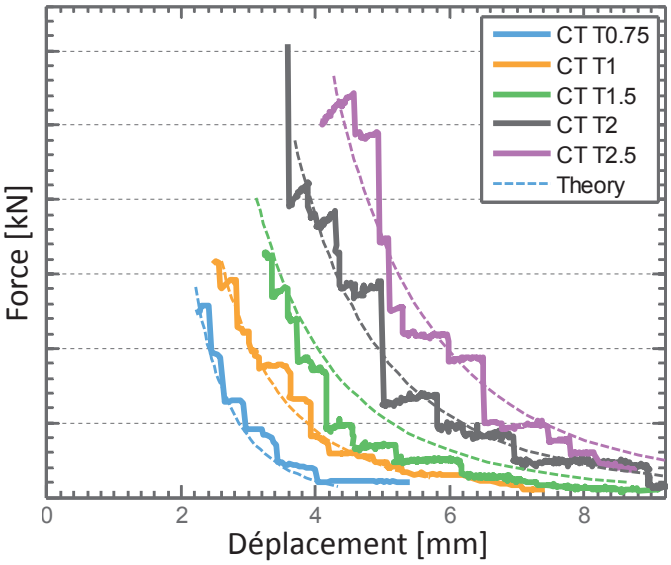


Fig. 2.26 – Comparaison des courbes forces déplacement expérimentales et du modèle (Éq. 2.64 et 2.64)

naturelle, les effets d'interaction avec les bords ou la modification des gradients en cours d'essai à travers les variations de la fonction $\tilde{g}$ et ses dérivées.

Dans le cas des essais CT et SENB, les ratios $\partial_k \tilde{g}/\tilde{g}$ augmentent avec x (Fig. 2.22), ce qui accroît l'influence des longueurs internes et fait chuter la valeur de G_C en cours d'essai (Éq. 2.47). Les courbes de résistance ainsi obtenues sont présentées en Fig. 2.27 et comparées avec les données expérimentales. Bien que le modèle semble bien décrire le comportement observé, une détermination plus précise de la chute de G_C en bout d'éprouvette doit faire l'objet d'une confirmation expérimentale. La mise en évidence de cette baisse de tenue au voisinage des bords ou d'une variation forte de G_C en cours d'essai liée à une variation des gradients sur des configurations particulières, permettrait d'offrir une nouvelle confirmation du cadre d'analyse et de conforter l'identification proposée.

L'étude de l'impact des longueurs internes sur la courbe-$\mathcal{R}$ se limite ici au régime stabilisé de propagation. On peut s'attendre à ce que ces longueurs influencent également la phase de mise en place de la fissure décrite en Section 1.4.2. Une relation pourrait exister entre c_x et la longueur initiale de propagation nécessaire à la mise en place de la fissure (durant laquelle G_C augmente avant d'atteindre le régime stabilisé). Cependant, aucune variation cohérente de cette distance de mise en place n'est observée expérimentalement (voir Section 1.4.2) et cette question reste encore un sujet ouvert pour les composites tissés 3D, pouvant faire l'objet de futures études.

2.4.3 Sur les champs mécaniques

Dans le cas de modèles de rupture en l'absence de longueurs internes (MLER, plasticité, endommagement local etc.), les champs mécaniques conservent la même forme lors d'une modification homothétique de l'éprouvette, du fait des lois de similitude existantes (voir Section 2.1.2). La valeur de ces champs à rupture évolue comme une puissance de la taille W de l'éprouvette. La contrainte en tout point évolue par exemple en $1/\sqrt{W}$ dans le cadre de la MLER et reste la même quel que soit W en plasticité.

Dans le cadre d'un modèle à longueurs internes, ces évolutions ne sont plus appli-

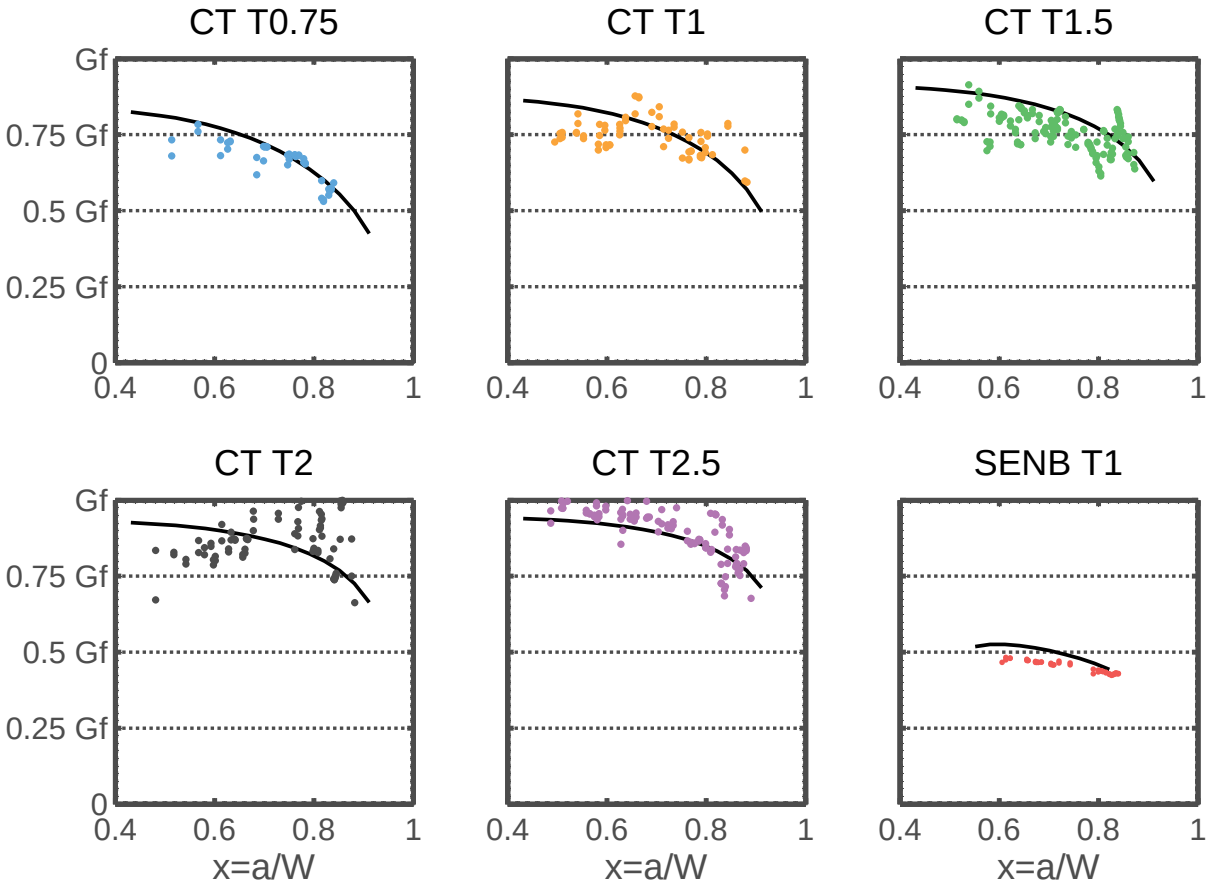


Fig. 2.27 – Prise en compte de l'influence de la longueur interne sur le taux de restitution d'énergie critique G_C

cables. La forme du champ est modifiée avec la taille de l"éprouvette et la loi en puissance de W sur les valeurs n'est plus respectée. Cependant des comportements généraux peuvent être déterminés :

— Au voisinage de la pointe de fissure, l'effet des longueurs internes et leur interaction avec les gradients mécaniques modifient la forme des champs de contrainte, d'importantes redistribution pouvant s'effectuer.

— Loin de la fissure, l'effet des longueurs internes sur la forme des champs diminue (bien que leur valeur soit encore modifiée). Les champs mécaniques exhibent à nouveau une distribution identique quel que soit W, qui se rapproche de celle obtenue en absence de longueurs internes. Cette homothétie des formes des champs est uniquement observable pour des éprouvettes suffisamment grandes. Les champs de contrainte σ_C et de déformation ε_C à rupture évoluent alors de la même manière que la contrainte nominale σ_{NC} (Éq. 2.47.b) :

$$\sigma_C(x,y,W) = \frac{\sigma_C(x,y,W\to\infty)}{\sqrt{1+\dfrac{g(x)W}{\partial_x\tilde{g}c_x+\partial_y\tilde{g}c_y}}} \tag{2.65}$$

Cette réflexion peut être confirmée par l'analyse des données issues de la CIN. Les champs de déformation ε_{yy} observés sur éprouvettes CT T1 et T2 sont présentés en Fig. 2.28. En tout point (x,y) de l'éprouvette, le rapport $\varepsilon_C(x,y,W_{T2})/\varepsilon_C(x,y,W_{T1})$ est calculé. Un rapport moyen de 0.85 est observé, *i.e.* $0.85\varepsilon_C(x,y,W_{T1}) \approx \varepsilon_C(x,y,W_{T2})$. Cette valeur se situe de manière cohérente entre 1 (attendu pour de petites éprouvettes, loi de

similitude en contrainte) et $1/\sqrt{2}$ (attendu pour de grandes éprouvettes, loi de similitude de la MLER). Une carte d'erreur sur la forme des champs peut être obtenue à partir de la formulation :

$$erreur(x,y) = \frac{0.85\varepsilon_C(x,y,W_{T1}) - \varepsilon_C(x,y,W_{T2})}{\max \varepsilon_C(x,y,W_{T2})} \tag{2.66}$$

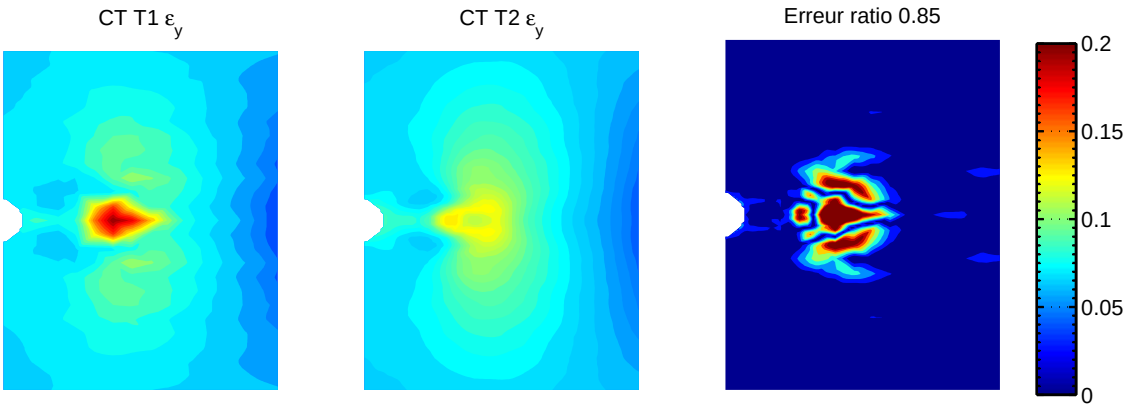


Fig. 2.28 – Comparaison des champs de déformation obtenus par CIN sur éprouvettes CT T1 et T2

La carte d'erreur présentée en Fig. 2.28 semble confirmer que les champs de déformation conserve la même forme loin de la fissure quelle que soit la taille. Cette hypothèse et l'Éq. 2.65 sont par contre mises en défaut au voisinage de la pointe de fissure, du fait des redistributions locales créées par les longueurs internes. Cette analyse en pointe de fissure doit cependant être menée de façon prudente, les données de CIN subissant d'importantes décorrélations autour de la pointe de fissure.

Le facteur multiplicatif de $\varepsilon_C(x,y,W_{T2})/\varepsilon_C(x,y,W_{T1}) = 0.85$ observé expérimentalement loin de la fissure entre les deux tailles peut être comparé avec celui prévu par le modèle :

$$\frac{\varepsilon_C(x,y,W_{T2})}{\varepsilon_C(x,y,W_{T1})} = \sqrt{\frac{1+\dfrac{g(x)W_{T1}}{\partial_x\tilde{g}c_x + \partial_y\tilde{g}c_y}}{1+\dfrac{g(x)W_{T2}}{\partial_x\tilde{g}c_x + \partial_y\tilde{g}c_y}}} = \sqrt{\frac{W_{T1}}{W_{T2}}\frac{G_C(W_{T2})}{G_C(W_{T1})}} = 0.76 \tag{2.67}$$

Cette valeur prévue de 0.76 n'est pas strictement égale au 0.85 observé expérimentalement mais peut être considérée suffisamment proche compte tenue de l'imprécision existant sur les données de CIN et du fait que seules deux éprouvettes et une position de fissure ont été analysées. Une étude plus approfondie de toutes les données disponibles permettrait une plus juste appréciation de cette valeur et une correction des hypothèses de l'Éq. 2.65 le cas échéant.

2.4.4 Relation entre les paramètres de rupture et l'architecture du matériau

L'identification de paramètres présentée précédemment a été effectuée sur le RCT1 pour lequel le plus grand nombre de configurations d'essais était disponible. Il est cependant attendu que les paramètres obtenus soient liés à l'architecture du matériau :

RCT	G_f/G_f^{RCT1}	c_{eq}/c_{eq}^{RCT1}	G_f/RCT	c_{eq}/dist colonne
RCT1	1	1	7.95	-
RCT2	1.95	0.88	8.80	-
RCT3	5.78	3.45	19.52	-

Table 2.1 – Évolution des paramètres de la rupture avec le RCT sur composites tissés 3D

G_f doit évoluer avec le RCT et c_x et c_y sont possiblement dépendants des paramètres du tissage.

Lors de la campagne expérimentale, des essais ont également été réalisés sur RCT2 et RCT3 avec respectivement deux et trois configurations différentes (Tableau 1.1). Bien que l'utilisation de seulement deux configurations (variation de taille ou de géométrie) reste faible afin d'identifier de manière robuste les trois paramètres de rupture, une estimation peut être effectuée sur ces architectures dans l'attente de données expérimentales supplémentaires.

L'exercice peut se réduire à l'identification d'une unique longueur interne en considérant que c_y est faible et/ou que $\partial_x\tilde{g} \approx \partial_y\tilde{g}$ sur les essais CT et SENB. Pour rappel, $\partial_x\tilde{g} = \partial_y\tilde{g} = 1.25$ sur CT et 0.55 sur SENB, néanmoins, cet exercice permet une première compréhension des phénomènes. On identifie alors sur les essais une longueur $c_{eq} \approx c_x + c_y$. L'évolution des paramètres obtenus pour les différents RCT disponibles est présentée en Tableau 2.1 et en Fig. 2.29. La valeur de G_f a été rapportée au taux de fibres dans la direction correspondante afin de mettre en évidence une éventuelle évolution linéaire avec celui-ci. La longueur c_{eq} est également rapportée à la distance entre les colonnes de trame du tissage.

Les résultats obtenus donnent des évolutions cohérentes entre les RCT1 et 2 : la valeur de G_f évolue relativement linéairement avec le taux de fibres et les valeurs de longueurs internes estimées sont du même ordre de grandeur, pour des paramètres de tissage équivalents. Une forte différence de comportement est cependant observée avec les résultats sur RCT3 : les valeurs de G_f et c_{eq} sont ici bien plus élevées et ne satisfont pas une évolution linéaire avec les paramètres du tissage. Cependant, cette identification reste en l'état imprécise sur si peu d'essais et l'estimation de G_C pour des ratios chaîne/trames élevés reste expérimentalement difficile.

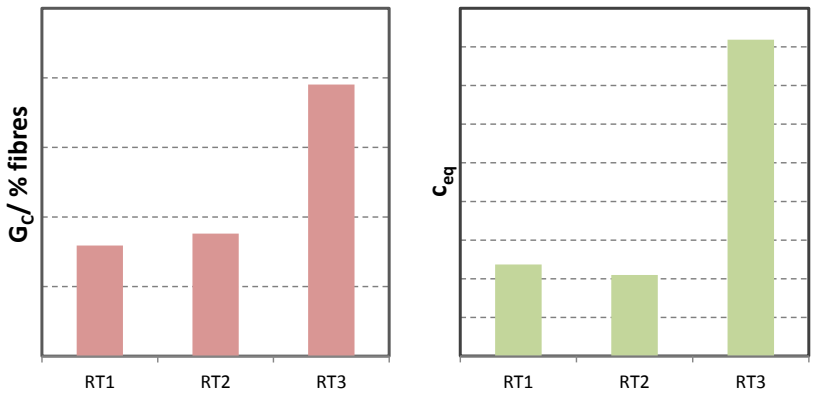


Fig. 2.29 – Valeurs du ratio G_C/% de fibre et de c_{eq} sur les 3 RCT étudiés

Des études complémentaires devront être menées pour confirmer ou infirmer ces tendances. A terme, une bonne compréhension du lien entre les paramètres de l'architecture et ceux caractérisant la rupture pourrait permettre de fournir une estimation de G_C à partir des propriétés du tissage et ainsi estimer par extrapolation la rupture des

forts RCT pour lesquels les données expérimentales de propagation de fissure contrôlée s'avèrent difficiles à obtenir.

2.4.5 Résumé des principales conséquences pour le dimensionnement de pièces en composite tissé 3D

Ce chapitre et les résultats expérimentaux ont montré que la présence de phénomènes non-linéaires, s'opérant sur une zone dont la taille est influencée par une ou plusieurs longueurs internes, modifie le comportement vis-à-vis de la rupture. Les principales conclusions pratiques sont donc rappelées ici :

— **Variation de G_C :** le taux de restitution d'énergie critique G_C n'est plus un paramètre matériau. Il s'agit d'une grandeur apparente dont la valeur évolue selon l'essai réalisé (taille, géométrie), au même titre que le sont classiquement la force à rupture P_C ou le déplacement u_C. Il en va de même pour le facteur d'intensité de contrainte critique apparent K_C. Leur détermination sur un essai ne suffit pas à caractériser la rupture tant que, sur les éprouvettes considérées, les distances sur lesquelles varient les champs mécaniques ne sont pas largement supérieures aux longueurs internes.

— **Caractérisation de la rupture :** Une caractérisation complète de la propagation de fissure dans ces matériaux nécessite au moins 2 paramètres : un taux de restitution d'énergie asymptotique G_f, valeur observée sur des éprouvettes suffisamment grandes (comportement tendant vers la MLER), et au moins une longueur interne traduisant la taille caractéristique des mécanismes de fissuration.

— **Analyse des profils de fissure, mécanisme de longueur interne :** L'analyse des profils de fissure met en évidence un mécanisme d'épaisseur de fissure et un mécanisme de dégradation en avant du front, tous deux guidés par les paramètres de tissage. Cependant, ces observations sont effectuées pour corroborer les hypothèses du modèle. Les longueurs mesurées à partir de cette analyse ne peuvent pas être directement utilisées dans le modèle. Ces longueurs décrivent géométriquement le profil, alors que c_x et c_y introduites dans les équations sont définies au travers de leur influence sur la réponse mécanique globale et de l'énergie dissipée.

— **Méthode d'identification des paramètres :** Identification de l'ensemble de paramètres ne peut être obtenue qu'à partir d'éprouvettes de tailles et de géométries différentes. Pour identifier de manière robuste trois paramètres G_f, c_x et c_y, il semble raisonnable d'utiliser au moins quatre configurations différentes, afin d'avoir des données de validation, par exemple deux tailles et deux géométries différentes.

— **Apport d'un modèle à deux longueurs internes :** Le modèle présenté dans ce chapitre utilise deux longueurs internes, suivant deux orientations matériau. Ces longueurs sont nécessaires pour (i) rendre compte des deux mécanismes distincts introduisant des longueurs internes, (ii) permettre une bonne modélisation du comportement quel que soit le chargement considéré. Cependant, dans le cadre des géométries CT et SENB étudiées, les gradients sont suffisamment proches pour se ramener en première approche à une unique longueur interne $c_{eq} = c_x + c_y$.

— **Dimensionnement conservatif sur les valeurs de G_C :** La détermination de valeurs de G_C sur des éprouvettes de laboratoire est *a priori* conservative par rapport aux valeurs sur structures réelles. En effet, la valeur de G_C augmente avec la

taille des éprouvettes, ou plus précisément avec la longueur sur laquelle varie les champs mécaniques. Les valeurs obtenues sur des petites éprouvettes fournissent donc une borne inférieure aux valeurs de G_C observées sur des éprouvettes plus grandes (si la forme des gradients reste suffisamment proche). Si G_f a été identifié, cette valeur fournie également une borne supérieure de G_C.

— **Utilisation pour le pré-dimensionnement :** Les techniques de dimensionnement reposant sur une valeur de G_C à rupture peuvent être appliquées à condition d'utiliser le taux apparent déterminé à l'aide de l'Éq. 2.47. L'utilisation de cette équation nécessite l'obtention des valeurs de $\tilde{g}$ et de ses dérivées à partir de la configuration équivalente, à l'aide de calculs élastiques (voir Section 2.3.5). La valeur G_C obtenue n'est valable que pour une géométrie, taille d'éprouvette, position et direction de propagation de la fissure donnée.

— **Utilisation au sein de simulations numériques :** La prise en compte de ces mécanismes de longueurs internes s'avère nécessaire à une bonne description de la rupture des composites tissés 3D. Ces mécanismes doivent donc être intégrés dans les simulations numériques, de manière cohérente avec le modèle décrit en Section 2.4.5 afin d'assurer la représentativité des résultats. Un parallèle clair doit être établit entre les paramètres G_f, c_x et c_y et ceux introduits dans les modèles utilisés pour la simulation par éléments finis.

Conclusion

Ce chapitre décrit le cadre théorique de modélisation mis en place afin de décrire le comportement à la rupture des matériaux composites tissés 3D, en prenant en compte les effets d'échelle et de géométrie mis en évidence lors de la campagne expérimentale. La démarche appliquée repose sur l'utilisation de modèles à longueurs internes : ces longueurs définissent une zone non-linéaire de taille caractéristique en pointe de fissure, correspondant à la taille des mécanismes participant à la mise en place de la macro-fissure. Ces longueurs se retrouvent ainsi guidées par l'architecture du matériau et constituent des paramètres caractéristiques identifiables à partir des données expérimentales.

Un modèle à plusieurs longueurs a été mis en place, permettant de décrire la rupture des composites tissés 3D. Ce modèle repose sur une configuration équivalente linéaire élastique, plus facile à manipuler que la configuration réelle de la fissure et produisant les mêmes effets que la fissure réelle loin de celle-ci. Cette démarche a permis d'obtenir une loi de similitude donnant l'évolution de G_C pour n'importe quelle géométrie et taille de structure.

Appliqués aux composites tissés 3D, deux mécanismes de longueurs internes ont été exhibés, cohérents avec ce cadre théorique : (i) une longueur de dégradation en avant du front de la macro-fissure c_x, guidée par la distance entre les colonnes de trame et (ii) une épaisseur de fissure c_y, guidée par la distance de rupture des torons de part et d'autre du plan moyen de la macro-fissure. L'identification du modèle sur les données d'essais permet alors de caractériser la rupture à l'aide de trois paramètres :

— c_x et c_y, les deux longueurs internes caractérisant la taille des mécanismes de rupture et liées aux paramètres du tissage.

— G_f, taux de restitution d'énergie critique asymptotique obtenu pour des éprouvettes sur lesquelles la taille des gradients mécaniques est très grande devant les longueurs internes.

Ce modèle permet de décrire les évolutions de G_C observées expérimentalement et de rendre cohérents les essais réalisés sur éprouvettes CT et SENB. Des études complémentaires sur d'autres géométries d'éprouvettes pourraient être réalisées afin de valider la capacité du modèle à décrire tout type de singularité.

Enfin, les conséquences de ces mécanismes ont été étudiées plus en détails, notamment sur les forces à rupture, courbes-$\mathcal{R}$ et champs mécaniques. L'évolution des paramètres de rupture avec les propriétés du tissage a également été discutée et des études supplémentaires doivent être mises en place afin d'obtenir une connaissance plus précise du lien entre l'architecture du matériau et les paramètres c_x, c_y et G_f.

Le modèle mis en place dans ce chapitre permet de poser un cadre théorique adapté, fournit de nombreuses informations sur le comportement du matériau vis-à-vis de la rupture et peut servir d'outil de pré-dimensionnement. Cependant, pour les besoins industriels de dimensionnement de pièces complexes à rupture, cette approche reste limitée. Elle doit faire l'objet d'un transfert vers des méthodes de simulations numériques, offrant des capacités de calcul plus adaptées à la réalité des problèmes industriels. Ce transfert sera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Simulation de la rupture dans les modèles d'endommagement

Résumé

Dans ce chapitre, différentes approches numériques sont étudiées afin de retranscrire les effets mis en évidence dans les deux premiers chapitres. Les simulations numériques effectuées dans le chapitre reposent sur le formalisme de l'endommagement continu.

Ce formalisme sera présenté dans la première section, ainsi que les spécificités du modèle Onera Damage Model pour les Composites à Matrice Organique (ODM-CMO) utilisé par la suite. Cette partie présentera également la notion d'adoucissement et ces conséquences sur la perte de robustesse des simulations numériques.

La seconde partie introduira plusieurs méthodes de régularisation afin de pallier cette perte de robustesse : modèles à endommagement retardé, méthodes Crack-Band, Non-Local et Phase-Field. Les détails de l'application au modèle utilisé et l'implémentation de ces méthodes seront présentés.

En troisième partie, ces méthodes seront appliquées sur des cas tests numériques et afin d'évaluer leur comportement pratique et d'estimer leur capacité à retranscrire les effets d'échelle observés expérimentalement.

Suite à cette étude, la description de la rupture des composites tissés 3D sera effectuée à l'aide d'un modèle Non-Local. Celui-ci sera étudié plus en détails dans la dernière section de ce chapitre. Une identification des paramètres du modèle sera proposée, permettant une comparaison entre les données expérimentales et les résultats de simulation numériques.

Sommaire

3.1 **Les modèles d'endommagement continu** 113
3.1.1 Présentation du formalisme de l'endommagement continu 113
3.1.2 Les spécificités du modèle ODM-CMO 114
3.1.3 Modèle simplifié utilisé dans ces travaux 117
3.1.4 Conséquences de l'adoucissement 118
3.2 **Les méthodes de régularisation numérique** 121
3.2.1 Modèle d'endommagement retardé : visco-endommagement et Taux limité . 122
3.2.2 Crack Band 125
3.2.3 Modèles Non-Locaux 128
3.2.4 Modèles Phase-Field 131
3.2.5 Calcul des matrices tangentes 133
3.2.6 Similarités entre les méthodes de régularisation 138
3.3 **Analyse des méthodes de régularisation** 139
3.3.1 Critères de contrôle des simulations numériques 139
3.3.2 Analyse pratique des méthodes de régularisation 142
3.3.3 Description des effets d'échelle des méthodes de régularisation 150
3.4 **Étude approfondie des modèles Non-Locaux à gradient** 158
3.4.1 Analyse détaillée du comportement Non Local 158
3.4.2 Lien entre les paramètres de rupture et les paramètres du modèle d'endommagement Non-Local 159
3.4.3 Identification des paramètres du modèle Non-Local et comparaison essais/calcul 163
3.4.4 Enrichissement vers un modèle à deux longueurs internes 166

Introduction

3.1 Les modèles d'endommagement continu

3.1.1 Présentation du formalisme de l'endommagement continu

Les modèles d'endommagement continu ont été développés afin de décrire la détérioration progressive du matériau précédant la création d'une macro-fissure. Ils traduisent l'apparition irréversible de micro-défauts et de cavités, phénomènes par nature discrets, en conservant le formalisme des milieux continus. Ces phénomènes sont principalement appréhendés à travers le comportement du matériau (relation $\underline{\boldsymbol{\sigma}} - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$).

Le formalisme de l'endommagement continu repose sur la description de l'état local du matériau par des variables internes d'endommagement, notées D_i, traduisant l'état de dégradation progressive des propriétés mécaniques. Cette démarche a été initialement proposée en 1958 par [Kachanov, 1958] et enrichie depuis [Lemaitre and Chaboche, 1994]. Classiquement, le formalisme repose sur l'écriture d'un potentiel thermodynamique faisant intervenir les variables d'endommagement et duquel vont dériver les lois d'état. En négligeant l'influence de la température, l'état local du matériau est défini par la déformation $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et les variables d'endommagement, notées D_i. Le potentiel d'énergie libre de Helmholtz s'écrit alors :

$$\rho\psi = \rho\psi(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, D_i) \tag{3.1}$$

À partir de ce potentiel, sont obtenues les lois d'état qui permettent de définir les variables associées à chacune des variables d'état : $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ pour la déformation $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et Y_i les forces thermodynamiques pour les variables d'endommagement D_i.

$$\sigma = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \qquad Y_i = -\rho\frac{\partial\psi}{\partial D_i} \tag{3.2}$$

Le modèle reste thermodynamiquement admissible tant que la dissipation intrinsèque volumique est positive, c'est à dire [Lorentz, 2008, Lemaitre and Chaboche, 1994] :

$$Y_i\dot{D}_i = -\rho\frac{\partial\psi}{\partial D_i}\dot{D}_i \geq 0 \tag{3.3}$$

L'évolution des variables internes étant généralement définie à partir des forces thermodynamiques Y_i à travers un potentiel de dissipation ϕ (Éq. 3.4), cette condition est assurée si le potentiel de dissipation ϕ choisi est convexe.

$$\dot{D}_i = \frac{\partial\phi(Y_i)}{\partial Y_i} \tag{3.4}$$

Les modèles d'endommagement continu offrent ainsi un cadre général dont la validité thermodynamique est assurée. Ils permettent de décrire un grand nombre de phénomènes et peuvent être adaptés à de nombreux matériaux. Différentes formulations ont ainsi été proposées, notamment pour décrire le comportement des composites stratifiés [Ladeveze and LeDantec, 1992, Allix et al., 1996, Maimi, 2006, Maimí et al., 2007, Lapczyk and Hurtado, 2007, Meer and Sluys, 2009]. Ces modèles sont également particulièrement adaptés à la description du comportement des matériaux composites tissés 3D. Du fait de leur caractère fortement architecturé à l'échelle mésoscopique (échelle du tissage), ces matériaux exhibent des mécanismes d'endommagement diffus, bien représentés par les modèles d'endommagement continu.

3.1.2 Les spécificités du modèle ODM-CMO

Afin de répondre aux spécificités des matériaux composites, et particulièrement des tissés 3D, le modèle Onera Damage Model pour les Composites à Matrice Organique (ODM-CMO) a été développé au sein de l'Onera [Laurin, 2015]. Il fait, depuis plusieurs années, l'objet d'enrichissements successifs et a été appliqué à la modélisation :

- d'éprouvettes élémentaires en traction monotone [Marcin, 2010]
- d'essais de fatigue sur éprouvettes élémentaires [Rakotoarisoa, 2014]
- de la compression de structures composites [Hurmane et al., 2016]
- des impacts basse vitesse / basse énergie [Elias, 2015]
- de la fatigue incrémentale [Angrand, 2016]
- du matage des assemblages [Mounien, 2017]
- de la ruine de structures complexes aéronautiques [Garcia, 2019]

Le modèle reprend le cadre des modèles d'endommagement continu présenté précédemment. Il est formulé en déformation totale (les forces motrices sont comme précédemment fonctions de $\underline{\varepsilon}$). Cependant ce modèle possède certaines spécificités méritant d'être soulevées afin de prendre en compte leur influence lors de la mise en place de méthodes de régularisation, qui sera présentée en Section 3.2.

Principe général du modèle :

Ce modèle a été développé pour permettre une application en bureau d'études et une identification des paramètres à partir des campagnes d'essais à la disposition des industriels. Afin d'être représentatif des nombreux mécanismes d'endommagement présents dans les CMO tissés 3D, le modèle doit proposer une importante diversité dans les phénomènes modélisés tout en conservant une complexité maîtrisée. Le choix de l'échelle macroscopique apparaît alors pertinent afin de permettre un transfert vers l'industrie tout en limitant la complexité des calculs sur des structures complètes. À cette échelle, le choix d'un modèle d'endommagement continu se justifie d'une part par la richesse offerte par ce cadre de modélisation et, d'autre part, par la présence de nombreux endommagements diffus, favorisés par la nature hétérogène du matériau à l'échelle inférieure.

L'endommagement est introduit dans le modèle de manière phénoménologique, c'est à dire à travers son influence et non pas par le biais de grandeurs physiques quantifiables : sa définition ne repose donc pas sur une valeur mesurée expérimentalement (par exemple la densité de fissures). Cette mesure serait par ailleurs délicate à mettre en place à l'échelle macroscopique sur un matériau tissé 3D, une grande partie des mécanismes d'endommagement trouvant leur origine à l'échelle mésoscopique voire microscopique. Les variables d'endommagement sont donc introduites à travers leurs effets sur le comportement global.

Cadre thermodynamique :

Le modèle n'est pas écrit dans le cadre thermodynamique standard : les forces motrices de l'endommagement ont été découplées des forces thermodynamiques et sont définies de manière *ad-hoc*. Contrairement au cadre général présenté précédemment, ces forces ne dérivent pas du potentiel. Ce choix a été effectué afin d'offrir une plus

grande latitude dans la description des mécanismes et de représenter l'importante variété d'endommagements observée dans les composites tissés 3D. Dans ce cas, l'admissibilité thermodynamique doit être vérifiée afin de s'assurer que la dissipation reste positive. Il convient de noter que le modèle a été écrit afin de garantir la thermodynamique de manière simple.

Variables d'endommagement :

Pour certains matériaux tels les composites à matrice céramique, dans lesquels l'orientation de l'endommagement est pilotée par le chargement, les variables d'endommagement peuvent être décrites à l'aide de tenseurs d'ordre 2 ou 4 [Ladevèze et al., 1994, Maire and Lesne, 1998, Desmorat et al., 2018]. Néanmoins ce formalisme souffre d'une grande complexité et de difficultés d'interprétation des résultats. Afin de permettre une approche simplifiée, le modèle ODM-CMO repose sur les constats expérimentaux obtenus pour les tissés 3D à matrice organique : en effet, les endommagements sont dans notre cas fortement orientés par l'architecture [Laurin, 2015]. Le comportement peut ainsi être correctement décrit à l'aide d'un petit nombre de variables scalaires, orientées suivant les directions principales du matériau (chaîne, trame et hors plan).

Les variables d'endommagement sont catégorisées en fonction des mécanismes sous-jacents et du scénario progressif illustré en Fig. 3.1 :

1. **Viscoélasticité / Variables microscopiques** δ_i **:** Dès le début du comportement, un comportement visco-élastique est observé au sein de la matrice. Celui-ci est décrit par des variables δ_i, associées à l'échelle microscopique et activées en début de calcul.
2. **Fissurations matricielles / Variables mésoscopiques** d_i **:** Les premières pertes de rigidité conséquentes sont observées à partir d'une valeur de déformation critique et sont attribuées à la création de fissures matricielles et de décohésions toron/matrice ou entre torons. Elles sont décrites par les variables d_i. Ces variables induisent une chute de rigidité, mais leur évolution est saturée afin d'empêcher tout comportement adoucissant.
3. **Rupture des torons / Variables macroscopiques** D_i **:** Finalement, la rupture des torons entraîne l'apparition d'une macro-fissure et la perte de rigidité complète du matériau.

Par soucis de simplicité, les variables microscopiques δ_i, qui possèdent un effet faible en comparaison de celui induit par les variables d_i et D_i, seront négligées dans ce travail.

Tenseurs d'effet de l'endommagement formulés en souplesse :

Afin de décrire précisément l'influence des mécanismes sur la réponse locale, les variables d'endommagement sont reliées à la contrainte via des tenseurs des effets. Du fait de la forte anisotropie du matériau et des orientations assignées aux variables (traduisant des endommagements suivant les directions matériaux), leurs effets sont fortement anisotropes et doivent affecter un nombre limité de coefficients. Afin de faciliter la manipulation de ces tenseurs et leur interprétation, le choix a été fait de les écrire comme une augmentation de la souplesse, affectant uniquement certains des termes dans le repère matériau. La contrainte s'exprime alors :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\underline{\boldsymbol{S}}}^{-1} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\underline{\underline{\boldsymbol{S}}}_0 + \sum d_i \underline{\underline{\boldsymbol{h}}}_i + \sum D_i \underline{\underline{\boldsymbol{H}}}_i \right)^{-1} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{3.5}$$

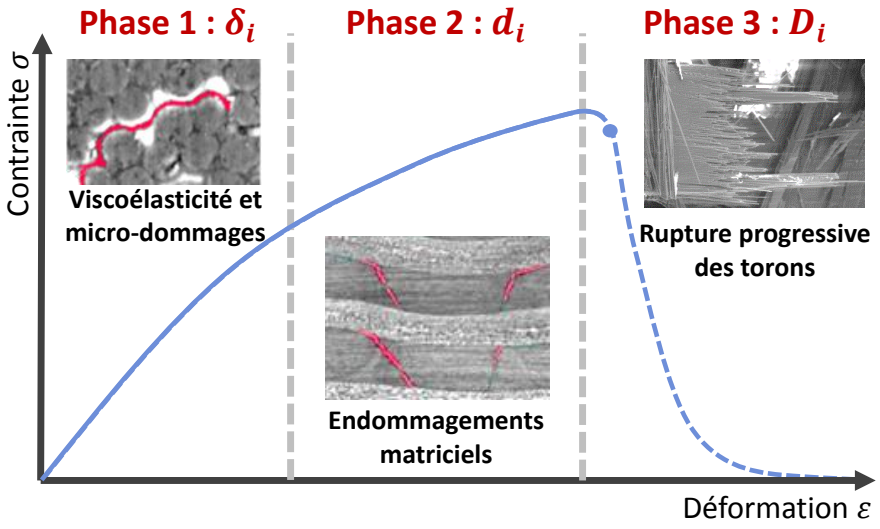


Fig. 3.1 – Scénario d'endommagement et variables internes du modèle ODM-CMO

avec $\underline{\underline{S}}$ la souplesse effective, $\underline{\underline{S}}_0$ la souplesse initiale et $\underline{\underline{h}}_i$, $\underline{\underline{H}}_i$ des tenseurs des effets des endommagements sur la souplesse effective du matériau.

La rupture totale est obtenue lorsque la contrainte devient localement nulle, c'est à dire que $\underline{\underline{S}}$ devient infinie. Dans cette formulation, les variables d'endommagement ne varient donc pas entre 0 et 1, comme classiquement pour les modèles formulés en rigidité, mais entre 0 et $+\infty$. Cette spécificité du modèle ODM-CMO peut avoir des conséquences lors de l'application de certaines méthodes de régularisation présentées en Section 3.2. On peut notamment signaler que l'endommagement n'est plus borné et que celui-ci ne pouvant pas atteindre $+\infty$, une rigidité résiduelle reste toujours présente.

Pour permettre une interprétation plus intuitive des valeurs d'endommagement, une variable indicatrice est fournie à l'aide de la transformation :

$$d_E = \frac{d}{1+d} \Leftrightarrow d = \frac{d_E}{1-d_E} \tag{3.6}$$

La variable d_E ainsi obtenue, variant entre 0 et 1, s'interprète de la même façon que les variables des modèles écrits en rigidité, les deux approches étant strictement équivalentes dans un cas à une dimension (le parallèle n'étant pas exact en 3D).

Phénomènes pris en compte :

Du fait des évolutions successives, le modèle ODM-CMO complet intègre la description d'un grand nombre de mécanismes. Une liste rapide est présentée ci-dessous (pour plus de détails, se référer à [Laurin, 2015]) :

- Comportement visqueux de la matrice : la contribution visqueuse est nécessaire à la prise en compte des effets de vitesse et des effets de fluage. La démarche choisie utilise une formulation visco-élastique spectrale. Elle repose sur la décomposition en mécanismes visqueux élémentaires possédant des temps caractéristiques et des pondérations différentes.
- Déformations résiduelles de cuisson : l'influence de la relaxation des contraintes de cuisson est prise en compte par l'introduction de déformations résiduelles permanentes après création des premières fissures matricielles. Elles permettent de décrire les déformations résiduelles non négligeables observées après décharge.

