



HAL
open science

Le risque généré par les produits dérivés en réseau

Nicolas Mauhé

► **To cite this version:**

Nicolas Mauhé. Le risque généré par les produits dérivés en réseau. Gestion et management. Université de Bordeaux, 2020. Français. NNT : 2020BORD0058 . tel-02967804

HAL Id: tel-02967804

<https://theses.hal.science/tel-02967804v1>

Submitted on 15 Oct 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE PRÉSENTÉE
POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR DE
L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE ENTREPRISE, ÉCONOMIE, SOCIÉTÉ
SCIENCES DE GESTION

Par Nicolas MAUHÉ

Le risque généré par les produits dérivés en réseau

Sous la direction de : Olivier BRANDOUY et Philippe MATHIEU

Soutenu le 26/06/2020

Membres du jury :

M. Frédéric AMBLARD

Professeur des Universités, Université Toulouse 1 Capitole, Examineur

M. Pascal BARNETO

Professeur des Universités, Université de Bordeaux, Président du jury

M. Olivier BRANDOUY

Professeur des Universités, Université de Bordeaux, Directeur de thèse

M. Roland GILLET

Professeur des Universités, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, Rapporteur

Mme Delphine LAUTIER

Professeur des Universités, Université Paris-Dauphine, Rapporteur

M. Philippe MATHIEU

Professeur des Universités, Université de Lille, Directeur de thèse

Mme Noémi NAVARRO

Maître de conférences, HDR, Université de Bordeaux, Examineur

Mme Hélène RAINELLI-WEISS

Professeur des Universités, Université de Rennes, Examineur

Titre : Le risque généré par les produits dérivés en réseau.

Résumé :

Cette thèse étudie les mécanismes à l'œuvre quand des agents s'échangent des produits dérivés en réseau. La conclusion de ce travail est la suivante : lorsque l'on modélise des mécanismes simples entre des agents qui ont des tolérances au risque différentes, on obtient des comportements qui sont similaires à ceux observés dans la réalité, et qui sont parfois la source de troubles majeurs. Pour arriver à cette conclusion, ce travail utilise une modélisation mathématique basé sur les mesures de risques financières, que l'on complexifie au fil des chapitres et que l'on étend à l'aide de la simulation informatique. Dans un premier temps, la modélisation montre que les agents ont tendance à établir des chaînes de dépendance lorsqu'ils ont la liberté de s'échanger des produits dérivés. Leur comportement fait émerger un point de faillite systémique. Lorsque la modélisation intègre le risque de contrepartie, les chaînes de dépendance peuvent aggraver la faillite générale. Une méthode informatique est ensuite développée pour étendre l'analyse au cas le plus général possible; celle-ci permet de concevoir des produits dérivés optimaux dans un cadre très large. Appliqué au problème des produits dérivés en réseau, cette méthode fait émerger des produits dérivés plus réalistes que précédemment, comme des options. Le risque systémique persiste cependant, faisant planer la menace d'une faillite générale en cas de mauvaise évaluation de l'une des positions financières. Enfin, ce travail de thèse propose une réflexion sur la valeur scientifique des simulations informatiques en sciences sociales. Adoptant un point de vue issu de la philosophie de Karl Popper, cette thèse propose ainsi de considérer les simulations comme des contre-exemples logiques à des présupposés théoriques fermement établis.

Mots clés : Risque, Produits dérivés, Réseaux

Title : Risk generated by derivatives in networks.

Abstract :

This thesis studies the mechanisms at work when agents exchange derivatives in networks. The general conclusion of this work is the following: when one models simple mechanisms between agents who have different risk tolerances, one obtains behaviors which are similar to those observed in reality, and which are sometimes the source of major trouble. To reach this conclusion, this work uses mathematical modeling based on financial risk measures, made more complex over the chapters and extended using computer simulation. At first, the model shows that agents tend to establish chains of dependence when they have the freedom to trade derivatives. Their behavior leads to the emergence of a point of systemic failure. When modeling incorporates counterparty risk, chains of dependence can worsen general bankruptcy. A computer method is then developed to extend the analysis to the most general case possible; it enables to design optimal derivative products within a very broad framework. Applied to the problem of network derivatives, this method leads to the emergence of more realistic derivatives than previously, such as options. Systemic risk persists, however, raising the threat of general bankruptcy if one of the financial positions is misjudged. Finally, this thesis work proposes a reflection on the scientific value of computer simulations in social sciences. Adopting a point of view stemming from the philosophy of Karl Popper, this thesis proposes to consider simulations as logical counterexamples to firmly established theoretical presuppositions.

Keywords : Risk, Derivatives, Networks

Unité de recherche

GREThA - Groupe de Recherche en Economie Théorique et Appliquée

UMR 5113 CNRS

6 Avenue Léon Duguit, Pessac, France

Remerciements

Mes remerciements vont en premier lieu à mes directeurs de thèse pour leur encadrement et leur confiance. Je remercie Olivier Brandouy, à l'origine de ce projet et qui a sans cesse œuvré pour qu'il se déroule dans d'excellentes conditions. Je remercie également Philippe Mathieu ; ce manuscrit doit beaucoup à son expertise et sa disponibilité.

Je remercie les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer ce travail et de participer à sa soutenance malgré les difficultés posées par l'épidémie du COVID-19. Je les remercie pour les critiques et les propositions, formulées avec bienveillance durant la soutenance ; elles seront une source de motivation et d'inspiration pour la valorisation de ce manuscrit.

Je remercie également l'ensemble des personnels de l'Université de Bordeaux que j'ai pu côtoyer et grâce à qui j'ai pu travailler dans des conditions idéales. Je pense en particulier à Pascale Roux, Selma Boussetta, Marc-Alexandre Sénégas et Dan Tran qui ont contribué par leur relecture patiente et leurs conseils à l'amélioration de ce manuscrit. Je remercie Léo Malherbe et Mahdi Fawaz pour leur aide quotidienne, et grâce à qui je n'ai jamais eu l'impression de réaliser un travail solitaire. Je remercie Yaodia Sénou Dumartin, Coralie Kersulec, Jérémy Rastouil et Sébastien Carrère pour leur soutien.

Ce travail de thèse a été rendu possible par le financement du collège DESPEG de l'Université de Bordeaux sous la forme de demi-contrats d'ATER. Les instances dirigeantes du collège ont toute ma gratitude pour avoir renouvelé ces contrats deux fois afin que je puisse terminer ma thèse.

Enfin, je tiens à remercier mes parents et Elodie qui se sont investis autant que moi dans ce projet, et sans qui il n'aurait pas été possible.

Table des matières

Remerciements	v
Introduction	1
0.1 Un exemple simple	1
0.2 Question de recherche et plan	4
0.3 Cadre théorique et méthodologique	4
0.4 Intérêt de ce travail	5
1 Représenter les éléments du problème à l'aide d'un cadre théorique	7
1.1 Les positions financières	7
1.1.1 Des objets fondamentalement mathématiques	7
1.1.2 Les produits dérivés comme positions financières	8
1.2 Les agents et leur comportement	10
1.2.1 Les préférences	10
1.2.2 Les conditions d'un comportement intéressant	12
1.2.3 Des aversions au risque différentes	14
1.3 Le coeur du problème : le contrat dérivé optimal	16
1.4 La répartition optimale au sens de Pareto	20
1.5 Les autres cadres théoriques possibles	20
1.5.1 Arbitrage	21
1.5.2 Utilité espérée	22
1.5.3 Économie comportementale et expérimentale	24
1.6 Conclusion du chapitre	25
1.7 Bibliographie du chapitre	25
2 Évaluer les conséquences de contrats dérivés établis dans un réseau	27
2.1 Des agents liés par un réseau fixé	28
2.2 Autant de contreparties que de voisins : le contrat optimal	29
2.3 Le partage des bénéfices	33
2.4 Le point où aucun contrat supplémentaire n'est souscrit	35
2.5 Les conditions de la convergence	39
2.6 Le défaut simultané de tous les agents	40
2.7 L'existence d'un prix d'équilibre	46
2.8 Conclusion du chapitre	49
2.9 Annexe mathématique	50
2.9.1 Démonstration de la Proposition 4	50

2.9.2	Démonstration de la Proposition 5	52
2.9.3	Démonstration de la Proposition 10	53
2.10	Bibliographie du chapitre	56
3	Prendre en compte le risque de contrepartie et de la contagion	59
3.1	Un problème complexe auquel se heurte l'analyse mathématique . . .	59
3.2	Simulations informatiques de la contagion lorsque les agents ignorent le risque de contrepartie	62
3.2.1	Lorsque l'agent initiateur de la transaction empêche tout... . .	64
3.2.2	... et lorsque les bénéficiaires sont répartis de manière égalitaire .	67
3.3	Analyse du cas où les agents prennent en compte le risque de contagion	69
3.3.1	Un cas simple avec deux agents	69
3.3.2	Le cas général avec un nombre fini d'agents	70
3.3.3	Le risque systémique persiste	73
3.3.4	Situation potentiellement différente en cas de décentralisation	73
3.4	Conclusion du chapitre	75
3.5	Annexe : littérature sur la contagion financière	76
3.5.1	Déterminants de la contagion	76
3.5.2	Mesure de la fragilité d'un réseau	77
3.5.3	Décisions des agents	79
3.6	Bibliographie du chapitre	83
4	Dépasser les contraintes théoriques à l'aide de l'informatique évo- lutionnaire	87
4.1	Évoluer des produits dérivés	89
4.2	Test de la méthode sur les résultats théoriques obtenus précédemment	91
4.2.1	Le cas simple à deux agents	93
4.2.2	Le cas général à un nombre fini d'agents	95
4.3	Le coeur du problème : le dérivé optimal en réseau avec risque de contrepartie	97
4.3.1	Un agent averse au risque qui fait face au risque de faillite . .	98
4.3.2	L'impact de la tolérance au risque	103
4.3.3	La persistance du risque systémique	105
4.3.4	Discussion mathématique des résultats précédents	105
4.4	Conclusion du chapitre	106
4.5	Bibliographie du chapitre	108
5	Estimer la valeur scientifique des simulations informatiques	109
5.1	La valeur épistémologique des simulations, une question moderne . .	109
5.2	Le critère de démarcation, un outil qui a marqué le XXe siècle	112
5.3	La simulation informatique n'est pas une méthode empirique	114
5.4	Le raisonnement logique ne peut être parfaitement remplacé par les simulations	117
5.5	Un entre-deux pour les simulations informatiques : produire des énon- cés singuliers logiques	121
5.5.1	Auto-organisation sans concepteur omniscient	123
5.5.2	Le modèle de Schelling et les racines de la ségrégation urbaine	125

5.5.3	La coopération est parfois une stratégie gagnante	126
5.5.4	Un marché boursier où l'irrationalité est la stratégie payante .	127
5.6	Les limites de l'analyse	128
5.7	Conclusion du chapitre	129
5.8	Bibliographie du chapitre	130
Conclusion		135
Liste complète des références		139

Introduction

0.1 Un exemple simple

Une compagnie aérienne fait face au risque que le prix du carburant augmente dans le mois qui vient. Le prix du fioul variera en fonction de plusieurs scénarios possibles, comme une guerre qui éclate au Moyen-Orient ou un pays producteur qui décide de réduire sa production. Un risque de perte financière pèse sur l'entreprise, et sa valeur dépend du scénario qui se réalisera.

La compagnie aérienne cherche une solution pour réduire ce risque. Prédire le prix du pétrole ne fait pas partie de ses spécialités : son activité première est de transporter des gens efficacement d'une ville à l'autre.

Heureusement, il existe d'autres agents économiques bien plus compétents sur le sujet, qui ont la capacité de gérer le risque lié aux fluctuations des prix. Il existe également des agents économiques qui ont une activité complémentaire, comme la production de pétrole ; ces producteurs souffrent d'un risque inverse, à savoir celui de voir le prix du baril s'effondrer. Il existe donc des possibilités pour établir des transactions qui satisferaient les deux parties.

Cependant, il s'agit d'un univers inconnu pour la compagnie aérienne, qui dispose d'un carnet d'adresses limité. Elle décide donc de s'adresser à un trader au sein de sa banque habituelle. Celui-ci offre la solution suivante à la compagnie aérienne : établir un contrat qui lui permettra de transférer le risque lié à l'évolution des cours du pétrole, en échange d'un paiement monétaire. Ce contrat lui permettra d'acheter à un prix déterminé à l'avance une certaine quantité de fioul dans un mois. Ainsi, la compagnie aérienne n'a plus à se soucier des fluctuations du prix du pétrole : cela devient le problème de la contrepartie avec qui elle a conclu ce contrat.

Le paiement qui devra être réalisé dans un mois dépend du scénario qui va se réaliser. Cependant, il est plus commode de rédiger le contrat en le faisant dépendre d'un actif financier clairement identifié et coté en bourse : ici, le cours du pétrole. Le contrat pourrait se résumer ainsi : « Quel que soit le prix du baril de pétrole, j'achèterai 20 barils pour 70 euros le baril ». Des contrats bien plus complexes

pourraient être conclus, tel que : « Si le prix du baril dépasse 70 euros, je pourrai tout de même acheter 20 barils pour 70 euros. Sinon, j'achèterai au prix du marché ». On voit bien que le contrat dérivera naturellement du prix du baril : il s'agit d'un *produit dérivé*.

Ce type de contrat est bilatéral ; il lie seulement la compagnie aérienne et le trader. Rien n'empêche cependant l'une ou l'autre des parties de souscrire des contrats supplémentaires. Le trader qui a vendu le produit dérivé à la compagnie aérienne a d'autres clients. Parmi eux se trouve un producteur de pétrole. Celui-ci est inquiet au sujet de la situation politique : il a peur que les prix chutent dans un mois, ce qui constitue un risque financier important. Ce producteur de pétrole préférerait se débarrasser de ce risque, en concluant un contrat stipulant qu'il vendra dans un mois (à un prix que l'on détermine maintenant) sa production de pétrole. Le trader et le producteur s'entendent sur le contrat suivant : « Quel que soit le prix du fioul, la vente sera de 20 barils pour 70 euros ».

Il s'agit d'un produit dérivé complémentaire à celui conclu avec la compagnie aérienne. Le trader a équilibré sa position : quel que soit le prix du fioul, il sera simplement l'intermédiaire d'une transaction impliquant 20 barils de pétrole à 70 euros, transitant par trois agents économiques. Évidemment, le trader récupérera une petite commission sur chacune de ces deux transactions à travers le prix qu'il fixe pour ses produits dérivés.

Chaque agent a joué son rôle : la compagnie aérienne consomme le pétrole, le producteur le fournit, et le trader met en lien les agents grâce à son réseau. Les produits dérivés eux-mêmes jouent leur rôle : sans eux, impossible de mener à bien une telle transaction, qui a clairement servi les intérêts des trois parties.

Il y a cependant une ombre au tableau. Lorsque la compagnie aérienne souscrit un contrat avec le trader, elle ignore si les choses vont bien se dérouler comme prévu. Elle ne connaît ni ne contrôle, les agissements du trader. Parfois, ce dernier ne connaît pas de producteur pour équilibrer sa position. Pourtant, il accepte quand même de vendre un produit dérivé à cette compagnie aérienne, car la transaction lui paraît intéressante, et il connaît un de ses collègues que cela pourrait intéresser. Il établit un contrat avec un autre trader, et empoche une commission. Le deuxième trader connaît lui-même un troisième trader que cela va intéresser. Trois intermédiaires se succèdent ainsi avant qu'un contrat ne se conclue avec le producteur de pétrole.

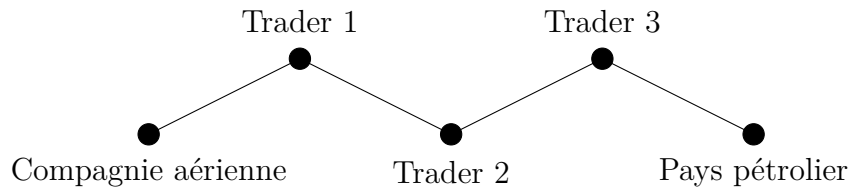


FIGURE 1 – Quatre transactions sont nécessaires pour réajuster le risque.

Un problème majeur vient soudainement stopper la production de notre fournisseur de pétrole : il est incapable de fournir les 20 barils, et il n’a pas d’argent pour dédommager le troisième trader avec qui il a souscrit un produit dérivé. Le producteur *fait défaut* sur sa dette auprès du troisième trader. Ce dernier se trouve face à une perte financière, d’environ 1400 euros, qu’il n’avait pas prévue. Il doit fournir ces barils ou dédommager le deuxième trader ; il en est incapable. Il fait défaut à son tour. C’est au tour du premier trader d’affronter une perte de 1400 euros, il ne peut encaisser le coup. La compagnie aérienne ne reçoit pas son pétrole.

Une perte financière de 1400 euros provoquée par le producteur et qui aurait simplement dû frapper le client final a généré le défaut de 3 agents économiques, qui ont chacun 1400 euros de dettes non payées. Le montant total des dettes a été multiplié par un effet de cascade. Cet effet est imprévisible : la compagnie aérienne ne connaît pas les agissements du premier trader, et encore moins ceux des autres membres de la chaîne. Il lui était impossible de connaître l’identité du producteur, et donc l’ampleur du risque qu’elle prenait.

Sur un marché avec beaucoup plus d’acteurs, lorsqu’un actif (ici le pétrole) devient l’objet de toutes les attentions, ce type de phénomène peut mener à une crise globale. C’est une des explications possibles à la crise survenue en 2008 lorsque le monde de la finance s’est pris de passion pour les dérivés de crédit immobilier.

Comprendre le risque posé par des acteurs qui s’échangent des produits dérivés est crucial si l’on veut comprendre et éviter de reproduire les dysfonctionnements passés. C’est également un objectif important pour prévenir les crises futures, qui pourraient être provoquées par l’échange de produits dérivés en réseau à travers la blockchain.

C’est un objectif ambitieux, qui dépasse le cadre de ce travail de thèse. Avant d’en arriver là, il est nécessaire dans un premier temps de comprendre comment ce mécanisme opère dans une situation simple, comme dans le cas de notre compagnie aérienne.

C’est l’objet de ce travail : étudier une représentation simplifiée de la réalité, que l’on appelle un *modèle*. Une fois capable de comprendre quelque chose de très simple, on peut ajouter des éléments et tenter d’étendre notre compréhension à la

complexité supplémentaire qui apparaît. C'est la feuille de route de ce manuscrit.

0.2 Question de recherche et plan

Contracter des produits dérivés en réseau peut-il s'avérer dangereux pour le système financier ?

Pour répondre à cette question, cette thèse étudie une représentation simplifiée du problème, en utilisant la modélisation mathématique puis informatique, de complexité croissante au fil des chapitres.

Le chapitre 1 présente la représentation mathématique des différents éléments du problème ("cadre théorique"), comme les produits dérivés. Ce chapitre détaille également certains résultats de la littérature en finance sur lesquels les chapitres suivants s'appuieront. En particulier, le contrat dérivé optimal entre deux agents, ce qui constitue la forme la plus simple de notre problème.

Le chapitre 2 étend l'analyse à la situation qui nous intéresse : celle de contrats établis avec plusieurs contreparties dans un réseau. Certains résultats théoriques du chapitre précédents sont adaptés à cette configuration et les conséquences pour le système sont étudiées.

Le chapitre 3 intègre une composante supplémentaire : la possibilité que les agents n'honorent pas leurs dettes. Cet aspect ajoute une possibilité de voir le défaut d'un agent entraîner celui de ses contreparties, provoquant une cascade de défauts. Les conséquences de ce mécanisme sont étudiées théoriquement et informatiquement, en adaptant un algorithme (utilisé pour les réseaux de dettes) au cas des produits dérivés.

Le chapitre 4 propose une méthode informatique pour étendre l'analyse à des situations plus complexes. Cette partie adapte un algorithme basé sur des arbres logiques au cas des produits dérivés et montre qu'il s'avère relativement efficace pour retrouver les solutions obtenues dans les chapitres précédents. Cette méthode est ensuite appliquée à un cas de figure où il n'existe pas encore de solution mathématique.

0.3 Cadre théorique et méthodologique

La représentation théorique que l'on va utiliser s'inscrit dans la continuité de plusieurs travaux qui traitent des *mesures de risque*. Une mesure de risque est une fonction mathématique qui permet de quantifier le montant qu'il paraît nécessaire de conserver pour faire face à une position financière risquée. Il s'agit d'un cadre

théorique adapté à l'étude d'institutions financières qui font face au risque de faire défaut.

Les quatre premiers chapitres s'attacheront à étudier comment une représentation mathématique simplifiée de ce phénomène peut expliquer certains éléments de la réalité. Le raisonnement est purement théorique. Il justifie son utilité par l'ambition de montrer que certaines conséquences logiques (comme une faillite du système tout entier) peuvent découler de manière inattendue d'un ensemble de prémisses. Cette justification est marquée par la théorie du *falsificationnisme* développée par Karl Popper, comme le détaille le dernier chapitre.

D'un point de vue méthodologique, le choix d'une représentation théorique permet l'utilisation des mathématiques pour détailler les conséquences logiques des différents mécanismes que l'on étudie. Un certain nombre de concepts sont naturellement empruntés à l'économie. Lorsqu'une démonstration mathématique n'est plus possible, la simulation informatique est utilisée. Les deux outils n'ont pas la même valeur épistémologique ; ce point constitue précisément le sujet du dernier chapitre.

0.4 Intérêt de ce travail

D'un point de vue théorique, ce travail présente l'intérêt de proposer un raisonnement logique autour des contrats dérivés optimaux et du risque systémique qu'ils peuvent poser. La littérature sur le risque posé par la contagion en réseau s'est focalisée sur la modélisation de prise de capital ou d'emprunts monétaires. Ces deux composantes créent en effet un réseau de liens financiers qui peut présenter des fragilités liées à la contagion. Cependant, la littérature théorique financière ne proposait pas jusqu'à présent d'analyser la problématique de la contagion en réseau sous l'angle des produits dérivés optimaux. Inversement, la littérature portant sur les dérivés optimaux et la répartition du risque reste détachée de la problématique de la contagion en réseau. Ce travail de thèse propose d'établir un pont entre ces deux courants scientifiques et d'en tirer des résultats.

D'un point de vue méthodologique, ce travail propose des altérations relativement inédites d'outils classiques. Chaque chapitre tente d'améliorer des méthodes existantes pour les appliquer à une problématique qui dépasse leur domaine habituel. Les mesures de risques présentées au chapitre 1 sont utilisées pour modéliser le défaut d'un agent ; les résultats sur les dérivés optimaux sont étendus au chapitre 2 pour représenter les chaînes de dépendances dans les réseaux ; l'algorithme classique d'Eisenberg & Noe permettant de simuler la contagion des réseaux de dettes est modifié au chapitre 3 pour évaluer la faillite d'un marché de produits dérivés ;

l'informatique évolutionnaire est adaptée au cas des produits dérivés au chapitre 4 ; les avancées épistémologiques de Karl Popper sont revisitées pour analyser la valeur scientifique des simulations informatiques, et par extension, des résultats présentés dans cette thèse.

Du point de vue des disciplines mobilisées, ce travail tente de répondre à une question plutôt que de s'inscrire dans un domaine précis. Le problème des produits dérivés en réseau touche plusieurs disciplines : la finance, l'économie, les mathématiques, l'informatique, l'épistémologie. Toutes ont été mobilisées pour tenter d'apporter un éclairage nouveau sur le sujet. L'interdisciplinarité s'explique également par les conditions pratiques dans lesquelles ce travail a été réalisé. Il s'agit d'une thèse de gestion, hébergée dans un laboratoire d'économie, dans un groupe de recherche sur les réseaux, dirigée par un professeur spécialisé en finance computationnelle et un professeur spécialisé en informatique et en système multi agents. Ces différentes dimensions sont toutes présentes dans ce travail.

D'un point de vue pratique, plusieurs résultats peuvent être utilisables immédiatement. Le chapitre 2 établit l'existence d'un point de basculement relativement robuste et réutilisable dans des modèles théoriques ; le chapitre 3 montre que l'utilisation de l'algorithme d'Eisenberg & Noe dans une perspective de Monte-Carlo s'avère tout à fait efficace ; le chapitre 4 propose une méthode informatique pour obtenir un contrat dérivé optimal dans des situations où il est impossible de l'obtenir mathématiquement ; le chapitre 5 propose un critère précis et des recommandations pratiques relatives à l'utilisation de la simulation informatique en sciences sociales.

En matière de valorisation, un article basé sur les chapitres 3 et 4 a fait l'objet d'une présentation à la conférence de l'Association Française de Finance en 2019, et a remporté le prix du meilleur article sur les produits dérivés. Le chapitre 4 est à son premier tour de révision dans la revue *Oeconomia* et a fait l'objet d'une présentation organisée par cette revue lors d'un atelier en octobre 2019.

Chapitre 1

Représenter les éléments du problème à l'aide d'un cadre théorique

La transaction entre la compagnie aérienne et le trader est caractérisée par trois éléments : une position financière (1), la perception que les agents en ont (2), et le choix du meilleur contrat dérivé qui en découle (3). Pour comprendre comment ces différents mécanismes fonctionnent, il est nécessaire de choisir une représentation théorique pour ces objets. Plusieurs possibilités s'offrent à nous en fonction du *cadre théorique* choisi. Ce chapitre détaille l'option retenue pour l'ensemble du travail de thèse¹, et justifie ce choix. Il aborde également le sujet des autres cadres théoriques possibles.

1.1 Les positions financières

1.1.1 Des objets fondamentalement mathématiques

La position financière et le risque associé qui pèse sur la compagnie aérienne sont une conséquence directe de ce qui va se produire à un horizon déterminé. Le *temps* est donc une composante cruciale dans les choix de représentations. Ici, nous opterons pour le choix le plus simple possible : deux périodes temporelles. Une période au cours de laquelle les agents analysent le risque qui pèse sur leur activité compte tenu de leur position financière initiale, de celle de leurs partenaires et de la nature des scénarios qui peuvent se produire. La deuxième période est celle au cours de laquelle

1. Un traitement complet peut être trouvé dans Föllmer and Schied (2011). La notation et les définitions utilisées dans ce chapitre en sont issues.

les éléments aléatoires *se réalisent* : un scénario survient, et détermine la position financière des agents.

Plusieurs scénarios sont possibles : par exemple, une crise pétrolière peut survenir ou ne pas survenir. Ici il y a deux scénarios possibles, que l'on peut appeler ω_1 et ω_2 . Le risque financier est simplement la conséquence pour l'entreprise en termes monétaires. Dans l'exemple introductif, il y a deux scénarios : une crise pétrolière survient ou ne survient pas. En cas de crise pétrolière (scénario ω_1), l'entreprise va perdre 1000 euros. Si aucune crise ne se produit (scénario ω_2), l'entreprise ne perd rien.

La position financière, que l'on peut noter X , associe donc un montant (ici -1000 et 0) à chaque scénario (ω_1 et ω_2). D'un point de vue mathématique, il s'agit d'une *fonction* : une relation qui associe à chaque élément de l'ensemble de départ (ici l'ensemble des scénarios possibles, que l'on note habituellement Ω) un élément de l'ensemble d'arrivée (ici l'ensemble des nombres réels, noté \mathbb{R}). On la note alors $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

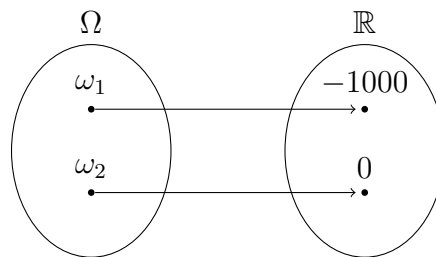


FIGURE 1.1 – Une position financière est une fonction qui à chaque élément de l'ensemble des scénarios (Ω) associe un élément de l'ensemble des nombres réels (\mathbb{R}).

L'élément fondamental ici est donc un objet mathématique. Cela ouvre la possibilité d'utiliser un grand nombre de résultats mathématiques pour manipuler la représentation simplifiée que l'on va se faire du phénomène que l'on veut étudier. Pour cela, il est nécessaire de représenter les autres éléments sous la forme d'objets mathématiques, un choix que nous avons fait dans cette thèse.

La représentation mathématique est naturelle pour certains éléments (une position financière, un paiement) et beaucoup moins pour d'autres (le comportement des agents). Le minimum absolu d'objets mathématiques nécessaires au travail de recherche sera présenté ici.

1.1.2 Les produits dérivés comme positions financières

Un produit dérivé est un actif financier dont la valeur est déterminée ou "dérive" d'autres actifs financiers. En pratique, les produits dérivés sont le plus souvent in-

dexés sur les actions d'entreprises, les indices boursiers comme le CAC 40, les devises comme l'euro ou le dollar, les commodités agricoles, les métaux précieux ou encore les taux d'intérêt (Bodie, 2009).

Certains produits dérivés relativement standards s'échangent sur des places financières centrales. C'est le cas par exemple de certaines options, qui permettent d'acheter la possibilité future d'acquérir un actif financier à un prix déterminé à l'avance. Sur les places centrales, les modalités de ces options (prix, échéances) sont standardisées pour atteindre un certain seuil de liquidité. Pour obtenir un produit dérivé avec des caractéristiques particulières, les agents économiques peuvent se tourner vers le marché de gré à gré (ou *over-the-counter*). Celui-ci permet à deux agents de s'échanger des produits dérivés dont les caractéristiques sont modifiées pour convenir à des besoins particuliers.

Dans le cadre théorique dont on vient de poser les bases, le contrat dérivé est simplement un accord entre deux parties au sujet des scénarios possibles. La compagnie aérienne peut acheter un produit dérivé F avec le trader stipulant qu'en cas de crise pétrolière (ω_1), le trader lui verse 1000 euros (on a alors $F(\omega_1) = 1000$), et rien sinon (on a $F(\omega_2) = 0$). Le trader peut exiger un montant π en échange du produit dérivé. La nouvelle position de la compagnie est donc $X + F - \pi$, ce qui l'amène à être entièrement assurée contre le risque que fait peser la position financière X (Tableau 1.2).

Scénario	ω_1	ω_2
X	-1000	0
F	+1000	0
π	-150	-150
$X + F - \pi$	-150	-150

FIGURE 1.2 – Acheter F permet de s'assurer entièrement contre les variations de la position financière X en échange du prix π (ici 150) du produit dérivé.

On voit ici que d'un point de vue mathématique, rien ne différencie une position financière d'un produit dérivé. Tout comme X , F est une fonction qui à chaque élément de l'ensemble des scénarios (Ω) associe un élément de l'ensemble des nombres réels (\mathbb{R}).

En pratique, il peut s'avérer difficile de s'accorder au sujet du scénario qui se réalise ; qu'est-ce qui caractérise réellement une crise pétrolière ? À la réalisation du scénario, les intérêts des deux parties sont souvent opposés, ce qui peut entraîner des conflits : quel que soit le scénario qui se réalise, la compagnie aérienne a tout intérêt à faire reconnaître au trader qu'une crise pétrolière est survenue, tandis que le trader

sera dans la position opposée. C'est une problématique fréquente en assurance au sujet de la reconnaissance d'un sinistre.

Pour ces différentes raisons, le plus souvent les deux parties font dériver la valeur du contrat non pas des scénarios possibles, mais d'un actif clairement identifié, voire côté publiquement (comme le prix du baril). Ici, il est possible de faire dériver F de X : on voit clairement dans la Figure 1.2 que l'on a $F = -X$. La valeur de F dérivera de celle de X , sur laquelle les agents peuvent plus facilement s'accorder ; il s'agit bien d'un produit dérivé.

1.2 Les agents et leur comportement

1.2.1 Les préférences

Dans l'exemple introductif, la compagnie aérienne est insatisfaite du risque qui pèse sur son activité : elle trouve donc un trader avec qui conclure un contrat dérivé. À l'issue de la transaction, la compagnie et le trader sont satisfaits, du moins un peu plus que dans la situation initiale.

Le comportement des agents est une chose complexe à représenter mathématiquement, la littérature académique a donc commencé par ce qui paraissait le plus nécessaire. Ici, le coeur du comportement est l'ordre entre les alternatives proposées : la *préférence* des agents pour une position financière plutôt qu'une autre.

La recherche en économie a étudié le concept de préférences et la possibilité d'en tirer une mesure chiffrée de la satisfaction des agents. C'est le concept d'*utilité* : une fonction mathématique associe à chaque alternative un nombre réel. Si à une alternative est associée une plus grande utilité par rapport à une autre alternative, c'est la première qui sera choisie par l'agent économique².

Appliquée aux positions financières, une fonction d'utilité U associe à la position financière de la compagnie aérienne un nombre réel, représentant sa satisfaction. Si la situation de l'entreprise est entièrement caractérisée par la position financière X , sa satisfaction est $U(X)$. L'ensemble de départ de la fonction U est donc l'ensemble des positions financières et l'ensemble d'arrivée est l'ensemble des nombres réels. On se restreindra aux fonctions *bornées* : quelle que soit la fonction X choisie, il doit exister une borne M telle que $|X(\omega)| \leq M$ pour tout scénario ω . Cette restriction est une hypothèse nécessaire aux résultats mathématiques que nous allons utiliser, et l'imposer n'entraîne pas une perte de généralité importante pour les problèmes qui nous concernent : les risques financiers réels peuvent tous être bornés par un

2. Voir Mas-Colell et al. (1995) pour un traitement complet.

montant, aussi élevé soit-il. On note habituellement cet ensemble \mathcal{X} (Figure 1.3).

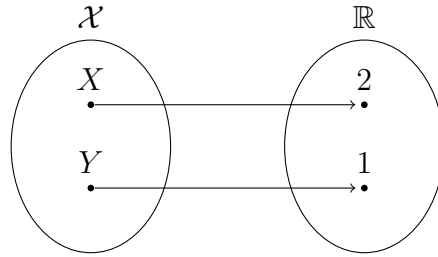


FIGURE 1.3 – La fonction d'utilité U associée à chaque élément de l'ensemble des positions financières (\mathcal{X}) associe un élément de l'ensemble des nombres réels (\mathbb{R}).

Dans le cas de la Fig. 1.3, la fonction d'utilité U représente le comportement d'un agent qui préfère la position financière X à la position Y , car $U(X)$ est égal à 2; il est donc supérieur à $U(Y)$, qui vaut seulement 1. Les valeurs 2 et 1 ne sont pas nécessairement interprétables, mais elles définissent avec précision la préférence pour une position plutôt qu'une autre.

$Y + X$ est lui-même une position financière telle que nous l'avons définie : si l'ensemble des scénarios est toujours composé de ω_1 et ω_2 (une crise pétrolière survient ou ne survient pas), alors $X + Y$ représente la situation financière globale dans le premier scénario ($X(\omega_1) + Y(\omega_1)$) et dans le deuxième ($X(\omega_2) + Y(\omega_2)$). De même, pour toute position financière X , on peut multiplier cette position par n'importe quel nombre réel, on obtiendra une position financière. On a donc αX qui est une position financière pour tout α appartenant aux nombres réels³.

Il est possible de considérer la situation du point de vue opposée : représenter non pas la satisfaction, mais l'insatisfaction que pose une situation. La compagnie aérienne peut ainsi appréhender sa position financière sous l'angle du risque qu'elle fait peser. Il est possible de quantifier ce risque, à l'aide de ce que l'on appelle une *mesure de risque*. Il s'agit du concept complémentaire de fonction d'utilité : un agent préférera systématiquement une position financière dont la mesure du risque est la plus faible. Ici nous opterons pour cette représentation, pour des raisons que nous détaillerons plus loin.

Une mesure de risque est une fonction (que l'on notera généralement ρ) qui associe à chaque position financière (appartenant à \mathcal{X}) un nombre réel (appartenant donc à \mathbb{R}). Formellement, on note $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$.

Le comportement de l'agent est entièrement caractérisé par cette fonction. Un agent préférera une position financière Y à X si et seulement si $\rho(Y) \leq \rho(X)$.

3. Formellement, on dit que \mathcal{X} est un espace vectoriel.

Toute fonction définie sur \mathcal{X} et à valeurs dans \mathbb{R} peut donc représenter un comportement. Cependant, certaines fonctions seront plus intéressantes que d'autres, car elles représentent des comportements qui correspondent à l'objet de notre problématique.

1.2.2 Les conditions d'un comportement intéressant

Il est possible de choisir n'importe quelle fonction pour représenter le comportement de nos agents. Cependant, il est possible qu'une fonction représente un comportement qui nous paraisse incohérent, "irrationnel"; il est même probable qu'en choisissant une fonction au hasard on obtienne un comportement absurde. La littérature micro-économique s'est donc intéressée à ce qui caractérise la "rationalité" et aux conditions nécessaires pour qu'une fonction représente bien un comportement rationnel (Mas-Colell et al., 1995).

Imaginons une position financière légèrement différente de X celle vue précédemment. Avec cette position (appelons-la \tilde{X}), en cas de crise pétrolière, l'entreprise ne perd que 700 euros : $\tilde{X}(\omega_1) = -700$, tandis que précédemment nous avions $X(\omega_1) = -1000$. En cas d'absence de crise, l'entreprise ne perd rien : $\tilde{X}(\omega_2) = 0$, ici cela ne change pas par rapport à $X(\omega_2) = 0$.

On voit que quelque soit le scénario, \tilde{X} est supérieur ou égal à X , ce que l'on note par $X \leq \tilde{X}$. Dans ce cas de figure, il paraîtrait rationnel pour la compagnie aérienne de préférer \tilde{X} à X , ce qui se traduirait par $\rho(\tilde{X}) \leq \rho(X)$. L'inverse serait un comportement étrange. Pour choisir une fonction qui représente le comportement de la compagnie, on peut donc exiger que cette condition soit tout le temps respectée, quelles que soient les positions financières considérées. Cette condition porte le nom de "monotonicité" :

Monotonicité : Si $X \leq Y$, alors $\rho(X) \geq \rho(Y)$.

Tout comme pour la fonction d'utilité, la valeur de la mesure du risque n'est pas toujours interprétable. Il est possible d'imposer une condition supplémentaire pour qu'elle le soit. Les acteurs économiques qui échangent des produits dérivés, tels que les banques, ont tendance à considérer une position risquée sous l'angle du capital nécessaire pour la couvrir. C'est compatible avec notre mesure de risque : un nombre réel qui quantifie le risque, et qui augmente au fur et à mesure que la position financière est perçue de manière négative. Une position qui risque de générer des pertes plus grandes nécessitera un capital supérieur pour la couvrir.

Il serait donc intéressant que la valeur de la mesure de risque ρ soit interprétable du point de vue d'une réserve de capital nécessaire. Prenons l'exemple de la position financière X liée au carburant, pour la compagnie aérienne dont la mesure de risque

est ρ . Nous aimerions que $\rho(X)$ représente le capital que l'entreprise juge nécessaire pour couvrir la position financière X , qui peut valoir -1000 ou 0 . Imaginons que nous ajoutons 200 euros à la position de l'entreprise, qui devient alors $X + 200$. Comment évolue la mesure du risque ? Comme l'entreprise gagne 200 euros de plus quel que soit le scénario, le capital nécessaire pour couvrir sa position devrait être diminué de 200 euros : $\rho(X + 200) = \rho(X) - 200$. Et cela devrait être vrai quel que soit le montant. Cela nous amène à une condition qui s'appelle "l'invariance monétaire" :

Invariance monétaire : Si m est un nombre réel (on note $m \in \mathbb{R}$), alors $\rho(X + m) = \rho(X) - m$.

Il s'avère que cette condition suffit à rendre interprétable la valeur de la mesure du risque. Tout ajout d'argent à une position financière entraîne une diminution de la mesure de risque d'autant : l'unité de cette mesure de risque est donc l'argent.

Une condition supplémentaire dont nous allons avoir besoin est liée à la diversification d'une position. Un élément important qui a marqué la finance dans la deuxième moitié du 20e siècle (Bernstein, 1993) est le fait que lorsque l'on diversifie une position financière, il existe un bénéfice lié à l'interaction des actifs entre eux. Dès lors que les éléments du portefeuille sont corrélés, alors diversifier son portefeuille entraîne une réduction de la variance totale. Pour représenter le fait que nos agents économiques sont conscients des bénéfices de la diversification, on peut imposer la condition suivante :

Convexité : $\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$ pour $0 \leq \lambda \leq 1$.

Cette condition implique qu'une combinaison de positions financières (par exemple la moitié d'une position A et la moitié d'une position B) soit perçue comme moins risquée (ou aussi risquée) que la simple moyenne pondérée des mesures de risque de A et de B . Diversifier sa position ne peut pas nuire.

Cette condition a un autre intérêt ici : elle permet de s'assurer que les agents présentent une forme d'aversion au risque. En effet, supposons que le comportement du trader soit représenté par une mesure de risque convexe ρ_t . Supposons qu'il considère qu'il n'ait pas besoin de conserver du cash lorsque sa position financière est nulle : $\rho_t(0) = 0$. La position financière X est une position qui ne peut que faire perdre de l'argent, puisqu'elle vaut -1000 en cas de premier scénario ($X(\omega_1) = -1000$) et 0 en cas de second scénario ($X(\omega_2) = 0$). Être dans cette position financière est pire que de ne rien avoir pour le trader ; supposons donc que l'on a ici $\rho_t(0) < \rho_t(X)$, ce qui signifie $0 < \rho_t(X)$. Pour couvrir cette position, le trader estime qu'il est nécessaire de garder une réserve de capital positive, estimée à $\rho_t(X)$.

Utilisons maintenant la convexité avec les deux positions financières que sont X

et 0, avec un coefficient λ de $\frac{1}{2}$. On obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}\rho_t\left(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}0\right) &\leq \frac{1}{2}\rho_t(X) + \frac{1}{2}\rho_t(0) \\ \rho_t\left(\frac{1}{2}X\right) &\leq \frac{1}{2}\rho_t(X) \\ \rho_t\left(\frac{1}{2}X\right) &< \rho_t(X)\end{aligned}\tag{1.1}$$

Si la position financière est divisée par deux, il paraît logique que le trader la perçoive comme moins risquée. En tout cas, il serait incohérent qu'il la considère comme plus risquée. C'est ce que la convexité empêche ici : la moitié de X ne peut pas être perçue comme plus risquée que X .

On peut reproduire le raisonnement précédent avec n'importe quelle fraction positive inférieure à 1. Grâce à la convexité, on aura donc un comportement qui paraît rationnel : dès lors que l'on réduit la position financière X , l'agent réduit le capital nécessaire.

Dans les cas où la convexité est stricte, c'est-à-dire quand on a $\rho_t(\frac{1}{2}X) < \frac{1}{2}\rho_t(X)$, alors on observe que pour une position financière réduite de moitié, l'agent juge nécessaire de réduire plus de la moitié de son capital. À l'inverse lorsque l'agent multiplie par deux sa position financière risquée et qu'il passe de $\frac{1}{2}X$ à X , il fait plus que multiplier par deux sa réserve de capital : lorsque le risque augmente, l'agent prend des précautions supplémentaires et fait augmenter plus rapidement sa réserve de capital. C'est une forme d'aversion au risque, que permet la convexité. Un agent neutre au risque aurait simplement multiplié le capital nécessaire par deux.

Ces trois conditions réunies définissent la catégorie des mesures de risques qui retiendra notre attention par la suite.

Definition 1. La fonction $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ est une *mesure de risque monétaire convexe* si, pour tout X, Y appartenant à \mathcal{X} (on note $X, Y \in \mathcal{X}$), elle satisfait les conditions suivantes :

- *Monotonie* : Si $X \leq Y$, alors $\rho(X) \geq \rho(Y)$;
- *Invariance monétaire* : Si m est un nombre réel (on note $m \in \mathbb{R}$), alors $\rho(X + m) = \rho(X) - m$.
- *Convexité* : $\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$ pour $0 \leq \lambda \leq 1$.

◇

1.2.3 Des aversions au risque différentes

Pour représenter des agents différents, il suffit de choisir des mesures de risques différentes. Cependant, cette solution peut s'avérer complexe pour plusieurs raisons :

- À chaque nouvel agent, il faudra trouver une nouvelle mesure de risque qui répond aux conditions énoncées précédemment, ce qui rend complexe la manipulation d'un nombre important d'agents ;
- Deux mesures de risques différentes peuvent être difficiles à comparer, et dépendre des positions financières auxquelles elles sont confrontées ;
- En cas de modèle informatique, il sera nécessaire de pouvoir générer automatiquement des mesures de risques différentes des précédentes.

Une solution intéressante est de pouvoir choisir une mesure de risque dont les propriétés conviennent, et ensuite de la décliner pour obtenir des agents différents. Nous venons de voir que les mesures de risques convexes peuvent s'interpréter comme la réserve de capital que l'agent juge nécessaire face à une position financière. Une plus grande tolérance face au risque signifiera alors que l'agent immobilise moins de capital face à une position financière identique (et se comporte donc de manière plus "risquée").

Si l'on a une mesure de risque convexe ρ , la convexité appliquée avec X et 0 nous donne :

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)0) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(0) \quad \text{pour tout } \lambda \in (0, 1]$$

Supposons pour simplifier les choses que $\rho(0) = 0$, c'est-à-dire que l'agent juge que lorsque sa position est nulle il n'a pas besoin d'immobiliser du capital. On dit alors que ρ est *normalisée*. On a alors :

$$\rho(\lambda X) \leq \lambda\rho(X)$$

$$\frac{1}{\lambda}\rho(\lambda X) \leq \rho(X) \tag{1.2}$$

Cette inégalité est vraie pour tout λ supérieur à 0 et inférieur ou égal à 1.

