HAL open science

Sur les ensembles de rotation des homéomorphismes de surface en genre ≥ 2

Gabriel Lellouch

To cite this version:

Gabriel Lellouch. Sur les ensembles de rotation des homéomorphismes de surface en genre ≥ 2. Systèmes dynamiques [math.DS]. Sorbonne Université, 2019. Français. NNT : 2019SORUS220 . tel-02969493v2

HAL Id: tel-02969493

https://theses.hal.science/tel-02969493v2

Submitted on 16 Oct 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sorbonne Université

École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Gabriel Lellouch

Sur les ensembles de rotation des homéomorphismes de surface en genre ≥ 2

---

dirigée par Patrice Le Calvez

Date de soutenance : 1er avril 2019

Après avis des rapporteurs :

M. François Béguin	Université Paris 13
M. Martín Sambarino	Universidad de la República, Montevideo

Jury de soutenance :

M. François Béguin	Université Paris 13	rapporteur
M. Christian Bonatti	Institut de mathématiques de Bourgogne	examinateur
M. Patrice Le Calvez	Sorbonne Université	directeur
M. Frédéric Le Roux	Sorbonne Université	examinateur
Mme Isabelle Liousse	Université de Lille 1	examinatrice

Institut de mathématiques de Jussieu - Paris Rive gauche. UMR 7586.
Boîte courrier 247
4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05

École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre.
Boîte courrier 290
4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05

Longtemps, je me suis couché de bonne heure.

Thèse : joug, promesse de l'embûche inconnue.

Remerciements

C'est avec un manque cruel d'originalité que s'ouvre cette thèse sur la partie qui en achève l'écriture : les remerciements, acmé du processus rédactionnel, pages qui seront très probablement les plus lues de ce manuscrit. À celles et ceux qui ont contribué, activement ou inconsciemment, à l'aboutissement de ces années de thèse, ces lignes sont destinées à témoigner de ma plus sincère reconnaissance. Et avant d'entrer dans le vif du sujet, merci à toi, lecteur curieux et intrépide, d'avoir osé feuilleter (transversalement, sans doute) ce manuscrit ; ainsi, je suis certain de n'oublier que ceux qui ne le sauront pas.

Naturellement, mes premiers remerciements vont à Patrice Le Calvez. Sa patience infinie face à mes errances, ses conseils récurrents face à mes doutes, son encadrement sur mesure et son support total comptent parmi les multiples vertus qui font de Patrice un patron en or. Conjuguant disponibilité et générosité, il a su prendre de son temps précieux pour me remettre à flot de manière périodique, et pour relire avec application chaque ébauche de mes travaux. Par-dessus tout enfin, c'est bien le mélange - fort - entre le soutien attentif dont j'ai bénéficié et l'immense liberté qu'il m'a accordée qui m'a permis, sous sa tutelle bienveillante, de me délecter pleinement du plaisir de faire des maths. Pour tout cela, je le remercie infiniment.

Je tiens ensuite à exprimer toute ma reconnaissance à François Béguin et Martín Sambarino, qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Leurs retours détaillés et nombreuses remarques constructives ont éclairé mon travail, me permettant d'améliorer considérablement le manuscrit. Je les en remercie sincèrement. Je profite de ce paragraphe pour remercier également Pierre-Antoine Guihéneuf qui, de manière informelle, m'a lui aussi fait part de commentaires précieux sur ce texte.

Par le cours de M2 qu'il dispensait à l'époque, Frédéric Le Roux a été le premier, il y a quelques années, à me faire plonger dans le monde merveilleux des systèmes dynamiques. Je suis donc très honoré qu'il ait bien voulu faire partie de mon jury de thèse. Il en va de même pour Christian Bonatti, que j'ai eu la chance d'avoir comme directeur de stage de Master : je me rappelle avec nostalgie les journées passées à Dijon à faire des belles maths, et me réjouis de sa présence à ma soutenance. Enfin, bien que je ne l'aie que peu côtoyée, Isabelle Liousse a accepté de venir compléter ce jury prestigieux. À eux trois, j'adresse également mes plus profonds remerciements.

Plus largement maintenant, mes pensées vont à tout l'IMJ-PRG, plus particulièrement à l'équipe d'Analyse Algébrique, et ses membres divers et variés : les chercheurs, toujours prompts à répondre aux questions de jeunes doctorants égarés ; les doctorants, garants d'une ambiance de travail stimulante et accueillante ; et l'équipe administrative, rouage indispensable au bon fonctionnement de cette petite société. Je ne saurais citer tout le monde, mais chacun d'entre eux mérite sa place dans ces remerciements.

L'aboutissement d'une thèse ne peut néanmoins se résumer à un cadre professionnel, aussi idéal qu'il puisse être. Je tiens donc à mentionner ceux qui, toutes ces années, m'ont permis de respirer, de rire, de souffler, de vivre et de m'émerveiller. Afin de ne pas diverger tout de suite du monde scientifique, je commencerai par mes amis de l'ENS : Diego, Joël et Florence, trio de zigoti aux zygomatiques bien exercés ; David et Jhih-Huang, pour les week-ends genevois (et je ne vois pas que ça) ; Paulien et Alexandre, rares rescapés du vol C286 reliant le boulevard Saint-Michel à la rue d'Ulm ; et bien sûr, tous les membres de la grande famille du C3, étage à la plus incroyable cuisine qu'il m'ait été donné de connaître, et dont les effluves exquis m'enivrent parfois encore, en rêve !...

Je ne puis à présent continuer plus longtemps sans mentionner l'*autre monde* : dans ce monde magique, les mesures ergodiques deviennent ternaires, les partitions ne sont pas de Markov mais de Mozart, et Nielsen a écrit un concerto au lieu d'une théorie de classification des homéos de surface... Évoquer ce monde m'impose de commencer par citer celle et ceux qui m'y ont tenu par la main depuis plus de vingt ans : Anne, qui m'a vu (et fait) grandir ; Alexandre, infaillible, en qui l'on peut avoir la plus aveugle confiance ; Arnaud, et sa pédagogie à couper le souffle (ou pas, justement) ; Jérôme, romantique et contemporain, à la passion contagieuse ; et bien sûr Philippe, désarmant d'humanité, d'intelligence et de sensibilité. À eux cinq, et bien que ce seul mot ne puisse contenir toute ma reconnaissance envers eux, merci.

Il me serait impossible de lister exhaustivement tous les musiciens incroyables que j'ai rencontrés ces dernières années, alors je me contenterai de décerner quelques mentions spéciales : à Joë, Enzo et Lucas, claribolistes millésime 2016, meilleur pupitre de l'univers ; à Marie et Gabriel, acolytes du trio ∇, pour les sporadiques séances de résurrection de compositeurs bizarres ; à toute la classe de clarinette du CNSM, dont les membres m'impressionnent chaque semaine par leur spectaculaire talent ; et enfin à l'agence de voyages OCPSL et son chef Johan, pour sa confiance, les frites du lundi soir, et les rencontres inestimables qui en ont résulté, Ambroisine, Antoine, David, Elsa, Guillaume, Guy, Marguerite-Marie, Matthias, Nicolas, Sarah, et tous ceux que faute de place, je suis contraint de garder pour moi.

À tous les membres de ma famille, merci d'avoir eu la délicatesse de ne pas trop souvent me demander "alors, ça avance la thèse ?" : cela représente le plus grand soutien qu'un thésard peut attendre de ses proches.

À Marie-Lys enfin, merci d'être.

Table des matières

Introduction **9**
1 État de l'art . . . 9
1.1 Nombre et ensemble de rotation . . . 9
1.2 Résultats sur le tore . . . 12
1.3 Et en genre ≥ 2 ? . . . 13
2 Énoncé des résultats . . . 15
3 Plan de la thèse . . . 19

1 Quelques outils importants **21**
1.1 Nombre(s) d'intersection et intersection homologique . . . 21
1.1.1 Nombre d'intersection entre deux chemins . . . 21
1.1.2 Cas des lacets . . . 23
1.1.3 Lien avec l'intersection de classes d'homologie . . . 24
1.2 Feuilletages et chemins transverses . . . 25
1.2.1 Cas d'un feuilletage non singulier de $\mathbb{R}^2$ . . . 25
1.2.2 Cas d'un feuilletage singulier de M . . . 29
1.2.3 Fonctions duales . . . 31
1.3 Théorie de forçage . . . 32
1.3.1 Isotopies maximales et feuilletages transverses . . . 32
1.3.2 Paramétrage des trajectoires . . . 35

2 Quelques résultats préliminaires **37**
2.1 Sur les feuilletages et chemins transverses . . . 37
2.1.1 Propriétés de l'accumulation des chemins transverses . . . 37
2.1.2 Bande définie par un lacet et approximations . . . 40
2.1.3 Équivalence de deux relevés d'un chemin transverse . . . 45
2.2 Sur les trajectoires et leurs directions homologiques . . . 47
2.2.1 Points génériques et vecteurs de rotation . . . 47
2.2.2 Intersection d'une trajectoire et d'un lacet . . . 49
2.2.3 Équivalence d'une trajectoire transverse et d'un lacet . . . 55
2.3 Deux corollaires . . . 57

3 Entropie et points périodiques **59**
3.1 Idée générale, problèmes rencontrés et plan de la preuve . . . 60
3.2 Choix des points x et y . . . 62
3.2.1 Des conséquences du lemme d'Atkinson . . . 62
3.2.2 Choix des points selon le signe des intersections . . . 64

3.3 Intersection nulle avec une approximation 65
3.3.1 Notations 65
3.3.2 Si $(\mathcal{H}_{\widetilde{\gamma}})$ n'est pas vérifiée 67
3.3.3 Si $(\mathcal{H}_{\widetilde{\gamma}})$ est vérifiée 67
3.3.4 Réunion des deux cas 69
3.4 Cas où l'une des trajectoires est équivalente à un lacet 69
3.4.1 Notations 70
3.4.2 Argument de forçage 71
3.4.3 Auto-intersections $\mathcal{F}-$transverses 74
3.4.4 Existence de points périodiques 76
3.5 Preuve des théorèmes A et C 78
3.5.1 Réunion des résultats précédents 78
3.5.2 Comportement chaotique 79
3.5.3 Existence de points périodiques 80
3.6 Une question complémentaire 84

4 Uniformité des déplacements 87
4.1 Préliminaires à la preuve 88
4.1.1 Motivations et plan de la section 88
4.1.2 Homologie pour les chemins non fermés 88
4.1.3 Accumulation de lacets et ensemble de rotation 90
4.1.4 Une famille de lacets génératrice 92
4.1.5 Homologie des feuilles et chemins de grande homologie 94
4.1.6 Subdivision des trajectoires 96
4.2 Preuve du théorème G 98
4.2.1 Idée détaillée de la preuve 98
4.2.2 Notations 99
4.2.3 Proximité avec une famille de points périodiques 100
4.2.4 Estimations homologiques 103
4.3 Conséquences du théorème G 105
4.3.1 Notations 105
4.3.2 Mesures supportées sur $X_{[\omega]}$ et conjecture de Boyland 106
4.3.3 Mesures supportées sur X_∂ 109

Bibliographie 113

Introduction

1 État de l'art

1.1 Nombre et ensemble de rotation

Commençons par rappeler le cas classique de la théorie du nombre de rotation pour les homéomorphismes du cercle $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, introduite par Poincaré en 1885 dans son célèbre mémoire [Poi85]. Soit $f : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ un homéomorphisme préservant l'orientation, et $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un relevé de f à $\mathbb{R}$. Pour tout $\widetilde{x} \in \mathbb{R}$, la quantité

$$\rho(\widetilde{f}, \widetilde{x}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\widetilde{f}^n(\widetilde{x}) - \widetilde{x}}{n} \pmod 1$$

est bien définie, indépendante des choix de $\widetilde{x}$ et du relevé $\widetilde{f}$: on la note $\rho(f)$ et on l'appelle *nombre de rotation* de f. En quelque sorte, le nombre de rotation mesure la "vitesse moyenne" asymptotique à laquelle les points de $\mathbb{T}^1$ tournent le long du cercle sous l'action de f.

La donnée de ce simple nombre permet d'avoir déjà de précieuses informations sur la dynamique de f. Par exemple, la situation est très différente selon que $\rho(f)$ est rationnel ou non : si $\rho(f) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, alors f possède une orbite périodique ; si au contraire $\rho(f) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})/\mathbb{Z}$, alors f est semi-conjugué à la rotation $z \mapsto z + \rho(f)$ de $\mathbb{T}^1$ (cette semi-conjugaison étant une vraie conjugaison si et seulement si f est minimal, ce qui se produit par exemple quand f est un $\mathcal{C}^2-$difféomorphisme (voir les travaux de Denjoy [Den32])).

Le fait que le nombre de rotation soit bien défini et indépendant du point $\widetilde{x}$ choisi indique, dans le cas d'un homéomorphisme du cercle, que tous les points "tournent à la même vitesse" asymptotiquement, ceci découlant de l'existence d'un ordre cyclique sur $\mathbb{T}^1$. Si l'on souhaite généraliser cette définition aux homéomorphismes d'autres espaces (les surfaces par exemple), on se doute que l'on va perdre cette propriété. Ce n'est donc pas un unique nombre de rotation que l'on va définir, mais un *ensemble de rotation*, contenant les vitesses et directions moyennes (si tant est que ces quantités existent) des orbites des points de l'espace considéré.

Intéressons-nous donc au cas d'un homéomorphisme $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. On va s'intéresser uniquement au cas où f est *isotope à l'identité*, c'est-à-dire qu'il existe un chemin continu, dans l'espace des homéomorphismes de $\mathbb{T}^2$, reliant $\mathrm{Id}_{\mathbb{T}^2}$ à f (cette condition est analogue à la préservation de l'orientation demandée pour les homéomorphismes du

cercle $\mathbb{T}^1$). Dans ce cas, f se relève à $\mathbb{R}^2$ en un homéomorphisme $\widetilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ commutant aux translations entières. Si l'on veut calquer la définition que l'on a dans le cas du cercle, on se heurte au problème suivant : pour $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^2$, la suite $(\frac{1}{n}(\widetilde{f}^n(\widetilde{x}) - \widetilde{x}))_{n\geq 1}$ ne converge pas forcément. On peut cependant s'intéresser aux valeurs d'adhérence de suites formées par ce type de quantités, et définir l'ensemble

$$\rho(\widetilde{f}) = \bigcap_{m\geq 1} \overline{\bigcup_{n\geq m} \left\{ \frac{\widetilde{f}^n(\widetilde{x}) - \widetilde{x}}{n},\ \widetilde{x} \in \mathbb{R}^2 \right\}} \subset \mathbb{R}^2.$$

Une autre manière de définir l'ensemble de rotation de $\widetilde{f}$ est, au lieu de moyenner temporellement le déplacement des points de $\mathbb{T}^2$ sous l'action de f, de le faire spatialement. Soit $\mathcal{M}(f)$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes $f-$invariantes sur $\mathbb{T}^2$. Pour tout $x \in \mathbb{T}^2$, soit $\Delta_{\widetilde{f}}(x) = \widetilde{f}(\widetilde{x}) - \widetilde{x}$ où $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^2$ est un relevé de x : cette quantité est indépendante du relevé $\widetilde{x}$ choisi, car f est isotope à l'identité. On définit alors

$$\mathrm{rot}(\widetilde{f}) = \left\{ \int_{\mathbb{T}^2} \Delta_{\widetilde{f}}(x)\ \mathrm{d}\mu(x) \mid \mu \in \mathcal{M}(f) \right\}.$$

Ces deux ensembles $\rho(\widetilde{f})$ et $\mathrm{rot}(\widetilde{f})$ sont en fait égaux (voir les travaux de Misiurewicz et Ziemian [MZ89]), et appelés *ensemble de rotation* de $\widetilde{f}$; c'est un compact convexe de $\mathbb{R}^2$. Notons bien que cet ensemble de rotation dépend du choix d'un relevé $\widetilde{f}$ de f.

Ces deux définitions peuvent s'adapter pour des surfaces de genre supérieur. Néanmoins, si le premier ensemble est toujours inclus dans le second (ses éléments correspondent aux moyennes des déplacements relativement aux mesures qui sont limites, pour la topologie faible*, de mesures portées par des portions d'orbites), il n'y a plus forcément égalité en genre plus grand : en particulier, le premier ensemble n'a plus de raison d'être convexe. Afin de garder cette propriété de convexité, c'est donc la seconde définition, à partir de $\mathcal{M}(f)$ tout entier, que nous allons privilégier pour définir l'ensemble de rotation d'un homéomorphisme en genre supérieur. Détaillons cette définition.

Soit $f : M \to M$ isotope à l'identité sur une surface M compacte orientée de genre $g \geq 1$. Soit $I : [0,1] \times M \to M$ une isotopie entre Id_M et f, c'est-à-dire une application continue telle que pour tout $x \in M$, $I(0,x) = x$ et $I(1,x) = f(x)$, et pour tout $t \in [0,1]$, $x \mapsto I(t,x)$ est un homéomorphisme de M. Pour tout $x \in M$, on note alors $I(x)$ le chemin $t \mapsto I(t,x)$ donné par l'isotopie, reliant x à $f(x)$. Soit également $\mathcal{M}(f)$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes $f-$invariantes sur M. Pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(f)$, pour toute $1-$forme différentielle fermée ω sur M, l'intégrale

$$\int_M \left(\int_{I(x)} \omega \right)\ \mathrm{d}\mu(x)$$

est bien définie, et s'annule par $f-$invariance de μ dès que ω est exacte. L'application $\omega \mapsto \int_M (\int_{I(x)} \omega)\ \mathrm{d}\mu(x)$ passe donc au quotient en une forme linéaire sur le premier groupe de cohomologie $H^1(M,\mathbb{R})$ de M, c'est-à-dire par dualité en un élément du premier groupe d'homologie $H_1(M,\mathbb{R})$ de M. Cet élément ρ_μ est appelé *vecteur de rotation* de la mesure μ, et l'ensemble de rotation de f est alors défini par

$$\mathrm{rot}(f) = \{\rho_\mu \mid \mu \in \mathcal{M}(f)\} \subset H_1(M,\mathbb{R}).$$

Dans le cas du tore, cette définition coïncide alors avec les définitions précédentes via l'identification canonique entre $H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$ et le revêtement universel de $\mathbb{T}^2$. Cependant, il faut noter que cette définition dépend toujours, sur le tore, du choix de l'isotopie, et donc du choix d'un relevé de f. Ceci n'est pas le cas en genre supérieur : si $g \geq 2$, cette définition est indépendante du choix de l'isotopie (ceci découle de travaux de Hamstrom [Ham66], qui montre que deux isotopies entre Id_M et f sont homotopes), et contrairement au cas du tore $\mathbb{T}^2$, l'ensemble de rotation est bien défini directement pour f et pas uniquement pour les relevés de f, ce qui justifie la notation $\mathrm{rot}(f)$. Signalons également au passage qu'en genre $g \geq 2$, une telle définition peut être étendue aux homéomorphismes homotopes à Id_M car en vertu de résultats de Baer [Bae28] puis d'Epstein [Eps66], tout homéomorphisme homotope à Id_M est en fait isotope à Id_M.

Comme $\mu \mapsto \rho_\mu$ est affine et que $\mathcal{M}(f)$ est compact et convexe pour la topologie faible*, alors $\mathrm{rot}(f)$ est un compact convexe de $H_1(M, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{2g}$. Remarquons que si $g \geq 2$, il contient toujours 0 : en effet, en vertu du théorème du point fixe de Nielsen (voir par exemple [Jia83]), f possède nécessairement un point fixe contractile, et il est facile de voir que le vecteur de rotation de la mesure de Dirac en un tel point fixe est nul. Notons également que que les points extrêmaux de $\mathrm{rot}(f)$ sont vecteurs de rotation de points extrêmaux de $\mathcal{M}(f)$, c'est-à-dire de mesures ergodiques : en effet, pour tout $\rho \in \mathrm{rot}(f)$, l'ensemble $\mathcal{M}_\rho = \{\mu \in \mathcal{M}(f) \mid \rho_\mu = \rho\}$ est un convexe compact de $\mathcal{M}(f)$, et si ρ est en plus un point extrêmal de $\mathrm{rot}(f)$, alors les points extrêmaux de $\mathcal{M}_\rho$ sont aussi points extrêmaux de $\mathcal{M}(f)$. Enfin, si $x \in M$ est un point $f-$périodique, on appellera vecteur de rotation de x le vecteur de rotation de la mesure de probabilité équidistribuée sur l'orbite de x : ce vecteur appartient alors à $H_1(M, \mathbb{Q})$.

Si la définition de $\mathrm{rot}(f)$ peut paraître assez formelle, on peut cependant en donner une interprétation plus visuelle en termes de *cycles asymptotiques* (voir Schwartzman [Sch57] et Pollicott [Pol92]). Soit $\mu \in \mathcal{M}(f)$ une mesure pour laquelle il existe $x \in M$ tel que

$$\mu = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^i(x)} \quad \text{(pour la topologie faible}^*\text{)}$$

où δ_z désigne la mesure de Dirac au point z. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut concaténer les trajectoires $I(f^k(x))$ pour $k \in \{0, ..., n-1\}$ en une trajectoire $I^n(x)$ reliant x à $f^n(x)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $c_n(x)$ un chemin reliant $f^n(x)$ à x de sorte que les $(c_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ soient de longueurs (relativement à une métrique riemannienne sur M) bien définies et uniformément bornées en n. Soit $\gamma_n(x)$ le lacet obtenu en concaténant $I^n(x)$ et $c_n(x)$, et $[\gamma_n(x)]$ sa classe d'homologie ; alors le vecteur de rotation de la mesure μ est donné par

$$\rho_\mu = \lim_{n \to +\infty} \frac{[\gamma_n(x)]}{n}.$$

Autrement dit, si la mesure μ est associée à l'orbite d'un point x (ce qui sera le cas par exemple pour les mesures ergodiques), alors son vecteur de rotation correspond à la "direction homologique" asymptotique de la trajectoire de x donnée par l'isotopie, qu'on peut comprendre en moyennant asymptotiquement les classes d'homologie de lacets de plus en plus grands approximant cette trajectoire.

1.2 Résultats sur le tore

L'ensemble de rotation pour un relevé d'un homéomorphisme du tore isotope à l'identité étant un compact convexe non vide de $\mathbb{R}^2$, il y a trois possibilités : il peut être un singleton, un segment non trivial, ou un compact convexe d'intérieur non vide. Savoir si un compact convexe donné de $\mathbb{R}^2$ peut être réalisé comme ensemble de rotation d'un relevé d'un homéomorphisme du tore est une question qui se pose encore aujourd'hui, à laquelle on a cependant de très nombreuses réponses partielles. Citons à ce sujet les résultats de Kwapisz [Kwa92] et [Kwa95] sur les ensembles de rotation polygonaux, ou ceux de Boyland, de Carvalho et Hall [BdCH16] pour la construction d'autres ensembles de rotation explicites dans le cas d'intérieur non vide. Dans le cas d'intérieur vide, Franks et Misiurewicz ont conjecturé, dans [FM90], qu'un ensemble de rotation non réduit à un point est soit un segment à pente rationnelle contenant un point à coordonnées rationnelles, soit un segment à pente irrationnelle dont l'une des extrémités est à coordonnées rationnelles. Si l'on dispose d'un contre-exemple (non publié, dû à Ávila) à cette conjecture dans le cas de pente irrationnelle, le cas de pente rationnelle reste toujours ouvert malgré quantité d'avancées sur le sujet ([Koc16], [KPS16], [PS18], [LCT18]...).

Inversement, et à l'instar du nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle, connaître l'ensemble de rotation permet d'avoir certaines informations sur la dynamique de l'homéomorphisme. Parmi les nombreux résultats de ce type dont on dispose, citons-en quelques-uns qui nous intéresseront tout particulièrement. Le premier, dû à Llibre et Mackay [LM91], affirme que la dynamique de f est "riche" dès que l'ensemble de rotation est suffisamment gros :

Théorème 1. *Soit $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ un homéomorphisme du tore isotope à l'identité, dont on fixe un relevé $\widetilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ à $\mathbb{R}^2$. Si $\mathrm{rot}(\widetilde{f})$ est d'intérieur non vide, alors l'entropie de f est strictement positive.*

La preuve originelle de Llibre et Mackay repose sur la très fructueuse classification de Nielsen-Thurston pour les homéomorphismes de surface, consistant à déduire des informations dynamiques de l'étude des classes d'isotopie (voir l'article de Thurston [Thu88] ou par exemple le livre [CB88]). Plus récemment cependant, dans [LCT18], Le Calvez et Tal ont pu redémontrer ce résultat à l'aide de leur théorie de forçage, dont on rappellera les bases au chapitre 1.

L'ensemble de rotation peut également donner des informations sur l'existence de points périodiques ayant des vecteurs de rotation, donc des "directions asymptotiques", donnés. Plus précisément, dans le cas d'un homéomorphisme du cercle, on sait que l'on dispose d'une orbite périodique si et seulement si le nombre de rotation est rationnel. Il est donc naturel de se demander, dans le cas du tore, si les points rationnels de l'ensemble de rotation (i.e. les points dont les deux coordonnées sont rationnelles) sont ou non réalisés comme vecteurs de rotation de points périodiques. Le premier résultat dans ce sens, dû à Franks [Fra88], affirme que c'est le cas pour les points rationnels extrêmaux de l'ensemble de rotation. Puis, dans [Fra89], il étend cette propriété à tous les points rationnels de l'intérieur de l'ensemble de rotation :

Théorème 2. *Soit $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ un homéomorphisme du tore isotope à l'identité, dont on fixe un relevé $\widetilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ à $\mathbb{R}^2$. Pour tout $\left(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q}\right) \in \mathbb{Q}^2$ appartenant à l'intérieur de $\mathrm{rot}(\widetilde{f})$, il existe $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^2$ tel que $\widetilde{f}^q(\widetilde{x}) = \widetilde{x} + (p, p')$.*

Plusieurs résultats portent enfin sur la vitesse de convergence des moyennes des quantités de la forme $\widetilde{f}^n(\widetilde{x}) - \widetilde{x}$ vers l'ensemble de rotation, avec plus ou moins d'hypothèses selon que l'ensemble de rotation est un point (Jäger [Jäg09a] et [Jäg09b], Koropecki-Tal [KT14]), un segment (Guelman-Koropecki-Tal [GKT14], Dávalos [DÍ6], Kocsard [Koc16]), ou est d'intérieur non vide (Addas-Zanata [AZ15], Dávalos [DÍ6]). Plus précisément, étudier le comportement de ce type de quantités renseigne sur la précision de l'information contenue dans l'ensemble de rotation. Dans le cas d'intérieur non vide, citons le théorème suivant, toujours dû à Le Calvez et Tal [LCT18], et dont la preuve repose également sur la théorie de forçage :

Théorème 3. *Soit $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ un homéomorphisme du tore isotope à l'identité, dont on fixe un relevé $\widetilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ à $\mathbb{R}^2$. Si $\mathrm{rot}(\widetilde{f})$ est d'intérieur non vide, alors il existe une constante $L \geq 0$ telle que pour tout $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$d(\widetilde{f}^n(\widetilde{x}) - \widetilde{x}, n\mathrm{rot}(\widetilde{f})) \leq L.$$

Ce résultat est une généralisation de ce que l'on trouve dans [DÍ6] pour les ensembles de rotation polygonaux à sommets rationnels, et dans [AZ15] pour les $\mathcal{C}^{1+\varepsilon}-$difféomorphismes (c'est-à-dire les $\mathcal{C}^1-$difféomorphismes dont la dérivée est $\varepsilon-$hölderienne pour un $\varepsilon > 0$). En particulier, il permet à Le Calvez et Tal de donner une réponse positive à une conjecture de Boyland (initialement faite sur l'anneau $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$) dans le cas du tore (ceci étant aussi fait dans [AZ15]) :

Corollaire 4. *Soit $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ un homéomorphisme isotope à l'identité, dont on fixe un relevé $\widetilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ à $\mathbb{R}^2$, et μ une mesure borélienne de probabilité $f-$invariante de support total, dont on note $\mathrm{rot}(\mu)$ le vecteur de rotation. Si $\mathrm{Int}(\mathrm{rot}(\widetilde{f})) \neq \emptyset$, alors $\mathrm{rot}(\mu) \in \mathrm{Int}(\mathrm{rot}(\widetilde{f}))$.*

Il existe bien sûr de nombreux autres résultats donnant des informations sur la dynamique de f, également dans les cas où l'ensemble de rotation est un point ou un segment. Si nous nous sommes restreints à ces quelques résultats ici, c'est qu'il s'agit des principaux résultats que nous adapterons au cas de surfaces de genre supérieur.

1.3 Et en genre ≥ 2 ?

En genre plus grand, la situation est très différente car la géométrie de la surface n'est plus du tout semblable à celle du tore. En particulier, les choses se compliquent car le premier groupe d'homologie de la surface (dans lequel vit l'ensemble de rotation) est plus difficile à appréhender : il n'est plus égal au groupe fondamental mais à son abélianisé. Néanmoins, plusieurs résultats tentent d'adapter les théorèmes dont on dispose sur le tore cités précédemment.

Comme pour le théorème de Llibre et Mackay sur le tore, on peut se demander si avoir un ensemble de rotation suffisamment "gros" permet d'affirmer que la dynamique est "riche" (et en particulier que l'entropie est strictement positive). Le premier résultat qui va dans ce sens est dû à Pollicott [Pol92] :

Théorème 5. *Soit $f : M \to M$ un homéomorphisme isotope à l'identité sur une surface fermée M de genre $g \geq 2$. S'il existe $2g + 1$ points périodiques dont les vecteurs de rotation ne sont pas contenus dans un hyperplan commun de $H_1(M, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{2g}$, alors l'entropie de f est strictement positive.*

En particulier, notons que l'hypothèse de ce théorème implique comme dans le cas du tore que l'intérieur de l'ensemble de rotation est non vide. Un résultat assez similaire est le suivant, dû à Matsumoto [Mat97], mais est plus précis dans la mesure où il ne requiert pas que l'ensemble de rotation soit d'intérieur non vide :

Théorème 6. *Soit $f : M \to M$ un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme isotope à l'identité sur une surface fermée M de genre $g \geq 2$. S'il existe $g+2$ points périodiques dont les vecteurs de rotation forment un $(g+1)-$simplexe non dégénéré, alors l'entropie de f est strictement positive.*

Ces deux résultats reposent en grande partie, tout comme le théorème de Llibre et Mackay, sur la théorie de Nielsen-Thurston de classification des homéomorphismes de surface. Dans leurs énoncés, l'hypothèse sur la taille de l'ensemble de rotation implique en particulier que l'ensemble de rotation n'est pas totalement isotrope pour la forme symplectique $\wedge$ naturelle sur $H_1(M, \mathbb{R})$, dont on rappellera la définition au paragraphe 1.1.3. À ce titre, il paraît utile de rappeler un résultat, dû à Katok (voir [Kat73] ou [KH96]), dans le cas des flots. Si $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ est un flot engendré par un champ de vecteurs sur une surface compacte orientée M, on appelle ensemble de rotation de φ l'ensemble de rotation de l'homéomorphisme de temps 1 de φ. Le résultat de Katok est alors le suivant :

Théorème 7. *L'ensemble de rotation de φ est totalement isotrope pour la forme $\wedge$.*

L'argument principal sur lequel repose la preuve de ce théorème (voir [KH96]) est que les trajectoires du flot ne s'intersectent jamais deux à deux (tandis que dans le cas d'un homéomorphisme, les trajectoires données par l'isotopie peuvent s'intersecter). Ceci fait donc apparaître le lien, que nous détaillerons dans la suite, entre l'intersection au sens de la forme $\wedge$ et l'intersection des trajectoires.

Revenons maintenant au cas des homéomorphismes. Dans les théorèmes 5 et 6, la question de savoir si certains points rationnels de l'ensemble de rotation sont réalisés comme vecteurs de rotation de points périodiques apparaît comme étant fondamentale. On peut en particulier se demander si on dispose d'un analogue au théorème 2 en genre ≥ 2. Si certains résultats donnent des conditions suffisantes pour obtenir l'existence de vecteurs de rotation de points périodiques dans l'ensemble de rotation (voir Hayakawa [Hay95] ou Matsumoto [Mat97]), on sait néanmoins que le théorème 2, tel quel, ne peut s'adapter directement en genre supérieur. Ceci est exprimé dans ce résultat de Matsumoto [Mat97] :

Théorème 8. *Il existe un homéomorphisme $f : M \to M$ isotope à l'identité sur une surface fermée M de genre 2, dont l'intérieur de l'ensemble de rotation est non vide, mais ne contient aucun vecteur réalisé par une orbite périodique.*

Pour montrer ce résultat, Matsumoto exhibe un contre-exemple assez élémentaire. Soit M une surface fermée de genre 2, obtenue en recollant deux tores, dont on note l, m, l' et m' les courbes équateurs et méridiens respectives. On peut alors définir un homéomorphisme f isotope à l'identité ayant quatre points fixes x, y, x' et y' non contactiles, tels que sous l'isotopie, x fait le tour de l, y fait le tour de m, x' fait le tour de l', et y' fait le tour de m' ; ainsi, les vecteurs de rotation de x, y, x' et y' sont égaux respectivement aux classes d'homologies $[l]$, $[m]$, $[l']$ et $[m']$. Au voisinage de la zone de recollement des deux tores, l'isotopie est égale à l'identité. Il est bien clair, dans un tel exemple, que $\mathrm{rot}(f)$ est d'intérieur non vide, car les quatre vecteurs de rotation de x, y, x' et y' engendrent l'homologie. Mais la dynamique de f étant entièrement dissociée entre les deux tores, les

points périodiques de f sont situés soit d'un côté soit de l'autre ; leurs vecteurs de rotation sont donc soit sur le plan engendré par $[l]$ et $[m]$, soit sur le plan engendré par $[l']$ et $[m']$.

En un sens, un tel exemple vient souligner le fait que la définition de $\mathrm{rot}(f)$ à partir de l'ensemble des mesures invariantes, que nous utiliserons dans toute la suite, n'est pas forcément toujours la plus naturelle. Ici, en particulier, la convexité vient "remplir" l'intérieur de $\mathrm{rot}(f)$, tandis que la dynamique est, dans les faits, uniquement concentrée sur les plans engendrés respectivement par $[l]$ et $[m]$ et par $[l']$ et $[m']$.

Enfin, et contrairement au cas du tore, peu de résultats de "déplacements uniformes" équivalents au théorème 3 existent en genre supérieur. Parmi les rares avancées sur le sujet, citons les travaux d'Addas-Zanata et de Paula Jacóia [AZdPJ18], qui donnent une condition ayant de multiples conséquences sur la dynamique des $\mathcal{C}^{1+\varepsilon}-$difféomorphismes, y compris une propriété de déplacement uniforme similaire au théorème 3 et une réponse à la conjecture de Boyland 4 en genre supérieur. Cette condition est la suivante :

Définition 9. *On dit qu'un homéomorphisme $f : M \to M$ admet un système essentiel de courbes s'il existe une famille $\{g_1, ..., g_r\}$ de géodésiques fermées de M, et pour tout $i \in \{1, ..., r\}$ des points périodiques p_i^- et p_i^+ (de périodes respectives n_i^- et n_i^+), tels que :*
- le premier groupe d'homologie de chaque composante connexe du complémentaire de $\cup_{1\leq i\leq r} g_i$ dans M est trivial,
- pour tout $i \in \{1, ..., k\}$, les trajectoires $I^{n_i^-}(p_i^-)$ et $I^{n_i^+}(p_i^+)$ des points p_i^- et p_i^+ sous l'isotopie sont des lacets homotopes à g_i, avec chacune des deux orientations possibles.

2 Énoncé des résultats

L'objectif de cette thèse est d'étudier la dynamique des homéomorphismes de surface isotopes à l'identité sur des surfaces de genre ≥ 2 à partir de leur ensemble de rotation. Plus précisément, notre but est d'obtenir pour de telles surfaces des résultats similaires à ceux dont on dispose sur le tore et que nous avons cités précédemment (théorèmes 1, 2, 3 et 4), et qui viendront ainsi améliorer ce que l'on sait sur ces surfaces (théorèmes 5 et 6). Bien que tous les énoncés qui suivent soient des généralisations de résultats connus sur le tore, nous les énoncerons uniquement dans le cadre d'une surface de genre ≥ 2, sans leur adjoindre le cas connu du tore. Cela est intentionnel : en effet, les preuves que nous présenterons utiliseront l'hypothèse selon laquelle le genre est au moins 2, et ne fonctionneront donc pas directement sur le tore.

Nous nous intéresserons tout particulièrement aux homéomorphismes ayant un "gros" ensemble de rotation. À ce titre, l'hypothèse fondamentale de plusieurs de nos résultats sera l'existence de deux mesures ergodiques dont les vecteurs de rotation "s'intersectent", au sens où ils n'annulent pas la forme symplectique $\wedge$. Le premier résultat indique que cette hypothèse suffit à assurer une certaine complexité dynamique :

Théorème A. *Soit $f : M \to M$ un homéomorphisme isotope à l'identité sur une surface fermée de genre $g \geq 2$. S'il existe deux mesures de probabilité ergodiques $f-$invariantes μ et ν de vecteurs de rotation ρ_μ et ρ_ν tels que $\rho_\mu \wedge \rho_\nu \neq 0$, alors f est topologiquement chaotique, au sens où :*
- l'entropie de f est strictement positive, et
- le nombre de points périodiques de période n d'un certain itéré de f croît exponentiellement en n.

En appelant *dimension* de $\mathrm{rot}(f)$ la dimension minimale d'un sous-espace vectoriel de $H_1(M,\mathbb{R})$ dans lequel $\mathrm{rot}(f)$ est inclus, ce théorème admet alors pour corollaire immédiat :

Corollaire B. *Si* $\mathrm{rot}(f)$ *n'est pas totalement isotrope pour la forme symplectique* $\wedge$*, alors* f *est topologiquement chaotique. En particulier, c'est donc le cas si* $\mathrm{rot}(f)$ *est de dimension au moins* $g+1$*.*

Autrement dit, les homéomorphismes dont l'ensemble de rotation est suffisamment "gros" ont une dynamique "riche". Ce résultat est donc une adaptation naturelle du théorème 1 de Llibre et Mackay, et une généralisation des théorèmes 5 et 6 de Pollicott et Matsumoto. Notons que bien sûr, il implique que si $\mathrm{rot}(f)$ est d'intérieur non vide, alors f est topologiquement chaotique (et donc son entropie est strictement positive).

Le deuxième résultat concerne l'existence de points périodiques :

Théorème C. *Soit* $f : M \to M$ *un homéomorphisme isotope à l'identité sur une surface fermée de genre* $g \geq 2$*. On fixe une norme* $\|.\|$ *sur* $H_1(M,\mathbb{R})$ *et pour tout* $\rho \in H_1(M,\mathbb{R})$ *et* $\varepsilon > 0$*, on note* $B(\rho,\varepsilon)$ *la boule ouverte de centre* ρ *et rayon* ε *pour cette norme.*

Pour toutes mesures de probabilité ergodiques $f-$*invariantes* μ *et* ν *de vecteurs de rotation* ρ_μ *et* ρ_ν *tels que* $\rho_\mu \wedge \rho_\nu \neq 0$*, pour tout* $\varepsilon > 0$*, pour tout* $r \in [0,1]$*, il existe un point périodique* z *dont le vecteur de rotation* ρ_z *appartient à* $B(r\rho_\mu + (1-r)\rho_\nu, \varepsilon)$*. De plus, pour tout* $\kappa \in \mathbb{Q}\cap]0,1]$*, il existe un point périodique de vecteur de rotation* $\kappa\rho_z$*.*

Si l'on sait grâce au contre-exemple 8 de Matsumoto que le résultat 2 de Franks ne peut s'adapter tel quel en genre plus grand, ce théorème vient néanmoins lui faire écho. En effet, il indique que l'adhérence de l'ensemble des vecteurs de rotation réalisés par des orbites périodiques contient chaque triangle de sommet 0, ρ et ρ', où ρ et ρ' sont des points extrêmaux de l'ensemble de rotation de f qui s'intersectent en homologie. En quelque sorte, on est en mesure de trouver de nombreux vecteurs de rotation d'orbites périodiques, près de l'intérieur de certaines "faces" de l'ensemble de rotation.

Le théorème C vient en particulier donner des informations sur les formes possibles que peut, ou plutôt, que ne peut pas prendre un ensemble de rotation. Le premier corollaire est immédiat :

Corollaire D. *Si* $\mathrm{rot}(f)$ *n'est pas totalement isotrope pour la forme* $\wedge$*, alors* $\mathrm{rot}(f)$ *contient un point non nul à coordonnées rationnelles. Par exemple,* $\mathrm{rot}(f)$ *ne peut être un triangle non isotrope, sans rationnel hormis* 0*.*

Le second corollaire que nous montrerons est un énoncé de type Franks-Misiurewicz puisqu'il concerne les ensembles de rotation d'intérieur vide :

Corollaire E. *Si* $\mathrm{rot}(f)$ *est d'intérieur vide, alors tout segment non totalement isotrope reliant deux de ses points extrêmaux est inclus dans un hyperplan engendré par des vecteurs à coordonnées rationnelles. En particulier, si* $\mathrm{rot}(f)$ *est de dimension comprise entre* $g+1$ *et* $2g-1$*, alors il possède deux points extrêmaux dont les coordonnées ne sont pas linéairement indépendantes sur* $\mathbb{Q}$*.*

L'outil principal dont nous nous servirons pour montrer les deux théorèmes A et C est la théorie de forçage de Le Calvez et Tal, issue de [LCT18], dont nous détaillerons les bases au chapitre suivant, en section 1.3. L'une des notions centrales de cette théorie, basée

sur l'étude d'une isotopie *maximale* et d'un feuilletage $\mathcal{F}$ *transverse* à cette isotopie, est la notion d'*(auto-)intersection $\mathcal{F}-$transverse* de trajectoires *transverses* de points de M (tout cela sera défini en détail au chapitre suivant). Comme nous le verrons, cette notion d'intersection est une condition suffisante à la positivité de l'entropie et à l'existence de points périodiques. Ainsi, c'est précisément cette condition que nous allons utiliser pour montrer les théorèmes A et C, à travers la proposition fondamentale suivante :

Proposition F. *Soit $f : M \to M$ un homéomorphisme isotope à l'identité sur une surface fermée de genre $g \geq 2$, I une isotopie maximale entre Id_M et f, et $\mathcal{F}$ un feuilletage transverse à l'isotopie I. S'il existe deux mesures de probabilité ergodiques $f-$invariantes μ et ν de vecteurs de rotation ρ_μ et ρ_ν tels que $\rho_\mu \wedge \rho_\nu \neq 0$, alors :*
- soit il existe deux points récurrents z et $z' \in M$ dont les trajectoires transverses ont une intersection $\mathcal{F}-$transverse,
- soit il existe un point $z \in M$ dont la trajectoire transverse a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse.

On retrouve en particulier dans cette proposition le lien entre l'intersection des vecteurs de rotation (au sens de la forme $\wedge$) et l'intersection des trajectoires, lien qui apparaissait déjà avec le théorème 7 de Katok dans le cas des flots.

À l'aide du théorème C et de plusieurs résultats intermédiaires que nous aurons montrés préalablement, nous serons en mesure d'obtenir également un équivalent du théorème 3. Si f est isotope à l'identité, pour tout $z \in M$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I^n(z)$ le chemin reliant z à $f^n(z)$ obtenu en concaténant les trajectoires $I(f^k(z))$, pour $k = 0, ..., n-1$, données par l'isotopie. La notion de déplacement de la forme $\widetilde{f^n}(\widetilde{z}) - \widetilde{z}$ n'ayant plus de sens en genre ≥ 2, on va la remplacer par une estimation de la direction homologique que prend la trajectoire $I^n(z)$. Le résultat s'énonce alors ainsi :

Théorème G. *Soit $f : M \to M$ un homéomorphisme isotope à l'identité sur une surface fermée de genre $g \geq 2$. On fixe une norme sur $H_1(M, \mathbb{R})$ et on note d la distance induite. Pour tout $z \in M$ et $n \in \mathbb{N}$, soit $c_n(z)$ un chemin de M reliant $f^n(z)$ à z, de longueur (relativement à une métrique riemannienne sur M) bien définie et uniformément bornée en z et n. Soit $\overline{I^n(z)}$ la classe d'homologie du lacet obtenu en concaténant $I^n(z)$ et $c_n(z)$.*
Si 0 est dans l'intérieur de l'ensemble de rotation de f, alors il existe $L > 0$ tel que pour tout $z \in M$ et $n \in \mathbb{N}$, on ait $d(\overline{I^n(z)}, n\mathrm{rot}(f)) \leq L$.

Un point crucial de la preuve de ce théorème sera de montrer l'existence d'un système de courbes ayant des propriétés assez similaires à la propriété de la définition 9 (voir [AZdPJ18]), ce qui aura de nombreuses conséquences dynamiques. En appliquant le théorème C, nous parviendrons en effet à obtenir :

Proposition H. *Soit $f : M \to M$ un homéomorphisme isotope à l'identité sur une surface fermée de genre $g \geq 2$, I une isotopie maximale entre Id_M et f, et $\mathcal{F}$ un feuilletage transverse à l'isotopie I. Si $0 \in \mathrm{Int}(\mathrm{rot}(f))$, alors il existe un entier $r \geq 1$ et une famille $\{\gamma_1, ..., \gamma_r\}$ de r lacets transverses à $\mathcal{F}$ tels que :*
- pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, $[\gamma_j] \neq 0$,
- pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, γ_j est la trajectoire transverse d'un point périodique,
- les $([\gamma_j])_{1 \leq j \leq r}$ engendrent $H_1(M, \mathbb{R})$, et
- 0 est dans l'intérieur de l'enveloppe convexe des $([\gamma_j])_{1 \leq j \leq r}$.

Notons bien que le théorème G est tout de même sensiblement plus faible que son analogue (théorème 3) sur le tore, puisque son hypothèse principale est que l'intérieur de l'ensemble de rotation contient 0 (et pas seulement que cet intérieur est non vide). Cette hypothèse est nécessaire pour les preuves que nous présenterons (par exemple, pour obtenir la proposition H), mais il n'est cependant pas exclu de pouvoir l'affaiblir, par d'autres arguments, et d'obtenir ainsi une meilleure version du théorème G.

Enfin, nous pourrons obtenir un certain nombre de corollaires au théorème G, concernant les mesures dont le vecteur de rotation est dans la frontière de $\mathrm{rot}(f)$. Afin de les énoncer, introduisons quelques notations. Soit ω une $1-$forme différentielle fermée sur M, et $[\omega] \in H^1(M, \mathbb{R})$ sa classe de cohomologie. Pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(f)$ de vecteur de rotation $\mathrm{rot}(\mu)$, on notera

$$\mathrm{rot}(\mu).[\omega] = \int_M \left(\int_{I(x)} \omega \right) \mathrm{d}\mu(x)$$

(autrement dit, on voit l'élément $\mathrm{rot}(\mu)$ du premier groupe d'homologie $H_1(M, \mathbb{R})$ par dualité, comme une forme linéaire sur le premier groupe de cohomologie $H^1(M, \mathbb{R})$). Comme $\mathcal{M}(f)$ est compact, on peut définir

$$\alpha_{[\omega]} = \max_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \mathrm{rot}(\mu).[\omega] \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{[\omega]} = \{\mu \in \mathcal{M}(f) \mid \mathrm{rot}(\mu).[\omega] = \alpha_{[\omega]}\}.$$

En notant $\mathrm{supp}(\mu)$ le support d'une mesure $\mu \in \mathcal{M}(f)$, on définit alors

$$X_{[\omega]} = \overline{\bigcup_{\mu \in \mathcal{M}_{[\omega]}} \mathrm{supp}(\mu)}.$$

On fixe enfin une norme $\|.\|_{H^1}$ sur le premier groupe de cohomologie $H^1(M, \mathbb{R})$. De même que le théorème 3 admet comme corollaire le théorème 4, la conséquence principale du théorème G est donnée par la version suivante de la conjecture de Boyland :

Théorème I. *Soit $f : M \to M$ un homéomorphisme isotope à l'identité sur une surface fermée de genre ≥ 2, et μ une mesure borélienne de probabilité $f-$invariante de support total, dont on note $\mathrm{rot}(\mu)$ le vecteur de rotation. Si $0 \in \mathrm{Int}(\mathrm{rot}(f))$, alors $\mathrm{rot}(\mu) \in \mathrm{Int}(\mathrm{rot}(f))$.*

En particulier, ce théorème s'applique donc pour un homéomorphisme isotope à l'identité qui préserve l'aire : si 0 est dans l'intérieur de l'ensemble de rotation d'un tel homéomorphisme, alors c'est aussi le cas du vecteur de rotation de la mesure de Lebesgue. Le théorème reposera sur la proposition fondamentale suivante, qui elle-même découlera du théorème G et du lemme d'Atkinson (que nous réénoncerons en 3.2.1, voir [Atk76]) :

Proposition J. *Si $0 \in \mathrm{Int}(\mathrm{rot}(f))$, alors il existe une constante $L_0 \in \mathbb{R}$ telle que pour toute $1-$forme fermée ω, pour tout $z \in X_{[\omega]}$, pour tout $n \geq 1$,*

$$\left| \left(\int_{I^n(z)} \omega \right) - n\alpha_{[\omega]} \right| \leq L_0 \, \|[\omega]\|_{H^1} .$$

En particulier, toute mesure μ supportée sur $X_{[\omega]}$ appartient à $\mathcal{M}_{[\omega]}$.

De manière similaire au cas du tore (voir [LCT18]), nous pourrons enfin obtenir un résultat analogue à cette dernière proposition pour tous les points appartenant au support d'une mesure dont le vecteur de rotation est dans la frontière de $\mathrm{rot}(f)$, notée $\partial(\mathrm{rot}(f))$. On adopte les notations suivantes :

$$\mathcal{M}_\partial = \{\mu \in \mathcal{M}(f) \mid \mathrm{rot}(\mu) \in \partial(\mathrm{rot}(f))\} \quad \text{et } X_\partial = \overline{\bigcup_{\mu \in \mathcal{M}_\partial} \mathrm{supp}(\mu)}.$$

Pour tout $z \in M$ et $n \in \mathbb{N}$, on désigne encore par $\overline{I^n(z)}$ la classe d'homologie d'un lacet obtenu en refermant $I^n(z)$ par un chemin de longueur uniformément bornée en z et n. On fixe aussi une norme sur $H_1(M, \mathbb{R})$ et on note d la distance induite. On obtiendra alors :

Proposition K. *Si* $0 \in \mathrm{Int}(\mathrm{rot}(f))$*, alors il existe une constante* $L_1 \in \mathbb{R}$ *telle que pour tout* $z \in X_\partial$*, pour tout* $n \geq 1$*,*

$$d\left(\overline{I^n(z)}, n\partial(\mathrm{rot}(f))\right) \leq L_1.$$

En particulier, toute mesure ergodique μ *supportée sur* X_∂ *appartient à* $\mathcal{M}_\partial$*.*

3 Plan de la thèse

Cette thèse comporte quatre chapitres. Divers préliminaires sont faits dans les deux premiers chapitres, tandis que les deux chapitres suivants sont consacrés aux preuves des résultats que nous avons énoncés dans la section précédente.

Le chapitre 1 a pour but d'introduire les outils fondamentaux et de donner les définitions de base que nous utiliserons en permanence dans la suite : notions d'intersection, définitions classiques sur les feuilletages et leurs chemins transverses, et présentation rapide de la théorie de forçage de Le Calvez et Tal.

Au chapitre 2, nous énonçons et montrons quelques résultats préliminaires généraux qui nous seront utiles dans la suite : d'abord des résultats liés uniquement aux chemins transverses à un feuilletage, puis des résultats sur les trajectoires et leurs "directions homologiques".

Le chapitre 3 est consacré aux preuves des théorèmes A (et de son corollaire B) et C (et de ses corollaires D et E). Nous y conduisons une étude générale, dont le plan est détaillé au début du chapitre, menant en particulier à la proposition fondamentale F. De cette étude découlent simultanément les théorèmes A et C.

Enfin, le chapitre 4 est dédié à la preuve du théorème G et de ses corollaires. Y sont faits divers préliminaires utilisant les résultats du chapitre précédent (en particulier la proposition H), puis nous prouvons le théorème G. Ce chapitre se termine avec la preuve des corollaires I, J et K.

Chapitre 1

Quelques outils importants

Le but de ce chapitre est d'introduire les outils et notions de base que nous utiliserons constamment dans les chapitres suivants. La section 1.1 a ainsi pour objectif de préciser les différentes notions d'intersection sur lesquelles sera basée une bonne partie des preuves qui suivront, afin d'éviter toute ambiguïté de langage. La section 1.2 est dévolue aux premières définitions sur les feuilletages et leurs chemins transverses. Celles-ci nous permettront, en section 1.3, de présenter rapidement la théorie de forçage de Le Calvez et Tal, en énonçant ses principes phares et les résultats dont nous aurons l'utilité.

1.1 Nombre(s) d'intersection et intersection homologique

Dans toute cette section, M désigne une surface orientée (non nécessairement compacte), dont on note $\widetilde{M}$ le revêtement universel, et $\mathcal{G}$ le groupe des automorphismes de ce revêtement.

Définition 1.1.1. *On appelle chemin toute application continue $\alpha : I \to M$, définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On appelle lacet tout chemin $\gamma : \mathbb{R} \to M$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t+1) = \gamma(t)$. Par abus de langage, on appellera également chemin (resp. lacet) l'image d'un chemin (resp. lacet) ainsi défini.*

Faisons quelques remarques simples mais importantes. Tout d'abord, insistons sur le fait qu'on paramétrera systématiquement les lacets de cette manière, c'est-à-dire par une application définie sur $\mathbb{R}$ et $1-$périodique. Ensuite, si $\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \widetilde{M}$ relève un lacet $\gamma : \mathbb{R} \to M$, alors il existe un unique automorphisme $T \in \mathcal{G}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\widetilde{\gamma}(t+1) = T\widetilde{\gamma}(t)$. Enfin, si $\gamma : \mathbb{R} \to M$ est un lacet, on appellera *ensemble des relevés* de γ l'ensemble des chemins $\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \widetilde{M}$ relevant l'application $\gamma : \mathbb{R} \to M$, modulo la relation d'équivalence définie par $\widetilde{\gamma} \sim \widetilde{\gamma}' \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{R}, \widetilde{\gamma}(t+n) = \widetilde{\gamma}'(t)$.

1.1.1 Nombre d'intersection entre deux chemins

Le nombre d'intersection entre deux chemins, tel que nous allons le définir, représente le nombre de fois que le premier chemin croise le second, compté algébriquement relativement à leurs orientations naturelles. Commençons par le définir pour des chemins compacts :

Définition 1.1.2. *Soit $\alpha : [a,b] \to M$ et $\beta : [c,d] \to M$ deux chemins (orientés naturellement par leurs paramétrages). On dit que le nombre d'intersection de α avec β est bien défini si α ne rencontre ni $\beta(c)$ ni $\beta(d)$, et si β ne rencontre ni $\alpha(a)$ ni $\alpha(b)$.*

Définition 1.1.3. *Soit $\alpha : [a,b] \to M$ et $\beta : [c,d] \to M$ deux chemins orientés, dont le nombre d'intersection est bien défini. On dit que α et β sont topologiquement transverses si $\mathcal{I} = \{(t,s) \in [a,b] \times [c,d] \mid \alpha(t) = \beta(s)\}$ est fini. Dans ce cas, on pose pour tout $(t,s) \in \mathcal{I}$:*
- $\varepsilon(t,s) = +1$ si α croise localement β de la gauche vers la droite en $\alpha(t) = \beta(s)$,
- $\varepsilon(t,s) = -1$ si α croise localement β de la droite vers la gauche en $\alpha(t) = \beta(s)$,
- $\varepsilon(t,s) = 0$ sinon (i.e. si α rebrousse chemin au contact de β en $\alpha(t) = \beta(s)$).

On définit alors $i(\alpha,\beta)$, nombre d'intersection de α avec β, en posant

$$i(\alpha,\beta) = \sum_{(t,s)\in\mathcal{I}} \varepsilon(t,s).$$

On a alors la proposition suivante qui permet de définir le nombre d'intersection pour des chemins non nécessairement topologiquement transverses :

Proposition 1.1.4. *Soit $\alpha : [a,b] \to M$ et $\beta : [c,d] \to M$ deux chemins orientés, dont le nombre d'intersection est bien défini. Il existe un chemin α' homotope à extrémités fixées à α dans $M \setminus \{\beta(c), \beta(d)\}$, et un chemin β' homotope à extrémités fixées à β dans $M \setminus \{\alpha(a), \alpha(b)\}$, tels que α' et β' sont topologiquement transverses.*

Le nombre d'intersection de α avec β est alors défini par $i(\alpha,\beta) = i(\alpha',\beta')$, et il est indépendant des choix de α' et β'.

Étendons cette définition au cas de chemins non nécessairement compacts :

Définition 1.1.5. *Soit I, J deux intervalles non vides de $\mathbb{R}$, et $\alpha : I \to M$ et $\beta : J \to M$ deux chemins orientés. On dit que le nombre d'intersection de α avec β est bien défini s'il existe $t^- \leq t^+ \in I$ et $s^- \leq s^+ \in J$ tels que pour tout $t \in I$ et $s \in J$, on ait l'implication $(\alpha(t) = \beta(s)) \Rightarrow (t^- < t < t^+$ et $s^- < s < s^+)$. Dans ce cas, on définit $i(\alpha,\beta)$, nombre d'intersection de α avec β, en posant $i(\alpha,\beta) = i(\alpha_{|[t^-,t^+]}, \beta_{|[s^-,s^+]})$ (ceci étant indépendant des choix de t^-, t^+, s^- et s^+).*

Remarque : bien sûr, il découle de ces définitions que si $\alpha : I \to M$ et $\beta : J \to M$ sont deux chemins orientés et que le nombre d'intersection $i(\alpha,\beta)$ de α avec β est bien défini, alors le nombre d'intersection $i(\beta,\alpha)$ de β avec α est bien défini et $i(\beta,\alpha) = -i(\alpha,\beta)$.

Pour calculer un nombre d'intersection, on utilisera souvent la proposition suivante, indiquant qu'on peut compter les intersections algébriques de deux courbes en comptant celles de leurs relevés au revêtement universel $\widetilde{M}$:

Proposition 1.1.6. *Soit I, J deux intervalles non vides de $\mathbb{R}$, et $\alpha : I \to M$ et $\beta : J \to M$ deux chemins orientés dont le nombre d'intersection est bien défini. Soit $\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{M}$ un relevé de α et $\widetilde{\beta} : J \to \widetilde{M}$ un relevé de β à $\widetilde{M}$. Alors pour tout $T \in \mathcal{G}$, le nombre d'intersection du chemin $T\widetilde{\alpha}$ avec $\widetilde{\beta}$ est bien défini et on a*

$$i(\alpha,\beta) = \sum_{T\in\mathcal{G}} i(T\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$$

(cette somme ne comportant qu'un nombre fini de termes non nuls).

