



**HAL**  
open science

# Méthodes isogéométrique multipatch pour des coques épaisses non linéaires avec contact

Nicolas Adam

► **To cite this version:**

Nicolas Adam. Méthodes isogéométrique multipatch pour des coques épaisses non linéaires avec contact. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Institut Polytechnique de Paris, 2020. Français. NNT : 2020IPPAX039 . tel-02982163

**HAL Id: tel-02982163**

**<https://theses.hal.science/tel-02982163v1>**

Submitted on 28 Oct 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2020IPPAX039

Thèse de doctorat



# Méthodes isogéométrique multipatch pour des coques épaisses non linéaires avec contact

Thèse de doctorat de l'Institut Polytechnique de Paris  
préparée à l'École Polytechnique

École doctorale n°626 École Doctorale de l'Institut Polytechnique de Paris (IP Paris)  
Spécialité de doctorat : Mécanique, génie mécanique, génie civil

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 30 septembre 2020, par

**NICOLAS ADAM**

Composition du Jury :

Habibou Maitournam Professeur, ENSTA ParisTech	Président
Barbara Wohlmuth Professeur, Université Technique de Munich (TUM)	Rapporteur
Anthony Gravouil Professeur, INSA Lyon	Rapporteur
Hakim Naceur Professeur, INSA Hauts-de-France	Examineur
Andrei Constantinescu Directeur de recherche, École Polytechnique	Examineur
Malek Zarroug Ingénieur de recherche, Groupe PSA	Examineur
Patrick Le Tallec Professeur, École Polytechnique	Directeur de thèse



\_\_\_\_\_ *À mes proches*

*À ma famille* \_\_\_\_\_





# Remerciements

Le doctorat, diplôme tout à fait singulier et exercice exigeant, ne peut être mené à son terme sans la contribution essentielle des collègues, amis et proches. Ces quelques lignes, concises mais sincères, sont pour les personnes qui m'ont soutenues, de près ou de loin, au cours de ces trois années qui, il faut bien le dire, ont un caractère tout à fait unique et ne trouveront pas leur pareil dans la suite de mon cursus professionnel.

Mes premières pensées vont naturellement vers mes deux encadrants qui m'ont accompagnés tant sur le plan scientifique que personnel. Un immense merci à mon directeur de thèse, Patrick Le Tallec, pour sa patience, sa bienveillance à mon égard ainsi que sa rigueur scientifique et mathématique dont l'aboutissement est représenté par le manuscrit ci-après. Un merci des plus sincères à Malek Zarroug pour son empathie, ses connaissances en mécanique et dont le soutien permanent et sans faille au cours de ces années m'ont donné la motivation nécessaire pour mettre un dernier point à ce travail de recherche. Merci à tous les deux pour la confiance que vous m'avez accordée.

Je souhaite également remercier l'ensemble du jury pour son implication et l'intérêt porté à l'analyse isogéométrique. Un merci tout particulier à mes rapporteurs, Barbara Wohlmuth et Anthony Gravouil, d'avoir accepté de relire et corriger ce travail ainsi que pour l'ensemble de vos remarques pertinentes. C'est également une joie pour moi de pouvoir présenter ces travaux à mon ancien tuteur de master, il y a quelques années maintenant, qui a largement contribué à mon intérêt pour la mécanique du solide et à cette thèse de façon plus général.

Un merci sincère à Laurent Rota pour m'avoir accueilli et intégré au sein de l'équipe PSA à Vélizy. Laurent R., Laurent F., Ida, Benoît, Arnaud, Olivier, Zouhir, Zoran, Quentin, Flavien, Zeineb, Florian, Chenzhang, Adrien merci pour votre sympathie et les bons moments passés parfois autour d'un café et parfois au baby-foot ! Je n'oublie bien évidemment pas Agathe qui, malgré ses talents de conductrice parfois discutables, a toujours eu un mot gentil à mon égard et s'est avéré être un soutien sans faille, merci d'avoir été un pilier, pour cette thèse et pour moi.

Un merci enthousiaste et chaleureux à toute l'équipe du LMS à Palaiseau et dans un premier temps à son nouveau directeur, Andrei Constantinescu, qui prend les commandes de ce navire attachant en lieu et place de mon directeur de thèse. Je remercie l'équipe administrative, Danielle, Valérie, Christiane et tout particulièrement Anna et Alexandra qui, me concernant et en toute objectivité, ont été d'une efficacité et d'une gentillesse sans équivalent. Je n'oublie bien évidemment pas mes camarades doctorant avec qui j'ai pu partager les joies et difficultés de cette épreuve. Mon premier co-bureau Foucault, Blandine que j'ai pu apprendre à connaître à l'occasion du CSMA à Giens, Audrey, Jean-Pierre, Laurent, Alexandre, Anthony, Othmane, Alexis, Yanis, Erato merci pour ces bons moments passés ensemble et pardon à ceux qui subissent ma mémoire défaillante. Un immense merci à Ustim, si les aspects techniques d'une thèse peuvent s'effacer avec le temps ce n'est pas le cas des moments de vie et de partage, je

---

n'oublierai pas ce superbe voyage à Austin avec notre directeur de thèse.

J'ai également été accueilli au sein de l'équipe M $\Xi$ DISIM de l'INRIA Saclay, dirigée par Philippe Moireau, pour ces derniers mois de thèse si particulier. Merci à son directeur et à l'ensemble de l'équipe, en particulier à Dominique Chapelle pour avoir accepté de faire parti de mon comité de suivi de thèse ainsi que pour son aide précieuse sur les modèles de coque, mon seul regret restera de ne pas avoir pu trouver une date permettant de pouvoir échanger lors de la soutenance. Mes pensées se dirigent également vers Cécile, Jessica et Chloé qui ont eu la force de me supporter dans cette dernière période de thèse, merci de votre compréhension et pour votre soutien ! Bien évidemment je ne t'oublie pas, Nicole, un soleil qui réussit à percer les nuages (trop fréquents) de Palaiseau, cette fin de thèse n'aurait clairement pas été la même sans toi, merci !

Je conclus naturellement ces remerciements en pensant à mes proches et à ma famille. Merci à mes amis de longue date, en particulier Romain et mon poulet, Cyril, pour m'avoir supporté et pour avoir toujours eu les mots justes depuis notre arrivée à Lyon, il y a neuf ans maintenant, jusqu'à aujourd'hui. Merci à tous mes proches restés dans le sud pour leur soutien sans faille après mon départ sur Lyon puis sur Paris, la distance ne nous a pas éloignée bien au contraire. Un immense merci également à mes grands parents qui ont toujours été là pour moi et en toutes circonstances. J'ai une pensée bien particulière pour Marion, qui a toujours eu une attention particulière à mon égard, et à mon frère Cédric sans qui, il faut bien le dire, toute cette aventure doctorale n'aurait pas été possible. Merci, d'abord d'avoir toujours été là pour moi et, ensuite, de m'avoir donné l'opportunité de travailler sur ce sujet passionnant. Le fait d'avoir pu, en plus, discuter science et partager cette aventure avec toi restera pour moi quelque chose d'assez exceptionnel et loin d'être commun. Je termine ces remerciements en pensant à mes deux anges gardiens, mes parents, qui en dépit de mes erreurs et indépendamment de mes choix m'ont toujours portés et bien plus que de raison, j'en suis conscient. Merci à vous deux et encore plus pour cette dernière période de thèse qui a été tout à fait singulière.

Malgré ce que l'on peut en penser, une thèse est un travail collectif mais dont le bénéfice, bien malheureusement, n'est censé revenir qu'à une seule personne. J'espère avoir pu, avec ces quelques mots, redistribuer une partie de ce que vous m'avez donné au cours de ces années.

Merci !

# Résumé - Abstract

**Résumé :** Le concept d'analyse isogéométrique généralise la méthode des éléments finis par l'utilisation de fonctions splines plus riches que les traditionnelles fonctions de Lagrange qui imposent l'approximation de la géométrie considérée. Sa principale motivation est de lier plus fortement la conception à l'analyse par l'utilisation des mêmes modèles géométriques comme supports pour la création et la simulation numérique. La méthode isogéométrique a connu ces dernières années une activité de recherche très soutenue et elle intéresse aussi bien le monde académique que le monde industriel. De par la construction des fonctions splines, la géométrie issue d'un logiciel de conception est nécessairement composée de plusieurs domaines (ou patches). La majeure partie des applications visées par les travaux publiés à ce jour concerne des pièces simples, constituées de quelques patches voir même d'un seul, et ne sont donc pas applicables au contexte industriel. Certains champs d'applications restent encore à développer tel que le couplage multipatch ainsi que le contact afin de traiter de manière robuste et efficace des géométries complexes en petites et grandes transformations. Cette thèse s'inscrit dans un contexte industriel lié à l'automobile pour lequel la majorité des pièces sont des structures minces modélisables par des coques épaisses. L'un des principaux enjeux est de mettre en place la méthode isogéométrique multipatch, permettant l'utilisation de grandeurs cinématiques exactes, pour des coques de type Reissner-Mindlin nécessitant un traitement efficace du verrouillage numérique. Une méthode originale permettant de traiter le cas des grands déplacements, avec en particulier des grandes rotations de normale, est proposée. Le développement de méthodes de couplage multipatch et de contact non frottant associées à un modèle de coque épaisse non linéaire permet d'insérer la méthode isogéométrique dans un contexte industriel exigeant.

**Abstract :** The concept of isogeometric analysis generalizes the finite element method by the use of spline functions richer than the traditional Lagrange functions which impose an approximation of the considered geometry. Its main motivation is to link design with analysis by using the same geometrical models as supports for creation and numerical simulation. The isogeometric method have experimented these last years a very constant research activity and it is of interest to both the academic field and the industrial one. By construction of spline functions, the geometry created with a design software is necessarily composed of several domains (or patches). The majority of applications dealt with published work relates to simple parts, made of a few patches or even a single one, and are therefore not applicable to the industrial context. Some application fields still need to be developed, such as multipatch coupling and contact, in order to handle complex geometries in a robust and efficient way, combining accuracy and low computational cost. This thesis is strongly related to the automobile industry for which most of the geometries are thin structures and so can be modeled by thick shells. One of the main challenges will be to set up the multipatch isogeometric method, allowing the use of exact kinematic quantities, for Reissner-Mindlin shells requiring an efficient treatment of numerical locking. An original method concerning finite deformations, with large rotations of normal, will be proposed. The development of multipatch coupling and frictionless contact methods associated with a nonlinear thick shell model will allow the isogeometric method to be applied to a demanding industrial field.



# Table des matières

Résumé - Abstract	v
Table des matières	ix
<b>1 Préambule</b>	<b>1</b>
<b>2 Méthodes multipatch pour des coques épaisses</b>	<b>11</b>
2.1 Introduction	12
2.2 Modèle de coque	14
2.2.1 Cinématique	14
2.2.2 Formulation variationnelle	15
2.3 Description d'un problème multipatch	16
2.3.1 Définition du domaine global	16
2.3.2 Formulation faible du problème multipatch	18
2.3.3 Discrétisation locale	21
2.3.4 Problème discret pénalisé	22
2.3.5 Problème discret dualisé	22
2.3.6 Problème discret augmenté	23
2.4 Analyse de convergence	23
2.4.1 Hypothèses géométriques	23
2.4.2 Hypothèses sur l'espace dual	24
2.4.3 Résultats de convergence	26
2.4.3.1 Équivalence des normes	26
2.4.3.2 Erreur de consistance	27
2.4.3.3 Erreur d'approximation	29
2.4.3.4 Résultat de convergence	31
2.4.4 Construction de l'espace dual	32
2.5 Intégration réduite et stabilité	34
2.5.1 Reconstruction des normales	34
2.5.2 Intégration réduite	35
2.5.3 Stabilité numérique	36
2.6 Résultats numériques	39
2.6.1 Plaque simplement supportée	40
2.6.1.1 Validation	40
2.6.1.2 Approches simplifiée et optimale	41
2.6.1.3 Influence du facteur de pénalité	42
2.6.1.4 Dépendance en épaisseur	43
2.6.1.5 Analyse de fréquence propre	44
2.6.2 Hémisphère pincé	47

## Table des matières

---

2.6.3	Plaque trouée . . . . .	49
2.6.4	Pignon droit . . . . .	51
2.6.5	Rail latéral . . . . .	53
2.6.6	Carter d'huile . . . . .	55
2.7	Conclusion . . . . .	59
Annexes	. . . . .	60
2.A	Compléments sur le modèle de coque . . . . .	60
2.A.1	Géométrie différentielle sur la surface . . . . .	60
2.A.2	Géométrie différentielle dans le volume . . . . .	62
2.A.3	Déformations linéarisées . . . . .	63
2.A.4	Loi de comportement . . . . .	64
2.A.5	Analyse du modèle monopatch . . . . .	65
2.B	Coque linéaire en coordonnées cartésiennes . . . . .	70
2.C	Système à résoudre pour le couplage de deux patches . . . . .	73
2.D	Compléments sur l'intégration réduite . . . . .	75
2.D.1	Intégration réduite dans les patches . . . . .	75
2.D.1.1	Éléments finis de Lagrange quadratiques . . . . .	76
2.D.1.2	Éléments finis B-splines quadratiques . . . . .	78
2.D.1.3	Quadrature réduite pour des plaques et coques . . . . .	80
2.D.2	Intégration réduite aux interfaces . . . . .	82
2.D.3	Résumé des schémas de quadrature . . . . .	83
<b>3</b>	<b>Modèle de coque épaisse en grandes transformations</b> . . . . .	<b>85</b>
3.1	Introduction . . . . .	86
3.2	Déplacements avec grandes rotations . . . . .	88
3.3	Tenseur des déformations de Green-Lagrange . . . . .	89
3.4	Loi de comportement . . . . .	90
3.5	Écriture du problème non linéaire . . . . .	91
3.6	Résolution par la méthode de Newton-Raphson . . . . .	95
3.7	Matrice de rigidité tangente . . . . .	96
3.7.1	Partie matérielle de la matrice de raideur tangente . . . . .	96
3.7.2	Partie géométrique de la matrice de raideur tangente . . . . .	96
3.8	Application à un problème multipatch . . . . .	100
3.8.1	Équivalence d'écriture pour l'équilibre dans le volume . . . . .	100
3.8.2	Problème multipatch augmenté discret en grandes transformations . . . . .	101
3.8.3	Résolution par la méthode de Newton-Raphson . . . . .	103
3.9	Résultats numériques . . . . .	105
3.9.1	Stabilisation numérique des rotations . . . . .	105
3.9.2	Plaque en porte-à-faux . . . . .	106
3.9.2.1	Monopatch . . . . .	107
3.9.2.2	Multipatch . . . . .	107
3.9.3	Hémisphère pincé . . . . .	109
3.9.3.1	Monopatch . . . . .	110

---

3.9.3.2	Multipatch . . . . .	110
3.9.4	Cylindre étiré . . . . .	112
3.9.4.1	Monopatch . . . . .	113
3.9.4.2	Multipatch . . . . .	113
3.10	Conclusion . . . . .	116
	Annexes . . . . .	117
3.A	Dérivées première $\mathbf{\bar{D}}$ et seconde $\mathbf{\bar{D}}$ du gradient ponctuel . . . . .	117
3.B	Variante de la FLT avec une normale actualisée . . . . .	127
3.B.1	Composition des rotations finies . . . . .	127
3.B.2	Calcul incrémental des déplacements et normales . . . . .	129
3.B.3	Application de la méthode de Newton-Raphson . . . . .	130
3.C	Angles d'Euler pour la paramétrisation des rotations . . . . .	133
<b>4</b>	<b>Contact pour des coques épaisses</b>	<b>139</b>
4.1	Introduction . . . . .	139
4.2	Cinématique du contact . . . . .	142
4.2.1	Géométrie . . . . .	142
4.2.2	Appariement et repères locaux . . . . .	144
4.2.3	Distance normale de contact . . . . .	146
4.3	Contact unilatéral sans frottement en quasi-statique . . . . .	148
4.3.1	Loi de Hertz-Signorini-Moreau . . . . .	148
4.3.2	Hypothèse quasi-statique . . . . .	149
4.3.3	Travail virtuel de contact pour des coques épaisses multipatch . . . . .	149
4.3.4	Méthode primale pour l'application des conditions de contact . . . . .	151
4.3.5	Méthode duale pour l'application des conditions de contact . . . . .	152
4.3.6	Méthode primale-duale pour l'application des conditions de contact . . . . .	153
4.3.7	Formulations faibles du contact multipatch en grandes transformations . . . . .	155
4.4	Discrétisation des intégrales de contact . . . . .	157
4.4.1	Points de collocation pour la discrétisation de la surface de contact . . . . .	157
4.4.2	Post-traitement des efforts de contact . . . . .	158
4.5	Aspects numériques pour le problème non linéaire . . . . .	161
4.5.1	Méthode de type point-fixe pour la non-linéarité d'appariement . . . . .	161
4.5.2	Méthode des statuts traitant la non-linéarité de contact . . . . .	162
4.5.3	Écritures matricielles du contact multipatch en grandes transformations . . . . .	163
4.6	Résultats numériques . . . . .	167
4.6.1	Contact hertzien en 2D . . . . .	167
4.6.2	Contact cylindre-plan en 3D . . . . .	176
4.6.3	Contact cylindre-plan en 3D soumis à des grandes transformations . . . . .	179
4.7	Conclusion . . . . .	183
<b>5</b>	<b>Épilogue</b>	<b>185</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>189</b>

---





# Préambule

---

Le travail présenté dans ce document est issu d'un partenariat entre le Laboratoire de Mécanique des Solides à l'École Polytechnique et le groupe PSA au travers de la chaire André Citroën. Cette collaboration a déjà permise d'explorer le concept d'analyse isogéométrique (IGA) et de mettre en avantage ses avantages sur des géométries simples [Adam 2015a]. Nous proposons d'étendre les contributions de ce premier document, en particulier les travaux portant sur l'intégration numérique de structures minces, au cas de pièces plus complexes issu d'un logiciel de conception assistée par ordinateur (CAD). L'enjeu sera donc de proposer des méthodes permettant de mettre à profit les avantages de l'IGA sur des essais numériques industriels qui requièrent à la fois précision, robustesse et faible coût numérique.