Choisissons un *coefficient de tolérance au risque* noté γ qui sera supérieur ou égal à 1. On a alors $0 < \frac{1}{\gamma} \leq 1$: on peut donc prendre $\lambda = \frac{1}{\gamma}$ et on a :

$$\gamma\rho\left(\frac{1}{\gamma}X\right) \leq \rho(X) \quad \text{pour tout } \gamma \geq 1$$

On peut alors vérifier que la fonction qui associe à toute position financière X le nombre réel $\gamma\rho\left(\frac{1}{\gamma}X\right)$ répond bien aux conditions énoncées dans la Définition 1. Il s'agit donc d'une mesure de risque convexe, que l'on pourrait noter ρ_γ et on a

$$\rho_\gamma(X) \leq \rho(X) \quad \text{pour tout } X \in \mathcal{X}$$

C'est exactement ce que l'on cherchait : pour un coefficient de tolérance au risque supérieur à 1, il est possible de produire une mesure de risque ρ_γ qui va conduire l'agent à immobiliser moins de capital qu'un autre agent avec une mesure ρ . Pour $\gamma \in]0, 1]$, on utilise l'inégalité (1.2) avec $\lambda = \gamma$ et $X = \frac{1}{\gamma}\tilde{X}$, ce qui nous donne :

$$\rho(\tilde{X}) \leq \gamma \rho\left(\frac{1}{\gamma}\tilde{X}\right) \quad \text{pour tout } \gamma \in]0, 1]$$

Lorsque la tolérance au risque est inférieure à 1, l'agent doté de ρ_γ immobilise plus de capital que l'agent doté de ρ ; il est moins tolérant au risque. Lorsque $\gamma = 1$, les deux mesures sont égales.

Ce procédé permet de "dilater" la mesure ρ pour obtenir à volonté des agents plus ou moins tolérants au risque en fonction du coefficient choisi. Les *mesures de risques dilatées* ont été introduites par Barrieu and El Karoui (2005) qui les définit formellement de la manière suivante :

Definition 2. Soit ρ une mesure de risque convexe et $\gamma > 0$ un nombre réel appelé le *coefficient de tolérance au risque*. La *mesure de risque γ -tolérante associée à ρ* est définie par :

$$\forall X \in \mathcal{X}, \quad \rho_\gamma(X) = \gamma \rho\left(\frac{1}{\gamma}X\right)$$

◇

Il s'agit d'un procédé très pratique pour générer des agents avec des tolérances au risque différentes. Il suffit de choisir un nombre réel γ et l'expression présentée dans la Définition 2 nous assure d'avoir une mesure de risque convexe différente dont on peut caractériser le comportement face au risque de manière immédiate.

L'hétérogénéité des agents sera uniquement considérée du point de vue de l'aversion au risque. Tous les agents ont la même perception (correcte) de la valeur de toutes les positions financières dans tous les scénarios possibles. C'est une hypothèse simplificatrice. Dans la réalité, la situation est différente : les agents peuvent avoir des croyances hétérogènes, ce qui peut avoir des conséquences sur le volume des produits dérivés échangés sur les marchés over-the-counter (Rannou and Barneto, 2016).

1.3 Le coeur du problème : le contrat dérivé optimal

La compagnie aérienne peut décider se s'assurer entièrement contre la position X en achetant $F = -X$ auprès du trader, contre un prix π . Cependant rien ne dit

qu'il s'agit du contrat dérivé optimal entre les deux agents : il est possible que le trader soit réticent à l'idée d'acquérir l'intégralité de X , et qu'il va demander un prix trop élevé. Pour le savoir, il faut comparer les mesures de risques respectives des deux agents avant et après la transaction.

Supposons que la compagnie aérienne ait une mesure de risque ρ et le trader $\tilde{\rho}$. Avant la transaction, la compagnie a une mesure de risque de $\rho(X)$, contre $\rho(X + F - \pi)$ ensuite. Le trader passe lui de $\tilde{\rho}(0)$ à $\tilde{\rho}(X + \pi)$. Pour que la transaction ait lieu, il faut que la situation de chaque agent ne soit pas dégradée par la transaction. Cela se traduit par une mesure du risque inférieure ou égale. On doit donc avoir $\rho(X) \geq \rho(X + F - \pi)$ et $\tilde{\rho}(0) \geq \tilde{\rho}(X + \pi)$.

Pour la compagnie aérienne, le contrat dérivé optimal est celui qui lui apporte le plus de bénéfices, c'est-à-dire qui minimise sa mesure du risque. La seule contrainte est que le trader doit accepter la transaction : sa mesure du risque ne doit pas augmenter au cours de la transaction. On peut également considérer le point de vue dans l'autre sens, et chercher le contrat dérivé optimal pour le trader, sachant que la compagnie aérienne doit accepter la transaction.

Ce problème est proposé par Barrieu and El Karoui (2005) avec des mesures de risque convexe dilatées. Soit ρ n'importe quelle mesure convexe. Supposons que nous cherchions le contrat dérivé optimal du point de vue du trader, dont la mesure est la dilatation de ρ (Définition 2) avec un coefficient de tolérance au risque γ_T . La compagnie aérienne est-elle dotée d'un coefficient γ_C . Les deux mesures de risques sont donc ρ_{γ_T} et ρ_{γ_C} .

Supposons que le seul risque présent soit issu de la position financière X de la compagnie aérienne.

On cherche à minimiser la mesure du risque du trader après la transaction :

$$\rho_{\gamma_T}(F - \pi)$$

La seule contrainte est que l'on ne doit pas augmenter la mesure du risque de la compagnie aérienne après la transaction :

$$\rho_{\gamma_C}(X) \leq \rho_{\gamma_C}(X + (F - \pi))$$

Pour ce faire, on peut choisir n'importe quel contrat F parmi l'ensemble des risques financiers \mathcal{X} et n'importe quel prix π parmi les nombres réels \mathbb{R} . Le tout forme un programme de minimisation mathématique, qui se note de la manière

suivante :

$$\begin{aligned} & \inf_{F \in \mathcal{X}, \pi \in \mathbb{R}} \rho_{\gamma_T}(F - \pi) \\ \text{s.c. } & \rho_{\gamma_C}(X) \geq \rho_{\gamma_C}(X + (F - \pi)) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Barrieu and El Karoui (2005) démontrent que le problème admet la solution suivante :

Proposition 1. *Une solution optimale au programme (4.1) est :*

$$\begin{aligned} \pi^*(F) &= \rho_{\gamma_C}(X) - \rho_{\gamma_C}(X + F) \\ F^* &= -\frac{\gamma_T}{\gamma_T + \gamma_C} X \quad (\text{à une constante près}) \end{aligned}$$

(Ici on parle "d'une" solution optimale, car techniquement, il en existe une infinité : il suffit d'ajouter une constante à F et de l'enlever au paiement π .)

Si les deux agents ont la même tolérance au risque, par exemple si $\gamma_T = 1$ et $\gamma_C = 1$, alors $F = -\frac{1}{2}X$, ce qui laisse chaque agent avec la moitié de la position financière X . Les agents se répartissent la position X en fonction de leurs tolérances respectives. Si le trader est deux fois plus tolérant, il prendra deux fois plus de parts dans la position X : ainsi avec $\gamma_T = 2$ et $\gamma_C = 1$, on a $F = -\frac{2}{3}X$.

Le prix est simplement un dédommagement pour la compagnie aérienne afin de la maintenir au même niveau de satisfaction. Avant la transaction, sa mesure de risque est de $\rho_{\gamma_C}(X)$. Après la transaction, sa mesure de risque est :

$$\begin{aligned} \rho_{\gamma_C}(X + (F^* - \pi^*)) &= \rho_{\gamma_C}(X + (F^* - (\rho_{\gamma_C}(X) - \rho_{\gamma_C}(X + F^*)))) \\ &= \rho_{\gamma_C}(X + F^*) + \rho_{\gamma_C}(X) - \rho_{\gamma_C}(X + F^*) \\ &= \rho_{\gamma_C}(X + F^*) + \rho_{\gamma_C}(X) - \rho_{\gamma_C}(X + F^*) \\ &= \rho_{\gamma_C}(X) \end{aligned}$$

La mesure du risque de la compagnie est la même à l'arrivée qu'au départ. Sa satisfaction est donc intacte. Ainsi le trader "paie" la compagnie juste ce qu'il faut pour que la compagnie aérienne soit indifférente entre réaliser la transaction ou pas : c'est son niveau d'indifférence.

En pratique, si la position financière donne des valeurs négatives le trader ne paiera pas la compagnie, mais l'inverse : le prix π sera négatif, mais la même logique s'appliquera. Le trader demandera le montant maximum que la compagnie pourra accepter.

Que se passe-t-il si le trader est lui-même exposé à d'autres risques avant la transaction ?

Supposons que le trader dispose d'une position initiale de X_T et la compagnie aérienne X_C . Pour le trader, en pratique X_T est composé de l'ensemble des produits dérivés qu'il a vendus et achetés, et de tout autre actif financier dans lequel il a pris des parts. C'est une situation un peu plus générale que l'exemple précédent, dans lequel $X_T = 0$ et $X_C = X$.

Le programme devient :

$$\begin{aligned} & \inf_{F \in \mathcal{X}, \pi \in \mathbb{R}} \rho_{\gamma_T}(X_T - (F - \pi)) \\ \text{s.c. } & \rho_{\gamma_C}(X_C) \geq \rho_{\gamma_C}(X_C + (F - \pi)) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Barrieu and El Karoui (2007) montre que le problème admet la solution suivante :

Proposition 2. *Une solution optimale au programme (1.4) est :*

$$\begin{aligned} \pi^*(F) &= \rho_{\gamma_C}(X_C) - \rho_{\gamma_C}(X_C + F) \\ F^* &= \frac{\gamma_C}{\gamma_T + \gamma_C} X_T - \frac{\gamma_T}{\gamma_T + \gamma_C} X_C \quad (\text{à une constante près}) \end{aligned}$$

Pour comprendre ce résultat, il est plus intuitif d'écrire F^* comme suit :

$$F^* = \frac{\gamma_C}{\gamma_T + \gamma_C} (X_T + X_C) - X_C$$

Sachant que c'est la compagnie qui acquiert F^* , le contrat va supprimer son exposition à X_C et la remplacer par la part de la position totale $(X_T + X_C)$ qui correspond à sa tolérance au risque comparé à celle du trader. En ce qui concerne le trader, il vend F^* ce qui revient à acquérir $-F$ que l'on peut écrire ainsi :

$$-F^* = \left(\frac{\gamma_T}{\gamma_T + \gamma_C} (X_T + X_C) - X_T \right)$$

Ainsi le même changement est opéré du côté du trader. Il y a une certaine symétrie dans le contrat : en matière de répartition des positions financières, cela revient au même quel que soit l'agent à l'origine de la transaction. La seule différence est que cet agent capte tout le bénéfice de la transaction à travers le prix π , et laisse son partenaire au son niveau d'indifférence.

On observe ici que l'établissement de contrat dérivés optimaux est l'occasion pour les positions initiales de se diffuser chez des agents différents. Ces agents opèrent ainsi

un processus de diversification. Il sera intéressant de voir si ce processus affecte la stabilité du système; la littérature a déjà mis en lumière le fait que le risque systémique posé par les produits dérivés pouvait se propager plus facilement selon les commodités, ce qui affecte nécessairement les bénéfices de la diversification (Lautier and Raynaud, 2013).

1.4 La répartition optimale au sens de Pareto

Si l'on devait se situer du point de vue d'un décideur central, quelle serait la répartition du risque optimale entre les agents? Le concept d'optimalité peut recouvrir plusieurs définitions, mais celle qui est la plus souvent utilisée est celle de l'optimum de Pareto. Il s'agit d'une situation où le bien-être d'un agent ne peut être amélioré sans dégrader le bien-être d'un autre agent (Mas-Colell et al., 1995).

Soit ρ une mesure de risque monétaire convexe. Supposons que chaque agent ait une position financière initiale X_i avec i désignant le numéro de l'agent. Sa mesure de risque est la dilatation de ρ avec un coefficient de tolérance au risque γ_i . Il existe une répartition du risque dans laquelle l'agent i dispose désormais de la position financière Y_i , et la somme des positions financières reste inchangée : $\sum_i^n X_i = \sum_i^n Y_i$.

Proposition 3. *Une allocation pareto-optimale des positions financières $X_i, i = 1, \dots, n$ parmi des agents dont les mesures de risque sont $\rho_{\gamma_i}(X_i), i = 1, \dots, n$ est donnée par :*

$$Y_i = \frac{\gamma_i}{\sum_i \gamma_i} \sum_{i=1}^n X_i \quad (\text{à une constante près})$$

Ce résultat vient de Rüschenendorf (2013). Il s'agit d'un problème simplifié par rapport au nôtre : ici le risque est réorganisable librement, sans établir de contrats dérivés et donc sans établir de liens entre les agents.

Voilà qui conclut la présentation du cadre théorique et des résultats mathématiques existants utilisés par la suite. D'autres cadres théoriques étaient cependant possibles.

1.5 Les autres cadres théoriques possibles

Le choix de recourir ici au cadre théorique des mesures de risques tient à plusieurs raisons détaillées précédemment. Cependant cette argumentation manque de force si on ne considère pas simultanément les alternatives possibles. Cette section recense

les principales possibilités disponibles pour analyser les produits dérivés et d'une manière générale le comportement des agents face au risque.

1.5.1 Arbitrage

Le modèle basé sur l'arbitrage part d'une hypothèse simple : il n'existe aucune opportunité financière qui permette de générer un bénéfice sans risque. Une telle opportunité se nomme *opportunité d'arbitrage*. Cette hypothèse se justifie aisément : si une telle possibilité existait, alors elle serait utilisée de manière immédiate par un agent financier jusqu'à épuisement. Par exemple, un même produit financier ayant deux prix différents sur deux places financières générera en l'absence de coûts de transaction une opportunité d'arbitrage. Il suffira à un agent d'acheter au prix bas et de vendre simultanément au prix élevé pour obtenir un bénéfice sans risque. Lorsqu'une telle opportunité existe, alors il suffit d'un seul agent pour l'épuiser rapidement : le produit financier verra son cours augmenter sur la première place financière à force d'achats répétés, tandis que son prix diminuera sur la seconde sous l'effet des ventes. Très rapidement, les deux prix s'égaliseront.

Il est donc intéressant de considérer des marchés qui font preuve d'une certaine efficacité, dans le sens où il n'existe pas de situation d'arbitrage. C'est une situation intéressante car 1) il s'agit d'un attracteur puissant, puisqu'il suffit de peu d'agents économiques désireux de réaliser des bénéfices (ce qui ne manque pas) pour pousser le système vers cette situation et 2), car cette hypothèse s'avère particulièrement productive en termes mathématiques.

Cette hypothèse a donc donné naissance à un corpus important de modèles mathématiques. Un aspect particulier est développé : le *pricing* des produits financiers. En effet, pour donner un prix à un produit financier donné, il suffit d'être capable de le reconstituer à l'aide de produits plus simples, et l'hypothèse d'absence d'arbitrage imposera que les deux éléments doivent avoir le même prix. Il s'agit donc d'un cadre théorique primordial pour l'analyse des produits dérivés, qui voient par définition leur valeur dériver d'autres produits plus simples. Plusieurs modèles ont donc permis de donner une valeur aux options, les produits dérivés les plus échangés : le modèle binomial puis le modèle de Black & Scholes pour ne citer que les plus célèbres (Bodie, 2009).

Ce cadre théorique ne convient pas dans le cas des dérivés en réseau, car l'hypothèse d'absence d'arbitrage n'est pas soutenable, et ce pour deux raisons. Les agents échangent des produits dans un réseau qui est le plus souvent incomplet. Par exemple, la compagnie aérienne peut ne connaître que sa banque propre : elle devra donc composer avec cet intermédiaire précis, ce qui amène à une négociation et à la

possibilité que la banque mette à profit sa position privilégiée pour capter le bénéfice de la transaction, comme nous le verrons par la suite. C'est incompatible avec un marché complet caractérisé par un prix unique pour chaque produit financier. De plus, chaque agent cherche à obtenir un produit dérivé customisé selon ses besoins précis. Un marché sans opportunité d'arbitrage fonctionne avec un nombre de produits suffisamment bas pour que la liquidité des produits entraîne un bon fonctionnement. L'hypothèse d'absence d'arbitrage est donc soutenable pour des places centrales avec des produits standardisés (comme une option à un horizon spécifique portant sur un actif côté).

La problématique de ce travail concerne le besoin des agents de souscrire des produits dérivés customisés auprès d'intermédiaires qui peuvent proposer ce service, à l'image du marché over-the-counter des produits dérivés avant la crise financière. Pour ces raisons, un cadre théorique issu de l'arbitrage n'est pas envisageable.

1.5.2 Utilité espérée

Dans un marché où l'hypothèse d'absence d'arbitrage est retenue, on peut obtenir un prix pour un produit financier sans faire survenir les préférences des agents. Ces dernières ne jouent pas : une position financière donnée dispose d'un prix unique et l'agent peut la vendre contre ce montant. Toute position financière est valorisable immédiatement : il n'est donc pas question de préférences des agents, puisque les positions financières deviennent l'équivalent de montants monétaires.

Dans un marché où ce n'est pas le cas, alors certaines positions financières peuvent ne pas avoir de prix : on ne peut trouver de combinaison de produits financiers librement accessible qui permet de contrebalancer la position financière. Il reste donc une part de risque (Föllmer and Schied, 2011). Dans ces conditions, les préférences individuelles des agents surviennent.

Il existe plusieurs manières de rendre explicites (mathématiquement) ces préférences. La plus utilisée est le cadre théorique de l'utilité espérée. Il s'agit d'un cadre théorique construit dans la tradition mathématique dite de Bourbaki, une approche axiomatique extrêmement rigoureuse qui a prévalu dans la mathématisation de l'économie à partir du 20e siècle (Weintraub, 2002).

Le point de départ est la mathématisation des *préférences* des agents. On définit ainsi une relation d'ordre entre des alternatives, qui peuvent être n'importe quels éléments d'un ensemble. In fine, cet ensemble sera constitué des positions financières, ou dans le langage de cadre théorique, des *loteries*. Ce point de départ est ensuite enrichi d'hypothèses de complexité croissante, justifiées par la nécessité de capturer une certaine idée de la *rationalité* des agents économiques. Si la compagnie aérienne

préfère la position A à la position B, et la position B à la position C, on peut par exemple imposer l'hypothèse qu'elle préférera la position A à la position C.

Un autre objectif est de *mesurer* cette préférence en établissant les conditions pour lesquelles ces préférences peuvent être représentées par une fonction qui valorise chaque alternative, de sorte que l'alternative au score le plus élevé emporte systématiquement l'adhésion de l'agent. Il s'agit d'une fonction d'utilité.

Le concept d'*utilité espérée* entre alors en scène. Face à des alternatives qui sont des loteries (ou des positions financières), nous avons affaire non pas à des montants certains, mais à des fonctions qui associent à chaque scénario un montant. Comment valoriser de tels objets? L'utilité espérée est une réponse possible. Ce cadre théorique suppose l'existence de probabilités pour chaque scénario, et propose de valoriser les positions financières en utilisant ces probabilités. Dans le cas de la position financière de la compagnie aérienne, nous avons dans le premier scénario $X = -1000$ et dans le deuxième $X = 0$. Supposons que l'agent valorise les montants certains -1000 et 0 , par les quantités $u(-1000)$ et $u(0)$. Supposons que le premier scénario ait une chance sur trois de se produire, contre deux chances sur trois pour le deuxième scénario. L'utilité espérée suppose que l'agent valorisera sa position financière par la quantité suivante :

$$U(X) = \frac{1}{3}u(-1000) + \frac{2}{3}u(0)$$

Ce qui résout le problème de valoriser des positions financières. Si le nombre des scénarios est infini, alors on pourra étendre la logique précédente en utilisant l'intégration. On aura alors $U(X) = \int u(x)dF(x)$ avec F la fonction de distribution de la position X considérée (Mas-Colell et al., 1995, Chapitre 6, Section C).

Ce cadre théorique est très proche de celui décrit dans ce chapitre. Il coïncide même sur certains choix de comportements, comme la fonction d'utilité exponentielle qui est identique mathématiquement à la mesure de risque entropique : cette mesure de risque particulière est d'ailleurs utilisée dans les chapitres suivants lorsqu'il faut s'éloigner du cas général et choisir un comportement précis, par exemple dans les simulations informatiques du chapitre 3 ou dans les algorithmes du chapitre 4.

L'utilisation ici du cadre théorique des mesures de risques tient à deux raisons. La première est qu'elle permet une interprétation immédiate de la mesure de risque comme d'un capital à immobiliser pour faire face à une position financière donnée. Cette interprétation est déterminante ici : le coeur du sujet est ici le risque de contagion des défauts, or pour faire défaut il faut décider d'un capital à immobiliser. Le cadre théorique des mesures de risque répond de manière immédiate et intuitive à cet aspect déterminant. La deuxième raison est beaucoup plus pragmatique. Les

résultats mathématiques sur lesquels l'on s'appuie - concernant les produits dérivés optimaux entre deux agents - ont été développés dans ce cadre théorique. Reprendre la même conceptualisation permet de les utiliser immédiatement.

1.5.3 Économie comportementale et expérimentale

L'économie comportementale est un courant des sciences sociales qui cherche à proposer un cadre théorique alternatif à la rationalité économique développée en micro-économie classique. Ce courant de pensée est intimement lié à l'économie expérimentale, qui propose d'utiliser des protocoles d'expérimentation habituellement réservés aux disciplines médicales. Le lien entre ces deux disciplines vient du fait que l'on peut relativement aisément créer des expériences au cours desquelles les participants prennent des décisions contraires à ce que dicterait la rationalité économique.

La nécessité d'approches comportementales et donc alternatives aux hypothèses de rationalité est souvent invoquée lorsque l'on étudie le comportement des agents face au risque. Les marchés financiers sont souvent accusés d'être le théâtre de mouvements irrationnels, basés sur le mimétisme et les crises auto réalisatrices.

L'exemple le plus emblématique d'un cadre théorique comportemental concernant le risque est sans conteste la *Théorie des perspectives* développée par Amos Tversky et Daniel Kahneman (Kahneman and Tversky, 1979), pour laquelle ce dernier a reçu le prix Nobel d'Économie en 2002. L'objectif de cette théorie est de proposer un cadre alternatif à la Théorie de l'utilité espérée, notamment en identifiant des situations où elle échoue à expliquer le comportement des agents. Les auteurs montrent que le comportement face au risque des agents veut varier énormément en fonction de la situation. Les agents tendent à être très frileux en présence de gains potentiels, tandis qu'ils prendront beaucoup plus de risque en situation de pertes.

Cette théorie est une des plus performantes pour analyser le comportement des agents en laboratoire, mais manque encore d'applications emblématiques en économie générale (Barberis, 2013).

Ce cadre n'est pas retenu dans ce travail pour plusieurs raisons. La première est l'absence de travaux théoriques "classiques" au sujet des produits dérivés en réseau avec un risque de contagion. Or il s'agit d'une première étape nécessaire avant d'aborder une approche comportementale. L'utilisation d'un cadre théorique classique basé sur des agents rationnels et optimisateur n'a pas nécessairement vocation à produire une théorie finale prédisant le comportement des acteurs économiques. Cependant il s'agit d'une base de travail sur laquelle se construisent - ou au contraire contre laquelle s'érigent - les approches alternatives. Ainsi les théories classiques du

comportement face au risque ont permis de produire un ensemble de résultats mathématiques donnant les grandes lignes d'un comportement rationnel : la disponibilité de ces résultats permet de révéler par contrastes les situations où les agents s'en écartent, ce qui permet in fine de proposer une théorie unifiée. Nous pensons qu'une telle approche serait également bénéfique pour analyser le problème des dérivés en réseau ; analyser les résultats issus d'une conception froidement mathématique du comportement des agents permettrait de constituer une base de travail facilement manipulable pour qui voudrait analyser l'impact des biais cognitifs dans cette problématique.

Un deuxième argument que l'on peut avancer ici concerne l'identité des acteurs principaux du marché des produits dérivés : même si le futur nous réserve sans doute une certaine démocratisation via des technologies comme la blockchain, pour l'heure les acteurs sont des institutions bancaires. Il est plus facile de soutenir que de tels agents ont un comportement purement optimisateur : réunissant les esprits mathématiques les plus brillants de chaque pays et armés d'ordinateurs dont les capacités de calcul progressent sans cesse, ces acteurs économiques constituent ce qui se fait de plus proche du comportement décrit dans les résultats mathématiques de la littérature financière classique. Et s'ils se rendent parfois coupables de comportements irrationnels, ils ont cependant à leur disposition permanente ce qui se fait de mieux comme modèle mathématique pour les guider. Pour analyser ces acteurs, il paraît donc judicieux de considérer, a minima dans un premier temps, la situation d'agents économiques rationnels au sens classique du terme.

1.6 Conclusion du chapitre

Ce chapitre présente le cadre théorique que utilisé dans les chapitres suivants. Il recense également les résultats mathématiques déjà obtenus dans la littérature, et qui vont constituer la base sur laquelle les autres chapitres s'appuient. Il n'y a pas à proprement parler de contribution originale dans ce chapitre, si ce n'est les explications motivant le choix des hypothèses⁴.

1.7 Bibliographie du chapitre

Barberis, N. C. (2013). Thirty Years of Prospect Theory in Economics : A Review and Assessment. *Journal of Economic Perspectives*, 27(1) :173–196.

4. Comme le lien entre la convexité et l'aversion au risque, ou le calcul motivant le choix de la dilatation.

- Barrieu, P. and El Karoui, N. (2005). Inf-convolution of risk measures and optimal risk transfer. *Finance and Stochastics*, 9(2) :269–298.
- Barrieu, P. and El Karoui, N. (2007). Pricing, Hedging and Optimally Designing Derivatives Via Minimization of Risk Measures.
- Bernstein, P. L. (1993). *Capital ideas : the improbable origins of modern Wall Street*. Simon and Schuster.
- Bodie, Z. (2009). *Investments*. Tata McGraw-Hill Education.
- Föllmer, H. and Schied, A. (2011). *Stochastic finance : an introduction in discrete time*. Walter de Gruyter.
- Kahneman, D. and Tversky, A. (1979). Prospect Theory : An Analysis of Decision under Risk. *Econometrica*, 47(2) :263–291.
- Lautier, D. and Raynaud, F. (2013). Systemic Risk and Complex Systems : A Graph-Theory Analysis. In Abergel, F., Chakrabarti, B. K., Chakraborti, A., and Ghosh, A., editors, *Econophysics of Systemic Risk and Network Dynamics*, pages 19–37. Springer Milan, Milano.
- Mas-Colell, A., Whinston, M. D., and Green, J. R. (1995). *Microeconomic theory*, volume 1. Oxford university press New York.
- Rannou, Y. and Barneto, P. (2016). Futures trading with information asymmetry and OTC predominance : Another look at the volume/volatility relations in the European carbon markets. *Energy Economics*, 53 :159–174.
- Rüschendorf, L. (2013). *Mathematical Risk Analysis*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- Weintraub, E. R. (2002). *How economics became a mathematical science*. Duke University Press.

Chapitre 2

Évaluer les conséquences de contrats dérivés établis dans un réseau

Le contrat bilatéral que vont conclure la compagnie aérienne et le trader dépend des partenaires potentiels des deux agents. Si la compagnie connaît d'autres traders, elle peut comparer les prix et les possibilités de contrats. Si le trader connaît d'autres contreparties, il peut envisager de "revendre" sa position à un autre agent et conserver une commission. En l'absence de possibilités de revente, il peut décider que le risque lié au carburant est trop important pour qu'il le supporte lui-même.

Le réseau de connaissances des deux agents est donc primordial pour comprendre le fonctionnement élémentaire du partage du risque. D'un point de vue empirique, le réseau est très important pour comprendre la structuration du marché de gré à gré avant la crise financière de 2008. D'importantes régulations ont été mises en place depuis cette crise, limitant fortement la liberté des acteurs de s'organiser comme ils le souhaitent, ce qui peut faire relativiser l'importance de l'analyse des réseaux dans les produits dérivés. Néanmoins le monde bancaire fait face à d'importantes transformations numériques qui transforment les utilisateurs en de nouveaux acteurs indépendants, qui peuvent par exemple décentraliser les flux monétaires grâce à la blockchain (Alexandre, 2017). Cette nouvelle économie peut replacer les réseaux au coeur de la problématique du partage du risque.

La première étape de notre projet de recherche est donc d'étendre les résultats de la littérature scientifique en matière de contrats optimaux vus au chapitre précédent à une configuration où plusieurs agents sont structurés en réseau. C'est l'objet de ce chapitre.

2.1 Des agents liés par un réseau fixé

On suppose à partir de maintenant qu'il existe n agents numérotés de 1 à i , dont le comportement est représenté par une mesure de risque monétaire convexe ρ dilatée pour chaque agent à l'aide d'un coefficient de tolérance au risque γ_i qui peut varier d'un agent à l'autre.

Pour représenter le réseau de connaissances des agents économiques, la modélisation la plus simple possible est utilisée ici : les agents sont placés sur des *noeuds* et le fait que deux agents se connaissent est représenté par l'existence d'une *arête* entre eux¹.

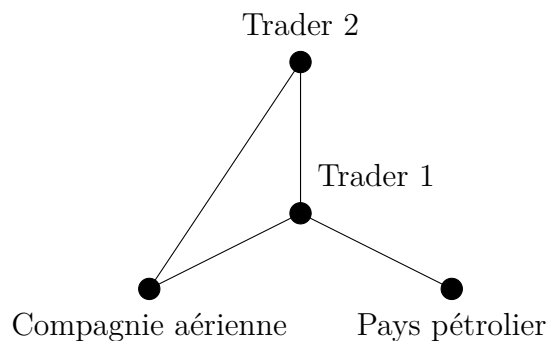


FIGURE 2.1 – Dans un réseau connecté, il est toujours possible de trouver un chemin allant de n'importe quel agent vers un autre.

Pour n agents, le nombre d'arêtes possibles est de $\frac{n(n-1)}{2}$. En pratique les réseaux financiers sont *incomplets*, ce qui signifie qu'il manque certaines arêtes : le trader dispose d'un carnet d'adresses plus conséquent que la compagnie aérienne, et c'est une des raisons pour lesquelles la compagnie s'adresse à lui. Le nombre d'arêtes est donc le plus souvent inférieur à $\frac{n(n-1)}{2}$. Le réseau est cependant supposé *connecté* : il existe nécessairement une suite d'arêtes qui lie tous les agents, ce qui signifie qu'il n'existe pas de sous-ensemble d'agents séparés du reste (Figure 2.1).

La structure en réseau représentera ici la possibilité ou non d'établir un contrat dérivé. Il s'agit de la modélisation la plus élémentaire possible des relations entre acteurs bancaires. En pratique, ces relations sont beaucoup plus complexes, et certains éléments peuvent avoir des conséquences importantes sur l'activité économique ; c'est le cas notamment de la réputation (Gillet et al., 2010). Nous nous en tiendrons ici à une modélisation simple car elle est déjà porteuse de beaucoup de complexité, comme nous le verrons par la suite.

1. Mathématiquement, le réseau est une paire d'ensembles $G = (V, E)$, V désignant les noeuds et E désignant les arêtes : chaque arête est une paire de noeuds, de sorte que $E \subseteq [V]^2$ (Diestel, 2017).

Dans la configuration de la Figure 2.1, établir le contrat dérivé optimal du point de vue du trader 1 est plus compliqué que dans le chapitre précédent. Le trader 1 connaît désormais la compagnie aérienne, mais également un autre trader et un producteur de pétrole. Dans ces conditions, il n'est pas certain que le contrat optimal soit toujours une répartition de la somme des positions entre la compagnie et lui selon leurs tolérances au risque respectives. Par exemple, si le trader 2 cherche activement à prendre position sur le marché du carburant, le trader 1 sait qu'il dispose d'un canal de "revente" de la position qu'il peut acquérir auprès de la compagnie aérienne.

Pour parvenir à représenter cela, la première étape est d'étendre le résultat présenté dans le chapitre précédent à une situation où il y a plusieurs contreparties.

2.2 Autant de contreparties que de voisins : le contrat optimal

Supposons que nous nous placions du point de vue de l'agent i , qui connaît un certain nombre de personnes, que l'on appelle le voisinage de l'agent i et que l'on note I . Par exemple, si I est composé des agents 1 à 3, on aura $I = \{1, 2, 3\}$. Cette configuration est représentée dans la Figure 2.4.

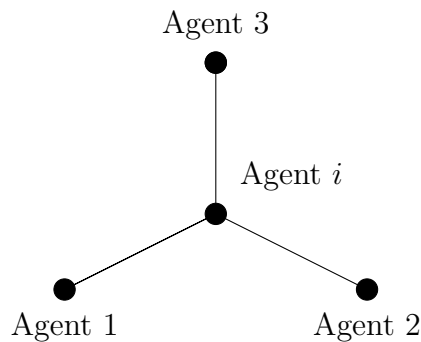


FIGURE 2.2 – Voisinage de l'agent i .

L'agent i dispose d'une position initiale X_i (de même que chaque contrepartie j dispose de X_j). L'agent i cherche la combinaison de contrats à proposer simultanément à toutes ses connaissances de sorte que sa mesure du risque relative à sa nouvelle position soit la plus basse possible, ce que l'on peut traduire mathématiquement par

$$\inf_{F_{ij} \in \mathcal{X}, \pi_{ij} \in \mathbb{R}, j \in I} \rho_{\gamma_i}(X_i - \sum_{j \in I} (F_{ij} - \pi_{ij}))$$

Chaque contrepartie j ne doit pas voir sa mesure du risque augmenter dans

l'opération, sous peine de refuser la transaction ; cela se traduit mathématiquement par

$$\rho_{\gamma_j}(X_j + (F_{ij} - \pi_{ij})) \leq \rho_{\gamma_j}(X_j)$$

Cela constitue une contrainte pour l'agent i , et il y a autant de contraintes que de contreparties j dans le voisinage I .

Le tout amène à la généralisation du programme de minimisation (1.4) au cas avec un nombre fini de contreparties :

$$\begin{aligned} \inf_{F_{ij} \in \mathcal{X}, \pi_{ij} \in \mathbb{R}, j \in I} \quad & \rho_{\gamma_i}(X_i - \sum_{j \in I} (F_{ij} - \pi_{ij})) \\ \text{s.t.} \quad & \rho_{\gamma_j}(X_j + (F_{ij} - \pi_{ij})) \leq \rho_{\gamma_j}(X_j) \quad \forall j \in I \end{aligned} \quad (2.1)$$

La première étape nécessaire est d'apporter une solution au programme (2.1).

Proposition 4. *Une solution optimale au programme (2.1) est :*

$$\begin{aligned} \pi_{ij}^*(F_{ij}) &= \rho_{\gamma_j}(X_j) - \rho_{\gamma_j}(X_j + F_{ij}) \quad \forall j \in I \\ F_{ij}^* &= \frac{\gamma_j}{\gamma_i + \sum_{k \in I} \gamma_k} (X_i + \sum_{k \in I} X_k) - X_j \quad (\text{à une constante près}) \quad \forall j \in I \end{aligned}$$

La démonstration est disponible dans l'annexe de ce chapitre.

Le résultat est une simple extension du résultat de Barrieu and El Karoui (2005). Du côté de π , on observe que le prix est toujours celui qui maintient les contreparties à leur niveau d'indifférence, et que l'intégralité du bénéfice de la transaction est donc captée par l'agent i .

Du côté des contrats eux-mêmes, on observe que pour l'agent j , le contrat retire sa position initiale X_j et lui donne une part de la position totale du voisinage de l'agent i ($X_i + \sum_{k \in I} X_k$) correspondant à sa tolérance relative ($\frac{\gamma_j}{\gamma_i + \sum_{k \in I} \gamma_k}$). C'est une extension du résultat à deux agents.

L'effet est le même pour l'agent i , ce qui peut se vérifier en sommant tous les contrats du voisinage :

$$\begin{aligned} - \sum_{j \in I} F_{ij}^* &= - \frac{\sum_{j \in I} \gamma_j}{\gamma_i + \sum_{k \in I} \gamma_k} (X_i + \sum_{k \in I} X_k) + \sum_{j \in I} X_j \\ &= \frac{\gamma_i}{\gamma_i + \sum_{k \in I} \gamma_k} (X_i + \sum_{j \in I} X_j) - X_i \end{aligned}$$

La symétrie observée dans le cas à deux agents est légèrement altérée, car les positions finales dépendent de la perception de l'agent i . En effet les positions

comme les tolérances sont sommées au niveau du petit marché composé de l'agent i et des personnes qu'il connaît. Cependant une des contreparties j peut très bien avoir accès à un marché différent, avec certains agents inconnus de l'agent i d'une part et où certains voisins de i sont absents d'autre part (Figure 2.4)

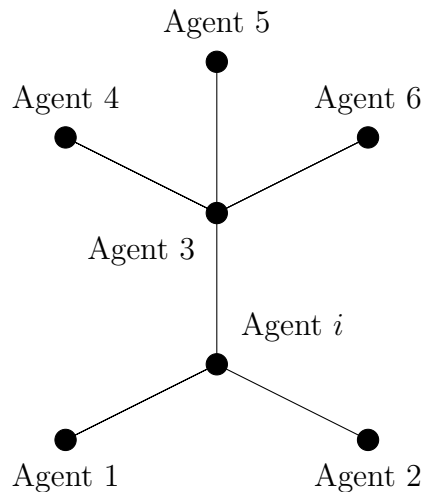


FIGURE 2.3 – L'agent 3 à accès à un "marché" différent de l'agent i .

Les agents continuent de transférer entre eux le risque total sans en créer de supplémentaire. Cependant, ils peuvent acheter et vendre certaines positions à visée purement spéculative. Considérons l'exemple de la compagnie aérienne et du trader, mais imaginons que le trader connaisse un producteur de pétrole. Pour ce producteur, en cas de crise pétrolière (scénario ω_1), les retombées financières seront positives et il gagnera 1000 euros. En cas d'absence de crise, il ne gagnera rien (0). Sa position est donc $-X$, c'est-à-dire l'inverse de celle de la compagnie aérienne. En tant qu'agent averse au risque, il préférerait réduire l'incertitude qui pèse sur son activité : par exemple il préférerait un montant certain compris entre 1000 et 0. Pouvoir vendre sa production dans le futur à un tarif fixé à l'avance est un type de produit particulièrement prisé des producteurs, notamment agricoles. Le producteur est donc ouvert à la possibilité d'un produit dérivé. La position initiale du trader est nulle.

Le total des positions des agents est donc $X + 0 + (-X) = 0$. Si la compagnie aérienne et le producteur se connaissaient, le résultat du Chapitre 1 serait très logique : il s'agirait du contrat $F = -X$, ce qui "annulerait" la position des deux agents, et un versement monétaire aurait lieu, dépendant des mesures de risques exactes choisies pour ces agents. Par exemple, la compagnie aérienne s'engagerait à payer 500 euros au producteur, en échange de quoi le producteur réglerait la perte liée à X quelle qu'elle soit. Pour le pays producteur, cela revient à s'assurer un revenu

certain de 500 euros plutôt qu'un gain incertain.

Cependant, la compagnie aérienne ne connaît pas le producteur. Ils sont connectés par l'intermédiaire du trader (Figure 2.4)

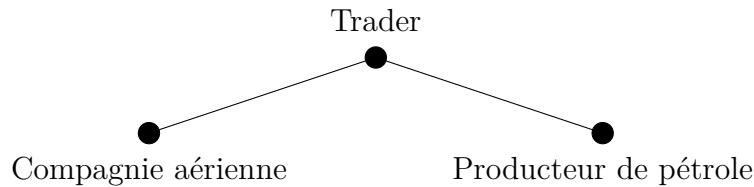


FIGURE 2.4 – Le trader est l'intermédiaire entre les deux agents aux positions complémentaires.

Si l'on applique la Proposition 4 au trader, on obtient le résultat suivant : le trader achète la position X à la compagnie aérienne et la vend au trader. Il maintient ses deux contreparties à leur niveau d'indifférence et capture l'intégralité du bénéfice de la transaction. Ce bénéfice dépend de la mesure de risque précise que l'on choisit pour les agents, mais un exemple possible est le suivant :

- La compagnie aérienne est prête à accepter de payer un maximum de 700 euros pour être se débarrasser de l'intégralité de sa position X .
- Le producteur de pétrole est prêt à accepter un minimum de 300 euros en échange de sa position $-X$.

Il s'agit des paiements qui maintiennent les agents à leur niveau d'indifférence. Le trader va naturellement récupérer 700 euros auprès de la compagnie aérienne et payer 300 euros au producteur. La différence (400 euros) constitue le bénéfice de la transaction ; dans le cas où la compagnie et le producteur s'entendraient directement, ce bénéfice serait réparti entre eux. Dans le cas où le trader agit en intermédiaire, il a la possibilité de capter ce bénéfice.

Sans prendre en compte les paiements monétaires, la position finale du trader est $0 - X + X = 0$, c'est-à-dire qu'elle est inchangée. Le trader a conclu deux contrats dérivés, non pas pour améliorer sa position, mais pour empocher le bénéfice de la transaction. Des contrats dérivés ont donc été conclus par pure spéculation.

Ce mécanisme porte le nom de *chaîne de dépendance*. Il s'agit du phénomène brièvement évoqué dans l'introduction. Dans une situation idéale, le trader ne serait pas impliqué. La compagnie aérienne et le producteur s'entendraient entre eux, et les éventuelles difficultés de l'un n'impacteraient que l'autre, et inversement. Or si le trader a l'initiative ou si la structure en réseau est telle que décrite dans la Figure 2.4, on assiste à l'émergence d'une chaîne de dépendance réunissant trois agents là où deux auraient suffi. Désormais, si le producteur de pétrole fait faillite, la contagion

risque d'entraîner deux autres agents à sa suite.

2.3 Le partage des bénéfices

Une limite apparente des résultats précédents vient du partage des bénéfices. On suppose ici que l'agent à l'origine de la transaction capte l'intégralité du bénéfice en maintenant ses contreparties à leur niveau d'indifférence. Or il s'agit d'une hypothèse très forte : quel serait l'intérêt des contreparties à accepter la transaction ? Il est possible de contourner le problème en arguant qu'il s'agit d'un point de référence, et qu'il suffit à l'agent initiateur de proposer un tout petit peu plus que le niveau d'indifférence (Jouini et al., 2008).

Cela ne traite pas le problème de fond : si une contrepartie a conscience du bénéfice généré par la transaction, elle peut négocier sa part. Cette problématique est une question classique en économie, où elle porte le nom du problème de la négociation (*bargaining problem*). Deux types de solutions existent.

La première est une solution dite "normative", la solution de Nash (Nash Jr, 1950). Cette solution cherche à connaître la répartition la plus robuste à un certain nombre d'écueils : il s'agit de la solution qu'un décideur central pourrait vouloir appliquer. Elle répond à la question de la répartition optimale des bénéfices du point de vue du marché tout entier. Elle a été généralisée à un nombre fini d'agents par Lensberg (1988).

La deuxième solution est une solution dite "positive", la solution de Rubinstein (Rubinstein, 1982). Il s'agit de la solution à laquelle les agents parviennent par eux-mêmes lorsque le processus de négociation présente certaines caractéristiques. La répartition dépend évidemment des règles de négociation durant la transaction.

La question qui se pose ici est : le résultat que l'on obtient change-t-il lorsque le bénéfice est réparti différemment ? Il y aura nécessairement un changement puisqu'une partie du bénéfice sera capté par les contreparties, mais ce changement affecte-t-il le contrat F en lui-même ?

Pour répondre à cette question, il faut généraliser le problème de minimisation (2.1). Pour faciliter la notation, on suppose (sans perte de généralité) qu'il y a p contreparties et qu'on peut les numéroter de 1 à p : en d'autres termes $I = 1, 2, \dots, p$. Désormais, on ne cherche plus à minimiser la mesure de risque d'un seul agent, mais de toutes les contreparties impliquées. Cependant minimiser une mesure de risque peut entraîner l'augmentation d'une autre : les intérêts des différents agents peuvent être contradictoires. Il faut donc choisir une expression unique à minimiser, comme la somme des mesures de risques. En optimisation, il s'agit d'une *fonction multi*

objectifs.

Cette fonction a pour argument les $p + 1$ mesures de risques, et donne un score qui est un nombre réel. Il s'agit donc d'une fonction $f : \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R}$. Ici, on cherchera à prendre en compte autant de cas de figure que possible, on évitera donc de spécifier la fonction f . Pour éviter les cas de figures absurdes, on exigera cependant que la fonction f représente le fait que l'on cherche effectivement à minimiser les mesures de risques des agents : cette fonction f doit donc être croissante, de sorte que lorsque l'on diminuera f , on diminuera les mesures de risques qui lui servent d'argument. Cela représente que l'on a à coeur les intérêts des agents. Pas forcément de tous, mais au moins de l'un d'entre eux, à l'image des résultats précédents. Formellement, cela revient à exiger de f qu'elle soit strictement croissante en au moins un de ses arguments. Cela laisse la possibilité que l'on ne se soucie pas des autres agents, auquel cas la fonction sera constante en ces arguments-là ; il est même possible que l'on cherche délibérément à dégrader la situation de certains agents, auquel cas la fonction sera décroissante en les arguments concernés. En ce qui concerne la spécification de la fonction (somme, produit, etc.), tout est possible.

Le programme de minimisation devient :

$$\begin{aligned} \inf_{F_{ij} \in \mathcal{X}, \pi_{ij} \in \mathbb{R}, j \in I} & f[\rho_{\gamma_i}(X_i - \sum_{j \in I} (F_{ij} - \pi_{ij})), \rho_{\gamma_1}(X_1 + (F_{i1} - \pi_{i1})), \\ & \dots, \rho_{\gamma_p}(X_p + (F_{ip} - \pi_{ip}))] \\ \text{s.t.} & \quad \rho_{\gamma_i}(X_i - \sum_{j \in I} (F_{ij} - \pi_{ij})) \leq \rho_{\gamma_i}(X_i) \\ \text{s.t.} & \quad \rho_{\gamma_j}(X_j + (F_{ij} - \pi_{ij})) \leq \rho_{\gamma_j}(X_j) \quad \forall j \in I \end{aligned} \quad (2.2)$$

La solution au programme généralisé est identique à la précédente en termes de contrats F :

Proposition 5.

$$F_{ij}^* = \frac{\gamma_j}{\gamma_i + \sum_{k \in I} \gamma_k} (X_i + \sum_{k \in I} X_k) - X_j \quad (\text{\`a une constante pr\`es}) \quad \forall j \in I$$

est une solution optimale au Programme 2.2.