1.1.2 Cas des lacets

On va maintenant étendre la définition du nombre d'intersection aux lacets :

Définition 1.1.7. *Soit $\alpha : I \to M$ un chemin orienté et $\gamma : \mathbb{R} \to M$ un lacet orienté. On dit que le nombre d'intersection de α avec γ est bien défini s'il existe $t^- \leq t^+ \in I$ tels que pour tout $t \in I$, on ait l'implication $(\alpha(t) \in \gamma) \Rightarrow (t^- < t < t^+)$. Dans ce cas, soit $\alpha' : [t^-, t^+] \to M$ un chemin homotope à extrémités fixées à $\alpha_{|[t^-,t^+]}$, tel que pour tout $t \in [t^-, t^+]$, $\alpha'(t) \neq \gamma(0)$. On définit le nombre d'intersection entre α et γ en posant $i(\alpha, \gamma) = i(\alpha'_{|[t^-,t^+]}, \gamma_{|[0,1]})$, et ce nombre est indépendant des choix de t^-, t^+ et α'.*

De manière analogue à la proposition 1.1.6, on peut calculer un tel nombre d'intersection en comptant les intersections au revêtement universel :

Proposition 1.1.8. *Soit $\alpha : I \to M$ un chemin et $\gamma : \mathbb{R} \to M$ un lacet, tels que le nombre d'intersection $i(\alpha, \gamma)$ entre α et γ est bien défini. Soit $\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{M}$ un relevé de α, et $\widetilde{\mathcal{C}}$ l'ensemble des relevés de γ à $\widetilde{M}$. Alors pour tout $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\mathcal{C}}$, le nombre d'intersection $i(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma})$ de $\widetilde{\alpha}$ avec $\widetilde{\gamma}$ est bien défini et on a :*

$$i(\alpha, \gamma) = \sum_{\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\mathcal{C}}} i(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma})$$

(cette somme ne comportant qu'un nombre fini de termes non nuls).

Dans le cas de deux lacets, enfin, le nombre d'intersection est toujours bien défini :

Définition 1.1.9. *Soit $\gamma_1 : \mathbb{R} \to M$ et $\gamma_2 : \mathbb{R} \to M$ deux lacets. On considère un lacet $\gamma'_2 : \mathbb{R} \to M$ homotope à γ_2 tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma'_2(t) \neq \gamma_1(0)$. On définit le nombre d'intersection entre γ_1 et γ_2 en posant $i(\gamma_1, \gamma_2) = i(\gamma_{1|[0,1]}, \gamma'_2)$, et ce nombre est indépendant du choix de γ'_2.*

Remarques : notons bien que si $\gamma_1 : \mathbb{R} \to M$ et $\gamma_2 : \mathbb{R} \to M$ sont deux lacets, le nombre d'intersection entre un relevé $\widetilde{\gamma}_1$ de γ_1 et un relevé $\widetilde{\gamma}_2$ de γ_2 à $\widetilde{M}$ n'est pas forcément bien défini. Néanmoins, si ce nombre d'intersection entre $\widetilde{\gamma}_1$ et $\widetilde{\gamma}_2$ n'est pas bien défini, alors les lacets γ_1 et γ_2 sont homotopes ; en particulier, cela implique que leur nombre d'intersection $i(\gamma_1, \gamma_2)$ est nul. Dans le cas contraire où le nombre d'intersection entre $\widetilde{\gamma}_1$ et $\widetilde{\gamma}_2$ est bien défini, il vaut alors -1, 0 ou $+1$.

Détaillons un peu la manière, analogue aux propositions 1.1.6 et 1.1.8, dont on peut calculer un nombre d'intersection entre deux lacets en se plaçant au revêtement universel. Soit donc $\gamma_0 : \mathbb{R} \to M$ et $\gamma : \mathbb{R} \to M$ deux lacets. On suppose que le nombre d'intersection $i(\gamma_0, \gamma)$ entre γ_0 et γ est non nul. Fixons un relevé $\widetilde{\gamma}_0$ de γ_0 à $\widetilde{M}$, et notons $T \in \mathcal{G}$ l'automorphisme de revêtement associé (i.e. tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\widetilde{\gamma}_0(t+1) = T\widetilde{\gamma}_0(t)$).

Soit $\widetilde{\mathcal{C}}$ l'ensemble des relevés de γ à $\widetilde{M}$. On munit $\widetilde{\mathcal{C}}$ de la relation d'équivalence $\sim$ définie par : pour tout $\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2 \in \widetilde{\mathcal{C}}$, $\widetilde{\gamma}_1 \sim \widetilde{\gamma}_2 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \widetilde{\gamma}_1 = T^k \widetilde{\gamma}_2$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour $\sim$, et pour toute classe $e \in \mathcal{E}$, on fixe un relevé $\widetilde{\gamma}_e \in e$. Alors :

Proposition 1.1.10. *Pour tout $e \in \mathcal{E}$, le nombre d'intersection $i(\widetilde{\gamma}_0, \widetilde{\gamma}_e)$ est bien défini, et on a :*

$$i(\gamma_0, \gamma) = \sum_{e \in \mathcal{E}} i(\widetilde{\gamma}_0, \widetilde{\gamma}_e)$$

(cette somme ne comportant qu'un nombre fini de termes non nuls).

Démonstration. Soit $\gamma' : \mathbb{R} \to M$ un lacet homotope à γ tel que $\gamma_0(0) \notin \gamma'$. Notons $\widetilde{\mathcal{C}'}$ l'ensemble des relevés de γ' à $\widetilde{M}$. On dispose d'une bijection naturelle $\varphi : \widetilde{\mathcal{C}'} \to \widetilde{\mathcal{C}}$ obtenue en relevant l'homotopie entre γ' et γ. Comme on a supposé que $i(\gamma_0, \gamma) \neq 0$, alors par la remarque ci-dessus, pour tout $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\mathcal{C}}$, $i(\widetilde{\gamma}_0, \widetilde{\gamma})$ est bien défini et vaut donc -1, 0 ou $+1$. Mais $i(\gamma_0, \gamma') = i(\gamma_0, \gamma) \neq 0$, donc pour tout $\widetilde{\gamma}' \in \widetilde{\mathcal{C}'}$, $i(\widetilde{\gamma}_0, \widetilde{\gamma}')$ est aussi bien défini. Notons enfin que par définition de φ, pour tout $\widetilde{\gamma}' \in \widetilde{\mathcal{C}'}$, $i(\widetilde{\gamma}_0, \widetilde{\gamma}') = i(\widetilde{\gamma}_0, \varphi(\widetilde{\gamma}'))$.

Comme par hypothèse $\gamma_0(0) \notin \gamma'$, alors par définition, on a $i(\gamma_0, \gamma') = i(\gamma_{0|[0,1]}, \gamma')$. Par la proposition 1.1.8, on a donc

$$i(\gamma_0, \gamma') = \sum_{\widetilde{\gamma}' \in \widetilde{\mathcal{C}'}} i(\widetilde{\gamma}_{0|[0,1]}, \widetilde{\gamma}').$$

On note alors $\sim'$ la relation d'équivalence sur $\mathcal{C}'$ définie par : pour tout $\widetilde{\gamma}'_1, \widetilde{\gamma}'_2 \in \widetilde{\mathcal{C}}$, $\widetilde{\gamma}'_1 \sim' \widetilde{\gamma}'_2 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \widetilde{\gamma}'_1 = T^k \widetilde{\gamma}'_2$. On note $\mathcal{E}'$ l'ensemble des classes d'équivalence pour $\sim'$. Bien sûr, φ passe au quotient en une bijection $\widetilde{\varphi} : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$. Par conséquent, les relevés $\widetilde{\gamma}'_{e'} = \varphi^{-1}\widetilde{\gamma}_e$ décrivent toutes les classes de $\mathcal{E}'$. On a donc :

$$i(\gamma_0, \gamma') = \sum_{e' \in \mathcal{E}'} \sum_{\widetilde{\gamma}' \in e'} i(\widetilde{\gamma}_{0|[0,1]}, \widetilde{\gamma}') = \sum_{e' \in \mathcal{E}'} \sum_{k \in \mathbb{Z}} i(\widetilde{\gamma}_{0|[0,1]}, T^k \widetilde{\gamma}'_{e'}).$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, pour tout $e' \in \mathcal{E}'$, on a $i(\widetilde{\gamma}_{0|[0,1]}, T^k \widetilde{\gamma}'_{e'}) = i(T^{-k}\widetilde{\gamma}_{0|[0,1]}, \widetilde{\gamma}'_{e'})$ donc un changement d'indice donne

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} i(\widetilde{\gamma}_{0|[0,1]}, T^k \widetilde{\gamma}'_{e'}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} i(T^k \widetilde{\gamma}_{0|[0,1]}, \widetilde{\gamma}'_{e'}) = i(\widetilde{\gamma}_0, \widetilde{\gamma}'_{e'}).$$

Autrement dit, on a

$$i(\gamma_0, \gamma') = \sum_{e' \in \mathcal{E}'} i(\widetilde{\gamma}_0, \widetilde{\gamma}'_{e'}).$$

Il reste à effectuer le changement d'indice $\widetilde{\varphi} : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ dans la somme pour obtenir

$$i(\gamma_0, \gamma') = \sum_{e \in \mathcal{E}} i(\widetilde{\gamma}_0, \widetilde{\gamma}_e).$$

□

1.1.3 Lien avec l'intersection de classes d'homologie

On suppose maintenant que M est une surface compacte connexe orientée. Le produit extérieur de deux $1-$formes fermées sur M donne une $2-$forme (fermée) sur M, et s'annule dès que l'une des $1-$formes de départ est exacte : il induit donc une application bilinéaire antisymétrique, appelée cup-produit, entre les groupes de cohomologie $H^1(M, \mathbb{R}) \times H^1(M, \mathbb{R}) \to H^2(M, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$. Par dualité de Poincaré, on obtient donc une forme bilinéaire antisymétrique sur les groupes d'homologie

$$\wedge : H_1(M, \mathbb{R}) \times H_1(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}.$$

La proposition suivante nous permet d'avoir une intuition de ce produit d'intersection homologique, dans le cas où les classes d'homologie sont entières :

Proposition 1.1.11. *Soit γ et γ' deux lacets de M, dont on note $[\gamma]$ et $[\gamma'] \in H_1(M, \mathbb{Z})$ les classes d'homologie. Le nombre d'intersection de γ avec γ' est égal à $[\gamma] \wedge [\gamma']$.*

1.2 Feuilletages et chemins transverses

Dans cette section, on rappelle brièvement les définitions de base sur les feuilletages sur les surfaces. Le lecteur intéressé par une théorie des feuilletages plus étoffée pourra se référer à [CC99].

Définition 1.2.1. *Un feuilletage topologique $\mathcal{F}$ sur une surface M est la donnée d'un atlas de cartes $(U_i, \phi_i)_{i\in I}$ tel que*
(i) $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de M, et
(ii) pour tout $i \in I$, $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^2$ est un homéomorphisme, et les applications $\psi_{i,j} = \phi_j \circ \phi_i^{-1}$ de changement de cartes sont de la forme

$$\begin{array}{rcccl} \psi_{i,j} & : & \phi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^2 & \to & \phi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (\psi^1_{i,j}(x,y), \psi^2_{i,j}(y)) \end{array}.$$

Définition 1.2.2. *On appelle plaque du feuilletage $\mathcal{F} = (U_i, \phi_i)_{i\in I}$ les ensembles de la forme $\phi_i^{-1}(\mathbb{R} \times \{y\})$, où $y \in \mathbb{R}$.*

On appelle feuille du feuilletage $\mathcal{F}$ les classes d'équivalence pour la relation d'équivalence sur M engendrée par la relation binaire d'appartenance à une même plaque.

Remarque : les feuilles de $\mathcal{F}$ héritent naturellement de cette définition d'une orientation canonique. On pourra donc parler de feuilletage topologique orienté sur M.

Définition 1.2.3. *Un feuilletage singulier orienté $\mathcal{F}$ sur une surface M est un feuilletage topologique orienté défini sur un ouvert de M. Cet ouvert est appelé domaine de définition de $\mathcal{F}$, et noté* $\mathrm{dom}(\mathcal{F})$ *; les points de $M \setminus \mathrm{dom}(\mathcal{F})$ sont appelés singularités de $\mathcal{F}$. Si* $\mathrm{dom}(\mathcal{F}) = M$*, on dit que $\mathcal{F}$ est non singulier.*

On va maintenant donner les définitions concernant les chemins "transverses" à un feuilletage. Commençons par définir les notions dans le cas d'un feuilletage $\mathcal{F}$ non singulier du plan $\mathbb{R}^2$; on pourra ensuite, par passage au revêtement universel, donner leur équivalent dans le cas d'un feuilletage singulier sur une surface M.

1.2.1 Cas d'un feuilletage non singulier de $\mathbb{R}^2$

Dans tout ce paragraphe, $\mathcal{F}$ désigne un feuilletage orienté non singulier du plan $\mathbb{R}^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on note ϕ_x la feuille de $\mathcal{F}$ passant par x. Faisons pour commencer quelques rappels sur la structure de $\mathcal{F}$; pour plus de détails, on pourra se référer aux travaux de Haefliger et Reeb ([Hae58] et [HR57]) :

- tout d'abord, une conséquence du théorème de Poincaré-Bendixson est que toute feuille ϕ de $\mathcal{F}$ est une droite injective propre. Elle sépare donc $\mathbb{R}^2$ en deux composantes connexes, l'une à sa gauche (relativement à son orientation) notée $L\phi$, et l'autre à sa droite notée $R\phi$. On dira que deux feuilles ϕ et ϕ' de $\mathcal{F}$ sont comparables si les parties $R\phi$ et $R\phi'$ sont comparables pour l'inclusion. De manière équivalente, ϕ et ϕ' sont comparables si $\phi \subset L\phi'$ et $\phi' \subset R\phi$, ou si $\phi' \subset L\phi$ et $\phi \subset R\phi'$.

- en quotientant $\mathbb{R}^2$ par la relation d'équivalence d'appartenance à une feuille commune (pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, $x \sim y \Leftrightarrow \phi_x = \phi_y$), et en munissant l'espace obtenu de la topologie quotient, on obtient une variété de dimension 1 simplement connexe à base dénombrable d'ouverts, appelée *espace des feuilles*. Chaque feuille de $\mathcal{F}$ correspond alors bien sûr à un point de l'espace des feuilles. Notons bien que cette variété n'est pas séparée en général ;

elle l'est si et seulement si le feuilletage est trivial, c'est-à-dire que toutes ses feuilles sont deux à deux comparables.

La notion centrale qui va nous intéresser est celle de transversalité d'un chemin relativement au feuilletage $\mathcal{F}$. Un chemin sera dit transverse s'il croise localement chaque feuille du feuilletage de la droite vers la gauche, comme exprimé dans la définition suivante :

Définition 1.2.4. *Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}$ un chemin défini sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit que α est positivement transverse à $\mathcal{F}$ si pour tout $t > t_0 \in I$, $\alpha(t) \in L\phi_{\alpha(t_0)}$ et pour tout $t < t_0 \in I$, $\alpha(t) \in R\phi_{\alpha(t_0)}$.*

Remarque : on ne considèrera jamais de chemin négativement transverse. Dans toute la suite, on se contentera donc, au lieu des termes "positivement transverse", d'employer uniquement le terme "transverse".

Soulignons les deux faits suivants : si $\alpha : I \to \mathbb{R}$ est un chemin transverse à $\mathcal{F}$, alors pour tout feuille $\phi \in \mathcal{F}$, l'ensemble $\{t \in I \mid \alpha(t) \in \phi\}$ est soit vide, soit un singleton ; de plus, si $t < t' \in I$ sont tels que $\alpha(t), \alpha(t') \in R\widetilde{\phi}$ (resp. $L\widetilde{\phi}$), alors $\alpha_{|[t,t']} \subset R\widetilde{\phi}$ (resp. $L\widetilde{\phi}$).

Définition 1.2.5. *Deux chemins $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ et $\beta : J \to \mathbb{R}^2$ transverses à $\mathcal{F}$ sont dits équivalents s'ils rencontrent exactement les mêmes feuilles. Cela est équivalent à dire qu'il existe un homéomorphisme croissant $h : I \to J$ tel que pour tout $t \in I$, $\phi_{\alpha(t)} = \phi_{\beta(h(t))}$.*

Dans le cas où $I = [a, b]$ et $J = [c, d]$ sont compacts, cela est encore équivalent au fait que $\phi_{\alpha(a)} = \phi_{\beta(c)}$ et $\phi_{\alpha(b)} = \phi_{\beta(d)}$.

Autrement dit, deux chemins $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ et $\beta : J \to \mathbb{R}^2$ sont équivalents s'ils définissent le même chemin dans l'espace des feuilles. Précisons les différentes possibilités qu'ont deux chemins transverses d'avoir des portions infinies ou non équivalentes entre elles. Pour ne pas faire de confusions, on va considérer uniquement des chemins paramétrés par $\mathbb{R}$:

Définition 1.2.6. *Soit $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ deux chemins transverses à $\mathcal{F}$.*

On dit que α se sépare positivement de β s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \geq t_0$, $\phi_{\alpha(t)}$ ne rencontre pas β.

On dit que α se sépare négativement de β s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \leq t_0$, $\phi_{\alpha(t)}$ ne rencontre pas β.

Définition 1.2.7. *Soit $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ deux chemins transverses à $\mathcal{F}$.*

On dit que α et β sont équivalents en $+\infty$, et on note $\alpha \overset{+\infty}{\sim} \beta$ s'il existe $t, t' \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_{|[t,+\infty[}$ est équivalent à $\beta_{|[t',+\infty[}$.

On dit que α et β sont équivalents en $-\infty$, et on note $\alpha \overset{-\infty}{\sim} \beta$ s'il existe $t, t' \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_{|]-\infty,t]}$ est équivalent à $\beta_{|]-\infty,t']}$.

Remarque : on peut donner une définition équivalente de cette notion de la manière suivante : α et β sont équivalents en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si et seulement si α ne se sépare pas positivement (resp. négativement) de β et β ne se sépare pas positivement (resp. négativement) de α.

Notons également que α et β sont équivalents si et seulement s'ils sont équivalents à la fois en $+\infty$ et en $-\infty$.

Définition 1.2.8. *Soit $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ deux chemins transverses à $\mathcal{F}$.*

On dit que α s'accumule positivement dans β s'il existe trois réels t_0 et $t < t'$ tels que $\alpha_{|[t_0,+\infty[}$ est équivalent à $\beta_{|[t,t'[}$.

On dit que α s'accumule négativement dans β s'il existe trois réels t_0 et $t > t'$ tels que $\alpha_{|]-\infty,t_0]}$ est équivalent à $\beta_{|]t',t]}$.

On dit que α s'accumule dans β si α s'accumule positivement ou négativement dans β.

Remarque : une définition équivalente de l'accumulation est la suivante : α s'accumule positivement (resp. négativement) dans β si et seulement si α ne se sépare pas de β positivement (resp. négativement), mais β se sépare de α positivement (resp. négativement).

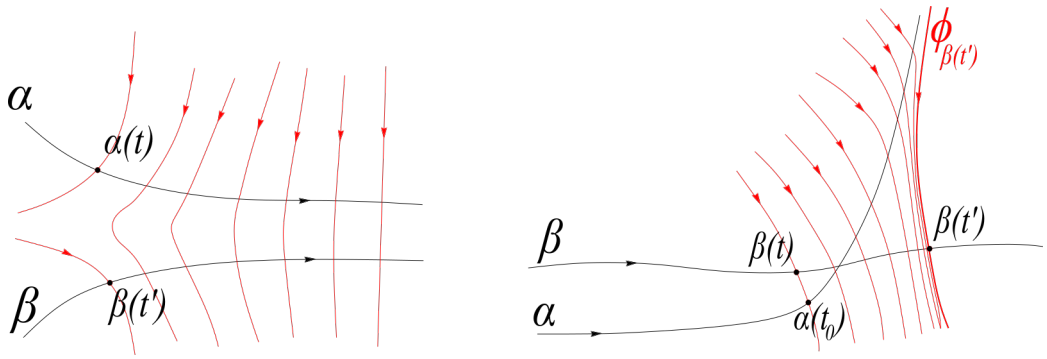

FIGURE 1.1 – À gauche, exemple de deux chemins équivalents en $+\infty$, mais non équivalents en $-\infty$; à droite, exemple d'un chemin α s'accumulant positivement dans un chemin β.

Enfin, terminons en définissant la notion d'intersection $\mathcal{F}-$transverse évoquée dans l'introduction. Pour cela, nous allons avoir besoin de la définition suivante :

Définition 1.2.9. *Soit ϕ_0, ϕ_1, et ϕ_2 trois feuilles de $\mathcal{F}$ deux à deux distinctes. On dit que ϕ_1 est au-dessus de ϕ_2 par rapport à ϕ_0 (ou que ϕ_2 est en-dessous de ϕ_1 par rapport à ϕ_0) si les deux conditions suivantes sont réunies :*
- aucune des trois feuilles ne sépare les deux autres, et
- pour tous chemins disjoints $\alpha_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ et $\alpha_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, tels que $\alpha_1(0) \in \phi_1$ et $\alpha_1(1) \in \phi_0$, et $\alpha_2(0) \in \phi_2$ et $\alpha_2(1) \in \phi_0$, et tels que $\alpha_{1|]0,1[}$ et $\alpha_{2|]0,1[}$ ne rencontrent pas ϕ_0, ϕ_1 et ϕ_2, le point $\alpha_1(1)$ est situé après le point $\alpha_2(1)$ relativement à l'orientation de ϕ_0.

Notons qu'étant données trois feuilles distinctes ϕ_0, ϕ_1, et ϕ_2, parmi lesquelles aucune ne sépare les deux autres, alors soit ϕ_1 est au-dessus de ϕ_2, soit ϕ_2 est au-dessus de ϕ_1 relativement à ϕ_0.

On peut maintenant définir cette notion d'intersection $\mathcal{F}-$transverse entre deux chemins, qui exprime que les projections des deux chemins à l'espace des feuilles se "croisent" réellement :

Définition 1.2.10. *Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ et $\alpha' : I' \to \mathbb{R}^2$ deux chemins transverses. On dit que α et α' s'intersectent $\mathcal{F}-$transversalement positivement (ou que α' et α s'intersectent $\mathcal{F}-$transversalement négativement) s'il existe $a < t < b \in I$ et $a' < t' < b' \in I'$ tels que :*
- $\phi_{\alpha(t)} = \phi_{\alpha'(t')}$,
- $\phi_{\alpha(a)}$ est en-dessous de $\phi_{\alpha'(a')}$ par rapport à $\phi_{\alpha(t)} = \phi_{\alpha'(t')}$,
- $\phi_{\alpha(b)}$ est au-dessus de $\phi_{\alpha'(b')}$ par rapport à $\phi_{\alpha(t)} = \phi_{\alpha'(t')}$.

Lemme 1.2.11. *Deux chemins $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ et $\alpha' : I' \to \mathbb{R}^2$ s'intersectent $\mathcal{F}-$transversalement positivement si et seulement s'il existe $a < b \in I$ et $a' < b' \in I'$ tels que :*
- $\alpha_{|[a,b]}$ ne rencontre pas $\phi_{\alpha'(a')}$ et $\phi_{\alpha'(b')}$,
- $\alpha'_{|[a',b']}$ ne rencontre pas $\phi_{\alpha(a)}$ et $\phi_{\alpha(b)}$, et
- le nombre d'intersection entre $\alpha_{|[a,b]}$ et $\alpha'_{|[a',b']}$ (est bien défini et) vaut $+1$.

Démonstration. Soit donc $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ et $\alpha' : I' \to \mathbb{R}^2$ deux chemins transverses qui s'intersectent $\mathcal{F}-$transversalement : il existe donc $a < t < b \in I$ et $a' < t' < b' \in I'$ tels que $\phi_{\alpha(a)}$ est en-dessous de $\phi_{\alpha'(a')}$ par rapport à $\phi_{\alpha(t)} = \phi_{\alpha'(t')}$, et $\phi_{\alpha(b)}$ est au-dessus de $\phi_{\alpha'(b')}$ par rapport à $\phi_{\alpha(t)} = \phi_{\alpha'(t')}$. Comme $a' < t'$, alors $\phi_{\alpha'(a')}$ est située à droite de $\phi_{\alpha'(t')} = \phi_{\alpha(t)}$. Si $\alpha_{|[a,b]}$ rencontre $\phi_{\alpha'(a')}$, alors cela implique donc que $\alpha_{|[a,t]}$ rencontre $\phi_{\alpha'(a')}$, donc que $\phi_{\alpha'(a')}$ sépare les deux feuilles $\phi_{\alpha(a)}$ et $\phi_{\alpha(t)}$: cela contredit que $\phi_{\alpha(a)}$ est en-dessous de $\phi_{\alpha'(a')}$ par rapport à $\phi_{\alpha(t)}$. De la même manière, il est impossible que $\alpha_{|[a,b]}$ rencontre $\phi_{\alpha'(b')}$, ou que $\alpha'_{|[a',b']}$ rencontre $\phi_{\alpha(a)}$ ou $\phi_{\alpha(b)}$. En particulier, le nombre d'intersection entre $\alpha_{|[a,b]}$ et $\alpha'_{|[a',b']}$ est bien défini. Il est bien clair, étant données les positions relatives des quatre feuilles extrêmes $\phi_{\alpha'(a')}$, $\phi_{\alpha'(b')}$, $\phi_{\alpha(a)}$ et $\phi_{\alpha(b)}$, que $\alpha_{|[a,b]}$ croise $\alpha'_{|[a',b']}$ de la gauche vers la droite, donc ce nombre d'intersection vaut $+1$. Les propriétés de la définition 1.2.10 entraînent donc celles de l'énoncé du lemme.

Inversement, supposons qu'il existe $a < b \in I$ et $a' < b' \in I'$ tels que $\alpha_{|[a,b]}$ ne rencontre pas $\phi_{\alpha'(a')}$ et $\phi_{\alpha'(b')}$, $\alpha'_{|[a',b']}$ ne rencontre pas $\phi_{\alpha(a)}$ et $\phi_{\alpha(b)}$, et le nombre d'intersection entre $\alpha_{|[a,b]}$ et $\alpha'_{|[a',b']}$ vaut $+1$. Ceci implique que $\alpha_{|[a,b]}$ et $\alpha'_{|[a',b']}$ se rencontre en un point $\alpha(t) = \alpha'(t')$, avec $a < t < b$ et $a' < t' < b'$. Comme $a < t$ et $a' < t'$, alors $\phi_{\alpha(a)}$ et $\phi_{\alpha'(a')}$ sont à droite de $\phi_{\alpha(t)} = \phi_{\alpha'(t')}$, donc cette dernière feuille ne sépare pas $\phi_{\alpha(a)}$ et $\phi_{\alpha'(a')}$. Comme de plus $\alpha_{|[a,t]}$ ne rencontre pas $\phi_{\alpha'(a')}$, alors $\phi_{\alpha'(a')}$ ne sépare pas $\phi_{\alpha(a)}$ et $\phi_{\alpha(t)}$, et comme $\alpha'_{|[a',t']}$ ne rencontre pas $\phi_{\alpha(a)}$, alors $\phi_{\alpha(a)}$ ne sépare pas $\phi_{\alpha'(a')}$ et $\phi_{\alpha'(t')}$. Aucune des trois feuilles $\phi_{\alpha(a)}$, $\phi_{\alpha'(a')}$ et $\phi_{\alpha(t)} = \phi_{\alpha'(t')}$ ne sépare donc les deux autres. De même, aucune des trois feuilles $\phi_{\alpha(b)}$, $\phi_{\alpha'(b')}$ et $\phi_{\alpha(t)} = \phi_{\alpha'(t')}$ ne sépare les deux autres. Comme le nombre d'intersection entre $\alpha_{|[a,b]}$ et $\alpha'_{|[a',b']}$ est $+1$, $\alpha_{|[a,b]}$ croise $\alpha'_{|[a',b']}$ de la gauche vers la droite, donc $\phi_{\alpha(a)}$ est en-dessous de $\phi_{\alpha'(a')}$ relativement à $\phi_{\alpha(t)}$ et $\phi_{\alpha(b)}$ est au-dessus de $\phi_{\alpha'(b')}$ relativement à $\phi_{\alpha(t)}$. □

Notons que dans les énoncés 1.2.10 et 1.2.11, on peut toujours, quitte à augmenter a et a' et à diminuer b et b', choisir que $\alpha_{|]a,b[}$ et $\alpha'_{|]a',b'[}$ soient équivalents. De plus, si α et α' s'intersectent $\mathcal{F}-$transversalement positivement, alors le nombre d'intersection global de α avec α' est bien défini et vaut $+1$.

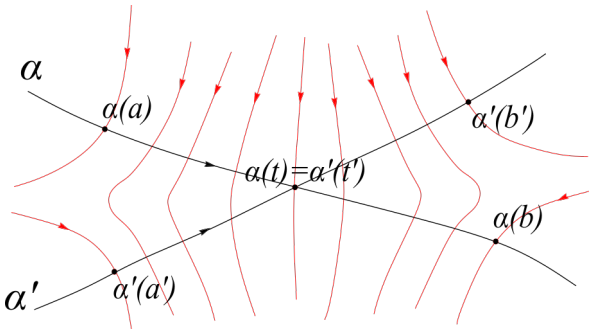

FIGURE 1.2 – Définition d'une intersection $\mathcal{F}-$transverse.

1.2.2 Cas d'un feuilletage singulier de M

Toutes les définitions précédentes vont s'étendre naturellement au cas d'un feuilletage singulier sur une surface M. En effet, un tel feuilletage se relève au revêtement universel de son domaine de définition en un feuilletage non singulier, et comme les composantes connexes de ce revêtement universel sont des plans, la situation est similaire à celle du paragraphe précédent.

On fixe donc dans tout ce paragraphe un feuilletage singulier orienté $\mathcal{F}$ sur une surface compacte connexe orientée M, dont on note $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ le revêtement universel du domaine de définition, et $\mathcal{G}$ le groupe des automorphismes de ce revêtement. Le feuilletage $\mathcal{F}$ se relève en particulier en un feuilletage orienté non singulier $\mathcal{G}-$invariant de $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$, que l'on note $\widetilde{\mathcal{F}}$.

On peut alors donner les définitions suivantes :

Définition 1.2.12. *Un chemin $\alpha : I \to M$ est dit transverse à $\mathcal{F}$ si son image est contenue dans $\mathrm{dom}(\mathcal{F})$ et s'il en existe un relevé $\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ transverse au feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$.*

Définition 1.2.13. *Deux chemins transverses $\alpha : I \to M$ et $\beta : J \to M$ sont dits équivalents (en $+\infty$, en $-\infty$) s'il en existe deux relevés $\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ et $\widetilde{\beta} : J \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ équivalents (en $+\infty$, en $-\infty$).*

Remarque : soyons attentifs au fait que les autres caractérisations de l'équivalence des chemins transverses, que nous avions dans le cas d'un feuilletage non singulier du plan, ne sont ici plus valables. Sur une surface quelconque, il est ainsi possible que deux chemins rencontrent exactement les mêmes feuilles mais ne soient pas équivalents : un exemple simple peut être construit avec un feuilletage en cercles sur le tore, auquel on ajoute une singularité "artificielle" en coupant l'une des feuilles, comme le montre la figure 1.3.

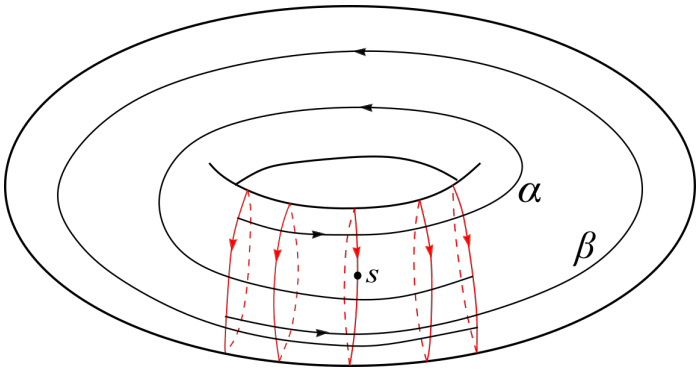

FIGURE 1.3 – Exemple de deux chemins α et β, transverses à un feuilletage sur le tore, rencontrant exactement les mêmes feuilles, mais n'étant pas équivalents (s est ici une singularité du feuilletage).

Définition 1.2.14. *Soit $\alpha : \mathbb{R} \to M$ et $\beta : \mathbb{R} \to M$ deux chemins transverses au feuilletage $\mathcal{F}$. On dit que α s'accumule (positivement, négativement) dans β s'il existe des relevés $\widetilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ et $\widetilde{\beta} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ de α et β tels que $\widetilde{\alpha}$ s'accumule (positivement, négativement) dans $\widetilde{\beta}$.*

Définition 1.2.15. *On dit que deux chemins $\alpha : I \to M$ et $\beta : J \to M$ transverses à $\mathcal{F}$ s'intersectent $\mathcal{F}-$transversalement (positivement, négativement) s'il en existe deux relevés $\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ et $\widetilde{\beta} : J \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ qui s'intersectent $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement (positivement, négativement).*

On dit qu'un chemin $\alpha : I \to M$ transverse à $\mathcal{F}$ a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse s'il en existe un relevé $\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ et $T \in \mathcal{G}$ tels que $\widetilde{\alpha}$ et $T\widetilde{\alpha}$ s'intersectent $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement.

Remarque : le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ étant $\mathcal{G}-$invariant, toutes les propriétés de transversalité, équivalence, accumulation, et intersection $\mathcal{F}-$transverse, dès lors qu'elles sont vraies pour des chemins de $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$, sont également vraies pour tous leurs translatés sous l'action d'un automorphisme de revêtement. Plus précisément, on a donc les choses suivantes :
- si α est un chemin transverse à $\mathcal{F}$, alors tous ses relevés à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ sont transverses à $\widetilde{\mathcal{F}}$;
- si deux chemins transverses α et β sont équivalents (en $+\infty$, en $-\infty$), alors tout relevé $\widetilde{\alpha}$ de α à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ est équivalent (en $+\infty$, en $-\infty$) à un relevé $\widetilde{\beta}$ de β à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$;
- si un chemin transverse α s'accumule dans un chemin transverse β, alors tout relevé $\widetilde{\alpha}$ de α à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ s'accumule dans un relevé $\widetilde{\beta}$ de β à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$;
- si deux chemins transverses α et β s'intersectent $\mathcal{F}-$transversalement, alors pour tout relevé $\widetilde{\alpha}$ de α à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$, il existe un relevé $\widetilde{\beta}$ de β à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ tel que $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$ s'intersectent $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement.

Enfin, définissons la notion de récurrence pour un chemin transverse sur M :

Définition 1.2.16. *Soit $\alpha : \mathbb{R} \to M$ un chemin transverse à $\mathcal{F}$.*

On dit que α est positivement récurrent si pour tout $a < b \in \mathbb{R}$ et pour tout $m \in \mathbb{R}$, il existe $c < d$ avec $c \geq m$ tels que $\alpha_{|[a,b]}$ est équivalent à $\alpha_{|[c,d]}$.

On dit que α est négativement récurrent si pour tout $a < b \in \mathbb{R}$ et pour tout $m \in \mathbb{R}$, il existe $c < d$ avec $d \leq m$ tels que $\alpha_{|[a,b]}$ est équivalent à $\alpha_{|[c,d]}$.

On dit que α est récurrent si α est positivement et négativement récurrent.

Définition 1.2.17. *On dit qu'un chemin $\widetilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ est $\mathcal{G}-$récurrent si $\widetilde{\alpha}$ relève un chemin de M transverse récurrent.*

Remarque : on a donc la définition équivalente suivante : un chemin $\widetilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ est $\mathcal{G}-$récurrent si et seulement si $\widetilde{\alpha}$ est transverse au feuilletage relevé $\widetilde{\mathcal{F}}$ et si pour tout $a < b \in \mathbb{R}$ et $m, m' \in \mathbb{R}$, il existe $c < d$ avec $c \geq m$ et $c' < d'$ avec $d \leq m'$, et $T, T' \in \mathcal{G}$ tels que les trois sous-arcs $\widetilde{\alpha}_{|[a,b]}$, $T\widetilde{\alpha}_{|[c,d]}$ et $T'\widetilde{\alpha}_{|[c',d']}$ sont équivalents.

De même, on adoptera la terminologie suivante :

Définition 1.2.18. *Pour tout $S \in \mathcal{G} \setminus \{\mathrm{Id}\}$, un chemin transverse $\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ est appelé $S-$lacet si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\widetilde{\gamma}(t+1) = S\widetilde{\gamma}(t)$.*

Remarque : bien sûr, cette terminologie est motivée par le fait qu'un tel chemin relève un lacet de M. Notons également que tout $S-$lacet transverse $\widetilde{\gamma}$ (pour $S \in \mathcal{G} \setminus \{\mathrm{Id}\}$) est une droite injective propre. Elle sépare donc la composante connexe de $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ à laquelle elle appartient en deux composantes connexes, l'une à sa gauche notée $L(\widetilde{\gamma})$ et l'autre à sa droite notée $R(\widetilde{\gamma})$.

1.2.3 Fonctions duales

Terminons cette section par rappeler un formalisme que nous utiliserons dans la suite, celui des *fonctions duales*. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage singulier orienté sur une surface M, dont on note $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ le revêtement universel du domaine de définition, et $\widetilde{\mathcal{F}}$ le feuilletage non-singulier relevé à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$.

Si $\gamma : \mathbb{R} \to M$ est un lacet transverse sur M, notons $\widetilde{\mathcal{C}}$ l'ensemble des relevés de γ à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$, et considérons l'ensemble $\mathcal{D}$ des relevés des points de $M \setminus \gamma$:

$$\mathcal{D} = \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F}) \setminus \bigcup_{\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\mathcal{C}}} \widetilde{\gamma}.$$

On peut alors définir une fonction $\delta : \mathcal{D} \to \mathbb{Z}$, appelée *fonction duale*, ayant la propriété suivante : pour tout $\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2 \in \mathcal{D}$, la différence $\delta(\widetilde{z}_1) - \delta(\widetilde{z}_2)$ est égale au nombre d'intersection de tout chemin $\widetilde{c}$ reliant $\widetilde{z}_1$ à $\widetilde{z}_2$ avec la famille $\widetilde{\mathcal{C}}$, c'est-à-dire au nombre d'intersection de la projection de $\widetilde{c}$ avec le lacet γ. Une telle fonction est uniquement définie à une constante additive près. Bien entendu, δ est constante sur chaque composante connexe de $\mathcal{D}$.

Si γ est un lacet transverse homologue à zéro dans M maintenant, le nombre d'intersection d'un chemin de M avec γ, dès lors qu'il est bien défini, ne dépend que de ses extrémités. On peut donc définir une fonction duale $\delta : M \setminus \gamma \to \mathbb{Z}$ directement sur M, ayant la propriété suivante : pour tout $z_1, z_2 \in M \setminus \gamma$, la différence $\delta(z_1) - \delta(z_2)$ est égale au nombre d'intersection de tout chemin reliant z_1 à z_2 avec γ. Une telle fonction est encore uniquement définie à une constante additive près. De même, δ est constante sur chaque composante connexe de $M \setminus \gamma$.

Définition 1.2.19. *On dit qu'une feuille ϕ de $\mathcal{F}$ est errante si pour tout $z \in \phi$, z admet un voisinage V trivialisant le feuilletage tel que pour tout $z' \in V$, la feuille $\phi_{z'}$ passant par z' n'est pas fermée et $\phi_{z'} \cap V$ est connexe.*

Soit γ un lacet transverse homologue à zéro sur M, et δ une fonction duale sur $M \setminus \gamma$. Chaque feuille de $\mathcal{F}$ que rencontre γ le croise localement de gauche à droite, donc δ décroît le long des feuilles, et change de valeur à chaque intersection avec γ. Ceci implique que toutes les feuilles rencontrées par γ sont errantes : en effet, si une feuille ϕ non-errante rencontrait γ, alors ϕ s'accumulerait, donc on disposerait de deux points de $M \setminus \gamma$ arbitrairement proches l'un de l'autre mais ayant des valeurs par δ différentes, ce qui est absurde. En particulier, pour une feuille ϕ donnée, la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale de δ sur ϕ est bien définie, et cette valeur est uniformément bornée pour toutes les feuilles rencontrées par γ ; ceci implique que le nombre de fois qu'une feuille donnée rencontre γ est uniformément borné. De manière équivalente, le nombre de relevés de γ à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ rencontrés par une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}$ est uniformément borné.

Remarque : tout ceci est également valable pour un "multi-lacet", c'est-à-dire une famille finie de lacets. En particulier, si $\sum_{1 \leq i \leq r} \gamma_i$ est un multi-lacet transverse homologue à zéro (i.e. $\sum_{1 \leq i \leq r} [\gamma_i] = 0$), alors le nombre de relevés de tous les γ_i rencontrés par une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}$ est uniformément borné.

1.3 Théorie de forçage

1.3.1 Isotopies maximales et feuilletages transverses

Dans cette section, nous rappelons les bases de la théorie de forçage de Le Calvez et Tal, qui sera l'outil principal dont nous nous servirons dans la suite, développée dans [LCT18] et [LCT]. On considère un homéomorphisme $f : M \to M$ isotope à l'identité sur une surface compacte orientée M. Si $I : [0,1] \times M \to M$ est une isotopie entre Id_M et f, on note $\mathrm{Fix}(I)$ l'ensemble des *points fixes* de l'isotopie, défini par

$$\mathrm{Fix}(I) = \{x \in M \mid \text{pour tout } t \in [0,1], I(t,x) = x\}$$

et on note $\mathrm{dom}(I) = M \setminus \mathrm{Fix}(I)$ le *domaine* de l'isotopie. Pour tout point $x \in M$, on note $I(x)$ le chemin $t \mapsto I(t,x)$ donnée par l'isotopie, reliant x à $f(x)$. On définit également les concaténations suivantes :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ I^n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} I(f^k(x)) \quad \text{ et } I^{\mathbb{Z}}(x) = \prod_{k\in\mathbb{Z}} I(f^k(x)).$$

Bien entendu, si $x \in M$ est un point fixe de f, le chemin $I(x)$ relie x à lui-même et définit donc un lacet.

Définition 1.3.1. *On dit qu'une isotopie I entre Id_M et f est maximale si pour tout $x \in \mathrm{Fix}(f) \setminus \mathrm{Fix}(I)$, le lacet $I(x)$ n'est pas homotopiquement trivial dans $\mathrm{dom}(I)$.*

L'utilisation du terme "maximal" provient du fait que cette définition coïncide avec la maximalité pour un certain préordre sur l'ensemble des isotopies entre Id_M et f (voir [Jau14]). Un résultat de Béguin-Crovisier-Le Roux [BCLR18] affirme alors que toute isotopie entre Id_M et f est en fait inférieure pour ce préordre à une isotopie maximale. En particulier, il existe des isotopies maximales :

Théorème 1.3.2. *Si $f : M \to M$ est un homéomorphisme isotope à l'identité, alors il existe une isotopie maximale reliant Id_M et f.*

Remarquons que de manière équivalente, une isotopie I entre l'identité et f est maximale si et seulement si f se relève au revêtement universel $\widetilde{\mathrm{dom}}(I)$ du domaine de I en une application $\widetilde{f} : \widetilde{\mathrm{dom}}(I) \to \widetilde{\mathrm{dom}}(I)$ qui n'a aucun point fixe. On va ainsi pouvoir appliquer la théorie de Le Calvez-Brouwer, développée dans [LC04], pour construire un feuilletage "transverse" à I.

Rappelons les bases de cette théorie. Un homéomorphisme de Brouwer est un homéomorphisme $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ préservant l'orientation et sans point fixe. Pour toute droite orientée D de $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire un plongement propre de $\mathbb{R}$), on note $R(D)$ la composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus D$ située à la droite de D, et $L(D)$ la composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus D$ située à la gauche de D ; on dit que D est une droite de Brouwer pour h si $h(D) \subset L(D)$ et $h^{-1}(D) \subset R(D)$. La version feuilletée équivariante du théorème de translation de Brouwer due à Le Calvez [LC04] affirme alors que :

Théorème 1.3.3. *Si G est un groupe discret d'automorphismes du plan préservant l'orientation, dont l'action est libre et propre, et h un homéomorphisme de Brouwer commutant aux éléments de G, alors il existe un feuilletage orienté $G-$invariant de $\mathbb{R}^2$ dont les feuilles sont des droites de Brouwer pour h.*

Étant donnée donc une isotopie maximale I entre l'identité de M et f, comme les composantes connexes de $\widetilde{\mathrm{dom}}(I)$ sont topologiquement des plans, f se relève donc à $\widetilde{\mathrm{dom}}(I)$ en une application dont les restrictions à ces composantes connexes sont des homéomorphismes de Brouwer. En appliquant le théorème 1.3.3 avec le groupe $\mathcal{G}$ des automorphismes du revêtement, on peut donc feuilleter $\widetilde{\mathrm{dom}}(I)$ par un feuilletage $\mathcal{G}-$équivariant en droites de Brouwer. Ce procédé permet d'obtenir la proposition suivante :

Proposition 1.3.4. *Si I est une isotopie maximale entre Id_M et f, alors il existe un feuilletage $\mathcal{F}$ singulier orienté sur M, dont l'ensemble des singularités est égal à $\mathrm{Fix}(I)$, et tel que pour tout $x \in \mathrm{dom}(I)$, la trajectoire $I(x)$ est homotope à extrémités fixées dans $\mathrm{dom}(I)$ à un chemin transverse à $\mathcal{F}$.*

Un tel feuilletage donné par la proposition 1.3.4 est dit *transverse* à l'isotopie I.

Étant donné un feuilletage transverse $\mathcal{F}$ à une isotopie maximale I entre Id_M et f, on peut donc définir pour tout $x \in \mathrm{dom}(I)$ un chemin transverse à $\mathcal{F}$, homotope à extrémités fixées à $I(x)$ dans $\mathrm{dom}(I)$, que l'on note $I_{\mathcal{F}}(x)$. Ce chemin est uniquement défini modulo la relation d'*équivalence* entre chemins transverses. Pour tout $x \in \mathrm{dom}(I)$, le chemin $I_{\mathcal{F}}(x)$ relie x à $f(x)$, donc on peut définir les concaténations suivantes :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ I^n_{\mathcal{F}}(x) = \prod_{k=0}^{n-1} I_{\mathcal{F}}(f^k(x)) \quad \text{ et } I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x) = \prod_{k\in\mathbb{Z}} I_{\mathcal{F}}(f^k(x)).$$

On dit enfin qu'un chemin transverse $\alpha : [a,b] \to \mathrm{dom}(I)$ est *admissible d'ordre* $n \in \mathbb{N}^*$ s'il existe $x \in \mathrm{dom}(I)$ tel que α est équivalent (au sens de la relation entre chemins transverses définie en 1.2.13) à un sous-chemin de $I^n_{\mathcal{F}}(x)$.

Ces définitions données, nous pouvons aborder le fond de la théorie de forçage de Le Calvez et Tal. Son résultat fondamental est de construire, étant donnés deux chemins admissibles qui s'intersectent convenablement (il s'agit bien sûr de la notion d'intersection $\mathcal{F}-$transverse), de nouveaux chemins admissibles. Plus précisément, le lemme de "forçage" est le suivant :

Proposition 1.3.5. *Soit I une isotopie maximale et $\mathcal{F}$ un feuilletage transverse à I. Soit $\alpha : [a,b] \to \mathrm{dom}(I)$ et $\alpha' : [a',b'] \to \mathrm{dom}(I)$ deux chemins transverses à $\mathcal{F}$, s'intersectant $\mathcal{F}-$transversalement en un point $\alpha(t) = \alpha'(t')$, avec $a < t < b$ et $a' < t' < b'$.*

Si α est admissible d'ordre n et α' est admissible d'ordre n' alors les deux chemins $\alpha_{|[a,t]}\alpha'_{|[t',b']}$ et $\alpha'_{|[a',t']}\alpha_{|[t,b]}$ sont admissibles d'ordre $n+n'$.

Autrement dit, à partir de deux orbites dont les trajectoires transverses au feuilletage données par l'isotopie s'intersectent $\mathcal{F}-$transversalement, on déduit l'existence d'orbites dont les trajectoires "suivent" les chemins obtenus en changeant de direction au point d'intersection entre les deux premières trajectoires. Cette construction repose sur un simple argument de connexité, dont nous nous inspirerons dans l'une des situations que nous étudierons. C'est donc cette situation d'intersection $\mathcal{F}-$ transverse entre trajectoires admissibles qui fait apparaître la richesse de la dynamique de l'homéomorphisme f.

Cette proposition peut, et à juste titre, faire penser au théorème de Sharkovsky dans le cas unidimensionnel (voir [Sha64]) : en effet, celui-ci fournit l'existence d'un ordre total $\prec$ sur $\mathbb{N}^*$ (dont le plus petit élément est 1 et le plus grand élément est 3) tel que toute

application continue de $[0,1]$ dans lui-même ayant une orbite périodique de période n a une orbite périodique de période m pour tout $m \prec n$. Ce "forçage" d'orbites induit en particulier une certaine richesse dynamique, puisqu'on peut en déduire qu'une application continue sur $[0,1]$ admettant une orbite périodique dont la période n'est pas une puissance de 2 a une entropie strictement positive.

Le premier théorème découlant de ce phénomène de forçage 1.3.5 et décrivant ainsi cette richesse dynamique, énoncé dans [LCT18], est le suivant :

Théorème 1.3.6. *Soit I une isotopie maximale et $\mathcal{F}$ un feuilletage transverse à I. On suppose qu'il existe deux points récurrents dont les trajectoires transverses ont une intersection $\mathcal{F}-$transverse. Alors f est topologiquement chaotique, c'est-à-dire que :*
- l'entropie de f est strictement positive, et
- le nombre de points périodiques de période n d'un certain itéré de f croît exponentiellement en n.

De manière plus générale cependant, une condition suffisante pour qu'un homéomorphisme $T : X \to X$ soit topologiquement chaotique est qu'il présente un *fer-à-cheval topologique*, c'est-à-dire qu'il existe un compact $Y \subset X$ invariant par un itéré T^r, $r \geq 1$, tel que les deux conditions suivantes soient vérifiées :
- $T^r_{|Y}$ est semi-conjugué au décalage de Bernouilli $\sigma : \{1,...,q\}^{\mathbb{Z}} \to \{1,...,q\}^{\mathbb{Z}}$ avec $q \geq 2$,
- la préimage par l'application de semi-conjugaison de tout point $\sigma-$périodique de $\{1,...,q\}^{\mathbb{Z}}$ contient au moins un point T^r-périodique de même période.

Il s'avère que c'est en fait la situation que l'on a lorsque des trajectoires ont une intersection $\mathcal{F}-$transverse : en effet, dans [LCT], on dispose de la version améliorée suivante du théorème 1.3.6 :

Théorème 1.3.7. *S'il existe un chemin transverse admissible ayant une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse, alors f possède un fer-à-cheval topologique.*

Ce second énoncé est bien une amélioration du premier : d'une part, il précise que le comportement chaotique provient bel et bien de la présence d'un fer-à-cheval ; d'autre part, il s'appuie sur une hypothèse plus faible puisque la trajectoire admissible considérée n'est plus forcément récurrente. Notons également qu'il contient le premier énoncé car on peut construire un chemin transverse admissible avec une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse dès lors que l'on a deux points récurrents dont les trajectoires transverses s'intersectent $\mathcal{F}-$transversalement.

Enfin, une dernière conséquence importante est que la situation d'auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse permet également d'obtenir l'existence de multiples points périodiques dans l'ensemble de rotation (voir toujours [LCT]) :

Théorème 1.3.8. *Soit I une isotopie maximale et $\mathcal{F}$ un feuilletage transverse à I. Soit $\widetilde{\mathrm{dom}}(I)$ le revêtement universel du domaine de I et $\mathcal{G}$ le groupe des automorphismes de ce revêtement, et soit $\widetilde{\mathcal{F}}$ le feuilletage relevé. On suppose qu'il existe un automorphisme $T \in \mathcal{G}$ et un chemin $\widetilde{\alpha} : [a,b] \to \widetilde{\mathrm{dom}}(I)$ relevant un chemin transverse admissible d'ordre n, tels que $\widetilde{\alpha}$ et $T\widetilde{\alpha}$ ont une intersection $\widetilde{\mathcal{F}}-$transverse au point $T\widetilde{\alpha}(s) = \widetilde{\alpha}(t)$ avec $a < s < t < b$. Alors, pour tout $\kappa \in \mathbb{Q} \cap]0,1]$, il existe un point périodique $z \in M$ dont le vecteur de rotation ρ_z est égal à*

$$\rho_z = \kappa \frac{[T]}{n}.$$

1.3.2 Paramétrage des trajectoires

Terminons cette section par quelques remarques de notation. Soit $f : M \to M$ un homéomorphisme isotope à l'identité sur une surface M, I une isotopie maximale, et $\mathcal{F}$ un feuilletage transverse à I. Soit $\mathcal{G}$ le groupe des automorphismes du revêtement universel $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ et $\widetilde{f} : \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F}) \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ un relevé de f commutant aux éléments de $\mathcal{G}$.

Pour tout $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$, les points $(f^n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ de l'orbite de x sont par définition situés sur les deux trajectoires $I^{\mathbb{Z}}(x)$ et $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$. Dans toute la suite, pour tout $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$, on paramétrera systématiquement les trajectoires $I^{\mathbb{Z}}(x)$ et $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ par des applications $I^{\mathbb{Z}}_x : \mathbb{R} \to M$ et $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},x} : \mathbb{R} \to M$ telles que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on ait $I^{\mathbb{Z}}_x(k) = I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},x}(k) = f^k(x)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on paramètrera également $I^n(x)$ et $I^n_{\mathcal{F}}(x)$ par des applications $I^n_x : [0,n] \to M$ et $I^n_{\mathcal{F},x} : [0,n] \to M$ telles que pour tout entier $0 \leq k \leq n$, on ait $I^n_x(k) = I^n_{\mathcal{F},x}(k) = f^k(x)$. Pour simplifier les notations, on notera $I_x : [0,1] \to M$ et $I_{\mathcal{F},x} : [0,1] \to M$ les paramétrages de $I(x)$ et $I_{\mathcal{F}}(x)$.

De la même manière, on adoptera les notations suivantes : pour tout $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$, on note $\widetilde{I}(\widetilde{x})$ la trajectoire donnée par l'isotopie relevée entre $\widetilde{x}$ et $\widetilde{f}(\widetilde{x})$, et $\widetilde{I}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ une trajectoire transverse au feuilletage relevé $\widetilde{\mathcal{F}}$ homotope à extrémités fixées à $\widetilde{I}(\widetilde{x})$. On note de même

$$\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}(\widetilde{x}) = \prod_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{I}(\widetilde{f}^n(\widetilde{x})) \quad \text{et} \quad \widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x}) = \prod_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{I}_{\mathcal{F}}(\widetilde{f}^n(\widetilde{x})),$$

trajectoires que l'on paramétrera systématiquement par des applications $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ et $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ telles que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on ait $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}}(n) = \widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}}(n) = \widetilde{f}^n(\widetilde{x})$. Et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\widetilde{I}^n(\widetilde{x}) = \prod_{k=0}^{n-1} \widetilde{I}(\widetilde{f}^k(\widetilde{x})) \quad \text{et} \quad \widetilde{I}^n_{\mathcal{F}}(\widetilde{x}) = \prod_{k=0}^{n-1} \widetilde{I}_{\mathcal{F}}(\widetilde{f}^k(\widetilde{x})),$$

qu'on paramètre par des applications $\widetilde{I}^n_{\widetilde{x}} : [0,n] \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ et $\widetilde{I}^n_{\mathcal{F},\widetilde{x}} : [0,n] \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ telles que pour tout entier $0 \leq k \leq n$, on ait $\widetilde{I}^n_{\widetilde{x}}(k) = \widetilde{I}^n_{\mathcal{F},\widetilde{x}}(k) = \widetilde{f}^k(\widetilde{x})$. De même, on notera $\widetilde{I}_{\widetilde{x}} : [0,1] \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ et $\widetilde{I}_{\mathcal{F},\widetilde{x}} : [0,1] \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ les paramétrages de $\widetilde{I}(\widetilde{x})$ et $\widetilde{I}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$.

Enfin, signalons que l'on dispose du lemme suivant (voir [LCT18]) :

Lemme 1.3.9. *Pour tout $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $a < b \in]0,n[$, il existe un voisinage V de x dans $\mathrm{dom}(\mathcal{F})$ tel que pour tout $x' \in V$, le chemin $I^n_{\mathcal{F},x|[a,b]}$ est équivalent à un sous-chemin de $I^n_{\mathcal{F}}(x')$. Il existe aussi un voisinage W de x dans $\mathrm{dom}(\mathcal{F})$ tel que pour tout $x', x'' \in W$, le chemin $I^n_{\mathcal{F}}(x')$ est équivalent à un sous-chemin de $I^{n+2}_{\mathcal{F}}(f^{-1}(x''))$.*

Ce lemme a pour conséquence immédiate, mais primordiale, que si x est un point récurrent pour f, alors sa trajectoire transverse $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ est récurrente (au sens de 1.2.16).

Chapitre 2

Quelques résultats préliminaires

Ce chapitre a pour but d'établir quelques résultats préliminaires indépendants, qui nous seront pour la plupart utiles au chapitre 3. La section 2.1 s'intéresse à quelques propriétés structurelles des feuilletages et de leurs chemins transverses. La section 2.2, de manière entièrement indépendante, étudie diverses situations concernant les trajectoires données par l'isotopie de points "génériques" pour une mesure ergodique, ces trajectoires ayant la particularité d'avoir une "direction homologique" bien déterminée. Enfin, la section 2.3 se contente d'énoncer deux corollaires obtenus en rassemblant certains résultats issus des sections précédentes.

2.1 Sur les feuilletages et chemins transverses

Dans toute cette section, on fixe un feuilletage singulier orienté $\mathcal{F}$ sur une surface M, dont on note $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ le revêtement universel du domaine de définition, et $\mathcal{G}$ le groupe des automorphismes de ce revêtement. On désigne par $\widetilde{\mathcal{F}}$ le feuilletage relevé à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$. Pour tout $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$, on désigne encore par ϕ_x la feuille de $\mathcal{F}$ passant par x ; et pour tout $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$, on désigne par $\widetilde{\phi}_{\widetilde{x}}$ la feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}$ passant par $\widetilde{x}$.

