



HAL
open science

Entre arithmétique et géométrie discrète, une étude épistémologique et didactique du théorème de Bézout et du théorème de Pick

Sinaly Dissa

► **To cite this version:**

Sinaly Dissa. Entre arithmétique et géométrie discrète, une étude épistémologique et didactique du théorème de Bézout et du théorème de Pick. Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]. Université Grenoble Alpes [2020-..]; Université des Sciences Techniques et Technologiques de Bamako (Mali), 2020. Français. NNT : 2020GRALM008 . tel-02971653

HAL Id: tel-02971653

<https://theses.hal.science/tel-02971653v1>

Submitted on 19 Oct 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

**préparée dans le cadre d'une cotutelle entre la
Communauté Université Grenoble Alpes (UGA) et
l'Université des Sciences, des Techniques et des
Technologies de Bamako (USTTB)**

Spécialité : **Mathématiques**

Arrêté ministériel : le 6 janvier 2005 – 25 mai 2016

Présentée par

Sinaly DISSA

Thèse dirigée par Sylvain GRAVIER et Gaoussou
TRAORÉ, codirigée par Denise GRENIER

préparée au sein du **Laboratoire Institut Fourier de
Grenoble**, dans les **Écoles Doctorales Mathématiques,
Sciences et Technologies de l'Information, Informatique /
Facultés des Sciences et Techniques de Bamako**

Entre arithmétique et géométrie discrète, une étude épistémologique et didactique autour du théorème de Bézout et du théorème de Pick

Thèse soutenue publiquement le **17 mars 2020**,
devant le jury composé de :

Eric DUCHÊNE – MCF, Lyon I (rapporteur)

Viviane DURAND-GUERRIER – PR, Univ. Montpellier I
(examineur)

Thierry GALLAY – PR, UGA (Président)

Sylvain GRAVIER – DR CNRS, UGA (directeur)

Denise GRENIER- MCF, UGA (examineur)

Karim SAMAKÉ- MCF, USTTB (FST) (invité)

Fana TRAORÉ- PR, USTTB (FST) (invité)

Gaoussou TRAORÉ – PR, USTTB (FST) (co-directeur)

Cécile OUVRIER-BUFFET – PR, UPECréteil (rapporteur)



Remerciements

Je tiens d'abord à remercier très particulièrement Sylvain GRAVIER et Denise GRENIER pour le soutien qu'ils m'ont apporté tout au long de cette thèse. A commencer par un accueil chaleureux, un soutien lors de mes démarches administratives, mais aussi mes participations à des rencontres et activités de recherches sur la didactique des mathématiques, ils ont été toujours présents. Je garde un souvenir fort de nos moments de travail qui m'ont donné le courage de toujours mieux faire.

Je remercie Gaoussou TRAORE, qui a accepté de co-diriger cette thèse pour son aide et sa disponibilité durant cette thèse.

Je remercie Cécile OUVRIER-BUFFET et Eric DUCHÊNE qui ont accepté d'être rapporteurs sur cette thèse. Viviane DURAND-GUERRIER et Thierry GALLAY qui ont accepté de faire parti du jury.

Un grand merci à Sidi Békaye SOKONA et Mamadou Souleymane SANGARE de l'ENSup (École Normale Supérieure) de Bamako qui m'ont fait confiance en me donnant l'opportunité de poursuivre des études de recherche en didactique des mathématiques. Je n'oublie pas le temps qu'ils ont accordé à la distribution et à l'envoi de mon questionnaire adressé aux enseignants maliens. Je n'oublie pas aussi leurs remarques sur mon travail de mémoire qui m'ont beaucoup appris. Je leur dois beaucoup.

Je remercie tous les formateurs de l'ENSup de Bamako pour leur appui durant cette thèse.

Je remercie l'équipe administrative de l'IREM (Institut de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques) de Grenoble, qui m'a bien accueilli à chaque fois que j'y allais. Un merci particulier à la Directrice Michèle GANDIT pour sa générosité et sa gentillesse dès mon premier jour.

Je remercie l'équipe administrative de l'Institut Fourier de Grenoble, qui m'a bien accueilli et bien accompagné durant toutes mes démarches administratives.

Je remercie chaleureusement mes parents, ma famille, mes amis qui m'ont accompagnés pendant cette thèse. Ils ont été tous là, pour me soutenir chacun en sa façon. Je ne peux pas vous citer tous, mais sachez que je pense à vous.

Un petit message reconnaissant à mon frère Souleymane DISSA, à Marine TOSCANE et ses parents Jean-Claude et Dominique pour leur soutien. Ils m'ont chaleureusement accueilli et m'ont fait découvrir Paris, Fontainebleau.

Résumé

Cette thèse étudie la problématique de changement de registres dans l'enseignement des mathématiques. Plus spécifiquement, nous avons choisi d'étudier les registres du continu et du discret avec des interactions des domaines de l'arithmétique et de la géométrie.

Cette thèse montre, en particulier, que les situations adidactiques / didactiques « classiques » ne permettent pas de mettre en œuvre de telles interactions.

Nous avons montré, de plus, qu'il y a une forte prégnance du continu dans les conceptions des étudiants et même une résistance à considérer le discret. Nos expérimentations ont été réalisées auprès d'étudiants de Licence mathématiques et de formateurs.

Notre première ingénierie aborde l'étude des points entiers d'une droite du plan. Elle a mis en évidence l'obstacle à reconnaître une caractérisation géométrique des solutions de l'équation de Bézout (existence et exhaustivité).

Cela montre, que pour franchir cet obstacle de changement de registres, il est nécessaire de proposer un type de situation plus « ouverte » et concernant un problème mathématique épistémologiquement consistant.

Dans cette thèse, nous avons étudié la possibilité de faire la dévolution d'un changement de registre arithmétique/géométrie dans le cadre de « Situation Recherche pour la Classe ». C'est un des objectifs de notre seconde ingénierie portant sur l'aire de polygones à sommet entier (en référence au théorème de Pick).

Deux pré-expérimentations ont permis de cerner les conditions de prise en compte du registre discret pour une question relevant de la géométrie.

Nous avons construit une dernière expérimentation en tenant compte de ces conditions.

L'analyse didactique de la situation sur Pick nous permet d'affirmer que, d'une part, le modèle SiRC est adapté à l'ingénierie de situations de changement de registres. D'autre part elle montre aussi que l'arithmétique et la géométrie sont des domaines mathématiques pertinents pour les interactions de registre et le travail sur la preuve et le raisonnement.

Parmi les conditions pour une bonne dévolution des changements de registre, la nature de la question joue un rôle essentiel. Nous avons choisi dans l'ingénierie sur le problème de Pick de demander de chercher une « méthode » ou une « formule » sans préciser les variables et les registres concernés.

Notre expérimentation a montré que ce type de question a permis le développement de nombreuses stratégies identifiées dans l'analyse mathématique du problème.

Mots clés : didactique, arithmétique, géométrie discrète, changement de registre

Table des matières

Introduction.....	11
I - Épistémologie.....	15
I.1 - En arithmétique.....	15
1.1 - Divisibilité et PGCD des nombres entiers.....	15
1.2 - Notion de commune mesure.....	17
1.3 - Théorème de Bézout.....	19
I.2 - En géométrie discrète.....	21
2.1 - Droite discrète.....	21
2.2 - Théorème de Pick.....	22
II - Travaux didactiques existants sur l'arithmétique et la géométrie discrète.....	27
II.1 - Travaux sur l'arithmétique.....	27
1.1 - Ravel (thèse, 2003).....	27
1.2 - Battie (thèse, 2003).....	28
1.3 - Godot (Grand N n°78, 2006).....	28
1.4 - Gardes (Petit x n°83, 2010).....	29
1.5 - Majaj (thèse, 2011).....	30
II.2 - Travaux sur la géométrie discrète.....	30
2.1 - Grenier et Payan (RDM n°18-2, 1998).....	30
2.2 - Ouvrier-Bufferet (thèse, 2003).....	31
2.3 - Grenier et Tanguay (Petit x n°78, 2008).....	31
II.3 - Conclusion.....	32
III - Transposition didactique de notions de l'arithmétique et de la géométrie discrète.....	35
III.1 - Programmes et manuels maliens.....	35
1.1 - Programmes de 7ème, 8ème, 9ème.....	35
1.2 - Programme du Lycée.....	36
1.3 - Analyse de manuels.....	40
III.2 - Programme et Manuels français.....	42
III.3 - Conclusion.....	44
IV - Questions de recherche et méthodologie.....	45
V - Cadres théoriques didactiques.....	47
V.1 - Notion de registre.....	47
V.2 - Situation didactique – Situation adidactique.....	48
V.3 - Situation de recherche pour la classe (SiRC).....	48
VI - Points entiers sur une droite.....	53
VI.1 - Problème général.....	53
VI.2 - Étude mathématique.....	53
2.1 - Résolution graphique.....	53
2.2 - Autres méthodes.....	56

VI.3 - Étude didactique.....	58
VI.4 - Situation expérimentée.....	60
VI.5 - Analyse des productions.....	62
5.1 - Classe de Master 1 (futurs professeurs d'enseignement secondaire).....	62
5.2 - Classe de Master 2 (futurs professeurs d'enseignement secondaire).....	68
VI.6 - Conclusion.....	72
VII - Aire et points entiers d'un polygone.....	73
VII.1 - Problème général.....	73
VII.2 - Étude mathématique.....	74
2.1 - Application des méthodes du registre du continu.....	74
2.2 - Recherche d'autres méthodes de calcul.....	77
2.3 - Utilisation des points de la grille.....	79
2.4 - Étude du triangle sans points entiers intérieurs.....	90
2.5 - Cas des polygones réguliers.....	94
VII.3 - Étude didactique.....	94
3.1 - Situations de pré-expérimentation.....	97
3.2 - Situation expérimentée.....	102
3.3 - Résultats de l'expérimentation.....	117
VII.4 - Conclusion.....	118
Conclusion et perspectives.....	121
Bibliographie.....	123
Annexes.....	129

INTRODUCTION

Pendant notre période d'activité d'enseignement au lycée, nous avons observé que l'arithmétique a un traitement particulier. D'une part, elle occupe peu de place dans les programmes. D'autre part, elle apparaît « isolée » dans les enseignements, sans lien avec d'autres domaines mathématiques. Ces constats nous ont motivé à effectuer une première étude sur l'enseignement de l'arithmétique au Lycée (Mali) dans le cadre d'un mémoire de master de didactique des mathématiques en 2013. Ce travail nous a permis de découvrir que certains enseignants ont des conceptions très restreintes sur des notions arithmétiques. De plus, les situations d'enseignement sont centrées sur des techniques pour résoudre des familles de problèmes bien spécifiques : déterminer le PGCD (ou le PPCM) d'entiers donnés, décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers, résoudre des équations entières, etc. En tant que formateur depuis quelques années, il nous est paru important de poursuivre les recherches sur l'enseignement de l'arithmétique afin de trouver des éléments didactiques et mathématiques qui pourraient avoir des apports pour enrichir la formation et/ou les ressources pédagogiques.

Ainsi, nous avons choisi d'étudier les registres de continu et du discret avec des interactions des domaines de l'arithmétique et de la géométrie.

Au delà du professionnel, ce choix est motivé aussi par la richesse des notions et leurs applications étudiées dans chacun de ces deux champs mathématiques. Rappelons que l'arithmétique est le champ mathématique consacré à l'étude des nombres, leurs propriétés et usages. Dans certains ouvrages, elle ne se distingue pas de la *théorie des nombres*. Les nombres sont utilisés dans la vie quotidienne, ainsi que dans toutes les autres disciplines scientifiques à chaque fois qu'il s'agit par exemple de compter, désigner, dénombrer ou mesurer. Quant à la géométrie discrète, elle étudie les objets géométriques dans des espaces discrets (par exemple les grilles régulières à deux ou trois dimensions). Elle contribue particulièrement à l'essor du traitement d'image, à l'analyse et à la reconnaissance de formes en informatique.

Dans les recherches en didactiques des mathématiques, l'arithmétique et la géométrie discrète ne sont pas abordées suivant la problématique de liens entre les deux domaines (cf. § II Des travaux didactiques existants). En abordant conjointement les deux, nous visons à regarder d'une part l'apport de la géométrie, pour l'enseignement de notions arithmétiques, d'autre part, amorcer une introduction de la géométrie discrète dans la formation.

Nous avons choisi, comme entrée dans cette recherche, deux théorèmes qui nous paraissent « emblématiques ». Le qualificatif « emblématique », renvoie au fait que ces théorèmes jouent une fonction centrale du point de vue épistémologique dans ces deux domaines mathématiques (cf. § I. Épistémologie). Les formulations simples des énoncés et des preuves accessibles dès le niveau Collège, nous ont aussi motivé à les privilégier.

Le premier est le théorème dit de Bézout. En arithmétique, il est présent, par exemple à chaque fois que l'on doit résoudre des questions de résolutions d'équations entières. Le second est le théorème de Pick du mathématicien autrichien Georg Alexander Pick. Il est moins connu que celui de Bézout, du moins dans l'enseignement. Il établit une formule qui permet de calculer l'aire d'un polygone sur une grille en effectuant uniquement des additions de points de la grille.

Les principales questions étudiées dans cette thèse sont :

- Quels conditions et types de situations pour établir le lien, dans l'enseignement, entre arithmétique et géométrie ?
- Quelles connaissances mathématiques (notionnelles et transversales) peuvent-elles se construire avec ces situations ?

Dans la première partie de cette thèse, nous apportons des éléments de réponses aux questions suivantes :

- Quand ces théorèmes sont-ils apparus dans le savoir savant ? Dans quel contexte ? A quoi servent-ils en mathématique ?
- Où retrouve-t-on ces théorèmes dans l'enseignement ? Quelles place et fonction occupent-ils ? Comment sont-ils abordés ?

Ce premier travail nous permettra de circonscrire ces objets dans le savoir savant et dans l'enseignement.

Puis nous consacrons un chapitre aux travaux didactiques existant sur l'arithmétique et la géométrie (discrète). Cela vise à bien situer notre recherche par rapport à l'existant.

La deuxième partie de cette thèse, est consacrée à la construction et à la mise en œuvre de deux situations. Dans la première nous montrons la résistance des étudiants à considérer le discret versus le continu. La seconde est basée sur une mise en Situation de Recherche pour la Classe (SiRC). Ce modèle didactique a été développé dans mon équipe d'accueil « maths à modeler » et permet de transposer notamment des savoirs liés à la preuve et au raisonnement. Cette seconde ingénierie donne des éléments de réponse aux questions de recherche en identifiant des conditions nécessaires sur le type de situation permettant des interactions entre arithmétique et géométrie.

Les expérimentations sont effectuées avec des étudiants de Licence mathématiques et des élèves-professeurs.



Partie I
ÉTUDE DU SAVOIR SAVANT



I - ÉPISTÉMOLOGIE

Ce travail nous paraît indispensable en début de cette thèse, afin de mieux circonscrire nos objets d'étude. Dans le domaine de l'arithmétique, les théorèmes de référence de notre recherche concernent : la divisibilité, le PGCD et le théorème de Bézout. Concernant la géométrie discrète, nous privilégions le théorème de Pick (1899). Il fait un pont entre une notion du continu, l'aire de polygone, et les points du plan discret. Il nous paraît donc intéressant pour travailler les interactions entre continu et discret avec une forte relation avec l'arithmétique.

I.1 - EN ARITHMÉTIQUE

Afin de comprendre et de démontrer le théorème de Bézout qui est l'objet principal de cette partie, nous avons besoin de quelques définitions et propriétés concernant les nombres entiers. Nous travaillons donc exclusivement sur l'ensemble \mathbf{Z} , en privilégiant par moment l'ensemble des entiers positifs \mathbf{N} .

1.1 - Divisibilité et PGCD des nombres entiers

Définition 1. Soit a et b , deux nombres entiers ; on dit que b est un multiple de a , ou que b est *divisible* par a s'il existe un entier k tel que $b = ka$. On note $a \mid b$ (a *divise* b). On dit aussi que a est un diviseur de b .

D'un point de vue « ensembliste », l'ensemble des multiples de a est noté $a\mathbf{Z} = \{an, n \in \mathbf{Z}\}$. Autrement dit, l'ensemble des multiples d'un entier a sont : $\dots - 3a, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a, \dots$

La relation « \mid » est une relation d'ordre (réflexive, transitive et antisymétrique) dans \mathbf{N} ; elle est réflexive et transitive dans \mathbf{Z} . Dire que $a \mid b$ signifie que $b\mathbf{Z} \subset a\mathbf{Z}$.

La notion de *divisibilité* a un lien évident avec la *division*. En effet, pour qu'un entier b soit *divisible* par un entier a non nul, il faut et il suffit que le quotient $\frac{b}{a}$ (qui est un nombre rationnel) soit un entier.

Si $\frac{b}{a}$ est un entier k , on a, $b = ka$, de sorte que b est un multiple de a . Inversement, si b est

multiple de a , on peut écrire $b = ka$, où $k \in \mathbf{Z}$, comme $a \neq 0$, on a, $\frac{b}{a} = k$.

Cette propriété fournit un premier moyen simple pour tester la divisibilité d'un entier par un autre en particulier à l'aide d'une calculatrice. Mais en générale, on utilise plutôt la division avec reste, dite division euclidienne.

Division euclidienne. Soit a et $b \in \mathbf{Z}$ avec $b > 0$, il existe un et un seul couple d'entiers (q, r) tel que : $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$. q et r sont appelés respectivement quotient et reste de la division euclidienne de a par b .

Définition 2. Soit a et b deux entiers non nuls et $D(a, b)$ l'ensemble des diviseurs communs à a et b . $D(a, b)$ admet un plus grand élément, il est appelé le plus grand commun diviseur de a et b . On le note $PGCD(a, b)$.

Quelques propriétés

(P1). Si $a = bq + r$, alors $PGCD(a, b) = PGCD(b, r)$.

Preuve. Si un entier divise a et b , alors il divise r car $r = a - bq$. De même si un entier divise b et r , alors il divise a car $a = bq + r$.

Ainsi, $D(a, b) = D(b, r)$, et en particulier $PGCD(a, b) = PGCD(b, r)$

(P2). Le PGCD est associatif et commutatif. Autrement, si a, b, c sont des entiers non nuls, $PGCD(a, b, c) = PGCD(a, PGCD(b, c))$.

Pour calculer le PGCD de deux entiers, on peut utiliser l'algorithme d'Euclide dont le fondement est la propriété (P1) ci-dessus citée.

Algorithme d'Euclide

Soit $a > b$, effectuons la division euclidienne de a par b :

$$a = bq + r \text{ où } r < b.$$

Si $r = 0$ on a $PGCD(a, b) = b$ et le calcul est terminé.

Si $r \neq 0$, on a d'après la propriété (i) : $PGCD(a, b) = PGCD(b, r)$.

Effectuons alors la division euclidienne de b par r :

$$b = rq_1 + r_1 \text{ où } r_1 < r.$$

Si $r_1 = 0$, on a : $PGCD(b, r) = r$

et d'après la propriété (i) : $PGCD(a, b) = PGCD(b, r) = r$.

Le calcul est terminé.

Si $r_1 \neq 0$, on a : $PGCD(a, b) = PGCD(b, r) = PGCD(r, r_1)$.

Effectuons alors la division euclidienne de r par r_1 , et ainsi de suite.

Si à la $(n+1)^{ième}$ division aucun reste n'est nul, on a :

$$PGCD(a, b) = PGCD(b, r) = PGCD(r, r_1) = \dots = PGCD(r_{(n-1)}, r_n)$$

avec $b > r > r_1 \dots > r_{(n-1)} > r_n$.

L'ensemble des restes forme une suite d'entiers naturels strictement décroissante, donc de nombres tous distincts. C'est une partie de \mathbf{N} . Il existe par suite un entier n tel que la division de $r_{(n-1)}$ par r_n donne un reste nul : $r_{(n+1)}=0$ (principe de la descente infinie de *Fermat*¹). En effet, si aucun reste n'était nul, les divisions pourraient se poursuivre indéfiniment et l'ensemble des restes ne serait pas fini, ce qui est contradictoire avec le principe de la descente infinie. Donc il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $r_{(n+1)}=0$ et $PGCD(a, b)=PGCD(r_{(n-1)}, r_n)=r_n$. En d'autres termes le PGCD est le dernier reste non nul de la division successive.

Exemple : soit $a=476$ et $b=364$

1ère division : $476=364 \times 1+112$;

2ème division : $364=112 \times 3+28$;

3ème division : $112=28 \times 4+0$.

On trouve un reste nul. Le calcul est donc terminé. Le dernier reste non nul est 28. On a donc : $PGCD(476,364)=28$.

L'algorithme d'Euclide peut être réalisé sur un tableur ou programmé dans une calculatrice pour effectuer le calcul du PGCD. Précisons qu'ils existent autres techniques de calcul du PGCD.

L'algorithme d'Euclide peut servir aussi à trouver des solutions particulières (si elles existent) dans les résolutions d'équations à coefficients entiers.

Quant au PGCD, il est utilisé pour :

– Déterminer les diviseurs communs à deux entiers.

Exemple : les diviseurs communs à 13720 et 19432 sont les diviseurs de $PGCD(13720,19432)=56$ (car l'ensemble des diviseurs communs à a et b deux entiers non nuls, est l'ensemble des diviseurs de $PGCD(a, b)$).

– Pour simplifier des fractions et les rendre irréductibles.

Exemple. Soit à simplifier la fraction $\frac{50960}{43472}$, en utilisant l'algorithme d'Euclide on trouve $PGCD(50960,43472)=208$, on peut donc écrire : $\frac{50960}{43472}=\frac{208 \times 245}{208 \times 209}=\frac{245}{209}$, cette dernière fraction est irréductible.

– Pour simplifier la résolution de certaines équations dans \mathbf{Z}^2 ou dans \mathbf{N}^2 .

– Pour résoudre des problèmes « concrets ».

1.2 - Notion de commune mesure

C'est une notion introduite par les grecs dans l'antiquité. On ne disposait à l'époque que des entiers naturels pour compter, mesurer. On retrouve par exemple, dans les « éléments d'Euclide » (Euclide, trad. Itard J., 1961) les définitions suivantes :

¹ Le principe de la descente infinie « de Fermat » est donné sous l'une des deux formes suivantes :

- Tout ensemble non vide de \mathbf{N} admet un plus petit élément.
- Il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante dans \mathbf{N}

Définition 1. L'unité est ce suivant quoi chacune des choses est dite une.

Définition 2 : Le nombre est une multitude composée d'unité.

Ainsi, mesurer une longueur c'est compter combien d'unités permettent de reconstituer cette longueur. Pour définir le rapport de deux longueurs x , y , comme rapport de deux entiers, on peut utiliser deux techniques décrite ici dans (Berre. M, 2002) :

– *Première Technique.* Reporter parallèlement chacune des deux longueurs jusqu'à obtenir deux segments de même longueur.

Exemple.

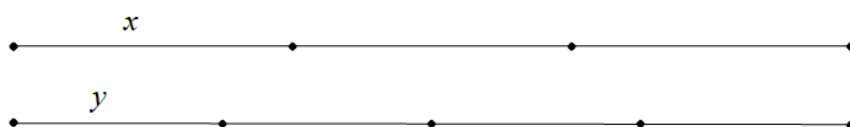


Figure 1. Illustration de recherche de rapport de longueurs

On a $3x = 4y$. On dit que les longueurs x et y sont dans le rapport 4 et 3.

– *Deuxième technique.* Trouver une unité de longueur qui puisse être reportée un nombre entier de fois dans chaque longueur x et y . S'il existe une telle unité u , on dira que u est une commune mesure pour x et y .

Exemple.

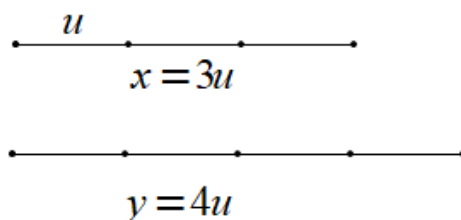


Figure 2. Exemple de rapport de longueur avec une commune mesure

Le principe pour déterminer une commune mesure de deux longueurs x , y est basé sur la propriété suivante :

S'il existe une commune mesure u pour les longueurs x et y ($x > y$), alors u est aussi une commune mesure pour y et $x - y$ et réciproquement.

Ce principe permet de construire un algorithme de détermination de la plus grande commune mesure de deux longueurs. On reconnaît bien ici l'algorithme d'Euclide. Voici des éléments qui permettent de comprendre comment cela fonctionne géométriquement.

Considérons que les deux longueurs initiales x et y sont représentées par des segments perpendiculaires. On obtient par conséquent un rectangle de dimensions x et y .

Supposons que $x < y$. Si on construit alors, à une extrémité du rectangle, un carré de côté x , il reste un rectangle dont les côtés sont x et $y - x$.

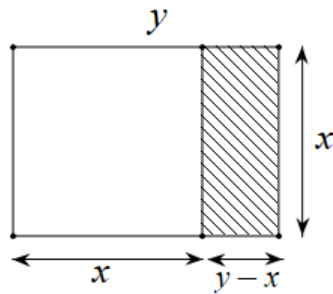


Figure 3. Illustration de la première étape du processus

Si y est un multiple de x , le rectangle de dimensions x, y peut être pavé par des carrés de côté x . La longueur x est alors la plus grande commune mesure de x et y .

Sinon on recommence le processus sur le rectangle de dimension x et $y-x$. Si le rectangle résiduel est un carré, on arrête (ce carré est le plus grand qui pave tous les rectangles successivement construits). Sinon on recommence.

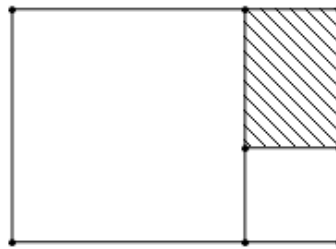


Figure 4. Illustration d'une autre étape du processus

Le processus fini par s'arrêter nécessairement sur un carré si les deux longueurs ont une commune mesure. Si au contraire, on obtient une suite de rectangles (jamais carrés) qui s'emboîtent indéfiniment, alors les deux longueurs sont incommensurables. Cela peut fournir alors une preuve de l'irrationalité de certain nombre.

L'interprétation géométrique de l'algorithme d'Euclide permet donc à la fois de visualiser la recherche du PGCD et de fournir une nouvelle preuve d'irrationalité.

1.3 - Théorème de Bézout

C'est l'un des principaux résultats sur les propriétés de nombres dits *premiers entre eux*.

Définition 1. On dit que deux entiers a et b sont premiers entre eux si leurs seuls diviseurs communs sont 1 et -1.

A noter que les « nombres premiers entre eux » ne doivent pas être confondus avec les « nombres premiers ». Afin d'éviter d'éventuelles confusions, certains auteurs utilisent l'expression « nombres étrangers » pour désigner des nombres premiers entre eux.

Énoncé du théorème. Pour que deux entiers a et b soient premiers entre eux, il faut et il suffit qu'il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

C'est ce théorème qui est généralement appelé *théorème de Bézout*. Dans certain ouvrage, on l'appelle « identité de Bézout ».

Selon (Guino. M, 2005), l'appellation « théorème de Bézout » pour ce théorème, ne serait pas historiquement justifiée. Le mathématicien français Etienne Bézout (1730-1783), a acquit sa célébrité en publiant des cours de mathématiques. Mais n'a pas inventé ce théorème qui figurait déjà dans « les Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres de Brachet » de Mésiriac (1581-1638). Cité par J. Dixmier dans son ouvrage (Cours de mathématiques, 1976), Bézout est surtout l'auteur de l'extension du résultat aux polynômes d'une variable.

Preuve du théorème de Bézout. La condition est suffisante car si $au + bv = 1$ alors, tout diviseur commun d à a et b est un diviseur commun de $au + bv$, donc d est égal à 1 ou -1.

Supposons inversement que a et b soient premiers entre eux et appelons E l'ensemble des entiers de la forme $ax + by$ où x et y sont des entiers quelconques. L'ensemble E contient a et b ainsi que $-a$ et $-b$. Comme l'un des nombres a ou b n'est pas nul (sinon a et b ne seraient pas premiers entre eux), E contient au moins un entier > 0 . Appelons m le plus petit entier de ce genre. Il s'écrit donc $au + bv$. Pour démontrer le théorème, il suffit de prouver que $m = 1$ ou ce qui revient au même que m divise à la fois a et b .

Pour cela, effectuons la division euclidienne de a par m : $a = mq + r$, avec q et r des entiers et $0 \leq r < m$.

Comme $r = a - mq = a - (au + bv)q = a(1 - uq) + b(-vq)$, on voit que r appartient à E . Dans ces conditions il est impossible que r soit strictement positif car cela contredirait la définition de m (il est le plus petit élément > 0 de E). On a donc $a = mq$, ce qui prouve que m divise a .

On démontre de la même manière que m divise b . En conclusion, on a donc $m = 1$. \square

Dans les résolutions de problèmes mathématiques, le théorème de Bézout peut servir :

– à démontrer que deux nombres sont premiers entre eux.

Exemple : démontrer que pour tout entier n , les entiers $a = n + 1$ et $b = 5n + 6$ sont premiers entre eux.

On a : $(-5) \times (n + 1) + 1 \times (5n + 6) = 1$; ainsi, $-5a + b = 1$ ce qui prouve que a et b sont premiers entre eux.

– à démontrer que des équations à coefficients entiers ont des (ou n'ont pas de) solutions entières.

Exemple : $9x - 14y = 1$ (E1) et $9x - 15y = 10$ (E2).

Dans l'équation(E1), 9 et -14 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Bézout, il existe des entiers u et v tel que : $9u - 14v = 1$ ($u = -3$ et $v = -2$ par exemple).

Pour E2, s'il admettait des solutions entières, alors, comme 3 divise 9 et 15, 3 devrait diviser 10, ce qui est faux. Donc E2 n'admet pas de solutions entières.

Le théorème de Bézout se généralise avec la propriété suivante :

Soit a et b deux entiers non nuls. Un entier d est un multiple du $PGCD(a, b)$, si et seulement si il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = d$.

Il permet aussi d'établir le *théorème de Gauss*.

Énoncé du théorème de Gauss. Si un entier a divise un produit bc de deux entiers b et c , si a est premier avec b , alors a divise c .

Preuve. Si on suppose que $a|bc$ et que a soit premier avec b . Alors d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$. On obtient donc en multipliant par c , $auc + bvc = c$. Comme a divise bc d'après notre hypothèse et il divise aussi auc (par définition de la division), a divise $auc + bvc = c$, c'est-à-dire il divise c . \square

Le théorème de Bézout généralisé et le théorème de Gauss permettent de résoudre les équations d'inconnues entières x et y se ramenant à la forme $ax + by = d$ (encore appelées équations diophantiennes). Ces résultats permettent de faire un lien entre l'arithmétique et la géométrie à chaque fois qu'on parlera de problème autour de points entiers d'une droite.

1.2 - EN GÉOMÉTRIE DISCRÈTE

2.1 - Droite discrète

La géométrie discrète a fait son apparition dans les années 70 (Rosenfeld A, 1974). Elle a pour objet de définir un cadre théorique pour transposer dans \mathbf{Z}^n les bases de la géométrie euclidienne. Les objets de ce domaine mathématique sont donc des ensembles de points et des relations entre ces points : on peut représenter par exemple une droite, un cercle, un polygone « discret » sur une grille régulière. Il faut préciser ici que les notions discrètes définies doivent être « le plus proche » des objets continues connues. Cela crée alors une complexité dans le choix des éléments de base pour définir les objets de la géométrie discrète.

Ils existent plusieurs approches de l'objet « droite discrète » (Ouvrier-Buffet, 2003). On peut citer : l'analyse discrète différentielle avec l'approche algorithmique de Bresenham (Bresenham JE., 1965), les algorithmes basés sur des analyses combinatoires, les algorithmes basés sur des analyses linguistiques, les petits harpons de Greene-Yoa, la discrétisation de Freeman et Pham (Freeman, 1970), la discrétisation de Rosenfeld (Rosenfeld A., 1974) et l'approche arithmétique de Reveillès (Reveillès JP., 1991). Nous ne présentons pas ici l'histoire des définitions de la droites discrètes. Mais pour fixer un peu les idées sur le concept, on peut retenir la définition arithmétique de Reveillès (1991) : Une droite discrète de paramètres (a, b, μ) et d'épaisseur arithmétique ω est définie comme l'ensemble des points (x, y) vérifiant la double inégalité : $\mu \leq ax - by < \mu + \omega$.

- a, b, μ, ω dans \mathbf{Z}
- a et b premiers en eux, $\frac{a}{b}$ pente de la droite
- Elle est notée $D(a, b, \mu, \omega)$

L'étude de l'objet « droite discrète » est donc fondamentalement liée à des propriétés arithmétiques.

2.2 - Théorème de Pick

Les problèmes de répartition des parcelles de cultures ont rendu nécessaire l'établissement de formule de calcul d'aire. On a donc appris, il y a de longue date à effectuer le calcul d'aire de figures géométriques, en utilisant des longueurs de côtés de celles-ci.

Ce point de vue sur l'aire privilégie l'approche analytique qui propose de déterminer l'aire de certain domaine à l'aide du calcul intégral. Le calcul d'aire peut alors être présenté comme un problème d'analyse dimensionnelle sur les longueurs. Autrement dit, calculer une aire, revient à multiplier des mesures de longueurs. On travaille et raisonne alors essentiellement dans le continu sur de tel problème.

Le principe de conservation de l'aire quant à lui privilégie des approches géométriques telles que celle que l'on retrouve dans les énoncés d'identités remarquables sous formes de « preuves sans mot ». De façon plus efficiente, ce principe permet d'adopter des méthodes de « couper/coller » pour démontrer par exemple des invariances sur l'aire de figures géométriques données. La formule de l'aire d'un triangle basé sur la hauteur peut être démontrée ainsi en ramenant tout triangle d'aire donné en un triangle rectangle de même aire. De manière plus générale, le théorème de Bolyai (Gerwien P, 1833) affirme que l'on peut découper tout polygone d'aire donnée en un nombre fini de « petits » polygones permettant de former tout autre polygone de même aire.

Ce point de vue sur l'aire comme invariant d'une figure géométrique a donné lieu aussi au développement d'opérations permettant de préserver l'aire. On peut mentionner la notion algébrique de *transvection* qui peut être vue comme une généralisation en de plus grandes dimensions de la notion de hauteur pour le triangle. Cette notion est centrale dans le développement de notions d'algèbre linéaire notamment des théorèmes de décomposition de matrices inversibles.

Geog Alexander Pick (1859-1942), un mathématicien autrichien, a proposé une manière assez inattendu (à premier abord) pour déterminer l'aire sans passer par les longueurs. Sa méthode ramène le calcul d'aire d'un polygone à une opération de dénombrement de points.

Théorème de Pick (1899).

Soit un polygone entier P dont i est le nombre de points de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ à l'intérieur du polygone et b le nombre de points de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ sur le bord du polygone. Alors, l'aire $A(P)$ du polygone est : $A(P) = i + \frac{b}{2} - 1$.

La formule ne s'applique donc qu'à un cas particulier de polygones : les polygones entiers. Ils s'agit des polygones dont tous les sommets sont entiers (points à coordonnées entières). Par exemple, sur la Figure 3, les polygones P_1 , P_3 sont entiers alors que P_2 n'en est pas un. Les polygones entiers sont aussi dénommés polygones simples.

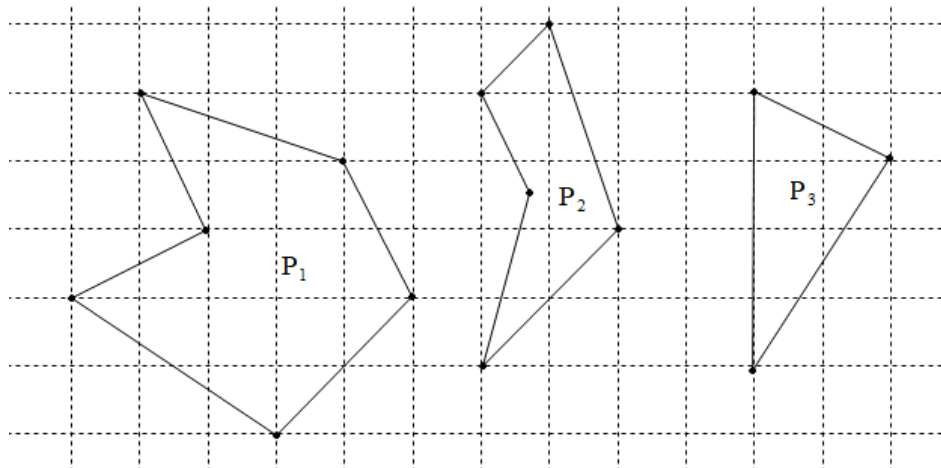


Figure 3. Exemple de polygones

D'après la formule de Pick :

Polygone	Nombre de points intérieur : i	Nombre de points sur les bords : b	Aire $(P) = i + \frac{b}{2} - 1$
P_1	10	7	$A(P_1) = 12,5$
P_3	2	6	$A(P_3) = 4$

De sa publication en 1899, la formule de Pick est restée inconnue pendant près d'un demi-siècle (Pick G., 1899). Selon la littérature, c'est Hugo Steinhaus (mathématicien polonais, 1887-1972) qui l'a fait connaître à travers son livre « les mathématiques en instantanés » publié en 1964 (Steinhaus H., 1964).

Dans (Grunbaum et al., 1993), on trouve une liste de différentes preuves de ce théorème. La plupart de celles-ci utilisent le principe de « couper/coller » et se ramènent à la preuve de la formule sur les triangles. Dans le chapitre VII de cette thèse, on trouvera une preuve de ce type qui est accessible dès le collège. La notion de triangulation de polygone apparaît fréquemment dans de telles preuves (voir par exemple, Gaskel et al., 1976). L'existence d'algorithmes efficaces de triangulations d'un polygone est une problématique classique de géométrie discrète. On propose, dans le chapitre VII, une preuve par récurrence de l'existence d'une triangulation qui peut être interprétée en un algorithme polynomial.

On peut mentionner l'approche originale proposée par (Blatter C., 1997). Elle est basée sur le principe de thermodynamique de diffusion de la chaleur. Au temps 0, on associe à chaque point de la grille (\mathbb{Z}^2) une quantité de chaleur fixe. Celle-ci se diffuse dans le temps selon un disque de rayon croissant, jusqu'à obtenir une répartition uniforme de la chaleur où tout point du plan (réel) ait une unité de chaleur. Une fois diffusée ainsi, la quantité de chaleur répartie sur un polygone correspond à son aire. Par un argument de symétrie autour de chaque côté du polygone, on observe que la quantité de chaleur sortant du polygone est égale à celle provenant de l'extérieur. Par ailleurs, la quantité de chaleur entrant dans le polygone, issue d'un sommet du bord correspond à la moitié de celle du sommet moins une proportion correspondant à l'angle des deux côtés incidents au sommet. Comme la somme des angles des sommets du bord d'un polygone correspond à un tour complet (2π), on en déduit la formule de Pick.

Lorsque l'on dispose d'une formule « simple » comme celle énoncée par le théorème de Pick, on peut s'interroger sur son efficacité d'un point de vue algorithmique. Par exemple, comment calculer les points intérieurs ? Un algorithme de balayage par ligne donne un résultat satisfaisant qui n'est pas plus difficile (d'un point de vue algorithmique) que le calcul de l'aire. Il est cependant intéressant de noter que la problématique algorithmique du calcul des points entiers d'un polygone (non nécessairement entier) reste d'actualité (voir par exemple de De Loera et al., 2004).

Depuis, différents auteurs ont cherché à généraliser la formule de Pick. Les preuves par « couper/coller » peuvent naturellement s'étendre pour de plus grandes dimensions ou à des surfaces non planes.

Les tétraèdres de Reeve (Reeve JE, 1957 ; 1959) montrent que l'on ne peut pas obtenir d'analogue à la formule de Pick en dimension 3 en utilisant uniquement les points du réseau. Cependant, Reeve propose une formule similaire mais en incorporant la caractéristique d'Euler du bord du polygone. Cette preuve a été étendue par Macdonald (Macdonald I.G., 1963) pour toutes dimensions en utilisant le polynôme d'Ehrhart qui permet de calculer notamment le nombre de points entiers à l'intérieur d'un polyèdre (Ehrhart E., 1967). Depuis, plusieurs auteurs ont adapté ces techniques pour d'autres formules de calcul de volume de polyèdre. Par exemple, Kolodziejczyk présente des généralisations de la formule d'Hadwiger-Wills dans (Kolodziejczyk K. et al., 2000).

