



**HAL**  
open science

# CONTRIBUTION AU DÉVELOPPEMENT ET À L'ÉVALUATION DE MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR L'IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES DE MATÉRIAUX EN DYNAMIQUE

Clément Touzeau

► **To cite this version:**

Clément Touzeau. CONTRIBUTION AU DÉVELOPPEMENT ET À L'ÉVALUATION DE MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR L'IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES DE MATÉRIAUX EN DYNAMIQUE. Autre. Institut National des Sciences Appliquées - Centre Val de Loire, 2018. Français. NNT : 2018ISAB0006 . tel-02970807

**HAL Id: tel-02970807**

**<https://theses.hal.science/tel-02970807v1>**

Submitted on 19 Oct 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**ÉCOLE DOCTORALE**  
**ÉNERGIE, MATÉRIAUX, SCIENCES DE LA TERRE ET DE L'UNIVERS**

LABORATOIRE DE MÉCANIQUE GABRIEL LAMÉ

THÈSE présentée par :  
**Clément TOUZEAU**

Soutenue le : 04 octobre 2018

Pour obtenir le grade de : **Docteur de l'INSA Centre Val de Loire**  
Discipline/S spécialité : génie mécanique

---

**CONTRIBUTION AU DÉVELOPPEMENT ET À L'ÉVALUATION DE MÉTHODES  
NUMÉRIQUES POUR L'IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES DE  
MATÉRIAUX EN DYNAMIQUE**

---

**THÈSE dirigée par :**

**Éric FLORENTIN**                      Professeur des universités, INSA Centre Val de Loire

**co-encadrée par :**

**Benoît MAGNAIN**                      Maître de conférences, INSA Centre Val de Loire

**RAPPORTEURS :**

**François LOUF**                      Maître de conférences HDR, ENS-Paris Saclay

**Philippe ROUCH**                      Professeur des universités, Arts et Métiers ParisTech

**JURY :**

<b>Mame WILLIAM-LOUIS</b>	Professeur des universités, Université d'Orléans	Président
<b>François LOUF</b>	Maître de conférences HDR, ENS-Paris Saclay	Rapporteur
<b>Philippe ROUCH</b>	Professeur des universités, Arts et Métiers ParisTech	Rapporteur
<b>Hélène LAURENT</b>	Maître de conférences HDR, INSA Centre Val de Loire	Examinatrice
<b>Benoît MAGNAIN</b>	Maître de conférences, INSA Centre Val de Loire	Co-encadrant
<b>Éric FLORENTIN</b>	Professeur des universités, INSA Centre Val de Loire	Directeur



*« C'est la marque d'un esprit cultivé qu'être capable de nourrir une pensée sans la cautionner pour autant. », Aristote.*

*« C'est pas faux. », Perceval (Franck Pitiot).*

*À mes amis,*

*à ma famille.*



# Remerciements

Ces travaux de thèse ont été réalisés au sein du Laboratoire de Mécanique Gabriel LaMé, dirigé par Monsieur Patrice BAILLY, et dans les locaux de l'INSA Centre-Val de Loire, dirigée par Monsieur Jean Marie CASTELAIN.

Mes premiers remerciements vont vers Messieurs Éric FLORENTIN et Benoit MAGNAIN qui m'ont encadré à la fois comme étudiant, stagiaire et finalement doctorant. J'ai très sincèrement apprécié leur disponibilité, leurs conseils ainsi que leur patience. Je suis conscient d'avoir bénéficié d'un encadrement exceptionnel, sans lequel les objectifs de cette thèse n'auraient pas été atteints.

Je remercie ensuite Monsieur Mame WILLIAM-LOUIS pour avoir accepté la charge de président du jury.

Je tiens aussi à exprimer ma gratitude à Messieurs Philippe ROUCH et François LOUF qui ont examiné mon manuscrit de thèse et qui ont fait parti du jury.

Mes remerciements vont aussi à Madame Hélène LAURENT pour avoir accepté de faire partie du jury et pour avoir apporté sa contribution pour le premier papier.

Enfin, je tiens à remercier tous les membres du laboratoire et tout le personnel de l'INSA-CVL pour m'avoir conseillé et aidé dans mes démarches. En particulier, je remercie Messieurs Jean-Luc HANUS, Quentin SERRA, Khaled CHETEHOUNA, Huabin ZENG et Patrice BAILLY pour la vie de tous les jours au laboratoire. Puis Mesdames Laura GUILLET, Nathalie MACHU, Karine COTTANCIN et Jaennine REBOULEAU pour le suivi administratif.

Pour conclure ces remerciements, il me paraît important de consacrer une partie spéciale à tous mes amis (spéciaux) doctorants. En effet, Yohann, Maria, Kevin, David, Hamza, Nathan, Guillaume, Ludovic et Xavier méritent bien une mention particulière.

D'abord Yohann pour avoir partagé sa passion du whisky avec moi. Il a aussi essayé avec le Lacrosse mais je ne suis pas totalement idiot non plus. Merci pour tous ces bons moments du type apéros, raclettes, BBQ, vacances et week-ends.

Ensuite Maria et Kevin, pour compléter la fine équipe des énergéticiens qui sont incapables d'arriver à l'heure. Maria pour sa patience (Dieu sait qu'il en faut pour supporter certaines personnes), les madeleines et toutes les fois où j'ai vidé son frigo. Kevin parce que sans lui je n'aurais pas eu internet (pour des raisons d'honneur et de fierté personnelle, je ne donne pas plus de détail).

Aux tours des mécaniciens David, Hamza et Xavier. David, parce que c'est toujours bien de remercier quelqu'un qui est capable de fabriquer des catapultes, des arbalètes et des tanks en impression 3D. Merci aussi pour toutes les fois où j'ai squatté ta voiture. Hamza, parce que même s'il boit que du coca zéro, il est marrant quand même. Dommage qu'il ne soit pas capable de fermer une portière sans coincer la boucle de ceinture. Xavier, parce qu'il a un humour encore plus noir que le mien et qu'il aime bien le gros plan Nantais.

Et finalement, ceux que je sais pas trop comment classer Nathan, Guillaume et Ludovic. Nathan, mon ancien voisin de bureau, parce qu'il ne m'a jamais lancé d'ouvrage de mécanique des fluides dans la tête. Honnêtement, à sa place moi je l'aurais fait. Guillaume, parce que même s'il ne mange pas de viande il n'est pas chiant comme certains. Et Ludovic, parce qu'il faut voter blanc (il comprendra).

**Résumé :** Les procédures d'identification de paramètres de matériau utilisent généralement un champ cinématique mesuré expérimentalement par des techniques non intrusives. En dynamique, une telle démarche n'est pas triviale en raison du nombre important d'informations à traiter. Par ailleurs, la fiabilité de ces informations mesurées conditionne en partie la qualité de l'identification des paramètres. Dans ce travail, nous développons deux nouveaux outils numériques visant à simplifier la démarche d'identification tant au niveau de l'implémentation numérique qu'au niveau de la mise en œuvre expérimentale. Le premier outil, basé sur la méthode des champs virtuels, conduit à une simple inversion d'un système de petite taille. Cette démarche diminue le coût d'une identification de manière significative. Cette méthode est comparée à l'approche du recalage de modèles éléments finis dans le cadre de l'élasticité linéaire. Le second outil est une approche purement géométrique du recalage de modèles. L'objectif de cette nouvelle approche est de s'affranchir de la pose d'un mouchetis aléatoire et de simplifier les traitements d'images associés à la corrélation d'images numériques. Nous montrons que cette méthode est adaptée au contexte de la dynamique en grandes transformations. Les deux outils sont évalués en robustesse et en précision lorsque des incertitudes viennent perturber la mesure.

**Mots-clés :** Identification, Dynamique, Éléments finis, Traitement d'images, Approche géométrique de recalage de modèles, Méthode des champs virtuels, Robustesse et précision, Coûts numériques, Études comparatives.

**Abstract :** The material parameters identification procedure usually takes benefit of measured kinematic field obtained by non intrusive techniques. In dynamics, such a procedure can be challenging because of the important flow of information to take into account. By the way, the reliability of those measured information is likely to define the quality of the parameters identified. In this work, we develop two new numerical tools in order to simplify the identification procedure in term of numerical and experimental implementation. The first tool, based on the virtual fields method, leads to a small system inversion. This method allows one to significantly decrease the cost of one identification. This method is compared to the finite element model updating method in linear elasticity. The second tool is a geometrical approach of the finite element model updating method. This new method aim at overcoming the deposit of a random speckle and of simplifying image processing associated with the digital image correlation technique. Results demonstrate that the method is adapted to the framework of dynamics in large transformations. Both numerical tools are assessed in term of robustness and accuracy when different kind of uncertainties are considered.

**Key-words :** Identification, Dynamics, Finite elements, Image processing, Geometrical approach for model updating, Virtual fields method, Robustness and accuracy, Numerical costs, Comparative studies.



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>11</b>
Cadre de l'étude . . . . .	11
Objectifs des travaux . . . . .	15
Plan du document . . . . .	15
<b>1 Étude bibliographique sur l'identification des paramètres de matériaux et la mesure de champs en mécanique des solides</b>	<b>17</b>
1.1 Notations et définitions . . . . .	19
1.1.1 Mécanique des milieux continus . . . . .	19
1.1.1.1 Relations cinématiques . . . . .	19
1.1.1.2 Mesure des contraintes . . . . .	20
1.1.1.3 Relation de comportement . . . . .	20
1.1.1.4 Principe fondamental de la dynamique . . . . .	21
1.1.1.5 Conditions limites et conditions initiales . . . . .	21
1.1.2 Méthode des éléments finis . . . . .	23
1.1.2.1 Principe des travaux virtuels en dynamique . . . . .	23
1.1.2.2 Discrétisation spatiale . . . . .	24
1.1.2.3 Discrétisation temporelle . . . . .	25
1.2 Identification : un problème inverse . . . . .	26
1.3 Mesure de champs par corrélation d'images numériques (CIN) . . . . .	26
1.3.1 Principe de l'approche locale . . . . .	27
1.3.2 Paramètres métrologiques et incertitudes de mesure . . . . .	29
1.3.3 Bilan sur la corrélation d'images numériques . . . . .	30
1.4 Méthodes d'identification de paramètres de matériaux . . . . .	30
1.4.1 Le recalage de modèles éléments finis (FEMU) . . . . .	31
1.4.2 Erreur en relation de comportement (CEGM) . . . . .	33
1.4.3 La méthode des champs virtuels (VFM) . . . . .	34
1.4.4 La méthode de l'écart à l'équilibre (EGM) . . . . .	36

1.4.5	La méthode de l'écart à la réciprocité (RGM)	38
1.5	Conclusion	38
1.5.1	Bilan du chapitre 1	38
1.5.2	Transition vers les chapitres 2 et 3	39
<b>2</b>	<b>Stratégie basée sur les champs virtuels</b>	<b>41</b>
2.1	Introduction	43
2.2	Méthodologie développée (0D)	44
2.2.1	Système étudié : masse-ressort	44
2.2.1.1	Génération de la quantité d'intérêt mesurée	46
2.2.1.2	Recalage de modèles	47
2.2.2	Formulation variationnelle	49
2.2.3	Choix et construction des champs virtuels	49
2.2.3.1	Choix 1	50
2.2.3.2	Choix 2	50
2.2.3.3	Choix 3	50
2.2.4	Techniques numériques utilisées	51
2.2.4.1	Intégration numérique	51
2.2.4.2	Dérivation numérique	52
2.2.4.3	Technique de lissage temporel	53
2.2.5	Évaluation de la qualité de l'identification	56
2.2.6	Validation numérique de la méthodologie	57
2.2.6.1	Influence du lissage temporel sur <b>CV.1</b>	57
2.2.6.2	Influence de $p$ sur <b>CV.2</b>	58
2.2.6.3	Influence de $i$ sur <b>CV.3</b>	58
2.2.6.4	Comparaison des différentes stratégies d'identification	59
2.2.7	Bilan intermédiaire	63
2.3	Généralisation de la méthodologie développée (2D)	64
2.3.1	Cas particulier : élastique linéaire (2D)	64
2.3.1.1	Équations du problème	64
2.3.1.2	Génération de la quantité d'intérêt mesurée	65
2.3.1.3	Génération des quantités d'intérêts calculées (FEMU-U)	67
2.3.2	Généralisation de la méthodologie	68
2.4	Étude en robustesse lorsque la mesure est bruitée	69
2.4.1	Présentation des cas d'études	70
2.4.2	Validation numérique pour le cas <b>C2.2</b>	71
2.4.2.1	Étude du comportement global	71

2.4.2.2	Influence des propriétés mécaniques du matériau . . . . .	73
2.4.3	Validation numérique pour le cas <b>C2.3</b> . . . . .	74
2.4.3.1	Influence et intérêt du lissage temporel . . . . .	74
2.4.3.2	Étude du coût de calcul . . . . .	77
2.4.3.3	Étude du comportement global . . . . .	77
2.5	Étude en robustesse lorsque le chargement est incertain . . . . .	79
2.5.1	Introduction d'incertitudes sur le chargement . . . . .	80
2.5.2	Validation numérique pour le cas <b>C2.2</b> . . . . .	81
2.5.3	Validation numérique pour le cas <b>C2.3</b> . . . . .	83
2.6	Conclusion . . . . .	84
2.6.1	Bilan du chapitre 2 . . . . .	84
2.6.2	Transition vers le chapitre 3 . . . . .	85
<b>3</b>	<b>Stratégie basée sur l'information géométrique</b>	<b>87</b>
3.1	Introduction . . . . .	89
3.2	Méthodologie développée (FEMU-G) . . . . .	90
3.2.1	Définition de la quantité d'intérêt purement géométrique . . . . .	90
3.2.2	Génération des images numériques (film) . . . . .	90
3.2.2.1	Génération de <b>Mes1</b> . . . . .	91
3.2.2.2	Génération de <b>Mes2</b> . . . . .	94
3.2.3	Définition du problème d'identification . . . . .	96
3.2.3.1	Construction des fonctions coûts purement géométriques	96
3.2.3.2	Génération des quantités d'intérêts calculées . . . . .	97
3.2.3.3	Minimisation des fonctions coûts . . . . .	97
3.3	Validation numérique de la méthodologie . . . . .	97
3.3.1	Présentation des cas d'études . . . . .	97
3.3.1.1	Cas d'étude <b>C3.1</b> . . . . .	98
3.3.1.2	Cas d'étude <b>C3.2</b> . . . . .	99
3.3.2	Influence de la segmentation . . . . .	100
3.3.2.1	Influence du seuillage . . . . .	100
3.3.2.2	Influence de la pixellisation . . . . .	108
3.3.3	Influence des paramètres du modèle numérique . . . . .	112
3.3.3.1	Influence de la discrétisation spatiale . . . . .	113
3.3.3.2	Influence de la discrétisation temporelle . . . . .	115
3.3.3.3	Influence de l'amplitude du chargement . . . . .	117
3.4	Étude en robustesse lorsque la mesure est bruitée . . . . .	121
3.4.1	Génération des quantités d'intérêts mesurées bruitées . . . . .	122

3.4.2	Présentation du cas d'étude . . . . .	122
3.4.3	Validation numérique pour le cas <b>C3.3</b> . . . . .	123
3.5	Étude en robustesse lorsque le chargement est incertain . . . . .	127
3.5.1	Validation numérique pour le cas <b>C3.3</b> . . . . .	127
3.6	Étude en robustesse pour différents matériaux . . . . .	129
3.6.1	Identification du modèle de Saint-Venant Kirchhoff . . . . .	129
3.6.2	Identification de modèles multi-matériaux . . . . .	136
3.6.2.1	Modèle à 2 paramètres . . . . .	136
3.6.2.2	Modèle à 3 paramètres . . . . .	143
3.6.2.3	Modèle à 4 paramètres . . . . .	145
3.7	Bilan du chapitre 3 . . . . .	147
 <b>Conclusions et perspectives</b>		<b>149</b>
	Conclusions . . . . .	149
	Perspectives . . . . .	151
 <b>Références bibliographiques</b>		<b>153</b>

# Liste des figures

1	Exemples de dispositifs expérimentaux selon la vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$ obtenue. . . . .	11
2	Illustration d'un ensemble de jauges de déformation (à gauche), d'un extensomètre (au centre) et d'un capteur LVDT (à droite). . . . .	12
3	Démarche d'identification des paramètres d'un modèle de comportement par une méthode de mesure sans contact. . . . .	13
4	Exemple d'un mouchetis aléatoire apposé sur une gomme. . . . .	13
5	Principe d'identification avec une démarche de type FEMU – illustration extraite de [65]. . . . .	14
1.1	a) Illustration de la ROI, des ZOI de centre $x_i$ et du décalage $\delta$ – inspirée de [44]. b) Illustration du vecteur déplacement $\mathbf{u}(x)$ d'une ZOI – inspirée de [25]. . . . .	28
2.1	Génération d'un champ de déplacement spatio-temporel synthétique via les éléments finis. . . . .	43
2.2	Cas d'étude <b>C2.1</b> . . . . .	44
2.3	Chargement dynamique appliqué. . . . .	45
2.4	Discrétisation temporelle de la solution exacte sur $\tau$ – cas d'étude <b>C2.1</b> . . . . .	46
2.5	PDF de $x^{mes}(t_i; \omega)$ pour $\alpha = 8\%$ – cas d'étude <b>C2.1</b> . . . . .	47
2.6	Comparaison analytique-numérique pour le calcul de la vitesse – cas d'étude <b>C2.1</b> . . . . .	53
2.7	PDF de $\tilde{x}^{mes}(t_i; \omega)$ et de $x^{mes}(t_i; \omega)$ pour $\alpha = 8\%$ – cas d'étude <b>C2.1</b> . . . . .	54
2.8	PDF de $\dot{\tilde{x}}^{mes}(t_i; \omega)$ et de $\dot{x}^{mes}(t_i; \omega)$ pour $\alpha = 8\%$ – cas d'étude <b>C2.1</b> . . . . .	55
2.9	PDF de $\ddot{\tilde{x}}^{mes}(t_i; \omega)$ et de $\ddot{x}^{mes}(t_i; \omega)$ pour $\alpha = 8\%$ – cas d'étude <b>C2.1</b> . . . . .	55
2.10	Erreur seuil $e_k^{90\%}$ en fonction de $\alpha$ – cas d'étude <b>C2.1</b> . . . . .	57
2.11	Erreur seuil $e_k^{90\%}$ en fonction de $\alpha$ – cas d'étude <b>C2.1</b> . . . . .	58
2.12	Erreur seuil $e_k^{90\%}$ en fonction de $\alpha$ – cas d'étude <b>C2.1</b> . . . . .	59
2.13	Erreur moyenne $\bar{e}_k$ en fonction de $\alpha$ – cas d'étude <b>C2.1</b> . . . . .	60

2.14	Écart-type de l'erreur $\hat{e}_k$ en fonction de $\alpha$ – cas d'étude <b>C2.1</b> . . . . .	60
2.15	Erreur seuil $e_k^{90\%}$ en fonction de $\alpha$ – cas d'étude <b>C2.1</b> . . . . .	61
2.16	PDF de $e_k(\omega)$ pour <b>CV.1'</b> (bleu) et pour la méthode de référence (noir) – cas d'étude <b>C2.1</b> . . . . .	62
2.17	CDF de $e_k(\omega)$ pour <b>CV.1'</b> (bleu) et pour la méthode de référence (noir) – cas d'étude <b>C2.1</b> . . . . .	63
2.18	Cas d'étude <b>C2.2</b> . . . . .	70
2.19	Cas d'étude <b>C2.3</b> . . . . .	70
2.20	Erreur seuil $e_\lambda^{90\%}$ en fonction de $\alpha$ – cas d'étude <b>C2.2</b> . . . . .	72
2.21	Erreur seuil $e_\mu^{90\%}$ en fonction de $\alpha$ – cas d'étude <b>C2.2</b> . . . . .	72
2.22	<i>PDF</i> ( $e_\lambda$ ) avec <b>M1</b> et sa variante <b>M2</b> – cas d'étude <b>C2.3</b> . . . . .	75
2.23	<i>PDF</i> ( $e_\mu$ ) avec <b>M1</b> et sa variante <b>M2</b> – cas d'étude <b>C2.3</b> . . . . .	75
2.24	<i>CDF</i> ( $e_\lambda$ ) avec <b>M1</b> et sa variante <b>M2</b> – cas d'étude <b>C2.3</b> . . . . .	76
2.25	<i>CDF</i> ( $e_\mu$ ) avec <b>M1</b> et sa variante <b>M2</b> – cas d'étude <b>C2.3</b> . . . . .	76
2.26	Erreur seuil $e_\lambda^{90\%}$ en fonction de $\alpha$ – cas d'étude <b>C2.3</b> . . . . .	78
2.27	Erreur seuil $e_\mu^{90\%}$ en fonction de $\alpha$ – cas d'étude <b>C2.3</b> . . . . .	78
2.28	Enveloppe du chargement incertain obtenue pour un niveau de bruit de $\beta = 8\%$ . Exemple numérique simple avec $P_{max} = 10 N$ et $t_1 = 5 s$ . . . . .	81
2.29	Erreur seuil $e_\lambda^{90\%}$ en fonction de $\alpha$ et $\beta$ – cas d'étude <b>C2.2</b> . . . . .	82
2.30	Erreur seuil $e_\mu^{90\%}$ en fonction de $\alpha$ et $\beta$ – cas d'étude <b>C2.2</b> . . . . .	82
2.31	Erreur seuil $e_\lambda^{90\%}$ en fonction de $\alpha$ et $\beta$ – cas d'étude <b>C2.3</b> . . . . .	83
2.32	Erreur seuil $e_\mu^{90\%}$ en fonction de $\alpha$ et $\beta$ – cas d'étude <b>C2.3</b> . . . . .	84
3.1	Génération de la succession d'images numériques. . . . .	90
3.2	Génération du jeu de mesure <b>Mes1</b> . . . . .	92
3.3	Élément de référence et élément réel pour TRI3. . . . .	92
3.4	Points de Gauss utilisés pour l'intégration des moments géométriques. . . . .	93
3.5	Illustration de la suppression d'un obstacle sur une image segmentée. . . . .	95
3.6	Cas d'étude <b>C3.1</b> . . . . .	98
3.7	Cas d'étude <b>C3.2</b> . . . . .	99
3.8	Image pixelisée (format PNG) issue d'une simulation éléments finis – cas d'étude <b>C3.1</b> . . . . .	100
3.9	Image segmentée correspondante – cas d'étude <b>C3.1</b> . . . . .	101
3.10	Évolution de $I_0^{mes}$ en fonction du temps pour trois niveaux de seuil, comparaison entre <b>Mes1</b> et <b>Mes2</b> – cas d'étude <b>C3.1</b> . . . . .	101
3.11	Image segmentée obtenue avec $S = 254/255$ et un format JPEG – cas d'étude <b>C3.1</b> . . . . .	102

3.12	Influence de la segmentation par seuillage sur $C_0$ – cas d'étude <b>C3.1.</b>	103
3.13	Influence de la segmentation par seuillage sur $C_{(2,O)}$ – cas d'étude <b>C3.1.</b>	103
3.14	Influence de la segmentation par seuillage sur $C_{(2,G)}$ – cas d'étude <b>C3.1.</b>	104
3.15	Traitement morphologique par érosion et dilatation.	105
3.16	Influence de l'opérateur morphologique sur $I_0(t)$ – cas d'étude <b>C3.1.</b>	105
3.17	Influence de l'opérateur morphologique sur $C_0$ – cas d'étude <b>C3.1.</b>	106
3.18	Influence de l'opérateur morphologique sur $C_{(2,O)}$ – cas d'étude <b>C3.1.</b>	107
3.19	Influence de l'opérateur morphologique sur $C_{(2,G)}$ – cas d'étude <b>C3.1.</b>	107
3.20	Niveaux de pixellisation P1, P3 et P6 – cas d'étude <b>C3.1.</b>	109
3.21	Influence de la résolution sur le calcul de $I_0(t)$ – cas d'étude <b>C3.1.</b>	110
3.22	Influence de la résolution sur $C_0$ – cas d'étude <b>C3.1.</b>	111
3.23	Influence de la résolution sur $C_{(2,O)}$ – cas d'étude <b>C3.1.</b>	111
3.24	Erreur relative d'identification $e_E$ (%) en fonction de $N_{EF}$ – cas d'étude <b>C3.2.</b>	113
3.25	Erreur relative d'identification $e_\nu$ (%) en fonction de $N_{EF}$ – cas d'étude <b>C3.2.</b>	114
3.26	Influence de $P_{max}$ (en Pa) sur $I_0(t)$ – cas d'étude <b>C3.2.</b>	117
3.27	Influence de $P_{max}$ (en Pa) sur $I_0(t)$ ( $P_{max} = 1 \cdot 10^7$ Pa) – cas d'étude <b>C3.2.</b>	119
3.28	Influence de $P_{max}$ (en Pa) sur $I_0(t)$ ( $P_{max} = 1 \cdot 10^8$ Pa) – cas d'étude <b>C3.2.</b>	119
3.29	Influence de $P_{max}$ (en Pa) sur $I_0(t)$ ( $P_{max} = 1 \cdot 10^9$ Pa) – cas d'étude <b>C3.2.</b>	120
3.30	Influence de $P_{max}$ (en Pa) sur $I_0(t)$ ( $P_{max} = 1 \cdot 10^{10}$ Pa) – cas d'étude <b>C3.2.</b>	120
3.31	Erreur relative d'identification $e_E$ (%) en fonction de $P_{max}$ (en Pa) (comparaison entre Mes1 et Mes2) – cas d'étude <b>C3.2.</b>	121
3.32	Cas d'étude <b>C3.3.</b>	122
3.33	Convergence en maillage ; $\bar{e}_G$ (%) en fonction de $N_{EF}$ – cas d'étude <b>C3.3.</b>	123
3.34	Moyenne de l'erreur $\bar{e}_G(\omega)$ en fonction de $\beta$ – cas d'étude <b>C3.3.</b>	124
3.35	Écart-type de l'erreur $\hat{e}_G(\omega)$ en fonction de $\beta$ – cas d'étude <b>C3.3.</b>	125
3.36	Erreur seuil $e_G^{90\%}$ en fonction de $\beta$ – cas d'étude <b>C3.3.</b>	125
3.37	PDF de $e_G(\omega)$ pour $\beta = 20\%$ – cas d'étude <b>C3.3.</b>	126
3.38	CDF de $e_G(\omega)$ pour $\beta = 20\%$ – cas d'étude <b>C3.3.</b>	126
3.39	Moyenne de l'erreur $\bar{e}_G(\omega)$ en fonction de $\alpha$ et $\beta$ – cas d'étude <b>C3.3.</b>	127
3.40	Écart-type de l'erreur $\hat{e}_G(\omega)$ en fonction de $\alpha$ et $\beta$ – cas d'étude <b>C3.3.</b>	128
3.41	Erreur seuil $e_G^{90\%}$ en fonction de $\alpha$ et $\beta$ – cas d'étude <b>C3.3.</b>	128
3.42	Moyenne de l'erreur $\bar{e}_E(\omega)$ en fonction de $\beta$ – cas d'étude <b>C3.3.</b>	130
3.43	Écart-type de l'erreur $\hat{e}_E(\omega)$ en fonction de $\beta$ – cas d'étude <b>C3.3.</b>	130
3.44	Erreur seuil $e_E^{90\%}$ en fonction de $\beta$ – cas d'étude <b>C3.3.</b>	131
3.45	Erreur moyenne $\bar{e}_\nu(\omega)$ en fonction de $\beta$ – cas d'étude <b>C3.3.</b>	131
3.46	Écart-type de l'erreur $\hat{e}_\nu(\omega)$ en fonction de $\beta$ – cas d'étude <b>C3.3.</b>	132

3.47	Erreur seuil $e_{\nu}^{90\%}$ en fonction de $\beta$ – cas d'étude <b>C3.3</b> . . . . .	132
3.48	Moyenne de l'erreur $\bar{e}_E(\omega)$ en fonction de $\alpha$ et $\beta$ – cas d'étude <b>C3.3</b> . . . . .	133
3.49	Écart-type de l'erreur $\hat{e}_E(\omega)$ en fonction de $\alpha$ et $\beta$ – cas d'étude <b>C3.3</b> . . . . .	134
3.50	Erreur seuil $e_E^{90\%}$ en fonction de $\alpha$ et $\beta$ – cas d'étude <b>C3.3</b> . . . . .	134
3.51	Moyenne de l'erreur $\bar{e}_{\nu}(\omega)$ en fonction de $\alpha$ et $\beta$ – cas d'étude <b>C3.3</b> . . . . .	135
3.52	Écart-type de l'erreur $\hat{e}_{\nu}(\omega)$ en fonction de $\alpha$ et $\beta$ – cas d'étude <b>C3.3</b> . . . . .	135
3.53	Erreur seuil $e_{\nu}^{90\%}$ en fonction de $\alpha$ et $\beta$ – cas d'étude <b>C3.3</b> . . . . .	136
3.54	Cas d'étude <b>C3.4</b> . . . . .	137
3.55	Fonction coût $C_u$ autour de $\theta_{ex}$ – cas d'étude <b>C3.4</b> . . . . .	138
3.56	Fonction coût $C_0$ autour de $\theta_{ex}$ – cas d'étude <b>C3.4</b> . . . . .	138
3.57	Fonction coût $C_2$ autour de $\theta_{ex}$ – cas d'étude <b>C3.4</b> . . . . .	139
3.58	Moyenne de l'erreur $\bar{e}_{G^1}(\omega)$ en fonction de $\beta$ – cas d'étude <b>C3.4</b> . . . . .	140
3.59	Écart-type de l'erreur $\hat{e}_{G^1}(\omega)$ en fonction de $\beta$ – cas d'étude <b>C3.4</b> . . . . .	140
3.60	Erreur seuil $e_{G^1}^{90\%}$ en fonction de $\beta$ – cas d'étude <b>C3.4</b> . . . . .	141
3.61	Moyenne de l'erreur $\bar{e}_{G^2}(\omega)$ en fonction de $\beta$ – cas d'étude <b>C3.4</b> . . . . .	141
3.62	Écart-type de l'erreur $\hat{e}_{G^2}(\omega)$ en fonction de $\beta$ – cas d'étude <b>C3.4</b> . . . . .	142
3.63	Erreur seuil $e_{G^2}^{90\%}$ en fonction de $\beta$ – cas d'étude <b>C3.4</b> . . . . .	142
3.64	Erreur seuil $e_{G^1}^{90\%}$ en fonction de $\alpha$ et $\beta$ – cas d'étude <b>C3.4</b> . . . . .	143
3.65	Cas d'étude <b>C3.5</b> . . . . .	144
3.66	Cas d'étude <b>C3.6</b> . . . . .	145
3.67	Erreurs relatives d'identification pour $\theta = (G^1, G^2, G^3, G^4)$ avec $C_u, C_0$ et $C_2$ – cas d'étude <b>C3.6</b> . . . . .	146

# Liste des tableaux

2.1	Comparaison analytique-numérique pour le calcul des intégrales. . . . .	52
2.2	Résultats obtenus à l'issu de la comparaison des schémas de dérivation numérique. . . . .	53
2.3	Évaluation finale des champs virtuels – cas d'étude <b>C2.1</b> . . . . .	63
2.4	Moyennes ( $\bar{e}_\lambda, \bar{e}_\mu$ ) et écart-types ( $\hat{e}_\lambda, \hat{e}_\mu$ ) des erreurs en fonction de $\alpha$ – cas d'étude <b>C2.2</b> . . . . .	73
2.5	Propriétés élastiques classiques selon le matériau constitutif. . . . .	74
2.6	Qualité de l'identification selon le matériau constitutif – cas d'étude <b>C2.2</b> . . . . .	74
2.7	Comparaison de temps CPU – cas d'étude <b>C2.3</b> . . . . .	77
2.8	Moyennes ( $\bar{e}_\lambda, \bar{e}_\mu$ ) et écart-types ( $\hat{e}_\lambda, \hat{e}_\mu$ ) des erreurs en fonction de $\alpha$ – cas d'étude <b>C2.3</b> . . . . .	79
3.1	Coordonnées et poids associés aux différents points de Gauss. . . . .	93
3.2	Erreurs relatives d'identification $e_G$ (%) obtenues pour plusieurs paramètres de segmentation – cas d'étude <b>C3.1</b> . . . . .	108
3.3	Niveaux de pixellisation – cas d'étude <b>C3.1</b> . . . . .	109
3.4	Erreurs relatives d'identification $e_G$ (%) obtenues pour plusieurs niveaux de résolution – cas d'étude <b>C3.1</b> . . . . .	112
3.5	Erreurs relatives d'identification $e_E$ et $e_\nu$ (%) en fonction de $N_{EF}$ – cas d'étude <b>C3.2</b> . . . . .	115
3.6	Erreurs relatives d'identification $e_E$ et $e_\nu$ (%) en fonction de $\Delta t$ (s) – cas d'étude <b>C3.2</b> . . . . .	116
3.7	Erreurs relatives d'identification $e_E$ et $e_\nu$ (%) en fonction de $N_{mes}$ – cas d'étude <b>C3.2</b> . . . . .	116
3.8	Erreurs relatives d'identification $e_E$ et $e_\nu$ (%) en fonction de $P_{max}$ (en Pa) – cas d'étude <b>C3.2</b> . . . . .	118
3.9	Paramètres identifiés et erreurs relatives correspondantes pour $G_{ex}^1 = 7$ MPa et $G_{ex}^2 = 10$ MPa – cas d'étude <b>C3.3</b> . . . . .	139

3.10 Paramètres identifiés et erreurs relatives d'identification associées – cas d'étude	
<b>C3.5.</b> . . . . .	144
3.11 Paramètres identifiés et erreurs relatives d'identification associées – cas d'étude	
<b>C3.6.</b> . . . . .	146

# Introduction générale

## Cadre de l'étude

Dans le domaine du dimensionnement des structures mécaniques, la bonne connaissance des matériaux utilisés est un point essentiel. Cela implique la définition d'une loi de comportement mécanique traduisant le plus fidèlement possible la réponse du matériau pour un type de sollicitation donné. Cela implique également la détermination de la valeur des propriétés mécaniques (paramètres inhérents au matériau) intervenant dans cette loi.

Dans notre travail, nous nous intéressons à la seconde étape, qui est communément qualifiée d'identification des paramètres de matériaux. Ainsi, la thématique de nos recherches s'inscrit dans le cadre d'étude du GDR CNRS intitulé : *mesures de champs et identification en mécanique des solides* [35]. Cette thématique est très active puisqu'elle n'a eu de cesse de suivre l'enrichissement de la bibliothèque des lois de comportement.

De manière globale, nous pouvons dire que les grandeurs physiques recherchées sont extraites en associant une procédure expérimentale à une méthode de traitement des mesures obtenues. Les dispositifs expérimentaux sont multiples et varient notamment selon le type de sollicitation, la vitesse de déformation, l'énergie transmise durant l'essai de caractérisation, ... etc. La Figure 1 en donne quelques-uns à titre d'exemple.

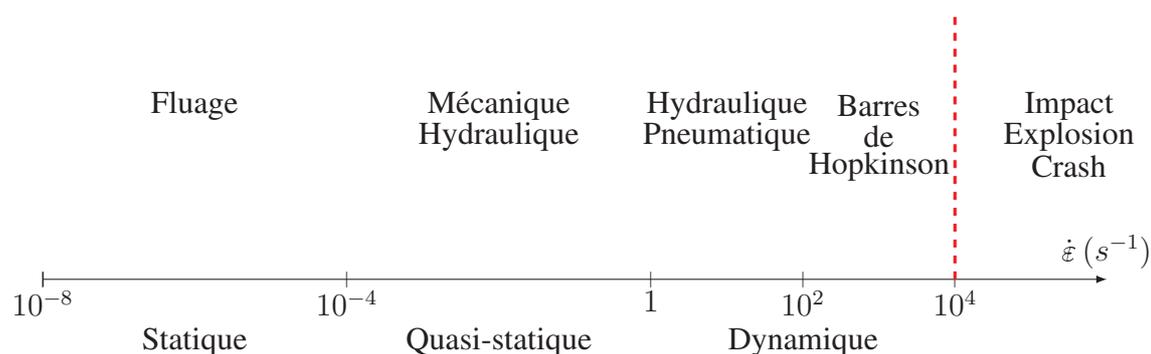


FIGURE 1 – Exemples de dispositifs expérimentaux selon la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$  obtenue.

Classiquement, il est possible d'obtenir une mesure de quantités cinématiques du matériau sollicité à l'aide d'instruments mis en contact sur ce dernier. À titre d'exemple, nous pouvons citer les jauges de déformation, les extensomètres ou bien encore les capteurs LVDT. Des images d'illustration de ces trois instruments de mesure sont données en Figure 2.



FIGURE 2 – Illustration d'un ensemble de jauges de déformation (à gauche), d'un extensomètre (au centre) et d'un capteur LVDT (à droite).

Plus récemment, une seconde approche s'est développée pour obtenir ces données. Elle est basée sur le traitement, par des méthodes dédiées, d'images numériques prises durant l'essai. Citons à titre d'exemple, la corrélation d'images numériques (CIN) qui est très utilisée dans ce domaine. Associée à une démarche telle que la Finite Element Method Updating (FEMU), elle permet de remonter aux grandeurs physiques recherchées. Ce type de démarche offre énormément d'opportunités et c'est assez naturellement que nous voyons les travaux de recherche se multiplier dans le domaine. Une représentation schématique de cette démarche d'identification de paramètres matériau est proposée sur la Figure 3.

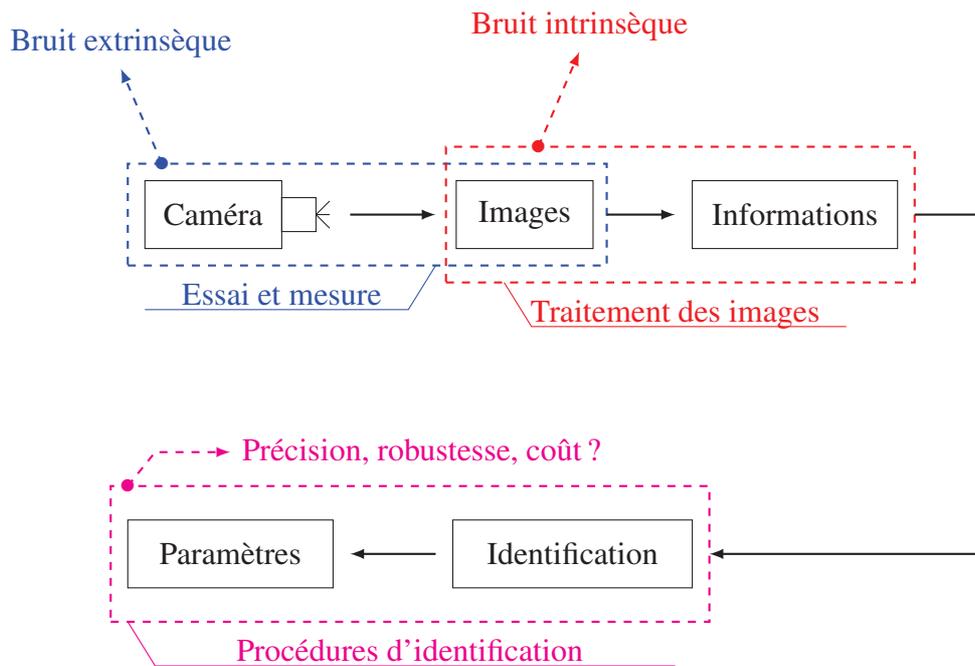


FIGURE 3 – Démarche d’identification des paramètres d’un modèle de comportement par une méthode de mesure sans contact.

La première étape (en bleu sur la Figure 3) consiste à mener un essai (statique ou dynamique) sur une éprouvette tout en réalisant des prises d’images numériques. D’une part, l’utilisation d’une caméra permet de s’affranchir des instruments de mesure classiques. D’autre part, elle permet une mesure globale sur toute une région d’intérêt définie sur l’éprouvette. Notons, que pour utiliser la technique de CIN, un mouchetis aléatoire doit être posé sur l’éprouvette. À titre illustratif, un exemple de mouchetis aléatoire est montré sur la Figure 4.

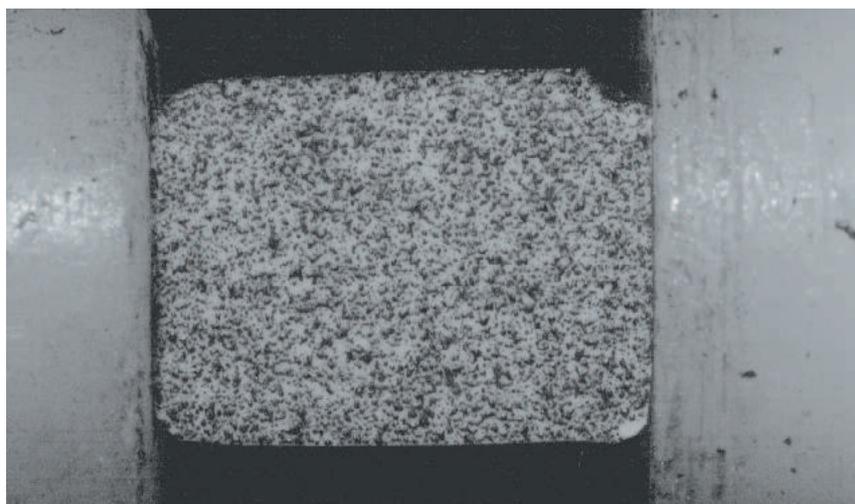


FIGURE 4 – Exemple d’un mouchetis aléatoire apposé sur une gomme.

À l'issue de cette première étape, nous disposons d'un jeu d'images numériques qui sont potentiellement perturbées par les différentes sources de bruit extrinsèque (variation d'éclairage, distorsion des images, bruit de capteur CCD, ...).

La deuxième étape (en rouge sur la Figure 3) consiste à traiter ces images numériques afin d'en extraire l'information nécessaire au processus d'identification. Pour la méthode FEMU évoquée précédemment, cette information est un champ de déplacement. Les traitements d'images associés à cette étape dépendent d'un certain nombre de paramètres métrologiques pouvant influencer la fiabilité du champ de déplacement mesuré. Les perturbations associées à ces traitements d'images sont qualifiées de sources de bruit intrinsèque.

La troisième étape (en magenta sur la Figure 3) consiste à utiliser ce champ de déplacement comme donnée d'entrée pour différentes procédures d'identification. À titre d'exemple, la démarche FEMU impliquant la comparaison entre un champ de déplacement mesuré expérimentalement et un champ de déplacement calculé par la méthode des éléments finis est illustrée sur la Figure 5.

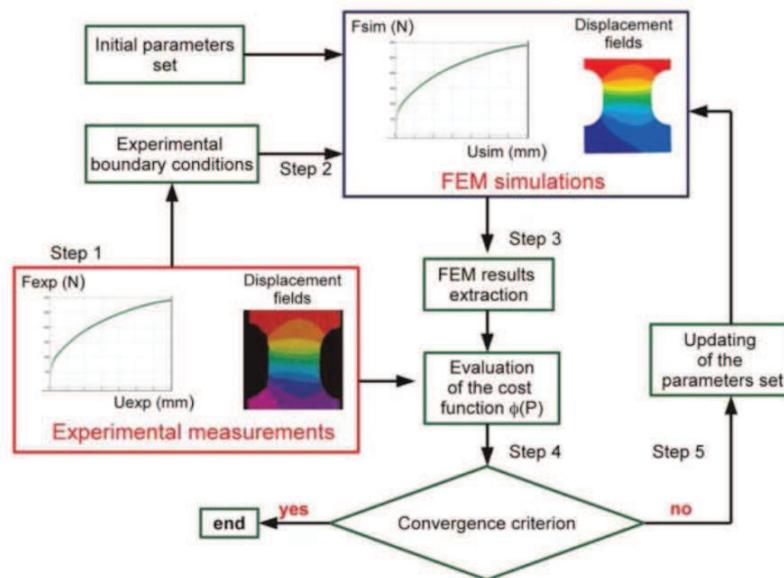


FIGURE 5 – Principe d'identification avec une démarche de type FEMU – illustration extraite de [65].

Cette démarche sera détaillée par la suite et sera la base du second développement proposé dans ce travail.

Dans le cadre de la dynamique, le problème d'identification est délicat en raison de la quantité d'informations importantes à acquérir, stocker et traiter. L'espace mémoire nécessaire ainsi que la puissance de calcul, tant pour les traitements d'images que pour les simula-

tions éléments finis, peuvent ainsi représenter un obstacle majeur à l'utilisation de ce type de méthode. Dans nos travaux, nous nous plaçons dans ce contexte afin de répondre aux besoins de l'équipe DIVS du laboratoire de mécanique LaMé (EA 7494).

## Objectifs des travaux

En lien avec les préoccupations de notre équipe de recherche, l'objectif de cette thèse est d'apporter de nouveaux outils pour l'identification de paramètres mécaniques des matériaux en dynamique. Après un état de l'art des techniques les plus populaires dans ce domaine, nous avons dégagé les axes d'améliorations à envisager. Nous verrons ainsi que le coût de calcul, la facilité de mise en œuvre (expérimentale et numérique), la précision et la robustesse sont les qualités sur lesquelles nous essayerons d'agir.

De par notre domaine d'expertise, nous choisissons de ne pas nous intéresser au bloc *essai et mesure* de la Figure 3. Cette étape est bien entendue capitale pour la qualité des résultats obtenus mais elle sort du cadre de cette étude. La validation des outils développés se fera ainsi à partir de mesures synthétiques générées par la méthode des éléments finis sur des modèles considérés comme convergés. Afin d'étudier le comportement des méthodes vis-à-vis des aléas expérimentaux, un bruit sur la mesure synthétique sera par la suite appliqué.

Deux axes d'améliorations sont retenus dans notre étude et menés de manière distincte. Le premier axe de recherche porte sur la réduction significative du coût de calcul d'une identification de paramètre matériau en dynamique. Le second axe de recherche porte sur une simplification d'implémentation et un gain du coût des calculs du traitement des images (bloc *traitement des images* de la Figure 3). En parallèle, cette nouvelle approche permettra une mise en œuvre expérimentale simplifiée également.

Afin d'évaluer la pertinence des outils proposés, ces derniers sont comparés à une méthode d'identification de référence sur des critères de qualité définis au préalable. La méthode de référence choisie dans notre travail est la méthode de recalage de modèles éléments finis basée sur le champ de déplacement.

## Plan du document

Le mémoire est organisé de la manière suivante :

- **Chapitre 1.** L'objectif de ce premier chapitre est double : définir le problème qui se pose à nous et faire un état de l'art des techniques utilisées à ce jour. Tout d'abord nous définirons l'ensemble des éléments qui constituent notre problème direct : équations de la mécanique des milieux continus en grandes transformations et en dynamique ainsi que la méthode de résolution numérique qui est utilisée. L'essentiel des notations utilisées dans nos travaux est introduit ici. Ensuite, après avoir présenté brièvement ce qu'est notre problème inverse d'identification, nous effectuons une étude bibliographique portant à la fois sur la mesure de champs et sur l'identification en mécanique des solides.
  
- **Chapitre 2.** L'objectif de ce chapitre est de proposer une méthode d'identification adaptée à la dynamique permettant d'améliorer de manière significative le coût de l'identification. Le choix se porte sur le développement d'une méthode basée sur une formulation variationnelle et la construction de champs virtuels. Appliquée dans le cadre des petites perturbations, cette dernière aboutit à la résolution d'un système linéaire de petite taille. La difficulté consiste à choisir et construire des champs virtuels spatio-temporels permettant d'assurer la précision et la robustesse de la méthode. La méthode est d'abord présentée puis validée sur différents cas tests numériques.
  
- **Chapitre 3.** Dans ce dernier chapitre, une nouvelle variante de la méthode FEMU est proposée. Cette nouvelle approche, basée sur une information purement géométrique, permet de s'affranchir de la corrélation d'images en utilisant une simple segmentation d'images. Comme évoqué précédemment, l'objectif ici est une simplification d'implémentation et un gain de temps sur le traitement des images. Le choix de la fonction coût est un point essentiel. Nous explorons le potentiel des fonctions coûts basées sur les moments géométriques de la surface capturée de l'éprouvette. La question est de savoir si cette information scalaire est suffisante pour identifier les paramètres du matériau. La méthode est d'abord présentée puis validée sur différents cas tests numériques.

# Chapitre 1

## Étude bibliographique sur l'identification des paramètres de matériaux et la mesure de champs en mécanique des solides

L'objectif de ce chapitre est double. Dans un premier temps, nous rappelons les équations de la mécanique des milieux continus et définissons l'ensemble des notations utiles dans la suite de nos travaux. Un bref rappel sur la méthode des éléments finis, largement utilisée dans ces travaux, est également proposé. Dans un second temps, nous faisons un état de l'art sur les différents éléments-clés constitutifs des méthodes d'identification.

Plus en détail, le chapitre s'organise comme suit :

- la section 1.1 rappelle brièvement les principaux éléments de la mécanique des milieux continus et de la méthode des éléments finis,
- la section 1.2 introduit la problématique d'identification des paramètres mécaniques des matériaux,
- la section 1.3 présente une méthode de mesure de champ basée sur la corrélation d'images numériques (CIN),
- la section 1.4 présente différentes stratégies d'identification s'appuyant sur la mesure de champ cinématique,
- la section 1.5 propose une conclusion sur cette étude bibliographique. À partir des verrous scientifiques identifiés, nous dégageons deux axes d'amélioration que nous poursuivons dans notre travail.

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Notations et définitions</b>	<b>19</b>
1.1.1	Mécanique des milieux continus	19
1.1.2	Méthode des éléments finis	23
<b>1.2</b>	<b>Identification : un problème inverse</b>	<b>26</b>
<b>1.3</b>	<b>Mesure de champs par corrélation d'images numériques (CIN)</b>	<b>26</b>
1.3.1	Principe de l'approche locale	27
1.3.2	Paramètres métrologiques et incertitudes de mesure	29
1.3.3	Bilan sur la corrélation d'images numériques	30
<b>1.4</b>	<b>Méthodes d'identification de paramètres de matériaux</b>	<b>30</b>
1.4.1	Le recalage de modèles éléments finis (FEMU)	31
1.4.2	Erreur en relation de comportement (CEGM)	33
1.4.3	La méthode des champs virtuels (VFM)	34
1.4.4	La méthode de l'écart à l'équilibre (EGM)	36
1.4.5	La méthode de l'écart à la réciprocité (RGM)	38
<b>1.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>38</b>
1.5.1	Bilan du chapitre 1	38
1.5.2	Transition vers les chapitres 2 et 3	39

---

## 1.1 Notations et définitions

L'objectif de la section est d'introduire les notations scientifiques utilisées tout au long de notre étude tout en introduisant les équations du problème. Pour cela, nous nous plaçons dans le cadre de la dynamique et nous considérons les non-linéarités suivantes :

- matérielles (*i.e.* matériaux hyper-élastiques),
- géométriques (*i.e.* grandes transformations),
- de frontières (*i.e.* contact avec ou sans frottement).

Le problème présenté est ensuite résolu numériquement par la méthode des éléments finis. Nous présentons succinctement les étapes importantes de cette méthode.

### 1.1.1 Mécanique des milieux continus

#### 1.1.1.1 Relations cinématiques

La durée de l'étude porte sur l'intervalle de temps  $\tau = [0, T]$ . À l'instant initial  $t = 0$ , le milieu continu (*i.e.* notre solide déformable) peut être modélisé par un domaine  $\Omega_0$  qui est un sous-espace fermé de  $\mathbb{R}^3$ . C'est alors un ensemble infini de points  $P$  dont les positions peuvent être exprimées classiquement dans le repère  $\mathcal{R}_0 = (O, e_1, e_2, e_3)$  par leur vecteur position  $\mathbf{X}(P)$ . Dans la suite, la référence au point  $P$  n'apparaît plus (sauf si elle est nécessaire à la compréhension) dans les équations pour des raisons évidentes de clarté. Sous l'effet d'un ensemble d'actions extérieures, le milieu continu est amené à se déplacer et à se déformer. Ainsi, à l'instant  $t$ , il occupe une nouvelle configuration, dite courante et modélisé par le domaine  $\Omega_t$ . La position de chaque point est alors exprimée par le vecteur position  $\mathbf{x}$ . Cette transformation est exprimée mathématiquement par une application bijective continue et réversible  $\phi$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \phi(\mathbf{X}, t) \quad \text{sur} \quad \Omega_0 \times \tau. \quad (1.1)$$

Par la suite, le champ de déplacement s'exprime comme la différence entre la position courante et la position initiale de chaque point :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \phi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad \text{sur} \quad \Omega_0 \times \tau. \quad (1.2)$$

Dans le cadre de la description lagrangienne totale, adoptée dans notre travail, il est classique d'utiliser le tenseur de Green-Lagrange (noté  $\mathbb{E}$ ) pour mesurer les déformations :

$$\mathbb{E}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2} \left( \nabla_0 \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \nabla_0^T \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \nabla_0^T \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \cdot \nabla_0 \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \right) \quad \text{sur} \quad \Omega_0 \times \tau, \quad (1.3)$$

où  $\nabla_0$  est l'opérateur gradient relatif à la configuration initiale. Rappelons ici que ce tenseur des déformations est non linéaire en déplacement en raison de la présence du dernier terme qui est quadratique.