— Ouverture et la fermeture progressives des fissures : l'endommagement agit de manière unilatérale sur la dégradation des propriétés. Il a été constaté expérimentalement une restauration des propriétés en compression et en cisaillement sur les composites tissés. Le module de Young est cependant recouvré progressivement pour des raisons numériques : afin de décrire ce passage progressif d'un état à l'autre, une fonction de fermeture η_i est introduite. Elle évolue continûment d'une valeur 0 (fissure fermée) à 1 (fissure ouverte) sur un intervalle de part et d'autre de $\underline{\varepsilon} = 0$.

— Déformations positives : le modèle fait l'hypothèse que seules les déformations positives sont susceptibles de générer de l'endommagement. Ces déformations sont obtenues en conservant uniquement les parties positives des déformations principales. Afin de faciliter le calcul des dérivées pour l'obtention des matrices tangentes, une version approximée de cette définition a été proposée [Hurmane et al., 2016].

— Résolution implicite / matrices tangentes : le modèle a été implémenté dans des codes de calculs implicites (Z-set, Abaqus Standard). Une attention particulière a donc été portée sur le calcul des matrices tangentes afin de permettre une bonne convergence des calculs.

3.1.3 Modèle simplifié utilisé dans ces travaux

Dans le cadre de ce travail de thèse, l'objectif principal reste d'étudier la robustesse numérique de la propagation d'une macro-fissure et de retranscrire les effets observés expérimentalement. La prise en compte de l'ensemble des phénomènes évoqués précédemment n'est donc pas nécessaire et une version simplifiée du modèle est utilisée, le reste des mécanismes ayant fait l'objet de thèses préalables.

Ainsi, le modèle se concentre sur les variables des macro-endommagements D_i dans le plan et l'influence éventuelle des variables d_i. L'influence de la viscosité n'est pas considérée. Comme les cas de chargements se limitent pour l'instant à des chargements de traction dans l'une des directions principales du matériau (principalement la trame pour pouvoir confronter les résultats de simulations et expérimentaux), les variables d'endommagement sont réduites à une variable d et une variable D dans la direction de sollicitation. Dans un souci de simplicité, les déformations résiduelles sont également négligées et la fonction d'ouverture/fermeture de la fissure est supposée instantanée et décrite par une fonction créneau.

Ces simplifications permettent une mise en place plus robuste du modèle et une diminution du temps et du coût des calculs. Néanmoins les principes généraux restent les mêmes de sorte que les conclusions obtenues puissent être étendues au modèle complet.

Sous ces conditions, les équations décrivant le modèle sont :

$$\begin{cases} \text{Loi de comportement :} \\ \quad \underline{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, d, D) = \underline{\underline{\boldsymbol{K}}}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, d, D) : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \text{Rigidité effective :} \\ \quad \underline{\underline{\boldsymbol{K}}}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, d, D) = (\underline{\underline{\boldsymbol{S_0}}} + d\underline{\underline{\boldsymbol{h}}} + D\underline{\underline{\boldsymbol{H}}})^{-1} \\ \text{Forces motrices de l'endommagement :} \\ \quad y(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \dfrac{1}{2}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{+} : \underline{\underline{\boldsymbol{\lambda}}} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{+} \qquad \text{et} \qquad Y(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \dfrac{1}{2}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\Lambda}}} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \text{Loi d'évolution de } d \text{ et saturation :} \\ \quad f(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) = d_c \left[1 - exp\left(- \dfrac{< \sqrt{y} - \sqrt{y_0} >_+}{\sqrt{y_C}} \right)^p \right] \\ \text{Loi d'évolution de } D : \\ \quad F(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \left(\dfrac{< \sqrt{Y} - \sqrt{Y_0} >_+}{\sqrt{Y_C}} \right)^P \\ \text{Évolution positives :} \\ \quad d = \underset{\tau<t}{max} f(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) \qquad \text{et} \qquad D = \underset{\tau<t}{max} F(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) \end{cases} \tag{3.7}$$

Les paramètres matériaux consistent alors en : le tenseur de souplesse élastique $\underline{\underline{\boldsymbol{S_0}}}$, les tenseurs d'effets $\underline{\underline{\boldsymbol{h}}}$ et $\underline{\underline{\boldsymbol{H}}}$, les tenseurs $\underline{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}$ et $\underline{\underline{\boldsymbol{\Lambda}}}$ intervenant dans la définition des forces motrices , les seuils d'endommagement y_0 et Y_0, la valeur de saturation de l'endommagement matriciel d_c ainsi que les paramètres de cinétique y_c, Y_C, p et P. La notation $< . >_+$ désigne la partie positive au sens des crochets de Macaulay.

Afin de faciliter les futures comparaisons énergétiques, il est souhaitable que le modèle conduise à une densité volumique d'énergie de rupture e_{rupt} finie. Pour une traction monotone dans un cas 1D, cette densité est équivalente à :

$$e_{rupt} \quad \sim_\infty \quad \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \frac{E_0 \varepsilon}{1 + h d_c + H \left(\frac{\sqrt{Y} - \sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_C}} \right)^P} d\varepsilon \tag{3.8}$$

Cette intégrale ne converge vers une valeur finie que pour des valeurs de $P > 2$, une valeur $P = 3$ a donc été fixée. Dans ce cas, une expression analytique de e_{rupt} peut être obtenue en une dimension.

3.1.4 Conséquences de l'adoucissement

Les variables de macro-endommagement, représentant la rupture des torons de fibres et actives en phase (3) du comportement (Fig. 3.1), introduisent un comportement adoucissant : il se traduit par une diminution de la contrainte lorsque la déformation augmente. En une dimension, cet adoucissement s'écrit donc :

$$\dot{\varepsilon}\dot{\sigma} \leq 0 \tag{3.9}$$

Un critère suffisant d'adoucissement peut être trouvé pour des problèmes à deux ou trois dimensions, sous la forme [Hill, 1958] :

$$\dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}.\dot{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} : \frac{\partial \underline{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} : \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \leq 0 \tag{3.10}$$

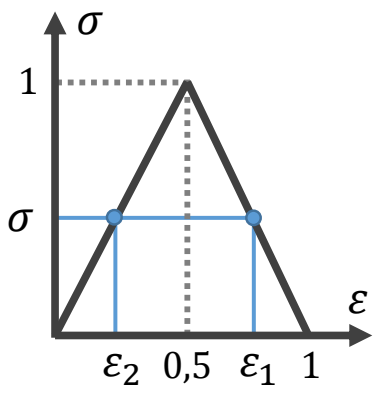


Fig. 3.2 – Perte d'unicité locale sur un problème adoucissant

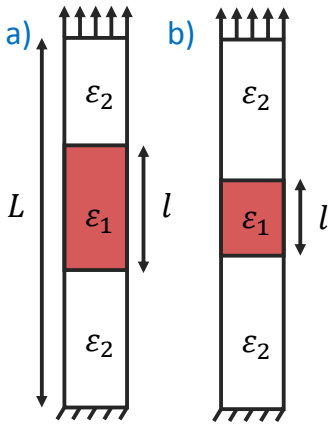


Fig. 3.3 – Perte d'unicité globale sur une barre

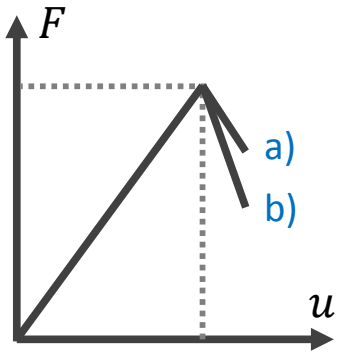


Fig. 3.4 – Influence sur la courbe Force/Déplacement

On peut également tenter de caractériser l'adoucissement en vérifiant l'inégalité 3.9 termes à termes. Cependant, le critère n'est alors pas conservé par changement de base contrairement à celui proposé par Hill.

La présence d'un comportement adoucissant entraîne une perte de régularité et une mauvaise définition du problème d'endommagement continu, soulevées dès la mise en place du formalisme de l'endommagement continu [Hill, 1958]. Cette mauvaise définition est due à la perte d'un certain nombre de conditions nécessaires à l'unicité de la solution [Benallal et al., 1993, Forest and Lorentz, 2004] et en particulier à la perte d'ellipticité des équations en quasi-statique. Cette invalidité a des répercussions importantes sur le problème continu et sa mise en place numérique, notamment :

— **Perte d'unicité de la solution :** Du fait de la présence de l'adoucissement, l'unicité de la solution n'est plus assurée. Afin d'illustrer ce phénomène il est possible de prendre l'exemple d'une barre unidimensionnelle de taille L et de section constante soumise à un déplacement imposé u, illustrée en Fig. 3.3. Localement, le comportement suit une loi triangle telle que présentée en Fig. 3.2. L'équilibre mécanique $div\underline{\boldsymbol{\sigma}} = 0$ se traduit par une contrainte σ constante dans toute la barre. Localement, il n'y a pas unicité de la déformation ε satisfaisant cette valeur de contrainte (Fig. 3.2) : deux valeurs ε_1 et ε_2 sont admissibles. Au niveau de la barre, il y donc, en tout point, deux valeurs de déformations possibles et donc une infinité de champs de déformation satisfaisants l'équilibre mécanique global (bien que ces solutions introduisent des discontinuités de contrainte). Supposons qu'il existe une unique zone de taille l pour laquelle $\varepsilon = \varepsilon_1$, le reste de la barre exhibant une déformation $\varepsilon_2 = 1 - \varepsilon_1$ (Fig. 3.3). Les solutions du problème en fonction des valeurs de l et de u sont présentées en Éq. 3.11.

$$\sigma_1 = \sigma_2 \qquad u = l\varepsilon_1 + (L-l)\varepsilon_2 \qquad \varepsilon_1 = \frac{L-l-u}{L-2l} \qquad \varepsilon_2 = \frac{u-l}{L-2l} \tag{3.11}$$

On voit que selon la longueur l, le comportement global peut être modifié de manière significative. De plus, la zone 1 peut être découpée en un ensemble d'intervalles de longueur cumulée l. L'existence de tels points de bifurcation entre plusieurs solutions est généralisable aux cas 2D et 3D.

— **Localisation de la déformation :** Dans l'exemple précédent, la zone endommagée peut tendre vers 0, entraînant ainsi une très forte localisation de la déformation. Cette localisation représente une solution de plus faible énergie et est privilégiée d'un point de vue variationnel. Elle coïncide avec l'apparition de bandes

de discontinuité [Hill, 1962, Deü, 1997]. Sous certaines conditions, évoquées en Section 3.3.1, ces discontinuités ne peuvent pas se propager et la déformation va effectivement s'accumuler dans une zone d'épaisseur nulle. En pratique, lors de l'usage d'une approximation par éléments finis sous ces conditions, ce phénomène se traduit par une concentration de la déformation sur une bande dont la largeur correspond à un unique élément (ou point d'intégration) : on observe l'apparition d'une bande de localisation.

— **Perte de la convergence au maillage / Énergie dissipée nulle :** Du fait de la localisation, l'énergie dissipée par la mise en place de la fissure est obtenue en intégrant la densité d'énergie de rupture e_{rupt} sur l'épaisseur de la bande endommagée. Avec le raffinement du maillage, cette énergie et le volume endommagé tendent vers 0 et une fissure peut ainsi s'installer sans dissipation d'énergie.

$$\mathcal{U}_{diss} = \int_{Bande} e_{rupt} d\Omega \underset{Bande \to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{3.12}$$

Ce résultat contrevient à la condition de convergence au maillage, fondamentale au formalisme des éléments finis. Non seulement la solution obtenue numériquement avec une discrétisation spatiale plus fine ne converge pas vers une solution unique du problème continu, mais la solution obtenue n'est pas admissible physiquement.

— **Instabilité du problème global :** La localisation de l'endommagement compromet également la stabilité du comportement global. Dans l'exemple de la barre homogène, lorsque la longueur de la zone endommagée diminue, une plus grande partie de l'éprouvette se retrouve en décharge élastique. Cela se traduit par une chute de la courbe Force/Déplacement de plus en plus brutale (Fig. 3.4). Lorsque la bande devient trop petite, une solution n'est possible qu'en revenant à un déplacement plus faible : on observe alors un phénomène de snap-back (Fig. 3.6). Bien que ce phénomène possède parfois un vrai sens physique, il est ici nourri par la localisation de la déformation. Dans ce cas, sur des structures complexes sous chargement statique, la résolution à déplacement imposé croissant nécessite un saut de solution, difficile à atteindre numériquement. La convergence ne peut être atteinte de proche en proche qu'en autorisant localement une diminution du déplacement imposé combinée avec une méthode de résolution adaptée (méthode à longueur d'arc par exemple) ou en autorisant une résolution dynamique pour bénéficier d'une régularisation inertielle.

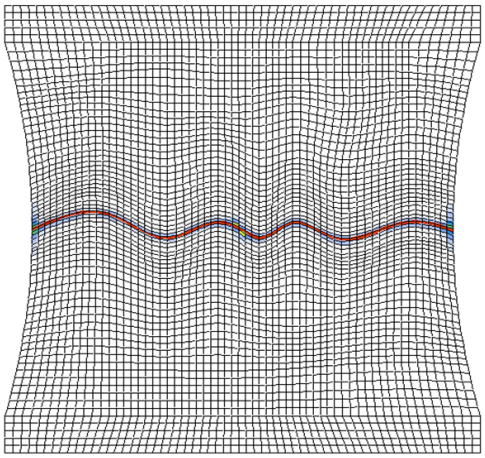


Fig. 3.5 – Localisation de l'endommagement et dépendance au maillage

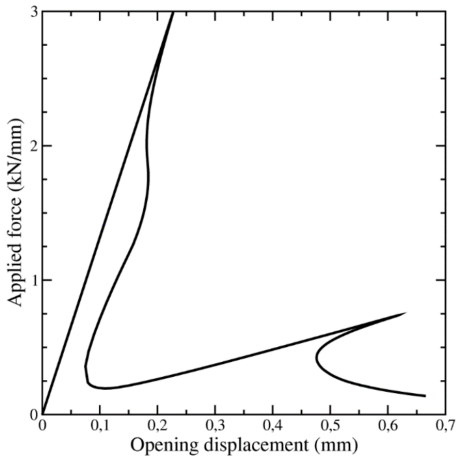


Fig. 3.6 – Instabilité du problème global et phénomène de snap-back

— **Dépendance à la mise en données :** De manière générale, tous ces éléments entraînent une complète dépendance du résultat à l'ensemble des paramètres du maillage. Du fait de la localisation préférentielle de l'endommagement sur une bande d'éléments, la direction de la fissure se retrouve généralement guidée par l'orientation du maillage et non pas par le chargement mécanique. La résolution amène alors en un comportement non-physique, comme c'est par exemple le cas pour un problème symétrique avec un maillage non-symétrique (Fig. 3.5). De surcroît, la réponse macroscopique peut varier considérablement en fonction de la mise en données, jusqu'à avoir un impact sur le régime de propagation (stable, instable).

Synthèse

Le formalisme des modèles d'endommagement continu présenté ici est un puissant outil pour décrire le comportement non-linéaire d'une importante gamme de matériaux, dont les composites tissés 3D à matrice organique. La multiplicité des phénomènes pouvant être pris en compte a ainsi permis depuis plusieurs années le développement du modèle ODM-CMO à l'Onera, adapté aux composites à matrice organique. Ce modèle a en particulier été validé sur un grand nombre de cas de chargements et appliqués à des structures industrielles complexes.

Cependant, la dégradation finale du matériau est, dans ces modèles, introduite par le biais d'un comportement adoucissant. Cet adoucissement est la source de problèmes qui compromettent la bonne utilisation de ces modèles pour décrire l'apparition de macrofissures et leur propagation. De fait, les pertes de robustesse et de représentativité observées peuvent entraver leur transfert vers les bureaux d'études industriels. Afin de pallier ces difficultés, des méthodes dites de régularisation ont été introduites dans les modèles d'endommagement continu. Elles visent à retrouver la bonne régularité des équations et en particulier l'unicité de la solution, l'indépendance au maillage et une délocalisation de l'endommagement. Ces méthodes seront présentées dans la section suivante et appliquées à la version simplifiée du modèle ODM-CMO présentée.

3.2 Les méthodes de régularisation numérique

Les méthodes de régularisation évoquées ici reposent sur trois approches :

— le contrôle de l'énergie dissipée : cette approche assure le contrôle de l'énergie nécessaire à la propagation de fissure et son indépendance aux paramètres du maillage et de chargement. C'est le cas des méthodes Crack-Band et Phase-Field.

— le contrôle de l'étalement de l'endommagement : afin de pallier le phénomène de localisation, certaines méthodes introduisent un étalement forcé de l'endommagement, souvent à travers un opérateur spatial ou l'introduction de terme de gradient au sein des équations (Non-Local et Phase-Field).

— le contrôle de la vitesse d'évolution de l'endommagement : le comportement est dans ce cas dépendant de la vitesse de chargement et la mise en place de la fissure est retardée ou bornée, entraînant également une délocalisation de l'endommagement. Ces modèles, visco-endommageables ou Taux Limité, sont généralement pensés pour des cas dynamiques mais ont été appliqués à la régularisation de problèmes quasi-statiques.

Plusieurs de ces approches peuvent être utilisées de façon conjointe. Les différentes méthodes évoquées seront présentées par la suite et appliquées au modèle ODM simplifié.

D'autres approches existent aussi afin de décrire de manière robuste l'endommagement et la rupture, plus ou moins proches du formalisme des modèles d'endommagement : second gradient [Mindlin, 1965], XFEM [Moës et al., 1999], Phantom Node [Chen et al., 2014], Thick level Set [Lé et al., 2018] etc. Elles n'ont pas été retenues ici, de part l'absence de travaux préliminaires, leur difficulté de mise en place ou pour se concentrer sur des méthodes applicables en bureau d'étude.

3.2.1 Modèle d'endommagement retardé : visco-endommagement et Taux limité

Présentation

Une des approches utilisée pour retrouver la régularité du problème continu est l'introduction d'une dépendance temporelle au sein de la loi d'évolution de l'endommagement : on parle alors de modèle de visco-endommagement, d'endommagement retardé ou d'effet retard [Needleman, 1988, Ladeveze and LeDantec, 1992]. Ces modèles font intervenir selon les implémentations un paramètre de viscosité, un temps caractéristique ou un taux d'endommagement maximal.

Ce paramètre, qui introduit une dépendance temporelle, offre des possibilités de correspondance avec une longueur caractéristique lors d'une utilisation dans un cas dynamique, à travers la vitesse de propagation des ondes élastiques [Suffis et al., 2003]. Le paramètre introduit est alors considéré comme un paramètre matériau. Dans un cas quasi-statique, cette correspondante est plus critiquable, le sens physique de cette grandeur temporelle n'étant pas correctement défini. Ces modèles ont cependant été appliqués au cas quasi-statique, du fait de leur importantes propriétés régularisantes et de leur simplicité de mise en œuvre dans les codes éléments finis. Le paramètre de temps caractéristique revêt alors un caractère purement numérique et est choisi de manière à permettre une délocalisation de l'endommagement et une bonne convergence des calculs, tout en restant suffisamment faible pour ne pas introduire une dissipation numérique trop importante.

En fonction du type de mise en œuvre choisie, ces modèles restituent la bonne définition du problème continu [Deü, 1997]. En particulier, les équations deviennent hyperboliques et permettent de retrouver l'unicité de la solution. L'introduction d'un retard à l'endommagement entraînant une délocalisation, on retrouve la propriété de convergence au maillage et une indépendance à celui-ci pour une discrétisation spatiale suffisamment fine. Enfin, l'effet visqueux empêche les sauts de solution et améliore fortement la convergence des calculs.

Mise en place sur le modèle simplifié

En plus de leurs bonnes propriétés mathématiques, ces modèles sont généralement faciles d'implémentation. Ils se contentent de modifier la fonction d'évolution de l'endommagement, celle-ci ne s'écrivant plus sur D mais sur $\dot{D}$. Deux catégories de modèles sont utilisées par la suite.

— **Le modèle Effet Retard/Visco-endommagement**, faisant intervenir un simple retard à l'évolution de l'endommagement, qui peut être interprété comme un re-

tard visqueux [Ladeveze and LeDantec, 1992]. Le modèle fait intervenir un temps caractéristique τ et l'équation locale d'évolution de D devient alors :

$$\dot{D} = \frac{1}{\tau}(F(\underline{\varepsilon}) - D) \tag{3.13}$$

— **Le modèle à Taux Limité**, qui borne la vitesse d'évolution de l'endommagement [Deü, 1997, Allix et al., 2003]. On introduit alors deux paramètres caractéristiques, $\tau = 1/\dot{D}_{max}$ et un paramètre a contrôlant l'activation de la régularisation. L'équation d'évolution de l'endommagement s'écrit dans ce cas :

$$\dot{D} = \frac{1}{\tau}\left(1 - e^{-a<F(\underline{\varepsilon})-D>_+}\right) \tag{3.14}$$

Ces méthodes de régularisation ont été initialement introduites pour des modèles écrits avec des variables évoluant entre 0 et 1. Dans le cas d'un modèle de type ODM-CMO, où les variables d'endommagement varient entre 0 et $+\infty$, les résultats peuvent être significativement différents. Afin de se rapprocher de l'écriture classique, la régularisation peut être effectuée sur D_E puis la variable D est calculée :

$$F_E = \frac{F}{1+F} \rightarrow \dot{D}_E = f(F_E - D_E) \rightarrow D = \frac{D_E}{1 - D_E} \tag{3.15}$$

Pour une écriture de type visco-endommagement, des différences de résultats sont observées mais le fonctionnement général reste le même en quasi-statique et aucune des deux écritures (sur D ou sur D_E) ne semble être préférable à l'autre. Lors d'une régularisation Taux Limité, de grandes différences de comportement sont observées entre les deux écritures. En effet, dans le cas de D variant entre 0 et $+\infty$, $\dot{D}$ varie de manière exponentielle en absence de régularisation. Le choix d'une valeur limite $\dot{D}_{max}$ (et donc de τ) devient alors difficile : si celle-ci est trop élevée, la régularisation entre en jeux après la perte de la majeure partie de la rigidité et ne permet pas de délocaliser. Au contraire, si la valeur est trop faible, D est freinée de manière trop importante et localement le comportement n'atteint jamais une rigidité nulle. L'endommagement se propage alors rapidement à la quasi-totalité de l'éprouvette pour satisfaire les conditions de chargement. L'utilisation d'un taux limité sur une variable d'endommagement non bornée doit donc être proscrite et l'écriture sur D_E sera utilisée par la suite.

Formulation explicite à partir d'un schéma de Newton implicite

L'évolution de D n'est plus obtenue explicitement mais nécessite la résolution d'une équation différentielle, le plus souvent réalisée à partir d'un algorithme de Newton local. Cependant dans le cas d'un modèle à endommagement retardé classique (visco-endommageable), une formulation directe peut être obtenue à partir d'un schéma d'Euler implicite :

$$\dot{D}_i = \frac{D_i - D_{i-1}}{\Delta t} = \frac{1}{\tau}(F(\underline{\varepsilon}) - D_i) \tag{3.16}$$

$$D_i = D_{i-1} + \frac{\Delta t}{\tau + \Delta t}\left(F(\underline{\varepsilon}) - D_{i-1}\right) \tag{3.17}$$

Une formulation explicite a également été proposée pour la forme en taux limité [Desmorat et al., 2010]. Elle est obtenue en dérivant par rapport au temps la relation d'évolution du taux limité pour obtenir une équation du second ordre en $\dot{D}_i$. En prenant la

solution la plus faible (la plus élevée donnant souvent des valeurs de $\dot{D}_i$ supérieures à $1/\tau$), on obtient :

$$\dot{D}_i = \frac{A}{2a\tau\Delta t}\left(1-\sqrt{1-4\frac{B}{A^2}}\right) \text{ avec : } A = a\Delta t + \tau + a\Delta t\tau\dot{F} \tag{3.18}$$

$$B = a\Delta t\tau(a\Delta t\dot{F} + \tau\dot{d}_{i-1}) \tag{3.19}$$

On peut notamment vérifier le bon comportement de la formule quand $\dot{F}$ est grand. On a alors :

$$A \sim a\Delta t\tau\dot{F} \; ; \; B \sim a^2\Delta t^2\tau\dot{F} \text{ donc } \dot{D} = \frac{\dot{F}}{2}\left(1-\sqrt{\frac{4}{\tau^2\dot{F}}}\right) \sim \frac{1}{\tau} \tag{3.20}$$

Cependant, dans le cadre de notre implémentation, le résultat obtenu à l'aide de la formulation explicite n'est pas toujours en accord avec celui obtenu lors de l'utilisation d'une méthode de Newton-Raphson locale. Ces différences sont présentées sur des résultats de simulation en Fig. 3.7. On observe une saturation de l'endommagement lors de l'utilisation de la formulation explicite, qui entraîne une divergence sur la courbe contrainte/déformation. La valeur de $\dot{D}$ ne respecte plus formellement l'équation d'évolution du taux limité (Éq. 3.14). Ce comportement peut être quantifié par l'erreur entre la consigne et la valeur de $\dot{D}$, dans notre cas $erreur = (\dot{D}_E - 1/\tau(1-e^{-a(F_E-D_E)}))/\dot{D}_E$. Celle-ci augmente de manière continue avec l'évolution de l'endommagement, en particulier lorsque les pas de temps sont petits. Ce comportement n'a pas été observé de manière systématique et ses causes n'ont pas été formellement identifiées. On peut cependant remarquer que lorsque le pas de temps diminue :

$$A \underset{\Delta t\to 0}{\sim} \tau \; ; \; B \underset{\Delta t\to 0}{\sim} a\Delta t\tau\dot{D} \text{ donc } \dot{D}_i \underset{\Delta t\to 0}{\sim} \dot{D}_{i-1} \tag{3.21}$$

Contrairement à la formulation explicite obtenue sur le modèle visco-endommagé, l'équation discrétisée temporellement ne semble plus tendre vers l'équation continue lorsque Δt tend vers 0. $\dot{D}$ parait ne plus dépendre de la vitesse de chargement et des paramètres τ et a. En absence d'une compréhension plus précise des résultats obtenues avec la formulation explicite dans le cadre de notre implémentation, celle-ci a été abandonnée au profit de l'utilisation d'une méthode de Newton-Raphson locale.

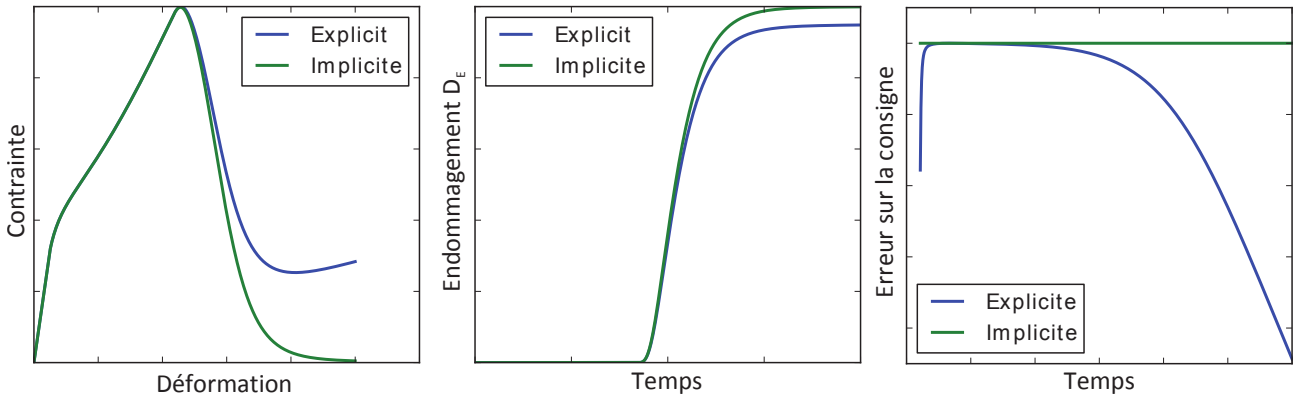


Fig. 3.7 – Erreur de la résolution explicite du taux limité sur D_E

3.2.2 Crack Band

Présentation

L'utilisation des modèles Crack Band a été initialement introduite pour les bétons afin de traiter le problème de diminution de l'énergie dissipée avec le raffinement du maillage et l'impossibilité de faire coïncider les modèles d'endommagement continu avec les approches énergétiques reposant sur G_C [Bažant, 1982]. La méthode tire parti de la localisation de l'endommagement sur une unique bande d'éléments pour contrôler l'énergie dissipée par cette bande. Elle a depuis été appliquée à la modélisation de l'endommagement des composites [Lapczyk and Hurtado, 2007, Maimí et al., 2007, Pinho, 2005].

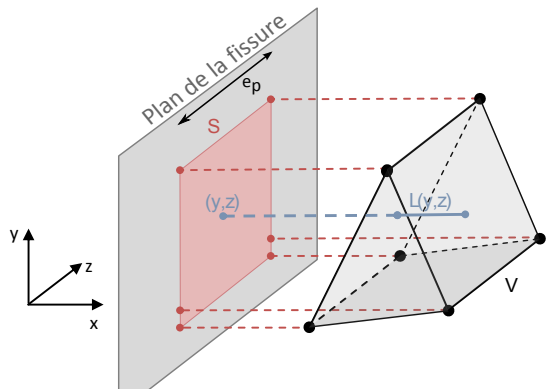
Lors de l'utilisation d'une régularisation Crack Band, le comportement local en chaque point de Gauss est modifié en prenant en compte une longueur d'épaisseur caractéristique de l'élément L_C de manière à contrôler l'énergie dissipée. Cette approche impose que la densité d'énergie de rupture e_{rupt} soit finie (ce qui n'était pas le cas pour un modèle de type ODM-CMO avec une puissance $P \leq 2$). Les valeurs des paramètres de la loi d'endommagement sont fixées de manière à vérifier :

$$e_{rupt} = \frac{G_C}{L_C} \tag{3.22}$$

On peut noter que la méthode Crack Band n'est pas en soi une méthode de régularisation. Cette méthode corrige uniquement le problème de dépendance à la taille de maille en introduisant G_C dans les équations. Cependant, cette méthode n'est définie et introduite qu'au niveau des éléments finis et n'a pas d'équivalent pour le problème continu. Il n'y a donc pas de réelle notion de convergence au maillage puisqu'il n'y pas de solution continue correspondante. De plus, les problèmes de non-unicité et d'instabilité globale ne sont *a priori* pas résolus. La dépendance aux paramètres généraux du maillage reste importante : en particulier il n'a aucune assurance que l'endommagement s'installera effectivement sur une unique bande d'éléments et la direction de la fissure reste pilotée par l'orientation du maillage.

Calcul de la longueur

Le calcul de la longueur caractéristique L_C de l'élément dans la direction normale à la surface de fissure est un élément essentiel de la bonne mise en place de la méthode Crack Band. Ce problème reste délicat lorsque l'orientation de la fissure n'est pas connue *a priori*. Cependant, dans le cadre des modèles de type ODM-CMO, pour lesquels les variables d'endommagement sont assignées aux directions matériau et donc connues à l'avance, cela revient à calculer la longueur caractéristique de l'élément selon les directions principales du matériau. Pour des soucis de simplicité de notation, on suppose ici que les directions principales $\{1, 2, 3\}$ coïncident avec les axes $\{Ox, Oy, Oz\}$ et les longueurs correspondantes sont notées L_x, L_y et L_z.



La longueur L_x associée à D_1 est alors définie, comme présenté en Fig. 3.8, par :

$$L_x = \underset{(y,z)\in S}{\text{moyenne}}\{L(y,z)\} \tag{3.23}$$

— $L(y,z)$ la longueur traversant l'élément au point (y,z)

— S l'ensemble des points (y, z) pour lesquels $L(y, z)$ n'est pas nulle, c'est à dire faisant partie de la projection de l'élément sur le plan (yOz)

Cette équation se réécrit en faisant intervenir le volume V de l'élément :

$$L_x = \frac{1}{\int_S dS} \int_S L(y,z) dS = \frac{V}{S} \tag{3.24}$$

Afin d'obtenir L_x, il faut donc déterminer la projection de l'élément dans le plan normal à la direction souhaitée. Les maillages utilisés sont obtenus par extrusion d'éléments 2D suivant la direction Oz, les projections d'éléments $c3d6$ et $c3d8$ dans les plans Oxz et Oyz sont rectangulaires de largeur e_p (épaisseur de l'élément). L_x est alors obtenue par :

$$L_x = \frac{V}{e_p(y_{max} - y_{min})} \tag{3.25}$$

Pour une direction n quelconque ne coïncidant pas avec le repère global, L_n est obtenu grâce à la projection des coordonnées s de chacun des nœuds de l'élément :

$$L_n = \frac{V}{e_p(\left|\underline{\boldsymbol{s}} - \langle \underline{\boldsymbol{s}} | \underline{\boldsymbol{n}} \rangle \underline{\boldsymbol{n}}\right|_{max} - \left|\underline{\boldsymbol{s}} - \langle \underline{\boldsymbol{s}} | \underline{\boldsymbol{n}} \rangle \underline{\boldsymbol{n}}\right|_{min})} \tag{3.26}$$

Mise en place sur le modèle simplifié

La méthode Crack Band a fait l'objet d'implémentations sur des lois permettant un contrôle simple de e_{rupt}, parmi lesquelles les lois triangles [Lapczyk and Hurtado, 2007]. Dans le cas des modèles de type ODM-CMO et pour $P = 3$ fixé, e_{rupt} est contrôlé par 2 paramètres : Y_0 (déterminé à partir du seuil d'endommagement $\underline{\varepsilon}_0$) et Y_C (vitesse d'évolution de l'endommagement). Avec deux paramètres, on choisit donc de satisfaire les deux contraintes suivantes :

$$\begin{cases} e_{rupt}(Y_C, Y_0) = \frac{G_C}{L_C} & \text{Contrôle de la densité volumique d'énergie dissipée} \\ \max\limits_{\underline{\varepsilon}} \{\underline{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\varepsilon}, Y_C, Y_0)\} = \underline{\boldsymbol{\sigma}}_{max} & \text{Contrôle de la contrainte maximale} \end{cases} \tag{3.27}$$

Pour un modèle de type ODM-CMO, cette résolution s'avère plus délicate que dans le cas d'une simple loi triangle. Si des expressions analytiques de e_{rupt} et σ_{max} peuvent être trouvées en unidimensionnel, celles-ci sont plus complexes à obtenir dans le cas 3D. La détermination des paramètres est alors effectuée numériquement en début de calcul. Des exemples des formes de lois d'évolution obtenues sont présentés en Fig. 3.9.

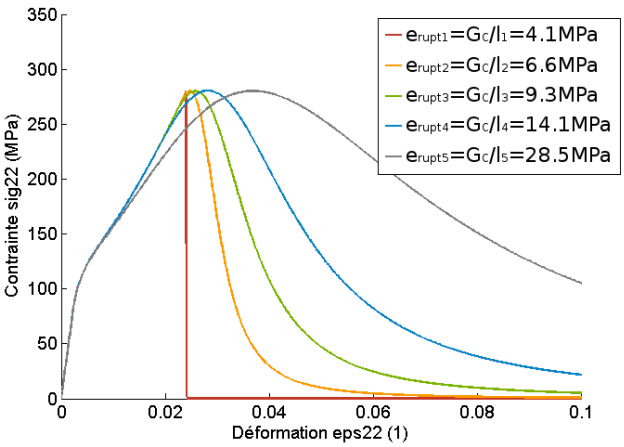


Fig. 3.9 – Modification du comportement local contrainte/déformation avec la méthode Crack-Band sur le modèle ODM-CMO

Plusieurs phénomènes, inhérents à l'utilisation du Crack-Band ou propres à son application au modèle ODM-CMO, peuvent compromettre son utilisation comme méthode de régularisation :

— Dans le cas d'ODM-CMO, la modification des paramètres d'adoucissement peut modifier le comportement avant adoucissement et donc la réponse globale même dans des zones non adoucissantes comme illustré en Fig. 3.9

— Il existe des valeurs minimales et maximales de e_{rupt} pour lesquelles un jeu de paramètres (Y_C, Y_0) satisfaisant peut être trouvé. Dans notre cas, l'intervalle des valeurs admissibles de e_{rupt} s'étale sur un ordre de grandeur. À G_C fixé, la taille de maille doit donc être comprise dans un intervalle relativement restreint.

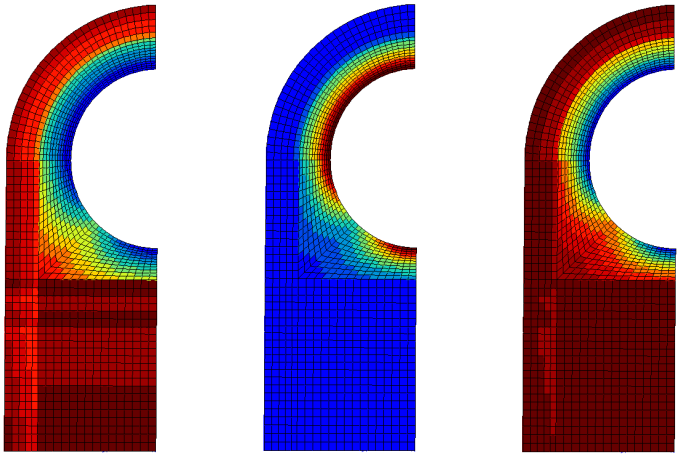
— Plus les éléments sont petits, plus la densité volumique d'énergie à dissiper est importante. Pour de petits éléments, elle n'est alors totalement dissipée que pour des valeurs de déformation extrêmement élevées, qui ne sont pas forcément atteintes lors du calcul, entraînant une erreur sur le G_C apparent.

Détails de la méthodologie

Dans la pratique, la mise en place de la méthode Crack-Band s'effectue de la façon suivante :

1. L'utilisateur fournit des valeurs de G_C et $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{max}$ à respecter et des valeurs initiales pour Y_0 et Y_C
2. Les longueurs caractéristiques L_i sont calculées suivant les directions des variables d'endommagement sur chaque élément
3. En fonction de $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{max}$ et des autres paramètres de la loi de comportement, les valeurs extrémales e_{rupt}^{min} et e_{rupt}^{max} admissibles sont déterminées
4. On en déduit les longueurs caractéristiques admissibles, définies par $L_{min} = G_C/e_{rupt_max}$ et $L_{max} = G_C/e_{rupt_min}$
5. Lors de la première itération, on résout le système 3.27 pour chaque élément par méthode Newton-Raphson si la longueur caractéristique de l'élément est comprise entre L_{min} et L_{max}
6. Si $L_C < L_{min}$ (respectivelent $L_C > L_{max}$) on attribue à l'élément les paramètres permettant d'obtenir e_{rupt}^{max} (resp. e_{rupt}^{min}).

On obtient alors un champ de paramètres Y_C et Y_0 utilisés lors du calcul. Un exemple d'application de cette méthodologie est présenté en Fig. 3.10, sur une chape composite afin de fournir un exemple de structure aéronautique.



(a) L_C **(b)** Y_C **(c)** $\underline{\varepsilon}_0$

Fig. 3.10 – Mise en donnée de la méthode Crack-Band sur une chape composite avec le modèle simplifié

3.2.3 Modèles Non-Locaux

Présentation

Les méthodes non-locales ont été introduites par Pijaudier-Cabot et Bazant au milieu des années 80 [Pijaudier-Cabot and Bažant, 1987, Bažant and Pijaudier-Cabot, 1988] et ont depuis fait l'objet de nombreuses variantes [Peerlings et al., 1996a, Jirásek, 1998, Lorentz and Andrieux, 1999, Desmorat et al., 2015, Lorentz, 2017], dont des applications aux matériaux composites [Germain, 2006]. Elles reposent sur la délocalisation de l'endommagement sur une zone caractéristique à travers l'utilisation d'un opérateur spatial. Les modèles non-locaux représentent une famille de modèles d'endommagement continu enrichis du fait de la dépendance spatiale des variables internes, qui ne sont plus uniquement définies à partir de quantités locales. On s'affranchit donc du "principe de l'état local" utilisé précédemment dans les modèles. Cette interaction non-locale a été introduite afin de rendre compte de deux phénomènes :

— Elle permet de corriger la forte dépendance au maillage évoquée en Section 3.1.4 et notamment les problèmes de localisation de l'endommagement sur une unique bande d'éléments. En effet ces modèles pénalisent l'apparition de gradients trop importants sur les variables délocalisées et permettent de retrouver une bonne définition du problème [Forest and Lorentz, 2004].