Dans (Dubeau et al., 2007), les auteurs décrivent des formules d'aire de polygones inscrits dans des réseaux sur des surfaces, la caractéristique d'Euler de la surface entre alors aussi en ligne de compte.

Au delà de la détermination de l'aire, la formule de Pick permet également de calculer l'un des entiers i ou b en connaissant l'autre et l'aire.

Friedelmeyer J.P. et al. (dans Bulletin Vert n°516 de l'APMEP²), indiquent que la formule est exploitée par des forestiers au Canada pour estimer le nombre d'arbres plantés de façon régulière dans un domaine. Pour faire ce calcul, il leur suffit de retrouver l'aire du domaine dans le cadastre et de compter les arbres sur le pourtour du domaine. La formule de Pick leur donne alors le nombre d'arbres situés dans le domaine.

Dans (Grunbaum B. et al. 1993), les auteurs introduisent leur article en mentionnant une anecdote attribuée à DeTemple dans (DeTemple D. 1983) :

Some years ago, the Northwest Mathematics Conference was held in Eugene, Oregon. To add a bit of local flavor, a forester was included on the program, and those who attended this session were introduced to a variety of nice examples which illustrated the important role that mathematics plays in the forest industry. One of his problems was concerned with the calculation of the area inside a polygonal region drawn to scale from field data obtained for a stand of timber by a timber cruiser. The standard method is to overlay a scale drawing with a transparency on which a square dot pattern is printed. Except for a factor dependent on the relative sizes of the drawing and the square grid, the area inside the polygon is computed by counting all of the dots fully inside the polygon, and then adding half of the number of dots which fall on the bounding edges of the polygon. Although the speaker was not aware that he was essentially using Pick's formula, I was delighted to see that one of my favorite mathematical results was not only beautiful, but even useful. (From DeTemple (1989).)

² Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public – De la maternelle à l'université (en France)

II - TRAVAUX DIDACTIQUES EXISTANTS SUR L'ARITHMÉTIQUE ET LA GÉOMÉTRIE DISCRÈTE

Dans ce chapitre, nous présentons des travaux didactiques sur l'arithmétique et la géométrie discrète. L'objectif de ce travail est de situer notre recherche par rapport à l'existant. Nous allons nous centrer sur les travaux qui problématisent l'enseignement de concepts en arithmétique et de la géométrie discrète.

II.1 - TRAVAUX SUR L'ARITHMÉTIQUE

Nous n'avons pas identifié beaucoup de travaux didactiques sur l'arithmétique. Le fait que les programmes d'enseignement de beaucoup de pays, accordent peu de place à l'arithmétique, pourrait être la raison.

1.1 - Ravel (thèse, 2003)

La thèse de Ravel porte sur la réintroduction en 2002 de l'arithmétique au niveau des classes de Terminale S en France après 20 années d'absence. Elle a effectué une analyse institutionnelle de l'enseignement de l'arithmétique et une analyse de pratiques de classes. Ses recherches se sont centrées sur les programmes d'arithmétique de Terminale Scientifique de 1886 à 2002 et les manuels de la période (1998-2002). Les documents ont été analysés du point de vue de l'écologie des savoirs et des praxéologies. Elle a aussi élaboré et analysé un questionnaire (à l'adresse des enseignants), dont les questions peuvent se regrouper comme suit :

- des questions autour de la démonstration de quelques propriétés dans le programmes de Terminale S : l'existence de l'unicité de la division euclidienne ; le théorème de Bézout, l'existence de la décomposition d'un entier naturel (supérieur ou égal à 2) en produit de facteurs premiers ;
- des questions autour du PGCD : méthodes de calcul, coup et efficacité des méthodes ;
- des questions autour de l'usage de la calculatrice en arithmétique : programmation d'algorithmes sur calculatrice.

Pour finir, elle a effectué des observations dans deux classes de Terminale Scientifique - spécialité mathématiques. Cette étape lui a permis d'identifier les choix d'organisations mathématiques et didactiques de ces enseignants et leur conformité avec les savoirs arithmétiques à enseigner.

Parmi les résultats de Ravel, nous nous intéressons en particulier à son analyse des programmes. Elle a identifié une évolution des fonctions occupées par l'arithmétique au fil des changements de programmes. Parmi ces fonctions de l'arithmétique, on distingue :

- La fonction structurelle : étude de structures algébriques de nombres en arithmétique ;
- La fonction diversité des modes de raisonnement : les résolutions de problèmes arithmétiques permettant de travailler les différents types de raisonnement ;

-
- La fonction mise en avant de l’aspect algorithmique : les algorithmes que l’on peut travailler en arithmétique.

Cette typologie des fonctions de l’arithmétique nous paraît utile pour l’étude de programmes et de manuels dans notre étude,

1.2 - Battie (thèse, 2003)

L’étude de Battie s’est déroulée comme celle de Ravel (2003), dans le contexte de la réintroduction de l’arithmétique dans les programmes de Terminale S en France. Elle a effectué un travail épistémologique et didactique des spécificités et potentialités de l’arithmétique élémentaire pour l’apprentissage du raisonnement mathématique.

Elle a distingué deux dimensions du raisonnement arithmétique : une dimension organisatrice et une dimension opératoire sur lesquelles s’est appuyée son analyse épistémologique. Pour Battie, «la dimension organisatrice s’identifie au raisonnement global qui traduit la mise en acte d’une visée et la dimension opératoire définit tout ce qui relève des techniques de calcul utilisées au fil de la démonstration qui permettent de mettre en œuvre les différentes étapes du ou des raisonnements suivis». Elle a ensuite montré comment ces deux dimensions «vivent» et s’articulent dans les démonstrations arithmétiques.

Dans son analyse didactique, elle a effectué une étude écologique des potentialités *a priori* révélées par son analyse épistémologique. Elle a notamment analysé les sujets d’arithmétique de l’épreuve de Spécialité du baccalauréat (à partir de 1998), des ressources destinées aux enseignants, des copies d’élèves (produites lors d’une épreuve d’entraînement au baccalauréat) et une étude de la rationalité d’élèves de Terminale S (une expérimentation menée dans une classe).

Concernant ses résultats, elle a montré une exploitation certaine mais limitée des potentialités de l’arithmétique pour le raisonnement du côté institutionnel (enseignement). Battie souligne en particulier que les ressources destinées aux enseignants font vivre une grande richesse mais qu’elles supposent une certaine culture arithmétique du lecteur et laisse à la charge de ce dernier un travail non négligeable de transposition didactique pour un enseignement effectif. Du côté des élèves, elle a montré, à la fois une créativité mathématique et des difficultés de raisonnement indéniables de ces derniers.

Dans notre étude, nous examinerons les programmes et manuels par rapport à la place accordée aux potentialités de l’arithmétique pour l’apprentissage du raisonnement mathématique.

1.3 - Godot (Grand N n°78, 2006)

Karine a étudié la problématique de la « démarche de recherche en mathématique » à partir d’une situation construite autour du jeu de *la roue aux couleurs*. La résolution de ce jeu repose, entre autre, sur une compréhension de notions de diviseur commun, de relativement premier et de permutation.

Principe du jeu (résumé) : Si on place les nombres de 0 à $n-1$ le long d’une roue et que l’on se déplace de p en p à partir de 0, quand atteindrons-nous 0 ? A-t-on parcouru tous les nombres ?

L'expérimentation est effectuée dans des classes primaires (CE2, CM1, CM2) en France. Elle a identifié dans les productions des élèves, des « éléments constitutifs » de l'activité de recherche en mathématique. Elle retrouve notamment : l'activité de conjecturer, la confrontation à l'impossibilité, la recherche de preuve, la recherche d'une modélisation, la recherche de généralisation, l'argumentation.

Son étude montre aussi des conditions pour faire vivre une situation de recherche (voir Chapitre. V) en classe. Elle trouve qu'il est avant tout, nécessaire *d'organiser la classe en groupes*. Cela permet de favoriser le débat, l'argumentation, et d'éviter le découragement chez des élèves.

Par ailleurs, son expérimentation ayant lieu sur plusieurs séances, elle trouve qu'il est nécessaire que chaque groupe de travail dispose d'une « *feuille de recherche* » ou cahier de recherche. Ils pourraient y mettre les résultats de leur recherche qu'ils jugent importants et sur lesquels ils peuvent s'appuyer lors des séances suivantes.

D'autre part, elle trouve qu'il est important d'organiser des *mises en communs* afin que les groupes communiquent leurs résultats, leurs méthodes, leurs conjectures et éventuellement débâtent.

Notre intérêt pour cet étude porte sur les conditions de conduite de ses expérimentations et le fait qu'elle prend en compte des savoirs notionnels de l'arithmétique. Nous nous appuierons sur certains de ces résultats lors de nos expérimentations.

1.4 - Gardes (Petit x n°83, 2010)

Dans cet article publié dans la revue *Petit x* en 2010, Gardes rend compte d'une étude didactique de la résolution d'un « problème ouvert » en arithmétique. Elle utilise le terme « problème ouvert » dans le sens de problème non résolu par les chercheurs en mathématiques. Toutefois, le choix de son problème tient en compte deux critères : il doit être accessible aux élèves, il doit aussi permettre une recherche effective de ces derniers. Avec ces critères, les élèves peuvent s'approprier le problème facilement précise-t-elle. Elle a alors choisi la conjecture d'Erdős-Strauss (formulée en 1950):

« Pour tout entier au moins égal à n , on peut trouver des entiers naturels (non nécessairement distincts) x, y, z tels que : $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.»

L'étude est menée dans une classe de Terminale Scientifique.

L'expérimentation a mis en évidence, les potentialités (pour l'enseignement des mathématiques) de la résolution de « problème ouvert ». Elle a trouvé que le problème choisi permet une mobilisation des connaissances notionnelles et le développement d'une démarche expérimentale dans le processus de recherche mathématique des élèves. Elle a notamment identifié la mobilisation des notions de fraction, calcul fractionnel, nombres premiers, nombres entiers, multiples, diviseurs. La résolution du problème a aussi permis aux élèves d'approfondir leurs connaissances sur le rôle du contre-exemple dans une preuve, le rôle d'un exemple généralisateur dans la recherche d'une conjecture.

Il faut dire que l'arithmétique regorge de conjectures, autrement dit, de problèmes ouverts dans le sens de Gardes. Dans notre étude, nous regarderons les bénéfices du « problème ouvert » dans un contexte de changement de passage de l'arithmétique en géométrie et réciproquement.

1.5 - Majaj (thèse, 2011)

Majaj a étudié l'enseignement de l'arithmétique au Collège et dans la transition Collège/Lycée en France. Elle a effectué en premier lieu, une analyse épistémologique des organisations mathématiques et les choix de définitions dans les savoirs savants. Elle a ensuite fait une analyse institutionnelle de l'arithmétique dans une perspective écologique pour dégager les différents systèmes de contraintes et de conditions qui pèsent sur les évolutions de ce savoir au cours du processus de transposition didactique interne (choix de l'enseignant avant la classe). Cette analyse institutionnelle a porté sur les programmes et manuels du Collège et de la Seconde de 1902 à 2010. Elle a mené ensuite une étude des rapports personnels des enseignants et des élèves aux objets de savoir en jeu en classe de Seconde (en 2011). Ses travaux montrent une très *grande instabilité des contenus d'arithmétique* dans le curriculum français au Collège et à la transition Collège/Lycée.

Notre intérêt pour son étude porte sur les ordres de travail et de présentations des notions d'arithmétiques qu'elle a mises en évidence dans son étude d'organisation mathématique. Elle a identifié notamment que les ouvrages universitaires choisissent leur organisation mathématique en fonction du choix de définition des concepts.

II.2 - TRAVAUX SUR LA GÉOMÉTRIE DISCRÈTE

Comme pour l'arithmétique, il n'existe pas beaucoup de travaux didactiques autour des mathématiques discrètes. Cela peut s'expliquer par le fait que ce n'est pas un domaine mathématique explicitement présent dans les programmes d'enseignement.

2.1 - Grenier et Payan (RDM n°18-2, 1998)

Dans cette publication, les auteurs proposent une ingénierie sur le problème suivant :

« Pour quelles valeurs de n peut-on construire des n -polygones réguliers dont tous les sommets sont sur une grille carrée régulière ? »

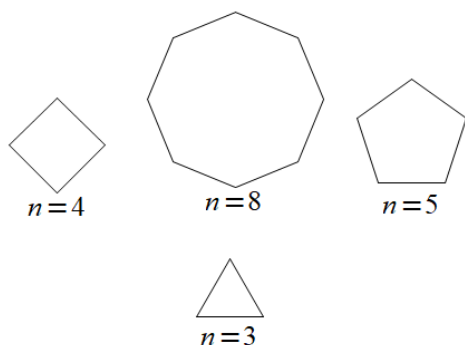


Figure 1a. Exemple de polygones réguliers

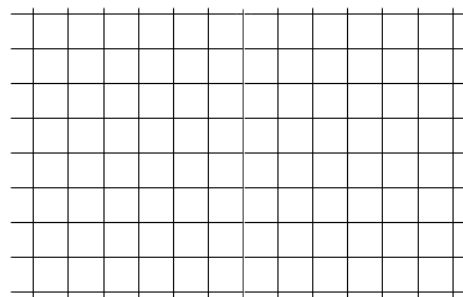


Figure 1b. Grille carrée régulière

La résolution de ce problème n'est pas facile dans le cadre de géométrie euclidienne sauf pour des valeurs particulières de n . Par exemple, pour $n=3$, c'est impossible. Pour $n=4$, on peut trouver plusieurs positions différentes sur la grille. En cherchant à vérifier pour chaque valeur de n indépendamment, le travail est fastidieux et risque de ne pas aboutir.

Grenier et Payan, utilisent la notion d'aire discrète d'un polygone (comptée par le nombre de ses points intérieurs) et des transformations isométriques (symétries ou rotations) pour résoudre la question pour toutes les valeurs de $n \geq 3$ en une fois.

Cette ingénierie a été proposée sous forme de Situation Recherche pour la Classe (voir Chapitre.V). On note que ce problème relève de géométrie discrète (points sur la grille et aire discrète) mais sa résolution ne fait pas intervenir l'arithmétique.

2.2 - Ouvrier-Buffer (thèse, 2003)

Dans sa thèse, Ouvrier-Buffer étudie la problématique de la construction de définition ainsi que la construction de concept en mathématique. En partant du constat que les situations de construction de définition sont absentes dans l'enseignement, Ouvrier-Buffer a développé des outils théoriques qui permettent de construire, réaliser en classe et analyser des telles situations. Elle étudie et expérimente notamment des situations sur : « l'arbre », la « droite discrète » et le « déplacement dans le plan discret ».

Pour le cas de la droite discrète par exemple, la résolution de la situation conduit à reconsidérer et à redéfinir les notions de pentes d'une droite, de points d'intersection dans le plan discret, en les confrontant à celles de la géométrie euclidienne. Quand à la situation « déplacement dans le plan discret », les concepts qu'elle permet de questionner sont : générateur, indépendance, minimalité etc.

Sur la notion de définition d'une « droite discrète », l'arithmétique est présente mais peu étudiée dans ses interactions avec la géométrie discrète. Par contre, l'étude des « déplacements » dans le plan discret est un exemple de problème reliant les questions d'arithmétique et de géométrie discrète. Dans les deux cas, le modèle des SiRC (voir chapitre. V) a permis la mise en œuvre et l'analyse de telles ingénieries.

Un autre intérêt de la thèse d'Ouvrier-Buffer par rapport à nos préoccupations est la nature de la question posée puisqu'il s'agit d'une situation de définition. Notre ingénierie sur le théorème de Pick (voir Chapitre.VII) présente ce même genre de spécificité sur la question : « trouver une méthode » ou encore « trouver une formule ».

2.3 - Grenier et Tanguay (Petit x n°78, 2008)

Cet article présente un compte rendu de l'étude didactique d'une situation d'exploration des solides de Platon (polyèdres réguliers et convexes). La situation est basée sur une mise en relation des activités de définitions, de construction et de preuve.

La question étudiée est : *Démontrer le théorème : il n'y a (pas plus) que 5 polyèdres réguliers dans R^3 .*

Les conditions nécessaires d'existence de tels polyèdres sont exprimées sous forme d'inéquations à deux inconnus pour les graphes planaires. Montrer que ces conditions sont suffisantes (existence) nécessite un retour à la géométrie euclidienne.

Les auteurs ont mené des expérimentations auprès des étudiants en Licence de mathématiques. L'étude a montré l'intérêt d'établir des connexions entre les domaines de la géométrie euclidienne, des graphes planaires et arithmétique.

II.3 - CONCLUSION

Notre étude montre que les domaines de l'arithmétique et de la géométrie discrète sont souvent dissociés dans les travaux (francophones) de recherche en didactique des mathématiques, seule la situation proposée dans la thèse de Ouvrier-Buffet (2003) sur les « déplacements » exploite ces interactions.

On pourrait penser que ce constat est dû au faible nombre de travaux de didactique en géométrie discrète qui sont essentiellement issus de chercheurs de la Fédération de Recherche « Maths à Modeler »³. Nous avons étudié notamment les travaux de Grenier et Payan (1998). Cet étude porte sur une ingénierie du modèle SiRC (voir Chapitre V.) autour d'un problème de géométrie discrète (points sur une grille et l'aire discrète). Mais la résolution proposée ne fait pas intervenir l'arithmétique. Nous avons étudié aussi les travaux de Grenier et Tanguay (2008). Ils effectuent un compte rendu d'une situation d'exploration des solides de Platon (polyèdres réguliers). Leur étude montre l'intérêt d'établir des connexions entre les domaines de la géométrie euclidienne, des graphes planaires et arithmétique.

Concernant l'arithmétique, les travaux de didactique sont diverses et riches pour l'enseignement. Toutefois, ils ne problématisent pas des interactions avec d'autres domaines des mathématiques. Nous avons étudié une liste non exhaustive de ces travaux. On note par exemple, l'étude de Ravel (2003) sur la réintroduction de l'arithmétique dans les programmes en France. Elle identifie des fonctions de l'arithmétique mises en avant dans les programmes : fonction structurelle, fonction diversité des modes de raisonnement, fonction algorithmique. Elle effectue aussi des observations de classe, afin d'identifier les choix d'organisations mathématiques et didactiques des enseignants et leur conformité avec les savoirs arithmétiques à enseigner. Majaj (2011) a étudié l'enseignement des savoirs notionnels arithmétiques au Collège et dans la transition Collège/Lycée en France. Elle analyse le choix de définitions des notions (divisibilité, PGCD, PPCM, nombre premier, etc) dans les manuels et ouvrages universitaires. Elle effectue ensuite une analyse des contraintes et conditions sur l'évolution de ses notions lors de la transposition dans l'enseignement. Battie (2003) étudie les potentialités de l'arithmétique pour l'apprentissage du raisonnement mathématiques. Elle a analysé les sujets d'arithmétique de l'épreuve de Spécialité du baccalauréat (à partir de 1998), des ressources destinées aux enseignants, ainsi que des copies d'élèves (produites lors d'une épreuve d'entraînement au baccalauréat) et une étude de la rationalité avec des élèves de Terminale S (sur une expérimentation dans une classe). Gardes (2010) a étudié l'apport pour l'enseignement de problèmes « ouverts » d'arithmétique. Elle montre, les potentialités de ces types de

3 « Maths à modeler » est une fédération de recherche qui regroupe des chercheurs en mathématiques, en didactique et d'autres communautés scientifiques (laboratoire de référence Institut Fourier - Grenoble).

problèmes dans le développement de la démarche expérimentale dans le processus de recherche mathématique. Enfin parmi les travaux consultés, Godot (2003) étudie la mise œuvre de l'activité de recherche en mathématique à travers une situation sur le problème de « jeu de la roue aux couleurs ». La résolution de ce jeu repose, entre autre, sur une compréhension de notions de diviseur commun, de nombres relativement premiers et de permutation.

Il convient de mentionner que le théorème de Pick est présenté d'un point de vue mathématique dans des revues à destination des enseignants mais sans éléments d'analyse de la transposition en classe : par exemple, dans *Mathecole* n°133 (Calame A., 1988) et dans le *Bulletin Vert* de APMEP n°516 (2015).

III - TRANSPOSITION DIDACTIQUE DE NOTIONS DE L'ARITHMÉTIQUE ET DE LA GÉOMÉTRIE DISCRÈTE

L'objet de ce chapitre est de chercher à savoir comment les notions de l'arithmétique et de la géométrie discrète sont présentées dans les programmes et abordées dans les manuels. Nous nous consacrerons ici sur le cas du Mali dans la mesure où des éléments de réponses à cette questions existent déjà pour la France dans (Battie V., 2003 ; Raval L., 2003) notamment pour l'arithmétique.

III.1 - PROGRAMMES ET MANUELS MALIENS

Nous regardons en particulier les programmes du second cycle de l'enseignement fondamental (collège) et du Lycée.

L'expression « type de tâche » est utilisée dans le sens des praxéologies de Chevallard (1999). Toutefois nous ne faisons pas une analyse praxéologique (qui ne sera donc pas présentée dans cette recherche).

1.1 - Programmes de 7ème, 8ème, 9ème

Ces niveaux d'enseignement correspondent respectivement à la 5ème, 4ème et 3ème en France.

Le premier constat sur ce programme est sa structure. Il est organisé en deux grandes parties : algèbre et géométrie. Le mot « arithmétique » même n'est pas utilisé dans les contenus du programme. Les notions à enseigner sont présentées sous forme d'une liste de savoir-faire qui sont définis, regroupés autour des ensembles \mathbf{N} , \mathbf{Z} , \mathbf{D} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} . Cette organisation montre que le programme est élaboré du point de vue des mathématiques modernes.

– Au niveau de la classe de 7ème (5ème France), on étudie les propriétés des entiers (\mathbf{N} et \mathbf{Z}). On trouve les savoir-faire suivants : les pratiques des opérations dans \mathbf{N} et \mathbf{Z} , le calcul mental, la comparaison d'entiers, les puissances, la division euclidienne dans \mathbf{N} , la pratique des critères de divisibilité (par 2, 3, 4, 5, 25, 9, 10, 100, 1000). Le lecteur remarquera que les critères de divisibilité par 6, 7 ou 8 sont absents. Ce choix des programmes suppose que ces critères de divisibilité seraient difficiles à pratiquer pour les élèves de 7ème. Pour autant, la pratique de la divisibilité par 6 permettrait de réinvestir la divisibilité par 2 et 3 étant donné qu'un nombre est divisible par 6 si et seulement s'il est à la fois divisible par 2 et 3. Après ces critères de divisibilité, le programme préconise d'aborder les nombres premiers et la décomposition en un produit de facteurs premiers.

– En 8ème (4ème en France), il y a un retour sur les entiers naturels avec les notions de diviseur et de multiple qui ne sont abordées que sur des exemples numériques. Le calcul du PPCM et du PGCD de deux entiers naturels sont introduits. Deux méthodes de calcul du PGCD et du PPCM sont recommandées : utiliser les notions d'ensemble de diviseurs, d'ensemble de multiples ou la décomposition primaire dans les cas dits « complexes ». L'ensemble \mathbf{Q} est ensuite introduit par les pratiques des opérations sur les fractions et la notion de fractions équivalentes.

– En 9ème (3ème en France), la fin du cycle fondamental, l'étude des entiers n'est plus au programme. Les enseignements sur les nombres sont centrés sur les irrationnels : la racine carrée d'un nombre positif, son extraction et les opérations sur les radicaux.

Ce programme des trois années du second cycle de l'enseignement fondamental nous conduit aux conclusions et interrogations qui suivent. Toutes les notions de l'arithmétique sont pour la plus part abordées sur des exemples pratiques uniquement. La présentation du programme instruit un enseignement de « techniques » sur les propriétés des nombres. Aussi, le réinvestissement des notions apprises n'est pas explicite. Par exemple à propos de la notion de fractions équivalentes (en 8ème) : est-ce une simplification élémentaire ou une simplification complète avec le PGCD qu'il faut pratiquer ? Quels sont les outils de l'élève pour le faire ? Des questions se posent aussi sur la stabilité des connaissances en arithmétique au sortir de ce cycle de formation. Il y a une rupture de l'enseignement des entiers en 9ème.

Du point de vue de la géométrie discrète, on ne retrouve pas de notion explicitement abordée. L'essentielle de la géométrie porte sur : les figures géométriques (définitions, caractérisation, calcul d'aire), notions de base de la géométrie repérée⁴ dans le plan.

1.2 - Programme du Lycée

Dans l'analyse du programme du second Cycle de l'enseignement fondamental, il est défini distinctement deux domaines : algèbre et géométrie. Le programme du Lycée ne suit pas cette organisation. Il est présenté suivant l'approche par compétence (APC) : compétences, composantes, manifestations, contenus.

Les notions à enseigner sont dans la partie « contenus » et organisées par chapitre. Ainsi, l'arithmétique n'apparaît ni en 10ème (Seconde en France), ni en 11ème Sciences (1ère en France). Nous avons examiné ces deux contenus d'enseignement et certains points posent question. En 10ème par exemple, il est recommandé de revenir sur les propriétés de \mathbf{R} dans le chapitre « Équations et inéquations ». Les élèves doivent être capable de simplifier, soustraire, comparer des fractions. Mais comment opérer ces savoir-faire sans un enseignement des notions de PGCD et PPCM ? Quels sont les moyens de contrôle donné aux élèves lorsqu'ils simplifient une fraction ?

L'arithmétique apparaît finalement comme un chapitre d'étude au niveau de la Terminale SE (Sciences Exactes). Nous avons repris dans le tableau ci-après les commentaires du document « savoir-faire ». Ils fixent les objectifs généraux d'apprentissage de l'arithmétique en Terminale SE.

4 Géométrie analytique dans certains ouvrages ou manuels

Objectifs généraux :

1. Faire mieux connaître aux élèves un concept, celui de nombre entier, qui est la base de la construction de l'édifice mathématique. Il ne s'agira toutefois pas de donner une définition axiomatique des entiers naturels, ni une construction formelle des autres ensembles de nombres.
2. Leur donner quelques outils et méthodes pour aborder des problèmes aux énoncés simples qui jalonnent l'histoire des mathématiques ou qui peuvent se rencontrer lors de la mathématisation de situations de la vie courante.
3. Les entraîner à des raisonnements sur des objets mathématiques qu'ils connaissent et utilisent depuis leur enfance.
4. Les entraîner à l'élaboration d'algorithmes qui pourront être mis en œuvre sur une calculatrice programmable.
5. Les initier à la démarche algébrique : transport d'une structure à un ensemble-quotient (en se limitant strictement à l'exemple des congruences) ; leur donner quelques exemples de groupes, de sous-groupes, d'anneaux ou de corps. Cependant, on ne présentera formellement ces structures en aucun cas.

Remarques :

- On introduira la numération en s'appuyant sur des réalités du pays.
- On adoptera la terminologie « nombres étrangers » (et non « nombres premiers entre eux »).

Tableau 1: Objectifs généraux de l'enseignement de l'arithmétique (Terminale SE)

Le lecteur remarquera que « toute construction formelle » (voir objectif 1.) des ensembles de nombres est exclue. Mais quelles sont les propriétés et/ou axiomes qui caractérisent les ensembles de nombres à enseigner ? Ce choix d'interprétation est à la charge des enseignants puisqu'on ne retrouve pas ces précisions dans les contenus d'enseignement.

ARITHMÉTIQUE

- Anneau \mathbf{Z} des entiers relatifs; multiple d'un entier relatif, notation $n\mathbf{Z}$.
- Sous – groupe de \mathbf{Z} .
- Division euclidienne dans \mathbf{N} et \mathbf{Z} . Numération décimale et binaire.
- Congruence modulo n . Anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
- Nombres premiers; si n est premier alors $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est un corps (admis)
- Décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers; existence et unicité.
- Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple. Application à des problèmes pratiques.

Tableau 2. Contenus d'enseignement en arithmétique (Terminale SE) -Extrait du programme de 2011

En nous référant à la typologie de Majaj (2012) sur les différentes fonctions de l'arithmétique, on peut dire que l'arithmétique en Terminale SE au Mali a quatre fonctions :

- Une fonction d'apprentissage du raisonnement en mathématique (voir objectif 3.) ;
- Une fonction d'apprentissage d'algorithme (voir objectif 4.) ;

- Une fonction d'initiation à l'étude des structures algébrique des nombres (voir objectif 5.) ;
- Et une fonction d'apprentissage de culture mathématique (voir objectif 2.).

Examinons à présent les savoir-faire (voir Tableau ci-dessous).

<p>Savoir-faire : L'élève doit être capable de :</p> <p>1°) Appliquer le principe du raisonnement par récurrence ;</p> <p>2°) Pratiquer la division euclidienne dans \mathbb{N} ;</p> <p>3°) Écrire dans une base un nombre donné dans la base décimale et réciproquement ;</p> <p>4°) Écrire dans une base un nombre donné dans une autre base ;</p> <p>5°) Pratiquer la division euclidienne dans \mathbb{Z} ;</p> <p>6°) Calculer dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$;</p> <p>7°) Résoudre des équations de degré 1 ou 2 et des systèmes linéaires dans (n premier ou non) ;</p> <p>8°) Dans la numération décimale, utiliser les critères de divisibilité par 2, 3, 4, 5, 9, 11, 25 ;</p> <p>9°) Résoudre des problèmes sur la divisibilité en utilisant les propriétés de congruences ;</p> <p>10°) Déterminer le PGCD de deux entiers en utilisant l'algorithme d'Euclide ;</p> <p>11°) Déterminer le PPCM de deux entiers ;</p> <p>12°) Résoudre des équations où interviennent le PGCD et le PPCM en utilisant la propriété :</p> $\left. \begin{array}{l} PGCD(a;b) = d \\ PPCM(a;b) = m \end{array} \right\} \Leftrightarrow \exists (a', b') \in \mathbb{N}^{*2} / \left\{ \begin{array}{l} a = da'; b = db' \\ a'b'd = m \\ a' \wedge b' = 1 \end{array} \right.$ <p>13°) Résoudre des équations du premier degré dans \mathbb{Z}^2.</p> <p>14°) Reconnaître un nombre premier ;</p> <p>15°) Décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers ;</p>
<p>16°) Trouver le nombre des diviseurs et éventuellement l'ensemble des diviseurs d'un entier en utilisant sa décomposition en produit de facteurs premiers ;</p> <p>17°) Utiliser la décomposition en produit de facteurs premiers pour déterminer le PGCD et le PPCM de deux entiers ;</p> <p>18°) Un algorithme étant donné, le programmer et le faire fonctionner sur une calculatrice programmable.</p>

Tableau 3. Les savoir-faire du chapitre arithmétique (Terminale SE) -page scannée dans le document d'accompagnement des programmes(1991, 2011)

Les notions et savoir-faire de l'enseignant fondamental (7ème, 8ème) sont pratiquement tous repris en Terminale SE avec un peu d'approfondissement. Ainsi, le calcul dans les systèmes de numération se généralise sur toute base $b \in \mathbb{N}^*(n \geq 3)$. La division euclidienne qui se limitait sur \mathbb{N} est étendue sur \mathbb{Z} (n°2 et n°5). Les critères de divisibilité usuels (par 2, 3, 4, 5, 9, 11, 25) sont repris (n°8). Mais les justifications ne sont pas explicitement recommandées (Est-ce dans les savoir-faire n°9 ?).

Les notions de PGCD, PPCM, nombres premiers, décomposition en produit de facteurs premiers sont aussi reprises. Une nouvelle méthode de calcul du PGCD apparaît : l'algorithme d'Euclide (n°10). Cependant, pourquoi les seules utilisations des notions de PGCD et de PPCM sont les savoir-faire n°12 (résolution d'équation) ? Elles ont pour autant beaucoup d'applications. Concernant les nombres premiers, quelles méthodes sont-elles proposées pour vérifier si un nombre est premier ou pas (n°14) ? Aussi, pourquoi les utilisations de nombres premiers se limitent aux savoir-faire n°15, 16 et 17 ?

Nous trouvons qu'ils existent des éléments « d'ambiguïtés » entre les contenus de programme et les savoir-faire. En effet, des notions sont absentes au niveau des contenus de programmes alors que leurs pratiques font partie des savoir-faire. C'est le cas des théorèmes de Bézout, Gauss (voir Tableau 3 : n°13). Aussi, des questions se posent sur l'interprétation possible des enseignants dans leurs pratiques de classe au sujet des structures algébriques. D'après les commentaires, l'arithmétique est censée avoir une fonction d'introduction à l'étude de structures algébriques, mais un seul savoir-faire porte sur ces notions : le calcul dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ (n°6).

Pour la récurrence, il s'agit de savoir « appliquer le principe du raisonnement par récurrence » (voir Tableau 3, n°1). Mais s'il existe un ordre de complexité au niveau des savoir-faire, la récurrence en première position pose question.

On peut précisément identifier les types de tâches :

- Calculer : 6, 2, 3, 4, 10, 11
- Utiliser (théorème, propriété, ...) : 1, 8, 9, 16, 17
- Appliquer (algorithme):1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 14, 15, 16, 17
- Résoudre :7, 9, 12, 13
- Programmer : 18
- Démontrer : « rien »

On voit que les savoir-faire définissent essentiellement des *types de tâches* qui relèvent de « techniques » calculatoires sur les propriétés des nombres. En effet, hormis les savoir-faire n°9 (résolution de problèmes liées aux congruences) et n°18 (programmation), tous les autres consistent en l'application algorithmique ou de calcul, même la récurrence. Le réinvestissement des notions est aussi peu abordé. Le programme ne recommande pas dans les savoir-faire l'utilisation des notions dans les résolutions des problèmes pratiques alors que cela fait parti des objectifs d'enseignement de l'arithmétique.

Du point de vue des mathématiques discrètes en générale, on retrouve les notions d'arbre, de combinaison, d'arrangement dans le chapitre « Dénombrement et probabilité » dès le niveau 11ème Sciences (Première) et reprises en Terminale. La géométrie discrète est absente.

1.3 - Analyse de manuels

L'analyse du programme nous a permis d'identifier les notions à enseigner, les recommandations officielles, les objectifs d'enseignement et leurs « manques » sur l'arithmétique et la géométrie discrète. C'est un avis partagé dans l'enseignement que les programmes seuls ne suffisent pas pour élaborer un Cours. Les enseignants sont donc dans l'obligation d'utiliser des manuels. Ce travail d'analyse de manuel permettra d'approcher les choix possibles d'organisation mathématiques et d'organisation didactique des enseignants du Mali. Nous nous consacrerons ici aux manuels du lycée.

Il n'existe pas à proprement dit de manuels officiels de mathématiques pour le Lycée au Mali. Des enseignants et chercheurs du Mali avec le soutien du Ministère de l'Éducation participent au projet de la Collection Inter-Africaine de Mathématiques (CIAM). Ce projet vise à harmoniser les programmes de mathématiques dans les pays d'Afrique dont la langue d'enseignement est le français. La rédaction des manuels regroupe des enseignants, des chercheurs et de responsables pédagogiques de plusieurs pays d'Afrique. Les manuels élaborés sont proposés aux enseignants et élèves des pays participants, dont le Mali. Nous faisons donc l'hypothèse que ces manuels sont les références des enseignants du Lycée au Mali. Notre analyse portera donc sur le manuel de Terminale SM de cette collection (édition 1999 en cours).

Organisation didactique générale du manuel CIAM

Le manuel CIAM est structuré par chapitre. Chaque chapitre est à son tour organisé en trois parties : « Introduction », « Cours » et « Exercices ». La partie « Introduction » résume les notions mathématiques qui sont abordées dans le chapitre, les domaines d'applications ou d'utilisation de ces notions. Le « Cours » regroupe les définitions, les propriétés, des méthodes, des exemples d'application, des TD (Travaux dirigés) et les premiers exercices. Quant à la partie « Exercices », elle est divisée en « Exercices d'apprentissage » et exercices d'« Approfondissement ». Il faut noter aussi que le manuel ne propose pas d'activités introductives sur les notions. On ne retrouve pas non plus de rappels ou de tests de prérequis.

Contenu sur l'arithmétique

L'organisation du cours d'arithmétique se présente dans cet ordre :

- 1) Les ensembles \mathbf{N} et \mathbf{Z}
- 2) Divisibilité dans \mathbf{Z}
- 3) PPCM et PGCD de deux entiers relatifs
- 4) Nombres premiers

Toutes les notions du programme sont abordées dans le manuel. Du point de vue des choix de définitions des notions (par exemple PGCD, PPCM,...), l'aspect existence et unicité sont prises en compte. Les propriétés sont en général justifiées. Les théorèmes de Bézout et Gauss sont donnés avec preuves. Par contre, les preuves sont peu commentées, avec parfois beaucoup d'implicite. Ce choix didactique de CIAM peut rendre son contenu mathématique moins accessible aux élèves. Nous précisons que ce manuel est à la fois pour l'enseignant et l'élève.

Concernant le principe par récurrence, la présentation pose question pour sa compréhension effective. Le manuel propose une formulation algorithmique pour son application :

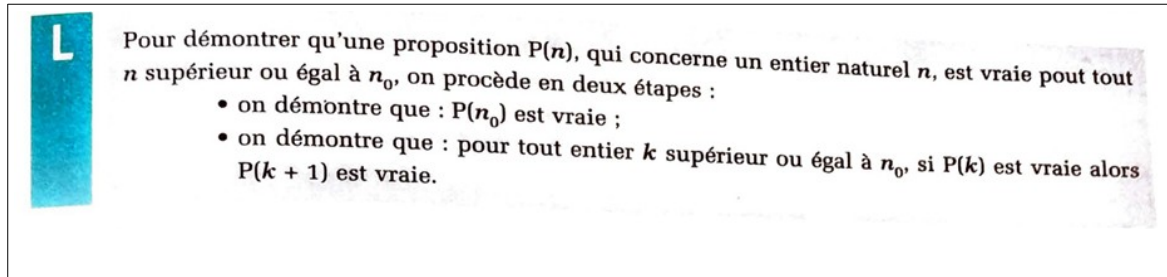


Figure 3. Principe de récurrence du manuel CIAM Terminal SM (éd. 1999)

Le « si » de la proposition conditionnelle globale n'est pas écrit, le « Alors » non plus. Le quantificateur « il existe » pour le rang n_0 (initialisation) est implicite. Ce quantificateur est pourtant indispensable pour la compréhension du principe (Grenier, D., 2012). Aussi, doit-on comprendre que le n_0 est toujours une donnée pour pouvoir appliquer la récurrence ? Les exercices portant sur la récurrence débutent tous par « démontrer que ... ». Cela induit que le principe de récurrence s'appliquerait uniquement à des propriétés déjà vraies.

Les autres exercices sont essentiellement de types de tâches « calculatoires » sur les notions du cours : pratique de la divisions euclidienne, calcul du PGCD et du PPCM, changement de base de numération, résolution d'équation dans Z^2 , application du test de primalité etc.

Parmi les 86 exercices du chapitre « Arithmétique », celui de la Figure 4 est le seul qui fait un lien avec la géométrie. Il porte sur une interprétation géométrique de solutions d'une équation dans $N \times N$.