Les logiciels de CAD sont désormais très répandus et permettent de générer simplement des modèles 1D, 2D et 3D sous des formats de lecture communs tel que l'IGES ou plus récemment le STEP. Suite à la conception d'une pièce, le modèle doit être préparé pour l'étape d'analyse. Cette étape de préparation représente plus des trois quarts du temps consacré à l'étude, du début de la conception jusqu'au post-traitement des résultats numériques. En effet, avant de procéder aux essais numériques, il est nécessaire de décomposer la géométrie, réparer certaines approximations tel que des arêtes ou sommets non confondus avant de discrétiser spatialement la structure. Cette dernière opération en particulier peut rapidement devenir fastidieuse lorsqu'il est nécessaire de boucler entre la géométrie issue de la CAD et celle utilisée pour l'analyse, notamment lors de processus d'optimisation structurelle.

Dans le but de concevoir des géométries de plus en plus complexes et facilement modifiables, Pierre Bézier proposa en 1962 de rendre invariant par rotation du repère les courbes régulières splines et donc de pouvoir les utiliser dans un logiciel de CAD. Il s'agit des courbes de Bézier basées sur les polynômes de Bernstein. Les designers et les ingénieurs utilisent désormais un même support géométrique, basé sur des fonctions splines régulières, mais avec des opérateurs mathématiques différents. L'analyse par éléments finis (FEA) classique utilise des polynômes de Lagrange et donc une géométrie facétisée après maillage du modèle. Il est donc nécessaire de prendre du temps à créer un modèle géométrique à part entière pour l'analyse avec une nouvelle description moins riche que la géométrie initiale issue de la conception. Le passage entre ces deux modèles géométriques n'est pas trivial, avec des opérateurs mathématiques bien distincts, et nécessite presque toujours l'intervention de l'ingénieur.

Les pièces issues de la CAD étant de plus en plus complexes, le nombre d'éléments discrets décrivant le modèle d'analyse est rapidement devenu le facteur à prendre en compte lors des simulations numériques. Le domaine de l'automobile et notamment le groupe PSA, avec un

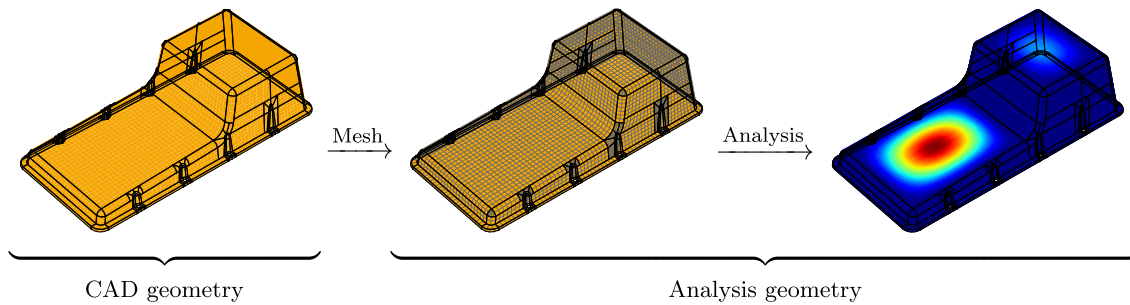


FIGURE 1.1 – Procédure de validation structurelle classique en FEA. La géométrie initiale est maillée afin d’obtenir la géométrie utilisée pour l’analyse. Carter d’huile soumis à une pression.

nombre d’éléments qui double tous les deux ans, est d’autant plus concerné sachant que les simulations peuvent être multi-physiques et nécessitent donc un couplage fort entre les modèles de conception et d’analyse. Le crash automobile est un exemple particulièrement sensible quant à l’écart de géométrie engendré par la FEA. La résolution se faisant généralement en dynamique explicite pour des raisons de robustesse, il est nécessaire de satisfaire la condition de stabilité, propre aux schémas explicites, qui peut engendrer un pas de temps relativement faible. À cette discrétisation temporelle exigeante en temps de calcul, il faut rajouter la discrétisation en espace du modèle géométrique initial.

Pour le crash automobile comportant du contact et de l’auto-contact, un écart de géométrie peut rapidement détériorer la qualité des résultats obtenus. La précision de la solution est donc garantie par des maillages adaptatifs et localement raffinés. Ces maillages nécessitent néanmoins un temps de préparation important, la tâche ne pouvant être automatisée, de même qu’un coût numérique élevé. De plus, le processus de validation d’un modèle numérique nécessite de faire varier certains paramètres, tel que le matériau ou la géométrie, afin de s’assurer de sa robustesse et de pouvoir mesurer la dispersion des résultats en fonction des paramètres d’entrée. Il s’agit d’un contexte industriel exigeant, nécessitant un lien fort entre la conception et l’analyse, qui requière à la fois précision et faible coût numérique.

L’IGA, introduite pour la première fois en 2005 par Hughes et al. [Hughes 2005], permet d’unifier la conception à l’analyse en utilisant le modèle géométrique exact, c’est à dire celui issu du logiciel de CAD, comme support pour les validations numériques. Dans l’idéal, un module IGA pourrait être directement intégré aux logiciels existant en utilisant les mêmes fonctions splines régulières, sans introduire de nouvelles fonctions de base qui, en plus de facétiser la géométrie, nécessite un temps de préparation supplémentaire. Dans la pratique, la paramétrisation des différents domaines (ou patches) constituant une pièce complexe n’est pas nécessairement identique entre le modèle géométrique et le modèle d’analyse ce qui est mis en évidence dans le premier chapitre.

La méthode isogéométrique fait partie des méthodes de Galerkin et permet d’approcher la solution d’un système d’équations aux dérivées partielles (PDE) par l’utilisation des fonctions

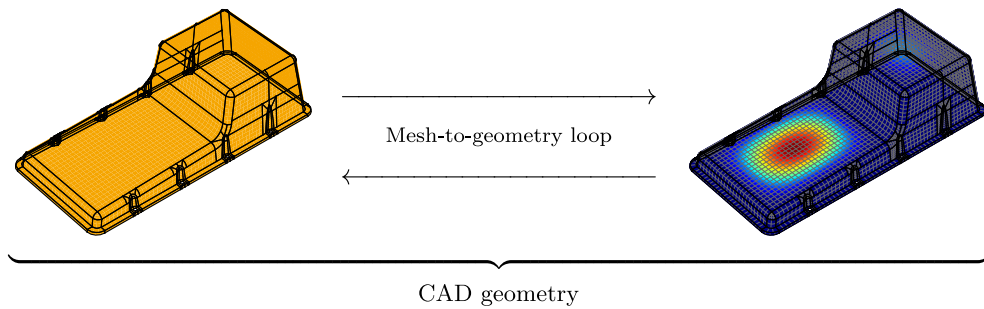


FIGURE 1.2 – Procédure de validation structurelle en IGA. L’analyse utilise les mêmes fonctions de base que celles définissant la géométrie initiale. Carter d’huile soumis à une pression.

B-splines rationnelles non uniformes (NURBS). Le domaine physique (domaine de calcul) est défini à partir d’une paramétrisation NURBS et la solution du problème considéré est construite avec des espaces NURBS basés sur ce même domaine. La paramétrisation NURBS utilisée pour la géométrie sera donc, après passage dans l’espace physique, utilisée comme espace d’approximation pour la solution d’un problème PDE. L’IGA est présentée en détails dans [Cottrell 2009] ainsi que dans [Bazilevs 2006, Beirão da Veiga 2014, Hughes 2017, Hughes 2018] en ce qui concerne le cadre mathématiques. Les fonctions NURBS sont déjà utilisées par la plupart des logiciels de création (conception structurelle mais également artistique) ainsi que les logiciels de fabrication sous la dénomination freeform surface. Dans la plupart des cas, ce sont des B-splines ou des NURBS d’ordre trois qui sont utilisées, permettant ainsi d’avoir un changement de concavité sur la forme souhaitée. Les NURBS sont une généralisation des B-splines au sens où elles sont capables de représenter de manière exacte les coniques mais elles partagent les mêmes propriétés d’approximation requise pour l’analyse. Pour des fonctions d’ordre (ou degré)  $p$ , la régularité entre éléments peut atteindre  $C^{p-1}$  là où les polynômes de Lagrange sont limités à une régularité  $C^0$ . La haute régularité de ces fonctions et les propriétés d’approximation optimale ont fait de l’IGA un candidat de choix en mécanique des structures mais également en mécanique des fluides [Bazilevs 2012, Hsu 2012, Wang 2017], en mécanique vibratoire [Cottrell 2006, Hughes 2014] ou encore en électromagnétisme [Buffa 2010, Garcia 2019].

Nous proposons d’appliquer la méthode isogéométrique à des pièces complexes issues de l’industrie automobile. Une difficulté majeure vient du fait que ces pièces, définies à partir de fonctions B-splines ou NURBS, sont composées de plusieurs domaines (également appelés patches). Chacun de ces patches possède sa propre paramétrisation dans l’espace de référence. Ainsi, il est nécessaire de développer des méthodes de couplage des solutions du problème aux PDE considéré applicables sur chaque interface. Un couplage au sens faible permettra de lier des patches avec des maillages non conformes et des ordres différents et constitue donc une méthode plus robuste qu’un couplage fort (ou ponctuel). Une méthode mortier est proposée dans [Brivadis 2015] avec notamment des espaces duaux d’ordre  $p$ ,  $p - 1$  ou  $p - 2$  par rapport à un espace primal d’ordre  $p$ . En particulier le couplage  $p/p$ , avec la création d’un espace dual optimal, s’est avéré précis et adapté à des géométries académiques. Il est

néanmoins nécessaire de créer un espace dual à part entière et de localiser un ensemble de points singuliers, appelés coins mortiers, afin de garantir l'unicité de la solution. Nous proposerons et nous analyserons dans un premier temps une méthode mortier  $p/p$  avec un espace dual simplifié et donc facilement applicable au domaine industriel avec un faible coût numérique.

Sachant que plus de 90% des pièces issues de l'industrie automobile sont des structures minces, un modèle de coque épaisse est retenu. Ce dernier permettra notamment de prendre en compte le cisaillement transverse le long de l'épaisseur. L'utilisation d'un tel élément est soumis au classique verrouillage numérique en membrane et cisaillement. Ce point a été traité en détail dans [Adam 2015b] en proposant une méthode d'intégration réduite précise et à très faible coût en temps de calcul. L'intégration réduite sera étendue ici au cas multipatch, c'est à dire aux pièces composées de plusieurs patches. Pour un problème monopatch, en notant  $V$  un espace de Hilbert sur le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  constitué d'un unique patch, le problème classique au sens faible consiste à trouver  $\mathbf{u} \in V$  tel que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

avec  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  une forme bilinéaire continue et coercive sur  $V$  et  $L(\mathbf{v})$  une forme linéaire continue sur  $V$ , toutes deux dépendantes du problème considéré. En utilisant la méthode de Galerkin avec des fonctions B-splines ou NURBS, on définit l'espace discret conforme  $V_h \subset V$  formé par des combinaisons linéaires de ces mêmes fonctions. Le problème monopatch discret à résoudre consiste désormais à trouver  $\mathbf{u}_h \in V_h$  tel que

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = L(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h.$$

Pour une géométrie multipatch, le domaine global  $\Omega$  est formé par l'union de l'ensemble des patches tel que  $\bar{\Omega} = \bigcup_k \bar{\Omega}_k$ , avec  $k$  le numéro du patch considéré. Les formes bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  et linéaire  $L(\cdot)$  seront respectivement remplacées par leurs sommes sur l'ensemble des patches  $\sum_k a_k(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)$  et  $\sum_k L_k(\mathbf{v}_k)$ . L'espace global brisé et discret  $V_h$  est formé par l'ensemble des espaces locaux discrets tel que  $V_h = \prod_k V_{k,h}$ . Le premier chapitre porte sur le développement de méthodes multipatches, avec application de la contrainte d'interface au sens faible, à visée industrielle sur des coques épaisses linéaires soumises à du verrouillage numérique.

En se limitant à un modèle de coque linéaire avec un tenseur des déformations linéarisé, le cas des transformations finies fréquemment rencontré dans le milieu industriel n'est pas abordé. Une méthode originale a été proposée dans [Adam 2015a], dans un cadre monopatch, et consiste en une formulation lagrangienne totale utilisant la normale actualisée grâce à l'algèbre des quaternions. Cette formulation a été obtenue en supposant des variations incrémentales infinitésimales lors de la résolution par la méthode de Newton-Raphson. Nous développerons dans le cadre de ce mémoire une méthode originale basée sur une formulation lagrangienne totale et l'utilisation d'une normale en configuration initiale grâce aux formules de rotation de Rodrigues. Dans ce cas, aucune hypothèse sur la valeur des rotations ne sera émise. Afin de vérifier les résultats obtenus, la première méthode a néanmoins été retenue. Le modèle de coque épaisses non linéaire sera validée sur des exemples monopatch et multipatch classiques

---

dans le second chapitre.

Sachant que le contact est une part importante des essais numériques dans le domaine automobile, la troisième partie concernera le développement de méthodes de contact adaptées à l'IGA. Deux méthodes seront proposées et comparées avec, en particulier, l'utilisation d'un espace dual pour l'application de la contrainte d'interface défini aux mêmes points que celui développé pour le multipatchs. Des validations seront proposées sur des cas multipatchs avec un modèle de coque linéaire et non linéaire. L'IGA devra permettre d'obtenir une solution précise, en utilisant des grandeurs cinématiques exactes, tout en conservant une robustesse et un faible coût numérique grâce aux méthodes originales développées dans ce mémoire afin de satisfaire les exigences du milieu industriel.

Le plan du travail est donc le suivant. Après avoir succinctement rappelé les notions de base en isogéométrie, le modèle de coque, l'intégration numérique et les différentes méthodes multipatchs seront présentées dans le premier chapitre. La seconde partie du mémoire concernera l'extension du modèle de coque au cas non linéaire qui permettra de traiter le cas des grandes rotations de manière exacte. Enfin, le dernier chapitre portera sur le développement de méthodes de contact dans le cadre de l'isogéométrie. L'implémentation numérique est entièrement réalisée dans un code à part entière qui prend en charge la gestion de fichiers IGES [IGES/PDES Organization 1996] pour l'importation de modèles CAD. Le développement a été réalisé sous Python avec une syntaxe permettant une compilation à la volée en langage de bas niveau (bibliothèque Numba [Lam 2015]). Les matrices sont stockées dans un format sparse CSR grâce à la bibliothèque SciPy [Jones 2001]. La résolution de l'ensemble des systèmes linéaires se fera par le solveur Pardiso [Schenk 2001] pour l'analyse structurelle et le Lanczos (issu de la collection ARPACK [Lehoucq 1998]) pour l'analyse fréquentielle.

## Notions essentielles en isogéométrie

Les éléments essentiels et la notation utilisée dans l'approche isogéométrique sont succinctement présentés. Pour plus de détails sur la méthode, voir le livre de Cottrell et al. [Cottrell 2009] ainsi que [Piegl 1995] qui traite en détail l'implémentation numérique des fonctions splines et NURBS.

### Vecteur noeud

Les fonctions NURBS, issues des fonctions B-splines, sont définies à partir d'un vecteur noeud. On rappelle qu'un vecteur noeud est un ensemble croissant de réels

$$\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}\},$$

correspondant à des coordonnées de l'espace paramétrique. Une base de  $n$  fonctions B-splines univariées d'ordre  $p$  peut ensuite être construite. Par simplicité et sans perte de généralité, le segment paramétrique est choisi unitaire avec  $\hat{I} = (0, 1)$ . La première et dernière valeur de  $\Xi$  est

répété  $p + 1$  fois ce qui correspond à un vecteur noeud dit ouvert. Les vecteurs noeuds ouverts sont largement utilisés dans la communauté CAD et garantissent que les fonctions de base sont interpolantes aux extrémités de  $\hat{I}$ .

On définit également le vecteur noeud de partition, i.e. le vecteur  $\Xi^*$  correspondant à  $\Xi$  sans aucune répétition des coordonnées paramétriques. En notant  $m_j$  le nombre de répétitions (également appelé multiplicité du noeud), on a

$$\begin{aligned} \Xi^* &= \{\xi_1^* = 0, \dots, \xi_E^* = 1\} \\ &= \text{unique} \left( \left\{ \underbrace{\xi_1^* = 0, \dots, \xi_1^* = 0}_{m_1=p+1 \text{ répétitions}}, \underbrace{\xi_2^*, \dots, \xi_2^*}_{m_2 \text{ répétitions}}, \dots, \underbrace{\xi_{n+p+1}^* = 1, \dots, \xi_{n+p+1}^* = 1}_{m_E=p+1 \text{ répétitions}} \right\} \right). \end{aligned}$$

Les noeuds de partition dans  $\Xi^*$  coupe l'espace paramétrique, sans élément de mesure nulle, et définissent ainsi un maillage. Si les noeuds sont régulièrement espacés, le vecteur noeud associé est dit uniforme (dans le cas général il est non uniforme). Nous prendrons, pour les chapitres suivants, uniquement des vecteurs noeuds ouverts et uniformes.

