



HAL
open science

Morphismes de périodes et cohomologie syntomique

Sally Gilles

► **To cite this version:**

Sally Gilles. Morphismes de périodes et cohomologie syntomique. Théorie des nombres [math.NT]. Université de Lyon, 2020. Français. NNT : 2020LYSEN049 . tel-02965753

HAL Id: tel-02965753

<https://theses.hal.science/tel-02965753>

Submitted on 13 Oct 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Numéro National de Thèse : 2020LYSEN049

THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON

opérée par

l'Ecole Normale Supérieure de Lyon

Ecole Doctorale N° 512

École Doctorale Informatique et Mathématiques

Discipline : Mathématiques

Soutenue publiquement le 29/09/2020, par :

Sally GILLES

Morphismes de périodes et cohomologie syntomique

Après l'avis de :

M. Denis BENOIS Institut Mathématique de Bordeaux
M. Peter SCHOLZE Mathematisches Institut der Universität Bonn

Devant le jury composé de :

M. Ahmed ABBES	DR CNRS	IHES, Paris	Examineur
M. Denis BENOIS	Professeur	Université de Bordeaux	Rapporteur
M. Laurent BERGER	Professeur	ENS de Lyon	Examineur
M. Kestutis CESNAVICIUS	CR CNRS	LMO, Orsay	Examineur
M. Gabriel DOSPINESCU	CR CNRS	ENS de Lyon	Examineur
M. Michel GROS	CR CNRS	IRMAR, Rennes	Examineur
Mme Ariane MÉZARD	Professeure	IMJ-PRG, Paris	Examinatrice
Mme Wieslawa NIZIOL	DR CNRS	IMJ-PRG, Paris	Directrice de thèse

Résumé

Dans un travail récent, Colmez et Nizioł ont prouvé un théorème de comparaison entre les cycles proches p -adiques arithmétiques et la cohomologie des faisceaux syntomiques. Ils ont pour cela donné une construction locale utilisant des (φ, Γ) -modules qui permet de réduire l'isomorphisme de période à un théorème de comparaison entre des algèbres de Lie. Dans cette thèse, on commence par donner la version géométrique de cette construction. On construit ensuite à partir de cette application locale un isomorphisme de période global.

Le morphisme de période obtenu est utile pour décrire la cohomologie étale d'espaces analytiques rigides. On peut notamment en déduire la conjecture semi-stable de Fontaine-Jannsen qui relie la cohomologie étale de la variété analytique rigide associée à un schéma formel semi-stable propre à sa cohomologie de Hyodo-Kato. Ce résultat a également été prouvé par (entre autres) Tsuji, via l'application de Fontaine-Messing, et par Česnavičius et Koshikawa, qui généralisent la preuve de la conjecture cristalline de Bhatt, Morrow et Scholze. Dans la deuxième partie de la thèse, on utilise l'application construite précédemment pour montrer que les morphismes de période de Tsuji et de Česnavičius-Koshikawa sont égaux.

Mots-clés : Cohomologie étale, Cohomologie syntomique, Cycle proche p -adique, (φ, Γ) -module, Théorie de Hodge p -adique

Abstract

Recently, Colmez and Nizioł proved a comparison theorem between arithmetic p -adic nearby cycles and syntomic cohomology sheaves. To prove it, they gave a local construction using (φ, Γ) -modules which allows to reduce the period isomorphism to a comparison theorem between Lie algebras. In this thesis, we first give the geometric version of this construction before globalizing it to get a global period isomorphism.

This period morphism can be used to describe the étale cohomology of rigid analytic spaces. In particular, we deduce the semi-stable conjecture of Fontaine-Jannsen, which relates the étale cohomology of the rigid analytic variety associated to a formal proper semi-stable scheme to its Hyodo-Kato cohomology. This result was also proved by (among others) Tsuji, via the Fontaine-Messing map, and by Česnavičius and Koshikawa, which generalized the proof of the crystalline conjecture by Bhatt, Morrow and Scholze. In the second part of the thesis, we use the previous map to show that the period morphism of Tsuji and the one of Česnavičius-Koshikawa are the same.

Keywords : Étale cohomology, Syntomic cohomology, p -adic nearby cycle, (φ, Γ) -module, p -adic Hodge theory

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier ma directrice de thèse Wiesława Nizioł pour son aide précieuse et ses nombreux conseils et corrections. Je remercie également Denis Benois et Peter Scholze d'avoir accepté d'être rapporteurs, merci pour leurs nombreux commentaires, corrections et suggestions qui ont permis d'améliorer cette thèse. Je voudrais remercier aussi Ahmed Abbas, Laurent Berger, Kęstutis Česnavičius, Gabriel Dospinescu, Michel Gros et Ariane Mézard d'avoir accepté de faire partie de mon jury. J'aimerais aussi remercier Ana Caraiani pour m'accueillir au sein de son équipe à Londres pour mon post-doctorat.

Merci à toute l'équipe de théorie des nombres de l'ENS et plus généralement à tous les membres de l'UMPA. Merci en particulier aux secrétaires pour leur efficacité et leur bienveillance. Merci aussi aux doctorants de l'UMPA et de Lyon 1, et notamment Damien, Juan Esteban, Manh Tu, Simon (et tous ceux que j'oublie) pour les discussions mathématiques intéressantes et/ou les (tentatives de) groupes de travail.

Enfin merci à mes parents, et merci à Bonnie, Sammy et Tess d'être Bonnie, Sammy et Tess (respectivement).

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Théorie de Hodge p -adique	5
1.1.1	Théorème de comparaison de de Rham	5
1.1.2	Théorème de comparaison cristallin	6
1.1.3	Théorème de comparaison semi-stable	7
1.2	Cohomologie syntomique et cycles proches p -adiques	8
1.2.1	Preuve du théorème 1.2.3	10
1.2.2	Quasi-isomorphisme global	12
1.2.3	Preuve du théorème 1.2.4	13
2	Préliminaires : cohomologie syntomique	16
2.1	Géométrie logarithmique	16
2.1.1	Structure logarithmique	17
2.1.2	Différentielles logarithmiques et lissité	18
2.2	Cohomologie log-cristalline	19
2.2.1	Site cristallin	19
2.2.2	Cohomologie cristalline absolue	21
2.2.3	Cohomologie de Hyodo-Kato	23
2.3	Cohomologie log-syntomique	24
2.3.1	Site syntomique	24
2.3.2	Cohomologie syntomique géométrique	29
2.3.3	(φ, N) -modules filtrés et espaces de Banach-Colmez	32
3	Faisceaux syntomiques et cycles proches p-adiques	37
3.1	Résultat local	37
3.1.1	Modèles locaux	38
3.1.2	Complexe syntomique local	39
3.2	Anneaux de périodes	40
3.2.1	Définitions des anneaux	40
	Les anneaux $\mathbb{E}_{\overline{R}}$, $\mathbb{A}_{\overline{R}}$ et $\mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$	40
	Les anneaux $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0,v]}$, $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]}$ et $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}$	41
3.2.2	Suites exactes pour les anneaux $\mathbb{A}_{\overline{R}}$ et $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0,v]^{+}}$	44
3.2.3	Suite exacte pour l'anneau \mathbb{A}_{cris}	45

3.2.4	Suites exactes pour les anneaux $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}$ et $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]}$	48
3.2.5	Anneaux de convergence et morphisme de Frobenius	51
3.3	Passage de R_{cris}^+ à $R^{[u,v]}$	52
3.3.1	Disque de convergence	53
3.3.2	Passage de φ à ψ	54
3.3.3	Anneaux de convergence	56
3.4	Utilisation des (φ, Γ) -modules	58
3.4.1	Plongement dans les anneaux de périodes	59
3.4.2	Passage des (φ, ∂) -modules aux (φ, Γ) -modules	60
3.4.3	Changement d'anneau	64
3.5	Cohomologie de Galois	66
3.5.1	Lemme d'Abhyankar	66
3.5.2	Calcul de la cohomologie de Galois	67
3.5.3	Comparaison avec le complexe syntomique	70
3.6	Résultat global	71
3.6.1	Construction du quasi-isomorphisme $\alpha_{r,\Sigma,\Lambda}$	73
3.6.2	Preuve du théorème 3.6.1	76
3.6.3	Conjecture semi-stable	78
4	Unicité des morphismes de périodes	80
4.1	Application de Fontaine-Messing et symboles	80
4.1.1	Faisceaux syntomiques et cycles proches	80
	Applications symboles et faisceaux syntomiques	81
	Applications symboles et cycles proches	83
	Preuve du théorème (4.1.1)	84
4.1.2	Comparaison locale avec l'application de Fontaine-Messing	87
	Les anneaux $\mathbb{E}_{\overline{R}}^{[u,v]}$ et $\mathbb{E}_{\overline{R}}^{PD}$ et lemmes de Poincaré	87
	Application de Fontaine-Messing	91
4.1.3	Comparaison de $\tilde{\alpha}^{\text{FM}}$ et $\tilde{\alpha}^0$	93
4.2	Preuve via la cohomologie \mathbb{A}_{inf}	94
4.2.1	Définition de l'application locale γ^{CK}	94
4.2.2	Application globale	97
4.2.3	Comparaison avec $\tilde{\alpha}^0$	99

Chapitre 1

Introduction

1.1 Théorie de Hodge p -adique

Les théorèmes de comparaison p -adique sont des analogues de l'isomorphisme de période complexe

$$H_{\text{dR}}^i(X/\mathbb{C}) \cong H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C} \quad (1.1)$$

qui relie la cohomologie de de Rham d'une variété lisse et projective X sur \mathbb{Q} à sa cohomologie singulière. Ils permettent de décrire la cohomologie étale p -adique d'une variété algébrique à l'aide de formes différentielles et rendent ainsi possible son calcul.

On fixe p un nombre premier. Soit K une extension complète de \mathbb{Q}_p de corps résiduel k parfait et d'anneau de valuation \mathcal{O}_K . On note ϖ une uniformisante de K , $\mathcal{O}_F := W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt associé à k et $F = \text{Frac}(\mathcal{O}_F)$ (avec $e := [K : F]$). Soit \overline{K} la clôture algébrique de K et $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ la clôture intégrale de \mathcal{O}_K dans \overline{K} . Enfin, on note C le corps complet algébriquement clos $\widehat{\overline{K}}$ et \mathcal{O}_C son anneau de valuation.

Si X est une variété sur K , la cohomologie étale p -adique $H_{\text{ét}}^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_p)$ de $\overline{X} = X \otimes_K \overline{K}$ admet une structure de K -espace vectoriel muni d'une action du groupe de Galois absolu $G_K := \text{Gal}(\overline{K}/K)$ de K . Pour établir un analogue de (1.1) pour la variété X , on cherche un anneau B tel qu'il existe un isomorphisme Galois-équivariant

$$H_{\text{dR}}^i(X_K) \otimes_K B \cong H_{\text{ét}}^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B$$

tel qu'on puisse calculer $H_{\text{ét}}^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_p)$ à partir de $H_{\text{dR}}^i(X_K)$.

1.1.1 Théorème de comparaison de de Rham

Contrairement à ce qu'on obtient dans le cas complexe, cet anneau B n'est pas C . La raison pour cela est que C ne contient pas assez de périodes. On considère donc les anneaux de Fontaine ([28]).

On note \mathcal{O}_C^b le tilt $\varprojlim_{x \rightarrow x^p} \mathcal{O}_C/p$ de \mathcal{O}_C et soit $\mathbb{A}_{\text{inf}} := W(\mathcal{O}_C^b)$ l'anneau des vecteurs de Witt associé. Soit $[\cdot] : \mathcal{O}_C^b \rightarrow \mathbb{A}_{\text{inf}}$ le relèvement de Teichmüller et $\varepsilon = (1, \zeta_p, \zeta_{p^2}, \dots) \in \mathcal{O}_C^b$

un système de racines primitives de l'unité. On a les éléments de \mathbb{A}_{inf} suivants :

$$\mu = [\varepsilon] - 1, \quad t = \log(1 + \mu) \quad \text{et} \quad \xi = \frac{\mu}{\varphi^{-1}(\mu)}.$$

Il existe une application naturelle $\theta : \mathbb{A}_{\text{inf}} \rightarrow \mathcal{O}_C$ de noyau $\ker(\theta) = (\xi)$. On définit \mathbb{B}_{dR}^+ comme la complétion de $\mathbb{A}_{\text{inf}} \otimes_{\mathcal{O}_C} C$ par rapport à l'idéal $\ker(\theta)$ et soit $\mathbb{B}_{\text{dR}} := \text{Frac}(\mathbb{B}_{\text{dR}}^+)$. L'anneau de période \mathbb{B}_{dR}^+ est un anneau de valuation discrète d'idéal maximal (ξ) et de corps résiduel C . Il est muni d'une action de G_K telle que $\mathbb{B}_{\text{dR}}^{G_K} = K$. L'élément t appartient à \mathbb{B}_{dR}^+ et il en est une uniformisante. On munit \mathbb{B}_{dR} de la filtration naturelle $F^m \mathbb{B}_{\text{dR}} = \{x \in \mathbb{B}_{\text{dR}} \mid v(x) \geq m\}$ et les quotients $F^m \mathbb{B}_{\text{dR}} / F^{m+1}$ sont isomorphes à $C(m)$.

Théorème 1.1.1 (Théorème de comparaison de de Rham). *Soit X une variété algébrique lisse et projective sur K . Il existe un isomorphisme naturel*

$$H_{\text{ét}}^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{dR}} \cong H_{\text{dR}}^i(X) \otimes_K \mathbb{B}_{\text{dR}}$$

compatible avec l'action du groupe de Galois et les filtrations (où la filtration sur la cohomologie de de Rham est donnée par la suite spectrale de Hodge).

Ce résultat a été prouvé par Faltings dans [26]. Une autre construction a été donné par Beilinson dans [6]. Il a été étendu au cas des variétés analytiques rigides par Scholze dans [45].

En particulier, le théorème permet de calculer la cohomologie de de Rham de X à partir de sa cohomologie p -adique (puisque'on a $(H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{dR}})^{G_K} \cong H_{\text{dR}}^i(X_K)$) mais il n'est pas suffisant pour permettre de déduire la cohomologie p -adique à partir de la cohomologie de de Rham. Pour cela, on doit ajouter de la structure à la cohomologie de de Rham et considérer d'autres anneaux de Fontaine.

1.1.2 Théorème de comparaison cristallin

On considère toujours X une variété lisse et projective sur K et on suppose de plus que X est à bonne réduction (i.e. il existe un modèle entier \mathcal{X} propre et lisse sur \mathcal{O}_K). Si on note $Y := \mathcal{X}_k$ la fibre spéciale de \mathcal{X} , on peut construire la cohomologie cristalline $H_{\text{cris}}^i(Y/\mathcal{O}_F)$ de Y . Alors $H_{\text{cris}}^i(Y/\mathcal{O}_F)_{\mathbb{Q}} := H_{\text{cris}}^i(Y/\mathcal{O}_F) \otimes_{\mathcal{O}_F} F$ est un F -espace vectoriel muni d'un isomorphisme σ -linéaire¹ φ et tel que

$$H_{\text{cris}}^i(Y/\mathcal{O}_F)_{\mathbb{Q}} \otimes_F K \cong H_{\text{dR}}^i(X_K).$$

Définissons l'anneau \mathbb{A}_{cris} comme la complétion p -adique de $\mathbb{A}_{\text{inf}} \left[\frac{\xi^k}{k!}, k \geq 0 \right]$, puis $\mathbb{B}_{\text{cris}}^+ := \mathbb{A}_{\text{cris}} \left[\frac{1}{p} \right]$ et soit \mathbb{B}_{cris} le corps de fraction associé. L'anneau de période \mathbb{B}_{cris} est muni d'une action de G_K tel que $\mathbb{B}_{\text{cris}}^{G_K} = F$ et d'un morphisme de Frobenius σ -linéaire φ . On a de plus un plongement naturel $\mathbb{B}_{\text{cris}} \otimes_F K \rightarrow \mathbb{B}_{\text{dR}}$ et on munit $\mathbb{B}_{\text{cris}} \otimes_F K$ de la filtration induite.

1. où σ est le morphisme Frobenius sur $W(k)$.

Théorème 1.1.2 (Théorème de comparaison cristallin). *Soit X une variété algébrique lisse et projective sur K , à bonne réduction. Il existe un isomorphisme naturel*

$$H_{\text{ét}}^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{cris}} \cong H_{\text{cris}}^i(Y/F) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{cris}}$$

compatible avec l'action du groupe de Galois, l'action du morphisme de Frobenius et la filtration après tensorisation par \mathbb{B}_{dR} .

On en déduit notamment les isomorphismes

$$(H_{\text{ét}}^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{cris}})^{G_K} \cong H_{\text{cris}}^i(Y/F)$$

$$H_{\text{ét}}^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_p) \cong (H_{\text{cris}}^i(Y/F) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{cris}})^{\varphi=1} \cap F^0(H_{\text{dR}}^i(X) \otimes (\mathbb{B}_{\text{cris}} \otimes_F K)).$$

Le théorème de comparaison cristallin a été prouvé par Faltings dans [27] via des méthodes presque étales et par Nizioł dans [42] en utilisant de la K -théorie. Une preuve passant par la cohomologie syntomique a été donnée par Fontaine-Messing dans [29] dans la cas où la dimension de X est plus petite que p et $F = K$ et par Kato-Messing dans [35] dans le cas où $2 \dim(X) < p - 1$. Le théorème dans le cas général se déduit de la preuve de la conjecture semi-stable de Tsuji dans [47]. D'autres preuves ont été données par Beilinson ([7]) et plus récemment par Bhatt-Morrow-Scholze ([9]) qui ont donné une nouvelle construction de l'isomorphisme utilisant la cohomologie \mathbb{A}_{inf} .

1.1.3 Théorème de comparaison semi-stable

On se place maintenant dans le cas où X est à réduction semi-stable sur \mathcal{O}_K i.e. il existe un modèle (propre) \mathcal{X} de X sur \mathcal{O}_K qui s'écrit localement $\text{Spec}(\mathcal{O}_K[X_1, \dots, X_d]/(X_1 \dots X_a - \varpi))$ où a et d sont des entiers avec $a \leq d$. On associe à X sa cohomologie de Hyodo-Kato $H_{\text{HK}}^i(X)$ qui est définie à partir de la cohomologie cristalline à pôles logarithmiques de $Y = \mathfrak{X}_k$ sur le log-schéma $\text{Spec}(\mathcal{O}_F)$ muni de la log-structure induite par $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathcal{O}_F)}, 1 \mapsto 0$. C'est un F -espace vectoriel muni d'un isomorphisme de Frobenius σ -linéaire φ et d'un opérateur de monodromie N nilpotent tel que $N\varphi = p\varphi N$. On a de plus un isomorphisme

$$\iota_{\text{HK}} : H_{\text{HK}}^i(X) \otimes_F K \xrightarrow{\sim} H_{\text{dR}}^i(X).$$

Théorème 1.1.3 (Théorème de comparaison semi-stable). *Soit X une variété algébrique lisse et projective sur K , à réduction semi-stable. Il existe un isomorphisme naturel*

$$H_{\text{ét}}^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{st}} \cong H_{\text{HK}}^i(X) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}$$

compatible avec l'action du groupe de Galois, de N , du morphisme de Frobenius et avec la filtration après tensorisation par \mathbb{B}_{dR} .

Le théorème a été prouvé par Kato dans [34] dans le cas où $2 \dim(X) < p - 1$ et par Tsuji dans [47] dans le cas général. D'autres preuves ont été données par Faltings

dans [27], Nizioł dans [43] et Colmez-Nizioł dans [21]. Dans [15], Česnavičius-Koshikawa généralisent la construction de [9].

Les preuves de Tsuji et Colmez-Nizioł reposent sur un théorème de comparaison entre les faisceaux syntomiques et les cycles proches p -adiques. Plus précisément, l'isomorphisme $\tilde{\alpha}$ ci-dessus est induit par les applications

$$H_{\text{ét}}^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p(r)) \xleftarrow{\alpha_{i,r}} H_{\text{syn}}^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p(r)) \rightarrow F^r(\mathbb{B}_{\text{dR}} \otimes_K H_{\text{dR}}^i(X_K)) \cap (\mathbb{B}_{\text{st}} \otimes_F H_{\text{HK}}^i(X))^{\varphi=p^r, N=0}$$

et le résultat principal de [47] et [21] est que $\alpha_{i,r}$ est un isomorphisme pour $i \leq r$. La preuve de [21] est plus générale puisque le résultat est établi dans le cas arithmétique (i.e. pour X_K au lieu de $X_{\bar{K}}$). Le but de cette thèse est de donner la version géométrique de la construction de Colmez-Nizioł, pour ensuite la globaliser et utiliser le morphisme de période obtenu pour montrer l'égalité entre les isomorphismes de Tsuji ([47]) et Česnavičius-Koshikawa ([15]).

1.2 Cohomologie syntomique et cycles proches p -adiques

On note \mathcal{O}_K^\times le schéma formel $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$ muni de la log-structure donnée par son point fermé et \mathcal{O}_F^0 le schéma formel $\text{Spf}(W(k))$ muni de la log-structure $(\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{O}_F, 1 \mapsto 0)$. On considère \mathfrak{X} un log-schéma formel log-lisse sur \mathcal{O}_K^\times . On note $Y := \mathfrak{X}_k$ sa fibre spéciale, $\bar{\mathfrak{X}} := \mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}$ et $\bar{Y} := \mathfrak{X}_{\bar{k}}$. Soit $\mathcal{S}_n(r)_{\mathfrak{X}}$ dans $D(Y_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2$ et $\mathcal{S}_n(r)_{\bar{\mathfrak{X}}}$ dans $D(\bar{Y}_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ les faisceaux syntomiques arithmétique et géométrique. On note $\mathfrak{X}_{K,\text{tr}}$ (respectivement $\mathfrak{X}_{C,\text{tr}}$) le lieu de \mathfrak{X}_K (respectivement de \mathfrak{X}_C) où la structure logarithmique est triviale, et i et j (respectivement \bar{i} et \bar{j}) les morphismes $Y \hookrightarrow \mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}_{K,\text{tr}} \hookrightarrow \mathfrak{X}$ (respectivement $\bar{Y} \hookrightarrow \bar{\mathfrak{X}}$ et $\mathfrak{X}_{C,\text{tr}} \hookrightarrow \bar{\mathfrak{X}}$). Enfin, soit $\mathbb{Z}_p(r)' := \frac{1}{a(r)!p^{a(r)}}\mathbb{Z}_p(r)$, $r = a(r)(p-1) + b(r)$ avec $0 \leq b(r) \leq p-2$.

On a le théorème suivant :

Théorème 1.2.1. *Pour tout $0 \leq k \leq r$, il existe un p^N -isomorphisme³*

$$\alpha_{r,n}^0 : \mathcal{H}^k(\mathcal{S}_n(r)_{\bar{\mathfrak{X}}}) \rightarrow \bar{i}^* R\bar{j}_* \mathbb{Z}/p^n(r)'_{\mathfrak{X}_{C,\text{tr}}}$$

où N est un entier qui dépend de p et de r , mais pas de X ni de n .

Notons $\alpha_{r,n}^{\text{FM}} : \mathcal{S}_n(r)_{\mathfrak{X}} \rightarrow i^* Rj_* \mathbb{Z}/p^n(r)'_{\mathfrak{X}_{K,\text{tr}}}$ (respectivement $\mathcal{S}_n(r)_{\bar{\mathfrak{X}}} \rightarrow \bar{i}^* R\bar{j}_* \mathbb{Z}/p^n(r)'_{\mathfrak{X}_{C,\text{tr}}}$) l'application de Fontaine-Messing arithmétique (respectivement géométrique). Dans [47, Th. 0.4], Tsuji montre le théorème (1.2.1) en prouvant que l'application de Fontaine-Messing fournit le p^N -quasi-isomorphisme voulu. Pour cela, il commence par se ramener au cas $n = 1$ par dévissage. En multipliant le faisceau syntomique (respectivement le faisceau de cycle proche) par t avec $t = \log([\varepsilon])$, où $\varepsilon \in \mathcal{O}_C^b$ est un système de racine p -ième

2. Où $D(Y_{\text{ét}}, A)$ est la catégorie dérivée des faisceaux de A -modules sur le site étale de Y , pour A un anneau.

3. On appelle p^N -isomorphisme, un morphisme dont le noyau et le conoyau sont tués par p^N .

de l'unité (respectivement par ζ_p), il se ramène au cas $k = r$. Il utilise ensuite une description des faisceaux $\mathcal{H}^r(\mathcal{S}_n(r)_{\bar{\mathfrak{X}}})$ via des applications symboles qu'il compare avec celle de $i^* R^k j_* \mathbb{Z}/p^n(r)'_{\mathfrak{X}_{C,\text{tr}}}$ donnée par Bloch-Kato ([11]) dans le cas de la bonne réduction, puis étendue à la réduction semi-stable par Hyodo ([31]).

Dans [21], Colmez-Nizioł prouvent la version arithmétique du théorème ci-dessus c'est-à-dire :

Théorème 1.2.2. [21, Th. 1.1] *Pour tout $0 \leq k \leq r$, l'application*

$$\alpha_{r,n}^{FM} : \mathcal{H}^k(\mathcal{S}_n(r)_{\mathfrak{X}}) \rightarrow i^* R^k j_* \mathbb{Z}/p^n(r)'_{\mathfrak{X}_{K,\text{tr}}}$$

est un p^N -isomorphisme pour une constante N qui dépend de e , p et de r , mais pas de \mathfrak{X} ni de n .

Pour cela, ils construisent un p^N -quasi-isomorphisme qui est localement égal à l'application de Fontaine-Messing. Le théorème 3.0.1 peut ensuite se déduire de 1.2.2 en passant à la limite sur les extensions finies L de K . Une nouvelle preuve du résultat de Colmez-Nizioł a récemment été donnée dans [4] dans le cas où \mathfrak{X} est propre et lisse sur \mathcal{O}_K .

On prouve ici le théorème 3.0.1 directement. On commence par montrer un résultat local semblable à celui de Colmez-Nizioł. On considère R la complétion p -adique d'une algèbre étale sur $R_{\square} := \mathcal{O}_C\{X_1, \dots, X_d, \frac{1}{X_1 \dots X_a}, \frac{\varpi}{X_{a+1} \dots X_{a+b}}\}$ (pour a, b, c et d des entiers tels que $a + b + c = d$). On note $D = \{X_{a+b+1} \dots X_d = 0\}$ le diviseur à l'infini et $\bar{R}[\frac{1}{p}]$ l'extension maximale de $R[\frac{1}{p}]$ non ramifiée en dehors de D . Soit $G_R = \text{Gal}(\bar{R}/R)$. On relève ensuite R en une algèbre R_{inf}^+ sur $R_{\text{inf},\square}^+ := \mathbb{A}_{\text{inf}}\{X, \frac{1}{X_1 \dots X_a}, \frac{[\varpi^b]}{X_{a+1} \dots X_{a+b}}\}$ (où $\varpi^b \in \mathcal{O}_C^b$ est un système de racines p -ièmes de ϖ), on définit $R_{\text{cris}}^+ := R_{\text{inf}}^+ \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} \mathbb{A}_{\text{cris}}$ et on s'intéresse au complexe syntomique donné par la fibre homotopique :

$$\text{Syn}(R_{\text{cris}}^+, r) := [F^r \Omega_{R_{\text{cris}}^+}^{\bullet} \xrightarrow{p^r - \varphi} \Omega_{R_{\text{cris}}^+}^{\bullet}]$$

où φ est le Frobenius sur R_{cris}^+ qui étend celui de $R_{\text{inf},\square}^+$ donné par le Frobenius usuel sur \mathbb{A}_{inf} et par $\varphi(X_i) = X_i^p$. Le complexe $\text{Syn}(R_{\text{cris}}^+, r)$ calcule alors la cohomologie syntomique de $\text{Spf}(R)$. On a le résultat local suivant :

Théorème 1.2.3. *Il existe des p^N -quasi-isomorphismes :*

$$\begin{aligned} \alpha_r^0 : \tau_{\leq r} \text{Syn}(R_{\text{cris}}^+, r) &\xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r)) \\ \alpha_{r,n}^0 : \tau_{\leq r} \text{Syn}(R_{\text{cris}}^+, r)_n &\xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}/p^n(r)) \end{aligned}$$

où N est une constante qui ne dépend que de r .

Si \mathfrak{X} est propre sur \mathcal{O}_K , on déduit de 3.0.1 que α_r^0 induit un quasi-isomorphisme Frobenius et G_K -équivariant, qui préserve la filtration après tensorisation par \mathbb{B}_{dR} :

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}^0 : H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{st}} &\cong H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_{W(k)} \mathbb{B}_{\text{st}} \\ H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{dR}} &\cong H_{\text{dR}}^i(\mathfrak{X}_K) \otimes_K \mathbb{B}_{\text{dR}} \end{aligned}$$

où $R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X}) \cong R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X}_k/W(k)^0)_{\mathbb{Q}}$. Par les résultats de Tsuji et de Colmez-Nizioł, le morphisme α_r^{FM} induit, lui aussi, un quasi-isomorphisme $\tilde{\alpha}^{\text{FM}}$ entre les mêmes objets. Enfin, Česnavičius-Koshikawa dans [15], donnent une troisième construction d'un tel quasi-isomorphisme $\tilde{\alpha}^{\text{CK}}$. Dans la seconde partie de ce mémoire, on montre :

Théorème 1.2.4. *Les morphismes $\tilde{\alpha}^{\text{FM}}$ et $\tilde{\alpha}^0$ d'une part et $\tilde{\alpha}^{\text{CK}}$ et $\tilde{\alpha}^0$ d'autre part sont égaux. En particulier, $\tilde{\alpha}^{\text{FM}} = \tilde{\alpha}^{\text{CK}}$.*

Ce dernier théorème étend le résultat de Nizioł dans [41] dans lequel elle prouve l'égalité entre les morphismes de période de [27], [7] et [43].

1.2.1 Preuve du théorème 1.2.3

Nous expliquons dans un premier temps comment construire le p^N -quasi-isomorphisme local. On part du complexe $\text{Syn}(R_{\text{cris}}^+, r)$. On commence par "changer la convergence" des éléments de R_{cris}^+ . Pour $0 < u < v$, on définit l'anneau $\mathbb{A}^{[u]}$ (respectivement $\mathbb{A}^{[u,v]}$) comme la complétion p -adique de $\mathbb{A}_{\text{inf}}[\frac{[\beta]}{p}]$ (respectivement de $\mathbb{A}_{\text{inf}}[\frac{p}{[\alpha]}, \frac{[\beta]}{p}]$) pour β un élément de \mathcal{O}_C^b de valuation $\frac{1}{u}$ (respectivement α et β des éléments de \mathcal{O}_C^b de valuation $\frac{1}{v}$ et $\frac{1}{u}$). Pour des valeurs de u et de v convenables, on déduit de la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p t^{\{r\}} \rightarrow F^r \mathbb{A}_{\text{cris}} \xrightarrow{1 - \frac{\varphi}{p^r}} \mathbb{A}_{\text{cris}} \rightarrow 0 \quad (1.2)$$

où $t^{\{r\}} := \frac{t^r}{a(r)!p^{a(r)}}$, des suites p^{6r} -exactes :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbb{Z}_p(r) \rightarrow F^r \mathbb{A}^{[u]} \xrightarrow{p^r - \varphi} \mathbb{A}^{[u]} \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \mathbb{Z}_p(r) \rightarrow F^r \mathbb{A}^{[u,v]} \xrightarrow{p^r - \varphi} \mathbb{A}^{[u,v]} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

On définit $R^{[u]} := R_{\text{inf}}^+ \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} \mathbb{A}^{[u]}$ et $R^{[u,v]} := R_{\text{inf}}^+ \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} \mathbb{A}^{[u,v]}$ et pour $S \in \{R^{[u]}, R^{[u,v]}\}$, on pose $C(S, r) := [F^r \Omega_S^\bullet \xrightarrow{p^r - \varphi} \Omega_S^\bullet]$. Les suites exactes (1.3) ci-dessus permettent alors de montrer les $p^{N_1 r}$ -quasi-isomorphismes⁴ :

$$\text{Syn}(R_{\text{cris}}^+, r) \cong C(R^{[u]}, r) \cong C(R^{[u,v]}, r).$$

En plongeant $R^{[u]}$ et $R^{[u,v]}$ dans des anneaux de périodes $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]}$ et $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}$ (construits de manière similaire à $\mathbb{A}^{[u]}$ et $\mathbb{A}^{[u,v]}$ en utilisant \overline{R} au lieu de \mathcal{O}_C), on les munit d'une action du groupe de Galois G_R . On note $\mathbb{A}_R^{[u]}$ et $\mathbb{A}_R^{[u,v]}$ leurs images respectives par ce plongement. On se place ensuite dans une base de Ω_R^1 pour écrire le complexe $C(R^{[u,v]}, r)$ sous la forme d'un complexe de Koszul $\text{Kos}(\varphi, \partial, F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]})$. La multiplication par $t = \log([\varepsilon]) \in \mathbb{A}_{\text{cris}}$ (où $\varepsilon \in \mathcal{O}_C^b$ est un système de racine p -ième de l'unité) permet de se débarrasser de la filtration

4. pour un $N_1 \in \mathbb{N}$.

en transformant l'action des différentielles en une action de l'algèbre de Lie du groupe $\Gamma_R = \text{Gal}(R_\infty/R) \cong \mathbb{Z}_p^d$ avec $R_\infty := (\varinjlim_m R_m)^{\wedge p}$ et

$$R_m := \left(\mathcal{O}_C \left\{ X^{\frac{1}{p^m}}, \frac{1}{(X_1 \dots X_a)^{\frac{1}{p^m}}}, \frac{\varpi^{\frac{1}{p^m}}}{(X_{a+1} \dots X_{a+b})^{\frac{1}{p^m}}} \right\} \right) \widehat{\otimes} R.$$

C'est à cette étape qu'il est nécessaire de tronquer les complexes en degré r pour garder des isomorphismes. Finalement, on a la suite de $p^{N_2 r}$ -quasi-isomorphismes⁵ suivante :

$$\tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]}) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \text{Lie } \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)) \xleftarrow{\sim} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)) \quad (1.4)$$

Soit $R_{\text{inf}} := R_{\text{inf}}^+[\frac{1}{p}]$ et \mathbb{A}_R son image dans $\mathbb{A}_{\text{inf}}(\overline{R}^\flat)$. On montre ensuite qu'on a un quasi-isomorphisme $\text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{[u,v]}) \cong \text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R)$. Pour cela, on passe par l'intermédiaire d'un anneau $\mathbb{A}_R^{(0,v]^+}$ (construit à partir de l'anneau $\mathbb{A}^{(0,v]^+} := \{x = \sum_{n \in \mathbb{N}} [x_n] p^n \in \mathbb{A}_{\text{inf}} \mid x_n \in \mathcal{O}_C^\flat, v_{\mathcal{O}_C^\flat}(x_n) + \frac{n}{v} \geq 0 \text{ et } v_{\mathcal{O}_C^\flat}(x_n) + \frac{n}{v} \rightarrow +\infty \text{ quand } n \rightarrow \infty\}$) et on utilise ψ , un inverse à gauche du Frobenius φ . Enfin, des arguments de descente presque étale et de décomplétion permettent d'obtenir un quasi-isomorphisme :

$$\text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R) \xrightarrow{\sim} \text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_{R_\infty}) \xrightarrow{\sim} \text{Kos}(\varphi, G_R, \mathbb{A}_{\overline{R}})$$

et la suite exacte $0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{R}} \xrightarrow{1-\varphi} \mathbb{A}_{\overline{R}} \rightarrow 0$ montre que le complexe $\text{Kos}(\varphi, G_R, \mathbb{A}_{\overline{R}})$ calcule la cohomologie galoisienne $R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p)$. En résumé le morphisme construit est le suivant :

$$\begin{aligned} R\Gamma_{\text{syn}}(R, r) &\xrightarrow{\sim} \text{Syn}(R_{\text{cris}}^+, r) \xrightarrow{\sim} C(R^{[u,v]}, r) \xrightarrow{\sim} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]}) \xrightarrow{\sim} \text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R(r)) \xleftarrow{\sim} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r)). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Remarque 1.2.5. La construction du morphisme local dans le cas arithmétique traité dans [21] est similaire à celle décrite ci-dessus. Il existe cependant quelques différences que nous soulignons ici. Dans le cas où $\text{Spf}(R)$ est défini sur \mathcal{O}_K , on ne dispose plus du quasi-isomorphisme $R\Gamma_{\text{cris}}(R/\mathcal{O}_F) \cong R\Gamma_{\text{cris}}(R/\mathbb{A}_{\text{cris}})$ qui nous permet de travailler avec l'anneau R_{cris}^+ . Au lieu de cela, Colmez et Nizioł écrivent R comme le quotient d'une \mathcal{O}_F -algèbre log-lisse R_{ϖ}^+ . Cela nécessite l'introduction d'une variable supplémentaire X_0 : on définit R_{ϖ}^+ comme le relevé étale de R sur $\mathcal{O}_F \{X_0, X_1, \dots, X_d, \frac{1}{X_1 \dots X_a}, \frac{X_0}{X_{a+1} \dots X_{a+b}}\}$. Le rôle de l'anneau \mathbb{A}_{inf} (respectivement $\mathbb{A}^{[u]}$, $\mathbb{A}^{[u,v]}$) est joué par l'anneau $r_{\varpi}^+ := \mathcal{O}_F[[X_0]]$ (respectivement par l'anneau $r_{\varpi}^{[u]}$ des fonctions analytiques sur F qui convergent sur le disque $v_p(X_0) \geq \frac{u}{e}$, par l'anneau $r_{\varpi}^{[u,v]}$ des fonctions analytiques sur F qui convergent sur la couronne $\frac{v}{p} \geq v_p(X_0) \geq \frac{u}{e}$). On perd, dans le cas géométrique, cette interprétation des anneaux en termes de séries de Laurent.

Travailler directement sur C permet aussi de simplifier la preuve lors du passage au complexe de Koszul. Dans le cas arithmétique, il existe deux manières différentes de plonger $R_{\varpi}^{[u]}$, $R_{\varpi}^{[u,v]}$ dans $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]}$, $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}$: le plongement "de Kummer", qui envoie X_0 sur $[\varpi^b]$ et le

5. pour un $N_2 \in \mathbb{N}$.

plongement "cyclotomique" par lequel X_0 s'envoie sur un élément $\pi_K \in \mathbb{A}_{\text{inf}}(\overline{K}^\flat)$ tel que $\bar{\pi}_K = (\varpi_{K_m})_m$, où $(\varpi_{K_m})_m$ est une suite compatible d'uniformisantes des extensions cyclotomiques K_m de K . Les quasi-isomorphismes (1.4) sont obtenus en utilisant le plongement cyclotomique, mais le Frobenius qui intervient alors diffère de celui apparaissant dans la définition du complexe syntomique (qui correspond, lui, au plongement de Kummer).

Une autre différence entre la preuve arithmétique et la preuve géométrique se trouve dans les propriétés de l'inverse à gauche ψ du Frobenius. Dans [21], par construction, il est topologiquement nilpotent sur le quotient $R_{\varpi}^{[u,v]}/R_{\varpi}^{[u]}$. Colmez et Nizioł utilisent notamment cette propriété pour montrer le quasi-isomorphisme $C(R_{\varpi}^{[u]}, r) \cong C(R_{\varpi}^{[u,v]}, r)$. Ce n'est plus le cas lorsqu'on travaille avec l'anneau $R^{[u,v]}$ mais en montrant que $\psi - 1$ est surjective sur $\mathbb{A}^{[u,v]}/\mathbb{A}^{[u]}$, on obtient que quasi-isomorphisme voulu.

Enfin, dans [21], du fait de cette variable supplémentaire X_0 , l'algèbre de Lie de Γ_R n'est pas commutative. Cette difficulté n'apparaît pas dans le cas géométrique.

1.2.2 Quasi-isomorphisme global

Si \mathfrak{X} est un schéma formel à réduction semi-stable et propre sur \mathcal{O}_K , on montre que le morphisme local du théorème 3.1.1 se globalise en un p^N -quasi-isomorphisme :

$$\alpha_r^0 : \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r) \rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}_p(r)).$$

Pour faire cela, on applique la méthode utilisée par Bhatt-Morrow-Scholze dans [9] (et Česnavičius-Koshikawa dans [15, §5]). L'idée est de construire pour $\mathfrak{X} = \text{Spf}(R)$ assez petit, une version fonctorielle des complexes intervenant en (1.5).

Pour \mathfrak{X} un schéma formel à réduction semi-stable, il existe une base $(\text{Spf}(R))$ de $\mathfrak{X}_{\text{ét}}$ telle que pour chaque R on ait des ensembles finis non vides Σ et Λ tels qu'il existe une immersion fermée

$$\text{Spf}(R) \rightarrow \text{Spf}(R_{\Sigma}^{\square}) := \text{Spf}(\mathcal{O}_C\{X_{\sigma}^{\pm 1} \mid \sigma \in \Sigma\})$$

et pour chaque λ , une application étale

$$\text{Spf}(R) \rightarrow \text{Spf}(R_{\lambda}^{\square}) := \text{Spf}(\mathcal{O}_C\{X_{\lambda,1}, \dots, X_{\lambda,d}, \frac{1}{X_{\lambda,1} \dots X_{\lambda,a_{\lambda}}}, \frac{\varpi}{X_{\lambda,a_{\lambda}+1} \dots X_{\lambda,d}}\}).$$

On note $\text{Spf}(R_{\Sigma,\Lambda}^{\square}) := \text{Spf}(R_{\Sigma}^{\square}) \times \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Spf}(R_{\lambda}^{\square})$. On construit alors une application

$$\alpha_{r,\Sigma,\Lambda} : \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r R_{\Sigma,\Lambda}^{PD}) \rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r))$$

de la même façon qu'en (1.5) en remplaçant R_{cris}^+ par $R_{\Sigma,\Lambda}^{PD}$ défini sur $\mathbb{A}_{\text{cris}} \widehat{\otimes} R_{\Sigma,\Lambda}^{\square}$. On déduit ensuite du théorème (3.1.1) que $\alpha_{r,\Sigma,\Lambda}$ est un p^N -quasi-isomorphisme. On obtient des complexes fonctoriels en prenant la limite sur l'ensemble des données (Σ, Λ) comme ci-dessus. Un argument de descente cohomologique permet finalement d'obtenir le p^N -quasi-isomorphisme α_r^0 .

Remarque 1.2.6. Dans [21], Colmez et Nizioł construisent le p^N -quasi-isomorphisme localement, puis comparent ce morphisme à l'application de Fontaine-Messing, ce qui permet de montrer que l'application de Fontaine-Messing globale est un p^N -quasi-isomorphisme. Le même argument que celui que nous utilisons permettrait de montrer que le morphisme arithmétique admet, lui aussi, une définition globale. Il suffit de définir des anneaux $R_{\varpi, \Sigma, \Lambda}^+$, $R_{\varpi, \Sigma, \Lambda}^{[u]}$, ... de la même façon que nous le faisons ici.

1.2.3 Preuve du théorème 1.2.4

On commence par comparer les morphismes :

$$\tilde{\alpha}^0, \tilde{\alpha}^{\text{FM}} : H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{st}} \cong H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_{W(k)}^L \mathbb{B}_{\text{st}}.$$

Pour cela, il suffit de montrer l'égalité des morphismes

$$\alpha_r^0, \alpha_r^{\text{FM}} : \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r) \rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}_p(r)).$$

Définissons l'anneau $\mathbb{E}_{\overline{R}}^{\text{PD}}$ (respectivement $\mathbb{E}_{\overline{R}}^{[u,v]}$) comme la complétion p -adique de la log-PD-enveloppe de $R_{\text{cris}}^+ \otimes \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) \rightarrow \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$ (respectivement de $R^{[u,v]} \otimes \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]} \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}$). On note ici $C(G_R, M)$ le complexe des cochaines continues de G_R à valeurs dans M . Localement, α_r^{FM} est la composée des applications :

$$\text{Kos}(\partial, \varphi, F^r R_{\text{cris}}^+) \rightarrow C(G_R, \text{Kos}(\partial, \varphi, F^r \mathbb{E}_{\overline{R}}^{\text{PD}})) \xleftarrow{\sim} C(G_R, \text{Kos}(\varphi, F^r \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}))) \xleftarrow{\sim} C(G_R, \mathbb{Z}_p(r))$$

où la deuxième flèche est un quasi-isomorphisme via le lemme de Poincaré :

$$F^r \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) \xrightarrow{\sim} F^r \Omega_{F^r \mathbb{E}_{\overline{R}}^{\text{PD}}}$$

et la troisième flèche se déduit de la suite exacte (1.2). L'application α_r^0 est donnée par la composée (1.5). On montre qu'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} K_{\partial, \varphi}(F^r R_{\text{cris}}^+) & \longrightarrow & C_G(K_{\partial, \varphi}(F^r \mathbb{E}_{\overline{R}}^{\text{PD}})) & \longleftarrow & C_G(K_{\varphi}(F^r \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}))) & \longleftarrow & C_G(\mathbb{Z}_p(r)) \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & C_G(K_{\partial, \varphi}(F^r \mathbb{E}_{\overline{R}}^{[u,v]})) & \longleftarrow & C_G(K_{\varphi}(F^r \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]})) & \longleftarrow & C_G(K_{\varphi}(\mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0,v)+}(r))) \longrightarrow C_G(K_{\varphi}(F^r \mathbb{A}_{\overline{R}})) \\ & \searrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ K_{\partial, \varphi}(F^r \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}) & \xrightarrow{\tau_{\leq r}} & K_{\Gamma, \varphi}(\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}(r)) & \longleftarrow & K_{\Gamma, \varphi}(\mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0,v)+}(r)) & \longrightarrow & K_{\Gamma, \varphi}(\mathbb{A}_{\overline{R}}(r)) \end{array} \quad (1.6)$$

où, pour alléger, $C_G(\cdot)$ désigne les complexes de cochaines et $K_{\partial, \varphi}(\cdot)$ la fibre homotopique de l'application $1 - \varphi$ sur les complexes de Koszul. On en déduit l'égalité locale. On prouve ensuite que le diagramme (1.6) est toujours valable pour les anneaux construits à partir des coordonnées (Σ, Λ) et en passant à la limite, on obtient l'égalité globale.

Il reste à comparer $\tilde{\alpha}^0$ et $\tilde{\alpha}^{\text{CK}}$. Pour les mêmes raisons, il suffit de montrer l'égalité des morphismes locaux. Celle-ci découle de leurs constructions. Le morphisme $\tilde{\alpha}^0$ s'obtient par la composée⁶ :

$$\begin{aligned} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(R[\frac{1}{p}], \mathbb{Q}_p) \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}} &\xleftarrow[\varepsilon^{-r} t^r]{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(R[\frac{1}{p}], \mathbb{Q}_p(r)) \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}}\{r\} \xleftarrow[\alpha_r^0]{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(R, r)_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}}\{r\} \\ &\xrightarrow[\text{can}]{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{cris}}(R/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{cris}}[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{B}_{\text{st}} \xleftarrow[t_{\text{cris}}^{\text{B}}]{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{HK}}(R) \widehat{\otimes}_F^L \mathbb{B}_{\text{st}} \end{aligned} \quad (1.7)$$

où

$$t_{\text{cris}}^{\text{B}} : R\Gamma_{\text{cris}}((R/p)/W(k)^0) \widehat{\otimes}_{W(k)}^L \mathbb{B}_{\text{st}}^+ \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\text{cris}}((R/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{cris}}}^L \mathbb{B}_{\text{st}}^+$$

est le quasi-isomorphisme de [7, 1.18.5]. Rappelons maintenant comment $\tilde{\alpha}^{\text{CK}}$ est défini. La preuve de [15] passe par la construction d'un complexe $A\Omega_R \in D^+(\text{Spf}(R))_{\text{ét}}, \mathbb{A}_{\text{inf}}$ qui vérifie (voir [15, 2.3]) :

$$R\Gamma_{\text{ét}}(R[\frac{1}{p}], \mathbb{Z}_p) \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{\mu}] \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\text{ét}}(R, A\Omega_R) \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{\mu}]. \quad (1.8)$$

où $\mu = [\epsilon] - 1 \in \mathbb{A}_{\text{inf}}$. On obtient ensuite $\tilde{\alpha}^{\text{CK}}$ en construisant un quasi-isomorphisme

$$\gamma_{\text{CK}} : Ru_*(\mathcal{O}_{(R/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}}}) \xrightarrow{\sim} A\Omega_R \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{A}_{\text{cris}}$$

où $\mathbb{Z}_{(R/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}}} \in ((R/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\text{log-cris}}$ désigne le faisceau structural sur le site cristallin et u est la projection $((R/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\text{log-cris}} \rightarrow (\text{Spf}(R))_{\text{ét}}$. Pour cela, Česnavičius-Koshikawa commencent par montrer qu'on peut calculer $A\Omega_R$ comme $L\eta_{\mu} R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{inf}}(R_{\infty}))$ où η_{μ} est le foncteur de décalage de Berthelot-Ogus ([9]). Pour définir γ_{CK} , il reste à construire un quasi-isomorphisme entre $\text{Kos}(\partial, R_{\text{inf}}^+)$ et $\eta_{\mu} \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{inf}}(R_{\infty})) \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{A}_{\text{cris}}$. Ce passage entre la cohomologie d'une algèbre de Lie et la cohomologie de groupe est similaire à celui apparaissant dans la construction de α_r^0 , avec μ jouant le rôle de t et c'est ce qui permet de d'obtenir un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(R, A\Omega_R)_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{B}_{\text{st}} & \xleftarrow[\gamma_{\text{CK}}]{\sim} & \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{cris}}(R/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{cris}}[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{B}_{\text{st}} & (1.9) \\ \uparrow & & \uparrow & \\ \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(R[\frac{1}{p}], \mathbb{Q}_p(r)) \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}}\{r\} & \xleftarrow[\alpha_r^0]{\sim} & \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(R, r)_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}}\{r\} & \end{array}$$

Finalement, $\tilde{\alpha}^{\text{CK}}$ est donnée par la composée :

$$\begin{aligned} R\Gamma_{\text{ét}}(R[\frac{1}{p}], \mathbb{Q}_p) \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}} &\xrightarrow[\sim]{(1.8)} R\Gamma_{\text{ét}}(R, A\Omega_R)_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{B}_{\text{st}} \xleftarrow[\sim]{\gamma^{\text{CK}}} R\Gamma_{\text{cris}}(R/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{cris}}[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{B}_{\text{st}} \\ &\xleftarrow[\sim]{t_{\text{cris}}^{\text{B}}} R\Gamma_{\text{HK}}(R) \widehat{\otimes}_F^L \mathbb{B}_{\text{st}} \end{aligned} \quad (1.10)$$

et le diagramme (1.9) permet d'obtenir l'égalité entre (1.10) et (1.7).

6. Si M est un module muni d'une action d'un Frobenius φ , on note $M\{r\}$ le module M muni de l'action du Frobenius $p^r \varphi$.

Notations et conventions Si N est un entier, on dit qu'une application $f : A \rightarrow B$ est p^N -injective (respectivement p^N -surjective) si son noyau (respectivement son conoyau) est tué par p^N . Le morphisme f est un p^N -isomorphisme si il est à la fois p^N -injectif et p^N -surjectif. La suite

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} 0$$

est p^N -exacte si i est p^N -injective, $\text{Im}(g) = p^N \ker(f)$ et g est p^N -surjective. On définit de même un p^N -quasi-isomorphisme comme étant une application $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ dans la catégorie dérivée qui induit un p^N -isomorphisme sur la cohomologie.

Si T est un topos et A un anneau, on note $\mathcal{D}^+(T, A)$ (respectivement $\mathcal{D}^+(A)$) l' ∞ -catégorie dérivée des faisceaux de A -modules sur T inférieurement bornés (respectivement l' ∞ -catégorie dérivée des A -modules). Les catégories homotopiques associées sont les catégories dérivées $D^+(T, A)$ et $D^+(A)$. Le foncteur dérivé $R\Gamma(-) : D^+(T, A) \rightarrow D^+(A)$ se relève en un foncteur $R\Gamma(-) : \mathcal{D}^+(T, A) \rightarrow \mathcal{D}^+(A)$. On note aussi $\mathbf{Fsc}(T, \mathcal{D}^+(A))$ la catégorie des faisceaux de $\mathcal{D}^+(A)$ sur T et on identifie les ∞ -catégories $\mathcal{D}^+(T, A)$ et $\mathbf{Fsc}(T, \mathcal{D}^+(A))$.

Si $f : K^\bullet \rightarrow L^\bullet$ est un morphisme de $\mathcal{D}^+(T, A)$, on note $[K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet] := \text{holim}(K^\bullet \rightarrow L^\bullet \leftarrow 0)$ la fibre d'homotopie de l'application f .