La démonstration est disponible en annexe, mais la logique est très simple. L'invariance par translation monétaire assure que chaque agent valorise de la même manière un montant monétaire : donner 10 euros à un agent le conduit à diminuer logiquement de 10 euros la réserve de capital qu'il juge nécessaire pour couvrir sa position. Cette mesure est justement ce que l'on cherche à diminuer. Ainsi, donner 10 euros à un agent diminue de 10 sa mesure du risque, et c'est vrai pour tous les

agents.

Dès lors, tous les agents valorisent l'argent de la même manière, et ils peuvent se le transférer par le canal des prix. Si l'objectif change et que l'agent i doit désormais avoir à coeur les intérêts de certaines de ses contreparties, il ne changera pas le contrat optimal obtenu précédemment, il reversera simplement une partie du bénéfice via les canaux monétaires. Si une meilleure solution existait, il l'aurait déjà appliquée lorsqu'il gérait uniquement ses intérêts et il aurait capté un bénéfice supérieur via le canal des prix, en laissant tous les autres agents à leur niveau d'indifférence.

Ce résultat ouvre la voie à un grand nombre de configurations. L'agent i est toujours à l'origine de la transaction et il est donc restreint au marché formé par lui et ses contreparties, mais il peut être amené à partager le bénéfice via le choix de la fonction F . Un cas intéressant est celui de la solution de Nash au problème de la négociation à n agents développé par Lensberg (1988). Il s'agit de la configuration où l'on cherche à maximiser le produit des gains en utilité. Ce cas sera utilisé dans certaines simulations du prochain chapitre.

Le contrat optimal défini dans ce chapitre est donc robuste à la répartition des bénéfices définie par une fonction multi objectifs très générale, ce qui est un résultat utile. La répartition du risque observée varie uniquement au niveau des paiements monétaires.

2.4 Le point où aucun contrat supplémentaire n'est souscrit

Nous connaissons désormais le contrat optimal qui pourrait survenir entre plusieurs agents avec de multiples possibilités de négociation. Cela nous rapproche d'une question fondamentale : si nos acteurs économiques sont livrés à eux-mêmes et s'ils se comportent comme établi précédemment, quelle est l'issue pour le marché tout entier ? Les agents amènent-ils le système vers une destination particulière ? Est-elle enviable ?

Cette partie s'intéresse à un état du réseau dans lequel il n'existe aucune transaction pareto-optimale entre des agents connectés. Le système atteint un point d'immobilité, car il n'existe plus de transaction possible, sauf à dégrader la situation d'un agent.

Par facilité de vocabulaire, un tel état est nommé par la suite *équilibre*, avec la compréhension que cela diffère d'un équilibre au sens classique du terme en économie, qui désigne habituellement un prix pour lequel l'offre égale la demande. Nommer cet

état stationnaire un équilibre correspond cependant à la définition plus générale de certains économistes comme Dixon (2017) qui considère que trois éléments doivent être réunis : un comportement cohérent de la part des agents, aucun agent n'a d'intérêt à changer son comportement et l'équilibre est l'aboutissement d'un processus dynamique.

Dans le cas des produits dérivés, il s'agit d'une situation dans laquelle aucun agent ne veut ou ne peut souscrire un contrat dérivé supplémentaire. L'ensemble des agents est donc dans un état stationnaire. Dans toute autre situation, les agents continueront à souscrire de nouveaux contrats.

Trois éléments doivent être analysés :

- établir s'il existe un ou plusieurs équilibres ;
- analyser si les agents se dirigent naturellement vers un équilibre et dans quelles conditions ;
- évaluer la qualité de cet équilibre pour l'ensemble des agents.

Pour comprendre ce qui caractérise une telle situation, on peut s'intéresser au marché le plus simple possible : deux agents seulement. Considérons le cas vu au Chapitre 1, où le trader (T) propose un contrat dérivé à la compagnie aérienne (C). Celle-ci a une position financière initiale X , tandis que le trader a une position nulle. Supposons pour simplifier que les tolérances au risque soient respectivement $\gamma_T = 2$ et $\gamma_C = 1$. À l'issue de la transaction, les positions initiales sont mises en commun et chacune des deux parties est désormais exposée à hauteur de sa tolérance au risque relative à l'autre. La position du trader est donc (d'après la Proposition 1) $\frac{2}{3}X$. Celle de la compagnie est $\frac{1}{3}X$.

Comme le trader est deux fois plus tolérant que la compagnie ($\gamma_T = 2$ et $\gamma_C = 1$), il va finir avec une exposition à X deux fois supérieure à celle de la compagnie. On peut exprimer cela différemment : les deux agents ont une exposition finale directement proportionnelle à leur tolérance au risque. Ce qui signifie qu'ils ont la même exposition par unité de tolérance au risque :

$$\text{(Trader)} \quad \frac{\frac{2}{3}X}{2} = \frac{\frac{1}{3}X}{1} \quad \text{(Compagnie)}$$

Une fois arrivé à cette situation, le contrat optimal est 0 pour une partie comme pour l'autre, ce que l'on peut vérifier facilement à l'aide de la Proposition 1. Les deux agents sont donc à l'équilibre, ils sont entièrement satisfaits par la transaction et n'ont pas d'intérêt à en conclure une nouvelle.

On peut observer que c'est vrai pour n'importe quelles tolérances au risque γ_T et γ_C et n'importe quelles positions initiales X_T et X_C . Dans le cas général, la position finale du trader est :

$$\frac{\gamma_T}{\gamma_T + \gamma_C}(X_T + X_C)$$

Celle de la compagnie est :

$$\frac{\gamma_C}{\gamma_T + \gamma_C}(X_T + X_C)$$

On a bien la même égalité des ratios position sur tolérance :

$$\frac{\frac{\gamma_T}{\gamma_T + \gamma_C}(X_T + X_C)}{\gamma_T} = \frac{\frac{\gamma_C}{\gamma_T + \gamma_C}(X_T + X_C)}{\gamma_C}$$

C'est une caractéristique intéressante de l'équilibre entre deux agents. Se maintient-elle lorsque l'on passe à plusieurs contreparties ?

Considérons le cas de l'agent i qui vient de réaliser une transaction avec ses voisins. Il n'a plus d'intérêt à en réaliser une seconde, car la première était optimale. Sa position finale est

$$\frac{\gamma_i}{\gamma_i + \sum_{k \in I} \gamma_k}(X_i + \sum_{j \in I} X_j)$$

Il dispose simplement de la part du risque total (des agents impliqués dans la transaction) proportionnel à sa tolérance (comparée à celles des autres agents impliqués). La position finale de chaque contrepartie j est :

$$\frac{\gamma_j}{\gamma_i + \sum_{k \in I} \gamma_k}(X_i + \sum_{k \in I} X_k)$$

On peut dès lors vérifier que nous avons également une égalité position sur tolérance :

$$\frac{\frac{\gamma_i}{\gamma_i + \sum_{k \in I} \gamma_k}(X_i + \sum_{j \in I} X_j)}{\gamma_i} = \frac{\frac{\gamma_j}{\gamma_i + \sum_{k \in I} \gamma_k}(X_i + \sum_{j \in I} X_j)}{\gamma_j} \quad (2.3)$$

Lorsqu'un agent n'a plus d'intérêt à souscrire une transaction avec ses voisins, il a le même ratio position sur tolérance que tous ses voisins.

L'inverse est également vrai. En effet, si un des agents du voisinage de i a un ratio position sur tolérance différent du sien, cela signifie que l'un d'entre eux n'est pas dans la position dictée par le contrat optimal. Il existe donc une transaction (différente de 0) optimale du point de vue de l'agent i qui va amener cette égalité.

Cela signifie qu'un agent ne propose pas de contrat à ses voisins si et seulement si lui et ses voisins ont le même ratio position sur tolérance.

Supposons désormais que l'ensemble du réseau soit à l'équilibre, ce qui signifie

qu'aucun agent n'ait d'intérêt à proposer un contrat à ses voisins.

Deux agents reliés par une arête ont donc le même ratio. L'agent 1 a donc le même ratio que l'agent 2 s'il le connaît. L'agent 2 a lui-même le même ratio que ses voisins, ce qui signifie que l'agent 1 a le même ratio que les voisins de l'agent 2, et donc par extension de tous les voisins de ses voisins. Par récurrence, tous les agents pour lesquels il existe un chemin d'arêtes dans le réseau ont le même ratio. Comme le réseau est connecté, il existe un chemin entre toutes les paires d'agents possibles. Par conséquent, à l'équilibre tous les agents ont le même ratio position sur tolérance.

Ce qui signifie que tous les agents du réseau ont le même ratio que, disons, l'agent 1. Cela donne, en notant X_k^* la position finale de l'agent k :

$$\begin{aligned}\frac{X_1^*}{\gamma_1} &= \frac{X_k^*}{\gamma_k} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\} \\ \gamma_k X_1^* &= \gamma_1 X_k^* \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}\end{aligned}$$

Ce qui nous intéresse ici c'est de savoir si cela implique quelque chose au sujet de la position finale X_k^* .

On peut sommer pour k allant de 1 à N :

$$\begin{aligned}\sum_{k \in N} \gamma_k X_1^* &= \sum_{k \in N} \gamma_1 X_k^* \\ \sum_{k \in N} \gamma_k X_1^* &= \sum_{k \in N} \gamma_1 X_k^* \\ X_1^* \sum_{k \in N} \gamma_k &= \gamma_1 \sum_{k \in N} X_k^* \\ X_1^* &= \frac{\gamma_1}{\sum_{k \in N} \gamma_k} \sum_{k \in N} X_k^*\end{aligned}$$

Or la somme des positions finales est égale à la somme des positions initiales ($\sum_{k \in N} X_k^* = \sum_{k \in N} X_k$), on a donc :

$$X_1^* = \frac{\gamma_1}{\sum_{k \in N} \gamma_k} \sum_{k \in N} X_k$$

Ce qui est vrai pour l'agent 1 est vrai pour les autres agents, il suffit de reproduire le même raisonnement.

Il existe donc un seul équilibre en termes de risque : dans celui-ci chaque agent dispose exactement de la part du risque total (du réseau tout entier) proportionnelle

à sa tolérance au risque (relative à celle du réseau tout entier). Et ce dans n'importe quel réseau connecté. Cela signifie que même dans un réseau incomplet², le seul équilibre est le même que dans un réseau complet.

On remarque que si les agents ont une position financière telle que décrite précédemment, cela est vrai quel que soit le montant monétaire dont ils disposent. Il existe donc une infinité d'équilibres si on prend en compte l'argent dont disposent les agents.

On peut résumer ce que nous venons de voir sous la proposition suivante :

Proposition 6. *Dans tout réseau connecté, à l'équilibre la position de l'agent i est :*

$$X_i^* = \frac{\gamma_i}{\sum_{j \in N} \gamma_j} \sum_{j \in N} X_j = \frac{\gamma_i}{\sum \gamma} \sum X \quad (\text{à une constante près})$$

Cela établit donc l'existence de l'équilibre et son caractère unique, quelle que soit la topologie du réseau.

Il s'agit de l'optimum de Pareto dans le problème du partage du risque vu à la fin du chapitre 1.

Rien ne garantit cependant que les agents se dirigent vers cet équilibre-là ni sous quelles conditions. Il s'agit de la question de la *convergence*.

2.5 Les conditions de la convergence

L'équilibre existe et est unique : une fois placé sur cet équilibre, aucun agent n'a intérêt à souscrire un contrat avec l'un de ses voisins. Cependant, il peut s'agir d'un point difficile, voire impossible, à atteindre pour les agents. Pour s'intéresser à l'éventuelle convergence du système vers ce point, il faut définir un processus dynamique : que font les agents ? Dans quel ordre ? Quand s'arrêtent-ils ?

Le but ici est de rester le plus général possible, de sorte que les conclusions s'appliquent à un maximum de configurations.

Le processus étudié fonctionne par tours successifs : à chaque tour, une transaction a lieu entre certains agents qui se connaissent. Quelles sont les conditions de la convergence vers un point où plus personne ne veut faire une transaction supplémentaire ?

La première restriction importante est la suivante : les décisions des agents sont des contrats optimaux définis tels que précédemment (dans leur configuration la plus générale, c'est-à-dire la Proposition 5). Une deuxième restriction est que, à

2. Un réseau dans lequel toutes les arêtes possibles ne sont pas présentes.

n’importe quel point dans le processus, tous les agents ont la possibilité future de participer à un contrat (dans un nombre fini de tours). Cela supprime la possibilité qu’un groupe d’agents soit écarté du processus à un certain stade.

Ces deux restrictions suffisent à assurer que le processus (quel qu’il soit par ailleurs) converge vers l’équilibre.

Proposition 7. *Soit un marché où les agents*

- *sont placés dans un réseau connecté ;*
- *souscrivent des contrats optimaux tels que définis dans la Proposition 5 ;*
- *ont chacun et à tout moment la possibilité future de participer à une transaction, dans un nombre fini de tours.*

Alors le marché converge vers un unique équilibre (à une constante près) :

$$X_k^* = \frac{\gamma_k}{\sum \gamma} \sum X \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}$$

La démonstration est disponible en annexe, mais le raisonnement est relativement simple : chaque transaction égalise les ratios position sur tolérance en redistribuant les positions des agents participant à la transaction. Chaque transaction harmonise donc ces ratios. Comme le réseau est connecté et que chaque agent participe périodiquement aux transactions, on assiste donc à une harmonisation de ces ratios dans le réseau tout entier, jusqu’à converger vers le point où tout le monde a le même ratio. Ce point, on l’a vu précédemment, est le point d’équilibre unique du marché.

Ce résultat laisse la possibilité de modéliser de nombreux jeux économiques qui convergent vers l’équilibre défini précédemment. Il suffit que le modèle économique corresponde aux éléments définis dans la Proposition 7.

2.6 Le défaut simultané de tous les agents

Quelles sont les conséquences de cet équilibre ?

L’équilibre est Pareto-optimal, ce qui est une forme d’optimalité concernant la satisfaction des agents. Mais la problématique de ce travail est celle des défauts qui peuvent se propager dans un réseau. De ce point de vue là, quelles sont les implications de notre équilibre ?

Un agent fait défaut lorsqu’il n’a pas assez d’argent pour couvrir ses dettes. Jusqu’à présent, nos résultats ont été établis ”à une constante près”, ce qui veut dire que les positions financières des agents peuvent s’accompagner de n’importe quelle constante, c’est-à-dire un montant monétaire. Il existe cependant une contrainte sur ce montant, à travers le prix du produit dérivé : naturellement, les agents participant

à la transaction n'accepteront un produit dérivé, quel qu'il soit, uniquement s'il est accompagné d'un montant qui le rend acceptable.

On a vu que dans une transaction avec plusieurs contreparties (voir Proposition 4), le prix qui maintient les contreparties à leur niveau d'indifférence est

$$\pi_{ij}^*(F_{ij}) = \rho_{\gamma_j}(X_j) - \rho_{\gamma_j}(X_j + F_{ij}) \quad \forall j \in I$$

Il s'agit simplement du dédommagement minimal qu'exige l'agent j , pour qu'il accepte tout contrat dérivé F_{ij} .

C'est plus facilement interprétable si l'on fait la supposition que les agents débutent avec le capital dicté par leur mesure de risque. L'agent j est initialement doté de la position X_j . Sa perception du risque de cette position est $\rho(X_j)$: il s'agit du montant monétaire qu'il estime nécessaire de posséder pour se couvrir face au risque que pose X_j :

$$\begin{aligned} \rho(X_j + \rho(X_j)) &= \rho(X_j) - \rho(X_j) \quad (\text{invariance par translation monétaire}) \\ \rho(X_j + \rho(X_j)) &= 0 \end{aligned}$$

La mesure de toute position accompagnée du capital jugé nécessaire est donc 0.

L'agent i est initialement doté de la position X_j : il sera désormais supposé qu'il dispose également du capital qu'il juge nécessaire pour couvrir cette position, à savoir $\rho(X_j)$.

Le prix minimal exigé $\pi_{ij}^*(F_{ij})$ prend donc tout son sens. La position de l'agent j passe de X_j à $X_j + F_{ij}$, mais le capital qu'il possède passe de $\rho(X_j)$ à :

$$\rho_{\gamma_j}(X_j) - (\rho_{\gamma_j}(X_j) - \rho_{\gamma_j}(X_j + F_{ij})) = \rho_{\gamma_j}(X_j + F_{ij})$$

L'agent change de position, mais récupère juste assez d'argent pour se couvrir contre sa nouvelle position, de sorte qu'il mesure le risque de sa nouvelle situation à 0, tout comme sa situation initiale.

Pour l'agent i à l'origine de la transaction, s'il capte la totalité du bénéfice alors le montant récupéré sera le prix $\pi_{ij}^*(F_{ij})$. Ce montant est supérieur au montant minimal que l'agent i exige pour se maintenir à son niveau d'indifférence, sans quoi il n'y aurait pas de transaction.

La Proposition 5 assure que les contrats dérivés échangés restent les mêmes, et que le partage des bénéfices se fait par le canal des prix (et donc des montants monétaires). Cependant pour que la transaction ait lieu, il faut que ces prix soient supérieurs ou égaux aux montants minimaux que nous venons de voir.

Ces observations permettent de donner une borne minimale aux montants monétaires finaux de tout agent participant à une suite de transactions définies par la Proposition 7.

Proposition 8. *Tout agent participant à une suite de transactions définies par la Proposition 7 et débutant avec une position initiale totale de $X_i + \rho_{\gamma_i}(X_i)$ dispose à l'équilibre de la position financière totale $X_i^* + c_i$, avec $c_i \in \mathbb{R}$ et $c_i \geq \rho_{\gamma_i}(X_i^*)$.*

Cette borne inférieure signifie simplement qu'à minima, chaque agent atteindra l'équilibre en ayant suffisamment de capital pour couvrir sa position ; sans quoi il aurait simplement refusé une des transactions. Un agent atteint exactement la borne minimale s'il conclut uniquement des transactions sans bénéfice pour lui.

Ce point est intéressant, car il s'agit du point au-dessus duquel graviteront les agents à l'équilibre : ils en seront plus ou moins éloignés en fonction des bénéfices accumulés. Ceux-ci dépendent du processus de négociation, de l'ordre d'initiative, de la forme du réseau, et d'à quel point leur dotation initiale est éloignée de celles qu'ils doivent avoir à l'équilibre.

Un autre élément qui rend ce point intéressant est qu'il s'agit précisément du capital jugé nécessaire par les agents. Si ceux-ci décident de réallouer le bénéfice accumulé ailleurs, ils retomberont sur la borne minimale, car il s'agit du capital qu'ils estiment être suffisants pour se couvrir. C'est un comportement économique pertinent pour analyser les acteurs du monde financier, qui laissent rarement de l'argent dormir sans être investi.

Supposons qu'un agent i soit sur cette borne inférieure. Pour qu'il fasse défaut, un scénario ω doit survenir de sorte que le capital immobilisé ne suffise pas à couvrir la position de l'agent. Par exemple, si 10 euros ont été immobilisés, il faut qu'un scénario ω survienne de sorte que $X_i^*(\omega) = -11$ par exemple. D'une manière générale, il faut que $X_i^*(\omega)$ (dans notre exemple -11) soit inférieur à $-\rho_{\gamma_i}(X_i^*)$ (-10 dans notre exemple). On doit donc avoir

$$X_i^* < -\rho_{\gamma_i}(X_i^*)$$

À l'équilibre, la Proposition 6 dit que $X_i^* = \frac{\gamma_i}{\sum \gamma} \sum X$. On peut donc établir une relation d'équivalence (notée \Leftrightarrow) :

$$\begin{aligned} X_i^* &< -\rho_{\gamma_i}(X_i^*) \\ \Leftrightarrow \frac{\gamma_i}{\sum \gamma} \sum X &< -\rho_{\gamma_i}\left(\frac{\gamma_i}{\sum \gamma} \sum X\right) \end{aligned}$$

La Définition 2 rappelle que $\rho_\gamma(X) = \gamma\rho(\frac{1}{\gamma}X)$. On peut donc poursuivre le calcul :

$$\begin{aligned}
& X_i^* < -\rho_{\gamma_i}(X_i^*) \\
\Leftrightarrow & \frac{\gamma_i}{\sum \gamma} \sum X < -\rho_{\gamma_i}\left(\frac{\gamma_i}{\sum \gamma} \sum X\right) \quad (\text{d'après la Proposition 6}) \\
\Leftrightarrow & \frac{\gamma_i}{\sum \gamma} \sum X < -\gamma_i\rho\left(\frac{1}{\sum \gamma} \sum X\right) \quad (\text{d'après la Définition 2}) \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{n} \sum X < -\left(\frac{1}{n} \sum \gamma\right)\rho\left(\frac{\frac{1}{n} \sum X}{\frac{1}{n} \sum \gamma}\right) \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{n} \sum X < -\rho_{\frac{1}{n} \sum \gamma}\left(\frac{1}{n} \sum X\right) \quad (\text{d'après la Définition 2})
\end{aligned}$$

Deux éléments importants sont à noter ici.

Premièrement, il n'y a plus d'indice i à la dernière ligne, ce qui signifie que les événements concernés par la dernière inégalité ne varient pas en fonction des agents. Cela signifie que le même raisonnement est possible pour deuxième agent j , puis k , etc., et aboutir à la même condition de défaut. En clair, les scénarios qui amènent le défaut d'un agent sont les mêmes pour tous les agents. Tout le monde fait défaut en même temps.

Deuxièmement, le défaut général survient lorsque

$$\frac{1}{n} \sum X < -\rho_{\frac{1}{n} \sum \gamma}\left(\frac{1}{n} \sum X\right)$$

Cela signifie que tout le monde fait défaut lorsqu'un agent (imaginaire) doté d'une tolérance au risque moyenne ($\frac{1}{n} \sum \gamma$) et de la moyenne des positions initiales ($\frac{1}{n} \sum X$) fait défaut. Il s'agit d'un agent représentatif du marché. Le marché tout entier fait donc défaut lorsqu'un agent représentatif de l'ensemble du marché fait défaut.

Ces observations peuvent être résumées dans le résultat suivant :

Proposition 9. *À l'équilibre, tous les agents sur la borne minimale en termes de montant monétaire font défaut lors de la réalisation du même ensemble de scénarios.*

Ces défauts surviennent pour tout $\omega \in \Omega$ tel que

$$\bar{X}(\omega) < -\rho_{\bar{\gamma}}\left(\bar{X}(\omega)\right)$$

avec $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_i^n X_i$ et $\bar{\gamma} = \frac{1}{n} \sum_i^n \gamma$.

Dans le cas d'une mesure de risque normalisée ($\rho(0) = 0$), les mécanismes à l'oeuvre sont simples à analyser.

La convexité de ρ permet d'écrire, pour tout λ dans $]0, 1[$:

$$\begin{aligned}\rho_\gamma(\lambda X + (1 - \lambda)0) &\leq \lambda\rho_\gamma(X) + (1 - \lambda)\rho_\gamma(0) \\ \rho_\gamma(\lambda X) &\leq \lambda\rho_\gamma(X)\end{aligned}$$

Pour une position perçue comme nécessitant un capital positif pour la couvrir, cela signifie que lorsque la position est réduite, le capital immobilisé est réduit dans une proportion plus importante.

Par exemple, pour $\lambda = \frac{1}{2}$, on a $\rho_\gamma(\frac{1}{2}X) \leq \frac{1}{2}\rho_\gamma(X)$. La position est réduite de moitié, mais le capital jugé nécessaire par l'agent est inférieur à la moitié du capital de la position initiale.

C'est l'aversion au risque de l'agent qui s'exprime ici : lorsqu'une position jugée comme "négative" décroît, l'agent est d'une certaine manière "soulagé" et assouplit son exigence en matière de capital à immobiliser. Inversement, lorsque la position négative s'accroît, l'agent "s'inquiète" et immobilise plus de capital (par unité de X) que précédemment.

Pour que le défaut survienne sous le même ensemble de scénarios, lorsque la position X est réduite de moitié, il faut nécessairement que le capital immobilisé soit également réduit de moitié. Ce qui conduit au mécanisme suivant : lorsque la position de l'agent s'allège, il devient moins précautionneux vis-à-vis du capital à immobiliser et un plus grand nombre de scénarios l'amènent à faire défaut. Inversement, lorsque sa position X s'accroît, il devient plus inquiet par la situation et immobilise relativement plus de capital ; cela décroît l'ensemble des scénarios qui l'amèneront à faire défaut.

On aurait pu aussi écrire :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}\rho_\gamma(\lambda X) &\leq \rho_\gamma(X) \\ \rho_{\tilde{\gamma}}(X) &\leq \rho_\gamma(X)\end{aligned}$$

Avec $\tilde{\gamma} = \frac{1}{\lambda}\gamma \quad \forall \lambda \in]0, 1[$, ce qui revient à dire $\forall \tilde{\gamma} > \gamma$.

Tout agent plus tolérant au risque immobilisera moins de capital pour une même position X . Il fera donc défaut plus facilement.

Les deux mécanismes sont à l'oeuvre ici : les agents les plus tolérants sont moins

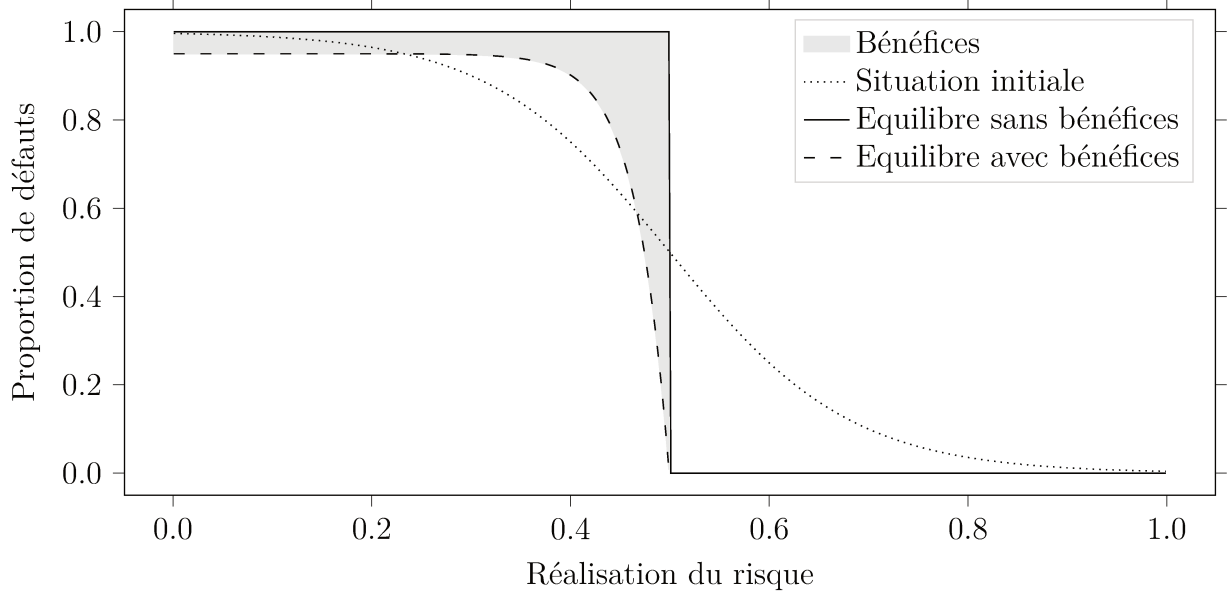


FIGURE 2.5 – Proportion d’agents en défaut (avec bénéfices)

précautionneux, mais ils acquièrent une plus grande part des positions durant les transactions, ce qui les amène à devenir plus précautionneux. À l’inverse, les agents les moins tolérants étaient relativement plus prudents, mais en vendant leurs positions ils relâchent leur vigilance.

À l’équilibre, ce niveau de vigilance s’égalise pour tous les agents du marché.

Un troisième élément vient s’ajouter : tous les risques se diffusent dans le marché. On l’a vu, à l’équilibre chaque agent a une part de toutes les positions initiales, quelque soit la forme du réseau. Cette diffusion des risques amène à une homogénéisation des positions finales des agents.

Les agents ont donc pris des parts dans toutes les positions initiales du marché et ils ont égalisé leur niveau de vigilance et donc le capital qu’ils jugent nécessaire d’immobiliser : la conséquence est que les agents qui n’ont pas fait de bénéfice font défaut systématiquement en même temps.

On observe l’émergence d’un point où tout le système fait faillite en même temps. Les agents qui ont réalisé un bénéfice peuvent constituer une marge qui protège légèrement le système contre ce point de faillite (Figure 2.5).

Ces éléments passent par le canal des prix. En effet, le prix d’indifférence de l’agent i est le capital que lui dicte sa mesure de risque nécessaire pour couvrir le changement de position. Les prix d’indifférence sont les reflets directs du niveau d’inquiétude des agents vis-à-vis de leur position, pondéré par leur tolérance au risque. Tant qu’il existe des différences dans ces prix d’indifférence, il existe une

marge pour la réalisation d'une transaction. Ces prix s'égalisent lorsque le marché est à l'équilibre.

2.7 L'existence d'un prix d'équilibre

Dans un cadre économique classique, le marché n'est pas limité par l'existence d'un réseau, et l'équilibre est caractérisé par la rencontre d'une offre et d'une demande à travers l'existence d'un prix d'équilibre. L'équilibre est alors appelé *équilibre de Walras*, du nom Léon Walras qui développa le concept dans Walras (1896). L'économie a été profondément marquée par l'apparition de modèles mathématiques initiés à Arrow, Debreu et McKenzie permettant de formaliser cet équilibre (Düppe and Weintraub, 2014), permettant le passage au premier plan d'un paradigme (appelé *néo-classique*) fortement influencé par un raisonnement mathématique axiomatique (Weintraub, 2002).

La nécessité d'acheter et vendre des éléments risqués a naturellement donné lieu à de nombreuses tentatives d'adapter l'équilibre Walrasien à des commodités proches des positions financières que nous étudions ici. Les premiers essais sont dus à Arrow, Allais, et Borch (voir Borch (1962)) et ont donné lieu au concept d'*équilibre d'Arrow-Debreu* dans le cadre de l'utilité espérée (voir (Mas-Colell et al., 1995, chapitre 19) et (Föllmer and Schied, 2011, chapitre 3)). Dans de nombreux cas, l'existence d'un prix d'équilibre n'est pas garantie (Borch, 1962); quand on parvient à démontrer leur existence, définir précisément ces prix demeure souvent une tâche impossible à calculer mathématiquement, et il faut souvent recourir à des outils computationnels pour les obtenir, ce qui est également le cas des commodités classiques (Kao, 2008, page 347).

Ici nous ne sommes pas particulièrement préoccupés par l'équilibre Walrasien car le sujet étudié est le risque posé par les dérivés dans les réseaux comme les marchés over-the-counter, qui sont le parfait exemple de marchés incomplets où il n'existe pas de prix pour tous les produits dérivés et où les agents procèdent à des négociations bilatérales. Cependant, les résultats précédents permettent d'obtenir des prix d'équilibre relativement facilement et de leur donner une interprétation intéressante, ce que nous détaillons brièvement dans cette section.

L'objectif est ici d'obtenir un prix P pour tout produit dérivé F de sorte que si les agents disposent d'un marché pour chaque produit dérivé où ils peuvent acheter et vendre à ce prix, l'offre et la demande s'égalisent et amènent les agents vers l'optimum de Pareto vu précédemment. Chaque agent doit en plus respecter sa contrainte budgétaire, qui stipule que les fonds dont ils disposent sont constitués

par leur dotation initiale (X_i) éventuellement vendue au prix du marché.

La difficulté de l'équilibre Walrasien vient en partie de la nécessité d'obtenir un prix pour tout produit dérivé donné. Compte-tenu du fait qu'il existe une infinité de produits dérivés, le prix prend la forme d'une fonction du type $P(F) \in \mathbb{R}$ (Borch, 1962), tandis que dans le cas d'un vecteur de commodités un simple vecteur des prix suffit.

L'avantage du cadre théorique dont on dispose ici est qu'il propose naturellement des fonctions permettant d'attribuer un nombre réel à n'importe quelle position financière : il s'agit évidemment des mesures de risques. Il faut alors choisir une ou plusieurs mesures de risques qui permettront de constituer un prix d'équilibre.

Les résultats précédents permettent de suggérer un candidat naturel. Nous avons vu que les agents moins exposés ou plus tolérants achetaient du risque jusqu'à atteindre une position finale qui les place au même ratio position sur tolérance que le reste du marché. Inversement, les agents plus exposés ou moins tolérants vendent du risque jusqu'à atteindre le même point. À ce point-là, ils ont un comportement identique à celui d'un agent représentatif du marché qui disposerait d'une position moyenne et d'une tolérance moyenne.

Ce qui détermine les transactions avant d'atteindre ce point, c'est le montant de capital maximum que l'agent est prêt à donner pour un changement de position, à savoir $\rho(X) - \rho(X + F)$. Payer ce montant l'assure de disposer de la différence du capital jugé nécessaire entre son ancienne position X et sa nouvelle position $X + F$. On peut également la considérer du point de vue de la nouvelle position Y : $\rho(Y - F) - \rho(Y)$. Il s'agit d'un prix.

Un candidat naturel serait donc ce prix, mais du point de vue de l'agent représentatif disposant d'une position financière représentative (moyenne) :

$$\rho_{\bar{\gamma}}(\bar{X} - F) - \rho_{\bar{\gamma}}(\bar{X})$$

Avec $\bar{\gamma}$ (respectivement \bar{X}) désignant la moyenne des γ (respectivement des X). Il s'agit du prix que l'agent représentatif est prêt à payer pour atteindre la position représentative.

Il existe cependant un problème : selon F , on peut se situer relativement loin de la position représentative \bar{X} , et on a vu que cela influait directement sur la mesure du risque des agents, et donc sur le prix. Or nous cherchons à avoir une valorisation de F non pas entre $\bar{X} - F$, mais précisément à \bar{X} . Une solution est donc de prendre une fraction ϵ de F , ce qui permettrait d'avoir une fraction du prix ϵP .

$$\epsilon P = \rho_{\bar{\gamma}}(\bar{X} - \epsilon F) - \rho_{\bar{\gamma}}(\bar{X})$$

$$P = \frac{\rho_{\bar{\gamma}}(\bar{X} - \epsilon F) - \rho_{\bar{\gamma}}(\bar{X})}{\epsilon} \equiv P_{\epsilon}(F)$$

Évidemment, plus ϵ se rapproche de 0, plus l'on se rapproche du prix que l'on cherche, à savoir le prix marginal pour F lorsque l'agent représentatif se situe à la position représentative. Le prix que l'on se propose de tester est donc :

$$P(F) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\rho_{\bar{\gamma}}(\bar{X} - \epsilon F) - \rho_{\bar{\gamma}}(\bar{X})}{\epsilon}$$

Il s'agit d'une quantité proche de la dérivée mathématique, qui vaut

$$f'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon}$$

En ce qui nous concerne, il s'agit de la dérivée le long de F . Mathématiquement, il s'agit de l'opposé de la *dérivée directionnelle à gauche* de $\rho_{\bar{\gamma}}$ au point \bar{X} suivant F (voir (Phelps, 2009, chapitre 1)). Le Lemme 1.2 dans Phelps (2009) garantit que cette quantité existe dans le cas des fonctions convexes, de sorte que ce prix est bien une quantité réelle.

Proposition 10. *Soit $P : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de prix définie par :*

$$P(F) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\rho_{\bar{\gamma}}(\bar{X} - \epsilon F) - \rho_{\bar{\gamma}}(\bar{X})}{\epsilon}$$

Alors si chaque agent peut acheter et vendre à ce prix, alors le contrat optimal pour chaque agent conduit le système vers l'optimum de Pareto défini à la Proposition 3. De plus, si chaque agent dispose du capital qu'il juge nécessaire pour couvrir sa position, les contraintes budgétaires de chacun sont respectées.

La démonstration, relativement longue, est reléguée en annexe de ce chapitre.

Il s'agit d'un résultat périphérique de notre problématique, mais qui vient confirmer l'attraction exercée par cet optimum sur tout système économique proche de celui que nous avons défini. En plus de la convergence dans les réseaux connectés, il existe une fonction de prix qui caractérise un équilibre entre l'offre et la demande qui amène les agents à l'optimum.

De plus, il s'agit d'une fonction de prix relativement complexe à première vue, mais qui revêt un aspect tout à fait intuitif lorsque l'on considère la dynamique à l'oeuvre dans le marché, telle que détaillée à la section précédente : le prix est simplement la valorisation marginale (en termes de capital nécessaire) du marché vis-à-vis du dérivé étudié.

2.8 Conclusion du chapitre

Ce chapitre identifie le contrat dérivé optimal dans le cas où un agent a plusieurs contreparties. Ce contrat est robuste à un grand nombre de répartitions des bénéfices entre les agents concernés. Lorsque ce résultat est appliqué à des réseaux incomplets, des chaînes de dépendances émergent naturellement. C'est une partie du phénomène que l'on cherchait à comprendre.

En étendant simplement la notion de contrat dérivé optimal à plusieurs contreparties, on est donc parvenu ici à modéliser naturellement ce type de mécanisme. En pratique cependant, les chaînes de dépendance sont plus longues que trois contreparties, et c'est pour cela qu'elles suscitent le débat. Ici, on peut arguer que, quelles que soient les motivations du trader qui joue le rôle d'intermédiaire dans une chaîne à trois agents, il a permis une meilleure répartition du risque. Cet argument est moins convaincant lorsque plusieurs traders s'enchaînent (littéralement) avant d'atteindre la contrepartie finale.

Ce chapitre analyse ensuite les implications du contrat dérivé optimal obtenu précédemment dans un réseau connecté. En particulier, il étudie l'existence et l'unicité d'un équilibre au sens économique ; une situation dans laquelle aucun agent ne veut souscrire un produit dérivé supplémentaire. Cet équilibre existe, est unique, et le système converge vers ce point si les agents prennent des décisions optimales telles que définies dans le chapitre précédent. Cet équilibre est précisément l'optimum de Pareto dans le problème de la répartition optimale du risque.

Lorsque le système se dirige vers cet équilibre, deux phénomènes se produisent. Le premier est une diffusion de tous les risques dans le réseau. Une position financière portée uniquement par un agent trouvera nécessairement un prix de vente qui lui permettra de se diffuser aux voisins de cet agent, puis aux voisins de ceux-ci, etc. Le deuxième élément est l'harmonisation du comportement en termes d'immobilisation de capital. Les positions s'achètent et se vendent tant que les prix d'indifférence ne sont pas harmonisés dans le réseau. Toute différence des prix d'indifférence induit l'existence d'une transaction avec un prix effectif se situant dans l'intervalle. Lorsque les prix d'indifférence sont identiques, alors les agents immobilisent le même capital pour une unité marginale de n'importe quelle position. La combinaison de ces deux éléments conduit au fait que, sans prendre en compte les bénéfices, tous les agents font défaut en même temps : ils possèdent les mêmes positions et immobilisent du capital avec le même degré de prudence. Un point de faillite systémique émerge donc.

Le système présente tous les traits d'un phénomène de mimétisme entre agents économiques : ils disposent des mêmes positions, ont le même comportement en

termes d'immobilisation de capital et par conséquent font faillite en même temps, alors même qu'ils ont des appétences au risque différentes. Pourtant, aucun agent n'en imite un autre ; aucun mécanisme de transmission de l'information, propice à l'apparition du mimétisme (Brandouy et al., 2003), n'est présent ici. Ce phénomène est entièrement dû à une suite de transactions optimales pour les agents, au jeu des prix et à la force de diffusion de ce mécanisme qui opère dans n'importe quel réseau connecté. C'est une leçon supplémentaire : lorsque des agents différents ont les mêmes positions, la même prudence (ou imprudence) et font faillite en même temps, il est peut-être faux de suspecter un comportement moutonnier : un tel phénomène peut être la conséquence de décisions rationnelles et non coordonnées.

2.9 Annexe mathématique

2.9.1 Démonstration de la Proposition 4

Le résultat suivant obtenu par Barrieu and El Karoui (2005) sera nécessaire :

Lemma 1. *Soit ρ une mesure de risque convexe. Soit γ et γ' deux coefficients de tolérance au risque strictement croissants.*

- $\forall X \in \mathcal{X}, \quad \inf_{F \in \mathcal{X}} \rho_\gamma(X - F) + \rho_{\gamma'}(F) = \rho_{\gamma+\gamma'}(X)$
- $F^* = \frac{\gamma'}{\gamma+\gamma'}X$ est une solution optimale à ce programme de minimisation.

Le programme à minimiser est :

$$\inf_{F_{ij} \in \mathcal{X}, \pi_{ij} \in \mathbb{R}, j \in I} \quad \rho_{\gamma_i}(X_i - \sum_{j \in I} (F_{ij} - \pi_{ij}))$$

s.t. $\rho_{\gamma_j}(X_j + (F_{ij} - \pi_{ij})) \leq \rho_{\gamma_j}(X_j) \quad \forall j \in I$

Choisir $F_{ij} - \pi_{ij}$ pour minimiser la première ligne du programme va maximiser la mesure de risque de l'agent j dans la contrainte. Dès lors, pour toute solution qui laisse une des contraintes non saturée, il est possible d'obtenir une meilleure solution en saturant la contrainte. Par conséquent à l'optimum chaque contrainte est saturée.

La saturation des contraintes et l'invariance par translation monétaire permettent d'obtenir le prix optimal de tout contrat F_{ij} considéré :

$$\pi_{ij}^*(F_{ij}) = \rho_{\gamma_j}(X_j) - \rho_{\gamma_j}(X_j + F_{ij}) \quad \forall j \in I \quad (2.4)$$

En remplaçant dans le programme, celui-ci devient :

$$\inf_{F_{ij} \in \mathcal{X}, j \in I} \rho_{\gamma_i} \left(X_i - \sum_{j \in I} F_{ij} \right) - \sum_{j \in I} \rho_{\gamma_j}(X_j) + \sum_{j \in I} \rho_{\gamma_j}(X_j + F_{ij})$$

Ce qui revient à résoudre :

$$\inf_{F_{ij} \in \mathcal{X}, j \in I} \rho_{\gamma_i} \left(X_i - \sum_{j \in I} F_{ij} \right) + \sum_{j \in I} \rho_{\gamma_j}(X_j + F_{ij})$$

Procédons par étape, en commençant par l'agent k :

$$\inf_{F_{ij} \in \mathcal{X}, j \in I \setminus \{k\}} \inf_{F_{ik} \in \mathcal{X}} \left\{ \rho_{\gamma_i} \left(X_i - \sum_{j \in I} F_{ij} \right) + \rho_{\gamma_k}(X_k + F_{ik}) \right\} + \sum_{j \in I \setminus \{k\}} \rho_{\gamma_j}(X_j + F_{ij})$$

Ce qui peut s'écrire de la manière suivante :

$$\inf_{F_{ij} \in \mathcal{X}, j \in I \setminus \{k\}} \inf_{\tilde{F}_{ik} \in \mathcal{X}} \left\{ \rho_{\gamma_i}(\tilde{X}_i - \tilde{F}_{ik}) + \rho_{\gamma_k}(\tilde{F}_{ik}) \right\} + \sum_{j \in I \setminus \{k\}} \rho_{\gamma_j}(X_j + F_{ij})$$

avec $\tilde{X}_i = X_i + X_k - \sum_{j \in I \setminus \{k\}} F_{ij}$ et $\tilde{F}_{ik} = X_k + F_{ik}$.

En utilisant le premier résultat du Lemme 1, le programme devient :

$$\inf_{F_{ij} \in \mathcal{X}, j \in I \setminus \{k\}} \rho_{\gamma_i + \gamma_k}(X_i + X_k - \sum_{j \in I \setminus \{k\}} F_{ij}) + \sum_{j \in I \setminus \{k\}} \rho_{\gamma_j}(X_j + F_{ij})$$

On répète l'opération jusqu'à ce qu'il ne reste plus que l'agent l :

$$\inf_{F_{il} \in \mathcal{X}} \rho_s(X_i + \sum_{j \in I \setminus \{l\}} X_j - F_{il}) + \rho_{\gamma_l}(X_l + F_{il})$$

avec

$$s = \gamma_i + \sum_{j \in I \setminus \{l\}} \gamma_j$$

Le programme peut s'écrire de la manière suivante :

$$= \inf_{\tilde{F}_{il} \in \mathcal{X}} \rho_s(\tilde{X} - \tilde{F}_{il}) + \rho_{\gamma_l}(\tilde{F}_{il})$$

avec $\tilde{X} = X_i + \sum_{j \in I} X_j$ et $\tilde{F}_{il} = X_l + F_{il}$

En utilisant le deuxième résultat du Lemme 1, on obtient une solution optimale :

$$\tilde{F}_{il} = \frac{\gamma_l}{s + \gamma_l} \tilde{X}$$

$$F_{il}^* = \frac{\gamma_l}{\gamma_i + \sum_{j \in I} \gamma_j} (X_i + \sum_{j \in I} X_j) - X_l$$

Avec (2.4), cela complète la démonstration de la Proposition 4.

2.9.2 Démonstration de la Proposition 5

Soit F_{ij} une solution possible au programme de minimisation, qui satisfait les $p + 1$ contraintes. C'est un ensemble non-vidé car il contient F_{ij}^* , la solution à la Proposition 4.