## Fonctions B-splines

Les fonctions B-splines sont des courbes polynomiales par morceaux construites à partir de combinaisons linéaires de fonctions B-splines d'ordre inférieur. On commence donc par construire les fonctions B-splines univariées constantes par morceaux, i.e. d'ordre  $p = 0$ , tel que

$$N_i^0(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \forall i \in \llbracket 1, n+p \rrbracket, \forall \xi \in \hat{I}.$$

Pour  $p > 0$ , on utilise la formule récursive de Cox-de Boor afin d'obtenir les fonctions

$$N_i^q(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+q} - \xi_i} N_i^{q-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+q+1} - \xi}{\xi_{i+q+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1}^{q-1}(\xi), \quad \forall i \in \llbracket 1, n+p-q \rrbracket, \forall q \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall \xi \in \hat{I},$$

avec la convention  $0/0 = 0$ . Par simplicité de notation, on utilisera indifféremment  $\xi$  et  $\xi^*$ , i.e. sans distinguer les éléments de mesure nulle. Par conséquent, on note  $S^p(\Xi) = \text{span} \{N_i^p(\xi), i = 1, \dots, n\}$  l'espace des splines d'ordre  $p$ . La base ainsi formée satisfait la propriété de partition de l'unité

$$\sum_{i=1}^n N_i^p(\xi) = 1, \quad \forall \xi \in \hat{I}.$$

De plus, chaque fonction  $N_i^p$  est un polynôme positif par morceaux d'ordre  $p$  et à support compact tel que  $N_i^p \geq 0$  sur le support  $\text{supp}(N_i^p) = [\xi_i, \dots, \xi_{i+p+1}]$ . En d'autres termes,  $N_i^p$  est non nulle sur  $p + 1$  éléments au maximum et donc un élément contient au maximum  $p + 1$  fonctions non nulles. La régularité entre chaque élément est  $C^{p-m_j}$ , elle dépend de la multiplicité  $m_j$  du noeud considéré. On donne deux relations quant à la multiplicité d'un noeud

$$\sum_{j=1}^E m_j = n + p + 1, \quad \text{et} \quad r_j = p - m_j,$$

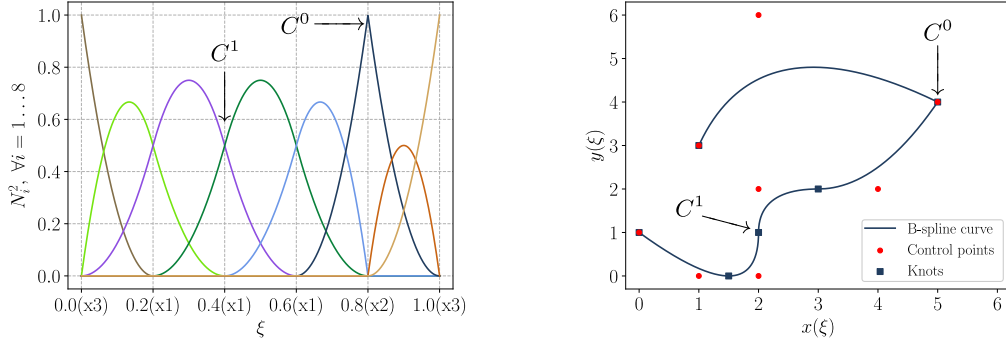


FIGURE 1.3 – Base et courbe B-spline pour un vecteur noeud ouvert uniforme  $\Xi = [0, 0, 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.8, 1, 1, 1]$  et un ordre  $p = 2$ . Gauche : fonctions B-splines. Droite : courbe B-spline. La répétition du noeud 0.8 entraine une continuité  $C^0$  entre les deux éléments adjacents. Le point de contrôle est interpolant sur ce noeud.

la première nous renseigne sur la taille du vecteur noeud alors que la seconde précise la régularité atteinte au noeud  $j$ . Les dérivées  $k^{\text{ième}}$ , avec  $k \leq p$ , des fonctions B-splines peuvent naturellement, avec la relation de récursivité précédente, s'exprimer en fonction de B-splines d'ordres inférieurs tel que

$$N_i^{p(k)}(\xi) = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} N_{i+j}^{p-k}(\xi), \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall \xi \in \hat{I},$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_{0,0} &= 1, \\ \alpha_{k,0} &= \frac{\alpha_{k-1,0}}{\xi_{i+p-k+1} - \xi_i}, \\ \alpha_{k,j} &= \frac{\alpha_{k-1,j} - \alpha_{k-1,j-1}}{\xi_{i+p+j-k+1} - \xi_{i+j}}, \quad \forall j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket, \\ \alpha_{k,k} &= \frac{-\alpha_{k-1,k-1}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+k}}, \end{aligned}$$

et par convention, pour les dénominateurs qui s'annulent, la valeur de  $\alpha_{k,j}$  est nulle. L'algorithme A2.5 de [Piegl 1995] permet d'implémenter numériquement la dérivation des fonctions B-splines de manière robuste et peu onéreuse en temps de calcul.

Afin de construire une courbe B-spline, on considère un ensemble de  $n$  points de contrôle  $\mathbf{X}_i$ , où les degrés de liberté (DOF) sont définis, et un vecteur noeud  $\Xi$  pour obtenir

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^n N_i^p(\xi) \mathbf{X}_i.$$



De la même façon, les objets B-spline multivariés sont construits à partir du produit tensoriel de fonctions B-splines univariées. Par conséquent, une surface B-spline est décrite à partir de deux vecteurs noeuds  $\Xi$  et  $\mathcal{H}$  et un ensemble de  $n \cdot m$  points de contrôle  $\mathbf{X}_{ij}$  tel que

$$\mathbf{F}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_i^p(\xi) M_j^q(\eta) \mathbf{X}_{ij} = \sum_{A=1}^{n \cdot m} N_A(\xi, \eta) \mathbf{X}_A,$$

avec l'indexation linéaire  $A$  qui simplifie l'écriture. Naturellement, les objets volumiques sont obtenus à partir du produit tensoriel de trois fonctions B-splines univariées.

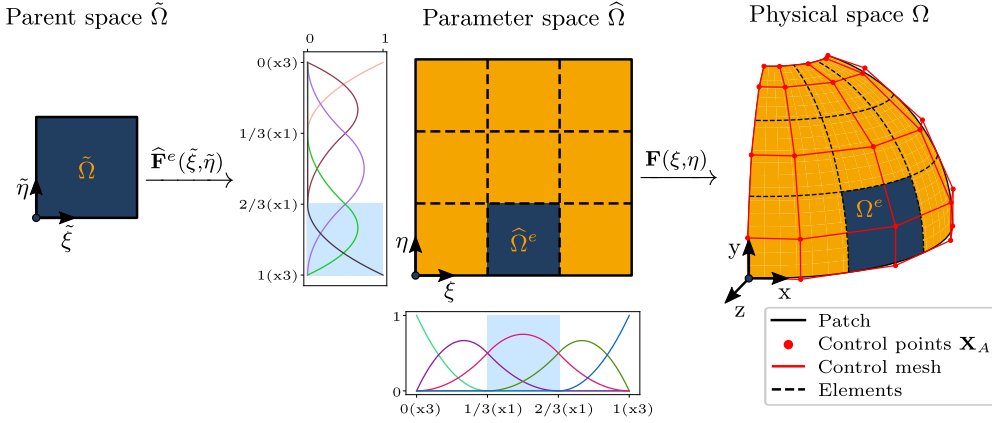


FIGURE 1.4 – Espaces en IGA et fonctions de forme quadratiques pour l'élément  $\hat{\Omega}^e$ . Gauche : espace parent, application du schéma de quadrature. Centre : maillage et éléments dans l'espace paramétrique  $\hat{\Omega}$  pour un seul patch. Droite : image physique des éléments, et points de contrôle associés, par la transformation  $\mathbf{F}$  pour des B-splines quadratiques.

## Fonctions NURBS

Les fonctions B-splines rationnelles telles que les fonctions NURBS sont de plus en plus utilisées dans les logiciels de CAD notamment grâce à la possibilité de représenter de manière exact les sections coniques. Elles ne sont pas seulement caractérisées par les positions des points de contrôle mais également par des grandeurs scalaires positives appelés poids  $w_A$  et sont définies de la manière suivante

$$R_A(\xi, \eta) = \frac{N_A(\xi, \eta) w_A}{\sum_{A=1}^{n \cdot m} N_A(\xi, \eta) w_A} = \frac{N_A(\xi, \eta) w_A}{W(\xi, \eta)}.$$

Une surface NURBS est alors donnée par la transformation

$$\mathbf{F}(\xi, \eta) = \frac{\sum_{A=1}^{n \cdot m} N_A(\xi, \eta) w_A \mathbf{X}_A}{W(\xi, \eta)} = \sum_{A=1}^{n \cdot m} R_A(\xi, \eta) \mathbf{X}_A.$$

Les poids sont des données d'entrées choisi au préalable dans le logiciel de CAD et permettent de représenter la géométrie désirée. Les fonctions B-splines sont un cas particulier NURBS pour lesquelles l'ensemble des poids est unitaire, i.e.  $w_A = 1$  et  $W(\xi, \eta) = 1$ .

---

## Procédures de raffinement

La méthode isogéométrique possède trois possibilités de raffinement différentes. Il est important de préciser que, indépendamment du raffinement choisi, la géométrie initiale est toujours préservée et aucune approximation supplémentaire n'est introduite quant à la description physique de l'objet.

Le raffinement- $h$  consiste à insérer un noeud supplémentaire dans le vecteur noeud considéré afin d'augmenter le nombre d'éléments. En fonction du nombre d'ajout de ce noeud, la régularité inter-éléments peut être modifiée. Les deux autres méthodes de raffinement sont basées sur la non-commutativité des opérateurs de raffinement- $h$ , en nombre d'éléments, et raffinement- $p$ , en ordre.

Le raffinement- $p$  prévoit d'insérer en premier lieu un nouveau noeud puis d'augmenter l'ordre  $p$  des fonctions de base. Sachant que l'opérateur  $p$  préserve la régularité initiale, nous avons ainsi augmenté l'ordre des fonctions de base tout en conservant la régularité initiale.

Le raffinement- $k$ , dénommé ainsi dans [Cottrell 2009], consiste à augmenter l'ordre  $p$  des fonctions de base et d'insérer un nouveau noeud seulement après. La nouvelle base ainsi formée préserve la continuité inter-éléments des noeuds déjà existants et une continuité maximale  $C^{p-1}$  est obtenue au nouveau noeud inséré.

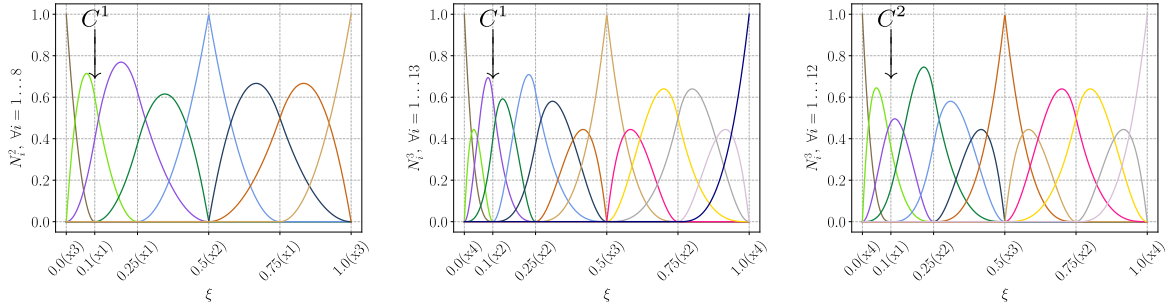


FIGURE 1.5 – Raffinement- $hpk$  à partir d'un vecteur noeud ouvert uniforme  $\Xi = [0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.5, 0.75, 1, 1, 1]$  et d'un ordre  $p = 2$ . Gauche : raffinement- $h$  avec insertion du noeud 0.1. Centre : raffinement- $p$  avec insertion du noeud 0.1 puis élévation à l'ordre  $p = 3$ . Droite : raffinement- $k$  avec élévation à l'ordre  $p = 3$  puis insertion du noeud 0.1. Le raffinement- $k$  permet d'atteindre une régularité maximale sur les noeuds insérés.

Pour l'ensemble des études présentées, seuls les raffinement- $h$  et raffinement- $k$ , dans le cas où l'ordre est augmenté à  $p > 2$ , sont utilisés. Le raffinement- $k$  permettra d'obtenir une régularité entre éléments  $C^{p-1}$  maximale par rapport au raffinement- $p$ . Les fonctions B-splines et NURBS permettent donc de décrire une géométrie de manière exacte, avec une régularité pouvant atteindre  $C^{p-1}$  entre les éléments au contraire des polynômes de Lagrange qui sont limités à du  $C^0$ . Cet avantage majeur de la méthode isogéométrique est mis à profit sur des problèmes multipatches, de formulation d'élément coque non linéaire ainsi que sur le contact.



# Méthodes multipatch pour des coques épaisses

---

## Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>12</b>
<b>2.2</b>	<b>Modèle de coque</b>	<b>14</b>
2.2.1	Cinématique	14
2.2.2	Formulation variationnelle	15
<b>2.3</b>	<b>Description d'un problème multipatch</b>	<b>16</b>
2.3.1	Définition du domaine global	16
2.3.2	Formulation faible du problème multipatch	18
2.3.3	Discrétisation locale	21
2.3.4	Problème discret pénalisé	22
2.3.5	Problème discret dualisé	22
2.3.6	Problème discret augmenté	23
<b>2.4</b>	<b>Analyse de convergence</b>	<b>23</b>
2.4.1	Hypothèses géométriques	23
2.4.2	Hypothèses sur l'espace dual	24
2.4.3	Résultats de convergence	26
2.4.3.1	Équivalence des normes	26
2.4.3.2	Erreur de consistance	27
2.4.3.3	Erreur d'approximation	29
2.4.3.4	Résultat de convergence	31
2.4.4	Construction de l'espace dual	32
<b>2.5</b>	<b>Intégration réduite et stabilité</b>	<b>34</b>
2.5.1	Reconstruction des normales	34
2.5.2	Intégration réduite	35
2.5.3	Stabilité numérique	36
<b>2.6</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>39</b>
2.6.1	Plaque simplement supportée	40
2.6.1.1	Validation	40
2.6.1.2	Approches simplifiée et optimale	41
2.6.1.3	Influence du facteur de pénalité	42
2.6.1.4	Dépendance en épaisseur	43
2.6.1.5	Analyse de fréquence propre	44
2.6.2	Hémisphère pincé	47

2.6.3	Plaque trouée . . . . .	49
2.6.4	Pignon droit . . . . .	51
2.6.5	Rail latéral . . . . .	53
2.6.6	Carter d’huile . . . . .	55
<b>2.7</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>59</b>
<b>Annexes</b>	<b>. . . . .</b>	<b>60</b>
<b>2.A</b>	<b>Compléments sur le modèle de coque . . . . .</b>	<b>60</b>
2.A.1	Géométrie différentielle sur la surface . . . . .	60
2.A.2	Géométrie différentielle dans le volume . . . . .	62
2.A.3	Déformations linéarisées . . . . .	63
2.A.4	Loi de comportement . . . . .	64
2.A.5	Analyse du modèle monopatch . . . . .	65
<b>2.B</b>	<b>Coque linéaire en coordonnées cartésiennes . . . . .</b>	<b>70</b>
<b>2.C</b>	<b>Système à résoudre pour le couplage de deux patchs . . . . .</b>	<b>73</b>
<b>2.D</b>	<b>Compléments sur l’intégration réduite . . . . .</b>	<b>75</b>
2.D.1	Intégration réduite dans les patchs . . . . .	75
2.D.1.1	Éléments finis de Lagrange quadratiques . . . . .	76
2.D.1.2	Éléments finis B-splines quadratiques . . . . .	78
2.D.1.3	Quadrature réduite pour des plaques et coques . . . . .	80
2.D.2	Intégration réduite aux interfaces . . . . .	82
2.D.3	Résumé des schémas de quadrature . . . . .	83

---

### 2.1 Introduction

L’analyse isogéométrique (IGA) possède l’avantage de pouvoir mener l’étape d’analyse sur la géométrie exacte, issue d’un logiciel de conception assistée par ordinateur (CAD), par l’utilisation de fonctions de forme identiques. Par conséquent, l’ensemble des grandeurs cinématiques peuvent être évaluées précisément sans introduire d’erreur due à la discrétisation spatiale du modèle.

Les géométries issues d’un logiciel CAD sont, dans la très grande majorité des cas, composées de plusieurs domaines, ou patchs en IGA. Les patchs sont dits trimmés s’il n’est pas possible de les représenter par produit tensoriel des fonctions de base ou non trimmés si au contraire ces patchs peuvent être maillés exclusivement par des éléments quadrangulaires. La différence entre une géométrie trimmée et cette même géométrie non trimmée est visible sur la Figure 2.1.

L’analyse de structures trimmées [Breitenberger 2015, Guo 2018, Teschemacher 2018] est récente et peut poser plusieurs difficultés parmi lesquelles l’intégration des éléments ou la vérification de conditions au sens faible. Dans cette étude, nous considérons exclusivement des géométries multipatch non trimmées complexes nécessitant un traitement robuste des conditions de continuité entre domaines. Les structures industrielles de ce type comprennent généralement une centaine de patchs.

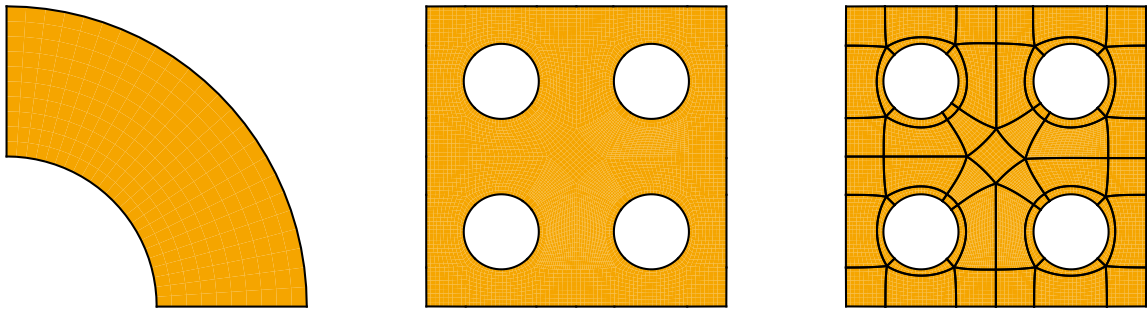


FIGURE 2.1 – Exemples de géométries 2D. Gauche : un patch non trimmé. Centre : un patch trimmé. Droite : cinquante-trois patches non trimmés.

Ce travail concerne en particulier des pièces industrielles qui peuvent être représentées par des structures minces tel que les plaques ou les coques pour lesquelles l'effet du cisaillement transverse ne peut pas être négligé. À cet effet, le modèle de Reissner-Mindlin est retenu et les degrés de liberté (DOF) en rotation de la normal seront pris en compte. Un exemple de géométrie issue du domaine de l'automobile et modélisée par des éléments coques est montré en Figure 2.2.

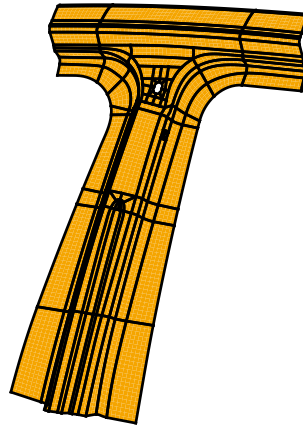


FIGURE 2.2 – Modélisation par des éléments coques d'un encadrement de portière (138 patches et 253 interfaces).

