



**HAL**  
open science

# Gaz quantique dans un potentiel périodique dépendant du temps : de la modulation perturbative aux résonances de l'effet tunnel assisté par le chaos

Maxime Arnal

► **To cite this version:**

Maxime Arnal. Gaz quantique dans un potentiel périodique dépendant du temps : de la modulation perturbative aux résonances de l'effet tunnel assisté par le chaos. Gaz Quantiques [cond-mat.quant-gas]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2020. Français. NNT : 2020TOU30078 . tel-02976831v2

**HAL Id: tel-02976831**

**<https://theses.hal.science/tel-02976831v2>**

Submitted on 5 Jan 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par l'Université Toulouse 3 - Paul Sabatier

---

Présentée et soutenue par :

**Maxime ARNAL**

Le 8 octobre 2020

**GAZ QUANTIQUE DANS UN POTENTIEL PÉRIODIQUE DÉPENDANT  
DU TEMPS : DE LA MODULATION PERTURBATIVE AUX  
RÉSONANCES DE L'EFFET TUNNEL ASSISTÉ PAR LE CHAOS**

---

**École doctorale :**

SDM - Sciences de la matière - Toulouse

**Spécialité :**

Physique de la matière

**Unité de recherche :**

LCAR - IRSAMC - Laboratoire Collisions Agrégats Réactivité

**Thèse dirigée par**

David GUÉRY-ODELIN

Juliette BILLY

**Jury**

Mme Anna MINGUZZI, Rapporteur

M. Pascal SZRIFTGISER, Rapporteur

Mme Florence PETTINARI-STURMEL, Examinatrice

M. Jean DALIBARD, Examineur

M. Mathias VAN DEN BOSSCHE, Membre invité

M. Simon PIGEON, Membre invité

M. David GUÉRY-ODELIN, Directeur de thèse

Mme Juliette BILLY, Co-directrice de thèse





# Remerciements

*Ohana signifie famille ; famille signifie que  
personne ne doit être abandonné, ni oublié.*

*Lilo et Stitch (2002)*

Long-métrage d'animation Disney

Bien que le manuscrit et la soutenance ressemblent à s'y méprendre à un (très) long monologue de ma part, bien d'autres acteurs ont contribué à ce travail de thèse. Je voudrais ici saluer et sincèrement remercier l'ensemble de la troupe.

Je tiens d'abord à remercier le carré VIP, les membres de mon jury de thèse, qui a accepté de relire ce manuscrit et de participer à ma soutenance de thèse : Anna Minguzzi, Pascal Szriftgiser, Jean Dalibard et Florence Pettinari-Sturmel. Merci également aux deux membres invités : Mathias Van Den Bossche de Thales, et Simon Pigeon, qui a accepté de représenter la Direction Générale de l'Armement à ma soutenance. Je vous remercie tous de m'avoir consacré du temps et de vous être intéressés à mon travail. J'emporte avec moi, précieusement, vos remarques et compliments.

Je souhaite remercier David Guéry-Odelin et Juliette Billy, mes directeurs de thèse tous deux exceptionnels, qui furent tout à la fois acteurs, metteurs en scène et producteurs de cette œuvre. David, je suis heureux d'avoir fait confiance à mon intuition lorsque, dès la L1, j'ai rencontré un prof enthousiasmant (et enthousiasmé!), au talent pédagogique incroyable. Puis j'ai découvert au cours de ma thèse, en plus de tes qualités de physicien, ton humanité, ta grande disponibilité et ton humour. Je garderai de cette thèse le souvenir de ton éternel optimisme et de tes mille idées. Juliette, tu as été un soutien inébranlable au cours de ces trois années, soutien sur lequel je savais pouvoir compter à chaque instant (du jour et même de la nuit!). Je te remercie pour tous les dépannages sur la manip et pour les réponses que tu as apportées à mes questions au cours de ces trois ans. Merci aussi pour les nombreuses discussions qui n'avaient rien à voir avec les atomes froids, que ce soit des échanges de bouquins, des anecdotes croustillantes ou des choix d'orientation à faire. Vos qualités, David et Juliette, m'ont permis de m'investir dans ma thèse autant que je le souhaitais, et je tiens à vous témoigner de ma très sincère reconnaissance.

Je remercie également Bruno Peaudecarf, fraîchement débarqué dans la troupe mais qui a déjà trouvé toute sa place dans l'équipe de choc. Bruno, je suis admiratif de ton intuition de physicien et de tes capacités d'interprétation, que j'espère un jour réussir à



égalier. Mon manuscrit a clairement bénéficié de ta relecture attentive et de tes remarques toujours pertinentes : pour ça et pour le reste, merci.

Il me faut continuer à énumérer la distribution, en soulignant l'importance des trois autres premiers rôles tenus par Gabriel Chatelain, Nathan Dupont et Maxime Martinez. Cette œuvre, l'étude du CAT, a été sublimée par leur présence. Gabriel, je n'ai pas de mot assez fort pour t'exprimer ma gratitude : tu as été un compagnon de route extraordinaire, à la fois curieux, énergique, consciencieux et plein de joie de vivre. Je n'oublierai pas tous les bons moments passés en ta compagnie, aussi bien en manip<sup>1</sup> qu'en dehors<sup>2</sup>. Je mesure toute la chance d'avoir partagé deux années de ma thèse avec toi : merci pour tout. Nathan, tu es venu compléter la fine équipe : jongleur attitré de la troupe, je me régale encore de tes traits d'humour bien placés. Je te remercie de contribuer à l'ambiance si agréable qui règne au sein de l'équipe. La seule chose que je regrette est de ne pas saisir toutes les références que Gabriel et toi partagez ! (ce doit être l'âge) Enfin Maxime, mon "alter ego" maléfique théoricien : merci pour cette collaboration ô combien enrichissante. Ta volonté de bien faire et de nous accompagner au plus près des expériences a été déterminante, et si je considère cette aventure scientifique et humaine comme réussie, c'est en grande partie grâce à nos nombreux échanges. Je te remercie pour toutes nos discussions, de physique ou non. À ces trois compères : soyez assurés de ma sincère amitié.

Un grand merci aussi aux plus anciens de l'équipe, maintenant partis mais qui m'ont accompagné lors de mes débuts sur scène : Citlali, dont le rire résonne encore dans les couloirs du labo ; Eric, musicien indétronable de la troupe ; Vincent, à qui je souhaite le meilleur pour la suite ; et Qi, que j'ai été ravi de retrouver pendant les dernières semaines de ma thèse.

Je remercie plus généralement les personnes avec qui j'ai eu la chance de collaborer : Bertrand Georgeot, Gabriel Lemarié, Olivier Giraud et Denis Ullmo, dont l'expertise sur le chaos quantique a été essentielle et avec qui j'ai eu grand plaisir à échanger ; Peter Schlagheck, dont je salue ici la rigueur scientifique et que je remercie pour le temps qu'il a pu me consacrer, que ce soit par des cours lors de ses visites à Toulouse ou par la relecture de mon manuscrit.

Les atomes froids sont doublement représentés à Toulouse puisque nous cohabitons avec l'équipe Interférométrie Atomique : merci pour tous les bons conseils empreints de bonne humeur d'Alexandre Gauguet et de Baptiste Allard ; merci aux anciens doctorants Julien et Maxime B, pour les moments sérieux comme ceux de détente ; merci aux nouveaux entrants, Ashley, Tangui, et Romain, pour leur touche de fraîcheur dans le bureau des doctorants. Je vous souhaite une manip d'enfer avec de beaux résultats !

Ma thèse s'est déroulée dans des conditions de travail privilégiées, et ceci grâce au dévouement d'une poignée de personnes : merci à Jean-Marc L'Hermite à la direction du labo ; merci à Carole Lecinana, Christine Soucasse et Anna Soler pour le volet administratif ; merci à l'ensemble des équipes de soutien aux expériences pour les débogages divers et variés, du "simple" LabView qui plante au véritable coup de théâtre avec la pompe à eau qui lâche. Un merci en particulier à Stéphane Faure pour sa disponibilité et son sourire permanent.

---

1. Les pizzas face à l'ordi alors qu'on prenait 80 shots identiques resteront une de mes meilleures soirées d'été !

2. Les (rares) bières que nous avons bues ensemble, la sortie ski, le périple à vélo...

Si j'ai présenté là l'essentiel des personnes qui ont occupé le devant de la scène ces trois dernières années, il y a également une ribambelle de "figurants", qui n'ont peut-être pas contribué directement au travail présenté mais dont la présence est primordiale pour rendre le résultat vivant.

D'abord, si j'ai pu fournir un travail dont je suis aujourd'hui fier, c'est avant tout grâce à un formidable soutien pédagogique tout au long de mon cursus, du lycée jusqu'à l'université. Je souhaite rendre hommage à M. Pelissier et Mme Abadie qui, dès le lycée, ont attisé mon goût des sciences ; à Jesse Groenen, Benoit Chalopin et Florence Pettinari-Sturmel, qui chouchoutent les Parcours Spéciaux dont je suis heureux d'avoir fait partie ; Lionel Calmels, Aziz Bouchene et Xavier Bouju, pour leur accompagnement pendant le Master et après. Un grand merci à vous.

Que seraient trois années de thèse sans une belle brochette de doctorants ? Un grand merci à eux, des différents labos, pour tous les chouettes moments passés ensemble : merci à Olivier (LCAR) pour ses instants de folie, Mickaël pour sa gentillesse infinie, Evgeny pour le soutien réciproque tout au long de la thèse, Olivier (LPT) pour tous les débats endiablés, Benjamin (junior) pour son expertise des dinosaures, Benjamin (sénior) pour son expertise de la théorie des champs, Julie C pour ses vésicules, Faedi pour ses éclats de rire, Hugo pour son mélenchonisme, Yassir pour sa force tranquille, Jordan pour sa tête qui fait peur, Eric Michoulier pour sa drôle de prononciation du son [o], Nicolas pour son expertise du vélo, Ulysse pour son "Saaalut", Théo pour sa passion de l'Histoire... Chacun et chacune avez apporté une touche personnelle à cette représentation longue de trois ans : merci.

Je suis également chanceux car j'ai croisé la route d'amis qui ont réussi à me faire oublier, de temps en temps, la vie de labo : merci à Clément, Rémy & Cécile, Rémi, Hadrien "dit Hacheu", Marie, Charlie & Morgan. Une pensée en particulier à Charlie qui, malgré la distance, a toujours réussi à me redonner le sourire par ses éclats de folie lorsque c'était nécessaire<sup>3</sup>.

Merci aux copains musiciens, Yasmine, Vincent et Micka, pour les répèt' qui font du bien. Merci aux copains karatékas, Ben, Nemo, Ambre, Marie-Jo, pour les entraînements qui font du bien. Merci à Marc, Seb et Maeva, amis de longue date que malheureusement j'ai de moins en moins l'occasion de croiser mais avec qui j'ai toujours plaisir à passer une bonne soirée.

Mes plus profonds remerciements vont à ma famille : merci à mes parents, fans de la première heure, pour leur soutien constant et les moments de calme que j'ai pu passer à la maison, loin de l'expérience ; merci à mes frères et sœurs, dont j'ai pu ressentir la fierté lorsqu'on m'a accordé le titre de docteur ; merci à Jacques, Mireille et Marie-Laure de m'avoir intégré dans leur famille.

Enfin, merci à Julie, véritable muse tout au long de ces années. Julie, je te remercie de ta confiance, de ton soutien et surtout de ton courage pendant cette thèse : tu as quasiment fait deux thèses en une, en écoutant mes problèmes tout en réglant les tiens. Tu as été d'une grande force tout ce temps là, et je suis heureux de pouvoir démarrer une nouvelle aventure à tes côtés. Merci d'avoir été toi.

À toutes ces personnes et à celles que j'aurais pu oublier (oups) : je vous souhaite tout le bonheur du monde.

---

3. Et merci pour les palets bretons !



# Table des matières

Table des figures   viii

Acronymes et légende des schémas optiques   xiii

Introduction   1

I

## Dispositif expérimental

<b>1</b>	<b>Condensat de Bose-Einstein dans un piège hybride</b>	<b>11</b>
<b>1.1</b>	<b>Rappels sur la condensation de Bose-Einstein</b>	<b>13</b>
1.1.1	Quelques longueurs caractéristiques des gaz quantiques	14
1.1.2	Gaz idéal sans interaction	14
1.1.3	Gaz avec interactions : équation de Gross-Pitaevskii	17
1.1.4	Effet des interactions et limite de Thomas-Fermi	18
	<i>Puits de potentiel</i>	18
	<i>Potentiel harmonique</i>	19
<b>1.2</b>	<b>Séquence expérimentale pour produire un condensat</b>	<b>20</b>
1.2.1	Description générale du dispositif	21
1.2.2	Piège magnéto-optique et refroidissement laser	22
	<i>Principe</i>	22
	<i>Mise en œuvre expérimentale</i>	24
	<i>Séquence expérimentale – 1<sup>ère</sup> partie</i>	27
1.2.3	Mécanisme général du refroidissement par évaporation	29
1.2.4	Évaporation forcée dans le piège magnétique	30
	<i>Principe</i>	30
	<i>Mise en œuvre expérimentale</i>	32
	<i>Séquence expérimentale – 2<sup>ème</sup> partie</i>	33
1.2.5	Évaporation forcée et condensation dans le piège hybride	34
	<i>Principe</i>	35
	<i>Mise en œuvre expérimentale</i>	36
	<i>Séquence expérimentale – 3<sup>ème</sup> partie</i>	39
<b>1.3</b>	<b>Détection d'un nuage d'atomes : système d'imagerie</b>	<b>40</b>
1.3.1	Principe	41

1.3.2 Montage expérimental	43
1.3.3 Analyse par temps de vol	44
<i>Cas d'un nuage thermique</i>	44
<i>Cas d'un condensat</i>	45

## 1.4 Conclusion 47

## 2 Réseau optique pour gaz quantiques : montage expérimental et calibration 49

### 2.1 Particule quantique dans un potentiel périodique : éléments de théorie 52

2.1.1 Définition des grandeurs caractéristiques du réseau optique	52
2.1.2 Théorème de Bloch	53
2.1.3 Équation centrale et structure de bandes	53

### 2.2 Mise en œuvre expérimentale du réseau optique 55

2.2.1 Interférences et potentiel périodique	55
2.2.2 Montage optique	56
2.2.3 Contrôle des paramètres du réseau	58
<i>Contrôle de la profondeur</i>	58
<i>Contrôle de la position</i>	61
2.2.4 Applications numériques des grandeurs associées au réseau	63

### 2.3 Calibration de la profondeur du réseau 63

2.3.1 Diffraction du condensat sur le potentiel périodique	63
2.3.2 Expansion du condensat après chargement	65
2.3.3 Déplacement soudain du réseau optique	67
<i>Développement théorique et comparaison aux mesures expérimentales</i>	69
<i>Fréquence caractéristique du centre de masse</i>	73

### 2.4 Conclusion 76

## II Réseau optique modulé : dynamique non chaotique

## 3 Modulation résonante : excitations interbandes et refroidissement dans l'espace réciproque 79

### 3.1 Règles de sélection 82

3.1.1 Conservation du quasi-moment	83
3.1.2 Modulation de phase	83
3.1.3 Modulation d'amplitude	86
3.1.4 Bilan des règles de sélection	86

### 3.2 Spectroscopie de bandes 87

3.2.1 Transitions interbandes à quasi-moment nul	88
<i>Protocole expérimental</i>	88
<i>Vérification expérimentale des règles de sélection</i>	88
3.2.2 Au-delà du système idéal	91
<i>Simulations numériques en champ moyen</i>	91
<i>Effet du confinement extérieur</i>	93

<b>3.3</b>	<b>Évaporation dans l'espace réciproque</b>	<b>96</b>
3.3.1	Protocole expérimental	97
3.3.2	Protection du condensat vis-à-vis de la modulation	99
3.3.3	Refroidissement dans le réseau	101
3.3.4	Vers la condensation de Bose-Einstein	105
<b>3.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>107</b>
<b>4</b>	<b>Modulation de phase hors résonance : d'une nouvelle phase quantique à la signature du micro-mouvement</b>	<b>109</b>
<b>4.1</b>	<b>Modulation basse fréquence : nucléation d'états alternés</b>	<b>112</b>
4.1.1	Quelques éléments de théorie	113
	<i>Hamiltonien de Hubbard</i>	113
	<i>Renormalisation du taux tunnel</i>	116
	<i>Effet des interactions et prise en compte des fluctuations</i>	119
4.1.2	Résultats expérimentaux	121
	<i>Protocole expérimental et grandeur mesurée</i>	121
	<i>Cinétique de nucléation des états alternés</i>	122
	<i>Formation d'états alternés par transition interbandes</i>	125
<b>4.2</b>	<b>Modulation haute fréquence : étude statistique d'un Hamiltonien effectif</b>	<b>127</b>
4.2.1	Hamiltonien effectif : renormalisation du potentiel	129
	<i>Vérification expérimentale du potentiel moyenné</i>	129
	<i>Vérification expérimentale du changement de signe</i>	133
4.2.2	Étude du micro-mouvement par une analyse statistique	135
	<i>Description théorique du micro-mouvement</i>	136
	<i>Mise en évidence expérimentale du micro-mouvement</i>	140
	<i>Retour sur l'asymétrie après quench</i>	143
<b>4.3</b>	<b>Conclusion</b>	<b>144</b>

## III

## Effet tunnel assisté par le chaos : résonances

<b>5</b>	<b>Signature expérimentale de bifurcations dans un espace des phases mixte</b>	<b>147</b>
<b>5.1</b>	<b>Adimensionnement de l'Hamiltonien</b>	<b>150</b>
<b>5.2</b>	<b>Outils pratiques pour l'étude d'un système dynamique</b>	<b>152</b>
5.2.1	Cas sans modulation : espace des phases	152
5.2.2	Cas avec modulation : portrait de phase stroboscopique	154
<b>5.3</b>	<b>Éléments de théorie sur la bifurcation</b>	<b>156</b>
5.3.1	Développement au premier ordre : équation de Mathieu	157
5.3.2	Développement au deuxième ordre : équation de Mathieu-Duffing	160
5.3.3	Évolution sub-période classique des îlots de stabilité	163
<b>5.4</b>	<b>Mise en évidence expérimentale des bifurcations</b>	<b>165</b>
5.4.1	Rotation dans l'espace des phases	165
5.4.2	Protocole expérimental	167
5.4.3	Résultats	168

**5.5 Conclusion 173****6 Observation des résonances de l'effet tunnel assisté par le chaos 175****6.1 Effet tunnel dans un espace des phases mixte 179**

- 6.1.1 Rappels sur le double-puits 179
- 6.1.2 Mécanisme à deux niveaux dans un espace des phases mixte : effet tunnel dynamique 181
- 6.1.3 Mécanisme à trois niveaux dans un espace des phases mixte : effet tunnel assisté par le chaos 184

**6.2 Contexte et état de l'art 188****6.3 Méthodes 191**

- 6.3.1 Identification des facteurs limitants 192
- 6.3.2 Séquence expérimentale 194
  - Préparation de l'état initial* 194
  - Protocole dans le réseau* 194
- 6.3.3 Reconstruction des populations des îlots réguliers 196
- 6.3.4 Extraction des fréquences d'oscillation tunnel 197

**6.4 Mise en évidence expérimentale 198**

- 6.4.1 Mesure de l'effet tunnel dynamique 199
- 6.4.2 Première résonance de l'effet tunnel assisté par le chaos et comparaison à l'effet tunnel dynamique 201
  - Observation expérimentale* 201
  - Analyse du spectre de quasi-énergie* 204
- 6.4.3 Deuxième et troisième résonances 205
  - Observation expérimentale* 205
  - Analyse du spectre de quasi-énergie* 207
- 6.4.4 Quatrième résonance 208
  - Observation expérimentale* 208
  - Analyse du spectre de quasi-énergie* 209

**6.5 Conclusion 210****Conclusion 213****IV****Annexes****A Préparation des faisceaux résonants et séquence expérimentale totale 219****B Corrections à l'approximation harmonique d'un puits du réseau optique 225****C Expression de la fonction d'onde perturbée pour le micro-mouvement 229****Bibliographie 235**

# Table des figures

Figure 1.1	Profils de densité atomique théoriques dans deux types de pièges unidimensionnels en présence d'interactions. . . . .	19
Figure 1.2	Schéma 3D du cœur du dispositif et de son système à vide. . . . .	21
Figure 1.3	Schéma de principe du refroidissement et du piégeage dans un MOT. . . . .	23
Figure 1.4	Raie $D_2$ de la structure hyperfine du rubidium 87. . . . .	25
Figure 1.5	Schéma 3D du piège magnéto-optique tridimensionnel. . . . .	26
Figure 1.6	Première partie de la séquence expérimentale : refroidissement laser. . . . .	28
Figure 1.7	Schéma de principe du refroidissement par évaporation. . . . .	29
Figure 1.8	Schéma de principe de l'évaporation micro-onde. . . . .	31
Figure 1.9	Schéma 3D des bobines du piège magnétique. . . . .	32
Figure 1.10	Deuxième partie de la séquence expérimentale : refroidissement par évaporation dans le piège magnétique. . . . .	34
Figure 1.11	Schéma du montage optique utilisé pour le piège dipolaire. . . . .	37
Figure 1.12	Schéma 3D du piège hybride. . . . .	38
Figure 1.13	Troisième partie de la séquence expérimentale : refroidissement par évaporation dans le piège hybride. . . . .	40
Figure 1.14	Principe du temps de vol et de l'imagerie par absorption. . . . .	41
Figure 1.15	Schéma du montage optique utilisé pour le système d'imagerie. . . . .	43
Figure 2.1	Résultats de l'équation centrale Eq. 2.10. . . . .	54
Figure 2.2	Réalisation d'un potentiel périodique par interférence d'ondes lumineuses. . . . .	56
Figure 2.3	Schéma du montage optique utilisé pour le réseau. . . . .	57
Figure 2.4	Caractérisation du nouveau dispositif de contrôle de la profondeur du réseau optique. . . . .	60
Figure 2.5	Schéma du montage électronique utilisé pour contrôler la position du réseau. . . . .	62
Figure 2.6	Calibration de la profondeur du réseau par la méthode de l'expansion du condensat. . . . .	67
Figure 2.7	Calibration de la profondeur du réseau par déplacement soudain du réseau. . . . .	68
Figure 2.8	Évolution temporelle des ordres de diffraction après déplacement soudain du réseau : analyse par les ondes de Bloch. . . . .	70
Figure 2.9	Spectres en fréquence des évolutions temporelles des populations des ordres de diffraction. . . . .	71




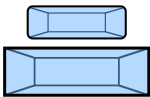
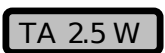















Figure 2.10	Analyse détaillée d'une oscillation dans le réseau translaté pour deux déphasages différents. . . . .	72
Figure 2.11	Description classique de l'oscillation du centre de masse dans un puits du réseau. . . . .	74
Figure 2.12	Comparaison des deux fréquences caractéristiques $\nu_0/2$ et $\nu_{\pm 1}$ . . . . .	75
Figure 3.1	Fonction de Bessel d'ordre zéro de première espèce $\mathcal{J}_0$ . . . . .	85
Figure 3.2	Probabilités de transition interbande à un phonon entre la bande fondamentale et les deux première bandes excitées sur l'intégralité de la 1 <sup>ère</sup> zone de Brillouin. . . . .	87
Figure 3.3	Protocole expérimental utilisé pour étudier les transitions interbandes à quasi-moment nul. . . . .	89
Figure 3.4	Spectroscopie de la structure de bandes. . . . .	90
Figure 3.5	Étude numérique des transitions interbandes en présence de confinement extérieur et d'interactions interatomiques. . . . .	92
Figure 3.6	Effet des interactions sur la population dans le réseau optique. . . . .	93
Figure 3.7	Effet du confinement extérieur sur la population dans le réseau optique. . . . .	94
Figure 3.8	Effet du confinement extérieur sur les transitions interbandes. . . . .	95
Figure 3.9	Protocole expérimental utilisé pour les expériences de refroidissement dans l'espace réciproque. . . . .	98
Figure 3.10	Protection de la fraction condensée du nuage d'atomes vis-à-vis de la modulation d'amplitude. . . . .	100
Figure 3.11	Transitions interbandes utilisées dans l'expérience de refroidissement dans le réseau optique. . . . .	103
Figure 3.12	Résultats expérimentaux de refroidissement dans l'espace réciproque d'un nuage partiellement condensé. . . . .	104
Figure 3.13	Résultats expérimentaux de refroidissement dans l'espace réciproque d'un nuage au seuil de condensation. . . . .	106
Figure 4.1	Bande fondamentale $E_k$ pour différentes profondeurs. . . . .	115
Figure 4.2	Inversion de la courbure de la bande fondamentale et résultat sur la distribution en impulsion. . . . .	118
Figure 4.3	Protocole expérimental utilisé pour mesurer la cinétique de formation des états alternés. . . . .	122
Figure 4.4	Formation d'états alternés et mesure du temps de nucléation. . . . .	123
Figure 4.5	Temps de nucléation des états alternés en fonction de plusieurs paramètres expérimentaux. . . . .	124
Figure 4.6	Nucléation d'états alternés pour différentes fréquences de modulation. . . . .	125
Figure 4.7	Nucléation d'états alternés par transition interbande. . . . .	126
Figure 4.8	Protocole expérimental utilisé pour vérifier la renormalisation de la profondeur du réseau optique par modulation rapide. . . . .	130
Figure 4.9	Validité en fréquence du régime de renormalisation de la profondeur. . . . .	131
Figure 4.10	Renormalisation de la profondeur du réseau optique par modulation rapide. . . . .	132
Figure 4.11	Protocole expérimental utilisé pour vérifier l'inversion de signe par modulation rapide. . . . .	133
Figure 4.12	Résultat expérimental de quench par modulation rapide de phase. . . . .	134

Figure 4.13	Résultats numériques sur l'asymétrie des populations des ordres due au micro-mouvement. . . . .	140
Figure 4.14	Exemple de test statistique de type Kolmogorov-Smirnov. . . . .	141
Figure 4.15	Étude statistique révélant le micro-mouvement. . . . .	142
Figure 5.1	Exemples d'espaces des phases. . . . .	153
Figure 5.2	Principe de construction d'un portrait de phase stroboscopique. . . . .	155
Figure 5.3	Diagramme de stabilité dans le cas linéaire (équation de Mathieu). . . . .	160
Figure 5.4	Diagramme de stabilité dans le cas non linéaire (équation de Mathieu-Duffing). . . . .	163
Figure 5.5	Évolution classique sub-modulation : rotation des orbites stables du portrait de phase. . . . .	164
Figure 5.6	Protocoles de rotation dans l'espace des phases. . . . .	166
Figure 5.7	Protocole expérimental utilisé pour sonder un espace des phases mixte. . . . .	168
Figure 5.8	Exemples d'images d'absorption obtenues dans un espace des phases mixte. . . . .	169
Figure 5.9	Détermination expérimentale de la position des îlots réguliers dans un espace des phases mixte. . . . .	170
Figure 5.10	Observation expérimentale de bifurcations dynamiques. . . . .	172
Figure 5.11	Super-réseau effectif et effet tunnel. . . . .	174
Figure 6.1	Effet tunnel dans un double-puits de potentiel. . . . .	180
Figure 6.2	Portrait de phase à deux îlots symétriques en position et effet tunnel dynamique. . . . .	182
Figure 6.3	Schéma de principe d'une résonance du taux tunnel pour l'effet tunnel assisté par le chaos. . . . .	187
Figure 6.4	Comparaison des espaces des phases utilisés dans les différentes expériences. . . . .	189
Figure 6.5	Nombre de données prises sur le CAT au cours de l'année 2019. . . . .	191
Figure 6.6	Résultats de simulations numériques effectuées par le LPT : variation de la fréquence tunnel en fonction de différents paramètres expérimentaux. . . . .	193
Figure 6.7	Observation expérimentale de l'amortissement des oscillations tunnel dû au nombre d'atomes. . . . .	194
Figure 6.8	Protocole expérimental utilisé pour observer l'effet tunnel entre deux îlots réguliers symétriques en position. . . . .	195
Figure 6.9	Reconstruction des populations des îlots réguliers gauche et droite. . . . .	196
Figure 6.10	Mesure de l'effet tunnel dynamique. . . . .	200
Figure 6.11	Mesure de la première résonance de l'effet tunnel assisté par le chaos. . . . .	202
Figure 6.12	Comparaison entre mesures expérimentales des oscillations par effet tunnel et simulations numériques incluant la distribution en quasi-moment. . . . .	203
Figure 6.13	Analyse théorique de la première résonance de l'effet tunnel. . . . .	205
Figure 6.14	Mesure de deux résonances CAT consécutives. . . . .	206
Figure 6.15	Analyse théorique des deuxième et troisième résonances de l'effet tunnel assisté par le chaos. . . . .	207
Figure 6.16	Mesure de la quatrième résonance de l'effet tunnel assisté par le chaos. . . . .	208
Figure 6.17	Analyse théorique de la quatrième résonance de l'effet tunnel assisté par le chaos. . . . .	209
Figure 7.1	Observation des halos de collisions. . . . .	214

Figure 7.2	Observation de motifs "hybrides" par modulation résonante avec la structure de bandes. . . . .	215
Figure 7.3	Longue portée dans un réseau effectif habillé par le chaos. . . . .	216
Figure A.1	Montage optique de la table refroidisseur - première partie. . . . .	220
Figure A.2	Montage optique de la table refroidisseur - deuxième partie. . . . .	221
Figure A.3	Montage optique de la table repompeur. . . . .	222
Figure A.4	Séquence expérimentale totale. . . . .	223

# Acronymes et légende des schémas optiques

AOM	modulateur acousto-optique
CAT	effet tunnel assisté par le chaos
dark MOT	piège magnéto-optique sombre
MOT	piège magnéto-optique
MOT 2D	piège magnéto-optique bidimensionnel
MOT 3D	piège magnéto-optique tridimensionnel
ToF	temps de vol
VCO	oscillateur contrôlé en tension

	Diode laser		Cellules en verre
	Amplificateur optique ( <i>Tapered Amplifier</i> )		Collimateur de fibre optique
	Miroir		Lame de verre
	Miroir dichroïque		Modulateur acousto-optique
	Lame demi-onde		Caméra CCD
	Lame quart d'onde		Photodiode
	Cube à séparation de polarisation		Diaphragme mécanique
	Lentilles		Platine de translation
	Isolateur optique		Ascenseur optique





# Introduction

*"Y'know," he said, "it's very hard to talk quantum using a language originally designed to tell other monkeys where the ripe fruit is."*

*Discworld – Night Watch (2002)*  
Terry D. J. Pratchett

**S'**IL est une annonce qui a fait grand bruit récemment dans le monde de la physique quantique, c'est bien celle faite par un groupe de chercheurs travaillant chez Google : ils ont démontré, sur leur puce supraconductrice SYCAMORE de 53 qubits, l'exécution en environ 200 secondes d'un algorithme quantique que le meilleur supercalculateur classique actuellement disponible mettrait 10 000 ans à effectuer [ARUTE *et al.* (2019)], affirmant ainsi avoir réalisé ce que J. PRESKILL avait nommé la "suprématie quantique" [PRESKILL (2012, 2018)]. Cette affirmation a ensuite été contestée, notamment par le concurrent IBM, puisque le temps de calcul sur le supercalculateur a pu être diminué à un peu plus de deux jours<sup>1</sup>. Un autre reproche alors émis réside dans le choix de l'algorithme quantique utilisé : il présente peu d'intérêt pratique, et surtout est peu sensible aux erreurs et ne nécessite donc pas de codes correcteurs.

Si nous ne nous permettons pas d'entrer dans ce débat quant à la bonne dénomination du résultat de l'équipe de Google, cette prouesse expérimentale nous permet à la fois de nous émerveiller devant le chemin parcouru depuis les débuts de la physique quantique, apparue il y a seulement un siècle de cela, et également de souligner toute la difficulté à aboutir à l'ordinateur quantique universel, tel qu'imaginé par R. FEYNMAN [FEYNMAN (1982)], qui serait par exemple capable de prédire l'évolution d'un grand nombre de particules quantiques en interaction. Un tel ordinateur, universel et tolérant aux erreurs, nécessite en effet le contrôle d'un très grand nombre de particules quantiques, soumises à la décohérence, et l'implémentation de codes correcteurs coûteux en ressources. De telles contraintes avaient d'ailleurs fait dire à S. HAROCHE et J.-M. RAIMOND dès 1996 que l'ordinateur quantique était un "cauchemar d'expérimentateur" [HAROCHE et RAIMOND (1996)], et sa réalisation, si tant est qu'elle arrive, n'est pas attendue avant de nombreuses années. En revanche, une variante plus modeste de l'ordinateur quantique universel, l'ordinateur quantique analogique, a déjà été démontrée. Ce champ de recherche, celui de la simulation quantique [CIRAC et ZOLLER (2012) et GEORGESCU *et al.* (2014)], bénéficie de la très grande maturité atteinte aujourd'hui en termes de contrôle des systèmes quantiques,

---

1. Ce qui est quand même toujours 1000 fois plus long que le temps d'exécution sur SYCAMORE !

que nous pouvons à présent utiliser pour imiter d'autres systèmes physiques, moins contrôlables et qu'on ne sait pas simuler par un ordinateur classique.

Plusieurs plateformes sont utilisées comme simulateurs quantiques : atomes neutres, ions piégés, circuits supraconducteurs, boîtes quantiques, etc. Dans ce contexte, les atomes froids permettent de réaliser des systèmes remarquablement bien contrôlés :

- Grâce aux techniques de refroidissement et de piégeage développées avant les années 2000, il est à présent possible de manipuler les atomes au niveau de l'atome unique. On peut ainsi piéger dans une pince optique un seul atome [BEUGNON *et al.* (2007) et GRÜNZWEIG *et al.* (2010)] ou deux atomes en interaction [GAËTAN *et al.* (2009), WILK *et al.* (2010) et SOMPET *et al.* (2019)]; on peut également observer directement les sites individuels d'un réseau optique dans des microscopes à gaz quantique [BAKR *et al.* (2009) et SHERSON *et al.* (2010)] ou encore déplacer les atomes un par un pour former des structures arbitraires sans défaut [ENDRES *et al.* (2016) et BARREDO *et al.* (2018)].
- Contrairement aux électrons d'un cristal, on peut modifier les interactions interatomiques par des résonances de Feshbach [CHIN *et al.* (2010)] ou en utilisant les interactions entre états de Rydberg [BROWAEYS et LAHAYE (2020)].
- L'utilisation de réseaux optiques pour piéger les atomes est particulièrement adaptée pour simuler les systèmes de la matière condensée, ces potentiels périodiques, créés à partir d'ondes lumineuses, étant "parfaits" (pas de phonon) et pouvant être manipulés à souhait (contrôle, entre autres, de leur période spatiale, de leur profondeur, de leur position et de leur géométrie).

Les gaz d'atomes ultrafroids ont ainsi permis plusieurs percées marquantes dans le champ de la simulation quantique ces deux dernières décennies [BLOCH *et al.* (2012)]. Une de ces premières réalisations spectaculaires est l'observation de la transition de phase superfluide-isolant de Mott en 2002 [GREINER *et al.* (2002)]. Encouragés par ce résultat, plusieurs axes de recherche pour la simulation avec des atomes ultrafroids se sont par la suite développés : la physique en basse dimension, avec la réalisation d'un gaz de Tonks-Girardeau à 1D [PAREDES *et al.* (2004)] ou l'observation de la transition Berezinskii-Kosterlitz-Thouless à 2D [HADZIBABIC *et al.* (2006) et CLADÉ *et al.* (2009)]; les problématiques de localisation dans des milieux désordonnés, avec l'étude de la localisation d'Anderson à 1D [BILLY *et al.* (2008) et ROATI *et al.* (2008)], à 2D [MANAI *et al.* (2015)] et à 3D [CHABÉ *et al.* (2008), KONDOV *et al.* (2011), JENDRZEJEWski *et al.* (2012) et SEMEGHINI *et al.* (2015)]; les gaz d'atomes fortement corrélés, avec par exemple les gaz fermioniques dans le régime unitaire qui présentent des propriétés thermodynamiques universelles, également vérifiées dans les étoiles à neutrons [HO (2004), NASCIMBÈNE *et al.* (2010) et NAVON *et al.* (2010)].

Comme nous l'avons déjà évoqué, des atomes froids placés dans un réseau optique sont particulièrement adaptés pour simuler les problèmes de la matière condensée, cette configuration rappelant les électrons piégés par le réseau cristallin [LEWENSTEIN *et al.* (2007)]. Outre le modèle de Bose-Hubbard [GREINER *et al.* (2002)] ou de Fermi-Hubbard [MAZURENKO *et al.* (2017)], ils permettent par exemple d'étudier les différentes phases rencontrées dans les systèmes magnétiques [STRUCK *et al.* (2011, 2013)]. Malgré la neutralité des atomes utilisés, ce type d'étude est rendu possible par l'application de champs magnétiques artificiels [LIN *et al.* (2009) et DALIBARD *et al.* (2011)], qui peuvent

entre autres être obtenus en modulant périodiquement la position du réseau optique [STRUCK *et al.* (2012) et GÖRG *et al.* (2019)]. Plus généralement, la modulation temporelle des paramètres expérimentaux peut conduire à une description du système par un Hamiltonien effectif : il devient donc possible de façonner les équations d'évolution grâce à ces modulations en temps.

Pour aboutir à un Hamiltonien effectif, la modulation est dans la majorité des cas traitée comme une perturbation, soit parce que l'amplitude de modulation est faible, soit parce qu'il y a séparation des échelles de temps, ce qui permet de ne considérer qu'une dynamique effective moyennée pour les atomes. À l'extrême opposé, certains systèmes ont été étudiés dans un régime de forte modulation, conduisant à une dynamique classique complètement chaotique. C'est le cas du rotateur frappé (ou *kicked rotor*), pour lequel a lieu la localisation dynamique [MOORE *et al.* (1994) et RINGOT *et al.* (2000)] ou la transition d'Anderson [CHABÉ *et al.* (2008) et MANAI *et al.* (2015)]. Dans ces cas, le chaos joue le rôle de désordre, et on peut donc simuler la physique des milieux désordonnés. Il existe cependant un régime intermédiaire, dans lequel on ne peut pas traiter la modulation comme une perturbation et qui présente à la fois des trajectoires régulières et des trajectoires chaotiques : il s'agit du régime mixte. Relativement peu exploré, ce régime permet pourtant d'étudier de nouveaux mécanismes de transport, à savoir l'effet tunnel dynamique [HELLER et DAVIS (1981)] et l'effet tunnel assisté par le chaos (ou *chaos-assisted tunneling*) [TOMSOVIC et ULLMO (1994)], qui ont tous les deux été observés expérimentalement au début des années 2000 [HENSINGER *et al.* (2001a) et STECK *et al.* (2001)].

C'est dans ce contexte, celui la simulation quantique et à l'interface entre régime perturbatif et dynamique mixte, que se situent les travaux présentés dans ce manuscrit. Effectuée au sein de l'équipe Atomes froids du Laboratoire Collisions Agrégats Réactivité, ma thèse traite de la dynamique d'un gaz quantique, un condensat de Bose-Einstein de rubidium 87, piégé dans le potentiel périodique d'un réseau optique 1D dont les paramètres sont modulés dans le temps. Plus précisément, le réseau optique peut être périodiquement modulé en amplitude (on fait alors varier sa profondeur) ou en phase (on fait alors varier sa position). De manière plus générale, les thématiques de recherche de notre équipe s'articulent autour du développement de nouveaux outils pour le contrôle des gaz quantiques, utilisés comme des simulateurs quantiques. La mise en œuvre de ces techniques requiert en général l'étude de phénomènes physiques à leur niveau le plus fondamental. Par exemple, en développant une nouvelle méthode de calibration de la profondeur du réseau optique, l'équipe a également eu l'occasion de mesurer le temps que mettaient les atomes à traverser, par effet tunnel, une barrière de potentiel du réseau optique [FORTUN *et al.*, 2016]. Au début de ma thèse en 2017, le dispositif expérimental fonctionnait depuis déjà deux ans. Je suis donc arrivé à un moment charnière : ayant mené un certain nombre de travaux dans le régime perturbatif, l'équipe souhaitait élargir ses études au domaine des systèmes mixtes. Les premières expériences dans ce régime ont été réalisées au cours de ma thèse.

Par conséquent, mon manuscrit présente deux axes de recherche, qui comprennent au total cinq travaux différents. Ces travaux se distinguent en fonction de la profondeur  $s$  du réseau optique, exprimée en unité d'énergie<sup>2</sup>  $E_L = \hbar^2/(2md^2)$  où  $d$  est la période spatiale

2. Précisons dès maintenant que  $E_L = 4E_R$ , où  $E_R = \hbar^2/(2m\lambda^2)$  est l'énergie de recul associée à un photon du réseau, ce dernier étant le résultat d'interférences entre deux lasers de longueur d'onde  $\lambda$ .



du réseau, et des paramètres de modulation utilisés, ramenés aux grandeurs typiques du réseau. Nous comparons d'une part la fréquence de modulation  $\nu$  à la fréquence associée à la dynamique du centre de masse des atomes dans le réseau, notée  $\nu_{\text{CdM}}$ , que nous aurons l'occasion de définir plus précisément par la suite ; cette fréquence  $\nu_{\text{CdM}}$  est très proche de la fréquence de la première transition interbande. D'autre part, l'amplitude de modulation est comparée aux paramètres du réseau que sont sa période spatiale  $d$  et sa profondeur  $s$  : une amplitude de modulation égale à l'unité revient à moduler le réseau sur une amplitude égale à sa profondeur pour la modulation d'amplitude, et sur une amplitude égale à sa période spatiale en modulation de phase. Le premier axe de ma thèse est dédié au régime perturbatif, auquel je consacre deux chapitres. La physique à l'œuvre dans ce régime, obtenu pour des réseaux faiblement ou modérément profonds ( $s \lesssim 10$ ), dépend du rapport  $\nu/\nu_{\text{CdM}}$  :

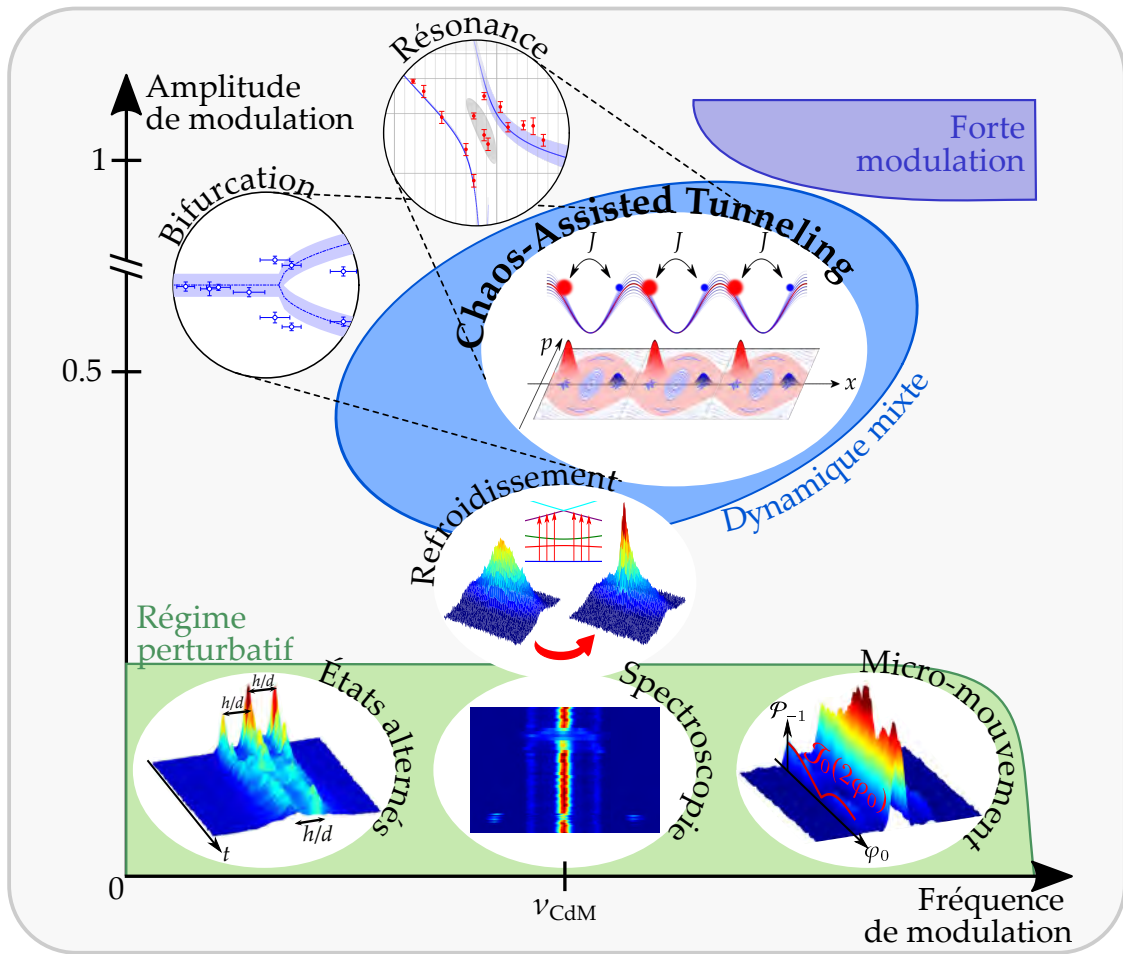
- Pour  $\nu < \nu_{\text{CdM}}$  et de faibles profondeurs  $s < 4$ , la modulation de phase du réseau conduit à la renormalisation du taux tunnel intersite. Lorsque le taux tunnel effectif devient négatif, nous assistons à une transition de phase quantique vers un nouvel état appelé *état alterné* (ou *staggered state*). Nous avons étudié la cinétique de cette transition.
- Pour  $\nu \sim \nu_{\text{CdM}}$  et des profondeurs intermédiaires  $s \lesssim 10$ , la modulation du réseau induit des transitions interbandes. Nous les avons étudiées, en comparant les résultats expérimentaux de notre *spectroscopie de bandes* au cas du système idéal infini sans interaction interatomiques, puis avec des simulations numériques prenant en compte les interactions et le confinement.
- Pour  $\nu \gg \nu_{\text{CdM}}$  et des profondeurs intermédiaires  $5 \lesssim s \lesssim 8$ , le réseau modulé en phase est perçu par les atomes comme un réseau statique de profondeur renormalisée. Nous avons vérifié cette propriété, mais également observé l'effet du *micro-mouvement*, mouvement rapide des atomes à la fréquence de modulation et de faible amplitude, habituellement négligé.

Dans le régime résonant  $\nu \sim \nu_{\text{CdM}}$ , nous avons également exploité les transitions interbandes pour démontrer une nouvelle méthode de *refroidissement*, qui a lieu dans l'espace réciproque. L'amplitude de modulation alors utilisée est suffisamment grande pour qu'on ne puisse plus parler de perturbation, néanmoins comme nous utilisons de faibles profondeurs ( $s \approx 2$ ) nous ne sommes pas dans le cas d'une dynamique mixte. Ce sujet, un peu à part, est représentatif de la volonté de notre équipe de développer des techniques complémentaires à l'usage de la communauté des gaz quantiques piégés dans des réseaux optiques.

Le deuxième axe de recherche exploré au cours de ma thèse concerne le transport quantique d'ondes de matière dans le régime mixte (donc en présence de chaos), auquel je consacre deux autres chapitres. Pour atteindre ce régime, nous utilisons un réseau optique très profond ( $10 \lesssim s \lesssim 40$ ) dont nous modulons fortement la profondeur, dans le régime de fréquence proche de résonance  $\nu \sim \nu_{\text{CdM}}$ . En réunissant ces conditions, nous obtenons à la limite classique un système mixte qui, comme le pendule modulé, présente des trajectoires régulières et des trajectoires chaotiques. Les premières forment des îlots réguliers, alors que les secondes constituent une mer chaotique, qui est ergodique. Les centres des îlots réguliers, qui définissent les nouvelles positions stables du système, évoluent avec les paramètres de modulation selon un diagramme de *bifurcation*, que nous avons étudié expérimentalement en premier lieu.

La présence d'une dynamique mixte à la limite classique peut radicalement modifier l'évolution d'une fonction d'onde, de nature quantique. De manière analogue au double-puits, il est possible d'observer de l'effet tunnel entre deux îlots réguliers de l'espace des phases. Quand ce transport est assuré par deux états quantiques seulement, on parle d'effet tunnel dynamique. La présence d'une mer chaotique rend ce transport plus riche, car un troisième état provenant de la mer chaotique peut intervenir et médier l'effet tunnel : il s'agit de l'effet tunnel assisté par le chaos. Or, cet état chaotique étant très sensible aux paramètres expérimentaux, il devient possible de faire varier le taux tunnel entre les îlots par plusieurs ordres de grandeur. On retrouve là l'idée du "contrôle par le chaos" [OTT *et al.* (1990)], où on met à profit la grande sensibilité des systèmes chaotiques pour modifier leur état de manière contrôlée, et éventuellement atteindre des variations difficilement accessibles avec un système purement régulier. Pour ce sujet, il a été nécessaire de marier deux communautés : celle des gaz quantiques et celle du chaos quantique. À cet effet, nous avons collaboré avec B. GEORGEOT, G. LEMARIÉ et M. MARTINEZ de l'équipe Cohérence Quantique du Laboratoire de Physique Théorique de Toulouse. Cette association fructueuse a permis l'observation pour la première fois des *résonances* de l'effet tunnel assisté par le chaos. Ces résonances du taux tunnel, caractéristique emblématique de ce type d'effet tunnel, n'avaient pas été obtenues sur les deux expériences pionnières [HENSINGER *et al.* (2001a) et STECK *et al.* (2001)] qui utilisaient toutes deux des îlots réguliers symétriques en impulsion. Nous avons fait le choix d'îlots symétriques en position, que des études préalables avaient montré plus robustes vis-à-vis des contraintes expérimentales [DUBERTRAND *et al.* (2016)]. De plus, nous pouvons considérer cette configuration comme un super-réseau effectif, dont l'une des deux périodes spatiales est ajustable et dont le taux tunnel est contrôlable. Un tel réseau flexible présente un intérêt pour la simulation quantique.

L'ensemble des expériences qui seront détaillées dans ce manuscrit sont résumées grâce à la figure présentée sur la page suivante, qui rend compte des différents régimes précédemment évoqués selon la fréquence (axe horizontal) et l'amplitude (axe vertical) de modulation. Cette figure reviendra tout au long du manuscrit, pour guider le lecteur.



## Plan du manuscrit

Mon manuscrit est divisé en trois parties, comportant chacune deux chapitres. La première partie décrit l'ensemble du dispositif expérimental, à savoir la production d'un condensat de Bose-Einstein et le réseau optique. La deuxième partie traite de l'ensemble des résultats obtenus dans le régime perturbatif, tandis que la troisième et dernière partie est consacrée en totalité à l'effet tunnel assisté par le chaos.

**Le chapitre 1** est dédié à la production du condensat de Bose-Einstein. J'y rappelle les grandes étapes de la séquence expérimentale permettant d'atteindre la dégénérescence quantique d'un gaz de rubidium 87, ainsi que les propriétés qui caractérisent ce gaz quantique dégénéré.

**Le chapitre 2** décrit le réseau optique, outil au cœur de l'ensemble des études menées pendant ma thèse. Je rappelle son montage, mais surtout je décris les améliorations apportées au contrôle de la profondeur, rendues nécessaires pour l'observation de l'effet tunnel assisté par le chaos. Je détaille également la méthode de calibration de la profondeur du réseau, mise au point par l'équipe, et le formalisme associé.

**Le chapitre 3** regroupe les expériences effectuées en modulation de phase et d'amplitude, dans le régime résonant avec les transitions interbandes mais ne présentant pas de dynamique chaotique. J'y expose les résultats de notre spectroscopie de bandes par excitation des transitions interbandes, soumises à des règles de sélection. Nous avons mis à profit ces règles de sélection en validant une nouvelle technique de refroidissement, qui s'apparente à une évaporation dans l'espace réciproque.

**Le chapitre 4** traite de la modulation de phase du réseau optique, lorsque les fréquences de modulation sont hors résonance vis-à-vis de la structure de bandes. Nous explorons les deux régimes extrêmes : pour une fréquence de modulation faible, nous étudions la cinétique de transition vers les états alternés ; lorsque la fréquence de modulation est très élevée nous pouvons renormaliser la profondeur du réseau optique et étudier l'effet du micro-mouvement.

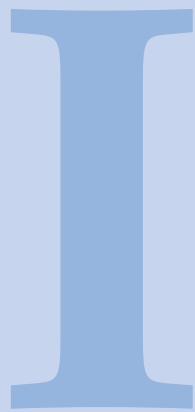
**Le chapitre 5** s'intéresse à la dynamique classique de notre système dans le régime mixte. J'y définis un ensemble d'outils et de représentations utiles pour l'étude de systèmes mixtes, en particulier le portrait de phase stroboscopique. J'explicité également l'évolution des trajectoires classiques, et je retrouve le diagramme de bifurcation des positions stables de notre système. Nous avons mesuré expérimentalement ce diagramme de bifurcation en utilisant les atomes comme sonde dans l'espace des phases mixtes : je présente l'ensemble de ces résultats.

**Le chapitre 6** vient clore le manuscrit en présentant les résonances de l'effet tunnel assisté par le chaos que nous avons mesurées. Je rappelle d'abord les mécanismes à l'œuvre dans ce transport quantique, qui est médié par un troisième état en provenance de la mer chaotique. Je montre finalement les quatre résonances observées, ainsi que les spectres en quasi-énergie et l'identification des états impliqués dans l'effet tunnel.

## Liste des publications

Je liste ci-dessous les articles scientifiques rédigés dans le cadre de ma thèse. J'indique également à quelle partie du manuscrit chaque article se rapporte.

- CABRERA-GUTIÉRREZ C., E. MICHON, V. BRUNAUD, T. KAWALEC, A. FORTUN, M. ARNAL, J. BILLY et D. GUÉRY-ODELIN (2018), *Robust calibration of an optical-lattice depth based on a phase shift*, Physical Review A **97**, 4, DOI : [10/gf965b](https://doi.org/10/gf965b) Chapitre 2 section 2.3.3
- CABRERA-GUTIÉRREZ C., E. MICHON, M. ARNAL, G. CHATELAIN, V. BRUNAUD, T. KAWALEC J. BILLY et D. GUÉRY-ODELIN (2019), *Resonant excitations of a Bose Einstein condensate in an optical lattice*, The European Physical Journal D **73**, 170, DOI : [10/gf6rtf](https://doi.org/10/gf6rtf) Chapitre 3 section 3.2
- ARNAL M., V. BRUNAUD, G. CHATELAIN, C. CABRERA-GUTIÉRREZ, E. MICHON, P. CHEINEY, J. BILLY et D. GUÉRY-ODELIN (2019), *Evidence for cooling in an optical lattice by amplitude modulation*, Physical Review A **100**, 013416, DOI : [10/gf6rs5](https://doi.org/10/gf6rs5) Chapitre 3 section 3.3
- MICHON E., C. CABRERA-GUTIÉRREZ, A. FORTUN, M. BERGER, M. ARNAL, V. BRUNAUD, J. BILLY, C. PETITJEAN, P. SCHLAGHECK et D. GUÉRY-ODELIN (2018), *Phase transition kinetics for a Bose Einstein condensate in aperiodically driven band system*, New Journal of Physics **20**, 053035, DOI : [10/gf967g](https://doi.org/10/gf967g) Chapitre 4 section 4.1
- ARNAL M., G. CHATELAIN, C. CABRERA-GUTIÉRREZ, A. FORTUN, E. MICHON, J. BILLY, P. SCHLAGHECK et D. GUÉRY-ODELIN (2020), *Beyond effective Hamiltonians : micromotion of Bose-Einstein condensates in periodically driven optical lattices*, Physical Review A **101**, 013619, DOI : [10/ggkmsx](https://doi.org/10/ggkmsx) Chapitre 4 section 4.2
- ARNAL M., G. CHATELAIN, M. MARTINEZ, N. DUPONT, O. GIRAUD, D. ULLMO, B. GEORGEOT, G. LEMARIÉ, J. BILLY et D. GUÉRY-ODELIN (2020), *Chaos-assisted tunneling resonances in a synthetic Floquet superlattice*, Science Advances **6**, eabc4886, DOI : [fdxg](https://doi.org/10.1126/sciadv.abc4886) Chapitres 5 et 6
- CHATELAIN G., N. DUPONT, M. ARNAL, V. BRUNAUD, J. BILLY, B. PEAUDECERF, P. SCHLAGHECK et D. GUÉRY-ODELIN (2020), *Observation and control of quantized halos*, [arXiv:2009.09923v1](https://arxiv.org/abs/2009.09923v1) [cond-mat.quant-gas] Conclusion



# Dispositif expérimental

## 1 Condensat de Bose-Einstein dans un piège hybride 11

- 1.1 Rappels sur la condensation de Bose-Einstein 13
- 1.2 Séquence expérimentale pour produire un condensat 20
- 1.3 Détection d'un nuage d'atomes : système d'imagerie 40
- 1.4 Conclusion 47

## 2 Réseau optique pour gaz quantiques : montage expérimental et calibration 49

- 2.1 Particule quantique dans un potentiel périodique : éléments de théorie 52
- 2.2 Mise en œuvre expérimentale du réseau optique 55
- 2.3 Calibration de la profondeur du réseau 63
- 2.4 Conclusion 76



# Condensat de Bose-Einstein dans un piège hybride

– *It's something. It's not light, it's not shadow, or some trick of the mind. Pass through walls, check. Outside the visible spectrum, check. [...] You know what that means? It means this stuff isn't natural. Someone made it. It's man-made.*

– *Man-made how?*

– *Okay. You have solid, liquid, gas. Lava can turn into rock. Ice can turn into water. Metals can melt. These are natural states. But there are unnatural states. Artificial states, man-made states. Condensate. Bose-Einstein condensate. A state of matter that was predicted by Nath Bosc and Albert Einstein. It has some very unusual properties.*

*Spectral* (2016)

Film réalisé par Nic Mathieu

---

## Sommaire

---

- 1.1 Rappels sur la condensation de Bose-Einstein 13**
  - 1.1.1 Quelques longueurs caractéristiques des gaz quantiques 14
  - 1.1.2 Gaz idéal sans interaction 14
  - 1.1.3 Gaz avec interactions : équation de Gross-Pitaevskii 17
  - 1.1.4 Effet des interactions et limite de Thomas-Fermi 18
    - Puits de potentiel* 18
    - Potentiel harmonique* 19
- 1.2 Séquence expérimentale pour produire un condensat 20**
  - 1.2.1 Description générale du dispositif 21
  - 1.2.2 Piège magnéto-optique et refroidissement laser 22
    - Principe* 22
    - Mise en œuvre expérimentale* 24
    - Séquence expérimentale – 1<sup>ère</sup> partie* 27
  - 1.2.3 Mécanisme général du refroidissement par évaporation 29
  - 1.2.4 Évaporation forcée dans le piège magnétique 30
    - Principe* 30
    - Mise en œuvre expérimentale* 32
    - Séquence expérimentale – 2<sup>ème</sup> partie* 33



1.2.5 Évaporation forcée et condensation dans le piège hybride 34

*Principe* 35

*Mise en œuvre expérimentale* 36

*Séquence expérimentale – 3<sup>ème</sup> partie* 39

**1.3 Détection d'un nuage d'atomes : système d'imagerie** 40

1.3.1 Principe 41

1.3.2 Montage expérimental 43

1.3.3 Analyse par temps de vol 44

*Cas d'un nuage thermique* 44

*Cas d'un condensat* 45

**1.4 Conclusion** 47

---

LA PREMIÈRE réalisation expérimentale d'un condensat de Bose-Einstein fête en cette année 2020 ses 25 ans. En effet, c'est en 1995, d'abord dans le groupe d'E. CORNELL et de C. WIEMAN avec du rubidium 87 [ANDERSON *et al.* (1995)], puis dans le groupe de W. KETTERLE avec du sodium 23 [DAVIS *et al.* (1995b)], que la condensation a été observée pour la première fois. Cette prouesse, qui a valu à ces trois physiciens le prix Nobel de physique en 2001, est le résultat de plusieurs décennies d'efforts pour refroidir des ensembles atomiques. Ils ont donc bénéficié des progrès préalables qu'ont connu les techniques de refroidissement laser et de piégeage d'atomes, qui avaient valu à S. CHU, C. COHEN-TANNOUJDI et W. D. PHILLIPS le prix Nobel de physique de 1997. Cette observation expérimentale a marqué un jalon important d'une histoire démarrée 70 ans auparavant, lorsqu'A. EINSTEIN introduisit le concept de condensation de bosons en 1925 [EINSTEIN (1925)].

Depuis, la communauté des gaz quantiques a continué d'évoluer. De nombreux laboratoires<sup>1</sup> disposent de nos jours de dispositifs permettant d'atteindre le régime de dégénérescence quantique. La condensation, qui a d'abord eu lieu pour des atomes alcalins, concerne à présent de nombreuses espèces, ce qui permet par exemple l'étude de gaz dits dipolaires [LAHAYE *et al.* (2009)] avec du chrome, de l'erbium ou du dysprosium. On sait également réaliser des gaz ultra froids dégénérés de fermions, dont les premières réalisations datent de 1999 avec des atomes de potassium 40 [DEMARCO et JIN (1999)], à partir desquels on peut par exemple créer des condensats moléculaires [GREINER *et al.* (2003)].

L'équipe Atomes froids du Laboratoire Collisions Agrégats Réactivité s'inscrit dans cette communauté des gaz quantiques. Installée à Toulouse depuis 2009, elle dispose d'un dispositif expérimental de condensation de rubidium 87 dont la dernière reconstruction s'est terminée en 2015. Ce premier chapitre est consacré à la description du montage expérimental chargé de produire les condensats. Après avoir rappelé quelques éléments théoriques autour de la condensation de Bose-Einstein, je décris le dispositif en même temps que je déroule une séquence expérimentale typique. La dernière partie du chapitre traite de l'imagerie utilisée sur l'expérience. Dans un souci de concision, un certain nombre de détails seront omis, ils pourront être trouvés dans les thèses des précédents doctorants chargés de la reconstruction [CONDON (2015) et FORTUN (2016)].

## 1.1 Rappels sur la condensation de Bose-Einstein

La condensation de Bose-Einstein est une transition de phase quantique au cours de laquelle, par un effet de saturation des états excités, un nombre macroscopique de bosons vient peupler l'état fondamental. Dans cette section nous revenons sur les principes théoriques permettant de rendre compte de la condensation.

Pour cela, nous commençons par rappeler la définition de quelques grandeurs caractéristiques des gaz quantiques. Nous retrouvons par la suite grâce aux statistiques quantiques le phénomène de condensation d'un gaz idéal de bosons dans un piège harmonique. Nous discutons également, de manière plus qualitative, l'effet des interactions (en approximation de champ moyen) sur la fonction d'onde d'un condensat. Cela nous

---

1. Visiter par exemple <https://everycoldatom.com/>.

permet en particulier d'évoquer l'approximation de Thomas-Fermi, qui décrit bien notre système en général.

Ces rappels étant loin d'être exhaustifs, le lecteur désireux d'en savoir plus pourra se référer au grand nombre de cours et d'ouvrages de référence disponibles sur ce sujet [COHEN-TANNOUJJI (1997, 1998), COHEN-TANNOUJJI et GUÉRY-ODELIN (2016) et PITAEVSKII et STRINGARI (2016)].

### 1.1.1 Quelques longueurs caractéristiques des gaz quantiques

Considérons d'abord un gaz constitué de  $N$  atomes de masse  $m$  dans une boîte de volume  $V$ . Ce gaz est caractérisé par sa densité atomique  $n = N/V$  et sa température  $T$ . Nous pouvons associer à ce gaz un ensemble de longueurs caractéristiques :

- $\ell$  la distance moyenne entre particules, que l'on déduit de la densité atomique :

$$\ell = n^{-1/3}; \quad (1.1)$$

- $\lambda_{\text{dB}}$  la longueur d'onde thermique de de Broglie, qui fait intervenir la masse des atomes et la température du gaz :

$$\lambda_{\text{dB}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}; \quad (1.2)$$

- $a$  la longueur de diffusion en ondes  $s$ , utilisée pour caractériser les interactions comme nous le verrons par la suite. Pour le rubidium 87 cette longueur vaut  $a = 5.3$  nm [EGOROV *et al.* (2013)].

Les deux longueurs  $\ell$  et  $\lambda_{\text{dB}}$  sont associées respectivement à la nature classique et quantique de la matière. Nous pouvons introduire la densité dans l'espace des phases  $\mathcal{D}$ , une grandeur sans dimension qui fait intervenir ces deux longueurs :

$$\mathcal{D} = n\lambda_{\text{dB}}^3. \quad (1.3)$$

Lorsque  $\lambda_{\text{dB}} \ll \ell$  (donc  $\mathcal{D} \ll 1$ ), le gaz peut être décrit classiquement, ses propriétés étant expliquées par la théorie cinétique des gaz et la statistique de Maxwell-Boltzmann. Le régime pour lequel  $\lambda_{\text{dB}} \gtrsim \ell$  (c'est-à-dire  $\mathcal{D} \gtrsim 1$ ) correspond au régime de dégénérescence quantique : il faut dans ce cas faire appel aux statistiques quantiques pour décrire correctement le comportement du gaz. C'est dans ce régime que nous nous plaçons dans la suite.

### 1.1.2 Gaz idéal sans interaction

Considérons à présent un gaz idéal de  $N$  bosons dans un piège harmonique en trois dimensions, isotrope<sup>2</sup> et de fréquence angulaire  $\omega$ . Puisqu'il n'y a pas d'interactions,

---

2. Le cas anisotrope se traite en prenant la moyenne géométrique des fréquences angulaires :  $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$  et en séparant les contributions de chaque degré de liberté dans l'expression des énergies propres  $E_n$ .

l'Hamiltonien total peut se mettre sous la forme  $\hat{H} = \sum_{i=1}^N \hat{h}^{(i)}$ , où  $\hat{h}^{(i)}$  satisfait l'équation de Schrödinger à un corps :

$$\hat{h}^{(i)} |\psi_n^{(i)}\rangle = E_n |\psi_n^{(i)}\rangle \quad (1.4)$$

avec  $|\psi_n^{(i)}\rangle$  la fonction d'onde décrivant la particule  $i$  dans l'état de vibration  $n$ . Les énergies correspondantes sont bien connues :

$$E_n = \hbar\omega \left( n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right) \quad (1.5)$$

où  $n_x, n_y$  et  $n_z$  sont des entiers positifs, et  $n = n_x + n_y + n_z$  désigne le nombre de quanta de vibrations. L'état fondamental est donc associé à l'énergie  $E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega$ , tandis que les états excités sont caractérisés par leur énergie  $E_n = n\hbar\omega + E_0$  et leur dégénérescence  $g_n$  selon :

$$g_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad (1.6)$$

Puisque nous avons affaire à des bosons, l'occupation des niveaux d'énergie suit la statistique de Bose-Einstein, initialement proposée par S. N. BOSE en 1924 pour des photons [BOSE (1924)] et étendue par la suite aux atomes par A. EINSTEIN [EINSTEIN (1925)]. Le nombre moyen d'atomes  $N_n$  ayant une énergie  $E_n$  est donné par :

$$N_n(T, \mu) = \frac{g_n}{\exp[\beta(E_n - \mu)] - 1} \quad (1.7)$$

avec  $\beta = 1/(k_B T)$  et  $\mu$  le potentiel chimique, paramètres associés respectivement à la conservation de l'énergie et du nombre d'atomes. Or quel que soit le niveau d'énergie considéré, on ne peut avoir un nombre d'atomes négatif. Cette contrainte appliquée au niveau fondamental conduit à une borne supérieure pour le potentiel chimique  $\mu$  :

$$N_0(T, \mu) = \frac{1}{\exp[\beta(E_0 - \mu)] - 1} \geq 0 \Rightarrow \mu < E_0. \quad (1.8)$$

avec  $N_0(T, \mu)$  le nombre d'atomes occupant l'état fondamental. Exprimons également le nombre d'atomes occupant l'ensemble des états excités :

$$N_{\text{exc}}(T, \mu) = \sum_{n \neq 0} \frac{g_n}{\exp[\beta(E_n - \mu)] - 1} = \sum_{n \neq 0} \frac{g_n}{\exp[\beta(n\hbar\omega + E_0 - \mu)] - 1} \quad (1.9)$$

avec bien sûr la relation  $N = N_0 + N_{\text{exc}}$ . Le nombre d'atomes dans les états excités est une fonction monotone croissante de  $\mu$ . Par conséquent, il existe pour cette grandeur une valeur maximale obtenue pour  $\mu = E_0$  :

$$N_{\text{max}}(T) = N_{\text{exc}}(T, \mu = E_0) = \sum_{n \neq 0} \frac{g_n}{\exp[\beta n\hbar\omega] - 1}. \quad (1.10)$$

Le nombre d'atomes dans les états excités est donc borné par une fonction  $N_{\text{max}}(T)$  monotone croissante : lorsque la température diminue, le nombre maximum d'atomes pouvant occuper ces états diminue. Dans le cas d'un système 3D auquel nous nous

intéressons ici<sup>3</sup>,  $N_{\max}(T)$  ne peut prendre que des valeurs finies. Il existe alors une température critique  $T_C$  telle que :

$$N_{\max}(T = T_C) = N. \quad (1.11)$$

On trouve, dans la limite semi-classique  $\hbar\omega \ll k_B T$ , l'expression suivante pour cette température critique :

$$k_B T_C \approx 0.94 \hbar\omega N^{1/3}. \quad (1.12)$$

Nous aboutissons à un phénomène de *saturation*, dû aux statistiques quantiques, qui implique qu'on ne peut pas mettre un nombre arbitraire d'atomes dans les états excités puisqu'il existe une valeur maximale. Ce nombre maximum diminue avec la température, jusqu'à atteindre la valeur seuil  $N_{\max}(T = T_C) = N$  pour la température critique  $T_C$ . Ainsi, pour une température inférieure à la température critique, les états excités ne peuvent pas accueillir tous les atomes et l'état fondamental contient au minimum  $N_0 = N - N_{\max}(T)$  atomes. Plus précisément, on peut montrer que la fraction d'atomes dans l'état fondamental s'écrit :

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^3. \quad (1.13)$$

Il y a donc accumulation d'atomes dans l'état fondamental, qui est peuplé de manière macroscopique lorsque  $T < T_C$  : c'est le phénomène de *condensation de Bose-Einstein*.

Calculons les ordres de grandeur des différentes quantités mises en jeu, en considérant les valeurs typiques  $N = 10^5$  atomes dans un piège isotrope de fréquence angulaire  $\omega \approx 2\pi \times 50$  Hz :

- $T_C \approx 100$  nK;
- pour  $T = 0.5T_C \approx 50$  nK il y a environ 90% des atomes dans l'état fondamental;
- $\hbar\omega/k_B \approx 2$  nK  $\ll T_C$ , nous sommes donc bien dans la limite semi-classique.

Les atomes dans l'état fondamental constituent le condensat, généralement désigné comme une onde de matière cohérente (par analogie avec l'onde lumineuse issue d'un laser) de taille macroscopique. Le condensat est décrit par une seule fonction d'onde  $|\Psi\rangle$  : l'Hamiltonien total  $\hat{H}$  s'écrivant comme la somme des Hamiltoniens à un corps, la fonction d'onde exacte du condensat à température nulle est simplement le produit des fonctions d'onde à une particule dans l'état fondamental :

$$|\Psi\rangle = \bigotimes_{i=1}^N |\psi_0^{(i)}\rangle. \quad (1.14)$$

Les atomes dans les états excités, non condensés, constituent la *fraction thermique*.

3. La dimensionalité a son importance : on montre par exemple qu'à la limite thermodynamique, un gaz de bosons idéal dans une boîte peut condenser à 3D, mais qu'il n'y a pas de condensation à 1D ni à 2D [COHEN-TANNOUJDI et GUÉRY-ODELIN (2016)].

### 1.1.3 Gaz avec interactions : équation de Gross-Pitaevskii

Ajoutons à présent des interactions entre atomes, dont on rend compte par un potentiel d'interaction à deux particules  $V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ . Dans ce cas, l'expression de la fonction d'onde du condensat Eq. 1.14 n'est plus valable, et il est en général impossible d'en obtenir une expression analytique. On fait donc appel à plusieurs approximations.

En premier lieu, l'approximation des gaz dilués  $na^3 \ll 1$  permet de restreindre les interactions à des collisions à deux corps. Pour étudier les propriétés collisionnelles de ces gaz, on utilise pour la fonction d'onde un développement en ondes partielles. À la limite des basses énergies, c'est-à-dire pour les gaz ultra-froids que nous considérons, seules les ondes  $s$  entrent en jeu. Sous ces hypothèses, nous pouvons donc remplacer le potentiel d'interaction par un pseudo-potentiel de type contact :

$$V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = g\delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad \text{avec} \quad g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}. \quad (1.15)$$

La force de ces interactions est caractérisée par le terme de couplage  $g$ , qui fait intervenir la longueur de diffusion  $a$  en ondes  $s$ . Cette longueur de diffusion étant positive pour le rubidium 87 considéré ici, il s'agit d'interactions répulsives.

La deuxième approximation consiste à utiliser une approche variationnelle pour trouver l'état fondamental du système. On restreint la recherche de solutions à des états similaires à l'Eq. 1.14, c'est-à-dire à des états pour lesquels tous les atomes sont décrits par la même fonction d'onde<sup>4</sup>. Sous ces hypothèses, la méthode variationnelle conduit à l'équation de Gross-Pitaevskii, qui s'écrit en représentation position :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{\text{ext}}(\vec{r}) + g|\Psi(\vec{r}, t)|^2 \right] \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.16)$$

où  $V_{\text{ext}}(\vec{r})$  désigne le potentiel extérieur (pris ici indépendant du temps) et  $\Psi(\vec{r}, t)$  la fonction d'onde du condensat. Dans le régime stationnaire, cette dernière peut se mettre sous la forme  $\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_0(\vec{r}) e^{-i\mu t/\hbar}$ , ce qui conduit à l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{\text{ext}}(\vec{r}) + g|\Psi_0(\vec{r})|^2 \right] \Psi_0(\vec{r}) = \mu\Psi_0(\vec{r}). \quad (1.17)$$

On ne s'intéresse ici qu'aux solutions réelles de l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire. La fonction d'onde du condensat peut dans ce cas être reliée à la densité atomique *via* :

$$\Psi_0(\vec{r}) = \sqrt{n(\vec{r})}. \quad (1.18)$$

**i**

Comparé à l'équation de Schrödinger, l'introduction d'interactions à deux corps se traduit dans l'équation de Gross-Pitaevskii par le terme supplémentaire  $g|\Psi_0(\vec{r})|^2$ . Ce terme, qui peut également s'écrire  $gn(\vec{r})$ , traduit un potentiel effectif dépendant de la densité atomique locale  $n(\vec{r})$  : on rend compte des interactions par un champ moyen.

4. Cette approximation est également connue sous le nom d'approximation de Hartree.

## 1.1.4 Effet des interactions et limite de Thomas-Fermi

Pour terminer ces rappels, nous faisons quelques raisonnements qualitatifs à une dimension afin de comprendre l'effet des interactions sur l'état fondamental du système. Pour cela nous nous attardons sur les deux cas d'école que sont le puits de potentiel et le piège harmonique. Le premier cas nous permettra de comprendre l'origine de l'approximation de Thomas-Fermi, que nous appliquerons ensuite au deuxième cas pour aboutir à l'expression de la fonction d'onde  $\Psi_{\text{TF}}$  très utilisée pour les gaz de bosons.

*Puits de potentiel*

Considérons le cas simple à une dimension d'un puits de potentiel défini selon :

$$V_{\text{ext}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < x < L, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.19)$$

On impose également des conditions aux limites de Dirichlet :  $\Psi_0(0) = \Psi_0(L) = 0$ . En l'absence d'interaction, l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire Eq. 1.17 se réduit à l'équation de Schrödinger, et on retrouve la solution bien connue :

$$\Psi_0^{(g=0)}(x) \propto \sin(\pi x/L). \quad (1.20)$$

En présence d'interactions, on obtient pour la fonction d'onde près des bords du puits :

$$\Psi_0^{(g \neq 0)}(x) \propto \tanh(x/(\sqrt{2}\xi)) \quad (1.21)$$

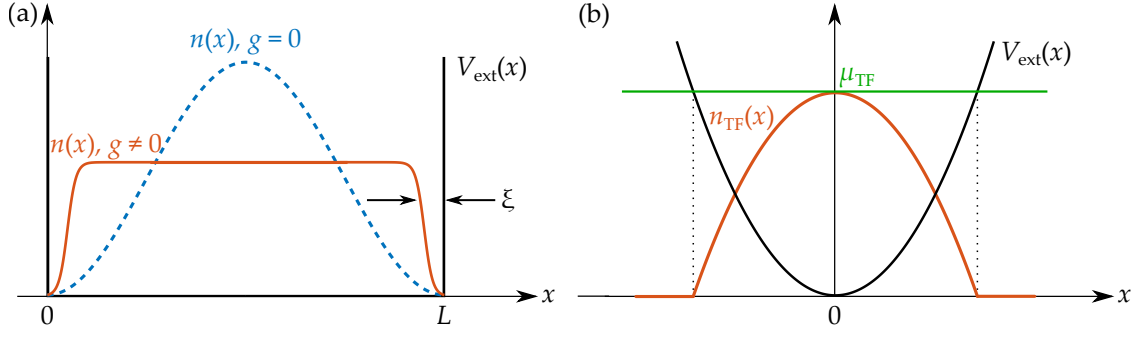
où l'on a fait apparaître une longueur caractéristique  $\xi$  appelée *longueur de relaxation*<sup>5</sup>, qui dépend du terme de couplage  $g$  selon  $\xi \propto g^{-1/2}$ .

L'allure des densités correspondantes  $n(x) = |\Psi_0(x)|^2$  est tracée Fig. 1.1(a). Dans la boîte de potentiel, l'effet des interactions répulsives est clair : le système est plus homogène afin de minimiser l'énergie d'interaction, excepté sur une distance  $\xi$  près des bords de la boîte. Plus les interactions sont fortes, plus la distance  $\xi$  est faible et plus les atomes se distribuent uniformément dans le piège. En d'autres termes, en présence d'interactions répulsives, la densité atomique est plus uniforme et présente moins de variations spatiales. Or on peut montrer que l'énergie cinétique dépend du gradient de la densité<sup>6</sup>. L'énergie cinétique peut donc devenir négligeable comparée à l'énergie d'interaction, ce qui nous amène à ignorer ce terme dans l'équation de Gross-Pitaevskii.

5. On parle également de longueur de cicatrisation (ou *healing length*), car il s'agit de la longueur au-delà de laquelle on perd l'information sur les conditions de bord.

6. Plus précisément on a [COHEN-TANNOUJJI (1998)] :

$$E_{\text{cin}} = \langle \Psi_0 | -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} | \Psi_0 \rangle = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{n(x)} \right)^2 dx.$$



**FIGURE 1.1** | Profils de densité atomique théoriques dans deux types de pièges unidimensionnels en présence d'interactions. (a) Densité correspondant à l'état fondamental dans un puits de potentiel (trait noir), solution de l'équation de Gross-Pitaevskii (Eq. 1.17), en l'absence d'interaction (tirets bleus) et avec interactions (trait orange). On définit également la longueur de relaxation  $\xi$ . (b) Densité correspondant à l'état fondamental dans un piège harmonique (trait noir) en présence d'interactions et dans l'approximation de Thomas-Fermi (parabole concave, trait orange). La valeur du potentiel chimique  $\mu$  est indiquée par un trait horizontal vert.

### Potentiel harmonique

Considérons à présent un potentiel harmonique  $V_{\text{ext}}(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ . Nous utilisons à nouveau l'équation de Gross-Pitaevskii Eq. 1.17 mais nous négligeons ici l'énergie cinétique sous l'effet des interactions. Nous obtenons alors la *limite de Thomas-Fermi*, dont la solution  $\Psi_{\text{TF}}$  satisfait l'équation :

$$\left[ \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + g|\Psi_{\text{TF}}(x)|^2 \right] \Psi_{\text{TF}}(x) = \mu_{\text{TF}}\Psi_{\text{TF}}(x). \quad (1.22)$$

Cette dernière équation se résout aisément, et nous trouvons l'expression suivante pour la fonction d'onde :

$$\Psi_{\text{TF}}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{g} \left( \mu_{\text{TF}} - \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \right)} & \text{si } \mu_{\text{TF}} > V_{\text{ext}}(x), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.23)$$

Le nuage dans le piège harmonique a donc une distribution en forme de parabole inversée, dont une représentation est donnée Fig. 1.1(b). Soulignons toutefois que cette approximation n'est pas vérifiée en tout point du condensat : au voisinage des bords de la parabole, la densité tendant vers 0, on comprend qu'on ne peut plus négliger l'énergie cinétique. L'approximation par une parabole inversée n'est donc plus valable au voisinage de ses bords [DALFOVO et STRINGARI (1996) et RIOU (2006)].

Cette description est valide s'il y a "suffisamment d'interactions". De manière plus formelle, la condition suivante doit être vérifiée [PITAEVSKII et STRINGARI (2016)] :

$$N \frac{a}{a_{\text{OH}}} \gg 1 \quad (1.24)$$



où  $a_{\text{OH}} = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$  est la longueur de l'oscillateur harmonique quantique associé au piège harmonique et  $a$  la longueur de diffusion en ondes  $s$  définie précédemment.

Sur notre dispositif expérimental, nous utilisons des fréquences de piégeage comprises entre 5 et 50 Hz. Dans le pire des cas ( $\omega = 2\pi \times 5$  Hz), le nombre d'atomes  $N$  doit donc vérifier :

$$N \gg 1000.$$

Les plus petits condensats que nous avons utilisés contenant  $N = 3 \times 10^4$ , la condition est bien validée.

## 1.2 Séquence expérimentale pour produire un condensat

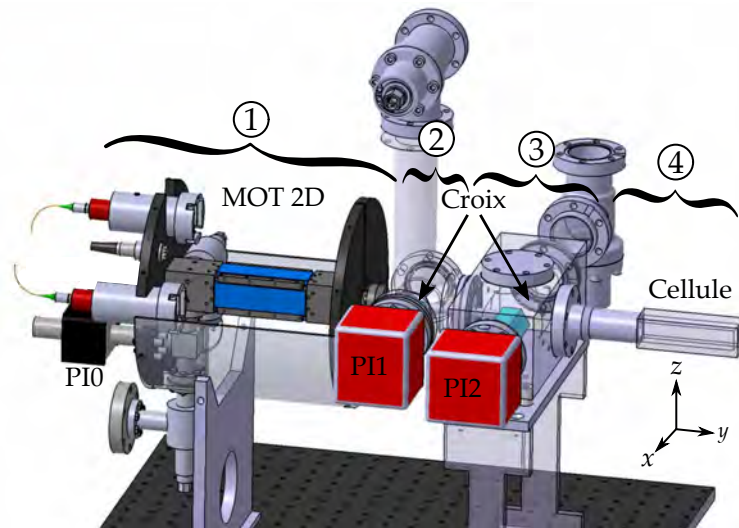
Comme nous l'avons rappelé au début de la section précédente, il est nécessaire d'avoir une densité dans l'espace des phases  $\mathcal{D}$  de l'ordre de l'unité pour atteindre la condensation. D'après sa définition Eq. 1.3, on peut chercher à augmenter la densité atomique  $n$  ou encore augmenter la longueur d'onde thermique de de Broglie  $\lambda_{\text{dB}}$  en diminuant la température  $T$  du gaz. Ainsi, grâce aux techniques de piégeage et de refroidissement développées ces dernières années, nous parvenons par exemple à diminuer la température du gaz de plus de neuf ordres de grandeur<sup>7</sup>, passant d'une température ambiante à une température inférieure à 100 nK.

Dans cette deuxième section, je rappelle les étapes successives de la séquence expérimentale que nous réalisons afin d'atteindre le régime de dégénérescence quantique et ainsi produire un condensat de Bose-Einstein de rubidium 87. J'ai choisi de découper la description de cette séquence en trois blocs :

- une première sous-section est dédiée au refroidissement laser, qui constitue le premier type de refroidissement que nous mettons en œuvre. À l'issue de ces étapes nous atteignons une température d'environ 50  $\mu\text{K}$ .
- la deuxième partie de la séquence consiste en un refroidissement par évaporation forcée dans un piège magnétique quadrupolaire à l'aide d'un rayonnement micro-onde. En fin d'évaporation nous avons un nuage à une température d'environ 30  $\mu\text{K}$ .
- nous terminons la séquence avec une deuxième évaporation forcée, cette fois-ci dans un piège hybride qui consiste en la somme du piège magnétique quadrupolaire et d'un confinement optique. Cette dernière étape nous permet de franchir la température critique de l'ordre de la centaine de nanokelvins et d'obtenir des condensats.

Avant de détailler la séquence expérimentale, je commence par une brève description du cœur du dispositif et de son système à vide.

<sup>7</sup>. À titre de comparaison, il n'y a qu'un ordre de grandeur entre la température ambiante et la température à la surface du Soleil.



**FIGURE 1.2** | Schéma 3D du cœur du dispositif et de son système à vide. Un MOT 2D produit en ① un jet atomique de rubidium en refroidissant les atomes selon les deux directions transverses  $x$  et  $z$ . Les atomes sont poussés selon l'axe  $y$  vers le centre de la cellule en verre en ④ où ils sont capturés dans le MOT 3D. L'ensemble du dispositif est maintenu sous vide grâce à trois pompes ioniques (PI), complétées pour les pompes PI1 et PI2 par des pompes NEG. Les chiffres se réfèrent aux différentes parties du système à vide décrites dans le texte.

### 1.2.1 Description générale du dispositif

Le dispositif expérimental principal, visible sur la Fig. 1.2, consiste en un piège magnéto-optique bidimensionnel (MOT 2D), construit par le SYRTE, et d'un piège magnéto-optique tridimensionnel (MOT 3D) dans une cellule en verre.

Le MOT 2D est alimenté par un four à atomes dans lequel du rubidium est chauffé à environ 100°C. Grâce à des faisceaux refroidisseurs, amenés par fibre optique, ainsi qu'au faisceau repompeur qui entre directement par le hublot central du dispositif du SYRTE, le MOT 2D produit un jet d'atomes refroidis selon les directions transverses  $x$  et  $z$  et poussés selon l'axe  $y$  jusqu'au MOT 3D par un faisceau résonant appelé *faisceau pousseur*, superposé au faisceau repompeur. Les différents éléments du système à vide qui relie le MOT 2D et le MOT 3D se répartissent en quatre parties :

1. La chambre initiale où nous réalisons le MOT 2D. Les faisceaux refroidisseurs proviennent directement de deux fibres optiques (visibles sur la Fig. 1.2). Le vide dans cette chambre est assuré par une première pompe ionique PI0.
2. Le MOT 2D est relié à une première croix par un tube à vide différentiel. Sur cette croix est branchée une deuxième pompe<sup>8</sup>, constituée à la fois d'une pompe ionique PI1 et d'une pompe NEG (*Non Evaporable Getter*).
3. Cette première croix communique avec une deuxième croix via un nouveau tube à vide différentiel. Une troisième pompe<sup>9</sup> ionique PI2, également complétée par une pompe NEG, est reliée à cette deuxième croix.

8. NEX Torr D 100-5

9. NEX Torr D 200-5

4. Une cellule en verre, qui constitue la chambre d'expérience, termine cet ensemble à vide. Cette cellule, de section carrée, mesure 10 cm de long et 3 cm de côté extérieur, avec une épaisseur de paroi de 5 mm. C'est ici que nous piégeons les atomes dans le MOT 3D, avant d'effectuer les différentes étapes de refroidissement présentées ci-après jusqu'à atteindre la condensation. Des lasers de différentes longueurs d'onde (780 et 1064 nm) étant utilisés dans nos expériences, la cellule en verre n'a pas subi de traitement anti-reflet.

Grâce à ce dispositif de double vide différentiel, la cellule en verre est maintenue sous ultra-vide (soit une pression inférieure à  $10^{-10}$  mbar).

### 1.2.2 Piège magnéto-optique et refroidissement laser

Le dispositif expérimental est composé de deux MOTs. Ces pièges exploitent les forces radiatives, issues de l'interaction lumière/matière, pour manipuler les degrés de liberté externes d'un atome. Les techniques de refroidissement et de piégeage avec des lasers, développées il y a maintenant plus de trente ans, sont largement documentées [COHEN-TANNOUJDI (1990), TOWNSEND *et al.* (1995) et DALIBARD (2015)]. Nous ne ferons pas une revue exhaustive du refroidissement laser, nous nous contenterons de donner les ingrédients nécessaires à la compréhension du dispositif expérimental et des différentes étapes de la séquence.

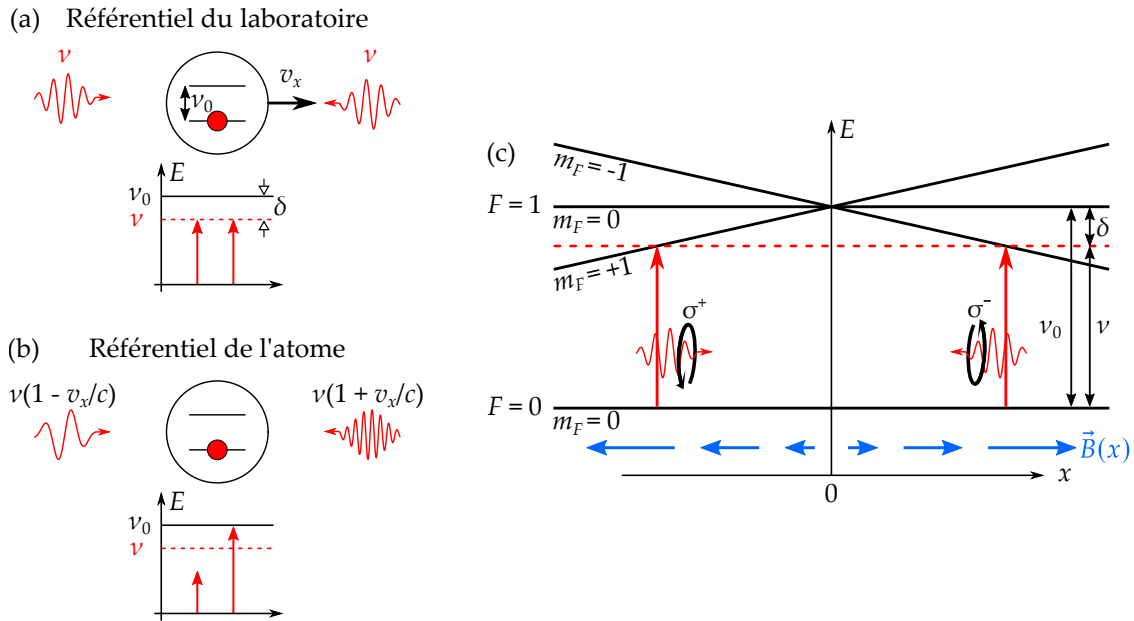
#### Principe

Rappelons ici très brièvement les mécanismes permettant d'expliquer le MOT. Nous simplifierons les explications en considérant un atome à deux niveaux (un état fondamental de moment cinétique nul et un état excité de moment cinétique égal à 1) se déplaçant selon la direction  $x$  à une vitesse  $v_x$ . La différence d'énergie entre les deux états atomiques est  $E = h\nu_0$ , et l'état excité a une durée de vie  $\tau = 1/\Gamma$ . La force  $F$  qui s'exerce au sein d'un MOT,

$$F = -\alpha v_x - \kappa x, \quad (1.25)$$

a deux composantes : la première est une force de frottement visqueux à l'origine du refroidissement, la deuxième est une force de rappel responsable du piégeage. Nous nous appuierons sur la Fig. 1.3 pour illustrer l'origine de ces deux effets.

REFROIDISSEMENT : Plaçons-nous d'abord dans le référentiel du laboratoire, et considérons la situation où l'atome est éclairé par deux lasers contra-propageants, dits *faisceaux refroidisseurs* (Fig. 1.3(a)). Ces lasers sont de même fréquence  $\nu$  et sont désaccordés dans le rouge : leur fréquence est telle que  $\nu < \nu_0$ , donc le désaccord  $\delta = \nu - \nu_0$  est négatif. Cependant, dans le référentiel de l'atome, ces deux lasers ne sont pas à la même fréquence (Fig. 1.3(b)) : compte-tenu de l'effet Doppler, l'onde laser qui va à l'encontre de l'atome est perçue par ce dernier comme étant à une fréquence plus élevée. Ce laser sera donc, pour l'atome, plus proche de résonance d'une quantité  $(v_x/c)\nu$ . Symétriquement, l'onde laser se propageant dans le même sens que l'atome est perçue par celui-ci à une fréquence inférieure, éloignée de résonance de la même quantité  $(v_x/c)\nu$ . Par conséquent, l'atome est plus susceptible d'absorber des photons provenant du laser venant à sa rencontre.



**FIGURE 1.3 | Schéma de principe du refroidissement et du piégeage dans un MOT.** Principe d'une mélasse optique : deux lasers contra-propageants de même fréquence éclairant un atome en mouvement dans le référentiel du laboratoire (a) seront perçus de fréquences différentes par l'atome dans son référentiel (b) à cause de l'effet Doppler. En choisissant un désaccord  $\delta = \nu - \nu_0$  négatif, l'atome absorbe préférentiellement un photon allant à son encontre, entraînant son ralentissement. (c) Principe d'un MOT : l'atome peut absorber un photon  $\sigma^+$  du faisceau venant de la gauche ou  $\sigma^-$  du faisceau venant de la droite. La dégénérescence des sous-états magnétiques étant levée par application d'un gradient de champ magnétique, un atome à  $x > 0$  absorbera de préférence un photon  $\sigma^-$  car la transition  $|F = 0, m_F = 0\rangle \rightarrow |F = 1, m_F = -1\rangle$  est plus proche de résonance. Ce photon venant de droite, l'atome sera ramené au centre. Un raisonnement similaire peut être fait pour un atome en  $x < 0$ .

Lorsque l'atome absorbe un tel photon, il subit un recul : par conservation de la quantité de mouvement, son impulsion après absorption est diminuée de l'impulsion du photon  $h\nu/c$ . L'atome subit ensuite un deuxième transfert d'impulsion lorsqu'il émet spontanément un photon dans une direction aléatoire de l'espace, cette émission ayant lieu de manière équiprobable pour deux directions opposées. Après un grand nombre de cycles absorption/émission spontanée, ces deux processus n'ont pas le même effet moyen : l'effet de recul dû à l'absorption est toujours opposé au mouvement de l'atome et s'additionne, tandis que le transfert d'impulsion associé à l'émission spontanée se moyenne à zéro. La lumière exerce ainsi sur les atomes une force moyenne appelée *force de pression de radiation*. Dans le cas de deux lasers contra-propageants, le déséquilibre entre les deux forces de pression de radiation dû au déplacement de l'atome se traduit par une force visqueuse de forme  $-\alpha v_x$  (d'où le terme de *mélasse optique*). Cette force réduit la dispersion en vitesse de l'ensemble atomique et assure donc le refroidissement du nuage.

Il existe une température minimale  $T_{\text{Dop}}$ , appelée *température Doppler* à cette méthode de refroidissement. Son origine est l'ensemble des chocs aléatoires dûs à l'émission spontanée : bien que l'émission spontanée n'ait pas d'effet sur la vitesse moyenne, elle est responsable d'une diffusion de l'atome dans l'espace des impulsions<sup>10</sup>. En utilisant le formalisme du mouvement brownien, nous aboutissons à l'expression suivante pour cette température limite [DALIBARD (2015)] :

$$k_B T_{\text{Dop}} = \frac{\hbar \Gamma}{2}. \quad (1.26)$$

Pour le rubidium 87, le temps de vie de l'état excité vaut  $\tau = 26.2$  ns et la largeur naturelle associée est  $\Gamma = 2\pi \times 6.07$  MHz. La température Doppler a donc pour valeur  $T_{\text{Dop}} = 147$   $\mu$ K.

Nous verrons dans la séquence expérimentale qu'il est possible d'atteindre dans le MOT des températures inférieures à  $T_{\text{Dop}}$  par des processus sub-Doppler.

**PIÉGEAGE :** Pour le refroidissement nous n'avons considéré que les deux niveaux de l'atome : nous devons à présent également prendre en compte son moment cinétique. La force de pression de radiation ne dépendant que de la vitesse des atomes, un ingrédient supplémentaire est nécessaire afin d'ajouter une dépendance spatiale à la force et de confiner les atomes en un point donné. Cet ingrédient consiste en un champ magnétique inhomogène  $\vec{B}(x)$  s'annulant en  $x = 0$  : ce point devient la position d'équilibre. En effet, la dégénérescence des sous-états magnétiques étant levée par effet Zeeman, l'énergie des niveaux internes de l'atome varie en fonction de la position de ce dernier. En combinant cet effet et l'utilisation de polarisations circulaires droite et gauche pour les deux lasers contra-propageants, on crée un déséquilibre des forces de pression de radiation en tout point  $x \neq 0$ . Ainsi, un atome éloigné de l'origine, même s'il est au repos, absorbera préférentiellement un photon qui tendra à le ramener vers le centre du piège.

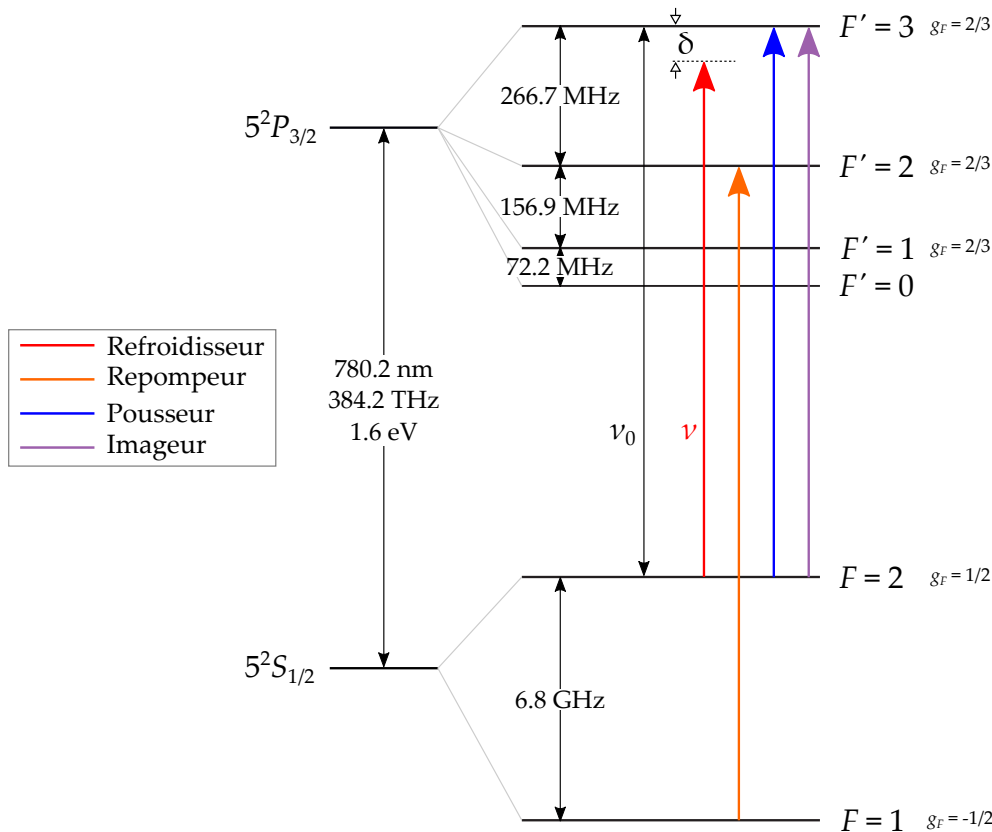
Les raisonnements que nous avons suivis à une dimension se généralisent bien à trois dimensions : un MOT 3D nécessite trois paires de faisceaux refroidisseurs, afin de refroidir les atomes selon les trois degrés de liberté externes. La configuration habituelle utilise trois directions orthogonales les unes des autres, mais ce n'est pas la géométrie qui a été retenue sur notre dispositif comme décrit dans la suite.

### Mise en œuvre expérimentale

Les premières étapes de refroidissement laser nécessitent donc deux éléments : trois paires de faisceaux dont la fréquence, l'intensité et la polarisation sont soigneusement contrôlées, et un gradient de champ magnétique.

En pratique, le rubidium 87 possède de nombreux niveaux atomiques. On ne s'intéressera qu'à la raie  $D_2$  constitué de l'état fondamental  $5^2S_{1/2}$  et de l'état excité  $5^2P_{3/2}$ , et dont la structure hyperfine est rappelée Fig. 1.4. La transition utilisée pour le refroidissement est la transition entre les états hyperfins  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ . Lors des cycles

10. Le processus d'émission spontanée peut donc être pris en compte à travers une force de Langevin.



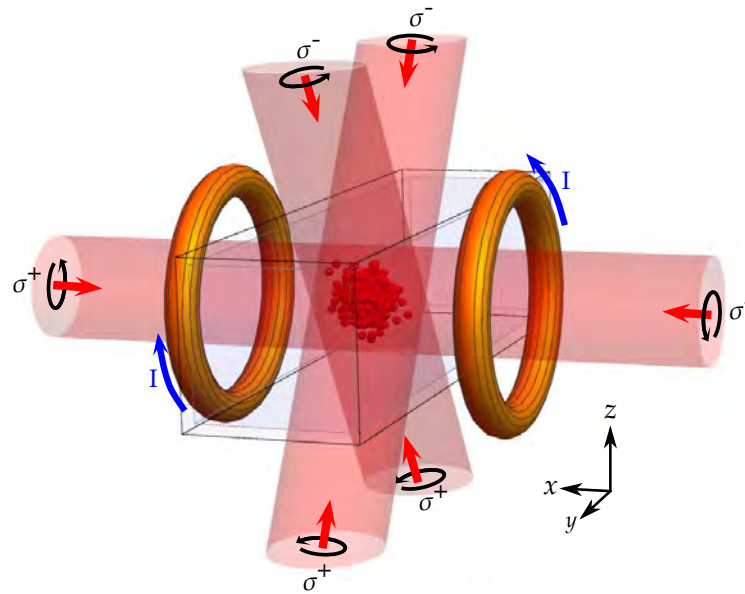
**FIGURE 1.4 | Raie  $D_2$  de la structure hyperfine du rubidium 87.** La transition de refroidissement est la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$  de fréquence associée  $\nu_0$ . Les faisceaux refroidisseurs, de fréquence  $\nu$ , sont désaccordés d'une quantité  $|\delta|$  vers le rouge par rapport à la transition de refroidissement. Les faisceaux repompeurs sont résonants avec la transition  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ . Les faisceaux pousseur et imageur sont résonants avec la transition de refroidissement. Source : [STECK (2001)].

absorption/émission spontanée, il arrive que des atomes se désexcitent vers l'état  $|F = 1\rangle$  du niveau fondamental. Cet état est un état noir car il n'existe pas de transition atomique correspondant à la longueur d'onde des faisceaux refroidisseurs depuis l'état  $|F = 1\rangle$ . Par conséquent, les atomes finissent par s'y accumuler après un grand nombre de cycles et il n'y a plus d'effet de refroidissement. Pour remédier à ce phénomène, nous ajoutons des *faisceaux repompeurs*, résonants avec la transition  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ , chargés de renvoyer les atomes dans le cycle de refroidissement. À ces deux types de faisceaux s'ajoutent également le *faisceau pousseur*, chargé d'entraîner les atomes du MOT 2D vers le MOT 3D, ainsi que le *faisceau imageur* utilisé dans l'imagerie par absorption (voir section 1.3). Tous deux sont résonants avec la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ .

Ces faisceaux sont préparés sur deux tables optiques distinctes, dont les schémas sont disponibles en annexe A :

- la table "refroidisseur" prépare d'une part un unique faisceau refroidisseur pour le MOT 3D (il sera divisé en trois paires plus tard), d'autre part les deux faisceaux refroidisseurs du MOT 2D, le faisceau pousseur et le faisceau imageur. On utilise





**FIGURE 1.5** | Schéma 3D du piège magnéto-optique tridimensionnel. Le MOT 3D est constitué de six faisceaux refroidisseurs (une paire de faisceaux horizontaux et deux paires de faisceaux dans le plan  $(yOz)$ ) et de deux faisceaux repompeurs (confondus avec les faisceaux refroidisseurs horizontaux). Parmi les faisceaux refroidisseurs, deux bras d'une même paire sont de polarisation circulaire opposée. Deux bobines en configuration anti-Helmholtz d'axe commun  $(Ox)$  produisent un gradient de champ magnétique. Figure tirée de [CONDON (2015)].

pour cela une diode laser <sup>11</sup> dont la fréquence est asservie sur la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$  par un montage de spectroscopie par absorption saturée. Le signal d'erreur est obtenu grâce à un amplificateur à détection synchrone <sup>12</sup>, tandis que la rétroaction est assurée par un circuit électronique qui agit directement sur le courant de la diode. Les fréquences des différents faisceaux sont ensuite ajustées grâce à des modulateurs acousto-optiques (AOMs). La puissance laser est amplifiée par deux amplificateurs optiques <sup>13</sup>. Pour le faisceau refroidisseur du MOT 3D, un AOM utilisé en double-passage nous permet d'asservir l'intensité du faisceau et de modifier dynamiquement sa fréquence.

- la table "repompeur" prépare les faisceaux repompeurs pour le MOT 2D et le MOT 3D. Le montage est assez semblable à la table refroidisseur : une diode laser <sup>14</sup> est asservie en fréquence sur le cross-over  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 1, 2\rangle$  par un montage similaire à la première table, puis des AOMs sont utilisés pour ajuster la fréquence des lasers. La puissance optique est là aussi amplifiée grâce à un amplificateur optique <sup>15</sup>, tandis qu'un des AOMs sert à asservir l'intensité du faisceau repompeur du MOT 3D.

Les faisceaux des deux tables sont ensuite amenés par fibre optique sur une troisième table optique où se situe le système à vide. Sur cette table d'expérience, le laser refroidisseur

11. Toptica DL Pro

12. SRS Lock-In Amplifier SR830

13. Sacher Lasertechnik TEC 400 de 2 W et 2.5 W.

14. Toptica DL Pro

15. Toptica BoosTA Pro de 3 W (puissance maximale de sortie après isolateur optique intégré : 2.5 W).

du MOT 3D est divisé en trois paires directement en sortie de fibre, puis chaque faisceau est préparé (diamètre de faisceau de 2 cm, polarisations circulaires). Les trois paires se croisent au niveau de la cellule en verre selon la géométrie représentée Fig. 1.5. Le MOT 3D est ainsi formé d'une paire de faisceaux horizontaux selon l'axe  $x$  et de deux paires dans le plan  $(yOz)$  formant un angle d'environ  $30^\circ$  avec la verticale. Cette géométrie non orthogonale permet de conserver un accès optique selon l'axe vertical pour d'éventuels besoins futurs. Le faisceau repompeur du MOT 3D, divisé en deux sur la table d'expérience, est superposé aux faisceaux refroidisseurs horizontaux. Tous les lasers se croisent donc au centre de la cellule en verre, qui correspond également au zéro du champ magnétique produit par une paire de bobines, visible sur la Fig. 1.5, en configuration anti-Helmholtz.

### Séquence expérimentale – 1<sup>ère</sup> partie

La première partie de la séquence expérimentale, dédiée au refroidissement laser, est décrite ci-dessous. Dans la marge sont indiqués le nombre d'atomes  $N$  et la température  $T$  du gaz typiques à la fin de chaque étape. Cette séquence est également résumée sur la Fig. 1.6.