2.1.1 Propriétés de l'accumulation des chemins transverses

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que la notion d'accumulation de chemins transverses définie en 1.2.14, lorsqu'elle est couplée à de la récurrence (au sens de 1.2.16), est non-réflexive, antisymétrique et transitive. Commençons directement par la transitivité :

Lemme 2.1.1. *Soit $\alpha : \mathbb{R} \to M$, $\beta : \mathbb{R} \to M$ et $\gamma : \mathbb{R} \to M$ trois chemins transverses à $\mathcal{F}$. On suppose que β est récurrent (au sens de 1.2.16).*

Si α s'accumule positivement dans β et β s'accumule positivement dans γ, alors α s'accumule positivement dans γ.

Si α s'accumule négativement dans β et β s'accumule négativement dans γ, alors α s'accumule négativement dans γ.

Démonstration. Traitons le cas où α s'accumule positivement dans β et β s'accumule positivement dans γ, l'autre cas étant similaire. Il existe alors trois relevés $\widetilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$, $\widetilde{\beta} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$, et $\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ de α, β et γ à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$, tels que $\widetilde{\alpha}$ s'accumule positivement dans $\widetilde{\beta}$ et $\widetilde{\beta}$ s'accumule positivement dans $\widetilde{\gamma}$. Par définition, il existe donc trois réels t_0 et $t < t'$ tels que $\widetilde{\alpha}_{|[t_0,+\infty[}$ et $\widetilde{\beta}_{|[t,t'[}$ sont équivalents, et trois réels s_0 et

$s < s'$ tels que $\widetilde{\beta}_{|[s_0,+\infty[}$ et $\widetilde{\gamma}_{|[s,s'[}$ sont équivalents. Mais comme β est récurrent, alors $\widetilde{\beta}$ est $\mathcal{G}-$récurrent donc il existe $S \in \mathcal{G}$ et $r < r' \in [s_0, +\infty[$ tels que $S\widetilde{\beta}_{|[t,t'[}$ est équivalent à $\widetilde{\beta}_{|[r,r'[}$. Comme $r \geq s_0$, cela implique que $S\widetilde{\beta}_{|[t,t'[}$ est équivalent à un sous-chemin $\widetilde{\gamma}_{|[a,a'[}$, avec $s \leq a < a' < s'$, c'est-à-dire que $S\widetilde{\alpha}_{|[t_0,+\infty[}$ est équivalent à $\widetilde{\gamma}_{|[a,a'[}$, et donc finalement que α s'accumule positivement dans γ. □

Remarque : dans le résultat précédent, la récurrence du chemin β est bien sûr indispensable. Donnons un exemple simple pour nous en convaincre. Supposons qu'il existe un chemin transverse $c : [0,3] \to M$ tel que l'ensemble des feuilles rencontrées par $c_{|[0,1[}$ est disjoint de l'ensemble des feuilles rencontrées par $c_{|[1,3]}$. Soit alors $\alpha : \mathbb{R} \to M$ une reparamétrisation de $c_{|]0,1[}$, $\beta : \mathbb{R} \to M$ une reparamétrisation de $c_{|]0,2[}$, et $\gamma : \mathbb{R} \to M$ une reparamétrisation de $c_{|]1,3[}$: il est bien clair que α s'accumule positivement dans β, que β s'accumule positivement dans γ, mais que α ne s'accumule pas positivement dans γ (puisque α et γ ne rencontrent même pas de feuille commune).

Pour la non-réflexivité et l'antisymétrie, nous allons avoir besoin du résultat suivant :

Lemme 2.1.2. *Soit $\alpha : \mathbb{R} \to M$ et $\beta : \mathbb{R} \to M$ deux chemins transverses à $\mathcal{F}$. Si α est récurrent et s'accumule dans β, alors α ne rencontre pas de feuille fermée.*

Démonstration. On traite le cas où l'accumulation a lieu positivement, l'autre cas étant similaire. Il existe donc deux relevés $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$ de α et β à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$, et trois réels $t_0, t, t' \in \mathbb{R}$ tels que $\widetilde{\alpha}_{|[t_0,+\infty[}$ est équivalent à $\widetilde{\beta}_{|[t,t'[}$. Soit $\widetilde{\phi}$ une feuille rencontrée par $\widetilde{\alpha}$. Comme α est récurrent, alors $\widetilde{\alpha}$ est $\mathcal{G}-$récurrent, donc $\widetilde{\alpha}_{|[t_0,+\infty[}$ rencontre une infinité de translatés de $\widetilde{\phi}$ sous l'action de $\mathcal{G}$. Donc par équivalence, $\widetilde{\beta}_{|[t,t']}$ rencontre aussi une infinité de translatés de $\widetilde{\phi}$. Cela impose que $\widetilde{\phi}$ ne relève pas une feuille fermée : en effet, si $\widetilde{\phi}$ relève une feuille fermée, tout compact de $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ ne peut rencontrer qu'un nombre fini de ses translatés sous l'action de $\mathcal{G}$. □

On peut alors en déduire la non-réflexivité et l'antisymétrie :

Lemme 2.1.3. *Si $\alpha : \mathbb{R} \to M$ est un chemin récurrent transverse à $\mathcal{F}$, alors α ne s'accumule pas dans lui-même.*

Démonstration. On suppose au contraire qu'il existe un relevé $\widetilde{\alpha}$ de α à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$, et $S \in \mathcal{G}$, tels que $S\widetilde{\alpha}$ s'accumule positivement dans $\widetilde{\alpha}$ (le cas où l'accumulation a lieu négativement étant similaire) : il existe donc trois réels t_0 et $t < t'$ tels que $S\widetilde{\alpha}_{|[t_0,+\infty[}$ est équivalent à $\widetilde{\alpha}_{|[t,t'[}$. Par définition de la notion d'équivalence, on peut donc définir un homéomorphisme $f : [t_0, +\infty[\to [t, t'[$ en posant, pour tout $s \in [t_0, +\infty[$, $S\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(s)} = \widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(f(s))}$.

Comme α est récurrent, alors $\widetilde{\alpha}$ est par définition $\mathcal{G}-$récurrent, donc il existe deux réels $t_1 < t_2 \in]t_0, +\infty[$, et $T \in \mathcal{G} \setminus \{\mathrm{Id}\}$ tels que $S\widetilde{\alpha}_{|[t_1,t_2]}$ est équivalent à $T\widetilde{\alpha}_{|[t,t']}$. On définit donc un homéomorphisme $g : [t, t'] \to [t_1, t_2]$ par la relation : pour tout $s \in [t, t']$, $T\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(s)} = S\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(g(s))}$. Comme $[t_1, t_2] \subset [t_0, +\infty[$, alors l'application $f \circ g : [t, t'] \to [t, t']$ est bien définie et continue d'un intervalle compact dans lui-même : elle admet un point fixe noté $s_0 \in [t, t']$. Pour un tel s_0, on a donc $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(s_0)} = \widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(f\circ g(s_0))} = S\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(g(s_0))} = T\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(s_0)}$. La feuille $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(s_0)}$ est donc invariante par $T \neq \mathrm{Id}$: elle relève donc une feuille fermée, ce qui contredit le lemme 2.1.2. □

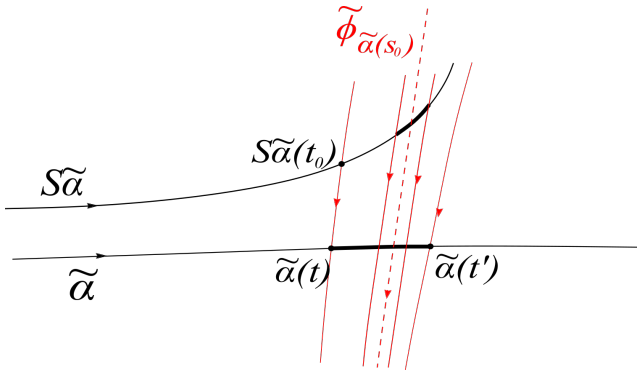

FIGURE 2.1 – Preuve du lemme 2.1.3 : les deux sous-arcs en gras sont par récurrence de α translatés l'un de l'autre, et l'un est équivalent à un sous-arc de l'autre. Par théorème du point fixe, on déduit l'existence d'une feuille fermée, ce qui est absurde.

Lemme 2.1.4. *Soit $\alpha : \mathbb{R} \to M$ et $\beta : \mathbb{R} \to M$ deux chemins récurrents transverses à $\mathcal{F}$. Si α s'accumule dans β, alors β ne s'accumule pas dans α.*

Démonstration. Supposons par exemple que α s'accumule positivement dans β et que β s'accumule négativement dans α, les autres cas pouvant se traiter de manière similaire. Il existe donc deux relevés $\widetilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ et $\widetilde{\beta} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ de α et β à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$, un automorphisme $S \in \mathcal{G}$ et des réels $t < t'$ et t_0, et $s < s'$ et s_0 tels que $\widetilde{\alpha}_{|[t_0,+\infty[}$ est équivalent à $\widetilde{\beta}_{|[t,t'[}$ et $\widetilde{\beta}_{|]-\infty,s_0]}$ est équivalent à $S\widetilde{\alpha}_{|]s,s']}$. On peut donc définir deux homéomorphismes $f : [t_0, +\infty[\to [t, t'[$ et $g :]-\infty, s_0] \to]s, s']$ par les relations suivantes : pour tout $r \in [t_0, +\infty[$, $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(r)} = \widetilde{\phi}_{\widetilde{\beta}(f(r))}$; et pour tout $r \in]-\infty, s_0]$, $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\beta}(r)} = S\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(g(r))}$.

Maintenant, comme α est récurrent, alors $\widetilde{\alpha}$ est $\mathcal{G}-$récurrent : il existe donc deux réels $s_1 < s_2 \in [t_0, +\infty[$ et $T \in \mathcal{G}$ tels que $T\widetilde{\alpha}_{|[s,s']}$ est équivalent à $\widetilde{\alpha}_{|[s_1,s_2]}$. On définit donc un homéomorphisme $h : [s, s'] \to [s_1, s_2]$ en posant, pour tout $r \in [s, s']$, $T\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(r)} = \widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(h(r))}$. De même, comme β est récurrent, alors $\widetilde{\beta}$ est $\mathcal{G}-$récurrent, donc il existe $t_1 < t_2 \in]-\infty, s_0]$ et $T' \in \mathcal{G}$ tels que $T'\widetilde{\beta}_{|[t,t']}$ est équivalent à $\widetilde{\beta}_{|[t_1,t_2]}$. On définit donc un homéomorphisme $k : [t, t'] \to [t_1, t_2]$ en posant, pour tout $r \in [t, t']$, $T'\widetilde{\phi}_{\widetilde{\beta}(r)} = \widetilde{\phi}_{\widetilde{\beta}(k(r))}$. Comme on a une infinité de choix pour T et T', on peut les choisir de sorte que $T'^{-1}T \neq S$.

On a les inclusions $[s_1, s_2] \subset [t_0, +\infty[$ et $[t_1, t_2] \subset]-\infty, s_0]$, donc l'application $g \circ k \circ f \circ h$ est bien définie et continue de l'intervalle compact $[s, s']$ dans lui-même : elle admet donc un point fixe r_0. Pour un tel r_0, on a les égalités $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(r_0)} = \widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(g\circ k\circ f\circ h(r_0))} = S^{-1}\widetilde{\phi}_{\widetilde{\beta}(k\circ f\circ h(r_0))} = S^{-1}T'^{-1}\widetilde{\phi}_{\widetilde{\beta}(f\circ h(r_0))} = S^{-1}T'^{-1}\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(h(r_0))} = S^{-1}T'^{-1}T\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(r_0)}$. Comme $T'^{-1}T \neq S$, cela implique que $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(r_0)}$ est invariante par $S^{-1}T'^{-1}T \neq \mathrm{Id}$, donc qu'elle relève une feuille fermée, ce qui contredit le lemme 2.1.2. □

Remarque 1 : on aurait pu déduire immédiatement des lemmes 2.1.1 et 2.1.3 qu'il est impossible que deux chemins transverses récurrents s'accumulent l'un dans l'autre positivement, et qu'il est impossible que deux chemins transverses récurrents s'accumulent l'un dans l'autre négativement. C'est le cas où l'une des accumulations serait positive et l'autre négative qui n'est pas pris en compte par le lemme 2.1.1, et qui nécessite donc la preuve directe ci-dessus.

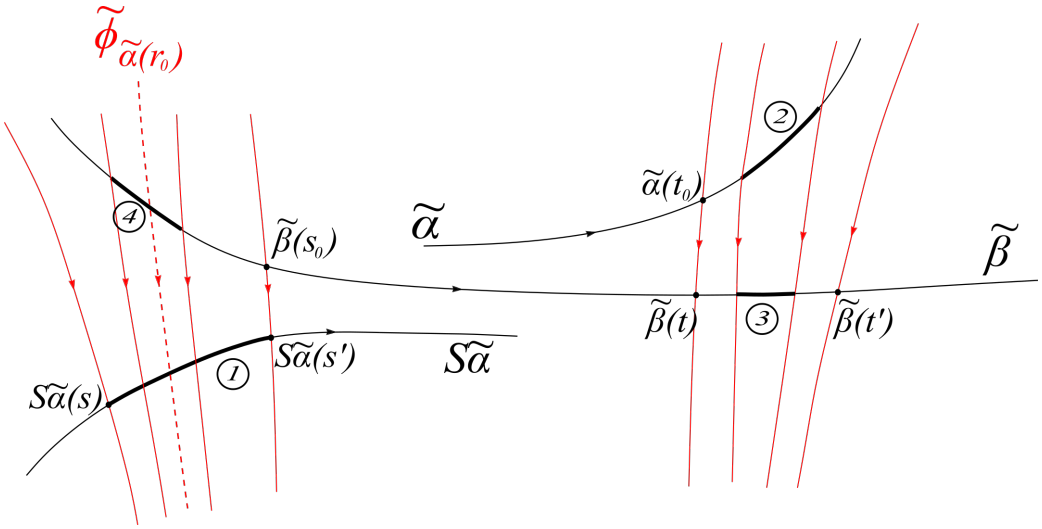

FIGURE 2.2 – Preuve du lemme 2.1.4 : le sous-arc 1 en gras est équivalent, par récurrence de α, à un translaté du sous-arc 2, lui-même équivalent au sous-arc 3, lui-même équivalent, par récurrence de β, à un translaté du sous-arc 4, lui-même équivalent à un sous-arc du sous-arc 1. Par théorème de point fixe, on déduit l'existence d'une feuille fermée, ce qui est absurde.

Remarque 2 : de même que précédemment, les hypothèses sur la récurrence des chemins sont indispensables dans ces résultats, comme on peut le voir dans l'exemple suivant. Supposons qu'il existe un lacet $\gamma : \mathbb{R} \to M$ transverse au feuilletage $\mathcal{F}$ sur M (pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t+1) = \gamma(t)$), et considérons le chemin transverse $\alpha : \mathbb{R} \to M$, obtenu en reparamétrant la portion $\gamma_{|]0,2[}$. Alors α s'accumule dans lui-même : en effet, $\gamma_{|[1,2[}$ est égale (donc équivalente) à $\gamma_{|[0,1[}$, donc s'accumule positivement dans $\gamma_{|]0,1]}$.

2.1.2 Bande définie par un lacet et approximations

2.1.2.a Définitions des objets

Définition 2.1.5. *Pour tout $T \in \mathcal{G} \setminus \{\mathrm{Id}\}$ et tout $T-$lacet transverse $\widetilde{\gamma}$, on appelle bande définie par $\widetilde{\gamma}$ et on note $B(\widetilde{\gamma})$ l'ensemble des points des feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$ qui rencontrent $\widetilde{\gamma}$:*

$$B(\widetilde{\gamma}) = \{\widetilde{x} \in \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F}) \mid \widetilde{\phi}_{\widetilde{x}} \cap \widetilde{\gamma} \neq \emptyset\} = \bigcup_{\substack{\widetilde{\phi} \in \widetilde{\mathcal{F}} \\ \widetilde{\phi} \cap \widetilde{\gamma} \neq \emptyset}} \widetilde{\phi}.$$

Pour tout $T-$lacet transverse $\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$, la bande $B(\widetilde{\gamma})$ est un ouvert connexe saturé pour la relation d'équivalence d'appartenance à la même feuille, et peut donc être vu naturellement comme un ouvert connexe de l'espace des feuilles. Par définition, la frontière de $B(\widetilde{\gamma})$ dans $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$, notée $\partial B(\widetilde{\gamma})$, est la réunion de feuilles ne rencontrant par $\widetilde{\gamma}$, donc situées soit à gauche, soit à droite de $\widetilde{\gamma}$. On note $\partial B^L(\widetilde{\gamma})$ l'ensemble des points de $\partial B(\widetilde{\gamma})$ situés dans $L(\widetilde{\gamma})$, et $\partial B^R(\widetilde{\gamma})$ l'ensemble des points de $\partial B(\widetilde{\gamma})$ situés dans $R(\widetilde{\gamma})$. La frontière gauche $\partial B^L(\widetilde{\gamma})$ et la frontière droite $\partial B^R(\widetilde{\gamma})$ sont donc également saturés. Comme $\widetilde{\gamma}$ est invariant par T, les ensembles $B(\widetilde{\gamma})$, $\partial B^L(\widetilde{\gamma})$ et $\partial B^R(\widetilde{\gamma})$ sont bien sûr aussi tous T-invariants.

On fixe maintenant, afin d'énoncer quelques lemmes préliminaires, un automorphisme $T \in \mathcal{G} \setminus \{\mathrm{Id}\}$ et un $T-$lacet transverse $\widetilde{\gamma}$.

Lemme 2.1.6. *S'il existe une feuille $\widetilde{\phi} \subset \partial B^L(\widetilde{\gamma})$ telle que $\widetilde{\phi} = T\widetilde{\phi}$, alors $\partial B^L(\widetilde{\gamma}) = \widetilde{\phi}$.*
S'il existe une feuille $\widetilde{\phi} \subset \partial B^R(\widetilde{\gamma})$ telle que $\widetilde{\phi} = T\widetilde{\phi}$, alors $\partial B^R(\widetilde{\gamma}) = \widetilde{\phi}$.

Démonstration. Soit $\widetilde{\phi} \subset \partial B^L(\widetilde{\gamma})$ telle que $\widetilde{\phi} = T\widetilde{\phi}$. Supposons par exemple que l'orientation de $\widetilde{\phi}$ est telle que $\widetilde{\gamma} \subset R\widetilde{\phi}$, le cas où $\widetilde{\gamma} \subset L\widetilde{\phi}$ étant similaire. Comme $\widetilde{\phi} \subset \partial B(\widetilde{\gamma})$, il existe un chemin $\widetilde{c} : [0,1] \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ tel que $\widetilde{c}(0) \in \widetilde{\gamma}$, $\widetilde{c}(1) \in \widetilde{\phi}$ et $\widetilde{c}_{|]0,1[} \subset B(\widetilde{\gamma})$.

Soit $\widetilde{\phi}' \neq \widetilde{\phi}$ une feuille incluse dans $L(\widetilde{\gamma})$. Supposons que $\widetilde{\phi}' \subset R\widetilde{\phi}$: alors $\widetilde{\phi}'$ est incluse dans la bande $T-$invariante $R\widetilde{\phi} \cap L(\widetilde{\gamma})$. Mais par le théorème de Poincaré-Bendixson, $\widetilde{\phi}'$ est une droite propre, donc comme $\widetilde{c}$ relie les deux frontières de cette bande, $\widetilde{\phi}'$ rencontre un translaté $T^n\widetilde{c}$ pour un $n \in \mathbb{Z}$. Ceci implique donc que $\widetilde{\phi}' \cap B(\widetilde{\gamma}) \neq \emptyset$ et donc que $\widetilde{\phi}' \not\subset \partial B(\widetilde{\gamma})$. Dans le cas maintenant où $\widetilde{\phi}' \subset L\widetilde{\phi}$, alors $\widetilde{\phi}$ sépare $\widetilde{\phi}'$ et $\widetilde{\gamma}$, donc tout chemin reliant $\widetilde{\gamma}$ à $\widetilde{\phi}'$ doit rencontrer $\widetilde{\phi}$: ceci implique encore que $\widetilde{\phi}' \not\subset \partial B(\widetilde{\gamma})$.

La feuille $\widetilde{\phi}$ est donc bien la seule feuille de $\partial B^L(\widetilde{\gamma})$. La preuve est similaire pour la frontière droite de la bande. □

Remarque : cette preuve revient finalement à appliquer le théorème de Poincaré-Bendixson au "revêtement annulaire" $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})/T$.

On va particulièrement s'intéresser dans la suite à la manière dont un chemin transverse donné rencontre la bande définie par un $T-$lacet. Pour éviter les confusions, on ne donne les définitions que pour des chemins paramétrés par $\mathbb{R}$. Faisons tout d'abord la remarque simple suivante :

Lemme 2.1.7. *Si $\widetilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ est un chemin transverse à $\widetilde{\mathcal{F}}$, alors l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} \mid \widetilde{\alpha}(t) \in B(\widetilde{\gamma})\}$ est un intervalle.*

Démonstration. En effet, soit $t < t'$ deux réels tels que $\widetilde{\alpha}(t) \in B(\widetilde{\gamma})$ et $\widetilde{\alpha}(t') \in B(\widetilde{\gamma})$, et soit $\widetilde{\phi} \subset \partial B(\widetilde{\gamma})$: par connexité, $B(\widetilde{\gamma})$ est contenue toute entière du même côté de $\widetilde{\phi}$, donc $\widetilde{\alpha}(t)$ et $\widetilde{\alpha}(t')$ sont du même côté de $\widetilde{\phi}$. Comme $\widetilde{\alpha}$ est transverse, on a alors $\widetilde{\alpha}_{|[t,t']} \cap \widetilde{\phi} = \emptyset$; cela étant valable pour tout $\widetilde{\phi} \subset \partial B(\widetilde{\gamma})$, on déduit que $\widetilde{\alpha}_{|[t,t']} \subset B(\widetilde{\gamma})$. □

On donne alors les définitions suivantes :

Définition 2.1.8. *Soit $\widetilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ un chemin transverse.*
On dit que $\widetilde{\alpha}$ traverse $B(\widetilde{\gamma})$ de droite à gauche s'il existe deux réels $t < t'$ tels que $\widetilde{\alpha}(t) \in \partial B^R(\widetilde{\gamma})$ et $\widetilde{\alpha}(t') \in \partial B^L(\widetilde{\gamma})$.
On dit que $\widetilde{\alpha}$ traverse $B(\widetilde{\gamma})$ de gauche à droite s'il existe deux réels $t < t'$ tels que $\widetilde{\alpha}(t) \in \partial B^L(\widetilde{\gamma})$ et $\widetilde{\alpha}(t') \in \partial B^R(\widetilde{\gamma})$.
On dit que $\widetilde{\alpha}$ visite $B(\widetilde{\gamma})$ par la gauche s'il existe deux réels $t < t'$ tels que $\widetilde{\alpha}(t) \in \partial B^L(\widetilde{\gamma})$ et $\widetilde{\alpha}(t') \in \partial B^L(\widetilde{\gamma})$.
On dit que $\widetilde{\alpha}$ visite $B(\widetilde{\gamma})$ par la droite s'il existe deux réels $t < t'$ tels que $\widetilde{\alpha}(t) \in \partial B^R(\widetilde{\gamma})$ et $\widetilde{\alpha}(t') \in \partial B^R(\widetilde{\gamma})$.

Remarquons donc que dans les quatre situations de cette définition, $\widetilde{\alpha}$ se sépare positivement et négativement de $\widetilde{\gamma}$. En effet, il doit rencontrer la bande $B(\widetilde{\gamma})$ entre t et t', et donc ne peut plus la rencontrer avant t ou après t'. En ajoutant les cas où il y a équivalence en ∞ ou accumulation, on obtient donc la classification suivante :

Lemme 2.1.9. *Étant donné un chemin transverse* $\widetilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ *qui rencontre* $B(\widetilde{\gamma})$*, il y a quatre possibilités :*
- soit $\widetilde{\alpha}$ *traverse* $B(\widetilde{\gamma})$ *(de droite à gauche ou de gauche à droite),*
- soit $\widetilde{\alpha}$ *visite* $B(\widetilde{\gamma})$ *(par la gauche ou par la droite),*
- soit $\widetilde{\alpha}$ *est équivalent à* $\widetilde{\gamma}$ *en* $+\infty$ *ou en* $-\infty$*,*
- soit $\widetilde{\alpha}$ *s'accumule (positivement ou négativement) dans* $\widetilde{\gamma}$*.*

Démonstration. Ceci découle de toutes les définitions précédentes. □

Remarquons d'emblée que dans les deux premiers cas de ce lemme 2.1.9, le nombre d'intersection de $\widetilde{\alpha}$ avec $\widetilde{\gamma}$ est bien défini : en effet, $\widetilde{\alpha}$ se sépare positivement et négativement de $\widetilde{\gamma}$ donc l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} \mid \widetilde{\alpha}(t) \in \widetilde{\gamma}\}$ est compact. Plus précisément, ce nombre d'intersection vaut $+1$ si $\widetilde{\alpha}$ traverse $B(\widetilde{\gamma})$ de gauche à droite, -1 si $\widetilde{\alpha}$ traverse $B(\widetilde{\gamma})$ de droite à gauche, et 0 si $\widetilde{\alpha}$ visite $B(\widetilde{\gamma})$). Dans les deux derniers cas du lemme 2.1.9, on ne peut cependant rien dire concernant le nombre d'intersection de $\widetilde{\alpha}$ avec $\widetilde{\gamma}$, qui peut être ou non bien défini selon les situations.

Lemme 2.1.10. *Soit* $\widetilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ *un chemin transverse.*
Si $\widetilde{\alpha}$ *visite* $B(\widetilde{\gamma})$ *par la gauche, alors pour toute feuille* $\widetilde{\phi} \subset \partial B^L(\widetilde{\gamma})$*,* $T\widetilde{\phi} \neq \widetilde{\phi}$*.*
Si $\widetilde{\alpha}$ *visite* $B(\widetilde{\gamma})$ *par la droite, alors pour toute feuille* $\widetilde{\phi} \subset \partial B^R(\widetilde{\gamma})$*,* $T\widetilde{\phi} \neq \widetilde{\phi}$*.*

Démonstration. En effet, si $\widetilde{\alpha}$ visite $B(\widetilde{\gamma})$ par la gauche, elle doit rencontrer $\partial B^L(\widetilde{\gamma})$ en deux points distincts appartenant donc à deux feuilles distinctes. Par le lemme 2.1.6, le fait que $\partial B^L(\widetilde{\gamma})$ contienne deux feuilles distinctes implique qu'aucune de ses feuilles n'est invariante par T. De même si $\widetilde{\alpha}$ visite $B(\widetilde{\gamma})$ par la droite. □

Terminons par un cas particulier où un translaté de $\widetilde{\gamma}$ traverse $B(\widetilde{\gamma})$:

Lemme 2.1.11. *Pour tout* $S \in \mathcal{G}$*,* $S\widetilde{\gamma}$ *traverse* $B(\widetilde{\gamma})$ *de gauche à droite si et seulement si* $\widetilde{\gamma}$ *traverse* $B(S\widetilde{\gamma})$ *de droite à gauche. En particulier,* $S\widetilde{\gamma}$ *intersecte* $\widetilde{\mathcal{F}}-$*transversalement* $\widetilde{\gamma}$ *positivement.*

Démonstration. Il suffit de montrer un sens, l'autre se montrant de manière similaire. On suppose que $S\widetilde{\gamma}$ traverse $B(\widetilde{\gamma})$ de gauche à droite. Alors $S\widetilde{\gamma}$ se sépare positivement et négativement de $\widetilde{\gamma}$. De plus, par le lemme 2.1.3, $\widetilde{\gamma}$ ne s'accumule pas dans $S\widetilde{\gamma}$. On déduit donc que $\widetilde{\gamma}$ se sépare positivement et négativement de $S\widetilde{\gamma}$, ce qui implique que $\widetilde{\gamma}$ traverse ou visite $B(S\widetilde{\gamma})$. Comme enfin le nombre d'intersection de $S\widetilde{\gamma}$ avec $\widetilde{\gamma}$ est $+1$, alors le nombre d'intersection de $\widetilde{\gamma}$ avec $S\widetilde{\gamma}$ est -1, donc la seule possibilité est que $\widetilde{\gamma}$ traverse $B(S\widetilde{\gamma})$ de droite à gauche. □

2.1.2.b Approximations

Dans la suite, on s'intéressera au comportement de trajectoires vis-à-vis des bandes définies par certains lacets bien particuliers, obtenus en approximant la trajectoire dans le sens suivant :

Définition 2.1.12. *Soit* $\widetilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ *un chemin transverse. On dit qu'un chemin transverse* $\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ *est une approximation de* $\widetilde{\alpha}$ *si :*
- $\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ *est un* $T-$*lacet transverse pour un certain* $T \in \mathcal{G} \setminus \{\mathrm{Id}\}$*, et*
- il existe deux réels $a < b$ *tels que* $\widetilde{\alpha}_{|[a,b]}$ *est équivalent à* $\widetilde{\gamma}_{|[0,1]}$*.*

Définition 2.1.13. *Soit $\alpha : \mathbb{R} \to M$ un chemin transverse. On dit qu'un lacet transverse $\gamma : \mathbb{R} \to M$ est une approximation de α si γ possède un relevé $\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ qui est une approximation d'un relevé $\widetilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ de α.*

Le choix du terme "approximation" est motivé par le cas d'un chemin $\widetilde{\alpha}$ récurrent : en effet, dans ce cas, $\widetilde{\alpha}$ a des portions aussi grandes que l'on veut qui relient deux relevés d'une même feuille de $\mathcal{F}$. Chacune de ces portions est donc équivalente à un chemin qui relève un lacet, et qui, périodisé, définit exactement une approximation de $\widetilde{\alpha}$ telle que définie en 2.1.12. En un certain sens, on peut considérer que la suite des lacets obtenus en choisissant des portions de plus en plus grandes approche le chemin global $\widetilde{\alpha}$.

Donnons pour conclure un résultat simple mais qui nous sera utile :

Lemme 2.1.14. *Soit $\alpha : \mathbb{R} \to M$ et $\beta : \mathbb{R} \to M$ deux chemins transverses et γ une approximation de α. Si β s'accumule dans γ, alors β s'accumule dans α.*

Démonstration. Supposons que β s'accumule positivement dans γ (le cas où l'accumulation a lieu négativement étant similaire). Il existe des relevés $\widetilde{\beta}$ et $\widetilde{\gamma}$ de β et γ, et trois réels t_0, et $t < t'$ tels que $\widetilde{\beta}_{|[t_0,+\infty[}$ est équivalent à $\widetilde{\gamma}_{|[t,t'[}$: on peut les choisir (quitte à prendre de plus grands réels t_0 et t), de sorte qu'il existe $N \in \mathbb{Z}$ tel que $N < t < t' \leq N+1$. De plus, par définition d'une approximation, il existe un relevé $\widetilde{\alpha}$ de α, un relevé $\widetilde{\gamma}$ de γ qui est un $T-$lacet (pour un certain $T \in \mathcal{G} \setminus \{\mathrm{Id}\}$)), et $a < b$ tels que $\widetilde{\alpha}_{|[a,b]}$ est équivalent à $\widetilde{\gamma}_{|[0,1]}$. Comme $\widetilde{\beta}_{|[t_0,+\infty[}$ est équivalent à $\widetilde{\gamma}_{|[t,t'[}$, alors il est équivant à un sous-chemin de $\widetilde{\gamma}_{|[N,N+1]}$, donc à un sous-chemin de $T^N\widetilde{\gamma}_{|[0,1]}$, donc à un sous-chemin de $T^N\widetilde{\alpha}_{|[a,b]}$. Autrement dit, $\widetilde{\beta}$ s'accumule dans $T^N\widetilde{\alpha}$, et donc β s'accumule dans α. □

2.1.2.c Quelques cas d'intersection $\mathcal{F}-$transverse

Dans certains cas, les positions relatives de chemins transverses par rapport à la bande définie par une de leurs approximations permettent immédiatement de trouver des chemins transverses qui s'intersectent $\mathcal{F}-$transversalement. La première de ces situations est la suivante :

Proposition 2.1.15. *Soit $\widetilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ un chemin transverse, et $\widetilde{\gamma}$ une approximation de $\widetilde{\alpha}$. Si $\widetilde{\alpha}$ visite $B(\widetilde{\gamma})$, alors $\widetilde{\alpha}$ relève un chemin ayant une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse.*

Démonstration. Par définition d'une approximation, $\widetilde{\gamma}$ est un $T-$lacet pour un certain $T \in \mathcal{G} \setminus \{\mathrm{Id}\}$. Notons $\widetilde{\phi}$ la feuille passant par $\widetilde{\gamma}(0)$: $\widetilde{\alpha}$ rencontre donc $\widetilde{\phi}$ et $T\widetilde{\phi}$. On suppose que $\widetilde{\alpha}$ visite $B(\widetilde{\gamma})$ par la droite, l'autre cas étant similaire.

Comme $\widetilde{\alpha}$ visite $B(\widetilde{\gamma})$ par la droite, il existe deux réels $t < t'$ tels que $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t)}$ et $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t')}$ appartiennent à $\partial B^R(\widetilde{\gamma})$. Les deux feuilles $\widetilde{\phi}$ et $T\widetilde{\phi}$ appartenant à $B(\widetilde{\gamma})$, elles sont donc rencontrées par $\widetilde{\alpha}$ entre $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t)}$ et $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t')}$: il s'ensuit que $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t)}$ est à droite de $\widetilde{\phi}$ et de $T\widetilde{\phi}$, et que $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t')}$ est à gauche de $\widetilde{\phi}$ et de $T\widetilde{\phi}$.

La trajectoire $T\widetilde{\alpha}$, quant à elle, rencontre $T\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t)}$ et $T\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t')}$. Comme $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t)}$ est à droite de $\widetilde{\phi}$, alors $T\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t)}$ est à droite de $T\widetilde{\phi}$. Le lemme 2.1.10 implique de plus que $T\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t)} \neq \widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t)}$: il s'ensuit, comme $T\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t)}$ et $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t)}$ sont dans $\partial B^d(\widetilde{\gamma})$ et à droite de $T\widetilde{\phi}$, que $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t)}$ est en-dessous de $T\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t)}$ par rapport à $T\widetilde{\phi}$. De même, le lemme 2.1.10 donne $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t')} \neq T\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t')}$. Comme

$\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t')}$ et $T\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t')}$ sont dans $\partial B^d(\widetilde{\gamma})$ et à gauche de $T\widetilde{\phi}$, alors $T\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t')}$ est en-dessous de $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t')}$ par rapport à $T\widetilde{\phi}$.

Les positions des quatre feuilles $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t)}$, $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t')}$, $T\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t)}$ et $T\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t')}$ par rapport à $T\widetilde{\phi}$ impliquent alors que $\widetilde{\alpha}$ et $T\widetilde{\alpha}$ s'intersectent $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement, c'est-à-dire par définition que la projection de $\widetilde{\alpha}$ à M a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse. □

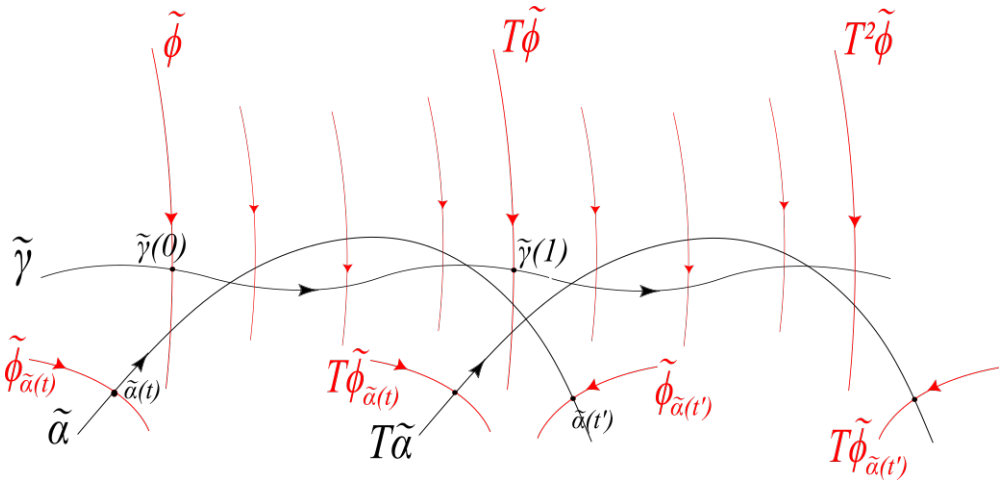

FIGURE 2.3 – Preuve de la proposition 2.1.15

Le deuxième résultat concerne le cas où un chemin transverse traverse la bande définie par une de ses approximations :

Proposition 2.1.16. *Soit $\widetilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ et $\widetilde{\beta} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ deux chemins transverses, et $\widetilde{\gamma}$ une approximation de $\widetilde{\alpha}$. Soit $T \in \mathcal{G} \setminus \{\mathrm{Id}\}$ tel que $\widetilde{\gamma}$ est un $T-$lacet.*

Si $\widetilde{\alpha}$ traverse $B(\widetilde{\gamma})$ de droite à gauche et $\widetilde{\beta}$ traverse $B(\widetilde{\gamma})$ de gauche à droite, alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\widetilde{\alpha}$ et $T^n\widetilde{\beta}$ s'intersectent $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement.

Si $\widetilde{\alpha}$ traverse $B(\widetilde{\gamma})$ de gauche à droite et $\widetilde{\beta}$ traverse $B(\widetilde{\gamma})$ de droite à gauche, alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\widetilde{\alpha}$ et $T^n\widetilde{\beta}$ s'intersectent $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement.

Démonstration. On traite ici le cas où $\widetilde{\alpha}$ traverse $B(\widetilde{\gamma})$ de droite à gauche et $\widetilde{\beta}$ traverse $B(\widetilde{\gamma})$ de gauche à droite (l'autre cas étant similaire).

Comme $\widetilde{\beta}$ traverse $B(\widetilde{\gamma})$ de gauche à droite, il existe $s < s'$ tels que $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\beta}(s)} \in \partial B^L(\widetilde{\gamma})$ et $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\beta}(s')} \in \partial B^R(\widetilde{\gamma})$. De plus, $\widetilde{\beta}_{]s,s'[}$ est alors inclus dans $B(\widetilde{\gamma})$, donc on peut choisir $r \in \mathbb{R}$ tel que $\widetilde{\beta}_{]s,s'[}$ rencontre $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\gamma}(r)}$: ainsi, $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\beta}(s)}$ est à droite de $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\gamma}(r)}$ et $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\beta}(s')}$ est à gauche de $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\gamma}(r)}$.

Comme maintenant $\widetilde{\alpha}$ traverse $B(\widetilde{\gamma})$ de droite à gauche, il existe deux réels $t < t'$ tels que $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t)} \in \partial B^R(\widetilde{\gamma})$ et $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t')} \in \partial B^L(\widetilde{\gamma})$. Notant $\widetilde{\phi}$ la feuille passant pas $\widetilde{\gamma}(0)$, et $\{r\}$ la partie fractionnaire de r, la feuille $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\gamma}(\{r\})}$ est alors entre $\widetilde{\phi}$ et $T\widetilde{\phi}$, donc elle est rencontrée par $\widetilde{\alpha}$ entre $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t)}$ et $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t')}$: il s'ensuit que $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t)}$ est à droite de $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\gamma}(\{r\})}$, et que $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t')}$ est à gauche de $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\gamma}(\{r\})}$.

Les deux feuilles $T^{-\lfloor r \rfloor}\widetilde{\phi}_{\widetilde{\beta}(s)}$ et $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t)}$ sont donc situées à droite de $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\gamma}(\{r\})}$: comme la première est dans $\partial B^L(\widetilde{\gamma})$ et la seconde dans $\partial B^R(\widetilde{\gamma})$, on déduit que $T^{-\lfloor r \rfloor}\widetilde{\phi}_{\widetilde{\beta}(s)}$ est en-dessous de $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t)}$ par rapport à $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\gamma}(\{r\})}$. De même, $T^{-\lfloor r \rfloor}\widetilde{\phi}_{\widetilde{\beta}(s')}$ et $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t')}$ sont situées à gauche

de $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\gamma}(\{r\})}$: comme la première est dans $\partial B^R(\widetilde{\gamma})$ et la seconde dans $\partial B^L(\widetilde{\gamma})$, on déduit que $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t)}$ est en-dessous de $T^{-\lfloor r\rfloor}\widetilde{\phi}_{\widetilde{\beta}(s)}$ par rapport à $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\gamma}(\{r\})}$.

Les positions des quatre feuilles $T^{-\lfloor r\rfloor}\widetilde{\phi}_{\widetilde{\beta}(s)}$, $T^{-\lfloor r\rfloor}\widetilde{\phi}_{\widetilde{\beta}(s')}$, $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t)}$ et $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t')}$ par rapport à la feuille commune $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\gamma}(\{r\})}$ montrent que $\widetilde{\alpha}$ et $T^{-\lfloor r\rfloor}\widetilde{\beta}$ s'intersectent $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement. □

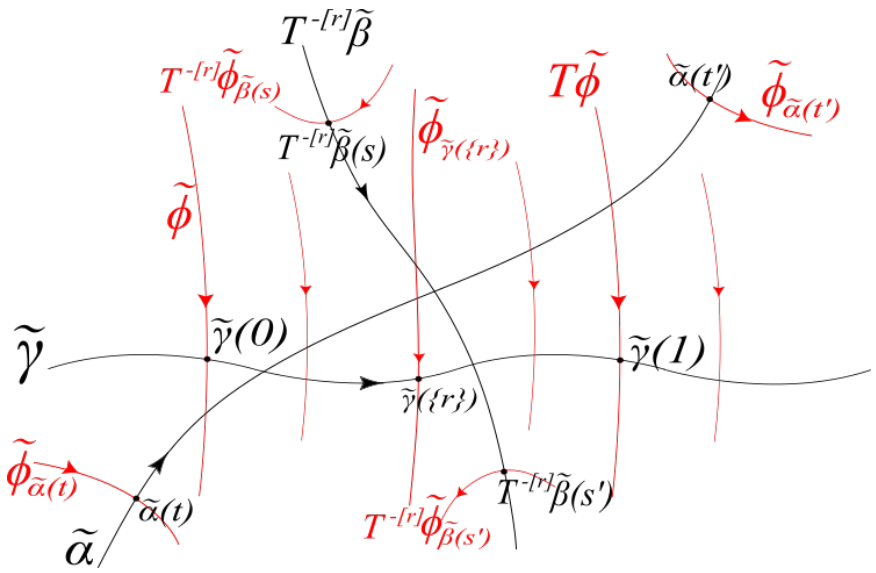

FIGURE 2.4 – Preuve de la proposition 2.1.16

2.1.3 Équivalence de deux relevés d'un chemin transverse

On suppose maintenant, pour ce paragraphe, que M est une surface de genre plus grand que 2. Le but est de montrer la proposition suivante, qui exprime qu'à équivalence près, seuls les lacets ont plusieurs de leurs relevés deux à deux équivalents :

Proposition 2.1.17. *On considère un chemin transverse $\mathcal{G}-$récurrent $\widetilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$, et $S \in \mathcal{G} \setminus \{\mathrm{Id}\}$. Si $\widetilde{\alpha} \overset{+\infty}{\sim} S\widetilde{\alpha}$ (resp. $\widetilde{\alpha} \overset{-\infty}{\sim} S\widetilde{\alpha}$), alors il existe un $S-$lacet transverse $\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ tel que $\widetilde{\alpha} \overset{+\infty}{\sim} \widetilde{\gamma}$ (resp. $\widetilde{\alpha} \overset{-\infty}{\sim} \widetilde{\gamma}$).*

La preuve de ce résultat va reposer sur le lemme suivant :

Lemme 2.1.18. *Soit $S \in \mathcal{G} \setminus \{\mathrm{Id}\}$ et $\widetilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ un chemin transverse $\mathcal{G}-$récurrent. Si $\widetilde{\alpha}$ rencontre une feuille invariante par S, alors $\widetilde{\alpha}$ et $S\widetilde{\alpha}$ ne sont équivalents ni en $+\infty$, ni en $-\infty$.*

Démonstration. Soit $\widetilde{\phi}$ une feuille invariante par S (la feuille $\widetilde{\phi}$ relève donc une feuille fermée de $\mathcal{F}$). La surface M étant de genre plus grand que 2, alors $\mathcal{F}$ possède au moins une singularité, donc $\mathrm{dom}(\mathcal{F})$ n'est pas compact et $\mathcal{G}$ est un groupe libre : en particulier, il existe $R \in \mathcal{G}$ tel que $\{S' \in \mathcal{G} \mid S'\widetilde{\phi} = \widetilde{\phi}\} = \{R^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. De plus, si $T \in \mathcal{G}$ est tel que le relevé $T\widetilde{\phi}$ est aussi $S-$invariant, alors T et S doivent commuter. Autrement dit, T doit être une puissance de R, c'est-à-dire qu'aucun translaté de $\widetilde{\phi}$ n'est invariant par S (à part $\widetilde{\phi}$ elle-même).

Supposons donc que $\widetilde{\alpha} \overset{+\infty}{\sim} S\widetilde{\alpha}$ rencontrent une telle feuille $\widetilde{\phi} = S\widetilde{\phi}$ (le cas d'équivalence en $-\infty$ se traitant de même). Soit $s \in \mathbb{R}$ tel que $\widetilde{\alpha}(s) \in \widetilde{\phi}$: comme $\widetilde{\phi} = S\widetilde{\phi}$, on a aussi $S\widetilde{\alpha}(s) \in \widetilde{\phi}$. Il s'ensuit, comme $\widetilde{\alpha} \overset{+\infty}{\sim} S\widetilde{\alpha}$, que $\widetilde{\alpha}_{|[s,+\infty[}$ est équivalent à $S\widetilde{\alpha}_{|[s,+\infty[}$. Comme $\widetilde{\alpha}$ est $\mathcal{G}-$récurrent, il rencontre de nouveau un translaté de $\widetilde{\phi}$ après $\widetilde{\phi}$: par la remarque faite ci-dessus, ce translaté n'est pas invariant par S. Autrement dit, il existe $T \in \mathcal{G}$ et $t > s$, tels que $ST\widetilde{\phi} \neq T\widetilde{\phi}$ et $\widetilde{\alpha}(t) \in T\widetilde{\phi}$. Puisque $\widetilde{\alpha}_{|[s,+\infty[}$ est équivalent à $S\widetilde{\alpha}_{|[s,+\infty[}$, il existe $t' > s$ tel que $S\widetilde{\alpha}(t') \in T\widetilde{\phi}$, et on a $t \neq t'$ puisque $ST\widetilde{\phi} \neq T\widetilde{\phi}$.

Quitte à remplacer S par S^{-1}, on peut supposer $t < t'$. Par récurrence, on va construire une suite réelle strictement décroissante $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n > s$ et $\widetilde{\alpha}(t_n) \in S^{n-1}T\widetilde{\phi}$. On pose donc $t_0 = t'$ et $t_1 = t$. Supposons avoir construit de tels t_k, pour $k \leq n$. Alors d'une part $S\widetilde{\alpha}(t_{n-1}) \in S^{n-1}T\widetilde{\phi}$ et $\widetilde{\alpha}(t_n) \in S^{n-1}T\widetilde{\phi}$: il s'ensuit que $S\widetilde{\alpha}_{|[s,t_{n-1}[}$ est équivalent à $\widetilde{\alpha}_{|[s,t_n[}$. D'autre part on a $S\widetilde{\alpha}(t_n) \in S^nT\widetilde{\phi}$ et $s < t_n < t_{n-1}$, donc par équivalence il existe bien $t_{n+1} \in]s, t_n[$ tel que $\widetilde{\alpha}(t_{n+1}) \in S^nT\widetilde{\phi}$.

On obtient donc finalement que $\widetilde{\alpha}_{|[s,t]}$ rencontre pour tout n la feuille $S^nT\widetilde{\phi}$, ces feuilles étant de plus deux à deux distinctes par construction : ceci est impossible car $\widetilde{\phi}$ relevant une feuille fermée, l'ensemble de ses translatés ne peut rencontrer un compact donné qu'un nombre fini de fois. □

Remarque : ce lemme repose avant tout sur le fait que $\mathcal{G}$ est un groupe libre, ce qui découle du fait que M est de genre ≥ 2. Une telle hypothèse est primordiale puisque le résultat est clairement faux dans le cas où $\mathcal{F}$ est un feuilletage non singulier du tore $\mathbb{T}^2$.

On peut maintenant prouver la proposition 2.1.17 :

Démonstration. On prouve la proposition dans le cas où $\widetilde{\alpha} \overset{+\infty}{\sim} S\widetilde{\alpha}$, l'autre cas étant similaire. Soit donc t et t' tels que $\widetilde{\alpha}_{|[t',+\infty[}$ est équivalent à $S\widetilde{\alpha}_{|[t,+\infty[}$. Ceci définit de manière naturelle un homéomorphisme $f : [t, +\infty[\to [t', +\infty[$ par la relation : pour tout $s \geq t$, $S\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(s)} = \widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(f(s))}$. Cette application n'a pas de point fixe : en effet, s'il existe s_0 tel que $S\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(s_0)} = \widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(s_0)}$, alors cette feuille est invariante par S, ce qui contredit le lemme 2.1.18. En particulier, on a $t' \neq t$: quitte à remplacer S par S^{-1}, on va supposer que $t' > t$. Comme $t' > t$ et que f n'a pas de point fixe, la suite $(f^n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et tend vers $+\infty$.

Définissons maintenant un chemin transverse $\widetilde{c}$, équivalent à $\widetilde{\alpha}_{|[f(t),f^2(t)]}$, reliant $\widetilde{\alpha}(f(t))$ à $S\widetilde{\alpha}(f(t))$. Ceci est possible car $\widetilde{\alpha}_{|[f(t),f^2(t)]}$ est équivalent à $S\widetilde{\alpha}_{|[t,f(t)]}$. Ce chemin relie un point à son image par S, donc on peut le périodiser en un $S-$lacet transverse $\widetilde{\gamma}$ de la manière suivante : $\widetilde{\gamma}_{|[0,1]}$ est une paramétrisation de $\widetilde{c}$, et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $\widetilde{\gamma}_{|[n,n+1]} = S^n\widetilde{\gamma}_{|[0,1]}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{\alpha}_{|[f^n(t),f^{n+1}(t)]}$ est alors par construction équivalent à $S\widetilde{\alpha}_{|[f^{n-1}(t),f^n(t)]}$, donc par récurrence à $S^{n-1}\widetilde{\alpha}_{|[f(t),f^2(t)]}$, donc à $S^{n-1}\widetilde{c}$, donc à $S^{n-1}\widetilde{\gamma}_{|[0,1]}$, et donc à $\widetilde{\gamma}_{|[n-1,n]}$. Comme la suite $(f^n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, il s'ensuit finalement que $\widetilde{\alpha}_{|[f(t),+\infty[}$ est équivalent à $\widetilde{\gamma}_{|[0,+\infty[}$, donc que $\widetilde{\alpha}$ est équivalent en $+\infty$ à $\widetilde{\gamma}$.

□

2.2 Sur les trajectoires et leurs directions homologiques

On s'intéresse maintenant aux trajectoires (transverses ou non) données par l'isotopie de points ayant une "direction homologique" bien déterminée. Dans toute cette section, $f : M \to M$ désigne un homéomorphisme isotope à l'identité sur une surface M compacte orientée de genre ≥ 2. On considère une isotopie $I : [0,1] \times M \to M$ entre l'identité et f, dont on note $\mathrm{dom}(I) = M \setminus \mathrm{Fix}(I)$ le domaine ; soit $\widetilde{\mathrm{dom}}(I)$ le revêtement universel de ce domaine, $\mathcal{G}$ le groupe des automorphismes de ce revêtement, et $\widetilde{f} : \widetilde{\mathrm{dom}}(I) \to \widetilde{\mathrm{dom}}(I)$ le relevé de f à $\widetilde{\mathrm{dom}}(I)$ qui commute aux éléments de $\mathcal{G}$. Pour tout $T \in \mathcal{G}$, on notera $[T]$ la "classe d'homologie" de T, c'est-à-dire la classe d'homologie d'un lacet obtenu en projetant un chemin reliant un point de $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ à son image par T (cette classe étant indépendante du point choisi).

On fixe également une métrique riemannienne sur M. Quand on parlera de la "longueur" d'un chemin, on sous-entendra systématiquement que celle-ci est bien définie relativement à cette métrique riemannienne.

Les résultats des paragraphes 2.2.2 et 2.2.3 sont entièrement indépendants.

2.2.1 Points génériques et vecteurs de rotation

Si μ est une mesure ergodique $f-$invariante sur M, le théorème ergodique de Birkhoff assure que pour toute fonction continue $\varphi : M \to \mathbb{R}$, $\mu-$presque tout $x \in M$ vérifie

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) = \int_M \varphi(x) d\mu(x).$$

Si dans l'énoncé du théorème de Birkhoff, l'ensemble (de mesure pleine) des x vérifiant une telle relation paraît dépendre de la fonction φ considérée, il existe en fait dans le cas où M est une surface compacte un ensemble de mesure pleine qui convient pour toutes les fonctions φ : ceci est une conséquence du théorème de Stone-Weierstraß qui implique que l'espace des fonctions continues sur M est séparable. Autrement dit, pour toute mesure ergodique μ sur M, μ-presque tout point $z \in M$ est récurrent (par le théorème de récurrence de Poincaré) et vérifie les relations suivantes (où les limites sont prises par rapport à la topologie faible*) :

$$\mu = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^k(z)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^{-k}(z)}.$$

On dira dans toute la suite qu'un tel point est $\mu-$*générique*.

Soit donc μ une mesure ergodique $f-$invariante sur M, dont on note ρ_μ le vecteur de rotation, et $z \in M$ un point $\mu-$générique. Détaillons ici l'interprétation géométrique de ρ_μ en termes de cycles asymptotiques (voir [Sch57] et [Pol92]). Par définition, ρ_μ est l'élément de $H_1(M, \mathbb{R})$ défini par dualité par la forme linéaire sur $H^1(M, \mathbb{R})$ suivante :

$$\omega \mapsto \int_M \left(\int_{I(x)} \omega \right) d\mu(x)$$

(ω désignant une $1-$forme fermée sur M, cette application s'annule quand ω est exacte et passe donc bien au quotient en une application sur $H^1(M,\mathbb{R})$). Comme z est $\mu-$générique, cette application se réécrit

$$\omega \mapsto \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{I(f^k(z))}\omega = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_{I^n(z)}\omega.$$

Si l'on considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un chemin c_n joignant $f^n(z)$ à z, de sorte que les chemins c_n soient de longueurs uniformément bornées, on peut alors noter $\gamma_n(z)$ le lacet obtenu en concaténant $I^n(z)$ et c_n et vérifier que l'élément ρ_μ est défini par la forme linéaire

$$\omega \mapsto \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_{\gamma_n(z)}\omega.$$

Autrement dit, si $[\gamma_n(z)] \in H_1(M,\mathbb{Z})$ désigne la classe d'homologie du lacet $\gamma_n(z)$, on a alors par dualité

$$\rho_\mu = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}[\gamma_n(z)] \in H_1(M,\mathbb{R}).$$

Ceci se généralise dans le résultat suivant :

Lemme 2.2.1. *Soit μ une mesure ergodique de vecteur de rotation ρ_μ et z un point $\mu-$générique. Pour toutes suites réelles croissantes $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $t_n + s_n$ tend vers $+\infty$, pour tout lacet γ_n obtenu en concaténant $I^{\mathbb{Z}}_{z|[-s_n,t_n]}$ avec un chemin reliant $I^{\mathbb{Z}}_z(t_n)$ à $I^{\mathbb{Z}}_z(-s_n)$ de longueur uniformément bornée en n, on a*

$$\rho_\mu = \lim_{n\to+\infty}\frac{[\gamma_n]}{t_n+s_n}.$$

En particulier, on déduit le lemme ergodique suivant qui nous servira à de nombreuses reprises dans la suite :

Lemme 2.2.2. *Soit μ une mesure ergodique de vecteur de rotation ρ_μ, non portée par un point fixe de l'isotopie I, et z un point $\mu-$générique. Pour tout relevé $\widetilde{z}$ de z à $\widetilde{\mathrm{dom}}(I)$, pour tout voisinage borné $\widetilde{U}$ de $\widetilde{z}$, il existe une suite croissante $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers, une constante $L > 0$ et une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{G}$ telles que $k_n \sim Ln$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{f}^{k_n}(\widetilde{z}) \in T_n(\widetilde{U})$ et*

$$\rho_\mu = \lim_{n\to+\infty}\frac{[T_n]}{k_n}.$$

Démonstration. Soit U la projection de $\widetilde{U}$ sur M. Par le théorème de Birkhoff appliqué à l'application de premier retour dans U, il existe une suite croissante $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers telle que $k_n \sim \mu(U)n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{k_n}(z) \in U$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc un automorphisme $T_n \in \mathcal{G}$ tel que $\widetilde{f}^{k_n}(\widetilde{z}) \in T_n(\widetilde{U})$.

Maintenant, comme $\widetilde{U}$ est supposé borné, les $T_n(\widetilde{U})$ sont uniformément bornés, donc pour tout n, il existe un chemin $\widetilde{c}_n$ reliant $\widetilde{f}^{k_n}(\widetilde{z})$ à $T_n(\widetilde{z})$, de longueur uniformément bornée en n. Le chemin $\widetilde{c}_n$ se projette sur M en un chemin reliant $f^{k_n}(z)$ à z, de longueur uniformément bornée en n. De plus, le lacet γ_n obtenu en concaténant $I^{\mathbb{Z}}_{z|[0,k_n]}$ et c_n se relève en un chemin reliant $\widetilde{z}$ à $T_n(\widetilde{z})$, donc son homologie est exactement $[T_n]$. Il reste à appliquer le lemme 2.2.1 pour conclure que

$$\rho_\mu = \lim_{n\to+\infty}\frac{[T_n]}{k_n}.$$

□

Remarque : bien sûr, on dispose d'une version analogue de ce lemme en regardant l'orbite dans le passé : on obtient alors l'existence d'une suite d'entiers $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, et d'une constante $L < 0$. Le reste de l'énoncé est inchangé.