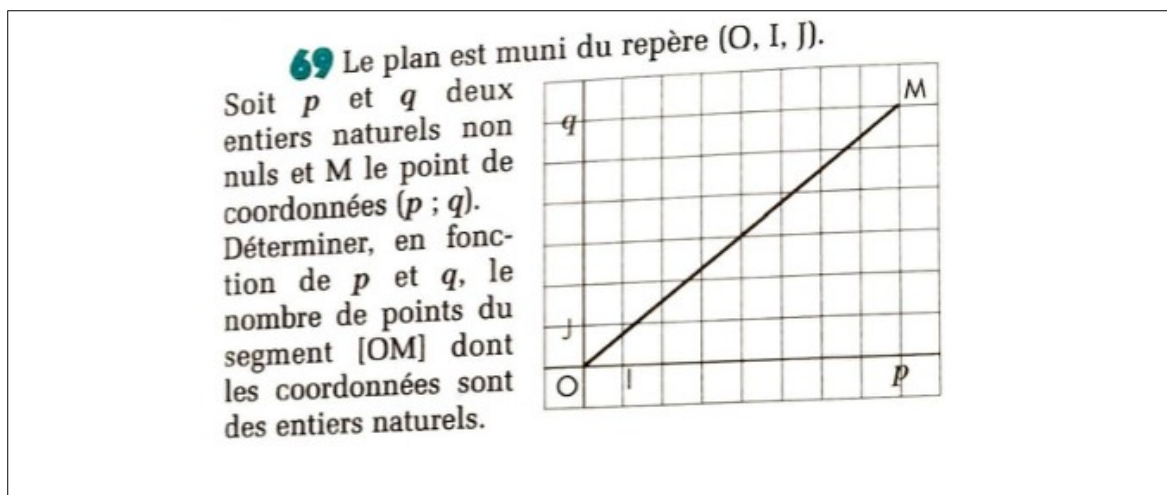


Figure 4. Exercice du manuel CIAM (p.30)

L'exercice est placé dans la partie « Approfondissement ». Pour les auteurs, il est donc supposé moins accessible aux élèves de ce niveau d'enseignement. Pour autant, les savoirs notionnels mobilisables pour sa résolution sont bien abordés.

Nous faisons l'hypothèse que ce type de problème est probablement absent dans les pratiques de classes.

III.2 - PROGRAMME ET MANUELS FRANÇAIS

Nous nous sommes intéressés en particulier au niveau Lycée. L'arithmétique est enseignée en Terminale S (spécialité mathématiques). Notre étude porte sur les programmes en vigueur (B.O, 2011).

Les contenus d'enseignement sur l'arithmétique se présentent dans cet ordre :

- Divisibilité dans Z ;
- Division euclidienne ;
- Congruence dans Z ; PGCD de deux entiers ;
- Entiers premiers entre eux ;
- Théorème de Bézout ;
- Théorème de Gauss ;
- Nombres premiers ; Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers.

Dans les commentaires du programme, il est assigné à l'arithmétique, une fonction d'apprentissage de l'algorithme et des raisonnements mathématiques.

Nous avons regardé les manuels de Terminales S (spécialité mathématique) *Indice* (2012), *Symbole* (2012), *Transmath* (2012). Nous précisons que le choix des manuels n'est pas lié à de critères spécifiques.

Du point de vue de l'organisation didactique, *Indice* et *Transmath* sont structurés en séquences, les contenus prennent appui sur des résolutions de problèmes (voir Tableau 4 ci-après). Dans la même idée, *Symbole* introduit ses chapitres par des exercices de vérification des connaissances antérieures et des activités de découverte des notions. Ces choix didactiques ont particulièrement attiré notre attention, le manuel CIAM ne propose pas d'activités introductives ou de découvertes de notions.

Indice	Symbole	Transmath
- Avant de commencer, se tester avec...	- Vérifier ses acquis	- Résolution de problèmes
- Problèmes	- Activité d'introduction	- Synthèse des notions
- Cours	- Le cours et les capacités attendues	- Exercices d'application
- Exercices pour démarrer	- Travaux pratiques	- Activités de recherche
- Exercices pour s'entraîner	- Exercices	- Exercices d'entraînement
- Travaux pratiques	- Préparer le BAC	- Le jour du BAC
- Cap vers le BAC	- Accompagnement	- Pour aller plus loin
- Exercices pour aller plus loin	personnalisé	

Tableau 4. Organisations didactiques des manuels *indice* (2012), *Symbole*(2012),*Transmath* (2012)

Du point de vue de l'organisation mathématique des notions, les choix sont aussi différents (voir Tableau 5). Les manuels *Symbole* et *Transmath* proposent des progressions qui correspondent à celle du programme. Tous les contenus d'enseignement du programme sont abordés dans les trois manuels. *Indice* et *Transmath* rajoute même la notion de PPCM qui n'apparaît pas dans le programme.

Indice	Symbole	Transmath
<ul style="list-style-type: none"> - Divisibilité et division euclidienne - Nombres premiers - Congruence et critères de divisibilité - PGCD de deux entiers - Entiers premiers entre eux - PPCM et Petit théorème de Fermat 	<ul style="list-style-type: none"> - Divisibilité dans \mathbf{Z} - Division euclidienne - Congruence - PGCD de deux entiers - Entiers premiers entre eux - Théorème de Bézout - Théorème de Gauss - Nombres premiers - Décomposition en produit de facteurs premiers 	<ul style="list-style-type: none"> - Divisibilité et division euclidienne - Congruence - PGCD de deux entiers naturels - Théorème de Bézout - Théorème de Gauss - Nombres premiers - Décomposition en produit de facteurs premiers

Tableau 5. Organisations mathématiques des manuels *Indice* (2012), *Symbole* (2012), *Transmath* (2012)

Par rapport aux types de problèmes traités ou proposés, on trouve :

- de types *technique* opératoire sur les propriétés des nombres ;
- des exercices d'application de la récurrence, les algorithmes et des problèmes pratiques sur les utilisations des notions dans la vie courante ;
- Quelques exemples de problèmes mettant l'arithmétique en lien avec la géométrie et l'analyse.

Les exercices résolus, les TP (travaux pratiques) et les exercices proposés, montrent particulièrement que les manuels mettent en avant l'aspect algorithmique de l'arithmétique et l'usage des Technologies de l'information et de la Communication dans l'enseignement (TICE). Ce choix des manuels trouve une justification dans les commentaires du programme qui indique : «*les thèmes abordés sont particulièrement propices à l'utilisation des outils informatiques (logiciels de calcul, tableur) et à la mise en œuvre d'algorithmes* » (B.O, 2011).

A noter que ces manuels présentent une autre spécificité par rapport au manuel CIAM. *Indice* et *Transmath* utilisent notamment des pictogrammes pour désigner les contenus de pages ainsi que les problèmes qui les utilisent un mode de raisonnement mathématique. Quand à *Symbole*, il propose à la suite du cours, des problèmes portant sur des preuves de quelques propriétés du Cours.

III.3 - CONCLUSION

L'analyse de programmes et des manuels s'est portée particulièrement sur le niveau lycée. Nous nous sommes appuyés sur l'*organisation mathématique* des notions et les *types de tâches*, afin d'identifier ce qui est abordé sur l'arithmétique et la géométrie discrète.

L'étude montre que l'arithmétique occupe peu de place dans les enseignements dans les deux pays, qu'il n'y a aucune référence à la géométrie discrète. Le théorème de Pick n'apparaît pas. Les types de tâches proposés en arithmétique, sont essentiellement des « techniques calculatoires » sur les propriétés des nombres : calculer, utiliser, appliquer, résoudre, programmer... En ce qui concerne le théorème de Bézout, il est énoncé, dans le « Cours », avec une preuve et son utilisation est restreinte à une application calculatoire dans les résolutions d'équations entières.

La récurrence est mentionnée. Elle est le mode de raisonnement mis en avant, mais, encore une fois, sa mise en œuvre reste une application d'une technique opératoire de type algorithmique. Ce constat est à mettre en contraste avec les résultats en didactique sur l'arithmétique où il est montré que c'est un domaine pertinent pour l'enseignement du raisonnement et de la preuve (voir Battie, 2003 ; Gardes, 2010 ; Godot, 2006). De plus, il existe des ingénieries le permettant (voir Gardes, 2010 ; Godot, 2006).

IV - QUESTIONS DE RECHERCHE ET MÉTHODOLOGIE

Dans notre étude épistémologique, nous avons trouvé que la géométrie est pertinente pour étudier des problématiques arithmétiques. On peut rappeler, par exemple, la notion de « commune mesure ». Elle permet de comprendre géométriquement les notions de fractions irréductibles (donc d'entiers premiers entre eux), ainsi que le PGCD. Elle permet aussi de donner du sens à l'utilisation du PGCD dans la résolution de problèmes de détermination du rapport entre deux longueurs, des problèmes de pavage ou de clôture discret d'un domaine. Réciproquement, dans le domaine de la géométrie discrète, quand on étudie des droites, on tombe sur des questions dont les résolutions font appel au PGCD, au théorème de Bézout ou au théorème de Gauss. On peut citer, par exemple, le problème de l'existence et de la recherche des points entiers d'une droite dans le plan. Ainsi, du point de vue épistémologique, il ne fait aucun doute qu'il existe des liens intrinsèques entre arithmétique et géométrie.

Au niveau de la recherche en didactique des mathématiques, il y a très peu de recherches sur l'arithmétique. Celles qui existent sont essentiellement centrées sur les problématiques de sa réintroduction dans l'enseignement (en France particulièrement), de ses fonctions, de ses potentialités pour l'apprentissage du raisonnement. Quand à la géométrie discrète, son absence dans les programmes, est certainement la raison du faible nombre de travaux. Nous estimons aussi que l'enseignement de l'arithmétique étant centré sur des techniques et l'algorithme, cela est l'une des raisons de l'absence de travaux didactiques portant sur la problématique du lien géométrie et arithmétique.

Dans le chapitre que nous avons consacré à l'analyse des programmes et de manuels (en particuliers du Mali), les mathématiques discrètes sont de façon générale absentes. Quelques notions sont étudiées dans les enseignements sur le dénombrement : arbre, combinaison, arrangement. Quant à la géométrie discrète, elle est totalement absente. Concernant l'arithmétique, son enseignement est centré sur les définitions des notions et l'exploration rapide de quelques propriétés, mais l'essentiel du temps est consacré à un apprentissage de techniques pour résoudre de types de problèmes spécifiques : déterminer le PGCD ou le PPCM d'entiers donnés, décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers, résoudre dans $Z \times Z$ une équation ou un système d'équations diophantiennes, etc. Ainsi, l'arithmétique est étudiée exclusivement dans le registre numérique et sans lien avec la géométrie et le raisonnement.

Au regard de toutes ces analyses, il nous est paru intéressant et important de mener une étude sur l'arithmétique et de son lien avec la géométrie discrète dans l'enseignement.

Nos questions de recherche sont donc les suivantes :

- Quelles conditions et quelles situations pour établir le lien, dans l'enseignement, entre arithmétique et géométrie ?
- Quelles connaissances mathématiques (notionnelles et transversales) peuvent-elles se construire avec ces situations ?

Vis à vis des connaissances notionnelles, l'essentielle est donnée dans l'étude épistémologique. Pour les connaissances transversales cela dépend du type de situation. Par contre très probablement on repèrera des informations sur les représentations en mathématique.

Méthodologie

Pour étudier ces questions, nous avons choisi comment entrée, deux théorèmes qui nous paraissent « emblématiques » en arithmétique et en géométrie discrète. Il s'agit en l'occurrence du théorème de Bézout et le théorème de Pick. Le premier est déjà bien présent dans l'enseignement de l'arithmétique. Il apparaît à chaque fois qu'il s'agit de résoudre des problèmes se ramenant à des résolutions d'équations entières. On le retrouve également en géométrie discrète comme nous l'avons mentionné. Le deuxième, moins connu dans l'enseignement, est fondamental lorsqu'il s'agit d'étudier des questions de dispositions de points dans un plan discret. Par exemple, la détermination de points entiers les plus proches des deux points donnés. Il établit une formule (ce qui lui donne toute son importance) qui permet de calculer l'aire d'un polygone sur une grille en effectuant uniquement des additions de nombres de points de la grille. Au delà des relations (non évidente) qui existent entre ces théorèmes, leur choix est aussi motivé par la simplicité de la formulation des énoncés, ainsi que leurs preuves accessibles dès le niveau collège.

Notre objectif dans cette thèse est de problématiser ces deux théorèmes dans des situations d'enseignement qui nous permettent de créer des liens entre arithmétique et géométrie. Au terme de l'étude, nous souhaitons développer un regard géométrique sur des propriétés arithmétiques, et amorcer une introduction de la géométrie discrète dans la formation des enseignants.

Nous faisons l'hypothèse que les problèmes que nous allons proposer, n'étant pas du tout habituels dans l'enseignement, leur résolution peut se révéler difficile, même pour des étudiants ayant une bonne connaissance des notions arithmétiques ou géométriques en jeu. Bien entendu, pour le choix du public, nous nous basons sur les connaissances théoriques « supposées » permettant d'aborder et de résoudre les problèmes. L'hypothèse de travail que ces connaissances sont disponibles est justifiée par l'étude du curriculum, des échanges avec des étudiants et les formateurs.

La thèse que nous soutenons dans ce travail est :

Les situations qui mettent en œuvre des changements de registres entre arithmétique et géométrie, ont un fort potentiel d'apprentissages mathématiques. Elles permettent notamment de construire et/ou de consolider des connaissances de ces deux champs mathématiques, tout en les rapprochant dans l'enseignement.

Sur le plan des outils théoriques didactiques, nous utiliserons, la notion de changement de registre (Duval, 1993) dans l'analyse didactique de nos situations expérimentales. La notion de situation didactique / adidactique et le modèle SiRC (Grenier et Payan, 2003) sont exploitées dans la construction des situations. Le chapitre V qui suit, est consacré à la présentation des principales caractéristiques de chacun de ces outils théoriques didactiques.

V - CADRES THÉORIQUES DIDACTIQUES

Dans ce chapitre, nous présentons les principales caractéristiques des outils didactiques que nous utilisons, tout en précisant l'intérêt de chacun dans cette étude.

V.1 - NOTION DE REGISTRE

Duval appelle registre de représentation sémiotique « tout système de représentation qui a ses propres contraintes de signifiante et de fonctionnement » (Duval, 1991). En mathématique, on manipule ainsi plusieurs types de registres : numérique, graphique, algébrique, géométriques, fonctionnel etc. D'après Duval, un registre permet d'accomplir trois activités cognitives inhérentes à toute représentation sémiotique :

- « De constituer une trace ou un assemblage de traces perceptibles qui soient identifiables comme une représentation de quelque chose dans un système déterminé ». Par exemple dans le registre algébrique, x^2+2x est conforme, mais pas $2(4x-1)$.
- « De transformer les représentations par les seules règles propres au système de façon à obtenir d'autres représentations pouvant constituer un apport de connaissance par rapport aux représentations initiales » ; c'est ce que Duval appelle le *traitement*. Par exemple dans le registre algébrique, la règle $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ permet d'écrire ce développement : $(x+1)^2=x^2+2x+1$.
- « De convertir les représentations produites dans un système en représentations d'un autre système, de telle façon que ces dernières permettent d'explicitier d'autres significations relatives à ce qui est représenté » ; Duval appelle cela *conversion*. Exemple, on a l'identité remarquable $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ dans le registre algébrique, correspond au dessin suivant dans le registre figures géométrique.

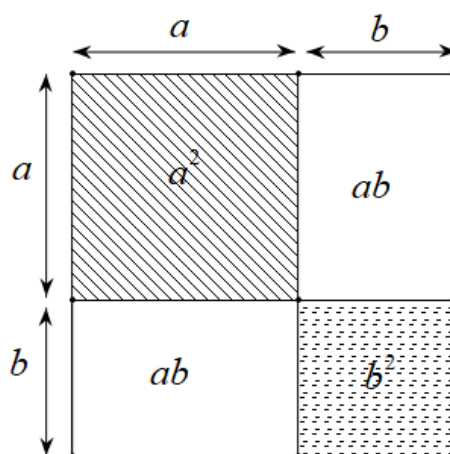


Figure 1. Illustration géométrique de $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Selon Duval, le point fondamental dans une activité mathématique est la capacité à passer d'un registre (sémiotique) à un autre registre. Cette coordination des registres est une condition nécessaire de la compréhension (Duval, 1991).

Dans notre recherche, nous utilisons le terme « registre » selon Duval en ce qui concerne les registres numériques, algébrique, géométrique et graphique.

Mais, on a besoin d'identifier aussi la nature des objets sur lesquels portent ces registres. Par extension, on parlera de « registre discret » ou « registre continu » selon les méthodes choisies pour la résolution du problème.

Notre recherche est centrée sur l'étude de situations d'enseignement qui permettent le passage entre les registres arithmétique et géométrique, parallèlement aux registres continu et discret.

V.2 - SITUATION DIDACTIQUE – SITUATION ADIDACTIQUE

La théorie des situations didactiques (TSD) de G. Brousseau (1986) propose des modèles (situation didactique/situation adidactique) pour construire et analyser des situations d'enseignement.

Certaines situations didactiques, comportent en elles-mêmes des situations partiellement libérées d'interventions directes de l'enseignant. Elles sont nommées situations adidactiques par Brousseau. En pratique, l'intention d'enseigner est bien présente dans une situation adidactique. Mais, elle n'est pas explicitée par l'enseignant. Pour Brousseau, « *la situation adidactique est une sorte d'idéal vers lequel il s'agit de converger : l'enseignant doit sans cesse aider l'élève à dépouiller dès que possible la situation de tous les artifices didactiques et lui laisser la connaissance personnelle et objective* » (Brousseau, 1986).

La TSD différencie aussi les situations suivant l'activité de l'élève (action, formulation, validation, institutionnalisation).

Nous utiliserons aussi le concept de *variable didactique*. C'est un élément de la situation sur laquelle l'enseignant peut agir. Elle provoque des changements qualitatifs dans les procédures de résolution de l'élèves. Elle provoque aussi une modification dans l'apprentissage.

On va utiliser ce cadre théorique pour construire des situations, pour la classe, susceptibles de mettre en jeu l'ensemble des types d'activités des élèves décrites dans la TSD. Autrement dit, une situation qui produit les changements d'activités (action, formulation ou validation) au fur et à mesure de la résolution.

V.3 - SITUATION DE RECHERCHE POUR LA CLASSE (SiRC)

Nous reprenons ici la caractérisation d'une SiRC développée dans Grenier et Payan (2003) :

- Une « situation recherche » s'inscrit dans une problématique de recherche professionnelle. Elle doit être proche de questions non résolues. Il y a l'hypothèse que cette proximité à des questions non résolues — non seulement pour les élèves, pour l'ensemble de la classe, mais aussi pour l'enseignant, les chercheurs — va être déterminante pour les rapports que vont avoir les élèves avec la situation.

– La question initiale est facile d'accès : la question est « facile » à comprendre. Pour cela, le problème doit se situer hors des mathématiques formalisées et c'est la situation elle-même qui doit « amener » l'élève à l'intérieur des mathématiques.

– Des stratégies initiales existent, sans que soient indispensables des prérequis spécifiques. De référence, les connaissances scolaires nécessaires pour initier la résolution sont élémentaires.

– Plusieurs stratégies d'avancer dans la recherche et plusieurs développements sont possibles, aussi bien du point de vue de l'activité (construction, preuve, calcul) que du point de vue des notions mathématiques en jeu.

– Une question résolue renvoie très souvent une nouvelle question. La situation n'a pas de « fin ». Il n'y a que des critères de fin locaux. L'objectif premier est donc la résolution (au moins partielle) d'une question dont on ne connaît pas la réponse, et non l'apprentissage ou le travail d'une notion mathématique désignée. Une « bonne » SiRC va conduire l'élève à pratiquer les savoir-faire transversaux décrits ci-dessus. Les pistes de résolution peuvent diverger et donc mettre en jeu des concepts mathématiques différents.

Trois aspects fondamentaux sont présents dans nos SiRC, qui sont peu présents, voire absents, dans la classe usuelle.

– L'« enjeu de vérité ». En classe, usuellement, ce qui est à prouver est la plupart du temps annoncé comme vrai (« démontrer que »), il n'y a pas d'enjeu de vérité. Ou bien, lorsque la question est ouverte, la réponse est évidente (« que constatez-vous ? », en regardant une figure, par exemple).

– L'aspect « social » de l'activité. Dans une SiRC, il peut y avoir un vrai enjeu social de production mathématique, même s'il est local (groupe + professeur et/ou chercheur).

– L'aspect « recherche ». Dans les manuels et les pratiques enseignantes, il est explicitement déclaré que, pour résoudre un problème et aussi pour prouver, « on ne doit utiliser que les propriétés du cours ou celles d'une liste donnée ». Cette consigne est contradictoire avec l'activité du chercheur et avec la démarche scientifique.

L'une des raisons importantes qui nous fait choisir ce modèle est qu'il est adapté à l'étude et l'analyse de situations suffisamment ouverte pour permettre des interactions entre registres mathématiques différents. De plus, ce type de situations favorise la mise en œuvre de savoirs transversaux relatifs au raisonnement et à la preuve. Notamment ceux identifiés en arithmétiques dans les travaux didactiques antérieurs (Battie, 2003 ; Garde, 2010 ; Godot, 2006).

PARTIE II
CONSTRUCTION ET MISE EN ŒUVRE D'INGÉNIERIE DIDACTIQUE

VI - POINTS ENTIERS SUR UNE DROITE

L'objectif de cette partie est de construire et d'étudier un problème qui met l'arithmétique et la géométrie en relation. D'où l'idée de regarder des problèmes autour de la nature des points qui caractérisent un objet géométrique. L'objet « point » est incontournable en géométrie de façon générale. Lorsqu'on s'intéresse particulièrement à la géométrie repérée (ou analytique), la nature des points, définit le caractère continu ou discret des objets.

VI.1 - PROBLÈME GÉNÉRAL

La question de départ que nous nous sommes posées est la suivante :

« Étant donné une courbe déterminée par n points, trouver tous les points à coordonnées entières sur cette courbe »

Pour résoudre ce problème mathématique, il est nécessaire de regarder par type de courbe. Toutefois, il est important de noter que la question n'a de l'intérêt en mathématique que lorsqu'on se place dans le registre de la géométrie repérée.

Nous avons donc choisi pour cette recherche d'étudier le cas de la droite dans le plan. Ainsi, le problème général de notre étude est formulé comme suit :

Étant donné n points alignés dans le plan, déterminer tous les points à coordonnées entières situés dans le même alignement que ces n points.

VI.2 - ÉTUDE MATHÉMATIQUE

Lorsqu'on a des points donnés avec leurs coordonnées, il est assez naturel de commencer par une représentation graphique dans un repère. On regardera donc si on peut résoudre graphiquement le problème ou en tirer des informations pour poursuivre la résolution. Il faut remarquer ici que cette démarche nécessite d'avoir des points dont les coordonnées sont faciles à représenter graphiquement. Les valeurs irrationnelles par exemple, sont difficile à exploiter lorsqu'on cherche une représentation graphique satisfaisante.

2.1 - Résolution graphique

On est donc dans le cas où une représentation graphique de la droite est possible (avec les coordonnées données). Nous l'appellerons méthode (S1) dans la suite du texte.

Soit des points $A(a, b)$ et $B(a', b')$ à coordonnées entières repérés sur la droite (cf. figure 1).

On détermine alors la pente de la droite : $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ où Δx et Δy sont des entiers.

En partant de A (ou de B), un déplacement Δx parallèlement à l'axe des abscisses, puis un déplacement Δy parallèlement à l'axe des ordonnées permet d'obtenir un autre point entier (voir. Figure 1).

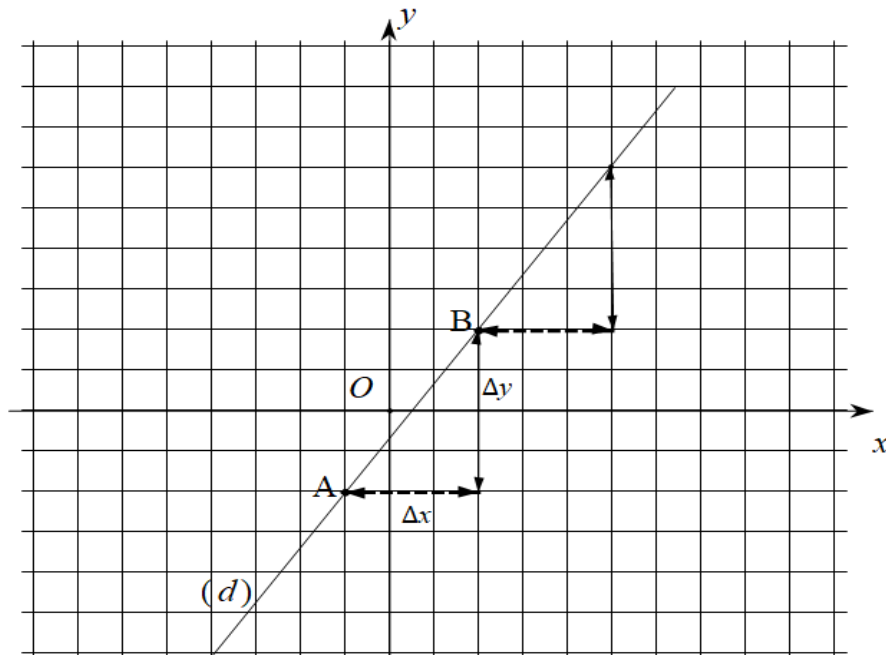


Figure 1. Illustration de la résolution graphique

Une répétition périodique de ce processus permet de se faire une conjecture de la solution générale du problème. C'est-à-dire on peut observer par exemple, qu'à partir de $A(a, b)$, les points $M(a+k\Delta x, b+k\Delta y)$ avec k entiers, sont aussi des points entiers de la droite.

Il y a bien sûr des interrogations : comment peut-on être sûr graphiquement qu'on a tous les points entiers qui se trouvent sur notre droite ? Qu'on n'en a pas oublié ? Les réponses de ces questions sont basées sur des propriétés de l'arithmétique. Il faut par exemple, que Δx et Δy soient premiers entre eux (c'est-à-dire $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ irréductible) pour pouvoir définir le « pas » entre deux solutions (entières) consécutives.

Donc pour trouver une justification de la méthode et proposer une solution générique, il peut être nécessaire de passer du graphique à l'arithmétique.

Cas particulier

Selon Lafond (2015), il est possible de résoudre graphiquement sans calcul, les équations se ramenant à la forme $ax+by = \pm 1$ (a, b sont des paramètres entiers donnés premiers entre eux ; x, y des inconnues dans \mathbf{Z}).

Il explique sa stratégie sur cet exemple : soit à résoudre l'équation $5x-11y = \pm 1$ dans \mathbf{Z} .

On commence par construire la droite d'équation $ax+by = 0$ dans un repère du plan cartésien quadrillé. Cela correspond dans son exemple à construire la droite (D) : $5x-11y = 0$ (voir Figure 2).

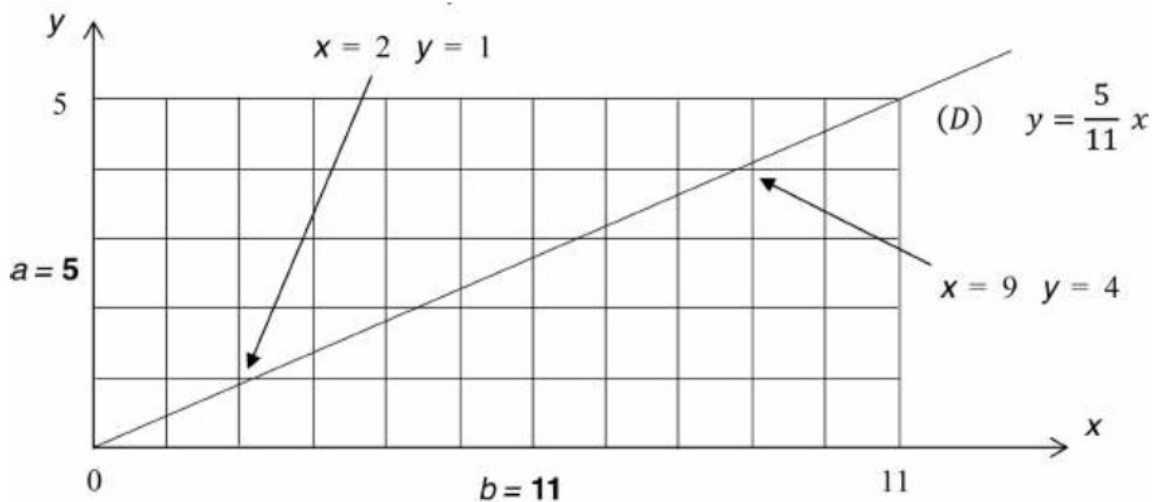


Figure 2. Résolution graphique proposé par Lafond (2015)

Puis on cherche un point du quadrillage qui est le plus près possible de la droite (D) mais pas sur (D) (un point sur (D) serait une solution de l'équation $ax+by = 0$ et non de $ax+by = \pm 1$). Les coordonnées de chacun des points trouvés fournissent une solution de l'équation $ax+by = \pm 1$. Dans son exemple, $x=9$, $y=4$ au dessous de la droite (D) ou $x=2$, $y=1$ au dessus de la droite (D) conviennent. Ces choix de point peuvent être vérifiés aisément : $5 \times 9 - 11 \times 4 = 1$, $5 \times 2 - 11 \times 1 = -1$.

La justification de Lafond (2015) est la suivante :

La distance du point $M(x_0, y_0)$ à la droite (D) d'équation $ax-by = 0$ est :

$$d(x_0, y_0) = \frac{|ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$d(x_0, y_0)$ sera minimale si et seulement si $|ax_0 - by_0|$ est minimal. Or $|ax_0 - by_0|$ est un entier positif (non nul car on n'est pas sur (D)).

Donc le minimal a lieu lorsque $|ax_0 - by_0| = 1$.

Ce minimum est atteint aux deux points particuliers du graphique (voir Figure 2). On peut prouver ce résultat géométriquement en utilisant le théorème de Pick (d'après Lafond).

Si on étend le quadrillage au plan tout entier, la Figure 2 se répète périodiquement, ce qui montre que la solution particulière $x_0 = 9$, $y_0 = 4$ engendre la solution générale (dans le cas $5x - 11y = +1$) : $x = x_0 + 11t$, $y = y_0 + 5t$ avec $t \in \mathbb{Z}$.

Lafond (2015) soutient que sa méthode est exclusivement graphique, mais on peut bien remarquer que les justifications sont basées sur des théorèmes ou propriétés arithmétiques (les nombres premiers entre eux, le théorème de Bézout).

En conclusion, sous l'hypothèse qu'on a des points de la droite dont les coordonnées sont premiers entre elles, la résolution graphique marche. Mais elle « cache » en réalité l'utilisation de propriétés arithmétiques.

2.2 - Autres méthodes

Lorsqu'on a des points donnés avec les coordonnées, on peut choisir de déterminer l'équation de la droite. Pour cela plusieurs techniques sont possibles.

Soit $A(a, b)$ et $B(a', b')$ (avec a, b, a', b' des réels) deux points donnés et $M(x, y)$ (avec x, y des réels), un point quelconque de (AB) .

– Première technique. Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB}$. C'est-à-dire : $x = a + k(a' - a)$ et $y = b + k(b' - b)$ avec k un réel. On obtient alors une équation paramétrique de la droite.

– Deuxième technique. On utilise la propriété du déterminant de deux vecteurs colinéaires dans le plan euclidien. On a : $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$.

D'où : $(x - a)(b' - b) - (y - b)(a' - a) = 0$ ce qui est équivalent à :

$x(b' - b) + y(a - a') + (b - b') + b(a' - a) = 0$. C'est la forme générale de l'équation d'une droite.

– Troisième technique. On part de la forme réduite de l'équation de (AB) : $y = mx + p$ (avec m, p des réels). Ensuite, on utilise les coordonnées de A et B pour obtenir un système de deux équations d'inconnues m et p et l'équation $y = mx + p$ est déterminée.

Considérons que nous avons l'équation de la droite en jeu.

Lorsqu'elle est sous la forme : $y = a$ avec a réel ou $x = a$, avec a réel, les solutions se résument comme suit :

– Si a est un entier, alors l'ensemble des points recherché est $\{(n; a) \text{ avec } n \in \mathbb{Z}\}$ pour l'équation $y = a$ ou $\{(a; n) \text{ avec } n \in \mathbb{Z}\}$ pour l'équation $x = a$.

– Sinon les droites $x = a$ et $y = a$ ne passent par aucun point à coordonnées entières.

On s'intéresse maintenant au cas général où l'équation de la droite est : $ax + by + c = 0$ (a, b, c des entiers non nuls).

Résolution par « exploration » de l'équation (S2)

L'équation générale peut être ré-écrite sous la forme (E): $y = \frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ (si b non nul).

- Si b divise a et c , alors une condition suffisante pour obtenir y entier est que x soit entier. Cette condition n'est pas nécessaire. Par exemple, l'équation $y = -2x + 1$ admet la solution $(-\frac{1}{2}; 2)$, où y est un nombre entier, x un rationnel strict. Les solutions avec x entier forment donc une partie de l'ensemble des solutions pour avoir un y entier.
- Si b divise c et ne divise pas a , alors une condition suffisante pour obtenir y entier est que x soit un multiple de b . Ici aussi, cette condition n'est pas nécessaire. Par exemple $(-\frac{3}{2}; 2)$ est une solution de l'équation $y = -\frac{2}{3}x + 1$, où y est un entier, x un rationnel strict. Ainsi, les solutions avec x multiple de b constituent une partie de l'ensemble des solutions pour avoir un y entier.

-
- Si b divise a et ne divise pas c , alors l'équation n'admet pas de solution entière. Par exemple, pour l'équation $y = -2x + \frac{1}{3}$, si x est un entier, $-2x + \frac{1}{3}$ est un rationnel strict, donc y n'est pas entier. Réciproquement, si y est entier, $y - \frac{1}{3}$ est un rationnel strict, donc x n'est pas entier.
 - Si b ne divise ni a ni c , alors, on ne peut pas conclure de manière générale : il y aura ou non des solutions selon les valeurs des nombres a, b, c . Déterminer l'ensemble des solutions nécessite une étude spécifique.

La méthode par « exploration » est valable aussi lorsqu'on exprime x en fonction de y . Les notions de *diviseur*, *multiple* d'un entier sont les principales notions arithmétiques mobilisées, ainsi que les concepts de *condition nécessaire*, *condition suffisante*.

Résolution « diophantienne » (S3)

Rechercher les points entiers de l'équation $ax+by+c = 0$ (a, b , non nul) revient à résoudre dans \mathbf{Z} , une équation sous la forme : $ax+by = c$ avec a, b, c entiers (a et b non nuls). On a donc une égalité semblable à la propriété de Bézout.

– Existence d'une solution entière

Si l'équation $ax+by = c$ (a, b, c entiers a et b non nul) admet au moins une solution, alors il existe u et v entiers tels que : $au+bv = c$. En désignant $d = \text{PGCD}(a, b)$, d divise a et b donc d divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de a et de b . Par conséquent d divise $au+bv$ et comme $au+bv = c$, on a : d divise c .

Une condition nécessaire à l'existence d'au moins une solution est donc que $\text{PGCD}(a, b)$ divise c .

La condition est aussi suffisante. Pour preuve, supposons maintenant que d divise c . Il existe alors k entier tel que $c = kd$. Puisque $d = \text{PGCD}(a, b)$, il existe a' et b' premiers entre eux tels que : $a = da'$ et $b = db'$. Et d'après la théorème de Bézout, alors il existe u et v tels que : $a'u'+b'v' = 1$, d'où : $kd a'u'+kd b'v' = kd$. Soit : $aku'+bkv' = c$. En posant : $u = ku'$ et $v = kv'$ qui sont tous deux des entiers relatifs, nous obtenons que l'équation admet alors au moins une solution. En conclusion, la condition est suffisante.

– Résolution de l'équation

Lorsque $\text{PGCD}(a, b)$ divise c , l'existence d'au moins une solution dans \mathbf{Z} de l'équation $ax+by = c$ (avec a, b, c entiers, et a et b non nuls) est assurée.

Dans le cas où a et b ne sont pas premiers entre eux, on peut procéder comme suit pour obtenir l'ensemble des solutions. On réduit l'équation à une nouvelle équation : $a'x+b'y = c'$, avec a' , et b' premiers entre eux. Puis on cherche une solution particulière. Si nécessaire, on se sert de l'*algorithme d'Euclide* pour en trouver. En utilisant ensuite le théorème de Bézout, il existe deux entiers u' et v' tels que $a'u'+b'v' = 1$. On peut donc choisir (u, v) comme solution particulière de l'équation avec $u = u'c'$ et $v = v'c'$. Ainsi un couple (x, y) élément de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ est une solution si et

seulement si $a'(x-u)+b'(y-v) = 0$. On applique ensuite le théorème de Gauss à l'égalité $a'(x-u) = -b'(y-v)$. On a a' et b' étant premiers entre eux, alors a' divise $-y+v$, ce qui équivaut à dire qu'il existe un entier k tel que $-y+v = ka'$ c'est à dire $y = v - ka'$. On en déduit que $x = u + kb'$. En prenant soin de vérifier que les couples (x, y) obtenus sont bien des solutions de l'équation, on conclut que l'ensemble des solutions recherchés sont les couples : $(u + kb', v - ka')$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

Cette méthode est appelée résolution « diophantienne ». Elle est présentée dans les manuels et dans les pratiques de classe en général sous forme d'un algorithme de résolution avec très peu de justification des différentes étapes et les propriétés.

Résolution «fonctionnelle» (S4)

Elle est plus proche de la résolution par exploration (S2). Il s'agit de ré-écrire l'équation de la droite sous la forme : $y = \frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ (avec b non nul), on en déduit que l'ensemble des solutions recherchés est : $\left\{ (x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, \text{ tel que } : y = \frac{a}{b}x + \frac{c}{b}, b \text{ non nul} \right\}$. C'est-à-dire qu'on se place dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ puis on sélectionne les couples entiers qui vérifient la relation $y = \frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ (b non nul).

Si la méthode apparaît pertinente mathématiquement, la détermination effective de tous les points pose des difficultés.

VI.3 - ÉTUDE DIDACTIQUE

Pour rappel, voici l'énoncé du problème :

Étant donné n points alignés dans le plan, déterminer tous les points à coordonnées entières situés dans le même alignement que ces n points.

L'étude mathématique montre que la résolution de ce problème mobilise à la fois des connaissances notionnelles du domaine de la géométrie (analytique) et de l'arithmétique. Pour le domaine de la géométrie, on peut citer : coordonnées cartésiennes d'un point, représentation d'une droite dans un repère du plan, équation d'une droite dans le plan. En arithmétique, on a : diviseur, multiple, PGCD, nombres premiers entre eux, Théorème de Bézout, théorème de Gauss.

L'étude mathématique montre aussi que des connaissances transversales peuvent être mobilisées : condition nécessaire, condition suffisante, l'existence et exhaustivité de solution.

Du point de vue des registres, l'étude montre que plusieurs peuvent être convoqués selon les stratégies de résolutions. Nous en avons identifié quatre, que nous définissons dans le tableau suivant :

Registres	Écritures ou éléments d'identification	Commentaires
Graphique	Droite, point dans un repère du plan	Représentation graphique des points et des droites
Fonctionnelle	$y = ax + b$ avec y, x, a, b des réels	Elle renvoie à une conception fonctionnelle de la droite (fonction affine)
Algébrique	$ax + by + c = 0$ avec x, y, a, b, c des réels	On identifie une caractérisation algébrique de droite :
	$\begin{cases} x = a + bk \\ y = a' + b'k \end{cases}$ où a, a', b, b', k sont des réels et k un paramètre.	à partir d'une équation algébrique à deux inconnues ou à partir d'un système de deux équations paramétriques
Arithmétique	$ax + by = c$, avec x, y, a, b, c des entiers	On identifie une écriture plus proche d'une égalité de Bézout

Tableau 1. Registres identifiés dans la résolution du problème

Il est évident que le problème soulève des questions de passage du *continu* au *discret* et réciproquement. Notamment le passage de la *droite réelle* à des « *points entiers alignés* ». Toutefois, nous ne pouvons pas dire ici que le problème aborde entièrement toutes les notions permettant le passage de la droite réelle à la « droite discrète ». Ouvrier- Buffet(2003) étudie spécifiquement la problématique de la définition de la « droite discrète ». Elle souligne que la droite réelle peut être un support « physique » pour définir la « droite discrète ». On a besoin de bien plus de concepts pour définir cet objet.

Du point de vue des variables didactiques, nous avons identifié :

– *La nature de la droite.* La détermination de l'ensemble des points entiers d'une droite peut être triviale ou plus « complexe » selon l'équation. On peut rappeler par exemple, les cas particuliers ($x = a$ ou $y = a$ avec a réel) qui sont plus « simple » à interpréter en suivant les caractéristiques des points par rapport aux droites d'équation $ax + by = c$ (a, b, c réels non nuls).