Soit S le score atteint par la fonction multi objectifs f qui prend les F_{ij} comme arguments :

$$\begin{aligned} S &= f(\rho_{\gamma_i}(X_i - \sum_{j \in I} (F_{ij} - \pi_{ij})), \rho_{\gamma_1}(X_1 + (F_{i1} - \pi_{i1})), \dots, \rho_{\gamma_p}(X_p + (F_{ip} - \pi_{ip}))) \\ &= f(\rho_{\gamma_i}(X_i) - m_i, \rho_{\gamma_1}(X_1) - m_1, \dots, \rho_{\gamma_p}(X_p) - m_p) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} m_i &= \rho_{\gamma_i}(X_i) - \rho_{\gamma_i}(X_i - \sum_{j \in I} (F_{ij} - \pi_{ij})) \\ &= \rho_{\gamma_j}(X_j) - \rho_{\gamma_j}(X_j + (F_{ij} - \pi_{ij})) \quad \forall j \in I \end{aligned}$$

En utilisant l'invariance par translation monétaire, on obtient :

$$S = f(\rho_{\gamma_i}(X_i + m_i), \rho_{\gamma_1}(X_1 + m_1), \dots, \rho_{\gamma_p}(X_p + m_p)) \quad (2.5)$$

m_k est la valeur monétaire dont l'agent k bénéficie grâce à la transaction. Les agents sont indifférents entre recevoir ce paiement et bénéficier de la transaction. En termes économiques, il s'agit de *l'équivalent certain* de la transaction.

L'argument est le suivant : ce score S est atteignable avec F_{ij}^* si l'agent i distribue le bénéfice de la transaction via les paiements monétaires.

Observons d'abord que :

$$m_j = \rho_{\gamma_j}(X_j) - \rho_{\gamma_j}(X_j + (F_{ij})) - \pi_{ij} \quad \forall j \in I$$

Pour un contrat donné F_{ij} , l'agent i peut choisir le bénéfice qu'il laisse à l'agent j via le prix π_{ij} qu'il fixe pour son contrat. Chaque contrainte impose simplement que ce bénéfice doit être supérieur ou égal à 0, ce qui détermine un prix maximum.

Le bénéfice de l'agent i est :

$$\begin{aligned}
m_i &= \rho_{\gamma_i}(X_i) - \rho_{\gamma_i}(X_i - \sum_{j \in I} (F_{ij})) + \sum_{j \in I} \pi_{ij} \\
m_i &= \rho_{\gamma_i}(X_i) - \rho_{\gamma_i}(X_i - \sum_{j \in I} (F_{ij})) + \sum_{j \in I} [\rho_{\gamma_j}(X_j) - \rho_{\gamma_j}(X_j + (F_{ij}))] - \sum_{j \in I} m_j \\
m_i + \sum_{j \in I} m_j &= \rho_{\gamma_i}(X_i) - \rho_{\gamma_i}(X_i - \sum_{j \in I} (F_{ij})) + \sum_{j \in I} [\rho_{\gamma_j}(X_j) - \rho_{\gamma_j}(X_j + (F_{ij}))]
\end{aligned}$$

L'agent i a donc accès à l'intégralité du bénéfice généré par le contrat F (partie droite de l'égalité ci-dessus), qu'il peut redistribuer parmi tous les agents (partie gauche). Si seule la minimisation de son propre risque le préoccupe, il distribue tout le bénéfice à m_i et laisse les autres m à 0, saturant ainsi les contraintes.

Par conséquent, à partir du contrat F il est possible de construire une solution au programme original (2.1) dans laquelle l'agent i absorbe tout le bénéfice de F . Le nouveau bénéfice de l'agent i est $\tilde{m}_i = m_i + \sum_{j \in I} m_j$.

Comme F^* est le contrat optimal, si l'on note m_i^* le bénéfice associé on a nécessairement $\tilde{m}_i \leq m_i^*$, soit de manière équivalente $0 \leq m_i^* - m_i - \sum_{j \in I} m_j$.

Cela signifie qu'avec F^* on peut construire une solution au Programme (2.2) dans laquelle l'agent i partagerait son bénéfice m_i^* de sorte que tous les agents aient le même bénéfice que dans la solution F . Étant donné l'inégalité précédente, il resterait une quantité supérieure ou égale à 0 à allouer. Comme f est strictement croissante sur au moins un de ses arguments, on peut l'allouer à l'agent correspondant et construire ainsi une solution équivalente ou supérieure à F .

2.9.3 Démonstration de la Proposition 10

Commençons par observer que la convexité de ρ_{γ} garantit la monotonie de $P_{\epsilon}(F)$ (ce qui signifie que $P_{\epsilon}(F)$ diminue quand ϵ tend vers 0), ce que l'on peut vérifier de la manière suivante (Phelps, 2009, Lemme 1.2) :

Soit $0 < \epsilon < t$:

$$\begin{aligned}
f(X - \epsilon F) - f(X) &= f\left(\frac{\epsilon}{t}(X - tF) + \left(1 - \frac{\epsilon}{t}\right)X\right) - f(X) \\
f(X - \epsilon F) - f(X) &\leq \frac{\epsilon}{t}f(X - tF) + \left(1 - \frac{\epsilon}{t}\right)f(X) - f(X) \\
f(X - \epsilon F) - f(X) &\leq \frac{\epsilon}{t}[f(X - tF) - f(X)] \\
\frac{f(X - \epsilon F) - f(X)}{\epsilon} &\leq \frac{f(X - tF) - f(X)}{t}
\end{aligned}$$

Il s'agit désormais de vérifier que si le prix de chaque produit dérivé F est fixé à l'aide de $P(F)$, l'offre égale la demande et place les agents à l'optimum vu précédemment.

La fonction de demande l'agent i est simplement le résultat de son programme d'optimisation lorsqu'il peut acheter ou vendre n'importe quel produit dérivé au prix $P(F)$:

$$\begin{aligned} \inf_{F \in \mathcal{X}} \rho_{\gamma_i}(X_i + F - P(F)) &= \inf \rho_{\gamma_i}(X_i + F) + P(F) \\ &= \inf_{F \in \mathcal{X}} \rho_{\gamma_i}(X_i + F) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_\epsilon(F) \\ &= \inf_{F \in \mathcal{X}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \rho_{\gamma_i}(X_i + F) + P_\epsilon(F) \end{aligned}$$

À cette étape, le caractère décroissant de $P_\epsilon(F)$ quand $\epsilon \rightarrow 0$ entraîne la décroissance de $\rho_{\gamma_i}(X_i + F) + P_\epsilon(F)$. On peut donc intervertir inf et $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$:

$$\inf_{F \in \mathcal{X}} \rho_{\gamma_i}(X_i + F - P(F)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_{F \in \mathcal{X}} \rho_{\gamma_i}(X_i + F) + P_\epsilon(F)$$

Ici on observe que

$$\begin{aligned} P_\epsilon(F) &= \frac{1}{\epsilon} [\rho_{\bar{\gamma}}(\bar{X} - \epsilon F) - \rho_{\bar{\gamma}}(\bar{X})] \\ P_\epsilon(F) &= \rho_{\bar{\gamma}/\epsilon}(\frac{\bar{X}}{\epsilon} - F) - \frac{1}{\epsilon} \rho_{\bar{\gamma}}(\bar{X}) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\inf_{F \in \mathcal{X}} \rho_{\gamma_i}(X_i + F) + P_\epsilon(F) = \inf_{F \in \mathcal{X}} \rho_{\gamma_i}(X_i + F) + \rho_{\bar{\gamma}/\epsilon}(\frac{\bar{X}}{\epsilon} - F) - \frac{1}{\epsilon} \rho_{\bar{\gamma}}(\bar{X})$$

La solution vient une nouvelle fois de Barrieu and El Karoui (2007) :

$$F_\epsilon^* = \frac{\gamma_i}{\gamma_i + \bar{\gamma}/\epsilon} (\frac{\bar{X}}{\epsilon} + X_i) - X_i \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} F^* = \frac{\gamma_i}{\bar{\gamma}} \bar{X} - X_i$$

Quand ϵ tend vers 0, le prix P_ϵ tend vers P et le contrat demandé par l'agent

tend vers celui qui le place à l'optimum.

Si l'on sait que pour P_ϵ , le contrat demandé est F_ϵ^* et ce pour tout ϵ strictement positif, il reste à vérifier que pour P le contrat demandé est bien F^* , en somme qu'il n'y a pas de discontinuité dans la demande de l'agent lors du passage à la limite.

Toute mesure de risque convexe est continue si l'on se dote de la norme du supremum sur \mathcal{X} . On observe par ailleurs que

$$\begin{aligned}
P_\epsilon(F_\epsilon^*) &= \frac{1}{\epsilon} [\rho_{\bar{\gamma}}(\bar{X} - \epsilon(\frac{\gamma_i}{\gamma_i + \bar{\gamma}/\epsilon}(\frac{\bar{X}}{\epsilon} + X_i) - X_i)) - \rho_{\bar{\gamma}}(\bar{X})] \\
&= \frac{1}{\epsilon} [\rho_{\bar{\gamma}}(\bar{X} - \epsilon(\frac{\gamma_i}{\epsilon\gamma_i + \bar{\gamma}}(\bar{X} + \epsilon X_i) - X_i)) - \rho_{\bar{\gamma}}(\bar{X})] \\
&= \frac{1}{\epsilon} [\rho_{\bar{\gamma}}(\bar{X} - \epsilon(\frac{1}{\epsilon\gamma_i + \bar{\gamma}}(\gamma_i\bar{X} + \epsilon\gamma_i X_i) - X_i)) - \rho_{\bar{\gamma}}(\bar{X})] \\
&= \frac{1}{\epsilon} [\rho_{\bar{\gamma}}(\bar{X} - \epsilon\frac{1}{\epsilon\gamma_i + \bar{\gamma}}(\gamma_i\bar{X} + \epsilon\gamma_i X_i - (\epsilon\gamma_i + \bar{\gamma})X_i)) - \rho_{\bar{\gamma}}(\bar{X})] \\
&= \frac{1}{\epsilon} [\rho_{\bar{\gamma}}(\bar{X} - \epsilon\frac{1}{\epsilon\gamma_i + \bar{\gamma}}(\gamma_i\bar{X} - \bar{\gamma}X_i)) - \rho_{\bar{\gamma}}(\bar{X})] \\
&= \frac{1}{\epsilon} [\rho_{\bar{\gamma}}(\bar{X} - \epsilon\frac{\bar{\gamma}}{\epsilon\gamma_i + \bar{\gamma}}(\frac{\gamma_i}{\bar{\gamma}}\bar{X} - X_i)) - \rho_{\bar{\gamma}}(\bar{X})]
\end{aligned}$$

On pose

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon \frac{\bar{\gamma}}{\epsilon\gamma_i + \bar{\gamma}} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

On a alors

$$\frac{1}{\epsilon} = \frac{1 - \tilde{\epsilon}\gamma_i}{\tilde{\epsilon}}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$P_\epsilon(F_\epsilon^*) = P_{\tilde{\epsilon}}(F^*) - \tilde{\epsilon}\gamma_i P_{\tilde{\epsilon}}(F^*)$$

Or on sait que $P_{\tilde{\epsilon}}(F^*) \xrightarrow{\tilde{\epsilon} \rightarrow 0} P(F^*)$ ce qui permet d'en déduire que

$$P_\epsilon(F_\epsilon^*) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} P(F^*)$$

Comme ρ_{γ_i} est continue, on en déduit que

$$\rho_{\gamma_i}(X_i + F_\epsilon^* - P_\epsilon(F_\epsilon^*)) \searrow_{\epsilon \rightarrow 0} \rho_{\gamma_i}(X_i + F^* - P(F^*))$$

La décroissance vient du fait qu'il s'agit de la mesure de risque pour le contrat

optimal étant donné ϵ ; or quand ϵ diminue, pour un F donné le prix $P_\epsilon(F)$ diminue, donc la mesure de risque avec des prix plus bas et le contrat optimal est nécessairement inférieure ou égale.

Nous pouvons désormais montrer que F^* est le meilleur contrat lorsque la fonction de prix est P . Par l'absurde, supposons qu'il existe un meilleur contrat \tilde{F} sous la fonction de prix P :

$$\begin{aligned}\rho_{\gamma_i}(X_i + \tilde{F} - P(\tilde{F})) &< \rho_{\gamma_i}(X_i + F^* - P(F^*)) \\ \rho_{\gamma_i}(X_i + \tilde{F}) + P(\tilde{F}) &< \rho_{\gamma_i}(X_i + F^* - P(F^*))\end{aligned}$$

Il existe alors un ϵ suffisamment petit de sorte que :

$$\rho_{\gamma_i}(X_i + \tilde{F}) + P_\epsilon(\tilde{F}) < \rho_{\gamma_i}(X_i + \tilde{F}^* - P(F^*)) \leq \rho_{\gamma_i}(X_i + F_\epsilon^* - P_\epsilon(F_\epsilon^*))$$

Ce qui est impossible. On a donc pour tout produit dérivé F :

$$\rho_{\gamma_i}(X_i + F^* - P(F^*)) \leq \rho_{\gamma_i}(X_i + F - P(F))$$

Lorsque les prix sont déterminés par la fonction P , la demande l'agent i est le contrat optimal $F^* = \frac{\gamma_i}{\gamma} \bar{X} - X_i$, ce qui amène l'agent à l'optimum de Pareto. Sommer pour les i permet de voir que l'offre égale la demande.

La contrainte budgétaire est clairement remplie si chaque agent est doté du capital qu'il juge nécessaire : si un agent est acheteur, il disposera de plus de capital que nécessaire pour payer le prix (c'est ce qui le caractérise en tant qu'acheteur).

2.10 Bibliographie du chapitre

Alexandre, H. (2017). Plateformes et évolution du système bancaire. Research Report, Université Paris-Dauphine.

Barrieu, P. and El Karoui, N. (2005). Inf-convolution of risk measures and optimal risk transfer. *Finance and Stochastics*, 9(2) :269–298.

Barrieu, P. and El Karoui, N. (2007). Pricing, Hedging and Optimally Designing Derivatives Via Minimization of Risk Measures.

- Borch, K. (1962). Equilibrium in a Reinsurance Market. *Econometrica*, 30(3) :424.
- Brandouy, O., Barneto, P., and Leger, L. A. (2003). Asymmetric information, imitative behaviour and communication : price formation in an experimental asset market. *The European Journal of Finance*, 9(5) :393–419.
- Diestel, R. (2017). *Graph Theory*, volume 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. 00411.
- Dixon, H. D. (2017). *Surfing economics*. Macmillan International Higher Education.
- Düppe, T. and Weintraub, E. R. (2014). *Finding equilibrium : Arrow, Debreu, McKenzie and the problem of scientific credit*. Princeton University Press.
- Föllmer, H. and Schied, A. (2011). *Stochastic finance : an introduction in discrete time*. Walter de Gruyter.
- Gillet, R., Hübner, G., and Plunus, S. (2010). Operational risk and reputation in the financial industry. *Journal of Banking & Finance*, 34(1) :224–235.
- Jouini, E., Schachermayer, W., and Touzi, N. (2008). Optimal Risk Sharing for Law Invariant Monetary Utility Functions. *Mathematical Finance*, 18(2) :269–292.
- Kao, M.-Y. (2008). *Encyclopedia of algorithms*. Springer Science & Business Media.
- Lensberg, T. (1988). Stability and the Nash solution. *Journal of Economic Theory*, 45(2) :330–341.
- Mas-Colell, A., Whinston, M. D., and Green, J. R. (1995). *Microeconomic theory*, volume 1. Oxford university press New York.
- Nash Jr, J. F. (1950). The bargaining problem. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 155–162.
- Phelps, R. R. (2009). *Convex functions, monotone operators and differentiability*, volume 1364. Springer.
- Rubinstein, A. (1982). Perfect Equilibrium in a Bargaining Model. *Econometrica*, 50(1) :97–109.
- Walras, L. (1896). *Éléments d'économie politique pure, ou, Théorie de la richesse sociale*. F. Rouge.
- Weintraub, E. R. (2002). *How economics became a mathematical science*. Duke University Press.

Chapitre 3

Prendre en compte le risque de contrepartie et de la contagion

Les agents qui n'ont pas réalisé des bénéfices font défaut en même temps. Qu'en est-il des autres? A priori, les bénéfices accumulés peuvent leur servir pour rester dans le positif au moment où une bonne partie du marché fait faillite. Mais c'est ignorer un aspect crucial : la contagion. Jusqu'à présent, nous avons supposé que tous les agents recouvraient leurs créances. Or un agent qui fait défaut sera incapable d'honorer ses dettes. Il pourra donc provoquer des difficultés auprès de ses partenaires. L'objet de ce chapitre est d'intégrer ce mécanisme.

Dans un premier temps, l'analyse prolonge les résultats du chapitre précédent en supposant que les agents ignorent le risque de contrepartie. C'est un cas de figure qui peut survenir lorsque les agents sont persuadés que la faillite d'un agent sera compensée par un *bailout*, un renflouement. C'est un phénomène fréquent parmi les institutions bancaires qui sont présentes sur les marchés de produits dérivés : un grand nombre d'entre elles sont trop importantes pour faire faillite (*too big to fail*).

Dans un second temps, nous étendrons l'analyse théorique au risque de contrepartie et proposerons un ensemble de dérivés optimaux dans un cas de figure précis, celui où la liquidité dans le réseau est suffisante pour régler toutes les dettes.

3.1 Un problème complexe auquel se heurte l'analyse mathématique

La contagion est un phénomène *complexe*. Il est composé d'un certain nombre d'entités dont le comportement est compris, et prévisible : les agents qui doivent de l'argent à d'autres agents, formant une toile de dettes. Pourtant, la conséquence

de ces interactions est elle-même imprévisible. C'est en ce sens que l'on qualifie ce mécanisme de complexe (Mitchell, 2009).

Si les rouages du mécanisme pris indépendamment sont simples à comprendre, comment expliquer que la somme des parties devienne imprévisible ? Deux facteurs bien connus des sciences de la complexité viennent ici se conjuguer.

Le premier est le caractère *non linéaire* du défaut d'un agent. Il ne s'agit pas d'un phénomène graduel : on est capable de payer sa dette jusqu'au moment où on ne l'est plus. Peu nous importe que notre débiteur soit riche ou pauvre du moment qu'il est capable de nous rembourser : on peut donc assister à la dégradation de ses positions financières dans une relative indifférence dès lors que sa situation lui permet de payer ce qu'il nous doit. C'est l'essence même d'un mécanisme non linéaire : il peut évoluer sans affecter son environnement jusqu'à atteindre un point critique où la situation change.

À l'inverse, un mécanisme linéaire est facile à intégrer dans des calculs mathématiques. Considérons le pendant linéaire de notre problème : imaginons que les dettes des agents soient une part directe de leur capital.

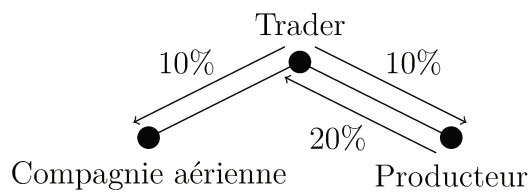


FIGURE 3.1 – Contagion

Le calcul est immédiat, quel que soit le capital au moment du solde des dettes. Notons K_C, K_T, K_P le capital respectif de la compagnie, du trader et du producteur. La valeur totale est donnée par le système suivant :

$$\begin{aligned}
 \text{Valeur}_C &= K_C + 0.1 * K_T \\
 \text{Valeur}_T &= K_T + 0.2 * K_P \\
 \text{Valeur}_P &= K_P + 0.1 * K_T
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Les agents ne pourront jamais faire défaut et le calcul est immédiat. Si un événement inattendu vient affecter le capital initial, les dettes s'ajustent de manière linéaire.

Imaginons désormais la même chose avec des dettes fixes :

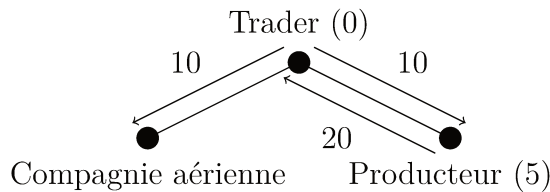


FIGURE 3.2 – Contagion

Imaginons que le pays pétrolier soit en difficulté : son capital au moment de solder les dettes n'est que de 5. S'il récupère 10 que lui doit le trader, il sera tout de même en défaut de paiement envers ce même trader, à qui il doit 20. Il ne sera capable que de payer 15. Ici il est facile d'estimer combien doit payer le pays pétrolier, puisque l'intégralité de sa dette est envers le trader.

Les choses perdent leur simplicité lorsque ce défaut entraîne des difficultés auprès du trader. Supposons que le capital du trader soit nul (0). Compte tenu de ce qu'il doit (10 et 10) et de ce qu'on lui doit (20), le trader est pile à l'équilibre ($20 - 10 - 10 = 0$).

Cependant si le pays pétrolier fait défaut sur sa dette, cela entraîne par contagion le défaut du trader, qui voit sa position devenir $15 - 10 - 10 = -5$. Il va donc devoir faire défaut sur une partie de sa dette. Comme le trader doit de l'argent à la compagnie et au pays pétrolier, il ne peut favoriser une dette plutôt que l'autre, et devra donc respecter la *proportionnalité des créances*. Ses rentrées d'argent étant pour le moment de 15, il va donc verser 7.5 à chacun des deux agents : chaque créancier reçoit une part proportionnelle aux dettes initiales (10 et 10) compte tenu des capacités de paiement du débiteur.

Cependant le versement de 15 de la part du pays pétrolier n'est possible que si le trader verse 10. Si le pays pétrolier reçoit uniquement 7.5, il ne sera capable de payer que 12.5. Ce qui va amoindrir les rentrées du trader, et par voie de conséquence réduire sa capacité de remboursement, et donc les rentrées du pays producteur, etc. Ce processus peut être multiplié si la même chose survient du côté de la compagnie aérienne, que nous avons ignoré jusqu'à présent, ou si le pays producteur a lui-même plusieurs contreparties. Le réseau peut donc agir comme un démultiplicateur de ce phénomène complexe. En lui-même, le réseau est porteur de complexité (Mitchell, 2009). C'est le deuxième facteur de complexité dans le phénomène de la contagion.

La contagion dans les réseaux de dettes est un phénomène qui a suscité beaucoup de travaux de recherche depuis la crise financière de 2008. Plusieurs travaux ont permis de mieux comprendre son fonctionnement, mais les avancées théoriques ne permettent pas cependant de lever entièrement le voile sur la complexité relative à ce phénomène : pour un réseau de dettes donné, il est n'est pas possible mathématiquement de prévoir de manière déterministe le résultat final.

La seule solution à l'heure actuelle est celle que nous avons esquissée précédemment : procéder par étapes successives pour prendre en compte, de manière incrémentale, les conséquences de chaque défaut et l'évolution de la contagion. Cette manière de procéder peut être très longue (voire infinie) en fonction de la manière dont on s'y prend. L'enjeu est ici de trouver une suite d'étapes qui permet d'arriver au résultat final le plus rapidement possible. Il s'agit donc d'une problématique computationnelle : trouver l'algorithme le plus efficace pour obtenir l'issue d'un réseau de dettes.

L'algorithme le plus efficace à ce jour est celui d'Eisenberg and Noe (2001). Il permet d'obtenir l'ensemble des paiements que les agents doivent se faire les uns aux autres pour régler l'ensemble des dettes en prenant en compte la contagion des défauts, en respectant la proportionnalité des créances.

Cet algorithme fonctionne cependant sur un réseau de dettes déterminé : or ce que nous avons ici ce sont des positions financières qui peuvent prendre des valeurs différentes selon les scénarios. Cela ne constitue pas une difficulté majeure : il suffit d'utiliser l'algorithme pour chaque scénario.

3.2 Simulations informatiques de la contagion lorsque les agents ignorent le risque de contrepartie

Compte tenu de la complexité du phénomène de contagion, il est désormais nécessaire de passer par une simulation informatique pour tenter de mieux comprendre les mécanismes à l'oeuvre ici. Il faut donc spécifier les caractéristiques de la simulation : tout est possible, dès lors que sont respectées les conditions spécifiées dans la Proposition 7.

On considère une unique position financière X uniformément distribuée entre 0 et 1. Chaque agent a pour position initiale X . La mesure de risque que l'on va adopter ici est la *mesure de risque entropique* :

$$\forall X \in \mathcal{X}, \rho_\gamma(X) = \gamma \ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(-\frac{1}{\gamma} X \right) \right]$$

Le coefficient γ permet de jouer sur la tolérance au risque. 100 agents sont générés avec des coefficients de tolérance au risque tirés au hasard (de manière uniforme) entre 0.1 et 0.5. Chaque coefficient γ détermine le capital que l'agent juge nécessaire d'immobiliser $\rho_\gamma(X)$. Chaque agent est doté de cette quantité.

Quatre types de réseau sont considérés. Le premier est un réseau *coeur-périphérie*, suivant la définition de Borgatti and Everett (2000). Il s'agit d'un réseau dans lequel

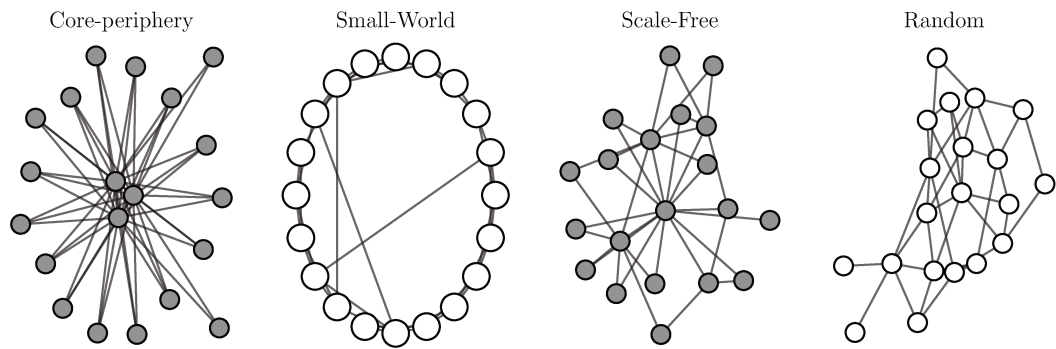


FIGURE 3.3 – Les autres formes de réseaux considérées ici.

un groupe d’agents qui se connaissent tous entre eux forme le coeur, tandis que le reste forme la périphérie : ce deuxième groupe connaît certains agents du coeur, mais les agents qui le composent se connaissent très peu entre eux. Dans notre cas, il sert à modéliser le fait que les entreprises classiques (la périphérie) tendent à s’adresser à des banques (le coeur), qui sont très connectées entre elles.

Un grand nombre d’études empiriques ont montré que la topologie coeur-périphérie est très présente parmi les réseaux financiers (Craig and von Peter, 2014 ; Freixas et al., 2000 ; Fricke and Lux, 2015 ; Langfield et al., 2014 ; Li and Schürhoff, 2018 ; Maggio et al., 2016 ; in ’t Veld and van Lelyveld, 2014). En particulier, Peltonen et al. (2014) a montré que certains marchés de gré à gré de produits dérivés possédaient cette forme caractéristique.

Un deuxième type de réseau considéré ici est le réseau ”petit-monde” tel que défini dans Watts and Strogatz (1998). Les réseaux petit-monde sont utilisés pour représenter un vaste panel de réseaux biologiques, technologiques et sociaux (Watts and Strogatz, 1998). Le troisième réseau modélisé est un réseau invariant d’échelle tel que présenté dans Albert and Barabási (2002). Il s’agit de réseaux dans lesquels un faible nombre de noeuds a une importance démesurée (voir Mitchell (2009)), et qui caractérise certains réseaux financiers (Cont et al., 2013). Enfin des réseaux entièrement aléatoires seront générés en utilisant l’algorithme de Erdos and Rényi (1959). Ces quatre types de réseaux sont illustrés en Figure 3.3

Le Tableau 3.1 récapitule ces paramètres.

Il reste à spécifier un élément déterminant dans la contagion des défauts : la répartition des bénéfices. En effet, un agent qui accapare les bénéfices aura une marge importante pour se prémunir d’un défaut, mais il laissera ses partenaires à la merci d’une faillite qui pourrait in fine le toucher. À l’inverse, une répartition homogène des bénéfices pourrait renforcer le système contre une faillite en cascade,

Paramètre	Valeur
X	Uniforme entre -1 et 1
Position initiale	$1X$ pour tous les agents
Ordre	Aléatoire
Mesure de risque ρ	Mesure de risque entropique : $\forall X \in \mathcal{X}, \rho_\gamma(X) = \gamma \ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(-\frac{1}{\gamma} X \right) \right]$
Tolérance au risque γ	Uniformément distribuée entre 0.01 and 0.5
Capital initial	$\rho_\gamma(X)$
Nombre d'agents	100
Nombre de tirages	1000
Réseau coeur-périphérie	10 agents dans le coeur
Réseau invariant d'échelle	Probabilité de 0.3 pour chaque lien coeur-périphérie 5 arêtes pour chaque agent ajouté
Réseau petit-monde	10 voisins, probabilité de 0.1 de rediriger une arête
Réseau aléatoire	Probabilité de 0.1 pour chaque arête

TABLE 3.1 – Paramètres initiaux

tout comme disperser inutilement les ressources financières. Dans les deux cas, il est difficile d'évaluer l'impact sur la contagion. Considérons ces deux cas de figure.

3.2.1 Lorsque l'agent initiateur de la transaction empoche tout...

Dans cette première configuration, l'agent à l'initiative de la transaction capte l'intégralité des bénéfiques. Il laisse ses contreparties à leur niveau d'indifférence. À tour de rôle et dans un ordre aléatoire, les agents concluent des transactions suivant la Proposition 4. Une fois le marché à l'équilibre, on peut considérer ce qu'il se passe dans chaque scénario. Ici la position financière X varie entre -1 et 1 , ce que l'on peut facilement représenter sur l'axe des abscisses (horizontal). Sur l'axe des ordonnées est représenté l'indicateur clé ici : le pourcentage des agents qui font défaut. Les résultats dans le cas du réseau aléatoire sont représentés sur la Figure 3.4.

Sur l'axe des abscisses, nous avons les réalisations de X . Sur l'axe des ordonnées, la proportion d'agents qui font défaut, c'est-à-dire la part des agents qui n'ont pas assez de capital pour faire face à leur position financière. Tous les agents ont comme position initiale X . Étant donné leur coefficient de tolérance au risque $\rho_\gamma(X)$, ils immobilisent plus ou moins de capital pour faire face à ce risque. Comme les tolérances au risque sont différentes dans la population, on observe naturellement que les agents font défaut à des moments différents dans la situation initiale (courbe en ".....").

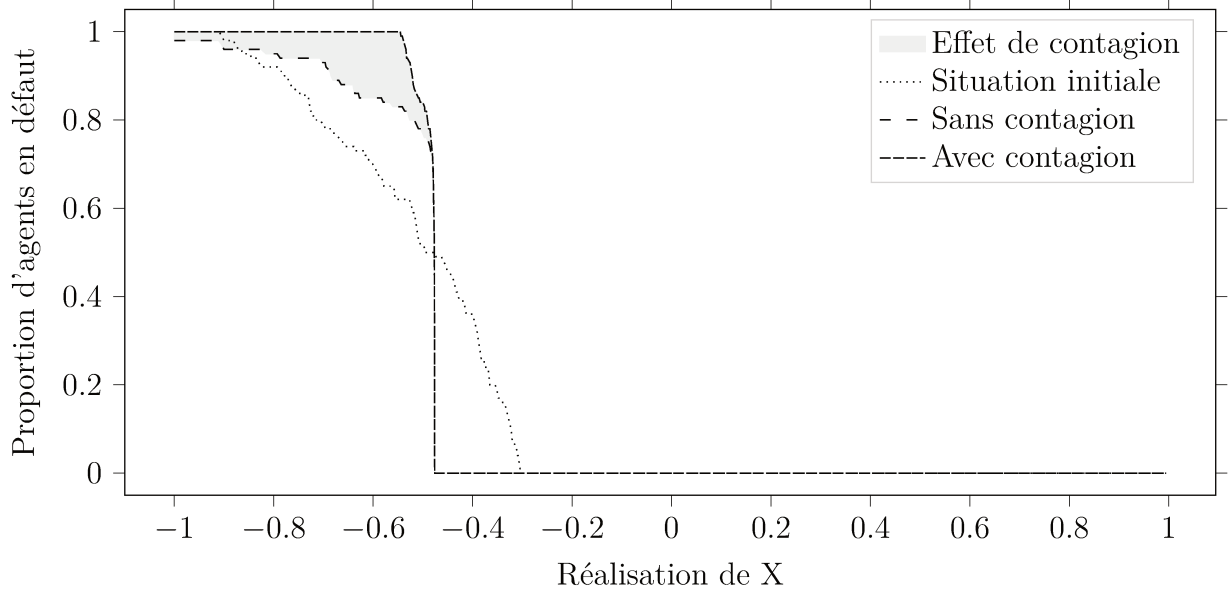


FIGURE 3.4 – Proportion d’agents en défaut dans un réseau aléatoire

Dans le cas où il n’y a pas d’effet de contagion (courbe en ”- -”), on observe bien ce que les résultats théoriques précédents laissaient deviner : personne ne fait défaut jusqu’à ce que X atteigne une réalisation suffisamment basse pour atteindre le point de faillite systémique (ici situé à peu près à -0.5). Les agents qui n’ont pas réalisé de bénéfice font alors défaut. Les agents qui ont accumulé des bénéfices sont capables de résister plus longtemps, et une petite minorité survit à toutes les réalisations de X .

Cependant, la proportion des défauts calculés pour cette courbe est purement théorique, car elle ne prend pas en compte la contagion des défauts. Une fois prise en compte (courbe en ”- . -”), on observe qu’une fois le point de faillite systémique atteint, une part importante des survivants est entraînée par la faillite des agents qui ont réalisé moins de bénéfices. Très rapidement, c’est l’intégralité du système qui fait défaut. La différence entre les deux courbes permet d’évaluer précisément l’ampleur de l’effet de la contagion (zone grise).

Les résultats sont similaires dans les autres types de réseau (Figure 3.5).

Ces résultats semblent indiquer que la forme du réseau n’influe pas sur le phénomène. Lorsque l’on effectue 1000 simulations et que l’on évalue les résultats (Table 3.2), les différences sont en effet très faibles entre les différents réseaux.

On observe par ailleurs que laisser les agents acheter et vendre des produits dérivés augmente la part de défauts dans le système.

On note également qu’une part importante des agents font défaut immédiatement, ce qui signifie qu’ils n’ont réalisé absolument aucun bénéfice. Cela provient du

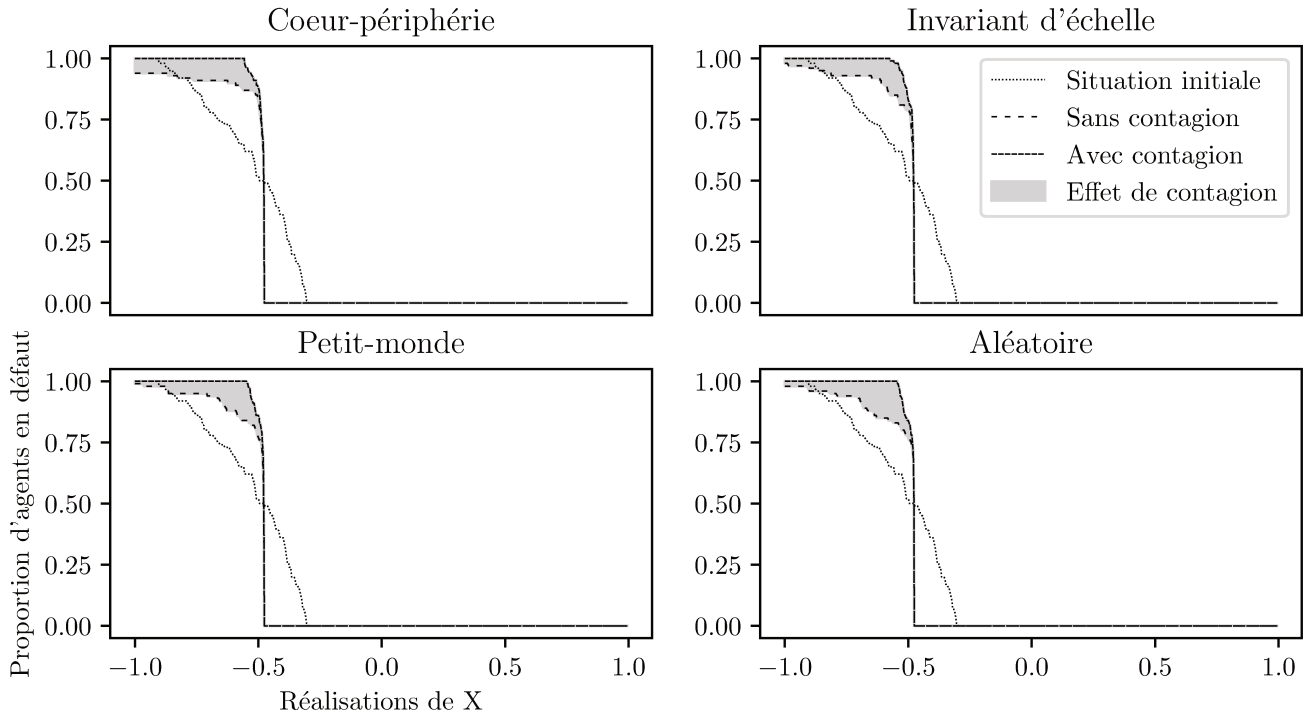


FIGURE 3.5 – Simulations avec différents réseaux

	Core-periphery		Small-world		Scale-free		Random	
	Mean	Std	Mean	Std	Mean	Std	Mean	Std
Initial	0.245	0.012	0.245	0.012	0.245	0.012	0.245	0.012
Tradable	0.248	0.014	0.242	0.014	0.241	0.014	0.241	0.014
Non-tradable	0.262	0.014	0.261	0.014	0.260	0.014	0.260	0.014

TABLE 3.2 – Part des défauts lorsque l'initiateur empoche tout (1000 simulations)

fait que l'initiateur empêche tout. Si l'on répartit de manière égalitaire les bénéfices à chaque transaction, cela fait-il disparaître le phénomène de faillite globale auquel nous assistons ici ?

3.2.2 ... et lorsque les bénéfices sont répartis de manière égalitaire

Supposons maintenant que l'initiateur de la transaction cherche à répartir les bénéfices de manière égalitaire : son objectif est désormais de maximiser l'augmentation de la satisfaction de tout le monde. Une manière de mathématiser cet objectif est d'utiliser la *solution de Nash à n personnes* (Lensberg, 1988) : l'initiateur cherche à maximiser le produit de ces augmentations de satisfaction.

Formellement, le programme de maximisation devient :

$$\begin{aligned} & \sup_{F_{ij} \in \mathcal{X}, \pi_{ij} \in \mathbb{R}, j \in I} \prod m \\ & \text{s.t. } m_k \geq 0 \end{aligned}$$

avec π désignant le produit et m_k le bénéfice de l'agent k (à comprendre comme l'opposé de la diminution du risque perçu) :

$$\begin{aligned} m_i &= \rho_{\gamma_i}(X_i) - \rho_{\gamma_i}(X_i - \sum_{j \in I} (F_{ij} - \pi_{ij})) \\ m_j &= \rho_{\gamma_j}(X_j) - \rho_{\gamma_j}(X_j + (F_{ij} - \pi_{ij})) \quad \forall j \in I \end{aligned}$$

D'après la Proposition 5, la répartition est la même que précédemment, à la différence des prix des produits dérivés contractés : ceux-ci permettent d'égaliser les bénéfices de tous les agents ($m_i = m_j \quad \forall j \in I$).

Malgré la répartition égalitaire des bénéfices, un point de faillite systémique émerge toujours (Figure 3.6). En comparant les résultats avec la Figure 3.5, on observe que la répartition égalitaire permet d'augmenter le nombre de survivants avant l'effet de contagion. Cependant cette contagion est exacerbée par la faible marge de la totalité des agents. Il semblerait que précédemment les agents ayant accumulé des bénéfices servaient de "coupe-feu" à la propagation des défauts : désormais, les bénéfices étant ventilés dans tout le réseau, il n'y a plus d'agents ayant accumulé des réserves pour freiner la contagion.

Une nouvelle fois, la forme du réseau semble ne pas avoir de conséquence notable sur le résultat (Tableau 3.3).

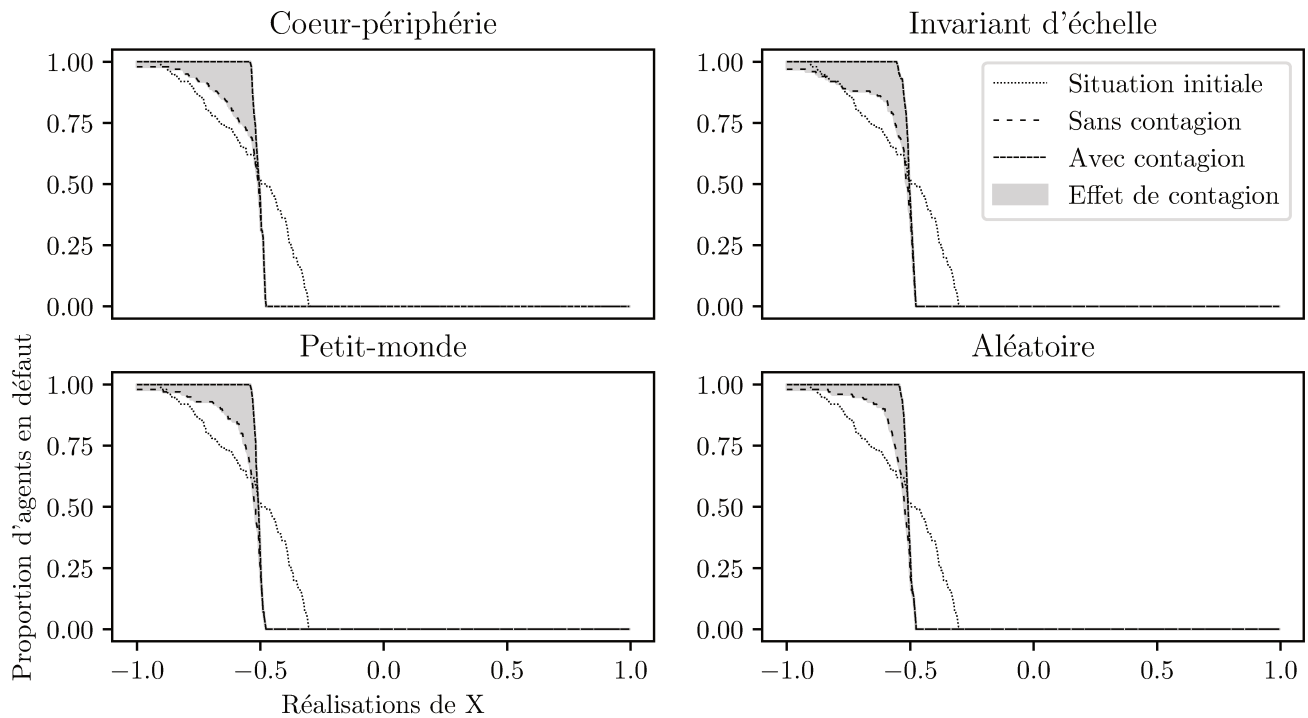


FIGURE 3.6 – Simulations dans différents réseaux avec une solution de Nash à n personnes

	Core-periphery		Small-world		Scale-free		Random	
	Mean	Std	Mean	Std	Mean	Std	Mean	Std
Initial	0.245	0.012	0.245	0.012	0.245	0.012	0.245	0.012
Tradable	0.231	0.014	0.229	0.014	0.230	0.014	0.229	0.014
Non-tradable	0.251	0.014	0.250	0.014	0.251	0.014	0.251	0.014

TABLE 3.3 – Part moyenne des agents en défaut pour plusieurs réseaux avec une solution de Nash à n personnes (1000 simulations)

3.3 Analyse du cas où les agents prennent en compte le risque de contagion

Les résultats précédents montrent que la contagion vient renforcer le point de faillite systémique qui émerge, en entraînant la quasi-totalité du système vers la faillite. Il s'agit cependant d'un résultat lorsque les agents sont inconscients du risque de défaut. Que se passe-t-il lorsqu'ils en sont conscients ?

Compte tenu de la complexité de la contagion, des difficultés apparaissent rapidement lorsque l'on cherche à obtenir des résultats mathématiques à ce sujet. Il est cependant possible de proposer un cas de figure pour lequel il est possible d'obtenir le produit dérivé optimal en présence de risque de contrepartie, et donc de contagion. Il s'agit du cas où la liquidité nécessaire pour couvrir les scénarios déficitaires est disponible, même dispersée, dans le marché. Commençons par considérer le cas à deux agents.

3.3.1 Un cas simple avec deux agents

Imaginons que la compagnie aérienne ait une position financière initiale X . Considérons le problème du point de vue d'un décideur central qui aurait à déterminer le contrat dérivé optimal entre les deux agents. Le problème sans risque de contrepartie est :

$$\inf_{F \in \mathcal{X}} \rho_{\gamma_C}(X_C + F) + \rho_{\gamma_T}(X_T - F)$$

Ici les prix ont disparu, car on s'intéresse au point de vue d'un décideur central.

Maintenant, les agents peuvent faire défaut sur leur dette. On a donc un risque de défaut que l'on peut noter D_C pour la compagnie aérienne et D_T pour le trader. Ce sont les montants que les agents ne paient pas suite à un défaut. Ce sont des fonctions du contrat dérivé qu'ils vont contracter. Le programme devient :

$$\inf_{F \in \mathcal{X}} \rho_{\gamma_C}(X_C + F - D_T(F)) + \rho_{\gamma_T}(X_T - F - D_C(F))$$

Soit m la valeur minimale que peut atteindre X_C . Formellement, on note $m = \inf_{\omega} X(\omega)$. Cette valeur est différente de, $-\infty$ car X est bornée. Les cas intéressants sont ici quand m est négatif. Dans l'exemple introductif, la compagnie pouvait perdre 1000 euros au maximum en cas de crise financière, nous avons donc $m = -1000$.