La littérature est particulièrement riche en ce qui concerne le couplage de domaines en IGA pour des plaques et coques minces. Pour des maillages conformes, Kiendl et al. [Kiendl 2010] proposent d'ajouter une bande de flexion fictive afin de transférer le moment de flexion et conserver une continuité  $C^0$  entre les patches. Une autre méthode pour préserver une continuité  $C^0/G^1$  consiste à projeter virtuellement les points de contrôle pour chaque interface (algorithme d'Oslo [Cohen 1980]) puis d'utiliser une méthode statique condensée ou une méthode de pénalisation de la contrainte, voir [Lei 2015]. Une formulation basée sur la méthode de Nitsche est proposée dans [Apostolatos 2014], pour des problèmes plans ou des

problèmes en 3D [Nguyen 2014], permettant de conserver l'unicité de la solution au prix de la résolution d'un système aux valeurs propres supplémentaire.

Les méthodes mortier sont reconnues pour être une alternative intéressante afin d'assurer les conditions de contact ou de continuité pour des problèmes d'interface [De Lorenzis 2012, Temizer 2012, Kim 2012, Dittmann 2014, Seitz 2016]. Dans ce cas, le choix d'un espace dual est essentiel. D'un point de vue théorique, l'espace des multiplicateurs de Lagrange doit satisfaire deux conditions. La première est la stabilité inf-sup et la seconde requiert une bonne approximation de l'espace dual. En notant  $p$  l'ordre des fonctions splines primales, un espace dual d'ordre  $p/p - 1/p - 2$  est proposé par Brivadis et al. [Brivadis 2015]. Nous présenterons ici une méthode mortier simplifiée d'ordre  $p$  qui peut être facilement appliquée à des géométries industrielles avec un faible coût numérique. Le but de ce chapitre est d'introduire, analyser et valider la méthode mortier en isogéométrie pour résoudre des problèmes de coques épaisses posés sur des géométries multipatch. Une attention particulière sera portée à l'introduction d'une formulation rigoureuse des conditions de couplage, avec un intérêt particulier pour la méthode du lagrangien augmenté, au choix des espaces mortier et à l'élaboration de règles d'intégration pertinentes.

Ce chapitre est structuré en cinq parties distinctes. La Section 2.2 présente le modèle de coque linéaire de type Reissner-Mindlin. Dans la Section 2.3 le problème multipatch et un cadre fonctionnelle et de discrétisation seront donnés. Des résultats de convergence seront détaillés et adaptés dans la Section 2.4 et les règles d'intégration seront discutées dans 2.5. Dans un dernier temps, des résultats numériques sont proposés sur des géométries académiques et industrielles en Section 2.6.

## 2.2 Modèle de coque

### 2.2.1 Cinématique

On considère une coque de volume  $V$ , de surface moyenne  $\Omega$  et d'épaisseur constante  $t$ . Soit  $\mathbf{x}_q$  le vecteur position d'un point matériel  $q$  de la coque dans l'espace physique et  $\boldsymbol{\xi}_q = (\xi, \eta, \zeta)^T$  son équivalent dans l'espace paramétrique. La coordonnée  $\xi$  (resp.  $\eta$ ) est associée au vecteur noeud  $\Xi$  (resp.  $\mathcal{H}$ ) et  $\zeta \in [-1, 1]$  définit la position transverse d'un point dans l'espace paramétrique. En d'autres termes, le point  $p$  correspondant à  $\boldsymbol{\xi}_p = (\xi, \eta, 0)^T$  dans l'espace paramétrique appartient à la surface moyenne  $\Omega$ . Localement, i.e. pour un patch donné, le volume de la coque est l'image de l'espace paramétrique par la transformation

$$\mathbf{x}_q(\boldsymbol{\xi}_q) = \mathbf{x}_p(\boldsymbol{\xi}_p) + z\mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}_p) = \sum_{A=1}^{n \cdot m} R_A(\xi, \eta)\mathbf{X}_A + \frac{t}{2}\zeta\mathbf{n}(\xi, \eta) \quad (2.1)$$

avec  $\mathbf{n}(\xi, \eta)$  le vecteur normal à la surface moyenne au point  $\mathbf{x}_p(\xi, \eta)$ . Le champ de déplacement dans la coque est localement décomposé en un déplacement  $\mathbf{u}_p(\mathbf{x}_p)$  de la surface moyenne et une rotation d'angle  $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}_p)$  de la normale

$$\mathbf{u}_q(\boldsymbol{\xi}_q) = \mathbf{u}_p(\mathbf{x}_p) + z\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{n}(\mathbf{x}_p) \quad (2.2)$$

L'expression (2.2) est obtenue en supposant des petites rotations de normale  $(\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{I}_3)\mathbf{n} \simeq \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{n}$  avec  $\mathbf{R}$  la matrice de rotation usuelle. L'extension aux grandes rotations requiert une paramétrisation non linéaire  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})$  de l'ensemble des rotations de l'espace.

### 2.2.2 Formulation variationnelle

Nous souhaitons prendre en compte le cisaillement transverse. De tels modèles de coque peuvent être obtenus à partir d'un modèle tri-dimensionnel (3D) en supposant, comme dans l'expression (2.2), que la cinématique est linéaire dans la direction transverse et qu'elle peut être caractérisée par deux points de contrôle à travers l'épaisseur, voir Figure 2.3. On suppose un état plan de contraintes tel que  $\sigma_{33} = 0$  dans la base locale de l'élément. Le modèle retenu, présenté dans [Adam 2015b], suit le travail de Benson et al. [Benson 2010, Benson 2011].

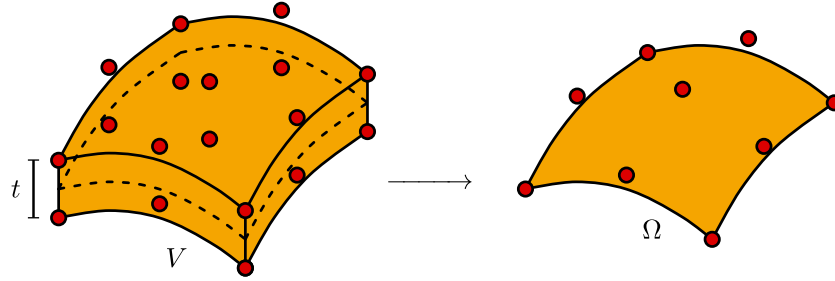


FIGURE 2.3 – Construction d'un modèle coque surfacique à partir d'un modèle solide dégénéré.

La formulation variationnelle de ce modèle de coque a été étudiée en détail dans [Chapelle 2011], mentionné sous le nom de *basic shell model*. Nous utilisons ici la même notation pour présenter la forme variationnelle correspondante. Dans ce qui suit, les lettres grecques feront références aux quantités de la surface moyenne avec  $(\alpha, \beta, \lambda, \mu) \in \{1, 2\}$  alors que les lettres latines correspondront à celles dans le volume avec  $(i, j, k, l) \in \{1, 2, 3\}$ . On note les quantités exprimées dans la base covariante par des indices alors qu'un exposant fera référence aux quantités exprimées dans la base contravariante. La base covariante associée à la surface moyenne  $\mathbf{a}_\alpha$  correspond aux dérivées  $\mathbf{x}_{,\xi}$  ou  $\mathbf{x}_{,\eta}$  des positions dans le plan. En notant  $\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{a}_\alpha + z\mathbf{a}_{3,\alpha}$  et  $\mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 = \mathbf{n}$  les vecteurs covariants 3D, les coordonnées covariantes locales du tenseur métrique sont  $g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta$  ou en base duale  $g^{\alpha\beta}$ .

Pour une analyse linéaire, on écrit les composantes du tenseur des déformations associées au déplacement (2.2) dans la base covariante

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{u}_{q,j} + \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{u}_{q,i}).$$

Avec un matériau linéaire élastique, la loi de Hooke classique exprimée dans la base locale est

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl},$$

avec  $\mathbf{C}$  le tenseur des rigidités élastique défini par le module de Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ . L'hypothèse des contraintes planes nous permet d'éliminer la déformation transverse



$\varepsilon_{33}$  afin de simplifier la relation précédente en

$$\begin{cases} \sigma^{\alpha\beta} = H^{\alpha\beta\lambda\mu} \varepsilon_{\lambda\mu}, \\ \sigma^{\alpha 3} = \frac{1}{2} G^{\alpha\lambda} \varepsilon_{\lambda 3}, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)} (g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} + g^{\alpha\mu} g^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu} g^{\alpha\beta} g^{\lambda\mu}), \\ G^{\alpha\lambda} = \frac{2E}{1+\nu} g^{\alpha\lambda}. \end{cases} \quad (2.3)$$

En utilisant la loi élastique (2.3), l'action du champ des contraintes associé au déplacement  $\mathbf{u}$  sur le champ des déformations associé au déplacement virtuel  $\mathbf{v}$  prend la forme

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dV = \int_V \left( H^{\alpha\beta\lambda\mu} \varepsilon_{\lambda\mu}(\mathbf{u}) \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) + G^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha 3}(\mathbf{u}) \varepsilon_{\beta 3}(\mathbf{v}) \right) dV.$$

La surface moyenne de la coque  $\Omega$  est supposée fixe sur la partie  $\Gamma_d^u$  de sa frontière et aucune rotation de normale n'est autorisée sur une partie possiblement distincte  $\Gamma_d^\theta$ . On définit ensuite l'espace de Sobolev  $H_d^1(\Omega)$  des fonctions test admissibles par

$$H_d^1(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} = (\mathbf{v}_p, \boldsymbol{\vartheta}) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega), \mathbf{v}_p = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_d^u, \boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_d^\theta \right\}, \quad (2.4)$$

où  $\mathbf{v}_p$  représente le champ de déplacement virtuel de la membrane et  $\boldsymbol{\vartheta}$  le champ de rotation virtuelle de la normale. Ainsi, le problème élastique de coque de type Reissner-Mindlin soumise à un chargement extérieur se résume à l'équation variationnelle

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dV = \int_V \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{v} dV + \int_\Omega \mathbf{f}_s \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{g}_p + \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{m}_p) d\Gamma, \quad (2.5)$$

avec les inconnues du champ de déplacement  $\mathbf{u} \in H_d^1(\Omega)$  et les fonctions test arbitraires  $\mathbf{v} \in H_d^1(\Omega)$ . Sur l'équation précédente,  $\mathbf{f}_v$  et  $\mathbf{f}_s$  correspondent aux forces volumiques et surfaciques imposées respectivement dans  $V$  et sur  $\Omega$  alors que  $\mathbf{g}_p$  et  $\mathbf{m}_p$  sont les tensions latérales et les moments appliqués sur  $\Gamma$  qui doit être spécifié respectivement sur les parties complémentaires de  $\Gamma_d^u$  et  $\Gamma_d^\theta$  sur  $\partial\Omega$ . La preuve de continuité et coercivité de la forme bilinéaire correspondant au terme de gauche de (2.5) est détaillée dans [Chapelle 2011] de laquelle nous pouvons déduire l'existence et l'unicité de la solution. L'analyse du modèle de coque, avec en particulier la continuité et la coercivité de la forme bilinéaire précédente, est donnée sur l'Annexe 2.A et la formulation pratique de l'élément en coordonnées cartésiennes est précisée sur l'Annexe 2.B.

**Remarque 2.1.** On peut montrer, voir Annexe 2.A, que la constante de coercivité contient des termes en  $\mathcal{O}(t)$  pour les composantes de déformation en membrane et cisaillement (celles ne variant pas selon l'épaisseur) et en  $\mathcal{O}(t^3)$  pour les composantes de déformation en flexion (celles variant linéairement en  $z$ ). Cette différence d'ordre en épaisseur aboutit à l'obtention d'un verrouillage numérique que nous traiterons par la suite en utilisant une règle d'intégration réduite adéquate. ■

## 2.3 Description d'un problème multipatch

### 2.3.1 Définition du domaine global

Nous souhaitons trouver les déplacements d'une coque constituée de plusieurs patches avec différentes paramétrisations. On considère à titre d'exemple les deux domaines de la Figure 2.4.

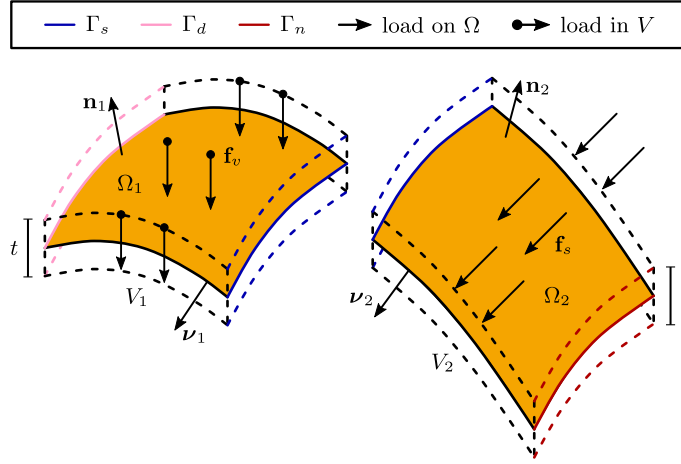


FIGURE 2.4 – Exemple d'un problème de coque multipatch avec deux domaines à coller le long de l'interface  $\Gamma_s$ .

Les deux patches, défini par leurs surfaces moyennes  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , ont une frontière commune  $\Gamma_s$ . Les deux autres frontières  $\Gamma_d$  et  $\Gamma_n$  correspondent respectivement à des conditions limites de Dirichlet et de Neumann. Les arêtes  $\partial\Omega_k$ , avec  $k = \{1, 2\}$ , sont au moins  $C^1$  par morceaux de sorte à ce que la normale sortante  $\nu_k$  de chaque patch puisse être défini de manière unique presque partout. Plus généralement, soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  une surface bornée divisée en  $K$  patches non chevauchant  $\Omega_k$  qui constituent une partition de  $\Omega$  au sens suivant

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^K \bar{\Omega}_k \quad \text{et} \quad \Omega_{k_1} \cap \Omega_{k_2} = \emptyset \quad \text{avec} \quad k_1 \neq k_2.$$

La surface NURBS du patch  $\Omega_k$  est définie par

$$\mathbf{F}_k(\xi, \eta) = \sum_{A=1}^{n \cdot m} R_A(\xi, \eta) \mathbf{X}_A^k,$$

en rappelant que  $\mathbf{X}_A \in \mathbb{R}^3$  sont les coordonnées des points de contrôle. On note  $\mathcal{M}_k$  le maillage dans l'espace physique, image du maillage  $\widehat{\mathcal{M}}_k$  dans l'espace paramétrique par  $\mathbf{F}_k$ . Soit  $\mathbf{O}$  et  $\mathbf{Q}$  des éléments respectivement dans l'espace physique et paramétrique (Figure 1.4). Par conséquent, on écrit

$$\mathcal{M}_k = \left\{ \mathbf{O} \subset \Omega_k : \mathbf{O} = \mathbf{F}_k(\mathbf{Q}), \mathbf{Q} \in \widehat{\mathcal{M}}_k \right\}.$$

Une interface  $\gamma_{kl}$  est définie comme l'intersection fermée entre les frontières de deux domaines

$$\gamma_{kl} = \overline{\partial\Omega_k} \cap \overline{\partial\Omega_l} \quad \text{avec} \quad 1 \leq l < k \leq K.$$

L'ensemble de ces interfaces définissent le squelette  $\Gamma_s = \bigcup_{k>l} \gamma_{kl}$ . L'approche maître-esclave est retenue afin de définir une hiérarchie entre les domaines constituant une interface. Le côté esclave  $s(kl) \in \{k, l\}$  est à priori arbitraire. On souligne le fait qu'un patch peut être choisi

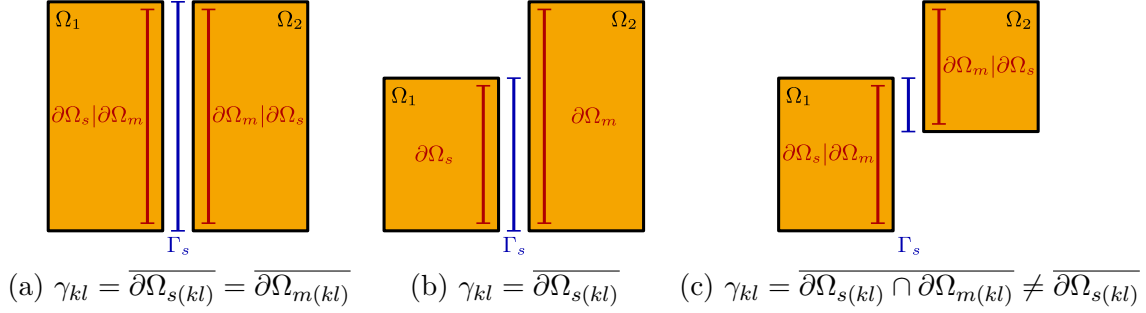


FIGURE 2.5 – Trois cas différents de géométrie d’interface : géométriquement conforme (a), conformité géométrique esclave (b) et complètement non conforme (c).

comme esclave pour une interface et maître pour une autre.

Avec les notations précédentes, chaque interface  $\gamma_{kl}$  est définie comme étant l’intersection d’un côté esclave  $\overline{\partial\Omega_{s(kl)}}$  et d’un côté maître  $\overline{\partial\Omega_{m(kl)}}$ . Sachant cela, on distingue trois types de conformités géométriques. Une situation géométriquement conforme correspond au cas où  $\gamma_{kl}$  est une arête complète des deux côtés  $\gamma_{kl} = \overline{\partial\Omega_{s(kl)}} = \overline{\partial\Omega_{m(kl)}}$ , Figure 2.5 (a). La conformité géométrique esclave, tel que détaillée dans [Brivadis 2015], correspond au cas où  $\gamma_{kl}$  est un bord entier du côté esclave  $\Omega_{s(kl)} = \mathbf{F}_{s(kl)}(\widehat{\Omega}_{s(kl)})$ , i.e.,  $\gamma_{kl} = \overline{\partial\Omega_{s(kl)}}$  tel que montré sur la Figure 2.5 (b). Toutes les autres situations sont représentées sur la Figure 2.5 (c).