– *La nature des coordonnées des points.* Selon qu'on ait des coordonnées avec des valeurs entières, rationnelles ou irrationnelles, les calculs pour déterminer l'équation peuvent être plus simples ou plus exigeants en terme d'attention pour réduire les erreurs. La nature des points a aussi une influence sur le choix des stratégies. Par exemple, lorsque les coordonnées ne sont pas faciles à représenter graphiquement, cela réduit l'exploration de la résolution graphique.

– *Le nombre de points de l'énoncé.* On sait que deux points suffisent pour définir une droite. Ainsi, lorsqu'on donne exactement deux points, le problème sera « fermé » du point de vue de la caractérisation de la droite en jeu. Alors qu'en donnant plus de deux points, on laisse à l'actant le choix des données utiles. Le problème est dans ce cas plus « ouvert » du point de vue des données.

Cet étude didactique montre qu'on a le choix entre plusieurs instances pour mener une expérimentation.

VI.4 - SITUATION EXPÉRIMENTÉE

La formulation de l'énoncé est basée sur les choix suivants :

- Cas particuliers sont exclus : $x=a$ ou $y=a$ où a est un réel. Ils pourront être évoqués lors de l'institutionnalisation (moment de mise en commun) ;
- Donner des points dont les coordonnées sont faciles à représenter graphiquement : pour « ouvrir » le problème par rapport à la résolution graphique ;
- Donner au moins un cas où il n'existe pas de points entiers dans l'alignement : pour identifier les arguments selon les différentes méthodes de résolutions ;
- Donner au moins un cas dans lequel la résolution graphique et celle par « exploration » sont « difficiles » à aboutir : pour évaluer l'opérationnalisation du théorème de Bézout ;
- Donner 3 points : pour ouvrir le problème par rapport au choix des données utiles pour la résolution.

Énoncé

Étant donné des points alignés dans un repère du plan, on veut déterminer tous les points à coordonnées entières situés dans le même alignement que ces points.

Étudier ce problème dans chacun des cas particuliers suivants :

Cas 1. $\left(1, \frac{1}{2}\right), (2, 3), \left(\frac{-2}{5}, -3\right)$

Cas 2. $\left(\frac{-3}{2}, -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{-1}{2}, -1\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Cas 3. $\left(-1, -\frac{5}{2}\right), (1, -1), \left(3, \frac{1}{2}\right)$

Quelques éléments de solutions attendues

Nous n'aborderons pas ici les différentes techniques pour déterminer l'équation d'une droite (dont au moins deux points sont donnés). Elles sont considérées comme des acquis du secondaire. Nous ne présentons pas non plus en détails les étapes de résolution pour chacun des cas. Le lecteur pourrait se référer à la partie « VI.2 Étude mathématique » au besoin.

– *Les équations associées aux cas particuliers donnés*

Rappelons que la détermination des équations de droites ne fait pas parti des objectifs de l'expérimentation. Les équations associées aux trois cas particuliers sont respectivement :

$$(1) : y = \frac{5}{2}x - 2 \Leftrightarrow 5x - 2y - 4 = 0, \text{ pour tout couple de réels } (x, y).$$

$$(2) : y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \Leftrightarrow 2x - 4y - 3 = 0, \text{ pour tout couple de réels } (x, y).$$

$$(3) : y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4} \Leftrightarrow 3x - 4y - 7 = 0, \text{ pour tout couple de réels } (x, y).$$

– *Les ensembles des solutions attendues*

Les équations (1) et (3) admettent au moins une solutions dans \mathbf{Z} . Ceci est trivial, puisqu'un point à coordonnées entières est donnés dans chacun de ces deux cas. La méthode de résolution diophantienne permet d'obtenir l'ensemble des solutions à partir de ce couple d'entiers. On obtient donc : $S_1 = \{(2k; 5k - 2), k \in \mathbf{Z}\}$ pour l'équation (1) et $S_3 = \{(1 + 4k; -1 + 3k), k \in \mathbf{Z}\}$ pour l'équation (3).

L'équation (2) n'admet pas de solution dans \mathbf{Z} . Cela peut être vérifié en calculant le $PGDC(2, 4)$ et en utilisant la propriété de la partie « Résolution diophantienne ». On a bien $PGDC(2, 4) = 2$, or 2 ne divise pas 3, donc l'équation n'admet pas de solution. On peut aussi prouver ce résultat par « exploration » de l'équation (2). En effet, l'équation (2) est équivalente à $2x - 4y = 3$. Ainsi, pour tout couple d'entiers (x, y) , le nombre $2x - 4y$ est pair, donc il ne peut être égal à 3. On conclut que l'équation n'admet donc pas de solution entière.

En utilisant la méthode graphique, on peut faire une conjecture pour une partie des solutions du cas 1 et 3 (car une solution particulière est donnée). Mais elle sera « difficile » à appliquer pour résoudre le cas 2.

Par ailleurs, si la méthode de résolution par « exploration » permet aussi de résoudre le cas 1, elle est difficile à mettre en œuvre pour résoudre le cas 3 (voir. Méthode par « exploration »).

Le public de l'expérimentation

Elle sera effectuée avec des étudiants de Master 1 et Master 2 de la filière mathématique de l'ENSup de Bamako. Précisons que la formation de Master à l'ENSup est centrée sur des compléments disciplinaires (algèbre, analyse, géométrie, logique) de niveau Licence (L 3) et Master 1 de mathématiques ainsi que sur quelques notions de base de didactique des mathématiques. Les étudiants doivent aussi préparer et soutenir un mémoire au terme d'un stage à responsabilité dans un lycée. Donc, en principe, les notions arithmétiques et géométriques en jeu et les méthodes de résolutions du problème sont disponibles chez ces étudiants. Nous précisons aussi que les étudiants de Master 2 ont revu des notions d'arithmétique à l'ENSup.

Stratégies de résolution et hypothèses sur les difficultés

Nous faisons l'hypothèse que des graphiques vont être construits, car l'énoncé fait référence explicitement à des objets géométriques et que c'est un usage de tracer une droite lorsqu'elle est en question dans un problème. Dans chacun des cas 1 et 3, le point à coordonnées entières qui est donné ((2, 3) pour le cas 1 et (1, -1) pour le cas 3), peut être un point de départ pour en « trouver d'autres », mais ceci ne permet pas l'exhaustivité. Et les pentes des droites n'étant pas entières, on ne peut en déduire directement d'autres points à coordonnées entières sur ces droites.

Nous estimons aussi que le passage de la géométrie à l'arithmétique peut être difficile pour les étudiants étant donné que le problème proposé n'est pas habituel dans les enseignements.

L'objectif de l'expérimentation est d'identifier :

- les stratégies de résolutions ;
- les passages entre registres en particulier entre le graphique et l'arithmétique ;
- les savoirs notionnels et transversaux mobilisés par les étudiants ;
- les difficultés et les blocages éventuels.

VI.5 - ANALYSE DES PRODUCTIONS

Elle est centrée sur un certain nombre de points mis en avant dans les études précédentes. Ainsi, nous nous intéressons aux *registres* mis en œuvre dans les résolutions des étudiants. Ce registre peut être *graphique*, *algébrique*, *fonctionnel* ou bien *arithmétique*. Nous étudions les différentes stratégies d'étudiants par rapports aux méthodes : *Résolution graphique* (S1) ; *Résolutions par exploration* (S2) ; *Résolution diophantienne* (S3) et la *Résolution ensembliste* (S4). Nous examinons aussi la prise en compte par les étudiants de *l'existence et du nombre de solutions* pour chacun des cas. Enfin, nous nous intéressons, aux *raisonnements adoptés* pour la détermination effective de l'ensemble des solutions. Vont-ils utiliser un raisonnement par l'inclusion ou par égalité ? Et comment ?

Dans le dépouillement, nous distinguons l'analyse des productions pour chacun des deux niveaux de formation afin d'identifier d'éventuels changements (ou une évolution) de *conceptions* d'étudiants du Master 1 au Master 2. Rappelons que les étudiants du Master 2 ont suivi en début d'année un cours d'arithmétique dans le module dénommé « complément d'algèbre ».

5.1 - Classe de Master 1 (futurs professeurs d'enseignement secondaire)

L'effectif est de *vingt* étudiants. Le temps de résolution du problème est limité à une heure, le travail est individuel. Aucun document de mathématiques n'est autorisé. Chaque étudiant dispose de son trousseau de matériel de constructions géométriques et de sa calculatrice.

Dans un premier temps, les étudiants (plus de la moitié) commencent par construire un repère (orthonormé) du plan, représentent les points de l'énoncé et les droites. En démarrant dans le registre *graphique*, on peut s'attendre à l'adoption d'une stratégie de *résolution graphique*. Ce qui n'est finalement pas le cas. Les étudiants utilisent la représentation graphique pour « vérifier » l'alignement des points donnés.

Dans un deuxième temps, les étudiants déterminent les équations des droites. Certains utilisent des notions de *géométrie vectorielle* (vecteurs colinéaires, déterminant...), d'autres utilisent des notions de la *géométrie analytique* (équation générale ou réduite d'une droite). Nous observons que cette entrée dans le problème a été plus longue que prévue. Les étudiants y ont consacré trop de temps, en particulier, pour les deux derniers cas. Quelques étudiants n'ont donc pas pu arriver dans le temps imparti, à la détermination de l'ensemble des solutions qui constitue l'objectif central de la situation. Nous observons aussi qu'en cette étape de détermination des équations de droites, les étudiants concluent leur calcul par une équation sous une forme *algébrique* ($ax+by+c=0$, avec a, b, c , des réels), ou *fonctionnelle* ($y=ax+b$, avec a, b des réels).

La détermination de l'ensemble des solutions

Ils ne sont que *cinq* étudiants à trouver une réponse correcte pour au moins un cas. Mais aucun n'a résolu entièrement les trois cas. La méthode de résolution apparue est celle de *l'exploration de l'équation* (S2). Comme on peut le voir sur la copie de K. (cf. Figure 3), les étudiants cherchent surtout à déterminer une condition nécessaire. On peut lire par exemple sur la copie de « K. » : « pour que y soit entier, il faut que $x=2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$... ». Elle ne se rend pas compte qu'elle a déterminé plutôt une condition suffisante.

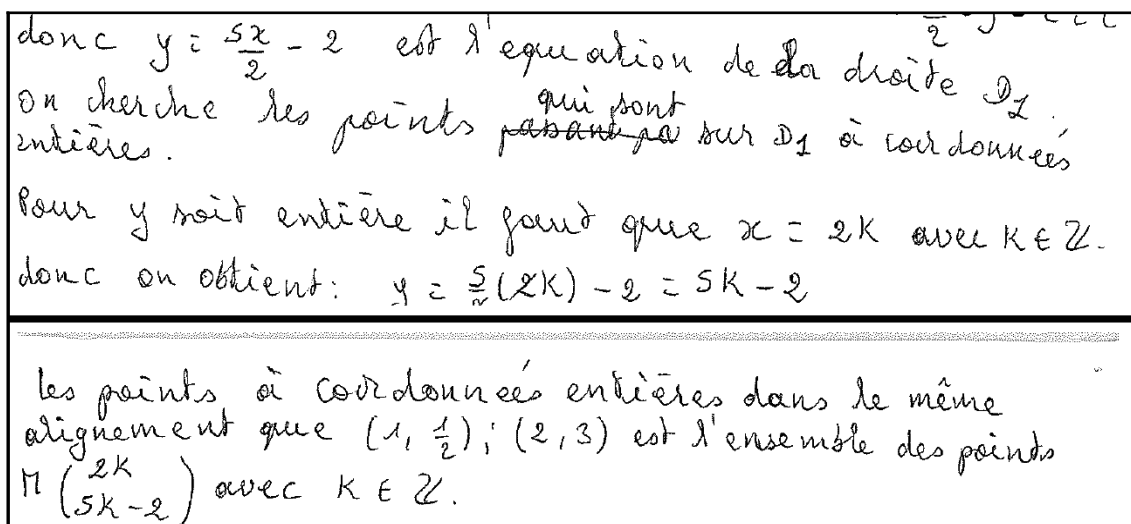


Figure 3. Production de K. pour le cas 1

Pour le cas 2, les étudiants ayant résolu ont utilisé aussi la méthode par exploration (S2). Ils partent de l'hypothèse que x et y sont entiers pour aboutir à une contradiction : égalité entre entiers pairs et impairs. Ce qui leur a permis de conclure que le cas 2 n'admet pas de solution entière.

L'étudiant T., lui, adopte un raisonnement semblable. On peut lire sur sa copie (voir Figure 4) :

« $\forall x, y$, il n'existe pas un seul point à coordonnées entières dans le même alignement que ces n points car à chaque fois on ajoute $\frac{1}{2}$ à la valeur de x »

Déterminons l'équation de cette droite.

(1) : $y = ax + b$
 $-\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}a + b$ $-1 = -\frac{1}{2}a + b \Rightarrow x = \frac{1}{2}a - b$
 $\left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{2}a + b = -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}a - b = -\frac{3}{2} \end{array} \right.$ $b = \frac{1}{2}a - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$
 $-\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow -a = -2 \Rightarrow a = 2$ (2) : $y = 3x + \frac{1}{2}$

et x, y il n'existe pas un seul point à coordonnées entières dans le même alignement que ces n points. Car à chaque fois on ajoute $\frac{1}{2}$ à la valeur de x .

Figure 4. Production de T. pour le cas 2

La phrase de conclusion ne nous semble pas très explicite. Mais nous trouvons que son raisonnement peut être basé sur l'argument suivant :

Si on a une égalité « $y = 3x + \frac{1}{2}$ », il n'existe pas de x entier qui permet d'obtenir un y entier car si x est un entier alors $3x + \frac{1}{2}$ n'est pas entier.

Toujours sur le cas 2, l'étudiant O. trouve qu'il n'existe pas de point à coordonnées entières « car les points donnés ne sont pas entières ». Il ne donne aucune justification mathématique sur sa copie (voir Figure 5). A-t-il utilisé des propriétés mathématiques ? Son argument sous le graphique semble indiqué plutôt qu'il a utilisé un *théorème en acte* : « si une droite passe par trois points dont toutes les coordonnées sont non entières, alors elle ne passe pas par des points à coordonnées entières ». Il pouvait bien se rendre compte assez facilement que son *théorème en acte* n'est pas valide. Il suffit de l'appliquer au cas 1 ou 3. En effet, selon son *théorème en acte*, si les points entières (2,3) du cas 1 et (1,-1) du cas 3 n'étaient pas donnés, on peut conclure aussi que ces droites ne passent pas par des points à coordonnées entières.

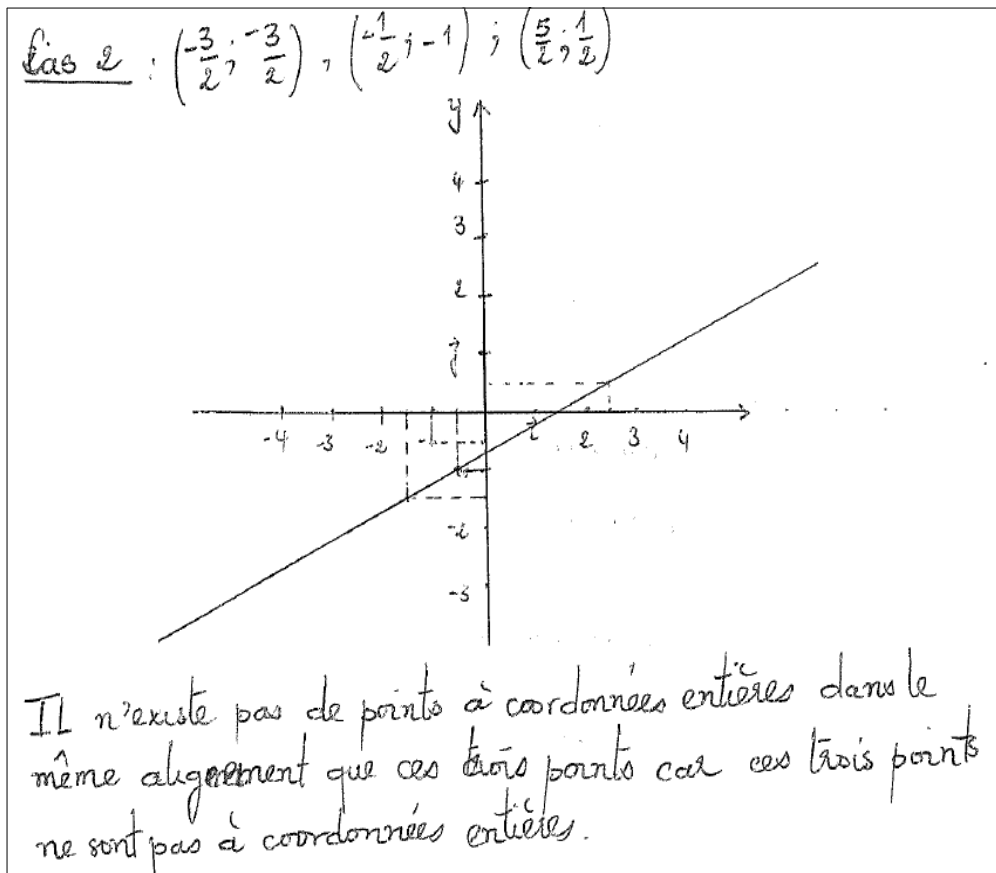


Figure 5. Production de O. pour le cas 2

Quant au cas 3, aucun étudiant de la classe n'a pu le résoudre. Ils reprennent sans succès la méthode par exploration (S2). On peut voir sur la copie de D.. (voir Figure 6), qu'il tourne pratiquement en « boucle ». Nous liions cet échec à un obstacle de mobilisation de théorème de Bézout dans un autre registre que celui de l'arithmétique.

3^e cas soit $A(-1, -\frac{5}{2})$, $B(1, -1)$ et $C(3, \frac{1}{2})$

vérifions si A, B, C sont alignés

$$\vec{AB} = \begin{vmatrix} 1+1=2 \\ -1+\frac{5}{2}=\frac{3}{2} \end{vmatrix} \quad \vec{AB} = (2, \frac{3}{2}) \quad \vec{AC} = \begin{vmatrix} 3+1=4 \\ \frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3 \end{vmatrix} \quad \vec{AC} = (4, 3)$$

Soit $P(x, y) \in (AC)$ tel que ~~$\vec{AP} \parallel \vec{AC}$~~

$$\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$$

$\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = 0$ alors A, B, C sont alignés

$$\det(\vec{AP}, \vec{AC}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ x+1 & y+\frac{5}{2} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4y+10-3x-3=0$$

$$\Leftrightarrow -3x+4y+7=0$$

$$\Leftrightarrow 4y=3x-7$$

$4 \mid 3x-7 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tel que $3x-7 = 4k \Rightarrow x = \frac{4k+7}{3}$

$\Rightarrow \exists k' \in \mathbb{N}^*$ tel que $4k+7 = 3k' \Rightarrow 4k = 3k'-7$.

Donc $x = \frac{3k'}{3} = k'$

Figure 6. Copie de D. pour le cas 3

Nous avons par ailleurs trouvé que 12 étudiants s'arrêtent sur une conclusion semblable à celle de la résolution «fonctionnelle» (S4). Voici par exemple la copie de M. (voir. Figure 6).

$$5x - 2y - 4 = 0$$

(AB): $5x - 2y - 4 = 0$ est l'équation Cartésienne de la droite (AB)

$E: \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2; 5x - 2y - 4 = 0\}$: l'ensemble des couples d'entiers relatifs qui vérifient l'équation de la droite (AB) est l'ensemble de tous les points qui sont à coordonnées entières qui sont dans le même alignement que A et B

Figure 7. Production de M. pour le cas 1

Ces étudiants ne montrent ni l'existence de solutions ni une forme générique des couples solutions. L'ensemble défini est bien correct sur le plan mathématique. Mais nous attendions que les étudiants donnent plus de précisions sur les couples solutions. Nous faisons l'hypothèse qu'ils n'ont peut être pas compris ce qu'on attendait d'eux. Ou bien, ils ont pu être bloqués dans leur démarche de résolution et ne savaient plus quoi faire de l'équation de droite obtenue. Il faut noter qu'il leur restait du temps pour continuer la résolution, mais ils ont choisi de rendre les copies. Nous pensons que notre intervention pour relancer ces étudiants dans la résolution pouvait être utile. Par exemple, en leur demandant de trouver des points entiers ou bien de trouver une formule générique qui permet de déterminer tous les points à coordonnées entières.

Pour cette classe de Master 1, si les notions de diviseur, multiple sont utilisées par quelques étudiants, le PGCD, le théorème de Bézout, le théorème de Gauss n'ont pas été évoqué. Nous faisons l'hypothèse que, soit les étudiants n'ont pas reconnu que la résolution du problème convoque des savoirs arithmétiques, soit ils ont tout simplement oublié ces notions.

Nous avons aussi relevé des erreurs assez surprenantes. Prenons par exemple, la copie de S. (voir Figure 8.). Il réduit à \mathbb{N} , l'ensemble de recherche des solutions (voir Figure 8., première ligne). Il fait clairement une confusion entre « entier » et « entier naturel ». Dans la suite de son raisonnement, on peut comprendre aussi « qu'il suffit d'exprimer x et y en fonction d'un entier k'' pour que x et y soit des entiers ».

Trouvons tous les $x, y \in \mathbb{N}$, $3x - 4y - 7 = 0 \Rightarrow 3x = 4y + 7 \Rightarrow x = \frac{4y + 7}{3}$ ④
 $x \in \mathbb{N}$ si et seulement si 3 divise x c'est à dire $3 \mid 4y + 7 \Rightarrow 4y + 7 = 3k''$
 où $k'' \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow y = \frac{3k'' - 7}{4}$
 À partir de ④ on a : $x = \frac{4(3k'' - 7) + 7}{3} = k''$
 D'où l'ensemble des points à coordonnées entières dans le même alignement que F, G et H est : $\left\{ \left(k'', \frac{3k'' - 7}{4} \right) \mid k'' \in \mathbb{N} \right\}$.

Figure 8. Production de S. pour le cas 3

En adoptant un raisonnement semblable à celui de S., d'autres étudiants ont eux aussi abouti à un ensemble générique erroné.

Nous pouvons dire aussi que les conceptions algébriques et fonctionnelles de la droite sont assez prégnantes chez la majorité des étudiants. Cela apparaît dans les stratégies de résolutions à travers le choix d'écriture (algébrique ou fonctionnelle) des équations de droites.

Discussion avec les étudiants

La séance expérimentale s'est terminée par un échange avec les étudiants. L'objectif est d'obtenir leurs réactions sur la compréhension du problème et les différentes stratégies trouvées.

Sur un effectif de 20 étudiants, seuls 4 affirment avoir manqué du temps pour arriver au terme de leur démarche.

A la question : « existe-t-il des droites sans points entiers ? », il y a eu un moment de d'hésitation avant les premières réponses. Si certain affirme que oui, pour d'autre, il n'en existe pas car « *la droite étant une infinité de points alignés, elle finira par passer par au moins un point entier* ». Nous sommes assez surpris d'observer cette fausse *représentation* sur la droite à ce niveau de l'enseignement supérieur. Des exemples triviaux pour s'en convaincre (de l'existence), peuvent être des droites $x=a$, $y=a$ (avec a non entier). L'interprétation géométrique des équations dans $Z \times Z$ sans solution entière pouvait être aussi évoqué.

La majorité des étudiants avoue être bloquée à cause de la formulation de l'énoncé. Selon eux, le problème est « géométrique », donc il fallait trouver une stratégie géométrique. Ils n'en ont pas trouvé. Ainsi, leur champ d'exploration étant réduit au domaine géométrique, en aucun moment, ils n'ont fait un lien entre les équations des droites et une résolution d'équations dans $Z \times Z$. Pour autant, toute la classe affirme avoir étudié au lycée puis à l'université les résolutions d'équations dans $Z \times Z$ avec les propriétés du PGCD, du théorème de Bézout et du théorème de Gauss.

5.2 - Classe de Master 2 (futurs professeurs d'enseignement secondaire)

Ils sont au total *sept* étudiants. Ils ont travaillé en binôme (avec un qui a travaillé seul). Toutes nos analyses s'établiront sur quatre productions écrites, étant donné que nous n'avons pas mis en place de dispositifs pour recueillir les interactions d'étudiants au sein des binômes.

Comme pour la classe de Master 1, les étudiants commencent dans le registre graphique. Ils construisent le repère et tracent les droites. Mais ils l'abandonnent aussitôt et débutent la détermination des équations de droites dans le registre algébrique.

Au niveau de la détermination de l'ensemble des solutions, une nette différence apparaît par rapport à la classe de Master 1. Deux binômes passent dans le registre arithmétique (ré-écriture de l'équation sous la forme d'une égalité de Bézout). Ils évoquent assez vite les notions de congruence, le théorème de Bézout, le théorème de Gauss. Mais ici aussi, un binôme donne une conclusion ensembliste (S4) (voir Figure 9).

On trouve l'équation de la droite passant par ces deux points AB

Soit $A(1, -\frac{1}{2})$; $B(-2, -3)$

$\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$

Soit $M(x, y) \in (AB)$

$\vec{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\det(\vec{AB}, \vec{AM}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ y+\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{vmatrix} = 0$

$-\frac{5}{2}(x-1) - (y+\frac{1}{2}) = 0$

$-\frac{5x}{2} + \frac{5}{2} - y - \frac{1}{2} = 0$

$-10x + 10 - 2y - 1$

$(AB) : -10x - 2y + 9 = 0$

Tous les points du plan de coordonnées entières vérifiant l'équation $-10x - 2y + 9 = 0$ sont dans le même alignement que les points A et B

Figure 9. Solutions du binôme 3 pour le cas 1

Sur deux copies, on retrouve la résolution « diophantienne » (S4). La méthode est utilisée comme une « recette ». On observe par exemple, que les étudiants recherchent un autre couple entier solutions de l'équation alors qu'il y en a un dans l'énoncé. Le binôme 1 par exemple, utilise le couple (9,5) comme solution particulière dans la résolution du cas 3 (voir Figure 10). De plus le théorème de Gauss est utilisé implicitement.

$(Ac) : -3x + 4y = -7$

$-27 + 20$

$\begin{cases} -3(9) + 4(5) = -7 \\ -3x + 4y = -7 \end{cases}$

$-3(9-x) - 4(5-y) = 0$

$3(x-9) = 4(5-y)$

$x-9 = 3k \Rightarrow x = 3k + 9$

$x-9 = 4k \Rightarrow x = 4k + 9$

$E_2 = \{(4k+9, 5-3k), k \in \mathbb{Z}\}$

Figure 10. Production binôme 1 pour le cas 3

Lorsqu'on regarde le raisonnement du second binôme (cf. Figure 11), le couple $(1, -1)$ donné dans l'énoncé est bien identifié comme une solution particulière. Mais sur la ligne suivante, ils utilisent encore le PGCD. Est-ce pour vérifier de nouveau l'existence d'une solution ? Dans la suite de leur résolution, le théorème de *Bézout* et le théorème de *Gauss* sont utilisés pour déterminer une solution générique. Bien qu'ils utilisent explicitement le symbole « \Rightarrow » (implication), le binôme ne vérifie pas l'ensemble solution trouvée. Il est possible aussi qu'ils n'interprètent peut être pas le symbole « \Rightarrow » comme une implication.

alors $(A/B) : 3x - 4y = 7$
 le point de coordonnées $(1, -1)$ est une solution particulière de cette droite.
 $3 \wedge (-4) = 12$ et $1/7$
 $\text{On a : } \begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ -3(1) - 4(-1) = c \end{cases} \Rightarrow 3(x-1) - 4(y+1) = c$
 $\Rightarrow 3(x-2) = 4(y+1)$
 or $3 \wedge 4 = 12$ alors $3/y+1$ et $4/x-2$
 alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que
 $\begin{cases} x = 1 + 4k \\ y = -1 + 3k \end{cases}$
 $S = \{ (1 + 4k, -1 + 3k) ; k \in \mathbb{Z} \}$

Figure 11. Copie d'un binôme pour le cas 3

Un autre binôme utilise la méthode d'exploration (S2). Mais leur stratégie est basée la notion de *congruence* (cf. Figure 12). Il aboutit à l'ensemble générique attendu. Par contre, des questions se posent sur la démarche. Les propriétés de *congruence* sont appliquées à l'équation $4y - 3x = 7$ sans au préalable définir l'ensemble d'appartenance de x et y . Est-ce qu'ils ont pris implicitement x et y comme des entiers ? Est-ce une omission ? Ou est-ce une confusion autour du concept de congruence ?

Cas 3:

$$\text{On a: } y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4} \Leftrightarrow 4y = 3x - 7$$

$$\Leftrightarrow 4y = 3x - 6 - 1$$

$$= 3(x-2) - 1$$

$$4y = 3(x-2) - 1 \Leftrightarrow 4y \equiv -1(5)$$

$$\equiv 8(3) \Leftrightarrow y \equiv 2(3)$$

$$\Leftrightarrow y = 3k + 2$$

$$4y = 3x - 7 \Leftrightarrow 3x = 4y + 7$$

$$= 4(3k+2) + 7$$

$$= 12k + 8 + 7$$

$$= 12k + 15$$

$$\Leftrightarrow x = 4k + 5$$

$$(x, y) = (4k+5; 3k+2); k \in \mathbb{Z}.$$

Figure 12. Production d'un binôme sur le cas 3

Les étudiants effectuent ce qui nous semble être une simplification par 4, pour passer de $4y \equiv 8(3)$ à $y \equiv 2(3)$. S'ils ont appliqué une propriété de congruence entre les deux étapes, c'est celle-ci : « si a est premier avec n et si $ab \equiv ac(n)$, alors $b \equiv c(n)$ avec a, b, c et n des entiers, a non nul ». C'est donc une *implication* qui est en jeu dans leur démarche et non un équivalence (comme c'est écrit sur la copie). Les étudiants ne se rendent pas compte de leur erreur puisqu'ils ne vérifient pas si l'ensemble des solutions générique vérifie bien l'équation de départ.

En conclusion pour la classe de Master 2, la mobilisation de notions arithmétiques dans la résolution a été beaucoup plus « rapide » (sauf pour un binôme). Cela pourrait s'expliquer, soit par le fait que la classe est revenue sur l'arithmétique (peu de temps avant l'expérimentation), soit à l'organisation du travail en binôme. Toutefois, les argumentations et l'utilisation des propriétés montrent des confusions (ou un manque de rigueur) dans les raisonnements mathématiques. On peut noter ici aussi que la registre graphique n'est exploitée lors de la résolution que pour la représentation des droites.

VI.6 - CONCLUSION

L'analyse mathématique montre que le problème a du potentiel pour travailler en même temps des notions de l'arithmétique (diviseur, multiple, PGCD, théorème de Bézout, théorème de Gauss, les congruences) et de la géométrie repérée (point, droite, représentation graphique, équation d'une droite), tout en utilisant les registres graphique, fonctionnel, algébrique et arithmétique. De plus, les méthodes de résolution arithmétique ou algébrique mettent en jeu les savoirs transversaux (implication, condition nécessaire, condition suffisante).

L'instanciation des variables didactiques (nature de la droite, ensemble de référence des coordonnées, nombre de points donné) a été choisie pour inciter les étudiants à mobiliser les registres arithmétique et graphique. L'expérimentation a montré que notre choix de points donnés a incité de représenter graphiquement des droites. Cependant, ce registre est abandonné pour la recherche de points entiers, même lorsqu'il permet de générer un sous ensemble de solutions à partir d'un point entier donné et que la pente permet de déterminer un second.

L'expérimentation montre qu'il y a une forte prégnance du continu. De plus, l'enseignement de l'arithmétique dans le seul registre numérique constitue un obstacle pour passer de la géométrie à l'arithmétique. En effet, les notions arithmétiques apparues sont *multiple*, *diviseur*, associées à l'écriture fonctionnelle de la droite ($y=ax+b$, a, b des réels non nuls). Cette écriture a été utilisée pour résoudre partiellement le problème. Les étudiants décrivent l'ensemble des solutions réelles et « ajoutent » la condition d'intégrité en pensant avoir résolu le problème. Il faut quand même noter que cette description de l'ensemble des solutions réelles a permis de travailler les points de vue *condition nécessaire*, *condition suffisante*. Quant à l'écriture algébrique $ax+by+c=0$ (avec a, b, c des entiers non nuls), plus proche de l'énoncé du théorème de Bézout, les étudiants n'ont pas fait de lien.

L'expérimentation montre aussi que la mise en œuvre de la situation ne permet pas les interactions de registres continu/discret et arithmétique / géométrique. Cependant, il permet de travailler les points de vue : graphique, fonctionnel, et des savoirs transversaux (implication, condition nécessaire, condition suffisante).

Afin de contrer la résistance du passage au discret, il nous semble nécessaire de proposer une version plus « ouverte » de cette situation sur le modèle SiRC. En particulier, en laissant en variable de recherche la nature de la droite (aucun point entier, un seul point entier, une infinité dénombrable de points entiers).

VII - AIRE ET POINTS ENTIERS D'UN POLYGONE

VII.1 - PROBLÈME GÉNÉRAL

Le problème concerne le calcul de l'aire d'un polygone dont les sommets sont sur une grille carrée régulière, donc des points à coordonnées entières. Nous parlerons de « polygones à sommets entiers ».

Problème. Déterminer une méthode « simple » pour déterminer l'aire d'un polygone quelconque à sommets entiers.

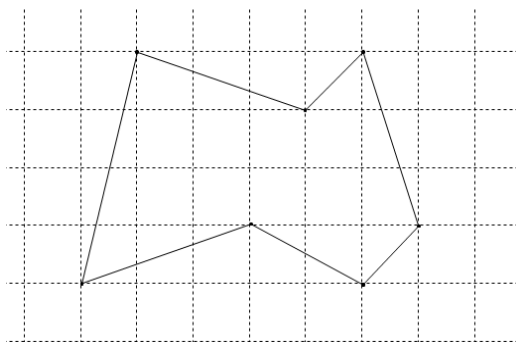


Figure 1. Exemple de polygone à sommets entiers

Afin de mieux fixer les idées, précisons un peu des termes utilisés dans la suite.

Quelques définitions

- **Définition 1.** Un polygone est une figure géométrique du plan délimitée par une ligne polygonale fermée qui ne se coupe pas. Cette définition exclut donc de notre étude les polygones dits « croisés » (voir Figure 2a).

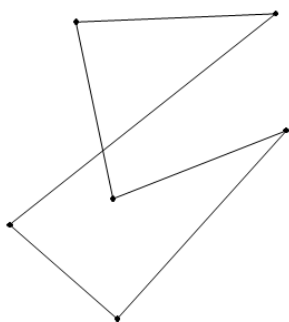


Figure 2a. Exemple de polygone croisé

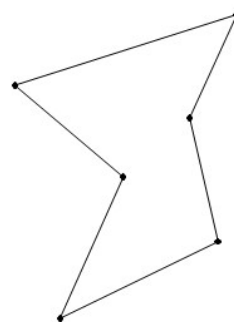


Figure 2b. Exemple de polygone non croisé

- **Définition 2.** L'intérieur d'un polygone est l'ensemble des points situés dans l'ensemble ouvert défini par la ligne polygonale fermée.

-
- **Définition 3.** Un segment qui relie deux sommets consécutifs du polygone est un côté ou bord.
 - **Définition 4.** Un segment qui relie deux sommets non consécutifs du polygone est appelé diagonale du polygone.
 - **Définition 5.** La triangulation d'un polygone est un découpage du polygone en régions triangulaires.

VII.2 - ÉTUDE MATHÉMATIQUE

Le polygone de la figure précédente (Figure 1) illustre que le calcul de son aire ne sera pas « facile » même si le théorème de Pythagore suffit pour calculer de manière exacte les longueurs des côtés. On peut se demander ce qu'apporte de plus la propriété que tous les sommets du polygone sont entiers, et explorer la question sur des polygones habituels (rectangles, triangles, trapèze, etc), dans des orientations diverses sur la grille, et pour lesquels on connaît les formules de calcul d'aire. Pour un polygone quelconque, on peut se ramener à des calculs sur des rectangles ou des triangles, en particulier en construisant une triangulation du polygone, c'est-à-dire un découpage du polygone en régions triangulaires. Les sommets de ces triangles ne sont pas *a priori* seulement les sommets du polygone et, donc, ne sont pas nécessairement tous « entiers ».

2.1 - Application des méthodes du registre du continu

Dans une activité de recherche, il est naturel de s'appuyer sur ce que l'on connaît. L'aire d'un polygone est très souvent calculée, dans le registre de la géométrie classique, en calculant les longueurs des côtés et les aires de tous les polygones d'un découpage approprié, essentiellement une triangulation. Le théorème de Bolyai (1832) établit la conservation de l'aire quelle que soit le découpage du polygone et la formule de Héron, donne l'aire d'un triangle en fonction des longueurs des cotés.

Théorème de Bolyai. Deux polygones sont décomposable par dissection polygonale, si et seulement si ils ont la même aire.

Formule de Héron. Soit s le demi-périmètre d'un triangle dont les côtés ont pour mesures a , b et c . Alors l'aire A du triangle est telle que :

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

a) Utilisation d'une triangulation dont les sommets des triangles ne sont pas tous sur la grille

Considérons les polygones à sommets entiers P et Q (voir Figure 3a. et Figure 3b.), sur lesquels on veut effectuer des triangulations. Alors, ne prendre que de points entiers intérieurs de P est possible alors que pour Q cela n'est pas possible.

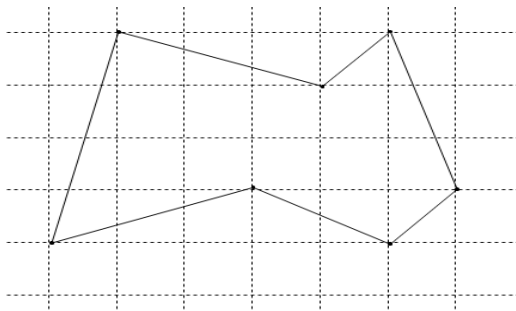


Figure 3a. Polygone P avec des points entiers intérieurs

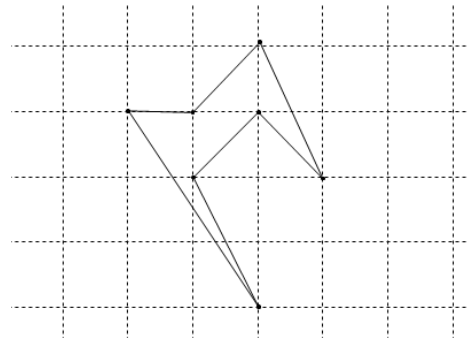


Figure 3b. Polygone Q sans points entiers intérieur

Dans le cas de figure d'une triangulation de Q comme sur la Figure 3c.

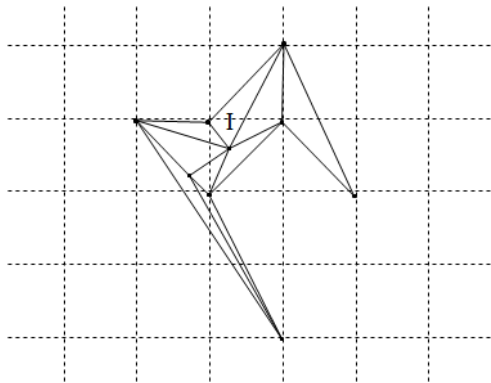


Figure 3c. Exemple de triangulation à partir de points intérieur non entiers

Le sommet I par exemple, commun à six triangles n'est pas entier. Le calcul des aires des triangles ayant I pour sommet se révèle difficile, car il faut d'abord déterminer les mesures des longueurs des segments d'extrémité I .

b) Utilisation d'une triangulation dont tous les sommets sont sur la grille

Si tous les sommets sont sur la grille, il est possible de déterminer la valeur exacte des longueurs des côtés des triangles (en utilisant le théorème de Pythagore) puis les aires (par la formule de Héron).

Dans l'exemple du polygone P , choisissons une triangulation à partir d'un point I sur la grille et intérieur à P (voir Figure 4a).