On s'intéresse au cas où le trader dispose de suffisamment de liquidité pour couvrir ce scénario catastrophe. Formellement, on aura $X_T - m \geq 0$. La position

financière initiale du trader peut couvrir les pertes de la compagnie aérienne sans se mettre en danger lui-même.

Étant donné que $D_T(F) \geq 0$ et $D_C(F) \geq 0$, par monotonie de ρ_{γ_C} et ρ_{γ_T} on a :

$$S(F) = \rho_{\gamma_C}(X_C + F - D_T(F)) + \rho_{\gamma_T}(X_T - F - D_C(F)) \leq \rho_{\gamma_C}(X_C + F) + \rho_{\gamma_T}(X_T - F) \quad (3.2)$$

Notons F^* le contrat optimal donné par la Proposition 4 :

$$F^* = \frac{\gamma_C}{\gamma_C + \gamma_T} * (X_C + X_T) - X_C$$

Remarquons que $X_C + X_T = X_C + m + X_T - m \geq 0$.

On a alors :

$$\begin{aligned} S(F^*) &= \rho_{\gamma_C}(X_C + F^* - D_T(F^*)) + \rho_{\gamma_T}(X_T - F^* - D_C(F^*)) \\ S(F^*) &= \rho_{\gamma_C}\left(\frac{\gamma_C}{\gamma_C + \gamma_T} * (X_C + X_T) - D_T(F^*)\right) + \rho_{\gamma_T}\left(\frac{\gamma_T}{\gamma_C + \gamma_T} * (X_C + X_T) - D_C(F^*)\right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Remarquons que $X_C + X_T = X_C + m + X_T - m \geq 0$. Nous avons donc $D_T(F^*) = 0$ et $D_C(F^*) = 0$. Nous avons donc :

$$S(F^*) = \rho_{\gamma_C}(X_C + F^* - D_T(F^*)) + \rho_{\gamma_T}(X_T - F^* - D_C(F^*)) = \rho_{\gamma_C}(X_C + F^*) + \rho_{\gamma_T}(X_T - F^*) \quad (3.4)$$

Or nous avons :

$$\rho_{\gamma_C}(X_C + F - D_T(F)) + \rho_{\gamma_T}(X_T - F - D_C(F)) \leq \rho_{\gamma_C}(X_C + F) + \rho_{\gamma_T}(X_T - F) \quad (3.5)$$

Et F^* est le seul contrat (à une constante près) qui maximise la partie droite de (3.5). Donc F^* est le seul contrat (à une constante près) qui maximise la partie gauche.

3.3.2 Le cas général avec un nombre fini d'agents

Le cas à n agents peut être obtenu en suivant la même logique.

La répartition issue de F^* (le cas sans risque de contrepartie) est la répartition optimale à une constante près, et elle est également Pareto-optimale.

Par monotonie, on étend l'inégalité (3.5) au cas général. Là encore, toute situation avec des défauts atteindra un bien-être social inférieur à une situation sans défaut. Le bien-être social sans défaut atteint un maximum unique avec les positions finales X^* , qui sont elles à une constante près.

Donc logiquement si ces positions finales sont atteintes par un ensemble de contrats dérivés qui rendent nuls les défauts, ces contrats atteignent le maximum unique.

Si la liquidité totale du système est suffisante pour couvrir le pire scénario pour le système, alors il existe un ensemble de contrats qui permettent d'atteindre l'optimum de Pareto.

Formellement, nous avons la proposition suivante :

Proposition 11. *Soit $X_i^* = \frac{\gamma_i}{\sum_{j \in N} \gamma_j} \sum_{j \in N} X_j = \frac{\gamma_i}{\sum \gamma} \sum X$ (à une constante près).*

$\sum_i \rho \gamma_i (X_i^)$ est le bien-être maximum que peut atteindre un ensemble d'agents dans un réseau de produits dérivés avec risque de contrepartie.*

Ce maximum peut-être atteint par un ensemble de contrats dérivés dans tout réseau connecté où la liquidité totale est suffisante ($\sum X \geq 0$).

Le fait qu'un ensemble de contrats dérivés existe et atteigne ce maximum dans tout réseau connecté est relativement trivial. On peut par exemple imaginer la construction suivante :

- On désigne un agent "centralisateur" ;
- On établit un premier ensemble de contrats dérivés qui permettent d'acheminer la totalité de la position de tous les autres agents vers celui-ci. C'est possible, car le réseau est connecté, donc il existe un chemin entre l'agent centralisateur et chaque contrepartie ;
- On modifie les contrats dérivés de sorte que l'agent centralisateur reverse X_i^* à chaque agent ;
- Comme chaque $X_i^* = \frac{\gamma_i}{\sum \gamma} \sum X$, on a $X_i^* \geq 0$ et donc les montants des défauts deviennent nuls pour tous les scénarios.

On atteint bien l'optimum de Pareto.

Pour comprendre ce que ce résultat signifie, considérons un cas de figure simple avec 3 agents.

Considérons le cas de la compagnie aérienne, du trader et d'un acteur économique. Le réseau est le suivant :

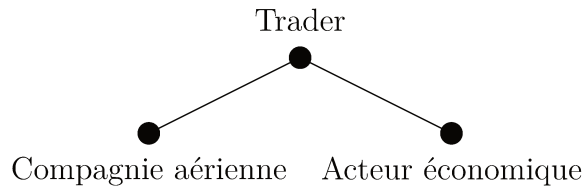


FIGURE 3.7 – Un réseau simple avec trois agents économiques.

La position de la compagnie aérienne est X . En cas de crise pétrolière, la position financière de la compagnie vaut -1000 euros : on a donc $\inf X = -1000$. Imaginons que la position du trader soit de 22000 euros, et celle du dernier acteur économique de 0 . Supposons que chaque agent mesure le risque en utilisant une mesure de risque convexe ρ avec chacun la même tolérance au risque 1 .

La répartition optimale du risque est atteinte par les positions finales $\frac{1}{3}(X - 1000 + 20000) = \frac{1}{3}(X + 21000) = \frac{1}{3}X + 7000$.

Ce résultat peut être réorganisé en transférant de l'argent d'un agent à l'autre tant que cela n'entraîne pas de risque de défaut. Une autre combinaison de positions finales est par exemple :

- $\frac{1}{3}X + 334$ pour la compagnie aérienne ;
- $\frac{1}{3}X + 20666$ pour le trader ;
- $\frac{1}{3}X + 334$ pour l'acteur économique.

Dans le réseau précédent, cela implique que le trader achète $\frac{2}{3}X$ et verse 1334 euros à la compagnie aérienne. Il vend $\frac{1}{3}X + 334$ à l'acteur économique.

L'agent avec des liquidités (le trader) vient donc financer la position dangereuse de la compagnie aérienne, mais pas seulement. Il lui donne assez pour que l'agent ne soit plus sous la menace d'une faillite, mais il récupère au passage une partie de la position risquée. Avec celle-ci, il peut proposer un produit dérivé "reconditionné" de sorte qu'il soit intéressant pour l'acteur neutre. Il s'agit du produit $\frac{1}{3}X + 334$, qui donne des rendements positifs, quel que soit le scénario.

L'agent avec des liquidités conserve une partie de la position risquée en fonction de son appétence au risque, à l'image du *proprietary trading*.

On se retrouve donc face à une situation où l'optimum de Pareto est atteint si l'agent avec des liquidités vient financer l'agent en risque de faillite, mais récupère une partie de la position risquée pour la "repackager" en produit dérivé intéressant pour ses propres clients. L'optimum de Pareto est donc atteint si l'agent avec des liquidités joue le rôle classique - voire décrié - d'une banque d'investissement, un rôle qui mêle apport en liquidité, trading propriétaire, chaîne de dépendance et revente d'un produit dérivé modifié pour être financièrement intéressant à un autre client.

3.3.3 Le risque systémique persiste

Ce résultat témoigne également de la persistance du point de faillite systémique. Le risque est toujours diffusé entièrement dans le réseau, et chaque agent dispose d'une position identique à la différence des montants monétaires, qui sont réorganisés pour éviter les défauts. Cependant, si auparavant seuls les agents porteurs d'une position potentiellement négative faisaient défaut, désormais des chaînes de dépendance se sont établies avec les autres agents.

Considérons un exemple caricatural. L'agent 1 dispose d'une position financière X_1 qui atteint au minimum -10 . Il est le seul agent avec une position financière qui peut être négative; les X_2, X_3, \dots, X_n sont systématiquement positifs. L'ensemble du système dispose d'un excès de liquidité de 10. L'optimum de Pareto consiste ici à diriger cette liquidité vers l'agent 1, avant de prélever une série de contrats dérivés basés sur le produit - systématiquement positif et donc intéressant - formé par $X + 10$.

Imaginons que pour un scénario ω tel que $X_1(\omega) = -10$, les agents se soient trompés et la réalisation de X_1 vaut en fait -11 . Dans la situation initiale, le défaut de l'agent 1 s'aggrave simplement, sans affecter le reste du marché. À l'optimum de Pareto, l'ensemble du marché fait défaut, et le montant à renflouer peut être multiplié par les multiples chaînes de dépendance qui se sont formées.

Le système est donc passé d'une situation où un seul agent fait défaut à cause d'une position uniquement détenue par cet agent à une situation où tout le monde fait défaut si le risque de cette position est mal évalué par les agents.

3.3.4 Situation potentiellement différente en cas de décentralisation

Le résultat précédent montre que l'optimum de Pareto est atteignable si le trader joue un rôle de fournisseur de liquidité et de canal de transmission du risque pour les autres agents. Ce résultat permet également de répondre à la question de la décentralisation.

La décentralisation est le pendant de la situation avec un décideur central : que se passerait-il si les agents étaient laissés à eux-mêmes, comme dans les chapitres 2 et 3 ? Atteindraient-ils l'optimum de Pareto ? La comparaison de l'optimum social et de la situation décentralisée est une approche fréquemment suivie (voir Castiglionesi and Navarro (2008) pour un exemple) afin d'évaluer la nécessité d'intervenir dans un système économique. Si les agents se dirigent par eux-mêmes vers l'optimum social, alors on peut s'abstenir de toute intervention.

Ici il est facile de voir que des conditions bien particulières doivent être réunies pour que les agents se dirigent de manière décentralisée vers l'optimum de Pareto. Le trader subit une perte conséquente lorsqu'il finance la compagnie aérienne : il doit être dédommagé. Il est impossible que la compagnie le dédommage par un paiement immédiat, comme c'était le cas dans le chapitre 1 et 2. Pour voir cela, considérons le prix d'indifférence du trader.

Pour tout contrat F , le trader demandera un prix $\pi(F)$. Ce qui change la position de la compagnie dans le calcul précédent de $X+F$ vers $X+F-\pi(F)$. Mécaniquement, tout prix positif entraîne une baisse de la liquidité de la compagnie et donc un besoin égal en liquidité auprès du trader. On est donc dans la situation où tout produit F sera facturé $F + \pi(F)$, ce qui entraîne le besoin d'un produit dérivé, $F + \pi(F)$ etc. Dans l'exemple précédent, le produit dérivé qui permet à la compagnie d'atteindre la position finale $\frac{1}{3}X + 334$ sera probablement facturé à un prix positif par le trader (bien que cela dépende du reste des réalisations de X et de la mesure de risque choisie). Or $\inf \frac{1}{3}X + 334 = 0$, et donc $\inf \frac{1}{3}X + 334 - \pi = -\pi$. Il faudra donc ajouter π aux liquidités fournies par le trader, ce qui entraînera un doublement du prix (invariance par translation monétaire).

À ce titre l'exemple minimaliste comportant la compagnie et le trader seuls, avec un prix π pour atteindre l'optimum positif, constitue le cas le plus simple démontrant l'existence de situation où les agents restent à un état sous-optimal. Formellement, on peut imaginer que X suit une loi uniforme entre -1000 et 0 et que le trader détient 2000 : comme $X \leq 0$ par monotonie $\rho(\frac{1}{2}X) \geq \rho(0)$. En supposant que les deux agents ont la même tolérance au risque, le prix d'indifférence du trader est $\rho(\frac{1}{2}X + 1500) - \rho(2000) = \rho(\frac{1}{2}X) - \rho(0) + 500$ ce qui est un prix positif. D'une manière générale il n'existe pas de dérivé possible entre les deux agents, car la compagnie est systématiquement dans le négatif.

Si le prix du dérivé est positif, c'est-à-dire si le trader subit une perte en finançant la compagnie, son bénéfice doit nécessairement passer par la revente des produits dérivés "reconditionnés" à ses clients. Il est facile d'imaginer des situations dans lesquelles ce bénéfice ne suffit pas à couvrir le financement de la compagnie aérienne ; une appétence faible au risque de ses clients, un faible nombre (voire l'absence) de ceux-ci, le fait qu'ils sont déjà exposés à une quantité de risque proche de l'optimum social.

3.4 Conclusion du chapitre

Ce chapitre intègre à l'analyse le risque de contrepartie : lorsqu'un agent fait défaut, il n'est pas capable de régler une partie de ses dettes.

Le premier cas de figure étudié est celui où les agents ignorent ce risque. Les résultats montrent que les agents qui ont survécu au point de faillite systémique sont entraînés par la chute de leurs débiteurs. Les simulations semblent indiquer que la topologie du réseau n'impacte que faiblement l'issue, tout comme la répartition des bénéfices. Une répartition inégalitaire provoque un véritable bond initial lié aux échecs des agents n'ayant pas réalisé de bénéfice, puis le rythme des faillites est ralenti par les agents "riches" capables de résister. Une répartition égalitaire des bénéfices lisse quelque peu les faillites initiales, car tout le monde dispose d'une petite réserve ; cependant, l'absence d'agents avec beaucoup de capital rend la contagion plus sévère. Dans l'ensemble, la répartition des bénéfices ne change pas le fait qu'un point de faillite systémique émerge.

Face à ce résultat, que conclure ? Gardons tout d'abord en tête qu'il s'agit d'un résultat obtenu lorsque les agents sont inconscients du risque de défaut. Les transactions qui sont conclues sont "optimales" en partant du fait que chaque agent va honorer sa dette. Le défaut et le mécanisme de contagion de ces défauts ne font pas partie des éléments que les agents pondèrent avant de prendre leur décision. Dans ce cas-là, quelle est l'utilité de ce résultat ? Il peut s'appliquer aux situations où les agents sont inconscients du risque de défaut, ou aux situations où le défaut des agents entraîne le renflouement par une autorité étatique, comme c'est souvent le cas dans le monde financier. Le défaut d'une institution bancaire provoque ainsi l'intervention de l'État, notamment afin d'éviter une crise financière. Si les agents agissent en supposant que tout défaut sera compensé par l'État, alors le modèle présenté dans ce chapitre est applicable.

Une question plus complexe est celle de l'ensemble de dérivés optimaux lorsque l'on prend en compte le risque de contrepartie et du risque de contagion. Nous avons vu que nous étions capables de répondre mathématiquement à cette question dans le cas où la liquidité nécessaire pour couvrir toutes les pertes possibles était disponible au sein du marché.

Dans cette configuration, l'ensemble de produits dérivés optimaux du point de vue du décideur central est à la fois intuitif et surprenant. Les agents disposant de liquidités jouent le rôle de financeurs des agents à risque, et récupèrent une partie des positions risquées pour les transformer en produits dérivés intéressants pour les autres agents. On assiste à un comportement fidèle à celui des banques d'investissement ; elles apportent de la liquidité, vendent des dérivés qui jouent le

rôle d'assurances partielles pour les acteurs économiques qui font face à des risques, puis reconditionnent ces positions pour fournir des produits d'intérêt à leurs autres clients. Selon leur position initiale et leur appétence au risque, elles peuvent également conserver une part de risque, à l'image du trading propriétaire. Au passage, elles mettent à profit leurs connexions dans le réseau et créent par là des chaînes de dépendance supplémentaires.

Ce résultat témoigne de la propension d'un ensemble d'agents à établir des liens dès lors que la liquidité est suffisante pour contenir le risque de faillite des quelques agents initialement menacés. Cependant, en cas d'erreur de jugement, c'est désormais l'ensemble du système qui risque la faillite.

Il s'agit d'une configuration qui peut ne pas être atteinte par les agents eux-mêmes. La forme du réseau, les tolérances respectives et les positions initiales peuvent conduire à des équilibres sous-optimaux en l'absence d'un décideur central.

Il nous reste à répondre à la question des dérivés optimaux en présence de risque de contagion, mais dans un cadre générique. C'est l'objet du chapitre suivant.

3.5 Annexe : littérature sur la contagion financière

La problématique de la contagion dans les réseaux financiers a été traitée dans la littérature scientifique. De quelle manière la méthode décrite dans ce chapitre diffère-t-elle ? On peut distinguer trois approches dans la littérature : l'analyse des déterminants de la contagion, la recherche d'indicateurs fiables pour mesurer cette contagion et la proposition de modèles pour comprendre comment elle apparaît.

3.5.1 Déterminants de la contagion

Les déterminants de la contagion dans les réseaux ont été étudiés et plusieurs résultats sont disponibles.

Plusieurs travaux mettent en lumière l'ambivalence du rôle de la connectivité du réseau sur la contagion. C'est par exemple le cas de Nier et al. (2007). Pour des niveaux faibles de connectivités, une augmentation de celle-ci amplifie les effets de la contagion. Mais au-delà d'un certain seuil, la connectivité permet au système de mieux répartir les chocs et réduit donc les conséquences de la contagion.

L'ambivalence du mécanisme de contagion est un élément que l'on retrouve également dans le travail de Elliott et al. (2014). Ce papier différencie deux composantes qui peuvent jouer sur la contagion : la diversification et l'intégration. La diversi-

fication joue un rôle similaire au degré de connectivité dans Nier et al. (2007) : plus un agent a des actifs diversifiés, plus il est connecté aux autres acteurs économiques. À ce titre, Elliott et al. (2014) obtient un résultat similaire au sujet de l'effet non monotone de la diversification : la contagion est maximale lorsque les agents sont suffisamment intégrés pour permettre la propagation, mais pas assez diversifiés pour qu'ils risquent quand même une faillite individuelle. L'intégration se réfère à l'ampleur des expositions de chaque agents avec les autres. Là encore, l'effet est ambivalent : il est nécessaire qu'un agent soit suffisamment intégré pour que la contagion survienne : néanmoins il doit dépendre de lui-même dans une certaine mesure pour qu'une faillite individuelle survienne et déclenche une cascade de défauts.

Battiston et al. (2012) obtient des résultats similaires, qu'il résume en décrivant l'arbitrage que doivent réaliser les agents économiques : ils sont incités à partager leur risque d'une part, ce qui implique de prendre des positions - et donc s'exposer - chez leurs partenaires. Mais un degré trop élevé de connectivité entraîne un risque lié à la contagion, risque difficile à percevoir pour les agents : Battiston et al. (2012) avertit ainsi que le degré de la contagion varie selon les choix de modélisation.

Gai and Kapadia (2010) obtiennent des résultats différents, grâce à une méthodologie inspirée des réseaux complexes et de la transmission des maladies en épidémiologie. Ces auteurs analysent les conséquences de chocs inattendus sur des réseaux complexes générés de manière aléatoire. Ils montrent que les réseaux étudiés ont une caractéristique qualifiée de "robuste mais fragile" (*robust-yet-fragile*) : la probabilité des défauts est faible mais leurs conséquences sont dévastatrices. Ils montrent également que des chocs qui peuvent apparaître identiques peuvent avoir des conséquences radicalement différentes selon l'endroit du réseau où ils sont localisés. Ce résultat amène les auteurs à avertir que la résilience d'un réseau financier n'est pas la garantie d'une "robustesse future".

Les résultats de Acemoglu et al. (2015) vont légèrement à contresens de l'ambivalence observée quant à l'impact de la connectivité sur la contagion. Le papier montre qu'en présence de chocs importants, la connectivité devient systématiquement un facteur amplificateur dans leur modèle. Les réseaux très connectés semblent plus robustes, mais disposent en fait d'un point de basculement où la crise devient systémique. Les auteurs font le rapprochement entre leurs résultats et ceux de Gai and Kapadia (2010).

3.5.2 Mesure de la fragilité d'un réseau

Mesurer la fragilité d'un réseau de dettes est une question étroitement liée.

Cont et al. (2013) utilisent un indicateur développé dans une suite d'articles précédents (Cont and Schaanning, 2010 ; Cont and Moussa, 2010) appelé le Contagion Index, qui propose de mesurer le potentiel de contagion d'un acteur bancaire en fonction de la perte totale en capital qu'il générerait dans un scénario de crise. Appliqué à des données relatives au système financier brésilien, l'étude révèle que dans une structure de réseau qui semble suivre un réseau invariant d'échelle, le risque systémique est concentré dans un faible nombre d'institutions bancaires. Le papier montre que l'effet de contagion est déterminant et par conséquent recommande de prendre en compte la topologie formée par les liens financiers entre les institutions.

Cont and Minca (2016) étend cette analyse aux réseaux formés par les contrats dérivés de type "Credit Default Swap". Les auteurs proposent un "indicateur de résilience" (que l'on retrouve également dans Amini et al. (2016)) et analysent l'impact de chocs de liquidité en suivant une démarche similaire à celle suivie dans cette thèse, basée sur des simulations informatiques et la génération de réseaux coeur-périphérie. Leur travail met en lumière le rôle déterminant de certaines créances qui viennent provoquer des points de basculement qui sonnent le début de faillites en cascade dans le système.

Glasserman and Young (2015) utilise le cadre théorique proposé par Eisenberg and Noe (2001) pour étudier le mécanisme de la contagion. Il focalise son analyse sur les caractéristiques propres à un noeud donné pour essayer de mesurer la probabilité qu'un noeud entraîne la faillite des autres en cas de difficultés. Cela permet aux auteurs de proposer un "contagion index" qui a une certaine utilité pratique, puisqu'il n'a pas besoin de l'information de la totalité du réseau pour estimer la probabilité qu'un noeud fasse défaut. À l'inverse, ce chapitre estime la probabilité en procédant à des simulations de type Monte-Carlo et en calculant pour chaque tirage l'algorithme d'Eisenberg et Noe. Une telle méthode à l'avantage de la précision, mais n'est d'aucune utilité pratique pour un décideur financier qui disposerait d'informations partielles.

Hué et al. (2019) combinent un indicateur de causalité temporelle, la causalité au sens de Granger, et le combinent avec une approche qui consiste à supprimer une institution du réseau et analyser l'impact sur le réseau. Les auteurs testent ensuite cet indicateur sur un jeu de données et avancent plusieurs arguments en faveur de sa pertinence : notamment, sa capacité à identifier les mêmes institutions à risque que le Financial Stability Board et sa capacité à prédire les rendements négatifs durant la dernière crise. À la différence de notre approche théorique et simulatoire, ce travail s'attache à proposer un indicateur performant compte tenu des contraintes en matière de données disponibles sur les institutions bancaires, ce

qui rend l'approche immédiatement utilisable.

3.5.3 Décisions des agents

Il s'agit ici des papiers les plus similaires à l'approche suivie dans ce travail de thèse.

Castiglionesi and Navarro (2008) s'intéresse à un modèle réunissant banques, consommateurs et investisseurs. Ils adoptent une représentation simplifiée de la contagion, dans laquelle les partenaires directs d'une banque en faillite font eux aussi faillite. La formation du réseau financier est endogène. Dans cette configuration, le réseau optimal peut s'avérer un réseau coeur-périphérie, régulièrement observé parmi les topologies des réseaux financiers. Le papier compare l'optimum sociétal avec une situation où les décisions sont décentralisées, et montre que les deux équilibres peuvent différer.

Ce papier diffère de l'approche que suivie par cette thèse du point de vue des hypothèses de départ : cette thèse suit une approche centrée sur le produit dérivé optimal, ce qui induit des différences majeures. Elle considère également les réseaux comme exogènes, tandis que la formation de réseau coeur-périphérie de manière endogène est un aspect crucial dans Castiglionesi and Navarro (2008).

L'objectif de Allen and Gale (2000) est de fournir des bases micro-économiques à la contagion financière, ce qui le rend très similaire l'approche développée dans ce travail de thèse. Allen and Gale (2000) utilise un modèle économique comprenant des consommateurs, des banques, un bien unique et trois périodes temporelles. Les consommateurs peuvent désirer consommer le bien en période 1 ou en période 2 : en période 0 ils ne savent pas quelle sera leur volonté à ce sujet, ce qui les pousse à vouloir de la liquidité. Ils déposent leur argent à la banque, contre une garantie de pouvoir consommer en période 1 et 2. La banque peut investir dans deux actifs : un actif liquide et un actif de long-terme qui rapporte plus d'argent mais coûte de l'argent si le capital est retiré avant la date prévu (illiquide). Les consommateurs cherchent à modéliser leur espérance d'utilité.

Les banques sont localisées dans 4 régions. Les régions peuvent compenser les demandes en liquidité. Le papier obtient l'équilibre qui découle de l'optimisation du bien-être de chaque consommateur (social planner optimum). Est ensuite considéré l'optimum en situation décentralisée, et le papier montre que l'optimum précédent peut être atteint en situation de réseau complet ou incomplet parmi les régions. Ici le réseau est fixé et les différentes topologies sont comparées. Enfin, le papier considère la possibilité que l'ensemble des consommateurs demandent plus de liquidité que prévu : la contagion financière frappe alors différemment selon la topologie des liens

entre les régions.

Ce papier diffère de ce travail de thèse sur un aspect fondamental : la contagion financière est analysée sous l'angle de la liquidité financière. Cet aspect oblige les auteurs à représenter un modèle plus complexe que celui développé ici, avec des banques, des consommateurs, un bien de consommation et des actifs financiers. Il n'existe pas d'hétérogénéité parmi les consommateurs, tous identiques en termes d'aversion au risque. Il s'agit d'un modèle tourné vers la liquidité tandis que celui développé ici est tourné vers le partage du risque entre des agents hétérogènes.

Le papier de Freixas et al. (2000) propose un modèle avec n banques et un segment continu de consommateurs à chaque emplacement de banque. Il existe un seul bien et trois périodes. Chaque consommateur dispose initialement d'une unité du bien, qu'il dépose à la banque correspondant à son emplacement. Il peut retirer son bien à la deuxième période, ou attendre la troisième période. Les consommateurs restants à la troisième période se partagent les bénéfices générés par la banque grâce aux dépôts et à un taux d'intérêt fixé. La satisfaction des consommateurs provient de la consommation qui survient en dernière période. Il y a donc une incitation à maintenir leur bien à la banque s'ils pensent que celle-ci ne rencontrera pas de problème, versus une incitation à retirer leur bien en deuxième période s'ils suspectent des difficultés futures. Une dimension spatiale est introduite avec certains consommateurs devant voyager. La faillite d'une banque peut survenir avec une probabilité faible.

Les équilibres de ce jeu économique sont ensuite analysés. Les résultats montrent qu'un certain nombre de situations inefficaces peuvent survenir, du fait d'un manque de coordination des consommateurs. Au premier lieu, le retrait excessif de fond et la contagion qui s'ensuit, frappant des banques solvables : le papier parvient donc à modéliser un *bank run*, une panique bancaire.

Ce travail diffère du nôtre par son objectif même, qui est de modéliser la contagion sous l'angle d'un problème de liquidité. Les auteurs mentionnent que la contagion financière peut être générée "par trois types d'opérations : le système de paiement, le réseau interbancaire et le marché des produits dérivés" (Bodie, 2009). Le papier se focalise sur les deux premiers aspects, tandis que le troisième est l'objet de ce travail de thèse.

Elliott et al. (2014) modélise un ensemble de n agents et m actifs. Les agents détiennent une part (en pourcentage) des actifs et des autres organisations, ce qui écarte les effets non linéaires. Le papier s'intéresse alors à la problématique comptable de valoriser les agents compte tenu de leurs possessions. Le modèle intègre des effets non linéaires de la manière suivante : si un agent voit sa valeur descendre en

dessous d'un certain seuil, alors une diminution non linéaire de valeur lui est appliquée. Un exemple donné est celui d'une compagnie aérienne dont la valeur diminue de telle sorte qu'elle se trouve incapable de payer pour son fuel : l'arrêt brutal de son activité entraîne alors une baisse non linéaire de sa valeur. L'équilibre économique est alors considéré du point de vue des valeurs qui permettent de résoudre le problème de la valorisation comptable.

Ce modèle diffère du nôtre au sujet de l'objet fondamental, qui est ici la prise de part dans des actifs et des organisations, et non la répartition du risque. Cela entraîne un set de décision très restreint pour les agents. La "décision" des agents est également un aspect moins central dans ce travail, qui se concentre sur la notion d'équilibre. Il n'y a pas de modélisation du comportement. Il y a également une contrainte de linéarité dans les liens entre les agents, pour des raisons mathématiques. Cela impose aux auteurs d'introduire de manière volontariste de la non-linéarité.

Acemoglu et al. (2015) modélise n banques neutres au risque dans un modèle à trois périodes. En dehors du système, des investisseurs existent et sont représentés par un segment continu. Les banques ont chacun accès à un projet qui demande un prêt pour un certain montant de capital. Chaque banque est initialement dotée de ce capital, mais elle n'est pas autorisée à le prêter directement : elle doit emprunter aux autres banques et aux investisseurs externes selon des conditions fixées ex ante. Les projets rémunèrent à un taux fixe en troisième période, mais peuvent être liquidés avec certaines pertes à la deuxième période. Les dettes doivent être payées à la deuxième période, ce qui peut nécessiter la liquidation des projets. La formation du réseau est endogène, car elle dépend des choix d'emprunt des banques.

Le papier montre que, laissés à eux-mêmes, les agents conduisent le système vers un équilibre non efficace. Les auteurs soulignent la présence d'une externalité négative liée au fait que les agents sous-estiment l'effet négatif de leurs décisions sur leurs relations au-delà du 1er degré : les voisins de leurs voisins, etc. La conséquence est un excès de liquidité et un mauvais choix des débiteurs ce qui aggrave la contagion.

Ce papier diffère du mien sur le fait que ce sont les problématiques bancaires de prêt à des projets et de gestion de la liquidité qui sont au cœur des décisions. Il n'existe pas de composante aléatoire dans les éléments financiers : tous les projets sont déterministes et connus à l'avance.

Castiglionesi and Navarro (2019) s'intéressent au trade-off qui survient lorsque les institutions bancaires doivent choisir leur exposition à d'autres agents économiques. D'une part la connexion à d'autres acteurs permet de diversifier ses risques et donc d'améliorer sa position globale : d'autre part l'augmentation des connexions accroît

également la probabilité d'être frappé par la contagion des défauts. Le système est composé de banques qui prennent des décisions en matière de connexions aux autres banques et de projets dans lesquels elles investissent. Le papier obtient la forme optimale du réseau dans ces conditions, qui est un réseau coeur-périphérie. Il s'intéresse ensuite aux conditions sous lesquelles les banques atteignent cet équilibre de manière décentralisée ?

Les hypothèses de Castiglionesi and Navarro (2019) permettent d'obtenir des résultats mathématiques au sujet de la structure optimale du réseau. Ce travail de thèse fait face à des contraintes similaires, et les résultats mathématiques obtenus dans ce chapitre l'ont été sous l'hypothèse que les agents supposent que leurs contreparties vont honorer leur dette. Lever cette hypothèse implique d'utiliser l'intelligence artificielle, comme nous le verrons dans le chapitre suivant. Le modèle de Castiglionesi and Navarro (2019) se concentre cependant sur la liquidité : les relations entre les institutions se font sous la forme d'un réseau interbancaire. La rentabilité - et le risque - des banques se fait à travers le choix entre un projet risqué et un projet non risqué. Ce travail de thèse adopte une approche radicalement différente : les agents ont des positions financières qui sont risquées en elle-même, et les liens proviennent de cette répartition du risque.

Babus and Hu (2017) s'intéresse à la formation de réseau dans le marché de gré à gré. Les choix de modélisation sont extrêmement stylisés : n agents se rencontrent au hasard. La moitié d'entre eux a un surplus de liquidité, tandis que l'autre moitié dispose d'un projet pour lequel il recherche des fonds. Plusieurs modalités sont étudiées, dont la mise à disposition de collatéral de la part des agents qui reçoivent des liquidités. Le papier analyse ensuite quelle est la forme du réseau à l'équilibre selon les différentes modalités. En présence de coûts pour acquérir de l'information, une structure avec un intermédiaire central (en étoile) émerge.

Ce papier est différent du mien au sujet des modalités de contrats entre les agents. Elles sont représentées de manières très simplifiées tandis que le travail de thèse considère le comportement de nos agents sous l'angle du produit dérivé optimal.

Cabrales et al. (2017) modélise n agents dotés chacun d'un projet risqué avec les mêmes caractéristiques. Les agents peuvent investir dans leur projet comme dans celui des autres. Le rendement des projets est une variable aléatoire : il peut être égal à R qui est le même taux pour tous les projets, mais il peut également être frappé d'un choc d'ampleur aléatoire. Un seul choc est possible : la probabilité que deux chocs surviennent est suffisamment faible pour être ignorée.

Le papier étudie ensuite la structure financière optimale en fonction de la distribution de probabilité des chocs. Il s'intéresse à l'optimalité du point de vue social.

Le papier démontre ensuite que sous certaines conditions, il existe un équilibre qui ne soit l'optimum social. Il s'agit d'une démarche similaire à celle suivie dans ce chapitre.

Ce modèle diffère du nôtre par le fait que les liens entre les agents se limitent à des prises de participations dans des projets. Les agents sont identiques, neutres au risque et maximisent simplement l'espérance des revenus, tandis que l'hétérogénéité des agents et leur aversion au risque constituent le moteur du modèle adopté ici.

Jackson and Pernoud (2019) souligne le fait que dans la littérature sur la contagion dans les réseaux financiers, la modélisation a fait le choix de réseaux de dettes ou de prise de participation. Le papier de Jackson and Pernoud (2019) modélise n agents qui représentent tout acteur du monde financier pouvant jouer sur le mécanisme de contagion, ce qui comprend entre autres "les banques, fonds de capital-risque, courtiers, chambres de contreparties, compagnies d'assurance", etc. Il y a m actifs et les agents peuvent contracter des dettes et prendre des positions dans les actifs et dans les autres agents. Les agents maximisent l'espérance de valeur de leur portefeuille : on est donc dans un cadre théorique relatif à l'utilité espérée, avec des agents neutres au risque.

Le papier présente un traitement extensif de ce modèle, et met en lumière le fait que des la structure en réseau peut produire des incitations dangereuses du point de vue de la contagion. En particulier, les agents sont incités à prendre trop de risque et à entretenir des relations privilégiées avec un faible nombre de contreparties, notamment en corrélant leurs investissements avec elles.

Ce papier présente le même objectif qui est le nôtre en termes d'extension des possibilités des agents : la motivation du travail est d'introduire la possibilité de souscrire des dettes comme de prendre des positions. Ce travail de thèse a opté pour une possibilité différente : celle de choisir une modélisation relativement générale des produits dérivés et de laisser les agents établir n'importe quel type de contrat. Là encore l'objectif du papier est de se situer dans le domaine bancaire et sans avoir les produits dérivés en objectif central : ce travail de thèse est centré sur le partage du risque entre agents dans un réseau, avec pour focus les contrats dérivés.

3.6 Bibliographie du chapitre

Acemoglu, D., Ozdaglar, A., and Tahbaz-Salehi, A. (2015). Systemic Risk and Stability in Financial Networks. *American Economic Review*, 105(2) :564–608.

Albert, R. and Barabási, A.-L. (2002). Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, 74(1) :47–97.

- Allen, F. and Gale, D. (2000). Financial Contagion. *Journal of Political Economy*, 108(1) :1–33.
- Amini, H., Cont, R., and Minca, A. (2016). Resilience to Contagion in Financial Networks. *Mathematical Finance*, 26(2) :329–365.
- Babus, A. and Hu, T.-W. (2017). Endogenous intermediation in over-the-counter markets. *Journal of Financial Economics*, 125(1) :200–215.
- Battiston, S., Delli Gatti, D., Gallegati, M., Greenwald, B., and Stiglitz, J. E. (2012). Liaisons dangereuses : Increasing connectivity, risk sharing, and systemic risk. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 36(8) :1121–1141.
- Bodie, Z. (2009). *Investments*. Tata McGraw-Hill Education.
- Borgatti, S. P. and Everett, M. G. (2000). Models of core/periphery structures. *Social networks*, 21(4) :375–395.
- Cabrales, A., Gottardi, P., and Vega-Redondo, F. (2017). Risk Sharing and Contagion in Networks. *The Review of Financial Studies*, 30(9) :3086–3127.
- Castiglionesi, F. and Navarro, N. (2008). Optimal Fragile Financial Networks. SSRN Scholarly Paper ID 1089357, Social Science Research Network, Rochester, NY.
- Castiglionesi, F. and Navarro, N. (2019). (In)Efficient Interbank Networks. *Journal of Money, Credit and Banking*.
- Cont, R. and Minca, A. (2016). Credit default swaps and systemic risk. *Annals of Operations Research*, 247(2) :523–547.
- Cont, R. and Moussa, A. (2010). Too interconnected to fail : Default contagion and systemic risk in financial networks. Technical report, Working Paper, Columbia University and University Paris VI.
- Cont, R., Moussa, A., and Santos, E. B. (2013). Network Structure and Systemic Risk in Banking Systems. In Fouque, J.-P. and Langsam, J. A., editors, *Handbook on Systemic Risk*, pages 327–368. Cambridge University Press, Cambridge.
- Cont, R. and Schaanning, E. (2010). Measuring systemic risk : The Indirect Contagion Index. Technical report, Working paper. Adrian, T. and Shin, HS.
- Craig, B. and von Peter, G. (2014). Interbank tiering and money center banks. *Journal of Financial Intermediation*, 23(3) :322–347.

- Eisenberg, L. and Noe, T. H. (2001). Systemic Risk in Financial Systems. *Management Science*, 47(2) :236–249.
- Elliott, M., Golub, B., and Jackson, M. O. (2014). Financial Networks and Contagion. *American Economic Review*, 104(10) :3115–3153.
- Erdos, P. and Rényi, A. (1959). On random graphs I. *Publ. Math. Debrecen*, 6 :290–297.
- Freixas, X., Parigi, B. M., and Rochet, J.-C. (2000). Systemic Risk, Interbank Relations, and Liquidity Provision by the Central Bank. *Journal of Money, Credit and Banking*, 32(3) :611–638.
- Fricke, D. and Lux, T. (2015). Core–Periphery Structure in the Overnight Money Market : Evidence from the e-MID Trading Platform. *Computational Economics*, 45(3) :359–395.
- Glasserman, P. and Young, H. P. (2015). How likely is contagion in financial networks? *Journal of Banking & Finance*, 50 :383–399.
- Hué, S., Lucotte, Y., and Tokpavi, S. (2019). Measuring network systemic risk contributions : A leave-one-out approach. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 100 :86–114.
- in ’t Veld, D. and van Lelyveld, I. (2014). Finding the core : Network structure in interbank markets. *Journal of Banking & Finance*, 49 :27–40.
- Jackson, M. O. and Pernoud, A. (2019). What Makes Financial Networks Special? Distorted Investment Incentives, Regulation, and Systemic Risk Measurement. SSRN Scholarly Paper ID 3311839, Social Science Research Network, Rochester, NY.
- Langfield, S., Liu, Z., and Ota, T. (2014). Mapping the UK interbank system. *Journal of Banking & Finance*, 45 :288–303.
- Lensberg, T. (1988). Stability and the Nash solution. *Journal of Economic Theory*, 45(2) :330–341.
- Li, D. and Schürhoff, N. (2018). Dealer Networks. SSRN Scholarly Paper ID 2023201, Social Science Research Network, Rochester, NY.
- Maggio, M. D., Kermani, A., and Song, Z. (2016). The value of trading relationships in turbulent times. Technical report, National Bureau of Economic Research.

- Mitchell, M. (2009). *Complexity : A guided tour*. Oxford University Press.
- Nier, E., Yang, J., Yorulmazer, T., and Alentorn, A. (2007). Network models and financial stability. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 31(6) :2033–2060.
- Peltonen, T. A., Scheicher, M., and Vuillemey, G. (2014). The network structure of the CDS market and its determinants. *Journal of Financial Stability*, 13 :118–133.
- Watts, D. J. and Strogatz, S. H. (1998). Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 393(6684) :440.

Chapitre 4

Dépasser les contraintes théoriques à l'aide de l'informatique évolutionnaire

Pendant l'essentiel des chapitres précédents, les décisions des agents ne prenaient pas en compte les risques liés aux défauts et à leur contagion. L'analyse a ensuite considéré le cas avec risque de contrepartie, dans un marché où la liquidité est suffisante. Ce chapitre s'intéresse au cas général. Il s'agit d'un problème complexe à résoudre mathématiquement. L'objectif de ce chapitre est donc de proposer une méthode informatique pour obtenir un dérivé optimal dans un cadre général en utilisant l'intelligence artificielle, à défaut de pouvoir utiliser un raisonnement mathématique. Pour un réseau donné et un ensemble de produits dérivés, nous avons vu dans le chapitre précédent que l'on pouvait obtenir l'issue en prenant en compte la contagion des défauts à l'aide de l'algorithme de Eisenberg and Noe (2001). Il est donc possible d'obtenir par la simulation l'ampleur des défauts pour chaque produit dérivé que l'on pourrait considérer. Obtenir le produit dérivé optimal devient alors une problématique d'optimisation informatique.

Informatiquement, le problème est difficile, et ce pour trois raisons. La première est le nombre vertigineux de possibilités à considérer. Considérons le cas de la compagnie aérienne qui cherche le dérivé optimal. Un produit dérivé est simplement un contrat qui stipule combien le trader verse à la compagnie dans chaque scénario. N'importe quel versement est possible ; supposons cependant que nous nous limitons aux nombres entiers entre 1 et 10 euros. S'il n'y a qu'un scénario, il n'y a qu'un versement à choisir, et donc 10 produits dérivés possibles. S'il y a deux scénarios possibles, alors il faut choisir le premier scénario, puis le deuxième : il y a $10 * 10$ combinaisons, et donc autant de produits dérivés possibles. Dans le domaine

des risques financiers, le nombre de deux scénarios est assez irréaliste : ce nombre est bien plus élevé et peut souvent atteindre l'infini si l'on décide de modéliser une position financière à l'aide d'une distribution continue, comme la loi normale. Mais si l'on considère 50 scénarios, la compagnie aérienne fait déjà face à 10^{50} candidats possibles pour son produit dérivé, ce qui est mille fois plus que le nombre d'atomes sur Terre.

La deuxième raison derrière la difficulté du problème est liée à la complexité du mécanisme de contagion. Pour chaque produit dérivé candidat, il faut évaluer sa qualité, ou *fitness*, pour pouvoir ensuite conserver la meilleure. L'évaluation de la solution dépend ici de deux choses : les conséquences en matière de contagion des défauts, ce que l'on doit simuler en utilisant l'algorithme de Eisenberg and Noe (2001) ; la satisfaction pour les agents, que l'on calcule en utilisant leurs mesures de risque. L'algorithme de Eisenberg and Noe (2001) est relativement efficace, mais il s'agit tout de même de plusieurs étapes successives dont le nombre dépend de la taille du réseau et des interactions entre les agents. En ce qui concerne la mesure de risque, considérons par exemple la mesure de risque entropique utilisée dans le chapitre précédent :

$$\forall X \in \mathcal{X}, e_\gamma(X) = \gamma \ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(-\frac{1}{\gamma} X \right) \right]$$

Celle-ci implique l'espérance mathématique $E_{\mathbb{P}}$ de la position financière. Ce qui signifie que la position de l'ensemble des scénarios doit être simulée. Si l'on a 50 scénarios, il faudra procéder à 50 calculs de la position financière, qui implique donc le calcul des défauts : il faudra donc procéder à 50 simulations en utilisant l'algorithme de Eisenberg and Noe (2001). Si le nombre des scénarios est infini, il faudra faire des tirages aléatoires en respectant la probabilité des événements.

Une troisième raison vient du fait que l'on ne connaît pas la solution. Ce n'est pas toujours le cas : dans beaucoup de problèmes informatiques, il est possible d'avoir accès à un ensemble de situations pour lesquelles nous avons la solution. Il est alors possible d'utiliser le *machine learning* : une forme d'intelligence artificielle qui implique de faire apprendre un algorithme à se rapprocher de la solution optimale en lui montrant des situations et en lui enseignant ensuite la bonne réponse. Ce n'est pas une possibilité ici. Il serait possible de générer artificiellement des situations et calculer le dérivé optimal pour chacune d'elles en utilisant les résultats mathématiques vus précédemment : cependant l'algorithme apprendrait alors à ignorer le problème de la contagion, ce qui est le contraire du but recherché. Si le problème de la contagion doit être pris en compte, nous ne pouvons rien enseigner à l'algorithme, car nous sommes précisément incapables de connaître le produit dérivé optimal.

```

DEBUT
  INITIALISER population avec des solutions candidates aléatoires;
  ÉVALUER chaque candidat;
  RÉPÉTER JUSQU'A QUE (CONDITION DE FIN soit satisfaite)
    1. SÉLECTIONNER les parents;
    2. RECOMBINER les paires de parents,
    3. MUTER les fils;
    4. ÉVALUER les nouveaux candidats;
    5. SÉLECTIONNER des individus pour la prochaine génération;
FIN

```

FIGURE 4.1 – Pseudo-code d’un algorithme évolutionnaire, tiré de Eiben and Smith (2003)

La taille de l’espace des solutions, le coût computationnel de l’évaluation des candidats et l’absence de possibilité de recourir au machine learning sont des contraintes fortes. Une forme particulière d’intelligence artificielle peut néanmoins s’en affranchir : il s’agit de l’informatique évolutionnaire (*evolutionary computing*).