Pour $A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux et K^\bullet et L^\bullet des objets de $\mathcal{D}(A)$, on note

$$K^\bullet \widehat{\otimes}_A L^\bullet := \text{holim}_n((K^\bullet \otimes_A^L L^\bullet) \otimes_{\mathbb{Z}}^L \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})$$

$$\text{et } (K^\bullet)_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_A B := (\text{holim}_n((K^\bullet \otimes_A^L B) \otimes_{\mathbb{Z}}^L \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})) \otimes \mathbb{Q}_p.$$

Si G est un groupe qui agit sur un module M , on notera $R\Gamma(G, M)$ la cohomologie de groupe *continue* associée.

Si \mathcal{O}_K est un anneau de valuation discrète en caractéristique mixte $(0, p)$ et ϖ une uniformisante de \mathcal{O}_K , on dira qu'un schéma (respectivement schéma formel) est à *réduction semi-stable* sur \mathcal{O}_K s'il s'écrit localement $\text{Spec}(R)$ (respectivement $\text{Spf}(R)$) avec R une algèbre étale sur

$$\mathcal{O}_K[X_1, \dots, X_d, \frac{1}{X_1 \dots X_a}, \frac{\varpi}{X_{a+1} \dots X_{a+b}}]$$

$$(\text{respectivement } \mathcal{O}_K\{X_1, \dots, X_d, \frac{1}{X_1 \dots X_a}, \frac{\varpi}{X_{a+1} \dots X_{a+b}}\})$$

avec a, b et d des entiers tels que $a + b \leq d$. On dira qu'il est *propre à réduction semi-stable* s'il n'admet pas de diviseur à l'infini, i.e. il s'écrit localement $\text{Spec}(R)$ (respectivement $\text{Spf}(R)$) avec R étale sur

$$\mathcal{O}_K[X_1, \dots, X_d, \frac{1}{X_1 \dots X_a}, \frac{\varpi}{X_{a+1} \dots X_d}]$$

$$(\text{respectivement } \mathcal{O}_K\{X_1, \dots, X_d, \frac{1}{X_1 \dots X_a}, \frac{\varpi}{X_{a+1} \dots X_d}\})$$

avec $a \leq d$.

Chapitre 2

Préliminaires : cohomologie syntomique

La notion de morphismes syntomiques a été introduite par Mazur, puis utilisée par Fontaine et Messing dans [29] pour prouver un théorème de comparaison entre la cohomologie étale et la cohomologie de de Rham pour une variété p -adique propre et lisse. Kato a ensuite étendu la définition de la topologie syntomique au cas de la réduction semi-stable en décrivant une notion de cohomologie syntomique avec pôles logarithmiques ([34], [12], [14]).

La cohomologie syntomique peut être vue comme un analogue p -adique de la cohomologie de Deligne-Beilinson ([23]). Rappelons que pour X une variété propre et lisse sur \mathbb{C} et r un entier, la cohomologie de Deligne-Beilinson $H_{\text{DB}}^q(X, r)$ est définie comme étant l'ensemble des cocycles topologiques de X qui appartiennent à $F^r H_{\text{dR}}^q(X)$ (où $F^\bullet H_{\text{dR}}^q(X)$ désigne la filtration de Hodge de la cohomologie de de Rham de X). Plus précisément, on a une suite exacte :

$$\dots \rightarrow H^{q-1}(X^{\text{an}}, \mathbb{C}) \rightarrow H_{\text{DB}}^q(X, r) \rightarrow H^q(X, \mathbb{Z}(r)) \oplus F^r H_{\text{dR}}^q(X) \rightarrow H^q(X^{\text{an}}, \mathbb{C}) \rightarrow \dots$$

Si maintenant \mathcal{O}_K est un anneau de valuation discrète en caractéristique mixte $(0, p)$, de corps résiduel k et de corps de fraction K et si X est une variété sur \mathcal{O}_K , alors la fibre spéciale X_k de X est munie d'un morphisme de Frobenius (qui vient de celui de k) et la cohomologie de de Rham de sa fibre générique est munie d'une filtration de Hodge $F^\bullet H_{\text{dR}}^q(X_K)$. Par imitation du cas complexe, l'idée pour définir la cohomologie syntomique est de passer par une théorie cohomologique qui permette d'entremêler l'action du Frobenius venant de la fibre spéciale et la structure de Hodge de X_K : ce rôle sera joué par la cohomologie cristalline.

2.1 Géométrie logarithmique

Pour définir la cohomologie syntomique dans le cadre plus général des schémas (formels) à réduction semi-stable, on utilise la définition logarithmique de la cohomologie cristalline. On commence ici par rappeler des définitions et résultats de géométrie logarithmique qui seront utiles par la suite. On suit ici l'article [33] de Kato.

2.1.1 Structure logarithmique

Une pré-log structure sur un schéma X est un morphisme $\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{O}_X$ de faisceaux de monoïdes sur le site étale de X . Une pré-log structure est une log-structure si α induit un isomorphisme $\alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X^*$. Si \mathcal{M} est une pré-log structure sur X , le poussé en avant (dans la catégorie des faisceaux de monoïdes) de $\mathcal{M} \leftarrow \alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^*) \rightarrow \mathcal{O}_X^*$ définit une log-structure sur X , qu'on notera \mathcal{M}^a . Pour (X, \mathcal{M}, α) un log-schéma, une carte sur X est la donnée d'un monoïde P et d'un morphisme de faisceaux de monoïdes $c_P : P_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ (où P_X est le faisceau constant associé à P sur le site étale de X) tel que \mathcal{M} est isomorphe à la log-structure induite par (P_X, c_P) . Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de log-schémas, une carte pour f est la donnée de cartes $P_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ sur X , $Q_Y \rightarrow \mathcal{O}_Y$ sur Y et d'un morphisme de monoïde $P \rightarrow Q$. On dit que (X, \mathcal{M}) est quasi-cohérent si, localement pour la topologie étale, il existe une carte (P, c_P) sur X ; on dit qu'il est cohérent si P est finiment engendré. Le log-schéma (X, \mathcal{M}) est appelé intègre si \mathcal{M} est un faisceau de monoïdes intègres. Il est fin si il est quasi-cohérent et intègre. On peut montrer que (X, \mathcal{M}) est fin si et seulement si, localement pour la topologie étale, il existe des cartes (P, c_P) avec P intègre.

Exemple 2.1.1. Si X est un schéma, le morphisme $\mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{O}_X$ définit une log-structure sur X (appelée log-structure triviale de X).

Soient X un schéma régulier et D un diviseur à croisement normal sur X . On munit X de la log-structure donnée par $\mathcal{M} := \{g \in \mathcal{O}_X \mid g \text{ est inversible en dehors de } D\}$. Alors (X, \mathcal{M}) est fin : localement, D est donné par r équations $\pi_i = 0$ et \mathcal{M} est la log-structure induite par la carte $P = N^r$, $c_P : (n_i)_{1 \leq i \leq r} \mapsto \prod_i \pi_i^{n_i}$. Si on note j l'immersion ouverte $U := X \setminus D \rightarrow X$, \mathcal{M} est en fait l'image directe par i de la log-structure triviale sur U i.e. on a un diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \longrightarrow & j_*(\mathcal{O}_U^*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_X & \longrightarrow & j_*(\mathcal{O}_U) \end{array}$$

Un morphisme de log-structures $\iota : (X, \mathcal{M}) \rightarrow (Y, \mathcal{N})$ est une immersion fermée si le morphisme de schémas $X \rightarrow Y$ est une immersion fermée et $i^*\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ est surjective. On dit que ι est exacte si de plus $i^*\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ est un isomorphisme.

Proposition 2.1.2. [33, (4.10)] Si $i : (X, \mathcal{M}) \rightarrow (Y, \mathcal{N})$ est une immersion fermée de log-schémas fins alors, localement pour la topologie étale, il existe une factorisation de i en

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{M}) & \xrightarrow{i} & (Y, \mathcal{N}) \\ & \searrow \iota & \nearrow f \\ & (Z, \mathcal{M}_Z) & \end{array}$$

avec ι une immersion fermée exacte, (Z, \mathcal{M}_Z) un log-schéma fin et f un morphisme étale.

Exemple 2.1.3. Soit k un corps de caractéristique p et notons $X := \text{Spec}(k[t])$ et $Y := \text{Spec}(k[t_1, t_2])$. On munit X de la log-structure induite par le diviseur $\{t = 0\}$ et Y de celle induite par $\{t_1 = 0\} \cup \{t_2 = 0\}$. L'immersion fermée $X \rightarrow Y$ donnée par $t_i \mapsto t$ pour $i = 1, 2$ se factorise en $X \rightarrow Z \rightarrow Y$ où Z est le schéma $\text{Spec}(k[t_1, t_2, \frac{t_1}{t_2}, \frac{t_2}{t_1}])$ muni de la log-structure induite par le diviseur $t_1 = 0$ (qui est égal au diviseur $t_2 = 0$). L'immersion fermée $X \rightarrow Z, t_i \mapsto t$ est maintenant exacte et $Z \rightarrow Y$ est étale.

Si M est un monoïde intègre, on note M^{gp} le groupe associé. Dans la suite, si ça ne prête pas à confusion, on omettra (\mathcal{M}, α) et on notera simplement X le log-schéma (X, \mathcal{M}, α) . On a les mêmes définitions et des résultats analogues pour \mathfrak{X} un schéma formel. En particulier, on a toujours l'existence locale de cartes pour un log-schéma formel fin.

2.1.2 Différentielles logarithmiques et lissité

On considère $f : (X, \mathcal{M}, \alpha) \rightarrow (Y, \mathcal{N}, \beta)$ un morphisme de log-schémas. On définit le \mathcal{O}_X -module $\omega_{X/Y}^1$ des log-différentielles de X sur Y comme le quotient de $\Omega_{X/Y}^1 \oplus (\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{M}^{\text{gp}})$ (où $\Omega_{X/Y}^1$ est le module des différentielles classiques de X sur Y) par le \mathcal{O}_X -sous-module engendré par les sections locales $(d\alpha(m), 0) - (0, \alpha(m) \otimes m)$ pour m dans \mathcal{M} et $(0, 1 \otimes m)$ pour m dans l'image de $f^{-1}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{M}$. On note $d \log(m)$ la classe de $(0, 1 \otimes m)$ dans $\omega_{X/Y}^1$. On a une surjection $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{M}^{\text{gp}} \rightarrow \omega_{X/Y}^1$ donnée par $a \otimes b \mapsto a \cdot d \log(b)$.

Exemple 2.1.4. Soient $Q \rightarrow P$ un morphisme de monoïdes et A un anneau. Notons $X = \text{Spec}(A[P])$ et $Y = \text{Spec}(A[Q])$. On munit X (respectivement Y) de la structure logarithmique induite par $P \rightarrow A[P]$ (respectivement $Q \rightarrow A[Q]$). On a un isomorphisme $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}} P^{\text{gp}}/Q^{\text{gp}} \xrightarrow{\sim} \omega_{X/Y}^1$ donné par $a \otimes b \mapsto a \cdot d \log(b)$.

Un morphisme $f : (X, \mathcal{M}) \rightarrow (Y, \mathcal{N})$ de log-schémas fins est log-lisse (respectivement log-étale) si le morphisme de schémas $X \rightarrow Y$ est localement de présentation finie et pour tout diagramme commutatif de log-schémas fins

$$\begin{array}{ccc} (T', \mathcal{L}') & \xrightarrow{s} & (X, \mathcal{M}) \\ \downarrow i & & \downarrow f \\ (T, \mathcal{L}) & \xrightarrow{t} & (Y, \mathcal{N}) \end{array}$$

avec i une immersion fermée exacte telle que l'idéal I définissant T' vérifie $I^2 = 0$, il existe, localement sur $T_{\text{ét}}$, un morphisme (respectivement un unique morphisme) $g : (T, \mathcal{L}) \rightarrow (X, \mathcal{M})$ tel que $gi = s$ et $fg = t$. On a le théorème suivant (voir [33, (3.5)]) :

Théorème 2.1.5. Soient $f : (X, \mathcal{M}) \rightarrow (Y, \mathcal{N})$ un morphisme de log-schémas fins et (Q, c_Q) une carte de \mathcal{N} . Alors f est log-lisse si et seulement si, localement sur $X_{\text{ét}}$, il existe une carte $(P_X \rightarrow \mathcal{M}, Q_Y \rightarrow \mathcal{N}, Q \rightarrow P)$ qui étend $Q_Y \rightarrow \mathcal{N}$ et telle que :

1. $\ker(Q^{\text{gp}} \rightarrow P^{\text{gp}})$ et la partie de torsion de $\text{coker}(Q^{\text{gp}} \rightarrow P^{\text{gp}})$ sont des groupes finis d'ordre inversible sur X ,

2. le morphisme $X \rightarrow Y \times_{\mathbb{Z}[Q]} \text{Spec}(\mathbb{Z}[P])$ est étale.

De la même façon, f est log-étale si et seulement si les conditions ci-dessus sont vérifiées en remplaçant "la partie de torsion de $\text{coker}(Q^{\text{gp}} \rightarrow P^{\text{gp}})$ " par $\text{coker}(Q^{\text{gp}} \rightarrow P^{\text{gp}})$.

Exemple 2.1.6. Soit K une extension complète de \mathbb{Q}_p de corps résiduel k parfait et d'anneau de valuation \mathcal{O}_K et soit ϖ une uniformisante de K . Soit X un schéma à réduction semi-stable sur \mathcal{O}_K i.e. localement X s'écrit $\text{Spec}(R)$ avec R une algèbre étale sur

$$\mathcal{O}_K[X_1, \dots, X_d, \frac{1}{X_1 \dots X_a}, \frac{\varpi}{X_{a+1} \dots X_{a+b}}]$$

avec a, b, c et d des entiers tels que $a + b + c = d$. La fibre spéciale de X est dans ce cas un diviseur à croisement normal sur X . On note $D := \{X_{a+b+1} \dots X_d = 0\}$ le diviseur à l'infini et on munit X de la log-structure donnée par

$$\mathcal{M} := \{g \in \mathcal{O}_X \mid g \text{ inversible en dehors de } D \cup X_k\}.$$

On note \mathcal{O}_K^\times le schéma $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$ muni de la log-structure induite par son point fermé. On a alors que $X \rightarrow \mathcal{O}_K^\times$ est log-lisse.

Proposition 2.1.7. [33, (3.10)] Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de log-schémas fins. Si f est log-lisse alors $\omega_{X/Y}^1$ est un \mathcal{O}_X -module localement libre de type fini.

2.2 Cohomologie log-cristalline

Passons maintenant à la définition de la version logarithmique de la cohomologie cristalline. La plupart des résultats énoncés ci-dessus sont donnés dans la section §5 de [33] (voir aussi [7, §1]).

2.2.1 Site cristallin

Un log-schéma à puissance divisée (ou log-PD-schéma) est un log-schéma (X, \mathcal{M}) muni d'une PD-structure $(\gamma_n : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{O}_X)_n$ (avec \mathcal{J} un idéal de \mathcal{O}_X). Pour alléger les notations, on notera souvent X le log-PD-schéma $(X, \mathcal{M}, \mathcal{J}, \gamma)$. On note $\mathcal{J}^{[r]}$ la filtration associée (i.e. $\mathcal{J}^{[r]}$ est l'idéal engendré par les éléments de la forme $\gamma_{i_1}(x_1) \dots \gamma_{i_r}(x_r)$ où les x_i sont des sections de \mathcal{J} et $i_1 + \dots + i_k \geq r$). Une immersion fermée exacte d'un log-schéma Z dans un log-PD-schéma X (de PD-idéal \mathcal{J}) est un PD-épaississement si on a un isomorphisme $\mathcal{O}_Z \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X/\mathcal{J}$.

On a une notion de log-PD-enveloppe (voir [33, (5.3)]) : pour (S, γ) un log-PD-schéma, si $i : X \hookrightarrow Y$ est une immersion fermée de S -log-schémas fins avec Y muni d'une structure à puissance divisée qui étend γ , alors il existe un log-schéma à puissance divisée $D_X(Y)$ dont la PD-structure δ compatible avec γ et qui vérifie la propriété universelle :

$$\text{Hom}_{(S, \gamma)}(Z, D_X(Y)) \cong \text{Hom}_S(X, Z).$$

On appelle $D_X(Y)$ la log-PD-enveloppe de X dans Y . La construction de $D_X(Y)$ dans le cas logarithmique se déduit en fait de celle du cas classique via la proposition 2.1.2 : pour une immersion fermée $i : X \rightarrow Y$ d'exactification $X \xrightarrow{\iota} Z \xrightarrow{f} Y$, $D_X(Y)$ est égale à la PD-enveloppe au sens usuel de $\iota : X \rightarrow Z$ de i et sa log-structure est donnée par l'image inverse de celle de Z . En particulier, si i est déjà exacte, les PD-enveloppes classique et logarithmique coïncident.

Soient S un log-PD-schéma avec p nilpotent dans \mathcal{O}_S et X un S -log-schéma fin. On définit le site log-cristallin $(X/S)_{\text{cris}}$ de la façon suivante. Les objets sont les couples (U, T) où $U \hookrightarrow T$ est un PD-épaississement (sur S) tel que T soit intègre et quasi-cohérent et U est étale sur X . Un morphisme $(U, T) \rightarrow (U', T')$ est la donnée de deux morphismes $U \rightarrow U'$ et $T \rightarrow T'$, compatibles aux PD-structures, qui font commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} U & \hookrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ U' & \hookrightarrow & T' \\ & \searrow & \swarrow \\ & S & \end{array}$$

et un recouvrement de (U, T) est une famille de morphismes $(U_i, T_i) \rightarrow (U, T)$ tels que les T_i forment un recouvrement étale de T . On note $\text{Cris}(X/S)$ le topos associé. Il est fonctoriel : si on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \longrightarrow & S \end{array}$$

avec X/S et X'/S' comme ci-dessus, alors il existe un morphisme de topoi $f_{\text{cris}} : \text{Cris}(X'/S') \rightarrow \text{Cris}(X/S)$ (voir [33], [7]).

Si \mathcal{F} est un faisceau sur le site log-cristallin, on dispose de la même description explicite que dans le cas classique ([8, III.1.1.4]) : pour tout objet (U, T) , l'application $V \mapsto \mathcal{F}(U \times_T V, V)$ définit un faisceau $\mathcal{F}_{U,T}$ sur le site de Zariski de T tel que si $g : (U, T) \rightarrow (U', T')$ est un morphisme du site cristallin alors il existe $g_{\mathcal{F}}^* : g^{-1}\mathcal{F}_{U',T'} \rightarrow \mathcal{F}_{U,T}$ vérifiant les conditions suivantes :

1. pour $(U, T) \xrightarrow{g_1} (U', T') \xrightarrow{g_2} (U'', T'')$, $(g_2 \circ g_1)_{\mathcal{F}}^* = (g_1)_{\mathcal{F}}^* \circ (g_2)_{\mathcal{F}}^*$,
2. si $T \hookrightarrow T'$ est une immersion ouverte et $U = U' \times_{T'} T$ alors $g_{\mathcal{F}}^*$ est un isomorphisme.

Réciproquement, la donnée de faisceaux $\mathcal{F}_{U,T}$ vérifiant les conditions ci-dessus définit un faisceau \mathcal{F} de $\text{Cris}(X/S)$. Le faisceau structural du site cristallin est le faisceau $\mathcal{O}_{X,S}$ donné par $\mathcal{O}_{X,S}(U, T) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ et son idéal à puissances divisées est $\mathcal{J}_{X/S}(U, T) := \Gamma(T, \mathcal{J}_T)$. Le monoïde \mathcal{M}_T donné par la log-structure de T définit aussi un faisceau de monoïdes $\mathcal{M}_{X/S}$ sur le site cristallin. On note $u : X_{\text{ét}} \rightarrow (X/S)_{\text{cris}}$ la projection naturelle du site étale vers le site cristallin $(U, T) \mapsto U$. On a un isomorphisme $\mathcal{O}_{X/S}/\mathcal{J}_{X/S} \xrightarrow{\sim} u_*\mathcal{O}_X$. On

définit la cohomologie cristalline de X par $R\Gamma((X/S)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{X/S}) := R\Gamma_{\text{ét}}(X, Ru_*\mathcal{O}_{X/S})$ et si \mathcal{F} est un faisceau, $R\Gamma((X/S)_{\text{cris}}, \mathcal{F}) := R\Gamma_{\text{ét}}(X, Ru_*\mathcal{F})$.

Un $\mathcal{O}_{X/S}$ -cristal sur $(X/S)_{\text{cris}}$ est un $\mathcal{O}_{X/S}$ -faisceau \mathcal{F} tel que $g^*\mathcal{F}_{U',T'} \rightarrow \mathcal{F}_{U,T}$ est un isomorphisme pour tout morphisme $(U, T) \rightarrow (U', T')$. Comme dans le cas classique, on a le théorème :

Théorème 2.2.1. [33, (6.2) et (6.4)][7, (1.7) et (1.8)] *Soient $X \rightarrow Y$ une immersion fermée de S -log schémas fins avec Y log-lisse sur S , D la log-PD-enveloppe associée et \mathcal{F} un cristal sur $(X/S)_{\text{cris}}$.*

1. *Le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{X,D} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/S}^1$ induit une équivalence entre la catégorie des cristaux sur le site cristallin de X/S et celle des \mathcal{O}_D -modules M de $D_{\text{ét}}$ muni d'une connection intégrable quasi-nilpotente $\nabla : M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/S}^1$ ([8, II.(\\$4.3)]).*

2. *On a un isomorphisme*

$$Ru_*(\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}_{X,D} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/S}^\bullet.$$

Enfin, on a un théorème de changement de base (voir [33, (6.12)]) :

Théorème 2.2.2. *Supposons qu'on ait le diagramme cartésien de log-schémas fins suivant :*

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \text{Spec}(A') & \xrightarrow{g} & \text{Spec}(A) \end{array}$$

avec f et g log-lisses et X quasi-compact et quasi-séparé. Soit \mathcal{F} un cristal quasi-cohérent sur $(X/S)_{\text{cris}}$ et notons \mathcal{F}' son tiré en arrière sur $(X'/S')_{\text{cris}}$. Alors on a un quasi-isomorphisme :

$$R\Gamma((X/S)_{\text{cris}}, \mathcal{F}) \otimes_A^L A' \xrightarrow{\sim} R\Gamma((X'/S')_{\text{cris}}, \mathcal{F}').$$

2.2.2 Cohomologie cristalline absolue

Soit K une extension complète de \mathbb{Q}_p de corps résiduel k parfait et d'anneau de valuation \mathcal{O}_K et soit ϖ une uniformisante de \mathcal{O}_K . On note \overline{K} une clôture algébrique de K et $C := \widehat{\overline{K}}$ sa complétion p -adique (associé à l'anneau d'entiers \mathcal{O}_C). Notons $\mathcal{O}_F := W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt associé et $\mathcal{O}_{F,n} = W_n(k)$ sa réduction modulo p^n . Il existe plusieurs structures logarithmiques naturelles desquelles on peut munir le schéma $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$. L'une est la log-structure triviale, induite par $\mathcal{O}_K^* \rightarrow \mathcal{O}_K$ et on notera \mathcal{O}_K le log-schéma $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$ muni de cette structure logarithmique. La log-structure canonique est la log-structure induite par le point fermé, elle est donnée par l'inclusion $\mathcal{O}_K \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{O}_K$ (et elle correspond à la log-structure fine associée à $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathcal{O}_K)}$ qui envoie 1 sur ϖ). On notera \mathcal{O}_K^\times le log-schéma associé. Enfin, l'application de $\mathcal{O}_K \setminus \{0\}$ dans \mathcal{O}_K qui est l'identité sur les inversibles et qui envoie les éléments non inversibles sur 0 induit une autre log-structure sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$, qu'on notera \mathcal{O}_K^0 (elle correspond à la log-structure

fine $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathcal{O}_K)}, 1 \mapsto 0$). On définit de même les log-schémas $\mathcal{O}_{F,n}$, $\mathcal{O}_{F,n}^\times$ et $\mathcal{O}_{F,n}^0$ et les log-schémas formels \mathcal{O}_F , \mathcal{O}_F^\times et \mathcal{O}_F^0 .

Pour X un log-schéma fin sur \mathcal{O}_K^\times , on note X_0 sa fibre spéciale et X_n sa réduction modulo p^n . On définit

$$R\Gamma_{\text{cris}}(X)_n := R\Gamma((X_n/\mathcal{O}_{F,n})_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{X_n/\mathcal{O}_{F,n}})$$

$$R\Gamma_{\text{cris}}(X, \mathcal{J}^{[r]})_n := R\Gamma((X_n/\mathcal{O}_{F,n})_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{X_n/\mathcal{O}_{F,n}}, \mathcal{J}_{X_n/\mathcal{O}_{F,n}}^{[r]})$$

$$R\Gamma_{\text{cris}}(X) := \text{holim}_n R\Gamma_{\text{cris}}(X)_n \text{ et } R\Gamma_{\text{cris}}(X, \mathcal{J}^{[r]}) := \text{holim}_n R\Gamma_{\text{cris}}(X, \mathcal{J}^{[r]})_n$$

la cohomologie cristalline absolue de X . On a des quasi-isomorphismes $R\Gamma_{\text{cris}}(X)_n \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\text{cris}}(X_1/\mathcal{O}_{F,n})$. Le Frobenius absolu de $X_1/\mathcal{O}_{F,n}$ induit un morphisme

$$R\Gamma_{\text{cris}}(X_1/\mathcal{O}_{F,n}) \rightarrow R\Gamma_{\text{cris}}(X_1/\mathcal{O}_{F,n})$$

qui permet de définir le Frobenius $\varphi : R\Gamma_{\text{cris}}(X, \mathcal{J}^{[r]})_n \rightarrow R\Gamma_{\text{cris}}(X)_n$ comme la composée :

$$R\Gamma_{\text{cris}}(X, \mathcal{J}^{[r]})_n \rightarrow R\Gamma_{\text{cris}}(X)_n \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\text{cris}}(X_1/\mathcal{O}_{F,n}) \xrightarrow{\varphi} R\Gamma_{\text{cris}}(X_1/\mathcal{O}_{F,n}) \xleftarrow{\sim} R\Gamma_{\text{cris}}(X)_n.$$

On considère maintenant l'anneau de Fontaine $\mathbb{A}_{\text{cris}} := \mathbb{A}_{\text{cris}}(\mathcal{O}_C)$ et $\mathbb{A}_{\text{cris},n} := \mathbb{A}_{\text{cris}}/p^n$. La log-structure de $\mathcal{O}_{\overline{K}}^\times/p^n$ s'étend en une log-structure sur $\text{Spec}(\mathbb{A}_{\text{cris},n})$, on note $\mathbb{A}_{\text{cris},n}$ ce log-schéma. On munit \mathbb{A}_{cris} de la log-structure induite par la limite des log-structures sur $\mathbb{A}_{\text{cris},n}$ (voir [7, (1.17)]). Le PD-épaississement $(\mathcal{O}_{\overline{K}}^\times/p^n, \mathbb{A}_{\text{cris},n})$ est universel. Ainsi, pour tout PD-épaississement $U \rightarrow T$ dans $(\mathcal{O}_{\overline{K}/p^n}^\times/\mathcal{O}_{F,n})_{\text{cris}}$, la flèche $U \rightarrow \mathcal{O}_{\overline{K}/p}^\times$ se relève en un morphisme $(U, T) \rightarrow (\mathcal{O}_{\overline{K}/p^n}^\times, \mathbb{A}_{\text{cris},n})$ de $(\mathcal{O}_{\overline{K}/p^n}^\times/\mathcal{O}_{F,n})_{\text{cris}}$. On en déduit que, pour tout faisceau \mathcal{F} sur le site cristallin $(\mathcal{O}_{\overline{K}/p^n}^\times/\mathcal{O}_{F,n})_{\text{cris}}$, on a un isomorphisme naturel $\Gamma((\mathcal{O}_{\overline{K}/p^n}^\times/\mathcal{O}_{F,n})_{\text{cris}}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}_{(\mathcal{O}_{\overline{K}/p^n}^\times, \mathbb{A}_{\text{cris},n})}(\mathbb{A}_{\text{cris},n})$ (où $\mathcal{F}_{(\mathcal{O}_{\overline{K}/p^n}^\times, \mathbb{A}_{\text{cris},n})}$ est le faisceau sur le site étale de $\mathbb{A}_{\text{cris},n}$ associé à \mathcal{F}). Mais les revêtements étales de \mathbb{A}_{cris} sont triviaux et donc le faisceau $\mathcal{F}_{(\mathcal{O}_{\overline{K}/p^n}^\times, \mathbb{A}_{\text{cris},n})}$ n'a pas de cohomologie en degrés supérieurs. On obtient

$$R\Gamma_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}/p^n}^\times/\mathcal{O}_{F,n}, \mathcal{F}) = \Gamma_{\text{ét}}(\mathbb{A}_{\text{cris},n}, \mathcal{F}_{(\mathcal{O}_{\overline{K}/p}^\times, \mathbb{A}_{\text{cris},n})}).$$

Pour $f : \overline{X} \rightarrow \mathcal{O}_C^\times$ un log-schéma fin, en utilisant

$$R\Gamma((\overline{X}_n/\mathcal{O}_{F,n})_{\text{cris}}, \mathcal{F}) \cong R\Gamma((\mathcal{O}_{\overline{K}/p^n}^\times/\mathcal{O}_{F,n})_{\text{cris}}, Rf_{\text{cris},*}\mathcal{F}),$$

on obtient (voir [7, (1.18.1)]) des isomorphismes :

$$\begin{aligned} R\Gamma((\overline{X}_n/\mathcal{O}_{F,n})_{\text{cris}}, \mathcal{F}) &\xrightarrow{\sim} R\Gamma((\overline{X}_n/\mathbb{A}_{\text{cris},n})_{\text{cris}}, \mathcal{F}) \\ R\Gamma((\overline{X}/\mathcal{O}_F)_{\text{cris}}, \mathcal{F}) &\xrightarrow{\sim} R\Gamma((\overline{X}/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\text{cris}}, \mathcal{F}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Enfin, on utilisera plus loin le résultat suivant :

Théorème 2.2.3. [40, (2.4)] *Soit X un log-schéma fin, lisse et propre sur \mathcal{O}_K^\times . Pour $r \geq 0$, il existe un quasi-isomorphisme naturel :*

$$\gamma_r : R\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K)/F^r \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\mathrm{cris}}(X, \mathcal{O}/\mathcal{J}^{[r]})$$

où $R\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K)$ la cohomologie du (log-)complexe de Rham de la fibre générique X_K de X et $F^\bullet R\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K)$ la filtration de Hodge associée.

Remarque 2.2.4. Le résultat reste vrai en remplaçant X par un log-schéma formel \mathfrak{X} sur \mathcal{O}_K^\times . Il existe aussi une version géométrique de ce quasi-isomorphisme : considérons \mathfrak{X} est un schéma formel propre et semi-stable sur \mathcal{O}_K et \mathbb{B}_{dR} et $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ les anneaux de périodes de de Rham. Alors pour tout $r \geq 0$, il existe un quasi-isomorphisme (voir preuve de la proposition (5.22) de [21]) :

$$\gamma_r : (R\Gamma_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{X}_K) \otimes_K \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)/F^r \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\mathrm{cris}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, \mathcal{O}/\mathcal{J}^{[r]}). \quad (2.2)$$

2.2.3 Cohomologie de Hyodo-Kato

On reprend les notations de la section précédente. Pour simplifier, on note simplement $W_n := W_n(k)$. On suppose X propre et log-lisse sur \mathcal{O}_K^\times et on note X_0 sa fibre spéciale. On définit sa cohomologie de Hyodo-Kato par $R\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_0) := R\Gamma_{\mathrm{cris}}(X_0/\mathcal{O}_F^0)_{\mathbb{Q}}$ avec $R\Gamma_{\mathrm{cris}}(X_0/\mathcal{O}_F^0) = \mathrm{holim}_n R\Gamma_{\mathrm{cris}}(X_0/\mathcal{O}_{F,n}^0)$. Les groupes de cohomologie $H_{\mathrm{HK}}^q(X_0)$ sont des F -espaces vectoriels de dimension finie. Par functorialité du site cristallin, on obtient encore un morphisme de Frobenius $\varphi : R\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_0) \rightarrow R\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_0)$. Dans [32, (3.6)], Hyodo-Kato définissent un opérateur de monodromie N sur $R\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_0)$. L'opérateur N est nilpotent et on a $N\varphi = p\varphi N$.

On note $W_n\langle u \rangle$ la $W(k)$ -algèbre

$$W_n\langle u \rangle := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{u^i}{i!} \mid a_i \in W(k), \lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0 \right\}$$

et $W\langle u \rangle := \varprojlim_n W_n\langle u \rangle$. On munit $\mathrm{Spec}(W_n\langle u \rangle)$ (respectivement $\mathrm{Spec}(W\langle u \rangle)$) de la log structure associée à $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(W_n\langle u \rangle)}, 1 \mapsto u$ (respectivement $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(W\langle u \rangle)}, 1 \mapsto u$). Le plongement $X_0 \rightarrow X$ au dessus du morphisme $W_n^0 \rightarrow W_n\langle u \rangle$ donné par $u \mapsto 0$ induit une application naturelle $i_0 : R\Gamma_{\mathrm{cris}}(X/W_n\langle u \rangle) \rightarrow R\Gamma_{\mathrm{cris}}(X_0/\mathcal{O}_{F,n}^0)$. Le morphisme i_0 induit un quasi-isomorphisme

$$i_0 : R\Gamma_{\mathrm{cris}}(X/W_n\langle u \rangle) \otimes_{W_n\langle u \rangle}^L \mathcal{O}_{F,n} \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\mathrm{cris}}(X_0/\mathcal{O}_{F,n}^0).$$

De plus, $i_0 : R\Gamma_{\mathrm{cris}}(X/W\langle u \rangle)_{\mathbb{Q}} \rightarrow R\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_0)$ admet une unique section $W(k)$ -linéaire $j_0 : R\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_0) \rightarrow R\Gamma_{\mathrm{cris}}(X/W\langle u \rangle)_{\mathbb{Q}}$ compatible avec les actions de φ et de N (voir [7, (1.16)], [47, (4.4.6)]) et qui induit un quasi-isomorphisme :

$$j_0 : (R\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_0) \otimes_{W(k)}^L W\langle u \rangle)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\mathrm{cris}}(X/W\langle u \rangle)_{\mathbb{Q}}.$$

Le choix d'une uniformisante ϖ de \mathcal{O}_K permet de définir un morphisme

$$i_\varpi : R\Gamma_{\text{cris}}(X/W\langle u \rangle) \rightarrow R\Gamma_{\text{cris}}(X/\mathcal{O}_K^\times)$$

(induit par $u \mapsto \varpi$) tel qu'on ait encore un quasi-isomorphisme de changement de base :

$$i_\varpi : R\Gamma_{\text{cris}}(X/W\langle u \rangle) \otimes_{W\langle u \rangle}^L \mathcal{O}_K \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\text{cris}}(X/\mathcal{O}_K^\times).$$

On obtient un morphisme $\iota_{\text{HK}} : R\Gamma_{\text{HK}}(X) \rightarrow R\Gamma_{\text{dR}}(X_K)$ donné par :

$$R\Gamma_{\text{HK}}(X_0) \xrightarrow{j_0} R\Gamma_{\text{cris}}(X/W\langle u \rangle)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{i_\varpi} R\Gamma_{\text{cris}}(X/\mathcal{O}_K^\times)_{\mathbb{Q}} \rightarrow R\Gamma_{\text{dR}}(X_K).$$

Théorème 2.2.5. [47, (4.4.8)] [32, (5.1)] *Le morphisme ι_{HK} induit un quasi-isomorphisme K -linéaire fonctoriel :*

$$\iota_{\text{HK}} : R\Gamma_{\text{HK}}(X_0) \otimes_F K \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\text{dR}}(X_K).$$

Remarque 2.2.6. 1. Dans le cas où \mathfrak{X} est un log-schéma formel propre et log-lisse sur \mathcal{O}_K , on a encore un tel quasi-isomorphisme.

2. Dans [7, (1.18.5)], Beilinson construit un quasi-isomorphisme (où X_1 est la réduction modulo p de X et $\mathbb{B}_{\text{st}}, \mathbb{B}_{\text{st}}^+$ les anneaux de période semi-stables) :

$$\iota_{\text{cris}}^{\mathbb{B}} : R\Gamma_{\text{cris}}(X_0/\mathcal{O}_F^0) \otimes_{\mathcal{O}_F}^L \mathbb{B}_{\text{st}}^+ \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\text{cris}}(X_{\mathcal{O}_C}/\mathbb{A}_{\text{cris}}) \otimes_{\mathbb{A}_{\text{cris}}}^L \mathbb{B}_{\text{st}}^+. \quad (2.3)$$

2.3 Cohomologie log-syntomique

On définit maintenant le site et la cohomologie log-syntomiques. On rappelle notamment un théorème de comparaison qui permet de relier la cohomologie syntomique à la cohomologie cristalline (§(2.3.1)). En utilisant les quasi-isomorphismes rappelés plus haut, on obtient une description de la cohomologie syntomique via la cohomologie de Hyodo-Kato (§(2.3.2)). Enfin en utilisant la théorie des espaces de Banach-Colmez de [16], on montre un isomorphisme entre la cohomologie syntomique et la cohomologie de Hyodo-Kato qui interviendra dans la preuve du théorème de comparaison semi-stable (§(2.3.3)).

2.3.1 Site syntomique

On dit qu'un morphisme de log-schémas $f : X \rightarrow Y$ est log-syntomique ([34, (2.5)]) s'il est intègre, si le morphisme de schémas associés est plat et localement de présentation finie et qu'il se factorise en

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow i & \nearrow g \\ & & Z \end{array}$$

où i est une immersion fermée exacte, g est log-lisse et l'idéal associé à $X \hookrightarrow Z$ est engendré par une suite régulière (on dit alors que i est régulière).

Remarque 2.3.1. [12, §2.2]

1. Si $f : X \rightarrow Y$ est syntomique $X \xrightarrow{i'} Z' \xrightarrow{h} Y$ est une autre factorisation de f avec h log-lisse et i' une immersion fermée exacte alors i' est régulière.
2. Les morphismes log-syntomiques sont stables par composition et par changement de base.
3. Les morphismes log-syntomiques se relèvent localement le long des PD-épaississements. Plus précisément, si $U \hookrightarrow T$ est un PD-épaississement et $U' \rightarrow U$ est un morphisme log-syntomique, alors il existe un recouvrement étale $(V_i)_i$ de U' tel que les morphismes $V_i \rightarrow U$ se relèvent en des morphismes log-syntomiques $T_i \rightarrow T$ et tel que $V_i \rightarrow T_i$ soit encore un PD-épaississement et $(T_i)_i$ forme un recouvrement de T (voir [12, (3.2.2)]).

Soit k un corps parfait de caractéristique p . Si X est un log-schéma fin sur $W := W(k)$, on note X_{syn} le (petit) site (log-)syntomique associé. Ses objets sont donnés par les log-schémas U qui sont log-syntomiques sur X . Les morphismes sont définis de manière évidente et les recouvrements sont les familles $\{f_i : U_i \rightarrow U\}$ de morphismes syntomiques tels que $U = \bigcup_i f_i(U_i)$. On peut définir de la même façon le site X_{SYN} en considérant tous les X -log-schémas U . On définit les pré-faisceaux \mathcal{O}_n et $\mathcal{J}_n^{[r]}$ sur X_{syn} en posant pour U log-syntomique sur X :

$$\mathcal{O}_n(U) = H^0((U_n/W_n)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{U_n/W_n}) \text{ et } \mathcal{J}_n^{[r]}(U) = H^0((U_n/W_n)_{\text{cris}}, \mathcal{J}_{U_n/W_n}^{[r]}) \text{ pour } r \geq 0$$

et on pose $\mathcal{J}_n^{[r]}(U) = \mathcal{O}_n(U)$ si $r \leq 0$. On a alors (voir [29, (1.3)] pour le cas classique, [12, (3.2.3)] pour le cas logarithmique) :

Proposition 2.3.2. *Pour tout entier n et tout entier r , \mathcal{O}_n et $\mathcal{J}_n^{[r]}$ sont des faisceaux sur X_{syn} .*

Démonstration. Soit \mathcal{F} l'un des pré-faisceaux \mathcal{O}_n ou $\mathcal{J}_n^{[r]}$. Pour U dans X_{syn} et $\{U_i\}$ un recouvrement syntomique de U , on veut montrer que

$$0 \rightarrow H^0((U/W_n)_{\text{cris}}, \mathcal{F}) \rightarrow \prod_i H^0((U_i/W_n)_{\text{cris}}, \mathcal{F}) \rightarrow \prod_{i,j} H^0((U_i \times_U U_j/W_n)_{\text{cris}}, \mathcal{F})$$

est exacte.

Soit s une section dans $H^0((U/W_n)_{\text{cris}}, \mathcal{F})$ telle que $s = 0$ dans $H^0((U_i/W_n)_{\text{cris}}, \mathcal{F})$. Considérons la famille $(s_T)_{V \hookrightarrow T}$ associée où $V \rightarrow T$ est un PD-épaississement de $(U/W_n)_{\text{cris}}$ et s_T est une section globale de \mathcal{O}_T . Pour tout PD-épaississement $V \rightarrow T$ et pour tout i , il existe un recouvrement étale $(W_{i,j})_j$ de $V \times_U U_i$ tel que le morphisme syntomique $V \times_U U_i \rightarrow V$ se relève en des morphismes syntomiques $T_{i,j} \rightarrow T$ avec $W_{i,j} \rightarrow T_{i,j}$ un PD-épaississement (par le troisième point de la remarque 2.3.1). Mais $(s_T)_T$ est nulle dans $H^0((U_i/W_n)_{\text{cris}}, \mathcal{F})$ donc $s_T|_{T_{i,j}} = 0$ avec $(T_{i,j})_{i,j}$ recouvrement de T . Comme \mathcal{O}_T est un faisceau, on en déduit $s_T = 0$, puis $s = 0$. On obtient l'injectivité de $H^0((U/W_n)_{\text{cris}}, \mathcal{F}) \rightarrow \prod_i H^0((U_i/W_n)_{\text{cris}}, \mathcal{F})$. L'exactitude au milieu s'obtient de la même façon. \square

Proposition 2.3.3. *Il existe des isomorphisme naturels*

$$\begin{aligned} H^i(X_{\text{syn}}, \mathcal{O}_n) &\cong H^i((X_n/W_n)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{X_n/W_n}) \\ H^i(X_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{[r]}) &\cong H^i((X_n/W_n)_{\text{cris}}, \mathcal{J}_{X_n/W_n}^{[r]}) \end{aligned}$$

pour tout r de \mathbb{Z} et i de \mathbb{N} .

Démonstration. On prouve le résultat pour le faisceau \mathcal{O}_n , la preuve est identique dans le cas $\mathcal{J}_n^{[r]}$. On considère le site $(X/W_n)_{\text{syn-cris}}$ défini de la même façon que $(X/W_n)_{\text{cris}}$ mais en prenant pour recouvrements les familles de morphismes syntomiques. On a alors des applications sur les topoi associés :

$$\mathbf{Fsc}((X/W_n)_{\text{cris}}) \xleftarrow{\beta} \mathbf{Fsc}((X/W_n)_{\text{syn-cris}}) \xrightarrow{\alpha} \mathbf{Fsc}(X_{\text{syn}})$$

données par $\alpha_*\mathcal{F}(U) = H^0((U/W_n)_{\text{syn-cris}}, \mathcal{F})$ et $\beta_*\mathcal{F}(U, T) = \mathcal{F}_T(T)$ pour \mathcal{F} un faisceau sur $(X/W_n)_{\text{syn-cris}}$. Le résultat découle alors du lemme suivant :

Lemme 2.3.4. [12, (3.3.1) et (3.3.2)] *Pour $i > 0$, $R^i\alpha_*\mathcal{O}_{X/W_n} = R^i\beta_*\mathcal{O}_{X/W_n} = 0$.*

En effet, le résultat du lemme induit que les suites spectrales de Leray

$$E_2^{p,q} = H^p(X_{\text{syn}}, R^i\alpha_*\mathcal{O}_{X/W_n}) \Rightarrow H^{p+q}((X/W_n)_{\text{syn-cris}}, \mathcal{O}_{X/W_n})$$

$$E_2^{p,q} = H^p((X/W_n)_{\text{cris}}, R^i\beta_*\mathcal{O}_{X/W_n}) \Rightarrow H^{p+q}((X/W_n)_{\text{syn-cris}}, \mathcal{O}_{X/W_n})$$

dégénèrent à la page E_2 et on en déduit les isomorphismes

$$H^i(X_{\text{syn}}, \mathcal{O}_n) \cong H^i((X_n/W_n)_{\text{syn-cris}}, \mathcal{O}_{X_n/W_n}) \cong H^i((X_n/W_n)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{X_n/W_n}).$$

Preuve du lemme 2.3.4. Commençons par montrer que $R^i\beta_*\mathcal{O}_{X/W_n} = 0$ pour $i > 0$. Comme $R^i\beta_*\mathcal{O}_{X/W_n}$ est le faisceau associé au préfaisceau $(U, T) \mapsto H_{\text{syn}}^i(T, \mathcal{O}_T)$, il suffit de montrer $H_{\text{syn}}^i(T, \mathcal{O}_T) = 0$ pour $i > 0$ et T affine. Pour cela, on vérifie que les groupes de cohomologie de Čech, $\check{H}^i(\mathcal{U}/U, \mathcal{O}_U)$ pour $i > 0$ sont nuls pour tout recouvrement log-syntomique affine de U objet affine de T_{syn} (voir [1, Lemma 01EW]). Mais la structure logarithmique n'intervient pas dans la définition du faisceau \mathcal{O}_U et le complexe de Čech associé $\check{C}(\mathcal{U}/U, \mathcal{O}_U)$ est donc, lui aussi, indépendant de la log-structure. Si on écrit $\mathcal{U} = \{U_i\}$ avec $U_i \rightarrow U$ syntomique, alors $U_i \rightarrow U$ est plat et on obtient $\check{H}^i(\mathcal{U}/U, \mathcal{O}_U) = 0$ pour $i > 0$ ([39, III.(3.9)]).

Montrons maintenant que $R^i\alpha_*\mathcal{O}_{X/W_n} = 0$. C'est le faisceau sur X_{syn} associé au préfaisceau $U \mapsto H_{\text{syn-cris}}^i(U/W_n)$ et par ce qu'on vient de voir, on peut considérer les groupes $H_{\text{cris}}^i(U/W_n)$ au lieu de $H_{\text{syn-cris}}^i(U/W_n)$. Soit U dans X_{syn} et s dans $H_{\text{cris}}^i(U/W_n)$. Pour montrer que s est nulle, il suffit de trouver un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}$ de U tel que $s|_{U_i} = 0$ dans $H_{\text{cris}}^i(U_i/W_n)$. On peut supposer que $U = \text{Spec}(R)$ muni de la log-structure $\alpha : P \rightarrow R$ avec P est un monoïde finiment engendré et α compatible avec la log-structure de W_n . On note x_1, \dots, x_n des générateurs de P . Les groupes de cohomologie $H_{\text{cris}}^i(U/W_n)$ peuvent être calculés comme des groupes d'hypercohomologie d'un complexe

de de Rham via le théorème 2.2.1. Pour cela, on considère le W_n -log-schéma log-lisse $Y := \text{Spec}(B)$ avec $B := W_n[X_1, \dots, X_n][T_r]_{r \in R}$ où Y est muni de la log-structure donnée par $Q := \mathbb{N}x_0 \oplus \mathbb{N}x_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{N}x_n \rightarrow B$ telle que $x_i \mapsto X_i$ pour $i \neq 0$ et x_0 s'envoie sur une uniformisante de $W(k)$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & A \\ \uparrow & & \uparrow \\ Q & \xrightarrow{h} & P \end{array}$$

avec $h(x_i) = x_i$ pour $i > 0$ et $h(x_0) = g$. Soit Z la log-PD-enveloppe de l'immersion fermée exacte $B \otimes_{\mathbb{Z}[Q]} \mathbb{Z}[(h^{\text{gp}})^{-1}(P)] \rightarrow A$. Alors $s \in H_{\text{cris}}^i(U/W_n)$ peut être vu comme un élément de $Z \otimes \omega_{Y/W_n}^i$ avec $d(s) = 0$ i.e. s s'écrit comme une somme finie de différentielles de la forme $\lambda \otimes d \log(x_{i_1}) \otimes \dots \otimes d \log(x_{i_1}) \otimes \dots \otimes d \log(x_{i_l}) \otimes dX_{j_1} \otimes \dots \otimes dX_{j_m} \otimes dT_{r_1} \otimes \dots \otimes dT_{r_k}$. On considère maintenant le recouvrement $\text{Spec}(A) \times_Y Y_n$ de $\text{Spec}(A)$ où $Y_n := \text{Spec}(W_n[X_1^{\frac{1}{p^n}}, \dots, X_d^{\frac{1}{p^n}}, T_{r_1}^{\frac{1}{p^n}}, \dots, T_{r_k}^{\frac{1}{p^n}}][T_r]_{r \neq r_i})$ muni de la log-structure induite par $Q_n := \mathbb{N}x_0 \oplus \mathbb{N}x_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{N}x_d$. L'image de dT_{r_i} dans $H_{\text{cris}}^i(\text{Spec}(A) \times Y_n/W_n)$ est évidemment 0, ce qui termine la preuve du lemme. \square

On a aussi la proposition suivante :

Proposition 2.3.5. [13, §2.1.2] *Les faisceaux $\mathcal{J}_n^{[r]}$ sont plats sur $W_n(k)$ et on a des suites exactes :*

$$0 \rightarrow \mathcal{J}_m^{[r]} \xrightarrow{p^n} \mathcal{J}_{n+m}^{[r]} \rightarrow \mathcal{J}_n^{[r]} \rightarrow 0.$$

On définit ensuite les faisceaux $\mathcal{S}_n(r)_X$ sur X_{syn} par $\mathcal{S}_n(r)_X := [\mathcal{J}_n^{[r]} \xrightarrow{p^r - \varphi} \mathcal{O}_n]$ et la cohomologie syntomique de X est donnée par $R\Gamma_{\text{syn}}(X, r)_n := R\Gamma(X_{\text{syn}}, \mathcal{S}_n(r)_X)$.

On peut donner une autre définition de la cohomologie syntomique en travaillant directement sur le site étale de X . Pour U un ouvert étale de X , on pose

$$R\Gamma_{\text{syn}}(U, r)_n := [R\Gamma_{\text{cris}}(U, \mathcal{J}_{U/W}^{[r]})_n \xrightarrow{p^r - \varphi} R\Gamma_{\text{cris}}(U)_n]$$

$$R\Gamma_{\text{syn}}(U, r) := \text{holim}_n R\Gamma_{\text{syn}}(U, r)_n.$$

On a $R\Gamma_{\text{syn}}(U, r)_n \cong R\Gamma_{\text{syn}}(U, r) \otimes^L \mathbb{Z}/p^n$ et, en considérant la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{J}^{[r]} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}/\mathcal{J}^{[r]} \rightarrow 0$ (où pour simplifier, on écrit $\mathcal{J}^{[r]} = \mathcal{J}_{U/W}^{[r]}$ et $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{U/W}$), on obtient un quasi-isomorphisme naturel :

$$R\Gamma_{\text{syn}}(U, r)_n \xrightarrow{\sim} [R\Gamma_{\text{cris}}(U)_n \xrightarrow{(p^r - \varphi, \text{can})} R\Gamma_{\text{cris}}(U)_n \oplus R\Gamma_{\text{cris}}(U, \mathcal{O}/\mathcal{J}^{[r]})_n]. \quad (2.4)$$

Soient maintenant $\mathcal{J}_n^{[r]}$, $\mathcal{A}_{\text{cris}, n}$ et $\mathcal{S}_n(r)_X$ les faisceaux (sur le site étale) associés aux pré-faisceaux $U \mapsto R\Gamma_{\text{cris}}(U, \mathcal{J}^{[r]})_n$, $U \mapsto R\Gamma_{\text{cris}}(U, \mathcal{O})_n$ et $U \mapsto R\Gamma_{\text{syn}}(U, r)_n$. La cohomologie syntomique de X est alors donnée par $R\Gamma_{\text{syn}}(X, r) = R\Gamma_{\text{ét}}(X, \mathcal{S}_n(r)_X)$ et cette définition coïncide avec la précédente par la proposition 2.3.3. On définit de la même façon la cohomologie syntomique d'un log-schéma formel \mathfrak{X} . Les résultats précédents restent vrais pour \mathfrak{X} .