**CHARGEMENT DU MOT :** Nous chargeons le MOT 3D grâce au flux d'atomes provenant du MOT 2D. Pour cela, tous les faisceaux hors imageur (refroidisseurs 2D et 3D, repompeurs 2D et 3D et pousseur) ainsi que les gradients de champ magnétique sont allumés pendant 7 s environ. Les faisceaux refroidisseurs 3D ont chacun environ 10 mW de puissance en entrée de cellule, correspondant à une intensité de  $3 \text{ mW/cm}^2$ . Ils sont désaccordés de  $\delta = -2\Gamma$  pendant cette étape. Le gradient de champ magnétique du MOT 3D est d'environ 10 G/cm.

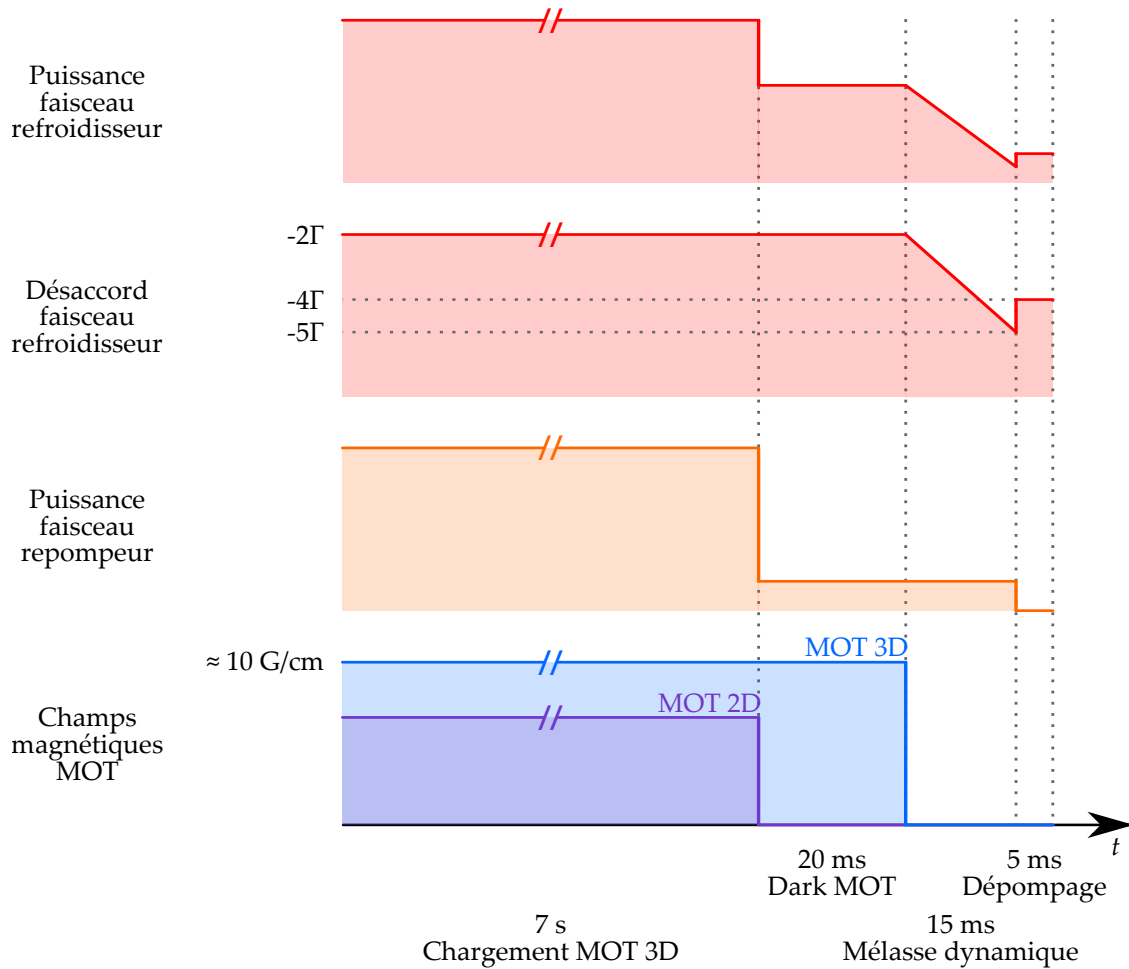
$$\begin{aligned} N &\gtrsim 1.5 \times 10^9 \\ T &\gtrsim 250 \mu\text{K} \end{aligned}$$

**DARK MOT :** Nous appliquons ensuite la technique du dark MOT, initialement proposée par [KETTERLE *et al.* (1993)]. Dans cet article, les auteurs expliquent qu'à des températures suffisamment basses, il n'est pas nécessaire de saturer les transitions atomiques puisque les forces de pression de radiation, même à faible intensité, permettent toujours d'assurer le confinement des atomes une fois ces derniers suffisamment ralentis. Nous réduisons donc pendant 20 ms l'intensité des faisceaux refroidisseurs d'un facteur  $\approx 2$  et celle des faisceaux repompeurs d'un facteur  $\approx 20$ . De part la réduction drastique du nombre de photons repompeurs, les atomes sont optiquement pompés dans l'état noir  $|F = 1\rangle$ , et n'effectuent plus qu'un nombre limité de cycles d'absorption/émission spontanée. Cette diminution du nombre de cycles est utile, car chaque photon réémis au sein du nuage est susceptible d'être absorbé par un autre atome, ce qui se traduit par une force effective répulsive entre les atomes [WALKER *et al.* (1990)]. Par cette technique, la taille du nuage est réduite sans perte d'atomes ni chauffage, ce qui augmente la densité atomique.

$$\begin{aligned} N &= 1.3 \times 10^9 \\ T &= 250 \mu\text{K} \end{aligned}$$

**MÉLASSE DYNAMIQUE :** J. DALIBARD et C. COHEN-TANNOUJDI ont expliqué en détail les mécanismes de refroidissement sub-Doppler pouvant avoir lieu dans une mélasse optique, en fonction de la polarisation utilisée pour les faisceaux refroidisseurs [DALIBARD et COHEN-TANNOUJDI (1989)]. Pour notre configuration  $\sigma^+ - \sigma^-$ , la température d'équilibre calculée  $T_{\text{sub-Dop}}$  est proportionnelle à  $I/\delta$ , où  $I$  est l'intensité des faisceaux refroidisseurs et  $\delta$  leur désaccord par rapport à la transition de refroidissement  $|F = 2\rangle \rightarrow |F = 3\rangle$ . Dans le but de diminuer encore la température du nuage, nous augmentons donc linéairement





**FIGURE 1.6 | Première partie de la séquence expérimentale : refroidissement laser.** Sont représentés la puissance et le désaccord des faisceaux refroidisseurs, la puissance des faisceaux repompeurs et les champs magnétiques. Après un chargement du MOT 3D de 7 s, nous augmentons la densité atomique avec une étape de dark MOT puis nous réduisons la température avec une étape de mélasse dynamique. Les atomes sont préparés dans l'état  $|F = 1\rangle$  par une phase de dépompage.

le désaccord en 15 ms, passant de  $\delta = -2\Gamma$  à  $\delta = -5\Gamma$ , tout en réduisant encore l'intensité des faisceaux refroidisseurs d'un facteur 10 environ par une rampe linéaire.

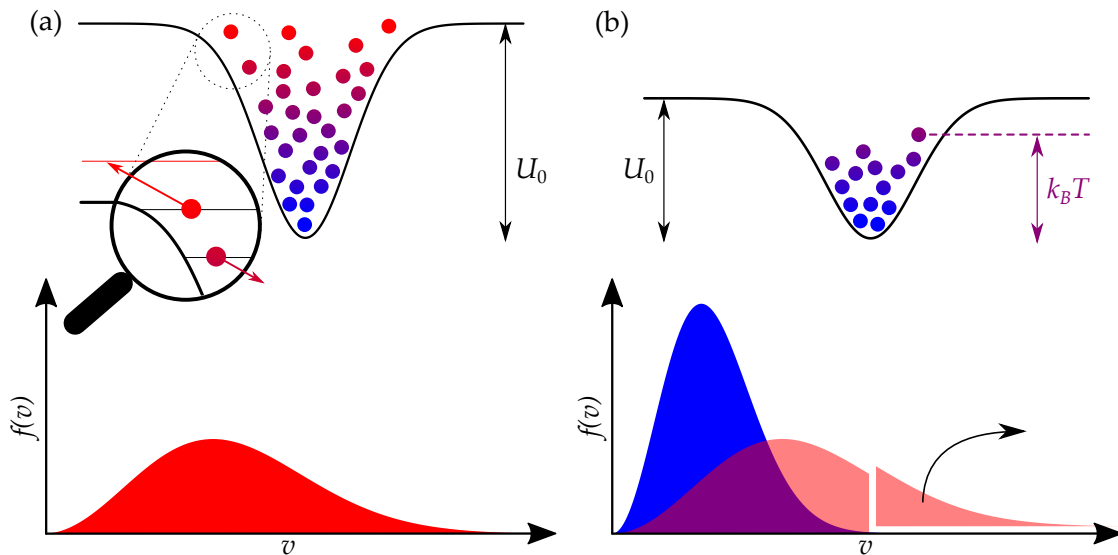
$$N = 1.2 \times 10^9$$

$$T = 50 \mu\text{K}$$

**DÉPOMPAGE :** Il s'agit ici de la dernière étape avant de charger les atomes dans le piège magnétique. Comme nous le verrons à la section suivante, le piégeage magnétique dépend des sous-états magnétiques de la structure atomique. Nous procédons donc à une étape de dépompage de 5 ms, pendant laquelle les faisceaux repompeurs sont coupés. Sous l'effet des faisceaux refroidisseurs seuls, les atomes s'accumulent dans l'état hyperfin  $|F = 1, m_F = 0, \pm 1\rangle$ , et sont prêts à être capturés dans le piège magnétique pour une première étape de refroidissement par évaporation.

$$N = 1.2 \times 10^9$$

$$T = 50 \mu\text{K}$$



**FIGURE 1.7** | Schéma de principe du refroidissement par évaporation. (a) Deux atomes piégés dans le potentiel de profondeur  $U_0$  interagissent par collision élastique. La particule la plus énergétique après collision peut quitter le piège. À profondeur fixée, le gaz, une fois thermalisé, possède une certaine distribution en vitesse  $f(v)$ . (b) On force l'évaporation en diminuant la profondeur du piège. On sacrifie les atomes les plus énergétiques (donc on tronque la distribution  $f(v)$ , en rouge, pour les grandes vitesses) pour ne garder qu'un nuage d'atomes d'énergie totale bien plus faible. Après rethermalisation, la nouvelle distribution  $f(v)$ , en bleue, présente une dispersion plus faible : la température du nuage est diminuée.

### 1.2.3 Mécanisme général du refroidissement par évaporation

Les premières étapes de la séquence expérimentale que nous venons de présenter reposent sur le refroidissement laser. Ce type de refroidissement, même s'il permet d'atteindre des températures sub-Doppler<sup>16</sup>, limite la densité dans l'espace des phases  $\mathcal{D}$  atteignable. En effet, les cycles d'absorption/émission spontanée sur lesquels reposent la force de pression de radiation s'accompagnent nécessairement d'une diffusion en impulsion des atomes du nuage. Cette diffusion constitue une limitation intrinsèque pour la densité atomique et la température atteignables au sein d'un MOT. Pour continuer à augmenter la densité dans l'espace des phases, nous utilisons donc la technique de refroidissement par évaporation, décrite de manière qualitative sur la Fig. 1.7.

Considérons comme état initial un gaz d'atomes confinés dans un piège conservatif (c'est-à-dire dérivant d'un potentiel) de profondeur  $U_0$  constante pour l'instant. Le refroidissement par évaporation libre peut se décomposer en deux étapes [DAVIS *et al.* (1995a)] : (i) les atomes piégés interagissant par collisions élastiques, il arrive que certains atomes acquièrent une énergie suffisante pour quitter le piège. Ces derniers sont alors perdus, mais emportent avec eux une grande quantité d'énergie ; (ii) l'énergie totale

<sup>16</sup> Il existe également des techniques de refroidissement laser sub-recul, c'est-à-dire permettant d'atteindre des températures  $T < T_R$  où  $T_R$  est la température de recul. Cette dernière est définie par  $k_B T_R / 2 = E_R$ , où l'énergie de recul  $E_R = \hbar^2 k_R^2 / (2m)$  est l'énergie portée par un seul photon refroidisseur, de vecteur d'onde  $k_R = 2\pi/\lambda$  [BARDOU *et al.* (1994)].

des atomes restants diminue. Grâce aux collisions élastiques, le gaz rethermalise et sa température moyenne diminue. Ce processus se répète et le système tend vers une température d'équilibre déterminée par la profondeur du piège  $U_0$ . En effet, lorsque <sup>17</sup>  $k_B T \ll U_0$  les collisions élastiques ne peuvent plus fournir l'énergie suffisante pour permettre aux atomes de quitter le piège et l'évaporation s'arrête. On obtient à l'équilibre thermique une distribution en vitesse donnée.

Pour atteindre des températures plus faibles, on peut forcer l'évaporation en diminuant la profondeur du piège au cours du temps. Cela revient à tronquer peu à peu la distribution en vitesse du nuage dans les hautes vitesses. Le gaz continuant de thermaliser, on obtient une distribution de plus faible dispersion, ce qui traduit une diminution de la température.

### 1.2.4 Évaporation forcée dans le piège magnétique

Au terme des premières étapes de la séquence expérimentale liée au refroidissement laser, les atomes ont été préparés par l'étape de dépompage dans l'état hyperfin  $|F = 1\rangle$ . Ceci constitue notre point de départ pour la première évaporation que nous allons effectuer. Nous utilisons pour cela un piège conservatif d'origine magnétique afin de capturer les atomes, et nous procédons à leur évaporation grâce à un rayonnement micro-onde. La mise en oeuvre expérimentale sur notre dispositif de cette technique, initialement proposée par [HESS (1986), HIJMANS *et al.* (1989) et PRITCHARD *et al.* (1989)] puis réalisée quelques années plus tard pour des atomes d'hydrogène [SETIJA *et al.* (1993)], est détaillée dans cette section.

#### Principe

PIÉGEAGE MAGNÉTIQUE : Considérons un champ magnétique  $\vec{B}(\vec{r})$  résultant d'une configuration quadropolaire, de la forme :

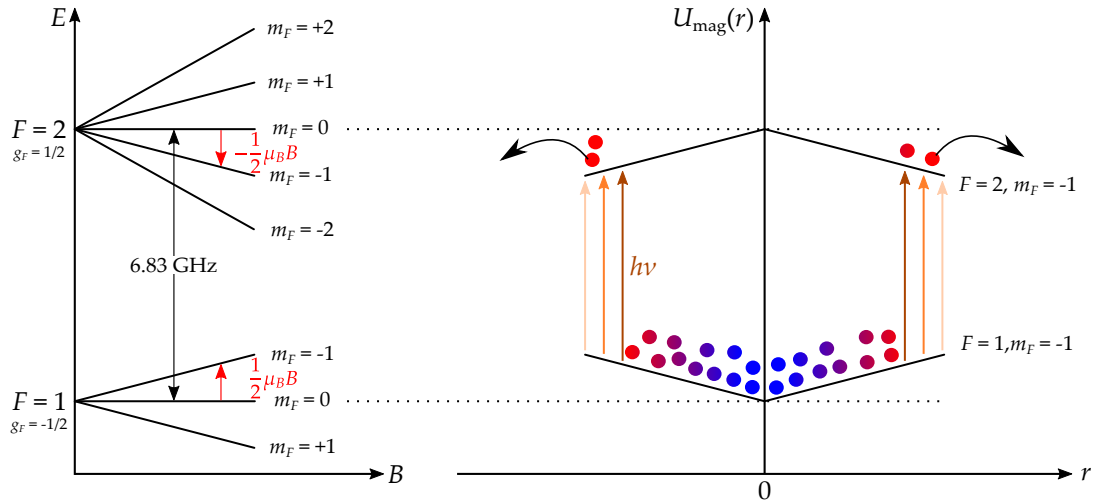
$$\vec{B}(\vec{r}) = b' \begin{pmatrix} x/2 \\ y/2 \\ -z \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

au voisinage de l'origine. Un atome dans un état hyperfin  $|F, m_F\rangle$  va interagir avec ce gradient de champ par son moment magnétique. Il en découle un potentiel  $U_{\text{mag}}(\vec{r})$  de la forme :

$$U_{\text{mag}}(\vec{r}) = g_F m_F \mu_B |\vec{B}(\vec{r})| = g_F m_F \mu_B b' \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{4} + z^2} \quad (1.28)$$

où  $g_F$  est le facteur de Landé de l'état considéré et  $\mu_B = 9.27 \times 10^{-24}$  J/T est le magnéton de Bohr. Ainsi, en fonction du signe du produit  $g_F m_F$  (qui dépend de l'état hyperfin dans lequel l'atome se trouve), l'atome sera attiré ( $g_F m_F > 0$ ) ou repoussé ( $g_F m_F < 0$ ) par le minimum du champ magnétique (qui correspond dans notre cas au zéro du champ quadropolaire). Compte-tenu du facteur de Landé  $g_F = -1/2$  de l'état fondamental  $|F = 1\rangle$  (voir Fig. 1.4), seuls les atomes dans le sous-état magnétique  $m_F = -1$  seront piégés

17. Sur les échelles de temps des expériences d'atomes froids, on a typiquement  $U_0/(k_B T) \approx 10$ .



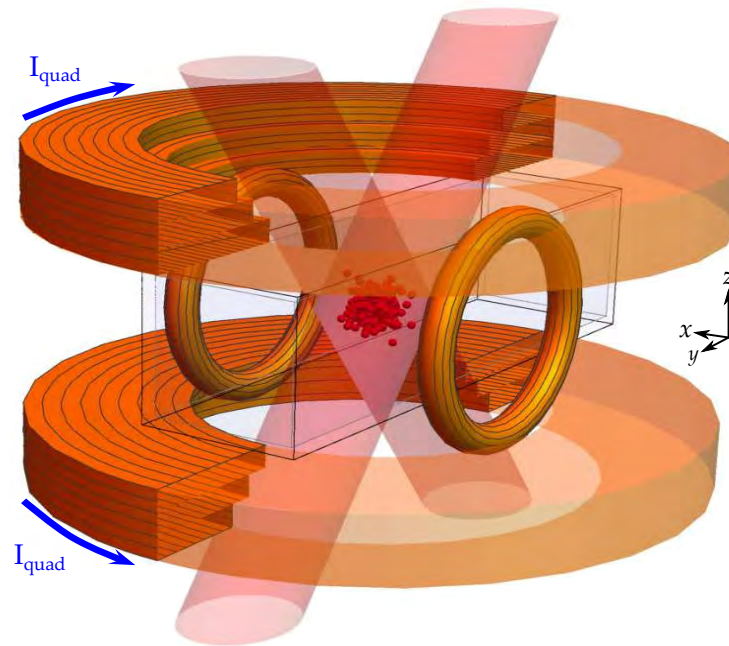
**FIGURE 1.8 | Schéma de principe de l'évaporation micro-onde.** (a) Structure interne des états hyperfins  $|F = 1\rangle$  et  $|F = 2\rangle$  en fonction de la norme du champ magnétique appliqué. (b) Potentiel magnétique ressenti par les atomes dans les états  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  et  $|F = 2, m_F = -1\rangle$ . Un rayonnement micro-onde d'énergie  $E = h\nu$  permet d'exciter la transition seulement pour les atomes situés à une distance  $r$  du centre du piège.

près du zéro de champ. Par le même raisonnement, les atomes de l'état  $|F = 2, m_F = -1\rangle$  (facteur de Landé associé  $g_F = 1/2$ ) seront expulsés du piège. Nous exploitons le caractère anti-piégeant de cet état excité pour forcer l'évaporation au moyen d'un rayonnement micro-onde.

**ÉVAPORATION MICRO-ONDE :** Considérons les deux états évoqués ci-dessus, à savoir l'état des atomes piégés par le gradient de champ magnétique  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  et l'état anti-piégeant  $|F = 2, m_F = -1\rangle$ . Nous pouvons provoquer la transition entre ces états en illuminant le nuage d'un rayonnement micro-onde polarisé linéairement : les atomes ainsi excités quittent le piège (voir Fig. 1.8). L'énergie de cette transition  $E_{(1,-1)\rightarrow(2,-1)}$  dépend de la distance  $r$  de l'atome au centre du piège selon :

$$E_{(1,-1)\rightarrow(2,-1)}(r) = E_{(1,0)\rightarrow(2,0)} - \mu_B B(r) = E_{(1,0)\rightarrow(2,0)} - \mu_B b' r \quad (1.29)$$

avec  $E_{(1,0)\rightarrow(2,0)}$  l'énergie de transition en champ nul (ou, de manière équivalente, entre sous-états magnétiques  $m_F = 0$ ) et  $r = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{4} + z^2}$ . Nous connaissons avec précision l'énergie de la transition en champ nul et la fréquence associée :  $E_{(1,0)\rightarrow(2,0)}/h = 6.83$  GHz [STECK (2001)]. En exploitant la dépendance spatiale de l'énergie de transition Eq. 1.29, nous pouvons choisir d'enlever seulement les atomes les plus loin du centre du piège, c'est-à-dire les plus énergétiques. Nous réalisons alors bien une évaporation forcée sélective dans l'espace des positions.



**FIGURE 1.9 | Schéma 3D des bobines du piège magnétique.** Les trois paires de bobines d'axe ( $Oz$ ) réparties symétriquement de part et d'autre de la cellule sont en configuration anti-Helmholtz et permettent de produire un piège magnétique de type quadrupolaire (Eq. 1.27). La paire la plus intérieure sert jusqu'à la fin de la séquence, tandis que les deux paires extérieures servent à comprimer le piège avant l'évaporation micro-onde. Figure tirée de [CONDON (2015)].

i

L'intérêt d'un rayonnement micro-onde comparé à une onde radio-fréquence est double. D'abord le couplage électromagnétique du rayonnement micro-onde avec les différents éléments électriques présents sur le dispositif expérimental est faible. De plus, la puissance de l'onde émise est bien plus homogène au cours de l'évaporation, car la fréquence varie peu de manière relative.

### Mise en œuvre expérimentale

Le gradient de champ magnétique est produit par trois paires de bobines placées au-dessus et en-dessous de la cellule et utilisées en configuration anti-Helmholtz (voir Fig. 1.9). Elles produisent au centre de la cellule un champ magnétique de type quadrupolaire (Eq. 1.27). Chaque bobine consiste en un enroulement d'un tube de cuivre refroidi grâce à une circulation d'eau à l'intérieur du tube et branché à une alimentation<sup>18</sup> délivrant un courant  $I_{\text{quad}}$ . Le courant maximum pouvant circuler dans les bobines est de 160 A, ce qui correspond à un gradient de  $b'_{\text{max}} = 300 \text{ G/cm}$ .

18. Delta Electronika SM 15-200D

Le champ micro-onde est généré par une chaîne de production détaillée dans [CONDON, 2015]. Un générateur radio-fréquence<sup>19</sup> piloté par un programme LabView produit d'abord une onde radio-fréquence de fréquence initiale  $\nu_{\text{RF}}^{(i)} = 960$  MHz. Cette fréquence est ensuite multipliée par 7 (on obtient alors une onde micro-onde de fréquence  $\nu_{\text{MW}}^{(i)} = 7 \times \nu_{\text{RF}}^{(i)} = 6.72$  GHz), avant que le signal ne subisse plusieurs étapes de filtrage et d'amplification. Le rayonnement est émis par un cornet micro-onde placé devant la cellule. Nous effectuons l'évaporation en augmentant progressivement la fréquence de l'onde micro-onde jusqu'à  $\nu_{\text{MW}}^{(f)} = 6.82$  GHz, diminuant de fait le rayon d'évaporation. La séquence expérimentale correspondante est détaillée ci-dessous.

### Séquence expérimentale – 2<sup>ème</sup> partie

La deuxième partie de la séquence expérimentale est décrite maintenant. Elle est également représentée sur la Fig. 1.10.

**CHARGEMENT DU PIÈGE MAGNÉTIQUE :** Après l'étape de dépompage, nous coupons abruptement les faisceaux refroidisseurs du MOT 3D qui étaient utilisés pour le refroidissement laser. Nous allumons en même temps l'alimentation de la paire de bobines la plus proche de la cellule : il circule alors un courant de 65 A dans ces bobines, ce qui correspond à un gradient  $b' \approx 62$  G/cm. Nous transférons ainsi pendant 500 ms les atomes, initialement préparés dans l'état  $|F = 1\rangle$ , du MOT 3D vers le piège magnétique : nous perdons une partie des atomes, puisque ceux de projection  $m_F = +1$  sont dans un état anti-piégeant. Afin de maximiser le nombre d'atomes et minimiser le chauffage du nuage atomique pendant le transfert, nous nous assurons également pendant cette étape qu'il y a bien adaptation de mode (ou *mode matching*), c'est-à-dire que les centres des pièges (MOT 3D et piège quadrupolaire) sont bien superposés et que le confinement magnétique est bien adapté à la taille et à la température du nuage. Une bobine supplémentaire, dite *compensatrice* et d'axe ( $Oy$ ), est ici utilisée à cet effet.

$$N = 6 \times 10^8$$

$$T = 140 \mu\text{K}$$

**COMPRESSION DU PIÈGE :** Dans le but d'améliorer la dynamique d'évaporation, nous augmentons le taux de collisions entre atomes. Pour cela, nous comprimons le piège magnétique en augmentant linéairement pendant 100 ms le courant dans les deux paires de bobines restantes jusqu'à atteindre 120 A dans ces bobines. Le gradient de champ magnétique en fin de compression vaut  $b' \approx 250$  G/cm.

$$N = 6 \times 10^8$$

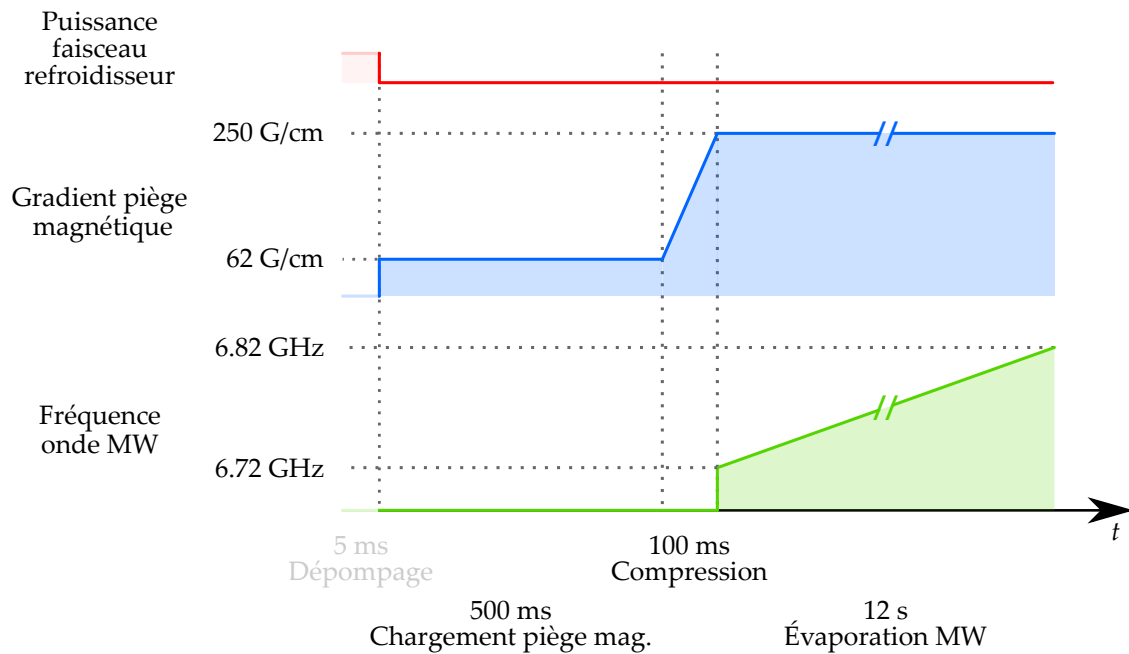
$$T = 190 \mu\text{K}$$

**ÉVAPORATION MICRO-ONDE :** Nous procédons à l'évaporation forcée dans le piège quadrupolaire comprimé. Le générateur produit une onde radio-fréquence dont la fréquence augmente linéairement entre  $\nu_{\text{RF}}^{(i)} = 960$  MHz et  $\nu_{\text{RF}}^{(f)} = 973.9$  MHz en 12 s. En sortie de chaîne électronique, la fréquence initiale de l'onde micro-onde envoyée sur les atomes vaut  $\nu_{\text{MW}}^{(i)} = 6.72$  GHz et la fréquence finale vaut  $\nu_{\text{MW}}^{(f)} = 6.82$  GHz. Comme nous l'expliquons dans la section suivante, nous arrêtons l'évaporation à ce stade, bien avant d'avoir atteint la condensation du nuage d'atomes, car nous subissons un chauffage par pertes Majorana au centre du piège. Pour poursuivre le refroidissement du nuage, il est nécessaire de le transférer dans un autre piège : le piège hybride.

$$N = 8 \times 10^7$$

$$T = 55 \mu\text{K}$$

19. Agilent E4428C



**FIGURE 1.10** | Deuxième partie de la séquence expérimentale : refroidissement par évaporation dans le piège magnétique. Sont représentés le gradient de champ magnétique et la fréquence de l'onde micro-onde illuminant les atomes. Après l'étape de dépompage (rappelée en début de schéma), les atomes sont chargés dans le piège magnétique en coupant les faisceaux refroidisseurs et en allumant le gradient de champ. S'ensuit une étape de compression, afin d'améliorer l'évaporation qui a lieu grâce au rayonnement micro-onde.

### 1.2.5 Évaporation forcée et condensation dans le piège hybride

Nous avons supposé jusqu'ici que le sous-état magnétique des atomes dans le piège quadrupolaire était conservé, or il peut arriver que ce ne soit pas le cas. En effet, le champ magnétique changeant rapidement de direction au niveau de son zéro, le moment magnétique des atomes au voisinage du centre du piège peut ne pas suivre adiabatiquement l'orientation du champ et il y a dans ce cas retournement de spin (ou *spin-flip*) : ce phénomène est appelé transition Majorana. Les atomes ayant subi un retournement de spin se trouvent dans un état anti-piégeant et sont perdus [PETRICH *et al.*, 1995]. Ces pertes concernant essentiellement les atomes proches du zéro de champ, c'est-à-dire ayant une faible énergie cinétique, elles provoquent par conséquent un chauffage du nuage d'atomes.

Tout au long de l'évaporation forcée dans le piège magnétique, il y a donc compétition entre le refroidissement de l'ensemble atomique par évaporation et son chauffage par pertes Majorana. Or, plus la température du nuage diminue, plus les atomes passent du temps près du zéro de champ et sont susceptibles d'être perdus. Nous stoppons l'évaporation dans le piège quadrupolaire lorsque refroidissement et chauffage du nuage se compensent. Pour pouvoir continuer à diminuer efficacement la température du nuage atomique, nous utilisons un deuxième type de piège dit hybride, combinant un champ magnétique et un piège dipolaire.



De manière similaire aux deux sous-sections précédentes, nous rappelons d'abord rapidement les mécanismes mis en œuvre pour le piégeage d'atomes par un laser de grande puissance et loin de résonance, qui constitue le piège dipolaire. Nous verrons également comment refroidir le nuage d'atomes dans ce cas. Nous décrivons ensuite la mise en place expérimentale du piège hybride. Nous terminons par la description de la 3<sup>ème</sup> et dernière partie de la séquence qui nous permet d'atteindre la condensation de Bose-Einstein.

### Principe

**PIÉGEAGE DIPOLAIRE :** Le piégeage des atomes par un laser loin de résonance a pour origine l'interaction entre le champ électrique inhomogène  $\vec{E}(\vec{r})$  du laser et le moment dipolaire de l'atome induit par ce laser. Il en résulte un potentiel qui s'exprime d'une manière générale comme [GRIMM *et al.* (2000) et DALIBARD (2013)] :

$$U_{\text{dip}}(\vec{r}) = -\frac{1}{2\epsilon_0 c} \text{Re}[\alpha(\omega)] I(\vec{r}) \quad (1.30)$$

avec  $\epsilon_0$  la permittivité du vide,  $c$  la vitesse de la lumière,  $\alpha$  la polarisabilité de l'atome et  $I$  l'intensité du champ défini par  $I(\vec{r}) = 2\epsilon_0 c |\vec{E}(\vec{r})|^2$ . Dans un formalisme semi-classique (c'est-à-dire en considérant un atome à deux niveaux dans un champ classique), le calcul de la polarisabilité  $\alpha$  permet d'aboutir à une relation du type :

$$U_{\text{dip}}(\vec{r}) \propto \frac{I(\vec{r})}{\Delta} \quad (1.31)$$

où  $\Delta = \omega - \omega_0$  est le désaccord entre le laser utilisé et la transition atomique. Cette expression résume les deux ingrédients clés du piégeage par un laser loin de résonance : la force dipolaire  $\vec{F}_{\text{dip}} = -\vec{\nabla} U_{\text{dip}}(\vec{r})$  issue de ce potentiel est proportionnelle au gradient d'intensité, et le signe du désaccord  $\Delta$  contrôle le type d'interaction, attractive ou répulsive, entre les atomes et les régions de forte intensité lumineuse. Pour trouver la valeur du coefficient de proportionnalité entre le potentiel dipolaire et l'intensité, il nous faut prendre en compte la structure interne atomique et les caractéristiques du laser. Dans le cas du rubidium 87, un calcul quantitatif par la méthode de l'atome habillé est présenté dans l'annexe C de [REINAUDI (2008)] et aboutit à la relation :

$$U_{\text{dip}}(\vec{r}) = \zeta \times I(\vec{r}) \quad (1.32)$$

avec  $\zeta \approx -2.1 \times 10^{-36} \text{ J}/(\text{W}/\text{m}^2)$  pour un laser de longueur d'onde  $\lambda = 1064 \text{ nm}$  polarisé linéairement. Il s'agit dans ce cas d'un désaccord dans le rouge ( $\Delta < 0$ ), les atomes seront donc attirés et piégés dans les régions où l'intensité lumineuse est maximale comme le suggère le signe de  $\zeta$ .

Considérons pour le laser un faisceau gaussien se propageant selon l'axe  $x$ , le profil d'intensité qui lui correspond est :

$$I(\vec{r}) = \frac{2P}{\pi w^2(x)} \exp\left(-\frac{2(y^2 + z^2)}{w^2(x)}\right) \quad (1.33)$$



avec  $P$  la puissance du laser et  $w(x)$  le rayon à  $1/e^2$  du faisceau à la position  $x$ . Le rayon varie selon la relation :

$$w(x) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{z_R}\right)^2} \quad (1.34)$$

où  $w_0$  est le waist du laser et  $z_R = \pi w_0^2 / \lambda$  est la longueur de Rayleigh associée. Un tel faisceau désaccordé dans le rouge piège donc les atomes autour de la position  $\vec{r} = \vec{0}$ .

**ÉVAPORATION DANS LE PIÈGE HYBRIDE :** La profondeur du piège dipolaire est liée à la puissance par  $U_0^{\text{dip}}(x) = 2\chi P / \pi w^2(x)$ . Pour diminuer la profondeur et forcer l'évaporation, on diminue donc la puissance du laser. On permet ainsi aux atomes les plus énergétiques de s'échapper selon le processus décrit section 1.2.3.

**i** Au voisinage du centre du piège dipolaire, la fréquence angulaire longitudinale  $\omega_x$  du piège dipolaire varie avec la puissance laser  $P$  selon  $\omega_x \propto \sqrt{P}/w_0^3$ . Ainsi, contrairement à l'évaporation dans le piège magnétique où profondeur et confinement sont indépendants, les fréquences de piégeage diminuent tout au long de l'évaporation dans un piège dipolaire : plus nous avançons dans l'évaporation, plus celle-ci perd en efficacité. Nous devons donc démarrer l'évaporation avec de très bonnes conditions initiales ( $N, T$ ) pour que cet effet ne soit pas limitant.

### Mise en œuvre expérimentale

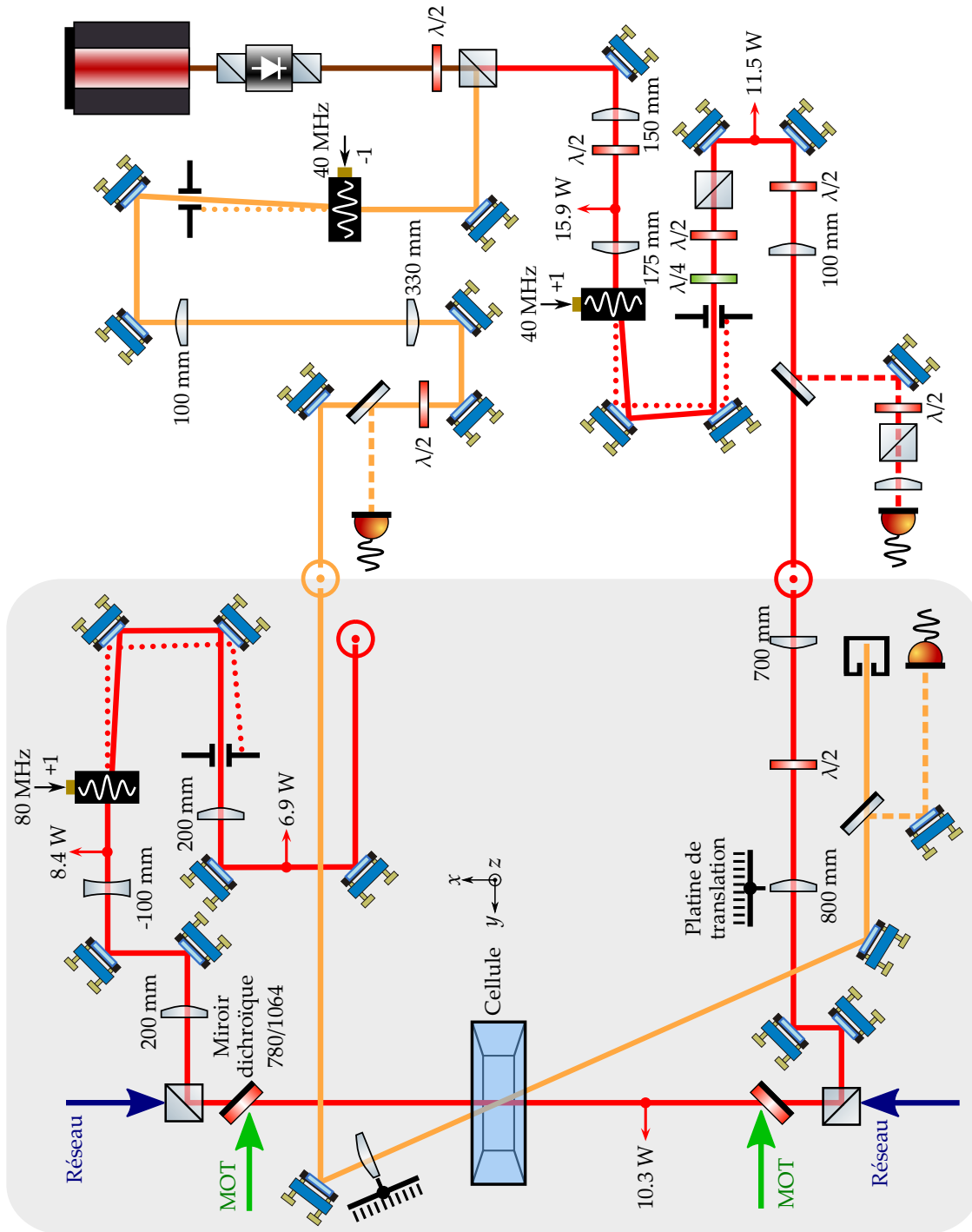
Le potentiel associé au piège hybride est la somme de trois contributions : les potentiels dus à la gravité  $U_{\text{grav}}(\vec{r}) = mgz$ , au confinement magnétique  $U_{\text{mag}}(\vec{r})$  et au piège dipolaire  $U_{\text{dip}}(\vec{r})$ .

Le champ magnétique est produit par la paire de bobines qui se trouve au plus près de la cellule seulement. Le gradient de champ magnétique utilisé ne compense pas tout à fait la gravité. Par conséquent, les atomes tombent lentement du piège magnétique vers le piège hybride, dans lequel ils sont maintenus grâce au piège dipolaire placé sous le zéro de champ magnétique.

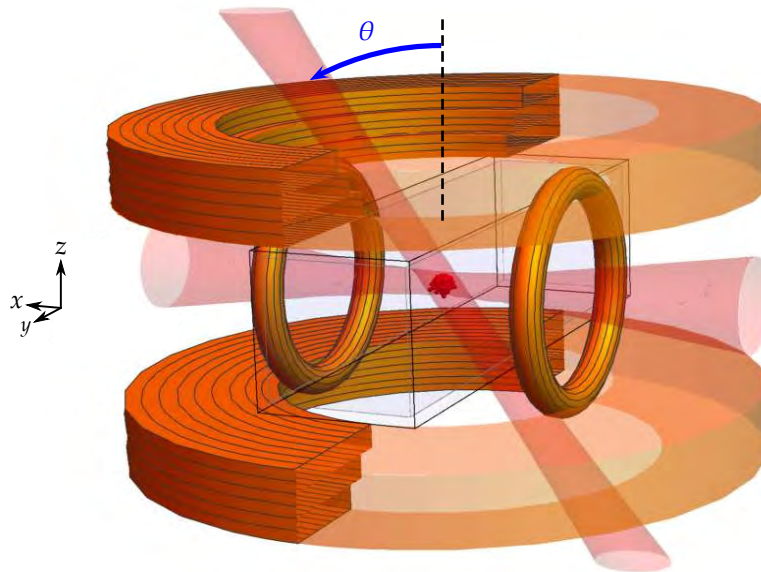
Le piège dipolaire est constitué de deux faisceaux gaussiens croisés issus d'un laser<sup>20</sup> de longueur d'onde  $\lambda = 1064$  nm et de puissance maximale  $P_{\text{max}} = 20$  W, mais dont nous n'utilisons que 17 W. Ce laser a été installé pendant ma thèse en remplacement d'un laser de puissance maximale plus faible  $P_{\text{max}} = 5$  W qui ne permettait plus de condenser de manière efficace. Nous avons réutilisé le précédent montage optique, dont un schéma est disponible sur la Fig. 1.11.

Le premier faisceau dipolaire est horizontal : il est aligné selon l'axe ( $Ox$ ) (sens de propagation vers les  $x$  positifs, voir Fig. 1.11), décalé d'environ 100  $\mu\text{m}$  en-dessous du zéro de champ magnétique. Il entre dans la cellule en verre en formant un angle d'environ  $1^\circ$  avec la normale à la cellule pour éviter les effets d'interférences dûs à une rétro-réflexion

20. Azurlight Systems ALS-IR-1064-20-I-SF



**FIGURE 1.11** | Schéma du montage optique utilisé pour le piège dipolaire. Un cube placé à la sortie d'un laser de puissance maximale 20 W permet de préparer deux trajets : le trajet rouge correspond au faisceau horizontal actuellement utilisé sur le dispositif, que nous recyclons après la cellule pour former un faisceau "vertical" (non représenté sur le schéma) ; le trajet jaune représente un nouveau faisceau horizontal rentrant sur le côté opposé de la cellule, afin d'utiliser par la suite un piège entièrement contenu dans le plan horizontal. Ce faisceau n'a pas encore été aligné sur les atomes. La zone grisée représente une partie sur-élevée du montage.



**FIGURE 1.12 | Schéma 3D du piège hybride.** Le faisceau dipolaire passe une première fois dans la cellule selon l'axe horizontal ( $Ox$ ), puis il est recyclé pour former un faisceau "vertical" contenu dans le plan ( $xOz$ ) et formant un angle  $\theta \approx 30^\circ$  avec l'axe ( $Oz$ ). Parmi les trois paires de bobines du piège magnétique, seule la paire intérieure est utilisée pour le piège hybride. Figure tirée de [CONDON (2015)].

du faisceau<sup>21</sup>. Le faisceau est focalisé au centre de la cellule avec un waist de  $w_{0,h} = 75 \mu\text{m}$  et sa puissance maximale en entrée de cellule est  $P_{0,h} = 10.3 \text{ W}$ . Cette puissance est contrôlée grâce à un AOM<sup>22</sup> à 40 MHz sur lequel nous rétro-agissons à partir d'une mesure de la puissance du faisceau avant la cellule (une petite partie du faisceau est déviée vers une photodiode par une lame 1%).

Nous recyclons ensuite le laser en sortie de cellule pour réaliser un deuxième faisceau dit "vertical" (il forme en réalité un angle de  $\theta \approx 30^\circ$  avec la verticale) passant une seconde fois dans la cellule selon la géométrie représentée Fig. 1.12. Son waist vaut  $w_{0,v} = 30 \mu\text{m}$  et la puissance maximale utilisable sur les atomes est  $P_{0,v} = 5.3 \text{ W}$ . Sa puissance est contrôlable par un AOM<sup>23</sup> à 80 MHz mais il n'y a pas de circuit d'asservissement. Nous ne modifions pas l'efficacité de diffraction de cet AOM au cours de l'évaporation : ce faisceau étant recyclé, sa puissance diminue de concert avec le faisceau dipolaire horizontal. Grâce à ce faisceau vertical, nous augmentons le confinement des atomes selon l'axe longitudinal du faisceau horizontal et améliorons la dynamique d'évaporation en maintenant un plus grand taux de collisions.

Les deux faisceaux (horizontal et vertical) se croisent au centre de la cellule. La position de leurs waists peut être contrôlée finement grâce aux platines de translation sur lesquelles sont fixées les lentilles servant à faire converger les lasers. Dans le cas où les waists sont superposés, le faisceau vertical est responsable d'une perte d'atomes au centre du piège optique par le processus suivant : (i) après chargement du piège hybride, un grand

21. Rappelons que la cellule n'a pas subi de traitement anti-reflet.

22. AA Opto-Electronics MQ40-B5A2-L1064-WSc

23. AA Opto-Electronics MT110-B50/A1-IR

nombre d'atomes est piégé dans le bras vertical. À puissance maximale, le piège associé au faisceau vertical est suffisamment profond pour retenir ces atomes contre la gravité ; (ii) lorsque nous procédons à l'évaporation, la puissance du faisceau vertical diminue. Les atomes qui étaient initialement piégés dans ce bras tombent alors sous l'effet de la gravité et sont perdus. Pour éviter ces pertes, nous avons décidé de ne pas superposer les waists : le waist du faisceau vertical se situe 4.5 mm au-dessus du waist du faisceau horizontal. De cette manière, le piégeage des atomes lors du chargement du piège hybride n'est assuré que par le bras horizontal, mais nous continuons à bénéficier d'une bonne dynamique d'évaporation grâce au faisceau vertical.

Lors de l'installation du nouveau laser, nous avons également préparé un deuxième chemin optique permettant d'amener un nouveau faisceau dipolaire horizontal. Nous n'avons pas encore mis en service ce deuxième bras horizontal, mais l'objectif à long terme est de changer de configuration et de passer à un piège croisé entièrement compris dans le plan horizontal ( $xOy$ ). Nous espérons ainsi augmenter le volume de capture et charger plus efficacement le piège hybride. De plus, cette configuration abandonne l'idée du recyclage du premier faisceau, ce qui rend indépendantes les puissances des deux faisceaux horizontaux.

### Séquence expérimentale – 3<sup>ème</sup> partie

La troisième et dernière partie de la séquence expérimentale, correspondant à l'évaporation dans le piège hybride, est décrite ci-dessous. Elle est également représentée sur la Fig. 1.13.

**DÉCOMPRESSION DU PIÈGE MAGNÉTIQUE :** Afin de préparer le nuage à la deuxième évaporation, nous décomprimons le piège magnétique. Nous diminuons donc linéairement le courant circulant dans les bobines : pour les deux paires de bobines extérieures ce courant est amené à zéro, tandis que nous maintenons un courant de 60 A dans la troisième paire de bobines (les plus proches de la cellule). Cette étape dure 1 s, et nous terminons cette étape avec un gradient  $b' \approx 60$  G/cm.

$$N = 8 \times 10^7$$

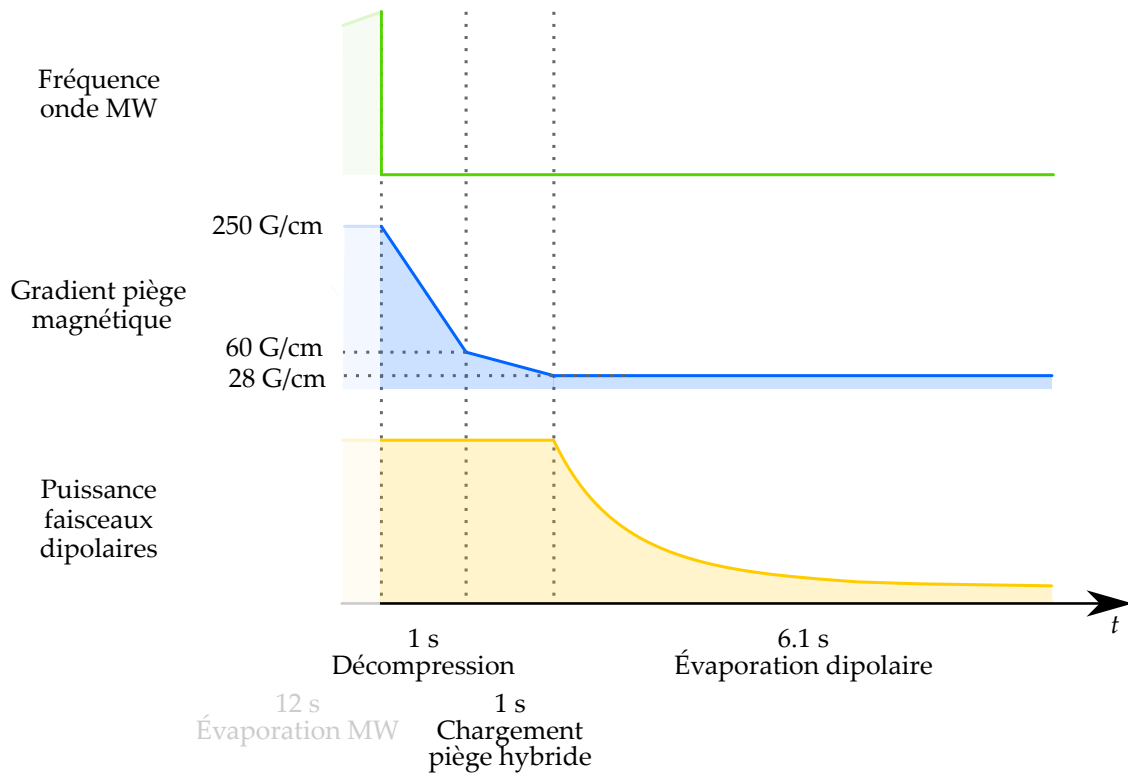
$$T = 40 \mu\text{K}$$

**CHARGEMENT DU PIÈGE HYBRIDE :** Nous transférons en 1 s les atomes du piège magnétique décomprimé vers le piège hybride. À cet effet, nous réduisons linéairement le courant de la paire de bobines encore allumées jusqu'à une valeur de 30 A, de sorte à obtenir un gradient de champ magnétique tel que  $g_F m_F \mu_B b' \approx 0.9mg$ , soit  $b' \approx 28$  G/cm. Les atomes tombent jusqu'à être piégés dans le faisceau dipolaire horizontal, qui a été allumé tôt dans la séquence (juste après la fin du chargement du MOT 3D) afin de stabiliser sa puissance. Seuls 20% des atomes initialement dans le piège magnétique sont capturés<sup>24</sup>.

$$N = 1.5 \times 10^7$$

$$T = 20 \mu\text{K}$$

<sup>24</sup>. Lorsque nous voulons mesurer le nombre d'atomes capturés par le piège hybride, nous ajoutons juste après son chargement une étape de maintien d'une durée de 250 ms. Nous nous débarrassons ainsi des atomes non piégés qui, rappelons-le, tombent lentement sous l'effet combiné de la gravité et du gradient de champ magnétique.



**FIGURE 1.13** | Troisième partie de la séquence expérimentale : refroidissement par évaporation dans le piège hybride. Sont représentés le gradient de champ magnétique et la puissance des faisceaux dipolaires. Après une étape de décompression du piège magnétique, le piège hybride est chargé en diminuant le gradient de champ magnétique jusqu'à compenser à peine la gravité. Les atomes sont alors retenus grâce au piège dipolaire, dont le laser est allumé tôt dans la séquence. L'évaporation se poursuit en diminuant la puissance du laser, jusqu'à atteindre la condensation.

**ÉVAPORATION DIPOLAIRE :** La dernière étape d'évaporation, dans le piège hybride, s'effectue en diminuant la puissance optique des faisceaux dipolaires. Le faisceau vertical étant recyclé du faisceau horizontal, les deux puissances diminuent de la même manière selon la formule :

$$P_{h/v}(t) = P_{0,h/v} \times \frac{1}{(1 + t/\tau)^\eta} \quad (1.35)$$

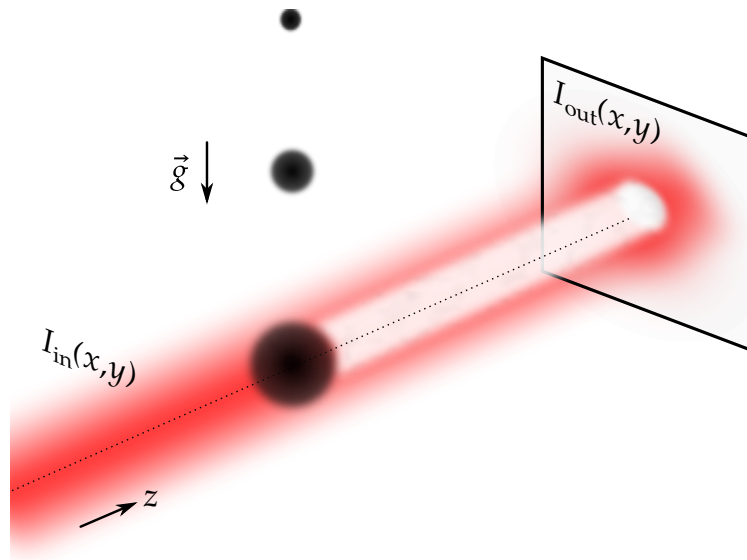
où  $\tau$  et  $\eta$  sont des paramètres que nous optimisons expérimentalement. Nous utilisons actuellement  $\tau = 3.5$  s et  $\eta = 4$ . Cette évaporation dure 6.1 s, correspondant à une diminution de la puissance d'un facteur  $\approx 60$ . À l'issue de cette évaporation, nous avons atteint la condensation.

$$N = 2 \times 10^5$$

$$T < T_C$$

### 1.3 Détection d'un nuage d'atomes : système d'imagerie

Tout au long de la séquence expérimentale que nous venons de décrire, il nous faut pouvoir imager le nuage atomique et extraire de cette image des informations quantitatives comme le nombre d'atomes et la température du gaz. Nous utilisons sur notre dispositif expérimental une imagerie par absorption, relativement courante sur ce type d'expérience.



**FIGURE 1.14 | Principe du temps de vol et de l'imagerie par absorption.** À la fin d'une séquence expérimentale, nous effectuons un temps de vol : tous les pièges sont coupés et le nuage tombe sous l'effet de la gravité. Il rentre en expansion au cours de la chute, puis est éclairé après un temps  $t_{\text{ToF}}$  par un faisceau imageur d'intensité  $I_{\text{in}}(x, y)$  résonant avec une transition atomique. À l'aide d'un montage optique (voir Fig. 1.15), le profil d'intensité  $I_{\text{out}}(x, y)$  après traversée du nuage est récupéré sur une caméra CCD. Nous en déduisons la densité atomique  $n_c(x, y)$  intégrée selon l'axe  $z$  (densité colonne).

Après en avoir rappelé le principe, nous décrivons rapidement le montage expérimental, puis nous terminons cette section en rappelant comment accéder au nombre d'atomes et à la température du nuage sur une image d'absorption obtenue après temps de vol (ToF).

### 1.3.1 Principe

Le principe de fonctionnement de l'imagerie par absorption est illustré sur la Fig. 1.14. Lorsque nous voulons imager le nuage d'atomes, nous l'éclairons avec un faisceau, dit *faisceau imageur*, collimaté et résonant avec une transition atomique : les atomes absorbent efficacement les photons de ce faisceau. Nous imageons ensuite sur une caméra CCD l'ombre des atomes (due à l'absorption puis la rediffusion par émission spontanée des photons) à partir de laquelle il nous est possible de déduire la densité atomique.

Plus précisément, on considère un faisceau imageur collimaté de longueur d'onde  $\lambda$  et se propageant selon l'axe  $z$ , illuminant un gaz d'atomes caractérisé par sa densité atomique  $n(x, y, z)$ . Le profil d'intensité du faisceau avant traversée du nuage est  $I_{\text{in}}(x, y)$ . L'information que l'on récupère sur la caméra est intégrée selon l'axe de propagation du faisceau. On introduit donc la densité atomique colonne  $n_c(x, y)$  :

$$n_c(x, y) = \int n(x, y, z) dz. \quad (1.36)$$

Lorsque l'intensité  $I_{\text{in}}$  du faisceau imageur est faible devant l'intensité de saturation, l'absorption de la lumière suit la loi de Beer-Lambert :

$$I_{\text{out}}(x, y) = I_{\text{in}}(x, y) e^{-\sigma_0 n_c(x, y)} \quad (1.37)$$

où  $\sigma_0$  est la section efficace d'absorption à résonance. On définit alors la densité optique  $\text{OD}(x, y)$  par :

$$\text{OD}(x, y) = \ln \left( \frac{I_{\text{in}}(x, y)}{I_{\text{out}}(x, y)} \right), \quad (1.38)$$

qui nous permet de retrouver la densité colonne  $n_c(x, y)$  selon :

$$n_c(x, y) = \frac{1}{\sigma_0} \text{OD}(x, y). \quad (1.39)$$

La section efficace d'absorption à résonance  $\sigma_0$  est donnée par :

$$\sigma_0 = C \times \frac{3\lambda^2}{2\pi}$$

i

où le coefficient  $C$  permet de tenir compte de la structure interne de l'atome et dépend à la fois de la polarisation du nuage d'atomes (répartition dans les sous-niveaux Zeeman) et de la polarisation du faisceau imageur.

Dans le cas d'un faisceau imageur de polarisation linéaire, résonant avec la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$  (soit  $\lambda \approx 780$  nm) qui éclaire un nuage d'atomes de rubidium 87 dans l'état  $|F = 2\rangle$  non polarisé (répartition équiprobable dans les sous-états magnétiques  $m_F$ ), le coefficient  $C$  vaut  $C = 7/15$  [RIOU (2006)]. On trouve alors :

$$\sigma_0 \approx 0.136 \mu\text{m}^2. \quad (1.40)$$

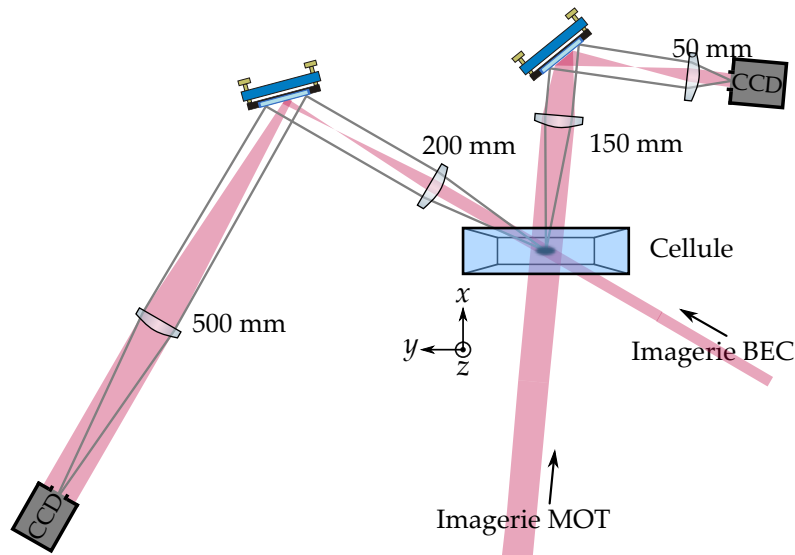
En pratique, il nous faut tenir compte : (i) des imperfections du faisceau imageur et (ii) du courant d'obscurité de la caméra et d'une éventuelle lumière parasite pouvant induire un bruit de fond  $I_{\text{Fond}}(x, y)$ . Nous prenons donc en réalité trois images, dans l'ordre suivant :

- Une image en présence du nuage atomique, obtenue en éclairant le gaz d'atomes avec le faisceau imageur. L'intensité résultante est  $I_{\text{At}}(x, y) = I_{\text{out}}(x, y) + I_{\text{Fond}}(x, y)$ .
- Une image prise en l'absence d'atomes mais toujours en présence du faisceau imageur. L'intensité résultante est  $I_{\text{No At}}(x, y) = I_{\text{in}}(x, y) + I_{\text{Fond}}(x, y)$ .
- Une image prise sans atomes et sans faisceau. L'intensité résultante est  $I_{\text{Fond}}(x, y)$ .

On retrouve à partir de ces trois images la densité optique par le simple calcul :

$$\text{OD}(x, y) = \ln \left( \frac{I_{\text{No At}}(x, y) - I_{\text{Fond}}(x, y)}{I_{\text{At}}(x, y) - I_{\text{Fond}}(x, y)} \right). \quad (1.41)$$





**FIGURE 1.15** | Schéma du montage optique utilisé pour le système d'imagerie. Vue de dessus des deux trajets optiques : l'imagerie MOT (de grandissement 0.3) permet de suivre la séquence expérimentale jusqu'au chargement du piège hybride, tandis que l'imagerie BEC (de grandissement 2.5) nous permet d'imager les atomes lors des dernières étapes.

### 1.3.2 Montage expérimental

Le montage optique utilisé pour l'imagerie est rappelé Fig. 1.15. Nous avons la possibilité d'utiliser deux chemins optiques avec des grandissements différents :

- En imagerie MOT, le grandissement de 0.3 nous permet d'imager les atomes pendant les premières étapes de la séquence expérimentale jusqu'au chargement du piège hybride. Le faisceau imageur est dans ce cas presque parallèle à l'axe ( $Ox$ ) ;
- En imagerie BEC, le grandissement de 2.5 nous permet d'imager les atomes pendant la deuxième évaporation (dans le piège hybride) jusqu'à l'obtention du condensat. Le trajet optique a été conçu pour être le plus orthogonal possible à l'axe ( $Ox$ ) dans cette configuration, compte tenu des contraintes d'accès optique dues aux différents éléments du dispositif.

Sur les deux trajets, le faisceau imageur est compris dans le plan horizontal et est récupéré en bout de chemin optique par une caméra CCD<sup>25</sup>.

Le faisceau imageur, préparé sur la table "refroidisseur", est résonant avec la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ . Or, au cours de la séquence, les atomes sont pompés dans l'état  $|F = 1\rangle$  et y restent *a priori* jusqu'à l'étape d'imagerie. Si nous appliquons le protocole d'imagerie décrit précédemment avec le faisceau imageur seul, nous n'imagesons que les éventuels atomes résiduels de l'état  $|F = 2\rangle$ , ce qui est utile pour effectuer un diagnostic de certaines étapes de la séquence expérimentale (comme l'étape de dépompage, voir section 1.2.2). Afin d'imager les atomes dans  $|F = 1\rangle$ , nous allumons les faisceaux repompeurs du MOT<sub>3D</sub> en plus du faisceau imageur à chacune des images prises en présence de faisceau

25. Basler A100f Series de  $1392 \times 1040$  pixels carrés de côté  $6.45 \mu\text{m}$ .



(soit les images correspondant à  $I_{\text{At}}$  et  $I_{\text{No At}}$ ). Grâce à cela, les atomes sont repompés vers l'état  $|F = 2\rangle$  et absorbent efficacement les photons du faisceau imageur.

Les trois images nécessaires au calcul de la densité optique sont prises avec un temps d'exposition de 40  $\mu\text{s}$ , et sont séparées<sup>26</sup> de 127 ms.

### 1.3.3 Analyse par temps de vol

Dans la majorité des expériences que nous effectuons, nous utilisons un **ToF**. Cette opération consiste à couper soudainement tous les pièges retenant les atomes et à laisser ces derniers tomber en chute libre avant de prendre une image d'absorption (voir Fig. 1.14). La durée du **ToF** peut être choisie : nous la faisons varier entre 5 et 30 ms typiquement<sup>27</sup>, la majorité des images étant prises à un **ToF** de 25 ms.

Considérons un atome du nuage juste avant le **ToF**, à une position initiale  $x_0$  et une vitesse initiale  $v_0$  selon l'axe  $x$ . Après un temps  $t_{\text{ToF}}$ , la position de l'atome est  $x(t_{\text{ToF}}) = x_0 + v_0 \times t_{\text{ToF}}$ . Lorsque les temps de chute sont suffisamment longs pour pouvoir négliger  $x_0$ , la distribution spatiale des atomes sur l'image d'absorption prise après **ToF**, c'est-à-dire la densité colonne  $n_c$ , reflète la distribution initiale en vitesse du nuage : on dit généralement que procéder à un **ToF** revient à effectuer la transformée de Fourier spatiale de la fonction d'onde initiale. Cette affirmation est vraie lorsque le temps de vol est long et en négligeant les interactions interatomiques. Nous accédons de cette manière aux grandeurs caractéristiques de l'ensemble atomique.

#### *Cas d'un nuage thermique*

Considérons dans un premier temps un nuage thermique, soit  $T \gg T_c$ . La distribution en impulsion de ce nuage étant donnée par la distribution de Maxwell-Boltzmann, la densité colonne  $n_c$  s'exprimera selon une loi gaussienne :

$$n_c(x, y) = n_c^{(0)} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\Delta x^2} - \frac{(y - y_0)^2}{2\Delta y^2}\right), \quad (1.42)$$

où  $n_c^{(0)}$  représente la densité maximale au centre du nuage,  $x_0$  et  $y_0$  les coordonnées de ce centre,  $\Delta x$  et  $\Delta y$  les tailles du nuage dans les deux directions.

La grandeur mesurée sur une image d'absorption est la densité optique OD définie Eq. 1.38, que nous savons reliée à la densité colonne  $n_c$  (Eq. 1.39). Nous pouvons donc en déduire le nombre total d'atomes dans le nuage thermique en calculant :

$$N_{\text{therm}} = \iint_{-\infty}^{+\infty} n_c(x, y) dx dy = \frac{1}{\sigma_0} \iint_{-\infty}^{+\infty} \text{OD}(x, y) dx dy. \quad (1.43)$$

26. Il s'agit du plus petit temps possible entre deux prises d'images successives sur la caméra CCD.

27. Nous profitons du temps de vol des atomes pour ouvrir les diaphragmes mécaniques des faisceaux imageur et repompeur, qui ne peuvent pas être plus rapides que 5 ms. Si nous voulons imager les atomes après un temps de vol inférieur à 5 ms, nous devons rajouter en fin de séquence, juste avant le **ToF**, une étape de maintien des atomes dans le piège hybride pour nous permettre d'ouvrir les diaphragmes plus tôt.

Si nous ajustons la densité optique mesurée expérimentalement avec la distribution gaussienne définie Eq. 1.42 (éventuellement corrigée d'un offset constant pour supprimer un bruit de fond), nous trouvons finalement que ce nombre d'atomes s'exprime simplement comme :

$$N_{\text{therm}} = \frac{2\pi}{\sigma_0} n_c^{(0)} \Delta x \Delta y. \quad (1.44)$$

Cet ajustement nous fournit également les moyens de mesurer la température du nuage d'atomes. En effet, ce nuage, de rayon initial  $\Delta x_0$  selon l'axe  $x$ , rentre en expansion au cours de la chute. Sa taille  $\Delta x$  évolue comme :

$$\Delta x(t_{\text{ToF}}) = \sqrt{\Delta x_0^2 + \Delta v_x^2 t_{\text{ToF}}^2} \quad (1.45)$$

où  $\Delta v_x$  est la dispersion en vitesse associée à la température  $T$ . Ces deux grandeurs sont liées par le théorème d'équipartition de l'énergie :

$$\frac{1}{2} m \Delta v_x^2 = \frac{1}{2} k_B T, \quad (1.46)$$

où  $m$  est la masse d'un atome et  $k_B$  la constante de Boltzmann. Nous trouvons donc finalement :

$$T = \frac{m \Delta x^2}{k_B t_{\text{ToF}}^2} \quad (1.47)$$

lorsque le temps  $t_{\text{ToF}}$  est suffisamment grand pour pouvoir négliger le rayon initial  $\Delta x_0$ . La mesure de la taille  $\Delta x$  du nuage atomique après ToF nous permet donc de mesurer sa température<sup>28</sup>. En pratique, nous traçons généralement  $\Delta x^2 = f(t_{\text{ToF}}^2)$  et nous ajustons le résultat par une fonction linéaire, dont la pente sera directement  $k_B T / m$ .

### Cas d'un condensat

Si nous considérons un condensat de Bose-Einstein, nous ne pouvons plus utiliser la distribution de Maxwell-Boltzmann. En nous plaçant dans le régime de Thomas-Fermi, évoqué section 1.1.4, nous pouvons écrire l'expression de la densité spatiale du condensat *in situ*, dans un piège harmonique :

$$n_{\text{TF}}^{(3D)}(x, y, z) = n_0 \left[ 1 - \left( \frac{x - x_0}{R_x} \right)^2 - \left( \frac{y - y_0}{R_y} \right)^2 - \left( \frac{z - z_0}{R_z} \right)^2 \right], \quad (1.48)$$

avec  $n_c^{(0)}$  la densité au centre du nuage,  $x_0$ ,  $y_0$  et  $z_0$  les coordonnées de ce centre et  $R_i$  les rayons (dits de Thomas-Fermi) du nuage dans la direction  $i$ . Rappelons que cette expression est valable dans le volume défini par :

$$\left( \frac{x - x_0}{R_x} \right)^2 + \left( \frac{y - y_0}{R_y} \right)^2 + \left( \frac{z - z_0}{R_z} \right)^2 \leq 1, \quad (1.49)$$

et que la densité est nulle en dehors.

<sup>28</sup>. Nous pouvons faire la même mesure selon l'autre axe, c'est-à-dire en utilisant  $\Delta y$ . Pour un nuage thermique, on trouve le même résultat puisqu'alors  $\Delta x = \Delta y$ .

Pour pouvoir intégrer la densité selon l'axe  $z$ , il nous faut tenir compte de ce volume. Les limites d'intégration sont donc telles que :

$$\left(\frac{z - z_0}{R_z}\right)^2 = 1 - \left(\frac{x - x_0}{R_x}\right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{R_y}\right)^2, \quad (1.50)$$

c'est-à-dire que l'on intègre dans l'intervalle  $[z_0 - \ell_z, z_0 + \ell_z]$ , où  $\ell_z$  est défini par  $\ell_z = R_z \sqrt{1 - \left(\frac{x - x_0}{R_x}\right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{R_y}\right)^2}$ . Alors, la densité intégrée devient :

$$\begin{aligned} n_{\text{TF}}^{(2D)}(x, y) &= \int_{z_0 - \ell_z}^{z_0 + \ell_z} n_{\text{TF}}^{(3D)}(x, y, z) dz \\ &= \frac{4}{3} n_0 R_z \left[ 1 - \left(\frac{x - x_0}{R_x}\right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{R_y}\right)^2 \right]^{3/2}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Grâce à une loi d'échelle, on montre [CASTIN et DUM (1996)] que la densité colonne  $n_c$  mesurée après ToF conserve la même forme, soit :

$$n_c(x, y) = n_c^{(0)} \max \left[ 1 - \left(\frac{x - x_0}{\sigma_x}\right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{\sigma_y}\right)^2, 0 \right]^{3/2} \quad (1.52)$$

où  $\sigma_i$  est le rayon de la distribution après ToF dans la direction  $i$ . Pour déterminer le nombre d'atomes dans le condensat  $N_{\text{BEC}}$ , il suffit d'intégrer cette densité deux fois :

- On intègre la densité colonne  $n_c$  selon la direction  $y$ , dans l'intervalle  $[y_0 - \ell_y, y_0 + \ell_y]$  avec  $\ell_y = \sigma_y \sqrt{1 - \left(\frac{x - x_0}{\sigma_x}\right)^2}$  :

$$n_{\text{BEC}}^{(1D)} = \int_{y_0 - \ell_y}^{y_0 + \ell_y} n_c(x, y) dy = \frac{n_c^{(0)}}{\sigma_y^3} \times 2 \int_0^{\ell_y} [\ell_y^2 - y^2]^{3/2} dy. \quad (1.53)$$

On peut montrer que l'on a :

$$\int_0^a (a^2 - x^2)^{3/2} dx = \frac{3\pi}{16} a^4 \quad (1.54)$$

en utilisant le changement de variable  $x = a \sin(t)$ .

Avec l'identité ci-dessus, on aboutit à une expression pour le profil unidimensionnel du condensat :

$$n_{\text{BEC}}^{(1D)}(x) = \frac{3\pi}{8} n_c^{(0)} \sigma_y \max \left[ 1 - \left(\frac{x - x_0}{\sigma_x}\right)^2, 0 \right]^2. \quad (1.55)$$

- Le nombre d'atomes est finalement obtenu en intégrant le profil unidimensionnel selon la direction  $x$ . On trouve :

$$N_{\text{BEC}} = \frac{2\pi}{5\sigma_0} n_c^{(0)} \sigma_x \sigma_y, \quad (1.56)$$

expression dans laquelle nous avons pris en compte la section efficace d'absorption  $\sigma_0$ . La densité au centre  $n_c^{(0)}$  ainsi que les rayons  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  sont obtenus en ajustant à la densité optique OD mesurée une fonction suivant l'Eq. 1.52.

## 1.4 Conclusion

J'ai dédié ce premier chapitre exclusivement au dispositif expérimental, déjà opérationnel à mon arrivée puisque sa construction s'est terminée en 2015.

J'ai d'abord rappelé le phénomène de condensation d'un gaz de bosons piégés. Nous avons vu qu'il faut obtenir une densité dans l'espace de l'ordre de l'unité pour atteindre le régime de dégénérescence quantique. C'est là tout l'objectif de la séquence expérimentale, que j'ai décrite en trois blocs successifs : une première étape de refroidissement laser ; une deuxième étape de refroidissement par évaporation dans un piège magnétique quadrupolaire ; une dernière étape au cours de laquelle nous effectuons une étape d'évaporation dans un piège hybride, constitué du piège magnétique décomprimé et d'un piège dipolaire. Je me suis attardé en particulier sur le piège dipolaire, que nous avons amélioré au cours de ma thèse en installant un nouveau laser et en préparant une nouvelle géométrie. Toutes ces étapes nous permettent de produire des condensats de Bose-Einstein de rubidium 87 d'environ  $N = 2 \times 10^5$  atomes de manière stable et répétable. La dernière partie de ce chapitre explique comment nous imageons le gaz d'atomes au cours de la séquence, ainsi que les informations que nous pouvons extraire d'un temps de vol.

Nous continuerons dans le chapitre suivant à décrire le dispositif, en nous focalisant cette fois-ci sur le réseau optique.



# Réseau optique pour gaz quantiques : montage expérimental et calibration

*Now I explicitly go to the question of how we can simulate with a computer – a universal automaton or something – the quantum-mechanical effects. If you have a single particle,  $\psi$  is a function of  $x$  and  $t$ , and this differential equation could be simulated just like my probabilistic equation was before. That would be all right and one has seen people make little computers which simulate the Schrödinger equation for a single particle. But the full description of quantum mechanics for a large system with  $R$  particles is given by a function  $\psi(x_1, x_2, \dots, x_R, t)$  which we call the amplitude to find the particles  $x_1, x_2, \dots, x_R$ , and therefore, because it has too many variables, it cannot be simulated with a normal computer with a number of elements proportional to  $R$  or proportional to  $N$ . [...] And therefore, the problem is, how can we simulate the quantum mechanics? [...] Can you do it with a new kind of computer – a quantum computer? Now it turns out, as far as I can tell, that you can simulate this with a quantum system, with quantum computer elements.*

*Simulating physics with computers (1982)  
Richard P. Feynman*

---

## Sommaire

---

- 2.1 Particule quantique dans un potentiel périodique : éléments de théorie 52**
  - 2.1.1 Définition des grandeurs caractéristiques du réseau optique 52
  - 2.1.2 Théorème de Bloch 53
  - 2.1.3 Équation centrale et structure de bandes 53
- 2.2 Mise en œuvre expérimentale du réseau optique 55**
  - 2.2.1 Interférences et potentiel périodique 55
  - 2.2.2 Montage optique 56
  - 2.2.3 Contrôle des paramètres du réseau 58
    - Contrôle de la profondeur 58*
    - Contrôle de la position 61*
  - 2.2.4 Applications numériques des grandeurs associées au réseau 63
- 2.3 Calibration de la profondeur du réseau 63**
  - 2.3.1 Diffraction du condensat sur le potentiel périodique 63

2.3.2 Expansion du condensat après chargement 65

2.3.3 Déplacement soudain du réseau optique 67

*Développement théorique et comparaison aux mesures  
expérimentales 69*

*Fréquence caractéristique du centre de masse 73*

**2.4 Conclusion 76**

---

DEPUIS la réalisation expérimentale des condensats de Bose-Einstein, un outil s'est largement développé et généralisé dans la communauté des atomes froids : les réseaux optiques. Ils consistent en un potentiel périodique, issu d'interférences entre plusieurs lasers, dans lequel on vient piéger un gaz quantique décrit par une fonction d'onde  $\psi$ . Un tel système rappelle les gaz d'électrons dans les solides étudiés en matière condensée, et peut en imiter les propriétés. Ces dispositifs sont donc une réalisation possible de ce que R. FEYNMAN a théorisé dans les années 1980 : un simulateur quantique [FEYNMAN (1982)].

Bien que ces "cristaux de lumière" soient une plateforme unique pour le domaine des simulations quantiques [BLOCH *et al.* (2012)], leur utilisation couvre un large champ d'étude [BLOCH (2005)]. Cela s'explique par leur grande flexibilité, puisque les propriétés des réseaux optiques, qu'ils soient 1D, 2D ou 3D, sont hautement contrôlables. Il est de nos jours possible de générer des réseaux de géométries variées (carré, triangulaire, ou encore nid d'abeille [TARRUELL *et al.* (2012)]); certains protocoles expérimentaux permettent également de rendre le potentiel dépendant du spin de l'atome, ce qui est par exemple utilisé pour réaliser des marches aléatoires quantiques [KARSKI *et al.* (2009)]. Dans les gaz de bosons ultra-froids, les interactions interatomiques conduisent à d'importants effets non-linéaires, autorisant une analogie avec les jonctions Josephson des systèmes supraconducteurs [ANDERSON et KASEVICH (1998) et CATALIOTTI *et al.* (2001)]. Dans un régime de fortes interactions, on assiste à une "fermionisation" d'un tel gaz (gaz de Tonks-Girardeau [PAREDES *et al.* (2004)]). En combinant gaz dégénéré de fermions et réseau optique, on arrive à imager directement la surface de Fermi et voir la transition vers un isolant de bande [KÖHL *et al.* (2005)]. On peut également étudier dans le réseau la compétition entre les interactions sur site et l'effet tunnel intersite, mécanisme à l'origine de la transition de Mott, aussi bien pour des bosons [GREINER *et al.* (2001)] que des fermions [JÖRDENS *et al.* (2008)]. La combinaison des réseaux optiques avec des lentilles à grande ouverture numérique permet même à présent d'observer des sites individuels du réseau dans les microscopes à gaz quantiques [BAKR *et al.* (2009), SHERSON *et al.* (2010), WEITENBERG *et al.* (2011) et HALLER *et al.* (2015)].

Ce deuxième chapitre est consacré à cet outil devenu incontournable dans les laboratoires d'atomes froids. La première section me permet de rappeler et définir des notions importantes pour l'étude des gaz quantiques dans un potentiel périodique. Je consacre ensuite la deuxième section au dispositif expérimental utilisé pour le réseau optique dans notre expérience. Je m'attarde particulièrement sur les moyens que nous utilisons pour contrôler la position et la profondeur du réseau optique, puisque ces dispositifs sont au cœur des travaux présentés dans ce manuscrit. Je termine en explicitant trois méthodes expérimentales qui nous permettent de calibrer la profondeur du réseau, qui est un paramètre clé dans l'ensemble des travaux effectués dans les réseaux. La dernière méthode présentée, qui repose sur le déphasage soudain du réseau, est particulièrement détaillée, puisqu'elle a été développée par l'équipe ces dernières années.



## 2.1 Particule quantique dans un potentiel périodique : éléments de théorie

### 2.1.1 Définition des grandeurs caractéristiques du réseau optique

Avant de rappeler quelques éléments théoriques, définissons dès à présent les grandeurs qui seront utilisées tout au long de ce manuscrit. Pour toutes nos études, on considérera un atome de masse  $m$ , placé dans le potentiel périodique d'un réseau optique unidimensionnel qui s'exprime, dans le cas statique, comme :

$$V(x) = -V_0 \cos^2\left(\frac{\pi x}{d}\right), \quad (2.1)$$

avec  $V_0$  la profondeur du réseau et  $d$  son pas. Nous définissons alors un certain nombre de paramètres associés au réseau :

- une vitesse  $v_L = \frac{\hbar}{md}$  ;
- un vecteur d'onde  $k_L = \frac{2\pi}{d}$  ;
- une énergie  $E_L = \frac{1}{2}mv_L^2 = \frac{\hbar^2 k_L^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2md^2}$  ;
- une fréquence  $\nu_L = \frac{E_L}{\hbar} = \frac{\hbar}{2md^2}$ .

Nous avons pour habitude d'exprimer la profondeur du réseau en unités de  $E_L$  sous la forme du paramètre  $s = V_0/E_L$ .

Comme nous le verrons dans la section 2.2, le pas  $d$  du réseau optique sur notre dispositif expérimental s'écrit  $d = \lambda/2$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde des faisceaux dont les interférences produisent le réseau. On peut donc également définir, à partir du vecteur d'onde  $k_R = 2\pi/\lambda$ , l'énergie de recul  $E_R$  :

$$E_R = \frac{\hbar^2 k_R^2}{2m} = E_L/4, \quad (2.2)$$

qui est utilisée dans la littérature comme unité naturelle pour mesurer la profondeur du réseau. Ainsi, la transition superfluide/isolant de Mott [GREINER *et al.* (2002)], qui a lieu pour une profondeur d'environ  $V_0/E_R = 13$  correspond dans notre langage à  $s = V_0/E_L = 3.25$ .

La décomposition en série de Fourier de ce potentiel périodique, qui s'écrit :

$$V(x) = -\frac{V_0}{2} - \frac{V_0}{4} \left( e^{ik_L x} + e^{-ik_L x} \right), \quad (2.3)$$

sera utile par la suite.

### 2.1.2 Théorème de Bloch

Rappelons ici succinctement le théorème de Bloch [BLOCH (1929)], résultat essentiel pour l'étude des potentiels périodiques. Si on considère un atome dans un potentiel périodique unidimensionnel  $V(x)$ , de périodicité spatiale  $d$ , l'Hamiltonien associé à la particule s'exprime comme :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(x) \quad (2.4)$$

avec la relation  $V(x + d) = V(x)$ . Puisque l'Hamiltonien est invariant par translation discrète d'une période spatiale  $d$ , nous savons que l'opérateur translation  $\hat{T}_d = e^{-id\hat{p}/\hbar}$  commute avec  $\hat{H}$ , et qu'il existe par conséquent une base commune dans laquelle ces deux opérateurs sont diagonaux. Les fonctions de cette base sont les *ondes de Bloch*, qui peuvent se mettre sous la forme :

$$\psi_k(x) = u_k(x) e^{ikx}, \quad (2.5)$$

produit d'une fonction périodique ( $u_k(x + d) = u_k(x)$ ) et d'une onde plane de vecteur d'onde  $k$  ( $e^{ikx}$ ). Par abus de langage, on appellera parfois "quasi-moment" la quantité  $k$ , même si ce terme doit normalement se référer à la grandeur  $p = \hbar k$ .

### 2.1.3 Équation centrale et structure de bandes

La fonction  $u$  étant périodique, on peut la décomposer en série de Fourier :

$$u_k(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j(k) e^{i \times j k_L x}, \quad (2.6)$$

soit

$$\psi_k(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j(k) e^{i(k + j k_L)x} \quad (2.7)$$

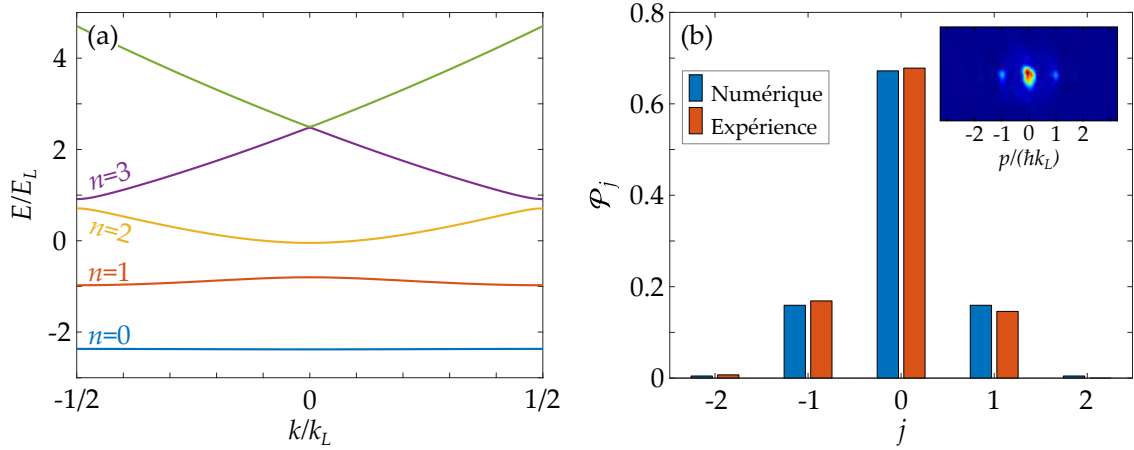
avec  $c_j$  les coefficients de Fourier. Une onde de Bloch de vecteur d'onde  $k$  est donc une superposition d'ondes planes, de vecteurs d'onde associés  $k + j k_L$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ . L'atome peuple ainsi plusieurs états d'impulsion, chaque état ayant une impulsion quantifiée :

$$p_j = \hbar(k + j k_L), j \in \mathbb{Z}. \quad (2.8)$$

Par conséquent, une image prise après ToF (qui donne accès à l'espace des impulsions) d'un condensat chargé dans le réseau optique révèle des *ordres de diffraction*, caractérisés par leur indice  $j$  et séparés d'une distance  $\Delta x_L = v_L \times t_{\text{ToF}}$ . On notera  $\mathcal{P}_j$  la population normalisée<sup>1</sup> dans l'ordre  $j$ . Un exemple d'image est visible Fig. 2.1(b), avec une mesure expérimentale des populations  $\mathcal{P}_j$ .

Le développement en série de Fourier (Eq. 2.7) de la fonction d'onde  $\psi_k(x)$  montre également une invariance par translation dans l'espace réciproque  $k \rightarrow k + k_L$ . On restreindra donc le vecteur d'onde  $k$  dans la première zone de Brillouin :  $k \in [-k_L/2; k_L/2]$ .

1. On a  $\sum_j \mathcal{P}_j = 1$ .



**FIGURE 2.1** | Résultats de l'équation centrale Eq. 2.10. (a) Structure de bandes calculée pour une profondeur  $s = 3.2$ . (b) Populations normalisées  $\mathcal{P}_j$  dans les ordres de diffraction  $j$ . Pour chaque ordre, la barre de gauche (bleue) représente le module carré du coefficient de Fourier  $|c_j^{(n=0)}(k=0)|^2$  obtenu numériquement pour  $s = 3.2$ , correspondant à une onde de Bloch dans la bande fondamentale ( $n = 0$ ) et à quasi-moment nul ( $k = 0$ ). La barre de droite (orange) est la mesure expérimentale de la population relative que l'on obtient en chargeant un condensat dans un réseau optique à cette profondeur en utilisant la montée adiabatique décrite section 2.2.3. L'image expérimentale correspondante est représentée dans le coin supérieur droit.

En utilisant l'Hamiltonien Eq. 2.4 et le résultat du théorème de Bloch (Eq. 2.5) dans l'équation de Schrödinger indépendante du temps, on trouve une équation aux valeurs propres pour la fonction périodique  $u$  :

$$\hat{H}\psi_k(x) = E_k\psi_k(x) \Rightarrow \left[ \frac{(\hat{p} + \hbar k)^2}{2m} + V(x) \right] u_k(x) = E_k u_k(x). \quad (2.9)$$

Cette équation a une infinité de solutions, indexées par un indice  $n \in \mathbb{N}$  et rangées par ordre croissant en énergie.

Finalement, en utilisant dans l'Eq. 2.9 les décompositions en série de Fourier des fonctions  $u$  (Eq. 2.6) et  $V$  (Eq. 2.3), on arrive à l'équation centrale qui lie entre eux les différents coefficients de Fourier  $c_j^{(n)}$  :

$$\left[ \left( j + \frac{k}{k_L} \right)^2 - \frac{V_0}{2E_L} \right] c_j^{(n)}(k) - \frac{V_0}{4E_L} \left( c_{j-1}^{(n)}(k) + c_{j+1}^{(n)}(k) \right) = \frac{E_k^{(n)}}{E_L} c_j^{(n)}(k), \quad (2.10)$$

où  $c_j^{(n)}(k)$  désigne, pour la  $n$ -ième solution de l'Eq. 2.9, le coefficient de Fourier associé à l'onde plane de vecteur d'onde  $k + jk_L$ . Cette équation centrale peut se mettre sous la forme d'une matrice tridiagonale et se résoudre numériquement pour une profondeur  $s = V_0/E_L$  donnée. Nous obtenons alors des solutions  $E_k^{(n)}$  qui forment la structure de bandes, dont un exemple est montré Fig. 2.1(a) pour une profondeur de  $s = 3.2$ . La bande de plus basse énergie est la bande fondamentale indexée par  $n = 0$ , les bandes supérieures avec  $n > 0$  correspondent aux bandes excitées.

La résolution numérique nous donne également accès aux coefficients de Fourier  $c_j^{(n)}(k)$ . Faisons l'hypothèse que le condensat dans le réseau est décrit par une onde de Bloch, dans la bande fondamentale ( $n = 0$ ) et à quasi-moment nul ( $k = 0$ ). Dans ce cas, la population  $\mathcal{P}_j$  de l'ordre de diffraction  $j$  associé à l'impulsion  $p_j = j \times \hbar k_L$  est directement donnée par :

$$\mathcal{P}_j = \left| c_j^{(n=0)}(k=0) \right|^2. \quad (2.11)$$

Sur la Fig. 2.1(b), nous comparons les populations  $\mathcal{P}_j$  mesurées expérimentalement après chargement adiabatique du condensat (décrit section 2.2.3) dans le réseau optique à une profondeur de  $s = 3.2$  aux coefficients de Fourier obtenus numériquement pour cette profondeur. Nous constatons un très bon accord, malgré un écart de quelques pourcents entre les grandeurs numériques et expérimentales. Une légère asymétrie est par exemple visible entre les ordres  $+1$  et  $-1$ , ce qui n'est pas attendu d'un chargement adiabatique. Plusieurs défauts expérimentaux (condensat pas au repos avant la montée du réseau, adiabaticité de cette montée ou encore fiabilité de détection des atomes) peuvent être à l'origine de cette asymétrie. Néanmoins la description du condensat par une unique onde de Bloch à  $\{n = 0, k = 0\}$  reste une bonne approximation, et permet de décrire une grande partie des travaux présentés dans ce manuscrit. Nous nous servirons à nouveau de cette description lorsque nous présenterons notre méthode de calibration de la profondeur du réseau optique en section 2.3.3.

## 2.2 Mise en œuvre expérimentale du réseau optique

### 2.2.1 Interférences et potentiel périodique

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, l'utilisation de lasers loin de résonance permet d'induire un moment dipolaire électrique dans l'atome, dont l'interaction avec le champ électrique du laser conduit à une force conservative : la *force dipolaire*. Nous exploitons à nouveau cette force pour créer le réseau optique, comme illustré sur la Fig. 2.2.

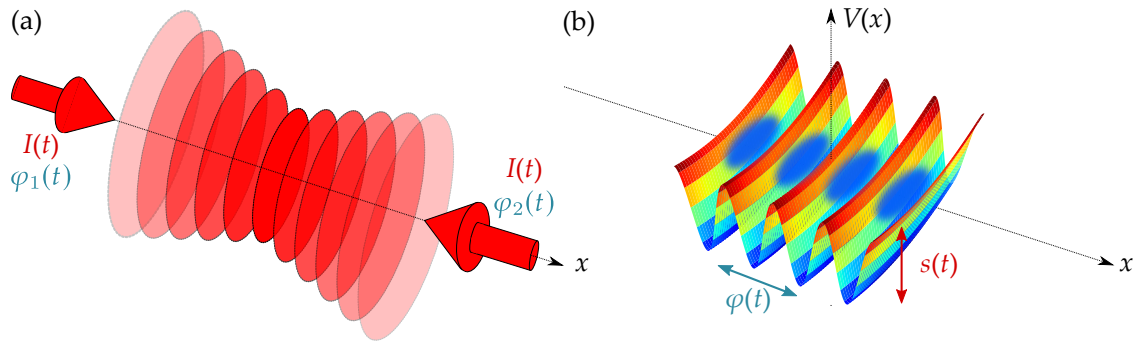
Considérons les champs électriques de deux ondes électro-magnétiques contra-propageantes issues d'un même laser. On les assimile à deux ondes planes progressives monochromatiques, de même polarisation linéaire  $\vec{e}$  et même vecteur d'onde  $k_R = \frac{2\pi}{\lambda}$ , se propageant dans le vide selon l'axe  $x$  en sens opposés. Leurs phases à l'origine respectives sont  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ . En notation complexe, ils s'expriment donc comme :

$$\vec{E}_1(x, t) = \underline{E}_0 e^{i(k_R x - \omega t + \varphi_1)} \vec{e} \quad \text{et} \quad \vec{E}_2(x, t) = \underline{E}_0 e^{i(-k_R x - \omega t + \varphi_2)} \vec{e}. \quad (2.12)$$

L'intensité lumineuse  $I(x)$  est le résultat d'interférences entre ces deux ondes, et est proportionnelle au module carré du champ électrique total  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ , qui vaut :

$$|\vec{E}(x)|^2 = 2|\underline{E}_0|^2 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda/2} x + (\varphi_1 - \varphi_2) \right) \right]. \quad (2.13)$$

L'interaction dipolaire entre le laser et le dipôle atomique est à l'origine d'un potentiel proportionnel à l'intensité lumineuse : il s'agit ici du réseau optique. Ainsi, en définissant  $V_0 = sE_L \propto |\underline{E}_0|^2$  la profondeur du réseau optique,  $d = \lambda/2$  sa période spatiale et



**FIGURE 2.2 | Réalisation d'un potentiel périodique par interférence d'ondes lumineuses.** (a) L'interférence de deux lasers contra-propageants conduit à une onde stationnaire dont l'intensité lumineuse varie périodiquement dans l'espace. Chaque laser est caractérisé par son intensité  $I(t)$  et sa phase  $\varphi_i(t)$ , ces deux grandeurs pouvant dépendre du temps. L'intensité des deux lasers est égale et varie de manière commune, tandis que les phases sont contrôlées séparément. (b) Potentiel  $V(x)$  résultant de l'interaction dipolaire entre l'onde stationnaire et les atomes (Eq. 2.14). Nous pouvons modifier la profondeur  $s(t)$  du potentiel en changeant l'intensité des lasers et la position  $\varphi(t)$  du potentiel par l'intermédiaire des phases des lasers.

$\varphi = (\varphi_1 - \varphi_2)/2$  la différence de phase entre les deux faisceaux, le potentiel prend bien la forme d'une onde stationnaire :

$$V(x) = -\frac{V_0}{2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{d} x + 2\varphi \right) \right] = -s E_L \cos^2 \left( \frac{\pi x}{d} + \varphi \right). \quad (2.14)$$

La profondeur  $s$  du réseau optique peut être contrôlée par l'intensité des lasers utilisés, tandis que le terme de phase  $\varphi$  permet de déplacer spatialement le potentiel périodique.

Voyons à présent la mise en place expérimentale du réseau, ainsi que les dispositifs de contrôle de ses paramètres.

## 2.2.2 Montage optique

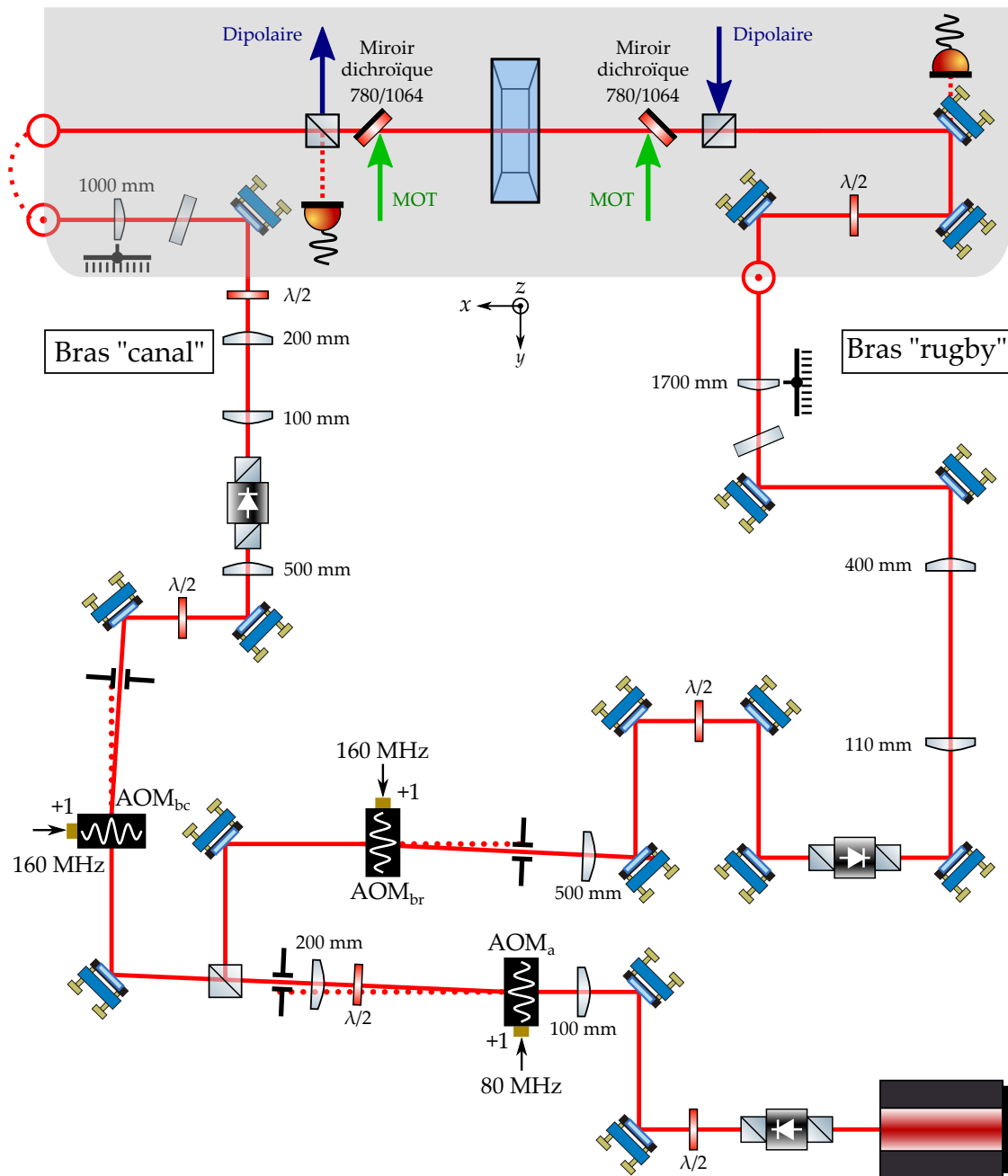
Le montage optique utilisé, bien détaillé dans les thèses de mes prédécesseurs [FORTUN (2016) et MICHON (2018)], est rappelé sur la Fig. 2.3. Le laser employé ici est un laser fibré<sup>2</sup> de longueur d'onde  $\lambda = 1064$  nm et de puissance maximale  $P = 15$  W. Il est diffracté par un premier AOM<sup>3</sup> à 80 MHz, avant d'être divisé en deux par un cube polarisant pour former les deux bras du réseau. Nous ajustons la lame demi-onde placée avant ce cube de sorte à égaliser la puissance optique : chaque bras (que nous désignons par bras "canal" ou bras "rugby"<sup>4</sup>) a en entrée de cellule une puissance maximale de  $P = 2.3$  W. Après la séparation, chaque faisceau suit un trajet relativement similaire : il passe par un deuxième AOM<sup>5</sup> à 160 MHz, avant d'être focalisé dans la cellule (waist de 150  $\mu\text{m}$ )

2. IPG Photonics YLR-15-1064-LP-SF

3. AA Opto-Electronic MQ80-A0,3-L1064-Z20-WLg

4. Les côtés correspondants de la table optique étant orientés vers le canal du Midi et un terrain de rugby respectivement!

5. AA Opto-Electronic MT200-A0,5-1064



**FIGURE 2.3 | Schéma du montage optique utilisé pour le réseau.** Le laser de puissance 15 W est diffracté par un premier  $AOM_a$  à 80 MHz utilisé pour contrôler l'intensité lumineuse (et, par conséquent, la profondeur du réseau). Nous séparons ensuite grâce à un cube polarisant le laser en deux bras ("canal" et "rugby"), dont nous contrôlons les phases respectives avec les  $AOM_{bc}$  et  $AOM_{br}$  à 160 MHz. Enfin les faisceaux sont focalisés dans la cellule d'expérience, où leurs interférences produisent le potentiel périodique. La zone grisée représente une partie sur-élevée du montage.

par une lentille placée sur une platine de translation. Le réseau est superposé au faisceau dipolaire horizontal, c'est-à-dire selon l'axe ( $Ox$ ) de la cellule. Une lame de verre, dont la normale fait un angle avec le faisceau incident du réseau, est également présente sur chaque trajet, ce qui permet un alignement beaucoup plus fin que par les miroirs [FABRE (2012)]. Enfin, nous nous assurons que les faisceaux ont la même polarisation en maximisant leur transmission à travers un cube polarisant en entrée de cellule. Le potentiel périodique ainsi obtenu a une périodicité spatiale de  $d = \lambda/2 = 532 \text{ nm}$ .

L'alignement des faisceaux du réseau nécessite plusieurs étapes :

- d'abord un réglage grossier, en superposant "à l'œil" les deux bras du réseau au laser du piège dipolaire horizontal ;
- nous ajustons la position verticale de chaque bras indépendamment, en utilisant le protocole suivant : nous repérons d'abord la position de référence du condensat, obtenue après **ToF** en fin d'évaporation dipolaire. Nous lançons ensuite une nouvelle séquence expérimentale où nous rajoutons après l'évaporation dipolaire une étape de quelques millisecondes pendant laquelle le faisceau dipolaire est coupé, et est remplacé instantanément par un des bras du réseau. Nous corrigeons la position verticale de ce bras de sorte à piéger le condensat à la même position que la position de référence ;
- enfin, nous superposons finement les faisceaux selon l'axe horizontal. Cet axe correspondant essentiellement à l'axe de la profondeur pour notre système d'imagerie, nous ne pouvons pas voir directement l'effet de ce degré de liberté sur la position du condensat comme c'est le cas pour l'axe vertical. Nous choisissons alors de maximiser les interférences entre les deux bras en maximisant la profondeur du réseau vue par les atomes. Nous utilisons pour cela la diffraction du condensat par le potentiel périodique dans le régime de Raman-Nath, que je rappellerai section 2.3.1.

En itérant les réglages verticaux et horizontaux, nous parvenons à obtenir une profondeur maximale d'environ  $s = V_0/E_L \approx 50$  à pleine puissance optique (soit une profondeur  $V_0 \approx 200E_R$  si exprimée en énergie de recul).

### 2.2.3 Contrôle des paramètres du réseau

#### *Contrôle de la profondeur*

Nous venons de le rappeler par le calcul des interférences : la profondeur du réseau est directement proportionnelle à l'intensité des faisceaux utilisés pour former le réseau optique. Afin de contrôler cette intensité, nous exploitons la diffraction par le premier **AOM** (noté **AOM<sub>a</sub>**), commun aux deux bras. Cet **AOM<sub>a</sub>** reçoit un signal sinusoïdal à 80 MHz, dont l'amplitude règle la quantité de lumière qui sera diffractée dans l'ordre +1 que nous récupérons pour la suite du montage. Contrôler la profondeur du réseau optique revient donc à moduler l'amplitude du signal sinusoïdal à 80 MHz par la courbe souhaitée.

Au début de ma thèse, le signal à 80 MHz était généré par un oscillateur contrôlé en tension (**VCO**), tandis que la modulation d'amplitude était assurée par un dispositif électronique qui comprenait un atténuateur et un mixeur reliés à un ensemble de générateurs de fonction. L'évolution souhaitée  $s(t)$  de la profondeur en fonction du temps était obtenue en programmant astucieusement ces derniers [MICHON (2018)]. Ce dispositif



a permis plusieurs études, mais a fini par atteindre ses limites lorsque nous avons étudié l'effet tunnel assisté par le chaos. En effet, cette étude requiert un contrôle très précis de  $s(t)$ , avec en particulier une modulation périodique de la profondeur pendant un nombre fixé de périodes et un contrôle sur la phase initiale de la modulation. Ces deux conditions ne pouvaient pas être remplies de manière simple avec le montage électronique présent à mon arrivée dans l'équipe.