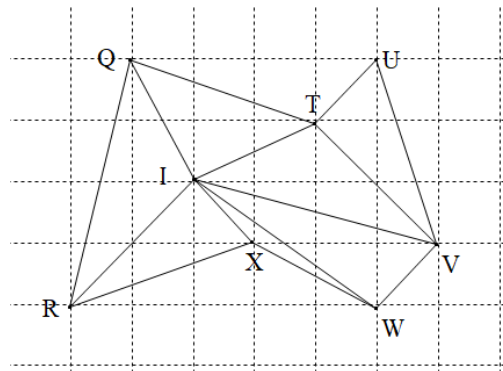


Figure 4a. Exemple d'une triangulation à partir de points entiers intérieurs

On peut calculer les longueurs des côtés de tous les triangles, puis leurs aires, et enfin les additionner. Mais cette méthode, de type « algorithmique », donne une formule non calculée. Et selon le type de triangulation ou la forme du polygone, les calculs des aires des triangles peuvent être laborieux.

Une méthode utilisant une triangulation restreinte aux sommets du polygone initial (voir Figure 4b), même si elle ne présente pas les mêmes défauts que les précédentes, reste aussi peu efficace.

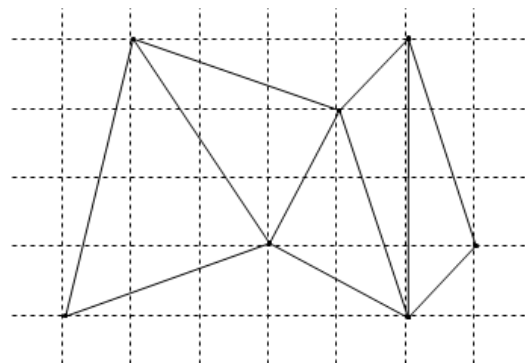


Figure 4b. Triangulation restreinte aux sommets du polygone

c) Justification de la triangulation

L'existence d'une triangulation dont tous les sommets des triangles sont ceux du polygone est justifiée par le théorème de la « diagonale propre ».

Théorème (diagonale propre). Tout polygone admet au moins une « diagonale propre », c'est-à-dire qu'il existe deux sommets non consécutifs A et B tel que $]AB[$ soit entièrement intérieur au polygone.

Preuve du théorème. Considérons un polygone P (voir Figure 5).

Prenons trois sommets consécutifs C, B, A du polygone P tel que l'angle \widehat{CBA} soit saillant.

Si aucun sommet du polygone P ne se trouve à l'intérieur du triangle ACB , alors $]AC[$ est une diagonale entièrement intérieure au polygone P .

Si on trouve des sommets du polygone P à l'intérieur du triangle ACB , on choisi parmi eux, celui par lequel passe la parallèle à (AC) la plus proche de B (sur notre figure c'est le point J). Si cette parallèle coupe $[AB]$ en H et $[BC]$ en I , alors le triangle BHI est intérieur au polygone P . On en déduit que $]BJ[$ est une diagonale intérieure à P . \square

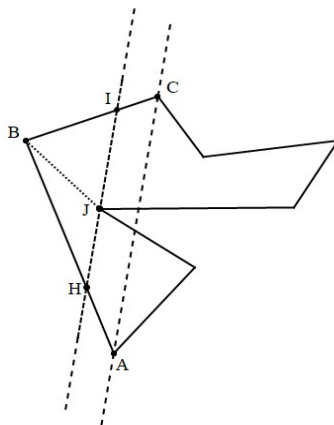


Figure 5. Exemple de recherche d'une diagonale entièrement intérieure à un polygone P

Preuve de l'existence d'une triangulation pour tout polygone.

Soit P un polygone à n côtés, où n est un entier ≥ 3 .

Si $n=3$ alors P est un triangle (donc une triangulation).

Sinon il admet une diagonale d qui le partage en deux polygones Q et R ayant un nombre plus petit de côté.

Si Q et R admettent une triangulation alors P admet la triangulation obtenue en rajoutant la diagonale d . \square

L'existence d'une triangulation pour tout polygone étant justifiée, on peut montrer aussi que le nombre de triangle d'une triangulation d'un polygone à n sommets est invariant et égale à $n-2$.

Il est important de noter que lorsqu'on choisit de faire une triangulation du polygone avec les sommets et des points intérieurs, on peut tomber sur des situations relativement difficiles à justifier pour tout polygone. Mais en fixant des conditions pour le choix des points intérieurs, on trouve des situations assez riches mathématiquement qui sont étudiées en géométrie algorithmique.

2.2 - Recherche d'autres méthodes de calcul

On peut chercher une approximation de l'aire d'un polygone P en l'encadrant entre deux polygones particuliers P_1 et P_2 composés d'une réunion de carrés dont les aires sont calculables très facilement (voir Figure 6a). Les polygones P_1 et P_2 sont uniquement composés de carrés unités, P_1 est entièrement situé à l'intérieur du polygone P , et P est situé à l'intérieur de P_2 . Différents choix sont possibles, la valeur de l'approximation se mesure par la différence des aires de P_2 et P_1 .

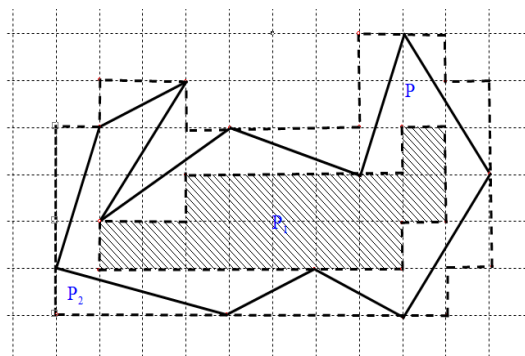


Figure 6a. Exemple de recherche d'un encadrement du polygone

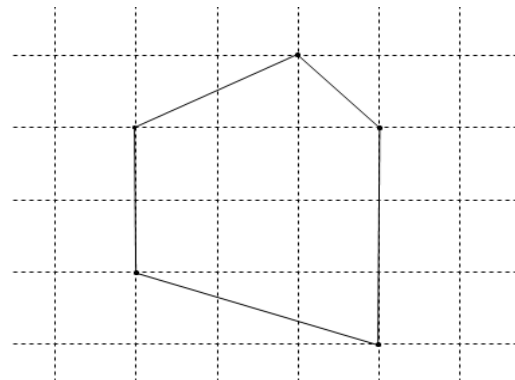


Figure 6b. Exemple de Polygone dont l'approximation est meilleure

Désignons par A l'aire du polygone.

Pour la Figure 6a, on a : $A(P1)=14$ et $A(P2)=46$, donc $14 < A(P) < 46$.

De la même manière sur le polygone de la Figure 6b, on a : $6 < A(P) < 12$

La valeur approchée de l'aire du polygone P par celles de $P1$ et $P2$ peut être alors très mauvaise, et elle dépend de la forme du polygone P considéré.

Cette technique d'approximation de l'aire de P n'est donc pas satisfaisante dans le cas général.

Une meilleure approximation peut être obtenue avec des polygones internes et externes composés de carrés et demi-carrés (triangles rectangles). Par exemple sur la Figure 6c, les demi-carrés intérieurs à P , ajoutés à l'aire de $P1$ permettent d'augmenter l'aire de $P1$, donc de réduire l'amplitude de l'intervalle d'approximation.

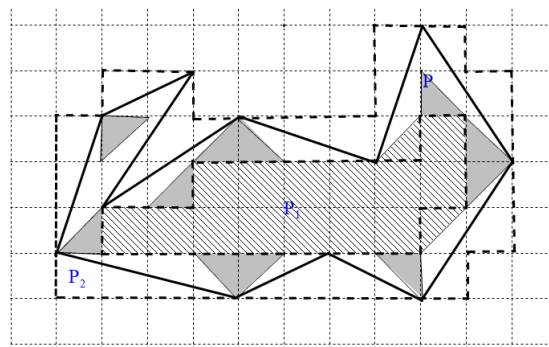


Figure 6c. Estimation de l'aire avec des carrés unités et demi-carrés

Plus généralement, les triangles permettent de mieux approcher l'aire d'un polygone quelconque (tout polygone étant triangulable) qu'avec les seuls carrés unités, et les calculs restent possibles.

Nous allons maintenant nous placer dans le registre du discret, c'est-à-dire nous intéresser en priorité aux points de la grille carrée, en utilisant explicitement la propriété que « tous les sommets du polygone sont entiers ».

2.3 - Utilisation des points de la grille

À tout polygone P considéré dans le plan discret, on peut associer trois types de points : extérieur, intérieur, ou sur la frontière (bord) du polygone. On peut supposer que les points qui vont intervenir dans la valeur de l'aire du polygone P sont ceux situés à l'intérieur et ceux du bord (il y a une infinité de points extérieurs à P). Si on ne prend en compte que les points intérieurs, on retrouve les problèmes d'estimation de la technique par approximation. En effet, on peut associer chaque carrée unité intérieure à P , un point de la grille. Par exemple, le sommet en haut à gauche du carré (voir Figure 7a) ou le point centre du carré (Figure 7b).

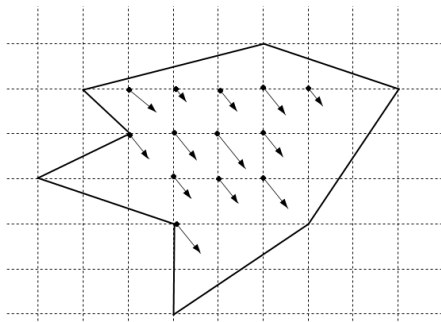


Figure 7a. Carré unité associé à son sommet en haut à gauche

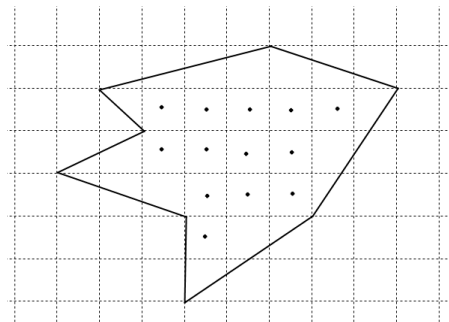


Figure 7b. Carré unité associé à son point centre

Une recherche empirique sur des formes de polygones « simples », en fixant le nombre d'un des types de points et en faisant varier l'autre, peut nous aider à préciser le rôle de chacun d'eux dans le calcul de l'aire de P .

Examinons d'abord des polygones à côtés parallèles aux lignes de la grille. Soit b et i le nombre des points du bord et intérieur associés à ces polygones.

– Pour un carré d'une unité d'aire 1, $i=0$, $b=4$.

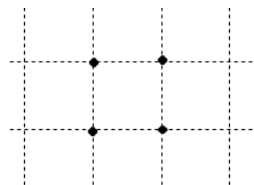


Figure 8a. Cas du carré unité

– Pour des rectangles de dimensions $1 \times n$: quand on passe de n à $n+1$, l'aire augmente de 1, b augmente de 2, i ne change pas.

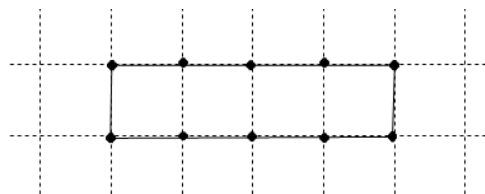


Figure 8b. Cas du rectangle R de dimension 1×4

b : nombre de point sur le bord	2	4	6	8	10	...
$A(R)$: aire du rectangle R	0	1	2	3	4	...

La relation identifiée entre l'aire et les points du bord est : $A(R) = \frac{b}{2} - 1$

– Pour des triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit sont sur les lignes de la grille et de longueurs 1 et n , quand on passe de n à $n+1$, l'aire augmente de 0,5, b augmente de 1, i ne change pas.

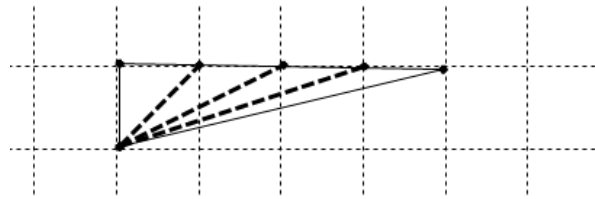


Figure 8c. Triangle rectangle 1×4

b : nombre de point sur le bord	3	4	5	6
$A(T)$ Triangle rectangle	1/2	1	1,5	2	

On trouve ici aussi que la relation entre l'aire et les points du bord est : $A(T) = \frac{b}{2} - 1$

Pour un polygone quelconque, un découpage en formes géométriques simples est nécessaire. Le triangle semble être la forme de base. Nous allons donc nous intéresser à différents triangles selon les valeurs de i et b .

a) Recherche d'une formule de l'aire en fonction de i et b

Considérons les triangles T_1 , T_2 , T_3 (voir Figure 9a).

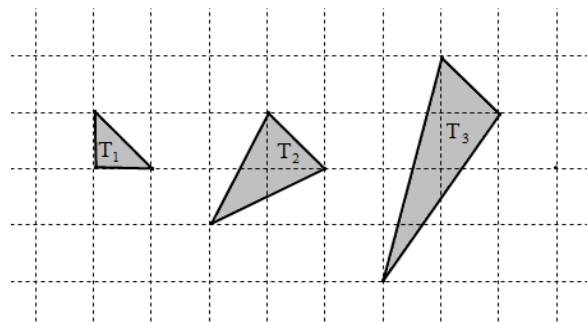


Figure 9a. Exemples de triangles ayant exactement 3 points de la grille sur les bords

Déterminons les aires de chacun de ces triangles. On pourra soit, appliquer la formule classique $base \times hauteur / 2$ ou inscrire le triangle dans un rectangle (voir Figure 9b)

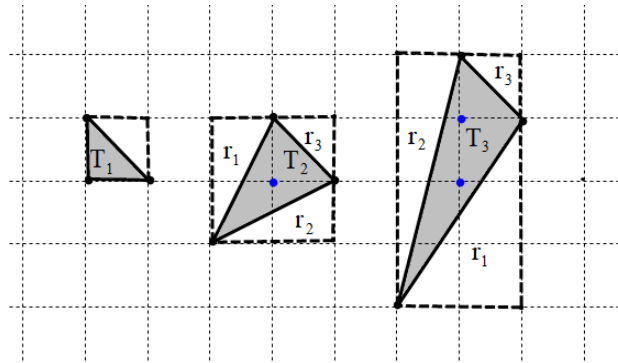


Figure 9b. Exemple de triangles ayant exactement 3 points sur les bords

- Triangle T_1 . Il n'a que 3 points de la grille sur les bords (ses sommets) et aucun point de la grille à l'intérieur. Son aire vaut $A_{T_1} = \frac{1}{2}$.
- Triangle T_2 . Il a exactement 3 points de la grille sur les bords (ses sommets) et 1 point à l'intérieur. On a : $A_{T_2} = \frac{3}{2}$
- Triangle T_3 . Il a exactement 3 points de la grille sur les bords (ses sommets) et 2 points à l'intérieur. On obtient : $A_{T_3} = \frac{5}{2}$.

A partir de ces résultats, nous pouvons déduire l'observation suivante :

Pour des triangles construits sur une grille carrée régulière, lorsqu'on fixe le nombre de points sur les bords et qu'on fait varier celui de l'intérieur de 1 point, on constate que l'aire du triangle varie de 1 unité d'aire.

Considérons de nouveau 3 triangles T_1 , T_2 et T_3 (voir Figure 10).

Ce sont des triangles ayant le même nombre de points intérieurs mais des nombres de points sur les bords différents.

Comme précédemment, calculons les aires de chacun de ces triangles en utilisant la formule classique $base \times hauteur / 2$.

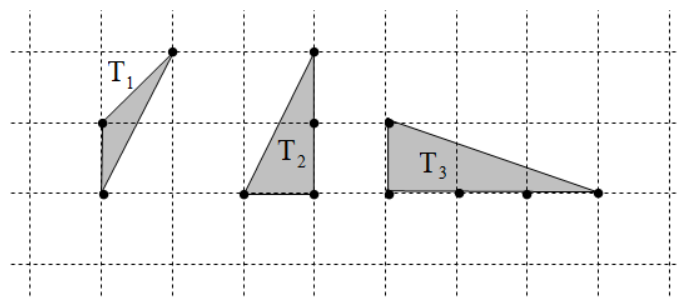


Figure 10. Exemple de triangles n'ayant aucun point à l'intérieur

– Triangle T_1 . Il n'a pas de point de la grille à l'intérieur. Il a 3 points sur les bords (ses sommets). Son aire vaut $A_{T_1} = \frac{1}{2}$.

– Triangle T_2 . Il n'a pas de point intérieur comme le triangle T_1 . Mais il admet 4 points de la grille sur les bords. Son aire vaut $A_{T_2} = 1$.

– Triangle T_3 . Il n'a pas non plus de point de la grille à l'intérieur. Il admet 5 points de la grille sur ses bords. Son aire vaut $A_{T_3} = \frac{5}{2}$.

Ces résultats nous permettent d'observer que :

L'aire du triangle augmente de $\frac{1}{2}$ lorsqu'on augmente de 1 le nombre de points sur ses bords.

Au vu de nos résultats sur ces essais, nous pouvons formuler des conjectures sur les liens entre l'aire d'un triangle et les points de la grille :

– **Conjecture 1.** Pour un triangle construit sur une grille carrée régulière, chaque point intérieur vaut pour 1 dans l'aire de ce triangle.

– **Conjecture 2.** Pour un triangle construit sur une grille carrée régulière, chaque point sur le bord (autre que ses sommets) vaut $\frac{1}{2}$ dans l'aire de ce triangle.

– **Conjecture 3.** Pour un triangle ayant exactement 3 points sur le bord (ses sommets) et aucun point à l'intérieur, son aire vaut $\frac{1}{2}$.

En exploitant ces conjectures, on peut établir une formule générique de l'aire d'un triangle T construit sur une grille carrée régulière : $A_T = I_T + (B_T - 2) \frac{1}{2} = I_T + \frac{B_T}{2} - 1$ où I_T = nombre de points intérieurs et B_T = nombre de points sur le bord .

Nous venons donc d'établir à partir de cas particuliers de triangles, une formule (c'est la formule de Pick) qui lie l'aire d'un triangle et les points de la grille. On doit s'interroger à présent si la formule obtenue est vraie pour tout triangle construit sur une grille carrée régulière et par la suite pour tout polygone.

b) Vérification de la formule candidate ($A=i+b/2-1$)

– Vérification de l'additivité de la formule

Soit P un polygone scindé par une ligne polygonale (à sommets entiers) en P_1 et P_2 . D'après de théorème de Bolyai, $A(P) = A(P_1) + A(P_2)$.

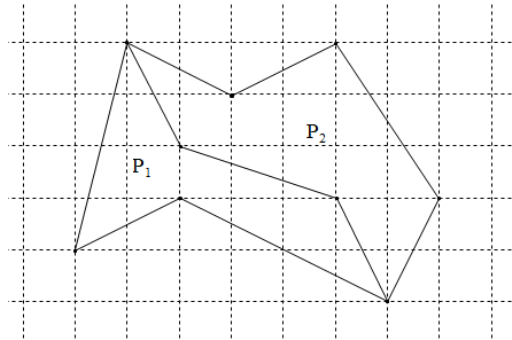


Figure 11. Illustration du découpage d'un polygone en deux polygones adjacents

Désignons par i le nombre de points intérieurs, b le nombre de points sur les bords.

On a :

$i(P) = i(P1) + i(P2) + m - 2$ où m = le nombre de points entiers de la polygone qui sépare $P1$ et $P2$.

$$b(P) = b(P1) + b(P2) - 2m + 2$$

On obtient :

$$\begin{aligned} i(P) + \frac{b(P)}{2} - 1 &= i(P1) + i(P2) + m - 2 + \frac{b(P1) + b(P2) - 2m + 2}{2} - 1 \\ &= i(P1) + \frac{b(P1)}{2} + i(P2) + \frac{b(P2)}{2} - 2 \end{aligned}$$

Par identification, on a: $A(P) = A(P1) + A(P2)$

Donc l'additivité de la formule est vérifiée pour les polygones adjacents.

On remarquera que pour les polygones entiers non adjacents par exemple, (voir Figure 12), la démonstration n'est plus valable et le principe de l'additivité est faux.

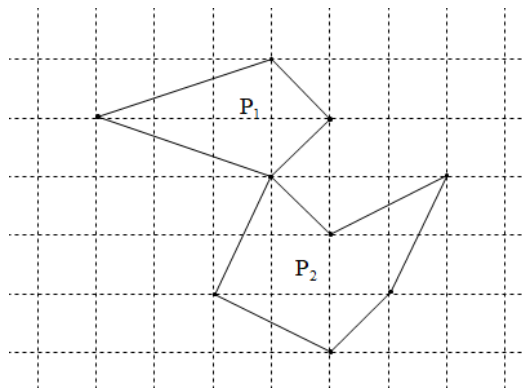


Figure 12. Exemple de polygones non adjacents

Ce type de figure est d'ailleurs exclu comme étant un polygone dans notre étude (voir Définition 1).

– **Vérification pour un rectangle aux côtés parallèles aux lignes de la grille**

Soit R le rectangle $ABCD$, $AB = m$ et $BC = n$.

En géométrie classique, l'aire A_R du rectangle R vaut : $A_R = m \times n$.

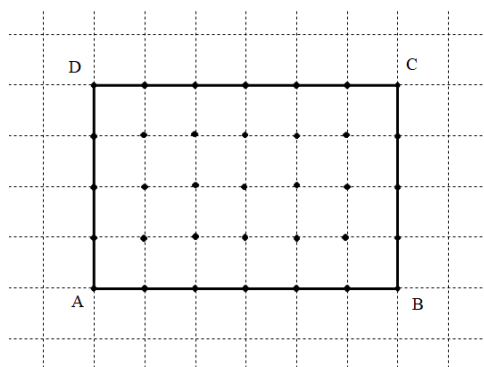


Figure 13. Exemple de rectangle de côtés parallèles aux axes

Le rectangle R étant sur la grille carrée régulière, les nombres de points intérieurs et sur les bords valent respectivement : $I_R = (m-1)(n-1)$, $B_R = 2(m+n)$.

On obtient alors :

$$I_R + \frac{B_R}{2} = (m-1)(n-1) + (m+n) = m \times n + 1 = A_R + 1$$

$$\text{Donc } A_R = I_R + \frac{B_R}{2} - 1.$$

La formule est donc vérifiée pour ce type de rectangle.

– **Vérification pour un triangle rectangle ayant deux côtés parallèles aux lignes de la grille**

Soit $T = ABC$ un tel triangle. On le complète par un point D en un rectangle $R = ACBD$ (voir Figure 14).

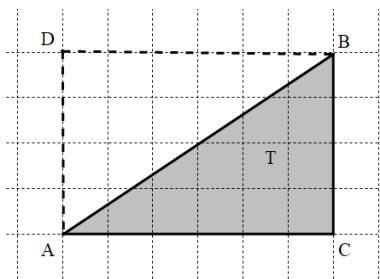


Figure 14. Exemple de triangle ayant deux côtés parallèles aux axes

Désignons par h le nombre de points sur l'hypoténuse (c'est-à-dire $[AB]$) du triangle rectangle.

On peut dire que le nombre de points sur les bords et celui de l'intérieur valent :

$$B_R = 2(B_T - h) + 2 \text{ et } I_R = 2I_T + h - 2$$

Donc l'aire du rectangle R vaut :

$$A_R = I_R + \frac{B_R}{2} - 1 = (2I_T + h - 2) + \frac{2(B_T - h) + 2}{2} - 1 = 2I_T + h - 2 + B_T - h = 2I_T + B_T - 2$$

$$= 2 \left(I_T + \frac{B_T}{2} - 1 \right) = 2A_T$$

Donc $A_T = I_T + \frac{B_T}{2} - 1$ et la formule est vérifiée pour ce type de triangle rectangle.

– Vérification pour un triangle ayant un côté parallèle aux axes

Considérons le triangle $T_1 = ABC$ (Figure 15). On peut inscrire T_1 dans un triangle rectangle $T = ADC$, dont deux côtés sont parallèles aux axes.

Désignons par T_2 le triangle rectangle BDC et par n le nombre de points de la grille sur le segment $[BC]$.

On a : $B_T = B_{T_1} + B_{T_2} - 2n + 2$

Dans cette relation, nous soustrayons $(2n)$ car le nombre de points du segment $[BC]$ est compté 2 fois (c'est-à-dire dans B_{T_1} et dans B_{T_2}).

Le rajout des « 2 » correspond aux 2 sommets du segment $[BC]$. Ces sommets sont bien des points du bord du triangle T mais qui ont été soustrait avec les $2n$.

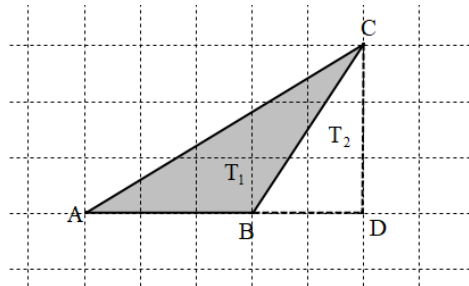


Figure 15. Exemple de triangle ayant un seul côté parallèle aux axes

Concernant les points intérieurs, on a : $I_T = I_{T_1} + I_{T_2} + n - 2$.

On peut dire :

$$I_T + \frac{B_T}{2} - 1 = (I_{T_1} + I_{T_2} + n - 2) + \frac{B_{T_1} + B_{T_2} - 2n + 2}{2} - 1$$

$$= \left(I_{T_1} + \frac{B_{T_1}}{2} - 1 \right) + \left(I_{T_2} + \frac{B_{T_2}}{2} - 1 \right)$$

Selon le résultat précédent, la formule est vérifiée pour les triangles rectangles ayant deux cotés parallèles aux axes. Elle est donc vérifiée pour T et T_2 .

On obtient alors : $A_T = \left(I_{T_1} + \frac{B_{T_1}}{2} - 1 \right) + A_{T_2}$.

Étant donné que l'aire du triangle T est égale à la somme de l'aire des régions T_1 et T_2 (théorème de Bolyai), on déduit que l'aire du triangle T_2 vaut : $I_{T_1} + \frac{B_{T_1}}{2} - 1$.

La formule est donc vérifiée pour les triangles ayant un côté parallèle aux axes.

– Vérification pour un triangle quelconque

Soit $T=ABC$ un triangle de ce type. La stratégie que nous adoptons est de l'inscrire dans un rectangle. On peut avoir la configurations suivante (voir Figure 16a) :

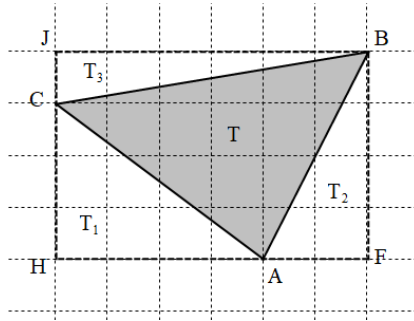


Figure 16a. Exemple de triangle quelconque

Le triangle $T=ABC$ sur la figure 16a est inscrit dans le rectangle $R=HFBJ$. On obtient 3 autres triangles intérieurs à R que nous désignons par T_1 , T_2 , T_3 .

Soit I et B , respectivement, le nombre de points intérieurs et du bords. Les indices associés aux lettres I et B renvoient à la figure désignée par ce codage.

En considérant les points sur les bords de notre dessin, on a la relation :

$$B_R + B_T = B_{T_1} + B_{T_2} + B_{T_3} \text{ cela équivaut à dire que } B_R = B_{T_1} + B_{T_2} + B_{T_3} - B_T.$$

Lorsqu'on s'intéresse aux points intérieurs, on peut dire :

$I_R = I_{T_1} + I_{T_2} + I_{T_3} + I_T + B_T - 3$. Dans cette égalité, les « 3 » correspondent aux sommets de T . Il s'agit des points sur le bord du triangle T et sur le bord rectangle R . Ils ne font donc pas parti des points intérieurs de R .

À partir de ces deux relations, on peut écrire l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} I_R + \frac{B_R}{2} - 1 &= (I_{T_1} + I_{T_2} + I_{T_3} + I_T + B_T - 3) + \frac{(B_{T_1} + B_{T_2} + B_{T_3} - B_T)}{2} - 1 \\ &= \left(I_{T_1} + \frac{B_{T_1}}{2} - 1 \right) + \left(I_{T_2} + \frac{B_{T_2}}{2} - 1 \right) + \left(I_{T_3} + \frac{B_{T_3}}{2} - 1 \right) + I_T + \frac{B_T}{2} - 1. \end{aligned} \quad (E1)$$

La formule de l'aire en fonction des points intérieurs et sur les bords est vérifiée pour le rectangle R , ainsi que pour les triangles T_1 , T_2 , T_3 . L'égalité (E1) est donc équivalente à :

$$A_R = A_{T_1} + A_{T_2} + A_{T_3} + \left(I_T + \frac{B_T}{2} - 1 \right) \quad (E1').$$

L'aire du rectangle R étant égale à la somme des aires de ses régions intérieures, nous pouvons donc déduire de l'égalité $(E1')$, que l'aire du triangle T vaut : $A_T = I_T + \frac{B_T}{2} - 1$.

En conclusion, la formule est vérifiée pour le triangle $T = ABC$.

On peut aussi avoir une seconde configuration pour le triangle quelconque (voir Figure 16b).

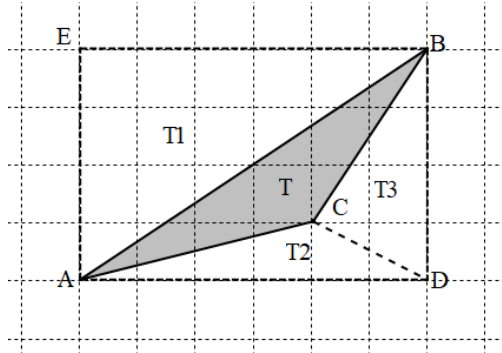


Figure 16b. Autre exemple de triangle quelconque

Désignons par n le nombre de points de la grille sur le segment $[CD]$ et $R = AD BE$.

On peut dire que : $B_R + B_T = B_{T1} + B_{T2} + B_{T3} - 2n$. La soustraction des « $2n$ » correspond au nombre de points n du segment $[CD]$ qui ont été compté deux fois.

Pour les points intérieurs, on a : $I_R = I_{T1} + I_{T2} + I_{T3} + I_T + (B_T - 2) + (n - 1)$.

Les $(B_T - 2)$ correspondent au nombre de points des bords du triangle T auquel on enlève les 2 sommets (non intérieurs au rectangle R).

Les $(n - 1)$ correspondent au nombre de points sur le segment $[CD]$, auquel on enlève le point de l'extrémité D (non intérieur au rectangle R).

On obtient :

$$I_R + \frac{B_R}{2} - 1 = [I_{T1} + I_{T2} + I_{T3} + I_T + (B_T - 2) + (n - 1)] + \frac{B_{T1} + B_{T2} + B_{T3} - B_T - 2n}{2} - 1$$

$$= \left(I_{T1} + \frac{B_{T1}}{2} - 1 \right) + \left(I_{T2} + \frac{B_{T2}}{2} - 1 \right) + \left(I_{T3} + \frac{B_{T3}}{2} - 1 \right) + \left(I_T + \frac{B_T}{2} - 1 \right)$$

La formule est vérifiée pour le rectangle R , les triangles rectangles ayant deux côtés parallèles aux axes $T1$ et pour les triangles ayant un côté parallèles aux axes $T2, T3$.

On a : $A_R = A_{T1} + A_{T2} + A_{T3} + \left(I_T + \frac{B_T}{2} - 1 \right)$. D'où l'aire du triangle T vaut $A_T = I_T + \frac{B_T}{2} - 1$.

La formule est donc vérifiée pour les triangles quelconques.

Conclusion

Tout triangle T , placé sur une grille carrée régulière vérifie la formule $A_T = I + \frac{B}{2} - 1$ où I = nombre de points intérieurs et B = nombre de points sur le bord.

On en déduit, tout triangle qui a exactement 3 points sur le bord (ses sommets) et aucun point intérieur a pour aire $\frac{1}{2}$.

c) Preuve de la formule candidate pour un polygone quelconque

Nous avons vérifié que la formule est vraie pour les triangles.

Il reste à prouver maintenant qu'elle est vraie pour tout polygone P à n cotés avec $n > 3$.

On sait que tout polygone P à n cotés ($n > 3$) est triangulable.

On peut avoir deux approches pour rechercher une preuve de la formule.

– Approche par récurrence (forte)

Considérons un polygone P à n sommets ($n > 3$) sur une grille carrée régulière.

D'après le théorème de la diagonale propre, P admet une diagonale intérieure. Cette diagonale nous permet d'obtenir une décomposition de P en deux polygones adjacents Q et R (ils ont au moins un côté en commun). Le nombre de côté de chacun de polygones est inférieur à n . (voir Figure 17)

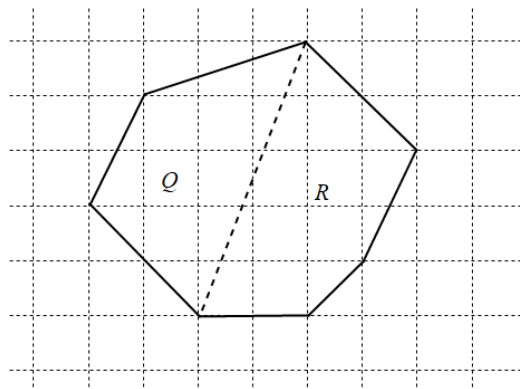


Figure 17. Exemple de polygone décomposé en deux polygones

Si la formule obtenue est vraie pour les polygones Q et R alors d'après le principe de l'additivité de la formule, elle est vraie aussi pour le polygone P .

La formule est donc démontrée pour tout polygone.

Il est important de noter ici que même si le polygone P n'est pas convexe, le théorème de la diagonale propre permet de se ramener à des polygones convexes.

– Approche par partition (induction ascendante)

Nous avons vérifié que la formule est vraie pour tout type de triangle. Nous avons aussi montré l'existence d'une triangulation pour tout polygone $n > 3$. On sait aussi qu'on obtient exactement $n - 2$ triangles (en triangulant par les sommets du polygone).

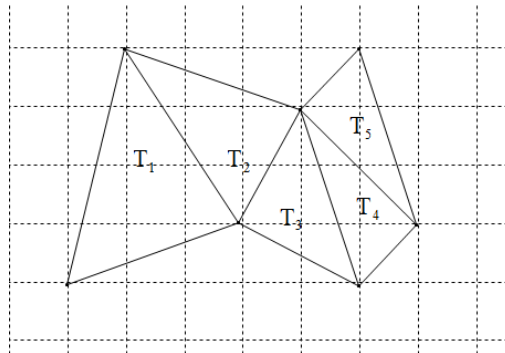


Figure. 17. Un exemple de triangulation de P par ses sommets

Considérons alors un polygone P sur une grille (figure 17). Il est triangulé des régions T_1, T_2, \dots, T_{n-2} .

Désignons par :

- i : le nombre de points intérieurs à P et b : le nombre de points sur les bords de P
- c_1 : le nombre de points sur les deux côtés du triangle T_1 qui coïncident avec 2 côtés de P .
- c_{n-2} : le nombre de points sur les deux cotés du triangle T_{n-2} qui coïncide avec 2 cotés de P .
- c_k : avec $2 \leq k \leq n-3$, le nombre de points sur le seul côté du triangle T_k qui coïncide avec un coté de P .
- d_k : avec $1 \leq k \leq n-3$, le nombre de points sur le côté de T_k intérieur à P qui ne coïncide pas avec un cote de T_{k-1} .
- i_k : le nombre de points intérieurs à T_k .

On a :

$$i = \sum_{k=1}^{k=n-2} i_k + \sum_{k=1}^{k=n-3} d_k \text{ et } b = c_1 + (c_2 - 1) + (c_3 - 1) + \dots + (c_{n-3} - 1) + (c_{n-2} - 2) = \sum_{k=1}^{k=n-2} c_k - n + 2$$

En désignant $A(P)$ l'aire de P et $A(k)$ l'aire du triangle T_k , on a :

$$A(P) = \sum_{k=1}^{k=n-2} A_k = A_1 + \sum_{k=2}^{k=n-3} A_k + A_{n-2}$$

On abouti à la formule de Pick pour le polygone P : $A(P) = i + \frac{b}{2} - 1$

Donc la formule est vraie pour tout polygone.

Ces deux preuves nous ont permis d'étudier les polygones partir des diagonales propres. Nous allons nous intéresser maintenant aux polygones sans diagonale : les triangles (en particulier les triangles sans point entier à l'intérieur).

2.4 - Étude du triangle sans points entiers intérieurs

Pour étudier ce type de triangle, on peut d'abord s'interroger sur sa construction sur une grille carrée régulière. Cette question nous semble légitime si on veut faire des essais sur différentes représentations possibles de ce type de triangle sur la grille.

Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, on considère un segment $[AB]$ sur une grille carrée régulière tel que : $A(0,0)$ et $B(a,b)$.

– Un point $M(x,y)$ appartient à $[AB]$ signifie qu'il existe un réel k tel que : $\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB}$ avec $0 \leq k \leq 1$. Autrement dit, $x=ka$ et $y=kb$ avec $0 \leq k \leq 1$.

Donc les points $M(x,y)$ de $[AB]$ sont caractérisés par : $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $ay = bx$.

– L'égalité $ay = bx$ nous permet de dire que x , y sont non nuls car a et b sont non nuls.

– Si a et b sont premiers entre eux :

a divise bx , donc a divise x d'après le théorème de Gauss. Sachant que $0 \leq x \leq a$, on en déduit que $x=a$.

De la même manière on trouve que $y=b$.

Donc les seuls points de la grille situés sur le segment $[AB]$ sont : $A(0,0)$ et $B(a,b)$.

– Si a et b ne sont pas premiers entre eux :

Soit $d = \text{PGCD}(a,b)$ avec $d \neq 1$.

D'après le théorème de Bézout, il existe a' et b' tel que : $a = da'$ et $b = db'$ avec $\text{PGCD}(a',b') = 1$.

Donc $ay = bx$ s'écrit $da'y = db'x$ c'est-à-dire $a'y = b'x$. D'après le résultat précédent, les points $A(0,0)$ et $D(a',b')$ sont les seuls points situés sur $[AD]$. Ce qui veut dire aussi que le segment $[AB]$ contient au moins un point de la grille : D .

Corollaire. Un triangle qui n'admet pas d'autres points entiers sur les bords que ses sommets est caractérisé par de sommets de coordonnées $(0,0)$ ou (a,b) avec a et b premier entre eux.

Les propriétés que nous venons de présenter permettent de construire des triangles sans autres points sur les cotés que ses sommets. Mais elles ne nous donne pas d'information sur l'existence de points de la grille à l'intérieur d'un triangle.

Évaluons maintenant l'aire dans le cas où le triangle n'admet pas de points de la grille à l'intérieur. Évaluer l'aire de ce type de triangle sur une grille peut se ramener à étudier quelques configurations.

a) Triangle ayant deux côtés parallèles aux lignes de la grille

On retrouve l'un des 4 types de constructions (voir Figure 1) par isométrie. Elles correspondent chacune à la moitié du carré unité. L'aire vaut donc $\frac{1}{2}$ dans chacun des cas.

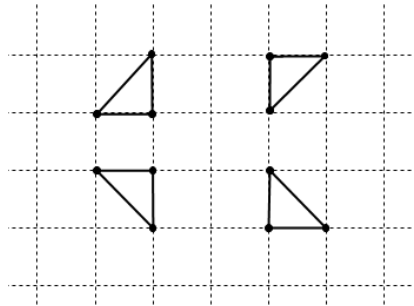


Figure 1. Exemples de triangles ayant deux côtés parallèles aux lignes de la grille

b) Triangle ayant un côté parallèle aux lignes de la grille

On se ramène toujours au cas d'un triangle dont la *base* mesure 1 et la *hauteur* 1.

L'aire vaut donc $\frac{1}{2}$ dans chacun des cas.

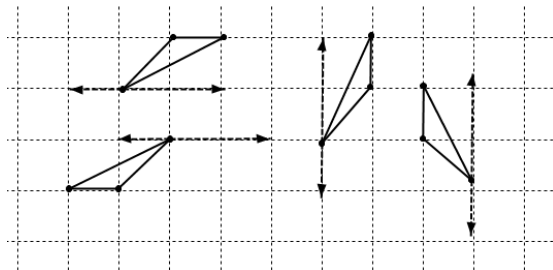


Figure 2. Exemple de triangles ayant un côté parallèle aux axes

c) Triangle aux côtés non parallèles aux lignes de la grilles

Pour ces cas de configurations, on retrouve des triangles qui peuvent être très aplatis (voir Figure 3a). La technique classique pour calculer l'aire devient assez difficile à mettre en œuvre. On ne peut déterminer de hauteur. On va donc utiliser soit la formule de Héron (en déterminant les longueurs des côtés), soit en inscrivant le triangle dans un rectangle (voir Figure 3b).