Remarque 2.3.6. Dans la suite, on trouvera utile la description suivante, plus explicite, de la cohomologie syntomique. Considérons un log-schéma formel \mathfrak{X} à réduction semi-stable sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_C)$ et notons Y sa fibre spéciale. On choisit \mathfrak{U}^\bullet un hyper-recouvrement de \mathfrak{X} pour la topologie étale. Soit $\{Z_n^\bullet\}$ un système inductif de log-schémas log-lisses simpliciaux sur $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ tels qu'on ait des immersions fermées $\mathfrak{U}_n^s \hookrightarrow Z_n^s$ et des relèvements $\varphi_{Z_n^\bullet}$ du Frobenius. On note D_n^s la log-PD-enveloppe de \mathfrak{U}_n^s dans Z_n^s , $J_{D_n^s}$ l'idéal associé et $J_{D_n^s}^{[r]}$ sa r -ième puissance divisée. Pour chaque s , on définit le faisceau $\mathcal{S}_n(r)_{\mathfrak{U}^s, Z^s, \varphi^s}$ de $D(Y_{\mathrm{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ par :

$$\mathcal{S}_n(r)_{\mathfrak{U}^s, Z^s, \varphi^s} := [J_{D_n^s}^{[r-\bullet]} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n^s}} \omega_{Z_n^s}^\bullet \xrightarrow{p^r - \varphi} \mathcal{O}_{D_n^s} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n^s}} \omega_{Z_n^s}^\bullet]$$

où $\omega_{Z_n^s}^\bullet$ est le complexe des log-différentielles de Z_n^s . On note $R\Gamma_{\mathrm{syn}}((\mathfrak{U}^\bullet, Z^\bullet, \varphi^\bullet), r)_n$ l'hypercohomologie associée (on utilise ici la définition (6.10) de [22]). En particulier, on a une suite spectrale (voir [22, Th. 6.11]) :

$$E_1^{p,q} := H_{\mathrm{syn}}^q((\mathfrak{U}^p, Z^p, \varphi^p), r)_n \Rightarrow H_{\mathrm{syn}}^{p+q}((\mathfrak{U}^\bullet, Z^\bullet, \varphi^\bullet), r)_n \quad (2.5)$$

On note $\widetilde{\mathrm{HRF}}(\mathfrak{X})$ la catégorie dont les objets sont donnés par les triplets $(\mathfrak{U}^\bullet, \{Z_n^\bullet\}, \{\varphi_n^\bullet\})$ où $\mathfrak{U}^\bullet \rightarrow \mathfrak{X}$ est un hyper-recouvrement et les $\{Z_n^\bullet\}$ et $\{\varphi_n^\bullet\}$ sont définis comme ci-dessus. On abrégera par \mathfrak{U}^\bullet un tel triplet. Un morphisme $(\mathfrak{U}^\bullet, \{Z_{\mathfrak{U},n}^\bullet\}, \{\varphi_{\mathfrak{U},n}^\bullet\}) \rightarrow (\mathfrak{V}^\bullet, \{Z_{\mathfrak{V},n}^\bullet\}, \{\varphi_{\mathfrak{V},n}^\bullet\})$ de $\widetilde{\mathrm{HRF}}(\mathfrak{X})$ est une paire $(u : \mathfrak{U}^\bullet \rightarrow \mathfrak{V}^\bullet, \tilde{u}_n : Z_{\mathfrak{U},n}^\bullet \rightarrow Z_{\mathfrak{V},n}^\bullet)$ telle que, pour tout s , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z_{\mathfrak{U},n}^s & \xrightarrow{\tilde{u}_n} & Z_{\mathfrak{V},n}^s \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathfrak{U}^s & \xrightarrow{u} & \mathfrak{V}^s \end{array}$$

commute et telle que les \tilde{u}_n commutent aux φ_n^s . Soit maintenant $\mathrm{HRF}(\mathfrak{X})$ la catégorie homotopique associée : ses objets sont ceux de $\widetilde{\mathrm{HRF}}(\mathfrak{X})$ et ses morphismes sont donnés par les classes d'équivalence des applications précédentes $\mathfrak{U}^\bullet \rightarrow \mathfrak{V}^\bullet$ pour la relation d'homotopie simpliciale. On va montrer que la catégorie $\mathrm{HRF}(\mathfrak{X})$ est filtrée.

D'abord, si $\mathfrak{U}^\bullet \rightarrow \mathfrak{X}$ et $\mathfrak{V}^\bullet \rightarrow \mathfrak{X}$ sont dans $\mathrm{HRF}(\mathfrak{X})$ alors $\mathfrak{U}^\bullet \times \mathfrak{V}^\bullet \rightarrow \mathfrak{X}$ également (en prenant le produit des plongements Z_n^\bullet et des Frobenius φ_n^\bullet associés). Pour vérifier que $\mathrm{HRF}(\mathfrak{X})$ est filtrante, il suffit donc de montrer que pour tous morphismes $\mathfrak{U}^\bullet \xrightarrow[u_1]{u_0} \mathfrak{V}^\bullet$ dans $\widetilde{\mathrm{HRF}}(\mathfrak{X})$, il existe $w : \mathfrak{W}^\bullet \rightarrow \mathfrak{U}^\bullet$ dans $\widetilde{\mathrm{HRF}}(\mathfrak{X})$ tel que $\mathfrak{W}^\bullet \xrightarrow[u_1 w]{u_0 w} \mathfrak{V}^\bullet$ sont homotopes. Pour cela, on utilise la construction de [5, V.7.3.5] : il existe un schéma simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet(\mathfrak{X} \times \Delta[1], \mathfrak{V}^\bullet)$ tel que pour tout \mathfrak{X} -schéma simplicial \mathfrak{V}^\bullet , on a

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{V}^\bullet \times \Delta[1], \mathfrak{V}^\bullet) = \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}^\bullet, \underline{\mathrm{Hom}}^\bullet(\mathfrak{X} \times \Delta[1], \mathfrak{V}^\bullet)).$$

On définit alors \mathfrak{W}^\bullet comme le sommet du diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{W}^\bullet & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}^\bullet(\mathfrak{X} \times \Delta[1], \mathfrak{V}^\bullet) \\ \downarrow w & & \downarrow \\ \mathfrak{U}^\bullet & \xrightarrow{(u_0, u_1)} & \mathfrak{V}^\bullet \times \mathfrak{V}^\bullet \end{array}$$

Par [5, V.7.3.7], $\mathfrak{W}^\bullet \rightarrow \mathfrak{X}$ définit un hyper-recouvrement. On va voir que \mathfrak{W}^\bullet est dans $\text{HRF}(\mathfrak{X})$. Si $(\{Z_{\mathfrak{U},n}^\bullet\}, \{\varphi_{\mathfrak{U},n}^\bullet\})$ et $(\{Z_{\mathfrak{V},n}^\bullet\}, \{\varphi_{\mathfrak{V},n}^\bullet\})$ sont les relevés associés à \mathfrak{U}^\bullet et \mathfrak{V}^\bullet , en définissant $(\{Z_{\mathfrak{W},n}^\bullet\}, \{\varphi_{\mathfrak{W},n}^\bullet\})$ comme les produits fibrés :

$$\begin{array}{ccc} Z_{\mathfrak{W},n}^\bullet & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}^\bullet(\mathfrak{X} \times \Delta[1], Z_{\mathfrak{V},n}^\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z_{\mathfrak{U},n}^\bullet & \xrightarrow{(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1)} & Z_{\mathfrak{V},n}^\bullet \times Z_{\mathfrak{V},n}^\bullet \end{array}$$

on obtient un objet $(\mathfrak{W}^\bullet, \{Z_{\mathfrak{W},n}^\bullet\}, \{\varphi_{\mathfrak{W},n}^\bullet\})$ de $\text{HRF}(\mathfrak{X})$. De plus, comme $\mathfrak{W}^\bullet \xrightarrow{w} \mathfrak{U}^\bullet \xrightarrow[u_1]{u_0} \mathfrak{V}^\bullet$ se factorisent par $\underline{\text{Hom}}^\bullet(\mathfrak{X} \times \Delta[1], \mathfrak{V}^\bullet) \rightarrow \mathfrak{V}^\bullet \times \mathfrak{V}^\bullet \rightrightarrows \mathfrak{V}^\bullet$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{W}^\bullet \times \Delta[0] & \longrightarrow & \mathfrak{W}^\bullet \times \Delta[1] & \longleftarrow & \mathfrak{W}^\bullet \times \Delta[0] \\ \downarrow w & & \downarrow & & \downarrow w \\ \mathfrak{U}^\bullet & \xrightarrow{u_0} & \mathfrak{V}^\bullet & \xleftarrow{u_1} & \mathfrak{U}^\bullet \end{array}$$

et les applications $u_0 w$ et $u_1 w$ sont homotopes. La catégorie $\text{HRF}(\mathfrak{X})$ est donc bien filtrée.

On peut alors considérer la limite hocolim $_{\text{HRF}(\mathfrak{X})} R\Gamma_{\text{syn}}((\mathfrak{U}^\bullet, Z^\bullet, \varphi^\bullet), r)_n$ et comme le morphisme $\mathfrak{U}^\bullet \rightarrow \mathfrak{X}$ est de descente cohomologique (voir [22, Ex. 6.9]) et on a un quasi-isomorphisme ([22, Th. 7.11]) :

$$R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}, r)_n \xrightarrow{\sim} \text{hocolim}_{\text{HRF}(\mathfrak{X})} R\Gamma_{\text{syn}}((\mathfrak{U}^\bullet, Z^\bullet, \varphi^\bullet), r)_n. \quad (2.6)$$

De plus, chacune des flèches dans la limite inductive ci-dessus définit un quasi-isomorphisme.

2.3.2 Cohomologie syntomique géométrique

Soit \mathfrak{X} un log-schéma formel propre sur \mathcal{O}_K , à réduction semi-stable. On note $R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X})$ la cohomologie de Hyodo-Kato de X_0/k et $[R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+]^{\varphi=p^r, N=0}$ la fibre homotopique (où $\varphi_r = \varphi/p^r$) :

$$\left[\begin{array}{ccc} R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+ & \xrightarrow{(1-\varphi_r, \iota_{\text{HK}})} & R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+ \oplus R\Gamma_{\text{dR}}(\mathfrak{X}_K)/F^r \\ \downarrow N & & \downarrow (N,0) \\ R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+ & \xrightarrow{(1-\varphi_{r-1})} & R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+ \end{array} \right]$$

On note

$$\begin{aligned} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r) &:= [R\Gamma((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/W(\bar{k}))_{\text{cris}}, \mathcal{J}^{[r]}) \xrightarrow{p^r - \varphi} R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/W(\bar{k}))] \\ R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} &:= [R\Gamma((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/W(\bar{k}))_{\text{cris}}, \mathcal{J}^{[r]})_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{1 - \frac{\varphi}{p^r}} R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/W(\bar{k}))_{\mathbb{Q}}]. \end{aligned}$$

Théorème 2.3.7. [40, §3.2], [21, (5.22)] *Il existe un quasi-isomorphisme naturel :*

$$R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \cong [[R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+]^{\varphi=p^r, N=0} \xrightarrow{\iota_{\text{HK}} \otimes \iota} (R\Gamma_{\text{dR}}(\mathfrak{X}_K) \otimes_K \mathbb{B}_{\text{dR}}^+)/F^r].$$

Démonstration. On a les morphismes suivants (où $\varphi_r = \frac{\varphi}{p^r}$) :

$$\begin{aligned} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} &= [R\Gamma((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/W(\bar{k}))_{\text{cris}}, \mathcal{J}^{[r]})_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{1-\varphi_r} R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/W(\bar{k}))_{\mathbb{Q}}] \\ &\xrightarrow{\sim} [R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/W(\bar{k}))_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{(1-\varphi_r, \text{can})} R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/W(\bar{k}))_{\mathbb{Q}} \oplus R\Gamma((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/W(\bar{k}))_{\text{cris}}, \mathcal{J}^{[r]})_{\mathbb{Q}}] \\ &\xrightarrow{\sim} [R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/W(\bar{k}))_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{(1-\varphi_r, \gamma_r^{-1} \circ \text{can})} R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/W(\bar{k}))_{\mathbb{Q}} \oplus (R\Gamma_{\text{dR}}(\mathfrak{X}_K) \otimes_K \mathbb{B}_{\text{dR}}^+)/F^r] \\ &\xleftarrow{\sim} \left[\begin{array}{ccc} R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X}) & \xrightarrow{(1-\varphi_r, \iota_{\text{HK}})} & R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X}) \oplus (R\Gamma_{\text{dR}}(\mathfrak{X}_K) \otimes_K \mathbb{B}_{\text{dR}}^+)/F^r \\ \downarrow N & & \downarrow (N, 0) \\ R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X}) & \xrightarrow{(1-\varphi_{r-1})} & R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X}) \end{array} \right] \end{aligned}$$

Le premier quasi-isomorphisme découle de (2.4), le second de (2.2) et le troisième de (2.3) (en utilisant que N est nul sur $R\Gamma_{\text{cris}}(\overline{X}_1/W(\bar{k}))_{\mathbb{Q}}$). \square

On va montrer la proposition suivante :

Proposition 2.3.8. [40, (3.25)] *Pour tout entier i , $H^i([R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+]^{\varphi=p^r, N=0}) = (H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+)^{\varphi=p^r, N=0}$.*

On montre d'abord le lemme suivant :

Lemme 2.3.9. [19, (3.21)] *Pour M un (φ, N) -module fini, on a les suites exactes suivantes :*

$$0 \rightarrow M \otimes_F \mathbb{B}_{\text{cris}}^+ \rightarrow M \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+ \xrightarrow{N} M \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+ \rightarrow 0 \quad (2.7)$$

$$0 \rightarrow (M \otimes_F \mathbb{B}_{\text{cris}}^+)^{\varphi=p^r} \rightarrow M \otimes_F \mathbb{B}_{\text{cris}}^+ \xrightarrow{p^r - \varphi} M \otimes_F \mathbb{B}_{\text{cris}}^+ \rightarrow 0 \quad (2.8)$$

où l'application $M \otimes_F \mathbb{B}_{\text{cris}}^+ \rightarrow M \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+$ de la première suite exacte est donnée par

$$M \otimes_F \mathbb{B}_{\text{cris}}^+ \xrightarrow{\sim} (M \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+)^{N=0}, \quad m \otimes b \mapsto \exp(Nu)m \otimes b.$$

Démonstration. Pour rendre l'argument plus clair (et dans cette preuve uniquement) on note N_M l'opérateur de monodromie sur M , N_B celui sur \mathbb{B}_{st}^+ et N celui de $M \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+$. La suite exacte (2.7) s'obtient par récurrence sur l'entier m tel que $N_M^m = 0$. Si $m = 0$ alors $N = \text{Id}_M \otimes N_B$ et la suite exacte se déduit de la platitude de M et de la suite exacte ([28]) :

$$0 \rightarrow \mathbb{B}_{\text{cris}}^+ \rightarrow \mathbb{B}_{\text{st}}^+ \xrightarrow{N} \mathbb{B}_{\text{st}}^+ \rightarrow 0.$$

On suppose maintenant le résultat établi pour M_0 tel que $N_{M_0}^{m-1} = 0$. On considère un (φ, N) -module M tel que $N_M^m = 0$, on note $M' := \text{Im}(N)$ et l'hypothèse de récurrence donne une suite exacte :

$$0 \rightarrow M' \otimes_F \mathbb{B}_{\text{cris}}^+ \rightarrow M' \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+ \xrightarrow{N} M' \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+ \rightarrow 0.$$

De même, si $M'' := M/M'$, la preuve pour $m = 0$ donne une suite exacte

$$0 \rightarrow M'' \otimes_F \mathbb{B}_{\text{cris}}^+ \rightarrow M'' \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+ \xrightarrow{N} M'' \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+ \rightarrow 0$$

et on obtient finalement

$$0 \rightarrow M \otimes_F \mathbb{B}_{\text{cris}}^+ \rightarrow M \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+ \xrightarrow{N} M \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+ \rightarrow 0.$$

Montrons maintenant (2.8). Il suffit de montrer que $p^r - \varphi : M \otimes_F \mathbb{B}_{\text{cris}}^+ \rightarrow M \otimes_F \mathbb{B}_{\text{cris}}^+$ est surjective. Cela découle du résultat plus général suivant (voir [21, (2.30)]) :

Lemme 2.3.10. *Pour M un φ -module fini et P un polynôme de $F[X]$ avec $P(0) \neq 0$, $P(\varphi) : M \otimes_F \mathbb{B}_{\text{cris}}^+ \rightarrow M \otimes_F \mathbb{B}_{\text{cris}}^+$ est surjective.*

Preuve du lemme 2.3.10. Par le théorème de classification de Dieudonné-Manin des φ -modules sur $W(\bar{k})[\frac{1}{p}]$ ([24], [38]) et en utilisant que $W(\bar{k}) \subset \mathbb{B}_{\text{cris}}^+$, on peut supposer qu'il existe r et s des entiers premiers entre eux tel que M est de la forme $Fx_1 \oplus Fx_2 \oplus \dots \oplus Fx_s$ avec $\varphi(x_i) = x_{i+1}$ pour $i < s$ et $\varphi(x_s) = p^r x_1$. Quitte à diviser les coefficients de P par des puissances de p^r , il suffit donc de vérifier que $P(\varphi) : \mathbb{B}_{\text{cris}}^+ \rightarrow \mathbb{B}_{\text{cris}}^+$ est surjective. On peut de plus supposer que $P(0) = 1$.

Si $P = P_1 \dots P_n$ est la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles alors $P(\varphi)$ est surjective si et seulement si les $P_i(\varphi)$ le sont. On peut alors supposer que P est irréductible et que toutes ses racines ont la même valuation. Enfin, si on écrit $P = \prod_i (1 - a_i X)$ et qu'on considère le polynôme $\tilde{P} := \prod_i (1 - a_i^s X^s)$, alors \tilde{P} est un multiple de P et P est surjective si et seulement si \tilde{P} l'est. On peut donc supposer $P(X) = Q(X^s)$ pour un $Q \in F[X]$.

Finalement, on s'est ramené à montrer la surjectivité de $Q(\varphi^s) : \mathbb{B}_{\text{cris}}^+ \rightarrow \mathbb{B}_{\text{cris}}^+$ où $Q(X^s)$ est un polynôme irréductible. Notons λ la valuation de ses racines, $Q := 1 + \sum_{i=1}^d a_i X^i$ et $\tilde{Q} := \frac{1}{Q} := 1 + \sum_{i \geq 1} b_i X^i$. Écrivons $\mathbb{B}_{\text{cris}}^+ = \mathbb{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{p}] + [p^b] \mathbb{B}_{\text{cris}}^+$. Alors $\tilde{Q}(\varphi^s)$ converge sur $[p^b] \mathbb{B}_{\text{cris}}^+$: en effet, pour $[p^b]y \in [p^b] \mathbb{A}_{\text{cris}}$,

$$(1 + \sum_{i \geq 1} b_i \varphi^{si})([p^b]y) = [p^b]y + \sum_{i \geq 1} b_i [p^b]^{p^{si}} \varphi^{si}(y).$$

Mais la valuation $v_p(b_i) + i\lambda$ est positive ou nulle pour tout $i \geq 1$ donc

$$v_p(b_i [p^b]^{p^{si}} \varphi^{si}(y)) = v_p(b_i) + p^{si} + v_p(\varphi^{si}(y)) \geq -i\lambda + p^{si} + v_p(\varphi^{si}(y)) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Ainsi $Q(\varphi^s)$ est inversible, donc surjective sur $[p^b] \mathbb{A}_{\text{cris}}$ et on obtient la surjectivité sur $[p^b] \mathbb{B}_{\text{cris}}^+$.

Il reste à voir que $Q(\varphi^s)$ est surjective sur $\mathbb{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{p}]$. Si $\lambda \leq 0$, la théorie des polygones de Newton nous donne que $Q(X^s)$ est à coefficients entiers, d'où $Q(\varphi^s)(\mathbb{A}_{\text{inf}}) \subset \mathbb{A}_{\text{inf}}$. Il suffit de montrer que $Q(\varphi^s) : \mathbb{A}_{\text{inf}} \rightarrow \mathbb{A}_{\text{inf}}$ est surjectif et comme \mathbb{A}_{inf} est p -adiquement complet, il suffit de le vérifier modulo p . Mais modulo p , $Q(\varphi^s)$ est l'application $x \mapsto x + \sum_{i=1}^d a_i x^{p^{si}}$ et $\mathbb{A}_{\text{inf}}/p \cong \mathcal{O}_C^b$ avec C^b algébriquement clos, donc $Q(\varphi^s)$ est surjective. Si $\lambda > 0$, on a

$a_d^{-1}Q(X^s) \in \mathcal{O}_F[X]$ et ses coefficients de degré plus petit que d sont nuls modulo p . On obtient que $a_d^{-1}Q(\varphi^s)$ est $x \mapsto x^{p^{sd}}$ modulo p et donc est surjective et on en déduit que $Q(\varphi^s)$ est surjective sur $\mathbb{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{p}]$, ce qui conclut la démonstration. \square

\square

\square

Preuve de 2.3.8. Pour alléger les notations, on note $\text{HK} := R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+$. On a une suite exacte longue :

$$\dots \rightarrow H^{i-1}(\text{HK}) \rightarrow H^i([\text{HK}]^{N=0}) \rightarrow H^i(\text{HK}) \xrightarrow{N} H^i(\text{HK}) \rightarrow H^{i+1}([\text{HK}]^{N=0}) \rightarrow \dots$$

et un isomorphisme $H^i(R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+) \cong H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+$ (on rappelle que $H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X})$ est un F -espace vectoriel de dimension finie). En utilisant la suite exacte 2.7, on obtient :

$$H^i([\text{HK}]^{N=0}) \cong (H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+)^{N=0} \cong H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{cris}}^+.$$

On a aussi une suite exacte longue :

$$\dots \rightarrow H^{i-1}([\text{HK}]^{N=0}) \rightarrow H^i([\text{HK}]^{N=0, \varphi=p^r}) \rightarrow H^i([\text{HK}]^{N=0}) \xrightarrow{\varphi-p^r} H^i([\text{HK}]^{N=0}) \rightarrow H^{i+1}([\text{HK}(\mathfrak{X})]^{N=0, \varphi=p^r}) \rightarrow \dots$$

et en utilisant $H^i([\text{HK}]^{N=0}) \cong H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{cris}}^+$ et la suite exacte 2.8, on obtient l'isomorphisme $H^i([\text{HK}]^{N=0, \varphi=p^r}) \cong (H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+)^{N=0, \varphi=p^r}$. \square

Corollaire 2.3.11. *On a une suite exacte longue :*

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow (H_{\text{dR}}^{i-1}(\mathfrak{X}_K) \otimes_K \mathbb{B}_{\text{dR}}^+)/F^r &\rightarrow H_{\text{syn}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r) \rightarrow (H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+)^{\varphi=p^r, N=0} \\ &\rightarrow (H_{\text{dR}}^i(\mathfrak{X}_K) \otimes_K \mathbb{B}_{\text{dR}}^+)/F^r \rightarrow H_{\text{syn}}^{i+1}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Démonstration. La suite spectrale de Hodge-de-Rham

$$E_1^{p,q} = H^q(\mathfrak{X}_K, \Omega^p) \Rightarrow H^{p+q}(\mathfrak{X}_K)$$

dégénère en E_1 et on a donc des isomorphismes

$$\begin{aligned} F^r(H_{\text{dR}}^i(\mathfrak{X}_K) \otimes_K \mathbb{B}_{\text{dR}}^+) &\cong H^i(F^r(R\Gamma_{\text{dR}}(\mathfrak{X}_K) \otimes_K \mathbb{B}_{\text{dR}}^+)) \\ (H_{\text{dR}}^i(\mathfrak{X}_K) \otimes_K \mathbb{B}_{\text{dR}}^+)/F^r &\cong H^i((R\Gamma_{\text{dR}}(\mathfrak{X}_K) \otimes_K \mathbb{B}_{\text{dR}}^+)/F^r). \end{aligned}$$

Le résultat découle ensuite du théorème 2.3.7 et de la proposition 2.3.8. \square

2.3.3 (φ, N) -modules filtrés et espaces de Banach-Colmez

Un (φ, N) -module filtré (sur K) est un module D sur F muni d'un endomorphisme de Frobenius φ bijectif semi-linéaire et d'un opérateur de monodromie N tels que $N\varphi = p\varphi N$ et tel que le K -espace vectoriel $D_K = D \otimes_F K$ soit un K -espace vectoriel filtré. La dimension d'un (φ, N) -module filtré est la dimension du F -espace vectoriel sous-jacent. On dit que D est fini s'il est de dimension finie. Dans la suite, si D est un (φ, N) -module

filtré, $D\{r\}$ désigne le module D muni du Frobenius $p^r\varphi$ et D_K est muni de la filtration $(F^{\bullet+r}D_K)$.

On s'intéresse ici on (φ, N) -module filtré $(H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}), H_{\text{dR}}^i(\mathfrak{X}_K), \iota_{\text{HK}})$. On utilise dans cette section le résultat de comparaison entre la cohomologie étale et la cohomologie syntomique qui sera prouvé dans le chapitre suivant. Pour déduire la conjecture semi-stable de ce théorème de comparaison, on aura besoin du résultat suivant :

Proposition 2.3.12. [21, Prop. (5.2)] *Le (φ, N) -module filtré $(H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}), H_{\text{dR}}^i(\mathfrak{X}_K), \iota_{\text{HK}})$ est faiblement admissible et pour $i \leq r$ et on a un isomorphisme (Frobenius et Galois équivariant) :*

$$H_{\text{syn}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{st}} \xrightarrow{\sim} H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}\{-r\}.$$

La preuve de [21] utilise la notion d'espaces de Banach-Colmez ([16]). Rappelons les définitions et principaux résultats de cette théorie. Un espace de Banach-Colmez est un foncteur de la catégorie des C -algèbres de Banach spectrales¹ Λ , connexes et telles que $x \mapsto x^p$ est surjective sur $\{x \in \Lambda \mid |x - 1| < 1\}$ vers la catégorie des \mathbb{Q}_p -espaces de Banach. En particulier, si V est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie, alors le foncteur $\Lambda \mapsto V$ qui envoie les morphismes $\Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$ sur l'identité de V dans V est un espace de Banach-Colmez. Pour d un entier, le foncteur $\mathbb{V}^d : \Lambda \mapsto \Lambda^d$ définit lui aussi un espace de Banach-Colmez.

Un espace de Banach-Colmez \mathbb{W} est de dimension finie s'il existe des \mathbb{Q}_p -espaces vectoriels de dimension finie V_1 et V_2 et des suites exactes

$$0 \rightarrow V_1 \rightarrow \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{V}^d \rightarrow 0 \tag{2.9}$$

$$0 \rightarrow V_2 \rightarrow \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{W} \rightarrow 0 \tag{2.10}$$

(i.e. pour tout Λ , les suites $0 \rightarrow V_i \rightarrow \mathbb{Y}(\Lambda) \rightarrow \mathbb{V}^d(\Lambda) \rightarrow 0$ sont exactes). On appelle alors dimension de \mathbb{W} l'entier positif $\dim(\mathbb{W}) := d$ et hauteur de \mathbb{W} l'entier $\text{ht}(\mathbb{W}) := \dim_{\mathbb{Q}_p} V_1 - \dim_{\mathbb{Q}_p} V_2$. Le couple de $\text{Dim}(\mathbb{W}) := (\dim(\mathbb{W}), \text{ht}(\mathbb{W}))$ ne dépend pas de la présentation 2.9 choisie (voir [16, (6.17)]). On peut noter que si la dimension $\dim(\mathbb{W})$ est nulle alors $\text{ht}(\mathbb{W})$ est positif. De plus, on a les résultats suivants :

Théorème 2.3.13. [16, (6.22)] *Si $\psi : \mathbb{W}_1 \rightarrow \mathbb{W}_2$ est un morphisme d'espaces de Banach-Colmez de dimension finie, alors $\ker(\psi)$ et $\text{Im}(\psi)$ sont des espaces de Banach-Colmez de dimension finie et*

$$\text{Dim}(\mathbb{W}_1) = \text{Dim}(\ker(\psi)) + \text{Dim}(\text{Im}(\psi))$$

$$\text{Dim}(\mathbb{W}_2) = \text{Dim}(\text{coker}(\psi)) + \text{Dim}(\text{Im}(\psi)).$$

Proposition 2.3.14. [18, (2.6)] *Si \mathbb{W} est un espace de Banach-Colmez qui admet une filtration décroissante par des sous-espaces \mathbb{W}_i , $0 \leq i \leq n$, avec $\mathbb{W}_0 = \mathbb{W}$ et $\mathbb{W}_i/\mathbb{W}_{i+1} \cong \mathbb{V}_1$ pour $0 \leq i \leq n-1$ et si \mathbb{W}' est un sous-espace de \mathbb{W} , alors $\text{ht}(\mathbb{W}') \geq 0$.*

On considère maintenant un triplet $D = (D_{\text{st}}, D_{\text{dR}}, \iota)$ où, pour tout i ,

1. c'est-à-dire munies de la norme spectrale.

1. D_{st} est un F -espace vectoriel de dimension finie muni d'un endomorphisme de Frobenius φ bijectif semi-linéaire et d'un opérateur de monodromie N tels que $N\varphi = p\varphi N$,
2. D_{dR} est un K -espace vectoriel de dimension finie muni d'une filtration décroissante, séparée et exhaustive,
3. $\iota : D_{\text{st}} \rightarrow D_{\text{dR}}$ est F -linéaire.

Pour $r \geq 1$, on note

$$\begin{aligned} X_{\text{st}}^r(D) &:= (t^{-r} \mathbb{B}_{\text{st}}^+ \otimes_F D_{\text{st}})^{\varphi=1, N=0} & X_{\text{dR}}^r(D) &:= (t^{-r} \mathbb{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_K D_{\text{dR}}) / F^0 \\ X_{\text{st}}(D) &:= (\mathbb{B}_{\text{st}}^+ \otimes_F D_{\text{st}})^{\varphi=1, N=0} & X_{\text{dR}}(D) &:= (\mathbb{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_K D_{\text{dR}}) / F^0. \end{aligned}$$

Les définitions des anneaux de périodes $\mathbb{B}_{\text{st}}, \mathbb{B}_{\text{st}}^+, \mathbb{B}_{\text{dR}}, \mathbb{B}_{\text{dR}}^+, \dots$ s'étendent en remplaçant C par une \mathbb{Q}_p -algèbre de Banach quelconque Λ (voir §2.2, [16, §7]) et permettent de définir des espaces de Banach-Colmez $\mathbb{X}_{\text{st}}(D), \mathbb{X}_{\text{dR}}(D), \mathbb{X}_{\text{st}}^r(D)$ et $\mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D)$ dont les C -points sont donnés par $X_{\text{st}}(D), X_{\text{dR}}(D), X_{\text{st}}^r(D)$ et $X_{\text{dR}}^r(D)$. On a alors que les espaces $\mathbb{X}_{\text{st}}^r(D)$ et $\mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D)$ sont de dimension finie avec

$$\text{Dim}(\mathbb{X}_{\text{st}}^r(D)) = (r \dim_F D_{\text{st}} - t_N(D), \dim_F D_{\text{st}}) \text{ et } \text{Dim}(\mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D)) = (r \dim_K D_{\text{dR}} - t_H(D), 0)$$

où $t_N(D) = v_p(\det(\varphi))$ et $t_H(D) = \sum_{i \geq 0} i \dim_K(F^i D_{\text{dR}} / F^{i+1})$ (voir [16, (10.1) et (10.8)]). On dit que D est faiblement admissible si $t_H(D) = t_N(D)$ et $t_H(D') \leq t_N(D')$ pour tout $D' \subset D$ stable par N et φ . On note $\mathbb{V}_{\text{st}}(D)$ (respectivement $\mathbb{V}_{\text{st}}^r(D)$) le noyau de l'application naturelle $\mathbb{X}_{\text{st}}(D) \rightarrow \mathbb{X}_{\text{dR}}(D)$ (respectivement de $\mathbb{X}_{\text{st}}^r(D) \rightarrow \mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D)$) et $V_{\text{st}}(D)$ (respectivement $V_{\text{st}}^r(D)$) les C -points de ces espaces.

Proposition 2.3.15. [16, (10.11)] *On suppose que $t_H(D') \leq t_N(D')$ pour tout $D' \subset D$ stable par N et φ . Alors l'application $\mathbb{B}_{\text{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_{\text{st}}(D) \rightarrow \mathbb{B}_{\text{st}} \otimes_F D_{\text{st}}$ est injective.*

On suppose de plus qu'il existe r tel que $F^{r+1} D_{\text{dR}} = 0$ et on note $r(D)$ le plus petit entier r pour cette propriété.

Proposition 2.3.16. [16, (10.14)] *On a $\mathbb{V}_{\text{st}}^r(D) = \mathbb{V}_{\text{st}}(D)$ pour $r \geq r(D)$ (et en particulier, $\mathbb{V}_{\text{st}}(D)$ est de dimension finie).*

On peut maintenant montrer le lemme :

Lemme 2.3.17. [21, (5.19)] *Si $\iota : D_{\text{st}} \otimes_F K \rightarrow D_{\text{dR}}$ est un isomorphisme et si $t_H(D) = t_N(D)$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (a) $V_{\text{st}}(D)$ est de dimension finie sur \mathbb{Q}_p ,
- (b) l'application $X_{\text{st}}^r(D) \rightarrow X_{\text{dR}}^r(D)$ est surjective pour $r = r(D)$,
- (c) l'application $X_{\text{st}}^r(D) \rightarrow X_{\text{dR}}^r(D)$ est surjective pour $r \geq r(D)$.

De plus, si ces conditions sont vérifiées alors D est faiblement admissible et

$$\dim_{\mathbb{Q}_p}(V_{\text{st}}(D)) = \dim_F(D_{\text{st}}).$$

Démonstration. Si $V_{\text{st}}(D)$ est de dimension finie, alors pour $r \geq r(D)$, $V_{\text{st}}^r(D) = \mathbb{V}_{\text{st}}^r(D)(C)$ est de dimension finie et donc $\dim(\ker(\mathbb{X}_{\text{st}}^r(D) \rightarrow \mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D))) = 0$ pour $r \geq r(D)$. Mais l'hypothèse $t_H(D) = t_N(D)$ entraîne $\dim(\mathbb{X}_{\text{st}}^r(D)) = \dim(\mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D))$ et donc par (2.3.13), on obtient $\dim(\text{coker}(\mathbb{X}_{\text{st}}^r(D) \rightarrow \mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D))) = 0$. Montrons que cela implique que $\text{coker}(\mathbb{X}_{\text{st}}^r(D) \rightarrow \mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D)) = 0$. L'espace $\mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D)$ vérifie les conditions de (2.3.14) et donc $\text{Im}(\mathbb{X}_{\text{st}}^r(D) \rightarrow \mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D))$ est de hauteur positive. Mais comme $\mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D)$ est de hauteur nulle, on a

$$\text{ht}(\text{Im}(\mathbb{X}_{\text{st}}^r(D) \rightarrow \mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D))) = -\text{ht}(\text{coker}(\mathbb{X}_{\text{st}}^r(D) \rightarrow \mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D)))$$

et donc $\text{ht}(\text{coker}(\mathbb{X}_{\text{st}}^r(D) \rightarrow \mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D))) \leq 0$. Or $\dim(\text{coker}(\mathbb{X}_{\text{st}}^r(D) \rightarrow \mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D))) = 0$ implique $\text{ht}(\text{coker}(\mathbb{X}_{\text{st}}^r(D) \rightarrow \mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D))) \geq 0$ et on obtient finalement

$$\text{ht}(\text{coker}(\mathbb{X}_{\text{st}}^r(D) \rightarrow \mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D))) = \dim(\text{coker}(\mathbb{X}_{\text{st}}^r(D) \rightarrow \mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D))) = 0.$$

On en déduit que $X_{\text{st}}^r(D) \rightarrow X_{\text{dR}}^r(D)$ est surjective pour $r \geq r(D)$.

Réciproquement, si $X_{\text{st}}^r(D) \rightarrow X_{\text{dR}}^r(D)$ est surjective pour $r = r(D)$, montrons que $\dim(\mathbb{V}_{\text{st}}^r(D))$ est nul. On a toujours $\dim(\mathbb{X}_{\text{st}}^r(D)) = \dim(\mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D))$ donc il suffit de vérifier $\dim(\text{coker}(\mathbb{X}_{\text{st}}^r(D) \rightarrow \mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D))) = 0$. Mais c'est immédiat puisque les C -points de $\text{coker}(\mathbb{X}_{\text{st}}^r(D) \rightarrow \mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D))$ sont nuls par hypothèse. On obtient donc que $V_{\text{st}}^r(D) = V_{\text{st}}$ est de dimension finie sur \mathbb{Q}_p .

Déterminons maintenant cette dimension. Elle est égale à $\text{ht}(\mathbb{V}_{\text{st}}^r(D))$ (pour $r \geq r(D)$) et on a vu que $\text{coker}(\mathbb{X}_{\text{st}}^r(D) \rightarrow \mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D))$ et $\mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D)$ sont de hauteurs nulles. Donc $\text{ht}(\text{Im}(\mathbb{X}_{\text{st}}^r(D) \rightarrow \mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D))) = 0$ et

$$\text{ht}(\mathbb{V}_{\text{st}}^r(D)) = \text{ht}(\mathbb{X}_{\text{st}}^r(D)).$$

Il reste à voir que D est faiblement admissible, c'est-à-dire que $t_N(D') \geq t_H(D')$ pour tout $D' \subset D$ stable par φ et N . Supposons qu'il existe D' tel que $t_H(D') > t_N(D')$. Alors $\dim(\mathbb{X}_{\text{st}}^r(D')) > \dim(\mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D'))$ donc

$$\dim(\ker(\mathbb{X}_{\text{st}}^r(D') \rightarrow \mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D'))) > \dim(\text{coker}(\mathbb{X}_{\text{st}}^r(D') \rightarrow \mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D')))$$

et on en déduit que $V_{\text{st}}(D')$ est de dimension infinie sur \mathbb{Q}_p , contradiction. \square

Proposition 2.3.18. [21, (5.20)] *Supposons qu'il existe un ensemble de triplets $D^i = (D_{\text{st}}^i, D_{\text{dR}}^i, \iota^i)$ avec D^i comme ci-dessus, $F^{i+1}D_{\text{dR}}^i = 0$ et ι^i bijective. On suppose de plus que pour tout r , on a une suite exacte longue*

$$\dots \rightarrow H^i(r) \rightarrow X_{\text{st}}^r(D^i) \rightarrow X_{\text{dR}}^r(D^i) \rightarrow H^{i+1}(r) \rightarrow \dots$$

où $H^i(r)$ est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie pour $r \geq i$.

Alors les D^i sont faiblement admissibles pour $i \geq 0$ et $H^i(r) = V_{\text{st}}(D^i)$ pour tout $r \geq i$.

Démonstration. Soit $r \geq i + 1$, comme $H^i(r)$ et $H^{i+1}(r)$ sont de dimension finie,

$$\dim(\ker(\mathbb{X}_{\text{st}}^r(D^i) \rightarrow \mathbb{X}_{\text{dR}}^r(D^i))) = \dim(\text{coker}(X_{\text{st}}^r(D^i) \rightarrow X_{\text{dR}}^r(D^i))) = 0$$

et donc $\dim(\mathbb{X}_{\text{st}}^r(D^i)) = \dim(X_{\text{dR}}^r(D^i))$ et $t_N(D^i) = t_H(D^i)$. On a aussi que $V_{\text{st}}(D^i)$ est de dimension finie (puisque pour r assez grand, il est égal à $V_{\text{st}}^r(D^i) \subset H^i(r)$) et on peut donc utiliser le lemme 2.3.17 pour obtenir que D^i est faiblement admissible et que les applications $X_{\text{st}}^r(D^i) \rightarrow X_{\text{dR}}^r(D^i)$ sont surjectives pour $r \geq r(D^i)$.

Soit $r - 1 \geq i$ (par hypothèse, on a alors $r \geq r(D^i)$). La suite exacte longue se scinde en suites exactes courtes

$$0 \rightarrow H^i(r) \rightarrow X_{\text{st}}^r(D^i) \rightarrow X_{\text{dR}}^r(D^i) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow H^r(r) \rightarrow X_{\text{st}}^r(D^r) \rightarrow X_{\text{dR}}^r(D^r).$$

On obtient finalement que $H^i(r) = V_{\text{st}}(D^i)$ pour tout $i \leq r$. □

Remarque 2.3.19. Il est en fait ici inutile de supposer ι^i bijective puisqu'on peut montrer que cela découle de l'hypothèse $\dim_{\mathbb{Q}_p}(H^i(r))$ finie (voir [21, (5.20)(i)]).

Preuve de la proposition (2.3.12). Le (φ, N) -module filtré $(H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}), H_{\text{dR}}^i(\mathfrak{X}_K), \iota_{\text{HK}})$ vérifie les conditions de la proposition précédente (les groupes de cohomologie syntomique étant finis par comparaison avec les groupes de cohomologie étale). Il suffit donc de voir que pour D comme ci-dessus la flèche naturelle $\mathbb{B}_{\text{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_{\text{st}}(D) \rightarrow \mathbb{B}_{\text{st}} \otimes_F D_{\text{st}}$ est bijective. Mais elle est injective par la proposition 2.3.15 et par le lemme 2.3.17, la dimension du \mathbb{Q}_p -espace vectoriel $V_{\text{st}}(D)$ est égale à celle du F -espace vectoriel D_{st} . On obtient bien l'isomorphisme voulu. □

Chapitre 3

Faisceaux syntomiques et cycles proches p -adiques

On se place dans la situation de l'exemple 2.1.6. On considère \mathfrak{X} un schéma formel à réduction semi-stable sur \mathcal{O}_K : on a donc que localement \mathfrak{X} s'écrit $\mathrm{Spf}(R)$ avec R la complétion d'une algèbre étale sur

$$\mathcal{O}_K\{X_1, \dots, X_d, \frac{1}{X_1 \dots X_a}, \frac{\varpi}{X_{a+1} \dots X_{a+b}}\}$$

avec a, b, c et d des entiers tels que $a + b + c = d$ et on note D le diviseur à l'infini $D = \{X_{a+b+1} \dots X_d = 0\}$. On munit \mathfrak{X} de la log-structure donnée par $\mathcal{M} := \{g \in \mathcal{O}_X \mid g \text{ inversible en dehors de } D \cup \mathfrak{X}_k\}$ et on a alors que \mathfrak{X} est log-lisse sur \mathcal{O}_K^\times . On note $\mathfrak{X}_{C, \mathrm{tr}}$ le lieu de \mathfrak{X}_C où la log-structure est triviale : si $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(R)$ alors $\mathfrak{X}_{C, \mathrm{tr}} = \mathrm{Spec}(R_C) \setminus D_C$. On appelle i (respectivement j) l'immersion $\mathfrak{X}_k \hookrightarrow \mathfrak{X}$ (respectivement $\mathfrak{X}_{K, \mathrm{tr}} \hookrightarrow \mathfrak{X}$) et $\bar{i} : \mathfrak{X}_{\bar{k}} \hookrightarrow \mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}$ (respectivement $\bar{j} : \mathfrak{X}_{C, \mathrm{tr}} \hookrightarrow \mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}$) le changement de base associé. On considère $\mathcal{S}_n(r)_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}}$ le faisceau syntomique géométrique associé à \mathfrak{X} et $\bar{i}^* R^k \bar{j}_* \mathbb{Z}/p^n(r)'_{\mathfrak{X}_{C, \mathrm{tr}}}$ le faisceau de cycle proche où $\mathbb{Z}/p^n(r)' := \frac{1}{p^{a(r)}} \mathbb{Z}/p^n(r)$ avec $r = (p-1)a(r) + b(r)$, $0 \leq b(r) < (p-1)$. Le but de ce chapitre est de montrer le théorème :

Théorème 3.0.1. *Pour tout $0 \leq k \leq r$, il existe un quasi-isomorphisme*

$$\alpha_{r,n}^0 : \mathcal{H}^k(\mathcal{S}_n(r)_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}}) \rightarrow \bar{i}^* R^k \bar{j}_* \mathbb{Z}/p^n(r)'_{\mathfrak{X}_{C, \mathrm{tr}}}$$

est un p^N -isomorphisme pour une constante N qui dépend de p et de r , mais pas de \mathfrak{X} ni de n .

3.1 Résultat local

On commence par prouver une version locale du théorème 3.0.1. On suppose donc que \mathfrak{X} s'écrit $\mathrm{Spf}(R_0)$ avec R_0 la complétion p -adique d'une algèbre étale sur

$$\mathcal{O}_K\{X_1, \dots, X_d, \frac{1}{X_1 \dots X_a}, \frac{\varpi}{X_{a+1} \dots X_{a+b}}\}$$

et on écrit $\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C} := \mathrm{Spf}(R)$. Dans la suite, on note $R_{\square} := \mathcal{O}_C\{X_1, \dots, X_d, \frac{1}{X_1 \dots X_a}, \frac{\varpi}{X_{a+1} \dots X_{a+b}}\}$.

3.1.1 Modèles locaux

On considère les anneaux de Fontaine $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ et $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ et on rappelle qu'on a les éléments suivants :

$\varepsilon = (1, \zeta_p, \zeta_{p^2}, \dots) \in \mathcal{O}_C^b$ (où ζ_{p^n} désigne une racine primitive p^n -ième de l'unité)

$$\mu = [\varepsilon] - 1, \quad t = \log(1 + \mu) \quad \text{et} \quad \xi = \frac{\mu}{\varphi^{-1}(\mu)}.$$

On a une application surjective $\theta : \mathbb{A}_{\mathrm{cris}} \rightarrow \mathcal{O}_C$ de noyau engendré par ξ . On munit $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ de la log-structure donnée par $([\varpi^b])$: on a alors une immersion exacte de log-schémas formels $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_C) \hookrightarrow \mathrm{Spf}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}})$. On note $F^r \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ la filtration sur $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ donnée par les puissances divisées de ξ .

On définit

$$R_{\mathrm{inf}, \square}^+ := \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}\{X, \frac{1}{X_1 \dots X_a}, \frac{[\varpi^b]}{X_{a+1} \dots X_{a+b}}\}.$$

$R_{\mathrm{inf}, \square}^+$ est complet pour la topologie (p, ξ) -adique. On va relever $R_{\square} \rightarrow R$ en un morphisme étale $R_{\mathrm{inf}, \square}^+ \rightarrow R_{\mathrm{inf}}^+$. Pour cela, on écrit $R := R_{\square}\{Z_1, \dots, Z_s\}/(Q_1, \dots, Q_s)$ avec $\det(\frac{\partial Q_j}{\partial Z_i})$ inversible dans R . Soient \tilde{Q}_j des relevés des Q_j dans $R_{\mathrm{inf}, \square}^+$. On note R_{inf}^+ la complétion (p, ξ) -adique de

$$R_{\mathrm{inf}, \square}^+[Z_1, \dots, Z_s]/(\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_s)$$

et $\det(\frac{\partial \tilde{Q}_j}{\partial Z_i})$ est inversible dans $R_{\mathrm{inf}, \square}^+$ (car il l'est modulo ξ et $R_{\mathrm{inf}, \square}^+$ est ξ -adiquement complet).

On note $R_{\mathrm{cris}, \square}^+$ (respectivement R_{cris}^+) l'anneau $R_{\mathrm{inf}, \square}^+ \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}} \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ (resp. $R_{\mathrm{inf}}^+ \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}} \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$).

On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spf}(R) & \hookrightarrow & \mathrm{Spf}(R_{\mathrm{cris}}^+) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spf}(R_{\square}) & \hookrightarrow & \mathrm{Spf}(R_{\mathrm{cris}, \square}^+) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_C) & \hookrightarrow & \mathrm{Spf}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}) \end{array}$$

On munit $\mathrm{Spf}(R_{\mathrm{cris}, \square}^+)$ (respectivement $\mathrm{Spf}(R_{\mathrm{cris}}^+)$) de la log-structure induite par $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathrm{Spf}(R_{\square})$ (respectivement R). On a alors que ces deux log-schémas formels sont log-lisses sur $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ et que

$$\mathrm{Spf}(R) \hookrightarrow \mathrm{Spf}(R_{\mathrm{cris}}^+)$$

est une immersion exacte.

On note R_{cris} la complétion p -adique de $R_{\mathrm{cris}}^+[\frac{1}{[\varpi^b]}]$.

Enfin, R_{cris}^+ admet une filtration donnée par $F^r R_{\mathrm{cris}}^+ := R_{\mathrm{inf}}^+ \widehat{\otimes} F^r \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$.

3.1.2 Complexe syntomique local

Via les quasi-isomorphismes (2.1), la cohomologie cristalline $R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X})_n$ et sa filtration en degré r sont calculées par les complexes $R\Gamma((\mathfrak{X}_n/\mathbb{A}_{\text{cris},n})_{\text{cris}}, \mathcal{O})$ et $R\Gamma((\mathfrak{X}_n/\mathbb{A}_{\text{cris},n})_{\text{cris}}, \mathcal{J}^{[r]})$. Comme $\tilde{\mathfrak{X}} := \text{Spf}(R_{\text{cris}}^+)$ est un relèvement log-lisse de \mathfrak{X} sur \mathbb{A}_{cris} et que $\mathfrak{X} \hookrightarrow \tilde{\mathfrak{X}}$ est exacte on obtient des quasi-isomorphismes naturels

$$R\Gamma((\mathfrak{X}_n/\mathbb{A}_{\text{cris},n})_{\text{cris}}, \mathcal{O}) \cong \Omega_{R_{\text{cris},n}^+}^\bullet \quad \text{et} \quad R\Gamma((\mathfrak{X}_n/\mathbb{A}_{\text{cris},n})_{\text{cris}}, \mathcal{J}^{[r]}) \cong F^r \Omega_{R_{\text{cris},n}^+}^\bullet$$

où $R_{\text{cris},n}^+$ est la réduction modulo p^n de R_{cris}^+ et

$$F^r \Omega_{R_{\text{cris},n}^+}^\bullet := F^r R_{\text{cris},n}^+ \rightarrow F^{r-1} \Omega_{R_{\text{cris},n}^+}^1 \rightarrow F^{r-2} \Omega_{R_{\text{cris},n}^+}^2 \rightarrow \dots$$

En particulier, on a $R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X}, \mathcal{J}^{[r]}) \cong F^r \Omega_{R_{\text{cris}}^+}^\bullet$ et $R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X}) \cong \Omega_{R_{\text{cris}}^+}^\bullet$ et on en déduit que $R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)$ et $R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_n$ sont calculés par les complexes :

$$\text{Syn}(R_{\text{cris}}^+, r) := [F^r \Omega_{R_{\text{cris}}^+}^\bullet \xrightarrow{p^r - \varphi} \Omega_{R_{\text{cris}}^+}^\bullet] \quad \text{et} \quad \text{Syn}(R_{\text{cris}}^+, r)_n := [F^r \Omega_{R_{\text{cris},n}^+}^\bullet \xrightarrow{p^r - \varphi} \Omega_{R_{\text{cris},n}^+}^\bullet].$$

Soit \bar{R} l'extension maximale de R telle que $\bar{R}[\frac{1}{p}]/R[\frac{1}{p}]$ est non ramifiée en dehors de D . On note $G_R := \text{Gal}(\bar{R}/R)$. Le but des sections suivantes est de montrer la version géométrique du théorème (4.14) de [21] :

Théorème 3.1.1. *Il existe des p^N -quasi-isomorphismes :*

$$\alpha_r^0 : \tau_{\leq r} \text{Syn}(R_{\text{cris}}^+, r) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r))$$

$$\alpha_{r,n}^0 : \tau_{\leq r} \text{Syn}(R_{\text{cris}}^+, r)_n \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}/p^n(r))$$

où N est une constante qui ne dépend que de r .

Remarque 3.1.2. On verra plus loin que ce résultat implique le théorème global (3.0.1). Justifions que dans le cas où $\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C} := \text{Spf}(R)$, la cohomologie de Galois $R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r))$ calcule bien la cohomologie étale $R\Gamma_{\text{ét}}(\text{Sp}(R), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. Cela vient du fait que l'affinoïde $\text{Spa}(R, R)$ est un espace $K(\pi, 1)$ pour les coefficients de torsion. Plus précisément, Scholze a montré le théorème suivant :

Théorème 3.1.3. [45, Th. (4.9)] *Soient $X := \text{Spa}(A, A^+)$ un $\text{Spa}(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p)$ -espace adique affinoïde noethérien connexe, \mathbb{L} un système local de p -torsion sur $X_{\text{ét}}$ et \bar{x} un point géométrique de X . On a un isomorphisme naturel*

$$H^k(\pi_1(X, \bar{x}), \mathbb{L}_{\bar{x}}) \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^k(X, \mathbb{L})$$

(où $H^k(\pi_1(X, \bar{x}), \mathbb{L}_{\bar{x}})$ est la cohomologie continue du groupe profini fondamental étale $\pi_1(X, \bar{x})$).