— L'influence perçue entre des points proches du solide permet de transcrire l'interaction entre les micro-fissures observée à petit échelle. En effet, ces effets entre micro-fissures (entraînement ou inhibition), observés dans certains matériaux, amènent à l'utilisation de modèles continus à même de prendre en compte les interactions dans des voisinages proches. [Bažant Zdeněk P. and Jirásek Milan, 2002, Pijaudier-Cabot et al., 2004, Desmorat et al., 2015, Solano and Beatriz, 2012].

Ces modèles se sont développés à travers différents choix d'opérateurs de délocalisation, appliqués à l'une des variables du problème continu local : déformation, force motrice ou endommagement. On obtient ainsi des grandeurs "délocalisées", notées $\bar{\underline{\varepsilon}}$, $\bar{Y}$ ou $\bar{D}$. Les premières versions proposées reposent sur un opérateur intégral associé à une

fonction de support ω, faisant intervenir une longueur interne l_c :

$$\bar{D}(x) = \int_{\Omega} \omega(||x-y||)D(y)dy \tag{3.28}$$

Cette forme a amené à l'utilisation d'une grande variété de fonctions de support, parmi lesquelles des supports rectangulaires, des paraboles, des fonctions cosinus, gaussiennes ou en cloche. En utilisant une série de Taylor de ω tronquée aux deux premiers termes, Peerlings [Peerlings et al., 1996a] a mis en évidence que ces modèles pouvaient être réécrits à partir d'une équation faisant intervenir le laplacien de la quantité délocalisée (Éq. 3.29). La correspondance est exacte si la fonction ω est une fonction de Green telle que les termes supérieurs soient nuls.

$$\bar{X} - l_c^2 \Delta \bar{X} = X \tag{3.29}$$

Les modèles Non-Locaux sont ainsi intégrés au groupe plus large des modèles à gradient (dont font également parti les modèles Phase-Field présentés en Section 3.2.4). Dans le cas des modèles non-locaux utilisés par la suite, ce gradient est explicite : le terme source (apparaissant à gauche de l'équation) ne fait pas intervenir la variable $\bar{X}$ sur laquelle agit la délocalisation.

Ces modèles font également intervenir un paramètre de longueur à travers le support de la fonction ω en écriture intégrale ou le paramètre de longueur l_c en écriture à gradient. Ces paramètres de longueurs sont, dans certaines implémentations, considérés comme des paramètres matériaux [Geers et al., 1998a, Solano and Beatriz, 2012, Grégoire et al., 2015]. Une procédure d'identification adaptée doit alors être mise en place. À l'inverse, les longueurs sont parfois considérées comme des paramètres numériques introduits afin de régulariser le calcul et leur valeur est choisie sur la base des performances numériques.

Choix de la variable à délocaliser

Les auteurs ont fait porter la délocalisation sur la déformation $\underline{\varepsilon}$ (généralement à travers une déformation équivalente scalaire ε_{eq}), sur la force motrice de l'endommagement Y ou sur la variable d'endommagement D [Jirásek, 1998, Forest and Lorentz, 2004]. La délocalisation des variables $\underline{\varepsilon}$ et Y s'interprète comme une délocalisation de la source de l'endommagement, alors que l'application à D revient à délocaliser les effets de l'endommagement. Aucun consensus définitif ne semble émerger sur le choix de cette variable. Cependant :

— Les modèles justifiant l'interaction non-local par des considérations micro-mécaniques tendent à délocaliser les sources de l'endommagement $\underline{\varepsilon}$ ou Y [Pijaudier-Cabot et al., 2004, Desmorat et al., 2015]

— La délocalisation ne doit pas porter sur une variable bornée (par exemple D variant entre 0 et 1). Dans le cas contraire, la répartition spatiale de l'endommagement empêche d'atteindre la valeur maximale au centre de la fissure. Une rigidité résiduelle importante reste localement présente et empêche la rupture macroscopique de la structure [Jirásek, 1998].

Non-local à longueur interne variable

Parmi l'importante littérature disponible sur les modèles Non-Locaux, des formulations faisant varier la longueur interne ont été proposées. Cette variation de la longueur interne peut être justifiée par trois facteurs :

— Les modèles non-locaux peuvent exhiber un problème de diffusion excessive de l'endommagement. On observe alors une propagation continue de l'endommagement de proche en proche, même après le passage de la fissure, dans des zones déchargées ou en avant de la pré-entaille. Cet étalement indésirable peut être maîtrisé par l'utilisation d'une longueur interne variable [Geers et al., 1998b].

— La localisation expérimentale des phénomènes d'endommagement au fur et à mesure de la mise en place de la fissure peut mettre en évidence une évolution des longueurs caractéristiques [Lefort et al., 2015]

— La justification d'un comportement non-local à l'aide de considérations micro--mécaniques d'interaction des micro-cavités peut amener à faire varier la longueur d'interaction au cours de la croissance et de la coalescence de celle-ci [Pijaudier-Cabot et al., 2004, Desmorat et al., 2015]

Ces différentes justifications ont cependant amené les auteurs à faire évoluer les longueurs internes dans des sens parfois opposés. Ainsi Pijaudier-Cabot *et al.* [Pijaudier-Cabot et al., 2004] ont proposé une évolution de l_c de 0 à une valeur maximale l_c, pilotée par ε_{eq} au fur et à mesure de la progression de l'endommagement (la fonction f évolue de 0 à 1).

$$\tilde{l}_c = l_c f(\varepsilon_{eq}) \tag{3.30}$$

Desmorat *et al.* [Desmorat et al., 2015] ont quant à eux proposé une diminution de la longueur avec l'augmentation de D (évoluant dans ce cadre entre 0 et 1), sur la base de l'augmentation des temps de trajet des ondes élastiques avec le développement de l'endommagement :

$$\tilde{l}_c = l_c \sqrt{1-D} \tag{3.31}$$

Enfin Lefort *et al.* [Lefort et al., 2015] ont mesuré expérimentalement des variations de la longueur d'étalement en fonction de l'ouverture de la fissure. Le sens de variation de cette longueur semble dépendre de la structure étudiée.

Mise en place sur le modèle simplifié

La mise en œuvre sur le modèle simplifié a été appliquée sur la variable Y à l'aide de l'écriture à gradient, afin de délocaliser une variable scalaire non bornée. Les équations du modèle simplifié (Eq. 3.7) sont alors remplacées par :

$$\begin{cases} \text{Force motrice de l'endommagement :} \\ \quad Y(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \dfrac{1}{2}\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{\Lambda}}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \\ \text{Délocalisation de la force motrice :} \\ \quad \bar{Y} - l_c^2 \nabla^2 \bar{Y} = Y \\ \text{Condition limite de la délocalisation :} \\ \quad \nabla \bar{Y} . \overrightarrow{n} = 0 \\ \text{Loi d'évolution de } D : \\ \quad F(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \left(\dfrac{< \sqrt{\bar{Y}} - \sqrt{Y_0} >_+}{\sqrt{Y_C}} \right)^P \end{cases} \tag{3.32}$$

Le calcul de $\bar{Y}$ s'inspire du travail réalisé dans le cadre de la thèse de N. Germain [Germain, 2006] ayant introduit ce formalisme dans la suite Z-Set. La résolution de l'équation 3.29 nécessite la mise en place d'un élément adapté : elle fait intervenir un

Laplacien et ne peut donc pas faire l'objet d'une résolution locale aux points de Gauss avec un élément classique. L'élément est enrichi des degrés de liberté $\bar{Y}$. Une discrétisation quadratique est utilisée suivant le champ de déplacement. La discrétisation est linéaire en $\dot{Y}$, de sorte que $\underline{\varepsilon}$ et $\bar{Y}$ évoluent tous les deux linéairement sur l'élément. Ce choix est effectué pour éviter le comportement en "dent de scie" qui peut être observé sur σ si $\underline{\varepsilon}$ et $\bar{Y}$ n'ont pas le même degré d'interpolation [Peerlings, 1999]. L'élément développé par N. Germain a été adapté aux besoins du modèle simplifié.

Une deuxième méthode de résolution a également été mise en place durant la thèse, inspirée des méthodes de résolutions alternées des modèles Phase-Field [Bourdin et al., 2000], présentés en Section 3.2.4. Ces modèles sont en effet communément résolus de manière alternée : le problème mécanique (équilibre des champs de déplacements) et le problème d'endommagement (délocalisation de Y) sont résolus séparément, chacun prenant le résultat de l'autre en paramètre d'entrée. Cette résolution nécessite de faire dialoguer les deux solveurs et de mettre en place des éléments possédant $\bar{Y}$ comme seul degré de liberté pour le problème d'endommagement. La convergence globale est obtenue par méthode du point fixe à partir d'un critère de stationnarité. Les détails de la mise en place sont présentés en Annexe C.

3.2.4 Modèles Phase-Field

Les modèles Phase-Field reposent sur une écriture variationnelle de l'inégalité de Griffith (Section 1.1.1), proposée par Francfort et Marigo [Francfort and Marigo, 1998]. Le problème de propagation est réécrit comme un problème de minimisation de l'énergie contenue dans le volume Ω du solide, les inconnues du problème étant le champ de déplacement $\underline{\boldsymbol{u}}$ et la surface de fissure Γ.

$$(\underline{\boldsymbol{u}}, \Gamma) = \arg \min_{\underline{\boldsymbol{u}}, \Gamma} \left(\int_\Omega \psi_0(\underline{\boldsymbol{u}}(x)) dx + G_C \int_\Gamma dS \right) \tag{3.33}$$

où ψ_0 est la densité d'énergie élastique. Du fait de la difficulté à résoudre numériquement un problème ayant pour inconnue une surface de fissure, Bourdin [Bourdin et al., 2000] a proposé une écriture approchée remplaçant la présence d'une surface de discontinuité par une variable continue D traduisant la présence de la fissure :

$$E(\underline{\boldsymbol{u}}, \Gamma) = \int_\Omega \psi_0(\underline{\boldsymbol{u}}) dx + G_C \int_\Omega f(D) dx = \int_\Omega \psi_0(\underline{\boldsymbol{u}}) dx + G_C \int_\Omega \frac{\alpha(D)}{4 l_c} + l_c |\nabla D|^2 dx \tag{3.34}$$

La zone de crête $D = 1$ traduit la position de la fissure (Fig. 3.12). Cette approche possède l'avantage de tendre vers le problème avec fissure discrète, et donc la théorie de Griffith, lorsque la longueur l_c tend vers zéro. Deux formulations ont été proposées pour α : AT1 pour laquelle $\alpha(D) = D$ et AT2 pour laquelle $\alpha(D) = D^2$ [Pham et al., 2011]. Ces modèles présentent des différences de comportements (voir Fig. 3.11). En particulier, la formulation AT1 possède une rupture de pente dans la courbe contrainte/déformation, contrairement à AT2, mais introduit naturellement un seuil d'activation de D. Dans le cas d'AT2 au contraire, D progresse dès que $\underline{\varepsilon} > 0$. Les modèles de type AT2 restent cependant plus répandus dans la communauté.

Les modèles Phase-Field ont fait l'objet de nombreux développements [Miehe et al., 2010, Ambati et al., 2015], parmi lesquels l'introduction d'une différentiation traction / compression à partir des parties positives et négatives du tenseur des déformations.

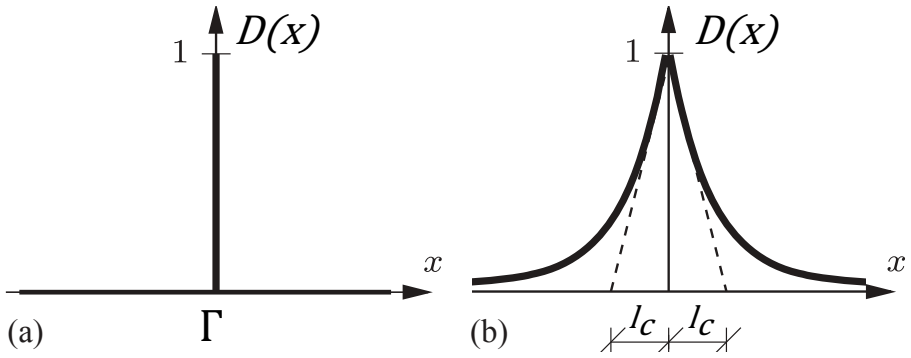


Fig. 3.11 – Comparaison des comportements obtenus sur un problème homogène pour 2 variantes des modèles Phase-Field [Miehe et al., 2010]

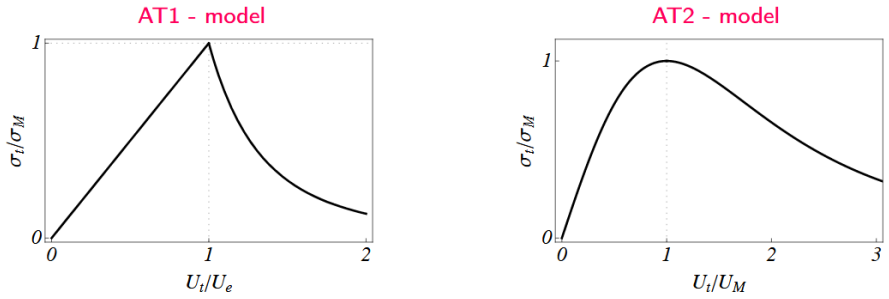


Fig. 3.12 – Comparaison des comportements obtenus sur un problème homogène pour 2 variantes des modèles Phase-Field [Pham et al., 2011]

Dans le cas de la formulation AT2, une forme locale de l'Éq. 3.34 peut être obtenue :

$$\begin{cases} \text{Loi de comportement :} \\ \qquad \underline{\boldsymbol{\sigma}} = (1-D)^2 \underline{\underline{\boldsymbol{K_0}}} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \text{Loi d'évolution régularisée :} \\ \qquad D - l_c^2 \Delta D = \frac{2l_c}{G_C}(1-D)\psi_0(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \end{cases} \tag{3.35}$$

Cette formulation locale peut être comparée avec celle des modèles non-locaux présentée en 3.32, des parallèles pouvant être établis entre les deux approches [Ambati et al., 2015, de Borst and Verhoosel, 2016]. Les deux équations faisant intervenir le gradient possèdent la même structure. Cependant dans le cas des modèles Phase-Field, le terme source (à droite de l'égalité) fait intervenir la variable régularisée (D ici). Le terme source du Phase-Field peut être qualifié d'implicite alors que celui du Non-Local est explicite (ces termes n'étant ici pas utilisés dans le même sens que la notion de gradient implicite/explicite caractérisant différents type de modèles Non-Locaux [Peerlings et al., 1996b]). L'autre différence est que G_C intervient ici directement dans l'équation locale, alors que cette quantité n'est pas introduite dans les équations dans le cas des modèles non-locaux.

Application sur le modèle simplifié

La mise en œuvre sur le modèle simplifié utilise la formulation AT2, plus répandue dans la littérature. Lors de l'utilisation d'un modèle Phase-Field, la variable d'endommagement définie en Éq. 3.7 est remplacée par celle issue de l'Éq. 3.35. Une dégradation en $(1-D)^2$ est appliquée à l'ensemble du tenseur de rigidité. Contrairement au modèle ODM-CMO qui introduit une chute de propriétés sélective à travers le tenseur d'effet

$\underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{H}}}}}$, la dégradation affecte ici tous les termes du tenseur de rigidité. À terme un tenseur des effets écrit en rigidité pourrait être introduit pour rester conforme avec la philosophie ODM-CMO. Une partie des équations du modèle simplifié (Éq. 3.7) se trouve ainsi remplacée par :

$$\begin{cases} \text{Loi de comportement :} \\ \qquad \underline{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, d, D) = \underline{\underline{\boldsymbol{K}}}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, d, D) : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \text{Rigidité effective :} \\ \qquad \underline{\underline{\boldsymbol{K}}}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, d, D) = (1-D)^2 (\underline{\underline{\boldsymbol{S_0}}} + d\underline{\underline{\boldsymbol{h}}})^{-1} \\ \psi_0^+ \text{ et évolution positive :} \\ \qquad \psi_0^+ = \max_t \frac{1}{2}\, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_+ : \underline{\underline{\boldsymbol{K}}}_0 : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_+ \\ \text{Loi d'évolution de } D : \\ \qquad D - l_c^2 \Delta D = \frac{2l_c}{G_C}(1-D)\psi_0^+(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \end{cases} \tag{3.36}$$

Comme précisé précédemment, D évolue immédiatement avec $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et aucun seuil d'endommagement n'est introduit. Ce point pourrait être corrigé par l'utilisation d'un modèle de type AT1, faisant apparaître un seuil d'endommagement ε_0 :

$$\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{3G_C}{8E_0 l_c}} \tag{3.37}$$

Le détail des équations et de la résolution est présenté en Annexe D.

Similarités avec le modèle Non-Local

On peut remarquer des similarités entre les formulations non-locales et Phase-Field présentées alors que ces modèles ont été introduits à partir de formalismes différents et pour des raisons distinctes : le cadre des modèles d'endommagement diffus et une volonté de régulariser le problème de l'adoucissement pour le non-local ; la théorie de Griffith et une description géométrique régulière et volumique d'une fissure discrète dans le cas du Phase-Field [Ambati et al., 2015, de Borst and Verhoosel, 2016].

On peut également noter que le gradient implicite des modèles Phase-Field peut être réécrit comme un modèle non-local à longueur variable. En effet l'Éq. 3.35 peut être modifiée pour obtenir :

$$D - \left(\frac{l_c}{\sqrt{1+\psi_0(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}})}}\right)^2 \Delta D = \frac{2l_c\psi_0(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}})}{G_C + 2l_c\psi_0(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}})} \tag{3.38}$$

$$D - l(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}})^2 \Delta D = f(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \tag{3.39}$$

La longueur variable l évolue avec $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ (comme proposé par Pijaudier-Cabot *et al.* [Pijaudier-Cabot et al., 2004]) mais diminue avec l'augmentation de la déformation (et donc avec celle de l'endommagement, comme proposé par Desmorat *et al.* [Desmorat et al., 2015]). Par ailleurs, contrairement aux modèles non-locaux, le gradient porte ici sur la variable D bornée.

3.2.5 Calcul des matrices tangentes

Le modèle simplifié et les différentes méthodes de régularisation présentées ici ont fait l'objet d'implémentations dans la suite d'éléments finis Z-set, co-développée par

l'ONERA et l'École des Mines. Une partie des outils a également été transférée dans le code commercial Abaqus/Standard [Rannou, 2015]. Pour ces deux logiciels, la résolution est obtenue grâce à l'algorithme de Newton-Raphson. Un grand soin doit ainsi être apporté au calcul des matrices tangentes locales (au niveau du point de Gauss) et des éléments (en particulier pour les modèles non-locaux et Phase-Field). Le calcul et la vérification de ces opérateurs tangents sont abordés dans cette section.

Calcul pour le modèle simplifié non-régularisé

L'algorithme de résolution implicite avec schéma de Newton-Raphson utilise la matrice tangente K permettant d'estimer les variations du résidu mécanique R^u en fonction des variations des degrés de liberté du problème aux éléments finis U. Par soucis de simplicité, les notations sont par la suite fortement simplifiées. On omet ainsi volontairement de détailler les notations indicielles : le but ici n'est pas de détailler l'implémentation pratique mais de mettre en évidence les termes importants. Pour une explication complète des termes mis en jeu, consulter [Rannou, 2015].

Les notations minuscules sont utilisées autant que possible pour les grandeurs physiques calculées aux points de Gauss ($\underline{\underline{\varepsilon}}$, $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$, u, etc.) et les notations majuscules pour les valeurs discrétisées par éléments finis et les matrices de fonction de forme (degrés de liberté U, résidus $\mathcal{R}$, matrices des fonctions de forme N et des gradients B, etc.). Les tenseurs $\underline{\boldsymbol{X}}$ et $\underline{\underline{\boldsymbol{X}}}$ sont tous des grandeurs physiques calculées aux points de Gauss. La matrice N^U représente les fonctions de formes du champ de déplacement u et B^U l'opérateur de gradient symétrique.

$$u = N^U U \tag{3.40}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = B^U U \tag{3.41}$$

Bien que d et D soient des variables d'état, elles n'interviennent pas en tant que degré de liberté dans le cas du modèle non régularisé. Ces valeurs sont calculées aux points de Gauss à partir de $\underline{\underline{\varepsilon}}$, de la loi d'évolution et de la condition d'évolution positive. Seul le champ de déplacement u intervient comme inconnue du problème discrétisé :

$$\mathcal{K}^{UU} = \frac{\partial \mathcal{F}^U}{\partial U} = \frac{\partial}{\partial U}\int_\Omega {}^tB^U \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} d\Omega = \int_\Omega {}^tB^U \frac{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}}{\partial U} d\Omega = \int_\Omega {}^tB^U \frac{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} B^U d\Omega \tag{3.42}$$

Au niveau du point de Gauss, il faut donc fournir l'opérateur tangent local $\underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}}} = \partial \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} / \partial \underline{\underline{\varepsilon}}$.

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}}} = \frac{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{K}}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}) \tag{3.43}$$

$$= \underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{K}}}}} + \frac{\partial \underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{K}}}}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{K}}}}} + \frac{\partial \left(\underline{\underline{\boldsymbol{S}}}_0 + d\underline{\underline{\boldsymbol{h}}} + D\underline{\underline{\boldsymbol{H}}} \right)^{-1}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \tag{3.44}$$

$$= \underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{K}}}}} + \underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{K}}}}} \left[\frac{\partial d}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \otimes \underline{\underline{\boldsymbol{h}}} + \frac{\partial D}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \otimes \underline{\underline{\boldsymbol{H}}} \right] : \underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{K}}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(t) \tag{3.45}$$

$$= \underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{K}}}}} \left[\underline{\underline{\mathbf{1}}} - \frac{\partial d}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \otimes \underline{\underline{\boldsymbol{h}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} - \frac{\partial D}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \otimes \underline{\underline{\boldsymbol{H}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \right] \tag{3.46}$$

On voit donc qu'il faut être capable de fournir $\partial d / \partial \underline{\underline{\varepsilon}}$, qui est un tenseur d'ordre 2. Dans le cas de l'absence de régularisation et s'il n'y pas localement de décharge, il s'agit directement de la dérivée de la fonction d'évolution de l'endommagement F. Pour la

variable de macro-endommagement D, ce terme est égal à :

$$\frac{\partial D}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = F'(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{P}{2\sqrt{YYc}} \left(\frac{\sqrt{Y} - \sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_C}} \right)^{P-1} \frac{\partial Y}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \tag{3.47}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{\Lambda}}}}} + \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{\Lambda}}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}) \tag{3.48}$$

Méthode de validation

La vérification de la matrice tangente locale $\underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}}}$ est souvent effectuée *a posteriori* par la méthode des perturbations. Afin de simplifier cette vérification et de vérifier que la tangente obtenue est bien consistante avec la discrétisation temporelle, nous proposons ici une méthode de vérification par différences finies au cours du calcul. En effet, si lors d'un calcul les incréments de temps sont suffisamment faibles, on a :

$$\Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_i \simeq \sum_j \frac{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_i}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_j} \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_j \tag{3.49}$$

donc

$$\frac{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_i}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_j} \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_j \simeq \left(\Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_i - \sum_{k \neq j} \frac{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_i}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_k} \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_k \right) \tag{3.50}$$

Lorsque les variations $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_j$ ne sont pas nulles, on peut donc approcher la matrice tangente par :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}}}(i,j) \simeq \frac{1}{\Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_j} \left(\Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_i - \sum_{k \neq j} \underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}}}(i,k) \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_k \right) \equiv \underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}}}_{diff}(i,j) \tag{3.51}$$

Les composantes $\underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}}}_{diff}(i,j)$ ainsi obtenues constituent un tenseur noté $\underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}}}_{diff}$ et nommé ici tenseur tangent par différences. Si toutes les composantes de $\underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}}}$ sont correctement calculées, on observe lors du calcul que $\underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}}}_{diff} \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} \underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}}}$. Au contraire, si au moins une des composantes de $\underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}}}$ est fausse, $\underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}}}_{diff}$ et $\underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}}}$ doivent posséder des composantes différentes.

Évidemment, $\underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}}}_{diff}$ ne peut être calculée que si toutes les composantes du tenseur des déformations sont non nulles, ce qui est, en pratique, souvent le cas en 3D du fait de l'influence des coefficients de Poisson. Cette méthode permet également de vérifier le bon comportement de la matrice tangente calculée en cours de calcul des cas réels complexes. Un résultat de l'application de cette méthode de validation est donné en Fig. 3.13 pour quelques-unes des composantes.

Déformations positives et négatives

Les modèles d'endommagement reposent parfois sur l'utilisation des déformations positives ou négatives (notées $\underline{\underline{\boldsymbol{x}}}_+$ et $\underline{\underline{\boldsymbol{x}}}_-$), en particulier dans l'expression des forces motrices. Une version simplifiée de ces dérivées est par exemple utilisée dans le modèle ODM-CMO [Hurmane et al., 2016], afin de simplifier le calcul des termes $\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_+ / \partial \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ (tenseur d'ordre 4) dans la matrice tangente. Ces dérivées doivent en effet intervenir dans le terme :

$$\frac{\partial Y}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\varepsilon}}_+ : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{\Lambda}}}}} + \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{\Lambda}}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_+) : \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_+}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \tag{3.52}$$

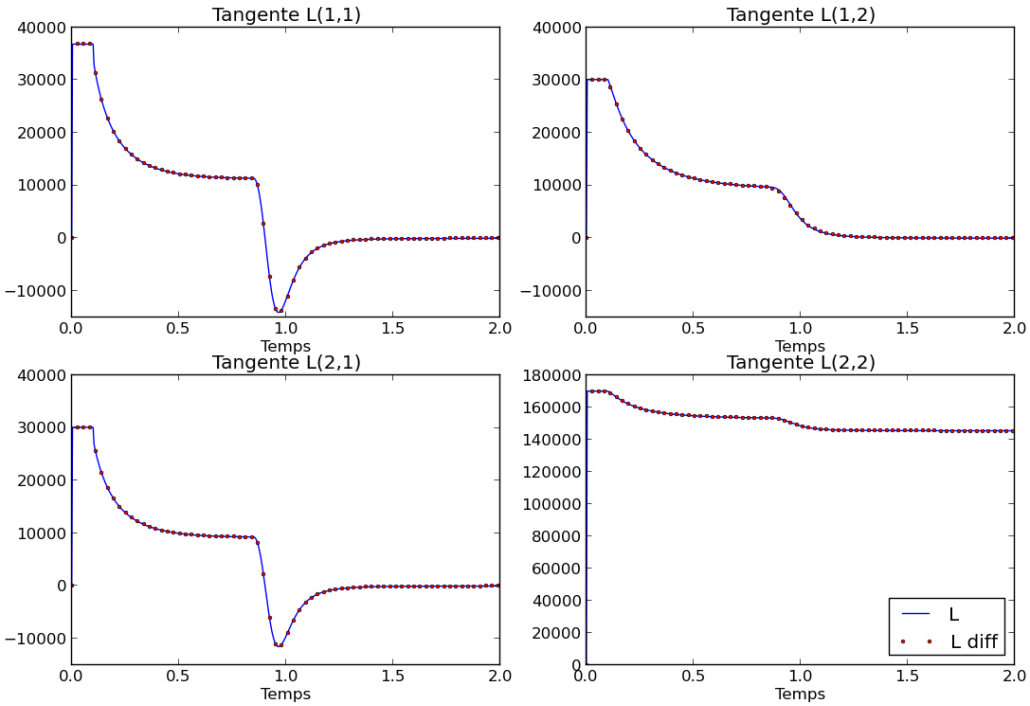


Fig. 3.13 – Comparaison des tangentes calculées et par différences sur le modèle simplifié non-régularisé

Cependant nous proposons ici une méthode de calcul des dérivées à partir des déformations positives exactes. Pour rappel, elles sont définies par :

$$\underline{\varepsilon}_{\pm} = P\langle \underline{\varepsilon}_p \rangle_{\pm} P^T \tag{3.53}$$

avec :

- $\underline{\varepsilon}_p$ la matrice diagonale constituée des valeurs propres (ou déformations principales) ε_I, ε_{II} et ε_{III} de $\underline{\varepsilon}$ dans la base propre
- P est une matrice de passage, construite à partir des vecteurs propres v_I correspondant aux valeurs propres. Du fait de la symétrie de $\underline{\varepsilon}$, P est une matrice orthogonale i.e. $P^{-1} = P^T$
- $\langle . \rangle_{\pm}$ sont les opérateurs de Macaulay tels que $\langle x \rangle_+ = x$ si $x > 0$, 0 sinon (et inversement pour la partie négative).

La dérivée de la déformation positive par chacun des termes de $\underline{\varepsilon}$ est égale :

$$\frac{\partial \underline{\varepsilon}_{\pm}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_{ij}} \langle \underline{\varepsilon}_p \rangle_{\pm} P^T + P \frac{\partial \langle \underline{\varepsilon}_p \rangle_{\pm}}{\partial \varepsilon_{ij}} P^T + P \langle \underline{\varepsilon}_p \rangle_{\pm} \left(\frac{\partial P}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)^T \tag{3.54}$$

Le calcul des dérivées des tenseurs et valeurs propres est compliqué dans le cas général mais peut ici être mené à terme du fait des propriétés des tenseurs intervenant dans la formule. Le détail de ce calcul est présenté en Annexe A. Cette méthode de calcul des dérivées des déformations positives a été implémentée dans Z-set et validée à l'aide de la méthode des perturbations et la méthode par différence présentée précédemment.

Calcul de l'opérateur tangent des modèles d'endommagement retardé

L'introduction d'une régularisation temporelle modifie le calcul de la dérivée de l'endommagement par rapport à la déformation $\partial D / \partial \underline{\varepsilon}$. En effet, la loi d'évolution ne relie

plus seulement D et $\underline{\varepsilon}$ mais $\dot{D}$, D et $\underline{\varepsilon}$:

$$\dot{D} = \frac{1}{\tau}(F(\underline{\varepsilon}) - D) \tag{3.55}$$

Une formulation consistante avec le schéma d'Euler explicite présenté en Section 3.2.1 a été proposée sous la forme :

$$\left.\frac{\partial D}{\partial \underline{\varepsilon}}\right|_i = \frac{\Delta t}{\tau + \Delta t}\left.\frac{\partial F}{\partial \underline{\varepsilon}}\right|_i \tag{3.56}$$

Cette formulation offre de bons résultats de convergence mais ne représente pas fidèlement l'évolution de D en fonction de $\underline{\varepsilon}$. On observe en pratique que $\partial\underline{\boldsymbol{\sigma}}/\partial\underline{\varepsilon}$ ne devient jamais négatif, même en présence d'adoucissement. Une formule plus conforme aux variations réelles peut être obtenue à l'aide de :

$$\left.\frac{\partial D}{\partial \underline{\varepsilon}}\right|_i = \left.\frac{\partial D}{\partial \underline{\varepsilon}}\right|_{i-1} + \frac{\Delta t}{\Delta t + \tau}\left(\left.\frac{\partial F}{\partial \underline{\varepsilon}}\right|_i - \left.\frac{\partial D}{\partial \underline{\varepsilon}}\right|_i\right) \tag{3.57}$$

Cette formulation est alors cohérente avec la matrice tangente obtenue par différence (Section 3.2.5). Cependant elle ne permet pas une bonne convergence lors de la résolution, possiblement à cause de ces moins bonnes propriétés mathématiques que la formulation présentée en Éq. 3.56 ($\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}$ n'est plus définie positive). Elle sera utilisée uniquement pour des calculs annexes nécessitant d'expliciter $\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}$ (par exemple les critères de validité en Section 3.3.1).

La même analyse peut être effectuée pour les modèles à Taux Limité. Les détails sont présentés en Annexe B pour les deux formulations.

Calcul de l'opérateur tangent des modèles non-locaux

Lors de l'utilisation de modèles à gradient (Non-Locaux ou Phase-Field), le champ d'endommagement D (ou la force motrice Y) vérifie une équation spatiale et ne peut être déterminé uniquement à partir des propriétés locales aux points de Gauss. La grandeur non-locale (ici $\bar{Y}$) devient donc un degré de liberté du problème discrétisé. Le vecteur des degrés de liberté s'écrit $X = (U\ \bar{Y})$ et le vecteur de résidu $R = (R^U\ R^{\bar{Y}})$. Un résidu sur l'équation de délocalisation $R^{\bar{Y}}$ doit alors être calculé.

Dans le cas d'une résolution monolithique, les deux champs sont résolus simultanément. Au niveau de l'élément, la matrice tangente fait donc intervenir les termes estimant la variation de chacun des résidus vis-à-vis des variables internes [Germain, 2006].

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}^{UU} & \mathcal{K}^{U\bar{Y}} \\ \mathcal{K}^{\bar{Y}U} & \mathcal{K}^{\bar{Y}\bar{Y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{F}^U}{\partial U} & \dfrac{\partial \mathcal{F}^U}{\partial \bar{Y}} \\ \dfrac{\partial \mathcal{F}^{\bar{Y}}}{\partial U} & \dfrac{\partial \mathcal{F}^{\bar{Y}}}{\partial \bar{Y}} \end{pmatrix} \tag{3.58}$$

Aux points d'intégration, la matrice tangente locale est constituée des termes intervenant dans les dérivées précédentes :

$$\underline{\underline{\boldsymbol{L}}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \underline{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \underline{\varepsilon}} & \dfrac{\partial \underline{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \bar{Y}} \\ \dfrac{\partial \bar{Y}}{\partial \underline{\varepsilon}} & \dfrac{\partial Y}{\partial \bar{Y}} \end{pmatrix} \tag{3.59}$$

Les termes intervenants dans cet opérateur sont présents dans l'expression de l'opérateur tangent non régularisé (Éq. 3.46). Ici, comme $\bar{Y}$ devient un degré de liberté du

problème, les différentes contributions se retrouvent réparties au sein des termes correspondants. Ceux-ci sont explicités en Annexe C.

Dans le cas d'une résolution alternée, privilégiée dans la suite de la thèse, chaque champ est résolu séparément à partir de la minimisation du résidu correspondant. A ce titre, seuls les blocs diagonaux des opérateurs $\mathcal{K}$ et $\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}$ sont nécessaires.

Calcul de l'opérateur tangent des modèles Phase-Field

De la même manière que pour les modèles non-locaux à gradient, D devient, pour les modèles Phase-Field, un degré de liberté du problème discrétisé. Les matrices tangentes élémentaires et locales s'expriment alors :

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{F}^U}{\partial U} & \dfrac{\partial \mathcal{F}^U}{\partial D} \\ \dfrac{\partial \mathcal{F}^D}{\partial U} & \dfrac{\partial \mathcal{F}^D}{\partial D} \end{pmatrix} ; \qquad \underline{\underline{\boldsymbol{L}}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}} & \dfrac{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}}{\partial D} \\ \dfrac{\partial \psi_0}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}} & \dfrac{\partial \psi_0}{\partial D} \end{pmatrix} \tag{3.60}$$

Le détail de ces termes est présenté en Annexe D.

3.2.6 Similarités entre les méthodes de régularisation

Des points communs peuvent être observés entre certaines des méthodes de régularisation, notamment Phase-Field, Crack-Band et Non-Local. La démarche repose sur un contrôle géométrique paramétré de l'étalement de l'endommagement et de l'énergie dissipée. Chaque méthode ayant été introduite suivant des motivations différentes, elles bénéficient de leurs propres avantages et inconvénients. L'étude des parallèles théoriques existants doit permettre une meilleure compréhension des hypothèses de modélisation à l'œuvre.

Crack Band : Cette méthode réalise de manière la plus directe le parallèle entre l'énergie de Griffith et un modèle d'endommagement continu, en tirant parti de la localisation sur une bande d'éléments. Elle peut s'interpréter comme une extension des modèles de zones cohésives en tout point du matériau. Mais cette approche reste peu robuste et présente des défauts d'utilisation pratique, illustrés en Section 3.3.2.

Non local : Le modèle Non-Local est tentative d'introduction d'une épaisseur de fissure dans un Continuum Damage Model (CDM) de manière plus robustesse. Cette approche permet de représenter une grande diversité de comportements (anisotropie, longueurs variables etc). Néanmoins, aucun parallèle n'est clairement effectué entre le comportement local et l'énergie de Griffith. L'étude d'une telle correspondance énergétique sera menée en Section 3.3.3.

Phase-Field : Cette méthode présente l'intérêt d'établir directement le lien entre l'énergie dissipée localement et G_C. Elle possède à l'origine un formalisme différent de celui des CDM (description géométrique d'une fissure discrète). Les formulations utilisées actuellement se rapprochent néanmoins fortement des modèles d'endommagement Non-Locaux à gradient [de Borst and Verhoosel, 2016]. Un travail d'adaptation reste nécessaire pour pouvoir les appliquer à un matériau anisotrope [Bleyer and Alessi, 2018].

Les évolutions observées semblent converger vers un modèle régularisé par gradient et se comportant comme une Zone Cohésive / Crack Band [Lorentz et al., 2011, Cuvilliez

et al., 2011]. Contrairement à ces trois approches, la famille des modèles à endommagement retardé propose une régularisation temporelle, plutôt que spatiale, de l'endommagement. Certaines correspondances, non triviales, peuvent être effectuées entre les deux visions [Suffis et al., 2003, Desmorat et al., 2015]. Mais les modèles à endommagement retardé semblent, pour notre cas d'application, moins adaptés en tant que méthode de régularisation :

— Dans le cadre d'une résolution quasi-statique, le paramètre temporel semble mal défini et la notion de temps caractéristique difficile à appréhender. La vitesse locale de chargement varie au cours de la résolution au sein d'une structure ou entre deux géométries. Il n'apparaît ainsi pas évident qu'une unique valeur de τ permette de décrire tous les résultats expérimentaux.

— La régularisation intervient fortement dans l'énergie dissipée et n'établit pas naturellement de parallèle avec l'énergie de Griffith.

Cependant, la régularisation par effet retard facilite la convergence des calculs et évite un raffinement trop important du pas de temps. On peut donc envisager de l'utiliser en complément d'une autre méthode, si l'énergie visqueuse dissipée reste faible. Une validation *a posteriori* permet de vérifier que l'énergie dissipée par le problème mécanique est très élevée devant celle dissipée par effet retard et éventuellement ajuster la valeur de τ.

Synthèse

Dans cette section plusieurs stratégies permettant de pallier les problèmes de la localisation de l'endommagement ont été présentées. Certaines sont introduites numériquement uniquement dans le but de régulariser le problème (Crack-Band, premières formulations non-locales), d'autres cherchent à retranscrire des phénomènes physiques (interactions micro-mécaniques, fissure discrète etc.).

Ces méthodes doivent donc être confrontées, sur les bases de leur validité mathématique, de leur robustesse numérique (indépendance des résultats à la mise en donnée), de leur utilisation pratique et enfin sur leur capacité à exhiber les comportements observés expérimentalement dans le premier chapitre. Cette étude sera l'objet de la section suivante.

3.3 Analyse des méthodes de régularisation

3.3.1 Critères de contrôle des simulations numériques

La validité des calculs éléments finis peut être analysée d'un point de vue mathématique. De nombreux critères sont proposés dans la littérature et offrent une grille de lecture des degrés de validité pouvant être attribués aux simulations [Hill, 1958, Rice and Rudnicki, 1980, Benallal et al., 1993, De Borst et al., 1993, Deü, 1997, Forest and Lorentz, 2004, Beaurain, 2011]. Certains des ces critères sont résumés en Fig. 3.14. Ils caractérisent différentes propriétés des équations (ellipticité, unicité, stabilité) et sont de natures variées (locaux ou globaux),

Adoucissement en une dimension

L'origine de la perte de robustesse réside dans l'adoucissement, introduit dans le modèle afin de décrire l'apparition de macro-fissures dans le matériau. Celui-ci est caractérisé par une diminution de la contrainte alors que la déformation diminue. Soit pour un problème en une dimension, le comportement est adoucissant si :

$$\dot{\varepsilon}\dot{\sigma} < 0 \tag{3.61}$$

En plusieurs dimensions, l'inégalité peut être vérifiée sur les couples $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}/\underline{\varepsilon}_{ij}$, qui peuvent présenter des comportements adoucissants. Néanmoins, le critère devient dépendant du choix du repère.