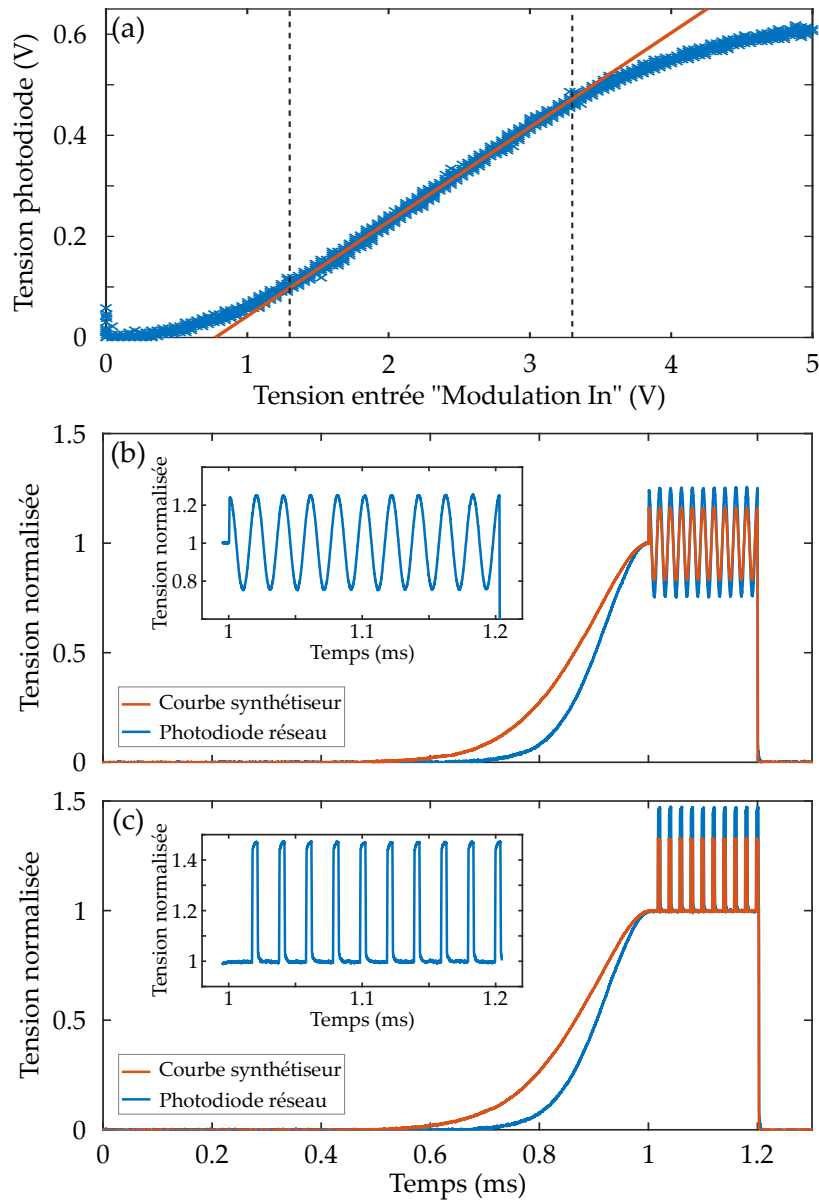
J'ai donc repensé la chaîne de contrôle de la profondeur, ce qui a mené à une simplification de l'électronique. Le signal à 80 MHz est maintenant produit par un générateur AA Opto-Electronic MODA80-B4-43 relié à l' $\text{AOM}_a$  sans dispositif électronique intermédiaire. Ce générateur possède une entrée "*Modulation In*" qui permet de moduler l'amplitude du signal qu'il produit par application d'une tension comprise entre 0 et 5 V sur cette entrée. Nous y avons relié un générateur de fonction arbitraire Keysight 33600A entièrement piloté par un programme LabView et déclenché par un signal TTL. Ainsi, nous pouvons mettre en forme une courbe arbitraire et l'envoyer sur l'entrée "*Modulation In*", modulant par conséquent l'intensité lumineuse diffractée par l' $\text{AOM}_a$  afin d'obtenir la courbe de profondeur  $s(t)$  souhaitée. Ce nouveau montage est plus souple que le précédent, puisque nous n'utilisons plus les signaux de base du générateur mais plutôt des fonctions arbitraires qu'il suffit de programmer dans le logiciel de contrôle.

Néanmoins, la réponse optique à la sortie de l' $\text{AOM}_a$  n'est pas linéaire avec la tension sur l'entrée "*Modulation In*". J'ai caractérisé cette réponse (voir Fig. 2.4(a)), ce qui nous permet d'établir une plage sur laquelle la réponse est linéaire : c'est le cas lorsque la tension est comprise entre 1.3 et 3.3 V environ. Lorsque nous souhaitons moduler la profondeur du réseau optique, nous nous assurons donc de rester entre ces bornes afin d'obtenir une modulation fidèle<sup>6</sup>. Je montre en Fig. 2.4(b) et Fig. 2.4(c) deux exemples expérimentaux d'évolution de la profondeur en fonction du temps  $s(t)$  en présence de modulation. Ces courbes, obtenues grâce à des photodiodes placées sur chaque bras du réseau peu avant la cellule (voir Fig. 2.3), nous permettent de vérifier le bon déroulé de la séquence et l'enregistrement de la courbe  $s(t)$  pour une analyse ultérieure éventuelle. Deux types de modulation sont actuellement implémentés : sinusoïdale et carrée. Chacune peut être finement paramétrée : sur l'exemple de la modulation sinusoïdale Fig. 2.4(b) nous avons choisi 10 périodes de modulation, avec une phase initiale de  $90^\circ$ .

---

6. Une étape de déconvolution, qui prend en compte les non-linéarités, a également été ajoutée afin de s'affranchir de ces limites. Néanmoins, comme elle n'a pas été suffisamment testée, nous ne l'avons pas encore utilisée.





**FIGURE 2.4 | Caractérisation du nouveau dispositif de contrôle de la profondeur du réseau optique.** (a) Mesure de la réponse du contrôleur AA Opto-Electronic MODA80-B4-43. Les points bleus sont les mesures avec une photodiode de l'intensité lumineuse diffractée par l' $AOM_a$  en fonction de la tension appliquée sur l'entrée "Modulation In" du contrôleur de l' $AOM_a$ . La droite orange est un ajustement linéaire de la zone centrale. La réponse est linéaire pour une tension comprise entre 1.3 et 3.3 V environ (pointillés verticaux). (b) et (c) Exemples de courbes  $s(t)$  obtenues avec le nouveau montage électronique. Sur chacun des exemples, on monte d'abord l'intensité du réseau adiabatiquement (Eq. 2.17), puis on la module par une fonction sinus ou carrée. La courbe orange est la tension délivrée par le générateur de fonction arbitraire, l'intensité lumineuse correspondante que nous avons mesurée est tracée en bleue. En encart : zoom sur la modulation. Les tensions ont été normalisées par la tension mesurée pour la profondeur statique  $s$ .

Les travaux présentés dans ce manuscrit ont été obtenus pour une modulation sinusoïdale de la profondeur autour de la profondeur statique  $s$ , de la forme :

$$s(t) = s [1 + \varepsilon_0 \sin(\omega t)] \quad (2.15)$$

où  $\varepsilon_0$  est l'amplitude de modulation et  $\omega = 2\pi\nu$  est la fréquence angulaire associée à la fréquence de modulation  $\nu$ .

! Pour tous les chapitres suivants, lorsque nous modulerons la profondeur, l'amplitude de modulation  $\varepsilon_0$  sera exprimée comme une fraction de la profondeur statique  $s$ . Nous avons par exemple sur la Fig. 2.4(b)  $\varepsilon_0 = 0.25$ , ce qui signifie que la profondeur du potentiel varie entre  $0.75s$  et  $1.25s$ .

Préalablement à la modulation du réseau, nous chargeons les atomes dans le réseau de manière adiabatique, de sorte à transférer le condensat dans l'état de Bloch  $\{n = 0, k = 0\}$  comme nous avons pu le vérifier au début de ce chapitre (section 2.1.3). Le critère d'adiabaticité [DENSCHLAG *et al.* (2002)] pour un quasi-moment nul  $k = 0$  peut s'écrire comme :

$$\frac{dV(x, t)}{dt} \ll \frac{E_L^2}{\hbar}. \quad (2.16)$$

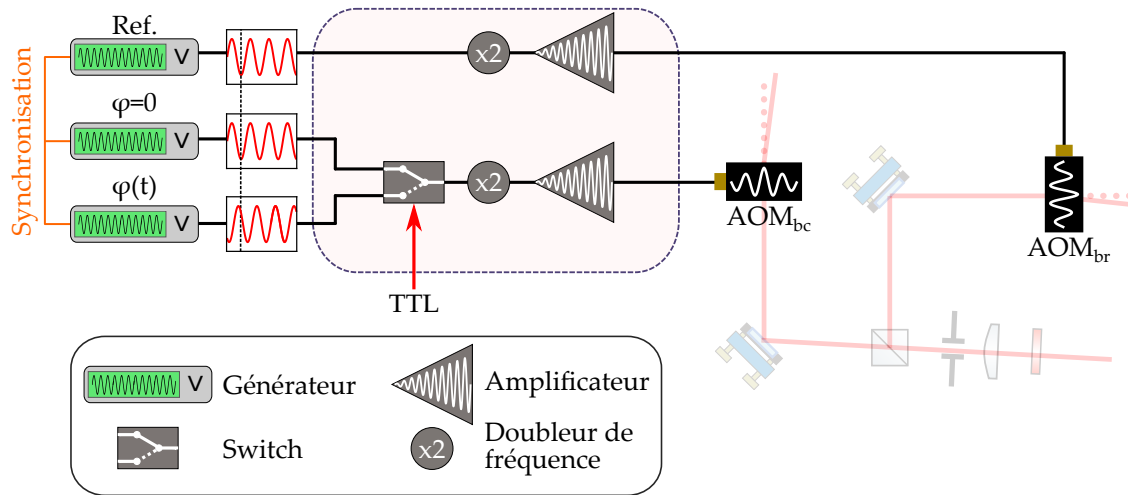
Il faut donc que le temps caractéristique de montée du réseau soit grand devant  $\hbar/E_L \approx 20 \mu\text{s}$ . Nous utilisons pour cette montée une courbe en  $S$  de la forme :

$$s(t) = s \left[ (\kappa + 1) \left( \frac{t}{\tau} \right)^\kappa - \kappa \left( \frac{t}{\tau} \right)^{\kappa+1} \right], \quad (2.17)$$

où  $\kappa$  et  $\tau$  sont des paramètres que nous ajustons pour modifier respectivement la pente et la durée de la courbe. Les valeurs  $\kappa = 11$  et  $\tau = 1 \text{ ms}$  que nous utilisons habituellement génèrent la montée représentée sur les courbes des Fig. 2.4(b) et (c). Compte-tenu de la réponse non linéaire de l'AOM<sub>a</sub>, la rampe obtenue expérimentalement est plus rapide que celle attendue théoriquement. Nous constatons toutefois sur la rampe réelle que la variation la plus forte de la profondeur dure environ  $300 \mu\text{s}$ , vérifiant le critère d'adiabaticité précédemment énoncé. Nous avons aussi vérifié expérimentalement que ce protocole n'induisait pas de chauffage. Pour cela, nous chargeons un condensat pur dans le réseau optique en utilisant l'Eq. 2.17 et les paramètres ci-dessus, puis nous maintenons les atomes dans le réseau pendant plusieurs millisecondes (typiquement 5 ms). Nous déchargeons ensuite le condensat du réseau optique en utilisant une rampe symétrique à la montée. Nous effectuons un ToF de 25 ms avant de prendre une image d'absorption, sur laquelle aucune fraction thermique (qui indiquerait un chauffage du nuage) n'est visible.

### Contrôle de la position

La position du potentiel périodique peut être modifiée par la différence de phase entre les deux bras du réseau. Nous contrôlons cette différence directement *via* les deux AOMs à 160 MHz (notés AOM<sub>bc</sub> et AOM<sub>br</sub> pour les bras "canal" et "rugby" respectivement), reliés à un ensemble de synthétiseurs Keysight 33600A tous synchronisés en phase (voir



**FIGURE 2.5 | Schéma du montage électronique utilisé pour contrôler la position du réseau.** L' $AOM_{br}$  du bras "rugby" est relié au générateur "Référence", utilisé comme origine des phases. Deux générateurs sont utilisés pour l' $AOM_{bc}$  du bras "canal" : un des générateurs est en phase avec la référence, tandis qu'un déphasage  $\varphi(t)$  est appliqué sur l'autre. Il peut s'agir d'une différence de phase fixe ou périodique. Un switch rapide contrôlé par un signal TTL permet de changer de source sur le bras "canal". Avant d'être envoyé à son AOM, chaque signal passe par un doubleur de fréquence puis un amplificateur.

Fig. 2.5). Plus précisément, l' $AOM_{br}$  n'est relié qu'à un seul synthétiseur dont le signal sert de référence. L' $AOM_{bc}$  est contrôlé par deux synthétiseurs dont nous ajustons les phases : l'un des deux synthétiseurs est exactement en phase avec la référence, tandis que nous choisissons une phase  $\varphi(t)$  sur le deuxième. Un commutateur rapide<sup>7</sup> contrôlé par un signal TTL permet d'utiliser l'un ou l'autre des synthétiseurs. Tous ces générateurs étant utilisés à 80 MHz, leurs signaux sont doublés en fréquence, puis amplifiés, avant d'être envoyés aux AOMs.

La phase  $\varphi(t)$  appliquée peut être de deux natures :

- un déphasage fixe  $\varphi(t) = \varphi_0$ . On déplace alors quasi-instantanément la position du réseau d'une quantité  $\Delta x$  proportionnelle à  $\varphi_0$  (voir Eq. 2.18 ci-après) ;
- une modulation périodique  $\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t)$ . La position du réseau est dans ce cas modulée autour de sa position d'origine avec une amplitude  $\Delta x \propto \varphi_0$  et à une fréquence  $\nu = \omega/(2\pi)$ .

! Tout au long de ce manuscrit, le terme  $\varphi_0$  sera donné en degrés. La fonction  $\cos^2$  qui définit le potentiel périodique (Eq. 2.1) étant  $\pi$ -périodique, un déphasage de  $\varphi_0 = 180^\circ$  correspond à un décalage d'une période  $d$  du réseau. On peut donc aisément calculer le déplacement du réseau :

$$\Delta x = \frac{\varphi_0}{180} d. \quad (2.18)$$

7. ZASWA-2-50-DR+

### 2.2.4 Applications numériques des grandeurs associées au réseau

Pour terminer cette partie sur le montage expérimental, calculons les grandeurs associées au réseau définies section 2.1.1 avec le pas  $d = 532$  nm et la masse de l'atome de rubidium  $m = 1.443 \times 10^{-25}$  kg. Ces grandeurs caractéristiques reviendront par la suite :



$$\begin{aligned} v_L &= 8.63 \text{ mm/s} \\ k_L &= 1.18 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \\ E_L &= 5.37 \times 10^{-30} \text{ J} \\ \nu_L &= 8111.25 \text{ Hz} \end{aligned}$$

## 2.3 Calibration de la profondeur du réseau

Un paramètre crucial pour toutes les études faites dans ce manuscrit est la profondeur du réseau optique, soit le paramètre  $s$ . En principe, connaissant les caractéristiques des faisceaux utilisés pour créer le réseau optique (longueur d'onde, puissance, waist, polarisation, alignement) et les grandeurs associées aux transitions atomiques, il est possible de déterminer par le calcul la valeur de la profondeur. En pratique, il est difficile d'estimer précisément la profondeur réelle par ce moyen, puisque nous ne pouvons pas mesurer les propriétés des faisceaux du réseau optique au centre de la chambre à vide, dont les parois en verre peuvent modifier les faisceaux. Il est donc nécessaire d'utiliser les atomes pour effectuer une mesure *in situ* de la profondeur du réseau optique.

Un ensemble de techniques ont été développées ces dernières décennies [MORSCH et OBERTHALER (2006)] pour déterminer *in situ* avec précision ce paramètre. Ces méthodes variées reposent pour la plupart sur l'étude des figures d'interférences résultant de l'interaction d'un condensat et du réseau optique et visibles après ToF. Après un bref rappel de certaines de ces techniques (diffraction de Raman-Nath et expansion après chargement), je décris dans cette dernière section une nouvelle méthode de calibration qui a été développée dans l'équipe.

### 2.3.1 Diffraction du condensat sur le potentiel périodique

La première méthode de calibration que je rappelle ici repose sur un phénomène de diffraction pour lequel les rôles de la lumière et de la matière sont inversés. En effet, en pulsant un réseau optique de profondeur  $s$  pendant une durée  $\tau$  relativement faible, l'interaction du condensat avec le réseau conduit à la diffraction de Kapitza-Dirac de l'onde de matière par le réseau optique [GOULD *et al.* (1986)]. Ce phénomène peut être utilisé pour retrouver la valeur du paramètre  $s$ .

Considérons l'équation de Schrödinger dépendante du temps :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x, t) \psi \quad (2.19)$$

où  $V(x, t) = -sE_L \cos^2(\frac{\pi x}{d})$  pendant la durée du pulse et  $V(x, t) = 0$  sinon. Durant ma thèse, nous avons surtout utilisé des temps d'interaction  $\tau$  très courts, ce qui nous place dans le régime de diffraction Raman-Nath [OBERTHALER *et al.* (1999) et OVCHINNIKOV *et al.* (1999)]. Dans cette approximation, nous négligeons le terme d'énergie cinétique de l'Eq. 2.19, qui s'intègre simplement et donne :

$$\psi(x, t = \tau) = e^{isE_L \cos^2(\pi x/d)\tau/\hbar} \psi(x, t = 0). \quad (2.20)$$

Rappelons l'identité de Jacobi-Anger :

i

$$e^{iz \cos(\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n \mathcal{J}_n(z) e^{in\theta} \quad (2.21)$$

où  $\mathcal{J}_n(z)$  est la  $n$ -ième fonction de Bessel de première espèce.

Après linéarisation du  $\cos^2$  et en utilisant la relation rappelée ci-dessus, on trouve l'expression de la fonction d'onde après interaction dans la base des ondes planes :

$$\psi(x, \tau) = e^{isE_L \tau/(2\hbar)} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} i^j \mathcal{J}_j\left(\frac{sE_L \tau}{2\hbar}\right) e^{j \times ik_L x} \psi(x, 0). \quad (2.22)$$

Pulser le réseau modifie donc les populations dans les ordres de diffraction. Plus précisément, après un temps d'interaction  $\tau$ , la population dans l'ordre  $j$  sera proportionnelle à  $\left|\mathcal{J}_j\left(\frac{sE_L \tau}{2\hbar}\right)\right|^2$ . Ainsi, en traçant l'évolution des populations des ordres de diffraction en fonction de la durée du pulse  $\tau$ , puis en ajustant les résultats avec la fonction de Bessel adéquate, il est possible de retrouver la profondeur  $s$  du potentiel utilisé.

En pratique, nous n'utilisons plus que rarement cette méthode pour déterminer la profondeur, puisque nous lui préférons la méthode basée sur le déplacement soudain du réseau, que j'expliquerai section 2.3.3. En revanche, nous utilisons la diffraction Raman-Nath pour avoir une première estimation de la profondeur avant une mesure plus précise, ou encore pour aligner le réseau. Pour cela, nous cherchons en général à déterminer le temps de pulse  $\tau = \tau_0$  le plus court tel qu'il n'y a plus d'atomes dans l'ordre central de diffraction  $j = 0$ . Dans ce cas, la relation suivante est vérifiée :

$$\left|\mathcal{J}_0\left(\frac{sE_L \tau_0}{2\hbar}\right)\right|^2 = 0. \quad (2.23)$$

Or les zéros de la fonction de Bessel  $\mathcal{J}_0$  sont bien connus. Son premier zéro étant atteint pour un argument  $x_0 \approx 2.4$ , nous avons de cette manière une estimation de la profondeur :

$$s \approx \frac{2\hbar}{E_L \tau_0} x_0 \approx 2.4 \times \frac{2\hbar}{E_L \tau_0}. \quad (2.24)$$

Ce résultat découle d'une approximation : nous négligeons ici l'énergie cinétique. Cette hypothèse est donc d'autant plus vraie que le temps  $\tau$  d'interaction avec le réseau est

court devant la période d'oscillation naturelle  $T_{\text{res}}$  du nuage d'atomes dans les puits du réseau.

En approximant le potentiel d'un site du réseau autour de son minimum par un piège harmonique, on trouve l'expression classique pour la fréquence du piège associé au réseau :

$$\nu_{\text{res}} = \frac{h}{2md^2} \sqrt{s} = \nu_L \sqrt{s} \quad (2.25)$$

avec  $\nu_L$  la fréquence caractéristique définie section 2.1.1. On a donc  $T_{\text{res}} = 1/\nu_{\text{res}} = 1/(\nu_L \sqrt{s})$ .

$s$	$\nu_{\text{res}}$ (kHz)	$T_{\text{res}}$ ( $\mu\text{s}$ )	$\tau_0$ ( $\mu\text{s}$ )
3	14	71.2	47.1
10	25.7	39	9.4
50	57.4	17.4	1.9

Nous constatons que l'hypothèse  $\tau \ll T_{\text{res}}$  est d'autant mieux vérifiée que la profondeur est grande. Dans le régime des temps d'interaction longs (donc *a fortiori* pour les profondeurs faibles), on ne peut plus négliger le terme associé à l'énergie cinétique. La résolution de l'équation de Schrödinger passe dans ce cas par le formalisme des équations de Mathieu [MCLACHLAN (1947) et HORNE *et al.* (1999)].

### 2.3.2 Expansion du condensat après chargement

Une deuxième méthode utilisée pour déterminer la profondeur du réseau optique repose sur l'analyse des populations des ordres de diffraction obtenus après un chargement adiabatique d'un condensat dans le réseau optique : nous augmentons l'intensité des faisceaux du réseau avec la courbe lente vue précédemment (Eq. 2.17) jusqu'à la profondeur  $s$  désirée, puis nous coupons soudainement tous les pièges afin de laisser le nuage d'atomes s'étendre pendant une chute libre. Nous effectuons ainsi un ToF, en général de l'ordre de 25 ms, qui nous renseigne sur les états d'impulsion de la fonction d'onde sous la forme d'ordres de diffraction. Les populations  $\mathcal{P}_j$  dans ces ordres permettent alors de déterminer  $s$ .

Les auteurs de [PEDRI *et al.* (2001)] donnent une relation entre la profondeur  $s$  du réseau optique et la grandeur  $\tilde{\mathcal{P}}_j = \mathcal{P}_j/\mathcal{P}_0$ , qui correspond à la population dans l'ordre  $j$  normalisée<sup>8</sup> par la population dans l'ordre 0. Cette relation s'écrit :

$$\tilde{\mathcal{P}}_j = e^{-2j^2/\sqrt{s}}. \quad (2.26)$$

8. Cette normalisation implique que  $\sum_j \tilde{\mathcal{P}}_j \neq 1$ . En particulier  $\tilde{\mathcal{P}}_0 = 1$ .

Une fois inversée, nous avons directement une expression de la profondeur en fonction de la grandeur mesurable  $\tilde{\mathcal{P}}_j$  :

$$s = \left( \frac{2j^2}{\ln(\tilde{\mathcal{P}}_j)} \right)^2. \quad (2.27)$$

Pour arriver à ce résultat, les auteurs décrivent la fonction d'onde totale par une somme de fonctions gaussiennes localisées sur chaque site du réseau. Si l'approximation gaussienne fonctionne bien pour les grandes profondeurs (où la fonction d'onde est effectivement bien localisée sur les minima du réseau), elle ne suffit pas dans le régime des faibles profondeurs  $s < 5$  où l'effet tunnel tend à délocaliser la fonction d'onde sur plusieurs puits du réseau. Les auteurs de [CRISTIANI *et al.* (2002)] donnent une expression corrigée de l'Eq. 2.27 :

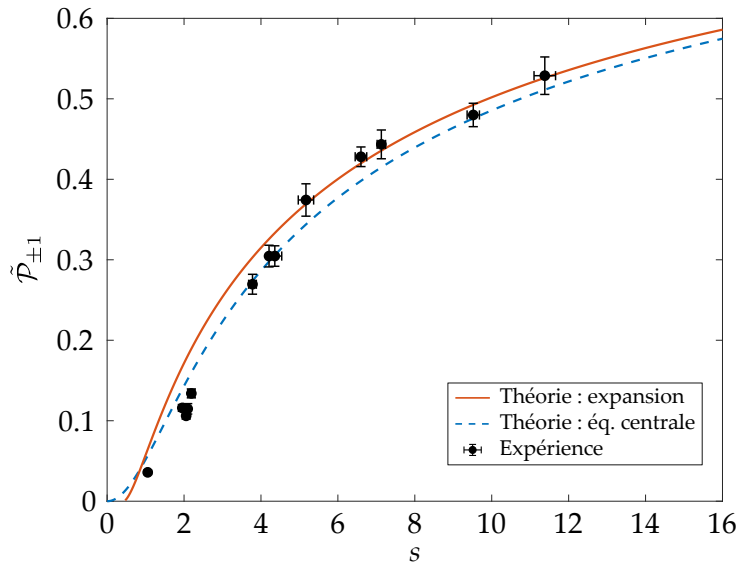
$$s_{\text{corr}} = \left( \frac{2j^2}{\ln(\tilde{\mathcal{P}}_j)} \right)^2 \tilde{\mathcal{P}}_j^{1/4}. \quad (2.28)$$

Cette méthode de calibration, que nous avons utilisée sur notre expérience, présente plusieurs avantages : elle est rapide à mettre en œuvre et, contrairement à la méthode par diffraction (réseau pulsé), la mesure de la profondeur se fait dans des conditions similaires aux expériences effectuées par la suite (montée adiabatique du réseau). Sur la Fig. 2.6 nous traçons  $\tilde{\mathcal{P}}_{\pm 1}$  (c'est-à-dire la population dans les ordres  $\pm 1$  normalisée par la population dans l'ordre 0) en fonction de la profondeur  $s$ . Cette dernière a été mesurée par la troisième méthode de calibration qui repose sur un déplacement soudain du réseau optique et qui est expliquée dans la section suivante. Les points expérimentaux sont comparés à deux courbes théoriques, très proches l'une de l'autre : en trait plein orange est indiquée la prédiction de l'Eq. 2.28, tandis que les tirets bleus donnent le résultat obtenu directement à partir des coefficients de Fourier de l'onde de Bloch  $\{n = 0, k = 0\}$ . Plus précisément, on résout l'équation centrale Eq. 2.10 pour  $0 < s < 16$  et un quasi-moment nul, puis on trace la grandeur :

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\pm 1} = \frac{\mathcal{P}_{\pm 1}}{\mathcal{P}_0} = \frac{\left| c_{j=\pm 1}^{(n=0)}(k=0) \right|^2}{\left| c_{j=0}^{(n=0)}(k=0) \right|^2}. \quad (2.29)$$

Les ordres  $+1$  et  $-1$  sont ici complètement équivalents, puisqu'un chargement adiabatique du réseau peuple les ordres de manière symétrique.

On observe un bon accord global entre les mesures expérimentales et les deux courbes théoriques, ne permettant pas de les discriminer. Néanmoins, il semble que malgré la correction apportée à l'Eq. 2.27, les mesures des populations à faible profondeur ( $s < 5$ ) soient en meilleur accord avec les résultats obtenus à partir de l'équation centrale. La méthode de calibration basée sur un déplacement quasi-instantané du réseau optique, que j'explique ci-dessous, repose entièrement sur un développement à partir de l'équation centrale.



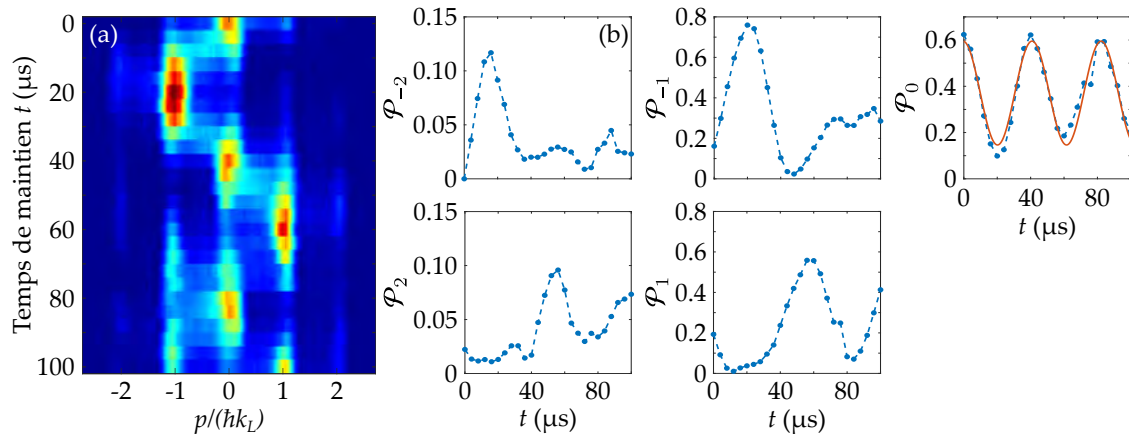
**FIGURE 2.6 | Calibration de la profondeur du réseau par la méthode de l'expansion du condensat.** Nous traçons les mesures expérimentales de la population relative  $\tilde{P}_{\pm 1}$  (voir Eq. 2.26) pour différentes profondeurs  $s$  mesurées avec la méthode du déplacement soudain du réseau (voir section 2.3.3). Ces résultats sont comparés à la prédiction de la méthode par expansion Eq. 2.28 (trait orange), donnée par [CRISTIANI *et al.* (2002)], et à l'Eq. 2.29 (tirets bleus) basée sur le calcul des coefficients de Fourier par résolution de l'équation centrale (Eq. 2.10).

### 2.3.3 Déplacement soudain du réseau optique

La dernière méthode que je présente a été développée et étudiée par l'équipe, puis expliquée dans deux articles [FORTUN *et al.* (2016) et CABRERA-GUTIÉRREZ *et al.* (2018)]. Elle repose sur l'étude de l'oscillation de la fonction d'onde dans le réseau optique après un déplacement soudain du réseau. Le protocole expérimental est le suivant : après chargement adiabatique du condensat dans le réseau, nous changeons abruptement la phase relative entre les deux bras du réseau d'une quantité fixée  $\varphi_0$  telle que  $-90^\circ \leq \varphi_0 \leq 90^\circ$ . Cela a pour effet de déplacer le potentiel périodique d'une distance  $\Delta x$  plus petite que le pas du réseau (typiquement quelques dizaines de nanomètres). Nous laissons ensuite les atomes évoluer dans ce potentiel translaté pendant un temps  $t$  variable (entre quelques dizaines et quelques centaines de microsecondes, en fonction de la profondeur), avant d'effectuer un ToF. Nous observons alors une évolution des populations dans les ordres de diffraction (dont un exemple est montré Fig. 2.7 pour une profondeur de  $s = 4.4$ ).

Une interprétation de cette évolution en termes d'oscillation du centre de masse et d'effet tunnel a déjà été exposée dans les thèses de mes prédécesseurs. Ces observations ont notamment permis la mesure directe du temps de traversée d'une barrière d'énergie par effet tunnel [FORTUN *et al.* (2016)]. Lors de cette étude, l'équipe a également montré que dans la gamme de profondeur étudiée ( $s < 5$ ) l'ordre central de diffraction (ordre 0) évoluait périodiquement, sa fréquence d'oscillation n'étant dictée que par la profondeur





**FIGURE 2.7 | Calibration de la profondeur du réseau par déplacement soudain du réseau.** (a) Oscillation des atomes dans le réseau translaté. Nous déplaçons le réseau de  $\varphi_0 = 34^\circ$  à l’instant  $t = 0$ , puis nous maintenons le condensat pendant un temps  $t$  variable dans le réseau translaté avant de faire un ToF de 25 ms. Chaque ligne correspond à une image d’absorption obtenue après ToF pour le temps de maintien  $t$  et intégrée selon la direction perpendiculaire à l’axe du réseau. (b) Mesure des populations  $\mathcal{P}_j$  dans les ordres de diffraction en fonction du temps de maintien dans le réseau translaté. Nous avons également ajusté une fonction sinusoïdale (courbe orange) à l’évolution de la population  $\mathcal{P}_0(t)$  de l’ordre central de diffraction. Cette population oscille à une fréquence de  $24.25 \pm 0.60$  kHz, ce qui correspond à une profondeur de  $s = 4.39 \pm 0.14$ .

du réseau : ni la fréquence  $\nu_{\text{ext}}$  du confinement harmonique extérieur<sup>9</sup>, dans la limite  $\nu_{\text{ext}} \ll \nu_L$ , ni la force des interactions interatomiques, ni l’angle de déphasage  $\varphi_0$  initialement appliqué ne modifient cette fréquence. Ce résultat en fait une méthode remarquablement robuste pour la calibration de la profondeur du réseau optique.

Cette équivalence univoque entre fréquence d’oscillation de l’ordre 0 et profondeur trouve son origine dans la structure de bandes, puisque les travaux réalisés dans l’équipe ont montré qu’à basse profondeur, la fréquence d’oscillation de l’ordre central de diffraction était liée à la différence d’énergie entre la bande fondamentale et la deuxième bande excitée. Or nous avons vu section 2.3.2 que les coefficients de Fourier obtenus à partir de l’équation centrale permettent de rendre compte des populations observées dans les ordres de diffraction après un chargement adiabatique. Toutes ces indications suggèrent que l’évolution des populations dans les ordres après déplacement soudain du réseau doit pouvoir s’expliquer dans le contexte des ondes de Bloch. Le développement que je présente ci-dessous, fait en majeure partie par V. BRUNAUD, doctorant dans l’équipe de 2017 à 2018, s’inspire du traitement d’un chargement soudain du réseau effectué par [DENSCHLAG *et al.* (2002)].

9. Le confinement extérieur change le nombre de puits peuplés dans le réseau. Or des simulations numériques ont montré qu’un nombre minimum de puits peuplés (entre 2 et 4 puits) était nécessaire pour observer l’émergence de ces oscillations, voir Sup. Mat. de [FORTUN *et al.* (2016)].

### Développement théorique et comparaison aux mesures expérimentales

Considérons le chargement adiabatique du condensat dans le réseau optique, puis une translation de ce potentiel d'une quantité  $\Delta x$  à l'instant  $t = 0$ . Comme en section 2.1.3, nous faisons l'hypothèse que la fonction d'onde juste après le chargement est bien décrite par une onde de Bloch dans la bande fondamentale  $n = 0$  à quasi-moment nul  $k = 0$ . Nous avons donc :

$$\psi(x, t = 0^-) = \psi_{k=0}^{(n=0)}(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j^{(n=0)}(k = 0) e^{j \times i k_L x}. \quad (2.30)$$

L'invariance par translation discrète étant vérifiée tout au long de l'évolution, nous avons conservation du quasi-moment  $k = 0$  (voir section 3.1.1 du chapitre 3). Nous alléons donc les notations pour la suite en ne précisant plus la dépendance en  $k$ .

Juste après translation du réseau, la fonction d'onde s'écrit dans le référentiel du réseau :

$$\psi(x, t = 0^+) = \psi(x + \Delta x, t = 0^-) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j^{(n=0)} e^{j \times i k_L x} e^{j \times i k_L \Delta x}. \quad (2.31)$$

Le condensat est alors mis hors-équilibre et ne peut plus être décrit par une fonction d'onde dans la bande fondamentale seulement : la fonction d'onde qui décrit le condensat se projette vers les bandes d'énergies supérieures. La fonction d'onde totale est ainsi une superposition des fonctions propres  $\psi^{(n)}$  d'énergie propre  $E^{(n)}$ , et l'évolution temporelle se fait selon :

$$\psi(x, t > 0) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \psi^{(n)}(x) e^{-i \frac{E^{(n)} t}{\hbar}}. \quad (2.32)$$

En utilisant la décomposition en série de Fourier (Eq. 2.7) de chaque fonction  $\psi^{(n)}$ , on trouve finalement l'expression de la fonction d'onde totale dans la base des ondes planes :

$$\psi(x, t > 0) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n c_j^{(n)} e^{-i \frac{E^{(n)} t}{\hbar}} \right) e^{j \times i k_L x}. \quad (2.33)$$

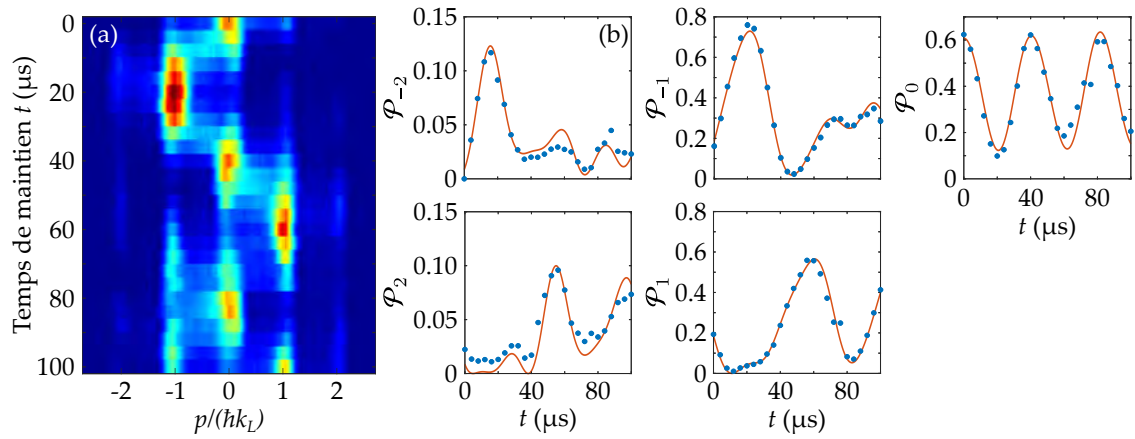
La population dans l'ordre de diffraction  $j$  en fonction du temps est donc donnée par :

$$\mathcal{P}_j(t) = \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n c_j^{(n)} e^{-i \frac{E^{(n)} t}{\hbar}} \right|^2 \quad (2.34)$$

avec, rappelons-le, les coefficients de Fourier  $c_j^{(n)}$  associés à la bande  $n$  pour  $k = 0$ , et les poids  $\alpha_n$  de chaque bande dans la décomposition de la fonction d'onde totale juste après déplacement du réseau. Ces poids peuvent être calculés en projetant l'Eq. 2.31 sur l'état  $\psi^{(n)}$  :

$$\alpha_n = \langle \psi^{(n)} | \psi(t = 0^+) \rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j^{(n)*} c_j^{(n=0)} e^{j \times i k_L \Delta x}. \quad (2.35)$$

Connaissant l'angle de déphasage appliqué  $\varphi_0$ , on peut déduire le déplacement  $\Delta x$  du réseau (voir Eq. 2.18). La résolution de l'équation centrale fournit ensuite toutes les grandeurs nécessaires pour calculer numériquement l'évolution des populations  $\mathcal{P}_j(t)$



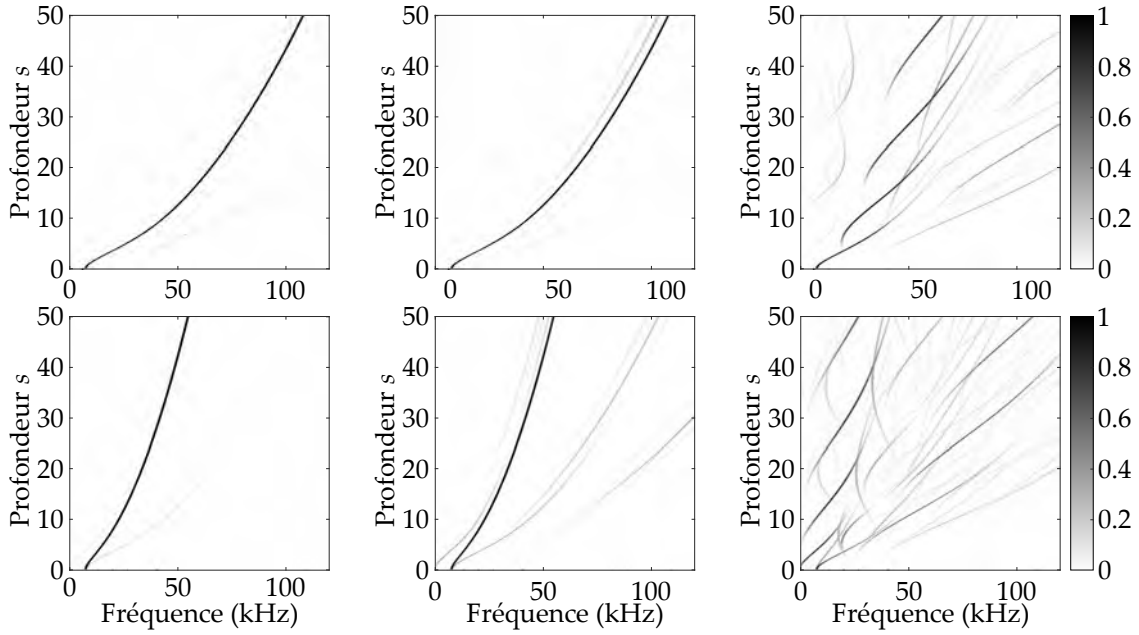
**FIGURE 2.8** | **Évolution temporelle des ordres de diffraction après déplacement soudain du réseau : analyse par les ondes de Bloch.** Données similaires à la Fig. 2.7. En (b), Nous avons tracé en plus des mesures expérimentales (points bleus) le résultat numérique obtenu avec l'Eq. 2.34 pour une profondeur de  $s = 4.4$  et un déphasage  $\varphi_0 = 34^\circ$  (courbes oranges).

dans les différents ordres. Reprenons les données de la Fig. 2.7 obtenues à une profondeur de  $s = 4.4$ , et calculons les  $\mathcal{P}_j(t)$ . Ces résultats numériques sont comparés aux données expérimentales sur la Fig. 2.8 : l'accord y est excellent. Insistons sur le fait qu'il n'y a aucun paramètre ajustable hormis la profondeur, obtenue à partir de l'oscillation de l'ordre central et qui peut être confirmée par les autres méthodes précédemment évoquées.

Une fois notre approche validée, nous avons étudié plus en détail la robustesse de cette méthode vis-à-vis de la profondeur du réseau et du déphasage appliqué. Pour cela, nous avons calculé numériquement l'évolution temporelle  $\mathcal{P}_0(t)$  et  $\mathcal{P}_{\pm 1}(t)$  des ordres 0 et  $\pm 1$  respectivement, pour  $0.5 < s < 50$  et avec trois déphasage différents :  $\varphi_0 = 10^\circ$ ,  $\varphi_0 = 25^\circ$  et  $\varphi_0 = 70^\circ$ . Pour chaque évolution, les fréquences d'oscillations sont extraites par FFT. Ces résultats sont indiqués Fig. 2.9.

Pour un déphasage allant jusqu'à  $25^\circ$ , l'oscillation de l'ordre central ne présente qu'une seule fréquence dominante sur toute la plage de profondeur étudiée, et cette fréquence ne change pas avec l'angle utilisé. Nous observons un comportement similaire pour les ordres  $\pm 1$ , en notant toutefois le poids plus important de fréquences secondaires. Ces résultats numériques indiquent que notre méthode de calibration est à la fois valide sur une large gamme de profondeur et robuste vis-à-vis de l'angle appliqué (dans le régime des petits angles). Pour un déphasage initial plus grand ( $\varphi_0 = 70^\circ$ ), l'évolution des populations est plus complexe, ce qui se traduit dans le spectre en fréquence par la présence de nombreuses branches.

Comment interpréter ces spectres en fréquence, que ce soit la fréquence unique pour les petits angles ou les nombreuses branches visibles pour  $\varphi_0 = 70^\circ$ ? Pour cela, deux ingrédients sont nécessaires. Nous pouvons d'abord évaluer les coefficients  $|\alpha_n|^2$ , qui sont les contributions des différentes bandes, en fonction de l'angle appliqué. Nous donnons sur la Fig. 2.10(a) ces coefficients pour  $s = 26$  avec deux angles différents :  $\varphi_0 = 24^\circ$  et  $\varphi_0 = 47^\circ$ . On constate que dans le régime des petits déphasages, le nombre de bandes sur lesquelles l'état initial se projette est limité (typiquement jusqu'à  $n = 3$ ). Ce n'est plus vrai pour des angles plus grands, où la fonction d'onde se projette vers des bandes



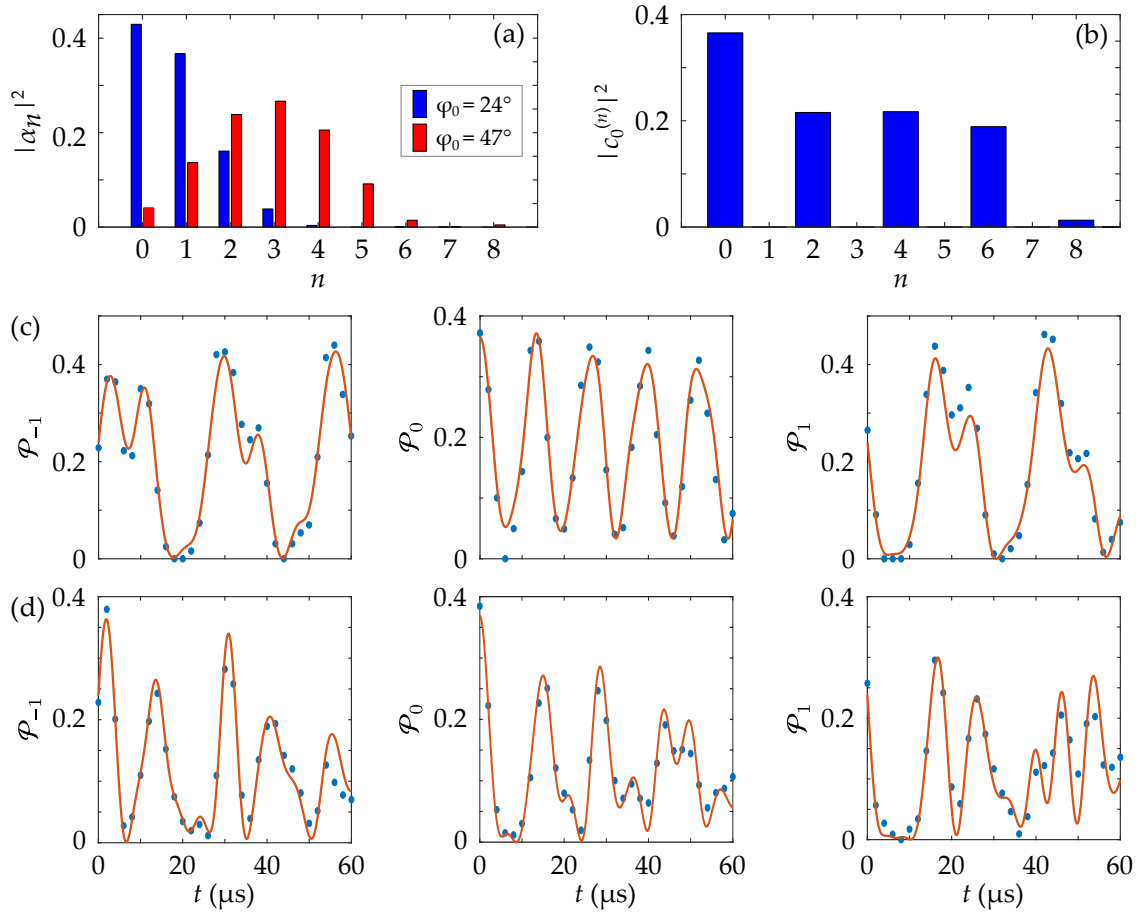
**FIGURE 2.9 | Spectres en fréquence des évolutions temporelles des populations des ordres de diffraction.** La ligne du haut correspond à la population  $\mathcal{P}_0$ , la ligne du bas à la population  $\mathcal{P}_{\pm 1}$ . Le calcul est fait pour une profondeur  $0.5 < s < 50$  et pour trois déphasages différents :  $\varphi_0 = 10^\circ$  (gauche),  $\varphi_0 = 25^\circ$  (milieu) et  $\varphi_0 = 70^\circ$  (droite). Les niveaux de gris correspondent à une échelle décimale.

supérieures ( $n > 3$ ). On comprend alors les nombreuses fréquences présentes dans le spectre pour  $\varphi_0 = 70^\circ$  : un plus grand nombre de fréquences interbandes, associées aux énergies  $E^{(n)}$  dans l'Eq. 2.34, est impliqué dans l'évolution des populations.

Nous pouvons également nous intéresser aux coefficients  $|c_0^{(n)}|^2$  qui participent à l'évolution de l'ordre central  $j = 0$  (voir Eq. 2.34). Nous les avons représentés Fig. 2.10(b) pour la même profondeur  $s = 26$ . En raison de la parité des ondes de Bloch, seules les coefficients associés aux bandes  $n = 0, 2, 4, \dots$  sont non nuls. Par conséquent, lorsque l'angle appliqué est petit (projection limitée aux bandes  $n \leq 3$ ), seules les bandes  $n = 0$  (bande fondamentale) et  $n = 2$  (deuxième bande excitée) participent de manière significative à la dynamique de l'ordre central de diffraction. Il en résulte une oscillation périodique de la population dans l'ordre 0, à la fréquence :

$$\nu_0 = \frac{E^{(n=2)}(k=0) - E^{(n=0)}(k=0)}{h}. \quad (2.36)$$

Les coefficients  $|c_{\pm 1}^{(n)}|^2$  associés à l'évolution des ordres  $\pm 1$  ne bénéficient pas de règles de parité aussi strictes. Par conséquent, comparé à l'ordre 0, les contributions des bandes supérieures seront plus rapidement visibles, notamment aux grandes profondeurs et grands déphasages. Néanmoins, dans le régime des petits angles, la contribution des bandes  $n \geq 2$  reste faible et un raisonnement similaire à celui fait pour l'ordre 0 conduit à



**FIGURE 2.10** | **Analyse détaillée d'une oscillation dans le réseau translaté pour deux déphasages différents.** (a) Contribution  $|\alpha_n|^2$  de la bande  $n$  à la fonction d'onde totale après déphasage, pour des angles  $\varphi_0 = 24^\circ$  (barres bleues, gauche) et  $\varphi_0 = 47^\circ$  (barres rouges, droite). (b) Coefficients de Fourier  $|c_0^{(n)}|^2$  associés à l'ordre central ( $j = 0$ ) pour les différentes bandes  $n$ . (c) et (d) Évolution des ordres  $-1$  (gauche),  $0$  (milieu) et  $+1$  (droite) après déphasage du réseau à l'instant  $t = 0$  d'un angle  $\varphi_0 = 24^\circ$  et  $\varphi_0 = 47^\circ$  pour (c) et (d) respectivement. Les points bleus sont les mesures expérimentales, tandis que les courbes oranges sont les résultats numériques calculés à partir de l'Eq. 2.34. Tous les résultats présentés dans cette figure sont obtenus pour une profondeur de  $s = 26$ .

une fréquence dominante pour l'oscillation des ordres  $\pm 1$  :

$$v_{\pm 1} = \frac{E^{(n=1)}(k=0) - E^{(n=0)}(k=0)}{h}. \quad (2.37)$$

Nous donnons Fig. 2.10(c) et (d) deux exemples d'oscillations des ordres 0 et  $\pm 1$  obtenus dans un réseau de grande profondeur  $s = 26$  pour deux déphasages différents :  $\varphi_0 = 24^\circ$  et  $\varphi_0 = 47^\circ$  respectivement. Pour l'angle le plus faible la population de l'ordre central évolue bien avec une fréquence dominante, même si l'effet de bandes supérieures commence à être visible à cette haute profondeur. L'évolution des ordres  $\pm 1$  fait quant à elle clairement intervenir plusieurs fréquences. Lorsque nous augmentons l'angle de déphasage, le poids des bandes supérieures est renforcé, ce qui est à l'origine des oscillations plus complexes que nous observons. Ces mesures sont une illustration des spectres de fréquence donnés Fig. 2.9. Nous constatons d'ailleurs sur les oscillations un accord remarquable entre les points expérimentaux et les résultats numériques, avec pour seul paramètre ajustable la profondeur du réseau optique.

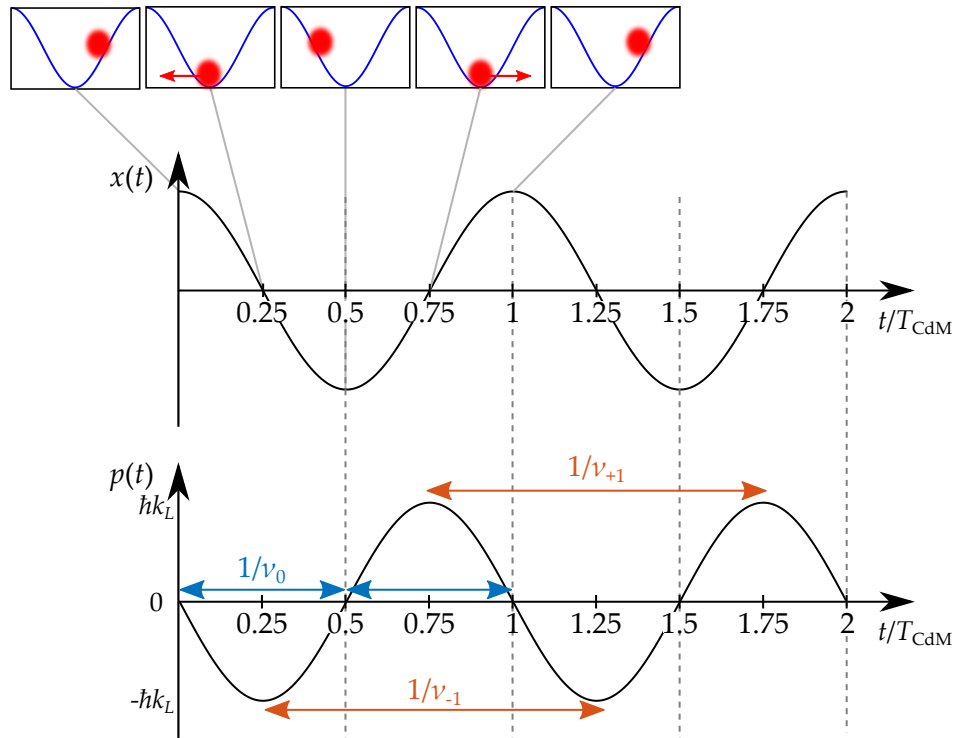
### Fréquence caractéristique du centre de masse

Pour terminer ce chapitre, revenons à une vision classique qualitative de l'oscillation et essayons de répondre à la question suivante : quel lien pouvons-nous faire entre les fréquences que nous venons de définir ( $\nu_0$  et  $\nu_{\pm 1}$ , fréquences associées à l'oscillation des états d'impulsion  $p_0 = 0$  et  $p_{\pm 1} = \pm \hbar k_L$  respectivement), définies par la structure de bandes, et la fréquence  $\nu_{\text{CdM}}$  d'oscillation du centre de masse des atomes au sein d'un puits ?

Soit  $T_{\text{CdM}} = 1/\nu_{\text{CdM}}$  la période d'oscillation du centre de masse du paquet d'atomes dans un puits du réseau. Définissons l'origine des temps telle que  $t = 0$  concorde avec le déphasage soudain du réseau optique. Nous pouvons suivre une seule oscillation du centre de masse en la découpant en cinq étapes, schématisées sur la Fig. 2.11 :

1. À  $t = 0$ , les atomes se trouvent sur un des bords du potentiel, à vitesse nulle ;
2. À  $t = T_{\text{CdM}}/4$ , les atomes ont accéléré jusqu'au fond du puits du réseau. Ce point correspond à un extremum de leur impulsion (que nous supposons, pour simplifier, égale à  $|\hbar k_L|$  en valeur absolue) ;
3. À  $t = T_{\text{CdM}}/2$ , les atomes atteignent à vitesse nulle la position symétrique de leur position initiale : il s'agit d'un point de rebroussement ;
4. À  $t = 3T_{\text{CdM}}/4$ , les atomes ont à nouveau accéléré jusqu'au fond du puits du réseau. Leur vitesse est une fois de plus extrême, mais de signe opposé à l'étape 2 ;
5. À  $t = T_{\text{CdM}}$  les atomes sont revenus à leur point de départ avec une vitesse nulle : c'est un point de rebroussement.

Nous avons représenté sur la Fig. 2.11 la position  $x(t)$  et l'impulsion  $p(t)$  d'une particule classique au cours de deux périodes d'oscillation. Intéressons-nous en particulier à l'impulsion : on constate qu'après une seule oscillation, l'impulsion de la particule s'est annulée deux fois. En revanche, les valeurs extrêmes de l'impulsion sont périodiquement



**FIGURE 2.11** | **Description classique de l'oscillation du centre de masse dans un puits du réseau.** Nous avons représenté l'évolution de  $x(t)$  et  $p(t)$  d'une particule classique dans un puits du réseau au cours de deux oscillations du centre de masse. Sur la première oscillation, nous montrons schématiquement les cinq étapes décrites dans le texte. Sur la courbe  $p(t)$  nous indiquons la périodicité de la composante nulle de l'impulsion (flèches bleues, période  $1/\nu_0$ ) et des composantes extrémales (flèches oranges, période  $1/\nu_{\pm 1}$ ).

atteintes, avec la même période que le centre de masse. De ce simple raisonnement classique, on aboutirait donc naturellement aux relations :

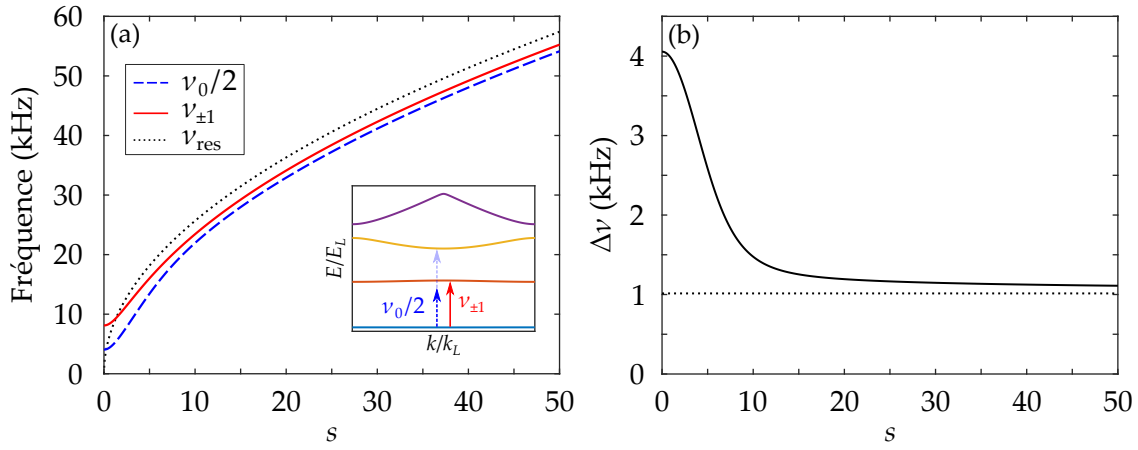
$$\nu_{\text{CdM}} \approx \nu_0/2 \quad \text{et} \quad \nu_{\text{CdM}} \approx \nu_{\pm 1}. \quad (2.38)$$

Toutefois, ce résultat étant le fruit d'une représentation classique de l'oscillation du centre de masse, il nous faut nuancer ces propos. Soulignons d'abord que cette vision n'est valable que dans le régime des petits angles de déphasage, lorsqu'il n'y a qu'une seule fréquence dominante dans l'évolution des populations. Notons également que les fréquences  $\nu_0/2$  et  $\nu_{\pm 1}$  ne sont pas égales : nous traçons sur la Fig. 2.12(a) ces fréquences, directement calculées à partir de la structure de bandes, en fonction de la profondeur  $s$  du réseau optique. Pour comparaison, nous indiquons sur le même graphique le résultat classique  $\nu_{\text{res}}$  obtenu Eq. 2.25 en approximant le puits du réseau par un potentiel harmonique. Sur la Fig. 2.12(b), nous montrons l'évolution de la différence  $\Delta\nu = \nu_{\pm 1} - \nu_0/2$  avec la profondeur.

Nous pouvons distinguer deux régimes, à faible et à grande profondeur :

- À mesure que la profondeur  $s$  augmente, l'écart entre  $\nu_0/2$  et  $\nu_{\pm 1}$  diminue. Chaque puits du réseau est de mieux en mieux décrit par un piège harmonique découplé





**FIGURE 2.12** | **Comparaison des deux fréquences caractéristiques  $\nu_0/2$  et  $\nu_{\pm 1}$ .** (a) Évolution des fréquences  $\nu_0/2$  (tirés bleus) et  $\nu_{\pm 1}$  (trait rouge), calculées selon les Eq. 2.36 et 2.37, en fonction de la profondeur  $s$  du réseau optique. Une structure de bandes en insert rappelle la définition de ces fréquences. Nous indiquons également en pointillés noirs le résultat classique  $\nu_{\text{res}}$  obtenue dans l’approximation harmonique (Eq. 2.25). (b) Différence  $\Delta\nu = \nu_{\pm 1} - \nu_0/2$  entre ces deux fréquences en fonction de la profondeur  $s$  du réseau. Le trait pointillé horizontal indique la valeur limite  $\nu_L/8$  (où  $\nu_L$  est définie section 2.1.1).

des autres puits et on tend alors vers le résultat de l’intuition classique  $\nu_0/2 \approx \nu_{\pm 1}$  pour  $s \rightarrow +\infty$ . Remarquons quand même que cette différence ne tend pas vers 0, mais vers  $\nu_L/8$ , avec  $\nu_L = E_L/h$  (voir section 2.1.1) : comme démontré en annexe B, il s’agit là d’un effet des non-linéarités du potentiel sinusoïdal.

- Pour les faibles profondeurs ( $s \lesssim 5$ ) ces deux fréquences sont notablement différentes, la plus grande différence étant obtenue pour  $s = 0$ . Dans une telle gamme de profondeur, l’effet tunnel n’est pas négligeable et il existe un couplage entre les différents sites du réseau : on ne peut plus considérer un puits du réseau comme un piège harmonique isolé et le raisonnement classique n’est plus valable.

Finalement, nous choisissons de définir la fréquence de l’oscillation du centre de masse (appelé mode dipolaire) par la plus petite fréquence parmi ces deux, soit :

$$\nu_{\text{CdM}} = \frac{\nu_0}{2} = \frac{E^{(n=2)}(k=0) - E^{(n=0)}(k=0)}{2h}. \quad (2.39)$$

Dans le régime des grandes profondeurs, cette valeur est presque confondue avec  $\nu_{\pm 1}$ , cette dernière correspondant à la fréquence de la première transition interbande (entre la bande fondamentale  $n = 0$  et la première bande excitée  $n = 1$ ) à quasi-moment nul. Il s’agit donc en quelque sorte de la plus petite fréquence naturelle du système.

**i**

Dans le régime des petits angles, le déplacement du réseau peut s’exprimer comme une perturbation impaire<sup>a</sup> et peut donc, d’après les règles de sélection que nous établirons au chapitre 3, coupler la bande fondamentale  $n = 0$  et la première bande excitée  $n = 1$ . Si nous mesurons dans ce régime l’évolution de l’impulsion moyenne



$\bar{p}(t) = \sum_j \mathcal{P}_j(t) p_j$ , nous obtenons effectivement une oscillation à la fréquence  $\nu_{\pm 1}$  : nous aurions ainsi pu légitimement choisir cette fréquence pour caractériser le centre de masse. Nous avons fait le choix de considérer  $\nu_0/2$  car il s'agit de la plus petite fréquence naturelle du système. En particulier et comme nous le verrons dans le chapitre suivant, il s'agit de la plus petite transition interbande que nous arrivons à exciter. Cette fréquence caractérise donc à la fois l'évolution du centre de masse selon le raisonnement fait Fig. 2.11 et le passage vers le régime de transitions interbandes.

*a.* Le potentiel du réseau non perturbé étant de la forme  $V(x) = V_0 \cos(x)$ , après déphasage ce potentiel peut s'approximer par  $V(x + \varepsilon) \approx V_0 \cos(x) - \varepsilon V_0 \sin(x) \equiv V(x) + \delta V(x)$ .

## 2.4 Conclusion

Nous avons consacré ce chapitre au réseau optique, outil incontournable dans le domaine des gaz ultrafroids et dont je me suis servi pour mes travaux de thèse. La première section a eu deux objectifs : d'abord définir les grandeurs caractéristiques associées au réseau, puis rappeler les points importants du formalisme des ondes de Bloch, avec un accent mis sur l'équation centrale dont nous nous sommes beaucoup servi pour la calibration de la profondeur du réseau. Nous avons ensuite rappelé le montage expérimental utilisé pour former le réseau. Le dispositif de contrôle de la profondeur du réseau a tout particulièrement été détaillé puisqu'il a été repensé pendant ma thèse, l'ancien dispositif n'étant pas assez précis pour l'observation de l'effet tunnel assisté par le chaos dont je parlerai par la suite. Nous avons terminé ce chapitre par des méthodes permettant de mesurer la profondeur du réseau optique. La dernière méthode exposée, qui repose sur un déplacement soudain du réseau, a été développée par l'équipe et est robuste vis-à-vis des interactions interatomiques et du confinement extérieur. Les évolutions des ordres de diffraction sont en effet uniquement dictées par la structure de bandes, qui dépend elle-même de la profondeur. Nous avons vu le formalisme permettant d'expliquer ces évolutions, même dans le cas où le réseau est fortement translaté.

Je conclus ainsi la première partie du manuscrit dédiée au dispositif expérimental. Je consacre les chapitres suivants aux résultats expérimentaux que j'ai obtenus pendant ma thèse et qui traitent de la dynamique d'un condensat de Bose-Einstein dans un réseau optique dont les paramètres (position et profondeur) sont modulés périodiquement. Dans ce chapitre dédié au réseau, nous avons fait apparaître Eq. 2.39 une fréquence naturelle  $\nu_{\text{CdM}}$  du système qui caractérise l'évolution du centre de masse des atomes après translation du réseau, et qui correspond également à l'entrée dans le régime résonant avec la structure de bandes. Je distinguerai donc les différents travaux réalisés en fonction de la fréquence de modulation  $\nu$  appliquée au réseau vis-à-vis de cette fréquence naturelle  $\nu_{\text{CdM}}$ . Je diviserai également les études en deux familles : la partie II est dédiée aux modulations perturbatives, en ce sens qu'elles n'induisent pas de dynamique chaotique ; la partie III sera consacrée aux modulations générant du chaos, au moins partiellement, dans le système, soit le régime d'une dynamique mixte.

# III

## Réseau optique modulé : dynamique non chaotique

### **3 Modulation résonante : excitations interbandes et refroidissement dans l'espace réciproque 79**

- 3.1 Règles de sélection 82
- 3.2 Spectroscopie de bandes 87
- 3.3 Évaporation dans l'espace réciproque 96
- 3.4 Conclusion 107

### **4 Modulation de phase hors résonance : d'une nouvelle phase quantique à la signature du micro-mouvement 109**

- 4.1 Modulation basse fréquence : nucléation d'états alternés 112
- 4.2 Modulation haute fréquence : étude statistique d'un Hamiltonien effectif 127
- 4.3 Conclusion 144



# Modulation résonante : excitations interbandes et refroidissement dans l'espace réciproque

– *This is indeed a mystery. What do you imagine that it means?*  
– *I have no data yet. It is a capital mistake to theorize before one has data. Insensibly one begins to twist facts to suit theories, instead of theories to suit facts.*

*The Adventures of Sherlock Holmes – A Scandal in Bohemia (1891)*  
Arthur I. C. Doyle

---

## Sommaire

---

- 3.1 Règles de sélection** 82
    - 3.1.1 Conservation du quasi-moment 83
    - 3.1.2 Modulation de phase 83
    - 3.1.3 Modulation d'amplitude 86
    - 3.1.4 Bilan des règles de sélection 86
  - 3.2 Spectroscopie de bandes** 87
    - 3.2.1 Transitions interbandes à quasi-moment nul 88
      - Protocole expérimental* 88
      - Vérification expérimentale des règles de sélection* 88
    - 3.2.2 Au-delà du système idéal 91
      - Simulations numériques en champ moyen* 91
      - Effet du confinement extérieur* 93
  - 3.3 Évaporation dans l'espace réciproque** 96
    - 3.3.1 Protocole expérimental 97
    - 3.3.2 Protection du condensat vis-à-vis de la modulation 99
    - 3.3.3 Refroidissement dans le réseau 101
    - 3.3.4 Vers la condensation de Bose-Einstein 105
  - 3.4 Conclusion** 107
-



APRÈS avoir dédié la première partie du manuscrit au dispositif expérimental, je débute avec ce chapitre la présentation des résultats concernant la dynamique d'un condensat de Bose-Einstein placé dans un réseau optique unidimensionnel dépendant du temps. L'expression générale du potentiel du réseau, qui nous suivra tout au long de ce manuscrit, est :

$$V(x, t) = -sE_L [1 + \varepsilon(t)] \cos^2 \left( \frac{\pi x}{d} + \varphi(t) \right),$$

où  $\varepsilon$  et  $\varphi$  désignent respectivement le contrôle de l'amplitude et de la phase du réseau. Dans ce chapitre, je présente un premier ensemble de résultats expérimentaux obtenus par modulation périodique de ces paramètres. Nous nous plaçons spécifiquement dans le régime où la fréquence de modulation  $\nu \sim \nu_{\text{CdM}}$ , c'est-à-dire dans le cas où la modulation est résonante avec les fréquences caractéristiques de la structure de bandes, élément central de ce chapitre.

Grâce à leur grande flexibilité, les réseaux optiques sont des systèmes idéaux pour sonder et manipuler la structure de bandes qui les caractérisent. Éventuellement couplés à des faisceaux de Bragg, ils permettent par exemple de mesurer les spectres d'excitation des gaz quantiques dans les phases superfluide ou isolant de Mott [SCHORI *et al.* (2004), STÖFERLE *et al.* (2004) et KOLLATH *et al.* (2006)], et d'étudier des processus d'excitations multibandes [CLÉMENT *et al.* (2009), HEINZE *et al.* (2011) et FABBRI (2012)] ou à plusieurs phonons [WEINBERG *et al.* (2015)]. L'utilisation de modulations résonantes avec les transitions interbandes favorise également l'hybridation de bandes, utilisée pour créer du magnétisme artificiel [PARKER *et al.* (2013) et CLARK *et al.* (2016)] ou pour générer des structures de bandes complexes avec de nouvelles propriétés topologiques [ZHANG et ZHOU (2014), ZHENG et ZHAI (2014) et KANG *et al.* (2020)].

Pour les profondeurs de réseau que nous considérons, la modulation résonante correspond à des fréquences de l'ordre de la dizaine de kilohertz. Dans ce régime de fréquence, et compte tenu des protocoles expérimentaux et des amplitudes de modulation utilisés, nous nous trouvons dans un régime où la modulation, traitée comme une perturbation, peut fournir efficacement de l'énergie aux atomes lorsque des conditions de résonance sont remplies : nous excitons alors des transitions interbandes. Nous verrons que ces transitions, pour un quasi-moment nul, sont soumises à des règles de sélection dues à la parité des modulations employées. La première section de ce chapitre est consacrée à l'établissement de ces règles de sélection.

Dans la deuxième section, nous étudions expérimentalement les transitions interbandes. Nous soumettons les atomes aux deux types de modulation du réseau, de phase et d'amplitude, qui sont complémentaires. Nous réalisons ainsi la spectroscopie de bandes du réseau, sur une grande gamme de profondeur, et nous comparons nos résultats à la structure de bandes calculée pour un système idéal (extension infinie et sans interaction). Nous approfondissons ensuite notre étude en considérant les interactions interatomiques ainsi que le confinement extérieur. Nous trouvons, par des simulations numériques et par des résultats expérimentaux, que certaines transitions interbandes semblent immunes à ces éléments, tandis que d'autres y sont sensibles. Nous interprétons ces comportements en reliant les transitions considérées à des modes d'excitation du condensat.

Dans la dernière section du chapitre, nous nous écartons du régime perturbatif car nous augmentons l'amplitude de modulation. Pour les expériences présentées dans cette section, nous ne travaillons plus avec des condensats purs mais avec des nuages atomiques présentant une fraction thermique. En effet, nous avons testé une nouvelle méthode de refroidissement par évaporation dans l'espace réciproque, imaginée par l'équipe et qui exploite les transitions interbandes et leurs règles de sélection. Cette technique consiste à promouvoir sur des bandes d'énergie supérieures les atomes ayant la plus grande énergie. Après filtrage des atomes excités, le nuage restant possède une énergie totale plus faible. Je donnerai les résultats expérimentaux indiquant qu'il y a alors effectivement une diminution de la température.

### 3.1 Règles de sélection

Le potentiel associé au réseau optique modulé, que nous avons rappelé en introduction de ce chapitre, s'écrit :

$$V_{\varepsilon,\varphi}(x, t) = -sE_L [1 + \varepsilon(t)] \cos^2 \left( \frac{\pi x}{d} + \varphi(t) \right) \quad (3.1)$$

avec  $\varepsilon(t)$  la modulation en amplitude et  $\varphi(t)$  la modulation en phase. Nous nous intéressons à des modulations sinusoïdales de fréquence  $\nu = \omega/(2\pi)$  :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t) \quad \text{ou} \quad \varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t), \quad (3.2)$$

où les amplitudes de modulation  $\varepsilon_0$  et  $\varphi_0$  (définies section 2.2.3 du chapitre 2) sont suffisamment faibles pour traiter la modulation de manière perturbative. Ces modulations peuvent coupler différentes bandes d'énergie du réseau optique *via* des phonons, ce qui conduit les atomes à effectuer des transitions interbandes assistées par phonons. Le terme de couplage associé à la transition entre deux bandes  $n$  et  $n'$  et pour deux quasi-moments  $k$  et  $k'$  est :

$$\delta V_{n,n',k,k'} = \langle \psi_{k'}^{(n')} | (V_{\varepsilon,\varphi}(x, t) - V_{0,0}(x)) | \psi_k^{(n)} \rangle, \quad (3.3)$$

où  $\{|\psi_k^{(n)}\rangle\}$  sont les ondes de Bloch, déjà rappelées au chapitre 2 et que nous pouvons décomposer grâce au théorème de Bloch sous la forme  $\psi_k^{(n)}(x) = u_k^{(n)}(x)e^{ikx}$ , avec  $u_k^{(n)}$  une fonction ayant la même périodicité que le réseau :  $u_k^{(n)}(x + d) = u_k^{(n)}(x)$ . La probabilité de transition entre les états  $|\psi_k^{(n)}\rangle$  et  $|\psi_{k'}^{(n')}\rangle$  est alors directement donnée par :

$$\mathcal{P}_{n,n',k,k'} = |\delta V_{n,n',k,k'}|^2. \quad (3.4)$$

Rappelons également que pour  $k = 0$ , les états de Bloch possèdent la même parité que leur indice de bande. Par conséquent, certains couplages ne sont pas autorisés pour des raisons de symétrie. Nous en déduisons des règles de sélection propres aux deux types de modulation, que nous établissons dans la suite de cette section.

### 3.1.1 Conservation du quasi-moment

Dans le cas du réseau statique, le théorème de Bloch est une conséquence de l'invariance par translation discrète du système. Cette propriété permet en particulier d'affirmer que l'Hamiltonien  $\hat{H}$  et l'opérateur de translation discrète  $\hat{T}_d$  commutent :  $[\hat{H}, \hat{T}_d] = 0$ . L'ensemble des états propres commun à ces deux opérateurs constitue les ondes de Bloch.

Considérons comme état initial à  $t = 0$  une onde de Bloch de quasi-moment  $k$  :  $\psi_k^{(n)}(x, t = 0) = u_k^{(n)}(x, t = 0)e^{ikx}$  et rappelons l'équation aux valeurs propres associée à l'opérateur translation :

$$\hat{T}_d \psi_k^{(n)}(x, t = 0) = e^{-ikd} \psi_k^{(n)}(x, t = 0), \quad (3.5)$$

la valeur propre  $e^{-ikd}$  étant associée au quasi-moment  $k$ . Pour connaître l'état du système après évolution dans le réseau modulé, il faut appliquer l'opérateur d'évolution  $\hat{U}(t)$  :

$$\psi_k^{(n)}(x, t) = \hat{U}(t) \psi_k^{(n)}(x, t = 0). \quad (3.6)$$

Or, pour tout temps  $t$ , la relation de commutation  $[\hat{H}(t), \hat{T}_d] = 0$  est vérifiée puisque l'invariance par translation discrète est conservée, entraînant également la relation  $[\hat{U}(t), \hat{T}_d] = 0 \forall t$ . Nous pouvons alors calculer :

$$\hat{T}_d \psi_k^{(n)}(x, t) = \hat{T}_d \hat{U}(t) \psi_k^{(n)}(x, t = 0) = \hat{U}(t) [\hat{T}_d \psi_k^{(n)}(x, t = 0)] = e^{-ikd} \psi_k^{(n)}(x, t). \quad (3.7)$$

La fonction d'onde après évolution dans le réseau modulé est toujours état propre de l'opérateur translation, de quasi-moment  $k$  inchangé. Il y a donc conservation du quasi-moment  $k' = k$  : seules des transitions "verticales" sur la structure de bandes sont possibles. Nous avons vu au chapitre 2 que le chargement adiabatique du condensat dans le réseau peuplait l'état de Bloch  $\{n = 0, k = 0\}$ . Nous établirons donc les règles de sélection pour un quasi-moment constant  $k = 0$ .

### 3.1.2 Modulation de phase

Considérons le cas particulier d'une modulation sinusoïdale de la phase seulement. Le potentiel du réseau s'écrit alors :

$$\begin{aligned} V_{0,\varphi}(x, t) &= -sE_L \cos^2 \left( \frac{\pi x}{d} + \varphi_0 \sin(\omega t) \right) \\ &= -\frac{sE_L}{2} - \frac{sE_L}{2} \cos(k_L x + 2\varphi_0 \sin(\omega t)) \\ &= -\frac{sE_L}{2} - \frac{sE_L}{2} [\cos(k_L x) \cos(2\varphi_0 \sin(\omega t)) - \sin(k_L x) \sin(2\varphi_0 \sin(\omega t))]. \end{aligned} \quad (3.8)$$



Rappelons à nouveau la relation de Jacobi-Anger, vue au chapitre 2 :

$$e^{iz \cos(\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n \mathcal{J}_n(z) e^{in\theta} \quad (3.9)$$

i

où  $\mathcal{J}_n(z)$  est la  $n$ -ième fonction de Bessel de première espèce. Ces fonctions ont entre autres propriétés :

- $\mathcal{J}_n(-x) = (-1)^n \mathcal{J}_n(x)$
- $\mathcal{J}_{-n}(x) = (-1)^n \mathcal{J}_n(x)$

En utilisant les propriétés ci-dessus, on peut montrer que l'on a les relations suivantes :

$$\begin{cases} \cos(z \sin(\omega t)) = \mathcal{J}_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{J}_{2n}(z) \cos(2n\omega t); \\ \sin(z \sin(\omega t)) = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \mathcal{J}_{2p+1}(z) \cos((2p+1)\omega t). \end{cases} \quad (3.10)$$

En remplaçant  $z = 2\varphi_0$  on retrouve les deux termes de l'équation 3.8, que nous pouvons remplacer par les expressions 3.10. Nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} V_{0,\varphi}(x, t) = -\frac{sE_L}{2} - \frac{sE_L}{2} \left\{ \cos(k_L x) \mathcal{J}_0(2\varphi_0) \right. \\ \left. + 2 \cos(k_L x) \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{J}_{2n}(2\varphi_0) \cos(2n\omega t) \right. \\ \left. - 2 \sin(k_L x) \sum_{p=0}^{+\infty} \mathcal{J}_{2p+1}(2\varphi_0) \cos((2p+1)\omega t) \right\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

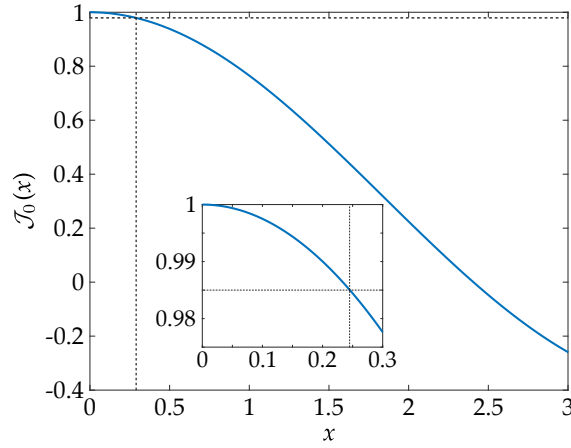
Seuls les premiers termes de chaque développement contribuent de manière significative puisque  $\mathcal{J}_p(x) \sim x^p$  pour  $x$  proche de zéro et que nous nous plaçons ici dans un régime perturbatif. Nous distinguons trois types de contribution, en fonction de l'ordre de la fonction de Bessel :

1. La première ligne de l'Eq. 3.11 correspond au terme d'ordre zéro, dont l'effet est la renormalisation de la profondeur du réseau optique. La profondeur effective s'exprime comme  $s_{\text{eff}} = s \mathcal{J}_0(2\varphi_0)$ .

La plus grande modulation de phase utilisée dans les expériences présentées dans cette partie a une amplitude de  $\varphi_0 = 7^\circ \approx 0.039\pi$ . Cela correspond à :

$$\mathcal{J}_0(2\varphi_0) \approx 0.985.$$

Le processus de renormalisation est donc ici négligeable (voir Fig. 3.1). Il sera traité plus en détails dans le chapitre 4.



**FIGURE 3.1** | **Fonction de Bessel d'ordre zéro de première espèce  $\mathcal{J}_0$ .** Les pointillés noirs indiquent la valeur correspondant à la plus grande amplitude de modulation utilisée. L'encart représente un zoom sur  $0 \leq x \leq 0.3$ .

- Les termes d'ordre pair (deuxième ligne de l'Eq. 3.11) sont associés à des excitations avec un nombre pair de phonons. Parmi tous les éléments du développement, le premier terme ( $n = 1$ ) est celui qui contribue le plus. L'excitation associée est à la fréquence  $2\omega$ , révélant un processus à deux phonons. Les fonctions de Bloch  $u_{k=0}^{(n)}$  ayant les parités de leur indice de bande, les termes de couplage à deux phonons entre bandes successives et à  $k = k' = 0$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \langle u_{k=0}^{(n+1)} | \left( V_{0,\varphi}(x, t) \right)_{2 \text{ ph.}} | u_{k=0}^{(n)} \rangle \propto \langle u_{k=0}^{(n+1)} | \cos(k_L x) | u_{k=0}^{(n)} \rangle = 0; \\ \langle u_{k=0}^{(n+2)} | \left( V_{0,\varphi}(x, t) \right)_{2 \text{ ph.}} | u_{k=0}^{(n)} \rangle \propto \langle u_{k=0}^{(n+2)} | \cos(k_L x) | u_{k=0}^{(n)} \rangle \neq 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Ainsi, en modulation de phase, des transitions à deux phonons sont attendues entre les bandes vérifiant  $\Delta n = n' - n = 2p \forall p \in \mathbb{N}^*$ .

- Les termes d'ordre impair (dernière ligne de l'Eq. 3.11) sont associés à des excitations à un nombre impair de phonons. À nouveau, le premier terme ( $p = 0$ ), associé à la fréquence  $\omega$ , contribuant de manière majoritaire, nous ne considérerons que des transitions à un phonon. Un calcul similaire au cas à deux phonons donne :

$$\begin{cases} \langle u_{k=0}^{(n+1)} | \left( V_{0,\varphi}(x, t) \right)_{1 \text{ ph.}} | u_{k=0}^{(n)} \rangle \propto \langle u_{k=0}^{(n+1)} | \sin(k_L x) | u_{k=0}^{(n)} \rangle \neq 0; \\ \langle u_{k=0}^{(n+2)} | \left( V_{0,\varphi}(x, t) \right)_{1 \text{ ph.}} | u_{k=0}^{(n)} \rangle \propto \langle u_{k=0}^{(n+2)} | \sin(k_L x) | u_{k=0}^{(n)} \rangle = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Dans ce cas, des transitions à un phonon sont attendues entre les bandes vérifiant  $\Delta n = n' - n = (2p + 1) \forall p \in \mathbb{N}$ .

## 3.1.3 Modulation d'amplitude

Plaçons-nous à présent dans le cas d'une modulation périodique de la profondeur du réseau optique. Le potentiel vu par les atomes s'exprime comme :

$$\begin{aligned} V_{\varepsilon,0}(x, t) &= -sE_L [1 + \varepsilon_0 \cos(\omega t)] \cos^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) \\ &= -\frac{sE_L}{2} [1 + \varepsilon_0 \cos(\omega t)] (1 + \cos(k_L x)). \end{aligned} \quad (3.14)$$

En exploitant la parité des états de Bloch, les probabilités de transitions s'écrivent :

$$\begin{cases} \langle u_{k=0}^{(n+1)} | V_{\varepsilon,0}(x, t) | u_{k=0}^{(n)} \rangle \propto \langle u_{k=0}^{(n+1)} | \cos(k_L x) | u_{k=0}^{(n)} \rangle = 0; \\ \langle u_{k=0}^{(n+2)} | V_{\varepsilon,0}(x, t) | u_{k=0}^{(n)} \rangle \propto \langle u_{k=0}^{(n+2)} | \cos(k_L x) | u_{k=0}^{(n)} \rangle \neq 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Par conséquent, les règles de sélection en modulation d'amplitude pour  $k = k' = 0$  sont simples : seules des transitions à un phonon pour des bandes vérifiant  $\Delta n = 2p \forall p \in \mathbb{N}^*$  sont autorisées.

## 3.1.4 Bilan des règles de sélection

Résumons les règles de sélection que nous avons obtenues :

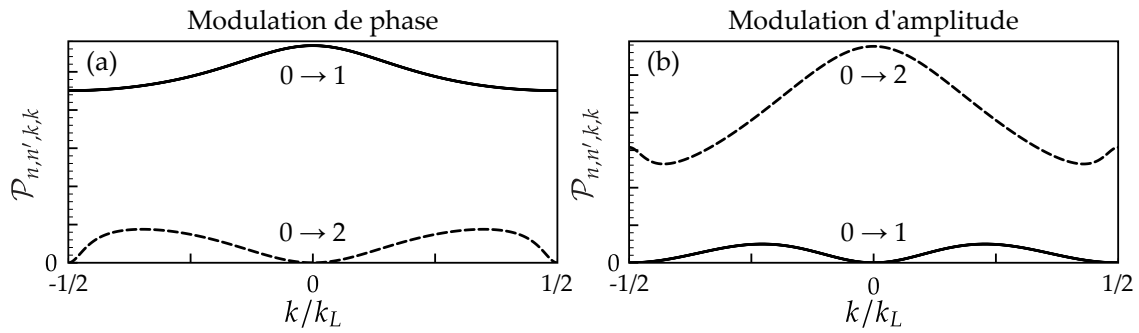
	Modulation de phase		Modulation d'amplitude		
	$\Delta n = 2p$	$\Delta n = 2p + 1$	$\Delta n = 2p$	$\Delta n = 2p + 1$	
1 phonon	Interdites	Autorisées	1 phonon	Autorisées	Interdites
2 phonons	Autorisées	Interdites	2 phonons	Interdites	Interdites

Nous n'avons considéré pour l'instant que le cas d'un système idéal :

- nous supposons un réseau infini et sans confinement harmonique supplémentaire, autrement dit la symétrie de translation discrète est bien vérifiée ;
- il n'y a pas d'interactions entre atomes.

Nous avons effectué un travail de spectroscopie de bandes, au cours duquel nous avons effectivement retrouvé les règles de sélection tout en montrant la nécessité d'aller au-delà des approximations mentionnées ci-dessus pour décrire complètement nos résultats expérimentaux. La section 3.2 de ce chapitre est dédiée à cette étude.

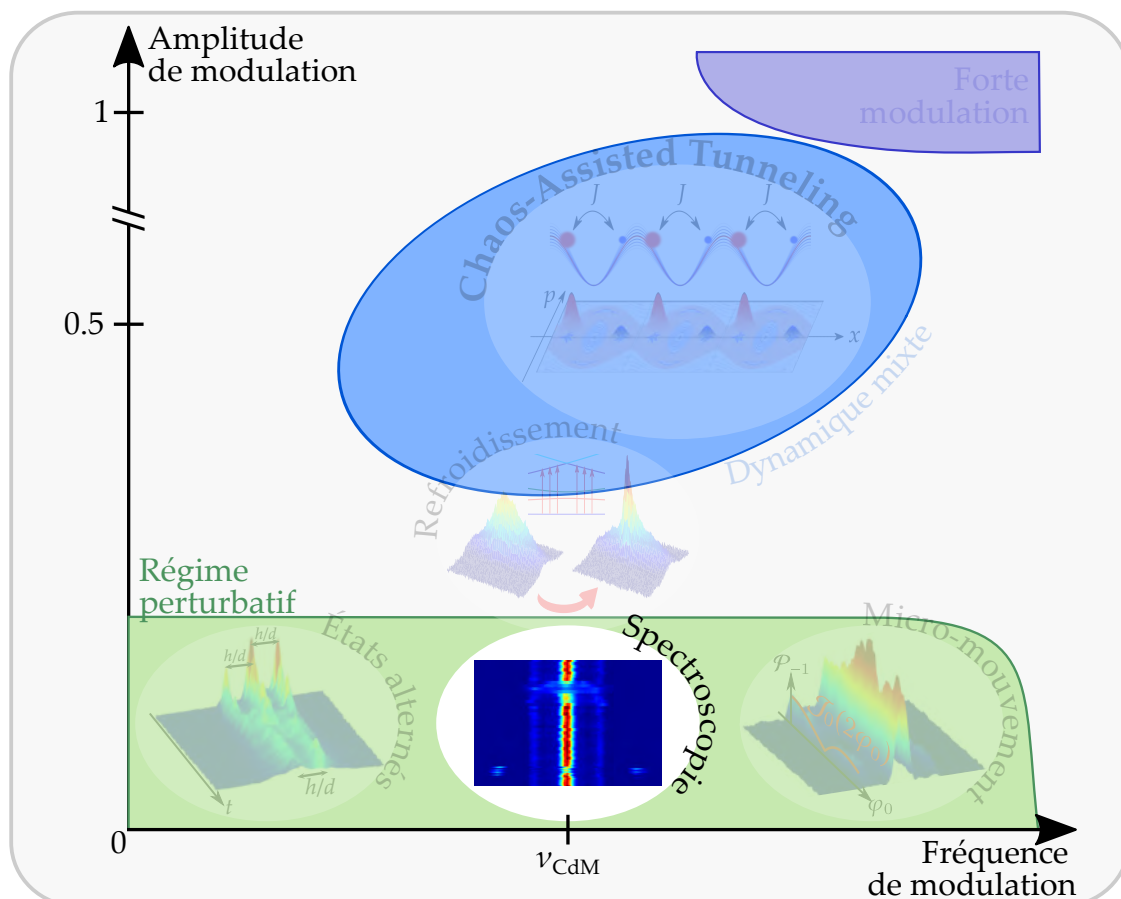
Insistons également sur le fait que *les règles ne sont valables qu'à quasi-moment nul*. Nous constatons sur la Fig. 3.2 que les probabilités de transitions entre la bande fondamentale et les deux premières bandes excitées, calculées numériquement sur toute la 1<sup>ère</sup> zone de Brillouin, ne se comportent strictement selon les règles de sélection précédemment établies que pour  $k = 0$ . Cet effet a d'ailleurs été exploité pour un nouveau protocole de refroidissement que je décrirai à la section 3.3.



**FIGURE 3.2** | Probabilités de transition interbande à un phonon entre la bande fondamentale et les deux première bandes excitées sur l'intégralité de la 1<sup>ère</sup> zone de Brillouin. Le trait plein (resp. tirets) est associé à la transition entre la bande fondamentale et la première bande excitée  $0 \rightarrow 1$  (resp. bande fondamentale et deuxième bande excitée  $0 \rightarrow 2$ ). Les résultats sont obtenus pour une modulation de phase en (a) et une modulation d'amplitude en (b).

### 3.2 Spectroscopie de bandes

Nous avons établi, au cours de la section précédente, que des couplages peuvent exister entre les différentes bandes lorsqu'on module le réseau optique, soit en phase, soit en amplitude. Dans cette deuxième section, nous mettons en œuvre sur le dispositif expérimental ces deux types de modulations dans le régime de transitions interbandes, c'est-à-dire pour des fréquences de modulation  $\nu \sim \nu_{\text{CdM}}$ . Nous pouvons ainsi directement tester expérimentalement la validité des règles de sélection, obtenues dans le contexte d'un système idéal.



Dans un premier temps, nous observons des résonances, marquées par la déplétion de l'ordre de diffraction central, dues aux transitions interbandes à  $k = 0$ . Nous faisons alors la spectroscopie de bandes de notre système, en mesurant les fréquences des transitions interbandes tout en variant la profondeur du réseau optique. En comparant ces résultats avec la structure de bandes du système idéal, nous constatons que, si les règles de sélection sont majoritairement bien respectées, certaines transitions normalement interdites à  $k = 0$  sont néanmoins excitées. Ces observations sont une motivation pour aller au-delà du cadre du système idéal. En prenant en compte les interactions interatomiques et le confinement extérieur dans des simulations numériques en champ moyen, nous approfondissons l'étude des transitions à quasi-moment nul. Nous étudions tout particulièrement l'effet du confinement extérieur, dont les fréquences de piégeage sont pourtant un ordre de grandeur plus faibles que celles du réseau optique, sur la largeur des transitions. Nous ferons alors le lien entre ces observations et les modes d'excitation collective du condensat.

### 3.2.1 Transitions interbandes à quasi-moment nul

#### *Protocole expérimental*

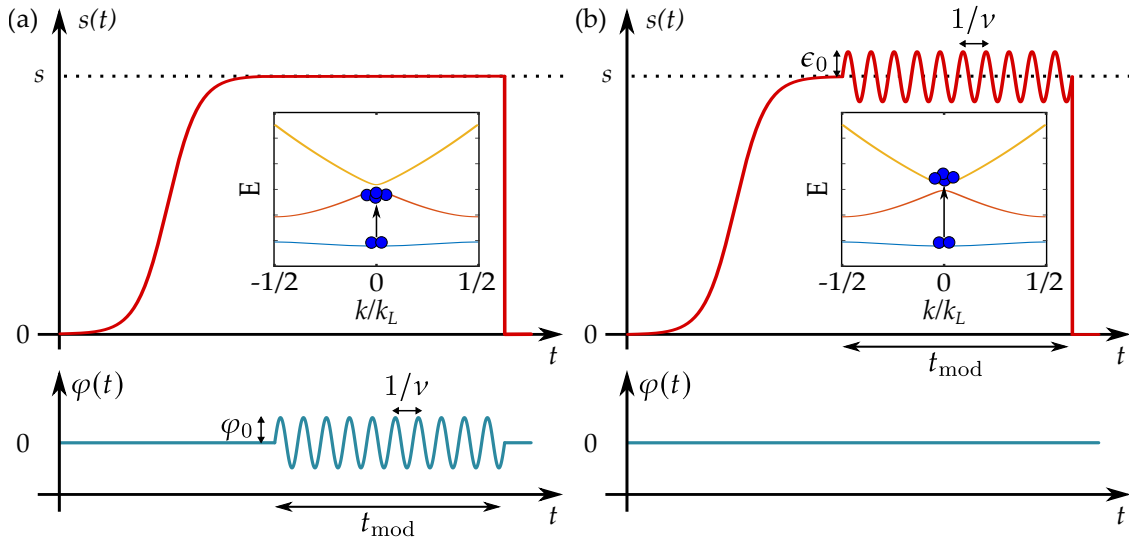
Après les différentes étapes d'évaporation, nous obtenons un condensat de Bose-Einstein pur d'environ  $10^5$  atomes dans le piège hybride (piège magnétique et piège dipolaire croisé). Nous ajoutons ensuite le réseau optique, selon une des deux séquences représentées Fig. 3.3 : après chargement adiabatique du condensat dans le potentiel du réseau optique à une profondeur  $s$ , nous modulons le réseau soit en phase soit en amplitude. Nous modulons à une fréquence  $\nu$ , avec une amplitude  $\varphi_0$  (phase) ou  $\varepsilon_0$  (amplitude), pendant une durée  $t_{\text{mod}}$ , puis nous coupons abruptement tous les pièges pour effectuer un ToF. Nous prenons finalement une image d'absorption de la figure de diffraction résultante.

Pour une profondeur fixée nous répétons le protocole en variant la fréquence de modulation sur la gamme typique  $0 < \nu < 50$  kHz. Nous effectuons ce travail pour plusieurs profondeurs.

#### *Vérification expérimentale des règles de sélection*

La modulation du réseau optique à différentes fréquences induit des transitions interbandes assistées par phonons entre l'état de la bande fondamentale  $\{n = 0, k = 0\}$  (peuplé par le chargement adiabatique) et des états excités  $\{n' > n, k' = k = 0\}$ . Les paramètres expérimentaux utilisés pour le réseau optique sont les suivants :

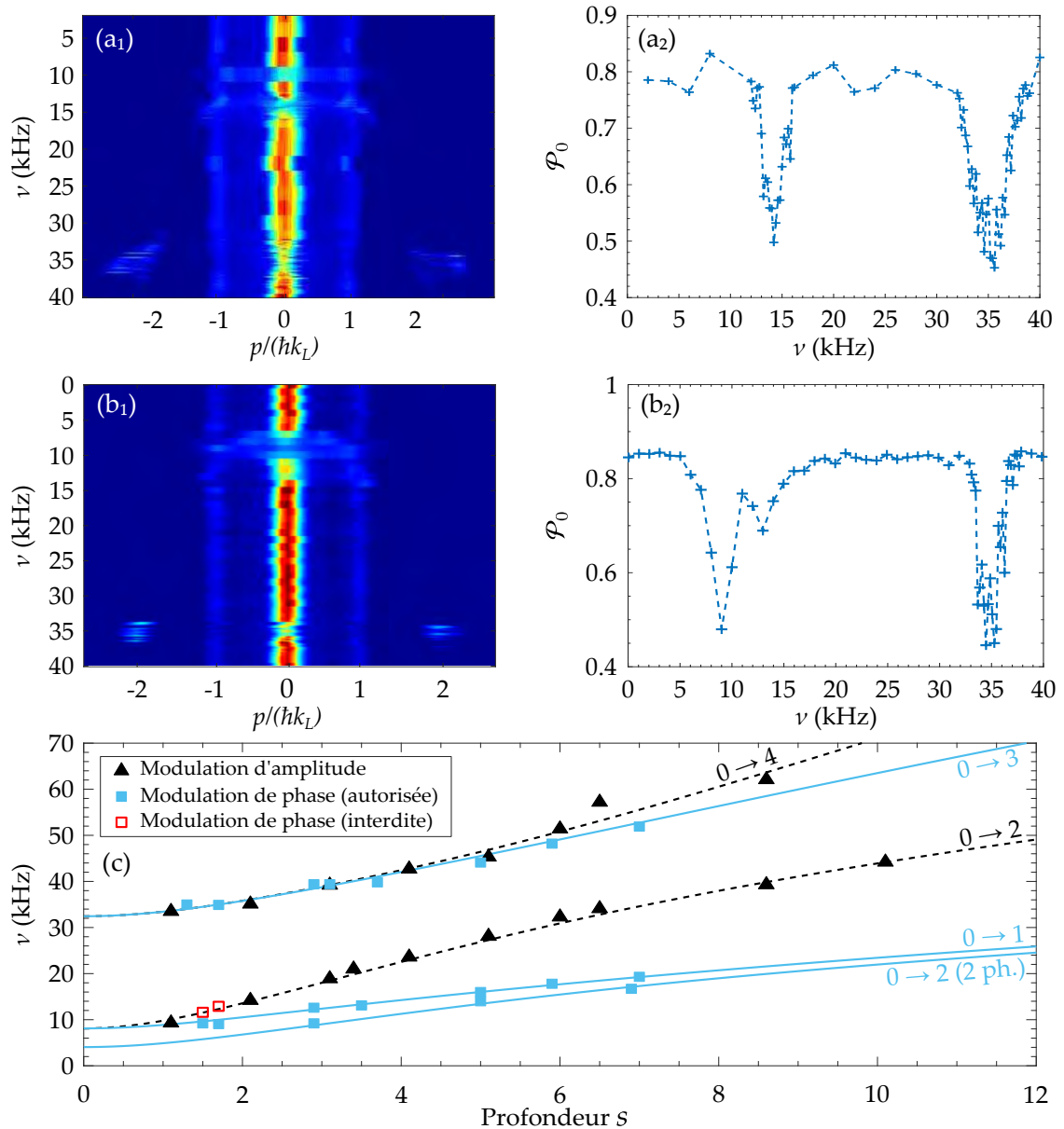
	Modulation de phase	Modulation d'amplitude
Profondeur	$1.3 < s < 7.3$	$1.1 < s < 10.1$
Durée de modulation	$1 \text{ ms} < t_{\text{mod}} < 5 \text{ ms}$	$3 \text{ ms} < t_{\text{mod}} < 15 \text{ ms}$
Amplitude de modulation	$2.5^\circ < \varphi_0 < 7^\circ$	$0.05 < \varepsilon_0 < 0.07$



**FIGURE 3.3 | Protocole expérimental utilisé pour étudier les transitions interbandes à quasi-moment nul.** Nous chargeons d’abord adiabatiquement les atomes dans le réseau optique jusqu’à la profondeur  $s$  (voir chapitre 2 Eq. 2.17), puis nous démarrons soit (a) la modulation de phase à profondeur constante, soit (b) la modulation d’amplitude à phase constante. La modulation est caractérisée par son amplitude (a)  $\varphi_0$  ou (b)  $\epsilon_0$ , sa fréquence  $\nu$  et sa durée  $t_{\text{mod}}$ . Finalement, tous les pièges sont éteints et les atomes tombent en chute libre, effectuant ainsi un temps de vol. En insert : exemples de transitions interbandes à  $k = 0$  ayant lieu au cours de la modulation entre la bande fondamentale et les premières bandes excitées.

Des exemples de résultats expérimentaux sont indiqués Fig. 3.4(a) (modulation d’amplitude,  $s = 2.1$ ) et Fig. 3.4(b) (modulation de phase,  $s = 1.7$ ). Nous retrouvons sur les images d’absorption prises après ToF une figure de diffraction associée à la structure périodique du réseau, avec des ordres séparés d’une distance  $\Delta x_L = v_L \times t_{\text{ToF}}$ .

Loin de résonance, les populations relatives de ces ordres de diffraction  $\mathcal{P}_j$  mesurées expérimentalement ne varient pas avec la fréquence de modulation  $\nu$  employée, et nous retrouvons dans ce cas les populations attendues après un chargement adiabatique dans le réseau à la profondeur considérée et correspondant à l’état  $\{n = 0, k = 0\}$ . À résonance, nous fournissons par la modulation de l’énergie aux atomes, ce qui entraîne une déplétion de l’ordre central de diffraction (d’impulsion nulle), et corrélativement une augmentation de la population des ordres supérieurs. Cet effet est clairement visible avec les deux types de modulation, comme le montrent les images expérimentales Fig. 3.4(a<sub>1</sub>) et Fig. 3.4(b<sub>1</sub>). Nous exploitons cette signature expérimentale en traçant, pour une profondeur donnée, la population  $\mathcal{P}_0$  de l’ordre 0 en fonction de la fréquence  $\nu$  appliquée, puis en ajustant une fonction gaussienne au voisinage des résonances (par exemple autour de 14 et 35 kHz pour la Fig. 3.4(a<sub>2</sub>)). Nous déterminons, grâce au centre de la gaussienne, les fréquences de transition interbande pour une profondeur du réseau statique  $s$  donnée, et nous répétons ce processus pour différentes profondeurs du réseau optique. L’ensemble de ces résultats est résumé Fig. 3.4(c). Nous y comparons nos mesures aux fréquences attendues, calculées à partir de la structure de bandes pour un quasi-moment nul : seules les transitions à un phonon sont considérées pour la modulation d’amplitude, tandis qu’en modulation



**FIGURE 3.4 | Spectroscopie de la structure de bandes.** (a) et (b) Exemples de résultats expérimentaux montrant des transitions interbandes, en modulation d'amplitude à  $s = 2.1$  et en modulation de phase à  $s = 1.7$  respectivement. Sur les images (a<sub>1</sub>) et (b<sub>1</sub>), chaque ligne correspond à une image d'absorption obtenue après modulation à une fréquence  $\nu$  puis temps de vol, et intégrée dans la direction transverse au réseau. Les populations normalisées  $\mathcal{P}_0$  dans l'ordre central sont tracées en (a<sub>2</sub>) et (b<sub>2</sub>). Grâce à un ajustement gaussien autour des zones de déplétion de  $\mathcal{P}_0$ , on mesure les fréquences de résonance. (c) Ensemble des résonances mesurées expérimentalement en fonction de la profondeur du réseau optique  $s$ , pour la modulation d'amplitude (triangles noirs) et la modulation de phase (carrés pleins bleus et carrés creux rouges; les premiers correspondent à une transition autorisée, les seconds à une transition interdite). Nous calculons numériquement à partir de la structure de bandes les fréquences de transitions autorisées à  $k = 0$  pour les deux types de modulation (amplitude : tirets noirs, phase : traits bleus).

de phase la transition  $0 \rightarrow 2$  à deux phonons est indiquée en plus des excitations à un phonon. Elle correspond à la branche de plus basse fréquence.

Les fréquences obtenues expérimentalement sont en très bon accord avec celles attendues théoriquement. Les règles de sélection sont plutôt bien respectées : seules des excitations à un phonon ont lieu en modulation d'amplitude, tandis que la modulation de phase peut induire des excitations à deux phonons, bien que celles-ci soient plus rares et d'amplitude plus faible. Cependant, nous avons aussi observé à basse profondeur ( $s = 1.5$  et  $1.7$ ) des transitions normalement interdites en modulation de phase (carrés creux rouges). Nous attribuons cet effet au confinement extérieur, que nous n'avions pas considéré jusqu'à présent : à faible profondeur du réseau optique l'invariance par translation discrète est plus facilement brisée par le potentiel associé au piège hybride, ce qui affaiblit les règles de sélection et permet d'exciter des transitions interdites.

Les excitations à résonance révèlent donc directement la structure de bandes, mais un seul type de modulation ne permet pas de retrouver tout le spectre du fait des règles de sélection : les deux types de modulation sont ainsi complémentaires. Dans la suite, nous nous concentrons sur des effets nécessitant d'aller au-delà du cas idéal, et plus particulièrement sur l'effet du confinement extérieur sur les résonances.

### 3.2.2 Au-delà du système idéal

#### *Simulations numériques en champ moyen*

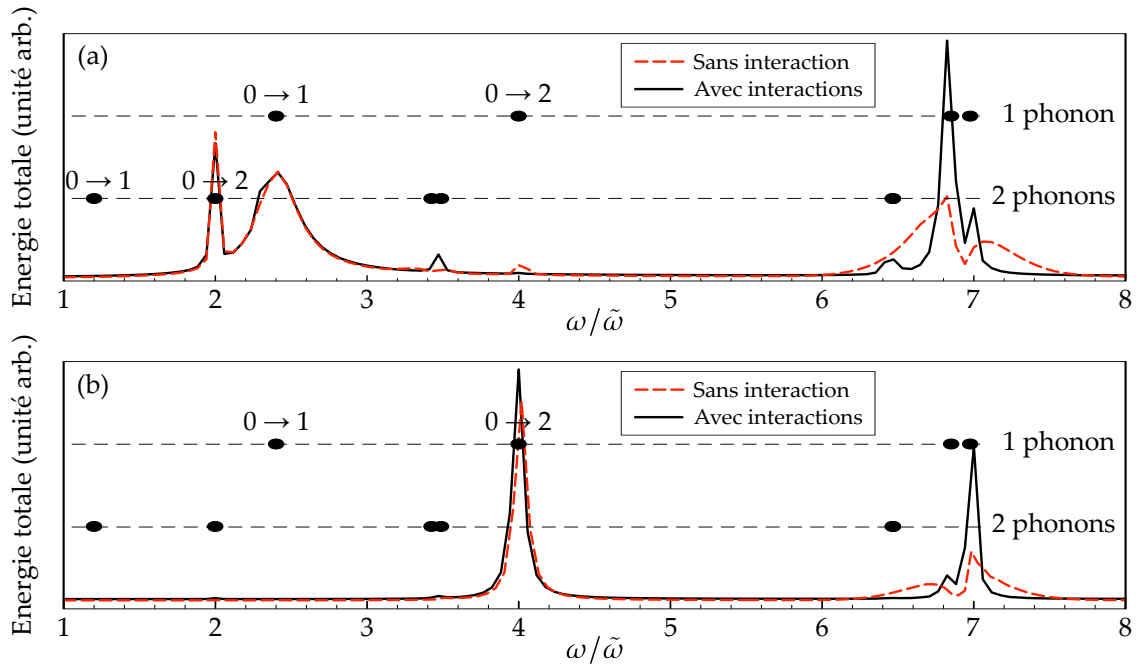
Afin de nous rapprocher de manière réaliste des conditions expérimentales, nous avons utilisé des simulations numériques qui rendent compte à la fois des interactions interatomiques et du confinement extérieur dû au piège hybride. Nous résolvons pour cela l'équation de Gross-Pitaevskii (Eq. 1.16 du chapitre 1), prise à une dimension. Ces simulations donnent accès à l'énergie totale de la fonction d'onde après évolution, pendant un temps fixe, dans le potentiel du réseau modulé pour une profondeur et un confinement donnés. Un exemple est montré Fig. 3.5, pour lequel nous avons pris des paramètres typiques des expériences. Nous y indiquons les résultats obtenus sans interaction (terme de couplage  $g = 0$ , tirets rouges) et en présence d'interactions (terme de couplage  $g \neq 0$ , trait noir).