Expliquons rapidement comment ce résultat est obtenu. Comme les recouvrements finis étales de X sont équivalents aux ensembles finis munis d'une action continue de $\pi_1(X, \bar{x})$ et en utilisant la proposition (3.7) de [45], on est ramené à montrer que le morphisme $H^i(X_{\text{fét}}, \mathbb{L}) \rightarrow H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{L})$ induit par la projection naturelle $u : X_{\text{ét}} \rightarrow X_{\text{fét}}$ (où $X_{\text{fét}}$ désigne le site fini étale de X) est un isomorphisme i.e. $u_*\mathbb{L} = \mathbb{L}$ et $R^i u_*\mathbb{L} = 0$ pour $i > 0$. Pour cela, il suffit de trouver un recouvrement fini étale de X tel que les éléments de $H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{L})$ sont nuls sur ce recouvrement et, quitte à se placer sur un recouvrement qui trivialise \mathbb{L} , on peut supposer $\mathbb{L} = \mathbb{F}_p$. En utilisant le théorème de presque pureté ([44, Th. (7.9)(iii)]), Scholze construit un système de recouvrements finis étales $X_i := \text{Spa}(A_i, A_i^+)$ de X et un affinoïde perfectoïde X_∞ tel que $X_\infty \sim \varprojlim_i X_i$ (voir [44, Def. (7.14)] pour la définition). On a alors $H_{\text{ét}}^k(X_\infty, \mathbb{L}) = \varinjlim_i H_{\text{ét}}^k(X_i, \mathbb{L})$ pour tout $k \geq 0$ ([44, Cor. (7.18)]) et il suffit de vérifier que $H_{\text{ét}}^k(X_\infty, \mathbb{L}) = 0$ pour $k > 0$. On utilise l'équivalence de sites $X_{\infty, \text{ét}} \cong X_{\infty, \text{ét}}^b$ ([44, Th. (1.11)]) pour se placer sur le site étale du basculé X_∞^b de X_∞ . On déduit de la suite exacte d'Artin-Schreier $0 \rightarrow \mathbb{F}_p \rightarrow \mathcal{O}_{X_\infty^b} \rightarrow \mathcal{O}_{X_\infty^b} \rightarrow 0$ et du fait que $H^k(X_{\infty, \text{ét}}, \mathcal{O}_{X_\infty^b}^b) = 0$ pour $k > 0$ que $H_{\text{ét}}^k(X_\infty, \mathbb{F}_p) = 0$ pour tout $k \geq 2$. Puis pour $k = 1$, le résultat se déduit du fait que le basculé \hat{A}_∞^b de la complétion \hat{A}_∞ de A_∞ n'a que des recouvrements finis étales triviaux (par le lemme (7.5) et la proposition (5.25) de [44]) et de la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathbb{F}_p \rightarrow \hat{A}_\infty^b \rightarrow \hat{A}_\infty^b \rightarrow H_{\text{ét}}^1(X_\infty, \mathbb{F}_p) \rightarrow 0.$$

3.2 Anneaux de périodes

Pour la preuve de (3.1.1), on a besoin de définir une notion d'anneaux de périodes $(\mathbb{A}_{\text{inf}}, \mathbb{A}_{\text{cris}}, \dots)$ sur \bar{R} et R . Les suites exactes prouvées dans les sections suivantes joueront notamment un rôle important dans la suite.

3.2.1 Définitions des anneaux

On reprend ici la construction des anneaux de périodes donnée dans [21, §2.4].

Les anneaux $\mathbb{E}_{\bar{R}}$, $\mathbb{A}_{\bar{R}}$ et $\mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R})$

La complétion p -adique $\widehat{\bar{R}}$ de \bar{R} est une algèbre perfectoïde et on peut définir les anneaux :

$$\mathbb{E}_{\bar{R}}^+ := \varprojlim_{x \rightarrow \varphi(x)} (\widehat{\bar{R}}/p) \text{ et } \mathbb{A}_{\bar{R}}^+ := W(\mathbb{E}_{\bar{R}}^+)$$

$$\mathbb{E}_{\bar{R}} = \mathbb{E}_{\bar{R}}^+[\frac{1}{[p^b]}] \text{ et } \mathbb{A}_{\bar{R}} = W(\mathbb{E}_{\bar{R}}).$$

On rappelle qu'on a les éléments :

$$\varepsilon = (1, \zeta_p, \zeta_{p^2}, \dots) \in \mathcal{O}_C^b, \quad \mu = [\varepsilon] - 1, \quad t = \log(1 + \mu) \quad \text{et} \quad \xi = \frac{\mu}{\varphi^{-1}(\mu)}.$$

On définit $v_{\mathbb{E}} : \mathbb{E}_{\overline{R}} \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ par $v_{\mathbb{E}}(x_0, x_1, x_2, \dots) = v_p(x_0)$. On a (voir [3, §2.10]) :

1. $v_{\mathbb{E}}(x) = +\infty$ si et seulement si $x = 0$,
2. $v_{\mathbb{E}}(xy) \geq v_{\mathbb{E}}(x) + v_{\mathbb{E}}(y)$,
3. $v_{\mathbb{E}}(x + y) \geq \min(v_{\mathbb{E}}(x), v_{\mathbb{E}}(y))$ avec égalité si $v_{\mathbb{E}}(x) \neq v_{\mathbb{E}}(y)$,
4. $v_{\mathbb{E}}(\varphi(x)) = pv_{\mathbb{E}}(x)$.

On définit un morphisme surjectif :

$$\theta : \begin{cases} \mathbb{A}_{\overline{R}}^+ & \rightarrow \widehat{\overline{R}} \\ \sum_{k \in \mathbb{N}} p^k [x_k] & \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} p^k x_k^{(0)} \end{cases}$$

où $[\cdot] : \mathbb{E}_{\overline{R}} \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{R}}$ est le relèvement de Teichmüller et $x_k = (x_k^{(0)}, \dots, x_k^{(n)}, \dots)$. On a de plus que le noyau de θ est principal engendré par ξ (ou par $\xi_0 := p - [p^{\flat}]$).

On peut aussi munir $\mathbb{A}_{\overline{R}}$ de la topologie faible dont un système fondamental de voisinages de 0 est donné par les $U_{n,h} := p^n \mathbb{A}_{\overline{R}} + \mu^h \mathbb{A}_{\overline{R}}$.

On définit $\mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$ comme la complétion p -adique de $\mathbb{A}_{\overline{R}}^+[\frac{\xi^k}{k!}, k \in \mathbb{N}]$ et on le munit de la filtration $F^\bullet \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$ où $F^r \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$ est l'idéal de $\mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$ engendré par les $\frac{\xi^k}{k!}$ pour $k \geq r$. On définit $\mathbb{B}_{\text{cris}}^+ = \mathbb{A}_{\text{cris}}[\frac{1}{p}]$ et $\mathbb{B}_{\text{cris}} = \mathbb{B}_{\text{cris}}^+[\frac{1}{t}]$ et on les munit de la filtration induite de celle de \mathbb{A}_{cris} . Soit $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+ = \varprojlim_r \mathbb{B}_{\text{cris}}^+ / F^r \mathbb{B}_{\text{cris}}^+$ et $\mathbb{B}_{\text{dR}} = \mathbb{B}_{\text{dR}}^+[\frac{1}{t}]$. On munit ces anneaux de la filtration donnée par les puissances de ξ . On note ensuite $\mathbb{B}_{\text{st}}^+ := \mathbb{B}_{\text{cris}}^+[u]$ où u est une variable. On étend l'action du Frobenius φ en posant $\varphi(u) = pu$. On définit une application de monodromie $N : \mathbb{B}_{\text{st}}^+ \rightarrow \mathbb{B}_{\text{st}}^+$ par $N = -\frac{d}{du}$. On a un plongement $\mathbb{B}_{\text{st}}^+ \hookrightarrow \mathbb{B}_{\text{dR}}^+$ donné par $u \mapsto u_{\varpi} := \log(\frac{[\varpi^{\flat}]}{\varpi})$ et qui permet d'induire l'action de G_K à \mathbb{B}_{st}^+ . Enfin, on note $\mathbb{B}_{\text{st}} = \mathbb{B}_{\text{cris}}[u_{\varpi}]$, l'anneau de période semi-stable.

Les anneaux $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0,v]}$, $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]}$ et $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}$

Pour $0 < u \leq v$, on définit les anneaux :

- $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]}$, la complétion p -adique de $\mathbb{A}_{\overline{R}}^+[\frac{[\beta]}{p}]$ pour β un élément de $\mathbb{E}_{\overline{R}}^+$ avec $v_{\mathbb{E}}(\beta) = \frac{1}{u}$.
- $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}$, la complétion p -adique de $\mathbb{A}_{\overline{R}}^+[\frac{p}{[\alpha]}, \frac{[\beta]}{p}]$ pour α et β des éléments de $\mathbb{E}_{\overline{R}}^+$ avec $v_{\mathbb{E}}(\alpha) = \frac{1}{v}$ et $v_{\mathbb{E}}(\beta) = \frac{1}{u}$.
- $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0,v]}$:= $\{x = \sum_{n \in \mathbb{N}} [x_n] p^n \in \mathbb{A}_{\overline{R}} \mid x_n \in \mathbb{E}_{\overline{R}}, v_{\mathbb{E}}(x_n) + \frac{n}{v} \rightarrow +\infty \text{ quand } n \rightarrow \infty\}$.

On définit une application $w_v : \mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0,v]}$ $\rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ par :

$$w_v(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = 0 \\ \inf_{n \in \mathbb{N}} (v v_{\mathbb{E}}(x_n) + n) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note ensuite $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0,v] +}$ l'ensemble des éléments x de $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0,v]}$ tels que $w_v(x) \geq 0$. L'anneau $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0,v]}$ est séparé et complet pour la topologie induite par w_v ([2, Prop. 4.3]).

Si $v \geq 1$, on a des injections

$$\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]} \hookrightarrow \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\overline{R}), \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]} \hookrightarrow \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\overline{R}) \text{ et } \mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0,v)} \hookrightarrow \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\overline{R}),$$

ce qui nous permet de définir des filtrations sur ces trois anneaux.

On note $\mathbb{A}^{[u]}$, $\mathbb{A}^{[u,v]}$ et $\mathbb{A}^{(0,v)}$ les anneaux précédents obtenus pour $R = \mathcal{O}_C$.

Proposition 3.2.1. *Supposons $u \leq 1 \leq v$. L'idéal $p^r F^r \mathbb{A}^{[u,v]}$ est inclus dans $\xi^r \mathbb{A}^{[u,v]} = \xi_0^r \mathbb{A}^{[u,v]}$ où $\xi_0 := p - [p^b]$.*

Démonstration. On rappelle d'abord qu'on a (voir [47, A2.13]) :

$$\mathbb{A}_{\text{inf}} \cap (\xi^r \mathbb{B}_{\text{dR}}^+) = \xi^r \mathbb{A}_{\text{inf}} = \xi_0^r \mathbb{A}_{\text{inf}}. \quad (3.1)$$

Soit maintenant x dans $F^r \mathbb{A}^{[u,v]} = (\xi^r \mathbb{B}_{\text{dR}}^+) \cap \mathbb{A}^{[u,v]}$. Par définition de $\mathbb{A}^{[u,v]}$, on peut écrire

$$x = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{p^n}{[\alpha^n]} + \sum_{n \geq 0} b_n \frac{[\beta^n]}{p^n}$$

avec $v_{\mathbb{E}}(\alpha) = \frac{1}{v}$ et $v_{\mathbb{E}}(\beta) = \frac{1}{u}$ et (a_n) et (b_n) des suites de \mathbb{A}_{inf} qui tendent vers 0. Pour simplifier, on note

$$A := \sum_{n \geq 0} a_n \frac{p^n}{[\alpha^n]} \text{ et } B := \sum_{n \geq 0} b_n \frac{[\beta^n]}{p^n}.$$

On montre d'abord que $p^r A$ est dans $\mathbb{A}_{\text{inf}} + \xi^r \mathbb{A}^{[u,v]}$. On a $\frac{p}{[\alpha]} = \frac{1}{1 + \frac{\xi_0}{p}} [\alpha']$ avec $v_{\mathbb{E}}(\alpha') = 1 - \frac{1}{v} \geq 0$. D'où, dans \mathbb{B}_{dR}^+ :

$$p^r \frac{p}{[\alpha]} = p^r \cdot \left(\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{\xi_0^n}{p^n} \right) \cdot [\alpha'] = \left(\sum_{0 \leq n < r} (-1)^n \xi_0^n p^{r-n} \right) \cdot [\alpha'] + \xi_0^r \cdot \left(\sum_{n \geq 0} (-1)^{n+r} \frac{\xi_0^n}{p^n} \right) \cdot [\alpha']$$

c'est-à-dire :

$$p^r \frac{p}{[\alpha]} = a + \xi_0^r \frac{(-1)^r}{1 + \frac{\xi_0}{p}} [\alpha'] = a + \xi_0^r \cdot (-1)^r \cdot \frac{p}{[\alpha]} \text{ avec } a \in \mathbb{A}_{\text{inf}}.$$

On en déduit le résultat.

Montrons ensuite que $p^r B$ est dans $\xi^r \mathbb{A}^{[u,v]}$. Comme pour le point précédent, on a $\frac{[\beta]}{p} = (1 + \frac{\xi_0}{p}) [\beta']$ avec $v_{\mathbb{E}}(\beta') = \frac{1}{u} - 1 \geq 0$. On peut alors écrire

$$B = \sum_{n \geq 0} b'_n [(\beta')^n] \frac{\xi_0^n}{p^n} \text{ avec } b'_n \in \mathbb{A}_{\text{inf}}$$

et on peut supposer que ξ_0 ne divise pas b'_n dans \mathbb{A}_{inf} .

Mais \mathbb{B}_{dR}^+ est un anneau de valuation discrète dont l'idéal maximal est donné par ξ : on note v_ξ sa valuation. Par hypothèse, on a $v_\xi(B) \geq r$. De plus, en utilisant (3.1), on voit que $v_\xi(b'_n[(\beta')^n] \frac{\xi_0^n}{p^n}) = n$ et donc $b'_n = 0$ pour tout $n < r$. On a alors

$$p^r B = p^r \cdot \left(\sum_{n \geq r} b'_n [(\beta')^n] \frac{\xi_0^n}{p^n} \right) = \xi_0^r \cdot \left(\sum_{n \geq 0} b'_{n+r} [(\beta')^{n+r}] \frac{\xi_0^n}{p^n} \right) \in \xi^r \mathbb{A}^{[u,v]}.$$

On obtient finalement que $p^r x$ est dans $\xi^r \mathbb{A}^{[u,v]}$ et donc $p^r F^r \mathbb{A}^{[u,v]} \subseteq \xi^r \mathbb{A}^{[u,v]}$. □

On utilisera plus loin le résultat suivant :

Proposition 3.2.2. [21, §2.4.2] *On a les inclusions :*

1. $\mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) \subseteq \mathbb{A}_R^{[u]}$ si $u \geq \frac{1}{p-1}$;
2. $\mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) \supseteq \mathbb{A}_R^{[u]}$ si $u \leq \frac{1}{p}$.

Démonstration. On écrit $[\beta] = [p^\flat]^{\frac{1}{u}} u_0$ avec u_0 une unité de \mathbb{A}_R^+ . On rappelle que $v_p(n!) = \frac{k-s_n}{p-1}$ où s_n est la somme des chiffres de n en base p .

On suppose $u \geq \frac{1}{p-1}$ et on va montrer que $[p^\flat]^{[n]} := \frac{[p^\flat]^n}{n!}$ est dans $\mathbb{A}_R^{[u]}$. Mais

$$[p^\flat]^{[n]} = \frac{[p^\flat]^n}{p^{\frac{n-s_n}{p-1}}} u_1 \text{ avec } u_1 \in (\mathbb{A}_R^+)^*$$

et

$$\left(\frac{[\beta]}{p} \right)^{\frac{n-s_n}{p-1}} = \frac{[p^\flat]^{\frac{1}{u} \frac{n-s_n}{p-1}}}{p^{\frac{n-s_n}{p-1}}} u_2 \text{ avec } u_2 \in (\mathbb{A}_R^+)^*.$$

Comme $\frac{1}{u} \frac{n-s_n}{p-1} \leq (n-s_n) \leq n$, on a bien $[p^\flat]^{[n]} \in \left(\frac{[\beta]}{p} \right)^{\frac{n-s_n}{p-1}} \mathbb{A}_R^+ \subseteq \mathbb{A}_R^{[u]}$.

Soit maintenant $u \leq \frac{1}{p}$. On veut montrer que $\left(\frac{[\beta]}{p} \right)^n$ est dans $\mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$. Or

$$\left(\frac{[\beta]}{p} \right)^n = \frac{[p^\flat]^{\frac{1}{u} n}}{p^n} u_3 \text{ avec } u_3 \in (\mathbb{A}_R^+)^*$$

et $\frac{1}{u} n \geq pn$ donc

$$\left(\frac{[\beta]}{p} \right)^n = \frac{[p^\flat]^{(pn)!} (pn)!}{(pn)! p^n} u_4 \text{ avec } u_4 \in (\mathbb{A}_R^+)^*.$$

Mais $v_p \left(\frac{(pn)!}{p^n} \right) = \frac{pn-s_{pn}}{p-1} - n \geq 0$ et donc $\left(\frac{[\beta]}{p} \right)^n$ est dans $\mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$. □

3.2.2 Suites exactes pour les anneaux $\mathbb{A}_{\overline{R}}$ et $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0,v]^+}$

Lemme 3.2.3. [3, 8.1.1] *Le morphisme $1 - \varphi : \mathbb{E}_{\overline{R}} \rightarrow \mathbb{E}_{\overline{R}}$ est surjectif.*

Démonstration. On a $\overline{R} = \varinjlim S$ où la limite est prise sur une chaîne maximale de R -algèbres normales S avec $S[\frac{1}{p}]$ extension finie étale de $R[\frac{1}{p}][X_{a+b+1}^{-1}, \dots, X_d^{-1}]$. Comme $\mathbb{E}_{\overline{R}}$ est le basculé de $\widehat{\overline{R}}$, on a $H_{\text{ét}}^1(\mathbb{E}_{\overline{R}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$. Mais la suite d'Artin-Schreier nous donne une injection :

$$0 \rightarrow \mathbb{E}_{\overline{R}}/(\varphi - 1)\mathbb{E}_{\overline{R}} \rightarrow H_{\text{ét}}^1(\mathbb{E}_{\overline{R}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

et donc $\mathbb{E}_{\overline{R}}/(\varphi - 1)\mathbb{E}_{\overline{R}} = 0$. \square

Théorème 3.2.4. [3, 8.1] *La suite*

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{R}} \xrightarrow{1-\varphi} \mathbb{A}_{\overline{R}} \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

est exacte.

Démonstration. $\mathbb{A}_{\overline{R}}$ est sans p -torsion et $\mathbb{A}_{\overline{R}}/p\mathbb{A}_{\overline{R}} = \mathbb{E}_{\overline{R}}$, il suffit donc de prouver qu'on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{E}_{\overline{R}} \xrightarrow{1-\varphi} \mathbb{E}_{\overline{R}} \rightarrow 0.$$

La surjectivité de $1 - \varphi$ est donnée par le lemme 3.2.3. Il reste à voir que $\ker(1 - \varphi) = \mathbb{F}_p$: cela découle du fait que $\mathbb{E}_{\overline{R}}$ est intègre (les éléments de \mathbb{F}_p sont les seules racines de $X^p - X$). \square

Lemme 3.2.5. [3, 8.1.1] *Pour x et y dans $\mathbb{E}_{\overline{R}}$ tels que $(1 - \varphi)(y) = x$, on a*

$$v_{\mathbb{E}}(y) = \begin{cases} v_{\mathbb{E}}(x) & \text{si } v_{\mathbb{E}}(y) > 0 \\ \frac{v_{\mathbb{E}}(x)}{p} & \text{si } v_{\mathbb{E}}(y) < 0 \end{cases}.$$

Démonstration. On a $v_{\mathbb{E}}(\varphi(y)) = pv_{\mathbb{E}}(y)$. Si $v_{\mathbb{E}}(y) < 0$, on a $pv_{\mathbb{E}}(y) < v_{\mathbb{E}}(y)$ donc $v_{\mathbb{E}}(y - \varphi(y)) = pv_{\mathbb{E}}(y)$ et on a le résultat. De même, si $v_{\mathbb{E}}(y) > 0$, $pv_{\mathbb{E}}(y) > v_{\mathbb{E}}(y)$ et alors $v_{\mathbb{E}}(y - \varphi(y)) = v_{\mathbb{E}}(y)$. \square

Théorème 3.2.6. *La suite*

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0,v]^+} \xrightarrow{1-\varphi} \mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0,\frac{v}{p}]^+} \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

est exacte.

Démonstration. Comme $\mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0,v]^+}$ et $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0,v]^+} \subseteq \mathbb{A}_{\overline{R}}$, il suffit de montrer la surjectivité de $1 - \varphi$. Soit x dans $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0,\frac{v}{p}]^+}$, on peut écrire $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} [x_n]p^n$ avec $w_{\frac{v}{p}}(x) \geq 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v}{p}v_{\mathbb{E}}(x_n) + n = +\infty$. Par le lemme 3.2.3, pour tout n de \mathbb{N} , il existe y_n dans $\mathbb{E}_{\overline{R}}$ tel que $x_n = (1 - \varphi)(y_n)$. On a de plus (par le lemme 3.2.5) :

$$v_{\mathbb{E}}(y_n) = \begin{cases} v_{\mathbb{E}}(x_n) & \text{si } v_{\mathbb{E}}(y_n) > 0 \\ \frac{v_{\mathbb{E}}(x_n)}{p} & \text{si } v_{\mathbb{E}}(y_n) < 0 \end{cases}.$$

Donc $vv_{\mathbb{E}}(y_n) + n \geq \frac{v}{p}v_{\mathbb{E}}(x_n) + n$ pour tout n et on en déduit que $y := \sum_{n \in \mathbb{N}} p^n [y_n]$ est dans $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0,v]^+}$. Comme $x = (1 - \varphi)(y)$, on a terminé. \square

Remarque 3.2.7. On montre de la même façon qu'on a la suite exacte : $0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{R}}^+ \xrightarrow{1-\varphi} \mathbb{A}_{\overline{R}}^+ \rightarrow 0$.

3.2.3 Suite exacte pour l'anneau \mathbb{A}_{cris}

Pour n dans \mathbb{N} , on écrit $n = a(n)(p-1) + b(n)$ avec $0 \leq b(n) \leq p-2$ et on note $t^{\{n\}} := \frac{t^n}{a(n)!p^{a(n)}}$. Alors, comme on a

$$\frac{t^n}{a(n)!p^{a(n)}} = t^{b(n)} \left(\frac{t^{p-1}}{p} \right)^{[a(n)]}$$

et que $\frac{t^{p-1}}{p}$ est dans $\mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$, on obtient que $t^{\{n\}}$ est dans $\mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$. Les éléments de $\mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$ peuvent de plus s'écrire de la façon suivante (voir [28, 5.2.7], [47, A3.3]) :

$$\mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) := \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n t^{\{n\}} \mid a_n \in \mathbb{A}_{\overline{R}}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \right\}. \quad (3.4)$$

Le but de cette partie est de prouver le théorème ([21, §2.4.3], [28, 5.3.6], [47, A3.26]) :

Théorème 3.2.8. *Pour tout $r \geq 0$, on a la suite exacte :*

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p t^{\{r\}} \rightarrow F^r \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) \xrightarrow{1-\frac{\varphi}{p^r}} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

On définit pour cela la filtration $I^{[s]} \mathbb{A}_{\overline{R}}$ sur $\mathbb{A}_{\overline{R}}$ par :

$$I^{[s]} \mathbb{A}_{\overline{R}} := \{x \in \mathbb{A}_{\overline{R}} \mid \varphi^n(x) \in F^s \mathbb{A}_{\overline{R}} \text{ pour tout } n \geq 0\}.$$

De même, on note $I^{[s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) := \{x \in \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) \mid \varphi^n(x) \in F^s \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) \text{ pour } n \geq 0\}$ et on vérifie qu'on a alors $I^{[s]} \mathbb{A}_{\overline{R}} = I^{[s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) \cap \mathbb{A}_{\overline{R}}$.

Remarque 3.2.9. 1. On peut montrer (voir [47, A3.19]) que, pour $0 \leq r < s$, les quotients $I^{[r]} \mathbb{A}_{\overline{R}} / I^{[s]} \mathbb{A}_{\overline{R}}$ et $I^{[r]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) / I^{[s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$ sont plats sur \mathbb{Z}_p .

2. Dans [47], Tsuji montre également : $I^{[s]} \mathbb{A}_{\overline{R}} = (\mu^s)$.

Plus explicitement, on peut décrire cette filtration de la façon suivante (voir [28, 5.3.1], [47, A3.20]) :

Proposition 3.2.10. *Soit $s \geq 0$.*

1. On a :

$$I^{[s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) = \left\{ \sum_{n \geq s} a_n t^{\{n\}} \mid a_n \in \mathbb{A}_{\overline{R}}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \right\}.$$

2. L'application $x \mapsto xt^{\{s\}}$ de $\mathbb{A}_{\overline{R}}$ dans $I^{[s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$ induit un isomorphisme :

$$\mathbb{A}_{\overline{R}}/(I^{[1]}A_{\overline{R}}) \xrightarrow{\sim} (I^{[s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})) / (I^{[s+1]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})).$$

Remarque 3.2.11. On a, de manière évidente :

$$\left\{ \sum_{n \geq s} a_n t^{\{n\}} \mid a_n \in \mathbb{A}_{\overline{R}}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \right\} \subseteq I^{[s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}).$$

Démonstration. On démontre le résultat par récurrence sur s .

Si $s = 0$, le premier point est donné par l'égalité (3.4). La surjectivité du morphisme se déduit de la remarque précédente et son injectivité vient du fait que :

$$I^{[s]} \mathbb{A}_{\overline{R}} = I^{[s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) \cap \mathbb{A}_{\overline{R}}.$$

On suppose qu'on a le résultat pour un entier s et on veut montrer :

$$I^{[s+1]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) = \left\{ \sum_{n \geq s+1} a_n t^{\{n\}} \mid a_n \in \mathbb{A}_{\overline{R}}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \right\}.$$

On note $I(s+1)$ le terme de droite. Il suffit de voir que $I^{[s+1]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) \subseteq I(s+1)$. Soit x dans $I^{[s+1]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$. Alors x est dans $I^{[s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$ et par l'hypothèse de récurrence, x s'écrit $\sum_{n \geq s} a_n t^{\{n\}}$ avec (a_n) une suite qui tend vers 0. En utilisant la remarque 3.2.11, on voit que $x = a_s t^{\{s\}}$ dans $(I^{[s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})) / (I^{[s+1]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}))$ donc $a_s t^{\{s\}} = 0$ modulo $(I^{[s+1]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}))$ et en utilisant l'injectivité du morphisme $y \mapsto yt^{\{s+1\}}$ de $\mathbb{A}_{\overline{R}} / (I^{[1]}A_{\overline{R}})$ dans $(I^{[s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})) / (I^{[s+1]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}))$, on en déduit que a_s est dans $I^{[1]}A_{\overline{R}}$. On peut alors écrire $a_s = \mu a$ avec a dans $\mathbb{A}_{\overline{R}}$ (remarque 3.2.10). On a donc :

$$a_s t^{\{s\}} = \mu a t^{\{s\}} = \left(\sum_{n \geq 1} a(n)! p^{a(n)} \frac{t^{\{n\}}}{n!} \right) t^{\{s\}} a$$

et comme $t^{\{n\}} t^{\{s\}}$ est dans $\mathbb{Z}_p t^{\{s+n\}}$, on obtient que $a_s t^{\{s\}}$ est dans $I(s+1)$. On en déduit $x \in I(s+1)$ et on a le premier point.

On montre maintenant que le morphisme $x \mapsto xt^{\{s+1\}}$ induit une bijection

$$\mathbb{A}_{\overline{R}} / (I^{[1]}A_{\overline{R}}) \xrightarrow{\sim} (I^{[s+1]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})) / (I^{[s+2]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})).$$

Il est surjectif par ce qu'on vient de faire, il reste à voir l'injectivité. Mais on a une application injective :

$$\begin{cases} F^{s+1} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) / F^{s+2} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) & \rightarrow \widehat{\overline{R}} \\ x \frac{\xi^{s+1}}{(s+1)!} & \mapsto \theta(x) \end{cases}.$$

Par définition de ξ , l'image de μ^{s+1} par cette application est $(s+1)! \cdot (\varepsilon^{\frac{1}{p}} - 1)^{s+1}$. On en déduit que si x est dans $\mathbb{A}_{\overline{R}}$ alors $xt^{\{s+1\}}$ est dans $F^{s+2} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$ si et seulement si $\theta(x) = 0$ i.e. $x \in F^1 \mathbb{A}_{\overline{R}}$. On conclut en appliquant ce résultat à tous les $\varphi^n(x)$. \square

Remarque 3.2.12. Pour $0 \leq r < s$, on peut montrer que $I^{[r]} \mathbb{A}_{\overline{R}}, I^{[r]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}), I^{[r]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})/I^{[s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$ et $I^{[r]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})/I^{[s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$ sont p -adiquement complets et séparés (voir [47, A3.27]).

Pour r et s des entiers positifs, on note $J^{[r,s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) = I^{[s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) \cap F^r \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$. Pour r fixé, $(J^{[r,s]})_s$ donne une filtration de $F^r \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$. La suite exacte (3.5) va se déduire des lemmes 3.2.13 et 3.2.14 suivants :

Lemme 3.2.13. *Pour $s < r$, on a un p^r -isomorphisme :*

$$p^r - \varphi : \frac{J^{[r,s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})}{J^{[r,s+1]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})} \xrightarrow{\sim} \frac{I^{[s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})}{I^{[s+1]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})}.$$

Démonstration. Par définition de $I^{[s]}$, on a

$$\varphi(I^{[s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) \cap F^r \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})) \subseteq I^{[s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$$

et donc le morphisme est bien défini.

On montre d'abord l'injectivité. Soit x dans $J^{[r,s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$ tel que $p^r x - \varphi(x)$ est dans $I^{[s+1]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$. On veut x dans $I^{[s+1]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$, c'est-à-dire, $\varphi^n(x)$ dans $F^{s+1} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$. Pour $n = 0$, cela découle de l'hypothèse $s < r$. On suppose maintenant que $\varphi^n(x)$ est dans $F^{s+1} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$ et on a $p^r \varphi^n(x) - \varphi^{n+1}(x) \in F^{s+1} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$ donc (par récurrence) $\varphi^{n+1}(x) \in F^{s+1} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$. Et on en déduit que le morphisme est injectif.

Montrons qu'il est surjectif. On rappelle qu'on a $\xi := \sum_{i=0}^{p-1} [\varepsilon^{\frac{i}{p}}]$ et on note $\pi_0 := \varphi(\xi) - p$. Comme ξ est un générateur de $\ker(\theta)$, on remarque que $\xi^{r-s} t^{\{s\}}$ est dans $J^{[r,s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$. On a de plus $\pi_0 = \xi^p = p! \xi^{[p]} = 0 \pmod{p \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})}$ et alors $\varphi(\xi^{r-s} t^{\{s\}}) = p^r (1 + \frac{\pi_0}{p})^{r-s} t^{\{s\}}$. Mais $[\varepsilon^{\frac{i}{p}}] - 1$ est dans $I^{[1]} \mathbb{A}_{\overline{R}}$ pour tout i donc (en utilisant que $\mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})/I^{[1]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$ est plat sur \mathbb{Z}_p) $\frac{\pi_0}{p}$ est dans $I^{[1]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$. On en déduit $\varphi(\xi^{r-s} t^{\{s\}}) = p^r t^{\{s\}} \pmod{I^{[s+1]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})}$ et on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \frac{J^{[r,s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})}{J^{[r,s+1]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})} & \xrightarrow{p^r - \varphi} & \frac{I^{[s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})}{I^{[s+1]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})} \\ \xi^{r-s} t^{\{s\}} \uparrow & & \uparrow t^{\{s\}} \\ \mathbb{A}_{\overline{R}} & \xrightarrow{p^r (\xi^{r-s} - \varphi)} & \mathbb{A}_{\overline{R}}/I^{[1]} \end{array}$$

La deuxième flèche verticale est un isomorphisme par ce qu'on a vu plus haut et on peut vérifier que la flèche du bas est p^r -surjective (voir [47, A3.33]) : on obtient que la flèche du haut est surjective. \square

Lemme 3.2.14. *La suite*

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p t^{\{r\}} \rightarrow \frac{J^{[r,r]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})}{J^{[r,r+1]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})} \xrightarrow{p^r - \varphi} \frac{I^{[r]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})}{I^{[r+1]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})} \rightarrow 0$$

est p^r -exacte.

Démonstration. Remarquons d'abord que $J^{[r,r]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) = I^{[r]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$ et $J^{[r,r+1]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) = I^{[r+1]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$. Il suffit donc de voir que

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p t^{\{r\}} \rightarrow \frac{I^{[r]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})}{I^{[r+1]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})} \xrightarrow{p^r - \varphi} \frac{I^{[r]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})}{I^{[r+1]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})} \rightarrow 0$$

est p^r -exacte. Par le deuxième point de la proposition 3.2.10, on se ramène à montrer que :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \frac{\mathbb{A}_{\overline{R}}}{I^{[1]} \mathbb{A}_{\overline{R}}} \xrightarrow{1-\varphi} \frac{\mathbb{A}_{\overline{R}}}{I^{[1]} \mathbb{A}_{\overline{R}}} \rightarrow 0$$

est exacte. On sait déjà (suite exacte (3.2)) qu'on a :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{R}} \xrightarrow{1-\varphi} \mathbb{A}_{\overline{R}} \rightarrow 0$$

et comme $\mathbb{Z}_p \cap I^{[1]} \mathbb{A}_{\overline{R}} = 0$, $1 - \varphi : I^{[1]} \mathbb{A}_{\overline{R}} \rightarrow I^{[1]} \mathbb{A}_{\overline{R}}$ est injective. D'où le résultat. \square

On peut maintenant montrer la suite exacte (3.5) :

Preuve du théorème 3.2.8. Il reste à vérifier que le morphisme :

$$p^r - \varphi : I^{[s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) \cap F^r \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) = I^{[s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) \rightarrow I^{[s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$$

est un p^r -isomorphisme pour $s > r$.

Or, si $x = \sum_{n \geq s} a_n t^{\{n\}}$ est dans $I^{[s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$ alors $\varphi(x) = p^s \sum_{n \geq s} p^{n-s} a_n t^{\{n\}}$ et donc $\varphi(I^{[s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})) \subseteq p^{r+1} I^{[s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$. D'où, modulo p , $1 - \frac{\varphi}{p^r}$ est un isomorphisme et comme $I^{[s]} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$ est p -adiquement complet et séparé, on en déduit le résultat. \square

3.2.4 Suites exactes pour les anneaux $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}$ et $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]}$

Dans cette partie, on utilise les suites exactes précédentes pour établir des résultats similaires pour $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}$ et $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]}$.

Théorème 3.2.15. [21, Lem. 2.23] *Soit u tel que $\frac{p-1}{p} \leq u \leq 1$ (et $u = \frac{1}{2}$ si $p = 2$).*

1. On a une suite p^{2r} -exacte :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p(r) \rightarrow (\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]})^{\varphi=p^r} \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]} / F^r \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

2. On a une suite p^{2r} -exacte :

$$0 \rightarrow (\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]})^{\varphi=p^r} \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]} \xrightarrow{p^r - \varphi} \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]} \rightarrow 0 \quad (3.7)$$

3. On a une suite p^{4r} -exacte :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p(r) \rightarrow F^r \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]} \xrightarrow{p^r - \varphi} \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]} \rightarrow 0. \quad (3.8)$$

Démonstration. L'exactitude de (3.8) va se déduire de celle des deux autres suites.

On déduit de (3.5) que la suite

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p(r) \rightarrow \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})^{\varphi=p^r} \rightarrow \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})/F^r \rightarrow 0 \quad (3.9)$$

est p^r -exacte. Supposons dans un premier temps que $p \geq 3$. On a alors $\frac{1}{p-1} \leq \frac{p-1}{p} \leq u$ et donc (proposition 3.2.2), on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p(r) & \longrightarrow & \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})^{\varphi=p^r} & \longrightarrow & \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})/F^r \longrightarrow 0 \\ & & \parallel \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p(r) & \longrightarrow & (\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]})^{\varphi=p^r} & \longrightarrow & \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]}/F^r \longrightarrow 0. \end{array}$$

On va montrer que les flèches verticales sont des p^r -isomorphismes. Il suffit de vérifier la p^r -surjectivité. Soit x dans $(\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]})^{\varphi=p^r}$. Alors $p^r x = \varphi(x)$ est dans $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[\frac{u}{p}]}$ et $\frac{u}{p} \leq \frac{1}{p}$ donc $p^r x$ est dans $\mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$ et on obtient un p^r -isomorphisme :

$$\mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})^{\varphi=p^r} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]})^{\varphi=p^r}.$$

Il reste à voir que $\mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})/F^r \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]}/F^r$ est p^r -surjective. Mais $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]}$ est la complétion de $\mathbb{A}_{\overline{R}}^+ \left[\frac{[\beta]}{p} \right]$ avec $v_{\mathbb{E}}(\beta) = \frac{1}{u}$ et, en écrivant $[\beta] = [p^b][\beta']$ avec $v_{\mathbb{E}}(\beta') = \frac{1}{u} - 1$, on a :

$$p^r \left(\frac{[\beta]}{p} \right)^n = p^r \left(\frac{[p^b] - p}{p} + 1 \right)^n [\beta']^n = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} ([p^b] - p)^k p^{r-k} \right) [\beta']^n.$$

Comme $F^r \mathbb{A}_{\overline{R}}^+ = ([p^b] - p)^r \mathbb{A}_{\overline{R}}^+$, on en déduit que $\mathbb{A}_{\overline{R}}^+/F^r \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]}/F^r$ (et donc $\mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})/F^r \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]}/F^r$) est p^r -surjective. Ceci termine la preuve de (3.6) pour $p \geq 3$.

Supposons $p = 2$. Le diagramme s'écrit

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p(r) & \longrightarrow & \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})^{\varphi=p^r} & \longrightarrow & \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})/F^r \longrightarrow 0 \\ & & \parallel \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p(r) & \longrightarrow & (\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]})^{\varphi=p^r} & \longrightarrow & \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]}/F^r \longrightarrow 0. \end{array}$$

Le même raisonnement que précédemment donne un p^r -isomorphisme :

$$(\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]})^{\varphi=p^r} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[pu]})^{\varphi=p^r}$$

et comme $\mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) \subseteq \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[pu]}$, on en déduit que la deuxième flèche horizontale est un p^r -isomorphisme. On montre de même que $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]}/F^r \rightarrow \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})/F^r$ est p^r -surjective. D'où le résultat pour $p = 2$.

On prouve ensuite que la suite (3.7) est exacte. Il suffit de montrer qu'elle est p^{2r} -exacte à droite. On a un p^r -isomorphisme :

$$\mathbb{A}_R^+ + [\beta]^r \mathbb{A}_R^{[u]} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_R^{[u]}$$

donc il suffit de vérifier que $p^r - \varphi$ est p^r -surjective sur \mathbb{A}_R^+ et sur $[\beta]^r \mathbb{A}_R^{[u]}$.

La surjectivité sur \mathbb{A}_R^+ vient de la suite exacte (3.2) si $r = 0$ et si $r > 0$, la série $-(1 + p^r \varphi^{-1} + p^{2r} \varphi^{-2} + \dots)$ converge vers un inverse de $(p^r \varphi^{-1} - 1)$.

Soit maintenant $x = [\beta]^r y$ avec y dans $\mathbb{A}_R^{[u]}$. On a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varphi([\beta]^r y)}{p^{nr}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} p^{p^n r - nr} \left(\frac{[\beta]}{p} \right)^{p^n r} \varphi^n(y)$$

et donc la série converge dans $\mathbb{A}_R^{[u]}$. On en déduit que $p^r - \varphi$ est p^r -surjective. \square

Théorème 3.2.16. *Soient u et v tels que $\frac{p-1}{p} \leq u \leq 1 \leq v$ (et $u = \frac{1}{2}$ si $p = 2$).*

1. *On a une suite p^{3r} -exacte :*

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p(r) \rightarrow (\mathbb{A}_R^{[u,v]})^{\varphi=p^r} \rightarrow \mathbb{A}_R^{[u,v]}/F^r \rightarrow 0 \quad (3.10)$$

2. *On a une suite p^{3r} -exacte :*

$$0 \rightarrow (\mathbb{A}_R^{[u,v]})^{\varphi=p^r} \rightarrow \mathbb{A}_R^{[u,v]} \xrightarrow{p^r - \varphi} \mathbb{A}_R^{[u,v]} \rightarrow 0 \quad (3.11)$$

3. *On a une suite p^{6r} -exacte :*

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p(r) \rightarrow F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]} \xrightarrow{p^r - \varphi} \mathbb{A}_R^{[u,v]} \rightarrow 0. \quad (3.12)$$

Démonstration. Il suffit de montrer les deux premiers résultats.

L'exactitude de (3.10) va se déduire de celle de (3.6) et des p^r -isomorphismes :

$$(\mathbb{A}_R^{[u]})^{\varphi=p^r} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{A}_R^{[u,v]})^{\varphi=p^r} \text{ et } \mathbb{A}_R^{[u]}/F^r \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_R^{[u,v]}/F^r.$$

On obtient le second par le même raisonnement que dans la preuve précédente (c'est-à-dire en écrivant :

$$\frac{p}{[\alpha]} = \left(1 + \frac{[p^b] - p}{p} \right)^{-1} [\alpha']$$

où $v_{\mathbb{E}}(\alpha) = \frac{1}{v}$ et $v_{\mathbb{E}}(\alpha') = 1 - \frac{1}{v}$). Pour la première application, il suffit ensuite de montrer qu'on a un isomorphisme :

$$(p^r - \varphi) : \mathbb{A}_R^{[u,v]}/\mathbb{A}_R^{[u]} \rightarrow \mathbb{A}_R^{[u, \frac{v}{p}]}/\mathbb{A}_R^{[u]}. \quad (3.13)$$

Mais comme on a

$$\mathbb{A}_R^{(0,v)^+}/\mathbb{A}_R^+ \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_R^{[u,v]}/\mathbb{A}_R^{[u]} \text{ et } \mathbb{A}_R^{(0, \frac{v}{p})^+}/\mathbb{A}_R^+ \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_R^{[u, \frac{v}{p}]}/\mathbb{A}_R^{[u]}$$

il suffit de voir que

$$(p^r - \varphi) : \mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0,v)+} / \mathbb{A}_{\overline{R}}^+ \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0, \frac{v}{p}]^+} / \mathbb{A}_{\overline{R}}^+$$

est un isomorphisme.

Si $r = 0$, cela vient des suites exactes (3.2) et (3.3). Si $r > 0$, comme dans la preuve précédente, la série $-(1 + p^r \varphi^{-1} + p^{2r} \varphi^{-2} + \dots)$ converge vers un inverse de $(p^r \varphi^{-1} - 1)$.

La suite exacte (3.11) découle de l'isomorphisme (3.13) et de la suite (3.7). \square

3.2.5 Anneaux de convergence et morphisme de Frobenius

La proposition suivante est donnée dans [21, §2.1], on l'utilise pour définir un morphisme de Frobenius sur les anneaux utilisés. On considère $\lambda : \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$ un morphisme d'anneaux topologiques et Λ'_1 la complétion d'une Λ_1 -algèbre étale :

$$\Lambda'_1 := \Lambda_1\{Z_1, \dots, Z_s\} / (Q_1, \dots, Q_s)$$

avec $J := (\frac{\partial Q_j}{\partial Z_i})_{1 \leq i, j \leq s}$ inversible.

Notation. Si $F = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^s} a_{\mathbf{k}} Z^{\mathbf{k}}$ est une série dans un anneau $\Lambda_1\{Z\}$, on note F^λ la série $\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^s} \lambda(a_{\mathbf{k}}) Z^{\mathbf{k}}$.

Proposition 3.2.17. [21, Prop. 2.1 et Rem. 2.2] *On suppose qu'il existe Z_λ dans Λ_2^s et I un idéal de Λ_2 tels que Λ_2 est séparé et complet pour la topologie I -adique et tels que les coordonnées de $Q^\lambda(Z_\lambda)$ sont dans I . Alors l'équation $Q^\lambda(Y) = 0$ admet une unique solution dans $Z_\lambda + I^s$ et on peut étendre λ de manière unique à Λ'_1 .*

On considère les anneaux :

$$R^{[u]} := \mathbb{A}^{[u]} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+, \quad R^{[u,v]} := \mathbb{A}^{[u,v]} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+, \quad R^{(0,v)+} := \mathbb{A}^{(0,v)+} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+.$$

On rappelle qu'on avait :

$$R_{\text{cris}, \square}^+ := \mathbb{A}_{\text{cris}}\{X, \frac{1}{X_1 \dots X_a}, \frac{\varpi}{X_{a+1} \dots X_{a+b}}\} \text{ et } R_{\text{cris}}^+ := \mathbb{A}_{\text{cris}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+.$$

Si φ est le Frobenius sur \mathbb{A}_{inf} , on étend φ à $R_{\text{inf}, \square}^+$ en posant $\varphi(X_i) = X_i^p$ pour i dans $\{1, \dots, d\}$. On utilise ensuite la proposition 3.2.17 pour l'étendre à R_{inf}^+ (prendre $\Lambda_1 = R_{\text{inf}, \square}^+$, $\Lambda_2 = \Lambda'_1 = R_{\text{inf}}^+$, $Z_\varphi = Z^p$ et $I = (p)$).

On définit φ sur $\mathbb{A}^{[u]}$, $\mathbb{A}^{[u,v]}$ et $\mathbb{A}^{(0,v)+}$ par :

$$\varphi\left(\frac{p}{[\alpha]}\right) = \frac{p}{[\alpha^p]}, \quad \varphi\left(\frac{[\beta]}{p}\right) = \frac{[\beta^p]}{p} \quad \text{et} \quad \varphi\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} [x_n] p^n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} [x_n^p] p^n$$

et on étend φ à $R^{[u]}$, $R^{[u,v]}$, $R^{(0,v)+}$ et R_{cris}^+ . On a alors :

$$\varphi(R^{[u]}) = R^{\left[\frac{u}{p}\right]}, \quad \varphi(R^{[u,v]}) = R^{\left[\frac{u}{p}, \frac{v}{p}\right]} \quad \text{et} \quad \varphi(R_{\varpi}^{(0,v)+}) = R^{\left(0, \frac{v}{p}\right)^+}.$$

On note ψ l'inverse de φ sur \mathbb{A}_{inf} . On va étendre ψ aux anneaux R_{inf} , R_{inf}^+ , R_{cris} , R_{cris}^+ , $R^{[u]}$, $R^{[u,v]}$ et $R^{(0,v)+}$.

Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ avec α_i dans $\{0, \dots, p-1\}$, on note

$$u_\alpha = X_1^{\alpha_1} \dots X_d^{\alpha_d}$$

et pour j dans $\{1, \dots, d\}$,

$$\partial_j = X_j \frac{\partial}{\partial X_j}.$$

La même preuve que [21, §2.2.7] donne le lemme et le corollaire suivants :

Lemme 3.2.18. [21, Lem. 2.7] *Tout élément x de R_{inf}/p s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_\alpha c_\alpha(x)$ avec $c_\alpha(x) = x_\alpha^p u_\alpha$ pour un x_α dans R_{inf}/p .*

De plus, si x est dans R_{inf}^+/p alors $c_\alpha(x)$ et x_0 sont dans R_{inf}^+/p .

Corollaire 3.2.19. [21, Cor. 2.8] *Tout élément x de R_{inf} s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_\alpha c_\alpha(x)$ avec $c_\alpha(x) = \varphi(x_\alpha) u_\alpha$ pour un x_α dans R_{inf} .*

De plus, si x est dans R_{inf}^+ alors x_0 est dans R_{inf}^+ et $\partial_j c_\alpha(x) - \alpha_j c_\alpha(x) \in pR_{\text{inf}}^+$.

On définit alors ψ sur R_{inf}^+ par : $\psi(x) = \varphi^{-1}(c_0(x))$. L'application ψ n'est pas un morphisme d'anneau, mais on a $\psi \circ \varphi(x) = x$ et plus généralement, $\psi(\varphi(x)y) = x\psi(y)$ pour x et y dans R_{inf}^+ .

On étend ensuite ψ à R_{cris} , R_{cris}^+ , $R^{[u]}$, $R^{[u,v]}$ et $R^{(0,v)+}$ et on obtient des applications surjectives :

$$\psi : R^{[u]} \rightarrow R^{[pu]}, \quad R^{[u,v]} \rightarrow R^{[pu,pv]} \quad \text{et} \quad R^{(0,v)+} \rightarrow R^{(0,pv)+}.$$

Remarque 3.2.20. Comme dans [21], on peut voir que les applications $x \mapsto c_\alpha(x)$ donnent des décompositions :

$$S = \bigoplus_\alpha S_\alpha \quad \text{et} \quad S^{\psi=0} = \bigoplus_{\alpha \neq 0} S_\alpha$$

pour $S \in \{R_{\text{inf}}, R_{\text{inf}}^+, R_{\text{cris}}, R_{\text{cris}}^+, R^{[u]}, R^{[u,v]}, R^{(0,v)+}\}$. On a de plus $\partial_j = \alpha_j$ sur S_α/pS_α .

3.3 Passage de R_{cris}^+ à $R^{[u,v]}$

La première étape dans la preuve du théorème 3.1.1 est de construire un quasi-isomorphisme entre le complexe $\text{Syn}(R_{\text{cris}}^+, r)$ et un complexe $C(R^{[u,v]}, r)$ défini à partir de l'anneau $R^{[u,v]}$.

Dans cette partie, on suppose $u \geq \frac{1}{p-1}$ de telle sorte que $\mathbb{A}_{\text{cris}} \subseteq \mathbb{A}^{[u]} \subseteq \mathbb{A}^{[u,v]}$. Si $S = R^{[u]}$ (respectivement $R^{[u,v]}$), on écrit $S' = R^{[u]}$ (respectivement $R^{[u, \frac{u}{p}]}$) et $S'' = R^{[pu]}$ (respectivement $R^{[pu,v]}$). On note Ω_S^\bullet le complexe de de Rham de S sur \mathbb{A}_{cris} . Pour i dans $\{1, \dots, d\}$, on note $J_i = \{(j_1, \dots, j_i) \mid 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_i \leq d\}$ et $\omega_i = \frac{dX_i}{X_i}$. Si \mathbf{j} est dans J_i , on écrit $\omega_{\mathbf{j}} = \omega_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_i}$. On étend φ à Ω_S^i par

$$\varphi\left(\sum_{\mathbf{j} \in J_i} f_{\mathbf{j}} \omega_{\mathbf{j}}\right) = \sum_{\mathbf{j} \in J_i} \varphi(f_{\mathbf{j}}) \omega_{\mathbf{j}}.$$

On définit ensuite le complexe $C(S, r) := [F^r \Omega_S^\bullet \xrightarrow{p^r - p^\bullet \varphi} \Omega_{S'}^\bullet]$. Enfin, on étend ψ à Ω_S^i en posant $\psi(\sum_{j \in J_i} f_j \omega_j) = \sum_{j \in J_i} \psi(f_j) \omega_j$ et on note $C^\psi(S, r) := [F^r \Omega_S^\bullet \xrightarrow{p^r \psi - p^\bullet} \Omega_{S''}^\bullet]$

Le p^{10r} -quasi-isomorphisme $\tau_{\leq r} C(R_{\text{cris}}^+, r) \rightarrow \tau_{\leq r} C(R^{[u,v]}, r)$ (voir (3.14) ci-dessous) s'obtient de manière similaire à son analogue arithmétique (section §3.2 de [21]). Les principales différences viennent du fait qu'on ne dispose pas de la variable arithmétique X_0 qui permet de donner une interprétation des anneaux considérés en termes de séries de Laurent (sur l'anneau $W(k)$) ou de définir ψ de telle sorte à ce qu'il soit "suffisamment" topologiquement nilpotent. La démonstration se fait en trois parties. On montre dans un premier temps qu'on a un p^{8r} -quasi-isomorphisme $\text{Syn}(R_{\text{cris}}^+, r) \xrightarrow{\sim} C(R^{[u]}, r)$. Contrairement au cas arithmétique, si f est un élément de $R^{[u]}$, on n'a pas, a priori, une décomposition $f = f_1 + f_2$ avec f_1 dans $F^r R^{[u]}$ et f_2 tel que $p^r f_2$ est dans R_{inf}^+ (voir [21, Rem. 2.6]) : au lieu de cela, on utilise ici la p^{2r} -exactitude de la suite (3.6) (voir lemme 3.3.2). L'étape suivante consiste à passer du complexe $C(R^{[u]}, r)$ au complexe $C^\psi(R^{[u]}, r)$. Enfin, on montre que l'inclusion $R^{[u]} \hookrightarrow R^{[u,v]}$ induit un p^{2r} -quasi-isomorphisme sur les complexes tronqués $\tau_{\leq r} C^\psi(S, r)$. La preuve diffère ici de celle de [21] dans la mesure où la série $\sum_{n \geq 1} \psi^n(x)$ pour x dans $R^{[u,v]}/R^{[u]}$ ne converge pas nécessairement pour notre définition de ψ . Il reste vrai, cependant, que $\psi - 1$ est surjective sur $\mathbb{A}^{(0,v)+}$, ce qui permet de conclure (voir lemme 3.3.7).