Instabilité matérielle/Instabilité structurelle

Un critère sous chargement multi-axial a été alors proposé sous la forme [Hill, 1958] :

$$^{t}\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}.\underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}} < 0 \tag{3.62}$$

Lorsque ce critère est vérifié, il apparaît une instabilité matérielle (la réciproque n'atant pas nécessairement vrai). Par ailleurs, s'il existe un régime adoucissant sur l'une des composantes du tenseur de rigidité, il est possible de trouver un mode de sollicitation tel que $^{t}\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}.\underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}$ devienne négatif.

Cependant, l'Éq. 3.62 peut être invalidée, sans apparition de comportement adoucissant sur les composantes individuelles $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}/\underline{\varepsilon}_{ij}$, lorsque le tenseur tangent $\underline{\underline{\boldsymbol{L}}} = \partial\underline{\boldsymbol{\sigma}}/\partial\underline{\varepsilon}$ n'est pas symétrique. Pour prendre en compte les cas non symétriques, le critère d'instabilité est adapté sous la forme [Forest and Lorentz, 2004, De Borst et al., 1993] :

$$det(\underline{\underline{\boldsymbol{L}}} + {}^{t}\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}) < 0 \tag{3.63}$$

Le caractère défini positif de l'opérateur tangent symétrique $\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}_S = \underline{\underline{\boldsymbol{L}}} + {}^{t}\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}$ est une condition suffisante à la bonne définition du problème : tant que $det(\underline{\underline{\boldsymbol{L}}} + {}^{t}\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}) > 0$, la solution est unique et il n'existe pas de mode de bifurcation. À l'inverse, si $det(\underline{\underline{\boldsymbol{L}}} + {}^{t}\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}) \leq 0$, la présence d'instabilités matérielles est possible (mais non garantie). La présence de cette instabilité matérielle se transpose à l'échelle de la pièce par l'apparition d'instabilités structurelles. Celles-ci sont caractérisées par :

$$\int_{\Omega} {}^{t}\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}.\underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}} d\Omega = 0 \qquad \forall\underline{\varepsilon} \text{ admissible, soit} \qquad det(\mathcal{K} + {}^{t}\mathcal{K}) = 0 \tag{3.64}$$

Ω est le volume occupé par la structure et $\mathcal{K}$ la matrice tangente du problème discrétisé $\mathcal{K} = \int_{\Omega} {}^{t}B\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}Bd\Omega$. Contrairement à l'Éq. 3.62, c'est un critère global, difficilement vérifiable en pratique. A noter que l'instabilité globale peut apparaître indépendamment de la présence d'instabilités locales (du fait d'instabilités géométriques) et n'invalide pas nécessairement les résultats de calcul [De Borst et al., 1993].

Critère de perte d'ellipticité / de localisation

L'apparition d'instabilités locales peut entraîner l'apparition d'autres phénomènes tels que des modes de bifurcation ou d'une localisation de l'endommagement [De Borst et al., 1993, Forest and Lorentz, 2004, Deü, 1997]. Cette dernière condition correspond à l'apparition d'une discontinuité stationnaire, liée à la perte d'ellipticité des équations

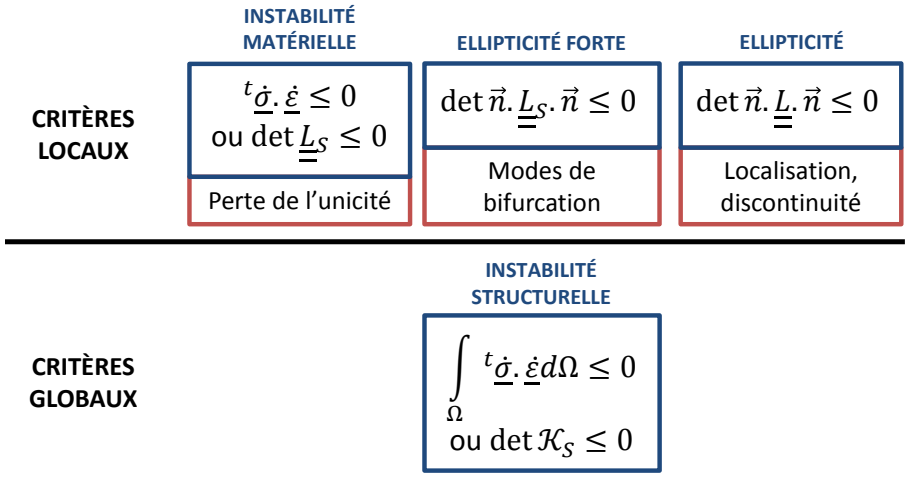


Fig. 3.14 – Critères de validité des modèles d'endommagement adoucissants

(d'hyperbolicité dans des cas d'application dynamique). Cette discontinuité stationnaire se traduit mathématiquement par l'existence d'un vecteur $\underline{\boldsymbol{n}}$:

$$\exists \underline{\boldsymbol{n}}, det(\underline{\boldsymbol{n}}.\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}.\underline{\boldsymbol{n}}) = 0 \tag{3.65}$$

où $\underline{\boldsymbol{n}}$ est un vecteur de direction, définissant la normale au plan de discontinuité et $\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}$ l'opérateur tangent défini par $[\![\dot{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}]\!] = \underline{\underline{\boldsymbol{L}}} : [\![\dot{\underline{\varepsilon}}]\!]$. La notation $[\![x]\!] = x^+ - x^-$ dénote le saut de la quantité x à travers l'interface de discontinuité.

Un critère plus conservatif peut être trouvé à partir de la notion d'ellipticité forte, portant sur la matrice symétrisée $\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}_S$. Celle-ci est assurée tant que :

$$\exists \underline{\boldsymbol{n}}, det(\underline{\boldsymbol{n}}.\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}_S.\underline{\boldsymbol{n}}) > 0 \tag{3.66}$$

Ce critère offre un indicateur, plus conservatif que l'ellipticité, de la possibilité d'apparition de modes de bifurcation localisés, bien que non discontinus. Le critère portant sur la matrice symétrisée semble donc être un bon indicateur de la localisation de la déformation. Il peut être vérifié en cours de calcul afin de signaler l'apparition éventuelle de localisation de l'endommagement.

Ces critères assurent ou non le caractère bien défini du problème, mais leur usage pratique en cours de calcul reste probablement limité. Ceux-ci sont définis sur le modèle continu, la discrétisation par éléments finis interdisant de fait l'apparition de surfaces de discontinuité. De plus, le calcul de minimisation du déterminant peut augmenter le temps de calcul. Ces critères sont donc utilisés pour vérifier théoriquement la validité des méthodes de régularisation utilisées : l'impossibilité de franchir ce critère a été ainsi démontré pour les modèles à endommagement retardé de type Taux-Limité [Deü, 1997] et pour certains modèles Non-Locaux [Forest and Lorentz, 2004]. De ce point de vue, la méthode Crack Band n'offre quant à elle aucune régularisation mathématique du problème. Ces différents critères sont en effet définis localement et la méthode Crack Band ne modifie pas la nature fondamentale des équations locales.

La validité mathématique exhibée ou non sur les différents modèles ne présage cependant pas réellement de la robustesse des résultats de simulations numériques. Des critères pratique d'analyse des résultats de calcul ont donc été mise en place sur les différents modèles pour étudier leur application pratique.

3.3.2 Analyse pratique des méthodes de régularisation

Une campagne de calculs numériques a été mise en place à cette fin sur les différents modèles présentés en Section 3.2 pour une application avec des modèles de type ODM-CMO. La capacité des méthodes à pallier la perte de robustesse évoquée en Section 3.1.4 sera évaluée, ainsi que l'influence des paramètres introduits. Dans un deuxième temps, en Section 3.3.3, ces méthodes seront également analysées à travers leur capacité à exhiber les effets d'échelle observés expérimentalement.

Mise en place

Les tests numériques sont conduits sur deux géométries complémentaires, possédant des gradients mécaniques et des conditions de chargement différentes :

— **Éprouvette Compact Tension (CT) :** Une géométrie CT est utilisée, correspondant à celles testées durant la campagne expérimentale. Elle exhibe une propagation stable de la fissure. Les conditions aux limites sont introduites à l'aide d'un déplacement imposé au centre des pions. Une symétrie est réalisée dans l'épaisseur (Axe z) afin de limiter la taille des calculs. Aucune symétrie n'est réalisée dans la direction y, afin d'éviter d'imposer une condition de symétrie au milieu du plan de la fissure, celle-ci pouvant modifier la réponse et notamment la dépendance à l'orientation du maillage. Un chargement en déplacement imposé est appliqué au centre des pions, ces derniers étant solidaires de l'éprouvette.

— **Éprouvette Diabolo :** L'éprouvette Diabolo, présentée en Fig. 3.15, est un cas numérique test fréquemment rencontré dans la littérature. Il exhibe des gradients mécaniques plus faibles que l'éprouvette CT et un régime de propagation instable de la fissure. Les déplacements sont imposés sur les faces supérieures et inférieures de l'éprouvette. Des symétries sont réalisées selon les axes x et z, mais pas selon l'axe y pour les même raisons que précédemment. Des conditions de déplacement imposé sont imposées en haut et en bas de l'éprouvette.

Les maillages sont constitués d'éléments hexaèdres quadratiques à intégration complète. L'interpolation quadratique étant utilisée pour la régularisation non-locale (voir 3.2.3), elle est conservée pour les autres méthodes afin de ne pas introduire de biais lors de la comparaison. Quatre tailles de mailles sont considérées afin d'étudier leur influence sur le comportement des méthodes de régularisation et la réponse globale, notamment la convergence au maillage. Les tailles de maille caractéristiques, présentées en Fig. 3.15a, sont :

— M1 : 3.3 mm (environ 800 éléments sur Diabolo)

— M2 : 1.75 mm (environ 2 600 éléments sur Diabolo)

— M3 : 1.25 mm (environ 5 000 éléments sur Diabolo)

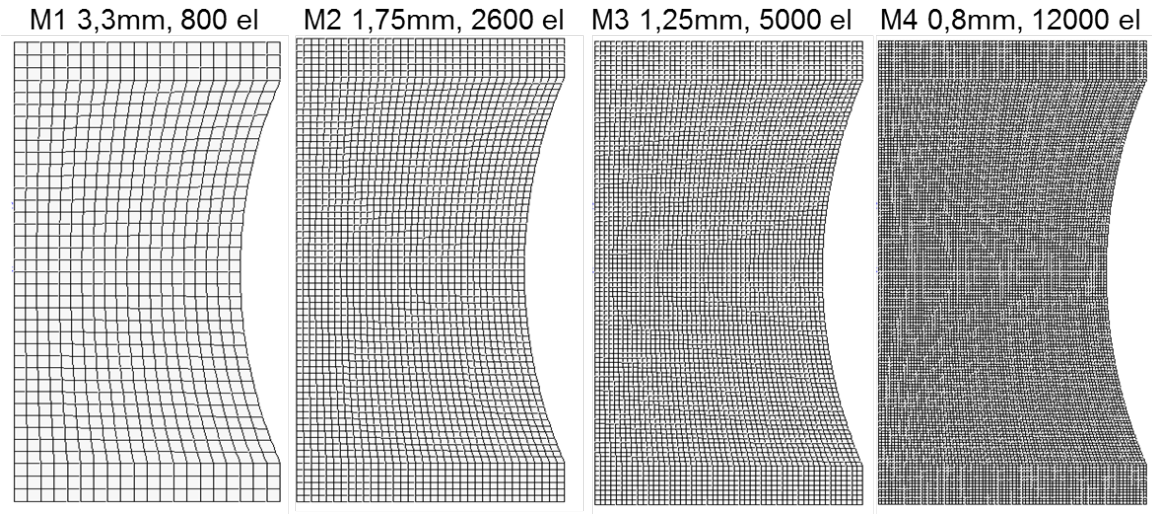
— M4 : 0.8 mm (environ 12 000 éléments sur Diabolo)

Deux orientations du maillage sont utilisées (Fig. 3.15b) :

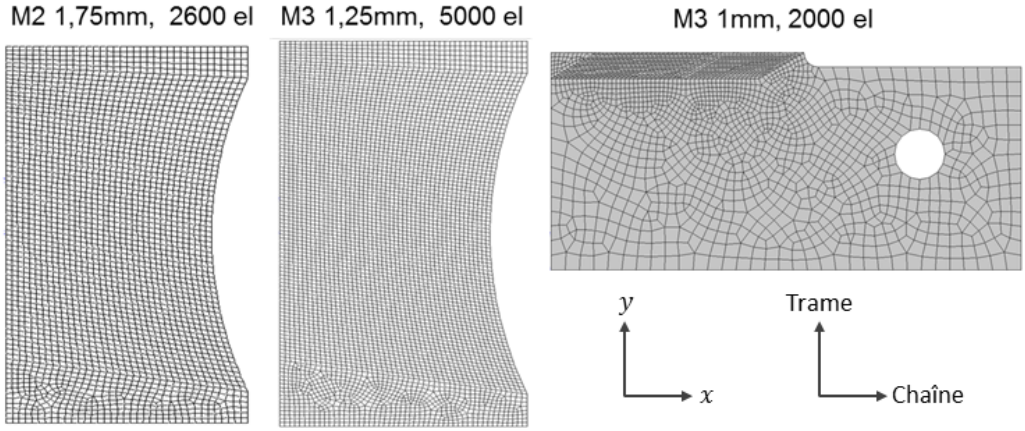
— Une configuration pour laquelle le maillage coïncide avec la direction de fissure (M1-D à M4-D)

— Une configuration pour laquelle le maillage possède un angle d'inclinaison par rapport à la surface de fissure (M1-0 à M4-0)

Différentes valeurs des paramètres de régularisation (τ, l_c etc.) ont également été testées.



(a) Maillages droits sur éprouvette Diabolo



(b) Maillages orientés sur éprouvette Diabolo et CT

Fig. 3.15 – Maillages utilisés pour l'analyse numérique des méthodes de régularisation

Critères étudiés

Le fonctionnement pratique des méthodes est analysé suivant les critères suivants :

— **Insensibilité à la taille de maille :** Variation anormale du comportement global avec le raffinement (variation de la force/déplacement max à rupture), convergence au maillage

— **Insensibilité à l'orientation du maillage :** Variation du comportement global avec l'orientation du maillage

— **Profil de fissure :** Analyse de la forme et de l'évolution du profil de fissure

— **Contrôle de l'énergie dissipée :** Les densités volumiques d'énergie dissipées sont calculées et intégrées sur la structure. La capacité de la méthode de régularisation à contrôler cette énergie est évaluée.

— **Facilité de convergence des simulations :** Comparaison du coût numérique et de la facilité de convergence des méthodes.

— **Influence des paramètres introduits :** Variation du comportement avec la valeur des paramètres introduits dans la régularisation.

Résultats sur le modèle non régularisé

Le comportement observé pour le modèle est conforme à ce qui est attendu au vue des problèmes présentés précédemment.

— **Insensibilité à la taille de maille :** Des variations du comportement sont observées avec la taille de maille : sur géométrie Diabolo, une variation de 2% de la force à rupture est observée entre les maillages M1 et M4 (Fig. 3.16a). Sur CT, les mêmes écarts sont observés au point maximal de la courbe Force/Déplacement. Ceux-ci progressent de manière encore plus significative dans la suite de la propagation, pouvant amener à des comportements macroscopiques fortement divergents selon les maillages.

— **Insensibilité à l'orientation du maillage :** La direction de fissure reste prisonnière de l'orientation du maillage, amenant à des directions de propagation non physiques (Fig. 3.16d).

— **Profil de fissure :** Le profil de fissure reste difficile à contrôler. Si l'adoucissement tend généralement à se concentrer sur une unique bande, ce résultat n'est cependant pas automatique, en particulier en présence de gradients plus faibles, comme sur l'éprouvette diabolo. Plusieurs éléments peuvent s'endommager dans l'épaisseur de la fissure, entraînant l'apparition de plusieurs fissures parallèles (Fig. 3.16c). Ce phénomène reste difficilement contrôlable et imprévisible.

— **Contrôle de l'énergie dissipée :** L'énergie dissipée varie fortement selon les configurations, jusqu'à 86% entre les maillages M1 et M4 (Fig. 3.16b). Celle-ci dépend de la taille du maillage mais également du nombre d'éléments s'endommageant et n'est pas contrôlée.

— **Convergence des simulations :** Sur la géométrie Diabolo instable, le comportement nécessite une forte réduction du pas de temps jusqu'à l'apparition d'une régularisation inertielle pour les simulations dynamiques. Moyennant une résolution dynamique implicite, des oscillations peuvent être présentes mais les calculs sont globalement menés à terme sans difficultés particulières.

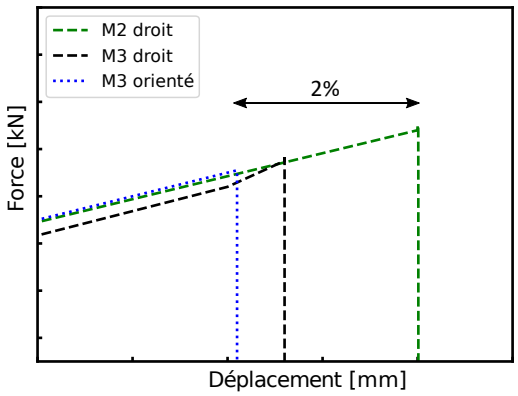
Résultats sur le modèle Crack-Band

Le modèle régularisé par la méthode Crack-Band présente les même problèmes (dépendance à l'orientation du maillage, bandes d'endommagement parallères). Ces phénomènes compromettent la tentative de contrôle de l'énergie dissipée recherchée par la modification locale du comportement.

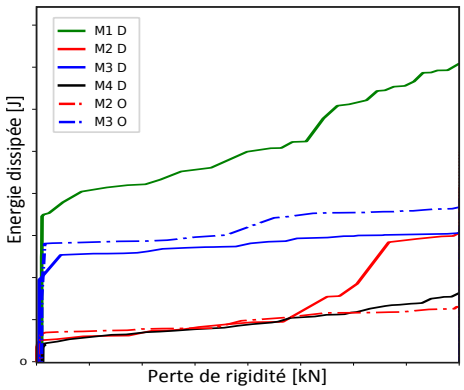
— **Insensibilité à l'orientation du maillage :** Comme pour le modèle non régularisé, la fissure reste guidée par l'orientation du maillage (Fig. 3.16d). Ce phénomène conduit à des profils de fissure non physiques.

— **Profil de fissure :** Le profil de fissure obtenu exhibe, comme le modèle non régularisé, de multiples bandes parallèles d'endommagement (Fig. 3.16c). Ce phénomène compromet la robustesse des simulations.

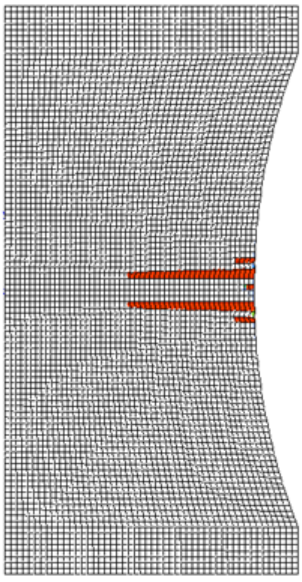
— **Contrôle de l'énergie dissipée :** Le Crack-Band nécessite l'apparition d'une unique bande de fissuration, une erreur non contrôlable sur la régularisation est donc effectuée. C'est particulièrement le cas pour les structures exhibant de plus faibles gradients mécaniques comme le diabolo. Mêmes dans le cas des éprouvettes



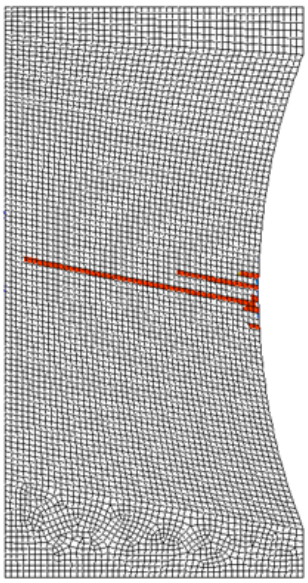
(a) Variation au pic d'effort sur Diabolo pour différents maillages



(b) Variation de l'énergie dissipée pour différents maillages



(c) Profil de fissure sur maillage droit



(d) Profil de fissure sur maillage orienté

Fig. 3.16 – Résultats de simulations numériques sur le modèle non-régularisé sur éprouvette Diabolo

CT, qui possèdent un gradient plus fort, les fissures obtenues sont constituées, selon les simulations, de un ou deux éléments dans l'épaisseur, entraînant une variation du simple au double sur l'énergie dissipée par la propagation.

— **Convergence des simulations :** Un pré-traitement est nécessaire afin d'attribuer les valeurs des paramètres Y_C et Y_0 satisfaisant une densité d'énergie volumique e_{rupt} local et une contrainte maximale σ_{max} en fonction de la taille de maille (voir Section 3.2.2). Une fois ce pré-traitement réalisé, les résultats de convergence sont identiques à ceux obtenus sur le modèle non régularisé.

Résultats sur le modèle d'endommagement retardé

Des résultats ont été obtenus sur les modèles avec endommagement retardé de type effet retard et Taux limité pour des variations de temps caractéristique $\tau = 0.002s$ à $0.1s$ (les simulations ayant une durée imposée de 1s, avec un déplacement final imposé de 4mm sur éprouvettes diabolos et 8mm sur CT). Les résultats sont ici présentés pour

le modèle avec effet retard classique (de type visco-endommagement), les conclusions pouvant s'étendre au cas du Taux Limité.

— **Insensibilité à la taille de maille :** Une bonne insensibilité à la taille de maille est observée, avec une variation faible ($< 1\%$) du pic de la courbe Force / Déplacement sur toutes les configurations de tailles et orientations de maillage, pour une valeur de τ donnée.

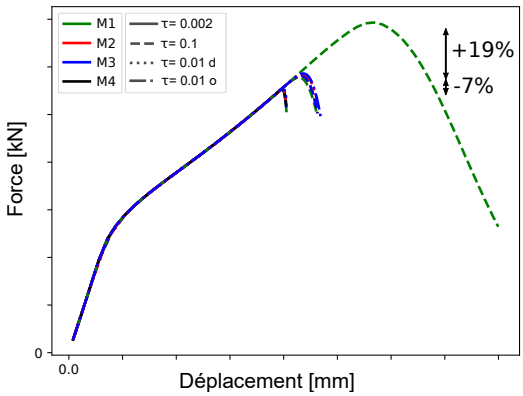
— **Insensibilité à l'orientation du maillage :** Le profil de fissure obtenu est indépendant de l'orientation du maillage (Fig. 3.17d). Cependant, cet effet n'est obtenu que pour une valeur de τ suffisamment élevée, garantissant une délocalisation de l'endommagement sur plusieurs éléments. Pour une faible valeur de τ et/ou une taille de maille trop importante, l'effet délocalisant peut ne pas s'avérer suffisant, et la sensibilité à l'orientation des mailles réapparaît.

— **Profil de fissure :** La largeur du profil n'est pas constante et varie en fonction de l'essai et au cours de la propagation. En effet, la délocalisation est contrôlée par la vitesse locale de déformation : si $F(\underline{\varepsilon})$ augmente rapidement, le retard entre la consigne $F(\underline{\varepsilon})$ et la valeur de D régularisée devient important. Un grand nombre d'éléments doivent alors s'endommager pour satisfaire l'équilibre mécanique global (Fig. 3.17c). L'évolution de l'épaisseur du profil dépend alors de la géométrie étudiée. À vitesse de déplacement limite $\dot{u}$ fixé, la vitesse locale de déformation en pointe de fissure, et donc l'épaisseur du profil obtenu, augmentent au fur et à mesure de l'essai sur la géométrie Diabolo. Au contraire, cette vitesse diminue au cours des essais CT, entraînant une relocalisation de la fissure. Cette variation de l'épaisseur de fissure, non observée expérimentalement, est délicate à prévoir et à contrôler *a priori*. Ce phénomène est exacerbé par les modèles à taux limité, qui contraignent de manière plus importante l'évolution de D.

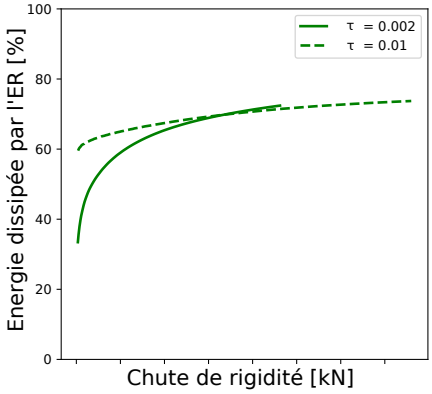
— **Contrôle de l'énergie dissipée :** Une part importante de l'énergie dissipée est liée à la régularisation visqueuse et non à la densité d'énergie de rupture e_{rupt} introduit dans la loi de comportement avant régularisation. Dans les cas étudiés, e_{rupt} ne correspond qu'à 30% de l'énergie totale dissipée localement, 70% de l'énergie dissipée étant due à l'effet de la régularisation (Fig. 3.17b). Pour des plus faibles valeurs de τ, cette énergie redevient inférieure à la part dissipée "mécaniquement". Cependant, l'effet retard est alors trop faible pour délocaliser l'endommagement et D se concentre à nouveau sur une unique bande d'éléments.

— **Convergence des simulations :** La convergence est en règle générale bien plus rapide que pour les autres méthodes de régularisation, l'effet retard prohibant en pratique tout comportement dynamique et facilitant la convergence. Cependant, lors de l'application à des géométries instables comme le Diabolo, la régularisation modifie fortement le comportement global pour se ramener à une propagation stable (l'énergie nécessaire à la propagation devenant de plus en plus importante). Cette modification peut entraîner une impossibilité de résoudre l'équilibre global et l'arrêt des calculs. Ce point pourrait compromettre l'application de conclusions et d'identifications obtenues sur des données quasi-statiques à des problématiques dynamiques.

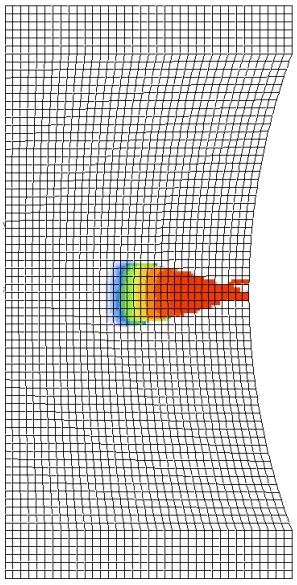
— **Influence des paramètres :** Le choix du paramètre τ a une forte influence sur les résultats. Sur l'éprouvette Diabolo, des variations du pic de force de respectivement +19% et -7% sont par exemple observées pour $\tau = 0.1$ et $\tau = 0.002$ par rapport à une valeur de $\tau = 0.01$. L'effet retard étant lié à la vitesse locale de déformation, dépendante de la structure étudiée et des vitesses des conditions limites appliquées,



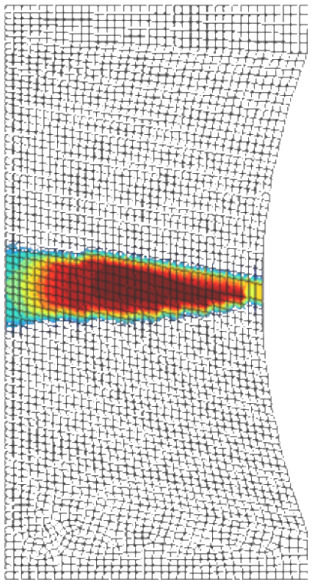
(a) Force/Déplacement sur Diabolo pour différents maillages et valeurs de τ



(b) Part de l'énergie dissipée par l'effet visqueux



(c) Profil de fissure sur maillage droit



(d) Profil de fissure sur maillage orienté

Fig. 3.17 – Résultats de simulations numériques sur le modèle à endommagement retardé

il semble impossible d'identifier une unique valeur de τ offrant des résultats satisfaisants sur plusieurs configurations pour une application quasi-statique. On rappelle que ces modèles ne sont initialement pas prévus pour régulariser des problèmes quasi-statiques, mais pour rendre compte d'une certaine viscosité dans des cas de chargement dynamiques. Cela explique les valeurs démesurées de τ (parfois égales ou supérieures à la durée complète de la simulation) nécessaires pour obtenir un effet délocalisant en quasi-statique.

Résultats sur le modèle Non-Local

— **Insensibilité à la taille de maille :** Une bonne insensibilité à la taille de maille est observée, avec une variation inférieure au pourcent du pic de la courbe Force / Déplacement sur toutes les configurations (taille et orientation de maillage), à valeur de l_c fixée (Fig. 3.18a).

— **Insensibilité à l'orientation du maillage :** Le profil de fissure obtenu est indépendant de l'orientation du maillage (Fig. 3.18e).

— **Profil de fissure :** La largeur du profil de fissure est initialement contrôlé par la longueur l_c introduite en paramètre lors de la propagation. Cependant, une fois la propagation effectuée, on observe une diffusion de l'endommagement depuis les zones déjà endommagées. Cet étalement provient du fait que le terme source de l'équation non-local (Éq. 3.29) est écrit en déformation et continu de croître continûment une fois la fissure établie. Cependant, cette diffusion s'effectue sans dissipation d'énergie, puisque l'endommagement se propage dans des zones mécaniquement déchargées ($Y_d \approx 0$). Cet étalement n'a don pas ou peu d'influence sur la réponse globale, du moins tant que le chargement reste en traction monotone. La zone de dissipation d'énergie reste, elle, bien contrôlée par l_c (Fig. 3.18d). Cet étalement parasite est d'autant plus marqué que la fissure s'ouvre après propagation : elle est dans notre cas visible sur la géométrie CT, mais quasiment absente sur la géométrie diabolo.

— **Contrôle de l'énergie dissipée :** Comme précisé précédemment, l'énergie reste dissipée dans une zone contrôlée et le profil d'énergie dissipée reste globalement inchangé le long de la fissure (Fig. 3.18b et 3.18d). Cependant la quantité d'énergie dissipée n'est pas connue a priori et le lien n'est pas directement établi entre la densité d'énergie volumique de rupture e_{rupt} introduite dans la loi de comportement avant régularisation, l_c et le G_C apparent obtenu.

— **Convergence des simulations :** L'utilisation d'éléments mixtes, avec degrés de liberté en $\bar{Y}$, entraîne une augmentation du nombre d'inconnues et donc des coûts de calcul. De plus, une instabilité peut être observée en début de propagation (étudiée plus en détails en Section 3.4.1). Celle-ci compromet la convergence des calculs lors d'une résolution monolithique et l'arrêt des simulations. Ce phénomène peut être évité par l'introduction d'un effet visqueux comme méthode de régularisation temporelle. Cependant cette approche est écartée, l'effet visqueux parasitant l'analyse énergétique et influençant l'effet d'échelle obtenu (présenté en Section 3.3.3). La convergence est cependant possible lors de l'utilisation de l'algorithme de résolution alterné, qui présente une bien meilleur vitesse de convergence que la résolution monolithique, en particulier en présence d'instabilités.

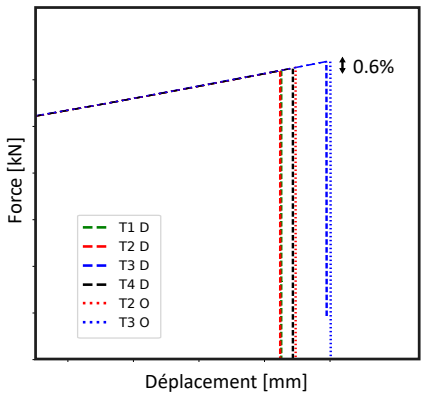
— **Influence des paramètres :** Une évolution de la réponse macroscopique est observée en fonction de la valeur l_c choisie (étudiée plus en détails en Section 3.4.2). On peut également noter qu'en dessous d'un certain ratio $l_c/$ taille de maille, des effets numériques de damier apparaissent sur le champs de D. Dans notre cas, ceux-ci sont visibles à partir de l_c/taille de maille < 0.5 (soit quand l_c devient inférieur à la distance entre les points de Gauss d'un élément), bien que l'influence sur le comportement puisse apparaître avant. Par sécurité il est généralement recommandé d'utiliser un ratio $l_c/$ taille de maille supérieur à 2.

Résultats sur modèle Phase-Field

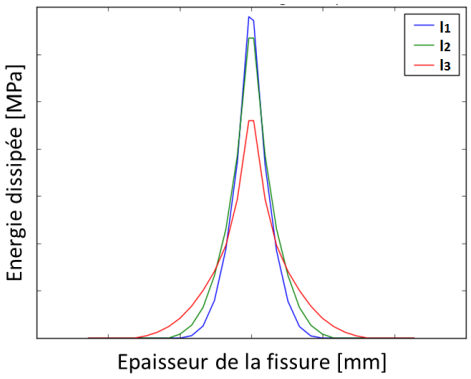
— **Insensibilité à la taille de maille :** Une bonne insensibilité à la taille de maille est observée, avec une variation inférieure au pourcent du pic de la courbe Force / Déplacement sur toutes les configurations (taille et orientation du maillage), pour des valeurs de l_c et G_C fixées.

— **Insensibilité à l'orientation du maillage :** Le profil de fissure obtenu est indépendant de l'orientation du maillage

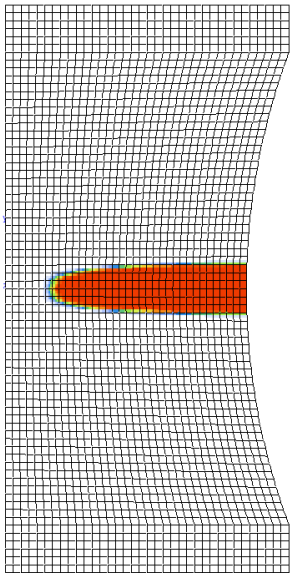
— **Profil de fissure :** La largeur du profil de fissure est contrôlée par la longueur l_c. Contrairement au modèle Non-Local, il n'y a ici pas d'étalement continu de l'en-



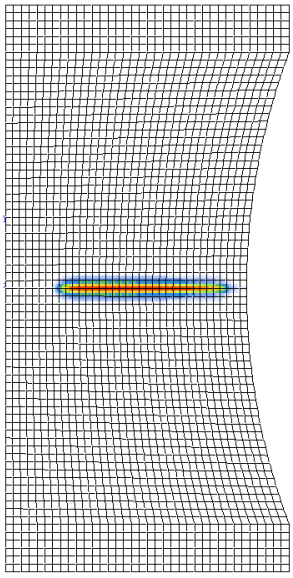
(a) Force/Déplacement sur Diabolo pour différents maillages



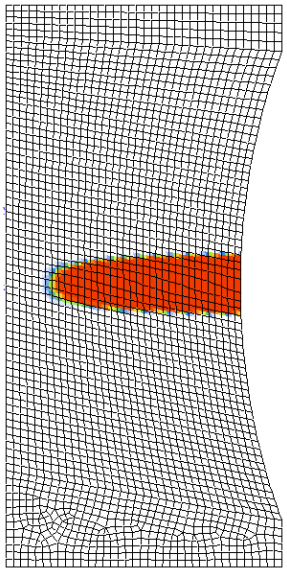
(b) Profil d'énergie dissipée



(c) Profil de fissure sur maillage droit



(d) Profil d'énergie dissipé sur maillage droit



(e) Profil de fissure sur maillage orienté

Fig. 3.18 – Résultats de simulations numériques sur le modèle Non-Local

dommagement une fois la fissure établie : cela vient du fait que le terme source dans l'équation locale diminue quand D atteint 1 (Éq. 3.35). Le profil obtenu est indépendant du maillage utilisé et globalement indépendant de la structure étudiée à l_c fixé.

— **Contrôle de l'énergie dissipée :** Le modèle Phase-Field offre un bon contrôle de l'énergie dissipée grâce à l'introduction de G_C en tant que paramètre. Cependant, il faut noter que le taux de restitution d'énergie obtenu n'est pas nécessairement égale à celui introduit. En particulier, lorsque la longueur l_c devient grande, le G_C apparent est inférieur à la valeur introduite en paramètre. Ce comportement est étudié plus en détail en Section 3.3.3. Lorsque l_c devient faible, la convergence du G_C apparent vers la valeur du paramètre utilisé est assuré par la Γ-convergence [Bourdin et al., 2000].

— **Convergence des simulations :** Comme pour les modèles Non-Locaux, l'enrichissement du nombre de degrés de liberté liés à la résolution du champs en D entraîne une augmentation du coût de calcul. Lors d'une résolution monolithique, la convergence s'avère très difficile voir impossible à obtenir même pour des configurations

stables et des augmentations très importantes de la discrétisation temporelle et du nombre d'itérations sont nécessaires. L'utilisation de méthode line-search ont été proposées afin de faciliter cette convergence, tout en nécessitant un grand nombre d'itérations par incrément [Gerasimov and De Lorenzis, 2016]. La méthode de résolution alternée exhibe quant à elle de bonnes performances de convergence, avec des pas de temps et des nombres d'itérations très largement réduits par rapport à la résolution monolithique et une capacité à atteindre la convergence dans des cas où la résolution monolithique diverge. Enfin, la résolution monolithique découplée permet un coût de calcul limité et une convergence rapide des calculs. Néanmoins, elle exhibe un fort manque de robustesse : en fonction des pas de temps, des résidus de convergence choisis et de la fréquence de mise à jour des matrices tangentes, d'importantes variations des résultats ont été observées, compromettant la robustesse des simulations. Il est donc conseillé d'éviter l'utilisation de cette méthode de résolution au profit de la méthode alternée.

— **Influence des paramètres :** Les paramètres l_c et G_C ont évidemment une influence directe sur le résultat macroscopique (présentée plus en détail en Section 3.3.3). Comme pour les modèles Non-Locaux, des effets de damier sur D apparaissent quand la longueur devient trop faible par rapport à la taille de maille.

3.3.3 Description des effets d'échelle des méthodes de régularisation

En plus de l'étude de l'utilisation pratique des modèles régularisés, il convient de vérifier que ceux-ci produisent la bonne évolution vis-à-vis de l'effet d'échelle et de géométrie. Cette dépendance à la taille de la structure W est étudiée ci-dessous, afin de déterminer les candidats aptes à la description des composites tissés 3D.

Pour rappel trois familles de comportements sont principalement attendues (voir Section 2.1.2) :

— **Comportement de type MLER :** Dans ce cas, la force et le déplacement sont proportionnels à $\sqrt{W}$, tandis que G_C reste constant. En tous points de l'éprouvette, la déformation et la contrainte évoluent en $1/\sqrt{W}$. On peut s'attendre à ce que les modèles essayant de se rapprocher de la MLER (Crack Band, Phase-Field quand $l_c \to 0$) rentrent dans cette catégorie.

— **Comportement de type modèle en contrainte :** La force, le déplacement et le G_C apparent sont proportionnels à W. La déformation et la contrainte ne dépendent pas de la taille de la structure. C'est le comportement exhibé par les modèles d'endommagement non-régularisés (du moins tant que l'adoucissement ne compromet pas l'unicité de la solution).

— **Comportement à longueurs internes :** G_C évolue ici de manière non-linéaire en fonction de W selon la loi de similitude générale présentée en Éq. 2.47. Celle-ci se simplifie en l'Éq. 2.25 dans le cas d'éprouvettes homothétiques comme étudiées ici. La force et le déplacement évoluent alors de manière plus complexe en fonction de W suivant l'Éq. 2.64. La forme des champs de déformation et de contrainte n'est pas conservée lors de l'homothétie et l'évolution ponctuelle de ces valeurs ne peut pas être déterminée *a priori* de manière générale. Ce type de comportement est observé expérimentalement sur les composites tissés 3D

Mise en place

Les modèles sont évalués à partir d'éprouvettes homothétiques, telles que présentées en Fig. 3.19, de facteurs d'échelle 0.5, 1., 1.5, 2. et 2.5 (définis similairement aux essais). Afin d'éviter une éventuelle influence de la taille de maille, celle ci est conservée identique dans la zone de propagation quelle que soit la taille de l'éprouvette. Ce choix permet également de se rapprocher des pratiques industrielles qui travaillent souvent à taille de maille fixée. Cependant, il est attendu que cela n'est pas ou peu d'impact sur les résultats, les modèles régularisés s'affranchissant de l'influence de la taille de maille. L'éprouvette CT est utilisée afin de réaliser par la suite une comparaison avec les données expérimentales.