4.1 Évoluer des produits dérivés

L’informatique évolutionnaire est une technique computationnelle inspirée par les mécanismes biologiques liés à l’évolution des espèces. L’idée derrière cette inspiration vient de la capacité des espèces vivantes à s’adapter aux problèmes posés par leur environnement. Les individus les plus aptes à survivre sont également ceux qui parviennent à se reproduire le plus. Ainsi, génération après génération, il existe une sélection naturelle des individus les plus à même de faire face aux défis qu’ils affrontent. La reproduction permet de combiner des individus qui ont réussi à survivre et peut conduire à l’apparition de progénitures encore plus performantes. À ces deux aspects, la sélection naturelle et la reproduction, s’ajoute un troisième mécanisme : la mutation. Les individus ont une faible probabilité de voir leur structure légèrement modifiée de manière tout à fait aléatoire.

L’interaction de ces trois mécanismes est un des facteurs majeurs derrière l’émergence d’espèces animales particulièrement efficaces dans leurs environnements respectifs. La recherche en informatique s’est donc inspirée de ces mécanismes pour produire un algorithme capable d’évoluer et de devenir de plus en plus performant. Un *algorithme évolutionnaire* peut être décrit en utilisant le pseudo-code de la Figure 4.1 issu de Eiben and Smith (2003).

L’algorithme débute par générer des candidats aléatoires. Les candidats sont

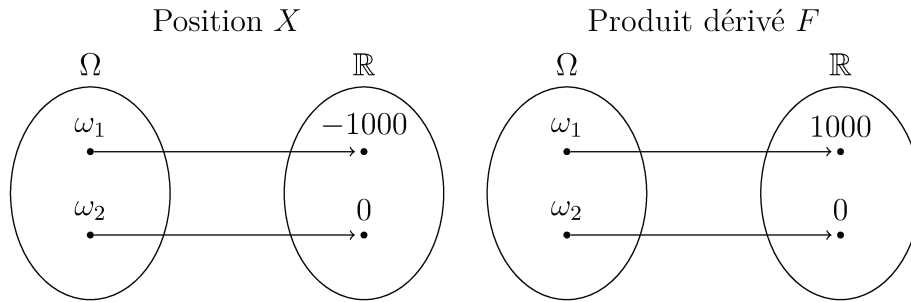


FIGURE 4.2 – Mathématiquement, un produit dérivé est une position financière : une fonction qui à chaque élément de l’ensemble des scénarios (Ω) associe un élément de l’ensemble des nombres réels (\mathbb{R}).

évalués en fonction de leur capacité à répondre au problème que l’on cherche à résoudre. Les meilleurs candidats se reproduisent le plus, à l’image de la sélection naturelle (étape 1). La reproduction entraîne la naissance d’individus qui sont la recombinaison du patrimoine génétique de leurs parents (étape 2). Les individus ont une faible probabilité de voir leur patrimoine altéré de manière mineure et totalement aléatoire, à l’image de la mutation (étape 3). On évalue ensuite la capacité des individus à répondre au problème (étape 4), ce qui conduit à une sélection en vue d’une prochaine génération (étape 5). Le processus est répété autant de fois que nécessaire.

En pratique, comment appliquer cette logique à nos produits dérivés ? La première étape consiste à représenter ces produits dérivés de sorte qu’ils puissent subir le processus que l’on vient de détailler. En particulier, on doit pouvoir les générer de manière aléatoire, les recombinaison et les muter.

Dans notre représentation mathématique, un produit dérivé est simplement une position financière, que l’on a définie comme une fonction de l’ensemble des scénarios vers les nombres réels, comme nous l’avons vu au Chapitre 1 (Figure 4.2)

On a également vu au Chapitre 1 qu’un produit dérivé (tel que F décrit dans la Figure 4.2) peut s’écrire en fonction d’une position financière (telle que X , avec $F = -X$ ici).

On peut alors définir un produit dérivé comme une fonction bornée $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $F(\omega) = f(\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\})$ avec $\{X_1, \dots, X_n\}$ l’ensemble fini des positions financières initiales des agents.

La définition d’un produit dérivé comme une fonction peut donner lieu à une représentation utilisable dans un algorithme évolutionnaire. En effet, il existe un sous-domaine de l’informatique évolutionnaire appelé la programmation génétique, dans lequel les individus sont représentés sous la forme d’un *arbre syntaxique*. Il s’agit d’une structure avec un *noeud* unique à l’origine, puis une structure en arborescence

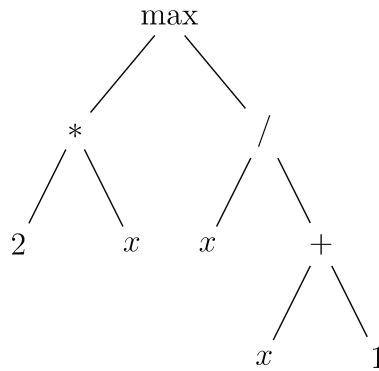


FIGURE 4.3 – L’expression $(\max(2x, \frac{x}{x+1}))$ représentée à l’aide d’un arbre syntaxique.

qui mène à d’autres noeuds. Chaque noeud contient un opérateur logique. On peut utiliser ce type de structure pour représenter une expression arithmétique (Figure 4.3).

Chaque noeud contient un opérateur logique : dans le cas d’une opération arithmétique, il s’agit d’opérations comme la multiplication ou l’addition. L’arbre se termine sur des *feuilles*, qui contiennent des variables (comme x dans la Figure 4.3) ou des constantes.

Cette représentation permet bien d’utiliser un processus évolutif tel que décrit précédemment. La recombinaison entre deux arbres prend la forme d’un échange d’une partie de chaque arbre, à partir d’un point d’échange commun (Figure 4.4). Ce processus admet plusieurs variations selon le nombre de points d’échange ou les restrictions que l’on impose sur les possibles points d’échange¹.

En ce qui concerne la mutation, il suffit de choisir aléatoirement un noeud dans l’arbre et de remplacer le sous-arbre correspondant par un autre, généré de manière aléatoire (Figure 4.5)

On dispose donc là d’une représentation des produits dérivés compatibles avec les mécanismes de l’informatique évolutionnaire. Il reste à juger de son efficacité.

4.2 Test de la méthode sur les résultats théoriques obtenus précédemment

Il existe une solution unique au problème du dérivé optimal à n contreparties sans risque de défaut, détaillée dans les chapitres précédents. Il est donc possible de tester l’approche génétique développée précédemment sur ce problème.

1. Voir Poli et al. (2008) pour une revue des possibilités.

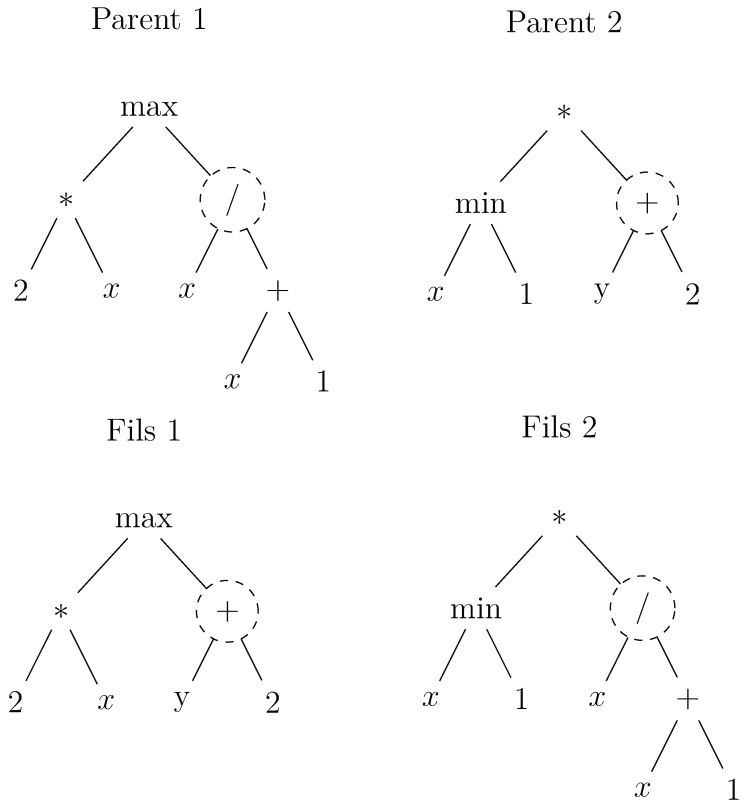


FIGURE 4.4 – Recombinaison à un point d'échange entre deux expressions arithmétiques.

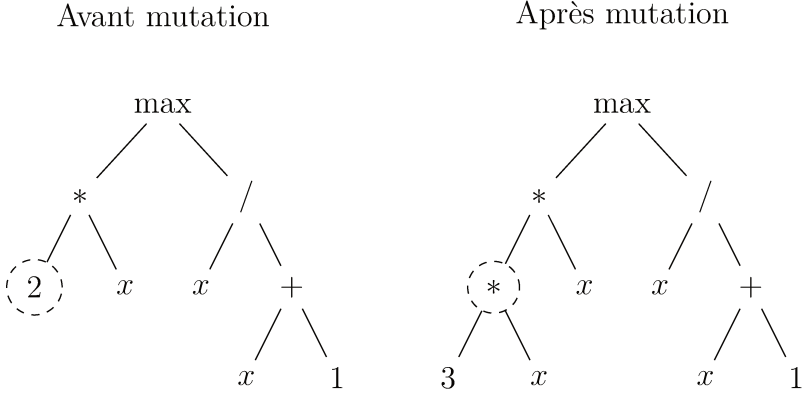


FIGURE 4.5 – Mutation par insertion d'un sous-arbre généré aléatoirement ($3 * x$) à un point choisi aléatoirement (cercle pointillé).

4.2.1 Le cas simple à deux agents

Rappelons le problème :

$$\begin{aligned} & \inf_{F \in \mathcal{X}, \pi \in \mathbb{R}} \rho_{\gamma_T}(F - \pi) \\ \text{s.c. } & \rho_{\gamma_C}(X) \geq \rho_{\gamma_C}(X + (F - \pi)) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Les mesures de risques sont des mesures de risque entropiques :

$$\forall X \in \mathcal{X}, e_\gamma(X) = \gamma \ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(-\frac{1}{\gamma} X \right) \right]$$

Les individus sont les possibles contrats F entre la compagnie C et le trader T . Ils sont représentés en utilisant des arbres syntaxiques. Les opérations logiques sont : +, -, *, /, exp, log, min, max. Les feuilles contiennent la position financière X ainsi que des constantes générées aléatoirement.

Pour utiliser le processus évolutionnaire, il est nécessaire de spécifier précisément les étapes vues dans la Figure 4.1.

1. *Initialisation* - Les individus sont des arbres générés de manière aléatoire avec une profondeur comprise entre 1 et 5.
2. *Selection* On sélectionne le meilleur individu parmi trois sélectionnés au hasard ; on répète l'opération jusqu'à obtenir une nouvelle population de même taille que la population originale.
3. *Recombinaison* - Chaque paire d'individus consécutifs se reproduisent avec une probabilité de 0.5. Les deux fils remplacent leurs parents.
4. *Mutation* - Chaque fils mute avec une probabilité de 0.1. Le sous-arbre généré de manière aléatoire a une profondeur comprise entre 1 et 5.
5. *Evaluation* - La performance d'un individu est le score du programme de minimisation dans l'Équation 4.1. Il s'agit de la somme des mesures de risque des deux agents.
6. *Selection (2)* - Ici il n'y a pas de sélection supplémentaire, car la population des enfants est déjà de la même taille que celle des parents.

La taille de la population varie en fonction de la difficulté du problème. Pour les deux benchmarks, la taille est 300. Pour le problème avec risque de défaut, cette taille passe à 1000.

En programmation génétique, la taille des arbres tend à augmenter de manière mécanique. Pour contrôler ce phénomène, une limite de profondeur de 17 est fixée, comme suggéré par Koza (1992).

TABLE 4.1 – Résultats pour 100 optimisations dans le cas à deux agents

Génération	Distance monétaire au contrat optimal			
	Moyenne	Ecart-type	Minimum	Maximum
5	9.3e-05	0.00017	1.2e-09	0.00094
10	2.9e-05	6.5e-05	1.7e-09	0.00041
20	2.5e-05	0.0001	7.6e-10	0.00081
50	2.3e-06	5.4e-06	2.2e-13	3.4e-05
100	9.1e-07	2.9e-06	3.3e-16	2.2e-05

On fixe la tolérance au risque de la compagnie aérienne à 0.5 et celle du trader à 1. La compagnie aérienne dispose d'une position financière initiale de X , tandis que la position du trader est nulle. À chaque expérience, on génère X en tirant uniformément 50 valeurs issues de l'intervalle $[0, 1]$.

L'algorithme est testé avec plusieurs nombres de générations, de 5 à 500 pour les benchmarks, afin d'évaluer la vitesse de convergence vers le contrat optimal.

Le succès de chaque procédure est calculé en faisant la différence entre la performance de la meilleure solution et celle du contrat optimal. Compte tenu du caractère monétaire des mesures de risque, il peut être interprété comme l'argent que les agents seraient prêts à payer pour atteindre le contrat optimal. Il s'agit du montant que les agents perdent à cause du caractère sous-optimal de la situation. On s'attend naturellement à ce que cette quantité converge vers 0, et soit suffisamment faible pour que l'on considère que l'algorithme a obtenu la solution recherchée. Cette quantité sera désignée sous le nom de *distance monétaire*.

Comme la position financière X varie entre 0 et -1 , la distance monétaire peut être interprétée comme un pourcentage de la perte maximale que risque la compagnie aérienne. Par exemple, si cette perte de 1000 euros au maximum, une distance monétaire de 0.001 signifie que la compagnie serait prête à payer 0.1% de la perte maximale (soit 1 euro) pour passer de la solution produite par l'algorithme au contrat optimal.

L'algorithme converge rapidement vers l'optimum mathématique (Tableau 4.2). C'est un signe encourageant, mais il peut être en partie expliqué par la simplicité arithmétique de la solution. Considérons maintenant un problème un petit peu plus complexe.

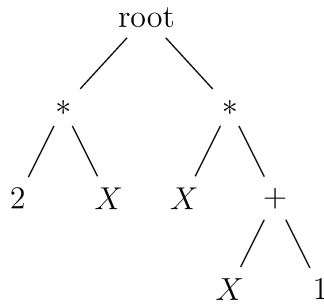


FIGURE 4.6 – Un individu unique représente deux contrats, $2X$ an $X(X + 1)$.

4.2.2 Le cas général à un nombre fini d’agents

On se place cette fois du point de vue du marché tout entier. Quels seraient les contrats dérivés optimaux ou un ensemble de n agents placés dans un réseau, sans risque de contrepartie ? Là encore, l’objectif est de minimiser la somme des mesures de risque du marché tout entier.

Les résultats du chapitre 3 donnent l’ensemble de contrats dérivés qui apportent une satisfaction maximale, à une constante près. La constante désigne les paiements monétaires qui les accompagnent. Comme les mesures de risque sont monétaires, un transfert d’argent d’un agent à l’autre n’affecte pas la somme des mesures de risques. Il n’y a donc pas lieu de se soucier que chaque agent voie bien sa contrainte satisfaite dans le programme de minimisation. Dès lors que nous réussissons à minimiser la somme des mesures de risque, pour une telle diminution il existe nécessairement une distribution des bénéfices à travers le canal des prix qui permettra de diminuer le risque individuel de chaque agent (le réseau étant connecté).

Les individus de l’algorithme génétique ne sont plus des contrats F . Chaque individu représente désormais un ensemble de m contrats, m désignant le nombre de liens dans le réseau considéré. Pour représenter plusieurs contrats avec un seul individu, nous utiliserons une technique issue de Koza and Poli (2003). Il s’agit de connecter plusieurs composants d’un seul individu grâce à un noeud ”racine”. Un ensemble de m contrats est ainsi représenté par un arbre unique : chaque contrat est un arbre arithmétique et tous les contrats sont liés entre eux par un noeud originel, qui contient l’opérateur logique root (Figure 4.6).

Le réseau est généré de manière aléatoire en utilisant l’algorithme d’Erdős–Rényi (Erdos and Rényi, 1959). Il s’agit simplement d’un procédé qui passe en revue toutes les paires possibles d’agents et crée un lien entre eux avec une certaine probabilité fixée ici à 0.8. Si le réseau généré n’est pas connecté, on en génère simplement un autre. Le nombre d’agents est 10, et on les numérote de 1 à 10 pour les identifier. L’agent numéroté i à une tolérance au risque de $\frac{i}{n}$, de sorte que l’agent 1 est le plus

TABLE 4.2 – Résultats pour 100 optimisations dans le cas à deux agents

Génération	Distance monétaire au contrat optimal			
	Moyenne	Ecart-type	Minimum	Maximum
5	0.055	0.022	0.0062	0.13
10	0.032	0.015	0.0058	0.09
20	0.0065	0.0054	0.00067	0.038
50	0.00057	0.0003	0.00021	0.0022
100	0.00019	0.00032	6.8e-05	0.00076
200	4.8e-05	5.6e-05	8.9e-07	0.00031

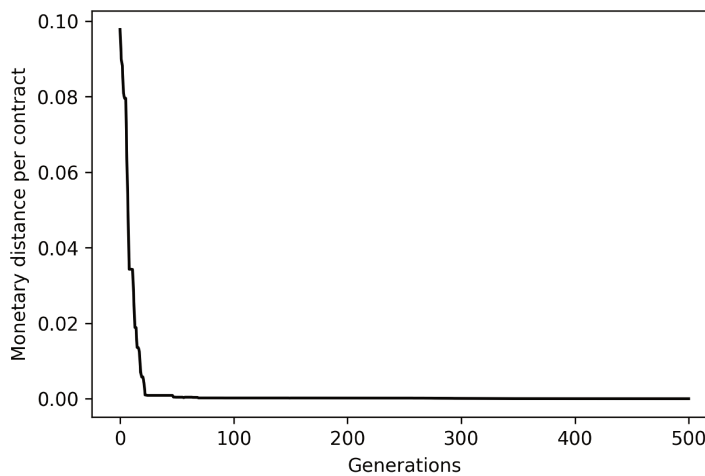


FIGURE 4.7 – La distance monétaire décroît de manière similaire à une loi de puissance.

averse au risque et l’agent 10 le plus tolérant. On dote l’agent 1 de l’intégralité de la position financière X , tandis que les autres agents ont une position initiale nulle. Les autres paramètres sont les mêmes que dans la partie précédente.

La convergence est plus lente que dans le cas à deux agents (Tableau 4.2). La distance monétaire est nécessairement accrue par le nombre de contrats, qui est en moyenne de $(n(n - 1) * \frac{1}{2} * 0.8 = 36$. L’algorithme parvient à gérer les multiples contrats, mais nécessite un plus grand nombre de générations.

La distance du meilleur individu par rapport à l’optimum mathématique est représentée en Figure 4.8. Le processus continue de converger après 400 générations. L’optimisation peut être prolongée aussi longtemps que les gains sont jugés valables.

Une augmentation du nombre d’agents implique une augmentation quadratique du nombre de contrats possibles (qui sont au nombre de $n(n - 1)$). Cela impacte nécessairement le temps requis pour atteindre une distance acceptable relative de

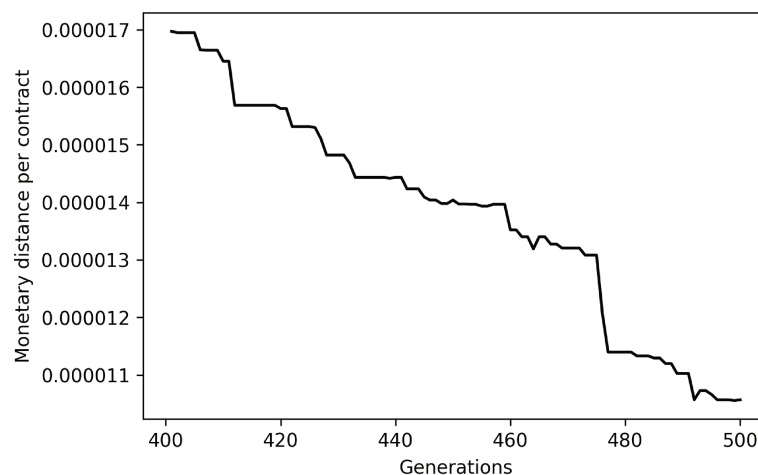


FIGURE 4.8 – La distance monétaire continue à décroître après 400 générations.

TABLE 4.3 – Temps nécessaire pour atteindre une distance monétaire de 0.01 par contrat

Agents	Génération	Temps (secondes)
2	2	0.28
3	3	0.32
5	7	1.09
10	29	9.74
15	52	65.25

l'équilibre (Tableau 4.3).

L'algorithme fournit des résultats satisfaisants sur ces deux tests. Il est temps de l'appliquer au problème du dérivé optimal avec risque de défaut.

4.3 Le coeur du problème : le dérivé optimal en réseau avec risque de contrepartie

Les agents peuvent désormais faire défaut. Si la réalisation de leur position financière finale n'est pas entièrement couverte par leur réserve d'argent, alors on utilise l'algorithme de Eisenberg and Noe (2001) pour obtenir l'ensemble des paiements que l'agent peut réaliser en respectant la responsabilité limitée et la proportionnalité des créances.

L'objectif reste la minimisation de la somme des mesures de risque. On peut alors penser que le défaut d'un agent n'a pas d'impact sur la somme des mesures de

risques. Après tout, dix euros qu'un agent ne rembourse pas à un autre agent, cela ne change rien si l'on prend le bien-être collectif; le bonheur des uns fait le malheur des autres, et la somme des deux ne varie pas.

La réalité est cependant tout à fait différente. Imaginons que l'agent 1 et 2 soient chacun dotés d'une position financière $\frac{1}{2}X$, et d'une réserve d'argent de 0.4. Les deux feront faillite en cas de scénario $\frac{1}{2}X = -0.5$; chaque agent fera face à une perte de 0.1.

Imaginons maintenant que l'agent 1 ait eu l'intégralité de X en position initiale et les deux agents décident de contracter un produit dérivé $F = \frac{1}{2}X$. Les deux agents sont alors dotés d'une position financière finale de $\frac{1}{2}X$. En cas de scénario $\frac{1}{2}X = -0.5$; l'agent 2 fera face à une perte de 0.1. Il sera donc incapable de payer les 0.5 qu'il doit à l'agent 1 : il pourra simplement payer 0.4. L'agent 1 fait déjà face à sa propre perte de 0.1, à laquelle s'additionne les 0.1 que sa contrepartie se trouve incapable de régler. Le total des pertes est alors de 0.3, contre 0.1 précédemment. Il y a donc un effet multiplicateur du défaut sur les pertes du système tout entier. Le malheur des uns s'invite chez les autres.

4.3.1 Un agent averse au risque qui fait face au risque de faillite

Dans les optimisations qui suivent, il y a 5 agents. L'agent 1 dispose d'une position financière de X , uniformément distribuée entre -1 et 0 . Les dotations en capital sont simplement 0.7 pour l'agent 1 et rien pour les autres. Ce qui signifie que dans 30% des scénarios, il n'y aura pas assez d'argent dans le système et des défauts surviendront nécessairement. L'agent numéroté i à une tolérance au risque de $\frac{i}{n}$, ce qui signifie simplement que l'agent 1 est plus averse au risque, et l'agent 5 le plus tolérant. Il s'agit d'une situation similaire à l'exemple introductif : un agent très averse au risque et doté d'une position financière possiblement négative cherche à améliorer sa situation. Quelle est la répartition optimale du risque ?

La position financière finale de l'agent 1 est représentée en Figure 4.9, aux côtés de sa position initiale et de sa position théorique en l'absence de risque de contrepartie. On observe que pour les scénarios occasionnant un défaut (intervalle $[-1, -0.7]$), l'agent 1 conserve l'intégralité de X et donc subit l'intégralité des pertes. La logique derrière ceci est la suivante : s'il partageait ce risque, alors d'autres faillites surviendraient et l'effet de contagion viendrait multiplier les pertes totales.

Le point de faillite théorique est le point où la liquidité totale du système ne suffit plus à couvrir le risque total du système. Dans le cas théorique où les agents ignorent

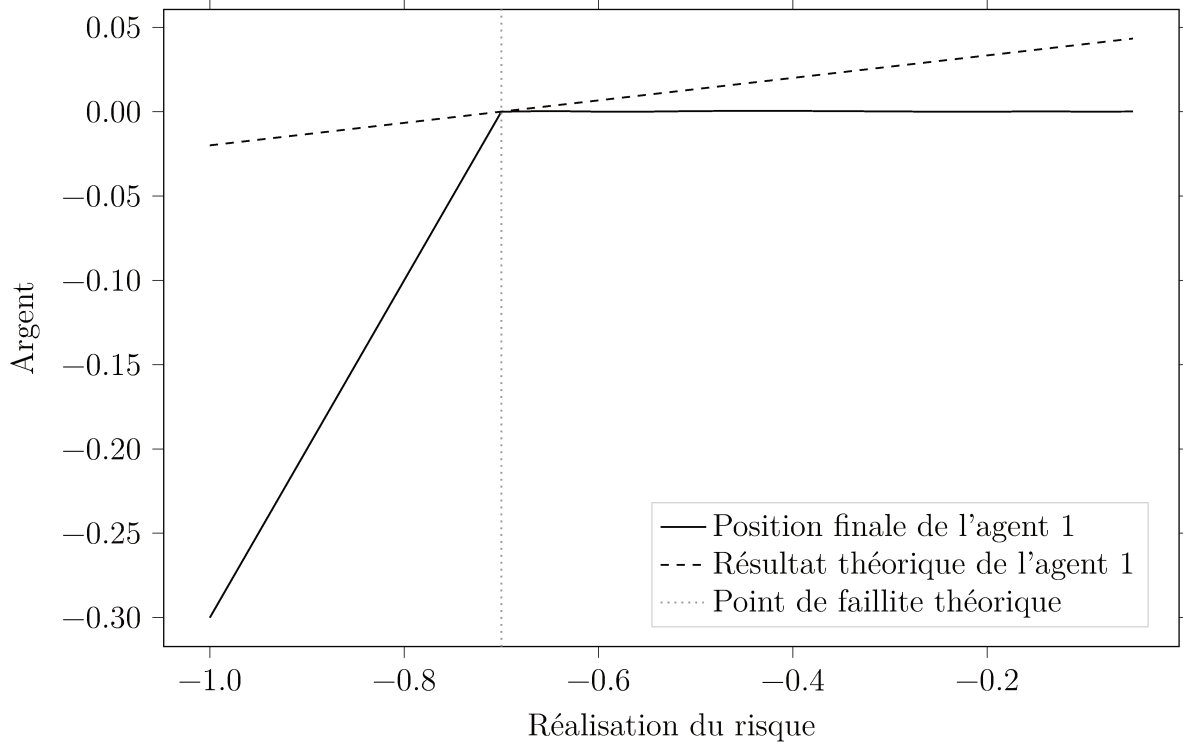


FIGURE 4.9 – L’agent 1 encaisse l’intégralité des pertes. En échange, il est entièrement assuré dès que la position totale $X + 0.7$ devient positive.

le risque de contrepartie, tous les agents font défaut à ce point. Ici, la répartition optimale est celle qui sacrifie un seul agent.

En échange de son sacrifice, l’agent 1 semble presque entièrement assuré contre X pour tous les autres scénarios, ce qui se traduit par une courbe horizontale sur l’intervalle $[-0.7, 0]$. Les autres agents ne sont pas exposés à X sur l’intervalle $[-1, -0.7]$, mais sur les autres scénarios ils semblent prendre une part fixe de X , ce qui se traduit par une courbe en pente constante (Figure 4.10).

La pente semble légèrement plus importante que celle occasionnée par la part de risque prise dans le cas où le risque de contrepartie est absent. Il semble qu’un sous-marché se forme sans l’agent 1 : chaque agent se répartit le risque total selon sa tolérance relative (à l’image des résultats théoriques précédents) dans le sous-marché qu’ils forment en l’absence de l’agent 1.

L’algorithme paraît donc proposer de lui-même un des produits dérivés les plus utilisés en finance de marché, les *options*. Une option offre la possibilité d’acheter un actif sous-jacent (ici X) pour un prix fixé à une période future. Ici l’agent 1 vend des options pour acheter une part fixe de X à tous les autres agents. Le prix proposé par l’agent 1 est -0.7 par unité de X . Cela signifie que les autres agents disposent d’une option leur permettant dans la période suivante (la période de réalisation de

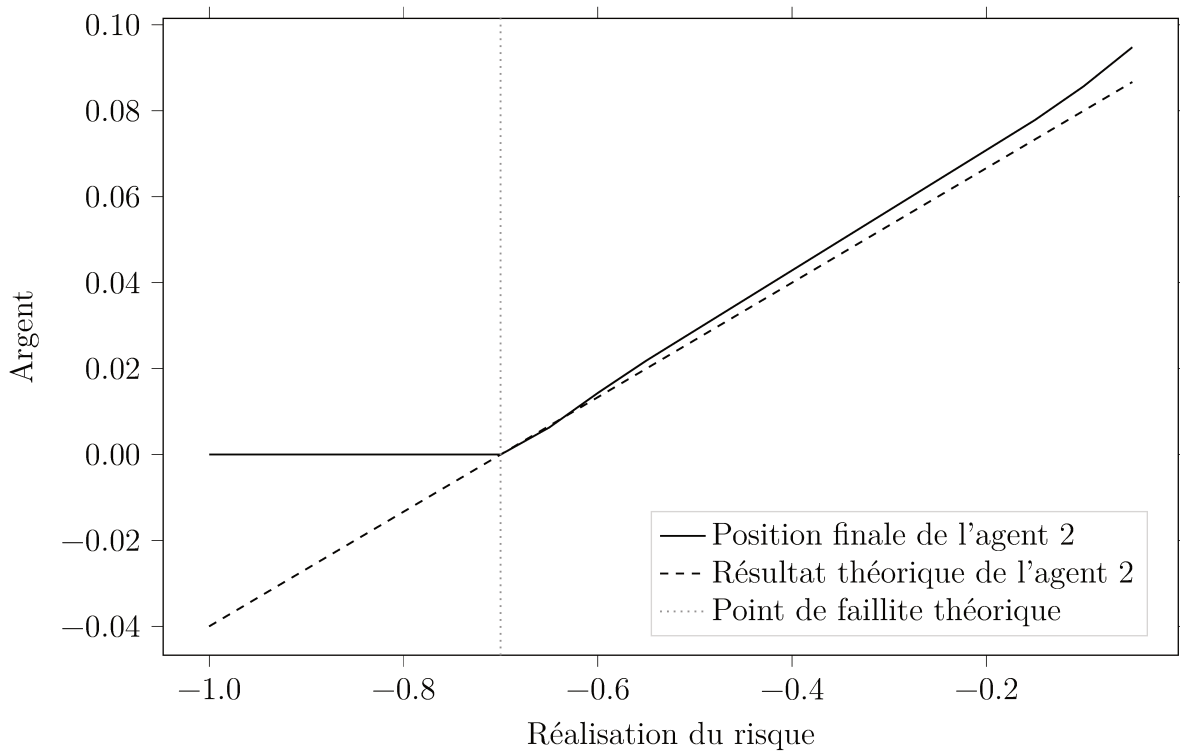


FIGURE 4.10 – L'agent 2 ne prend pas de part dans la position totale lorsqu'elle est négative. Après ça, il semble prendre la part relative à sa tolérance dans le sous-marché formé par les agents 2, 3, 4 et 5.

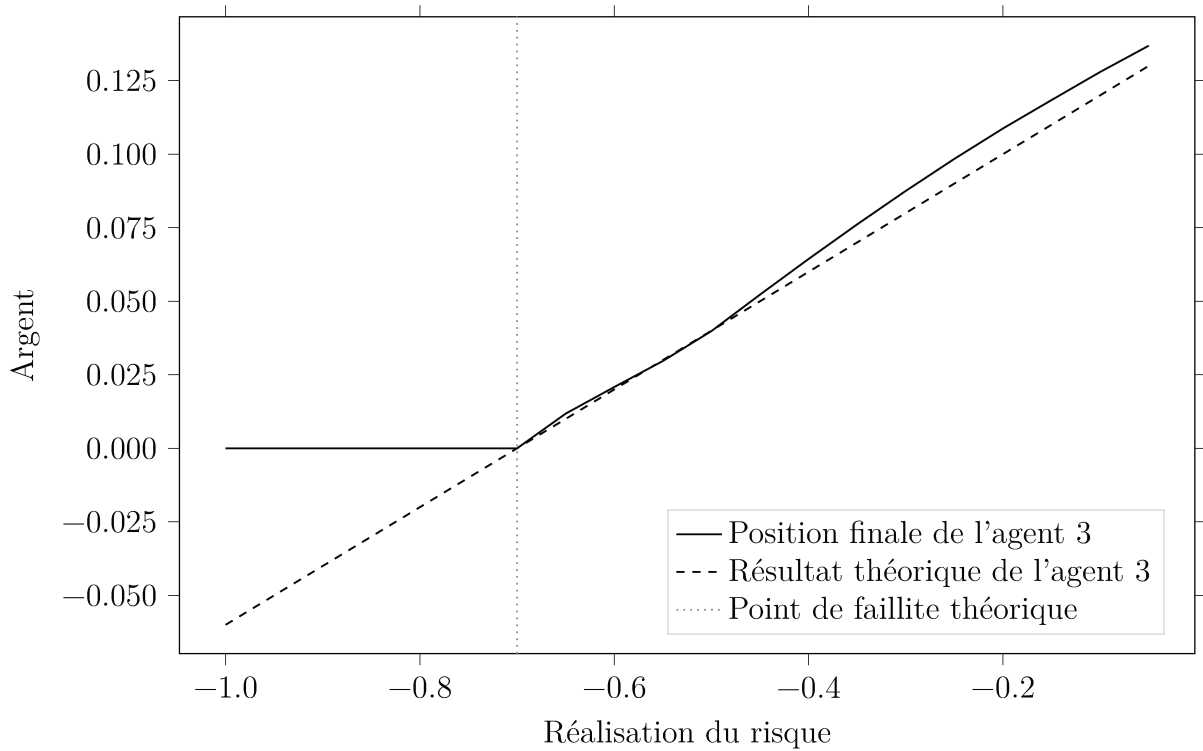


FIGURE 4.11 – L'agent 3 représenté ici, de même que les agents 4 et 5, ont une position finale semblables à celle de l'agent 2, mais adaptées à leurs tolérances au risques respectives.

X) d'acquérir une part s de X en échange du prix égal à $-0.7 * s$.

Si X dépasse -0.7 , alors cela devient financièrement intéressant et les agents vont exercer l'option et acquérir une part fixe de X . Si X ne dépasse pas -0.7 , l'option est sans valeur et les agents ne l'exercent pas, leur position finale reste nulle. Cette option s'écrit donc $\max(0, X + 0.7)$. Par conséquent, la forme de la courbe des agents autres que l'agent 1 est plate jusqu'à ce que X atteigne -0.7 , et augmente ensuite de manière proportionnelle à la valeur de X (Figure 4.10).

Dans le monde des assurances, cette configuration s'appelle une assurance en excédents de pertes (*stop-loss insurance*). Les agents autres que l'agent 1 jouent le rôle des assureurs. Contre un paiement monétaire, ces agents assurent entièrement l'agent 1 contre le risque que fait peser la position X sur son activité. Cependant, les assureurs se protègent contre des réclamations trop importantes de l'agent 1 ; plus précisément, contre des versements qui les pousseraient à faire défaut en même temps que l'agent 1. Le seuil est le point précis où la liquidité totale du système (0.7) ne suffit plus à couvrir les pertes de la position totale du marché (X).

Il semble donc que l'introduction du risque de contrepartie conduise à l'émergence de contrats bien connus du monde de la finance et de l'assurance.

Traduits en termes mathématiques, la configuration de positions financières que l'on vient de décrire s'écrit comme suit :

1. Position finale de l'agent 1 :

$$X + 0.7 - \max(0, X + 0.7) = \min(0, X + 0.7) \quad (4.2)$$

2. Position finale de l'agent $i, i \neq 1$:

$$\frac{\gamma_i}{\sum \gamma - \gamma_1} * \max(0, X + 0.7) \quad (4.3)$$

La position de l'agent 1 est simplement sa position initiale ($X + 0.7$) moins l'option qu'il a vendue ($\max(0, X + 0.7)$) au reste du marché. Les autres agents se répartissent cette option au prorata de leur tolérance au risque dans le sous-marché qu'ils forment en l'absence de l'agent 1. Ce résultat est cohérent avec les résultats théoriques précédents : s'agissant d'une option d'achat, le produit dérivé ne peut entraîner un défaut. La répartition entre les agents 2, 3 et 4 obéit donc aux théorèmes obtenus dans les résultats précédents, car dans ce sous-marché le risque de contrepartie est absent.

À notre connaissance et après de nombreuses tentatives infructueuses pour la détrôner, il s'agit de la solution qui obtient le meilleur bien-être collectif dans nos optimisations. Les meilleures solutions produites par l'algorithme évolutionnaire sont

celles qui se dirigent vers cette solution.

4.3.2 L'impact de la tolérance au risque

Que se passe-t-il lorsque la tolérance au risque de l'agent est plus grande ? Considérons un cas de figure identique au précédent, à l'exception du fait que c'est désormais l'agent 5 qui détient la position financière X . Il s'agit de l'agent le plus tolérant au risque. Il dispose également d'un montant monétaire de 0.7, sa probabilité de faire défaut dans la position initiale est donc de 30%.

Considérons les résultats de l'algorithme. On observe que la situation est similaire au cas précédent, simplement ici au-delà d'un certain seuil l'agent 5 reprend son rôle dans le partage du risque (Figure 4.12).

Les autres agents ont des positions similaires au cas précédent, mais leur exposition à X diminue légèrement lorsque l'agent 5 retourne sur le marché. On observe donc une position finale non-linéaire découpée en trois périodes : la première pour laquelle ils sont assurés contre le risque de défaut, la seconde où ils supportent collectivement le risque en l'absence de l'agent 5, et la dernière qui rejoint le cas théorique initial dans lequel la répartition du risque dépend des tolérances respectives (Figure 4.13).

L'apparition de cette troisième phase est en lien direct avec la tolérance au risque supérieure de l'agent 5. Compte tenu de sa tolérance, le sacrifice consenti sur la première phase (lors de laquelle il supporte seul les pertes liées à X) est moindre que pour l'agent 1. Sa compensation est donc également moindre : il n'est entièrement assuré que sur une partie du reste des scénarios de X . On observe un résultat similaire si l'on considère le premier cas mais que l'on augmente la liquidité : affaiblir l'ampleur du sacrifice consenti par l'agent porteur du risque conduit à l'émergence de cette troisième phase.

On peut une nouvelle fois traduire ces éléments en termes mathématiques :

— Position finale de l'agent 5 :

$$Y_5 = \min(0, X + 0.7) + \frac{\gamma_5}{\sum \gamma} \max(0, X + 0.45)$$

— Position finale de l'agent i , pour $i \neq 5$:

$$Y_i = \frac{\gamma_i}{\sum \gamma - \gamma_5} [(X + 0.7) - Y_5]$$

Là encore il s'agit de la solution qui obtient le meilleur bien-être collectif dans nos optimisations, vers laquelle tendent les meilleurs résultats de l'algorithme de programmation génétique.

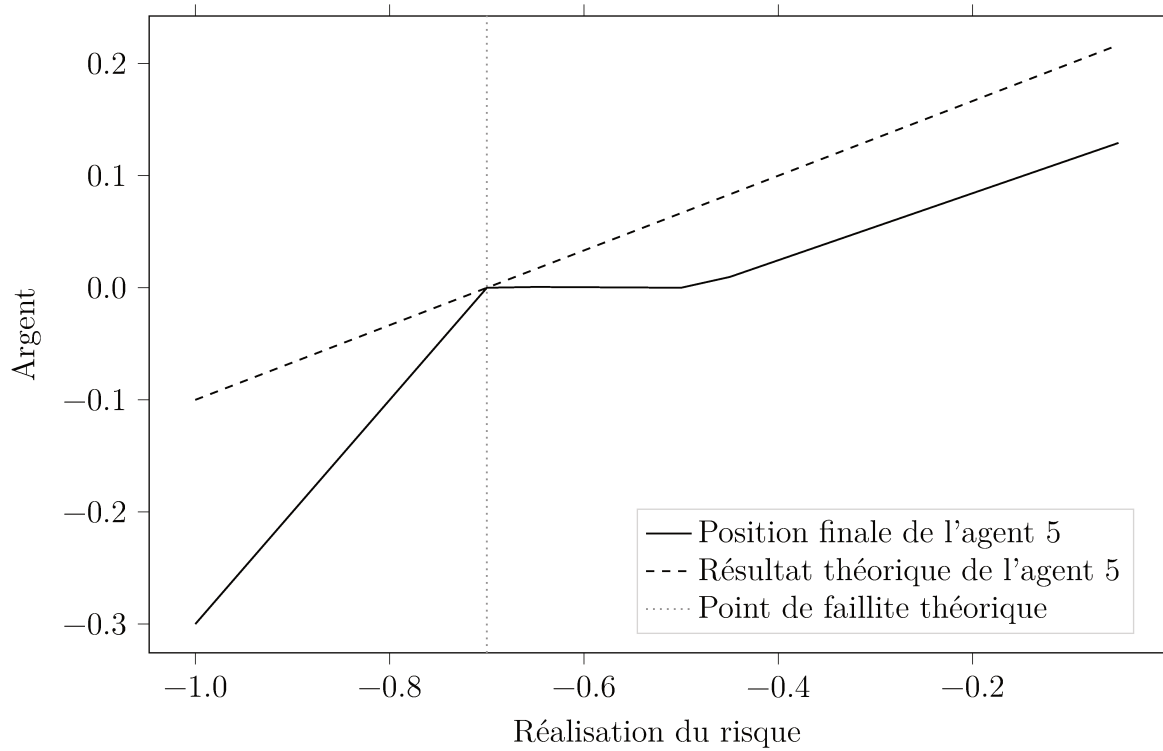


FIGURE 4.12 – L'agent 5 reprend son rôle après un certain seuil.

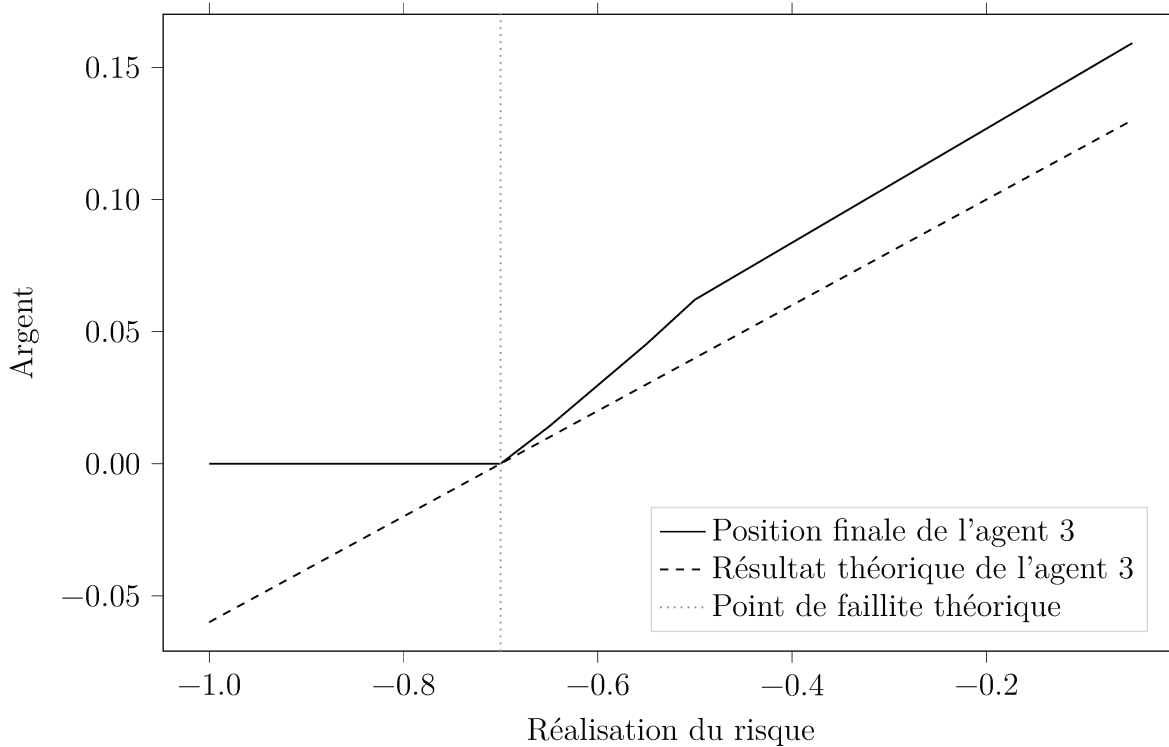


FIGURE 4.13 – L'agent 3 n'est pas exposé pour les scénarios qui mènent à un défaut de l'agent 1. Son exposition reprend à partir du seuil de solvabilité de l'agent 1, avant de ralentir sous l'influence du retour dans le marché de l'agent 1.

4.3.3 La persistance du risque systémique

Ces résultats témoignent une nouvelle fois de la persistance du point de faillite systémique. Dans les cas où la liquidité totale dans le système est insuffisante pour financer les agents en défaut (l'agent 1 dans le premier cas de figure), la situation optimale consiste à sacrifier cet agent pour éviter toute contagion. Cependant, dès lors que la liquidité s'avère suffisante, on retombe sur le résultat théorique obtenu dans le chapitre précédent : la liquidité sert à financer l'agent en difficulté, en échange d'une part de risque repackagée de sorte qu'il soit intéressant pour les autres agents. Ce produit dérivé, systématiquement positif, est alors réparti parmi les agents selon leurs tolérances au risque respectives.