3.3.1 Disque de convergence

On commence par montrer qu'on a un p^{8r} -quasi-isomorphisme $\text{Syn}(R_{\text{cris}}^+, r) \xrightarrow{\sim} C(R^{[u]}, r)$.

Lemme 3.3.1. [21, Lem. 3.1] *Soit f dans $R^{[u]}$ tel que $f = \sum_{n \geq N} x_n \frac{[\beta]^n}{p^n}$ pour un N dans \mathbb{N} et soit s dans \mathbb{Z} . Si $N \geq \frac{s}{p-1}$ alors il existe g dans $\mathbb{A}^{[u]}$ tel que $f = (1 - p^{-s} \varphi)(g)$.*

Démonstration. On a :

$$p^{-ks} \varphi^k(f) = \sum_{n \geq N} p^{-ks-n+p^k n} \varphi^k(x_n) \frac{[\beta]^{p^k n}}{p^{p^k n}}.$$

Et comme $-ks - N + p^k N$ tend vers l'infini quand k tend vers l'infini, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} p^{-ks} \varphi^k(f)$ converge dans $R^{[u]}[\frac{1}{p}]$. On a de plus,

$$N \geq \frac{s}{p-1} \geq \frac{ks}{p^k - 1}$$

et donc $-ks - N + p^k N \geq 0$. □

Comme dans [21, Lem. 3.2], on utilise le lemme ci-dessus pour montrer les isomorphismes suivants :

Lemme 3.3.2. *Soient r dans \mathbb{N} et u et u' des réels tels que $\frac{1}{p-1} \leq u \leq 1$ et $u' \leq u \leq pu'$. Alors,*

1. L'application $p^r - p^i\varphi$ induit un p^{4r} -isomorphisme $F^r\Omega_{R^{[u]}}^i/F^r\Omega_{R_{\text{cris}}^+}^i \xrightarrow{\sim} \Omega_{R^{[u]}}^i/\Omega_{R_{\text{cris}}^+}^i$.
2. L'application $p^r - p^i\varphi$ induit un p^{4r} -isomorphisme $F^r\Omega_{R^{[u]}}^i/F^r\Omega_{R^{[u']}}^i \xrightarrow{\sim} \Omega_{R^{[u]}}^i/\Omega_{R^{[u']}}^i$.

Démonstration. Comme on a $\varphi(\omega_{\mathbf{j}}) = \omega_{\mathbf{j}}$ pour \mathbf{j} dans J_i , il suffit de montrer que $p^r - p^i\varphi$ induit un p^{4r} -isomorphisme : $F^r R^{[u]}/F^r R_{\text{cris}}^+ \xrightarrow{\sim} R^{[u]}/R_{\text{cris}}^+$ (respectivement $F^r R^{[u]}/F^r R^{[u']} \xrightarrow{\sim} R^{[u]}/R^{[u']}$). On note $A = R^{[u']}$ ou R_{cris}^+ et $B = R^{[u]}$.

On montre d'abord l'injectivité. Soit f dans $F^r B$ tel que $(p^r - p^i\varphi)(f)$ est dans A . Il suffit de voir que $p^r f$ est dans A : c'est bien le cas car $p^r f = (p^r - p^i\varphi)(f) + p^i\varphi(f)$ et $\varphi(B) \subseteq A$.

Il reste à voir que l'application est surjective. Soit f dans B : on peut écrire $f = f_1 + f_2$ avec

$$f_1 = \sum_{n < N} x_n \frac{[\beta]^n}{p^n} \text{ et } f_2 = \sum_{n \geq N} x_n \frac{[\beta]^n}{p^n}$$

où $N = \lfloor \frac{r-i}{p-1} \rfloor$ et $x_n \in R_{\text{inf}}^+$ tend vers 0 en l'infini. On a alors que $p^r f_1$ est dans A . Par le lemme précédent, il existe g dans B tel que $f_2 = (1 - p^{i-r})(g)$. En utilisant la suite p^{2r} -exacte (3.6) :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p(r) \rightarrow (\mathbb{A}^{[u]})^{\varphi=p^r} \rightarrow \mathbb{A}^{[u]}/F^r \rightarrow 0$$

on remarque que pour tout élément y de $\mathbb{A}^{[u]}$ on a $p^{2r}y = y_1 + y_2$ avec y_1 dans $(\mathbb{A}^{[u]})^{\varphi=p^r}$ et y_2 dans $F^r \mathbb{A}^{[u]}$. Mais on a un p^r -isomorphisme (voir preuve de (3.6)) :

$$(\mathbb{A}_{\text{cris}})^{\varphi=p^r} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{A}^{[u]})^{\varphi=p^r}$$

et donc $p^r y_1$ est dans \mathbb{A}_{cris} (respectivement dans $\mathbb{A}^{[u']}$).

Comme $R^{[u]} = \mathbb{A}^{[u]} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+$, on peut donc écrire $p^{2r}g = g_1 + g_2$ avec $p^r g_1$ dans A et g_2 dans $F^r B$. On obtient :

$$p^{4r}f = p^{4r}f_1 + (p^r - p^i\varphi)(p^r g_1 + p^r g_2)$$

et donc, modulo A , on a $p^{4r}f = (p^r - p^i\varphi)(p^r g_2)$, ce qui termine la démonstration. \square

Corollaire 3.3.3. *Pour u et u' comme précédemment, on a :*

1. L'injection $R_{\text{cris}}^+ \subseteq R^{[u]}$ induit un p^{8r} -quasi-isomorphisme $C(R_{\text{cris}}^+, r) \xrightarrow{\sim} C(R^{[u]}, r)$.
2. L'injection $R^{[u']} \subseteq R^{[u]}$ induit un p^{8r} -quasi-isomorphisme $C(R^{[u']}, r) \xrightarrow{\sim} C(R^{[u]}, r)$.

3.3.2 Passage de φ à ψ

On rappelle qu'on a $C^\psi(R^{[u]}, r) := [F^r \Omega_{R^{[u]}}^\bullet \xrightarrow{p^r \psi - p^\bullet} \Omega_{R^{[pu]}}^\bullet]$.

Lemme 3.3.4. [21, Lem. 3.4] *On a un quasi-isomorphisme $C(R^{[u]}, r) \xrightarrow{\sim} C^\psi(R^{[u]}, r)$ donné par le diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} F^r \Omega_{R^{[u]}}^\bullet & \xrightarrow{p^r - p^\bullet \varphi} & \Omega_{R^{[u]}}^\bullet \\ \downarrow \text{Id} & & \downarrow \psi \\ F^r \Omega_{R^{[u]}}^\bullet & \xrightarrow{p^r \psi - p^\bullet} & \Omega_{R^{[pu]}}^\bullet \end{array}$$

Démonstration. La preuve est identique à celle du cas arithmétique traité dans [21]. Comme les flèches verticales dans le diagramme ci-dessus sont surjectives, il reste à vérifier que les groupes de cohomologie du complexe :

$$0 \rightarrow (R^{[u]})^{\psi=0} \rightarrow (\Omega_{R^{[u]}}^1)^{\psi=0} \rightarrow (\Omega_{R^{[u]}}^2)^{\psi=0} \rightarrow \dots$$

sont nuls. On écrit ensuite

$$(\Omega_{R^{[u]}}^i)^{\psi=0} = (R^{[u]})^{\psi=0} \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega^i$$

avec $\Omega^j = \bigoplus_{1 \leq j \leq d} \mathbb{Z} \frac{dX_j}{X_j}$ et $\Omega^i = \wedge^i \Omega^1$ et on utilise la décomposition

$$(R^{[u]})^{\psi=0} = \bigoplus_{\alpha \in \{0, \dots, p-1\}^d, \alpha \neq 0} (R^{[u]})_{\alpha}$$

donnée par la remarque 3.2.20. On est ramené à montrer que le complexe

$$0 \rightarrow (R^{[u]})_{\alpha} \rightarrow (R^{[u]})_{\alpha} \otimes \Omega^1 \rightarrow (R^{[u]})_{\alpha} \otimes \Omega^1 \rightarrow \dots$$

est acyclique pour tout $\alpha \neq 0$. Il suffit de le vérifier modulo p et toujours d'après 3.2.20, on voit que ce complexe correspond au complexe total associé à un cube de dimension d dont les sommets sont égaux à $(R^{[u]})_{\alpha}$ et les flèches dans la direction i sont données par les α_i .

Par exemple, si $d = 1$ on aura :

$$(R^{[u]})_{\alpha} \xrightarrow{\alpha_1} (R^{[u]})_{\alpha}$$

et si $d = 2$:

$$\begin{array}{ccc} (R^{[u]})_{\alpha} & \xrightarrow{\alpha_1} & (R^{[u]})_{\alpha} \\ \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_2 \\ (R^{[u]})_{\alpha} & \xrightarrow{\alpha_1} & (R^{[u]})_{\alpha} \end{array}$$

Comme $\alpha \neq 0$, un des α_i au moins est inversible et le complexe est acyclique. □

Remarque 3.3.5. La même preuve donne que le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F^r \Omega_{R^{[u,v]}}^{\bullet} & \xrightarrow{p^r - p^{\bullet} \varphi} & \Omega_{R^{[u, \frac{v}{p}]}}^{\bullet} \\ \downarrow \text{Id} & & \downarrow \psi \\ F^r \Omega_{R^{[u,v]}}^{\bullet} & \xrightarrow{p^r \psi - p^{\bullet}} & \Omega_{R^{[pu, v]}}^{\bullet} \end{array}$$

induit un quasi-isomorphisme $C(R^{[u,v]}, r) \xrightarrow{\sim} C^{\psi}(R^{[u,v]}, r)$.

3.3.3 Anneaux de convergence

On passe maintenant de l'anneau $R^{[u]}$ à $R^{[u,v]}$.

Lemme 3.3.6. *Soient u et v tels que $\frac{1}{p-1} \leq u \leq 1 \leq v$. Alors on a un p^r -isomorphisme :*

$$F^r R^{[u,v]} / F^r R^{[u]} \xrightarrow{\sim} R^{[u,v]} / R^{[u]}.$$

Démonstration. Comme on a $R^{[u,v]} = \mathbb{A}^{[u,v]} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+$, le morphisme ci-dessus est donné par :

$$F^r \mathbb{A}^{[u,v]} / F^r \mathbb{A}^{[u]} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+ \rightarrow \mathbb{A}^{[u,v]} / \mathbb{A}^{[u]} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+$$

et, comme dans [21, Lem 3.5], il suffit de montrer le résultat pour $R = \mathcal{O}_C$. Comme $\mathbb{A}^{[u,v]}$ est la complétion de $\mathbb{A}_{\text{inf}} \left[\frac{p}{[\alpha]}, \frac{[\beta]}{p} \right]$ et $\mathbb{A}^{[u]}$ est celle de $\mathbb{A}_{\text{inf}} \left[\frac{[\beta]}{p} \right]$, il suffit de montrer que $p^r \frac{p}{[\alpha]}$ est dans l'image : c'est le cas puisqu'on a

$$\frac{p}{[\alpha]} = \left(1 + \frac{[p^\flat] - p}{p} \right)^{-1} [\alpha'] \text{ avec } v_p(\alpha') = 1 - \frac{1}{v}.$$

□

On peut maintenant montrer la version géométrique du lemme 3.6 de [21].

Lemme 3.3.7. *L'inclusion $R^{[u]} \hookrightarrow R^{[u,v]}$ induit un p^{2r} -quasi-isomorphisme :*

$$\tau_{\leq r} C^\psi(R^{[u]}, r) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} C^\psi(R^{[u,v]}, r).$$

Démonstration. L'application est induite par

$$\begin{array}{ccc} F^r \Omega_{R^{[u]}}^\bullet & \xrightarrow{p^r \psi - p^\bullet} & \Omega_{R^{[pu]}}^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^r \Omega_{R^{[u,v]}}^\bullet & \xrightarrow{p^r \psi - p^\bullet} & \Omega_{R^{[pu,v]}}^\bullet \end{array}$$

Pour montrer qu'on a un p^{2r} -quasi-isomorphisme $\tau_{\leq r} C^\psi(R^{[u]}, r) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} C^\psi(R^{[u,v]}, r)$, il suffit de voir qu'on a un p^{2r} -quasi-isomorphisme :

$$\tau_{\leq r} (F^r \Omega_{R^{[u,v]}}^\bullet / F^r \Omega_{R^{[u]}}^\bullet) \xrightarrow{p^r \psi - p^\bullet} \tau_{\leq r} (\Omega_{R^{[pu,v]}}^\bullet / \Omega_{R^{[pu]}}^\bullet).$$

Pour simplifier, on note

$$A^\bullet = (F^r \Omega_{R^{[u,v]}}^\bullet / F^r \Omega_{R^{[u]}}^\bullet) \text{ et } B^\bullet = (\Omega_{R^{[pu,v]}}^\bullet / \Omega_{R^{[pu]}}^\bullet).$$

On va prouver :

1. pour tout $i \leq r$, $F^r \Omega_{R^{[u,v]}}^i / F^r \Omega_{R^{[u]}}^i \xrightarrow{p^r \psi - p^i} \Omega_{R^{[pu,v]}}^i / \Omega_{R^{[pu]}}^i$ est un p^{2r} -isomorphisme ;
2. pour $i = r + 1$, le morphisme $p^r \psi - p^{r+1} : H^{r+1}(A^\bullet) \rightarrow H^{r+1}(B^\bullet)$ est p^{2r} -injectif.

Prouvons le point 1). Soit $i \leq r$. Comme on a $\psi(\sum_{j \in J_i} f_j \omega_j) = \sum_{j \in J_i} \psi(f_j) \omega_j$, on se ramène à prouver que $p^r \psi - p^i : F^r R^{[u,v]} / F^r R^{[u]} \rightarrow R^{[pu,v]} / R^{[pu]}$ est un p^{2r} -isomorphisme. Par le lemme précédent, il suffit de montrer que $p^r \psi - p^i : R^{[u,v]} / R^{[u]} \rightarrow R^{[pu,v]} / R^{[pu]}$ est un p^{2r} -isomorphisme.

Pour $i < r$, $1 - p^s \psi$ avec $s = r - i$ est inversible d'inverse $1 + p^s \psi + p^{2s} \psi^2 + \dots$ et donc $p^r \psi - p^i$ est un p^r -isomorphisme. Il reste à voir le cas $i = r$: on va montrer que $(\psi - 1) : R^{[u,v]} / R^{[u]} \rightarrow R^{[pu,v]} / R^{[pu]}$ est un isomorphisme.

On a

$$R^{[u,v]} / R^{[u]} = \mathbb{A}^{[u,v]} / \mathbb{A}^{[u]} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+ \cong \mathbb{A}^{(0,v)^+} / \mathbb{A}_{\text{inf}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+.$$

Si x est un monôme $aX_1^{\alpha_1} \dots X_d^{\alpha_d}$ de R_{inf}^+ avec $a \in \mathbb{A}_{\text{inf}}$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \neq 0$ alors, par construction de ψ , il existe k tel que $\psi^k(x) = 0$ et la série $x + \psi(x) + \psi^2(x) + \dots$ converge. Il suffit donc de vérifier que $\psi - 1$ est un isomorphisme de $\mathbb{A}^{(0,v)^+} / \mathbb{A}_{\text{inf}}$ dans lui-même.

L'injectivité se déduit des suites exactes :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{A}_{\text{inf}} \xrightarrow{\psi-1} \mathbb{A}_{\text{inf}} \rightarrow 0 \text{ et } 0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow A^{(0,v)^+} \xrightarrow{\psi-1} A^{(0,v)^+}$$

obtenues à partir des suites exactes (3.2) et (3.3).

Montrons que $1 - \psi : \mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0,v)^+} \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0,v)^+}$ est surjective. Soit x dans $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0,v)^+}$. Comme $(1 - \psi)$ est surjective de $\mathbb{A}_{\overline{R}}$ dans $\mathbb{A}_{\overline{R}}$, il existe y dans $\mathbb{A}_{\overline{R}}$ tel que $x = (1 - \psi)(y)$. On va montrer que $\psi(y)$ est dans $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0,v)^+}$ (et on aura en particulier que $y = x + \psi(y)$ est dans $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0,v)^+}$).

Écrivons $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} [x_n] p^n$ et $y = \sum_{n \in \mathbb{N}} [y_n] p^n$, on a l'égalité

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} [x_n] p^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} ([y_n] - [y_n^{\frac{1}{p}}]) p^n.$$

On veut montrer que $v_{\mathbb{E}} \frac{v_{\mathbb{E}}(y_n)}{p} + n$ tend vers l'infini et que $v_{\mathbb{E}}(y_n) \geq -\frac{pn}{v}$. Il suffit de vérifier que $v_{\mathbb{E}}(y_n) \geq -\frac{n}{v}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: on aura alors

$$v_{\mathbb{E}}(y_n) \geq \frac{-n}{v} > \frac{-pn}{v} \text{ et } v_{\mathbb{E}} \frac{v_{\mathbb{E}}(y_n)}{p} + n \geq \frac{p-1}{p} n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Pour $n = 0$, on a $x_0 = y_0 - y_0^{\frac{1}{p}}$. Si $v_{\mathbb{E}}(y_0) < 0$ alors $v_{\mathbb{E}}(y_0) < v_{\mathbb{E}}(y_0^{\frac{1}{p}})$ et $v_{\mathbb{E}}(y_0) = v_{\mathbb{E}}(x_0) \geq 0$, contradiction. Donc $v_{\mathbb{E}}(y_0) \geq 0$.

Soit n dans \mathbb{N} . Supposons que pour tout $i \leq n$, $v_{\mathbb{E}}(y_i) \geq -\frac{n}{v}$. Dans $\mathbb{A}_{\overline{R}}$, on a

$$-([x_{n+1}] - [y_{n+1}] + [y_{n+1}^{\frac{1}{p}}]) p^{n+1} = \left(\sum_{i \leq n} ([x_i] - [y_i] + [y_i^{\frac{1}{p}}]) p^i \right) + p^{n+2} \left(\sum_{i \geq n+2} ([x_i] - [y_i] + [y_i^{\frac{1}{p}}]) p^{i-(n+2)} \right).$$

En divisant par p^{n+1} et en projetant dans $\mathbb{E}_{\overline{R}}$, on obtient que $x_{n+1} - y_{n+1} + y_{n+1}^{\frac{1}{p}}$ est l'image de

$$\frac{1}{p^{n+1}} \sum_{i \leq n} ([x_i] - [y_i] + [y_i^{\frac{1}{p}}]) p^i$$

dans $\mathbb{E}_{\overline{R}}$. Mais par hypothèse de récurrence $[\alpha^n](\sum_{i \leq n} ([x_i] - [y_i] + [y_i^{\frac{1}{p}}]p^i) \in \mathbb{A}_{\overline{R}}^+ \cap p^{n+1}\mathbb{A}_{\overline{R}} = p^{n+1}\mathbb{A}_{\overline{R}}^+$ donc $\alpha^n(x_{n+1} - y_{n+1} + y_{n+1}^{\frac{1}{p}})$ est dans $\mathbb{E}_{\overline{R}}^+$. On obtient

$$v_{\mathbb{E}}(x_{n+1} - y_{n+1} + y_{n+1}^{\frac{1}{p}}) \geq \frac{-n}{v}.$$

Si $v_{\mathbb{E}}(y_{n+1}) \geq v_{\mathbb{E}}(x_{n+1})$ ou $v_{\mathbb{E}}(y_{n+1}) \geq 0$, on a fini. Si $v_{\mathbb{E}}(y_{n+1}) < v_{\mathbb{E}}(x_{n+1})$ et $v_{\mathbb{E}}(y_{n+1}) < 0$ alors

$$v_{\mathbb{E}}(y_{n+1}) = v_{\mathbb{E}}(x_{n+1} - y_{n+1} + y_{n+1}^{\frac{1}{p}}) \geq \frac{-n}{v} \geq \frac{-(n+1)}{v}.$$

On obtient finalement que $\psi - 1$ est un isomorphisme.

Montrons maintenant le point 2). On veut montrer que $\psi - p : H^{r+1}(A^\bullet) \rightarrow H^{r+1}(B^\bullet)$ est p^r -injectif. Par le quasi-isomorphisme prouvé en 3.3.4, il suffit de voir que le morphisme $1 - p\varphi : H^{r+1}(A^\bullet) \rightarrow H^{r+1}(B^\bullet)$ est injectif : c'est le cas puisqu'il est inversible (d'inverse $1 + p\varphi + p^2\varphi^2 + \dots$). Cela termine la démonstration. \square

Corollaire 3.3.8. *Si $pu \leq v$, on a un p^{2r} -quasi-isomorphisme :*

$$\tau_{\leq r}C(R^{[u]}, r) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r}C(R^{[u,v]}, r).$$

Démonstration. Le résultat se déduit des quasi-isomorphismes des lemmes 3.3.4, 3.3.7 et de la remarque 3.3.5. \square

En combinant les résultats de ces deux sections, on obtient un p^{10r} -quasi-isomorphisme :

$$\tau_{\leq r}C(R_{\text{cris}}^+, r) \rightarrow \tau_{\leq r}C(R^{[u,v]}, r). \quad (3.14)$$

3.4 Utilisation des (φ, Γ) -modules

Dans cette section, on définit un isomorphisme $R^{[u,v]} \cong \mathbb{A}_R^{[u,v]}$ où $\mathbb{A}_R^{[u,v]}$ est un anneau muni d'une action du groupe de Galois G_R . Cela va permettre de construire un quasi-isomorphisme entre le complexe $C(R^{[u,v]}, r)$ de la section précédente et un complexe de (φ, Γ) -modules $\text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{[u,v]})$ qui intervient dans le calcul de la cohomologie de Galois.

Comme dans [21, §4], la preuve se fait en deux étapes. Premièrement, en divisant par des puissances de t , on transforme l'action des différentielles ∂_i en une action d'une algèbre de Lie, $\text{Lie } \Gamma_R$: cela permet de se débarrasser de la filtration (c'est possible par le lemme 3.4.3 ci-dessous). On utilise ensuite que les opérateurs τ_i qui sont définis dans le paragraphe suivant et qui traduisent l'action du groupe Γ_R sur l'anneau $\mathbb{A}_R^{[u,v]}$ sont topologiquement nilpotents (pour la topologie μ -adique) pour passer de $\text{Lie } \Gamma_R$ à Γ_R .

Remarque 3.4.1. 1. Dans [21], Colmez-Nizioł ne travaillent pas ici avec leur complexe original $\text{Kum}(R_{\overline{\omega}}^{[u,v]}, r)$ mais avec un complexe quasi-isomorphe $\text{Cycl}(R_{\overline{\omega}}^{[u,v]}, r)$. Ce changement de complexe correspond à un changement de la variable *arithmétique* X_0 par une variable *cyclotomique* T sur laquelle on peut définir une action de Γ_R . Dans notre cas, les deux complexes sont confondus.

2. Dans [21], du fait de la variable supplémentaire T , l'algèbre de Lie obtenue $\text{Lie } R$ n'est pas commutative.

3.4.1 Plongement dans les anneaux de périodes

Pour chaque i de $\{1, \dots, d\}$, on choisit un élément $X_i^b = (X_i, X_i^{\frac{1}{p}}, \dots)$ dans $\mathbb{E}_{\overline{R}}$ et on définit un plongement de $R_{\text{inf}, \square}^+$ dans $\mathbb{A}_{\overline{R}}$ en envoyant X_i sur $[X_i^b]$. On étend le plongement à

$$R_{\text{inf}}^+ \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{R}}, \quad R_{\text{cris}}^+ \rightarrow \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}), \quad R^{[u]} \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]}, \quad R^{[u,v]} \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]} \quad \text{et} \quad R^{(0,v)+} \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0,v)+}.$$

On note \mathbb{A}_R (respectivement \mathbb{A}_R^+ , $\mathbb{A}_{\text{cris}}(R)$, \mathbb{A}_R^*) l'image de R_{inf} (respectivement R_{inf}^+ , R_{cris}^+ , R^* pour $\star \in \{[u], [u, v], (0, v)+\}$) par ce plongement. On peut alors définir une action du groupe G_R sur ces anneaux.

On considère :

$$R_m^\square := \mathcal{O}_C \left\{ X^{\frac{1}{p^m}}, \frac{1}{(X_1 \dots X_a)^{\frac{1}{p^m}}}, \frac{\varpi^{\frac{1}{p^m}}}{(X_{a+1} \dots X_{a+b})^{\frac{1}{p^m}}} \right\}$$

et on note R_∞^\square la complétion de $\varinjlim R_m^\square$. Soient $R_m = R_m^\square \widehat{\otimes} R$ et $R_\infty = R_\infty^\square \widehat{\otimes} R$.

On rappelle que $G_R := \text{Gal}(\overline{R}[\frac{1}{p}]/R[\frac{1}{p}])$. On note

$$\Gamma_R := \text{Gal}(R_\infty^\square[\frac{1}{p}]/R^\square[\frac{1}{p}]) = \text{Gal}(R_\infty[\frac{1}{p}]/R[\frac{1}{p}])$$

et on a $\Gamma_R \cong \mathbb{Z}_p^d$.

En résumé, on a :

$$\begin{array}{c} \overline{R}[\frac{1}{p}] \\ \uparrow \\ R_\infty[\frac{1}{p}] \\ \uparrow \\ R[\frac{1}{p}] \end{array} \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

G_R (sur la gauche) et Γ_R (sur la droite) agissent sur ces anneaux.

De plus, comme G_R agit sur $\mathbb{A}_{\overline{R}}$ (resp. $\mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$, $\mathbb{A}_{\overline{R}}^*$), il agit sur \mathbb{A}_R (resp. $\mathbb{A}_{\text{cris}}(R)$, \mathbb{A}_R^*) via Γ_R . Si on choisit des générateurs topologiques $\gamma_1, \dots, \gamma_d$ de Γ_R , cette action est donnée par

$$\gamma_k([X_k^b]) = [\varepsilon][X_k^b] \quad \text{et} \quad \gamma_j([X_k^b]) = [X_k^b] \quad \text{si } j \neq k.$$

Remarque 3.4.2. On note $\tau_j := \gamma_j - 1$. Précisons l'action des τ_j sur \mathbb{A}_R^+ . Comme les γ_j agissent trivialement sur \mathbb{A}_{inf} , on obtient que $\tau_j(R_{\text{inf}, \square}^+) \subseteq \mu R_{\text{inf}, \square}^+$. En utilisant la proposition 3.2.17 pour $\lambda = \gamma_j$, $I = (\mu)$ et $Z_\lambda = Z$, on obtient que $\gamma_j(Z)$ est dans $Z + (\mu)$ et en utilisant l'isomorphisme $\mathbb{A}_R^+ \cong R_{\text{inf}}^+$, on en déduit que $\tau_j(\mathbb{A}_R^+) \subseteq \mu \mathbb{A}_R^+$.

Comme on a $R^{[u,v]} = \mathbb{A}^{[u,v]} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+$, on a le même résultat pour $\mathbb{A}_R^{[u,v]}$.

3.4.2 Passage des (φ, ∂) -modules aux (φ, Γ) -modules

On commence par montrer le lemme suivant. Comme pour les preuves précédentes, on ne dispose pas ici de l'interprétation des anneaux $R^{[u]}$ et $R^{[u,v]}$ en anneaux de séries de Laurent. La démonstration se fait en travaillant directement avec les anneaux de périodes et en utilisant la description de la filtration $F^r \mathbb{A}^{[u,v]}$ donnée en 3.2.1.

Lemme 3.4.3. *Soit $\frac{v}{p} < 1 < v$. Alors, l'application $f \mapsto t^r f$ induit des p^{3r} -isomorphismes $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]} \rightarrow F^r \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}$ et $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u, \frac{v}{p}]} \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u, \frac{v}{p}]}$.*

Démonstration. Montrons d'abord la p^{3r} -surjectivité de $t^r : \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]} \rightarrow F^r \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}$. D'après la remarque 3.2.1, si y est un élément de $F^r \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}$, $p^r y$ s'écrit $\xi^r x$ avec x dans $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}$: il suffit donc de voir que t divise $p^2 \xi$ dans $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}$. Comme dans la preuve de la proposition 3.2.10, on écrit

$$\mu = \tilde{u}_0 t \quad \text{avec} \quad \tilde{u}_0 = \begin{cases} \sum_{n \geq 1} \frac{a(n)! p^{a(n)}}{n!} t^{\{n-1\}} & \text{si } b(n) \neq 0 \\ \sum_{n \geq 1} \frac{a(n)! p^{a(n)-1}}{n!} t^{\{n-1\}} & \text{si } b(n) = 0 \end{cases}$$

et on en déduit que μ et t engendrent les mêmes idéaux dans \mathbb{A}_{cris} (voir [28, 5.2.4]). Il suffit alors de vérifier que μ divise $p^2 \xi$. Mais, par définition, $\xi = \frac{\mu}{\mu_1}$ avec $\mu_1 = \varphi^{-1}(\mu)$: on va montrer que $\frac{p^2}{\mu_1}$ est dans $\mathbb{A}^{[u,v]}$.

Pour cela, on montre d'abord que $\mu = u_0 [\bar{\mu}]$ avec u_0 unité de $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0, \frac{v}{p}]^+}$. On suit la preuve de Andreatta-Brinon dans [2, 4.3(d)]. En utilisant que $\varphi(\mu) = (\mu + 1)^p - 1$, on vérifie qu'on a :

$$\mu = [\varepsilon] - 1 = [\bar{\mu}] + p[\alpha_1] + p^2[\alpha_2] + \dots \quad \text{avec } v_{\mathbb{E}}(\alpha_n) \geq v_{\mathbb{E}}(\varepsilon^{\frac{1}{p^n}} - 1) = \frac{1}{p^{n-1}(p-1)}.$$

Si on écrit $\alpha_n = \bar{\mu} a_n$ avec a_n dans \mathbb{E} , on a

$$v_{\mathbb{E}}(a_n) \geq \frac{1 - p^n}{p^{n-1}(p-1)} = - \sum_{k=0}^{n-1} p^{k-n+1}.$$

Donc pour tout n dans \mathbb{N}^\times , $\frac{v}{p} v_{\mathbb{E}}(a_n) + n \geq 0$. En notant $u_0 = 1 + p[a_1] + p^2[a_2] + \dots$, on obtient $w_{\frac{v}{p}}(u_0 - 1) > 0$ donc $w_{\frac{v}{p}}(u_0) = 0$ et u_0 est une unité de $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0, \frac{v}{p}]^+}$.

On montre de même que $\mu_1 = u_1 [\bar{\mu}_1]$ avec u_1 unité de $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0,v]^+}$ (et donc aussi de $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0, \frac{v}{p}]^+}$). On en déduit

$$\frac{p^2}{\mu_1} = \frac{p^2}{[\bar{\mu}_1]} u_1^{-1} \quad \text{avec } w_v\left(\frac{p^2}{[\bar{\mu}_1]}\right) = -\frac{v}{(p-1)} + 2 > -\frac{p}{p-1} + 2 > 0$$

et on obtient le résultat voulu.

La p^{3r} -surjectivité de $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u, \frac{v}{p}]} \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u, \frac{v}{p}]}$ s'obtient de la même façon.

On vérifie ensuite p^{3r} -injectivité. Soit f dans $\mathbb{A}_R^{[u,v]}$ tel que $t^r f = 0$, on veut montrer $p^{3r} f = 0$. Par ce qu'on a vu plus haut, $\mu^r f = 0 = [\bar{\mu}]^r u_0^r f$ avec u_0 unité de $\mathbb{A}_R^{(0, \frac{v}{p}]^+}$ donc $[\bar{\mu}]^r f = 0$. Enfin, on peut écrire $p^2 = [\bar{\mu}] \cdot x$ avec x dans $\mathbb{A}_R^{(0, \frac{v}{p}]^+}$: on a donc

$$p^{3r} f = px[\bar{\mu}]^r f = 0.$$

□

- Remarque 3.4.4.* 1. On en déduit qu'on a un p^{3r} -isomorphisme $\mathbb{A}_R^{[u,v]} \xrightarrow{\sim} F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]}$ (et $\mathbb{A}_R^{[u, \frac{v}{p}]} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_R^{[u, \frac{v}{p}]}$).
2. La même preuve montre que le morphisme $f \mapsto t^{r+1} f$ de $\mathbb{A}_R^{[u,v]} \rightarrow F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]}$ et $\mathbb{A}_R^{[u, \frac{v}{p}]} \rightarrow \mathbb{A}_R^{[u, \frac{v}{p}]}$ est $p^{2(r+1)}$ -injectif.
3. On va montrer que les applications précédentes induisent des p^{6r} -isomorphismes :

$$\mathbb{A}_R^{[u,v]}/p^n \rightarrow F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]}/p^n \text{ et } \mathbb{A}_R^{[u, \frac{v}{p}]} / p^n \rightarrow \mathbb{A}_R^{[u, \frac{v}{p}]} / p^n.$$

Pour cela, notons $A = \mathbb{A}_R^{[u,v]}$ (respectivement $\mathbb{A}_R^{[u, \frac{v}{p}]}$) et $B = F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]}$ (respectivement $\mathbb{A}_R^{[u, \frac{v}{p}]}$) et montrons que $x \mapsto t^r x$ induit un p^{6r} -isomorphisme de A/p^n dans B/p^n . La surjectivité découle du lemme précédent de manière évidente, montrons la p^{6r} -injectivité : soit x dans A tel que $t^r x = p^n y$ pour y dans B . On a ensuite $p^{3r} t^r x = p^n (p^{3r} y) = p^n (t^r z)$ avec z dans A (on utilise ici que la p^{3r} -surjectivité). Ainsi $t^r (p^{3r} x - p^n z)$ est nul et on déduit que $p^{3r} (p^{3r} x - p^n z) = 0$. On obtient que $p^{6r} x$ est nul modulo $p^n A$ et donc que t^r est p^{6r} -injective modulo p^n .

Dans la suite, pour simplifier, on note $S = \mathbb{A}_R^{[u,v]}$ et $S' = \mathbb{A}_R^{[u, \frac{v}{p}]}$. On rappelle qu'on a choisi $(\gamma_j)_{1 \leq j \leq d}$ des générateurs topologiques de $\Gamma_R \cong \mathbb{Z}_p^d$ et qu'on a défini $\partial_j := X_j \frac{\partial}{\partial X_j}$ et $J_i := \{(j_1, \dots, j_i) \mid 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_i \leq d\}$.

On note $\chi : G_R \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ le caractère cyclotomique. Pour tout g de G_R , on a $g \cdot t = \chi(g)t$. Si on note $S(r)$ l'anneau S muni de l'action de G_R tordue par χ , on obtient que la multiplication par t^r induit une application Galois-invariante $S(r) \rightarrow S$.

On définit les complexes :

$$\text{Kos}(\Gamma_R, S(r)) := S(r) \xrightarrow{(\gamma_j - 1)} S(r)^{J_1} \rightarrow \dots \rightarrow S(r)^{J_d},$$

$$\text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, S(r)) := [\text{Kos}(\Gamma_R, S(r)) \xrightarrow{1 - \varphi} \text{Kos}(\Gamma_R, S'(r))],$$

$$\text{Kos}(\partial, F^r S) := F^r S \xrightarrow{(\partial_j)} (F^{r-1} S)^{J_1} \rightarrow \dots \rightarrow (F^{r-d} S)^{J_d},$$

$$\text{Kos}(\varphi, \partial, F^r S) := [\text{Kos}(\partial, F^r S) \xrightarrow{p^r - p^\bullet \varphi} \text{Kos}(\partial, S')].$$

On a $C(S, r) \xrightarrow{\sim} \text{Kos}(\varphi, \partial, S)$ et en utilisant l'isomorphisme $R^{[u,v]} \xrightarrow{\sim} A_R^{[u,v]}$, on obtient $C(S, r) \xrightarrow{\sim} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r S)$.

Le but est maintenant de prouver la proposition suivante (voir [21, Prop. 4.2] pour l'analogie arithmétique) :

Proposition 3.4.5. 1. Il existe un p^{30r} -quasi-isomorphisme

$$\tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, S(r)) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r S).$$

2. Il existe un p^{58r} -quasi-isomorphisme

$$\tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, S(r))_n \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r S)_n$$

où $(\cdot)_n$ désigne la réduction modulo p^n .

Pour montrer cela, on définit $\nabla_j := t\partial_j$ et on considère l'algèbre de Lie associée au groupe Γ_R , $\text{Lie } \Gamma_R$. Alors $\text{Lie } \Gamma_R$ est un \mathbb{Z}_p -module libre de rang d , engendrée par les ∇_j pour $1 \leq j \leq d$. On note :

$$\begin{aligned} \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S(r)) &:= S(r) \xrightarrow{(\nabla_j)} S(r)^{J_1} \rightarrow \dots \rightarrow S(r)^{J_d}, \\ \text{Kos}(\varphi, \text{Lie } \Gamma_R, S(r)) &:= [\text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S(r)) \xrightarrow{1-\varphi} \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S'(r))]. \end{aligned}$$

Lemme 3.4.6. 1. Il existe un p^{30r} -quasi-isomorphisme

$$\tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \text{Lie } \Gamma_R, S(r)) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r S).$$

2. De même, il existe un p^{58r} -quasi-isomorphisme

$$\tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \text{Lie } \Gamma_R, S(r))_n \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r S)_n.$$

Démonstration. On rappelle qu'on note $S = \mathbb{A}_R^{[u,v]}$ et $S' = \mathbb{A}_R^{[u, \frac{v}{p}]}$. Comme dans [21, Lem. 4.4], on déduit du lemme 3.4.3 et des diagrammes :

$$\begin{array}{ccccccc} S(r) & \xrightarrow{(\nabla_j)} & S(r)^{J_1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & S(r)^{J_r} & \longrightarrow & S(r)^{J_{r+1}} & \longrightarrow & \dots \\ \varepsilon^{-r} t^r \downarrow & & \varepsilon^{-r} t^r \downarrow & & & & \varepsilon^{-r} t^r \downarrow & & \varepsilon^{-r} t^r \downarrow & & \\ F^r S & \xrightarrow{(\nabla_j)} & (F^r S)^{J_1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & (F^r S)^{J_r} & \longrightarrow & (F^r S)^{J_{r+1}} & \longrightarrow & \dots \\ \uparrow t^0 & & \uparrow t^1 & & & & \uparrow t^r & & \uparrow t^{r+1} & & \\ F^r S & \xrightarrow{(\partial_j)} & (F^{r-1} S)^{J_1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & S^{J_r} & \longrightarrow & S^{J_{r+1}} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccc} S'(r) & \xrightarrow{(\nabla_j)} & S'(r)^{J_1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & S'(r)^{J_r} & \longrightarrow & S'(r)^{J_{r+1}} & \longrightarrow & \dots \\ \varepsilon^{-r} t^r \downarrow & & \varepsilon^{-r} t^r \downarrow & & & & \varepsilon^{-r} t^r \downarrow & & \varepsilon^{-r} t^r \downarrow & & \\ S' & \xrightarrow{(\nabla_j)} & (S')^{J_1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & (S')^{J_r} & \longrightarrow & (S')^{J_{r+1}} & \longrightarrow & \dots \\ \uparrow t^0 & & \uparrow t^1 & & & & \uparrow t^r & & \uparrow t^{r+1} & & \\ S' & \xrightarrow{(\partial_j)} & (S')^{J_1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & (S')^{J_r} & \longrightarrow & (S')^{J_{r+1}} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

qu'on a des p^{14r} -quasi-isomorphismes

$$\tau_{\leq r} \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S(r)) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\partial, F^r S) \text{ et } \tau_{\leq r} \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S'(r)) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\partial, S').$$

En effet, par le lemme, les flèches verticales du haut sont des p^{3r} -isomorphismes et on obtient donc un p^{6r} -quasi-isomorphisme entre les deux premiers complexes. De la même façon, les flèches du bas sont des p^{3r} -isomorphismes en degré inférieur à r . En degré $(r+1)$, d'après la remarque 3.4.4, le morphisme $S \xrightarrow{t^{r+1}} F^r S$ est p^{4r} -injectif et on en déduit le p^{8r} -quasi-isomorphisme entre les complexes tronqués. Comme on a :

$$\text{Kos}(\varphi, \text{Lie } \Gamma_R, S(r)) := [\text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S(r)) \xrightarrow{1-\varphi} \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S'(r))]$$

$$\text{Kos}(\varphi, \partial, F^r S) := [\text{Kos}(\partial, F^r S) \xrightarrow{p^r - p^\bullet \varphi} \text{Kos}(\partial, S')]$$

on obtient un p^{30r} -quasi-isomorphisme

$$\tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \text{Lie } \Gamma_R, S(r)) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r S)$$

induit par le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S(r)) & \xrightarrow{1-\varphi} & \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S'(r)) \\ \downarrow p^r & & \downarrow p^r \\ \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S(r)) & \xrightarrow{p^r(1-\varphi)} & \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S'(r)) \\ \downarrow t^r & & \downarrow t^r \\ \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, F^r S) & \xrightarrow{p^r - \varphi} & \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S') \\ t^\bullet \uparrow & & t^\bullet \uparrow \\ \text{Kos}(\partial, F^r S) & \xrightarrow{p^r - p^\bullet \varphi} & \text{Kos}(\partial, S'). \end{array}$$

Le résultat modulo p^n s'obtient de la même façon, en utilisant le dernier point de la remarque 3.4.4. \square

Remarque 3.4.7. En degré supérieur à $r+1$, les flèches du bas dans le diagramme ci-dessus ne sont plus surjectives et, sans la troncation, on perd le quasi-isomorphisme entre la deuxième et la troisième ligne.

Lemme 3.4.8. *Il existe un quasi-isomorphisme :*

$$\text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, S(r)) \xrightarrow{\sim} \text{Kos}(\varphi, \text{Lie } \Gamma_R, S(r)).$$

Démonstration. La preuve est semblable à celle de [21, Prop. 4.5]. On va construire une application $\beta : \text{Kos}(\Gamma_R, S(r)) \rightarrow \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S(r))$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} S(r) & \xrightarrow{(\gamma_j - 1)} & S(r)^{J_1} & \longrightarrow & S(r)^{J_2} & \longrightarrow & \dots \\ \text{Id} \downarrow & & \beta_1 \downarrow & & \beta_2 \downarrow & & \\ S(r) & \xrightarrow{(\nabla_j)} & S(r)^{J_1} & \longrightarrow & S(r)^{J_2} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

et qui induit le quasi-isomorphisme voulu.

On rappelle qu'on a noté $\tau_j := \gamma_j - 1$.

Soient $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ les coefficients des séries formelles :

$$\frac{\log(1+X)}{X} = 1 + a_1X + a_2X^2 + \dots \quad \text{et} \quad \frac{X}{\log(1+X)} = 1 + b_1X + b_2X^2 + \dots$$

Pour tout j de $\{1, \dots, d\}$, on pose :

$$s_j := 1 + a_1\tau_j + a_2\tau_j^2 + \dots \quad \text{et} \quad s_j^{-1} := 1 + b_1\tau_j + b_2\tau_j^2 + \dots$$

En utilisant la remarque 3.4.2, on voit que pour x dans $\mathbb{A}_R^{[u,v]}$, les séries $s_j(x)$ et $s_j^{-1}(x)$ convergent dans $\mathbb{A}_R^{[u,v]}$.

Considérons maintenant les applications $\beta_i : S(r)^{J_i} \rightarrow S(r)^{J_i}$ avec $\beta_i((a_j)_{j \in J_i}) = (s_{j_1} \cdots s_{j_i}(a_j))_{j \in J_i}$. Par ce qu'on vient de voir, les β_i sont bien définies et sont des isomorphismes.

Il reste à voir que le diagramme commute. Mais on a

$$(s_{j_1} \cdots s_{j_i} \tau_{j_i} \cdots \tau_{j_1}) = (s_{j_1} \cdots s_{j_{i-1}} \nabla_{j_i} \tau_{j_{i-1}} \cdots \tau_{j_1}) = \cdots = (\nabla_{j_1} \cdots \nabla_{j_i})$$

car ∇_j et τ_j commutent (comme on a tordu l'action par χ).

Enfin, en remarquant que $\beta \circ \varphi = \varphi \circ \beta$, on obtient que l'application β nous donne bien le quasi-isomorphisme cherché. \square

Remarque 3.4.9. La convergence des séries s_j et s_j^{-1} se déduit ici directement de la définition de l'action des τ_j sur $\mathbb{A}_R^{[u,v]}$. Dans [21], du fait de la variable supplémentaire T , la preuve de cette convergence est plus technique et s'obtient, là encore, par des considérations sur des séries de Laurent (voir [21, §2.5.3]).

La proposition 3.4.5 se déduit ensuite des deux précédents lemmes.

3.4.3 Changement d'anneau

Pour terminer, on passe de l'anneau $\mathbb{A}_R^{[u,v]}$ à \mathbb{A}_R .

Lemme 3.4.10. *L'inclusion $\mathbb{A}_R^{(0,v)+} \hookrightarrow \mathbb{A}_R^{[u,v]}$ induit un quasi-isomorphisme :*

$$\text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{(0,v)+}(r)) \xrightarrow{\sim} \text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)).$$

Démonstration. L'idée est la même que dans [21, Lem. 4.8] : on vérifie que $1 - \varphi : \mathbb{A}_R^{[u,v]} / \mathbb{A}_R^{(0,v)+} \rightarrow \mathbb{A}_R^{[u, \frac{v}{p}]} / \mathbb{A}_R^{(0, \frac{v}{p})+}$ est un isomorphisme. Comme on a un isomorphisme entre $\mathbb{A}_R^{[u,v]} / \mathbb{A}_R^{(0,v)+}$ et $\mathbb{A}_R^{[u, \frac{v}{p}]} / \mathbb{A}_R^{(0, \frac{v}{p})+}$, on peut voir $1 - \varphi$ comme un endomorphisme de $\mathbb{A}_R^{[u,v]} / \mathbb{A}_R^{(0,v)+}$.

On a de plus :

$$\varphi \left(\frac{[\beta]^n}{p^n} \right) = \frac{[\beta]^{pn}}{p^n} = p^{(p-1)n} \frac{[\beta]^{pn}}{p^{pn}}.$$

On en déduit que $\varphi(\mathbb{A}_R^{[u,v]}/\mathbb{A}_R^{(0,v]^+}) \subseteq p \cdot (\mathbb{A}_R^{[u,v]}/\mathbb{A}_R^{(0,v]^+})$ et par itération,

$$\varphi^k(\mathbb{A}_R^{[u,v]}/\mathbb{A}_R^{(0,v]^+}) \subseteq p^k \cdot (\mathbb{A}_R^{[u,v]}/\mathbb{A}_R^{(0,v]^+}).$$

On obtient que φ est topologiquement nilpotent et $(1 - \varphi)$ inversible. \square

Pour $S = \mathbb{A}_R, \mathbb{A}_R^{(0,v]^+}$, on note $\text{Kos}(\psi, \Gamma_R, S) := [\text{Kos}(\Gamma_R, S) \xrightarrow{1-\psi} \text{Kos}(\Gamma_R, S)]$.

Remarque 3.4.11. Dans [21], l'anneau $\mathbb{A}_R^{(0,v]^+}$ n'est pas stable par ψ et il est nécessaire de multiplier $\mathbb{A}_R^{(0,v]^+}$ par une constante π_i^{-l} dans la définition de $\text{Kos}(\psi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{(0,v]^+})$.

Lemme 3.4.12. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_R^{(0,v]^+}) & \xrightarrow{1-\varphi} & \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_R^{(0, \frac{v}{p}]^+}) \\ \downarrow \text{Id} & & \downarrow \psi \\ \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_R^{(0,v]^+}) & \xrightarrow{1-\psi} & \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_R^{(0,v]^+}) \end{array}$$

induit un quasi-isomorphisme $\text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, S) \xrightarrow{\sim} \text{Kos}(\psi, \Gamma_R, S)$.

Démonstration. Le raisonnement est semblable à celui de la preuve du lemme 3.3.4 : comme ψ est surjective, il suffit de vérifier que $\text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_R^{(0, \frac{v}{p}]^+})^{\psi=0}$ est acyclique. On utilise la décomposition de la remarque 3.2.20 et on est ramené à prouver que $\text{Kos}(\Gamma_R, \varphi(\mathbb{A}_R^{(0, \frac{v}{p}]^+})u_\alpha)$ est acyclique pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \neq 0$.

Soit alors k tel que $\alpha_k \neq 0$. On peut supposer que $k = d$. Pour simplifier, on pose $M_\alpha = \varphi(\mathbb{A}_R^{(0,v]^+})u_\alpha$. On note $J'_i := \{(j_1, \dots, j_i) \mid 1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq d-1\}$ et on écrit $\text{Kos}(\Gamma_R, M_\alpha)$ comme le complexe :

$$\begin{array}{ccccccc} M_\alpha & \xrightarrow{(\tau_j)_{j \neq d}} & (M_\alpha)^{J'_1} & \longrightarrow & (M_\alpha)^{J'_2} & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow \tau_d & & \downarrow \tau_d & & \downarrow \tau_d & & \\ M_\alpha & \xrightarrow{(\tau_j)_{j \neq d}} & (M_\alpha)^{J'_1} & \longrightarrow & (M_\alpha)^{J'_2} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

On va montrer que τ_d est inversible sur M_α . Il suffit de montrer la surjectivité modulo p .

On a $\gamma_d \cdot u_\alpha = (\bar{\mu} + 1)^{\alpha_d} u_\alpha$ et donc, pour y dans $(\mathbb{A}_R^{(0,v]^+}/p)$:

$$(\gamma_d - 1) \cdot (\varphi(y)u_\alpha) = \varphi(\bar{\mu}_1 G(y))u_\alpha$$

avec $\bar{\mu}_1 = \varphi^{-1}(\bar{\mu})$ et $G(y) = (1 + \bar{\mu}_1)^{\alpha_d} \bar{\mu}_1^{-1}(\gamma_d - 1)y + \bar{\mu}_1^{-1}((1 + \bar{\mu}_1)^{\alpha_d} - 1)y$. Mais l'action de $(\gamma_d - 1)$ est triviale modulo $\bar{\mu}$ (car, modulo $\bar{\mu}$, $\varepsilon = 1$) et comme $\bar{\mu} = \bar{\mu}_1^p$, on obtient que, modulo $\bar{\mu}_1$, $G(y) = \alpha_d y$. On a alors que l'application $\varphi \circ G : (\mathbb{A}_R^{(0,v]^+}/p) \rightarrow (\mathbb{A}_R^{(0, \frac{v}{p}]^+}/p)$ est surjective modulo $\bar{\mu}$ et comme $(\mathbb{A}_R^{(0,v]^+}/p)$ est $\bar{\mu}$ -complet, on en déduit que $\varphi \circ G$ est surjective et que $(\gamma_d - 1)$ est inversible sur M_α . \square

Lemme 3.4.13. *L'inclusion $\mathbb{A}_R^{(0,v]^+} \hookrightarrow \mathbb{A}_R$ induit un quasi-isomorphisme*

$$\mathrm{Kos}(\psi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{(0,v]^+}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kos}(\psi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R).$$

Démonstration. Comme dans [21, Lem. 4.12], il suffit de voir que $1 - \psi : \mathbb{A}_R / \mathbb{A}_R^{(0,v]^+} \rightarrow \mathbb{A}_R / \mathbb{A}_R^{(0,v]^+}$ est un isomorphisme. De la même façon que dans la preuve du lemme 3.3.7, en remarquant que $1 + \psi + \psi^2 + \dots$ converge sur les monômes, on se ramène à montrer le résultat pour l'anneau $\overline{\mathbb{A}}_R / \overline{\mathbb{A}}_R^{(0,v]^+}$. Mais on a montré en 3.3.7 que $1 - \psi$ était surjective de $\overline{\mathbb{A}}_R^{(0,v]^+}$ dans lui-même et on obtient donc que $1 - \psi$ est un isomorphisme sur le quotient. \square

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 3.4.14. *On a un quasi-isomorphisme*

$$\mathrm{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{(0,v]^+}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R).$$

Enfin, en combinant tous les résultats de cette section, on obtient :

Proposition 3.4.15. *Il existe un quasi-isomorphisme :*

$$\mathrm{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R(r)).$$

Remarque 3.4.16. On peut montrer également que l'inclusion $\mathbb{A}_R^+ \hookrightarrow \mathbb{A}_R^{[u,v]}$ induit un quasi-isomorphisme $\mathrm{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^+(r)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r))$. En effet, par ce qu'on vient de voir, il reste à vérifier que l'inclusion $\mathbb{A}_R^+ \hookrightarrow \mathbb{A}_R^{(0,v]^+}$ donne un quasi-isomorphisme $\mathrm{Kos}(\psi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^+) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kos}(\psi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{(0,v]^+})$. Pour cela, il suffit de prouver que $1 - \psi : \mathbb{A}_R^{(0,v]^+} / \mathbb{A}_R^+ \rightarrow \mathbb{A}_R^{(0,v]^+} / \mathbb{A}_R^+$ est un isomorphisme, ce qui est montré dans la preuve du lemme 3.3.7.

3.5 Cohomologie de Galois

Pour terminer la preuve du théorème de comparaison locale 3.1.1, il reste à voir qu'on a un quasi-isomorphisme $R\Gamma(G_R, \mathbb{A}_R) \cong R\Gamma(G_R, \overline{\mathbb{A}}_R)$. Ce résultat s'obtient via des arguments classiques de descente presque étale et de décomplétion.