### 2.3.2 Formulation faible du problème multipatch

On commence par définir le cadre abstrait général tel qu’introduit dans [Ben Belgacem 1999, Brivadis 2015]. La formulation faible initiale (2.5) est définie sur  $H_d^1(\Omega)$ . On divise cet espace en plusieurs espaces locaux

$$V_k(\Omega_k) = H_d^1(\Omega_k) = \left\{ \mathbf{v}_k = ((\mathbf{v}_p)_k, \boldsymbol{\vartheta}_k) \in H^1(\Omega_k) \times H^1(\Omega_k), (\mathbf{v}_p)_k|_{\Gamma_d^u} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\vartheta}_k|_{\Gamma_d^\theta} = \mathbf{0} \right\},$$

et on définit les formes locales bilinéaire  $a_k$  et linéaire  $L_k$  par

$$a_k(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) = \int_{\text{Vol}_k} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_k) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_k) \, d\text{Vol}_k,$$

$$L_k(\mathbf{v}_k) = \int_{\text{Vol}_k} (\mathbf{f}_v)_k \cdot \mathbf{v}_k \, d\text{Vol}_k + \int_{\Omega_k} (\mathbf{f}_s)_k \cdot \mathbf{v}_k \, d\Omega_k + \int_{\Gamma_n \cap \Omega_k} (\mathbf{v}_p)_k \cdot (\mathbf{g}_p)_k + \boldsymbol{\vartheta}_k \cdot (\mathbf{m}_p)_k \, d\Gamma_n,$$

avec  $\text{Vol}_k$  le volume de la coque associée à la surface moyenne  $\Omega_k$ .

On s’intéresse désormais au terme de couplage qui va lier chaque patch de  $\Omega$ . Afin de donner un cadre fonctionnel, on définit l’espace de Sobolev brisé  $V = \prod_k V_k$  associé à la norme brisée

$$\|\mathbf{v}\|_V^2 = \sum_k \|(\mathbf{v}_p)_k\|_{H^1(\Omega_k)}^2 + \|\boldsymbol{\vartheta}_k\|_{H^1(\Omega_k)}^2.$$

Avec une intégration par partie standard, nous allons rappeler que nous avons

$$H_d^1(\Omega) = \left\{ \{\mathbf{v}_k\} \in V, \{\text{Tr}_{kl}\mathbf{v}_k - \text{Tr}_{kl}\mathbf{v}_l\}_{\gamma_{kl}} = \mathbf{0}, \forall kl \right\}, \quad (2.6)$$

---

### 2.3. Description d'un problème multipatch

avec  $\text{Tr}_{kl}\mathbf{v}_m$  la trace de  $\mathbf{v}_m$  sur  $\gamma_{kl}$ . Dans cet espace on a  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_k a_k(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)$ , avec  $\mathbf{v}_k$  la restriction de  $\mathbf{v}$  sur  $\Omega_k$ , expression à utiliser dans le problème variationnel (2.5). On définit l'opérateur de couplage  $\mathbf{C}$  par

$$\mathbf{C} : V \rightarrow \prod_{k>l} L^2(\gamma_{kl})^2, \quad \{\mathbf{v}_k\} \mapsto \{\text{Tr}_{kl}\mathbf{v}_k - \text{Tr}_{kl}\mathbf{v}_l\}_{\gamma_{kl}},$$

de noyau

$$\text{Ker}(\mathbf{C}) = \left\{ \{\mathbf{v}_k\} \in V, \{\text{Tr}_{kl}\mathbf{v}_k - \text{Tr}_{kl}\mathbf{v}_l\}_{\gamma_{kl}} = \mathbf{0}, \forall kl \right\}. \quad (2.7)$$

On peut alors introduire les deux problèmes suivants.

**Problème monopatch.** Trouver  $\{\mathbf{u}\} \in H_d^1(\Omega)$  tel que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \forall \{\mathbf{v}\} \in H_d^1(\Omega). \quad (2.8)$$

**Problème multipatch abstrait.** Trouver  $\{\mathbf{u}_k\} \in \text{Ker}(\mathbf{C})$  tel que

$$\sum_k a_k(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) = \sum_k L_k(\mathbf{v}_k), \forall \{\mathbf{v}_k\} \in \text{Ker}(\mathbf{C}). \quad (2.9)$$

**Proposition 2.2** (Équivalence monopatch-multipatch). *Les formulations (2.8) et (2.9) sont équivalentes avec*

$$H_d^1(\Omega) = \text{Ker}(\mathbf{C}),$$

sous l'identification  $\mathbf{v}|_{\Omega_k} = \mathbf{v}_k = ((\mathbf{v}_p)_k, \boldsymbol{\vartheta}_k)$ . □

**Preuve.** On note  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'espace des fonctions test  $\varphi$  régulières s'annulant au bord. Par définition de la dérivation au sens des distributions, on a

$$\langle D_i(\mathbf{v}), \varphi \rangle = - \langle \mathbf{v}, D_i(\varphi) \rangle = - \int_{\Omega} D_i(\varphi) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

avec la même construction de dérivée  $D_i(\mathbf{v}_k)$  sur  $\Omega_k$ .

Soit  $\mathbf{v} \in H_d^1(\Omega)$  de dérivée  $D_i(\mathbf{v}) \in L^2(\Omega)^2$ , on utilise cette même construction de dérivée pour  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_k)$  afin d'obtenir

$$\int_{\Omega_k} \varphi \cdot D_i(\mathbf{v}) \, d\Omega_k = - \int_{\Omega_k} \mathbf{v} \cdot D_i(\varphi) \, d\Omega_k, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_k),$$

et donc la fonction  $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}|_{\Omega_k} \in H^1(\Omega_k)^2$  et  $D_i(\mathbf{v}|_{\Omega_k}) \in L^2(\Omega_k)^2$  représente la dérivée de  $\mathbf{v}_k$  sur  $\Omega_k$ . De plus, par unicité de la trace dans  $H^1(\Omega)^2$  on a  $\mathbf{v}_k|_{\gamma_{kl}} = \mathbf{v}_l|_{\gamma_{kl}} = \mathbf{v}|_{\gamma_{kl}}$ , ce qui signifie que  $\{\mathbf{v}|_{\Omega_k}\}$  est dans  $\text{Ker}(\mathbf{C})$  et vérifie  $D_i(\mathbf{v}|_{\Omega_k})|_{\Omega_k} = D_i(\mathbf{v}|_{\Omega_k})$ .

Réciproquement, en partant de  $\{\mathbf{v}_k\} \in \text{Ker}(\mathbf{C})$  et en construisant  $\mathbf{v}$  sur  $\Omega$  par  $\mathbf{v}|_{\Omega_k} = \mathbf{v}_k$ , on a

$$- \int_{\Omega} D_i(\varphi) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = - \sum_k \int_{\Omega_k} D_i(\varphi) \cdot \mathbf{v}_k \, d\Omega_k.$$

Avec une intégration par partie sur  $\Omega_k$  on obtient

$$-\sum_k \int_{\Omega_k} D_i(\boldsymbol{\varphi}) \cdot \mathbf{v}_k \, d\Omega_k = \sum_k \int_{\Omega_k} \boldsymbol{\varphi} \cdot D_i(\mathbf{v}_k) \, d\Omega_k - \int_{\partial\Omega_k} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{v}_k \nu_k^i \, \partial\Omega_k,$$

avec  $\nu_k^i$  la  $i$ -ème composante de la normale sortante à  $\partial\Omega_k$  (à ne pas confondre avec la normale associée au modèle de coque) et  $D_i(\mathbf{v}_k) \in L^2(\Omega_k)^2$  la dérivée de  $\mathbf{v}_k$  au sens des distributions sur  $\Omega_k$ . On développe l'expression précédente sur l'ensemble des interfaces pour obtenir

$$-\sum_k \int_{\Omega_k} D_i(\boldsymbol{\varphi}) \cdot \mathbf{v}_k \, d\Omega_k = \sum_k \int_{\Omega_k} \boldsymbol{\varphi} \cdot D_i(\mathbf{v}_k) \, d\Omega_k - \sum_{k>l} \int_{\gamma_{kl}} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{v}_k \nu_k^i + \mathbf{v}_l \nu_l^i) \, d\gamma_{kl}.$$

Sachant que  $\nu_l^i = -\nu_k^i$ , on peut écrire

$$\langle D_i(\mathbf{v}), \boldsymbol{\varphi} \rangle = -\sum_k \int_{\Omega_k} D_i(\boldsymbol{\varphi}) \cdot \mathbf{v}_k \, d\Omega_k = \sum_k \int_{\Omega_k} \boldsymbol{\varphi} \cdot D_i(\mathbf{v}_k) \, d\Omega_k - \sum_{k>l} \int_{\gamma_{kl}} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_l) \nu_k^i \, d\gamma_{kl}.$$

Comme  $\{\mathbf{v}_k\} \in \text{Ker}(\mathbf{C})$  et que  $\boldsymbol{\varphi} \nu_k^i \in L^2(\gamma_{kl})^2$ , l'intégrale  $\int_{\gamma_{kl}} \boldsymbol{\varphi} \nu_k^i (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_l) \, d\gamma_{kl}$  est nulle et donc l'identité précédente montre que la dérivée  $D_i(\mathbf{v})$  de  $\mathbf{v}$  sur  $\Omega$  est la fonction de  $L^2(\Omega)^2$  définie par  $D_i(\mathbf{v}|_{\Omega_k}) = D_i(\mathbf{v}_k)$ . On peut donc identifier  $\text{Ker}(\mathbf{C})$  et  $H_d^1(\Omega)$  et de plus l'identité  $D_i(\mathbf{v}|_{\Omega_k}) = D_i(\mathbf{v}_k)$  montre que l'on a

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_k a_k(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k),$$

d'où l'équivalence entre (2.8) et (2.9). ■

On aimerait maintenant écrire le problème multipatch abstrait (2.9) sous forme dualisée. Pour ce faire, on rappelle le théorème de l'image fermée et la définition du complément orthogonal pour deux espaces de Banach quelconques.

**Théorème 2.3** (Image fermée). *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach et  $\mathbf{C} : D(\mathbf{C}) \rightarrow Y$  un opérateur linéaire fermé dont le domaine  $D(\mathbf{C})$  est dense dans  $X$ . En notant  $X'$  le dual topologique de  $X$ , on définit les quatre propositions équivalentes suivantes :*

$$\text{Im}(\mathbf{C}) \text{ est fermée dans } Y, \tag{2.10}$$

$$\text{Im}(\mathbf{C}^T) \text{ est fermée dans } X', \tag{2.11}$$

$$\text{Im}(\mathbf{C}) = \text{Ker}(\mathbf{C}^T)^\perp = \left\{ \mathbf{y} \in Y, \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}^* \rangle = 0 \, \forall \mathbf{y}^* \in \text{Ker}(\mathbf{C}^T) \right\}, \tag{2.12}$$

$$\text{Im}(\mathbf{C}^T) = \text{Ker}(\mathbf{C})^\perp = \left\{ \mathbf{x}^* \in X', \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle = 0 \, \forall \mathbf{x} \in \text{Ker}(\mathbf{C}) \right\}. \tag{2.13}$$

□

La preuve est présentée dans [Yosida 1978], en particulier pour  $D(\mathbf{C}) = X$ , et dans un cadre plus général dans [Banach 1932]. Si dans notre cas l'opérateur  $\mathbf{C}$  était à image fermée, on aurait équivalence entre les expressions (2.10) et (2.13). On remarque que le problème (2.9) permet

---

### 2.3. Description d'un problème multipatch

d'affirmer que  $\sum_k a_k(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) - \sum_k L_k(\mathbf{v}_k)$  est dans  $\text{Ker}(\mathbf{C})^\perp$ . Ainsi, l'égalité  $\text{Ker}(\mathbf{C})^\perp = \text{Im}(\mathbf{C}^T)$  nous permettrait d'écrire

$$\sum_k a_k(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) + \sum_{k>l} \langle \mathbf{C}^T(\boldsymbol{\lambda}_{kl}), \mathbf{v}_k \rangle = \sum_k a_k(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) + \sum_{k>l} \langle \boldsymbol{\lambda}_{kl}, \mathbf{C}(\mathbf{v}_k) \rangle = \sum_k L_k(\mathbf{v}_k).$$

Malheureusement, en présence de coins mortiers (présentés par la suite), même en changeant de topologie dans la construction de l'espace d'interface, on ne peut pas obtenir au niveau continue un opérateur de saut  $\mathbf{C}$  défini séparément interface par interface et d'image fermée [Braess 1999]. Il est donc nécessaire de discrétiser le problème multipatch abstrait (2.9) avant de le dualiser.

#### 2.3.3 Discrétisation locale

On rappelle que chaque patch est défini par la paramétrisation NURBS  $\mathbf{F}_k$  qui s'appuie sur deux vecteurs noeuds  $\Xi_k = \{\Xi_k, \mathcal{H}_k\}$  et qui envoie l'espace paramétrique  $\widehat{\Omega}_k$  vers l'espace physique  $\Omega_k$  (Figure 1.4). On utilise les mêmes fonctions de forme  $R_A$  décrivant la géométrie pour représenter l'ensemble des déplacements admissibles de la coque afin d'obtenir la relation (2.2) discrétisée

$$\mathbf{u}_q(\boldsymbol{\xi}_q) = \mathbf{u}_p(\mathbf{x}_p) + z\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{n}(\mathbf{x}_p) = \sum_{A=1}^{n \cdot m} R_A(\xi, \eta) \left( \mathbf{U}_A + \frac{t}{2} \zeta \boldsymbol{\theta}_A \times \mathbf{n}(\xi, \eta) \right), \quad (2.14)$$

avec  $\mathbf{U}_A$  (resp.  $\boldsymbol{\theta}_A$ ) les vecteurs déplacements (resp. rotations) aux points de contrôle de coordonnées  $\mathbf{X}_A$ . Par conséquent, on peut définir l'espace discret des déplacements  $V_{k,h} \subset V_k$  par

$$V_{k,h} = \left\{ \mathbf{v}_k = \widehat{\mathbf{v}}_k \circ \mathbf{F}_k^{-1}, \widehat{\mathbf{v}}_k \in R^{p_k}(\Xi_k)^2 \right\},$$

avec  $R^{p_k}(\Xi_k) = R^{p_k}(\Xi_k) \otimes R^{p_k}(\mathcal{H}_k)$  l'espace généré par produit tensoriel de l'espace des fonctions NURBS d'ordre  $p_k$  défini respectivement sur  $\Xi_k$  et  $\mathcal{H}_k$ .

On introduit également l'approximation en dimension finie  $M_{kl,h} = M_{lk,h}$  de l'espace des forces d'interfaces  $\gamma_{kl} = \gamma_{lk}$

$$M_{kl,h} \subset L^2(\gamma_{kl})^2.$$

Pour appliquer la contrainte de continuité au niveau discret, on définit les formes bilinéaires continues  $b_{kl}$  et  $c_{kl}$  par

$$b_{kl} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) \mapsto \int_{\gamma_{kl}} (\text{Tr}_{kl} \mathbf{u}_k - \text{Tr}_{kl} \mathbf{u}_l, \text{Tr}_{kl} \mathbf{v}_k - \text{Tr}_{kl} \mathbf{v}_l) d\gamma_{kl}, \quad (2.15)$$

$$c_{kl} : L^2(\gamma_{kl})^2 \times L^2(\gamma_{kl})^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\boldsymbol{\lambda}_{kl}, \mathbf{u}_{kl}) \mapsto \int_{\gamma_{kl}} \boldsymbol{\lambda}_{kl} \cdot \mathbf{u}_{kl} d\gamma_{kl}, \quad (2.16)$$

et on approxime l'espace des déplacements (2.7) par le noyau

$$\text{Ker}(\mathbf{C}_h) = \left\{ \mathbf{v}_k = ((\mathbf{v}_p)_k, \boldsymbol{\vartheta}_k) \in V_h = \prod_k V_{k,h}, c_{kl}(\boldsymbol{\mu}_{kl}, \text{Tr}_{kl} \mathbf{v}_k - \text{Tr}_{kl} \mathbf{v}_l) = 0, \forall \boldsymbol{\mu}_{kl} \in M_{kl,h}, \forall kl \right\}.$$

### 2.3.4 Problème discret pénalisé

Il s'agit de l'approche la plus simple à mettre en oeuvre, elle permet notamment de conserver la taille du système à résoudre et peut se résumer à un ajout de raideur sur la structure globale, voir par exemple [Babuška 1973, Zienkiewicz 2005]. La convergence de la solution est garantie si le facteur de pénalité augmente avec le niveau de raffinement- $h$ . Dans la pratique, lorsque ce paramètre est trop élevé, le système devient mal conditionné d'où l'utilisation d'un paramètre de valeur modérée. Ce dernier point implique qu'une erreur sur la solution existe, indépendamment du maillage considéré, ce qui en fait une méthode dite variationnellement inconsistante. La forme bilinéaire (2.15) permet d'écrire le problème pénalisé discret qui consiste à trouver  $\{\mathbf{u}_k\} \in V_h = \prod_k V_{k,h}$  tel que  $\forall \{\mathbf{v}_k\} \in V_h$

$$\sum_k a_k(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) + \sum_{k>l} \alpha_{kl} b_{kl}(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) = \sum_k L_k(\mathbf{v}_k), \quad (2.17)$$

avec  $\alpha_{kl}$  le facteur de pénalité tel que  $\alpha_{kl} \propto \frac{E}{\max_{kl} h_{kl}}$  et  $h_{kl}$  les longueurs des éléments associées à l'interface  $\gamma_{kl}$ . Le choix du facteur de pénalité est critique puisque s'il est trop faible, la contrainte ne sera pas appliquée, et s'il est trop élevé, il y aura un verrouillage numérique sur le système à résoudre.