Soit ABC un triangle sans points intérieurs et sans points sur les côtés (sauf les sommets).

Inscrivons-le dans le triangle rectangle ADC d'hypoténuse $[AC]$ (le plus grand côté du triangle ABC).

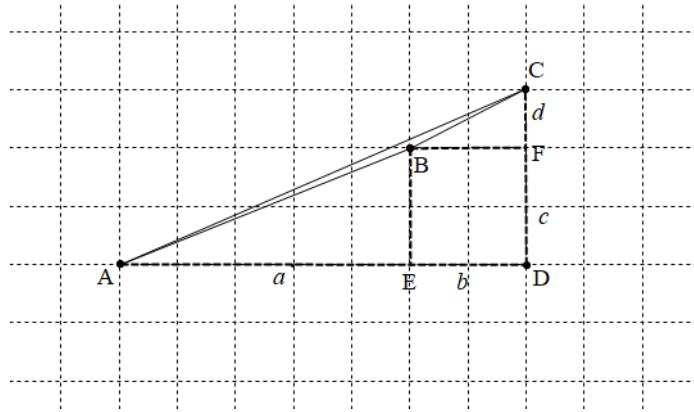


Figure 3.a Exemple de triangle aux côtés non parallèles aux axes

Le triangle ADC peut être décomposé en régions : AEB (triangle rectangle), BFC (triangle rectangle), $EDFB$ (rectangle aux côtés parallèles aux axes).

Soit $AE = a$, $EB = BF = b$, $DF = DE = c$, $CF = d$.

En utilisant les formules classiques de calcul d'aire, on a :

$$\begin{aligned} \text{Aire}(ABC) &= \text{Aire}(ADC) - [\text{Aire}(AEB) + \text{Aire}(BFC) + \text{Aire}(EDFB)] \\ &= \frac{(a+b)(c+d)}{2} - \frac{ac}{2} - \frac{bd}{2} - bc \\ &= \frac{ad-bc}{2} \end{aligned}$$

Que vaut alors $ad-bc$?

Nous allons utiliser les points de la grille comme base de notre stratégie.

Considérons un rectangle R construit sur une grille (voir figure 4) dont les côtés m et n sont parallèles aux lignes de la grille.

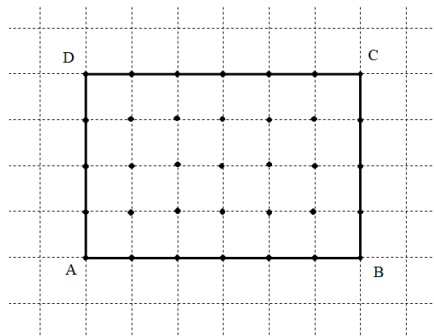


Figure 4. Exemple de rectangle aux côtés parallèles aux axes de la grille

Le nombre de points de la grille appartenant (bords et intérieur) à R vaut : $(m+1)(n+1)$.

Si R n'admet pas d'autres points sur ses diagonales que ses sommets, on peut dire que le nombre de points du triangle rectangle (de côtés m et n) vaut : $\frac{1}{2}(m+1)(n+1)+1$.

Nous allons appliquer ces deux résultats à notre figure afin de déterminer le nombre de points de la grille du triangle rectangle (dans lequel nous avons inscrit notre triangle ABC).

L'hypoténuse $[AC]$ du triangle ADC n'admet pas d'autre point de la grille que les points A et C . On a : $AD=a+b$ et $DC=c+d$

Nous pouvons donc calculer directement le nombre de points N du triangle ADC .

$$\text{Il vaut : } N_{ADC} = \frac{1}{2}(a+b+1)(c+d+1)+1 = \frac{1}{2}(ac+bc+ad+bd+a+b+c+d+3) \quad (1)$$

On peut calculer d'une autre manière le nombre de points du triangle rectangle ADC . Il s'agit d'utiliser la décomposition que nous avons faite sur la figure 3a.

Selon notre construction de départ (hypothèse), le triangle ABC n'a aucun point intérieur et il n'admet que ses sommets sur la grille.

Donc il n'existe pas de points entre A et B . Il en est de même pour B et C .

$$\text{On a : } N_{AEB} = \frac{1}{2}(a+1)(c+1)+1 = \frac{1}{2}(ac+a+c+3)$$

$$N_{BFC} = \frac{1}{2}(b+1)(d+1)+1 = \frac{1}{2}(bd+b+d+3)$$

$$N_{EDFB} = (b+1)(c+1) = bc+b+c+1$$

Avec ces résultats, on peut dire que pour le triangle ADC :

$$N_{ADC} = N_{AEB} + N_{BFC} + N_{EDFB} - (c+1) - (b+1).$$

Dans cette égalité, les soustractions renvoient aux points des côtés ($[EB]$ et $[BF]$) qui ont été comptés deux fois.

On obtient :

$$\begin{aligned} N_{ADC} &= \frac{1}{2}(ac+a+c+3) + \frac{1}{2}(bd+b+d+3) + (bc+b+c+1) - c - b - 2 \\ &= \frac{1}{2}(ac+2bc+bd+a+b+c+d+4) \end{aligned} \quad (2)$$

Les égalités (1) et (2) nous permettent de poser que :

$$\frac{1}{2}(ac+bc+ad+bd+a+b+c+d+3) = \frac{1}{2}(ac+2bc+bd+a+b+c+d+4)$$

$$ad - bc = 1$$

$$\text{D'où, l'aire du triangle } ABC \text{ vaut : } \text{Aire}(ABC) = \frac{ad - bc}{2} = \frac{1}{2}$$

Conclusion

Tout triangle sur une grille ayant exactement 3 points de la grille sur ses bords (ses sommets) et aucun point intérieur, a pour aire $\frac{1}{2}$.

2.5 - Cas des polygones réguliers

Dans (Grenier et Payan, 1998) la question de la constructibilité sur une grille carrée régulière des n -polygones réguliers est résolue pour tout $n \geq 3$.

Dans cette partie nous voulons préciser que la formule de Pick peut être utilisée pour résoudre cette question.

En effet, elle permet de déduire que pour tout polygone P à sommets entiers, l'aire de P est entière ou (entier+1/2). Cette information permet donc de savoir si un polygone quelconque peut être construit sur une grille carrée régulière dès qu'on connaît son aire.

En particulier si nous prenons l'exemple le triangle équilatéral (donc pour $n=3$). Son aire vaut $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$ où c désigne le côté. Ainsi tout triangle équilatéral a une aire irrationnelle. Par conséquent il est impossible de le construire sur une grille carrée régulière.

VII.3 - ÉTUDE DIDACTIQUE

L'étude mathématique a montré que les questions autour de l'objet « théorème de Pick » permettent de mettre en œuvre différents registres, ceux de la géométrie euclidienne, des mathématiques discrètes, de l'arithmétique et, dans une certaine mesure, celui de l'algorithmique. Ces registres et leurs interactions sont au centre de nos objectifs de recherche. Mais quelle transposition du problème et quel dispositif mettre en place pour que l'étude de l'objet en jeu (théorème de Pick) puisse être prise en charge en didactique par des élèves et être porteuse d'apprentissages ? En particulier, quel choix faire pour l'énoncé du problème, et comment favoriser le développement de stratégies dans les différents registres et la mise en œuvre des savoirs transversaux (expérimenter, construire des exemples, contre-exemples, conjecturer, résoudre des cas particuliers, et prouver).

Nos choix pour l'énoncé s'appuient à la fois sur les notions et savoirs repérés dans l'analyse mathématique et les hypothèses sur les connaissances des élèves. Pour la mise en œuvre des savoirs transversaux, la situation doit s'inscrire dans le cadre d'un contrat didactique de type recherche. Le modèle SiRC est tout-à-fait adapté pour cela. La dévolution de la situation se fera en fonction des conceptions et connaissances des élèves sur les notions mathématiques en jeu et les savoirs transversaux disponibles. Nous présumons que la formule de Pick n'est pas connue et que ce type de question n'est pas usuel, ceci devrait favoriser une recherche empirique.

Nous allons préciser ces éléments.

Énoncé du problème

On donne un polygone sur une grille carrée régulière. On veut trouver une méthode simple pour déterminer l'aire de ce polygone.

L'énoncé est compréhensible dès que l'on sait ce que sont un polygone et une aire. Le contexte de la grille carrée régulière donne un sens particulier à la question, et devrait induire la recherche d'une méthode autre que celles de la géométrie euclidienne. L'énoncé ne dit pas qu'il faut chercher une formule, ainsi, même si c'est une interprétation probable de la question, cet implicite permet de ne pas exclure d'autres stratégies (plus géométriques). La tâche « rechercher une méthode » n'est pas habituelle dans les pratiques de classe, les méthodes et techniques sont données, rarement construites par l'élève.

L'étude mathématique montre que les savoirs notionnels qui peuvent être convoqués dans cette situation sont nombreux et à des niveaux de connaissance différents :

- Polygones : définition et caractéristiques ;
- Formules usuelles de calcul d'aire (triangle, carré, rectangle, trapèze, etc.) ;
- Formule de Héron (pour le calcul de l'aire d'un triangle en fonction des trois côtés) ;
- Théorème de Pythagore ;
- Théorème de Bézout, Théorème de Gauss ;
- Théorème de Bolyai (découpage, triangulation) ;
- Théorème de la diagonale propre d'un polygone.

Des savoirs transversaux peuvent être aussi convoqués :

- Expérimenter, faire des essais, étudier un cas particulier,
- décomposer et restructurer une figure,
- faire une conjecture,
- utiliser des types ou outils de preuve : exhibition d'exemple (sur des questions d'existence), ou de contre-exemple, exhaustivité de cas, la récurrence.

Les méthodes de résolution

L'analyse mathématique nous fournit aussi des méthodes de résolution liées au problème, et les techniques de calcul associées. On peut les regrouper en fonction des registres auxquelles elles appartiennent.

– Méthodes relevant du continu

- Découpage (triangulation, inscription dans un rectangle) : $S_{\text{déc-t}}$ et $S_{\text{déc-r}}$.
- Estimation de l'aire à partir de calcul d'aire de figures usuelles : $S_{\text{es-cal}}$

– Méthodes relevant du discret

- Recherche empirique d'une formule en fonction des points de la grille : $S_{\text{réc-f}}$
- Estimation de l'aire par dénombrement de carrés unités : $S_{\text{es-dén}}$
- Application directe de la formule de Pick (lorsqu'elle est connue) : S_{pick}

Les méthodes du continu mobilisent des savoirs étudiés dès le collège. Nous faisons donc l'hypothèse qu'elles peuvent apparaître dès le début de la recherche.

Quant aux méthodes du discret, elles sont absentes dans la plupart des connaissances. On peut s'attendre donc à des difficultés pour leur mobilisation. En effet, tout au long de l'enseignement, le concept d'aire est construit dans les registres de la géométrie euclidienne et de l'analyse (de l'aire de figures de base en primaire, avec le calcul de longueurs, au calcul intégral en analyse à l'université).

Situation et modèle didactique

La situation relève du modèle SiRC (voir Chapitre. V). En effet :

- Le problème est *a priori* « ouvert » : le théorème de Pick n'est pas enseigné sauf dans des cursus spécifiques post-bac, et dans le cas où la formule serait connue, il reste à faire la preuve du théorème.
- Plusieurs stratégies initiales sont possibles, en particulier dans le registre de la géométrie du continu, dès que les notions d'aires et de polygone sont connues.
- Les stratégies initiales ne permettent pas de répondre à la question posée, ce qui devrait conduire à chercher comment la propriété « à sommets entiers » peut conduire à une méthode « plus simple ».

-
- La phase de recherche expérimentale permet de construire des solutions partielles et des conjectures, et de donner des éléments de preuve.
 - La recherche peut se développer dans différents registres (continu, discret, algorithmique).

La situation peut être proposée sous plusieurs formes suivant des choix didactiques. Nous identifions particulièrement les choix didactiques suivants :

- *La nature de la question*
L'enjeu de l'activité de recherche dépend de la formulation de la question. Demander de « chercher une formule » peut réduire l'activité de recherche alors que « trouver une méthode ou un moyen » rend le problème plus « ouvert ».
- *La nature du polygone de l'énoncé (précisée ou pas)*
Préciser un type de polygone par rapport au nombre de cotés ou à la convexité peut limiter la résolution du problème à des instances ou la généraliser.
- *La présence (ou non) d'un exemple de polygone associé à l'énoncé*
Quel type de polygone donner ? Son aire doit-elle être facile à calculer ou non ? En proposant par exemple, de polygones habituels (triangles, carré, rectangle, etc.), cela peut réduire l'enjeu de trouver une autre méthode de calcul d'aire que celle basée sur les formules classiques de la géométrie.
- *La référence (ou non) aux points de la grille*
Le choix de faire (ou non) explicitement référence aux points de grille dans l'énoncé du problème va influencer la recherche empirique et les registres de résolutions.

Ainsi, suivant les valeurs de choix didactiques, on peut mettre en place des situations « fermées » ou « ouvertes » par rapport aux registres de résolution et/ou à l'activité de recherche. Nous allons expérimenter différentes valeurs.

Nous faisons l'hypothèse que la situation peut permettre :

- de passer du registre du continu de la géométrie euclidienne (habituel dans l'enseignement) à celui de la géométrie discrète et de l'arithmétique.
- de donner du sens à la formule de Pick. A savoir, par exemple, pourquoi, dans le calcul de l'aire, un point à l'intérieur du polygone vaut 1 et un point sur le bord vaut $\frac{1}{2}$.

D'autre part, comparativement à l'étude du problème des « points entiers sur une droite » (voir. Chapitre VI), celle-ci met en jeu une situation plus ouverte du point de vue de l'activité de recherche. Elle nous permettra donc d'évaluer la capacité des étudiants à s'appropriier ce type de problème et d'identifier les savoirs notionnels et transversaux mobilisés.

Le modèle SiRC est privilégié pour mener l'étude. A terme, nous pourrons donc savoir si ce choix est pertinent ou pas.

Nous allons chercher à identifier dans nos expérimentations : les traces d'activités de recherche, les méthodes de résolutions, les changements de registres, les savoirs notionnels et transversaux mobilisés, ainsi que les blocages et les difficultés.

3.1 - Situations de pré-expérimentation

Dans le déroulement chronologique de notre étude nous avons effectué deux mises en situation du problème afin de mieux préparer la situation expérimentale. Au vu des résultats obtenus, il nous est paru important de les présenter. Toutefois, nous ne faisons ici que des résumés.

a) Première pré-expérimentation

Nous avons fait les choix didactiques suivants :

- Proposer une formulation qui ne fait aucune mention des points de la grille. Il s'agit donc d'une formulation « ouverte » du point de vue du registre de résolution.
- L'hypothèse que les formules habituelles de calcul ne permettent pas de résoudre facilement tous les problèmes de détermination d'aire de polygones est précisée.

L'expérimentation est effectuée avec des étudiants de L3 maths de l'université de Grenoble. C'est un niveau d'enseignement qui dispose *a priori* des savoirs pour amorcer des stratégies initiales. La durée prévue est une heure. Nous privilégions le travail en groupe. Cette organisation permet de faciliter les interactions et la dévolution du problème. Des fiches de grille carrée régulière sont données.

Énoncé présenté

Problème. Étude de l'aire des polygones.

On veut chercher un « moyen » simple de déterminer l'aire des polygones (s'il existe de moyens simples).

Vous avez appris à calculer avec des formules l'aire de triangles, de quadrilatères (carré, rectangle, etc.) ou de polygones réguliers. Toutefois il n'est pas toujours « simple » de trouver l'aire d'un polygone de façon générale.

Pour cette recherche, on restreint le problème aux polygones dont tous les sommets sont sur une grille carrée régulière.

On se demande si le fait de placer un polygone sur une grille peut nous aider à calculer son aire.

Les résultats

L'expérimentation a montré que :

- La formulation proposée ne permet pas le passage du registre du continu de la géométrie euclidienne au registre du discret. Le travail des étudiants s'est centré sur la recherche de propriétés analytiques qui permettent d'élaborer un algorithme de construction de polygones sur une grille carrée régulière. Bien que nous trouvons ce travail intéressant, il est assez éloigné des hypothèses de notre analyse.
- Le problème est présenté de façon trop « ouverte ». Malgré nos relances pour que les étudiants regardent le problème sur des cas particuliers de polygones construits sur la grille, cette approche ne leur dit rien. Il faudrait donc ajouter d'autres informations pour espérer l'apparition du registre du discret.

b) Deuxième pré-expérimentation

Le public est constitué cette fois d'étudiants de Master 1 mathématiques de l'ENsup de Bamako. Nous avons fait de nouveaux choix :

- Donner une fiche de travail avec des exemples de polygones à sommets entiers (voir figure de la fiche).
- Préciser l'unité d'aire de la grille. Mais aucune référence n'est faite aux points de la grille.

Avec ces choix, on a une situation un peu « fermée » du point de vue de l'activité de recherche et des registres de résolution.

Nous faisons l'hypothèse que cette nouvelle formulation permettra aux étudiants d'adopter une recherche empirique à travers les cas particuliers donnés et qu'ils vont se centrer beaucoup plus sur des méthodes de résolution en lien avec la grille et les points entiers.

L'organisation du travail en groupe est maintenue.

Énoncé présenté

« On veut trouver un moyen simple pour déterminer l'aire d'un polygone dont tous les sommets sont des points d'une grille carrée régulière.

Pour cette recherche, on vous donne les exemples de polygones A, B, C et D sur la fiche suivante. »

Fiche de travail

On vous donne le cas des polygones suivants (A, B, C, D). On considère que l'unité d'aire de la grille est 1.

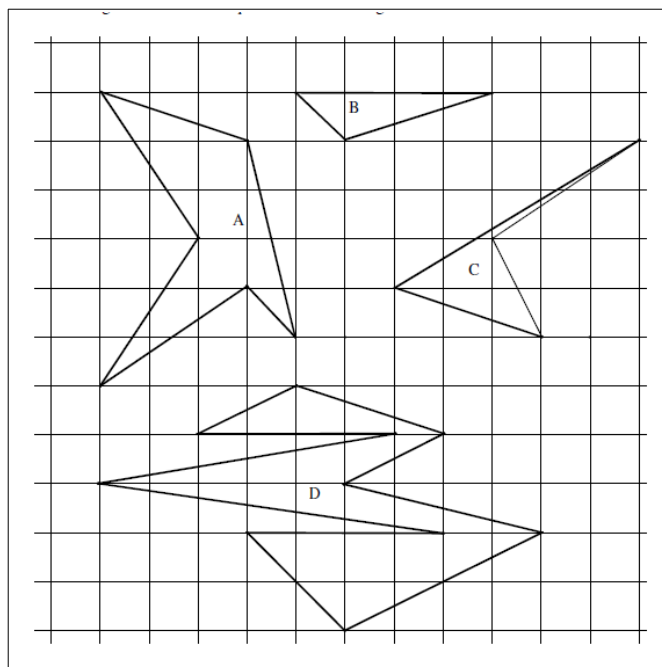


Figure 1. Polygones de la fiche de travail de seconde pré-expérimentation

Analyse des productions et résultats

Nous avons 5 groupes de travail de 2 ou 3 étudiants.

Le Groupe 1 a adopté la méthode par découpage (S_déc). Le choix du découpage des polygones montre explicitement la triangulation en sommets entiers et sans points intérieurs au polygone (voir figure 2). Le principe du groupe pour déterminer l'aire d'un polygone P est de calculer l'aire des triangles t_i , ensuite faire la somme des aires $A(t_i)$ pour obtenir $A(P)$, A désignant l'aire. Le calcul des aires des triangles se basent sur la formule classique $base \times hauteur / 2$. Ils sont donc vite bloqués. Cela était prévisible puisqu'on a pas les moyens pour déterminer toujours les hauteurs des triangles. On peut pourtant déterminer ces aires de triangles en utilisant le théorème de Pythagore et la formule de Héron (voir § VII.2. Étude mathématique).

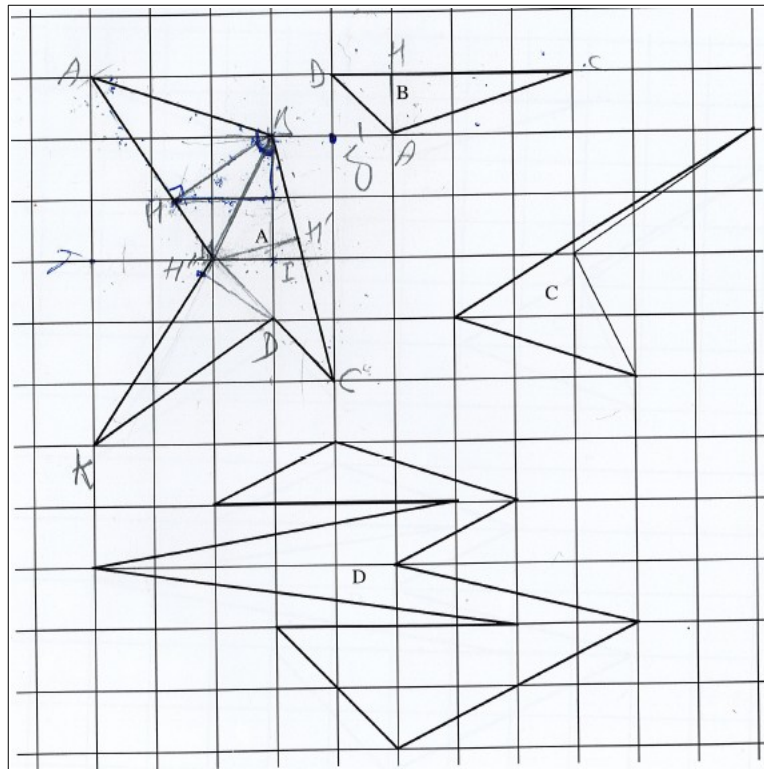


Figure 2. Copie du groupe 1

Les quatre autres groupes ont eu une même approche (Voir Figure 3). C'est une méthode qui est aussi basée sur le découpage (S_{déc-r}). Mais à la différence avec celle du Groupe 1, le polygone P est d'abord inscrit dans un rectangle R . Ensuite en retranchant de l'aire de R , l'aire des régions qui complètent P en R , on obtient alors $A(P)$.

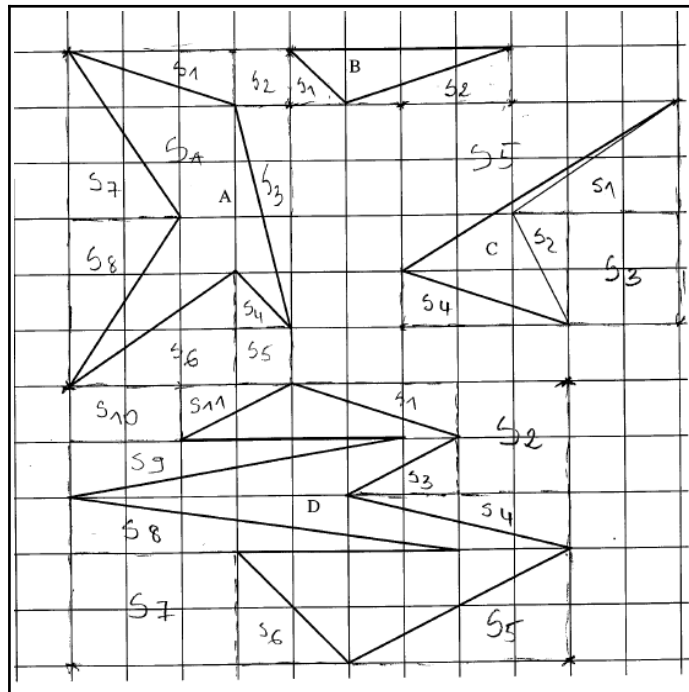


Figure 3a. *Copie Groupe 2*

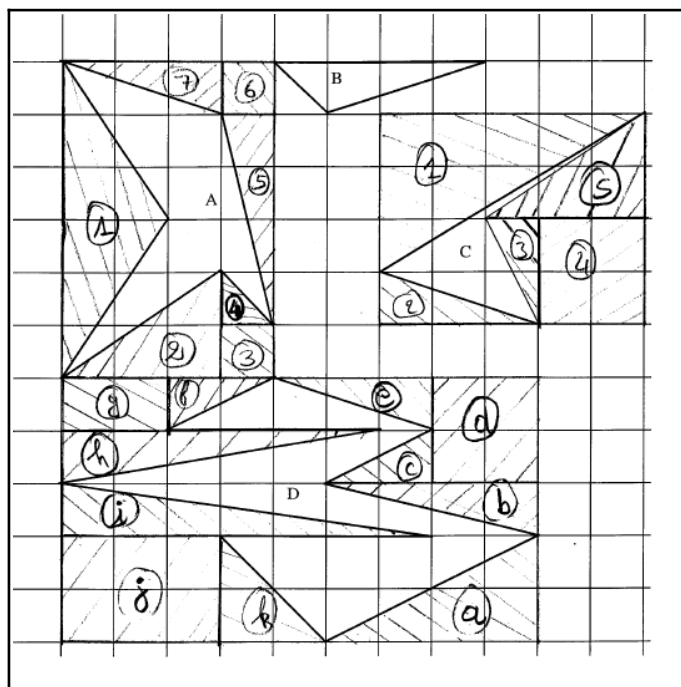


Figure 3b. *Copie Groupe 4*

Parmi les quatre groupes, deux ont pu mener la méthode (S_déc-r) à terme, en choisissant judicieusement des formes en triangles rectangles ou en rectangles de côtés parallèles aux lignes de la grille. Ils se sont donc basés sur les figures dont on peut déterminer les longueurs facilement en exploitant la grille.

Concernant les résultats, nous retenons :

- Le registre du continu de la géométrie euclidienne est prégnant. Les méthodes de résolution (S_déc-t et S_déc-r) des étudiants sont basées sur les formules de la géométrie euclidienne.
- La formulation ne permet pas de faire le lien entre l'aire d'un polygone et les points de la grille. Les méthodes de résolutions apparues ne sont pas spécifiques à la grille. En aucun moment de l'expérimentation, les points de la grille ne sont évoqués par les étudiants. A la question s'il existe d'autre méthode, un seul étudiant trouve que le problème lui évoque les estimations d'aire sous une courbe en analyse numérique (la méthode des trapèzes).
- Le problème est cette fois trop « fermé » sur le plan de l'activité de recherche. Il faut dire que les étudiants se sont focalisés exclusivement sur les exemples donnés et non sur le problème général.

Nous trouvons aussi que, les polygones d'exemple doivent être assez « tordus » pour espérer créer l'enjeu d'explorer d'autres pistes de résolution.

3.2 - Situation expérimentée

Elle vise à expérimenter une nouvelle formulation de l'énoncé du problème. Le public cible est constitué d'étudiants de L3 mathématiques de l'université de Grenoble. Le travail est effectué en groupe. Des observateurs sont associés à l'expérimentation. Leurs interventions peuvent être des explications de bases sur la compréhension de la situation. Ils pourront aussi intervenir si les étudiants se « bloquent ». Ils pourront donner des exemples ou contre-exemple, ou encore demander des précisions sur les stratégies de résolution.

a) Choix didactiques

Nous avons choisi cette fois-ci d'expérimenter une formulation moins ouverte sur le plan des registres de résolutions. Ainsi, on a fait les choix suivants :

- le problème est présenté au tableau et un seul exemple de polygone sur la grille est donné. Ce polygone est beaucoup plus « tordu » (voir figure 4).
- Il est explicitement recommandé d'utiliser les points de la grille dans la résolution (voir § Transcription de la présentation du problème).
- deux séances de travail de 1h30mn sont prévues. Cela pour donner plus de temps de résolutions et de réflexion aux étudiants, mais aussi pour avoir un moment d'institutionnalisation.

Ces choix nous sont parus fondamentaux à la suite de nos pré-expérimentations, pour espérer voir des méthodes en lien avec les points de la grille et une activité de recherche plus soutenue.

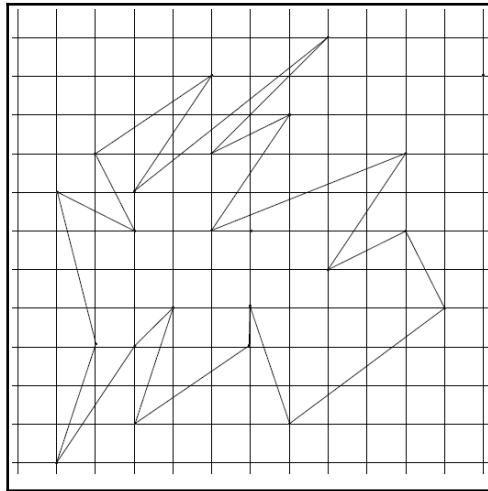


Figure 4 . Fiche de polygone exemple donné

Transcription de la présentation du problème

Il est présenté au tableau par l'un des observateurs.

« Ob.S » désigne l'observateur et « Ed. » un étudiant.

Ob.S : On s'intéresse à des polygones. Je dessine un polygone. Ce qui m'intéresserait de faire c'est de déterminer son aire. Mais de façon la plus "simple" possible.

Ob.S : Très certainement vous avez dans vos souvenirs, des formules pour des polygones très particuliers, qui vous permettent de déterminer l'aire. Vous aurez peut être envie de mettre cela en œuvre pour calculer l'aire. Mais j'appellerai cela des formules un peu compliquée déjà par rapport à ce qu'on veut chercher.

Ob.S : Alors pour chercher l'aire, on vous invite très fortement à placer le polygone sur un objet : une grille.

Ob.S : On va placer le polygone sur la grille, de telle sorte que les sommets de notre polygone soient sur la grille (avec des carrés).

(Dessin d'illustration au tableau par le l'observateur)

Ob.S : Donc j'ai posé mon polygone sur ma grille. A savoir que tous les sommets sont sur la grille. En quoi cela va nous aider à déterminer l'aire?

Ob.S : A part le fait que le polygone est sur la grille, est ce que vous voyez éventuellement d'autres éléments qui pourraient vous aider?

(Pas de réponse des étudiants)

Ob.S : Qu'est-ce que ça fait d'avoir dessiné le polygone sur la grille?

Ed. : On connaît l'aire d'un carré.

Ob.S : Oui, mais pour le moment, restons plutôt sur le dessin et pas sur le problème.

Ed : il y a des points intérieurs et des points extérieurs.

Ob.S : Effectivement, il y a des points intérieurs, il y a des points extérieurs, il y a les sommets et on imagine aussi qu'il y a en sur le bord. Est-ce que ces genres d'informations pourront nous aider pour déterminer l'aire?

Ob.S : Donc le problème est posé. Trouver une méthode assez simple pour déterminer l'aire de n'importe quel polygone qui peut être complètement tordu et dont tous les sommets sont sur une grille.

Ob.S : On souhaiterait que vous trouvez quelque chose de simple. Cela peut être même une approche de la valeur de l'aire.

Ob.S : On va vous donner des fiches de travail. Une fiche avec un exemple de polygone construit sur une grille et une autre portant uniquement une grille.

b) Analyse des productions

Nous avons trois groupes de travail et chacun des groupes a eu une approche particulière de la résolution. Nous allons donc regarder les productions par groupe de travail.

Groupe 1

Il est constitué de 3 étudiants. Au début de la résolution, les étudiants essaient de retrouver un exercice étudié en classe qui serait semblable au problème. Les notions du produit scalaire en lien avec l'aire d'une figure géométrique sont évoquées. Cette approche revient régulièrement dans les travaux lorsqu'ils sont en manque d'inspiration pour trouver d'autres pistes de recherches. Cela montre que les étudiants n'ont pas l'habitude de ce type de situation. Les pratiques d'enseignement autour de résolution de problème sont en général des moments d'application de notions étudiées dans le Cours.

La première piste qui émerge finalement est la technique de l'estimation de l'aire ($S_{\text{es-dén}}$). La détermination d'une approximation de l'aire est basée sur des polygones aux côtés parallèles aux lignes de la grille (voir figure 5).

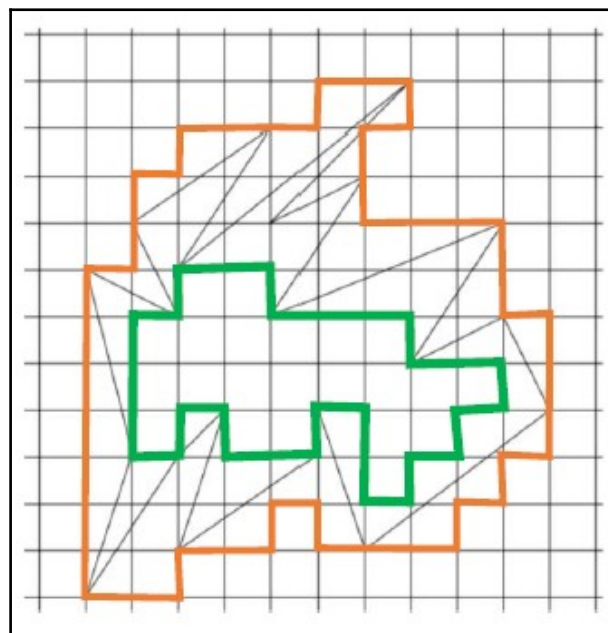


Figure 5. *Illustration Copie d'étudiant*

Avec ce découpage, on a : $22 < A(P) < 76$, $A(P)$ désigne l'aire de P . Si l'encadrement permet d'avoir une idée de l'aire de P , l'amplitude est bien trop grande pour rapprocher l'aire $A(P)$. C'est la limite de la méthode comme nous l'avons souligné dans notre analyse mathématique.

Le dessin est finalement abandonné. *A priori*, il ne leur donne aucune information sur le lien entre points intérieurs, points extérieurs, points du bord et l'aire du polygone P .

L'observateur intervient : « quelles sont les informations que ce dessin peut apporter pour leurs recherches, et est ce qu'ils sont finalement sûr qu'on ne peut rien en tirer ? »

Les expressions « plus » ou « moins » sont alors évoquées rapidement. Mais la piste de résolution est écartée.

Ensuite, l'idée de regarder les points intérieurs est proposée. Voici une transcription des échanges en ce moment (les étudiants sont désignés par E1, E2, E3) :

E2 : Si tu comptes les points qu'il y a sur la frontière, il y a pas unicité.

E1 : Si tu prends deux figures qui ont les mêmes points intérieurs alors elles ont la même aire.

E2 : Pourquoi il y aurait ça ?

E1 : Ah ça me paraît... Si tu essaies de faire des dessins, deux figures qui ont les mêmes points intérieurs et qui n'ont pas la même aire. Déjà faire des figures qui n'ont que les mêmes points intérieurs et qui ne se ressemblent pas c'est compliqué, et je pense qu'elles ont la même aire.

On observe dans cet échange, les prémices d'une approche de résolution dans le registre du discret. Mais le groupe constate finalement par essais que leur observation est fautive. D'abord, l'un des étudiants trouve un « contre exemple » (voir figure 6). En rajoutant le triangle « bleu » au polygone P , le nouveau polygone a le même nombre de points intérieurs que P mais a une aire plus grande.

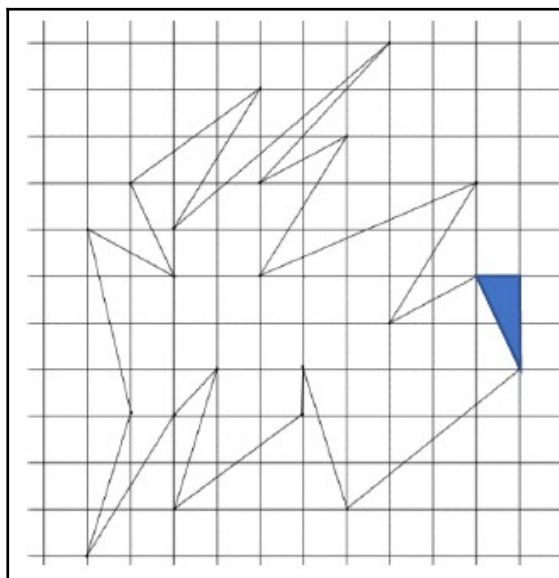


Figure 6. Contre-exemple à la proposition de l'étudiant E1 sur l'apport des points intérieurs

Ils s'intéressent ensuite aux triangles entiers sans points intérieurs. Les calculs donnent sur des exemple que l'aire d'un triangle entier sans point intérieur à pour aire $\frac{1}{2}$.

Après ces deux observations, les étudiants remettent en doute leur hypothèse de travail : *les points intérieurs contribuent au calcul de l'aire*. Malgré qu'un des étudiants propose « qu'il faut peut être considéré la frontière (le bord) », l'intérêt des points de la grille ne les accroche plus.

Nous observons ici un abandon de la méthode de recherche empirique (S_rec-f) du lien entre points de la grille et l'aire du polygone par manque d'une investigation plus poussée de la recherche.

Une intervention judicieuse d'un observateur peut pallier à un tel renoncement à une piste de résolution.

Ensuite, l'idée de trianguler le polygone P apparaît (S_dec-t). Ils trouvent qu'en découpant P en triangles, le problème se ramène à une étude de triangles « plus simple ». Mais quelle triangulation choisir ? Voici deux propositions de triangulation explorées :

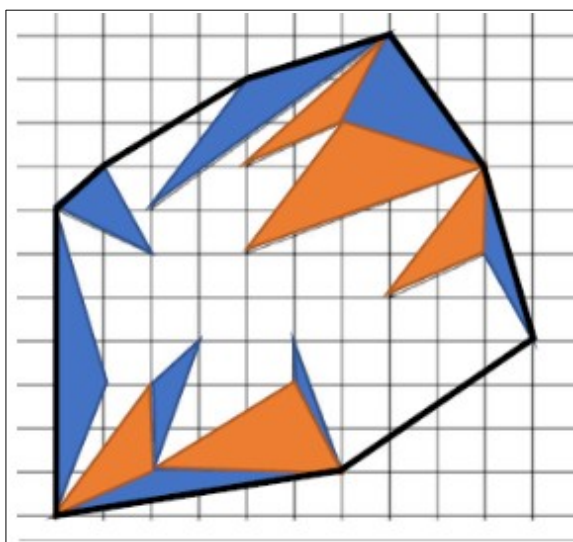


Figure 7a. *Création d'un polygone convexe par ajout de triangles à P*

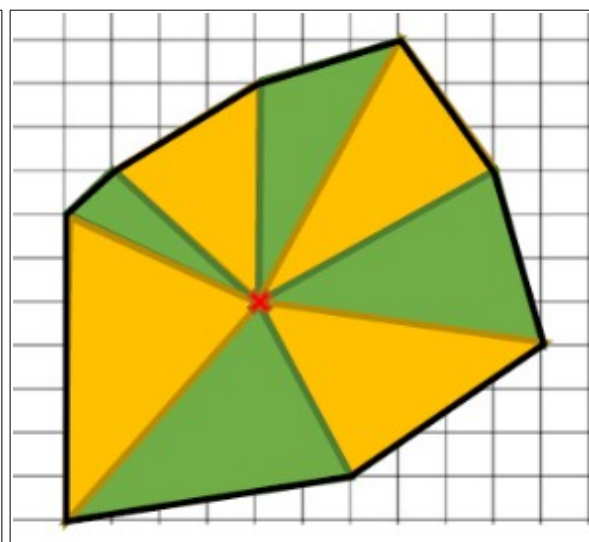


Figure 7b. *Triangulation du polygone par partir d'un point intérieur à P*

On retrouve ici le second type de triangulation présenté dans l'analyse mathématique du problème. Les aires des triangles peuvent être calculées car tous les sommets sont entiers.

Mais pour les étudiants, ces triangles ne sont pas « simples » car « on ne peut déterminer les longueurs ». Ils évoquent alors le triangle rectangle d'aire $1/2$ et « un quart de carré ». Le situation leur paraît toujours difficile à résoudre pour chacun de ces types de polygones.

Ils reviennent finalement à une recherche empirique de l'aire en lien avec les points de la grille lors de la seconde séance (S_rec-f). Les essais se focalisent sur le triangle rectangle $1 \times n$ (voir figure 8).