3.5.1 Lemme d'Abhyankar

Pour m non nul dans \mathbb{N} , on note $\tilde{R}_m := R[X_{a+b+1}^{\frac{1}{m}}, \dots, X_d^{\frac{1}{m}}]$ et $\tilde{R}_\infty = \cup_m \tilde{R}_m$. Dans cette section, on va montrer que \overline{R} est l'extension maximale de \tilde{R}_∞ qui est étale en caractéristique zéro.

Pour cela, on utilise les deux théorèmes suivants ([21, Th. 5.7], [37] et [30, XIII, 5.2]) :

Théorème 3.5.1. *Soient X un espace rigide lisse quasi-compact et $D \subseteq X$ un diviseur à croisement normal. On note $U = X \setminus D$. Alors tout revêtement fini étale de U s'étend de manière unique en un revêtement fini normal et plat de X .*

Théorème 3.5.2 (Lemme d'Abhyankar). *Soient X un schéma local régulier et $D = \sum_{1 \leq i \leq r} \text{div} f_i$ un diviseur à croisement normal. On note $U = X \setminus D$ et on considère un revêtement étale V de U modérément ramifié. Alors il existe n_1, \dots, n_r tels que, si*

$$X' = X[T_1, \dots, T_r]/(T_1^{n_1} - f_1, \dots, T_r^{n_r} - f_r),$$

le revêtement étale $V \times X' \rightarrow U \times X'$ s'étend de manière unique en un revêtement étale de X' .

Soient maintenant $\overline{R}_\infty[\frac{1}{p}]$ l'extension étale maximale de $\widetilde{R}_\infty[\frac{1}{p}]$ et \overline{R}_∞ la clôture intégrale de R dans $\overline{R}_\infty[\frac{1}{p}]$.

Proposition 3.5.3. *L'inclusion $\overline{R}_\infty \subseteq \overline{R}$ est une égalité.*

Démonstration. On note X la fibre générique de \mathfrak{X} , $D = \{X_{a+b+1} \dots X_d = 0\}$ et $U = X \setminus D$. Par le théorème 3.5.1, on peut considérer $Y \rightarrow X$ un revêtement fini normal et plat tel que $Y \times U \rightarrow U$ est fini étale. Si on note X_m la fibre générique de $\text{Spf}(\widehat{(\widetilde{R}_m)})$, par le lemme d'Abhyankar, il existe m tel que $Y \times X_m \rightarrow X_m$ est étale. On obtient donc un revêtement fini étale de X_∞ et on en déduit le résultat. \square

3.5.2 Calcul de la cohomologie de Galois

Le but de cette partie est de montrer qu'on a un quasi-isomorphisme :

$$[R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_R(r)) \xrightarrow{1-\varphi} R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_R(r))] \xleftarrow{\sim} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r)). \quad (3.15)$$

Comme la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{R}} \xrightarrow{1-\varphi} \mathbb{A}_{\overline{R}} \rightarrow 0$$

donne un quasi-isomorphisme

$$R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r)) \xrightarrow{\sim} [R\Gamma(G_R, \mathbb{A}_{\overline{R}}(r)) \xrightarrow{1-\varphi} R\Gamma(G_R, \mathbb{A}_{\overline{R}}(r))],$$

il suffit de vérifier qu'on a un quasi-isomorphisme :

$$R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_R(r)) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(G_R, \mathbb{A}_{\overline{R}}(r)).$$

On note $\mathbb{E}_{\widetilde{R}_\infty}$ le tilt de \widetilde{R}_∞ , $\mathbb{A}_{\widetilde{R}_\infty} = W(\mathbb{E}_{\widetilde{R}_\infty})$ et $\widetilde{\Gamma}_R := \text{Gal}(\widetilde{R}_\infty[\frac{1}{p}]/R[\frac{1}{p}])$. Enfin, soit $H_R := \ker(G_R \rightarrow \widetilde{\Gamma}_R)$. On a le lemme ([18, 10.1], [2, 4.6]) :

Lemme 3.5.4. *Pour tout sous-groupe normal ouvert H de H_R , il existe α dans $\mathbb{A}_{\overline{R}}$ tel que $\sum_{\tau \in H_R/H} \tau(\alpha) = 1$.*

Démonstration. $H \subseteq H_R$ correspond à une extension finie $\tilde{R}_\infty[\frac{1}{p}] \subseteq S_\infty[\frac{1}{p}] \subseteq \bar{R}[\frac{1}{p}]$. On a de plus, pour α dans \mathbb{E}_{S_∞} ,

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{E}_{S_\infty}/\mathbb{E}_{\tilde{R}_\infty}}(\alpha) = \sum_{\tau \in H_R/H} \tau(\alpha).$$

Mais $\mathbb{E}_{S_\infty}/\mathbb{E}_{\tilde{R}_\infty}$ est séparable par la proposition 3.5.3 donc il existe un β dans \mathbb{E}_{S_∞} tel que $\sum_{\tau \in H_R/H} \tau(\beta) = 1$. L'élément

$$A = \sum_{\tau \in H_R/H} \tau([\beta]) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} p^k [x_k] \text{ avec } x_k \in \mathbb{E}_{\bar{R}}$$

est alors une unité de $\mathbb{A}_{\bar{R}}$ et en notant $\alpha = \frac{[\beta]}{A}$, on obtient le résultat. \square

On peut maintenant montrer la proposition suivante (voir [2, §2], [3, §7], [17], [21, 4.13]) :

Proposition 3.5.5 (Descente presque étale). *1. Pour tout $i \geq 1$, on a $H^i(H_R, \mathbb{A}_{\bar{R}}) = 0$. En particulier, on a un quasi-isomorphisme :*

$$R\Gamma(\tilde{\Gamma}_R, \mathbb{A}_{\tilde{R}_\infty}(r)) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(G_R, \mathbb{A}_{\bar{R}}(r)).$$

2. Il existe un quasi-isomorphisme :

$$R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_{R_\infty}(r)) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\tilde{\Gamma}_R, \mathbb{A}_{\tilde{R}_\infty}(r)).$$

Dans la suite on note μ_H le morphisme $R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_{R_\infty}(r)) \rightarrow R\Gamma(G_R, \mathbb{A}_{\bar{R}}(r))$.

Démonstration. Prouvons d'abord le premier point. Soit $f : (H_R)^i \rightarrow \mathbb{A}_{\bar{R}}$ un cocycle continu. Pour tout n , on note $\bar{f}_n : (H_R)^i \rightarrow \mathbb{A}_{\bar{R}} \rightarrow \mathbb{A}_{\bar{R}}/U_{n,n}$ (on rappelle que $U_{n,h} := p^n \mathbb{A}_{\bar{R}} + \mu^h \mathbb{A}_{\bar{R}}$). Par continuité, il existe un sous-groupe normal ouvert H_n de H_R tel que \bar{f}_n se factorise :

$$\begin{array}{ccc} (H_R)^i & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{A}_{\bar{R}}/U_{n,n} \\ & \searrow & \nearrow \\ & (H_R/H_n)^i & \end{array}$$

Soit $f_n : (H_R/H_n)^i \rightarrow \mathbb{A}_{\bar{R}} \rightarrow \mathbb{A}_{\bar{R}}/U_{n,n} \rightarrow \mathbb{A}_{\bar{R}}$ un relevé (ensembliste) de \bar{f}_n . On a alors $f_n - f \in U_{n,n}$ pour tout n et donc (f_n) converge vers f pour la topologie faible.

Le lemme 3.5.4 (appliqué à $H_1 \subseteq H_R$) donne un α dans $(\mathbb{A}_{\bar{R}})^{H_1} \subseteq (\mathbb{A}_{\bar{R}})^{H_n}$ tel que $\sum_{\tau \in H_R/H_1} \tau(\alpha) = 1$. On définit une $(i-1)$ -cochaîne continue $\alpha \cup f_n : (H_R/H_n)^{i-1} \rightarrow \mathbb{A}_{\bar{R}}$ par :

$$(\alpha \cup f_n)(g_1, \dots, g_{i-1}) := (-1)^i \sum_{\tau \in H_R/H_1} g_1 \dots g_{i-1} \tau(\alpha) \cdot f_n(g_1, \dots, g_{i-1}, \tilde{\tau})$$

où pour chaque τ de H_R/H_1 , on a choisi un relevé $\tilde{\tau}$ dans H_R/H_n . En utilisant que $\sum_{\tau \in H_R/H_1} \tau(\alpha) = 1$, on vérifie qu'on a :

$$(\alpha \cup \partial f_n) = f_n - \partial(\alpha \cup f_n).$$

Si on note $h_n := \alpha \cup f_n$, on obtient $f_n - \partial h_n \in U_{n,n}$ (car $\partial f_n = 0$ modulo $U_{n,n}$) et $h_{n+1} - h_n \in U_{n,n}$. On en déduit que $(\partial h_n)_n$ converge vers f pour la topologie faible et que la suite $(h_n)_n$ est de Cauchy. Elle converge donc vers un $h : (H_R)^i \rightarrow \mathbb{A}_{\bar{R}}$ continu et on a $\partial h = f$. Ainsi, $H^i(H_R, \mathbb{A}_{\bar{R}}) = 0$.

Le second isomorphisme s'obtient en remarquant que le noyau $\tilde{H}_R = \ker(\tilde{\Gamma}_R \rightarrow \Gamma_R)$ est isomorphe à $\prod_{l \neq p} \mathbb{Z}_l^c$ (avec $a + b + c = d$) et est donc d'ordre premier à p . \square

Enfin, on passe de l'anneau \mathbb{A}_{R_∞} à \mathbb{A}_R via un argument de décomplétion (voir [3, 7.16], [21, 4.13], [36]) :

Proposition 3.5.6 (Décomplétion). *On a un quasi-isomorphisme :*

$$\mu_\infty : R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_R(r)) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_{R_\infty}(r)).$$

Démonstration. Comme p est un élément régulier de \mathbb{A}_R et \mathbb{A}_{R_∞} , il suffit de prouver le résultat modulo p i.e. $H^i(\Gamma_R, \mathbb{E}_R) = H^i(\Gamma_R, \mathbb{E}_{R_\infty})$ où $\mathbb{E}_R := \mathbb{A}_R/p\mathbb{A}_R$. Mais on remarque que \mathbb{E}_{R_∞} est la complétion $\bar{\mu}$ -adique de $\varphi^{-\infty}(\mathbb{E}_R) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi^{-n}(\mathbb{E}_R)$.

Or, on a $\mathbb{E}_R = \varphi(\mathbb{E}_R) \oplus \mathbb{E}_R^{\psi=0} = \varphi^2(\mathbb{E}_R) \oplus \varphi(\mathbb{E}_R^{\psi=0}) \oplus \mathbb{E}_R^{\psi=0} = \dots$ et donc $\varphi^{-n}(\mathbb{E}_R) = \mathbb{E}_R \oplus \varphi^{-1}(\mathbb{E}_R^{\psi=0}) \oplus \dots \oplus \varphi^{-n}(\mathbb{E}_R^{\psi=0})$. On a alors des applications $s_0 : \varphi^{-\infty}(\mathbb{E}_R) \rightarrow \mathbb{E}_R$ et $s_n : \varphi^{-\infty}(\mathbb{E}_R) \rightarrow \varphi^{-n}(\mathbb{E}_R^{\psi=0})$ pour $n > 0$ telles que tout x de $\varphi^{-\infty}(\mathbb{E}_R)$ s'écrit (de manière unique) $x = s_0(x) + \sum_{n \geq 1} s_n(x)$ avec un nombre fini de $s_n(x)$ non nuls.

On va montrer qu'on peut étendre les s_n à \mathbb{E}_{R_∞} . Si on note $\tilde{s}_n := s_0 + \dots + s_n$, on vérifie que $\varphi^n \circ \tilde{s}_n|_{\varphi^{-n-k}(\mathbb{E}_R)} = \psi^n \circ \varphi^{n+k}|_{\varphi^{-n-k}(\mathbb{E}_R)}$. Pour un m dans \mathbb{N} , on a donc

$$\tilde{s}_n(\bar{\mu}^{p^n m} \varphi^{-n-k}(\mathbb{E}_R)) \subseteq \bar{\mu}^m \varphi^{-n}(\mathbb{E}_R)$$

et on obtient que les \tilde{s}_n sont continues. On en déduit que tout élément x de \mathbb{E}_{R_∞} s'écrit (de manière unique) :

$$x = s_0(x) + \sum_{n \geq 1} s_n(x) \text{ avec } s_0(x) \in \mathbb{E}_R, s_n(x) \in \varphi^{-n}(\mathbb{E}_R^{\psi=0}) \text{ si } n \geq 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = 0.$$

On obtient une décomposition (Γ_R -équivariante) : $\mathbb{E}_{R_\infty} = \mathbb{E}_R \oplus Z$ donnée par $x \mapsto (s_0(x), x - s_0(x))$.

Soit maintenant c un cocycle continu de Γ_R^i dans \mathbb{E}_{R_∞} . Alors, par ce qu'on vient de voir, $s_n(c)$ est un cocycle à valeurs dans $\bar{\mu}^{k_n} \varphi^{-n}(\mathbb{E}_R^{\psi=0})$ (avec $k_n \rightarrow \infty$). Donc, par le lemme 3.5.7 ci-dessous, $\varphi^n(s_n(c))$ est le cobord d'une cochaîne à valeurs dans $\bar{\mu}^{-1} \bar{\mu}^{p^n k_n}(\mathbb{E}_R^{\psi=0})$ et $s_n(c)$ est le cobord d'un c_n à valeurs dans $\bar{\mu}^{\frac{-1}{p^n}} \bar{\mu}^{k_n} \varphi^{-n}(\mathbb{E}_R^{\psi=0})$. Alors $c - s_0(c)$ est le cobord de $\sum_{n \geq 1} c_n$ et on obtient $H^i(\Gamma_R, Z) = 0$. \square

Lemme 3.5.7. [21, Rem. 4.11] *Pour tout i de \mathbb{N} et tout n de \mathbb{Z} , $H^i(\Gamma_R, \bar{\mu}^{pn} \mathbb{E}_R^{\psi=0})$ est tué par $\bar{\mu}$.*

Démonstration. Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \{0, \dots, p-1\}^d$, on note $X^\alpha = (X_1^b)^{\alpha_1} \dots (X_d^b)^{\alpha_d}$ et $M_\alpha := X^\alpha \varphi(\mathbb{E}_R)$. On suppose α non nul et on choisit k tel que $\alpha_k \neq 0$. On commence par montrer que $\bar{\mu} \cdot H^i(\Gamma_R, \bar{\mu}^{pn} M_\alpha) = 0$. En utilisant l'écriture sous forme de complexes de Koszul, on est ramené à montrer que $(\gamma_k - 1)$ est inversible sur M_α et que

$$(\gamma_k - 1)^{-1}(\bar{\mu}^{pn} M_\alpha) \subseteq \bar{\mu}^{pn-1} M_\alpha. \quad (3.16)$$

Comme pour la preuve du lemme 3.4.12, pour y dans \mathbb{E}_R , on a

$$(\gamma_k - 1) \cdot (\varphi(y) X^\alpha) = \varphi(\bar{\mu}_1 G(y)) X^\alpha$$

avec $\varphi \circ G$ surjective et donc $(\gamma_k - 1)$ est inversible sur M_α . On a de plus que $\frac{\gamma_k - 1}{\bar{\mu}}$ est la multiplication par α_k sur $\bar{\mu}^{pn-1} M_\alpha / \bar{\mu}^{pn} M_\alpha$ et on en déduit (3.16).

On utilise ensuite l'isomorphisme Γ_R -équivariant :

$$\begin{cases} \mathbb{E}_R^{\psi=0} & \rightarrow \bigoplus_{\alpha \neq 0} X^\alpha \varphi(\mathbb{E}_R) \\ x & \mapsto (c_\alpha(x))_{\alpha \neq 0} \end{cases}$$

pour conclure (en remarquant que $c_\alpha(\bar{\mu}x) = \bar{\mu}c_\alpha(x)$).

□

3.5.3 Comparaison avec le complexe syntomique

On peut maintenant montrer le théorème :

Théorème 3.5.8. *Il existe une constante N qui ne dépend pas de R telle qu'on a des p^{Nr} -quasi-isomorphismes :*

$$\alpha_r : \tau_{\leq r} \text{Syn}(R, r) \rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r))$$

$$\alpha_{r,n} : \tau_{\leq r} \text{Syn}(R, r)_n \rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}/p^n(r)).$$

Démonstration. On vient de voir qu'on avait un quasi-isomorphisme

$$[R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_R(r)) \xrightarrow{1-\varphi} R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_R(r))] \xleftarrow{\sim} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r)).$$

Mais $R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_R(r))$ est calculé par le complexe $\text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_R(r))$ et on a un quasi-isomorphisme naturel :

$$R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r)) \xrightarrow{\sim} \text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R(r)).$$

D'après la proposition (3.4.5), on a un p^{30r} -quasi-isomorphisme :

$$\tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]})$$

et en utilisant le quasi-isomorphisme du lemme 3.4.15 :

$$\mathrm{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R(r)),$$

on en déduit un p^{30r} -quasi-isomorphisme :

$$\tau_{\leq r} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r)) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} \mathrm{Kos}(\varphi, \partial, F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]}).$$

Enfin, en utilisant l'isomorphisme naturel $\mathbb{A}_R^{[u,v]} \cong R^{[u,v]}$ et le p^{10r} -quasi-isomorphisme $\mathrm{Syn}(R_{\mathrm{cris}}^+, r) \xrightarrow{\sim} C(R^{[u,v]}, r)$ établi dans la section §3, on obtient le p^{Nr} -quasi-isomorphisme α_r (avec $N = 40$). La même démonstration donne un p^{Nr} -quasi-isomorphisme $\alpha_{r,n}$ pour $N = 68$. □

3.6 Résultat global

À partir de maintenant, on se place dans le cas où le schéma formel \mathfrak{X} est propre sur \mathcal{O}_K . On suppose que localement \mathfrak{X} s'écrit $\mathrm{Spf}(R_0)$ avec $R_0^\square \rightarrow R_0$ la complétion d'un morphisme étale et $R_0^\square := \mathcal{O}_K\{X_1, \dots, X_d, \frac{1}{X_1 \dots X_a}, \frac{\varpi}{X_{a+1} \dots X_d}\}$ (pour a, d dans \mathbb{N}). On rappelle que $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$ est muni de la log-structure donnée par son point fermé et \mathfrak{X} de celle donnée par $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \cap (\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}])^\times \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$.

Le but de cette section est de montrer le théorème :

Théorème 3.6.1. *Il existe un morphisme de période :*

$$\alpha_{r,n}^0 : \tau_{\leq r} R\Gamma_{\mathrm{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_n \rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma_{\mathrm{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(r)').$$

De plus, ce morphisme est un p^{Nr} -isomorphisme pour une constante N universelle.

En particulier, on a le résultat ([21, Cor. 5.12]) :

Corollaire 3.6.2. *Si \mathfrak{X} est un log-schéma formel propre à réduction semi-stable sur \mathcal{O}_K alors pour $k \leq r$, il existe un isomorphisme :*

$$\alpha_r^0 : H_{\mathrm{syn}}^k(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} H_{\mathrm{ét}}^k(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)).$$

Preuve du corollaire 3.6.2. Par définition de la limite homotopique, si K désigne le complexe $R\Gamma_{\mathrm{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)$ (respectivement $R\Gamma_{\mathrm{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r))$) et K_n sa réduction modulo p^n (respectivement $R\Gamma_{\mathrm{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(r)')$) alors on a un triangle distingué :

$$K \rightarrow \prod_n K_n \rightarrow \prod_n K_n \rightarrow K[1]$$

où l'application $\prod_n K_n \rightarrow \prod_n K_n$ est donnée par $(k_n) \mapsto (k_n - \psi_{n+1}(k_{n+1}))$ (avec $\psi_{n+1} : K_{n+1} \rightarrow K_n$ sont les morphismes associés au système projectif (K_n)).

Par le théorème 3.6.1, pour tout n et $k \leq r$, on a un p^{Nr} -isomorphisme $H^k R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_n \xrightarrow{\sim} H^k R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)')$. En écrivant la suite exacte longue associée au triangle distingué ci-dessus, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \prod_n H_{\text{syn}}^{k-1}(r)_n & \longrightarrow & H_{\text{syn}}^k(r) & \longrightarrow & \prod_n H_{\text{syn}}^k(r)_n & \longrightarrow & \prod_n H_{\text{syn}}^k(r)_n & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \\ \dots & \longrightarrow & \prod_n H_{\text{ét}}^{k-1}(r)_n & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^k(r) & \longrightarrow & \prod_n H_{\text{ét}}^k(r)_n & \longrightarrow & \prod_n H_{\text{ét}}^k(r)_n & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

où pour simplifier on a noté $H_{\text{syn}}^k(r)_n := H^k R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_n$, $H_{\text{syn}}^k(r) := H^k R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)$ et de même pour la cohomologie étale. On tensorise ensuite par \mathbb{Q}_p et on compose par p^{-r} pour obtenir pour tout $k \leq r$ un isomorphisme¹ :

$$\alpha_r^0 : H_{\text{syn}}^k(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^k(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)) \xrightarrow{p^{-r}} H_{\text{ét}}^k(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)).$$

□

Revenons à la preuve du théorème 3.6.1. On a construit le morphisme α_r^0 localement, il suffit de montrer qu'on peut le globaliser. Pour cela on utilise la méthode de Česnavičius-Koshikawa dans [15, §5] (qui généralise celle de [9]).

On se place dans le cas où $\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C} = \text{Spf}(R)$ et on suppose qu'il existe une immersion fermée

$$\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C} \rightarrow \text{Spf}(R_{\Sigma}^{\square}) \times_{\mathcal{O}_C} \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Spf} R_{\lambda}^{\square} \quad (3.17)$$

telle que

- (i) $R_{\Sigma}^{\square} := \mathcal{O}_C\{X_{\sigma}^{\pm 1} \mid \sigma \in \Sigma\}$ avec Σ un ensemble fini ;
- (ii) $R_{\lambda}^{\square} := \mathcal{O}_C\{X_{\lambda,1}, \dots, X_{\lambda,d}, \frac{1}{X_{\lambda,1} \dots X_{\lambda,a_{\lambda}}}, \frac{\varpi^{h_{\lambda}}}{X_{\lambda,a_{\lambda}+1} \dots X_{\lambda,d}}\}$ où $\lambda \in \Lambda$ avec Λ fini ;
- (iii) $\text{Spf}(R) \rightarrow \text{Spf}(R_{\Sigma}^{\square})$ est une immersion fermée ;
- (iv) $\text{Spf}(R) \rightarrow \text{Spf}(R_{\lambda}^{\square})$ est étale pour tout λ dans Λ ;
- (v) il existe un λ dans Λ tel que chaque composante irréductible de la fibre spéciale $\text{Spec}(R \otimes k)$ est donnée par un unique $(t_{\lambda,i})$ pour $a_{\lambda} + 1 \leq i \leq d$.

On choisit des éléments $\{u_{\sigma}\}_{\sigma \in \Sigma}$ (respectivement $\{u_{\lambda,i}\}_{1 \leq i \leq d}$ avec $\lambda \in \Lambda$) tels qu'on ait une application $X_{\sigma} \mapsto u_{\sigma}$ de R_{Σ}^{\square} dans R (respectivement $X_{\lambda,i} \mapsto u_{\lambda,i}$ de R dans R_{λ}^{\square}).

Dans la suite on note $\text{Spf}(R_{\Sigma, \Lambda}^{\square})$ le produit $\text{Spf}(R_{\Sigma}^{\square}) \times_{\mathcal{O}_C} \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Spf}(R_{\lambda}^{\square})$.

Remarque 3.6.3. On peut toujours trouver une base de $\mathfrak{X}_{\text{ét}}$ telle qu'on ait de telles immersions : soit x un point de \mathfrak{X} . Si x est dans le lieu lisse de \mathfrak{X} alors localement $\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}$ s'écrit $\text{Spf}(\widehat{A})$ avec A de type fini sur \mathcal{O}_C et donc il existe une immersion fermée $\text{Spec}(A) \hookrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_C[X_1, \dots, X_n])$. On recouvre ensuite $\text{Spec}(\mathcal{O}_C[X_1, \dots, X_n])$ par une

1. La multiplication par p^{-r} permet d'obtenir l'égalité avec le morphisme de période de Tsuji (voir le chapitre suivant). Ceci permet de définir un morphisme compatible avec les classes de Chern.

union de tores et on obtient que localement $\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}$ s'écrit $\mathrm{Spf}(R)$ tel qu'il existe une immersion fermée $\mathrm{Spf}(R) \hookrightarrow \mathrm{Spf}(R_\Sigma^\square)$ avec Σ un ensemble fini.

Si maintenant x n'est plus dans le lieu lisse de \mathfrak{X} , $\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}$ s'écrit localement $\mathrm{Spf}(R_\lambda)$ pour une \mathcal{O}_C -algèbre R_λ telle qu'on ait une application étale $R_\lambda^\square \rightarrow R_\lambda$ avec

$$R_\lambda^\square := \mathcal{O}_C \left\{ X_{\lambda,1}, \dots, X_{\lambda,d}, \frac{1}{X_{\lambda,1} \dots X_{\lambda,a_\lambda}}, \frac{\varpi^{h_\lambda}}{X_{\lambda,a_\lambda+1} \dots X_{\lambda,d}} \right\}$$

et telle que x est donné par $(X_{\lambda,a_\lambda+1} \dots X_{\lambda,d})$. Si on localise en x , on obtient une immersion fermée dans un tore formel $\mathrm{Spf}(R_\Sigma^\square)$.

Remarque 3.6.4. 1. Pour un tel R , si $R_{\Sigma_1, \Lambda_1}^\square$ et $R_{\Sigma_2, \Lambda_2}^\square$ vérifient les conditions ci-dessus avec $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ et $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$, on note $f_1^2 : R_{\Sigma_1, \Lambda_1}^\square \rightarrow R_{\Sigma_2, \Lambda_2}^\square$ l'application induite par $X_\sigma \mapsto X_\sigma$ et $X_{\lambda,i} \mapsto X_{\lambda,i}$ pour σ dans Σ_1 , λ dans Λ_1 et i dans $\{1, \dots, d\}$. L'ensemble des $R_{\Sigma, \Lambda}^\square$ muni des applications ainsi définies forme alors un système inductif filtrant. Il est inductif car si $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \Sigma_3$ et $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2 \subseteq \Lambda_3$, on a $f_1^3 = f_2^3 \circ f_1^2$. Vérifions qu'il est filtrant. Par définition du système, pour $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ et $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$, f_1^2 est la seule application de $R_{\Sigma_1, \Lambda_1}^\square$ dans $R_{\Sigma_2, \Lambda_2}^\square$. Considérons à présent deux anneaux $R_{\Sigma_1, \Lambda_1}^\square$ et $R_{\Sigma_2, \Lambda_2}^\square$ vérifiant (3.17) pour R . On note $\Sigma_3 := \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ et $\Lambda_3 = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$. Alors (Σ_3, Λ_3) vérifie les conditions (3.17) pour R et les deux morphismes f_1^3 et f_2^3 sont bien définis.

2. Maintenant si $f : R \rightarrow R'$ est un morphisme étale tel qu'on ait une immersion fermée $\mathrm{Spf}(R') \rightarrow \mathrm{Spf}(R_{\Sigma', \Lambda'}^\square)$, on note $\tilde{\Sigma} := \Sigma \cup \Sigma'$ et $\tilde{\Lambda} = \Lambda \cup \Lambda'$. Alors $(\tilde{\Sigma}, \tilde{\Lambda})$ vérifie les conditions (3.17) pour R' : comme $R \rightarrow R'$ est étale, $R_\lambda^\square \rightarrow R'$ est étale pour tout λ de $\tilde{\Lambda}$. On a de plus une surjection $R_{\tilde{\Sigma}}^\square \rightarrow R'$ donnée par :

$$\begin{aligned} R_{\tilde{\Sigma}}^\square &\rightarrow R' \\ X_\sigma &\mapsto f(u_\sigma) \quad \text{pour } \sigma \in \Sigma \\ X_{\sigma'} &\mapsto u_{\sigma'} \quad \text{pour } \sigma' \in \Sigma' \end{aligned}$$

et telle qu'on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & R' \\ \uparrow & & \uparrow \\ R_{\Sigma'}^\square & \longrightarrow & R_{\tilde{\Sigma}}^\square \end{array}$$

On obtient alors un morphisme de $R_{\Sigma, \Lambda}^\square \rightarrow R_{\tilde{\Sigma}, \tilde{\Lambda}}^\square$ et de $\varinjlim_{(\Sigma, \Lambda)} R_{\Sigma, \Lambda}^\square \rightarrow \varinjlim_{(\Sigma', \Lambda')} R_{\Sigma', \Lambda'}^\square$ (où la première limite est prise sur l'ensemble des (Σ, Λ) qui vérifient (3.17) pour R et la seconde limite sur l'ensemble des (Σ', Λ') qui vérifient (3.17) pour R').

3.6.1 Construction du quasi-isomorphisme $\alpha_{r, \Sigma, \Lambda}$

On travaille localement. Supposons que $\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C} = \mathrm{Spf}(R)$ avec R tel qu'il existe des immersions comme en (3.17).

On note $R_{\Sigma,\Lambda}^{PD}$ la log-PD-enveloppe complétée de $\mathrm{Spf}(R) \rightarrow \mathrm{Spf}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_{\Sigma,\Lambda}^{\square}))$ (où $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_{\Sigma,\Lambda}^{\square}) := \mathbb{A}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}} \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R_{\Sigma,\Lambda}^{\square})$) :

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Spf}(R_{\Sigma,\Lambda}^{PD}) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \mathrm{Spf}(R) & \longrightarrow & \mathrm{Spf}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_{\Sigma,\Lambda}^{\square})) \end{array}$$

On définit un Frobenius φ sur $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_{\Sigma,\Lambda}^{\square})$ par $\varphi(X_{\sigma}) = X_{\sigma}^p$, $\varphi(X_{\lambda,i}) = X_{\lambda,i}^p$ et, par fonctorialité, on l'étend à $R_{\Sigma,\Lambda}^{PD}$. On étend de même les applications différentielles $\partial_{\sigma} = \frac{d}{d\log(X_{\sigma})}$ et $\partial_{\lambda,i} = \frac{d}{d\log(X_{\lambda,i})}$.

Le but de cette partie est de construire un p^{Nr} -quasi-isomorphisme

$$\alpha_{r,\Sigma,\Lambda} : \tau_{\leq r} \mathrm{Kos}(\varphi, \partial, F^r R_{\Sigma,\Lambda}^{PD}) \rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r))$$

avec N qui ne dépend ni de Σ , Λ , ni de R .

On considère les anneaux :

$$R_{\Sigma,\Lambda}^{[u]} = \mathbb{A}^{[u]} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}} R_{\Sigma,\Lambda}^{PD}, \quad R_{\Sigma,\Lambda}^{[u,v]} = \mathbb{A}^{[u,v]} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}} R_{\Sigma,\Lambda}^{PD} \text{ et } R_{\Sigma,\Lambda}^{(0,v)^+} = \mathbb{A}^{(0,v)^+} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}} R_{\Sigma,\Lambda}^{PD}.$$

L'application $R_{\Sigma,\Lambda}^{PD} \rightarrow R_{\Sigma,\Lambda}^{[u,v]}$ induit alors un morphisme sur les complexes de Koszul :

$$\mathrm{Kos}(\varphi, \partial, F^r R_{\Sigma,\Lambda}^{PD}) \rightarrow \mathrm{Kos}(\varphi, \partial, F^r R_{\Sigma,\Lambda}^{[u,v]}). \quad (3.18)$$

Soient $R_{\Sigma,\infty}^{\square}$ et $R_{\lambda,\infty}^{\square}$ les complétions p -adiques des anneaux

$$\varinjlim_n \mathcal{O}_C \{ X_{\sigma}^{\frac{\pm 1}{p^n}} \mid \sigma \in \Sigma \} \text{ et } \varinjlim_n \mathcal{O}_C \{ X_{\lambda,1}^{\frac{1}{p^n}}, \dots, X_{\lambda,d}^{\frac{1}{p^n}}, \frac{1}{(X_{\lambda,1} \dots X_{\lambda,a_{\lambda}})^{\frac{1}{p^n}}}, \frac{\varpi^{\frac{h_{\lambda}}{p^n}}}{(X_{\lambda,a_{\lambda}+1} \dots X_{\lambda,d})^{\frac{1}{p^n}}} \}$$

On note $R_{\Sigma,\Lambda,\infty}^{\square}$ le produit des anneaux précédents, $R_{\Sigma,\Lambda,\infty} := R_{\Sigma,\Lambda,\infty}^{\square} \widehat{\otimes}_{R_{\Sigma,\Lambda}^{\square}} R$ et $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_{\Sigma,\Lambda,\infty})$, $\mathbb{A}_{R_{\Sigma,\Lambda,\infty}}^{[u,v]}$, $\mathbb{A}_{R_{\Sigma,\Lambda,\infty}}^{[u]}$ les anneaux associés. Enfin, on considère les groupes $\Gamma_{\Sigma} := \mathrm{Gal}(R_{\Sigma,\infty}^{\square}[\frac{1}{p}]/R_{\Sigma}^{\square}[\frac{1}{p}]) \cong \mathbb{Z}_p^{\Sigma}$, $\Gamma_{\lambda} := \mathrm{Gal}(R_{\lambda,\infty}^{\square}[\frac{1}{p}]/R_{\lambda}^{\square}[\frac{1}{p}]) \cong \mathbb{Z}_p^d$ et $\Gamma_{\Sigma,\Lambda} := \Gamma_{\Sigma} \times \prod_{\lambda \in \Lambda} \Gamma_{\lambda}$.

Si $(\gamma_{\sigma})_{\sigma}$ et $(\gamma_{\lambda,i})_{1 \leq i \leq d}$ sont des générateurs topologiques de Γ_{Σ} et de Γ_{λ} , les actions de Γ_{Σ} et Γ_{λ} sur R_{Σ}^{\square} et R_{λ}^{\square} sont données par :

$$\gamma_{\sigma}(X_{\sigma}) = [\varepsilon]X_{\sigma} \text{ et } \gamma_{\sigma}(X_{\sigma'}) = X_{\sigma'} \text{ si } \sigma' \neq \sigma$$

$$\gamma_{\lambda,i}(X_{\lambda,i}) = [\varepsilon]X_{\lambda,i} \text{ et } \gamma_{\lambda,i}(X_{\lambda,j}) = X_{\lambda,j} \text{ si } i \neq j.$$

On en déduit une action de $\Gamma_{\Sigma,\Lambda}$ sur $R_{\Sigma,\Lambda}^{PD}$, $\mathbb{A}_{\Sigma,\Lambda}^{[u]}$, $\mathbb{A}_{\Sigma,\Lambda}^{[u,v]}$.

Enfin, pour $1 \leq i \leq |\Sigma| + d|\Lambda|$, on écrit $J_i := \{(j_1, \dots, j_i) \mid 1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq |\Sigma| + d|\Lambda|\}$.

Proposition 3.6.5. *Il existe un p^{30r} -quasi-isomorphisme :*

$$\begin{aligned} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r R_{\Sigma, \Lambda}^{[u, v]}) \xrightarrow{t^\bullet} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \text{Lie } \Gamma_{\Sigma, \Lambda}, F^r R_{\Sigma, \Lambda}^{[u, v]}) \xleftarrow{p^r \varepsilon^{-r} t^r} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \text{Lie } \Gamma_{\Sigma, \Lambda}, R_{\Sigma, \Lambda}^{[u, v]}(r)) \\ \xleftarrow{\beta} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \Gamma_{\Sigma, \Lambda}, R_{\Sigma, \Lambda}^{[u, v]}(r)). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Remarque 3.6.6. Modulo p^n , on obtient de la même façon un p^{58r} -quasi-isomorphisme.

Démonstration. La preuve est la même que celle des propositions 3.4.6 et 3.4.8.

Les deux premières flèches sont des p^{30r} -quasi-isomorphismes par le lemme 3.4.3.

Pour montrer le dernier quasi-isomorphisme, on commence par construire les sommes

$$s_\sigma := 1 + a_1 \tau_\sigma + a_2 \tau_\sigma^2 + \dots \text{ et } s_\sigma^{-1} := 1 + b_1 \tau_\sigma + b_2 \tau_\sigma^2 + \dots$$

$$(\text{resp. } s_{\lambda, i} := 1 + a_1 \tau_{\lambda, i} + a_2 \tau_{\lambda, i}^2 + \dots \text{ et } s_{\lambda, i}^{-1} := 1 + b_1 \tau_{\lambda, i} + b_2 \tau_{\lambda, i}^2 + \dots)$$

où $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ sont les coefficients des séries formelles $\frac{\log(1+X)}{X}$ et $\frac{X}{\log(1+X)}$ et $\tau_\sigma := \gamma_\sigma - 1$ (respectivement $\tau_{\lambda, i} := \gamma_{\lambda, i} - 1$). Pour les mêmes raisons qu'en 3.4.8, ces sommes convergent et on peut définir un isomorphisme de complexes donné par les $\beta_i : R_{\Sigma, \Lambda}^{[u, v]}(r)^{J_i} \rightarrow R_{\Sigma, \Lambda}^{[u, v]}(r)^{J_i}$ avec $\beta_i((a_j)_{j \in J_i}) = (s_{j_1} \cdots s_{j_i}(a_j))_{j \in J_i}$. \square

Le morphisme $R_{\Sigma, \Lambda}^{PD} \rightarrow \mathbb{A}_{\text{cris}}(R_{\Sigma, \Lambda, \infty})$ ([15, (5.38.1)]) induit la première flèche du morphisme suivant :

$$R\Gamma(\Gamma_{\Sigma, \Lambda}, R_{\Sigma, \Lambda}^{[u, v]}(r)) \rightarrow R\Gamma(\Gamma_{\Sigma, \Lambda}, A_{R_{\Sigma, \Lambda, \infty}}^{[u, v]}(r)) \rightarrow R\Gamma(G_R, \mathbb{A}_R^{[u, v]}(r)) \quad (3.20)$$

et la deuxième flèche correspond au morphisme de bord ([1, 01GY], [15, (3.15.1)]).

On rappelle qu'on a également un quasi-isomorphisme :

$$R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r)) \cong [R\Gamma_{\text{cont}}(G_R, F^r \mathbb{A}_R^{[u, v]}) \xrightarrow{p^r - \varphi} R\Gamma(G_R, \mathbb{A}_R^{[u, v]})]. \quad (3.21)$$

En composant les morphismes précédents, on obtient une application :

$$\alpha_{r, \Sigma, \Lambda} : \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r R_{\Sigma, \Lambda}^{PD}) \rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r)).$$

Proposition 3.6.7. *Il existe une constante N indépendante de R , Σ et Λ telle que l'application $\alpha_{r, \Sigma, \Lambda}$ ci-dessus est un p^{Nr} -quasi-isomorphisme.*

Démonstration. On fixe un λ dans Λ . On note

$$R_{\text{cris}, \lambda, \square}^+ := \mathbb{A}_{\text{cris}} \left\{ X_{\lambda, 1}, \dots, X_{\lambda, d}, \frac{1}{X_{\lambda, 1} \cdots X_{\lambda, a_\lambda}}, \frac{[\varpi^b]}{X_{\lambda, a_\lambda + 1} \cdots X_{\lambda, d}} \right\}$$

et $R_{\text{cris}, \lambda, \square}^+ \rightarrow R_{\text{cris}, \lambda}^+$ un relevé étale de $R_{\lambda, \square} \rightarrow R$. On construit les anneaux $R_\lambda^{[u, v]}$ et $\mathbb{A}_{R_\infty, \lambda}^{[u, v]}$ associés et on a alors un p^{Nr} -quasi-isomorphisme (par ce qui a été fait plus haut) :

$$\alpha_{r, \lambda} : \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r R_{\text{cris}, \lambda}^+) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r)).$$

On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
& \text{Spf}(R_{\Sigma, \Lambda}^{PD}) & \\
& \swarrow & \searrow \\
\text{Spf}(R) & \xrightarrow{\quad} & \text{Spf}(\mathbb{A}_{\text{cris}}(R_{\Sigma, \Lambda}^{\square})) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{Spf}(R_{\text{cris}, \lambda}^+) & \xrightarrow{\quad} & \text{Spf}(R_{\text{cris}, \lambda, \square}^+)
\end{array}$$

Mais $R_{\Sigma, \Lambda}^{PD}$ est complet pour l'idéal associé à l'immersion $\text{Spf}(R) \hookrightarrow \text{Spf}(R_{\Sigma, \Lambda}^{PD})$ (car c'est un PD-épaississement). Comme $\text{Spf}(R_{\text{cris}}^+) \rightarrow \text{Spf}(R_{\text{cris}, \square}^+)$ est étale, on peut alors relever la flèche $\text{Spf}(R_{\Sigma, \Lambda}^{PD}) \rightarrow \text{Spf}(R_{\text{cris}, \lambda, \square}^+)$ en une application $\text{Spf}(R_{\Sigma, \Lambda}^{PD}) \rightarrow \text{Spf}(R_{\text{cris}, \lambda}^+)$ qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
\text{Spf}(R) & \xrightarrow{\quad} & \text{Spf}(R_{\text{cris}, \lambda}^+) \\
\downarrow & \nearrow \text{---} & \downarrow \\
\text{Spf}(R_{\Sigma, \Lambda}^{PD}) & \xrightarrow{\quad} & \text{Spf}(R_{\text{cris}, \lambda, \square}^+)
\end{array}$$

On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
R_{\text{cris}, \lambda}^+ & \longrightarrow & R_{\lambda}^{[u, v]} & \longrightarrow & \mathbb{A}_{R_{\infty}, \lambda}^{[u, v]} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
R_{\Sigma, \Lambda}^{PD} & \longrightarrow & R_{\Sigma, \Lambda}^{[u, v]} & \longrightarrow & \mathbb{A}_{R_{\Sigma, \Lambda}, \infty}^{[u, v]}
\end{array}$$

et le résultat se déduit du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
\tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(R, r) & \xleftarrow{\sim} & \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r R_{\text{cris}, \lambda}^+) & \xrightarrow{\sim \alpha_{r, \lambda}} & \tau_{\leq r} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r)) \\
\parallel & & \downarrow & & \parallel \\
\tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(R, r) & \xleftarrow{\sim} & \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r R_{\Sigma, \Lambda}^{PD}) & \xrightarrow{\sim \alpha_{r, \Sigma, \Lambda}} & \tau_{\leq r} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r)).
\end{array}$$

□

3.6.2 Preuve du théorème 3.6.1

On rappelle qu'on cherche à montrer le théorème :

Théorème 3.6.8. *Il existe un morphisme de période :*

$$\alpha_{r, n}^0 : \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_n \rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(r)').$$

De plus, ce morphisme est un p^{Nr} -isomorphisme pour une constante N qui ne dépend que de K , p et r .

Démonstration. Soit $\mathfrak{U}^\bullet \rightarrow \mathfrak{X}$ un hyper-recouvrement affine. On note R^k l'anneau tel que $\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k := \mathrm{Spf}(R^k)$.

Pour chaque k , on considère (Σ_k, Λ_k) tel qu'on ait une immersion fermée

$$\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k \hookrightarrow \mathrm{Spf}(R_{\Sigma_k}^\square) \times_{\mathcal{O}_C} \prod_{\lambda_k \in \Lambda_k} \mathrm{Spf}(R_{\lambda_k}^\square)$$

comme en (3.17). On note ensuite $\mathrm{Spf}(R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^{PD})$ la log-PD-enveloppe complétée de $\mathrm{Spf}(R^k) \rightarrow \mathrm{Spf}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^\square))$. On note :

$$\mathrm{Syn}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^\square), r)_n := [F^r \Omega_{R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^{PD}}^\bullet \xrightarrow{p^r - \varphi} \Omega_{R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^{PD}}^\bullet]_n.$$

L'application canonique $\mathrm{Syn}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^\square), r)_n \rightarrow R\Gamma_{\mathrm{syn}}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, r)_n$ est alors un quasi-isomorphisme. De plus, on a vu que l'ensemble des $R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^\square$ pour (Σ_k, Λ_k) comme en (3.17) forme un système inductif filtrant. Le système des $\mathrm{Syn}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^\square), r)_n$ est donc lui-même inductif filtrant. On en déduit un quasi-isomorphisme :

$$\varinjlim_{(\Sigma_k, \Lambda_k)} \mathrm{Syn}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^\square), r)_n \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\mathrm{syn}}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, r)_n. \quad (3.22)$$

Mais pour chaque (Σ_k, Λ_k) , on a un quasi-isomorphisme $\mathrm{Syn}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^\square), r)_n \cong \mathrm{Kos}(\varphi, \partial, R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^{PD})_n$. On vérifie que ce morphisme est fonctoriel. En effet, pour $R \rightarrow R'$ une application étale, soit (Σ, Λ) associé à R et (Σ', Λ') associé à R' . Alors si on note $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup \Sigma'$ et $\tilde{\Lambda} = \Lambda \cup \Lambda'$, le morphisme $R_{\Sigma, \Lambda}^\square \rightarrow R_{\tilde{\Sigma}, \tilde{\Lambda}}^\square$ décrit plus haut induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{R_{\Sigma, \Lambda}^{PD}}^\bullet & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Kos}(\partial, R_{\Sigma, \Lambda}^{PD}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_{R_{\tilde{\Sigma}, \tilde{\Lambda}}^{PD}}^\bullet & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Kos}(\partial, R_{\tilde{\Sigma}, \tilde{\Lambda}}^{PD}) \end{array}$$

Comme les systèmes sont filtrants, on a pour tout i ,

$$H^i(\varinjlim_{(\Sigma_k, \Lambda_k)} \mathrm{Kos}(\varphi, \partial, R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^{PD})_n) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{(\Sigma_k, \Lambda_k)} H^i(\mathrm{Kos}(\varphi, \partial, R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^{PD})_n)$$

et de même pour les complexes $\mathrm{Syn}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^\square), r)_n$. On en déduit un quasi-isomorphisme fonctoriel :

$$\varinjlim_{(\Sigma_k, \Lambda_k)} \mathrm{Syn}(\mathfrak{U}^k, \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^\square), r)_n \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{(\Sigma_k, \Lambda_k)} \mathrm{Kos}(\varphi, \partial, R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^{PD})_n.$$

Par ailleurs, on a construit un p^{Nr} -quasi-isomorphisme $\alpha_{r, \Sigma, \Lambda}^k$ fonctoriel de $\tau_{\leq r} \mathrm{Kos}(\varphi, \partial, R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^{PD})_n$ dans $\tau_{\leq r} R\Gamma(G_{R^k}, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(r)')$, qui donne :

$$\varinjlim_{(\Sigma_k, \Lambda_k)} \tau_{\leq r} \mathrm{Kos}(\varphi, \partial, R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^{PD})_n \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma(G_{R^k}, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(r)').$$

On obtient un quasi-isomorphisme fonctoriel :

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ (\Sigma_k, \Lambda_k)}} \tau_{\leq r} \text{Syn}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, \mathbb{A}_{\text{cris}}(R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^{\square}), r)_n \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma(G_{R^k}, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(r)'). \quad (3.23)$$

En combinant les deux quasi-isomorphismes précédents, on a :

$$\tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, r)_n \xleftarrow[\sim]{(3.22)} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ (\Sigma_k, \Lambda_k)}} \tau_{\leq r} \text{Syn}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, \mathbb{A}_{\text{cris}}(R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^{\square}), r)_n \xrightarrow[\sim]{(3.23)} \tau_{\leq r} R\Gamma(G_{R^k}, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(r)')$$

et ce quasi-isomorphisme est fonctoriel. On en déduit un quasi-isomorphisme

$$\tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^{\bullet}, r)_n \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma(G_{R^{\bullet}}, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(r)').$$

On définit $\alpha_{r,n}^0 : \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_n \rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(r)')$ comme la composée :

$$\begin{aligned} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_n &\rightarrow \text{hocolim}_{\text{HRF}} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^{\bullet}, r)_n \rightarrow \text{hocolim}_{\text{HRF}} \tau_{\leq r} R\Gamma(G_{R^{\bullet}}, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(r)') \\ &\rightarrow \tau_{\leq r} \text{hocolim}_{\text{HRF}} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{U}_C^{\bullet}, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(r)') \leftarrow \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(r)'). \end{aligned} \quad (3.24)$$

On va montrer que c'est un p^{Nr} -quasi-isomorphisme. La première et dernière flèches sont des quasi-isomorphismes par descente cohomologique (voir (2.6) pour la cohomologie syn-
tomique ; le même argument donne le résultat pour la cohomologie étale). La deuxième
flèche est un p^{Nr} -quasi-isomorphisme par ce qu'on vient de faire. Il reste à voir que, pour
tout k , on a un quasi-isomorphisme : $R\Gamma(G_{R^k}, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(r)') \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\text{ét}}(\text{Sp}(R^k[\frac{1}{p}]), \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(r)').$
Mais cela découle du fait que $\text{Sp}(R^k[\frac{1}{p}])$ est $K(\pi, 1)$ pour $\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ (voir remarque 3.1.2). \square

On peut maintenant considérer les faisceaux $\mathcal{H}^k(\mathcal{S}_n(r)_{\bar{\mathfrak{X}}})$ et $\bar{i}^* R^k \bar{j}_* \mathbb{Z}/p^n(r)'_{\bar{\mathfrak{X}}_{C, \text{tr}}}$ asso-
ciés aux préfaisceaux $U \mapsto H^k(U, \mathcal{S}_n(r)_{\bar{\mathfrak{X}}})$ et $U \mapsto H^k(U, \bar{i}^* R^k \bar{j}_* \mathbb{Z}/p^n(r)'_{\bar{\mathfrak{X}}_{C, \text{tr}}})$. En utili-
sant l'équivalence de catégorie entre $\mathbf{Fsc}(T, \mathcal{D}(\mathbb{Z}/p^n))$ et $\mathcal{D}^+((\bar{Y})_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n)$, le morphisme
ci-dessus peut être vu comme un morphisme dans $\mathcal{D}^+((\bar{Y})_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n)$ et on en déduit le
théorème :

Théorème 3.6.9. *Pour tout $0 \leq k \leq r$, il existe un p^N -isomorphisme*

$$\alpha_{r,n}^0 : \mathcal{H}^k(\mathcal{S}_n(r)_{\bar{\mathfrak{X}}}) \rightarrow \bar{i}^* R^k \bar{j}_* \mathbb{Z}/p^n(r)'_{\bar{\mathfrak{X}}_{C, \text{tr}}}$$

où N est un entier qui dépend de p et de r , mais pas de \mathfrak{X} ni de n .

3.6.3 Conjecture semi-stable

On suppose toujours que \mathfrak{X} est propre à réduction semi-stable sur \mathcal{O}_K . On rappelle
qu'on a la cohomologie de Hyodo-Kato $R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X}) := R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X}_k/W(k)^0)_{\mathbb{Q}}$ et que si D est un
(φ, N)-module filtré, $D\{r\}$ désigne le module D muni du Frobenius $p^r \varphi$ et D_K est muni
de la filtration $(F^{\bullet+r} D_K)$. Le but de cette partie est de prouver la conjecture semi-stable
de Fontaine-Jannsen :

Théorème 3.6.10. *Soit \mathfrak{X} un schéma formel propre semi-stable sur \mathcal{O}_K . On a un \mathbb{B}_{st} -linéaire, Galois équivariant isomorphisme :*

$$\tilde{\alpha}^0 : H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{st}} \xrightarrow{\sim} H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}. \quad (3.25)$$

De plus, cet isomorphisme préserve l'action du Frobenius et celle de l'opérateur de monodromie et après tensorisation par \mathbb{B}_{dR} , il induit un isomorphisme filtré :

$$H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{dR}} \xrightarrow{\sim} H_{\text{dR}}^i(\mathfrak{X}_K) \otimes_K \mathbb{B}_{\text{dR}}. \quad (3.26)$$

Démonstration. Par le corollaire 3.6.2, pour $i \leq r$, on a un isomorphisme $\alpha_r^0 : H_{\text{syn}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r))$ et en utilisant le lemme (2.3.7), on obtient un morphisme :

$$H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)) \xleftarrow{\sim} H_{\text{syn}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \rightarrow (H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}})^{\varphi=p^r, N=0}.$$

Le morphisme de période $\tilde{\alpha}^0$ est alors donné par :

$$\begin{aligned} H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{st}} &\xleftarrow[\varepsilon^{-r} t^r]{\sim} H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{st}}\{r\} \xleftarrow[\alpha_r^0]{\sim} H_{\text{syn}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{st}}\{r\} \\ &\rightarrow H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}} \end{aligned} \quad (3.27)$$

et la flèche $H_{\text{syn}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{st}}\{r\} \rightarrow H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}$ est un isomorphisme par le lemme (2.3.12). On obtient l'isomorphisme (3.25). Enfin, par construction de α_r^0 , l'application ci-dessus est Galois-équivariante, elle est compatible avec l'action de φ et de N et avec la filtration après tensorisation par \mathbb{B}_{dR} . \square

Chapitre 4

Unicité des morphismes de périodes

On suppose toujours que \mathfrak{X} est un schéma formel propre à réduction semi-stable sur \mathcal{O}_K . On a construit, dans le chapitre précédent, un isomorphisme :

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}^0 &: H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{st}} \xrightarrow{\sim} H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}} \\ \tilde{\alpha}_{\text{dR}}^0 &: H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{dR}} \xrightarrow{\sim} H_{\text{dR}}^i(\mathfrak{X}_K) \otimes_K \mathbb{B}_{\text{dR}}.\end{aligned}$$

D'autres démonstrations de la conjecture de Fontaine-Jannsen ont également été données par Česnavičius-Koshikawa ([15]) et par Tsuji ([47]). Le morphisme de période utilisé par Tsuji est l'application de Fontaine-Messing, $\tilde{\alpha}^{\text{FM}}$ définie ci-dessous. Česnavičius-Koshikawa définissent, eux, un morphisme de période $\tilde{\alpha}^{\text{CK}}$ en généralisant la construction de Bhatt-Morrow-Scholze ([9]) et dont on rappelle la construction plus loin. Le but de cette section est d'utiliser $\tilde{\alpha}^0$ pour montrer que ces deux morphismes de période $\tilde{\alpha}^{\text{CK}}$ et $\tilde{\alpha}^{\text{FM}}$ coïncident.