Concentrons-nous dans un premier temps sur les simulations avec interactions. Pour les deux types de modulation, les pics principaux vérifient bien les règles de sélection établies section 3.1 et retrouvées expérimentalement :

- la modulation de phase (Fig. 3.5(a)) induit des résonances à un phonon pour les transitions  $0 \rightarrow 1$  et  $0 \rightarrow 3$  ainsi que des transitions à deux phonons pour les excitations  $0 \rightarrow 2$  et  $0 \rightarrow 4$ ;
- la modulation d'amplitude (Fig. 3.5(b)) suit des règles de sélection strictes et opposées à la modulation de phase : seules les transitions à un phonon vérifiant  $\Delta n = 2p$  sont induites.

Néanmoins, certaines transitions *a priori* interdites sont également excitées. C'est le cas par exemple en modulation de phase des transitions à un phonon  $0 \rightarrow 2$  (cas sans interaction, tirets rouges) et  $0 \rightarrow 4$  (avec interactions, trait noir). Nous avons vérifié que l'amplitude de ces résonances dépendait de la fréquence du piège harmonique  $\nu_{\text{ext}}$  dû au



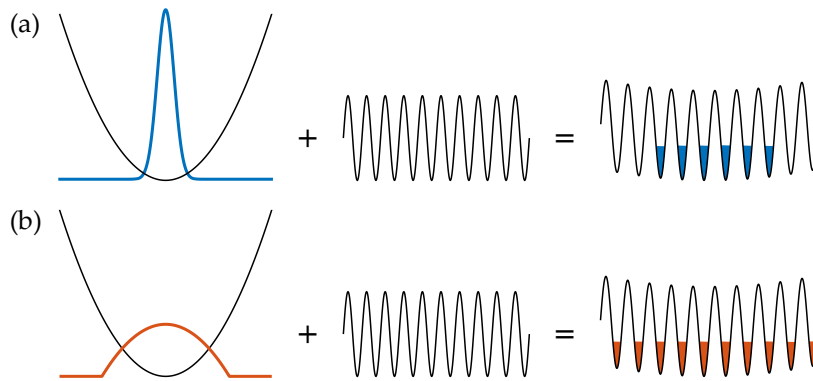


**FIGURE 3.5** | Étude numérique des transitions interbandes en présence de confinement extérieur et d'interactions interatomiques. Nous traçons l'énergie totale de la fonction d'onde après modulation du réseau, en fonction de la fréquence de modulation renormalisée  $\omega/\tilde{\omega}$  (avec  $\tilde{\omega} = 2\pi \times 6.55$  kHz) pour la modulation de phase (a) et d'amplitude (b). Ces résultats ont été calculés pour une profondeur  $s = 4.86$ , dans le cas d'un confinement harmonique de fréquence  $\nu_{\text{ext}} = 13.8$  Hz. Les amplitudes de modulation sont  $\varphi_0 \approx 5^\circ$  et  $\varepsilon_0 = 0.04$  respectivement. On compare le cas sans interaction (tirets rouges) au cas en présence d'interactions (trait plein noir). Les disques noirs indiquent les fréquences des transitions à 1 et 2 phonons, calculées à partir de la structure de bandes pour cette profondeur.

confinement extérieur. Nous pouvons ainsi confirmer que les violations des règles de sélection, déjà observées expérimentalement et obtenues ici numériquement, trouvent leur origine dans la brisure de la symétrie par translation discrète du système.

Restreignons-nous aux transitions autorisées par les règles de sélection, et comparons les cas avec et sans interaction. Nous constatons que certaines transitions ne sont pas du tout affectées, comme la transition  $0 \rightarrow 2$  pour les deux types de modulation (à deux phonons pour la modulation de phase, à un phonon pour la modulation d'amplitude), ou la transition à un phonon  $0 \rightarrow 1$  pour la modulation de phase. Ceci est à mettre en regard des excitations à plus hautes fréquences  $0 \rightarrow 3$  (phase) et  $0 \rightarrow 4$  (amplitude), qui sont bien mieux définies spectralement lorsqu'il y a des interactions.

Une interprétation de l'élargissement des raies en l'absence d'interactions est représentée Fig. 3.6. La fonction d'onde de l'état fondamental du condensat dans un potentiel harmonique extérieur est beaucoup plus étendue lorsqu'il y a des interactions qui, rappelons-le, sont répulsives. En ajoutant le réseau optique, le condensat occupe plus de puits, ce qui le rapproche d'un système idéal invariant par translation discrète. Les transitions interbandes s'en trouvent ainsi mieux définies.



**FIGURE 3.6 | Effet des interactions sur la population dans le réseau optique.** La fonction d'onde dans un potentiel harmonique est moins large lorsqu'il n'y a pas d'interaction (a) qu'en présence d'interactions (b). Il en résulte un nombre différent de sites peuplés dans le réseau optique.

### *Effet du confinement extérieur*

Dans les résultats expérimentaux présentés en début de section, nous ne nous étions intéressés qu'à la fréquence correspondant au sommet des pics associés aux transitions interbandes, retrouvant en grande partie les règles de sélection précédemment établies dans un formalisme à un corps. Or, nous venons de voir numériquement que les spectres en fréquence contiennent également des informations sur la dynamique à  $N$  corps à travers la largeur des pics de résonance. Les simulations numériques prédisent en particulier un phénomène non trivial : parmi les transitions interbandes autorisées, certaines résonances semblent totalement immunes aux interactions, tandis que d'autres à l'inverse y sont sensibles.

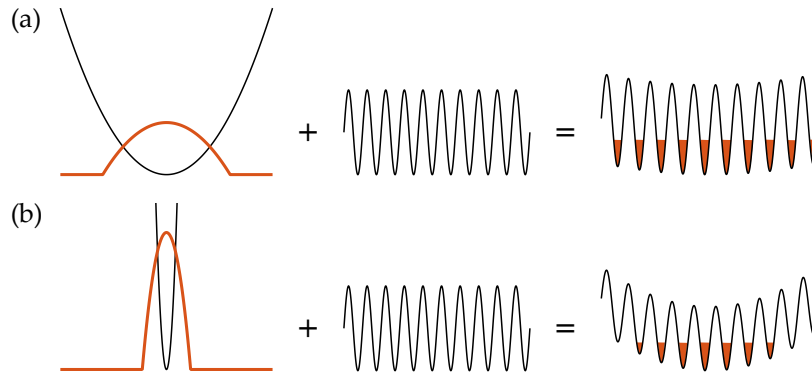
Pour vérifier expérimentalement ce phénomène, nous changeons le confinement harmonique extérieur produit par le piège hybride. En choisissant de conserver ou d'enlever le faisceau dipolaire vertical, nous pouvons utiliser deux fréquences de piège harmonique différentes :  $\nu_{\text{ext}}^{(1)} = 4$  Hz (piège hybride dit décomprimé, faisceau dipolaire horizontal seul) et  $\nu_{\text{ext}}^{(2)} = 50$  Hz (piège hybride dit comprimé, piège dipolaire croisé). Pour enlever le faisceau vertical, nous ajoutons après l'évaporation dipolaire une étape de 400 ms pendant laquelle la puissance du faisceau vertical est réduite linéairement.

L'effet du confinement extérieur sur les transitions interbandes autorisées que nous étudions peut sembler négligeable de prime abord, compte tenu des différences de fréquences de piégeage entre ce potentiel harmonique et le potentiel du réseau. Un calcul d'ordre de grandeur classique semble nous en convaincre :

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, l'approximation harmonique d'un site du réseau autour de son minimum conduit à une fréquence :

$$\nu_{\text{res}} = \nu_L \sqrt{s}$$

qui donne  $\nu_{\text{res}} = 14$  kHz pour  $s = 3$ . En comparaison, nous réalisons les expériences en utilisant deux configurations du piège dipolaire, avec des fréquences de piégeage de  $\nu_{\text{ext}}^{(1)} = 4$  Hz ou  $\nu_{\text{ext}}^{(2)} = 50$  Hz.

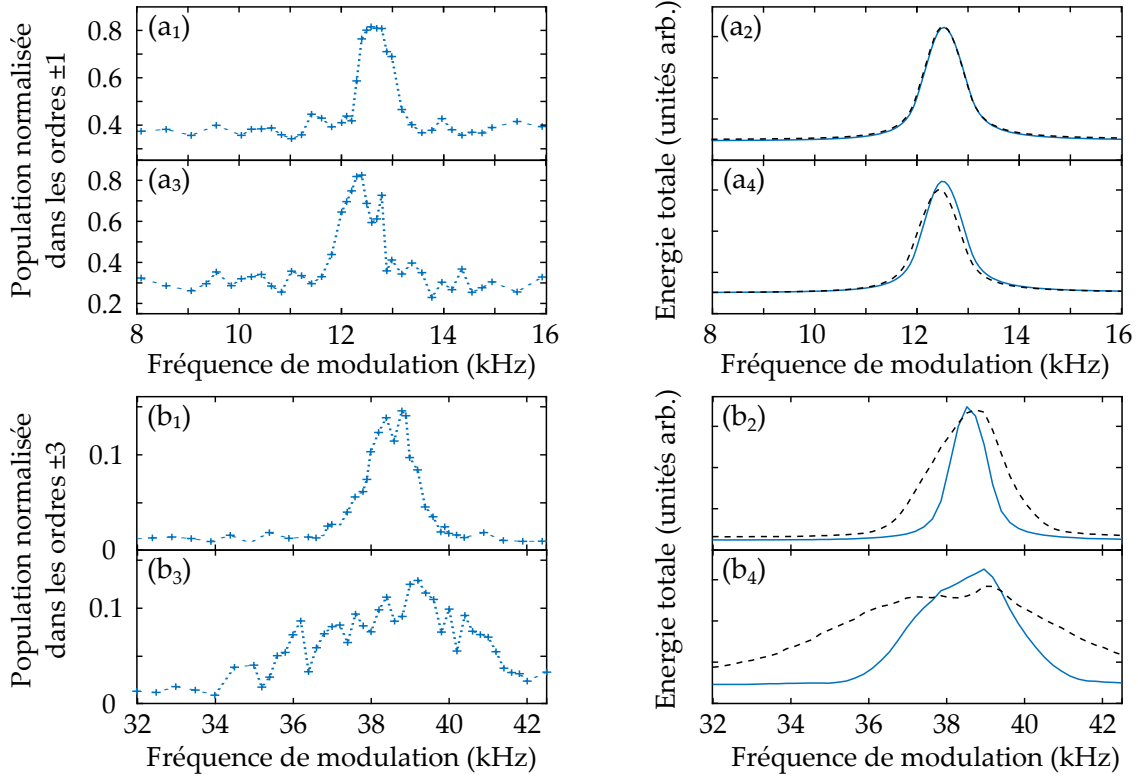


**FIGURE 3.7 | Effet du confinement extérieur sur la population dans le réseau optique.** La taille du condensat variant avec la fréquence de piégeage du potentiel harmonique (piège décomprimé en (a), comprimé en (b)), on modifie par le confinement extérieur le nombre de sites peuplés et la densité atomique intrasite.

Toutefois, le confinement harmonique associé au piège hybride conduit à des conditions de piégeage inhomogènes dans le réseau. Dans le régime de Thomas-Fermi, la taille du condensat, caractérisée par le rayon de Thomas-Fermi  $R_{TF}$ , varie comme  $R_{TF} \propto 1/\nu_{ext}$ . Modifier le confinement extérieur change par conséquent le nombre de puits peuplés dans le réseau optique ainsi que la densité atomique dans chaque puits, ce qui a un effet direct sur la dynamique à  $N$  corps par les interactions interatomiques (voir Fig. 3.7).

Nous avons étudié expérimentalement l'effet du confinement extérieur sur les transitions interbandes. Nous nous sommes pour cela concentrés sur deux résonances autorisées particulières, l'une semblant immune aux interactions et l'autre y étant sensible. Nous avons donc d'abord scanné la transition  $0 \rightarrow 1$  en modulation de phase (immune aux interactions), puis la transition  $0 \rightarrow 4$  en modulation d'amplitude (sensible aux interactions). Pour chacune des résonances, nous suivons l'évolution de l'ordre de diffraction peuplé le plus élevé en fonction de la fréquence de modulation, et nous répétons la mesure pour les deux confinements  $\nu_{ext}^{(1)} = 4$  Hz et  $\nu_{ext}^{(2)} = 50$  Hz. Ces résultats, présentés Fig. 3.8, sont comparés à des simulations numériques effectuées avec les mêmes conditions expérimentales, dans les cas avec et sans interactions.

La première résonance que nous avons scannée, en modulation de phase, est obtenue avec les paramètres de modulation suivants :  $\varphi_0 = 5^\circ$ ,  $t_{mod} = 1$  ms et une fréquence de modulation  $\nu$  comprise entre 8 kHz et 16 kHz. La résonance correspondante  $0 \rightarrow 1$  est excitée aux alentours de  $\nu = 12.6$  kHz, comme attendu pour la profondeur utilisée  $s = 3.1$ . Les largeurs des pics, mesurées grâce à un ajustement gaussien, sont 1.2 kHz et 1.4 kHz pour  $\nu_{ext}^{(1)}$  et  $\nu_{ext}^{(2)}$  respectivement : les pics obtenus sont similaires pour les deux confinements harmoniques testés. Les simulations numériques mises en regard montrent un bon accord avec les spectres expérimentaux. Cette résonance se révèle donc bien immune aux modifications du confinement. Ceci peut s'expliquer par le lien entre cette transition interbande et le mode d'oscillation du centre de masse des atomes dans chaque site du réseau, dit aussi mode dipolaire ou mode de Kohn, qui est insensible aux interactions interatomiques [DALFOVO *et al.* (1999)]. C'est ce même mode qui est excité lors d'un faible déplacement soudain du réseau optique : nous avons constaté section 2.3.3 que la dynamique était dans ce cas associée aux transitions  $0 \rightarrow 1$  et  $0 \rightarrow 2$ . La modulation de



**FIGURE 3.8 | Effet du confinement extérieur sur les transitions interbandes.** Les graphiques de gauche montrent les populations normalisées dans les ordres d'impulsion élevée, mesurées expérimentalement. Les résultats des simulations numériques, à droite, représentent l'énergie totale de la fonction d'onde après modulation du réseau avec (trait bleu) et sans (tirets noirs) interactions, pour des paramètres similaires aux expériences. (a) Excitation de la transition  $0 \rightarrow 1$  en modulation de phase pour  $s = 3.1$ . (b) Excitation de la transition  $0 \rightarrow 4$  en modulation d'amplitude pour  $s = 3$ . Pour chaque excitation, nous avons répété l'expérience avec  $\nu_{\text{ext}}^{(1)} = 4$  Hz ((a<sub>1</sub>) et (b<sub>1</sub>)) et  $\nu_{\text{ext}}^{(2)} = 50$  Hz ((a<sub>3</sub>) et (b<sub>3</sub>)).

phase du réseau utilisée ici, d'amplitude relativement faible ( $2.5^\circ < \varphi_0 < 7^\circ$ ), excite donc principalement le mouvement d'oscillation du centre de masse, rendant cette transition interbande immune aux interactions.

Cette conclusion n'est pas valable pour la deuxième résonance étudiée, à savoir la transition  $0 \rightarrow 4$  en modulation d'amplitude. Pour cette deuxième résonance, les paramètres de modulation sont  $\varepsilon_0 = 0.06$  et  $t_{\text{mod}} = 10$  ms, et les pics observés sont centrés sur la fréquence attendue  $\nu = 38.9$  kHz pour la profondeur utilisée ( $s = 3$ ). Contrairement à la transition étudiée en modulation de phase, on observe ici une variation de la largeur de la transition avec le confinement extérieur : on mesure des largeurs de 2.4 kHz et 7.8 kHz pour  $\nu_{\text{ext}}^{(1)}$  et  $\nu_{\text{ext}}^{(2)}$  respectivement. Nous avons la confirmation par les simulations numériques de cet effet d'élargissement.

Comment interpréter cette observation, et quels renseignements pouvons-nous tirer de la confrontation entre résultats expérimentaux et numériques ? Rappelons d'abord que lorsqu'on augmente le nombre de sites peuplés dans le réseau, on se rapproche du

cas idéal du réseau infini, et la résonance est mieux définie. Deux tendances se dégagent alors des résultats numériques des Figs. 3.8(b<sub>2</sub>) et (b<sub>4</sub>) :

- Pour un confinement donné, la largeur spectrale de la transition est plus fine lorsqu'il y a des interactions interatomiques. Comme nous l'avons illustré Fig. 3.6, les interactions répulsives tendent à augmenter le nombre de puits peuplés.
- Pour une constante d'interaction fixée, plus le confinement harmonique est faible, plus la transition est fine spectralement. En effet, diminuer le confinement harmonique revient à peupler un plus grand nombre de puits du réseau comme nous l'avons vu Fig. 3.7.

En modifiant expérimentalement les fréquences de piégeage du piège hybride, nous avons un effet combiné sur le confinement et la densité atomique que nous ne pouvons pas découpler. Nous remarquons néanmoins que les simulations numériques en présence d'interactions rendent mieux compte de la largeur observée expérimentalement. Cela indique que les deux ingrédients, confinement et interactions, sont nécessaires pour expliquer la largeur de l'excitation observée.

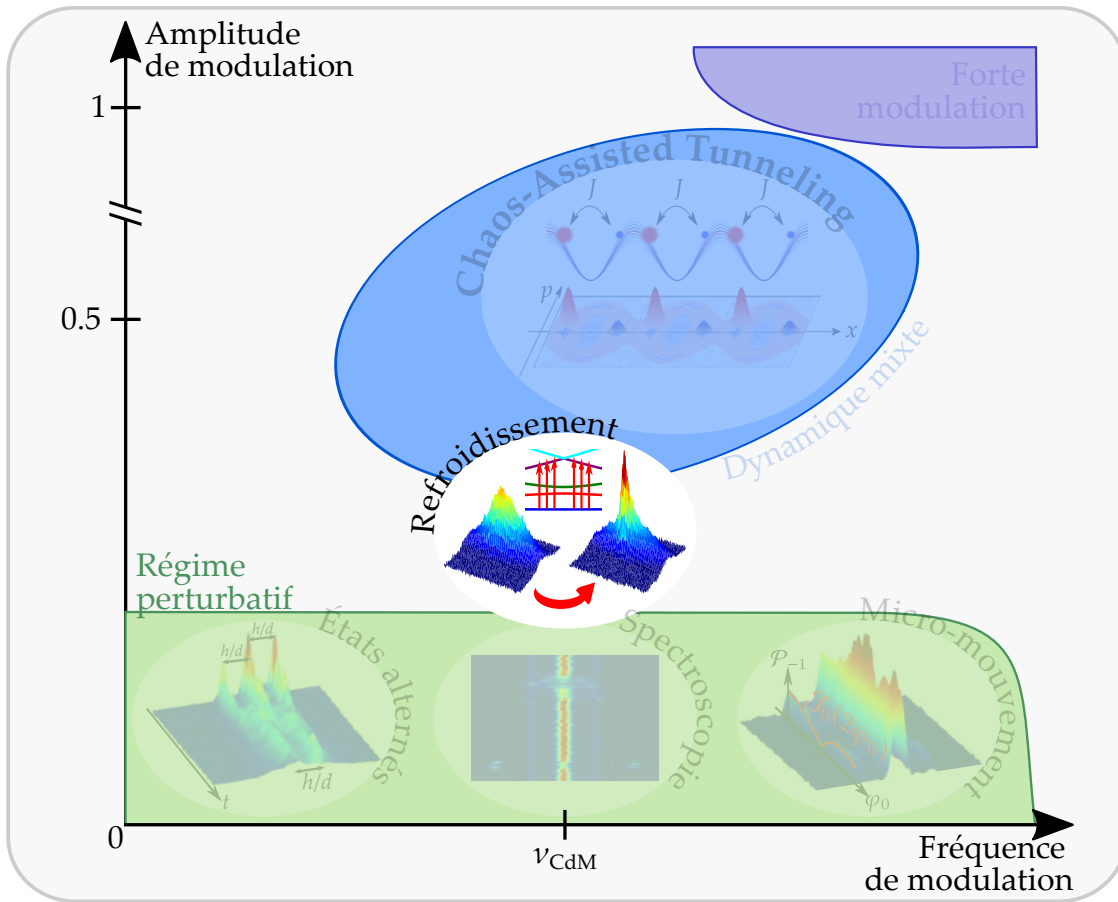
Cette transition est donc bien sensible aux interactions. Par un raisonnement similaire à celui mené ci-dessus pour les transitions à des basses fréquences, on s'attend à ce que des transitions à des fréquences plus élevées correspondent à des excitations de modes d'oscillation plus élevés au sein des puits. Or contrairement au mode dipolaire, ces modes d'excitations sont sensibles aux interactions.

### 3.3 Évaporation dans l'espace réciproque

Dans cette dernière section, je décris une nouvelle méthode de refroidissement utilisée directement dans le réseau optique modulé en amplitude, et qui exploite les règles de sélection vues précédemment.

Cette méthode repose sur le principe suivant : par un choix judicieux de modulation, on satisfait une condition de résonance seulement pour les atomes ayant le plus grand quasi-moment  $k$ , c'est-à-dire ayant une énergie plus grande que l'énergie moyenne, afin de les exciter vers des bandes supérieures. Une fois excités, ces atomes sont filtrés, puis les collisions élastiques permettent la rethermalisation du nuage restant.

À ce titre, cette méthode rappelle le processus de refroidissement par évaporation dans l'espace réel, très utilisé dans le domaine des atomes froids, en particulier afin d'atteindre le régime de dégénérescence quantique. Néanmoins, notre méthode s'en distingue par plusieurs aspects. D'abord, la robustesse de cette méthode repose sur les règles de sélection : en choisissant de manière appropriée les paramètres de modulation et les résonances excitées, nous pouvons cibler des transitions interdites à  $k = 0$ . Nous utilisons cette propriété pour protéger les atomes dont le quasi-moment est proche de zéro, c'est-à-dire essentiellement des atomes de la fraction condensée. Une autre particularité de cette méthode est que la sélection n'est pas spatiale mais se fait dans l'espace réciproque : tout le nuage perçoit la modulation en même temps. Enfin, la méthode que nous proposons est générique, en ce sens qu'elle n'exploite pas les degrés internes de l'atome. Elle est donc indépendante de l'espèce atomique utilisée.

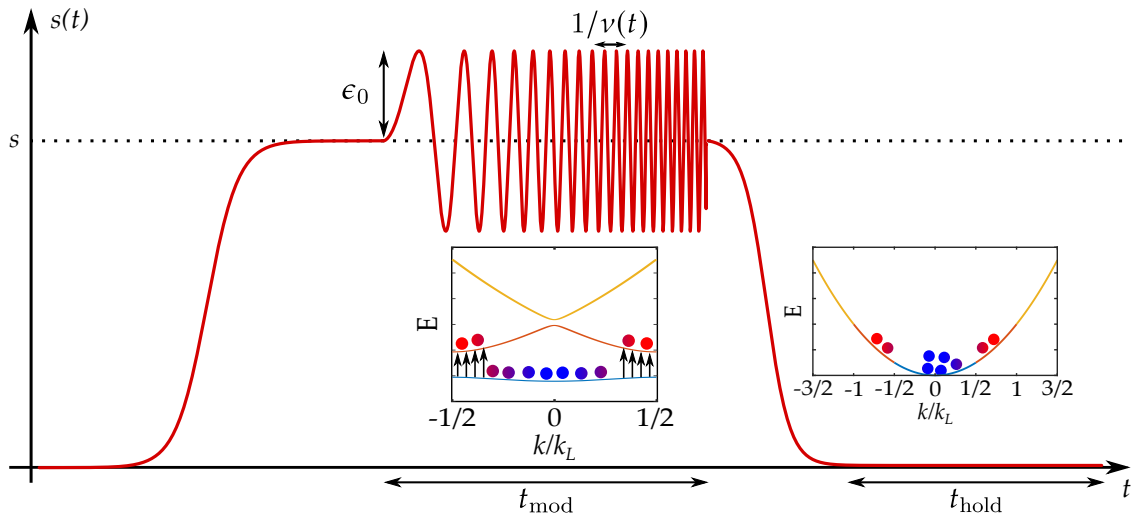


Les résultats que je présente dans cette section découlent d'un travail purement expérimental. En particulier, aucune analyse théorique préalable n'avait été faite concernant les collisions élastiques entre atomes pouvant avoir lieu durant le protocole. Bien que ces collisions soient nécessaires à la rethermalisation du gaz et jouent donc un rôle important dans la méthode de refroidissement, elles peuvent également être responsables d'un chauffage du nuage si ces collisions entraînent une perte d'atomes de la phase condensée. Ma tâche a donc été de trouver le bon régime de paramètres, directement par des observations expérimentales. Ceci s'est fait en plusieurs étapes, que je décris ci-après.

### 3.3.1 Protocole expérimental

Considérons un nuage d'atomes de rubidium partiellement condensé dans le piège hybride décomprimé ( $\nu_{\text{ext}}^{(1)} = 4$  Hz), que l'on charge adiabatiquement dans le réseau optique. Dans ce cas, la fonction d'onde occupe la bande fondamentale de la structure de bandes, avec une certaine largeur en quasi-moment  $\Delta k$ , due à la fraction thermique du nuage, centrée sur  $k = 0$ . Nous appliquons ensuite pendant un temps  $t_{\text{mod}}$  une modulation de l'amplitude du réseau, dont la fréquence de modulation est scannée en résonance avec des bandes excitées. Plus précisément, la modulation s'exprime comme :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(2\pi\nu(t)t) \quad (3.16)$$



**FIGURE 3.9 | Protocole expérimental utilisé pour les expériences de refroidissement dans l'espace réciproque.** Après chargement adiabatique du réseau, nous modulons sa profondeur en variant linéairement la fréquence de modulation (*frequency chirp*), de sorte à être à résonance pour les classes d'impulsion  $k \neq 0$  qui correspondent aux atomes de plus grande énergie. Le déchargement du réseau accélère ensuite les atomes excités, que nous séparons spatialement des atomes au repos avec un maintien dans le piège hybride d'une durée  $t_{\text{hold}}$ .

avec  $\epsilon_0$  l'amplitude de modulation et  $\nu(t) = \nu_i + (\nu_f - \nu_i)t/(2t_{\text{mod}})$  sa fréquence. Il s'agit là d'une vobulation de la fréquence de modulation (ou *frequency chirp*) entre la fréquence initiale  $\nu_i$  et la fréquence finale  $\nu_f$  (voir Fig. 3.9). Nous choisissons ces fréquences autour de transitions interdites à  $k = 0$ , ce qui nous permet d'utiliser une modulation résonante avec des atomes dont le quasi-moment est de plus en plus faible tout en protégeant la population d'atomes condensés dont le quasi-moment est proche de zéro.

Deux échelles de temps sont impliquées dans la vobulation en fréquence :

- la durée de la vobulation  $t_{\text{mod}}$  ;
- la période de modulation, qui varie au cours du temps :  $T(t) = 1/\nu(t)$ .

La durée de vobulation est choisie grande devant la période de modulation :

$$t_{\text{mod}} \sim 10 \text{ ms} \gg T(t) \sim 0.1 \text{ ms}.$$

Une fois les atomes excités, nous devons les séparer spatialement des atomes restés au repos afin d'observer un éventuel refroidissement du nuage après rethermalisation. Pour cela, nous procédons à un déchargement adiabatique du réseau optique, en utilisant la courbe symétrique à la courbe de chargement du réseau donnée par l'Eq. 2.17.

Le déchargement adiabatique du réseau, ou *band mapping*, est une technique qui a été utilisée pour la première fois dans le courant des années 2000 et qui a permis d'observer les différentes zones de Brillouin de gaz de bosons et de fermions [GREINER *et al.* (2001) et KÖHL *et al.* (2005)]. Dans notre cas, nous utilisons cette technique pour accélérer les



atomes excités par la vobulation vers les bandes supérieures. En effet, les atomes excités dans la bande  $n$ , piégés dans le réseau optique, se déplacent à une vitesse locale (ou vitesse de groupe) donnée par la pente locale de la structure de bandes :

$$v = \frac{v_L}{2} \frac{\partial E^{(n)}}{\partial k} \quad (3.17)$$

avec  $v_L = \hbar/md$  la vitesse caractéristique associée au réseau optique,  $E$  et  $k$  l'énergie et le quasi-moment adimensionnés par  $E_L$  et  $k_L$  respectivement. Du fait de l'ouverture des gaps d'énergie, les bandes s'aplatissent et la vitesse des atomes excités dans le réseau est relativement faible. À l'inverse, lorsque nous diminuons adiabatiquement la profondeur du réseau optique jusqu'à  $s = 0$ , nous conservons à la fois les populations dans les différentes bandes et le quasi-moment. Ainsi, un atome initialement dans la bande  $n$  avec le quasi-moment  $k$  occupe après déchargement un état d'impulsion  $p = \hbar(k \pm nk_L)$  : les atomes dans les bandes excitées sont ainsi accélérés.

Considérons un réseau de profondeur  $s = 3$  et des atomes excités dans la bande  $n = 1$ . Dans le réseau, la vitesse de groupe maximale est de l'ordre de :

$$v_{\max} = \frac{v_L}{2} \max_k \left( \frac{\partial E^{(1)}}{\partial k} \right) \approx \frac{v_L}{2} \times 0.3 \approx 1.3 \text{ mm/s}. \quad (3.18)$$

Après déchargement adiabatique, ces mêmes atomes excités dans la bande  $n = 1$  ont une vitesse  $v$  comprise dans l'intervalle :

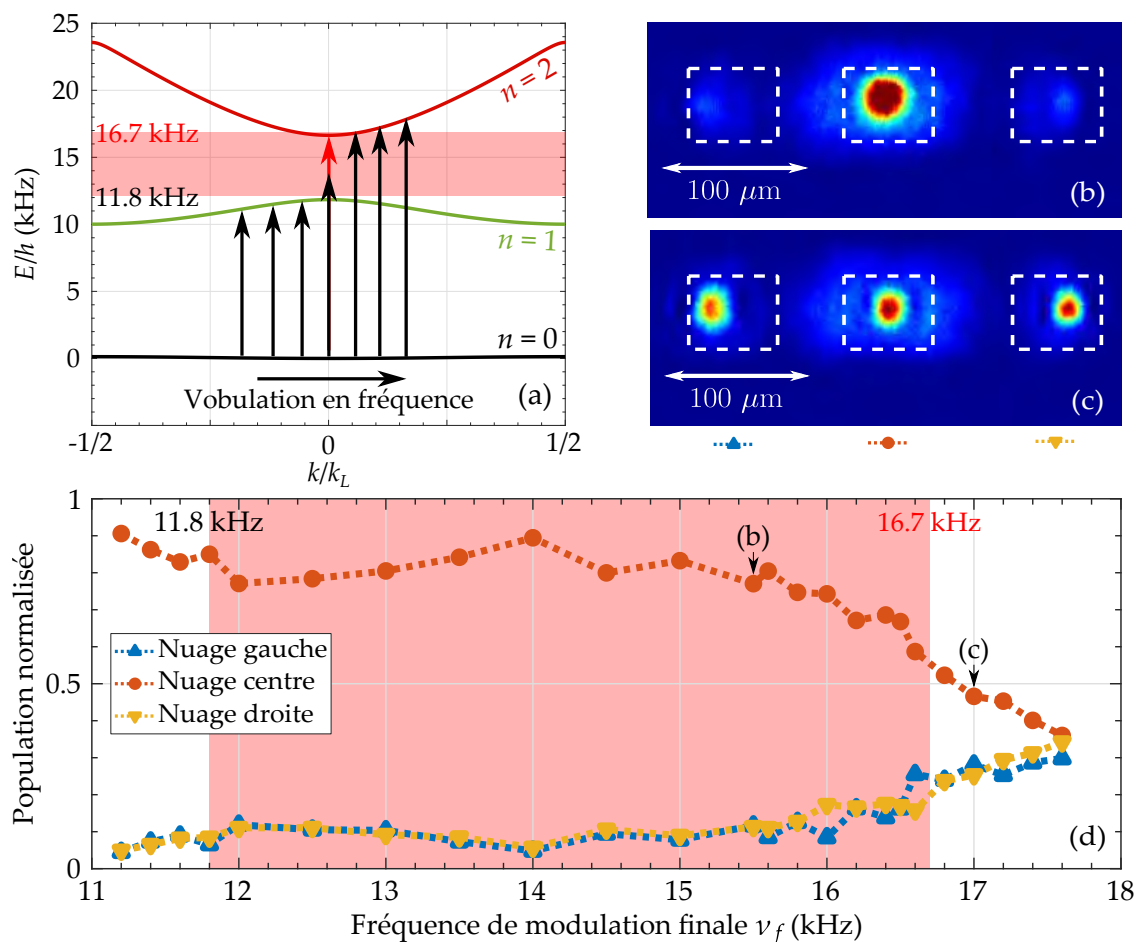
$$v_L/2 \approx 4.3 \text{ mm/s} \leq v \leq v_L \approx 8.6 \text{ mm/s}. \quad (3.19)$$

Nous ajoutons ensuite un temps de maintien  $t_{\text{hold}}$  dans le piège hybride décomprimé, afin de laisser le temps aux atomes excités et aux atomes au repos de se séparer. Les atomes excités étant toujours piégés dans le piège hybride, nous choisissons par sécurité un temps de maintien  $t_{\text{hold}}$  plus court que le quart de période  $T/4 \approx 60 \text{ ms}$  (où  $T = 1/v_{\text{ext}}^{(1)}$ ) des atomes dans ce piège pour éviter le retour des atomes excités au centre du piège. Finalement, pour accéder à la distribution en impulsion du nuage d'atomes au repos et mesurer sa température, nous prenons une image d'absorption après [ToF](#).

### 3.3.2 Protection du condensat vis-à-vis de la modulation

Dans un premier temps, nous avons voulu vérifier la protection des atomes condensés grâce aux règles de sélection. Pour cela, nous avons utilisé un nuage dont la fraction condensée était de 40%, dans un réseau optique de profondeur  $s = 2.7$ . Après chargement adiabatique, nous démarrons la modulation avec les paramètres suivants :  $\varepsilon_0 = 0.38$ ,  $t_{\text{mod}} = 6 \text{ ms}$ ,  $\nu_i = 11 \text{ kHz}$  et une fréquence finale  $\nu_f$  que nous avons fait varier entre 11.2 et 17.6 kHz. Ces fréquences correspondent à des excitations entre la bande fondamentale ( $n = 0$ ) et les deux premières bandes excitées (voir Fig 3.10(a)). Rappelons qu'en modulation d'amplitude, la transition  $0 \rightarrow 1$  est interdite mais que  $0 \rightarrow 2$  est autorisée. Après déchargement adiabatique du réseau, nous laissons les atomes évoluer





**FIGURE 3.10** | Protection de la fraction condensée du nuage d’atomes vis-à-vis de la modulation d’amplitude. (a) Structure de bandes pour un réseau de profondeur  $s = 2.7$ , sur laquelle sont représentées les résonances excitées par la vobulation. Le gap entre les deux premières bandes excitées ( $n = 1$  et  $n = 2$ ) est indiqué par l’aire rouge. La transition  $0 \rightarrow 2$  autorisée à  $k = 0$ , qui a lieu à 16.7 kHz, est indiquée par une flèche rouge. (b) et (c) Exemples d’images d’absorption obtenues lorsque nous arrêtons la vobulation respectivement avant ( $\nu_f = 15.5 \text{ kHz} < 16.7 \text{ kHz}$ , image du haut) et après ( $\nu_f = 17 \text{ kHz} > 16.7 \text{ kHz}$ , image du bas) la transition autorisée à  $k = 0$ . (d) Population normalisée dans les trois nuages d’atomes en fonction de la fréquence finale de vobulation  $\nu_f$ .

un temps  $t_{\text{hold}} = 20$  ms dans le piège hybride décomprimé. Une image est prise après un ToF de 25 ms.

Deux exemples d'images après ToF sont montrées Fig. 3.10(b) et (c), pour des fréquences finales de vobulation  $\nu_f = 15.5$  kHz et  $\nu_f = 17$  kHz respectivement. Nous distinguons en plus du nuage central deux nuages latéraux qui correspondent aux atomes excités par la modulation, puis accélérés par le déchargement adiabatique. Sur la première image, la modulation a été en résonance avec la première bande excitée jusqu'à  $k = 0$  ( $\nu_f = 15.5$  kHz  $>$  11.8 kHz, où 11.8 kHz correspond à la transition  $0 \rightarrow 1$  à  $k = 0$ ). Néanmoins la transition  $0 \rightarrow 1$  en modulation d'amplitude est interdite à  $k = 0$ , ce que confirme l'image après ToF : seuls des atomes thermiques peuplent les nuages latéraux. En revanche, en continuant à augmenter la fréquence finale  $\nu_f$ , nous excitons la transition  $0 \rightarrow 2$  attendue à 16.7 kHz pour  $k = 0$ , qui, elle, n'est pas protégée par une règle de sélection. Par conséquent, la deuxième image d'absorption montre clairement des atomes condensés dans les nuages excités.

De manière plus quantitative, nous pouvons suivre les populations relatives dans les trois paquets d'atomes, comme montré Fig. 3.10(d). Après une diminution du nombre d'atomes dans le nuage central (et corrélativement une augmentation dans les nuages latéraux) tant que  $\nu_f < 11.8$  kHz, les populations restent constantes lorsque les fréquences utilisées correspondent au gap entre les bandes 1 et 2 ( $11.8$  kHz  $<$   $\nu_f <$  16 kHz). À partir de  $\nu_f = 16$  kHz, une forte diminution du nombre d'atomes dans l'ordre central est observée, ce qui correspond à la chute du nombre d'atomes condensés due à la transition autorisée à  $k = 0$ .

Ainsi, la baisse initiale du nombre d'atomes dans le nuage central, tant que nous n'avons pas excité la transition interbande  $0 \rightarrow 2$  autorisée à  $k = 0$ , traduit le transfert vers la bande  $n = 1$  d'atomes thermiques de plus grand quasi-moment. Les atomes restant, dans le nuage au centre de l'image, correspondent à des atomes dont le quasi-moment est proche de zéro et qui sont protégés de la modulation. Cette première expérience montre qu'il est donc possible d'exciter seulement les atomes thermiques tout en protégeant les atomes les moins énergétiques, dans ce cas la fraction condensée du nuage, grâce aux règles de sélection.

### 3.3.3 Refroidissement dans le réseau

Afin de montrer un effet de refroidissement, nous avons utilisé des excitations vers des bandes plus hautes en énergie. Nous avons chargé dans un réseau optique de profondeur  $s = 2.2$  un nuage partiellement condensé de température initiale  $T = 130$  nK, mesurée grâce à la fraction thermique du nuage.

Considérons la bande fondamentale de la structure de bandes, dans la limite où  $s$  tend vers 0. En prenant  $E_{k=0}^{(n=0)} = 0$ , la hauteur de la bande est simplement :

$$\Delta E^{(n=0)} = E_{k=k_L/2}^{(n=0)} - E_{k=0}^{(n=0)} = \frac{\hbar^2(k_L/2)^2}{2m} = \frac{h^2}{8md^2}. \quad (3.20)$$

Cette largeur correspond à une température de  $T = \Delta E^{(n=0)}/k_B = 97$  nK. En chargeant un nuage de température  $T = 130$  nK dans le réseau optique, nous peuplons ainsi complètement la bande fondamentale, et partiellement la première bande excitée.

Nous utilisons pour cette expérience les fréquences de modulation suivantes :  $\nu_i = 25$  kHz et  $\nu_f$  que nous faisons varier dans l'intervalle [27; 37.5 kHz]. Les transitions associées à ces fréquences sont représentées Fig. 3.11. Nous y distinguons les transitions résonantes avec les atomes de la bande fondamentale  $n = 0$  d'une part, et avec les atomes de la première bande excitée  $n = 1$  d'autre part :

- Si nous considérons comme bande de départ la bande fondamentale (Fig. 3.11(a)), ce choix de fréquence de modulation permet d'exciter la transition  $0 \rightarrow 3$ , dont la composante à  $k = 0$  est protégée par les règles de sélection, tant que  $\nu_f < 36.3$  kHz. Au-delà de cette valeur, la modulation est transitoirement résonante avec la transition  $0 \rightarrow 4$  qui elle est autorisée à  $k = 0$ .
- Si nous considérons comme bande de départ la première bande excitée (Fig. 3.11(b)), la modulation est résonante avec la transition  $1 \rightarrow 4$  sur une partie seulement de la 1<sup>ère</sup> zone de Brillouin, soit  $-0.3 < k/k_L < 0.3$ .

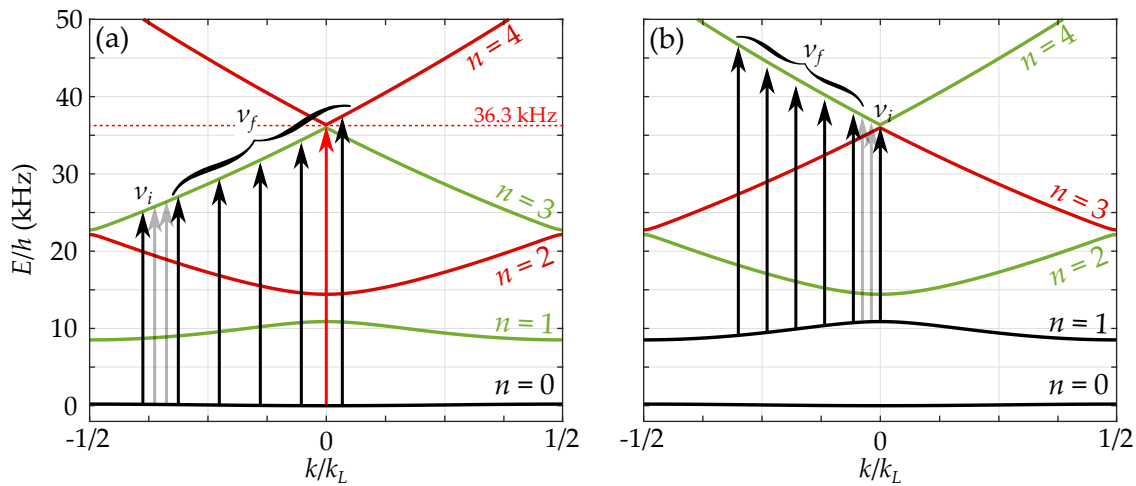
Les autres paramètres de modulation sont  $\varepsilon_0 = 0.37$ ,  $t_{\text{mod}} = 10$  ms et  $t_{\text{hold}} = 30$  ms.

Notons que ce choix de transition, compte-tenu de la profondeur du réseau, limite la protection de la classe d'atomes à  $k = 0$  par les règles de sélection car les fréquences des transition  $0 \rightarrow 3$  et  $0 \rightarrow 4$  à quasi-moment nul sont très proches. Néanmoins, nous avons constaté que :

- Si nous transférons les atomes vers la bande  $n = 3$ , celle-ci est suffisamment haute pour que nous puissions facilement séparer atomes excités et atomes au repos avec le déchargement adiabatique.
- Si nous voulons avoir un écart plus grand entre les bandes  $n = 3$  et  $n = 4$  nous devons aller vers de plus grandes profondeurs du réseau. Par exemple, pour avoir une différence d'au moins 3 kHz entre ces deux bandes il nous faut une profondeur  $s > 7.2$ . Or nous avons constaté que pour de telles profondeurs, la fraction d'atomes thermiques que nous arrivions à transférer vers les bandes excitées diminuait pour une amplitude de modulation constante. Si nous augmentons cette amplitude, nous observons alors plutôt du chauffage.

Ce choix de paramètres résulte donc d'un compromis auquel nous avons abouti expérimentalement.

Après déchargement du réseau et maintien dans le piège hybride décomprimé, nous obtenons à nouveau trois nuages. Nous n'analysons que le nuage central, c'est-à-dire les atomes qui n'ont pas été excités par la modulation, afin d'extraire à partir d'un ajustement bimodal standard le nombre d'atomes thermiques, le nombre d'atomes condensés ainsi que la température du nuage. Ces grandeurs sont tracées en fonction de la fréquence finale de modulation sur la Fig. 3.12. Nous avons également pris un ensemble de données pour lequel la modulation est remplacée par un temps de maintien dans le réseau de

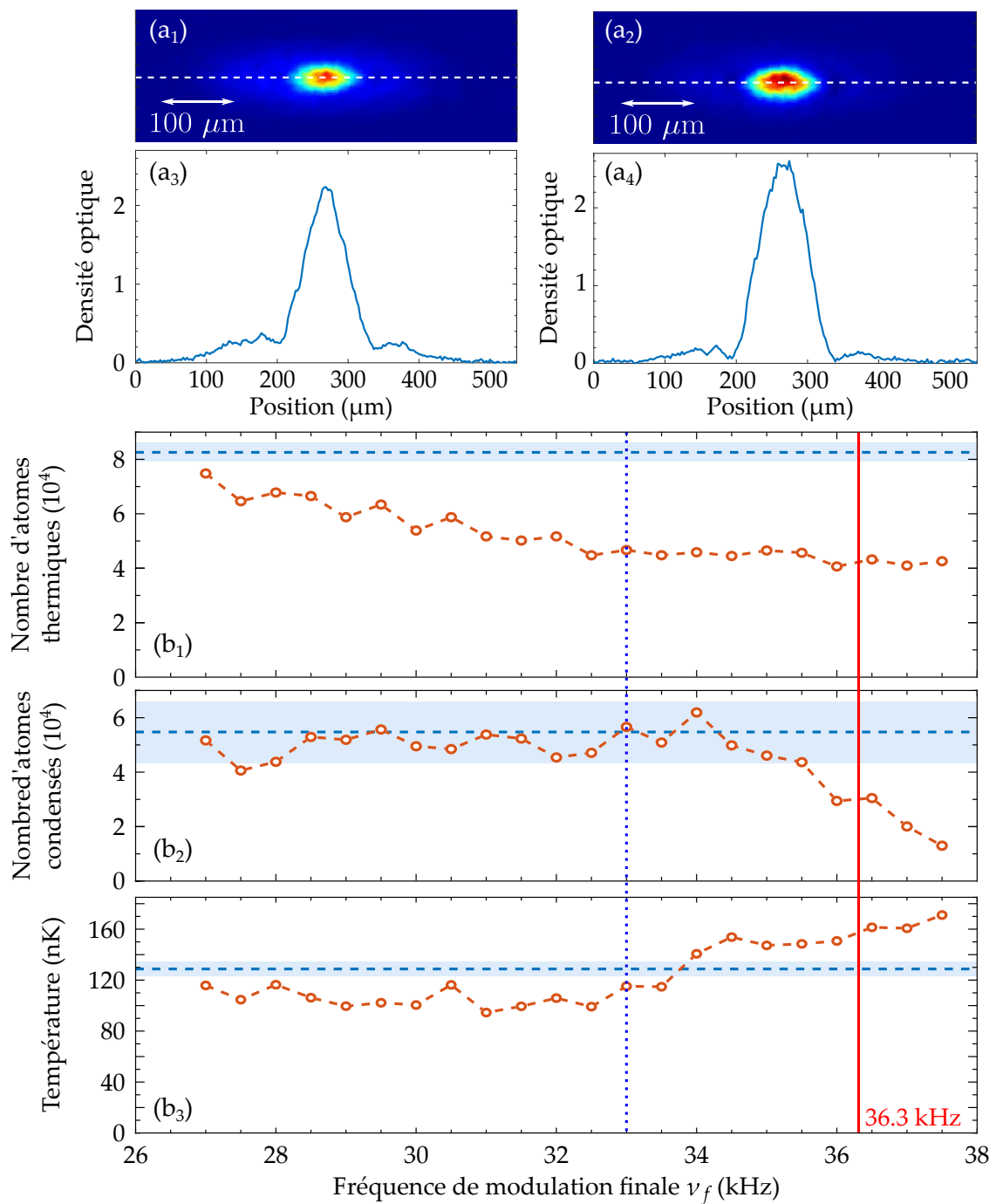


**FIGURE 3.11 | Transitions interbandes utilisées dans l'expérience de refroidissement dans le réseau optique.** Nous indiquons la structure de bandes pour un réseau de profondeur  $s = 2.2$ , sur laquelle sont représentées les résonances excitées par la vobulation. Nous excitons des transitions interbandes à partir (a) de la bande fondamentale  $n = 0$  et (b) de la première bande excitée  $n = 1$ . Sur les deux structures de bandes, les bandes vertes (resp. rouges) correspondent aux bandes dont la transition est interdite (resp. autorisée) à  $k = 0$  depuis la bande de départ considérée. Par un souci de lisibilité nous n'avons représenté que les transitions pour des valeurs négatives du quasi-moment. Sur (a) la transition autorisée  $0 \rightarrow 4$  à  $k = 0$ , dont la fréquence associée est  $36.3 \text{ kHz}$ , est représentée par une flèche rouge.

durée équivalente, afin de nous assurer que seule la modulation est à l'origine des effets observés.

En comparant les images d'absorption obtenues avec et sans modulation (Fig 3.12(a)), nous constatons que la modulation affecte bien les ailes thermiques du nuage, qui semblent grandement réduites, sans pour autant modifier la partie condensée. Cela est confirmé par les mesures des populations thermiques et condensées montrées Fig 3.12(b), pour  $\nu_f < 34 \text{ kHz}$ . En augmentant la fréquence finale de modulation, de plus en plus d'atomes thermiques sont résonants avec la modulation. Ils sont alors promus sur une bande supérieure et filtrés par le déchargement du réseau. Ainsi, le nombre d'atomes dans la partie thermique décroît continument avec  $\nu_f$  jusqu'à être quasiment divisé par deux par rapport au nombre d'atomes thermiques mesuré sans modulation. Ce n'est pas le cas de la fraction condensée, dont le nombre d'atomes reste constant et comparable aux expériences de référence sans modulation. Nous démontrons de cette manière que nous pouvons extraire les atomes les plus énergétiques du réseau optique : il s'agit bien d'un filtrage par classe de vitesse.

Nous mesurons également la température des atomes grâce à la fraction thermique. Nous constatons que pour  $\nu_f < 34 \text{ kHz}$  la température obtenue avec modulation du réseau optique est systématiquement inférieure à celle mesurée en l'absence de modulation : la diminution observée est d'environ 20%.



**FIGURE 3.12** | Résultats expérimentaux de refroidissement dans l'espace réciproque d'un nuage partiellement condensé. (a) Images d'absorption et leurs coupes selon les traits blancs obtenues sans modulation (a<sub>1</sub>-a<sub>3</sub>) et avec modulation pour  $\nu_f = 33$  kHz (a<sub>2</sub>-a<sub>4</sub>). (b) Mesure du nombre d'atomes thermiques, du nombre d'atomes condensés et de la température en fonction de la fréquence finale  $\nu_f$  utilisée pour la modulation. Les points oranges correspondent aux mesures obtenues avec la modulation. Ces résultats sont à comparer aux mêmes grandeurs obtenues sans modulation, dont nous avons représenté la moyenne (tirets bleus) et l'écart-type (aire bleue). Les tirets bleus verticaux indiquent le point représenté en (a<sub>2</sub>-a<sub>4</sub>). La ligne rouge verticale, placée à 36.3 kHz, correspond à la fréquence de la transition  $0 \rightarrow 4$  autorisée à  $k = 0$ .

L'effet des règles de sélection est à nouveau vérifiée avec cette expérience. Pour cette profondeur, la transition  $0 \rightarrow 4$  autorisée à  $k = 0$  a lieu à 36.3 kHz. Lorsque la fréquence finale de modulation approche cette valeur (c'est-à-dire pour  $\nu_f \geq 34$  kHz), nous voyons clairement que la partie condensée est drastiquement dépeuplée. Puisque la modulation enlève dans ce cas des atomes ayant moins d'énergie que l'énergie moyenne, la température est nécessairement impactée et il s'ensuit un chauffage du nuage : nous mesurons une augmentation de la température de 30% lorsque la résonance est atteinte.

Toutes ces observations suggèrent donc que notre protocole de filtrage dans l'espace réciproque s'accompagne également d'un processus de rethermalisation, qui repose vraisemblablement sur des collisions à deux corps. Il faut néanmoins garder en tête que le gaz n'est probablement pas à l'équilibre thermique au moment où nous effectuons le ToF, et que la mesure de la température consiste plutôt en une mesure "instantanée" à un moment donné du processus de refroidissement. Pour s'assurer du retour à l'équilibre thermique, un développement théorique plus complet est nécessaire afin d'estimer les taux de collisions. Le protocole expérimental pourra être amélioré en conséquence.

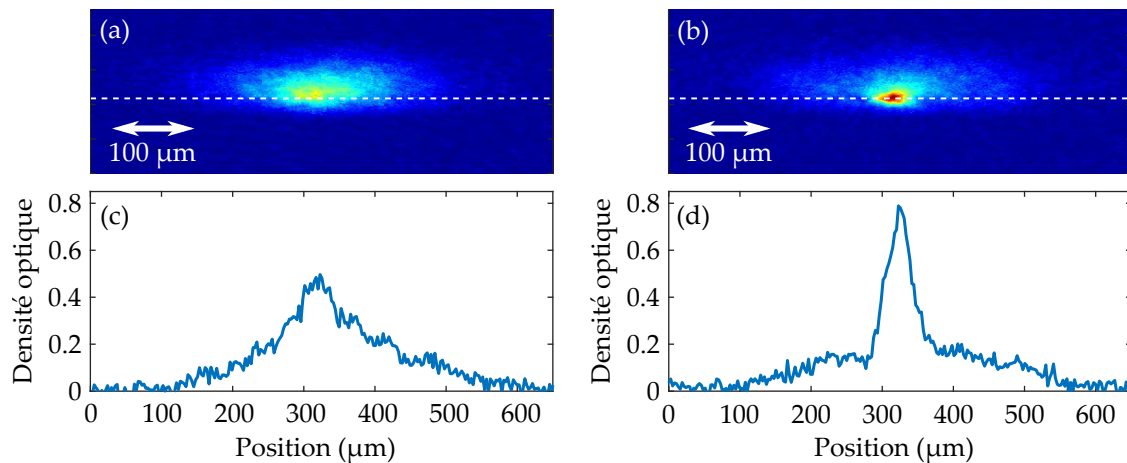
### 3.3.4 Vers la condensation de Bose-Einstein

Puisque nous venons de démontrer que notre protocole permettait à la fois filtrage et rethermalisation, nous avons voulu vérifier s'il y avait un gain de densité dans l'espace des phases. Nous avons donc essayé, comme preuve de principe, de condenser un nuage purement thermique en appliquant notre protocole.

Pour cela, nous avons arrêté l'évaporation du nuage dans le piège hybride juste au-dessus du seuil de condensation, puis nous avons enlevé le faisceau dipolaire vertical. Nous démarrons ainsi l'expérience avec un nuage thermique constitué de  $7 \times 10^4$  atomes à une température de  $T = 160$  nK dans le piège hybride de fréquence  $\nu_{\text{ext}}^{(1)} = 4$  Hz. Nous appliquons ensuite le protocole de refroidissement complet (chargement, modulation, déchargement, maintien dans le piège hybride décomprimé) dans un réseau de profondeur  $s = 1.8$  et avec les paramètres de modulation suivants :  $t_{\text{mod}} = 10$  ms,  $\varepsilon_0 = 0.32$ ,  $\nu_i = 25.7$  kHz et  $\nu_f = 33.9$  kHz. La profondeur et les fréquences utilisées étant relativement similaires à la section précédente, les transitions interbandes impliquées sont celles déjà indiquées sur la Fig. 3.11, soit les transitions  $0 \rightarrow 3$  et  $1 \rightarrow 4$ . Le temps de maintien est de  $t_{\text{hold}} = 25$  ms, plus court que le quart de période de l'oscillation dans le piège hybride décomprimé estimé à  $T/4 \approx 60$  ms. Enfin nous prenons une image d'absorption après un ToF de 25 ms. Afin de confirmer l'effet de la modulation, nous répétons le protocole à l'identique sauf pour l'étape de modulation, qui est remplacée par un maintien d'un temps équivalent dans le réseau. Nous nous assurons ainsi que la modulation est bien à l'origine des résultats observés Fig. 3.13.

Nous voyons sur les images d'absorption un pic de densité apparaître lorsque nous appliquons la modulation, caractéristique d'une condensation partielle du nuage. Nous mesurons  $2.8 \times 10^3$  atomes condensés et  $5.6 \times 10^4$  atomes thermiques dans l'exemple présenté Fig. 3.13.

Insistons sur le fait que les deux protocoles, avec et sans modulation, sont identiques. En particulier, nous observons la condensation partielle du nuage dans un potentiel harmonique similaire, à savoir le piège hybride décomprimé. Il ne peut donc pas s'agir



**FIGURE 3.13** | Résultats expérimentaux de refroidissement dans l'espace réciproque d'un nuage au seuil de condensation. (a) et (b) Images d'absorption obtenues respectivement sans et avec modulation. Les coupes respectives selon les tirets blancs sont indiquées en (c) et (d).

d'une condensation par augmentation de la température critique grâce au confinement extérieur, mais bien d'une diminution de la température du nuage. Néanmoins, le nuage étant juste au-dessus du seuil de condensation avant le protocole de refroidissement, de légères fluctuations pourraient être envisagées comme responsables de cette condensation partielle. Pour nous assurer de l'effet du protocole et tenir compte d'une éventuelle dérive lente de l'expérience, nous avons répété les mesures en alternant les cas avec et sans modulation. Nous n'avons observé de gain de densité marqué que sur les images obtenues après modulation.

Cette méthode s'inscrit dans l'effort de la communauté pour trouver des techniques de refroidissement de plus en plus poussées. Citons par exemple :

- Les travaux accomplis depuis les années 2000 pour produire un condensat dans un piège tout optique, *via* une évaporation forcée [BARRETT *et al.* (2001) et HUNG *et al.* (2008)] ou encore en exploitant des raies atomiques étroites (atome de strontium [STELLMER *et al.* (2013)]).
- Il existe également d'autres techniques permettant de refroidir directement dans un réseau optique, en exploitant l'anharmonicité des puits du réseau [POLI *et al.* (2002)] ou en appliquant la technique de refroidissement Raman par bande latérale [HAMANN *et al.* (1998), VULETIĆ *et al.* (1998), HAN *et al.* (2000) et KERMAN *et al.* (2000)], récemment démontrée dans un piège dipolaire [URVOY *et al.* (2019)]. Cette dernière technique ne repose plus sur l'évaporation des atomes, mais exploite cette fois-ci leur structure interne. C'est ce qui a permis d'atteindre la dégénérescence quantique d'atomes de rubidium 87 dans un piège tout optique [HU *et al.* (2017)]. En se passant d'évaporation, on évite la perte d'atomes et on obtient en général des protocoles plus rapides. Cela se fait au détriment de l'aspect générique, puisqu'on repose alors sur les niveaux atomiques propres à chaque espèce.
- Le piégeage cohérent de population sélectif en vitesse [ASPECT *et al.* (1988)], dont notre méthode rappelle certains aspects. Cette autre technique de refroidissement repose sur l'accumulation des atomes dans un état noir correspondant à une vitesse



---

nulle. On retrouve là l'idée de protection d'une certaine classe de vitesse vis-à-vis du protocole de refroidissement.

### 3.4 Conclusion

Ce troisième chapitre m'a permis de présenter un premier ensemble de résultats expérimentaux, obtenus par modulation périodique des paramètres du réseau optique pour des fréquences résonantes avec la structure de bandes et en l'absence de chaos. Ces travaux ont fait l'objet de deux publications [ARNAL *et al.* (2019) et CABRERA-GUTIÉRREZ *et al.* (2019)].

Nous avons établi en début de chapitre les règles de sélection des transitions interbandes qu'une telle modulation peut induire. Nous avons ensuite effectué la spectroscopie de la structure de bandes pour différentes profondeurs du réseau optique, en appliquant une modulation de la position ou de la profondeur du réseau. Cette étude a été l'occasion de montrer la complémentarité des deux types de modulation, mais également d'expliquer l'effet du confinement extérieur sur la largeur des résonances observées en considérant l'effet combiné du confinement et des interactions interatomiques. Les outils alors mis en place ont servi dans un deuxième temps à proposer et valider un nouveau protocole de refroidissement par évaporation dans l'espace réciproque. Cette technique repose sur un filtrage dans l'espace des impulsions : nous excitons les atomes les plus énergétiques vers des bandes supérieures, tout en exploitant les règles de sélection pour protéger de la modulation les atomes les moins énergétiques. Nous avons mené des expériences de preuve de principe, où nous observons une réduction de la partie thermique du nuage atomique, une diminution de sa température et même la condensation partielle d'un nuage thermique par cette méthode.

Ces études nous ont permis de valider les dispositifs de contrôle expérimental du réseau optique, ainsi que de tester les premiers effets d'une modulation proche de résonance. Nous reviendrons sur ce régime dans la partie III lorsque nous traiterons de l'effet tunnel assisté par chaos, avec toutefois des gammes de profondeur différentes ainsi que des protocoles adaptés.





# Modulation de phase hors résonance : d'une nouvelle phase quantique à la signature du micro-mouvement

*It doesn't matter if you're the slowest kid in gym class or the fastest man alive, every one of us is running.*

*The Flash* – Saison 1 épisode 3 (2014)  
Épisode réalisé par Jesse Warn

---

## Sommaire

---

- 4.1 Modulation basse fréquence : nucléation d'états alternés 112**
    - 4.1.1 Quelques éléments de théorie 113
      - Hamiltonien de Hubbard* 113
      - Renormalisation du taux tunnel* 116
      - Effet des interactions et prise en compte des fluctuations* 119
    - 4.1.2 Résultats expérimentaux 121
      - Protocole expérimental et grandeur mesurée* 121
      - Cinétique de nucléation des états alternés* 122
      - Formation d'états alternés par transition interbandes* 125
  - 4.2 Modulation haute fréquence : étude statistique d'un Hamiltonien effectif 127**
    - 4.2.1 Hamiltonien effectif : renormalisation du potentiel 129
      - Vérification expérimentale du potentiel moyenné* 129
      - Vérification expérimentale du changement de signe* 133
    - 4.2.2 Étude du micro-mouvement par une analyse statistique 135
      - Description théorique du micro-mouvement* 136
      - Mise en évidence expérimentale du micro-mouvement* 140
      - Retour sur l'asymétrie après quench* 143
  - 4.3 Conclusion 144**
-



Nous nous sommes intéressés, au cours du chapitre précédent, aux deux types de modulation du réseau optique (en amplitude et en phase), dans un domaine de fréquence où la modulation est résonante avec les transitions interbandes. Ce domaine est caractérisé par la fréquence  $\nu_{\text{CdM}}$ , définie au chapitre 2, associée au mouvement du centre de masse de la fonction d'onde lorsque les atomes sont soudainement placés hors d'équilibre dans le réseau optique. Dans ce nouveau chapitre, nous nous consacrons exclusivement à la modulation de phase, cette fois-ci dans les deux domaines hors résonance, soit  $\nu < \nu_{\text{CdM}}$  et  $\nu \gg \nu_{\text{CdM}}$ .

Le forçage temporel de systèmes quantiques est un outil puissant, car il permet d'accéder à de nouvelles propriétés et éventuellement de nouveaux états de la matière [DALIBARD *et al.* (2011) et ECKARDT (2017)]. La physique du système peut être capturée par un Hamiltonien effectif, qui peut mimer un Hamiltonien d'intérêt : c'est le principe de la simulation quantique. Ces techniques sont par exemple utilisées pour créer du magnétisme artificiel [STRUCK *et al.* (2011, 2012) et GÖRG *et al.* (2019)] ou des dimensions synthétiques pour l'étude de propriétés topologiques [PRICE *et al.* (2017)]. Dans ce chapitre, nous étudions deux Hamiltoniens effectifs :

- Dans le cas d'une modulation lente de la phase du réseau optique ( $\nu < \nu_{\text{CdM}}$ ), la dynamique atomique à un corps est bien décrite par un Hamiltonien de Hubbard dont le terme de saut par effet tunnel, ici réel, est renormalisé. Lorsque ce taux tunnel effectif devient négatif, une transition de phase s'opère, les atomes relaxant vers un nouvel état stable appelé état alterné (ou *staggered state*). J'exposerai dans une première section les résultats que nous avons obtenus concernant la dynamique de nucléation de ces états. En particulier, nous avons mis en lumière les deux ingrédients clés de cette transition de phase : le rôle des fluctuations quantiques ou thermiques comme élément déclencheur de la transition, faisant suite à une inversion de la courbure de bande. Comme nous le verrons, cette inversion a d'abord été obtenue dans l'approximation mono-bande, mais également dans un régime de fréquences résonantes avec des transitions interbandes.
- Dans le cas d'une modulation rapide de la phase du réseau optique ( $\nu \gg \nu_{\text{CdM}}$ ), la dynamique des degrés de liberté lents, liés au centre de masse, est obtenue en moyennant le potentiel modulé. Les atomes évoluent alors dans un réseau optique effectif statique dont la profondeur est renormalisée. Je présenterai dans une deuxième section nos résultats expérimentaux qui confirment cet effet, mais également un approfondissement qui permet de rendre compte du micro-mouvement, c'est-à-dire du mouvement des atomes à fréquence rapide et de faible amplitude. Nous avons en effet observé l'influence du micro-mouvement sur les populations des états d'impulsion.

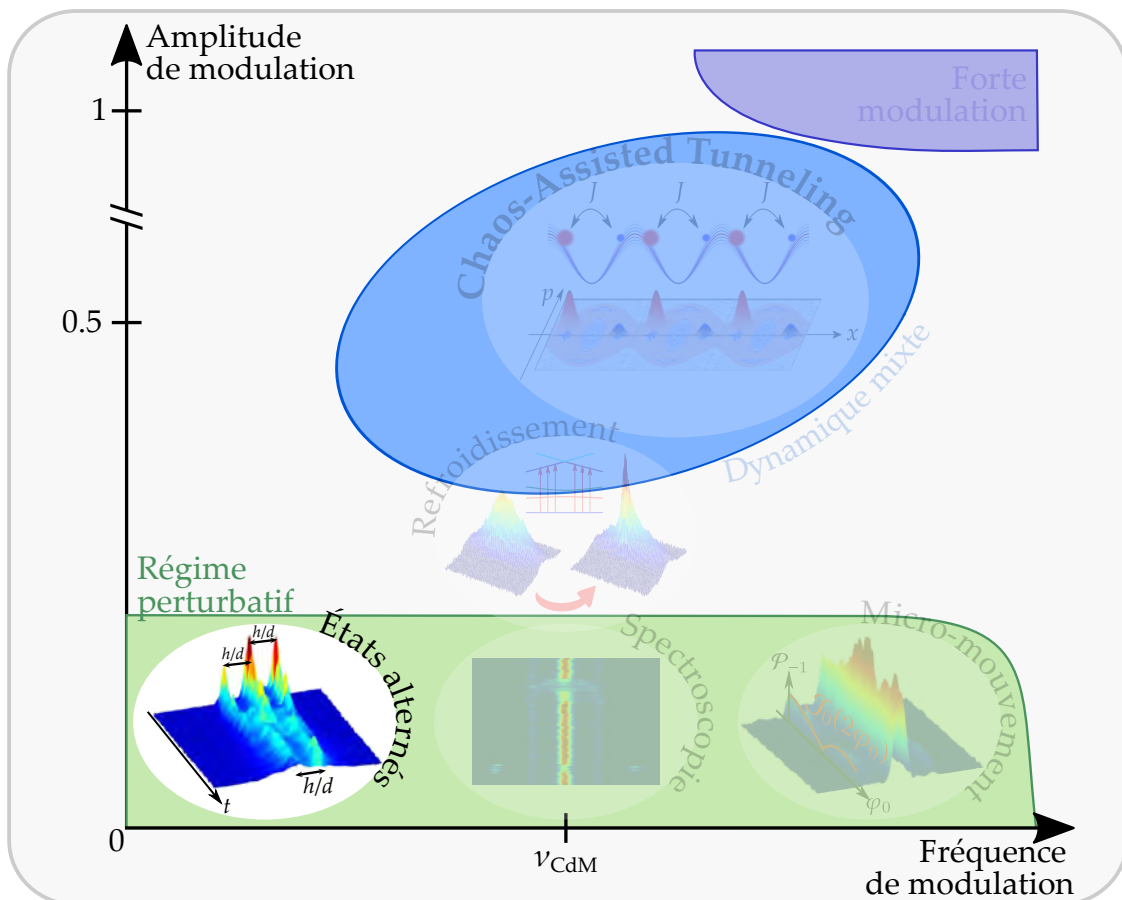
Notons que les travaux de l'équipe concernant ces deux sujets ont débuté bien avant mon début de thèse. Dans un souci d'auto-cohérence, je rappellerai donc les concepts nécessaires à leur compréhension ainsi que les résultats principaux obtenus par l'équipe, mais je me concentrerai principalement sur les approfondissements que nous avons obtenus au cours de ma thèse. Plus de détails sont disponibles dans les manuscrits de mes prédécesseurs [FORTUN (2016) et MICHON (2018)].

Soulignons également que les études présentées dans ce chapitre ont bénéficié de la collaboration avec P. SCHLAGHECK, de l'Université de Liège, pour les développements théoriques ainsi que les simulations numériques.

## 4.1 Modulation basse fréquence : nucléation d'états alternés

Nous considérons dans cette première section la modulation de phase du réseau optique dans un régime où la fréquence de modulation est plus petite que les fréquences de transition interbandes, soit  $\nu < \nu_{\text{CdM}}$ . Étant loin de résonance, la modulation de phase n'induit pas de transitions interbandes et nous pouvons donc restreindre la description du système à la bande fondamentale : il s'agit de l'approximation mono-bande. Dans cette approximation, nous montrerons que la modulation de phase est à l'origine d'une renormalisation du taux tunnel dans le réseau optique.

La possibilité de réduire à souhait le taux tunnel effectif dans des réseaux dépendants du temps, jusqu'à éventuellement l'annuler (destruction cohérente de l'effet tunnel) [KIERIG *et al.* (2008)], a fourni à la communauté des gaz quantiques de nouveaux moyens pour contrôler les ondes de matière. Ce nouveau type de contrôle a ainsi permis de revisiter la transition superfluide/isolant de Mott, d'abord théoriquement [ECKARDT *et al.* (2005) et CREFFIELD et MONTEIRO (2006)] puis expérimentalement [ZENESINI *et al.* (2009)]. Cette renormalisation peut également conduire à un taux tunnel effectif négatif : dans ce cas, le système est mis hors équilibre et relaxe vers un nouvel état dit état alterné (ou *staggered state*). La nucléation d'états alternés a été observée pour la première fois dans le courant des années 2000, d'abord dans l'équipe de S. CHU [GEMELKE *et al.* (2005)], puis dans celle d'E. ARIMONDO [LIGNIER *et al.* (2007) et CREFFIELD *et al.* (2010)].



Après avoir rappelé l'origine de la renormalisation du taux tunnel, nous nous intéressons dans la suite à la dynamique de formation des états alternés. En particulier, en comparant nos résultats expérimentaux à des simulations numériques obtenues en allant au-delà du champ moyen, nous avons mis en lumière le rôle des fluctuations, quantiques ou thermiques, comme élément déclencheur de la transition vers les états alternés. Nous avons également observé leur nucléation dans un régime où l'approximation mono-bande n'est plus valable. Ces résultats permettent de mieux comprendre les mécanismes fondamentaux mis en œuvre lors de la formation de ces nouveaux états quantiques.

#### 4.1.1 Quelques éléments de théorie

##### *Hamiltonien de Hubbard*

Nous rappelons ici en quelques équations la démarche pour obtenir l'Hamiltonien de Hubbard, qui permet de décrire le déplacement des atomes au sein d'une seule bande du réseau optique par effet tunnel. Nous nous plaçons pour l'instant dans le cas à une particule (donc sans interaction) et avec un réseau statique. Nous débutons ainsi avec l'Hamiltonien initialement rencontré au chapitre 2 :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(x), \quad (4.1)$$

où  $V$  désigne le potentiel sinusoidal du réseau, de pas  $d$ .

Jusqu'à présent, nous n'avons utilisé que la base des ondes de Bloch  $\{|\psi_k^{(n)}\rangle\}$  pour décrire le condensat. Dans cette partie, nous introduisons une nouvelle base  $\{|w_l^{(n)}\rangle\}$  constituée par les fonctions de Wannier, qui correspondent à des états localisés sur les sites du réseau optique [DALIBARD (2013)]. L'état de Wannier  $|w_l^{(n)}\rangle$ , associé à la  $n^{\text{ème}}$  bande d'énergie et localisé sur le site  $l$  du réseau, est défini en représentation position par :

$$w_l^{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{k_L}} \int_{-k_L/2}^{k_L/2} \psi_k^{(n)}(x) e^{-ildk} dk. \quad (4.2)$$

Nous avons donc deux bases avec lesquelles travailler. Nous associons des opérateurs création et annihilation à chacune de ces bases : les opérateurs  $\hat{a}_{n,k}$  et  $\hat{a}_{n,k}^\dagger$  détruisent et créent des atomes dans l'onde de Bloch  $|\psi_k^{(n)}\rangle$  tandis que les opérateurs  $\hat{b}_{n,l}$  et  $\hat{b}_{n,l}^\dagger$  agissent sur les états de Wannier  $|w_l^{(n)}\rangle$ . En appliquant les relations de changement de base<sup>1</sup>, on trouve les relations suivantes entre ces opérateurs :

$$\begin{cases} \hat{a}_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{k_L}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{ildk} \hat{b}_{n,l}, \\ \hat{a}_{n,k}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{k_L}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{-ildk} \hat{b}_{n,l}^\dagger. \end{cases} \quad (4.3)$$

1. Pour rappel :  $\hat{a}_{n,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle w_l^{(n)} | \psi_k^{(n)} \rangle \hat{b}_{n,l}$ .

L'Hamiltonien rappelé Eq. 4.1 est, par définition, diagonal dans la base des ondes de Bloch, il s'écrit donc également :

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{-k_L/2}^{k_L/2} E_k^{(n)} |\psi_k^{(n)}\rangle \langle \psi_k^{(n)}| dk \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{-k_L/2}^{k_L/2} E_k^{(n)} \hat{a}_{n,k}^\dagger \hat{a}_{n,k} dk\end{aligned}\quad (4.4)$$

en seconde quantification. Nous effectuons alors le changement de base en utilisant les relations 4.3, ce qui nous conduit à l'expression :

$$\hat{H} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{l, l' \in \mathbb{Z}} J_n(l - l') \hat{b}_{n,l'}^\dagger \hat{b}_{n,l} \quad (4.5)$$

où  $J_n(l)$  est défini selon :

$$J_n(l) = \frac{1}{k_L} \int_{-k_L/2}^{k_L/2} E_k^{(n)} e^{ildk} dk. \quad (4.6)$$

L'interprétation physique des termes de l'Hamiltonien Eq. 4.5 est claire : ils décrivent le saut du site  $l$  vers le site  $l'$  d'un atome appartenant à la  $n^{\text{ème}}$  bande d'énergie. La probabilité de ce saut est donnée par le taux tunnel  $J_n(l - l')$ , qui dépend donc à la fois de la distance entre les deux sites et de la bande d'énergie considérée. Remarquons également avec l'Eq. 4.6 que le taux tunnel et le spectre d'énergie sont reliés par une relation de type transformée de Fourier. En inversant cette équation et parce que les couplages tunnels sont ici réels, nous obtenons :

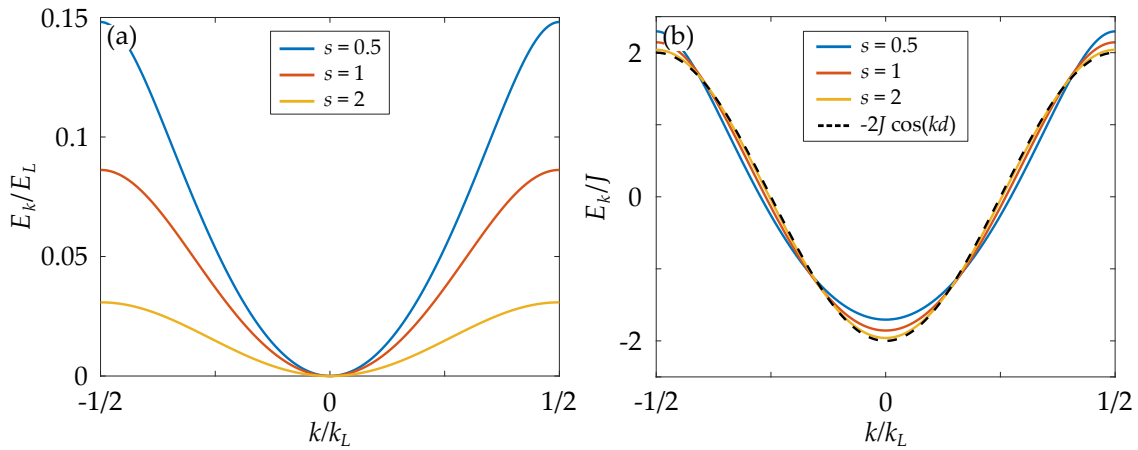
$$\begin{aligned}E_k^{(n)} &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} J_n(l) e^{-ildk} \\ &= J_n(0) + \sum_{l \in \mathbb{N}^*} 2J_n(l) \cos(ldk).\end{aligned}\quad (4.7)$$

À ce stade, nous allons faire deux hypothèses que nous conserverons pour toute la suite, même dans le cas du réseau modulé :

1. Nous nous plaçons dans le régime des liaisons fortes, valable lorsque le réseau est assez profond ( $s \gg 1$ ); dans ce cas le taux tunnel depuis un site  $l$  décroît exponentiellement avec la distance. Nous ne considérerons alors que les sauts vers le premier voisin  $|l' - l| \leq 1$  et prendrons les autres couplages nuls.
2. Comme évoqué en introduction, nous faisons l'approximation mono-bande, en nous limitant à la bande fondamentale  $n = 0$ . Cette hypothèse est vraie tant que la modulation n'induit pas de transition interbandes, c'est-à-dire pour le régime de fréquence  $\nu < \nu_{\text{CdM}}$  que nous considérons pour l'instant<sup>2</sup>. Nous n'indiquons plus dans la suite l'indice de bande.

---

<sup>2</sup>. Nous présenterons par la suite des résultats expérimentaux où nous avons testé les limites de cette hypothèse.



**FIGURE 4.1 | Bande fondamentale  $E_k$  pour différentes profondeurs.** (a) La bande fondamentale, en unités de  $E_L$ , est tracée pour les profondeurs  $s = 0.5$ ,  $s = 1$  et  $s = 2$ . La valeur moyenne de la bande est choisie telle que l'énergie est nulle en  $k = 0$ . (b) Bande fondamentale tracée en unités de  $J$  pour les mêmes profondeurs. Le taux tunnel  $J$  est déterminé grâce à la largeur de la bande, dont la valeur moyenne est ici prise égale à 0. On indique également en tirets noirs l'expression de l'Eq. 4.9 attendue dans le régime des liaisons fortes.

Il n'y a donc plus que les deux contributions  $J_0(0)$  et  $J_0(1)$ . La première contribution consiste en une énergie constante correspondant à la valeur moyenne de la bande fondamentale sur la 1<sup>ère</sup> zone de Brillouin : sa valeur pourra être choisie librement. En définissant un unique couplage tunnel  $J = |J_0(1)| > 0$ , nous réduisons finalement l'Eq. 4.5 à l'Hamiltonien de Hubbard :

$$\hat{H}_H = -J \sum_{l \in \mathbb{Z}} [\hat{b}_l^\dagger \hat{b}_{l+1} + \hat{b}_{l+1}^\dagger \hat{b}_l]. \quad (4.8)$$

La bande fondamentale prend alors la simple forme d'un cosinus :

$$E_k = -2J \cos(kd), \quad (4.9)$$

le minimum d'énergie étant atteint pour  $k = 0$  (puisque  $J$  est positif) et la largeur totale de la bande étant  $\Delta E_k = 4J$ . Nous avons tracé sur la Fig. 4.1(a) la bande fondamentale en unités de  $E_L$  pour plusieurs profondeurs ( $s = 0.5$ ,  $s = 1$  et  $s = 2$ ), en imposant une énergie nulle pour  $k = 0$ . La largeur de la bande  $\Delta E_k$ , et par conséquent le taux tunnel  $J$ , diminue quand la profondeur augmente, ce qui se comprend parfaitement : plus le réseau est profond, plus la barrière de potentiel entre deux sites voisins est haute, réduisant d'autant plus la probabilité de saut d'un atome par effet tunnel.



À partir de la structure de bandes Fig. 4.1(a) nous pouvons évaluer le taux tunnel  $J$ . Il vaut ainsi  $J/h \approx 60$  Hz pour la profondeur  $s = 2$ .

Nous traçons également en Fig. 4.1(b) la bande fondamentale pour ces mêmes profondeurs en unités de  $J$  (dédit de la largeur de la bande), en imposant une énergie moyenne nulle



sur la 1<sup>ère</sup> zone de Brillouin. À mesure que la profondeur du réseau optique augmente la forme de la bande tend vers l'expression Eq. 4.9, justifiant ainsi le régime des liaisons fortes.

### Renormalisation du taux tunnel

Considérons maintenant le réseau modulé en phase<sup>3</sup>, dont le potentiel s'écrit :

$$\begin{aligned} V(x, t) &= -sE_L \cos^2 \left( \frac{\pi x}{d} + \varphi_0 \cos(\omega t) \right) \\ &= -\frac{sE_L}{2} - \frac{sE_L}{2} \cos(k_L x + 2\varphi_0 \cos(\omega t)). \end{aligned} \quad (4.10)$$

En négligeant le premier terme (énergie constante), nous pouvons nous ramener à la forme suivante :

$$V(x - x_0(t)) = -\frac{sE_L}{2} \cos(k_L(x - x_0(t))) \quad (4.11)$$

où nous avons fait apparaître explicitement le déplacement de la position du réseau grâce à la fonction  $x_0$  :

$$x_0(t) = -\frac{2}{k_L} \varphi_0 \cos(\omega t). \quad (4.12)$$

L'Hamiltonien du système dans le cas du réseau modulé est alors :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(x - x_0(t)) \quad (4.13)$$

et correspond au réseau en mouvement dans le référentiel du laboratoire. Nous pouvons transformer cet Hamiltonien  $\hat{H}$  en un Hamiltonien équivalent  $\hat{\tilde{H}}$  grâce à une transformation unitaire et qui s'interprète simplement comme un changement de référentiel. Nous passons ainsi du référentiel du laboratoire au référentiel en mouvement avec le réseau optique. Nous ne détaillons pas ici cette transformation, explicitée dans [DALIBARD (2013)], nous donnons simplement le résultat :

$$\hat{\tilde{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(x) - F(t)\hat{x} \quad (4.14)$$

avec  $F(t) = -m\ddot{x}_0(t)$ . Il s'agit là d'un résultat remarquable : le réseau optique en mouvement dans le référentiel du laboratoire correspond, dans le référentiel associé au réseau, à un réseau optique statique auquel s'ajoute une force d'inertie  $F$  dépendante du temps. Contrairement à l'Hamiltonien de départ  $\hat{H}$ , ce nouvel Hamiltonien  $\hat{\tilde{H}}$  n'est plus invariant par translation discrète. Il ne commute donc pas avec l'opérateur translation discrète  $\hat{T}_d$ , et le quasi-moment  $k$  n'est plus conservé au cours du temps dans ce référentiel (voir section 3.1.1). L'évolution temporelle du quasi-moment est dans ce cas donnée par [ECKARDT *et al.* (2009) et DALIBARD (2013)] :

$$k(t) = k_0 + \frac{1}{\hbar} \int_0^t F(t') dt', \quad (4.15)$$

3. Contrairement aux autres parties du manuscrit, nous considérons ici une modulation en cosinus plutôt qu'en sinus. Ceci rend les calculs présentés dans cette section plus simples, mais ne change en rien la physique du système.

où  $k_0$  est le quasi-moment initial. Appliqué à notre modulation de phase, le quasi-moment évolue comme :

$$k(t) = k_0 - \frac{2m\omega}{\hbar k_L} \varphi_0 \sin(\omega t). \quad (4.16)$$

Comment étudier la dynamique d'un tel système ? Ce dernier est ici caractérisé par deux échelles de temps :

1. Le mouvement intersite des atomes dans le réseau optique *statique* est décrit par des sauts par effet tunnel d'un site à l'autre. Le couplage tunnel  $J$  fournit donc un premier temps caractéristique du mouvement des atomes entre les sites du réseau en l'absence de modulation. Nous avons vu précédemment que la fréquence associée à ce couplage est de l'ordre de  $\approx 50$  Hz.
2. Le forçage temporel impose un deuxième temps d'évolution caractéristique, que l'on retrouve par exemple dans le défilement du quasi-moment (Eq. 4.16) lorsque le réseau est modulé en phase. La fréquence de modulation  $\nu$  est de l'ordre  $\approx 1$  kHz.

Nous avons donc  $J/h \ll \nu$  : une telle séparation des échelles de temps permet de moyennner l'évolution due à l'effet tunnel sur une période de la modulation rapide de phase. Ainsi, l'évolution moyenne dans le réseau modulé est similaire à la dynamique dans le réseau statique pour peu que l'on remplace la relation de dispersion de la bande fondamentale par sa moyenne temporelle [ECKARDT *et al.* (2009)] :

$$\tilde{E}_{k_0} = \langle E_{k(t)} \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T -2J \cos(k(t)d) dt. \quad (4.17)$$

La fonction de Bessel  $\mathcal{J}_0$  de première espèce d'ordre zéro peut s'écrire :

**i**

$$\mathcal{J}_0(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\xi \sin(x)) dx. \quad (4.18)$$

En utilisant l'identité ci-dessus et en posant :

$$\xi = \frac{2md\omega\varphi_0}{\hbar k_L} = 2\pi\varphi_0 \frac{h\nu}{E_L}, \quad (4.19)$$

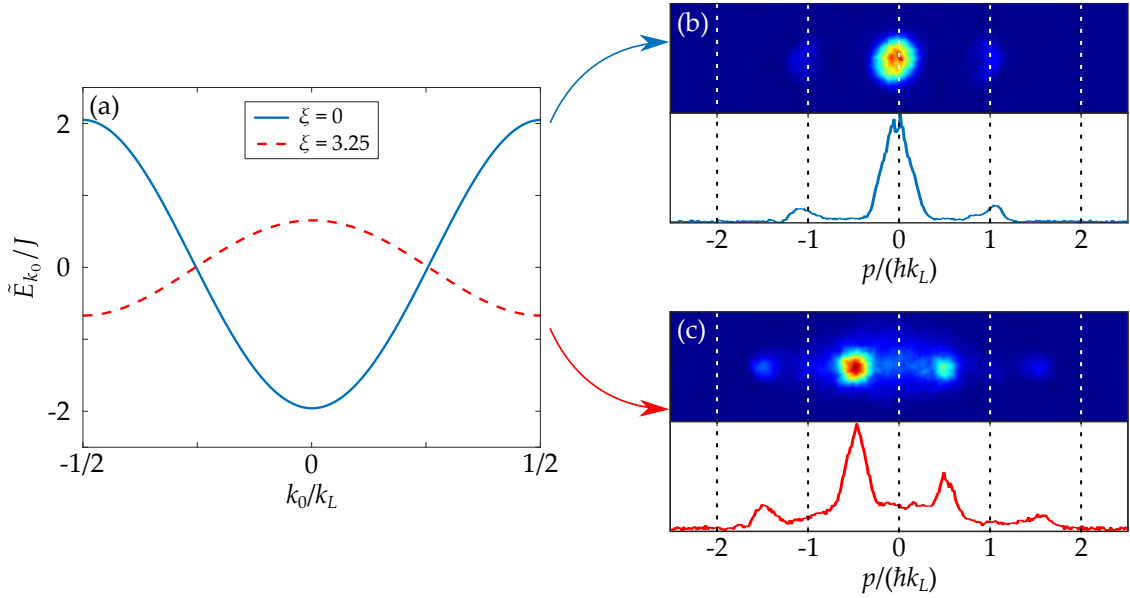
nous effectuons l'intégration Eq. 4.17 en incluant l'expression du quasi-moment Eq. 4.16. Nous obtenons finalement :

$$\tilde{E}_{k_0} = -2J \mathcal{J}_0(\xi) \cos(k_0 d). \quad (4.20)$$

Cette expression de la bande fondamentale moyennée sur une période de modulation est similaire à celle obtenue dans le cas du réseau non modulé, si on considère un taux tunnel effectif :

$$J_{\text{eff}} = J \mathcal{J}_0(\xi). \quad (4.21)$$

En modifiant les paramètres de modulation (amplitude  $\varphi_0$  et fréquence  $\nu$ ), on peut donc modifier la valeur du taux tunnel effectif. Trois situations émergent alors :



**FIGURE 4.2 | Inversion de la courbure de la bande fondamentale et résultat sur la distribution en impulsion.** (a) Bande fondamentale, en unités du taux tunnel  $J$ , dans le réseau optique en l'absence de modulation (trait bleu,  $\xi = 0$ ) et en présence de modulation (tirets rouges,  $\xi = 3.25$ ). (b) Image d'absorption (et coupe correspondante) obtenue après ToF lorsque nous chargeons les atomes dans le réseau optique, sans modulation. (c) Image d'absorption (et coupe correspondante) obtenue après ToF lorsque nous chargeons les atomes dans le réseau optique dont nous modulons la phase pendant  $t_{\text{mod}} = 10$  ms, les autres paramètres de modulation étant choisis tels que  $\xi = 3.25$ .

1. Pour  $0 \leq \xi < 2.4$ , nous avons  $0 < \mathcal{J}_0(\xi) \leq 1$  : le taux tunnel effectif reste positif mais son amplitude est diminuée ;
2. Pour  $\xi \approx 2.4$ , le premier zéro de la fonction de Bessel est atteint  $\mathcal{J}_0(\xi) \approx 0$  : l'effet tunnel est supprimé, c'est le phénomène de localisation dynamique [ECKARDT *et al.* (2009)] ;
3. Pour  $2.4 < \xi < 5.5$ , nous avons  $-0.4 < \mathcal{J}_0(\xi) < 0$  : le taux tunnel effectif devient négatif.

C'est ce dernier cas qui nous intéresse. En effet, lorsqu'on change le signe de  $J_{\text{eff}}$  on inverse la courbure de la bande fondamentale, qui ne présente alors plus un seul minimum en  $k = 0$  mais deux minima en  $k = \pm k_L/2$  (voir Fig. 4.2(a)). Cela se traduit dans l'espace des impulsions par de nouveaux pics à  $p = \pm \hbar k_L/2$ , situés à mi-chemin des ordres correspondant au réseau statique. Ces pics sont par exemple visibles sur la Fig. 4.2(c), qui est à comparer au cas statique Fig. 4.2(b). Cette nouvelle figure de diffraction est associée à un nouvel état quantique que l'on qualifie d'état alterné [LIGNIER *et al.* (2007)]. Cette dénomination trouve son origine dans la fonction d'onde du nouvel état fondamental du système : dans le cas où  $J_{\text{eff}} < 0$ , la fonction d'onde de l'état fondamental voit sa phase changer de  $\pi$  de site en site, d'où un signe *alterné* de la fonction d'onde entre sites voisins.

### Effet des interactions et prise en compte des fluctuations

Comme nous l'avons vu en section 3.1.1, la modulation de phase préserve la périodicité du réseau optique, ce qui impose la conservation du quasi-moment<sup>4</sup>. La modulation seule du réseau ne peut donc pas expliquer la présence des états alternés d'impulsion  $p = \pm \hbar k_L/2$ . La symétrie de translation peut cependant être spontanément brisée par les interactions interatomiques, la transition vers les états alternés se faisant dans ce cas par l'intermédiaire de collisions. Plutôt que de considérer l'Hamiltonien de Hubbard Eq. 4.8, nous rendons compte des interactions avec l'Hamiltonien de Bose-Hubbard :

$$\hat{H}_{\text{BH}} = -J_{\text{eff}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} [\hat{b}_l^\dagger \hat{b}_{l+1} + \hat{b}_{l+1}^\dagger \hat{b}_l] + \frac{U}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \hat{b}_l, \quad (4.22)$$

qui a été comme précédemment moyenné sur une période de modulation,  $\hat{b}_l^\dagger$  et  $\hat{b}_l$  étant les opérateurs (définis auparavant) création et annihilation d'un atome du condensat sur le site  $l$  du réseau. Ici  $J_{\text{eff}}$  désigne toujours le taux tunnel effectif, tandis que  $U$  correspond à l'énergie d'interaction intra-site.

**i**

Précisons que la renormalisation du taux tunnel a été obtenue dans un formalisme à une particule, mais que ce résultat reste valable en présence d'interactions à deux corps [ECKARDT *et al.* (2005) et LELLOUCH *et al.* (2017)].

Dans ce manuscrit, nous avons jusqu'à présent supposé que tous les atomes du condensat étaient dans le même état (ou mode) à une particule : le mode condensé. Cependant, il existe dans le condensat des excitations élémentaires dues aux fluctuations quantiques faisant intervenir les états excités (ou modes excités). Or on peut montrer que l'augmentation de la population des états alternés s'accompagne d'une perte de cohérence [MICHON *et al.* (2018)], signifiant qu'il y a dépeuplement du mode condensé au profit des modes excités. En plus des interactions, nous devons donc également considérer ces excitations élémentaires. Pour les décrire, nous adoptons l'approche de Bogoliubov, valable dans le régime des gaz dilués  $na^3 \ll 1$  (avec  $n$  la densité atomique et  $a$  la longueur de diffusion), et qui va au-delà du champ moyen.

Dans ce formalisme, les excitations élémentaires sont décrites par des quasi-particules, les phonons de Bogoliubov, qui sont une superposition d'une particule dans un état excité et d'un trou dans le mode condensé. Ainsi, même à  $T = 0$ , ces excitations élémentaires sont présentes à cause des fluctuations quantiques et tous les atomes ne sont pas dans le mode condensé : c'est la *déplétion quantique*. On peut néanmoins montrer que le nombre d'atomes en dehors du mode condensé est très faible [COHEN-TANNOUJDI et GUÉRY-ODELIN (2016)]. De manière analogue aux atomes du condensat, on définit les opérateurs  $\hat{\delta}_l$  et  $\hat{\delta}_l^\dagger$  qui, respectivement, annihilent et créent une quasi-particule dans le site  $l$  du réseau.

4. Nous avons démontré la conservation du quasi-moment dans le référentiel du laboratoire. Or nous venons de voir que ce n'était pas le cas dans le référentiel du réseau (Eq. 4.16). On retrouve dans ce référentiel la conservation du quasi-moment si on se limite à une vision "stroboscopique" du système, c'est-à-dire qu'on ne considère que les temps  $t$  tels que  $t = nT$ ,  $n \in \mathbb{N}$  avec  $T$  la période de modulation. Cette propriété est une conséquence du formalisme de Floquet.

Les excitations élémentaires sont alors prises en compte en écrivant par exemple pour l'opérateur  $\hat{b}_l$  :

$$\hat{b}_l(t) = \left( \sqrt{n} + \hat{\delta}_l(t) \right) e^{-i\mu t/\hbar} \quad (4.23)$$

avec  $n$  la densité dans un site du réseau (on suppose que le réseau est peuplé de manière homogène) et  $\mu = -2J_{\text{eff}} + nU$  le potentiel chimique. Le premier terme du membre de droite correspond au seul mode condensé, tandis qu'on inclut les modes excités avec l'opérateur  $\hat{\delta}_l$ . Nous décomposons ce dernier dans l'espace réciproque par :

$$\hat{\delta}_l(t) = \frac{1}{\sqrt{k_L}} \int_{-k_L/2}^{k_L/2} \hat{\Lambda}(k, t) e^{ik \times ld} dk. \quad (4.24)$$

Les opérateurs  $\hat{\Lambda}(k, t)$  décrivent ici le transfert d'un atome d'un mode excité avec le quasi-moment  $k$  vers le mode condensé à  $k = 0$  [CASTIN et DUM (1997)]. On peut en déduire l'évolution au cours du temps de la population des états excités associée au quasi-moment  $k$  par la grandeur  $\langle \hat{\Lambda}^\dagger(k, t) \hat{\Lambda}(k, t) \rangle$ . Ce calcul, détaillé dans [MICHON (2018)], conduit finalement à :

$$\langle \hat{\Lambda}^\dagger(k, t) \hat{\Lambda}(k, t) \rangle = (nU)^2 \left( \frac{\sin(\Omega_k t)}{\Omega_k} \right)^2 \quad (4.25)$$

avec les fréquences

$$\Omega_k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{4J_{\text{eff}}^2 (1 - \cos(kd)) [J_{\text{eff}}^2 (1 - \cos(kd)) + nU]} \quad (4.26)$$

qui forment le spectre de Bogoliubov. Ainsi, lorsque  $\Omega_k$  est positif, nous obtenons les modes d'oscillation collective au sein du condensat, qui se traduisent par un déplacement périodique des atomes entre le mode condensé et les modes excités. Nous nous intéressons pour notre part aux états alternés, caractérisés par  $p = \pm \hbar k_L/2$  soit  $k = \pm \pi/d$ . Le spectre se réduit dans ce cas à :

$$\Omega_{k=\pm\pi/d} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{8J_{\text{eff}}^2 (2J_{\text{eff}} + nU)}. \quad (4.27)$$

On constate à partir de cette expression que si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} J_{\text{eff}} < 0 \\ nU > -2J_{\text{eff}} \end{cases} \quad (4.28)$$

alors  $\Omega_{k=\pm\pi/d}$  devient imaginaire. Dans ce cas, l'Eq. 4.25 décrit une croissance exponentielle des états excités à  $k = \pm \pi/d$  (et corrélativement un dépeuplement exponentiel du mode condensé) : c'est la nucléation des états alternés.

En résumé, lorsqu'il y a inversion du signe du taux tunnel effectif en présence d'interactions, le spectre d'énergie des excitations élémentaires présente des fréquences complexes. Ce mécanisme est à l'origine d'une *instabilité dynamique*, pour laquelle on observe une croissance exponentielle des modes excités même si ceux-ci sont initialement très faiblement peuplés. Cette croissance est la plus forte pour les modes *staggered* à  $k = \pm \pi/d$ , et ce sont les fluctuations quantiques qui sont à l'origine d'un peuplement initial non nul de ces modes.

En revenant à une vision où la courbure de la bande fondamentale est inversée par le changement de signe du taux tunnel effectif, le mécanisme de nucléation consiste en l'interaction de deux atomes du condensat, initialement dans l'état métastable à  $k = 0$ , qui viennent alimenter les états alternés d'impulsions opposées : il s'agit là d'un exemple de mélange à quatre ondes [GEMELKE *et al.* (2005) et CAMPBELL *et al.* (2006)]. Notons également qu'une telle transition de phase par instabilité dynamique se retrouve dans la formation de vortex dans des condensats mis en rotation [HALJAN *et al.* (2001), MADISON *et al.* (2000) et SINHA et CASTIN (2001)].

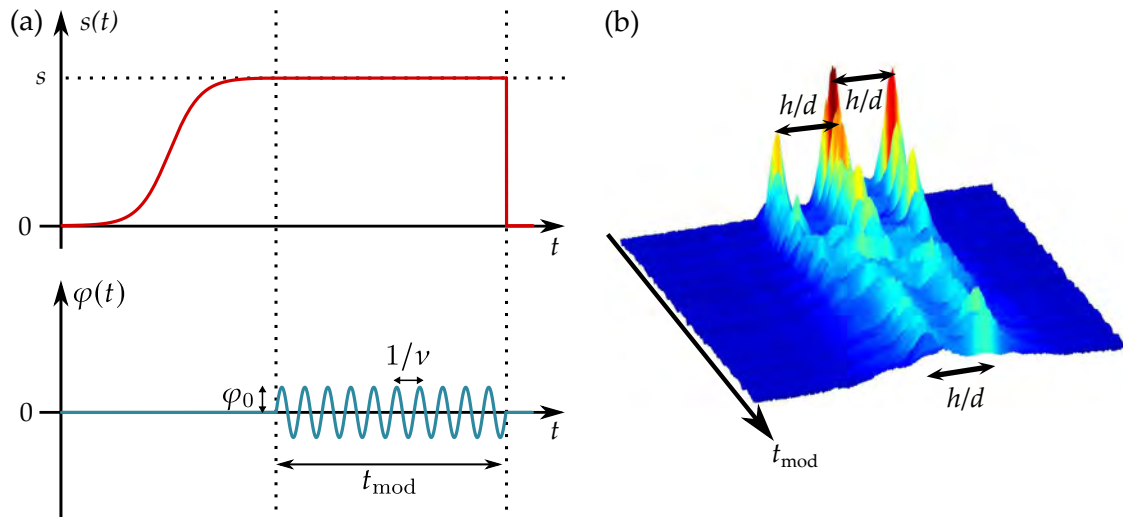
La formation des états alternés n'est pas instantanée mais résulte d'une dynamique. En effet, lorsque nous changeons le signe de  $J_{\text{eff}}$ , les atomes, initialement dans la bande fondamentale à  $k = 0$ , sont soudainement placés dans un état métastable (extremum d'énergie correspondant à un maximum à  $k = 0$ ) et vont relaxer vers les états alternés après un certain temps. Afin d'étudier quantitativement la dynamique de cette nucléation, il nous faut porter une attention particulière aux interactions interatomiques ainsi qu'aux fluctuations quantiques. Nous avons pour cela collaboré avec P. SCHLAGHECK, théoricien à l'Université de Liège et spécialiste de la méthode Wigner tronquée (ou *Truncated Wigner*) [STEEL *et al.* (1998) et SINATRA *et al.* (2002)]. Cette méthode permet d'échantillonner la fonction d'onde du condensat autour de son évolution moyenne et inclut donc les fluctuations quantiques. Les simulations numériques effectuées par cette méthode dans le formalisme de Bogoliubov donnent une prédiction assez fiable du temps de nucléation, qu'une approche de champ moyen (évolution selon l'équation de Gross-Pitaevskii définie section 1.1.3) ne pourrait pas fournir, notamment car elle ne rend pas compte du peuplement initial des modes excités par la déplétion quantique. Nous nous sommes intéressés à la cinétique de nucléation des états alternés en fonction de divers paramètres expérimentaux, tout en comparant nos résultats expérimentaux avec les simulations numériques obtenues par la méthode Wigner tronquée. Ces dernières ont été effectuées à température nulle ( $T = 0$ ), et ne prennent donc en compte que les fluctuations quantiques au sein du nuage et non les fluctuations thermiques. L'ensemble des résultats est présenté dans la sous-section suivante.

#### 4.1.2 Résultats expérimentaux

##### *Protocole expérimental et grandeur mesurée*

Le protocole expérimental utilisé pour étudier la dynamique de formation des états alternés est rappelé Fig. 4.3 : nous chargeons adiabatiquement les atomes dans un réseau de profondeur  $s$ , puis nous enclenchons la modulation de phase. Les paramètres de modulation, que nous contrôlons, sont l'amplitude  $\varphi_0$  et la fréquence  $\nu$ , ainsi que le temps de modulation  $t_{\text{mod}}$  que nous faisons varier pour reconstruire la cinétique. Après modulation nous coupons abruptement tous les pièges pour prendre une image d'absorption après ToF.

Un exemple de résultat expérimental, avec formation d'états alternés, est présenté Fig. 4.3(b) et Fig. 4.4(a). Nous voyons clairement qu'il existe un temps de nucléation : pour des temps de modulation courts nous retrouvons les pics de diffraction associés aux impulsions  $p_j = j\hbar k_L$  ( $j \in \mathbb{Z}$ ) identiques au réseau statique, avant d'observer l'émergence d'ordres intermédiaires, situés en  $p = \pm\hbar k_L/2$ .



**FIGURE 4.3 | Protocole expérimental utilisé pour mesurer la cinétique de formation des états alternés.** (a) Nous chargeons d'abord adiabatiquement les atomes dans le réseau optique de profondeur  $s$ , puis nous modulons périodiquement la phase (c'est-à-dire la position) du réseau, avec une amplitude  $\varphi_0$  et une fréquence  $\nu$ , pendant un temps de modulation  $t_{\text{mod}}$ . Nous coupons ensuite abruptement tous les pièges pour effectuer un ToF. (b) Exemple de formation d'états alternés.

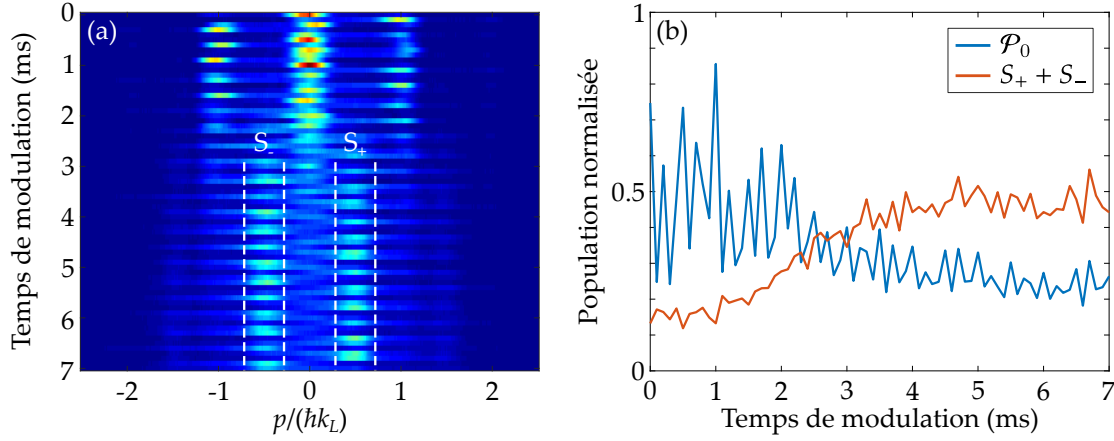
**i** L'oscillation rapide visible sur la distribution en impulsion est une conséquence de la modulation de phase du réseau optique. Pour établir l'Hamiltonien effectif nous avons considéré la dynamique moyennée des atomes dans le référentiel du réseau, dans lequel la distribution en impulsion du système effectif est statique. Ce changement de référentiel s'est fait grâce à une transformation de jauge : si nous appliquons la transformation inverse pour revenir au référentiel du laboratoire (dans lequel sont prises les images expérimentales) nous obtenons une oscillation périodique de la distribution en impulsion.

Pour caractériser la dynamique, nous avons choisi de définir le temps de nucléation comme l'instant à partir duquel les populations des états d'impulsion entière, associés au réseau statique, deviennent moins importantes que celles des états d'impulsion demi-entière, associés à l'état alterné. Pour quantifier ce temps, nous mesurons la population relative  $\mathcal{P}_0$  de l'ordre d'impulsion nulle, ainsi que les populations relatives  $S_+$  et  $S_-$  des états *staggered*. Nous traçons ensuite  $\mathcal{P}_0$  et  $(S_+ + S_-)$  en fonction du temps de modulation, et définissons le temps de nucléation comme le moment où ces deux grandeurs se croisent (voir Fig. 4.4(b)).

#### *Cinétique de nucléation des états alternés*

L'étude complète du temps de nucléation de ce nouvel état quantique a largement été décrite dans la thèse d'E. MICHON [MICHON (2018)]. Nous donnons ici un rappel rapide de ces résultats, résumés sur la Fig. 4.5 et tous obtenus pour une profondeur  $s = 2.6$ .