### 1.1.1.2 Mesure des contraintes

La contrainte est une grandeur mécanique pouvant être liée aux efforts de cohésion à l'intérieur du solide. Dans le cadre de la description lagrangienne totale, il existe plusieurs tenseurs permettant de mesurer cette grandeur physique. Dans un premier temps, nous considérons un élément de surface  $ds$  d'une coupe de  $\Omega_t$ . La normale à cette surface est notée  $\mathbf{n}$  et nous notons  $d\mathbf{f}$  les efforts internes agissants sur  $ds$ . Nous définissons le tenseur des contraintes de Cauchy, noté  $\sigma$ , par :

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \sigma(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)ds \quad \text{sur} \quad \Omega_t \times \tau \quad (1.4)$$

Ce tenseur des contraintes est exprimé dans la configuration déformée. Cette configuration n'est pas connue donc nous transportons l'élément de surface  $ds$  dans la configuration initiale par la formule de Nanson. Ceci permet de définir le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff noté  $\mathbb{P}$ . Nous obtenons :

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}, t) = J\sigma(\mathbf{x}, t)\mathbb{F}^{-T}(\mathbf{X}, t) \quad (1.5)$$

où  $J$  est le jacobien de la transformation, défini par  $J = \det(\mathbb{F})$ , et  $\mathbb{F}$  est le tenseur gradient de la transformation défini par  $\mathbb{F}(\mathbf{X}, t) = \partial\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)/\partial\mathbf{X}$ . Ce tenseur est mixte et non symétrique. Dans une description lagrangienne totale, nous utilisons le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff noté  $\mathbb{S}$ . Il est construit en transportant l'effort  $d\mathbf{f}$  dans la configuration initiale :

$$\mathbb{S}(\mathbf{X}, t) = \mathbb{F}^{-1}(\mathbf{X}, t)\mathbb{P}(\mathbf{X}, t) \quad \text{sur} \quad \Omega_0 \times \tau \quad (1.6)$$

### 1.1.1.3 Relation de comportement

Pour prédire la réponse mécanique du matériau soumis à un chargement extérieur, nous devons définir une loi de comportement reliant déformations et contraintes. Cette relation s'exprime au travers d'un tenseur d'ordre 4, noté  $\underline{\underline{D}}$  dans lequel interviennent les paramètres mécaniques du matériau, regroupés ici dans le vecteur  $\boldsymbol{\theta}$  :

$$\mathbb{S}(\mathbf{X}, t) = \underline{\underline{D}}(\boldsymbol{\theta}) : \mathbb{E}(\mathbf{X}, t) \quad \text{sur} \quad \Omega_0 \times \tau \quad (1.7)$$

Dans nos travaux, nous nous intéressons à des matériaux hyper-élastiques de type élastomères compressibles. Ce type de matériau est caractérisé par une forte capacité d'allongement (jusqu'à 1000%). Les élastomères sont définis par une densité d'énergie de déformation élastique, souvent notée  $W$  dans la littérature. Le tenseur des contraintes  $\mathbb{S}$  dérive de cette densité d'énergie et la loi de comportement (1.7) est obtenue en calculant :

$$\mathbb{S}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial W}{\partial \mathbb{E}(\mathbf{X}, t)} \quad \text{sur } \Omega_0 \times \tau \quad (1.8)$$

Cette loi de comportement vérifie le principe d'objectivité.

Dans la littérature, de nombreux travaux visent à définir la meilleure expression de la densité d'énergie de déformation  $W$  pour un élastomère donné. Ces densités d'énergies sont généralement établies suite à une démarche qui couple expérimentation et modélisation. À titre d'exemple, le modèle de Blatz-Ko est présenté dans la référence [11]. Ce modèle permet de décrire le comportement de mousse compressible en polyuréthane.

#### 1.1.1.4 Principe fondamental de la dynamique

Relativement à la description utilisée, le principe fondamental de la dynamique s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{DIV} \mathbb{P}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{F}(t) = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \quad \text{sur } \Omega_0 \times \tau, \quad (1.9)$$

où  $\mathbf{DIV}$  est l'opérateur divergence exprimé par rapport à la configuration initiale,  $\mathbf{F}(t)$  est le vecteur des actions extérieures,  $\rho_0$  est la densité du matériau à l'instant initial et  $\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t)$  est le champ des vecteurs accélérations. Afin de préciser cette dernière notation, nous rappelons que cela signifie que nous avons :

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) = \left. \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} \quad \text{et} \quad \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) = \left. \frac{d^2\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}_0} \quad \text{sur } \Omega_0 \times \tau \quad (1.10)$$

#### 1.1.1.5 Conditions limites et conditions initiales

Afin d'obtenir un problème bien posé au sens d'Hadamard (*i.e* : existence et unicité de la solution, ainsi que continuité de la solution en temps et en espace), il est nécessaire de donner un ensemble de conditions supplémentaires. Pour cela, il nous faut partitionner la frontière

du domaine, notée  $\partial\Omega_0$ , de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\partial\Omega_0 &= \Gamma_{\mathbf{u}} \cup \Gamma_{\sigma} \cup \Gamma_{\mathbf{c}} \\ \emptyset &= \Gamma_{\mathbf{u}} \cap \Gamma_{\sigma} = \Gamma_{\sigma} \cap \Gamma_{\mathbf{c}} = \Gamma_{\mathbf{u}} \cap \Gamma_{\mathbf{c}}\end{aligned}\quad (1.11)$$

Dans le cadre qui est le nôtre, les conditions supplémentaires, qui doivent être renseignées, sont :

- *conditions limites de Dirichlet :*

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}_d(\mathbf{X}, t) \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\mathbf{u}} \times \tau, \quad (1.12)$$

Autrement dit, la portion de frontière  $\Gamma_{\mathbf{u}}$  est une zone sur laquelle un déplacement connu, noté  $\mathbf{u}_d$ , est imposé.

- *conditions limites de Neumann :*

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{N}_0(\mathbf{X}, t) = \mathbf{T}_d(\mathbf{X}, t) \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\sigma} \times \tau, \quad (1.13)$$

où  $\mathbf{N}_0$  est la normale extérieure à la frontière, exprimée dans la configuration initiale. Ainsi, la portion de frontière  $\Gamma_{\mathbf{d}}$  est une zone sur laquelle un chargement extérieur connu, noté  $\mathbf{T}_d$ , est imposé.

- *conditions initiales :*

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}) \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t)|_{t=0} = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}) \quad \text{sur} \quad \Omega_0 \quad (1.14)$$

- *conditions de contact unilatéral (conditions de Signorini) :*

Lorsque le scénario intègre un impact entre deux corps, nous introduisons l'existence d'une zone  $\Gamma_{\mathbf{c}}$  sur laquelle le contact se produit. La non-pénétration de la matière est garantie par un ensemble de trois inégalités :

$$g \geq 0 ; r_n \geq 0 \quad \text{et} \quad g \cdot r_n = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\mathbf{c}} \times \tau, \quad (1.15)$$

où  $g$  est la distance entre les deux solides et  $r_n$  est la composante normale de la réaction de contact. Cette dernière agit selon la normale extérieure de l'obstacle.

- *Conditions de frottement de Coulomb :*

Dans le cas où le contact s'accompagne de frottement, nous choisissons d'utiliser

le modèle de frottement de Coulomb. Lorsque le contact est avéré, ce dernier peut s'écrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \|\mathbf{r}_t\| < \mu r_n \quad \text{alors} \quad \dot{\mathbf{u}}_t = \mathbf{0} \quad (\text{contact adhérent}) \\ \text{Sinon } \|\mathbf{r}_t\| = \mu r_n \quad \text{alors} \quad \exists \lambda > 0 \quad \text{tel que} \quad \dot{\mathbf{u}}_t = -\lambda \frac{\mathbf{r}_t}{\|\mathbf{r}_t\|} \quad (\text{glissement}) \end{array} \right. \quad (1.16)$$

où  $\mathbf{r}_t$  est le vecteur des composantes tangentielles de la réaction de contact,  $\mu$  est le coefficient de frottement de l'interface de contact et  $\dot{\mathbf{u}}_t$  est le vecteur des composantes tangentielles de la vitesse de glissement relatif.

## 1.1.2 Méthode des éléments finis

Hormis quelques rares cas, souvent académiques, la solution analytique pour un problème de ce type n'est pas accessible. Parmi les méthodes numériques permettant d'obtenir une solution approchée, la méthode des éléments finis (MEF) est très certainement la plus largement utilisée, tant au niveau des laboratoires de recherche qu'à celui de l'industrie. Nous l'utilisons donc pour résoudre notre problème direct de façon approchée. Dans la suite, les grandes lignes de la méthode sont rappelées.

### 1.1.2.1 Principe des travaux virtuels en dynamique

Dans un premier temps, nous rappelons le principe des travaux virtuels qui est un des points de départ possible pour obtenir la formulation faible de notre problème. Notons  $\mathbf{u}^*$  un champ de déplacement virtuel relatif à notre problème et  $\mathbf{u}_{CA}^*$  ce même champ s'il est cinématiquement admissible à 0 (*i.e.* il vérifie la relation cinématique (1.1) et les conditions de Dirichlet (1.12)). En dynamique transitoire, pour tous champs cinématiquement admissibles à 0, le travail virtuel des efforts d'inertie est égal à la différence entre le travail virtuel des efforts externes et le travail virtuel des efforts internes :

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}_{CA}^* d\Omega_0 = \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{T}_d \cdot \mathbf{u}_{CA}^* d\Gamma_\sigma + \int_{\Gamma_c} \mathbf{r}_c \cdot \mathbf{u}_{CA}^* d\Gamma_c - \int_{\Omega_0} \mathbb{S}(\boldsymbol{\theta}) : \delta \mathbb{E}(\mathbf{u}_{CA}^*) d\Omega_0 \quad \forall t \in \tau \quad \text{et} \quad \forall \mathbf{u}_{CA}^* \quad (1.17)$$

ou de manière plus synthétique :

$$\mathcal{W}^{inertie} = \mathcal{W}^{ext} - \mathcal{W}^{int}(\boldsymbol{\theta}) \quad (1.18)$$

avec :

$$\begin{aligned} - \mathcal{W}^{inertie} &= \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}_{CA}^* d\Omega_0, \\ - \mathcal{W}^{ext} &= \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{T}_d \cdot \mathbf{u}_{CA}^* d\Gamma_\sigma + \int_{\Gamma_c} \mathbf{r}_c \cdot \mathbf{u}_{CA}^* d\Gamma_c, \\ - \mathcal{W}^{int}(\boldsymbol{\theta}) &= \int_{\Omega_0} \mathbb{S}(\boldsymbol{\theta}) : \delta \mathbb{E}(\mathbf{u}_{CA}^*) d\Omega_0. \end{aligned}$$

### 1.1.2.2 Discrétisation spatiale

Dans le but d'aboutir à un problème discret et donc à un nombre fini d'inconnues à déterminer, le domaine  $\Omega_0$  est partitionné par un ensemble de  $N_{EF}$  sous-domaines :

$$\Omega_0 \approx \Omega_h = \bigcup_{e=1}^{N_{EF}} \Omega_e \quad (1.19)$$

Chaque sous-domaine est caractérisé par sa forme géométrique : le nombre de ses arêtes, leur type et le nombre de ses sommets. Ces derniers sont communément appelés les nœuds du maillage.

Sur chaque sous-domaine, toutes les quantités recherchées vont alors être interpolées par rapport aux valeurs calculées aux nœuds, souvent de manière linéaire mais parfois de manière quadratique ou bien cubique. C'est la notion d'éléments finis qui se traduit par la mise en place d'une matrice des fonctions de forme  $\mathbb{N}$  telle que :

$$\mathbf{X}(P) \approx \mathbf{X}_h(P) = \mathbb{N}^T(P) \mathbf{X}_n \quad \text{et} \quad \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \approx \mathbf{u}_h = \mathbb{N}^T(\mathbf{X}) \mathbf{U}(t) \quad (1.20)$$

Dans l'équation (1.20), les éléments sont dits isoparamétriques car les fonctions de formes utilisées pour interpoler les coordonnées des nœuds ainsi que les déplacements nodaux sont les mêmes. Chaque nœud possède un nombre donné de degré de liberté, noté  $n_{ddl}$ . Le nombre total de nœuds composant le maillage est noté  $N_{node}$  et le nombre total de degré de liberté est noté  $N_{ddl}$ . Ces derniers sont les inconnus du problème discrétisé et sont les composantes du vecteur des inconnues  $\mathbf{U}(t)$ .

Suite à cette opération de discrétisation spatiale, l'équation (1.17) prend la forme matri-

cielle :

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{F}_{ext}(t) + \mathbf{R}_c(t) - \mathbf{F}_{int}(t; \boldsymbol{\theta}) \quad \forall t \in \tau \quad (1.21)$$

où  $\mathbb{M}$  est la matrice de masse globale,  $\ddot{\mathbf{U}}(t)$  est le vecteur des accélérations nodales discrètes,  $\mathbf{F}_{ext}(t)$  est le vecteur des efforts extérieurs discrets,  $\mathbf{F}_{int}(t; \boldsymbol{\theta})$  est le vecteur des efforts internes discrets et  $\mathbf{R}_c(t)$  est le vecteur des réactions de contact discrètes. C'est un système d'équations algébriques dont la taille dépend du nombre de degrés de liberté total.

Du fait des grandes transformations subies par notre domaine, le vecteur des efforts internes  $\mathbf{F}_{int}$  est non linéaire en déplacement. De manière assez classique, nous utilisons un schéma de Newton-Raphson pour linéariser ce terme.

Pour la résolution du contact, nous utilisons la méthode du bi-potentiel étendue à la dynamique telle que présentée dans [53]. En effet, plusieurs travaux ont montré la pertinence de cette méthode pour traiter le contact entre deux corps hyper-élastiques en dynamique, en particulier ceux présentés dans [31, 30].

### 1.1.2.3 Discrétisation temporelle

Afin de résoudre l'équation (1.21) sur l'intervalle de temps  $\tau$  qui est continu, nous devons une nouvelle fois effectuer une discrétisation mais dans l'espace-temps cette fois-ci. Pour cela, nous avons à notre disposition trois schémas numériques d'intégration :

- le schéma explicite des différences centrées [26] qui est adapté pour la dynamique rapide (crash, onde de choc) mais est conditionnellement stable. Pour rappel, il est intéressant lorsqu'il est utilisé avec une matrice de masse globale diagonalisée car il est alors très rapide pour résoudre le système à chaque pas de temps,
- le schéma de Newmark [55] qui est implicite [69]. Il est inconditionnellement stable en élasticité linéaire,
- un schéma de résolution implicite d'ordre 1 qui est particulièrement adapté pour la prise en compte du contact (voir [53, 31, 30]).

Nous abordons ces schémas numériques dans les chapitres 2 et 3 lorsque nous en avons réellement besoin. Toutefois, plusieurs ouvrages de référence sont disponibles dans la littérature au sujet de la MMC, de la MEF et de la résolution du contact parmi lesquels nous pouvons citer [76, 51, 78, 53] (contact, MMC, MEF) et [77] (MMC, MEF non linéaire).

## 1.2 Identification : un problème inverse

Le problème défini et résolu dans 1.1 est qualifié de direct. Il consiste à trouver un champ de déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  en connaissant la géométrie, le matériau ainsi que les conditions limites et initiales.

En mécanique des solides, l'identification des propriétés mécaniques d'un matériau est qualifiée de problème inverse [14]. C'est un problème mal posé car l'existence et l'unicité de la solution ne sont pas toujours assurées. Par opposition au problème direct, nous supposons que le champ de déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ , la géométrie et les conditions limites et initiales sont connues. Les inconnues du problème sont les propriétés mécaniques du matériau contenues dans le vecteur  $\theta$ .

La Figure 3 (voir **Introduction générale**) illustre une démarche possible pour l'identification en mécanique des solides. Les paramètres matériau sont obtenus par une méthode inverse qui exploite une information, souvent cinématique, mesurée par une technique de mesure de champ non intrusive. Un essai de classification de ces techniques de mesure de champ est proposé dans [70]. En premier lieu, l'auteur distingue les techniques interférométriques et les techniques non interférométriques. Les techniques interférométriques ne font pas partie du contexte de ce travail et ne sont pas abordées plus en détail ici. Pour les techniques non interférométriques, le montage optique consiste le plus souvent en une ou plusieurs caméras (capteur CCD ou CMOS). Parmi ces techniques, la corrélation d'images numériques ([71, 21]) est certainement la plus utilisée. Selon les conclusions de l'auteur, cet ensemble de techniques est plus simple à utiliser mais moins performante que les techniques interférométriques. La section 1.3 est dédiée à la mesure de champs par corrélation d'images numériques.

Les méthodes inverses exploitant l'information cinématique obtenue par corrélation d'images sont présentées dans [14, 7, 5, 35]. La section 1.4 présente 5 d'entre elles.

## 1.3 Mesure de champs par corrélation d'images numériques (CIN)

La corrélation d'images numériques est une méthode non intrusive de mesure de champ cinématique datant des années 80 [60]. L'idée repose sur la comparaison des niveaux de gris de deux images numériques enregistrées à deux instants différents à l'aide d'un capteur CCD

ou CMOS. Cette méthode permet la mesure globale du champ de déplacement contrairement aux jauges de déformation qui n'apportent qu'une mesure locale. Le champ d'application de cette méthode de mesure est important car la stratégie peut être utilisée dans différents domaines (essai mécanique sur des matériaux, médical) et à différentes échelles (du nanomètre au mètre). Plusieurs conditions s'appliquent pour utiliser cette approche : un mouchetis aléatoire doit être appliqué sur l'éprouvette et l'axe optique de la caméra doit être perpendiculaire au plan de l'éprouvette sollicitée. Le mouchetis est généralement réalisé en combinant des bombes de peinture blanche et noire afin d'avoir le meilleur contraste. En effet, la dynamique des niveaux de gris doit être très large pour obtenir une corrélation d'images de bonne qualité. L'histogramme des niveaux de gris d'une image est un bon indicateur. Le mouchetis est également caractérisé par une taille de grain en pixel. C'est un paramètre pouvant influencer la qualité de la mesure [52].

Pour la mécanique des solides dans le cadre des petites perturbations, la méthode est présentée dans [71] puis dans [21]. Plus tard, dans les années 2000, la méthode de corrélation est étendue au cas des grandes déformations [20]. Une approche multi-échelle adaptée à ce cas est présentée dans [42]. Une approche globale basée sur une interpolation de type éléments finis est par ailleurs présentée dans [10].

La fiabilité de la mesure conditionne en partie la qualité de l'identification des paramètres du matériau. La propagation des incertitudes sur les mesures obtenues par la CIN est une source d'erreurs potentielles dans la démarche d'identification. Par exemple, lorsque le champ des déformations est requis, celui-ci est obtenu par dérivation numérique du champ de déplacement obtenu par la CIN. À ce sujet nous trouvons des informations sur les paramètres métrologiques de la méthode dans [52, 15] et plus récemment dans [12]. Les auteurs montrent que plusieurs paramètres propres à la méthode, et présentés plus loin dans la section, ont une influence sur la fiabilité de la mesure du champ de déplacement.

Dans notre démarche, nous ne sommes pas amenés à mettre en œuvre la méthode. En revanche, les développements apportés au chapitre 2 reposent sur la connaissance du champ de déplacement. Pour cette raison nous nous intéressons aux incertitudes de mesure introduites durant le processus complet de la CIN.

Le principe de l'approche locale est d'abord présenté dans 1.3.1 puis quelques paramètres métrologiques sont abordés dans 1.3.2 avant de dresser un bilan sur cette méthode dans 1.3.3.

### **1.3.1 Principe de l'approche locale**

L'objectif de la méthode est de mesurer un champ de déplacement dans le plan de l'éprouvette à partir d'images numériques. Chaque image peut être représentée par une fonction  $f(\mathbf{x})$  qui renvoie le niveau de gris d'un pixel de centre  $\mathbf{x} = (x, y)$  où  $(x, y)$  sont les coordon-

nées dans l'image. Pour un codage sur 8-bits de l'image, la fonction prend des valeurs dans l'intervalle des nombres entiers  $[0, 255]$ .

L'appariement point par point d'une image de la configuration initiale, représentée par  $f(\mathbf{x})$ , et d'une image de la configuration déformée, représentée par  $g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}))$ , permet de déterminer le déplacement recherché, simplement noté  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ .

Tout d'abord nous devons définir une région d'intérêt (ROI) sur l'image d'origine et diviser cette ROI en zones d'intérêts (ZOI) de surface  $\Omega_{ZOI}$ .

La taille de la ROI, la taille des ZOI ainsi que le décalage, noté  $\delta$ , entre le centre de chaque ZOI sont des paramètres qui impactent la qualité des résultats obtenus [15]. La Figure 1.1 illustre le découpage d'une image numérique. Le nombre de ZOI définit la résolution spatiale et donc la discrétisation spatiale du champ de déplacement.

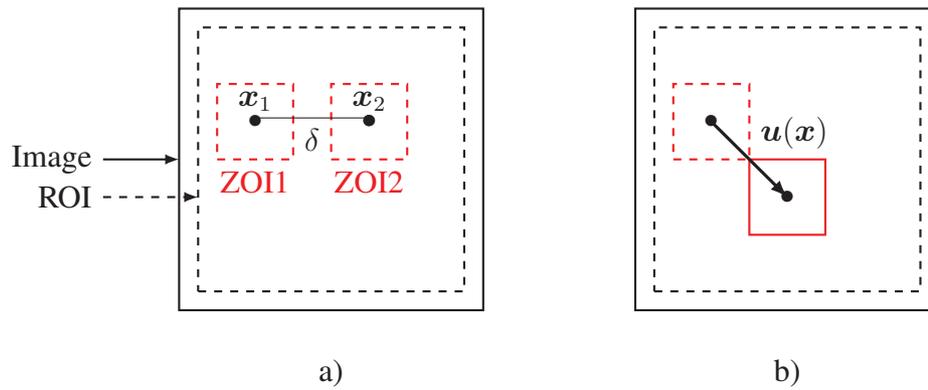


FIGURE 1.1 – a) Illustration de la ROI, des ZOI de centre  $\mathbf{x}_i$  et du décalage  $\delta$  – inspirée de [44]. b) Illustration du vecteur déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  d'une ZOI – inspirée de [25].

C'est donc l'appariement des ZOI de l'image de la configuration de référence avec les ZOI de l'image de la configuration déformée qui conduit au champ de déplacement. En effet, la conservation du niveau de gris entre les deux images implique :

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})) + bruit(\mathbf{x}) \quad (1.22)$$

où  $bruit(\mathbf{x})$  est le bruit présent dans les images numériques (bruit capteur, variation d'éclairage, distorsion des images).

Ainsi, le champ de déplacement est obtenu par minimisation de la fonction coût suivante [12] :

$$\mathbf{u}^{opti}(\mathbf{x}) = \underset{\mathbf{u}}{\text{Argmin}} \sum_{\mathbf{x}' \in ZOI} \left( f(\mathbf{x}') - g(\mathbf{x}' + \mathbf{u}(\mathbf{x}')) \right)^2 \quad (1.23)$$

C'est un problème de minimisation mal posé donc l'existence et l'unicité de la solution ne sont pas garanties. La résolution de ce problème requiert l'utilisation d'un algorithme d'optimisation tel que l'algorithme de Gauss-Newton, l'algorithme de Levenberg-Marquardt, ou un algorithme de dichotomie.

Il existe d'autres alternatives à ce problème de minimisation. Par exemple, il est possible de maximiser une fonction d'intercorrélation comme dans [42].

Par la résolution de l'un de ces problèmes d'optimisation, il est possible d'obtenir un champ de déplacement avec une précision de l'ordre du pixel. Afin d'améliorer la précision jusqu'à un niveau sub-pixel, l'utilisateur dispose d'algorithmes d'interpolation dédiés [12, 15]. Dans ces travaux, les auteurs ont observé que l'algorithme d'interpolation utilisé influence la qualité du résultat.

Le champ de déplacement obtenu est généralement destiné à être comparé avec un champ de déplacement obtenu par la méthode des éléments finis. Le maillage des images, défini par les ZOI, est différent de celui utilisé pour la simulation par les éléments finis. Dans l'approche locale, il faut donc projeter le champ de déplacement obtenu par CIN sur le maillage utilisé lors de la simulation. C'est une source d'erreurs potentielles qui est fortement réduite par l'utilisation de l'approche globale présentée dans [10].

### **1.3.2 Paramètres métrologiques et incertitudes de mesure**

La mesure du champ de déplacement mesuré est toujours perturbée par différentes sources de bruit. Ces différentes sources interviennent, et s'accumulent, durant les différentes étapes du processus :

- préparation des éprouvettes (dépôt du mouchetis) et du dispositif expérimental,
- acquisition des images,
- traitements numériques des images.

L'influence de la qualité du mouchetis sur la corrélation d'image est étudiée dans [52]. Le bruit introduit lors de l'acquisition des images est d'ordre matériel. Nous pouvons citer les problèmes liés à la source de lumière, la distorsion des images par l'objectif ou encore les défauts du capteur. En dynamique, la mesure est plus délicate car il faut faire un compromis entre la résolution spatiale et la fréquence d'acquisition des images. La propagation des incertitudes en dynamique est étudiée dans [80]. La première partie des travaux présentés dans [54] donne un état de l'art sur le matériel (caméra ultra-rapide) utilisé pour la mesure en dynamique.

Les problèmes liés au traitement des images sont inhérents aux algorithmes de la corrélation d'image. Dans [15], les auteurs étudient l'influence de plusieurs paramètres dont :

- la taille en pixel de la ROI et des ZOI en approche locale,
- l'introduction d'une cinématique du champ de déplacement,
- le choix de l'algorithme d'interpolation sub-pixel,
- le choix de l'algorithme d'optimisation.

Les effets de l'interpolation sub-pixel sur la propagation du bruit sont également étudiés dans [12].

De la littérature, nous retenons qu'un compromis doit être trouvé entre la taille des ZOI (résolution spatiale) et le respect de la cinématique (forme du champ de déplacement). En effet, les incertitudes de mesure diminuent quand la taille de la ZOI augmente mais la cinématique est moins bien respectée.

### **1.3.3 Bilan sur la corrélation d'images numériques**

Dans la littérature, nous avons distingué plusieurs axes de recherche concernant les techniques de mesure de champs et notamment la technique de corrélation d'images numériques. Nous retenons les suivants :

- un essai de classification est présenté dans [70]. La corrélation d'image est décrite comme étant simple de mise en œuvre mais peu performante par rapport aux techniques de mesure interférométriques.
- l'utilisation de la technique de corrélation d'images est présentée dans de nombreux travaux [50, 8, 63, 43, 64, 59] par exemple.
- plusieurs approches, autre que l'approche locale, sont développées dans [10] (globale), [42](multi-échelles) ou bien [66](intégrée).
- certaines études s'intéressent davantage aux incertitudes de mesure engendrées par la CIN [15, 80, 12].

Les développements apportés dans nos travaux ont, en partie, pour objectif de simplifier les différentes sources de difficultés inhérentes à la CIN. Ainsi, nous identifions plusieurs axes d'amélioration à envisager : la difficulté de mise en œuvre, tant expérimentale que numérique, les coûts de calcul et la propagation du bruit de mesure.

## **1.4 Méthodes d'identification de paramètres de matériaux**

Dans cette section, nous nous intéressons aux procédures d'identification exploitant les mesures de champs. Les cinq méthodes retenues sont présentées de manière détaillée dans

[5, 35]. Nous retenons les méthodes suivantes :

- le recalage de modèles éléments finis (FEMU - Finite Element Model Updating) datant des années 70 [47],
- l’erreur en relation de comportement (CEGM - Constitutive Equation Gap Method) datant des années 80 et initialement utilisée comme estimateur d’erreur [48],
- la méthode des champs virtuels (VFM - Virtual Field Method) datant des années 90 [62],
- l’erreur à l’équilibre (EGM - Equilibrium Gap Method) datant des années 2000 [22],
- l’écart à la réciprocité (RGM - Reciprocity Gap Method) basée sur le théorème de Maxwell-Betti et datant des années 2000 [2].

Avant d’entrer dans le détail de chacune de ces méthodes, notons tout d’abord quelques caractéristiques des champs de mesure utilisés par chacune d’entre elles :

- les méthodes FEMU et CEGM peuvent être utilisées avec une mesure cinématique partielle ou totale, à l’intérieur du domaine ou bien sur son contour,
- la méthode FEMU peut être appliquée avec des informations de nature différente (cinématique, statique, thermique, géométrique),
- les méthodes EGM et VFM exploitent une mesure cinématique à l’intérieur du domaine uniquement,
- la méthode RGM nécessite des mesures cinématiques sur le contour du domaine uniquement.

La plage d’utilisation de ces méthodes est de plus en plus large en raison des progrès du numérique et des systèmes d’acquisition d’images. Dans la suite de la section, nous présentons ces méthodes dans le cadre de l’élasticité linéaire avec un matériau homogène et isotrope. Nous évoquons également l’application de ces méthodes au contexte de la dynamique.

#### **1.4.1 Le recalage de modèles éléments finis (FEMU)**

Cette première méthode est la plus intuitive et surtout la plus flexible de toutes, au sens que son champ d’application est très vaste. L’idée est de comparer la quantité d’intérêt mesurée expérimentalement à une quantité d’intérêt calculée numériquement par la méthode des éléments finis. Une fonction coût, notée  $C(\theta)$ , est construite de façon à quantifier l’écart entre ces deux quantités. Le modèle éléments finis est ensuite mis à jour, par modification des paramètres matériau, jusqu’à minimisation de cet écart. La flexibilité de la méthode est un avantage car cela permet d’exploiter plusieurs types d’information de nature différente. D’ailleurs, la première approche historique de FEMU est une approche en force (FEMU-F

[47]) et non en déplacement. Cette approche est particulière car elle ne nécessite pas de minimisation dans le cas de l'élasticité linéaire [58, 5]. Néanmoins, l'approche la plus répandue aujourd'hui est certainement celle en déplacement (FEMU-U [23]). Elle consiste à comparer un champ de déplacement souvent mesuré par CIN, noté  $\mathbf{u}^{mes}(\mathbf{X})$ , à un champ de déplacement calculé par la méthode des éléments finis, noté  $\mathbf{u}^{cal}(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})$ . Le problème d'optimisation est le suivant :

$$\boldsymbol{\theta}_{id} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmin}} C(\boldsymbol{\theta}) = \min_{\boldsymbol{\theta}} \int_{\Omega} \left( \mathbf{u}^{mes}(\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{cal}(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta}) \right)^2 d\Omega \quad (1.24)$$

où  $\boldsymbol{\theta}_{id}$  est le vecteur dont les composantes sont les paramètres matériau identifiés. La fonction coût du problème (1.24) mesure l'écart au sens des moindres carrés. À titre d'exemple, cette approche est mise en œuvre dans les travaux suivants : [7, 5, 28, 59].

Dans la littérature, on trouve également des approches mixtes en force et en déplacement (FEMU-U-F [5, 58, 59]), en déformation ([46]) et en contrainte ([72]).

Pour la FEMU-U, qui nous intéresse ici, l'extension au contexte de la dynamique est immédiate. Le problème de minimisation (1.24) devient :

$$\boldsymbol{\theta}_{id} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmin}} C(t; \boldsymbol{\theta}) = \min_{\boldsymbol{\theta}} \int_0^T \int_{\Omega} \left( \mathbf{u}^{mes}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{u}^{cal}(\mathbf{X}, t; \boldsymbol{\theta}) \right)^2 d\Omega dt \quad (1.25)$$

Nous trouvons une évaluation de cette approche dans [74] où l'on considère l'impact d'un élastomère compressible sur une surface rigide. La plage d'utilisation de la méthode est large. À titre d'exemple, les paramètres d'un modèle d'endommagement pour les élastomères sont identifiés par FEMU dans [72]. Une application à la viscoplasticité est donnée dans [45]. Dans le cadre de l'élasticité linéaire statique, on trouve plusieurs applications dans [7, 5]. D'après la littérature, on retient que la qualité de la méthode repose sur plusieurs aspects :

- la fiabilité de la mesure cinématique,
- la bonne connaissance des conditions aux limites,
- la qualité du modèle numérique,
- la construction de la fonction coût,
- la nature de l'algorithme d'optimisation.

Dans [9], les auteurs montrent que la méthode FEMU-U est sensible aux incertitudes sur les conditions aux limites. Parmi les algorithmes de minimisation, l'utilisateur dispose de plusieurs choix dont celui de l'algorithme de Gauss-Newton [79] ou celui de l'algorithme de Levenberg-Marquardt [19]. Ces schémas nécessitent le calcul du gradient de la fonction

coût ainsi que l'initialisation des paramètres. Un algorithme plus simple à mettre en œuvre mais plus coûteux est celui de la dichotomie. Notons également que la présence de minima locaux peut perturber ces algorithmes.

### 1.4.2 Erreur en relation de comportement (CEGM)

La méthode CEGM est initialement développée pour obtenir un estimateur d'erreur pour les simulations éléments finis [48]. Plus tard, la méthode s'est avérée être un outil intéressant pour l'identification des paramètres de matériau [49]. Dans cette nouvelle approche, la fonction coût à minimiser est homogène à une énergie :

$$C(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \boldsymbol{\sigma}^{cal} - \underline{\underline{D}}(\boldsymbol{\theta}) : \boldsymbol{\varepsilon}^{mes} \right) : \underline{\underline{D}}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) : \left( \boldsymbol{\sigma}^{cal} - \underline{\underline{D}}(\boldsymbol{\theta}) : \boldsymbol{\varepsilon}^{mes} \right) d\Omega \quad (1.26)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}^{cal}$  est un champ de contrainte statiquement admissible calculé et  $\boldsymbol{\varepsilon}^{mes}$  est le champ de déformation obtenu à partir de la mesure  $\boldsymbol{u}^{mes}$ . Cette fonction coût mesure l'écart entre le champ de contrainte calculé et le second champ de contrainte construit à partir du champ de déplacement mesuré et de la relation de comportement. La minimisation de cette fonction coût est plus délicate que pour FEMU car elle s'opère en deux étapes. La première consiste à trouver le meilleur champ  $\boldsymbol{\sigma}^{cal}$  statiquement admissible par minimisation :

$$\boldsymbol{\sigma}^{cal} = \underset{\boldsymbol{\sigma} \in SA}{\text{Argmin}} C(\boldsymbol{\theta}) \quad (1.27)$$

La seconde étape, dite de correction, consiste à déterminer le jeu de paramètres optimal  $\boldsymbol{\theta}^{id}$  :

$$\boldsymbol{\theta}^{id} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\text{Argmin}} C(\boldsymbol{\theta}) \quad (1.28)$$

Une application de cette approche est présentée dans la référence [32] dans le cadre de l'élasticité linéaire. En particulier, les auteurs y présentent une façon originale de construire un champ de contrainte statiquement admissible. Toujours dans le cadre de l'élasticité linéaire, on trouve des analyses comparatives dans [7, 5] dans lesquels nous retenons que la méthode CEGM semble moins robuste que la méthode FEMU-U. Toutefois, il est possible d'améliorer la robustesse de la méthode CEGM en intégrant les incertitudes de mesures dans la fonction coût, comme cela est présenté dans [29]. L'idée développée est de considérer les conditions aux limites comme des données non fiables et de rajouter un terme de calibration

afin de minimiser l'effet du bruit sur ces données :

$$\begin{aligned}
C(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \boldsymbol{\sigma}^{cal} - \underline{\underline{D}}(\boldsymbol{\theta}) : \boldsymbol{\varepsilon}^{cal} \right) : \underline{\underline{D}}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) : \left( \boldsymbol{\sigma}^{cal} - \underline{\underline{D}}(\boldsymbol{\theta}) : \boldsymbol{\varepsilon}^{cal} \right) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega_m} \left( \alpha \|\mathbf{u}_d^{cal} - \mathbf{u}_d^{mes}\|^2 + \beta \|\mathbf{T}_d^{cal} - \mathbf{T}_d^{mes}\|^2 \right) d\Omega_m
\end{aligned} \tag{1.29}$$

où  $\mathbf{u}_d^{cal}$  (resp.  $\mathbf{T}_d^{cal}$ ) sont les conditions limites en déplacement (resp. en chargement) calculées par simulation éléments finis et  $\mathbf{u}_d^{mes}$  (resp.  $\mathbf{T}_d^{mes}$ ) sont les conditions limites en déplacement (resp. en chargement) obtenues par mesure expérimentale. Le domaine  $\Omega_m$  est une partie du domaine  $\Omega$  sur lequel les mesures sont considérées non fiables. Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  permettent de rendre l'équation homogène et de pondérer la prise en compte du bruit sur les données non fiables. Cette nouvelle stratégie d'identification est appelée erreur en relation de comportement modifiée (M-CEGM). La première étape de la minimisation consiste à déterminer le couple  $(\mathbf{u}^{cal}, \boldsymbol{\sigma}^{cal})$  tel que :

$$(\mathbf{u}^{cal}, \boldsymbol{\sigma}^{cal}) = \underset{\mathbf{u} \in CA \times \boldsymbol{\sigma} \in SA}{\text{Argmin}} C(\boldsymbol{\theta}) \tag{1.30}$$

La deuxième étape consiste à identifier les paramètres optimaux :

$$\boldsymbol{\theta}^{id} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\text{Argmin}} C(\boldsymbol{\theta}) \tag{1.31}$$

Dans [9], les auteurs montrent que la méthode M-CEGM est plus robuste que FEMU-U lorsque les conditions aux limites sont incertaines.

Cette méthode peut être étendue au cas de la dynamique à condition de construire un champ de contrainte dynamique admissible. Des exemples d'application sont donnés dans [29, 56, 13].

### 1.4.3 La méthode des champs virtuels (VFM)

L'application de la méthode des champs virtuels à l'identification des paramètres de matériau est décrite dans l'ouvrage de référence [62]. Dans [39], elle est qualifiée d'alternative intéressante à la méthode de recalage de modèles présentée dans 1.4.1. En effet, dans le cadre de l'élasticité linéaire, cette méthode n'est pas basée sur la minimisation d'une fonction coût et ne nécessite donc pas de processus itératif. En lieu et place, elle aboutit à la résolution d'un système linéaire de petite taille. Elle repose sur une formulation variationnelle et sur la construction de champs virtuels cinématiquement admissibles. Dans le cadre de l'élasticité

linéaire statique, le principe des travaux virtuels se réduit à :

$$\int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{T}_d \cdot \mathbf{u}_{CA}^* d\Gamma_\sigma = \int_{\Omega} \underline{\underline{D}}(\boldsymbol{\theta}) : \boldsymbol{\varepsilon}^{mes} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{CA}^*) d\Omega \quad \forall \mathbf{u}_{CA}^* \quad (1.32)$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{CA}^*)$  est un champ de déformation virtuel construit à partir du champ de déplacement virtuel cinématiquement admissible  $\mathbf{u}_{CA}^*$ . Une difficulté réside dans le choix d'un de déplacement virtuel pertinent. En effet, il a été montré dans [40, 41] que ceci conditionne en partie la qualité de l'identification. En théorie, il est possible d'identifier autant de paramètres matériau que l'on crée de champs virtuels. Une revue détaillée de la méthode est présentée dans la référence [38]. Nous retenons que l'équation (1.32) écrite pour plusieurs champs virtuels permet d'obtenir le système linéaire :

$$\mathbb{A}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{b} \quad (1.33)$$

où  $\mathbb{A}$  est une matrice carrée et  $\mathbf{b}$  est un vecteur dont les composantes sont les travaux virtuels des efforts externes pour chacun des champs virtuels. Pour cela, cette formulation de la méthode nécessite que les paramètres matériau puissent être mis en facteurs dans le modèle de comportement.

Historiquement, les premiers champs virtuels sont choisis de façon empirique et le système (1.33) est inversé pour extraire les paramètres matériau. Dans [37], les auteurs introduisent la notion de champs virtuels spéciaux qui conduit à un nouveau système ne nécessitant pas d'inversion de matrice :

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{b} \quad (1.34)$$

Une approche de construction de ces champs virtuels spéciaux par sous-domaines est proposée dans [73]. Dans ce travail, les auteurs s'appuient sur des fonctions de formes de type éléments finis pour construire un champ de déplacement virtuel nodal. Par ailleurs, une approche par construction polynomiale est également présentée dans [35]. Dans ces approches, il reste néanmoins une infinité de choix possibles pour la construction de ces champs virtuels spéciaux.

Une autre amélioration consiste à prendre en compte les incertitudes de mesure. Dans [6], les auteurs introduisent ainsi les champs virtuels spéciaux optimisés. Ces derniers sont uniques car ils doivent minimiser un critère permettant de réduire l'impact des incertitudes de mesure. Ainsi, en utilisant ces champs virtuels, les auteurs aboutissent à une méthode d'identification dite *au maximum de vraisemblance*. Dans l'étude comparative [7], nous retenons que cette méthode montre une grande robustesse comparable à celle de la méthode

FEMU-U.

Les applications en dynamique sont peu courantes mais existent, notamment dans [54]. Les auteurs réalisent un essai de compression dynamique à l'aide des barres de Hopkinson et une mesure par corrélation d'image à l'aide de caméras ultra-rapides et multicapteurs. Ainsi, ils appliquent la méthode VFM en utilisant la forme suivante du principe des travaux virtuels :

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}}^{mes} \cdot \mathbf{u}_{CA}^* d\Omega = \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{T}_d \cdot \mathbf{u}_{CA}^* d\Gamma_{\sigma} - \int_{\Omega} \underline{\underline{D}}(\boldsymbol{\theta}) : \boldsymbol{\varepsilon}^{mes} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{CA}^*) d\Omega \quad \forall \mathbf{u}_{CA}^* \quad (1.35)$$

Dans ce travail, les champs virtuels sont choisis de façon à annuler le travail virtuel des efforts extérieurs et les propriétés élastiques d'un matériau composite de type verre/époxy sont identifiées.

Pour les cas d'études où les modèles de comportement sont non linéaires, il n'est plus possible d'extraire directement les paramètres matériau par inversion d'un système linéaire. Une fonction coût est alors construite afin de caractériser un écart entre les travaux virtuels des efforts internes et externes. Dans le cadre de la statique, nous pouvons écrire :

$$C(\boldsymbol{\theta}) = \left( \frac{\mathcal{W}^{ext} - \mathcal{W}^{int}(\boldsymbol{\theta})}{\mathcal{W}^{ext}} \right)^2 \quad (1.36)$$

De cette manière, les paramètres matériau d'un modèle hyperélastique sont identifiés dans [63] tandis que ceux d'un modèle élastoplastique le sont dans [36]. Dans [61], les auteurs étendent l'utilisation des champs virtuels spéciaux optimisés dans le cas de la plasticité. Le cas de la visco-plasticité est traité dans [34]. Enfin, les paramètres d'une loi d'endommagement couplée à un modèle élastoplastique sont identifiés dans [57].

#### 1.4.4 La méthode de l'écart à l'équilibre (EGM)

Cette méthode, initialement présentée dans [22], repose sur la vérification de l'équilibre local à l'intérieur du solide. Dans le cadre de l'élasticité linéaire en statique, nous rappelons que cet équilibre vérifie les conditions suivantes :

- en présence de forces volumiques,  $\mathbf{f}_d$ , non nulles, l'équation d'équilibre suivante est vérifiée dans le domaine  $\Omega$  :

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f}_d = \mathbf{0} \quad (1.37)$$

- en présence de forces surfaciques,  $\mathbf{T}_d$ , non nulles, les conditions limites de Neumann

sont vérifiées :

$$\sigma \cdot \mathbf{n}_{ext} = \mathbf{T}_d \quad (1.38)$$

où  $\mathbf{n}_{ext}$  est la normale extérieure à la frontière  $\partial\Omega$ .

- le champ de contrainte  $\sigma$  doit être régulier. Il est notamment continu à travers toute coupure de normale  $\mathbf{n}$  :

$$\sigma^+ \cdot \mathbf{n} - \sigma^- \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (1.39)$$

Un champ de contrainte vérifiant ces conditions est qualifié de statiquement admissible. Un champ ne vérifiant pas l'une de ces conditions induit un écart à l'équilibre. Cet écart à l'équilibre peut être mesuré par la fonction coût suivante :

$$C(\boldsymbol{\theta}) = \alpha \|\underline{\underline{div}}(\underline{\underline{D}}(\boldsymbol{\theta}) : \boldsymbol{\varepsilon}^{mes}) + \mathbf{f}_d\|^2 + \beta \|\underline{\underline{D}}(\boldsymbol{\theta}) : \boldsymbol{\varepsilon}^{mes} \cdot \mathbf{n}_{ext} - \mathbf{T}_d\|^2 + \gamma \sum_i \|\sigma_i^+ \cdot \mathbf{n} - \sigma_i^- \cdot \mathbf{n}\|^2 \quad (1.40)$$

où les facteurs  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  permettent de rendre la fonction coût homogène et de pondérer les différents termes de la fonction coût. La minimisation de cette fonction coût permet d'identifier les paramètres matériau du tenseur  $\underline{\underline{D}}(\boldsymbol{\theta})$  [35].

Dans la littérature, on trouve plusieurs façons d'implémenter la méthode EGM :

- un développement sur la base de la méthode des éléments finis est donné dans [22] où les paramètres d'une loi d'endommagement isotrope sont identifiés.
- un second développement sur la base de la méthode des différences finies est donné dans [24]. Dans cette référence, les paramètres d'une loi d'endommagement d'un matériau composite orthotrope sont identifiés. Dans ce travail, un système linéaire est obtenu pour lequel les inconnues sont les rigidités orthotropes.
- la méthode est également appliquée dans le contexte de la théorie des poutres pour l'étude du flambement dans [43].

Dans l'étude comparative [7], nous retenons que la méthode est particulièrement sensible au bruit de mesure. Dans [35], plusieurs pistes sont explorées afin de reconditionner la fonction coût et ainsi minimiser les effets du bruit. À ma connaissance, des applications de cette méthode dans le cadre de la dynamique ne sont pas encore parues dans la littérature scientifique.

## 1.4.5 La méthode de l'écart à la réciprocité (RGM)

La méthode de l'écart à la réciprocité est basée sur le théorème de Maxwell-Betti. Elle est principalement utilisée pour la caractérisation de fissures planes présentes sur la surface extérieure du solide. L'idée est de comparer un solide virtuel sans défaut avec un solide réel présentant des défauts localisés sur la surface. Cette méthode nécessite une mesure sur le contour extérieur du domaine ( $\partial\Omega_{ext}$ ).

La méthode repose donc sur la construction de champs de déplacement adjoints, notés  $\mathbf{u}^{adj}$ , et la formulation d'une fonction coût. L'écart à la réciprocité est défini par :

$$C(\boldsymbol{\theta}) = \int \int_{\partial\Omega_{ext}} \left( \mathbf{T}_d \cdot \mathbf{u}^{adj} - \left( \underline{\underline{D}}(\boldsymbol{\theta}) : \boldsymbol{\varepsilon}^{adj} \right) \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{u}^{mes} dS \quad (1.41)$$

où  $\mathbf{T}_d$  (resp.  $\underline{\underline{D}}(\boldsymbol{\theta}) : \boldsymbol{\varepsilon}^{adj} \cdot \mathbf{n}$ ) représente les efforts extérieurs agissant sur le contour extérieur du domaine du solide réel (resp. virtuel). Le champ de déformation adjoint,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{adj}$ , est obtenu à partir du champ de déplacement adjoint.

La minimisation de cette fonction coût ne requiert aucune résolution de problèmes directs mais uniquement le calcul d'une intégrale sur le contour [35].

Pour construire le champ de déplacement adjoint, il est courant d'utiliser la notion de front d'onde. Ainsi, ce champ adjoint est caractérisé par une direction de propagation et une vitesse de propagation. Pour chaque champ adjoint construit, nous obtenons une mesure de l'écart à la réciprocité. Cette dernière nous donne une information sur la présence ou non de défauts localisés de type fissure plane : il y a absence de défaut tant que  $C(\boldsymbol{\theta}) = 0$ .

Nous trouvons des applications en élasticité statique dans [2, 3, 1, 4], en élastodynamique dans [17, 18] et aussi en viscoélasticité dans [16].

## 1.5 Conclusion

### 1.5.1 Bilan du chapitre 1

Dans un premier temps, nous avons défini un problème direct en grandes transformations, pour des matériaux non linéaires et en présence de zone de contact. Les équations du problème et la méthode des éléments finis ont été brièvement rappelées dans 1.1. Dans un second temps, un état de l'art, non exhaustif, sur l'identification des paramètres matériau a été présenté dans ce chapitre. D'après la littérature citée, nous retenons que l'identification en mécanique des solides est un problème inverse mal posé qui repose principalement sur deux étapes :

- la mesure d'un champ de déplacement expérimental,

- l'utilisation d'une méthode inverse exploitant cette mesure afin de déterminer les paramètres mécaniques du matériau.

Parmi les méthodes de mesure de champ cinématique présentes dans la littérature, nous nous sommes intéressés à la corrélation d'images numériques dans 1.3. Nous avons présenté le principe de l'approche locale et nous nous sommes intéressés aux travaux publiés dans [15] visant à étudier l'influence de certains paramètres de la méthode sur la fiabilité de la mesure. Nous retenons que la fiabilité de la mesure conditionne en partie la qualité de l'identification et que la CIN repose sur plusieurs compromis :

- la taille de l'élément doit être assez petite pour avoir une bonne résolution spatiale (respect de la cinématique) mais assez grande pour garantir la qualité du résultat,
- en dynamique, il faut trouver un juste milieu entre la résolution spatiale de la caméra et la fréquence d'acquisition des images.

Dans la littérature, la méthode est largement utilisée en mécanique des solides à des fins d'identification.

Par la suite, dans 1.4, nous avons présenté cinq méthodes d'identification pouvant utiliser le champ de déplacement mesuré par la CIN comme donnée d'entrée. D'après la littérature, le champ d'application de ces méthodes est large et toutes peuvent être étendues à la dynamique et à des modèles de comportement non linéaires. Notons tout de même que la méthode EGM est principalement utilisée pour caractériser des lois d'endommagement et que la méthode RGM est principalement utilisée pour identifier des fissures planes sur la frontière extérieure du domaine. Au contraire, les méthodes FEMU-U, CEGM et VFM s'appliquent à un plus large spectre d'application (statique, dynamique, non linéaire, ...). Les méthodes FEMU-U et CEGM peuvent être appliquées avec une mesure totale ou partielle du champ de déplacement. La méthode VFM peut être appliquée lorsque la mesure est disponible à l'intérieur du domaine. Cependant, notons que cette dernière est peu coûteuse dans le cas linéaire. En effet, elle conduit à l'inversion d'un système d'équations linéaires en lieu et place de la minimisation d'une fonction coût. À notre sens, c'est donc une méthode pertinente pour lever le problème du coût de l'identification en dynamique.

## **1.5.2 Transition vers les chapitres 2 et 3**

Deux axes d'amélioration ont été identifiés à l'issue de ce chapitre. Le premier concerne le contrôle de la propagation des incertitudes de mesure. Le second est relatif au coût de l'identification dans le contexte de la dynamique. Les deux chapitres suivants présenteront

les solutions envisagées, de manière indépendante.

Dans le chapitre 2, nous présentons une stratégie du type VFM permettant d'identifier à moindre coût les propriétés élastiques en dynamique. Ici, l'effort ne porte pas sur le traitement d'images et la méthode repose sur l'utilisation d'un champ de déplacement mesuré obtenu par la CIN par exemple. Nous présentons et validons numériquement la méthodologie développée. Nous évaluons la robustesse de la méthode développée lorsque les mesures sont bruitées.

Le chapitre 3 présente une nouvelle approche du recalage de modèles éléments finis. Nous explorons le potentiel d'une information géométrique et non plus cinématique. Cela nous permettra d'introduire une technique de mesure basée sur des traitements d'images plus simples et moins coûteux que la CIN : la segmentation d'image. De plus, cela permettra d'introduire très peu de paramètres métrologiques pouvant influencer la qualité de la mesure. Cette nouvelle approche est comparée à la méthode FEMU-U et plusieurs investigations numériques visent à valider la méthode en termes de précision et de robustesse.

# Chapitre 2

## Stratégie basée sur les champs virtuels

L'objectif du chapitre est de présenter une méthode d'identification adaptée à la dynamique. À l'issue du chapitre 1, il ressort que la stratégie basée sur les champs virtuels (VFM) est une stratégie peu onéreuse pour identifier des paramètres matériau. Cette stratégie semble bien adaptée pour lever le verrou lié au coût de l'identification présenté dans l'introduction. La difficulté consiste à choisir et construire des champs virtuels spatiaux-temporels permettant d'identifier, à moindre coût, plusieurs paramètres avec une bonne qualité. La méthode est d'abord présentée puis validée sur différents cas tests numériques.

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>43</b>
<b>2.2</b>	<b>Méthodologie développée (0D)</b>	<b>44</b>
2.2.1	Système étudié : masse-ressort	44
2.2.2	Formulation variationnelle	49
2.2.3	Choix et construction des champs virtuels	49
2.2.4	Techniques numériques utilisées	51
2.2.5	Évaluation de la qualité de l'identification	56
2.2.6	Validation numérique de la méthodologie	57
2.2.7	Bilan intermédiaire	63
<b>2.3</b>	<b>Généralisation de la méthodologie développée (2D)</b>	<b>64</b>
2.3.1	Cas particulier : élastique linéaire (2D)	64
2.3.2	Généralisation de la méthodologie	68
<b>2.4</b>	<b>Étude en robustesse lorsque la mesure est bruitée</b>	<b>69</b>
2.4.1	Présentation des cas d'études	70
2.4.2	Validation numérique pour le cas <b>C2.2</b>	71
2.4.3	Validation numérique pour le cas <b>C2.3</b>	74
<b>2.5</b>	<b>Étude en robustesse lorsque le chargement est incertain</b>	<b>79</b>
2.5.1	Introduction d'incertitudes sur le chargement	80
2.5.2	Validation numérique pour le cas <b>C2.2</b>	81
2.5.3	Validation numérique pour le cas <b>C2.3</b>	83
<b>2.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>84</b>
2.6.1	Bilan du chapitre 2	84
2.6.2	Transition vers le chapitre 3	85

---

## 2.1 Introduction

Les méthodes d'identification présentées dans 1.4 s'appuient sur la mesure d'un champ de déplacement. Une démarche très répandue consiste à utiliser la méthode FEMU-U (dans 1.4.1) qui compare un champ de déplacement éléments finis à un champ de déplacement mesuré obtenu par CIN (dans 1.3).

Deux verrous apparaissent. Le premier est inhérent aux incertitudes introduites par le processus de corrélation des images. Le second est lié au coût du recalage de modèles éléments finis en dynamique.

La méthode proposée dans ce chapitre a pour objectif de lever le second verrou. La technique développée s'appuie sur un champ de déplacement mesuré issu de la CIN comme pour la FEMU-U. Nous ne nous intéressons pas au traitement des images dans ce chapitre.

La méthode des champs virtuels comporte deux étapes :

- l'écriture d'une formulation variationnelle,
- le choix et la construction d'un jeu de champs virtuels.

La construction des champs virtuels conditionne la qualité de l'identification. Beaucoup d'études portent sur la construction spatiale de ces champs virtuels [40, 6, 73, 7, 61]. La construction de champs spatio-temporels en dynamique reste un sujet encore ouvert [54]. Nous proposons différents champs virtuels pour identifier des paramètres constitutifs de modèles de comportement.

Pour évaluer la qualité d'identification liée aux champs proposés, nous comparons la méthode développée avec la FEMU-U qui sert de méthode de référence. Pour se soustraire aux problèmes liés à la CIN (premier verrou), nous nous plaçons dans un contexte idéal où les mesures sont synthétiques. Les mesures sont issues de calculs éléments finis. L'ensemble *caméra, images et informations* de la Figure 3 est remplacé par celui de la Figure 2.1.