Terminons ce paragraphe par une conséquence simple des considérations précédentes :

Lemme 2.2.3. *Soit μ une mesure ergodique de vecteur de rotation ρ_μ, non portée par un point fixe de l'isotopie I, et z un point $\mu-$générique. Pour tout $T \in \mathcal{G}$ tel que ρ_μ et $[T]$ ne sont pas colinéaires, tout relevé de la trajectoire $I^{\mathbb{Z}}(z)$ au revêtement annulaire $\widetilde{\mathrm{dom}}(I)/T$ est propre.*

Démonstration. En effet, si ce n'est pas le cas, cela implique qu'il existe un compact K de $\widetilde{\mathrm{dom}}(I)$, et un relevé $\widetilde{z}$ de z à $\widetilde{\mathrm{dom}}(I)$, tel que l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} \mid \widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{z}}(t) \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} T^k(K)\}$ n'est pas borné.

Supposons par exemple qu'il n'est pas majoré, l'autre cas étant similaire. Alors il existe une suite réelle $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{z}}(t_n) \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} T^k(K)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit donc $k_n \in \mathbb{Z}$ et $\widetilde{z}_n \in K$ tel que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{z}}(t_n) = T^{k_n}(\widetilde{z}_n)$, et soit $\widetilde{c}_n$ un chemin reliant $\widetilde{z}_n$ à $\widetilde{z}_0$. Comme $\widetilde{z}_n$ et $\widetilde{z}_0$ appartiennent au même compact K, on peut choisir $\widetilde{c}_n$ de longueur uniformément bornée en n. En particulier, $\widetilde{c}_n$ descend donc à M en un chemin c_n reliant $I^{\mathbb{Z}}_z(t_n)$ à $I^{\mathbb{Z}}_z(t_0)$ de longueur uniformément bornée en n : notant $\gamma_n(z)$ le lacet obtenu en concaténant $I^{\mathbb{Z}}_{z|[t_0,t_n]}$ et c_n, il s'ensuit par le lemme 2.2.1 que

$$\rho_\mu = \lim_{n\to+\infty} \frac{[\gamma_n(z)]}{t_n - t_0}.$$

Or $\gamma_n(z)$ se relève en un chemin obtenu en concaténant $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{z}|[t_0,t_n]}$ et $T^{k_n}\widetilde{c}_n$, c'est-à-dire en un chemin reliant $T^{k_0}\widetilde{z}_0$ et $T^{k_n}\widetilde{z}_0$: il s'ensuit que $[\gamma_n(z)] = (k_n - k_0)[T]$, et donc que

$$\rho_\mu = \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n - k_0}{t_n - t_0}\right)[T],$$

c'est-à-dire que ρ_μ est colinéaire à [T]. Cela vient clore la preuve du lemme. □

Remarque : notons qu'on a en particulier la chose suivante : si μ une mesure ergodique de vecteur de rotation ρ_μ et $\widetilde{z} \in \widetilde{\mathrm{dom}}(I)$ relève un point $\mu-$générique de M, et si $\widetilde{\gamma}$ relève un lacet de M dont la classe d'homologie est non colinéaire à ρ_μ, alors $\{t \in \mathbb{R} \mid \widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{z}}(t) \in \widetilde{\gamma}\}$ est compact. En particulier, le nombre d'intersection de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}(\widetilde{z})$ avec $\widetilde{\gamma}$ est bien défini.

2.2.2 Intersection d'une trajectoire et d'un lacet

2.2.2.a But et notations

Dans cette section, on veut montrer le résultat suivant :

Proposition 2.2.4. *Soit μ une mesure ergodique de vecteur de rotation ρ et $x \in M$ un point $\mu-$générique. Soit γ un lacet de M inclus dans* $\mathrm{dom}(I)$.

Si $\rho \wedge [\gamma] > 0$, alors il existe un relevé $\widetilde{x}$ de x et un relevé $\widetilde{\gamma}$ de γ à $\widetilde{\mathrm{dom}}(I)$ tels que le nombre d'intersection de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}(\widetilde{x})$ avec $\widetilde{\gamma}$ est bien défini et vaut $+1$.

Si $\rho \wedge [\gamma] < 0$, alors il existe un relevé $\widetilde{x}$ de x et un relevé $\widetilde{\gamma}$ de γ à $\widetilde{\mathrm{dom}}(I)$ tels que le nombre d'intersection de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}(\widetilde{x})$ avec $\widetilde{\gamma}$ est bien défini et vaut -1.

On peut comprendre ce résultat de la manière suivante. Soit $\widetilde{\gamma}$ un relevé de γ à $\widetilde{\mathrm{dom}}(I)$: c'est un $T-$lacet, pour un certain $T \in \mathcal{G} \setminus \{\mathrm{Id}\}$. Le lemme 2.2.3 indique qu'au revêtement annulaire $\widetilde{\mathrm{dom}}(I)/T$, tout relevé de $I^{\mathbb{Z}}(x)$ est propre, et va donc positivement et négativement vers l'une ou l'autre des extrémités de l'anneau. La proposition 2.2.4 exprime que selon le signe de l'intersection $\rho \wedge [\gamma]$, on peut trouver un relevé de $I(x)$ qui traverse l'anneau dans le sens naturel, c'est-à-dire qui va d'une extrémité de l'anneau à l'autre, en intersectant la projection de $\widetilde{\gamma}$ "dans le bon sens". On remarque donc en particulier que si le résultat est vrai, alors il l'est encore en remplaçant γ par un lacet transverse homotope librement à γ : en effet, si γ' est un lacet homotope à γ, il en existe deux relevés $\widetilde{\gamma}$ et $\widetilde{\gamma}'$ invariants par le même automorphisme $T \in \mathcal{G}$, donc on peut considérer le même revêtement annulaire pour les deux lacets ; le résultat ne dépend donc plus que de l'existence d'un relevé de $I(x)$ qui relie les deux bonnes extrémités de ce revêtement annulaire.

L'idée de la preuve va reposer sur un argument de comptage : d'une part, si $\rho \wedge [\gamma] > 0$, alors $I^{\mathbb{Z}}(x)$ doit avoir des portions aussi grandes que l'on veut qui intersectent positivement "beaucoup de fois" le lacet γ ; mais d'autre part, pour des raisons d'uniforme continuité, $I^{\mathbb{Z}}(x)$ ne peut pas intersecter "trop de fois" le lacet γ. Ces deux faits combinés entraînent que la trajectoire $I^{\mathbb{Z}}(x)$ doit globalement intersecter positivement γ.

On fixe donc un point x de M générique pour une mesure ergodique μ de vecteur de rotation ρ, et γ un lacet de M inclus dans $\mathrm{dom}(I)$. On va traiter uniquement le cas où $\rho \wedge [\gamma] > 0$, l'autre cas étant similaire. Dans toute la suite, pour alléger les notations, on notera donc $C = \rho \wedge [\gamma] > 0$. On fixe également un relevé $\widetilde{x}$ de x à $\widetilde{\mathrm{dom}}(I)$: un tel relevé existe car x ne peut être un point fixe de I, puisque $\rho \neq 0$.

Par la remarque faite ci-dessus, on peut modifier le lacet γ par homotopie libre. On va donc demander tout d'abord que le nombre d'auto-intersection de γ est fini. Ensuite, on demande que les relevés de γ à $\widetilde{\mathrm{dom}}(I)$ soient des chemins injectifs. Ces deux premières conditions sont par exemple réalisées en prenant un lacet géodésique homotope à γ. Enfin, tout en préservant ces conditions, on va demander que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f^n(x) \notin \gamma$; ainsi, pour tout $p < q$, le nombre d'intersection de $I^{\mathbb{Z}}_{x|[p,q]}$ avec γ est bien défini.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des relevés de γ à $\widetilde{\mathrm{dom}}(I)$. Comme nous l'avons signalé plus haut, le fait que ρ et $[\gamma]$ ne sont pas colinéaires entraîne que l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} \mid \widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}}(t) \in \widetilde{\gamma}\}$ est borné pour tout $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{C}$, et donc en particulier, le nombre d'intersection de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}(\widetilde{x})$ avec $\widetilde{\gamma}$ est bien défini et vaut -1, 0 ou $+1$.

Soit maintenant l'ensemble $\mathcal{G}-$invariant

$$\mathcal{D} = \widetilde{\mathrm{dom}}(I) \setminus \left(\bigcup_{\widetilde{\gamma} \in \mathcal{C}} \widetilde{\gamma} \right).$$

On peut alors définir une fonction duale $\delta : \mathcal{D} \to \mathbb{Z}$ comme au paragraphe 1.2.3, telle que pour tous points $\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2 \in \mathcal{D}$, et tout chemin $\widetilde{c}$ reliant $\widetilde{z}_1$ à $\widetilde{z}_2$, la différence $\delta(z_2) - \delta(z_1)$ est égale au nombre d'intersection de $\widetilde{c}$ avec la famille des relevés de γ à $\widetilde{\mathrm{dom}}(I)$, c'est-à-dire au nombre d'intersection de la projection de $\widetilde{c}$ sur M avec le lacet γ. Une telle fonction est bien définie à une constante additive près, et on fixe dans toute la suite un choix de fonction duale δ.

2.2.2.b Propriétés de la fonction duale

Lemme 2.2.5. *Pour tout $T \in \mathcal{G}$, pour tout $\widetilde{z} \in \mathcal{D}$, on a $\delta(T\widetilde{z}) - \delta(\widetilde{z}) = [T] \wedge [\gamma]$.*

Démonstration. Notons $\widetilde{c}$ un chemin reliant $\widetilde{z}$ à $T\widetilde{z}$, $\widetilde{\gamma}_0$ le lacet obtenu en périodisant le chemin $\widetilde{c}$ par l'automorphisme T, et γ_0 la projection de $\widetilde{\gamma}_0$ sur M. Par définition, $\delta(T\widetilde{z}) - \delta(\widetilde{z})$ est égal au nombre d'intersection de $\widetilde{c}$ avec les relevés $\widetilde{\gamma}$ de γ, donc au nombre d'intersection de γ_0 avec γ, c'est-à-dire à $[\gamma_0] \wedge [\gamma] = [T] \wedge [\gamma]$. □

Pour tout $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{C}$, on s'intéresse à l'ensemble des images des trajectoires de points $\widetilde{z} \in \widetilde{\mathrm{dom}}(I)$ qui rencontrent $\widetilde{\gamma}$:

$$B_{\widetilde{\gamma}} = \bigcup_{\widetilde{I}(\widetilde{z}) \cap \widetilde{\gamma} \neq \emptyset} \widetilde{I}(\widetilde{z}).$$

Lemme 2.2.6. *Pour tout $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{C}$, la fonction duale δ est bornée sur $\mathcal{D} \cap B_{\widetilde{\gamma}}$. De plus, la quantité $\delta_0 = \max_{\mathcal{D} \cap B_{\widetilde{\gamma}}} \delta - \min_{\mathcal{D} \cap B_{\widetilde{\gamma}}} \delta$ est indépendante du choix de $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{C}$.*

Démonstration. Par continuité et compacité, les chemins $I(z)$, pour $z \in M$, se relèvent en des chemins de diamètres uniformément bornés en z : il existe donc $K \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Card}\ \{\widetilde{\gamma} \in \mathcal{C} \mid \widetilde{\gamma} \cap \widetilde{I}(\widetilde{z}) \neq \emptyset\} \leq K$ pour tout $\widetilde{z} \in \widetilde{\mathrm{dom}}(I)$. Comme les éléments de $\mathcal{C}$ sont des chemins injectifs, cela implique que pour tout $\widetilde{z} \in \widetilde{\mathrm{dom}}(I)$, on a

$$\max_{\mathcal{D} \cap \widetilde{I}(\widetilde{z})} \delta - \min_{\mathcal{D} \cap \widetilde{I}(\widetilde{z})} \delta \leq K.$$

Fixons $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{C}$. Soit T l'automorphisme de revêtement associé à la translation le long de $\widetilde{\gamma}$, et notons $C_{\widetilde{\gamma}}$ l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{D}$ dont la frontière rencontre $\widetilde{\gamma}$: cet ensemble est fini modulo T car γ a un nombre fini d'auto-intersections. Mais de plus, $[T] \wedge [\gamma] = 0$, donc en vertu du lemme 2.2.5, la fonction duale δ est $T-$invariante. Ceci implique qu'il existe k_0 tel que pour tout $c \in C_{\widetilde{\gamma}}$, pour tout $\widetilde{z} \in c$, $|\delta(\widetilde{z})| \leq k_0$.

Finalement, si $\widetilde{z} \in \mathcal{D} \cap B_{\widetilde{\gamma}}$, alors $\widetilde{I}(\widetilde{z})$ rencontre une composante c de $C_{\widetilde{\gamma}}$. Les deux inégalités précédentes se rassemblent en $|\delta(\widetilde{z})| \leq k_0 + K$, donc δ est bornée sur $\mathcal{D} \cap B_{\widetilde{\gamma}}$.

Soit maintenant un autre élément $\widetilde{\gamma}' \in \mathcal{C}$. Il existe $S \in \mathcal{G}$ tel que $\widetilde{\gamma}' = S\widetilde{\gamma}$. Par invariance de $\widetilde{f}$ par S, on a $\mathcal{D} \cap B_{\widetilde{\gamma}'} = S(\mathcal{D} \cap B_{\widetilde{\gamma}})$. En particulier, par le lemme 2.2.5, on a alors $\{\delta(\widetilde{z}) \mid \widetilde{z} \in \mathcal{D} \cap B_{\widetilde{\gamma}'}\} = \{\delta(\widetilde{z}) + [S] \wedge [\gamma] \mid \widetilde{z} \in \mathcal{D} \cap B_{\widetilde{\gamma}}\}$, et donc la différence maximale de valeurs de δ est la même sur tous les ensembles $\mathcal{D} \cap B_{\widetilde{\gamma}}$, pour $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{C}$.

□

Remarque : considérons deux suites d'entiers naturels $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissantes (au sens large), telles que $p_n + q_n$ tend vers $+\infty$, et notons c_n un chemin de longueur uniformément bornée en n reliant $f^{p_n}(x)$ à $f^{-q_n}(x)$. Soit également γ_n le lacet obtenu en concaténant $I^{\mathbb{Z}}_{x|[-q_n,p_n]}$ et c_n. Par définition, le nombre d'intersection de $I^{\mathbb{Z}}_{x|[-q_n,p_n]}$ avec γ est égal à la différence $\delta(\widetilde{f}^{p_n}(\widetilde{x})) - \delta(\widetilde{f}^{-q_n}(\widetilde{x}))$; de plus, comme les c_n sont de longueurs uniformément bornées, le nombre d'intersection de c_n avec γ est uniformément borné. Il s'ensuit que le nombre d'intersection de γ_n avec γ s'écrit

$$[\gamma_n] \wedge [\gamma] = \delta(\widetilde{f}^{p_n}(\widetilde{x})) - \delta(\widetilde{f}^{-q_n}(\widetilde{x})) + O(1),$$

ce qui, par le lemme 2.2.1, implique alors que l'on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\delta(\widetilde{f}^{p_n}(\widetilde{x})) - \delta(\widetilde{f}^{-q_n}(\widetilde{x}))}{p_n + q_n} = \rho \wedge [\gamma] = C > 0.$$

En particulier, on a les équivalents suivants :

$$\delta(\widetilde{f}^n(\widetilde{x})) \sim Cn, \quad \delta(\widetilde{f}^{-n}(\widetilde{x})) \sim -Cn, \quad \delta(\widetilde{f}^n(\widetilde{x})) - \delta(\widetilde{f}^{-n}(\widetilde{x})) \sim 2Cn,$$

$$\text{et donc} \quad \max_{k\in[-n,n]} \delta(\widetilde{f}^k(\widetilde{x})) \sim Cn \quad \text{et} \quad \min_{k\in[-n,n]} \delta(\widetilde{f}^k(\widetilde{x})) \sim -Cn.$$

2.2.2.c Preuve de la proposition 2.2.4

On raisonne par l'absurde en supposant donc que la proposition 2.2.4 est fausse.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons T_n le nombre total d'éléments de $\mathcal{C}$ rencontrés par $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|[-n,n]}$. Comme on l'a remarqué précédemment, il existe $K > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la portion $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|[n,n+1]} = \widetilde{I}(\widetilde{f}^n(\widetilde{x}))$ rencontre au plus K éléments de $\mathcal{C}$: il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $T_n \leq 2Kn$. Définissons maintenant les constantes qui vont nous intéresser. On fixe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\frac{K(1+\varepsilon)}{C(1+\varepsilon)+K} < 1$$

(l'existence d'un tel ε est assurée par le fait que la limite quand ε tend vers 0 de la quantité de gauche est clairement plus petite que 1), et on considère un réel α tel que

$$\frac{K(1+\varepsilon)}{C(1+\varepsilon)+K} < \alpha < 1.$$

Comme $\alpha < 1$, et que l'on a $\delta(\widetilde{f}^n(\widetilde{x})) \sim Cn$, ainsi que $\delta(\widetilde{f}^{-n}(\widetilde{x})) \sim -Cn$, et que $\delta(\widetilde{f}^n(\widetilde{x})) - \delta(\widetilde{f}^{-n}(\widetilde{x})) \sim 2Cn$, alors il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, on ait les inégalités

$$\delta(\widetilde{f}^n(\widetilde{x})) \geq \alpha Cn, \qquad \delta(\widetilde{f}^{-n}(\widetilde{x})) \leq -\alpha Cn,$$
$$\text{et} \quad \delta(\widetilde{f}^n(\widetilde{x})) - \delta(\widetilde{f}^{-n}(\widetilde{x})) \geq 2\alpha Cn \geq 1.$$

Considérons un entier $p \geq N_0$. Par définition, le nombre d'intersection de $I^{\mathbb{Z}}_{x|[-p,p]}$ avec γ est égal à $\delta(\widetilde{f}^p(\widetilde{x})) - \delta(\widetilde{f}^{-p}(\widetilde{x}))$, donc est supérieur à $2\alpha Cp$: en particulier, par définition de T_p, on a donc $T_p \geq 2\alpha Cp$ (rappelons que les éléments de $\mathcal{C}$ sont des chemins injectifs, donc que le nombre d'intersection d'un chemin avec un élément de $\mathcal{C}$, s'il est bien défini, ne peut valoir que -1, 0 ou 1). Notons $\widetilde{\gamma}_1, ..., \widetilde{\gamma}_{T_p}$ les éléments de $\mathcal{C}$ rencontrés par $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|[-p,p]}$. On note alors $\nu(p)$ le plus petit entier naturel tel que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|]-\infty,-\nu(p)]}$ et $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|[\nu(p),+\infty[}$ ne rencontrent aucun des $\widetilde{\gamma}_i$, pour $i = 1, ..., T_p$. Notons que $\nu(p)$ est bien défini car l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} \mid \widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}}(t) \in \widetilde{\gamma}_i\}$ est borné pour tout $i = 1, ..., T_p$.

Lemme 2.2.7. *Pour tout $p \geq N_0$, $\nu(p) > p$.*

Démonstration. En effet, pour $p \geq N_0$, le nombre d'intersection de $I^{\mathbb{Z}}_{x|[-p,p]}$ avec γ est supérieur à $2\alpha Cp$ donc est strictement positif : il existe donc un entier $i \in \{1, ..., T_p\}$ tel que le nombre d'intersection de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|[-p,p]}$ avec $\widetilde{\gamma}_i$ vaut $+1$. Mais comme on a supposé la proposition 2.2.4 fausse, un tel $\widetilde{\gamma}_i$ doit avoir une intersection nulle ou égale à -1 avec la trajectoire totale : il doit donc obligatoirement intersecter $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}(\widetilde{x})$ hors de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|[-p,p]}$ puisque son nombre d'intersection avec la trajectoire totale est différent de celui avec la portion $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|[-p,p]}$. Cela implique, par définition de $\nu(p)$, que $\nu(p) > p$. □

Lemme 2.2.8. *Pour tout $p \geq N_0$, et δ_0 donné par le lemme 2.2.6, on a*

$$\delta(\widetilde{f}^{\nu(p)}(\widetilde{x})) \leq \max_{k\in[-p,p]} \delta(\widetilde{f}^k(\widetilde{x})) + \delta_0,$$

$$ou \quad \delta(\widetilde{f}^{-\nu(p)}(\widetilde{x})) \geq \min_{k\in[-p,p]} \delta(\widetilde{f}^k(\widetilde{x})) - \delta_0.$$

Démonstration. Soit $p \geq N_0$. Par minimalité de $\nu(p)$, il existe $i \in \{1, ..., T_p\}$ tel que le relevé $\widetilde{\gamma}_i$ rencontre soit $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|[-\nu(p),-\nu(p)+1]}$, soit $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|[\nu(p)-1,\nu(p)]}$.

Si $\widetilde{\gamma}_i$ rencontre $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|[-\nu(p),-\nu(p)+1]}$, alors $\widetilde{f}^{-\nu(p)}(\widetilde{x})$ est dans l'ensemble $B_{\widetilde{\gamma}_i}$. Mais $\widetilde{\gamma}_i$ rencontre aussi $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|[-p,p]}$, donc il existe $k \in [-p, p]$ tel que $\widetilde{f}^k(\widetilde{x})$ est dans l'ensemble $B_{\widetilde{\gamma}_i}$. Par le lemme 2.2.6, on déduit $\delta(\widetilde{f}^k(\widetilde{x})) - \delta(\widetilde{f}^{-\nu(p)}(\widetilde{x})) \leq \delta_0$, et donc on a, comme $k \in [-p, p]$,

$$\delta(\widetilde{f}^{-\nu(p)}(\widetilde{x})) \geq \min_{k\in[-p,p]} \delta(\widetilde{f}^k(\widetilde{x})) - \delta_0.$$

De même, si $\widetilde{\gamma}_i$ rencontre $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|[\nu(p)-1,\nu(p)]}$, alors $\widetilde{f}^{\nu(p)}(\widetilde{x})$ est dans l'ensemble $B_{\widetilde{\gamma}_i}$. Mais $\widetilde{\gamma}_i$ rencontre aussi $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|[-p,p]}$, donc il existe $k \in [-p, p]$ tel que $\widetilde{f}^k(\widetilde{x})$ est dans l'ensemble $B_{\widetilde{\gamma}_i}$. Par le lemme 2.2.6, on déduit $\delta(\widetilde{f}^{\nu(p)}(\widetilde{x})) - \delta(\widetilde{f}^k(\widetilde{x})) \leq \delta_0$, et donc on a, comme $k \in [-p, p]$,

$$\delta(\widetilde{f}^{\nu(p)}(\widetilde{x})) \leq \max_{k\in[-p,p]} \delta(\widetilde{f}^k(\widetilde{x})) + \delta_0.$$

□

Lemme 2.2.9. *Pour tout $p \geq N_0$, $T_{\nu(p)} \geq T_p + 2\alpha C\nu(p)$.*

Démonstration. L'ensemble $\mathcal{C}_{\nu(p)} = \{\widetilde{\gamma} \in \mathcal{C} \mid \widetilde{\gamma} \cap \widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|[-\nu(p),\nu(p)]} \neq \emptyset\}$ est la réunion disjointe des deux ensembles $\mathcal{C}_p = \{\widetilde{\gamma} \in \mathcal{C} \mid \widetilde{\gamma} \cap \widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|[-p,p]} \neq \emptyset\}$ et $\mathcal{C}'_p = \{\widetilde{\gamma} \in \mathcal{C}_{\nu(p)} \mid \widetilde{\gamma} \cap \widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|[-p,p]} = \emptyset\}$. Par définition, le cardinal de $\mathcal{C}_{\nu(p)}$ vaut $T_{\nu(p)}$, celui de $\mathcal{C}_p$ vaut T_p.

Si $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{C}_p$, par définition de $\nu(p)$, le nombre d'intersection de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|[-\nu(p),\nu(p)]}$ avec $\widetilde{\gamma}$ est égal au nombre d'intersection de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}(\widetilde{x})$ avec $\widetilde{\gamma}$, qui vaut -1 ou 0 puisque la proposition 2.2.4 a été supposée fausse. Il s'ensuit que si le nombre d'intersection de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|[-\nu(p),\nu(p)]}$ avec un $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{C}_{\nu(p)}$ vaut $+1$, alors $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{C}'_p$. Mais il y a au moins $2\alpha C\nu(p)$ tels relevés, puisque comme $\nu(p) \geq N_0$ alors le nombre d'intersection de $I^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|[-\nu(p),\nu(p)]}$ avec γ est supérieur à $2\alpha C\nu(p)$. Il s'ensuit que le cardinal de $\mathcal{C}'_p$ est plus grand que $2\alpha C\nu(p)$, ce qui conclut la preuve. □

On définit maintenant une suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = N_0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \nu(u_n)$. Une telle suite est bien définie et strictement croissante en vertu du lemme 2.2.7.

Lemme 2.2.10. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$T_{u_n} \geq T_{N_0} + 2\alpha C \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Démonstration. Par récurrence immédiate à partir du lemme 2.2.9. □

Lemme 2.2.11. *Pour tout $\varepsilon > 0$, on a à partir d'un certain rang $\alpha u_{n+1} \leq (1+\varepsilon)u_n$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a soit $\delta(\widetilde{f}^{u_{n+1}}(\widetilde{x})) \leq \max_{k\in[-u_n,u_n]} \delta(\widetilde{f}^k(\widetilde{x})) + \delta_0$, soit $\delta(\widetilde{f}^{-u_{n+1}}(\widetilde{x})) \geq \min_{k\in[-u_n,u_n]} \delta(\widetilde{f}^k(\widetilde{x})) - \delta_0$ d'après le lemme 2.2.8.

Dans le premier cas, on obtient

$$\frac{\alpha C u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{\delta(\widetilde{f}^{u_{n+1}}(\widetilde{x}))}{u_n} \leq \frac{\max_{k\in[-u_n,u_n]} \delta(\widetilde{f}^k(\widetilde{x})) + \delta_0}{u_n}.$$

Dans le deuxième cas, on a alors

$$\frac{\alpha C u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{-\delta(\widetilde{f}^{-u_{n+1}}(\widetilde{x}))}{u_n} \leq \frac{-\min_{k\in[-u_n,u_n]} \delta(\widetilde{f}^k(\widetilde{x})) + \delta_0}{u_n}.$$

Ces deux cas se rassemblent en

$$\frac{\alpha C u_{n+1}}{u_n} \leq \max\left(\frac{\max_{k\in[-u_n,u_n]} \delta(\widetilde{f}^k(\widetilde{x}))}{u_n}, \frac{-\min_{k\in[-u_n,u_n]} \delta(\widetilde{f}^k(\widetilde{x}))}{u_n}\right) + \frac{\delta_0}{u_n}.$$

Comme $\delta(\widetilde{f}^k(\widetilde{x})) \sim Ck$ et $\delta(\widetilde{f}^{-k}(\widetilde{x})) \sim -Ck$, alors $\max_{k\in[-u_n,u_n]} \delta(\widetilde{f}^k(\widetilde{x})) \sim Cu_n$ et $\min_{k\in[-u_n,u_n]} \delta(\widetilde{f}^k(\widetilde{x})) \sim -Cu_n$. Il s'ensuit que le membre de droite converge globalement vers C, donc que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\alpha C u_{n+1} \leq C u_n(1+\varepsilon)$ à partir d'un certain rang, ce qui prouve le lemme. □

On va maintenant appliquer ce lemme avec le réel $\varepsilon > 0$ à partir duquel on a défini α. Soit donc N tel que pour tout $n \geq N$, $\alpha u_{n+1} \leq u_n(1+\varepsilon)$. Appliquons le lemme 2.2.10 : pour tout $n \geq N$, on a

$$T_{u_n} \geq T_{N_0} + 2\alpha C \sum_{k=1}^{n} u_k \geq T_{N_0} + 2\alpha C \left(\sum_{k=1}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{n} u_k\right).$$

Comme $\alpha u_{n+1} \leq u_n(1+\varepsilon)$ pour tout $n \geq N$, on a alors

$$T_{u_n} \geq C_0 + 2\alpha C \sum_{k=0}^{n-N} \left(\frac{\alpha}{1+\varepsilon}\right)^k u_n, \quad \text{où } C_0 = T_{N_0} + 2\alpha C \sum_{k=1}^{N-1} u_k.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, par définition de K, on a $T_{u_n} \leq 2Ku_n$, donc

$$K \geq \frac{C_0}{2u_n} + \alpha C \sum_{k=0}^{n-N} \left(\frac{\alpha}{1+\varepsilon}\right)^k.$$

Comme $0 < \alpha < 1$ et $\varepsilon > 0$, la suite géométrique obtenue converge, donc en passant à la limite, on obtient

$$K \geq \frac{\alpha C}{1 - \frac{\alpha}{1+\varepsilon}}, \quad \text{i.e.} \quad \alpha \leq \frac{K(1+\varepsilon)}{K + C(1+\varepsilon)},$$

ce qui vient contredire la définition de α.

Cette contradiction clôt la preuve de la proposition 2.2.4 dans le cas $\rho \wedge [\gamma] > 0$. On traitera le cas $\rho \wedge [\gamma] < 0$ de manière tout à fait similaire.

2.2.3 Équivalence d'une trajectoire transverse et d'un lacet

On suppose maintenant que I est une isotopie maximale, et on fixe un feuilletage $\mathcal{F}$ transverse à I. Rappelons que par définition, $\mathrm{dom}(\mathcal{F}) = \mathrm{dom}(I)$.

2.2.3.a But et notations

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au cas où la trajectoire transverse d'un point générique pour une mesure ergodique est équivalente à un lacet transverse. Le but est d'arriver au résultat suivant :

Proposition 2.2.12. *Soit μ une mesure ergodique $f-$invariante (non portée par un point fixe de I) dont on note ρ le vecteur de rotation, $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$ un point $\mu-$générique, et γ un lacet transverse à $\mathcal{F}$. Si $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ et γ sont équivalents (en $+\infty$ ou en $-\infty$), alors il existe $\lambda \geq 0$ tel que $\rho = \lambda[\gamma]$.*

On fixe donc dans toute cette partie une mesure ergodique $f-$invariante μ, de vecteur de rotation ρ, qui n'est pas portée par un point fixe de I. On peut donc en considérer un point $\mu-$générique $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$, dont on fixe un relevé $\widetilde{x}$ de x à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$. On fixe également un lacet transverse $\gamma : \mathbb{R} \to M$, ainsi qu'un de ses relevés $\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$, dont on note T l'automorphisme de revêtement associé (i.e. tel que $\widetilde{\gamma}$ est un $T-$lacet transverse). On suppose dans toute la suite que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ et $\widetilde{\gamma}$ sont équivalents en $+\infty$, le cas où l'équivalence a lieu en $-\infty$ se traitant de manière similaire. La preuve découlera du résultat suivant, qui a également son intérêt propre et dont on se servira dans la suite :

Proposition 2.2.13. *Il existe un voisinage borné W de $\widetilde{x}$, une suite d'entiers strictement croissante $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'entiers $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$, et une constante $C > 0$ telles que $l_n \sim Cn$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{f}^{l_n}(\widetilde{x}) \in T^{q_n}(W)$.*

Soit ϕ une feuille rencontrée par γ vérifiant la dichotomie suivante :

$$(\mathcal{D}) \quad \begin{array}{l} \text{soit la feuille } \phi \text{ est non errante,} \\ \text{soit } \gamma \text{ ne rencontre que des feuilles errantes.} \end{array}$$

On fixe un relevé $\widetilde{\phi}$ de ϕ rencontré par $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ et $\widetilde{\gamma}$; un tel relevé existe car $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ et $\widetilde{\gamma}$ sont supposés équivalents en $+\infty$. Comme $T\widetilde{\phi}$ est rencontrée par $\widetilde{\gamma}$ après $\widetilde{\phi}$ (donc que $\widetilde{\phi}$ est à droite de $T\widetilde{\phi}$ et $T\widetilde{\phi}$ est à gauche de $\widetilde{\phi}$), les deux trajectoires $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ et $\widetilde{\gamma}$ rencontrent aussi $T\widetilde{\phi}$. Notons $p < q$ deux entiers tels que $\widetilde{f}^p(\widetilde{x}) \in R(\widetilde{\phi})$ et $\widetilde{f}^q(\widetilde{x}) \in L(T\widetilde{\phi})$. On fixe un voisinage V de $\widetilde{f}^q(\widetilde{x})$ inclus dans $L(T\widetilde{\phi})$: par continuité, il existe un voisinage borné U de $\widetilde{f}^p(\widetilde{x})$, inclus dans $R(\widetilde{\phi})$, tel que $\widetilde{f}^{q-p}(U) \subset V$. Comme x est générique pour la mesure ergodique μ, par le lemme 2.2.2, il existe une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{G}$, une suite strictement croissante $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers (on choisit $k_0 = p$ et $S_0 = \mathrm{Id}$) et une constante $C > 0$ telles que $k_n \sim Cn$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{f}^{k_n}(\widetilde{x}) \in S_n(U)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $\widetilde{f}^{k_n}(\widetilde{x}) \in S_n(U)$, donc $\widetilde{f}^{k_n+q-p}(\widetilde{x}) \in S_n(V)$: la portion $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[k_n,k_n+q-p]}$ relie donc $S_n(U)$ à $S_n(V)$, donc rencontre les feuilles $S_n\widetilde{\phi}$ et $S_nT\widetilde{\phi}$. Il s'ensuit, par équivalence en $+\infty$ de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ avec le $T-$lacet $\widetilde{\gamma}$, que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ et $\widetilde{\gamma}$ rencontrent aussi la feuille $TS_n\widetilde{\phi}$.

2.2.3.b Preuves des propositions 2.2.12 et 2.2.13

La proposition 2.2.13 va reposer sur le lemme suivant :

Lemme 2.2.14. *Il existe une famille finie $\{R_1, ..., R_k\}$ d'éléments de $\mathcal{G}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p_n \in \mathbb{Z}$ et $i_n \in \{1, ..., k\}$ tels que $S_n = T^{p_n} R_{i_n}$.*

Démonstration. Supposons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n T = T S_n$. Comme M est de genre plus grand que 2, le groupe $\mathcal{G}$ est libre donc il existe $R \in \mathcal{G}$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $T = R^p$ et $\{S \in \mathcal{G} \mid ST = TS\} = \{R^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier $m_n \in \mathbb{Z}$ tels que $S_n = R^{m_n}$. En considérant le quotient q_n de la division euclidienne de m_n par p et r_n le reste de cette division euclidienne, on a alors $S_n = R^{q_n p + r_n} = T^{q_n} R^{r_n}$. Comme $0 \leq r_n < p$, la famille $\{\mathrm{Id}, R, R^2, ..., R^{p-1}\}$ convient pour que le lemme soit vrai.

On suppose donc qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $S_n T \neq T S_n$. Si on avait $T S_n \widetilde{\phi} = S_n T \widetilde{\phi}$, alors on aurait $T^{-1} S_n^{-1} T S_n \widetilde{\phi} = \widetilde{\phi}$, c'est-à-dire que ϕ est une feuille fermée d'homologie $[T^{-1} S_n^{-1} T S_n] = 0$. Cela implique que ϕ est le bord d'une surface. Le lacet γ intersectant ϕ, il doit à la fois entrer et sortir de cette surface, ce qui est absurde puisque l'intersection entre γ et ϕ est toujours positivement transverse.

Donc $T S_n \widetilde{\phi} \neq S_n T \widetilde{\phi}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: en particulier, la portion de $\widetilde{\gamma}$ entre $T S_n \widetilde{\phi}$ et $S_n T \widetilde{\phi}$ est équivalente à un chemin transverse qui relève un lacet dont l'automorphisme de revêtement associé est $T^{-1} S_n^{-1} T S_n$: autrement dit, il existe sur M un lacet transverse homologue à zéro. En particulier, comme expliqué au paragraphe 1.2.3, toute feuille qu'il rencontre est errante, donc ϕ est errante. En vertu de l'hypothèse $(\mathcal{D})$ faite en choisissant ϕ, on déduit donc qu'on est dans le cas où toutes les feuilles rencontrées par γ sont errantes. En particulier, ϕ ne peut pas s'accumuler sur une feuille que rencontre γ (sinon cette feuille ne serait pas errante), ce qui implique que les $S_n \widetilde{\phi}$ sont modulo T en nombre fini. Plus précisément, il existe $R_1, ..., R_k \in \mathcal{G}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des entiers $p_n \in \mathbb{Z}$ et $i_n \in \{1, ..., k\}$ tels que $S_n \widetilde{\phi} = T^{p_n} R_{i_n} \widetilde{\phi}$, et donc, comme ϕ n'est pas fermée, $S_n = T^{p_n} R_{i_n}$. □

On peut alors en déduire la proposition 2.2.13 :

Démonstration. Appliquons le lemme 2.2.14 : il existe une famille finie $\{R_1, ..., R_k\}$ d'éléments de $\mathcal{G}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p_n \in \mathbb{Z}$ et $i_n \in \{1, ..., k\}$ tels que $S_n = T^{p_n} R_{i_n}$.

Commençons par montrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{\gamma}$ rencontre $S_n \widetilde{\phi}$ donc rencontre $T^{p_n} R_{i_n} \widetilde{\phi}$, donc rencontre $R_{i_n} \widetilde{\phi}$. Quitte à enlever les éléments en trop dans la famille $\{R_1, ..., R_k\}$, on peut supposer que pour tout pour tout $i \in \{1, ..., k\}$, $\widetilde{\gamma}$ rencontre $R_i \widetilde{\phi}$. Pour tout $i \in \{1, ..., k\}$, on a donc $R(R_i \widetilde{\phi}) \subset R(T R_i \widetilde{\phi})$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Pour tout $i \in \{1, ..., k\}$, les k feuilles $T^N R_i \widetilde{\phi}$ sont rencontrées par $\widetilde{\gamma}$, donc comme $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, pour tout $i \in \{1, ..., k\}$, $\widetilde{f}^{k_n}(\widetilde{x}) \in L(T^N R_i \widetilde{\phi})$. En particulier, pour tout $n \geq n_0$, on déduit que $S_n \widetilde{\phi} \subset L(T^N R_i \widetilde{\phi})$, c'est-à-dire que $T^{p_n} R_{i_n} \widetilde{\phi} \subset L(T^N R_{i_n} \widetilde{\phi})$, ce qui impose que pour tout $n \geq n_0$, on a $p_n \geq N$. Ceci prouve donc que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

On considère alors la suite $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $l_n = k_n - p$, la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $q_n = p_n - p_0$ et l'ouvert

$$W = \bigcup_{i=1}^{k} \widetilde{f}^{-p} T^{p_0} R_i(U).$$

Tout d'abord, on a bien $\widetilde{x} \in W$. En effet, $T^{p_0} R_{i_0} = S_0 = \mathrm{Id}$, donc W contient $\widetilde{f}^{-p}(U)$ qui est bien un voisinage de $\widetilde{x}$. Ensuite, comme U est borné, W est la réunion de k ouverts bornés, donc est également borné. De plus, comme $k_n \sim Cn$, alors bien sûr $l_n \sim Cn$. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{f}^{l_n}(\widetilde{x}) = \widetilde{f}^{-p} \circ \widetilde{f}^{k_n}(\widetilde{x})$ appartient à $\widetilde{f}^{-p} S_n(U) = \widetilde{f}^{-p} T^{p_n} R_{i_n}(U)$, c'est-à-dire à $T^{q_n} \widetilde{f}^{-p} T^{p_0} R_{i_n}(U)$ qui est par définition inclus dans $T^{q_n} W$. On a donc bien $\widetilde{f}^{l_n}(\widetilde{x}) \in T^{q_n}(W)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Et on peut enfin en déduire la proposition 2.2.12, dans le cas d'équivalence en $+\infty$:

Démonstration. Par le lemme 2.2.13, il existe un voisinage borné W de $\widetilde{x}$, une suite d'entiers strictement croissante $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite d'entiers $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telles pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{f}^{l_n}(\widetilde{x}) \in T^{q_n}(W)$.

Comme W est borné, les $T^{q_n}(W)$ sont uniformément bornés donc il existe pour tout n un chemin $\widetilde{c}_n$, de longueur uniformément bornée en n, reliant $\widetilde{f}^{l_n}(\widetilde{x})$ à $T^{q_n}(\widetilde{x})$. On note $\widetilde{\gamma}_n$ le chemin obtenu en concaténant $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[0,l_n]}$ et $\widetilde{c}_n$: le chemin $\widetilde{\gamma}_n$ relie donc $\widetilde{x}$ à $T^{q_n}\widetilde{x}$, donc relève un lacet γ_n d'homologie $[T^{q_n}]$. Il s'ensuit par le lemme 2.2.1 que

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{[\gamma_n]}{l_n} = \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{q_n}{l_n}\right)[T],$$

ce qui conclut la preuve. □

Remarque : tout ce qui précède peut bien entendu s'adapter au cas où, au lieu d'avoir la trajectoire transverse d'un point générique pour une mesure ergodique, on aurait simplement un lacet transverse (la seule hypothèse étant que les trajectoires considérées aient des "directions homologiques" bien définies). On obtient donc l'analogue suivant de la proposition 2.2.12 :

Proposition 2.2.15. *Soit $\gamma : \mathbb{R} \to M$ et $\gamma' : \mathbb{R} \to M$ deux lacets transverses de classes d'homologie $[\gamma]$ et $[\gamma']$. Si γ et γ' sont équivalents (en $+\infty$ ou en $-\infty$), alors $[\gamma]$ et $[\gamma']$ sont colinéaires.*

2.3 Deux corollaires

Donnons simplement dans cette section deux énoncés qui s'obtiennent facilement en combinant les résultats des sections 2.1 et 2.2. On garde toutes les notations introduites précédemment (en particulier, l'isotopie I est suppposée maximale, et $\mathcal{F}$ désigne un feuilletage transverse à I). Le premier résultat est alors le suivant :

Proposition 2.3.1. *Soit μ une mesure ergodique $f-$invariante de vecteur de rotation ρ, non portée par un point fixe de I, et $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ un relevé d'un point $\mu-$générique de M.*

S'il existe $T \in \mathcal{G} \setminus \{\mathrm{Id}\}$ tel que $T\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x}) \overset{+\infty}{\sim} \widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$, alors il existe un $T-$lacet transverse $\widetilde{\gamma}$ tel que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x}) \overset{+\infty}{\sim} \widetilde{\gamma}$, et un réel $\lambda \geq 0$ tel que $\rho = \lambda[\widetilde{\gamma}]$.

S'il existe $T \in \mathcal{G} \setminus \{\mathrm{Id}\}$ tel que $T\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x}) \overset{-\infty}{\sim} \widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$, alors il existe un $T-$lacet transverse $\widetilde{\gamma}$ tel que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x}) \overset{-\infty}{\sim} \widetilde{\gamma}$, et un réel $\lambda \geq 0$ tel que $\rho = \lambda[\widetilde{\gamma}]$.

Démonstration. C'est la réunion des deux résultats précédents 2.1.17 et 2.2.12. □

Le second corollaire des études précédentes est le suivant :

Proposition 2.3.2. *Soit μ une mesure ergodique $f-$invariante dont on note ρ le vecteur de rotation, x un point $\mu-$générique, γ un lacet de M transverse à $\mathcal{F}$, et $\widetilde{\gamma}$ un relevé de γ à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$. On suppose que $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ ne s'accumule pas dans γ.*

Si $\rho \wedge [\gamma] > 0$, alors il existe un relevé $\widetilde{x}$ de x à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ tel que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ traverse $B(\widetilde{\gamma})$ de gauche à droite. Si $\rho \wedge [\gamma] < 0$, alors il existe un relevé $\widetilde{x}$ de x à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ tel que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ traverse $B(\widetilde{\gamma})$ de droite à gauche.

Démonstration. On traite le cas où $\rho \wedge [\gamma] > 0$, l'autre cas étant similaire. Par la proposition 2.2.4, il existe un relevé $\widetilde{x}$ de x dont le nombre d'intersection de la vraie trajectoire $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}(\widetilde{x})$ avec $\widetilde{\gamma}$ est bien défini et vaut $+1$.

Tout d'abord, il est impossible que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ et $\widetilde{\gamma}$ soient équivalents en $+\infty$ ou en $-\infty$, sans quoi, par la proposition 2.2.12, ρ et $[\gamma]$ seraient colinéaires et on aurait $\rho \wedge [\gamma] = 0$. De plus, on a supposé que $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ ne s'accumule pas dans γ. Il s'ensuit, par le lemme 2.1.9, que soit $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ visite la bande $B(\widetilde{\gamma})$, soit il la traverse. Le nombre d'intersection de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ avec $\widetilde{\gamma}$ est donc bien défini et vaut $+1$ si $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ traverse $B(\widetilde{\gamma})$ de gauche à droite, -1 s'il la traverse de droite à gauche, et 0 s'il la visite. Mais ce nombre d'intersection est égal au nombre d'intersection de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}(\widetilde{x})$ avec $\widetilde{\gamma}$: en effet, les deux trajectoires $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}(\widetilde{x})$ et $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ contiennent toute l'orbite du point $\widetilde{x}$ par $\widetilde{f}$, donc repassent régulièrement par des points communs. Cela implique que le nombre d'intersection de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ avec $\widetilde{\gamma}$ est $+1$, donc que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ traverse $B(\widetilde{\gamma})$ de gauche à droite. $\square$

Chapitre 3

Entropie et points périodiques

On considère une surface M compacte et orientable de genre $g \geq 2$, et $f : M \to M$ un homéomorphisme isotope à l'identité, dont on note $\mathrm{rot}(f)$ l'ensemble de rotation, toujours défini relativement aux mesures $f-$invariantes. On fixe une norme $\|.\|$ sur $H_1(M, \mathbb{R})$, et pour tout $\rho \in H_1(M, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$, on note $B(\rho, \varepsilon)$ la boule ouverte de centre ρ et rayon ε pour cette norme. Notre but principal est de prouver les théorèmes A et C, dont on rappelle ici les énoncés :

Théorème 3.0.1. *S'il existe deux mesures de probabilité ergodiques $f-$invariantes μ et ν de vecteurs de rotation ρ_μ et ρ_ν tels que $\rho_\mu \wedge \rho_\nu \neq 0$, alors f est topologiquement chaotique.*

Remarque : on va en fait montrer que f admet un fer-à-cheval, tel que défini en section 1.3.

Théorème 3.0.2. *Pour toutes mesures de probabilité ergodiques $f-$invariantes μ et ν de vecteurs de rotation ρ_μ et ρ_ν tels que $\rho_\mu \wedge \rho_\nu \neq 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $r \in [0, 1]$, il existe un point périodique z dont le vecteur de rotation ρ_z appartient à $B(r\rho_\mu + (1-r)\rho_\nu, \varepsilon)$. De plus, pour tout $\kappa \in \mathbb{Q} \cap]0, 1]$, il existe un point périodique de vecteur de rotation $\kappa\rho_z$.*

En particulier, on déduira de ces deux théorèmes les corollaires B, D et E de l'introduction, que nous réénoncerons en temps utile.

On considère une isotopie maximale I et un feuilletage $\mathcal{F}$ transverse à I. Comme expliqué dans l'introduction, ces deux théorèmes vont reposer en partie sur la proposition F dont revoici l'énoncé :

Proposition 3.0.3. *S'il existe deux mesures de probabilité ergodiques $f-$invariantes μ et ν de vecteurs de rotation ρ_μ et ρ_ν tels que $\rho_\mu \wedge \rho_\nu \neq 0$, alors :*
- soit il existe deux points récurrents z et $z' \in M$ dont les trajectoires transverses ont une intersection $\mathcal{F}-$transverse,
- soit il existe un point $z \in M$ dont la trajectoire transverse a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse.

On note $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ le revêtement universel du domaine de définition et $\mathcal{G}$ le groupe des automorphismes de ce revêtement. On note également $\widetilde{\mathcal{F}}$ le feuilletage non-singulier $\mathcal{G}-$invariant relevé à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$, et $\widetilde{f} : \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F}) \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ le relevé de f qui commute aux éléments de $\mathcal{G}$. On fixe enfin une métrique riemannienne sur M. Quand on parlera de la "longueur" d'un chemin, on sous-entendra systématiquement que celle-ci est bien définie relativement à cette métrique riemannienne.

3.1 Idée générale, problèmes rencontrés et plan de la preuve

Avant d'attaquer la preuve des théorèmes A et C, donnons-en une idée globale intuitive afin d'en comprendre le plan et les différents problèmes que nous allons rencontrer, dont la résolution fera l'objet des paragraphes suivants. Comme expliqué en préambule, les théorèmes A et C vont reposer sur la proposition F : en effet, la théorie de forçage de Le Calvez et Tal permet d'assurer que l'entropie d'un homéomorphisme de surface isotope à l'identité est strictement positive dès lors qu'il existe des points récurrents dont les trajectoires transverses s'intersectent $\mathcal{F}-$transversalement (ou un point dont la trajectoire transverse a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse) ; cette même condition suffira, moyennant un petit contrôle des ordres d'admissibilité des trajectoires, à obtenir par le théorème 1.3.8 l'existence de points périodiques dans l'ensemble de rotation.

La première idée intuitive pour trouver, sous l'hypothèse du théorème A, des trajectoires qui s'intersectent $\mathcal{F}-$transversalement est la suivante : si l'on dispose de deux mesures ergodiques dont les vecteurs de rotation s'intersectent, on peut choisir des points génériques x et y pour ces deux mesures, dont les trajectoires transverses ont donc des "directions" homologiques ρ_x et ρ_y qui s'intersectent. Naïvement, on peut penser que cette situation suffit pour que ces trajectoires s'intersectent $\mathcal{F}-$transversalement. Malheureusement, il n'en est rien, comme on peut le voir sur la figure 3.1.

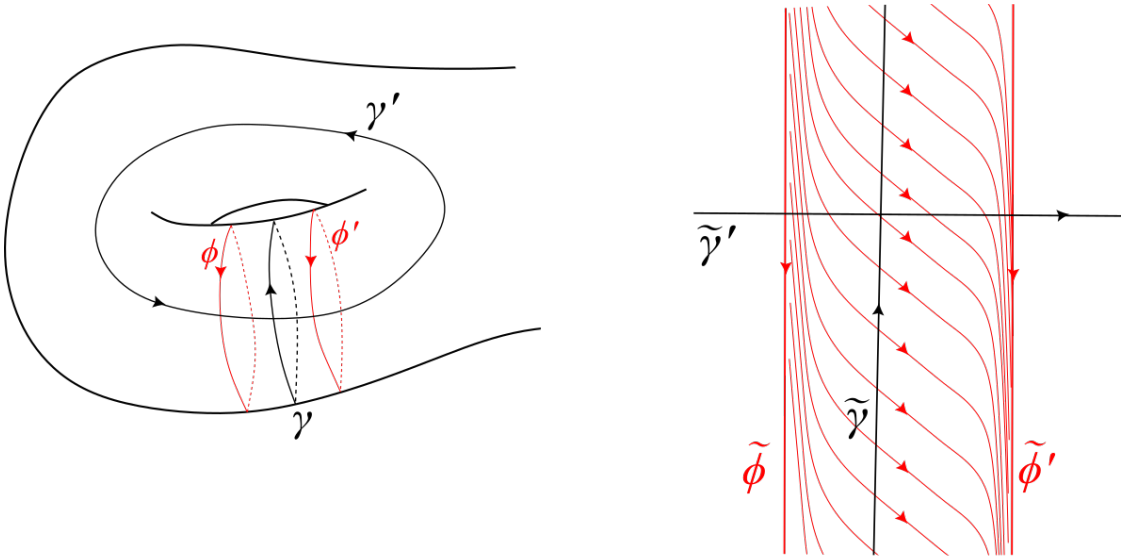

FIGURE 3.1 – Exemple de "mauvaise" situation : à gauche, la position relative de deux lacets transverses γ et γ' sur M (pouvant être les trajectoires transverses de deux points périodiques), l'un rencontrant deux feuilles, l'autre étant entre ces deux feuilles ; à droite, deux de leurs relevés à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$. La dynamique du feuilletage entre les feuilles $\widetilde{\phi}$ et $\widetilde{\phi}'$ montre que $\widetilde{\gamma}$ s'accumule (positivement et négativement) dans $\widetilde{\gamma}'$, donc qu'il n'y a pas d'intersection $\mathcal{F}-$transverse ; alors que les classes d'homologie de γ et de γ' s'intersectent.

Sur cette figure sont représentés deux lacets transverses (pouvant donc possiblement être les trajectoires transverses de x et y) dont les classes d'homologie s'intersectent, mais n'ayant pas d'intersection $\mathcal{F}-$transverse. En effet, le feuilletage $\mathcal{F}$ est tel que le lacet γ

est exactement équivalent au sous-chemin de γ' qui relie les feuilles ϕ et ϕ'. Autrement dit, on est dans le cas où tout relevé de γ s'accumule dans chaque relevé de γ' qu'il rencontre, et il ne peut donc y avoir d'intersection $\mathcal{F}-$transverse. De plus, aucune de ces deux trajectoires n'a ici d'auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse puisque les lacets considérés sont simples. Cet exemple permet donc de s'apercevoir que dans certains cas, la construction de trajectoires qui s'intersectent pourra s'avérer plus complexe. Heureusement, comme on va le voir dans la suite, ce cas "problématique" où les trajectoires de x et y ne s'intersectent pas $\mathcal{F}-$transversalement et où aucune d'elles n'a d'auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse ne se produit que dans le cas où l'une des trajectoires est équivalente (en $+\infty$ ou en $-\infty$) à un lacet transverse. On devra donc traiter ce cas à part, en gardant à l'esprit que la théorie de forçage de Le Calvez et Tal ne pourra s'appliquer directement.

Dans le cas général où la mauvaise situation ne se produit pas, les intersections et auto-intersections $\mathcal{F}-$transverses des trajectoires des points x et y vont découler des résultats 2.1.15 et 2.1.16. Plus précisément, considérons les approximations de la trajectoire transverse $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ (au sens de la définition 2.1.12). Si un relevé de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ visite la bande définie par une de ses approximations, cela fait apparaître une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse ; on va donc s'intéresser au cas où $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ traverse la bande définie par une de ses approximations. Dans ce cas, il suffira donc de trouver un relevé de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ ou de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ qui traverse la même bande dans l'autre sens. L'idée naturelle serait pour cela de choisir une approximation dont la classe d'homologie intersecte ρ_x avec un certain signe, et ρ_y avec le signe opposé. Ainsi, il existerait un relevé de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ et un relevé $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ qui traverseraient la bande dans des sens opposés (en vertu de la proposition 2.3.2), et l'un d'eux intersecterait donc bien $\mathcal{F}-$transversalement le relevé de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ fixé. Autrement dit, la question que l'on se pose est la suivante : en supposant que $\rho_x \wedge \rho_y > 0$, existe-t-il une approximation γ de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ telle que $[\gamma] \wedge \rho_x < 0$ et $[\gamma] \wedge \rho_y > 0$? Notons bien qu'en vertu du lemme 2.2.1, l'homologie (renormalisée) d'approximations de plus en plus "grandes" de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ (au sens où ces approximations sont obtenues en périodisant des portions de plus en plus grandes de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$) converge vers ρ_x, donc que la deuxième inégalité est vraie pour des grandes approximations.

Il y a deux obstructions pour répondre à cette question. La première vient du fait qu'on ne peut a priori pas garantir qu'il existe une approximation γ telle que $[\gamma] \wedge \rho_x \neq 0$. Il faudra donc traiter séparément le cas où l'intersection entre la classe d'homologie d'une approximation et le vecteur de rotation considéré est nulle. La seconde difficulté se pose donc dans le cas où on peut trouver γ telle que $[\gamma] \wedge \rho_x \neq 0$. Intuitivement, on pourrait penser que par ergodicité, les approximations telles que $[\gamma] \wedge \rho_x > 0$ vont devoir compenser celles telles que $[\gamma] \wedge \rho_x < 0$, et qu'on va donc pouvoir choisir le signe de nos intersections. Malheureusement, cette compensation n'est pas évidente en général, et repose sur un résultat d'ergodicité plus fort que le simple théorème ergodique de Birkhoff, et qui ne sera pas vrai pour n'importe quel point générique. Il faudra donc choisir les points x et y plus précisément au début de la preuve, afin d'avoir le résultat d'ergodicité qui nous intéresse.

Le plan de ce chapitre est donc le suivant : dans la section 3.2, on s'intéresse à ce résultat d'ergodicité qui va nous permettre de choisir les signes des intersections ; ensuite, en 3.3, on s'intéresse au cas où l'intersection entre le vecteur de rotation d'une mesure ergodique et la classe d'homologie d'une approximation d'un point générique pour cette mesure est nulle ; finalement, en 3.4, on attaque le problème plus délicat de la situation où une trajectoire est équivalente à un lacet (et donc où il peut ne pas y avoir d'intersection

ou d'auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse entre les trajectoires de x et y). Les trois sections 3.2, 3.3 et 3.4 sont entièrement indépendantes. Enfin, dans la dernière section 3.5, on met tous ces résultats bout à bout pour obtenir la preuve complète des théorèmes A et C.

3.2 Choix des points x et y

3.2.1 Des conséquences du lemme d'Atkinson

On fixe une mesure de probabilité borélienne ergodique $f-$invariante μ sur M, de vecteur de rotation $\rho \neq 0$. Considérons un disque topologique U inclus dans $\mathrm{dom}(\mathcal{F})$, trivialisant le revêtement $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$, tel que $\mu(U) > 0$. Pour tout $x, y \in U$, on note $c_{x,y}$ un chemin reliant x à y inclus dans U, de sorte que les chemins $c_{x,y}$ soient de longueurs uniformément bornées en x et $y \in U$.