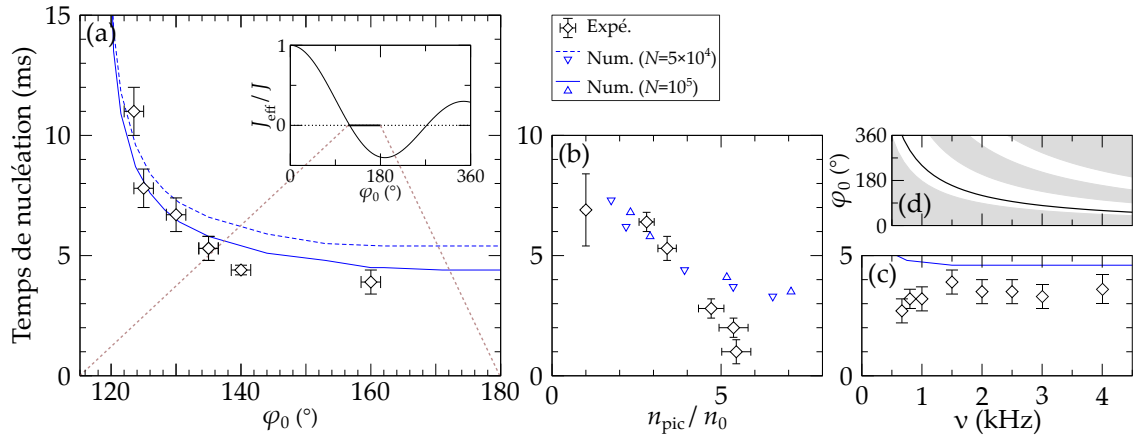
**FIGURE 4.4 | Formation d'états alternés et mesure du temps de nucléation.** (a) Résultat expérimental de formation d'états alternés, obtenus avec un réseau de profondeur  $s = 1.9$ , et des paramètres de modulation  $\nu = 3$  kHz et  $\varphi_0 = 80^\circ$ , correspondant à  $\xi = 3.25$  et  $J_{\text{eff}}/J = -0.33$ . Chaque ligne correspond à une image expérimentale intégrée selon la direction perpendiculaire au réseau et obtenue pour un temps de modulation variable. On définit les populations  $S_+$  et  $S_-$  comme les états d'impulsion demi-entière  $p/(\hbar k_L) = \pm 1/2$ . (b) Évolution de la population de l'ordre central  $\mathcal{P}_0$  et des états alternés ( $S_+ + S_-$ ) en fonction du temps de modulation. On définit le temps de nucléation comme l'instant où ces populations se croisent (environ 2.5 ms ici).

Le premier résultat, visible sur la Fig. 4.5(a), représente le temps de nucléation mesuré expérimentalement lorsque l'amplitude de modulation  $\varphi_0$  est variée, tout en gardant la fréquence de modulation  $\nu = 1.5$  kHz constante. Nous changeons alors l'argument  $\xi$  de la fonction de Bessel, ce qui modifie la valeur du taux tunnel effectif selon l'Eq. 4.21. Les valeurs de  $\varphi_0$  sont choisies telles que  $J_{\text{eff}} < 0$ , et nous nous intéressons particulièrement aux valeurs de  $\xi$  proche du premier zéro de la fonction de Bessel (voir encart de la Fig. 4.5(a)). Ce premier zéro est atteint pour  $\varphi_0^* \approx 118.6^\circ$ . Un développement plus poussé que ce qui a été présenté dans les sections précédentes prévoit une évolution du temps de nucléation comme  $t_{\text{nuc}} \sim (\varphi_0 - \varphi_0^*)^{-1/2}$ , c'est-à-dire une divergence du temps de nucléation à mesure qu'on s'approche de la valeur  $\varphi_0^*$  [MICHON *et al.* (2018)]. C'est bien ce qui est observé expérimentalement, en accord avec les simulations numériques. Ces simulations sont effectuées pour deux nombres d'atomes différents, mais ne montrent pas de différence appréciable à la divergence. De plus, le bon accord entre les points expérimentaux et les simulations numériques suggèrent que les fluctuations thermiques, absentes des simulations, jouent un rôle mineur dans le processus de nucléation pour ce jeu de données.

En modifiant les fréquences du piège dipolaire, et donc le confinement du condensat initial avant chargement dans le réseau, nous pouvons changer la densité atomique intrasite (voir section 3.2.2) et étudier son effet sur la dynamique de nucléation. En utilisant différentes puissances dans les faisceaux dipolaires (horizontal et vertical), nous obtenons des condensats dont la densité au centre du nuage<sup>5</sup> varie entre  $10^{13}$  at/cm<sup>3</sup> et

5. La densité a été caractérisée par un protocole d'imagerie à haute intensité, détaillée dans [REINAUDI (2008) et MICHON (2018)]

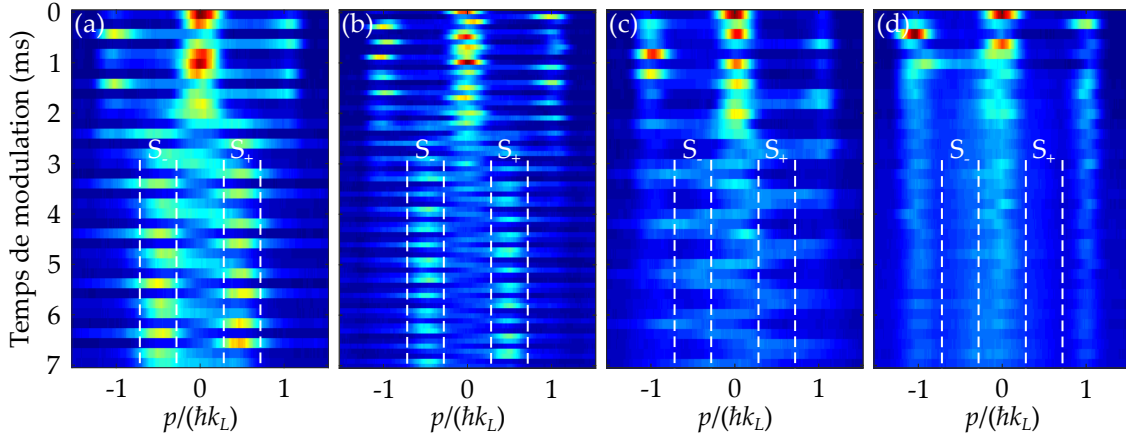




**FIGURE 4.5 | Temps de nucléation des états alternés en fonction de plusieurs paramètres expérimentaux.** Les panneaux (a), (b), et (c) partagent le même axe des ordonnées. Les panneaux (c) et (d) partagent le même axe des abscisses. Nous avons mesuré expérimentalement le temps de nucléation (losanges noirs) en fonction : (a) de l'amplitude de modulation  $\varphi_0$  à fréquence de modulation  $\nu = 1.5$  kHz constante ; (b) de la densité atomique initiale du condensat  $n_{\text{pic}}$  ( $n_0 = 10^{13}$  at/cm<sup>3</sup>) avec  $\varphi_0 = 135^\circ$  et  $\nu = 1.5$  kHz ( $\xi = 2.74$  et  $J_{\text{eff}}/J = -0.16$ ) ; (c) de la fréquence de modulation  $\nu$  en gardant le rapport  $J_{\text{eff}}/J = -0.33$  constant ( $\xi = 3.25$ ), ce qui est obtenu en adaptant également l'amplitude de modulation  $\varphi_0$  selon la courbe noire du panneau (d). Les aires blanches (resp. grises) du panneau (d) indiquent les régions où  $J_{\text{eff}} < 0$  (resp.  $J_{\text{eff}} > 0$ ). Ces résultats expérimentaux sont comparés aux simulations numériques impliquant la méthode Wigner tronquée effectuées pour deux nombres d'atomes différents :  $N = 10^5$  (trait bleu/triangles bleus) et  $N = 5 \times 10^4$  (tirets bleus/triangles bleus inversés). Tous les résultats présentés dans cette figure sont obtenus pour une profondeur de  $s = 2.6$ .

$5.5 \times 10^{13}$  at/cm<sup>3</sup> environ avant chargement dans le réseau optique. Les paramètres de modulation sont  $\nu = 1.5$  kHz et  $\varphi_0 = 135^\circ$  (correspondant à  $\xi = 2.74$  et  $J_{\text{eff}}/J = -0.16$ ). À mesure que la densité augmente la transition s'accélère, ce qui est attendu aussi bien théoriquement que numériquement (voir Fig. 4.5(b)). On remarque toutefois un désaccord pour les plus hautes densités : le temps de nucléation semble saturer sur les simulations numériques alors que nous observons une dynamique de plus en plus rapide sur l'expérience. Les fluctuations thermiques sont à l'origine de ce désaccord : lorsque nous comprimons le condensat pour augmenter la densité, nous chauffons également le nuage. Or la méthode Wigner tronquée est ici effectuée à température nulle, elle n'intègre donc pas les fluctuations thermiques, plus grandes quand la température du nuage augmente. Ce sont ces fluctuations qui sont responsables de l'accélération de la dynamique à haute densité, tandis que les fluctuations quantiques dominent pour les points à faible densité atomique. Nous observons ainsi directement sur ces résultats le rôle des fluctuations comme mécanisme déclencheur dans le processus de nucléation, ainsi que le passage des fluctuations quantiques aux fluctuations thermiques.

Le dernier résultat concernant la dynamique est présenté Fig. 4.5(c). Cette expérience consiste à mesurer le temps de nucléation pour différentes fréquences de modulation  $\nu$  en maintenant l'argument de la fonction de Bessel  $\xi$  constant. Pour cela nous adaptons



**FIGURE 4.6 | Nucléation d'états alternés pour différentes fréquences de modulation à taux tunnel effectif constant.** Images d'absorption, intégrées selon l'axe perpendiculaire au réseau optique, obtenues pour différents temps de modulation dans un réseau de profondeur  $s = 1.9$  et avec les paramètres de modulation : (a)  $\nu = 2$  kHz,  $\varphi_0 = 120^\circ$ , (b)  $\nu = 3$  kHz,  $\varphi_0 = 80^\circ$ , (c)  $\nu = 4$  kHz,  $\varphi_0 = 60^\circ$ , (d)  $\nu = 5$  kHz,  $\varphi_0 = 48^\circ$ . Le taux tunnel effectif est constant et vaut  $J_{\text{eff}}/J = -0.33$ .

l'amplitude de modulation  $\varphi_0$  selon la formule :

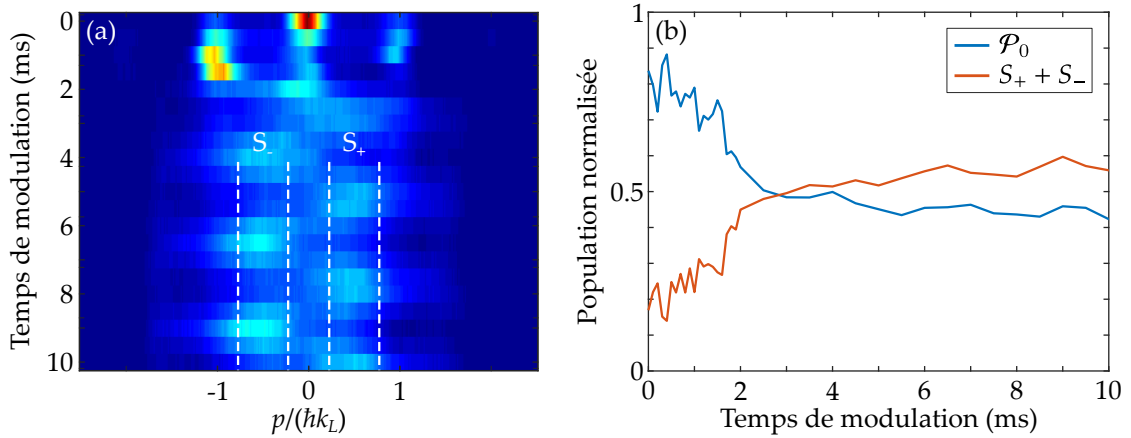
$$\varphi_0 = 160 \times \frac{1.5}{\nu} \quad (4.29)$$

avec  $\varphi_0$  en degrés et  $\nu$  en kilohertz, ce qui assure d'avoir  $\xi = 3.25$  et  $J_{\text{eff}}/J = -0.33$  fixés. La dynamique dans ce cas est inchangée, ce qui est attendu intuitivement puisque le taux tunnel effectif est alors constant. Les temps de nucléation mesurés sont du même ordre de grandeur que le résultat numérique mais sont systématiquement plus courts. À nouveau, les simulations numériques n'incluant que les fluctuations quantiques, elles ne peuvent fournir qu'une borne supérieure au temps de nucléation, la dynamique pouvant être accélérée par des effets thermiques.

#### Formation d'états alternés par transition interbandes

Le développement théorique rapidement rappelé dans la section 4.1.1 précédente repose sur un traitement mono-bande où seule la bande fondamentale est prise en compte. Cette hypothèse est justifiée tant que la fréquence de modulation  $\nu$  est petite devant les fréquences typiques des transitions interbandes, représentés par la fréquence  $\nu_{\text{CdM}}$  définie Eq. 2.39 du chapitre 2. Nous avons voulu tester expérimentalement les limites de cette hypothèse.

Nous avons déjà constaté sur la Fig. 4.5(c) qu'à une profondeur  $s = 2.6$ , correspondant à une fréquence  $\nu_{\text{CdM}} = 8.1$  kHz, nous pouvions nucléer les états alternés jusqu'à une fréquence de modulation  $\nu = 4$  kHz. Nous avons répété une expérience similaire à  $s = 1.9$  (fréquence associée  $\nu_{\text{CdM}} = 6.6$  kHz), avec des fréquences de modulation  $\nu$  égales à 2, 3, 4 et 5 kHz, tout en adaptant l'amplitude de modulation  $\varphi_0$  de sorte à conserver un taux tunnel effectif négatif constant ( $\xi = 3.25$  et  $J_{\text{eff}}/J = -0.33$ ). Les résultats expérimentaux



**FIGURE 4.7 | Nucléation d'états alternés par transition interbande.** (a) Résultat expérimental de nucléation d'états alternés par transition interbande : chaque ligne correspond à une image d'absorption intégrée obtenue en variant le temps de modulation dans le réseau optique. Les paramètres expérimentaux sont  $s = 3.7$ ,  $\varphi_0 = 5^\circ$  et  $\nu = 13.6$  kHz. (b) Population normalisée dans l'ordre 0 et dans les états *staggered* en fonction du temps de modulation. Le temps de nucléation est d'environ 3 ms dans ce cas.

ainsi obtenus sont montrés Fig. 4.6 : si la formation d'états alternés ne fait aucun doute pour  $\nu = 2$  kHz et  $\nu = 3$  kHz, ceux-ci sont bien moins visibles pour  $\nu = 4$  kHz et ne sont pas du tout nucléés avec  $\nu = 5$  kHz. Nous en déduisons une règle empirique, déterminée expérimentalement : la nucléation d'états alternés dans l'approximation mono-bande, c'est-à-dire avec  $J_{\text{eff}} < 0$ , n'a lieu que pour des fréquences de modulation  $\nu \lesssim \nu_{\text{CdM}}/2$ , définissant ainsi la gamme de validité de cette approximation. En d'autres termes, tant que la fréquence de modulation est inférieure à environ la moitié du gap entre la bande fondamentale  $n = 0$  et la première bande excitée  $n = 1$ , nous pouvons limiter notre traitement à la seule bande fondamentale et la nucléation des états alternés a lieu dès qu'on inverse la courbure de cette bande.

D'autre part, nous avons observé expérimentalement une résurgence du phénomène de nucléation dans le régime des transitions interbandes. La Fig. 4.7 montre une telle nucléation pour les paramètres de modulation  $\nu = 13.6$  kHz et  $\varphi_0 = 5^\circ$ , dans un réseau de profondeur  $s = 3.7$  (fréquence associée  $\nu_{\text{CdM}} = 10.6$  kHz). L'amplitude de modulation utilisée est faible, les taux tunnels des différentes bandes sont donc peu modifiés : les bandes possèdent les mêmes courbures que dans le cas du réseau non modulé. La fréquence de modulation est résonante avec la transition  $n = 0 \rightarrow n' = 1$  pour cette profondeur, les atomes sont donc excités vers la première bande excitée qui présente un maximum en  $k = 0$ . On retrouve de cette manière la situation décrite Fig. 4.2 qui rend possible la nucléation des états alternés.

Nous montrons par cette expérience que l'ingrédient clé du phénomène de nucléation est bien *l'inversion de la courbure de bande*. Cette inversion peut être obtenue grâce à la modulation de phase de deux manières distinctes :

- (i) Pour  $\nu \lesssim \nu_{\text{CdM}}/2$ , toute la dynamique peut être restreinte à la bande fondamentale, c'est l'approximation mono-bande. Un choix adapté de fréquence

et d'amplitude de modulation permet de renormaliser le taux tunnel de la bande fondamentale à une valeur négative, ce qui inverse brusquement la courbure de la bande, plaçant les atomes dans un état métastable à  $k = 0$ . Ils relaxent ensuite vers l'état alterné, avec pour élément déclencheur les fluctuations quantiques ou thermiques.

- (ii) Pour  $\nu \sim \nu_{\text{CdM}}$ , plusieurs bandes doivent être considérées pour décrire le système. En particulier, si la modulation est résonante avec la transition  $n = 0 \rightarrow n' = 1$ , les atomes sont transférés vers la première bande excitée. Pour une faible amplitude de modulation, les bandes sont peu perturbées par la modulation et on retrouve les courbures des bandes du réseau statique. La première bande excitée présentant son maximum à  $k = 0$ , les atomes sont à nouveau dans un état métastable et la nucléation peut avoir lieu (à nouveau grâce aux fluctuations).

Notons toutefois que les simulations numériques présentées pour le régime  $\nu \lesssim \nu_{\text{CdM}}/2$  ne peuvent pas être transposées au régime des transitions interbandes  $\nu \sim \nu_{\text{CdM}}$ . En effet, ces simulations sont faites dans l'approximation mono-bande, qui n'est alors plus valide. Des méthodes numériques adaptées, qui n'étaient pas disponibles au moment de ce travail, ont depuis été développées. Elles permettront dans le futur une étude plus complète des mécanismes de nucléation dans ce régime.

## 4.2 Modulation haute fréquence : étude statistique d'un Hamiltonien effectif

Dans cette deuxième section, nous continuons de considérer la dynamique d'atomes placés dans un réseau optique modulé en phase, mais nous nous plaçons dans le régime des grandes fréquences de modulation. Rappelons une nouvelle fois l'Hamiltonien associé :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(x, t) \quad (4.30)$$

où  $V$  désigne le potentiel du réseau modulé, dont nous reprenons l'expression introduite au chapitre 3 :

$$V(x, t) = -\frac{sE_L}{2} - \frac{sE_L}{2} \cos(k_L x + 2\varphi_0 \sin(\omega t)). \quad (4.31)$$

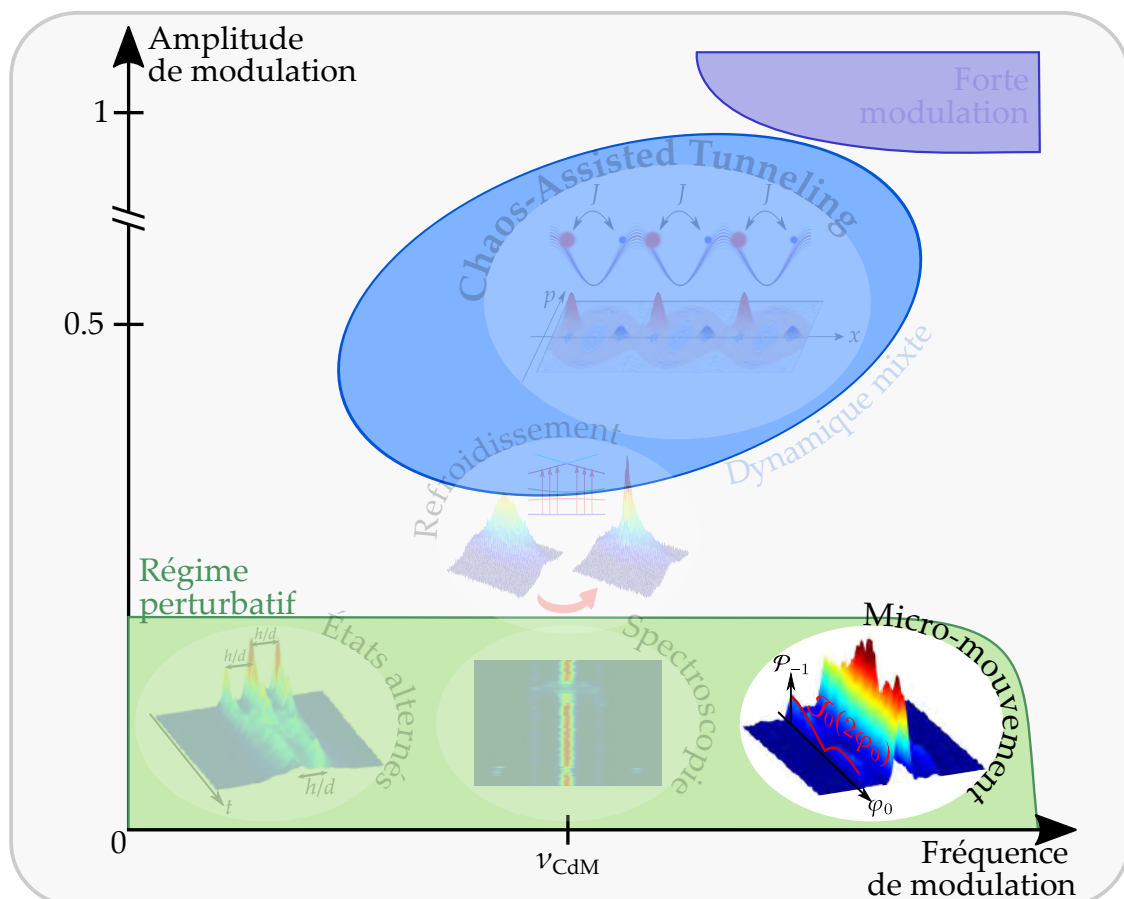
Comme nous l'avons déjà évoqué, nous pouvons définir plusieurs temps caractéristiques pour cet Hamiltonien, avec en particulier :

- Celui associé au mouvement lent des atomes ; il s'agit par exemple du temps d'oscillation du centre de masse de la fonction d'onde après un décalage soudain du réseau. Nous avons vu chapitre 2 que nous pouvons associer la fréquence  $\nu_{\text{CdM}}$  à ce mouvement.
- Un temps caractérisant la modulation du réseau optique, associé à la fréquence  $\nu = \omega/(2\pi)$ . Nous considérerons ici une modulation de phase rapide, c'est-à-dire vérifiant  $\nu \gg \nu_{\text{CdM}}$ . Le temps caractéristique associé se rapporte donc à un mouvement rapide des atomes, appelé *micro-mouvement*.

Nous pouvons faire une nouvelle hypothèse de séparation des échelles de temps, en distinguant les temps caractérisant les degrés de liberté lents et rapides, et qui permet de ne considérer pour le mouvement lent qu'un potentiel moyenné dans le temps.

L'utilisation de potentiels moyennés n'est pas nouvelle : les pièges TOP (*Time-Orbiting Potential*), qui consistent en un piège magnétique tournant, ont été proposés dès 1995 [PETRICH *et al.* (1995)] pour s'affranchir des pertes Majorana lors de l'évaporation forcée et ont permis la première réalisation expérimentale d'un condensat de Bose-Einstein quelques mois plus tard [ANDERSON *et al.* (1995)]. Plus récemment, ces techniques ont par exemple servi à créer des potentiels à géométrie variée pour des atomes froids, pouvant par exemple servir de guide d'ondes de matière [LESANOVSKY et KLITZING (2007) et HENDERSON *et al.* (2009)]. En ce qui concerne notre étude, nous verrons en sous-section 4.2.1 qu'une modulation rapide de la phase du réseau optique induit une renormalisation de sa profondeur. Nous avons vérifié expérimentalement cette renormalisation.

Le formalisme du potentiel moyenné, où l'on considère un Hamiltonien effectif pour les degrés de liberté lents seulement, est suffisant pour rendre compte qualitativement et quantitativement d'un grand nombre d'expériences. Cette approche n'en reste pas moins incomplète, étant donné qu'elle passe sous silence l'effet du micro-mouvement. Ce mouvement rapide, à la fréquence de modulation et de faible amplitude, émerge dans plusieurs domaines : on le retrouve aussi bien dans le piégeage de particules chargées [CIRAC *et al.* (1994) et BERKELAND *et al.* (1998)] qu'au sein de la communauté des atomes froids, où le micro-mouvement a par exemple été étudié dans les pièges TOP [MÜLLER *et al.* (2000)] ainsi que dans des systèmes de Floquet [ANISIMOVAS *et al.* (2015) et DESBUQUOIS *et al.* (2017)]. À l'aide d'une étude statistique, nous avons mis en évidence section 4.2.2 une signature du micro-mouvement dans notre système.



### 4.2.1 Hamiltonien effectif : renormalisation du potentiel

En première approximation, on peut ne considérer pour les degrés de liberté lents qu'un potentiel effectif moyenné. Grâce à cette hypothèse de séparation des échelles de temps, nous remplaçons le potentiel du réseau dépendant du temps Eq. 4.31 par un potentiel effectif indépendant du temps, tel que :

$$V_{\text{eff}}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T V(x, t) dt \quad (4.32)$$

où  $T = 1/\nu$  est la période de la modulation. En réutilisant le développement sur les fonctions de Bessel du potentiel modulé donné Eq. 3.11 du chapitre 3, nous effectuons l'intégrale ci-dessus : tous les termes du développement associés aux transitions interbandes se moyennent à zéro, et il ne reste plus que la contribution de la fonction de Bessel d'ordre zéro. En omettant l'énergie constante  $-sE_L/2$ , le potentiel effectif prend simplement la forme :

$$V_{\text{eff}}(x) = -\frac{s_{\text{eff}}E_L}{2} \cos(k_L x), \quad (4.33)$$

soit un potentiel périodique statique, de profondeur effective  $s_{\text{eff}}$  dont la valeur ne dépend que de l'amplitude de modulation :

$$s_{\text{eff}} = s \mathcal{J}_0(2\varphi_0). \quad (4.34)$$

Nous aboutissons finalement pour les degrés de liberté lents à un Hamiltonien effectif indépendant du temps :

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{s_{\text{eff}}E_L}{2} \cos(k_L x). \quad (4.35)$$

La modulation rapide de la phase a donc pour conséquence, pour le mouvement lent, de renormaliser la profondeur du réseau optique par une fonction de Bessel. Nous pouvons distinguer deux effets :

1. Un changement de la profondeur en valeur absolue, soit  $|s_{\text{eff}}| = s |\mathcal{J}_0(2\varphi_0)|$ ;
2. La fonction de Bessel pouvant prendre des valeurs négatives, nous pouvons également "inverser le signe" de la profondeur effective. Ce changement de signe résulte en une inversion des positions des maxima et des minima du potentiel effectif.

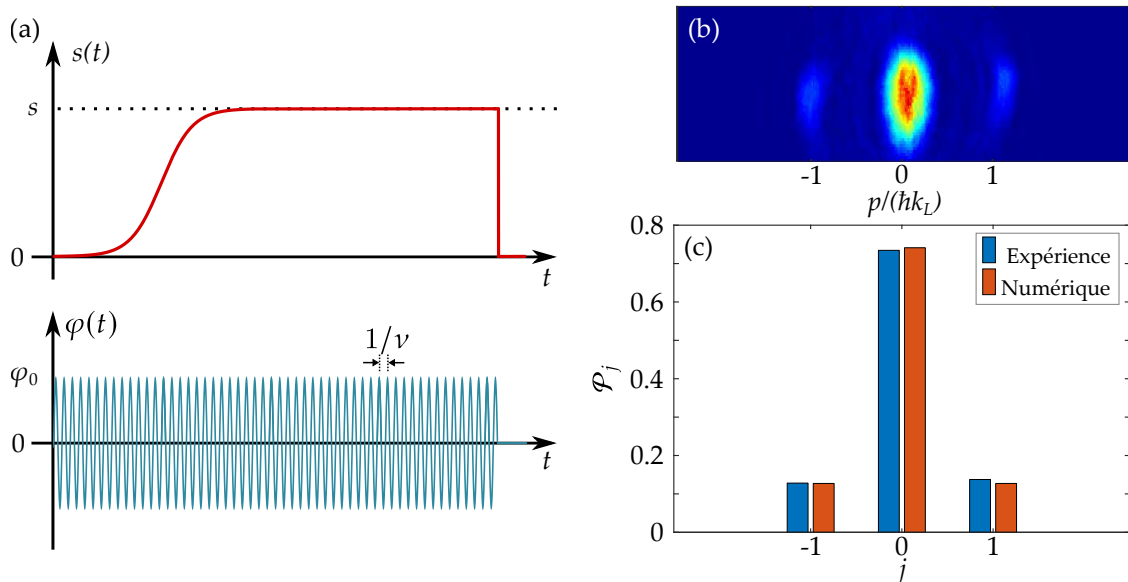
Nous étudions ci-après ces points séparément, en utilisant deux protocoles expérimentaux différents, dans les deux sous-sections suivantes.

#### *Vérification expérimentale du potentiel moyenné*

L'Hamiltonien effectif obtenu Eq. 4.35 est la somme de l'énergie cinétique et d'un potentiel périodique. Il est donc tout à fait pertinent d'appliquer le théorème de Bloch, comme nous l'avons fait au chapitre 2. En considérant les atomes dans la bande fondamentale et à quasi-moment nul (c'est-à-dire dans l'état  $\{n = 0, k = 0\}$ ), la fonction d'onde résultante, pour cet Hamiltonien effectif, s'écrit :

$$\psi_{\text{eff}}(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j(s_{\text{eff}}) e^{ijk_L x}, \quad (4.36)$$



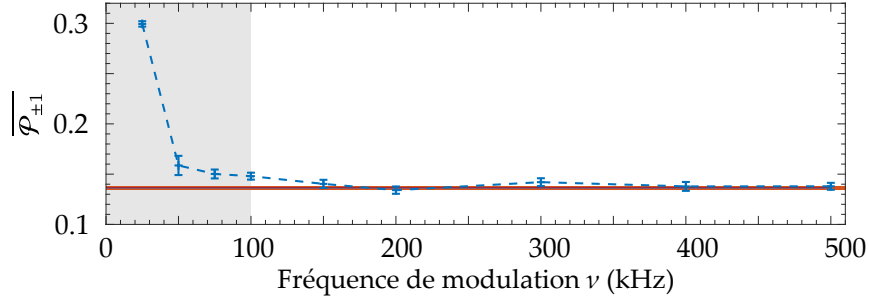


**FIGURE 4.8 | Protocole expérimental utilisé pour vérifier la renormalisation de la profondeur du réseau optique par modulation rapide.** (a) Pour cette étude la phase du réseau optique est constamment modulée (avec une amplitude  $\varphi_0$  et à une fréquence  $\nu$ ) : les atomes sont donc chargés adiabatiquement dans ce réseau modulé, puis maintenus 2 ms, avant d’effectuer un ToF. (b) Image d’absorption obtenue après un ToF de 25 ms, après chargement dans un réseau de profondeur  $s = 6.7$  modulé en phase ( $2\varphi_0 = 190^\circ$  et  $\nu = 500$  kHz). (c) Populations correspondantes des ordres de diffraction mesurées expérimentalement (barres bleues, gauche) et obtenue numériquement ( $|c_j|^2$  calculés avec l’Eq. 2.10 pour  $s = 2.3$ ; barres oranges, droite).

où les coefficients de Fourier  $c_j$  sont liés aux populations relatives des ordres de diffraction par  $\mathcal{P}_j = |c_j|^2$ . Ces coefficients dépendent de la profondeur effective (et donc de l’amplitude de la modulation de phase appliquée), et nous pouvons les calculer numériquement en résolvant l’équation centrale Eq. 2.10 pour une profondeur  $|s_{\text{eff}}|$  donnée. D’après l’expression de  $\psi_{\text{eff}}$ , nous nous attendons donc intuitivement à retrouver des ordres de diffraction, associés aux états impulsion  $p_j = j\hbar k_L$ , dont les populations reflètent la profondeur effective  $|s_{\text{eff}}|$ .

Le protocole expérimental que nous utilisons pour vérifier la renormalisation de la profondeur est schématisé Fig. 4.8(a) : après production du condensat, nous chargeons de manière adiabatique le nuage d’atomes dans le réseau optique à une profondeur  $s$  donnée. Nous maintenons ensuite les atomes dans le réseau pendant 2 ms, puis nous coupons de manière abrupte tous les confinements pour effectuer un ToF. Pendant toute la durée de la séquence, la phase du réseau est constamment modulée avec une amplitude  $\varphi_0$  et une fréquence  $\nu$  : nous chargeons et maintenons donc les atomes dans le réseau modulé en phase. Précisons que la profondeur du réseau aura été préalablement déterminée par la méthode du déplacement soudain du réseau expliquée en section 2.3.3 du chapitre 2.

Un exemple d’image d’absorption, obtenue après cette séquence expérimentale pour  $s = 6.7$ ,  $2\varphi_0 = 190^\circ$  et  $\nu = 500$  kHz est montrée Fig. 4.8(b) : nous retrouvons bien la même figure d’interférences que celle d’un réseau statique. Nous mesurons expérimentalement



**FIGURE 4.9 | Validité en fréquence du régime de renormalisation de la profondeur.** Population normalisée moyenne  $\overline{\mathcal{P}}_{\pm 1}$  mesurée expérimentalement (points bleus) en fonction de la fréquence de modulation. Les paramètres sont  $s = 7.3$  et  $2\varphi_0 = 190^\circ$ . Le trait horizontal indique la valeur attendue pour une profondeur  $|s_{\text{eff}}| = s|\mathcal{J}_0(2\varphi_0)| = 2.5$ , obtenue par résolution de l'équation centrale Eq. 2.10. Les barres d'erreur correspondent à une erreur de détection des atomes, estimée en variant la fenêtre d'intégration des ordres de diffraction.

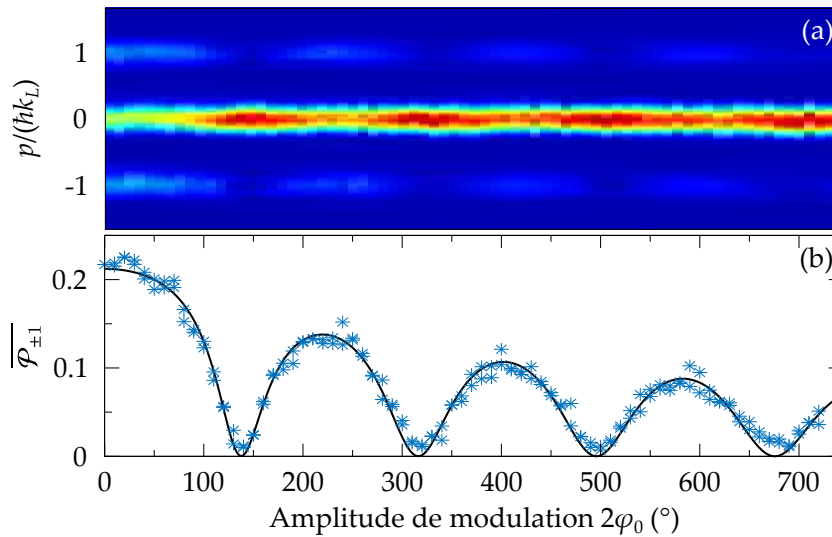
les populations relatives  $\mathcal{P}_j$ , et nous comparons sur la Fig. 4.8(c) ces valeurs expérimentales aux coefficients de Fourier  $|c_j|^2$  calculées pour une profondeur  $|s_{\text{eff}}| = s|\mathcal{J}_0(2\varphi_0)| = 2.3$ . Les populations mesurées concordant avec celles d'un réseau statique à la profondeur  $|s_{\text{eff}}|$ , elles traduisent bien sur cet exemple la renormalisation de la profondeur. Nous constatons également que les populations sont quasiment symétriques par rapport à l'ordre central  $j = 0$ , ce qui est attendu si nous peuplons un état à  $k = 0$ . Nous avons choisi d'utiliser la valeur moyenne dans les ordres  $\pm 1$  :

$$\overline{\mathcal{P}}_{\pm 1} = \frac{\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_{-1}}{2}. \quad (4.37)$$

pour caractériser la profondeur effective  $|s_{\text{eff}}|$  du réseau optique et vérifier, en valeur absolue, la renormalisation du potentiel.

Sur ce premier exemple, cette renormalisation a été obtenue avec  $\nu = 500$  kHz. Nous avons voulu déterminer expérimentalement dans un premier temps le domaine en fréquence sur lequel cette approche est valide. Pour cela, nous répétons le protocole précédent dans un réseau de profondeur  $s = 7.3$ , avec une amplitude de modulation fixée à  $2\varphi_0 = 190^\circ$ , et nous varions la fréquence de modulation entre 25 kHz et 500 kHz. Nous comparons sur la Fig. 4.9 la population moyenne  $\overline{\mathcal{P}}_{\pm 1}$  mesurée au coefficient de Fourier  $|c_1|^2$  calculé pour la profondeur effective  $|s_{\text{eff}}| = 2.5$  qui correspond aux paramètres utilisés. Nous constatons un très bon accord entre les grandeurs expérimentales et numérique pour les hautes fréquences, c'est-à-dire de 100 à 500 kHz. Pour les plus faibles fréquences utilisées ( $\nu \leq 100$  kHz), ces grandeurs ne correspondent plus : nous observons expérimentalement une augmentation des populations des ordres  $\pm 1$ , qui traduit en fait une excitation du nuage d'atomes par modulation résonante. En effet, à la profondeur utilisée  $s = 7.3$  est associée la fréquence  $\nu_{\text{CdM}} = 18$  kHz : lorsque  $\nu \leq 100$  kHz nous entrons dans le régime des transitions interbandes pour lequel le formalisme du potentiel moyenné n'est plus justifié. Ainsi, pour la gamme de profondeur explorée dans cette section, une fréquence de modulation de  $\nu = 250$  kHz ou  $\nu = 500$  kHz assure la validité de



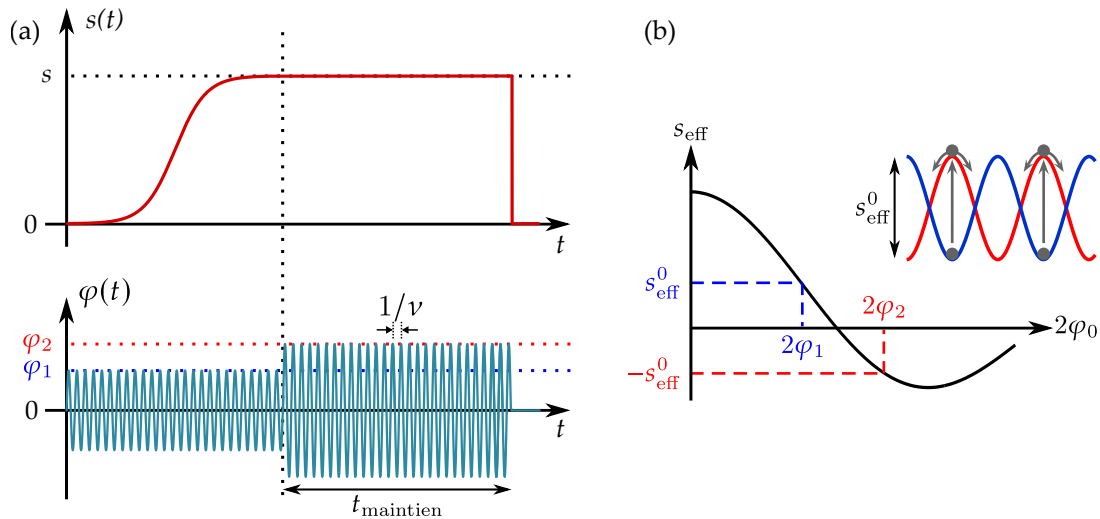


**FIGURE 4.10 | Renormalisation de la profondeur du réseau optique par modulation rapide.** (a) Profils de diffraction obtenus pour une fréquence de modulation constante  $\nu = 500$  kHz et une amplitude variable. La grandeur  $\overline{\mathcal{P}}_{\pm 1}$  correspondante aux profils est tracée en (b). Les valeurs expérimentales (étoiles bleues) sont comparées à la prédiction numérique (trait noir).

la renormalisation de la profondeur Eq. 4.34. Ce sont ces fréquences que nous utiliserons pour la suite.

Maintenant que le domaine de validité en fréquence est établi, nous vérifions Fig.4.10 la dépendance de la renormalisation du potentiel avec l'amplitude de modulation : nous utilisons le même protocole Fig. 4.8(a) avec une fréquence de modulation  $\nu = 500$  kHz fixée et une amplitude de modulation  $\varphi_0$  variable, en utilisant un réseau dont la profondeur est  $s = 6.4$ . L'ensemble des images expérimentales obtenues est résumé Fig.4.10(a). De la même manière que précédemment nous mesurons pour chaque image obtenue la population moyenne  $\overline{\mathcal{P}}_{\pm 1}$ , que nous traçons cette fois en fonction de l'amplitude de modulation  $\varphi_0$  appliquée. Les points expérimentaux sont comparés sur la Fig.4.10(b) au coefficient de Fourier  $|c_1|^2$  calculé numériquement pour la profondeur effective correspondante à l'amplitude de modulation selon  $s_{\text{eff}} = s|\mathcal{J}_0(2\varphi_0)|$  : l'accord entre les données expérimentales et numériques est très bon. Nous remarquons également qu'il existe des amplitudes de modulation pour lesquelles les ordres de diffraction  $\pm 1$  disparaissent. Ces points correspondent aux zéros de la fonction de Bessel pour lesquels  $s_{\text{eff}} = 0$ . Il s'agit là d'un résultat notable : pour ces amplitudes de modulation les atomes ne "voient" plus le réseau.

Par cette série d'expériences nous avons ainsi vérifié la renormalisation de la profondeur en valeur absolue et son domaine de validité. L'effet du changement de signe de la fonction de Bessel, lorsque nous croisons un des zéros de la fonction, ne nous est pas accessible par ce protocole expérimental. En effet, le changement de signe revient à translater le réseau optique d'une distance  $\Delta x = d/2$ , puisque les positions des minima et des maxima sont inversées. Or, la modulation de phase étant présente avant le branchement adiabatique du réseau optique, les atomes sont chargés dans un réseau optique initialement translaté de  $\Delta x$ , ce qui n'a aucune incidence sur la figure de diffraction. Nous avons donc eu recours à un autre type d'expérience pour retrouver cet effet.

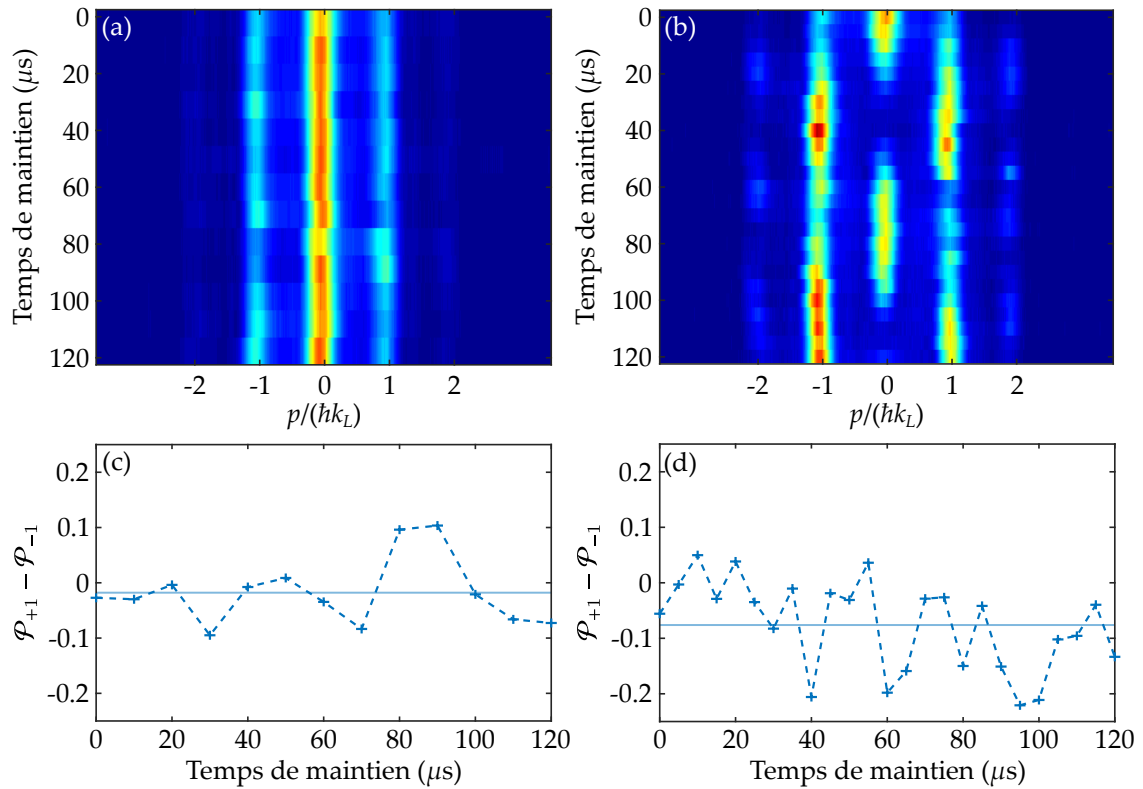


**FIGURE 4.11 | Protocole expérimental utilisé pour vérifier l'inversion de signe par modulation rapide.** (a) Le protocole est le suivant : nous chargeons adiabatiquement les atomes dans le réseau dont la phase est modulée à une fréquence  $\nu = 500$  kHz et une amplitude  $2\varphi_1 = 110^\circ$ . Après chargement nous changeons soudainement l'amplitude de modulation (quench) à  $2\varphi_2 = 180^\circ$ , puis nous maintenons pendant un temps variable les atomes dans le réseau pour étudier leur dynamique. Nous effectuons finalement un ToF. (b) Schéma de principe du quench : les amplitudes de modulation sont choisies telles que la profondeur ne change pas en valeur absolue, mais de sorte qu'il n'y ait qu'une inversion de signe. Cela place instantanément les atomes au sommet des puits du réseau.

### Vérification expérimentale du changement de signe

Afin de vérifier l'effet dû au changement de signe de la fonction de Bessel, nous adaptons le protocole expérimental comme présenté Fig. 4.11(a) : nous chargeons les atomes dans le réseau optique tout en modulant la phase à une fréquence constante  $\nu = 500$  kHz avec une amplitude  $\varphi_1$ . Une fois les atomes chargés dans le réseau modulé, nous changeons soudainement l'amplitude de modulation de  $\varphi_1$  à  $\varphi_2$ , puis nous maintenons les atomes dans le réseau un temps  $t_{\text{maintien}}$  varié entre 0 et 120  $\mu\text{s}$ . Nous procédons enfin au ToF et à l'imagerie par absorption.

Comme indiqué sur la Fig. 4.11(b), les amplitudes de modulation  $2\varphi_1 = 110^\circ$  et  $2\varphi_2 = 180^\circ$  sont choisies de sorte que  $|\mathcal{J}_0(2\varphi_1)| \approx |\mathcal{J}_0(2\varphi_2)|$  : la profondeur effective ne change donc pas en valeur absolue lorsque nous modifions l'amplitude de modulation et garde sa valeur  $|s_{\text{eff}}| \approx s_{\text{eff}}^0$ . En revanche le signe de la fonction de Bessel, prise à ces deux amplitudes de modulation, doit être inversé. Ce faisant, nous réalisons un déplacement quasi-instantané du réseau optique d'une distance  $\Delta x = d/2$  par le changement soudain de l'amplitude de modulation : il s'agit d'une forme de quench. Cette expérience a été conduite dans un réseau de profondeur  $s = 5$ , soit  $s_{\text{eff}}^0 = 1.4$ . Par souci de comparaison, nous réalisons également une expérience témoin : nous répétons le protocole à l'identique, avec les mêmes paramètres expérimentaux, mais nous n'effectuons pas le changement d'amplitude de modulation. Les atomes sont donc maintenus dans un réseau modulé



**FIGURE 4.12 | Résultat expérimental de quench par modulation rapide de phase.** Nous chargeons les atomes dans le réseau modulé en phase avec une amplitude  $2\varphi_1 = 110^\circ$ , puis nous les maintenons pendant un temps  $t_{\text{maintien}}$  variable avant de faire un ToF de 25 ms. (a) L'amplitude de modulation est gardée constante à  $2\varphi_1$  tout au long de l'expérience. (b) À  $t_{\text{maintien}} = 0$  l'amplitude de modulation est brusquement changée à  $2\varphi_2 = 180^\circ$  pour laquelle la profondeur effective change de signe mais garde la même valeur absolue. Nous traçons également la différence de population  $\mathcal{P}_{+1} - \mathcal{P}_{-1}$  au cours du temps pour (c) l'expérience témoin et (d) le quench. Sur ces deux panneaux la moyenne de la différence de population est indiquée par un trait horizontal bleu clair.

à une amplitude  $\varphi_1$  constante. Les résultats de ces deux expériences sont comparés Fig. 4.12.

L'interprétation des images expérimentales est claire : dans l'expérience témoin, les atomes ne subissent pas de quench et restent au repos dans les minima du potentiel effectif, nous n'observons donc aucune dynamique. À l'inverse, les images d'absorption montrent bien une oscillation des atomes dans le réseau modulé après changement soudain de l'amplitude de modulation. Cette oscillation est compatible avec une translation de  $\Delta x = d/2$  du réseau optique : l'évolution des populations est relativement symétrique par rapport à l'ordre central, ce qui est attendu si les atomes sont initialement placés sur les maxima de potentiel. Nuancions d'ores et déjà cette observation, car nous observons une asymétrie sur les états d'impulsion au cours de cette évolution. Nous reviendrons sur ce point par la suite.

Nous avons ainsi complètement vérifié l'Eq. 4.34 : la profondeur effective suit effectivement une fonction de Bessel lorsque nous varions l'amplitude de modulation, signe compris. Néanmoins, comme nous venons de l'évoquer, nous constatons Fig. 4.12(b) une légère asymétrie de l'oscillation des atomes après quench. Cette observation est confirmée en traçant sur la Fig. 4.12(d) la différence de population entre les ordres +1 et -1 après le quench de l'amplitude de modulation : les ordres d'impulsion négative sont plus peuplés que les ordres positifs, et ce de manière systématique. Nous constatons qu'en moyenne cette différence est de l'ordre de 7% en faveur de l'ordre -1. Classiquement, la séparation du paquet d'onde au sommet du potentiel a une sensibilité exponentielle au déphasage appliqué. Néanmoins, l'inversion de signe conduit normalement à un déplacement du réseau exactement égal à  $d/2$ . La différence de populations mesurée ne peut donc pas être expliquée par le formalisme du potentiel effectif seul. Nous avons choisi d'aller au-delà de ce formalisme et d'étudier l'effet du micro-mouvement dans la dynamique observée, afin de voir s'il permet de rendre compte de cette asymétrie.

#### 4.2.2 Étude du micro-mouvement par une analyse statistique

Dans la sous-section précédente, nous avons adopté une description *effective* du système pour étudier le dynamique des degrés de liberté lents dictée par l'Hamiltonien effectif :

$$\hat{H}_{\text{eff}}(x, p) = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{s_{\text{eff}} E_L}{2} \cos(k_L x) \quad (4.38)$$

indépendant du temps. Nous avons également donné l'expression de la fonction d'onde pour l'état fondamental associée à cet Hamiltonien effectif grâce au théorème de Bloch :

$$\psi_{\text{eff}}(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j(s_{\text{eff}}) e^{ijk_L x}. \quad (4.39)$$

Notre objectif dans cette sous-section est d'aboutir à une description plus complète de la dynamique en nous concentrant sur l'Hamiltonien exact dépendant du temps :

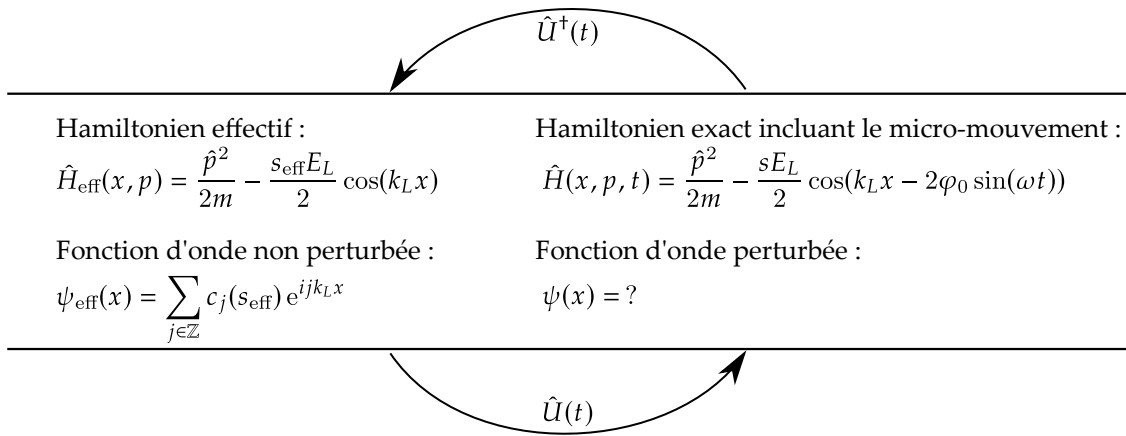
$$\hat{H}(x, p, t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{s E_L}{2} \cos(k_L x - 2\varphi_0 \sin(\omega t)), \quad (4.40)$$

qui prend alors en compte le micro-mouvement. Nous ne connaissons pas *a priori* la fonction d'onde  $\psi$  pour l'état fondamental associée à cet Hamiltonien exact.

Dans un premier temps, nous nous concentrons sur le développement théorique permettant de trouver l'expression de cette fonction d'onde  $\psi$ . Dans ce but, nous utilisons une théorie de perturbation adiabatique, justifiée par la séparation des échelles de temps  $\nu \gg \nu_{\text{CdM}}$ . Nous confrontons ensuite les mesures expérimentales des populations des états d'impulsion aux prédictions obtenues grâce à l'expression de  $\psi$ . Cependant, la dynamique du micro-mouvement, incluse dans l'Hamiltonien exact, a lieu sur une échelle de temps comparable à la période de modulation  $T = 1/\nu \approx 2 \mu\text{s}$ , mais nous ne contrôlons pas la modulation de phase sur des échelles de temps aussi courtes. Nous comparons donc résultats expérimentaux et prédictions théoriques au travers d'une étude statistique.

## Description théorique du micro-mouvement

Pour définir toutes les grandeurs nécessaires et illustrer la démarche que nous allons suivre, nous nous repons sur le diagramme ci-dessous :



Le système était précédemment décrit par l'Hamiltonien effectif  $\hat{H}_{\text{eff}}$ , dont la fonction d'onde non perturbée est  $\psi_{\text{eff}}$ . Pour déterminer l'expression de la fonction d'onde  $\psi$ , nous traitons la modulation comme une perturbation adiabatique. Ce choix se justifie par la séparation des échelles de temps : la modulation externe se fait à une fréquence beaucoup plus grande que la fréquence de la dynamique interne  $\nu \gg \nu_{\text{CDM}}$ . Nous nous plaçons dans le cas particulier de la théorie quantique de la perturbation adiabatique (*adiabatic quantum perturbation theory*) [RAHAV *et al.* (2003)] dans laquelle le paramètre de perturbation est non pas l'amplitude de la modulation mais l'inverse de la fréquence de modulation. Nous développerons donc les différentes grandeurs du problème en puissances inverses de la fréquence angulaire de modulation  $\omega$ . Dans ce cadre, la transformation de la fonction d'onde non perturbée  $\psi_{\text{eff}}$  vers la fonction d'onde perturbée  $\psi$  se fait grâce à un opérateur  $\hat{U}$  dépendant du temps. C'est cette transformation, unitaire (car les fonctions d'onde  $\psi_{\text{eff}}$  et  $\psi$  sont de même norme), que nous cherchons à déterminer dans la suite.

L'opérateur  $\hat{U}$  étant unitaire, nous pouvons l'écrire sous la forme :

$$\hat{U}(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \hat{U}(t_0, t) \text{ avec } \hat{U}(t_0, t) = \hat{\mathcal{T}} \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{K}(\omega t') dt' \right], \quad (4.41)$$

où  $\hat{\mathcal{T}}$  est l'opérateur d'ordonnancement du temps et  $\hat{K}$  est le générateur de cette transformation unitaire. Grâce au développement limité de l'exponentielle, nous obtenons l'expression :

$$\hat{U}(t) \approx 1 - \frac{i}{\hbar \omega} \int_{-\infty}^{\omega t} \hat{K}(\theta') d\theta' + \mathcal{O}(\omega^{-2}) \quad (4.42)$$

en nous arrêtant au premier ordre en  $\omega^{-1}$ .

L'opérateur  $\hat{\mathcal{T}}$  garantit que  $\hat{U}$  satisfait à une équation de type Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d\hat{U}(t)}{dt} = \hat{K}(\omega t) \hat{U}(t), \quad (4.43)$$

dans laquelle intervient le générateur  $\hat{K}$ . À ce titre, on qualifie également  $\hat{K}$  de pseudo-Hamiltonien.

L'Hamiltonien exact  $\hat{H}$  perturbé par la modulation est périodique en temps, il faut donc retrouver cette périodicité dans l'opérateur  $\hat{U} : \hat{U}(t_0, t + 2\pi/\omega) = \hat{U}(t_0, t)$ . Cette condition impose que  $\hat{K}$  soit périodique et de moyenne nulle, soit :

$$\hat{K}(\theta + 2\pi) = \hat{K}(\theta) \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \hat{K}(\theta) d\theta = 0. \quad (4.44)$$

Pour déterminer l'expression de l'opérateur  $\hat{U}$ , partons de la fonction d'onde en présence de la perturbation  $\psi$  et considérons la transformation de jauge  $\psi \mapsto \tilde{\psi} = \hat{U}^\dagger(t)\psi$  obtenue à partir de l'opérateur unitaire  $\hat{U}^\dagger$ . L'Hamiltonien exact  $\hat{H}$  se transforme alors en l'Hamiltonien  $\tilde{\hat{H}}$  suivant :

$$\tilde{\hat{H}}(t) = \hat{U}^\dagger(t)\hat{H}(t)\hat{U}(t) + i\hbar \frac{d\hat{U}^\dagger(t)}{dt}\hat{U}(t). \quad (4.45)$$

En utilisant l'Eq. 4.43 dans l'expression pour  $\tilde{\hat{H}}$  ainsi que le développement de l'Eq. 4.42, on trouve :

$$\begin{aligned} \tilde{\hat{H}}(x, p, t) &= \hat{U}^\dagger(t) [\hat{H}(x, p, t) - \hat{K}(\omega t)] \hat{U}(t) \\ &\approx \hat{H}(x, p, t) - \hat{K}(\omega t) + \mathcal{O}(\omega^{-1}) \end{aligned} \quad (4.46)$$

à l'ordre le plus bas en  $\omega^{-1}$ . Nous sommes donc passés de l'Hamiltonien en présence de modulation  $\hat{H}$  à l'Hamiltonien transformé  $\tilde{\hat{H}}$  à l'aide de la transformation de jauge  $\psi \mapsto \tilde{\psi} = \hat{U}^\dagger(t)\psi$ . Nous déterminons l'expression de  $\hat{K}$  à partir de l'Eq. 4.46 en imposant les deux conditions suivantes : (i) l'Hamiltonien transformé  $\tilde{\hat{H}}$  doit être indépendant du temps et (ii) l'Eq. 4.44 doit être satisfaite pour assurer la périodicité de l'opérateur unitaire  $\hat{U}$ . Ces deux conditions conduisent naturellement à :

$$\hat{K}(\omega t) = -\frac{sE_L}{2} \cos(k_L x - 2\varphi_0 \sin(\omega t)) + \frac{s\mathcal{J}_0(2\varphi_0)E_L}{2} \cos(k_L x), \quad (4.47)$$

où le premier terme du membre de droite permet de supprimer la dépendance temporelle de  $\tilde{\hat{H}}$ , tandis que le deuxième terme assure d'avoir une moyenne nulle pour  $\hat{K}$ . En se rappelant que  $s_{\text{eff}} = s\mathcal{J}_0(2\varphi_0)$ , cette expression est également égale à :

$$\hat{K}(\omega t) = \hat{H}(x, p, t) - \hat{H}_{\text{eff}}(x, p), \quad (4.48)$$

et nous identifions dans ce cas  $\tilde{\hat{H}} \equiv \hat{H}_{\text{eff}}$  d'après l'Eq. 4.46. Nous trouvons alors nécessairement que la fonction d'onde après transformation de jauge  $\tilde{\psi}$  correspond à la fonction d'onde non perturbée :  $\tilde{\psi} \equiv \psi_{\text{eff}}$ . La méthode de la perturbation adiabatique, dans laquelle nous avons cherché, par le développement d'un opérateur unitaire, à trouver un Hamiltonien effectif indépendant du temps (seule condition que nous imposons ici, avec celle de la périodicité), nous redonne donc le même résultat que l'approche plus

naïve du potentiel moyen. Tout son intérêt est qu'elle nous donne accès à une meilleure description de l'évolution du système.

Pour pouvoir décrire le micro-mouvement, nous souhaitons déterminer l'expression de la fonction d'onde perturbée  $\psi$ . Il nous suffit pour cela d'inverser la transformation de jauge précédente, soit :

$$\tilde{\psi} \mapsto \psi = \hat{U}(t)\tilde{\psi} = \hat{U}(t)\psi_{\text{eff}}. \quad (4.49)$$

Il est donc nécessaire de déterminer l'expression de  $\hat{U}(t)$ , ce que nous faisons à partir des Eqs. 4.41 et 4.48. Le calcul détaillé est disponible en annexe C, et nous aboutissons à l'expression :

$$\hat{U}(t) = 1 + \frac{s\hbar k_L^2}{8m\omega} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\mathcal{J}_n(2\varphi_0)}{n} \left( e^{in\omega t} - (-1)^n e^{-in\omega t} \right) \left( (-1)^n e^{ik_L x} + e^{-ik_L x} \right) \quad (4.50)$$

où interviennent à nouveau les fonctions de Bessel  $\mathcal{J}_n$ . En réutilisant ce résultat ainsi que l'Eq. 4.39 pour  $\psi_{\text{eff}}$ , nous trouvons donc finalement la décomposition sur les ondes planes de la fonction d'onde  $\psi$  associée à l'Hamiltonien exact  $\hat{H}$  :

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left[ c_j(s_{\text{eff}}) + \frac{s\hbar k_L^2}{8m\omega} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\mathcal{J}_n(2\varphi_0)}{n} \left( e^{in\omega t} - (-1)^n e^{-in\omega t} \right) \right. \\ \left. \times \left( (-1)^n c_{j-1}(s_{\text{eff}}) + c_{j+1}(s_{\text{eff}}) \right) \right] e^{ijk_L x}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Chaque terme de la somme correspond à un état d'impulsion  $p_j = j\hbar k_L$ , de population associée  $\mathcal{P}_j$ . Nous constatons que par rapport au résultat attendu  $\mathcal{P}_j(s_{\text{eff}}) = |c_j(s_{\text{eff}})|^2$  dans un réseau statique de profondeur  $|s_{\text{eff}}|$ , l'inclusion du micro-mouvement introduit des contributions supplémentaires oscillantes. Pour les états d'impulsion  $p/(\hbar k_L) = \pm 1$  étudiés précédemment, cela se traduit par des populations :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\pm 1} = \left| c_1(s_{\text{eff}}) + \frac{s\hbar k_L^2}{8m\omega} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\mathcal{J}_n(2\varphi_0)}{n} \left( e^{in\omega t} - (-1)^n e^{-in\omega t} \right) \right. \\ \left. \times (\mp 1)^n \left( c_0(s_{\text{eff}}) + (-1)^n c_2(s_{\text{eff}}) \right) \right|^2, \end{aligned} \quad (4.52)$$

où nous avons utilisé la propriété  $c_{-j} = c_j$  pour aboutir à cette expression. Grâce à celle-ci, nous pouvons donc estimer l'effet du micro-mouvement sur les populations relatives des ordres latéraux.

Revenons d'abord sur la population moyenne dans ces ordres, définie Eq. 4.37. En utilisant l'Eq. 4.52 dans cette définition, nous trouvons simplement :

$$\overline{\mathcal{P}_{\pm 1}} = |c_1(s_{\text{eff}})|^2 + O(\omega^{-2}). \quad (4.53)$$

Les premiers termes additionnels, proportionnels à  $\omega^{-2}$ , sont négligeables. Si cette grandeur nous a bien permis, dans la section précédente, de vérifier la renormalisation de la profondeur du réseau par la modulation de phase, l'effet du micro-mouvement sur cette grandeur est trop faible pour que nous puissions l'observer par ce moyen.



En revanche, le micro-mouvement peut induire un déséquilibre entre les populations des ordres +1 et -1. Nous évaluons cette asymétrie en calculant la différence de population  $\mathcal{P}_{+1} - \mathcal{P}_{-1}$ , ce qui donne grâce à l'Eq. 4.52 :

$$\mathcal{P}_{+1}(t) - \mathcal{P}_{-1}(t) = -c_1(s_{\text{eff}}) \left[ c_0(s_{\text{eff}}) - c_2(s_{\text{eff}}) \right] \frac{s\hbar k_L^2}{m\omega} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{J}_{2l+1}(2\varphi_0)}{(2l+1)} \cos((2l+1)\omega t). \quad (4.54)$$

**i**

Le calcul de toutes les grandeurs présentées dans cette section ( $\hat{U}$ ,  $\psi$ ,  $\mathcal{P}_{\pm 1}$ , etc.) est développé en détail dans l'annexe C.

Contrairement à la population moyenne, il reste des termes à l'ordre  $\omega^{-1}$ . Nous pouvons estimer numériquement l'évolution de cette différence au cours d'une période de modulation : c'est ce qui est fait Fig. 4.13(a) pour des paramètres  $s = 6.25$ ,  $2\varphi_0 = 87^\circ$  (nous avons donc  $|s_{\text{eff}}| = 3.1$ ) et deux fréquences de modulation  $\nu = 250$  kHz et  $\nu = 500$  kHz. L'évolution que nous obtenons est très similaire à un cosinus. Ceci est dû à l'amplitude de modulation utilisée : la somme de l'Eq. 4.54 est dans ce cas dominée par le terme  $l = 0$ , associé à  $\cos(\omega t)$ .

Lorsque  $2\varphi_0 = 87^\circ$  nous avons :

**=**

$$\frac{\mathcal{J}_1(2\varphi_0)}{1} \approx 0.56 \gg \frac{\mathcal{J}_3(2\varphi_0)}{3} \approx 0.02.$$

Pour ce choix d'amplitude de modulation, la différence de population entre les deux ordres peut donc s'approximer par :

$$\mathcal{P}_{+1}(t) - \mathcal{P}_{-1}(t) \approx -\Delta\mathcal{P}_{\text{max}} \cos(\omega t) \quad (4.55)$$

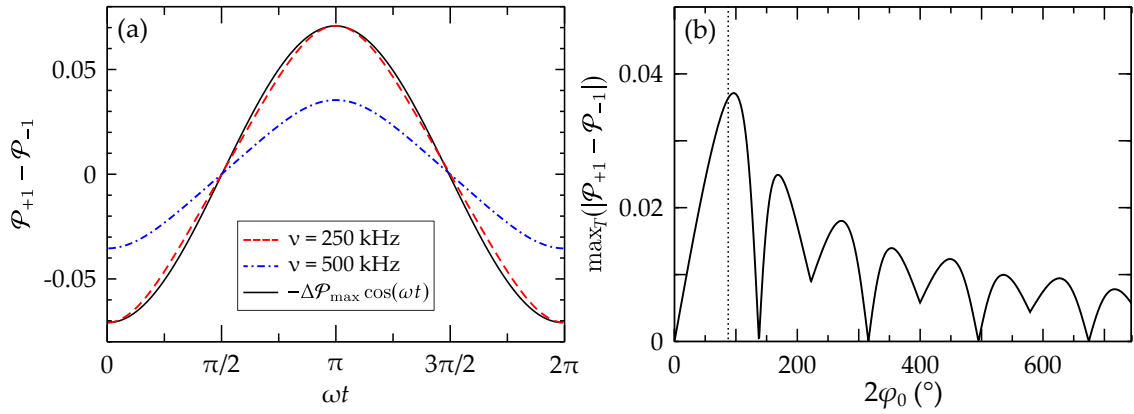
avec

$$\Delta\mathcal{P}_{\text{max}} = c_1(s_{\text{eff}}) \left[ c_0(s_{\text{eff}}) - c_2(s_{\text{eff}}) \right] \frac{s\hbar k_L^2}{m\omega} \mathcal{J}_1(2\varphi_0). \quad (4.56)$$

Cette différence est de l'ordre de 5% pour les paramètres utilisés sur la Fig. 4.13(a), ce qui est mesurable expérimentalement. Nous constatons aussi sur cette figure la dépendance de l'asymétrie observée avec la fréquence de modulation : pour une fréquence de modulation deux fois plus grande l'amplitude de l'asymétrie  $\Delta\mathcal{P}_{\text{max}}$  est divisée par deux, comme attendu selon l'Eq. 4.56.

Nous traçons également Fig. 4.13(b) la différence maximale de population entre l'ordre +1 et l'ordre -1 au cours d'une période de modulation, soit  $\max_T(|\mathcal{P}_{+1}(t) - \mathcal{P}_{-1}(t)|)$ , en fonction de l'amplitude de modulation  $\varphi_0$  et pour une fréquence de modulation fixée à  $\nu = 500$  kHz. L'asymétrie due au micro-mouvement variant avec l'amplitude de modulation utilisée, nous nous plaçons dans la suite au voisinage du premier maximum de cette courbe pour maximiser l'effet du micro-mouvement.





**FIGURE 4.13** | Résultats numériques sur l'asymétrie des populations des ordres due au micro-mouvement. (a) Différence de population entre les ordres +1 et -1 au cours d'une période de modulation, pour des fréquences de modulation  $\nu = 250$  kHz (tirets rouges) et  $\nu = 500$  kHz (trait bleu). Les autres paramètres sont  $s = 6.3$  et  $2\varphi_0 = 87^\circ$  ( $s_{\text{eff}} = 3.1$ ). Nous indiquons en trait noir l'approximation Eq. 4.55 pour  $\nu = 250$  kHz. (b) Différence maximale de population entre les ordres +1 et -1 au cours d'une période de modulation, en fonction de l'amplitude de modulation  $\varphi_0$  appliquée. Nous avons fixé  $\nu = 500$  kHz et  $s = 6.4$ . Les tirets verticaux indiquent la valeur  $2\varphi_0 = 87^\circ$  utilisée expérimentalement.

#### Mise en évidence expérimentale du micro-mouvement

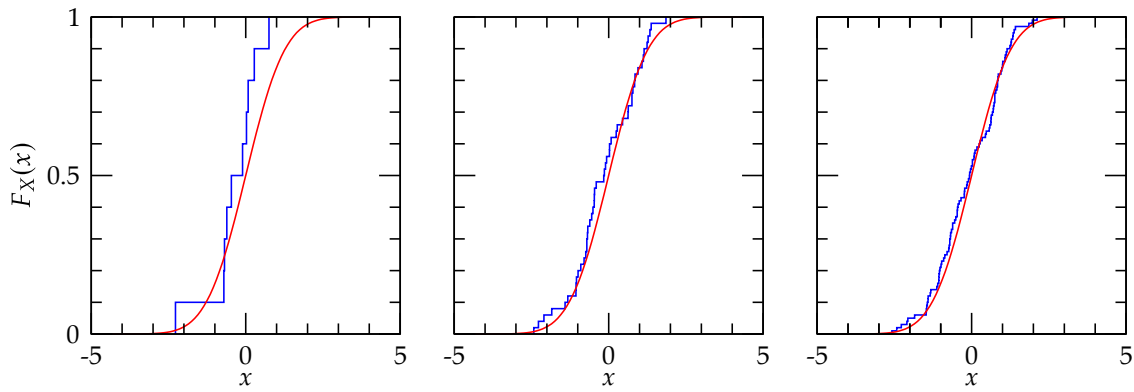
Le développement théorique que nous venons de présenter suggère qu'il existe une légère asymétrie entre les ordres +1 et -1, due au micro-mouvement du condensat dans le réseau optique, qui évolue au cours de la modulation. Afin d'augmenter nos chances d'observer cet effet, nous choisissons l'amplitude de modulation  $2\varphi_0 = 87^\circ$ , proche du premier maximum de la courbe Fig. 4.13(b). La différence de population varie alors en bonne approximation selon l'Eq. 4.55.

La modulation de phase étant constamment allumée, nous n'avons pas le contrôle sur la phase initiale ni sur la phase finale de la modulation. Nous ne pouvons donc pas choisir de terminer la modulation à une phase  $\omega t$  précise, ce qui nous aurait *a priori* permis de retrouver directement la courbe de la Fig. 4.13(a). Il nous faut donc plutôt procéder à une analyse statistique des résultats expérimentaux. Pour cela, nous nous sommes inspirés du test de Kolmogorov-Smirnov [MASSEY JR (1951)], qui permet de comparer les résultats statistiques obtenus à partir d'un échantillon par rapport à une distribution de probabilité de référence. Étudions un exemple concret avec la Fig. 4.14.

Soit une variable aléatoire  $X$ , d'univers  $\{x\}$ , suivant une loi de probabilité  $f_X(x)$ . On définit par  $F_X$  la fonction de distribution cumulative (ou fonction de répartition) de la variable  $X$  selon :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \quad (4.57)$$

où  $\mathbb{P}(X \leq x)$  désigne la probabilité d'obtenir un résultat inférieur ou égal à  $x$ . L'analyse statistique que nous proposons de faire repose simplement sur la comparaison de la distribution cumulative d'un ensemble de résultats expérimentaux avec celle calculée à partir de la loi de probabilité attendue. Nous tirons partie de la convergence de

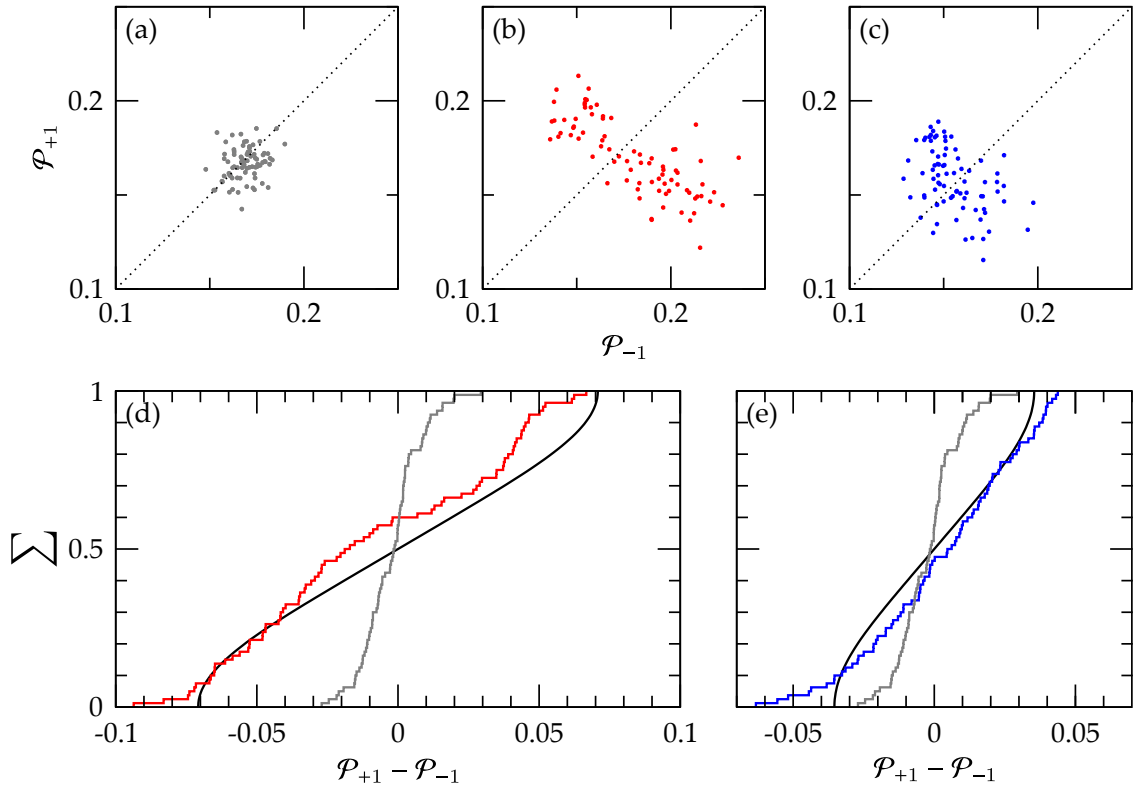


**FIGURE 4.14** | **Exemple de test statistique de type Kolmogorov-Smirnov.** Nous traçons la distribution cumulative d'une variable aléatoire  $X$  suivant une loi normale centrée réduite (courbes bleues) pour 10, 50 et 100 échantillons (de gauche à droite). La courbe rouge correspond à une fonction d'erreur, qui est la distribution cumulative attendue pour cette loi.

la distribution cumulative expérimentale vers la distribution théorique, dont se sert typiquement un test de Kolmogorov-Smirnov. Générons par exemple des points aléatoires suivant une loi normale centrée réduite ( $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ) : la distribution cumulative résultante est représentée Fig. 4.14 (courbes bleues) pour 10, 50 et 100 points de gauche à droite. Ces courbes tendent vers la courbe rouge, qui représente la distribution cumulative de la loi normale centrée réduite : il s'agit dans ce cas particulier de la fonction d'erreur. Remarquons le très bon accord entre les courbes rouges et bleues même avec un nombre réduit d'échantillons, ce qui permet de valider la loi de probabilité théorique malgré un nombre relativement faible d'échantillons.

Afin d'appliquer cette analyse à notre étude, nous réalisons deux expériences. La première consiste à appliquer le même protocole que celui présenté Fig. 4.8(a) avec un réseau de profondeur  $s = 6.6$  et une amplitude de modulation  $2\varphi_0 = 87^\circ$ , ce qui conduit à une profondeur renormalisée de  $s_{\text{eff}} = 3.3$ . Nous prenons 80 images d'absorption, avec  $\nu = 250$  kHz puis à nouveau avec  $\nu = 500$  kHz. La deuxième expérience sert de témoin : nous accumulons 80 images d'absorption selon le même protocole mais sans modulation de phase. Nous utilisons un réseau de profondeur  $s = 3.1$  comparable à la profondeur effective de la première expérience. Nous pouvons ainsi vérifier l'effet du micro-mouvement dans un réseau pour des profondeurs équivalentes, et ceci pour deux fréquences de modulation. L'ensemble de ces résultats est présenté Fig. 4.15.

Sur les panneaux Fig. 4.15(a-c) nous indiquons les mesures expérimentales des populations  $\mathcal{P}_{+1}$  et  $\mathcal{P}_{-1}$  en l'absence de modulation et avec modulation de phase, pour les deux fréquences de modulation. Ces points sont distribués autour d'une valeur moyenne  $\overline{\mathcal{P}_{\pm 1}} \approx 0.16$ , qui est le résultat attendu pour une profondeur moyenne  $s \approx 3.2$ . Alors que les points se répartissent selon une loi gaussienne dans le cas non modulé, nous obtenons des distributions radicalement différentes lorsque nous modulons le réseau, dont la profondeur effective est pourtant similaire à l'expérience témoin. Nous traçons Fig. 4.15(d-e) les fonctions de distribution cumulatives  $\Sigma$  de la différence entre les ordres +1 et -1 obtenues expérimentalement. En l'absence de modulation, nous retrouvons la fonction d'erreur caractéristique d'une loi gaussienne. Ce n'est pas le cas dans les cas modulés, où les fonctions de répartition sont cette fois en très bon accord avec la prédiction analytique.



**FIGURE 4.15** | **Étude statistique révélant le micro-mouvement.** Première ligne : mesures expérimentales des populations  $\mathcal{P}_{+1}$  et  $\mathcal{P}_{-1}$  dans un réseau : (a) de profondeur  $s = 3.1$  non modulé ; (b) et (c) de profondeur  $s = 6.6$  modulé en phase avec une amplitude  $2\varphi_0 = 87^\circ$  ( $s_{\text{eff}} = 3.3$ ) et à une fréquence  $\nu = 250$  kHz et  $\nu = 500$  kHz respectivement. Deuxième ligne : fonctions de distribution cumulatives de la différence de population ( $\mathcal{P}_{+1} - \mathcal{P}_{-1}$ ) calculées à partir des mesures expérimentales (courbes en escalier), en l'absence de modulation (courbe grise commune) et dans le réseau modulé à (d)  $\nu = 250$  kHz et (e)  $\nu = 500$  kHz. La prédiction analytique obtenue à partir de l'Eq. 4.54 est indiquée par la courbe lisse noire.

Cette dernière est obtenue par inversion de l'Eq. 4.54 dans l'intervalle  $0 \leq \omega t \leq \pi$  en supposant que la phase finale de modulation  $\omega t$  au moment où les confinements sont coupés suit une distribution de probabilité uniforme<sup>6</sup>. Pour l'amplitude de modulation utilisée ici, nous pouvons approximer l'asymétrie par l'Eq. 4.55, ce qui donne une fonction de distribution cumulative :

$$\Sigma(\Delta\mathcal{P}) \approx \pi^{-1} \arccos(-\Delta\mathcal{P}/\Delta\mathcal{P}_{\text{max}}). \quad (4.58)$$

La prédiction analytique de la Fig. 4.15 ressemble donc à un arccosinus. L'amplitude  $\Delta\mathcal{P}_{\text{max}}$  de la fonction, définie Eq. 4.56, dépend de la fréquence comme  $\omega^{-1}$ , ce qui est également vérifié expérimentalement.

Le bon accord observé entre les fonctions de répartition expérimentales et théoriques, ainsi que la vérification de la dépendance de  $\Delta\mathcal{P}_{\text{max}}$  avec la fréquence de modulation,

6. Nous ne contrôlons pas la phase à l'origine de la modulation, ce qui explique que nous obtenons une phase aléatoire uniformément distribuée dans l'intervalle  $[0, 2\pi[$  en fin de séquence.

confirment donc la présence du micro-mouvement. La méthode statistique employée ici pour révéler cet effet est tout à fait remarquable car elle fournit une signature claire et non ambiguë du micro-mouvement.

### *Retour sur l'asymétrie après quench*

Cette analyse plus approfondie du micro-mouvement, au-delà du formalisme du potentiel moyenné, était motivée par l'asymétrie observée Fig. 4.12(b) et (d) : après un changement soudain de l'amplitude de modulation, la dynamique des atomes dans le potentiel moyenné n'était pas complètement symétrique. Nous avons mesuré un déséquilibre des populations, l'ordre  $-1$  étant en moyenne 7% plus peuplé que l'ordre  $+1$ .

À la lumière des expériences dédiées au micro-mouvement, il est clair que ce dernier ne peut pas expliquer de manière satisfaisante l'asymétrie préalablement observée, et ceci pour deux raisons :

- L'asymétrie mesurée pour une fréquence de  $\nu = 500$  kHz, et avec une amplitude de modulation  $2\varphi_0 = 87^\circ$  choisie proche de l'asymétrie maximale attendue, est d'au plus 3% environ. Compte-tenu de l'amplitude de modulation utilisée dans l'expérience de quench ( $2\varphi_0 = 180^\circ$ ), le micro-mouvement ne serait responsable, au mieux, que d'une différence de 2% (voir Fig. 4.13(b)).
- Étant donné l'absence de contrôle sur la phase de la modulation, le déséquilibre dû au micro-mouvement sur une image d'absorption prise après ToF est orienté de façon aléatoire (la phase finale  $\omega t$  étant uniformément distribuée) et ne peut donc pas rendre compte de l'observation expérimentale préalable, où l'ordre  $-1$  était systématiquement plus peuplé.

Nous ne pouvons donc pas attribuer l'asymétrie observée dans l'expérience de quench au micro-mouvement. Il existe d'autres origines possibles à cette observation, notamment des défauts techniques expérimentaux. Détaillons ici une de ces possibilités.

Comme nous l'avons vu en section 2.2.3 du chapitre 2, le contrôle de la phase du réseau est réalisé à l'aide de plusieurs synthétiseurs et d'un commutateur rapide. Plus précisément, le quench est obtenu grâce aux deux synthétiseurs, dont les horloges sont synchronisées, reliés à l'AOM<sub>bc</sub>. Ces deux générateurs sont utilisés en modulation de phase, à la même fréquence de modulation mais avec une amplitude différente : il nous suffit de basculer d'un synthétiseur à l'autre pour effectuer le quench. Or nous ne contrôlons pas la différence de phase fixe qu'il peut exister entre les deux modulations. Il est donc probable que le changement d'amplitude de modulation s'accompagne également d'un saut de phase. Ainsi, l'inversion du signe de la profondeur, qui correspond à une translation du réseau optique de  $\Delta x = d/2$ , se double ainsi d'un déplacement supplémentaire non contrôlé  $\Delta x'$ . Les atomes ne sont alors pas exactement au sommet des puits, expliquant l'asymétrie observée. Les deux synthétiseurs étant utilisés avec les mêmes paramètres de fréquence, la relation de phase est conservée au cours du temps : le déplacement  $\Delta x'$  est dans ce cas le même à chaque expérience, favorisant de manière systématique le déséquilibre des populations vers l'ordre  $-1$  par exemple.

Une vérification de cette hypothèse nécessite un contrôle beaucoup plus précis sur la modulation de phase, en particulier sur des échelles de temps comparables à la période

de modulation  $T = 1/\nu \approx 2 \mu\text{s}$ . Ce contrôle n'est pas encore disponible, mais différentes améliorations du dispositif expérimental sont actuellement en cours d'implémentation.

### 4.3 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons exploité le contrôle des paramètres du réseau, tout particulièrement sa position (par l'intermédiaire de la phase), pour étudier différents Hamiltoniens effectifs. Ces expériences, bien que restreintes au régime perturbatif, montrent toute la richesse que recèle la dynamique d'un condensat de Bose-Einstein dans un potentiel périodique modulé dans le temps.

Dans un premier temps, nous avons travaillé dans le régime où la fréquence de modulation est faible vis-à-vis des transitions interbandes :  $\nu < \nu_{\text{CdM}}$ . La dynamique atomique est ici bien décrite en se restreignant à la bande fondamentale. Le taux tunnel, lié à la courbure de cette bande, devient un paramètre contrôlable, ce qui nous permet de nucléer des états alternés. Nous avons montré quels étaient les ingrédients nécessaires à cette nucléation : les interactions atomiques par les fluctuations (quantiques ou thermiques), ainsi que l'inversion de la courbure de bande. Cette dernière condition a également été remplie dans un régime multibande, en excitant les atomes vers la première bande excitée avec une fréquence de modulation  $\nu \sim \nu_{\text{CdM}}$ .

Nous avons ensuite considéré le régime opposé en fréquence, soit  $\nu \gg \nu_{\text{CdM}}$ . Deux échelles de temps, l'une lente et l'autre rapide, se distinguent alors. En première approximation, nous pouvons remplacer le potentiel modulé du réseau par un potentiel statique de profondeur renormalisée pour les degrés de liberté lents des atomes. Nous avons bien vérifié expérimentalement cet effet. Il existe également un micro-mouvement, associé au degrés de liberté rapides, dont nous avons révélé l'effet sur les populations des ordres de diffraction grâce à une étude statistique des images d'absorption obtenues.

Ces résultats, qui ont fait l'objet de deux publications [MICHON *et al.* (2018) et ARNAL *et al.* (2020)], offrent plusieurs perspectives. Ainsi, un contrôle plus précis de la modulation de phase permettrait de trancher sur l'origine de la légère asymétrie observée. Nous pourrions aussi imaginer des modulations plus complexes, où l'on déclencherait une oscillation du centre de masse cette fois-ci contrôlée (c'est-à-dire avec un déphasage fixé), dans le potentiel modulé. La nucléation des états alternés peut également être étudiée plus spécifiquement dans le régime des transitions interbandes, avec les méthodes numériques adéquates. Enfin, la dynamique de nucléation peut être modifiée par la présence de désordre, ce qu'il serait envisageable de sonder expérimentalement.

L'étude de systèmes quantiques dans des milieux désordonnés est devenue un sujet principal dans l'équipe. C'est à cette thématique, sur laquelle je me suis concentré pendant la deuxième moitié de ma thèse, que je consacre la dernière partie du manuscrit.

# III

## Effet tunnel assisté par le chaos : résonances

### 5 Signature expérimentale de bifurcations dans un espace des phases mixte 147

- 5.1 Adimensionnement de l'Hamiltonien 150
- 5.2 Outils pratiques pour l'étude d'un système dynamique 152
- 5.3 Éléments de théorie sur la bifurcation 156
- 5.4 Mise en évidence expérimentale des bifurcations 165
- 5.5 Conclusion 173

### 6 Observation des résonances de l'effet tunnel assisté par le chaos 175

- 6.1 Effet tunnel dans un espace des phases mixte 179
- 6.2 Contexte et état de l'art 188
- 6.3 Méthodes 191
- 6.4 Mise en évidence expérimentale 198
- 6.5 Conclusion 210



# Signature expérimentale de bifurcations dans un espace des phases mixte

- *I'm still not clear on chaos.*
- *It simply deals with unpredictability in complex systems. The shorthand is the butterfly effect : a butterfly can flap its wings in Peking and in Central Park you get rain instead of sunshine. Was I going too fast ? [ . . . ] Give me that glass of water, we'll conduct an experiment. [ . . . ] Put your hand flat like a hieroglyphic. A drop of water falls on your hand. Which way will the drop roll off? Which finger?*
- *Thumb, I'd say.*
- *Freeze your hand. Don't move. I'll do the same thing, start with the same place again. Which way, now?*
- *Let's say back the same way.*
- *It changed. Why? Because tiny variations, the orientation of the hairs on your hands, the amount of blood distending your vessels, imperfections in the skin... [ . . . ] never repeat and vastly affect the outcome. That's what?*
- *Unpredictability.*

*Jurassic Park (1993)*  
Film réalisé par Steven Spielberg

---

## Sommaire

- 5.1 Adimensionnement de l'Hamiltonien** 150
- 5.2 Outils pratiques pour l'étude d'un système dynamique** 152
  - 5.2.1 Cas sans modulation : espace des phases 152
  - 5.2.2 Cas avec modulation : portrait de phase stroboscopique 154
- 5.3 Éléments de théorie sur la bifurcation** 156
  - 5.3.1 Développement au premier ordre : équation de Mathieu 157
  - 5.3.2 Développement au deuxième ordre : équation de Mathieu-Duffing 160
  - 5.3.3 Évolution sub-période classique des îlots de stabilité 163



**5.4 Mise en évidence expérimentale des bifurcations** 165

5.4.1 Rotation dans l'espace des phases 165

5.4.2 Protocole expérimental 167

5.4.3 Résultats 168

**5.5 Conclusion** 173

---

LORSQUE l'on parle de chaos, il est difficile de ne pas faire référence à "l'effet papillon", rendu populaire par E. N. LORENZ lors d'une conférence en 1972. Ce dernier débuta en effet sa présentation en posant la question suivante : "*Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?*", renvoyant à la question de la prédictibilité d'un système dynamique chaotique.

Je profite de cette introduction pour faire une distinction nécessaire. Un système dit chaotique présente une très grande sensibilité aux conditions initiales : deux états du système caractérisés par des conditions initiales pourtant très proches vont rapidement (de manière exponentielle) conduire à des trajectoires différentes. Si on considère une trajectoire spécifique du système, il est donc très difficile d'obtenir son évolution sur des temps courts de manière fiable, car il faudrait connaître parfaitement toutes les conditions initiales. La prédiction est ainsi limitée au court terme, raison pour laquelle on ne peut prévoir la météo qu'il fera au-delà de quelques semaines : c'est bien ce phénomène qu'a voulu illustrer LORENZ en posant sa question un peu provocatrice. Néanmoins, même dans des systèmes chaotiques, les effets à très long terme résultent de propriétés statistiques et vont donc être robustes vis-à-vis des variations des conditions initiales. Ceci permet aux climatologues d'obtenir une tendance climatique parfaitement prédictible sur des temps beaucoup plus longs, malgré le caractère imprédictible de la météo à temps courts.

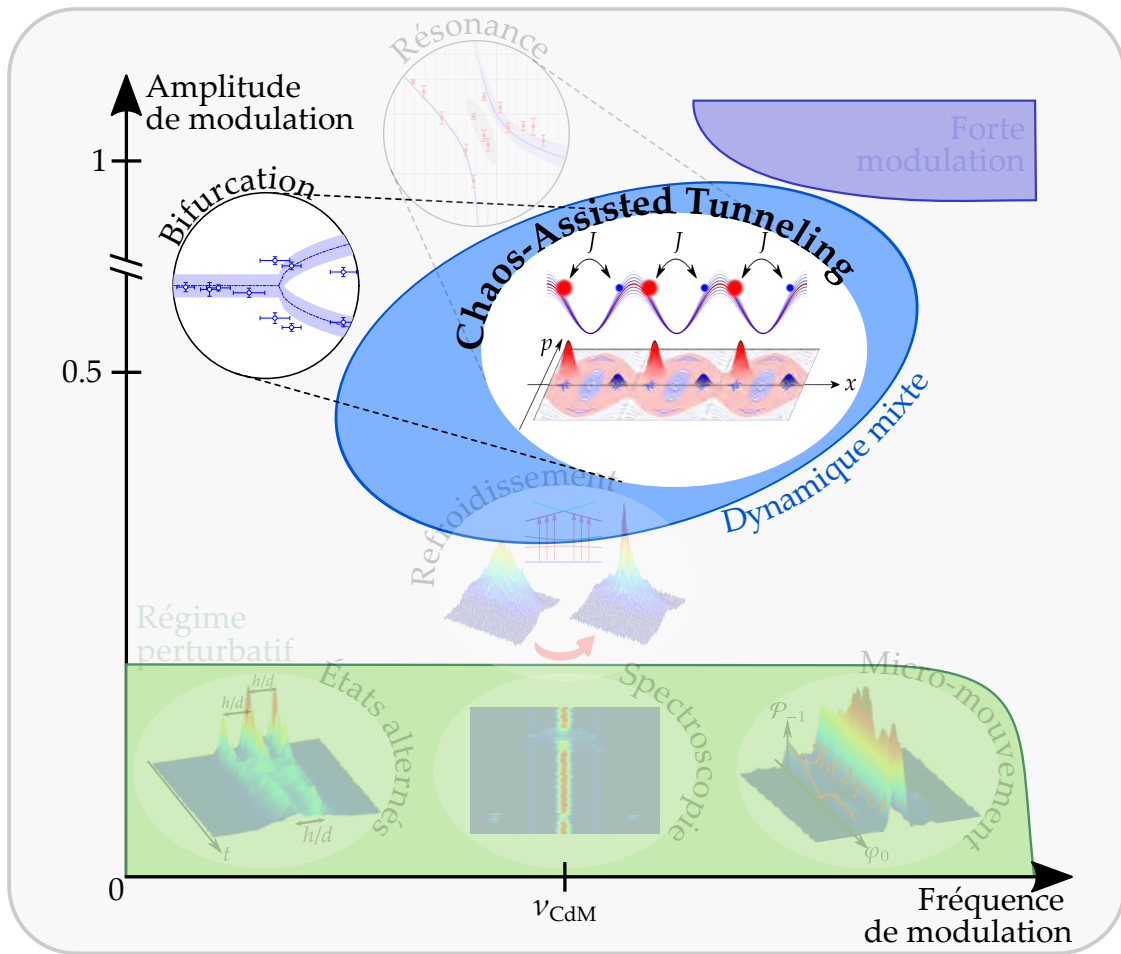
Notons bien que les comportements chaotiques peuvent émerger de systèmes purement déterministes, et pas nécessairement aussi complexes que dans le cas de la météorologie. Des systèmes plus simples, comme un pendule magnétique placé au-dessus de deux aimants ou encore un pendule double, possèdent également un caractère chaotique [SHINBROT *et al.* (1992) et CROQUETTE (2009)]. Il existe en fait une dimension minimale<sup>1</sup> pour observer du chaos : dans le cas d'un Hamiltonien statique, il faut au minimum un système de dimension  $D = 2$  ; dans le cas d'un Hamiltonien dépendant du temps, un système  $1D$  suffit. C'est dans ce deuxième cas, noté  $D = 1 + 1$  (une dimension spatiale et une dimension temporelle), que nous nous trouvons, puisque nous considérons la dynamique d'un condensat de Bose-Einstein dans un réseau optique unidimensionnel fortement modulé dans le temps. Nous nous intéressons, dans ce chapitre et le suivant, à la modulation d'amplitude seulement, dans un régime de paramètres différents des travaux présentés jusqu'ici : compte-tenu des paramètres expérimentaux utilisés (profondeur du réseau et amplitude de modulation), nous entrons dans le régime dit mixte. La dynamique classique est dans ce cas riche, puisque coexistent des trajectoires stables et des trajectoires chaotiques.

Dans ce premier chapitre dédié au régime mixte, je me concentrerai sur la description classique de la dynamique. J'établirai d'abord l'Hamiltonien d'intérêt sous sa forme adimensionnée, qui nous suivra jusqu'à la fin du manuscrit. Je définirai également un ensemble de termes et concepts utiles à l'étude de systèmes chaotiques, comme le portrait de phase stroboscopique. Je consacre la troisième section de ce chapitre à la détermination du diagramme de bifurcation de notre système : nous déterminerons les points d'équilibre du système et l'évolution de leur nature (équilibre stable ou instable) en fonction des paramètres expérimentaux. Enfin, je présenterai les résultats obtenus sur le dispositif expérimental qui nous permettent de retrouver ce diagramme de bifurcation. Nous

---

1. La dimension minimale est une condition nécessaire, mais pas suffisante !

verrons que notre système s'apparente alors, de manière effective, à un super-réseau dont l'une des deux longueurs caractéristiques est contrôlable expérimentalement.



### 5.1 Adimensionnement de l'Hamiltonien

Toute l'étude de la dynamique que nous ferons repose sur la résolution des équations d'évolution à partir d'un Hamiltonien adimensionné. Nous nous proposons de le retrouver, ce qui nous donnera l'occasion de définir les trois paramètres importants dont dépend la dynamique du système.

Nous modulons périodiquement la profondeur du réseau. Nous avons déjà rencontré le potentiel associé, qui s'écrit :

$$\begin{aligned} V(x, t) &= -sE_L [1 + \varepsilon(t)] \cos^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) \\ &= -\frac{sE_L}{2} [1 + \varepsilon(t)] \cos(k_L x) - \frac{sE_L}{2}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

En négligeant le dernier terme (constant) du potentiel du réseau et en appliquant la modulation  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$ , dont l'amplitude  $\varepsilon_0$  constitue un premier paramètre

important, l'Hamiltonien total que nous considérons est :

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2m} - \frac{sE_L}{2} [1 + \varepsilon_0 \cos(\omega t)] \cos(k_L x). \quad (5.2)$$

En utilisant les variables sans dimension suivantes :

$$\tilde{x} = k_L x = \frac{2\pi}{d} x, \quad \tilde{t} = \omega t, \quad \tilde{p} = \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{2\pi}{m\omega d} p, \quad (5.3)$$

nous trouvons l'Hamiltonien adimensionné :

$$\tilde{H}(\tilde{x}, \tilde{p}, \tilde{t}) = \frac{\tilde{p}^2}{2} - \gamma [1 + \varepsilon_0 \cos(\tilde{t})] \cos(\tilde{x}). \quad (5.4)$$

Nous avons introduit ici le deuxième paramètre sans dimension  $\gamma$ . Il caractérise la profondeur du réseau "habillé par la modulation" selon l'expression :

$$\gamma = s \left( \frac{\nu_L}{\nu} \right)^2 \quad (5.5)$$

où  $\nu_L$  désigne la fréquence caractéristique associée au réseau (voir section 2.1.1 du chapitre 2) et  $\nu = \omega/(2\pi)$  est la fréquence de modulation.

À partir des variables sans dimension, nous pouvons définir le troisième paramètre. Il s'agit d'une constante de Planck effective, dont l'expression s'obtient grâce au commutateur :

$$\hbar_{\text{eff}} = -i [\tilde{x}, \tilde{p}] = 2 \left( \frac{\nu_L}{\nu} \right). \quad (5.6)$$

**i**

Dans ce chapitre et le chapitre suivant, nous utiliserons indifféremment les variables avec et sans dimension. Pour alléger l'écriture, nous abandonnons la notation "tilde" pour la suite, mais les unités seront précisées le cas échéant.

Il existe donc trois paramètres qui caractérisent l'évolution du système selon l'Hamiltonien que nous venons de définir :  $\gamma$ ,  $\varepsilon_0$  et  $\hbar_{\text{eff}}$ . Leurs valeurs peuvent être choisies expérimentalement de manière indépendante à travers la profondeur du réseau  $s$ , la fréquence de modulation  $\nu$  et l'amplitude de modulation  $\varepsilon_0$ . Il nous faut distinguer :

- Le couple de paramètres  $(\gamma, \varepsilon_0)$  gouverne la dynamique classique du système, et en particulier son degré de "chaoticité". En effet, en fonction des valeurs choisies, le système peut être complètement régulier, ou présenter à la fois des trajectoires régulières et chaotiques : nous parlons alors de *système mixte*. Nous détaillons la dynamique classique attendue ainsi que les outils nécessaires à son analyse dans la section suivante.
- De la même manière qu'un état gaussien de taille minimale (c'est-à-dire à la limite de Heisenberg) est représenté par un disque d'aire proportionnelle à  $\hbar$  dans un portrait de phase traditionnel  $(x, p)$  (dont la définition sera rappelée section 5.2.1), la valeur de  $\hbar_{\text{eff}}$  représente l'aire typique d'un tel état dans le portrait de phase du système adimensionné. C'est donc un paramètre expérimental supplémentaire,

associé à la dynamique quantique, qui permet de contrôler le passage du régime classique au régime quantique.

Pour ces expériences, nous avons également besoin du contrôle sur la phase du réseau optique. En effet, comme nous le verrons par la suite, il est nécessaire de contrôler précisément la position initiale des atomes dans les puits du réseau. L'Hamiltonien adimensionné total s'écrit donc finalement :

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} - \gamma [1 + \varepsilon_0 \cos(t)] \cos(x + 2\varphi(t)) \quad (5.7)$$

où, pour ce chapitre et le suivant, le contrôle sur la phase se résume simplement à un saut de phase brusque :  $\varphi(t) = \varphi_0 \mathcal{H}(t)$  avec  $\mathcal{H}$  la fonction de Heaviside.

Les trois paramètres que nous venons de définir étant importants, résumons ici leur expression en fonction des grandeurs expérimentales :

$$\gamma = s \left( \frac{v_L}{v} \right)^2 \quad ; \quad \varepsilon_0 \quad ; \quad \hbar_{\text{eff}} = 2 \left( \frac{v_L}{v} \right) \quad (5.8)$$

## 5.2 Outils pratiques pour l'étude d'un système dynamique

### 5.2.1 Cas sans modulation : espace des phases

Considérons dans un premier temps le cas sans modulation, c'est-à-dire imposons  $\varepsilon(t) \equiv 0$ . L'Hamiltonien adimensionné se réduit à :

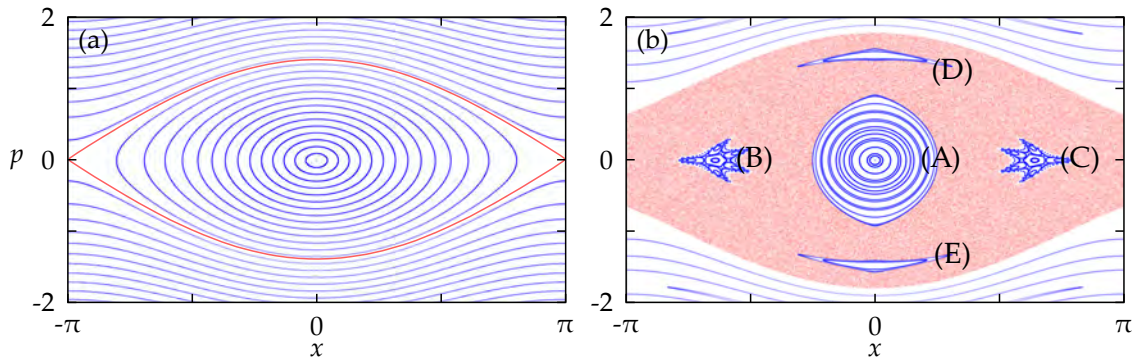
$$H(x, p) = \frac{p^2}{2} - \gamma \cos(x). \quad (5.9)$$

En utilisant les équations de la mécanique hamiltonienne, la dynamique du système s'obtient par résolution des équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\gamma \sin(x). \end{cases} \quad (5.10)$$

Nous retrouvons dans ce cas les équations d'évolution du pendule simple. L'état de ce système dynamique est complètement déterminé par ses deux degrés de liberté  $x$  et  $p$  : ces grandeurs définissent un espace appelé *espace des phases*<sup>2</sup>, dans ce cas de dimension 2. Si nous nous donnons un point de cet espace, de coordonnées  $(x_0, p_0)$ , l'évolution du système à partir de ce point (conditions initiales) définit une *trajectoire* dans l'espace des phases, et la représentation géométrique de l'ensemble de ces trajectoires constitue le *portrait de phase* [GIÉ et SARMANT (1992)].

2. On parle également de *plan de phase*  $(x, p)$  dans le cas où il n'y a que deux degrés de liberté comme ici.



**FIGURE 5.1 | Exemples d'espaces des phases.** (a) Espace des phases associé à l'Hamiltonien sans modulation Eq. 5.9. On retrouve une dynamique similaire à celle d'un pendule, avec le point stationnaire ( $x = 0, p = 0$ ) qui correspond à un équilibre stable. La séparatrice correspond à la trajectoire tracée en rouge. (b) Portrait de phase stroboscopique de l'Hamiltonien modulé avec ( $\gamma = 0.40, \varepsilon_0 = 0.27$ ). Ce portrait de phase est mixte, car on observe des orbites régulières (trajectoires bleues) et une mer chaotique (points roses). Les lettres désignent les différents types d'îlots stables (voir texte).

Pour le cas sans modulation que nous considérons pour l'instant, le portrait de phase est donné Fig. 5.1(a). Plusieurs remarques sont à faire :

- Les trajectoires étant périodiques en  $x$  (même évolution que le pendule simple), nous ne représentons la dynamique qu'au sein d'un puits du réseau, c'est-à-dire pour<sup>3</sup>  $-\pi \leq x \leq \pi$ .
- Puisque la dynamique est unidimensionnelle et que l'énergie totale est constante, le système possède suffisamment de constantes du mouvement : il est dit *intégrable* au sens de Liouville. Toutes les trajectoires sont donc régulières et la dynamique ne présente aucun caractère chaotique.
- La position centrale ( $x = 0, p = 0$ ) du portrait de phase est un point stationnaire, et correspond à une position d'équilibre stable : les atomes placés au fond du puits sans vitesse initiale y restent à tout temps.
- La position de bord ( $x = \pm\pi, p = 0$ ) est également un point stationnaire, mais il correspond ici à un équilibre instable. La trajectoire issue de ce point s'appelle la séparatrice, car elle correspond à la trajectoire limite distinguant les deux types de trajectoires définies ci-après.
- Nous pouvons distinguer deux types de trajectoires régulières en fonction du type de mouvement [GIÉ et SARMANT (1992)] : (i) le mouvement oscillatoire, représenté par des trajectoires fermées entourant le point stationnaire central. Pour le pendule simple, cette situation décrit l'oscillation du pendule autour de sa position d'équilibre. Dans le cas d'un atome dans le réseau optique, ce mouvement correspond au cas où la particule est piégée dans un des puits de potentiel ; (ii) le mouvement révolutif, dont les trajectoires ne croisent jamais l'axe  $p = 0$  et qui sont localisées aux grandes impulsions. Ce mouvement décrit un pendule simple effectuant une rotation complète autour de son point d'attache, ou bien un atome dont l'énergie cinétique est suffisante pour parcourir librement le réseau de puits en puits.