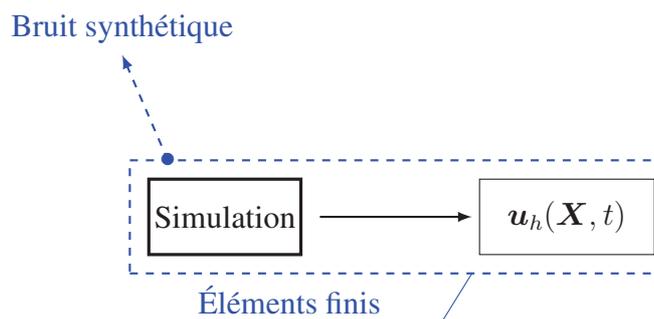


FIGURE 2.1 – Génération d'un champ de déplacement spatio-temporel synthétique via les éléments finis.

Pour étudier la robustesse de la méthode, un bruit synthétique peut être généré puis ad-

ditionné au champ de déplacement. Le comportement de la méthode développée peut ainsi être étudié pour plusieurs niveaux de bruit.

Le chapitre 2 s'organise de la manière suivante :

- la section 2.2 présente et valide numériquement la méthodologie développée sur un cas simple (masse-ressort 0D),
- la section 2.3 s'appuie sur les résultats de la section 2.2 et généralise la méthode à l'élasticité linéaire,
- la section 2.4 étudie la robustesse de la méthode développée par rapport à l'introduction d'un bruit synthétique sur les mesures,
- la section 2.5 analyse l'influence de la méconnaissance du chargement sur la qualité de l'identification,
- la section 2.6 dresse un bilan des performances de la méthode développée.

## 2.2 Méthodologie développée (0D)

L'objectif de la section est de présenter la méthodologie développée en s'appuyant sur un cas où la solution analytique est connue (masse-ressort). Sur cet exemple, différents champs virtuels sont testés pour définir le meilleur choix.

### 2.2.1 Système étudié : masse-ressort

Nous étudions un système masse-ressort, noté **C2.1**, présenté sur la Figure 2.2 où  $m$  est la masse et  $k$  est la raideur du ressort. La masse est soumise à un chargement extérieur  $T_d(t)$  dont les caractéristiques sont illustrées sur la Figure 2.3. On note  $P_{max}$  l'amplitude maximale du chargement et  $t_1$  un temps caractéristique.

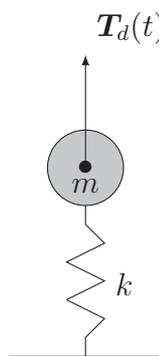


FIGURE 2.2 – Cas d'étude **C2.1**.

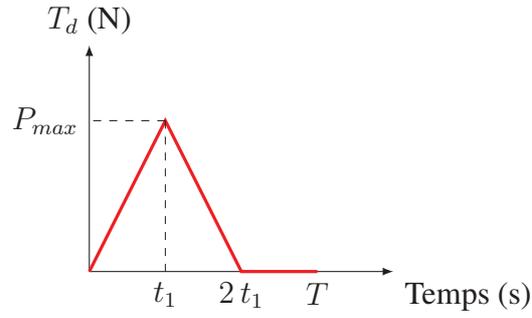


FIGURE 2.3 – Chargement dynamique appliqué.

L'équation gouvernant ce système est la suivante :

$$\ddot{x}^{ex} + \frac{k}{m}x^{ex} = \frac{1}{m}T_d \quad \forall t \in \tau = [0, T] \quad (2.1)$$

où  $x^{ex}$  est la position de la masse,  $\dot{x}^{ex}$  sa vitesse et  $\ddot{x}^{ex}$  son accélération. Les conditions initiales sont :

$$x^{ex}|_{t=0} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{x}^{ex}|_{t=0} = 0 \quad (2.2)$$

La solution analytique de l'équation (2.1) est définie par intervalles par :

$$x^{ex} = \frac{P_{max}}{kt_1} \left( t - \frac{\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t)}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \right) \quad \forall t \in [0, t_1] \quad (2.3)$$

$$x^{ex} = \frac{P_{max}}{kt_1} \left( t - 2t_1 + \frac{2 \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_1)) - \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t)}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \right) \quad \forall t \in [t_1, 2t_1] \quad (2.4)$$

$$x^{ex} = \frac{P_{max}}{kt_1} \left( \frac{2 \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_1)) + \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}(2t_1 - t)) - 1}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \right) \quad \forall t \in [2t_1, T] \quad (2.5)$$

La Figure 2.4 représente cette solution sur  $\tau = [0, T]$ .

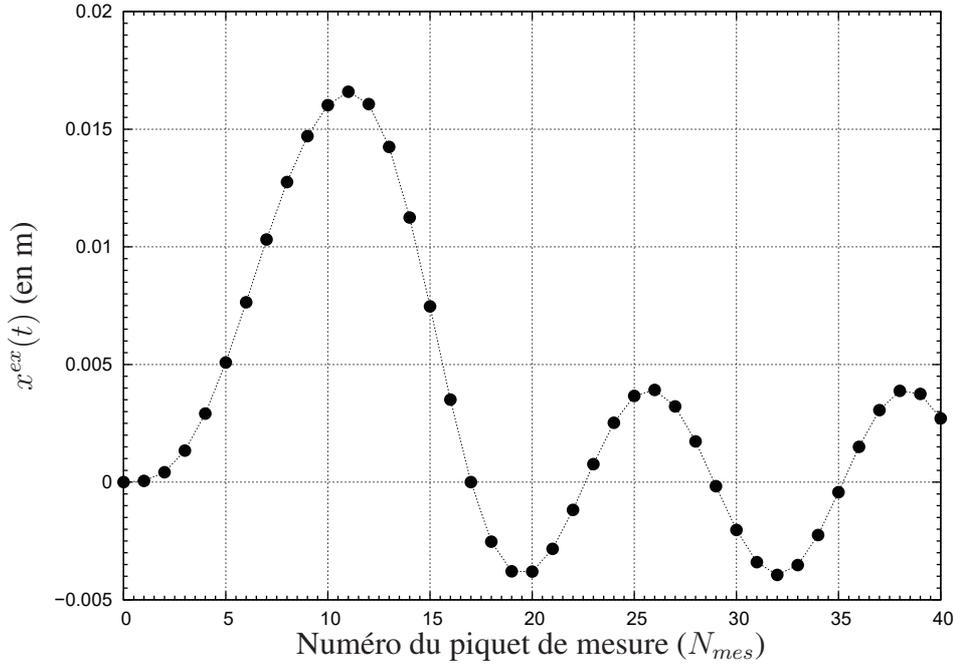


FIGURE 2.4 – Discrétisation temporelle de la solution exacte sur  $\tau$  – cas d'étude **C2.1**.

$N_{mes} + 1$  points de mesure sont extraits de cette solution analytique à des pas de temps réguliers (représentés par des disques pleins sur la Figure 2.4). Nous obtenons ainsi un ensemble de mesures synthétiques parfaites :

$$x^{ex}(t_i), t_i = i \times \Delta t, i = 0, \dots, N_{mes} \quad (2.6)$$

### 2.2.1.1 Génération de la quantité d'intérêt mesurée

Un bruit supplémentaire peut être introduit artificiellement en ajoutant une perturbation aléatoire, notée  $\delta x$ , à la solution analytique  $x^{ex}$  à chaque piquet de temps  $t_i$  :

$$x^{mes}(t_i; \omega) = x^{ex}(t_i) + \delta x(t_i; \omega) \quad (2.7)$$

où, à chaque  $t_i$ ,  $\delta x(t_i; \omega)$  est une variable aléatoire représentée par l'aléa  $\omega$  et définie par :

$$\delta x(t_i; \omega) = \alpha \psi_i(\omega) x^{ex}(t_i) \quad (2.8)$$

où  $\psi_i$  sont des variables aléatoires indépendantes et uniformément réparties entre  $-1$  et  $1$ . Le paramètre  $\alpha$  est un scalaire prenant les valeurs  $[0\%, 2\%, 4\%, 6\%, 8\%]$  qui décrit le niveau de bruit.

Les simulations de Monte-Carlo correspondent à une discrétisation de l'aléa, caractérisé par  $\omega$ . En effet, une variable aléatoire  $\psi(\omega)$  peut être représentée de manière discrète par

un ensemble de  $N_{MC}$  réalisations noté  $\psi(\omega_p)$ ,  $p \in [1, \dots, N_{MC}]$ . Pour que l'approximation soit satisfaisante,  $N_{MC}$  doit être grand. La fonction densité de probabilité discrète,  $PDF(\psi)$  (PDF : probability density function), peut être construite à partir de ces réalisations. La Figure 2.5 illustre la fonction densité de probabilité discrète de  $x^{mes}(t; \omega)$  pour un instant  $t_i$  donné, pour  $\alpha = 8\%$ .

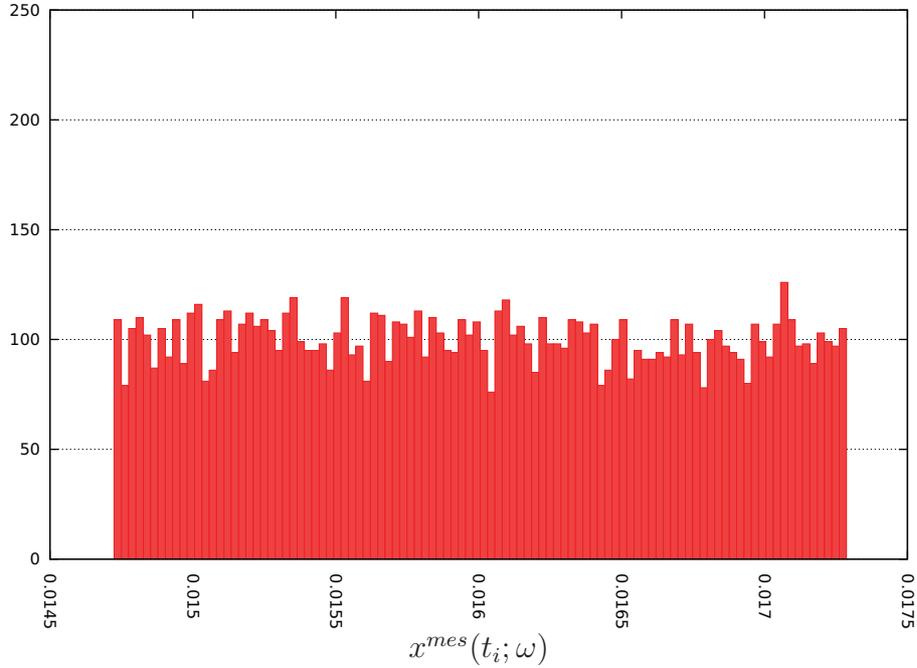


FIGURE 2.5 – PDF de  $x^{mes}(t_i; \omega)$  pour  $\alpha = 8\%$  – cas d'étude **C2.1**.

### 2.2.1.2 Recalage de modèles

La technique de recalage de modèles est présentée dans 1.4.1 et s'écrit, pour ce cas **C2.1**, comme suit :

$$k_{id}(\omega) = \underset{k}{\operatorname{argmin}} C_x(k, \omega) \quad (2.9)$$

où  $k_{id}(\omega)$  est le paramètre identifié. La fonction coût  $C_x$  est définie à partir de la mesure  $x^{mes}(t_i; \omega)$  et d'un calcul  $x^{cal}(t_n; k)$  réalisé à partir du paramètre  $k$ . Elle s'exprime comme suit :

$$C_x(k, \omega) = \sum_{i=0}^{N_{mes}} (x^{mes}(t_i; \omega) - x^{cal}(t_n; k))^2 \quad (2.10)$$

Le détail de la génération des quantités d'intérêts calculées  $x^{cal}(t_n; k)$  est donné dans 2.2.1.2.1. La minimisation (2.9) est réalisée par dichotomie et est détaillée dans 2.2.1.2.2.

### 2.2.1.2.1 Génération des quantités d'intérêts calculées

Les quantités calculées  $x^{cal}(t_n; k)$  sont obtenues par le schéma implicite de Newmark car il est inconditionnellement stable pour le cas traité.

Nous choisissons de prendre autant de piquets de temps de calcul ( $t_n$ ) que de piquet de temps de mesure ( $t_i$ ) :

$$t_n = n\Delta t \quad \text{avec} \quad n \in [0, N_{mes}] \quad \text{et} \quad N_{mes} = \frac{T}{\Delta t} \quad (2.11)$$

Dans ce qui suit, nous notons que  $x^{cal}(t_n) = x_n^{cal}$ . Les hypothèses du schéma de Newmark sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n+1}^{cal} &= \dot{x}_n^{cal} + \Delta t \left( (1 - \gamma)\ddot{x}_n^{cal} + \gamma\ddot{x}_{n+1}^{cal} \right) \\ x_{n+1}^{cal} &= x_n^{cal} + \Delta t \dot{x}_n^{cal} + (\Delta t)^2 \left( \left( \frac{1}{2} - \zeta \right) \ddot{x}_n^{cal} + \zeta \ddot{x}_{n+1}^{cal} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

où les paramètres du schéma sont classiquement  $\zeta = 0.25$  et  $\gamma = 0.5$ .

En notant que  $x^{cal}$  vérifie l'équation (2.1) et en utilisant les hypothèses (2.12), on obtient l'équation suivante :

$$x_{n+1}^{cal} = \left( k + \frac{1}{\zeta \Delta t^2} m \right)^{-1} \times \left( T_{dn+1} + m \left( \frac{1}{\zeta \Delta t^2} x_n^{cal} + \frac{1}{\zeta \Delta t} \dot{x}_n^{cal} + \left( \frac{1}{2\zeta} - 1 \right) \ddot{x}_n^{cal} \right) \right) \quad (2.13)$$

Les quantités d'intérêts calculées sont obtenues à chaque pas de temps à l'aide de l'équation (2.13) et des conditions initiales (équations (2.2)).

### 2.2.1.2.2 Algorithme de minimisation retenu

Nous cherchons à minimiser une fonction coût (équation (2.9) par exemple) afin d'identifier les paramètres. Parmi les différents algorithmes existants dans la littérature (Gauss-Newton, Levenberg-Marquardt, ...), nous choisissons d'utiliser un algorithme de dichotomie. Ce choix se justifie par la simplicité de son implémentation. En effet, dans ces travaux, nous nous intéressons à la solution (paramètres identifiés) à des fins d'évaluation numérique. L'impact du choix de la procédure de minimisation sur la qualité de l'identification sort du cadre de cette étude.

L'algorithme de dichotomie est néanmoins coûteux en temps lorsque le nombre de paramètres à identifier est grand.

## 2.2.2 Formulation variationnelle

La première étape de la stratégie développée consiste à écrire la formulation variationnelle de l'équation (2.1) :

$$\int_0^T \left( \ddot{x}^{ex} + \frac{k}{m} x^{ex} - \frac{1}{m} T_d \right) x_{CA}^* dt = 0 \quad \forall x_{CA}^* \quad (2.14)$$

où  $x_{CA}^*$  est un champ virtuel arbitrairement choisi.

En choisissant un champ virtuel judicieusement, nous obtenons une équation qui permet d'identifier le paramètre  $k$ . En effet, en supposant que  $x^{mes}$  vérifie l'équation (2.1) et en utilisant l'équation (2.14), nous avons :

$$k_{id}(\omega) = \frac{\int_0^T T_d x_{CA}^* dt - m \int_0^T \ddot{x}^{mes}(\omega) x_{CA}^* dt}{\int_0^T x^{mes}(\omega) x_{CA}^* dt} \quad (2.15)$$

L'accélération mesurée, présente dans le second terme de l'équation (2.15), est obtenue par une double dérivation numérique de la mesure bruitée. Ainsi, les incertitudes causées par le bruit sur les mesures peuvent se propager au cours de cette dérivation numérique. Le champ virtuel peut par contre être choisi de façon à être dérivable analytiquement. Ainsi, une double intégration par parties permet de reporter les dérivations du terme  $x^{mes}$  sur le terme  $x_{CA}^*$ . Finalement, l'équation (2.15) devient :

$$k_{id}(\omega) = \frac{\int_0^T T_d x_{CA}^* dt - \int_0^T m x^{mes}(\omega) \ddot{x}_{CA}^* dt + [m \dot{x}_{CA}^* x^{mes}(\omega)]_0^T - [m \dot{x}^{mes}(\omega) x_{CA}^*]_0^T}{\int_0^T x^{mes}(\omega) x_{CA}^* dt} \quad (2.16)$$

Dans l'équation (2.16), seule la dérivée première de  $x^{mes}$  apparaît aux instants initiaux et finaux. Ces termes peuvent disparaître en choisissant judicieusement un champ virtuel nul en ces instants.

Nous présentons, dans 2.2.3, plusieurs choix de champs virtuels et nous les comparons. Nous renseignons, dans 2.2.4, différentes techniques numériques permettant de calculer les termes de l'équation (2.16) (intégration, dérivation et lissage).

## 2.2.3 Choix et construction des champs virtuels

Nous présentons différents choix de champs virtuels pour l'équation (2.16). Leur qualité est comparée dans 2.2.6. L'objectif est de définir une stratégie peu coûteuse et facilement extensible pour l'identification de plusieurs paramètres en 2D.

### 2.2.3.1 Choix 1

La mesure  $x^{mes}$  contient *a priori* des informations pertinentes pour l'identification. Notre premier choix, noté **CV.1**, est donc :

$$x_{CA}^*(\omega) = x^{mes}(\omega) \quad , \quad \dot{x}_{CA}^*(\omega) = \dot{x}^{mes}(\omega) \quad \text{et} \quad \ddot{x}_{CA}^*(\omega) = \ddot{x}^{mes}(\omega) \quad (2.17)$$

La construction de ce champ est peu coûteuse car la mesure est disponible. Le seul coût porte sur les dérivées premières et secondes qui doivent être calculées numériquement. Pour pallier aux erreurs introduites nous proposons une variante notée **CV.1'**. L'idée consiste à remplacer  $x^{mes}$  par un champ lissé noté  $\tilde{x}^{mes}$ . Ce champ appauvri en information mécanique conduit *a priori* à une meilleure dérivation numérique. Ces deux champs sont comparés dans 2.2.6. La technique de lissage est présentée dans 2.2.4.

L'extension au 2D du choix **CV.1** (resp. **CV.1'**) est immédiate. En revanche, ce choix ne permet d'identifier qu'un seul paramètre.

### 2.2.3.2 Choix 2

Le second champ virtuel, noté **CV.2**, est construit à partir d'une famille de fonctions sinusoïdales s'annulant aux instants initiaux et finaux. Ce choix permet d'annuler le terme  $[m\dot{x}^{mes}(\omega)x_{CA}^*]_0^T$  de l'équation (2.16). Cette famille est paramétrée par l'entier  $p$  :

$$x_{CA}^* = \sin\left(p\frac{2\pi}{T}t\right) \quad , \quad \dot{x}_{CA}^* = p\frac{2\pi}{T} \cos\left(p\frac{2\pi}{T}t\right) \quad \text{et} \quad \ddot{x}_{CA}^* = -\left(p\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin\left(p\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (2.18)$$

Ce choix est peu coûteux et facilement dérivable car analytique. Il permet d'identifier un ensemble de paramètres en choisissant un ensemble de valeur de  $p$ . L'influence de  $p$  sur la qualité de l'identification est discutée dans 2.2.6. Différentes pistes existent pour étendre ce choix au 2D.

### 2.2.3.3 Choix 3

Le troisième choix, noté **CV.3**, est construit à partir d'une famille d'une base polynomiale des fonctions du temps :

$$x_{CA}^* = t^i \quad , \quad \dot{x}_{CA}^* = i \times t^{i-1} \quad \text{et} \quad \ddot{x}_{CA}^* = i(i-1) \times t^{i-2} \quad (2.19)$$

où  $i$  est un entier naturel.

Ce choix est très peu coûteux et facile à étendre au 2D. Cette famille permet d'identifier plusieurs paramètres.

## 2.2.4 Techniques numériques utilisées

À présent, nous présentons les techniques numériques utilisées pour calculer les différents termes de l'équation (2.16). Parmi celles-ci, nous retrouvons notamment l'intégration, la dérivation et le lissage.

### 2.2.4.1 Intégration numérique

L'intégration numérique en temps permet d'approcher la valeur de l'intégrale d'une fonction  $f(t)$  sur l'intervalle  $[0, T]$ . Cet intervalle est divisé en  $n$  sous-intervalles et on note  $\Delta t$  le pas de la discrétisation. On note  $\{y_0, \dots, y_n\}$  les valeurs discrètes de la fonction  $f(t)$  à chaque pas de temps.

Différentes méthodes classiques existent dans la littérature :

- **La méthode des rectangles à gauche** : la fonction  $f(t)$  est approchée par une fonction en escalier :

$$\int_0^T f(t) dt \approx \Delta t \sum_{i=0}^{n-1} y_i \quad (2.20)$$

- **La méthode des trapèzes** : la fonction  $f(t)$  est approchée par une fonction affine par sous-intervalles :

$$\int_0^T f(t) dt \approx \Delta t \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) \quad (2.21)$$

- **La méthode de Simpson** : la fonction  $f(t)$  est approchée par une fonction polynomiale de degré 2 sur chacun des sous-intervalles :

$$\int_0^T f(t) dt \approx \frac{\Delta t}{3} \left( y_0 + 4 \sum_{i=0}^{n/2-1} y_{2i+1} + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} y_{2i} + y_n \right) \quad (2.22)$$

D'un point de vue théorique, la méthode de Simpson est plus précise que la méthode des trapèzes qui elle-même est plus précise que la méthode des rectangles. Afin d'estimer l'ordre de grandeur de l'erreur d'intégration sur notre quantité d'intérêt, différents tests numériques sont menés ci-dessous.

La calcul analytique de la primitive de l'équation (2.3) donne :

$$\int_0^{t_1} x^{ex}(t) dt = \frac{P_{max}}{2k} \times t_1 + \frac{mP_{max}}{k^2 t_1} \times \left( \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} \times t_1 \right) - 1.0 \right) \quad (2.23)$$

Pour l'application numérique, nous prenons  $P_{max} = 10 N$ ,  $k = 745 N.m^{-1}$ ,  $t_1 = 1 s$  et  $m = 30 kg$ ,  $N_{mes} = 11$ . La Table 2.1 donne la valeur analytique de la primitive et la compare à celles obtenues par les différentes techniques présentées.

Méthode	Valeur de l'intégrale	Erreur relative	Degré d'interpolation
Rectangle	0.0055228	12.55 %	0
Trapèze	0.0063237	0.13 %	1
Simpson	0.0063154	0.0022 %	2
Analytique	0.0063155	#	#

TABLE 2.1 – Comparaison analytique-numérique pour le calcul des intégrales.

Il ressort de la Table 2.1 que les résultats obtenus par la méthode de Simpson et ceux obtenus analytiquement sont confondus à 0.0022% près. Nous utilisons cette technique d'intégration dans la suite.

### 2.2.4.2 Dérivation numérique

La dérivation numérique en temps permet d'approcher la valeur de la dérivée d'une fonction  $f(t)$  sur l'intervalle  $[0, T]$ .

Différentes méthodes classiques existent dans la littérature :

– **Schéma centré autour de 2 points :**

$$\left. \frac{\partial f(t)}{\partial t} \right|_{t=t_i} \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t} \quad (2.24)$$

– **Schéma centré autour de 3 points :**

$$\left. \frac{\partial f(t)}{\partial t} \right|_{t=t_i} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2 \times \Delta t} \quad (2.25)$$

– **Schéma centré autour de 5 points :**

$$\left. \frac{\partial f(t)}{\partial t} \right|_{t=t_i} \approx \frac{y_{i-2} - 8y_{i-1} + 8y_{i+1} - y_{i+2}}{12 \times \Delta t} \quad (2.26)$$

Sur la Figure 2.6, la vitesse  $\dot{x}^{ex}$ , connue analytiquement, et comparée à la vitesse obtenue par les trois différentes techniques de dérivation numérique.

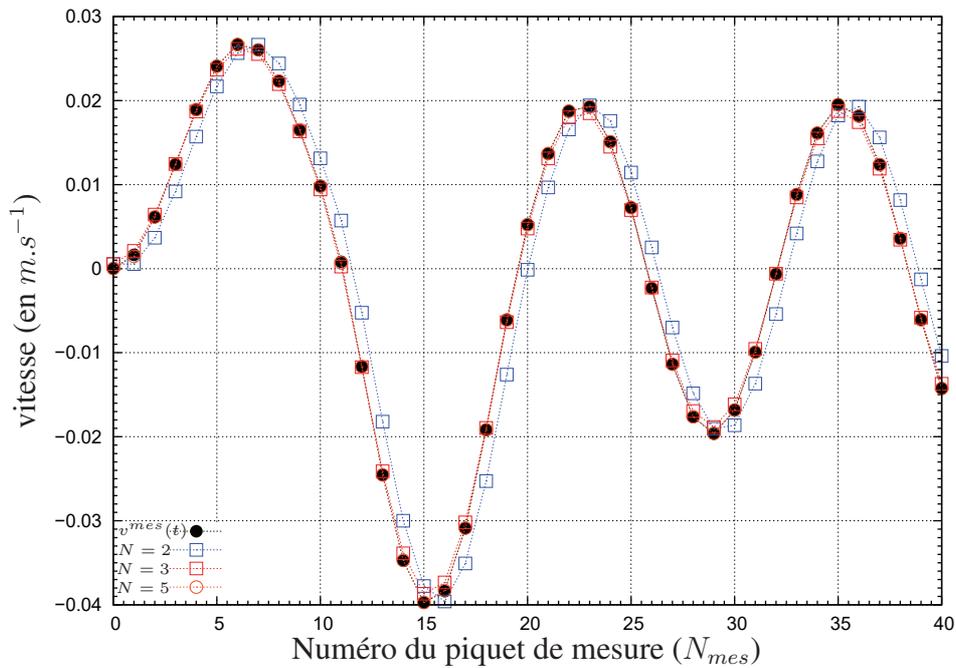


FIGURE 2.6 – Comparaison analytique-numérique pour le calcul de la vitesse – cas d’étude C2.1.

À partir de ces vitesses, nous pouvons définir une erreur relative présentée dans la Table 2.2.

Schéma	Erreur relative moyenne
2 points	67.70 %
3 points	5.72 %
5 points	0.82 %

TABLE 2.2 – Résultats obtenus à l’issu de la comparaison des schémas de dérivation numérique.

Il ressort de la Table 2.2 que les résultats obtenus par le schéma 5 points et ceux obtenus analytiquement sont confondus en moyenne à 0.82% près. Nous utilisons cette technique de dérivation dans la suite à la fois pour la vitesse et pour l’accélération.

### 2.2.4.3 Technique de lissage temporel

La technique de lissage temporel est utilisée dans le choix CV.1’ défini dans 2.2.3. L’idée du lissage est de réduire l’impact du bruit de mesure. Les valeurs discrètes lissées sont définies

nies de la manière suivante :

$$\tilde{x}^{mes}(t_i; \omega) = \frac{x^{mes}(t_{i-2}; \omega) + 2x^{mes}(t_{i-1}; \omega) + 4x^{mes}(t_i; \omega) + 2x^{mes}(t_{i+1}; \omega) + x^{mes}(t_{i+2}; \omega)}{10} \quad (2.27)$$

La Figure 2.5, montre la distribution (10 000 réalisations) de  $x^{mes}(t_i; \omega)$  pour  $\alpha = 8\%$  et pour un instant donné. Pour ce même instant, la Figure 2.7 montre la distribution de  $\tilde{x}^{mes}(t_i; \omega)$ .

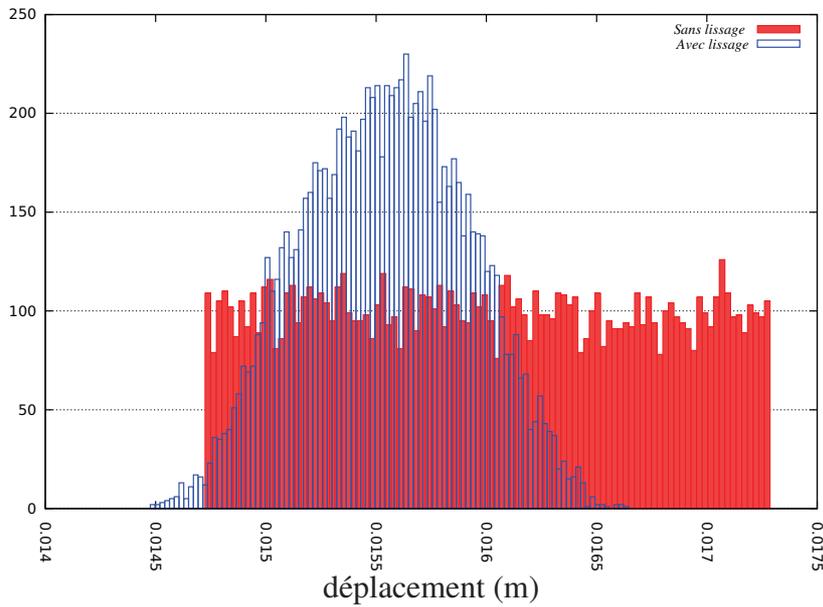


FIGURE 2.7 – PDF de  $\tilde{x}^{mes}(t_i; \omega)$  et de  $x^{mes}(t_i; \omega)$  pour  $\alpha = 8\%$  – cas d'étude **C2.1**.

Il ressort de la Figure 2.7 que la distribution de  $\tilde{x}^{mes}(t_i; \omega)$  ressemble à une gaussienne et est non centrée sur la valeur exacte  $x^{ex}(t_i)$ . Cela traduit bien l'appauvrissement en information mécanique. La même comparaison est faite pour la vitesse (Figure 2.8) et pour l'accélération (Figure 2.9).

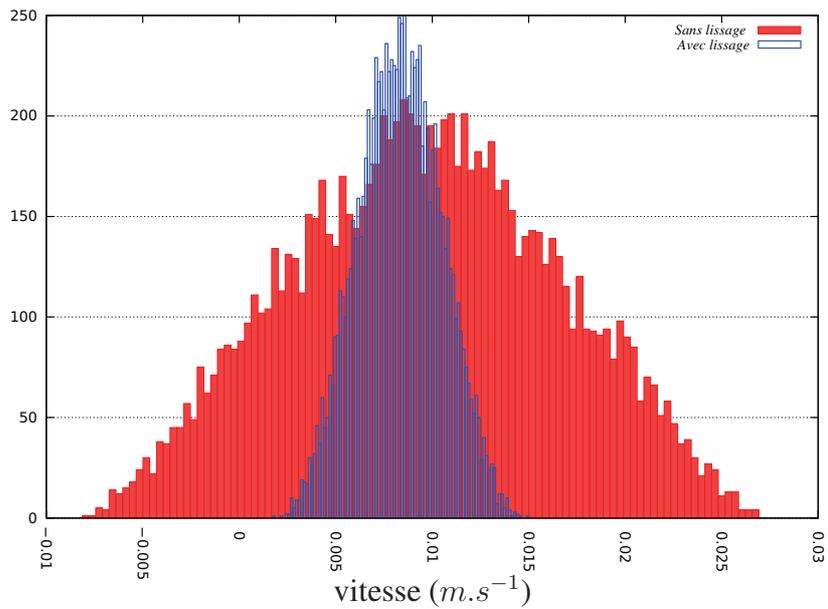


FIGURE 2.8 – PDF de  $\dot{\tilde{x}}^{mes}(t_i; \omega)$  et de  $\dot{x}^{mes}(t_i; \omega)$  pour  $\alpha = 8\%$  – cas d'étude **C2.1**.

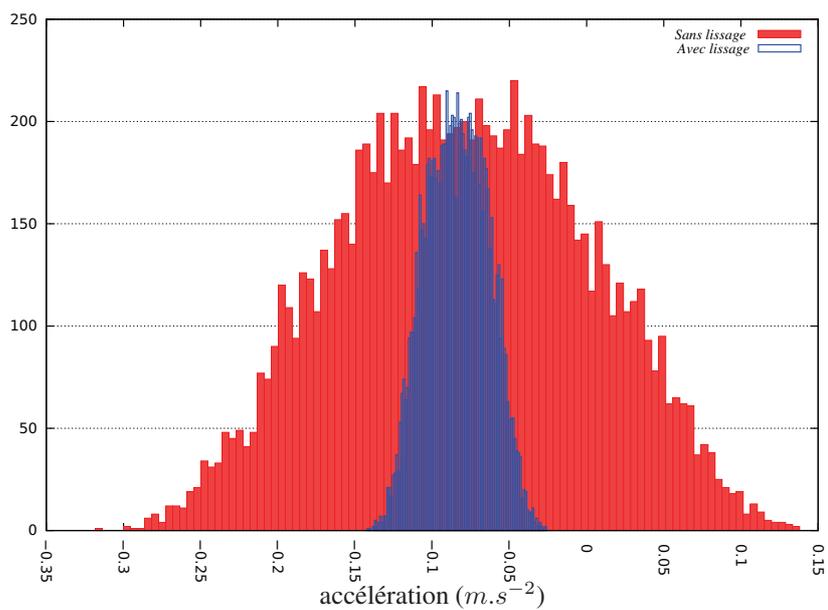


FIGURE 2.9 – PDF de  $\ddot{\tilde{x}}^{mes}(t_i; \omega)$  et de  $\ddot{x}^{mes}(t_i; \omega)$  pour  $\alpha = 8\%$  – cas d'étude **C2.1**.

La technique de lissage temporel permet de diminuer la dispersion des distributions de la vitesse et de l'accélération. De plus, nous observons que la moyenne de la distribution de l'accélération mesurée (non lissée) est proche de celle de l'accélération lissée.

## 2.2.5 Évaluation de la qualité de l'identification

Pour évaluer la qualité de l'identification, nous comparons la valeur du paramètre identifié à celle du paramètre exact, notée  $k_{ex}$ . Nous définissons ainsi l'erreur relative (variable aléatoire) suivante :

$$e_k(\omega) = \frac{k_{id}(\omega) - k_{ex}}{k_{ex}} \quad (2.28)$$

À partir des  $N_{MC}$  tirages de Monte-Carlo nous pouvons approcher les statistiques de l'erreur relative et ainsi, calculer la valeur moyenne de l'erreur relative, notée  $\bar{e}_k$  :

$$\bar{e}_k \approx \frac{1}{N_{MC}} \sum_{k=1}^{N_{MC}} e_k(\omega_k) \quad (2.29)$$

puis l'écart-type de l'erreur relative, notée  $\hat{e}_k$  :

$$\hat{e}_k \approx \sqrt{\frac{1}{N_{MC}} \sum_{k=1}^{N_{MC}} (e_k(\omega_k) - \bar{e}_k)^2} \quad (2.30)$$

Les équations (2.28), (2.29) et (2.30) définissent respectivement les critères d'évaluation suivants :

- la précision intrinsèque ( $\bar{e}_k$  pour  $\alpha = 0\%$ ) : elle caractérise l'erreur introduite dans le cas déterministe,
- la précision perturbée ( $\bar{e}_k$  pour  $\alpha > 0\%$ ) : elle caractérise l'erreur introduite en présence du bruit,
- la robustesse ( $\hat{e}_k$  pour  $\alpha > 0\%$ ) : elle caractérise la dispersion de l'erreur en présence du bruit.

Pour juger du comportement global de la méthodologie, nous définissons une valeur englobant ces trois critères. Nous introduisons une valeur seuil de l'erreur, notée  $e_k^{90\%}$ , telle que 90% des tirages conduisent à une erreur inférieure à  $e_k^{90\%}$ . En introduisant la fonction de répartition de l'erreur, notée  $CDF(e_k)$  (cumulative density function), qui correspond à l'intégrale de la fonction densité de probabilité de l'erreur, ce seuil est défini par :

$$CDF(e_k^{90\%}) = 90\% \quad (2.31)$$

Le comportement global est représenté par l'erreur seuil à 90% :  $e_k^{90\%}$ .

## 2.2.6 Validation numérique de la méthodologie

La méthodologie développée est validée numériquement en étudiant ses performances et sa sensibilité au bruit de mesure. Une analyse des différents critères définis dans 2.2.5 est menée. Les résultats sont comparés à la méthode de référence (méthode du recalage).

Les calculs sont effectués avec les paramètres suivants :

- $T = 4 \text{ s}$ ,
- $N_{mes} = 41$ ,
- $t_1 = 1 \text{ s}$  et  $P_{max} = 10 \text{ N}$ ,
- $m = 30 \text{ kg}$ ,
- $k_{ex} = 745 \text{ N.m}^{-1}$ .

Nous étudions l'influence du lissage temporel sur **CV.1** dans 2.2.6.1, l'influence du paramètre  $p$  de la famille **CV.2** dans 2.2.6.2 et l'influence du degré de la fonction polynomiale de la famille **CV.3** dans 2.2.6.3. Une comparaison de ces champs avec la méthode du recalage est donnée dans 2.2.6.4. Finalement, un bilan qualitatif est donné dans 2.2.7.

### 2.2.6.1 Influence du lissage temporel sur CV.1

Nous étudions la qualité de l'identification du champ **CV.1** et de sa variante **CV.1'**. La Figure 2.10 illustre le comportement global, nous traçons la valeur seuil  $e_k^{90\%}$  en fonction de  $\alpha$ .

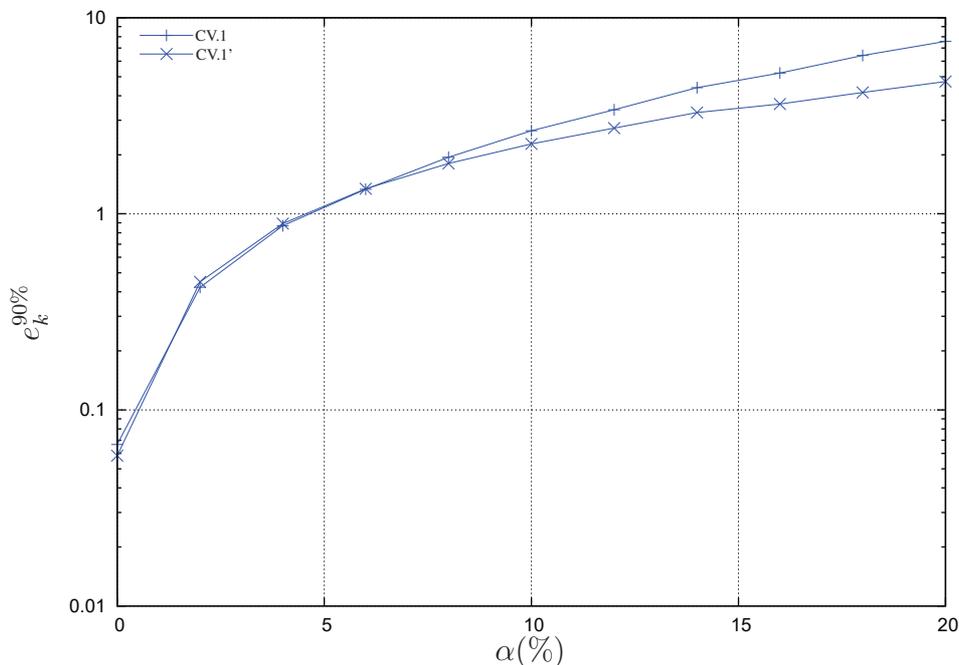


FIGURE 2.10 – Erreur seuil  $e_k^{90\%}$  en fonction de  $\alpha$  – cas d'étude **C2.1**.

Nous constatons sur la Figure 2.10 que le champ **CV.1** et le champ **CV.1'** ont un comportement similaire jusqu'à 8% de bruit. En effet, l'erreur seuil  $e_k^{90\%}$  est inférieure à 2% pour les deux cas. Pour un bruit supérieur à 8%, le champ **CV.1'** est plus intéressant car de meilleure qualité. Dans la suite, nous fixons à 8% la valeur maximale prise par  $\alpha$ .

### 2.2.6.2 Influence de $p$ sur CV.2

À présent, nous étudions l'influence du paramètre  $p$  du champ **CV.2** sur la qualité de l'identification. La Figure 2.11 illustre le comportement global, nous traçons la valeur seuil  $e_k^{90\%}$  en fonction de  $\alpha$ .

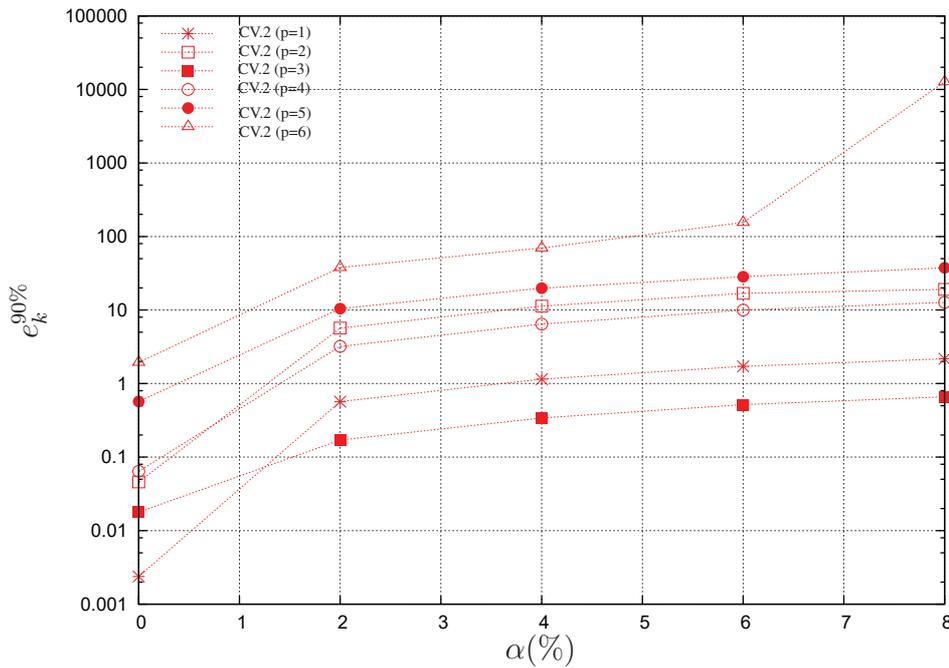


FIGURE 2.11 – Erreur seuil  $e_k^{90\%}$  en fonction de  $\alpha$  – cas d'étude **C2.1**.

Nous constatons que les meilleurs résultats ( $e_k^{90\%}$  les plus faibles) sont obtenus pour  $p = 1$  et  $p = 3$  et que les moins bons sont obtenus pour  $p \geq 5$ . Les valeurs impaires de  $p$  ne sont pas systématiquement les meilleures. Il paraît difficile de définir une règle systématique d'un bon choix de paramètre  $p$ .

### 2.2.6.3 Influence de $i$ sur CV.3

Nous étudions l'influence du degré  $i$  de la fonction polynomiale de la famille **CV.3** sur la qualité de l'identification. La Figure 2.12 illustre le comportement global, nous traçons la valeur seuil  $e_k^{90\%}$  en fonction de  $\alpha$ .

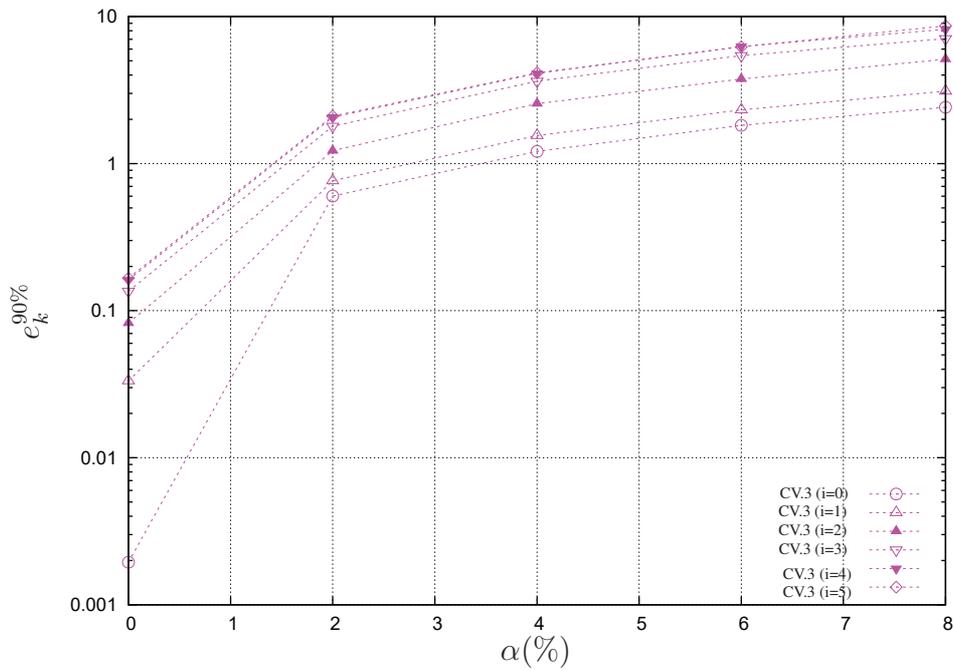


FIGURE 2.12 – Erreur seuil  $e_k^{90\%}$  en fonction de  $\alpha$  – cas d'étude **C2.1**.

Nous remarquons que les meilleurs résultats ( $e_k^{90\%}$  les plus faibles) sont obtenus pour les degrés  $i$  les plus faibles. La valeur de  $e_k^{90\%}$  croit avec  $i$ . Il est donc facile de choisir le meilleur degré  $i$ . Ceci rend cette famille facile à utiliser contrairement à la précédente.

#### 2.2.6.4 Comparaison des différentes stratégies d'identification

Finalement, nous comparons la méthode VFM en utilisant les choix **CV.1**, **CV.2** et **CV.3** à la méthode de recalage (référence). Les Figures 2.13, 2.14 et 2.15 illustrent respectivement la moyenne de l'erreur,  $\bar{e}_k$ , l'écart-type de l'erreur,  $\hat{e}_k$ , et l'erreur seuil,  $e_k^{90\%}$  en fonction de  $\alpha$ .

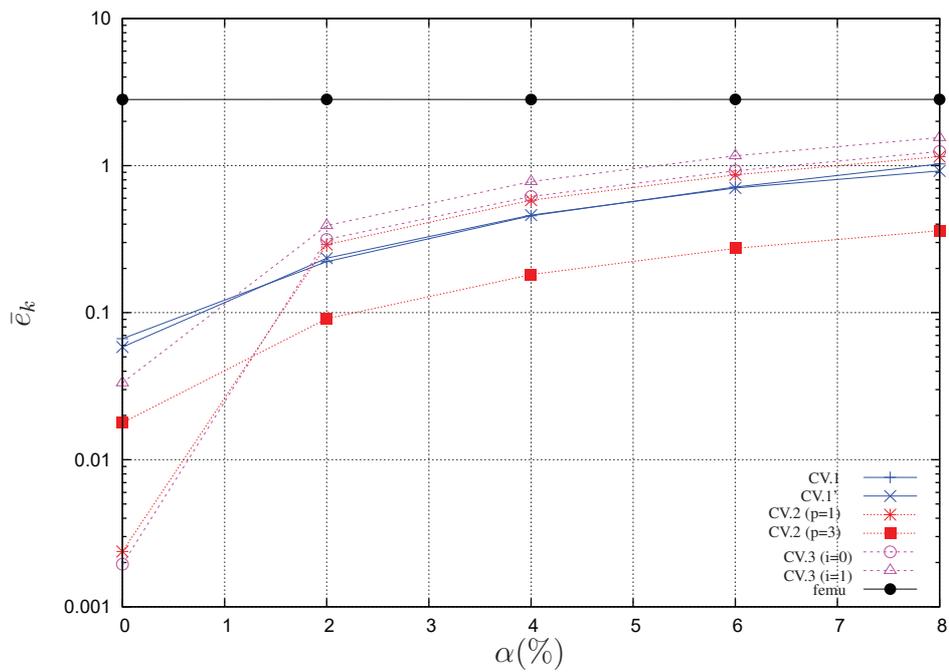


FIGURE 2.13 – Erreur moyenne  $\bar{e}_k$  en fonction de  $\alpha$  – cas d'étude **C2.1**.

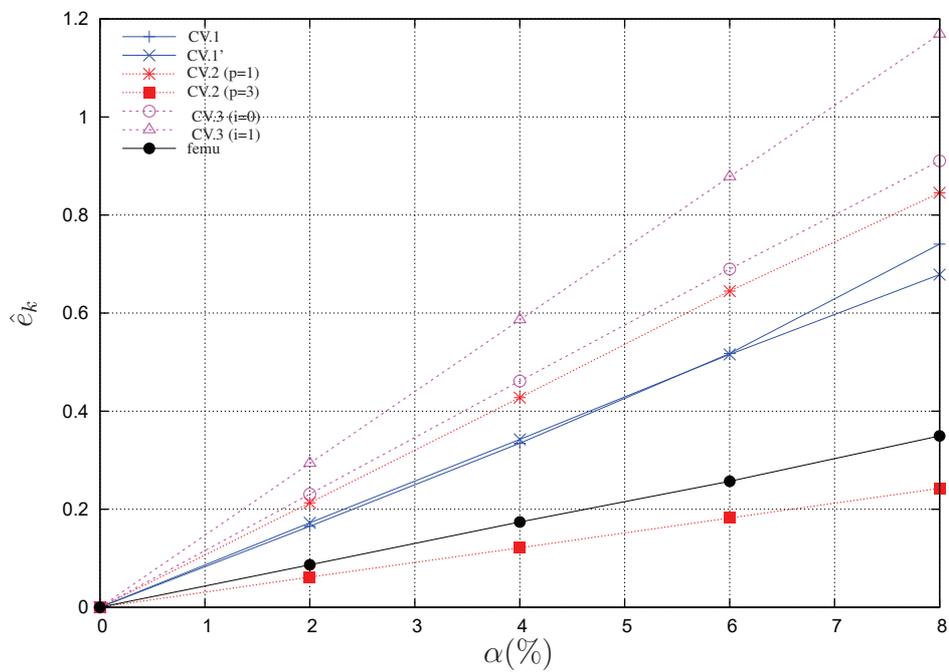


FIGURE 2.14 – Écart-type de l'erreur  $\hat{e}_k$  en fonction de  $\alpha$  – cas d'étude **C2.1**.

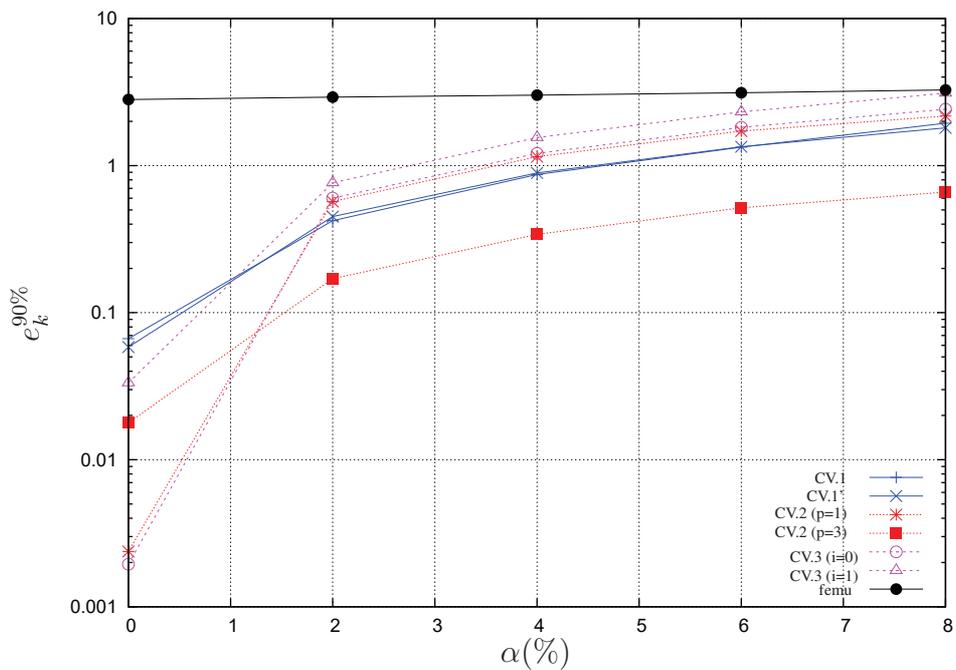


FIGURE 2.15 – Erreur seuil  $e_k^{90\%}$  en fonction de  $\alpha$  – cas d'étude **C2.1**.

Il ressort de ces Figures que la méthode de recalage est la plus robuste en général. En revanche, les stratégies basées sur l'utilisation de champs virtuels sont plus précises. Des bons résultats sont obtenus avec le choix **CV.1** et sa variante.

À titre illustratif, nous traçons la fonction densité de probabilité de  $e_k(\omega)$  sur la Figure 2.16 pour le champ **CV.1'** et pour la méthode de référence.

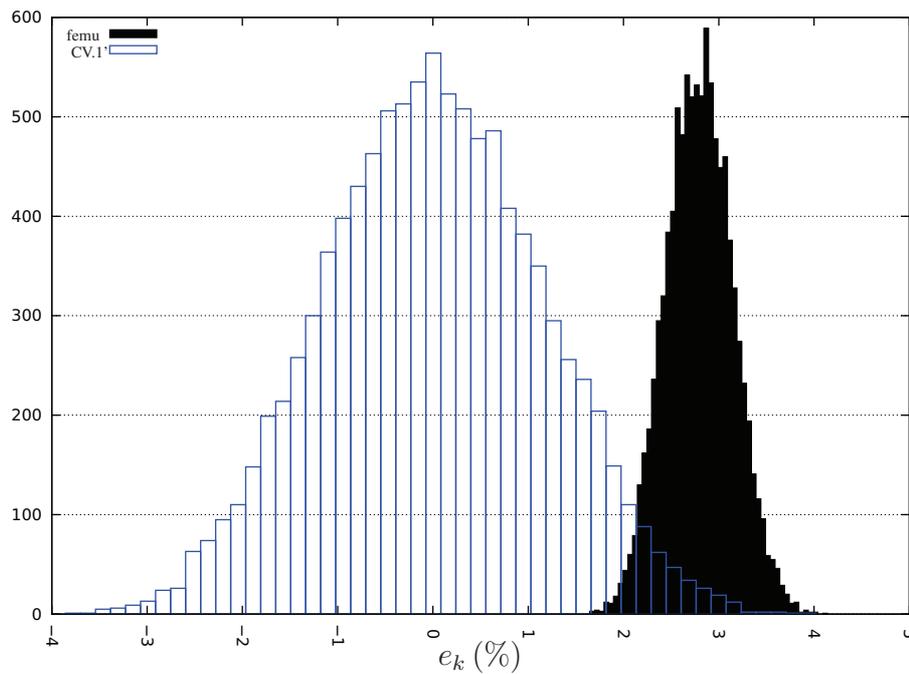


FIGURE 2.16 – PDF de  $e_k(\omega)$  pour **CV.1'** (bleu) et pour la méthode de référence (noir) – cas d'étude **C2.1**.