Par le théorème de récurrence de Poincaré, $\mu-$presque tout point de U revient une infinité de fois dans U : il existe donc un borélien $U' \subset U$, tel que $\mu(U') = \mu(U)$, et deux applications $\Psi : U' \to U'$ et $\tau : U' \to \mathbb{N}^*$ telles que pour tout $x \in U'$, $\tau(x)$ est bien définie par $\tau(x) = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid f^n(x) \in U'\}$ et $\Psi(x) = f^{\tau(x)}(x)$ (autrement dit, ψ est l'application de premier retour dans U' et τ l'application de temps de premier retour associée). L'application $\psi : U' \to U'$ préserve alors la mesure ergodique $\mu_{|U'}$. Définissons une application $\Theta : U' \to H_1(M, \mathbb{Z})$ de la manière suivante : pour tout $x \in U'$, $\Theta(x)$ est la classe d'homologie du lacet obtenu en concaténant $I^{\tau(x)}(x)$ et $c_{\Psi(x),x}$. Par le lemme 2.2.1, tout point $\mu-$générique x de U' (donc presque tout point de U) vérifie alors la relation

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(x)}{\tau_n(x)}, \quad \text{où } S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \Theta(\Psi^k(x)) \text{ et } \tau_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \tau(\Psi^k(x)).$$

Par le théorème de Birkhoff, on a de plus pour presque tout $x \in U'$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{Card}\ \{i = 0, ..., \tau_n(x) - 1 \mid f^i(x) \in U'\}}{\tau_n(x)} = \mu(U'),$$

et donc, comme $\tau_n(x)$ correspond au $n-$ième temps de retour de x dans U' par f, on a $\mathrm{Card}\ \{i = 0, ..., \tau_n(x) - 1 \mid f^i(x) \in U'\} = n$. On déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\tau_n(x)}{n} = \frac{1}{\mu(U')} \text{ et donc en particulier que } \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(x)}{n} = \frac{1}{\mu(U')}\rho.$$

Le théorème ergodique de Birkhoff permet donc de contrôler, dans une certaine mesure, les temps de retour de f dans U et donc les classes d'homologie $\Theta(x)$. On va en fait utiliser un résultat classique plus précis, le lemme d'Atkinson, dont on rappelle ici l'énoncé (voir [Atk76]) :

Proposition 3.2.1. *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de probabilité et $T : X \to X$ une application ergodique. Si $\varphi : X \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable de moyenne nulle (i.e. $\int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu = 0$), alors pour tout $B \in \mathcal{B}$, et pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\mu\left(\left\{x \in B \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } T^n(x) \in B \text{ et } \left|\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k(x))\right| < \varepsilon\right\}\right) = \mu(B).$$

On va simplement appliquer ce résultat pour obtenir le lemme suivant :

Lemme 3.2.2. *Pour $\mu-$presque tout $x \in U'$, on a* $\liminf_{n\to+\infty} |S_n(x) \wedge \rho| = 0$.

Démonstration. On applique le lemme d'Atkinson à l'application $\Psi : U' \to U'$, préservant la mesure $\mu_{|U'}$ ergodique, et avec la fonction $\varphi : U' \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in U'$ par $\varphi(x) = \Theta(x) \wedge \rho$. Il faut donc vérifier que φ est de moyenne nulle. On a, comme Ψ préserve la mesure $\mu_{|U'}$,

$$\begin{aligned}\int_{U'} \varphi \, \mathrm{d}\mu = \int_{U'} (\Theta(x) \wedge \rho) \, \mathrm{d}\mu(x) &= \frac{1}{n} \int_{U'} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \Theta(\Psi^k(x)) \wedge \rho \right) \, \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_{U'} \frac{S_n(x)}{n} \wedge \rho \, \mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

Ceci tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et montre donc que φ est de moyenne nulle. Le lemme d'Atkinson 3.2.1 s'applique donc : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a donc

$$\mu(A_k) = \mu(U'), \text{ où } A_k = \left\{ x \in U' \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \left| \sum_{i=0}^{n-1} \Theta(\Psi^i(x)) \wedge \rho \right| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

En particulier, on a alors

$$\mu(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} A_k) = \mu(U'), \qquad \text{i.e. } \mu\left(\{x \in U' \mid \liminf_{n\to+\infty} |S_n(x) \wedge \rho| = 0\} \right) = \mu(U').$$

□

Proposition 3.2.3. *Il existe un point $\mu-$générique $x \in U'$ et une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ strictement croissante d'entiers positifs tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\rho \wedge S_{n_k}(x) \geq 0$.*

Démonstration. Appliquons le lemme 3.2.2 : il existe un point $\mu-$générique $x \in U'$ tel que $\liminf_{n\to+\infty} |\rho \wedge S_n(x)| = 0$. En particulier, x étant $\mu-$générique, il vérifie l'égalité

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(x)}{\tau_n(x)} = \rho.$$

Supposons qu'il existe une infinité de n tels que $\rho \wedge S_n(x) \geq 0$. Alors la proposition est immédiatement vérifiée, avec le point x et la suite des entiers pour lesquels $\rho \wedge S_n(x) \geq 0$.

On suppose donc avoir, à partir d'un certain rang, $\rho \wedge S_n(x) < 0$. Comme on a $\liminf_{n\to+\infty} |\rho \wedge S_n(x)| = 0$, il existe donc une sous-suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ strictement croissante telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(\rho \wedge S_{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ croît strictement vers 0. On considère alors le point $\Psi^{n_1}(x)$ de U' et la suite strictement croissante des entiers $(n_k - n_1)_{k\in\mathbb{N}^*}$. Vérifions que la proposition est vérifiée avec ces objets.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\rho \wedge S_{n_k-n_1}(\Psi^{n_1}(x)) = \rho \wedge S_{n_k}(x) - \rho \wedge S_{n_1}(x) > 0$ car la suite $(\rho \wedge S_{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. De plus, comme x est $\mu-$générique, alors $\Psi^{n_1}(x)$ est aussi $\mu-$générique. □

Corollaire 3.2.4. *Soit $\rho' \in H_1(M, \mathbb{R})$ tel que $\rho \wedge \rho' > 0$. Il existe un point $\mu-$générique $x \in U'$ et un entier p tels que $\rho \wedge S_p(x) \geq 0$ et $S_p(x) \wedge \rho' > 0$.*

Démonstration. On applique simplement la proposition 3.2.3 : soit x et $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ les objets qu'elle définit. Comme x est $\mu-$générique, $S_{n_k}(x) \wedge \rho'$ est pour tout n_k suffisamment grand du signe de $\rho \wedge \rho'$. Pour n_k suffisamment grand, on a donc bien $\rho \wedge S_{n_k}(x) \geq 0$ et $S_{n_k}(x) \wedge \rho' > 0$. □

Remarquons pour conclure ce paragraphe que le signe choisi dans la proposition 3.2.3 est arbitraire ; on a donc également le résultat suivant :

Corollaire 3.2.5. *Soit $\rho' \in H_1(M, \mathbb{R})$ tel que $\rho \wedge \rho' > 0$. Il existe un point $\mu-$générique $x \in U'$ et un entier q tels que $\rho \wedge S_q(x) \leq 0$ et $S_q(x) \wedge \rho' > 0$.*

3.2.2 Choix des points selon le signe des intersections

On peut maintenant en déduire la proposition suivante : celle-ci exprime qu'on va pouvoir trouver des approximations (au sens de la définition 2.1.12) des trajectoires transverses qui nous intéressent dont l'intersection avec les différents vecteurs de rotation ont un signe choisi. Plus précisément :

Proposition 3.2.6. *Soit μ et ν deux mesures ergodiques f-invariantes, de vecteurs de rotation ρ_μ et ρ_ν tels que $\rho_\mu \wedge \rho_\nu > 0$. Il existe un point $\mu-$générique $x \in M$, un point $\nu-$générique $y \in M$, et deux approximations γ_x et γ_y de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ et $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ tels que :*
- $\rho_\mu \wedge [\gamma_x] \geq 0$ et $[\gamma_x] \wedge \rho_\nu > 0$, et
- $[\gamma_y] \wedge \rho_\nu \geq 0$ et $\rho_\mu \wedge [\gamma_y] > 0$.

Démonstration. Soit U un disque topologique de $\mathrm{dom}(\mathcal{F})$, tel que $\mu(U) > 0$, trivialisant le revêtement, et ayant la propriété suivante : il existe un relevé $\widetilde{U}$ de U à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ et une feuille $\widetilde{\phi}$ séparant $\widetilde{U}$ et $\widetilde{f}(\widetilde{U})$. Il est clair qu'on peut trouver un tel U, quitte à le choisir suffisamment petit. De même, soit V un disque topologique de $\mathrm{dom}(\mathcal{F})$, tel que $\nu(V) > 0$, trivialisant le revêtement, et tel qu'il en existe un relevé $\widetilde{V}$ à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ et une feuille $\widetilde{\phi}'$ séparant $\widetilde{V}$ et $\widetilde{f}(\widetilde{V})$.

Appliquons alors les corollaires 3.2.4 et 3.2.5. Tout d'abord, le corollaire 3.2.4 avec $\rho = \rho_\mu$ et $\rho' = \rho_\nu$ montre qu'il existe un point $\widetilde{x} \in \widetilde{U}$ relevant un point $\mu-$générique $x \in M$, un entier p, et un automorphisme de revêtement $T \in \mathcal{G}$ tels que $\widetilde{f}^p(\widetilde{x}) \in T(\widetilde{U})$, $\rho_\mu \wedge [T] \geq 0$ et $[T] \wedge \rho_\nu > 0$. Ensuite, le corollaire 3.2.5 avec $\rho = \rho_\nu$ et $\rho' = -\rho_\mu$ montre qu'il existe un point $\widetilde{y} \in \widetilde{V}$ relevant un point $\nu-$générique $y \in M$, un entier q, et un automorphisme de revêtement $S \in \mathcal{G}$ tels que $\widetilde{f}^q(\widetilde{y}) \in S(\widetilde{V})$, $[S] \wedge \rho_\nu \geq 0$ et $\rho_\mu \wedge [S] > 0$.

Par définition, la feuille $\widetilde{\phi}$ sépare $\widetilde{U}$ et $\widetilde{f}(\widetilde{U})$, donc sépare $\widetilde{x}$ et $\widetilde{f}(\widetilde{x})$: il s'ensuit que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ rencontre $\widetilde{\phi}$. De plus, $\widetilde{f}^p(\widetilde{x}) \in T(\widetilde{U})$ donc $\widetilde{f}^{p+1}(\widetilde{x}) \in T(\widetilde{f}(\widetilde{U}))$, donc la feuille $T\widetilde{\phi}$ sépare $\widetilde{f}^p(\widetilde{x})$ et $\widetilde{f}^{p+1}(\widetilde{x})$: il s'ensuit que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ rencontre aussi $T\widetilde{\phi}$. Cela suffit à assurer qu'il existe une approximation γ_x de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ d'homologie $[T]$.

De même, la feuille $\widetilde{\phi}'$ sépare $\widetilde{V}$ et $\widetilde{f}(\widetilde{V})$, donc sépare $\widetilde{y}$ et $\widetilde{f}(\widetilde{y})$: il s'ensuit que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$ rencontre $\widetilde{\phi}'$. De plus, $\widetilde{f}^q(\widetilde{y}) \in S(\widetilde{V})$ donc $\widetilde{f}^{q+1}(\widetilde{y}) \in S(\widetilde{f}(\widetilde{V}))$, donc la feuille $S\widetilde{\phi}'$ sépare $\widetilde{f}^q(\widetilde{y})$ et $\widetilde{f}^{q+1}(\widetilde{y})$: il s'ensuit que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$ rencontre aussi $S\widetilde{\phi}'$, et donc qu'il existe une approximation γ_y de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ d'homologie $[S]$.

Finalement, on a donc bien deux approximations telles que $\rho_\mu \wedge [\gamma_x] \geq 0$ et $[\gamma_x] \wedge \rho_\nu > 0$, et $[\gamma_y] \wedge \rho_\nu \geq 0$ et $\rho_\mu \wedge [\gamma_y] > 0$, ce qui conclut la preuve. □

3.3 Intersection nulle avec une approximation

Le but de cette partie est d'étudier le cas où une mesure ergodique a un point générique dont la trajectoire transverse a une approximation dont la classe d'homologie n'intersecte pas le vecteur de rotation de la mesure. En particulier, dans le cas où un relevé de cette trajectoire transverse traverse la bande définie par son approximation, on va montrer la proposition suivante :

Proposition 3.3.1. *Soit μ une mesure ergodique $f-$invariante et $\rho \neq 0$ son vecteur de rotation, $x \in M$ un point $\mu-$générique dont on note $\widetilde{x}$ un relevé à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$, et $\widetilde{\gamma}$ une approximation de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ dont on note γ la projection sur M. Si $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ traverse la bande $B(\widetilde{\gamma})$ et que $\rho \wedge [\gamma] = 0$, alors $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse.*

L'idée de la preuve est de montrer que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ traverse la bande définie par un translaté de $\widetilde{\gamma}$ dans l'autre sens que celui dans lequel elle traverse $B(\widetilde{\gamma})$, la proposition 2.1.16 permettant alors de conclure. Pour trouver un tel translaté, l'argument est le suivant : si $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ traverse la bande $B(\widetilde{\gamma})$, alors elle doit pour des raisons d'ergodicité traverser dans le même sens les bandes définies par "beaucoup" de translatés de $\widetilde{\gamma}$. Mais en même temps, comme $\rho \wedge [\gamma] = 0$, alors ce phénomène doit être compensé par beaucoup d'intersections de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ (avec d'autres translatés de $\widetilde{\gamma}$) dans l'autre sens. On va donc pouvoir trouver une portion suffisamment grande $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[p,q]}$ qui intersecte un certain translaté $S\widetilde{\gamma}$ dans le sens qui nous intéresse. Le problème, à ce stade, est que rien ne nous dit que la trajectoire totale $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ traverse globalement la bande $B(S\widetilde{\gamma})$. Il va donc falloir être un peu plus précis ; en choisissant un tel translaté $S\widetilde{\gamma}$ qui intersecte cette portion $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[p,q]}$ suffisamment loin de ses extrémités, on pourra s'assurer que si $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ ne traverse pas globalement la bande $B(S\widetilde{\gamma})$, elle a alors un "grand" sous-arc équivalent à une partie de $S\widetilde{\gamma}$, qui doit alors intersecter la bande définie par un autre translaté de $\widetilde{\gamma}$ dans le bon sens.

3.3.1 Notations

Dans toute cette partie, on considère une mesure μ ergodique $f-$invariante, de vecteur de rotation $\rho \neq 0$, et $x \in M$ un point $\mu-$générique, dont on note $\widetilde{x}$ un relevé à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$. On considère une approximation $\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ (au sens de 2.1.12), dont la projection γ sur M ne rencontre pas les points de l'orbite de x ; ainsi, pour tous entiers $p < q$, le nombre d'intersection de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},x|[p,q]}$ avec γ est bien défini. En particulier, pour tout $T \in \mathcal{G}$, pour tout $p < q$, le nombre d'intersection de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[p,q]}$ avec $T\widetilde{\gamma}$ est bien défini et vaut -1, 0 ou 1 (puisque $\widetilde{\gamma}$ est transverse, donc est une droite).

On suppose dans toute la suite que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ traverse $B(\widetilde{\gamma})$ de gauche à droite. Le nombre d'intersection de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ avec $\widetilde{\gamma}$ est donc bien défini et vaut $+1$. On suppose également que $\rho \wedge [\gamma] = 0$.

Notons $\widetilde{\phi}$ la feuille de $\partial B^L(\widetilde{\gamma})$ et $\widetilde{\phi}'$ la feuille de $\partial B^R(\widetilde{\gamma})$ rencontrées par $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$. Quitte à remplacer $\widetilde{x}$ par un de ses itérés par $\widetilde{f}^{-1}$, on peut supposer sans perte de généralités que $\widetilde{x} \in R\widetilde{\phi}$. Soit alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $\widetilde{f}^N(\widetilde{x}) \in L\widetilde{\phi}'$, et soit V un voisinage de $\widetilde{f}^N(\widetilde{x})$ entièrement inclus dans $L\widetilde{\phi}'$: par continuité, il existe un voisinage U de $\widetilde{x}$ inclus dans $R\widetilde{\phi}$ tel que $\widetilde{f}^N(U) \subset V$. Par le lemme 2.2.2, il existe une suite d'entiers strictement croissante $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{G}$, et une constante $C > 0$, telles que $k_n \sim Cn$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{f}^{k_n}(\widetilde{x}) \in S_n(U)$: quitte à extraire, on demande de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k_{n+1} \geq k_n + N$. On peut choisir également, sans perte de généralités, de fixer $S_0 = \mathrm{Id}$ et $k_0 = 0$. On fixe dans toute la suite de telles suites $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et la constante C associée.

Le premier lemme indique qu'on va pouvoir trouver une portion suffisamment grande de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$, intersectant un translaté de $\widetilde{\gamma}$ avec nombre d'intersection -1, et le rencontrant suffisamment "loin" de ses propres extrémités :

Lemme 3.3.2. *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq 2p$ et $S \in \mathcal{G}$ tels que :*
- le nombre d'intersection (bien défini) de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[0,k_n+N]}$ avec $S\widetilde{\gamma}$ vaut -1, et
- $S\widetilde{\gamma} \cap \widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[k_p+N,k_{n-p}]} \neq \emptyset$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit i_n le nombre d'intersection de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},x|[0,k_n+N]}$ avec γ. Pour calculer i_n, il suffit par la proposition 1.1.8 de compter algébriquement le nombre de translatés de $\widetilde{\gamma}$ intersectés par $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[0,k_n+N]}$, ou de manière équivalente, intersectés par $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|[0,k_n+N]}$ (ces deux trajectoires étant homotopes à extrémités fixées). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit P_n le nombre de translatés de $\widetilde{\gamma}$ avec lesquels $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|[0,k_n+N]}$ a une intersection égale à $+1$, et N_n le nombre de translatés de $\widetilde{\gamma}$ avec lesquels $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|[0,k_n+N]}$ a une intersection égale à -1. Par définition, on a donc $i_n = P_n - N_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit également c_n un chemin de longueur uniformément bornée en n reliant $f^{k_n+N}(x)$ à x : le nombre d'intersection de c_n avec γ est uniformément borné donc en particulier, c'est un $o(k_n)$. Soit également γ_n le lacet obtenu en concaténant $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},x|[0,k_n+N]}$ et c_n. On a donc $[\gamma_n] \wedge [\gamma] = i_n + o(k_n) = P_n - N_n + o(k_n)$. Par le lemme 2.2.1, et comme par hypothèse $\rho \wedge [\gamma] = 0$, on a

$$0 = \rho\wedge[\gamma] = \lim_{n\to+\infty} \frac{[\gamma_n] \wedge [\gamma]}{k_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{P_n - N_n + o(k_n)}{k_n}, \text{ c'est-à-dire que } P_n - N_n = o(k_n).$$

Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on a $\widetilde{f}^{k_i}(\widetilde{x}) \in S_i(U)$ donc $\widetilde{f}^{k_i+N}(\widetilde{x}) \in S_i(V)$: il découle, par définition de U et V, que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[k_i,k_i+N]}$ traverse $B(S_i(\widetilde{\gamma}))$ de gauche à droite. Le nombre d'intersection de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[0,k_n+N]}$ avec $S_i(\widetilde{\gamma})$ est donc égal à $+1$. De plus, pour tout $i < j$, on a $k_j \geq k_i + N$: il s'ensuit que la bande $B(S_i(\widetilde{\gamma}))$ traversée par $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[k_i,k_i+N]}$ et la bande $B(S_j(\widetilde{\gamma}))$ traversée par $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[k_j,k_j+N]}$ sont disjointes, et donc a fortiori que $S_i\widetilde{\gamma} \neq S_j\widetilde{\gamma}$. Autrement dit, il existe au moins n translatés distincts de $\widetilde{\gamma}$ que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[0,k_n+N]}$ intersecte positivement : on obtient donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n \geq n$, ce qui implique comme $k_n \sim Cn$ que P_n n'est pas un $o(k_n)$. Il s'ensuit que N_n n'est pas non plus un $o(k_n)$.

Mais par définition, N_n est le nombre de translatés de $\widetilde{\gamma}$ dont l'intersection avec $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|[0,k_n+N]}$ vaut -1. Or, comme les trajectoires $I^{\mathbb{Z}}_{x|[n,n+1]} = I(f^n(x))$ sont uniformément bornées en n, il existe K tel que pour tout $a < b$, le nombre de translatés de $\widetilde{\gamma}$ rencontrés par $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|[a,b]}$ est inférieur à $K(b-a)$. Le nombre de translatés de $\widetilde{\gamma}$ rencontrés par $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|[0,k_p+N]}$ ou par $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|[k_{n-p},k_n+N]}$ est donc inférieur à $K(k_n - k_{n-p} + K')$, où $K' = 2N + k_p$ est une constante. Comme $k_n \sim Cn$, on a donc $K(k_n - k_{n-p} + K') = o(k_n)$. Pour n suffisamment grand, il s'ensuit que parmi les N_n translatés de $\widetilde{\gamma}$ considérés, l'un au moins intersecte $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}(\widetilde{x})$ uniquement sur sa portion $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{x}|[k_p+N,k_{n-p}]}$, donc sépare les points $\widetilde{f}^{k_p+N}(\widetilde{x})$ et $\widetilde{f}^{k_{n-p}}(\widetilde{x})$, et donc intersecte $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[k_p+N,k_{n-p}]}$. □

On note enfin $(\mathcal{H}_{\widetilde{\gamma}})$ l'hypothèse suivante :

$$\text{Il existe } S \in \mathcal{G} \text{ tel que } S\widetilde{\gamma} \text{ rencontre } \widetilde{\phi} \text{ et } \widetilde{\phi}'.$$

3.3.2 Si $(\mathcal{H}_{\widetilde{\gamma}})$ n'est pas vérifiée

Dans le cas où $(\mathcal{H}_{\widetilde{\gamma}})$ n'est pas vérifiée, l'auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ va être assez évidente :

Lemme 3.3.3. *Si $(\mathcal{H}_{\widetilde{\gamma}})$ n'est pas vérifiée, alors $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse.*

Démonstration. On applique le lemme 3.3.2, simplement avec $p = 0$: il existe donc $n \in \mathbb{N}$ et $S \in \mathcal{G}$ tels que le nombre d'intersection de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[0,k_n+N]}$ avec $S\widetilde{\gamma}$ vaut -1, et il existe $s \in [N, k_n]$ tel que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}}(s) \in S\widetilde{\gamma}$.

Or, $S\widetilde{\gamma}$ ne peut pas rencontrer la feuille passant par $\widetilde{x}$: en effet, supposons que ce soit le cas ; alors $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[0,s]}$ est équivalent à une sous-portion de $S\widetilde{\gamma}$. Mais par définition, $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[0,N]}$ rencontre $\widetilde{\phi}$ et $\widetilde{\phi}'$, et $s \geq N$, donc $S\widetilde{\gamma}$ rencontre $\widetilde{\phi}$ et $\widetilde{\phi}'$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle $(\mathcal{H}_{\widetilde{\gamma}})$ n'est pas vérifiée. Pour les mêmes raisons, $S\widetilde{\gamma}$ ne peut pas rencontrer la feuille passant par $\widetilde{f}^{k_n+N}(\widetilde{x})$. Il s'ensuit que $\widetilde{x}$ et $\widetilde{f}^{k_n+N}(\widetilde{x})$ sont hors de la bande $B(S\widetilde{\gamma})$. Comme le nombre d'intersection de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[0,k_n+N]}$ avec $S\widetilde{\gamma}$ vaut -1, cela implique que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ traverse la bande $B(S\widetilde{\gamma})$ de droite à gauche, et donc que $S^{-1}\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ traverse $B(\widetilde{\gamma})$ de droite à gauche. La proposition 2.1.16 permet de conclure que $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse. □

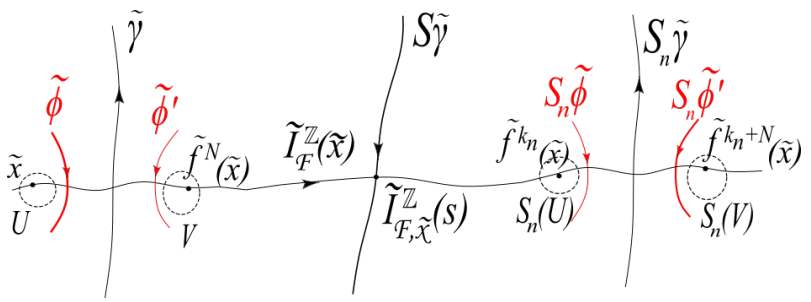

FIGURE 3.2 – Le lemme 3.3.3 : puisque $(\mathcal{H}_{\widetilde{\gamma}})$ n'est pas vérifiée, alors $S\widetilde{\gamma}$ ne peut rencontrer les feuilles $\widetilde{\phi}$ et $S_n\widetilde{\phi}'$, ce qui montre que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ traverse $B(S\widetilde{\gamma})$ de droite à gauche.

3.3.3 Si $(\mathcal{H}_{\widetilde{\gamma}})$ est vérifiée

Dans le cas où $(\mathcal{H}_{\widetilde{\gamma}})$ est vérifiée, $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ va encore avoir une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse, mais la preuve va demander un peu plus d'efforts :

Lemme 3.3.4. *Si $(\mathcal{H}_{\widetilde{\gamma}})$ est vérifiée, alors $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse.*

Démonstration. Comme $(\mathcal{H}_{\widetilde{\gamma}})$ est supposée vraie, il existe $S \in \mathcal{G}$ tel que $S\widetilde{\gamma}$ rencontre $\widetilde{\phi}$ et $\widetilde{\phi}'$, donc traverse la bande $B(\widetilde{\gamma})$ de gauche à droite. Par le lemme 2.1.11, $\widetilde{\gamma}$ traverse la bande $B(S\widetilde{\gamma})$ de droite à gauche. Notons $t_1 < t_2$ tels que $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\gamma}(t_1)} \in \partial B^R(S\widetilde{\gamma})$ et $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\gamma}(t_2)} \in \partial B^L(S\widetilde{\gamma})$. Autrement dit, t_1 et t_2 sont tels que $\widetilde{\gamma}_{|[t_1,t_2]}$ a une intersection $\widetilde{\mathcal{F}}-$transverse avec tout

chemin transverse rencontrant $\widetilde{\phi}$ et $\widetilde{\phi}'$, donc en particulier avec $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$. Il suffit donc, afin d'obtenir le lemme, de montrer que $\widetilde{\gamma}_{|[t_1,t_2]}$ est équivalent à un sous-arc d'un translaté de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$. Notons également $K_0 = t_2 - t_1 + 2$: ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $N_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $[N_0 + t_1, N_0 + t_2] \subset [t, t + K_0]$. Il existe de plus une constante $p \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la portion $\widetilde{\gamma}_{|[t,t+K_0]}$ rencontre au maximum p translatés de $\widetilde{\gamma}$. Appliquons le lemme 3.3.2 avec cette constante p : il existe $n \in \mathbb{N}$ et $S' \in \mathcal{G}$ tels que l'intersection de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[0,k_n+N]}$ avec $S'\widetilde{\gamma}$ vaut -1, et il existe $s \in [k_p + N, k_{n-p}]$ tel que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}}(s) \in S'\widetilde{\gamma}$.

Si $S'\widetilde{\gamma}$ ne rencontre ni la feuille passant par $\widetilde{x}$, ni la feuille passant par $\widetilde{f}^{k_n+N}(\widetilde{x})$, alors on retrouve la situation de la démonstration du lemme 3.3.3 : $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ se sépare positivement et négativement de $S'\widetilde{\gamma}$, et son nombre d'intersection avec $S'\widetilde{\gamma}$ est égal à -1, donc $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ traverse la bande $B(S'\widetilde{\gamma})$ de droite à gauche ; donc par la proposition 2.1.16, $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse.

On suppose donc que $S'\widetilde{\gamma}$ rencontre la feuille passant par $\widetilde{x}$ (le cas où $S'\widetilde{\gamma}$ rencontre la feuille passant par $\widetilde{f}^{k_n+N}(\widetilde{x})$ étant similaire) : la portion $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[0,s]}$ est donc équivalente à une sous-portion de $S'\widetilde{\gamma}$, donc, puisque $s \geq k_p + N$, il existe $a < b$ tels que $S'\widetilde{\gamma}_{|[a,b]}$ est équivalent à $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[0,k_p+N]}$. Mais pour tout $i = 0, ..., p$, il existe $S_i \in \mathcal{G}$ tel que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[k_i,k_i+N]}$ traverse la bande $B(S_i\widetilde{\gamma})$. Il s'ensuit que $S'\widetilde{\gamma}_{|[a,b]}$ traverse aussi $B(S_i\widetilde{\gamma})$ pour tout $i = 0, ..., p$, donc rencontre plus de p translatés de $\widetilde{\gamma}$: par définition de p, on a donc $b - a \geq K_0$. Par définition de K_0, il existe donc $N_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $[N_0 + t_1, N_0 + t_2]$ est inclus dans $[a, a + K_0]$, donc est inclus dans $[a, b]$. On déduit donc que $S'\widetilde{\gamma}_{|[N_0+t_1,N_0+t_2]}$ est un sous-arc de $S'\widetilde{\gamma}_{|[a,b]}$, donc est équivalent à un sous-arc de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[0,k_p+N]}$, donc que $\widetilde{\gamma}_{|[t_1,t_2]}$ est équivalent à un sous-arc de $T^{-N_0}S'^{-1}\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$.

Rappelons finalement que par définition de t_1 et t_2, $\widetilde{\gamma}_{|[t_1,t_2]}$ et $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ ont une intersection $\widetilde{\mathcal{F}}-$transverse : on déduit donc que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ et $T^{-N_0}S'^{-1}\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ ont une intersection $\widetilde{\mathcal{F}}-$transverse, donc que $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse. □

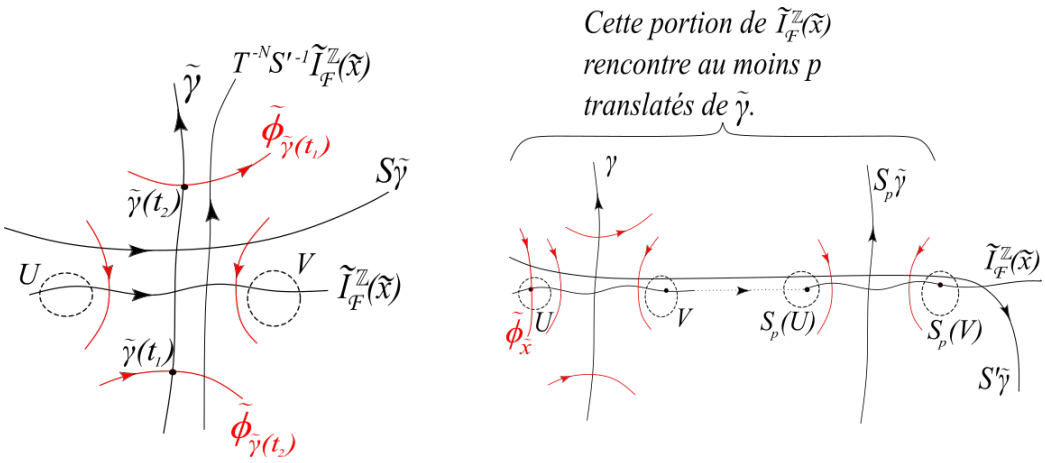

FIGURE 3.3 – Le lemme 3.3.4, cas où $S'\widetilde{\gamma}$ rencontre la feuille passant par $\widetilde{x}$: la portion de $S'\widetilde{\gamma}$ équivalente à une portion de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ rencontre "beaucoup" de translatés de $\widetilde{\gamma}$, donc est assez grande pour contenir un translaté de $\widetilde{\gamma}_{|[t_1,t_2]}$, qui par construction, a une intersection $\widetilde{\mathcal{F}}-$transverse avec $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$.

3.3.4 Réunion des deux cas

Il reste à réunir les deux cas précédents pour conclure :

Proposition 3.3.5. *Soit μ une mesure ergodique $f-$invariante et $\rho \neq 0$ son vecteur de rotation, $x \in M$ un point $\mu-$générique dont on note $\widetilde{x}$ un relevé à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$, et $\widetilde{\gamma}$ une approximation de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ dont on note γ la projection sur M. Si $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ traverse la bande $B(\widetilde{\gamma})$ et que $\rho \wedge [\gamma] = 0$, alors $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse.*

Démonstration. Quitte à modifier légèrement le lacet γ par homotopie, on peut supposer sans perte de généralité qu'il ne rencontre pas les points de l'orbite de x. L'étude précédente s'applique donc dans le cas où $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ traverse la bande de gauche à droite, et le résultat découle alors de 3.3.3 et 3.3.4. Le cas où $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ la traverse de droite à gauche se traite de manière similaire. □

3.4 Cas où l'une des trajectoires est équivalente à un lacet

On s'intéresse dans cette partie à deux trajectoires transverses de points génériques pour des mesures ergodiques dont les vecteurs de rotation s'intersectent, dont l'une est équivalente à un lacet. Comme nous l'avons vu dans le préambule de ce chapitre (section 3.1), il est tout à fait possible dans ce cas que ces deux trajectoires ne s'intersectent pas $\mathcal{F}-$transversalement et qu'aucune d'elles n'ait d'auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse, auquel cas on ne pourra pas utiliser directement les résultats 1.3.6 et 1.3.8 de la théorie de forçage de Le Calvez et Tal. La positivité de l'entropie et l'existence de points périodiques vont néanmoins découler d'un argument de "forçage" assez similaire à celui permettant d'obtenir la proposition 1.3.5 (voir [LCT18]), consistant à construire à partir de ces deux trajectoires une troisième trajectoire ayant une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse.

Le but premier de cette section est de montrer la proposition suivante :

Proposition 3.4.1. *Soit μ et ν deux mesures ergodiques $f-$invariantes sur M, de vecteurs de rotation ρ_μ et ρ_ν tels que $\rho_\mu \wedge \rho_\nu \neq 0$. Soit x un point $\mu-$générique et y un point $\nu-$générique. On suppose que $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ ne s'accumule pas dans $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$, et qu'il existe un lacet γ de M équivalent à $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ (en $+\infty$ ou en $-\infty$). Alors il existe un point $z \in M$ dont la trajectoire transverse a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse.*

On va en fait même construire toute une famille de trajectoires transverses ayant chacune une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse. En contrôlant convenablement les ordres d'admissibilité des arcs qui s'intersectent, on pourra alors appliquer le théorème 1.3.8 et en déduire l'existence de multiples points périodiques dans l'ensemble de rotation :

Corollaire 3.4.2. *Soit μ et ν deux mesures ergodiques $f-$invariantes sur M, de vecteurs de rotation ρ_μ et ρ_ν tels que $\rho_\mu \wedge \rho_\nu \neq 0$. On suppose qu'il existe un point $\mu-$générique x et un point $\nu-$générique y, tels que $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ ne s'accumule pas dans $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$, et qu'il existe un lacet γ de M équivalent à $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ (en $+\infty$ ou en $-\infty$). Alors pour tout $r \in [0,1]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un point z périodique dont le vecteur de rotation ρ_z appartient à $B(r\rho_\mu + (1-r)\rho_\nu, \varepsilon)$. De plus, pour tout $\kappa \in \mathbb{Q} \cap]0,1]$, il existe un point périodique de vecteur de rotation $\kappa\rho_z$.*

3.4.1 Notations

On fixe donc deux mesures ergodiques $f-$invariantes μ et ν de vecteurs de rotation ρ_μ et ρ_ν tels que $\rho_\mu \wedge \rho_\nu \neq 0$. On considère un point $\mu-$générique $x \in M$, et un point $\nu-$générique $y \in M$. Les points x et y sont donc des points récurrents, dont les trajectoires $I^{\mathbb{Z}}(x)$ et $I^{\mathbb{Z}}(y)$ ont des "directions homologiques" ρ_μ et ρ_ν (au sens où l'on a le lemme 2.2.1). Dans toute la suite, on va supposer que $\rho_\mu \wedge \rho_\nu < 0$, l'autre cas étant similaire.

Soit $\widetilde{x}$ un relevé de x à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$: on suppose qu'il existe $T \in \mathcal{G} \setminus \{\mathrm{Id}\}$ et un $T-$lacet transverse $\widetilde{\gamma}$ équivalent en $+\infty$ à $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ (le cas d'équivalence en $-\infty$ pourra se traiter de manière similaire). On suppose enfin que $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ ne s'accumule pas dans $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$.

Lemme 3.4.3. *Il existe un relevé $\widetilde{y}$ de y à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ tel que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$ traverse $B(\widetilde{\gamma})$ de gauche à droite.*

Démonstration. Par la proposition 2.2.12, il existe un réel $\lambda \geq 0$ tel que $\rho_\mu = \lambda[\gamma]$. En particulier, on a donc $[\gamma] \wedge \rho_\nu < 0$. De plus, comme $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ ne s'accumule pas dans $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ alors $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ ne s'accumule pas non plus dans γ. La proposition 2.3.2 s'applique donc et donne le résultat voulu. □

On fixe dans toute la suite un tel relevé $\widetilde{y} \in \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$. Comme $\rho_\nu \wedge [T] \neq 0$, alors par les propositions 2.1.3 et 2.3.1, $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$ et $T\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$ ne peuvent s'accumuler l'une dans l'autre, et ne sont équivalentes ni en $+\infty$ ni en $-\infty$, donc se séparent l'une de l'autre positivement et négativement. Il existe donc deux feuilles $\widetilde{\phi}$ et $\widetilde{\phi}'$ rencontrées par $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$ telles que $T\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$ ne rencontre pas les feuilles que rencontre $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$ avant $\widetilde{\phi}$ et après $\widetilde{\phi}'$, et $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$ ne rencontre pas les feuilles que rencontre $T\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$ avant $T\widetilde{\phi}$ et après $T\widetilde{\phi}'$. Comme $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$ traverse $B(\widetilde{\gamma})$ de gauche à droite, on peut choisir ces feuilles de sorte que $\widetilde{\phi} \subset L(\widetilde{\gamma})$ et $\widetilde{\phi}' \subset R(\widetilde{\gamma})$. Comme $\widetilde{\phi} \neq T\widetilde{\phi}$ et $\widetilde{\phi}' \neq T\widetilde{\phi}'$, on est donc dans la situation de la figure 3.4 ci-dessous. Notons en particulier que pour tout $i \neq j \in \mathbb{Z}$, la trajectoire $T^i\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$ est incluse dans $L(T^j\widetilde{\phi}) \cap R(T^j\widetilde{\phi}')$; de plus, $T^i\widetilde{\phi}$ et $T^i\widetilde{\phi}'$ sont situées à droite de $T^k\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y}))$ si $i < k$, et à gauche de $T^k\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$ si $i > k$ (au sens où $T^k\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$ sépare $L(T^k\widetilde{\phi}) \cap R(T^k\widetilde{\phi}')$ en deux composantes connexes, l'une à sa gauche, l'autre à sa droite).

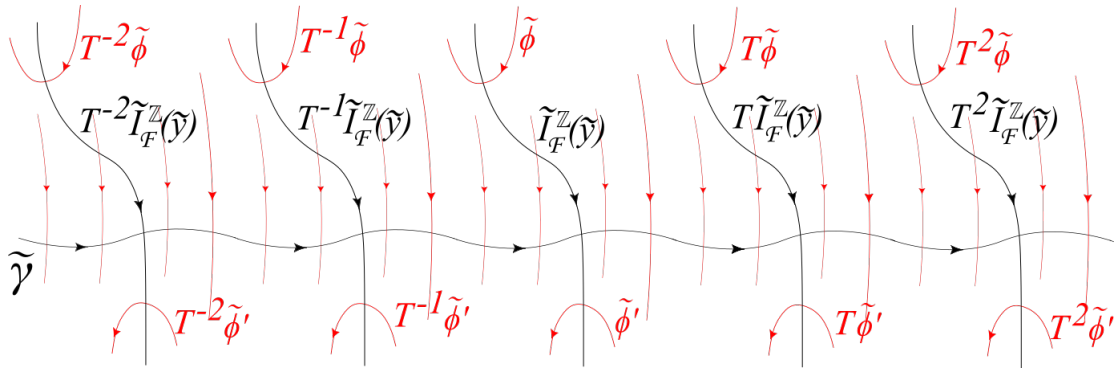

FIGURE 3.4 – Positions relatives des trajectoires et des feuilles rencontrées : notons bien que les $T^k\widetilde{\phi}$ ne sont pas nécessairement des feuilles de $\partial B^L(\widetilde{\gamma})$, mais peuvent être rencontrées par les $T^k\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$ antérieurement à la frontière gauche $\partial B^L(\widetilde{\gamma})$; de même, les $T^k\widetilde{\phi}'$ ne sont pas nécessairement des feuilles de $\partial B^R(\widetilde{\gamma})$, et peuvent être rencontrées par les $T^k\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$ postérieurement à la frontière droite $\partial B^R(\widetilde{\gamma})$.

Quitte à remplacer $\widetilde{y}$ par un de ses itérés par $\widetilde{f}^{-1}$, on va supposer sans perte de généralités que $\widetilde{y} \in R\widetilde{\phi}$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\widetilde{f}^N(\widetilde{y}) \in L\widetilde{\phi}'$. Soit V un voisinage de $\widetilde{f}^N(\widetilde{y})$ entièrement inclus dans $L\widetilde{\phi}'$: par continuité il existe un voisinage borné U de $\widetilde{y}$, inclus dans $R\widetilde{\phi}$, tel que $\widetilde{f}^N(U) \subset V$. Comme y est un point générique pour la mesure ergodique ν, le lemme 2.2.2 s'applique : il existe une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{G}$, une suite strictement croissante $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers et une constante $C > 0$, tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{f}^{k_n}(\widetilde{y}) \in S_n(U)$ (on choisit $k_0 > N$), que $k_n \sim Cn$ et

$$\rho_\nu = \lim_{n\to+\infty} \frac{[S_n]}{k_n}.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{f}^{k_n}(\widetilde{y}) \in S_n(U)$, donc $\widetilde{f}^{k_n+N}(\widetilde{y}) \in S_n(V)$: la portion $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{y}|[k_n,k_n+N]}$ relie $S_n(U)$ à $S_n(V)$, donc rencontre $S_n\widetilde{\phi}$ et $S_n\widetilde{\phi}'$.

Remarque : il n'y a pas forcément d'intersection $\widetilde{\mathcal{F}}-$transverse, à ce stade, entre $\widetilde{\gamma}$ et $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$: en effet, il est tout à fait possible a priori que $\widetilde{\gamma}$ s'accumule dans $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$. Néanmoins, cette accumulation est la seule obstruction possible à une intersection $\mathcal{F}-$transverse entre $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ et $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$: en effet, si $\widetilde{\gamma}$ ne s'accumule pas dans $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$, alors comme $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$ ne s'accumule pas dans $\widetilde{\gamma}$ et que ces deux chemins ne sont équivalents ni en $+\infty$ ni en $-\infty$, cela implique que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$ et $\widetilde{\gamma}$ se séparent deux à deux positivement et négativement, et donc, comme leur nombre d'intersection est non nul, qu'ils s'intersectent $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement. Il existe donc un sous-arc de $\widetilde{\gamma}$ qui intersecte $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$, et donc, comme $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ est équivalent en $+\infty$ à la projection γ de $\widetilde{\gamma}$ sur M, il existe un sous-arc d'un translaté de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ qui intersecte $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$. Autrement dit, il y a une intersection $\mathcal{F}-$transverse entre $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ et $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$.

Remarquons donc en particulier, en guise d'exemple, que si $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ rencontre une feuille fermée, alors γ aussi, et donc en vertu du lemme 2.1.2, γ ne s'accumule pas : on a alors directement une intersection $\mathcal{F}-$transverse entre $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ et $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$.

3.4.2 Argument de forçage

On considère l'ensemble

$$O = \widetilde{f}^N(R\widetilde{\phi}) \cup L\widetilde{\phi}'.$$

Le but est de montrer que certains itérés de O par $\widetilde{f}$ intersectent certains translatés de O par T : de ces intersections se déduira alors l'existence de trajectoires admissibles avec une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse. L'argument central, à l'instar de celui permettant de prouver la proposition 1.3.5 (voir [LCT18]), sera un simple argument de connexité. La première remarque est donc la suivante :

Lemme 3.4.4. *L'ensemble O est un ouvert connexe.*

Démonstration. Les deux ensemble $\widetilde{f}^N(R\widetilde{\phi})$ et $L\widetilde{\phi}'$ sont deux ouverts connexes qui, comme $\widetilde{y} \in R\widetilde{\phi}$ et $\widetilde{f}^N(\widetilde{y}) \in L\widetilde{\phi}'$, s'intersectent : leur réunion est donc un ouvert connexe. □

En particulier, comme $R\widetilde{\phi} \subset \widetilde{f}^N(R\widetilde{\phi})$, l'ouvert O contient $R\widetilde{\phi}$ et $L\widetilde{\phi}'$: par connexité, il existe donc un chemin simple orienté $\widetilde{c}$ (non nécessairement transverse), inclus dans O, inclus dans $L\widetilde{\phi} \cap R\widetilde{\phi}'$ (sauf en ses extrémités), reliant $\widetilde{\phi}$ à $\widetilde{\phi}'$. Ce chemin sépare $L\widetilde{\phi} \cap R\widetilde{\phi}'$ en deux composantes connexes, l'une à sa gauche (relativement à son orientation) notée $l(\widetilde{c})$ et l'autre à sa droite notée $r(\widetilde{c})$. Par définition donc, tout ouvert connexe qui ne rencontre

ni $R\widetilde{\phi}$, ni $L\widetilde{\phi}'$, ni $\widetilde{c}$ est inclus dans $l(\widetilde{c})$ ou $r(\widetilde{c})$; en particulier, comme O contient $R\widetilde{\phi}$, $L\widetilde{\phi}'$, et $\widetilde{c}$, tout ouvert connexe qui ne rencontre pas O est inclus dans $l(\widetilde{c})$ ou $r(\widetilde{c})$. De cette remarque se déduit le lemme suivant :

Lemme 3.4.5. *Soit $i, n \in \mathbb{N}^*$. Si $\widetilde{f}^n(O) \cap T^iO = \emptyset$, alors on a $T^{-i}\widetilde{f}^n(O) \subset r(\widetilde{c})$ et $\widetilde{f}^{-n}(T^iO) \subset l(\widetilde{c})$.*

Démonstration. On fixe i et $n \in \mathbb{N}^*$, tels que $\widetilde{f}^n(O) \cap T^iO = \emptyset$. Montrons la première inclusion, l'autre se traitant de manière similaire.

Commençons par remarquer qu'a priori, il est tout à fait possible d'avoir $\widetilde{c} \cap T^{-i}\widetilde{\phi} \neq \emptyset$ (en effet, le chemin $\widetilde{c}$ n'est pas transverse, donc peut rencontrer $T^{-i}\widetilde{\phi}$ bien qu'il relie deux points du même côté de cette feuille). Néanmoins, $\widetilde{c}$ joint deux points de $L(T^{-i}\widetilde{\phi})$ et est orienté de $\widetilde{\phi}$ vers $\widetilde{\phi}'$, donc on déduit que $l(\widetilde{c}) \cap R(T^{-i}\widetilde{\phi})$ est borné, i.e. que $T^il(\widetilde{c}) \cap R\widetilde{\phi}$ est borné. En particulier, comme $R\widetilde{\phi}$ n'est pas borné, on a donc $R\widetilde{\phi} \not\subset T^il(\widetilde{c})$.

Maintenant comme $\widetilde{\phi}$ est une droite de Brouwer pour $\widetilde{f}$, que $n \in \mathbb{N}^*$, et que O contient $R\widetilde{\phi}$, on a les inclusions $R\widetilde{\phi} \subset \widetilde{f}^nR\widetilde{\phi} \subset \widetilde{f}^n(O)$. Comme on vient de voir que $R\widetilde{\phi} \not\subset T^il(\widetilde{c})$, alors cela implique que $\widetilde{f}^n(O) \not\subset T^il(\widetilde{c})$, i.e. que $T^{-i}\widetilde{f}^n(O) \not\subset l(\widetilde{c})$.

Enfin, comme $\widetilde{f}^n(O) \cap T^iO = \emptyset$, alors $T^{-i}\widetilde{f}^n(O) \cap O = \emptyset$, donc $T^{-i}\widetilde{f}^n(O)$ est un connexe qui ne rencontre pas O. Comme on vient de voir que $T^{-i}\widetilde{f}^n(O) \not\subset l(\widetilde{c})$, c'est donc que $T^{-i}\widetilde{f}^n(O) \subset r(\widetilde{c})$. □

Remarquons maintenant, comme $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ est équivalent en $+\infty$ à $\widetilde{\gamma}$, qu'on est exactement dans le cadre de la proposition 2.2.13 : il existe donc un voisinage borné W de $\widetilde{x}$, une suite d'entiers strictement croissante $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'entiers $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$, et une constante $C' > 0$ telles que $r_n \sim C'n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{f}^{r_n}(\widetilde{x}) \in T^{s_n}(W)$. On fixe donc dans toute la suite de tels objets W, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et C'. De plus, comme $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ et $\widetilde{\gamma}$ sont équivalents en $+\infty$, les points de l'orbite de $\widetilde{x}$ sont à partir d'un certain rang dans $B(\widetilde{\gamma})$. Quitte à omettre les premiers termes de $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (et les premiers termes de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspondants), on va donc supposer sans perte de généralité que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{f}^{r_n}(\widetilde{x}) \in B(\widetilde{\gamma})$.

Lemme 3.4.6. *Il existe un point $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ et une suite d'entiers $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $i_n \sim s_n$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{x}_0 \in r(\widetilde{c})$ et $\widetilde{f}^{r_n-r_0}(\widetilde{x}_0) \in T^{i_n}l(\widetilde{c})$.*

Démonstration. Soit $W_0 = W \cap B(\widetilde{\gamma})$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, la bande $B(\widetilde{\gamma})$ est incluse dans $T^iL(\widetilde{\phi}) \cap T^iR(\widetilde{\phi}')$, donc en particulier $W_0 \subset T^iL(\widetilde{\phi}) \cap T^iR(\widetilde{\phi}')$. De plus, comme W_0 est borné (puisque W est borné), alors il existe deux entiers $i < j$ tels que $W_0 \subset T^il(\widetilde{c}) \cap T^jr(\widetilde{c})$. Ayant supposé que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{f}^{r_n}(\widetilde{x}) \in B(\widetilde{\gamma})$, et comme $B(\widetilde{\gamma}) = T^{s_n}B(\widetilde{\gamma})$, on a aussi $\widetilde{f}^{r_n}(\widetilde{x}) \in T^{s_n}W_0$.

Comme $\widetilde{c}$ est borné, il existe un entier $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\widetilde{c} \cap T^{N'}\widetilde{c} = \emptyset$. En particulier, comme $\widetilde{c}$ est orienté de la gauche de $B(\widetilde{\gamma})$ vers sa droite, on a alors l'inclusion $\left(T^{N'}l(\widetilde{c}) \cap B(\widetilde{\gamma})\right) \subset (l(\widetilde{c}) \cap B(\widetilde{\gamma}))$. On définit alors la suite $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i_n = s_n - s_0 - N' + i - j$. Bien sûr, on a $i_n \sim s_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de i_n, on a $s_n - s_0 + i - j - i_n = N'$, donc par définition de N', on a $\left(T^{s_n-s_0+i-j-i_n}l(\widetilde{c}) \cap B(\widetilde{\gamma})\right) \subset (l(\widetilde{c}) \cap B(\widetilde{\gamma}))$. Autrement dit, on obtient $\left(T^{s_n+i-j-s_0}l(\widetilde{c}) \cap B(\widetilde{\gamma})\right) \subset \left(T^{i_n}l(\widetilde{c}) \cap B(\widetilde{\gamma})\right)$, donc, comme $W_0 \subset T^il(\widetilde{c})$, on a finalement $T^{s_n-j-s_0}W_0 \subset T^{i_n}l(\widetilde{c})$.

On pose alors $\widetilde{x}_0 = T^{-j-s_0}\widetilde{f}^{r_0}(\widetilde{x})$. Comme $\widetilde{f}^{r_0}(\widetilde{x}) \in T^{s_0}W_0 \subset T^{s_0+j}r(\widetilde{c})$, alors on a bien $\widetilde{x}_0 \in r(\widetilde{c})$. De plus, $\widetilde{f}^{r_n-r_0}\widetilde{f}^{r_0}(\widetilde{x}) = \widetilde{f}^{r_n}(\widetilde{x}) \in T^{s_n}W_0$, ce qui peut se réécrire $\widetilde{f}^{r_n-r_0}T^{-j-s_0}\widetilde{f}^{r_0}(\widetilde{x}) \in T^{-j-s_0}T^{s_n}W_0$, et ceci implique $\widetilde{f}^{r_n-r_0}\widetilde{x}_0 \in T^{i_n}l(\widetilde{c})$. □

Lemme 3.4.7. *Il existe une suite d'entiers $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $i_n \sim s_n$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{f}^{r_n-r_0}(O) \cap T^{i_n}(O) \neq \emptyset$.*

Démonstration. Soit $\widetilde{x}_0$ et $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnés par le lemme 3.4.6 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\widetilde{x}_0 \in r(\widetilde{c})$ et $f^{r_n-r_0}(\widetilde{x}_0) \in T^{i_n} l(\widetilde{c})$.

Considérons un chemin $\widetilde{c}'$ reliant $\widetilde{x}_0$ à $\widetilde{c}$, inclus dans $r(\widetilde{c})$. Si $\widetilde{c}' \cap \widetilde{f}^{r_0-r_n} T^{i_n}(O) \neq \emptyset$, alors $r(\widetilde{c}) \cap \widetilde{f}^{r_0-r_n} T^{i_n}(O) \neq \emptyset$. Autrement dit, on a $\widetilde{f}^{r_0-r_n} T^{i_n}(O) \not\subset l(\widetilde{c})$, et le lemme 3.4.5 permet de conclure. Sinon, cela signifie que le chemin $\widetilde{f}^{r_n-r_0}(\widetilde{c}')$ est un connexe qui ne rencontre pas $T^{i_n}(O)$, donc que $\widetilde{f}^{r_n-r_0}(\widetilde{c}') \subset T^{i_n} l(\widetilde{c})$ ou $\widetilde{f}^{r_n-r_0}(\widetilde{c}') \subset T^{i_n} r(\widetilde{c})$. Mais $\widetilde{f}^{r_n-r_0}(\widetilde{c}')$ relie $\widetilde{f}^{r_n-r_0}(\widetilde{x}_0)$ à $\widetilde{f}^{r_n-r_0}(O)$, et $\widetilde{f}^{r_n-r_0}(\widetilde{x}_0) \in T^{i_n} l(\widetilde{c})$, donc $\widetilde{f}^{r_n-r_0}(\widetilde{c}') \subset T^{i_n} l(\widetilde{c})$, et donc $\widetilde{f}^{r_n-r_0}(O) \cap T^{i_n} l(\widetilde{c}) \neq \emptyset$. Autrement dit, $T^{-i_n} \widetilde{f}^{r_n-r_0}(O) \not\subset r(\widetilde{c})$ et le lemme 3.4.5 permet alors de conclure. □

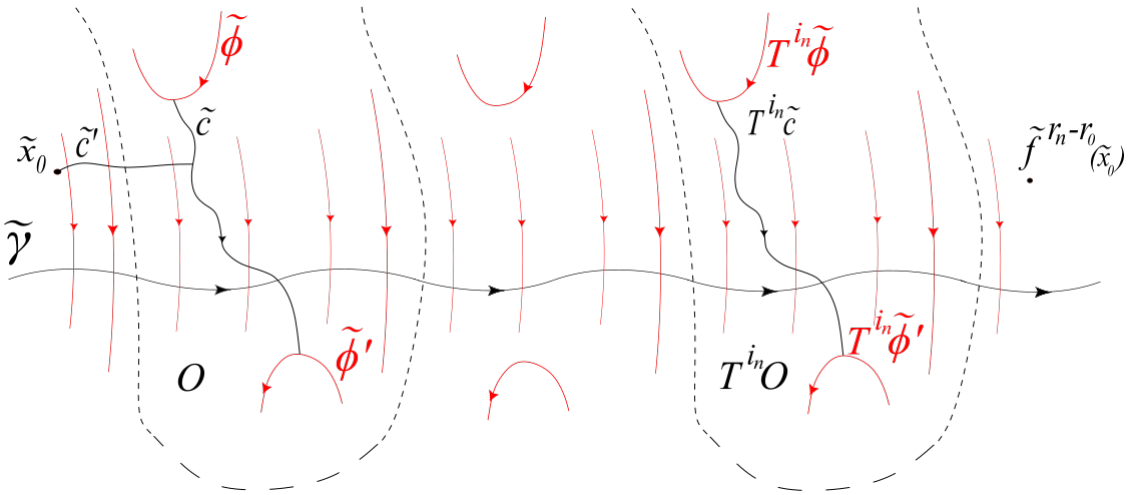

FIGURE 3.5 – Le lemme 3.4.7 : l'orbite de $\widetilde{x}_0$ "traverse" les zones définies par O et $T^{i_n}O$ et force donc $\widetilde{f}^{r_n-r_0}(\widetilde{x}_0)$ et $T^{i_n}O$ à s'intersecter.

On fixe donc dans toute la suite une suite $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant le lemme 3.4.7. On fixe également $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $i_n \geq 3$ (ceci est possible car $i_n \sim s_n$) et $r_n > r_0 + N$.

Lemme 3.4.8. *Pour tout $n \geq n_0$, il existe un chemin $\widetilde{\gamma}_n : [0,1] \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ transverse admissible d'ordre $r_n - r_0 + N$ tel que $\widetilde{\gamma}_n(0) \in \widetilde{\phi}$ et $\widetilde{\gamma}_n(1) \in T^{i_n}\widetilde{\phi}'$.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le lemme 3.4.7 donne $\widetilde{f}^{r_n-r_0}(O) \cap T^{i_n}(O) \neq \emptyset$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, remarquons que $(\widetilde{f}^{r_n-r_0}\widetilde{f}^N R(\widetilde{\phi})) \cap (T^{i_n}\widetilde{f}^N R(\widetilde{\phi})) = \emptyset$: en effet, si cette intersection n'était pas vide, il existerait un point dont la trajectoire rencontre $\widetilde{\phi}$ et $T^{i_n}\widetilde{\phi}$, ce qui est impossible puisque ces deux feuilles ne sont pas comparables. De même, on a $\widetilde{f}^{r_n-r_0} L(\widetilde{\phi}') \cap T^{i_n} L(\widetilde{\phi}') = \emptyset$.

Mais si $n \geq n_0$, on a également $\widetilde{f}^{r_n-r_0} L(\widetilde{\phi}') \cap T^{i_n}\widetilde{f}^N R(\widetilde{\phi}) = \emptyset$: en effet, si ce n'était pas le cas, on disposerait d'un point de $L(\widetilde{\phi}')$ dont l'image par $\widetilde{f}^{r_n-r_0-N}$ est dans $T^{i_n} R(\widetilde{\phi})$. Or, par définition de n_0, on a $r_n - r_0 - N \geq 0$, et $T^{i_n} R(\widetilde{\phi}) \subset R(\widetilde{\phi}')$, donc ceci est impossible.