4.1 Application de Fontaine-Messing et symboles

La preuve de la conjecture semi-stable par Tsuji passe elle aussi par un théorème de comparaison entre les cycles proches p -adiques et les faisceaux syntomiques. Ici, \mathfrak{X} est un schéma formel à réduction semi-stable muni de la log-structure définie plus haut. Dans la section §(4.1.3), on supposera de plus qu'il est propre.

4.1.1 Faisceaux syntomiques et cycles proches

La description locale des applications de Fontaine-Messing

$$\begin{aligned}\alpha_{r,n}^{\text{FM}} &: \mathcal{S}_n(r)_{\mathfrak{X}} \rightarrow i^* Rj_* \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(r)'_{\mathfrak{X}_{K,\text{tr}}} \\ (\text{respectivement } \mathcal{S}_n(r)_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}} &\rightarrow \bar{i}^* R\bar{j}_* \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(r)'_{\mathfrak{X}_{C,\text{tr}}})\end{aligned}$$

est donnée dans la section suivante. On rappelle ici les principales étapes de la démonstration de Tsuji ([47]). Plus précisément, Tsuji montre le théorème suivant :

Théorème 4.1.1. [47, (3.3.4)] *Pour $q \leq r$, il existe un entier N qui ne dépend que de p , r et q tel que le noyau et conoyau de*

$$\alpha_{r,n}^{\text{FM}} : \mathcal{H}^q(\mathcal{S}_n(r)_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}}) \rightarrow \bar{i}^* R^q \bar{j}_* \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(r)'_{\mathfrak{X}_{C,\text{tr}}}$$

est tué par p^N pour tout $n \geq 1$.

Applications symboles et faisceaux syntomiques

On suppose dans un premier temps qu'il existe une immersion exacte fermée de \mathfrak{X} dans un log-schéma formel Z log-lisse sur \mathcal{O}_F , on note Z_n sa réduction modulo p^n et on suppose qu'on peut trouver un système compatible de relèvements du Frobenius $\{\varphi_{Z_n} : Z_n \rightarrow Z_n\}$. Soit D_n la log-PD-enveloppe de $\mathfrak{X}_n \hookrightarrow Z_n$, \mathcal{J}_{D_n} l'idéal à puissance divisée associé et $\mathcal{J}_{D_n}^{[r]}$ sa r -ième puissance divisée. On rappelle qu'on a les faisceaux syntomiques

$$\mathcal{S}_n(r)_{\mathfrak{X},Z,\varphi} := [\mathcal{J}_{D_n}^{[r-\bullet]} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}} \Omega_{Z_n/W_n}^\bullet \xrightarrow{p^r - \varphi} \mathcal{O}_{D_n} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}} \Omega_{Z_n/W_n}^\bullet].$$

On considère le faisceau $\tilde{\mathcal{J}}_{D_n}^{(r)} := \{x \in \mathcal{J}_{D_n}^{[r]} \mid \varphi(x) \in p^r \mathcal{O}_{D_n}\}$ et pour $s \geq r$, on pose $\mathcal{J}_{D_n}^{(r)} := \tilde{\mathcal{J}}_{D_{n+s}}^{(r)} \otimes \mathbb{Z}/p^n$. Alors $\mathcal{J}_{D_n}^{(r)}$ est indépendant de s . En effet, la flèche $\mathcal{J}_{D_{n+s}}^{[r]} \xrightarrow{p^{n+r}} \mathcal{J}_{D_{n+s}}^{[r]}$ se factorise par $\mathcal{J}_{D_{n+s}}^{[r]} \xrightarrow{p^{n+r}} \tilde{\mathcal{J}}_{D_{n+s}}^{(r)}$ et on a une suite exacte

$$\mathcal{J}_{D_{n+s}}^{[r]} \xrightarrow{p^{n+r}} \tilde{\mathcal{J}}_{D_{n+s}}^{(r)} \rightarrow \tilde{\mathcal{J}}_{D_{n+r}}^{(r)} \rightarrow 0.$$

En réduisant modulo p^n on obtient un isomorphisme

$$\tilde{\mathcal{J}}_{D_{n+s}}^{(r)} \otimes \mathbb{Z}/p^n \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{J}}_{D_{n+r}}^{(r)} \otimes \mathbb{Z}/p^n.$$

On définit ensuite $\mathcal{J}_{D_n}^{(r-\bullet)} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}} \Omega_{Z_n/W_n}^\bullet := (\tilde{\mathcal{J}}_{D_{n+r}}^{(r-\bullet)} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_{n+r}}} \Omega_{Z_{n+r}/W_{n+r}}^\bullet) \otimes \mathbb{Z}/p^n$ et le complexe de faisceau :

$$\mathcal{S}'_n(r)_{\mathfrak{X},Z,\varphi} := [\mathcal{J}_{D_n}^{(r-\bullet)} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}} \Omega_{Z_n/W_n}^\bullet \xrightarrow{1-\varphi_r} \mathcal{O}_{D_n} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}} \Omega_{Z_n/W_n}^\bullet]$$

où $\varphi_r = (\frac{\varphi}{p^{r-\bullet}} \otimes \wedge \frac{d\varphi}{p})$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}_{D_n}^{(r-\bullet)} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}} \Omega_{Z_n/W_n}^\bullet & \xrightarrow{1-\varphi_r} & \mathcal{O}_{D_n} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}} \Omega_{Z_n/W_n}^\bullet \\ \uparrow p^r & & \uparrow \\ \mathcal{J}_{D_n}^{[r-\bullet]} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}} \Omega_{Z_n/W_n}^\bullet & \xrightarrow{p^r - \varphi} & \mathcal{O}_{D_n} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}} \Omega_{Z_n/W_n}^\bullet \end{array}$$

qui induit un morphisme $\mathcal{S}_n(r)_{\mathfrak{X},Z,\varphi} \rightarrow \mathcal{S}'_n(r)_{\mathfrak{X},Z,\varphi}$ dont les noyau et conoyau sont tués par p^r . Pour alléger les notations, dans la suite de cette partie, on notera simplement $\mathcal{S}_n(r)$ et $\mathcal{S}'_n(r)$ pour $\mathcal{S}_n(r)_{\mathfrak{X},Z,\varphi}$ et $\mathcal{S}'_n(r)_{\mathfrak{X},Z,\varphi}$.

Notons \mathcal{M} la log-structure de \mathfrak{X} , \mathcal{M}_n sa réduction modulo p^n et \mathcal{M}_{D_n} la log-structure de D_n . On rappelle qu'on a un isomorphisme $\mathcal{M}_{D_n}^{\text{gp}}/(1 + \mathcal{J}_{D_n}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_n^{\text{gp}}$. On va maintenant définir des applications symboles $(\mathcal{M}_n^{\text{gp}})^{\otimes q} \rightarrow \mathcal{H}^q(\mathcal{S}_n(q))$ et $(\mathcal{M}_{n+1}^{\text{gp}})^{\otimes q} \rightarrow \mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_n(q))$ (voir [47, §2.2]). On commence par supposer que $q = 1$. On définit le complexe

$$C_n := (\cdots \rightarrow 0 \rightarrow (1 + \mathcal{J}_{D_n}) \rightarrow \mathcal{M}_{D_n}^{\text{gp}} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots)$$

concentré en degrés 0 et 1. En particulier, on a $\mathcal{H}^1(C_n) = \mathcal{M}_n^{\text{gp}}$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} 1 + \mathcal{J}_{D_n} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{D_n}^{\text{gp}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{J}_{D_n}^{[1]} & \longrightarrow & (\mathcal{O}_{D_n} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}} \Omega_{Z_n/W_n}^\bullet) \oplus \mathcal{O}_{D_n} \end{array}$$

où la flèche de gauche est donnée par $x \mapsto \log(x)$ et celle de droite par $x \mapsto (d \log(x), \log(\frac{x}{\varphi_{D_n}(x)}))$. On obtient donc un morphisme $C_n \rightarrow \mathcal{S}_n(1)$, puis en prenant la cohomologie en degré 1, un morphisme

$$\mathcal{M}_n^{\text{gp}} \rightarrow \mathcal{H}^1(\mathcal{S}_n(1)).$$

De la même façon, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} 1 + \mathcal{J}_{D_{n+1}} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{D_{n+1}}^{\text{gp}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{J}_{D_n}^{(1)} & \longrightarrow & (\mathcal{O}_{D_n} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}} \Omega_{Z_n/W_n}^\bullet) \oplus \mathcal{O}_{D_n} \end{array}$$

où la flèche de gauche est donnée par $x \mapsto \log(x) \bmod p^n$ et celle de droite par $x \mapsto (d \log(x) \bmod p^n, p^{-1} \log(\frac{x}{\varphi_{D_{n+1}}(x)}))$, induit un morphisme

$$\mathcal{M}_{n+1}^{\text{gp}} \rightarrow \mathcal{H}^1(\mathcal{S}'_n(1)).$$

On étend ces applications à un q quelconque en utilisant les structures produits suivantes. Pour le faisceau $\mathcal{S}_n(r)$, le terme de degré q est égal à

$$(\mathcal{J}_{D_n}^{[r-i]} \otimes_{Z_n} \Omega_{Z_n/W_n}^i) \oplus (\mathcal{O}_{D_n} \otimes_{Z_n} \Omega_{Z_n/W_n}^{i-1})$$

et on définit le produit par

$$\begin{cases} \mathcal{S}_n(r) \otimes \mathcal{S}_n(r') & \rightarrow \mathcal{S}_n(r + r') \\ (x, y) \otimes (x', y') & \mapsto (xx', (-1)^q p^r xy' + y\varphi(x')) \end{cases}.$$

Pour $\mathcal{S}'_n(r)$, on a de la même façon :

$$\begin{cases} \mathcal{S}'_n(r) \otimes \mathcal{S}'_n(r') & \rightarrow \mathcal{S}'_n(r + r') \\ (x, y) \otimes (x', y') & \mapsto (xx', (-1)^q xy' + y\varphi_r(x')) \end{cases}.$$

On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n(r) \oplus \mathcal{S}_n(r') & \longrightarrow & \mathcal{S}_n(r+r') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{S}'_n(r) \oplus \mathcal{S}'_n(r') & \longrightarrow & \mathcal{S}'_n(r+r'). \end{array}$$

On peut maintenant étendre les applications définies plus haut et on obtient des morphismes :

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_n^{\text{gp}})^{\otimes q} &\rightarrow \mathcal{H}^q(\mathcal{S}_n(q)) \\ (\mathcal{M}_{n+1}^{\text{gp}})^{\otimes q} &\rightarrow \mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_n(q)). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Applications symboles et cycles proches

Considérons le faisceau $i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(1)'_{\mathfrak{X}_{K,\text{tr}}}$. La suite exacte de Kummer :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(1)_{\mathfrak{X}_{K,\text{tr}}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{K,\text{tr}}}^* \xrightarrow{p^n} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{K,\text{tr}}}^* \rightarrow 0$$

induit un morphisme $i^*(\mathcal{M}^{\text{gp}}) = i^* j_* \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{K,\text{tr}}}^* \rightarrow i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(1)_{\mathfrak{X}_{K,\text{tr}}}[1]$ et en prenant le \mathcal{H}^0 , on a :

$$i^*(\mathcal{M}^{\text{gp}}) \rightarrow i^* R^1 j_* \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(1)_{\mathfrak{X}_{K,\text{tr}}}.$$

Ensuite, l'inclusion $\mathbb{Z}_p(r) \rightarrow \frac{1}{p^a a!} \mathbb{Z}_p(r)$ induit $\mathbb{Z}_p/p^n(r) \rightarrow \mathbb{Z}_p/p^n(r)'$ et on obtient une application symbole pour $q = 1$:

$$i^*(\mathcal{M}^{\text{gp}}) \rightarrow i^* R^1 j_* \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(1)'_{\mathfrak{X}_{K,\text{tr}}}.$$

Le cas q quelconque s'obtient comme précédemment en prenant le produit :

$$i^*(\mathcal{M}^{\text{gp}})^{\otimes q} \rightarrow i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(q)'_{\mathfrak{X}_{K,\text{tr}}}. \quad (4.2)$$

On peut de plus montrer que les applications symboles ainsi définies sont compatibles avec l'application de Fontaine-Messing, c'est-à-dire qu'on a le théorème :

Théorème 4.1.2. [47, Proposition (3.2.4)] *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{M}_{n+1}^{\text{gp}})^{\otimes q} & \xrightarrow{(4.1)} & \mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_n(q)) \\ \uparrow & & \downarrow \alpha_{q,n}^{\text{FM}} \\ i^*(\mathcal{M}^{\text{gp}}) & \xrightarrow{(4.2)} & i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(q)'_{\mathfrak{X}_{K,\text{tr}}} \end{array} .$$

Preuve du théorème (4.1.1)

Tsuji commence par prouver le théorème (4.1.1) dans le cas où le twist r est égal au degré q . Pour cela, il définit les filtrations suivantes sur les faisceaux syntomiques et les cycles proches p -adiques ([47, §2.4]). On rappelle que ϖ est une uniformisante de K . On définit d'abord F^\bullet et G^\bullet sur $\mathcal{M}_2^{\text{gp}}$:

— Si $q = 1$:

$$\begin{aligned} F^0 \mathcal{M}_2^{\text{gp}} &= \mathcal{M}_2^{\text{gp}} & \text{et} & & F^m \mathcal{M}_2^{\text{gp}} &= 1 + \varpi^m \mathcal{O}_{\mathfrak{x}} \text{ si } m \geq 1 \\ G^0 \mathcal{M}_2^{\text{gp}} &= (1 + \varpi \mathcal{O}_{\mathfrak{x}_2}) \langle \varpi \rangle & \text{et} & & G^m \mathcal{M}_2^{\text{gp}} &= F^{m+1} \mathcal{M}_2^{\text{gp}} \text{ si } m \geq 1. \end{aligned}$$

— Si $q \geq 2$:

$$\begin{aligned} F^m (\mathcal{M}_2^{\text{gp}})^{\otimes q} &= \text{l'image de } F^m \mathcal{M}_2^{\text{gp}} \otimes (\mathcal{M}_2^{\text{gp}})^{\otimes (q-1)} \\ G^m (\mathcal{M}_2^{\text{gp}})^{\otimes q} &= \text{l'image de } F^m \mathcal{M}_2^{\text{gp}} \otimes (\mathcal{M}_2^{\text{gp}})^{\otimes (q-2)} \otimes \langle \varpi \rangle + F^{m+1} (\mathcal{M}_2^{\text{gp}})^{\otimes q} \end{aligned}$$

et on étend ensuite ces définitions à $\mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_1(q))$ en prenant leurs images par l'application (4.1). On définit les mêmes filtrations pour $i^*(\mathcal{M}^{\text{gp}})$ et on étend la définition à $i^*R^q j_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(r)'$ via (4.2). Si \mathcal{F}^q est l'un des faisceaux $\mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_1(q))$ ou $i^*R^q j_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(r)'$, on note :

$$\text{gr}_0^m \mathcal{F}^q = F^m \mathcal{F}^q / V^m \mathcal{F}^q \text{ et } \text{gr}_1^m \mathcal{F}^q = V^m \mathcal{F}^q / F^{m+1} \mathcal{F}^q$$

puis : $B^q := \text{Im}(d : \Omega_{X_k/k}^{q-1} \rightarrow \Omega_{X_k/k}^q)$ et $Z^q := \text{ker}(d : \Omega_{X_k/k}^q \rightarrow \Omega_{X_k/k}^{q+1})$. Enfin, soit ω_{\log}^q le sous-faisceau de $\Omega_{X_k/k}^q$ engendré par $d \log(a_1) \wedge \cdots \wedge d \log(a_q)$ pour a_1, \dots, a_q dans \mathcal{M}_1 .

Théorème 4.1.3. [47, 2.4.1, 3.3.1] *Si \mathcal{F}^q est l'un des faisceaux $\mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_1(q))$ ou $i^*R^q j_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(r)'$, alors*

1. \mathcal{F}^q est localement engendré par les symboles (i.e. $F^0 \mathcal{F}^q = \mathcal{F}^q$).
2. Si $m = 0$, on a les isomorphismes :

$$\begin{cases} \text{gr}_0^0 \mathcal{F}^q & \xrightarrow{\sim} \omega_{\log}^q \\ \{a_1, \dots, a_q\} & \mapsto d \log(\bar{a}_1) \wedge \cdots \wedge d \log(\bar{a}_q) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{gr}_1^0 \mathcal{F}^q & \xrightarrow{\sim} \omega_{\log}^{q-1} \\ \{a_1, \dots, a_{q-1}, \varpi\} & \mapsto d \log(\bar{a}_1) \wedge \cdots \wedge d \log(\bar{a}_{q-1}) \end{cases}$$

3. Si $0 < m < \frac{pe}{p-1}$ et $p \nmid m$,

$$\begin{cases} \text{gr}_0^m \mathcal{F}^q & \xrightarrow{\sim} \omega_{\log}^{q-1} / B^{q-1} \\ \{1 + \varpi^m x, a_1, \dots, a_{q-1}\} & \mapsto \bar{x} d \log(\bar{a}_1) \wedge \cdots \wedge d \log(\bar{a}_{q-1}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{gr}_1^m \mathcal{F}^q & \xrightarrow{\sim} \omega_{\log}^{q-2} / Z^{q-2} \\ \{1 + \varpi^m x, a_1, \dots, a_{q-2}, \varpi\} & \mapsto \bar{x} d \log(\bar{a}_1) \wedge \cdots \wedge d \log(\bar{a}_{q-1}) \end{cases}$$

4. Si $0 < m < \frac{pe}{p-1}$ et $p \mid m$,

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{gr}_0^m \mathcal{F}^q \\ \{1 + \varpi^m x, a_1, \dots, a_{q-1}\} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} \omega_{\log}^{q-1} / Z^{q-1} \\ & \mapsto \bar{x} d \log(\bar{a}_1) \wedge \dots \wedge d \log(\bar{a}_{q-1}) \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{gr}_1^m \mathcal{F}^q \\ \{1 + \varpi^m x, a_1, \dots, a_{q-2}, \varpi\} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} \omega_{\log}^{q-2} / Z^{q-2} \\ & \mapsto \bar{x} d \log(\bar{a}_1) \wedge \dots \wedge d \log(\bar{a}_{q-1}) \end{aligned}$$

5. Si $m \geq \frac{pe}{p-1}$, $F^m \mathcal{F}^q = 0$.

Dans le cas du faisceau syntomique, la preuve de ce théorème est donné dans [47, 2.4.1]. Dans le cas où $\mathcal{F}^q = i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(q)'$, le résultat a d'abord été démontré par Bloch et Kato dans [11] dans le cas de la bonne réduction, puis a été étendu à la réduction semi-stable par Hyodo ([31]).

Théorème 4.1.4. [47, (3.3.2)] *Écrivons $m := v_p(a(q)!p^{a(q)})$ où $q = a(q)(q-1) + b(q)$ avec $b(q) < (q-1)$ et soit $n > m$. On suppose que K contient les racines primitives p^n -ième de l'unité. Alors l'application de Fontaine-Messing*

$$\alpha_{q,n}^{\mathrm{FM}} : \mathcal{H}^q(\mathcal{S}_n(q)) \rightarrow i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(q)'$$

est un p^{m+2q} -isomorphisme.

Démonstration. Comme la flèche $\mathcal{H}^q(\mathcal{S}_n(q)) \rightarrow \mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_n(q))$ est un p^{2q} -isomorphisme, il suffit de vérifier que $\mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_n(q)) \rightarrow i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(q)'$ est un p^m -isomorphisme.

Remarquons d'abord que les applications symboles

$$(\mathcal{M}_{l+1}^{\mathrm{gp}})^{\otimes q} \rightarrow \mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_l(q)) \text{ et } (i^*(\mathcal{M}^{\mathrm{gp}}))^{\otimes q} \rightarrow i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p^l \mathbb{Z}(q)$$

sont surjectives pour tout entier $l \geq 1$. En effet, pour $l = 1$, le résultat est donné par le premier point de 4.1.3. Si maintenant on a $l \geq 1$ tel que $(\mathcal{M}_{l+1}^{\mathrm{gp}})^{\otimes q} \rightarrow \mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_l(q))$ et $(i^*(\mathcal{M}^{\mathrm{gp}}))^{\otimes q} \rightarrow i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p^l \mathbb{Z}(q)$ sont surjectives, le résultat pour $l+1$ s'obtient à partir des suites exactes

$$\begin{aligned} i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(q)' & \xrightarrow{p^l} i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p^{l+1}\mathbb{Z}(q)' \rightarrow i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p^l \mathbb{Z}(q)' \\ \mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_1(q)) & \xrightarrow{p^l} \mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_{l+1}(q)) \rightarrow \mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_l(q)) \end{aligned}$$

(induites par les suites exactes courtes

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/p \xrightarrow{p^l} \mathbb{Z}/p^{l+1} \rightarrow \mathbb{Z}/p^l \rightarrow 0 \text{ et } 0 \rightarrow \mathcal{J}_{D_1}^{(r)} \xrightarrow{p^l} \mathcal{J}_{D_{l+1}}^{(r)} \rightarrow \mathcal{J}_{D_l}^{(r)} \rightarrow 0).$$

Rappelons que $\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(q)' = \frac{1}{p^m} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(q)$: on a un morphisme naturel de $i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p^{n-m} \mathbb{Z}(q)$ dans $i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(q)'$ dont le conoyau est tué par p^m . Montrons que ce morphisme est injectif. On a la suite exacte longue :

$$\dots \rightarrow i^* R^{q-1} j_* \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(q) \rightarrow i^* R^{q-1} j_* \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}(q) \rightarrow i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p^{n-m} \mathbb{Z}(q) \xrightarrow{p^m} i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(q) \rightarrow \dots$$

et la flèche de gauche est surjective (on a supposé que K contient toutes les racines p^n -ième de l'unité). On en déduit que la flèche de droite est injective et donc que $i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p^{n-m} \mathbb{Z}(q) \rightarrow i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(q)'$ est injective.

On déduit de la surjectivité des applications symboles et de la compatibilité de celles-ci avec l'application de Fontaine-Messing, que l'image du morphisme

$$\mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_n(q)) \rightarrow i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(q)'$$

est égale à l'image de

$$i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p^{n-m} \mathbb{Z}(q) \rightarrow i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(q)'$$

et on obtient finalement que $\mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_n(q)) \rightarrow i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(q)'$ se factorise en

$$\mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_n(q)) \rightarrow \mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_{n-m}(q)) \rightarrow i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p^{n-m} \mathbb{Z}(q) \rightarrow i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(q)'.$$

La première flèche est surjective (par la surjectivité des applications symboles) et de noyau

$$p^{n-m} \mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_m(q)) = p^{n-m} \mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_n(q))$$

tué par p^m . La troisième flèche est injective par ce qu'on vient de voir et de conoyau tué par p^m . Montrons que la flèche du milieu est un isomorphisme. On déduit de (4.1.2) qu'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_{n-m-1}(q)) & \xrightarrow{p} & \mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_{n-m}(q)) & \longrightarrow & \mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_1(q)) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p^{n-m-1} \mathbb{Z}(q) & \xrightarrow{p} & i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p^{n-m} \mathbb{Z}(q) & \longrightarrow & i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p \mathbb{Z}(q) \longrightarrow 0. \end{array}$$

De plus les lignes sont exactes par les mêmes arguments que précédemment. Par récurrence, on voit qu'il suffit de vérifier que $\mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_1(q)) \rightarrow i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p \mathbb{Z}(q)$ est un isomorphisme. C'est le résultat du théorème (4.1.3).

Finalement, on obtient que $\mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_n(q)) \rightarrow i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(q)'$ est un p^m -isomorphisme et donc

$$\alpha_{q,n}^{\text{FM}} : \mathcal{H}^q(\mathcal{S}_n(q)) \rightarrow i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(q)'$$

est un p^{m+2q} -isomorphisme. □

Si \mathfrak{X} n'admet pas d'immersion fermée dans un Z log-lisse sur \mathcal{O}_F , on considère un hyper-recouvrement \mathfrak{U}^\bullet de \mathfrak{X} tel que les \mathfrak{U}^s admettent des relevés log-lisses sur \mathcal{O}_F munis de Frobenius compatibles et on utilise la remarque 2.3.6 pour obtenir le résultat du théorème 4.1.4 dans le cas général. En prenant ensuite la limite sur les extensions finies L de K , on en déduit le théorème (4.1.1) pour $q = r$. On obtient finalement (4.1.1) pour tout $q \geq r$, en utilisant le résultat suivant :

Théorème 4.1.5. [47, 2.3.1] *Soit $0 \leq q \leq r$. Il existe une constante N qui ne dépend que de p, q et r telle que l'application*

$$\begin{cases} \mathcal{H}^q(\mathcal{S}_n(q)_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}}) \rightarrow \mathcal{H}^q(\mathcal{S}_n(r)_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}}) \\ x \mapsto t^{r-q}x \end{cases}$$

est un p^N -isomorphisme.

Démonstration. La preuve est donnée dans la section (2.3) de [47]. □

On obtient finalement un isomorphisme

$$\alpha_r^{\text{FM}} : H_{\text{syn}}^k(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^k(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)) \xrightarrow{p^{-r}} H_{\text{ét}}^k(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)).$$

4.1.2 Comparaison locale avec l'application de Fontaine-Messing

Dans cette partie, on montre que le morphisme de période local construit dans le chapitre précédent est égal à l'application de Fontaine-Messing modulo une certaine puissance de p . Une fois la construction du morphisme établie, la preuve est très similaire à celle du cas arithmétique ([21, §4.7]). On suppose toujours $\mathfrak{X} = \text{Spf}(R)$.

Les anneaux $\mathbb{E}_{\bar{R}}^{[u,v]}$ et $\mathbb{E}_{\bar{R}}^{\text{PD}}$ et lemmes de Poincaré

On rappelle ici la définition de $\mathbb{E}_{\bar{R}}^{[u,v]}$ et $\mathbb{E}_{\bar{R}}^{\text{PD}}$ donnée dans [21, §2.6]. Dans cette section, S désignera l'anneau R_{cris}^+ ou $R^{[u,v]}$ et A désignera $\mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R})$, $\mathbb{A}_{\text{cris}}(R)$, $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v]}$ ou $\mathbb{A}_R^{[u,v]}$. On a donc un morphisme injectif continu $\iota : S \rightarrow A$ et on note $f : S \otimes A \rightarrow A$ le morphisme tel que $f(x \otimes y) = \iota(x)y$.

On note SA la log-PD-enveloppe complétée de $S \otimes A \rightarrow A$ par rapport à $\ker(f)$.

Remarque 4.1.6. Soit $V_j = \frac{X_j \otimes 1}{1 \otimes \iota(X_j)}$ pour $1 \leq j \leq d$. Alors SA est en fait la complétion p -adique de $S \otimes A$ auquel on ajoute tous les $(x \otimes 1 - 1 \otimes \iota(x))^{[k]}$ pour x dans S et les $(V_j - 1)^{[k]}$.

En effet, la log-structure de \bar{R} est induite de celle de R (qui est donnée par la fibre spéciale et le diviseur à l'infini). On munit A de la log-structure induite de celle de \mathbb{A}_{cris} (donnée par $([\varpi^b])$) et de celle de \bar{R} . L'inclusion $\text{Spf}(A) \rightarrow \text{Spf}(S \widehat{\otimes} A)$ n'est alors plus exacte, mais on peut considérer son exactification :

$$\begin{array}{ccc} & \text{Spf}(D) & \\ \tilde{f} \nearrow & & \searrow \\ \text{Spf}(A) & \xrightarrow{f} & \text{Spf}(S \widehat{\otimes} A) \end{array}$$

où $D := S \widehat{\otimes} A[V_j, 1 \leq j \leq d]$, $\tilde{f}|_{S \widehat{\otimes} A} = f$ et $\tilde{f}(V_j) = 1$.

On obtient ainsi que \tilde{f} est exacte et SA est alors donnée par la PD-enveloppe usuelle de $\tilde{f} : D \rightarrow A$ par rapport à $\ker(\tilde{f})$.

On munit SA d'une filtration en définissant $F^r SA$ comme l'adhérence de l'idéal engendré par les éléments de la forme :

$$x_1 x_2 \prod_{1 \leq j \leq s} (V_j - 1)^{[k_j]}$$

où x_1 est dans $F^{r_1} S$, x_2 est dans $F^{r_2} A$ et $r_1 + r_2 + \sum_{j=1}^d k_j \leq r$.

Proposition 4.1.7. [21, Lem. 2.36]

1. Tout x de SA s'écrit de manière unique sous la forme :

$$x = \sum_{\mathbf{k}=(k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d} x_{\mathbf{k}} \prod_{j=1}^d (1 - V_j)^{[k_j]} \quad (4.3)$$

avec $x_{\mathbf{k}}$ dans A et $x_{\mathbf{k}}$ tend vers 0 quand \mathbf{k} tend vers l'infini.

2. De plus,

$$x = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d} x_{\mathbf{k}} \prod_{j=1}^d (1 - V_j)^{[k_j]} \in F^r SA \quad \text{si et seulement si} \quad x_{\mathbf{k}} \in F^{r-|\mathbf{k}|} A \quad \text{pour tout } \mathbf{k}.$$

Démonstration. On note A' la complétion p -adique de $A[(1-V_j)^{[k]}, 1 \leq j \leq d, k \in \mathbb{N}]$. Pour obtenir le résultat du premier point, il suffit de montrer que l'application $\iota' : A' \rightarrow SA$ est bijective.

On commence par prouver l'injectivité. Soit x dans A' qui s'écrit comme dans (4.1.7) et tel que $\iota'(x) = 0$. Montrons par récurrence sur $|\mathbf{k}|$ que $x_{\mathbf{k}} = 0$. Pour $\mathbf{k} = (0, \dots, 0)$, on applique le morphisme $f : SA \rightarrow A$ et, comme $f(1 - V_j) = 0$, on obtient $x_0 = 0$. On suppose que $x_{\mathbf{k}} = 0$ pour tous $|\mathbf{k}| < n$ et on montre que $x_{\mathbf{l}} = 0$ pour $|\mathbf{l}| = n$ et $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_d)$ en utilisant les $\partial_j = X_j \frac{\partial}{\partial X_j}$:

$$\left(\prod_{j=1}^d \partial_j^{l_j} \right) \circ \iota'(x) = \sum_{|\mathbf{k}| \geq n} x_{\mathbf{k}} \prod_{j=1}^d \partial_j^{l_j} (1 - V_j)^{[k_j]}$$

car $\partial_j V_l = 0$ si $j \neq l$. En écrivant $\partial_j V_j = (V_j - 1) + 1$ et en appliquant f , on obtient que $x_{\mathbf{l}} = 0$.

Il reste à voir la surjectivité. On va d'abord montrer que S est inclus dans $\iota'(A')$. Pour cela, on prouve qu'il existe un (unique) morphisme $\iota_0 : S \rightarrow A'$ tel que l'injection naturelle $S \rightarrow SA$ se factorise :

$$\begin{array}{ccc} S & \hookrightarrow & SA \\ & \searrow & \nearrow \\ & A' & \end{array}$$

Or, il existe un morphisme $\iota_0 : S_\square \rightarrow A'$ tel que $\iota' \circ \iota_0$ est l'injection $S_\square \rightarrow SA$: il est donné par la formule

$$\iota_0(X_j^{k_j}) = \iota(X_j)^{k_j} (1 - V_j)^{k_j} = \iota(X_j)^{k_j} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{n}{p^s}! \binom{k_j}{n} (V_j - 1)^{[n]}.$$

Il est unique car ι' est injective. On vérifie ensuite que $\iota_0(x) - \iota(x)$ est dans $\ker(f \circ \iota')$ pour tout x de S_\square . Comme $S_\square \rightarrow S$ est étale, ι s'étend alors de manière unique à S , avec $\iota_0(x) - \iota(x) \in \ker(f \circ \iota')$. Par unicité, on obtient que la composition $\iota' \circ \iota_0$ est l'application naturelle $S \rightarrow SA$ et que S est dans $\iota'(A')$.

Pour terminer, il suffit de voir que le log-PD-idéal engendré par $\ker(f)$ est inclus dans l'image de ι' . Par définition de ι' , il est clair que c'est le cas pour les $(V_j - 1)^{[k]}$. De plus, comme on a $(X_j - \iota(X_j)) = \iota(X_j)(V_j - 1)$, on voit que $(x - \iota(x))^{[k]}$ est dans l'image du PD-idéal engendré par les $(V_j - 1)$. Ceci termine la démonstration de la première assertion.

Montrons le second point. Soit $x = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d} x_{\mathbf{k}} \prod_{j=1}^d (1 - V_j)^{[k_j]}$ dans SA . On a de manière évidente que si tous les $x_{\mathbf{k}}$ sont dans $F^{r-\mathbf{k}}A$ alors x est dans $F^r SA$.

On va maintenant montrer le sens direct par récurrence sur r . En utilisant les ∂_j , une récurrence sur \mathbf{k} montre que si $|\mathbf{k}| \neq 0$ alors $x_{\mathbf{k}}$ est dans $F^{r-|\mathbf{k}|}A$. Il reste à voir que x_0 est dans $F^r A$. Mais x_0 est dans $A \cap F^r SA$, $f(x_0) = x_0$ et $f(F^r SA_s) \subseteq F^r A$. On obtient donc $x_0 \in F^r A$. □

On définit les anneaux suivants :

- $\mathbb{E}_R^{PD} = SA$ (resp. $\mathbb{E}_R^{[u,v]}$) pour $S = R_{\text{cris}}^+$ (resp. $R^{[u,v]}$) et $A = \mathbb{A}_{\text{cris}}(R)$ (resp. $\mathbb{A}_R^{[u,v]}$),
- $\mathbb{E}_{R_\infty}^{PD} = SA$ (resp. $\mathbb{E}_{R_\infty}^{[u,v]}$) pour $S = R_{\text{cris}}^+$ (resp. $R^{[u,v]}$) et $A = \mathbb{A}_{\text{cris}}(R_\infty)$ (resp. $\mathbb{A}_{R_\infty}^{[u,v]}$),
- $\mathbb{E}_{\overline{R}}^{PD} = SA$ (resp. $\mathbb{E}_{\overline{R}}^{[u,v]}$) pour $S = R_{\text{cris}}^+$ (resp. $R^{[u,v]}$) et $A = \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$ (resp. $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}$).

On déduit de la proposition 4.1.7 les inclusions : $\mathbb{E}_R^{PD} \subseteq \mathbb{E}_{R_\infty}^{PD} \subseteq \mathbb{E}_{\overline{R}}^{PD}$ (et de même avec l'exposant $[u, v]$).

On va maintenant étendre les actions de G_R et de φ à ces anneaux.

Proposition 4.1.8. [21, Lem. 2.40] *Si $SA = \mathbb{E}_M^{PD}$ (respectivement $\mathbb{E}_M^{[u,v]}$) pour $M \in \{R, R_\infty, \overline{R}\}$, on note $SA' = \mathbb{E}_M^{PD}$ (respectivement $\mathbb{E}_M^{[u, \frac{v}{p}]}$). Alors :*

1. φ s'étend de manière unique en un morphisme continu $SA \rightarrow SA'$.
2. L'action de G_R s'étend de manière unique à une action continue sur SA , qui commute avec φ et $\mathbb{E}_{R_\infty}^\star$ (pour $\star \in \{PD, [u, v]\}$) est l'ensemble des points fixes de $\mathbb{E}_{\overline{R}}^\star$ par le sous-groupe $\Gamma_R \subseteq G_R$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $(1 - \varphi(V_j))^{[k]}$ et $(1 - g(V_j))^{[k]}$ sont dans SA pour g dans G_R . Comme on a $\varphi(V_j) = V_j^p$,

$$(1 - \varphi(V_j))^{[k]} = (1 - V_j)^{[k]} \cdot \left(\sum_{i=0}^{p-1} V_j^i \right)^k$$

et donc $(1 - \varphi(V_j))^{[k]}$ est dans SA .

On a ensuite $g(\iota(X_j)) = [\varepsilon^{c_j(g)}]\iota(X_j)$ pour un $c_j(g)$ dans \mathbb{Z}_p . Donc :

$$1 - \frac{X_j}{g(\iota(X_j))} = (1 - V_j) + (1 - [\varepsilon]^{-c_j(g)})V_j$$

et comme μ divise $(1 - [\varepsilon]^{-c_j(g)})$ et que μ admet des puissances divisées on obtient que $1 - \frac{X_j}{\sigma(\iota(X_j))}$ est dans SA . □

On considère maintenant le complexe

$$F^r \Omega_{SA/A}^\bullet := F^r SA \rightarrow F^{r-1} SA \otimes \Omega_{SA/A}^1 \rightarrow F^{r-2} SA \otimes \Omega_{SA/A}^2 \rightarrow \dots$$

Proposition 4.1.9. [21, Lem. 2.37] *Le morphisme $F^r A \rightarrow F^r \Omega_{SA/A}^\bullet$ est un quasi-isomorphisme.*

Démonstration. La preuve est la même que dans [21]. On note $\varepsilon : F^r A \rightarrow F^r SA$ l'application naturelle. On va construire une homotopie h :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F^r SA & \longrightarrow & F^{r-1} SA \otimes \Omega_{SA/A}^1 & \longrightarrow & F^{r-2} SA \otimes \Omega_{SA/A}^2 \longrightarrow \dots \\ & & \searrow h_0 & & \downarrow & & \downarrow \\ F^r A & \xrightarrow{\varepsilon} & F^r SA & \longrightarrow & F^{r-1} SA \otimes \Omega_{SA/A}^1 & \longrightarrow & F^{r-2} SA \otimes \Omega_{SA/A}^2 \longrightarrow \dots \\ & & \swarrow h_1 & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & F^{r-1} SA \otimes \Omega_{SA/A}^1 & \longrightarrow & F^{r-2} SA \otimes \Omega_{SA/A}^2 \longrightarrow \dots \end{array}$$

On définit

$$h_0 : \begin{cases} F^r SA & \rightarrow F^r A \\ \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d} a_{\mathbf{k}} \prod_{j=1}^d (V_j - 1)^{[k_j]} & \mapsto a_0 \end{cases}$$

et on a $h_0 \varepsilon = \text{Id}$.

Pour $n > 0$, $h_n : F^{j-n} SA \otimes \Omega^n \rightarrow F^{j-n+1} SA \otimes \Omega^{n-1}$ est donnée par :

$$(a \prod_{j=1}^d (V_j - 1)^{[k_j]}) \widetilde{\omega}_{\mathbf{j}} \mapsto \begin{cases} a \prod_{j=1}^d (V_j - 1)^{[k_j + \delta_{j j_1}]} \widetilde{\omega}_{\mathbf{j}'}, & \text{si } k_j = 0 \text{ pour } 0 \leq j \leq j_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_n)$, $\mathbf{j}' = (j_2, \dots, j_n)$ et $\widetilde{\omega}_{\mathbf{j}} = V_{j_1} \frac{dX_{j_1}}{X_{j_1}} \wedge \dots \wedge V_{j_n} \frac{dX_{j_n}}{X_{j_n}}$.

On vérifie qu'on a alors $\varepsilon h_0 + h_1 d = \text{Id}$ et $dh_n + h_{n+1} d = \text{Id}$. □

Pour simplifier les notations, on note $R_1 := R^{[u,v]}$ et $R_2 := \mathbb{A}_R^{[u,v]}$. On a des plongements $\iota_i : R^{[u,v]} \rightarrow R_i$ pour $i \in \{1, 2\}$. On note ensuite R_3 la log-PD-enveloppe complétée de $R_1 \otimes R_2$ pour $\iota_2 \circ \iota_1^{-1} : R_1 \rightarrow R_2$ (et donc $R_3 = \mathbb{E}_R^{[u,v]}$). On pose $X_{ij} := \iota_i(X_j)$ pour $i \in \{1, 2\}$ et $j \in \{1, \dots, d\}$. Soient

$$\Omega_i^1 = \bigoplus_{j=1}^d \mathbb{Z} \frac{dX_{ij}}{X_{ij}}, \quad \Omega_3^1 = \Omega_1^1 \oplus \Omega_2^1, \quad \Omega_i^n = \bigwedge^n \Omega_i^1$$

$$\text{et } F^r \Omega_{R_i}^\bullet := F^r R_i \rightarrow F^{r-1} R_i \otimes \Omega_i^1 \rightarrow F^{r-2} R_i \otimes \Omega_i^2 \rightarrow \dots$$

Lemme 4.1.10. [21, Lem. 3.11] *Les applications $F^r \Omega_{R_1}^\bullet \rightarrow F^r \Omega_{R_3}^\bullet$ et $F^r \Omega_{R_2}^\bullet \rightarrow F^r \Omega_{R_3}^\bullet$ sont des quasi-isomorphismes.*

Démonstration. Le raisonnement est le même pour R_1 ou pour R_2 .

On remarque d'abord que le complexe total du double complexe

$$K^{\bullet,\bullet} := F^r R_3 \otimes \Omega_2^\bullet \rightarrow F^{r-1} R_3 \otimes (\Omega_1^1 \wedge \Omega_2^\bullet) \rightarrow F^{r-2} R_3 \otimes (\Omega_1^2 \wedge \Omega_2^\bullet) \rightarrow \dots$$

calcule le complexe $F^r \Omega_{R_3}^\bullet$. Pour voir qu'on a un quasi-isomorphisme $F^r \Omega_{R_2}^\bullet \rightarrow F^r \Omega_{R_3}^\bullet$, il suffit donc de vérifier que les lignes du double complexe $0 \rightarrow F^r \Omega_{R_2}^\bullet \rightarrow K^{\bullet,\bullet}$ sont exactes. Mais cela découle du lemme précédent appliqué à $S = R_1$ et $A = R_2$. \square

Application de Fontaine-Messing

On note $\mathbb{E}_{R,n}^{PD}$ la réduction modulo p^n de \mathbb{E}_R^{PD} (alors $\mathbb{E}_{R,n}^{PD}$ est la log-PD-enveloppe de $\text{Spec}(\overline{R}_n) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})_n \otimes R_{\text{cris}}^+)$).

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} & \text{Spf}(\mathbb{E}_{R,n}^{PD}) & \\ & \swarrow & \searrow \\ \text{Spf}(\overline{R}_n) & \xrightarrow{\quad} & \text{Spf}(\mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})_n \otimes R_{\text{cris}}^+) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spf}(R_n) & \xrightarrow{\quad} & \text{Spf}(R_{\text{cris},n}^+) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spf}(\mathcal{O}_{C,n}) & \xrightarrow{\quad} & \text{Spf}(A_{\text{cris},n}) \end{array}$$

On définit le complexe syntomique : $\text{Syn}(\overline{R}, r)_n := [F^r \Omega_{\mathbb{E}_{R,n}^{PD}}^\bullet \xrightarrow{p^r - p^\bullet \varphi} \Omega_{\mathbb{E}_{R,n}^{PD}}^\bullet]$.

La suite p^r -exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/p^n(r)' \rightarrow F^r \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})_n \xrightarrow{p^r - \varphi} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})_n \rightarrow 0$$

donne un p^r -quasi-isomorphisme

$$R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}/p^n(r)') \xrightarrow{\sim} R\Gamma(G_R, [F^r \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})_n \xrightarrow{p^r - \varphi} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})_n])$$

et, par le lemme 4.1.9, on a :

$$R\Gamma(G_R, [F^r \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})_n \xrightarrow{p^r - \varphi} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})_n]) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(G_R, [F^r \Omega_{\mathbb{E}_{R,n}^{PD}}^\bullet \xrightarrow{p^r - p^\bullet \varphi} \Omega_{\mathbb{E}_{R,n}^{PD}}^\bullet]).$$

On peut alors définir l'application de Fontaine-Messing :

$$\alpha_{r,n}^{\text{FM}} : \text{Syn}(R, r)_n \rightarrow R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}/p^n(r)')$$

et, de même :

$$\alpha_r^{\text{FM}} : \text{Syn}(R, r) \rightarrow R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r)').$$

On obtient la version géométrique du théorème (4.16) de [21].

Théorème 4.1.11. *Il existe une constante N qui ne dépend que de p et de r telle que l'application de Fontaine-Messing α_r^{FM} (respectivement $\alpha_{r,n}^{\text{FM}}$) est p^N -égale à l'application α_r^0 (respectivement $\alpha_{r,n}^0$) donnée par le théorème 3.5.8.*

Démonstration. On reprend les mêmes notations que dans [21, Th. 4.16], c'est-à-dire :

- C_G (resp. C_Γ) désignent les complexes de cochaînes continues de G (resp. Γ)
- $K_\varphi(F^r S) := [F^r S \xrightarrow{p^r - \varphi} S]$ (et donc $K_\varphi(S) := [S \xrightarrow{1 - \varphi} S]$);
- $K_{\varphi, \partial}(F^r S) := \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r S) = [\text{Kos}(\partial, F^r S) \xrightarrow{p^r - \varphi} \text{Kos}(\partial, S)],$
- $K_{\varphi, \Gamma}(F^r S) := \text{Kos}(\varphi, \Gamma, F^r S) = [\text{Kos}(\Gamma, F^r S) \xrightarrow{p^r - \varphi} \text{Kos}(\Gamma, S)],$
- $K_{\partial, \varphi, \Gamma}(F^r S) := [\text{Kos}(\Gamma, F^r \Omega_S^\bullet) \xrightarrow{p^r - \varphi} \text{Kos}(\Gamma, \Omega_S^\bullet)],$
- $K_{\varphi, \text{Lie } \Gamma}(F^r S) := [\text{Kos}(\text{Lie } \Gamma, F^r S) \xrightarrow{p^r - \varphi} \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma, S)]$ et,
- $K_{\partial, \varphi, \text{Lie } \Gamma}(F^r S) := [\text{Kos}(\text{Lie } \Gamma, F^r \Omega_S^\bullet) \xrightarrow{p^r - \varphi} \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma, \Omega_S^\bullet)].$

Le théorème se déduit alors du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
K_{\partial, \varphi}(F^r R_{\text{cris}}^+) & \longrightarrow & C_G(K_{\partial, \varphi}(F^r \mathbb{E}_R^{PD})) & \xleftarrow[\sim]{(4.1.9)} & C_G(K_\varphi(F^r \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}))) & \xleftarrow[\sim]{(3.5)} & C_G(\mathbb{Z}_p(r)) \\
\downarrow \tau_{\leq r} \wr & & \downarrow & & \downarrow & \swarrow \sim (3.12) & \downarrow \wr (3.3) \\
K_{\partial, \varphi}(F^r R^{[u, v]}) & \longrightarrow & C_G(K_{\partial, \varphi}(F^r \mathbb{E}_R^{[u, v]})) & \xleftarrow[\sim]{(4.1.9)} & C_G(K_\varphi(F^r \mathbb{A}_R^{[u, v]})) & \xleftarrow[\sim]{p^r \varepsilon^{-r} t^r} & C_G(K_\varphi(\mathbb{A}_R^{(0, v]^+}(r))) \longrightarrow C_G(K_\varphi(\mathbb{A}_{\overline{R}}(r))) \\
& & \uparrow \mu_H & & \uparrow \mu_H & & \uparrow \mu_H (3.5.5) \wr \\
& & C_\Gamma(K_{\varphi, \partial}(F^r \mathbb{E}_{R_\infty}^{[u, v]})) & \xleftarrow[\sim]{(4.1.9)} & C_\Gamma(K_\varphi(F^r \mathbb{A}_{R_\infty}^{[u, v]})) & \xleftarrow[\sim]{p^r \varepsilon^{-r} t^r} & C_\Gamma(K_\varphi(\mathbb{A}_{R_\infty}^{(0, v]^+}(r))) \longrightarrow C_\Gamma(K_\varphi(\mathbb{A}_{R_\infty}(r))) \\
& & \uparrow \mu_\infty & & \uparrow \mu_\infty & & \uparrow \mu_\infty (3.5.6) \wr \\
& & C_\Gamma(K_{\varphi, \partial}(F^r \mathbb{E}_R^{[u, v]})) & \xleftarrow[\sim]{(4.1.9)} & C_\Gamma(K_\varphi(F^r \mathbb{A}_R^{[u, v]})) & \xleftarrow[\sim]{p^r \varepsilon^{-r} t^r} & C_\Gamma(K_\varphi(\mathbb{A}_R^{(0, v]^+}(r))) \longrightarrow C_\Gamma(K_\varphi(\mathbb{A}_R(r))) \\
& & \wr & & \wr & & \wr \\
(4.1.10) \sim & & K_{\partial, \varphi, \Gamma}(F^r \mathbb{E}_R^{[u, v]}) & \xleftarrow[\sim]{(4.1.9)} & K_{\varphi, \Gamma}(F^r \mathbb{A}_R^{[u, v]}) & \xleftarrow[\sim]{p^r \varepsilon^{-r} t^r} & K_{\varphi, \Gamma}(\mathbb{A}_R^{(0, v]^+}(r)) \xrightarrow[\sim]{(3.4.14)} K_{\varphi, \Gamma}(\mathbb{A}_R(r)) \\
& & \wr & & \wr & & \downarrow (3.4.8) \wr \\
& & K_{\partial, \varphi, \text{Lie } \Gamma}(F^r \mathbb{E}_R^{[u, v]}) & \xleftarrow[\sim]{(4.1.9)} & K_{\varphi, \text{Lie } \Gamma}(F^r \mathbb{A}_R^{[u, v]}) & \xleftarrow[\sim]{(3.4.3)} & K_{\varphi, \text{Lie } \Gamma}(\mathbb{A}_R^{[u, v]}(r)) \\
& & \uparrow t^\bullet & & \uparrow t^\bullet, \tau_{\leq r}, (3.4.6) \wr & & \wr \\
& & K_{\partial, \varphi}(F^r \mathbb{E}_R^{[u, v]}) & \xleftarrow[\sim]{(4.1.10)} & K_{\partial, \varphi}(F^r \mathbb{A}_R^{[u, v]}) & &
\end{array}$$

Remarque 4.1.12. Le passage de la troisième à la quatrième ligne se fait en utilisant le quasi-isomorphisme entre les complexes de Koszul et la cohomologie de groupe. \square

4.1.3 Comparaison de $\tilde{\alpha}^{\text{FM}}$ et $\tilde{\alpha}^0$

Dans cette section, on suppose que \mathfrak{X} est propre et à réduction semi-stable sur \mathcal{O}_K . On compare l'application de Fontaine-Messing avec le morphisme construit dans le chapitre précédent.

Théorème 4.1.13. *Soit \mathfrak{X} un schéma formel propre semi-stable sur \mathcal{O}_K . Les isomorphismes α_r^{FM} et α_r^0 de $H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r))$ dans $H_{\text{syn}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}}$ sont égaux. En particulier, les morphismes de périodes*

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}^{\text{FM}}, \tilde{\alpha}^0 : H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{st}} &\rightarrow H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}} \\ \tilde{\alpha}_{\text{dR}}^{\text{FM}}, \tilde{\alpha}_{\text{dR}}^0 : H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{dR}} &\rightarrow H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{dR}} \end{aligned}$$

sont égaux.

Il suffit de montrer que les applications entières sont p^N -égales pour une certaine constante $N \in \mathbb{N}$. La proposition 4.1.11 donne l'égalité locale. Pour obtenir l'égalité entre les morphismes globaux, on va commencer par construire des applications $\alpha_{r, \Sigma, \Lambda}^{\text{FM}}$ et les comparer au $\alpha_{r, \Sigma, \Lambda}^0$ définis plus haut.