Nous traçons la fonction de distribution cumulée de  $e_k(\omega)$  sur la Figure 2.17 pour le champ **CV.1'** et pour la méthode de référence. Pour l'erreur seuil à 90% mais aussi pour l'ensemble des valeurs seuils, le comportement global est systématiquement meilleur.

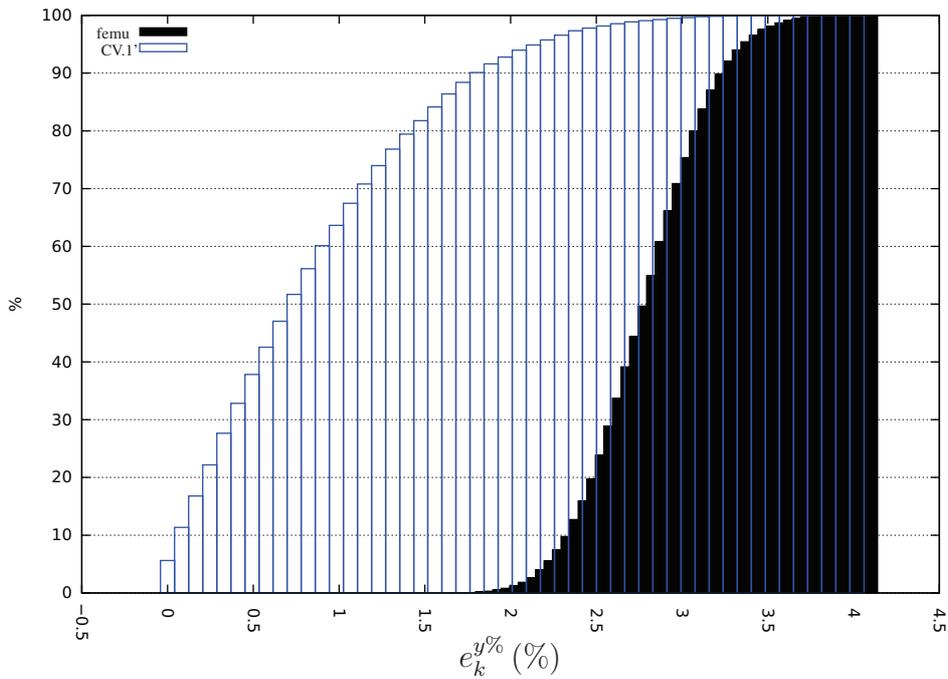


FIGURE 2.17 – CDF de  $e_k(\omega)$  pour **CV.1'** (bleu) et pour la méthode de référence (noir) – cas d'étude **C2.1**.

### 2.2.7 Bilan intermédiaire

Après la comparaison de plusieurs champs virtuels, nous cherchons à construire une famille peu onéreuse, de qualité et facilement généralisable pour le cas 2D.

Nous choisissons de comparer les champs virtuels suivant les trois critères suivants :

- le comportement global de la méthode ( $e_k^{90\%}$ ),
- la généricité du champ virtuel qui caractérise la facilité d'extension au 2D,
- le coût numérique.

La Table 2.3 dresse un bilan qualitatif basé sur ces critères :

Choix CV	Comportement	Généricité	Coût numériques
<b>CV.1</b> (et <b>CV.1'</b> )	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<b>CV.2</b>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
<b>CV.3</b>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>A</i>

*A* : très bon, *B* : bon, *C* : moyen, *D* : mauvais.

TABLE 2.3 – Évaluation finale des champs virtuels – cas d'étude **C2.1**.

Le choix **CV.1** a un bon comportement, est facilement généralisable mais ne permet d'identifier qu'un seul paramètre. Les choix **CV.2** et **CV.3** permettent d'identifier plusieurs

paramètres. Il est néanmoins plus facile de choisir le paramètre  $i$  de la famille **CV.3**. Nous choisissons donc dans la suite une famille constituée du champ **CV.1** et complétée par la famille de champs **CV.3** pour obtenir un bon compromis :

$$(x^{mes}(t; \omega), t^0, t^1, \dots, t^i, \dots, t^n) \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.32)$$

Dans 2.3, nous généralisons la méthodologie à l'élasticité linéaire (2D) où nous cherchons à identifier les coefficients de Lamé. La famille de champs virtuels (équation (2.32)) est généralisée au 2D. Le comportement de cette famille est ensuite validé numériquement et comparé à celui de FEMU-U.

## 2.3 Généralisation de la méthodologie développée (2D)

La méthodologie présentée précédemment est maintenant étendue au cas de l'élasticité linéaire. Ce cas particulier est une simplification du cas général présenté au chapitre 1. Nous présentons d'abord, dans ce contexte simplifié, les équations du problème (dans 2.3.1.1), la manière de générer les quantités d'intérêts mesurées (dans 2.3.1.2) et la manière de générer les quantités d'intérêts calculées utiles pour FEMU-U (dans 2.3.1.3).

### 2.3.1 Cas particulier : élastique linéaire (2D)

#### 2.3.1.1 Équations du problème

Dans le contexte simplifié considéré, nous adoptons l'hypothèse des petites perturbations. Le tenseur de Green-Lagrange (équation (1.3)) est donc linéarisé :

$$\varepsilon(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \right) \quad \text{sur} \quad \Omega \times \tau \quad (2.33)$$

où  $\varepsilon(\mathbf{X}, t)$  est le tenseur des déformations linéarisées.

La relation de comportement (équation (1.7)) devient :

$$\sigma(\mathbf{X}, t) = 2\mu\varepsilon(\mathbf{X}, t) + \lambda Tr(\varepsilon(\mathbf{X}, t))\mathbb{I} \quad \text{sur} \quad \Omega \times \tau \quad (2.34)$$

où  $\sigma(\mathbf{X}, t)$  est le tenseur des contraintes de Cauchy,  $\boldsymbol{\theta} = (\lambda, \mu)^T$  sont les deux coefficients de Lamé que nous identifions par la suite et  $\mathbb{I}$  est la matrice identité.

L'équation du mouvement (équation (1.9)) devient :

$$\mathit{div} \sigma(\mathbf{X}, t) + \mathbf{f}(t) = \rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \quad \text{sur} \quad \Omega \times \tau \quad (2.35)$$

Dans ce cas particulier, nous ne tenons pas compte des non linéarités dues au contact. Ainsi, la frontière est partitionnée en deux :

$$\begin{aligned}\partial\Omega &= \Gamma_{\mathbf{u}} \cup \Gamma_{\sigma} \\ \emptyset &= \Gamma_{\mathbf{u}} \cap \Gamma_{\sigma}\end{aligned}\tag{2.36}$$

Sur cette partition, les conditions limites et initiales que nous renseignons sont les suivantes :

- *condition limite de type Dirichlet :*

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}_d(\mathbf{X}, t) \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\mathbf{u}} \times \tau,\tag{2.37}$$

- *condition limite de type Neumann :*

$$\sigma(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{T}_d(\mathbf{X}, t) \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\sigma} \times \tau,\tag{2.38}$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal extérieur à la frontière.

- *conditions initiales :*

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}) \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t)|_{t=0} = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}) \quad \text{sur} \quad \Omega\tag{2.39}$$

### 2.3.1.2 Génération de la quantité d'intérêt mesurée

La quantité d'intérêt mesurée, notée  $\mathbf{u}^{mes}(\mathbf{X}, t; \omega)$ , est générée de manière synthétique comme dans 2.2. Ce champ se décompose en deux parties :

$$\mathbf{u}^{mes}(\mathbf{X}, t; \omega) = \mathbf{u}^{ref}(\mathbf{X}, t) + \delta\mathbf{u}(\mathbf{X}, t; \omega)\tag{2.40}$$

où  $\mathbf{u}^{ref}(\mathbf{X}, t)$  est le champ de référence obtenu par la méthode des éléments finis, et  $\delta\mathbf{u}(\mathbf{X}, t; \omega)$  représente les perturbations aléatoires. Le champ  $\mathbf{u}^{ref}(\mathbf{X}, t)$  est obtenue en résolvant l'équation (1.21) qui se simplifie dans le contexte simplifié considéré en un ensemble de  $N_{eq}^{fin}$  équations qui peuvent être mise sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{U}}^{ref}(t) + \mathbb{K}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{U}^{ref}(t) = \mathbf{F}^{ext}(t)\tag{2.41}$$

avec la discrétisation spatiale suivante :

$$\mathbf{u}^{ref}(\mathbf{X}, t) = \mathbb{N}^T(\mathbf{X})\mathbf{U}^{ref}(t)\tag{2.42}$$

où  $\mathbb{K}(\boldsymbol{\theta})$  est la matrice de raideur globale du système de taille  $N_{eq}^{fin} \times N_{eq}^{fin}$ .

Le système (2.41) est résolu en utilisant un schéma implicite de Newmark en utilisant la discrétisation temporelle suivante :

$$t_i = i \times \Delta t \quad \text{et} \quad i \in [0, \frac{T}{\Delta t}] \quad (2.43)$$

Dans ce qui suit, nous notons que  $\mathbf{U}^{ref}(t_i) = \mathbf{U}_i^{ref}$ . Les équations utilisées sont :

$$\dot{\mathbf{U}}_{i+1}^{ref} = \dot{\mathbf{U}}_i^{ref} + \Delta t \left( (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{U}}_i^{ref} + \gamma \ddot{\mathbf{U}}_{i+1}^{ref} \right) \quad (2.44)$$

$$\mathbf{U}_{i+1}^{ref} = \mathbf{U}_i^{ref} + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_i^{ref} + (\Delta t)^2 \left( \left( \frac{1}{2} - \zeta \right) \ddot{\mathbf{U}}_i^{ref} + \zeta \ddot{\mathbf{U}}_{i+1}^{ref} \right) \quad (2.45)$$

Nous fixons dans la suite les paramètres du schéma aux valeurs classiques  $\zeta = 0.25$  et  $\gamma = 0.5$ . Avec ce choix, ce schéma est stable sans conditions en élasticité linéaire. En utilisant l'équation (2.41) à l'instant  $i + 1$  avec les équations (2.44) et (2.45), nous pouvons écrire :

$$\left( \mathbb{K}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{\zeta \Delta t^2} \mathbb{M} \right) \mathbf{U}_{i+1}^{ref} = \left( \mathbf{F}_{i+1} + \mathbb{M} \left( \frac{1}{\zeta \Delta t^2} \mathbf{U}_i^{ref} + \frac{1}{\zeta \Delta t} \dot{\mathbf{U}}_i^{ref} + \left( \frac{1}{2\zeta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{U}}_i^{ref} \right) \right) \quad (2.46)$$

À partir de ce calcul fin, nous obtenons un ensemble de mesures régulièrement réparties en temps et en espace. Pour l'aspect temporel, nous retenons les valeurs tout les  $f$  piquets de temps :

$$t_n = n \times (f \Delta t) \quad \text{avec} \quad n \in [0, N_{mes}] \quad \text{et} \quad N_{mes} = \frac{T}{f \Delta t} \quad (2.47)$$

Pour l'aspect spatial, les  $N_{eq}^{fin}$  composantes du vecteur  $\mathbf{U}^{ref}$  sont projetées sur un maillage (grille spatiale de mesure) plus grossier pour définir le vecteur  $\mathbf{U}^{(ref,p)}$ . Ce vecteur contient  $N_{eq}$  composantes. L'ensemble des  $N_{mes} + 1$  déplacements  $\mathbf{U}_n^{(ref,p)}$  est stocké dans la matrice  $\mathbb{U}^{(ref,p)}$  :

$$\mathbb{U}^{(ref,p)} = \left[ \mathbf{U}_0^{(ref,p)}, \mathbf{U}_1^{(ref,p)}, \dots, \mathbf{U}_n^{(ref,p)}, \dots, \mathbf{U}_{N_{mes}}^{(ref,p)} \right] \quad (2.48)$$

Chaque composante,  $U_{m \ n}^{(ref,p)}$ , de cette matrice permet de définir les composantes  $U_{m \ n}^{mes}$  de la matrice des mesures bruitées :

$$U_{m \ n}^{mes} = (1 + \alpha \xi_{m \ n}(\omega)) U_{m \ n}^{(ref,p)} \quad \forall m \times n \in [0, N_{eq}] \times [0, N_{mes}] \quad (2.49)$$

où  $\alpha$  est un paramètre pouvant prendre les valeurs suivantes [0%; 2%; 4%; 6%; 8%]. L'ensemble des variables aléatoires, notées  $\xi_{m \ n}(\omega)$ , sont indépendantes et uniformes entre  $[-1, 1]$ .

### 2.3.1.3 Génération des quantités d'intérêts calculées (FEMU-U)

La quantité d'intérêt calculée, notée  $\mathbb{U}^{cal}$ , est aussi obtenue par la méthode des éléments finis. Cependant, la discrétisation spatio-temporelle retenue pour générer  $\mathbb{U}^{cal}$  n'est pas la même que celle pour générer  $\mathbb{U}^{mes}$ . Le maillage utilisé pour la discrétisation spatiale correspond à la grille spatiale de mesure retenue pour le cas précédent (maillage grossier).

La discrétisation temporelle est identique et nous retenons, de la même manière que précédemment,  $N_{mes} + 1$  mesures en ne retenant que les valeurs aux  $f$  piquets de temps. La différence porte sur le schéma d'intégration utilisé. Nous utilisons un schéma explicite aux différences centrées dont les hypothèses sont :

$$\dot{U}_i^{cal} = \frac{U_{i+1}^{cal} - U_{i-1}^{cal}}{2\Delta t} \quad \text{et} \quad \ddot{U}_i^{cal} = \frac{U_{i+1}^{cal} - 2U_i^{cal} + U_{i-1}^{cal}}{\Delta t^2} \quad (2.50)$$

Ceci nous permet d'écrire que :

$$U_{i+1}^{cal} = \mathbb{M}^{-1} \times \left( \Delta t^2 (\mathbf{F}_i - \mathbb{K}(\boldsymbol{\theta})U_i^{cal}) + \mathbb{M}(2U_i^{cal} - U_{i-1}^{cal}) \right) \quad (2.51)$$

où le terme  $U_{-1}^{cal}$  est donné par le développement suivant :

$$U_{-1}^{cal} = U_0^{cal} - \Delta t \dot{U}_0^{cal} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{U}_0^{cal} \quad \text{avec} \quad \ddot{U}_0^{cal} = \mathbb{M}^{-1} \times (\mathbf{F}_0 - \mathbb{K}(\boldsymbol{\theta})U_0^{cal}) \quad (2.52)$$

Ce schéma est conditionnellement stable. En élasticité linéaire, on utilise la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) qui donne la relation suivante :

$$\Delta t \leq \Delta t_c = \frac{l}{c} \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.53)$$

où  $c$  est la vitesse de propagation de l'onde de compression et  $l$  est la plus petite taille caractéristique d'un élément du maillage éléments finis.

L'ensemble des  $N_{mes} + 1$  déplacements  $U_n^{cal}$  est stocké dans la matrice  $\mathbb{U}^{cal}$  :

$$\mathbb{U}^{cal} = [U_0^{cal}, U_1^{cal}, \dots, U_n^{cal}, \dots, U_{N_{mes}}^{cal}] \quad (2.54)$$

de taille  $N_{eq} \times N_{mes} + 1$ .

Finalement, les matrices  $\mathbb{U}^{mes}$  et  $\mathbb{U}^{cal}$  permettent de construire la fonction coût de l'approche cinématique du recalage de modèles éléments finis. Notre problème d'optimisation

est ici défini par :

$$\boldsymbol{\theta}_{id}(\omega) = \min_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{m=0}^{N_{eq}} \sum_{n=0}^{N_{mes}} \left( U_{m\ n}^{mes}(\omega) - U_{m\ n}^{cal}(\boldsymbol{\theta}) \right)^2 \quad (2.55)$$

### 2.3.2 Généralisation de la méthodologie

Nous présentons une extension de la méthodologie développée dans 2.2. La formulation variationnelle s'écrit :

$$\int_0^T \left( \mathbb{M}\dot{\mathbf{U}}^{mes} + \mathbb{K}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{U}^{mes} - \mathbf{F} \right)^T \mathbf{U}_{CA}^* dt = 0 \quad \forall \mathbf{U}_{CA}^* \quad (2.56)$$

Comme vu dans le bilan de la section 2.2, nous utilisons la famille de  $n + 2$  champs virtuels suivante :

$$\left( \mathbf{U}^{mes}(t; \omega), t^0 \mathbf{1}, t^1 \mathbf{1}, \dots, t^i \mathbf{1}, \dots, t^n \mathbf{1} \right) \quad (2.57)$$

Identifier à l'aide de cette famille de champs virtuels constitue une première méthode notée **M1**. Une variante consiste à utiliser un champ lissé  $\tilde{\mathbf{U}}^{mes}(t; \omega)$  à la place du premier élément  $\mathbf{U}^{mes}(t; \omega)$  de cette famille. Identifier à partir de cette variante constitue une deuxième méthode notée **M2**. Ces  $n + 2$  champs virtuels permettent d'identifier en principe  $n + 2$  paramètres matériau :  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_{n+2})^T$ . En effet, en supposant que la matrice de raideur,  $\mathbb{K}(\boldsymbol{\theta})$ , se décompose linéairement de la façon suivante :

$$\mathbb{K}(\boldsymbol{\theta}) = \theta_1 \mathbb{K}_{\theta_1} + \dots + \theta_{n+2} \mathbb{K}_{\theta_{n+2}}, \quad (2.58)$$

il est possible, en intégrant le premier terme de l'équation (2.56) par partie (deux fois), d'obtenir la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \mathbf{U}^{mesT} \mathbb{M} \dot{\mathbf{U}}_{CA}^* dt + \int_0^T \mathbf{U}^{mesT} (\theta_1 \mathbb{K}_{\theta_1} + \dots + \theta_{n+2} \mathbb{K}_{\theta_{n+2}}) \mathbf{U}_{CA}^* dt - \int_0^T \mathbf{F}^T \mathbf{U}_{CA}^* dt \\ & + [\dot{\mathbf{U}}^{mesT} \mathbb{M} \mathbf{U}_{CA}^*]_0^T - [\mathbf{U}^{mesT} \mathbb{M} \dot{\mathbf{U}}_{CA}^*]_0^T = 0 \quad \forall \mathbf{U}_{CA}^* \end{aligned} \quad (2.59)$$

En écrivant l'équation (2.59) avec les  $n + 2$  champs virtuels retenus, nous aboutissons au système linéaire suivant :

$$\mathbb{A} \cdot \boldsymbol{\theta} = \mathbf{b} \quad (2.60)$$

L'inversion de la matrice  $\mathbb{A}$  conduit, tant que son déterminant est non nul, à l'identification des  $n + 2$  paramètres contenus dans  $\boldsymbol{\theta}$ . Dans le cadre de l'élasticité linéaire homogène et isotrope, nous avons :  $\boldsymbol{\theta} = (\lambda, \mu)^T$ . Dans ce cas, seuls les deux premiers champs virtuels de la famille sont utilisés. La résolution analytique du système (2.60) conduit aux deux paramètres recherchés :

$$\lambda_{id} = \frac{b_1 A_{22} - b_2 A_{12}}{\det \mathbb{A}} \quad \text{et} \quad \mu_{id} = \frac{A_{11} b_2 - A_{21} b_1}{\det \mathbb{A}} \quad (2.61)$$

où :

$$A_{11} = \int_0^T \mathbf{U}^{mesT} \mathbb{K}_\lambda \mathbf{U}^{mes} dt \quad (2.62)$$

$$A_{12} = \int_0^T \mathbf{U}^{mesT} \mathbb{K}_\mu \mathbf{U}^{mes} dt \quad (2.63)$$

$$A_{21} = \int_0^T \mathbf{U}^{mesT} \mathbb{K}_\lambda \mathbf{1} dt \quad (2.64)$$

$$A_{22} = \int_0^T \mathbf{U}^{mesT} \mathbb{K}_\mu \mathbf{1} dt \quad (2.65)$$

$$b_1 = \int_0^T \mathbf{F}^T \mathbf{U}^{mes} dt + \left[ \mathbf{U}^{mesT} \mathbb{M} \dot{\mathbf{U}}^{mes} \right]_0^T - \left[ \dot{\mathbf{U}}^{mesT} \mathbb{M} \mathbf{U}^{mes} \right]_0^T - \int_0^T \mathbf{U}^{mesT} \mathbb{M} \ddot{\mathbf{U}}^{mes} dt \quad (2.66)$$

$$b_2 = \int_0^T \mathbf{F}^T \mathbf{1} dt - \left[ \dot{\mathbf{U}}^{mesT} \mathbb{M} \mathbf{1} \right]_0^T \quad (2.67)$$

Chacun des termes (2.62) à (2.67) est approché numériquement en utilisant les techniques numériques (dérivation, intégration) retenues en 2.2.4.

La suite du chapitre est consacrée à la validation numérique de la méthode **M1** et de sa variante **M2**. Nous comparons la méthodologie développée avec FEMU-U au cours d'études de robustesse proposées dans 2.4 et dans 2.5.

## 2.4 Étude en robustesse lorsque la mesure est bruitée

Deux cas d'études numériques sont définis afin d'évaluer le comportement de la méthodologie développée lorsque la mesure est bruitée. On cherche à identifier les deux coefficients de Lamé auxquels on associe les erreurs relatives suivantes :

$$e_\lambda(\omega) = \frac{\lambda_{id}(\omega) - \lambda_{ex}}{\lambda_{ex}} \quad \text{et} \quad e_\mu(\omega) = \frac{\mu_{id}(\omega) - \mu_{ex}}{\mu_{ex}} \quad (2.68)$$

où  $\lambda_{ex}$  et  $\mu_{ex}$  sont les valeurs exactes utilisées pour générer les données synthétiques. Les données caractéristiques (géométrie, chargement, ...) des différents cas d'études sont présentées dans 2.4.1 et les résultats de l'étude de robustesse sont donnés dans 2.4.2 et 2.4.3.

## 2.4.1 Présentation des cas d'études

La géométrie, les conditions limites et le chargement agissant sur les deux cas d'études, nommés **C2.2** et **C2.3**, sont respectivement présentés sur la Figure 2.18 et sur la Figure 2.19.

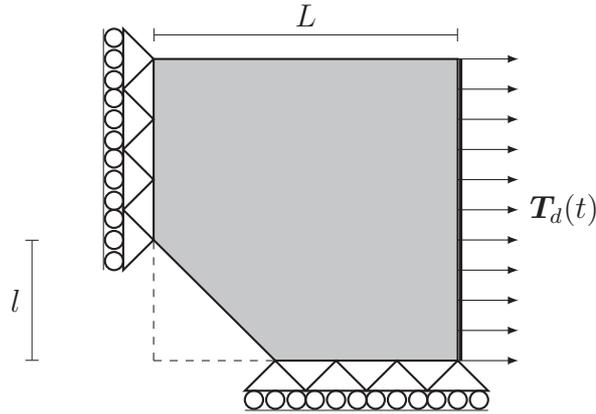


FIGURE 2.18 – Cas d'étude **C2.2**.

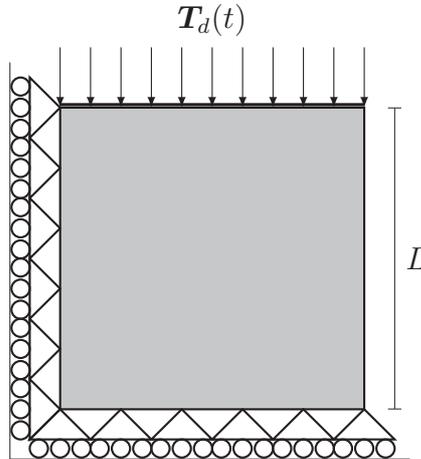


FIGURE 2.19 – Cas d'étude **C2.3**.

L'évolution temporelle du chargement  $T_d(t)$  est identique à celle présentée sur la Figure 2.3. Les principaux paramètres associés aux deux cas d'études sont :

- **C2.2** :  $L = 0.1 \text{ m}$ ,  $l = 0.04 \text{ m}$ ,  $P_{max} = 4 \cdot 10^4 \text{ N}$ ,  $t_1 = 1 \text{ ms}$ ,  $T = 2 \text{ ms}$ ,  $\lambda_{ex} = 40.4 \text{ GPa}$ ,  $\mu_{ex} = 26.9 \text{ GPa}$  et  $N_{mes} = 200$ .

- **C2.3** :  $L = 0.01 \text{ m}$ ,  $P_{max} = 1.6 \cdot 10^5 \text{ N}$ ,  $t_1 = 0.1 \text{ ms}$ ,  $T = 0.25 \text{ ms}$ ,  $\lambda_{ex} = 40.4 \text{ GPa}$ ,  $\mu_{ex} = 26.9 \text{ GPa}$  et  $N_{mes} = 250$ .

Les quantités d'intérêts mesurées  $\mathbb{U}^{mes}(\omega)$  sont générées en utilisant les paramètres suivants :

- **C2.2** : maillage de 1856 éléments TRI3 et un schéma implicite avec  $\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$ .
- **C2.3** : maillage de 1024 éléments TRI3 et un schéma implicite avec  $\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$ .

Les quantités d'intérêts calculées  $\mathbb{U}^{cal}(\theta)$  sont générées en utilisant les paramètres suivants :

- **C2.2** : maillage de 29 éléments TRI3 et un schéma explicite avec  $\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$ .
- **C2.3** : maillage de 16 éléments TRI3 et un schéma explicite avec  $\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$ .

## 2.4.2 Validation numérique pour le cas C2.2

La méthodologie est validée numériquement en étudiant ses performances et sa sensibilité au bruit de mesure. Les critères de l'évaluation (précision intrinsèque et perturbée, robustesse) sont identiques à ceux définis dans 2.2.5.

Le comportement des différentes stratégies d'identification est discuté dans 2.4.2.1. Enfin nous étudions l'influence du choix de matériau constitutif dans 2.4.2.2.

### 2.4.2.1 Étude du comportement global

Nous comparons le comportement de la méthode **M1**, de sa variante **M2** et de la méthode FEMU-U pour plusieurs niveaux de bruit. Les Figures 2.20 et 2.21 présentent les erreurs seuils,  $e_{\lambda}^{90\%}$  et  $e_{\mu}^{90\%}$ , pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

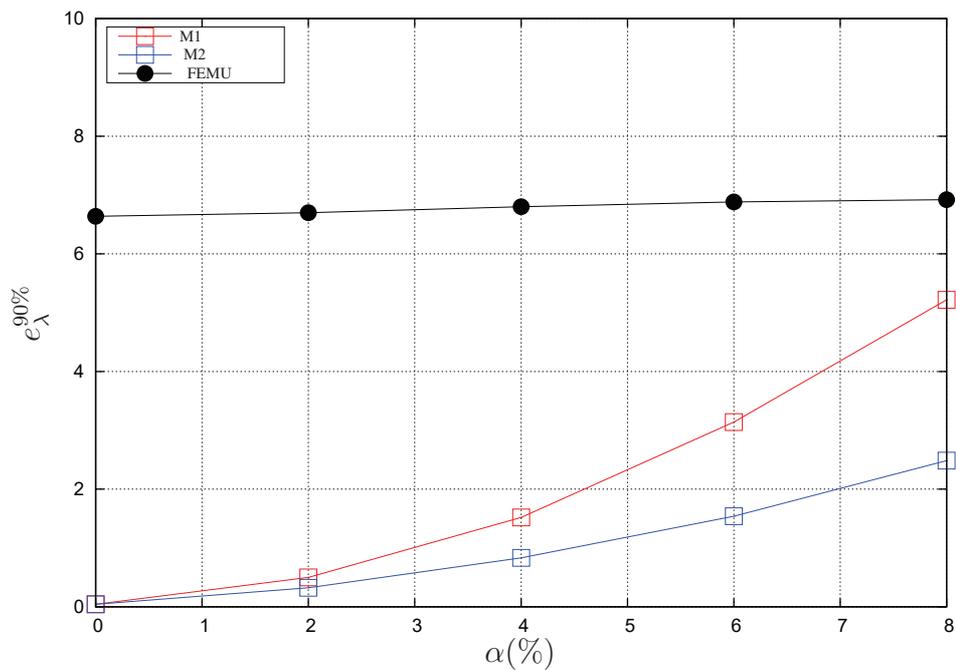


FIGURE 2.20 – Erreur seuil  $e_{\lambda}^{90\%}$  en fonction de  $\alpha$  – cas d'étude **C2.2**.

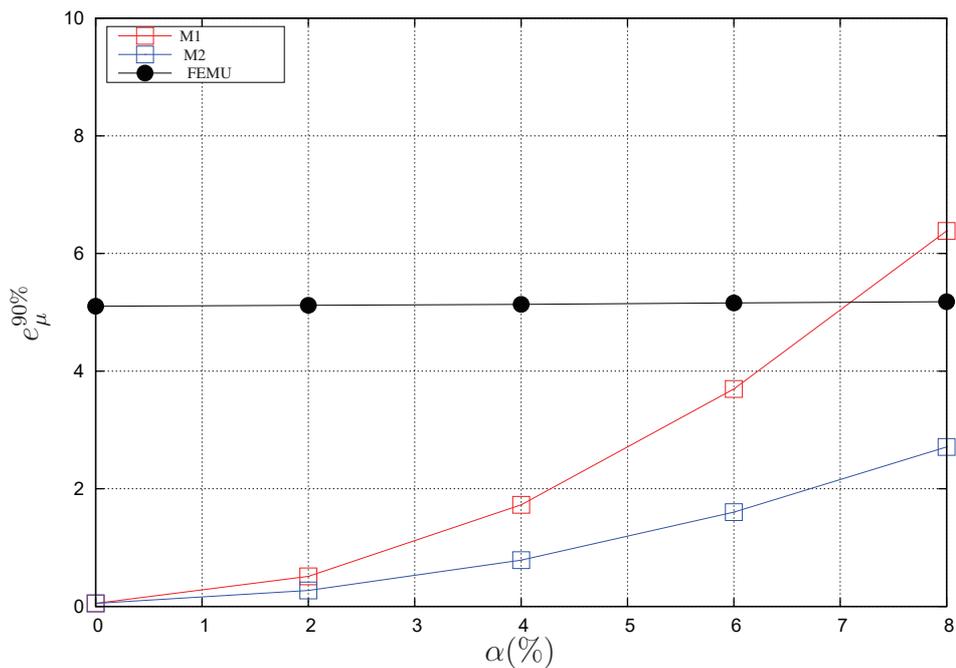


FIGURE 2.21 – Erreur seuil  $e_{\mu}^{90\%}$  en fonction de  $\alpha$  – cas d'étude **C2.2**.

Nous constatons que la méthode **M2** conduit aux meilleurs résultats pour l'identification des deux paramètres. Le lissage est donc intéressant notamment pour les grands niveaux de bruit. Le comportement global ( $e^{90\%}$ ) de FEMU-U semble indépendant du niveau de bruit,

alors que pour la méthodologie développée nous remarquons une évolution.

La Table 2.4 donne les erreurs moyennes ( $\bar{e}_\lambda$ ,  $\bar{e}_\mu$ ) et l'écart-type des erreurs ( $\hat{e}_\lambda$ ,  $\hat{e}_\mu$ ) afin de compléter l'étude.

$\alpha$		0%	2%	4%	6%	8%
$\bar{e}_\lambda$ (%)	M1	0.043	0.33	1.19	2.62	4.58
	M2	0.043	0.17	0.50	1.05	1.82
	FEMU	6.63	6.63	6.63	6.63	6.64
$\hat{e}_\lambda$ (%)	M1	0.00	0.15	0.30	0.45	0.61
	M2	0.00	0.12	0.27	0.44	0.60
	FEMU	0.00	0.07	0.13	0.20	0.25
$\bar{e}_\mu$ (%)	M1	0.052	0.43	1.57	3.45	6.02
	M2	0.052	0.19	0.63	1.37	2.40
	FEMU	5.10	5.10	5.10	5.10	5.10
$\hat{e}_\mu$ (%)	M1	0.00	0.072	0.14	0.22	0.31
	M2	0.00	0.072	0.14	0.22	0.29
	FEMU	0.00	0.01	0.02	0.049	0.065

TABLE 2.4 – Moyennes ( $\bar{e}_\lambda$ ,  $\bar{e}_\mu$ ) et écart-types ( $\hat{e}_\lambda$ ,  $\hat{e}_\mu$ ) des erreurs en fonction de  $\alpha$  – cas d'étude **C2.2**.

La méthode **M2** est plus précise que la méthode FEMU-U mais moins robuste. Le bon comportement global de la méthode développée est principalement dû à sa bonne précision et à une robustesse raisonnable. Le lissage temporel agit principalement sur la valeur moyenne de l'erreur (divisé par 2). En revanche, il a peu d'influence sur l'écart-type. La valeur de l'erreur moyenne obtenue avec FEMU-U est quasi constante pour les valeurs de  $\alpha$  considérées.

#### 2.4.2.2 Influence des propriétés mécaniques du matériau

Les valeurs des coefficients de Lamé retenues pour le cas **C2.2** correspondent à de l'aluminium. À présent, nous nous intéressons à l'influence du choix du matériau constitutif. La Table 2.5 fournit les propriétés mécaniques usuelles pour différents types de matériaux.

	Acier	Aluminium	Verre	Bois	Béton	Diamant
$E(\text{GPa})$	210	70	60	7	35	1000
$\nu$	0.285	0.3	0.25	0.2	0.2	0.1
$\rho(\text{kg.m}^{-3})$	7800	2700	2800	400	2400	3517
$\lambda(\text{GPa})$	108.3	40.4	24	1.9	9.7	113.6
$\mu(\text{GPa})$	81.7	26.9	24	2.9	14.6	454.5

TABLE 2.5 – Propriétés élastiques classiques selon le matériau constitutif.

La précision intrinsèque ( $\alpha = 0\%$ ) pour les méthodes **M2** (meilleur choix) et FEMU-U sont données dans la Table 2.6.

		Acier	Aluminium	Verre	Bois	Béton	Diamant
$e_\lambda(\%)$	M2	0.032	0.043	0.11	0.11	0.22	0.12
	FEMU	5.09	6.63	2.56	1.65	1.72	9.15
$e_\mu(\%)$	M2	0.028	0.052	0.056	0.047	0.077	0.027
	FEMU	6.12	5.10	6.62	7.23	3.91	5.61

TABLE 2.6 – Qualité de l'identification selon le matériau constitutif – cas d'étude **C2.2**.

La méthode **M2** conduit aux meilleurs résultats quelque soit le matériau considéré. L'identification du coefficient  $\mu$  est plus précise que celle du coefficient  $\lambda$  dans la majorité des cas traités.

### 2.4.3 Validation numérique pour le cas C2.3

Nous évaluons le comportement global de la méthodologie développée sur le cas **C2.3**. Nous nous intéressons en particulier à l'intérêt du lissage ( dans 2.4.3.1) et au coût de calcul (dans 2.4.3.2).

#### 2.4.3.1 Influence et intérêt du lissage temporel

Le lissage temporel agit sur la distribution des variables aléatoires  $e_\lambda(\omega)$  et  $e_\mu(\omega)$ . En effet, la Figure 2.22 (resp. 2.23) illustre la fonction densité de probabilité  $PDF(e_\lambda)$  (resp.  $PDF(e_\mu)$ ) pour un niveau de bruit à 8%.

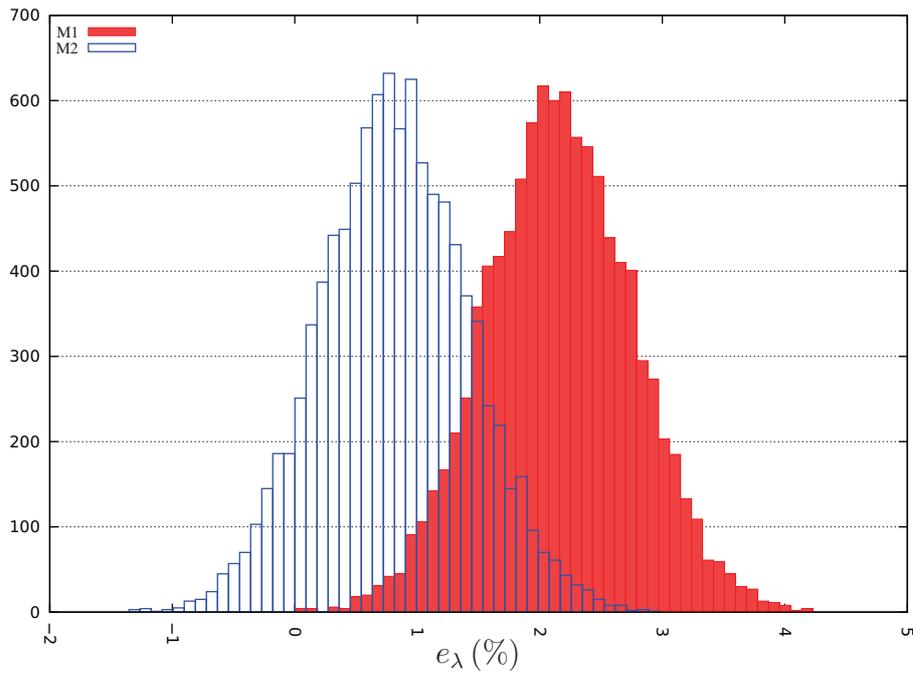


FIGURE 2.22 –  $PDF(e_\lambda)$  avec **M1** et sa variante **M2** – cas d'étude **C2.3**.

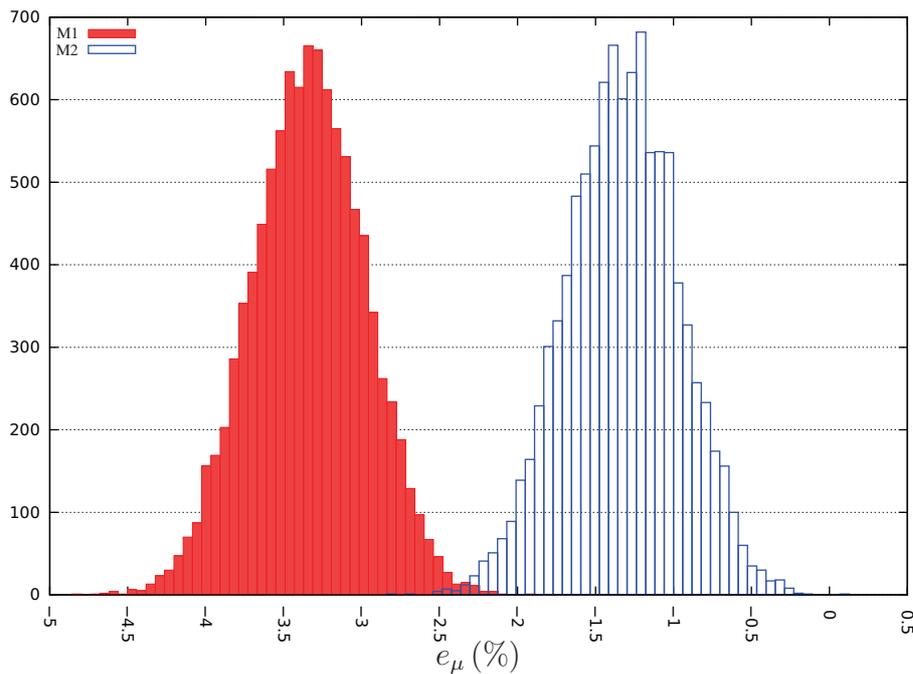


FIGURE 2.23 –  $PDF(e_\mu)$  avec **M1** et sa variante **M2** – cas d'étude **C2.3**.

Le lissage améliore systématiquement la précision perturbée. En effet, la moyenne de la distribution se rapproche de zéro. En revanche, le lissage a peu d'influence sur l'allure de la distribution et en particulier sur son écart-type. Ces résultats sont déjà constatés sur **C2.2**.

En complément, nous traçons sur la Figure 2.24 (resp. 2.25) la fonction de distribution cumulative (CDF) de la variable aléatoire  $e_\lambda(\omega)$  (resp.  $e_\mu(\omega)$ ).

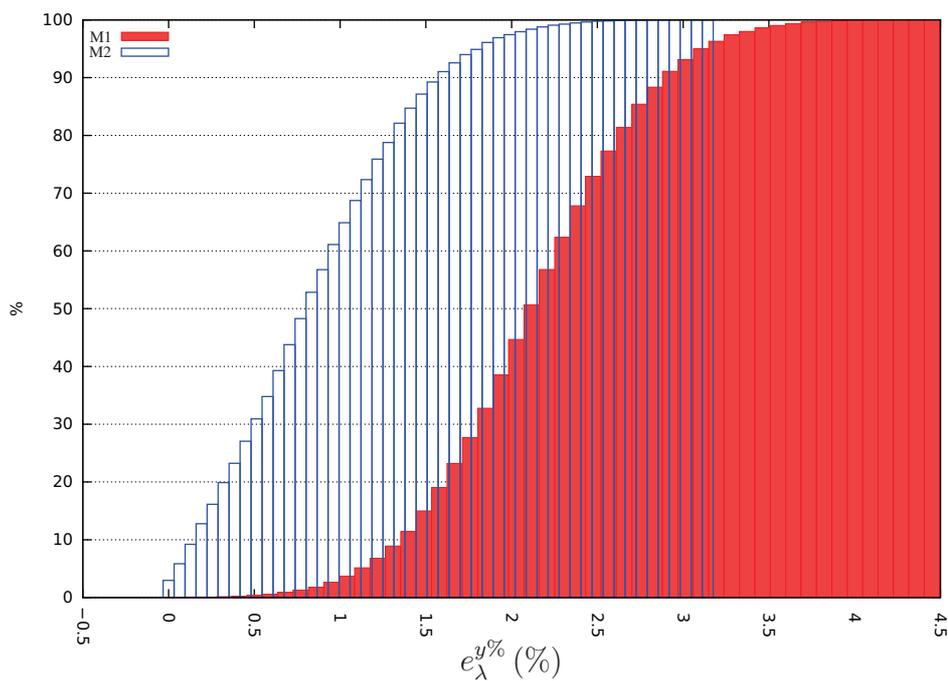


FIGURE 2.24 –  $CDF(e_\lambda)$  avec **M1** et sa variante **M2** – cas d'étude **C2.3**.

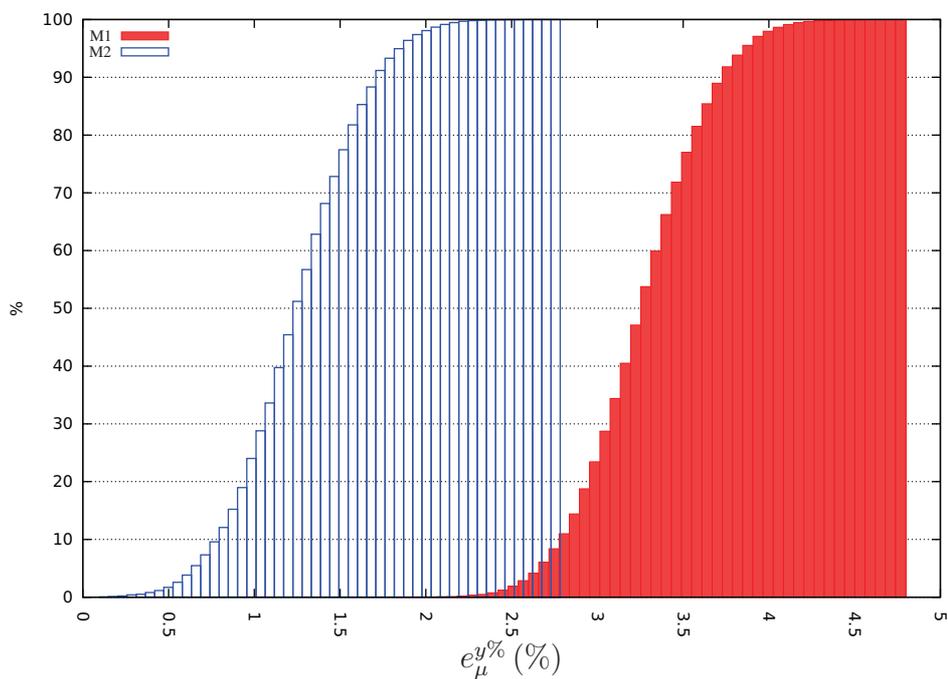


FIGURE 2.25 –  $CDF(e_\mu)$  avec **M1** et sa variante **M2** – cas d'étude **C2.3**.

Nous constatons que le comportement global de la méthodologie développée est amélioré

par le lissage. En effet, l'erreur seuil est quasiment divisée par 2 après son application.

### 2.4.3.2 Étude du coût de calcul

Comme vu précédemment, le lissage est une technique intéressante pour améliorer le comportement de la méthodologie développée. Nous évaluons son coût numérique en comparant **M1** et **M2** dans la Table 2.7. À titre indicatif, le coût d'une résolution du problème par les éléments finis est également donné. Cette simulation éléments finis est réalisée avec un maillage de 16 éléments TRI3 et un schéma explicite ( $\Delta t = 10^{-7} s$ ). La machine que nous utilisons possède 4 processeurs Intel Core i5 de 3.3 Ghz et 15.6 Gio de RAM.

méthodes	temps (ms)
M1	4.25
M2	4.32
1 résolution EF	102.50

TABLE 2.7 – Comparaison de temps CPU – cas d'étude **C2.3**.

Nous constatons que le lissage ne conduit pas à une augmentation significative du coût de calcul. Le processus complet d'identification de la méthodologie développée est quasiment 24 fois moins coûteuse qu'une seule simulation éléments finis du problème de référence. Ceci démontre l'intérêt en termes de coût de la méthode développée par rapport à FEMU-U qui nécessite au moins une résolution éléments finis.

### 2.4.3.3 Étude du comportement global

Le comportement global des différentes méthodologies est maintenant évalué pour le cas **C2.3**. La Figure 2.26 (resp. 2.27) présente l'erreur seuil  $e_{\lambda}^{90\%}$  (resp.  $e_{\mu}^{90\%}$ ) en fonction de  $\alpha$ .

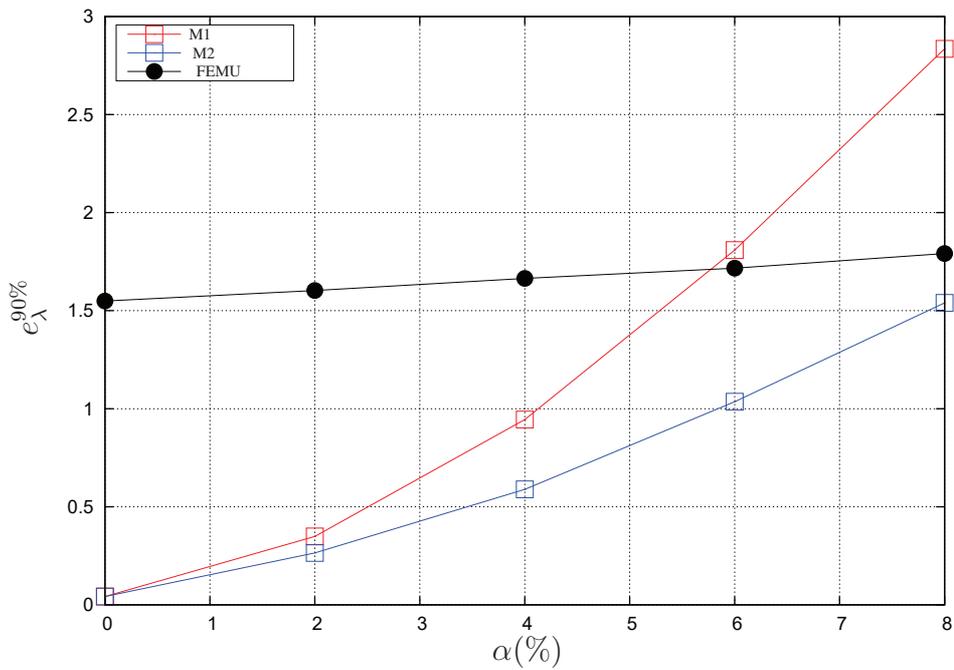


FIGURE 2.26 – Erreur seuil  $e_{\lambda}^{90\%}$  en fonction de  $\alpha$  – cas d'étude **C2.3**.

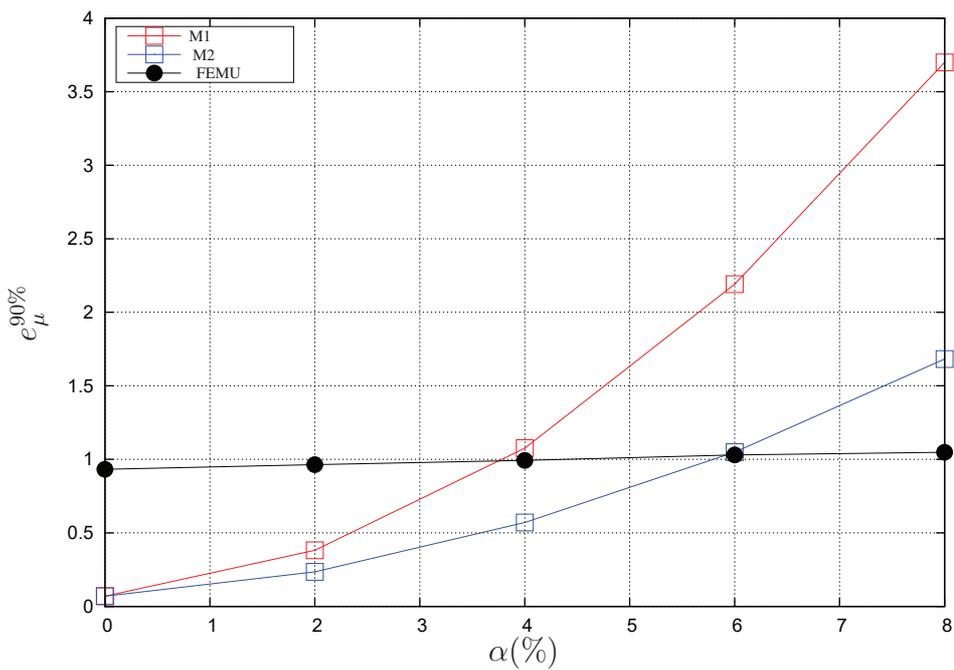


FIGURE 2.27 – Erreur seuil  $e_{\mu}^{90\%}$  en fonction de  $\alpha$  – cas d'étude **C2.3**.

Nous constatons que la méthode **M2** conduit à une meilleure identification de  $\lambda$  pour des niveaux de bruit allant jusqu'à 8%. L'identification du module de cisaillement est moins favorable puisqu'elle est meilleure jusqu'à un niveau de 6%. L'intérêt du lissage est observé

dès les plus bas niveaux de bruit (2%).

La Table 2.8 donne les erreurs moyennes ( $\bar{e}_\lambda$ ,  $\bar{e}_\mu$ ) et l'écart-type des erreurs ( $\hat{e}_\lambda$ ,  $\hat{e}_\mu$ ) afin de compléter l'étude.

	$\alpha$	0%	2%	4%	6%	8%
$\bar{e}_\lambda$ (%)	M1	0.042	0.20	0.59	1.27	2.20
	M2	0.042	0.14	0.31	0.56	0.90
	FEMU	1.55	1.55	1.55	1.55	1.55
$\hat{e}_\lambda$ (%)	M1	0.00	0.13	0.29	0.45	0.60
	M2	0.00	0.10	0.22	0.37	0.54
	FEMU	0.00	0.049	0.098	0.15	0.20
$\bar{e}_\mu$ (%)	M1	0.069	0.27	0.89	1.90	3.31
	M2	0.069	0.14	0.37	0.76	1.30
	FEMU	0.93	0.93	0.93	0.93	0.93
$\hat{e}_\mu$ (%)	M1	0.00	0.090	0.18	0.27	0.36
	M2	0.00	0.081	0.17	0.27	0.36
	FEMU	0.00	0.026	0.053	0.079	0.10

TABLE 2.8 – Moyennes ( $\bar{e}_\lambda$ ,  $\bar{e}_\mu$ ) et écart-types ( $\hat{e}_\lambda$ ,  $\hat{e}_\mu$ ) des erreurs en fonction de  $\alpha$  – cas d'étude **C2.3**.

Nous constatons que la méthode développée a un comportement globalement similaire sur les trois exemples envisagés **C2.1**, **C2.2** et **C2.3**. Cependant, le cas **C2.3** met en avant des limites de la méthode développée. En effet, la méthode **M1** conduit à de moins bons résultats que FEMU-U pour des niveaux de bruit compris entre 4% et 8%. Le lissage permet de repousser cette limite à des niveaux de bruit compris entre 6% et 8%.

Dans la section suivante, nous introduisons une seconde forme de perturbation et nous évaluons de nouveau le comportement des méthodes. Nous conservons uniquement la méthode **M2**, que nous comparons toujours avec FEMU-U.

## 2.5 Étude en robustesse lorsque le chargement est incertain

Dans la section précédente, l'étude en robustesse est menée en supposant que les conditions aux limites sont connues. Dans cette section, on se propose de revenir sur cette hypothèse. En effet, même avec un dispositif expérimental soigné, il n'est pas évident de connaître

avec certitude les conditions aux limites. De plus, la sensibilité aux conditions limites est une faiblesse connue de FEMU-U [9]. Afin d'étudier la robustesse liée aux incertitudes sur le chargement, nous introduisons des conditions limites paramétrées par des variables aléatoires. Nous combinons ces incertitudes aux perturbations aléatoires associées au bruit de mesure. Nous étudions dans cette section la robustesse de la méthodologie développée par rapport à cette nouvelle perturbation.

Le détail de la construction du chargement incertain est présenté dans 2.5.1. Les résultats de l'étude en robustesse sont donnés dans 2.5.2 pour **C2.2** puis dans 2.5.3 pour **C2.3**.

## 2.5.1 Introduction d'incertitudes sur le chargement

Nous introduisons des incertitudes sur le chargement  $T_d(t)$ . En effet, les différents paramètres de ce chargement sont perturbés de façon aléatoire. Ce nouveau chargement perturbé, noté  $T_d^b(t; \omega)$ , est paramétré par des variables aléatoires.