### 2.3.5 Problème discret dualisé

Avec les notations précédentes, le problème discret abstrait consiste à trouver  $\{\mathbf{u}_k\} \in \text{Ker}(\mathbf{C}_h)$  tel que

$$\sum_k a_k(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) = \sum_k L_k(\mathbf{v}_k), \quad \forall \{\mathbf{v}_k\} \in \text{Ker}(\mathbf{C}_h). \quad (2.18)$$

On remarque que  $\text{Ker}(\mathbf{C}_h)$  est le noyau de l'application linéaire  $\mathbf{C}_h : \prod_k V_{k,h} \rightarrow (\prod_{k>l} M_{kl,h})'$  définie par (2.16). Il sera géré par les multiplicateurs de Lagrange [Babuška 1972, Brezzi 1991] comme ce qui a été développé en IGA dans le contexte de l'élasticité plane [Apostolatos 2014, Brivadis 2015]. En utilisant le théorème de l'image fermée en dimension finie,  $\text{Im}(\mathbf{C}_h^T) = \text{Ker}(\mathbf{C}_h)^\perp$  et il existe alors un champ de multiplicateurs  $\boldsymbol{\lambda} = \{\boldsymbol{\lambda}_{kl}\} = \{(\boldsymbol{\lambda}_{kl}^u, \boldsymbol{\lambda}_{kl}^\theta)\} \in (\prod_{k>l} M_{kl,h})$  tel que (2.18) peut être réécrit sous la forme : trouver  $\{\mathbf{u}_k\} \in V_h = \prod_k V_{k,h}$  et  $\{\boldsymbol{\lambda}_{kl}\} \in M_h = \prod_{k>l} M_{kl,h}$  tel que

$$\begin{aligned} \sum_k a_k(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) + \sum_{k>l} c_{kl}(\boldsymbol{\lambda}_{kl}, \text{Tr}_{kl} \mathbf{v}_k - \text{Tr}_{kl} \mathbf{v}_l) &= \sum_k L_k(\mathbf{v}_k), & \forall \{\mathbf{v}_k\} \in V_h, \\ \sum_{k>l} c_{kl}(\boldsymbol{\mu}_{kl}, \text{Tr}_{kl} \mathbf{u}_k - \text{Tr}_{kl} \mathbf{u}_l) &= 0, & \forall \{\boldsymbol{\mu}_{kl}\} \in M_h. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Pour des maillages non conformes à une interface, cette formulation est parfois appelée méthode mortier [Ben Belgacem 1997]. La formulation dualisée (2.19) est un problème de point-selle. La coercivité de la forme bilinéaire correspondante n'est plus assurée. Par conséquent, le choix d'un espace dual approprié est essentiel afin de préserver l'unicité de la solution [Ben Belgacem 1999, Brivadis 2015, Fritz 2004]. La théorie mortier classique requiert la satisfaction de deux hypothèses majeures qui seront détaillées par la suite. La première est la condition inf-sup, parfois appelée L.B.B. (Ladyženskaja-Babuška-Brezzi [Brezzi 1974, Bathe 2001]), alors que la seconde concerne l'ordre d'approximation de l'espace dual choisi.

### 2.3.6 Problème discret augmenté

Une formulation lagrangienne augmentée, parfois appelée méthode mixte ou hybride, introduit un terme primal supplémentaire dans (2.19) qui renforce localement la contrainte de continuité, voir [Glowinski 1989, Le Tallec 1995], amenant une robustesse supplémentaire à la fois au niveau de l'approximation et d'un point de vue algorithmique. Cette méthode est la combinaison de l'approche pénalisée et du problème dualisé précédent. En conservant la notation  $\alpha_{kl}$  pour le facteur de pénalité associé à l'interface  $\gamma_{kl}$ , on peut désormais écrire le problème pénalisé dualisé discret qui consiste à trouver  $\{\mathbf{u}_k\} \in V_h = \prod_k V_{k,h}$  et  $\{\boldsymbol{\lambda}_{kl}\} \in M_h = \prod_{k>l} M_{kl,h}$  tel que

$$\begin{aligned} \sum_k a_k(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) + \sum_{k>l} \alpha_{kl} b_{kl}(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) + \sum_{k>l} c_{kl} (\boldsymbol{\lambda}_{kl}, \text{Tr}_{kl} \mathbf{v}_k - \text{Tr}_{kl} \mathbf{v}_l) &= \sum_k L_k(\mathbf{v}_k), \quad \forall \{\mathbf{v}_k\} \in V_h, \\ \sum_{k>l} c_{kl} (\boldsymbol{\mu}_{kl}, \text{Tr}_{kl} \mathbf{u}_k - \text{Tr}_{kl} \mathbf{u}_l) &= 0, \quad \forall \{\boldsymbol{\mu}_{kl}\} \in M_h. \end{aligned}$$

Pour cette forme augmentée, le choix du facteur de pénalité n'est pas aussi important que dans l'approche purement pénalisée en Section 2.3.4 écrite sans les multiplicateurs de Lagrange. Les matrices de couplage ainsi que le système linéaire à résoudre, en prenant l'exemple de la Figure 2.4, sont détaillées sur l'Annexe 2.C pour les trois méthodes précédentes.

## 2.4 Analyse de convergence

### 2.4.1 Hypothèses géométriques

Pour l'analyse à venir, nous reprenons les mêmes hypothèses que [Brivadis 2015] concernant la régularité de la transformation  $\mathbf{F}_k$  permettant de passer de l'espace paramétrique à l'espace physique. On utilisera le même ordre  $p_k$  des fonctions de forme selon les deux directions paramétrique et on suppose que

**Hypothèse 2.4** (Transformation physique  $\mathbf{F}_k$ ). L'application  $\mathbf{F}_k$  sur chaque patch  $k$  est régulière, avec son inverse  $\mathbf{F}_k^{-1}$  bien défini, et dérivable par morceaux à n'importe quel ordre avec des dérivées bornées. ■

Avec la notation  $h_{\mathbf{Q}} = \text{diam}(\mathbf{Q})$  et  $h_{\mathbf{O}} = \text{diam}(\mathbf{O})$  désignant respectivement les longueurs caractéristiques du maillage dans l'espace paramétrique et physique, l'Hypothèse 2.4 affirme que pour chaque patch  $h_{\mathbf{Q}} \simeq h_{\mathbf{O}}$ . On définit  $h_k$ , la taille caractéristique du maillage associée au patch  $k$ , par

$$h_k = \max \{h_{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q} \in \widehat{\mathcal{M}}_k\} \simeq \max \{h_{\mathbf{O}}, \mathbf{O} \in \mathcal{M}_k\}.$$

Nous limiterons aussi notre analyse au cas des maillages quasi-uniformes.

**Hypothèse 2.5** (Maillage quasi-uniforme, Hypothèse 2 dans [Brivadis 2015]). On considère le maillage formé par les noeuds de partition de  $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}\}$  et  $\mathcal{H} = \{\eta_1, \dots, \eta_{m+p+1}\}$ . Alors il existe une constante  $C_{\theta,k} \geq 1$  tel que tous les éléments  $h_i^1 = \xi_{i+1}^* - \xi_i^*$  et  $h_j^2 = \eta_{j+1}^* - \eta_j^*$  du patch satisfont

$$C_{\theta,k}^{-1} \leq \frac{h_i^\delta}{h_j^{\delta'}} \leq C_{\theta,k}, \quad \forall i, \forall j, \forall (\delta, \delta') \in \{1, 2\}. \quad \blacksquare$$



L'Hypothèse simplificatrice 2.5, écartant les maillages biaisés ou à gradient de taille, permet de considérer que la taille caractéristique  $h_k$  est quasi-uniforme selon les éléments et les deux directions paramétrique  $\xi$  et  $\eta$ . Sous l'Hypothèse 2.5, impliquant un maillage globalement quasi-uniforme, il est classiquement reconnu que les NURBS présentent des propriétés d'approximation optimale tel que montré dans [Bazilevs 2006].

**Lemme 2.6** (Approximation NURBS optimale). *On considère un maillage quasi-uniforme et les entiers  $r$  et  $s$  tel que  $0 \leq r \leq s \leq p_k + 1$ . On note  $C_{shape}$  une constante dépendante de  $p_k$ ,  $C_{\theta,k}$ ,  $\mathbf{F}_k$  et des poids  $w_A$  utilisés dans la construction des fonctions NURBS. Alors,  $\forall \mathbf{v}_k = ((\mathbf{v}_p)_k, \boldsymbol{\vartheta}_k) \in H^s(\Omega_k)^2$ , on peut définir une approximation locale  $\mathbf{v}_{k,h} \in V_{k,h}$  tel que*

$$\|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{k,h}\|_{H^r(\Omega_k)^2} \leq C_{shape} h_k^{s-r} \|\mathbf{v}_k\|_{H^s(\Omega_k)^2},$$

$$\text{avec } \|\mathbf{v}_k\|_{H^s(\Omega_k)^2}^2 = \|(\mathbf{v}_p)_k\|_{H^s(\Omega_k)}^2 + \|\boldsymbol{\vartheta}_k\|_{H^s(\Omega_k)}^2. \quad \square$$

### 2.4.2 Hypothèses sur l'espace dual

Le but de cette section est de passer brièvement en revue l'analyse de convergence permettant de justifier les choix spécifiques des espaces mortier et de les adapter au contexte des coques épaisses multipatch en isogéométrie. Les résultats de convergence de la méthode mortier ont été présenté dans [Ben Belgacem 1997, Ben Belgacem 1999, Braess 1998, Braess 1999, Wohlmuth 1999, Wohlmuth 2000]. Le choix d'une stratégie d'approximation non conforme impose de décomposer l'erreur sur la solution discrète de (2.19) en une erreur d'approximation et une erreur de consistance. Une difficulté technique se pose car les traces des solutions pour des interfaces adjacentes ne sont pas indépendantes d'un patch à l'autre alors que notre stratégie de discrétisation divise la contrainte de continuité en des conditions de continuité écrites au sens faible, locales et indépendantes. Pour surmonter cette difficulté, on introduit l'espace réduit  $W_{kl,h}$  de l'espace des traces du côté esclave  $V_{s(kl),h}$  sur  $\gamma_{kl}$  s'annulant aux bords de l'interface

$$W_{kl,h} = \text{Tr}_{kl} V_{s(kl),h} \cap H_{0,0}^{1/2}(\gamma_{kl})^2$$

sur lequel nous devons vérifier la condition inf-sup locale [Malkus 1981], [Brivadis 2015, Hypothèse 4]. Dans ce contexte, l'analyse de coque multipatch en isogéométrie présente deux difficultés supplémentaires : la complexité de la forme variationnelle comprenant des degrés de liberté en rotation et le caractère non interpolant des fonctions de forme NURBS aux points singuliers. Cette dernière difficulté a déjà été rencontrée par [Brivadis 2015] et requiert d'utiliser une norme  $L^2$  pondérée sur l'interface comme dans [Braess 1999].

En notant  $C$  une constante indépendante de la taille du maillage, mais pouvant dépendre de l'ordre d'approximation  $p_k$ , on introduit nos trois principales hypothèses à vérifier par la suite pour chaque choix spécifique de l'espace des traces. La première est la condition de stabilité inf-sup standard

**Hypothèse 2.7** (Stabilité inf-sup locale). Pour tout  $l < k \in \{1, \dots, K\}$  et  $\forall \boldsymbol{\mu}_{kl} \in M_{kl,h}$  on a

$$\sup_{\mathbf{w}_k \in W_{kl,h}} \frac{\int_{\gamma_{kl}} \mathbf{w}_k \boldsymbol{\mu}_{kl} \, d\gamma_{kl}}{\|\mathbf{w}_k\|_{L^2(\gamma_{kl})^2}} \geq C \|\boldsymbol{\mu}_{kl}\|_{L^2(\gamma_{kl})^2}. \quad \blacksquare$$

Cette condition assure la continuité  $L^2$  de l'opérateur de projection orthogonale  $\mathbf{\Pi}_{kl,h}$  de  $M_{kl,h}$  sur  $W_{kl,h}$  défini comme le point le plus proche  $\mathbf{\Pi}_{kl,h}(\mathbf{v}) \in W_{kl,h}$  tel que

$$\int_{\gamma_{kl}} \boldsymbol{\mu}_{kl,h} \mathbf{\Pi}_{kl,h}(\mathbf{v}) \, d\gamma_{kl} = \int_{\gamma_{kl}} \boldsymbol{\mu}_{kl,h} \mathbf{v} \, d\gamma_{kl}, \quad \forall \boldsymbol{\mu}_{kl,h} \in M_{kl,h}, \mathbf{\Pi}_{kl,h}(\mathbf{v}) \in W_{kl,h}.$$

**Lemme 2.8** (Stabilité  $L^2$  de l'opérateur de projection à l'interface [Braess 1999]). *Sous l'Hypothèse 2.7, nous avons*

$$\|\mathbf{\Pi}_{kl,h}(\mathbf{v})\|_{L^2(\gamma_{kl})} \leq \frac{1}{C} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\gamma_{kl})}, \quad \forall \mathbf{v} \in L^2(\gamma_{kl}). \quad \square$$

**Preuve.** On note  $(\cdot, \cdot)$  et  $\|\cdot\|$  le produit scalaire dans  $L^2$  et la norme sur l'interface  $\gamma_{kl}$ . La projection  $\mathbf{w} = \mathbf{\Pi}_{kl,h}(\mathbf{v})$  est définie par

$$\min_{\hat{\mathbf{w}} \in W} \|\hat{\mathbf{w}} - \mathbf{v}\|^2 \quad \text{sous la contrainte} \quad (\hat{\mathbf{w}}, \boldsymbol{\mu}) = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}), \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in M.$$

Il s'agit d'un problème de minimisation coercive sur un sous-espace fermé de  $W$  et qui, par conséquent, possède une solution unique. Pour montrer que l'espace

$$W_V = \{\hat{\mathbf{w}} \in W, (\hat{\mathbf{w}}, \boldsymbol{\mu}) = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}), \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in M\}$$

n'est pas vide, il suffit de remarquer que l'on a

$$W_V = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{\Pi}_M(\mathbf{v}))$$

où  $\mathbf{\Pi}_M(\mathbf{v})$  dénote la projection  $L^2$  orthogonale sur  $M$  et où  $\mathbf{B}$  est l'application de  $W$  vers  $M'$  définie par

$$\langle \mathbf{B}\mathbf{w}, \boldsymbol{\mu} \rangle = (\mathbf{w}, \boldsymbol{\mu}), \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in M.$$

D'après la condition inf-sup, l'image de  $\mathbf{B}$  est d'orthogonal nul, donc  $\mathbf{B}$  est surjectif car on est ici en dimension finie, donc  $W_V$  n'est pas vide. Les conditions d'optimalité d'Euler-Lagrange correspondantes sont

$$\begin{aligned} (\mathbf{w} - \mathbf{v}, \hat{\mathbf{w}}) + (\hat{\mathbf{w}}, \boldsymbol{\lambda}) &= \mathbf{0}, \quad \forall \hat{\mathbf{w}} \in W, \mathbf{w} \in W, \\ (\mathbf{w}, \boldsymbol{\mu}) &= (\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}), \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in M, \boldsymbol{\lambda} \in M. \end{aligned}$$

Sous l'Hypothèse 2.7 concernant la stabilité inf-sup, il existe un vecteur  $\mathbf{w}_\lambda \in W$  tel que  $(\mathbf{w}_\lambda, \boldsymbol{\lambda}) \geq C \|\mathbf{w}_\lambda\| \|\boldsymbol{\lambda}\|$ . En utilisant ce vecteur en tant que fonction test dans la première égalité on a

$$\|\mathbf{w}_\lambda\| \|\boldsymbol{\lambda}\| \leq \frac{1}{C} (\mathbf{w}_\lambda, \boldsymbol{\lambda}) = -\frac{1}{C} (\mathbf{w} - \mathbf{v}, \mathbf{w}_\lambda) \leq \frac{1}{C} \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| \|\mathbf{w}_\lambda\|$$

c'est-à-dire après division

$$\|\boldsymbol{\lambda}\| \leq \frac{1}{C} \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|.$$

En insérant ce résultat dans la première égalité écrite avec  $\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{w}$  et dans la seconde égalité écrite avec  $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\lambda}$ , on obtient

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|^2 = -(\mathbf{w} - \mathbf{v}, \mathbf{v}) - (\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda}) = -(\mathbf{w} - \mathbf{v}, \mathbf{v}) - (\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) \leq \|\mathbf{v}\| (\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| + \|\boldsymbol{\lambda}\|) \leq \left(\frac{1}{C} + 1\right) \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|$$

d'où, après division,  $\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|$  est borné par  $\|\mathbf{v}\|$  ce qui implique le résultat attendu suite à l'application de l'inégalité triangulaire. ■

L'hypothèse suivante assure que les forces d'interfaces peuvent être approximées de manière optimale avec notre choix d'espace pour les multiplicateurs de Lagrange aux interfaces [Brivadis 2015, Assumption 5].

**Hypothèse 2.9** (Approximation d'interface optimale). Pour tout  $l < k \in \{1, \dots, K\}$ , il existe un ordre d'approximation  $\eta(kl)$  tel que  $\forall \boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}^u, \boldsymbol{\lambda}^\theta) \in H^{\eta(kl)}(\gamma_{kl})^2$  on a

$$\inf_{\boldsymbol{\mu}_{kl} \in M_{kl,h}} \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu}_{kl}\|_{L^2(\gamma_{kl})^2} \leq Ch_{kl}^{\eta(kl)} \|\boldsymbol{\lambda}\|_{H^{\eta(kl)}(\gamma_{kl})^2},$$

avec  $\|\boldsymbol{\lambda}\|_{H^{\eta(kl)}(\gamma_{kl})^2}^2 = \|\boldsymbol{\lambda}^u\|_{H^{\eta(kl)}(\gamma_{kl})}^2 + \|\boldsymbol{\lambda}^\theta\|_{H^{\eta(kl)}(\gamma_{kl})}^2$ . ■

La dernière hypothèse garantie que la condition de continuité au sens faible implique la continuité forte des mouvements de corps rigide. Elle est satisfaite, par exemple, dès que  $M_{kl,h}$  contient des fonctions linéaires ou des fonctions bulle régulières positives.