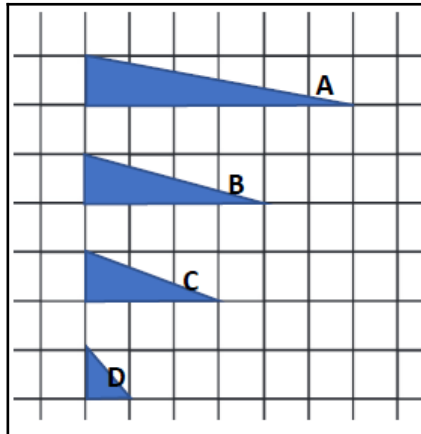


Figure 8. *Illustration des triangles étudiés par les étudiants*

Ils commencent alors à faire des observations liant l'aire des figures et les points des bords. Mais ce travail ne leur permet pas d'exhiber une formule générique.

Le groupe ne parvient pas à aller plus loin dans la résolution du problème.

Groupe 2

Ils sont trois étudiants au sein ce groupe. Nous les désignons par R , T , S dans les extraits de transcription des échanges.

Le groupe débute aussi ses recherches avec la méthode d'estimation ($S_{es-dén}$) de l'aire du polygone P (voir figure 9). Mais ils s'intéressent exclusivement à l'aire de la région intérieure à P (hachurée sur la figure).

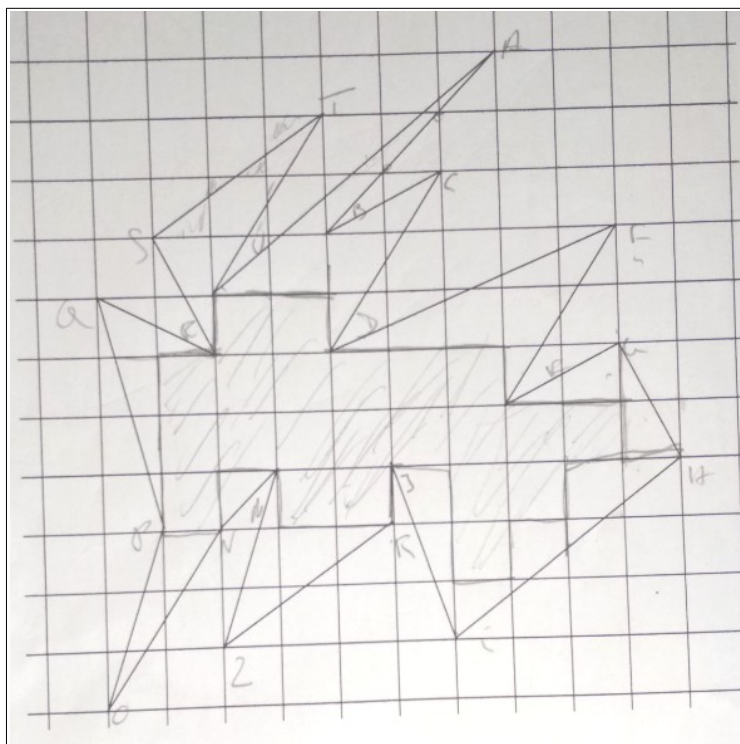


Figure 9. Copie de l'étudiant T

A partir de ce dessin, ils cherchent à reconstituer des carrés unités avec des portions de la partie non hachurée dans P . On reconnaît dans cette stratégie une application du théorème de Bolyai. Mais comme ils ne trouvent pas de justification, ils abandonnent la stratégie.

L'observateur intervient en leur rappelant qu'ils doivent penser à regarder aussi les points de la grille. Étant donné que cela a été recommandé dans la présentation du problème.

Mais l'idée de regarder les points ne leur semble pas pertinent. Ils s'interrogent sur les données du problème. Voici un extrait des échanges :

T : Qu'est ce qu'on nous donne au départ pour faire ce calcul ? Les coordonnées des sommets ?

R : Avec ces histoires de points intérieurs et tout ça, je ne vois pas trop où est ce que ça peut nous amener.

(Chacun sur sa fiche, commence à construire des polygones sur la grille et à marquer des points.)

R : Je trouve que si on construit un polygone sur la grille, il y a des points intérieurs, extérieurs et sur la frontière.... Mais les points extérieurs ne doivent pas intervenir pour déterminer l'aire.

T : Je trouve que si on devait chercher une majoration ou une minoration de l'aire, les points peuvent nous aider.

R : Oui, je pense que pour une minoration de l'aire, les points intérieurs correspondent aux carrés que nous avons coloriés à l'intérieur. Mais après pour trouver l'aire exacte... Le problème me fait penser à du carrelage .

S : Je ne comprends pas trop l'histoire de points extérieurs.

T : Et si on faisait une figure régulière et on essaye de s'intéresser aux points intérieurs si ça nous donne une information sur son aire. Par exemple si on prend ce triangle, on peut regarder les points intérieurs et sur les cotés. Puis on calcule l'aire.

Dans cet extrait, on observe que, l'idée de l'apport des points dans le calcul de l'aire du polygone commence à les convaincre (S_rec-f). Le fait que les points intérieurs n'interviennent pas dans la détermination de l'aire du polygone est bien trouvé. Nous estimons que l'approche du groupe leur permettra de donner du sens à la formule s'ils la découvrent.

Ils se lancent alors à faire des essais sur particulièrement des triangles (voir figure 10).

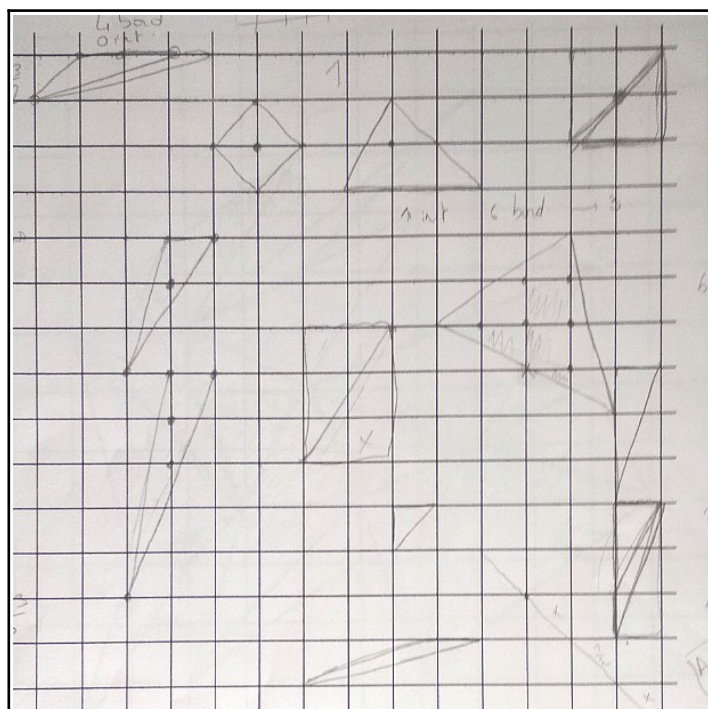


Figure 10. Copie de l'étudiant R

Ils s'entendent finalement sur trois observations :

Observation 1. Un triangle sans point intérieur et qui n'a que ses sommets sur la grille, a pour aire $1/2$.

Observation 2. Dans un triangle, si le nombre de point intérieur est fixé, en augmentant le nombre de point du bord de 1, l'aire du triangle augmente de $1/2$

Observation 3. Dans un triangle, si le nombre de point du bord est fixé, en augmentant le nombre de point intérieur de 1, l'aire du triangle augmente de 1.

Ils cherchent alors à vérifier l'observation 1. L'observateur leur propose un triangle très aplati.

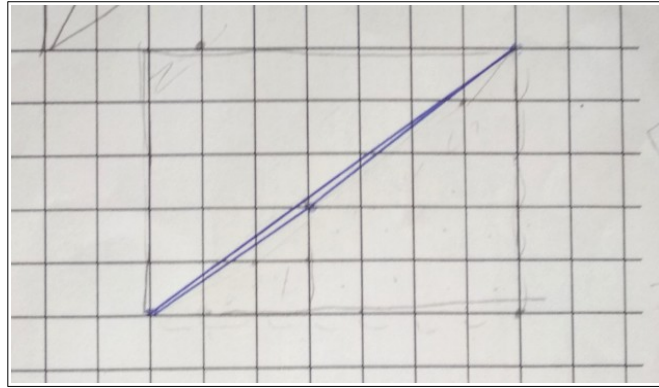


Figure 11a. Triangle proposé par l'observateur au Groupe 1

Ils inscrivent le triangle dans un rectangle ($S_{\text{déc-r}}$) puis effectuent le découpage suivants (voir figure 11b).

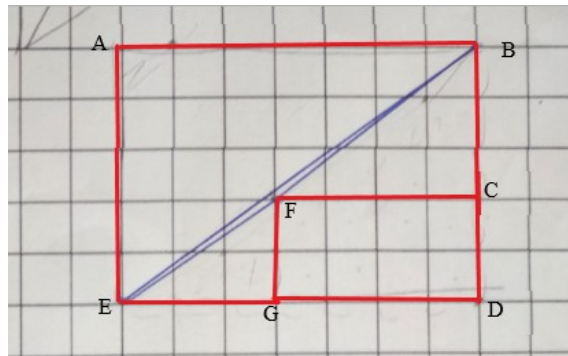


Figure 11b. Dessin de référence du Groupe 1

On obtient : $A(EFB) = A(ABDE) - A(ABE) - A(EGF) - A(FCB) - A(GDCF) = \frac{1}{2}$

Ce résultat reconforte le groupe sur sa première observation.

Mais nous remarquons que les étudiants ont des difficultés à reproduire des triangles aplatis sans points intérieurs.

Observateur : Comment construisez-vous donc ce type de triangle aplati ? Autrement comment construire un segment qui n'a que ses sommets sur la grille ?

Après un moment de silence, un des étudiants propose :

T : Je trouve qu'il faut que le segment corresponde à la diagonale d'un rectangle dont les cotés sont premiers entre eux.

La séance s'achève sans que nous obtenons une justification de cette affirmation. Mais cet échange montre que jusqu'à ce moment, le travail effectué sur la grille n'a évoqué que très peu de savoirs notionnels chez les étudiants.

Lors de la seconde séance, le groupe repart sur ses observations précédentes.

Voici un résumé de leur stratégie :

R : on se disait que sur ça (cas du triangle d'aire 1/2), on a pas trop d'idée sur comment le prouver. Du coup, on s'est dit qu'on allait le laisser à part et essayer de revenir à la figure et de trouver, de relier cette histoire de points intérieurs, points au bord avec (vraiment) pas que pour un triangle mais avec l'aire d'une figure quelconque pour essayer d'aller jusqu'au bout. Alors, on aura pas prouver ce qu'on dit... Enfin, ça à l'air d'être vrai. Il reste à le prouver, mais au moins, on serait allé jusqu'au bout pour arriver à un résultat concret, même si on a pas la preuve. Afin qu'on ait quelque chose à présenter.

Observateur : d'accord.

T : l'idée ça sera donc de compter pour les triangles (qui restent), les points intérieurs, les points au bord ?

R : ça voudrait dire par exemple, qu'il faudrait qu'on arrive à le trianguler, à transformer la figure qu'en des triangles comme ça, tu vois.

Ils repartent avec une recherche empirique (S_rec-f) sur des triangles et trouvent la formule :

$$A(b, i) = i + (b - 3) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = i + \frac{b}{2} - 1 \quad \text{où } A \text{ désigne l'aire, } b = \text{nombre de points du bord,}$$

i = nombre de points intérieurs.

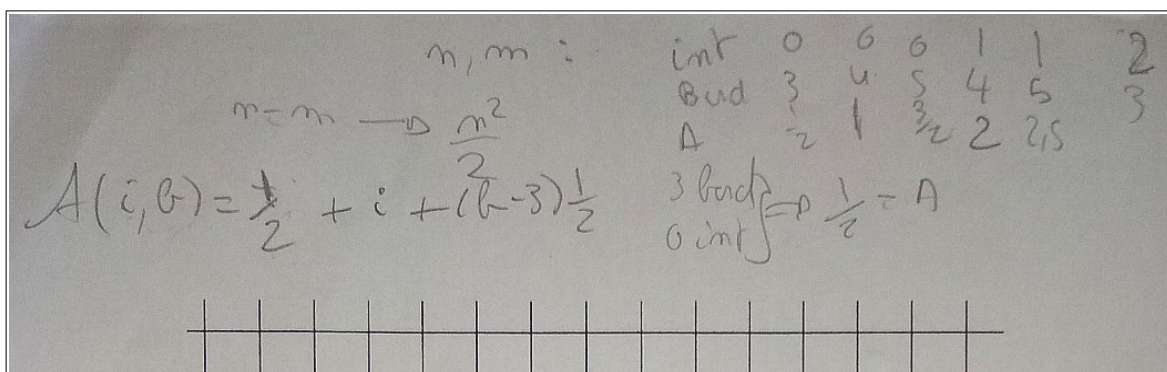


Figure 12. Copie d'étudiant T

Ils vérifient ensuite la formule sur des régions du polygone P (voir figure 13a et 13b).

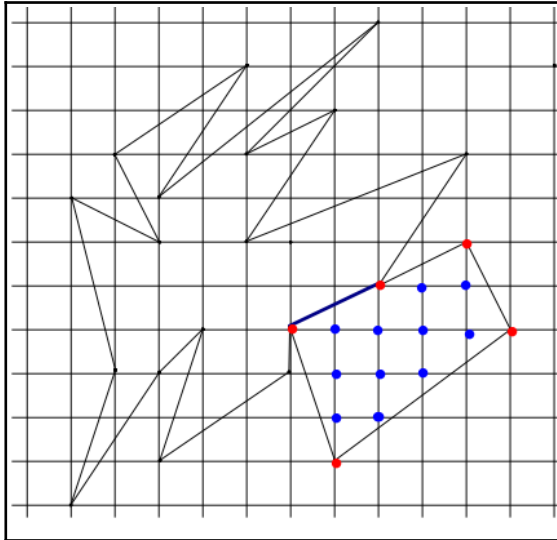


Figure 13a. Polygone de référence
($b = 5 ; i = 11$)

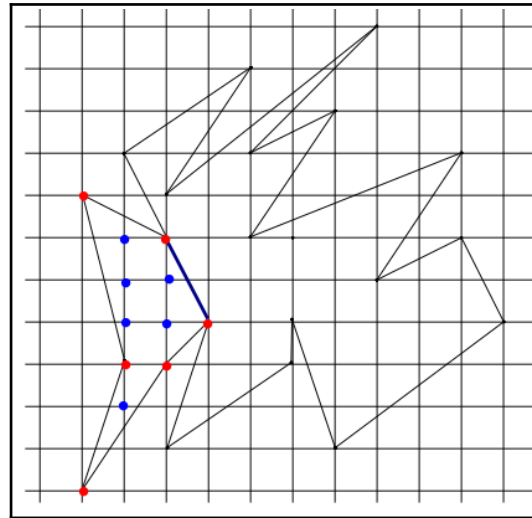


Figure 13b. Polygone choisi pour vérifier
le cas $b = 6$ et $i = 6$

Observateur : vous pouvez me résumer votre idée ?

R : Notre idée, c'est que si la formule marche pour un triangle et que n'importe quel quadrilatère est triangulable. On pourrait extrapoler la formule à n'importe quel quadrilatère qui serait triangulable.

R : En tout cas, je pense que cette formule est vraie.

T : Mais après, est ce que tout quadrilatère est triangulable ?

R : je pense que c'est oui. Pour un triangle c'est simple. Pour un quadrilatère, il suffit de relier les points opposés. Pour un hexagone, je ne sais pas. Est ce que s'il n'est pas régulier ça marche ?

Le groupe a donc découvert la formule. Ils ont aussi trouvé le principe de l'additivité de la formule et une approche de la preuve par induction. Mais hormis des vérifications par essais, ils ne parviendront pas à amorcer la rédaction de la preuve.

Groupe 3

Ils sont aussi trois étudiants au sein de ce groupe. Nous les désignons par A, B, C dans la suite du texte.

Dès les premiers échanges, ils se sont convenus d'écartier l'utilisation des formules classiques, car les consignes exclues ces méthodes. L'estimation de l'aire du polygone est évoquée (S_{es-dén}). Mais ils ne s'attardent pas la dessus (voir figure 14a).

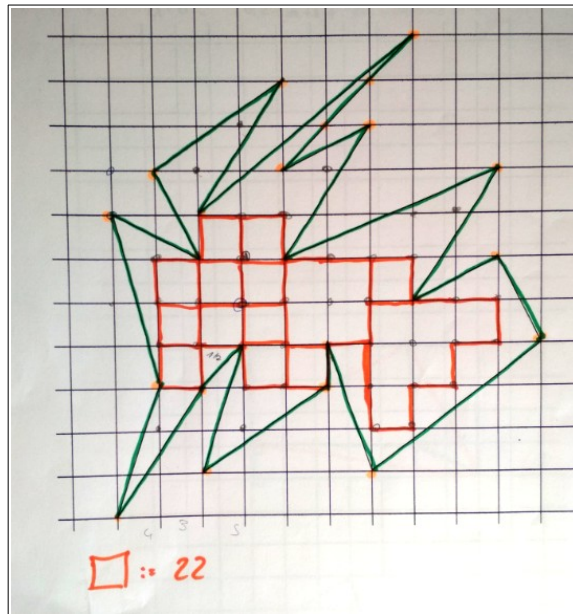


Figure 14a. Copie de l'étudiant A

Voici une transcription des échanges :

C : On peut prendre tous les carrés entiers.

B : Le grand carré est une majoration.

A : Il y a des points intérieurs, extérieurs, bords. On peut prendre des cas simples au départ.

Le groupe adopte donc assez vite une recherche empirique (S_rec-f) pour déterminer une relation entre l'aire et les points de la grille. Ils aboutissent à la formule de Pick. Voici un résumé de la démarche :

- Fixer le nombre de points intérieurs et faire varier celui des bords. Les différents essais (voir figure 14b) leur permettent d'obtenir deux conjectures :

Conjecture 1 : l'aire d'un polygone sans point intérieur vaut $A = \frac{b}{2} - 1$ avec

b = nombre de points de la grille sur le bord du polygone.

	# Int	# Edge	# Bord	Aire
①	0		3	$\frac{1}{2}$
②	0		4	1
③	0		4	1
④	0		6	2

Conjecture 1 (sans intérieur)

$$A = \frac{\# \text{Bord}}{2} - 1$$

Figure 14b. Copie de l'étudiant A - Conjecture 1

- Faire varier à la fois les points intérieurs et ceux du bord (voir figure 14c). Il formule la conjecture suivant :

Conjecture 2 : l'aire d'un polygone avec des points intérieurs vaut : $A = \frac{b}{2} + i - 1$,
avec i = nombre de points intérieurs et b = nombre de points sur le bord.

	# Int	# Bord	Aire
⑤	1	4	2
⑥	4	4	5
⑦	6	8	9
⑧	4	6	6
⑨	36	23	46,5
⑩	4	8	7 7

Conjecture 2:

$$A = \frac{\# \text{Bord}}{2} + \# \text{Int} - 1$$

Figure 14c. Copie de l'étudiant A - Conjecture 2

Contrairement au groupe 2, on observe que le groupe 3 ne se fixe pas de figures particulières pour effectuer les conjectures.

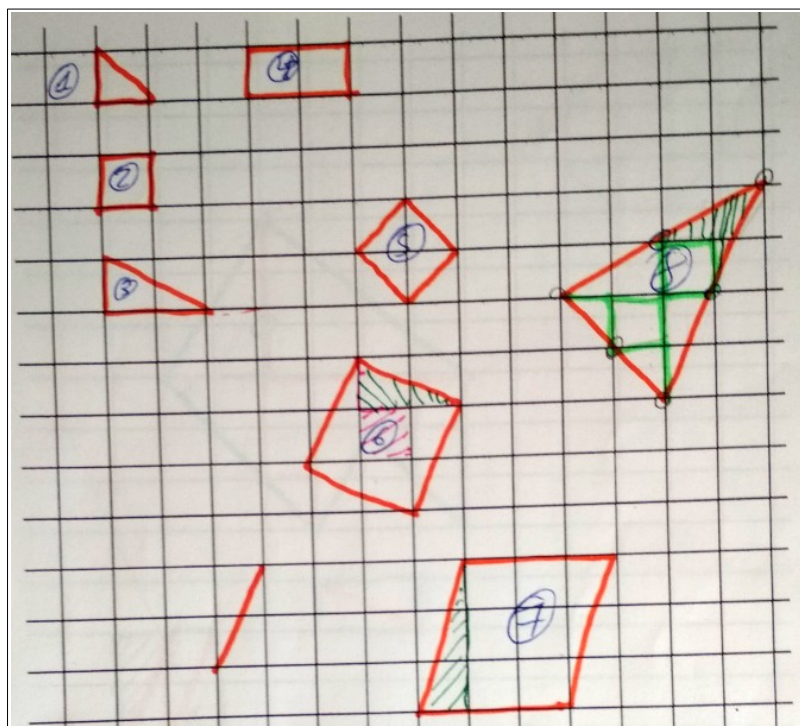


Figure 14d. Dessins de référence des deux conjectures

Ils sont assez vite convaincus des deux conjectures. La formule est alors appliquée sur le polygone donné. En trouvant : $i = 36$, $b = 23$, alors : $Aire(P) = 46,5$.

Mais étant donné qu'ils ne disposent pas de moyen de « contrôle », ils ne peuvent se convaincre de ce résultat. Ils tentent alors de vérifier la formule sur des figures familières. Le rectangle, le trapèze, le pentagone régulier sont essayés.

Dans le travail de ce groupe, il nous semble que l'étudiant « A » a déjà travaillé sur la formule de Pick. La détermination de la formule s'est déroulée beaucoup « trop vite » au sein du groupe. Lorsqu'on se retrouve dans une telle situation, l'enjeu de la SiRC peut être réduit considérablement. Mais il reste toujours à trouver une preuve de la formule.

L'observateur relance le groupe sur la recherche d'une preuve de la formule.

Le groupe s'intéresse alors au cas particulier du triangle. La récurrence est évoquée pour aboutir à une preuve. Ils se proposent de fixer un côté du triangle et d'augmenter les points sur un autre côté (voir figure 14e).

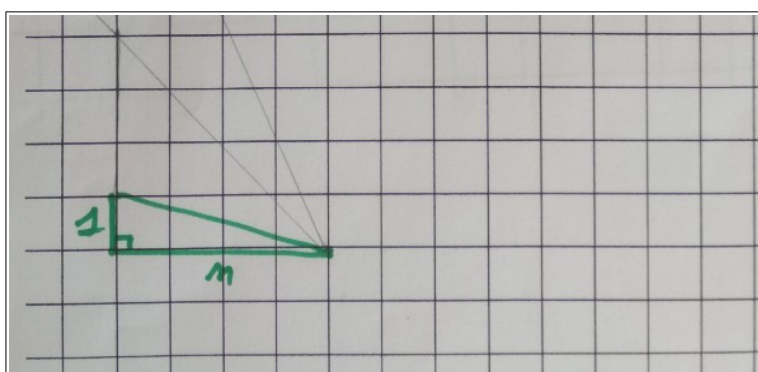


Figure 14e. Copie étudiant B

L'étudiant A affirme :

« En démontrant la formule pour le triangle. Nous pourrions par la suite, découper n'importe quelle figure en triangle. ».

Cet extrait montre qu'ils ont compris l'intérêt de la triangulation pour aboutir à une preuve. Mais ils ne parviennent pas à donner une justification.

Le principe de la preuve descendante (en utilisant l'additivité de la formule) est aussi exploré. On retrouve les traces de cette piste de recherche au bas de la copie de l'étudiant A. (voir figure 14f).

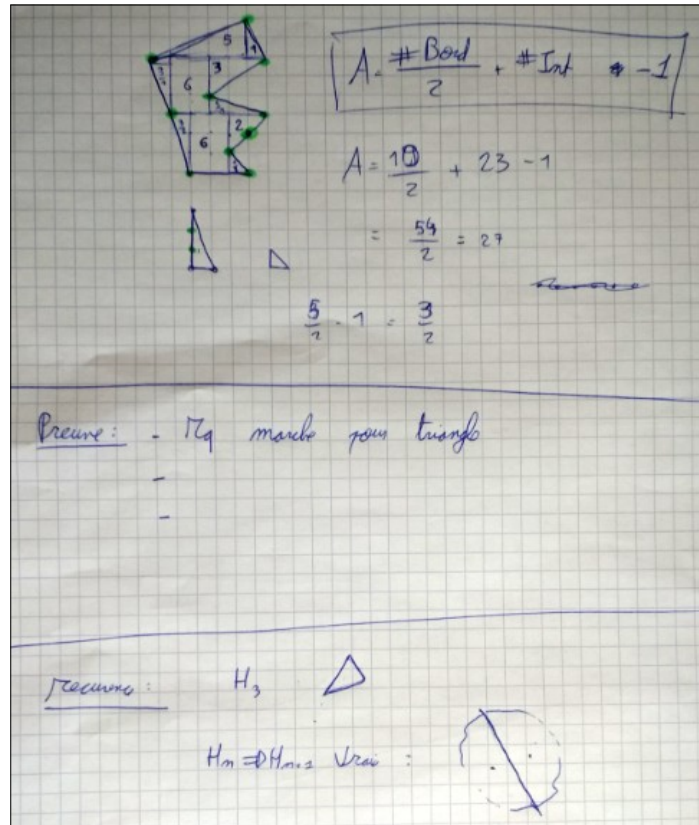


Figure 14f. Copie de l'étudiant A

Malgré un schéma de la preuve trouvé et les relances de l'observateur, le groupe ne parvient pas à rédiger une preuve.

L'institutionnalisation

Durant cette phase collective, chacun des groupes a présenté au tableau ses résultats. Les échanges ont porté non seulement sur la résolution du problème, mais également sur les démarches, les conjectures obtenues et les raisonnements qui ont été produits.

La solution détaillée du problème n'est pas donnée aux étudiants. Les parties de preuves qui sont prouvées et celles qui restent à prouver ont été précisées. Il a aussi été mis au clair, les stratégies menées par les étudiants, des précisions sont données particulièrement sur le raisonnement par récurrence.

3.3 - Résultats de l'expérimentation

Globalement sur le plan du changement de registre, la troisième expérimentation a permis d'amener les étudiants à passer du registre du continu de la géométrie euclidienne, au registre du discret. Chacun des groupes a débuté la résolution par une méthode d'estimation de l'aire ($S_{es-dén}$) puis l'a prolongé sur la recherche d'une relation entre l'aire et les points de la grille. Bien entendu, le temps mis pour faire ce pont est différent selon les groupes. Par exemple, le Groupe 3 a été très rapide (dès le début de la première séance) alors que le Groupe 1 n'est passé au discret qu'à la fin de la seconde séance.

Concernant l'activité de recherche, elle est mise en œuvre durant les deux séances et par chacun des groupes. On retrouve des essais, des expérimentations sur des cas particuliers, des transformations et reconstitutions de figures. Deux groupes ont d'ailleurs pu aboutir à la découverte de la formule de Pick.

Par rapport aux savoirs notionnels identifiés dans l'étude mathématique, nous avons trouvé qu'ils sont presque tous mobilisés ou évoqués : polygone (définition, intérieur, bord), formules classiques de calcul d'aire de figures géométriques, le théorème de Pythagore, Théorème de Bolyai, la triangulation, les nombres premiers entre eux.

Par rapport aux savoirs transversaux, les essais, l'exhibition de contre-exemple, des formulations de conjectures apparaissent clairement. Toutefois nous ne sommes pas parvenu à faire rédiger des preuves. Les étudiants ont tout de même découvert des schémas de preuves (notamment la récurrence). Le principal obstacle que nous avons observé est la triangulation d'un polygone. Elle est évoquée par les étudiants sous différentes formes. Mais aucun groupe ne parvient à la justifier.

Quand au modèle SiRC, nous trouvons qu'elle est tout à fait pertinente pour effectuer cette étude.

Par ailleurs, même si cela n'est pas précisé dans nos hypothèses de recherche, les interventions de l'observateur lors de la conduite de l'expérimentation sont apparues déterminantes. Elles ont permis à chaque fois d'inciter les étudiants à approfondir leurs pistes de résolutions et à trouver des arguments de validation ou d'invalidation.

VII.4 - CONCLUSION

L'analyse mathématique du problème a permis d'identifier que la résolution permet de convoquer de nombreux savoirs notionnels, à des niveaux de connaissances différents. On peut rappeler entre autres, des notions sur le polygone (définition, intérieur, bord), des formules « habituelles » de calcul d'aire de figures géométriques, le théorème de Pythagore, le théorème de Bolyai, la triangulation, le théorème de Bézout. Des savoirs transversaux aussi peuvent être mobilisés : expérimenter, faire des essais, étudier un cas particulier, décomposer et restructurer une figure, faire une conjecture, utiliser des types ou outils de preuve. L'expérimentation a montré que ses savoirs (notionnels et transversaux) sont presque tous mobilisés ou évoqués. En plus de l'utilisation des théorèmes et propriété ci-dessus cités, tout au long de l'expérimentation, il y a eu des essais, étude de cas particuliers, des décompositions et restructurations de figures, des formulations de conjectures, utilisation de types ou outils de preuve.

Les valeurs de variables de recherche ont été choisi pour inciter à une activité de recherche et de passer du registre du continu de la géométrie euclidienne à celui du plan discret. L'expérimentation a montré que la situation est bien efficace pour mener une activité de recherche et qu'elle permet le passage du registre continu au discret. En effet, pour entrer dans le problème, diverses stratégies sont apparues. Cela nous semble lier au fait qu'il a été demandé de « trouver une méthode simple » et non « de trouver une formule ». La résolution s'est finalement centrée sur la recherche de stratégies liées aux points de la grille. Pour ce passage au registre discret, la demande explicite d'utiliser les points de la grille a été déterminante, au regard de la prégnance du continu préalablement identifié (en référence aux pré-expérimentations).

Le modèle SiRC a été privilégié pour mener l'étude. L'expérimentation montre que ce choix est tout à fait pertinent. Le problème est bien apparu « ouvert » (les étudiants ne connaissaient pas le théorème de Pick). Les stratégies initiales n'ont pas permis de répondre à la question posée. Cela a conduit d'abord au développement de différents registres (continu, discret). Puis à la recherche de propriétés qui lient les points entiers de la grille et l'aire du polygone. Les essais ont permis de construire de solutions partielles (cas des figures particulières), de formuler des conjectures et de donner des éléments de preuves. Il faut noter que tout ce travail ne pouvaient être mené dans les conditions d'une séance de durée limitée (habituellement).

Du point de vue du concept d'aire de polygone, l'étude a permis de construire une autre façon d'étudier l'aire. Le calcul d'aire est habituellement réduit à l'application de formules usuelles (par les longueurs des figures). L'expérimentation a permis à des étudiants de s'interroger sur « qu'est-ce que l'aire d'un polygone ? »

L'expérimentation montre aussi que la situation est intéressante pour aborder la preuve et le raisonnement en mathématique. La récurrence a été identifiée par exemple comme étant un moyen de preuve de la formule de Pick. Mais les hypothèses permettant d'amorcer la rédaction de la preuve n'ont pu être formulées par les étudiants. Ce blocage peut être lié à l'absence de ce type de situation dans la pratique de la preuve par récurrence dans les enseignements. Il faut dire que, habituellement la récurrence s'applique à des situations où la propriété à démontrer est déjà établie ou donnée dans le problème.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Cette thèse étudie la problématique de changement de registres dans l'enseignement des mathématiques. Notre intérêt pour ce thème est lié à une motivation professionnelle. Nous cherchons des éléments épistémologiques et didactiques qui pourraient avoir un apport pour l'enseignement de l'arithmétique ou enrichir les ressources.

Pour mener cet étude, nous avons commencé par une étude épistémologique qui a montré qu'il existe de liens forts entre l'arithmétique et la géométrie. Nous avons choisi spécifiquement, d'étudier les interactions entre ces deux domaines à travers les registres du continu et du discret.

Cette thèse montre, en particulier, que les situations adidactiques / didactiques « classiques » ne permettent pas de mettre en œuvre de telles interactions. D'ailleurs les travaux didactiques antérieurs n'abordent pas ces questions de changement de registres concernant l'arithmétique et la géométrie. Ce travail est donc une contribution innovante en didactique des mathématiques sur cette problématique.

Nous avons montré, qu'il y a une forte prégnance du continu dans les conceptions des étudiants et même une résistance à considérer le discret. Nos expérimentations ont été réalisées auprès d'étudiants de Licence mathématiques et de formateurs en France et au Mali.

Sans doute les choix d'enseignement que l'on a identifié dans les manuels et les programmes (France et Mali), sont l'une des causes de ces conceptions. De plus, dans l'enseignement supérieur, l'arithmétique est peu présente et la géométrie quasiment absente.

Une des raisons de la résistance du passage au discret est que les questions d'arithmétique ne sont considérées que dans des exercices sur les entiers. L'essentiel des contenus et les types de tâche proposés concerne le calcul numérique.

Notre première ingénierie aborde l'étude des points entiers d'une droite du plan. Elle a mis en évidence l'obstacle à reconnaître une caractérisation géométrique des solutions de l'équation de Bézout (existence et exhaustivité).

Cela montre, que pour franchir cet obstacle de changement de registres, il est nécessaire de proposer un type de situation plus « ouverte » et concernant un problème mathématique épistémologiquement consistant. Ce type de situation nécessite d'être proposée dans un contexte adidactique sur une durée « longue », ce qui permet, aussi, d'aborder des aspects liés à l'activité de recherche (modélisation, expérimentation, conjecture, preuve...).

Dans cette thèse, nous avons étudié la possibilité de faire la dévolution d'un changement de registre continu/discret et arithmétique/géométrie dans le cadre du modèle « Situation Recherche pour la Classe ». C'est un des objectifs de notre seconde ingénierie portant sur l'aire de polygones à sommets entiers (en référence au théorème de Pick).

Deux pré-expérimentations ont permis de cerner les conditions de prise en compte du registre discret pour une question relevant de la géométrie. Nous avons ensuite construit une dernière expérimentation en tenant compte de ces conditions.

L'analyse didactique de la situation sur Pick nous permet d'affirmer que, d'une part, le modèle SiRC est adapté à l'ingénierie de situations de changement de registres. D'autre part, elle montre aussi que l'arithmétique et la géométrie sont des domaines mathématiques pertinents pour les interactions de registre et le travail sur la preuve et le raisonnement.

Parmi les conditions pour une bonne dévolution des changements de registre, la « nature de la question » joue un rôle essentiel. Nous avons choisi dans l'ingénierie sur le problème de Pick (en référence au problème sur l'aire et les points d'un polygone) de demander de chercher une « méthode » ou une « formule » sans préciser les variables et les registres concernés.

Notre expérimentation a montré que ce type de question a permis le développement de nombreuses stratégies identifiées dans l'analyse mathématique du problème.

Une des perspectives à cours terme de notre thèse serait de modifier la première ingénierie sur « les points entiers sur une droite » en tenant compte aussi de ces conditions. Autrement dit étudier ce problème dans le modèle SiRC. On pourrait donner par exemple, comme variable de recherche, la nature de la droite (aucun point entier, exactement un point entier ou une infinité dénombrable de points entiers).

Une des perspectives à long terme serait d'identifier des questions qui permettent de travailler sur l'activité de recherche en mathématique et la représentation de ce que c'est que « faire des mathématiques ». Une telle recherche permettrait de comprendre le rôle des questions « ouvertes » dans le modèle SiRC. Nous avons déjà repéré que, une question du type « chercher une méthode » ou « une formule » présente des similitudes avec les situations de définition développées dans la thèse de Ouvrier-Bufferet (Ouvrier-Bufferet, 2003).

BIBLIOGRAPHIE

- Battie, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique*. Thèse, Université Paris 7 - Denis Diderot, Paris.
- Berre, M. (2002). Du PGCD au nombres irrationnels, approche géométrique. *Répère IREM*, n°46, pp. 27-37. REM de Grenoble
- Blatter, C. (1997). Another proof of Pick's area theorem. *Math. Mag.* n°70.
- Bresenham, JE. (1965). Algorithm for computer control of a digital plotter. *IBM Systems Journal*, 4(1), pp. 25-30
- Calame, A. (1988). La formule de Pick. *Math-Ecole*, n°133, pp. 3-10.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologiques du didactique. *Revue de Didactique des mathématiques*, 19(2).
- De Loera J.A, Hemmecke R., Tauzer J., Yoshida R. (2004). Effective lattice point counting in rational convex polytopes, *Journal of Symbolic Computation*, Vol 38, n°4, pp. 1273-1302.
- DeTemple, D. (1989). *Pick's Formula: A Retrospective*, Washington State University.
- Dissa, S. (2018). Points entiers sur une droite, un problème entre arithmétique et géométrie. *Petit x*, n°107, pp. 29-48. IREM de Grenoble.
- Dubeau, F. et Labbé, S. (2007). Euler's Characteristics and Pick's Theorem. *Int. J. Contemp. Maths. Science*, Vol 2, n°19, pp. 909-928.
- Duval, R. (1991). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, n°5, pp. 37-65.
- Ehrhart, E. (1967). Démonstration de la loi de réciprocité pour un polyèdre entier, *C. R. Acad. Sci. Paris*, n°26, pp. 5-7.
- Freeman, H. (1970). Boundary encoding and processing. In B.S. Lipkin & A. Friedelmeyer, M., Moreau, J. (2015). Le théorème de Pick. *Bulletin vert de l'APMEP* n°516, pp. 597-604.
- Gardes, M.-L. (2012). Démarche d'investigation en arithmétique, entre essais et conjectures - un exemple en classe de Terminale Scientifique. *Petit x*, n°83, IREM de Grenoble.
- Gaskell R. W., Klamkin M. S. et Watson P. (1976). Triangulations and Pick's theorem, *Math. Mag.*, n°49, pp. 35-37.
- Godot, K. (2006). La roue aux couleurs : une situation de recherche pour apprendre à chercher dès le cycle 3. *Grand N*, n°78, pp. 31-52. REM de Grenoble.

- Grenier D. (2012). Une étude didactique du concept de récurrence. *Petit x*, n°88, pp. 27-47. IREM de Grenoble.
- Grenier d., Payan, Ch. (1998) Spécificités de la preuve et de modélisation en Mathématiques Discrètes, *Revue de Didactique des Mathématiques* vol. 18.1, pp.59-100, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Grenier D., Tanguay D. (2008) L'angle dièdre, notion incontournable dans les constructions pratique et théorique des polyèdres réguliers. *Petit x*, n°78, pp. 26-52. IREM de Grenoble.
- Grenier, D. Fabert, C. (2011). Une étude didactique de quelques éléments de raisonnement de mathématiques et de logique. *Petit x*, n°87, pp. 31-52.
- Grunbaum B. et Shephard G. C. (1993), Pick's theorem, *Amer. Math. Monthly*, n°100, pp. 150-161.
- Guinot, M. (1992). *Arithmétique pour amateurs*. Aléas édition.
- Hardy, G. H., & Wright, E. M. (2007). *Introduction à la théorie des nombres* (Traduction de François Sauvageot). Vuibert-Springer.
- Itard, J. (1961). *Éléments, livre VII et IX*, (trad. dans "les livres arithmétiques d'Euclide"). Ed. Hermann, Paris.
- Kolodziejczyk K., Hadwiger-Wills-Type (2000), Higher-Dimensional Generalizations of Pick's Theorem, *Discrete Comput. Geom.* n°24, pp. 355-364.
- Lafond, M. (2015). Représenter plus pour démontrer plus. *Bulletin vert de l'APMEP* n°513, pp. 132-142.
- Macdonald I.G. (1963), The volume of a lattice polyhedron, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* n°59, pp. 719–726.
- Majaj, M. (2006). *L'enseignement de l'arithmétique en France au collège et la transition collège/lycée*. Thèse, université Claude Bernard Lyon I, Lyon.
- Ouvrier-Buffet, C. (2003). *Construction de définitions/construction de concept: vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques ; étude épistémologique et didactique de la définition ; étude théorique et expérimentale de la dévolution de problèmes de construction de définitions, auprès d'étudiants de 1ère année d'université*. Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- P. Gerwien, (1833). Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke, *J. Reine Angew Math.*, vol 10, pp. 228-234.
- Pick G. (1899). Geometrisches zur Zahlenlehre, *Sitzungber. Lotos (Prague)*, n°19, pp. 311-319.
- Ravel, L. (2003). *Des programmes a la classe : étude de la transposition didactique interne- exemple de l'arithmétique en terminale s spécialité mathématique*. Thèse, Université Joseph FOURIER, Grenoble.
- Reeve J. E. (1957). On the volume of lattice polyhedra, *Proc. London Math. Soc.* Vol.(3) 7, pp. 378-395.