Pour les différents cas étudiés, cela revient à perturber l'intensité du chargement ( $P_{max}$ ) ainsi que sa durée caractéristique ( $t_1$ ) :

$$t_1^b(\omega) = (1.0 + \beta \psi_1(\omega)) t_1 \quad (2.69)$$

et :

$$P_{max}^b(\omega) = (1.0 + \beta \psi_2(\omega)) P_{max} \quad (2.70)$$

où :

- $\psi_1(\omega)$  et  $\psi_2(\omega)$  sont deux variables aléatoires uniformes entre  $-1$  et  $1$ ,
- $t_1^b(\omega)$  (resp.  $P_{max}^b(\omega)$ ) est une variable aléatoire de moyenne  $t_1$  (resp.  $P_{max}$ )
- $\beta$  est un paramètre prenant les valeurs  $[0\%, 2\%, 4\%, 6\%, 8\%]$ .

À titre indicatif, la Figure 2.28 illustre l'enveloppe du chargement incertain obtenue pour un niveau de bruit de  $\beta = 8\%$ .

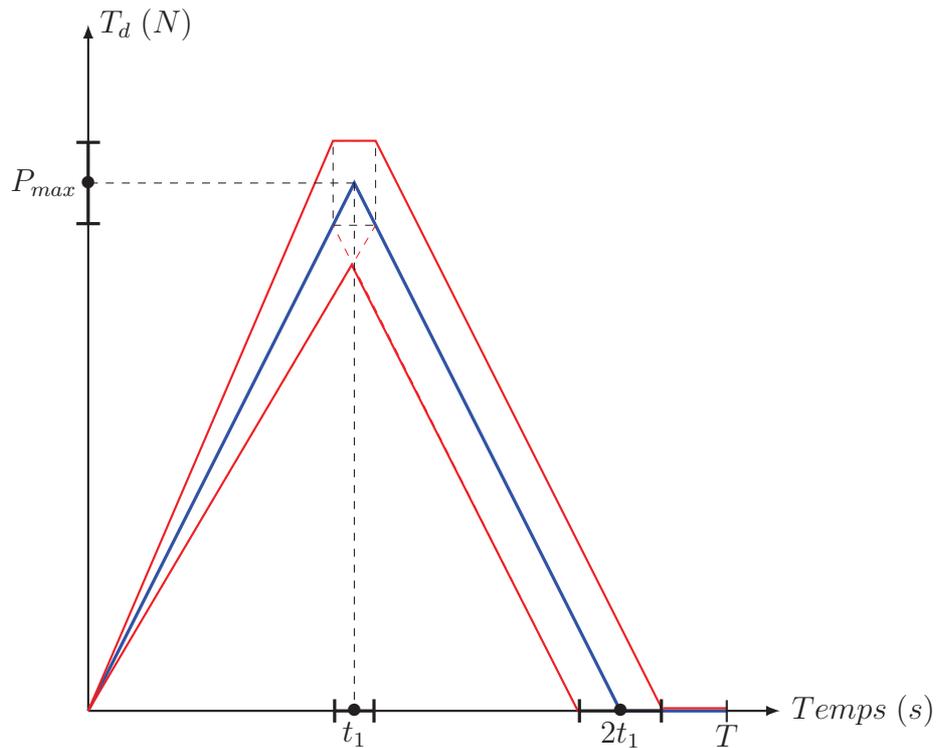


FIGURE 2.28 – Enveloppe du chargement incertain obtenue pour un niveau de bruit de  $\beta = 8\%$ . Exemple numérique simple avec  $P_{max} = 10\text{ N}$  et  $t_1 = 5\text{ s}$ .

## 2.5.2 Validation numérique pour le cas C2.2

Nous comparons le comportement global de **M2** à celui de FEMU-U. La Figure 2.29 (resp. 2.30) illustre l'évolution de l'erreur seuil  $e_\lambda^{90\%}$  (resp.  $e_\mu^{90\%}$ ) pour plusieurs valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ .

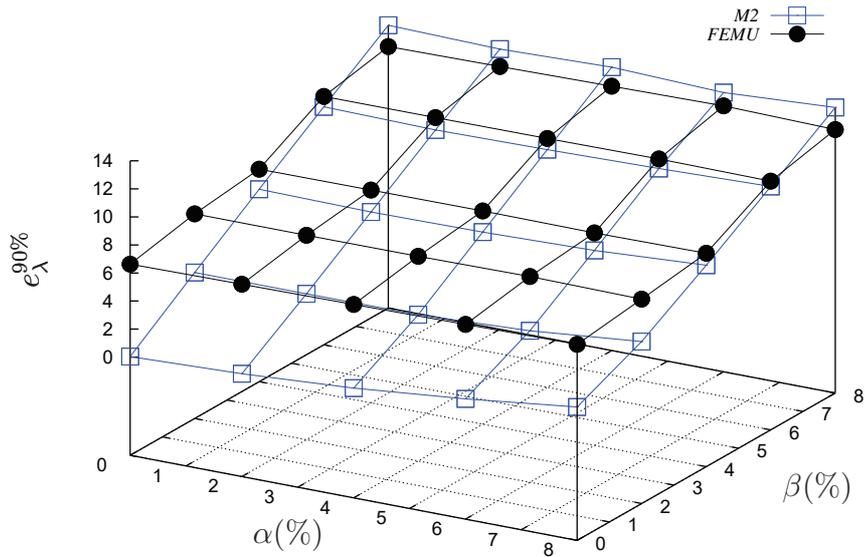


FIGURE 2.29 – Erreur seuil  $e_{\lambda}^{90\%}$  en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  – cas d'étude **C2.2**.

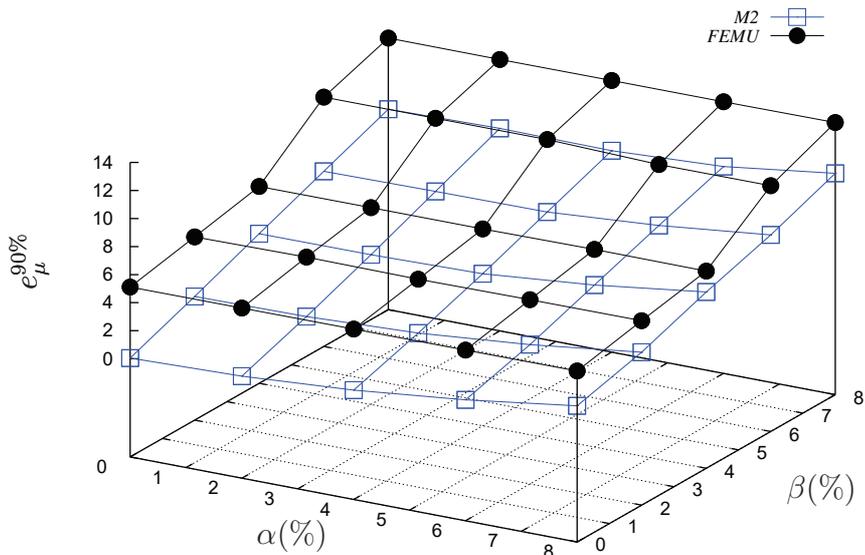


FIGURE 2.30 – Erreur seuil  $e_{\mu}^{90\%}$  en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  – cas d'étude **C2.2**.

Les deux méthodologies sont plus sensibles aux incertitudes sur le chargement qu'aux perturbations de la mesure. L'identification de  $\mu$  est de meilleure qualité en utilisant **M2**. La méthode est seulement mise en défaut par rapport à FEMU-U pour l'identification de  $\lambda$  pour

des niveaux de bruit à partir de 6%.

### 2.5.3 Validation numérique pour le cas C2.3

La Figure 2.31 (resp. 2.32) illustre l'évolution de l'erreur seuil  $e_{\lambda}^{90\%}$  (resp.  $e_{\mu}^{90\%}$ ) pour plusieurs valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ .

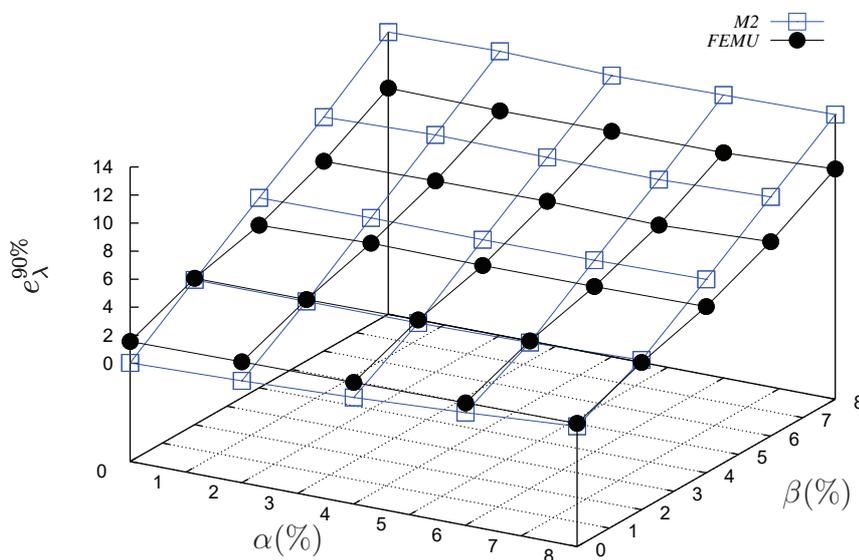


FIGURE 2.31 – Erreur seuil  $e_{\lambda}^{90\%}$  en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  – cas d'étude C2.3.

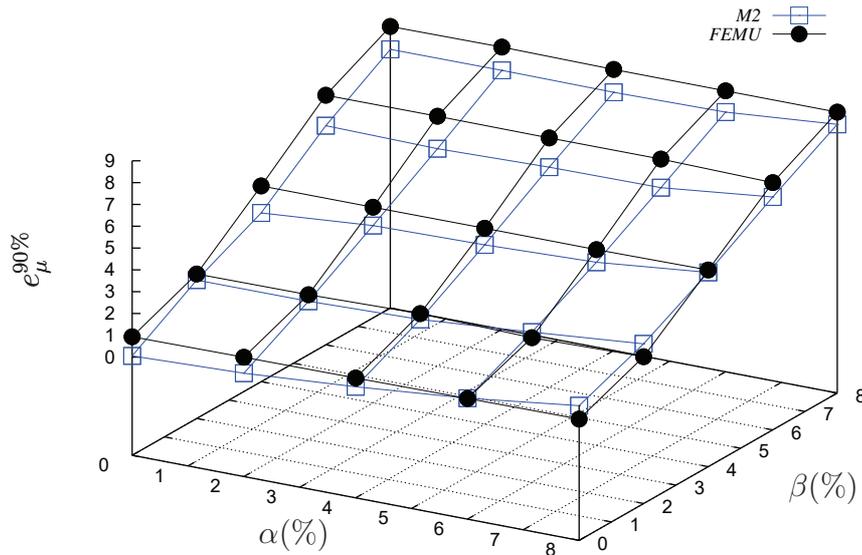


FIGURE 2.32 – Erreur seuil  $e_{\mu}^{90\%}$  en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  – cas d'étude **C2.3**.

Le comportement global de la méthode développée est meilleure que celui de FEMU-U dans 80% des cas pour l'identification de  $\mu$ . En effet, le coefficient de cisaillement est bien identifié ( $e_{\mu}^{90\%} = 9\%$  pour  $\alpha = 8\%$  et  $\beta = 8\%$ ). En revanche, sur ce cas, le comportement est moins bon que celui de FEMU-U pour l'identification de  $\lambda$ . Cependant,  $e_{\lambda}^{90\%}$  reste acceptable ( $e_{\lambda}^{90\%} = 14\%$  pour  $\alpha = 8\%$  et  $\beta = 8\%$ ).

## 2.6 Conclusion

### 2.6.1 Bilan du chapitre 2

Une méthode d'identification de paramètres matériau de type VFM est présentée puis évaluée numériquement dans ce chapitre. Le point clé de ce type de méthode est le choix de champs virtuels pertinents. Le travail présenté dans ce chapitre aboutit à la construction d'une famille de champs virtuels permettant d'identifier à moindre coût les paramètres matériau en élasto-dynamique. Différentes investigations numériques montrent que la technique ainsi développée est précise et robuste.

La méthodologie est d'abord présentée puis validée numériquement sur un cas simple dans 2.2 avant d'être généralisée dans 2.3 à un cas plus réaliste. Les investigations numériques présentées dans 2.4 et dans 2.5 illustrent le bon comportement global de la méthode développée lorsque les mesures sont perturbées et/ou lorsque le chargement est incertain. Le

lissage temporel est intéressant car il améliore, à moindre coût, le comportement global de la méthode en agissant sur la précision perturbée.

Le verrou que nous levons dans ce chapitre est donc celui du coût numérique de l'identification. Nous nous sommes appliqués à évaluer la robustesse de la méthode en présence d'incertitudes sur des mesures synthétiques. Il ressort de ces études de robustesse que la méthode développée a un bon comportement pour les faibles niveaux de bruit.

## **2.6.2 Transition vers le chapitre 3**

Dans le chapitre suivant, nous nous proposons de compléter ce travail en agissant sur le verrou des incertitudes de mesures liées au traitement des images. De nombreux auteurs s'intéressent au contrôle des incertitudes de mesure lorsque la CIN est utilisée [52, 15, 54, 80, 12]. D'autres cherchent à améliorer cette technique de CIN par différentes approches [42, 66, 10].

Nous choisissons d'explorer le potentiel d'une information non cinématique afin de contourner les problèmes liés au suivi de mouchetis et au traitement d'images inhérent à la CIN. La méthode que nous développons repose sur des traitements d'images simplifiés introduisant moins de paramètres métrologiques. Le chapitre 3 vise à présenter et à valider numériquement cette nouvelle approche de recalage de modèles éléments finis basée sur la géométrie.



## Chapitre 3

# Stratégie basée sur l'information géométrique

L'objectif du chapitre est de présenter une méthode d'identification adaptée à la dynamique basée sur une information géométrique. À l'issue du chapitre 1, il ressort que la stratégie basée sur le recalage de modèles est l'une des plus flexibles. Le choix de la fonction coût utilisée dans cette stratégie de recalage est un point essentiel. Nous explorons le potentiel d'une fonction coût purement géométrique et nous la comparons à une fonction coût classique basée sur les déplacements. Cette fonction coût géométrique ne requiert qu'un traitement d'images simplifié. L'objet de cette étude est de savoir si cette information appauvrie est suffisante pour identifier des paramètres matériau. La méthode est d'abord présentée puis validée sur différents cas tests numériques.

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>89</b>
<b>3.2</b>	<b>Méthodologie développée (FEMU-G)</b>	<b>90</b>
3.2.1	Définition de la quantité d'intérêt purement géométrique	90
3.2.2	Génération des images numériques (film)	90
3.2.3	Définition du problème d'identification	96
<b>3.3</b>	<b>Validation numérique de la méthodologie</b>	<b>97</b>
3.3.1	Présentation des cas d'études	97
3.3.2	Influence de la segmentation	100
3.3.3	Influence des paramètres du modèle numérique	112
<b>3.4</b>	<b>Étude en robustesse lorsque la mesure est bruitée</b>	<b>121</b>
3.4.1	Génération des quantités d'intérêts mesurées bruitées	122
3.4.2	Présentation du cas d'étude	122
3.4.3	Validation numérique pour le cas <b>C3.3</b>	123
<b>3.5</b>	<b>Étude en robustesse lorsque le chargement est incertain</b>	<b>127</b>
3.5.1	Validation numérique pour le cas <b>C3.3</b>	127
<b>3.6</b>	<b>Étude en robustesse pour différents matériaux</b>	<b>129</b>
3.6.1	Identification du modèle de Saint-Venant Kirchhoff	129
3.6.2	Identification de modèles multi-matériaux	136
<b>3.7</b>	<b>Bilan du chapitre 3</b>	<b>147</b>

---

## 3.1 Introduction

Un champ de déplacement mesuré par corrélation d'images numériques est par nature entaché de bruit. Le contrôle de la propagation des incertitudes de mesures est un point important que certains auteurs ont traité en détail : [52, 15, 54, 80, 12]. Il ressort que de nombreux paramètres métrologiques, propres à la CIN et à ses algorithmes, peuvent agir sur la fiabilité de la mesure cinématique (champ de déplacement mesuré).

Dans ce chapitre, nous nous posons la question suivante :

- *une information purement géométrique suffit-elle pour identifier des paramètres matériau en dynamique ?*

L'information géométrique ne requiert qu'une simple segmentation d'image. L'intérêt est donc de simplifier le traitement des images en se passant de suivi de mouchetis. La segmentation d'images repose sur un nombre de paramètres métrologiques relativement faible. Nous cherchons à étudier l'impact de ce traitement d'images sur les incertitudes de mesures. La méthodologie développée dans ce chapitre est donc une approche géométrique du recalage de modèle, notée FEMU-G.

Pour évaluer la qualité de l'identification de cette nouvelle approche, nous comparons la méthode FEMU-G avec la méthode FEMU-U qui reste notre méthode de référence. Comme dans le chapitre 2, nous nous plaçons dans un contexte idéal où les mesures cinématique et géométrique sont synthétiques (obtenues par les éléments finis, voir Figure 2.1). Un bruit synthétique est généré puis ajouté à ces mesures afin d'étudier la robustesse des méthodes.

Le chapitre 3 s'organise de la manière suivante :

- la section 3.2 présente l'approche géométrique du recalage de modèles éléments finis (FEMU-G),
- la section 3.3 valide numériquement la méthodologie en se basant sur une étude de la précision de l'identification,
- la section 3.4 étudie la robustesse de la méthode développée par rapport à l'introduction d'un bruit synthétique sur les mesures,
- la section 3.5 analyse l'influence de la méconnaissance du chargement sur la qualité de l'identification,
- la section 3.6 analyse l'influence du comportement du matériau sur la qualité de l'identification,
- la section 3.7 dresse un bilan des performances de la méthode développée.

## 3.2 Méthodologie développée (FEMU-G)

La méthodologie développée repose sur la minimisation d'une fonction coût purement géométrique. Nous retenons une stratégie d'identification par recalage de modèles éléments finis. Dans un premier temps, nous définissons des quantités d'intérêts basées sur la géométrie dans 3.2.1. Dans un second temps, nous présentons, dans 3.2.2, une démarche permettant d'obtenir un jeu de mesures synthétiques avec un bon niveaux de précision. Finalement, le problème d'identification est présenté dans 3.2.3.

### 3.2.1 Définition de la quantité d'intérêt purement géométrique

L'idée de la méthodologie développée consiste à identifier les paramètres de matériaux en s'appuyant sur l'évolution de la déformée  $\Omega_t$  au cours du temps. La surface d'une déformée  $\Omega_t$  à un instant donné est caractérisée par un ensemble de moments géométriques d'ordre  $n$ , noté  $I_{(n,P)}$ , où  $n$  est un entier naturel et  $P$  un point de  $\Omega_t$ . Plus précisément nous définissons le moment d'ordre  $n$  de  $\Omega_t$  par :

$$I_{(n,P)} = \int \int_{\Omega_t} \left( \sqrt{(x - X_P)^2 + (y - Y_P)^2} \right)^n dx dy \quad (3.1)$$

Nous nous intéressons à deux points  $P$  particuliers. Le point  $O$ , origine du repère d'étude (fixe) et le point  $G$ , centre de gravité de la surface étudiée (mobile). Il est à noter que la mesure de la surface (moment d'ordre 0) est indépendante du point  $P$  :  $I_{(0,P)} = I_0 \quad \forall P$ .

Dans la suite, nous montrons comment nous générons des images numériques contenant cette information purement géométrique.

### 3.2.2 Génération des images numériques (film)

Nous montrons la manière que nous avons retenue pour obtenir la succession d'images constituant le film. La démarche de création de ces images synthétiques est illustrée par la Figure 3.1. Ce film contenant des images parfaites (sans défauts) est noté  $Img^{id}(t)$ . Ce film idéal est généré à partir d'un résultat de simulation éléments finis et post-traité par le logiciel GMSH [33].

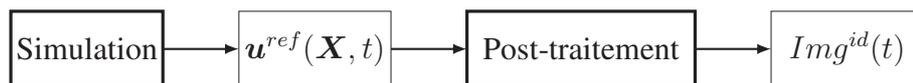


FIGURE 3.1 – Génération de la succession d'images numériques.

La première étape consiste à appliquer la méthode des éléments finis présentée en 1.1.2. Le champ  $\mathbf{u}^{ref}(\mathbf{X}, t)$  est obtenu en résolvant l'équation (1.21) correspondant au cas des grandes transformations avec contact.

La discrétisation spatiale est réalisée avec un maillage fin. Ainsi, nous obtenons un ensemble de  $N_{eq}^{fin}$  équations. Le système (1.21) est résolu en utilisant un schéma implicite d'ordre 1 [53] en utilisant la discrétisation temporelle suivante :

$$t_i = i \times \Delta t \quad \text{et} \quad i \in [0, \frac{T}{\Delta t}] \quad (3.2)$$

Ce schéma implicite du premier ordre est formulé en termes de vitesse pour entre autres ne pas calculer les termes d'accélération au moment de l'impact. En utilisant ce schéma, l'énergie du système est également conservée. À partir de ce calcul fin, nous obtenons un ensemble de mesures régulièrement réparties en temps et en espace. Pour l'aspect temporel, nous retenons les valeurs tout les  $f$  piquets de temps :

$$t_n = n \times (f\Delta t) \quad \text{avec} \quad n \in [0, N_{mes}] \quad \text{et} \quad N_{mes} = \frac{T}{f\Delta t} \quad (3.3)$$

Pour l'aspect spatial, les  $N_{eq}^{fin}$  composantes du vecteur  $\mathbf{U}^{ref}$  sont projetées sur un maillage (grille spatiale de mesure) plus grossier pour définir le vecteur  $\mathbf{U}^{(ref,p)}$ . Ce vecteur contient  $N_{eq}$  composantes. L'ensemble des  $N_{mes} + 1$  déplacements  $\mathbf{U}_n^{(ref,p)}$  est stocké dans la matrice  $\mathbb{U}^{(ref,p)}$  :

$$\mathbb{U}^{(ref,p)} = \left[ \mathbf{U}_0^{(ref,p)}, \mathbf{U}_1^{(ref,p)}, \dots, \mathbf{U}_n^{(ref,p)}, \dots, \mathbf{U}_{N_{mes}}^{(ref,p)} \right] \quad (3.4)$$

À l'aide du logiciel GMSH [33], il est possible de générer, à partir de ces  $N_{mes} + 1$  déplacements, une succession d'images synthétiques contenant les déformées  $\Omega_t$ . Ce film contient l'information géométrique que nous cherchons à exploiter.

Nous générons deux jeux de mesures différents à partir de cette succession d'images. Le premier, noté **Mes1**, est le jeu de mesures idéales décrit par l'équation (3.4). Le deuxième, noté **Mes2**, est obtenu en dégradant le jeu de mesures idéales. Ces deux démarches sont respectivement présentées dans 3.2.2.1 et 3.2.2.2.

### 3.2.2.1 Génération de Mes1

Nous générons le jeu de mesure **Mes1** à l'aide de la méthode des éléments finis puis d'une technique de quadrature de Gauss. La Figure 3.2 illustre la démarche appliquée :

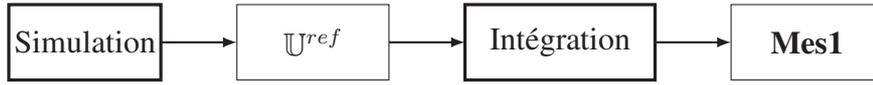


FIGURE 3.2 – Génération du jeu de mesure **Mes1**.

La position d'un élément (TRI3), noté  $\Omega_e$ , dans la configuration  $\Omega_t$  est connue à l'aide de la matrice  $\mathbb{U}^{ref}$ . En effet, nous considérons ici le maillage fin ( $N_{eq}^{fin}$  équations) et non sa projection ( $N_{eq}$  équations). Les moments géométriques sont calculés élément par élément à l'aide d'une technique d'intégration numérique. Pour appliquer cette technique, il est plus simple de définir un élément de référence, noté  $\Omega_r$ , dans le repère de coordonnées  $(\xi, \eta)$ . À titre illustratif, la Figure 3.3 illustre le passage de  $\Omega_e$  à  $\Omega_r$ .

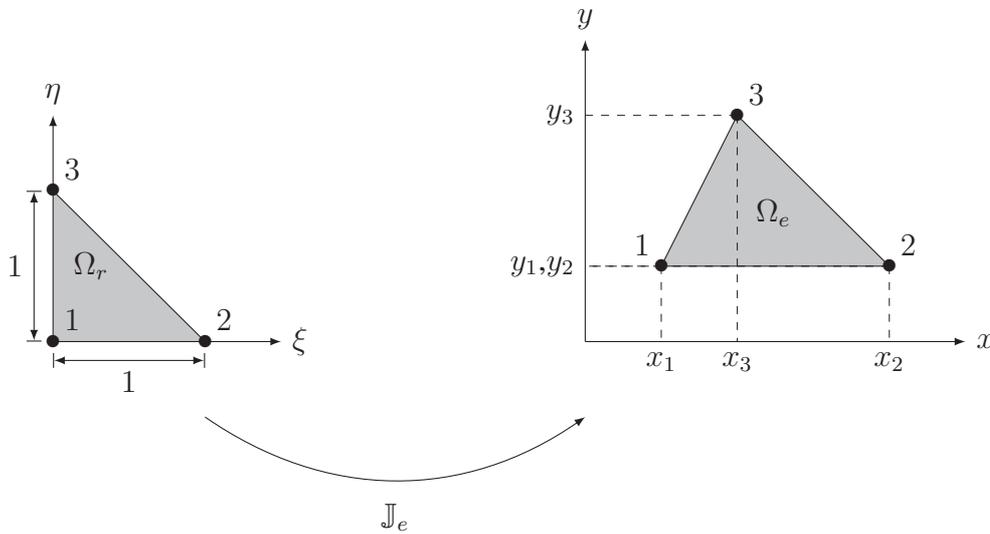


FIGURE 3.3 – Élément de référence et élément réel pour TRI3.

La technique d'intégration numérique que nous utilisons est la technique de quadrature de Gauss :

$$\int_{\Omega_e} \bullet(\mathbf{x}) d\Omega_e = \int_{\Omega_r} \bullet(\boldsymbol{\xi}) \det[\mathbb{J}_e] d\Omega_r \approx \sum_{p=1}^{n_p} \bullet(\xi_p, \eta_p) \det[\mathbb{J}_e] w_p \quad (3.5)$$

où  $\mathbb{J}_e = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}$  est la matrice jacobienne élémentaire (exprimée dans la configuration courante) et  $\bullet(\xi_p, \eta_p)$  est une quantité calculée aux différents points de Gauss  $(\xi_p, \eta_p)$  de poids  $w_p$ .

Dans nos travaux, nous choisissons d'utiliser la quadrature de Gauss sur 6 points. La Figure 3.4 montre l'emplacement de ces points sur l'élément de référence :

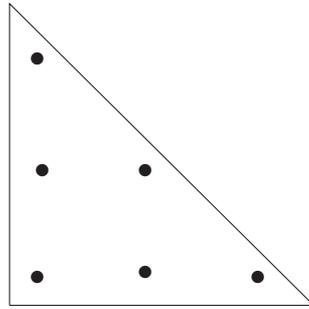


FIGURE 3.4 – Points de Gauss utilisés pour l’intégration des moments géométriques.

De plus, les coordonnées et les poids des différents points sont renseignés dans la Table 3.1 :

Numéro ( $p$ )	abscisse ( $\xi_p$ )	ordonnée ( $\eta_p$ )	poids ( $w_p$ )
1	$a$	$a$	0.11169079483905
2	$1 - 2 \times a$	$a$	0.11169079483905
3	$a$	$1 - 2 \times a$	0.11169079483905
4	$b$	$b$	0.0549758718227661
5	$1 - 2 \times b$	$b$	0.0549758718227661
6	$b$	$1 - 2 \times b$	0.0549758718227661
#	$a = 0.445948490915965 \quad b = 0.091576213509771$		

TABLE 3.1 – Coordonnées et poids associés aux différents points de Gauss.

L’utilisation de 6 points de Gauss nous permet de calculer, de manière exacte, les moments géométriques d’un ordre suffisant pour nos études.

En posant les coordonnées globales suivantes :

$$\begin{aligned}
 x_p &= N_1(\xi_p, \eta_p) \times x_1 + N_2(\xi_p, \eta_p) \times x_2 + N_3(\xi_p, \eta_p) \times x_3 \\
 y_p &= N_1(\xi_p, \eta_p) \times y_1 + N_2(\xi_p, \eta_p) \times y_2 + N_3(\xi_p, \eta_p) \times y_3
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

et en utilisant l’équation (3.5), nous obtenons le jeu de mesure **Mes1** après assemblage des éléments (défini par  $\bigcup_{e=1}^{N_{EF}}$ ) :

$$I_{(n,P)}^{mes1} = \bigcup_{e=1}^{N_{EF}} \sum_{p=1}^{n_p} \left( \sqrt{(x_p - X_P)^2 + (y_p - Y_P)^2} \right)^n \det[\mathbb{J}_e] w_p
 \tag{3.7}$$

avec, quand  $P = G$  :

$$X_G = \sum_{p=1}^{n_p} x_p \det[\mathbb{J}_e] w_p \quad \text{et} \quad Y_G = \sum_{p=1}^{n_p} y_p \det[\mathbb{J}_e] w_p \quad (3.8)$$

Ce premier jeu de mesure est considéré comme parfait à la précision machine près (intégration). Cependant, dans les conditions de mesure réelles, les images sont systématiquement pixelisées. Ainsi, dans la suite, nous utilisons un jeu de mesure plus réaliste en dégradant ces images parfaites.

### 3.2.2.2 Génération de Mes2

La pixellisation des images parfaites est réalisée avec le logiciel GMSH et permet de transformer l'image vectorielle  $Img^{id}(t)$  (Figure 3.1) en une image pixelisée  $Img^{mes}(t)$ . Nous utilisons deux types de formats compressés, l'un avec une perte de qualité (JPEG) et l'autre sans (PNG). Nos images sont codées en 8 – bits donc la dynamique des niveaux de gris est de 256 avec 0 pour la couleur noire et 255 pour la couleur blanche.

Pour définir les moments géométriques à chaque instant, les images pixelisées sont segmentées. La technique que nous appliquons est une segmentation d'image par seuillage global [67]. Le principe du seuillage est de transformer une image couleur en une image noir et blanc. Dans notre cas, le fond de l'image devient blanc et l'objet devient noir. Ce traitement d'images ne dépend que d'un seul paramètre métrologique : le seuil de la segmentation noté  $S$ . Le schéma de la segmentation est :

$$\begin{aligned} f_S(\mathbf{x}) &= 1 \text{ si } f(\mathbf{x}) \geq S \\ f_S(\mathbf{x}) &= 0 \text{ sinon} \end{aligned} \quad (3.9)$$

où  $f(\mathbf{x})$  est une image couleur quelconque et  $f_S(\mathbf{x})$  est l'image segmentée associée. Dans l'image segmentée, les pixels prennent la valeur 0 pour noir et la valeur 1 pour blanc. La qualité de la segmentation dépend de la valeur du seuil choisi. À titre d'exemple, un seuil de  $S = 254/255$  nous indique que tous les pixels qui ne sont pas blancs purs sur l'image couleur deviennent noirs sur l'image segmentée. Ce choix est naturel car nous cherchons à séparer le fond de l'image et l'objet. Il existe d'autres façons de le choisir. Le tracé de l'histogramme des niveaux de gris permet de choisir manuellement ce seuil pour un utilisateur expérimenté. À l'instant  $t = 0$ , la valeur théorique des moments est connue et permet aussi de déterminer le meilleur seuil.

Une fois les images segmentées, les moments géométriques sont obtenus par post-traitement. Afin de calculer les différents moments, la première étape de ce post-traitement est de déterminer la taille d'un pixel. Pour cela, nous travaillons sur l'image initiale. À cet instant, la dimension caractéristique de l'objet (diamètre, longueur, ...) ainsi que le nombre de pixels noirs le long de cette dimension sont connus. Ceci nous permet de déduire la taille d'un pixel et sa surface, en supposant qu'un pixel est un carré. La seconde étape de post-traitement est de traiter l'ensemble des autres images. Pour ces images :

- suppression, si nécessaire, des obstacles présents sur les images. Nous ne gardons que l'objet d'étude sur les images. L'algorithme de suppression d'obstacles consiste essentiellement à effectuer trois balayages sur les images segmentées. Chaque image peut-être vu comme une matrice de 0 et de 1. À titre illustratif, nous donnons un exemple lorsque l'objet est un cercle et l'obstacle est une ligne. La Figure 3.5 illustre l'image  $f_S(i, j)$  où  $i \in [1, N_{ligne}]$  et  $j \in [1, N_{col}]$ .

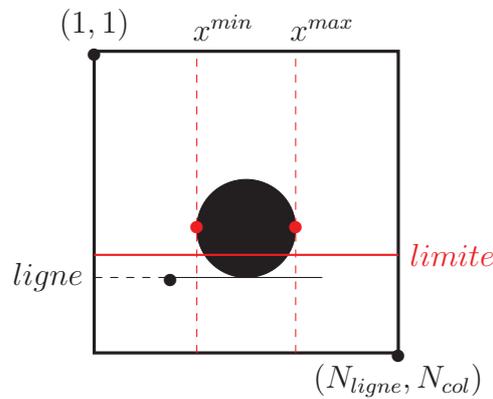


FIGURE 3.5 – Illustration de la suppression d'un obstacle sur une image segmentée.

Les trois étapes de l'algorithme sont les suivantes :

- nous fixons  $i = limite$  entre l'obstacle et le diamètre du cercle. Un premier balayage sur l'image  $f_S(i, j)$  avec  $i \in [1, limite]$  et  $j \in [1, N_{col}]$  permet de déterminer la position de  $x^{min}$  et de  $x^{max}$ ,
  - ensuite, un deuxième balayage sur l'image  $f_S(i, x^{min})$  avec  $i \in [1, N_{ligne}]$  permet de déterminer la position de l'obstacle donc  $i = ligne$ . En effet, au cours du balayage, si  $f_S(i, x^{min} - 1) = 0$  (noir) alors nous avons  $i = ligne$ ,
  - enfin, un dernier balayage sur  $f_S(i, j)$  avec  $i \in [ligne, N_{ligne}]$  et  $j \in [1, N_{col}]$  permet de transformer les pixels noirs de la zone retenue en pixels blancs,
- calcul des coordonnées des points  $O$  et  $G$ , sur chacune des images,

- calcul du moment géométrique d'ordre 0 par la formule suivante :

$$I_0^{mes2} = N_{px} \times S_{px} \quad (3.10)$$

où  $N_{px}$  est le nombre de pixels contenus dans l'objet et  $S_{px}$  est la surface d'un pixel calculée précédemment,

- calcul des moments géométriques d'ordre  $n > 0$  en un point  $P$  par la formule suivante :

$$I_{(n,P)}^{mes2} = \sum_{i=1}^{N_{ligne}} \sum_{j=1}^{N_{col}} \left( \sqrt{((X_j - X_P) \times T_{px})^2 + ((Y_i - Y_P) \times T_{px})^2} \right)^n \times S_{px} \quad (3.11)$$

où le couple  $(X_j, Y_i)$  représente les coordonnées d'un pixel sur la ligne  $i$  et la colonne  $j$ , et  $T_{px}$  est la taille d'un pixel définie précédemment.

Dans la suite, nous présentons la démarche d'identification des paramètres du matériau.

### 3.2.3 Définition du problème d'identification

La démarche est basée sur une stratégie de type recalage de modèles éléments finis. La construction des fonctions coûts purement géométriques est présentée dans 3.2.3.1. La génération des quantités d'intérêts calculées est présentée dans 3.2.3.2 et le problème de minimisation est introduit dans 3.2.3.3.

#### 3.2.3.1 Construction des fonctions coûts purement géométriques

À chaque moment géométrique  $I_{(n,P)}$ , nous associons une fonction coût géométrique, notée  $C_{(n,P)}(t; \boldsymbol{\theta})$  :

$$C_{(n,P)}(t; \boldsymbol{\theta}) = \int_0^T \left( I_{(n,P)}^{mes} - I_{(n,P)}^{cal}(\boldsymbol{\theta}) \right)^2 dt \quad (3.12)$$

où  $I_{(n,P)}^{mes}$  est une quantité d'intérêt mesurée (**Mes1** ou **Mes2**) et  $I_{(n,P)}^{cal}(\boldsymbol{\theta})$  une quantité d'intérêt calculée basée sur le moment d'ordre  $n$ . Nous choisissons de construire un écart au sens des moindres carrés comme pour l'approche FEMU-U (méthode de référence). La génération des quantités d'intérêts calculées est présentée dans la suite.

### 3.2.3.2 Génération des quantités d'intérêts calculées

Nous appliquons une démarche identique à celle utilisée pour générer **Mes1**. Cependant, nous considérons ici un maillage plus grossier ( $N_{eq}$  équations) ainsi que la matrice  $\mathbb{U}^{calc}(\boldsymbol{\theta})$  de taille  $N_{eq} \times N_{mes} + 1$  (introduite dans 2.3.1.3). La technique de quadrature de Gauss est toujours appliquée avec 6 points.

### 3.2.3.3 Minimisation des fonctions coûts

L'identification des paramètres  $\boldsymbol{\theta}$  repose sur le problème de minimisation suivant :

$$\boldsymbol{\theta}_{id} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmin}} C_{(n,P)}(t; \boldsymbol{\theta}) \quad (3.13)$$

Le problème de minimisation (3.13) est résolu avec un algorithme de dichotomie présenté dans 2.2.1.2.2.

Dans la suite, nous comparons différentes fonctions coûts géométriques à la fonction coût cinématique à l'aide de plusieurs investigations numériques.

## 3.3 Validation numérique de la méthodologie

Dans cette section, nous validons numériquement la qualité (précision intrinsèque) de la méthode. Nous évaluons notamment l'influence de différents paramètres de mesure ou de calcul. Dans un premier temps, nous définissons deux cas tests dans 3.3.1. Nous étudions d'abord l'influence de la segmentation d'image et du seuil associé sur la qualité de l'identification dans 3.3.2. Nous étudions ensuite l'influence des paramètres du modèle numérique pour les calculs (discrétisation, chargement) dans 3.3.3.

### 3.3.1 Présentation des cas d'études

Nous définissons deux cas d'études numériques afin d'évaluer les démarches d'identification. Le premier cas d'étude présenté dans 3.3.1.1 est noté **C3.1**. Nous étudions sur ce premier cas l'influence de la segmentation sur l'identification en comparant des mesures synthétiques idéales (**Mes1**) à des mesures reposant sur des images pixelisées (**Mes2**). Le second cas d'étude présenté dans 3.3.1.2 est noté **C3.2**. Nous comparons l'approche FEMU-G et FEMU-U (référence) dans le cas où les mesures sont idéales.

### 3.3.1.1 Cas d'étude C3.1

Le cas **C3.1** est illustré sur la Figure 3.6.

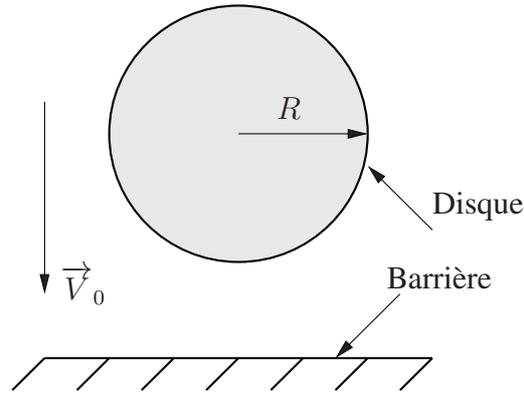


FIGURE 3.6 – Cas d'étude **C3.1**.

Nous nous intéressons à l'impact d'un élastomère sur une barrière rigide indéformable. Le solide est animé d'une vitesse initiale  $V_0 = -4.43 \text{ m.s}^{-1}$ . L'étude se déroule sur  $\tau = [0, T]$  avec  $T = 4 \text{ ms}$ . Le rayon du disque est  $R = 2.5 \text{ cm}$  et la densité est  $\rho = 700 \text{ kg.m}^{-3}$ .

Le potentiel d'énergie de déformation hyper-élastique de Blatz-Ko [11] est retenu pour représenter le comportement du matériau. Nous supposons que le matériau est compressible et isotrope et qu'il est représenté par le potentiel d'énergie de déformation hyper-élastique :

$$W = \frac{G}{2} \left[ \frac{I_2}{I_3} + 2\sqrt{I_3} - 5 \right] \quad (3.14)$$

où  $G$  est le module de cisaillement que nous cherchons à identifier et où :

$$I_1 = \text{tr}[\mathbb{C}], \quad I_2 = \frac{1}{2} ((\text{tr}[\mathbb{C}])^2 - \text{tr}[\mathbb{C}^2]) \quad \text{et} \quad I_3 = \det[\mathbb{C}] \quad (3.15)$$

sont les trois invariants du tenseur de Cauchy-Green droit  $\mathbb{C} = \frac{1}{2}(\mathbb{E} - \mathbb{I})$ .

En utilisant l'équation (1.8) et le potentiel (3.14), nous obtenons la relation de comportement suivante :

$$\mathbb{S} = G[J(2\mathbb{E} + \mathbb{I})^{-1} - (2\mathbb{E} + \mathbb{I})^{-2}] \quad (3.16)$$

Sur ce cas d'étude, nous choisissons la valeur exacte du paramètre, notée  $G_{ex}$ , à  $0.5 \text{ MPa}$ .

Le champ de déplacement de référence,  $\mathbb{U}^{ref}$ , est obtenu avec un maillage fin de 41730 éléments TRI3, un schéma implicite d'ordre 1 de pas de temps  $\Delta t = 10^{-8} \text{ s}$  et la valeur

exacte du paramètre.

Le champ de déplacement calculé,  $\mathbb{U}^{cal}(\theta)$ , est obtenu avec un maillage grossier de 654 éléments TRI3 et un schéma explicite de pas de temps  $\Delta t = 10^{-7}$  s.

Le nombre de points de mesure est  $N_{mes} = 400$ .

### 3.3.1.2 Cas d'étude C3.2

Le cas d'étude **C3.2** est illustré sur la Figure 3.7.

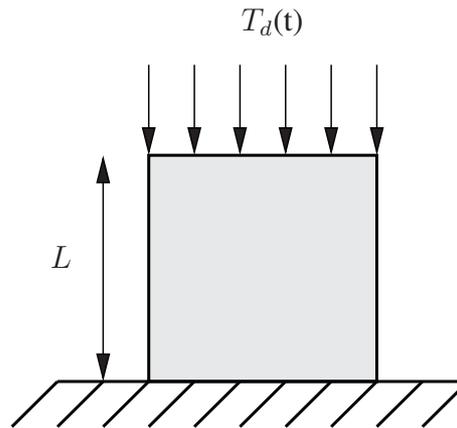


FIGURE 3.7 – Cas d'étude **C3.2**.

Un carré de côté  $L = 0.1$  m est placé (contact sans frottement) sur une fondation rigide indéformable. Un chargement dynamique identique à celui de la Figure 2.3 est appliqué sur la face supérieure du carré. Les caractéristiques du chargement sont  $P_{max} = 10$  GPa et  $t_1 = 0.1$  ms. La durée de l'étude est 0.25 ms et la densité est de  $\rho = 700$  kg.m<sup>-3</sup>.

Le potentiel d'énergie de déformation hyperélastique de Saint-Venant Kirchhoff est retenu pour représenter le comportement du matériau :

$$W = \frac{\nu E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} (tr[\mathbb{E}])^2 + \frac{E}{2(1+\nu)} tr[\mathbb{E}^2] \quad (3.17)$$

où  $E$  est le module de Young et  $\nu$  est le coefficient de Poisson.

En utilisant l'équation (3.17) dans (1.8), nous obtenons la relation de comportement suivante :

$$\mathbb{S} = \frac{\nu E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} tr[\mathbb{E}] \mathbb{I} + \frac{E}{(1+\nu)} \mathbb{E} \quad (3.18)$$

Sur ce cas test, nous choisissons les valeurs exactes des paramètres, notées  $E_{ex}$  et  $\nu_{ex}$ , à 69 GPa et à 0.3.

Le champ de déplacement de référence,  $\mathbb{U}^{ref}$ , est obtenu avec un maillage fin de 1024 éléments TRI3, un schéma implicite d'ordre 1 de pas de temps  $\Delta t = 10^{-7}$  s et la valeur exacte des paramètres.

Le champ de déplacement calculé,  $\mathbb{U}^{cal}(\boldsymbol{\theta})$ , est obtenu avec un maillage de [16, 64, 256, 1024] éléments TRI3 et un schéma explicite de pas de temps  $\Delta t = 10^{-7}$  s.

Le nombre de points de mesure est  $N_{mes} = 250$ .

### 3.3.2 Influence de la segmentation

L'objectif de cette section est de montrer l'influence de la segmentation sur la qualité de l'identification. Nous étudions l'influence de deux paramètres. Dans 3.3.2.1, nous évaluons l'influence du seuillage sur la qualité de l'identification. Dans 3.3.2.2, nous évaluons l'influence de la pixellisation sur la qualité de l'identification.

#### 3.3.2.1 Influence du seuillage

À titre d'exemple, la Figure 3.8 illustre une image pixelisée issue d'une simulation éléments finis.

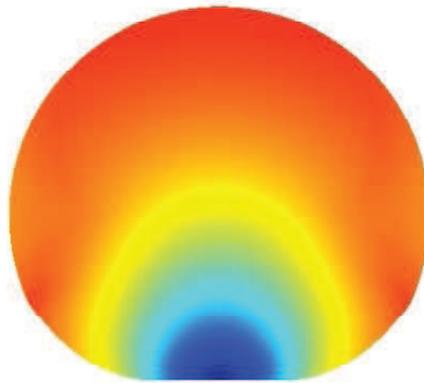


FIGURE 3.8 – Image pixelisée (format PNG) issue d'une simulation éléments finis – cas d'étude **C3.1**.

La Figure 3.9 illustre cette même image après segmentation avec un seuil  $S = 254/255$ .

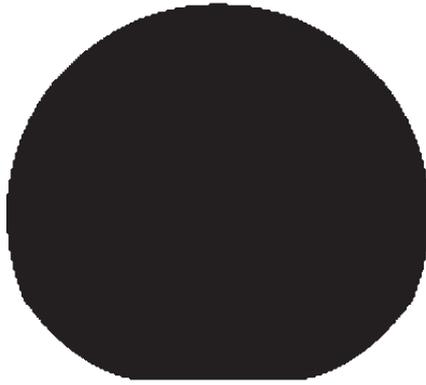


FIGURE 3.9 – Image segmentée correspondante – cas d'étude **C3.1**.

Dans la suite, nous préférons nous placer dans un cas moins optimal. Ainsi, nous choisissons le format JPEG afin d'introduire davantage de bruit sur l'image. Nous évaluons l'influence de trois seuils sur la qualité de l'identification :  $S = 252/255$ ,  $S = 253/255$  et  $S = 254/255$ . La Figure 3.10 montre l'évolution de la surface au cours du temps pour les trois niveaux de seuil et la compare avec celle obtenue pour la mesure parfaite.

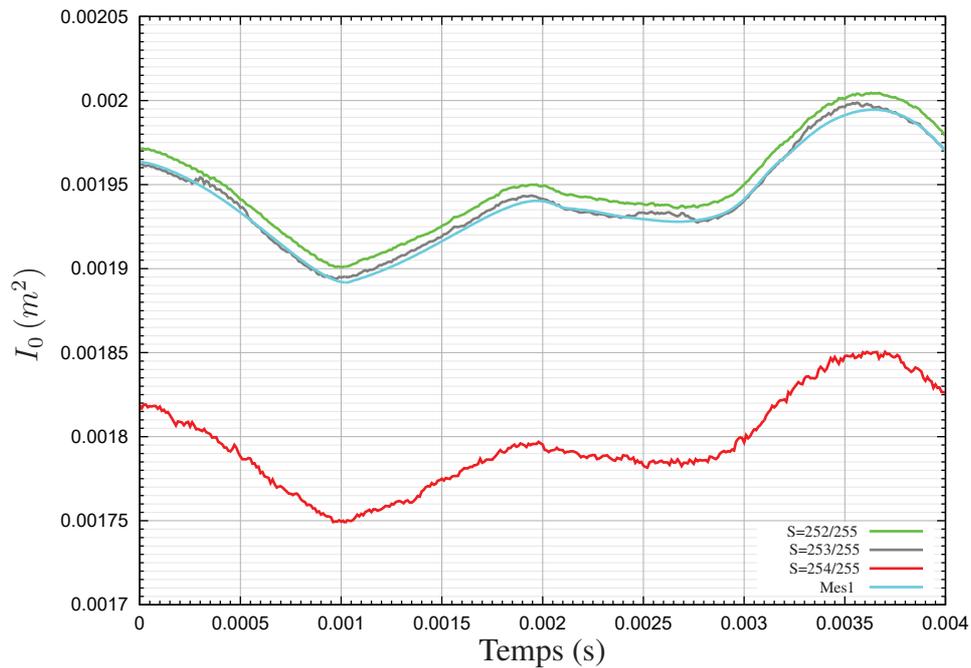


FIGURE 3.10 – Évolution de  $I_0^{mes}$  en fonction du temps pour trois niveaux de seuil, comparaison entre **Mes1** et **Mes2** – cas d'étude **C3.1**.

Il ressort de la Figure 3.10 que le seuil  $S = 252/255$  est satisfaisant, le seuil  $S = 253/255$  conduit aux meilleurs résultats et que le seuil  $S = 254/255$  est le plus mauvais choix. Ce décalage est dû au bruit introduit dans les images par le format JPEG (ce décalage n'est pas observé avec le format PNG). En effet, plusieurs pixels ne sont pas correctement filtrés en raison d'un seuil trop strict. La Figure 3.11 montre l'effet du bruit sur les images segmentées.

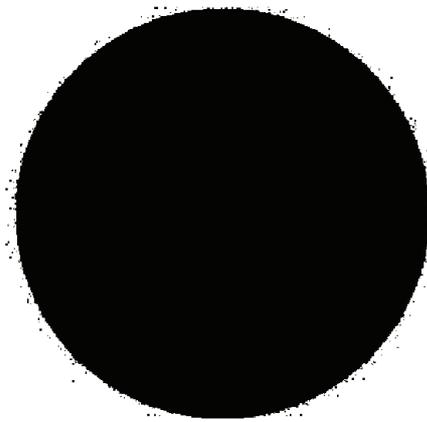


FIGURE 3.11 – Image segmentée obtenue avec  $S = 254/255$  et un format JPEG – cas d'étude **C3.1**.

Nous constatons un anneau de perturbation autour de l'objet.

Nous évaluons les fonctions coûts  $C_0$ ,  $C_{(2,O)}$  et  $C_{(2,G)}$  pour les trois niveaux de seuil sur les Figures 3.12, 3.13 et 3.14.

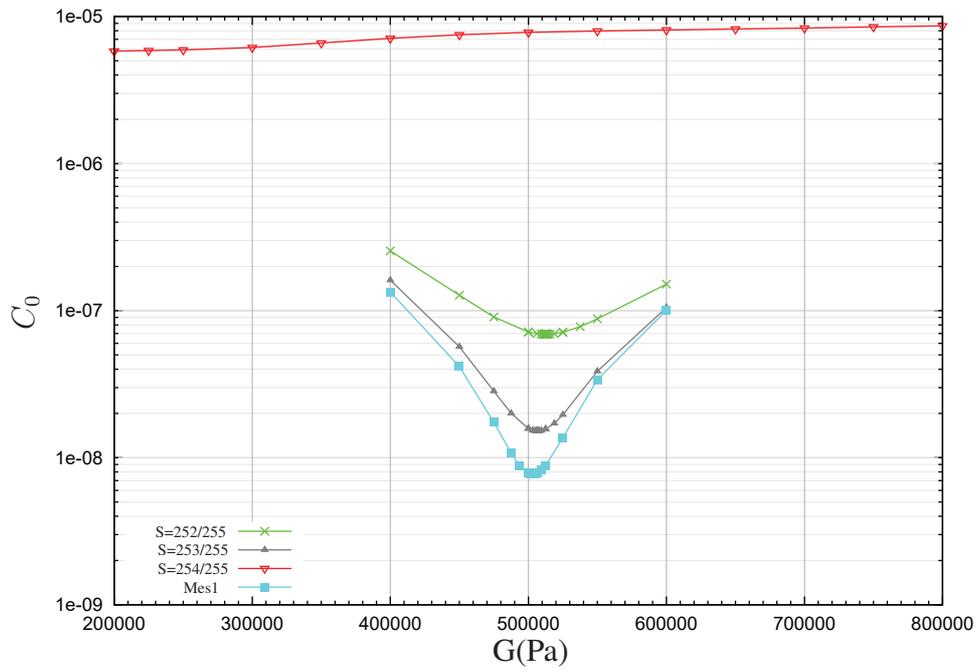


FIGURE 3.12 – Influence de la segmentation par seuillage sur  $C_0$  – cas d'étude **C3.1**.

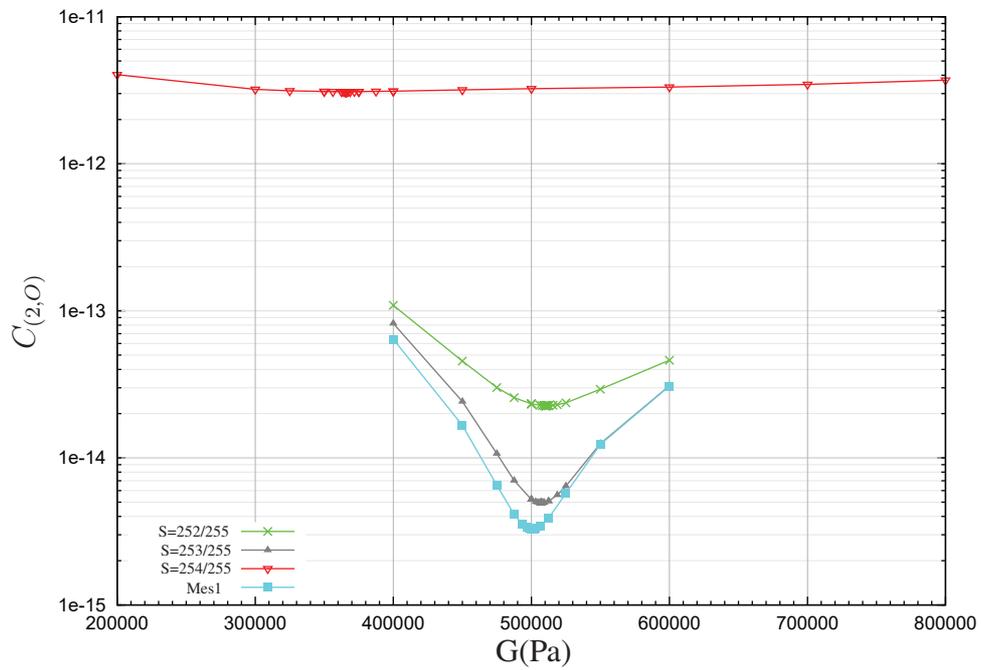


FIGURE 3.13 – Influence de la segmentation par seuillage sur  $C_{(2,0)}$  – cas d'étude **C3.1**.