**Hypothèse 2.10** (Espace dual grossier pour les mouvements de corps rigide). Pour toute interface  $\gamma_{kl}$ ,  $l < k \in \{1, \dots, K\}$ , il existe un sous-ensemble  $M_{kl,0} \subset M_{kl,h}$  indépendant de  $h_k$  tel que si  $\mathbf{v}_k$  et  $\mathbf{v}_l$  sont des mouvements de corps rigide respectivement sur  $\Omega_k$  et  $\Omega_l$  satisfaisant

$$\int_{\gamma_{kl}} \boldsymbol{\mu}_{kl}(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_l) d\gamma_{kl} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\mu}_{kl} \in M_{kl,0},$$

alors  $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_l$  sur  $\gamma_{kl}$ . ■

## 2.4.3 Résultats de convergence

### 2.4.3.1 Équivalence des normes

Dans cette partie, notre but est de prouver l'équivalence entre la norme de l'énergie et la norme brisée de  $H^1$  sur

$$\text{Ker}(\mathbf{C}_0) = \{\mathbf{v}_k = ((\mathbf{v}_p)_k, \boldsymbol{\vartheta}_k) \in V, c_{kl}(\boldsymbol{\mu}_{kl}, \text{Tr}_{kl}\mathbf{v}_k - \text{Tr}_{kl}\mathbf{v}_l) = 0, \forall \boldsymbol{\mu}_{kl} \in M_{kl,0}, \forall kl\}.$$

**Proposition 2.11.** *Sous l'Hypothèse 2.10 et si les conditions limites globales sont telles qu'il n'existe pas de mouvements de corps rigides globaux non nuls sur  $H_d^1(\Omega)$ , la norme de l'énergie est équivalente à la norme brisée de  $H^1$  sur  $\text{Ker}(\mathbf{C}_0)$*

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \sum_k a_k(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k) \simeq \|\mathbf{v}\|_V^2 = \sum_k \|\mathbf{v}_k\|_{H^1(\Omega_k)}^2, \quad \forall \mathbf{v} \in \text{Ker}(\mathbf{C}_0),$$

la constante d'équivalence étant dépendante de l'épaisseur. □

**Preuve.** La preuve est adaptée de la preuve par contradiction dans [Chapelle 2011]. Elle est donnée afin d'illustrer le rôle de l'espace dual grossier. Si l'équivalence était fautive, il existerait une suite  $(\mathbf{v}^n)$  dans  $\text{Ker}(\mathbf{C}_0)$  tel que

$$\begin{cases} \sum_k a_k(\mathbf{v}_k^n, \mathbf{v}_k^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \\ \sum_k \|\mathbf{v}_k^n\|_{H^1(\Omega_k)}^2 = 1. \end{cases}$$

Avec la seconde condition, il existerait une sous-suite toujours notée  $(\mathbf{v}_k^n)$  qui convergerait au sens faible dans  $H^1(\Omega_k)^2$  et donc au sens fort dans  $L^2(\Omega_k)^2$ . La convergence vers zéro en norme de l'énergie et la propriété d'ellipticité  $H^1$  locale permettent d'écrire

$$a_k(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k) + \|\mathbf{v}_k\|_{L^2(\Omega_k)^2}^2 \geq c\|\mathbf{v}_k\|_{H^1(\Omega_k)^2}^2,$$

prouvé dans [Chapelle 2011, Proposition 4.3.2], la sous-suite est également une suite de Cauchy pour la norme  $H^1$  brisée. Par conséquent, la sous-suite  $(\mathbf{v}_k^n)$  converge vers  $\mathbf{v}^\infty$  dans  $\text{Ker}(\mathbf{C}^0)$  et par construction on a

$$\begin{cases} \sum_k a_k(\mathbf{v}^\infty, \mathbf{v}^\infty) = 0, \\ \sum_k \|\mathbf{v}_k^\infty\|_{H^1(\Omega_k)^2}^2 = 1. \end{cases}$$

La limite  $\mathbf{v}^\infty$  est donc un mouvement de corps rigide local, continu aux interfaces sous l'Hypothèse 2.10. Par conséquent il s'agit d'un mouvement de corps rigide global dans  $H_d^1(\Omega)$ , il doit donc être nul, ce qui est en contradiction avec nos affirmations. On souligne que cette preuve ne renseigne aucun indice sur la façon dont la constante d'équivalence varie en fonction du nombre de domaines, leurs tailles ou leurs formes. ■

### 2.4.3.2 Erreur de consistance

**Proposition 2.12** (Résultat de consistance). *Sous l'Hypothèse 2.9, toute solution  $\mathbf{u}$  de (2.5) appartenant à  $H^{r+1}(\Omega)^2$  avec  $1/2 < r \leq \min_{kl}(\eta(kl) + 1/2)$  satisfait*

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \text{Ker}(\mathbf{C}_h)} \frac{|a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - L(\mathbf{v}_h)|}{\|\mathbf{v}_h\|_V} \leq C \sqrt{\sum_k h_k^{2r} \|\mathbf{u}_k\|_{H^{r+1}(\Omega_k)^2}^2}. \quad \square$$

**Preuve.** Il s'agit d'une simple adaptation de [Ben Belgacem 1999] à une formulation variationnelle d'un problème de coque épaisse. Soit  $\boldsymbol{\nu}_k$  la normale sortante à la frontière  $\partial\Omega_k$ , à ne pas confondre avec la normale associée au modèle de coque. Soit  $\mathbf{P}$  la projection sur la surface moyenne  $\Omega$ ,  $\frac{|dS|}{|da|}$  le ratio entre l'aire d'un élément  $dS$  de l'espace tangent à la distance  $z$  de la surface moyenne et son aire  $da$  projetée sur la surface moyenne,  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{M}$  sont les tensions et moments généralisés définis par

$$\mathbf{N} = \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}^t \frac{|dS|}{|da|} dz, \quad \mathbf{M} = \int_{-t/2}^{t/2} z \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}^t \frac{|dS|}{|da|} dz,$$

et  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{r}$  correspondent respectivement aux vecteurs des efforts de cisaillement du premier et second ordre tel que

$$\mathbf{q} = \int_{-t/2}^{t/2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \frac{|dS|}{|da|} dz, \quad \mathbf{r} = \int_{-t/2}^{t/2} z \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \frac{|dS|}{|da|} dz.$$

Sous l'hypothèse des contraintes planes, ces vecteurs n'ont pas de composante selon  $\mathbf{g}_3 = \mathbf{n}$ . On a donc

$$\int_{-t/2}^{t/2} \boldsymbol{\sigma} \frac{|dS|}{|da|} dz = \mathbf{N} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{q} + \mathbf{q} \otimes \mathbf{n}$$

et

$$\int_{-t/2}^{t/2} z \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{|dS|}{|da|} dz = \mathbf{M} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{r} \otimes \mathbf{n}.$$

Par construction du champ de déplacement  $(\mathbf{v}_q)_k = ((\mathbf{v}_p)_k + z \boldsymbol{\vartheta}_k \times \mathbf{n})(\mathbf{x}_p)$  dont le gradient est

$$\nabla(\mathbf{v}_q)_k = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_p} ((\mathbf{v}_p)_k + z \boldsymbol{\vartheta}_k \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{P} + \boldsymbol{\vartheta}_k \times \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$$

la forme variationnelle locale se note

$$\begin{aligned} a_k(\mathbf{u}, \mathbf{v}_k) &= \int_{\text{Vol}_k} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_k) d\text{Vol}_k \\ &= \int_{\Omega_k} \int_{-t/2}^{t/2} \boldsymbol{\sigma} : \nabla(\mathbf{v}_q)_k \frac{|dS|}{|da|} dz d\Omega_k \\ &= \int_{\Omega_k} \left( (\mathbf{N} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{q}) : \frac{\partial(\mathbf{v}_p)_k}{\partial \mathbf{x}_p} + (\mathbf{M} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{r}) : \frac{\partial(\boldsymbol{\vartheta}_k \times \mathbf{n})}{\partial \mathbf{x}_p} + \mathbf{q} \cdot (\boldsymbol{\vartheta}_k \times \mathbf{n}) \right) d\Omega_k \\ &= - \int_{\Omega_k} \left( (\text{div}_\Omega(\mathbf{N} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{q}) - \mathbf{N} : \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{x}_p}) \cdot (\mathbf{v}_p)_k d\Omega_k \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega_k} \mathbf{n} \times (\text{div}_\Omega(\mathbf{M} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{r}) - \mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\vartheta}_k \right) d\Omega_k \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_k} \left( (\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\nu}_k + \mathbf{n} \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nu}_k) \cdot (\mathbf{v}_p)_k + (\mathbf{n} \times \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\nu}_k) \cdot \boldsymbol{\vartheta}_k \right) d\partial\Omega_k. \end{aligned}$$

La présence de la seconde forme caractéristique de la surface  $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{x}_p}$  après la divergence dans l'expression précédente correspond à la contribution de la variation spatiale de la fonction test pour une composante normale fixée  $(\mathbf{v}_p)_k \cdot \mathbf{n}$ .

Sachant que la solution  $\mathbf{u}_k \in H^{r+1}(\Omega_k)^2$  satisfait l'équation d'équilibre locale, les deux intégrales sur  $\Omega_k$  s'annulent pour toute fonction test  $(\mathbf{v}_p, \boldsymbol{\vartheta})$  de  $H^1(\Omega_k) \times H^1(\Omega_k)$  et nous avons donc

$$a_k(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - L_k(\mathbf{v}_h) = \sum_l \int_{\gamma_{kl}} \boldsymbol{\lambda}_k \cdot \mathbf{v}_{k,h} d\gamma_{kl},$$

avec la notation  $\boldsymbol{\lambda}_k = \{\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\nu}_k + \mathbf{n} \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nu}_k, \mathbf{n} \times \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\nu}_k\}$ . Ainsi, après sommation sur les différents patches, on obtient

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - L(\mathbf{v}_h) = \sum_{k>l} \int_{\gamma_{kl}} \boldsymbol{\lambda}_k \cdot (\mathbf{v}_{k,h} - \mathbf{v}_{l,h}) d\gamma_{kl}.$$

Par construction de  $\mathbf{v}_h = \{(\mathbf{v}_p)_h, \boldsymbol{\vartheta}_h\} \in \text{Ker}(\mathbf{C}_h)$ , les sauts des déplacements aux interfaces sont orthogonaux aux espaces duaux d'interface et, ainsi, en introduisant successivement la projection  $L^2$   $\boldsymbol{\mu}_{kl,h}$  de  $\boldsymbol{\lambda}_k$  sur  $M_{kl,h}$  et un élément arbitraire  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{kl,h}$  dans  $M_{kl,h}$ , on obtient

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - L(\mathbf{v}_h) = \sum_{k>l} \int_{\gamma_{kl}} (\boldsymbol{\lambda}_k - \boldsymbol{\mu}_{kl,h}) \cdot (\mathbf{v}_{k,h} - \mathbf{v}_{l,h} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{kl,h}) d\gamma_{kl}.$$

Sous l'Hypothèse 2.9, nous avons d'une part (en supposant que  $k$  est le côté esclave de l'interface  $kl$ )

$$\|\boldsymbol{\lambda}_k - \boldsymbol{\mu}_{kl,h}\|_{L^2(\gamma_{kl})}^2 = \inf_{\hat{\boldsymbol{\mu}}_{kl,h} \in M_{kl,h}} \|\boldsymbol{\lambda}_k - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{kl,h}\|_{L^2(\gamma_{kl})}^2 \leq Ch_{kl}^s \|\boldsymbol{\lambda}_k\|_{H^s(\gamma_{kl})}^2 \leq Ch_k^s \|\mathbf{u}_k\|_{H^{s+3/2}(\Omega_k)}^2,$$

pour tout  $0 < s \leq \eta(kl)$  et d'autre part

$$\begin{aligned} \inf_{\hat{\boldsymbol{\mu}}_{kl,h} \in M_{kl,h}} \|\mathbf{v}_{k,h} - \mathbf{v}_{l,h} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{kl,h}\|_{L^2(\gamma_{kl})}^2 &\leq \inf_{\hat{\boldsymbol{\mu}}_{kl,h} \in M_{kl,h}} \|\mathbf{v}_{k,h} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{kl,h}\|_{L^2(\gamma_{kl})}^2 \\ &\quad + \inf_{\hat{\boldsymbol{\mu}}_{kl,h} \in M_{kl,h}} \|\mathbf{v}_{l,h} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{kl,h}\|_{L^2(\gamma_{kl})}^2 \\ &\leq C\sqrt{h_{kl}}(\|\mathbf{v}_{k,h}\|_{H^{1/2}(\gamma_{kl})}^2 + \|\mathbf{v}_{l,h}\|_{H^{1/2}(\gamma_{kl})}^2). \end{aligned}$$

Au final, nous obtenons après sommation et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - L(\mathbf{v}_h) &\leq \sum_{kl} Ch_k^r \|\mathbf{u}\|_{H^{r+1}(\Omega_k)}^2 (\|\mathbf{v}_{k,h}\|_{H^1(\Omega_k)}^2 + \|\mathbf{v}_{l,h}\|_{H^1(\Omega_k)}^2) \\ &\leq C \sqrt{\sum_k h_k^{2r} \|\mathbf{u}\|_{H^{r+1}(\Omega_k)}^2} \sqrt{\sum_k \|\mathbf{v}_{k,h}\|_{H^1(\Omega_k)}^2} \end{aligned}$$

avec  $1/2 < r \leq \min_{kl}(\eta(kl) + 1/2)$ . ■

### 2.4.3.3 Erreur d'approximation

Soit  $\mathbf{I}_h = \{\mathbf{I}_{k,h}\}$  l'approximation optimale utilisée dans le Lemme 2.6. Soit  $\mathbf{E}_{kl,h} : W_{kl,h} \rightarrow V_{s(kl),h}$  l'extension triviale obtenue en prenant une valeur nulle sur chaque point de contrôle du patch esclave qui n'est pas sur  $\gamma_{kl}$ . En s'inspirant de [Ben Belgacem 1999] et avec la notation de [Melenk 2012], on introduit le projecteur local  $\mathbf{P}_h$  défini par

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_h : H^{r+1}(\Omega)^2 &\rightarrow \text{Ker}(\mathbf{C}_h), \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{I}_h(\mathbf{v}) - \sum_{k>l} \mathbf{E}_{kl,h} \circ \mathbf{\Pi}_{kl,h} [\mathbf{I}_h(\mathbf{v})]. \end{aligned}$$

Le projecteur local  $\mathbf{\Pi}_{kl,h}$  permet de déplacer tous les sauts aux interfaces en dehors des points singuliers et donc d'effectuer une correction locale sur chaque interface. Sachant que  $\mathbf{\Pi}_{kl,h}$  est orthogonal à  $M_{kl,h}$ , on observe que cette projection est bien dans  $\text{Ker}(\mathbf{C}_h)$  sachant que l'on a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{kl}} \boldsymbol{\mu}_{kl,h} [\mathbf{P}_h(\mathbf{v})] \, d\gamma_{kl} &= \int_{\gamma_{kl}} \boldsymbol{\mu}_{kl,h} [\mathbf{I}_h(\mathbf{v})] - \boldsymbol{\mu}_{kl,h} \mathbf{\Pi}_{kl,h} [\mathbf{I}_h(\mathbf{v})] \, d\gamma_{kl} \\ &= \int_{\gamma_{kl}} \boldsymbol{\mu}_{kl,h} ([\mathbf{I}_h(\mathbf{v})] - [\mathbf{I}_h(\mathbf{v})]) \, d\gamma_{kl} = 0. \end{aligned}$$

Nous obtenons alors le résultat d'approximation suivant.

**Proposition 2.13** (Résultat d'approximation). *Sous l'Hypothèse 2.7 de 2.9 et si la taille du maillage est uniforme entre les patchs adjacents, toute solution  $\mathbf{u}$  de (2.5) appartenant à  $H^{r+1}(\Omega)^2$  avec  $1/2 < r \leq \min_{k,kl}(p_k, \eta(kl) + 1/2)$  satisfait*

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in \text{Ker}(\mathbf{C}_h)} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V \leq C \sqrt{\sum_k h_k^{2r} \|\mathbf{u}\|_{H^{r+1}(\Omega_k)}^2}. \quad \square$$

**Preuve.** Par construction de  $\mathbf{P}_h(\mathbf{u}) \in \text{Ker}(\mathbf{C}_h)$ , on a

$$\begin{aligned} \inf_{\mathbf{v}_h \in \text{Ker}(\mathbf{C}_h)} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{P}_h(\mathbf{u})\|_V, \\ &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{I}_h(\mathbf{u})\|_V + \sum_{k>l} \|\mathbf{E}_{kl,h} \circ \mathbf{\Pi}_{kl,h} [\mathbf{I}_h(\mathbf{u})]\|_V. \end{aligned}$$

Le dernier terme de l'inégalité précédente peut être estimé de manière semblable à [Braess 1999, Melenk 2012]. On propose l'estimation de  $\|\mathbf{E}_{kl,h} \circ \mathbf{\Pi}_{kl,h} [\mathbf{I}_h(\mathbf{u})]\|_{\Pi H^1(\Omega_k)^2}$  avec  $\mathbf{E}_{kl,h}$  l'extension triviale d'un élément de  $W_{kl,h}$ . On note  $\tilde{\mathbf{Q}}$  et  $\mathbf{Q}$  les éléments fins quadrangulaires respectivement dans l'espace parent et physique. Sachant que toutes les normes sont équivalentes sur l'élément de référence  $\tilde{\mathbf{Q}}$ , on a

$$\|\tilde{\nabla} \mathbf{E}_{kl,h} \circ \mathbf{\Pi}_{kl,h} [\mathbf{I}_h(\mathbf{u})]\|_{L^2(\tilde{\mathbf{Q}})^2}^2 \leq C \|\mathbf{\Pi}_{kl,h} [\mathbf{I}_h(\mathbf{u})]\|_{L^2(\partial\tilde{\mathbf{Q}} \cap \tilde{\gamma}_{kl})}^2,$$

avec  $\tilde{\gamma}_{kl}$  l'interface  $kl$  transportée dans l'espace parent. Après changement de variable, sachant  $\nabla \mathbf{E}_{kl,h} = \frac{1}{h_k} \tilde{\nabla} \mathbf{E}_{kl,h}$  et  $d\mathbf{Q} = h_k^2 d\tilde{\mathbf{Q}}$ , on écrit

$$\|\tilde{\nabla} \mathbf{E}_{kl,h} \circ \mathbf{\Pi}_{kl,h} [\mathbf{I}_h(\mathbf{u})]\|_{L^2(\tilde{\mathbf{Q}})^2}^2 \simeq \|\nabla \mathbf{E}_{kl,h} \circ \mathbf{\Pi}_{kl,h} [\mathbf{I}_h(\mathbf{u})]\|_{L^2(\mathbf{Q})}^2,$$

ce qui amène

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{E}_{kl,h} \circ \mathbf{\Pi}_{kl,h} [\mathbf{I}_h(\mathbf{u})]\|_{L^2(\mathbf{Q})}^2 &\leq C \|\mathbf{\Pi}_{kl,h} [\mathbf{I}_h(\mathbf{u})]\|_{L^2(\partial\tilde{\mathbf{Q}} \cap \tilde{\gamma}_{kl})}^2 \\ &\leq \frac{C}{h_k} \|\mathbf{\Pi}_{kl,h} [\mathbf{I}_h(\mathbf{u})]\|_{L^2(\partial\mathbf{Q} \cap \gamma_{kl})}^2. \end{aligned}$$