Reeve J. E., (1959). A further note on the volume of lattice polyhedra, J. London Math. Soc., n°34, pp. 57-62.

Reveillès, JP. (1991). *Géométrie discrète, calculs en nombres entiers et algorithmique*. Doctorat d'état, Université Louis Pasteur, Strasbourg

Rosenfeld, A. (1974), Digital straight line segments. IEEE Trans. *On Computers*, C-23, pp. 1264-1269.

Steinhaus, H. (1964). *Mathématiques en instantanés*. Flammarion, Paris.

MANUELS SCOLAIRES

Collection CIAM. (1999). *Terminale SM Mathématiques*. EDICEF.

Collection Indice. (2012). *Terminale S Spécialité*. Bordas.

Collection Symbole. (2012). *Maths Term. S enseignement de Spécialité*. Belin.

Collection Transmath. (2012). *Terminale S Spécialité*. Nathan.

PROGRAMMES SCOLAIRES

Ministère de l'éducation nationale de la France. (2011). Bulletin Officiel spécial n°8. *Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques - Classe Terminale S*.

Ministère de l'éducation nationale du Mali. (s.d.). Programmes de mathématiques. *Programme des classes de 7ème, 8ème, 9ème du second cycle de l'enseignement fondamental*.

Ministère de l'éducation nationale du Mali. (1992). Programmes de mathématiques. *Programmes, savoir-faire et découpage de programme des classes de 10ème, 11ème, 12ème*.

Ministère de l'éducation nationale du Mali. (2011). Programmes de mathématiques. *Programmes des classes de 10ème, 11ème, 12ème*.

ANNEXES

**Description détaillée
de l'expérimentation de la situation 2
(la formule de Pick)**

Groupe 1

Les étudiants seront désignés par E1, E2 et E3 et le polygone distribué pour les recherches sera nommé P dans la suite du texte.

Dans un premier temps les étudiants essaient de retrouver un exercice sur lequel ils ont travaillé qui apparemment liait le produit scalaire et l'aire d'une figure.

L'un d'eux décide de définir un polygone vert inclus dans P , qui est composé d'une réunion de carrés strictement inclus P . Puis définit un polygone rouge qui est le plus petit contenant P , et étant une réunion de carrés.

Voici l'illustration pour expliquer ce qui a été fait :

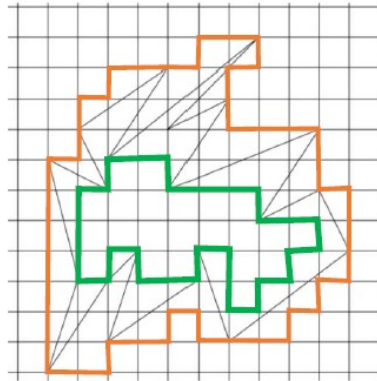


Figure 2

Ce dessin ne leur donne aucune information sur le lien entre point intérieur, point extérieur, point du bord et l'aire de la figure. Ils abandonnent rapidement celui-ci pour retrouver leurs formules sur le produit scalaire.

Le chercheur intervient et pose quelques questions pour savoir quelles sont les informations que ce dessin peut apporter pour leurs recherches, et est-ce qu'ils sont finalement sûrs qu'on ne peut rien en tirer ?

E2 « si par exemple on veut l'aire d'un triangle, 'fin si le polygone c'est un triangle donc si on décide que c'est un truc comme ça, ben l'aire rouge sera zéro et l'aire verte ce sera le rectangle. »

Chercheur « Donc ? »

E2 « Donc ça donne pas vraiment d'information, pour.. »

Chercheur « Ah bon ? »

E2 « 'fin ça majore déjà mais... »

Chercheur « Oui mais est-ce que tu peux me dessiner, je sais pas moi, un polygone tel que c'est 18 fois ton aire verte et 18 fois l'aire de ton polygone, 18 fois ou un nombre quelconque de fois parce que là ce que tu me dis c'est en gros la moitié. Tu peux me dire « je suis à la moitié de l'optimum » »

E2 « Oui »

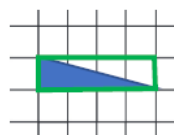


Figure 3

Chercheur « j'ai quand même cette approche. Est-ce que c'est toujours vrai ? je dis pas que c'est toujours vrai hein, mais est-ce que c'est toujours vrai. Sinon... Par contre ce que ça montre c'est qu'effectivement le rouge, il est arbitrairement mauvais parce que là il vaut 0 »

E2 « Oui oui voilà »

Chercheur « Donc ce que ça montre, que le rouge... effectivement ce dessin là, que le rouge peut être arbitrairement mauvais mais montre pas que le vert... »

E2 « Oui je vois je vois »

Cette discussion les amène à remarquer que l'aire du polygone étudié est égale au maximum à l'aire du polygone rouge dans la figure 1, et au moins égale à l'aire du polygone vert. La notion de « au plus » et « au moins » est évoqué rapidement. L'un d'eux décide de s'intéresser uniquement aux points intérieurs. Il partage l'idée suivante :

E1 « si je prends des points... un nuage de point quelconque, et je considère une figure qui n'a que ces points en coordonnées à l'intérieur.. à coordonnées entières à l'intérieur je pense qu'elle est unique. Je pense pas que tu puisses en avoir deux. Si tu as unicité de la figure, tu as unicité de l'aire »

E2 « C'est-à-dire par exemple ces points rouge là y a que... »

E1 « Y a que cette figure qui peut les contenir »

E2 « tu comptes ceux qui sont à la frontière ? Ils sont dedans ou dehors ? »

E1 « moi je les considère pas en fait. Je considère que les points intérieurs. J'ai pas l'impression que je puisse construire d'autres... »

E2 « si par exemple si tu prends ce point-là. Si ce truc là tu le places ici. »

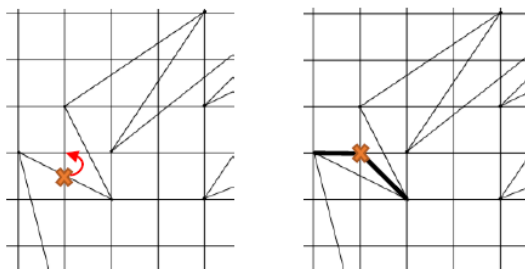


Figure 4

E1 « J'aurai pas un nouveau point intérieur »

E2 « Tu auras des nouveaux points sur la frontière »

E1 « Ah non tu as peut-être pas unicité »

E2 « je sais pas »

E1 « oui, j'ai un doute »

E2 « si tu comptes les points qu'il y a sur la frontière, il y a pas unicité »

E1 « si tu prends deux figures qui ont les mêmes points intérieur alors elles ont la même aire.»

E2 « Pourquoi il y aurait ça ? »

E1 « ah ça m'apparaît... Si tu essaies de faire des dessins, deux figures qui ont les mêmes points intérieurs et qui ont pas la même aire. Déjà faire des figures qui ont que les mêmes points intérieurs et qui se ressemblent pas c'est compliqué, et je pense qu'elles ont la même aire.

Après plusieurs essais pour trouver un contre-exemple à cette idée un étudiant propose ce dessin, qui montre que le nombre de points intérieur est bien identique sur les deux polygones (celui de base, et le deuxième auquel on a ajouté l'air bleu) :

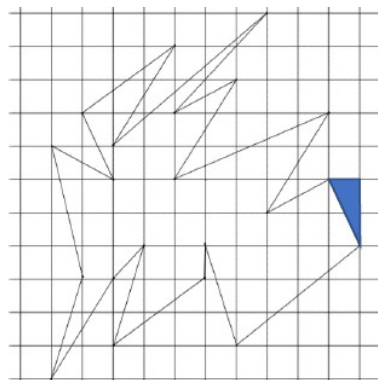


Figure 5

A la suite de cette démonstration, ils décident de s'intéresser uniquement aux points intérieurs dans le cadre des triangles. Mais le cas du triangle d'aire $1/2$ leur pose toujours problème car il n'a pas de point intérieur. L'un d'eux leurs suggère de considérer qu'un polygone contient au moins un point intérieur.

E2 « Si tu prends un triangle rectangle qui fait ça et un carré qui fait ça »

Désigne le carré unité de la grille et le triangle rectangle d'aire $1/2$

E1 « Oui mais ils ont pas la même aire »

E2 « Peut-être qu'il faut considérer la frontière »

E1 « Oui ou considérer qu'il y a au moins un point intérieur »

Cela remet donc en cause pour eux l'intérêt des points intérieurs. Plutôt que de chercher un lien entre ces points et l'aire de la figure, ils décident de partir sur la triangulation, qui leurs permettrait à partir du polygone proposé de se ramener à un ensemble de triangle « plus simple » à étudier. Plusieurs manières de trianguler sont alors étudiées :

La première consiste à découper la figure en triangles quelconques et de sommer toutes leurs aires, après quelques essais ils pensent que le choix des triangles risque d'avoir des conséquences sur les calculs. C'est pourquoi ils cherchent à mettre en place une autre méthode qui ne dépendrait selon eux pas du choix de ces triangles.

E1 « Tu te ramènes à une découpe où tu as pas de choix à faire, parce que là on est obligé de faire des choix, et comme ça t'as des triangles déterminés. Tu prends un point random dans la figure pour avoir des triangles déterminés. Et ensuite bah après à savoir déterminer l'aire d'un triangle dans un quadrillage en fonction d'à priori... ça ça va, en théorie on sait faire... »

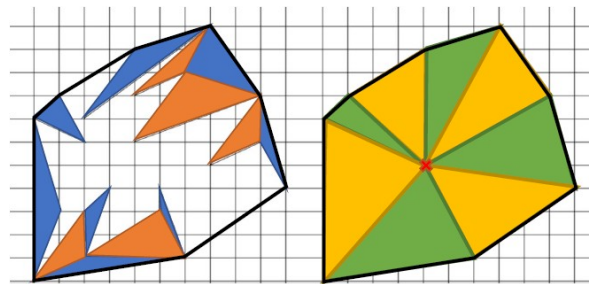


Figure 6

Figure 7

Cette seconde méthode consiste à rendre le polygone P convexe en lui ajoutant des triangles. (figure 6) Ils considèrent cela toujours réalisable car ils l'ont vue en cours bien qu'il faudrait le démontrer. Ensuite il faut calculer l'aire α de ce nouveau polygone. Ils choisissent un point intérieur (celui qu'on veut) et le relie à tous les sommets ce qui leurs permet de trianguler la figure « simplement » (figure 7) et d'ensuite sommer les aires de tous ces triangles. Puis il reste à soustraire à cette aire α , l'aire des triangles que l'on a ajouté pour construire ce polygone convexe.

Ils s'aperçoivent que le problème revient au même que le précédent et c'est à dire sommer des aires de triangles sans s'intéresser aux points.

Une question se pose alors sur le choix du découpage de la figure. Au lieu de choisir des triangles quelconques, pourquoi ne pas choisir une figure, la plus petite possible dont on pourra déterminer « simplement » l'aire et qui pave tout polygone du plan. Ils excluent rapidement les carrés pour paver n'importe quel polygone, et choisissent finalement les triangles rectangles d'aire $1/2$. Mais il leurs paraît difficile de paver tout polygone avec uniquement des triangles rectangles. Leurs recherches se terminent sur la recherche d'une autre figure qui puisse paver n'importe quel polygone et l'un d'eux propose « un quart de carré ».

----> début Séance 2

Cette séance dure 30 minutes de recherche. L'étudiant E1 de la séance précédente n'est pas présent, mais un étudiant n'ayant pas suivis les recherches la fois dernière rejoint le groupe. Il sera désigné dans la suite comme l'étudiant **E4**.

Les étudiants ne repartent pas sur leurs recherches établies la fois précédente. Tout de suite l'un d'eux propose de remarquer cela :

E2 « tous les cotés sont la diagonale d'un rectangle »

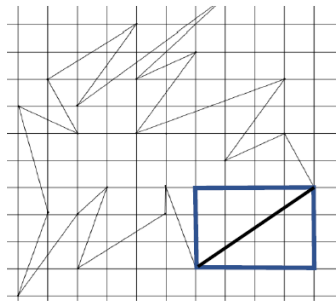


Figure 8

Avec cette observation il est plus simple pour eux de calculer l'aire du triangle qui est l'intérieur du polygone. Cependant en continuant leurs recherches sur tous les côtés du polygone, ils remarquent que certains rectangles « se chevauchent ».

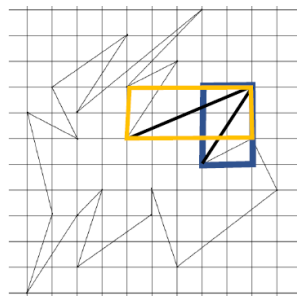


Figure 9

E4 « On utilise les formes, on utilise pas les points, le nombre de point...Ah ! euh..»

E2 « Ouais ? ... T'avais l'air d'avoir une idée fulgurante ! »

E4 « Ouais mais elle est partie aussi vite »

E2 « Parce qu'on avait déjà fait des trucs avec des points intérieurs, je vois pas trop trop.. »

E2 « Mais c'est quoi ton idée vas y ? »

E4 « C'était de voir si on pouvait calculer une aire avec juste les points.. en comptant le nombre de point »

E2 « Ouais je sais pas »

E4 « Donc la on arrive.. L'aire de ce machin c'est 6, donc c'est 8-2 »

E2 « Après ouais le truc c'est que tu peux toujours faire des figures et des triangles avec 0 point intérieur... ah, ou que 3 points intérieurs si tu comptes les côtés. Tu pourras toujours en faire comme ça »

A partir de cette dernière phrase de l'étudiant E4, ils se mettent à essayer de trouver une relation sur les figures suivantes :

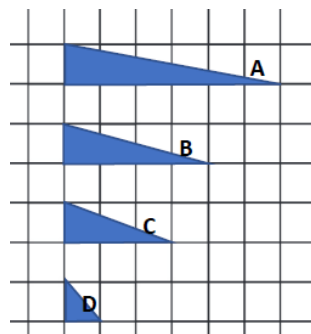


Figure 10

Ils observent les relation suivantes pour chacun de ces triangles : Le premier nombre étant à chaque fois le nombre de point du bord.

$$\text{Aire de A} = (8-2)/2$$

$$\text{Aire de B} = (6-2)/2$$

$$\text{Aire de C} = (5-2)/2$$

$$\text{Aire de D} = (3-2)/2$$

-----Fin de la séance-----

Groupe 2

Les étudiants sont désignés par R, S, T.

R « on va hachurer les carrés strictement contenus dans le polygone. Ensuite, on s'intéresse au bord, si on peut reconstituer les carrés ou pas ».

Les deux autres consentent.

R « on peut dire que les carrés pleins sont d'aire 1. »

S « oui c'est ça, pour tous les carrés intégralement contenus »

Les étudiants hachurent chacun sur leur fiche « Exemple de polygone », les carrés identifiés comme strictement contenus dans le polygone. Mais aucun ne dénombre ces carrés.

R continue son explication. Il montre sur sa fiche, des carrés sur un bord dont la somme des aires (selon lui) est égale à 1.

R « J'ai l'impression que cet aire là, si tu la complète avec celle - ci tu obtiens 1. Celui-là et celui - là aussi font un. Les deux autres.... Ha non il en manque une! C'est pas gagné. Ce n'est peut être pas vrai ! ».

T « pourtant, je trouve que celui-là et celui-là ce complète ». Tout en indiquant des portions de carrés.

S n'est pas convaincu par la méthode de **R**, pour ce qui concerne le calcul de l'aire des portions de carrés des bords. Il propose de faire des rectangles sur les bords et de calculer l'aire à partir des formules.

R « ce que tu proposes va être trop long ! Si on trouve un moyen de retrouver les parties qui se complètent en 1, cela serait beaucoup plus simple »

Ils poursuivent donc sur la proposition de R. Ils trouvent finalement que les portions de carrés du bord ne se complètent pas toujours pour donner une valeur entière. Ils se lancent alors à la recherche de conditions pour lesquelles les portions de carrés se complètent pour un bord.

En faisant des calculs sur quelques cas, ils font l'observation suivante :

« Si le coté du polygone est la diagonale d'un rectangle (impair*impair) alors la somme des aires de portions de carrés est un entier+1/2. Sinon l'aire est égale un entier ».

L'étudiant **R** rajoute qu'ils ne savent pas pour le moment si cela peut être généralisé ou pas.

Il formule alors cette conjecture : « L'aire des portions de carrés du bord est soit un entier, soit un entier + 1/2 ».

On vient faire 26 minutes depuis le début. Les étudiants ne font toujours aucune référence aux points de la grille.

Le chercheur intervient alors pour une faire une relance.

Chercheur « Ce que vous avez fait jusqu'à présent est intéressant mais selon l'énoncé du problème, on voudrait savoir s'il y a une relation entre l'aire du polygone et les points de la grille »

Les étudiants semble avoir oublié les consignes du début de la séance.

L'un demande : « qu'est ce qu'on nous donne au départ pour faire ce calcul ? Les coordonnées des sommets ? »

Chercheur « tout ce qu'on a c'est que le polygone est sur une grille carrée régulière. Nous pouvons tout simplement déduire de cela qu'il y a des points de la grille qui sont intérieurs au polygone, des points extérieurs au polygone ou sur ses bords »

R « Avec ces histoires de points intérieurs et tout ça, je ne vois pas trop où est ce que ça peut nous amener »

Ils commencent alors à construire des polygones sur la grille et à marquer des points.

R « je trouve que si on construit un polygone sur la grille, il y a des points intérieurs, extérieurs et sur la frontière » ;

(Après un moment d'observation sur leurs fiches, **R** indique que les points extérieurs ne doivent pas intervenir pour déterminer l'aire.)

S « je trouve que si on devait chercher une majoration ou une minoration de l'aire, les points peuvent nous aider. »

R « oui, je pense que pour une minoration de l'aire, les points intérieurs correspondent aux carrés que nous avons coloriés à l'intérieur. Mais après pour trouver l'aire exacte... Le problème me fait penser à du carrelage ».

T « je ne comprends pas trop l'histoire de point extérieurs... »

S « et si on faisait une figure régulière et on essaye de s'intéresser aux points intérieurs si ça nous donne une information sur son aire. Par exemple si on prend ce triangle, on peut regarder les points intérieurs et sur les cotés. Puis on calcule l'aire »

R et **T**, consentent à explorer cette piste.

C'est le tournant de leur résolution. Nous sommes à 35min depuis le début de la séance.

Ils commencent alors à construire des figures familières (triangles, carré, parallélogramme) sur la fiche « grille » et à marquer les points intérieurs, les points du bord.

R « construit un parallélogramme et essaye de faire un lien avec un cours d'algèbre. »

Il s'en suit alors une exploration par les étudiants de différent cas sur le triangle:

- Triangle sans point intérieur et 3 points au bord (sommets) ;
- Triangle sans point intérieur et 4 points au bord ;
- Triangle sans point intérieur et 5 points au bord ;
- Triangle avec 3 points au bord, 1 point intérieur ;
- Triangle avec 3 points au bord, 2 points intérieurs.

Ils en ont déduit les observations suivantes pour le triangle :

C1. « Un triangle sans point intérieur et qui n'a que ses sommets sur la grille, a pour aire $1/2$ »

C2. « Dans un triangle, si le nombre de point intérieur est fixé, en augmentant le nombre de point du bord de 1, l'aire du triangle augmente de $1/2$

C3. « Dans un triangle, si le nombre de point du bord est fixé, en augmentant le nombre de point intérieur de 1, l'aire du triangle augmente de 1.

Chercheur « Pensez-vous que votre observation (C1) est vraie pour tous les triangles de cette forme sur la grille ?

Il leur propose un cas de triangle (sans point intérieur) très aplatis. En leur demandant de trouver l'aire. **R** trouve $1/2$ comme solution en reconfigurant le triangle.

Chercheur « Comment construisez-vous donc ce type de triangle ? Autrement comment construire un segment qui n'a que ses sommets sur la grille ?

Après un moment de recherche,

S propose : « je trouve qu'il faut que le segment corresponde à la diagonale d'un rectangle dont les cotés sont premiers entre eux. »

La séance 1 s'arrête sur la recherche de preuve de l'observation C1

-----→ **début séance 2**

L'étudiant T est absent

Chercheur « est ce que vous vous rappelez de ce que vous avez fait la séance dernière ? »

R « oui, on voulait trouver une relation. En fait, on essayait de la conjecturer. Quand on a une figure, notamment le triangle, il y a une relation entre le nombre de points intérieurs, le nombre de points au bord, avec l'aire. Donc, ce qu'on disait, sait que, à point intérieur fixé, lorsqu'on augmente le nombre de points au bord de 1, ça faisait $1/2$ de plus pour l'aire et lorsqu'on augmentait le nombre de points intérieurs de 1, ça augmentait l'aire de 1. »

Chercheur « je pense que vous avez trouvé aussi quelque chose sur l'aire d'un triangle particulier. »

R « oui, on avait trouver que lorsqu'on a un triangle qui n'a que ses trois sommets sur la grille, son aire fait $1/2$. On l'a fait sur plusieurs cas, l'aire faisait toujours $1/2$. Et on voulait montrer que cela est vrai tout le temps ! »

Chercheur « vous avez effectivement fait sur plusieurs cas. On vous avait d'ailleurs donné aussi le cas d'un triangle très aplati. »

R « oui, j'avais trouvé que l'aire fait $1/2$ pour ce cas aussi. Du coup, ça l'air d'être vrai tout le temps. Enfin, il faudrait qu'on arrive à le démontrer donc ! »

Chercheur « ce qu'on vous demande durant ces 20mn, c'est de rassembler vos résultats de la séance dernière ou d'approfondir l'exploration d'une piste de solution. »

R « on se disait que sur ça (cas du triangle d'aire $1/2$), on a pas trop d'idée sur comment le prouver. Du coup, on s'est dit qu'on allait le laisser à part et essayer de revenir à la figure et de trouver, de relier cette histoire de points intérieurs, points au bord avec (vraiment) pas que pour un triangle mais avec l'aire d'une figure quelconque pour essayer d'aller jusqu'au bout. Alors, on aura pas prouver ce qu'on dit. Enfin, ça à l'air d'être vrai. Il reste à le prouver mais au moins on serait allé jusqu'au bout pour arriver à un résultat concret, même si on a pas la preuve. Afin qu'on ait quelque chose à présenter. »

Chercheur « d'accord. »

S « l'idée ça sera donc de compter pour les triangles (qui restent), les points intérieurs, les points au bord ? »

R « ça voudrait dire par exemple, qu'il faudrait qu'on arrive à le trianguler, à transformer la figure qu'en des triangles comme ça, tu vois. »

(Il commence la triangulation de la figure).

S « je pensais qu'on allait prendre une figure centrale au maximum et on ne laisse que des triangles. »

R « en fait, on doit trouver une relation, en enlevant pas les carrés pleins, mais juste en comptant tous les points à l'intérieur de la figure. Et je pense que ça doit revenir à la même chose. Tu vois, si tu fais des triangles commence ça. »

(Il construit un triangle à partir des sommets de la figure donnée).

S « ha d'accord ! Les sommets des triangles correspondent à des sommets de la figure ? Et carrément, on a que des triangles. »

R « oui. Du coup, comme on peut l'appliquer ici et ici, on aura l'aire de tout ça. »

(Il montre à **S** deux triangles qu'il vient de construire.)

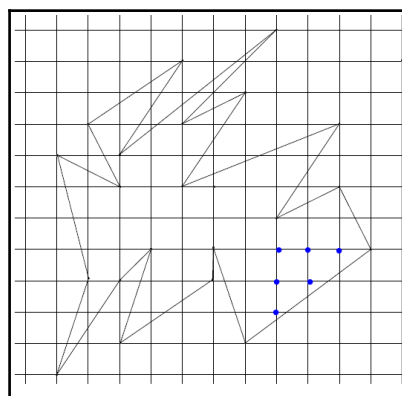


Figure 1. Deux premiers triangles construits

R : par exemple, pour ce triangle, on a deux points intérieurs et 3 points au bord. Cela veut dire qu'on a une aire de $2+1/2$ c'est à dire $5/2$. (Cf. Figure 1 – triangle du haut)

S : c'est vrai ça ?

R : oui. Deux points intérieurs ça fait 2 unités et 3 points au bord (c'est le minimum). Donc ça fait $5/2$.

(Il essaye d'appliquer la même méthode sur un autre triangle)

R : là, on a 6 à l'intérieur et 3 à l'extérieur, donc $6+1/2$. C'est à dire $13/2$ (l'aire totale).

Du coup l'aire de cette partie là (il montre la partie qui regroupe les deux triangles). Elle fait $5/2+13/2=9$.

Mais si au lieu de séparer ça (il montre la partie qui regroupe les deux triangles – Figure 1). On dit (il compte les points) 8 points à l'intérieur, 4 points au bord. Du coup, on a bien l'aire : $8+1/2$ (pour 3 points bord)+ $1/2$ (1 point au bord ajouter), ce qui donne 8.

S suit attentivement les explications.

R « du coup, je pense que pour toute la figure, il suffit de compter tous les points intérieurs et les points au bord. Là, je pense qu'on va trouver une petite formule sympa, je pense. »

Ça pourrait être : si on appelle b le nombre de points au bord et pour l'intérieur i .

(Il commence à poser un formule.)

S « Donc rien que pour un triangle, on a la formule de l'aire, en fonction des points intérieurs et des points au bord ? »

R « oui. On avait, un point intérieur, il vaut 1. C'est à dire à chaque fois que tu ajoutes un point à l'intérieur, tu ajoutes 1 à l'aire. Et pour les points au bord, on commence à 3. »

S « donc ça fait : $i+(b-3)*1/2$. Mais il faudrait ajouter $1/2$ puisque l'aire de départ fait $1/2$. »

Ils notent sur leur copie : $A(b, i) = i+(b-3)*1/2+1/2 = i+b/2 - 1$

R « cette formule s'applique à un triangle, mais pour un carré ou n'importe quel quadrilatère tu peux l'appliquer. Et même pour la figure qu'on a. »

S ne semble pas très convaincu.

S « vérifions pour des cas. »

R « par exemple, si on prend ce quadrilatère (il le construit sur la grille un quadrilatère avec $b=5, i=11$). (cf. Figure 2)

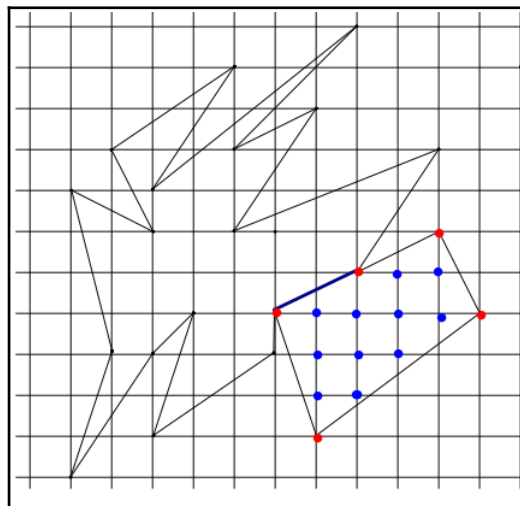


Figure 2. Polygone ($b=5, i=11$)

Ils se partagent les calculs. E1 calcule l'aire de façon « classique » et E2 applique la formule qu'ils viennent de trouver. Ils obtiennent le même résultat : $25/2$.

R « cette formule qui est vraie pour un triangle, est vraie pour n'importe quelle figure par linéarité, en recollant, en additionnant en fait. Par exemple, cette figure là, on peut la diviser en des triangles. »

Il commence la triangulation de la figure, mais il est bloqué après la construction de quelques segments.

Chercheur « mais est ce que cela sera toujours possible ? »

R « ah ! Bonne question ! »

Il parvient finalement à trianguler la figure. Il essaye alors de trouver une justification.

R « étant donné une figure avec un certain nombre de sommets, ça me paraît assez naturel qu'on parvienne, qu'on puisse le faire. Mais je ne sais pas si c'est vrai ! »

Chercheur « vous pouvez me résumer votre idée ? »

S « notre idée, c'est que si la formule marche pour un triangle et que n'importe quel quadrilatère est triangulable. On pourrait extrapoler la formule à n'importe quel quadrilatère qui serait triangulable. »

R « en tout cas, je pense que cette formule est vraie. »

S « mais après, est ce que tout quadrilatère est triangulable ? »

R « je pense que c'est oui. Pour un triangle c'est simple. Pour un quadrilatère, il suffit de relier les points opposés. Pour un hexagone, je ne sais pas. Est ce que s'il n'est pas régulier ça marche ? »

Il construit un hexagone, puis un premier triangle (intérieur à l'hexagone).

R « peut être que ça se fait avec une espèce de récurrence. Parce que là, on a fait un premier triangle. Et là, on se retrouve avec le cas d'un quadrilatère qu'on a traité juste avant. »

S « mais avec ça, il faudrait qu'on le fasse avec toutes les formes géométriques possibles ! »

R « oui c'est vrai. Mais je pense qu'il suffit d'un ensemble de sommets, juste avec les sommets. On ne pourra pas le faire avec les coordonnées. Mais par exemple, si on a un polygone à 5 sommets, on peut relier forcément 3 d'entre eux. »

Ils se mettent à construire des cas.

S « mais en fait, comment se fait que la formule soit linéaire ? Parce que si tu comptes les points intérieurs ça va, mais pour ces points au bord, on les compte pour ce triangle et pour ce triangle. »

R « ah oui ! »

S « donc pour un point au bord, il sera compter plusieurs fois. Mais pourquoi ça marche ? On a bien le même résultat. Mais c'est un peu bizarre non ?

R « pour autant, on trouve la même chose ! Ah, ce n'est pas trivial que ça soit linéaire ! »

S « oui c'est ça. »

S (au chercheur) : qu'est ce que vous pensez de ça ?

Chercheur « je suis observateur ! »

R « peut être que le cas qu'on a choisi est particulier. »

S « oui c'est possible. »

R « choisissons un autre. Si c'est vraie pour ce cas, on aura deux cas. On pourrait dire que c'est vraie peut être. On le fait pour être sûr au moins que la formule marche.

Ils se lancent alors à vérifier leur formule sur un second polynôme : $A(b=6, i=6)=15/2$.

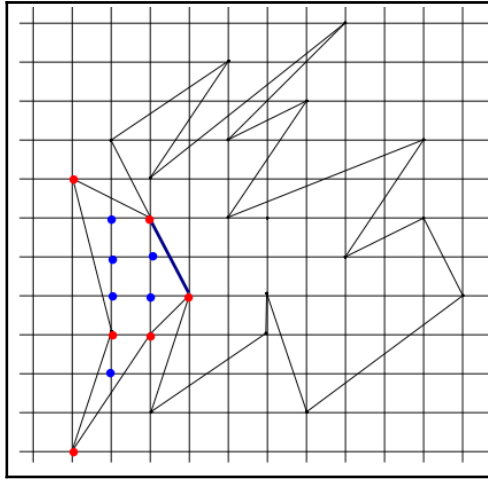


Figure 2. Polygone (b=6, i=6)

En conclusion, ils trouvent que la formule marche sur ce cas aussi.

-----Fin de la séance 2-----

Groupe 3

Ils sont trois dans ce groupe. Les étudiants sont désignés A, B, C.

i = points intérieurs et b = point du bord.

B : on connaît l'aire d'un carré.

A : y a des points intérieurs, extérieurs, bords. Il faut prendre des cas simples.

B : l'aire d'un triangle, on connaît. Ils ne veulent pas qu'on fasse ça.


C : prendre les carrés entiers.

B : le grand carré est un bonne majoration.


A trace un tableau avec : nombre de points intérieur – extérieur – bord – aire

C n'a pas compris « intérieur »

A dessine 

B dessine un carré unité : 

A dessine un triangle rectangle et calcul : $1*2/2$

B : si on prend le rectangle : 

A observe les données du tableau

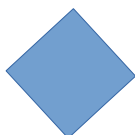
B : si on te donne le nombre de point toujours 0 à l'intérieur..

A : 1ère supposition : $b/2-1$. Il vérifie la formule sur les 4 exemples.

B : pour ne pas avoir de points intérieurs

A à B : infinité de points intérieurs

Chercheur : et en travers ?

A : dessine  $b=1, i=1$ (fig.5). Il fait un 2è tableau.

A : fig 6. Veut même nombre de points aux bord mais intérieur différent de 1 ($b=4, i=4$)




A : j'avais tendance à dire que *aire*=5

B et **C** : vérifie, oui c'est bon

A : remplit le tableau. Oublions les points du bord. $4/2-1+4=5$

A : hypothèse $b/2+i-1$?

B : oui

A : maintenant essayer avec , , , pas particulier
(Ils reviennent sur le polygone exemple donné)

A : trace un 

C : dessine un triangle rectangle ?

B : pas obligé

il est isocèle

A : numérote les figures

B : fig7 $a, i=4, b=8, \rightarrow 9$ ça marche !

C : fig8  en travers

B : $(base * hauteur)/2$.. Rires !

C : compte $b=6$

A : prend un feutre vert et partitionne en 

B : passe par hauteur

A : tu veux faire base*hauteur toi ?

A et B compte

C : on peut calculer ? Il y a un problème, la formule donne 6, nous on trouve 5.

A : c'est exacte à la formule ? Puis il hachure un des petits triangles intérieurs pour l'étudier.

A, B, C, essaient de calculer les # aires

A : preuve que l'aire de la flèche, ça fait un

C : C'est pareil que ça. Pour lui la formule elle marche.

A : truc hyper-moche

Ils sont très sûr de leur « conjecture 1 »

A : prouver ?

(Ils reviennent sur l'exemple proposé)

A colorie tous les carrés entiers à l'intérieur

C vérifie - en fait rajoute un - hésite sur un qui est un peu coupé

B compte 22 carrés

B et C comptent les points, les colorient pour mieux les voir

Pour les points frontières :

C : compte les points frontières : $b=23$

A et B vérifient

Pour le points intérieurs :

B fait un petit rond

C colorie


A : compte de manière ordonnée sur chaque ligne. $i=36$

C : je pense qu'on peut recompter

(A a fait un cours sur les graphes à Genève)

B et C recompte les points intérieurs, en trouve 36.

A : $aire=46,5$. Au vue de nez, ça a l'air juste. Ça va être horrible.

A demande une nouvelle feuille exemple et fait une partition différente en  faciles
→ 6, 3/2

B : j'aurais fait qu'avec des bords

A : pas grave, mais c'est un bord.

A : (le 4° triangle) : ça va être horrible

Abandon sur le 5° triangle, trop compliqué

A : il vaut mieux prouver directement.

Chercheur : d'où viennent les formules conjecturées en particulier « -1 ».

A : trace une nouvelle figure plus simple

montrer que la triangulation n'affecte pas notre formule.

C : problème. Les points intérieurs, ils sont plus intérieurs,..

point intérieurs jamais comptés.

A explique, les points bords comptés 2 fois mais comme divisé par 2 (ok?)

A : si point au bord, il reste au bord

B : oui, mais de 2 triangles

A : donc ah oui va compter deux fois ?

A fait un rectangle et la diagonale

On regarde la formule

A dessine un polygone, effectue un découpage hyper-compliqué

C, B comptent \rightarrow ça marche : $8/2+1-1=4$

A : 4 points au bords. $Aire=4/2+0-1=1$

B : maintenant, il faut la montrer la formule.

C dessine un pentagone régulier pour voir si ça marche ?

A : est ce qu'on peut ?

A et B : non !

En diagonale ça ne marche pas

C dessine un pentagone pas régulier

B dessine un trapèze

A revient aux triangles

B dessine un  en augmentant plus les points du bord

A : un triangle son aire $base*hauteur/2$

C : Si on ..

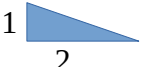
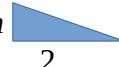
A fait le théorème de Pythagore quelque soit le triangle (rires?)

C redit ah c'est intéressant !

A : ah quelque soit le triangle, on le découpe en de triangles rectangles

C prononce « récurrence »..

preuves un tordues

B : y a pas une récurrence à faire. Si  \rightarrow 

A : je suis chaud (?)

Montrons pour un triangle rectangle $1*n$ et après quelque soit la figure on découpe.

B : tout triangle peut se découper en triangles rectangle $1*n$.

C : sûrs de ça

A, B : pas sûrs

C : on écrit

B : connaît que tout polygone se décompose en triangle

A : admis

B : tout triangle $m*n$

A : montrons que la formule est invariante par rapport triangulation

B : déjà ?

C : ?

B : on sait que la somme des aires des triangles est égale à l'aire

A : pas évident que « tout polygone se partitionne en triangle »

pour  ok, mais pour  c'est pas évident.

A : dessine un triangle quelconque à sommets entiers (presque rectangle).

B : on cherche l'aire ?

(ils appliquent la formule)

B : $b=4, i=13$ donc aire=14

A : comment on va prouver

(ils reprennent les calculs)

(Le Chercheur reparle de la récurrence)

A : on prouve de $P(n)$ à $P(n-1)$

B : pour le triangle ?

C : montrons que ça marche pour les triangles d'abord – on a gagné

(Ils tentent d'écrire $P(n)$)

C : il faut faire intervenir n dans la formule ?

(rires)

On rajoute un sommet ? Un triangle ? C'est la même chose ?

B : le nombre minimal de triangle ?

Chercheur : c'est quoi une triangulation ?

Discussion sur définition de triangulation

----- fin de la séance 1-----

Durant la séance 2, le groupe recentre ses recherche sur la preuve par récurrence. Il n'y arrive pas.

Résumé

Cette thèse étudie la problématique de changement de registres dans l'enseignement des mathématiques. Plus spécifiquement, nous avons choisi d'étudier les registres de l'arithmétique et de la géométrie avec des interactions des domaines du continu et du discret.

Cette thèse montre, en particulier, que les situations adidactiques / didactiques « classiques » ne permettent pas de mettre en œuvre de telles interactions.

Nous avons montré, de plus, qu'il y a une forte prégnance du continu dans les conceptions des étudiants et même une résistance à considérer le discret. Nos expérimentations ont été réalisées auprès d'étudiants de Licence mathématiques et de formateurs.

Notre première ingénierie aborde l'étude des points entiers d'une droite du plan. Elle a mis en évidence l'obstacle à reconnaître une caractérisation géométrique des solutions de l'équation de Bézout (existence et exhaustivité).

Cela montre, que pour franchir cet obstacle de changement de registres, il est nécessaire de proposer un type de situation plus « ouverte » et concernant un problème mathématique épistémologiquement consistant.

Dans cette thèse, nous avons étudié la possibilité de faire la dévolution d'un changement de registre arithmétique/géométrie dans le cadre de « Situation Recherche pour la Classe ». C'est un des objectifs de notre seconde ingénierie portant sur l'aire de polygones à sommet entier (en référence au théorème de Pick).

Deux pré-expérimentations ont permis de cerner les conditions de prise en compte du registre discret pour une question relevant de la géométrie.

Nous avons construit une dernière expérimentation en tenant compte de ces conditions.

L'analyse didactique de la situation sur Pick nous permet d'affirmer que, d'une part, le modèle SiRC est adapté à l'ingénierie de situations de changement de registres. D'autre part elle montre aussi que l'arithmétique et la géométrie sont des domaines mathématiques pertinents pour les interactions de registre et le travail sur la preuve et le raisonnement.

Parmi les conditions pour une bonne dévolution des changements de registre, la nature de la question joue un rôle essentiel. Nous avons choisi dans l'ingénierie sur le problème de Pick de demander de chercher une « méthode » ou une « formule » sans préciser les variables et les registres concernés.

Notre expérimentation a montré que ce type de question a permis le développement de nombreuses stratégies identifiées dans l'analyse mathématique du problème.

Mots clés : didactique, arithmétique, géométrie discrète, changement de registre