Pour $n \geq n_0$, l'intersection $\widetilde{f}^{r_n-r_0}(O) \cap T^{i_n}(O) \neq \emptyset$ implique alors forcément que $\widetilde{f}^{r_n-r_0}\widetilde{f}^N R(\widetilde{\phi}) \cap T^{i_n} L(\widetilde{\phi}') \neq \emptyset$, ce qui signifie précisément qu'il existe un chemin transverse admissible d'ordre $r_n - r_0 + N$ reliant $\widetilde{\phi}$ à $T^{i_n}\widetilde{\phi}'$. □

3.4.3 Auto-intersections $\mathcal{F}-$transverses

Le but est maintenant de déduire du lemme 3.4.8 l'existence de beaucoup de chemins transverses admissibles avec une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse. Ces chemins vont être eux-mêmes construits à l'aide de la proposition fondamentale 1.3.5, en "forçant" les chemins $\widetilde{\gamma}_n$ obtenus en 3.4.8 avec des trajectoires admissibles qu'ils intersectent $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement :

Lemme 3.4.9. *Il existe un entier K tel que pour tout $n \geq n_0$ et $m \in \mathbb{N}$, il existe un chemin transverse $\widetilde{\gamma}_{n,m}$ admissible d'ordre $r_n + k_m + K$ reliant $\widetilde{\phi}$ et $T^{i_n-1}S_m\widetilde{\phi}'$.*

Démonstration. Fixons $n \geq n_0$: le lemme 3.4.8 donne l'existence d'un chemin $\widetilde{\gamma}_n$ admissible d'ordre $r_n - r_0 + N$ reliant $\widetilde{\phi}$ et $T^{i_n}\widetilde{\phi}'$.

Comme $T^{i_n-1}\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{y}|[0,N]}$ rencontre $T^{i_n-1}\widetilde{\phi}$ et $T^{i_n-1}\widetilde{\phi}'$, et que $\widetilde{\phi}$ et $T^{i_n}\widetilde{\phi}'$ sont incluses dans $L(T^{i_n-1}\widetilde{\phi}) \cap R(T^{i_n-1}\widetilde{\phi}')$ et situées de part et d'autre de $T^{i_n-1}\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$ (puisque $i_n \geq 2$ par définition de n_0), les chemins $\widetilde{\gamma}_n$ et $T^{i_n-1}\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{y}|[0,N]}$ ont une intersection $\widetilde{\mathcal{F}}-$transverse. Notons $s \in]0,1[$ et $t \in]0,N[$ tels que $\widetilde{\gamma}_n(s) = T^{i_n-1}\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{y}}(t)$. En particulier, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $k_m+N > N$ donc $\widetilde{\gamma}_n$ a une intersection $\widetilde{\mathcal{F}}-$transverse avec le chemin $T^{i_n-1}\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{y}|[0,k_m+N]}$ au point $\widetilde{\gamma}_n(s) = T^{i_n-1}\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{y}}(t)$. De plus, $T^{i_n-1}\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{y}|[0,k_m+N]}$ est par définition admissible d'ordre $k_m + N$. Par la proposition fondamentale 1.3.5, il s'ensuit que le chemin $\widetilde{\gamma}'_{n,m}$ obtenu en concaténant $\widetilde{\gamma}_n([0,s])$ et $T^{i_n-1}\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{y}|[t,k_m+N]}$ est admissible d'ordre $r_n + k_m + K$, avec $K = 2N - r_0$. Ce chemin part de la feuille passant par $\widetilde{\gamma}_n(0)$, c'est-à-dire $\widetilde{\phi}$. De plus, $T^{i_n-1}\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{y}|[k_m,k_m+N]}$ rencontre par définition la feuille $T^{i_n-1}S_m\widetilde{\phi}'$, donc comme $t < k_m$, $T^{i_n-1}\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{y}|[t,k_m+N]}$ rencontre $T^{i_n-1}S_m\widetilde{\phi}'$: autrement dit $\widetilde{\gamma}'_{n,m}$ rencontre aussi $T^{i_n-1}S_m\widetilde{\phi}'$. La portion $\widetilde{\gamma}_{n,m}$ de $\widetilde{\gamma}'_{n,m}$ entre $\widetilde{\phi}$ et $T^{i_n-1}S_m\widetilde{\phi}'$ est donc bien admissible d'ordre r_n+k_m+K. $\square$

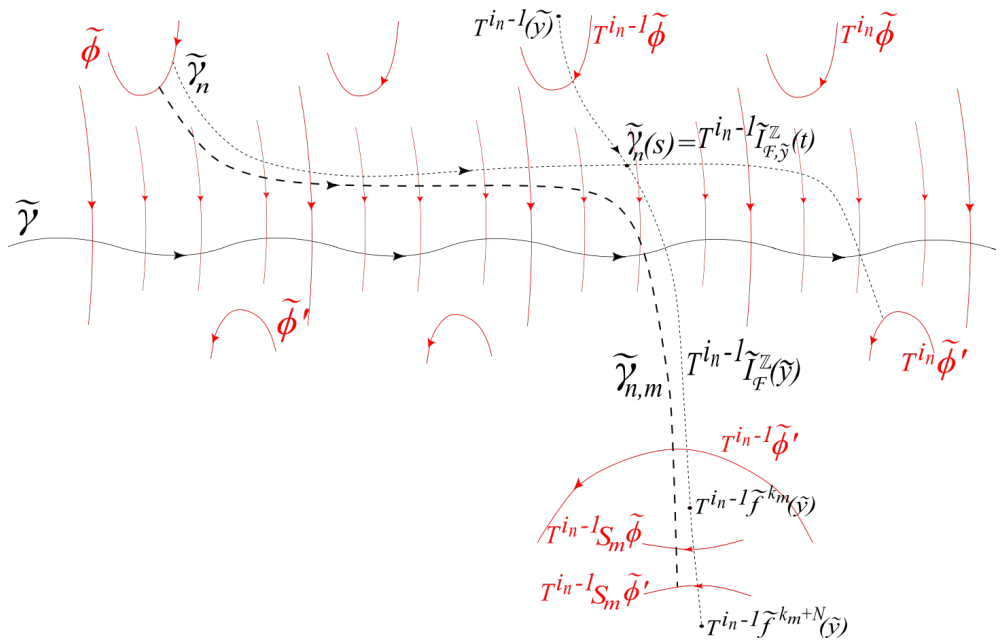

FIGURE 3.6 – Le lemme 3.4.9 : on obtient le chemin $\widetilde{\gamma}_{n,m}$ en "forçant" les deux chemins transverses $\widetilde{\gamma}_n$ et $T^{i_n-1}\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{y}|[0,k_m+N]}$ qui s'intersectent $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement.

Lemme 3.4.10. *Il existe un entier K tel que pour tout $n \geq n_0$ et $m \in \mathbb{N}$, il existe deux réels $s < t \in [0,1]$ et un chemin transverse $\widetilde{\gamma}_{n,m} : [0,1] \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ admissible d'ordre $K + r_n + k_m$ tels que $\widetilde{\gamma}_{n,m}$ et $T^{i_n-1}S_mT^{-1}\widetilde{\gamma}_{n,m}$ ont une intersection $\widetilde{\mathcal{F}}-$transverse au point $\widetilde{\gamma}_{n,m}(t) = T^{i_n-1}S_mT^{-1}\widetilde{\gamma}_{n,m}(s)$.*

Démonstration. Soit K donné par le lemme 3.4.9. Pour tout $n \geq n_0$ et $m \in \mathbb{N}$, on dispose donc d'un chemin transverse $\widetilde{\gamma}_{n,m}$ admissible d'ordre $r_n + k_m + K$ reliant $\widetilde{\phi}$ et $T^{i_n-1}S_m\widetilde{\phi}'$. Les positions relatives des feuilles considérées montrent de plus qu'on a les inclusions $R(\widetilde{\phi}) \subset R(T^{i_n-1}\widetilde{\phi}') \subset R(T^{i_n-1}S_m\widetilde{\phi}) \subset R(T^{i_n-1}S_m\widetilde{\phi}')$. Il s'ensuit que $\widetilde{\gamma}_{n,m}$ rencontre ces quatre feuilles dans cet ordre. Comme les feuilles $\widetilde{\phi}$ et $T^{i_n-1}\widetilde{\phi}'$ sont incluses dans $L(T\widetilde{\phi}) \cap R(T\widetilde{\phi}')$ et situées de part et d'autre de $T\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{y})$ (puisque $i_n \geq 3$ par définition de n_0), tout chemin transverse rencontrant $\widetilde{\phi}$ et $T^{i_n-1}\widetilde{\phi}'$ intersecte $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement tout chemin transverse reliant $T\widetilde{\phi}$ et $T\widetilde{\phi}'$. En particulier, $\widetilde{\gamma}_{n,m}$ intersecte $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement tout chemin transverse reliant $T\widetilde{\phi}$ et $T\widetilde{\phi}'$. Mais $\widetilde{\gamma}_{n,m}$ rencontre $T^{i_n-1}S_m\widetilde{\phi}$ et $T^{i_n-1}S_m\widetilde{\phi}'$, donc $\widetilde{\gamma}_{n,m}$ intersecte $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement $TS_m^{-1}T^{1-i_n}\widetilde{\gamma}_{n,m}$.

Fixons un paramétrage $\widetilde{\gamma}_{n,m} : [0,1] \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ de $\widetilde{\gamma}_{n,m}$. Soit $s, t \in [0,1]$ tels que $\widetilde{\gamma}_{n,m}(s) = TS_mT^{1-i_n}\widetilde{\gamma}_{n,m}(t)$. D'une part, le chemin $TS_mT^{1-i_n}\widetilde{\gamma}_{n,m}$ rencontre $T\widetilde{\phi}$ et $T\widetilde{\phi}'$, donc est entièrement inclus dans $R(T^{i_n-1}\widetilde{\phi}')$: en particulier, on a $\widetilde{\gamma}_{n,m}(s) \in R(T^{i_n-1}\widetilde{\phi}')$. D'autre part, le chemin $\widetilde{\gamma}_{n,m}$ rencontre $\widetilde{\phi}$ et $T^{i_n-1}\widetilde{\phi}'$, donc est entièrement inclus dans $L(T\widetilde{\phi})$: on a donc $TS_mT^{1-i_n}\widetilde{\gamma}_{n,m}(t) \in L(T\widetilde{\phi})$, donc $\widetilde{\gamma}_{n,m}(t) \in L(T^{i_n-1}S_m\widetilde{\phi})$, et donc $\widetilde{\gamma}_{n,m}(t) \in L(T^{i_n-1}\widetilde{\phi}')$. On a donc $\widetilde{\gamma}_{n,m}(s) \in R(T^{i_n-1}\widetilde{\phi}')$ et $\widetilde{\gamma}_{n,m}(t) \in L(T^{i_n-1}\widetilde{\phi}')$, donc forcément $s < t$.

Il s'ensuit finalement que $T^{i_n-1}S_mT^{-1}\widetilde{\gamma}_{n,m}$ et $\widetilde{\gamma}_{n,m}$ s'intersectent $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement en $T^{i_n-1}S_mT^{-1}\widetilde{\gamma}_{n,m}(s) = \widetilde{\gamma}_{n,m}(t)$ avec $s < t$. □

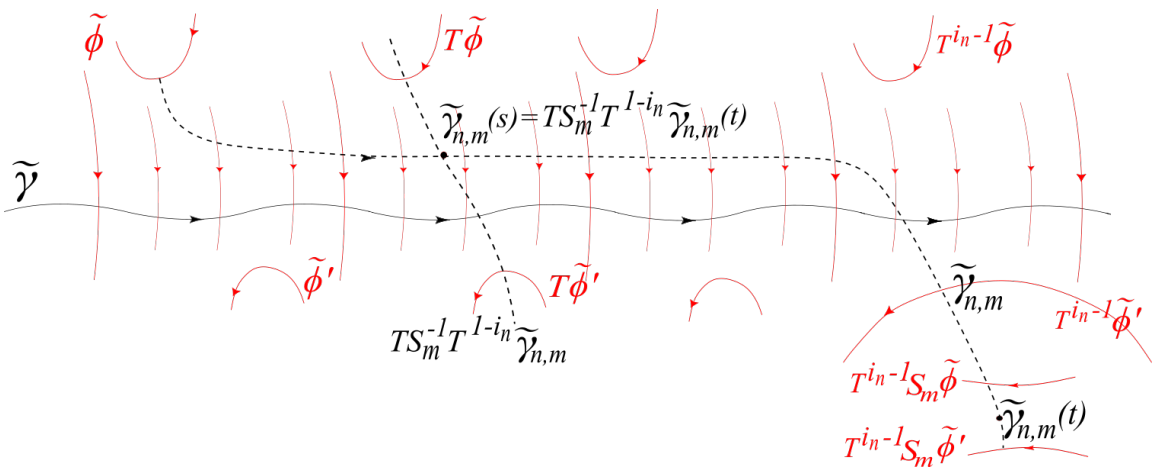

FIGURE 3.7 – Le lemme 3.4.10 : l'intersection $\widetilde{\mathcal{F}}-$transverse apparaît ici clairement.

On peut tout de suite déduire de ce résultat la première proposition qui nous intéresse (proposition 3.4.1) :

Proposition 3.4.11. *Il existe un point $z \in M$ dont la trajectoire transverse a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse.*

Démonstration. Ce résultat est inclus dans le lemme 3.4.10. □

3.4.4 Existence de points périodiques

Avant de prouver la seconde conséquence de l'étude précédente (corollaire 3.4.2), énonçons le lemme simple suivant :

Lemme 3.4.12. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles strictement positives, telles qu'il existe deux constantes $C, C' > 0$ avec $u_n \sim Cn$ et $v_n \sim C'n$. Alors*

$$\left\{\frac{u_n}{u_n+v_m}, n, m \in \mathbb{N}\right\} \text{ est dense dans } [0,1].$$

Démonstration. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe deux suites $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels, tendant vers $+\infty$, telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n}{l_n} = \frac{C'}{C}.$$

Pour $p < q \in \mathbb{N}$, on a alors

$$\frac{v_{l_n\times(q-p)}}{u_{k_n\times p}} \sim \frac{C' l_n \times (q-p)}{C k_n \times p} \sim \frac{q-p}{p},$$

$$\text{donc } \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{k_n\times p}}{u_{k_n\times p} + v_{l_n\times(q-p)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{v_{l_n\times(q-p)}}{u_{k_n\times p}}} = \frac{1}{1+\frac{q-p}{p}} = \frac{p}{q}.$$

Il s'ensuit que l'adhérence de l'ensemble qui nous intéresse contient tous les rationnels de $[0,1[$, donc que cette adhérence est bien $[0,1]$. □

On peut maintenant prouver la proposition 3.4.2 :

Proposition 3.4.13. *Pour tout $r \in [0,1]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un point périodique $z \in M$ dont le vecteur de rotation ρ_z appartient à $B(r\rho_\mu + (1-r)\rho_\nu, \varepsilon)$. De plus, pour tout $\kappa \in \mathbb{Q}\cap]0,1]$, il existe un point périodique de vecteur de rotation $\kappa\rho_z$.*

Démonstration. Soit K donné par le lemme 3.4.10. On reprend également toutes les notations introduites précédemment. Fixons $r \in [0,1]$ et $\varepsilon > 0$. Tout d'abord, rappelons que par définition des suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$\rho_\mu = \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{s_n}{r_n}\right)[T], \quad \text{et} \quad \rho_\nu = \lim_{n\to+\infty} \frac{[S_n]}{k_n}.$$

Ceci ajouté au fait que $i_n \sim s_n$ montre qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$,

$$\frac{i_n - 2}{K + r_n}[T] \in B\left(\rho_\mu, \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{[S_n]}{k_n} \in B\left(\rho_\nu, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Fixons maintenant un réel $\eta > 0$ tel que $2\eta(||\rho_\mu|| + ||\rho_\nu|| + \varepsilon) < \varepsilon$. On applique le lemme 3.4.12 avec $u_n = K + r_n$ (il existe par définition de $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une constante $C' > 0$ telle que $u_n \sim C'n$) et $v_n = k_n$ (il existe par définition de $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une constante $C > 0$ telle que $v_n \sim Cn$) : par densité, il existe $n \geq \max(N_0, n_0)$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que

$$\frac{K + r_n}{K + r_n + k_m} \in]r-\eta, r+\eta[.$$

Fixons de tels n et m, et définissons la quantité

$$\rho_{n,m} = \frac{i_n - 2}{K + r_n + k_m}[T] + \frac{1}{K + r_n + k_m}[S_m].$$

Montrons que $\rho_{n,m} \in B(r\rho_\mu + (1-r)\rho_\nu, \varepsilon)$. Soit donc δ, δ', et d les quantités

$$\delta = \frac{i_n - 2}{K + r_n}[T] - \rho_\mu, \quad \delta' = \frac{[S_m]}{k_m} - \rho_\nu \quad \text{et} \quad d = \frac{K + r_n}{K + r_n + k_m} - r,$$

de sorte que $||\delta|| < \varepsilon/2$ et $||\delta'|| < \varepsilon/2$ (puisque $n \geq N_0$), et $|d| < \eta$. On a alors

$$\rho_{n,m} = \frac{K + r_n}{K + r_n + k_m} \times \frac{i_n - 2}{K + r_n}[T] + \frac{k_m}{K + r_n + k_m} \times \frac{[S_m]}{k_m} = r\rho_\mu + (1-r)\rho_\nu + \Delta,$$

avec $\Delta = r\delta + (1-r)\delta' + d(\rho_\mu + \delta) - d(\rho_\nu + \delta')$. Évaluons la norme de Δ : comme $r \leq 1$, que $||\delta|| < \varepsilon/2$ et $||\delta'|| < \varepsilon/2$, et $|d| < \eta$, et par définition de η, on a

$$||\Delta|| < \frac{\varepsilon}{2} \times r + \frac{\varepsilon}{2} \times (1-r) + \eta\left(\|\rho_\mu\| + \|\rho_\nu\| + \varepsilon\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc finalement, on a bien

$$\rho_{n,m} \in B(r\rho_\mu + (1-r)\rho_\nu, \varepsilon).$$

Mais maintenant, le lemme 3.4.10 dit que, ayant fixé de tels $n \geq n_0$ et $m \in \mathbb{N}$, il existe un chemin transverse $\widetilde{\gamma}_{n,m}$ admissible d'ordre $K + r_n + k_m$ et deux réels $s < t$ tels que $\widetilde{\gamma}_{n,m}$ et $T^{i_n - 1}S_m T^1 \widetilde{\gamma}_{n,m}$ ont une intersection transverse au point $\widetilde{\gamma}_{n,m}(t) = T^{i_n-1}S_m T^{-1}\widetilde{\gamma}_{n,m}(s)$. Par le théorème 1.3.8 issu de la théorie de forçage de Le Calvez et Tal, cela fournit un point pérodique z dont le vecteur de rotation est

$$\rho_z = \frac{(i_n - 2)[T] + [S_m]}{K + r_n + k_m} = \rho_{n,m} \in B(r\rho_\mu + (1-r)\rho_\nu, \varepsilon).$$

De plus, le même théorème assure aussi que pour tout $\kappa \in \mathbb{Q} \cap]0,1]$, il existe un point périodique de vecteur de rotation $\kappa\rho_z$. □

Cela conclut donc la preuve de la proposition 3.4.2. Terminons ce paragraphe par le corollaire suivant, permettant de trouver de multiples points périodiques dans le cas où les deux trajectoires considérées sont en fait périodiques :

Proposition 3.4.14. *Soit x et y deux points périodiques de vecteurs de rotation ρ_x et ρ_y tels que $\rho_x \wedge \rho_y \neq 0$.*

Pour tout $r \in [0,1]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un point z périodique dont le vecteur de rotation ρ_z appartient à $B(r\rho_x + (1-r)\rho_y, \varepsilon)$. De plus, pour tout $\kappa \in \mathbb{Q} \cap]0,1]$, il existe un point périodique de vecteur de rotation $\kappa\rho_z$.

Démonstration. Soit μ la mesure ergodique équidistribuée sur l'orbite de x et ν la mesure ergodique équidistribuée sur l'orbite de y. Les points x et y sont bien sûr génériques pour les mesures μ et ν. Comme ils sont périodiques, leurs trajectoires transverses sont des lacets, donc trivialement équivalentes en $+\infty$ à des lacets. De plus, par le lemme 2.1.4, l'une des trajectoires $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ ou $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ ne s'accumule pas dans l'autre : on peut donc appliquer la proposition 3.4.2 qui permet immédiatement de conclure. □

3.5 Preuve des théorèmes A et C

3.5.1 Réunion des résultats précédents

En combinant les différentes études menées précédemment, on obtient la classification suivante :

Proposition 3.5.1. *Soit μ et ν deux mesures ergodiques $f-$invariantes dont on note ρ_μ et ρ_ν les vecteurs de rotation, x un point $\mu-$générique et y un point $\nu-$générique. On suppose qu'il existe une approximation γ_x de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ et une approximation γ_y de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ telles que $\rho_\mu \wedge [\gamma_x] \geq 0$, $[\gamma_x] \wedge \rho_\nu > 0$, $[\gamma_y] \wedge \rho_\nu \geq 0$ et $\rho_\mu \wedge [\gamma_y] > 0$. Alors on est dans l'un des deux cas suivants :*
- soit $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ ne s'accumule pas dans $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$, et l'une des trois situations suivantes est alors réalisée : $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ et $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ ont une intersection $\mathcal{F}-$transverse, ou $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse, ou $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ est équivalent en $+\infty$ ou en $-\infty$ à γ_x,
- soit $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ ne s'accumule pas dans $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$, et l'une des trois situations suivantes est alors réalisée : $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ et $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ ont une intersection $\mathcal{F}-$transverse, ou $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse, ou $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ est équivalent en $+\infty$ ou en $-\infty$ à γ_y.

Démonstration. Par le lemme 2.1.4, soit $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ ne s'accumule pas dans $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$, soit $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ ne s'accumule pas dans $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$. On va traiter le cas où $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ ne s'accumule pas dans $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$, l'autre cas étant en tout point similaire.

On suppose donc que $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ n'est pas équivalente, en $+\infty$ ou en $-\infty$, à γ_x, et on veut montrer que soit $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ et $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ ont une intersection $\mathcal{F}-$transverse, soit $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse. Fixons un relevé $\widetilde{x}$ de x à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ et $\widetilde{\gamma}_x$ le relevé de γ_x associé (de sorte donc que $\widetilde{\gamma}_x$ est une approximation de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$). Comme $\widetilde{\gamma}_x$ est une approximation de $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$, cette dernière rencontre donc la bande $B(\widetilde{\gamma}_x)$. Par hypothèse, $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ n'est équivalente à $\widetilde{\gamma}_x$ ni en $+\infty$, ni en $-\infty$. De plus, il est impossible que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ s'accumule dans $\widetilde{\gamma}_x$: en effet, cela impliquerait par le lemme 2.1.14 que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ s'accumule dans un de ses translatés, ce qui contredit le lemme 2.1.3. Le lemme 2.1.9 permet alors de conclure que soit $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ visite $B(\widetilde{\gamma}_x)$, soit $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ traverse $B(\widetilde{\gamma}_x)$. Si $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ visite $B(\widetilde{\gamma}_x)$, la proposition 2.1.15 permet de conclure que $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse. On suppose donc que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ traverse la bande $B(\widetilde{\gamma}_x)$.

Si $\rho_\mu \wedge [\gamma_x] = 0$, on est exactement dans le cadre de la proposition 3.3.5, qui indique que $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse. On suppose donc que $\rho_\mu \wedge [\gamma_x] \neq 0$. On a donc $\rho_\mu \wedge [\gamma_x] > 0$ et $[\gamma_x] \wedge \rho_\nu > 0$. Par la proposition 2.3.2, il existe donc un relevé $S\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ (avec $S \in \mathcal{G}$) qui traverse $B(\widetilde{\gamma}_x)$ de gauche à droite. De même, $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$ ne peut s'accumuler dans $\widetilde{\gamma}_x$, sans quoi par le lemme 2.1.14, elle s'accumulerait dans $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$: on peut donc appliquer la proposition 2.3.2 qui indique il existe un relevé $\widetilde{y}$ de y à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ tel que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$ traverse $B(\widetilde{\gamma}_x)$ de droite à gauche.

En particulier, l'une des deux trajectoires $S\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ et $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$ traverse $B(\widetilde{\gamma}_x)$ dans l'autre sens que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$: la proposition 2.1.16 permet alors de conclure que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ et cette trajectoire ont une intersection $\mathcal{F}-$transverse, donc que soit $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse, soit $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ et $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ ont une intersection $\mathcal{F}-$transverse. □

Remarque : bien sûr, le résultat qui permettra d'appliquer cette proposition est la proposition 3.2.6.

3.5.2 Comportement chaotique

On peut maintenant montrer la proposition F :

Proposition 3.5.2. *S'il existe deux mesures de probabilité ergodiques $f-$invariantes μ et ν de vecteurs de rotation ρ_μ et ρ_ν tels que $\rho_\mu \wedge \rho_\nu \neq 0$, alors :*
- soit il existe deux points récurrents z et $z' \in M$ dont les trajectoires transverses ont une intersection $\mathcal{F}-$transverse,
- soit il existe un point $z \in M$ dont la trajectoire transverse a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse.

Démonstration. Supposons que $\rho_\mu \wedge \rho_\nu > 0$, l'autre cas étant symétrique. On peut donc appliquer la proposition 3.2.6 : il existe un point $\mu-$générique x et un point $\nu-$générique y, et deux approximations γ_x et γ_y de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ et $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ tels que $\rho_\mu \wedge [\gamma_x] \geq 0$ et $[\gamma_x] \wedge \rho_\nu > 0$, et $[\gamma_y] \wedge \rho_\nu \geq 0$ et $\rho_\mu \wedge [\gamma_y] > 0$.

On est donc exactement dans le cadre de la proposition 3.5.1. Supposons par exemple être dans le cas où $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ ne s'accumule pas dans $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ (l'autre cas étant en tout point similaire) : alors soit $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ et $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ ont une intersection transverse, soit $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ a une auto-intersection transverse, soit $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ est équivalent en $+\infty$ ou en $-\infty$ à γ_x. Dans les deux premiers cas, le théorème est donc bien vérifié (rappelons que x et y sont génériques donc récurrents). Si enfin $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ est équivalente en $+\infty$ ou en $-\infty$ à γ_x, alors on est exactement dans le cadre de la proposition 3.4.1 qui indique qu'il existe un point de M dont la trajectoire transverse a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse. □

Le théorème A s'en déduit immédiatement :

Corollaire 3.5.3. *S'il deux mesures de probabilité ergodiques $f-$invariantes μ et ν de vecteurs de rotation ρ_μ et ρ_ν tels que $\rho_\mu \wedge \rho_\nu \neq 0$, alors f est topologiquement chaotique.*

Démonstration. On applique le théorème 3.5.2 : qu'on ait deux trajectoires transverses de points récurrents s'intersectant $\mathcal{F}-$transversalement, ou une trajectoire transverse avec une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse, le théorème 1.3.7 de la théorie de forçage de Le Calvez et Tal permet de conclure que f est topologiquement chaotique. □

En particulier, on obtient alors le corollaire B :

Corollaire 3.5.4. *Si* $\mathrm{rot}(f)$ *n'est pas totalement isotrope pour la forme symplectique $\wedge$, alors f est topologiquement chaotique. En particulier, c'est donc le cas si* $\mathrm{rot}(f)$ *est de dimension au moins $g+1$.*

Démonstration. En effet, si l'ensemble de rotation n'est pas totalement isotrope, alors il en existe a fortiori deux points extrêmaux ρ et ρ' qui s'intersectent pour le produit d'intersection homologique. Ces points étant extrêmaux, ils sont vecteurs de rotation de mesures ergodiques, et on peut alors appliquer le corollaire 3.5.3. □

Remarque : ce dernier corollaire s'applique donc en particulier dans le cas où l'ensemble de rotation est d'intérieur non vide, et assure que l'entropie de f est strictement positive, ce qui en fait l'analogue naturel du théorème de Llibre et Mackay sur le tore.

3.5.3 Existence de points périodiques

Avant d'établir la preuve du résultat C qui nous intéresse, donnons une proposition établissant l'existence de multiples points périodiques dans le cas où les trajectoires transverses de points génériques pour des mesures ergodiques s'intersectent $\mathcal{F}-$transversalement. Ce résultat va se fonder sur les résultats 1.3.5 et 1.3.8 de la théorie de forçage de Le Calvez et Tal. Plus précisément, on va obtenir en "forçant" les deux trajectoires qui s'intersectent $\mathcal{F}-$transversalement une famille de chemins admissibles avec des auto-intersections $\mathcal{F}-$transverses, et cela impliquera l'existence des points périodiques cherchés.

Proposition 3.5.5. *Soit μ et ν deux mesures ergodiques $f-$invariantes, de vecteurs de rotation ρ_μ et ρ_ν. Soit x un point $\mu-$générique et y un point $\nu-$générique, dont les trajectoires transverses $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ et $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ s'intersectent $\mathcal{F}-$transversalement.*

Alors pour tout $r \in [0,1]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un point z périodique dont le vecteur de rotation ρ_z appartient à $B(r\rho_\mu + (1-r)\rho_\nu, \varepsilon)$. De plus, pour tout $\kappa \in \mathbb{Q}\cap]0,1]$, il existe un point périodique de vecteur de rotation $\kappa\rho_z$.

Démonstration. Fixons un relevé $\widetilde{x}$ de x et un relevé $\widetilde{y}$ de y à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$, dont les trajectoires $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ et $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{y})$ s'intersectent $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement. Notons $a < b$ et $a' < b'$ quatre réels tels que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[a,b]}$ intersecte $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{y}|[a',b']}$.

Soit $p < q \in \mathbb{Z}$ deux entiers, avec $p < a$ et $b < q$. On fixe un voisinage V de $\widetilde{f}^q(\widetilde{x})$ entièrement inclus dans $L(\widetilde{\phi}_{\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}}(b)})$. Par continuité, il existe un voisinage borné U de $\widetilde{f}^p(\widetilde{x})$, inclus dans $R(\widetilde{\phi}_{\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}}(a)})$, tel que $\widetilde{f}^{q-p}(U) \subset V$. Comme x est $\mu-$générique, il existe par le lemme 2.2.2 une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite strictement croissante $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers et une constante $C > 0$, tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{f}^{k_n}(\widetilde{x}) \in S_n(U)$ (on choisit $k_0 = p$ et $S_0 = \mathrm{Id}$), que $k_n \sim Cn$ et

$$\rho_\mu = \lim_{n\to+\infty} \frac{[S_n]}{k_n}.$$

De même, soit $p' < q' \in \mathbb{Z}$ deux entiers, avec $p' < a'$ et $b' < q'$. On fixe un voisinage V' de $\widetilde{f}^{q'}(\widetilde{y})$ entièrement inclus dans $L(\widetilde{\phi}_{\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{y}}(b')})$. Par continuité, il existe un voisinage borné U' de $\widetilde{f}^{p'}(\widetilde{y})$, inclus dans $R(\widetilde{\phi}_{\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{y}}(a')})$, tel que $\widetilde{f}^{q'-p'}(U') \subset V'$. Comme y est $\nu-$générique, il existe par le lemme 2.2.2 une suite $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite strictement croissante $(k'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers et une constante $C' > 0$, tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{f}^{k'_n}(\widetilde{y}) \in S'_n(U')$ (on choisit $k'_0 = p'$ et $S'_0 = \mathrm{Id}$), que $k'_n \sim C'n$ et

$$\rho_\nu = \lim_{n\to+\infty} \frac{[S'_n]}{k'_n}.$$

Fixons alors $r \in [0,1]$ et $\varepsilon > 0$. Tout d'abord, il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait

$$\frac{[S_n]}{k_n + q - 2p} \in B\left(\rho_\mu, \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{[S'_n]}{k'_n + q' - 2p'} \in B\left(\rho_\nu, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Fixons un $\eta > 0$ tel que $2\eta(||\rho_\mu|| + ||\rho_\nu|| + \varepsilon) < \varepsilon$. On applique le lemme 3.4.12 avec $u_n = k_n + q - 2p$, $v_n = k'_n + q' - 2p'$: on a bien $u_n \sim Cn$ et $v_n \sim C'n$, donc par densité, il existe $n \geq N$ et $m \geq N$ tels que

$$\frac{k_n + q - 2p}{k_n + k'_m + q + q' - 2p - 2p'} \in]r - \eta, r + \eta[.$$

On fixe de tels n et m, et on définit alors :

$$\rho_{n,m} = \frac{[S_n] + [S'_m]}{k_n + k'_m + q + q' - 2p - 2p'}.$$

Montrons que $\rho_{n,m} \in B(r\rho_\mu + (1-r)\rho_\nu, \varepsilon)$. Soit δ et δ' les quantités

$$\delta = \frac{[S_n]}{k_n + q - 2p} - \rho_\mu \quad \text{ et } \delta' = \frac{[S'_m]}{k'_m + q' - 2p'} - \rho_\nu.$$

Comme $n, m \geq N$, on a $||\delta|| < \varepsilon/2$ et $||\delta'|| < \varepsilon/2$. Soit également le réel

$$d = \frac{k_n + q - 2p}{k_n + k'_m + q + q' - 2p - 2p'} - r, \text{ de sorte que } |d| < \eta.$$

On a alors

$$\rho_{n,m} = (r+d)(\rho_\mu + \delta) + (1-r-d)(\rho_\nu + \delta') = r\rho_\mu + (1-r)\rho_\nu + \Delta,$$

avec $\Delta = r\delta + (1-r)\delta' + d(\rho_\mu + \delta) - d(\rho_\nu + \delta')$. Évaluons finalement la norme de Δ : comme $||\delta|| < \varepsilon/2$ et $||\delta'|| < \varepsilon/2$ et $|d| < \eta$, et par définition de η, on a

$$||\Delta|| < r\frac{\varepsilon}{2} + (1-r)\frac{\varepsilon}{2} + \eta(||\rho_\mu|| + ||\rho_\nu|| + \varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Autrement dit, on a bien, pour ce choix de n et m,

$$\rho_{n,m} \in B(r\rho_\mu + (1-r)\rho_\nu, \varepsilon).$$

Maintenant, remarquons que comme le chemin $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[k_n,k_n+q-p]}$ rencontre les feuilles $S_n\widetilde{\phi}_{\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}}(a)}$ et $S_n\widetilde{\phi}_{\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}}(b)}$, il admet alors $S_n\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[a,b]}$ comme sous-arc et a donc une intersection $\widetilde{\mathcal{F}}-$transverse avec $S_n\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{y}|[p',q']}$. Il existe donc $t \in [k_n, k_n+q-p]$ et $s \in [k'_0, k'_0+q'-p']$ (rappelons qu'on a choisi $k'_0 = p'$) tels que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[k_0,k_n+q-p]}$ et $S_n\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{y}|[k'_0,k'_m+q'-p']}$ ont une intersection $\widetilde{\mathcal{F}}-$transverse en $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}}(t) = S_n\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{y}}(s)$. En appliquant la proposition 1.3.5, le chemin $\widetilde{\gamma}$ obtenu en concaténant $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[k_0,t]}$ et $S_n\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{y}|[s,k'_m+q'-p']}$ est donc admissible d'ordre $k_n + k'_m + q + q' - 2p - 2p'$ (on rappelle que $k_0 = p$ et $k'_0 = p'$).

De plus, $\widetilde{\gamma}$ contient le sous-arc $S_n\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{y}|[k'_m,k'_m+q'-p']}$: par définition, cette portion relie $S_nS'_mU'$ à $S_nS'_mV'$, donc contient un sous-arc équivalent à $S_nS'_m\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{y}|[a',b']}$. Mais $\widetilde{\gamma}$ contient aussi le sous-arc $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{x}|[a,b]}$, qui par définition intersecte $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},\widetilde{y}|[a',b']}$: il s'ensuit que $S_nS'_m\widetilde{\gamma}$ et $\widetilde{\gamma}$ ont une intersection $\widetilde{\mathcal{F}}-$transverse. On a donc un chemin admissible $\widetilde{\gamma}$, d'ordre d'admissibilité $k_n + k'_m + q + q' - 2p - 2p'$ ayant une intersection $\widetilde{\mathcal{F}}-$transverse avec $S_nS'_m\widetilde{\gamma}$: par théorème 1.3.8 de Le Calvez et Tal, on déduit qu'il existe un point périodique $\widetilde{z} \in \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ tel que $\widetilde{f}^{k_n+k'_m+q+q'-2p-2p'}(\widetilde{z}) = S_nS'_m(\widetilde{z})$, et donc qui a un vecteur de rotation

$$\rho_{\widetilde{z}} = \frac{[S_n] + [S'_m]}{k_n + k'_m + q + q' - 2p - 2p'} = \rho_{n,m} \in B(r\rho_\mu + (1-r)\rho_\nu, \varepsilon).$$

De plus, ce même théorème assure que pour tout $\kappa \in \mathbb{Q}\cap]0,1]$, le vecteur $\kappa\rho_{\widetilde{z}}$ est également réalisé par une orbite périodique. $\square$

Notons que la proposition 3.5.5 reste vraie dans le cas où on choisit pour x et y un même point dont la trajectoire transverse a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse ; le résultat se réecrit alors dans ce cas :

Proposition 3.5.6. *Soit μ une mesure ergodique $f-$invariante de vecteur de rotation ρ, et x un point $\mu-$générique, dont la trajectoire transverse $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse.*

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un point z périodique dont le vecteur de rotation ρ_z appartient à $B(\rho_\mu, \varepsilon)$. De plus, pour tout $\kappa \in \mathbb{Q}\cap]0,1]$, il existe un point périodique de vecteur de rotation $\kappa\rho_z$.

On peut maintenant en déduire le théorème C :

Théorème 3.5.7. *Pour tous points extrêmaux ρ et ρ' de $\mathrm{rot}(f)$ tels que $\rho \wedge \rho' \neq 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $r \in [0,1]$, il existe un point périodique z de M dont le vecteur de rotation ρ_z appartient à $B(r\rho + (1-r)\rho', \varepsilon)$. De plus, pour tout $\kappa \in \mathbb{Q}\cap]0,1]$, il existe un point périodique de vecteur de rotation $\kappa\rho_z$.*

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$, et $r \in [0,1]$. Soit également deux points extrêmaux ρ et ρ' tels que $\rho \wedge \rho' \neq 0$: on dispose donc de deux mesures ergodiques μ et ν, de vecteurs de rotation ρ_μ et ρ_ν telles que $\rho_\mu \wedge \rho_\nu > 0$. On peut donc appliquer la proposition 3.2.6 : il existe un point $\mu-$générique x et un point $\nu-$générique y, et deux approximations γ_x et γ_y de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ et $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ tels que $\rho_\mu \wedge [\gamma_x] \geq 0$ et $[\gamma_x] \wedge \rho_\nu > 0$, et $[\gamma_y] \wedge \rho_\nu \geq 0$ et $\rho_\mu \wedge [\gamma_y] > 0$. On est donc exactement dans le cadre de la proposition 3.5.1. Supposons par exemple être dans le cas où $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ ne s'accumule pas dans $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ (l'autre cas étant exactement similaire) : soit $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ et $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ ont une intersection $\mathcal{F}-$transverse, soit $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse, soit $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ est équivalente en $+\infty$ ou en $-\infty$ à γ_x.

Si $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ et $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ ont une intersection $\mathcal{F}-$transverse, alors la proposition 3.5.5 permet directement de conclure. Si $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ est équivalente en $+\infty$ ou en $-\infty$ à γ_x, alors on est exactement dans le cas du théorème 3.4.2 qui permet de conclure.

Il reste donc à traiter le cas où $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse. Fixons un $\varepsilon' > 0$ tel que d'une part $\varepsilon' < \varepsilon/2$, et d'autre part tel que pour tout $a \in B(\rho_\mu, \varepsilon')$ et $a' \in B(\rho_\nu, \varepsilon')$, on ait $a \wedge a' > 0$ et $a \wedge [\gamma_y] > 0$. Par la proposition 3.5.6, il existe un point périodique z dont le vecteur de rotation ρ_z appartient à $B(\rho_\mu, \varepsilon')$. Notons μ' la mesure ergodique équidistribuée sur l'orbite périodique du point z. Par définition de ε', on a $\rho_z \wedge \rho_\nu > 0$ et $\rho_z \wedge [\gamma_y] > 0$. De plus, par le lemme 2.1.4, soit $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ ne s'accumule pas dans $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z)$, soit $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z)$ ne s'accumule pas dans $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$.

Supposons d'abord que $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ ne s'accumule pas dans $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z)$: alors comme z est périodique, la trajectoire $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z)$ est trivialement équivalente à un lacet en $+\infty$, donc on peut appliquer exactement la proposition 3.4.2. On obtient donc qu'il existe un point périodique z' de M dont le vecteur de rotation $\rho_{z'}$ appartient à $B(r\rho_z + (1-r)\rho_\nu, \varepsilon')$, et tous les $\kappa\rho_{z'}$, pour $\kappa \in \mathbb{Q}\cap]0,1]$ sont réalisés par des orbites périodiques. En particulier, on a alors

$$\begin{aligned}
||\rho_{z'} - (r\rho_\mu + (1-r)\rho_\nu)|| &= ||\rho_{z'} - (r\rho_z + (1-r)\rho_\nu) + r(\rho_z - \rho_\mu)|| \\
&\leq ||\rho_{z'} - (r\rho_z + (1-r)\rho_\mu)|| + r||\rho_z - \rho_\mu|| \\
&\leq \varepsilon' + r\varepsilon' \leq 2\varepsilon' < \varepsilon.
\end{aligned}$$

On a donc bien $\rho_{z'} \in B(r\rho_\mu + (1-r)\rho_\nu, \varepsilon)$, et le théorème est donc vrai.

Supposons maintenant que $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z)$ ne s'accumule pas dans $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$. On va appliquer de nouveau la proposition 3.5.1, avec les mesures μ' et ν, les points z et y, en gardant γ_y

comme approximation de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$, et en prenant $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z)$ comme approximation d'elle-même (c'est bien un lacet puisque z est périodique). Par hypothèse, on a donc bien les quatre inégalités permettant d'appliquer la proposition 3.5.1, donc on est dans l'une des trois situations suivantes : soit $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z)$ et $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ ont une intersection $\mathcal{F}-$transverse, soit $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse, soit $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ est équivalente en $\pm\infty$ à γ_y. Si $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z)$ et $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ ont une intersection $\mathcal{F}-$transverse, ou si $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ est équivalente en $+\infty$ ou en $-\infty$ à un lacet, alors les propositions 3.5.5 et 3.4.2 s'appliquent : il existe donc un point périodique z' de M dont le vecteur de rotation $\rho_{z'}$ appartient à $B(r\rho_z + (1-r)\rho_\nu, \varepsilon')$, et tous les $\kappa\rho_z$, pour $\kappa \in \mathbb{Q}\cap]0,1]$ sont réalisés par des orbites périodiques. En particulier, le même calcul que ci-dessus montre que $\rho_{z'} \in B(r\rho_\mu + (1-r)\rho_\nu, \varepsilon)$, et le théorème est donc vrai.

Il reste donc finalement à traiter le cas où $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse : dans ce cas, la proposition 3.5.6 indique qu'il existe un point périodique z' de M dont le vecteur de rotation $\rho_{z'}$ appartient à $B(\rho_\nu, \varepsilon')$. En particulier, par définition de ε', z et z' sont donc deux points périodiques dont les vecteurs de rotations s'intersectent : on peut donc appliquer le corollaire 3.4.14, qui nous donne l'existence d'un point périodique z'' de M dont le vecteur de rotation $\rho_{z''}$ appartient à $B(r\rho_z + (1-r)\rho_{z'}, \varepsilon')$: de plus, tous les $\kappa\rho_{z''}$, pour $\kappa \in \mathbb{Q}\cap]0,1]$ sont réalisés par des orbites périodiques. En particulier, on a donc

$$||\rho_{z''} - (r\rho_\mu + (1-r)\rho_\nu)|| = ||\rho_{z''} - (r\rho_z + (1-r)\rho_{z'}) + r(\rho_z - \rho_\mu) + (1-r)(\rho_{z'} - \rho_\nu)||$$

$$\leq ||\rho_{z''} - (r\rho_z + (1-r)\rho_\nu)|| + r||\rho_z - \rho_\mu|| + (1-r)||\rho_{z'} - \rho_\nu|| \leq \varepsilon' + r\varepsilon' + (1-r)\varepsilon' < \varepsilon.$$

On a donc bien $\rho_{z''} \in B(r\rho_\mu + (1-r)\rho_\nu, \varepsilon)$, et le théorème est donc vrai. □

Pour conclure cette section, montrons que de ce théorème se déduisent les corollaires D et E, dont on rappelle ici les énoncés :

Corollaire 3.5.8. *Si* $\mathrm{rot}(f)$ *n'est pas totalement isotrope pour la forme* $\wedge$*, alors* $\mathrm{rot}(f)$ *contient un point non nul à coordonnées rationnelles. Par exemple,* $\mathrm{rot}(f)$ *ne peut être un triangle non isotrope, sans rationnel hormis* 0.

Démonstration. Si $\mathrm{rot}(f)$ n'est pas totalement isotrope, alors il existe en particulier deux points extrêmaux ρ et ρ' tels que $\rho \wedge \rho' \neq 0$. Le théorème C s'applique donc et montre que $\mathrm{rot}(f)$ contient des points rationnels aussi proches de ρ que possible, donc en particulier, des points rationnels non nuls. □

Corollaire 3.5.9. *Si* $\mathrm{rot}(f)$ *est d'intérieur vide, alors tout segment non totalement isotrope reliant deux de ses points extrêmaux est inclus dans un hyperplan engendré par des vecteurs à coordonnées rationnelles. En particulier, si* $\mathrm{rot}(f)$ *est de dimension comprise entre* $g+1$ *et* $2g-1$*, alors il possède deux points extrêmaux dont les coordonnées ne sont pas linéairement indépendantes sur* $\mathbb{Q}$.

Démonstration. On suppose que $\mathrm{rot}(f)$ est d'intérieur vide. Soit ρ et ρ' deux points extrêmaux, tels que le segment $[\rho, \rho']$ n'est pas totalement isotrope. En particulier, on a $\rho \wedge \rho' \neq 0$. Le théorème C s'applique donc et montre que pour tout $t \in [0,1]$, il existe une suite de points rationnels $(\rho_{t,n})_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathrm{rot}(f)$ convergeant vers $t\rho + (1-t)\rho'$. En particulier, $(t\rho + (1-t)\rho') \in \mathrm{Vect}\{\rho_{t,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Mais comme $\mathrm{rot}(f)$ est d'intérieur vide, alors $\mathrm{Vect}\{\rho_{t,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de dimension strictement inférieure à $2g$, donc est inclus dans un hyperplan, qui plus est engendré par des vecteurs à coordonnées rationnelles puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rho_{n,t}$ est rationnel. Autrement dit, chaque point de $[\rho, \rho']$ appartient à un hyperplan

engendré par des vecteurs à coordonnées rationnelles. Mais il y a un nombre dénombrable de tels hyperplans, et le segment $[\rho, \rho']$ contient un nombre indénombrable de points, donc deux points du segment appartiennent à un même hyperplan H engendré par des vecteurs rationnels : cela implique que le segment entier est inclus dans H.

En particulier, si $\mathrm{rot}(f)$ est de dimension comprise entre $g+1$ et $2g-1$, alors d'une part, $\mathrm{rot}(f)$ n'est pas totalement isotrope donc possède deux points extrêmaux ρ et ρ' tels que $\rho \wedge \rho' \neq 0$; d'autre part, $\mathrm{rot}(f)$ est alors d'intérieur vide, donc ce qui précède s'applique et montre qu'en particulier, ρ et ρ' appartiennent à un hyperplan engendré par des vecteurs rationnels. Cela est équivalent à dire que les coordonnées de ρ ne sont pas linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$, et de même pour ρ'. □

Remarque : d'un point de vue purement quantitatif, les conclusions de ce dernier corollaire sont en fait assez fortes. En effet, il n'y a qu'un nombre dénombrable (donc un "petit" nombre) d'hyperplans engendré par des vecteurs rationnels ; et l'ensemble des points dont les coordonnées ne sont pas linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$ étant égal à la réunion de ces hyperplans, il est donc de mesure nulle.

3.6 Une question complémentaire

Dans l'étude qui précède, nous avons donc montré qu'à partir de deux trajectoires transverses de points génériques pour des mesures ergodiques dont les vecteurs de rotation s'intersectent, nous étions en mesure de construire des intersections $\mathcal{F}-$transverses. La question que l'on se pose dans cette section est : ce résultat tient-il si les deux points considérés ne sont plus associés au même homéomorphisme ?

Plus précisément, considérons deux homéomorphismes $f : M \to M$ et $g : M \to M$, isotopes à l'identité. On fixe une isotopie maximale I entre Id_M et f, et une isotopie maximale I' entre Id_M et g, et on suppose qu'il existe un feuilletage transverse $\mathcal{F}$ commun à I et I'. Soit μ une mesure ergodique $f-$invariante dont on note ρ_μ^f le vecteur de rotation, et ν une mesure ergodique $g-$invariante dont on note ρ_ν^g le vecteur de rotation, telles que $\rho_\mu^f \wedge \rho_\nu^g \neq 0$. Peut-on assurer qu'il existe des chemins admissibles pour f ou pour g qui ont des intersections $\mathcal{F}-$transverses ? La question peut paraître quelque peu artificielle, mais elle provient d'un travail récent de Le Calvez et Sambarino.

Afin de répondre à cette question, on va supposer de plus que f et g ont exactement les mêmes chemins admissibles (c'est-à-dire que tout chemin admissible pour l'un est admissible pour l'autre, mais pas nécessairement avec le même ordre). Essayons donc de voir pas à pas si, sous ces hypothèses, les différentes étapes menées dans ce chapitre s'adaptent.

La première étape, celle du choix des points génériques avec le lemme d'Atkinson (proposition 3.2.6), s'adapte sans difficulté puisque qu'elle fait intervenir de manière dissociée les mesures μ et ν : on peut donc trouver un point $\mu-$générique x (associé donc à f) et un point $\nu-$générique y (associé à g), dont les trajectoires transverses $I_{\mathcal{F}}^{\mathbb{Z}}(x)$ et $I'^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ ont des approximations dont les classes d'homologie intersectent ρ_μ^f et ρ_ν^g avec les "bons" signes. On peut donc travailler avec ces points génériques : à partir de là, tout ce qui mène à la proposition 3.5.1 repose uniquement sur des résultats propres aux feuilletages transverses et aux trajectoires de points génériques, et ne fait donc plus apparaître directement la dynamique de f et g. Tout ceci s'adapte donc.

Autrement dit, on arrive sans difficulté à la conclusion suivante, analogue à la proposition 3.5.1. Supposons que $I'^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ ne s'accumule pas dans $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ (le cas inverse étant similaire) ; alors l'une des trois situations suivantes est réalisée : $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ et $I'^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ ont une intersection $\mathcal{F}-$transverse, ou $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse, ou $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ est équivalente en $+\infty$ ou en $-\infty$ à un lacet.

Le seul cas qui paraît donc faire obstruction à la construction directe d'intersections $\mathcal{F}-$transverses est donc le cas où l'une des trajectoires est équivalente à un lacet. En effet, plaçons-nous dans le cas où $I'^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(y)$ ne s'accumule pas dans $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$, et où $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(x)$ est équivalente à un lacet γ_x. On dispose donc d'une orbite de $\widetilde{f}$ (relevé de f à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$) qui "suit" la bande définie par un relevé $\widetilde{\gamma}_x$ de de γ_x à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$, et, par un équivalent du lemme 3.4.3, d'une orbite de $\widetilde{g}$ (relevé de g à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$) qui traverse cette même bande : si l'on essaie d'adapter la suite de l'étude menée en section 3.4 à cette nouvelle situation, on s'aperçoit que celle-ci fait intervenir les dynamiques des deux orbites simultanément. Dans le cas où ces deux orbites ne sont pas associées au même homéomorphisme, l'argument de forçage ne peut donc plus fonctionner tel quel. Néanmoins, rappelons que l'on a supposé que f et g ont exactement les mêmes chemins admissibles. Autrement dit, puisque qu'une certaine orbite de $\widetilde{g}$ traverse $B(\widetilde{\gamma}_x)$, c'est aussi le cas d'une orbite de $\widetilde{f}$. En remplaçant l'orbite de $\widetilde{g}$ par cette orbite de $\widetilde{f}$, on se retrouve donc exactement dans la situation du paragraphe 3.4, et on peut donc conclure qu'il existe un point dont la trajectoire transverse, pour f, a une auto-intersection transverse.

Grâce à l'hypothèse selon laquelle f et g ont les mêmes chemins admissibles, on parvient donc à montrer que l'une des trois situations suivantes est réalisées : soit il existe une trajectoire transverse de f avec une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse, soit il existe une trajectoire transverse de g avec une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse, soit il existe une trajectoire transverse de f et une trajectoire transverse de g avec une intersection $\mathcal{F}-$transverse. Mais puisque f et g ont les mêmes chemins admissibles, il est équivalent de dire qu'il existe une trajectoire transverse de f avec une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse et une trajectoire transverse de g avec une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse. On obtient donc finalement :

Théorème 3.6.1. *Soit $f : M \to M$ et $g : M \to M$ deux homéomorphismes isotopes à l'identité, I une isotopie maximale entre Id_M et f, et I' une isotopie maximale entre Id_M et g, ayant un feuilletage transverse commun. Soit μ une mesure ergodique $f-$invariante de vecteur de rotation ρ^f_μ, et ν une mesure ergodique $g-$invariante de vecteur de rotation ρ^g_ν, telles que $\rho^f_\mu \wedge \rho^g_\nu \neq 0$.*

Si f et g ont les mêmes chemins admissibles, alors f et g ont un fer-à-cheval.

En guise d'application, on pourra remarquer que si f est un homéomorphisme isotope à l'identité, dont on note I une isotopie maximale et $\mathcal{F}$ un feuilletage transverse à I, alors $\mathcal{F}$ reste un feuilletage transverse à toute petite perturbation g de f, égale à f sur un voisinage de $\mathrm{Fix}(I)$. En particulier, si f n'a pas de fer-à-cheval, et qu'il existe deux mesures μ et ν respectivement $f-$invariante et $g-$invariantes dont les vecteurs de rotation s'intersectent, alors le théorème 3.6.1 implique que f et g n'ont pas les mêmes chemins admissibles.

Chapitre 4

Uniformité des déplacements

On considère une surface M compacte et orientable de genre $g \geq 2$, et $f : M \to M$ un homéomorphisme isotope à l'identité, dont on note $\mathrm{rot}(f)$ l'ensemble de rotation. Soit I une isotopie entre Id_M et f. On fixe une norme $\|.\|$ sur $H_1(M, \mathbb{R})$, et on note d la distance sur $H_1(M, \mathbb{R})$ associée à cette norme.

On choisit également une métrique riemannienne sur M. Dans toute la suite, pour tout $x, y \in M$, on fixe un chemin $c_{x,y}$ reliant x à y de sorte que les chemins $(c_{x,y})_{x,y \in M}$ soient de longueurs (relativement à cette métrique riemannienne) bien définies et uniformément bornées en x et y. On note $c_{x,y}^{-1}$ le chemin $c_{x,y}$ parcouru en sens inverse. On impose de plus que pour tout $x \in M$, le chemin $c_{x,x}$ soit le chemin trivial. Pour tout chemin $\alpha : [a, b] \to M$, on note ℓ_α le lacet obtenu en concaténant α avec $c_{\alpha(b),\alpha(a)}$, et $\overline{\alpha}$ la classe d'homologie de ce lacet. Par abus de langage, la classe $\overline{\alpha}$ sera appelée *homologie* du chemin α.

Le but de ce chapitre est de montrer le théorème G, dont on rappelle ici l'énoncé :

Théorème 4.0.1. *Si* $0 \in \mathrm{Int}(\mathrm{rot}(f))$*, alors il existe* $L > 0$ *tel que pour tout* $z \in M$ *et* $n \in \mathbb{N}$*, on ait* $d(\overline{I^n(z)}, n\mathrm{rot}(f)) \leq L$.

Remarquons d'emblée que cet énoncé est indépendant du choix de la famille de chemins $(c_{x,y})_{x,y \in M}$ (bien que les homologies $\overline{I^n(z)}$ en dépendent) : en effet, choisir une autre famille de chemins modifierait au pire les classes $\overline{I^n(z)}$ d'un terme uniformément borné. De plus, il est aussi indépendant du choix de l'isotopie : choisir une autre isotopie ne change en effet pas la classe d'homotopie des lacets $\ell_{I^n(z)}$, et donc ne change pas les homologies $\overline{I^n(z)}$. Enfin, ce résultat est bien sûr également indépendant du choix de la norme $\|.\|$.

Afin d'utiliser les résultats des chapitres précédents et la théorie de forçage, on va choisir I comme étant une isotopie maximale entre Id_M et f : on peut donc fixer un feuilletage $\mathcal{F}$ transverse à I. On note $\mathrm{dom}(\mathcal{F})$ le domaine de définition de $\mathcal{F}$ et $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ son revêtement universel, et on désigne par $\mathcal{G}$ le groupe des automorphismes de ce revêtement ; on note également $\widetilde{\mathcal{F}}$ le feuilletage non singulier $\mathcal{G}-$invariant relevé à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$.

La section 4.1 présente divers résultats préliminaires indispensables à la preuve du théorème, y compris la proposition H de l'introduction. La section 4.2 est consacrée à la preuve en elle-même. Enfin, en section 4.3, on s'intéresse aux conséquences de ce résultat, c'est-à-dire aux résultats I, J et K cités dans l'introduction (et que nous réénoncerons en préambule de cette section).

4.1 Préliminaires à la preuve

4.1.1 Motivations et plan de la section

Ce paragraphe est destiné à motiver les différents résultats préliminaires à la preuve du théorème G, résultats que nous énonçons et montrons dans les paragraphes suivants. Ce n'est pas à proprement parler le plan de la preuve, que nous détaillerons au début de la section suivante, une fois ces préliminaires établis.

L'idée de la preuve du théorème G est grosso modo la même que celle du résultat analogue 3 dans le cas du tore, présentée dans [LCT18]. L'argument va consister à montrer que l'homologie d'une trajectoire $I^n(z)$ est uniformément proche d'une certaine combinaison des homologies de trajectoires de points périodiques, qui s'avèrera être par convexité dans l'ensemble $n\mathrm{rot}(f)$. Plus précisément, il va falloir travailler avec la notion d'homologie pour un chemin non nécessairement fermé que nous avons définie en introduction de ce chapitre. Le but du paragraphe 4.1.2 sera d'établir quelques lemmes formalisant la manière dont nous pourrons manier cette notion.

Pour trouver les points périodiques qui vont nous intéresser, nous nous appuierons sur la proposition fondamentale 1.3.5 et le théorème 1.3.8, dans le but de construire des trajectoires ayant des intersections (ou auto-intersections) $\mathcal{F}-$transverses. C'est ici que l'hypothèse selon laquelle 0 est dans l'intérieur de $\mathrm{rot}(f)$ va jouer un rôle majeur, en contraignant grandement la dynamique des feuilles du feuilletage $\mathcal{F}$. Plus précisément, cette hypothèse va avoir deux conséquences importantes, qui vont permettre d'éviter les situations problématiques pour obtenir des intersections $\mathcal{F}-$transverses.