3. Avec dimensions :  $-d/2 \leq x \leq d/2$

Dans la suite, nous étudions le cas avec modulation, qui induit des trajectoires chaotiques en plus des trajectoires régulières. Nous introduirons à cette occasion le portrait de phase stroboscopique, qui présente plusieurs similitudes avec le portrait de phase que nous venons de présenter.

### 5.2.2 Cas avec modulation : portrait de phase stroboscopique

Revenons maintenant à l'Hamiltonien Eq. 5.7 avec une modulation non nulle. La dynamique classique est dans ce cas obtenue à partir des équations différentielles suivantes :

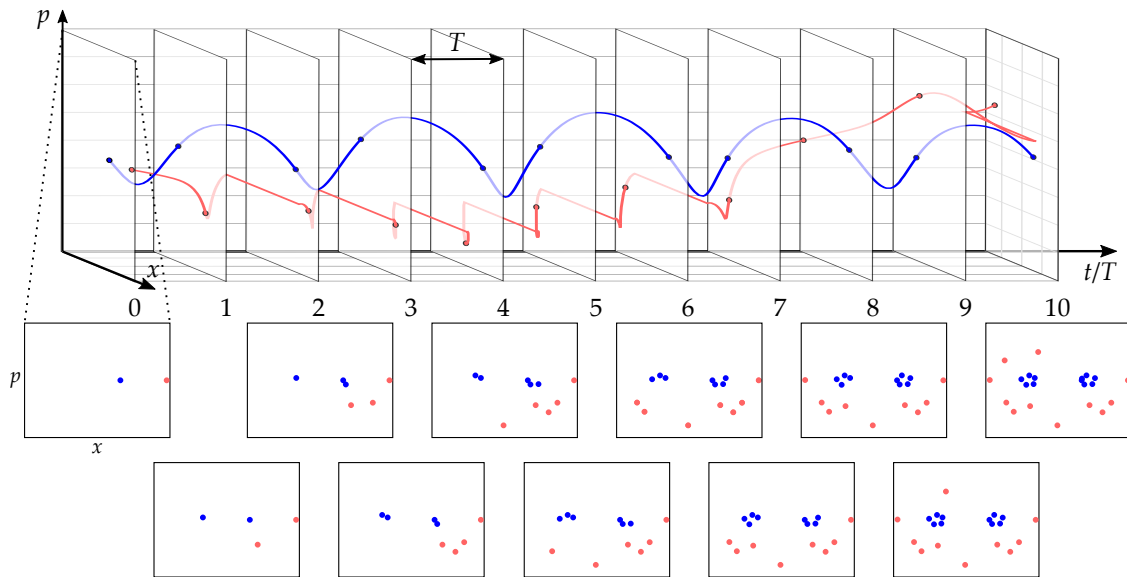
$$\begin{cases} \dot{x} = p, \\ \dot{p} = -\gamma(1 + \varepsilon_0 \cos(t)) \sin(x). \end{cases} \quad (5.11)$$

Contrairement au cas précédent, l'énergie n'est ici pas conservée : il n'y a alors plus assez de constantes du mouvement. Ce système présente donc un caractère non intégrable, mais aussi des non-linéarités dues au terme  $\sin(x)$  : il réunit deux ingrédients pouvant conduire à l'émergence d'une dynamique chaotique. Et en effet, en fonction des paramètres  $(\gamma, \varepsilon_0)$  utilisés et des conditions initiales du système, celui-ci peut évoluer selon des trajectoires stables ou chaotiques.

Pour étudier la réponse du système au forçage temporel, nous introduisons à présent une nouvelle représentation, le *portrait de phase stroboscopique*. La méthode de construction de cette représentation est illustrée à l'aide de la Fig. 5.2. Considérons comme exemple deux conditions initiales, c'est-à-dire deux points à  $t = 0$  dans le plan de phase  $(x, p)$ , qui constitue un espace de dimension 2. Ajoutons à cet espace une troisième dimension avec la variable de temps  $t$ . À partir des deux conditions initiales, nous obtenons, après évolution du système selon l'Hamiltonien Eq. 5.7, deux trajectoires (bleue et rose sur la Fig. 5.2) dans l'espace  $(x, p, t)$  de dimension 3. Le portrait de phase stroboscopique est construit en procédant à des coupes de l'espace  $(x, p, t)$  à intervalle de temps régulier : dès que le temps  $t = t_n = nT$ , où  $n \in \mathbb{N}$  et  $T$  est la période de modulation, nous mesurons l'état du système  $(x(t_n), p(t_n))$ , ce qui correspond à un nouveau point dans le plan de phase. Nous reportons ce point dans le plan de phase, et nous accumulons tous les points obtenus pour tout temps  $t_n$ . Autrement dit, les trajectoires continues du portrait de phase traditionnel sont ici remplacées par un ensemble de points résultant de l'intersection périodique, avec une période  $T$ , des trajectoires de l'espace  $(x, p, t)$  avec le plan de phase  $(x, p)$ . Nous visualisons de cette manière la dynamique du système à la même période que le forçage extérieur. La Fig. 5.1(b) est ainsi obtenue en répétant cette procédure pour un grand nombre de conditions initiales et pour des temps longs, à paramètres  $(\gamma, \varepsilon_0)$  donnés.

En comparant les Figs. 5.1(a) et (b), nous distinguons sur le portrait de phase stroboscopique plusieurs structures qui rappellent le portrait de phase traditionnel obtenu sans modulation. Nous retrouvons par exemple aux grandes impulsions les trajectoires stables du mouvement révolatif (*whispering galleries*) : des atomes avec suffisamment d'énergie cinétique continuent de se propager de site en site dans le réseau modulé. Nous voyons également apparaître sur la Fig. 5.1(b) des *îlots de stabilité* (structures bleues fermées indiquées par des lettres) qui traduisent un mouvement stable, similaire au cas du pendule simple, autour de points stationnaires. Par exemple, dans le cas de la Fig. 5.1(b), des atomes





**FIGURE 5.2** | **Principe de construction d'un portrait de phase stroboscopique.** Considérons deux conditions initiales différentes, représentées par deux points dans l'espace des phases à  $t = 0$ . Nous laissons évoluer le système sous l'effet de l'Hamiltonien Eq. 5.7. Tous les temps  $t_n = nT$  avec  $n \in \mathbb{N}$ , nous ajoutons sur le portrait de phase la coordonnée  $(x(t_n), p(t_n))$  de chacune des trajectoires obtenues, qui peut être stable (en bleu) ou chaotique (en rose).

initialement placés près du centre ( $x = 0, p = 0$ ) restent au voisinage de ce point tout au long de la modulation en suivant une orbite stable quasi-périodique. Notons la présence sur ce portrait de phase stroboscopique de deux paires d'îlots symétriques : des îlots (D) et (E) symétriques en impulsion ( $x = 0, p = \pm p^*$ ) ainsi que des îlots (B) et (C) symétriques en position ( $x = \pm x^*, p = 0$ ). Ce sont ces derniers îlots, symétriques en position, qui nous intéresseront dans toute la suite du manuscrit. Ces structures régulières sont immergées dans une *mer chaotique* (ensemble de points roses), constituée de trajectoires aperiodiques et sensibles aux conditions initiales. Les deux types de trajectoires coexistant, ce portrait de phase stroboscopique est dit *mixte*.

i

Pour déterminer le caractère régulier ou chaotique d'une trajectoire (et ainsi lui assigner la couleur bleue ou rose comme sur la Fig. 5.1(b)), nous mesurons son degré "d'exploration" du plan de phase. Pour cela, nous divisons le plan  $(x, p)$  en cellules élémentaires, et nous mesurons pour chaque trajectoire le nombre de cellules différentes traversées. Ce nombre est faible pour les trajectoires régulières, qui explorent une petite surface dans le plan de phase, tandis que les trajectoires chaotiques traversent un grand nombre de cellules différentes.

Attardons-nous sur les différents îlots de stabilité, indiqués sur la Fig. 5.1(b) par des lettres de (A) à (E). En adoptant une vision stroboscopique de la dynamique, nous perdons une partie de l'information, comme par exemple des comportements sous-harmoniques. Prenons donc le temps de décrire l'évolution de ces différents îlots, qui n'ont pas le même comportement au cours d'une période de modulation :



- L'îlot central (A) correspond à un mouvement quasi-périodique de l'atome autour de la position ( $x = 0, p = 0$ ). Une particule initialement placée dans cet îlot revient dans ce même îlot central, dans la même cellule du réseau, après une période de modulation.
- Les îlots (B) et (C) symétriques en  $x$  tournent autour du point central ( $x = 0, p = 0$ ) : après une période de modulation, l'îlot de gauche (B) est devenu l'îlot de droite (C) et inversement, au sein du même puits. Les deux îlots retrouvent donc leur position initiale après deux périodes de modulation. Un atome initialement placé dans un de ces îlots "saute" donc de l'un à l'autre à chaque période de modulation, mais reste dans l'îlot initial si le système est observé toutes les deux périodes. Cette dynamique, perdue dans le portrait de phase stroboscopique, est expliquée en détail dans la section 5.3.3.
- Les îlots (D) et (E) symétriques en  $p$  sont caractérisés par une faible largeur en impulsion (donc une faible dispersion en impulsion). Après une période de modulation, l'atome revient dans cet îlot mais pas dans le même site du réseau. Ces îlots se déplacent en effet d'un puits à l'autre à chaque période et sont, à ce titre, associés à du transport classique des atomes dans le réseau optique.

Le paysage du portrait de phase stroboscopique, c'est-à-dire les caractéristiques des îlots réguliers ainsi que le volume de la mer chaotique, est complètement déterminé par le couple  $(\gamma, \varepsilon_0)$ . En particulier, lorsque nous varions un de ces deux paramètres, le nombre et la position des îlots de stabilité changent selon un diagramme de bifurcation, que nous étudions dans la suite.

### 5.3 Éléments de théorie sur la bifurcation

La section précédente nous a permis de définir un certain nombre de termes, ainsi que d'introduire le portrait de phase stroboscopique. Pour des paramètres  $(\gamma, \varepsilon_0)$  donnés, nous obtenons des portraits de phase mixtes, dans lesquels des structures régulières, les îlots de stabilité, sont immergées dans une mer chaotique. Comme nous l'avons déjà évoqué, les principales caractéristiques des portraits de phase mixtes sont contrôlées par les paramètres  $(\gamma, \varepsilon_0)$ . En particulier, il est possible de varier la taille, le nombre et la position des îlots de stabilité. La détermination de la position du centre des îlots passe par la recherche de points stationnaires du système, et nous conduit à des *bifurcations* : le changement d'un des paramètres ( $\gamma$  ou  $\varepsilon_0$ ) peut modifier brusquement la stabilité d'un point stationnaire.

Dans cette section, nous nous concentrons sur la recherche des points stationnaires de notre système. Rappelons que l'évolution de ce dernier est régie par le système d'équations différentielles donné en Eq. 5.11, dont la deuxième équation est :

$$\dot{p} = -\gamma (1 + \varepsilon_0 \cos(t)) \sin(x). \quad (5.12)$$

Pour faire apparaître les deux bifurcations auxquelles nous nous intéressons, nous utilisons le développement limité du sinus :

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5). \quad (5.13)$$

En nous arrêtant au premier ordre de ce développement, nous faisons apparaître un premier diagramme de stabilité dans l'espace des paramètres  $(\gamma, \varepsilon_0)$  ainsi que les deux bifurcations. En allant jusqu'au deuxième ordre du développement, nous introduisons des non-linéarités dont l'effet sera de stabiliser dynamiquement le système en faisant émerger de nouveaux points stationnaires. Nous affinons ainsi le diagramme de stabilité précédemment obtenu.

i

La présence de non-linéarités dans un système dynamique tend à coupler l'amplitude et la fréquence d'oscillation du système. Or un système forcé excité à résonance va osciller avec une grande amplitude. À cause du couplage induit par les termes non-linéaires, la fréquence de résonance va être modifiée par l'amplitude des oscillations, et le système va s'écarter de résonance, revenant alors à un état plus stable.

On comprend ainsi que, d'une manière générique, la présence de non-linéarités tend à stabiliser les mouvements instables.

### 5.3.1 Développement au premier ordre : équation de Mathieu

Utilisons dans un premier temps le développement limité du sinus au premier ordre, soit  $\sin(x) \approx x$ . En combinant les équations du système Eq. 5.11, nous obtenons :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\gamma + \alpha \cos(t))x = 0, \quad (5.14)$$

soit le résultat de la deuxième loi de Newton, avec  $\alpha = \gamma\varepsilon_0 \ll 1$ . Cette équation est connue sous le nom d'équation de Mathieu. Sans forçage temporel ( $\alpha = 0$ ) on retrouve l'oscillateur harmonique, de fréquence angulaire naturelle  $\omega_0 = \sqrt{\gamma}$ . En présence de modulation ( $\alpha \neq 0$ ), cette équation décrit par exemple le mouvement d'un pendule simple dans le champ de gravité et dont le point d'attache oscillerait périodiquement selon la verticale.

Pour comprendre la dynamique résultant de l'Eq. 5.14, nous allons utiliser une méthode perturbative en suivant les références [RAND (2012) et KOVACIC *et al.* (2018)]. Nous faisons appel à une hypothèse de séparation des échelles de temps en introduisant deux temps : un temps long associé à la modulation  $\xi = t$  qui caractérise la solution périodique, et un temps court  $\eta = \alpha t \ll \xi$  qui correspond au temps d'approche du système vers la solution périodique.

Il nous faut exprimer la dérivée totale par rapport à  $t$  dans ce contexte. Nous utilisons pour cela :

i

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt}.$$

On montre alors qu'on obtient :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + 2\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \alpha^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}.$$

Suivant cette démarche, l'Eq. 5.14 se réécrit comme :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + 2\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \alpha^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + (\gamma + \alpha \cos(\xi)) x = 0. \quad (5.15)$$

Nous développons alors  $x$  en une série de puissance :  $x(\xi, \eta) = x_0(\xi, \eta) + \alpha x_1(\xi, \eta) + \dots$ , que nous injectons dans l'expression ci-dessus. En regroupant les termes par puissance de  $\alpha$ , nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi^2} + \gamma x_0 = 0 \quad \text{pour l'ordre 0,} \quad (5.16.a)$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi^2} + \gamma x_1 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi \partial \eta} - \cos(\xi) x_0 \quad \text{pour l'ordre 1.} \quad (5.16.b)$$

L'Eq. 5.16.a pour  $x_0$  est l'équation d'un oscillateur harmonique, dont la solution peut prendre la forme :

$$x_0(\xi, \eta) = A(\eta) \cos(\sqrt{\gamma} \xi) + B(\eta) \sin(\sqrt{\gamma} \xi), \quad (5.17)$$

les "constantes"  $A$  et  $B$  pouvant dépendre du temps court  $\eta$ . En injectant cette solution dans l'Eq. 5.16.b et après quelques manipulations de fonctions trigonométriques, nous obtenons pour  $x_1$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi^2} + \gamma x_1 &= 2\sqrt{\gamma} \frac{dA}{d\eta} \sin(\sqrt{\gamma} \xi) - 2\sqrt{\gamma} \frac{dB}{d\eta} \cos(\sqrt{\gamma} \xi) \\ &\quad - \frac{A}{2} [\cos((\sqrt{\gamma} + 1)\xi) + \cos((\sqrt{\gamma} - 1)\xi)] \\ &\quad - \frac{B}{2} [\sin((\sqrt{\gamma} + 1)\xi) + \sin((\sqrt{\gamma} - 1)\xi)]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Pour déterminer les points d'équilibre de la trajectoire, tout le jeu consiste à supprimer les termes résonants  $\sin(\sqrt{\gamma} \xi)$  et  $\cos(\sqrt{\gamma} \xi)$ , qui oscillent à la fréquence naturelle  $\omega_0 = \sqrt{\gamma}$  et qui conduiraient à une solution divergente. Pour une valeur quelconque de  $\gamma$ , cette condition conduit à imposer :

$$\frac{dA}{d\eta} = \frac{dB}{d\eta} = 0. \quad (5.19)$$

Dans ce cas, nous obtenons pour  $x_0$  une orbite périodique, autour du point  $(x = 0, p = 0)$  du portrait de phase. Ce point est donc un point stationnaire associé à une position d'équilibre stable, comme dans le cas non modulé.

Néanmoins, il existe une valeur particulière  $\gamma = 1/4$  (de fréquence associée  $\sqrt{\gamma} = 1/2$ ) pour laquelle des termes résonants supplémentaires (en  $\cos(\xi/2)$  et  $\sin(\xi/2)$ ) apparaissent dans l'équation sur  $x_1$  (Eq. 5.18). En imposant la suppression de ces termes, nous trouvons par exemple pour le coefficient  $A$  :

$$\frac{d^2 A}{d\eta^2} = \frac{A}{4}, \quad (5.20)$$

soit une divergence exponentielle du coefficient, sauf si  $A = 0$ . Un résultat similaire est obtenu pour le coefficient  $B$ .

Ainsi, le point stationnaire ( $x = 0, p = 0$ ) est globalement associé à un équilibre stable, sauf pour dans le cas particulier  $\gamma = \gamma_0 = 1/4$  où il devient un point selle. Cette situation correspond au cas bien connu du doublement de période (puisque la fréquence naturelle est alors  $\sqrt{\gamma} = 1/2$ ) qui peut s'accompagner de la création ou de l'annihilation d'orbites stables. Pour évaluer comment se propage cette instabilité autour de cette valeur particulière, nous développons  $\gamma$  en série de puissance autour de  $\gamma_0$  :  $\gamma = \gamma_0 + \alpha\gamma_1 + \dots$ . Nous répétons ensuite la procédure précédemment appliquée, en utilisant les développements en série de  $x$  et  $\gamma$  dans l'Eq. 5.15 puis en regroupant les termes par puissance de  $\alpha$ . Nous obtenons des équations très similaires au cas précédent :

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi^2} + \frac{x_0}{4} = 0 \quad \text{pour l'ordre 0,} \quad (5.21.a)$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi^2} + \frac{x_1}{4} = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi \partial \eta} - \cos(\xi)x_0 - \gamma_1 x_0 \quad \text{pour l'ordre 1,} \quad (5.21.b)$$

où, dans les membres de gauche, nous avons remplacé  $\gamma$  par  $\gamma_0 = 1/4$ , et où, dans le membre de droite de l'Eq. 5.21.b, est apparu le terme supplémentaire  $\gamma_1 x_0$ . Ce terme va rajouter de nouvelles contributions résonantes, qu'il nous faudra éliminer. En injectant la solution<sup>4</sup> de l'Eq. 5.21.a :

$$x_0(\xi, \eta) = A(\eta) \cos(\xi/2) + B(\eta) \sin(\xi/2) \quad (5.22)$$

dans l'Eq. 5.21.b et en imposant l'élimination des termes résonants en  $\cos(\xi/2)$  et  $\sin(\xi/2)$ , nous obtenons cette fois-ci la condition :

$$\frac{d^2 A}{d\eta^2} = - \left( \gamma_1^2 - \frac{1}{4} \right) A. \quad (5.23)$$

Ici, le caractère stable ou instable dépend de la valeur de  $\gamma_1$ . Plus précisément,  $A$  sera une fonction périodique et les trajectoires seront stables si  $\gamma_1^2 > 1/4$ , c'est-à-dire pour  $\gamma_1 > 1/2$  ou  $\gamma_1 < -1/2$ . Les valeurs  $\gamma_1 = \pm 1/2$  définissent dans l'espace des paramètres deux frontières entre des zones stables et instables, que nous pouvons exprimer à partir du développement  $\gamma = \gamma_0 + \alpha\gamma_1$  selon :

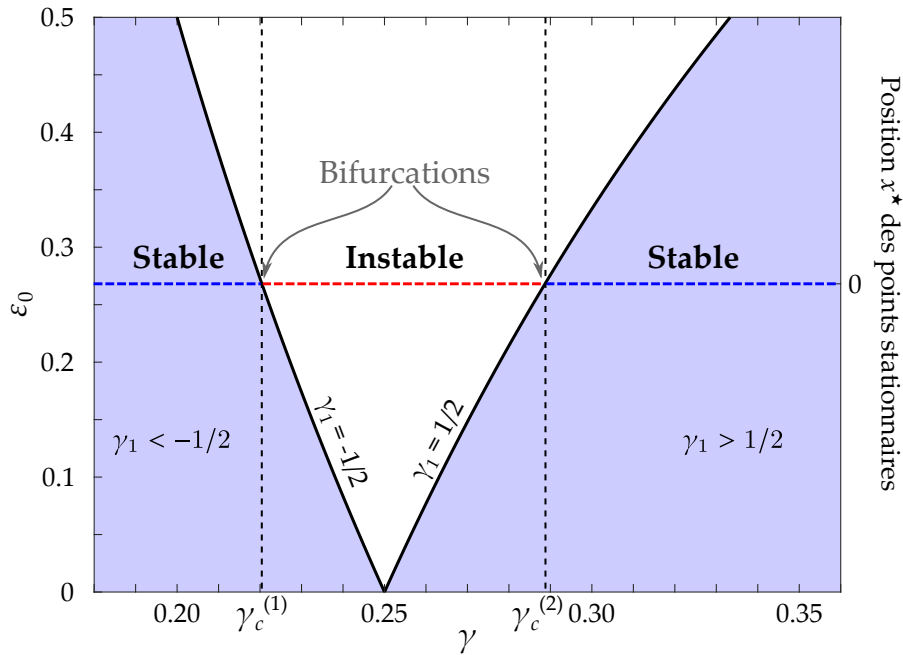
$$\gamma_c^{(1,2)} = \frac{1}{4} \pm \frac{\alpha}{2} \quad (5.24)$$

soit, en remplaçant  $\alpha$  par sa définition :

$$\gamma_c^{(1,2)} = \frac{1}{4 \pm 2\varepsilon_0}. \quad (5.25)$$

Nous pouvons tracer ces frontières dans l'espace des paramètres  $(\gamma, \varepsilon_0)$  : c'est ce qui est fait Fig. 5.3. Ces frontières définissent ce qu'on appelle une "langue" instable dans le plan  $(\gamma, \varepsilon_0)$ . Imaginons que  $\varepsilon_0$  soit fixé et que nous augmentions peu à peu  $\gamma$  en partant de  $\gamma < \gamma_c^{(1)}$  : nous nous déplacerions sur la droite indiquée en pointillés, le centre du portrait de phase ( $x = 0, p = 0$ ) étant alternativement stable, instable puis stable à nouveau. À  $\varepsilon_0$  fixé, ces changements ont lieu pour les deux valeurs critiques  $\gamma_c^{(1)}$  et  $\gamma_c^{(2)}$  données par l'Eq. 5.25 : ces points sont appelés des bifurcations.

4. Il s'agit de la même expression que Eq. 5.17 avec  $\gamma = 1/4$ .



**FIGURE 5.3 | Diagramme de stabilité dans le cas linéaire (équation de Mathieu).** Il existe une "langue" instable issue de la valeur  $\gamma = 1/4$  dans laquelle le point stationnaire correspondant au centre du portrait de phase devient un point selle. Les deux bifurcations (c'est-à-dire les points où la stabilité du point stationnaire change) ont lieu pour les deux valeurs critiques  $\gamma_c^{(1)}$  et  $\gamma_c^{(2)}$  données par l'Eq. 5.25.

### 5.3.2 Développement au deuxième ordre : équation de Mathieu-Duffing

Pour affiner le diagramme de stabilité précédemment obtenu, nous devons inclure les non-linéarités dues au sinus de l'Eq. 5.12. Ces contributions supplémentaires non linéaires permettent en effet de stabiliser dynamiquement le système et font émerger de nouvelles positions d'équilibre. Nous allons donc un cran plus loin dans le développement du sinus, soit  $\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6}$ . L'équation d'évolution devient alors :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\gamma + \alpha \cos(t)) \left( x - \frac{x^3}{6} \right) = 0. \quad (5.26)$$

En effectuant le changement de variable  $y = x/\sqrt{\alpha}$  dans l'équation précédente, nous obtenons à l'ordre 2 en  $\alpha$  :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\gamma + \alpha \cos(t)) y + \alpha \beta y^3 = 0, \quad (5.27)$$

où nous avons simplement posé  $\beta = -\gamma/6$ . Cette équation, appelée équation de Mathieu-Duffing, consiste en une équation de Mathieu avec un terme non-linéaire supplémentaire. Pour obtenir les points stationnaires de cette équation, nous procédons exactement de la même manière que précédemment :

- nous introduisons deux échelles de temps  $\xi$  et  $\eta \ll \xi$  ;
- nous développons  $y = y_0 + \alpha y_1$  ;

- nous développons  $\gamma = \gamma_0 + \alpha\gamma_1$  avec  $\gamma_0 = 1/4$ ;
- nous regroupons les termes en puissance de  $\alpha$ .

Dans le cas de l'équation de Mathieu-Duffing, nous aboutissons au résultat suivant :

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi^2} + \frac{y_0}{4} = 0 \quad \text{pour l'ordre 0,} \quad (5.28.a)$$

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi^2} + \frac{y_1}{4} = -2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi \partial \eta} - \cos(\xi) y_0 - \gamma_1 y_0 + \beta y_0^3 \quad \text{pour l'ordre 1.} \quad (5.28.b)$$

À nouveau, nous constatons qu'un terme supplémentaire  $\beta y_0^3$  est apparu dans l'équation sur  $y_1$ , cette fois-ci à cause des non-linéarités. L'équation sur  $y_0$  étant toujours celle d'un oscillateur harmonique de fréquence  $1/2$ , nous réutilisons pour  $y_0$  la solution donnée par l'Eq. 5.22. Nous injectons cette expression dans l'Eq. 5.28.b, où nous cherchons comme précédemment à faire disparaître les termes résonants. Cette condition nous conduit naturellement aux équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{dA}{d\eta} = \left(\gamma_1 - \frac{1}{2}\right) B + \frac{3\beta}{4} (A^2 + B^2) B, \\ \frac{dB}{d\eta} = - \left(\gamma_1 + \frac{1}{2}\right) A - \frac{3\beta}{4} (A^2 + B^2) A. \end{cases} \quad (5.29)$$

Pour résoudre ces équations croisées, nous passons en coordonnées polaires, c'est-à-dire que nous posons  $A(\eta) = R(\eta) \cos(\theta(\eta))$  et  $B(\eta) = R(\eta) \sin(\theta(\eta))$ . Le système Eq. 5.29 devient alors :

$$\begin{cases} \frac{dR}{d\eta} \cos(\theta) - \frac{d\theta}{d\eta} R \sin(\theta) = \left(\gamma_1 - \frac{1}{2}\right) R \sin(\theta) + \frac{3\beta}{4} R^3 \sin(\theta), \\ \frac{dR}{d\eta} \sin(\theta) + \frac{d\theta}{d\eta} R \cos(\theta) = - \left(\gamma_1 + \frac{1}{2}\right) R \cos(\theta) - \frac{3\beta}{4} R^3 \cos(\theta). \end{cases} \quad (5.30)$$

Après quelques manipulations<sup>5</sup>, nous obtenons finalement des équations différentielles sur  $R$  et  $\theta$  relativement simples :

$$\begin{cases} \frac{dR}{d\eta} = -\frac{R}{2} \sin(2\theta), \\ \frac{d\theta}{d\eta} = -\gamma_1 - \frac{\cos(2\theta)}{2} - \frac{3\beta}{4} R^2. \end{cases} \quad (5.31)$$

À partir de l'Eq. 5.17, on sait que des paramètres  $A$  et  $B$  indépendants du temps court  $\eta$  conduisent à des trajectoires périodiques. Par conséquent nous considérons des paramètres

5. En appelant  $L_1$  et  $L_2$  les deux équations du système Eq. 5.30, ces expressions se simplifient de la manière suivante :

- On calcule  $L_1 \cos(\theta) + L_2 \sin(\theta)$ ;
- On calcule  $L_2 \cos(\theta) - L_1 \sin(\theta)$ .

$R$  et  $\theta$  constants, qui doivent dans ce cas respecter les relations :

$$\begin{cases} -\frac{R}{2} \sin(2\theta) = 0, \\ -\gamma_1 - \frac{\cos(2\theta)}{2} - \frac{3\beta}{4} R^2 = 0. \end{cases} \quad (5.32)$$

Nous avons trois manières de satisfaire ce système :

1. Une solution triviale  $R = 0$  (et dans ce cas la valeur de  $\theta$  nous importe peu car  $A = B = 0$ ), qui correspond en fait au point stationnaire ( $x = 0, p = 0$ ) obtenu avec l'équation de Mathieu et dont nous avons déjà discuté de la stabilité en fonction de  $\gamma$  et  $\varepsilon_0$ .
2. Si  $R \neq 0$ , alors nous avons deux possibilités pour satisfaire la première équation du système :
  - a) soit  $\theta = 0$ ; dans ce cas la deuxième équation du système conduit à une expression pour  $R$  :

$$R = \pm \sqrt{\frac{8}{\gamma} \left( \gamma_1 + \frac{1}{2} \right)}, \quad (5.33)$$

obtenue en remplaçant  $\beta = -\gamma/6$ . Il existe donc deux nouveaux points stationnaires, qui n'apparaissent que si  $\gamma_1 > -1/2$  (de sorte que l'argument de la racine soit positif).

- b) soit  $\theta = \pi/2$ ; le paramètre  $R$  s'exprime à ce moment-là comme :

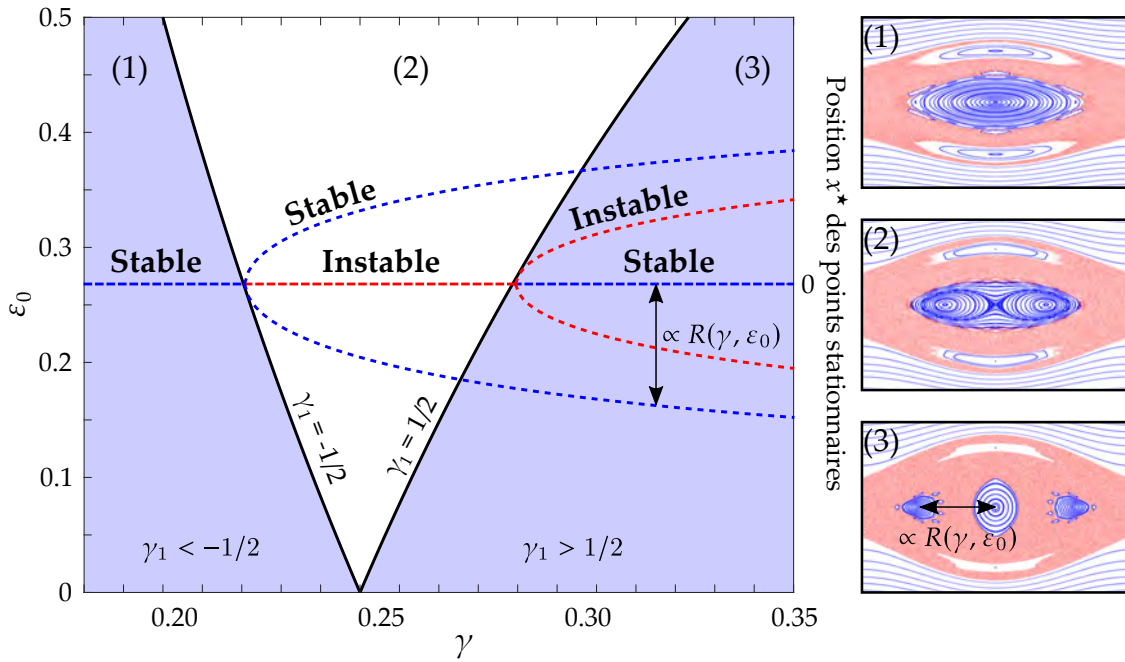
$$R = \pm \sqrt{\frac{8}{\gamma} \left( \gamma_1 - \frac{1}{2} \right)}. \quad (5.34)$$

Deux nouveaux points stationnaires apparaissent alors lorsque  $\gamma_1 > 1/2$ .

Ces nouveaux points stationnaires sont rajoutés sur la Fig. 5.4, et complètent le diagramme de bifurcation. Ainsi, le point stationnaire ( $x = 0, p = 0$ ) correspondant au centre du portrait de phase est initialement stable pour  $\gamma$  petit, puis devient un point selle et perd sa stabilité en  $\gamma_c^{(1)} = (4 + 2\varepsilon_0)^{-1}$  en même temps qu'apparaissent deux nouvelles positions d'équilibre stable, issues de la condition  $\gamma_1 > -1/2$ . Cette première bifurcation correspond donc au cas  $\theta = 0$ . Lorsque nous atteignons la deuxième frontière en  $\gamma_c^{(2)} = (4 - 2\varepsilon_0)^{-1}$ , le centre du portrait de phase se stabilise à nouveau, et deux points stationnaires supplémentaires s'ajoutent. Ils sont issus du cas  $\theta = \pi/2$  (puisqu'on a alors  $\gamma_1 > 1/2$ ), et sont instables<sup>6</sup>.

En résumé, pour une valeur de  $\varepsilon_0$  donnée et en augmentant progressivement la valeur de  $\gamma$ , le portrait de phase présente d'abord un îlot de stabilité en son centre, qui se scinde à partir de  $\gamma_c^{(1)}$  en deux îlots symétriques en position et situés à une distance proportionnelle à  $R$  du centre. Dès que la deuxième valeur critique  $\gamma_c^{(2)}$  est franchie, l'îlot central se stabilise à nouveau et nous observons un portrait de phase à trois îlots de stabilité. Nous présenterons dans la dernière section de ce chapitre la mise en évidence expérimentale de ce diagramme.

6. L'étude de la stabilité des solutions se fait en considérant de faibles perturbations autour des points d'équilibre, puis en linéarisant les équations d'évolution.



**FIGURE 5.4 | Diagramme de stabilité dans le cas non linéaire (équation de Mathieu-Duffing).** Nous observons l'émergence de nouveaux points stationnaires au niveau des deux bifurcations, au croisement de chaque frontière  $\gamma_1 = \pm 1/2$ . La première bifurcation s'accompagne de deux nouvelles positions d'équilibre stable, tandis que les nouveaux points stationnaires de la deuxième bifurcation sont instables. Nous observons donc un portrait de phase présentant un, deux puis trois îlots de stabilité selon l'axe des positions.

### 5.3.3 Évolution sub-période classique des îlots de stabilité

Pour connaître la position et l'évolution au cours d'une période de modulation des îlots de stabilité symétriques en position, il nous faut revenir à une expression de  $x_0$  depuis les coordonnées polaires. Nous nous intéressons aux points stationnaires stables, associés au cas  $\theta = 0$  : nous obtenons immédiatement  $y_0(\xi) = R \cos(\xi/2)$ . En appliquant le changement de variable inverse  $x_0 = \sqrt{\alpha} y_0$  et en utilisant l'expression de  $R$  donnée Eq. 5.33, nous obtenons finalement :

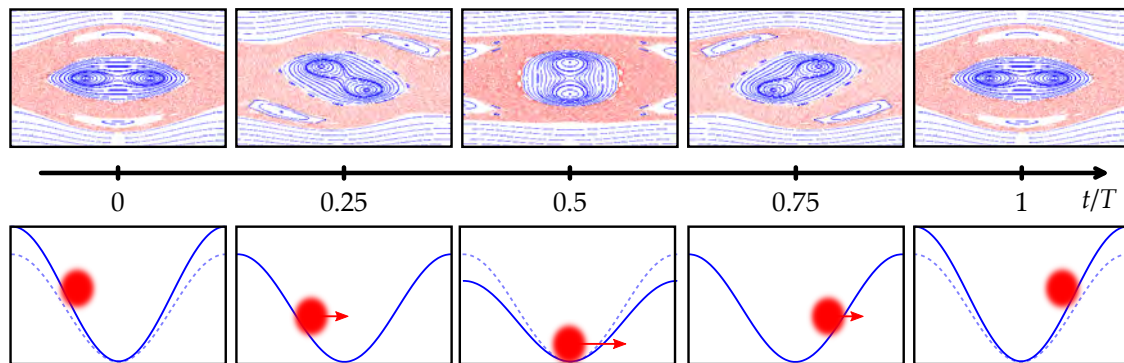
$$x_0(\xi) = \pm \sqrt{8 \left( 1 + \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{1}{4\gamma} \right)} \cos(\xi/2), \quad (5.35)$$

où nous avons utilisé  $\gamma_1 = (\gamma - 1/4)\alpha^{-1}$ . L'impulsion correspondante est obtenue par  $p_0 = \frac{dx_0}{d\xi}$ . Les variables  $x_0$  et  $p_0$  ne dépendant plus du temps rapide  $\eta$ , nous revenons à un temps avec dimension en remplaçant  $\xi$  par la variable  $2\pi t/T$ . Finalement, les centres des îlots symétriques en position évoluent dans l'espace des phases suivant :

$$\begin{pmatrix} x^*(t) \\ p^*(t) \end{pmatrix} = \pm \sqrt{8 \left( 1 + \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{1}{4\gamma} \right)} \begin{pmatrix} \cos(\pi t/T) \\ -\sin(\pi t/T)/2 \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

avec  $T$  la période de modulation.





**FIGURE 5.5** | **Évolution classique sub-modulation : rotation des orbites stables du portrait de phase.** Nous traçons le portrait de phase stroboscopique pour des temps inférieurs à la période de modulation, mettant en évidence la rotation des îlots réguliers symétriques en position autour de l'origine, selon l'Eq. 5.36. La dynamique classique, au sein d'un puits du réseau, d'une particule initialement dans l'îlot de gauche est également représentée.

Les îlots réguliers symétriques en position tournent donc périodiquement autour du centre du portrait de phase, comme cela est clairement visible sur la Fig. 5.5, avec une période de  $2T$  : les îlots reviennent à leur position initiale toutes les deux périodes de modulation. Ainsi, si on considère une particule classique placée à  $t = 0$  dans l'îlot de gauche comme représenté sur la Fig. 5.5 :

- Après une seule période de modulation, la particule se trouve dans l'îlot symétrique, ici l'îlot de droite, pour  $t/T = 1$ . Nous en déduisons qu'une particule classique observée stroboscopiquement toutes les périodes de modulation oscillerait entre les deux positions stables gauche et droite.
- Par conséquent, si nous mesurons la position toutes les deux périodes de modulation, la particule reste dans l'îlot initial, ici celui de gauche, selon la dynamique classique.

Cette dynamique, purement classique, ne sera plus valable dans le chapitre suivant, où nous entrerons dans le régime quantique avec l'effet tunnel.

Nous avons également mis à profit la rotation des îlots de stabilité lors de nos mesures expérimentales. En effet, les îlots de stabilité symétriques en position au temps  $t_n = nT$ ,  $n \in \mathbb{N}$  se retrouvent alignés selon l'axe des impulsions après un temps  $t = t_n + T/2$ . Cette rotation dans l'espace des phases permet de transférer vers l'axe des impulsions l'information contenue selon l'axe des positions. Cette technique, détaillée dans la section suivante, sera primordiale dans le chapitre 6.

La Fig. 5.6 permet également de se rendre compte dès maintenant de l'importance de la phase à l'origine de la modulation  $\varepsilon(t)$  :

- Nous avons ici considéré la modulation  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$  qui implique un saut de la profondeur, celle-ci passant brusquement de  $s$  à  $t = 0^-$  à  $s(1 + \varepsilon_0)$  à  $t = 0^+$ . Ce choix conduit à l'évolution donnée Fig. 5.6, avec les îlots réguliers alignés selon l'axe des positions à l'instant initial  $t = 0$ .
- Si nous considérons une modulation de la forme  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$  par exemple, l'évolution des îlots sera identique mais nous ne démarrerons pas du même

portrait de phase. Dans ce cas, la situation initiale sera donnée par le portrait de phase correspondant à  $t/T = 0.75$  de la Fig. 5.5. Or les îlots réguliers ne sont dans ce cas plus alignés selon l'axe des positions, nous ne pourrions donc pas y charger les atomes.

Il est donc nécessaire d'avoir une bonne maîtrise de la phase à l'origine de la modulation. C'est cette contrainte qui a motivé l'amélioration du dispositif de contrôle de la profondeur, expliquée section 2.2.3 du chapitre 2.

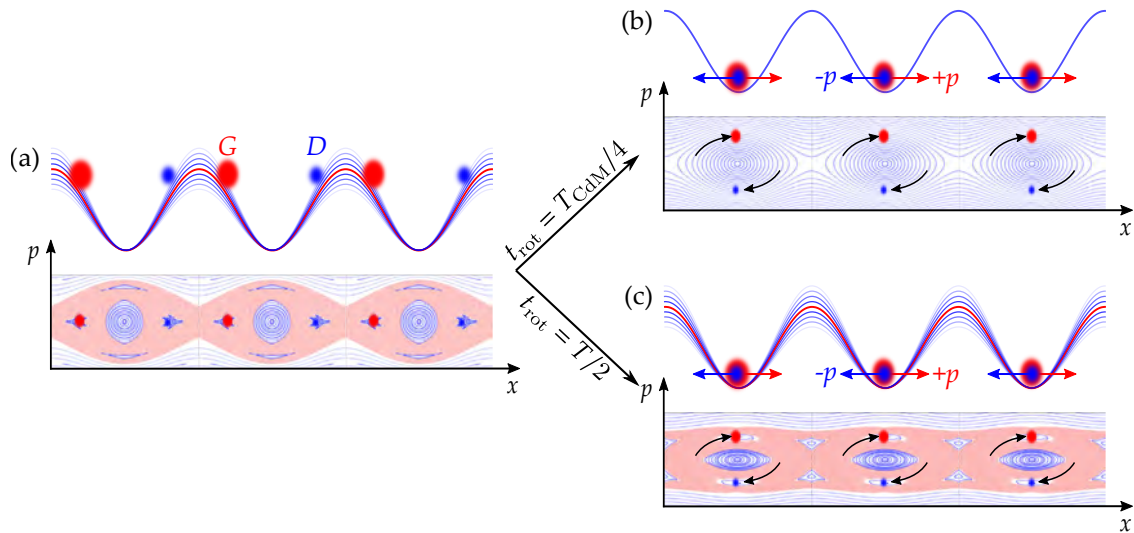
## 5.4 Mise en évidence expérimentale des bifurcations

Au cours des sections précédentes, nous avons rappelé les conditions nécessaires à l'émergence de chaos, et nous avons constaté que notre système, qui consiste en un condensat chargé dans un réseau optique fortement modulé en amplitude, les réunissait. En particulier, nous pouvons *a priori* obtenir une dynamique mixte, mêlant trajectoires stables et trajectoires chaotiques, en choisissant correctement les paramètres de modulation. Nous avons détaillé l'analyse des points stationnaires de la dynamique sous l'Hamiltonien Eq. 5.7, ce qui nous a conduit au diagramme de bifurcation présenté Fig. 5.4.

Dans cette dernière section, nous présentons la mise en évidence expérimentale de ce diagramme de bifurcation : de manière similaire à de précédentes expériences [HENSINGER *et al.* (2001b) et TOMKOVIČ *et al.* (2017)], nous avons utilisé les atomes pour sonder un espace des phases mixte. Comme nous le verrons, la nature de la trajectoire (stable ou chaotique), qui change lorsque nous varions les conditions initiales, modifie l'écart-type de la distribution en impulsion du condensat. Nous pouvons alors retrouver la position des îlots de stabilité, et comparer nos résultats aux prédictions théoriques précédemment établies. Avant cela, nous détaillons le protocole expérimental utilisé. Nous présentons dès maintenant la rotation dans l'espace des phases, astuce expérimentale qui nous permet de déterminer les populations des îlots réguliers. Cette notion aura toute son importance au chapitre suivant dédié à la dynamique quantique, soit l'effet tunnel assisté par le chaos.

### 5.4.1 Rotation dans l'espace des phases

Considérons la situation suivante : des atomes peuplent les deux îlots de stabilité symétriques selon l'axe des positions d'un portrait de phase stroboscopique mixte (voir Fig. 5.6(a)). Ces îlots se trouvent au sein d'un même puits du réseau, de période spatiale  $d = 532$  nm. Ils sont donc séparés d'une distance de l'ordre de la centaine de nanomètres, qui est à comparer à la résolution maximale de notre système d'imagerie d'environ  $3 \mu\text{m}$  : il nous est impossible d'observer *in situ* les îlots de stabilité sur notre dispositif expérimental. Il est alors naturel de se poser la question de la mesure : comment accéder aux populations relatives des îlots de stabilité ? À partir d'un travail théorique traitant de la manipulation de paquet d'onde dans l'espace des phases [CONDON *et al.* (2014)], l'équipe a imaginé un protocole de microscopie par rotation dans l'espace des phases. Cette méthode a été validée avant l'étude de l'effet tunnel assisté par le chaos, aussi



**FIGURE 5.6 | Protocoles de rotation dans l'espace des phases.** Nous utilisons cette rotation pour transférer vers l'axe des impulsions l'information initialement contenue sur l'axe des positions. Afin de distinguer deux îlots symétriques en position peuplés par des atomes (a), nous avons deux possibilités : (b) arrêter la modulation et laisser les atomes évoluer dans le réseau statique, pendant un temps de rotation  $t_{\text{rot}}$  correspondant au quart de période de l'oscillation naturelle dans un puits, ou (c) appliquer la modulation pendant une demi-période supplémentaire et ainsi tirer partie de la rotation des îlots de stabilité donnée par l'Eq. 5.36.

bien par des simulations numériques [DUBERTRAND *et al.* (2016)] que par des expériences préalables dans l'équipe [FORTUN (2016)]. Rappelons ici son principe.

Nous n'avons certes pas accès à la distribution spatiale des atomes au sein d'un puits, mais nous pouvons mesurer la distribution en impulsion en effectuant un ToF. L'idée est alors de transférer vers l'axe des impulsions l'information contenue selon l'axe des positions, à l'aide d'une rotation de  $\pi/2$  dans l'espace des phases. Plusieurs schémas de manipulation peuvent être envisagés ; nous en avons utilisé deux différents, présentés Figs. 5.6(b) et (c).

La première méthode (Fig. 5.6(b)) consiste simplement à arrêter la modulation  $\varepsilon(t)$  et ainsi revenir à un réseau statique de profondeur  $s$ . Nous maintenons ensuite les atomes dans le réseau pendant un temps  $t_{\text{rot}} = T_{\text{CdM}}/4$ , où  $T_{\text{CdM}} = 1/\nu_{\text{CdM}}$  désigne la période d'oscillation du centre de masse dans un puits du réseau statique (voir Eq. 2.39 du chapitre 2). Les atomes effectuent donc un quart d'oscillation, ce qui revient bien à effectuer la rotation voulue dans l'espace des phases.

La deuxième méthode (Fig. 5.6(c)) exploite la modulation du réseau : quand nous souhaitons mesurer les populations des îlots, nous laissons le système évoluer dans le réseau modulé pendant un temps supplémentaire  $t_{\text{rot}} = T/2$ , qui correspond à une demi-période de modulation. Les atomes continuent donc leur évolution selon l'Eq. 5.36, ce qui implique bien une rotation de  $\pi/2$  dans l'espace des phases après le temps de rotation.

Ces deux techniques aboutissent à un résultat similaire : les atomes de l'îlot de gauche acquièrent après rotation une impulsion positive, tandis que les atomes dans l'îlot de droite possèdent une impulsion négative. En coupant abruptement tous les confinements après l'un ou l'autre de ces protocoles, puis en effectuant un **ToF**, nous mesurons la distribution en impulsion résultante.

! Toutes les mesures que nous ferons porteront donc sur une distribution en impulsion. Grâce à la rotation dans l'espace des phases, il s'agira d'une image directe de la distribution spatiale de la fonction d'onde au sein d'un puits du réseau, reconstituée à partir de la figure d'interférences due à l'ensemble des puits. La reconstruction des populations "gauche" et "droite" sera expliquée plus en détail dans le chapitre 6.

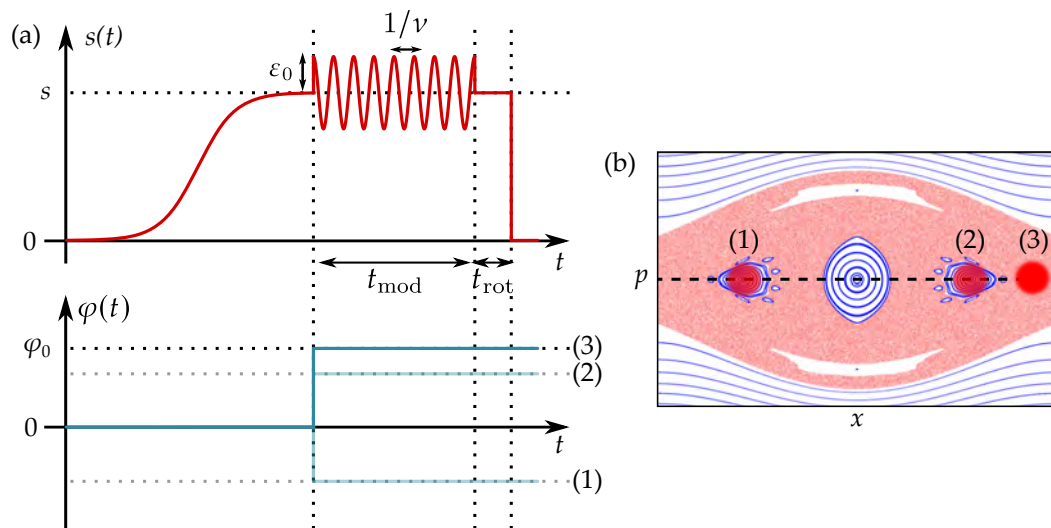
Pour les expériences présentées dans ce chapitre, nous avons opté pour la première méthode. Pour les mesures de l'effet tunnel assisté par le chaos, qui seront détaillées dans le chapitre 6, nous avons utilisé la deuxième méthode, plus robuste vis-à-vis d'une éventuelle dérive de la profondeur du réseau puisqu'elle ne repose que sur les paramètres de modulation.

#### 5.4.2 Protocole expérimental

La séquence expérimentale que nous utilisons pour sonder l'espace des phases est indiquée Fig. 5.7. Cette séquence se déroule comme suit :

- Nous montons adiabatiquement le réseau optique à la profondeur  $s$  voulue. Cette profondeur a été au préalable précisément mesurée par notre méthode de calibration (voir section 2.3.3);
- Nous déplaçons soudainement le réseau d'une distance  $\Delta x$  que nous contrôlons grâce à l'amplitude du saut de phase appliqué  $\varphi_0$ ;
- De manière concomitante au déplacement du réseau, nous démarrons la modulation de sa profondeur à une fréquence  $\nu$  et une amplitude  $\varepsilon_0$  choisies. Nous maintenons les atomes dans le réseau modulé pendant un temps  $t_{\text{mod}}$  qui correspond à un multiple entier pair de la période de modulation :  $t_{\text{mod}} = 2nT$  où  $n \in \mathbb{N}$  et  $T = 1/\nu$ ;
- Nous effectuons la rotation dans l'espace des phases, en ajoutant un maintien dans le réseau statique d'une durée  $t_{\text{rot}} = T_{\text{CdM}}/4$ . La période  $T_{\text{CdM}}$  est connue grâce à la calibration de la profondeur du réseau;
- Enfin nous coupons tous les confinements et nous procédons à un **ToF**.

Pour retrouver la signature expérimentale de la bifurcation, nous fixons le nombre de périodes de modulation  $2n$  entre 4 et 10. Ces temps sont relativement courts vis-à-vis de la dynamique quantique; il n'y a donc pas encore d'effet d'interférences quantiques, que nous étudierons au chapitre suivant. Néanmoins, ces temps sont également suffisamment longs pour que la nature de la dynamique (régulière ou chaotique), associée à la condition initiale testée, laisse une signature dans la distribution en impulsion. Comme cela a été discuté section 5.3.3, nous fixons aussi la phase à l'origine de la modulation de sorte à bien obtenir un cosinus, c'est-à-dire telle que la profondeur renormalisée vaille  $\gamma$  à  $t = 0^-$  et  $\gamma(1 + \varepsilon_0)$  à  $t = 0^+$  (l'origine des temps étant prise au début de la modulation).



**FIGURE 5.7 | Protocole expérimental utilisé pour sonder un espace des phases mixte.**

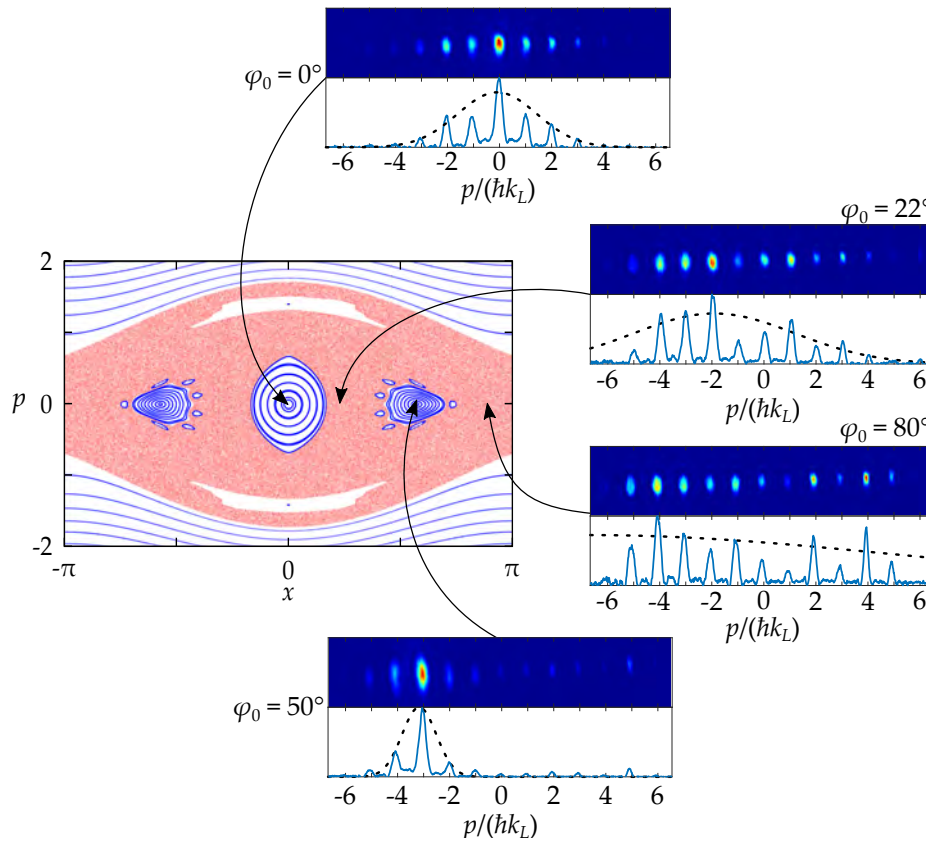
(a) Après avoir chargé les atomes dans le réseau optique statique, de profondeur désirée  $s$ , nous déplaçons quasi-instantanément le réseau optique en appliquant un déphasage  $\varphi_0$  contrôlé, et nous démarrons en même temps la modulation de la profondeur. Les paramètres de modulation sont l'amplitude  $\varepsilon_0$  et la fréquence  $\nu$ . Nous poursuivons la modulation un nombre entier pair de périodes. Nous effectuons ensuite la rotation dans l'espace des phases (voir section 5.4.1), puis procédons au ToF. (b) Le déphasage du réseau initialement appliqué permet de varier la position initiale des atomes dans l'espace des phases selon l'axe des positions.

Comme indiqué sur la Fig. 5.7, nous répétons ce protocole en changeant le déphasage  $\varphi_0$  initialement appliqué, en le faisant varier entre  $-90^\circ$  et  $+90^\circ$ . Nous varions ainsi la position initiale des atomes selon l'axe des positions sur l'intégralité de l'espace des phases, et nous observons l'effet de cette position initiale sur les images d'absorption.

### 5.4.3 Résultats

Débutons cette section par une question simple : peut-on distinguer expérimentalement une trajectoire régulière d'une trajectoire chaotique ? En d'autres termes, si nous plaçons initialement les atomes dans un îlot de stabilité ou dans la mer chaotique, y a-t-il une signature visible sur les images d'absorption, et quelle est-elle ?

Pour répondre à cette question, nous avons appliqué le protocole précédent. Nous fixons la profondeur  $s$  du réseau, ainsi que la fréquence  $\nu$  et l'amplitude  $\varepsilon_0$  de modulation, ce qui fixe les paramètres sans dimension  $\gamma$  et  $\varepsilon_0$  qui contrôlent la dynamique classique du système. En revanche nous changeons la position initiale des atomes dans l'espace des phases en variant le déphasage  $\varphi_0$ . Des exemples d'images d'absorption ainsi obtenues pour ( $\gamma = 0.348$ ,  $\varepsilon_0 = 0.27$ ), après 4 périodes de modulation et différentes valeurs de  $\varphi_0$ , sont montrées Fig. 5.8 avec l'espace des phases correspondant. Deux des quatre images

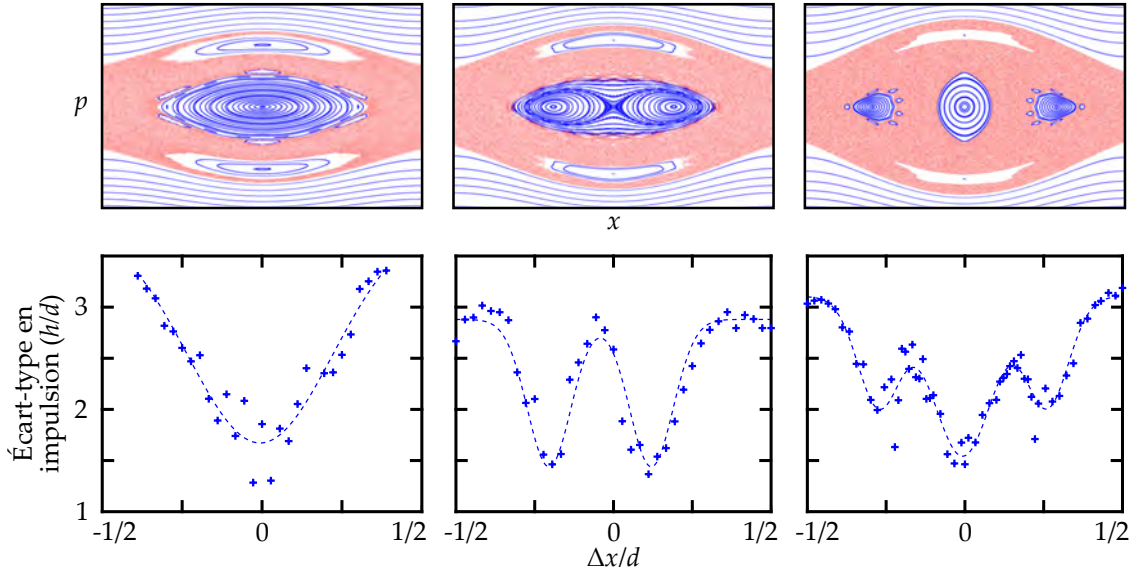


**FIGURE 5.8** | Exemples d'images d'absorption obtenues dans un espace des phases mixte. Lorsque les atomes sont initialement chargés dans un îlot stable ( $\varphi_0 = 0^\circ$  et  $\varphi_0 = 50^\circ$ ), la dispersion en impulsion reste petite, tandis que des atomes placés initialement dans la mer chaotique ( $\varphi_0 = 22^\circ$  et  $\varphi_0 = 80^\circ$ ) voient leur distribution en impulsion s'étaler.

présentées ont été obtenues pour des atomes initialement placés dans un îlot régulier (central ou de droite), les deux autres pour des atomes dans la mer chaotique.

Lorsque la position initiale des atomes correspond à une trajectoire régulière, nous obtenons après ToF un nombre faible d'ordres de diffraction peuplés. Nous remarquons également que la valeur moyenne de l'impulsion obtenue est bien celle attendue grâce à la rotation dans l'espace des phases : quand les atomes sont chargés dans l'îlot central sans déphasage  $\varphi_0 = 0^\circ$  l'impulsion moyenne est bien nulle, tandis que des atomes initialement placés dans l'îlot de droite ( $\varphi_0 = 50^\circ$ ) présentent après ToF une impulsion moyenne négative. Cette situation est à comparer au cas chaotique : nous observons dans ce cas bien plus d'ordres de diffraction peuplés. Pour s'en convaincre, un ajustement gaussien montre sur chaque profil expérimental de la Fig. 5.8 l'enveloppe des pics de diffraction obtenus. Il est clair que la largeur de l'enveloppe est directement reliée à la position initiale des atomes dans l'espace des phases. Ainsi, pour des temps courts de modulation, une fonction d'onde dans un îlot régulier à  $t = 0$  reste contenue dans cet îlot : la distribution en impulsion présente par conséquent une faible dispersion. À l'inverse, une fonction d'onde dans la mer chaotique va très rapidement diffuser et se délocaliser. Il en résulte une large dispersion en impulsion.





**FIGURE 5.9 | Détermination expérimentale de la position des îlots réguliers dans un espace des phases mixte.** Ligne du haut : portraits de phase obtenus à  $\varepsilon_0 = 0.27$  et pour des valeurs croissantes de  $\gamma$  :  $\gamma = 0.188$  (gauche),  $\gamma = 0.265$  (milieu),  $\gamma = 0.348$  (droite). Ligne du bas : Mesure expérimentale de l'écart-type de la distribution en impulsion obtenue après ToF (Eq. 5.37), en fonction du déplacement  $\Delta x$  initialement appliqué aux atomes. Les valeurs des paramètres ( $\gamma, \varepsilon_0$ ) utilisées sont celles générant les portraits de phase de la ligne supérieure. Les tirets bleus correspondent à un ajustement des résultats expérimentaux par une somme de fonctions gaussiennes.

La mesure de l'écart-type de la distribution en impulsion de la fonction d'onde est ainsi révélatrice de la nature de la trajectoire associée à la position initiale des atomes au sein d'un puits. Nous procédons Fig. 5.9 à l'étude systématique de trois espaces des phases, obtenus pour  $\varepsilon_0 = 0.27$  fixé et pour des valeurs de  $\gamma$  égales à 0.188, 0.265 et 0.348. Les espaces des phases associés présentent respectivement un, deux et trois îlots réguliers. Dans chaque cas, nous scannons l'axe des positions, et nous traçons pour chaque position initiale  $\Delta x$  (contrôlée par le déphasage  $\varphi_0$ , voir Eq. 2.18 du chapitre 2) l'écart-type en impulsion défini selon :

$$\sigma(\Delta x) = \sqrt{\sum_{j=-N}^N \mathcal{P}_j(\Delta x) (p_j - \bar{p}(\Delta x))^2}, \quad (5.37)$$

où  $\mathcal{P}_j(\Delta x)$  est la population mesurée, pour le déplacement  $\Delta x$ , dans l'ordre  $j$  d'impulsion  $p_j = j\hbar k_L$ . Cette expression fait également intervenir l'impulsion moyenne  $\bar{p}(\Delta x)$  dont l'expression est :

$$\bar{p}(\Delta x) = \sum_{j=-N}^N \mathcal{P}_j(\Delta x) p_j. \quad (5.38)$$

Les deux sommes courent sur l'ensemble des ordres visibles, avec  $N$  l'indice (en valeur absolue) du plus grand ordre peuplé (par exemple,  $N = 6$  sur la Fig. 5.8). Nous observons Fig. 5.9 des minima locaux de l'écart-type en impulsion qui indiquent la présence d'îlots

réguliers. En ajustant la mesure  $\sigma(\Delta x)$  par une somme de fonctions gaussiennes, nous sommes en mesure de déterminer la valeur du déphasage correspondant à un minimum, et d'en déduire alors expérimentalement les positions  $x^*$  de ces îlots.

Nous avons ainsi tous les outils nécessaires pour sonder expérimentalement les bifurcations. En gardant le paramètre  $\varepsilon_0 = 0.27$  fixé et en variant  $\gamma$  dans l'intervalle  $0.18 < \gamma < 0.36$ , l'îlot de stabilité central se scinde en deux puis trois îlots réguliers (voir Fig. 5.9 et Fig. 5.10(a)), comme nous l'avons évoqué en section 5.3. Nous avons pris deux ensembles de données :

- Les points à  $\gamma < 0.27$  ont été obtenus en fixant la fréquence de modulation à  $\nu = 80$  kHz et en variant la profondeur  $s$ . En utilisant cette fréquence de modulation, nous obtenons une constante de Planck effective  $\hbar_{\text{eff}} = 0.203$ .
- Les points à  $\gamma > 0.27$  ont été obtenus avec une fréquence de modulation de  $\nu = 70$  kHz. Ce changement était nécessaire, car nous étions alors limité par la profondeur du réseau optique si nous conservions  $\nu = 80$  kHz.



À partir des expressions données Eq. 5.8, la profondeur du réseau optique correspondant à  $\gamma = 0.27$  pour  $\hbar_{\text{eff}} = 0.203$  est  $s = 26$ . En prenant en compte la modulation, la profondeur maximale nécessaire est alors  $s(1 + \varepsilon_0) \approx 33$  avec  $\varepsilon_0 = 0.27$ . Nous pouvons difficilement aller au-delà de cette valeur sans sortir du régime linéaire de l'AOM<sub>a</sub> contrôlant la profondeur du réseau optique (voir section 2.2.3 du chapitre 2).

Avec la fréquence de modulation  $\nu = 70$  kHz, la constante de Planck effective vaut  $\hbar_{\text{eff}} = 0.232$ . Soulignons que  $\gamma$  varie comme  $\nu^{-2}$  tandis que  $\hbar_{\text{eff}}$  varie comme  $\nu^{-1}$  (voir Eq. 5.8). Changer la fréquence de modulation modifie donc peu la constante de Planck effective, tout en nous permettant d'accéder plus facilement aux grandes valeurs de  $\gamma$ .

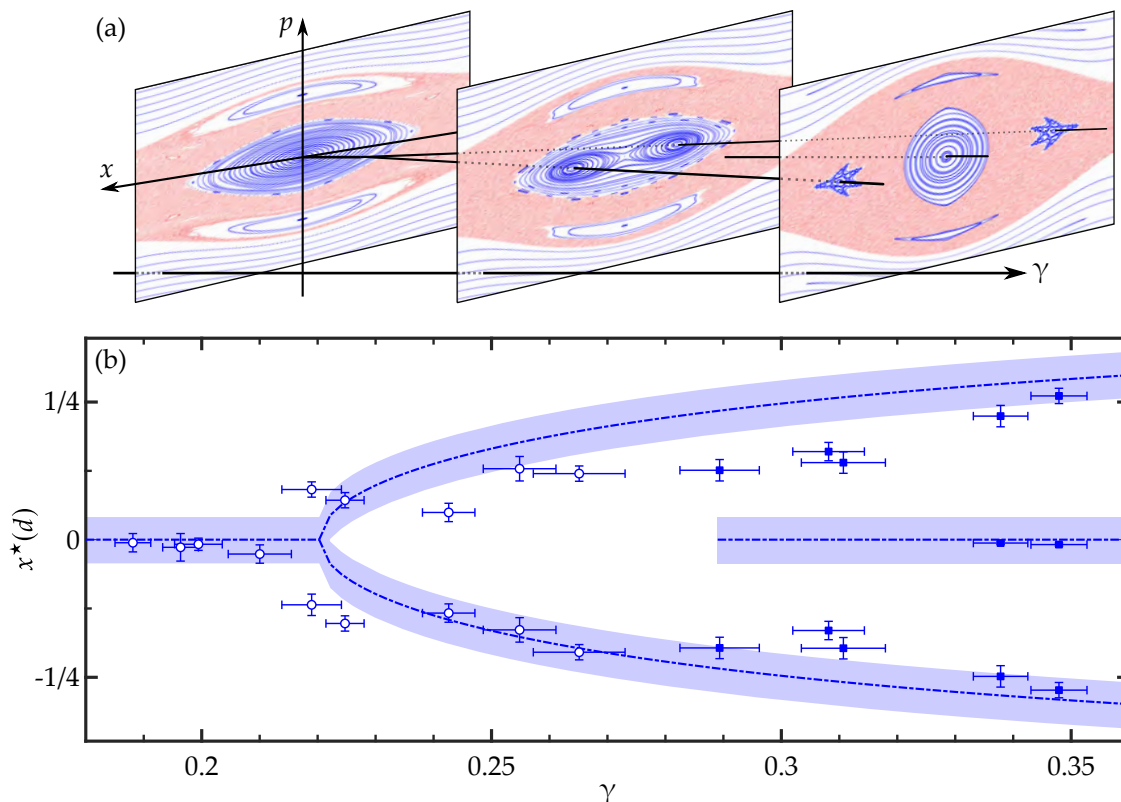
Pour chaque valeur de  $\gamma$  nous appliquons le protocole expérimental détaillé à la section précédente et répétons l'analyse sur l'écart-type de la distribution en impulsion. Sur la Fig. 5.10(b) nous confrontons les positions des centres des îlots réguliers déterminés expérimentalement à la prédiction théorique. Les deux valeurs critiques en  $\gamma$ , obtenues à partir de l'Eq. 5.25, sont  $\gamma_c^{(1)} = 0.22$  et  $\gamma_c^{(2)} = 0.29$ . L'évolution théorique de la position des deux îlots symétriques en  $x$ , indiquée en tirets bleus sur la Fig. 5.10(b), est donnée par :

$$x^*(\gamma) = \pm \sqrt{8 \left( 1 + \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{1}{4\gamma} \right)} \quad (5.39)$$

et est directement obtenue à partir de l'Eq. 5.36.

Les résultats expérimentaux et théoriques sont globalement en bon accord. Nous retrouvons en particulier la présence d'un, deux ou trois îlots à mesure que  $\gamma$  augmente. Les deux valeurs différentes de  $\hbar_{\text{eff}}$ , relativement proches, ont peu d'incidence sur l'observation expérimentale.





**FIGURE 5.10 | Observation expérimentale de bifurcations dynamiques.** (a) Évolution de l'espace des phases en variant  $\gamma$  à  $\varepsilon_0 = 0.27$  fixé. L'îlot central se divise d'abord en deux, puis en trois îlots de stabilité. (b) Évolution de la position des centres des îlots réguliers en fonction de  $\gamma$  : les points correspondent aux mesures expérimentales avec  $\hbar_{\text{eff}} = 0.203$  (ronds creux) et  $\hbar_{\text{eff}} = 0.232$  (carrés pleins), tandis que la prédiction analytique est indiquée par les pointillés. L'aire bleue indique la limite de résolution dictée par  $\hbar_{\text{eff}}$ . Les barres d'erreur indiquent l'incertitude sur  $\gamma$  (due à une incertitude sur la profondeur) et sur  $x^*$  (donnée par l'ajustement gaussien de  $\sigma(\Delta x)$ ).

La surface  $S$  de la fonction d'onde dans l'espace des phases est proportionnelle à  $\hbar_{\text{eff}}$ . En supposant un état gaussien dont les dispersions  $\Delta x$  et  $\Delta p$  seraient égales, nous avons également  $S \propto \Delta x^2$ . Nous avons donc :

$$\Delta x \propto \sqrt{\hbar_{\text{eff}}}.$$

Avec les deux valeurs de  $\hbar_{\text{eff}}$  utilisées, nous obtenons :

$$\Delta x^{(1)} \propto \sqrt{0.203} = 0.451 \quad \text{et} \quad \Delta x^{(2)} \propto \sqrt{0.232} = 0.482$$

La différence, ramenée à la largeur de l'espace des phases, est donc de  $(\Delta x^{(2)} - \Delta x^{(1)})/(2\pi) = 0.005$  soit moins de 1%.

Les écarts les plus importants entre points expérimentaux et courbes théoriques ont surtout lieu au niveau des valeurs critiques  $\gamma_c^{(1)} = 0.22$  et  $\gamma_c^{(2)} = 0.29$ , c'est-à-dire là où les

bifurcations sont attendues. Dans les deux cas, ces écarts sont à mettre sur le compte de la surface finie de la fonction d'onde du condensat dans l'espace des phases, qui limite notre résolution :

- Proche de la première bifurcation  $0.215 \lesssim \gamma \lesssim 0.23$ , la distance séparant les deux îlots réguliers est petite. Nous n'arrivons pas à charger uniquement un seul des deux îlots (la fonction d'onde débordant sur les deux), ce qui nous empêche de les distinguer convenablement. La situation est résolue pour  $\gamma > 0.23$  où la distance entre les îlots est suffisamment grande.
- À la deuxième bifurcation  $0.29 \lesssim \gamma \lesssim 0.32$ , la surface de l'îlot central venant de réapparaître est faible devant la surface, proportionnelle à  $\hbar_{\text{eff}}$ , qu'occupe la fonction d'onde. Nous ne pouvons donc pas charger le condensat dans l'îlot central tant que celui-ci n'est pas suffisamment grand, ce qui devient le cas pour  $\gamma > 0.33$ .

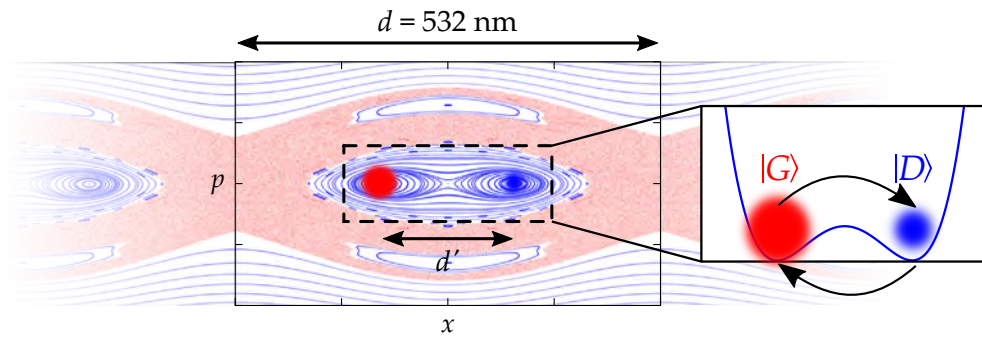
Nous constatons également sur les Figs. 5.9 et 5.10 un décalage des centres des îlots réguliers mesurés expérimentalement vers les valeurs négatives. Nous attribuons ce léger offset à un problème technique : nous avons remarqué une différence entre le saut de phase  $\varphi_0$  que nous programmons et le déplacement du réseau optique réellement perçu par les atomes. Cette différence, que nous avons mesurée, est de l'ordre de 2% du pas  $d$  du réseau optique.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes concentrés sur la dynamique classique obtenue dans un régime de paramètres tels que l'espace des phases est mixte : trajectoires régulières et trajectoires chaotiques y coexistent. Après avoir défini plusieurs grandeurs et notions utiles pour ce chapitre et le suivant, j'ai consacré une section à la détermination théorique du diagramme de bifurcation présenté Fig. 5.4 : en variant le paramètre  $\gamma$  à  $\varepsilon_0$  fixé, le système subit deux bifurcations. Le portrait de phase évolue en conséquence en présentant successivement un, deux et trois îlots de stabilité selon l'axe des positions. Cette étape nous a également permis de comprendre la dynamique sub-période des trajectoires régulières du système, dont nous nous servons au chapitre 6 pour effectuer la rotation dans l'espace des phases. Nous avons ensuite retrouvé expérimentalement ce diagramme de bifurcation. Pour cela, nous avons varié la position initiale des atomes dans les puits du réseau, et nous avons déduit de la dispersion en impulsion du nuage mesurée après ToF la position des centres des îlots réguliers.

Considérons le portrait de phase avec deux îlots symétriques selon l'axe des positions, par exemple le cas (2) de la Fig. 5.4, reporté sur la Fig. 5.11. En nous restreignant à la zone centrale du portrait de phase, on retrouve les trajectoires bien connues du double-puits de potentiel. Un puits du réseau modulé peut donc être décrit, de manière stroboscopique, comme un double-puits. Notre système s'apparente alors à un super-réseau effectif, caractérisé par deux périodes spatiales : le pas du réseau  $d = 532$  nm inchangé et la distance  $d'$  entre les deux positions stables au sein d'un site du réseau. Cette dernière distance est par ailleurs variable puisqu'elle dépend des paramètres de modulation, comme nous l'avons démontré en retrouvant le diagramme de bifurcation.

Nous n'avons considéré jusqu'à présent que la dynamique classique des atomes. Or nous nous intéressons à l'évolution d'une fonction d'onde, il y a donc également une



**FIGURE 5.11 | Super-réseau effectif et effet tunnel.** Les orbites stables au centre du portrait de phase rappellent le double-puits de potentiel. En adoptant une vision stroboscopique de notre système, celui-ci peut donc être décrit de manière effective comme un super-réseau où interviennent deux longueurs caractéristiques  $d$  et  $d'$ . En considérant la dynamique quantique, on conçoit qu'il peut s'établir de l'effet tunnel entre les îlots gauche et droite.

dynamique quantique. En particulier, si nous reprenons l'analogie avec le double puits, on comprend qu'il peut y avoir de l'effet tunnel entre les îlots réguliers. Ce type d'effet tunnel dans un espace des phases mixte a été observé dans des expériences pionnières dès le début des années 2000 [HENSINGER *et al.* (2001a) et STECK *et al.* (2001)], en utilisant les îlots réguliers symétriques en  $p$ . Comme on peut le voir sur la Fig. 5.11, ces îlots symétriques en impulsion sont très anisotropes et requièrent une dispersion en impulsion du paquet d'onde très petite. Nous avons fait le choix d'utiliser les îlots symétriques en  $x$  qui à l'inverse se caractérisent par leur grande surface, ce qui facilite le chargement de la fonction d'onde dans un de ces îlots. Dans cette configuration, nous avons pu observer pour la première fois des résonances de l'effet tunnel assisté par le chaos, que je présente dans le chapitre suivant.

# Observation des résonances de l'effet tunnel assisté par le chaos

*Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'Univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même Univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit.*

*Science et Méthode (1908)*

Henri Poincaré

---

## Sommaire

---

- 6.1 Effet tunnel dans un espace des phases mixte** 179
  - 6.1.1 Rappels sur le double-puits 179
  - 6.1.2 Mécanisme à deux niveaux dans un espace des phases mixte : effet tunnel dynamique 181
  - 6.1.3 Mécanisme à trois niveaux dans un espace des phases mixte : effet tunnel assisté par le chaos 184
- 6.2 Contexte et état de l'art** 188
- 6.3 Méthodes** 191
  - 6.3.1 Identification des facteurs limitants 192
  - 6.3.2 Séquence expérimentale 194
    - Préparation de l'état initial* 194
    - Protocole dans le réseau* 194
  - 6.3.3 Reconstruction des populations des îlots réguliers 196
  - 6.3.4 Extraction des fréquences d'oscillation tunnel 197

<b>6.4</b>	<b>Mise en évidence expérimentale</b>	<b>198</b>
6.4.1	Mesure de l'effet tunnel dynamique	199
6.4.2	Première résonance de l'effet tunnel assisté par le chaos et comparaison à l'effet tunnel dynamique	201
	<i>Observation expérimentale</i>	201
	<i>Analyse du spectre de quasi-énergie</i>	204
6.4.3	Deuxième et troisième résonances	205
	<i>Observation expérimentale</i>	205
	<i>Analyse du spectre de quasi-énergie</i>	207
6.4.4	Quatrième résonance	208
	<i>Observation expérimentale</i>	208
	<i>Analyse du spectre de quasi-énergie</i>	209
<b>6.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>210</b>

---

À l'occasion de son 60<sup>ème</sup> anniversaire en 1889, le roi Oscar II de Suède décida d'accorder un prix à "une découverte importante dans le domaine de l'analyse mathématique supérieure", chaque postulant devant envoyer de manière anonyme sa contribution sur un des sujets définis par le jury. L'un de ces sujets traitait de la stabilité du système solaire : si la trajectoire d'une planète est très proche de celle obtenue en ne tenant compte que de la planète elle-même et du Soleil, il est tout à fait légitime de se demander quelle est l'incidence aux temps longs des autres planètes, considérées comme de faibles perturbations, sur cette trajectoire. C'est H. POINCARÉ qui remporta le concours, en démontrant la stabilité dans le cas restreint du "problème réduit des trois corps"<sup>1</sup>. Tandis que son manuscrit est imprimé dans la prestigieuse revue *Acta Mathematica* et qu'une version prééditée est envoyée dans de nombreuses bibliothèques, H. POINCARÉ découvre, suite à sa correspondance avec le mathématicien L. E. PHRAGMÉN chargé de relire le manuscrit, que son résultat est faux. En corrigeant une erreur qu'il avait faite dans sa démonstration, il aboutit à la conclusion exactement opposée : il met en évidence l'existence de trajectoires très instables et pour de nombreuses situations, il ne peut pas prédire ce qu'il va se passer. Par cette confrontation à un problème relevant du chaos déterministe naît la théorie du chaos.

D'un côté, comme a pu s'en rendre compte H. POINCARÉ, le chaos déterministe implique qu'il est difficile de prévoir une trajectoire donnée du système sur les temps longs à cause d'une extrême sensibilité aux conditions initiales. D'un autre côté, cette grande sensibilité peut être mise à profit pour modifier l'état du système considéré en appliquant seulement de faibles perturbations. Cette possibilité, proposée dans le travail pionnier d'E. OTT *et al.* [OTT *et al.* (1990)], offre de nouveaux moyens de contrôle pour les systèmes mixtes. Le "contrôle par le chaos" [SHINBROT *et al.* (1993)] a depuis été utilisé avec succès dans plusieurs systèmes classiques : on peut contrôler par ces méthodes le rythme cardiaque [GARFINKEL *et al.* (1992)] ou l'activité neuronale [SCHIFF *et al.* (1994)] dans un système biologique, ou bien une diode laser chaotique [ROY *et al.* (1992)] ou encore une réaction chimique [PETROV *et al.* (1993)].

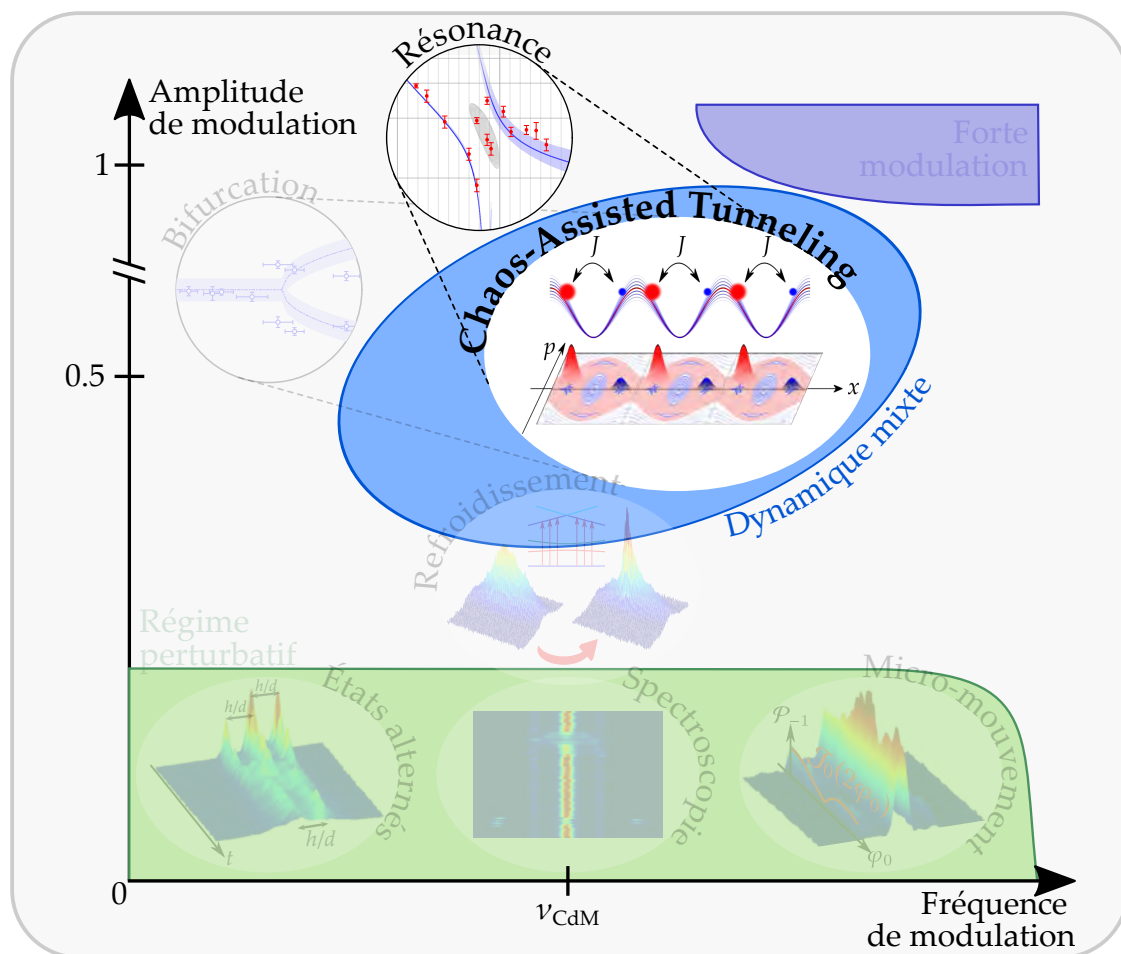
Peut-on néanmoins transposer cette idée à un système quantique ? Le passage du régime classique au régime quantique n'est pas si simple car il n'existe pas de chaos à proprement parler en physique quantique, l'équation de Schrödinger étant linéaire. La théorie du chaos quantique s'intéresse alors aux systèmes quantiques dont l'analogue classique, obtenu par le principe de correspondance, présente une dynamique chaotique. La présence de chaos modifie le comportement de tels systèmes au niveau quantique, et il est ainsi possible d'appliquer le concept de contrôle par le chaos.

Cela s'applique au système que nous considérons, soit un condensat de Bose-Einstein dans un réseau optique fortement modulé. À la limite semi-classique, c'est-à-dire lorsque l'échelle du régime quantique, donnée par  $\hbar_{\text{eff}}$ , est plus petite que la taille typique des structures classiques de l'espace des phases, un nouveau type de transport émerge : c'est l'effet tunnel assisté par le chaos. Initialement proposé par S. TOMSOVIC et D. ULLMO [TOMSOVIC et ULLMO (1994)], ce phénomène a été étudié par les groupes de W. D. PHILLIPS [HENSINGER *et al.* (2001a)] et M. G. RAIZEN [STECK *et al.*, 2001] au début des années 2000. Grâce à la sensibilité du taux tunnel aux paramètres expérimentaux, il est en principe possible de contrôler la fréquence des oscillations tunnel et de la faire varier sur plusieurs

1. Dans ce problème où on considère seulement le Soleil, la Terre et Jupiter, on fait l'approximation que la Terre a une masse nulle. Elle n'influence donc pas le mouvement des deux autres astres.

ordres de grandeur. Néanmoins, ces expériences pionnières ont été faites avec des valeurs de  $\hbar_{\text{eff}}$  trop grandes pour que l'on puisse véritablement associer les observations faites à une dynamique chaotique. Pour aller au-delà de ces premières expériences, nous avons choisi d'étudier cet effet tunnel dans une configuration différente. Nous avons ainsi pu observer sans ambiguïté du transport médié par la mer chaotique, dont je présente les résultats dans ce dernier chapitre. Notre étroite collaboration avec B. GEORGEOT, G. LEMARIÉ et M. MARTINEZ de l'équipe Cohérence Quantique, du Laboratoire de Physique Théorique (LPT) de Toulouse, nous a également permis d'interpréter nos résultats expérimentaux, et d'identifier les états quantiques impliqués. Précisons d'ailleurs que l'ensemble des simulations numériques et des graphes théoriques présentés dans ce chapitre sont le résultat du travail de M. MARTINEZ, doctorant dans cette équipe.

Je consacre la première section de ce chapitre à l'effet tunnel pouvant avoir lieu dans un espace des phases mixte : après un bref rappel de l'effet tunnel "traditionnel" dans un double-puits, je définis les deux types d'effet tunnel en jeu dans notre expérience, à savoir l'effet tunnel dynamique et l'effet tunnel assisté par le chaos. Je profite de la deuxième section pour situer notre approche vis-à-vis des expériences de 2001 [HENSINGER *et al.* (2001a) et STECK *et al.* (2001)]. Je détaille ensuite le protocole expérimental que nous avons utilisé, pour présenter en fin de chapitre les différentes résonances du taux tunnel que nous avons observées.





## 6.1 Effet tunnel dans un espace des phases mixte

### 6.1.1 Rappels sur le double-puits

Considérons un potentiel en forme de double-puits. Nous prendrons pour exemple le potentiel  $V$  de la forme :

$$V(x) = \frac{m\omega^2}{8a^2} (x - a)^2 (x + a)^2. \quad (6.1)$$

Ce potentiel présente deux positions stables en  $\pm a$ , correspondant aux deux minima du potentiel autour desquels il peut être vu comme un oscillateur harmonique :

$$V(x) \underset{x=\pm a}{\simeq} \frac{1}{2} m\omega^2 (x \mp a)^2. \quad (6.2)$$

Ces deux puits sont séparés par une barrière d'énergie de hauteur  $V_0 = m\omega^2/(8a^2)$ . Si une particule classique d'énergie  $E_0 < V_0$  est initialement placée dans un des deux puits, elle y reste piégée à tout temps. Il en va autrement d'une fonction d'onde, compte tenu de l'effet tunnel.

À la limite  $a \rightarrow +\infty$  (Fig. 6.1(a) et (b)), le potentiel  $V$  est la somme de deux oscillateurs harmoniques isolés séparés par une barrière d'énergie de hauteur infinie. Les états propres de plus basse énergie sont alors les états fondamentaux de l'oscillateur harmonique, localisés dans les puits de gauche et droite, notés  $|G\rangle$  et  $|D\rangle$  respectivement. Dans cet exemple, ils s'écrivent en représentation position :

$$\begin{aligned} \psi_G(x) = \langle x|G\rangle &= \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{a_{\text{OH}}}} \exp\left[-\left(\frac{x+a}{a_{\text{OH}}}\right)^2\right] \quad \text{et} \\ \psi_D(x) = \langle x|D\rangle &= \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{a_{\text{OH}}}} \exp\left[-\left(\frac{x-a}{a_{\text{OH}}}\right)^2\right], \end{aligned} \quad (6.3)$$

où  $a_{\text{OH}} = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$  est la longueur associée à l'oscillateur harmonique quantique. Ces deux états, d'énergie  $E_0 = \hbar\omega/2 < V_0$ , sont dégénérés.

Lorsque la barrière d'énergie entre les deux puits possède une hauteur finie (c'est-à-dire lorsque la distance  $a$  est finie, Fig. 6.1(c) et (d)), les deux états  $|G\rangle$  et  $|D\rangle$  sont couplés par effet tunnel. Dans la base  $\{|G\rangle, |D\rangle\}$  l'Hamiltonien s'exprime alors comme :

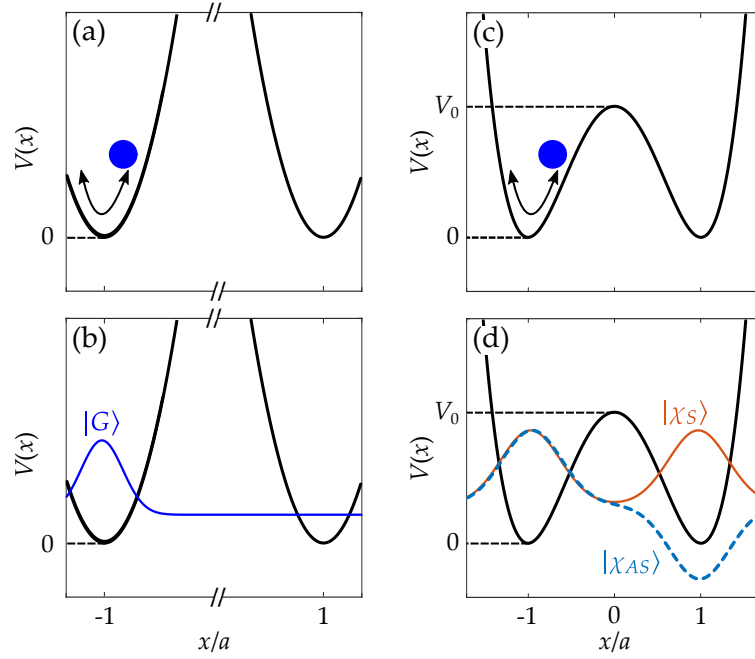
$$H = \begin{pmatrix} E_0 & -\delta/2 \\ -\delta/2 & E_0 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

avec  $\delta > 0$  l'énergie de couplage entre les deux états. Après diagonalisation, nous obtenons une nouvelle base  $\{|\chi_S\rangle, |\chi_{AS}\rangle\}$  constituée d'un état symétrique  $|\chi_S\rangle$  et un état anti-symétrique  $|\chi_{AS}\rangle$  :

$$|\chi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|G\rangle + |D\rangle) \quad \text{et} \quad |\chi_{AS}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|G\rangle - |D\rangle), \quad (6.5)$$

d'énergie propre  $E_S = E_0 - \delta/2$  et  $E_{AS} = E_0 + \delta/2$  respectivement. Le couplage des états  $|G\rangle$  et  $|D\rangle$ , représenté par le terme  $\delta$ , induit donc une levée de dégénérescence,





**FIGURE 6.1 | Effet tunnel dans un double-puits de potentiel.** On considère un double-puits formé par deux oscillateurs harmoniques centrés en  $\pm a$  (Eq. 6.1), ainsi qu'une particule d'énergie  $E_0$  initialement placée dans le puits de gauche. À la limite  $a \rightarrow +\infty$ , la barrière d'énergie séparant les deux puits est de hauteur  $V_0$  infinie. Une particule classique (a) et une particule quantique (b) sont toutes deux initialement piégées dans un seul des deux puits. La fonction d'onde de la particule quantique correspond à l'état localisé  $|G\rangle$ . Lorsque la valeur de  $a$  est finie, la particule classique (c) reste piégée dans le puits de gauche tant que  $E_0 < V_0$ , tandis que la particule quantique (d) peut passer dans l'autre puits par effet tunnel. Les états propres sont alors les états symétrique  $|\chi_S\rangle$  et anti-symétrique  $|\chi_{AS}\rangle$ , délocalisés sur les deux puits.

proportionnelle à la valeur du couplage. Dans notre cas, la différence d'énergie (ou *splitting*) entre les états symétrique et anti-symétrique ainsi obtenus est directement égale à  $\delta$ .

Si nous plaçons initialement les atomes dans le puits de gauche, c'est-à-dire  $|\psi(t=0)\rangle = |G\rangle = (|\chi_S\rangle + |\chi_{AS}\rangle)/\sqrt{2}$ , la fonction d'onde après un temps  $t$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
 |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\chi_S\rangle e^{-i(E_0 - \delta/2)t/\hbar} + |\chi_{AS}\rangle e^{-i(E_0 + \delta/2)t/\hbar} \right) \\
 &\propto \cos\left(\frac{\delta t}{2\hbar}\right) |G\rangle + i \sin\left(\frac{\delta t}{2\hbar}\right) |D\rangle
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

où la dernière expression est donnée à un terme de phase près. La probabilité de trouver l'atome dans un puits ou l'autre évolue donc selon :

$$\mathcal{P}_G(t) = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos\left(\frac{\delta t}{\hbar}\right) \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_D(t) = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos\left(\frac{\delta t}{\hbar}\right) \right). \tag{6.7}$$

Nous obtenons ainsi des oscillations entre le puits de gauche et le puits de droite : c'est l'effet tunnel. Ces oscillations s'effectuent à la fréquence :

$$\nu_{\text{tunnel}} = \frac{\delta}{\hbar}. \quad (6.8)$$

La fréquence d'oscillation tunnel est donc directement proportionnelle au splitting  $\delta$  entre les états symétrique et anti-symétrique. On peut par ailleurs montrer dans l'approximation semi-classique WKB que le splitting varie comme [LANDAU et LIFSHITZ (1958) et TOMSOVIC et ULLMO (1994)] :

$$\delta \propto \hbar e^{-S/\hbar} \quad (6.9)$$

où  $S$  est l'action classique, indépendante de  $\hbar$ , calculée à travers la barrière d'énergie<sup>2</sup>. En utilisant ce résultat, la fréquence tunnel varie donc finalement comme :

$$\nu_{\text{tunnel}} \propto e^{-S/\hbar}. \quad (6.10)$$

Nous verrons que nous obtenons un résultat similaire pour l'effet tunnel dynamique.

### 6.1.2 Mécanisme à deux niveaux dans un espace des phases mixte : effet tunnel dynamique

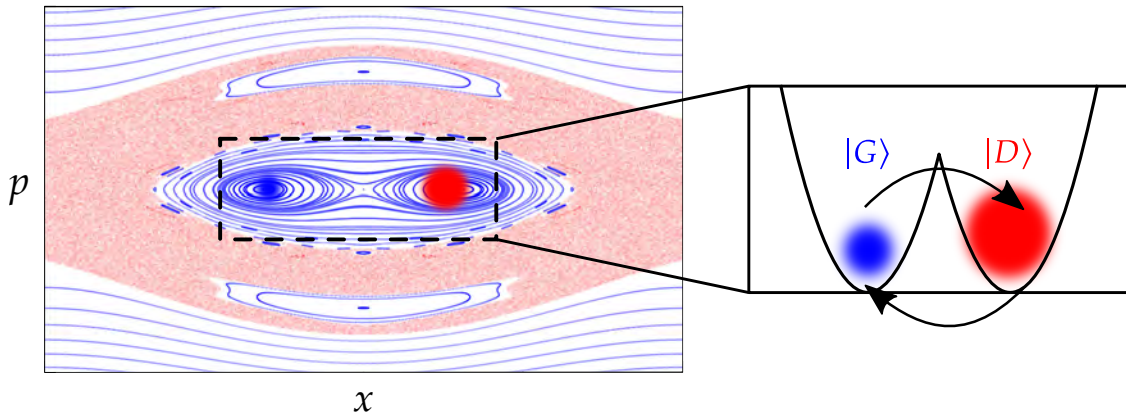
Le concept d'effet tunnel repose sur la nature ondulatoire de la matière : nous venons de rappeler qu'une fonction d'onde qui rencontre une barrière de potentiel a une probabilité non nulle de passer au travers, contrairement à une particule classique ponctuelle. Si le passage à travers une barrière d'énergie constitue la forme la plus "conventionnelle" de l'effet tunnel, il existe également des cas où une fonction d'onde explore des trajectoires classiquement interdites à cause de constantes du mouvement autres que l'énergie : on parle alors d'*effet tunnel dynamique*. Ce type d'effet tunnel a initialement été proposé par E. J. HELLER et M. J. DAVIS en 1981 [DAVIS et HELLER (1981)], et est principalement observé dans des systèmes mixtes, où trajectoires régulières et chaotiques coexistent, tels que le système que nous considérons.

Rappelons l'Hamiltonien adimensionné que nous avons introduit au chapitre précédent :

$$\hat{H}(x, p, t) = \frac{\hat{p}^2}{2} - \gamma [1 + \varepsilon_0 \cos(t)] \cos(\hat{x}), \quad (6.11)$$

où  $\gamma$  et  $\varepsilon_0$  sont des paramètres (dont l'expression en fonction des grandeurs expérimentales est donnée Eq. 5.8 du chapitre 5) qui modifient le paysage du portrait de phase. Nous rappelons Fig. 6.2 un portrait de phase typique. Nous avons décrit au chapitre 5 l'évolution classique des trajectoires, et nous en avons conclu qu'une particule classique initialement placée dans un des îlots réguliers symétriques en position, puis observée toutes les deux périodes de modulation, reste dans cet îlot. Puisqu'il est classiquement interdit de croiser les trajectoires régulières entre les îlots, le passage d'un îlot à l'autre est impossible dans le régime classique sans qu'il n'y ait pour autant de barrière d'énergie. En revanche,

2. On peut comprendre intuitivement l'expression de l'Eq. 6.9 :  $\delta$  quantifie le couplage entre les états  $|G\rangle$  et  $|D\rangle$ , on s'attend ainsi à ce qu'il diminue avec la largeur "effective" de la barrière, donc à la fois avec l'action  $S = \int p dx$  et avec  $\hbar$  (il n'y a plus d'effet tunnel à la limite classique  $\hbar \rightarrow 0$ ).



**FIGURE 6.2 | Portrait de phase à deux îlots symétriques en position et effet tunnel dynamique.** Nous ne nous intéressons à notre système que de manière stroboscopique, toutes les deux périodes de modulation. Dans ce cas, les îlots réguliers correspondent à des positions d'équilibre stable et une particule classique dans un îlot y reste à tout temps : c'est l'équivalent d'un minimum de potentiel du double-puits. Les trajectoires régulières entre les îlots contraignent la dynamique classique dans un îlot, et jouent donc à ce titre le rôle de barrière. Par analogie avec le double-puits, il peut y avoir de l'effet tunnel dynamique entre les îlots si l'on considère une fonction d'onde plutôt qu'une particule classique ponctuelle.

compte-tenu de la nature ondulatoire de la fonction d'onde, il peut y avoir de l'effet tunnel dynamique entre les îlots réguliers.

Nous nous trouvons dans une situation analogue au double-puits, et nous pouvons réutiliser en partie les résultats de la section précédente. Nous adoptons néanmoins un formalisme plus adapté à notre système en utilisant à la fois le théorème de Bloch et le théorème de Floquet, ce dernier étant l'équivalent du théorème de Bloch pour la variable de temps  $t$ .

**THÉORÈME DE BLOCH :** L'Hamiltonien Eq. 6.11 étant périodique spatialement, de période  $X = 2\pi$  (en grandeur adimensionnée), nous appliquons le théorème de Bloch rappelé au chapitre 2. Les solutions de l'équation de Schrödinger peuvent alors s'écrire :

$$\psi_k(x, t) = \exp(ikx) u_k(x, t) \quad (6.12)$$

où  $k$  est le quasi-moment et où  $u_k$  est une fonction périodique spatialement :  $u_k(x + X, t) = u_k(x, t)$ .

**THÉORÈME DE FLOQUET :** De plus, comme l'Hamiltonien Eq. 6.11 est périodique en temps, de période  $T = 2\pi$  (en grandeur adimensionnée), les solutions de l'équation de Schrödinger peuvent se mettre sous la forme :

$$\phi_{n,k}(x, t) = \exp\left(-i\frac{\epsilon_n(k)t}{\hbar_{\text{eff}}}\right) \exp(ikx) u_{n,k}(x, t) \quad (6.13)$$

avec  $u_{n,k}$  une fonction périodique à la fois en espace et en temps :  $u_{n,k}(x + X, t + T) = u_{n,k}(x, t)$ . Les états de Floquet-Bloch  $\{|\phi_{n,k}\rangle\}$  sont états propres de l'opérateur d'évolution  $\hat{U}$  sur une période de modulation, soit :

$$\hat{U}(t, t + T) |\phi_{n,k}(t)\rangle = \exp\left(-i \frac{\epsilon_n(k)T}{\hbar_{\text{eff}}}\right) |\phi_{n,k}(t)\rangle. \quad (6.14)$$

Les grandeurs  $\epsilon_n$ , qui dépendent du quasi-moment  $k$ , sont appelées quasi-énergies et peuvent être calculées numériquement. Le spectre obtenu est invariant sous la transformation  $\epsilon_n(k) \rightarrow \epsilon_n(k) + 2\pi\hbar_{\text{eff}}/T$ .

La dynamique quantique dans l'espace des phases mixte peut donc être décrite grâce aux états de Floquet-Bloch  $\{|\phi_{n,k}\rangle\}$ , à condition que l'on se restreigne à une vision stroboscopique de l'Hamiltonien Eq. 6.11. En effet, les états de Floquet-Bloch sont les états propres du système stroboscopique. Comme pour le double-puits, nous pouvons construire dans un espace des phases mixte des états  $|G\rangle$  et  $|D\rangle$  localisés sur les îlots réguliers symétriques en position [BOHIGAS *et al.* (1993)]. Lorsque  $\hbar_{\text{eff}}$  est suffisamment petit, les états symétrique et anti-symétrique se projettent essentiellement sur deux états de Floquet de symétrie opposée  $|\phi_{n,k}^+\rangle$  et  $|\phi_{n,k}^-\rangle$ , que nous noterons pour simplifier  $|\phi^+\rangle$  et  $|\phi^-\rangle$ , de quasi-énergie  $\epsilon^+$  et  $\epsilon^-$  respectivement. Nous avons donc :

$$|G\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi^+\rangle + |\phi^-\rangle) \quad \text{et} \quad |D\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi^+\rangle - |\phi^-\rangle). \quad (6.15)$$

Nous n'étudions le système que de manière stroboscopique, toutes les deux périodes de modulation. En considérant un atome initialement dans l'îlot de gauche  $|\psi(t=0)\rangle = |G\rangle$ , nous obtenons après  $2n$  périodes de modulation ( $n \in \mathbb{N}$ ) :

$$\begin{aligned} |\psi(t=2nT)\rangle &= \hat{U}(0, 2nT) |\psi(t=0)\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \exp\left(-i \frac{2nT\epsilon^+}{\hbar_{\text{eff}}}\right) |\phi^+\rangle + \exp\left(-i \frac{2nT\epsilon^-}{\hbar_{\text{eff}}}\right) |\phi^-\rangle \right] \\ &\propto |\phi^+\rangle + \exp\left(-i \frac{2nT(\epsilon^- - \epsilon^+)}{\hbar_{\text{eff}}}\right) |\phi^-\rangle \end{aligned} \quad (6.16)$$

La fonction d'onde va donc osciller, périodiquement et de manière cohérente, entre les états  $|G\rangle$  et  $|D\rangle$  définis Eq. 6.15. En utilisant  $T = 2\pi$ , on trouve que la fréquence d'oscillation s'exprime comme :

$$\nu_{\text{tunnel}} = \frac{2\delta}{\hbar_{\text{eff}}} \quad (6.17)$$

où  $\delta = |\epsilon^+ - \epsilon^-|$  désigne maintenant le splitting entre les deux états de Floquet de l'Hamiltonien stroboscopique, et où le facteur 2 provient du fait que nous étudions le système toutes les deux périodes de modulation. Dans le cas de l'effet tunnel dynamique ici considéré, on peut montrer qu'on obtient pour le splitting  $\delta$  la même dépendance avec  $\hbar_{\text{eff}}$  que celle donnée par l'Eq. 6.9 [BOHIGAS *et al.* (1993)]. Nous retrouvons donc finalement la même évolution de la fréquence tunnel qu'à la sous-section précédente, soit :

$$\nu_{\text{tunnel}} \propto e^{-S/\hbar_{\text{eff}}}, \quad (6.18)$$

avec cette fois-ci  $\hbar_{\text{eff}}$  un paramètre contrôlable expérimentalement. En changeant sa valeur, nous pouvons donc varier la fréquence de l'effet tunnel entre les deux îlots réguliers suivant la dépendance de l'Eq. 6.18.



Ces oscillations tunnel sont un processus cohérent : la fonction d'onde est périodiquement décrite comme une superposition des états  $|G\rangle$  et  $|D\rangle$  qui correspondent à deux états dynamiques distincts.