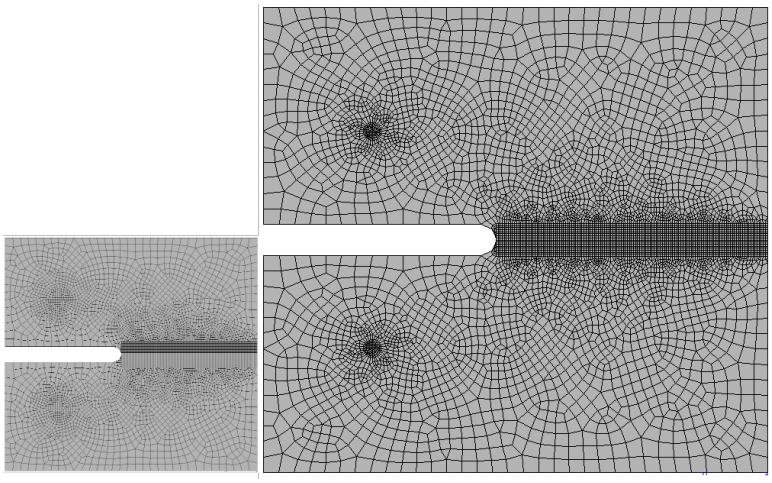


Fig. 3.19 – Maillages des éprouvettes CT T1 et T2 utilisés pour l'étude numérique de l'effet d'échelle des modèles d'endommagement régularisés

Plusieurs grandeurs peuvent être utilisées afin d'analyser le comportement vis-à-vis de la taille W :

— Les courbes Force / Déplacement sont extraites et leur superposition éventuelle après division par W (loi de similitude de type MLER) ou $\sqrt{W}$ (de type contrainte).

— G_C est mesuré selon le processus appliqué aux données expérimentales en Section 1.3.4. La position de fissure peut être déterminée par analyse des champs mécaniques, telle qu'appliquée à la corrélation d'images en Section 1.3.1. Cependant, afin de simplifier l'analyse, cette position de fissure est déterminée à partir de la valeur de D extraite des résultats de calcul au milieu de la fissure. Une valeur seuil sur D est choisie de façon à obtenir la même longueur de fissure qu'avec l'analyse des champs de déplacement. Ce processus est appliquée à toutes les tailles d'éprouvette afin de déterminer l'évolution de G_C avec W.

— Les champs de déformation et contrainte peuvent également être comparés : si ceux-ci sont identiques à un facteur multiplicatif près pour toutes les tailles W, aucune longueur interne n'est introduite par la modélisation.

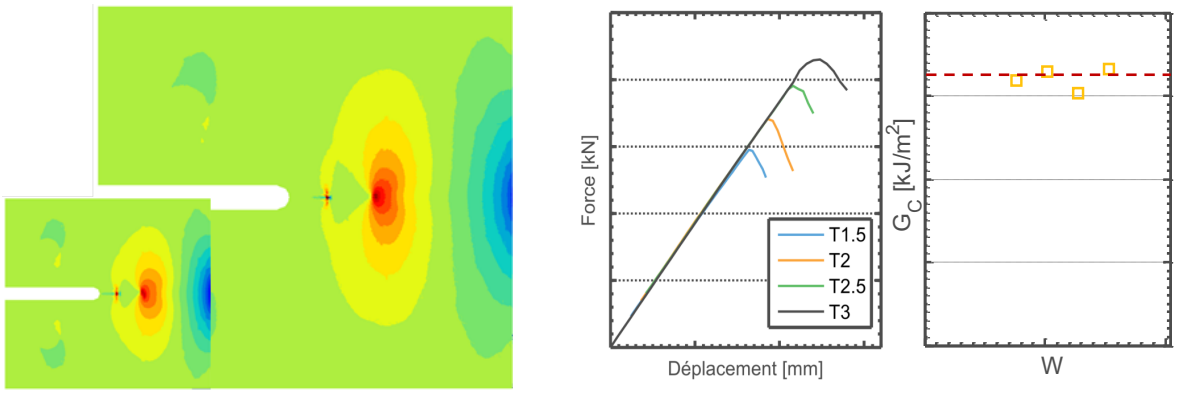
Résultat sur le modèle non régularisé

L'effet d'échelle sur un modèle d'endommagement adoucissant non régularisé dépend en réalité de la mise en données et en particulier de la discrétisation spatiale. Avant l'apparition des problèmes liés à l'adoucissement, la solution reste unique et la loi de

similitude observée est celle des modèles en contrainte. En régime adoucissant, la solution numérique se concentre généralement sur une unique bande de points de Gauss. La loi de similitude numérique dépend donc de cette bande : si le maillage est grossi de manière homothétique avec l'éprouvette (et donc la taille de maille augmente), les champs mécaniques sur la nouvelle éprouvette seront identiques (à l'homothétie près) à ceux obtenus sur la taille de référence. La loi de similitude restera alors de type modèle en "contrainte". Au contraire, si la taille de maille est conservée (comme c'est le cas ici), l'énergie dissipée par la fissure est la même quelque soit la taille W. La loi de similitude numérique est alors de type MLER. Enfin, si aucune correspondance n'existe entre les deux maillages ou si l'endommagement ne se concentre plus sur une unique bande d'éléments après changement de taille, l'effet d'échelle ne suivra probablement aucune règle clairement identifiable.

Résultats sur les modèles Crack Band

Les résultats sur modèle régularisé par la méthode Crack Band sont conformes à ceux attendus dans le cadre de la MLER. Les champs de contraintes sont présentés en Fig. 3.20a pour deux éprouvettes de taille 1 et 2. La forme de ces champs reste identique quelque soit la taille W (à la discrétisation près), laissant supposer l'absence de longueur interne. Les courbes Force / Déplacement, présentées en Fig. 3.20b, peuvent être superposées après division par $\sqrt{W}$, comme dans le cadre de la MLER. La valeur de G_C mesurée sur les données numériques est constante pour toutes les tailles W. Les variations observées peuvent être imputées à la discrétisation ou au fait que l'endommagement ne se concentre pas systématiquement sur une unique rangée d'éléments (ce qui modifie le contrôle l'énergie dissipée).



(a) Forme des champs de contraintes sur éprouvettes homothétiques de taille 1 et 2

(b) Évolution des courbes force déplacement et de G_C avec la taille de l'éprouvette W

Fig. 3.20 – Effet d'échelle numérique obtenu avec un modèle Crack-Band

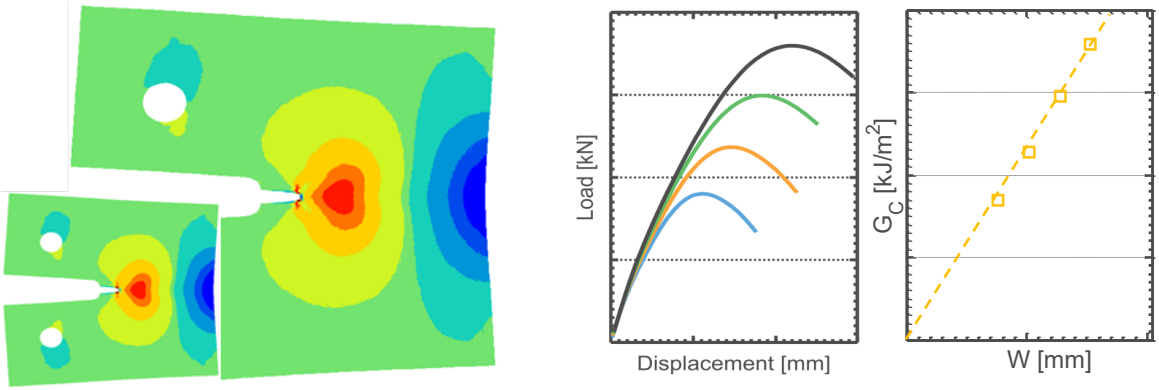
Bien que, dans notre cas, aucun effet de type longueur interne n'ait été observé, certains auteurs ont mis en évidence des effets de ce type sur les modèles Crack Band. Ce résultat est peut-être lié au choix de conserver la taille de maille constante avec W. Si elle est varie, le comportement local contrainte / déformation s'en retrouve modifié pour dissiper la bonne énergie G_C (voir Fig. 3.9). De ce fait, une part plus importante de l'énergie se retrouve dissipée après le pic de contrainte. Une process-zone importante pourrait se former, amenant, comme dans le cas des modèles de zones cohésives, à des effets d'échelles de type longueur interne si la structure est suffisamment petite. Cependant, la variation observée est dans ce cas autant un effet de maillage qu'un effet

d'échelle. La prévision robuste de la propagation de fissure pourrait alors nécessiter d'utiliser une taille de maille précise en plus de la régularisation Crack Band pour chacune des structures étudiées. Cette approche s'avérerait difficile à mettre en place dans un cadre industriel.

Une autre approche pour obtenir le bon effet d'échelle serait de régulariser en utilisant non plus une valeur uniforme de G_C mais la valeur apparente fournie par la loi générale présentée en Éq. 2.47. La réalisation d'un calcul nécessiterait alors d'assigner au préalable en tout point du trajet de fissure supposé, la valeur de G_C voulue, puis d'effectuer la modification locale du comportement suivant la méthode Crack Band pour satisfaire cette dissipation d'énergie. Le bon effet d'échelle devrait alors être obtenu, indépendamment de la taille de maille. Cette approche pourrait permettre une première intégration des résultats présentés dans cette thèse au sein de bureaux d'études, du fait de son caractère peu intrusif dans les codes de calcul. Cependant, elle reste peu robuste et notamment du point de vue de la sensibilité à l'orientation du maillage.

Résultats sur les modèles à endommagement retardé

Les champs de contraintes obtenus avec modèles à endommagement retardé (Fig. 3.21a) sont identiques quelque soit la taille de l'éprouvette, conformément aux modèles en contrainte. Les courbes Force / Déplacement, présentées en Fig. 3.21b, se superpositionnent après division par W. On obtient également un taux de restitution d'énergie critique apparent évoluant proportionnellement à W.



(a) Forme des champs de contraintes sur éprouvettes homothétiques

(b) Évolution des courbes force déplacement et de G_C avec la taille de l'éprouvette W

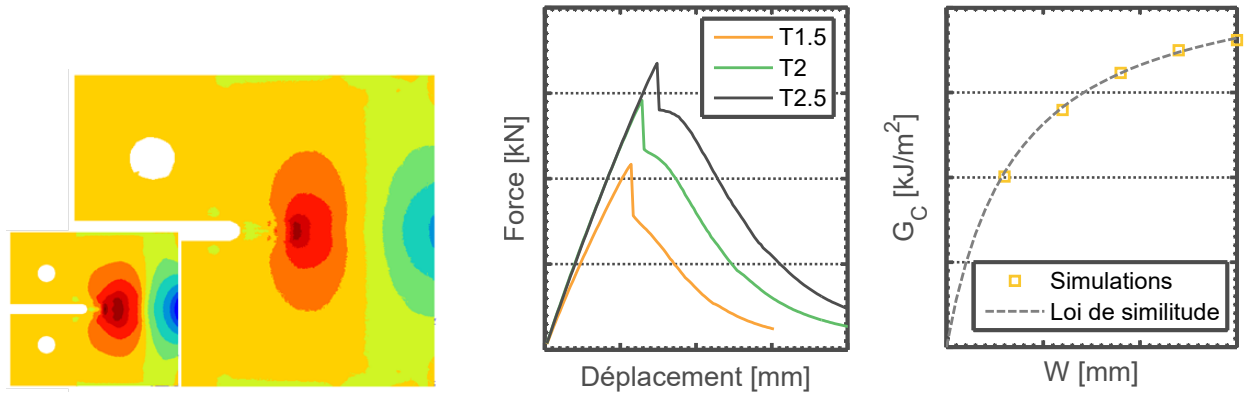
Fig. 3.21 – Effet d'échelle numérique obtenu avec un modèle à endommagement retardé

Cela confirme que les modèles à endommagement retardé suivent des lois de similitude de type contrainte. Du fait de leur bonne robustesse numérique, ils sont donc de bons candidats à la modélisation de matériaux appartenant à cette famille de comportement. Dans le cas de l'étude des composites tissés 3D, ils ne semblent cependant pas aptes à retranscrire les résultats expérimentaux observés.

Résultats sur les modèles Non-Locaux

Les champs de contraintes pour des éprouvettes homothétiques sont présentés en Fig. 3.22a sur le modèle Non-Local. Contrairement aux régularisations par Crack Band ou Effet Retard, la forme des champs n'est pas identique pour les différentes tailles

d'éprouvettes. Les courbes Force / Déplacement, présentées en Fig.3.22b, ne se superposent également pas rigoureusement après division par W ou par $\sqrt{W}$. La valeur de G_C mesurée sur les données numériques montre une évolution importante en fonction de la taille W.



(a) Forme des champs de contraintes sur éprouvettes homothétiques

(b) Évolution des courbes force déplacement et de G_C avec la taille de l'éprouvette

Fig. 3.22 – Effet d'échelle numérique obtenu avec un modèle Non-Local

Cette évolution peut être décrite à partir de la loi de similitude sur G_C pour des éprouvettes homothétiques, présentée en Section 2.1.4 :

$$G_C = \frac{G_f}{1 + \frac{W_0}{W}} \tag{3.67}$$

Pour rappel, G_f est le taux de restitution d'énergie asymptotique obtenu sur des éprouvettes suffisamment grandes et W_0 une taille de transition dépendante de la géométrie étudiée. Le résultat de l'identification de cette loi est superposée aux valeurs de G_C obtenues sur les données numériques. Une bonne correspondance est observée entre la loi de similitude et les valeurs de G_C. Ce résultat laisse supposer que les modèles Non Locaux exhibent bien un mécanisme de longueur interne et peuvent donc être adaptés à modéliser le comportement des composites tissés 3D.

L'identification de cette loi de similitude permet de quantifier l'influence de ces longueurs internes et d'identifier de premiers paramètres de rupture G_f et W_0. Ceux-ci varient avec les paramètres du modèle (loi d'endommagement avant régularisation, longueur l_c, grandeur délocalisée etc.), mais également avec la géométrie étudiée en ce qui concerne W_0. Une étude plus précise de ces paramètres ainsi que l'identification du modèle Non-Local sur les résultats d'essais seront présentées en Section 3.4.

Résultats sur les modèles Non-Locaux avec régularisation visqueuse

Une régularisation par endommagement retardé peut être adjointe aux modèles Non Locaux dans l'objectif de faciliter la convergence des calculs. Cet effet visqueux influence cependant de manière importante le comportement macroscopique. En particulier, en diminuant la valeur τ, le résultat ne semble pas nécessairement tendre vers celui obtenu sans effet visqueux, ou à partir de valeurs de τ trop faibles pour avoir un effet régularisant notable. Comme présenté en Fig. 3.23 sur éprouvettes CT, l'effet retard exerce d'autant plus d'influence que l'éprouvette est grande. Le retard est particulièrement prononcé en début de propagation pour les géométries CT, où le résultat s'écarte fortement du comportement non régularisé. Au fur et à mesure de la propagation, son influence

diminue du fait de la baisse de la vitesse locale de déformation $\underline{\dot{\varepsilon}}$. Cependant, alors que le retard visqueux devient négligeable en fin de calcul, la courbe Force/Déplacement reste significativement éloignée de la solution non régularisée. Il parait donc difficile de contrôler l'effet retard en combinaison avec une régularisation non-locale et de quantifier son influence sur les résultats. De plus, l'évolution de G_C avec la taille W, présentée en Fig. 3.24 pour $l_c = 1mm$ et $\tau = 0.01s$, ne semble suivre aucun des comportements présentés précédemment (MLER, contrainte ou longueur interne). La courbe obtenue dépend fortement des valeur de paramètres utilisées. L'introduction d'un effet visqueux en complément d'une régularisation non-locale ne semble donc pas adaptée pour décrire le comportement des matériaux composites tissés 3D.

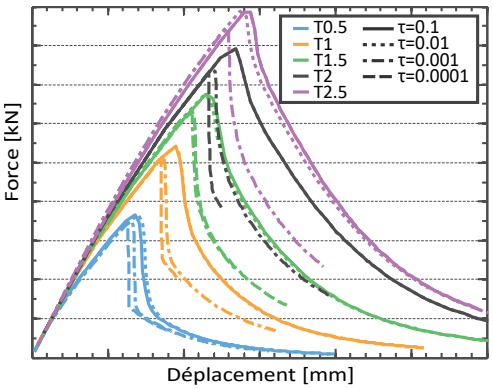


Fig. 3.23 – Courbes Force / Déplacement sur un modèle Non Local avec endommagement retardé

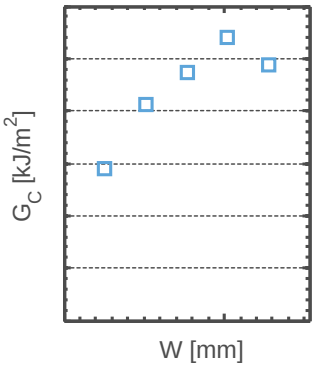


Fig. 3.24 – Évolution de G_C sur un modèle Non Local avec endommagement retardé

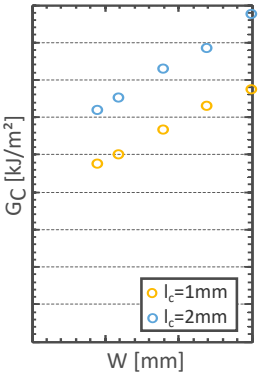


Fig. 3.25 – Évolution de G_C sur un modèle Non Local à longueur variable

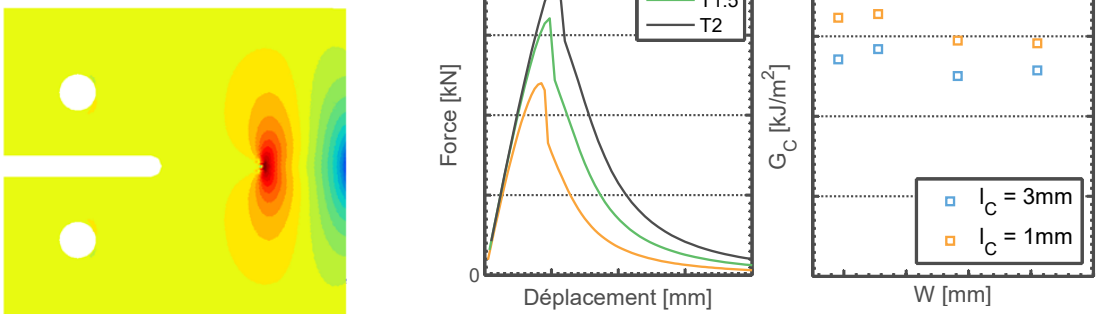
Résultats sur les modèles Non-Locaux avec longueur interne variable

L'évolution de G_C obtenue sur le modèle Non-Local avec longueur interne variable, tel qu'implémenté en Section 3.2.3, est présentée en Fig. 3.25. Une variation de G_C est observée avec W, bien que celle-ci ne semble suivre ni le comportement de type contrainte, ni celui des modèles à longueurs internes. Une étude plus approfondie est nécessaire pour estimer la capacité de ces modèles à retranscrire les résultats expérimentaux et sélectionner les bonnes formulations devant êtres mises en œuvre à ces fins.

Résultats sur les modèles Phase-Field

Les courbes Force/Déplacement obtenues sur modèle Phase-Field sont présentées en Fig. 3.26b. Les courbes se superposent après division par $\sqrt{W}$,malgré de légères différences en début de propagation. De plus, les valeurs de G_C obtenues sur les données numériques ne semblent pas dépendre de W (aux variations numériques près). Ces modèles semblent produire une loi de similitude de type MLER, dont ils sont une approximation continue. Bien qu'une longueur l_c soit introduite dans les équations, le comportement ne correspond pas à celui des modèles à longueurs internes.

Néanmoins, si G_C reste constant à l_c fixé quand W varie, ce n'est pas le cas à W fixé en faisant varier l_c. Dans le cadre des modèles à longueurs internes, l'évolution de G_C est symétrique en W et en $1/l_c$. En effet, la loi de similitude (Éq. 2.47) s'écrit de manière



(a) Forme des champs de contraintes sur éprouvettes homothétiques

(b) Évolution des courbes Force / Déplacement et de G_C avec la taille de l'éprouvette

Fig. 3.26 – Effet d'échelle numérique obtenu avec un modèle Phase-Field

simplifiée :

$$G_C(W, l_c) = \frac{G_f}{1 + a\frac{l_c}{W}} \tag{3.68}$$

où le paramètre a regroupe les termes en $\tilde{g}$. Dans ce cadre, une variation de W ou de $1/l_c$ a le même impact sur le taux de restitution d'énergie.

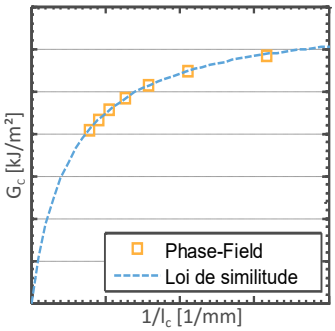


Fig. 3.27 – Évolution de G_C avec $1/l_c$ à W fixé sur le modèle Phase-Field

Dans le cas des modèles Phase Field au contraire, cette symétrie n'est pas respectée. La Fig. 3.27 présente l'évolution de G_C avec $1/l_c$ à taille d'éprouvette fixée. L'évolution est significativement et la valeur tend vers celle introduite en paramètre lorsque $l_c \to 0$ (qui joue le rôle de G_f dans l'Éq. 2.25). L'évolution avec $1/l_c$ est bien décrite par la loi de similitude Éq. 3.68, mais, contrairement à ce qui est attendu, G_C ne montre aucune évolution avec W. Les modèles Phase-Field ne semblent donc pas adaptés à la modélisation de matériaux introduisant des longueurs internes, mais sont, par contre, à même de correctement représenter la MLER si la longueur interne est suffisamment petite.

Synthèse

Dans cette section, nous avons présenté les études numériques effectuées sur les différents modèles régularisés. Ces études ont deux objectifs principaux :

— Étudier l'utilisation pratique d'utilisation de ces méthodes et leur adaptation à un modèle adoucissant de type ODM-CMO

— Déterminer les effets d'échelles induits par ces modèles afin de sélectionner ceux propices à retranscrire les résultats expérimentaux observés sur composites tissés 3D.

Les résultats de cette étude sont présentés dans le Tableau 3.28. Il en ressort que la méthode Crack Band ne permet pas de pallier la dépendance au maillage, en particulier de l'orientation, contrairement aux autres approches. Chacune des approches amènent à des résultats très différents vis-à-vis de la forme du profil de fissure ou de l'énergie dissipée. En particulier, les profils de fissure ne sont pas complètement contrôlés lors de l'utilisation des méthodes d'endommagement retardé (l'étalement dépend de la vitesse locale de déformation) et des méthodes Non-Locales (bien que l'énergie dissipée reste pour ceux-ci contrôlée et que l'utilisation de modèles à longueurs variables puisse contenir l'étalement). L'énergie dissipée est également fortement perturbée lors de l'utilisation de modèles retardés, alors que les modèles Phase-Field et Non-Local semblent contrôler celle-ci.

	Crack Band	Endommagement retardé	Non Local	Phase-Field
Indépendance au maillage	Indépendance à la taille mais pas à l'orientation	Oui	Oui	Oui
Profil de fissuration	Non contrôlé	Dépend de la vitesse locale de déformation, non physique	Non contrôlé sur D (étalement) mais reste contrôlé sur l'énergie dissipée	Oui
Contrôle de l'énergie	Contrôlé, sauf si plusieurs éléments s'endommagent dans l'épaisseur	Non	Contrôlée mais pas de lien direct entre G_c et e_{rupt} - l_c	Oui
Effet d'échelle	De type MLER	De type contrainte	De type longueur interne	De type MLER

Fig. 3.28 – Synthèse de l'étude numérique des méthodes de régularisations

Enfin, l'étude des effets d'échelles numériques produits par chaque modèle permet de dégager trois familles de comportement : (i) les modèles Crack Band et Phase Field suivent une loi de similitude de type MLER, (ii) les modèles à endommagement retardé suivent une loi de type modèle en contrainte et (iii) le modèle Non-Local suit une loi de type longueur interne. Ce dernier est donc cohérent avec le cadre présenté au Chapitre 2.4.5. L'adjonction d'une régularisation visqueuse au modèle Non-Local perturbe fortement l'énergie dissipée et l'effet d'échelle obtenu est difficilement analysable. Enfin, lors de l'utilisation d'une longueur variable, G_C varie avec W sans suivre réellement une évolution de type longueur interne. Une étude plus approfondie des différentes formulation et mises en œuvre pourrait permettre de combiner le bon effet d'échelle du modèle Non-Local avec la diffusion limité de D lors de l'utilisation d'une longueur variable (choix de la variable, fonction d'évolution de l_c etc.).

Cette étude permet de sélectionner le modèle Non-Local comme candidat à la description de la propagation de fissure des composites tissés 3D. Le représentativité du modèle est assurée par le formalise thermodynamique des modèles d'endommagement et le respect des effets d'échelles expérimentaux. La régularisation Non-Locale permet également de pallier les problèmes induits par l'adoucissement et d'assurer la robustesse des résultats. Enfin, les performances obtenues lors d'une résolution alternée laissent envisager une possible utilisation en bureau d'étude. Si le modèle Non-Local semble à même de reproduire les résultats expérimentaux sur les matériaux composites tissés 3D, les paramètres de rupture (G_f, c_x et c_y), introduits au Chapitre 2.4.5 pour caractériser le matériau, n'interviennent pas directement dans le modèle. Le lien avec les paramètres

du modèle et leur identification seront l'objet de la section suivante.

3.4 Étude approfondie des modèles Non-Locaux à gradient

3.4.1 Analyse détaillée du comportement Non Local

L'analyse des méthodes de régularisation a mis en évidence que le modèle Non-Local était, parmi ceux étudiés, le plus à même de reproduire les résultats expérimentaux obtenus sur les matériaux composites tissés 3D. Cependant, en l'état, le modèle présente des comportements non observés expérimentalement pouvant compromettre la bonne adéquation essai/calcul. Un de ces problèmes est l'étalement continu de l'endommagement observé lorsque le terme source de l'équation non-locale est écrit en déformation. Cependant, il a déjà été mentionné que ce problème restait "cosmétique" dans le cas d'un chargement proportionnel, dans le sens où il n'affecte pas le comportement macroscopique et que l'énergie dissipée reste contrôlée. Deux autres phénomènes peuvent également être notés et sont présentés ci-dessous.

Phase d'initiation de la fissure

La phase d'initiation de la fissure entraîne un comportement instable, évoqué en Section 3.3.2 et Annexe C. Ce phénomène est lié à la différence existant entre les conditions d'endommagement du premier élément et des éléments suivants. En effet, lors de la mise en place de la macro-fissure sur le premier élément, la force motrice locale Y est l'unique terme source de l'endommagement. $\bar{Y}$ ne bénéficie pas d'une diffusion à partir des éléments avoisinants, sur lesquels la valeur de Y est plus faible. $\Delta\bar{Y}$. Au contraire, une partie de la force motrice est délocalisée sur les éléments avoisinants, $\bar{Y}$ atteint le seuil d'endommagement Y_0 plus tard que ce qui aurait été observé sur le modèle non régularisé. Au contraire, une fois la fissure établie, les éléments suivant bénéficient de la distribution de $\bar{Y}$ réalisée en amont et sont ainsi pré-endommagées. $\bar{Y}$ peut dépasser la valeur seuil Y_0 pour des niveaux de contrainte/déformation inférieurs à ceux du comportement non régularisé. Il en résulte que l'énergie nécessaire à l'endommagement des premiers éléments est supérieure à celle nécessaire aux éléments suivants.

Ce phénomène entraine un G_C apparent supérieur lors de l'initialisation que la propagation (Fig. 3.29), en contradiction avec ce qui est généralement observé expérimentalement. Cette différence est également à l'origine de l'instabilité observée (Fig. 3.22b). L'initiation de la fissure s'effectue dès que $\mathcal{G}(u,a) = G_C^{init}$. Hors, une fois le premier élément endommagé, le taux de restitution critique pour la propagation devient $G_C^{propa} < G_C^{init}$. La condition $\mathcal{G}(u, a+\delta a) > G_C^{propa}$ est instantanément remplie sans modification du déplacement limite u. La longueur de fissure progresse alors instantanément d'une avancée Δa telle que $\mathcal{G}(u, a+\Delta a) = G_C^{propa}$. L'avancée peut ensuite de nouveau s'effectuer continûment avec l'augmentation du déplacement limite.

Cette instabilité ne correspond *a priori* pas aux observations expérimentales où G_C exhibait plutôt une augmentation en début de propagation. Le phénomène est plus ou moins marqué selon les configurations étudiées et n'empêche pas la convergence des calculs lors de l'utilisation d'un algorithme de résolution alterné. Cependant, il peut compromettre la représentativité du modèle. L'étude des différentes formulations non-

locales disponibles (loi locale, choix de la variable délocalisée, longueur variable) pourrait permettre de pallier ce problème.

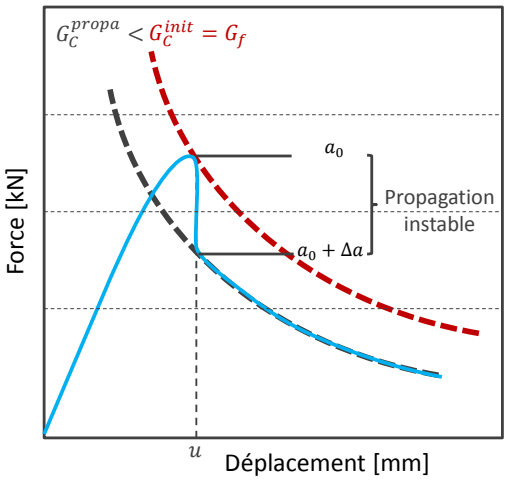


Fig. 3.29 – Initiation de la macro-fissure sur le modèle Non-Local

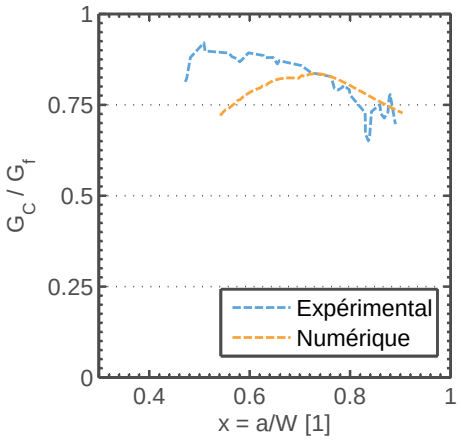


Fig. 3.30 – Comparaison de la forme des courbes $\mathcal{R}$ expérimentales et obtenues numériquement sur éprouvettes CT

Forme des courbes $\mathcal{R}$

Comme observé durant les essais, la valeur de G_C n'est pas constante durant la propagation et une courbe de résistance $\mathcal{R}$ peut être tracée. La comparaison entre la courbe observée expérimentalement et celle obtenue numériquement est présentée en Fig. 3.30. Des différences d'allure sont observables. Les deux courbes exhibent une diminution en fin de propagation, conformément à ce qui est prévu par le formalisme des modèles à longueurs interne (voir Section 2.4.5). Cependant, durant une grande partie de la propagation, cette valeur augmente avec le modèle Non-Local alors qu'elle reste constante ou diminue sur le comportement réel. Le modèle sera par la suite identifié afin d'obtenir une égalité de la valeur moyenne de G_C sur l'ensemble de la propagation. Ces variations locales de G_C entraînent donc des différences sur la courbe Force/Déplacement entre les essais et les simulations, tel qu'observé en Fig. 3.35a et 3.36a.

Les paramètres influant sur la forme de cette courbe ne sont pour l'heure pas explicités et ce point devrait faire l'objet de futures études.

3.4.2 Lien entre les paramètres de rupture et les paramètres du modèle d'endommagement Non-Local

Afin de faire le lien entre les modèles Non-Locaux et le modèle de rupture présenté au Chapitre 2.4.5, il convient d'étudier la variation des paramètres de rupture avec les paramètres introduits dans le modèle d'endommagement et la régularisation Non-Locale. Les paramètres du modèle de rupture sont :

— G_f le taux de restitution asymptotique, tel que $G_C \to G_f$ quand $W \to \infty$ pour toute structure W.

— c_x et c_y les longueurs internes dans les directions x et y ou c_{eq} la longueur équivalente.

— si l'on considère une unique géométrie, l'identification peut en première approche être simplifiée en remplaçant c_x et c_y par la taille de transition W_0. Cependant,W_0 n'est pas un paramètre caractéristique du matériau puisqu'il dépend de la géométrie considérée.

Face à ces paramètres de rupture, les paramètres du modèle Non-Local sont :

— Y_0, Y_C, P qui définissent la cinétique d'adoucissement du comportement non régularisé

— l_c la longueur introduite par le Non-Local

Afin de manipuler des quantités pouvant être plus facilement reliées avec le modèle de rupture, il est plus intéressant de parametrer le modèle à l'aide de :

— σ_{max} la valeur maximale de la courbe contrainte/déformation non régularisée

— ε_{max} la valeur de déformation pour laquelle σ_{max} est atteinte

— e_{rupt} la densité volumique d'énergie de rupture

Il existe en effet une correspondance bijective entre $[\sigma_{max}, \varepsilon_{max}, e_{rupt}]$ et $[Y_0, Y_C, P]$ sur la loi de comportement non régularisée. Du fait du nombre important de paramètres du modèle d'endommagement, la valeur P a été, dans le cadre de ce travail, fixée à $P = 3$. Cette valeur permet notamment d'assurer que e_{rupt} possède une valeur finie (l'aire sous la courbe σ/ε est intégrable, cette condition n'étant pas remplie pour $P \leq 2$). Il n'est alors plus possible de fixer simultanément $\sigma_{max}, \varepsilon_{max}$ et e_{rupt} avec les seuls paramètres Y_0 et Y_C. Le choix a été effectué de laisser libre ε_{max} et de fixer e_{rupt} et σ_{max}. En effet, la densité volumique d'énergie de rupture offre une interprétation plus proche de G_C et σ_C étant une grandeur dimensionnante du modèle sur des éprouvettes lisses, . La valeur de ε_{max} est donc laissée libre et varie en fonction de celles de σ_{max} et e_{rupt}.

Les paramètres des deux modèles sont donc σ_{max}, e_{rupt} et l_c pour le modèle Non-Local et en première approche G_C et W_0 pour la loi de rupture. Le choix de W_0 est réalisé afin de simplifier la démarche et d'augmenter le robustesse de l'analyse : les évolutions observées sont ainsi moins dépendantes d'hypothèses réalisées lors de la construction du modèle. De plus, l'identification robuste des deux longueurs c_x et c_y nécessite deux géométries alors que seule la géométrie CT est ici étudiée pour l'instant.

Il y a donc trois paramètres pour le modèle d'endommagement contre 2 pour la loi de rupture, une des valeurs doit ainsi être fixée. Or, σ_{max} est une valeur caractéristique du matériau identifiable sur des éprouvettes lisses. Cette valeur est donc gardée fixe, afin de correctement simuler le comportement sur plaque lisse. L'étude des liens entre le modèle Non-Local et la loi de rupture revient ainsi à expliciter les relations entre :

— les paramètres du modèle e_{rupt} et l_c

— les paramètres de la loi de rupture G_C et W_0

Afin d'expliciter ces relations, plusieurs simulations ont été réalisées en modifiant ces paramètres. Trois valeurs ont été choisies pour e_{rupt} et l_c et des éprouvettes de facteurs d'échelle 0.5 à 2.5 ont été simulées. Les courbes contrainte/déformation obtenues avant régularisation non locale à partir des valeurs de e_{rupt} sélectionnées sont présentées en Fig. 3.31. Les données numériques issues des simulations subissent le même traitement que les données expérimentales afin de déterminer la valeur de G_C observée durant la propagation. Les valeurs obtenues sont présentées en Fig. 3.32. On observe bien une forte variation de G_C selon la configuration étudiée.

Les paramètres G_f et W_0 sont ensuite identifiés pour chaque couple $[e_{rupt}, l_c]$ à partir de la formule :

$$G_C = \frac{G_f}{1 + \dfrac{W_0}{W}} \tag{3.69}$$

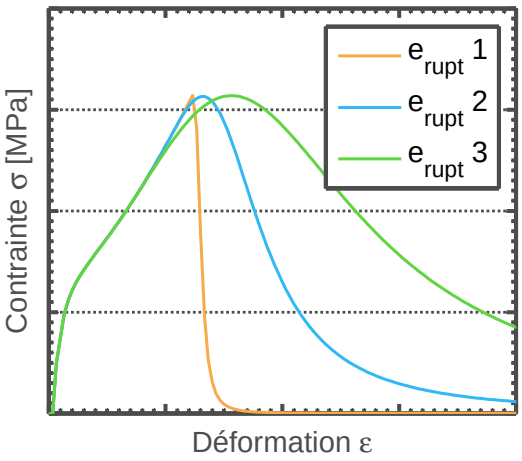


Fig. 3.31 – Variation des courbes Contrainte/Déformation avec e_{rupt} sur RCT1

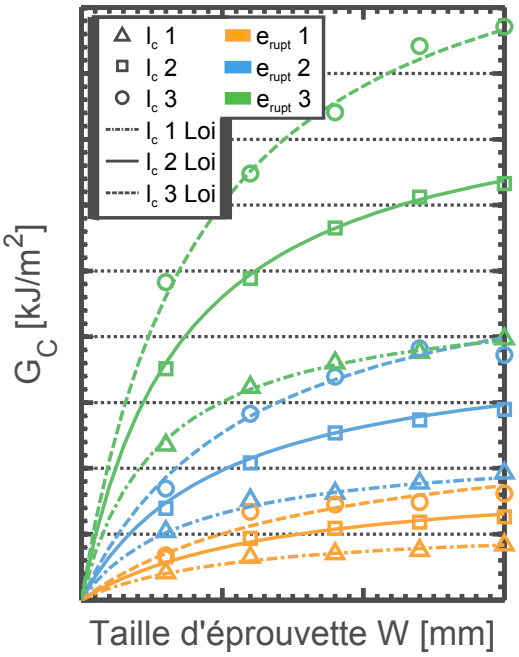


Fig. 3.32 – Variation de G_C avec e_{rupt}, l_c et W et identifications de l'Éq. 3.69

Une bonne correspondance est trouvée entre les résultats de simulation et la loi de rupture (Fig. 3.32). Les évolutions de G_f et de W_0 observées en fonction de e_{rupt} et l_c sont illustrées en Fig. 3.33.