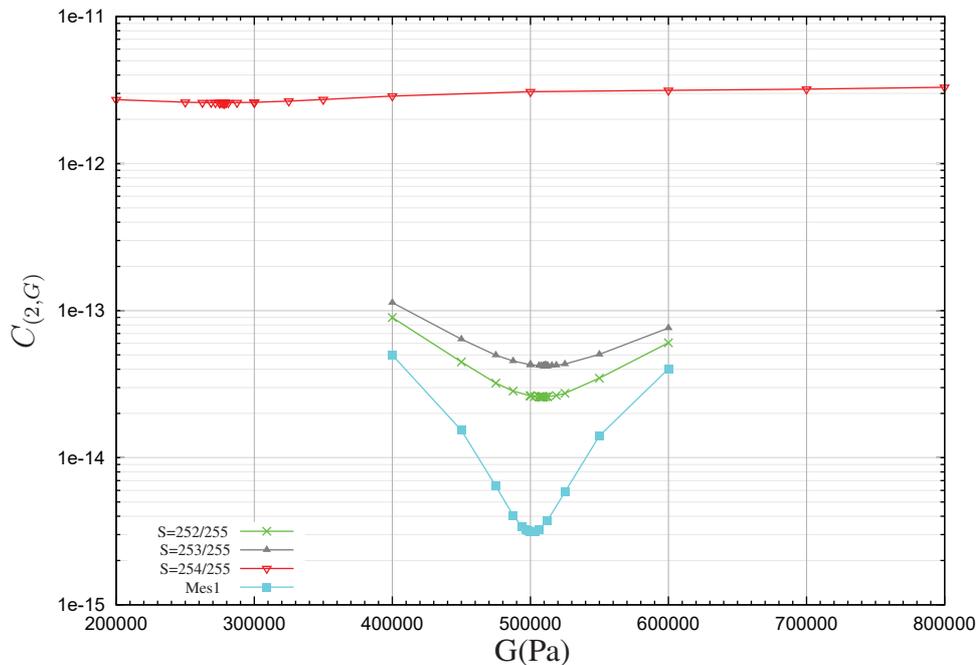


FIGURE 3.14 – Influence de la segmentation par seuillage sur  $C_{(2,G)}$  – cas d'étude C3.1.

Sans surprise, nous remarquons que le choix du seuil conditionne en partie la qualité de l'identification. Les meilleurs résultats sont obtenus pour  $S = 253/255$  et les moins bons pour  $S = 254/255$ . Les meilleurs résultats obtenus avec **Mes2** sont proches de ceux trouvés avec **Mes1**. De plus, nous observons la convexité de toutes les fonctions coûts. Ceci indique l'existence d'un unique minimum global.

Dans la suite, nous souhaitons apporter une amélioration efficace dans le but d'identifier les propriétés mécaniques avec des images compressées avec perte (JPEG). Ainsi, nous conservons le format JPEG et le seuil  $S = 254/255$ .

### 3.3.2.1.1 Amélioration proposée

L'idée consiste à filtrer les images JPEG en appliquant un opérateur morphologique [68]. Cette technique est une succession d'érosion et de dilatation. Pour cela, il est nécessaire de définir une forme géométrique simple (carré, cercle) et sa taille en pixel. Cette forme géométrique est qualifiée d'élément structurant (*e.s*). Pour l'érosion, l'élément structurant est entièrement contenu dans l'image binaire et filtre les perturbations en transformant les pixels noirs en pixels blancs. Pour la dilatation, l'élément structurant n'est plus entièrement contenu dans l'image binaire et il permet de se rapprocher de la forme initiale de l'objet. La Figure 3.15 illustre les phénomènes d'érosion et de dilatation.

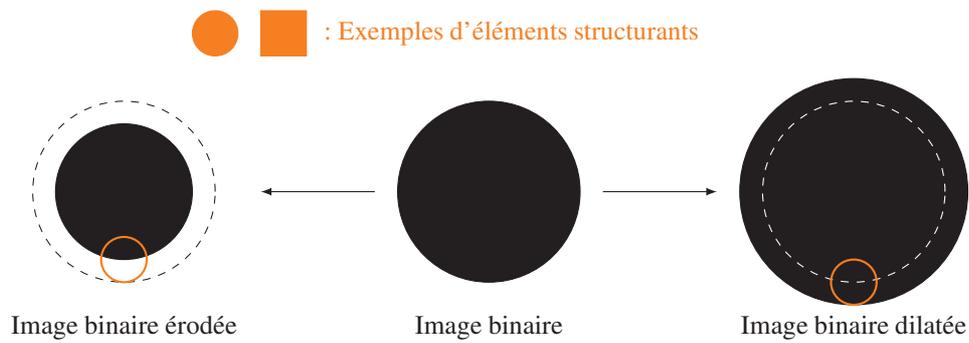


FIGURE 3.15 – Traitement morphologique par érosion et dilatation.

Ce traitement morphologique permet de supprimer les pixels parasites en conservant au mieux la forme initiale de l'objet.

Sur la Figure 3.16, nous traçons  $I_0(t)$  en fonction du temps pour différents éléments structurants. Les éléments structurants utilisés sont : disques de rayon  $r = 3px$  et  $r = 7px$  et carrés de longueur  $l = 5px$  et  $l = 13px$ .

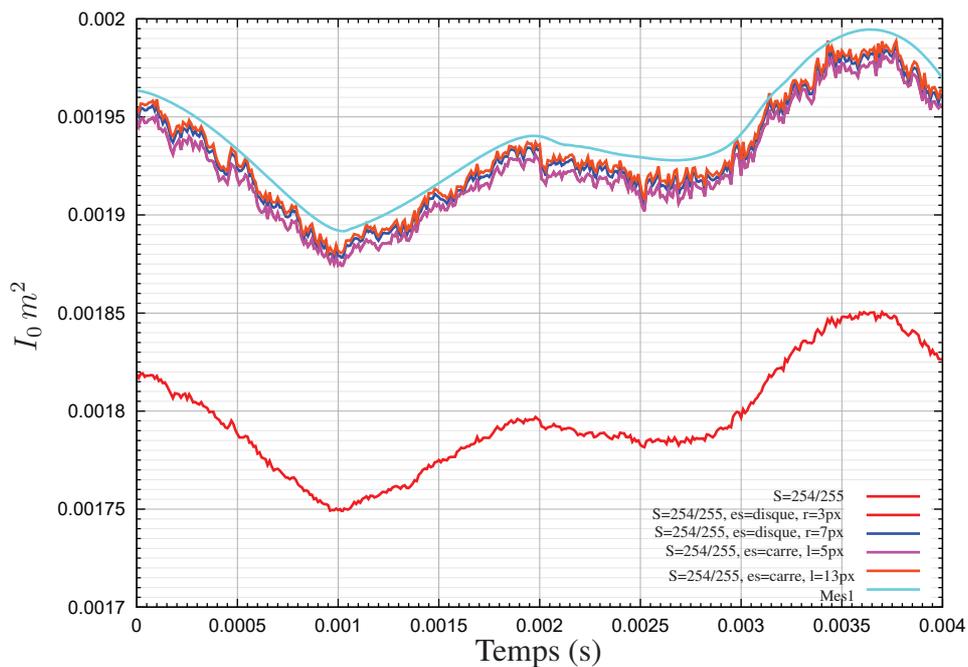


FIGURE 3.16 – Influence de l'opérateur morphologique sur  $I_0(t)$  – cas d'étude C3.1.

Il ressort de la Figure 3.16 que l'amélioration est satisfaisante. En effet, la fonction  $I_0(t)$  obtenue par traitement morphologique se rapproche de la mesure idéale (**Mes1**).

L'amélioration observée se traduit également sur la qualité de l'identification. En effet les Figures 3.17, 3.18 et 3.19 montrent respectivement la qualité de l'identification pour les trois fonctions coûts retenues ( $C_0$ ,  $C_{(2,O)}$ ,  $C_{(2,G)}$ ).

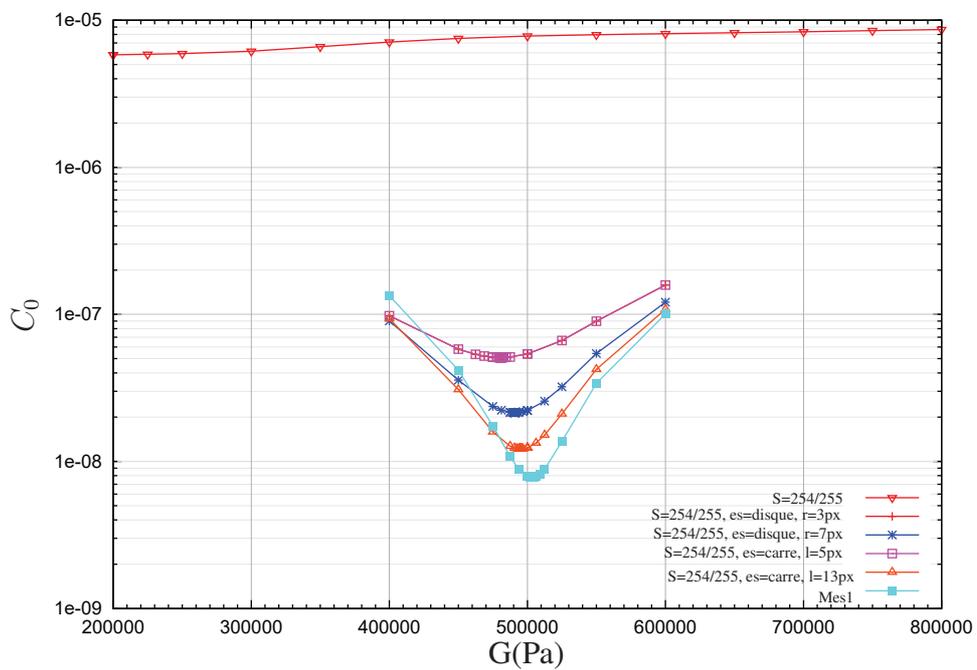


FIGURE 3.17 – Influence de l'opérateur morphologique sur  $C_0$  – cas d'étude **C3.1**.

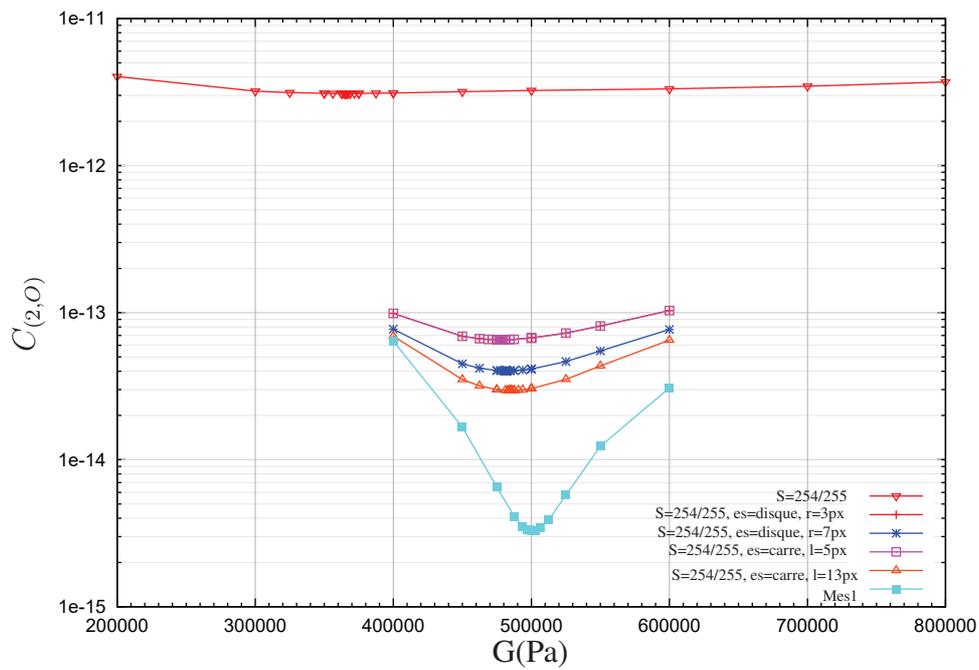


FIGURE 3.18 – Influence de l’opérateur morphologique sur  $C_{(2,0)}$  – cas d’étude **C3.1**.

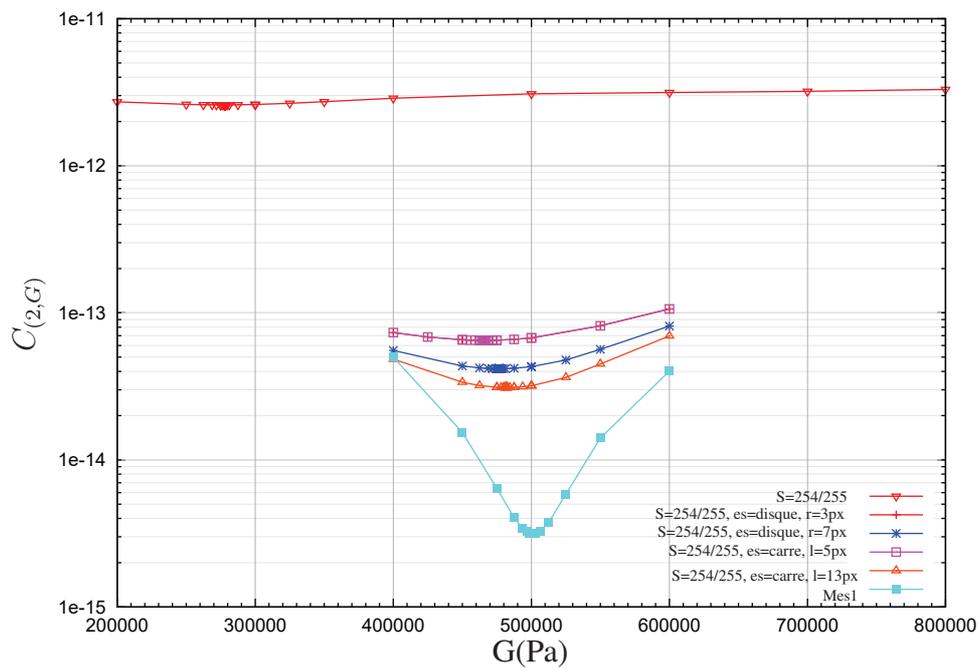


FIGURE 3.19 – Influence de l’opérateur morphologique sur  $C_{(2,G)}$  – cas d’étude **C3.1**.

Pour plus de précisions, les valeurs de l’erreur relative d’identification  $e_G$  sont reportées

dans la Table 3.2, pour l'ensemble des fonctions coûts, des seuils et des éléments structurants.

	$C_0$	$C_{(2,O)}$	$C_{(2,G)}$
$S = 252/255$	2.57	2.10	1.72
$S = 253/255$	1.33	1.43	2.18
$S = 254/255$	#	26.84	44.39
$S = 254/255, es = disque, r = 3px$	3.89	4.36	6.84
$S = 254/255, es = disque, r = 7px$	1.82	3.59	4.68
$S = 254/255, es = carre, l = 5px$	3.89	4.36	6.84
$S = 254/255, es = carre, l = 13px$	0.97	3.04	3.64
<i>Mes1</i>	0.63	0.16	0.26

TABLE 3.2 – Erreurs relatives d'identification  $e_G$  (%) obtenues pour plusieurs paramètres de segmentation – cas d'étude **C3.1**.

Nous constatons que les trois fonctions coûts sont de qualité équivalente ( $e_G < 1\%$ ) lorsque la mesure est idéale. Pour les niveaux de seuil  $S = 252/255$  et  $S = 253/255$ , la qualité des fonctions coûts est également équivalente ( $1.33\% < e_G < 2.57\%$ ). Lorsque le choix du seuil est mal choisi par l'utilisateur, la fonction coût  $C_0$  est la moins précise ( $e_G > 70\%$ ). En revanche, l'amélioration proposée corrige ce défaut. En effet, dans le meilleur des cas ( $S = 254/255, es = carre, l = 13px$ ), l'erreur obtenue avec  $C_0$  est de 0.97% contre 3.04% pour  $C_{(2,O)}$  et 3.64% pour  $C_{(2,G)}$ .

### 3.3.2.2 Influence de la pixellisation

Nous étudions le niveau de pixellisation d'un objet. Nous choisissons d'utiliser dans cette étude un format PNG pour éviter les problèmes de perte d'information du format JPEG. Le seuil de la segmentation est fixé à 254/255. Nous définissons 6 niveaux de pixellisation, notés de P1 à P6. Pour chaque niveau, le nombre de pixels noirs dans l'objet, le nombre de pixels noirs sur le contour de l'objet ainsi qu'un ratio entre les deux valeurs sont donnés dans la Table 3.3.

	Objet pixels	Contour pixels	Ratio
P1	735902	7744	1.05%
P2	257867	4584	1.77%
P3	116270	3072	2.64%
P4	33736	1656	4.90%
P5	5210	644	12.36%
P6	402	180	44.44%

TABLE 3.3 – Niveaux de pixellisation – cas d'étude **C3.1**.

À titre d'exemple, la Figure 3.20 montre les niveaux P1, P3 et P6.

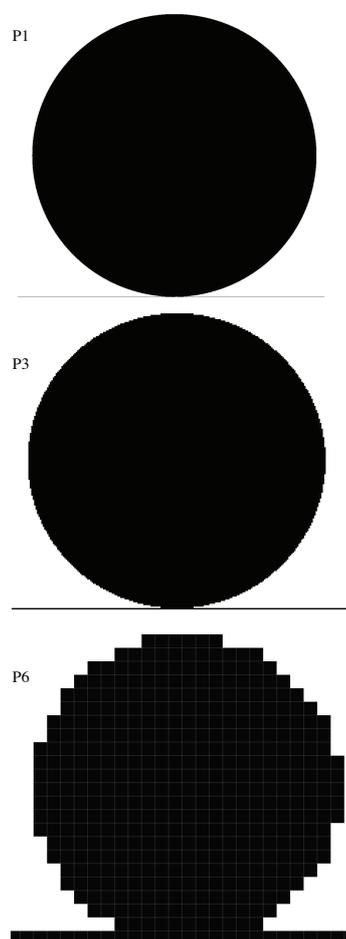


FIGURE 3.20 – Niveaux de pixellisation P1, P3 et P6 – cas d'étude **C3.1**.

Nous évaluons la qualité de l'identification pour chacun des niveaux de pixellisation re-

tenus. Dans l'étude, nous comparons la méthode FEMU-G (**Mes1**) à la méthode FEMU-G (**Mes2**) en retenant les fonctions coûts  $C_0$  et  $C_{(2,0)}$ . La Figure 3.21 l'évolution temporelle de  $I_0(t)$ .

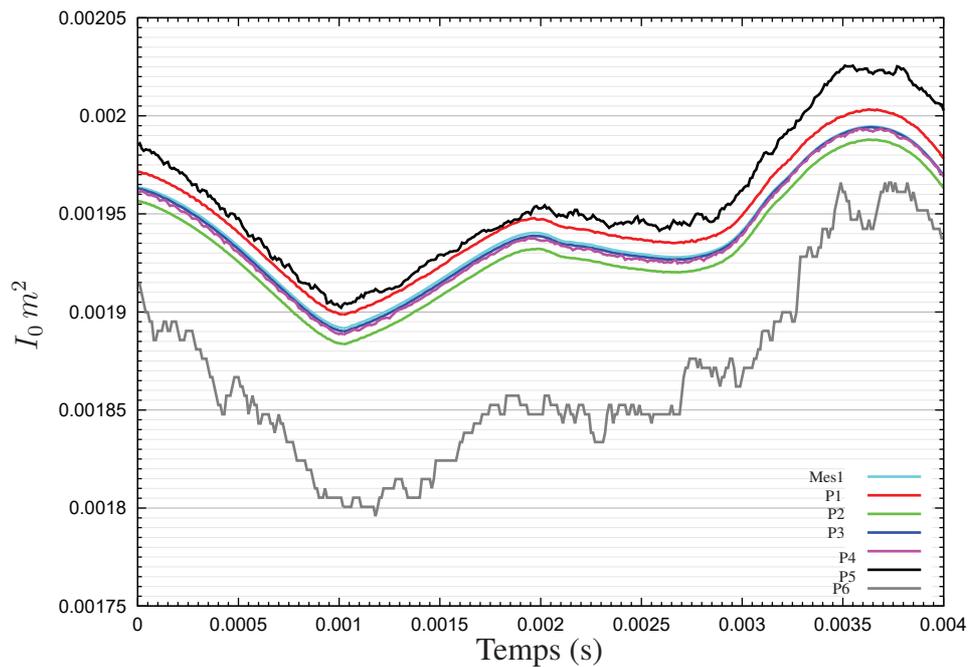


FIGURE 3.21 – Influence de la résolution sur le calcul de  $I_0(t)$  – cas d'étude **C3.1**.

Il ressort de la Figure 3.21 que les niveaux P5 et P6, trop grossiers, ne permettent pas de représenter correctement  $I_0(t)$ . La qualité de l'identification est ensuite illustrée sur les Figures 3.22 et 3.23 pour les fonctions coûts  $C_0$  et  $C_{(2,0)}$ .

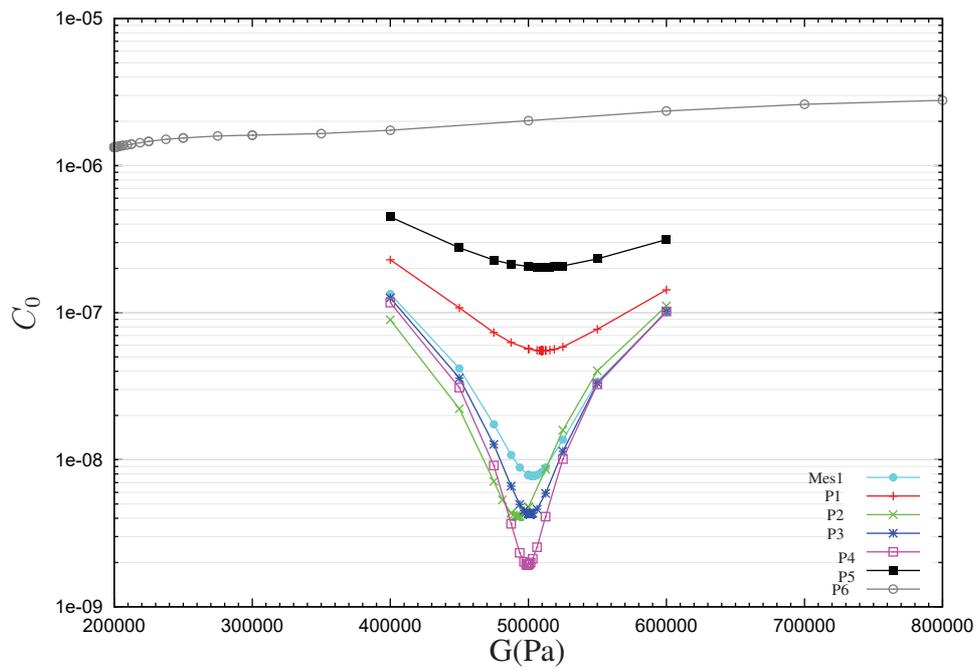


FIGURE 3.22 – Influence de la résolution sur  $C_0$  – cas d'étude **C3.1**.

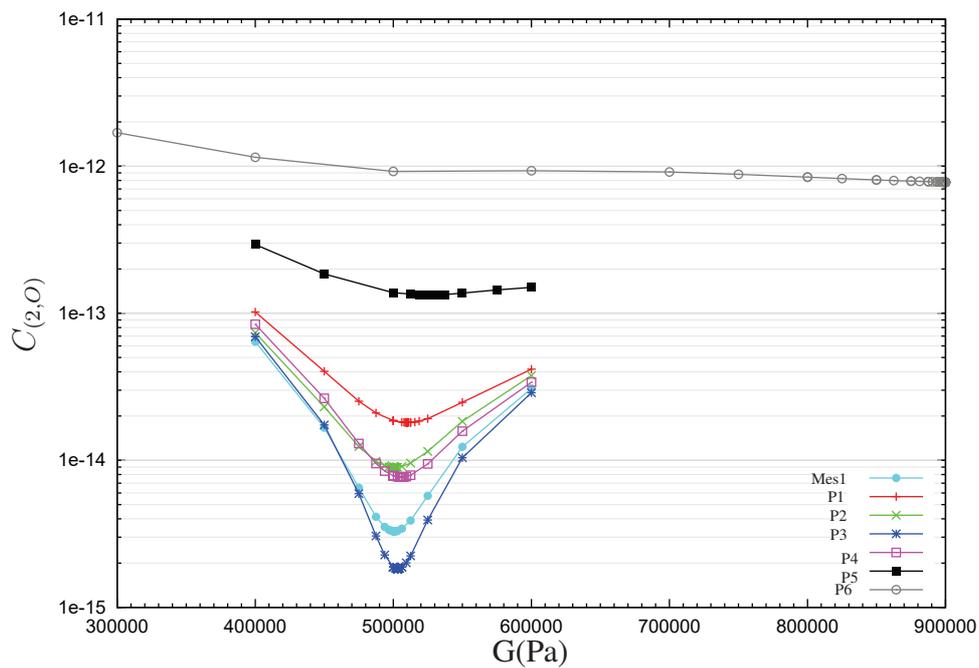


FIGURE 3.23 – Influence de la résolution sur  $C_{(2,0)}$  – cas d'étude **C3.1**.

Nous constatons que la démarche d'identification développée conduit à un unique mini-

mum global dans tous les cas sauf pour le cas où les quantités d'intérêts sont mal représentées (P6). Les erreurs relatives d'identification sont données dans la Table 3.4.

	$C_0$	$C_{(2,0)}$
<i>Mes1</i>	0.63	0.16
P1	0.23	0.63
P2	1.58	0.16
P3	1.97	2.02
P4	0.13	1.14
P5	1.96	5.10
P6	#	#

TABLE 3.4 – Erreurs relatives d'identification  $e_G$  (%) obtenues pour plusieurs niveaux de résolution – cas d'étude **C3.1**.

Nous constatons que de bons résultats sont obtenus pour le niveau P1 avec  $C_0$  et  $C_{(2,0)}$ . En effet, ces résultats sont proches de ceux obtenus avec les mesures parfaites. De bons résultats sont également obtenus avec  $C_{(2,0)}$  pour P2 et avec  $C_0$  pour P4. Les autres résultats sont satisfaisants avec une erreur comprise entre 1% et 2%. Nous observons une légère dégradation ( $e_G = 5.1\%$ ) pour le niveau P5 avec  $C_{(2,0)}$ .

À l'issue des études réalisées, nous remarquons que l'approche géométrique a un bon comportement. Dans la suite, nous étudions l'influence des paramètres du modèle numérique.

### 3.3.3 Influence des paramètres du modèle numérique

À présent, nous évaluons l'influence des paramètres du modèle numérique sur la qualité de l'identification. Nous retenons le cas **C3.2** pour les études suivantes. Les deux approches (FEMU-G et FEMU-U) sont comparées en termes de qualité. Afin de tester les potentialités de l'approche proposée, nous nous plaçons dans un cas idéal où les mesures sont supposées parfaites. Plusieurs paramètres du modèle éléments finis peuvent avoir une influence sur le résultat. Nous évaluons l'influence de la discrétisation spatiale dans 3.3.3.1, l'influence de la discrétisation temporelle dans 3.3.3.2 et l'influence de l'amplitude du chargement dans 3.3.3.3 sur l'identification.

### 3.3.3.1 Influence de la discrétisation spatiale

Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'influence du nombre d'éléments utilisés pour le maillage. Les quantités d'intérêts mesurées sont obtenues avec  $N_{EF} = 1024$  tandis que les quantités d'intérêts calculées sont obtenues avec des maillages allant de 16 à 1024 éléments. À maillage équivalent, un écart de modèle est assuré par la différence des schémas numérique de résolution en temps.

Nous comparons les fonctions coûts  $C_0$ ,  $C_{(2,O)}$  et  $C_{(2,G)}$  à la fonction coût  $C_u$  (approche cinématique en déplacement). Nous évaluons les erreurs relatives d'identification  $e_E$  et  $e_\nu$ . Les Figures 3.24 et 3.25 illustrent respectivement les erreurs relatives d'identification  $e_E$  et  $e_\nu$  en fonction de  $N_{EF}$ .

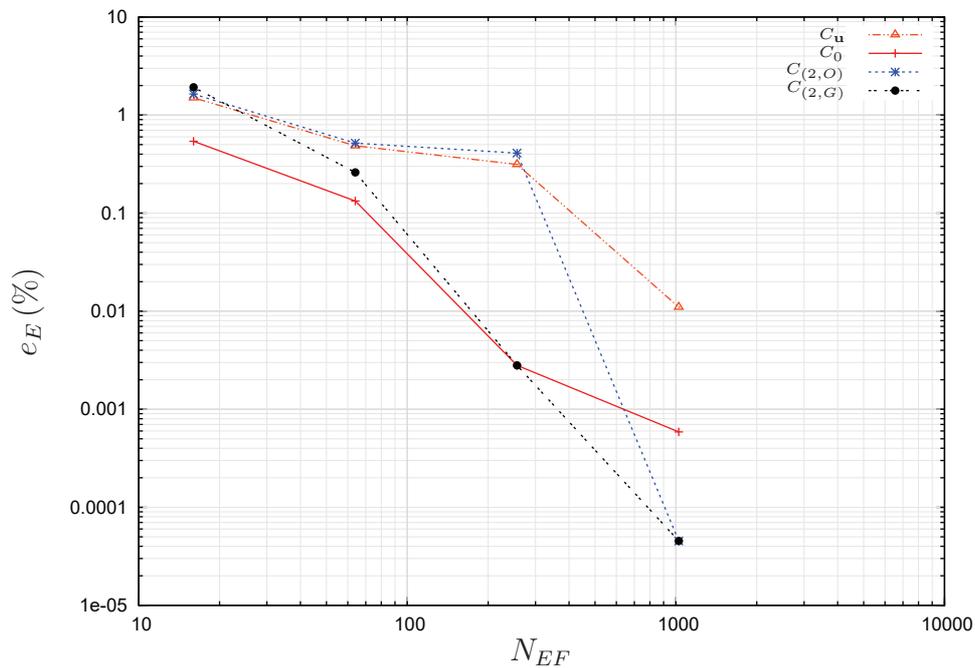


FIGURE 3.24 – Erreur relative d'identification  $e_E$  (%) en fonction de  $N_{EF}$  – cas d'étude C3.2.

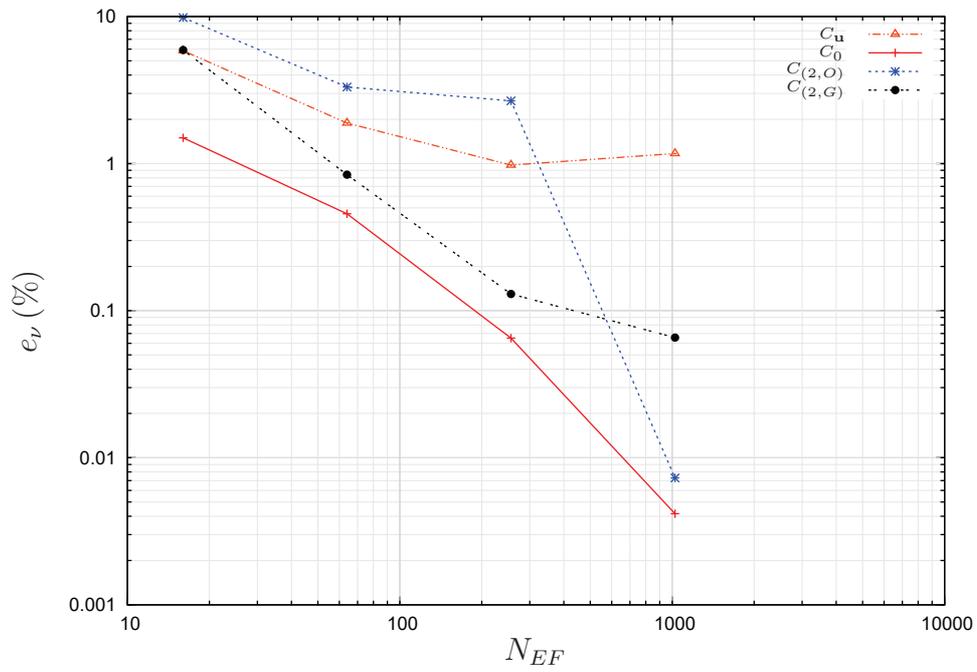


FIGURE 3.25 – Erreur relative d’identification  $e_\nu$  (%) en fonction de  $N_{EF}$  – cas d’étude **C3.2**.

Nous constatons qu’à maillage équivalent, l’approche géométrique donne de meilleurs résultats pour l’identification des deux paramètres. Les deux meilleures fonctions coûts étant  $C_0$  et  $C_{(2,G)}$ . L’identification du coefficient de Poisson est plus délicate mais de bonne qualité avec la fonction coût  $C_0$ .

Plus en détail, la Table 3.5 donne les valeurs numériques des erreurs relatives d’identification.

		$N_{EF} = 16$	$N_{EF} = 64$	$N_{EF} = 256$	$N_{EF} = 1024$
$e_E$ (%)	$C_{\mathbf{u}}$	1.50	0.49	0.31	0.011
	$C_0$	0.54	0.13	0.0028	0.00059
	$C_{(2,O)}$	1.64	0.052	0.41	0.000045
	$C_{(2,G)}$	1.92	0.26	0.0028	0.000045
$e_\nu$ (%)	$C_{\mathbf{u}}$	5.86	1.89	0.98	1.17
	$C_0$	1.50	0.46	0.065	0.042
	$C_{(2,O)}$	9.83	3.32	2.67	0.0073
	$C_{(2,G)}$	5.92	0.84	0.13	0.066

TABLE 3.5 – Erreurs relatives d’identification  $e_E$  et  $e_\nu$  (%) en fonction de  $N_{EF}$  – cas d’étude **C3.2**.

Dans la suite, nous retenons le maillage  $N_{EF} = 256$  pour obtenir les quantités d’intérêts calculées. Ce choix garantit la conservation d’un minimum de nœud dans la zone de contact et permet le bon déroulement des calculs.

### 3.3.3.2 Influence de la discrétisation temporelle

Le choix du maillage étant fixé par l’étude précédente, nous évaluons à présent l’influence des paramètres propres à la discrétisation temporelle. En particulier, nous agissons sur la valeur du pas de temps  $\Delta t$  des schémas et sur la valeur du nombre de piquets de mesure  $N_{mes}$ . Nous évaluons l’influence de ces deux paramètres indépendamment. Dans un premier temps, nous fixons une durée de simulation à  $T = 0.25 \text{ ms}$  et nous fixons  $N_{mes} = 250$ . Les valeurs prises par  $\Delta t$  ainsi que les erreurs relatives en identification sont données dans la Table 3.6.

		$\Delta t = 0.1 \mu s$	$\Delta t = 0.2 \mu s$	$\Delta t = 1 \mu s$
$e_E$ (%)	$C_{\mathbf{u}}$	0.31	0.30	0.32
	$C_0$	0.0028	0.085	0.085
	$C_{(2,O)}$	0.41	0.37	0.42
	$C_{(2,G)}$	0.0028	0.085	0.19
$e_\nu$ (%)	$C_{\mathbf{u}}$	0.98	1.50	0.52
	$C_0$	0.065	0.45	0.39
	$C_{(2,O)}$	2.67	2.21	2.80
	$C_{(2,G)}$	0.13	0.32	0.72

TABLE 3.6 – Erreurs relatives d’identification  $e_E$  et  $e_\nu(\%)$  en fonction de  $\Delta t$  (s) – cas d’étude **C3.2**.

Nous constatons que les fonctions coûts  $C_0$  et  $C_{(2,G)}$  conduisent aux meilleurs résultats pour l’ensemble des valeurs  $\Delta t$ .

À présent, nous fixons le pas de temps à  $\Delta t = 0.1 \mu s$  et nous agissons sur le nombre de piquets de mesure. Les valeurs prises par  $N_{mes}$  ainsi que les erreurs relatives d’identification sont données dans la Table 3.7.

		$N_{mes} = 25$	$N_{mes} = 125$	$N_{mes} = 250$
$e_E$ (%)	$C_{\mathbf{u}}$	0.30	0.31	0.31
	$C_0$	0.017	0.017	0.0028
	$C_{(2,O)}$	0.46	0.40	0.41
	$C_{(2,G)}$	0.017	0.017	0.0028
$e_\nu$ (%)	$C_{\mathbf{u}}$	1.50	0.98	0.98
	$C_0$	0.13	0.13	0.065
	$C_{(2,O)}$	2.99	2.54	2.67
	$C_{(2,G)}$	0.065	0.065	0.13

TABLE 3.7 – Erreurs relatives d’identification  $e_E$  et  $e_\nu(\%)$  en fonction de  $N_{mes}$  – cas d’étude **C3.2**.

Les fonctions coûts  $C_0$  et  $C_{(2,G)}$  sont à nouveau les meilleures fonctions. Nous constatons également une amélioration de l’identification avec l’augmentation du nombre de mesures.

Dans la suite, nous fixons le pas de temps  $\Delta t = 0.1 \mu s$  et le nombre de piquets de mesure à  $N_{mes} = 250$ .

### 3.3.3.3 Influence de l'amplitude du chargement

Une dernière étude consiste à étudier l'influence de l'amplitude du chargement  $P_{max}$  qui agit directement sur la signature caractéristique de l'évolution temporelle de la surface comme le montre la Figure 3.26.

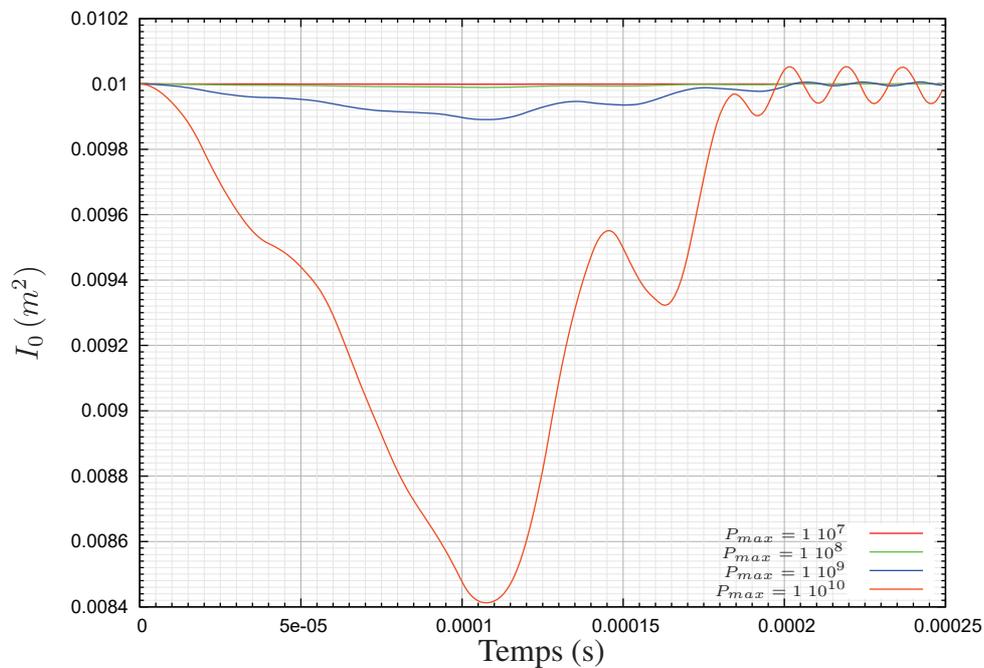


FIGURE 3.26 – Influence de  $P_{max}$  (en Pa) sur  $I_0(t)$  – cas d'étude **C3.2**.

La Table 3.8 rassemble les erreurs relatives d'identification pour différentes valeurs de  $P_{max}$ .

		$P_{max}$ (en Pa)	$1 \cdot 10^7$	$1 \cdot 10^8$	$1 \cdot 10^9$	$1 \cdot 10^{10}$
$e_E$ (%)	$C_u$		0.16	0.16	0.22	0.31
	$C_0$		0.040	0.030	0.011	0.0028
	$C_{(2,O)}$		0.14	0.15	0.18	0.40
	$C_{(2,G)}$		0.04	0.04	0.017	0.0028
$e_\nu$ (%)	$C_u$		0.59	0.59	0.26	0.98
	$C_0$		0.065	0.065	0.065	0.065
	$C_{(2,O)}$		0.65	0.65	0.78	2.67
	$C_{(2,G)}$		0.065	0.065	0.065	0.13

TABLE 3.8 – Erreurs relatives d’identification  $e_E$  et  $e_\nu$ (%) en fonction de  $P_{max}$ (en Pa) – cas d’étude **C3.2**.

Il ressort de la Table 3.8 que la qualité de l’identification ne semble pas varier de façon significative en fonction de  $P_{max}$ . Nous rappelons que ces résultats sont obtenus avec un jeu de mesure parfaite (**Mes1**), la précision machine permet donc de détecter la signature caractéristique de la surface.

Afin de tester la méthode de manière plus réaliste, nous utilisons un jeu de mesure pixelisée au format PNG. Un seuil de 254/255 est utilisé pour la segmentation. Le niveau de pixellisation est choisi à P3. Les Figures 3.27 à 3.30 illustrent la signature caractéristique de la surface pour les différents niveaux d’amplitude.

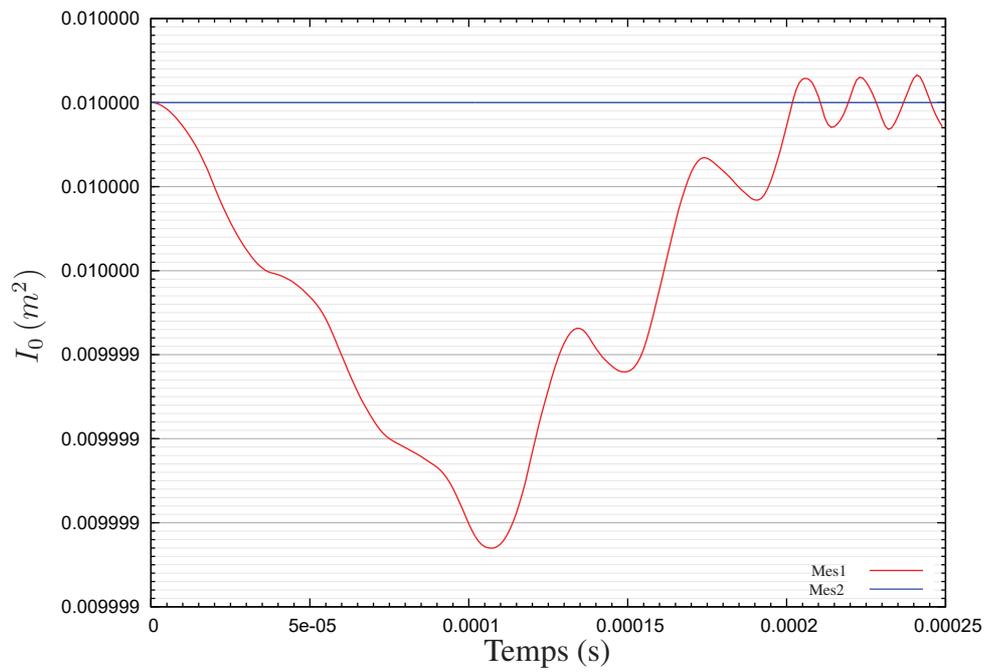


FIGURE 3.27 – Influence de  $P_{max}$ (en Pa) sur  $I_0(t)$  ( $P_{max} = 1 \cdot 10^7$  Pa) – cas d'étude C3.2.

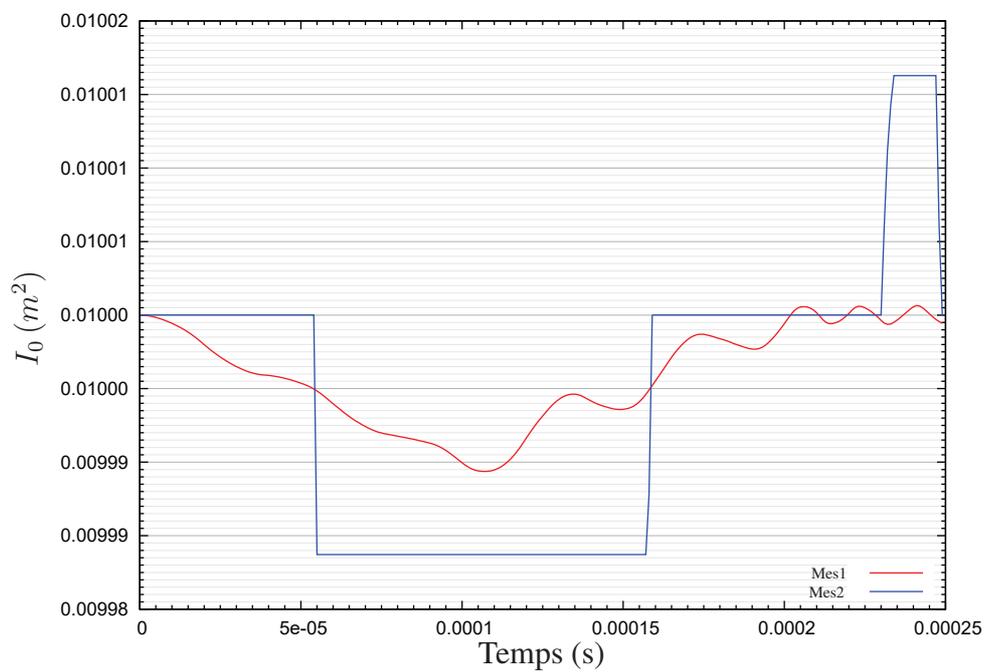


FIGURE 3.28 – Influence de  $P_{max}$ (en Pa) sur  $I_0(t)$  ( $P_{max} = 1 \cdot 10^8$  Pa) – cas d'étude C3.2.

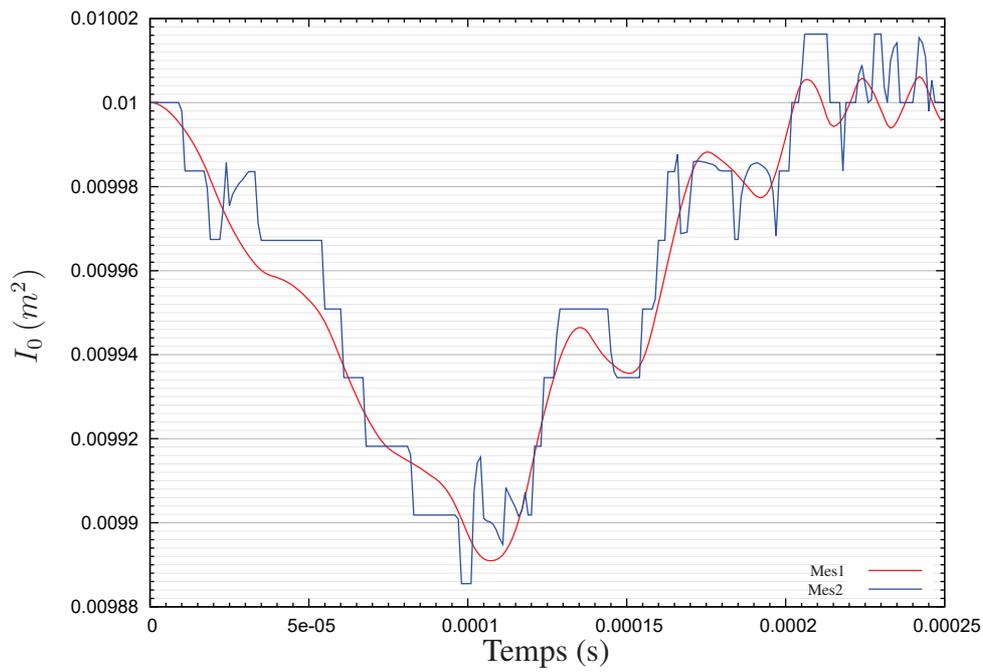


FIGURE 3.29 – Influence de  $P_{max}$  (en Pa) sur  $I_0(t)$  ( $P_{max} = 1 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ ) – cas d'étude **C3.2**.

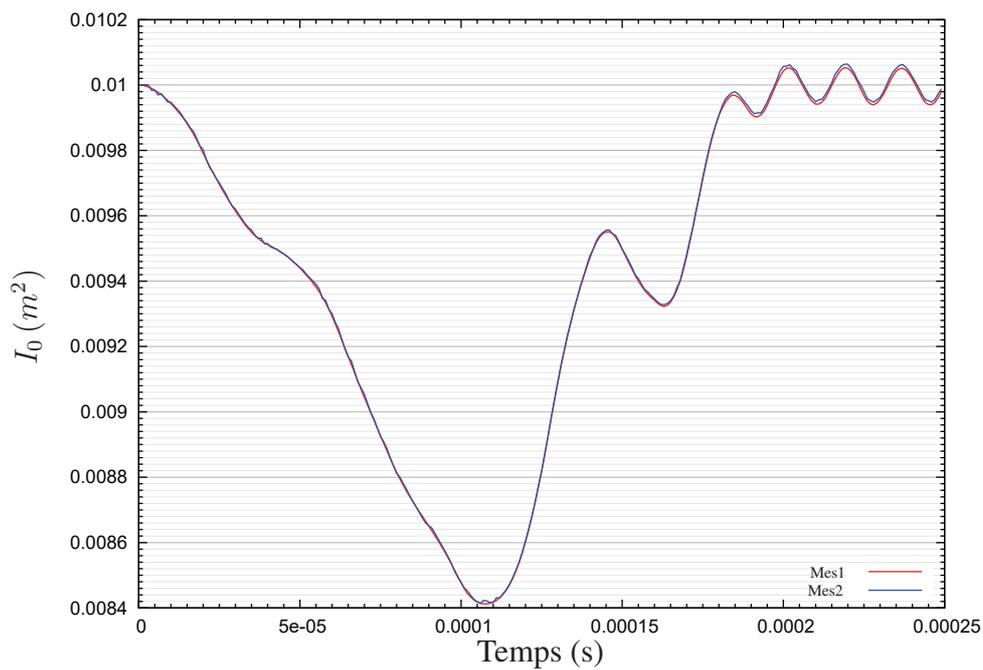


FIGURE 3.30 – Influence de  $P_{max}$  (en Pa) sur  $I_0(t)$  ( $P_{max} = 1 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ ) – cas d'étude **C3.2**.

Nous constatons que l'information géométrique n'est pas exploitable pour les faibles ni-

veaux d'amplitude. En effet, la Figure 3.31 illustre la qualité de l'identification obtenue avec  $C_0$ ,  $C_{(2,O)}$  et  $C_{(2,G)}$  pour **Mes1** et pour **Mes2**.

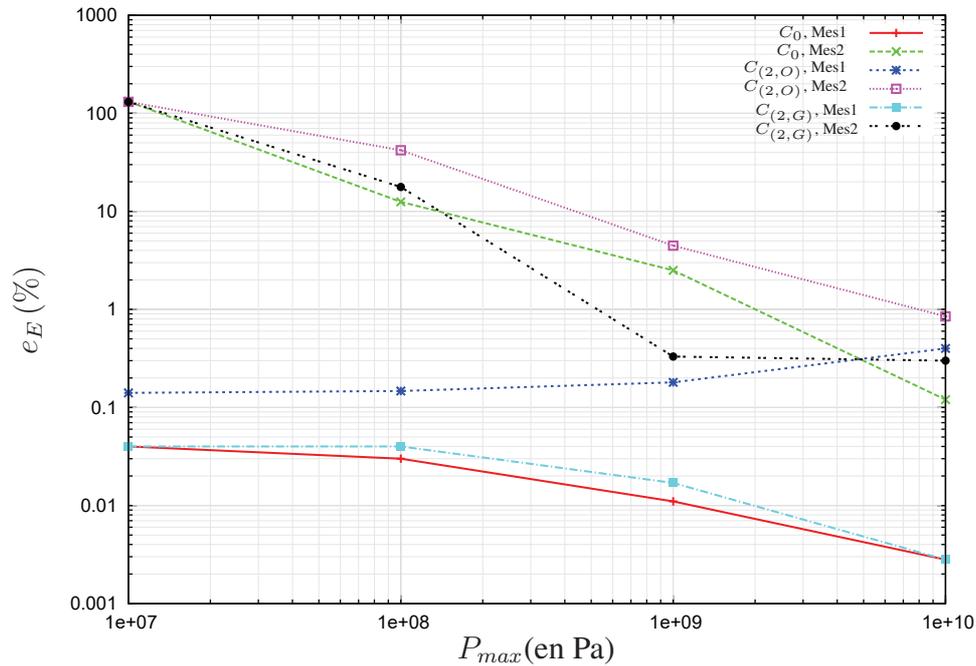


FIGURE 3.31 – Erreur relative d'identification  $e_E$  (%) en fonction de  $P_{max}$  (en Pa) (comparaison entre Mes1 et Mes2) – cas d'étude **C3.2**.

L'approche géométrique semble mieux adaptée pour les grandes transformations. Le niveau de pixellisation doit être compatible avec le niveau de déformation.

L'ensemble des études réalisées montrent que l'approche géométrique est intéressante et adaptée au contexte de la dynamique dans le cas des non-linéarités géométriques. Dans la suite, nous étudions la robustesse de cette approche.

### 3.4 Étude en robustesse lorsque la mesure est bruitée

Dans 3.4, nous ajoutons un bruit synthétique sur les mesures parfaites **Mes1**. Ceci permet de comparer l'approche développée et FEMU-U à partir d'un jeu de données identiques. Dans un premier temps, nous montrons dans 3.4.1 comment générer des quantités d'intérêts mesurées bruitées. Ensuite, un nouveau cas d'étude est présenté dans 3.4.2. Enfin, dans 3.4.3, nous validons numériquement la démarche d'identification développée.