### 6.1.3 Mécanisme à trois niveaux dans un espace des phases mixte : effet tunnel assisté par le chaos

Dans le cas d'une dynamique mixte, il arrive que le système ne puisse plus être décrit simplement par les deux états réguliers symétrique et anti-symétrique. En effet, il existe d'autres états de Floquet, localisés dans la mer chaotique, susceptibles d'interagir avec les états réguliers : ils doivent donc être pris en compte. Or ces états chaotiques (qui peuvent être symétriques ou anti-symétriques) voient leur énergie changer de manière erratique lorsqu'on modifie un paramètre du système. Par leur interaction avec les états réguliers, les états chaotiques sont responsables de grandes fluctuations du splitting entre les états réguliers, ce qui se traduit par de larges variations du taux tunnel. C'est cette dynamique à trois états, détaillée maintenant, que l'on appelle effet tunnel assisté par le chaos.

Considérons à nouveau l'Hamiltonien Eq. 6.11 que l'on étudie de manière stroboscopique : le système est dans ce cas bien décrit par des états de Floquet-Bloch. En plus des états réguliers symétrique  $|\phi^+\rangle$  et anti-symétrique  $|\phi^-\rangle$  définis à la sous-section précédente, nous considérons un troisième état  $|\phi_c\rangle$ , d'énergie  $\epsilon_c$ , localisé dans la mer chaotique. Supposons dans la suite que l'état chaotique est symétrique<sup>3</sup>, et qu'il interagit suffisamment avec l'état de même symétrie  $|\phi^+\rangle$  pour qu'on ne puisse pas le négliger. Dans la base  $\{|\phi^-\rangle, |\phi^+\rangle, |\phi_c\rangle\}$ , l'Hamiltonien stroboscopique s'écrit :

$$H = \begin{pmatrix} \epsilon^- & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon^+ & \beta \\ 0 & \beta & \epsilon_c \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

avec  $\beta$  la force du couplage entre l'état chaotique et l'état régulier symétrique. Nous nous restreignons au sous-espace des états symétriques  $\{|\phi^+\rangle, |\phi_c\rangle\}$  et nous diagonalisons l'Hamiltonien. Pour cela, il est utile de définir les grandeurs :

$$\begin{cases} \bar{\epsilon} = \frac{\epsilon^+ + \epsilon_c}{2} \\ \Delta = \frac{\epsilon^+ - \epsilon_c}{2} \end{cases} \quad (6.20)$$

3. Le raisonnement est identique dans le cas d'un état chaotique anti-symétrique, en considérant bien sûr qu'il interagit cette fois-ci avec l'état anti-symétrique  $|\phi^-\rangle$ .

ainsi que l'angle  $\theta$  appelé *angle de mixing* tel que :

$$\tan(2\theta) = \frac{\beta}{\Delta}. \quad (6.21)$$

Avec ces notations, on trouve les états propres :

$$\begin{cases} |\phi_m^{(1)}\rangle = \cos(\theta) |\phi^+\rangle + \sin(\theta) |\phi_c\rangle, \\ |\phi_m^{(2)}\rangle = -\sin(\theta) |\phi^+\rangle + \cos(\theta) |\phi_c\rangle, \end{cases} \quad (6.22)$$

avec les énergies propres  $\epsilon^{(1)} = \bar{\epsilon} + \sqrt{\Delta^2 + \beta^2}$  et  $\epsilon^{(2)} = \bar{\epsilon} - \sqrt{\Delta^2 + \beta^2}$  respectivement. Ces deux nouveaux états sont des états *mixtes* : ils sont la superposition de l'état régulier  $|\phi^+\rangle$  et de l'état chaotique  $|\phi_c\rangle$ .

Il est instructif d'étudier les deux cas limites  $\beta \ll \Delta$  et  $\beta \gg \Delta$  :

- Considérons d'abord le cas où le couplage avec l'état chaotique  $\beta$  est faible devant la différence d'énergie  $\Delta$  entre l'état régulier symétrique  $|\phi^+\rangle$  et l'état chaotique  $|\phi_c\rangle$  (également symétrique), soit  $\beta \ll \Delta$ . Dans ce cas, l'angle de mixing est  $\theta \approx 0$  et les états propres sont :

$$\begin{cases} |\phi_m^{(1)}\rangle \approx |\phi^+\rangle, \\ |\phi_m^{(2)}\rangle \approx |\phi_c\rangle. \end{cases} \quad (6.23)$$

On retrouve les deux états distincts, l'état régulier  $|\phi^+\rangle$  et l'état chaotique  $|\phi_c\rangle$ . On peut donc à nouveau considérer que la dynamique repose essentiellement sur les deux états réguliers, l'état symétrique étant toutefois modifié par sa faible interaction avec l'état chaotique. En effet, dans ce cas limite  $\beta \ll \Delta$ , les énergies propres s'expriment comme :

$$\epsilon^{(1)} = \bar{\epsilon} + \Delta \sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{\Delta}\right)^2} \approx \epsilon^+ + \frac{\beta^2}{2\Delta} \quad \text{et} \quad \epsilon^{(2)} = \bar{\epsilon} - \Delta \sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{\Delta}\right)^2} \approx \epsilon_c - \frac{\beta^2}{2\Delta} \quad (6.24)$$

On constate que l'état régulier symétrique  $|\phi^+\rangle$ , qui s'apparente à l'état  $|\phi_m^{(1)}\rangle$  d'énergie  $\epsilon^{(1)}$ , voit son énergie modifiée d'une quantité  $\beta^2/(2\Delta)$  par l'interaction avec l'état chaotique. Le splitting  $\delta$  entre les deux états réguliers peut donc grandement varier du fait de cette interaction, et le taux tunnel fluctue en conséquence. Dit autrement, si l'état chaotique  $|\phi_c\rangle$  participe peu (en termes de probabilité d'occupation) au transport de la fonction d'onde d'un îlot à l'autre, qui est essentiellement assuré par les deux états réguliers, sa présence modifie la différence d'énergie entre les états réguliers et fait varier le taux tunnel, éventuellement sur plusieurs ordres de grandeur : c'est la caractéristique de l'effet tunnel assisté par le chaos.

- Considérons maintenant le cas où le couplage avec l'état chaotique  $\beta$  est grand devant la différence d'énergie  $\Delta$ , soit  $\beta \gg \Delta$ . L'angle de mixing est cette fois  $\theta \approx \pi/4$ , et les états propres sont :

$$\begin{cases} |\phi_m^{(1)}\rangle \approx (|\phi_c\rangle + |\phi^+\rangle)/\sqrt{2}, \\ |\phi_m^{(2)}\rangle \approx (|\phi_c\rangle - |\phi^+\rangle)/\sqrt{2}. \end{cases} \quad (6.25)$$

Il s'agit du mixing maximal, pour lequel nous avons une superposition cohérente et équiprobable d'un état régulier et d'un état chaotique. Le transport est assuré par les trois états  $|\phi^-\rangle$ ,  $|\phi_m^{(1)}\rangle$  et  $|\phi_m^{(2)}\rangle$ . Il faut alors considérer deux différences d'énergie, ce qui se traduit par deux fréquences dans les oscillations par effet tunnel. Si les différences d'énergie sont proches, les oscillations prennent la forme de battements.

Ces différents comportements se retrouvent sur le spectre en quasi-énergie Fig. 6.3(a), où on fait varier un paramètre du système, ici  $1/\hbar_{\text{eff}}$ , qui change le couplage  $\beta$  avec l'état chaotique (en vert). Ce dernier interagit avec l'état régulier symétrique (en rouge), tandis que l'état régulier anti-symétrique (en bleu) est inchangé. La Fig. 6.3(b) représente la fréquence d'oscillation par effet tunnel  $\nu_{\text{tunnel}}$  calculée à partir des différences en quasi-énergie de ces états. Sur ces deux figures, nous avons représenté trois zones distinctes :

- Les zones I et III, loin de la résonance, correspondent au cas  $\beta \ll \Delta$  : le transport est essentiellement assuré par les deux états réguliers, mais l'état chaotique vient modifier leur différence d'énergie, ce qui change la fréquence d'oscillation tunnel.
- La zone II, à la résonance, correspond au régime de fort mixing  $\beta \gg \Delta$ . L'état régulier symétrique (rouge) et l'état chaotique (vert) interagissent fortement pour donner deux états mixtes (orange)  $|\phi_m^{(1)}\rangle$  et  $|\phi_m^{(2)}\rangle$  : avec l'état régulier anti-symétrique (bleu)  $|\phi^-\rangle$  il y a donc trois états impliqués dans le transport, soit deux fréquences d'oscillation tunnel. Nous observons également dans cette zone un croisement évité entre les états qui interagissent. À cause de cette répulsion, l'état anti-symétrique et un des états mixtes se croisent, leur différence en énergie devenant alors nulle. On se trouve ici dans le cas particulier où il y a deux fréquences avec l'une qui tend vers zéro.

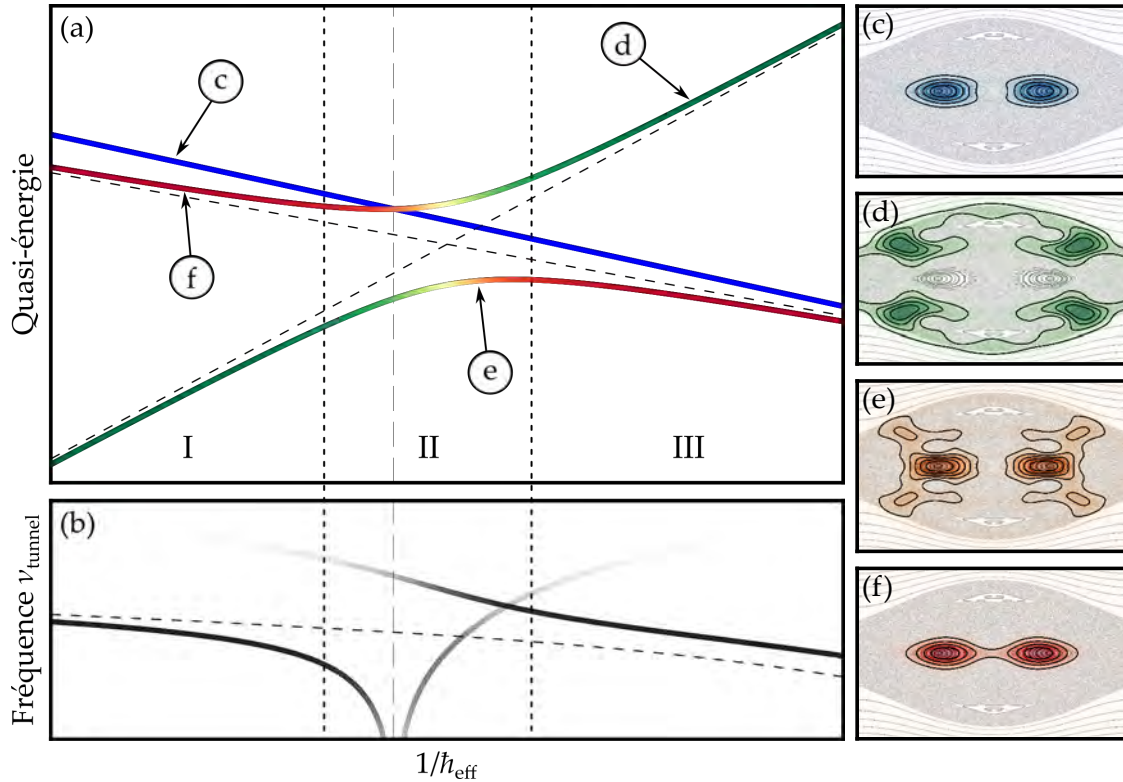
Notons que dans ce cas précis, nous observons (i) que deux niveaux d'énergie se croisent et (ii) que ce croisement et le point de mixing maximal sont très proches. Il s'agit là d'un exemple particulier, et il n'y a en fait pas de règle. Il existe un grand nombre d'états chaotiques dont l'énergie varie de manière erratique avec les paramètres du système, ces résonances sont donc nombreuses et conduisent à des variations du taux tunnel par plusieurs ordres de grandeur. Il s'agit là d'un transport quantique remarquable dans lequel un état de la mer chaotique est impliqué : c'est l'*effet tunnel assisté par le chaos*. Ce mécanisme de transport médié par la mer chaotique a été explicité dans [TOMSOVIC et ULLMO (1994)], où cette appellation a par ailleurs été introduite.

Le transport par effet tunnel, dans un réseau "habillé" par une dynamique chaotique, présente donc des résonances qui peuvent amplifier ou inhiber l'effet tunnel. En variant un paramètre du système, on peut en principe changer à souhait le taux tunnel : on retrouve là l'idée de contrôle par le chaos.

Afin de visualiser la correspondance entre un état quantique  $|\psi\rangle$  et les structures visibles sur le portrait de phase classique, il est commun d'utiliser la représentation de Husimi de  $|\psi\rangle$ . Cette représentation permet d'associer à l'état  $|\psi\rangle$  une fonction dans l'espace des phases  $\psi^H$  définie selon :

$$\psi^H(x, p) = N |\langle z | \psi \rangle|^2 \quad (6.26)$$





**FIGURE 6.3** | Schéma de principe d'une résonance du taux tunnel pour l'effet tunnel assisté par le chaos. (a) Spectre de quasi-énergie du doublet régulier (état symétrique : rouge ; état anti-symétrique : bleu) et d'un état chaotique symétrique (vert) en fonction du paramètre  $1/\hbar_{\text{eff}}$ . L'interaction entre cet état chaotique et l'état régulier symétrique conduit à un croisement évité : ces deux états mixent et se repoussent. (b) Évolution de la fréquence d'oscillation tunnel  $\nu_{\text{tunnel}}$ , proportionnelle aux différences de quasi-énergie, pour la situation donnée en (a). Dans la zone II correspondant à un grand couplage avec l'état chaotique, nous observons l'émergence de deux fréquences. Le croisement de l'état anti-symétrique et d'un état mixte est à l'origine des grandes variations de l'une de ces deux fréquences. (c-f) Représentations de Husimi des états impliqués dans la dynamique : états réguliers anti-symétrique (c) et symétrique (f) avant la résonance, état chaotique après la résonance (d) et un des deux états mixtes (e).



où  $|z\rangle$  est un état cohérent normalisé associé au nombre complexe  $z = (x + ip)/\sqrt{2\hbar_{\text{eff}}}$  [MOUCHET *et al.* (2001)], qui correspond à un état gaussien de taille minimale (soit de surface  $\hbar_{\text{eff}}$  dans l'espace des phases). La fonction  $\psi^H$  est normalisée grâce à la constante  $N$ . Cette représentation permet de connaître la distribution de  $|\psi\rangle$  dans l'espace des phases.

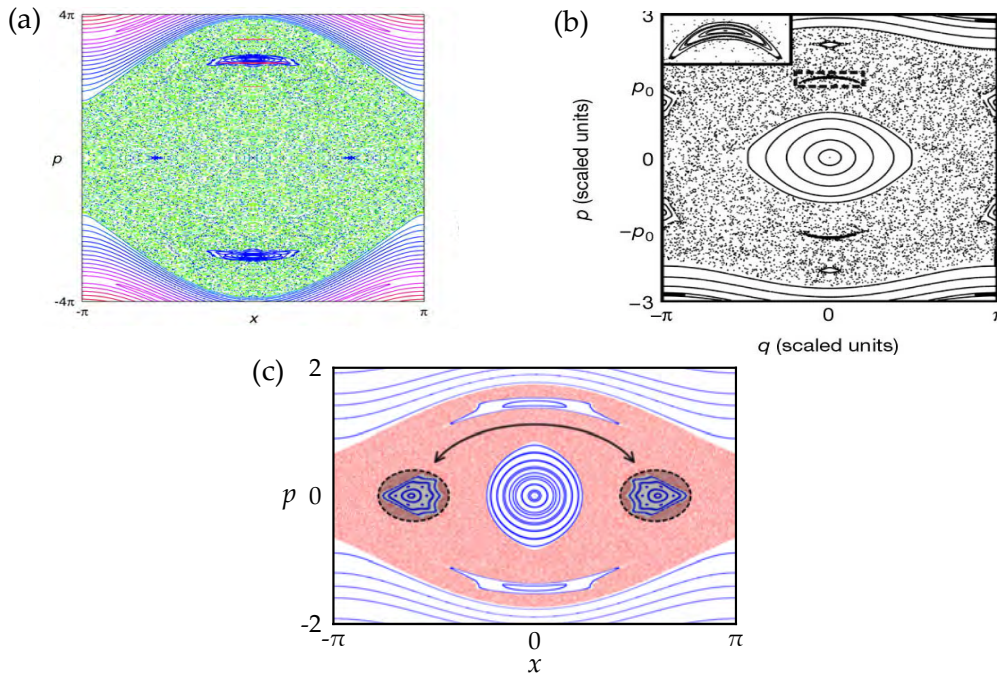
Nous présentons Fig. 6.3(c-f) les représentations de Husimi de certains états dont la quasi-énergie est tracée Fig. 6.3(a). Nous montrons par exemple :

- Les états réguliers symétriques (rouge, Fig. 6.3(f)) et anti-symétrique (bleu, Fig. 6.3(c)) avant la résonance. Ces états sont bien localisés sur les îlots réguliers.
- Un état chaotique (vert, Fig. 6.3(d)) après la résonance. La fonction d'onde est localisée dans la mer chaotique.
- Un des deux états mixtes (orange, Fig. 6.3(d)), dans la zone II au plus fort mixing. Cet état est localisé à la fois sur les structures régulières et dans la mer chaotique.

## 6.2 Contexte et état de l'art

Si l'effet tunnel dynamique et l'effet tunnel assisté par le chaos ont surtout été observés avec des ondes électromagnétiques (cavité micro-onde [DEMBOWSKI *et al.* (2000) et HOFFERBERT *et al.* (2005)] ou optique [SHINOHARA *et al.* (2010)]), l'intérêt pour les ondes de matière s'est rapidement manifesté. En effet, comme le soulignaient en 2001 les auteurs de [MOUCHET *et al.* (2001)], les plateformes d'atomes froids, grâce à leur grande flexibilité, au contrôle des mécanismes de dissipation ou encore aux temps de cohérence relativement longs, offrent des conditions privilégiées pour l'étude de ces différents types de transport. C'est ainsi que la même année, deux groupes américains ont publié chacun un article démontrant des oscillations par effet tunnel entre deux îlots réguliers dans un espace des phases mixte [HENSINGER *et al.*, 2001a; STECK *et al.*, 2001]. Pour cela, les équipes ont choisi toutes deux d'utiliser des îlots réguliers symétriques en impulsion (voir Fig. 6.4(a) et (b)). Ils n'ont toutefois pas obtenu le même type de transport : l'équipe de W. D. PHILLIPS au NIST parle d'effet tunnel dynamique quand l'équipe de M. G. RAIZEN à Austin évoque un effet tunnel assisté par un état chaotique.

Ces résultats ont par la suite engendré de nombreuses études théoriques afin de déterminer précisément les états impliqués, et voir si un état de la mer chaotique participait ou non à la dynamique tunnel. S'il est vite apparu que les observations du NIST correspondaient bien à un effet tunnel dynamique, impliquant seulement deux états de Floquet [LUTER et REICHL (2002) et HENSINGER *et al.* (2004)], l'expérience menée à Austin a fait débat quant à l'appellation "d'effet tunnel assisté par le chaos". D'un côté, les oscillations alors obtenues étaient bien le fruit d'une dynamique à trois états, confirmée par l'observation de battements [STECK *et al.* (2002)]. D'un autre côté, plusieurs travaux théoriques et numériques ont souligné que les valeurs de  $\hbar_{\text{eff}}$  utilisées étaient trop grandes [AVERBUKH *et al.* (2002) et MOUCHET et DELANDE (2003)] : s'il est facile d'identifier trajectoires régulières et chaotiques dans un espace des phases classique, la transposition de cette distinction au niveau quantique n'est pas possible pour la valeur  $\hbar_{\text{eff}} \approx 1$  utilisée dans les expériences. Cela n'a en effet de sens que dans le régime semi-classique, soit  $\hbar_{\text{eff}}$  petit devant l'unité. Les auteurs de [AVERBUKH *et al.* (2002)] regrettent d'ailleurs que le groupe de M. G. RAIZEN n'ait pas vu de grandes variations du taux tunnel, puisque les



**FIGURE 6.4 | Comparaison des espaces des phases utilisés dans les différentes expériences.** (a) Espace des phases correspondant à l'expérience d'Austin. L'effet tunnel a lieu entre les îlots réguliers symétriques en impulsion. Figure tirée de [STECK *et al.* (2001)]. (b) Espace des phases correspondant à l'expérience du NIST. L'effet tunnel a lieu entre les îlots réguliers symétriques en impulsion. L'un de ces îlots, entouré d'un rectangle noir, est agrandi en insert. Figure tirée de [HENSINGER *et al.* (2001a)]. (c) Espace des phases correspondant à notre expérience. L'effet tunnel a lieu entre les îlots réguliers symétriques en position, indiqués par les aires grisées.

fréquences mesurées étaient similaires à celles de l'expérience de l'effet tunnel dynamique du NIST. Le deuxième point qui mérite d'être souligné concernant l'expérience d'Austin porte sur le choix du paramètre varié : pour modifier le taux tunnel les auteurs de [STECK *et al.* (2001)] ont fait varier la profondeur renormalisée  $\gamma$ . Si ce paramètre, comme tout paramètre du système, change effectivement le taux tunnel, il s'agit surtout d'un paramètre qui modifie la structure classique de l'espace des phases. On s'éloigne alors du cadre conceptuel habituellement utilisé qui consiste à garder constants les paramètres classiques  $\gamma$  et  $\varepsilon_0$  pour obtenir un espace des phases fixe, tout en diminuant suffisamment  $\hbar_{\text{eff}}$  de sorte à pouvoir adopter une vision semi-classique.

C'est dans ce contexte que notre équipe a souhaité participer à l'effort de la communauté afin d'observer une manifestation claire de l'effet tunnel assisté par le chaos. Un article publié par l'équipe en 2016 [DUBERTRAND *et al.* (2016)] évoque une nouvelle configuration pour faciliter cette observation : l'idée est d'utiliser non pas des îlots symétriques en impulsion, mais les îlots symétriques en position sur lesquels nous nous concentrons depuis le chapitre 5. Ces îlots présentent deux avantages :

1. Ils sont plus robustes vis-à-vis d'une distribution en quasi-moment  $k$ . En effet, l'une des faiblesses des expériences pionnières est leur grande dépendance au quasi-moment, car les îlots utilisés reposent sur la symétrie  $p \rightarrow -p$  qui est brisée pour un quasi-moment non nul. Ce point, qui a d'ailleurs été souligné dans les

	NIST	Austin	Toulouse
Espèce atomique	Sodium (Na)	Césium (Cs)	Rubidium (Rb)
Condensat ?	Oui	Non	Oui
Nombre d'atomes	$3 \times 10^6$	$< 10^6$	$3 \times 10^4$
Symétrie des îlots réguliers	$p$	$p$	$x$
$\hbar_{\text{eff}}$	0.8 – 0.9	1 – 2.1	0.2 – 0.4
Nombre maximal de périodes de modulation	40	$\geq 160$	200 – 300
$\nu_{\text{tunnel}}/\nu (\times 10^{-2})$	7 – 17	3 – 6	0.6 – 6

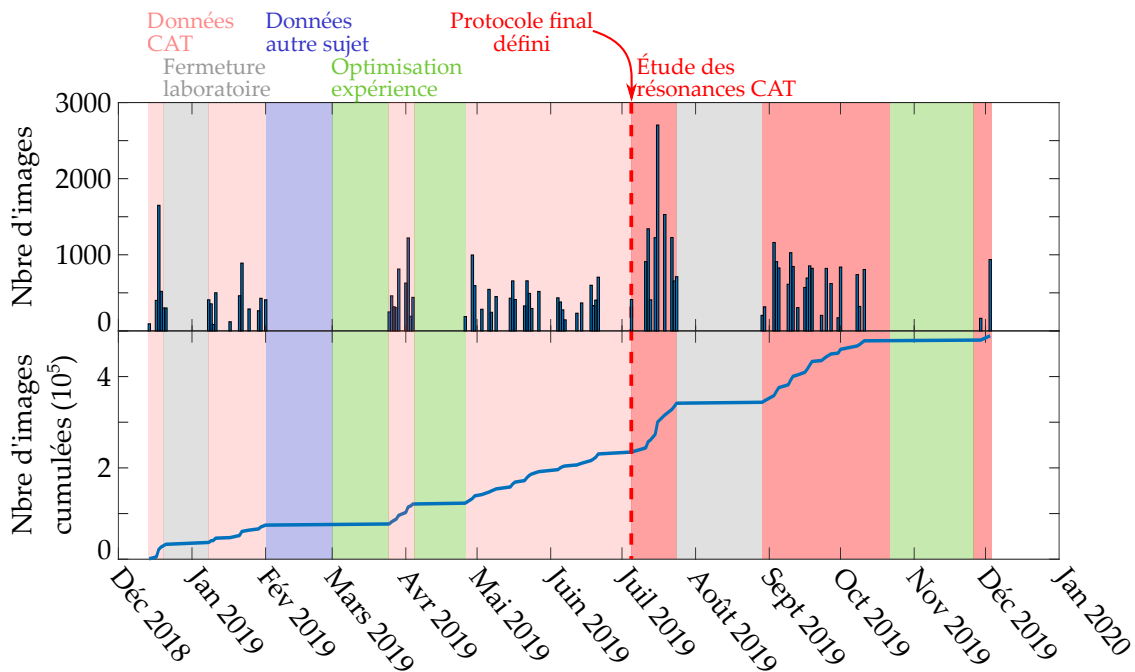
**TABLE 6.1 | Résumé des paramètres et résultats des différentes expériences d'effet tunnel dans un espace des phases mixte.** Nous comparons les grandeurs typiques entre les expériences faites au NIST [HENSINGER *et al.* (2001a)], à Austin [STECK *et al.* (2001)] et celles présentées dans ce manuscrit. Nous y reportons en particulier l'intervalle typique de  $\hbar_{\text{eff}}$  utilisé, ainsi que les fréquences d'oscillation tunnel  $\nu_{\text{tunnel}}$  mesurées (ramenées à la fréquence de modulation).

articles expérimentaux [HENSINGER *et al.* (2001a) et STECK *et al.* (2001)] et théoriques [MOUCHET et DELANDE (2003)], est à l'origine d'un fort amortissement des oscillations. Avec des îlots symétriques en position, la symétrie  $x \rightarrow -x$  est préservée même à  $k \neq 0$ . L'amortissement est dans ce cas plus faible, et nous pouvons mesurer un plus grand nombre de périodes.

2. Les îlots en  $x$  présentent une plus grande surface et sont plus isotropes que les îlots en  $p$  (voir Fig. 6.4). Il est donc plus simple d'y charger efficacement une fonction d'onde.

Notre équipe avait également identifié deux autres éléments ayant pu limiter les observations des expériences de 2001 : (i) les réseaux optiques utilisés, relativement proches de résonance (désaccord de quelques dizaines de GHz), sont une source de décohérence à cause de l'émission spontanée, et (ii) les atomes tombent sous l'effet de la gravité, réduisant le temps disponible pour effectuer l'expérience. Ces deux facteurs sont résolus sur notre dispositif, puisque le réseau optique est désaccordé de  $10^5$  GHz, et que le piège hybride maintient les atomes pendant toute la dynamique dans le réseau.

Le tableau 6.1 compare plusieurs paramètres et résultats expérimentaux entre les différents travaux sur l'effet tunnel assisté par le chaos. Notons que nous avons utilisé des valeurs de  $\hbar_{\text{eff}}$  deux à dix fois plus petites, et réussi à observer au maximum un facteur 10 entre la plus petite et la plus grande valeur de fréquence d'oscillation tunnel. Nous nous sommes concentrés sur les résonances, traits caractéristiques de l'effet tunnel assisté par le chaos. Nous présentons dans la section suivante le protocole expérimental que nous avons utilisé.



**FIGURE 6.5** | Nombre de données prises sur le CAT au cours de l'année 2019. La courbe supérieure montre le nombre d'images expérimentales enregistrées par jour, la courbe inférieure le nombre cumulé d'images.

### 6.3 Méthodes

Après avoir changé le laser utilisé pour le piège dipolaire à la fin de l'année 2018, nous avons débuté l'étude du CAT le 14 décembre 2018. Ce travail s'est ensuite étalé sur un an, quasiment à temps plein, comme l'indique la Fig. 6.5.

La dynamique du système étudié étant chaotique, la variation du taux tunnel avec n'importe quel paramètre du système peut potentiellement être très rapide. Cette grande sensibilité impose de fortes contraintes sur les paramètres expérimentaux, notamment sur  $\gamma$  qui dépend de la profondeur du réseau optique. Afin de prendre en compte ces contraintes, nous avons peu à peu affiné notre méthodologie, aussi bien en ce qui concerne le protocole expérimental que le traitement et l'analyse des données.

Nous consacrons cette section à cette méthodologie. Nous présentons d'abord trois paramètres expérimentaux que nous avons identifiés comme étant les principaux facteurs limitants l'observation des oscillations :

1. La stabilité de la profondeur du réseau optique ;
2. L'influence du confinement *via* le quasi-moment ;
3. Le nombre d'atomes.

Ces points clés permettent de justifier le protocole expérimental vers lequel nous avons convergé et que nous explicitons par la suite. Enfin nous nous concentrons sur les données elles-mêmes : nous montrons comment nous mesurons les populations dans les îlots de stabilité, et nous détaillons l'étape d'extraction des fréquences d'oscillation.

### 6.3.1 Identification des facteurs limitants

#### *Stabilité du réseau optique*

La fréquence des oscillations par effet tunnel va en premier lieu dépendre des paramètres classiques  $\gamma$  et  $\varepsilon_0$ . En pratique et pour les gammes de paramètres étudiées, ce sont des variations de  $\gamma$  qui modifient le plus cette fréquence. Par exemple, nous comparons sur les Fig. 6.6(a) et Fig. 6.6(b) les fréquences tunnel attendues en fonction de  $1/\hbar_{\text{eff}}$  pour différentes valeurs de  $\gamma$  et  $\varepsilon_0$  autour du point ( $\gamma = 0.375$ ,  $\varepsilon_0 = 0.240$ ), correspondant à la première résonance que nous présenterons section 6.4. Dans cet exemple, nous faisons varier  $\gamma$  de 1.5% et  $\varepsilon_0$  de 2% environ : il est clair que ce sont les fluctuations en  $\gamma$  qui induisent la plus grande variation de la fréquence tunnel.

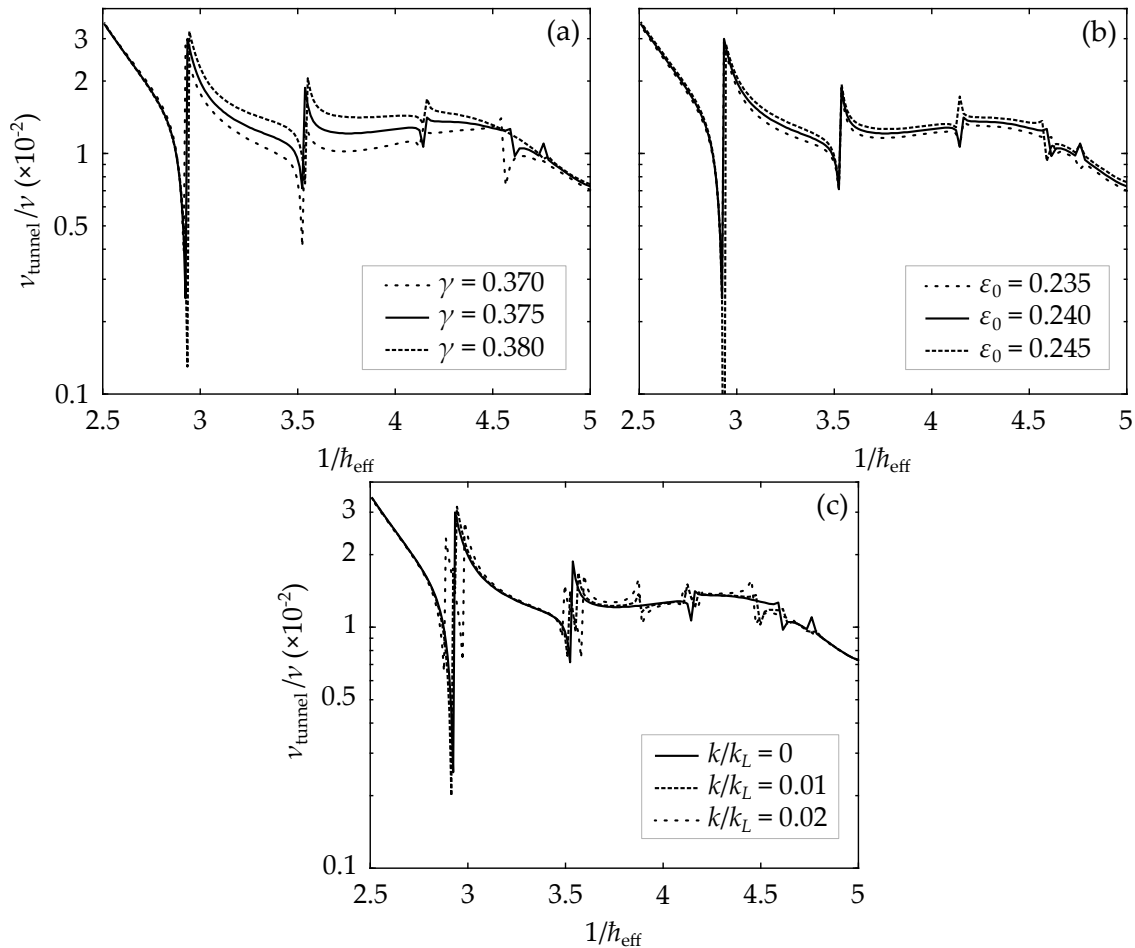
Nous savons par l'Eq. 5.8 du chapitre 5 que  $\gamma$  dépend linéairement de la profondeur du réseau  $s$ . Or la mesure d'une oscillation tunnel nécessite typiquement 1h30 de prise de données, temps sur lequel la profondeur peut dériver. N'ayant pas de moyen de lutter efficacement contre cette dérive lente, nous avons décidé d'encadrer chaque mesure d'oscillation tunnel par des calibrations de la profondeur du réseau (une avant, une après). Nous ne conservons les données expérimentales de l'oscillation tunnel que si la variation résultante de  $\gamma$  entre les deux calibrations est inférieure à 2%.

#### *Confinement harmonique et quasi-moment*

Un autre paramètre pouvant modifier la fréquence tunnel est le quasi-moment  $k$ . En effet, nous avons vu en sous-section 6.1.2 que les quasi-énergies dépendent du quasi-moment, on s'attend donc à ce que le splitting  $\delta$  varie avec  $k$ , induisant par conséquent une variation de la fréquence tunnel.

Considérons dans un premier temps le cas d'un système idéal peuplant un nombre infini de sites du réseau optique. Ce système est alors caractérisé par une seule valeur de quasi-moment  $k$ . La Fig. 6.6(c) présente le résultat de simulations numériques effectuées dans le cas du système idéal, pris dans notre configuration d'îlots réguliers symétriques en position. Nous suivons sur cette figure l'évolution de la fréquence tunnel  $\nu_{\text{tunnel}}$  en fonction de  $1/\hbar_{\text{eff}}$  pour trois valeurs différentes de  $k$ . Ces simulations montrent que la dépendance avec le quasi-moment est surtout visible aux résonances : loin des résonances, les fréquences sont les mêmes quelle que soit la valeur de  $k$ , tandis que les résonances sont modifiées lorsqu'on change le quasi-moment.

Le condensat ayant une taille finie, il occupe un nombre fini de sites du réseau. Il est donc décrit non pas par un seul quasi-moment mais par une distribution en quasi-moment, centrée en  $k = 0$  et de largeur finie. Chaque atome, de quasi-moment  $k$  appartenant à la distribution, va effectuer une oscillation tunnel avec une fréquence  $\nu_{\text{tunnel}}(k)$  qui lui est propre. Dans ce cas le signal total mesuré au niveau des résonances est la superposition de l'ensemble de ces oscillations : cet effet résulte en un brouillage (ou un amortissement) du signal total. Nous cherchons donc à réduire au maximum la largeur de la distribution initiale en quasi-moment du condensat. Pour cela, nous décomprimons le piège harmonique avant le chargement dans le réseau optique, afin d'augmenter la taille initiale du condensat et de nous rapprocher du système idéal.



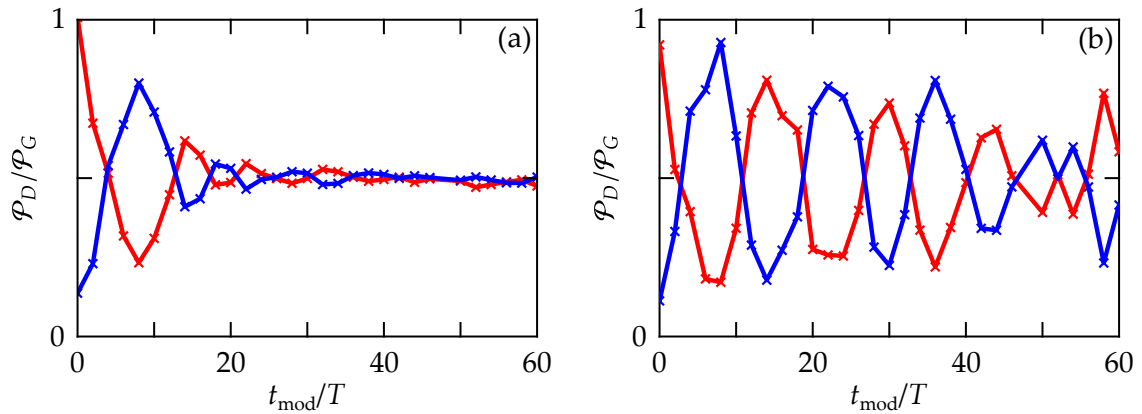
**FIGURE 6.6** | Résultats de simulations numériques effectuées par le LPT : variation de la fréquence tunnel en fonction de différents paramètres expérimentaux. Évolution de la fréquence d'oscillation tunnel  $\nu_{\text{tunnel}}$  avec  $1/\hbar_{\text{eff}}$  pour (a)  $\varepsilon_0 = 0.240$ ,  $k = 0$  et trois valeurs de  $\gamma$ ; (b)  $\gamma = 0.375$ ,  $k = 0$  et trois valeurs de  $\varepsilon_0$ ; (c)  $\gamma = 0.375$ ,  $\varepsilon_0 = 0.240$  et trois valeurs de  $k$ .

### Réduction du nombre d'atomes

Le dernier point clé s'est trouvé être le nombre d'atomes. Nous avons commencé l'étude du CAT avec des condensats contenant typiquement  $N \approx 1.5 \times 10^5$  atomes. Malgré des premiers signaux encourageants, l'amortissement observé dans ces conditions était toujours limitant et nous ne pouvions pas mesurer de fréquence d'oscillation de manière fiable (voir Fig. 6.7(a)). Comme l'illustre la Fig. 6.7(b), cet amortissement a été fortement réduit lorsque nous avons utilisé des condensats plus petits, avec un nombre d'atomes initial d'environ  $N \approx 3 \times 10^4$ . Nous avons pour cela raccourci le temps de chargement du MOT 3D et allongé l'évaporation finale dans le piège hybride.

Il est clair par cet exemple que les interactions interatomiques sont responsables de cet amortissement, puisqu'en diminuant le nombre d'atomes initialement chargés dans le réseau, nous diminuons la densité atomique  $n$  et réduisons ainsi la contribution du terme d'interaction  $gn$  de l'équation de Gross-Pitaevskii (section 1.1.3 du chapitre 1). Nous pensons que les interactions sont à l'origine de décohérence dans le réseau





**FIGURE 6.7 | Observation expérimentale de l'amortissement des oscillations tunnel dû au nombre d'atomes.** Nous comparons deux oscillations **CAT** obtenues pour deux nombre d'atomes différents : (a)  $N \approx 1.2 \times 10^5$  et (b)  $N \approx 4 \times 10^4$ . Les paramètres classiques sont  $\gamma = 0.225$  et  $\varepsilon_0 = 0.59$ .

optique, détruisant les oscillations tunnel qui sont un processus cohérent. Le signal que nous mesurons est par ailleurs obtenu à partir d'une figure d'interférences impliquant l'ensemble des puits du réseau : un déphasage de la fonction d'onde entre puits, dû aux interactions, est alors suffisant pour "tuer" ce signal. Ces hypothèses seront testées dans le futur par notre équipe, une étude dédiée à la décohérence de ce système étant prévue.

### 6.3.2 Séquence expérimentale

#### *Préparation de l'état initial*

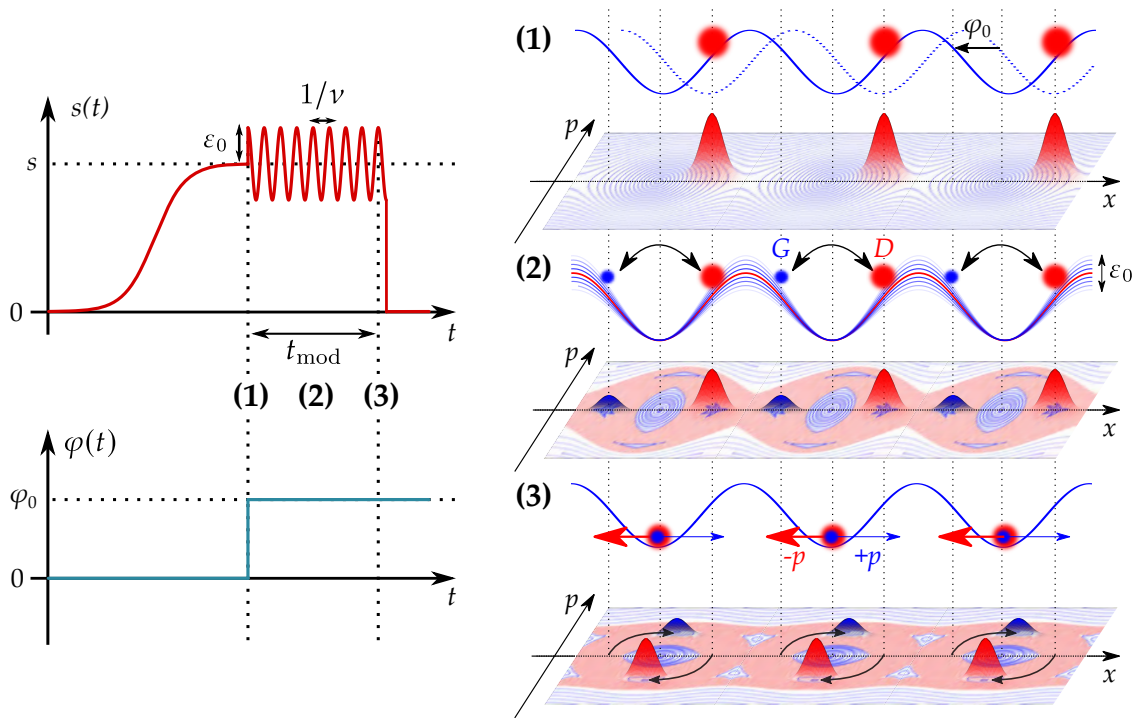
Pour obtenir des condensats à faible nombre d'atomes ( $N \approx 3 \times 10^4$ ), nous diminuons le temps de chargement du **MOT 3D** entre 2 et 3 s et nous rallongeons l'évaporation finale dans le piège hybride. Nous nous assurons à chaque fois que le nombre d'atomes ainsi obtenu est stable (variation de  $N$  l'ordre de 10% maximum). Après avoir obtenu le condensat, nous décompressons le piège hybride en enlevant le faisceau dipolaire vertical grâce à une rampe linéaire de 400 ms, afin de diminuer la largeur en quasi-moment.

C'est donc un "petit" condensat, dans un piège hybride décomprimé, que nous chargeons dans le réseau optique.

#### *Protocole dans le réseau*

Le protocole expérimental pour l'étude du **CAT** est très similaire à celui utilisé pour l'étude des bifurcations du chapitre 5. Résumé en Fig. 6.8, ce protocole consiste en :

- La montée adiabatique du réseau à une profondeur  $s$ , pour charger les atomes au fond des puits sans vitesse initiale. Cet état dynamique du système correspondant au point  $(x = 0, p = 0)$  de l'espace des phases. La profondeur a été précisément calibrée au préalable.
- Un déplacement soudain du réseau optique en appliquant une phase  $\varphi_0$ .

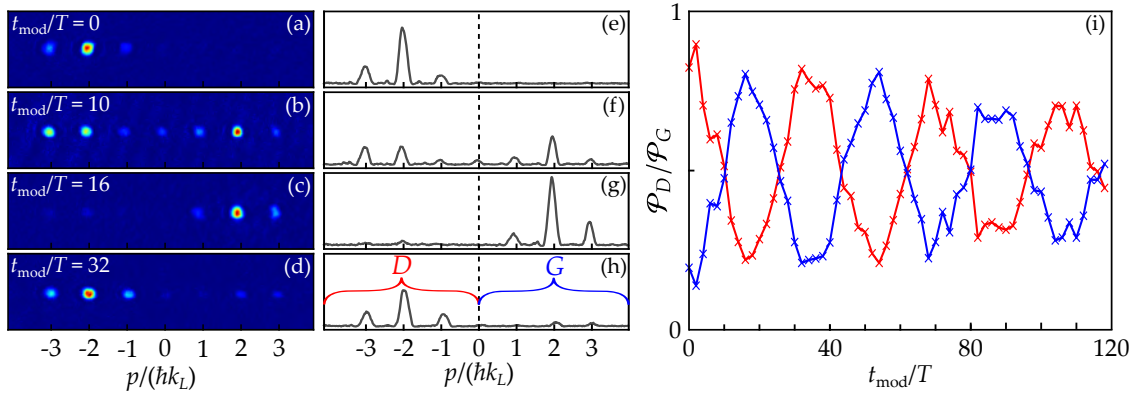


**FIGURE 6.8 | Protocole expérimental utilisé pour observer l'effet tunnel entre deux îlots réguliers symétriques en position.** Après chargement adiabatique du condensat dans le réseau optique à la profondeur  $s$ , nous procédons aux étapes suivantes : **(1)** Nous appliquons un déplacement soudain du réseau pour placer les atomes sur les pentes des puits. Nous démarrons en même temps la modulation d'amplitude. **(2)** Nous modulons la profondeur du réseau optique, à une fréquence  $\nu = 1/T$  et avec une amplitude  $\varepsilon_0$ , pendant un nombre entier pair de périodes de modulation :  $t_{\text{mod}} = 2nT$ . **(3)** Nous appliquons la rotation dans l'espace des phases en modulant pendant un temps  $t_{\text{rot}} = T/2$  supplémentaire.

- Une modulation de la profondeur du réseau, avec une fréquence de modulation  $\nu$  et une amplitude  $\varepsilon_0$ , pendant une durée  $t_{\text{mod}}$ .
- La rotation dans l'espace des phases, effectuée ici grâce à l'application d'une demi-période de modulation supplémentaire (voir section 5.4.1).
- Un ToF de 25 ms après avoir coupé tous les pièges.

Contrairement au chapitre précédent, le déphasage appliqué  $\varphi_0$  est fixé : il est choisi de sorte à peupler un des deux îlots réguliers, symétriques en position, à  $t_{\text{mod}} = 0$  (Fig. 6.8 étape **(1)**). Nous démarrons la modulation en même temps que nous effectuons le déphasage, en respectant le saut initial de profondeur  $\gamma(1 + \varepsilon_0)$ . Nous faisons varier le temps de modulation  $t_{\text{mod}}$ , ce qui nous permet de reconstruire l'oscillation tunnel entre les deux îlots réguliers (Fig. 6.8 étape **(2)**). Nous ne considérons que les temps de modulation correspondant à un nombre entier pair de périodes de modulation :  $t_{\text{mod}} = 2nT, n \in \mathbb{N}$ . Finalement, pour accéder aux populations des îlots de droite et de gauche, nous procédons à la rotation dans l'espace des phases en laissant le système évoluer dans le réseau modulé pendant un temps supplémentaire  $t_{\text{rot}} = T/2$  (Fig. 6.8 étape **(3)**). Grâce à cette rotation, les atomes initialement dans l'îlot de gauche acquièrent





**FIGURE 6.9 | Reconstruction des populations des îlots réguliers gauche et droite.** (a-d) Images d'absorption expérimentales obtenues après un ToF de 25 ms, après différents temps de modulation. (e-h) Profils intégrés correspondants, où les états d'impulsions sont clairement visibles. Les atomes initialement dans l'îlot régulier de droite (resp. de gauche) acquièrent, après rotation dans l'espace des phases, une impulsion négative (resp. positive). (i) Populations des îlots réguliers, calculées à partir des états d'impulsion selon l'Eq. 6.27, en fonction du temps de modulation.

une impulsion positive, tandis que les atomes de l'îlot de droite acquièrent une impulsion négative.

Insistons encore une fois sur le point suivant : si nous considérons à  $t = 0$  une particule classique placée dans un des îlots réguliers, alors nous observerons la particule *dans ce même îlot* si nous effectuons la mesure de sa position *toutes les deux périodes de modulation*. Dit autrement, une particule classique reste dans son îlot si nous adoptons une vision stroboscopique, de période  $2T$ , du système (se référer à la section 5.3.3 pour plus de détails).

Les images d'absorption, prises après ToF, présentent à nouveau des ordres de diffraction, à partir desquels nous pouvons retrouver les populations des îlots réguliers. Nous détaillons ce point dans la suite.

### 6.3.3 Reconstruction des populations des îlots réguliers

L'information qui nous intéresse est la population relative (ou, de manière équivalente, la probabilité d'occupation) des îlots réguliers droite  $D$  et gauche  $G$  après un temps de modulation  $t_{\text{mod}} = 2nT$ . Ces populations, désignées par  $\mathcal{P}_D$  et  $\mathcal{P}_G$ , peuvent être calculées à partir des images d'absorption obtenues après ToF. Nous nous appuyerons sur la Fig. 6.9 pour expliquer cette démarche.

Grâce à la rotation dans l'espace des phases, expliquée section 5.4.1 et rappelée Fig. 6.8, nous transférons les populations des îlots depuis l'axe des positions vers l'axe des impulsions. La distinction qu'il convient alors de faire porte sur le signe de l'impulsion : les atomes occupant l'îlot de **droite** possèdent après rotation une impulsion **négative**, tandis

que les atomes dans l'îlot de **gauche** ont une impulsion **positive**. Nous avons représenté sur la Fig. 6.9(a-d) des images d'absorption obtenues après modulation (le temps étant indiqué dans le coin supérieur gauche), ainsi que les profils intégrés correspondants en Fig. 6.9(e-h). Nous observons les ordres de diffraction habituels, d'impulsion  $p_j = \hbar k_L$  et de population  $\mathcal{P}_j$ . Les populations normalisées dans les îlots réguliers  $\mathcal{P}_D$  et  $\mathcal{P}_G$  sont alors simplement obtenues à partir des populations  $\mathcal{P}_j$  en calculant :

$$\mathcal{P}_D = \mathcal{P}_0/2 + \sum_{j=-1}^{-N} \mathcal{P}_j \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_G = \mathcal{P}_0/2 + \sum_{j=+1}^{+N} \mathcal{P}_j, \quad (6.27)$$

où  $N > 0$  est l'indice, en valeur absolue, du plus grand ordre peuplé visible. Ces définitions sont une conséquence directe de la rotation dans l'espace des phases, et assurent d'avoir  $\mathcal{P}_D + \mathcal{P}_G = 1$ . Nous avons tracé un exemple de l'évolution de ces populations en fonction du temps de modulation en Fig. 6.9(i) : des oscillations sont clairement visibles. Nous nous intéressons à la fréquence de ces dernières, que nous devons extraire à partir du signal brut.

#### 6.3.4 Extraction des fréquences d'oscillation tunnel

Les oscillations tunnel observées pouvant être très amorties, il est parfois difficile d'extraire toutes les fréquences présentes dans les oscillations des populations des îlots, en particulier en présence d'une éventuelle fréquence secondaire. Nous avons donc convergé vers la procédure d'analyse suivante, appliquée à l'ensemble des données :

1. Nous calculons les transformées de Fourier discrètes des évolutions temporelles des populations des îlots :

$$y_G(f_i) = \text{FFT}[\mathcal{P}_G(t)](f_i) \quad \text{et} \quad y_D(f_i) = \text{FFT}[\mathcal{P}_D(t)](f_i). \quad (6.28)$$

Nous mesurons les oscillations avec un pas de temps  $\Delta t$  pendant une durée  $t_{\text{mod}}$  : le pas en fréquence des spectres est donc  $\Delta f = 1/t_{\text{mod}}$  et les fréquences s'expriment comme  $f_i = i \times \Delta f$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Le spectre utile est compris dans l'intervalle  $f_i \in [0, f_{\text{ech}}/2]$ , où  $f_{\text{ech}} = 1/\Delta t$  est la fréquence d'échantillonnage.

2. Nous effectuons la moyenne des spectres :

$$y(f_i) = \frac{y_D(f_i) + y_G(f_i)}{2}. \quad (6.29)$$

3. Nous déterminons une valeur seuil  $y_{\text{min}}$  que nous avons définie selon :

$$y_{\text{min}} = 2\bar{y} \quad \text{avec} \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y(f_i), \quad (6.30)$$

$N$  étant le nombre de points dans le spectre utile. La valeur  $\bar{y}$  correspond à la moyenne du spectre en fréquence : si ce dernier consiste en quelques pics sur du bruit, la valeur moyenne sera légèrement au-dessus du bruit. La valeur seuil, qui correspond au double de cette moyenne, donne donc de manière empirique une

valeur minimale pour nous assurer qu'un pic émerge suffisamment par rapport au bruit des spectres en fréquence.

4. Nous cherchons les deux plus grands maxima du spectre en fréquence  $y_{\max}^{(1)}$  et  $y_{\max}^{(2)}$  qui se trouvent au-dessus de  $y_{\min}$ . Nous avons  $y_{\max}^{(1)} > y_{\max}^{(2)}$ .
5. Nous gardons systématiquement le premier pic  $y_{\max}^{(1)}$ , mais nous imposons une condition supplémentaire sur  $y_{\max}^{(2)}$  : nous ne conservons le deuxième pic que s'il satisfait la condition  $y_{\max}^{(2)} \geq y_{\max}^{(1)}/3$ , c'est-à-dire si sa hauteur est au moins égale à un tiers de la hauteur du premier pic. Ce choix nous assure que la fréquence secondaire n'est pas négligeable.
6. Les fréquences d'oscillation expérimentales  $\nu^{(1)}$  et  $\nu^{(2)}$  sont extraites en procédant à une moyenne pondérée sur trois points autour des valeurs  $y_{\max}^{(1)}$  et  $y_{\max}^{(2)}$ . Par exemple, si  $y_{\max}^{(1)}$  correspond à la valeur  $y_k = y(f_k)$  du spectre, nous calculons :

$$\nu^{(1)} = \frac{f_{k-1}y_{k-1} + f_k y_k + f_{k+1}y_{k+1}}{y_{k-1} + y_k + y_{k+1}}. \quad (6.31)$$

De plus, nous supposons que la mesure des fréquences d'oscillation  $\nu^{(i)}$  se distribue autour des  $y_{\max}^{(i)}$  selon une loi triangulaire. Suivant cette loi, l'erreur  $\Delta\nu$  faite sur la détermination des fréquences est :

$$\Delta\nu = \pm\Delta f/(2\sqrt{6}). \quad (6.32)$$

L'ensemble des choix faits pour ce protocole permet de rendre compte des caractéristiques principales des différentes oscillations obtenues, et d'en extraire les fréquences de manière pertinente.

#### 6.4 Mise en évidence expérimentale

Dans cette dernière section, nous présentons l'ensemble des résultats expérimentaux liés à l'effet tunnel dans un espace des phases mixte. Nous montrons d'abord une mesure de l'effet tunnel dynamique, où seuls deux états réguliers sont nécessaires pour comprendre le transport. Cette mesure, qui montre une évolution monotone de la fréquence tunnel avec  $1/\hbar_{\text{eff}}$ , comme prévu par l'Eq. 6.18, constitue une référence à laquelle nous comparons les résonances de l'effet tunnel assisté par le chaos. Nous présentons dans la suite quatre de ces résonances, que nous analysons à partir du spectre en quasi-énergie et des représentations de Husimi.

### 6.4.1 Mesure de l'effet tunnel dynamique

Pour observer l'effet tunnel dynamique, nous nous plaçons dans un portrait de phase avec deux îlots réguliers symétriques en position mais sans trajectoire chaotique entre ces îlots. Nous choisissons les paramètres ( $\gamma = 0.25$ ,  $\varepsilon_0 = 0.14$ ) qui génèrent le portrait de phase indiqué Fig. 6.10(b). On peut voir sur ce portrait que les îlots réguliers sont "protégés" par les orbites régulières qui les entourent : deux trajectoires ne pouvant se croiser dans un portrait de phase, il ne peut donc pas y avoir de trajectoire chaotique au centre du portrait de phase. Cette configuration réduit considérablement la possibilité d'une dynamique à trois états impliquant un état chaotique.

Servons-nous d'un exemple de données expérimentales pour résumer les étapes successives permettant d'aboutir à la mesure de la fréquence d'oscillation tunnel en fonction d'un paramètre du système, ici  $\hbar_{\text{eff}}$  :

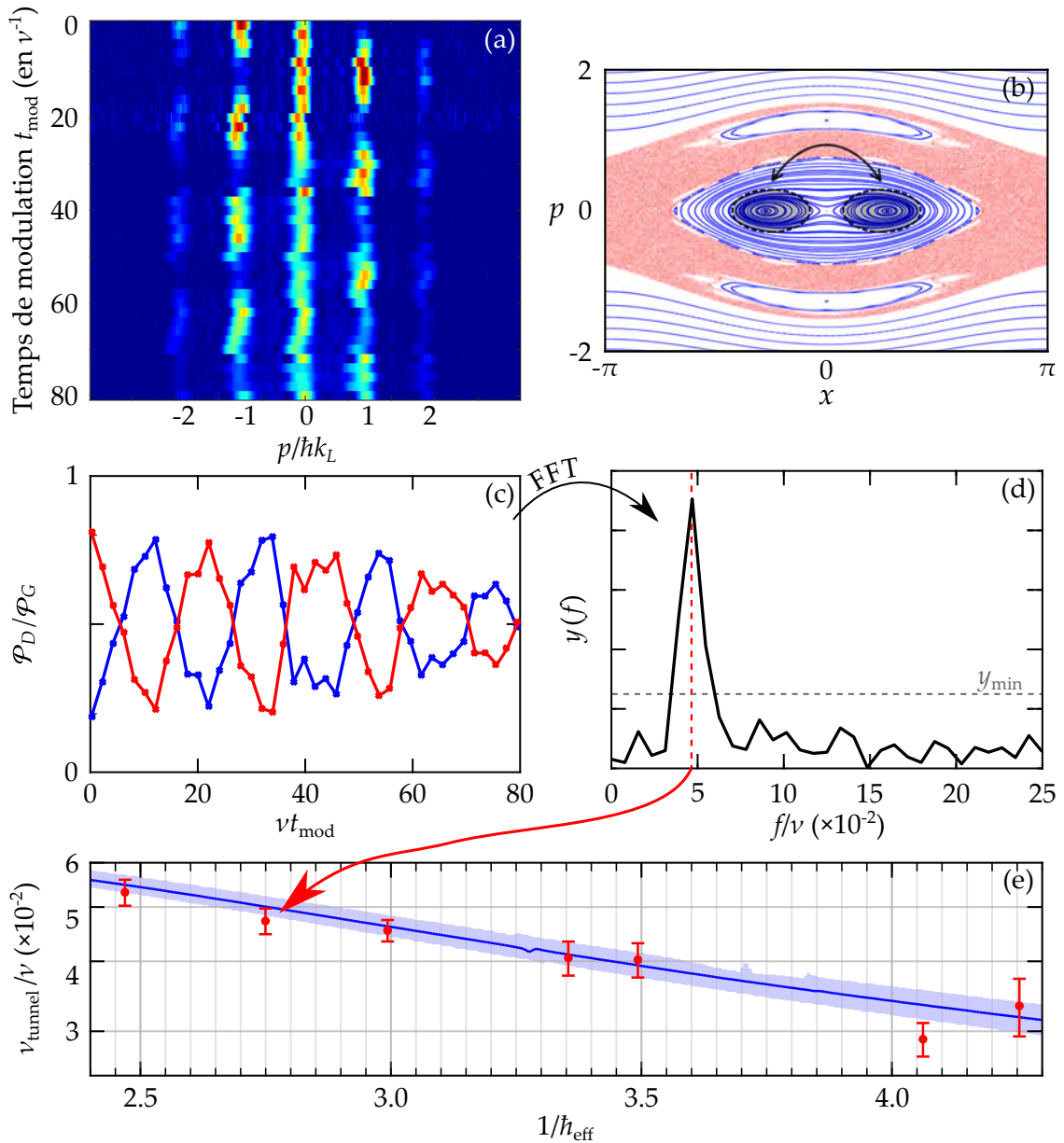
1. Nous appliquons le protocole expérimental décrit en section 6.3.2. Pour notre exemple, les paramètres expérimentaux associés au réseau optique sont :
  - la profondeur  $s = 7.5$ ;
  - l'amplitude de modulation  $\varepsilon_0 = 0.14$ ;
  - la fréquence de modulation  $\nu = 44.61$  kHz;
  - le déplacement initial  $\varphi_0 = 15^\circ$ , ce qui correspond à une distance  $\Delta x/\pi \approx 0.17$ .

Avec ces valeurs, nous obtenons ( $\gamma = 0.25$ ,  $\varepsilon_0 = 0.14$ ) et  $1/\hbar_{\text{eff}} = 2.75$ . Nous varions le temps de modulation  $t_{\text{mod}}$  en incrémentant le nombre de périodes de modulation, de 0 à 80 par pas de 2. Les images d'absorption obtenues sont concaténées et le résultat est montré Fig. 6.10(a). Une oscillation est clairement visible entre les impulsions positives et négatives.

2. En appliquant les définitions données section 6.3.3, nous reconstruisons les populations  $\mathcal{P}_D$  et  $\mathcal{P}_G$  des îlots réguliers à partir des populations relatives  $\mathcal{P}_j$  des états d'impulsion  $p_j$ . Nous obtenons de cette façon la Fig. 6.10(c).
3. Nous calculons ensuite le spectre en fréquence de ces signaux, montré Fig. 6.10(d), afin d'en extraire la fréquence d'oscillation tunnel  $\nu_{\text{tunnel}}$  (et l'erreur estimée) en suivant la méthode présentée section 6.3.4.

Nous mesurons ainsi une fréquence d'oscillation tunnel  $\nu_{\text{tunnel}}$  pour une valeur donnée de  $\hbar_{\text{eff}}$ . En variant à la fois la profondeur du réseau optique et la fréquence de modulation, nous pouvons changer la valeur de  $\hbar_{\text{eff}}$  en gardant  $\gamma$  constant (voir Eq. 5.8 du chapitre 5). Nous répétons alors la mesure de la fréquence d'oscillation pour des valeurs de  $1/\hbar_{\text{eff}}$  comprises entre 2.4 et 4.3 : l'ensemble des résultats est résumé Fig. 6.10(e).

Les points expérimentaux sont comparés au résultat de simulations numériques tenant compte d'une variation maximale de  $\gamma$  de 2%. Les fréquences d'oscillation tunnel s'alignant selon une droite pour une échelle logarithmique selon l'axe des ordonnées, nous confirmons bien la dépendance attendue par l'Eq. 6.18. Sur l'intervalle de  $\hbar_{\text{eff}}$  considéré, le taux tunnel est divisé par 2 environ. Nous comparons maintenant ce résultat à l'effet tunnel assisté par le chaos.



**FIGURE 6.10 | Mesure de l'effet tunnel dynamique.** (a) Images d'absorption prises après ToF et intégrées selon l'axe perpendiculaire au réseau optique, obtenues en appliquant le protocole expérimental défini section 6.3.2. Les paramètres de l'Hamiltonien adimensionné sont ( $\gamma = 0.25$ ,  $\varepsilon_0 = 0.14$ ) et  $1/\hbar_{\text{eff}} = 2.75$ . (b) Portrait de phase correspondant. Les îlots réguliers entre lesquels la fonction d'onde oscille sont indiqués par les aires grisées. (c) Évolution des populations  $\mathcal{P}_D$  (rouge) et  $\mathcal{P}_G$  (bleu) des îlots réguliers, calculées à partir des images d'absorption, en fonction du temps de modulation  $t_{\text{mod}}$ . (d) Moyenne des transformées de Fourier des oscillations des populations. La valeur seuil  $y_{\text{min}}$  définie Eq. 6.30 est indiquée par des tirets gris horizontaux. La fréquence mesurée des oscillations est indiquée par des tirets rouges verticaux. (e) Ensemble des fréquences tunnel  $\nu_{\text{tunnel}}$  mesurées expérimentalement (en unité de fréquence de modulation  $\nu$ , points rouges) lorsque  $1/\hbar_{\text{eff}}$  varie. Le résultat de simulations numériques obtenues avec un nombre infini de puits peuplés est indiqué en trait bleu. L'aire bleu clair représente l'erreur théorique sur  $\nu_{\text{tunnel}}$  si  $\gamma$  varie de  $\pm 2\%$ .

## 6.4.2 Première résonance de l'effet tunnel assisté par le chaos et comparaison à l'effet tunnel dynamique

### *Observation expérimentale*

Nous avons étudié l'effet tunnel entre îlots réguliers symétriques en position dans le cas où ces îlots sont distinctement séparés par la mer chaotique. Les paramètres utilisés sont ( $\gamma = 0.375$ ,  $\varepsilon_0 = 0.24$ ), le portrait de phase correspondant est donné Fig. 6.9(b).

Nous appliquons exactement les mêmes étapes que lors de l'étude de l'effet tunnel dynamique. Nous mesurons les fréquences d'oscillation  $\nu_{\text{tunnel}}$  sur un intervalle plus petit en  $\hbar_{\text{eff}}$  :  $1/\hbar_{\text{eff}} \in [2.4, 3.4]$ . Les résultats sont donnés Fig. 6.11(a), à nouveau avec une échelle logarithmique selon l'axe des ordonnées. À titre de comparaison, le portrait de phase et la courbe  $\nu_{\text{tunnel}} = f(1/\hbar_{\text{eff}})$  correspondants à l'effet tunnel dynamique sont rappelés Fig. 6.11(c) et (d). Insistons sur le fait que les Figs. 6.11(a) et (d) sont données avec les mêmes échelles en abscisses et en ordonnées.

La première caractéristique frappante de la Fig. 6.11(a) est l'évolution clairement non monotone de  $\nu_{\text{tunnel}}$  en fonction de  $1/\hbar_{\text{eff}}$  : contrairement à l'effet tunnel dynamique, les points expérimentaux (points rouges) ne s'alignent pas sur une droite (en échelle semi-logarithmique) mais présentent une résonance. Ainsi, nous pouvons distinguer trois zones, caractérisées par des comportements différents, sur lesquels nous reviendrons par la suite :

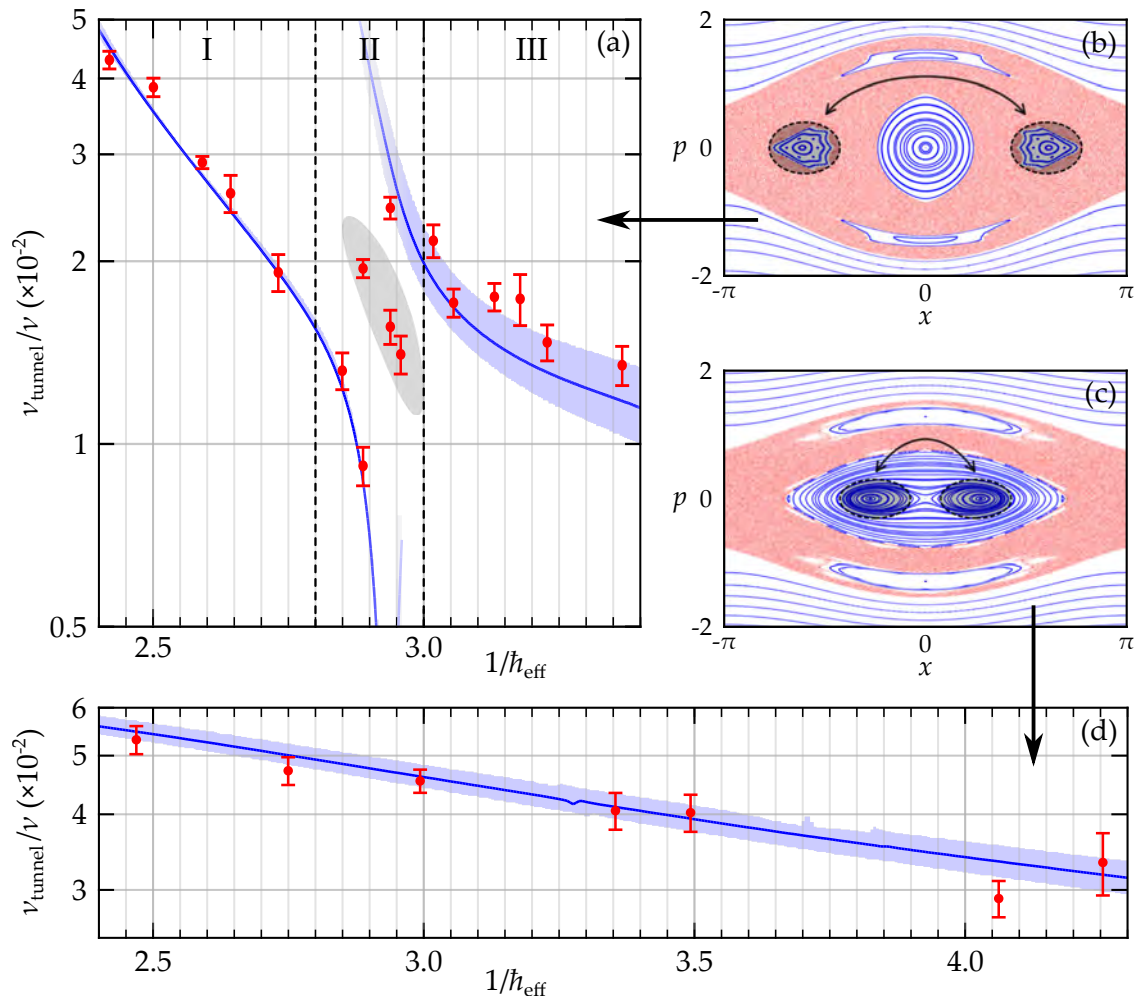
1. Dans la zone I ( $2.4 \lesssim 1/\hbar_{\text{eff}} \lesssim 2.8$ ) nous observons des oscillations de plus en plus lentes.
2. Dans la zone II ( $2.8 \lesssim 1/\hbar_{\text{eff}} \lesssim 3$ ) qui correspond à la résonance, nous voyons une fréquence secondaire apparaître dans les oscillations, en plus de la fréquence principale. Cette dernière décroît jusqu'à  $\nu_{\text{tunnel}}/\nu \approx 1$  puis effectue un saut à  $\nu_{\text{tunnel}}/\nu \approx 2.2$ .
3. Dans la zone III ( $3 \lesssim 1/\hbar_{\text{eff}} \lesssim 3.4$ ) nous retrouvons une oscillation avec une seule fréquence qui décroît jusqu'à  $\nu_{\text{tunnel}}/\nu \approx 1.2$ .

La variation de la fréquence tunnel est également beaucoup plus grande en présence de chaos puisque nous mesurons une réduction de la fréquence tunnel d'un facteur 5 environ alors que la valeur de  $\hbar_{\text{eff}}$  varie dans un intervalle deux fois plus petit comparé à l'effet tunnel dynamique.

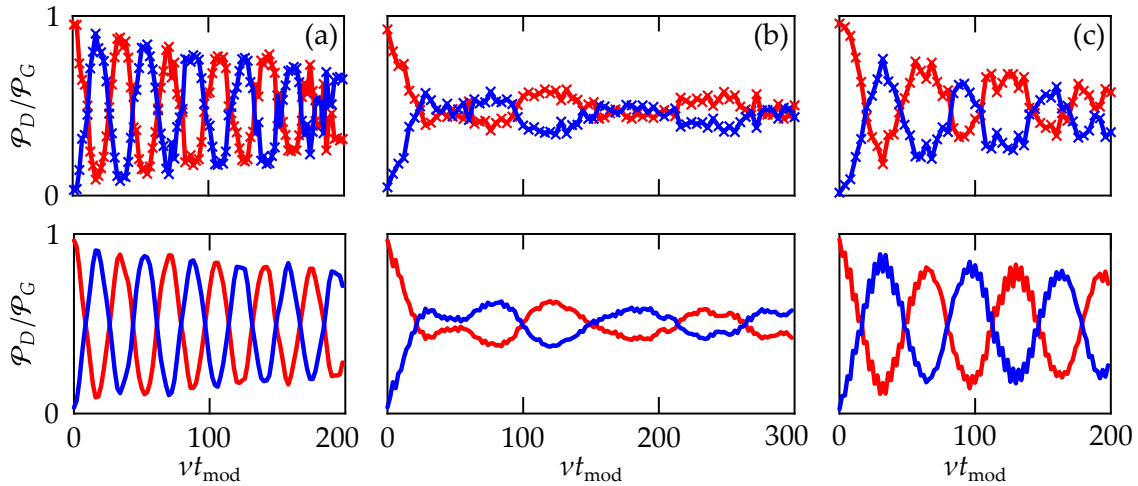
Sur cette figure nous comparons les points expérimentaux à des simulations numériques (lignes bleues) effectuées en supposant un réseau avec un nombre infini de puits peuplés. Nous discernons deux cas :

- Dans les zones I et III, loin de résonance, il y a un bon accord entre mesures expérimentales et simulations numériques. Le modèle simple supposant un réseau infini permet donc dans ce cas de retrouver les résultats expérimentaux.
- Dans la zone II correspondant à la résonance, il existe un petit intervalle autour de  $1/\hbar_{\text{eff}} \approx 2.9$  pour lequel on s'attend à mesurer deux fréquences d'oscillation, données par les deux branches bleues des simulations numériques. C'est en effet la région de plus fort mixing, où trois états (un état régulier et deux états mixtes) sont impliqués dans le transport (voir sous-section 6.1.3). Nous n'avons jamais observé ces deux





**FIGURE 6.11** | Mesure de la première résonance de l'effet tunnel assisté par le chaos. (a) Évolution de la fréquence tunnel  $\nu_{\text{tunnel}}$  (en unité de fréquence de modulation  $\nu$ ) en fonction de  $1/\hbar_{\text{eff}}$  pour ( $\gamma = 0.375$ ,  $\varepsilon_0 = 0.24$ ). Les points rouges correspondent aux valeurs mesurées expérimentalement, les lignes bleues sont le résultat de simulations numériques effectuées en supposant un réseau avec un nombre infini de puits peuplés. L'aire bleue autour de ces lignes indique l'erreur théorique sur la fréquence si  $\gamma$  varie de  $\pm 2\%$ . L'aire grise au centre de la résonance indique la région où le nombre fini de puits peuplés doit être pris en compte dans les simulations numériques pour obtenir des évolutions comparables. (b) Portrait de phase correspondant. (c) et (d) Portrait de phase et résultat associés à l'effet tunnel dynamique. Sur les deux portraits de phase (b) et (c), les aires grisées indiquent les îlots réguliers entre lesquels a lieu l'effet tunnel.



**FIGURE 6.12** | **Comparaison entre mesures expérimentales des oscillations par effet tunnel et simulations numériques incluant la distribution en quasi-moment.** Ligne supérieure : mesure expérimentale de l'évolution des populations  $\mathcal{P}_D$  et  $\mathcal{P}_G$  des îlots réguliers en fonction du temps de modulation  $t_{\text{mod}}$  (en unité de fréquence de modulation  $\nu$ ). Ligne inférieure : simulations numériques correspondantes en considérant 13 puits identiquement peuplés dans le réseau. Les paramètres sont ( $\gamma = 0.375$ ,  $\varepsilon_0 = 0.24$ ) et (a)  $1/\hbar_{\text{eff}} = 2.591$  (avant la résonance), (b)  $1/\hbar_{\text{eff}} = 2.888$  (à la résonance), (c)  $1/\hbar_{\text{eff}} = 3.131$  (après la résonance).

fréquences au cours d'une même oscillation, ceci pour deux raisons possibles : (i) le pic dans le spectre de Fourier associé à l'une des deux fréquences est trop faible pour être détecté et (ii) il est expérimentalement difficile de choisir  $1/\hbar_{\text{eff}}$  aussi précisément. En revanche, nous mesurons des fréquences intermédiaires, indiquées par une aire grisée, qui ne sont pas reproduites par les simulations numériques dans le cas d'un réseau infini. Ces fréquences intermédiaires ne sont donc pas reliées aux splittings entre les trois états qui participent au transport d'un îlot à l'autre.

La comparaison faite précédemment repose sur des simulations numériques calculées à partir de l'Hamiltonien exact, avec les mêmes paramètres ( $\gamma$ ,  $\varepsilon_0$ ) que ceux utilisés expérimentalement, en considérant un nombre infini de puits peuplés dans le réseau. Ces simulations ne reflètent pas exactement nos conditions expérimentales, puisque nous peuplons un nombre fini de puits, et ce de manière inhomogène compte tenu du confinement harmonique extérieur (voir Fig. 3.7 du chapitre 3). C'est cette différence qui explique le désaccord apparent entre les fréquences mesurées et attendues à la résonance.

Pour se rapprocher des conditions expérimentales, nos collaborateurs du LPT ont donc effectué des simulations numériques avec un nombre fini de puits peuplés, ce qui implique une distribution en quasi-moment de largeur finie. Trois exemples de simulations (avant la résonance, à la résonance, après la résonance) sont comparés aux données expérimentales Fig. 6.12. Ces résultats numériques sont obtenus en ne considérant que 13 sites initialement peuplés de manière identique, cette valeur correspondant à la valeur minimale permettant de rendre compte des données expérimentales (mais une valeur légèrement supérieure conduit à des résultats similaires). Dans ce cas, l'accord entre oscillations expérimentale et



théorique est remarquable. Nous constatons en particulier qu'à la résonance (Fig. 6.12(b)), les simulations numériques reproduisent bien les données expérimentales.

La nécessité de prendre en compte la distribution du quasi-moment du condensat à la résonance fait directement écho à ce que nous avons constaté section 6.3.1 : il peut y avoir dans cette zone une forte dépendance avec le quasi-moment. Nos collaborateurs du LPT essayent également de déterminer si les fréquences intermédiaires observées à la résonance ne traduisent pas une dynamique plus complexe, impliquant du transport à longue portée, c'est-à-dire entre sites éloignés. Cette possibilité, que nous évoquerons en fin de manuscrit, est en cours d'investigation.

### *Analyse du spectre de quasi-énergie*

Nous pouvons calculer numériquement le spectre en quasi-énergie dans le même régime de paramètres que la résonance observée et pour un système idéal caractérisé par un unique quasi-moment  $k = 0$ . Cette analyse nous renseigne à la fois sur les mécanismes sous-jacents à la résonance et sur les états du système impliqués dans la dynamique. Le spectre en quasi-énergie est indiqué Fig. 6.13(a), et les représentations de Husimi de certains états impliqués dans le transport sont données Fig. 6.13(b-e).

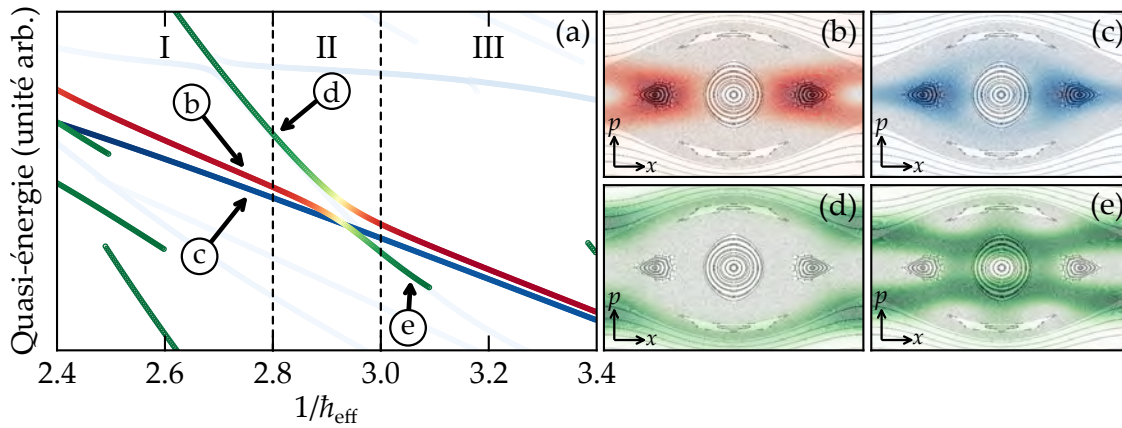
Concentrons-nous d'abord sur le spectre Fig. 6.13(a). À la lumière de celui-ci, nous pouvons réinterpréter les trois zones délimitées sur la Fig. 6.11(a) :

1. Dans la zone I, le système est bien décrit par deux états réguliers (rouge et bleu). La situation s'apparente donc à un système à deux niveaux, et la fréquence tunnel est directement proportionnelle à leur différence en énergie :  $\nu_{\text{tunnel}}(1/\hbar_{\text{eff}}) \propto \delta(1/\hbar_{\text{eff}})$ . On constate que cette différence diminue, ce qui se traduit expérimentalement par une diminution de la fréquence d'oscillation.
2. Dans la zone II, un des deux états réguliers (rouge) mixe avec un troisième état venu de la mer chaotique (vert). Il s'agit d'un mécanisme à trois états, on attend donc deux fréquences d'oscillation. Les deux états mixtes se repoussent par croisement évité, et l'un d'eux croise le deuxième état régulier (bleu) : une des deux fréquences s'annule.
3. Dans la zone III, un des états mixtes redevient un état régulier (rouge), et nous retrouvons un système à deux niveaux dont l'écart en énergie, initialement grand pour  $1/\hbar_{\text{eff}} \approx 3$ , diminue à nouveau.

Ainsi, la variation de la fréquence tunnel avec  $1/\hbar_{\text{eff}}$  se comprend naturellement en suivant l'évolution de la différence d'énergie entre les états impliqués dans la dynamique, dans le régime à deux états réguliers ou avec un état régulier et deux états mixtes.

Nous présentons sur la Fig. 6.13 les distributions de Husimi des états suivants :

- Les deux états réguliers avant résonance (rouge, Fig. 6.13(b), et bleu, Fig. 6.13(c)) ;
- L'état "chaotique" avant résonance (vert, Fig. 6.13(d)) ;
- L'état chaotique après résonance (vert, Fig. 6.13(e)).



**FIGURE 6.13** | **Analyse théorique de la première résonance de l'effet tunnel.** (a) Spectre de quasi-énergie des états impliqués dans la résonance. Les états réguliers, de parité opposée, sont indiqués en rouge et bleu. Les états chaotiques sont indiqués en vert. Le mixing entre un état chaotique et l'état régulier de même symétrie est représenté par un dégradé du rouge au vert. (b-e) Distribution de Husimi de certains états de (a) superposée au portrait de phase.

Comme attendu, la fonction d'onde des états réguliers avant résonance est majoritairement localisée sur les îlots réguliers. Si l'état après résonance Fig. 6.13(e) semble bien être un état chaotique, il est difficile de classer l'état avant résonance Fig. 6.13(d). Compte tenu de la valeur assez grande de  $\hbar_{\text{eff}}$ , il y a peu d'états qui "rentrent" sur le portrait de phase classique et cet état "chaotique" avant résonance est donc plutôt localisé sur les orbites stables à grande impulsion (les *whispering galleries*). La résonance que nous étudions ici est en quelque sorte la "première" résonance CAT du système : l'état chaotique Fig. 6.13(e) que l'on obtient après résonance est le premier état du système bien localisé dans la mer chaotique. Cette résonance caractérise donc le passage vers le régime semi-classique.

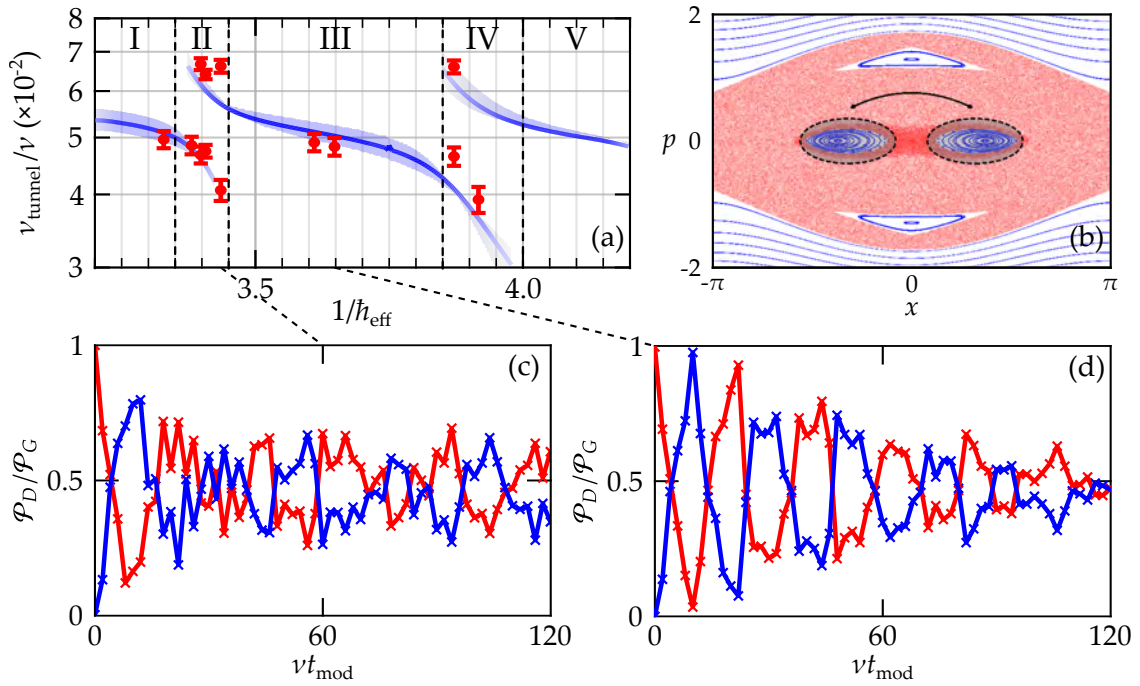
Nous nous sommes intéressés à d'autres résonances, pour des valeurs de  $\hbar_{\text{eff}}$  plus petites. Nous présentons dans la suite ces résultats.

### 6.4.3 Deuxième et troisième résonances

#### *Observation expérimentale*

Nous montrons ici un autre ensemble de données, obtenues pour  $(\gamma = 0.23, \varepsilon_0 = 0.60)$ , pour lesquelles nous mesurons deux fréquences d'oscillations que nous pouvons cette fois-ci attribuer à deux différences en quasi-énergie et qui constituent bien la signature d'une dynamique à trois états (un état régulier et deux états mixtes). Les fréquences d'oscillation expérimentales et théoriques obtenues dans ce régime sont données Fig. 6.14(a), le portrait de phase est indiqué Fig. 6.14(b).

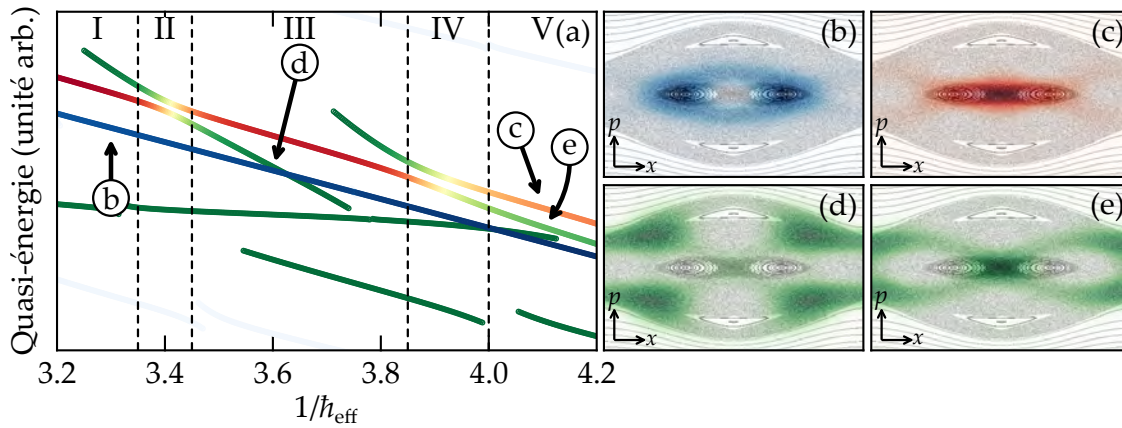
Sur l'intervalle  $1/\hbar_{\text{eff}} \in [3.2, 4.2]$  considéré, nous constatons deux résonances qui se traduisent expérimentalement par des sauts des fréquences d'oscillation tunnel. La première résonance a lieu pour  $\hbar_{\text{eff}} \approx 3.4$ , la seconde pour  $\hbar_{\text{eff}} \approx 3.9$ . Au niveau de chaque résonance, nous observons des battements dans l'évolution des populations des îlots



**FIGURE 6.14** | Mesure de deux résonances CAT consécutives. (a) Évolution de la fréquence tunnel  $\nu_{\text{tunnel}}$  (en unité de fréquence de modulation  $\nu$ ) lorsque  $1/\hbar_{\text{eff}}$  varie, pour les paramètres ( $\gamma = 0.23$ ,  $\varepsilon_0 = 0.60$ ). Les valeurs expérimentales sont indiquées par des points rouges, le résultat de simulations numériques pour un seule valeur de quasi-moment  $k = 0$  est indiqué par un trait bleu. L'aire bleu clair indique l'erreur théorique attendue sur  $\nu_{\text{tunnel}}$  si  $\gamma$  varie de  $\pm 2\%$ . (b) Portrait de phase obtenu pour ces paramètres. Les îlots réguliers entre lesquels la fonction d'onde oscille sont indiqués par les aires grisées. (c) et (d) Mesures expérimentales des populations des îlots réguliers en fonction du temps de modulation  $t_{\text{mod}}$  pour  $1/\hbar_{\text{eff}} = 3.436$  et  $1/\hbar_{\text{eff}} = 3.649$  respectivement.

réguliers (voir par exemple Fig. 6.14(c)), dont nous extrayons deux fréquences. Nous avons distingué sur la Fig. 6.14(a) cinq zones, que nous pouvons regrouper en deux catégories :

1. Les zones I ( $3.2 \lesssim 1/\hbar_{\text{eff}} \lesssim 3.35$ ), III ( $3.45 \lesssim 1/\hbar_{\text{eff}} \lesssim 3.85$ ) et V ( $4 \lesssim 1/\hbar_{\text{eff}} \lesssim 4.2$ ) correspondent à des régions loin de résonance. Le transport étant essentiellement assuré par deux états, nous ne mesurons qu'une seule fréquence d'oscillation. Cette fréquence reste environ constante, de l'ordre de  $\nu_{\text{tunnel}}/\nu = 5 \times 10^{-2}$ , sur ces trois zones.
2. Les zones II ( $3.35 \lesssim 1/\hbar_{\text{eff}} \lesssim 3.45$ ) et IV ( $3.85 \lesssim 1/\hbar_{\text{eff}} \lesssim 4$ ) correspondent aux régions de plus fort mixing. La dynamique à trois états dans ces zones se traduit par deux fréquences d'oscillation. Ces fréquences étant relativement proches, nous observons des battements.



**FIGURE 6.15** | Analyse théorique des deuxième et troisième résonances de l'effet tunnel assisté par le chaos. (a) Spectre de quasi-énergie des états impliqués dans la résonance. Les états réguliers, de parité opposée, sont indiqués en rouge et bleu. Les états chaotiques sont indiqués en vert. Le mixing entre un état chaotique et l'état régulier de même symétrie est représenté par un dégradé du rouge au vert. (b-e) Distribution de Husimi de certains états de (a) superposée au portrait de phase.

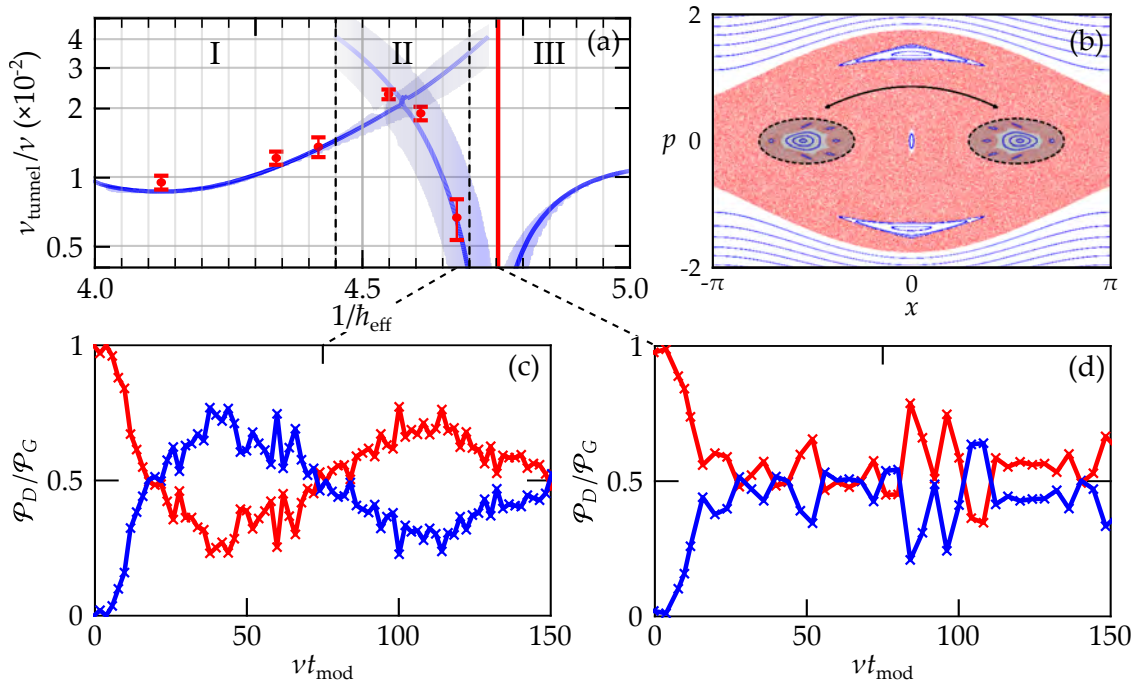
### Analyse du spectre de quasi-énergie

Pour interpréter ces résultats, nous nous tournons à nouveau vers le spectre de quasi-énergie du système donné Fig. 6.15, calculé avec les mêmes paramètres. En nous rappelant que la fréquence  $\nu_{\text{tunnel}}$  est proportionnelle au splitting entre les états occupés par le système, ce spectre rend bien compte de l'évolution observée :

1. Dans les zones I, III et V, le mixing avec un état chaotique est faible, il y a donc une seule fréquence d'oscillation, liée à la différence de quasi-énergie entre les deux états réguliers (rouge et bleu sur la Fig. 6.15(a)). Cette différence évoluant peu, la fréquence d'oscillation tunnel varie faiblement.
2. Dans les zones II et IV, l'énergie d'un état de la mer chaotique (en vert) se rapproche de l'énergie d'un des deux états réguliers de même symétrie (en rouge). Il y a alors mixing entre ces deux états et croisement évité. Au plus fort du mixing, la dynamique est à trois états : il y a donc deux différences d'énergie, soit deux fréquences d'oscillation que l'on retrouve dans les battements.

Les représentations de Husimi Fig. 6.15(b-e) confirment la nature des différents états : les états réguliers sont bien une superposition d'états localisés sur les deux îlots réguliers symétriques en position, tandis que cette fois-ci, comparé à la première résonance, tous les états non réguliers impliqués dans la dynamique sont bien des états chaotiques car les distributions correspondantes sont délocalisées dans la cellule sur les trajectoires chaotiques.

Le spectre en quasi-énergie permet de comprendre les mécanismes à l'œuvre derrière l'évolution de la fréquence tunnel observée Fig. 6.14(a). Cet exemple fournit une illustration de la dynamique à trois états. Soulignons que dans ce cas, les niveaux des états réguliers ne se croisent jamais et il n'y a donc pas de divergence du temps tunnel.



**FIGURE 6.16** | **Mesure de la quatrième résonance de l'effet tunnel assisté par le chaos.** (a) Évolution de la fréquence tunnel  $\nu_{\text{tunnel}}$  (en unité de fréquence de modulation  $\nu$ ) lorsque  $1/\hbar_{\text{eff}}$  varie, pour les paramètres ( $\gamma = 0.315$ ,  $\varepsilon_0 = 0.39$ ). Les valeurs expérimentales sont indiquées par des points rouges (le trait rouge vertical indiquant une donnée à partir de laquelle nous n'avons pas pu extraire de fréquence), le résultat de simulations numériques pour un seule valeur de quasi-moment  $k = 0$  est indiqué par un trait bleu. L'aire bleu clair indique l'erreur théorique attendue sur  $\nu_{\text{tunnel}}$  si  $\gamma$  varie de  $\pm 2\%$ . (b) Portrait de phase obtenu pour ces paramètres. Les îlots réguliers entre lesquels la fonction d'onde oscille sont indiqués par les aires grisées. (c) et (d) Mesures expérimentales des populations des îlots réguliers en fonction du temps de modulation  $t_{\text{mod}}$  pour  $1/\hbar_{\text{eff}} = 4.677$  et  $1/\hbar_{\text{eff}} = 4.754$  respectivement.

#### 6.4.4 Quatrième résonance

##### Observation expérimentale

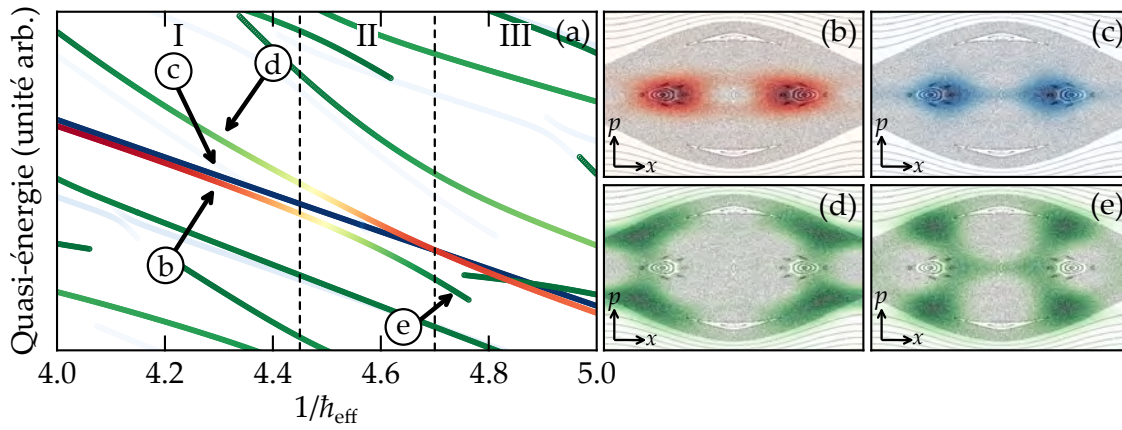
Pour terminer, nous présentons une quatrième résonance, visible sur la Fig. 6.16(a). Elle a été obtenue pour les paramètres ( $\gamma = 0.315$ ,  $\varepsilon_0 = 0.39$ ), avec un portrait de phase représenté Fig. 6.16(b). Nous avons scanné des valeurs de  $\hbar_{\text{eff}}$  encore plus petites, avec  $1/\hbar_{\text{eff}} \in [4, 5]$ . Ce régime de paramètres est difficile à atteindre, car nous sommes aux limites de la réponse linéaire de l'AOM contrôlant la profondeur du réseau optique.



Pour ( $\gamma = 0.315$ ,  $\varepsilon_0 = 0.39$ ) et  $1/\hbar_{\text{eff}} = 4.75$  par exemple, nous avons besoin d'une profondeur maximale de  $s(1 + \varepsilon_0) \approx 40$ , soit  $160 E_R$  !

Nous sommes donc obligés de soigner particulièrement l'alignement des faisceaux contre-propageants du réseau optique. La stabilité et la reproductibilité de telles conditions





**FIGURE 6.17** | **Analyse théorique de la quatrième résonance de l'effet tunnel assisté par le chaos.** (a) Spectre de quasi-énergie des états impliqués dans la résonance. Les états réguliers, de parité opposée, sont indiqués en rouge et bleu. Les états chaotiques sont indiqués en vert. Le mixing entre un état chaotique et l'état régulier de même symétrie est représenté par un dégradé du rouge au vert. (b-e) Distribution de Husimi de certains états de (a) superposée au portrait de phase.

expérimentales n'est pas simple à obtenir, ce qui explique le faible nombre de mesures expérimentales ainsi que leur absence pour  $1/\hbar_{\text{eff}} > 4.8$ .

Cette quatrième résonance présente un comportement encore différent par rapport aux résonances présentées jusqu'ici. Détaillons à nouveau les résultats de la Fig. 6.16(a) par zones :

1. Dans la zone I ( $4 \lesssim 1/\hbar_{\text{eff}} \lesssim 4.45$ ), la fréquence tunnel que nous mesurons augmente avec  $1/\hbar_{\text{eff}}$  (ce qui est l'évolution opposée par rapport à celle de l'effet tunnel dynamique simple d'après l'Eq. 6.18).
2. Dans la zone II ( $4.45 \lesssim 1/\hbar_{\text{eff}} \lesssim 4.7$ ), la fréquence des oscillations chute rapidement : elle est divisée par 3.
3. Dans la zone III ( $4.7 \lesssim 1/\hbar_{\text{eff}} \lesssim 5$ ), nous avons obtenu un point expérimental à  $1/\hbar_{\text{eff}} \approx 4.75$ , montré Fig. 6.16(d), pour lequel nous n'avons pas pu extraire de fréquence. En effet, les populations des îlots s'égalisent très rapidement puis n'oscillent plus.

### Analyse du spectre de quasi-énergie

Le spectre de quasi-énergie calculé pour ( $\gamma = 0.315$ ,  $\varepsilon_0 = 0.39$ ) sur le même intervalle de  $\hbar_{\text{eff}}$  est montré Fig. 6.17(a), accompagné en Fig. 6.17(b-e) des représentations de Husimi de certains des états.

Comme pour les résonances précédentes, nous interprétons le spectre de quasi-énergie en plusieurs étapes successives :

1. Dans la zone I, la dynamique est portée par deux états réguliers (rouge et bleu). L'un de ces états réguliers (rouge, Fig. 6.17(b)) est peu à peu repoussé par un état de la mer chaotique (vert, Fig. 6.17(d)). Le splitting entre les états réguliers augmente,

ce qui explique l'augmentation observée de la fréquence tunnel dans cet intervalle de  $1/\hbar_{\text{eff}}$ .

2. Dans la zone II, il y a mixing entre un état régulier (rouge) et un état chaotique (vert). On s'attend donc à mesurer deux fréquences : la fréquence mesurée dans la zone I continue d'augmenter, tandis qu'apparaît une deuxième fréquence qui, elle, diminue avec  $1/\hbar_{\text{eff}}$ . Sur les données expérimentales nous n'avons jamais pu extraire deux fréquences au cours de la même oscillation, mais les fréquences mesurées dans les zones I et II se placent bien sur les deux branches attendues. Nous avons donc observé séparément les deux splittings.
3. Dans la zone III nous revenons à un transport à deux états réguliers. On constate que ces deux états se croisent pour  $1/\hbar_{\text{eff}} \approx 4.7$  : la fréquence tunnel s'annule. C'est ce croisement qui explique l'absence d'oscillation pour le point expérimental à  $1/\hbar_{\text{eff}} \approx 4.75$ .

Cette résonance est intéressante car la région de plus fort mixing et la dégénérescence des états réguliers (croisement des niveaux d'énergie) sont relativement éloignées en  $1/\hbar_{\text{eff}}$ . Cette situation est à comparer à la première résonance par exemple, où le croisement des niveaux d'énergie avait lieu au plus fort du mixing. Dans le cas de cette quatrième résonance, l'inhibition de l'effet tunnel est donc induite par la présence de l'état chaotique (sans le couplage à l'état chaotique, les états réguliers ne se croiseraient pas, l'état régulier bleu ayant une quasi-énergie supérieure à l'état régulier rouge aux deux extrémités du spectre) mais il s'agit bien à ce moment là d'une dynamique essentiellement à deux états.

## 6.5 Conclusion

Dans ce dernier chapitre venant clore la présentation de l'ensemble des résultats expérimentaux obtenus pendant ma thèse, j'ai présenté la première mesure de résonances de l'effet tunnel assisté par le chaos. Pour cela, j'ai d'abord décrit le mécanisme fondamental à l'œuvre dans ce type d'effet tunnel : un des états réguliers interagit avec un état de la mer chaotique possédant la même symétrie, ce dernier participant alors au transport des atomes d'un îlot régulier à l'autre. Cette interaction se manifeste par du mixing, dont la signature expérimentale est la présence de deux fréquences dans les oscillations. En interagissant, les états se repoussent par croisement évité. Il arrive également que les états réguliers se croisent, la fréquence tunnel est dans ce cas nulle.

En comparaison des expériences de 2001, nous avons atteint des valeurs de  $\hbar_{\text{eff}}$  plus faibles, et nous avons utilisé des structures classiques (les îlots réguliers) plus grandes. Nous avons donc une meilleure résolution de l'espace des phases classique, et pouvons plus légitimement attribuer à la dynamique classique mixte les variations du taux tunnel observées. Nous avons étudié quatre résonances liées à l'effet tunnel assisté par le chaos. Les comportements obtenus, assez variés, soulignent la richesse et la diversité que peuvent induire au niveau quantique des systèmes classiques mixtes.

Comme nous l'avons déjà souligné, notre configuration s'apparente à un super-réseau, puisque nous gardons la périodicité initiale  $d$  du réseau statique mais que deux nouvelles positions d'équilibre, définies par les îlots réguliers et séparées d'une distance  $d'$ , apparaissent au sein d'un site du réseau. Nous avons vu au chapitre précédent que

---

la distance  $d'$  entre les îlots réguliers était modifiable. Nous venons de montrer dans ce chapitre un contrôle supplémentaire possible : le taux tunnel entre les deux îlots peut être modifié *via* les paramètres de modulation. Ce système déjà riche présente également une autre caractéristique : du possible transport à longue portée, médié par la mer chaotique. En effet, si nous n'avons considéré dans ce manuscrit que la dynamique au sein d'un seul puits du réseau, les états de la mer chaotique sont délocalisés sur l'ensemble des sites. Cette particularité permettrait d'assister le transport par effet tunnel d'un puits à l'autre du réseau, sur des distances beaucoup plus grandes que l'effet tunnel conventionnel. Cette nouvelle possibilité, que j'évoque en conclusion du manuscrit, pourrait ouvrir la voie vers l'implémentation expérimentale de modèles restés jusque là théoriques.