La première de ces conséquences, que nous verrons au paragraphe 4.1.3, est, en supposant donc que $0 \in \mathrm{Int}(\mathrm{rot}(f))$, qu'aucun lacet transverse non homologue à 0 ne peut s'accumuler dans un chemin transverse. Ceci va être très utile dès qu'il s'agira de construire des intersections $\mathcal{F}-$transverses, puisque l'accumulation, comme on le sait, en est une des principales obstructions. La seconde des conséquences de l'hypothèse $0 \in \mathrm{Int}(\mathrm{rot}(f))$ est qu'en construisant une famille de lacets transverses dont les classes d'homologie engendrent $H_1(M, \mathbb{R})$ et contiennent 0 dans l'intérieur de leur enveloppe convexe (construction faite au paragraphe 4.1.4), on va pouvoir montrer au paragraphe 4.1.5 que les feuilles du feuilletage sont bornées "en homologie" : c'est-à-dire que les homologies des portions de feuille sont uniformément bornées. D'autres conséquences sur les chemins de grande homologie seront également données dans ce paragraphe 4.1.5.

Enfin, on terminera ces préliminaires au paragraphe 4.1.6 en définissant la bonne notion de "subdivision" des trajectoires qui nous servira dans la preuve.

4.1.2 Homologie pour les chemins non fermés

Le but de ce paragraphe est d'énoncer quelques résultats simples qui nous permettront de travailler uniquement avec des classes $\overline{\alpha}$, en oubliant les chemins $(c_{x,y})_{x,y\in M}$. Le premier contrôle l'erreur entre l'homologie d'un chemin et la somme des homologies de différents sous-chemins dont il est la concaténation :

Lemme 4.1.1. *Il existe $K_0 > 0$ tel que pour tout chemin $\alpha : [a,b] \to M$, pour toute subdivision $a = a_0 < a_1 < ... < a_{n-1} < a_n = b$ de $[a,b]$,*

$$\left\| \overline{\alpha} - \sum_{i=0}^{n-1} \overline{\alpha_{|[a_i,a_{i+1}]}} \right\| \leq (n-1)K_0.$$

Démonstration. Comme les chemins $c_{x,y}$ sont de longueurs uniformément bornées en x et y, alors il existe une constante $K_0 > 0$ telle que pour tout $x, y, z \in M$, $\|[\gamma_{x,y,z}]\| \leq K_0$, où $\gamma_{x,y,z}$ est le lacet obtenu en concaténant $c_{x,y}^{-1}$, $c_{z,x}^{-1}$ et $c_{z,y}$. Montrons que le lemme est vrai avec cette constante K_0, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $n = 1$, alors $\alpha_{|[a_0,a_1]} = \alpha$ donc le membre de gauche de l'inégalité est bien nul.

Supposons que le résultat soit vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Pour une subdivision $a = a_0 < a_1 < ... < a_n < a_{n+1} = b$ de $[a, b]$, le cycle représenté par le lacet ℓ_α est homologue à la somme des cycles représentés par les lacets $\ell_{\alpha_{|[a_0,a_n]}}$, $\ell_{\alpha_{|[a_n,a_{n+1}]}}$ et $\gamma_{a_n,a_0,a_{n+1}}$. Par définition de K_0, on a donc

$$\left\|\overline{\alpha} - \overline{\alpha_{|[a_0,a_n]}} - \overline{\alpha_{|[a_n,a_{n+1}]}}\right\| = \left\|[\gamma_{a_n,a_0,a_{n+1}}]\right\| \leq K_0.$$

Il reste à appliquer l'hypothèse de récurrence au chemin $\alpha_{||[a_0,a_n]}$ avec la subdivision $a_0 < a_1 < ... < a_n$, pour obtenir

$$\begin{aligned}\left\|\overline{\alpha} - \sum_{i=0}^{n} \overline{\alpha_{|[a_i,a_{i+1}]}}\right\| &\leq \left\|\overline{\alpha} - \overline{\alpha_{|[a_0,a_n]}} - \overline{\alpha_{|[a_n,a_{n+1}]}}\right\| + \left\|\overline{\alpha_{|[a_0,a_n]}} - \sum_{i=0}^{n-1} \overline{\alpha_{|[a_i,a_{i+1}]}}\right\| \\ &\leq K_0 + (n-1)K_0 = nK_0.\end{aligned}$$

Ceci clôt la récurrence et la preuve du résultat. □

Le second lemme assure que l'erreur faite au niveau des nombres d'intersection avec un lacet est également contrôlable :

Lemme 4.1.2. *Soit $\gamma : \mathbb{R} \to M$ un lacet, et $\widehat{\mathcal{C}}$ l'ensemble des relevés de γ au revêtement universel $\widehat{M}$ de M. Pour tout chemin $\alpha : [a, b] \to M$, dont on fixe un relevé $\widehat{\alpha}$ à $\widehat{M}$, on note N_α le nombre d'éléments $\widehat{\gamma}$ de $\widehat{\mathcal{C}}$ dont le nombre d'intersection avec $\widehat{\alpha}$ est bien défini et non nul. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout chemin α, on ait $|\overline{\alpha} \wedge [\gamma]| \leq N_\alpha + N$.*

Démonstration. Comme les chemins $(c_{x,y})_{x,y\in M}$ sont de longueurs uniformément bornées, il existe N tel que tout relevé $\widehat{c}_{x,y}$ d'un chemin $c_{x,y}$ à $\widehat{M}$ rencontre au plus N éléments de $\widehat{\mathcal{C}}$. Montrons que le lemme est vrai avec cette constante N.

Soit $\alpha : [a, b] \to M$ un chemin de M. On suppose que $\overline{\alpha} \wedge [\gamma] \neq 0$, le lemme étant trivialement vrai dans le cas contraire. On paramètre le lacet ℓ_α de sorte que $\ell_{\alpha|[0,\frac{1}{2}]}$ soit une reparamétrisation de α et que $\ell_{\alpha|[\frac{1}{2},1]}$ soit une reparamétrisation de $c_{\alpha(b),\alpha(a)}$, puis on périodise le tout en une application $\ell_\alpha : \mathbb{R} \to M$ périodique de période 1. On en fixe alors un relevé $\widehat{\ell}_\alpha : \mathbb{R} \to \widehat{M}$, et (en notant G le groupe des automorphismes du revêtement $\widehat{M}$), on note $T \in G$ l'automorphisme associé (i.e. tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\widehat{\ell}_\alpha(t + 1) = T\widehat{\ell}_\alpha(t)$).

Soit alors $\sim$ la relation d'équivalence sur $\widehat{\mathcal{C}}$ définie en posant, pour tout $\widehat{\gamma}, \widehat{\gamma}' \in \widehat{\mathcal{C}}$, $\widehat{\gamma}' \sim \widehat{\gamma}' \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \widehat{\gamma} = T^k\widehat{\gamma}'$. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour $\sim$. Pour toute classe $e \in \mathcal{E}$, choisissons un élément $\widehat{\gamma}_e$ de e. Par la proposition 1.1.10, pour tout $e \in \mathcal{E}$, le nombre d'intersection $i(\widehat{\ell}_\alpha, \widehat{\gamma}_e)$ entre $\widehat{\ell}_\alpha$ et $\widehat{\gamma}_e$ est bien défini, vaut -1, 0 ou 1, et on a

$$\overline{\alpha} \wedge [\gamma] = i(\ell_\alpha, \gamma) = \sum_{e\in\mathcal{E}} i(\widehat{\ell}_\alpha, \widehat{\gamma}_e).$$

Notant $\mathcal{E}^*$ l'ensemble (fini) des classes $e \in \mathcal{E}$ pour lesquelles $i(\widehat{\ell}_\alpha, \widehat{\gamma}_e) \neq 0$, on a alors

$$\overline{\alpha} \wedge [\gamma] = \sum_{e\in\mathcal{E}^*} i(\widehat{\ell}_\alpha, \widehat{\gamma}_e), \qquad \text{donc } |\overline{\alpha} \wedge [\gamma]| \leq \mathrm{Card}(\mathcal{E}^*).$$

Finalement, on note $\mathcal{E}_0^*$ l'ensemble des classes $e \in \mathcal{E}^*$ pour lesquelles $\widehat{\gamma}_e$ rencontre une portion $T^k\widehat{\ell}_{\alpha|[\frac{1}{2},1]}$ (rappelons que $\widehat{\ell}_{\alpha|[\frac{1}{2},1]}$ correspond au relevé de la partie $c_{\alpha(b),\alpha(a)}$ de ℓ_α). Il reste à vérifier que par définition, on a $\mathrm{Card}(\mathcal{E}_0^*) \leq N$, et $\mathrm{Card}(\mathcal{E}^* \setminus \mathcal{E}_0^*) \leq N_\alpha$ pour obtenir finalement

$$|\overline{\alpha} \wedge [\gamma]| \leq N + N_\alpha.$$

□

De ce lemme, on utilisera en fait le corollaire suivant :

Corollaire 4.1.3. *Soit $\gamma : \mathbb{R} \to M$ un lacet transverse au feuilletage $\mathcal{F}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que tout relevé $\widetilde{\alpha}$ à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ d'un chemin $\alpha : [a,b] \to \mathrm{dom}(\mathcal{F})$ a un nombre d'intersection bien défini et non nul avec au moins $|\overline{\alpha} \wedge [\gamma]| - N$ relevés de γ à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$.*

Démonstration. On applique le lemme 4.1.2 : soit N la constante qu'il fournit. Fixons un chemin $\alpha : [a,b] \to \mathrm{dom}(\mathcal{F})$, dont on note $\widehat{\alpha}$ un relevé à $\widehat{M}$ et soit $\widetilde{\alpha}$ un relevé de $\widehat{\alpha}$ à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$. Le chemin $\widehat{\alpha}$ a un nombre d'intersection bien défini et non nul avec au moins $|\overline{\alpha} \wedge [\gamma]| - N$ relevés de γ à $\widehat{M}$: ces relevés se relèvent à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ en au moins $|\overline{\alpha} \wedge [\gamma]| - N$ relevés de γ dont le nombre d'intersection avec $\widetilde{\alpha}$ est bien défini et non nul. □

4.1.3 Accumulation de lacets et ensemble de rotation

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que l'hypothèse $0 \in \mathrm{Int}(\mathrm{rot}(f))$ implique qu'aucun lacet transverse non homologue à 0 ne peut s'accumuler dans un chemin transverse. L'idée est en effet que si un tel lacet s'accumule, alors les feuilles qu'il rencontre doivent "suivre" globalement sa direction homologique, ce qui interdit tout un demi-espace de vecteurs de rotation, puisque les trajectoires transverses doivent intersecter positivement les feuilles du feuilletage. Moralement, on peut penser au cas particulier où la frontière (gauche ou droite) de la bande définie par un lacet γ qui s'accumule est constituée d'une unique feuille fermée homologue à γ (donc d'homologie non nulle) : dans cet exemple, la feuille fermée "bloque" tout un demi-espace de directions homologiques pour les points de M sous l'action de f. Ainsi, dès lors que l'ensemble de rotation n'est pas inclus dans un demi-espace de $H_1(M,\mathbb{R})$, aucun lacet ne peut s'accumuler :

Proposition 4.1.4. *Soit γ un lacet transverse sur M, avec $[\gamma] \neq 0$. On suppose qu'il existe un chemin transverse $\alpha : \mathbb{R} \to M$ dans lequel γ s'accumule. Alors $\mathrm{rot}(f)$ est inclus dans l'un des deux demi-espaces*

$$\{\rho \in H_1(M,\mathbb{R}) \mid \rho \wedge [\gamma] \geq 0\} \quad \textit{ou} \quad \{\rho \in H_1(M,\mathbb{R}) \mid \rho \wedge [\gamma] \leq 0\}.$$

Démonstration. Fixons un relevé $\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ de γ à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$, et soit $T \in \mathcal{G}$ l'automorphisme de revêtement associé (de sorte donc que $\widetilde{\gamma}$ est un $T-$lacet, c'est-à-dire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\widetilde{\gamma}(t+1) = T\widetilde{\gamma}(t)$). Soit également $\widetilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ un relevé de α dans lequel $\widetilde{\gamma}$ s'accumule. On suppose que $\widetilde{\gamma}$ s'accumule positivement dans $\widetilde{\alpha}$, l'autre cas étant similaire. Il existe donc t_0 et $t < t'$ trois réels tels que $\widetilde{\gamma}_{|[t_0,+\infty[}$ est équivalent à $\widetilde{\alpha}_{|[t,t'[}$. En particulier, la feuille $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t')}$ appartient donc à $\partial B(\widetilde{\gamma})$ (frontière de la bande définie par $\widetilde{\gamma}$) : il y a donc deux cas, selon que $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t')} \subset \partial B^R(\widetilde{\gamma})$ ou $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t')} \subset \partial B^L(\widetilde{\gamma})$. Ces deux cas vont donner les deux possibilités de l'énoncé du lemme. Supposons par exemple que $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t')} \subset \partial B^R(\widetilde{\gamma})$, et montrons que dans ce cas, on a l'inclusion $\mathrm{rot}(f) \subset \{\rho \in H_1(M,\mathbb{R}) \mid \rho \wedge [\gamma] \geq 0\}$. Soit U un ouvert borné inclus dans $R(\widetilde{\gamma})$, qui rencontre $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t')}$.

Lemme 4.1.5. *Pour toute feuille $\widetilde{\phi} \subset B(\widetilde{\gamma})$, il existe $p_0 \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $p \geq p_0$, $\widetilde{\phi} \cap T^{-p}(U) \neq \emptyset$.*

Démonstration. Soit $\widetilde{\phi} \subset B(\widetilde{\gamma})$. Il existe donc $s \in \mathbb{R}$ tel que $\widetilde{\phi} = \widetilde{\phi}_{\widetilde{\gamma}(s)}$. Comme les feuilles de $\widetilde{\gamma}$ s'accumulent sur $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\alpha}(t')}$, il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \geq t_0$, $\widetilde{\phi}_{\gamma(t)} \cap U \neq \emptyset$. Soit alors $p_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $p_0 + s \geq t_0$. Pour tout entier $p \geq p_0$, on a alors $\widetilde{\phi}_{\widetilde{\gamma}(s+p)} \cap U \neq \emptyset$, i.e. $T^p \widetilde{\phi}_{\widetilde{\gamma}(s)} \cap U \neq \emptyset$, c'est-à-dire que $\widetilde{\phi} \cap T^{-p}(U) \neq \emptyset$. □

En particulier, après avoir rencontré $\widetilde{\gamma}$, toute feuille $\widetilde{\phi} \subset B(\widetilde{\gamma})$ repasse régulièrement à distance uniformément bornée de $\widetilde{\gamma}$ (dans les ouverts $T^{-p}(U)$ pour $p \geq p_0$ donné par le lemme 4.1.5). Au vu de la "forme" du domaine $R(\widetilde{\gamma}) \cap R(\widetilde{\phi})$, cela implique donc que tout chemin transverse propre inclus dans $R(\widetilde{\gamma}) \cap R(\widetilde{\phi})$ repasse dans le passé à distance uniformément bornée de $\widetilde{\gamma}$: cette situation est représentée sur la figure 4.1.

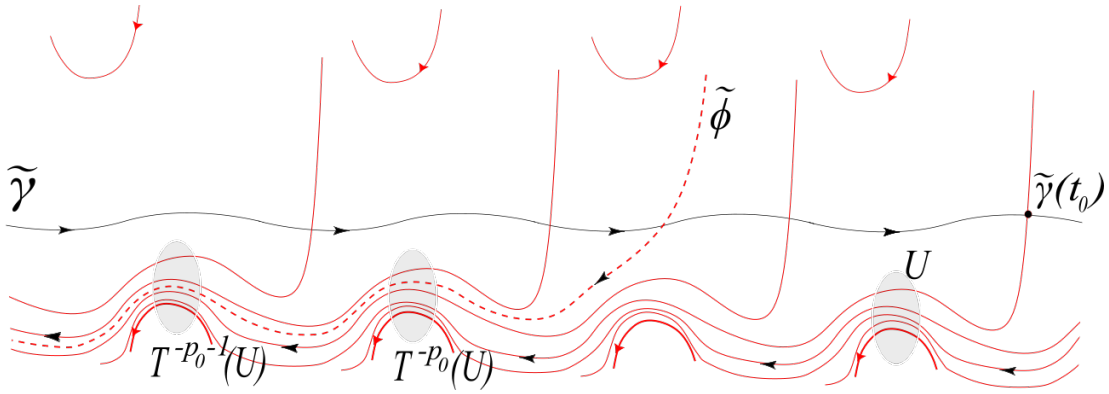

FIGURE 4.1 – Situation dans laquelle $\widetilde{\gamma}$ s'accumule positivement sur une feuille située à sa droite : toute feuille $\widetilde{\phi}$ qui rencontre $\widetilde{\gamma}$ doit rencontrer tout les $T^{-p}(U)$ à partir d'un certain rang, et donc tout chemin transverse propre inclus dans $R(\widetilde{\gamma}) \cap R(\widetilde{\phi})$ repasse dans le passé à distance uniformément bornée de $\widetilde{\gamma}$.

Supposons maintenant par l'absurde que $\mathrm{rot}(f)$ rencontre $\{\rho \in H_1(M, \mathbb{R}) \mid \rho \wedge [\gamma] < 0\}$: il existe donc un point extrêmal ρ de $\mathrm{rot}(f)$ tel que $\rho \wedge [\gamma] < 0$. Ce point extrêmal est réalisé par une mesure ergodique μ, et on fixe un point $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$ générique pour μ, dont on choisit un relevé $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$. Soit $\widetilde{V}$ un ouvert borné contenant $\widetilde{x}$, tel qu'il existe une feuille $\widetilde{\phi}_0$ du feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ séparant $\widetilde{V}$ et $\widetilde{f}(\widetilde{V})$. En particulier, $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ relie $\widetilde{V}$ à $\widetilde{f}(\widetilde{V})$ donc rencontre $\widetilde{\phi}_0$. De plus, par le lemme 2.2.2, il existe un automorphisme $S \in \mathcal{G}$, et un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $[S] \wedge [\gamma] < 0$ et $\widetilde{f}^k(\widetilde{x}) \in S(\widetilde{V})$. Ceci implique que $\widetilde{f}^{k+1}(\widetilde{x}) \in S(\widetilde{f}(\widetilde{V}))$, donc, comme $S\widetilde{\phi}_0$ sépare $S(\widetilde{V})$ et $S(\widetilde{f}(\widetilde{V}))$, que $\widetilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(\widetilde{x})$ rencontre $S\widetilde{\phi}_0$. Il existe donc un chemin transverse reliant $\widetilde{\phi}_0$ à $S\widetilde{\phi}_0$. Cela permet de construire un lacet transverse que l'on note γ_0, d'homologie $[S]$, ceci impliquant que $[\gamma_0] \wedge [\gamma] < 0$.

En particulier, il existe donc un relevé $\widetilde{\gamma}_0 : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ dont le nombre d'intersection avec $\widetilde{\gamma}$ est bien défini et vaut -1 (c'est-à-dire qui traverse $\widetilde{\gamma}$ de droite à gauche). Soit $\widetilde{\phi}$ une feuille rencontrée par $\widetilde{\gamma}$ et par $\widetilde{\gamma}_0$: il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que $\widetilde{\gamma}_{0|]-\infty,t]}$ est inclus dans $R(\widetilde{\gamma}) \cap R(\widetilde{\phi})$. Par la remarque faite à la suite du lemme 4.1.5, le chemin $\widetilde{\gamma}_{0|]-\infty,t]}$ doit repasser régulièrement à distance uniformément bornée de $\widetilde{\gamma}$, ce qui implique en particulier que $[\gamma_0]$ et $[\gamma]$ sont colinéaires, donc que $[\gamma_0] \wedge [\gamma] = 0$. Absurde.

Cette contradiction clôt la preuve, et montre donc que, dans le cas où $\widetilde{\phi} \subset \partial B^R(\widetilde{\gamma})$, on a bien $\mathrm{rot}(f) \subset \{\rho \in H_1(M,\mathbb{R}) \mid \rho \wedge [\gamma] \geq 0\}$. Dans le cas où $\widetilde{\phi} \subset \partial B^L(\widetilde{\gamma})$, une preuve similaire permettrait d'obtenir $\mathrm{rot}(f) \subset \{\rho \in H_1(M,\mathbb{R}) \mid \rho \wedge [\gamma] \leq 0\}$. □

On en déduit en particulier le corollaire suivant :

Corollaire 4.1.6. *On suppose que* $0 \in \mathrm{Int}(\mathrm{rot}(f))$. *Il n'existe alors pas sur* M *de lacet transverse non homologue à zéro qui s'accumule dans un chemin transverse. En particulier, si* γ *et* γ' *sont deux lacets transverses tels que* $[\gamma] \wedge [\gamma'] \neq 0$, *alors* γ *et* γ' *s'intersectent* $\mathcal{F}-$*transversalement.*

Démonstration. La première partie de l'énoncé découle directement de la proposition 4.1.4. Soit donc γ et γ' deux lacets transverses tels que $[\gamma] \wedge [\gamma'] \neq 0$. Il en existe donc deux relevés $\widetilde{\gamma}$ et $\widetilde{\gamma}'$ à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ dont le nombre d'intersection est bien défini et non nul. De plus, ces deux relevés se séparent deux à deux positivement et négativement : en effet, il est impossible qu'ils soient équivalents (en $+\infty$ ou en $-\infty$) en vertu de la proposition 2.2.15 ; et il est impossible que l'un s'accumule (positivement ou négativement) dans l'autre en raison de ce qui précède. On a donc une intersection $\widetilde{\mathcal{F}}-$transverse. □

4.1.4 Une famille de lacets génératrice

On suppose dorénavant, et ce jusqu'à la fin de ce chapitre, que 0 est dans l'intérieur de $\mathrm{rot}(f)$. Outre le corollaire 4.1.6, cette hypothèse va avoir une autre application importante, donnée par le lemme suivant (proposition H de l'introduction) :

Lemme 4.1.7. *Il existe un entier* $r \geq 1$ *et une famille* $\{\gamma_1, ..., \gamma_r\}$ *de* r *lacets transverses de* M *non homologues à* 0 *tels que :*
- pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, γ_j *est la trajectoire transverse d'un point périodique,*
- les $([\gamma_j])_{1 \leq j \leq r}$ *engendrent* $H_1(M,\mathbb{R})$, *et*
- 0 est dans l'intérieur de l'enveloppe convexe des $([\gamma_j])_{1 \leq j \leq r}$.

Démonstration. Comme $0 \in \mathrm{Int}(\mathrm{rot}(f))$, alors il existe une famille $(e_j)_{1 \leq j \leq r}$ de points extrêmaux de $\mathrm{rot}(f)$ tels que les e_j engendrent $H_1(M,\mathbb{R})$, et que 0 est contenu dans l'intérieur de l'enveloppe convexe des e_j. Mais les e_j engendrent $H_1(M,\mathbb{R})$, donc il existe pour tout $j \in \{1, ..., r\}$ un entier $k \in \{1, ..., r\}$ tel que $e_j \wedge e_k \neq 0$. On peut donc appliquer le théorème C qui nous dit en particulier que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un point périodique x_j dont le nombre de rotation ρ_j appartient à la boule de centre e_j de rayon ε pour $\|.\|$. En prenant un ε suffisamment petit, on peut s'assurer que les $(\rho_j)_{1 \leq j \leq r}$ sont tous non nuls, qu'ils engendrent $H_1(M,\mathbb{R})$, et que 0 est bien dans l'intérieur de leur enveloppe convexe.

Pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, notons γ_j la trajectoire transverse du point x_j : c'est donc un lacet transverse d'homologie $[\gamma_j] = p_j \times \rho_j$ (où p_j est la période du point x_j). Il est bien clair alors que pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, $[\gamma_j] \neq 0$, que les $([\gamma_j])_{1 \leq j \leq r}$ engendrent $H_1(M,\mathbb{R})$, et que 0 est dans l'intérieur de l'enveloppe convexe des $([\gamma_j])_{1 \leq j \leq r}$. □

Remarque : comme nous le verrons, l'existence d'une telle famille de lacets transverses a des conséquences fortes sur la structure du feuilletage $\mathcal{F}$. Cette condition est assez similaire à la condition d'existence d'un système de courbes essentielles de la définition 9 de l'introduction, dont il est prouvé dans [AZdPJ18] qu'elle implique de nombreux résultats sur la richesse de la dynamique pour les $\mathcal{C}^{1+\varepsilon}-$difféomorphismes en genre > 1.

La première utilité d'une telle famille de lacets $\{\gamma_j\}_{1\leq j\leq r}$ est de pouvoir construire une famille de chemins admissibles bornés, ayant chacun une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse, et "concentrant" toutes les intersections $\mathcal{F}-$transverses avec les lacets γ_j. Cette construction est similaire à celle faite dans le cas du tore, présentée dans [LCT18]. Elle nous sera très utile lorsque nous chercherons à construire des intersections $\mathcal{F}-$transverses et à en déduire l'existence de points périodiques :

Lemme 4.1.8. *Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $\gamma_1, ..., \gamma_r$ les lacets transverses donnés par le lemme 4.1.7. Pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, il existe alors un chemin transverse admissible $\gamma_j^* : [0, 3] \to M$ tel que :*
- $\gamma^*_{j|[0,1]}$ et $\gamma^*_{j|[2,3]}$ s'intersectent $\mathcal{F}-$transversalement, et
- si $\alpha : I \to M$ est un chemin transverse qui intersecte $\mathcal{F}-$transversalement γ_j, alors α intersecte $\mathcal{F}-$transversalement $\gamma^*_{j|[1,2]}$.

Démonstration. Fixons $j \in \{1, ..., r\}$. Comme les $[\gamma_j]$ engendrent l'homologie, il existe $k \in \{1, ..., r\}$ tel que $[\gamma_j] \wedge [\gamma_k] \neq 0$. En particulier, par le corollaire 4.1.6, γ_j et γ_k s'intersectent alors $\mathcal{F}-$transversalement. Il existe donc un relevé $\widetilde{\gamma}_j$ de γ_j et un relevé $\widetilde{\gamma}_k$ de γ_k à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$, qui s'intersectent $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement en un point $\widetilde{\gamma}_j(t) = \widetilde{\gamma}_k(s)$ (on paramètre γ_j et γ_k de manière naturelle, par des applications périodiques de période 1). En particulier, il existe donc un entier $n > 0$ tel que $\widetilde{\gamma}_{j|[t-n,t+n]}$ intersecte $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement $\widetilde{\gamma}_{k|[s-n,s+n]}$ au point $\widetilde{\gamma}_j(t) = \widetilde{\gamma}_k(s)$. On définit un chemin transverse $\widetilde{\gamma}_j^* : [0, 3] \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ de la manière suivante :
- $\widetilde{\gamma}^*_{j|[0,1]}$ est une reparamétrisation de $\widetilde{\gamma}_{j|[t-(4n+2),t-(2n+2)]}$,
- $\widetilde{\gamma}^*_{j|[1,2]}$ est une reparamétrisation du chemin obtenu en concaténant les chemins $\widetilde{\gamma}_{j|[t-(2n+2),t]}$ et $\widetilde{\gamma}_{k|[s,s+2n+2]}$, et
- $\widetilde{\gamma}^*_{j|[2,3]}$ est une reparamétrisation de $\widetilde{\gamma}_{k|[s+2n+2,s+4n+2]}$.

Soit alors $\gamma_j^* : [0, 3] \to M$ la projection de $\widetilde{\gamma}_j^*$ sur M. Montrons que le lemme est vérifié avec ce choix de γ_j^*.

Notons $T \in \mathcal{G}$ l'automorphisme de revêtement associé à $\widetilde{\gamma}_j$ (i.e. tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\widetilde{\gamma}_j(t+1) = T\widetilde{\gamma}_j(t)$) et $S \in \mathcal{G}$ l'automorphisme de revêtement associé à $\widetilde{\gamma}_k$ (i.e. tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\widetilde{\gamma}_k(t+1) = S\widetilde{\gamma}_k(t)$). Tout d'abord, le chemin $\widetilde{\gamma}_j^*$ est admissible par la proposition 1.3.5 : il est obtenu en "forçant" les deux trajectoires admissibles $\widetilde{\gamma}_j$ et $\widetilde{\gamma}_k$ qui s'intersectent $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement. Ensuite, $\widetilde{\gamma}_{j|[t-n,t+n]}$ et $\widetilde{\gamma}_{k|[s-n,s+n]}$ ont une intersection $\widetilde{\mathcal{F}}-$transverse, donc de manière équivalente, $T^{3n+2}\widetilde{\gamma}_{j|[t-(4n+2),t-(2n+2)]}$ et $S^{-3n-2}\widetilde{\gamma}_{k|[s+2n+2,s+4n+2]}$ ont une intersection $\widetilde{\mathcal{F}}-$transverse : il s'ensuit, par définition de γ_j^*, que $S^{3n+2}T^{3n+2}\widetilde{\gamma}^*_{j|[0,1]}$ et $\widetilde{\gamma}^*_{j|[2,3]}$ ont une intersection $\widetilde{\mathcal{F}}-$transverse, et donc que $\gamma^*_{j|[0,1]}$ et $\gamma^*_{j|[2,3]}$ s'intersectent bien $\mathcal{F}-$transversalement.

Enfin, soit $\alpha : I \to M$ un chemin transverse (défini sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$) ayant une intersection $\mathcal{F}-$transverse avec γ_j. On en fixe un relevé $\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ intersectant $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement $\widetilde{\gamma}_j$. Il existe donc deux réels $a < b$ de I, et deux réels $c < d$ tels que $\widetilde{\alpha}_{|[a,b]}$ intersecte $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement $\widetilde{\gamma}_{j|[c,d]}$, et tels que $\widetilde{\alpha}_{|]a,b[}$ et $\widetilde{\gamma}_{j|]c,d[}$ sont équivalents. Si $d-c \leq 2n+1$, alors il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $t-(2n+2)+m \leq c < d \leq t+m$. Ainsi, $T^{-m}\widetilde{\alpha}_{|[a,b]}$ a une intersection $\widetilde{\mathcal{F}}-$transverse avec $T^{-m}\widetilde{\gamma}_{j|[c,d]}$, donc avec $T^{-m}\widetilde{\gamma}_{j|[t-(2n+2)+m,t+m]}$, donc avec $\widetilde{\gamma}_{j|[t-(2n+2),t]}$, qui est une sous-portion de $\widetilde{\gamma}^*_{j|[1,2]}$. Dans ce cas, α a donc bien une intersection $\mathcal{F}-$transverse avec $\gamma^*_{j|[1,2]}$. Dans le cas maintenant où $d - c > 2n + 1$, alors il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $c-m < t-n < t+n < d-m$. Cela implique que la portion $T^{-m}\widetilde{\gamma}_{j|]c,d[}$

contient le sous-chemin $\widetilde{\gamma}_{j|[t-n,t+n]}$, donc intersecte $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement $\widetilde{\gamma}_{k|[s-n,s+n]}$, c'est-à-dire $S^{-n}\widetilde{\gamma}_{k|[s,s+2n]}$ qui est un sous-chemin de $S^{-n}\widetilde{\gamma}^*_{j|[1,2]}$. Or $T^{-m}\widetilde{\alpha}_{|]a,b[}$ est équivalente à $T^{-m}\widetilde{\gamma}_{j|]c,d[}$, donc $S^nT^{-m}\widetilde{\alpha}$ intersecte $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement $\widetilde{\gamma}^*_{j|[1,2]}$, ce qui montre que α et $\gamma^*_{j|[1,2]}$ ont une intersection $\mathcal{F}-$transverse. □

4.1.5 Homologie des feuilles et chemins de grande homologie

Dans ce paragraphe, on montre que l'existence des lacets donnés par le lemme 4.1.7 contraint grandement la dynamique des feuilles du feuilletage $\mathcal{F}$. Cela fait écho au cas du tore, dans lequel l'hypothèse selon laquelle 0 est dans l'intérieur de l'ensemble de rotation implique que les feuilles du feuilletage relevé à $\mathbb{R}^2$ sont uniformément bornées (voir [LCT18]), l'argument-clé étant que sur le tore, les composantes connexes du complémentaire de lacets engendrant l'homologie sont simplement connexes.

En genre supérieur, ceci ne tient plus : les composantes connexes du complémentaire de lacets engendrant l'homologie ne sont pas forcément simplement connexes. Néanmoins leur premier groupe d'homologie est trivial. Ainsi, nous allons pouvoir montrer que les feuilles, bien que non nécessairement uniformément bornées (on peut par exemple avoir une feuille fermée homologue à zéro), le sont "en homologie". La première remarque est la suivante :

Lemme 4.1.9. *Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $\gamma_1, ..., \gamma_r$ les lacets transverses donnés par le lemme 4.1.7, et soit $\widetilde{\mathcal{C}}$ l'ensemble des relevés de tous les γ_j à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$. Alors il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que toute feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}$ rencontre au maximum N' éléments de $\widetilde{\mathcal{C}}$.*

Démonstration. Comme les $[\gamma_j]$ sont des éléments de $H_1(M, \mathbb{Z})$, qu'ils engendrent l'homologie et contiennent 0 dans l'intérieur de leur enveloppe convexe, il existe donc des entiers non nuls $(t_j)_{j=1,...,r}$ tels que $\sum_{1\leq j\leq r} t_j[\gamma_j] = 0$. Le "multi-lacet" transverse $\sum_{1\leq j\leq r} t_j\gamma_j$ est donc homologue à zéro : on peut alors définir une fonction duale δ sur son complémentaire dans M. Comme expliqué au paragraphe 1.2.3, le nombre de relevés des γ_j à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ rencontrés par les feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$ est alors uniformément borné (par la différence entre le maximum et le minimum de la fonction duale considérée). □

Pour relier cette propriété à des considérations homologiques, nous aurons besoin du résultat simple de compacité suivant :

Lemme 4.1.10. *Soit $\{\rho_i\}_{i\in I}$ une famille génératrice de $H_1(M, \mathbb{R})$.*

Il existe $m > 0$ tel que pour tout $\alpha \in H_1(M, \mathbb{R})$, il existe $i \in I$ tel que $|\alpha \wedge \rho_i| \geq m \|\alpha\|$.

Démonstration. Soit $B = \{\alpha \in H_1(M, \mathbb{R}) \mid \|\alpha\| = 1\}$. Pour tout $\alpha \in B$, $\alpha \neq 0$ donc comme les ρ_i engendrent $H_1(M, \mathbb{R})$, il existe $i_\alpha \in I$ tel que $\alpha \wedge \rho_{i_\alpha} \neq 0$. Par continuité, il existe un voisinage ouvert V_α de α dans B et une constante $m_\alpha > 0$ tel que pour tout $\alpha' \in V_\alpha$, $|\alpha' \wedge \rho_{i_\alpha}| > m_\alpha$. Par compacité, B se recouvre par un nombre fini de tels ouverts V_α : notons $\alpha_1, ..., \alpha_N$ tels que $B = V_{\alpha_1} \cup ... \cup V_{\alpha_N}$. Posons alors $m = \min\{m_{\alpha_j}\}_{j=1,...,N}$. Pour tout $\beta \in B$, il existe donc $j \in \{1, ..., N\}$ tel que $\beta \in V_{\alpha_j}$, donc $|\beta \wedge \rho_{i_{\alpha_j}}| > m_{\alpha_j} \geq m$. Autrement dit, pour tout $\beta \in B$, il existe $i \in I$ tel que $|\beta \wedge \rho_i| \geq m$.

Soit maintenant $\alpha \neq 0 \in H_1(M, \mathbb{R})$ (le lemme étant trivialement vrai si $\alpha = 0$). Par définition de m, il existe donc $i \in I$ tel que

$$\left|\frac{\alpha}{\|\alpha\|} \wedge \rho_i\right| \geq m \quad \text{et donc tel que} \quad |\alpha \wedge \rho_i| \geq m \|\alpha\| .$$

□

On peut alors en déduire la propriété fondamentale suivante, qui exprime que les feuilles du feuilletage sont bornées "en homologie" :

Proposition 4.1.11. *Il existe $K' > 0$ tel que pour tout arc de feuille $\phi_{x,y}$ (reliant deux points x et y de $\mathrm{dom}(\mathcal{F})$ tels que $\phi_x = \phi_y$), on ait $\left\|\overline{\phi_{x,y}}\right\| \leq K'$.*

Démonstration. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $\gamma_1, ..., \gamma_r$ des lacets transverses donnés par le lemme 4.1.7. Notons $\widetilde{\mathcal{C}}$ l'ensemble des relevés à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ des γ_j, et N' donné par le lemme 4.1.9. Soit également N donné par le corollaire 4.1.3, et m donné par le lemme 4.1.10 appliqué avec la famille génératrice $\{[\gamma_j]\}_{1\leq j\leq r}$. Vérifions que l'énoncé est satisfait avec la constante $K' = (N + N')/m$.

Soit $\phi_{x,y}$ un arc de feuille reliant deux points x et y de $\mathrm{dom}(\mathcal{F})$. Pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, cet arc se relève en un chemin de $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ rencontrant au plus N' relevés de γ_j. Il s'ensuit, par définition de N (corollaire 4.1.3), que pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, on a $|\overline{\phi_{x,y}} \wedge [\gamma_j]| \leq N' + N$. Par définition de m, cela implique que $m \left\|\overline{\phi_{x,y}}\right\| \leq N + N'$, c'est-à-dire $\left\|\overline{\phi_{x,y}}\right\| \leq K'$. □

Une conséquence directe de ce phénomène est que les sous-arcs des trajectoires transverses $I_{\mathcal{F}}(z)$, pour $z \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$, bien que non nécessairement uniformément bornés, le sont "en homologie". Ceci va découler du fait qu'un tel sous-arc est homotope à extrémités fixées à la concaténation d'un sous-arc d'une trajectoire $I(z)$ (qui lui, est uniformément borné) et d'une portion de feuille (dont l'homologie est uniformément bornée) :

Corollaire 4.1.12. *Il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour tout $z \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $t \in [n, n + 1]$, on ait $\left\|\overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[n,t]}}\right\| \leq C_1$.*

Démonstration. Par continuité et compacité, les chemins $I_{z|[0,s]}$ pour $z \in M$, et $s \in [0, 1]$ sont uniformément bornés ; en particulier, leur homologie est uniformément bornée, donc il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $z \in M$ et $s \in [0, 1]$,

$$\left\|\overline{I_{z|[0,s]}}\right\| \leq C.$$

Mais pour tout $z \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $s \in [n, n + 1]$, le chemin $I^{\mathbb{Z}}_{z|[n,s]}$ est égal au chemin $I_{f^n(z)|[0,s-\lfloor s\rfloor]}$. On a donc, pour tout $z \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$, $n \in \mathbb{Z}$ et $s \in [n, n + 1]$,

$$\left\|\overline{I^{\mathbb{Z}}_{z|[n,s]}}\right\| \leq C.$$

Maintenant, rappelons que toute feuille rencontrée par une trajectoire transverse $I_{\mathcal{F}}(z)$ rencontre aussi la trajectoire $I(z)$. Comme pour tout $z \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$ et $n \in \mathbb{Z}$, le chemin $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[n,n+1]}$ est égal à $I_{\mathcal{F}}(f^n(z))$, et que le chemin $I^{\mathbb{Z}}_{z|[n,n+1]}$ est égal à $I(f^n(z))$, on déduit que pour tout $t \in [n, n + 1]$, la feuille passant par $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z}(t)$ rencontre la vraie trajectoire $I^{\mathbb{Z}}(z)$ en un point $I^{\mathbb{Z}}_z(s)$, avec $s \in [n, n + 1]$. Notons donc $\phi_{z,t}$ une portion de feuille reliant $I^{\mathbb{Z}}_z(s)$ à $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z}(t)$. Par la proposition 4.1.11, il existe une constante K' uniforme telle que $\left\|\overline{\phi_{z,t}}\right\| \leq K'$. Il reste donc finalement à appliquer le lemme 4.1.1, comme $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[n,t]}$ est homotope à extrémités fixées à la concaténation de $I^{\mathbb{Z}}_{z|[n,s]}$ et de $\phi_{z,t}$, pour obtenir

$$\left\|\overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[n,t]}}\right\| \leq \left\|\overline{I^{\mathbb{Z}}_{z|[n,s]}}\right\| + \left\|\overline{\phi_{z,t}}\right\| + K_0 \leq C + K' + K_0.$$

□

Enfin, on peut déduire de manière assez similaire à la proposition 4.1.11 qu'un chemin transverse de grande homologie intersecte forcément $\mathcal{F}-$transversalement l'un des γ_j :

Proposition 4.1.13. *Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $\gamma_1, ..., \gamma_r$ des lacets transverses donnés par le lemme 4.1.7. Alors il existe $K > 0$ tel que pour tout chemin transverse $\alpha : [a, b] \to M$ tel que $\|\overline{\alpha}\| \geq K$, il existe $j \in \{1, ..., r\}$ tel que α intersecte $\mathcal{F}-$transversalement γ_j.*

Démonstration. Soit $\widetilde{\mathcal{C}}$ l'ensemble des relevés à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ des γ_j, et N' donné par le lemme 4.1.9. Soit également N donné par le corollaire 4.1.3, et m donné par le lemme 4.1.10 appliqué avec la famille génératrice $\{[\gamma_j]\}_{1\leq j\leq r}$. On pose alors $K = (2N' + N + 1)/m$.

Soit $\alpha : [a, b] \to M$ un chemin transverse tel que $\|\overline{\alpha}\| \geq K$: par définition de m, il existe donc $j \in \{1, ..., r\}$ tel que $|\overline{\alpha} \wedge [\gamma_j]| \geq 2N' + N + 1$. Il faut donc comprendre pourquoi cela implique que α intersecte $\mathcal{F}-$transversalement γ_j. Fixons donc un relevé $\widetilde{\alpha} : [a, b] \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$. Par définition de N, et comme $|\overline{\alpha} \wedge [\gamma_j]| \geq 2N' + N + 1$, il existe donc au moins $2N' + 1$ relevés de γ_j dont le nombre d'intersection avec $\widetilde{\alpha}$ est bien défini et non nul. Maintenant, par définition de N', la feuille passant par $\widetilde{\alpha}(a)$ rencontre au plus N' relevés de γ_j, et de même, la feuille passant par $\widetilde{\alpha}(b)$ rencontre au plus N' relevés de γ_j. Parmi les $2N' + 1$ relevés considérés, l'un au moins ne rencontre donc pas ces deux feuilles : on a donc trouvé un relevé $\widetilde{\gamma}_j$ de γ_j dont le nombre d'intersection avec $\widetilde{\alpha}$ est bien défini et non nul, et qui ne rencontre pas les feuilles extrêmes de $\widetilde{\alpha}$. De plus, par le corollaire 4.1.6, γ_j ne s'accumule dans aucun chemin, ce qui implique que $\widetilde{\gamma}_j$ se sépare positivement et négativement de $\widetilde{\alpha}$. Tout ceci réuni montre que $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\gamma}_j$ s'intersectent $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement, donc que α et γ_j s'intersectent $\mathcal{F}-$transversalement. □

4.1.6 Subdivision des trajectoires

La preuve du théorème G va reposer sur des découpages de trajectoires en des portions ayant des homologies que l'on contrôle : on veut obtenir des portions "minimales" ayant des "grandes" homologies. Donnons le lemme-définition suivante :

Lemme 4.1.14. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha : [0, n] \to M$ un chemin de M. Pour tout réel $K > 0$, il existe une unique famille finie $\{n_0, n_1, ..., n_p\}$ d'entiers, telle que :*
- $0 = n_0 < n_1 < ... < n_p \leq n$,
- pour tout $i \in \{0, ..., p-1\}$, l'ensemble $\{k \geq n_i \mid \left\|\overline{\alpha_{|[n_i,k]}}\right\| \geq K\}$ est non vide et

$$n_{i+1} = \min\{k \geq n_i \mid \left\|\overline{\alpha_{|[n_i,k]}}\right\| \geq K\},$$

- pour tout entier $k \in \{n_p, ..., n\}$, $\left\|\overline{\alpha_{|[n_p,k]}}\right\| < K$.

Cette famille d'entiers est appelée $K-$subdivision de α.

Démonstration. Il suffit de définir ces entiers par récurrence. On pose $n_0 = 0$, et on suppose avoir construit l'entier n_i, avec $n_i \leq n$. Dans le cas tout d'abord où il existe un entier $k \in \{n_i, ..., n\}$ tel que $\left\|\overline{\alpha_{|[n_i,k]}}\right\| \geq K$, alors $\{k \geq n_i \mid \left\|\overline{\alpha_{|[n_i,k]}}\right\| \geq K\}$ est non vide : on définit n_{i+1} comme l'entier minimal de cet ensemble, et on a bien $n_{i+1} \leq n$; on a de plus $n_i < n_{i+1}$ puisque $\left\|\overline{\alpha_{|[n_i,n_i]}}\right\| = 0$ (car le chemin $c_{\alpha(n_i),\alpha(n_i)}$ est le chemin trivial). Dans le cas contraire où pour tout $k \in \{n_i, ..., n\}$, $\left\|\overline{\alpha_{|[n_i,k]}}\right\| < K$, on pose $i = p$ et on arrête le processus : l'entier n_i est le dernier construit.

Il est bien clair, dans cette construction, qu'aucun choix n'est possible et que de fait, la $K-$subdivision de α est bien unique. □

Terminons avec un lemme technique permettant de majorer de manière uniforme les homologies de différents sous-arcs construits par subdivision d'une trajectoire transverse, à l'aide des différentes majorations précédemment obtenues :

Lemme 4.1.15. *Soit K_0 la constante définie en 4.1.1 et C_1 la constante définie en 4.1.12. On considère un point $z \in M$, et pour $K > 0$, soit $0 = n_0 < ... < n_p \leq n$ la $K-$subdivision de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[0,n]}$. Alors pour tout $i \in \{0, ..., p-1\}$, pour tout $t \in]n_i, n_{i+1}[$, on a :*
- $\left\|\overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[n_i,t]}}\right\| < K + C_1 + K_0$, *et*
- $\left\|\overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[t,n_{i+1}]}}\right\| < 2K + 3K_0 + 2C_1$

Démonstration. Tout d'abord, comme $n_i < t < n_{i+1}$, alors $n_i \leq \lfloor t \rfloor < n_{i+1}$. Par définition de la $K-$subdivision, on a donc $\left\|\overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[n_i,\lfloor t \rfloor]}}\right\| < K$. De plus, par définition de C_1, $\left\|\overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[\lfloor t \rfloor,t]}}\right\| \leq C_1$. Il reste à voir que $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[n_i,t]}$ est la concaténation de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[n_i,\lfloor t \rfloor]}$ et de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[\lfloor t \rfloor,t]}$ et appliquer le lemme 4.1.1 pour obtenir

$$\left\|\overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[n_i,t]}}\right\| \leq \left\|\overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[n_i,\lfloor t \rfloor]}}\right\| + \left\|\overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[\lfloor t \rfloor,t]}}\right\| + K_0 < K + C_1 + K_0.$$

De même, comme $n_i < t < n_{i+1}$, alors $n_i \leq \lfloor t \rfloor \leq n_{i+1} - 1 < n_{i+1}$, donc $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[n_i,n_{i+1}-1]}$ est la concaténation de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[n_i,\lfloor t \rfloor]}$ et de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[\lfloor t \rfloor,n_{i+1}-1]}$. Le lemme 4.1.1 s'applique donc et donne

$$\left\|\overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[n_i,n_{i+1}-1]}} - \left(\overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[n_i,\lfloor t \rfloor]}} + \overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[\lfloor t \rfloor,n_{i+1}-1]}}\right)\right\| \leq K_0,$$

ce qui implique

$$\left\|\overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[\lfloor t \rfloor,n_{i+1}-1]}}\right\| \leq \left\|\overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[n_i,\lfloor t \rfloor]}}\right\| + \left\|\overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[n_i,n_{i+1}-1]}}\right\| + K_0.$$

Mais par définition de la $K-$subdivision, on a les deux inégalités $\left\|\overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[n_i,\lfloor t \rfloor]}}\right\| < K$ et $\left\|\overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[n_i,n_{i+1}-1]}}\right\| < K$, donc on obtient

$$\left\|\overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[\lfloor t \rfloor,n_{i+1}-1]}}\right\| < 2K + K_0.$$

Ensuite, par définition de C_1, on a $\left\|\overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[n_{i+1}-1,n_{i+1}]}}\right\| \leq C_1$. Comme $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[\lfloor t \rfloor,n_{i+1}]}$ est la concaténation de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[\lfloor t \rfloor,n_{i+1}-1]}$ et de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[n_{i+1}-1,n_{i+1}]}$, alors par le lemme 4.1.1, on obtient

$$\left\|\overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[\lfloor t \rfloor,n_{i+1}]}}\right\| \leq \left\|\overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[\lfloor t \rfloor,n_{i+1}-1]}}\right\| + \left\|\overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[n_{i+1}-1,n_{i+1}]}}\right\| + K_0 < 2K + 2K_0 + C_1.$$

Enfin, par définition de C_1, on a $\left\|\overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[\lfloor t \rfloor,t]}}\right\| \leq C_1$. Comme $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[\lfloor t \rfloor,n_{i+1}]}$ est la concaténation de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[\lfloor t \rfloor,t]}$ et de $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[t,n_{i+1}]}$, alors par le lemme 4.1.1, on obtient

$$\left\|\overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[\lfloor t \rfloor,n_{i+1}]}} - \left(\overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[\lfloor t \rfloor,t]}} + \overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[t,n_{i+1}]}}\right)\right\| \leq K_0,$$

et donc on a finalement

$$\left\|\overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[t,n_{i+1}]}}\right\| \leq \left\|\overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[\lfloor t \rfloor,n_{i+1}]}}\right\| + \left\|\overline{I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},z|[\lfloor t \rfloor,t]}}\right\| + K_0 < 2K + 3K_0 + 2C_1.$$

□

4.2 Preuve du théorème G

4.2.1 Idée détaillée de la preuve

Comme nous l'avons dit précédemment, l'idée de la preuve va être de montrer que toute trajectoire $I^n_{\mathcal{F}}(z)$ est "proche" d'une famille de trajectoires périodiques : si l'on peut découper $I^n_{\mathcal{F}}(z)$ en un nombre r (indépendant de n) de portions, chacune d'elle ayant une homologie proche d'un certain multiple du vecteur de rotation d'un point périodique, on pourra montrer que l'homologie globale de $I^n_{\mathcal{F}}(z)$ est uniformément proche de "n fois" une certaine combinaison convexe des vecteurs de rotation des points périodiques considérés. Ainsi, on aura borné uniformément en z et n la distance de $\overline{I^n_{\mathcal{F}}(z)}$ à l'ensemble $n\mathrm{rot}(f)$.

Plus précisément, fixons la famille de lacets $\{\gamma_j\}_{1\leq j\leq r}$ donnée en 4.1.7, et les chemins admissibles $\{\gamma^*_j\}_{1\leq j\leq r}$ associés donnés en 4.1.8. On sait par le lemme 4.1.13 qu'un arc de grande homologie intersecte nécessairement $\mathcal{F}-$transversalement l'un des γ_j, donc par définition des γ^*_j, intersecte $\mathcal{F}-$transversalement la partie centrale d'un des γ^*_j.

De fait, à chaque fois que $I^n_{\mathcal{F}}(z)$ a un sous-arc dont l'homologie est assez grande, celui-ci intersecte $\mathcal{F}-$transversalement l'un des γ^*_j. Mais si l'on considère deux sous-arcs (disjoints) $I^n_{\mathcal{F},z|[a,b]}$ et $I^n_{\mathcal{F},z|[c,d]}$ de $I^n_{\mathcal{F}}(z)$ qui intersectent $\mathcal{F}-$transversalement le même chemin γ^*_j, on se retrouve alors dans la situation de la figure 4.2 (au revêtement $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$).

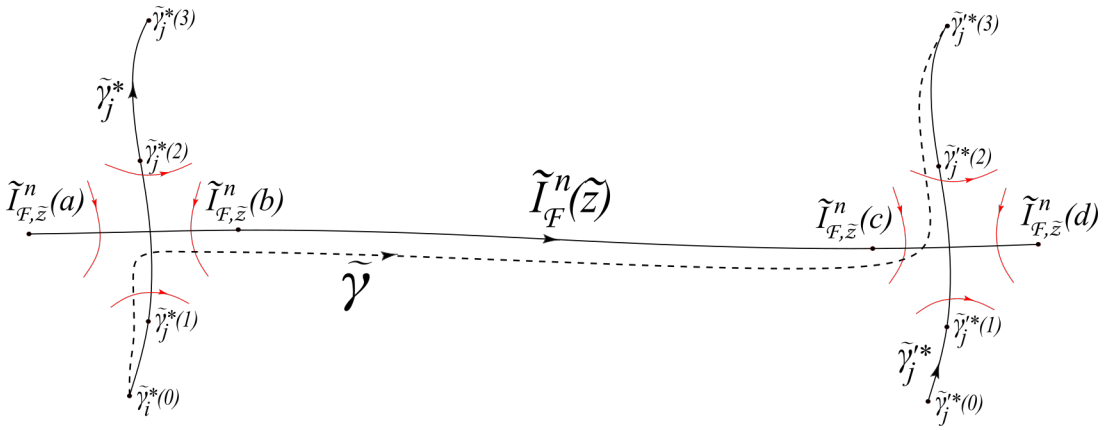

FIGURE 4.2 – Situation dans laquelle deux portions de $\widetilde{I}^n_{\mathcal{F}}(\widetilde{z})$ intersectent $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement deux relevés $\widetilde{\gamma}^*_j$ et $\widetilde{\gamma}'^*_j$ d'un même chemin γ^*_j : on obtient par forçage un chemin $\widetilde{\gamma}$ admissible, dont l'homologie est proche de celle de la portion totale, ayant une intersection $\widetilde{\mathcal{F}}-$transverse avec un de ses translatés.

Sur cette figure, le chemin en pointillés $\widetilde{\gamma}$ est alors admissible par la proposition fondamentale de forçage 1.3.5. Mais il a aussi une intersection $\widetilde{\mathcal{F}}-$transverse avec un de ses translatés, car $\gamma^*_{j|[0,1]}$ et $\gamma^*_{j|[2,3]}$ s'intersectent $\mathcal{F}-$transversalement. Par le théorème 1.3.8, il s'ensuit que l'homologie de $\widetilde{\gamma}$ est uniformément proche d'un multiple (qui dépend de l'ordre d'admissibilité de $\widetilde{\gamma}$) du vecteur de rotation d'un point périodique. On s'aperçoit également que si l'homologie des arcs $I^n_{\mathcal{F},z|[a,b]}$ et $I^n_{\mathcal{F},z|[c,d]}$ est suffisamment petite, alors l'homologie globale de $\widetilde{\gamma}$ sera uniformément proche de celle de la portion globale $I^n_{\mathcal{F},z|[a,d]}$. Autrement dit, dans cette situation, l'homologie de $I^n_{\mathcal{F},z|[a,d]}$ est uniformément proche d'un multiple du vecteur de rotation d'un point périodique.

Ayant dit cela, le but est alors de découper toute la trajectoire $I^n_{\mathcal{F}}(z)$ en portions dont on contrôle l'homologie : suffisamment grande pour qu'elles intersectent chacune un γ^*_j, mais pas trop grande pour garder une précision uniforme dans les estimations (autrement dit, on va considérer une subdivision comme définie en 4.1.14). À chaque fois que deux portions intersectent le même γ^*_j, le sous-arc reliant ces deux portions a donc une homologie uniformément proche d'un multiple du vecteur de rotation d'un point périodique. Comme les γ^*_j sont en nombre fini (indépendant de n), il reste à voir qu'on peut regrouper les différentes portions qui intersectent le même γ^*_j pour obtenir un découpage de $I^n_{\mathcal{F}}(z)$ en un nombre uniforme de tels sous-arcs, comme représenté sur la figure 4.3. Finalement, on pourra gérer les constantes obtenues pour vérifier que l'homologie de $I^n_{\mathcal{F}}(z)$ est bien uniformément proche de "n fois" une combinaison convexe des vecteurs de rotation des points périodiques obtenus pour chacune des portions considérées.

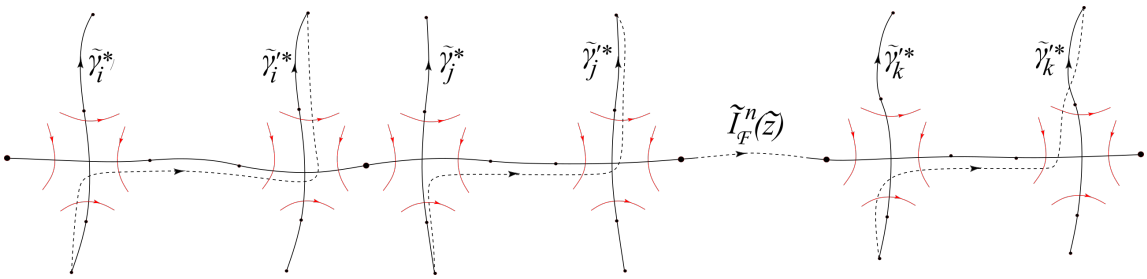

FIGURE 4.3 – Découpage de la trajectoire totale en un nombre fini de sous-arcs, chacun correspondant à la situation de la figure 4.2.

4.2.2 Notations

On note $r \geq 1$ l'entier et $\{\gamma_j\}_{1\leq j\leq r}$ la famille de lacets définis par le lemme 4.1.7. Pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, soit γ^*_j le chemin transverse admissible défini par le lemme 4.1.8 ; on fixe également un relevé $\widetilde{\gamma}^*_j$ de γ^*_j à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$. Comme par définition, $\gamma^*_{j|[0,1]}$ a une intersection $\mathcal{F}-$transverse avec $\gamma^*_{j|[2,3]}$, on peut noter $R_j \in \mathcal{G}$ un automorphisme tel que $R_j\widetilde{\gamma}^*_{j|[0,1]}$ intersecte $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement $\widetilde{\gamma}^*_{j|[2,3]}$.

Comme les $\gamma^*_j : [0, 3] \to M$ forment une famille finie de chemins compacts, il existe une constante C_2 telle que pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, pour tout $s < t \in [0, 3]$,

$$\left\|\overline{\gamma^*_{j|[s,t]}}\right\| \leq C_2.$$

De plus, les γ^*_j sont tous admissibles : on note donc N_0 leur ordre maximal d'admissibilité, de sorte donc que pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, γ^*_j soit admissible d'ordre N_0.