Cependant l'ensemble des agents est désormais exposé de la même manière, dans un réseau de chaînes de dépendance, et la survie du système dépend entièrement de la justesse de l'évaluation du risque des agents. Si le risque déteu par l'agent 1 est mal évalué, de la même manière qu'au chapitre précédent on assiste à un défaut général là où auparavant seul l'agent 1 faisait faillite.

4.3.4 Discussion mathématique des résultats précédents

Nous avons observé dans les résultats précédents qu'en cas de défaut d'un agent et en l'absence de liquidité dans le système pour le financer, toute contagion était empêchée par l'algorithme qui optait pour une solution dans laquelle l'agent en question était "sacrifié" : il conserve l'intégralité de sa position, et les autres agents ne sont pas exposés.

Ce résultat peut se comprendre mathématiquement.

Considérons d'abord le cas simple de deux agents, l'un doté de la position financière X et l'autre d'une position initiale nulle.

Sans risque de contrepartie, la problématique du produit dérivé entre deux agents peut se modéliser de la manière suivante :

$$\inf_{F \in \mathcal{X}} \rho_{\gamma_1}(X - F) + \rho_{\gamma_2}(F)$$

Cependant, le risque de contrepartie vient modifier considérablement la situation. Pour l'agent 1, cela signifie qu'il ne pourra pas obtenir un montant positif pour F , car l'agent 2 ne possède rien. $\rho_{\gamma_1}(X - F)$ devient alors $\rho_{\gamma_1}(X - \max(0, F))$.

Quant à l'agent 2, il ne pourra pas obtenir plus que ce que l'agent 1 possède, c'est-à-dire X si X est positif, 0 sinon. $\rho_{\gamma_2}(F)$ devient alors $\rho_{\gamma_2}(\min(\max(X, 0), F))$. Le programme devient donc :

$$\inf_{F \in \mathcal{X}} \rho_{\gamma_1}(X - \max(0, F)) + \rho_{\gamma_2}(\min(\max(X, 0), F)) \equiv \inf S(F)$$

Soit ω un scénario pour lequel l'agent 1 fait défaut dans la situation initiale, c'est-à-dire tel que $X(\omega) < 0$.

Considérons un candidat \tilde{F} tel que $\tilde{F}(\omega) < 0$. On a alors :

$$S(\omega) = \rho_{\gamma_1}(X(\omega)) + \rho_{\gamma_2}(\tilde{F}(\omega))$$

Clairement, on peut construire un meilleur produit dérivé que \tilde{F} en fixant $\dot{F}(\omega) = 0$ et $\dot{F} = \tilde{F}$ sinon. Ce produit dérivé ne changerait rien à la situation de l'agent 1 et allégerait la dette de l'agent 2.

Comme on est parvenu à construire un meilleur scénario que \tilde{F} , alors le contrat optimal ne peut être tel que $\tilde{F}(\omega) < 0$.

Supposons que $\tilde{F}(\omega) > 0$. On a alors :

$$S(\omega) = \rho_{\gamma_1}(X(\omega) - F(\omega)) + \rho_{\gamma_2}(0)$$

Une nouvelle fois, on peut construire un meilleur produit dérivé que \tilde{F} en fixant $\dot{F}(\omega) = 0$ et $\dot{F} = \tilde{F}$ sinon. Ce produit dérivé ne change rien à la situation de l'agent 2 et allège la dette de l'agent 1.

Donc, pour tout scénario tel que l'agent 1 fait défaut, la situation optimale est ici 0, c'est-à-dire conserver tout le risque dans les mains de l'agent qui fait défaut. Cette démonstration est une manière mathématisée de dire quelque chose de relativement évident : si je fais défaut, alors il ne sert à rien de vouloir prendre de l'argent à mon voisin, qui n'en possède pas, sous peine de l'accabler d'une dette qui ne m'apporte rien. Le bien-être social en sort diminué. Il ne sert à rien non plus de lui promettre de l'argent, sous peine de voir ma propre dette s'accroître sans gain de satisfaction pour le voisin, que je suis incapable de dédommager. Là encore le bien-être social diminue. On peut généraliser cette démonstration à un nombre fini de contreparties.

4.4 Conclusion du chapitre

Ce chapitre propose une méthode d'intelligence artificielle qui permet de pallier la complexité du problème et l'impossibilité actuelle de prolonger les résultats mathématiques des résultats précédents. En adaptant les produits dérivés pour les représenter sous forme d'arbres syntaxiques, il est possible d'utiliser une méthode d'optimisation inspirée de la sélection naturelle et des mécanismes de la reproduction.

Mise à l'essai sur des cas de figure que l'on connaît pour les avoir étudiés lors des chapitres précédents, cette méthode semble efficace. Appliquée à la problématique de cette thèse, à savoir la répartition du risque en réseau en présence du risque de défaut, elle a permis d'apporter une solution inédite. À défaut de pouvoir la caractériser formellement comme optimale, cette solution s'est avérée impossible à détrôner pour le moment. Pour l'obtenir, l'intelligence artificielle a réinventé la roue, ou du moins ce qui s'en approche le plus dans le monde des produits dérivés : les options.

En soi, ce résultat n'est pas nouveau : plusieurs résultats théoriques dans la littérature en mathématiques financières ont montré que les produits dérivés étaient nécessaires à la maximisation de l'utilité des investisseurs (Bertrand and Prigent, 2016 ; Föllmer and Schied, 2011). L'apport de ce chapitre consiste à montrer que des solutions complexes et réalistes peuvent être produites par la méthode informatique proposée.

Les résultats laissent à penser qu'en cas de liquidité insuffisante dans le système, la situation optimale consiste à contenir le risque de défaut chez l'agent porteur de la position financière qui risque d'être négative. Cependant, pour tous les scénarios où il y a suffisamment de liquidité dans le système pour couvrir les pertes de cette position financière, on retombe sur le cas de figure analysé au chapitre précédent : les agents disposant de liquidités financent le risque déficitaire, en échange d'une part de ce risque qui sera modifié pour être systématiquement positif puis redistribué à chaque agent selon son profil de risque.

Le danger de faillite systémique plane toujours : dès lors qu'une seule des positions initiales est mal évaluée, c'est tout le système qui risque de faire faillite, avec un montant de perte potentiellement multiplié par les chaînes de dépendance. Ce chapitre montre ainsi que la solution optimale pousse les agents vers un point extrêmement sensible à leur analyse du risque. Ces résultats font apparaître que le système économique présenté ici crée une tentation pour les agents de se placer dans une configuration où la moindre erreur de jugement peut produire une faillite générale.

Au-delà du résultat, ce chapitre est l'occasion de montrer que la programmation génétique, adaptée à la problématique des produits dérivés, peut constituer une méthode d'optimisation efficace pour proposer des produits dérivés inédits dans certaines situations où l'analyse mathématique classique montre ses limites. Le protocole suivi dans ce chapitre reste relativement proche de la configuration pour laquelle nous disposons de résultats établis, afin de pouvoir juger de l'efficacité de la méthode. En pratique cependant, rien n'empêche de modifier les fonctions d'utilité

pour modéliser des comportements plus complexes. Il est également possible d'augmenter le nombre de positions financières pour analyser les effets éventuels de la diversification. L'objectif principal de ce chapitre est de présenter de manière simple une méthode relativement inédite : nous pensons qu'il peut constituer un point de départ pour plusieurs travaux futurs.

4.5 Bibliographie du chapitre

- Bertrand, P. and Prigent, J.-l. (2016). Equilibrium of financial derivative markets under portfolio insurance constraints. *Economic Modelling*, 52 :278–291.
- Eiben, A. E. and Smith, J. E. (2003). *Introduction to evolutionary computing*, volume 53. Springer.
- Eisenberg, L. and Noe, T. H. (2001). Systemic Risk in Financial Systems. *Management Science*, 47(2) :236–249.
- Erdos, P. and Rényi, A. (1959). On random graphs I. *Publ. Math. Debrecen*, 6 :290–297.
- Föllmer, H. and Schied, A. (2011). *Stochastic finance : an introduction in discrete time*. Walter de Gruyter.
- Koza, J. R. (1992). *Genetic programming : on the programming of computers by means of natural selection*. Complex adaptive systems. MIT Press, Cambridge, Mass.
- Koza, J. R. and Poli, R. (2003). *A genetic programming tutorial*, volume 8. Chap.
- Poli, R., Langdon, W. B., McPhee, N. F., and Koza, J. R. (2008). *A field guide to genetic programming*. Lulu. com.

Chapitre 5

Estimer la valeur scientifique des simulations informatiques

Au cours de ce travail de thèse, nous avons utilisé à de nombreuses reprises l'outil informatique. La raison principale est la difficulté de prendre en compte l'effet réseau et l'effet contagion en utilisant les outils mathématiques existants. Ce travail cherche à étudier la question du risque posé par les produits dérivés en réseau. Il s'agit donc d'un travail motivé par un objet plus que par une méthode particulière ; c'est pour cette raison que nous avons utilisé des méthodes relatives à plusieurs disciplines, essentiellement la finance et les mathématiques dans un premier temps, puis l'économie et l'informatique ensuite.

Cependant, l'utilisation d'une simulation informatique n'a pas la même portée qu'une démonstration mathématique. C'est le sujet de la "valeur épistémologique" d'une méthode ou d'un travail de recherche par rapport à un autre : sa capacité à faire progresser la connaissance, voire à administrer une "preuve" relative au fonctionnement du monde réel.

Compte tenu du caractère relativement récent des simulations informatiques et de leur utilisation dans les sciences sociales, peu d'éléments sont disponibles pour nous éclairer au sujet de leurs apports et leurs limites. Quelle est leur place dans la recherche scientifique ?

5.1 La valeur épistémologique des simulations, une question moderne

Une simulation peut être perçue comme le processus consistant à "piloter un modèle d'un système avec des entrées appropriées et à observer les sorties corres-

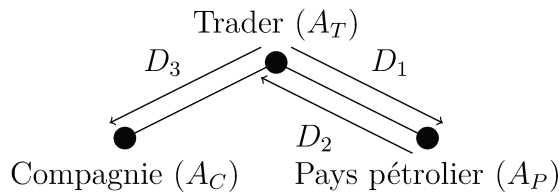


FIGURE 5.1 – Modèle

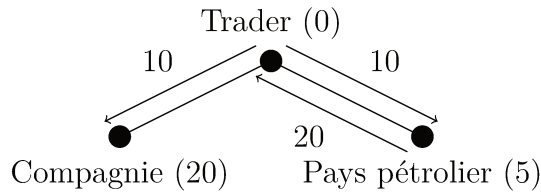


FIGURE 5.2 – Simulation du modèle précédent

pondantes” (tel que défini par Bratley et al. (2011) cité par Axelrod (1997)). Un modèle peut être défini comme une construction théorique faite d’axiomes et de relations logiques avec l’objectif possible de représenter une partie du monde (Frigg and Hartmann, 2018).

Le fait d’utiliser un réseau d’agents avec des dettes et des règles de paiements de ces dettes, comme nous l’avons fait auparavant, est un modèle qui cherche à représenter plus ou moins fidèlement plusieurs éléments de la réalité.

Une simulation de celui-ci consiste à choisir un ensemble de paramètres initiaux pour donner des valeurs précises à des variables telles que A_T (qui désigne ici l’argent détenu par le trader) ou pour donner des spécifications précises pour des fonctions comme les mesures de risque. À partir de cet ensemble de paramètres et de cet ensemble de relations logiques, la simulation produirait alors un résultat spécifique. Ce résultat prend la forme de valeurs précises pour chaque élément du modèle.

Les progrès récents des capacités informatiques ont permis aux scientifiques et parmi eux aux économistes de s’appuyer de plus en plus sur des simulations (voir Fontana (2006)). Cependant, cette évolution soulève des questions concernant la méthode scientifique.

La valeur épistémologique des simulations informatiques a été analysée en établissant des comparaisons avec les moyens existants de faire avancer la science. Dans la plupart des sciences sociales, les chercheurs ont partagé leurs efforts entre la construction de théories et leur mise à l’épreuve à l’aide de méthodes empiriques. Le débat sur les simulations informatiques s’est ainsi focalisé sur la place que les simulations doivent occuper entre le raisonnement logique et les méthodes empiriques (Lehtinen and Kuorikoski, 2007). Les simulations sont parfois considérées comme

des extensions du raisonnement logique dans le sens où «elles peuvent améliorer des propriétés spécifiques du modèle qui n'auraient pas pu être obtenues par d'autres méthodes analytiques plus conventionnelles» (?). Mais les simulations peuvent également être considérées comme une autre méthode empirique, et leur utilisation en sciences sociales comme substitut à des expériences réelles a suscité beaucoup de débats, malgré des avantages certains (Reiss, 2011).

Ces deux modes de pensée ont des conséquences sur la manière de concevoir des modèles en sciences sociales. Certains travaux préfèrent modéliser des relations très simples, étudiant un ensemble très restreint de mécanismes : le modèle de ségrégation de Schelling (Schelling, 1969) est un exemple classique de cette approche. D'autres travaux tentent d'être aussi réalistes que possible, englobant un grand nombre de caractéristiques pour être aussi proches que possible du phénomène qu'ils souhaitent étudier, comme le modèle OCDE "DEVPEM" (Brooks et al., 2010) utilisé pour formuler des recommandations politiques. La coexistence de ces deux approches ne s'est pas faite sans l'émergence de vifs débats. Ce chapitre s'inscrit ainsi dans la lignée de nombreux travaux proposant des idées et des recommandations sur la question (Noble, 1997 ; Silverman and Bullock, 2004 ; Korb and Mascaro, 2009 ; Silverman, 2018 ; Tolk et al., 2013).

Si les simulations sont relativement récentes, la question de la définition de la place d'un outil entre raisonnement logique et méthodes empiriques n'est pas nouvelle. Karl Popper a ainsi défini le problème de la démarcation comme "le problème de trouver un critère qui nous permettrait de distinguer entre les sciences empiriques d'une part, et les mathématiques et la logique ainsi que les systèmes" métaphysiques "d'autre part" (Popper, 2005). Cette question l'a amené à définir la falsifiabilité comme un tel critère ; pour être admis dans le domaine de la science empirique, "il doit être possible qu'un système empirique soit réfuté par l'expérience" (Popper, 2005).

Le *falsificationnisme* de Popper a eu un impact considérable sur le domaine de l'épistémologie et sur la façon dont nous faisons de la recherche scientifique aujourd'hui. À cela s'ajoute le fait que la démarcation est au coeur du problème de la place simulations scientifiques. Pour ces raisons, nous nous proposons ici de considérer la question de la place des simulations en utilisant un point de vue falsificationniste. Ce chapitre défend l'idée que l'analyse désormais classique de Popper peut apporter des éclairages intéressants sur cette problématique plutôt nouvelle. Notre argumentation suit trois étapes : nous soutenons d'abord que, du point de vue falsificationniste, les simulations ne peuvent pas être admises dans le domaine empirique. Deuxièmement, nous affirmons que les simulations ne peuvent pas non plus être strictement iden-

tifiées comme une forme de raisonnement logique. Troisièmement, nous affirmons que les simulations occupent un rôle spécifique et nécessaire entre les deux. Pour conclure, nous considérons ce que cela implique en termes de lignes directrices de modélisation.

Ce point de vue découle d'une position falsificationniste : il y a beaucoup de simulations informatiques différentes et il serait illusoire de penser pouvoir les juger en utilisant un seul ensemble de critères (Davis, 2007). Ce chapitre choisit délibérément de se limiter à une vision falsificationniste pour plus de clarté et pour apporter de nouvelles perspectives à un problème complexe.

5.2 Le critère de démarcation, un outil qui a marqué le XXe siècle

Pour comprendre la vision scientifique de Karl Popper, les premiers mots de son ouvrage majeur (Popper, 2005) sont extrêmement utiles.

”Un scientifique, qu’il soit théoricien ou expérimentateur, propose des énoncés, ou des systèmes d’énoncés, et les teste pas à pas. Dans le domaine des sciences empiriques, plus particulièrement, il construit des hypothèses, ou systèmes de théories, et les soumet à l’épreuve de l’expérience par l’observation et l’expérimentation. ”

Karl Popper utilise un vocabulaire très précis pour articuler sa pensée. La science consiste selon lui à manipuler des *énoncés*; ces déclarations appartiennent à deux catégories selon Popper. *Les énoncés singuliers* sont des éléments particuliers sans aucune généralité, ”tels que les comptes rendus des résultats d’observations ou d’expériences” (Popper, 2005). *Les énoncés universels* sont beaucoup plus généraux, ”comme les hypothèses ou les théories” (Popper, 2005).

Cette distinction peut être rendue plus explicite en observant que les énoncés singuliers sont des déclarations d’existence ou des déclarations ”il y a”, tandis que les énoncés universels sont des déclarations de non-existence ou des déclarations ”il n’y a pas”. Observer un corbeau noir est une déclaration singulière : ”il y a un corbeau noir ici”. Affirmer que tous les corbeaux partagent cette couleur est cependant une affirmation universelle : ”tous les corbeaux sont noirs”, qui peut également être exprimé comme ”il n’y a pas de corbeau qui ne soit pas noir”.

Selon Popper (2005), ”les théories scientifiques sont des énoncés universels”. Le rôle de la science est donc de construire des énoncés universels (ou des systèmes de plusieurs d’entre eux) avant de les tester par rapport à l’expérience. Un argument clé de l’opinion de Popper sur la méthode scientifique est que la seule façon de tester une théorie scientifique est de fournir un énoncé singulier (fourni par une expérience ou

une observation) qui réfuterait un énoncé universel (une théorie). Il faudrait trouver un corbeau blanc pour réfuter l'hypothèse selon laquelle "tous les corbeaux sont noirs". Toutes les autres façons de tester les théories sont vaines selon Karl Popper.

Cette position conduit à un puissant *critère de démarcation*. Popper définit le critère de démarcation comme un "critère qui nous permettrait de distinguer entre les sciences empiriques d'une part, et les mathématiques et la logique ainsi que les systèmes" métaphysiques "d'autre part" (Popper, 2005). Seules les disciplines capables de fournir des énoncés universels pouvant être réfutés en produisant des énoncés singuliers peuvent être considérées comme des *sciences empiriques*.

Ce critère a été largement utilisé pour différencier ce qui est de l'ordre de la science de ce qui ne l'est pas. Si Popper propose ce critère pour différencier les sciences empiriques des systèmes «métaphysiques» ou d'autres disciplines non scientifiques, il faut remarquer qu'il s'agit ici de science *empirique*. Popper définit ainsi ce critère pour différencier également les sciences empiriques des mathématiques. Les mathématiques et la logique sont des éléments cruciaux de la méthode scientifique de Popper : elles sont utilisées pour déduire toutes les conséquences logiques du système initial d'énoncés universels. Cela permet d'évaluer la *validité interne* d'une théorie scientifique : si certaines affirmations universelles initiales sont incompatibles avec d'autres, la théorie n'est pas valide. De plus, cela étend les possibilités de réfuter une théorie scientifique. Si l'une de ses conséquences logiques est réfutée, toute la théorie l'est également.

Le critère de démarcation sépare les mathématiques et la logique des sciences empiriques : les mathématiques ne produisent pas d'énoncés universels sur le monde. Aucune branche des mathématiques ne propose des énoncés tels que "tous les corbeaux sont noirs". Les mathématiques choisissent un ensemble d'axiomes et étudient leurs implications logiques : toute conclusion mathématique est aussi "vraie" que l'ensemble initial d'axiomes.

Utiliser le critère de démarcation pour faire la distinction entre les mathématiques et la logique d'un côté et les sciences empiriques de l'autre a été rarement utilisé, bien qu'il soit clairement indiqué dans la définition initiale de Popper (2005). Dans le monde de Popper, nous avons donc deux critères pour analyser les énoncés : singulier contre universel d'une part et empirique contre logique d'autre part (voir Figure 5.3).

Le but de ce chapitre est de montrer que ces distinctions peuvent s'avérer utiles dans notre problème : déterminer la place de la simulation informatique dans la méthode scientifique. En effet, nous avons vu que la question du rôle de la simulation dans le processus scientifique a été abordée dans la littérature en la comparant aux

	Singulier	Universel
Logique	"Dans <i>certains</i> triangles rectangles, le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés"	"Dans <i>tout</i> triangle rectangle, le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés"
Empirique	" <i>Certains</i> corbeaux sont noirs"	" <i>Tous</i> les corbeaux sont noirs"

FIGURE 5.3 – En utilisant la terminologie de Karl Popper, nous pouvons catégoriser les énoncés suivant deux critères.

deux axes principaux de la recherche : le raisonnement logique et l'expérimentation. Où se situe la simulation informatique entre ces deux domaines ? Cette frontière insaisissable est précisément ce que le critère de démarcation vise à identifier.

5.3 La simulation informatique n'est pas une méthode empirique

La possibilité que les simulations informatiques constituent une alternative satisfaisante à l'expérimentation ou l'observation a suscité de nombreux débats dans la communauté scientifique.

Les arguments "contre" tournent autour de l'idée que les résultats de simulation n'ont pas la même "valeur épistémologique" (Roush, 2018). De nombreux chercheurs s'accordent sur le fait qu'un résultat d'expérience est "plus riche" qu'un résultat de simulation ; cette différence s'exprime en différents termes. Currie and Levy (2018) soutient qu'un résultat de simulation ne peut pas avoir accès à de vrais "spécimens", contrairement à de vraies expériences. Currie (2018) et Morgan (2005) expriment cette différence en matière de "surprise" : si les deux conviennent que la simulation peut surprendre les chercheurs, Currie (2018) soutient que seules les expériences peuvent apporter une véritable "surprise" concernant le contact entre théorie et réalité. Les travaux de Morgan (2005) soutiennent que seule l'expérience peut produire une surprise inexplicable dans la théorie existante, concluant que les expériences ont "un pouvoir épistémologique supérieur". Varenne (2014) considère la problématique du point de vue inverse : il argumente ainsi que les simulations impliquent une "perte

de réalité” sur certains aspects.

Bien que formulée de diverses manières, cette ligne de pensée défend la même idée : les résultats de simulation sont limités par les choix de conception initiaux et ne possèdent pas la même richesse que les résultats d’une expérience. Parke (2014) réfute cette idée d’un ”privilège épistémologique” d’expériences sur des simulations, arguant qu’il s’agit d’une question contextuelle et que, dans certains cas, nous en savons suffisamment sur un problème particulier pour nous concentrer sur la modélisation et la simulation.

Plus fréquemment, les arguments en faveur de la simulation comme équivalent à l’expérimentation tournent autour des avantages supposés que la simulation peut fournir. Łatuszyńska (2016) fait valoir que la simulation présente un certain nombre d’avantages : reproductibilité, flexibilité, éventail de possibilités, moindre coût, rapidité de mise en œuvre, etc. Reiss (2011) partage cela la conviction que les nombreux avantages des simulations par rapport à l’expérimentation devraient conduire les chercheurs à les considérer comme un substitut possible. Le contrôle est un autre argument fort en faveur des simulations (Varenne, 2001).

Suivant le cadre théorique de Popper (2005), on pourrait considérer l’expérimentation comme le processus de production d’énoncés singuliers de manière contrôlée et reproductible. Pour le falsificationniste, il n’y a qu’une seule utilité aux énoncés singuliers : ”falsifier” les théories. Pour remplacer l’expérimentation, la simulation doit être capable de produire des énoncés singuliers pouvant falsifier les hypothèses scientifiques. Est-ce possible ?

Pour créer une simulation informatique, les chercheurs doivent préciser ses règles, qui sont le reflet direct de conceptions théoriques. Les énoncés singuliers qui en résultent peuvent ensuite être utilisés pour réfuter a) les conceptions théoriques qui sont à l’origine de la simulation ou b) d’autres conceptions théoriques.

Il est assez évident que la première option n’est pas une possibilité. Un énoncé singulier produit par simulation est la conséquence directe et logique des choix de modélisation. Si nous exécutons une simulation qui est l’application directe de la théorie que nous souhaitons réfuter, alors l’énoncé singulier résultant sera naturellement incapable de falsifier la théorie.

Il nous reste donc la deuxième option. Pouvons-nous produire des déclarations singulières qui réfuteront d’autres parties de la théorie ?

Si une déclaration singulière produite par une partie de la théorie réfute d’autres éléments, c’est une question de cohérence interne. Cela signifierait que les conséquences de la première partie de la théorie sont incompatibles avec la deuxième partie : par conséquent, la théorie a des incohérences internes. Mais cela n’a rien à

voir avec la validation empirique ou la falsification de la théorie.

De plus, nous n'aurions aucun élément pour juger quelle partie de la théorie est correcte : rien ne garantit que les éléments théoriques qui ont été utilisés pour concevoir la simulation sont corrects. C'est un aspect fondamental du point de vue de Popper : l'énoncé singulier doit être correct, ce qui amène Popper à recommander qu'ils proviennent d'un "effet reproductible" de la réalité, que tout chercheur peut juger. Et nous ne pouvons pas affirmer qu'en utilisant des simulations, nous avons produit des énoncés singuliers qui sont aussi bons que la réalité, car cela signifierait que la conception théorique est une bonne approximation du fonctionnement de la réalité. C'est une erreur logique, comme l'a souligné Kirman (1999) quand un argument similaire a été avancé par Koopmans. Cet argument "implique que nous comprenons la réalité sous-jacente et que nous sommes donc en mesure de juger en quoi consiste une bonne approximation de celle-ci. Cependant, si nous l'acceptons, il n'y aurait pas besoin d'un test empirique de nos affirmations, car toute la proposition dérivée des prémisses devrait être acceptée " (Kirman, 1999).

Cela rend les énoncés singuliers produits par simulation incapables de falsifier les éléments théoriques qui ont servi à les créer, car ils ne sont rien d'autre que leur conséquence. Ils ne peuvent pas non plus falsifier d'autres parties de la théorie, car cela signifierait que la théorie est incohérente. Enfin, ils ne peuvent rien apporter de plus : il n'y a pas de "surprise épistémologique" en eux. C'est une différence majeure avec les énoncés singuliers produits par l'expérimentation. Une bonne illustration peut être trouvée dans Chalmers (2013) : la taille constante apparente de Vénus lorsqu'elle est observée à l'œil nu était considérée comme un falsificateur potentiel de la théorie de Copernic. Jusqu'à ce que Galilée montre que la taille de Vénus change lorsqu'elle est regardée à travers un télescope. Cette expérience a produit l'énoncé singulier "il n'y a aucun changement dans la taille de Vénus lorsqu'elle est observée dans ces conditions précises". Il s'agit d'un énoncé singulier que nous avons produit à partir de la réalité : il peut être évalué de manière plus approfondie lorsque notre connaissance de la réalité change. Cela a d'abord semblé être un énoncé falsifiant la théorie de Copernic, mais l'énoncé a été réévalué une fois que nous avons pris conscience des différences entre l'œil nu et le télescope. Cela peut encore changer si nous procédons à des découvertes supplémentaires au sujet de la réalité. Un énoncé singulier produit par une simulation ne posséderait pas une telle caractéristique, car il serait limité par nos connaissances au moment de la modélisation. Un tel énoncé n'est qu'un élément singulier directement dérivé des conceptions théoriques utilisées pour créer la simulation.

Comme les simulations semblent incapables de produire des énoncés singuliers

falsifiant une théorie empirique, suivant le critère de démarcation de Popper (2005), elles ne peuvent se ranger aux côtés des méthodes empiriques. Ainsi, les simulations appartiennent au domaine des méthodes logiques. Parmi elles, quelle est exactement la place de la simulation ?

5.4 Le raisonnement logique ne peut être parfaitement remplacé par les simulations

Parmi les théoriciens des disciplines à orientation mathématique, la manière traditionnelle de prouver une hypothèse reste la méthode de recherche privilégiée. Un ensemble d'éléments logiques initiaux, appelés axiomes, est étudié : les conséquences de leur interaction sont obtenues en une série d'étapes qui "ne doivent laisser aucune discontinuité, aucune lacune, aucune incertitude, sinon ce n'est pas une preuve" (Polya, 2004). Ce type de raisonnement formel est devenu l'arme de choix pour tirer les conséquences logiques de toute théorie qui peut être formulée en termes mathématiques, comme en physique. Au cours du siècle dernier, l'économie a fait le choix plus ou moins conscient de modéliser ses hypothèses initiales en utilisant de plus en plus de mathématiques (voir Weintraub (2002) pour un compte rendu historique). Cela a permis aux économistes de bâtir des théories cohérentes à la complexité croissante, à l'image de ce que les premiers chapitres ont tenté de faire (toutes proportions gardées). Ce raisonnement mathématique est cependant de plus en plus remis en cause par des approches alternatives, telles que les simulations informatiques.

La simulation *centrée individu* (Mathieu and Picault, 2012) ainsi que d'autres formes utilisant les possibilités de l'informatique ont fait l'objet de recherches intenses au cours des dernières décennies en sciences sociales (Tsfatsion and Judd, 2006). De nombreux chercheurs conviennent de reconnaître que les simulations informatiques sont un outil pour générer de nouvelles théories. Noble (1997) défend l'idée que les modèles de vie artificielle peuvent établir des liens de causalité entre un ensemble d'hypothèses et des phénomènes émergents ; si ces phénomènes sont suffisamment proches des phénomènes réels, la simulation peut générer une théorie expliquant leur émergence. Une hypothèse de travail est ensuite renvoyée au côté empirique du champ à tester (Noble, 1997). Deffuant et al. (2003) considère les simulations informatiques comme un outil pour établir d'éventuelles implications théoriques : les simulations informatiques peuvent donc être utilisées avant de proposer un modèle théorique expliquant les résultats de la simulation (Deffuant et al., 2003).

Une fois de plus, les arguments en faveur des simulations informatiques considèrent leurs avantages par rapport aux méthodes traditionnelles. La modélisation mathématique est limitée par l'ensemble des résultats précédemment obtenus dans la littérature et la capacité du chercheur à en dériver de nouveaux. Il y a cependant des domaines entiers d'incompétence mathématique auxquels les chercheurs et surtout les économistes doivent faire face. Les simulations informatiques peuvent ensuite être utilisées pour obtenir des résultats dans des modèles qui présentent des caractéristiques qui les rendraient très difficiles à étudier, tels que des modèles avec plusieurs agents hétérogènes, qui interagissent entre eux et ont des trajectoires d'apprentissage ou d'adaptation (Bonabeau, 2002). En particulier, les modèles centrés individus résident dans le pouvoir explicatif qui découle de leur nature constructiviste (Mathieu and Picault, 2012) : il est possible d'établir un lien de cause à effet entre des causes individuelles simples et des phénomènes macroscopiques en s'affranchissant de toutes les limites mathématiques.

Pour évaluer la place des simulations informatiques, il faut aller plus loin et se demander si la simulation pourrait remplacer complètement le raisonnement mathématique formel en sciences sociales. Examinons à nouveau la question de l'adoption d'un point de vue falsificationniste.

Selon Popper, une bonne raison de rejeter une théorie est «la falsification d'une des conséquences de l'hypothèse». En effet, tout ensemble d'hypothèses produit un certain nombre de conséquences logiques qui peuvent en être déduites. Cet ensemble d'hypothèses peut ensuite être écarté si l'une de ces conséquences est falsifiée. Déduire logiquement les conséquences d'un ensemble d'hypothèses est donc une tâche cruciale dans la méthode falsificationniste de la recherche scientifique. Dans cette perspective, la simulation informatique peut-elle remplacer les mathématiques ? Si nous devons répondre oui, cela signifierait que les simulations informatiques sont capables de jouer le même rôle que les mathématiques, voire même de transcender les difficultés auxquelles le raisonnement mathématique traditionnel est confronté.

On se heurte rapidement aux limites des mathématiques. À partir d'un simple ensemble d'axiomes, il est possible de tirer des conséquences de plus en plus difficiles et de construire ainsi un corpus de connaissances fascinant, comme en témoigne l'histoire de la discipline. Prenons l'exemple de la théorie des nombres. Bien que tournée vers le sujet apparemment simple des nombres entiers, il s'agit d'une branche encore très active des mathématiques. Elle est constituée des contributions de certains des esprits les plus brillants au cours des siècles, et pourtant elle continue à admettre de nouveaux résultats. En outre, certaines des conséquences logiques de ses axiomes semblent encore hors de la portée de nos mathématiciens. C'est le cas de la conjec-

$$26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

FIGURE 5.4 – Le processus de Collatz appliqué à 26 mène bien à 1. Il s’agit d’un énoncé singulier qui ne falsifie ni ne prouve la conjecture.

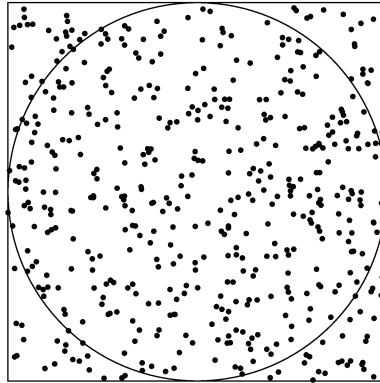


FIGURE 5.5 – Le nombre de points à l’intérieur du cercle divisé par le nombre total de points est une approximation de l’aire du cercle.

ture de Collatz. Prenez n’importe quel entier ; s’il est pair, divisez-le par deux ; sinon, multipliez-le par trois et ajoutez un. Si vous continuez, il semble que vous atteindrez finalement 1 (5.4). Mais personne n’a réussi à le prouver formellement.

Les simulations s’avèrent utiles dans de telles situations. Un exemple est celui des simulations Monte-Carlo qui sont couramment utilisées pour approximer des quantités intraitables. Taleb (2005) fournit un bon exemple du fonctionnement d’une telle simulation. Dessinons un cercle à l’intérieur d’un carré et tirons des balles au hasard. Le ratio donné par le nombre de balles à l’intérieur du cercle divisé par le nombre total de balles nous donnera une approximation d’un multiple de Pi (Figure 5.4).

Cette simulation produit une approximation de Pi, dont la précision peut être augmentée à volonté (en tirant plus de balles) (Taleb, 2005). De nos jours, les simulations Monte-Carlo sont utilisées quotidiennement pour calculer des approximations de problèmes insolubles par ailleurs, telles que certaines intégrales en économétrie.

Il est ainsi possible de réaliser des simulations basées sur un ensemble d’hypothèses logiques, puis d’en tirer des conséquences que les mathématiques ne peuvent pas. Les simulations pourraient-elles remplacer les mathématiques et devenir le nouveau standard de la pensée logique ? Dans la mesure des progrès actuels, les simulations ne sont que des instances de systèmes logiques. Alors que les mathématiques peuvent étudier des objets généraux et infinis, les simulations ne sont pour l’instant

capables d'étudier que des spécifications particulières et finies de ces systèmes, en utilisant des paramètres précis pour les définir. Les mathématiques peuvent considérer le cas général du cercle discuté précédemment : une simulation devra connaître la taille exacte du cercle. À ce stade, on pourrait faire valoir qu'il suffit de multiplier les simulations couvrant un large éventail de paramètres, comme dans les méthodes de Monte-Carlo, pour dériver des déclarations logiques générales des hypothèses initiales en utilisant le raisonnement inductif (Orcutt, 1960). Cela pourrait-il fonctionner ?

Une approche falsificationniste nous conduirait à rejeter cette possibilité, Popper étant fortement opposé à toute forme d'induction. Popper (2005) commence par établir clairement que "la théorie à développer dans les pages suivantes s'oppose directement à toute tentative d'opérer avec les idées de la logique inductive". Par conséquent, tout argument contre l'induction pourrait être utilisé ici pour combattre l'idée que le raisonnement inductif pourrait nous aider à transformer les résultats des simulations en déclarations universelles. L'un des arguments les plus célèbres est la "dinde inductiviste" de Russell (2001) (qui se trouve en fait être un poulet) : "L'homme qui a nourri le poulet chaque jour tout au long de sa vie lui tord finalement le cou, montrant qu'une opinion plus subtile¹ qu'un point de vue inductif sur l'uniformité de la nature aurait été utile au poulet" Russell (2001). Induire un énoncé universel à partir d'un ensemble d'énoncés singuliers s'est avéré plutôt malheureux pour le poulet : une longue série d'expériences positives avec le fermier ne suffit pas pour établir fermement qu'il se comportera toujours de la même manière.

Nous pouvons étendre l'argument au cas plus moderne des simulations en utilisant les progrès récents de l'informatique. En particulier, la *théorie de la complexité* nous fournit de nombreux exemples qui montrent à quel point on peut se tromper en utilisant une approche inductive avec des résultats simulatoires. Suivant Mitchell (2009), on peut définir un système complexe comme "un système qui présente des comportements émergents et auto-organisés non triviaux". L'un de ses exemples les plus célèbres, la carte logistique. Il s'agit d'un processus très simple se produisant à différents intervalles de temps t . L'état à $t + 1$ dépend de l'équation suivante : $x_{t+1} = Rx_t(1 - x_t)$ avec R étant un paramètre fixe de notre choix. Il s'agit a priori d'un processus très simple. Cependant, à certains moments précis, le chaos se produit ; par exemple, une variation de 0.0000000001 dans les conditions initiales peut donner naissance à deux processus complètement différents après 30 périodes (Mitchell, 2009). Ces systèmes, "si leurs conditions initiales sont perturbées, même à l'infini, peuvent modifier radicalement leur trajectoire. Ainsi, bien qu'ils soient dé-

1. .

terministes, leur comportement détaillé dans le temps est imprévisible” (Simon, 2008). Dans une telle situation, exécuter un nombre illimité de simulations et déduire une déclaration mathématique générale serait faux. Selon la distribution des paramètres, les résultats finaux présenteraient des différences imprévisibles énormes. L’augmentation du nombre de simulations s’avérerait inutile, car même des changements imperceptibles dans les paramètres initiaux conduisent à des résultats imprévisibles. La carte logique est un processus simple à une seule équation : imaginez maintenant étudier un modèle économique sophistiqué. L’existence d’un chaos et d’une complexité encore mal compris constitue l’argument le plus puissant contre l’induction d’une preuve mathématique à partir d’un certain nombre de simulations.

Les simulations sont incapables de produire des énoncés empiriques singuliers, ce qui les empêche de prétendre au rôle de méthode empirique. Elles ne sont pas plus capables d’opérer des déductions logiques valables, ce qui les différencie du raisonnement logique et mathématique. Dans ces conditions, quelle est exactement la place des simulations dans la méthode scientifique ? S’ils ne peuvent pas produire de preuves logiques ou falsifier des théories empiriques, peuvent-ils encore être d’une certaine utilité dans le processus scientifique ?

5.5 Un entre-deux pour les simulations informatiques : produire des énoncés singuliers logiques

Examinons ce qu’est une simulation informatique dans le cadre théorique de Karl Popper. Le résultat d’une simulation n’est pas un énoncé empirique singulier ; ce n’est pas non plus un énoncé logique universel. Notre argument est le suivant : si un résultat de simulation n’est pas empirique, alors il doit être logique. S’il n’est pas universel, alors il doit être singulier. Par conséquent, les résultats de simulation sont des énoncés singuliers logiques.

Jusqu’à présent, nous n’avons pas prêté beaucoup d’attention à cette catégorie. Quels sont exactement les énoncés singuliers logiques ? Rappelons qu’un énoncé singulier est le même qu’un énoncé existentiel. Dans le domaine logique, un exemple serait ”Il existe un nombre dont la valeur au carré est impaire”. Les résultats des simulations produisent de telles affirmations : ”Il existe des paramètres précis et des étapes spécifiques qui nous conduisent à ce résultat particulier”.

Quelle est leur utilisation dans la méthode scientifique ? Pour répondre à cette question, considérons leurs homologues empiriques. Les énoncés empiriques singu-

liers tels que «il existe un corbeau blanc observé dans ces conditions précises» n'ont qu'une utilité selon Popper : réfuter un énoncé empirique universel, tel que «Tous les corbeaux sont noirs». Les énoncés singuliers logiques peuvent jouer un rôle similaire : réfuter les énoncés logiques universels. Si l'on dit "Tous les nombres sont impairs", votre première réaction sera "Et 2 alors?". Énoncer des règles logiques non démontrées est chose courante en mathématiques : il s'agit des *conjectures*.

Par exemple, la conjecture de Polya pose que, quel que soit le nombre, plus de la moitié des nombres naturels inférieurs à ce nombre ont un nombre impair de facteurs premiers. Cette conjecture, en tant qu'énoncé universel, peut être exprimée comme une déclaration de non-existence : il n'y a pas de nombre tel que plus de la moitié du nombre naturel moins que ce nombre n'a un nombre impair de facteurs premiers. Il y a deux possibilités. Soit la conjecture est vraie, et un chercheur peut essayer de la prouver en la déduisant de l'ensemble des énoncés logiques déjà établis. Soit un chercheur suspecte que la conjecture est fautive : il peut alors essayer de la réfuter, en produisant un contre-exemple. Cependant, si la conjecture a gagné en popularité, c'est le plus souvent parce qu'elle a résisté à l'épreuve du temps, en raison de la difficulté à produire un contre-exemple... Jusqu'à ce que les simulations informatiques deviennent disponibles pour les mathématiciens. En utilisant la simulation, Haselgrove a établi en 1958 l'existence d'un entier réfutant la conjecture de Polya, bénéficiant du fait que "maintenant que les ordinateurs électroniques sont disponibles, il est possible de calculer (...) sur de grandes plages avec une précision considérable" (Haselgrove, 1958).

Un autre exemple est celui de Lander and Parkin (1966). Ce papier de recherche est célèbre pour être l'un des articles les plus courts jamais publiés, avec seulement deux phrases : "Une recherche directe sur le CDC 6600 a établi $27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$ comme la plus petite instance dans laquelle quatre cinquièmes puissances se résument à une cinquième puissance. Ceci est un contre-exemple d'une conjecture d'Euler selon laquelle au moins n $n^{\text{ième}}$ puissances sont requises former une somme égale à une $n^{\text{ième}}$ puissance, $n > 2$ " (Lander and Parkin, 1966). En effet, à l'aide d'une simulation informatique, il suffit d'un énoncé logique singulier (qui peut s'avérer particulièrement concis) pour réfuter une hypothèse théorique. La conjecture de Mertens est un autre cas d'une hypothèse mathématique réfutée par une simulation (Odlyzko et al., 1984).

Les simulations informatiques peuvent jouer un rôle semblable. Elles ne peuvent ni produire de vrais contre-exemples ni déduire des énoncés logiques universels, mais peuvent fournir des contre-exemples logiques. Elles peuvent ainsi réfuter une hypothèse logique de non-existence en produisant un énoncé logique singulier (Figure

	Singulier	Universel
Logique	Simulation informatique : "906 150 257"	Hypothèse logique : Conjecture de Polya
Empirique	Expérience : "Il existe un corbeau blanc"	Théorie scientifique : "Tous les corbeaux sont noirs"

FIGURE 5.6 – Le résultat de la simulation informatique falsifie la conjecture de Polya tandis que l’observation d’un corbeau blanc falsifie la conjecture que tous les corbeaux sont noirs.

5.6). Ici, nous utilisons le terme «réfuter» alors que nous aurions pu utiliser «falsifier» pour établir un parallèle avec le cas empirique ; mais formellement, un énoncé logique singulier montre simplement que la conjecture ne peut pas être incluse dans la théorie existante sans créer des inconsistances internes. L’énoncé logique universel n’est pas «falsifié» dans le sens où il s’est révélé incompatible avec la réalité : il s’est révélé incompatible avec les axiomes utilisés pour établir la conjecture.

Cela peut sembler un rôle très spécifique pour les simulations informatiques, et d’une utilité assez faible pour les sciences sociales. Au contraire, il est possible d’avancer que de nombreuses simulations en sciences sociales peuvent être interprétées comme un contre-exemple réfutant une forme de conjecture théorique qui existait avant elles. De plus, c’est précisément parce qu’elles ont réfuté des croyances théoriques largement répandues qu’elles ont eu un impact énorme sur leur domaine. Pour s’en convaincre, considérons quelques exemples emblématiques de simulations en sciences sociales.

5.5.1 Auto-organisation sans concepteur omniscient

Conway (1970) a créé une simulation informatique avec des règles très simples, sur une grille en deux dimensions. Les cellules peuvent être "mortes" ou "vivantes" ; une cellule morte peut devenir vivante si trois de ses voisins le sont ; une cellule vivante le reste tant que deux ou trois de ses voisins le sont également ; dans toutes les autres conditions, la cellule meurt (ou reste morte). Cet ensemble d’éléments initiaux très simple a généré l’une des simulations informatiques les plus fascinantes : sous

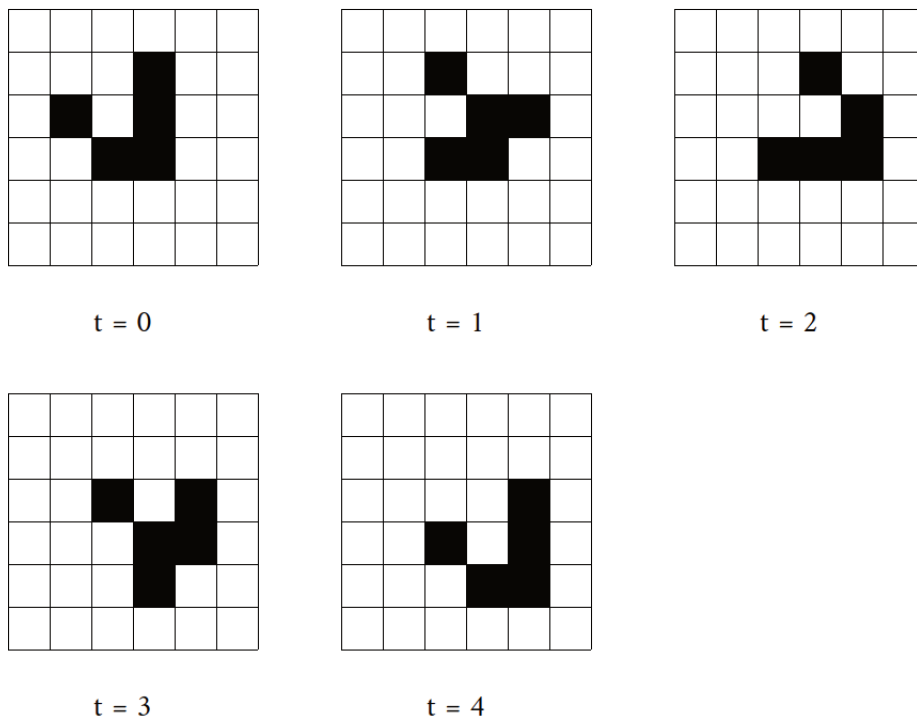


FIGURE 5.7 – A self-moving object in the Game of Life, called the glider. Source : Mitchell (2009)

certaines configurations initiales de cellules vivantes et mortes, des motifs semblent émerger et se déplacer à travers la grille, donnant naissance à d'autres formes de manière imprévisible.