On observe une relation linéaire entre G_f et e_{rupt} et affine avec l_c. Ce comportement est cohérent avec l'analyse dimensionnelle et l'intuition selon laquelle $G_f \propto e_{rupt} l_c$. W_0 quant à lui évolue quasi-proportionnellement à $\sqrt{l_c}$ et inversement proportionnellement à $\sqrt{e_{rupt}}$. Ces tendances peuvent être décrites par les équations :

$$G_f = \alpha(l_c + \beta)e_{rupt} \tag{3.70}$$

$$W_0 = \sqrt{\gamma \frac{l_c + \delta}{e_{rupt}}} \tag{3.71}$$

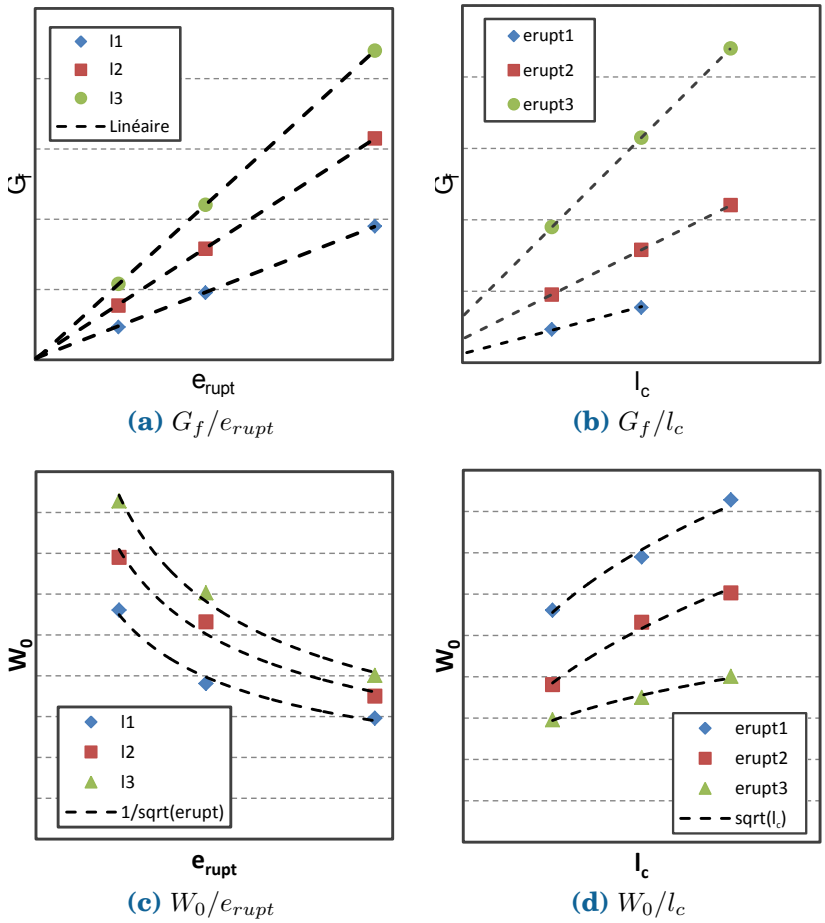
Afin de donner une interprétation plus facile aux valeurs introduites et de simplifier les équations, on choisit de fixer $\beta = \delta$, ces valeurs étant en pratique très proches. Cela permet également de réécrire ces équations sous la forme :

$$G_f = \alpha(l_c + \beta)e_{rupt} \tag{3.72}$$

$$W_0 = \sqrt{\alpha \frac{\gamma}{G_f}(l_c + \beta)} \tag{3.73}$$

Cette formulation donne un sens plus facilement interprétable aux paramètres : α représente un coefficient multiplicateur adimensionné sur G_f, β est une longueur introduisant un décalage entre l_c et c_x - cy (les longueurs internes de la loi de rupture c_x et c_y sont proportionnelles à W_0) et γ est un taux de restitution d'énergie intervenant dans l'expression de W_0. W_0 est sous cette forme proportionnelle à la longueur interne, comme observé dans la loi de similitude générale (Éq. 2.47).

La détermination des coefficients α, β et γ, permettant de relier les paramètres de rupture introduits dans la loi de similitude et du modèle Non-Local, est évidemment dépendante des autres propriétés du matériau (module de Young etc.) et de l'implémentation choisie du modèle Non-Local (variable délocalisée, formulation etc.). Les valeurs



(a) G_f/e_{rupt} **(b)** G_f/l_c

(c) W_0/e_{rupt} **(d)** W_0/l_c

Fig. 3.33 – Évolution des paramètres de rupture G_f et W_0 en fonction des paramètres du modèle e_{rupt} et l_c

obtenues et la forme même des fonctions peuvent ainsi être amenées à changer sur d'autres matériaux ou d'autres implémentations des modèles non-locaux. Dans le cas de W_0, ce coefficient dépend également de l'éprouvette considérée, W_0 n'étant pas un paramètre caractéristique du matériau mais fait intervenir une dépendance à la géométrie. Cette dépendance intervient à travers le coefficient γ, qui s'apparente aux termes $\partial g/g$ dans l'Éq. 2.47. G_f est en revanche indépendant de la géométrie, les coefficients α et β obtenus devraient donc ne pas dépendre de la géométrie étudiée (ce point n'ayant pas fait l'objet de vérifications).

3.4.3 Identification des paramètres du modèle Non-Local et comparaison essais/calcul

À partir du lien entre les paramètres du modèle et de la loi de rupture

Les paramètres du modèle Non-Local peuvent être identifiés en inversant le système d'Éq. 3.73.

$$l_c = \sqrt{\frac{G_f}{\alpha}}\frac{W_0}{\gamma} - \beta \tag{3.74}$$

$$e_{rupt} = \sqrt{\frac{\gamma G_f}{\alpha}}\frac{1}{W_0} \tag{3.75}$$

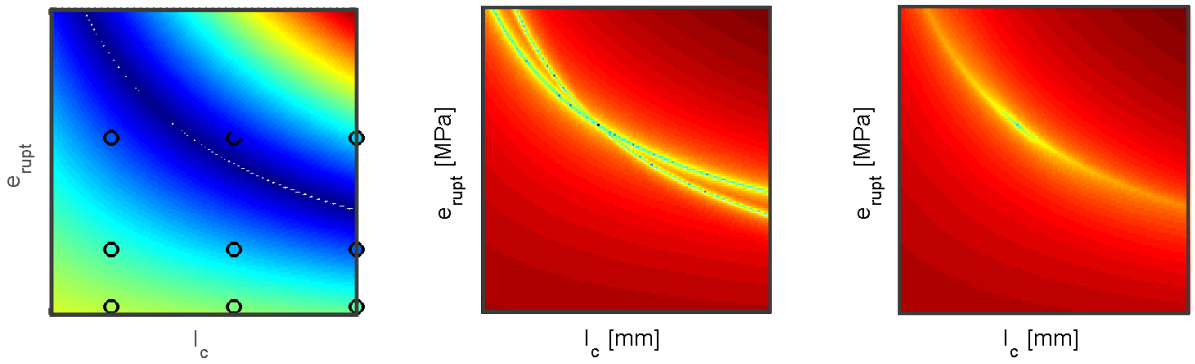
On obtient alors des valeurs de e_{rupt} et de l_c permettant de retranscrire l'évolution de G_C sur les éprouvettes CT. On peut espérer que les résultats numériques obtenus sur éprouvette SENB avec cette identification soit en adéquation avec les résultats expérimentaux, du fait du cadre général d'analyse des modèles à longueurs internes utilisé, l'éprouvette SENB sert alors de cas de validation. Cependant, des ajustements de la formulation peuvent offrir de meilleurs résultats lors du changement de géométrie. L'introduction de deux longueurs, comme utilisée au Chapitre 2.4.5 sera également discutée en Section 3.4.4.

À partir d'une comparaison directe des valeurs de G_C expérimentales et numériques pour toutes les tailles

Une autre méthode d'identification est présentée. Celle-ci consiste en une identification inverse plus classique, sans présupposer du cadre d'analyse des modèles à longueurs internes. Cette identification est présentée en parallèle de celle réalisée précédemment : bien qu'elle offre une moins bonne compréhension des mécanismes à l'œuvre, elle ne repose pas sur les hypothèses réalisées lors de la mise en place du formalisme des modèles à longueurs internes au Chapitre 2.4.5 et de la détermination des équations 3.74 et 3.75. La cohérence entre les valeurs obtenues par les deux méthodes assure donc une plus forte confiance dans l'identification.

On cherche ici à minimiser l'écart entre les valeurs de G_C mesurée expérimentalement et numériquement. Pour une taille d'éprouvette donnée, l'erreur $|G_C^{exp} - G_C^{num}|$ est mesurée pour chaque couple $[e_{rupt}, l_c]$. Une interpolation de cet écart est alors réalisée, permettant d'obtenir une carte d'écart entre le taux de restitution expérimental et numérique en fonction de e_{rupt} et l_c. Cette carte d'écart est présentée en Fig. 3.34a.

En considérant un essais CT de taille donnée (par exemple T0.75 en Fig. 3.34a), on remarque qu'il existe une infinité de couples $[e_{rupt}, l_c]$ satisfaisant l'égalité entre G_C^{exp} et G_C^{num}. Comme attendu, les deux paramètres ne sont pas identifiable à partir d'un unique essai. Cependant, lors de l'utilisation de plusieurs tailles d'éprouvettes, les courbes de l'espace $[e_{rupt}, l_c]$ minimisant l'écart diffèrent et ne possèdent plus qu'un unique point d'intersection. Ce résultat est présenté en Fig. 3.34b sur les éprouvettes de facteur d'échelle 0.75 et 2.5, avec une échelle logarithmique sur les couleurs afin de permettre une meilleure visualisation. Plus le facteur d'échelle entre les éprouvettes est élevé plus l'angle d'intersection entre les courbes sera important, permettant une identification précise du point d'intersection. Ce point d'intersection doit également être unique quelque soit les tailles considérées. Le minimum d'erreur sur G_C pour toutes l'ensemble



(a) $|G_C^{exp} - G_C^{num}|$ sur T0.75 **(b)** $log|G_C^{exp} - G_C^{num}|$ sur T0.75 et T2.5 **(c)** $max|G_C^{exp} - G_C^{num}|$ sur toutes les tailles

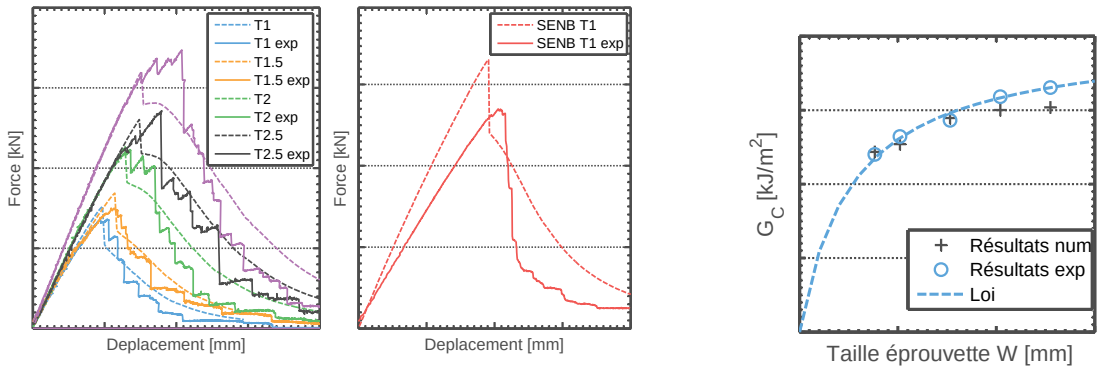
Fig. 3.34 – Écart entre les valeurs expérimentales et numériques de G_C en fonction des paramètres l_c et e_{rupt} et de la taille de l'éprouvette

des tailles testées [$\max_{Ti}|G_C^{exp} - G_C^{num}|$ est présenté en Fig. 3.34c en fonction de e_{rupt} et l_c. Les valeurs de e_{rupt} et l_c sont identifiées par :

$$arg \min_{e_{rupt},l_c} \max_{Ti}|G_C^{exp} - G_C^{num}| \tag{3.76}$$

Les paramètres identifiés selon cette méthode sont cohérents avec ceux obtenus précédemment à partir de l'Éq. 3.73.

Comparaison des résultats numériques et expérimentaux



(a) Comparaison Force/Déplacement sur CT et SENB **(b)** Comparaison de G_C sur CT

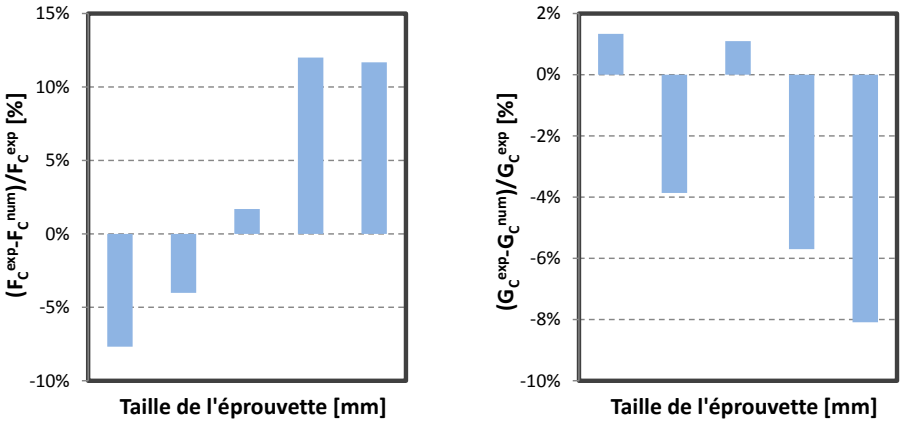
Fig. 3.35 – Comparaison des résultats expérimentaux et du modèle Non-Local pour les valeurs e_{rupt} et l_c identifiées

Des simulations numériques ont été effectuées à partir des valeurs identifiées sur les configurations CT et SENB similaires aux essais. Les forces courbes Force/Déplacement obtenues sont présentées en Fig. 3.35a. Une bonne correspondance générale est observée. Deux différences principales sont observées entre les essais et les simulations, dues aux mécanismes présentés en Section 3.4.1 :

— La présence d'une propagation instable en début de propagation

— Une surestimation de la force en fin de propagation (et dans une moindre mesure une sous-estimation en début). Celle-ci vient du fait que le modèle est identifié pour respecter la valeur moyenne de G_C sur l'ensemble de la propagation, mais exhibe des différences dans la forme de la courbe $\mathcal{R}$

L'étude des différentes formulations locales du modèle d'endommagement et des implémentations du Non-Local pourrait être effectuée dans le but d'obtenir une meilleur correspondance des courbes Force/Déplacement (choix de la loi locale, variable à délocaliser, forme de la délocalisation, longueur variable etc.).



(a) Écart sur la force maximale sur CT **(b)** Écart sur la valeur moyenne de G_C sur CT

Fig. 3.36 – Écarts entre les résultats expérimentaux et ceux du modèle Non-Local

La Fig. 3.35b présente également les valeurs de G_C obtenues numériquement avec celles observées expérimentalement, moyennées sur l'ensemble de la propagation. Les Fig. 3.36a et 3.36b présente les différences sur les pics d'effort et les valeurs de G_C entre le modèle Non-Local et les résultats expérimentaux sur les composites tissés 3D.

Enfin, la comparaison des courbes Forces/Déplacement sur l'éprouvette SENB est également visible en Fig. 3.35a. D'importantes différences sont observées, notamment sur la rigidité initiale. Celles-ci sont dues à la difficulté à simuler correctement les conditions limites subies par l'éprouvette : les conditions limites sont introduites par des rouleaux, pouvant de plus rouler autour de leurs axes. Deux approches permettraient alors d'introduire les conditions limites de manière plus représentative : (i) l'utilisation de contact entre les rouleaux et l'éprouvette (pouvant être coûteux en combinaison avec la résolution non-locale) ou (ii) l'introduction des champs de déplacement limites réels récupérés par CIN. Ces deux approches sont actuellement à l'étude pour permettre une meilleure adéquation des résultats numériques et expérimentaux. Malgré ce manque de représentativité des conditions limites, le modèle Non-Local semble à même de reproduire le comportement réel. Ce point doit encore être confirmé pour valider la capacité du modèle Non-Local à décrire le comportement des composites tissés 3D sur tout type de structures.

3.4.4 Enrichissement vers un modèle à deux longueurs internes

En l'état, le modèle Non-Local n'offre pas une correspondance totale avec le cadre introduit au Chapitre 2.4.5. Celui-ci introduit en effet deux longueurs internes, c_x et c_y, agissant respectivement dans les directions x et y. Le modèle Non-Local introduit, quant à lui, une unique longueur interne, agissant dans les trois directions. Ce point pourrait cependant être modifié afin de séparer la contribution suivant chacun des axes. En effet, l'équation de délocalisation du modèle Non-Local s'écrit :

$$\bar{Y} - l_c^2 \Delta \bar{Y} = Y \tag{3.77}$$

La longueur est multipliée au Laplacien $\Delta \bar{Y} = \Sigma \partial^2 \bar{Y} / \partial x_i^2$. Cette équation peut donc être modifiée pour faire intervenir trois longueurs, notées l_x, l_y et l_z :

$$\bar{Y} - l_x^2 \frac{\partial^2 \bar{Y}}{\partial x^2} - l_y^2 \frac{\partial^2 \bar{Y}}{\partial y^2} - l_z^2 \frac{\partial^2 \bar{Y}}{\partial z^2} = Y \tag{3.78}$$

Dans ce cas, l_x et l_y correspondent respectivement à c_x et c_y (sans être pour autant directement égales). La longueur l_z n'a pas été considérée au Chapitre 2.4.5, du fait de l'absence d'étude de l'effet de l'épaisseur, mais le modèle peut-être éventuellement étendu pour prendre en compte ce phénomène.

Des études sont actuellement en cours pour évaluer l'adéquation de cette amélioration avec le modèle de rupture introduit et la capacité du modèle ainsi modifié à représenter au plus juste les résultats expérimentaux.

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons cherché à décrire et à quantifier les mécanismes de rupture intervenant au sein des composites tissés 3D sous chargement de traction statique, afin de mettre en œuvre une méthode de simulation adaptée et robuste. Ce travail répond à un manque de données expérimentales sur les matériaux composites tissés 3D, encore peu répandus dans la littérature, en particulier en ce qui concerne la propagation d'une macro-fissure découlant de la rupture complète des torons de fibres. Cette thèse s'inscrit également dans le contexte industriel de l'aéronautique, domaine très réglementé, mettant en jeu des cas d'application complexes tout en exhibant un fort besoin de fiabilité. Dans ce contexte, il est important de valider l'intégralité de la chaîne de mise en œuvre, de l'expérience aux simulations numériques, et d'assurer la représentativité des modèles et la robustesse des simulations numériques (au sens de l'indépendance du résultat à la mise en données par l'utilisateur).

Ce travail a donc cherché à améliorer les connaissances expérimentales, mettre en place des modèles et guider les choix de mises en œuvre numériques pour décrire la rupture des composites tissés 3D, en se plaçant à l'échelle macroscopique. Le travail de thèse s'est organisé en trois phases principales.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté la campagne expérimentale mise en place, reposant sur l'estimation de l'énergie surfacique G_C dissipée par la propagation de la macro-fissure. Cette grandeur a été déterminée à partir d'éprouvettes à gradient de contrainte et à propagation stable de la macro-fissure, CT et SENB. Du fait de la possible apparition de modes de ruines indésirables, un dimensionnement prenant en compte les spécificités des composites tissés 3D a été proposé. Vingt-huit essais de propagation de fissure ont ainsi été réalisés, utilisant deux géométries d'éprouvettes (CT et SENB), différents facteurs d'échelle (avec des rapports de 0.75 à 3) et 4 RCT, allant de tissages très déséquilibrés à équilibrés dans le plan.

Plusieurs méthodes d'instrumentation ont également été utilisées pour tirer au mieux partie des essais : suivi optique, CIN, suivi acoustique 4-capteurs, thermographie infrarouge passive et μ-tomographie à rayons X (*in situ* ou *post mortem*). Les données issues de cette multi-instrumentation ont été analysées, notamment afin d'extraire la longueur de fissure en cours d'essai. Les stratégies mises en place à partir des différentes sources d'instrumentation se sont révélées cohérentes et leur utilisation simultanée a permis d'augmenter la confiance dans les valeurs obtenues. Le choix final s'est porté sur l'utilisation automatique d'une détection de la macro-fissure à partir des images optiques du profil de fissure et des résultats de CIN. Contrairement à la mesure des longueurs de fissure, les méthodes d'estimation de G_C ont exhibé d'importantes différences de résultats. Certaines méthodes (interpolation de K_C, VCCT, méthodes des normes) ont ainsi

été jugées inadaptées pour une application aux matériaux tissés 3D du fait de leurs hypothèses d'application trop restrictives. Le choix s'est porté sur l'utilisation simultanée de la méthode de la souplesse modifiée et de la méthode des aires.

Les essais bénéficient d'une bonne répétabilité pour les faibles RCT et constituent donc une base expérimentale utile pour la compréhension et la quantification des mécanismes de rupture des composites tissés 3D. Les valeurs de G_C ainsi obtenues varient fortement avec la taille de la structure (avec un facteur 1.4 entre la plus petite et la plus grande éprouvette CT) et la géométrie (facteur 1.8 entre la SENB et la plus grande CT). Ce constat, également corroboré par l'analyse des courbes force/déplacement, va à l'encontre de ce qui est usuellement observé sur les composites stratifiés de plis d'unidirectionnels. Il amène à remettre en question, pour les matériaux étudiés, l'applicabilité du cadre de la MLER, dans lequel G_C est un paramètre physique caractéristique indépendant de la structure étudiée. Cette variation a également été montrée sur les RCT plus équilibrés. Cependant, les valeurs obtenues doivent être prises avec prudence, du fait de la forte dispersion expérimentale, du profil chahuté de la macro-fissure et d'une rupture partielle des torons en compression en arrière d'éprouvette.

La mise en évidence de ces effets d'échelle et de géométrie a amené dans le Chapitre 2 à rechercher les mécanismes physiques à l'origine de ce phénomène et à proposer un cadre de modélisation adapté à leur description. L'étude des lois de similitude (évolution des grandeurs mécaniques avec la taille de l'éprouvette), a mis en évidence trois grandes familles de comportement : les modèles de type critère en contrainte, de type MLER et ceux introduisant des longueurs internes. C'est cette dernière catégorie qui s'avère adaptée à la description des variations observées expérimentalement. Ces modèles introduisent un paramètre matériau de longueur, lié à l'architecture, définissant une taille caractéristique des non-linéarités lors de la mise en place de la macro-fissure.

Des études expérimentales complémentaires ont donc été menées, reposant sur l'analyse des données de tomographie ainsi que sur la réalisation d'images des profils de fissures en gros plan et par microscope électronique à balayage. Ce travail a mis en évidence la présence de deux mécanismes de longueur interne : (i) une longueur de dégradation en avant du front de la macro-fissure, guidée par la distance entre les colonnes de trame et (ii) une épaisseur de fissure, guidée par la distance de rupture des torons de chaîne de part et d'autre du plan moyen de la macro-fissure.

Ces mécanismes ont été intégrés au sein d'un modèle à plusieurs longueurs internes. Il repose sur une configuration équivalente linéaire élastique du problème, plus facile à manipuler que la configuration réelle de la fissure, mais produisant au loin les mêmes effets que cette dernière sur la réponse globale de la structure et l'énergie dissipée. Des simulations linéaires-élastiques peuvent être facilement réalisées sur cette configuration équivalente et permettent d'obtenir une loi de similitude explicitant l'évolution de G_C pour toutes les géométries et tailles de structures.

Un protocole d'identification du modèle a été proposé, permettant de décrire la rupture à l'aide de trois paramètres :

— c_x et c_y, les deux longueurs internes caractérisant la taille des mécanismes de rupture et liées aux paramètres du tissage.

— G_f, le taux de restitution d'énergie critique asymptotique, obtenu pour des éprouvettes pour lesquelles la taille des gradients mécaniques est très grande devant les longueurs internes.

Ce modèle permet de décrire les évolutions de G_C observées expérimentalement et de rendre cohérents les essais réalisés sur éprouvettes CT et SENB. Les conclusions expérimentales et les évolutions prédites par le modèle peuvent avoir des répercussions sur

la démarche de dimensionnement à la rupture de pièces en matériaux composites tissés 3D. Un résumé des principales conclusions pouvant être tirées est présenté en Section 2.4.5.

Enfin, une étude du transfert de ces modèles vers des simulations numériques a été présentée au Chapitre 3. L'amélioration des simulations numériques pré-existantes doit remplir deux objectifs : (i) retranscrire les phénomènes physiques et les évolutions observées expérimentalement et (ii) pallier le manque de robustesse des calculs par éléments finis. En effet, les modèles numériques reposent sur le cadre général des modèles d'endommagement continu, dans lesquels la rupture est retranscrite par un comportement adoucissant local. En particulier, le modèle utilisé dans ces travaux repose sur les modèles ODM-CMO, développés à l'ONERA pour décrire le comportement des composites à matrice organique. Les modèles d'endommagement adoucissants exhibent, en effet, des comportements compromettant la bonne tenue de simulations, notamment une forte dépendance au maillage (absence de convergence au maillage, sensibilité à l'orientation des éléments) et un manque de contrôle de l'énergie dissipée. Une étude des approches permettant de pallier ces phénomènes a été réalisée. Des modèles de type Crack-Band, endommagement retardé, Non-Local et Phase-Field ont été adaptés au formalisme ODM-CMO et mis en œuvre dans le code de calcul Z-set, co-développé par L'ONERA et l'École des Mines de Paris.

Des études numériques ont été effectuées afin de déterminer les possibilités d'utilisation pratique de ces méthodes et leur capacité à retranscrire les effets d'échelle expérimentaux. Ces études se sont reposées sur une grande base de simulations numériques, réalisées pour chacun des modèles sur deux géométries (CT et Diabolo), différentes tailles d'éprouvettes (avec facteurs d'échelle de 0.5 à 3), maillages (tailles de maille et orientations), valeurs des paramètres "numériques" et méthodes de résolution. Cette étude pratique des méthodes remet en cause l'utilisation d'une régularisation Crack-Band pour la description de la rupture des composites tissés 3D. Bien que ces modèles puissent être adaptés au formalisme ODM, ils souffrent d'une forte dépendance à l'orientation du maillage et de la possibilité d'apparition de plusieurs bandes d'endommagement parallèles. De plus, ils exhibent avec notre mise en œuvre un effet d'échelle de type MLER, incompatible avec les variations de G_C observées.

Les autres approches (endommagement retardé, Non-Local et Phase-Field) ont dans notre cas démontré une robustesse numérique suffisante pour une application à des problématiques industrielles de dimensionnement. Deux de ces méthodes produisent cependant des profils de fissures non conformes à ceux observés : les modèles d'endommagement retardé (pour lesquels l'épaisseur de fissure est liée à la vitesse locale de chargement) et les modèles non-locaux à longueur fixe (où une diffusion de l'endommagement peut être observée après la mise en place de la fissure). Dans ce dernier cas cependant, cette diffusion s'effectue dans des zones déchargées mécaniquement et n'impacte pas la réponse globale lors de chargements de traction monotone. La sélection des méthodes a donc été réalisée sur leur faculté à retranscrire les effets d'échelles expérimentaux. De ce point de vue, les modèles à endommagement retardé suivent une loi de similitude de type critère en contrainte, dans la lignée du comportement attendu sur les modèles d'endommagement non régularisés. Ce comportement, bien que adéquat pour certaines applications, n'est pas à même de représenter la rupture des composites tissés 3D. Les modèles Phase-Field exhibent quant à eux une loi de type MLER, pour laquelle G_C ne varie pas avec la taille de la structure (mais peut varier avec la longueur interne l_c). Ils sont donc adaptés pour retranscrire la MLER ou pour les applications dans lesquelles les gradients mécaniques s'opèrent sur des distances très grandes vis-à-vis

des longueurs internes. Enfin, les modèles Non-Locaux produisent une évolution de G_C cohérente avec le formalisme des modèles à longueurs internes. Ils apparaissent donc comme les principaux candidats pour la modélisation numérique des matériaux étudiés.

Une dernière étape de ce travail a donc consisté à établir le lien entre les paramètres de rupture identifiés au Chapitre 2 et les paramètres du modèle Non-Local. À cette fin, les paramètres de rupture ont été identifiés sur les résultats numériques pour différentes valeurs de la densité volumique de rupture e_{rupt} et de la longueur interne l_c du modèle Non-Local. Une correspondance a ainsi été établie entre ces valeurs et les paramètres des lois de similitude. Des comparaisons essais-calculs ont finalement permis de décrire les courbes Force/Déplacement et les évolutions de G_C observées durant la campagne expérimentale. De plus, l'application d'une méthode de résolution alternée, inspirée des modèles Phase-Field, laisse envisager l'application de ces travaux à des problèmes industriels de dimensionnement robuste de structures aéronautiques.

Perspectives

La représentativité du cadre de modélisation imposé pourrait être confirmée par l'étude d'autres géométries. En particulier, l'utilisation d'éprouvettes générant des formes de gradients mécaniques différentes de celles observées sur CT et SENB permettrait de différencier plus clairement l'influence des deux longueurs c_x et c_y, introduites suivant différentes orientations du matériau. L'identification de ces valeurs reste pour l'instant peu précise du fait des éprouvettes utilisées et serait améliorée par des études expérimentales complémentaires. De plus, les résultats obtenus sur l'éprouvette CT de facteur d'échelle 3 ne sont pas retranscrits par le modèle et, bien que l'hypothèse principale avancée pour expliquer cette divergence soit une différence dans les conditions expérimentales, ce résultat mériterait d'être par la suite d'être appronfondi.

Il serait également intéressant que les futures campagnes expérimentales viennent compléter les données obtenues avec les différents tissages. Si, dans le cadre de ce travail, les paramètres de rupture ont été principalement identifiés sur un matériau fortement déséquilibré, des données ont été obtenues pour d'autres ratios chaîne/trame. Ces données restent cependant insuffisantes pour permettre une identification formelle du modèle sur ces RCT. En effet, il est recommandé d'utiliser au minimum quatre configurations (variation de la taille et/ou de la géométrie) pour pouvoir mener à bien cette identification. On peut s'attendre à ce qu'une correspondance existe entre les paramètres de rupture (G_f, c_x et c_y) et les propriétés du tissage (taux de fibres, armure, distance intertoron). L'enrichissement de la base expérimentale pourrait permettre de confirmer les tendances observées à ce sujet. Enfin, si les travaux menés durant cette thèse se sont attachés à caractériser la rupture des torons de trame du matériau, la caractérisation de la chaîne constitue un défi expérimental du fait des modes de ruines indésirables présents, notamment la rupture en compression. Des pistes existent afin d'adapter les montages à ces contraintes, mais l'obtention d'un profil de macro-fissure permettant une bonne analyse des résultats sur des forts taux de fibres reste une question expérimentale ouverte. En attendant, une meilleure compréhension des liens entre les paramètres de tissage et le comportement sur les faibles RCT pourrait fournir une première estimation du comportement à rupture des torons de chaîne.

De manière plus générale, l'existence de longueurs internes pourrait être examinée sur d'autres catégories de matériaux composites. Si aucun effet d'échelle ne semble être observé sur des stratifiés d'unidirectionnels carbone/epoxy [Laffan et al., 2010b], l'apparition de ces phénomènes à une échelle plus petite ou pour d'autres stratifications reste

possible. Les composites tissés 2D paraissent également être des candidats propices à leur apparition. Sur ces derniers, les données expérimentales de l'influence de la taille des structures sur la rupture restent peu nombreuses et pourraient générer de futurs travaux.

Du point de vue de la modélisation et des simulations numériques, le modèle Non-Local a démontré sa capacité à retranscrire les résultats expérimentaux. Cependant, des points d'inadéquation persistent, en particulier sur la mise en place de la fissure, la forme des courbes $\mathcal{R}$ et l'étalement continu du profil de fissure. De ce point de vue, une étude plus complète des formulations Non-Locales disponibles permettrait d'améliorer la concordance entre les résultats d'essais et de simulations. On peut par exemple penser à modifier la variable délocalisée, remplacer l'écriture en déformation par une écriture en contrainte, modifier la loi locale d'évolution de l'endommagement ou introduire une longueur interne variable. Il convient cependant de s'assurer que les modèles ainsi obtenus continuent à suivre un effet d'échelle en adéquation avec le formalisme des modèles à longueurs internes, cette condition n'ayant pas été vérifiée lors des premières tentatives non-locales avec longueur variable.

Une extension du Non-Local devrait également être effectuée afin de séparer l'influence de c_x et c_y telles qu'introduites dans le modèle de rupture. Cette séparation, discutée en Section 3.4.4, peut se traduire par une pondération des termes du laplacien par des longueurs différentes. Cette distinction pourrait permettre une correspondance complète entre les paramètres G_f, c_x et c_y de rupture et les paramètres e_{rupt}, l_x et l_y du Non-Local et permettrait une meilleure représentativité des simulations lors d'applications à d'autres formes de gradients.

De plus, ces travaux ont vocation à être transférés vers le milieu industriel et appliqués sur des structures complexes et pour de nombreux cas de chargements. À cette fin, la performance numérique des simulations et le choix des technologies éléments finis utilisées restent un enjeu majeur. L'algorithme de résolution alternée, utilisé dans ces travaux, permet une nette diminution des temps de calcul et une convergence quasi-systématique. Cependant, l'application à des pièces industrielles, combinée avec la discrétisation fine nécessaire à la bonne description des profils de fissures, ne peut que bénéficier d'une optimisation des stratégies de résolution (choix des solveurs, parallélisation, mise à jour des opérateurs tangents, résidu de convergence, etc.). Les modèles, développés dans le code Z-set, doivent également être transférés sur des codes industriels. Ce transfert a déjà été partiellement réalisé, les modèles Non-Locaux de l'ONERA ayant été mis en œuvre dans Abaqus et de nombreux modèles Phase-Field, très proches en termes d'équation, sont également disponibles. Mais la possibilité de ce transfert n'est pas avérée pour tous les codes de calcul et peut demander un travail de mise en œuvre conséquent : lors d'une résolution monolithique, il est nécessaire de définir des éléments spécifiques avec degrés de liberté supplémentaires et en résolution alternée, il faut pouvoir mener en parallèle deux calculs et échanger leurs résultats.

Enfin, l'application à des cas industriels amène à étendre les travaux effectués à des cas de sollicitations dynamiques. En effet, l'étude des phénomènes statiques constitue une première étape nécessaire à la compréhension des mécanismes, mais de nombreuses applications de rupture des composites tissés 3D s'effectuent au sein du groupe SAFRAN en régime dynamique : ingestion, perte d'aube, rétention par le carter, etc. De prime abord, aucune incompatibilité n'apparaît à l'utilisation en régime dynamique des modèles et des simulations développés ici. Des résultats expérimentaux sont néanmoins nécessaires pour déterminer si les effets d'échelle observés en propagation quasi-statique se retrouvent en dynamique. La réalisation de tels essais représente un défi technique, mais ouvre la porte à une compréhension plus exhaustive des mécanismes de rupture

des composites tissés 3D, à l'extension des applications industrielles et à la confirmation des résultats obtenus durant cette thèse.

Annexe A

Méthode de calcul des dérivées des déformations positives

Afin de mieux prendre en compte les mécanismes de création d'endommagement, l'écriture des lois d'évolutions de l'endommagement à partir de déformations positives et négatives est souvent rencontré dans la littérature. Si cette approche est utilisée avec une méthode de résolution implicite, il de vient nécessaire de connaître l'évolution de ces quantités au cours de la résolution. Ce calcul peut s'avérer compliqué et amener à la simplification de l'écriture des déformations positives ou au calcul d'une approximation des dérivées. Nous proposons ici une méthode de calcul des dérivées des déformations positives et négatives exactes. Pour rappel celles-ci sont définies par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{\pm} = P\langle \underline{\underline{\varepsilon}}_p \rangle_{\pm} P^T \tag{A.1}$$

avec :

- $\underline{\underline{\varepsilon}}_p$ la matrice diagonale constituée des valeurs propres (ou déformations principales) ε_I, ε_{II} et ε_{III} de $\underline{\underline{\varepsilon}}$
- P est une matrice de passage, construite à partir des vecteurs propres v_I correspondant aux valeurs propres. Du fait de la symétrie de $\underline{\underline{\varepsilon}}$, P est une matrice orthogonale i.e. $P^{-1} = P^T$
- $\langle . \rangle_{\pm}$ sont les opérateurs de Macaulay tels que $\langle x \rangle_+ = x$ si $x > 0$, 0 sinon (et inversement pour la partie négative) appliqués composantes par composantes.

Le calcul des dérivées est simplifié par les propriétés du tenseur des déformations (symétrique réel). Les dérivées des valeurs propres s'expriment alors à partir des composantes de la matrice de passages P, constituée des vecteurs propres v_I [Abou-Moustafa, 2009, Petersen and Pedersen, 2012] :

$$\frac{\partial \varepsilon_I}{\partial \varepsilon_{ij}} = v_I^T \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}{\partial \varepsilon_{ij}} v_I = (v_I)_i . (v_I)_j = P_{iI} P_{jI} \tag{A.2}$$

$$\frac{\partial \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_p \rangle_+}{\partial \varepsilon_{ij}} = \begin{pmatrix} \ddots & & (0) \\ & P_{iI}P_{jI} & \\ (0) & & \ddots \end{pmatrix} \text{ si } \varepsilon_I > 0 \tag{A.3}$$

En ce qui concerne les vecteurs propres, leurs dérivées sont obtenues par [Abou-Moustafa, 2009, Petersen and Pedersen, 2012] :

$$\frac{\partial v_I}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = (\varepsilon_I \underline{\underline{\boldsymbol{Id}}} - \underline{\underline{\varepsilon}})^* \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} v_I \tag{A.4}$$

L'écriture X^* représente la pseudo-inverse d'une matrice X. Celle-ci est égale à l'inverse lorsque cette dernière existe et dans le cas contraire est la matrice vérifiant $AA^*A = A$. Dans notre cas, la matrice $M_I = \varepsilon_I \underline{\underline{\boldsymbol{Id}}} - \underline{\underline{\varepsilon}}$ est diagonalisable avec la même matrice de passage que $\underline{\underline{\varepsilon}}$: $M_I = PD_IP^T$ et les valeurs propres sont les $\varepsilon_I - \varepsilon_J$ ($= 0$ quand $I = J$). On a donc $M_I* = PD_I^*P^T$, la pseudo-inverse d'une matrice diagonale étant simplement obtenue en prenant l'inverse des termes diagonaux non-nuls et en conservant les termes nuls à 0. Les coefficients deD_I^* sont donc simplement $1/(\varepsilon_I - \varepsilon_J)$ si $\varepsilon_J \neq \varepsilon_I$ et 0 sinon.

On en déduit que :

$$\frac{\partial (v_I)_k}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial P_{kI}}{\partial \varepsilon_{ij}} = (\varepsilon_I \underline{\underline{\boldsymbol{Id}}} - \underline{\underline{\varepsilon}})^*_{ki} P_{jI} = \left(PD_I^*P^T\right)_{ki} P_{jI} \tag{A.5}$$

$$= \left(P(\varepsilon_I \underline{\underline{\boldsymbol{Id}}} - \underline{\underline{\varepsilon}}_p)^* P^T\right)_{ki} P_{jI} \tag{A.6}$$

Finalement, la dérivée de la déformation positive s'écrit :

$$\frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_\pm}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{\partial P}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_p \rangle_\pm P^T + P \frac{\partial \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_p \rangle_\pm}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} P^T + P \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_p \rangle_\pm \frac{\partial P^T}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \tag{A.7}$$

$$= \frac{\partial P}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_p \rangle_\pm P^T + P \frac{\partial \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_p \rangle_\pm}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} P^T + P \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_p \rangle_\pm \left(\frac{\partial P}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}\right)^T \tag{A.8}$$

Termes à termes ont obtient donc les dérivées à l'aide de :

$$\frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_\pm}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_{ij}} \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_p \rangle_\pm P^T + P \frac{\partial \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_p \rangle_\pm}{\partial \varepsilon_{ij}} P^T + P \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_p \rangle_\pm \left(\frac{\partial P}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)^T \tag{A.9}$$

Ces calculs ne font intervenir que des multiplications matricielles simples mettant en jeu les matrices P et $\underline{\underline{\varepsilon}}_p$ d'ores et déjà utilisées pour calculer $\underline{\underline{\varepsilon}}_\pm$ et les matrices diagonales D_I^* dont l'expression est obtenue aisément à partir des valeurs des déformations principales ε_p. Ce calcul ne nécessite pas de résolution de système ni d'inversion de matrice étant donnée que $P^{-1} = P^T$ du fait de son orthogonalité. Il est intéressant de remarquer que du fait de la symétrie de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}_\pm$, le tenseur $(\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_\pm / \partial \underline{\underline{\varepsilon}})_{klij}$ est symétrique par rapport à kl et ij (symétries mineures).