### 3.4.1 Génération des quantités d'intérêts mesurées bruitées

En nous appuyant sur 2.3.1.2, nous rappelons que les composantes  $U_{m\ n}^{mes}$  de la matrice des mesures bruitées sont définies par :

$$U_{m\ n}^{mes} = (1 + \beta \xi_{m\ n}(\omega)) U_{m\ n}^{(ref,p)} \quad \forall m \times n \in [0, N_{eq}] \times [0, N_{mes}] \quad (3.19)$$

où  $\beta$  est un paramètre pouvant prendre les valeurs suivantes [0%; 5%; 10%; 15%; 20%]. L'ensemble des variables aléatoires, notées  $\xi_{m\ n}(\omega)$ , sont indépendantes et uniformes entre  $[-1, 1]$ . Nous rappelons de plus que la fonction coût de l'approche cinématique en déplacement est donnée par l'équation (2.55).

Les quantités d'intérêts géométriques bruitées sont obtenues à partir des composantes  $U_{m\ n}^{mes}$  et d'une quadrature de Gauss comme présenté dans 3.2.2.1. Nous obtenons ainsi la variable aléatoire  $I_{(n,P)}^{mes}(t; \omega)$ .

### 3.4.2 Présentation du cas d'étude

La géométrie, les conditions limites et le chargement agissant sur le cas d'étude, nommés **C3.3** est présenté sur la Figure 3.32.

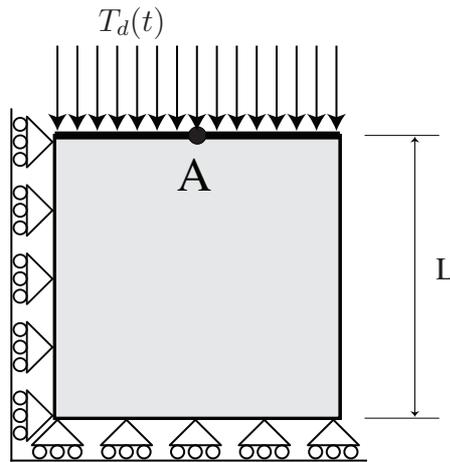


FIGURE 3.32 – Cas d'étude **C3.3**.

L'évolution temporelle du chargement  $T_d(t)$  est identique à celle présentée sur la Figure 2.3. Les principaux paramètres associés au cas d'étude sont :

- $L = 0.01\ m$ ,  $P_{max} = 1.6\ MPa$ ,  $t_1 = 0.1\ ms$ ,  $T = 0.25\ ms$ ,  $G_{ex} = 7\ MPa$  et  $N_{mes} = 250$ .

Les quantités d'intérêts mesurées  $\mathbb{U}^{mes}(\omega)$  sont générées en utilisant les paramètres suivants :

- maillage de 1024 éléments TRI3 et un schéma implicite de Newmark avec  $\Delta t = 10^{-7}$ s.

Les quantités d'intérêts calculées  $\mathbb{U}^{cal}(\theta)$  sont générées en utilisant les paramètres suivants :

- maillages de [16, 64, 256, 1024] éléments TRI3 et un schéma explicite avec  $\Delta t = 10^{-7}$ s.

### 3.4.3 Validation numérique pour le cas C3.3

La méthodologie est validée numériquement en étudiant ses performances et sa sensibilité au bruit de mesure. Les critères de l'évaluation (précision intrinsèque et perturbée, robustesse) sont identiques à ceux définis dans 2.2.5. Le comportement des différentes stratégies d'identification est discuté dans la suite. Nous comparons les fonctions coût  $C_u$ ,  $C_0$  et  $C_{(2,G)}$  (simplement notée  $C_2$  dans la suite) identifiées dans 3.3 comme étant les meilleures.

Dans un premier temps, nous étudions l'influence du maillage sur le calcul de  $\mathbb{U}^{cal}$ . Nous traçons  $\bar{e}_G$  (moyenne de l'erreur  $e_G$ ) pour  $\beta = 0\%$  (cas déterministe) en fonction de  $N_{EF}$  sur la Figure 3.33.

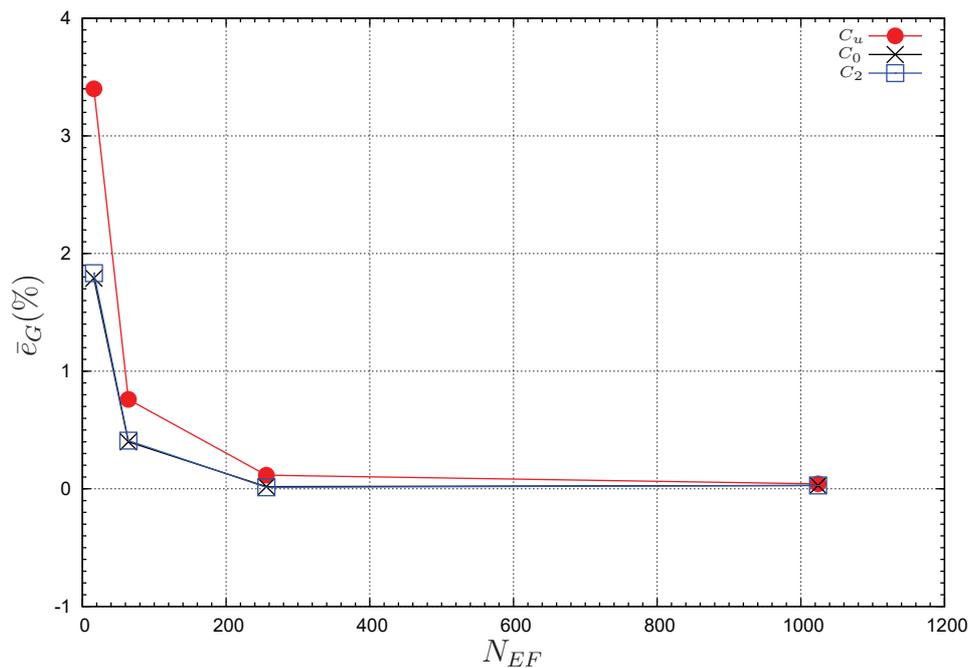


FIGURE 3.33 – Convergence en maillage ;  $\bar{e}_G(\%)$  en fonction de  $N_{EF}$  – cas d'étude C3.3.

Pour toutes les fonctions coûts, l'erreur décroît quand  $N_{EF}$  augmente. L'erreur résiduelle obtenue pour  $N_{EF} = 1024$  correspond à la différence des schémas utilisés pour la résolution.

Dans la suite, on conserve le maillage de 64 éléments.

Dans un second temps, nous comparons le comportement de la fonction coût  $C_u$ ,  $C_0$  et  $C_2$  pour plusieurs niveaux de bruit. Les Figures 3.34, 3.35 et 3.36 présentent respectivement l'erreur moyenne  $\bar{e}_G(\omega)$ , l'écart-type de l'erreur  $\hat{e}_G(\omega)$  et l'erreur seuil  $e_G^{90\%}$  pour différentes valeurs de  $\beta$ .

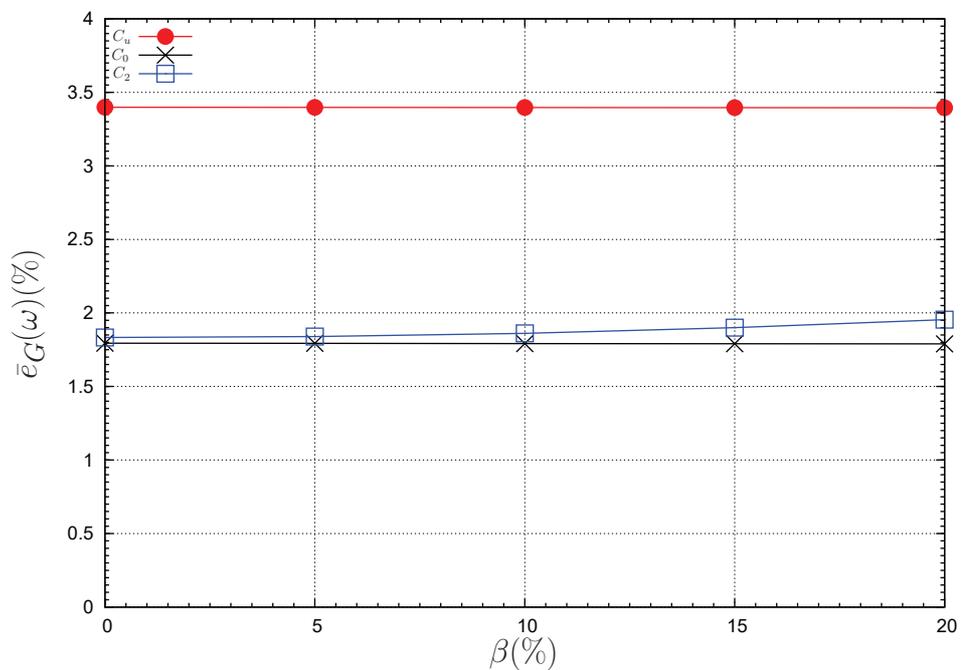


FIGURE 3.34 – Moyenne de l'erreur  $\bar{e}_G(\omega)$  en fonction de  $\beta$  – cas d'étude **C3.3**.

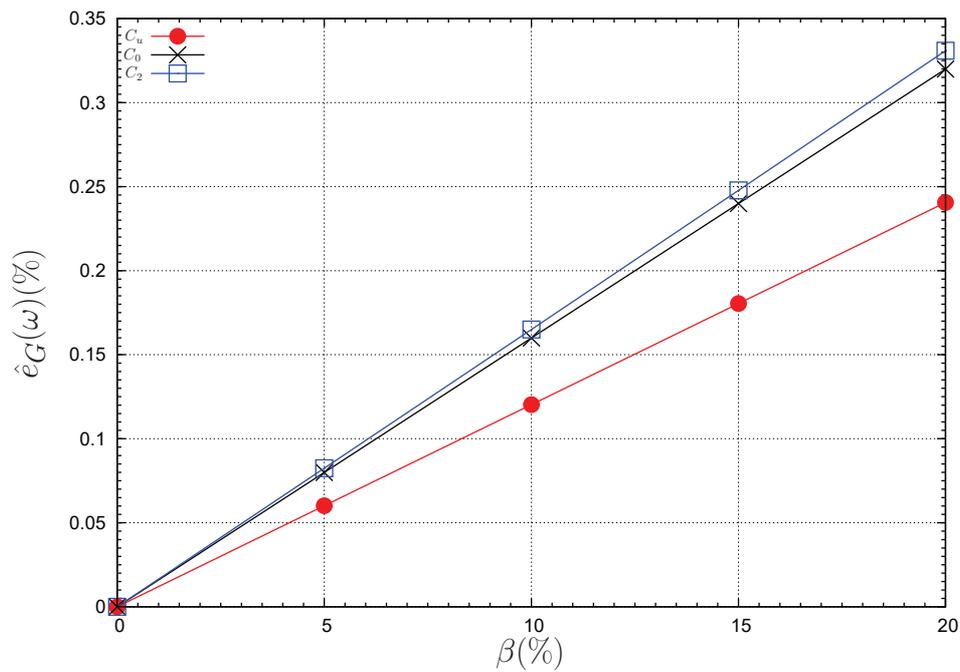


FIGURE 3.35 – Écart-type de l'erreur  $\hat{e}_G(\omega)$  en fonction de  $\beta$  – cas d'étude **C3.3**.

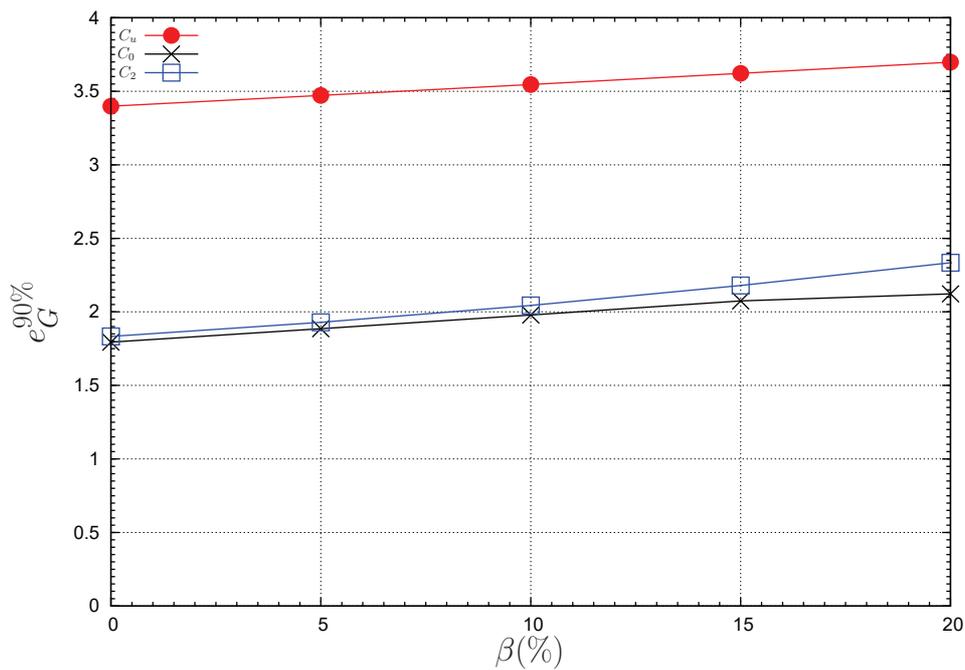


FIGURE 3.36 – Erreur seuil  $e_G^{90\%}$  en fonction de  $\beta$  – cas d'étude **C3.3**.

Nous constatons que les deux approches (FEMU-G et FEMU-U) sont peu sensibles au niveau du bruit et que le meilleur comportement est obtenu pour l'approche géométrique. L'approche cinématique est légèrement plus robuste. À titre illustratif, nous présentons éga-

lement la fonction densité de probabilité (PDF) de  $e_G(\omega)$  sur la Figure 3.37 et la fonction de distribution cumulative (CDF) de  $e_G(\omega)$  sur la Figure 3.38 pour un niveau de bruit de  $\beta = 20\%$ .

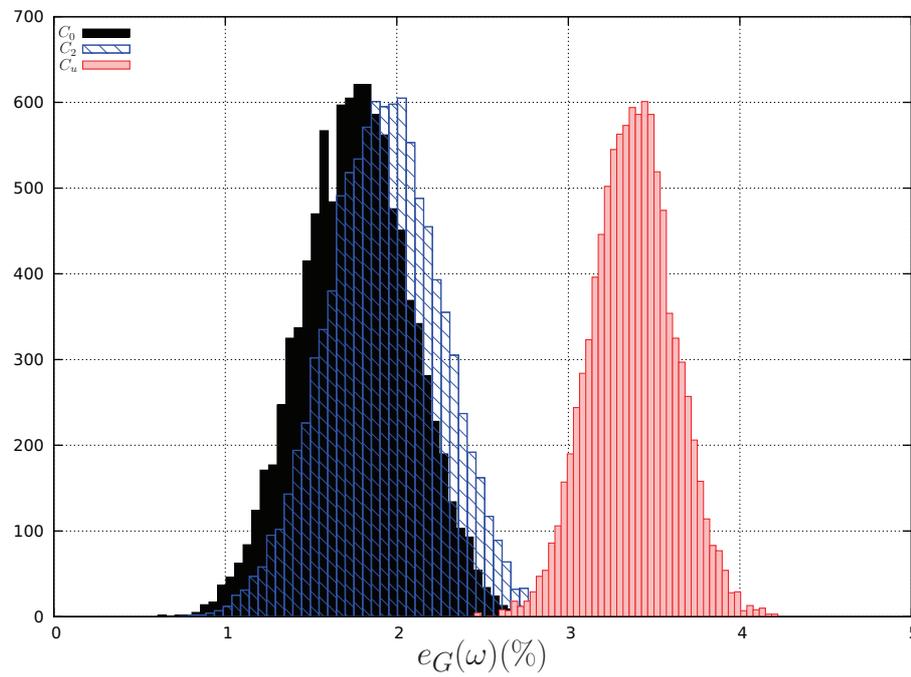


FIGURE 3.37 – PDF de  $e_G(\omega)$  pour  $\beta = 20\%$  – cas d'étude C3.3.

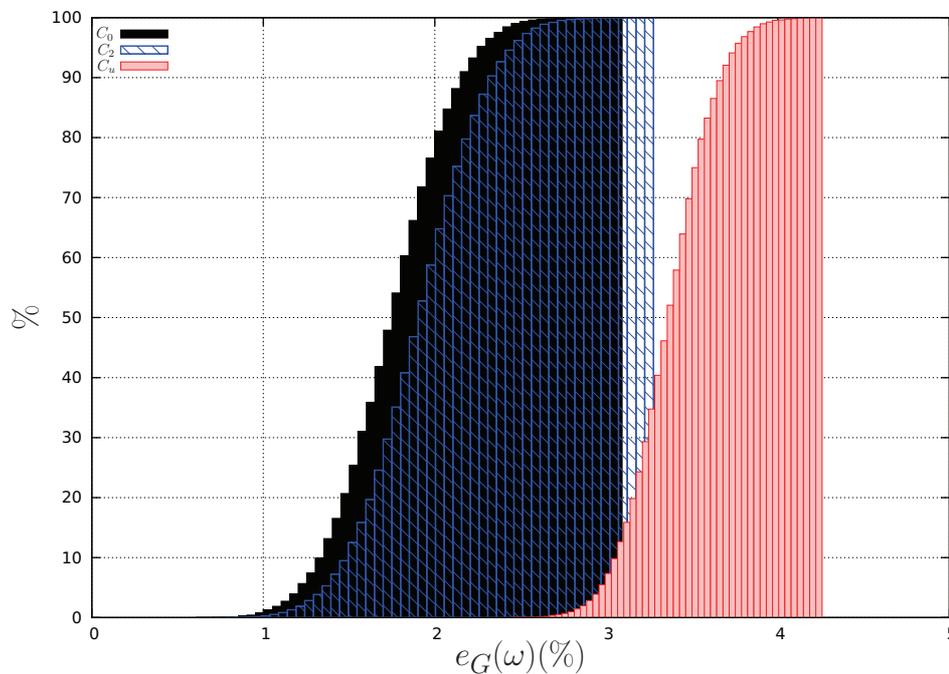


FIGURE 3.38 – CDF de  $e_G(\omega)$  pour  $\beta = 20\%$  – cas d'étude C3.3.

Dans la section suivante, nous introduisons une incertitude sur le chargement et nous évaluons de nouveau le comportement des méthodes.

### 3.5 Étude en robustesse lorsque le chargement est incertain

Afin d'étudier la robustesse liée aux incertitudes sur le chargement, nous introduisons des conditions limites paramétrées par des variables aléatoires. Nous combinons ces incertitudes aux perturbations aléatoires associées au bruit de mesure. Nous étudions dans cette section la robustesse de la méthodologie développée par rapport à cette nouvelle perturbation. Les incertitudes sur le chargement sont introduites comme dans 2.5.1. Ainsi, nous obtenons une nouvelle variable aléatoire  $I_{(n,P)}^{cal}(t; \theta, \omega)$ . L'approche géométrique est validée numériquement dans 3.5.1.

#### 3.5.1 Validation numérique pour le cas C3.3

Nous comparons le comportement des fonctions coûts  $C_u$ ,  $C_0$  et  $C_2$ . Les Figures 3.39, 3.40 et 3.41 présentent respectivement l'erreur moyenne  $\bar{e}_G(\omega)$ , l'écart-type de l'erreur  $\hat{e}_G(\omega)$  et l'erreur seuil  $e_G^{90\%}$  pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ .

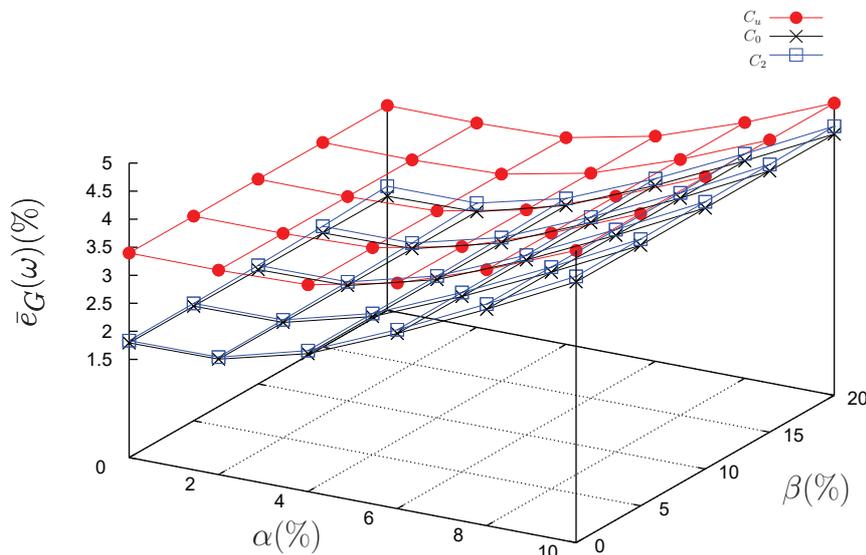


FIGURE 3.39 – Moyenne de l'erreur  $\bar{e}_G(\omega)$  en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  – cas d'étude **C3.3**.

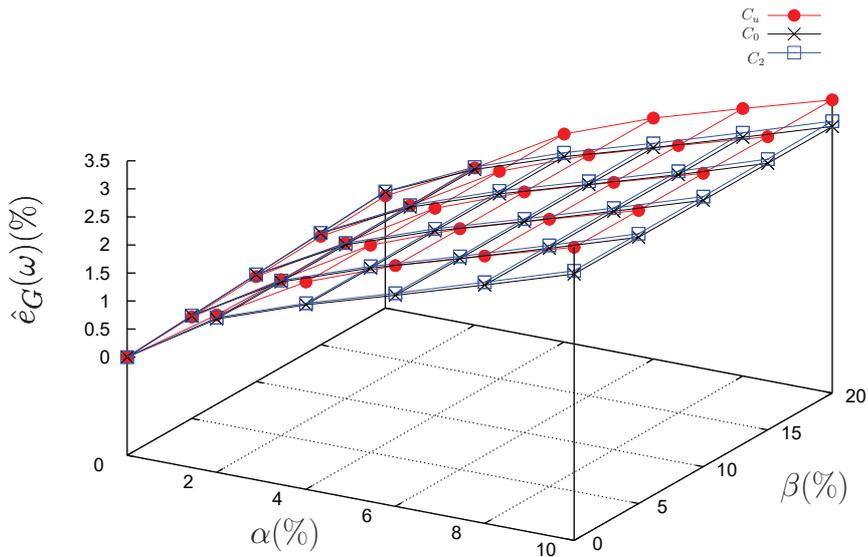


FIGURE 3.40 – Écart-type de l'erreur  $\hat{e}_G(\omega)$  en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  – cas d'étude **C3.3**.

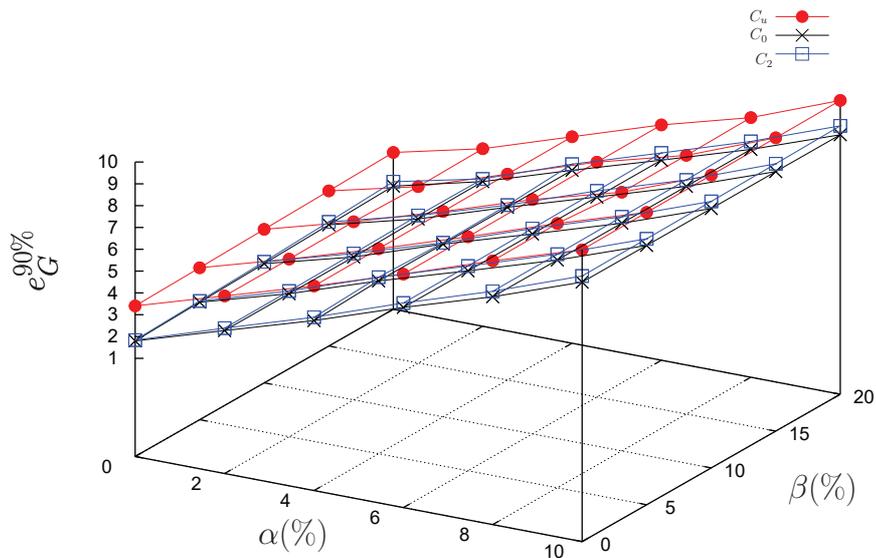


FIGURE 3.41 – Erreur seuil  $e_G^{90\%}$  en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  – cas d'étude **C3.3**.

Les deux méthodologies sont plus sensibles aux incertitudes sur le chargement qu'aux perturbations de la mesure. L'identification de  $G$  est de meilleure qualité en utilisant la méthode FEMU-G. En effet, l'approche géométrique est plus précise, plus robuste et a un

meilleur comportement sur ce cas d'étude.

## 3.6 Étude en robustesse pour différents matériaux

Dans cette section, nous évaluons le comportement de la méthodologie pour différents matériaux. Dans un premier temps, nous considérons le cas d'étude **C3.3** avec le modèle de Saint-Venant Kirchhoff. Nous identifions, dans 3.6.1, le module d'Young et le coefficient de Poisson lorsque les mesures sont perturbées et que le chargement est incertain. Dans un second temps, nous introduisons un nouveau cas d'étude, noté **C3.4**, dans 3.6.2. Nous considérons un domaine multi-matériaux et nous évaluons les méthodes en termes de robustesse. Nous comparons le comportement des fonctions coûts  $C_u$ ,  $C_0$  et  $C_2$ .

### 3.6.1 Identification du modèle de Saint-Venant Kirchhoff

Le cas d'étude **C3.3** est considéré avec un matériau défini par le potentiel d'énergie de déformation de Saint-Venant Kirchhoff. La valeur exacte des paramètres est  $E_{ex} = 20$  MPa et  $\nu_{ex} = 0.4$ .

Dans un premier temps, seules les mesures sont bruitées et nous supposons le chargement fixe. Les Figures 3.42, 3.43 et 3.44 présentent respectivement l'erreur moyenne  $\bar{e}_E(\omega)$ , l'écart-type de l'erreur  $\hat{e}_E(\omega)$  et l'erreur seuil  $e_E^{90\%}$  pour différentes valeurs de  $\beta$ .

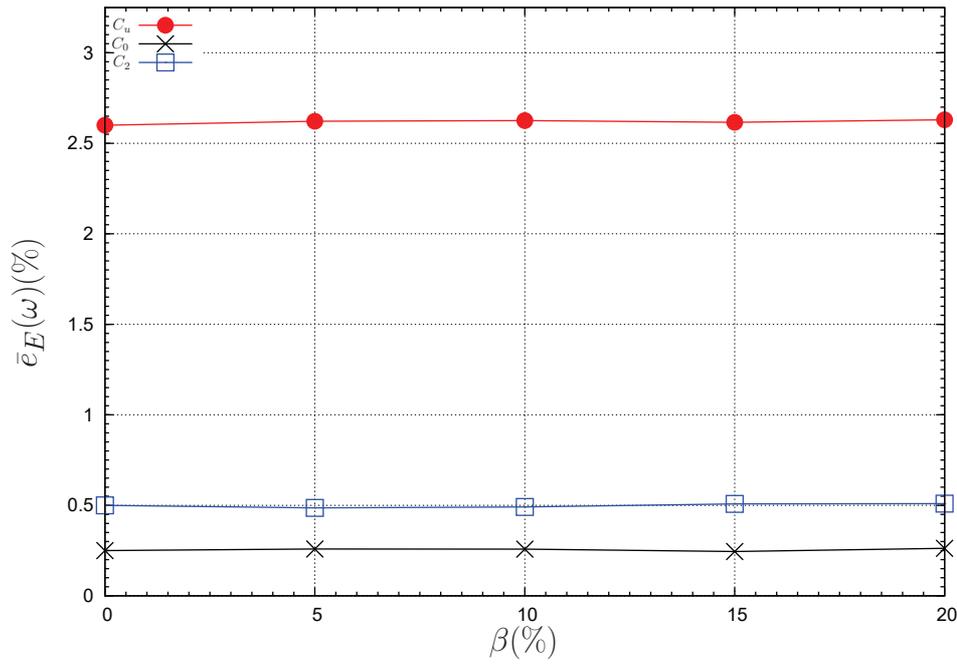


FIGURE 3.42 – Moyenne de l’erreur  $\bar{e}_E(\omega)$  en fonction de  $\beta$  – cas d’étude **C3.3**.

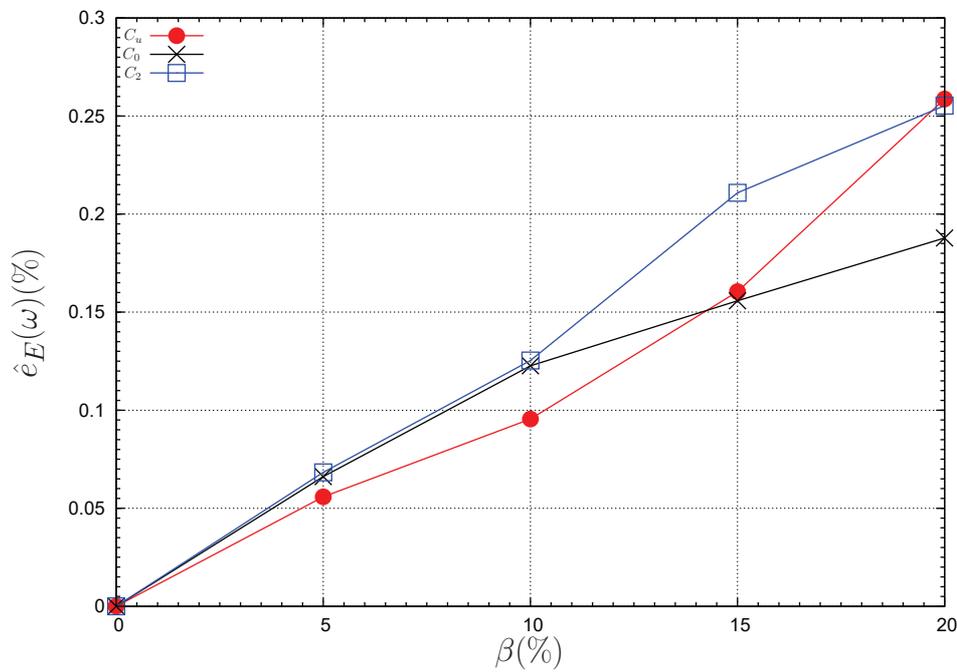


FIGURE 3.43 – Écart-type de l’erreur  $\hat{e}_E(\omega)$  en fonction de  $\beta$  – cas d’étude **C3.3**.

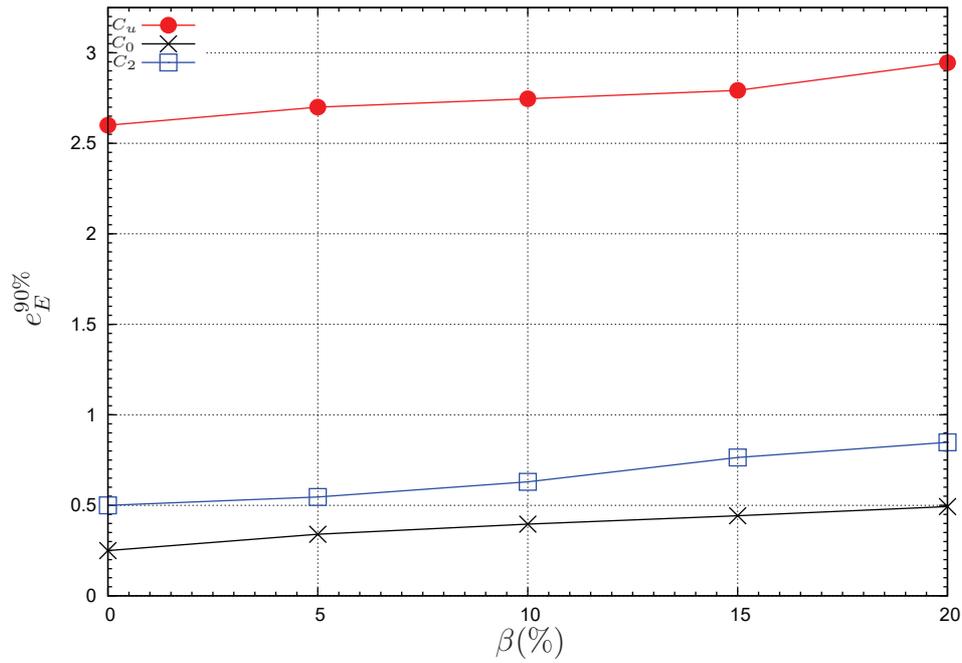


FIGURE 3.44 – Erreur seuil  $e_E^{90\%}$  en fonction de  $\beta$  – cas d'étude **C3.3**.

Les Figures 3.45, 3.46 et 3.47 présentent respectivement l'erreur moyenne  $\bar{e}_\nu(\omega)$ , l'écart-type de l'erreur  $\hat{e}_\nu(\omega)$  et l'erreur seuil  $e_\nu^{90\%}$  pour différentes valeurs de  $\beta$ .

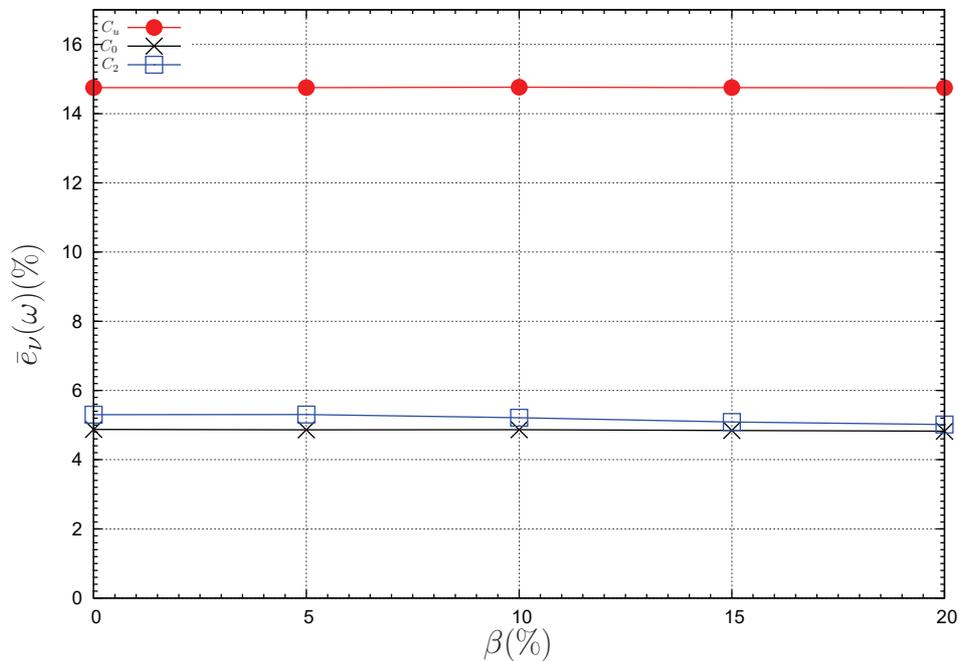


FIGURE 3.45 – Erreur moyenne  $\bar{e}_\nu(\omega)$  en fonction de  $\beta$  – cas d'étude **C3.3**.

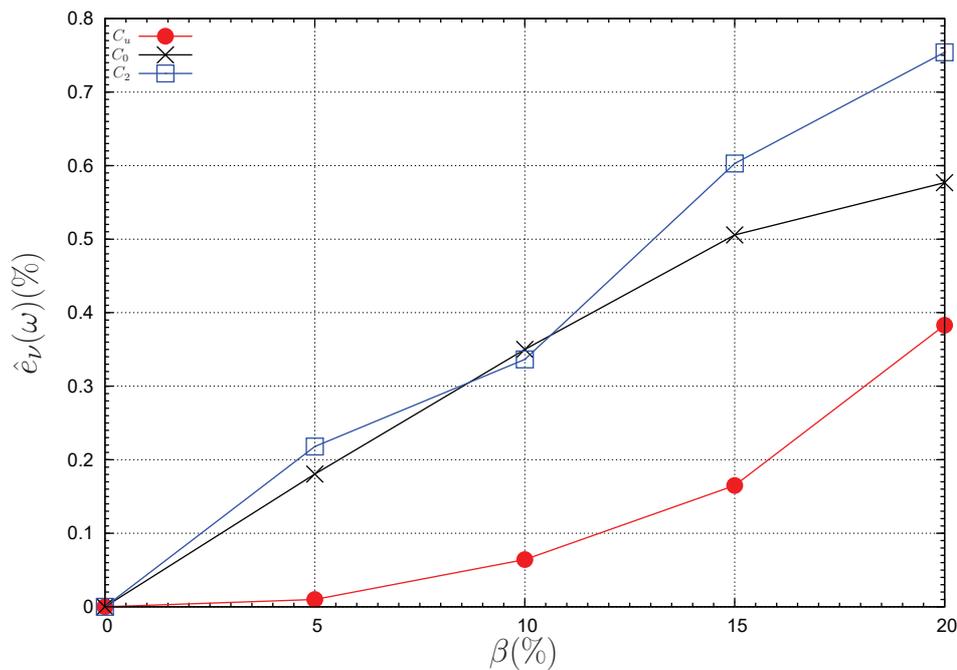


FIGURE 3.46 – Écart-type de l'erreur  $\hat{e}_\nu(\omega)$  en fonction de  $\beta$  – cas d'étude **C3.3**.

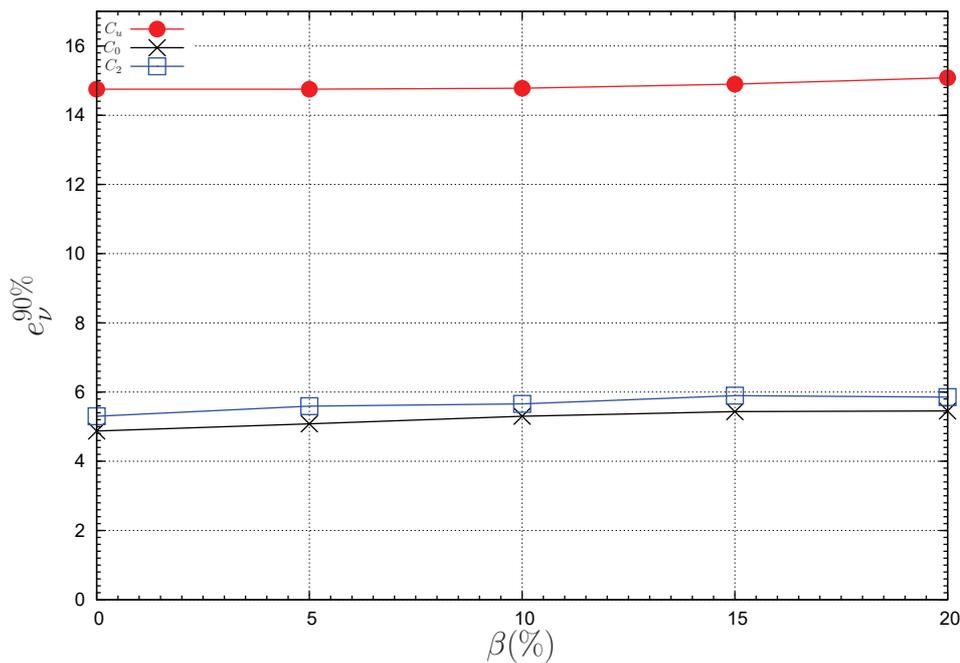


FIGURE 3.47 – Erreur seuil  $e_\nu^{90\%}$  en fonction de  $\beta$  – cas d'étude **C3.3**.

Nous constatons que les deux approches sont peu sensibles aux perturbations sur les mesures. Pour l'identification des deux paramètres, l'approche géométrique conduit aux meilleurs résultats en termes de précision perturbée et de comportement global. En revanche,

l'approche cinématique est légèrement plus robuste que l'approche géométrique.

Dans un second temps, nous considérons que les mesures sont bruitées et que le chargement est incertain. Les Figures 3.48, 3.49 et 3.50 présentent respectivement l'erreur moyenne  $\bar{e}_E(\omega)$ , l'écart-type de l'erreur  $\hat{e}_E(\omega)$  et l'erreur seuil  $e_E^{90\%}$  pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ .

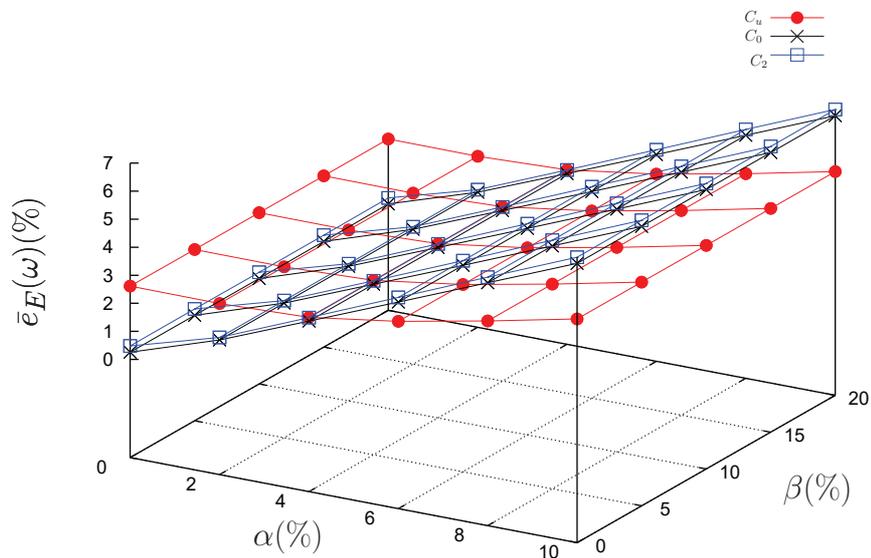


FIGURE 3.48 – Moyenne de l'erreur  $\bar{e}_E(\omega)$  en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  – cas d'étude **C3.3**.

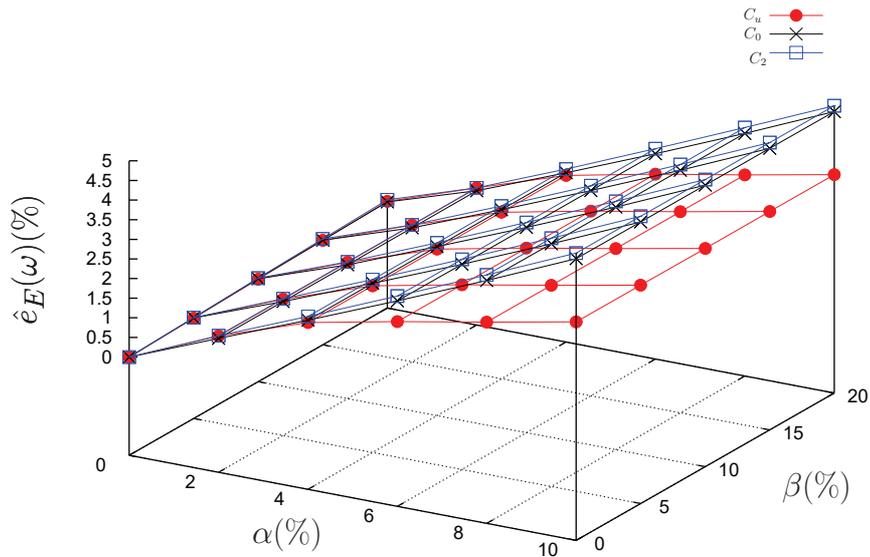


FIGURE 3.49 – Écart-type de l'erreur  $\hat{e}_E(\omega)$  en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  – cas d'étude **C3.3**.

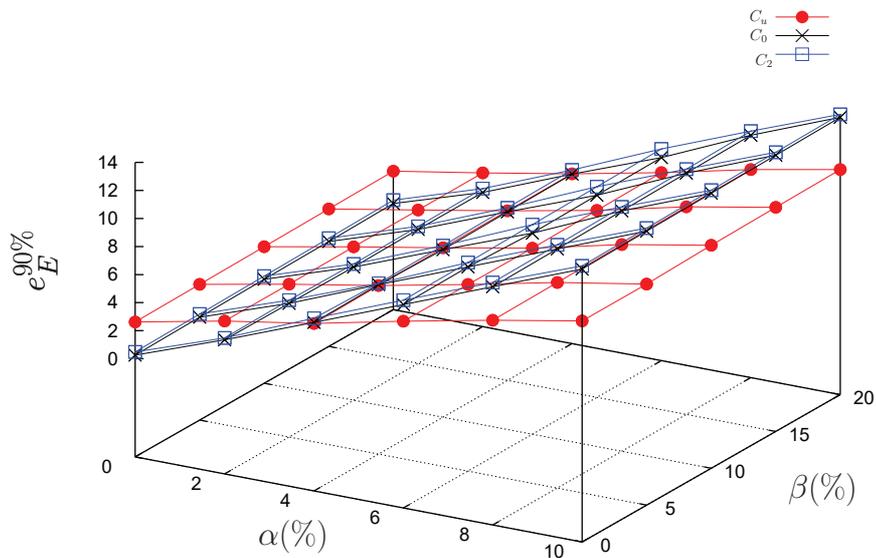


FIGURE 3.50 – Erreur seuil  $e_E^{90\%}$  en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  – cas d'étude **C3.3**.

Les Figures 3.51, 3.52 et 3.53 présentent respectivement l'erreur moyenne  $\bar{e}_\nu(\omega)$ , l'écart-type de l'erreur  $\hat{e}_\nu(\omega)$  et l'erreur seuil  $e_\nu^{90\%}$  pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ .

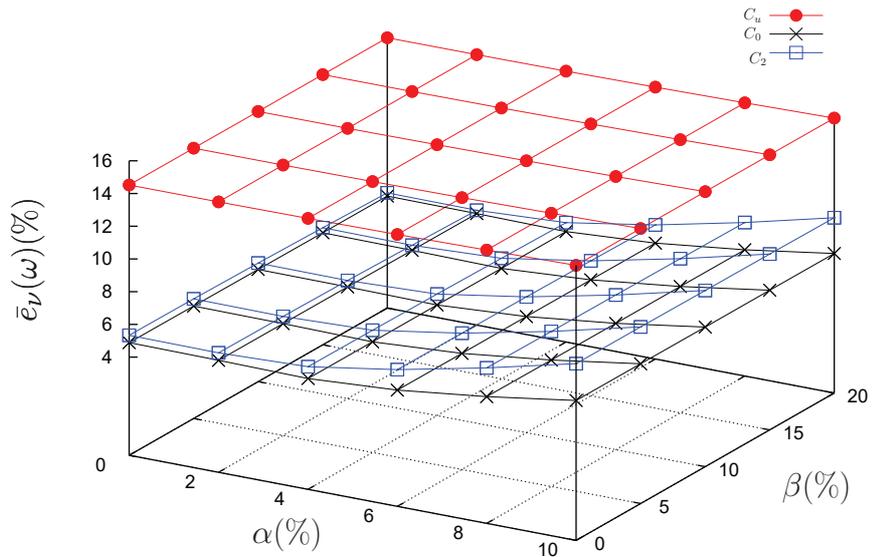


FIGURE 3.51 – Moyenne de l'erreur  $\bar{e}_\nu(\omega)$  en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  – cas d'étude **C3.3**.

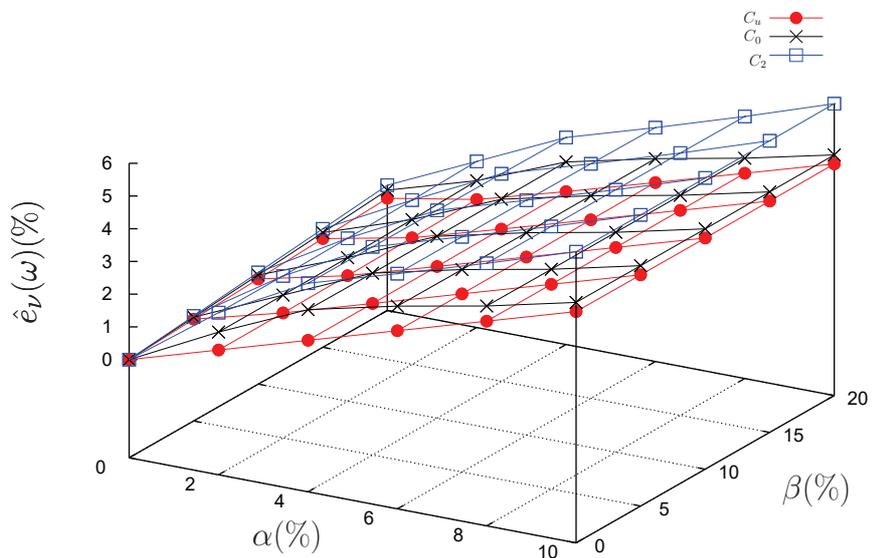


FIGURE 3.52 – Écart-type de l'erreur  $\hat{e}_\nu(\omega)$  en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  – cas d'étude **C3.3**.

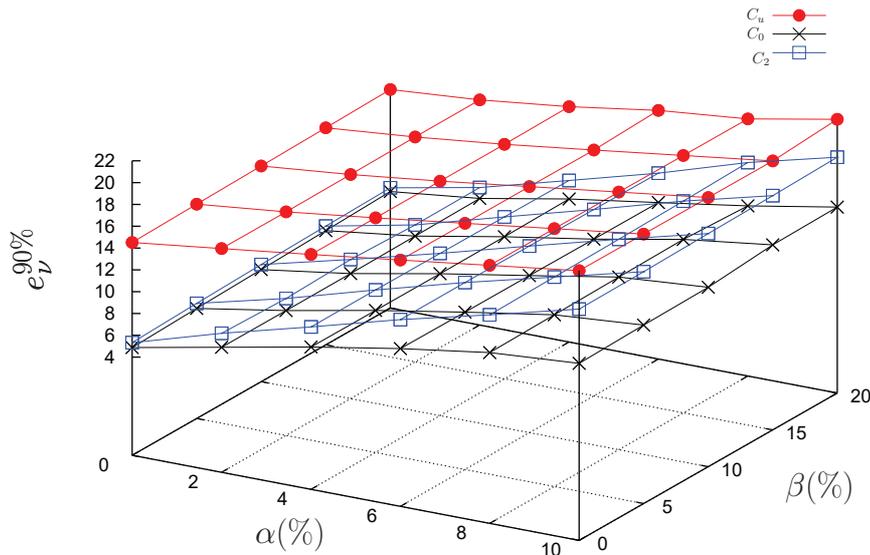


FIGURE 3.53 – Erreur seuil  $e_{\nu}^{90\%}$  en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  – cas d'étude **C3.3**.

Les deux méthodologies sont plus sensibles aux incertitudes sur le chargement qu'aux perturbations de la mesure. L'identification de  $E$  est de meilleure qualité en utilisant la méthode FEMU-G pour des faibles valeurs de  $\alpha$  (4%). En effet, l'approche géométrique est plus précise, plus robuste et a un meilleur comportement pour ces valeurs de  $\alpha$ . Au-delà, l'approche cinématique conduit aux meilleurs résultats. En revanche, l'identification de  $\nu$  est meilleure avec la méthode FEMU-G quelles que soient les valeurs de  $\alpha$  et de  $\beta$ . Néanmoins, la méthode FEMU-U reste la plus robuste.

Dans la suite, nous présentons différents modèles multi-matériaux.

### 3.6.2 Identification de modèles multi-matériaux

Le cas test **C3.3** est repris à l'identique sauf pour le modèle matériau. Le matériau homogène est remplacé par un multi-matériaux. Nous considérons un modèle à deux paramètres dans 3.6.2.1 puis des cas à trois et quatre paramètres dans 3.6.2.2 et 3.6.2.3.

#### 3.6.2.1 Modèle à 2 paramètres

Le nouveau cas d'étude pour identifier deux paramètres matériau est noté **C3.4**. Le modèle bi-matériau est illustré sur la Figure 3.54.

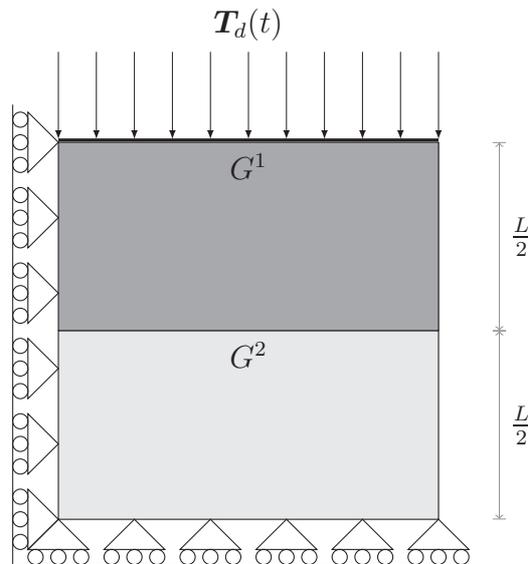


FIGURE 3.54 – Cas d'étude **C3.4**.

La moitié supérieure est occupée par un matériau de type Blatz-Ko avec  $G_{ex}^1 = 7$  MPa. La moitié inférieure est occupée par un matériau de type Blatz-Ko avec  $G_{ex}^2 = 10$  MPa. Les deux parties sont parfaitement collées. Dans la suite, nous cherchons à identifier le jeu de paramètre  $\theta = (G^1, G^2)$ .

Le problème étant plus complexe, nous augmentons la densité du maillage par rapport au cas **C3.3**. La référence est obtenue avec  $N_{EF} = 2048$  et les calculs sont obtenus avec  $N_{EF} = 32$ .

Dans un premier temps nous évaluons uniquement la qualité de l'identification lorsque les données sont supposées parfaites ( $\alpha = 0\%$  et  $\beta = 0\%$ ). À titre illustratif, les Figures 3.55 à 3.57 montrent le tracé des fonctions coûts  $C_u$ ,  $C_0$  et  $C_2$  autour de  $\theta_{ex}$ .