Le jeu de la vie de Conway a montré que dans un cadre théorique très simple, des conditions initiales simples pouvaient conduire à l'émergence de schémas qui évoluent, se maintiennent et produisent des conséquences imprévisibles au fil du temps. Dans un cadre simple à deux dimensions, ses simulations ont montré que des phénomènes proches de ce que nous pensions être l'exclusivité des organismes vivants pouvaient apparaître. Cela a fourni un contre-exemple frappant à la croyance générale que l'auto-organisation et l'imprévisibilité ne pouvaient venir que de formes de vie complexes. Une autre croyance largement répandue était que seul un concepteur omniscient pouvait produire ces éléments. À l'aide d'une simulation informatique, Conway a ainsi fourni un énoncé logique singulier qui vient ainsi réfuter des conjectures logiques largement répandues.

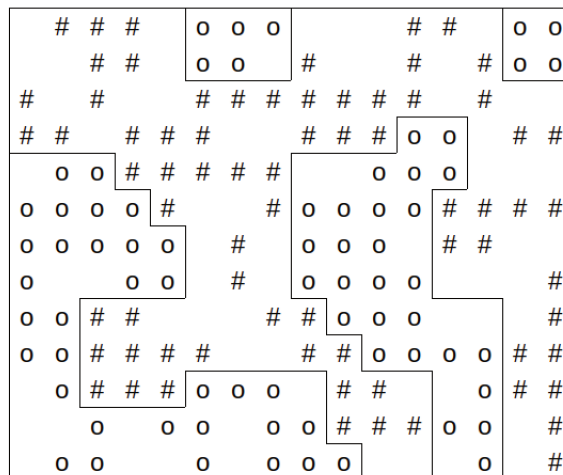


FIGURE 5.8 – Des schémas de ségrégation apparaissent dans les simulations de Schelling. Source : Schelling (1969)

5.5.2 Le modèle de Schelling et les racines de la ségrégation urbaine

Schelling (1969) a proposé un modèle simple avec deux groupes d’agents se déplaçant à travers une grille. Chaque agent décide de déménager si plus de la moitié de ses voisins appartiennent au groupe opposé. La simulation s’arrête une fois que chaque agent est satisfait de sa situation. On pourrait s’attendre à ce que la situation finale présente un ratio moyen de voisins similaires proche du seuil de décision individuel (50%). Cependant, les différentes simulations de Schelling (1969) présentent un ratio moyen final de plus de 80%.

Le modèle de Schelling peut être interprété comme un énoncé logique singulier réfutant l’hypothèse logique selon laquelle le niveau de ségrégation final existant dans un réseau composé de deux groupes est à peu près le même que le niveau d’intolérance individuelle. Avec cette conjecture logique, le niveau final de ségrégation était perçu comme une conséquence directe de l’intolérance individuelle initiale. Les simulations de Schelling ont montré que ce n’était pas le cas. Par extension, le modèle de Schelling fut perçu comme un avertissement que les villes marquées par la ségrégation n’étaient pas nécessairement le produit direct d’un comportement discriminant de même ampleur de la part de leurs habitants, comme on le croyait alors à l’époque. L’impact du travail de Schelling a été énorme, et sa simulation très simple a été acceptée par la communauté scientifique comme une réfutation des théories préexistantes (Varenne, 2014).

	Don't confess	Confess
Don't confess	3,3	0,4
Confess	4,0	1,1

FIGURE 5.9 – Dans le dilemme du prisonnier, chaque joueur a intérêt à trahir son partenaire. Source : Osborne and Rubinstein (1994)

5.5.3 La coopération est parfois une stratégie gagnante

Le dilemme du prisonnier est sans doute la configuration la plus célèbre de la théorie des jeux. Deux prisonniers sont interrogés dans des cellules séparées. Si l'un avoue et accepte de témoigner contre son complice, il sera libéré tandis que l'autre ira en prison (pour quatre ans dans l'exemple de la Figure 5.9). Si les deux avouent, ils seront condamnés à une peine légèrement plus courte. Si aucun des deux n'accepte de se confesser, ils seront condamnés pour une infraction mineure et passeront peu de temps en prison (un an ici). Dans ce jeu, il y a des "gains de coopération" (Osborne and Rubinstein, 1994), mais chaque joueur est incité à trahir l'autre ; l'unique équilibre de Nash est alors que les deux agents avouent.

Le cas du dilemme d'un prisonnier *répété* est cependant plus complexe à analyser mathématiquement. Axelrod and Hamilton (1981) a proposé une simulation informatique où différentes stratégies proposées par de nombreux chercheurs se faisaient concurrence, prenant des décisions en fonction du comportement de l'adversaire lors des rencontres précédentes. De manière tout à fait frappante, une stratégie simple a prévalu : appelée "tit for tat", la stratégie coopère initialement ; ensuite, elle reproduit la dernière action de son partenaire. Si l'autre joueur trahit, la stratégie le punit de trahison au tour suivant : cette punition prend fin dès que l'adversaire coopère. Cette stratégie s'est avérée la plus performante dans les tournois organisés par Axelrod à l'aide de simulations informatiques. Ainsi le vainqueur est une stratégie initialement coopérative qui donne systématiquement une nouvelle chance à son adversaire après une trahison, quel que soit le nombre de trahisons passées.

Une analyse théorique du jeu sur une période de ce jeu très simple peut nous amener à penser que les comportements égoïstes prévalent toujours dans les contextes théoriques similaires à la situation de dilemme du prisonnier. Il s'agit d'un énoncé logique universel, que l'on peut formuler comme un énoncé logique de non-existence : «aucun comportement altruiste ne peut prévaloir». Cet énoncé est réfuté par l'énoncé logique singulier d'Axelrod. Grâce à sa simulation dynamique, il fournit des conditions logiques initiales qui conduisent une stratégie relativement altruiste et indulgente à prévaloir systématiquement sur un large éventail de stratégies. D'autres

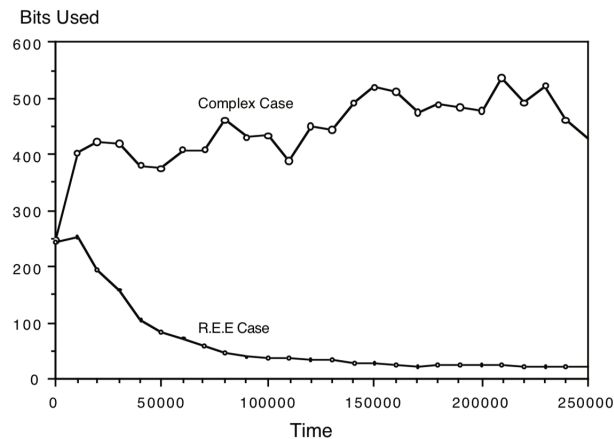


FIGURE 5.10 – Le trading technique émerge dans la simulation d’un marché boursier. Source : Arthur et al. (1996)

stratégies coopératives ont depuis prouvé leur efficacité, comme ”Gradual” (Beaufils et al., 1997), un autre exemple de stratégie où la coopération est le premier pas. Les simulations de Axelrod and Hamilton (1981) ont eu un impact frappant en sciences sociales (Mathieu et al., 2005), en partie car elles ont grandement contribué à affaiblir le préjugé que seules les stratégies égoïstes pouvaient gagner dans les jeux à somme nulle. La coopération peut être une stratégie gagnante.

5.5.4 Un marché boursier où l’irrationalité est la stratégie payante

L’analyse des marchés boursiers se fait généralement en considérant les agents rationnels et en obtenant un équilibre mathématique dans des modèles simplifiés. La pertinence de ces équilibres fait l’objet de vifs débats ; les critiques se portent souvent sur les hypothèses de rationalité initiales. Par exemple, les bulles financières et *l’analyse technique* - la croyance que l’on peut prédire les prix futurs en étudiant les tendances sur les graphiques financiers - s’expliquent généralement par des arguments comportementaux (Akerlof and Shiller, 2010). À l’inverse, les chercheurs font généralement l’hypothèse théorique qu’il existe une conséquence directe entre la rationalité et l’équilibre. Arthur et al. (1996) a proposé une simulation informatique où les comportements des agents ont été modélisés par des algorithmes génétiques. Dans la plupart des situations, les agents se sont placés à l’équilibre des attentes rationnelles (”R.E.E case”, Figure 5.10). Cependant, dans certains cas, les agents ont collectivement maintenu une dynamique complexe où l’analyse technique est apparue comme une stratégie plus rentable (”Complex case”, Figure 5.10).

Arthur et al. (1996) a ainsi réussi à réfuter l'hypothèse logique selon laquelle l'analyse technique, la psychologie du marché et les effets de meute sont incompatibles avec l'hypothèse d'efficacité du marché et l'absence d'opportunités d'arbitrage, ce qui était un énoncé logique universel généralement tenu pour vrai par les chercheurs en finance. Pour ce faire Arthur et al. (1996) a fourni un énoncé logique singulier à l'aide d'une simulation : cette simulation montre que dans certaines circonstances logiques, des agents optimisateurs sans émotion peuvent délibérément choisir l'analyse technique pour maximiser leurs gains.

5.6 Les limites de l'analyse

Le point de vue défendu dans cet article définit un rôle très spécifique pour les simulations informatiques en sciences sociales. Cela s'explique par la position falsificationniste que nous avons adoptée. Le travail de Popper consiste à produire des preuves formelles qui doivent être incontestables. Son travail est fortement orienté vers la démonstration logique. Toute approche inductive est rejetée, ce qui le conduirait à discréditer des pans entiers de la recherche en sciences sociales. C'est une position qui cherche à rejeter toutes les hypothèses possibles pour évaluer ce qui résiste. Avec cette approche, le seul rôle qui semble résister pour les simulations est celui qui consiste à produire des contre-exemples logiques.

Cependant, c'est un point de vue qui ne prend en compte que la valeur épistémologique, et non l'utilité générale d'une méthode scientifique. C'est une distinction très importante. Par exemple, les modèles que nous avons qualifiés auparavant de théoriques peuvent et ont été très utiles pour tirer des enseignements sur des questions empiriques. Le modèle de Schelling a suscité beaucoup de débats sur les faits observés empiriquement, tels que la ségrégation raciale dans les villes. Une perspective falsificationniste ne donnerait aucune valeur épistémologique empirique à ce modèle, mais les réflexions qu'il a suscitées ont conduit les chercheurs à proposer et tester des hypothèses empiriques. De cette manière, les simulations informatiques ont permis d'insuffler un nouvel élan à l'économie, conduisant le domaine à proposer de nouvelles théories.

C'est un aspect ignoré par l'approche développée dans ce chapitre. Basé sur une vision sans concession de la science, il ne nous fournit pas d'outils conceptuels pour analyser d'autres fonctions que pourraient jouer les simulations. Par conséquent, ces possibilités ne sont pas traitées dans ce chapitre. Cela ne signifie pas que nous pensons que le but considéré ici est le seul valable, ni même le principal ; cela signifie que nous pensons que de meilleures approches conceptuelles sont disponibles, telles

que celle développée dans Izquierdo and Izquierdo (2015). Les auteurs développent des critères pour évaluer l'utilité des modèles de la même manière que nous l'avons fait ici ; seulement, ils considèrent la question en considérant que "les modèles ne sont que des moyens et non des fins en soi" (Izquierdo and Izquierdo, 2015). Ce chapitre développe une approche complémentaire ici, évaluant comment les simulations informatiques pourraient être des fins en soi ; cependant, ce n'est peut-être pas leur rôle le plus important.

5.7 Conclusion du chapitre

Cet article contribue à une ligne de pensée décrite par Varenne (2001) qui considère les simulations comme un intermédiaire entre le raisonnement logique et l'expérience. En adoptant un point de vue falsificationniste, les simulations doivent jouer un rôle précis entre les deux : produire des énoncés logiques singuliers pour réfuter une hypothèse théorique.

Cela peut paraître une ambition très limitée pour les simulations informatiques en sciences sociales. Ce n'est pas le cas : cet objectif précis et très délimité peut apporter des éclairages saisissants et prouver qu'un éventail de possibilités théoriques est disponible. En effet, les exemples étudiés ici ont montré que des croyances largement répandues peuvent disparaître avec une seule simulation et de nouvelles perspectives logiques sont ouvertes. Par conséquent, le point de vue falsificationniste défendu ici ne limite pas la portée des simulations, mais les définit comme des outils de l'esprit porteurs de rupture ; en utilisant une seule expérience informatique, la façon dont nous pensons aux mécanismes théoriques complexes peut être profondément transformée.

Cette perspective peut inspirer une manière de modéliser les simulations. Le falsificationnisme recommande de conserver les théories qui résistent le mieux aux tentatives de falsification (Popper, 2005). En suivant ce raisonnement, un modélisateur devrait fournir les simulations les plus falsifiantes, pour aider à la comparaison scientifique entre les théories. À cet effet, plus la simulation est simple (au sens logique), plus le domaine falsifié est large. Si un énoncé logique a un contre-exemple, alors il a perdu sa généralité, mais peut rester relativement pertinent si le contre-exemple est un cas isolé. Le plus petit contre-exemple de la conjecture de Polya est 906150257 (Haselgrove, 1958), ce qui est assez élevé et donc difficile à trouver sans aide numérique. Cela explique pourquoi la conjecture de Polya est encore relativement bien connue. S'il existait plus de contre-exemples (dans le sens de plus faciles à trouver, plus petits, etc.), la conjecture de Polya aurait complètement perdu

sa pertinence et aurait probablement été oubliée depuis longtemps. Une simulation très spécifique qui ne produit un énoncé logique intéressant que sous des paramètres précis est comme un contre-exemple isolé. Inversement, une simulation simple et robuste ouvre un large éventail d'énoncé venant réfuter une conception erronée.

Popper lui-même affirme que la simplicité était une caractéristique "hautement souhaitable" des systèmes logiques, car elle augmentait le degré de falsifiabilité et en faisait donc de meilleures théories : "Les énoncés simples, si la connaissance est notre objet, doivent être plus appréciés que les énoncés moins simples parce qu'ils nous en disent plus ; parce que leur contenu empirique est plus important et parce qu'ils sont mieux testables" (Popper, 2005). Nous pensons que les simulations simples doivent également être plus appréciées, car elles nous en disent plus sur l'existence de contre-exemples logiques surprenants ; parce qu'elles ont un impact plus important sur la modification de nos idées préconçues ; parce qu'elles nous aident à construire de meilleures théories scientifiques.

5.8 Bibliographie du chapitre

Akerlof, G. A. and Shiller, R. J. (2010). *Animal spirits : How human psychology drives the economy, and why it matters for global capitalism*. Princeton university press.

Arthur, W. B., Holland, J. H., LeBaron, B., Palmer, R. G., and Tayler, P. (1996). Asset Pricing Under Endogenous Expectations in an Artificial Stock Market.

Axelrod, R. (1997). Advancing the art of simulation in the social sciences. In *Simulating social phenomena*, pages 21–40. Springer.

Axelrod, R. and Hamilton, W. D. (1981). The evolution of cooperation. *science*, 211(4489) :1390–1396.

Beaufils, B., Delahaye, J.-P., and Mathieu, P. (1997). Our meeting with gradual, a good strategy for the iterated prisoner's dilemma. In *Proceedings of the Fifth International Workshop on the Synthesis and Simulation of Living Systems*, pages 202–209. MIT press.

Bonabeau, E. (2002). Agent-based modeling : Methods and techniques for simulating human systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99(suppl 3) :7280–7287.

- Bratley, P., Fox, B. L., and Schrage, L. E. (2011). *A guide to simulation*. Springer Science & Business Media.
- Brooks, J., Filipski, M., Jonasson, E., and Taylor, J. E. (2010). Modelling the distributional impacts of agricultural policies in developing countries : the development policy evaluation model (Devpem). In *The 84th Annual Conference of the Agricultural Economics Society*.
- Chalmers, A. F. (2013). *What is this thing called science ?* Hackett Publishing.
- Conway, J. (1970). The game of life. *Scientific American*, 223(4) :4.
- Currie, A. (2018). The argument from surprise. *Canadian Journal of Philosophy*, 48(5) :639–661.
- Currie, A. and Levy, A. (2018). Why experiments matter. *Inquiry*, pages 1–25.
- Davis, J. B. (2007). The turn in economics and the turn in economic methodology. *Journal of Economic Methodology*, 14(3) :275–290.
- Deffuant, G., Amblard, F., Duboz, R., and Ramat, E. (2003). Une démarche expérimentale pour la simulation individus-centrée. *Actes des 10èmes Journées de Rochebrune, rencontres interdisciplinaires sur les systèmes complexes naturels et artificiels, statut épistémologique de la simulation*, pages 45–64.
- Fontana, M. (2006). Simulation in economics : evidence on diffusion and communication. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 9(2).
- Frigg, R. and Hartmann, S. (2018). Models in Science. In Zalta, E. N., editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, summer 2018 edition.
- Haselgrove, C. B. (1958). A disproof of a conjecture of Pólya. *Mathematika*, 5(02) :141.
- Izquierdo, L. R. and Izquierdo, S. S. (2015). Artificial Economics : What, Why and How. *SSRN Electronic Journal*.
- Kirman, A. (1999). The future of economic theory. *Economics beyond the Millennium (Oxford University Press, Oxford)*, pages 8–23.
- Korb, K. B. and Mascaro, S. (2009). The philosophy of computer simulation. In *Logic, methodology and philosophy of science : proceedings of the thirteenth international congress*. College Publications, London, pages 306–325. Citeseer.

- Lander, L. J. and Parkin, T. R. (1966). Counterexample to Euler’s conjecture on sums of like powers. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 72(6) :1079–1080.
- Lehtinen, A. and Kuorikoski, J. (2007). Computing the perfect model : Why do economists shun simulation ? *Philosophy of Science*, 74(3) :304–329.
- Mathieu, P., Beaufils, B., and Brandouy, O. (2005). *Artificial economics : agent-based methods in finance, game theory and their applications*, volume 564. Springer Science & Business Media.
- Mathieu, P. and Picault, S. (2012). Intérêt de la simulation centrée interactions pour les sciences humaines et sociales. *Revue des Nouvelles Technologies de l’Information*, pages 15–30.
- Mitchell, M. (2009). *Complexity : A guided tour*. Oxford University Press.
- Morgan, M. S. (2005). Experiments versus models : New phenomena, inference and surprise. *Journal of Economic Methodology*, 12(2) :317–329.
- Noble, J. (1997). The scientific status of artificial life. In *Poster presented at the Fourth European Conference on Artificial Life (ECAL’97), Brighton, UK*, volume 2831. Citeseer.
- Odlyzko, A. M., te Riele, H. J., and Odlyzko, A. (1984). *Disproof of the Mertens conjecture*. Centrum voor Wiskunde en Informatica.
- Orcutt, G. H. (1960). Simulation of economic systems. *The American Economic Review*, 50(5) :894–907.
- Osborne, M. J. and Rubinstein, A. (1994). *A course in game theory*. MIT press.
- Parke, E. C. (2014). Experiments, Simulations, and Epistemic Privilege. *Philosophy of Science*, 81(4) :516–536.
- Polya, G. (2004). *How to solve it : A new aspect of mathematical method*. Number 246. Princeton university press.
- Popper, K. (2005). *The logic of scientific discovery*. Routledge.
- Reiss, J. (2011). A plea for (good) simulations : nudging economics toward an experimental science. *Simulation & gaming*, 42(2) :243–264.

- Roush, S. (2018). The epistemic superiority of experiment to simulation. *Synthese*, 195(11) :4883–4906.
- Russell, B. (2001). *The problems of philosophy*. OUP Oxford.
- Schelling, T. C. (1969). Models of segregation. *The American Economic Review*, 59(2) :488–493.
- Silverman, E. (2018). Making the Artificial Real. In *Methodological Investigations in Agent-Based Modelling*, pages 39–59. Springer.
- Silverman, E. and Bullock, S. (2004). Empiricism in artificial life. In *Ninth International Conference on Artificial Life*, pages 534–539. MIT Press, Cambridge, MA.
- Simon, H. A. (2008). *The sciences of the artificial*. MIT Press, Cambridge, Mass., 3. ed., [nachdr.] edition. 00504 OCLC : 552080160.
- Taleb, N. (2005). *Foiled by randomness : The hidden role of chance in life and in the markets*, volume 1. Random House Incorporated. 01322.
- Tesfatsion, L. and Judd, K. L. (2006). *Handbook of computational economics : agent-based computational economics*, volume 2. Elsevier.
- Tolk, A., Heath, B. L., Ihrig, M., Padilla, J. J., Page, E. H., Suarez, E. D., Szabo, C., Weirich, P., and Yilmaz, L. (2013). Epistemology of Modeling and Simulation. In *Proceedings of the 2013 Winter Simulation Conference : Simulation : Making Decisions in a Complex World*, WSC '13, pages 1152–1166, Piscataway, NJ, USA. IEEE Press.
- Varenne, F. (2001). What does a computer simulation prove? In *Simulation in Industry-Proc. of the 13th European Simulation Symposium*, pages 549–554.
- Varenne, F. (2014). *Chapitre 1. Épistémologie des modèles et des simulations : tour d’horizon et tendances*. Editions Matériologiques.
- Weintraub, E. R. (2002). *How economics became a mathematical science*. Duke University Press.
- Łatuszyńska, M. (2016). Experimental Research in Economics and Computer Simulation. In Nermend, K. and Łatuszyńska, M., editors, *Selected Issues in Experimental Economics*, Springer Proceedings in Business and Economics, pages 151–169. Springer International Publishing.

Conclusion

La crise financière de 2008 a mis en lumière les risques posés par les produits dérivés lorsqu'ils sont échangés en réseau. La faillite d'un agent peut provoquer celle de ses partenaires, entraînant une cascade de défauts ; le caractère non-linéaire conjugué à la structuration en réseau rendent ce phénomène très difficile à anticiper. Pour ces mêmes raisons, cette problématique est difficile à analyser avec les outils de la recherche académique actuelle.

L'objet de ce travail de thèse est de proposer des pistes pour faire progresser la compréhension de ce phénomène, en tentant de pallier ces difficultés. Le **chapitre 1** reprend les résultats mathématiques obtenus précédemment sur le sujet dans ce cadre et justifie le choix d'un cadre théorique adapté pour représenter de la manière la plus simple possible les mécanismes à l'oeuvre.

Cette thèse prolonge dans un premier temps les outils classiques de la finance sur le sujet. Le **chapitre 2** étend les résultats théoriques existants pour les adapter aux réseaux. Il montre que les agents ont tendance à établir des chaînes de dépendance lorsqu'ils ont la liberté d'établir des produits dérivés. D'autre part, un point de basculement émerge, lors duquel tous les agents font faillite en même temps, et ce quelles que soient leurs positions initiales. Malgré des tolérances au risque différentes et un comportement qui vise uniquement à réduire la perception du risque des agents, le système entier semble se comporter comme si un mimétisme généralisé avait pris le pas sur la rationalité des agents. Cependant, c'est simplement le mécanisme des prix et de l'aversion au risque qui produit une homogénéisation des positions financières et de la manière dont les agents immobilisent du capital pour couvrir leurs positions.

Le **chapitre 3** intègre le risque de contrepartie - et donc de contagion - dans l'analyse. Si les agents ignorent ce risque (ou pensent qu'une autorité centrale viendra renflouer les agents en défaut et donc garantir les créances), les chaînes de dépendance rendent le point de faillite systémique fatal même pour les agents ayant réalisé des bénéfices. Si les agents intègrent le risque de contrepartie dans leur décision, le problème devient plus complexe. Dans le cas particulier où la liquidité totale du système suffit théoriquement à couvrir l'ensemble des pertes, le bien-être social

est maximal quand les agents disposant de la liquidité jouent un rôle similaire à celui des banques d'investissement. Ils financent les agents qui risquent de faire faillite, mais récupèrent en échange une part du risque qu'ils modifient pour le rendre systématiquement positif, et donc intéressant pour les autres agents, qui peuvent alors acheter une part de ce produit financier. Il s'agit cependant d'une situation où le risque systémique est toujours présent : désormais, la mauvaise évaluation d'une seule des positions financières est susceptible d'entraîner la faillite non pas de son porteur initial, mais de l'ensemble du système. De plus, l'ampleur des pertes peut se trouver démultipliée par la présence de chaînes de dépendance.

Ce travail de recherche propose également une nouvelle piste méthodologique pour appréhender le problème. Le **chapitre 4** propose ainsi d'étendre l'analyse au cas général à l'aide d'une méthode venant de l'informatique évolutionnaire et adaptée au cas particulier des produits dérivés. Cette méthode produit de bons résultats sur les cas théoriques traités précédemment, pour lesquels la solution est connue, ce qui permet d'évaluer la performance de l'algorithme. Le chapitre 4 l'applique ensuite à une situation relativement simple pour laquelle on ne connaît pas la solution mathématique : un agent est porteur d'un risque dont les pertes potentielles ne peuvent pas être couvertes par l'ensemble du système. Dans ce cas de figure, l'algorithme fait émerger des produits dérivés plus complexes que dans les chapitres précédents : des options, qui sont les produits dérivés les plus échangés sur les places financières réelles. Ce cas de figure montre également que le risque systémique persiste : en cas de mauvaise évaluation de l'une des positions financières, la faillite s'étend une nouvelle fois à l'intégralité du système.

La réflexion proposée par ces quatre chapitres s'appuie donc sur des éléments classiques - le raisonnement mathématique - mais également sur des outils moins conventionnels. Le **chapitre 5** est l'occasion de prendre du recul sur la valeur scientifique de ces productions informatiques. Adoptant un point de vue issu de la philosophie de Karl Popper, ce chapitre propose un rôle précis pour la simulation informatique dans la méthode scientifique en sciences sociales. Il propose de considérer les simulations comme des contre-exemples logiques à des présupposés théoriques fermement établis. Ce raisonnement est celui qui prédomine dans l'ensemble du travail de thèse. En effet, l'objectif de ce travail a été de proposer un modèle logique simple, étendu par les simulations informatiques, produisant des exemples logiques de cas de figure qui vont à l'encontre de certains présupposés. Un système où tout le monde fait faillite en même temps n'est pas nécessairement le fait d'agents spéculatifs et moutonniers. Certains comportements critiqués des banques d'investissement peuvent simplement être la décision optimale pour n'importe quel agent financier

dans certaines situations. Certains produits dérivés complexes comme les options ne sont pas nécessairement des conceptions arbitraires humaines, mais peuvent être simplement le produit financier optimal dans une situation donnée.

La conclusion de ce travail, si elle devait être formulée en une phrase, serait la suivante : *lorsque l'on modélise des mécanismes simples entre des agents qui ont des tolérances au risque différentes, on obtient des comportements qui sont similaires à ceux observés dans la réalité, et qui sont parfois la source de troubles majeurs. Des agents qui minimisent une mesure de risque avec différentes tolérances au risque font apparaître :*

- une synchronisation non coordonnée qui a toutes les apparences d'un comportement moutonnier ;
- des chaînes de dépendance qui peuvent se diffuser dans n'importe quelle forme de réseau ;
- des comportements semblables à celui des banques d'investissement : financement, intermédiation, semblant de titrisation, revente de produits dérivés ;
- des contrats plus complexes et plus réalistes, comme des options.

Ces éléments ont un point commun : ils poussent le système vers un point où tous les agents font faillite en même temps.

Il reste cependant beaucoup à faire sur le sujet, et les résultats décrits ici présentent des limites qui sont autant de pistes de recherche futures. Ce travail est très théorique : ce choix a été fait en considérant l'état de la littérature scientifique sur le sujet. Il s'agit d'un champ encore relativement neuf, qui propose peu de certitudes. Les données sur le sujet sont une denrée rare et difficilement accessible. Ce travail présente donc les limites inhérentes à tout exercice théorique de ce type : les conclusions sont les conséquences logiques des présupposés choisis en amont. Le résultat dépend entièrement des ingrédients, et l'on pourra toujours arguer que l'un est manquant ou qu'un autre est inutile. Ce travail tente d'appliquer à lui-même les principes défendus dans le dernier chapitre, à savoir rester le plus simple possible. La montée en complexité, mathématique ou informatique, a été réduite à ce qui est apparu le plus strict nécessaire pour obtenir des résultats. Une deuxième limite provient de la distance qu'il reste à parcourir depuis cette construction simplifiée pour atteindre le point où des conclusions pratiques pourront être formulées à l'usage des acteurs du monde de la finance. En l'état, il semble prématuré de tirer des recommandations immédiates de ce travail.

Le risque est une composante fondamentale de nos sociétés, et son organisation passe nécessairement par des accords qui lient la santé financière des agents dans des réseaux dont la compréhension reste un défi. Il est certain que ce sujet continuera

de susciter la réflexion ; nous espérons que ce travail y apporte une contribution.

Liste complète des références

- Acemoglu, D., Ozdaglar, A., and Tahbaz-Salehi, A. (2015). Systemic Risk and Stability in Financial Networks. *American Economic Review*, 105(2) :564–608.
- Akerlof, G. A. and Shiller, R. J. (2010). *Animal spirits : How human psychology drives the economy, and why it matters for global capitalism*. Princeton university press.
- Albert, R. and Barabási, A.-L. (2002). Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, 74(1) :47–97.
- Alexandre, H. (2017). Plateformes et évolution du système bancaire. Research Report, Université Paris-Dauphine.
- Allen, F. and Gale, D. (2000). Financial Contagion. *Journal of Political Economy*, 108(1) :1–33.
- Amini, H., Cont, R., and Minca, A. (2016). Resilience to Contagion in Financial Networks. *Mathematical Finance*, 26(2) :329–365.
- Arthur, W. B., Holland, J. H., LeBaron, B., Palmer, R. G., and Tayler, P. (1996). Asset Pricing Under Endogenous Expectations in an Artificial Stock Market.
- Axelrod, R. (1997). Advancing the art of simulation in the social sciences. In *Simulating social phenomena*, pages 21–40. Springer.
- Axelrod, R. and Hamilton, W. D. (1981). The evolution of cooperation. *science*, 211(4489) :1390–1396.
- Babus, A. and Hu, T.-W. (2017). Endogenous intermediation in over-the-counter markets. *Journal of Financial Economics*, 125(1) :200–215.
- Barberis, N. C. (2013). Thirty Years of Prospect Theory in Economics : A Review and Assessment. *Journal of Economic Perspectives*, 27(1) :173–196.

- Barrieu, P. and El Karoui, N. (2005). Inf-convolution of risk measures and optimal risk transfer. *Finance and Stochastics*, 9(2) :269–298.
- Barrieu, P. and El Karoui, N. (2007). Pricing, Hedging and Optimally Designing Derivatives Via Minimization of Risk Measures.
- Battiston, S., Delli Gatti, D., Gallegati, M., Greenwald, B., and Stiglitz, J. E. (2012). Liaisons dangereuses : Increasing connectivity, risk sharing, and systemic risk. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 36(8) :1121–1141.
- Beaufils, B., Delahaye, J.-P., and Mathieu, P. (1997). Our meeting with gradual, a good strategy for the iterated prisoner’s dilemma. In *Proceedings of the Fifth International Workshop on the Synthesis and Simulation of Living Systems*, pages 202–209. MIT press.
- Bernstein, P. L. (1993). *Capital ideas : the improbable origins of modern Wall Street*. Simon and Schuster.
- Bertrand, P. and Prigent, J.-l. (2016). Equilibrium of financial derivative markets under portfolio insurance constraints. *Economic Modelling*, 52 :278–291.
- Bodie, Z. (2009). *Investments*. Tata McGraw-Hill Education.
- Bonabeau, E. (2002). Agent-based modeling : Methods and techniques for simulating human systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99(suppl 3) :7280–7287.
- Borch, K. (1962). Equilibrium in a Reinsurance Market. *Econometrica*, 30(3) :424.
- Borgatti, S. P. and Everett, M. G. (2000). Models of core/periphery structures. *Social networks*, 21(4) :375–395.
- Brandouy, O., Barneto, P., and Leger, L. A. (2003). Asymmetric information, imitative behaviour and communication : price formation in an experimental asset market. *The European Journal of Finance*, 9(5) :393–419.
- Bratley, P., Fox, B. L., and Schrage, L. E. (2011). *A guide to simulation*. Springer Science & Business Media.
- Brooks, J., Filipowski, M., Jonasson, E., and Taylor, J. E. (2010). Modelling the distributional impacts of agricultural policies in developing countries : the development policy evaluation model (Devpem). In *The 84th Annual Conference of the Agricultural Economics Society*.

- Cabrales, A., Gottardi, P., and Vega-Redondo, F. (2017). Risk Sharing and Contagion in Networks. *The Review of Financial Studies*, 30(9) :3086–3127.
- Castiglionesi, F. and Navarro, N. (2008). Optimal Fragile Financial Networks. SSRN Scholarly Paper ID 1089357, Social Science Research Network, Rochester, NY.
- Castiglionesi, F. and Navarro, N. (2019). (In)Efficient Interbank Networks. *Journal of Money, Credit and Banking*.
- Chalmers, A. F. (2013). *What is this thing called science?* Hackett Publishing.
- Cont, R. and Minca, A. (2016). Credit default swaps and systemic risk. *Annals of Operations Research*, 247(2) :523–547.
- Cont, R. and Moussa, A. (2010). Too interconnected to fail : Default contagion and systemic risk in financial networks. Technical report, Working Paper, Columbia University and University Paris VI.
- Cont, R., Moussa, A., and Santos, E. B. (2013). Network Structure and Systemic Risk in Banking Systems. In Fouque, J.-P. and Langsam, J. A., editors, *Handbook on Systemic Risk*, pages 327–368. Cambridge University Press, Cambridge.
- Cont, R. and Schaanning, E. (2010). Measuring systemic risk : The Indirect Contagion Index. Technical report, Working paper. Adrian, T. and Shin, HS.
- Conway, J. (1970). The game of life. *Scientific American*, 223(4) :4.
- Craig, B. and von Peter, G. (2014). Interbank tiering and money center banks. *Journal of Financial Intermediation*, 23(3) :322–347.
- Currie, A. (2018). The argument from surprise. *Canadian Journal of Philosophy*, 48(5) :639–661.
- Currie, A. and Levy, A. (2018). Why experiments matter. *Inquiry*, pages 1–25.
- Davis, J. B. (2007). The turn in economics and the turn in economic methodology. *Journal of Economic Methodology*, 14(3) :275–290.
- Deffuant, G., Amblard, F., Duboz, R., and Ramat, E. (2003). Une démarche expérimentale pour la simulation individus-centrée. *Actes des 10èmes Journées de Rochebrune, rencontres interdisciplinaires sur les systèmes complexes naturels et artificiels, statut épistémologique de la simulation*, pages 45–64.

- Diestel, R. (2017). *Graph Theory*, volume 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. 00411.
- Dixon, H. D. (2017). *Surfing economics*. Macmillan International Higher Education.
- Düppe, T. and Weintraub, E. R. (2014). *Finding equilibrium : Arrow, Debreu, McKenzie and the problem of scientific credit*. Princeton University Press.
- Eiben, A. E. and Smith, J. E. (2003). *Introduction to evolutionary computing*, volume 53. Springer.
- Eisenberg, L. and Noe, T. H. (2001). Systemic Risk in Financial Systems. *Management Science*, 47(2) :236–249.
- Elliott, M., Golub, B., and Jackson, M. O. (2014). Financial Networks and Contagion. *American Economic Review*, 104(10) :3115–3153.
- Erdos, P. and Rényi, A. (1959). On random graphs I. *Publ. Math. Debrecen*, 6 :290–297.
- Fontana, M. (2006). Simulation in economics : evidence on diffusion and communication. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 9(2).
- Freixas, X., Parigi, B. M., and Rochet, J.-C. (2000). Systemic Risk, Interbank Relations, and Liquidity Provision by the Central Bank. *Journal of Money, Credit and Banking*, 32(3) :611–638.
- Fricke, D. and Lux, T. (2015). Core–Periphery Structure in the Overnight Money Market : Evidence from the e-MID Trading Platform. *Computational Economics*, 45(3) :359–395.
- Frigg, R. and Hartmann, S. (2018). Models in Science. In Zalta, E. N., editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, summer 2018 edition.
- Föllmer, H. and Schied, A. (2011). *Stochastic finance : an introduction in discrete time*. Walter de Gruyter.
- Gillet, R., Hübner, G., and Plunus, S. (2010). Operational risk and reputation in the financial industry. *Journal of Banking & Finance*, 34(1) :224–235.
- Glasserman, P. and Young, H. P. (2015). How likely is contagion in financial networks? *Journal of Banking & Finance*, 50 :383–399.

- Haselgrove, C. B. (1958). A disproof of a conjecture of Pólya. *Mathematika*, 5(02) :141.
- Hué, S., Lucotte, Y., and Tokpavi, S. (2019). Measuring network systemic risk contributions : A leave-one-out approach. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 100 :86–114.
- in 't Veld, D. and van Lelyveld, I. (2014). Finding the core : Network structure in interbank markets. *Journal of Banking & Finance*, 49 :27–40.
- Izquierdo, L. R. and Izquierdo, S. S. (2015). Artificial Economics : What, Why and How. *SSRN Electronic Journal*.
- Jackson, M. O. and Pernoud, A. (2019). What Makes Financial Networks Special? Distorted Investment Incentives, Regulation, and Systemic Risk Measurement. SSRN Scholarly Paper ID 3311839, Social Science Research Network, Rochester, NY.
- Jouini, E., Schachermayer, W., and Touzi, N. (2008). Optimal Risk Sharing for Law Invariant Monetary Utility Functions. *Mathematical Finance*, 18(2) :269–292.
- Kahneman, D. and Tversky, A. (1979). Prospect Theory : An Analysis of Decision under Risk. *Econometrica*, 47(2) :263–291.
- Kao, M.-Y. (2008). *Encyclopedia of algorithms*. Springer Science & Business Media.
- Kirman, A. (1999). The future of economic theory. *Economics beyond the Millennium (Oxford University Press, Oxford)*, pages 8–23.
- Korb, K. B. and Mascaro, S. (2009). The philosophy of computer simulation. In *Logic, methodology and philosophy of science : proceedings of the thirteenth international congress*. College Publications, London, pages 306–325. Citeseer.
- Koza, J. R. (1992). *Genetic programming : on the programming of computers by means of natural selection*. Complex adaptive systems. MIT Press, Cambridge, Mass.
- Koza, J. R. and Poli, R. (2003). *A genetic programming tutorial*, volume 8. Chap.
- Lander, L. J. and Parkin, T. R. (1966). Counterexample to Euler's conjecture on sums of like powers. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 72(6) :1079–1080.

- Langfield, S., Liu, Z., and Ota, T. (2014). Mapping the UK interbank system. *Journal of Banking & Finance*, 45 :288–303.
- Lautier, D. and Raynaud, F. (2013). Systemic Risk and Complex Systems : A Graph-Theory Analysis. In Abergel, F., Chakrabarti, B. K., Chakraborti, A., and Ghosh, A., editors, *Econophysics of Systemic Risk and Network Dynamics*, pages 19–37. Springer Milan, Milano.
- Lehtinen, A. and Kuorikoski, J. (2007). Computing the perfect model : Why do economists shun simulation? *Philosophy of Science*, 74(3) :304–329.
- Lensberg, T. (1988). Stability and the Nash solution. *Journal of Economic Theory*, 45(2) :330–341.
- Li, D. and Schürhoff, N. (2018). Dealer Networks. SSRN Scholarly Paper ID 2023201, Social Science Research Network, Rochester, NY.
- Maggio, M. D., Kermani, A., and Song, Z. (2016). The value of trading relationships in turbulent times. Technical report, National Bureau of Economic Research.
- Mas-Colell, A., Whinston, M. D., and Green, J. R. (1995). *Microeconomic theory*, volume 1. Oxford university press New York.
- Mathieu, P., Beaufils, B., and Brandouy, O. (2005). *Artificial economics : agent-based methods in finance, game theory and their applications*, volume 564. Springer Science & Business Media.
- Mathieu, P. and Picault, S. (2012). Intérêt de la simulation centrée interactions pour les sciences humaines et sociales. *Revue des Nouvelles Technologies de l'Information*, pages 15–30.
- Mitchell, M. (2009). *Complexity : A guided tour*. Oxford University Press.
- Morgan, M. S. (2005). Experiments versus models : New phenomena, inference and surprise. *Journal of Economic Methodology*, 12(2) :317–329.
- Nash Jr, J. F. (1950). The bargaining problem. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 155–162.
- Nier, E., Yang, J., Yorulmazer, T., and Alentorn, A. (2007). Network models and financial stability. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 31(6) :2033–2060.

- Noble, J. (1997). The scientific status of artificial life. In *Poster presented at the Fourth European Conference on Artificial Life (ECAL'97), Brighton, UK*, volume 2831. Citeseer.
- Odlyzko, A. M., te Riele, H. J., and Odlyzko, A. (1984). *Disproof of the Mertens conjecture*. Centrum voor Wiskunde en Informatica.
- Orcutt, G. H. (1960). Simulation of economic systems. *The American Economic Review*, 50(5) :894–907.
- Osborne, M. J. and Rubinstein, A. (1994). *A course in game theory*. MIT press.
- Parke, E. C. (2014). Experiments, Simulations, and Epistemic Privilege. *Philosophy of Science*, 81(4) :516–536.
- Peltonen, T. A., Scheicher, M., and Vuillemeij, G. (2014). The network structure of the CDS market and its determinants. *Journal of Financial Stability*, 13 :118–133.
- Phelps, R. R. (2009). *Convex functions, monotone operators and differentiability*, volume 1364. Springer.
- Poli, R., Langdon, W. B., McPhee, N. F., and Koza, J. R. (2008). *A field guide to genetic programming*. Lulu. com.
- Polya, G. (2004). *How to solve it : A new aspect of mathematical method*. Number 246. Princeton university press.
- Popper, K. (2005). *The logic of scientific discovery*. Routledge.
- Rannou, Y. and Barneto, P. (2016). Futures trading with information asymmetry and OTC predominance : Another look at the volume/volatility relations in the European carbon markets. *Energy Economics*, 53 :159–174.
- Reiss, J. (2011). A plea for (good) simulations : nudging economics toward an experimental science. *Simulation & gaming*, 42(2) :243–264.
- Roush, S. (2018). The epistemic superiority of experiment to simulation. *Synthese*, 195(11) :4883–4906.
- Rubinstein, A. (1982). Perfect Equilibrium in a Bargaining Model. *Econometrica*, 50(1) :97–109.
- Russell, B. (2001). *The problems of philosophy*. OUP Oxford.

- Rüschendorf, L. (2013). *Mathematical Risk Analysis*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- Schelling, T. C. (1969). Models of segregation. *The American Economic Review*, 59(2) :488–493.
- Silverman, E. (2018). Making the Artificial Real. In *Methodological Investigations in Agent-Based Modelling*, pages 39–59. Springer.
- Silverman, E. and Bullock, S. (2004). Empiricism in artificial life. In *Ninth International Conference on Artificial Life*, pages 534–539. MIT Press, Cambridge, MA.
- Simon, H. A. (2008). *The sciences of the artificial*. MIT Press, Cambridge, Mass., 3. ed., [nachdr.] edition. 00504 OCLC : 552080160.
- Taleb, N. (2005). *Fooled by randomness : The hidden role of chance in life and in the markets*, volume 1. Random House Incorporated. 01322.
- Tesfatsion, L. and Judd, K. L. (2006). *Handbook of computational economics : agent-based computational economics*, volume 2. Elsevier.
- Tolk, A., Heath, B. L., Ihrig, M., Padilla, J. J., Page, E. H., Suarez, E. D., Szabo, C., Weirich, P., and Yilmaz, L. (2013). Epistemology of Modeling and Simulation. In *Proceedings of the 2013 Winter Simulation Conference : Simulation : Making Decisions in a Complex World*, WSC '13, pages 1152–1166, Piscataway, NJ, USA. IEEE Press.
- Varenne, F. (2001). What does a computer simulation prove? In *Simulation in Industry-Proc. of the 13th European Simulation Symposium*, pages 549–554.
- Varenne, F. (2014). *Chapitre 1. Épistémologie des modèles et des simulations : tour d’horizon et tendances*. Editions Matériologiques.
- Walras, L. (1896). *Éléments d’économie politique pure, ou, Théorie de la richesse sociale*. F. Rouge.
- Watts, D. J. and Strogatz, S. H. (1998). Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 393(6684) :440.
- Weintraub, E. R. (2002). *How economics became a mathematical science*. Duke University Press.

Łatuszyńska, M. (2016). Experimental Research in Economics and Computer Simulation. In Nermend, K. and Łatuszyńska, M., editors, *Selected Issues in Experimental Economics*, Springer Proceedings in Business and Economics, pages 151–169. Springer International Publishing.