Les formules ont été vérifiées numériquement en générant aléatoirement des familles de matrices symétriques et en comparant les termes du tenseur d'ordre 4 $(\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_\pm / \partial \underline{\underline{\varepsilon}})$ aux variations de $\underline{\underline{\varepsilon}}_\pm$ obtenues par perturbation de chacune des composantes de $\underline{\underline{\varepsilon}}$. La comparaison des valeurs obtenue est présentée en Figure A.1 pour des matrices symétriques de norme égale à un.

Il faut préciser que ces formules ne sont plus valables dans le cas où plusieurs valeurs propres sont identiques [Abou-Moustafa, 2009]. Bien que ce cas de figure soit peut fréquent dans des cas réels complexes, il peut par exemple être rencontré dans des cas de chargement en traction pure.

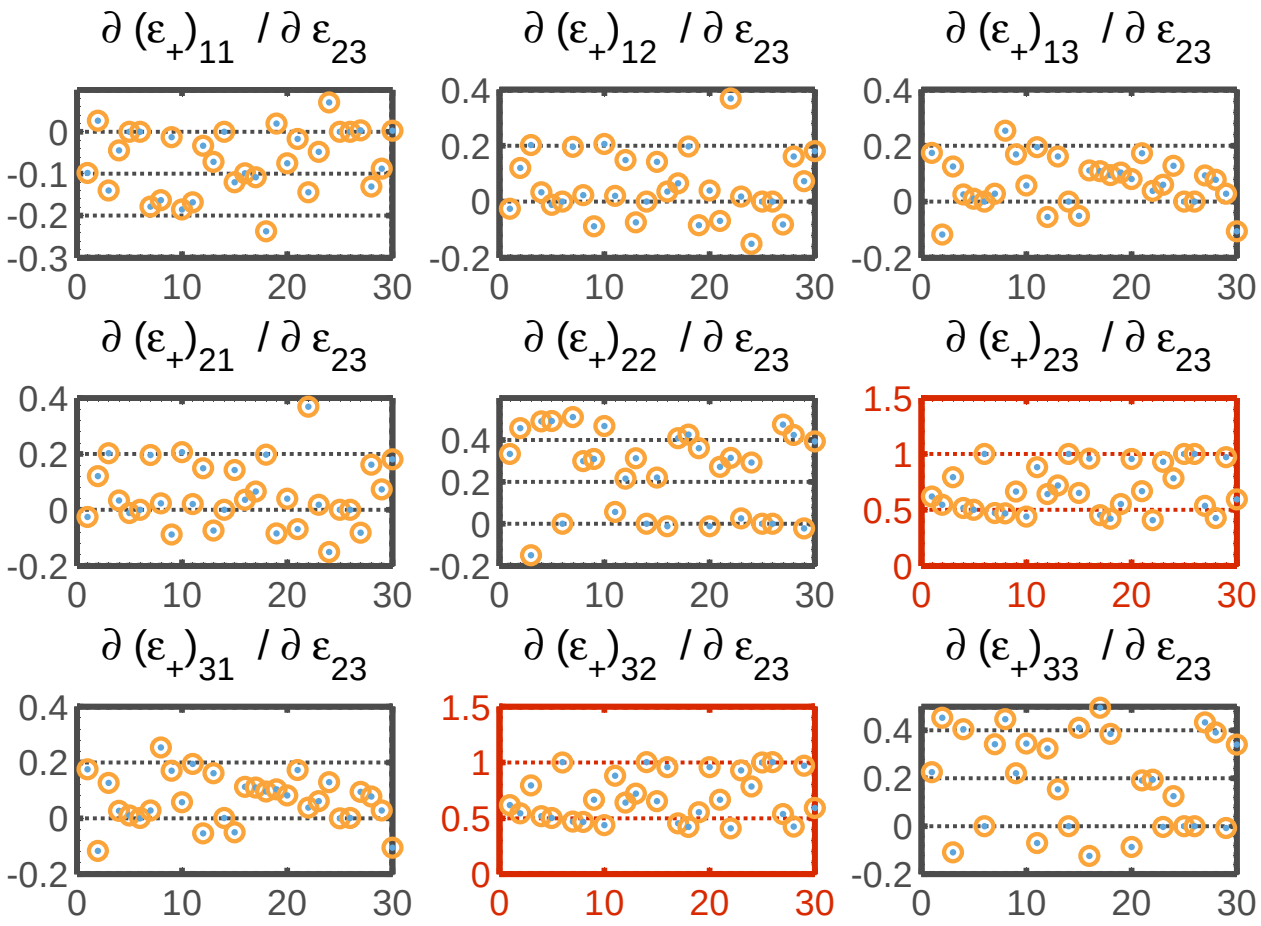


Fig. A.1 – Comparaison des dérivées analytiques (ronds oranges) de $\underline{\varepsilon}_+$ par rapport à $\underline{\varepsilon}_{23}$ avec les valeurs obtenues par perturbation (points bleus)

Annexe B

Détails de la mise en place des modèles avec endommagement retardé

L'Éq. 3.46 explicite le calcul de la matrice tangente pour une résolution explicite. Cette équation fait intervenir un terme de variation de l'endommagement de D en fonction de la déformation $\partial D/\partial \underline{\varepsilon}$. Ce terme est obtenu en différenciant la loi d'évolution reliant D et $\underline{\varepsilon}$. Cependant, dans le cadre de l'utilisation de modèles d'endommagement retardés, il n'existe plus de relation directe entre D et la déformation : la loi d'évolution est écrite sur $\dot{D}$.

A défaut de trouver une expression exacte de $\partial D/\partial \underline{\varepsilon}$, on peut essayer de trouver une valeur constante avec le pas de temps. Pour rappel, pour un modèle de type Effet retard, D est obtenu explicitement à partir de la relation (voir Section 3.2.1) :

$$D_i = D_{i-1} + \frac{\Delta t}{\tau + \Delta t}\left(F(\underline{\varepsilon}_i) - D_{i-1}\right) \tag{B.1}$$

D_{i-1} est la valeur convergée au pas de temps précédent, il est donc tentant de différencier cette formulation en considérant que $\partial D_{i-1}/\partial \underline{\varepsilon} = 0$. Une expression de l'opérateur tangent a donc été proposée :

$$\frac{\partial D}{\partial \underline{\varepsilon}} = \frac{\Delta t}{\tau + \Delta t}\frac{\partial F}{\partial \underline{\varepsilon}} \tag{B.2}$$

Cependant, la comparaison des composantes de l'opérateur tangent ainsi obtenues avec celles de l'opérateur par différence $\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}_{diff}$ (présenté en Section 3.2.5) exhibe de fortes différences (Fig. B.1). En particulier, les composantes de la matrice tangente calculée à partir de l'Éq. B.2 ne deviennent jamais négatives, alors même que le comportement devient adoucissant. Ce problème découle probablement de la différentiation erronée effectuée sur l'Éq. discrétisée B.1. De plus, cette équation ne fait pas intervenir de réelle dépendance temporelle : à taille d'incrément fixé, Δt et τ sont des grandeurs fixes et $\partial F/\partial \underline{\varepsilon}$ découle directement de la loi de comportement. Aucun de ces termes ne dépendent de la vitesse locale de chargement $\dot{\underline{\varepsilon}}$, qui pilote pourtant l'effet visqueux.

Afin d'améliorer le calcul de l'opérateur tangent, il est préférable de réaliser la différentiation sur l'équation continue du modèle retardé (Éq. 3.13) et d'inverser les dérivées

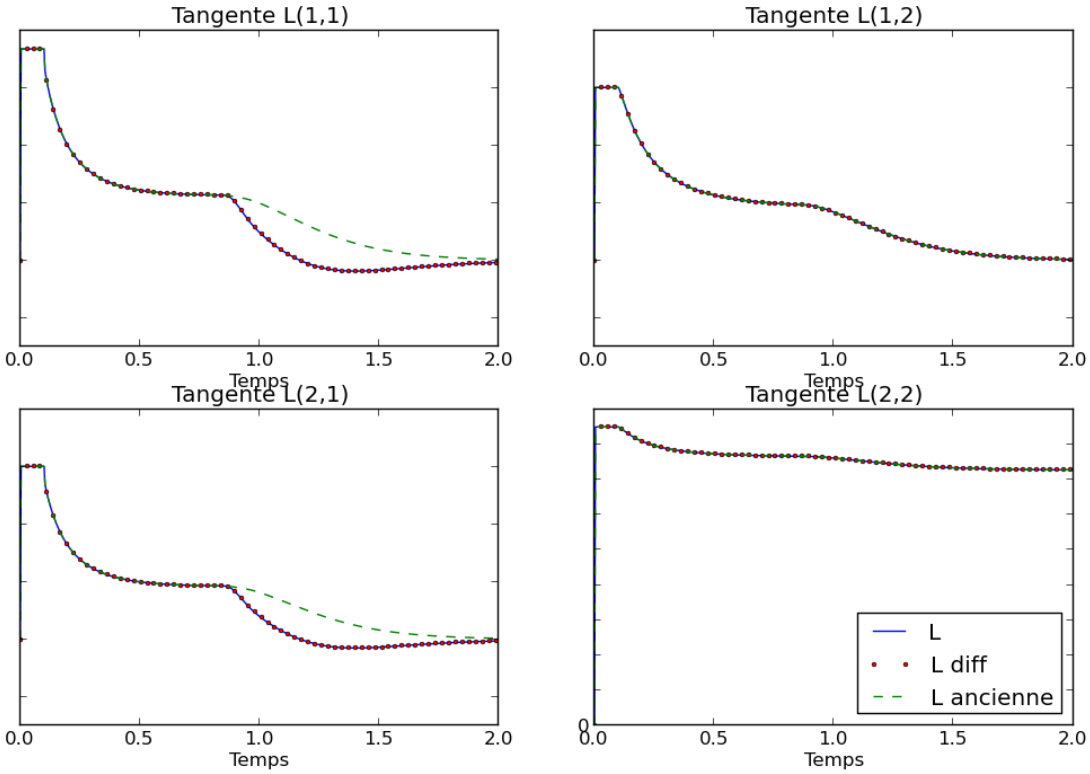


Fig. B.1 – Comparaison des tangentes calculées et par différences pour une régularisation par effet retard

temporelles et partielles :

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\tau}(F - D) \tag{B.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\varepsilon}}\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\varepsilon}} - \frac{\partial D}{\partial \underline{\varepsilon}}\right) \tag{B.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial D}{\partial \underline{\varepsilon}}\right] = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\varepsilon}} - \left[\frac{\partial D}{\partial \underline{\varepsilon}}\right]\right) \tag{B.5}$$

On obtient une équation différentielle en $\partial D/\partial \underline{\varepsilon}$ similaire à celle sur D, qui peut de la même manière être résolue explicitement par différences avant.

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\left.\frac{\partial D}{\partial \underline{\varepsilon}}\right|_i - \left.\frac{\partial D}{\partial \underline{\varepsilon}}\right|_{i-1}\right) = \frac{1}{\tau}\left(\left.\frac{\partial F}{\partial \underline{\varepsilon}}\right|_i - \left.\frac{\partial D}{\partial \underline{\varepsilon}}\right|_i\right) \tag{B.6}$$

$$\left.\frac{\partial D}{\partial \underline{\varepsilon}}\right|_i = \left.\frac{\partial D}{\partial \underline{\varepsilon}}\right|_{i-1} + \frac{\Delta t}{\Delta t + \tau}\left(\left.\frac{\partial F}{\partial \underline{\varepsilon}}\right|_i - \left.\frac{\partial D}{\partial \underline{\varepsilon}}\right|_i\right) \tag{B.7}$$

La comparaison des termes des opérateurs obtenus à l'aide de cette formulation de l'opérateur par différence est présentée en Fig. B.1. On observe une bonne cohérente entre $\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}$ et $\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}_{diff}$.

Tangente avec régularisation par taux limité

La même démarche est appliquée aux modèles de type Taux Limité dont on rappel la formulation :

$$\dot{D} = \frac{1}{\tau}\left(1 - e^{-a<F(\underline{\varepsilon})-D>_+}\right) \tag{B.8}$$

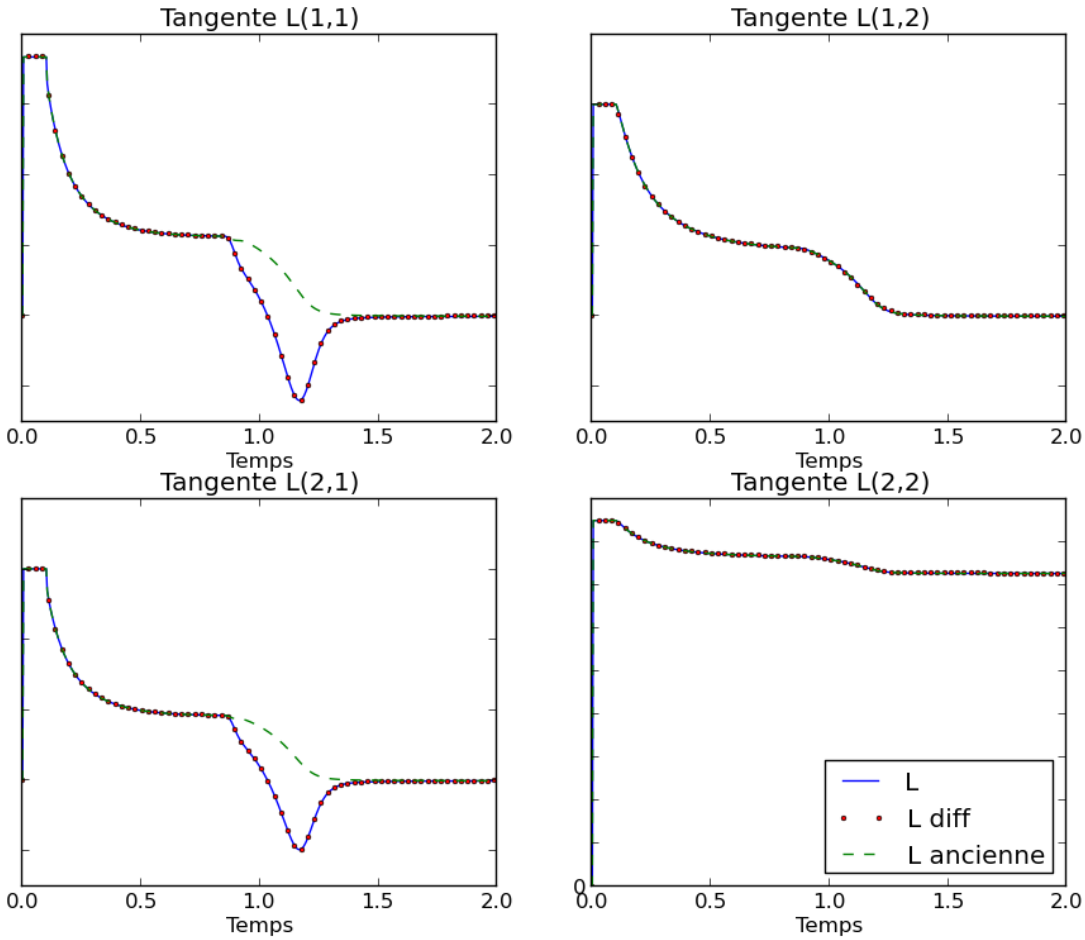


Fig. B.2 – Comparaison des tangentes calculées et par différences pour une régularisation par taux limité

On obtient alors :

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\varepsilon}}\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \frac{a}{\tau}e^{-a(F-D)}\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\varepsilon}} - \frac{\partial D}{\partial \underline{\varepsilon}}\right) \tag{B.9}$$

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\left.\frac{\partial D}{\partial \underline{\varepsilon}}\right|_i - \left.\frac{\partial D}{\partial \underline{\varepsilon}}\right|_{i-1}\right) = \frac{a}{\tau}(1-\tau\dot{D})\left(\left.\frac{\partial F}{\partial \underline{\varepsilon}}\right|_i - \left.\frac{\partial D}{\partial \underline{\varepsilon}}\right|_i\right) \tag{B.10}$$

$$\left.\frac{\partial D}{\partial \underline{\varepsilon}}\right|_i = \frac{1}{1+a\Delta t(1-\tau\dot{D})}\left(\tau\left.\frac{\partial D}{\partial \underline{\varepsilon}}\right|_{i-1} + a\Delta t(1-\tau\dot{D})\left.\frac{\partial F}{\partial \underline{\varepsilon}}\right|_i\right) \tag{B.11}$$

La Fig. B.2 présente la comparaison des valeurs de l'opérateur tangent ainsi obtenues (en trait plein bleu) avec celles de l'opérateur par différences (points rouges) et de l'ancien opérateur négligeant l'influence des termes temporels $\partial D/\partial \underline{\varepsilon}|_{i-1}|$ (tirets verts). Encore une fois, cette formulation décrit de manière satisfaisante l'évolution réelle de la tangente.

Utilisation au sein des résolutions numériques

Les méthodes d'estimation de la tangente présentées ici permettent d'obtenir une formulation consistante avec la discrétisation temporelle utilisée. Cependant l'utilisation des opérateurs tangents ainsi obtenus ne permet pas une amélioration de la convergence des simulations par rapport à l'ancienne formulation. Elle peut même provoquer l'aggravation des vitesses de convergence ou une divergence franche sur certains pas de

temps.

Bien que les raisons numériques derrière ce constat n'est pas été étudiées, il se pourrait que ces mauvais résultats proviennent de pertes de certaines propriétés mathématiques de l'opérateur tangent. Dans l'ancienne formulation, les composantes de celui-ci restaient toutes positives. Dans le cas réel, les valeurs propres du tenseur deviennent négatives durant l'adoucissement, complexifiant la résolution. Cet opérateur exact n'est donc pas utilisé pour la résolution globale et son utilisation reste cantonnée aux calculs annexes, par exemple les critères de validité utilisant $\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}$.

Annexe C

Détails de la mise en place des modèles Non-locaux

Formulations locale, faible et élément fini

Équations Locales :

Équations fortes sur $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\bar{Y}$ et conditions limites correspondantes :

$$\begin{cases} div\ \underline{\boldsymbol{\sigma}}=0 & \text{sur } \Omega \\ \bar{Y} - l_c^2 \Delta \bar{Y} = Y & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{C.1}$$

$$\begin{cases} \underline{\boldsymbol{\sigma}}.n=P_d & \text{sur } \partial\Omega_d \\ u=u_d & \text{sur } \partial\Omega_u \\ \nabla\bar{Y}.n=0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{C.2}$$

Formulation variationnelle :

Une formulation faible des équations précédentes a été proposée notamment par Peerlings [Peerlings et al., 1996a]. Pour tout champ de déplacement v et de force motrice w cinématiquement admissibles à zéro :

$$\begin{cases} \forall v\ , & \displaystyle\int_\Omega \nabla v : \sigma \,\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega} v.f_d \,\mathrm{d}\Omega \\ \forall w, & \displaystyle\int_\Omega \left[w\bar{Y} + l_c^2 \nabla w \nabla \bar{Y} - wY \right] \mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega} l_c^2 w \nabla\bar{Y}.n \,\mathrm{d}\Omega \end{cases} \tag{C.3}$$

Discrétisation par éléments finis :

En utilisant les formulations matricielles introduites en Section 3.2.5, la formulation faible peut être discrétisée à l'aide des éléments finis. Les efforts internes correspondants sont :

$$\begin{cases} \mathcal{F}^U = \displaystyle\int_\Omega {}^tB^u : \sigma \,\mathrm{d}\Omega \\ \mathcal{F}^{\bar{Y}} = \displaystyle\int_\Omega \left[{}^tN^{\bar{Y}} \bar{Y} N^{\bar{Y}} + l_c^2 {}^tB^{\bar{Y}} \bar{Y} B^{\bar{Y}} - N^{\bar{Y}} Y \right] \mathrm{d}\Omega \end{cases} \tag{C.4}$$

N^X et B^X correspondent respectivement aux matrices des fonctions de forme et des gradients de la variable X.

Algorithmes de résolution :

Contrairement à la résolution du modèle simplifié non régularisé, il faut ici résoudre deux équations aux dérivées partielles pour les champs de déplacement u et de force motrice $\bar{Y}$. Ces équations sont résolues par minimisation des résidus correspondant, définis par la différence entre les forces intérieures et extérieures. L'état est considéré comme convergé lorsque la norme des résidus, généralement adimensionnés à partir de la norme du travail des efforts extérieurs, devient plus petite qu'une valeur seuil de critère. Cependant, dans le cas du champs $\bar{Y}$, les forces extérieurs sont nulles. Le critère de convergence repose donc sur une valeur absolue du résidu $\epsilon^{\bar{Y}}$, cette valeur dépendant de la norme choisie, de la dimension des grandeurs manipulées et de la discrétisation du problème.

$$\frac{||\mathcal{R}^U||}{||\mathcal{F}^U_{ext}||} = \frac{||\mathcal{F}^U - \mathcal{F}^U_{ext}||}{||\mathcal{F}^U_{ext}||} < \epsilon^U \tag{C.5}$$

$$||\mathcal{R}^{\bar{Y}}|| = ||\mathcal{F}^{\bar{Y}}|| < \epsilon^{\bar{Y}} \tag{C.6}$$

Dans notre cas, la norme 2 est utilisée pour le résidu sur U et la norme infinie pour le résidu en $\bar{Y}$. Des critères de convergence plus avancés peuvent être trouvés permettant de prendre en compte les deux résidus de nature physique différente et de saffranchir de la taille de maille [Badel and Lorentz, 2011], mais non pour l'instant pas été implémentés. Plusieurs stratégies de résolution peuvent être mises en place pour obtenir des solutions convergées des deux champs.

Résolution monolithique :

L'approche monolithique consiste en une résolution simultanée des deux champs. Le vecteur des degrés de liberté X comporte alors des termes en U et en $\bar{Y}$:

$$X = \begin{pmatrix} U \\ \bar{Y} \end{pmatrix} \tag{C.7}$$

Le problème est résolu par méthode de Newton-Raphson globale. A l'incrément i, la variation des degrés de liberté $\Delta X_i = X_i - X_{i-1}$ à l'itération j est obtenue par résolution du système matriciel :

$$\mathcal{K}(X_i^{j-1})[\Delta X_i^j - \Delta X_i^{j-1}] = \mathcal{R}(X_i^{j-1}) \tag{C.8}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}^{UU} & \mathcal{K}^{U\bar{Y}} \\ \mathcal{K}^{\bar{Y}U} & \mathcal{K}^{\bar{Y}\bar{Y}} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \Delta U_i^j \\ \Delta \bar{Y}^j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta U_i^{j-1} \\ \Delta \bar{Y}^{j-1} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \mathcal{R}^U \\ \mathcal{R}^{\bar{Y}} \end{pmatrix} \tag{C.9}$$

Les termes $\mathcal{K}$ (opérateur tangent), $\mathcal{R}$ (vecteur de résidus) et X (vecteur des degrés de liberté) mélangent des grandeurs en U et en $\bar{Y}$. Les conditions de convergence doivent être vérifiées séparément sur les deux résidus et non pas sur le résidu total $\mathcal{R}$: prendre la norme de ce résidu complet n'a pas de sens car celui-ci se compose de grandeurs ayant des unités différentes. Le processus général est résumé en Fig. C.1.

La résolution monolithique offre l'avantage d'utiliser directement les solveurs déjà présents dans les codes de calculs implicites. Une attention particulière doit cependant est portée sur le calcul des matrices tangentes (présenté plus bas) et des résidus vis-à-vis de chaque variable. En particulier, le choix d'une valeur de résidu absolue sur $\bar{Y}$ peut s'avérer déterminante sur la bonne convergence des simulations. Cette valeur est en particulier dépendante de la discrétisation du problème quelle que soit la norme choisie.

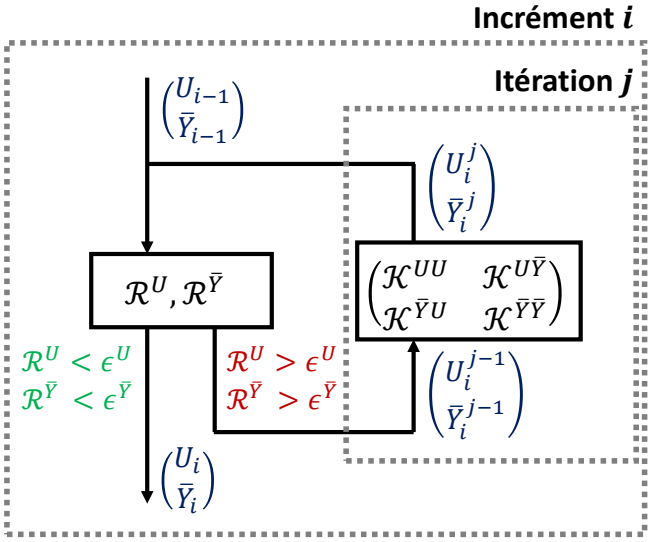


Fig. C.1 – Résolution monolithique des modèles non-locaux

Enfin, la résolution monolithique peut souffrir de difficultés de convergence, la fonctionnelle en énergie sous-jacente n'étant pas convexe : la résolution est fortement couplée et la convergence s'avère complexe dans le cas de problèmes fortement non-linéaires. En présence de fortes évolutions locales des variables (propagation rapide d'une fissure par exemple), une importante discrétisation temporelle est nécessaire pour atteindre la solution de proche en proche. Pour cette raison, la méthode ne s'avère pas efficace en présence de sauts de solution, tels les phénomènes de snap-back. Une résolution par longueurs d'arc [Germain, 2006] ou alternée (voir plus bas) peut alors s'avérer nécessaire.

Résolution alternée :

La méthode de résolution alternée a été proposée par [Bourdin et al., 2000] pour les modèles Phase-Field et consiste à résoudre les deux problèmes l'un après l'autre. Lors de la résolution du champs u (respectivement $\bar{Y}$), le champs $\bar{Y}$ issu de la résolution précédente (respectivement u) est considéré comme un paramètre d'entrée. La convergence de chaque problème est comme précédemment obtenue à partir des valeurs des résidus correspondant. La convergence globale des deux champs est elle obtenue par méthode du point fixe à partir d'un critère de stationnarité entre deux itérations j. Celui-ci peut par exemple être écrit sur le champ $\bar{Y}$:

$$||\bar{Y}_i^j - \bar{Y}_i^{j-1}|| < \epsilon^{stat} \tag{C.10}$$

La mise en place de cette stratégie de résolution est schématisée en Fig. C.2. Cette méthode de résolution possède de bonne propriétés de convergence. En particulier, les deux problèmes séparés deviennent simples à résoudre :

— En absence d'autres variables d'endommagement ou de sources de non-linéarité (comme du contact), le problème mécanique devient linéaire. Dans le cas du modèle réduit, la présence de la variable d'endommagement d entraîne une faible non-linéarité, la solution mécanique est obtenue en quelques itérations

— Le problème d'endommagement est linéaire, le terme source ne dépendant pas de D (ce n'est pas le cas pour les modèles Phase-Field ou lors de l'utilisation d'une longueur variable)

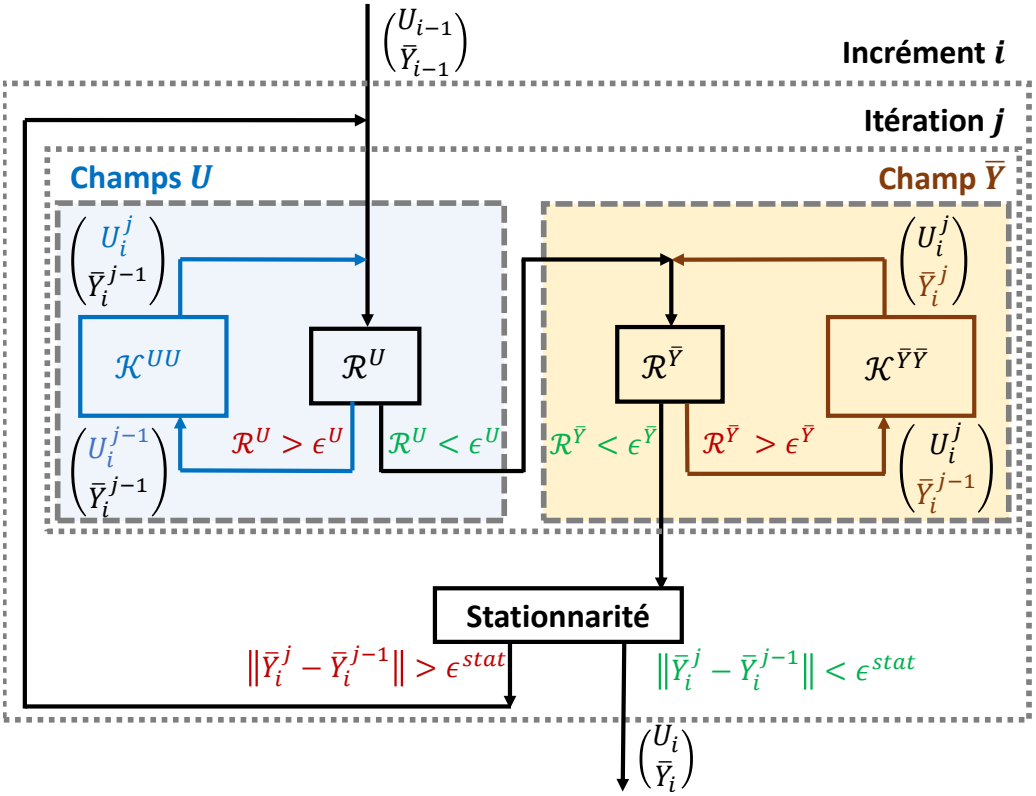


Fig. C.2 – Résolution alternée des modèles non-locaux

Cette algorithme exhibe de très bons résultats de convergence sur le modèle réduit. Il permet notamment d'utiliser des pas de temps plus importants qu'avec une résolution monolithique : une propagation sur plusieurs éléments peut facilement être obtenue sur un incrément. L'algorithme s'avère ainsi capable de converger en présence d'instabilités locales.

Cependant la mise en place de cette méthode de résolution nécessite un traitement particulier : deux calculs doivent être réalisés alternativement et les transferts des résultats de l'un vers l'autre effectués. Il faut également pouvoir intégrer dans le calcul la condition de stationnarité pour déterminer la convergence. Dans notre cas, le dialogue entre les deux calculs, effectués dans la suite élément finies Z-set, a été mené grâce à un interfaçage utilisant le code Python.

Résolution découplée :

La résolution découplée correspond à une une résolution intermédiaire entre les méthodes monolithiques et alternées. Elle consiste à résoudre les deux champs simultanément comme pour la résolution monolithique, mais en supprimant les termes croisés de la matrice tangente :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}^{UU} & 0 \\ 0 & \mathcal{K}^{\bar{Y}\bar{Y}} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \Delta U_i^j \\ \Delta \bar{Y}^j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta U_i^{j-1} \\ \Delta \bar{Y}^{j-1} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \mathcal{R}^U \\ \mathcal{R}^{\bar{Y}} \end{pmatrix} \tag{C.11}$$

Cette approche revient à résoudre les deux champs séparément comme dans le cas alterné, mais de manière simultanée et à l'aide des algorithmes de Newton-Raphson classiques. Bein qu'elle soit proche des deux autres schéma de résolution, notamment l'alterné, la résoution découplée présente des différences pouvant être notées :

— La résolution découplée mais simultannée des deux champs se rapproche d'une résolution alternée avec une unique itération au sein de chacune des boucles sur les

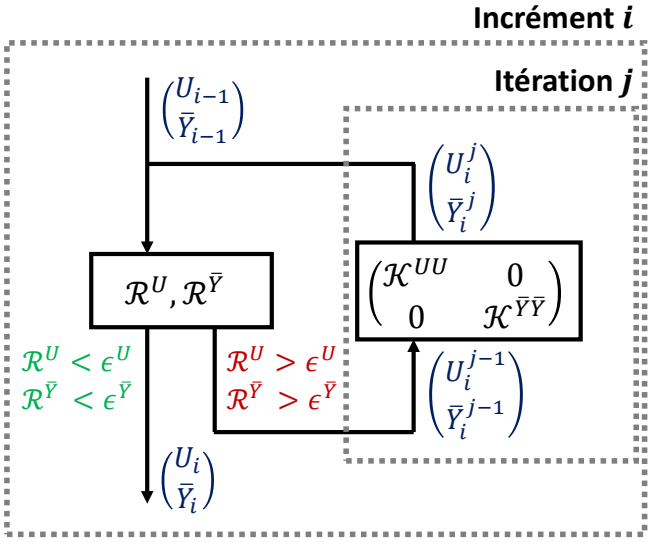


Fig. C.3 – Résolution découplée des modèles non-locaux

champs U et $\bar{Y}$ présentées en Fig. C.2. Dans les cas où chacun des problèmes est linéaire par rapport à sa variable, le schéma se rapproche d'une résolution alternée. Dans notre cas, les problèmes découplés n'étant pas linéaires, les itérations successives utilisent pour le calcul de $\mathcal{R}^U$ et $\mathcal{K}^{UU}$ un champs $\bar{Y}$ ne respectant pas l'équilibre mécanique (et inversement pour $\mathcal{R}^{\bar{Y}}$ et $\mathcal{K}^{\bar{Y}\bar{Y}}$), contrairement à ce qui est le cas lors de la résolution alternée.

— Le critère d'arrêt des itérations se fait à partir des résidus et n'inclut pas dans notre cas de critère de stationnarité. La convergence simultanée des deux champs n'est alors pas assurée si ceux-ci ont été largement modifiés au cours de la dernière itération. La suppression des termes de couplages de l'opérateur tangent ne permet pas de garantir une évolution cohérente des deux champs lors de la dernière itération.

Dans notre cas, les réponses macroscopiques obtenues avec ce schéma, pour un critère d'arrêt sur les résidus, se sont avérées très dépendantes d'un certain nombre de choix : valeurs des critères de convergences, choix de mise à jour des matrices tangentes, discrétisation temporelle etc. Bien que cette résolution soit la plus simple à mettre en place, elle a dans le cadre de ces travaux été abandonnée au profit de la méthode de résolution alternée en attente d'une meilleure compréhension de son fonctionnement.

Matrice Tangente :

Dans le cas d'une résolution monolithique, la matrice tangente globale est exprimée par :

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{F}^U}{\partial U} & \dfrac{\partial \mathcal{F}^u}{\partial \bar{Y}} \\ \dfrac{\partial \mathcal{F}^{\bar{Y}}}{\partial U} & \dfrac{\partial \mathcal{F}^{\bar{Y}}}{\partial \bar{Y}} \end{pmatrix} \tag{C.12}$$

Les différents termes se calculent par :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{F}^U}{\partial U} &= \int_\Omega {}^tB^U \frac{\partial \underline{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} B^U \,\mathrm{d}\Omega \\
\frac{\partial \mathcal{F}^U}{\partial \bar{Y}} &= \int_\Omega {}^tB^U \frac{\partial \underline{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \bar{Y}} N^{\bar{Y}} \,\mathrm{d}\Omega \\
\frac{\partial \mathcal{F}^{\bar{Y}}}{\partial U} &= \int_\Omega -{}^tN^{\bar{Y}} \frac{\partial Y}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} B^U \,\mathrm{d}\Omega \\
\frac{\partial \mathcal{F}^{\bar{Y}}}{\partial \bar{Y}} &= \int_\Omega [{}^tN^{\bar{Y}} N^{\bar{Y}} + l_C^2 {}^tB^{\bar{Y}} B^{\bar{Y}}] \,\mathrm{d}\Omega
\end{aligned} \tag{C.13}$$

Aux points de Gauss, l'opérateur tangent local s'exprime :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \underline{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} & \dfrac{\partial \underline{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \bar{Y}} \\ \dfrac{\partial \bar{Y}}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} & \dfrac{\partial Y}{\partial \bar{Y}} \end{pmatrix} \tag{C.14}$$

Avec :

$$\frac{\partial \underline{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{K}}}}} \left[\underline{\underline{\mathbf{1}}} + \frac{\partial d}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \otimes \underline{\boldsymbol{h}} : \underline{\boldsymbol{\sigma}} \right] \tag{C.15}$$

$$\frac{\partial \underline{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \bar{Y}} = \underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{K}}}}} \left[\frac{\partial D}{\partial \bar{Y}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{H}}}}} : \underline{\boldsymbol{\sigma}} \right] \tag{C.16}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{1}{2} (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{\Lambda}}}}} + \underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{\Lambda}}}}} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \tag{C.17}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \bar{Y}} = 0 \tag{C.18}$$

Ces termes correspondent à ceux apparaissant dans le modèle non régularisé, mais réparti selon les différentes contributions. Lors de l'utilisation de résolutions alternée ou découplée, seuls les blocs diagonaux sont utilisés.

Longueur variable en fonction de Y

Lors de l'utilisation d'une longueur interne évoluant avec la valeur de $\bar{Y}$, les équations locales et les forces discrétisées se retrouvent modifiées :

$$\begin{cases} div\ \sigma = 0 \\ Y - l_c^2(Y) \Delta Y = Y_l \end{cases} \tag{C.19}$$

$$\begin{cases} \mathcal{F}^U = \displaystyle\int_\Omega {}^tB^U : \sigma \,\mathrm{d}\Omega \\ \mathcal{F}^{\bar{Y}} = \displaystyle\int_\Omega \left[{}^tN^{\bar{Y}} N^{\bar{Y}} \bar{Y} + l_c^2(\bar{Y}) {}^tB^{\bar{Y}} B^{\bar{Y}} \bar{Y} - N^{\bar{Y}} Y \right] \mathrm{d}\Omega \end{cases} \tag{C.20}$$

Seul le terme $\partial \mathcal{F}^{\bar{Y}} / \partial \bar{Y}$ se retrouve modifié par rapport au cas à longueur constante :

$$\frac{\partial \mathcal{F}^{\bar{Y}}}{\partial \bar{Y}} = \int_\Omega [{}^tN^{\bar{Y}} N^{\bar{Y}} + l_c^2(\bar{Y}) {}^tB^{\bar{Y}} B^{\bar{Y}} + {}^tB^{\bar{Y}} B^{\bar{Y}} \frac{\partial l_c^2(\bar{Y})}{\partial \bar{Y}} N^{\bar{Y}} \bar{Y}] \,\mathrm{d}\Omega \tag{C.21}$$

Le même genre de modification peut être apporté si l_c évolue en fonction de $\underline{\varepsilon}$.

Annexe D

Détails de la mise en place des modèles Phase-Field

Formulations locale, faible et élément fini

Les modèles Phase-Field présentent une implémentation proche de celle des modèles non locaux à gradient. Les équations principales sont présentées ici, pour plus de détails voir l'Annexe C. Des détails peuvent également être trouvés dans [Miehe et al., 2010] et [Liu et al., 2016].