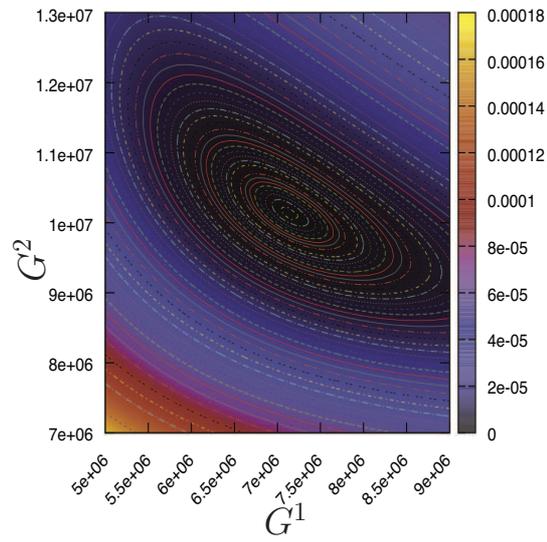


FIGURE 3.55 – Fonction coût  $C_u$  autour de  $\theta_{ex}$  – cas d'étude C3.4.

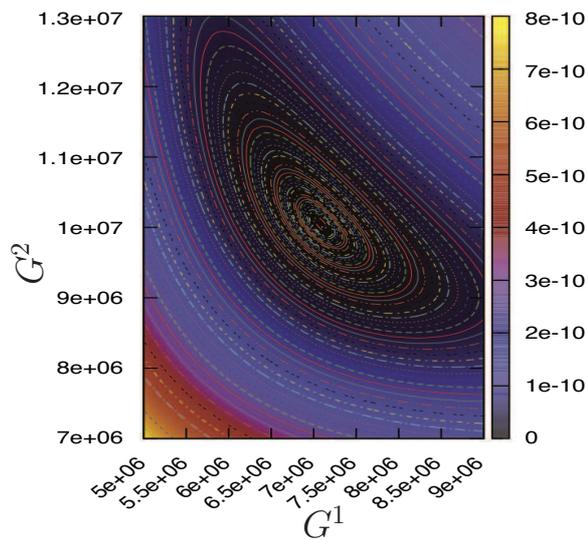


FIGURE 3.56 – Fonction coût  $C_0$  autour de  $\theta_{ex}$  – cas d'étude C3.4.

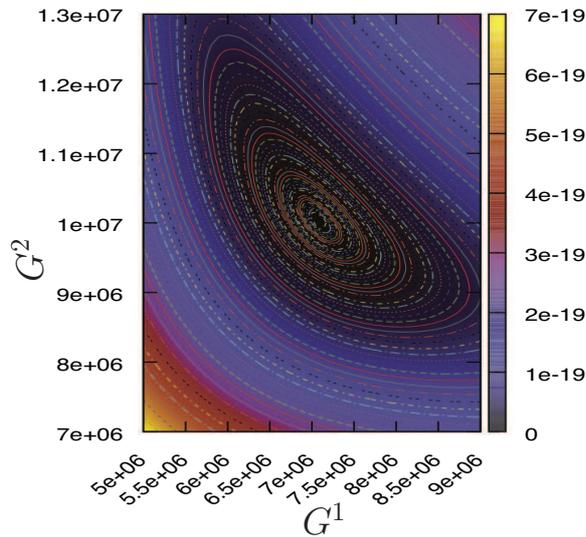


FIGURE 3.57 – Fonction coût  $C_2$  autour de  $\theta_{ex}$  – cas d'étude **C3.4**.

Nous constatons que toutes les fonctions coûts admettent un unique minimum global. Pour plus de détails, la Table 3.9 rassemble les valeurs du jeu de paramètres identifiés ainsi que la valeur de l'erreur relative d'identification associée.

Fonctions coûts	Paramètres identifiés	Erreurs relatives
$C_u$	$G_{id}^1 = 7.14$ MPa	$e_{G^1} = 2.03\%$
	$G_{id}^2 = 10.14$ MPa	$e_{G^2} = 1.36\%$
$C_0$	$G_{id}^1 = 7.08$ MPa	$e_{G^1} = \mathbf{1.15\%}$
	$G_{id}^2 = 10.04$ MPa	$e_{G^2} = 0.44\%$
$C_2$	$G_{id}^1 = 7.09$ MPa	$e_{G^1} = 1.21\%$
	$G_{id}^2 = 10.02$ MPa	$e_{G^2} = \mathbf{0.22\%}$

TABLE 3.9 – Paramètres identifiés et erreurs relatives correspondantes pour  $G_{ex}^1 = 7$  MPa et  $G_{ex}^2 = 10$  MPa – cas d'étude **C3.3**.

Il ressort que les deux approches sont assez similaires en termes de qualité d'identification avec néanmoins un avantage pour l'approche géométrique.

Dans un second temps, nous considérons que seules les mesures sont perturbées ( $\beta$  varie) et nous supposons que le chargement est fixe ( $\alpha = 0\%$ ). Les Figures 3.58, 3.59 et 3.60 présentent respectivement l'erreur moyenne  $\bar{e}_{G^1}(\omega)$ , l'écart-type de l'erreur  $\hat{e}_{G^1}(\omega)$  et l'erreur seuil  $e_{G^1}^{90\%}$  pour différentes valeurs de  $\beta$ .

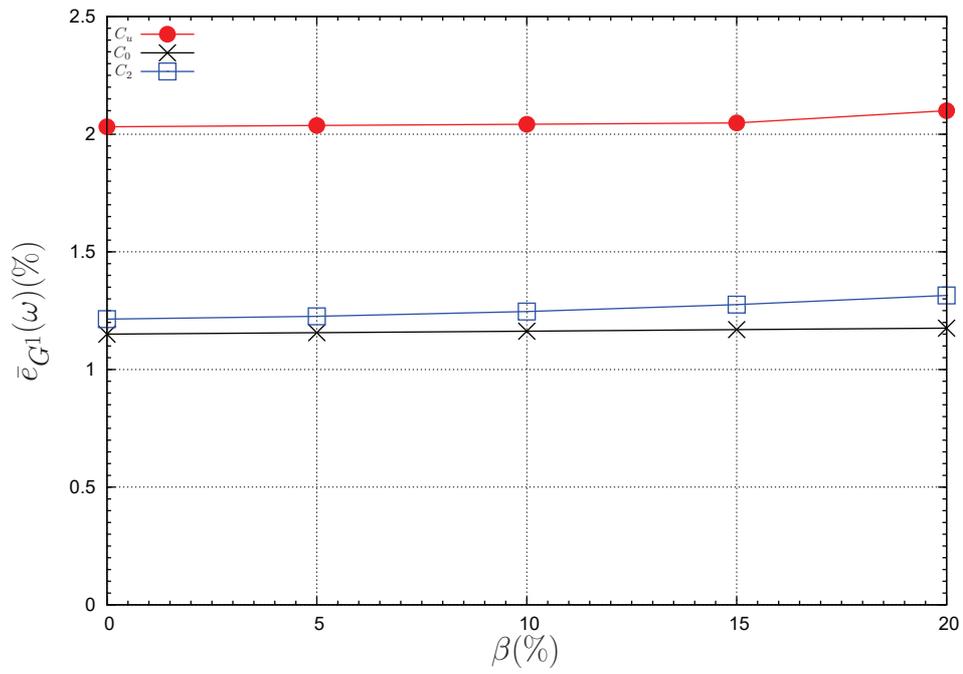


FIGURE 3.58 – Moyenne de l’erreur  $\bar{e}_{G^1}(\omega)$  en fonction de  $\beta$  – cas d’étude C3.4.

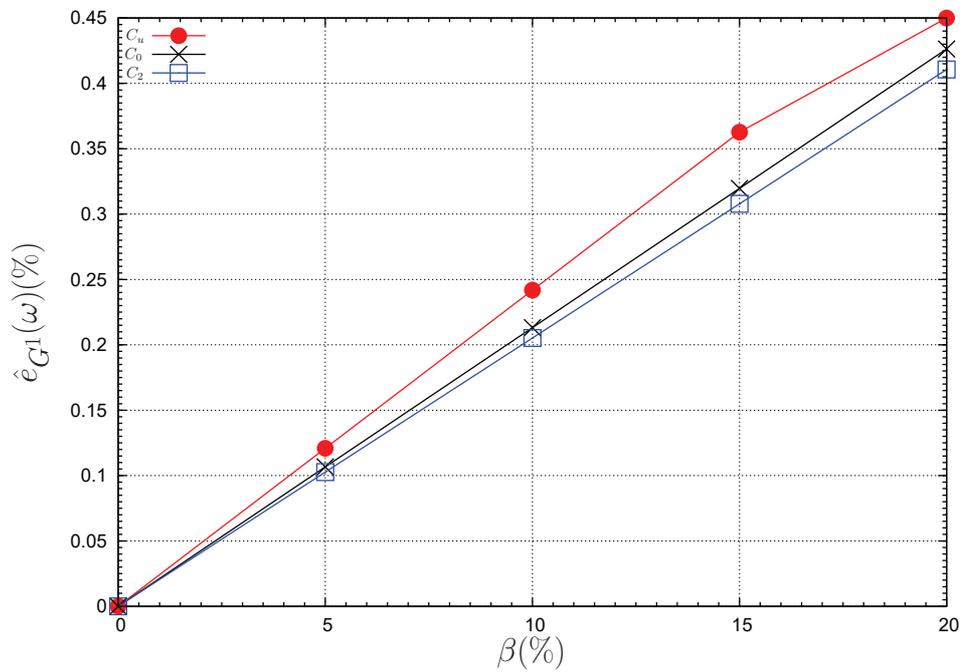


FIGURE 3.59 – Écart-type de l’erreur  $\hat{e}_{G^1}(\omega)$  en fonction de  $\beta$  – cas d’étude C3.4.

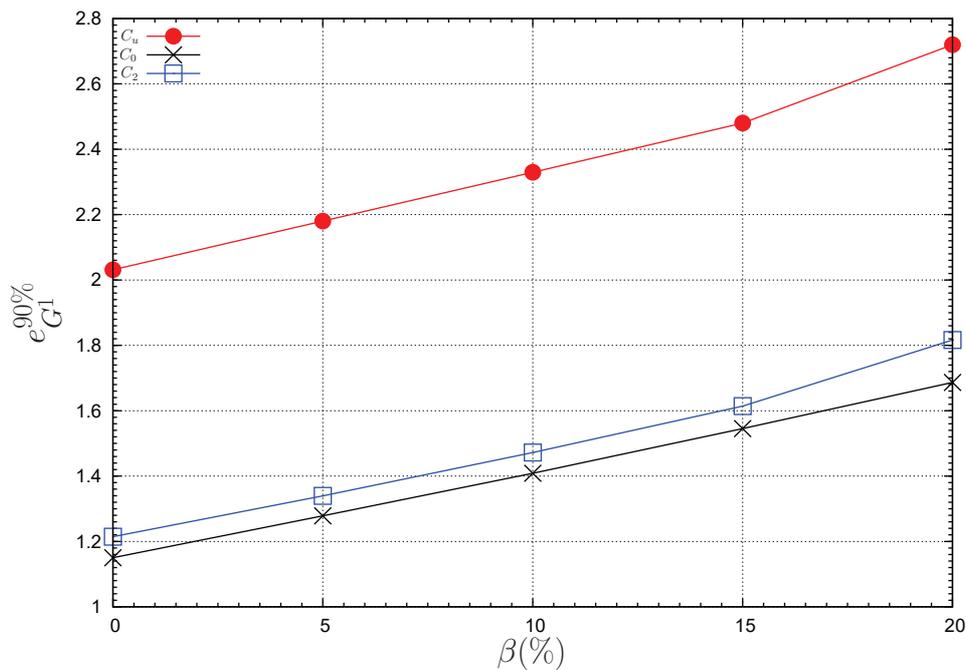


FIGURE 3.60 – Erreur seuil  $e_{G^1}^{90\%}$  en fonction de  $\beta$  – cas d'étude **C3.4**.

Les Figures 3.61, 3.62 et 3.63 présentent respectivement l'erreur moyenne  $\bar{e}_{G^2}(\omega)$ , l'écart-type de l'erreur  $\hat{e}_{G^2}(\omega)$  et l'erreur seuil  $e_{G^2}^{90\%}$  pour différentes valeurs de  $\beta$ .

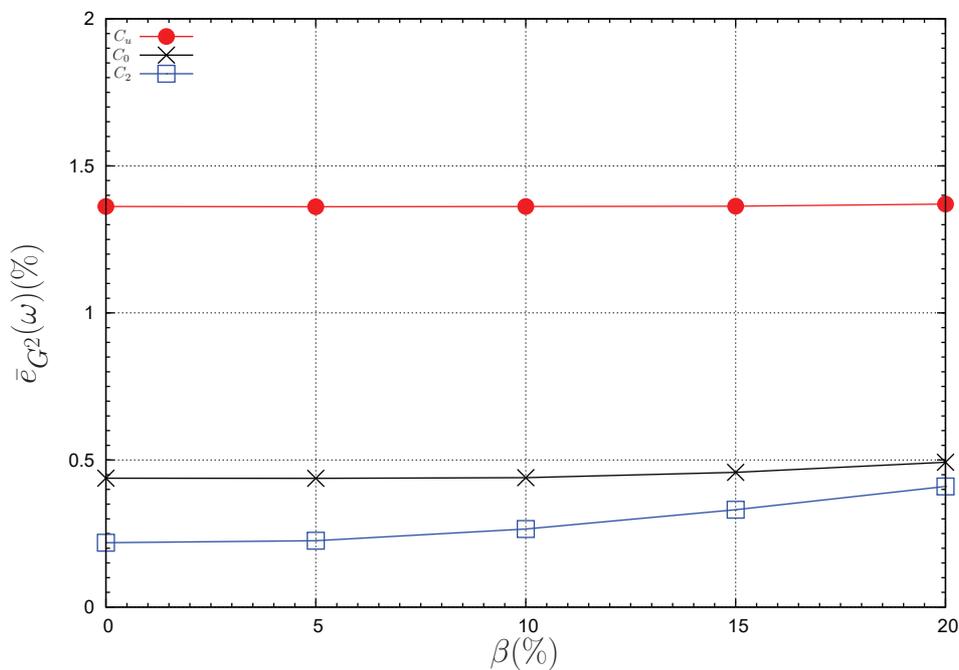


FIGURE 3.61 – Moyenne de l'erreur  $\bar{e}_{G^2}(\omega)$  en fonction de  $\beta$  – cas d'étude **C3.4**.

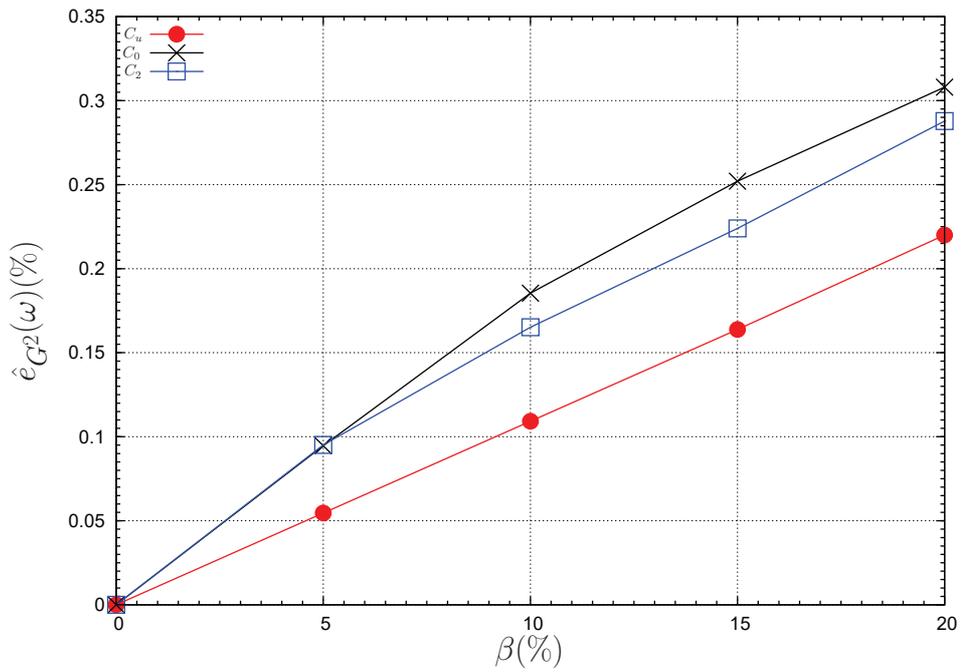


FIGURE 3.62 – Écart-type de l'erreur  $\hat{e}_{G^2}(\omega)$  en fonction de  $\beta$  – cas d'étude **C3.4**.

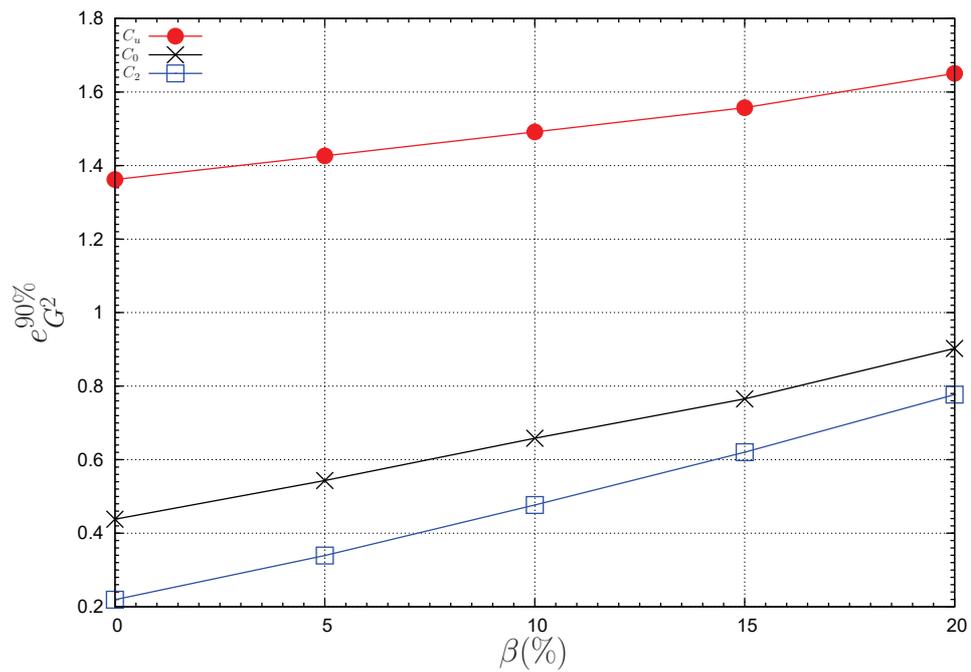


FIGURE 3.63 – Erreur seuil  $e_{G^2}^{90\%}$  en fonction de  $\beta$  – cas d'étude **C3.4**.

Les conclusions pour **C3.4** rejoignent celles observées sur **C3.3**, à savoir : meilleure précision, meilleur comportement global et robustesse comparable.

Une dernière étude vise à évaluer le comportement de la méthode FEMU-G pour différentes valeurs de  $\alpha$  et de  $\beta$ . Nous traçons d'abord l'erreur seuil  $e_{G^1}^{90\%}$  pour différentes valeurs de  $\alpha$  et de  $\beta$  sur la Figure 3.64.

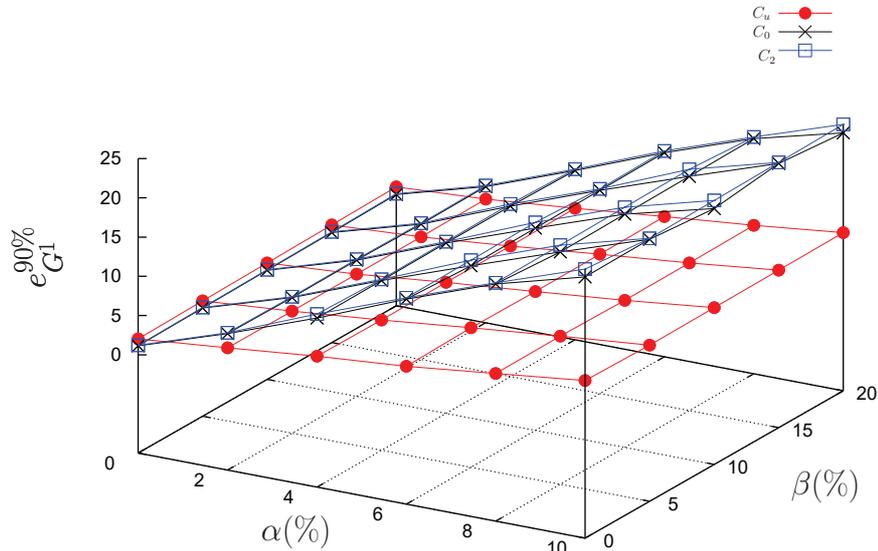


FIGURE 3.64 – Erreur seuil  $e_{G^1}^{90\%}$  en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  – cas d'étude **C3.4**.

Il ressort de la Figure 3.64 que la méthode FEMU-U a un meilleur comportement que la méthode FEMU-G. En effet, nous observons que la méthode FEMU-G est très sensible aux incertitudes sur le chargement. Des conclusions similaires sont observées pour l'identification du paramètre  $G^2$ . C'est une première limite de la méthode FEMU-G.

### 3.6.2.2 Modèle à 3 paramètres

Le modèle à 3 paramètres est représenté par le cas d'étude, noté **C3.5**, illustré sur la Figure 3.65.

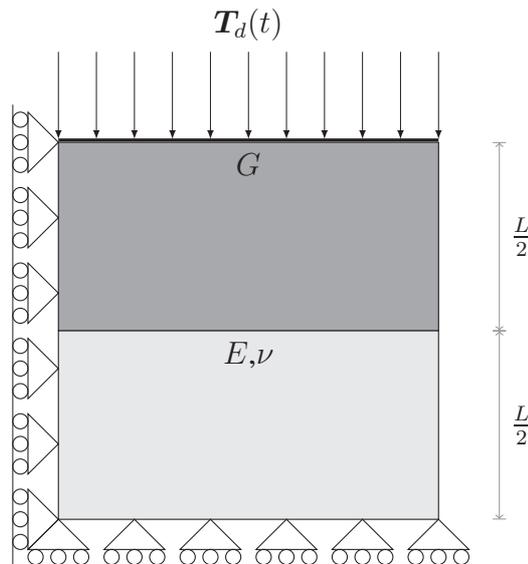


FIGURE 3.65 – Cas d'étude **C3.5**.

La moitié supérieure est occupée par un matériau de type Blatz-Ko avec  $G_{ex} = 10$  MPa. La moitié inférieure est occupée par un matériau de type Saint-Venant Kirchhoff avec  $E_{ex} = 10$  MPa et  $\nu_{ex} = 0.25$ . Les deux parties sont parfaitement collées. Dans la suite, nous cherchons à identifier le jeu de paramètre  $\theta = (E, \nu, G)$ .

La Table 3.10 rassemble la valeur des paramètres identifiés ainsi que l'erreur relative d'identification associée pour les trois fonctions coûts retenues.

Fonctions coûts	Paramètres identifiés	Erreurs relatives d'identification
$C_u$	$E_{id} = 10.36$ MPa	$e_E = 3.6\%$
	$\nu_{id} = 0.2494$	$e_\nu = 0.24\%$
	$G_{id} = 9.96$ MPa	$e_G = 0.40\%$
$C_0$	$E_{id} = 10.09$ MPa	$e_E = 0.89\%$
	$\nu_{id} = 0.2691$	$e_\nu = 7.64\%$
	$G_{id} = 10.04$ MPa	$e_G = 0.40\%$
$C_2$	$E_{id} = 10.01$ MPa	$e_E = 0.10\%$
	$\nu_{id} = 0.2750$	$e_\nu = 10.00\%$
	$G_{id} = 10.10$ MPa	$e_G = 1.00\%$

TABLE 3.10 – Paramètres identifiés et erreurs relatives d'identification associées – cas d'étude **C3.5**.

Nous constatons que le module d'Young est mieux identifié avec la méthode FEMU-G tandis que le coefficient de Poisson est mieux identifié avec FEMU-U. Pour l'identification

du module de cisaillement, les deux approches conduisent à des résultats relativement similaires (0.4% d'erreur pour  $C_u$  et  $C_0$ , 1% pour  $C_2$ ).

Dans la suite, nous introduisons un modèle à 4 paramètres.

### 3.6.2.3 Modèle à 4 paramètres

Le modèle à 4 paramètres est représenté par le cas d'étude, noté **C3.6**, illustré sur la Figure 3.66.

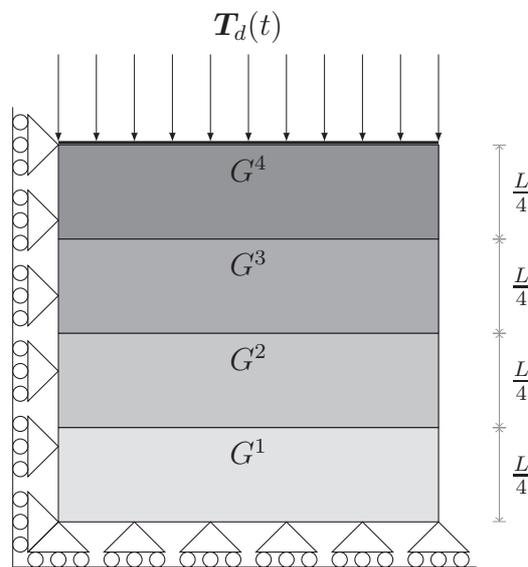


FIGURE 3.66 – Cas d'étude **C3.6**.

Le quart supérieur est occupé par un matériau de type Blatz-Ko avec  $G_{ex}^4 = 5$  MPa. Les quarts suivants sont également occupés par un matériau de type Blatz-Ko avec respectivement  $G_{ex}^3 = 10$ ,  $G_{ex}^2 = 15$  et  $G_{ex}^1 = 20$ . Les quatre parties sont parfaitement collées. Dans la suite, nous cherchons à identifier le jeu de paramètre  $\theta = (G^1, G^2, G^3, G^4)$ .

La Table 3.11 rassemble la valeur des paramètres identifiés ainsi que l'erreur relative d'identification associée pour les trois fonctions coûts retenues. Ces résultats sont représentés graphiquement sur la Figure 3.67 sur laquelle la moyenne des erreurs relatives d'identification des quatre paramètres est tracée en trait noir.

Fonctions coûts	Paramètres identifiés	Erreurs relatives d'identification
$C_u$	$G_{id}^1 = 21.92$ MPa	$e_{G^1} = 9.60\%$
	$G_{id}^2 = 14.76$ MPa	$e_{G^2} = 1.55\%$
	$G_{id}^3 = 9.56$ MPa	$e_{G^3} = 4.37\%$
	$G_{id}^4 = 4.95$ MPa	$e_{G^4} = 0.87\%$
$C_0$	$G_{id}^1 = 22.11$ MPa	$e_{G^1} = 10.55\%$
	$G_{id}^2 = 14.04$ MPa	$e_{G^2} = 6.40\%$
	$G_{id}^3 = 10.24$ MPa	$e_{G^3} = 2.47\%$
	$G_{id}^4 = 5.10$ MPa	$e_{G^4} = 2.05\%$
$C_2$	$G_{id}^1 = 22.11$ MPa	$e_{G^1} = 10.55\%$
	$G_{id}^2 = 14.44$ MPa	$e_{G^2} = 3.72\%$
	$G_{id}^3 = 9.90$ MPa	$e_{G^3} = 1.00\%$
	$G_{id}^4 = 5.13$ MPa	$e_{G^4} = 2.6\%$

TABLE 3.11 – Paramètres identifiés et erreurs relatives d'identification associées – cas d'étude **C3.6**.

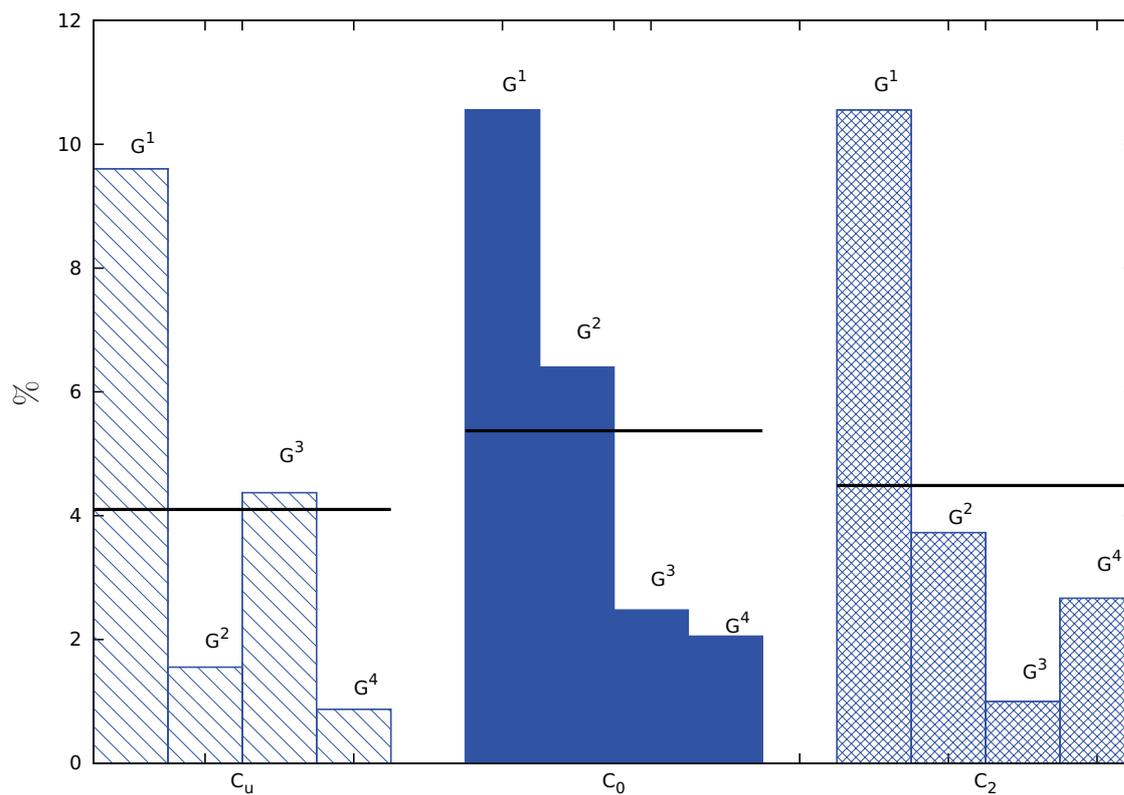


FIGURE 3.67 – Erreurs relatives d'identification pour  $\theta = (G^1, G^2, G^3, G^4)$  avec  $C_u, C_0$  et  $C_2$  – cas d'étude **C3.6**.

Nous constatons que l'identification de  $G^1$  est plus délicate et que les deux approches (FEMU-U et FEMU-G) sont similaires en termes de qualité. La meilleure identification du paramètre  $G^3$  est obtenue par la fonction coût  $C_2$  avec 1.0% d'erreur contre 4.37% pour  $C_u$ . En revanche, la méthode FEMU-U conduit à une meilleure identification des paramètres  $G^2$  et  $G^4$ . Nous constatons, en moyenne, que les fonctions coûts  $C_2$ , et  $C_u$  sont équivalentes. Néanmoins, nous observons quelques limites pour les valeurs de  $G$  les plus importantes.

### 3.7 Bilan du chapitre 3

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode d'identification adaptée à la dynamique. Le point-clé de la méthode est la construction d'une fonction coût basée sur une information purement géométrique. L'objectif était de montrer que cette information suffit à identifier des paramètres matériau en dynamique.

La méthodologie est d'abord présentée dans 3.2. Nous montrons que l'information géométrique peut être obtenue par une simple segmentation d'image. Nous nous passons ainsi de mouchetis aléatoires et de corrélation d'images. Le comportement global de la méthode FEMU-G a été validé numériquement dans les sections 3.3 à 3.6. La méthode est bien adaptée au contexte de la dynamique en grandes transformations. La limite de la méthode semble être le nombre de paramètres de matériaux à identifier.

Le verrou que nous levons dans ce chapitre est donc celui lié au traitement des images. En simplifiant la procédure, nous introduisons très peu de paramètres métrologiques.



# Conclusions et perspectives

## Conclusions

Ces travaux de thèse s'inscrivent dans la thématique de recherche portant sur la mesure de champ et l'identification en mécanique des solides. Dans ce domaine de recherche, la technique de mesure de champ la plus populaire actuellement est la corrélation d'images numériques. Le champ de déplacement ainsi mesuré est ensuite utilisé comme donnée d'entrée pour l'une des cinq méthodes d'identification suivantes : FEMU, CEGM, EGM, VFM et RGM. L'objectif est d'identifier les propriétés mécaniques des matériaux étudiés.

Dans nos travaux, nous avons proposé deux nouveaux outils numériques en lien avec les activités de notre équipe de recherche au sein du laboratoire LaMé. La démarche globale d'identification qui nous intéresse a été présentée sur la Figure 3 dans l'introduction générale. Parmi les trois blocs distingués, nos travaux portent sur le *traitement d'images* ainsi que sur les *procédures d'identification*. Ainsi, le bloc *essai et mesurage* ne fait pas partie de notre domaine d'étude. À l'issue d'une large étude bibliographique synthétisée dans le chapitre 1, nous avons retenu deux axes d'améliorations : le premier vise une méthode permettant de réduire de manière significative le coût de calcul d'une identification de paramètre matériau en élasto-dynamique tandis que le second porte sur une simplification d'implémentation, un gain en terme de coût de calcul du traitement d'images et une mise en œuvre expérimentale simplifiée.

Le premier axe de recherche a conduit au développement d'une méthode d'identification adaptée à la dynamique dans le cadre des petites perturbations. Nous nous sommes basés sur une stratégie de type VFM, connue pour permettre une identification peu onéreuse dans le cas de l'élasticité linéaire en statique. Dans le cadre de notre extension à la dynamique, une difficulté consiste à construire des champs virtuels spatiaux-temporels permettant d'identifier plusieurs paramètres avec une bonne qualité. Le travail réalisé a abouti à la construction d'une famille de champs virtuels permettant d'identifier les paramètres de matériaux en

élasto-dynamique. Entre autres, nous nous sommes appliqués à évaluer la robustesse de la méthode en présence d'incertitudes sur des mesures synthétiques. La méthode développée a été comparée avec la méthode FEMU-U afin d'évaluer la pertinence de l'outil en termes de précision, de robustesse et de coût numérique. Les différentes investigations numériques montrent que la technique ainsi développée est précise et robuste pour des niveaux de bruits réalistes.

Le second axe de recherche a également conduit au développement d'une méthode d'identification adaptée à la dynamique. Il répond à la question suivante :

*"une information purement géométrique suffit-elle pour identifier des paramètres matériau en dynamique ?"*

Afin d'explorer le potentiel de ce type d'information, nous avons retenu la méthode de recalage de modèles éléments finis. La méthode développée repose sur la minimisation d'une fonction coût que l'on construit à partir des moments géométriques de la surface de l'éprouvette. Nous avons développé cette variante de FEMU afin de nous affranchir de la corrélation d'images numériques et de la pose d'un mouchetis aléatoire associé. En effet, l'information requise est extraite par une simple segmentation d'image par seuillage global. Ainsi, nous apportons une méthode simplifiée tant au niveau numérique qu'expérimental. La pertinence de la méthode, nommée FEMU-G, est évaluée numériquement par comparaison avec la FEMU-U via plusieurs cas d'études. Un bruit synthétique est généré puis ajouté aux mesures nominales afin d'étudier la robustesse des méthodes. À l'issue des investigations numériques, la méthode paraît bien adaptée au contexte de la dynamique en grandes transformations (élastomères).

Ces deux axes de recherche ont conduit à la publication de deux papiers [74, 75], à la soumission d'un troisième et à différentes communications orales.

## Perspectives

À l'issue de ces travaux de thèse, nous sommes en mesure de dégager plusieurs pistes d'améliorations ou de développements. Les perspectives que nous envisageons sont les suivantes :

- Amélioration de l'algorithme de minimisation utilisé dans le cadre du recalage de modèles (FEMU-G). L'objectif est de réduire le coût de la minimisation. Une idée potentielle consiste à remplacer la fonction coût géométrique par une fonction coût approchée construite sur un ensemble de points bien choisis.
- Mise en œuvre numérique de l'approche de type VFM sur des cas plus complexes. L'objectif est de valider une plus grande plage d'utilisation (non linéarités géométriques, plus grand nombre de paramètres matériau à identifier).
- Mise en œuvre expérimentale des deux méthodes proposées dans cette thèse. Concernant FEMU-G, des premiers résultats encourageants ont été obtenus sur des essais quasi-statiques à partir d'images réelles [27].
- Comparaison des techniques développées à d'autres méthodes d'identification. La méthode CEGM est en effet très performante pour identifier des propriétés mécaniques de matériaux.



# Références bibliographiques

- [1] A.-B. Abda, H. Ben Ameer, and M. Jaoua. Identification of 2d cracks by elastic boundary measurements. *Inverse Problems*, 15(1) :67, 1999.
- [2] S. Andrieux, A.-B. Abda, and H.-D. Bui. Sur l'identification de fissures planes via le concept d'écart à la réciprocité en élasticité. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 324(12) :1431 – 1438, 1997.
- [3] S. Andrieux, A.-B. Abda, and H.-D. Bui. Reciprocity principle and crack identification. *Inverse Problems*, 15(1) :59, 1999.
- [4] S. Andrieux and T.-N. Baranger. Emerging crack front identification from tangential surface displacements. *Comptes Rendus Mécanique*, 340(8) :565 – 574, 2012.
- [5] S. Avril, M. Bonnet, A.-S. Bretelle, M. Grédiac, F. Hild, P. Ienny, F. Latourte, D. Lemosse, S. Pagano, E. Pagnacco, and F. Pierron. Overview of identification methods of mechanical parameters based on full-field measurements. *Experimental Mechanics*, 48(4) :381–402, 2008.
- [6] S. Avril, M. Grédiac, and F. Pierron. Sensitivity of the virtual fields method to noisy data. *Computational Mechanics*, 34(6) :439–452, Nov 2004.
- [7] S. Avril and F. Pierron. General framework for the identification of constitutive parameters from full-field measurements in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 44(14 - 15) :4978 – 5002, 2007.
- [8] S. Avril, F. Pierron, M.-A. Sutton, and J. Yan. Identification of elasto-visco-plastic parameters and characterization of Lüders behavior using digital image correlation and the virtual fields method. *Mechanics of Materials*, 40(9) :729–742, 2008.
- [9] M. Ben Azzouna, P. Feissel, and P. Villon. Robust identification of elastic properties using the modified constitutive relation error. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 295 :196–218, 10 2015.
- [10] G. Besnard, F. Hild, and S. Roux. Finite-element displacement fields analysis from digital images : Application to portevin-le châtelier bands. *Experimental Mechanics*, 46(6) :789–803, Dec 2006.

- [11] P.-J. Blatz and W.-L. Ko. Application of finite elastic theory to the deformation of rubbery materials. *Transactions of the Society of Rheology*, 6(1) :223–252, 1962.
- [12] B. Blaysat, M. Grédiac, and F. Sur. Effect of interpolation on noise propagation from images to DIC displacement maps. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 108(3) :213–232, 2016.
- [13] M. Bonnet and W. Aquino. Three-dimensional transient elastodynamic inversion using an error in constitutive relation functional. *Inverse Problems*, 31 :035010, 2015.
- [14] M. Bonnet and A. Constantinescu. Inverse problems in elasticity. *Inverse Problems*, 21(2) :R1, 2005.
- [15] M. Bornert, F. Brémand, P. Doumalin, J.-C. Dupré, M. Fazzini, M. Grédiac, F. Hild, S. Mistou, J. Molimard, J.-J. Orteu, L. Robert, Y. Surrel, P. Vacher, and B. Wattrisse. Assessment of digital image correlation measurement errors : Methodology and results. *Experimental Mechanics*, 49(3) :353–370, Jun 2009.
- [16] H.-D. Bui, S. Chaillat, A. Constantinescu, and E. Grasso. Identification of a planar crack in Zener type viscoelasticity. *Annals of Solid and Structural Mechanics*, 1(1) :3–8, 2010.
- [17] H.-D. Bui, A. Constantinescu, and H. Maigre. Numerical identification of linear cracks in 2d elastodynamics using the instantaneous reciprocity gap. *Inverse Problems*, 20(4) :993, 2004.
- [18] H.-D. Bui, A. Constantinescu, and H. Maigre. An exact inversion formula for determining a planar fault from boundary measurements. *Journal of Inverse ill-posed Problems*, 13 n 6 :553–565, 2005.
- [19] S.-S. Chen, Q.-H. Li, Y.-H. Liu, and H.-T. Chen. Identification of elastic orthotropic material parameters by the scaled boundary finite element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37(4) :781 – 787, 2013.
- [20] L. Chevalier, S. Calloch, F. Hild, and Y. Marco. Digital image correlation used to analyze the multiaxial behavior of rubber-like materials. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 20(2) :169 – 187, 2001.
- [21] T.-C. Chu, W.-F. Ranson, and M.-A. Sutton. Applications of digital-image-correlation techniques to experimental mechanics. *Experimental Mechanics*, 25(3) :232–244, 1985.
- [22] D. Claire, F. Hild, and S. Roux. A finite element formulation to identify damage fields : The equilibrium gap method. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 62 :189–208, 2004.

- [23] J.-D. Collins, G.-C. Hart, T.-K. Haselman, and B. Kennedy. Statistical identification of structures. *AIAA Journal*, 12, 04 1973.
- [24] L. Crouzeix, J.-N. Périé, F. Collombet, and B. Douchin. An orthotropic variant of the equilibrium gap method applied to the analysis of a biaxial test on a composite material. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 40(11) :1732 – 1740, 2009.
- [25] C. David. *Mechanical parameter identification of composite materials using multiscale digital image correlation*. Theses, Ecole des Mines d’Albi-Carmaux, November 2014.
- [26] M.-A. Dokainish and K. Subbaraj. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics-i. explicit methods. *Computers & Structures*, 32(6) :1371 – 1386, 1989.
- [27] O. Ezzaamari, B. Magnain, B. Emile, H. Laurent, and E. Florentin. Analyse d’images et calculs numériques pour la caractérisation d’un élastomère. *Rapport de stage de Master 2*, 2017.
- [28] M. Fazzini, O. Dalverny, and S. Mistou. Identification of materials properties using displacement field measurement. *Key Engineering Materials*, vol. 482 :pp. 57–65, 2011. Thanks to Trans Tech Publications editor. The definitive version is available at <http://dx.doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.482.57>.
- [29] P. Feissel and O. Allix. Modified constitutive relation error identification strategy for transient dynamics with corrupted data : The elastic case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(13-16) :1968 – 1983, 2007.
- [30] Z.-Q. Feng, P. Joli, J.-M. Cros, and B. Magnain. The bi-potential method applied to the modeling of dynamic problems with friction. *Computational Mechanics*, 36(5) :375–383, Oct 2005.
- [31] Z.-Q. Feng, B. Magnain, and J.-M. Cros. Solution of large deformation impact problems with friction between blatz-ko hyperelastic bodies. *International Journal of Engineering Science*, 44(1) :113 – 126, 2006.
- [32] E. Florentin and G. Lubineau. Identification of the parameters of an elastic material model using the constitutive equation gap method. *Computational Mechanics*, 46(4) :521–531, 2010.
- [33] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *international journal for numerical. Methods in Engineering*, 79(11) :1309–1331, 2009.
- [34] S.-N. Grama, S.-J. Subramanian, and F. Pierron. On the identifiability of anand viscoplastic model parameters using the virtual fields method. *Acta Materialia*, 86 :118–136, January 2015.

- [35] M. Grédiac and F. Hild. *Mesures de champs et identification en mécanique des solides (traité MIM)*. Lavoisier, 2011.
- [36] M. Grédiac and F. Pierron. Applying the virtual fields method to the identification of elasto-plastic constitutive parameters. *International Journal of Plasticity*, 22(4) :602 – 627, 2006.
- [37] M. Grédiac and F. Pierron. Identifying constitutive parameters from heterogeneous strain fields using the virtual fields method. *Procedia {IUTAM}*, 4 :48 – 53, 2012. {IUTAM} Symposium on Full-field Measurements and Identification in Solid Mechanics.
- [38] M. Grédiac, F. Pierron, S. Avril, and E. Toussaint. The virtual fields method for extracting constitutive parameters from full-field measurements : a review. *Strain*, 42(4) :233–253, 2006.
- [39] M. Grédiac, E. Toussaint, and F. Pierron. L'identification des propriétés mécaniques de matériaux avec la méthode des champs virtuels, une alternative au recalage par éléments finis. *Comptes Rendus Mécanique*, 330(2) :107 – 112, 2002.
- [40] M. Grédiac, E. Toussaint, and F. Pierron. Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 1-principle and definition. *International Journal of Solids and Structures*, 39(10) :2691 – 2705, 2002.
- [41] M. Grédiac, E. Toussaint, and F. Pierron. Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 2-application to in-plane properties. *International Journal of Solids and Structures*, 39(10) :2707 – 2730, 2002.
- [42] F. Hild, B. Raka, M. Baudequin, S. Roux, and F. Cantelaube. Multi-Scale Displacement Field Measurements of Compressed Mineral Wool Samples by Digital Image Correlation. *Applied optics*, IP 41 :6815–6828, 2002.
- [43] F. Hild, S. Roux, N. Guerrero, M.-E. Marante, and J. Florez-Lopez. Calibration of constitutive models of steel beams subject to local buckling by using Digital Image Correlation. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, November 2011.
- [44] M. Idjeri. *On the analysis of the homogeneous and heterogeneous deformations of the elastomer*. Theses, Université Paris-Est, April 2013.
- [45] J. Kajberg, K.-G. Sundin, L.-G. Melin, and P. Stahle. High strain-rate tensile testing and viscoplastic parameter identification using microscopic high-speed photography. *International Journal of Plasticity*, 20(4-5) :561 – 575, 2004.
- [46] K.-T. Kavanagh. Extension of classical experimental techniques for characterizing composite-material behavior. *Experimental Mechanics*, 12(1) :50–56, Jan 1972.

- [47] K.-T. Kavanagh and R.-W Clough. Finite element applications in the characterization of elastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, 7(1) :11–23, 1 1971.
- [48] P. Ladeveze and D. Leguillon. Error estimate procedure in the finite element method and applications. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 20(3) :485–509, 1983.
- [49] P. Ladevèze and A. Chouaki. Application of a posteriori error estimation for structural model updating. *Inverse Problems*, 15(1) :49, 1999.
- [50] F. Latourte, A. Chrysochoos, S. Pagano, and B. Wattrisse. Elastoplastic behavior identification for heterogeneous loadings and materials. *Experimental Mechanics*, 48(4) :435–449, 2008.
- [51] T.-A. Laursen. *Computational Contact and Impact Mechanics : Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis*. Engineering on-line library. Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- [52] D. Lecompte, A. Smits, S. Bossuyt, H. Sol, J. Vantomme, D. Van Hemelrijck, and A.-M. Habraken. Quality assessment of speckle patterns for digital image correlation. *Optics and Lasers in Engineering*, 44(11) :1132 – 1145, 2006.
- [53] B. Magnain. *Développement d’algorithmes et d’un code de calcul pour l’étude des problèmes de l’impact et du choc*. Theses, Université d’Evry-Val d’Essonne, November 2006.
- [54] R. Moulart, F. Pierron, S.-R. Hallett, and M.-R. Wisnom. Full-field strain measurement and identification of composites moduli at high strain rate with the virtual fields method. *Experimental Mechanics*, 51(4) :509–536, 2011.
- [55] N.-M. Newmark. *A Method of Computation for Structural Dynamics*. A Method of Computation for Structural Dynamics. American Society of Civil Engineers, 1959.
- [56] H.-M. Nguyen, O. Allix, and P. Feissel. A robust identification strategy for rate-dependent models in dynamics. *Inverse Problems*, 24(6) :065006, 2008.
- [57] D. Notta-Cuvier, B. Langrand, F. Lauro, and E. Markiewicz. An innovative procedure for characterising a coupled elastoplastic damage model of behaviour using the Virtual Fields Method. *International Journal of Solids and Structures*, 69-70 :p. 415–427, 2015.
- [58] E. Pagnacco, D. Lemosse, F. Hild, and F. Amiot. Inverse strategy from displacement field measurement and distributed forces using FEA. *Society for Experimental Mechanics*, 2005.
- [59] J.-C. Passieux, F. Bugarin, C. David, J.-N. Périé, and L. Robert. Multiscale displacement field measurement using digital image correlation : Application to the identification of elastic properties. *Experimental Mechanics*, 55(1) :121–137, 2015.

- [60] W.-H. Peters and W.-F. Ranson. Digital imaging techniques in experiment stress analysis. 21, 07 1982.
- [61] F. Pierron, S. Avril, and V. The Tran. Extension of the virtual fields method to elastoplastic material identification with cyclic loads and kinematic hardening. *International Journal of Solids and Structures*, 47(22-23) :2993 – 3010, 2010.
- [62] F. Pierron and M. Grédiac. *The Virtual Fields Method : Extracting Constitutive Mechanical Parameters from Full-field Deformation Measurements*. Springer New York, 2012.
- [63] N. Promma, B. Raka, M. Grédiac, E. Toussaint, J.-B. Le Cam, X. Balandraud, and F. Hild. Application of the virtual fields method to mechanical characterization of elastomeric materials. *International Journal of Solids and Structures*, 46 :698–715, 2009.
- [64] B. Rahmani, I. Villemure, and M. Levesque. Regularized virtual fields method for mechanical properties identification of composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 278 :543 – 566, 2014.
- [65] L. Robert, V. Velay, N. Decultot, and S. Ramde. Identification of hardening parameters using finite element models and full-field measurements : some case studies. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 47(1) :3–17, January 2012.
- [66] S. Roux and F. Hild. Stress intensity factor measurements from digital image correlation : post-processing and integrated approaches. *International Journal of Fracture*, 140(1) :141–157, Jul 2006.
- [67] M. Sezgin and B. Sankur. Survey over image thresholding techniques and quantitative performance evaluation. *Journal of Electronic Imaging*, 13(1) :146–168, 2004.
- [68] P. Soille. *Morphological image analysis : principles and applications*. Springer, 2013.
- [69] K. Subbaraj and M.-A. Dokainish. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics-ii. implicit methods. *Computers & Structures*, 32(6) :1387 – 1401, 1989.
- [70] Y. Surrel. Les techniques optiques de mesure de champ : essai de classification. *Instrumentation, Mesures, Métrologie*, pages 11–42, 2005.
- [71] M.-A. Sutton, W.-J. Wolters, W.-H. Peters, W.-F. Ranson, and S.-R. McNeill. Determination of displacements using an improved digital correlation method. *Image and Vision Computing*, 1(3) :133–139, 8 1983.
- [72] D. De Tommasi, D. Ferri, G.-C. Marano, and G. Puglisi. Material parameters identification and experimental validation of damage models for rubberlike materials. *European Polymer Journal*, 78 :302 – 313, 2016.

- [73] E. Toussaint, M. Grédiac, and F. Pierron. The virtual fields method with piecewise virtual fields. *International Journal of Mechanical Sciences*, 48(3) :256 – 264, 2006.
- [74] C. Touzeau, B. Magnain, B. Emile, H. Laurent, and E. Florentin. Identification in transient dynamics using a geometry-based cost function in finite element model updating method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 122 :49 – 60, 2016.
- [75] C. Touzeau, B. Magnain, Q. Serra, and E. Florentin. Accuracy and robustness analysis of geometric finite element model updating approach for material parameters identification in transient dynamic. *International Journal of Computational Methods*, 2018.
- [76] P. Wriggers. *Computational Contact Mechanics*. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [77] P. Wriggers. *Nonlinear Finite Element Methods*, volume 4. Springer Berlin Heidelberg, 01 2008.
- [78] V. Yastrebov. *Computational contact mechanics : geometry, detection and numerical techniques*. Theses, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, March 2011.
- [79] H. Yiqian and Y. Haitian. Solving inverse couple-stress problems via an element-free galerkin (efg) method and gauss-newton algorithm. *Finite Elements in Analysis and Design*, 46(3) :257 – 264, 2010.
- [80] E. Zappa, A. Matinmanesh, and P. Mazzoleni. Evaluation and improvement of digital image correlation uncertainty in dynamic conditions. *Optics and Lasers in Engineering*, 59 :82 – 92, 2014.

**Résumé** : Les procédures d'identification de paramètres de matériau utilisent généralement un champ cinématique mesuré expérimentalement par des techniques non intrusives. En dynamique, une telle démarche n'est pas triviale en raison du nombre important d'informations à traiter. Par ailleurs, la fiabilité de ces informations mesurées conditionne en partie la qualité de l'identification des paramètres. Dans ce travail, nous développons deux nouveaux outils numériques visant à simplifier la démarche d'identification tant au niveau de l'implémentation numérique qu'au niveau de la mise en œuvre expérimentale. Le premier outil, basé sur la méthode des champs virtuels, conduit à une simple inversion d'un système de petite taille. Cette démarche diminue le coût d'une identification de manière significative. Cette méthode est comparée à l'approche du recalage de modèles éléments finis dans le cadre de l'élasticité linéaire. Le second outil est une approche purement géométrique du recalage de modèles. L'objectif de cette nouvelle approche est de s'affranchir de la pose d'un mouchetis aléatoire et de simplifier les traitements d'images associés à la corrélation d'images numériques. Nous montrons que cette méthode est adaptée au contexte de la dynamique en grandes transformations. Les deux outils sont évalués en robustesse et en précision lorsque des incertitudes viennent perturber la mesure.

**Mots-clés** : Identification, Dynamique, Éléments finis, Traitement d'images, Approche géométrique de recalage de modèles, Méthode des champs virtuels, Robustesse et précision, Coûts numériques, Études comparatives.

**Abstract** : The material parameters identification procedure usually takes benefit of measured kinematic field obtained by non intrusive techniques. In dynamics, such a procedure can be challenging because of the important flow of information to take into account. By the way, the reliability of those measured information is likely to define the quality of the parameters identified. In this work, we develop two new numerical tools in order to simplify the identification procedure in term of numerical and experimental implementation. The first tool, based on the virtual fields method, leads to a small system inversion. This method allows one to significantly decrease the cost of one identification. This method is compared to the finite element model updating method in linear elasticity. The second tool is a geometrical approach of the finite element model updating method. This new method aim at overcoming the deposit of a random speckle and of simplifying image processing associated with the digital image correlation technique. Results demonstrate that the method is adapted to the framework of dynamics in large transformations. Both numerical tools are assessed in term of robustness and accuracy when different kind of uncertainties are considered.

**Key-words** : Identification, Dynamics, Finite elements, Image processing, Geometrical approach for model updating, Virtual fields method, Robustness and accuracy, Numerical costs, Comparative studies.