On définit les anneaux suivants :

- $\mathbb{E}_{R_{\Sigma, \Lambda}}^{PD} = SA$ (resp. $\mathbb{E}_{R_{\Sigma, \Lambda}}^{[u, v]}$) pour $S = A = R_{\Sigma, \Lambda}^{PD}$ (resp. $R_{\Sigma, \Lambda}^{[u, v]}$),
- $\mathbb{E}_{R_{\Sigma, \Lambda, \infty}}^{PD} = SA$ (resp. $\mathbb{E}_{R_{\Sigma, \infty}}^{[u, v]}$) pour $S = R_{\Sigma, \Lambda}^{PD}$ (resp. $R_{\Sigma, \Lambda}^{[u, v]}$) et $A = \mathbb{A}_{\text{cris}}(R_{\Sigma, \Lambda, \infty})$ (resp. $\mathbb{A}_{R_{\Sigma, \Lambda, \infty}}^{[u, v]}$),
- $\mathbb{E}_{\overline{R}_{\Sigma, \Lambda}}^{PD} = SA$ (resp. $\mathbb{E}_{\overline{R}_{\Sigma, \Lambda}}^{[u, v]}$) pour $S = R_{\Sigma, \Lambda}^{PD}$ (resp. $R_{\Sigma, \Lambda}^{[u, v]}$) et $A = \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$ (resp. $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u, v]}$).

L'application de Fontaine-Messing $\alpha_{\Sigma, \Lambda}^{\text{FM}}$ va être donnée par la composée :

$$\begin{aligned} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r R_{\Sigma, \Lambda}^{PD}) &\rightarrow \tau_{\leq r} C(G_R, \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r \mathbb{E}_{R_{\Sigma, \Lambda}}^{PD})) \xleftarrow{\sim} \tau_{\leq r} C(G_R, \text{Kos}(\varphi, F^r \mathbb{A}_{\text{cris}}(\overline{R}))) \\ &\xleftarrow{\sim} \tau_{\leq r} C(G_R, \mathbb{Z}_p(r)'). \end{aligned}$$

On montre que la deuxième flèche est bien un quasi-isomorphisme en se ramenant au cas où on ne travaille avec qu'une seule coordonnée λ (comme dans la preuve de (3.6.7)). Un diagramme similaire¹ à celui de la preuve de la proposition 4.1.11 donne le lemme suivant :

Lemme 4.1.14. *Il existe N qui ne dépend ni de R , ni de Σ et Λ telle que l'application de Fontaine-Messing $\alpha_{r, \Sigma, \Lambda}^{\text{FM}}$ est p^{Nr} -égale à l'application $\alpha_{r, \Sigma, \Lambda}^0$.*

1. La différence principale est que les flèches de la troisième à la deuxième ligne sont maintenant des morphismes de bord.

Preuve du théorème 4.1.13. L'application globale

$$\alpha_r^{\text{FM}} : \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r) \rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}_p(r)')$$

s'obtient de la même façon que dans la preuve du théorème 3.6.1 : elle est donnée par la composée :

$$\begin{aligned} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_n &\rightarrow \text{hocolim}_{\text{HRF}} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^\bullet, r) \rightarrow \text{hocolim}_{\text{HRF}} \tau_{\leq r} R\Gamma(G_{R^\bullet}, \mathbb{Z}_p(r)') \\ &\rightarrow \tau_{\leq r} \text{hocolim}_{\text{HRF}} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{U}_C^\bullet, \mathbb{Z}_p(r)') \leftarrow \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}_p(r)'). \end{aligned} \quad (4.4)$$

où le quasi-isomorphisme (fonctoriel) $\tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^\bullet, r) \rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma(G_{R^\bullet}, \mathbb{Z}_p(r)')$ pour $\mathfrak{U}^\bullet = \text{Spf}(R^\bullet) \rightarrow \mathfrak{X}$ un hyper-recouvrement affine est induit par :

$$\tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, r) \xleftarrow[\text{(3.22)}]{\sim} \varinjlim_{(\Sigma_k, \Lambda_k)} \tau_{\leq r} \text{Syn}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, \mathbb{A}_{\text{cris}}(R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^\square), r) \xrightarrow[\varinjlim \alpha_{r, \Sigma_k, \Lambda_k}^{\text{FM}}]{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma(G_{R^k}, \mathbb{Z}_p(r)') \quad (4.5)$$

Le lemme 4.1.14 donne la p^{Nr} -égalité entre les morphismes $\varinjlim \alpha_{r, \Sigma_k, \Lambda_k}^{\text{FM}}$ et $\varinjlim \alpha_{r, \Sigma_k, \Lambda_k}^0$ et donc entre les morphismes induits (4.5). On en déduit que $\alpha_r^{\text{FM}} : \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r) \rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}_p(r)')$ et $\alpha_r^0 : \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r) \rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}_p(r)')$ sont p^{Nr} -égales. En inversant p , on obtient l'égalité entre les morphismes rationnels et on en déduit finalement $\tilde{\alpha}^{\text{FM}} = \tilde{\alpha}^0$. □

4.2 Preuve via la cohomologie \mathbb{A}_{inf}

On considère maintenant le morphisme de période $\tilde{\alpha}^{\text{CK}} : H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{st}} \xrightarrow{\sim} H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}$ défini par Bhatt-Morrow-Scholze ([9]) dans le cas où \mathfrak{X} est à bonne réduction et par Česnavičius-Koshikawa ([15]) pour \mathfrak{X} à réduction semi-stable. On rappelle rapidement sa définition locale dans la section qui suit. On montre ensuite qu'il est égal à $\tilde{\alpha}^0$.

Dans toute cette section on suppose que \mathfrak{X} est propre à réduction semi-stable sur \mathcal{O}_K .

4.2.1 Définition de l'application locale γ^{CK}

Définition 4.2.1. [9, §6] Soit A un anneau et K un complexe de A -modules, sans f -torsion. On note $\eta_f(K)$ le sous-complexe de $K[\frac{1}{f}]$ dont le i -ème terme est donné par :

$$(\eta_f K)^i := \{x \in f^i K^i : dx \in f^{i+1} K^{i+1}\}.$$

L'application $K^i \rightarrow (\eta_f K)^i, x \mapsto f^i x$ induit un isomorphisme $H^i(K)/H^i(K)[f] \cong H^i(\eta_f K)$ (où $H^i(K)[f]$ désigne la f -torsion de $H^i(K)$) et on en déduit que si $K \rightarrow K'$ est un quasi-isomorphisme alors $\eta_f K \rightarrow \eta_f K'$ l'est aussi. On définit le foncteur $L\eta_f$ de

$D(A)$ dans $D(A)$ de la façon suivante : pour K dans $D(A)$ on choisit un complexe C quasi-isomorphe à K et dont les termes sont sans f -torsion et on pose $L\eta_f K := \eta_f C$.

Soit \mathfrak{X} un schéma formel propre à réduction semi-stable sur \mathcal{O}_K et soit $X := \mathfrak{X}_C$ la fibre générique de $\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}$, vue comme une variété analytique rigide. On note \mathcal{O}_X le faisceau structural du site pro-étale $X_{\text{proét}}$, \mathcal{O}_X^+ le faisceau intégral associé et $\hat{\mathcal{O}}_X^+$ sa complétion. On définit le complexe de faisceaux $\mathbb{A}_{\text{inf}, X}$ comme la complétion p -adique dérivée² de $W(\hat{\mathcal{O}}_X^{+,b})$. On considère alors le complexe de faisceaux suivant :

$$A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}} := L\eta_\mu(R\nu_*(\mathbb{A}_{\text{inf}, X})) \in \mathcal{D}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C, \text{ét}}, \mathbb{A}_{\text{inf}})$$

où $\nu : X_{\text{proét}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C, \text{ét}}$ est la projection. Dans [9, 5.6], il est montré que l'application naturelle $\mathbb{A}_{\text{inf}} \rightarrow \mathbb{A}_{\text{inf}, X}$ induit un morphisme

$$R\Gamma(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{A}_{\text{inf}} \cong R\Gamma(X_{\text{proét}}, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{A}_{\text{inf}} \rightarrow R\Gamma_{\text{proét}}(X, \mathbb{A}_{\text{inf}, X})$$

tel que la cohomologie de son cône est tuée par $W(\mathfrak{m}_C^b)$ (où \mathfrak{m}_C est l'idéal maximal de \mathcal{O}_C). Comme $\mu = [\varepsilon] - 1$ est dans $W(\mathfrak{m}_C^b)$, on en déduit le résultat suivant :

Théorème 4.2.2. [15, 2.3] *Il existe un quasi-isomorphisme :*

$$R\Gamma(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{A}_{\text{inf}}\left[\frac{1}{\mu}\right] \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}}) \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{A}_{\text{inf}}\left[\frac{1}{\mu}\right]. \quad (4.6)$$

On suppose maintenant que $\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C} = \text{Spf}(R)$ avec R étale sur R_\square . On reprend les notations R_{inf}^+ , R_{cris}^+ de §1.3.2 et \mathbb{A}_R^+ , $\mathbb{A}_{\text{cris}}(R)$ de §4.1 (on rappelle que $R_{\text{inf}}^+ \cong \mathbb{A}_R^+$ et $R_{\text{cris}}^+ \cong \mathbb{A}_{\text{cris}}(R)$). On définit R_∞ comme avant. On a alors que R_∞ est perfectoïde et muni d'une action de Γ_R . Ainsi, la tour $X_\infty := \varprojlim \text{Spa}(R_m[\frac{1}{p}], R_m)$ est un recouvrement affinoïde perfectoïde de $\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}$.

Théorème 4.2.3. [15, §3.3]

1. *On a des quasi-isomorphismes :*

$$\begin{aligned} L\eta_{(\zeta_p-1)}(R\Gamma(\Gamma_R, R_\infty)) &\xrightarrow{\sim} L\eta_{(\zeta_p-1)}(R\Gamma_{\text{proét}}(X, \hat{\mathcal{O}}_X^+)) \\ L\eta_\mu(R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{inf}}(R_\infty))) &\xrightarrow{\sim} L\eta_\mu(R\Gamma_{\text{proét}}(X, \mathbb{A}_{\text{inf}, X})). \end{aligned} \quad (4.7)$$

2. *Plus généralement, si R'_∞ définit un recouvrement affinoïde perfectoïde de R muni d'une action d'un groupe Γ' alors on a des quasi-isomorphismes :*

$$\begin{aligned} L\eta_{(\zeta_p-1)}(R\Gamma(\Gamma', R'_\infty)) &\xrightarrow{\sim} L\eta_{(\zeta_p-1)}(R\Gamma_{\text{proét}}(X, \hat{\mathcal{O}}_X^+)) \\ L\eta_\mu(R\Gamma(\Gamma', \mathbb{A}_{\text{inf}}(R'_\infty))) &\xrightarrow{\sim} L\eta_\mu(R\Gamma_{\text{proét}}(X, \mathbb{A}_{\text{inf}, X})). \end{aligned} \quad (4.8)$$

2. La complétion p -adique dérivée \hat{K} d'un complexe $K \in D(\mathcal{O}_X)$ est définie localement par $\hat{K}|_U = \text{holim}_n(K|_U \otimes_{\mathbb{Z}}^L \mathbb{Z}/p^n)$

Le but est de construire un quasi-isomorphisme entre $R\Gamma_{\text{cris}}((R/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})$ et $R\Gamma(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{A}_{\text{cris}}$. L'application va être induite par la composée :

$$\text{Kos}(\partial, \mathbb{A}_{\text{cris}}(R)) \xrightarrow{\tilde{\beta}} \eta_\mu \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{cris}}(R)) \rightarrow \eta_\mu \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{cris}}(R_\infty))$$

où $\tilde{\beta}$ est construit ci-dessous. Le problème est que l'anneau \mathbb{A}_{cris} vient de la complétion d'un anneau qui n'est pas de type fini sur \mathbb{A}_{inf} et en particulier, $\mathbb{A}_{\text{cris}}/\mu$ n'est pas p -adiquement séparé. Notamment, $\eta_\mu \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{cris}}(R_\infty))$ ne calcule pas nécessairement $R\Gamma(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{A}_{\text{cris}}$. Pour contourner cette difficulté, Bhatt-Morrow-Scholze passent par l'anneau $\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}$, construit à partir du même anneau que \mathbb{A}_{cris} mais tronqué en degré m .

Plus précisément, pour m dans \mathbb{N} , on note $\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}$ la complétion p -adique de $\mathbb{A}_{\text{inf}}[\frac{\xi^k}{k!}, k \leq m]$. On a toujours une surjection $\theta : \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)} \rightarrow \mathcal{O}_C$ et on étend le Frobenius de \mathbb{A}_{inf} en $\varphi : \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)} \rightarrow \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}$. Remarquons que pour $m < p$, on a $\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)} = \mathbb{A}_{\text{inf}}$ et pour $m \geq p$, les topologies p -adiques et (p, μ) -adique sur $\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}$ coïncident. On peut de plus identifier \mathbb{A}_{cris} à la complétion p -adique de $\varinjlim \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}$. On définit de la même façon $\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(\overline{R})$ et $\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R_\infty)$. Enfin, soit $\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R) := \mathbb{A}_R^+ \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}$.

On a des isomorphismes (voir [9, 12.7]) :

$$\begin{aligned} R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{inf}}(R_\infty)) \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)} &\xrightarrow{\sim} R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R_\infty)) \\ L\eta_\mu(R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{inf}}(R_\infty))) \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)} &\xrightarrow{\sim} L\eta_\mu(R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R_\infty))). \end{aligned} \quad (4.9)$$

En combinant les résultats (4.7) et (4.9), on obtient :

Corollaire 4.2.4. *Il existe un quasi-isomorphisme naturel :*

$$R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{A}_{\text{cris}} \xrightarrow{\sim} (\varinjlim_m (\eta_\mu(\text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R_\infty)))) \widehat{}.$$

On a alors le théorème (voir [9, Th. 12.1] et [15, Th. 5.4]) :

Théorème 4.2.5. *Il existe un quasi-isomorphisme Frobenius-équivariant :*

$$\gamma^{\text{CK}} : R\Gamma_{\text{cris}}((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{A}_{\text{cris}}. \quad (4.10)$$

Démonstration. Les détails de la preuve sont donnés dans [15, §5.5 à §5.16]. On rappelle ici rapidement la construction de γ^{CK} . Pour $m \geq p^2$, on définit $\tilde{\beta}^{(m)} : \text{Kos}(\partial, \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R)) \rightarrow \eta_\mu \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R))$ par :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R) & \xrightarrow{(\partial_j)} & (\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R))^{J_1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & (\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R))^{J_n} \longrightarrow \dots \\ \downarrow \text{Id} & & \downarrow (\tilde{\beta}_j) & & & & \downarrow (\tilde{\beta}_{j_1} \dots \tilde{\beta}_{j_n}) \\ \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R) & \xrightarrow{(\gamma_j - 1)} & (\mu \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R))^{J_1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & (\mu^n \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R))^{J_n} \longrightarrow \dots \end{array}$$

avec $\tilde{\beta}_j := \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} \partial_j^{n-1}$. L'application $\tilde{\beta}^{(m)}$ est bien définie puisqu'elle est induite par le morphisme de complexes :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R) & \xrightarrow{\partial_j} & \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R) \\ \downarrow \text{Id} & & \downarrow \tilde{\beta}_j \\ \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R) & \xrightarrow{\gamma_j - 1} & \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R) \end{array}$$

et $\tilde{\beta}_j \partial_j = \gamma_j - 1$ (en utilisant $\text{Kos}(\partial, \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R)) = \bigotimes_{j=1}^d (\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R) \xrightarrow{\partial_j} \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R))$). Ce sont des isomorphismes par le lemme 5.15 de [15]. Pour obtenir le résultat, il suffit ensuite de montrer que l'inclusion $\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R) \hookrightarrow \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R_\infty)$ induit un isomorphisme

$$\eta_\mu \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R)) \xrightarrow{\sim} \eta_\mu \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R_\infty)). \quad (4.11)$$

Pour cela, on écrit $\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R_\infty)$ comme une somme $\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R) \oplus (N_\infty \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)})$ (voir [15, 3.14.5]) avec $\mu \cdot H^i(\Gamma_R, N_\infty \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}) = 0$ (voir [15, 3.32]).

Finalement, le quasi-isomorphisme γ^{CK} est donné par la composée :

$$\begin{aligned} R\Gamma_{\text{cris}}((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}}) &\xrightarrow{\sim} (\varinjlim_m \text{Kos}(\partial, \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R)))^\wedge \\ &\xrightarrow[\sim]{\tilde{\beta}} (\varinjlim_m \eta_\mu \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R)))^\wedge \\ &\xrightarrow{\sim} (\varinjlim_m \eta_\mu \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R_\infty)))^\wedge \\ &\xrightarrow[\sim]{(4.2.4)} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{A}_{\text{cris}}. \end{aligned}$$

□

4.2.2 Application globale

Comme précédemment, on va écrire les complexes du théorème 4.2.5 de manière fonctorielle. On commence par le complexe de droite. On prend (Σ, Λ) comme en (3.17) et on définit $\Gamma_{\Sigma, \Lambda}$, $R_{\Sigma, \Lambda, \infty}^\square$ et $R_{\Sigma, \Lambda, \infty}$ comme avant. On a alors un recouvrement pro-étale affinoïde perfectoïde :

$$\text{Spa}(R_{\Sigma, \Lambda, \infty}[\frac{1}{p}], R_{\Sigma, \Lambda, \infty}) \rightarrow \text{Spa}(R[\frac{1}{p}], R). \quad (4.12)$$

Le raisonnement précédent (et en particulier l'isomorphisme (4.8)) donne un quasi-isomorphisme :

$$R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{A}_{\text{cris}} \xrightarrow{\sim} (\varinjlim_m \eta_\mu \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R_{\Sigma, \Lambda, \infty})))^\wedge. \quad (4.13)$$

On va maintenant écrire le complexe $\Omega_{R_{\Sigma, \Lambda}^{PD}/\mathbb{A}_{\text{cris}}}^\bullet$ sous une forme semblable à celle de (4.13).

On considère l'exactification de l'immersion $\text{Spec}(R/p) \hookrightarrow \text{Spf}(\mathbb{A}_{\text{cris}}(R_{\Sigma, \Lambda}^\square))$ (voir [15, §5.25

à 5.31]) :

$$\mathrm{Spec}(R/p) \xrightarrow{j} \mathcal{Y} \xrightarrow{q} \mathrm{Spf}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_{\Sigma,\Lambda}^{\square}))$$

avec j immersion fermée exacte et q log-étale. Si on note D_j la log-PD-enveloppe associée à j , on a alors un isomorphisme $R_{\Sigma,\Lambda}^{PD} \xrightarrow{\sim} \widehat{D}_j$. On note $D_j^{(m)}$ l'anneau des puissances divisées de degré inférieur à m et $R_{\Sigma,\Lambda}^{PD,(m)}$ la complétion de l'image de $D_j^{(m)}$ par cet isomorphisme.

Les $R_{\Sigma,\Lambda}^{PD,(m)}$ sont alors des $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}^{(m)}$ -algèbres munies d'une action continue de $\Gamma_{\Sigma,\Lambda}$ et d'un Frobenius. On a de plus un $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ -isomorphisme $R_{\Sigma,\Lambda}^{PD} \cong (\varinjlim_m R_{\Sigma,\Lambda}^{PD,(m)})^{\wedge}$, qui est équivariant pour l'action du Frobenius et de $\Gamma_{\Sigma,\Lambda}$. On obtient :

$$R\Gamma_{\mathrm{cris}}((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}) \xrightarrow{\sim} (\varinjlim_m \mathrm{Kos}(\partial, R_{\Sigma,\Lambda}^{PD,(m)}))^{\wedge}. \quad (4.14)$$

Enfin, en se ramenant au cas où on ne considère qu'une seule coordonnées λ (donné par 4.2.5), on construit un isomorphisme fonctoriel (voir [15, §5.38-5.39]) :

$$\tilde{\beta}_{\Sigma,\Lambda} : (\varinjlim_m \mathrm{Kos}(\partial, R_{\Sigma,\Lambda}^{PD,(m)}))^{\wedge} \xrightarrow{\sim} (\varinjlim_m \eta_{\mu} \mathrm{Kos}(\Gamma_{\Sigma,\Lambda}, \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}^{(m)}(R_{\Sigma,\Lambda,\infty})))^{\wedge}. \quad (4.15)$$

On peut maintenant prouver la version globale du théorème 4.2.5 :

Théorème 4.2.6. [15, 5.43] *Soit \mathfrak{X} un schéma formel propre sur \mathcal{O}_K à réduction semi-stable. Il existe un quasi-isomorphisme compatible avec le morphisme de Frobenius :*

$$\gamma^{\mathrm{CK}} : R\Gamma_{\mathrm{cris}}((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\mathrm{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}}^L \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}.$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle du théorème 3.6.1. Le morphisme global γ^{CK} est donné par la composée :

$$\begin{aligned} R\Gamma_{\mathrm{cris}}((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{hocolim}_{\mathrm{HRF}} R\Gamma_{\mathrm{cris}}((\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^{\bullet}/p)/\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{hocolim}_{\mathrm{HRF}} R\Gamma_{\mathrm{ét}}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^{\bullet}, A\Omega_{\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^{\bullet}}) \\ &\xleftarrow{\sim} R\Gamma_{\mathrm{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}}) \end{aligned}$$

où, si $\mathfrak{U}^{\bullet} \rightarrow \mathfrak{X}$ est un hyper-recouvrement affine de \mathfrak{X} avec $\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k := \mathrm{Spf}(R^k)$, le quasi-isomorphisme $R\Gamma_{\mathrm{cris}}((\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^{\bullet}/p)/\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\mathrm{ét}}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^{\bullet}, A\Omega_{\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^{\bullet}})$ est induit par :

$$\begin{aligned} R\Gamma_{\mathrm{cris}}((R^k/p)/\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}) &\xrightarrow[\text{(4.14)}]{\sim} \varinjlim_{(\Sigma_k, \Lambda_k)} (\varinjlim_m \mathrm{Kos}(\partial, R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^{PD,(m)}))^{\wedge} \\ &\xrightarrow[\text{(4.15)}]{\sim} \varinjlim_{(\Sigma_k, \Lambda_k)} (\varinjlim_m \eta_{\mu} \mathrm{Kos}(\Gamma_{\Sigma,\Lambda}, \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}^{(m)}(R_{\Sigma,\Lambda,\infty})))^{\wedge} \\ &\xleftarrow[\text{(4.13)}]{\sim} R\Gamma_{\mathrm{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}}^L \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}. \end{aligned}$$

□

On rappelle qu'on a le quasi-isomorphisme (2.3) (compatible avec les actions du Frobenius et de l'opérateur de monodromie [15, 9.2]) :

$$l_{\text{cris}}^B : R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X}_k/W(k)^0) \otimes_{W(k)}^L \mathbb{B}_{\text{st}}^+ \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\text{cris}}((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}}) \otimes_{\mathbb{A}_{\text{cris}}}^L \mathbb{B}_{\text{st}}^+ \quad (4.16)$$

et on en déduit l'isomorphisme de période $\tilde{\alpha}^{\text{CK}}$:

Théorème 4.2.7. [15, 9.5] *Soit \mathfrak{X} un schéma formel propre sur \mathcal{O}_K à réduction semi-stable. Il existe un quasi-isomorphisme :*

$$\tilde{\alpha}^{\text{CK}} : R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}} \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X}_k/W(k)^0) \otimes_{W(k)}^L \mathbb{B}_{\text{st}}.$$

De plus, $\tilde{\alpha}^{\text{CK}}$ est compatible avec les actions du morphisme de Frobenius, du groupe de Galois et de l'opérateur de monodromie et il induit un isomorphisme filtré après tensorisation par \mathbb{B}_{dR} .

Démonstration. Le morphisme $\tilde{\alpha}^{\text{CK}}$ est donné par la composée :

$$\begin{aligned} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}} &\xrightarrow[\sim]{(4.2.2)} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}}) \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{B}_{\text{st}} \\ &\xleftarrow[\sim]{\gamma^{\text{CK}}} R\Gamma_{\text{cris}}((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}}) \otimes_{\mathbb{A}_{\text{cris}}}^L \mathbb{B}_{\text{st}} \\ &\xleftarrow[\sim]{l_{\text{cris}}^B} R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X}_k/W(k)^0) \otimes_{W(k)}^L \mathbb{B}_{\text{st}}. \end{aligned}$$

□

En inversant p , on obtient un quasi-isomorphisme rationnel :

$$\tilde{\alpha}^{\text{CK}} : R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}} \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X}) \otimes_F^L \mathbb{B}_{\text{st}}.$$

4.2.3 Comparaison avec $\tilde{\alpha}^0$

Soit \mathfrak{X} un schéma formel propre sur \mathcal{O}_K à réduction semi-stable, le but de cette section est de prouver le théorème suivant :

Théorème 4.2.8. *Les morphismes de périodes*

$$\tilde{\alpha}^{\text{CK}}, \tilde{\alpha}^0 : H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{st}} \rightarrow H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}$$

$$\tilde{\alpha}_{\text{dR}}^{\text{CK}}, \tilde{\alpha}_{\text{dR}}^0 : H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{dR}} \rightarrow H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{dR}}$$

sont égaux. En particulier, on a $\tilde{\alpha}^{\text{CK}} = \tilde{\alpha}^{\text{FM}}$ et $\tilde{\alpha}_{\text{dR}}^{\text{CK}} = \tilde{\alpha}_{\text{dR}}^{\text{FM}}$.

Démonstration. Soit $r \geq 0$. On rappelle que le morphisme $\tilde{\alpha}^0$ est donné par la composée (voir (3.27)) :

$$\begin{aligned} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}} &\xleftarrow[\sim]{\varepsilon^{-r} t^r} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)) \otimes_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}}\{r\} \xleftarrow[\sim]{\alpha_0^r} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}}\{r\} \\ &\xrightarrow{\text{can}} R\Gamma_{\text{cris}}((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{cris}}[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{B}_{\text{st}} \xleftarrow[\sim]{l_{\text{cris}}^B} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X}) \otimes_F^L \mathbb{B}_{\text{st}} \end{aligned}$$

et $\tilde{\alpha}^{\text{CK}}$ par :

$$R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}} \xrightarrow[\sim]{(4.2.2)} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}^L[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{B}_{\text{st}} \xleftarrow[\sim]{\gamma^{\text{CK}}} R\Gamma_{\text{cris}}((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{cris}}^L[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{B}_{\text{st}} \\ \xleftarrow[\sim]{\iota_{\text{cris}}^B} R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X}) \otimes_F^L \mathbb{B}_{\text{st}}$$

Pour prouver le théorème, il suffit de montrer que pour $r \geq 2d$, $d = \dim(X)$, le rectangle extérieur du diagramme suivant commute (au moins au niveau des cohomologies) :

$$\begin{array}{ccccc} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}} & \xleftarrow[\sim]{\varepsilon^{-r} t^r} & \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)) \otimes_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}}\{r\} & \xleftarrow[\sim]{\alpha_r^0} & \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}}\{r\} \\ & \searrow f_r & & \swarrow \text{can} & \downarrow \\ (4.2.2) \downarrow \wr & & \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}^L[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{B}_{\text{st}} & \xleftarrow[\sim]{\gamma^{\text{CK}}} & \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{cris}}((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{cris}}^L[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{B}_{\text{st}} & \xleftarrow[\sim]{\iota_{\text{cris}}^B} & \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X}) \otimes_F^L \mathbb{B}_{\text{st}} \end{array}$$

L'application f_r est définie de façon à ce que le triangle de gauche soit commutatif. Le triangle de droite est commutatif par (2.3.7), il suffit donc de montrer que le trapèze intérieur commute. Il est suffisant de le montrer au niveau des cohomologies et c'est le résultat du lemme 4.2.9 ci-dessous. \square

Lemme 4.2.9. *Soit $i \leq r$. Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}^L[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{B}_{\text{st}} & \xleftarrow[\sim]{\gamma^{\text{CK}}} & H_{\text{cris}}^i((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{cris}}^L[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{B}_{\text{st}} \\ f_r \uparrow & & \text{can} \uparrow \\ H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)) \otimes_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}}\{r\} & \xleftarrow[\sim]{\alpha_r^0} & H_{\text{syn}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}}\{r\} \end{array}$$

Démonstration. (i) *Réduction.* Pour prouver le lemme, par $\mathbb{B}_{\text{cris}}^+[\frac{1}{\mu}]$ -linéarité, il suffit de voir que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}^L[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{B}_{\text{cris}}^+[\frac{1}{\mu}] & \xleftarrow[\sim]{\gamma^{\text{CK}}} & H_{\text{cris}}^i((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{cris}}^L[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{B}_{\text{cris}}^+[\frac{1}{\mu}] \\ f_r \uparrow & & \text{can} \uparrow \\ H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)) & \xleftarrow[\sim]{\alpha_r^0} & H_{\text{syn}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \end{array}$$

Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}^L[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{A}^{[u,v]}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}] & \xleftarrow[\sim]{\gamma_{[u,v]}^{\text{CK}}} & H_{\text{cris}}^i((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{cris}}^L[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{A}^{[u,v]}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}] \\ \text{Id} \otimes \text{can} \uparrow & & \text{Id} \otimes \text{can} \uparrow \\ H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}^L[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{A}_{\text{cris}}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}] & \xleftarrow[\sim]{\gamma^{\text{CK}}} & H_{\text{cris}}^i((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{cris}}^L[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{A}_{\text{cris}}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}] \\ f_r \uparrow & & \text{can} \uparrow \\ H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)) & \xleftarrow[\sim]{\alpha_r^0} & H_{\text{syn}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \end{array} \tag{4.17}$$

La flèche verticale de gauche $\beta_1 := \text{Id} \otimes \text{can}$ est injective. En effet, par le théorème 4.2.2, on a

$$H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}^L[\frac{1}{p}]} \mathbb{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}] \xleftarrow{\sim} H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)) \otimes_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}],$$

et on en déduit les isomorphismes :

$$\begin{aligned} H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}^L[\frac{1}{p}]} \mathbb{A}^{[u,v]}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}] &\xleftarrow{\sim} H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)) \otimes_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{A}^{[u,v]}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}], \\ H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}^L[\frac{1}{p}]} \mathbb{A}_{\text{cris}}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}] &\xleftarrow{\sim} H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)) \otimes_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{A}_{\text{cris}}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}]. \end{aligned}$$

En utilisant que l'application canonique $\mathbb{A}_{\text{cris}}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}] \rightarrow \mathbb{A}^{[u,v]}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}]$ est injective et $H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r))$ est de rang fini sur \mathbb{Q}_p on obtient que β_1 est injective.

On en déduit que pour prouver le lemme, il suffit de montrer que le carré extérieur du diagramme (4.17) commute. Mais en utilisant une nouvelle fois le théorème 4.2.2 puis le théorème 4.2.6 (et que $H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r))$ est de \mathbb{Q}_p -rang fini), on a

$$\begin{aligned} H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}^L[\frac{1}{p}]} \mathbb{A}^{[u,v]}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}] &\xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^i(R\Gamma(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}}) \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}^L[\frac{1}{p}]} \mathbb{A}^{[u,v]}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}]), \\ H_{\text{cris}}^i((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{cris}}^L[\frac{1}{p}]} \mathbb{A}^{[u,v]}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}] &\xrightarrow{\sim} H^i(R\Gamma_{\text{cris}}((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{cris}}^L[\frac{1}{p}]} \mathbb{A}^{[u,v]}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}]) \end{aligned}$$

et il suffit donc de montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}^L[\frac{1}{p}]} \mathbb{A}^{[u,v]}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}] & \xleftarrow[\gamma_{[u,v]}^{\text{CK}}]{\sim} & \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{cris}}((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{cris}}^L[\frac{1}{p}]} \mathbb{A}^{[u,v]}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}] \\ \uparrow f_r & & \uparrow \text{can} \\ \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)) & \xleftarrow[\alpha_r^0]{\sim} & \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \end{array} \quad (4.18)$$

commute.

Pour cela, on va montrer que le diagramme suivant est p^N -commutatif (pour un $N \in \mathbb{N}$) :

$$\begin{array}{ccc} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}^L} \mathbb{A}^{[u,v]}[\frac{1}{\mu}] & \xleftarrow[\gamma_{[u,v]}^{\text{CK}}]{\sim} & \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{cris}}((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{cris}}^L} \mathbb{A}^{[u,v]}[\frac{1}{\mu}] \quad (4.19) \\ \uparrow p^r f_r & & \uparrow \text{can} \\ \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}_p(r)) & \xleftarrow[\alpha_r^0]{\sim} & \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r) \end{array}$$

Remarque 4.2.10. Le morphisme rationnel α_r^0 est obtenu en multipliant le morphisme entier par p^{-r} , d'où la nécessité de multiplier f_r par p^r quand on travaille en niveau entier.

(ii) *Calcul local.* On suppose dans un premier temps que $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(R)$ avec R la complétion d'une algèbre étale sur R_{\square} . On va voir que la principale différence entre la construction du morphisme de [15] et celle de α_r^0 est que l'application $\tilde{\beta}$ utilisé par Bhatt-Morrow-Scholze est égale à l'inverse de l'application β construite plus haut, tordue par t . Plus précisément, on va montrer qu'on a un diagramme $p^{c(r)}$ -commutatif (pour une certaine constante $c(r) \in \mathbb{N}$) :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & & & \gamma_{[u,v]}^{\mathrm{CK}} \\
& & & & & & \nearrow \\
K_{\partial,\varphi}(F^r \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)) & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & (\eta_{\mu} \tilde{K}_{\Gamma}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)))^{[u,v]} & \xrightarrow{(4.11)} & (\eta_{\mu} \tilde{K}_{\Gamma}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_{\infty})))^{[u,v]} & \xleftarrow{(4.9)} & \eta_{\mu} K_{\Gamma}(\mathbb{A}_{R_{\infty}}^+)^{[u,v]} & \xrightarrow{\tilde{\mu}_H} & \eta_{\mu} C_G(\mathbb{A}_{\overline{R}}^+)^{[u,v]} \\
& \downarrow \\
K_{\partial}(\mathbb{A}_R^{[u,v]}) & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & \eta_{\mu} K_{\Gamma}(\mathbb{A}_R^{[u,v]}) & \longrightarrow & \eta_{\mu} K_{\Gamma}(\mathbb{A}_{R_{\infty}}^{[u,v]}) & \xrightarrow{\tilde{\mu}_H} & \eta_{\mu} C_G(\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}) & & \\
& \uparrow \\
K_{\partial}(F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]}) & \xrightarrow{\beta'} & K_{\Gamma}(\mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)) & \longrightarrow & K_{\Gamma}(\mathbb{A}_{R_{\infty}}^{[u,v]}(r)) & \xrightarrow{\tilde{\mu}_H} & C_G(\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}(r)) & & \\
& \uparrow \\
K_{\partial,\varphi}(F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]}) & \xrightarrow{\beta'} & K_{\varphi,\Gamma}(\mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)) & \longrightarrow & K_{\varphi,\Gamma}(\mathbb{A}_{R_{\infty}}^{[u,v]}(r)) & \xrightarrow{\tilde{\mu}_H} & C_{G,\varphi}(\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}(r)) & & \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
& & (3.4.10) \wr & & \uparrow & & \uparrow & & \\
& & K_{\varphi,\Gamma}(\mathbb{A}_R^{(0,v]+}(r)) & \longrightarrow & K_{\varphi,\Gamma}(\mathbb{A}_{R_{\infty}}^{(0,v]+}(r)) & \xrightarrow{\tilde{\mu}_H} & C_{G,\varphi}(\mathbb{A}_{\overline{R}}^{(0,v]+}(r)) & & \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
& & (3.4.14) \wr & & \uparrow & & \uparrow & & \\
& & K_{\varphi,\Gamma}(\mathbb{A}_R(r)) & \xrightarrow{(3.5.6)} & K_{\varphi,\Gamma}(\mathbb{A}_{R_{\infty}}(r)) & \xrightarrow{(3.5.5)} & C_{G,\varphi}(\mathbb{A}_{\overline{R}}(r)) & \xleftarrow{\sim} & C_G(\mathbb{Z}_p(r)) \\
& & & & & & & & (4.20)
\end{array}$$

Tous les complexes sont tronqués par $\tau_{\leq r}$. L'exposant $[u, v]$ sur la deuxième ligne désigne $(-)\widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}^L}^L \mathbb{A}^{[u,v]}$. On pose $K_{\Gamma}(-) := \mathrm{Kos}(\Gamma, -)$ et $C_G(-)$ désigne le complexe de cochaînes continues de G . Les notations $K_{\Gamma,\varphi}$ et $C_{G,\varphi}(-)$ sont celles de 4.1.11. On écrit $\eta_{\mu} \tilde{K}_{\Gamma}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)) := \varinjlim \eta_{\mu} K_{\Gamma}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}^{(m)}(R))$ et $\eta_{\mu} \tilde{K}_{\Gamma}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_{\infty})) := \varinjlim \eta_{\mu} K_{\Gamma}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}^{(m)}(R_{\infty}))$. Enfin, les morphismes $\tilde{\mu}_H$ sont ceux induits par les morphismes

$$\mathrm{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_{R_{\infty}}^?) \rightarrow C(\Gamma_R, \mathbb{A}_{R_{\infty}}^?) \rightarrow C(G_R, \mathbb{A}_{\overline{R}}^?)$$

pour $? \in \{(0, v]^+, [u, v]\}$.

L'application β' est donnée par la composée :

$$\tau_{\leq r} \mathrm{Kos}(\partial, \varphi, F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]}) \xrightarrow{t^{\bullet}} \tau_{\leq r} \mathrm{Kos}(\mathrm{Lie} \Gamma, \varphi, F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]}) \xleftarrow{p^r \varepsilon^{-r} t^r} \tau_{\leq r} \mathrm{Kos}(\mathrm{Lie} \Gamma, \varphi, \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)) \xleftarrow{\beta} \tau_{\leq r} \mathrm{Kos}(\Gamma, \varphi, \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r))$$

où

$$\beta : \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)^{J_j} \rightarrow \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)^{J_j}, (a_{i_1 \dots i_j}) \mapsto (\beta_{i_j} \dots \beta_{i_1}(a_{i_1 \dots i_j})) \text{ avec } \beta_k := \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \tau_k^{n-1}.$$

Les deux premières flèches sont des $p^{c(r)}$ -quasi-isomorphisme (pour certaines constantes $c(r)$) et l'application β est un isomorphisme.

L'application $\tilde{\beta}^{(m)} : (\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R))^{J_i} \rightarrow (\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R))^{J_i}$ est donnée par les $\tilde{\beta}_k = \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} \partial_k^{n-1}$. Soit $(a_{i_1 \dots i_j})$ dans $(F^{r-j} \mathbb{A}_R^{[u,v]})^{J_j}$, on a

$$t^r \beta'((a_{i_1 \dots i_j})) = (t^r \beta_{i_1}^{-1} \dots \beta_{i_j}^{-1} (t^{j-r} a_{i_1 \dots i_j})) = ((\beta_{i_1}^{-1} t) \dots (\beta_{i_j}^{-1} t)(a_{i_1 \dots i_j}))$$

et $(\beta_{i_k}^{-1} t) = (\sum_{n \geq 0} b_n \tau_{i_k}^n) t$ où les b_n sont les coefficients de la série $\frac{X}{\log(1+X)}$. Comme

$$\tilde{\beta}_{i_k} = \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} \partial_{i_k}^{n-1} = \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} (t \partial_{i_k})^{n-1} \right) t$$

avec $(t \partial_{i_k}) = \log(\gamma_{i_k})$, on obtient $\beta_{i_k}^{-1} t = \tilde{\beta}_{i_k}$ et on en déduit que le carré

$$\begin{array}{ccc} K_{\partial}(\mathbb{A}_R^{[u,v]}) & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & \eta_{\mu} K_{\Gamma}(\mathbb{A}_R^{[u,v]}) \\ \uparrow & & \uparrow \varepsilon^{-r} t^r \\ K_{\partial}(F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]}) & \xrightarrow{\beta'} & K_{\Gamma}(\mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)) \end{array}$$

commute, puis que le diagramme (4.20) est $p^{c(r)}$ -commutatif (pour un certain $c(r) \in \mathbb{N}$).

Montrons que le trapèze dans le coin supérieur droit :

$$\begin{array}{ccc} \eta_{\mu} K_{\Gamma}(\mathbb{A}_{R_{\infty}}^+)^{[u,v]} & \xrightarrow{\tilde{\mu}_H} & \eta_{\mu} C_G(\mathbb{A}_R^+)^{[u,v]} \\ \downarrow \wr & \searrow \sim & \downarrow \wr \\ \eta_{\mu} K_{\Gamma}(\mathbb{A}_{R_{\infty}}^{[u,v]}) & \xrightarrow{\tilde{\mu}_H} & \eta_{\mu} C_G(\mathbb{A}_R^{[u,v]}) \end{array} \quad (4.21)$$

est constitué de quasi-isomorphismes.

La flèche verticale de gauche est un isomorphisme de complexes. La flèche horizontale du haut est un quasi-isomorphisme par le théorème 4.7. La flèche verticale de droite est un quasi-isomorphisme parce qu'on a un isomorphisme (G est profini et les modules sont I -adiquement complets) :

$$\text{Map}_{\text{cont}}(G^m, \mathbb{A}_R^+) \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} \mathbb{A}^{[u,v]} \xrightarrow{\sim} \text{Map}_{\text{cont}}(G^m, \mathbb{A}_R^+ \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} \mathbb{A}^{[u,v]}), \quad n \geq 0. \quad (4.22)$$

On en déduit que les autres flèches de (4.21) sont elles aussi des quasi-isomorphismes. Finalement, une chasse au diagramme (de (4.20)) montre que (4.19) et donc (4.18) commute dans le cas où $\mathfrak{X} := \text{Spf}(R)$. Il reste à voir que le résultat reste vrai pour \mathfrak{X} global.

(iii) *Cas global.* Dans un premier temps, on suppose toujours $\mathfrak{X} = \text{Spf}(R)$. Si (Σ, Λ) sont tels qu'on ait une immersion (3.17), en définissant $R_{\Sigma, \Lambda}^{PD}$, $R_{\infty, \Sigma, \Lambda}$, etc ... comme précédemment, on peut réécrire le diagramme (4.20) en utilisant les versions (Σ, Λ) des anneaux. On

prend ensuite la limite sur l'ensemble des (Σ, Λ) et on obtient un diagramme commutatif fonctoriel :

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_{\Sigma, \Lambda} \tau_{\leq r} (\text{Kos}(\partial, R_{\Sigma, \Lambda}^{PD})_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{cris}}[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{A}^{[u, v] [\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}]}) & \xrightarrow{\sim} & \varinjlim_{\Sigma, \Lambda} \tau_{\leq r} (\eta_{\mu} C_G(\mathbb{A}_{R_{\Sigma, \Lambda}}^+)_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{A}^{[u, v] [\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}]}) \\ \uparrow & & \uparrow \varepsilon^{-r} t^r \\ \varinjlim_{\Sigma, \Lambda} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\partial, \varphi, F^r R_{\Sigma, \Lambda}^{PD})_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\sim} & \tau_{\leq r} C_G(\text{Kos}(\varphi, \mathbb{A}_{\overline{R}}(r)))_{\mathbb{Q}} \longleftarrow \tau_{\leq r} C_G(\mathbb{Z}_p(r))_{\mathbb{Q}} \end{array}$$

Soit \mathfrak{X} global. En considérant des hyper-recouvrements affines $\mathfrak{U}^{\bullet} \rightarrow \mathfrak{X}$ comme précédemment et en remarquant que les deux complexes de la ligne du haut du diagramme ci-dessus calculent respectivement

$$\tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{cris}}((\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{cris}}[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{A}^{[u, v] [\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}]} \text{ et } \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}})_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{A}^{[u, v] [\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}]}$$

on en déduit que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccc} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X})_{\mathbb{Q}}^{[u, v]} & \xrightarrow{\sim} & \tau_{\leq r} \text{hocolim } R\Gamma_{\text{cris}}((\mathfrak{U}^{\bullet})_{\mathbb{Q}}^{[u, v]}) & \xrightarrow{\sim} & \tau_{\leq r} \text{hocolim } R\Gamma_{\text{ét}}(A\Omega_{\mathfrak{U}^{\bullet}})_{\mathbb{Q}}^{[u, v]} & \xleftarrow{\sim} & \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(A\Omega_{\mathfrak{X}})_{\mathbb{Q}}^{[u, v]} \\ \uparrow & & \uparrow & & \varepsilon^{-r} t^r \uparrow & & \varepsilon^{-r} t^r \uparrow \\ \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\sim} & \tau_{\leq r} \text{hocolim } R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^{\bullet}, r)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\sim} & \tau_{\leq r} \text{hocolim } R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^{\bullet}, \mathbb{Q}_p(r)) & \xleftarrow{\sim} & \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, \mathbb{Q}_p(r)) \end{array}$$

où on a noté $R\Gamma_{\text{cris}}(-) := R\Gamma_{\text{cris}}(((-)_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})$ et $R\Gamma_{\text{ét}}(A\Omega_{(-)_{\mathcal{O}_C}}) := R\Gamma_{\text{ét}}((-)_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{(-)_{\mathcal{O}_C}})$.
On obtient le résultat du lemme. □

Bibliographie

- [1] *The stacks project*. <http://stacks.math.columbia.edu/>.
- [2] Fabrizio Andreatta and Olivier Brinon, *Surconvergence des représentations p -adiques: le cas relatif*, Astérisque **319** (2008), 39–116. Représentations p -adiques de groupes p -adiques. I. Représentations galoisiennes et (ϕ, Γ) -modules. MR2493216
- [3] Fabrizio Andreatta and Adrian Iovita, *Global applications of relative (ϕ, Γ) -modules. I*, Astérisque **319** (2008), 339–420. Représentations p -adiques de groupes p -adiques. I. Représentations galoisiennes et (ϕ, Γ) -modules. MR2493222
- [4] Benjamin Antieau, Akhil Mathew, Matthew Morrow, and Thomas Nikolaus, *On the beilinson fiber square*. <https://arxiv.org/abs/2003.12541>.
- [5] Michael Artin, Alexander Grothendieck, and Jean-Louis Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269 (1972) - 270 (1972) - 305 (1973), Springer-Verlag, Berlin-New York. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4).
- [6] A. Beilinson, *p -adic periods and derived de Rham cohomology*, J. Amer. Math. Soc. **25** (2012), no. 3, 715–738. MR2904571
- [7] Alexander A. Beilinson, *On the crystalline period map*, Camb. J. Math. **1** (2013), no. 1, 1–51. MR3272051
- [8] Pierre Berthelot, *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$* , Lecture Notes in Mathematics, Vol. 407, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974. MR0384804
- [9] Bhargav Bhatt, Matthew Morrow, and Peter Scholze, *Integral p -adic Hodge theory*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **128** (2018), 219–397. MR3905467
- [10] Bhargav Bhatt, Matthew Morrow, and Peter Scholze, *Topological Hochschild homology and integral p -adic Hodge theory*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **129** (2019), 199–310. MR3949030
- [11] Spencer Bloch and Kazuya Kato, *p -adic étale cohomology*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **63** (1986), 107–152. MR849653
- [12] Christophe Breuil, *Topologie log-syntomique, cohomologie log-cristalline et cohomologie de Čech*, Bull. Soc. Math. France **124** (1996), no. 4, 587–647. MR1432059
- [13] Christophe Breuil, *Cohomologie étale de p -torsion et cohomologie cristalline en réduction semi-stable*, Duke Math. J. **95** (1998), no. 3, 523–620. MR1658764
- [14] Christophe Breuil and William Messing, *Torsion étale and crystalline cohomologies*, 2002, pp. 81–124. Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques, II. MR1922829
- [15] Kestutis Česnavičius and Teruhisa Koshikawa, *The A_{inf} -cohomology in the semistable case*, Compos. Math. **155** (2019), no. 11, 2039–2128. MR4010431
- [16] Pierre Colmez, *Espaces de Banach de dimension finie*, J. Inst. Math. Jussieu **1** (2002), no. 3, 331–439. MR1956055
- [17] Pierre Colmez, *Les conjectures de monodromie p -adiques*, Astérisque **290** (2003), Exp. No. 897, vii, 53–101. Séminaire Bourbaki. Vol. 2001/2002. MR2074051

- [18] Pierre Colmez, *Espaces vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham*, Astérisque **319** (2008), 117–186. Représentations p -adiques de groupes p -adiques. I. Représentations galoisiennes et (ϕ, Γ) -modules. MR2493217
- [19] Pierre Colmez, Gabriel Dospinescu, and Wiesława Nizioł, *Cohomology of p -adic Stein spaces*, Invent. Math. **219** (2020), no. 3, 873–985. MR4055181
- [20] Pierre Colmez and Wiesława Nizioł, *On the cohomology of the affine space*. <https://arxiv.org/abs/1707.01133>.
- [21] Pierre Colmez and Wiesława Nizioł, *Syntomic complexes and p -adic nearby cycles*, Invent. Math. **208** (2017), no. 1, 1–108. MR3621832
- [22] Brian Conrad, *Cohomological descent*. <https://math.stanford.edu/~conrad/papers/hypercover.pdf>.
- [23] Frédéric Déglise and Wiesława Nizioł, *On p -adic absolute Hodge cohomology and syntomic coefficients. I*, Comment. Math. Helv. **93** (2018), no. 1, 71–131. MR3777126
- [24] Jean Dieudonné, *Lie groups and Lie hyperalgebras over a field of characteristic $p > 0$. IV*, Amer. J. Math. **77** (1955), 429–452. MR717118
- [25] Veronika Ertl and Wiesława Nizioł, *Syntomic cohomology and p -adic motivic cohomology*, Algebr. Geom. **6** (2019), no. 1, 100–131. MR3904801
- [26] Gerd Faltings, *Crystalline cohomology and p -adic Galois-representations*, Algebraic analysis, geometry, and number theory (Baltimore, MD, 1988), 1989, pp. 25–80. MR1463696
- [27] Gerd Faltings, *Almost étale extensions*, 2002, pp. 185–270. Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques, II. MR1922831
- [28] Jean-Marc Fontaine, *Le corps des périodes p -adiques*, Astérisque **223** (1994), 59–111. With an appendix by Pierre Colmez, Périodes p -adiques (Bures-sur-Yvette, 1988). MR1293971
- [29] Jean-Marc Fontaine and William Messing, *p -adic periods and p -adic étale cohomology*, Current trends in arithmetical algebraic geometry (Arcata, Calif., 1985), 1987, pp. 179–207. MR902593
- [30] Alexander Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental (sga 1)*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960–61 (1960).
- [31] Osamu Hyodo, *A note on p -adic étale cohomology in the semistable reduction case*, Invent. Math. **91** (1988), no. 3, 543–557. MR928497
- [32] Osamu Hyodo and Kazuya Kato, *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles*, 1994, pp. 221–268. Périodes p -adiques (Bures-sur-Yvette, 1988). MR1293974
- [33] Kazuya Kato, *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie*, Algebraic analysis, geometry, and number theory (Baltimore, MD, 1988), 1989, pp. 191–224. MR1463703
- [34] Kazuya Kato, *Semi-stable reduction and p -adic étale cohomology*, Astérisque **223** (1994), 269–293. Périodes p -adiques (Bures-sur-Yvette, 1988). MR1293975
- [35] Kazuya Kato and William Messing, *Syntomic cohomology and p -adic étale cohomology*, Tohoku Math. J. (2) **44** (1992), no. 1, 1–9. MR1145716
- [36] Kiran S. Kedlaya and Ruochuan Liu, *Relative p -adic hodge theory, ii: Imperfect period rings*. <https://arxiv.org/abs/1602.06899>.
- [37] Werner Lütkebohmert, *Riemann’s existence problem for a p -adic field*, Invent. Math. **111** (1993), no. 2, 309–330. MR1198812
- [38] Ju. I. Manin, *Theory of commutative formal groups over fields of finite characteristic*, Uspehi Mat. Nauk **18** (1963), no. 6 (114), 3–90. MR0157972
- [39] J.S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Univ. Press, 1980.
- [40] Jan Nekovář and Wiesława Nizioł, *Syntomic cohomology and p -adic regulators for varieties over p -adic fields*, Algebra Number Theory **10** (2016), no. 8, 1695–1790. With appendices by Laurent Berger and Frédéric Déglise. MR3556797

- [41] Wiesława Nizioł, *On uniqueness of p -adic period morphisms, ii.* <https://arxiv.org/abs/1804.03873>.
- [42] Wiesława Nizioł, *Crystalline conjecture via K -theory*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **31** (1998), no. 5, 659–681. MR1643962
- [43] Wiesława Nizioł, *Semistable conjecture via K -theory*, Duke Math. J. **141** (2008), no. 1, 151–178. MR2372150
- [44] Peter Scholze, *Perfectoid spaces*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **116** (2012), 245–313. MR3090258
- [45] Peter Scholze, *p -adic Hodge theory for rigid-analytic varieties*, Forum Math. Pi **1** (2013), e1, 77. MR3090230
- [46] Takeshi Tsuji, *p -adic Hodge theory in the semi-stable reduction case*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998), 1998, pp. 207–216. MR1648071
- [47] Takeshi Tsuji, *p -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Invent. Math. **137** (1999), no. 2, 233–411. MR1705837
- [48] Charles A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. MR1269324