Équations Locales :

Équations fortes sur $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ et D et conditions limites correspondantes :

$$\begin{cases} div\ \underline{\boldsymbol{\sigma}}=0 & \text{sur } \Omega \\ D - l_c^2 \Delta D = \frac{2l_c}{G_C}(1-D)\max \psi_0^+ & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{D.1}$$

$$\begin{cases} \underline{\boldsymbol{\sigma}}.n=P_d & \text{sur } \partial\Omega_d \\ u=u_d & \text{sur } \partial\Omega_u \\ \nabla D.n=0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{D.2}$$

Formulation variationnelle :

$$\begin{cases} \forall u\,, & \displaystyle\int_\Omega \nabla u : \sigma \,\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega} u.f_d \,\mathrm{d}\Omega \\ \forall w, & \displaystyle\int_\Omega \left[wD + l_c^2 \nabla w \nabla D - w\frac{2l_c}{G_C}(1-D)\max\ \psi_0 \right] \mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega} w \nabla D.n \,\mathrm{d}\Omega \end{cases} \tag{D.3}$$

Discrétisation par éléments finis :

L'équation sur le champ d'endommagement D est multipliée par G_C/l_c afin de d'harmoniser les valeurs des termes de la matrice tangente présentée plus loin.

$$\begin{cases} \mathcal{F}^U = \displaystyle\int_\Omega {}^tB^u : \sigma \,\mathrm{d}\Omega \\ \mathcal{F}^D = \displaystyle\int_\Omega \left[\frac{G_C}{l_c} {}^tN^D N^D D + G_C l_c {}^tB^D B^D D - N^D 2(1-D)\max\ \psi_0 \right] \mathrm{d}\Omega \end{cases} \tag{D.4}$$

Algorithmes de résolution :

Le choix d'algorithmes de résolution est identique à celui présenté dans l'Annexe C pour les modèles non-locaux. La convergence est également obtenue à partir de critère sur le résidu de chacun des champs (relatif pour U et absolu pour D) :

$$\frac{||\mathcal{R}^U||}{||\mathcal{F}^U_{ext}||} = \frac{||\mathcal{F}^U - \mathcal{F}^U_{ext}||}{||\mathcal{F}^U_{ext}||} < \epsilon^U \tag{D.5}$$

$$||\mathcal{R}^D|| = ||\mathcal{F}^D|| < \epsilon^D \tag{D.6}$$

Résolution monolithique :

L'approche monolithique consiste en une résolution simultanée des deux champs. Le vecteur des degrés de liberté X comporte alors des termes en U et en D :

$$X = \begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix} \tag{D.7}$$

Le problème est résolu par méthode de Newton-Raphson globale. A l'incrément i, la variation des degrés de liberté $\Delta X_i = X_i - X_{i-1}$ à l'itération j est obtenue par résolution du système matriciel :

$$\mathcal{K}(X_i^{j-1})[\Delta X_i^j - \Delta X_i^{j-1}] = \mathcal{R}(X_i^{j-1}) \tag{D.8}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}^{UU} & \mathcal{K}^{UD} \\ \mathcal{K}^{DU} & \mathcal{K}^{DD} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \Delta U_i^j \\ \Delta D^j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta U_i^{j-1} \\ \Delta D^{j-1} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \mathcal{R}^U \\ \mathcal{R}^D \end{pmatrix} \tag{D.9}$$

La résolution des modèles Phase-Field de manière monolithique semble encore plus difficile à atteindre que pour les modèles non-locaux du fait du niveau de couplage plus important des équations. Le terme source de l'équation sur D fait en effet intervenir une dépendance en D. Dans le cadre de ce travail, la résolution monolithique n'a pas permis de faire converger les calculs de manière satisfaisante. En particulier, une forte augmentation des résidus était observée lors de la première itération de chaque incrément, ainsi que chez d'autres auteurs [Gerasimov and De Lorenzis, 2016]. Un grand nombre d'itération étaient alors nécessaires pour atteindre la convergence sur chaque incrément, même lors de l'utilisation d'une importante discrétisation spatiale ou temporelle. Le calcul excédait régulièrement le nombre maximal d'itérations et de raffinement du pas de temps autorisés sans atteindre la convergence.

Plusieurs approchent peuvent être proposées pour pallier ce problème :

— Introduction d'une régularisation visqueuse [Miehe et al., 2010] : une régularisation similaire à l'effet retard peut être introduite pour faciliter la stabilité du problème. Cependant, celle-ci modifie l'énergie dissipée, dont le contrôle est l'une des raisons de l'étude des modèles Phase-Field dans le cadre de ce travail. Cette approche n'a donc pas été appliquée.

— Utilisation du "line-search" [Gerasimov and De Lorenzis, 2016] : du fait de la forte non-linéarité des équations et des couplages importants entre les deux champs, la résolution de Newton-Raphson peut entraîner une augmentation des résidus. Dans ce cas, une méthode "line-search" peut être appliquée, visant à chercher un coefficient multiplicateur sur la correction $X^j - X^{j-1}$ appliquée. On choisit la valeur de coefficient minimisant le résidu. Cela revient à conserver la direction de modification fournie par la tangente, mais à ajuster la norme des corrections appliquées. Cette stratégie améliore la convergence des calculs mais leur coût reste très élevé (plusieurs dizaine d'itérations par incréments même avec des petits pas de temps).

— Mise à jour de la matrice tangente : étonnamment, la convergence semblait atteinte plus rapidement en absence de mise à jour systématique de la matrice tangente. Ce phénomène pourrait s'interpréter par un trop fort couplage entre les deux champs entraînant des directions de recherche non-optimales lors d'une résolution simultanée.

La résolution monolithique des équations et les pistes d'améliorations évoquées ont été abandonnées en faveur d'une résolution alternée.

Résolution alternée :

Comme dans le cas des modèles non-locaux (voir C), on résout ici les deux champs l'un après l'autre, en considérant la solution convergée de l'autre champs comme paramètre d'entrée. La convergence globale des deux champs est obtenue par méthode du point fixe à partir d'un critère de stationnarité entre deux itérations $j-1$ et j. Celui-ci peut par exemple être écrit sur le champ D :

$$||D_i^j - D_i^{j-1}|| < \epsilon^{stat} \tag{D.10}$$

Cette méthode de résolution possède de bonnes propriétés de convergence. En particulier, les deux problèmes séparés deviennent simples à résoudre :

— En absence d'autres variables d'endommagement ou de sources de non-linéarité (comme du contact), le problème mécanique devient linéaire. Dans le cas du modèle réduit, la présence de la variable d'endommagement d entraîne une faible non-linéarité, la solution mécanique est obtenue en quelques itérations

— Le problème d'endommagement n'est pas linéaire en D du fait du terme source, mais la convergence à U fixé est facilement obtenue.

Cette algorithme exhibe de très bons résultats de convergence sur le modèle réduit. Il permet notamment d'utiliser des pas de temps plus importants qu'avec une résolution monolithique : une propagation sur plusieurs éléments peut facilement être obtenue sur un incrément. L'algorithme s'avère ainsi capable de converger en présence d'instabilités locales.

Cependant la mise en place de cette méthode de résolution nécessite un traitement particulier : deux calculs doivent être réalisés alternativement et les transferts des résultats de l'un vers l'autre effectués. Il faut également pouvoir intégrer dans le calcul la condition de stationnarité pour déterminer la convergence globale.

Une étude comparée des résolutions monolithique / alterné a confirmé le bon comportement de la résolution alternée malgré la résolution séparée des deux champs. Le résultat par résolution alterné peut s'avérer cependant plus sensible à la discrétisation spatiale et temporelle et au choix du critère de stationnarité. La bonne convergence doit alors être validée pour assurer la robustesse des résultats.

Résolution découplée :

La résolution découplée représente une résolution hybride entre les méthodes monolithiques et alternées. Elle consiste à résoudre les deux champs simultanément comme pour la résolution monolithique, mais en supprimant les termes croisés de la matrice tangente :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}^{UU} & 0 \\ 0 & \mathcal{K}^{DD} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \Delta U_i^j \\ \Delta D^j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta U_i^{j-1} \\ \Delta D^{j-1} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \mathcal{R}^U \\ \mathcal{R}^D \end{pmatrix} \tag{D.11}$$

Cette approche revient à résoudre les deux champs séparément comme dans le cas alterné, mais de manière simultanée et à l'aide des algorithmes de Newton-Raphson classiques. Pendant une itération, le champs mécanique est mis à jour à partir des valeurs de D de l'itération précédente et inversement. Cette méthode doit cependant, comme dans le cas des modèles non-locaux, être manipulée avec précaution puisqu'elle manipule des champs non convergés au cours du calcul (voir l'Annexe C). Ce problème est ici accru par le couplage important entre les champs (le terme source en D variant avec D). Des solutions macroscopiques variant très fortement avec la mise donnée et les critères de convergence ont en effet été observés.

Matrice Tangente :

Dans le cas d'une résolution monolithique, la matrice tangente globale est exprimée par :

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{F}^U}{\partial U} & \dfrac{\partial \mathcal{F}^u}{\partial D} \\ \dfrac{\partial \mathcal{F}^D}{\partial U} & \dfrac{\partial \mathcal{F}^D}{\partial D} \end{pmatrix} \tag{D.12}$$

Les différents termes se calculent grâce à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}^U}{\partial U} &= \int_\Omega {}^tB^U \frac{\partial \underline{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} B^U \, \mathrm{d}\Omega \\ \frac{\partial \mathcal{F}^U}{\partial D} &= \int_\Omega {}^tB^U \frac{\partial \underline{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial D} N^D \, \mathrm{d}\Omega \\ \frac{\partial \mathcal{F}^D}{\partial U} &= \int_\Omega -2(1-D) {}^tN^D \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} B^U \, \mathrm{d}\Omega \\ \frac{\partial \mathcal{F}^D}{\partial D} &= \int_\Omega \left[{}^tN^D \left(2\psi_0 + \frac{G_C}{l_c} \right) N^D + G_C l_C {}^tB^D B^D \right] \mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{D.13}$$

Les termes locaux se calculent de la même manière que dans le cadre des modèles non-locaux.

Bibliographie

[Cor, 2019] (2019). Logiciel de corrélation d'image Correli STC.

[Abou-Moustafa, 2009] Abou-Moustafa, K. T. (2009). On Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors of the Generalized Eigenvalue Problem. McGill Technical Report (MTR) TR–CIM–10–09, McGill University.

[Allix et al., 1996] Allix, O., Bahlouli, N., Cluzel, C., and Perret, L. (1996). Modelling and identification of temperature-dependent mechanical behaviour of the elementary ply in carbon/epoxy laminates. *Composites Science and Technology*, 56(7) :883–888.

[Allix et al., 2003] Allix, O., Feissel, P., and Thévenet, P. (2003). A delay damage mesomodel of laminates under dynamic loading : basic aspects and identification issues. *Computers & Structures*, 81(12) :1177–1191.

[Ambati et al., 2015] Ambati, M., Gerasimov, T., and De Lorenzis, L. (2015). A review on phase-field models of brittle fracture and a new fast hybrid formulation. *Computational Mechanics*, 55(2) :383–405.

[Angrand, 2016] Angrand, L. (2016). *Modèle d'endommagement incrémental en temps pour la prévision de la durée de vie des composites tissés 3D en fatigue cyclique et en fatigue aléatoire*. Thèse de doctorat, Université Paris Saclay.

[ASTM, 1997] ASTM (1997). Standard Test Method for Plane-Strain Fracture Toughness of Metallic Materials. Technical report, ASTM International, West Conshohocken, PA.

[ASTM, 1999] ASTM (1999). Standard Test Methods for Plane-Strain Fracture Toughness and Strain Energy Release Rate of Plastic Materials. Technical report, ASTM International, West Conshohocken, PA.

[ASTM, 2015] ASTM (2015). Test Method for Translaminar Fracture Toughness of Laminated and Pultruded Polymer Matrix Composite Materials. Technical report, ASTM International.

[Bažant, 1982] Bažant, Z. P. (1982). Crack band model for fracture of geomaterials. In *4th International Conference of Numerical Methods in Geomechanics*.

[Bažant, 1993] Bažant, Z. P. (1993). Scaling Laws in Mechanics of Failure. *Journal of Engineering Mechanics*, 119(9) :1828–1844.

[Bažant and Pijaudier-Cabot, 1988] Bažant, Z. P. and Pijaudier-Cabot, G. (1988). Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *Journal of Applied Mechanics*, 55(2).

[Bažant and Planas, 1997] Bažant, Z. P. and Planas, J. (1997). *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*. CRC Press.

[Bažant Zdeněk P. and Jirásek Milan, 2002] Bažant Zdeněk P. and Jirásek Milan (2002). Nonlocal Integral Formulations of Plasticity and Damage : Survey of Progress. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(11) :1119–1149.

[Badel and Lorentz, 2011] Badel, P.-B. and Lorentz, E. (2011). Critères de convergence en mécanique des solides. Giens, France.

[Bai, 2016] Bai, G. (2016). *Évaluation par vibrothermographie de l'endommagement de composites tissés*. Thèse de doctorat, Institut de Mécanique et d'Ingénierie de Bordeaux.

[Bak and Lindgaard, 2017] Bak, B. L. V. and Lindgaard, E. (2017). Optical measurement of fatigue -driven delamination in laminated glass fiber materials for mode i loading. *8th International Conference on Composites Testing and Model Identification (CompTest2017)*.

[Beaurain, 2011] Beaurain, J. (2011). *Recherche de solutions bifurquées et étude de leur stabilité dans les problèmes d'endommagement*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI.

[Benallal et al., 1993] Benallal, A., Billardon, R., and Geymonat, G. (1993). Bifurcation and localization in rate-independent materials. some general considerations. In *Bifurcation and Stability of Dissipative Systems*, International Centre for Mechanical Sciences, pages 1–44. Springer, Vienna.

[Blanco, 2007] Blanco, N. (2007). Parametric analysis of different compact tension specimens for fracture toughness characterisation in woven composite materials. *Imperial College London Report*.

[Blanco et al., 2014] Blanco, N., Trias, D., Pinho, S. T., and Robinson, P. (2014). Intralaminar fracture toughness characterisation of woven composite laminates. Part I : Design and analysis of a compact tension (CT) specimen. *Engineering Fracture Mechanics*, 131 :349–360.

[Bleyer and Alessi, 2018] Bleyer, J. and Alessi, R. (2018). Phase-field modeling of anisotropic brittle fracture including several damage mechanisms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 336 :213–236.

[Bourdin et al., 2000] Bourdin, B., Francfort, G. A., and Marigo, J.-J. (2000). Numerical experiments in revisited brittle fracture.

[Bullegas et al., 2016] Bullegas, G., Pinho, S. T., and Pimenta, S. (2016). Engineering the translaminar fracture behaviour of thin-ply composites. *Composites Science and Technology*, 131 :110–122.

[Camanho et al., 2007] Camanho, P. P., Maimí, P., and Dávila, C. G. (2007). Prediction of size effects in notched laminates using continuum damage mechanics. *Composites Science and Technology*, 67(13) :2715–2727.

[Catalanotti et al., 2014] Catalanotti, G., Arteiro, A., Hayati, M., and Camanho, P. P. (2014). Determination of the mode I crack resistance curve of polymer composites using the size-effect law. *Engineering Fracture Mechanics*, 118 :49–65.

[Catalanotti et al., 2010] Catalanotti, G., Camanho, P. P., Xavier, J., Dávila, C. G., and Marques, A. T. (2010). Measurement of resistance curves in the longitudinal failure of composites using digital image correlation. *Composites Science and Technology*, 70(13) :1986–1993.

[Chaboche, 2001] Chaboche, J.-L. ; Lemaitre, J. (2001). *Mécanique des matériaux solides*. DUNOD.

[Chan and Vese, 2001] Chan, T. F. and Vese, L. A. (2001). Active contours without edges. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(2) :266–277.

[Chen et al., 2014] Chen, B. Y., Pinho, S. T., Carvalho, N. V. D., Baiz, P. M., and Tay, T. E. (2014). A floating node method for the modelling of discontinuities in composites. *Engineering Fracture Mechanics*, Complete(127) :104–134.

[Cinar et al., 2017] Cinar, A. F., Barhli, S. M., Hollis, D., Flansbjer, M., Tomlinson, R. A., Marrow, T. J., and Mostafavi, M. (2017). An autonomous surface discontinuity detection and quantification method by digital image correlation and phase congruency. *Optics and Lasers in Engineering*, 96 :94–106.

[Cinquin, 2002] Cinquin, J. (2002). AM 5645 - Les composites en aérospatiale. Technical report, Techniques de l'Ingénieur, France.

[Colin Cameron and Windmeijer, 1997] Colin Cameron, A. and Windmeijer, F. A. G. (1997). An R-squared measure of goodness of fit for some common nonlinear regression models. *Journal of Econometrics*, 77(2) :329–342.

[Cuvilliez et al., 2011] Cuvilliez, S., Feyel, F., Lorentz, E., and Michel-Ponnelle, S. (2011). Transition endommagent non local - fissuration dans le cadre de la rupture quasi-fragile. In *10e Colloque National en Calcul des Structures*, page 8 p., Giens, France.

[Deü, 1997] Deü, J.-F. (1997). *Rupture des composites stratifiés sous chargement dynamique : apport des méso-modèles avec endommagement retardé*. Thèse de doctorat, Cachan, Ecole normale supérieure.

[De Borst et al., 1993] De Borst, R., Sluys, L. J., Muhlhaus, H. B., and Pamin, J. (1993). Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation. *Engineering Computations 10(2), 99-121. (1993)*.

[de Borst and Verhoosel, 2016] de Borst, R. and Verhoosel, C. V. (2016). Gradient damage vs phase-field approaches for fracture : Similarities and differences. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 312 :78–94.

[Desmorat et al., 2010] Desmorat, R., Chambart, M., Gatuingt, F., and Guilbaud, D. (2010). Delay-active damage versus non-local enhancement for anisotropic damage dynamics computations with alternated loading. *Engineering Fracture Mechanics*, 77(12) :2294–2315.

[Desmorat et al., 2018] Desmorat, R., Desmorat, B., Olive, M., and Kolev, B. (2018). Micromechanics based framework with second-order damage tensors. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 69 :88–98.

[Desmorat et al., 2015] Desmorat, R., Gatuingt, F., and Jirásek, M. (2015). Nonlocal models with damage-dependent interactions motivated by internal time. *Engineering Fracture Mechanics*, 142 :255–275.

[Dyskin, 1997] Dyskin, A. V. (1997). Crack growth criteria incorporating non-singular stresses : Size effect in apparent fracture toughness. *International Journal of Fracture*, 83 :191–206.

[Elias, 2015] Elias, A. (2015). *Nocivité des défauts induits par impact pour les structures composites tissées 3D à matrice organique*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nante.

[Elices and Planas, 1993] Elices, M. and Planas, J. (1993). The equivalent elastic crack : 1. Load-Y equivalences. *International Journal of Fracture*, 61(2) :159–172.

[Forest and Lorentz, 2004] Forest, S. and Lorentz, E. (2004). Localization phenomena and regularization methods. In *Local approach to fracture*, pages 311–371. Presses de l'École des Mines de Paris.

[Francfort and Marigo, 1998] Francfort, G. A. and Marigo, J. J. (1998). Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(8) :1319–1342.

[Garcia, 2019] Garcia, C. (2019). *Modélisation multiaxiale de l'endommagement et de la rupture des matériaux composites tissés 3D appliquée aux chapes ceinturées*. Thèse de doctorat, SMEMaG, Université Paris Saclay.

[Geers et al., 1998a] Geers, M. G. D., Borst, R. d., Brekelmans, W. a. M., and Peerlings, R. H. J. (1998a). On the use of local strain fields for the determination of the intrinsic length scale. *Le Journal de Physique IV*, 08(8) :167–174.

[Geers et al., 1998b] Geers, M. G. D., de Borst, R., Brekelmans, W. A. M., and Peerlings, R. H. J. (1998b). Strain-based transient-gradient damage model for failure analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 160(1) :133–153.

[Gerasimov and De Lorenzis, 2016] Gerasimov, T. and De Lorenzis, L. (2016). A line search assisted monolithic approach for phase-field computing of brittle fracture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 312 :276–303.

[Germain, 2006] Germain, N. (2006). *Modélisation non locale de l'endommagement dans les structures composites*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.

[Godin et al., 2005] Godin, N., Huguet, S., and Gaertner, R. (2005). Integration of the Kohonen's self-organising map and k-means algorithm for the segmentation of the AE data collected during tensile tests on cross-ply composites. *NDTE Int.*, 38 :299–309.

[González et al., 2012] González, E. V., Maimí, P., Camanho, P. P., Turon, A., and Mayugo, J. A. (2012). Simulation of drop-weight impact and compression after impact tests on composite laminates. *Composite Structures*, 94(11) :3364–3378.

[Gregoire et al., 2016] Gregoire, D., Lefort, V., and Pijaudier-Cabot, G. (2016). Correlation during the fracture process analysed with the help of Ripley's functions. In *9th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures*, Berkeley, USA.

[Grégoire et al., 2015] Grégoire, D., Lefort, V., and Pijaudier-Cabot, G. (2015). Études numeriques et experimentales des correlations induites durant la rupture des materiaux quasi-fragiles. In *22e Congrès Français de Mecanique*, Lyon, France.

[Griffith, 1921] Griffith, A. A. (1921). The phenomena of rupture and flow in solids. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 221(582-593) :163–198.

[Gutkin et al., 2011] Gutkin, R., Laffan, M. L., Pinho, S. T., Robinson, P., and Curtis, P. T. (2011). Modelling the R-curve effect and its specimen-dependence. *International Journal of Solids and Structures*, 48(11–12) :1767–1777.

[Helm, 2008] Helm, J. D. (2008). Digital Image Correlation for Specimens with Multiple Growing Cracks. *Experimental Mechanics*, 48(6) :753–762.

[Hild and Roux, 2006] Hild, F. and Roux, S. (2006). Digital Image Correlation : from Displacement Measurement to Identification of Elastic Properties – a Review. *Strain*, 42(2) :69–80.

[Hill, 1958] Hill, R. (1958). A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 6(3) :236–249.

[Hill, 1962] Hill, R. (1962). Acceleration waves in solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 10(1) :1–16.

[Hillerborg et al., 1976] Hillerborg, A., Modéer, M., and Petersson, P. E. (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6(6) :773–781.

[Hongkarnjanakul, 2013] Hongkarnjanakul, N. (2013). *Modélisation numérique pour la tolérance aux dommages d'impact sur stratifié composite : de l'impact à la résistance résiduelle en compression*. Thèse de doctorat, ISAE - Université de Toulouse.

[Hurmane et al., 2016] Hurmane, A., Irisarri, F.-X., Laurin, F., Leclercq, S., and Benzeggagh, M. (2016). Analyse de la tenue d'éprouvettes trouées composites tissées 3d sous sollicitations de compression au moyen d'un dialogue essais/calculs. *Materiaux et Techniques*, 104(403) :pages 1–11.

[Husson et al., 2002] Husson, C., Bahlouli, N., M'guil, S., and Ahzi, S. (2002). Mechanical characterization of thin metal sheets by a digital image correlation method. *Journal de Physique IV*, 12(11) :393–400.

[ICAO, 2019] ICAO (2019). Carbon Offsetting and Reduction Scheme for International Aviation (CORSIA).

[Irwin, 1957] Irwin, G. (1957). Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. *Journal of Applied Mechanics*.

[Irwin, 1958] Irwin, G. R. (1958). Fracture, in Encyclopedia of Physics. *Flügge, S. (ed.) Elasticity and Plasticity*, 4 :551–590.

[Jirásek, 1998] Jirásek, M. (1998). Nonlocal models for damage and fracture : Comparison of approaches. *International Journal of Solids and Structures*, 35(31) :4133–4145.

[Kachanov, 1958] Kachanov, L. (1958). Rupture time under creep conditions. *Izv. Akad. Nauk SSSR*, 8 :26–31.

[Krueger, 2002] Krueger, R. (2002). The Virtual Crack Closure Technique : History, Approach and Applications. *NASA Report*, 57(1).

[Lé et al., 2018] Lé, B., Moës, N., and Legrain, G. (2018). Coupling damage and cohesive zone models with the Thick Level Set approach to fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 193 :214–247.

[Ladeveze and LeDantec, 1992] Ladeveze, P. and LeDantec, E. (1992). Damage modelling of the elementary ply for laminated composites. *Composites Science and Technology*, 43(3) :257–267.

[Ladevèze et al., 1994] Ladevèze, P., Gasser, A., and Allix, O. (1994). Damage Mechanisms Modeling for Ceramic Composites. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 116(3) :331–336.

[Laffan et al., 2010a] Laffan, M. J., Pinho, S. T., Robinson, P., and Iannucci, L. (2010a). Measurement of the in situ ply fracture toughness associated with mode I fibre tensile failure in FRP. Part I : Data reduction. *Composites Science and Technology*, 70(4) :606–613.

[Laffan et al., 2010b] Laffan, M. J., Pinho, S. T., Robinson, P., and Iannucci, L. (2010b). Measurement of the in situ ply fracture toughness associated with mode I fibre tensile failure in FRP. Part II : Size and lay-up effects. *Composites Science and Technology*, 70(4) :614–621.

[Laffan et al., 2012] Laffan, M. J., Pinho, S. T., Robinson, P., and McMillan, A. J. (2012). Translaminar fracture toughness testing of composites : A review. *Polymer Testing*, 31(3) :481–489.

[Lapczyk and Hurtado, 2007] Lapczyk, I. and Hurtado, J. A. (2007). Progressive damage modeling in fiber-reinforced materials. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 38(11) :2333–2341.

[Laurin, 2015] Laurin, F. (2015). *Transfer to industries of advanced damage and failure approaches to predict the strength of aeronautical composite structures*. Habilitation à diriger des recherches, Ecole normale supérieure de Cachan.

[Le Gall and Godin, 2017] Le Gall, T. and Godin, N. (2017). Modélisation de l'Emission Acoustique : aide à l'identification de paramètres pertinents pour décrire l'endommagement des matériaux composites. In *Journées Nationales sur les Composites 2017*, Champs-sur-Marne, France.

[Lefort et al., 2015] Lefort, V., Pijaudier-Cabot, G., and Grégoire, D. (2015). Analysis by Ripley's function of the correlations involved during failure in quasi-brittle materials : Experimental and numerical investigations at the mesoscale. *Engineering Fracture Mechanics*, 147 :449–467.

[Lemaitre and Chaboche, 1994] Lemaitre, J. and Chaboche, J.-L. (1994). *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press.

[Liu et al., 2016] Liu, G., Li, Q., Msekh, M. A., and Zuo, Z. (2016). Abaqus implementation of monolithic and staggered schemes for quasi-static and dynamic fracture phase-field model. *Computational Materials Science*, 121 :35–47.

[Lomov et al., 2008] Lomov, S., Isanov, D., and Verpoest, I. (2008). Full-field strain measurements for validation of meso-FE analysis of textile composites. *Compos. Part A Appl. Sci. Manuf.*, 39 :1218–1231.

[Lopez-Crespo et al., 2008] Lopez-Crespo, P., Shterenlikht, A., Patterson, E. A., Yates, J. R., and Withers, P. J. (2008). The stress intensity of mixed mode cracks determined by digital image correlation. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 43(8) :769–780.

[Lorentz, 2008] Lorentz, E. (2008). *Modélisation et simulation numérique de l'endommagement des structures*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI.

[Lorentz, 2017] Lorentz, E. (2017). A nonlocal damage model for plain concrete consistent with cohesive fracture. *International Journal of Fracture*, 207(2) :123–159.

[Lorentz and Andrieux, 1999] Lorentz, E. and Andrieux, S. (1999). A variational formulation for nonlocal damage models. *International Journal of Plasticity*, 15(2) :119–138.

[Lorentz et al., 2011] Lorentz, E., Cuvilliez, S., and Kazymyrenko, K. (2011). Convergence of a gradient damage model toward a cohesive zone model. *Comptes Rendus Mécanique*, 339(1) :20–26.

[Luo et al., 2015] Luo, E., Chan, S. H., and Nguyen, T. Q. (2015). Adaptive Image Denoising by Targeted Databases. *IEEE Transactions on Image Processing*, 24(7) :2167–2181.

[Maimí et al., 2007] Maimí, P., Camanho, P. P., Mayugo, J. A., and Dávila, C. G. (2007). A continuum damage model for composite laminates : Part I – Constitutive model. *Mechanics of Materials*, 39(10) :897–908.

[Maimi, 2006] Maimi, P. (2006). A Thermodynamically Consistent Damage Model for Advanced Composites. Technical report, NASA Langley Research Center.

[Maire and Lesne, 1998] Maire, J. F. and Lesne, P. M. (1998). An explicit damage model for the design of composites structures. *Composites Science and Technology*, 58(5) :773–778.

[Marcin, 2010] Marcin, L. (2010). *Modélisation du comportement, de l'endommagement et de la rupture de matériaux composites à renforts tissés pour le dimensionnement robuste de structures*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1.

[Matlab, 2017] Matlab (2017). Segment image into foreground and background using active contour - MATLAB activecontour.

[McCombe et al., 2012] McCombe, G. P., Rouse, J., Trask, R. S., Withers, P. J., and Bond, I. P. (2012). X-ray damage characterisation in self-healing fibre reinforced polymers. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 43(4) :613–620.

[Mechraoui et al., 2012] Mechraoui, S.-E., Laksimi, A., and Benmedakhene, S. (2012). Reliability of damage mechanism localisation by acoustic emission on glass/epoxy composite material plate. *Composite Structures*, 94(5) :1483–1494.

[Meer and Sluys, 2009] Meer, F. P. V. D. and Sluys, L. J. (2009). Continuum Models for the Analysis of Progressive Failure in Composite Laminates. *Journal of Composite Materials*, 43(20) :2131–2156.

[Miehe et al., 2010] Miehe, C., Welschinger, F., and Hofacker, M. (2010). Thermodynamically consistent phase-field models of fracture : Variational principles and multi-field FE implementations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83(10) :1273–1311.

[Mindlin, 1965] Mindlin, R. D. (1965). Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 1(4) :417–438.

[Mistras, 2011] Mistras (2011). *Système PCI-2 - Guide d'utilisateur AEWin*. MISTRAS GROUP SA.

[Morel and Dourado, 2011] Morel, S. and Dourado, N. (2011). Size effect in quasibrittle failure : Analytical model and numerical simulations using cohesive zone model. *International Journal of Solids and Structures*, 48(10) :1403–1412.

[Moës et al., 1999] Moës, N., Dolbow, J., and Belytschko, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1) :131–150.

[Mounien, 2017] Mounien, R. (2017). *Analyse expérimentale 3D et modélisation de la tenue et du comportemen au matage de structures composites tissées 3D*. Thèse de doctorat, LBMS, Université de Brest.

[N. Bahlouli and N. Bahlouli, 2009] N. Bahlouli, S. M. and N. Bahlouli, S. M. (2009). Stress-Strain Response of Biomaterials by a Digital Image Correlation Method : Application to Tecoflex. *Journal of Materials Sciences and Technology*, 20(Supl.) :114–116.

[Needleman, 1988] Needleman, A. (1988). Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 67(1) :69–85.

[Ortega et al., 2017] Ortega, A., Maimí, P., González, E. V., and Trias, D. (2017). Specimen geometry and specimen size dependence of the $\mathcal{R}$-curve and the size effect law from a cohesive model point of view. *International Journal of Fracture*, 205(2) :239–254.

[Ortega et al., 2014] Ortega, A., Maimi, P., Gonzalez, E. V., and Ripoll, L. (2014). Compact tension specimen for orthotropic materials. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 63 :85–93.

[Otsu, 1979] Otsu, N. (1979). A Threshold Selection Method from Gray-Level Histograms. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 9(1) :62–66.

[Panin et al., 2017] Panin, S. V., Chemezov, V. O., Lyubutin, P. S., and Titkov, V. V. (2017). Algorithm of fatigue crack detection and determination of its tip position in optical images. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 53(3) :237–244.

[Peerlings, 1999] Peerlings, R. H. J. (1999). *Enhanced damage modelling for fracture and fatigue*. Thèse de doctorat, Technische Universiteit Eindhoven.

[Peerlings et al., 1996a] Peerlings, R. H. J., De Borst, R., Brekelmans, W. a. M., and De Vree, J. H. P. (1996a). Gradient Enhanced Damage for Quasi-Brittle Materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(19) :3391–3403.

[Peerlings et al., 1996b] Peerlings, R. H. J., R. Borst, D., Brekelmans, W. a. M., J. H.P. Vree, D., and Spee, I. (1996b). Some observations on localisation in non-local and gradient damage models. *European Journal of Mechanics. A, Solids*, 15 :937–953.

[Petersen and Pedersen, 2012] Petersen, K. B. and Pedersen, M. S. (2012). *The Matrix Cookbook*. Technical University of Denmark.

[Pham et al., 2011] Pham, K., Amor, H., Marigo, J. J., and Maurini, C. (2011). Gradient damage models and their use to approximate brittle fracture. *International Journal of Damage Mechanics*, 20(4) :618–652.

[Pierron, 2008] Pierron, F. (2008). Application of full-field measurement techniques to composite materials and structures. *Compos. Part A Appl. Sci. Manuf.*, 39 :1193.

[Pijaudier-Cabot et al., 2004] Pijaudier-Cabot, G., Haidar, K., and Dubé, J.-F. (2004). Nonlocal Damage Model with Evolving Internal Length. *International journal of numerical and analytical methods in geomechanics*, 28(7 8) :633–652.

[Pijaudier-Cabot and Bažant, 1987] Pijaudier-Cabot, G. and Bažant, Z. P. (1987). Nonlocal Damage Theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 113(10) :1512–1533.

[Pimenta and Pinho, 2014] Pimenta, S. and Pinho, S. (2014). An analytical model for the translaminar fracture toughness of fibre composites with stochastic quasi-fractal fracture surfaces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 66 :78–102.

[Pinho, 2005] Pinho, S. T. (2005). *Modelling failure of laminated composites using physically-based failure models*. Thèse de doctorat, Imperial College, Univsersity of London.

[Pinho et al., 2006] Pinho, S. T., Iannucci, L., and Robinson, P. (2006). Physically-based failure models and criteria for laminated fibre-reinforced composites with emphasis on fibre kinking : Part I : Development. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 37(1) :63–73.

[Planas and Elices, 1988] Planas, J. and Elices, M. (1988). Size effect in concrete structures : Mathematical approximations and experimental validation. *Cracking and Damage*, pages 462–476.

[Planas et al., 1993] Planas, J., Elices, M., and Ruiz, G. (1993). The equivalent elastic crack : 2. X-Y equivalences and asymptotic analysis. *International Journal of Fracture*, 61(3) :231–246.

[Rakotoarisoa, 2014] Rakotoarisoa, C. (2014). *Prévision de la durée de vie en fatigue des composites à matrice organique tisses interlock*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne.

[Rannou, 2015] Rannou, J. (2015). Mise en oeuvre d'un élément non-local avec loi d'endommagement adoucissante dans le code Abaqus. Technical report, ONERA, Chatillon.

[Rice, 1968] Rice, J. R. (1968). A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35(2) :379–386.

[Rice and Rudnicki, 1980] Rice, J. R. and Rudnicki, J. W. (1980). A note on some features of the theory of localization of deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 16(7) :597–605.

[Roche and Balageas, 2014] Roche, J.-M. and Balageas, D. (2014). Advanced thermal imaging techniques for quantitative damage mapping of composite materials. In *6th International Symposium on NDT in Aerospace*, Madrid, Spain.

[Rosi and Auffray, 2016] Rosi, G. and Auffray, N. (2016). Anisotropic and dispersive wave propagation within strain-gradient framework. *Wave Motion*, 63 :120–134.

[Roux et al., 2008] Roux, S., Hild, F., Viot, P., and Bernard, D. (2008). Three-dimensional image correlation from X-ray computed tomography of solid foam. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 39(8) :1253–1265.

[Saliba et al., 2016] Saliba, J., Matallah, M., Loukili, A., Regoin, J. P., Grégoire, D., Verdon, L., and Pijaudier-Cabot, G. (2016). Experimental and numerical analysis of crack evolution in concrete through acoustic emission technique and mesoscale modelling. *Engineering Fracture Mechanics*, 167 :123–137.

[Sause, 2016] Sause, M. G. R. (2016). *In Situ Monitoring of Fiber-Reinforced Composites : Theory, Basic Concepts, Methods, and Applications*. Springer Series in Materials Science. Springer International Publishing.

[Sengupta et al., 2015] Sengupta, S., Datta, A. K., Topdar, P., Sengupta, S., Datta, A. K., and Topdar, P. (2015). Structural damage localisation by acoustic emission technique : A state of the art review. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 12(8) :1565–1582.

[Solano and Beatriz, 2012] Solano, R. and Beatriz, L. (2012). *Endommagement non-local, interactions et effets d'échelle*. Thèse de doctorat, Pau.

[Suffis et al., 2003] Suffis, A., Lubrecht, T. A. A., and Combescure, A. (2003). Damage model with delay effect : Analytical and numerical studies of the evolution of the characteristic damage length. *International Journal of Solids and Structures*, 40(13–14) :3463–3476.

[Sutton et al., 1983] Sutton, M., Wolters, W., Peters, W., Ranson, W., and McNeill, S. (1983). Determination of displacements using an improved digital correlation method. *Image and Vision Computing*, 1(3) :133–139.

[Tada et al., 2000] Tada, H., Paris, P. C., and Irwin, G. R. (2000). *The Stress Analysis of Cracks Handbook, Third Edition*. ASME, Three Park Avenue New York, NY 10016-5990.

[Vanlanduit et al., 2009] Vanlanduit, S., Vanherzeele, J., Longo, R., and Guillaume, P. (2009). A digital image correlation method for fatigue test experiments. *Optics and Lasers in Engineering*, 47(3) :371–378.

[Westphal et al., 2011] Westphal, O., Bahlouli, N., Rémond, Y., Olivier, P., Gornet, L., Lawniczak, F., Uhring, W., Maillard, S., and Chevallier, C. (2011). Caractérisation des dommages au choc de composites stratifiés aéronautiques : application à la chute d'objets. In AMAC, editor, *17èmes Journées Nationales sur les Composites (JNC17)*, page 172, Poitiers-Futuroscope, France.

[Wu et al., 2011] Wu, Z., Rong, H., Zheng, J., Xu, F., and Dong, W. (2011). An experimental investigation on the FPZ properties in concrete using digital image correlation technique. *Engineering Fracture Mechanics*, 78(17) :2978–2990.

[Zani-Demange, 2008] Zani-Demange, M. L. (2008). Tomography heads for metrology applications. *Mesures (1983)*, pages 30–34.

Résumé

Ces travaux s'attachent à décrire et quantifier les mécanismes de ruptures des composites tissés 3D sous chargement de traction quasi-statique et à mettre en place une méthode de simulation numérique adaptée et robuste, pouvant à terme être appliquée en bureau d'études. Dans cette optique, une étude expérimentale a été menée afin de quantifier la propagation de fissures dans ces matériaux. Celle-ci a permis de mettre en place un scenario de rupture, en tirant parti de la multi-instrumentation des essais. L'étude a également été effectuée sur des éprouvettes de géométries et de tailles variées et a mis en évidence d'importantes variations du taux de restitution d'énergie avec les conditions d'essai. Un formalisme d'analyse et de modélisation introduisant des longueurs internes a ensuite été présenté et adapté aux mécanismes de rupture des composites tissés 3D. Ce formalisme est étayé par la recherche des mécanismes à l'aide de l'analyse des faciès de rupture. Les longueurs introduites ont ainsi été mises en relation avec les paramètres du tissage. Une méthode d'identification des paramètres a été proposée et les conséquences de ce comportement sur le dimensionnement de pièces composites discutées. Enfin, le transfert de ces résultats a été effectué vers des simulations numériques robustes. Des méthodes de régularisation des modèles d'endommagement continu ont été présentées et évaluées à l'aune de leur capacité à assurer, d'une part, la robustesse des résultats et, d'autre part, la bonne retranscription des effets d'échelle expérimentaux. La prise en compte de ces considérations numériques et physiques nous a amené à proposé un modèle d'endommagement Non-Local. Une méthode d'identification des paramètres et de la longueur interne à partir des données expérimentales a été proposée.

Mots clés :
Rupture ; Composite tissé 3D ; Effet d'échelle ; Modèle d'endommagement ; Régularisation ; Taux de restitution d'énergie ; Longueur interne

Abstract

This work aims to describe and quantify the failure mechanisms of 3D woven composites under quasi-static tensile loading and to implement an adapted and robust numerical simulation method, that can be applied in industry. To this end, an experimental study was carried out to quantify the propagation of cracks in these materials. Thus, a crack propagation scenario was established, thanks to the multi-instrumentation used during the tests. The experimental campaign was carried out on specimens of various geometries and sizes and highlighted significant variations in the fracture toughness with the test conditions. A modelisation framework introducing internal lengths was then presented and adapted to 3D woven composites. This framework is supported by the identification of the failure mechanisms subsequent to the analysis of the crack profile. The introduced lengths were thus related to the weaving parameters. A method for identifying the parameters was proposed and the consequences of this behaviour on the design of the composite parts discussed. Finally, these results were transferred to robust numerical simulations. Regularisation methods of continuous damage models were presented and evaluated in terms of their ability to ensure, on the one hand, the robustness of the results and, on the other hand, the correct transcription of experimental size effects. Taking into account these numerical and physical considerations led us to propose a Non-Local damage model. A method for identifying the parameters and the internal length on experimental data was proposed.

Keywords :
Fracture ; 3D woven composite ; Size effect ; Damage Model ; Regularization ; Fracture toughness ; Internal length