# Conclusion

*Pour les plus humbles comme pour les plus grands, il est une œuvre qu'il ne leur est donné d'accomplir qu'une fois, et dans cette œuvre leur cœur se met tout entier.*

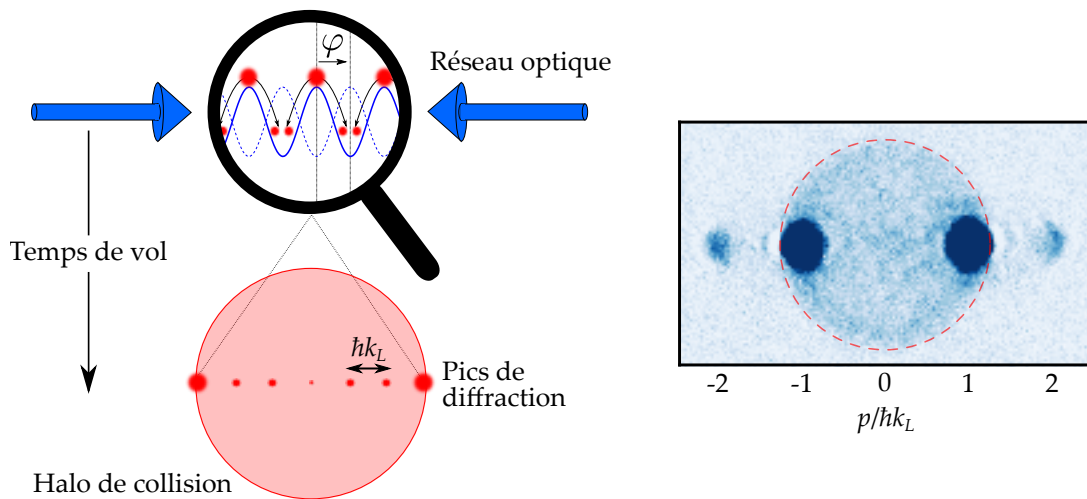
*Le Silmarillion (1977)*  
John R. R. Tolkien

J'ai présenté l'ensemble des résultats expérimentaux obtenus au cours de ma thèse concernant la dynamique d'un gaz de Bose dégénéré dans un réseau optique périodiquement modulé en phase et en amplitude. Pour cela, j'ai divisé le manuscrit en trois parties distinctes : la description du dispositif expérimental, les expériences réalisées dans le régime perturbatif et les premiers résultats liés à une dynamique mixte. Chacune de ces parties donne tout naturellement lieu à de nombreuses perspectives.

## Dispositif expérimental

**Bilan :** Dans cette première partie j'ai décrit le dispositif expérimental, d'abord en rappelant dans le chapitre 1 la réalisation expérimentale d'un condensat de Bose-Einstein, puis en dédiant le chapitre 2 au réseau optique, élément central de l'ensemble des études réalisées. J'ai en particulier détaillé le contrôle amélioré de la profondeur du réseau, ainsi que la méthode de calibration de cette profondeur, développée dans l'équipe et qui repose sur l'oscillation du centre de masse des atomes dans les puits du réseau après un déplacement soudain.

**Perspectives :** Le dispositif expérimental actuel pourra encore être amélioré dans le futur. Tout d'abord, comme nous l'avons évoqué au chapitre 1, nous avons commencé à mettre en place une nouvelle géométrie pour le piège dipolaire, avec un plus grand volume de capture, ce qui permettra d'augmenter le nombre d'atomes transférés du piège quadrupolaire au piège hybride. D'autre part, le travail effectué sur le contrôle précis de la profondeur du réseau optique mérite d'être étendu au contrôle de la phase, ce qui autorisera la modulation de la position du réseau optique selon une fonction arbitraire. On trouve une application directe de ce contrôle dans le contexte des collisions, où l'on peut vouloir chercher à optimiser le peuplement de certains ordres de diffraction. En effet, on observe sur les images d'absorption des halos de collisions isotropes autour des ordres de diffraction les plus peuplés (voir Fig. 7.1). À la fin de ma thèse, nous avons commencé à nous intéresser au contrôle

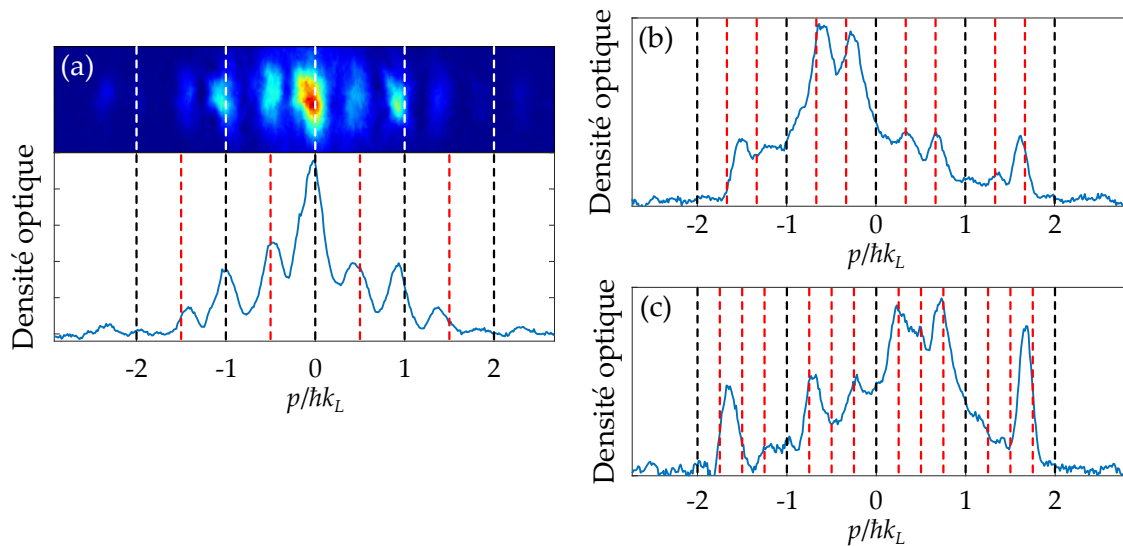


**FIGURE 7.1 | Observation des halos de collisions.** Après avoir chargé les atomes dans le réseau optique, nous pouvons faire apparaître après temps de vol une sphère de collisions par exemple centrée sur  $p = 0$  et de rayon  $\hbar k_L$ , en plaçant les atomes sur les sommets des puits du réseau et en attendant environ un quart de période d'oscillation du centre de masse dans le réseau, avant de couper tous les pièges. En variant la profondeur, le déphasage initialement appliqué et le temps de maintien dans le réseau, nous pouvons contrôler le centre et le rayon du halo de collisions.

de ces sphères de collisions par l'ingénierie de la dynamique des atomes dans le réseau optique après un déplacement soudain du réseau. Un contrôle continu et arbitraire de l'amplitude et de la phase du réseau permet d'envisager, par-delà ce qui a déjà été fait dans l'équipe, l'implémentation d'algorithmes de contrôle optimal [GLASER *et al.* (2015)] permettant de préparer des états d'impulsion bien définis dans le réseau. Cette possibilité présente un intérêt non seulement pour l'étude des collisions mais également pour l'interférométrie atomique.

## Régime perturbatif

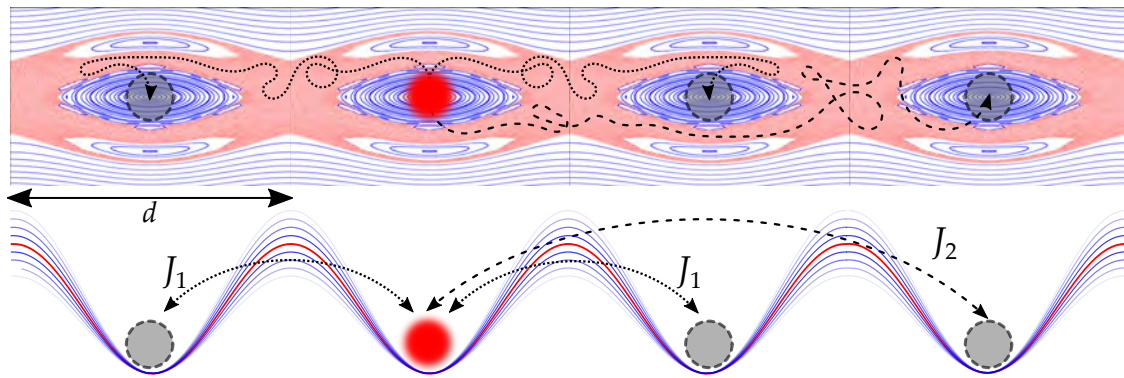
**Bilan :** Dans cette deuxième partie, je me suis consacré à la modulation du réseau optique traitée de manière perturbative. Dans le chapitre 3 j'ai présenté les résultats de modulations résonantes avec la structure de bandes du réseau optique. Nous avons étudié les transitions interbandes à quasi-moment nul, soumises à des règles de sélection, et nous avons interprété l'effet des interactions et du confinement sur la largeur des résonances *via* les modes d'excitation du condensat. Nous avons ensuite utilisé les règles de sélection des transitions interbandes en démontrant une méthode de refroidissement basée sur la modulation du réseau. Notre technique est similaire à un refroidissement par évaporation dans l'espace réciproque. Dans le chapitre 4, je me suis concentré sur la modulation de phase du réseau optique dans le cas où les fréquences de modulation ne sont pas résonantes avec la structure de bandes. Pour une modulation lente, nous avons étudié la cinétique de la transition de phase vers les états alternés (*staggered states*), déclenchée par une instabilité dynamique, et nous avons mis en lumière les deux ingrédients nécessaires à cette transition, à savoir



**FIGURE 7.2 | Observation de motifs "hybrides" par modulation résonante avec la structure de bandes.** (a) Apparition de pics de densité centrés sur les impulsions  $p = n \times \hbar k_L/2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Données obtenues avec un réseau de profondeur  $s = 5$  en modulation d'amplitude, avec une fréquence de modulation  $\nu = 30.2$  kHz et une amplitude  $\varepsilon_0 = 0.07$ . (b) et (c) Profils de densité intégrés montrant des pics centrés sur les impulsions  $p = n \times \hbar k_L/3$  et  $p = n \times \hbar k_L/4$  respectivement,  $n \in \mathbb{N}$ . Données obtenues avec un réseau de profondeur  $s = 3.4$  modulé en phase, avec une fréquence de modulation  $\nu = 14$  kHz et  $\nu = 15$  kHz respectivement, et une amplitude de modulation  $\varphi_0 = 10^\circ$ .

les fluctuations (quantiques ou thermiques) et l'inversion de la courbure de bande. Dans le cas d'une modulation rapide, nous avons d'abord vérifié la renormalisation de la profondeur du réseau optique, obtenue par séparation des échelles de temps, puis nous avons fait apparaître une signature claire du micro-mouvement par une analyse statistique des populations dans les ordres latéraux de diffraction.

**Perspectives :** Des études complémentaires autour de la nucléation des états alternés sont envisagées. En premier lieu, leur nucléation dans un régime où la modulation de phase est résonante avec la structure de bandes appelle à une meilleure compréhension de la dynamique multibande. Assurément, cette compréhension permettra aussi de rendre compte d'autres structures que nous avons observées dans le régime résonant, aussi bien en modulation d'amplitude qu'en modulation de phase. Ces structures, ou "motifs hybrides", présentent des pics de densité pour des états d'impulsions qui ne correspondent plus seulement au bord de zone de Brillouin  $\hbar k_L/2$  mais aussi à  $\hbar k_L/3$  et  $\hbar k_L/4$  (voir Fig. 7.2). Ces premières observations expérimentales méritent un approfondissement à la fois expérimental et théorique, et leur interprétation bénéficiera à nouveau de la collaboration avec P. SCHLAGHECK. Enfin, la nucléation des états alternés peut être revisitée en présence de désordre : on s'attend alors à ce que la présence du désordre accélère la transition de phase en augmentant les fluctuations.



**FIGURE 7.3** | Longue portée dans un réseau effectif habillé par le chaos. Une fonction d'onde initialement placée dans un îlot régulier peut passer par effet tunnel dans un îlot régulier appartenant à un autre site du réseau grâce à la mer chaotique. Il y a alors plusieurs couplages tunnels intersites, qui décroissent lentement comparés aux couplages de l'effet tunnel conventionnel

### Dynamique mixte

**Bilan :** Dans cette troisième et dernière partie, j'ai présenté les premiers résultats obtenus dans le régime mixte. Nous nous sommes intéressés au transport quantique de l'onde de matière entre deux îlots réguliers d'un espace des phases mixte. Après avoir étudié expérimentalement dans le chapitre 5 la bifurcation classique de ces îlots réguliers, nous avons mesuré une variation non-monotone du taux tunnel autour de quatre résonances. Ces résonances, présentées dans le chapitre 6, sont la marque emblématique de l'effet tunnel assisté par le chaos, pour lequel un état chaotique vient médier le transport d'un îlot régulier à l'autre. Le système stroboscopique considéré consiste alors en un super-réseau effectif, dont l'une des deux périodes spatiales est modifiable et dont le taux tunnel est contrôlable.

**Perspectives :** Comme nous avons commencé à l'évoquer, le transport dans ce super-réseau effectif est très riche. Nous nous sommes restreints aux oscillations tunnel entre deux îlots réguliers se trouvant au sein d'un même puits du réseau. Or la mer chaotique est étendue sur l'ensemble des sites : il peut donc y avoir du transport à longue portée entre des puits éloignés, la mer chaotique jouant à nouveau le rôle d'intermédiaire comme schématisé sur la Fig. 7.3. Les premières études théoriques semblent montrer une décroissance algébrique du taux tunnel avec la distance, à comparer à la décroissance exponentielle dans le cas de l'effet tunnel conventionnel. De premières expériences sont en cours dans l'équipe pour confirmer la longue portée, toujours en collaboration avec l'équipe Cohérence Quantique. Il existe également d'autres types de transport dans un espace des phases mixte, comme le transport dit *ratchet* [SALGER *et al.* (2009), WHITE (2013) et GROSSERT *et al.* (2016)] : il s'agit de transporter des atomes dans une direction définie en l'absence de force nette, c'est-à-dire en utilisant une modulation du réseau qui soit de moyenne temporelle nulle. Notre équipe souhaite combiner modulation continue de la phase et de l'amplitude du réseau, de manière corrélée, pour générer ce courant d'atomes.

La mise en place des nouveaux contrôles et l'étude détaillée de ces différents sujets complémentaires feront l'objet des thèses de G. CHATELAIN et de N. DUPONT.

# IV

## Annexes

**A Préparation des faisceaux résonants et sé-  
quence expérimentale totale 219**

**B Corrections à l'approximation harmonique  
d'un puits du réseau optique 225**

**C Expression de la fonction d'onde perturbée  
pour le micro-mouvement 229**



# Préparation des faisceaux résonants et séquence expérimentale totale

Dans cette annexe nous présentons les deux tables optiques décrites au chapitre 1 :

- Les Figs. [A.1](#) et [A.2](#) représentent la table "refroidisseur", sur laquelle sont préparés les faisceaux refroidisseurs du [MOT 2D](#) et du [MOT 3D](#) ainsi que les faisceaux pousseur et imageur ;
- La Fig. [A.3](#) représente la table "repompeur", sur laquelle sont préparés les faisceaux repompeur pour le [MOT 2D](#) et le [MOT 3D](#).

Nous résumons également sur la Fig. [A.4](#) l'ensemble de la séquence expérimentale utilisée pour produire les condensats de Bose-Einstein.



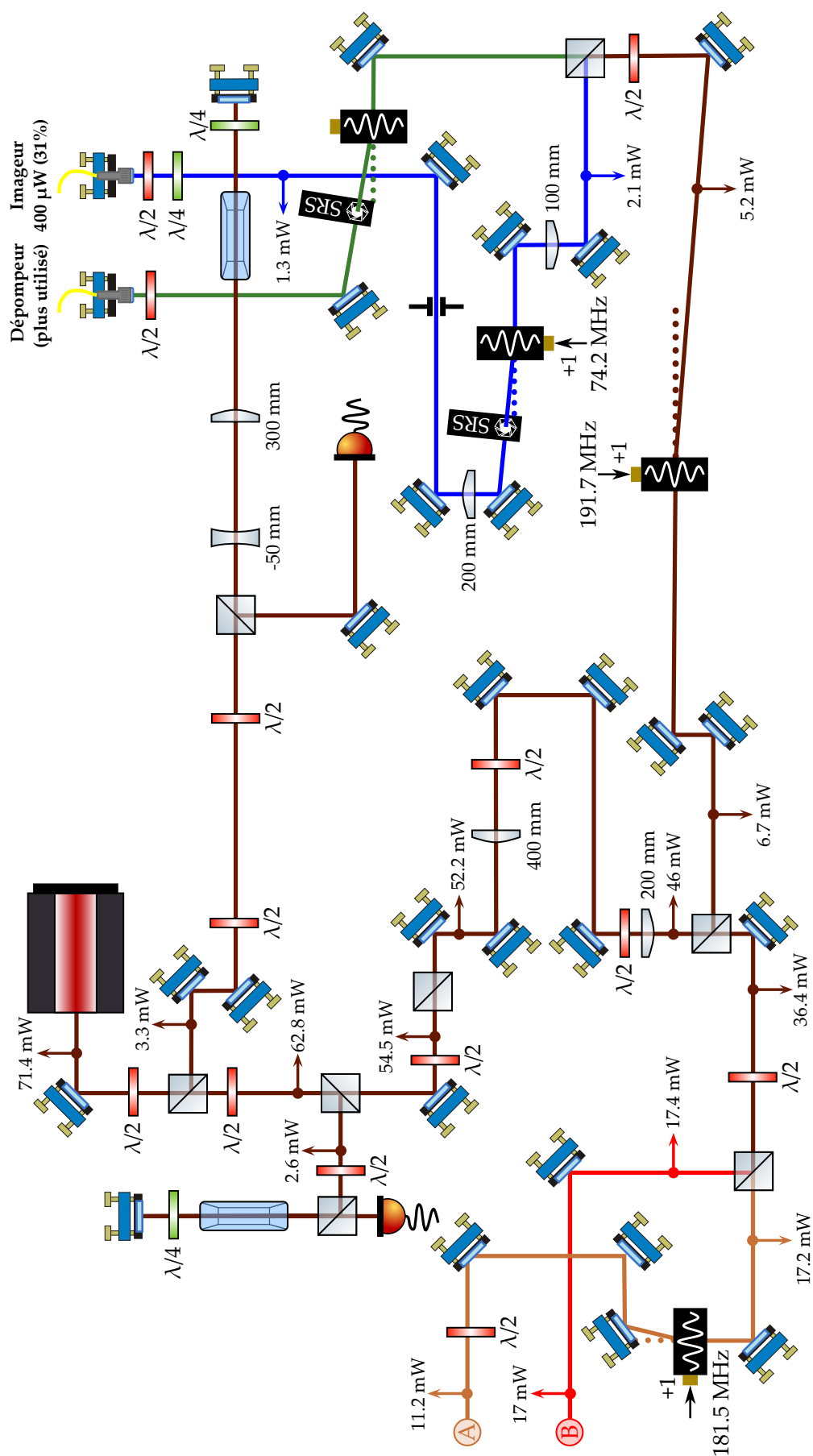


FIGURE A.1 | Montage optique de la table refroidisseur - première partie. Les faisceaux continuent leur trajet aux points (A) et (B) sur la Fig. A.2.

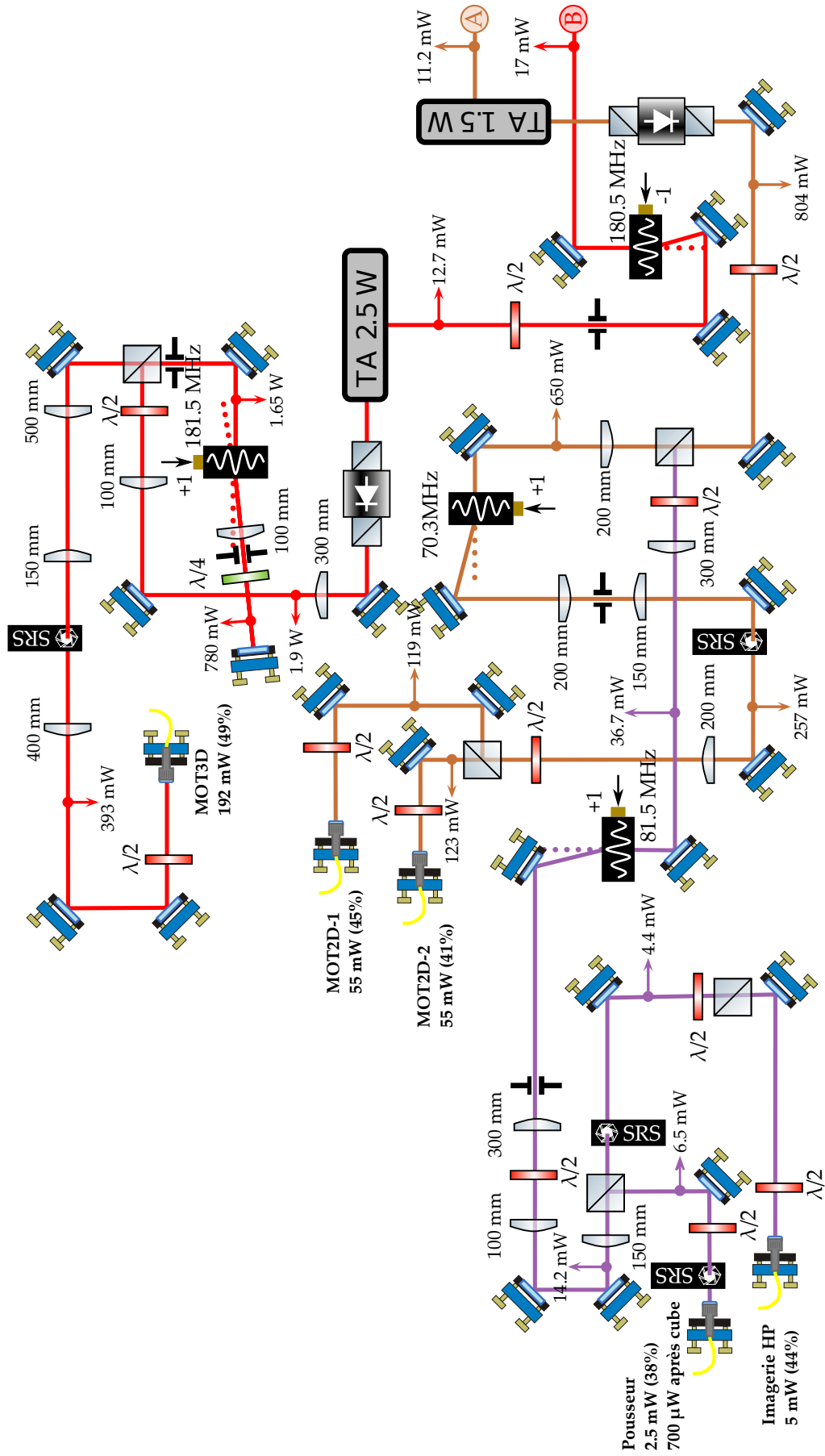


FIGURE A.2 | Montage optique de la table refroidisseur - deuxième partie.

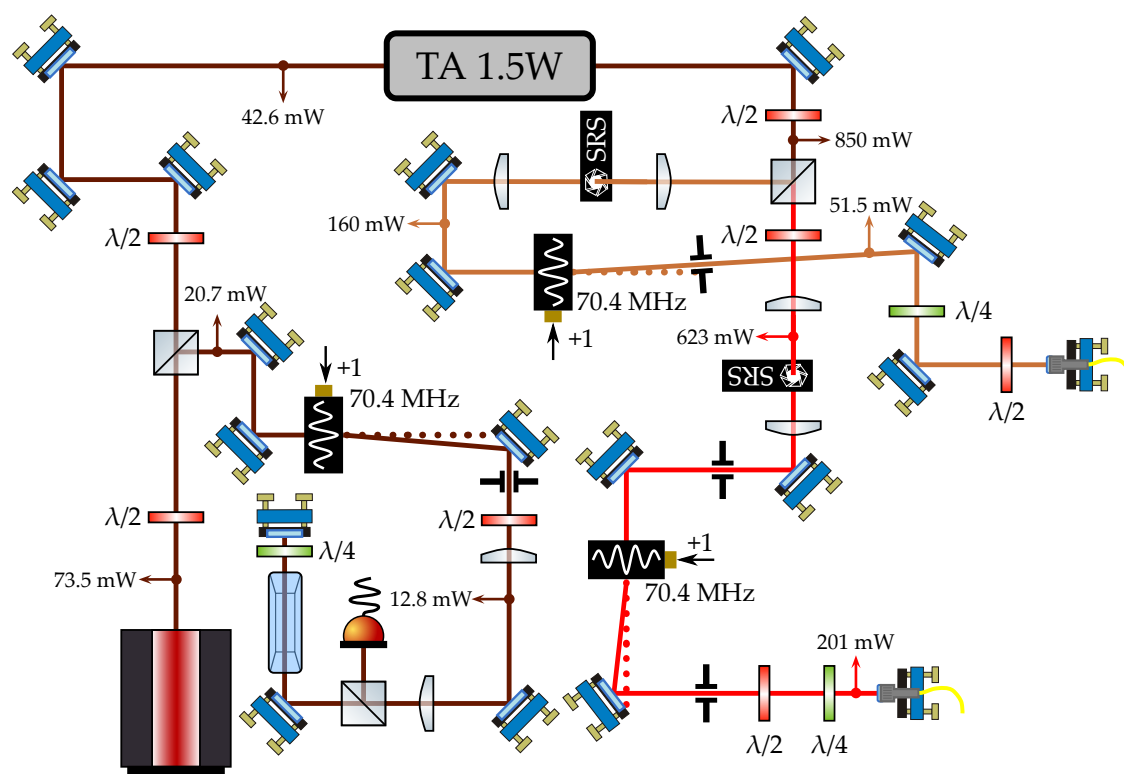


FIGURE A.3 | Montage optique de la table repompeur.

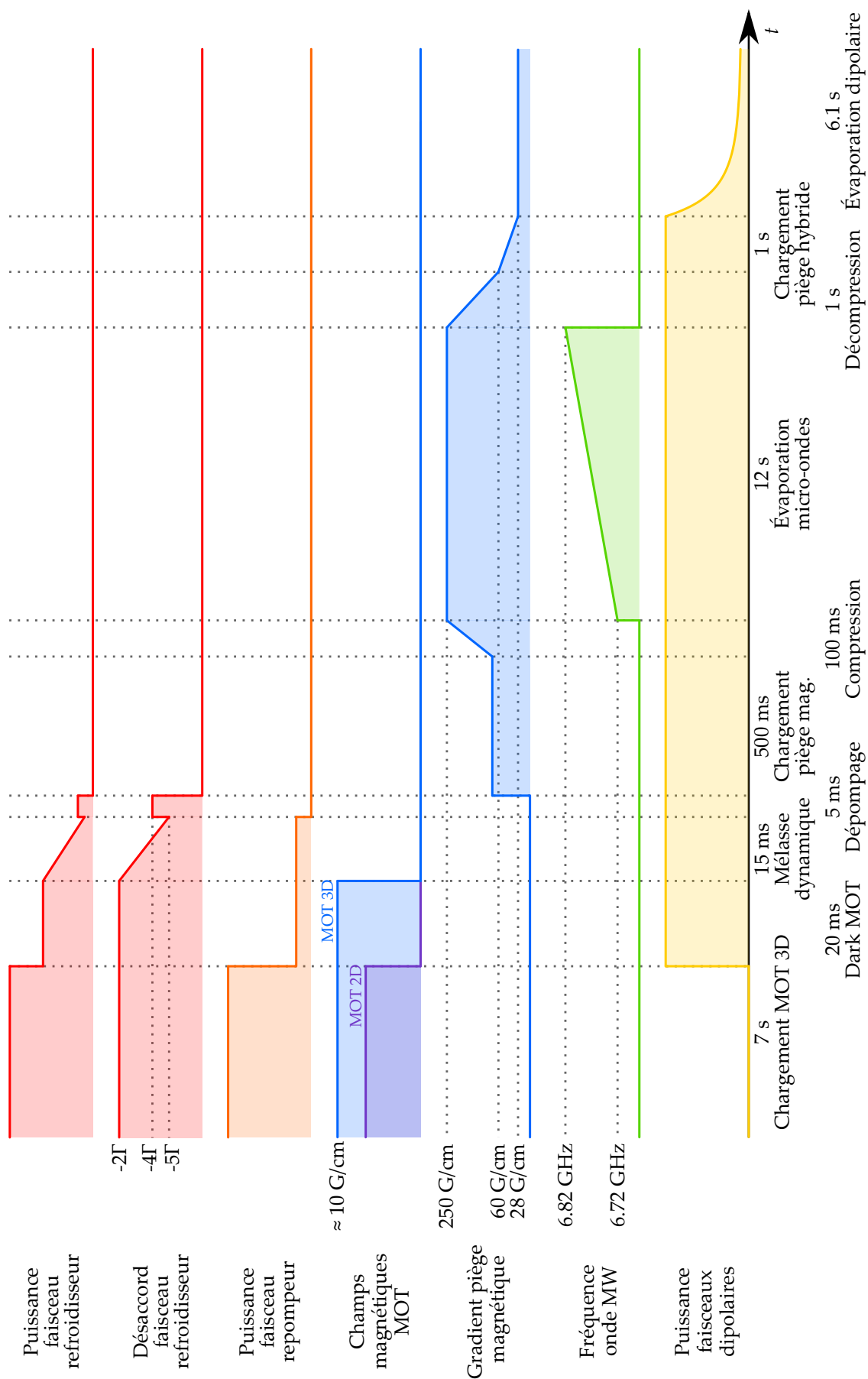


FIGURE A.4 | Séquence expérimentale totale.



## Corrections à l'approximation harmonique d'un puits du réseau optique

Dans cette annexe, nous revenons sur les deux fréquences caractéristiques  $\nu_0/2$  et  $\nu_1$  que nous avons définies au chapitre 2 lors de la discussion autour de la fréquence d'oscillation du centre de masse. Ces fréquences, définies comme :

$$\frac{\nu_0}{2} = \frac{E^{(n=2)}(k=0) - E^{(n=0)}(k=0)}{2h} \quad \text{et} \quad \nu_1 = \frac{E^{(n=1)}(k=0) - E^{(n=0)}(k=0)}{h} \quad (\text{B.1})$$

sont directement liées à la structure de bandes comme nous l'avions indiqué Fig.2.12(a). À la limite des hautes profondeurs, les bandes d'énergie du réseau optique sont de plus en plus plates et la structure de bandes tend vers le spectre d'énergie de l'oscillateur harmonique, avec des états d'énergie  $E_n$  régulièrement espacés d'un quantum d'énergie  $\hbar\omega$ . On s'attend donc à avoir égalité entre  $\nu_0/2$  et  $\nu_1$  à la limite  $s \rightarrow +\infty$ . Nous montrons ici qu'il existe une différence constante entre ces deux fréquences, même à la limite des hautes profondeurs, due aux anharmonicités du potentiel.

Considérons pour cela le potentiel du réseau sous la forme suivante :

$$\hat{V}(x) = sE_L \sin\left(\frac{k_L \hat{x}}{2}\right)^2. \quad (\text{B.2})$$

En utilisant le développement limité du sinus au premier ordre nous obtenons :

$$\hat{V}(x) \approx \frac{sE_L}{4} k_L^2 \hat{x}^2. \quad (\text{B.3})$$

En faisant l'approximation d'un potentiel harmonique, soit  $\hat{V}(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2$ , on trouve l'expression de la fréquence angulaire :

$$\omega^2 = \frac{sE_L}{2m} k_L^2. \quad (\text{B.4})$$

Prenons maintenant en compte les non linéarités du potentiel en allant à l'ordre suivant dans le développement limité du sinus, nous trouvons dans ce cas :

$$\hat{V}(x) \approx \frac{sE_L}{4} k_L^2 \hat{x}^2 - \frac{sE_L}{48} k_L^4 \hat{x}^4 \equiv \hat{V}_0(x) + \hat{V}_1(x), \quad (\text{B.5})$$

où  $\hat{V}_0$  correspond à l'approximation de l'oscillateur harmonique et  $\hat{V}_1$  désigne un potentiel perturbatif. Le potentiel  $\hat{V}_0$  s'écrit à l'aide des opérateurs d'échelles  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^\dagger$  comme :

$$\hat{V}_0 = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{B.6})$$

Rappelons l'effet de ces opérateurs sur un état propre  $|n\rangle$  de l'oscillateur harmonique :

$$\begin{cases} \hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \\ \hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle. \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Nous savons également que ces opérateurs sont liés à l'opérateur position  $\hat{x}$  par :

$$\hat{x} = x_0 (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (\text{B.8})$$

où

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \quad (\text{B.9})$$

a la dimension d'une longueur. Grâce à cette relation, nous exprimons le potentiel perturbatif en termes d'opérateurs d'échelle :

$$\hat{V}_1 = -\frac{sE_L}{48} k_L^4 x_0^4 (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^4. \quad (\text{B.10})$$

Développons la puissance, et nous obtenons :

$$\begin{aligned} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^4 = & \hat{a}^4 + \hat{a}^3 \hat{a}^\dagger + \hat{a}^2 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}^2 + \hat{a} (\hat{a}^\dagger)^3 \\ & + \hat{a}^\dagger \hat{a}^3 + \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{a}^\dagger)^2 + (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a} \hat{a}^\dagger + (\hat{a}^\dagger)^3 \hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^4 \\ & + \hat{a}^2 (\hat{a}^\dagger)^2 + \hat{a} (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a}^2 \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a}^2 \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

La correction d'énergie due au potentiel perturbatif pour l'état  $|n\rangle$  sera simplement donnée par  $\Delta E_n = \langle n | \hat{V}_1 | n \rangle$ . Du développement Eq. B.11 seule la dernière ligne donne des termes non nuls. Après calcul et en utilisant les expressions Eq. B.4 et Eq. B.9, nous trouvons :

$$\Delta E_n = -\frac{E_L}{8} \left( n^2 + n + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{B.12})$$

Dans l'approximation harmonique et compte tenu de cette correction, l'énergie de l'état  $|n\rangle$  est donc :

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) + \Delta E_n. \quad (\text{B.13})$$

Revenons finalement aux fréquences caractéristiques rappelées Eq. B.1. Calculons d'une manière plus générique l'écart en énergie suivant :

$$\Delta E = (E_{n+1} - E_n) - \left( \frac{E_{n+2} - E_n}{2} \right). \quad (\text{B.14})$$

Pris pour  $n = 0$ , cette différence est équivalent, à un coefficient  $h$  près, à la différence de fréquence  $\Delta\nu = \nu_1 - \nu_0/2$  définie au chapitre 2 et tracée Fig.2.12(b). En utilisant les Eqs. B.12 et B.13, nous aboutissons au résultat final :

$$\Delta E = \frac{E_L}{8} \quad (\text{B.15})$$

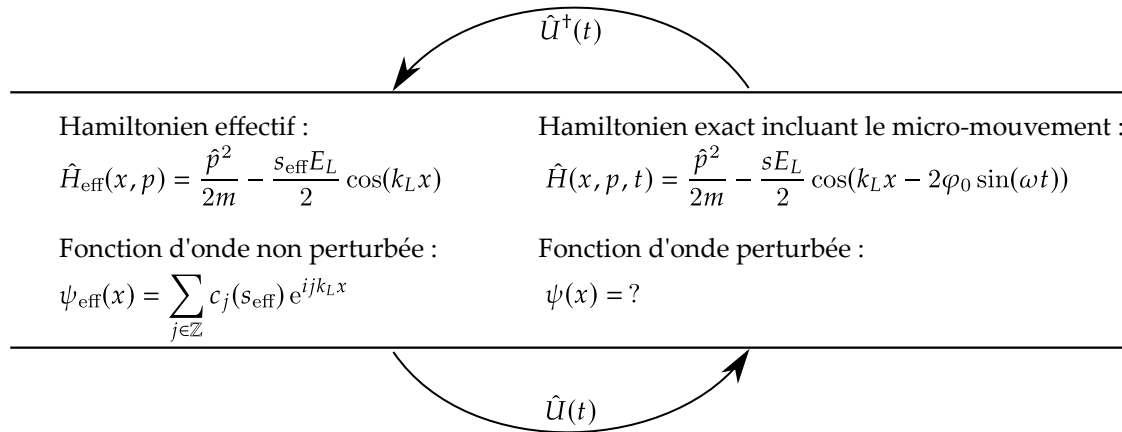
qui ne dépend ni de l'état  $|n\rangle$  considéré ni de la profondeur du réseau optique. Ainsi, même à la limite des hautes profondeurs, il existe toujours une différence entre les deux fréquences caractéristiques, cette différence étant égale à  $\nu_L/8$ .





# Expression de la fonction d'onde perturbée pour le micro-mouvement

Dans cette annexe nous présentons quelques étapes de calcul supplémentaires qui permettent d'aboutir aux différentes équations utilisées dans l'étude du micro-mouvement au chapitre 4. En particulier, nous montrons pourquoi la moyenne des populations des ordres +1 et -1 ne permet pas d'observer une signature claire du micro-mouvement, contrairement à la différence de ces populations. Rappelons le diagramme présenté section 4.2.2 :



Une première expression pour l'opérateur unitaire

Nous souhaitons déterminer l'expression de l'opérateur unitaire  $\hat{U}$  permettant de passer de la fonction d'onde non perturbée  $\psi_{\text{eff}}$  à la fonction d'onde perturbée  $\psi$ . Nous avons défini cet opérateur par :

$$\hat{U}(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \hat{U}(t_0, t) \text{ avec } \hat{U}(t_0, t) = \hat{\mathcal{T}} \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{K}(\omega t') dt' \right] \quad (\text{C.1})$$

avec  $\hat{\mathcal{T}}$  l'opérateur d'ordonnancement du temps et  $\hat{K}$  le générateur de la transformation unitaire. En utilisant le développement limité de l'exponentielle, on trouve :

$$\hat{U}(t) \approx 1 - \frac{i}{\hbar\omega} \int_{-\infty}^{\omega t} \hat{K}(\theta') d\theta' + \mathcal{O}(\omega^{-2}) \quad (\text{C.2})$$

en nous arrêtant au premier ordre en  $\omega^{-1}$ . Nous avons déterminé dans le chapitre 4 l'expression du générateur  $\hat{K}$  :

$$\hat{K}(\omega t) = -\frac{sE_L}{2} \cos(k_L x - 2\varphi_0 \sin(\omega t)) + \frac{s_{\text{eff}} E_L}{2} \cos(k_L x), \quad (\text{C.3})$$

obtenue simplement en imposant que l'Hamiltonien transformé soit indépendant du temps et que l'opérateur unitaire  $\hat{U}$  soit périodique. En injectant cette expression dans l'Eq. C.2 et en utilisant l'identité suivante :

$$\lim_{\theta_0 \rightarrow -\infty} \int_{\theta_0}^{\theta} \hat{K}(\theta') d\theta' = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta' \hat{K}(\theta - \theta' - \pi) d\theta' \quad (\text{C.4})$$

on obtient finalement pour l'opérateur unitaire une première expression sous la forme d'une intégrale :

$$\hat{U}(t) = 1 + \frac{i}{2\pi\hbar\omega} \int_{-\pi}^{\pi} \theta' \left\{ -\frac{sE_L}{2} \cos(k_L x + 2\varphi_0 \sin(\omega t - \theta')) \right\} d\theta'. \quad (\text{C.5})$$

### Expression de l'opérateur unitaire en termes d'ondes planes

Pour cette deuxième étape, nous allons effectuer l'intégrale ci-dessus et donner une nouvelle expression de l'opérateur  $\hat{U}$ , décomposée dans la base des ondes planes. Rappelons pour commencer l'identité suivante :

$$e^{i\xi \sin(\theta)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}_n(\xi) e^{in\theta} \quad (\text{C.6})$$

où  $\mathcal{J}_n$  désigne la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $n$ .

Grâce à cette identité, on montre qu'on a :

$$\cos(k_L x + 2\varphi_0 \sin(\omega t - \theta')) = \frac{1}{2} \left( e^{ik_L x} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}_n(2\varphi_0) e^{in(\omega t - \theta')} + e^{-ik_L x} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}_n(-2\varphi_0) e^{in(\omega t - \theta')} \right), \quad (\text{C.7})$$

expression que nous réinjectons dans l'Eq. C.5. Nous aboutissons à :

$$\hat{U}(t) = 1 + \frac{i}{2\pi\hbar\omega} \left( -\frac{sE_L}{2} \right) \left\{ \frac{e^{ik_L x}}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}_n(2\varphi_0) e^{in\omega t} \int_{-\pi}^{\pi} \theta' e^{-in\theta'} d\theta' \right. \\ \left. \frac{e^{-ik_L x}}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}_n(-2\varphi_0) e^{in\omega t} \int_{-\pi}^{\pi} \theta' e^{-in\theta'} d\theta' \right\}. \quad (\text{C.8})$$

Les intégrales peuvent facilement être évaluées : elles valent 0 pour  $n = 0$  et  $\frac{(-1)^n 2i\pi}{n}$  sinon. On utilise ensuite certaines propriétés des fonctions de Bessel, à savoir :

- $\mathcal{J}_n(-x) = (-1)^n \mathcal{J}_n(x)$  et
- $\mathcal{J}_{-n}(x) = (-1)^n \mathcal{J}_n(x)$ .

Nous obtenons donc finalement l'expression donnée dans le manuscrit, soit :

$$\hat{U}(t) = 1 + \frac{s\hbar k_L^2}{8m\omega} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\mathcal{J}_n(2\varphi_0)}{n} \left( e^{in\omega t} - (-1)^n e^{-in\omega t} \right) \left( (-1)^n e^{ik_L x} + e^{-ik_L x} \right). \quad (\text{C.9})$$

### Expression des populations des ordres latéraux

En utilisant la formule que nous venons de trouver pour l'opérateur unitaire  $\hat{U}$ , nous pouvons maintenant déterminer la forme de la fonction d'onde en présence de modulation  $\psi$ . Pour cela, nous appliquons la transformation de jauge :

$$\psi(x, t) = \hat{U}(t) \psi_{\text{eff}}(x, t) \quad (\text{C.10})$$

où  $\psi_{\text{eff}}$  désigne la fonction d'onde dans le potentiel effectif statique. Nous l'avions décomposée sur la base des ondes planes grâce au théorème de Bloch :

$$\psi_{\text{eff}} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j(s_{\text{eff}}) e^{ijk_L x}, \quad (\text{C.11})$$

avec  $c_j$  le coefficient de Fourier associé à l'onde de vecteur d'onde  $jk_L$ . Injectons les Eqs. C.9 et C.11 dans la transformation de jauge Eq. C.10 et nous aboutissons au résultat :

$$\psi(x, t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left[ c_j(s_{\text{eff}}) + \frac{s\hbar k_L^2}{8m\omega} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\mathcal{J}_n(2\varphi_0)}{n} \left( e^{in\omega t} - (-1)^n e^{-in\omega t} \right) \right. \\ \left. \times \left( (-1)^n c_{j-1}(s_{\text{eff}}) + c_{j+1}(s_{\text{eff}}) \right) \right] e^{ijk_L x} \quad (\text{C.12})$$

donné dans le manuscrit. Pour alléger l'écriture pour la suite, nous posons deux coefficients, l'un réel et l'autre complexe :

$$\alpha = \frac{s\hbar k_L^2}{8m\omega} \quad \text{et} \quad \beta_n(t) = \frac{\mathcal{J}_n(2\varphi_0)}{n} \left( e^{in\omega t} - (-1)^n e^{-in\omega t} \right). \quad (\text{C.13})$$

À partir de l'expression Eq. C.12 de  $\psi$ , nous pouvons aisément exprimer les populations dans les ordres  $j = +1$  et  $j = -1$  :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{+1}(t) = \left| c_1(s_{\text{eff}}) + \alpha \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \beta_n(t) \left( (-1)^n c_0(s_{\text{eff}}) + c_2(s_{\text{eff}}) \right) \right|^2, \\ \mathcal{P}_{-1}(t) = \left| c_{-1}(s_{\text{eff}}) + \alpha \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \beta_n(t) \left( (-1)^n c_2(s_{\text{eff}}) + c_0(s_{\text{eff}}) \right) \right|^2. \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

Le coefficient  $\alpha$  est proportionnel à  $\omega^{-1}$ . On peut donc développer les expressions des populations et s'arrêter au premier ordre, soit :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{+1}(t) = |c_1|^2 + c_1 \alpha \sum_{n \in \mathbb{N}^*} 2 \operatorname{Re}(\beta_n(t)) [(-1)^n c_0 + c_2] + \mathcal{O}(\alpha^2), \\ \mathcal{P}_{-1}(t) = |c_1|^2 + c_1 \alpha \sum_{n \in \mathbb{N}^*} 2 \operatorname{Re}(\beta_n(t)) [c_0 + (-1)^n c_2] + \mathcal{O}(\alpha^2). \end{cases} \quad (\text{C.15})$$

Soulignons que nous avons arrêté de préciser la dépendance des coefficients de Fourier avec la profondeur effective simplement pour alléger les notations. De plus, nous avons utilisé la propriété  $c_j = c_{-j}$ , qui n'est vraie que parce que nous considérons l'état de Bloch  $\{n = 0, q = 0\}$ .

### Retour sur les grandeurs expérimentales

Terminons cette annexe en donnant les expressions de la moyenne des populations latérales et leur différence, grandeurs utilisées lors de l'étude de la modulation rapide.

À partir des expressions Eq. C.15, nous trouvons pour la moyenne des populations :

$$\overline{\mathcal{P}_{\pm 1}} = \frac{\mathcal{P}_{+1} + \mathcal{P}_{-1}}{2} = |c_1|^2 + c_1 \alpha \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \operatorname{Re}(\beta_n) ((-1)^n + 1) [c_0 + c_2] \quad (\text{C.16})$$

On constate très simplement que :

- $((-1)^n + 1) = 0$  pour tout  $n$  impair ;
- $\operatorname{Re}(\beta_n) = 0$  pour tout  $n$  pair.

En définitive, à l'ordre  $\omega^{-1}$ , il ne reste plus que :

$$\overline{\mathcal{P}_{\pm 1}} = |c_1|^2 \quad (\text{C.17})$$

Nous retrouvons bien le même résultat que dans le cas du réseau statique : l'effet du micro-mouvement sur la moyenne des populations est trop faible pour être mesuré expérimentalement.

En calculant la différence de population, on obtient dans ce cas :

$$\mathcal{P}_{+1} - \mathcal{P}_{-1} = c_1 \alpha \sum_{n \in \mathbb{N}^*} 2 \operatorname{Re}(\beta_n) \left[ ((-1)^n - 1) c_0 + (1 - (-1)^n) c_2 \right]. \quad (\text{C.18})$$

Comme nous venons de le voir, seules les valeurs de  $n$  impaires conduisent à des termes non nuls. En remplaçant les coefficients  $\alpha$  et  $\beta_n$  par leurs expressions, on trouve bien le résultat donné au chapitre 4 :

$$\mathcal{P}_{+1}(t) - \mathcal{P}_{-1}(t) = -c_1(s_{\text{eff}}) \left[ c_0(s_{\text{eff}}) - c_2(s_{\text{eff}}) \right] \frac{s\hbar k_L^2}{m\omega} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{J}_{2l+1}(2\varphi_0)}{(2l+1)} \cos\left((2l+1)\omega t\right). \quad (\text{C.19})$$



# Bibliographie

- ANDERSON B. P. et M. A. KASEVICH (1998), *Macroscopic Quantum Interference from Atomic Tunnel Arrays*, *Science* **282**, 5394, p. 1686–1689, DOI : [10/cvdhzt](#).
- ANDERSON M. H., J. R. ENSHER, M. R. MATTHEWS, C. E. WIEMAN et E. A. CORNELL (1995), *Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor*, *Science* **269**, 5221, p. 198–201, DOI : [10/cr87gf](#).
- ANISIMOVAS E., G. ŽLABYS, B. M. ANDERSON, G. JUZELIŪNAS et A. ECKARDT (2015), *Role of real-space micromotion for bosonic and fermionic Floquet fractional Chern insulators*, *Physical Review B* **91**, 24, p. 245135, DOI : [10/ggrmx2](#).
- ARNAL M., V. BRUNAUD, G. CHATELAIN, C. CABRERA-GUTIÉRREZ, E. MICHON, P. CHEINEY, J. BILLY et D. GUÉRY-ODELIN (2019), *Evidence for cooling in an optical lattice by amplitude modulation*, *Physical Review A* **100**, 1, p. 013416, DOI : [10/gf6rs5](#).
- ARNAL M., G. CHATELAIN, C. CABRERA-GUTIÉRREZ, A. FORTUN, E. MICHON, J. BILLY, P. SCHLAGHECK et D. GUÉRY-ODELIN (2020), *Beyond effective Hamiltonians : Micromotion of Bose-Einstein condensates in periodically driven optical lattices*, *Physical Review A* **101**, 1, p. 013619, DOI : [10/ggkmsx](#).
- ARUTE F. et al. (2019), *Quantum supremacy using a programmable superconducting processor*, *Nature* **574**, 7779, p. 505–510, DOI : [10/ggbnb4](#).
- ASPECT A., E. ARIMONDO, R. KAISER, N. VANSTEENKISTE et C. COHEN-TANNOUJJI (1988), *Laser Cooling below the One-Photon Recoil Energy by Velocity-Selective Coherent Population Trapping*, *Physical Review Letters* **61**, 7, p. 826–829, DOI : [10/c6grzr](#).
- AVERBUKH V., S. OSOVSKI et N. MOISEYEV (2002), *Controlled Tunneling of Cold Atoms : From Full Suppression to Strong Enhancement*, *Physical Review Letters* **89**, 25, p. 253201, DOI : [10/d8tnmx](#).
- BAKR W. S., J. I. GILLEN, A. PENG, S. FÖLLING et M. GREINER (2009), *A quantum gas microscope for detecting single atoms in a Hubbard-regime optical lattice*, *Nature* **462**, 7269, p. 74–77, DOI : [10/bdh2vp](#).
- BARDOU F., J. P. BOUCHAUD, O. EMILE, A. ASPECT et C. COHEN-TANNOUJJI (1994), *Subrecoil laser cooling and Lévy flights*, *Physical Review Letters* **72**, 2, p. 203–206, DOI : [10/bbpw4j](#).



- BARREDO D., V. LIENHARD, S. de LÉSÉLEUC, T. LAHAYE et A. BROWAEYS (2018), *Synthetic three-dimensional atomic structures assembled atom by atom*, *Nature* **561**, 7721, p. 79–82, DOI : [10/gd4vt9](https://doi.org/10/gd4vt9).
- BARRETT M. D., J. A. SAUER et M. S. CHAPMAN (2001), *All-Optical Formation of an Atomic Bose-Einstein Condensate*, *Physical Review Letters* **87**, 1, p. 010404, DOI : [10/c65ccp](https://doi.org/10/c65ccp).
- BERKELAND D. J., J. D. MILLER, J. C. BERGQUIST, W. M. ITANO et D. J. WINELAND (1998), *Minimization of ion micromotion in a Paul trap*, *Journal of Applied Physics* **83**, 10, p. 5025–5033, DOI : [10/d8v235](https://doi.org/10/d8v235).
- BEUGNON J., C. TUCHENDLER, H. MARION, A. GAËTAN, Y. MIROSHNYCHENKO, Y. R. P. SORTAIS, A. M. LANCE, M. P. A. JONES, G. MESSIN, A. BROWAEYS et P. GRANGIER (2007), *Two-dimensional transport and transfer of a single atomic qubit in optical tweezers*, *Nature Physics* **3**, 10, p. 696–699, DOI : [10/dp9573](https://doi.org/10/dp9573).
- BILLY J., V. JOSSE, Z. ZUO, A. BERNARD, B. HAMBRECHT, P. LUGAN, D. CLÉMENT, L. SANCHEZ-PALENCIA, P. BOUYER et A. ASPECT (2008), *Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder*, *Nature* **453**, 7197, p. 891–894, DOI : [10/ccnvg9](https://doi.org/10/ccnvg9).
- BLOCH F. (1929), *Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern*, *Zeitschrift für Physik* **52**, 7, p. 555–600, DOI : [10/ffwjtm](https://doi.org/10/ffwjtm).
- BLOCH I. (2005), *Ultracold quantum gases in optical lattices*, *Nature Physics* **1**, 1, p. 23–30, DOI : [10/bcxr5q](https://doi.org/10/bcxr5q).
- BLOCH I., J. DALIBARD et S. NASCIMBÈNE (2012), *Quantum simulations with ultracold quantum gases*, *Nature Physics* **8**, 4, p. 267–276, DOI : [10/gcsjdc](https://doi.org/10/gcsjdc).
- BOHIGAS O., S. TOMSOVIC et D. ULLMO (1993), *Manifestations of classical phase space structures in quantum mechanics*, *Physics Reports* **223**, 2, p. 43–133, DOI : [10/cpzhpw](https://doi.org/10/cpzhpw).
- BOSE S. N. (1924), *Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese*, *Zeitschrift für Physik* **26**, 1, p. 178–181, DOI : [10/d5zt6c](https://doi.org/10/d5zt6c), Traduction en anglais dans *The beginning of quantum statistics : A translation of "Planck's law and the light quantum hypothesis"*, O. THEIMER et B. RAM (1976), *American Journal of Physics* **44**, 11, p.1056-1057, DOI : [10/cp6vh4](https://doi.org/10/cp6vh4).
- BROWAEYS A. et T. LAHAYE (2020), *Many-body physics with individually controlled Rydberg atoms*, *Nature Physics* **16**, 2, p. 132–142, DOI : [10/ggxcdt](https://doi.org/10/ggxcdt).
- CABRERA-GUTIÉRREZ C., E. MICHON, V. BRUNAUD, T. KAWALEC, A. FORTUN, M. ARNAL, J. BILLY et D. GUÉRY-ODELIN (2018), *Robust calibration of an optical-lattice depth based on a phase shift*, *Physical Review A* **97**, 4, DOI : [10/gf965b](https://doi.org/10/gf965b).
- CABRERA-GUTIÉRREZ C., E. MICHON, M. ARNAL, G. CHATELAIN, V. BRUNAUD, T. KAWALEC, J. BILLY et D. GUÉRY-ODELIN (2019), *Resonant excitations of a Bose Einstein condensate in an optical lattice*, *The European Physical Journal D* **73**, 8, p. 170, DOI : [10/gf6rtf](https://doi.org/10/gf6rtf).
- CAMPBELL G. K., J. MUN, M. BOYD, E. W. STREED, W. KETTERLE et D. E. PRITCHARD (2006), *Parametric Amplification of Scattered Atom Pairs*, *Physical Review Letters* **96**, 2, p. 020406, DOI : [10/c4dhsg](https://doi.org/10/c4dhsg).
- CASTIN Y. et R. DUM (1996), *Bose-Einstein Condensates in Time Dependent Traps*, *Physical Review Letters* **77**, 27, p. 5315–5319, DOI : [10/fqk8w3](https://doi.org/10/fqk8w3).

- CASTIN Y. et R. DUM (1997), *Instability and Depletion of an Excited Bose-Einstein Condensate in a Trap*, Physical Review Letters **79**, 19, p. 3553–3556, DOI : [10/bjn5c9](https://doi.org/10/bjn5c9).
- CATALIOTTI F. S., S. BURGER, C. FORT, P. MADDALONI, F. MINARDI, A. TROMBETTONI, A. SMERZI et M. INGUSCIO (2001), *Josephson Junction Arrays with Bose-Einstein Condensates*, Science **293**, 5531, p. 843–846, DOI : [10/bmh6s9](https://doi.org/10/bmh6s9).
- CHABÉ J., G. LEMARIÉ, B. GRÉMAUD, D. DELANDE, P. SZRIFTGISER et J. C. GARREAU (2008), *Experimental Observation of the Anderson Metal-Insulator Transition with Atomic Matter Waves*, Physical Review Letters **101**, 25, p. 255702, DOI : [10/ff9655](https://doi.org/10/ff9655).
- CHIN C., R. GRIMM, P. JULIENNE et E. TIESINGA (2010), *Feshbach resonances in ultracold gases*, Reviews of Modern Physics **82**, 2, p. 1225–1286, DOI : [10/fmvjms](https://doi.org/10/fmvjms).
- CIRAC J. I., L. J. GARAY, R. BLATT, A. S. PARKINS et P. ZOLLER (1994), *Laser cooling of trapped ions : The influence of micromotion*, Physical Review A **49**, 1, p. 421–432, DOI : [10/b482zk](https://doi.org/10/b482zk).
- CIRAC J. I. et P. ZOLLER (2012), *Goals and opportunities in quantum simulation*, Nature Physics **8**, 4, p. 264–266, DOI : [10/gddjcq](https://doi.org/10/gddjcq).
- CLADÉ P., C. RYU, A. RAMANATHAN, K. HELMERSON et W. PHILLIPS (2009), *Observation of a 2D Bose Gas : From Thermal to Quasicondensate to Superfluid*, Physical Review Letters **102**, 17, p. 170401, DOI : [10/c3nr26](https://doi.org/10/c3nr26).
- CLARK L. W., L. FENG et C. CHIN (2016), *Universal space-time scaling symmetry in the dynamics of bosons across a quantum phase transition*, Science **354**, 6312, p. 606–610, DOI : [10/f89t79](https://doi.org/10/f89t79).
- CLÉMENT D., N. FABBRI, L. FALLANI, C. FORT et M. INGUSCIO (2009), *Multi-band spectroscopy of inhomogeneous Mott-insulator states of ultracold bosons*, New Journal of Physics **11**, 10, p. 103030, DOI : [10/czmjsf](https://doi.org/10/czmjsf).
- COHEN-TANNOUJDI C. (1990), *Atomic motion in laser light*, Fundamental systems in quantum optics, Les Houches session LIII.
- COHEN-TANNOUJDI C. (1997), *Condensation de Bose-Einstein : gaz sans interactions*, URL : <http://www.phys.ens.fr/~cct/college-de-france/1997-98/1997-98.htm>.
- COHEN-TANNOUJDI C. (1998), *Condensation de Bose-Einstein des gaz atomiques ultra froids : effets des interactions*, URL : <http://www.phys.ens.fr/~cct/college-de-france/1998-99/1998-99.htm>.
- COHEN-TANNOUJDI C. et D. GUÉRY-ODELIN (2016), *Avancées en physique atomique : Du pompage optique aux gaz quantiques*, Editions Hermann.
- CONDON G. (2015), *Condensation de Bose-Einstein : des potentiels périodiques d'extension finie aux manipulations dans l'espace des phases*, thèse de doctorat, Université Toulouse III - Paul Sabatier, URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01238405v1>.
- CONDON G., A. FORTUN, J. BILLY et D. GUÉRY-ODELIN (2014), *Phase-space manipulations of many-body wave functions*, Physical Review A **90**, 6, DOI : [10/ggpbjx](https://doi.org/10/ggpbjx).
- CREFFIELD C. E. et T. S. MONTEIRO (2006), *Tuning the Mott Transition in a Bose-Einstein Condensate by Multiple Photon Absorption*, Physical Review Letters **96**, 21, p. 210403, DOI : [10/b8dkwd](https://doi.org/10/b8dkwd).

- CREFFIELD C. E., F. SOLS, D. CIAMPINI, O. MORSCH et E. ARIMONDO (2010), *Expansion of matter waves in static and driven periodic potentials*, *Physical Review A* **82**, 3, p. 035601, DOI : [10/crc8w6](https://doi.org/10.1088/1098-6460/82/3/035601).
- CRISTIANI M., O. MORSCH, J. H. MÜLLER, D. CIAMPINI et E. ARIMONDO (2002), *Experimental properties of Bose-Einstein condensates in one-dimensional optical lattices : Bloch oscillations, Landau-Zener tunneling, and mean-field effects*, *Physical Review A* **65**, 6, p. 063612, DOI : [10/cqtpwx](https://doi.org/10.1088/1098-6460/65/6/063612).
- CROQUETTE V. (2009), *Systèmes nonlinéaires et introduction au chaos*, URL : <http://pimprenelle.lps.ens.fr/biolps/sites/default/files/teaching/4/c4.pdf>.
- DALFOVO F. et S. STRINGARI (1996), *Bosons in anisotropic traps : Ground state and vortices*, *Physical Review A* **53**, 4, p. 2477–2485, DOI : [10/b3f6j4](https://doi.org/10.1088/1098-6460/53/4/2477).
- DALFOVO F., S. GIORGINI, L. P. PITAEVSKII et S. STRINGARI (1999), *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*, *Reviews of Modern Physics* **71**, 3, p. 463–512, DOI : [10/d8xjc7](https://doi.org/10.1088/0034-7528/71/3/01).
- DALIBARD J. et C. COHEN-TANNOUDJI (1989), *Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical models*, *Journal of the Optical Society of America B* **6**, 11, p. 2023, DOI : [10/cx2tdf](https://doi.org/10.1088/1083-7122/6/11/2023).
- DALIBARD J. (2013), *Des cages de lumière pour les atomes la physique des pièges et des réseaux optiques*, URL : [http://pro.college-de-france.fr/jean.dalibard/CdF/2013/Cours\\_2013.pdf](http://pro.college-de-france.fr/jean.dalibard/CdF/2013/Cours_2013.pdf).
- DALIBARD J. (2015), *Une brève histoire des atomes froids*, URL : [http://www.phys.ens.fr/~dalibard/CdF/2015/cours\\_2015.pdf](http://www.phys.ens.fr/~dalibard/CdF/2015/cours_2015.pdf).
- DALIBARD J., F. GERBIER, G. JUZELIŪNAS et P. ÖHBERG (2011), *Colloquium : Artificial gauge potentials for neutral atoms*, *Reviews of Modern Physics*, **83**, p. 1523–1543, DOI : [10/c6vdcf](https://doi.org/10.1088/0034-7528/83/3/01).
- DAVIS K. B., M. O. MEWES et W. KETTERLE (1995a), *An analytical model for evaporative cooling of atoms*, *Applied Physics B Laser and Optics* **60**, 2-3, p. 155–159, DOI : [10/bt8dn2](https://doi.org/10.1088/0884-6460/60/2-3/01).
- DAVIS K. B., M. O. MEWES, M. R. ANDREWS, N. J. van DRUTEN, D. S. DURFEE, D. M. KURN et W. KETTERLE (1995b), *Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms*, *Physical Review Letters* **75**, 22, p. 3969–3973, DOI : [10/drjzvd](https://doi.org/10.1088/0034-7528/75/22/01).
- DAVIS M. J. et E. J. HELLER (1981), *Quantum dynamical tunneling in bound states*, *The Journal of Chemical Physics* **75**, 1, p. 246–254, DOI : [10/d6bzmb](https://doi.org/10.1088/0034-7528/75/1/01).
- DEMARCO B. et D. S. JIN (1999), *Onset of Fermi Degeneracy in a Trapped Atomic Gas*, *Science* **285**, 5434, p. 1703–1706, DOI : [10/bvtfkq](https://doi.org/10.1126/science.1193000).
- DEMBOWSKI C., H.-D. GRÄF, A. HEINE, R. HOFFERBERT, H. REHFELD et A. RICHTER (2000), *First Experimental Evidence for Chaos-Assisted Tunneling in a Microwave Annular Billiard*, *Physical Review Letters* **84**, 5, p. 867–870, DOI : [10/dr4ws5](https://doi.org/10.1088/0034-7528/84/5/01).
- DENSCHLAG J. H., J. E. SIMSARIAN, H. HÄFFNER, C. MCKENZIE, A. BROWAEYS, D. CHO, K. HELMERSON, S. L. ROLSTON et W. D. PHILLIPS (2002), *A Bose-Einstein condensate in an optical lattice*, *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* **35**, 14, p. 3095–3110, DOI : [10/cvfr9q](https://doi.org/10.1088/0953-4075/35/14/01).

- DESBUQUOIS R., M. MESSER, F. GÖRG, K. SANDHOLZER, G. JOTZU et T. ESSLINGER (2017), *Controlling the Floquet state population and observing micromotion in a periodically driven two-body quantum system*, Physical Review A **96**, 5, p. 053602, DOI : [10/gddjdw](https://doi.org/10/gddjdw).
- DUBERTRAND R., J. BILLY, D. GUÉRY-ODELIN, B. GEORGEOT et G. LEMARIÉ (2016), *Routes towards the experimental observation of the large fluctuations due to chaos-assisted tunneling effects with cold atoms*, Physical Review A **94**, 4, DOI : [10/ggpbjz](https://doi.org/10/ggpbjz).
- ECKARDT A. (2017), *Colloquium : Atomic quantum gases in periodically driven optical lattices*, Reviews of Modern Physics **89**, p. 011004, DOI : [10/f9w98s](https://doi.org/10/f9w98s).
- ECKARDT A., C. WEISS et M. HOLTTHAUS (2005), *Superfluid-Insulator Transition in a Periodically Driven Optical Lattice*, Physical Review Letters **95**, 26, p. 260404, DOI : [10/fgpjkq](https://doi.org/10/fgpjkq).
- ECKARDT A., M. HOLTTHAUS, H. LIGNIER, A. ZENESINI, D. CIAMPINI, O. MORSCH et E. ARIMONDO (2009), *Exploring dynamic localization with a Bose-Einstein condensate*, Physical Review A **79**, 1, p. 013611, DOI : [10/bc66p3](https://doi.org/10/bc66p3).
- EGOROV M., B. OPANCHUK, P. DRUMMOND, B. V. HALL, P. HANNAFORD et A. I. SIDOROV (2013), *Measurement of s-wave scattering lengths in a two-component Bose-Einstein condensate*, Physical Review A **87**, 5, p. 053614, DOI : [10/ggmxkz](https://doi.org/10/ggmxkz).
- EINSTEIN A. (1925), *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases*, Preußische Akademie der Wissenschaften, Phys.-Math. Klasse, Sitzungsberichte, Traduction française dans *Albert Einstein, œuvres choisies*, tome 1, Quanta, F. BALIBAR, O. DARRIGOL et B. JECH (1989), Editions du Seuil et CNRS, "Théorie quantique du gaz parfait monoatomique", p. 172-179.
- ENDRES M., H. BERNIEN, A. KEESLING, H. LEVINE, E. R. ANSCHUETZ, A. KRAJENBRINK, C. SENKO, V. VULETIC, M. GREINER et M. D. LUKIN (2016), *Atom-by-atom assembly of defect-free one-dimensional cold atom arrays*, Science **354**, 6315, p. 1024-1027, DOI : [10/bs3c](https://doi.org/10/bs3c).
- FABBRI N. (2012), *Quasiparticle Dynamics in a Bose Insulator Probed by Interband Bragg Spectroscopy*, Physical Review Letters **109**, 5, DOI : [10/gddjf7](https://doi.org/10/gddjf7).
- FABRE C. (2012), *Miroirs de Bragg pour ondes de matière et apport de la supersymétrie aux potentiels exponentiels*, thèse de doctorat, Université Toulouse III - Paul Sabatier, URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00749622>.
- FEYNMAN R. P. (1982), *Simulating physics with computers*, International Journal of Theoretical Physics **21**, 6-7, p. 467-488, DOI : [10/cpkzhd](https://doi.org/10/cpkzhd).
- FORTUN A., C. CABRERA-GUTIÉRREZ, G. CONDON, E. MICHON, J. BILLY et D. GUÉRY-ODELIN (2016), *Direct Tunneling Delay Time Measurement in an Optical Lattice*, Physical Review Letters **117**, 1, DOI : [10/gddjgv](https://doi.org/10/gddjgv).
- FORTUN A. (2016), *Dynamique hors équilibre d'un condensat de Bose-Einstein dans un réseau dépendant du temps*, thèse de doctorat, Université Toulouse III - Paul Sabatier, URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01588809>.
- GARFINKEL A, M. SPANO, W. DITTO et J. WEISS (1992), *Controlling cardiac chaos*, Science **257**, 5074, p. 1230-1235, DOI : [10/dgsq8m](https://doi.org/10/dgsq8m).

- GAËTAN A., Y. MIROSHNYCHENKO, T. WILK, A. CHOTIA, M. VITEAU, D. COMPARAT, P. PILLET, A. BROWAEYS et P. GRANGIER (2009), *Observation of collective excitation of two individual atoms in the Rydberg blockade regime*, *Nature Physics* **5**, 2, p. 115–118, DOI : [10/ctz867](https://doi.org/10.1038/nphys2867).
- GEMELKE N., E. SARAJLIC, Y. BIDEL, S. HONG et S. CHU (2005), *Parametric Amplification of Matter Waves in Periodically Translated Optical Lattices*, *Physical Review Letters* **95**, 17, p. 170404, DOI : [10/cx3f7c](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.170404).
- GEORGESCU I., S. ASHHAB et F. NORI (2014), *Quantum simulation*, *Reviews of Modern Physics* **86**, 1, p. 153–185, DOI : [10/gcsjd7](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.011001).
- GIÉ H. et J.-P. SARMANT (1992), *Le portrait de phase des oscillateurs*, *Bulletin de l'union des physiciens* **86**, 744, URL : [http://bupdoc.udppc.asso.fr/consultation/article-bup.php?ID\\_fiche=3036](http://bupdoc.udppc.asso.fr/consultation/article-bup.php?ID_fiche=3036).
- GLASER S. J., U. BOSCAIN, T. CALARCO, C. P. KOCH, W. KÖCKENBERGER, R. KOSLOFF, I. KUPROV, B. LUY, S. SCHIRMER, T. SCHULTE-HERBRÜGGEN, D. SUGNY et F. K. WILHELM (2015), *Training Schrödinger's cat : quantum optimal control : Strategic report on current status, visions and goals for research in Europe*, *The European Physical Journal D* **69**, 12, p. 279, DOI : [10/gd7fhj](https://doi.org/10.1051/epjd/20156912027).
- GOULD P. L., G. A. RUFF et D. E. PRITCHARD (1986), *Diffraction of atoms by light : The near-resonant Kapitza-Dirac effect*, *Physical Review Letters* **56**, 8, p. 827–830, DOI : [10/bfz4mk](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.56.827).
- GREINER M., I. BLOCH, O. MANDEL, T. W. HÄNSCH et T. ESSLINGER (2001), *Exploring Phase Coherence in a 2D Lattice of Bose-Einstein Condensates*, *Physical Review Letters* **87**, 16, p. 160405, DOI : [10/bp9v5m](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.160405).
- GREINER M., O. MANDEL, T. ESSLINGER, T. W. HÄNSCH et I. BLOCH (2002), *Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms*, *Nature* **415**, 6867, p. 39–44, DOI : [10/dr59dj](https://doi.org/10.1038/415039a).
- GREINER M., C. A. REGAL et D. S. JIN (2003), *Emergence of a molecular Bose-Einstein condensate from a Fermi gas*, *Nature* **426**, 6966, p. 537–540, DOI : [10/ckkqmb](https://doi.org/10.1038/426537a).
- GÖRG F., K. SANDHOLZER, J. MINGUZZI, R. DESBUQUOIS, M. MESSER et T. ESSLINGER (2019), *Realization of density-dependent Peierls phases to engineer quantized gauge fields coupled to ultracold matter*, *Nature Physics* **15**, 11, p. 1161–1167, DOI : [10/ggbrxv](https://doi.org/10.1038/s41567-019-0600-4).
- GRIMM R., M. WEIDEMÜLLER et Y. B. OVCHINNIKOV (2000), *Optical Dipole Traps for Neutral Atoms*, *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*, **42**, Elsevier, p. 95–170, DOI : [10/cj9z3c](https://doi.org/10.1016/B0C-2000-00033-3).
- GRÜNZWEIG T., A. HILLIARD, M. MCGOVERN et M. F. ANDERSEN (2010), *Near-deterministic preparation of a single atom in an optical microtrap*, *Nature Physics* **6**, 12, p. 951–954, DOI : [10/c4p835](https://doi.org/10.1038/nphys1835).
- GROSSERT C., M. LEDER, S. DENISOV, P. HÄNGGI et M. WEITZ (2016), *Experimental control of transport resonances in a coherent quantum rocking ratchet*, *Nature Communications* **7**, 1, p. 1–6, DOI : [10/f8b9ph](https://doi.org/10.1038/ncom11939).
- HADZIBABIC Z., P. KRÜGER, M. CHENEAU, B. BATTELIER et J. DALIBARD (2006), *Berezinskii-Kosterlitz-Thouless crossover in a trapped atomic gas*, *Nature* **441**, 7097, p. 1118–1121, DOI : [10/dq464d](https://doi.org/10.1038/4411118a).



- HALJAN P. C., I. CODDINGTON, P. ENGELS et E. A. CORNELL (2001), *Driving Bose-Einstein-Condensate Vorticity with a Rotating Normal Cloud*, *Physical Review Letters* **87**, 21, p. 210403, DOI : [10/fb2smm](https://doi.org/10/fb2smm).
- HALLER E., J. HUDSON, A. KELLY, D. A. COTTA, B. PEAUDECERF, G. D. BRUCE et S. KUHR (2015), *Single-atom imaging of fermions in a quantum-gas microscope*, *Nature Physics* **11**, 9, p. 738–742, DOI : [10/f7q3nr](https://doi.org/10/f7q3nr).
- HAMANN S. E., D. L. HAYCOCK, G. KLOSE, P. H. PAX, I. H. DEUTSCH et P. S. JESSEN (1998), *Resolved-Sideband Raman Cooling to the Ground State of an Optical Lattice*, *Physical Review Letters* **80**, 19, p. 4149–4152, DOI : [10/d5ksfh](https://doi.org/10/d5ksfh).
- HAN D.-J., S. WOLF, S. OLIVER, C. MCCORMICK, M. T. DEPUE et D. S. WEISS (2000), *3D Raman Sideband Cooling of Cesium Atoms at High Density*, *Physical Review Letters* **85**, 4, p. 724–727, DOI : [10/dhcnn4](https://doi.org/10/dhcnn4).
- HAROCHE S. et J. RAIMOND (1996), *Quantum Computing : Dream or Nightmare ?*, *Physics Today* **49**, 8, p. 51–52, DOI : [10/d5r8p6](https://doi.org/10/d5r8p6).
- HEINZE J., S. GÖTZE, J. S. KRAUSER, B. HUNDT, N. FLÄSCHNER, D.-S. LÜHMANN, C. BECKER et K. SENGSTOCK (2011), *Multiband Spectroscopy of Ultracold Fermions : Observation of Reduced Tunneling in Attractive Bose-Fermi Mixtures*, *Physical Review Letters* **107**, 13, p. 135303, DOI : [10/fn8tzg](https://doi.org/10/fn8tzg).
- HELLER E. J. et M. J. DAVIS (1981), *Quantum dynamical tunneling in large molecules. A plausible conjecture*, *The Journal of Physical Chemistry* **85**, 4, p. 307–309, DOI : [10/bgvrsm](https://doi.org/10/bgvrsm).
- HENDERSON K., C. RYU, C. MACCORMICK et M. G. BOSHER (2009), *Experimental demonstration of painting arbitrary and dynamic potentials for Bose-Einstein condensates*, *New Journal of Physics* **11**, 4, p. 043030, DOI : [10/cqb5nz](https://doi.org/10/cqb5nz).
- HENSINGER W. K., H. HÄFFNER, A. BROWAEYS, N. R. HECKENBERG, K. HELMERSON, C. MCKENZIE, G. J. MILBURN, W. D. PHILLIPS, S. L. ROLSTON, H. RUBINSZTEIN-DUNLOP et B. UPCROFT (2001a), *Dynamical tunnelling of ultracold atoms*, *Nature* **412**, 6842, p. 52–55, DOI : [10/drx22f](https://doi.org/10/drx22f).
- HENSINGER W. K., B. UPCROFT, C. A. HOLMES, N. R. HECKENBERG, G. J. MILBURN et H. RUBINSZTEIN-DUNLOP (2001b), *Multiple bifurcations in atom optics*, *Physical Review A* **64**, 6, p. 063408, DOI : [10/cv4mbg](https://doi.org/10/cv4mbg).
- HENSINGER W., A. MOUCHET, P. JULIENNE, D. DELANDE, N. HECKENBERG et H. RUBINSZTEIN-DUNLOP (2004), *Analysis of dynamical tunneling experiments with a Bose-Einstein condensate*, *Physical Review A* **70**, 1, DOI : [10/c2v58t](https://doi.org/10/c2v58t).
- HESS H. F. (1986), *Evaporative cooling of magnetically trapped and compressed spin-polarized hydrogen*, *Physical Review B* **34**, 5, p. 3476–3479, DOI : [10/cnzgqn](https://doi.org/10/cnzgqn).
- HIJMANS T. W., O. J. LUITEN, I. D. SETIJA et J. T. M. WALRAVEN (1989), *Optical cooling of atomic hydrogen in a magnetic trap*, *Journal of the Optical Society of America B* **6**, 11, p. 2235–2243, DOI : [10/b97nr5](https://doi.org/10/b97nr5).
- HO T.-L. (2004), *Universal Thermodynamics of Degenerate Quantum Gases in the Unitarity Limit*, *Physical Review Letters* **92**, 9, p. 090402, DOI : [10/bvfmzv](https://doi.org/10/bvfmzv).

- HOFFERBERT R., H. ALT, C. DEMBOWSKI, H.-D. GRÄF, H. L. HARNEY, A. HEINE, H. REHFELD et A. RICHTER (2005), *Experimental investigations of chaos-assisted tunneling in a microwave annular billiard*, *Physical Review E* **71**, 4, p. 046201, DOI : [10/fkr5g9](https://doi.org/10.1063/1.188599).
- HORNE M., I. JEX et A. ZEILINGER (1999), *Schrödinger wave functions in strong periodic potentials with applications to atom optics*, *Physical Review A* **59**, 3, p. 2190–2202, DOI : [10/d53mcf](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.59.2190).
- HU J., A. URVOY, Z. VENDEIRO, V. CRÉPEL, W. CHEN et V. VULETIĆ (2017), *Creation of a Bose-condensed gas of  $^{87}\text{Rb}$  by laser cooling*, *Science* **358**, 6366, p. 1078–1080, DOI : [10/gck9z4](https://doi.org/10.1126/science.1254244).
- HUNG C.-L., X. ZHANG, N. GEMELKE et C. CHIN (2008), *Accelerating evaporative cooling of atoms into Bose-Einstein condensation in optical traps*, *Physical Review A* **78**, 1, p. 011604, DOI : [10/bh6w87](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.78.011604).
- JENDRZEJEWSKI F., A. BERNARD, K. MÜLLER, P. CHEINET, V. JOSSE, M. PIRAUD, L. PEZZÉ, L. SANCHEZ-PALENCIA, A. ASPECT et P. BOUYER (2012), *Three-dimensional localization of ultracold atoms in an optical disordered potential*, *Nature Physics* **8**, 5, p. 398–403, DOI : [10/f3xjtt](https://doi.org/10.1038/nphys250).
- JÖRDENS R., N. STROHMAIER, K. GÜNTER, H. MORITZ et T. ESSLINGER (2008), *A Mott insulator of fermionic atoms in an optical lattice*, *Nature* **455**, 7210, p. 204–207, DOI : [10/b5x7zh](https://doi.org/10.1038/nature07448).
- KANG J. H., J. H. HAN et Y. SHIN (2020), *Creutz ladder in a resonantly shaken 1D optical lattice*, *New Journal of Physics* **22**, 1, p. 013023, DOI : [10/ggq685](https://doi.org/10.1088/1751-8121/ab9685).
- KARSKI M., L. FÖRSTER, J.-M. CHOI, A. STEFFEN, W. ALT, D. MESCHEDÉ et A. WIDERA (2009), *Quantum Walk in Position Space with Single Optically Trapped Atoms*, *Science* **325**, 5937, p. 174–177, DOI : [10/bb7423](https://doi.org/10.1126/science.1174233).
- KERMAN A. J., V. VULETIĆ, C. CHIN et S. CHU (2000), *Beyond Optical Molasses : 3D Raman Sideband Cooling of Atomic Cesium to High Phase-Space Density*, *Physical Review Letters* **84**, 3, p. 439–442, DOI : [10/chc63w](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.439).
- KETTERLE W., K. B. DAVIS, M. A. JOFFE, A. MARTIN et D. E. PRITCHARD (1993), *High densities of cold atoms in a dark spontaneous-force optical trap*, *Physical Review Letters* **70**, 15, p. 2253–2256, DOI : [10/b3rhnf](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.2253).
- KÖHL M., H. MORITZ, T. STÖFERLE, K. GÜNTER et T. ESSLINGER (2005), *Fermionic Atoms in a Three Dimensional Optical Lattice : Observing Fermi Surfaces, Dynamics, and Interactions*, *Physical Review Letters* **94**, 8, p. 080403, DOI : [10/d52g6j](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.080403).
- KIERIG E., U. SCHNORRBERGER, A. SCHIETINGER, J. TOMKOVIC et M. K. OBERTHALER (2008), *Single-Particle Tunneling in Strongly Driven Double-Well Potentials*, *Physical Review Letters* **100**, 19, p. 190405, DOI : [10/b5nk25](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.190405).
- KOLLATH C., A. IUCCI, T. GIAMARCHI, W. HOFSTETTER et U. SCHOLLWÖCK (2006), *Spectroscopy of Ultracold Atoms by Periodic Lattice Modulations*, *Physical Review Letters* **97**, 5, p. 050402, DOI : [10/fjdj8g](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.050402).
- KONDOV S. S., W. R. MCGEHEE, J. J. ZIRBEL et B. DEMARCO (2011), *Three-Dimensional Anderson Localization of Ultracold Matter*, *Science* **334**, 6052, p. 66–68, DOI : [10/cvcg6t](https://doi.org/10.1126/science.1204244).

- KOVACIC I., R. RAND et S. MOHAMED SAH (2018), *Mathieu's Equation and Its Generalizations : Overview of Stability Charts and Their Features*, Applied Mechanics Reviews **70**, 2, p. 020802, DOI : [10/ggj6w7](https://doi.org/10/ggj6w7).
- LAHAYE T., C. MENOTTI, L. SANTOS, M. LEWENSTEIN et T. PFAU (2009), *The physics of dipolar bosonic quantum gases*, Reports on Progress in Physics **72**, 12, p. 126401, DOI : [10/c5xrrp](https://doi.org/10/c5xrrp).
- LANDAU L. D. et E. M. LIFSHITZ (1958), *Quantum Mechanics : Non-relativistic Theory. V. 3 of Course of Theoretical Physics*, Pergamon Press.
- LELLOUCH S., M. BUKOV, E. DEMLER et N. GOLDMAN (2017), *Parametric Instability Rates in Periodically Driven Band Systems*, Physical Review X **7**, 2, p. 021015, DOI : [10/f96pdc](https://doi.org/10/f96pdc).
- LESANOVSKY I. et W. von KLITZING (2007), *Time-Averaged Adiabatic Potentials : Versatile Matter-Wave Guides and Atom Traps*, Physical Review Letters **99**, 8, p. 083001, DOI : [10/bxg7nm](https://doi.org/10/bxg7nm).
- LEWENSTEIN M., A. SANPERA, V. AHUFINGER, B. DAMSKI, A. SEN(De) et U. SEN (2007), *Ultracold atomic gases in optical lattices : mimicking condensed matter physics and beyond*, Advances in Physics **56**, 2, p. 243–379, DOI : [10/bwdppg](https://doi.org/10/bwdppg).
- LIGNIER H., C. SIAS, D. CIAMPINI, Y. SINGH, A. ZENESINI, O. MORSCH et E. ARIMONDO (2007), *Dynamical Control of Matter-Wave Tunneling in Periodic Potentials*, Physical Review Letters **99**, 22, DOI : [10/dj959f](https://doi.org/10/dj959f).
- LIN Y.-J., R. L. COMPTON, K. JIMÉNEZ-GARCÍA, J. V. PORTO et I. B. SPIELMAN (2009), *Synthetic magnetic fields for ultracold neutral atoms*, Nature **462**, 7273, p. 628–632, DOI : [10/bkn2md](https://doi.org/10/bkn2md).
- LUTER R. et L. E. REICHL (2002), *Floquet analysis of atom-optics tunneling experiments*, Physical Review A **66**, 5, p. 053615, DOI : [10/b4v3n7](https://doi.org/10/b4v3n7).
- MADISON K. W., F. CHEVY, W. WOHLLEBEN et J. DALIBARD (2000), *Vortex Formation in a Stirred Bose-Einstein Condensate*, Physical Review Letters **84**, 5, p. 806–809, DOI : [10/csn8j2](https://doi.org/10/csn8j2).
- MANAI I., J.-F. CLÉMENT, R. CHICIREANU, C. HAINAUT, J. C. GARREAU, P. SZRIFTGISER et D. DELANDE (2015), *Experimental Observation of Two-Dimensional Anderson Localization with the Atomic Kicked Rotor*, Physical Review Letters **115**, 24, p. 240603, DOI : [10/gg5gxb](https://doi.org/10/gg5gxb).
- MASSEY JR F. J. (1951), *The Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit*, Journal of the American statistical Association **46**, 253, p. 68–78, DOI : [10/gf9ptk](https://doi.org/10/gf9ptk).
- MAZURENKO A., C. S. CHIU, G. JI, M. F. PARSONS, M. KANÁSZ-NAGY, R. SCHMIDT, F. GRUSDY, E. DEMLER, D. GREIF et M. GREINER (2017), *A cold-atom Fermi–Hubbard antiferromagnet*, Nature **545**, 7655, p. 462–466, DOI : [10/f974f9](https://doi.org/10/f974f9).
- MCLACHLAN N. (1947), *Theory and Application of Mathieu Functions*, Clarendon Press.
- MICHON E. (2018), *Dynamique de condensats de Bose Einstein dans un réseau optique modulé en phase ou en amplitude*, thèse de doctorat, Université Toulouse III - Paul Sabatier, URL : <http://thesesups.ups-tlse.fr/4022>.
- MICHON E., C. CABRERA-GUTIÉRREZ, A. FORTUN, M. BERGER, M. ARNAL, V. BRUNAUD, J. BILLY, C. PETITJEAN, P. SCHLAGHECK et D. GUÉRY-ODELIN (2018), *Phase transition kinetics for a Bose Einstein condensate in a periodically driven band system*, New Journal of Physics **20**, 5, p. 053035, DOI : [10/gf967g](https://doi.org/10/gf967g).



- MÜLLER J. H., O. MORSCH, D. CIAMPINI, M. ANDERLINI, R. MANNELLA et E. ARIMONDO (2000), *Atomic Micromotion and Geometric Forces in a Triaxial Magnetic Trap*, *Physical Review Letters* **85**, 21, p. 4454–4457, DOI : [10/b67t9h](#).
- MOORE F. L., J. C. ROBINSON, C. BHARUCHA, P. E. WILLIAMS et M. G. RAIZEN (1994), *Observation of Dynamical Localization in Atomic Momentum Transfer : A New Testing Ground for Quantum Chaos*, *Physical Review Letters* **73**, 22, p. 2974–2977, DOI : [10/c77xcb](#).
- MORSCH O. et M. OBERTHALER (2006), *Dynamics of Bose-Einstein condensates in optical lattices*, *Reviews of Modern Physics* **78**, 1, p. 179–215, DOI : [10/fgfzm3](#).
- MOUCHET A., C. MINIATURA, R. KAISER, B. GRÉMAUD et D. DELANDE (2001), *Chaos-assisted tunneling with cold atoms*, *Physical Review E* **64**, 1, DOI : [10/c7gtg9](#).
- MOUCHET A. et D. DELANDE (2003), *Signatures of chaotic tunneling*, *Physical Review E* **67**, 4, p. 046216, DOI : [10/dmcdn7](#).
- NASCIMBÈNE S., N. NAVON, K. J. JIANG, F. CHEVY et C. SALOMON (2010), *Exploring the thermodynamics of a universal Fermi gas*, *Nature* **463**, 7284, p. 1057–1060, DOI : [10/cs5wm9](#).
- NAVON N., S. NASCIMBENE, F. CHEVY et C. SALOMON (2010), *The Equation of State of a Low-Temperature Fermi Gas with Tunable Interactions*, *Science* **328**, 5979, p. 729–732, DOI : [10/fv8ngn](#).
- OBERTHALER M. K., R. M. GODUN, M. B. D'ARCY, G. S. SUMMY et K. BURNETT (1999), *Observation of Quantum Accelerator Modes*, *Physical Review Letters* **83**, 22, p. 4447–4451, DOI : [10/ctt829](#).
- OTT E., C. GREBOGI et J. A. YORKE (1990), *Controlling chaos*, *Physical Review Letters* **64**, 11, p. 1196–1199, DOI : [10/dfsj2c](#).
- OVCHINNIKOV Y. B., J. H. MÜLLER, M. R. DOERY, E. J. D. VREDENBREGT, K. HELMERSON, S. L. ROLSTON et W. D. PHILLIPS (1999), *Diffraction of a Released Bose-Einstein Condensate by a Pulsed Standing Light Wave*, *Physical Review Letters* **83**, 2, p. 284–287, DOI : [10/bstm6g](#).
- PEREDES B., A. WIDERA, V. MURG, O. MANDEL, S. FÖLLING, I. CIRAC, G. V. SHLYAPNIKOV, T. W. HÄNSCH et I. BLOCH (2004), *Tonks–Girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice*, *Nature* **429**, 6989, p. 277–281, DOI : [10/dmc99q](#).
- PARKER C. V., L.-C. HA et C. CHIN (2013), *Direct observation of effective ferromagnetic domains of cold atoms in a shaken optical lattice*, *Nature Physics* **9**, 12, p. 769–774, DOI : [10/f5j6pd](#).
- PEDRI P., L. P. PITAEVSKII, S. STRINGARI, C. FORT, S. BURGER, F. S. CATALIOTTI, P. MADDALONI, F. MINARDI et M. INGUSCIO (2001), *Expansion of a Coherent Array of Bose-Einstein Condensates*, *Physical Review Letters* **87**, 22, p. 220401, DOI : [10/cjb9fz](#).
- PETRICH W., M. H. ANDERSON, J. R. ENSHER et E. A. CORNELL (1995), *Stable, Tightly Confining Magnetic Trap for Evaporative Cooling of Neutral Atoms*, *Physical Review Letters* **74**, 17, p. 3352–3355, DOI : [10/bvdtjz](#).
- PETROV V., V. GÁSPÁR, J. MASERE et K. SHOWALTER (1993), *Controlling chaos in the Belousov–Zhabotinsky reaction*, *Nature* **361**, 6409, p. 240–243, DOI : [10/ffvx6d](#).
- PITAEVSKII L. P. et S. STRINGARI (2016), *Bose-Einstein Condensation and Superfluidity*, Oxford University Press.

- POLI N., R. J. BRECHA, G. ROATI et G. MODUGNO (2002), *Cooling atoms in an optical trap by selective parametric excitation*, *Physical Review A* **65**, 2, p. 021401, DOI : [10/cjr5nt](https://doi.org/10.1063/jrj5nt).
- PRESKILL J. (2012), *Quantum computing and the entanglement frontier*, 25th Solvay Conference on Physics, [arXiv:1203.5813](https://arxiv.org/abs/1203.5813).
- PRESKILL J. (2018), *Quantum Computing in the NISQ era and beyond*, *Quantum* **2**, p. 79, DOI : [10/gd3xfp](https://doi.org/10.23915/gd3xfp).
- PRICE H. M., T. OZAWA et N. GOLDMAN (2017), *Synthetic dimensions for cold atoms from shaking a harmonic trap*, *Physical Review A* **95**, 2, p. 023607, DOI : [10/ggt5vn](https://doi.org/10.1063/ggt5vn).
- PRITCHARD D. E., K. HELMERSON et A. G. MARTIN (1989), *Proceedings of the 11th International Conference on Atomic Physics*, World Scientific, Singapore.
- RAHAV S., I. GILARY et S. FISHMAN (2003), *Effective Hamiltonians for periodically driven systems*, *Physical Review A* **68**, 1, p. 013820, DOI : [10/bzcv7](https://doi.org/10.1063/bzcv7).
- RAND R. H. (2012), *Lecture Notes on Nonlinear Vibrations*, URL : <https://ecommons.cornell.edu/handle/1813/28989>.
- REINAUDI G. (2008), *Manipulation et refroidissement par évaporation forcée d'ensembles atomiques ultra-froids pour la production d'un jet intense dans le régime de dégénérescence quantique : vers l'obtention d'un "laser à atomes continu"*, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00310387>.
- RINGOT J., P. SZRIFTGISER, J. C. GARREAU et D. DELANDE (2000), *Experimental Evidence of Dynamical Localization and Delocalization in a Quasiperiodic Driven System*, *Physical Review Letters* **85**, 13, p. 2741–2744, DOI : [10/c8mw2h](https://doi.org/10.1063/c8mw2h).
- RIOU J.-F. (2006), *Étude des propriétés de propagation d'un laser à atomes*, thèse de doctorat, Université Paris-Sud XI, URL : <https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00138450>.
- ROATI G., C. D'ERRICO, L. FALLANI, M. FATTORI, C. FORT, M. ZACCANTI, G. MODUGNO, M. MODUGNO et M. INGUSCIO (2008), *Anderson localization of a non-interacting Bose–Einstein condensate*, **453**, p. 5, DOI : [10/c3q62g](https://doi.org/10.1063/c3q62g).
- ROY R., T. W. MURPHY, T. D. MAIER, Z. GILLS et E. R. HUNT (1992), *Dynamical control of a chaotic laser : Experimental stabilization of a globally coupled system*, *Physical Review Letters* **68**, 9, p. 1259–1262, DOI : [10/djs7rw](https://doi.org/10.1063/djs7rw).
- SALGER T., S. KLING, T. HECKING, C. GECKELER, L. MORALES-MOLINA et M. WEITZ (2009), *Directed Transport of Atoms in a Hamiltonian Quantum Ratchet*, *Science* **326**, 5957, p. 1241–1243, DOI : [10/c48dsw](https://doi.org/10.1126/science.1174834).
- SCHIFF S. J., K. JERGER, D. H. DUONG, T. CHANG, M. L. SPANO et W. L. DITTO (1994), *Controlling chaos in the brain*, *Nature* **370**, 6491, p. 615–620, DOI : [10/d6zjs8](https://doi.org/10.1038/370615a0).
- SCHORI C., T. STÖFERLE, H. MORITZ, M. KÖHL et T. ESSLINGER (2004), *Excitations of a Superfluid in a Three-Dimensional Optical Lattice*, *Physical Review Letters* **93**, 24, p. 240402, DOI : [10/bggp2t](https://doi.org/10.1063/bggp2t).
- SEMEGHINI G., M. LANDINI, P. CASTILHO, S. ROY, G. SPAGNOLLI, A. TRENKWALDER, M. FATTORI, M. INGUSCIO et G. MODUGNO (2015), *Measurement of the mobility edge for 3D Anderson localization*, *Nature Physics* **11**, 7, p. 554–559, DOI : [10/f7hvt8](https://doi.org/10.1038/nphys1178).

- SETIJA I. D., H. G. C. WERIJ, O. J. LUITEN, M. W. REYNOLDS, T. W. HIJMANS et J. T. M. WALRAVEN (1993), *Optical cooling of atomic hydrogen in a magnetic trap*, *Physical Review Letters* **70**, 15, p. 2257–2260, DOI : [10/d9hrz4](https://doi.org/10/d9hrz4).
- SHERSON J. F., C. WEITENBERG, M. ENDRES, M. CHENEAU, I. BLOCH et S. KUHR (2010), *Single-atom-resolved fluorescence imaging of an atomic Mott insulator*, *Nature* **467**, 7311, p. 68–72, DOI : [10/b2nx3h](https://doi.org/10/b2nx3h).
- SHINBROT T., C. GREBOGI, J. WISDOM et J. A. YORKE (1992), *Chaos in a double pendulum*, *American Journal of Physics* **60**, 6, p. 491–499, DOI : [10/btb7xp](https://doi.org/10/btb7xp).
- SHINBROT T., C. GREBOGI, J. A. YORKE et E. OTT (1993), *Using small perturbations to control chaos*, *Nature* **363**, 6428, p. 411–417, DOI : [10/bh93zf](https://doi.org/10/bh93zf).
- SHINOHARA S., T. HARAYAMA, T. FUKUSHIMA, M. HENTSCHEL, T. SASAKI et E. E. NARIMANOV (2010), *Chaos-Assisted Directional Light Emission from Microcavity Lasers*, *Physical Review Letters* **104**, 16, p. 163902, DOI : [10/cftm8c](https://doi.org/10/cftm8c).
- SINATRA A., C. LOBO et Y. CASTIN (2002), *The truncated Wigner method for Bose-condensed gases : limits of validity and applications*, *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* **35**, 17, p. 3599–3631, DOI : [10/cq6h3g](https://doi.org/10/cq6h3g).
- SINHA S. et Y. CASTIN (2001), *Dynamic Instability of a Rotating Bose-Einstein Condensate*, *Physical Review Letters* **87**, 19, p. 190402, DOI : [10/bhjvm8](https://doi.org/10/bhjvm8).
- SOMPET P., S. S. SZIGETI, E. SCHWARTZ, A. S. BRADLEY et M. F. ANDERSEN (2019), *Thermally robust spin correlations between two <sup>85</sup>Rb atoms in an optical microtrap*, *Nature Communications* **10**, 1, p. 1889, DOI : [10/gg5hj9](https://doi.org/10/gg5hj9).
- STECK D. A. (2001), *Rubidium 87 D Line Data*, URL : <http://steck.us/alkalidata>.
- STECK D. A., W. H. OSKAY et M. G. RAIZEN (2001), *Observation of Chaos-Assisted Tunneling Between Islands of Stability*, *Science* **293**, 5528, p. 274–278, DOI : [10/bfsfx5](https://doi.org/10/bfsfx5).
- STECK D. A., W. H. OSKAY et M. G. RAIZEN (2002), *Fluctuations and Decoherence in Chaos-Assisted Tunneling*, *Physical Review Letters* **88**, 12, DOI : [10/cwjxmc](https://doi.org/10/cwjxmc).
- STEEL M. J., M. K. OLSEN, L. I. PLIMAK, P. D. DRUMMOND, S. M. TAN, M. J. COLLETT, D. F. WALLS et R. GRAHAM (1998), *Dynamical quantum noise in trapped Bose-Einstein condensates*, *Physical Review A* **58**, 6, p. 4824–4835, DOI : [10/csc6tb](https://doi.org/10/csc6tb).
- STELLMER S., B. PASQUIOU, R. GRIMM et F. SCHRECK (2013), *Laser Cooling to Quantum Degeneracy*, *Physical Review Letters* **110**, 26, p. 263003, DOI : [10/f3sqz3](https://doi.org/10/f3sqz3).
- STÖFERLE T., H. MORITZ, C. SCHORI, M. KÖHL et T. ESSLINGER (2004), *Transition from a Strongly Interacting 1D Superfluid to a Mott Insulator*, *Physical Review Letters* **92**, 13, p. 130403, DOI : [10/cdm2bz](https://doi.org/10/cdm2bz).
- STRUCK J., C. ÖLSCHLÄGER, R. L. TARGAT, P. SOLTAN-PANAHI, A. ECKARDT, M. LEWENSTEIN, P. WINDPASSINGER et K. SENGSTOCK (2011), *Quantum Simulation of Frustrated Classical Magnetism in Triangular Optical Lattices*, *Science* **333**, 6045, p. 996–999, DOI : [10/fsg8pd](https://doi.org/10/fsg8pd).
- STRUCK J., C. ÖLSCHLÄGER, M. WEINBERG, P. HAUKE, J. SIMONET, A. ECKARDT, M. LEWENSTEIN, K. SENGSTOCK et P. WINDPASSINGER (2012), *Tunable Gauge Potential for Neutral and*

- Spinless Particles in Driven Optical Lattices*, Physical Review Letters **108**, 22, p. 225304, DOI : [10/gddj5s](https://doi.org/10/gddj5s).
- STRUCK J., M. WEINBERG, C. ÖLSCHLÄGER, P. WINDPASSINGER, J. SIMONET, K. SENGSTOCK, R. HÖPPNER, P. HAUKE, A. ECKARDT, M. LEWENSTEIN et L. MATHEY (2013), *Engineering Ising-XY spin-models in a triangular lattice using tunable artificial gauge fields*, Nature Physics **9**, 11, p. 738–743, DOI : [10/f3s3bz](https://doi.org/10/f3s3bz).
- TARRUELL L., D. GREIF, T. UEHLINGER, G. JOTZU et T. ESSLINGER (2012), *Creating, moving and merging Dirac points with a Fermi gas in a tunable honeycomb lattice*, Nature **483**, 7389, p. 302–305, DOI : [10/gddj54](https://doi.org/10/gddj54).
- TOMKOVIČ J., W. MUESSEL, H. STROBEL, S. LÖCK, P. SCHLAGHECK, R. KETZMERICK et M. K. OBERTHALER (2017), *Experimental observation of the Poincaré-Birkhoff scenario in a driven many-body quantum system*, Physical Review A **95**, 1, p. 011602, DOI : [10/ggtpj4](https://doi.org/10/ggtpj4).
- TOMSOVIC S. et D. ULLMO (1994), *Chaos-assisted tunneling*, Physical Review E **50**, 1, p. 145–162, DOI : [10/dsjbdx](https://doi.org/10/dsjbdx).
- TOWNSEND C. G., N. H. EDWARDS, C. J. COOPER, K. P. ZETIE, C. J. FOOT, A. M. STEANE, P. SZRIFTGISER, H. PERRIN et J. DALIBARD (1995), *Phase-space density in the magneto-optical trap*, Physical Review A **52**, 2, p. 1423–1440, DOI : [10/cpnknw](https://doi.org/10/cpnknw).
- URVOY A., Z. VENDEIRO, J. RAMETTE, A. ADIYATULLIN et V. VULETIĆ (2019), *Direct Laser Cooling to Bose-Einstein Condensation in a Dipole Trap*, Physical Review Letters **122**, 20, p. 203202, DOI : [10/gf43gj](https://doi.org/10/gf43gj).
- VULETIĆ V., C. CHIN, A. J. KERMAN et S. CHU (1998), *Degenerate Raman Sideband Cooling of Trapped Cesium Atoms at Very High Atomic Densities*, Physical Review Letters **81**, 26, p. 5768–5771, DOI : [10/dtxzj4](https://doi.org/10/dtxzj4).
- WALKER T., D. SESKO et C. WIEMAN (1990), *Collective behavior of optically trapped neutral atoms*, Physical Review Letters **64**, 4, p. 408–411, DOI : [10/cvfdz9](https://doi.org/10/cvfdz9).
- WEINBERG M., C. ÖLSCHLÄGER, C. STRÄTER, S. PRELLE, A. ECKARDT, K. SENGSTOCK et J. SIMONET (2015), *Multiphoton interband excitations of quantum gases in driven optical lattices*, Physical Review A **92**, 4, p. 043621, DOI : [10/gddkb4](https://doi.org/10/gddkb4).
- WEITENBERG C., M. ENDRES, J. F. SHERSON, M. CHENEAU, P. SCHAUSS, T. FUKUHARA, I. BLOCH et S. KUHR (2011), *Single-spin addressing in an atomic Mott insulator*, Nature **471**, 7338, p. 319–324, DOI : [10/fd7v7x](https://doi.org/10/fd7v7x).
- WHITE D. H. (2013), *Experimental realization of a quantum ratchet through phase modulation*, Physical Review A **88**, 6, DOI : [10/gg54mg](https://doi.org/10/gg54mg).
- WILK T., A. GAËTAN, C. EVELLIN, J. WOLTERS, Y. MIROSHNYCHENKO, P. GRANGIER et A. BROWAEYS (2010), *Entanglement of Two Individual Neutral Atoms Using Rydberg Blockade*, Physical Review Letters **104**, 1, p. 010502, DOI : [10/djsnrk](https://doi.org/10/djsnrk).
- ZENESINI A., H. LIGNIER, D. CIAMPINI, O. MORSCH et E. ARIMONDO (2009), *Coherent Control of Dressed Matter Waves*, Physical Review Letters **102**, 10, DOI : [10/bxcczq](https://doi.org/10/bxcczq).
- ZHANG S.-L. et Q. ZHOU (2014), *Shaping topological properties of the band structures in a shaken optical lattice*, Physical Review A **90**, 5, p. 051601, DOI : [10/gg45xz](https://doi.org/10/gg45xz).

ZHENG W. et H. ZHAI (2014), *Floquet topological states in shaking optical lattices*, Physical Review A **89**, 6, p. 061603, DOI : [10/gg485z](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.89.061603).





## Résumé

Les gaz quantiques ont démontré leur capacité à imiter les propriétés d'autres systèmes et constituent, à ce titre, une plateforme privilégiée pour la simulation quantique. Ces gaz, caractérisés par un haut degré de contrôle grâce à la modulation temporelle de leurs paramètres, ont surtout été étudiés dans le régime perturbatif ou dans un régime purement chaotique. Cette thèse vise à accroître les possibilités offertes par ces dispositifs en tirant partie d'une dynamique mixte, que nous appliquons au cas du transport d'ondes de matière.

Nous décrivons dans ce manuscrit plusieurs études expérimentales portant sur la dynamique d'un condensat de Bose-Einstein dans un réseau optique unidimensionnel modulé en phase et en amplitude. Les expériences présentées se classent en deux catégories : (i) le régime perturbatif, pour lequel les modulations appliquées induisent peu de chaos, et (ii) le régime mixte, où coexistent à la limite classique des trajectoires régulières et chaotiques. Dans le régime perturbatif, qui constitue le premier axe de cette thèse, nous distinguons deux domaines de modulation du réseau optique. Lorsque les fréquences de modulation sont résonantes avec la structure de bandes, nous provoquons des transitions interbandes soumises à des règles de sélection. Nous démontrons alors une nouvelle méthode de refroidissement, assimilable à une évaporation dans l'espace réciproque, utilisant ces règles de sélection. Pour une modulation de phase hors résonance, la dynamique du condensat peut être décrite par un Hamiltonien effectif. Nous étudions deux de ces Hamiltoniens, qui rendent compte pour l'un d'une transition de phase quantique et pour l'autre de la renormalisation de la profondeur du réseau. Dans chaque cas nous explorons les limites de ces modèles. Le régime mixte constitue le deuxième axe d'étude de cette thèse. L'analogie classique à notre système est le pendule modulé, bien connu pour présenter des trajectoires régulières et chaotiques. Ce comportement se manifeste au niveau quantique par la présence, en plus de la structure du réseau, d'une mer chaotique. Dans ce réseau optique habillé par le chaos, nous étudions un type de transport appelé effet tunnel assisté par le chaos, qui présente des résonances susceptibles d'amplifier ou d'inhiber l'effet tunnel entre deux positions stables au sein d'un puits du réseau. Comparé aux expériences antérieures sur ce sujet, nous nous plaçons dans une configuration différente dans laquelle nous parvenons à résoudre pour la première fois ces résonances. Pour les simulateurs quantiques, ce travail ouvre la voie à un nouveau type de contrôle, avec notamment du transport à longue portée.

## Abstract

Degenerate quantum gases have demonstrated their ability to mimic the properties of other systems and are, as such, an ideal platform for quantum simulation. These gases, characterized by a high level of control thanks to the temporal driving of their parameters, have mainly been studied either in the perturbative regime or in a purely chaotic one. The aim of the present work is to further extend the possibilities offered by such systems by taking advantage of a mixed dynamics, which we apply to the case of matter-wave transport.

In this thesis, we describe several experimental studies on the dynamics of a Bose-Einstein condensate in a one-dimensional time-dependent optical lattice. The experiments that are presented fall into two categories: (i) the perturbative regime, where the applied modulations induce little chaos, and (ii) the mixed regime, where regular and chaotic trajectories coexist at the classical limit. In the perturbative regime, which was first studied during this thesis, we distinguish two modulation domains of the optical lattice. When the modulation frequencies are resonant with the band structure, we induce interband transitions that are subject to selection rules. We then demonstrate a new cooling technique, similar to evaporation but in reciprocal space, taking advantage of these selection rules. For a phase modulation out of resonance, the dynamics of the condensate can be described by an effective Hamiltonian. We study two such Hamiltonians, one of which accounts for a quantum phase transition and the other for the renormalization of the lattice depth. In each case we explore the limits of these models. The mixed regime constitutes the second focus of this thesis. The classical analogue of our system is the modulated pendulum, well-known to present both regular and chaotic trajectories. This behavior is revealed at the quantum level by the presence, in addition to the lattice structure, of a chaotic sea. In this optical lattice dressed by chaos, we study a type of transport called chaos-assisted tunneling, which presents resonances that can amplify or inhibit tunneling between two stable positions within a lattice well. Compared to previous experiments on this subject, we use a different configuration in which we manage to resolve these resonances for the first time. For quantum simulators, this work paves the way to a new type of control, including long-range transport.