On fixe ces constantes C_2 et N_0, ainsi que les constantes K_0 définie en 4.1.1, C_1 définie en 4.1.12 et K définie en 4.1.13 ; on note également K^* le diamètre de l'ensemble de rotation $\mathrm{rot}(f)$. On pose enfin

$$L = (3r + 1)K + r(2C_2 + 3C_1 + 9K_0 + 2N_0K^*).$$

Notre but est alors de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $z \in M$,

$$d\left(\overline{I^n(z)}, n\mathrm{rot}(f)\right) \leq L.$$

On fixe donc dans toute la suite un point $z \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$ (la majoration étant trivialement vraie si z est une singularité de $\mathcal{F}$) et un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Pour alléger les notations, on note $\alpha : [0, n] \to M$ la trajectoire transverse $I^n_{\mathcal{F}}(z)$ du point z entre z et $f^n(z)$, paramétrée de sorte donc que pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, $\alpha(k) = f^k(z)$. Bien entendu, $\alpha_{|[0,n]}$ est homotope à extrémités fixées à $I^n(z)$, donc

$$\overline{I^n(z)} = \overline{\alpha_{|[0,n]}}.$$

On fixe enfin un relevé $\widetilde{z}$ de z à $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$, ainsi que $\widetilde{\alpha} : [0, n] \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ le relevé de α associé, de sorte que pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, $\widetilde{\alpha}(k) = \widetilde{f}^k(\widetilde{z})$.

4.2.3 Proximité avec une famille de points périodiques

Fixons la $K-$subdivision $0 = n_0 < ... < n_p \leq n$ de α, dont l'existence et l'unicité sont données par le lemme 4.1.14. Par définition, on a donc pour tout $i \in \{0, ..., p-1\}$,

$$\left\|\overline{\alpha_{|[n_i,n_{i+1}]}}\right\| \geq K.$$

Pour tout $i \in \{0, ..., p-1\}$, il existe donc par définition de K (proposition 4.1.13) un entier $j_i \in \{1, ..., r\}$ tel que $\alpha_{|[n_i,n_{i+1}]}$ a une intersection $\mathcal{F}-$transverse avec γ_{j_i}.

Énonçons maintenant un lemme combinatoire simple, reposant sur une sorte de principe des tiroirs. C'est ce lemme qui nous permettra, comme expliqué au paragraphe 4.2.1, de regrouper les différentes portions données par la subdivision en un nombre uniforme de sous-arcs de la trajectoire totale :

Lemme 4.2.1. *Soit $p, r \in \mathbb{N}^*$, et E un ensemble à r éléments. Pour toute application $\varphi : \{0, ..., p-1\} \to E$, il existe une famille d'entiers $i_0, ..., i_l$, avec $0 < l \leq r$, telle que :*
- $0 = i_0 < ... < i_{l-1} < i_l = p$, et
- pour tout $k \in \{0, ..., l-1\}$, $\varphi(i_k) = \varphi(i_{k+1} - 1)$.

Démonstration. Montrons ceci par récurrence sur r.

Si $r = 1$, alors φ ne prend qu'une seule valeur. On pose $l = 1$, $i_0 = 0$ et $i_1 = p$, et on a bien $l \leq r$, ainsi que $0 = i_0 < i_1 = p$ et $\varphi(i_0) = \varphi(i_1 - 1)$.

Supposons donc que le lemme soit vrai pour un certain $r \in \mathbb{N}^*$. Soit un ensemble E à $r + 1$ éléments, et une application $\varphi : \{0, ..., p-1\} \to E$, avec $p \in \mathbb{N}^*$. On définit $j = \max\{i = 0, ..., p-1 \mid \varphi(i) = \varphi(0)\} + 1$. Si $j = p$, alors on pose $l = 1$, $i_0 = 0$ et $i_1 = p$ et le résultat est vrai. Sinon, $j < p$: considérons donc l'application φ' définie sur $\{0, ..., p-1-j\}$ par $\varphi'(i) = \varphi(i + j)$ pour tout $i = 0, ..., p-1-j$. Par définition de l'entier j, l'image de φ' est incluse dans $E \setminus \{\varphi(0)\}$ qui est un ensemble à r éléments. Par hypothèse de récurrence, il existe donc une famille d'entiers $i'_0, ..., i'_l$, avec $l \leq r$, telle que d'une part $0 = i'_0 < ... < i'_{l-1} < i'_l = p - j$, et que d'autre part, pour tout $k \in \{0, ..., l-1\}$, $\varphi'(i'_k) = \varphi'(i'_{k+1} - 1)$. Définissons alors les entiers $i_0, ..., i_l, i_{l+1}$ en posant $i_0 = 0$ et pour tout $k \in \{1, ..., l+1\}$, $i_k = i'_{k-1} + j$.

Vérifions que l'énoncé est bien vrai au rang $r+1$ avec ces entiers i_k pour $k \in \{0, ..., l+1\}$. Tout d'abord, on a alors bien $l + 1 \leq r + 1$. Ensuite, $i_0 < i_1$ car $i_1 = i'_0 + j = j > 0$ par

définition de j ; de plus, pour tout $k \in \{1, ..., l\}$, on a $i_k = i'_{k-1} + j < i'_k + j = i_{k+1}$; et on a bien aussi $i_{l+1} = i'_l + j = p - j + j = p$: donc on a bien les inégalités voulues $0 = i_0 < ... < i_l < i_{l+1} = p$. Enfin, $\varphi(i_0) = \varphi(0) = \varphi(j-1) = \varphi(i_1 - 1)$ par définition de j ; et de plus, $\varphi(i_k) = \varphi(i'_{k-1} + j) = \varphi'(i'_{k-1}) = \varphi'(i'_k - 1) = \varphi(i'_k + j - 1) = \varphi(i_{k+1} - 1)$ pour tout $k \in \{1, ..., l\}$. □

On peut donc appliquer ce lemme à notre situation :

Lemme 4.2.2. *Il existe une suite d'entiers $i_0, ..., i_m$, avec $m \leq r$, telle que :*
- $0 = i_0 < i_1 < ... < i_{m-1} < i_m = p$,
- *pour tout $k \in \{0, ..., m-1\}$, $j_{i_k} = j_{i_{k+1}-1}$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme 4.2.1 avec $\varphi : \{0, ..., p-1\} \to \{1, ..., r\}$ définie pour tout $i = 0, ..., p-1$ par $\varphi(i) = j_i$. □

On fixe dans toute la suite un entier m, et une suite d'entiers $i_0, ..., i_m$, avec $m \leq r$, vérifiant les conditions du lemme 4.2.2. Pour tout entier $k \in \{0, ..., m-1\}$, on a donc $j_{i_k} = j_{i_{k+1}-1}$; pour alléger les notations, notons $v(k) \in \{1, ..., r\}$ cette valeur commune $\nu(k) = j_{i_k} = j_{i_{k+1}-1}$. Par définition des entiers j_i, cela signifie que les portions $\alpha_{|[n_{i_k}, n_{(i_k)+1}]}$ et $\alpha_{|[n_{i_{k+1}-1}, n_{i_{k+1}}]}$ ont chacune une intersection $\mathcal{F}-$transverse avec $\gamma_{v(k)}$; par définition des chemins γ^*_i, cela implique qu'elles ont chacune une intersection $\mathcal{F}-$transverse avec la portion $\gamma^*_{v(k)|[1,2]}$.

Relevons toutes ces intersections $\mathcal{F}-$transverses au revêtement $\widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$, en définissant :
- $T_k \in \mathcal{G}$, $t_k \in]n_{i_k}, n_{(i_k)+1}[$ et $s_k \in]1, 2[$ tels que $\widetilde{\alpha}_{|[n_{i_k}, n_{(i_k)+1}]}$ et $T_k \widetilde{\gamma}^*_{v(k)|[1,2]}$ ont une intersection $\widetilde{\mathcal{F}}-$transverse au point $\widetilde{\alpha}(t_k) = T_k \widetilde{\gamma}^*_{v(k)}(s_k)$;
- et $T'_k \in \mathcal{G}$, $t'_k \in]n_{i_{k+1}-1}, n_{i_{k+1}}[$ et $s'_k \in]1, 2[$ tels que $\widetilde{\alpha}_{|[n_{i_{k+1}-1}, n_{i_{k+1}}]}$ et $T'_k \widetilde{\gamma}^*_{v(k)|[1,2]}$ ont une intersection $\widetilde{\mathcal{F}}-$transverse au point $\widetilde{\alpha}(t'_k) = T'_k \widetilde{\gamma}^*_{v(k)}(s'_k)$.

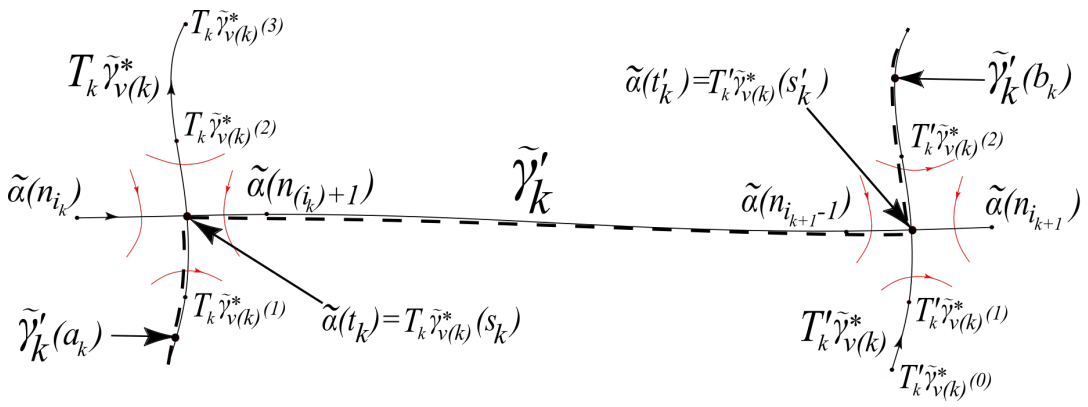

FIGURE 4.4 – Objets considérés. La situation reste exactement celle de la figure 4.2.

Remarque : il est tout à fait possible d'avoir $n_{i_k} = n_{i_{k+1}-1}$, c'est-à-dire que les deux portions $\widetilde{\alpha}_{|[n_{i_k}, n_{(i_k)+1}]}$ et $\widetilde{\alpha}_{|[n_{i_{k+1}-1}, n_{i_{k+1}}]}$ soient les mêmes. Dans ce cas, on choisit simplement $T_k = T'_k$, $t_k = t'_k$ et $s_k = s'_k$.

Pour tout $k \in \{0, ..., m-1\}$, soit alors $\widetilde{\gamma}'_k : [0,3] \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ le chemin transverse défini de la manière suivante :
- $\widetilde{\gamma}'_{k|[0,1]}$ est une reparamétrisation de $T_k\widetilde{\gamma}^*_{v(k)|[0,s_k]}$,
- $\widetilde{\gamma}'_{k|[1,2]}$ est une reparamétrisation de $\widetilde{\alpha}_{|[t_k,t'_k]}$,
- et $\widetilde{\gamma}'_{k|[2,3]}$ est une reparamétrisation de $T'_k\widetilde{\gamma}^*_{v(k)|[s'_k,3]}$.

On note $\gamma'_k : [0,3] \to M$ la projection de $\widetilde{\gamma}'_k : [0,3] \to \widetilde{\mathrm{dom}}(\mathcal{F})$ sur M. Le chemin γ'_k est transverse comme concaténation de chemins transverses. Le lemme suivant assure que ce chemin est admissible et qu'il a une auto-intersection $\mathcal{F}-$transverse :

Lemme 4.2.3. *Pour tout $k \in \{0, ..., m-1\}$, le chemin transverse γ'_k est admissible d'ordre $2N_0 + n_{i_{k+1}} - n_{i_k}$. De plus, il existe $a_k \in [0,1]$ et $b_k \in [2,3]$ tels que $T'_kR_{v(k)}T_k^{-1}\widetilde{\gamma}'_{k|[0,1]}$ et $\widetilde{\gamma}'_{k|[2,3]}$ s'intersectent $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement au point $T'_kR_{v(k)}T_k^{-1}\widetilde{\gamma}'_k(a_k) = \widetilde{\gamma}'_k(b_k)$.*

Démonstration. Traitons pour commencer le cas particulier de la remarque ci-dessus, où $n_{i_k} = n_{i_{k+1}-1}$. Dans ce cas, par définition, $\widetilde{\gamma}'_k$ est exactement le chemin $T_k\widetilde{\gamma}^*_{\nu(k)}$. Ce chemin est admissible d'ordre N_0, donc a fortiori est admissible d'ordre plus grand.

Dans le cas général maintenant, le chemin $\widetilde{\gamma}'_k$ est obtenu en effectuant deux forçages successifs. Tout d'abord, le chemin $\widetilde{\gamma}''_k$ obtenu en concaténant $T_k\widetilde{\gamma}^*_{\nu(k)|[0,s_k]}$ et $\widetilde{\alpha}_{|[t_k,n_{i_{k+1}}]}$ est admissible d'ordre $N_0+n_{i_{k+1}}-n_{i_k}$ car il est obtenu en forçant, par la proposition 1.3.5, les deux trajectoires transverses $T_k\widetilde{\gamma}^*_{\nu(k)}$ et $\widetilde{\alpha}_{|[n_{i_k},n_{i_{k+1}}]}$ qui s'intersectent $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement. Ensuite, on s'aperçoit que $\widetilde{\gamma}''_k$ contient la portion $\widetilde{\alpha}_{|[n_{i_{k+1}-1},n_{i_{k+1}}]}$ (car on est dans le cas où $n_{i_k} < n_{i_{k+1}-1}$), donc $\widetilde{\gamma}''_k$ intersecte $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement le chemin $T'_k\widetilde{\gamma}^*_{\nu(k)}$: en forçant par la proposition 1.3.5 ces deux trajectoires, admissibles d'ordres respectifs $N_0+n_{i_{k+1}}-n_{i_k}$ et N_0, on obtient précisément le chemin $\widetilde{\gamma}'_k$, qui est donc admissible d'ordre $2N_0+n_{i_{k+1}}-n_{i_k}$.

Enfin, $T'_kR_{v(k)}T_k^{-1}\widetilde{\gamma}'_{k|[0,1]}$ est égale à la portion $T'_kR_{v(k)}T_k^{-1}T_k\widetilde{\gamma}^*_{v(k)|[0,s_k]}$, qui contient donc $T'_kR_{v(k)}\widetilde{\gamma}^*_{v(k)|[0,1]}$, qui par définition de $R_{v(k)}$ a une intersection $\widetilde{\mathcal{F}}-$transverse avec $T'_k\widetilde{\gamma}^*_{v(k)|[2,3]}$, qui est une sous-portion de $\widetilde{\gamma}'_{k|[2,3]}$. Donc $T'_kR_{v(k)}T_k^{-1}\widetilde{\gamma}'_{k|[0,1]}$ intersecte bien $\widetilde{\mathcal{F}}-$transversalement $\widetilde{\gamma}'_{k|[2,3]}$. □

On déduit de cette intersection $\widetilde{\mathcal{F}}-$transverse le corollaire suivant :

Corollaire 4.2.4. *Pour tout $k \in \{0, ..., m-1\}$, on a*

$$\left(\frac{2mN_0+n_p}{2mN_0+n} \times \frac{[T'_k]+[R_{v(k)}]-[T_k]}{2N_0+n_{i_{k+1}}-n_{i_k}}\right) \in \mathrm{rot}(f).$$

Démonstration. Pour tout $k \in \{0, ..., m-1\}$, on dispose donc d'un chemin $\widetilde{\gamma}'_k$, admissible d'ordre $2N_0 + (n_{i_{k+1}} - n_{i_k})$, ayant une intersection $\widetilde{\mathcal{F}}-$transverse avec $T'_kR_{v(k)}T_k^{-1}\widetilde{\gamma}'_k$ au point $T'_kR_{v(k)}T_k^{-1}\widetilde{\gamma}'_k(a_k) = \widetilde{\gamma}'_k(b_k)$ avec $a_k < b_k$: le théorème 1.3.8 assure donc que pour tout $q \in \mathbb{Q}\cap]0,1]$, l'ensemble de rotation de f contient

$$q \times \frac{[T'_k]+[R_{v(k)}]-[T_k]}{2N_0+(n_{i_{k+1}}-n_{i_k})}.$$

Comme $n_p \leq n$, alors

$$\frac{2mN_0+n_p}{2mN_0+n} \in \mathbb{Q}\cap]0,1], \text{ et donc } \left(\frac{2mN_0+n_p}{2mN_0+n} \times \frac{[T'_k]+[R_{v(k)}]-[T_k]}{2N_0+n_{i_{k+1}}-n_{i_k}}\right) \in \mathrm{rot}(f).$$

□

4.2.4 Estimations homologiques

Il reste finalement à vérifier techniquement que les homologies des portions considérées sont bien "uniformément proches" comme on s'y attend :

Lemme 4.2.5. *Pour tout $k \in \{0, ..., m-1\}$, on a les majorations suivantes :*
- $\left\| \overline{\alpha_{|[n_{i_k}, n_{i_{k+1}}]}} - \overline{\alpha_{|[t_k, t'_k]}} \right\| < 3K + 3C_1 + 6K_0$, *et*
- $\left\| \overline{\gamma'_{k|[a_k, b_k]}} - \overline{\alpha_{|[t_k, t'_k]}} \right\| \leq 2C_2 + 2K_0$.

Démonstration. Par définition, on a $n_{i_k} < t_k < n_{i_k+1}$ et $n_{i_{k+1}-1} < t'_k < n_{i_{k+1}}$, donc le lemme 4.1.15 donne les majorations

$$\left\| \overline{\alpha_{|[n_{i_k}, t_k]}} \right\| < K + C_1 + K_0 \quad \text{et} \quad \left\| \overline{\alpha_{|[t'_k, n_{i_{k+1}}]}} \right\| < 2K + 2C_1 + 3K_0.$$

De plus, $\alpha_{|[n_{i_k}, n_{i_{k+1}}]}$ est la concaténation de $\alpha_{|[n_{i_k}, t_k]}$, de $\alpha_{|[t_k, t'_k]}$ et de $\alpha_{|[t'_k, n_{i_{k+1}}]}$, donc le lemme 4.1.1 assure que

$$\left\| \overline{\alpha_{|[n_{i_k}, n_{i_{k+1}}]}} - \overline{\alpha_{|[t_k, t'_k]}} \right\| \leq \left\| \overline{\alpha_{|[n_{i_k}, t_k]}} \right\| + \left\| \overline{\alpha_{|[t'_k, n_{i_{k+1}}]}} \right\| + 2K_0 < 3K + 3C_1 + 6K_0.$$

De même, par définition, $\gamma'_{k|[a_k,1]}$ et $\gamma'_{k|[2,b_k]}$ sont des portions de $\gamma^*_{v(k)}$, donc par définition de C_2, on a $\left\| \overline{\gamma'_{k|[a_k,1]}} \right\| \leq C_2$ et $\left\| \overline{\gamma'_{k|[2,b_k]}} \right\| \leq C_2$. Comme $\gamma'_{k|[a_k,b_k]}$ est la concaténation de $\gamma'_{k|[a_k,1]}$, de $\alpha_{|[t_k,t'_k]}$, et de $\gamma'_{k|[2,b_k]}$, le lemme 4.1.1 s'applique et donne bien

$$\left\| \overline{\gamma'_{k|[a_k,b_k]}} - \overline{\alpha_{|[t_k,t'_k]}} \right\| \leq \left\| \overline{\gamma'_{k|[a_k,1]}} \right\| + \left\| \overline{\gamma'_{k|[2,b_k]}} \right\| + 2K_0 \leq 2C_2 + 2K_0.$$

□

On peut alors rassembler toutes ces portions pour revenir à l'homologie de la trajectoire globale $\alpha_{|[0,n]}$:

Lemme 4.2.6. *On a la majoration*

$$\left\| \overline{\alpha_{|[0,n]}} - \left(\sum_{k=0}^{m-1} [T'_k] + [R_{v(k)}] - [T_k] \right) \right\| < (3r+1)K + r(2C_2 + 3C_1 + 9K_0).$$

Démonstration. Pour tout $k \in \{0, ..., m-1\}$, le chemin $\gamma'_{k|[a_k,b_k]}$ se relève en $\widetilde{\gamma}'_{k|[a_k,b_k]}$, qui par définition relie $\widetilde{\gamma}'_k(a_k)$ à $\widetilde{\gamma}'_k(b_k) = T'_k R_{v(k)} T_k^{-1} \widetilde{\gamma}'_k(a_k)$. Le chemin $\gamma'_{k|[a_k,b_k]}$ est donc en fait un lacet d'homologie $[T'_k R_{v(k)} T_k^{-1}]$. Or, par définition des chemins $(c_{x,y})_{x,y \in M}$, le chemin $c_{\gamma'_k(a_k), \gamma'_k(b_k)}$ est le chemin trivial. On déduit donc que

$$\overline{\gamma'_{k|[a_k,b_k]}} = [T'_k] + [R_{v(k)}] - [T_k].$$

Le lemme 4.2.5 permet donc d'obtenir que pour tout $k \in \{0, ..., m-1\}$,

$$\begin{aligned} \left\| \overline{\alpha_{|[n_{i_k}, n_{i_{k+1}}]}} + [T_k] - [R_{v(k)}] - [T'_k] \right\| &\leq \left\| \overline{\alpha_{|[n_{i_k}, n_{i_{k+1}}]}} - \overline{\alpha_{|[t_k, t'_k]}} \right\| + \left\| \overline{\gamma'_{k|[a_k,b_k]}} - \overline{\alpha_{|[t_k,t'_k]}} \right\| \\ &< 3K + 2C_2 + 3C_1 + 8K_0. \end{aligned}$$

Maintenant, $\alpha_{|[0,n]}$ est la concaténation des $\alpha_{|[n_{i_k},n_{i_{k+1}}]}$ pour $k = 0, ..., m-1$, et de $\alpha_{|[n_p,n]}$. Le lemme 4.1.1 s'applique donc et donne

$$\left\| \overline{\alpha_{|[0,n]}} - \sum_{k=0}^{m-1} \overline{\alpha_{|[n_{i_k},n_{i_{k+1}}]}} \right\| \leq \left\| \overline{\alpha_{|[n_p,n]}} \right\| + mK_0.$$

Ceci entraîne que

$$\begin{aligned} \left\| \overline{\alpha_{|[0,n]}} - \left(\sum_{k=0}^{m-1} [T'_k] + [R_{v(k)}] - [T_k] \right) \right\| &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \left\| \overline{\alpha_{|[n_{i_k},n_{i_{k+1}}]}} + [T_k] - [R_{v(k)}] - [T'_k] \right\| \\ &\quad + \left\| \overline{\alpha_{|[n_p,n]}} \right\| + mK_0 \\ &< m(3K + 2C_2 + 3C_1 + 9K_0) + \left\| \overline{\alpha_{|[n_p,n]}} \right\|. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à se souvenir que par définition de la $K-$subdivision, $\left\| \overline{\alpha_{|[n_p,n]}} \right\| < K$, et que par construction, $m \leq r$ pour obtenir finalement

$$\left\| \overline{\alpha_{|[0,n]}} - \left(\sum_{k=0}^{m-1} [T'_k] + [R_{v(k)}] - [T_k] \right) \right\| < (3r+1)K + r(2C_2 + 3C_1 + 9K_0).$$

□

Un argument final de convexité vient enfin clore la preuve :

Proposition 4.2.7. *On a finalement la majoration souhaitée*

$$d\left(\overline{\alpha_{|[0,n]}}, n\mathrm{rot}(f)\right) < (3r+1)K + r(2C_2 + 3C_1 + 9K_0 + 2N_0K^*).$$

Démonstration. Par le corollaire 4.2.4, on sait que pour tout $k \in \{0, ..., m-1\}$,

$$\left(\frac{2mN_0 + n_p}{2mN_0 + n} \times \frac{[T'_k] + [R_{v(k)}] - [T_k]}{2N_0 + n_{i_{k+1}} - n_{i_k}} \right) \in \mathrm{rot}(f).$$

Mais de plus, on a

$$\frac{2N_0 + n_{i_{k+1}} - n_{i_k}}{2mN_0 + n_p} > 0 \text{ pour tout } k \in \{0, ..., m-1\}, \text{ et } \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2N_0 + n_{i_{k+1}} - n_{i_k}}{2mN_0 + n_p} = 1.$$

Par convexité de $\mathrm{rot}(f)$, on déduit donc que

$$\left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{2N_0 + n_{i_{k+1}} - n_{i_k}}{2mN_0 + n_p} \times \frac{2mN_0 + n_p}{2mN_0 + n} \times \frac{[T'_k] + [R_{v(k)}] - [T_k]}{2N_0 + n_{i_{k+1}} - n_{i_k}} \right) \in \mathrm{rot}(f),$$

c'est-à-dire donc que

$$\frac{1}{2mN_0 + n} \left(\sum_{k=0}^{m-1} [T'_k] + [R_{v(k)}] - [T_k] \right) \in \mathrm{rot}(f).$$

On déduit donc, puisque K^* est le diamètre de $\mathrm{rot}(f)$, que

$$\begin{aligned} d\left(\overline{\alpha_{|[0,n]}}, n\mathrm{rot}(f)\right) &\leq \left\| \overline{\alpha_{|[0,n]}} - n \times \left(\frac{1}{2mN_0 + n} \sum_{k=0}^{m-1} [T'_k] + [R_{v(k)}] - [T_k] \right) \right\| \\ &\leq \left\| \overline{\alpha_{|[0,n]}} - \left(\sum_{k=0}^{m-1} [T'_k] + [R_{v(k)}] - [T_k] \right) \right\| + 2mN_0K^*. \end{aligned}$$

Il reste finalement à appliquer la majoration 4.2.6, et à se rappeler que $m \leq r$, pour obtenir

$$d\left(\overline{\alpha_{|[0,n]}}, n\mathrm{rot}(f)\right) < (3r+1)K + r(2C_2 + 3C_1 + 9K_0 + 2N_0K^*).$$

□

4.3 Conséquences du théorème G

Nous nous intéressons à présent aux conséquences du théorème G. Dans le cas du tore, on sait en effet qu'une telle propriété de "déplacement uniforme" a des applications intéressantes ([AZ15], [LCT18]). Le but de cette section est de montrer que ces applications tiennent en genre supérieur.

4.3.1 Notations

On garde toutes les notations introduites au début de ce chapitre : $f : M \to M$ désigne donc un homéomorphisme isotope à l'identité sur une surface de genre ≥ 2, et on suppose que 0 est dans l'intérieur de l'ensemble de rotation $\mathrm{rot}(f)$ (cette hypothèse sera uniquement nécessaire pour appliquer le théorème G).

Soit ω une $1-$forme différentielle fermée sur M, et $[\omega] \in H^1(M, \mathbb{R})$ sa classe de cohomologie. On désigne encore par $\mathcal{M}(f)$ l'ensemble des mesures boréliennes de probabilités $f-$invariantes sur M ; pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(f)$ de vecteur de rotation $\mathrm{rot}(\mu)$, on notera

$$\mathrm{rot}(\mu).[\omega] = \int_M \left(\int_{I(x)} \omega \right) \mathrm{d}\mu(x)$$

(autrement dit, on voit l'élément $\mathrm{rot}(\mu)$ du premier groupe d'homologie $H_1(M, \mathbb{R})$ par dualité, comme une forme linéaire sur le premier groupe de cohomologie $H^1(M, \mathbb{R})$). Comme $\mathcal{M}(f)$ est compact, on peut définir

$$\alpha_{[\omega]} = \max_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \mathrm{rot}(\mu).[\omega],$$

ainsi que l'ensemble des mesures "maximisantes" :

$$\mathcal{M}_{[\omega]} = \{\mu \in \mathcal{M}(f) \mid \mathrm{rot}(\mu).[\omega] = \alpha_{[\omega]}\}.$$

En notant $\mathrm{supp}(\mu)$ le support d'une mesure $\mu \in \mathcal{M}(f)$, on définit alors

$$X_{[\omega]} = \overline{\bigcup_{\mu \in \mathcal{M}_{[\omega]}} \mathrm{supp}(\mu)} \quad \text{et } X^{\mathrm{erg}}_{[\omega]} = \overline{\bigcup_{\substack{\mu \in \mathcal{M}_{[\omega]} \\ \mu \text{ ergodique}}} \mathrm{supp}(\mu)}.$$

On fixe enfin une norme $\|.\|_{H^1}$ sur le premier groupe de cohomologie $H^1(M,\mathbb{R})$, et on note $\|.\|_{\mathrm{op}}$ la norme d'opérateur induite sur le premier groupe d'homologie $H_1(M,\mathbb{R})$ (que l'on voit toujours comme l'espace des formes linéaires sur $H^1(M,\mathbb{R})$). On note également d_{op} la distance sur $H_1(M,\mathbb{R})$ associée à la norme $\|.\|_{\mathrm{op}}$.

La première des applications du théorème G est la réponse à la conjecture de Boyland énoncée dans l'introduction comme théorème I :

Théorème 4.3.1. *Si f préserve une mesure borélienne de probabilité μ de support total, dont on note* $\mathrm{rot}(\mu)$ *le vecteur de rotation, alors* $\mathrm{rot}(\mu) \in \mathrm{Int}(\mathrm{rot}(f))$.

En particulier, ce théorème s'applique donc pour un homéomorphisme isotope à l'identité qui préserve l'aire : si 0 est dans l'intérieur de l'ensemble de rotation d'un tel homéomorphisme, alors c'est aussi le cas du vecteur de rotation de la mesure de Lebesgue. Ce théorème reposera sur la proposition J de l'introduction, que nous montrerons au paragraphe 4.3.2 et dont nous rappelons ici l'énoncé :

Proposition 4.3.2. *Il existe une constante $L_0 \in \mathbb{R}$ telle que pour toute $1-$forme fermée ω, pour tout $z \in X_{[\omega]}$, pour tout $n \geq 1$,*

$$\left| \left(\int_{I^n(z)} \omega \right) - n\alpha_{[\omega]} \right| \leq L_0 \, \|[\omega]\|_{H^1} .$$

En particulier, toute mesure μ supportée sur $X_{[\omega]}$ appartient à $\mathcal{M}_{[\omega]}$.

Finalement, le dernier corollaire que nous obtiendrons est un résultat analogue à cette dernière proposition pour tous les points appartenant au support d'une mesure dont le vecteur de rotation appartient à la frontière de $\mathrm{rot}(f)$, notée $\partial(\mathrm{rot}(f))$. On adopte les notations suivantes :

$$\mathcal{M}_\partial = \{\mu \in \mathcal{M}(f) \mid \mathrm{rot}(\mu) \in \partial(\mathrm{rot}(f))\} \quad \text{et } X_\partial = \overline{\bigcup_{\mu \in \mathcal{M}_\partial} \mathrm{supp}(\mu)}.$$

Nous montrerons alors au paragraphe 4.3.3 la proposition K de l'introduction, dont revoici l'énoncé :

Proposition 4.3.3. *Il existe une constante $L_1 \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $z \in X_\partial$, pour tout $n \geq 1$,*

$$d_{\mathrm{op}}\left(\overline{I^n(z)}, n\partial(\mathrm{rot}(f))\right) \leq L_1.$$

En particulier, toute mesure ergodique μ supportée sur X_∂ appartient à M_∂.

4.3.2 Mesures supportées sur $X_{[\omega]}$ et conjecture de Boyland

Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème 4.3.1, à l'aide de la proposition 4.3.2. Commençons par le lemme suivant :

Lemme 4.3.4. *On a $X_{[\omega]} = X^{\mathrm{erg}}_{[\omega]}$.*

Démonstration. Il est bien clair, par définition, que $X_{[\omega]}^{\text{erg}} \subset X_{[\omega]}$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $\mu \in \mathcal{M}_{[\omega]}$. Par le théorème de Krein-Milman, μ est limite de combinaisons convexes d'éléments de l'ensemble $\text{Ext}(\mathcal{M}_{[\omega]})$ des points extrêmaux de $\mathcal{M}_{[\omega]}$. En particulier, ceci implique que

$$\text{supp}(\mu) \subset \overline{\bigcup_{\nu \in \text{Ext}(\mathcal{M}_{[\omega]})} \text{supp}(\nu)}.$$

Mais d'autre part, tout mesure $\nu \in \text{Ext}(\mathcal{M}_{[\omega]})$ est également un point extrêmal de $\mathcal{M}(f)$, c'est-à-dire une mesure ergodique. Il s'ensuit que

$$\text{supp}(\mu) \subset \overline{\bigcup_{\substack{\mu \in \mathcal{M}_{[\omega]} \\ \mu \text{ ergodique}}} \text{supp}(\mu)} = X_{[\omega]}^{\text{erg}},$$

et ce pour tout $\mu \in \mathcal{M}_{[\omega]}$, ce qui suffit à assurer que $X_{[\omega]} \subset X_{[\omega]}^{\text{erg}}$. □

On peut alors montrer la première partie de la proposition J :

Proposition 4.3.5. *Il existe une constante $L_0 \in \mathbb{R}$ uniforme en ω telle que pour tout $z \in X_{[\omega]}$, pour tout $n \geq 1$,*

$$\left| \left(\int_{I^n(z)} \omega \right) - n\alpha_{[\omega]} \right| \leq L_0 \left\| [\omega] \right\|_{H^1}.$$

Démonstration. Soit $z \in X_{[\omega]}$ et $n \geq 1$, et $\mu_{n,z} \in \mathcal{M}(f)$ une mesure réalisant la distance $d_{\text{op}}(\overline{I^n(z)}, n\text{rot}(f))$, c'est-à-dire telle que $d_{\text{op}}(\overline{I^n(z)}, n\text{rot}(f)) = \left\| \overline{I^n(z)} - n\text{rot}(\mu_{n,z}) \right\|_{\text{op}}$. Par définition de $\alpha_{[\omega]}$ comme maximum, on a donc

$$\begin{aligned} \left(\int_{I^n(z)} \omega \right) - n\alpha_{[\omega]} &\leq \left(\int_{I^n(z)} \omega \right) - n\text{rot}(\mu_{n,z}).[\omega] \\ &\leq \left| \left(\int_{\ell_{I^n(z)}} \omega \right) - \left(\int_{c_{f^n(z),z}} \omega \right) - n\text{rot}(\mu_{n,z}).[\omega] \right|. \end{aligned}$$

Tout d'abord, par définition de $\|.\|_{\text{op}}$, on a

$$\left| \left(\int_{\ell_{I^n(z)}} \omega \right) - n\text{rot}(\mu_{n,z}).[\omega] \right| \leq \left\| \overline{I^n(z)} - n\text{rot}(\mu_{n,z}) \right\|_{\text{op}} \left\| [\omega] \right\|_{H^1}.$$

Mais par définition de $\mu_{n,z}$, on a $\left\| \overline{I^n(z)} - n\text{rot}(\mu_{n,z}) \right\|_{\text{op}} = d_{\text{op}}(\overline{I^n(z)}, n\text{rot}(f))$, qui, comme par hypothèse $0 \in \text{Int}(\text{rot}(f))$, est uniformément borné par le théorème G. Il existe donc une constante uniforme L telle que

$$\left| \left(\int_{\ell_{I^n(z)}} \omega \right) - n\text{rot}(\mu_{n,z}).[\omega] \right| \leq L \left\| [\omega] \right\|_{H^1}.$$

Ensuite, comme les chemins $c_{f^n(z),z}$ sont de longueurs uniformément bornées, il existe une constante uniforme L' telle que

$$\left| \int_{c_{f^n(z),z}} \omega \right| \leq L' \left\| [\omega] \right\|_{H^1}.$$

Posant $L_0 = L + L'$, on déduit donc que pour tout $z \in X_{[\omega]}$, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\left(\int_{I^n(z)} \omega\right) - n\alpha_{[\omega]} \leq L_0 \left\|[\omega]\right\|_{H^1}.$$

Il reste donc à montrer que la quantité peut être aussi minorée par $-L_0 \left\|[\omega]\right\|_{H^1}$. Ceci va reposer sur le lemme d'Atkinson (proposition 3.2.1). Soit donc $\mu \in \mathcal{M}_{[\omega]}$ une mesure ergodique. La fonction $\varphi : M \to \mathbb{R}$ définie pour tout $z \in M$ par

$$\varphi(z) = \int_{I(z)} \omega - \alpha_{[\omega]}$$

a alors une moyenne nulle. En effet, $\mu \in \mathcal{M}_{[\omega]}$, donc

$$\int_M \varphi(z)\mathrm{d}\mu(z) = \mathrm{rot}(\mu).[\omega] - \alpha_{[\omega]} = 0.$$

Le lemme d'Atkinson s'applique donc et assure qu'il existe un borélien $A \subset \mathrm{supp}(\mu)$, tel que $\mu(A) = 1$, et que pour tout $z \in A$, il existe une suite d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{i=0}^{n_k-1} \varphi(f^i(z)) = 0, \quad \text{i.e.} \lim_{k\to+\infty} \left(\int_{I^{n_k}(z)} \omega\right) - n_k\alpha_{[\omega]} = 0.$$

Fixons donc $z \in A$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $n_k \geq n$, on a donc

$$\begin{aligned}\left(\int_{I^n(z)} \omega\right) - n\alpha_{[\omega]} &= \left(\int_{I^{n_k}(z)} \omega - n_k\alpha_{[\omega]}\right) - \left(\int_{I^{n_k-n}(f^n(z))} \omega - (n_k - n)\alpha_{[\omega]}\right) \\ &\geq \left(\int_{I^{n_k}(z)} \omega - n_k\alpha_{[\omega]}\right) - L_0 \left\|[\omega]\right\|_{H^1}.\end{aligned}$$

Faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient alors, pour tout $z \in A$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\int_{I^n(z)} \omega\right) - n\alpha_{[\omega]} \geq -L_0 \left\|[\omega]\right\|_{H^1}.$$

Les deux inégalités se réunissent en : pour tout $z \in A$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\left(\int_{I^n(z)} \omega\right) - n\alpha_{[\omega]}\right| \leq L_0 \left\|[\omega]\right\|_{H^1}.$$

En particulier, ceci est encore vrai pour tout $z \in \overline{A}$ (et $n \in \mathbb{N}$). De plus, comme $\mu(\overline{A}) = 1$, alors $\mathrm{supp}(\mu) \subset \overline{A}$, donc l'inégalité est encore vraie pour tout $z \in \mathrm{supp}(\mu)$. Autrement dit, comme μ est une mesure ergodique quelconque, elle est encore vraie pour tout $z \in X^{\mathrm{erg}}_{[\omega]}$ (et $n \in \mathbb{N}$). Il reste finalement à appliquer le lemme 4.3.4 pour obtenir que pour tout $z \in X_{[\omega]}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a bien

$$\left|\left(\int_{I^n(z)} \omega\right) - n\alpha_{[\omega]}\right| \leq L_0 \left\|[\omega]\right\|_{H^1}.$$

□

En guise de corollaire, on obtient la suite de la proposition J :

Corollaire 4.3.6. *Toute mesure μ supportée sur $X_{[\omega]}$ appartient à $\mathcal{M}_{[\omega]}$.*

Démonstration. Soit μ supportée sur $X_{[\omega]}$. On a

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{rot}(\mu).[\omega]-\alpha_{[\omega]}\right| &= \left|\int_{X_{[\omega]}}\left(\int_{I(x)}\omega\right)\mathrm{d}\mu(x)-\alpha_{[\omega]}\right| = \left|\int_{X_{[\omega]}}\frac{1}{n}\left(\int_{I^n(x)}\omega-n\alpha_{[\omega]}\right)\mathrm{d}\mu(x)\right| \\ &\leq \int_{X_{[\omega]}}\frac{1}{n}\left|\int_{I^n(x)}\omega-n\alpha_{[\omega]}\right|\mathrm{d}\mu(x) \leq \frac{L_0\,\|[\omega]\|_{H^1}}{n}\end{aligned}$$

par la proposition 4.3.5. Il reste à faire tendre n vers $+\infty$ pour obtenir que $\mathrm{rot}(\mu).[\omega]=\alpha_{[\omega]}$, et donc que $\mu\in\mathcal{M}_{[\omega]}$. □

On peut finalement déduire de ce corollaire la preuve du théorème I, dont on rappelle ici l'énoncé :

Théorème 4.3.7. *Soit $f : M \to M$ un homéomorphisme isotope à l'identité sur une surface fermée de genre ≥ 2, et μ une mesure borélienne de probabilité $f-$invariante de support total, dont on note $\mathrm{rot}(\mu)$ le vecteur de rotation. Si $0\in\mathrm{Int}(\mathrm{rot}(f))$, alors $\mathrm{rot}(\mu)\in\mathrm{Int}(\mathrm{rot}(f))$.*

Démonstration. Supposons au contraire que $\mathrm{rot}(\mu)\notin\mathrm{Int}(\mathrm{rot}(f))$. Alors $\mathrm{rot}(\mu)$ appartient à un hyperplan d'appui affine de $\mathrm{rot}(f)$: autrement dit, il existe une forme linéaire ψ sur $H_1(M,\mathbb{R})$ telle que

$$\psi(\mathrm{rot}(\mu))=\max_{\mathrm{rot}(f)}\psi.$$

Par dualité, il existe donc une classe de cohomologie $[\omega]\in H^1(M,\mathbb{R})$ (où ω est une $1-$forme fermée) telle que $\mathrm{rot}(\mu).[\omega]=\alpha_{[\omega]}$. En d'autres termes, on a donc $\mu\in\mathcal{M}_{[\omega]}$.

Pour une telle forme ω, on a donc $X_{[\omega]}=M$ puisque par hypothèse, la mesure μ est de support total. Toute mesure μ est donc à support dans $X_{[\omega]}$, donc par le corollaire 4.3.6, on a $\mathcal{M}(f)=\mathcal{M}_{[\omega]}$. Cela implique que pour toute mesure $\mu\in\mathcal{M}(f)$, on a $\mathrm{rot}(\mu).[\omega]=\alpha_{[\omega]}$, et donc que $\mathrm{rot}(f)$ est inclus dans l'hyperplan d'appui considéré. Ceci est absurde car par hypothèse, $\mathrm{rot}(f)$ est d'intérieur non vide. □

4.3.3 Mesures supportées sur X_∂

Dans ce paragraphe, on s'intéresse maintenant aux résultats de la proposition 4.3.3. Nous aurons besoin du lemme simple d'algèbre affine suivant :

Lemme 4.3.8. *Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme $\|.\|$. Soit $x\in E\setminus\{0\}$ et $c\in\mathbb{R}$. On désigne par E^* le dual de E, muni de la norme d'opérateur $\|.\|_{\mathrm{op}}$ et d la distance associée à cette norme. Soit $H=\{\psi\in E^*\mid\psi(x)=c\}$. Pour tout $K>0$, pour tout $\varphi\in E^*$ tel que $|\varphi(x)-c|\leq K\,\|x\|$, on a $d(\varphi,H)\leq K$.*

Démonstration. Complétons $\{x\}$ en une base $\{x,e_2,...,e_n\}$ de E, et soit $\{e_1^*,...,e_n^*\}$ sa base duale. Soit $\varphi\in E^*$: il existe $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{R}$ tels que $\varphi=\sum_{1\leq i\leq n}\lambda_i e_i^*$. Par définition de H, l'application $\psi=\varphi-(\varphi(x)-c)\,e_1^*$ est dans H. Si de plus $|\varphi(x)-c|\leq K\,\|x\|$, on a alors

$$d(\varphi,H)\leq\|\varphi-\psi\|_{\mathrm{op}}=|\varphi(x)-c|\,\|e_1^*\|_{\mathrm{op}}=\frac{|\varphi(x)-c|}{\|x\|}\leq K.$$

□

On a alors la proposition suivante, première partie de la proposition K :

Proposition 4.3.9. *Il existe une constante $L_1 \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $z \in X_\partial$ et pour tout $n \geq 1$,*

$$d_{\mathrm{op}}\left(\overline{I^n(z)}, n\partial\left(\mathrm{rot}(f)\right)\right) \leq L_1.$$

Démonstration. Soit $\mu \in \mathcal{M}_\partial$. Alors $\mathrm{rot}(\mu)$ appartient à un hyperplan d'appui affine de $\mathrm{rot}(f)$: autrement dit, il existe une classe de cohomologie non nulle $[\omega] \in H^1(M, \mathbb{R})$ (où ω est une $1-$forme fermée) telle que $\mathrm{rot}(\mu).[\omega] = \alpha_{[\omega]}$, c'est-à-dire telle que $\mu \in \mathcal{M}_{[\omega]}$. En particulier, on a donc $\mathrm{supp}(\mu) \subset X_{[\omega]}$. Il suffit donc de montrer le résultat pour tout $z \in X_{[\omega]}$, où $[\omega] \neq 0 \in H^1(M, \mathbb{R})$.

Soit donc $[\omega] \neq 0 \in H^1(M, \mathbb{R})$ une classe de cohomologie, représentée par une $1-$forme fermée ω. D'après la proposition 4.3.5, il existe une constante $L_0 \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $z \in X_{[\omega]}$ et pour tout $n \geq 1$,

$$\left|\left(\int_{I^n(z)} \omega\right) - n\alpha_{[\omega]}\right| \leq L_0 \left\|[\omega]\right\|_{H^1}.$$

En particulier, comme les chemins $c_{f^n(z),z}$ sont de longueurs uniformément bornées, il existe une constante L_0' telle que pour tout $z \in X_{[\omega]}$ et pour tout $n \geq 1$,

$$\left|\left(\int_{\ell_{I^n(z)}} \omega\right) - n\alpha_{[\omega]}\right| \leq L_0' \left\|[\omega]\right\|_{H^1}.$$

Notons $H_n^{[\omega]}$ l'hyperplan affine défini par $H_n^{[\omega]} = \{\rho \in H_1(M, \mathbb{R}) \mid \rho.[\omega] = n\alpha_{[\omega]}\}$ (on voit toujours les éléments de $H_1(M, \mathbb{R})$ par dualité, c'est-à-dire comme formes linéaires sur $H^1(M, \mathbb{R})$). Le lemme 4.3.8 s'applique donc et montre que pour tout $z \in X_{[\omega]}$ et pour tout $n \geq 1$, on a la majoration uniforme

$$d_{\mathrm{op}}\left(\overline{I^n(z)}, H_n^{[\omega]}\right) \leq L_0'.$$

En particulier, si $\overline{I^n(z)} \in n\mathrm{rot}(f)$, alors comme $H_n^{[\omega]}$ est un hyperplan d'appui de $n\mathrm{rot}(f)$, on a

$$d_{\mathrm{op}}\left(\overline{I^n(z)}, n\partial\left(\mathrm{rot}(f)\right)\right) \leq d_{\mathrm{op}}\left(\overline{I^n(z)}, H_n^{[\omega]}\right) \leq L_0'.$$

Dans le cas contraire où $\overline{I^n(z)} \notin n\mathrm{rot}(f)$, on a alors, en appliquant le théorème G (L désignant la constante qu'il fournit),

$$d_{\mathrm{op}}\left(\overline{I^n(z)}, n\partial\left(\mathrm{rot}(f)\right)\right) = d_{\mathrm{op}}\left(\overline{I^n(z)}, n\mathrm{rot}(f)\right) \leq L.$$

En posant $L_1 = \max(L, L_0')$, on peut alors rassembler ces deux cas en une unique inégalité : pour tout $z \in X_{[\omega]}$ et $n \geq 1$, on a donc

$$d_{\mathrm{op}}\left(\overline{I^n(z)}, n\partial\left(\mathrm{rot}(f)\right)\right) \leq L_1.$$

Par la remarque faite en début de preuve, cela suffit à assurer que la même égalité est vérifiée pour tout $z \in X_\partial$ et $n \geq 1$. □

On déduit alors de cette proposition le corollaire suivant, qui termine la preuve de la proposition K :

Corollaire 4.3.10. *Toute mesure ergodique μ supportée sur X_∂ appartient à M_∂.*

Démonstration. Soit μ une mesure ergodique supportée sur X_∂ et $z \in X_\partial$ un point $\mu-$générique. D'après la proposition 4.3.9, pour tout $n \geq 1$, il existe $\rho_{n,z} \in \partial\left(\mathrm{rot}(f)\right)$ tel que

$$\left\| \frac{\left(\overline{I^n(z)}\right)}{n} - \rho_{n,z} \right\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{L_1}{n}.$$

Mais comme z est $\mu-$générique, alors

$$\mathrm{rot}(\mu) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\overline{I^n(z)}\right)}{n}, \qquad \text{donc } \mathrm{rot}(\mu) = \lim_{n\to+\infty} \rho_{n,z},$$

ce qui montre, comme $\partial\left(\mathrm{rot}(f)\right)$ est fermée, que $\mathrm{rot}(\mu) \in \partial\left(\mathrm{rot}(f)\right)$. □

Bibliographie

[Atk76] Giles Atkinson. Recurrence of co-cycles and random walks. *Journal of the London Mathematical Society (2)*, 13 :486–488, 1976.

[AZ15] Salvador Addas-Zanata. Uniform bounds for diffeomorphisms of the torus and a conjecture by P. Boyland. *Journal of the London Mathematical Society*, 91 :537–553, 2015.

[AZdPJ18] Salvador Addas-Zanata and Bruno de Paula Jacóia. A condition that implies full homotopical complexity of orbits. *ArXiv preprint : 1804.04505*, 2018.

[Bae28] Reinhold Baer. Isotopie von kurven auf orientierbaren, geschlossenen Flächen und ihr zusammenhang mit der topologischen deformation der Flächen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 159 :101–116, 1928.

[BCLR18] François Béguin, Sylvain Crovisier, and Frédéric Le Roux. Fixed point sets of isotopies on surfaces. *Journal of the European Mathematical Society*, 2018.

[BdCH16] Philip Boyland, Andre de Carvalho, and Toby Hall. New rotation sets in a family of torus homeomorphisms. *Inventiones mathematicae*, 204(3) :895–937, 2016.

[CB88] Andrew Casson and Steven Bleiler. *Automorphisms of Surfaces after Nielsen and Thurston*. Number 9. London Mathematical Society Student Text, 1988.

[CC99] Alberto Candel and Lawrence Conlon. *Foliations I*. American Mathematical Society, 1999.

[DÍ6] Pablo Dávalos. On annular maps of the torus and sublinear diffusion. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, pages 1–66, 2016.

[Den32] Arnaud Denjoy. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 11 :333–375, 1932.

[Eps66] David Epstein. Curves on 2-manifolds and isotopies. *Acta Mathematica*, 115 :83–107, 1966.

[FM90] John Franks and Michal Misiurewicz. Rotation sets of toral flows. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 109(1) :243–249, 1990.

[Fra88] John Franks. Recurrence and fixed points of surface homeomorphisms. *Ergodic Theory of Dynamical Systems*, 8(8* (Charles Conley Memorial Issue)) :99–107, 1988.

[Fra89] John Franks. Realizing rotation vectors for torus homeomorphisms. *Transactions of the American Mathematical Society*, 311(1) :107–115, 1989.

[GKT14] Nancy Guelman, Andres Koropecki, and Fábio Armando Tal. A characterization of annularity for area-preserving toral homeomorphisms. *Mathematische Zeitschrift*, 276(3-4) :673–689, 2014.

[Hae58] André Haefliger. Structure feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 32 :248–329, 1958.

[Ham66] Mary-Elizabeth Hamstrom. Homotopy groups of the space of homeomorphisms on a 2-manifold. *Illinois Journal of Mathematics*, 10(4) :563–573, 1966.

[Hay95] Eijirou Hayakawa. A sufficient condition for the existence of periodic points of homeomorphisms on surfaces. *Tokyo Journal of Mathematics*, 18(1) :213–219, 1995.

[HR57] Andre Haefliger and Georges Reeb. Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan. *L'enseignement mathématique*, III :107–125, 1957.

[Jäg09a] Tobias Jäger. The concept of bounded mean motion for toral homeomorphisms. *Dynamical Systems*, 24(3) :277–297, 2009.

[Jäg09b] Tobias Jäger. Linearization of conservative toral homeomorphisms. *Inventiones mathematicae*, 176(3) :601–616, 2009.

[Jau14] Olivier Jaulent. Existence d'un feuilletage positivement transverse à un homéomorphisme de surface. *Annales de l'Institut Fourier*, 64(4) :1441–1476, 2014.

[Jia83] Boju Jiang. *Lectures on Nielsen fixed point theory*, volume 14. Contemporary Mathematics - American Mathematical Society, 1983.

[Kat73] Anatole Katok. Invariant measures of flows on oriented surfaces. *Soviet Mathematics Doklady*, 14 :1104–1108, 1973.

[KH96] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge University Press, 1996.

[Koc16] Alejandro Kocsard. On the dynamics of minimal homeomorphisms of $\mathbb{T}^2$ which are not pseudo-rotations. *e-print arxiv :1611.03784*, 2016.

[KPS16] Andres Koropecki, Alejandro Passeggi, and Martín Sambarino. The franks-misiurewicz conjecture for extensions of irrational rotations. *e-print arXiv :1611.05498*, 2016.

[KT14] Andres Koropecki and Fábio Armando Tal. Bounded and unbounded behavior for area-preserving rational pseudo-rotations. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 109(3) :785–822, 2014.

[Kwa92] Jaroslaw Kwapisz. Every convex polygon with rational vertices is a rotation set. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 12(2) :333–339, 1992.

[Kwa95] Jaroslaw Kwapisz. A toral diffeomorphism with a nonpolygonal rotation set. *Nonlinearity*, 8(4) :461–476, 1995.

[LC04] Patrice Le Calvez. Une version feuilletée équivariante du théorème de translation de Brouwer. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 79 :229–259, 2004.

[LCT] Patrice Le Calvez and Fábio Armando Tal. Topological horsehoes for surface homeomorphisms. *e-print arXiv :1803.04557*.

[LCT18] Patrice Le Calvez and Fábio Armando Tal. Forcing theory for transverses trajectories of surface homeomorphisms. *Inventiones Mathematicae*, 212(2) :619–729, 2018.

[LM91] Jaume Llibre and Robert Sinclair Mackay. Rotation vectors and entropy for homeomorphisms of the torus isotopic to the identity. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 11 :115–128, 1991.

[Mat97] Shinegori Matsumoto. Rotation sets of surface homeomorphisms. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática*, 28(1) :89–101, 1997.

[MZ89] Michał Misiurewicz and Krystyna Ziemian. Rotation sets for maps of tori. *Journal of the London Mathematical Society*, 40(3) :490–506, 1989.

[Poi85] Henri Poincaré. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, chapitre xv. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 4 :167–244, 1885.

[Pol92] Mark Pollicott. Rotation sets for homeomorphisms and homology. *Transactions of the American Mathematical Society*, 331 :881–894, 1992.

[PS18] Alejandro Passeggi and Martín Sambarino. Deviations in the Franks-Misiurewicz conjecture. *e-print arXiv :1803.03294*, 2018.

[Sch57] Sol Schwartzman. Asymptotic cycles. *Annals of Mathematics*, 68 :270–284, 1957.

[Sha64] Oleksandr Sharkovsky. Coexistence of the cycles of a continuous mapping of the line into itself. *Ukrainian Mathematical Journal*, 16(1) :61–71, 1964.

[Thu88] William P. Thurston. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 19(2) :417–431, 1988.

Sur les ensembles de rotation des homéomorphismes de surface en genre ≥ 2

Résumé : L'un des principaux invariants dynamiques associés à un homéomorphisme de surface isotope à l'identité est son *ensemble de rotation*, décrivant les vitesses et directions asymptotiques moyennes selon lesquelles les points "tournent" autour de la surface sous l'action de l'homéomorphisme. Dans le cas d'un homéomorphisme du tore en particulier, de nombreux résultats relient la forme ou la taille de l'ensemble de rotation à des propriétés dynamiques de l'homéomorphisme.
Cette thèse a pour but de généraliser au cas des surfaces de genre ≥ 2 un certain nombre de résultats connus sur le tore pour les homéomorphismes ayant un "gros" ensemble de rotation : positivité de l'entropie, réalisation de vecteurs de rotation par des points périodiques, déviations bornées, etc. L'outil principal utilisé est la théorie de forçage de Le Calvez et Tal, reposant sur la construction d'un *feuilletage transverse* et l'étude des *trajectoires* des points relativement à ce feuilletage.
Les deux premiers chapitres présentent des résultats préliminaires à ce cadre général. Au chapitre 3, nous menons une étude globale sur les *cycles asymptotiques* de points dont les trajectoires ont des directions homologiques qui s'intersectent. Nous montrons que cette situation suffit à assurer la positivité de l'entropie, ce qui permet d'aboutir à la généralisation de deux résultats connus sur le tore, les théorèmes de Llibre-Mackay et de Franks. Nous obtenons dans le cas d'une surface de genre ≥ 2 qu'un homéomorphisme ayant un "gros" ensemble de rotation a une entropie strictement positive, et nous parvenons à réaliser de nombreux points rationnels de l'ensemble de rotation comme vecteurs de rotation de points périodiques. Enfin, au chapitre 4, nous montrons à l'aide de ce dernier résultat qu'un homéomorphisme dont l'ensemble de rotation contient 0 dans son intérieur est à *déviation bornée*, généralisant encore une propriété connue sur le tore. Nous terminons avec diverses conséquences de ce résultat.

Mots-clés : homéomorphisme de surface, ensemble de rotation, théorie de forçage, feuilletage transverse, cycles asymptotiques, nombre d'intersection

On rotation sets for surface homeomorphisms in genus ≥ 2

Abstract : One of the main dynamical invariants related to a surface homeomorphism isotopic to identity is its *rotation set*, which describes the asymptotic average speeds and directions with which the points "rotate" around the surface under the action of the homeomorphism. In the case of a torus homeomorphism in particular, many results link the shape or the size of the rotation set to dynamical properties of the homeomorphism.
The aim of this thesis is to generalize to the case of surfaces of genus ≥ 2 a certain number of results, well-known on the torus, for homeomorphisms with a "big" rotation set : positivity of the entropy, realization of rotation vectors by periodic points, bounded deviations, etc. The leading tool used is the forcing theory by Le Calvez and Tal, based on the construction of a *transverse foliation* and the study of *trajectories* of points relatively to this foliation.
The first two chapters present some preliminary results in this general context. In chapter 3, we conduct a general study on the *asymptotic cycles* of points whose trajectories have homological directions that intersect. We show that this situation is sufficient to ensure the positivity of the entropy, which leads us to derive a generalization of two well-known results on the torus, Llibre-Mackay and Franks theorems. We obtain in the case of a surface of genus ≥ 2 that a homeomorphism with a "big" rotation set has positive entropy, and we manage to realize many rational points of the rotation set as rotation vectors of periodic points. Finally, in chapter 4, we use this last result to show that a homeomorphism for which 0 lies in the interior of the rotation set has *bounded deviations*, generalizing again a well-known property on the torus. We conclude with some consequences of this result.

Keywords : surface homeomorphism, rotation set, forcing theory, transverse foliation, asymptotic cycles, intersection number