Après sommation et en utilisant la continuité  $L^2$  du projecteur  $\mathbf{\Pi}_{kl,h}$  (Lemme 2.8), cela donne

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}_{kl,h} \circ \mathbf{\Pi}_{kl,h} [\mathbf{I}_h(\mathbf{u})]\|_{H^1(\Omega_k)^2} &\leq \frac{C}{\sqrt{h_k}} \|\mathbf{I}_h(\mathbf{u})\|_{L^2(\gamma_{kl})} \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{h_k}} \|\mathbf{u} - \mathbf{I}_h(\mathbf{u})\|_{L^2(\gamma_{kl})} \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{h_k}} \left( \|\mathbf{u}_k - \mathbf{I}_h(\mathbf{u}_k)\|_{L^2(\gamma_{kl})} + \|\mathbf{u}_l - \mathbf{I}_h(\mathbf{u}_l)\|_{L^2(\gamma_{kl})} \right). \end{aligned}$$

On peut alors conclure par un argument d'échelle classique en FEA, bien qu'il puisse exister une preuve plus précise pour des splines. Comme dans [Braess 1999], on s'intéresse à l'erreur d'approximation d'un élément  $\gamma^e$  du maillage de  $\gamma_{kl}$ . Par construction, une fois revenu dans l'espace paramétrique du patch  $k$  correctement déformé tel que l'image  $\hat{\gamma}$  de  $\gamma^e$  soit de longueur unitaire, la transformation  $\hat{\mathbf{I}}_h(\hat{\mathbf{v}}) - \hat{\mathbf{v}}$  utilisée dans le Lemme 2.6 est continue de  $L^2(\hat{Q})$  vers  $L^2(\hat{\gamma})$  et donc de  $H^{r+1}(\hat{Q})$  sur  $L^2(\hat{\gamma})$ , où  $\hat{Q}$  est un domaine indépendant avec un maillage fixe correspondant à l'union de tous les éléments du maillage dans l'espace paramétrique qui sont utilisés pour la construction de  $\hat{\mathbf{I}}_h(\hat{\mathbf{v}})$ . On observe également que l'approximation est exacte pour des polynômes de degré  $r$  sur  $\hat{Q}$

$$\hat{\mathbf{I}}_h(\hat{\mathbf{q}}) - \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \forall \hat{\mathbf{q}} \in P^r(\hat{Q}).$$

Par continuité de la transformation, il existe une constante indépendante du maillage tel que

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{I}}_h(\hat{\mathbf{v}}) - \hat{\mathbf{v}}\|_{L^2(\hat{\gamma})} &= \|\hat{\mathbf{I}}_h(\hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{q}}) - (\hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{q}})\|_{L^2(\hat{\gamma})} \leq \inf_{\mathbf{q} \in P^r(\hat{Q})} \|\hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{q}}\|_{H^{r+1}(\hat{Q})} \\ &\leq C|\hat{\mathbf{v}}|_{H^{r+1}(\hat{Q})}, \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in H^{r+1}(\hat{Q}). \end{aligned}$$

En revenant à l'espace physique, avec la régularité de  $\mathbf{F}_k$ , la norme de  $L^2(\gamma^e)$  évolue en  $\sqrt{h_k}$  alors que la semi-norme de  $H^{r+1}(Q)$  évolue en  $h_k^{-r}$ , on obtient

$$\|\mathbf{v}_k - \mathbf{I}_h(\mathbf{v}_k)\|_{L^2(\gamma^e)}^2 \leq C^2 h_k^{2r+1} \sum_{Q \subset Q^e} |\mathbf{v}|_{H^{r+1}(Q)}^2.$$

Par sommation, et sachant qu'un élément  $Q$  donné ne sera concerné qu'un  $\mathcal{O}(p)$  nombre de fois pour construire l'espace local d'approximation sur les segments  $\gamma^e$ , on écrit

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_k - \mathbf{I}_h(\mathbf{v}_k)\|_{L^2(\gamma_{kl})}^2 &\leq \sum_e \|\mathbf{v}_k - \mathbf{I}_h(\mathbf{v}_k)\|_{L^2(\gamma^e)}^2 \\ &\leq C h_k^{2r+1} \sum_e \sum_{Q \subset Q^e} |\mathbf{v}|_{H^{r+1}(Q)}^2 \\ &\leq C h_k^{2r+1} |\mathbf{v}|_{H^{r+1}(\Omega_k)}^2. \end{aligned}$$

En utilisant cette inégalité dans l'estimation précédente on obtient

$$\|\mathbf{E}_{kl,h} \circ \mathbf{\Pi}_{kl,h} [\mathbf{I}_h(\mathbf{u})]\|_{H^1(\Omega_k)} \leq \frac{C}{\sqrt{h_k}} \left( h_k^{r+1/2} \|\mathbf{u}_k\|_{H^{r+1}(\Omega_k)} + h_l^{r+1/2} \|\mathbf{u}_l\|_{H^{r+1}(\Omega_l)} \right)$$

qui, combinée au Lemme 2.6, amène le résultat attendu. ■

#### 2.4.3.4 Résultat de convergence

Nous pouvons maintenant estimer l'erreur entre la solution continue et discrète du problème multipatch en utilisant l'approche de [Brivadis 2015, Théorème 6].

**Théorème 2.14** (Résultat de convergence). *Sous l'Hypothèse 2.4 et 2.10 et si la taille du maillage est uniforme entre les patchs adjacents, l'erreur entre la solution  $\mathbf{u}$  de (2.5) et la solution discrète  $\mathbf{u}_h \in \text{Ker}(\mathbf{C}_h)$  de (2.19) est bornée par*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V^2 \leq C \sum_k h_k^{2r} \|\mathbf{u}\|_{H^{r+1}(\Omega_k)}^2,$$

avec  $\|\mathbf{u}\|_{H^{r+1}(\Omega_k)}^2 = \|\mathbf{u}_p\|_{H^{r+1}(\Omega_k)}^2 + \|\boldsymbol{\theta}\|_{H^{r+1}(\Omega_k)}^2$ . □

**Preuve.** La preuve consiste à appliquer directement le second lemme de Strang. Avec l'équivalence entre la norme de l'énergie et la norme brisée  $V$ , nous obtenons

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V \leq C_1 \left( \inf_{\mathbf{v}_h \in \text{Ker}(\mathbf{C}_h)} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V + \sup_{\mathbf{w}_h \in \text{Ker}(\mathbf{C}_h)} \frac{|a(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) - L(\mathbf{w}_h)|}{\|\mathbf{w}_h\|_V} \right),$$

et le résultat attendu est obtenu avec le résultat de consistance de la Proposition 2.12 et le résultat d'approximation de la Proposition 2.13. ■



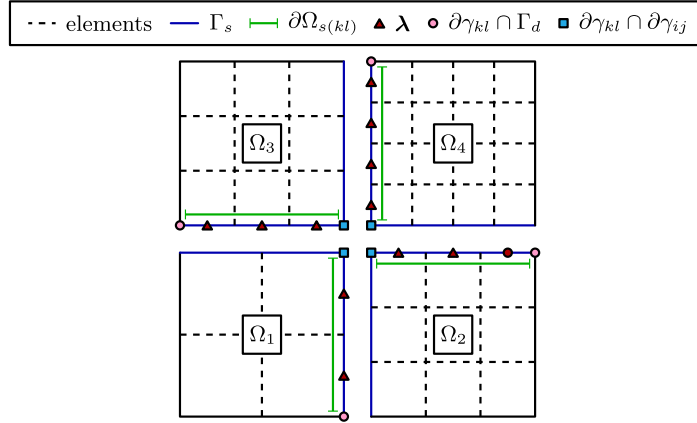


FIGURE 2.6 – Espace dual quadratique pour un problème constitué de quatre patches ayant les bords extérieurs encastés. Les noeuds duaux sont construits côté esclave ( $\Omega_1$  pour  $\gamma_{21}$ ,  $\Omega_2$  pour  $\gamma_{42}$ ,  $\Omega_3$  pour  $\gamma_{31}$  et  $\Omega_4$  pour  $\gamma_{43}$ ). Avant correction, quatre noeuds duaux sont présents au centre.

#### 2.4.4 Construction de l'espace dual

Le choix le plus simple et naturel consiste à utiliser les mêmes fonctions de base sur chaque interface  $\gamma_{kl}$  pour les variables primales (côté esclave) et duales (couplage  $p/p$ ). Mais de part la présence de points singuliers, la condition de stabilité 2.7 est violée à cause d'un excès local de variables duales en ces points (voir Figure 2.6). De plus, le problème de coins mortiers est particulièrement difficile en isogéométrie pour des situations de non-conformité géométrique, sachant que l'IGA n'est pas interpolante aux points de contrôle intérieurs, et donc la valeur du déplacement aux coins mortiers n'est pas forcément définie de manière unique.

Deux solutions sont envisageables pour surmonter cette difficulté [Ben Belgacem 1997]. La première est de grossir le maillage de l'espace dual près des points singuliers. La seconde méthode, valable pour des situations de conformité géométrique esclave, est de réduire localement l'ordre d'approximation des éléments finis duaux qui sont adjacents aux points singuliers tel que mis en place dans [Brivadis 2015] pour des problèmes 3D. Cette diminution locale de la dimension de l'espace dual nécessite d'utiliser une base B-spline modifiée  $\tilde{N}_i^p$  donnée par [Brivadis 2015]

$$\tilde{N}_i^p(\xi) = \begin{cases} N_i^p(\xi) + \alpha_i N_1^p(\xi), & \forall i \in \{2, \dots, p+1\}, \\ N_i^p(\xi), & \forall i \in \{p+2, \dots, n-p-1\}, \\ N_i^p(\xi) + \beta_i N_n^p(\xi), & \forall i \in \{n-p, \dots, n-1\}, \end{cases}$$

pour laquelle les coefficients  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont construits afin d'obtenir un ordre d'approximation  $p-1$  et la partition de l'unité autour des points singuliers. Pour des maillages quasi-uniformes (Hypothèse 2.5), ces coefficients sont bornés et il est possible de montrer que l'hypothèse inf-sup 2.7 et la condition d'approximation 2.9 sont vérifiées dans ce cas [Brivadis 2015].

L'identification des éléments adjacents aux points singuliers et la construction des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  peut néanmoins être fastidieuse en pratique tel qu'illustré dans la Section 2.6.6 sur

un exemple typique. Par conséquent, nous proposons une variante plus simple adaptée aux géométries complexes rencontrées dans l'industrie, pour laquelle nous supprimons simplement tous les degrés de liberté duaux aux coins du patch esclave (Figure 2.7)

$$M_{kl}^{\text{ind}} = \left\{ \mathbf{w} \in \text{Tr}_{kl} V_{s(kl),h}, \mathbf{w}_A = \mathbf{0}, \text{ à tous les coins } A \in \Omega_{s(kl)} \right\}.$$

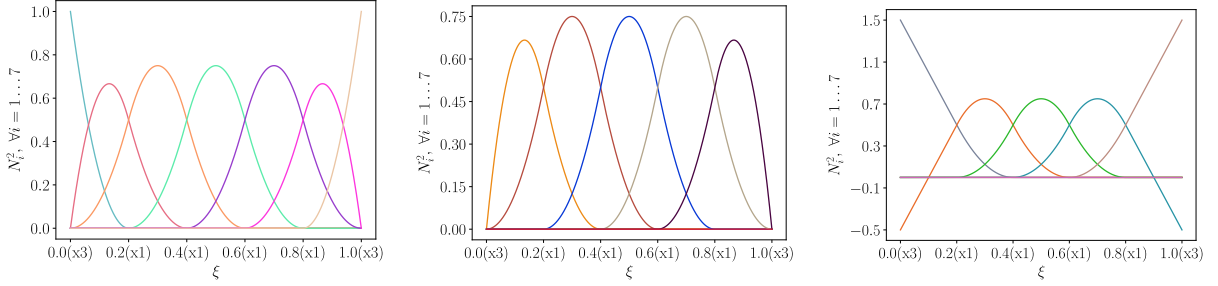


FIGURE 2.7 – Comparaison des bases pour l'espace dual. Gauche : originale. Centre : simplifiée  $M^{\text{ind}} = \text{span}_{i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket} \{N_i^p(\xi)\}$ . Droite : optimale  $M^{\text{opt}} = \text{span}_{i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket} \{\tilde{N}_i^p(\xi)\}$ . Éléments quadratiques  $p = 2$  avec sept fonctions de forme  $n = 7$ . Pour la variante simplifiée, les multiplicateurs sont nuls aux points singuliers, ce qui simplifie la vérification du inf-sup au prix d'une perte de précision sur les multiplicateurs d'interface. Cette dégradation sera atténuée en choisissant le lagrangien augmenté.

Pour la situation de conformité géométrique esclave, où nous avons  $M_{kl,h}^{\text{ind}} = W_{kl,h}$ , ce choix trivial satisfait l'hypothèse inf-sup 2.7 au prix d'une perte d'optimalité dans l'approximation des multiplicateurs de Lagrange, tel que précisé ci-dessous.

**Proposition 2.15.** *Pour des partitions respectant la conformité géométrique esclave, le choix trivial  $M_{kl,h}^{\text{ind}} = W_{kl,h}$  satisfait*

$$\inf_{\boldsymbol{\mu}_{kl} \in M_{kl,h}^{\text{ind}}} \sup_{\mathbf{w}_k \in W_{kl,h}} \frac{\int_{\gamma_{kl}} \mathbf{w}_k \boldsymbol{\mu}_{kl} d\gamma_{kl}}{\|\mathbf{w}_k\|_{L^2(\gamma_{kl})} \|\boldsymbol{\mu}_{kl}\|_{L^2(\gamma_{kl})}} = 1, \quad (2.20)$$

$$\inf_{\boldsymbol{\mu}_{kl} \in M_{kl,h}^{\text{ind}}} \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu}_{kl}\|_{L^2(\gamma_{kl})} \leq Ch_k \|\boldsymbol{\lambda}\|_{H^1(\gamma_{kl})} + Ch_k^{1/2} \|\boldsymbol{\lambda}\|_{H^1(\gamma_{kl})}. \quad \square$$

**Preuve.** Par construction, on a  $W_{kl,h} \equiv M_{kl,h}^{\text{ind}}$ . Par conséquent, en prenant  $\text{Tr}_{kl} \mathbf{w}_k = \boldsymbol{\mu}_{kl}$ , nous obtenons (2.20) avec la constante unitaire  $C = 1$ . Pour la seconde ligne, sans perte de généralité, on prend  $\gamma_{kl} = (0, 1)$  et on introduit

$$\boldsymbol{\mu}_{kl} = r_h(\boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{\lambda}(0)N_1^p - \boldsymbol{\lambda}(1)N_n^p$$

où  $r_h(\boldsymbol{\lambda})$  est l'opérateur d'interpolation de  $H^1(0, 1)^2$  vers  $M_{(0,1),h}^{\text{ind}} = \text{span}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \{N_i^p\}$ . On obtient par l'inégalité triangulaire

$$\|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu}_{kl}\|_{L^2(0,1)^2} \leq \|\boldsymbol{\lambda} - r_h(\boldsymbol{\lambda})\|_{L^2(0,1)^2} + |\boldsymbol{\lambda}(0)| \cdot \|N_1^p\|_{L^2(0,h)^2} + |\boldsymbol{\lambda}(1)| \cdot \|N_n^p\|_{L^2(1-h,1)^2}.$$

Pour un domaine 1D, nous avons classiquement

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\lambda} - r_h(\boldsymbol{\lambda})\|_{L^2(0,1)^2} &\leq Ch \|\nabla \boldsymbol{\lambda}\|_{L^2(0,1)^2}, \\ \max_{x \in [0,1]} |\boldsymbol{\lambda}(x)| &\leq C \|\boldsymbol{\lambda}\|_{H^1(0,1)^2}, \\ \|N_i^p\|_{L^2((i-1)h, ih)}^2 &= h \|\widehat{N}_i^p\|_{L^2(0,1)}^2, \end{aligned}$$

ce qui amène le résultat attendu. ■

## 2.5 Intégration réduite et stabilité

### 2.5.1 Reconstruction des normales

Les déplacements dans (2.2) sont décrits en utilisant une normale exacte  $\mathbf{n}$  définie par

$$\mathbf{n}(\xi, \eta) = \frac{\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}}{\|\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}\|_2},$$

avec  $\mathbf{x}_{,\xi}$  et  $\mathbf{x}_{,\eta}$  les vecteurs covariants locaux. Les dérivées  $\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{,\xi} & \mathbf{n}_{,\eta} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$  vont donc nécessiter les dérivées seconde de la géométrie, i.e. les dérivées secondes des NURBS, ce qui peut être incompatible avec l'utilisation d'une intégration réduite. C'est pourquoi nous proposons d'utiliser dans (2.2) une construction des normales à partir de l'interpolation

$$\mathbf{n}(\xi, \eta) \approx \mathbf{n}^h(\xi, \eta) = \sum_{A=1}^{n \cdot m} R_A(\xi, \eta) \mathbf{n}_A, \quad (2.21)$$

utilisant les normales  $\mathbf{n}_A$  construites en des points de collocation donnés. Une difficulté inhérente à l'IGA vient du fait que les points de contrôle ne sont pas nécessairement interpolants et, par conséquent, ne sont pas forcément situés sur la surface de la coque. Ainsi, nous devons choisir judicieusement les points de collocation pour cette construction. Comme détaillé dans [Adam 2015b], l'utilisation de la projection orthogonale des points de contrôle sur la surface moyenne ou l'utilisation de normales uniformément réparties dans l'espace paramétrique présente respectivement un coût numérique élevé et un manque de précision. En se basant sur l'analyse de [Adam 2015b, Section 3.4], notre choix se porte sur des normales de contrôle  $\mathbf{n}_A$  définies aux abscisses de Gréville [Farin 1997]

$$\bar{\xi}_k = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \xi_{k+i}, \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Ces abscisses correspondent au maximum des fonctions de base comme montré sur la Figure 2.8. En utilisant ces points de collocation, les normales de (2.21) sont construites par

$$\mathbf{n}^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{A=1}^{n \cdot m} R_A(\boldsymbol{\xi}) \frac{\mathbf{x}_{,\xi}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_A) \times \mathbf{x}_{,\eta}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_A)}{\|\mathbf{x}_{,\xi}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_A) \times \mathbf{x}_{,\eta}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_A)\|_2} = \sum_{A=1}^{n \cdot m} R_A(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{n}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_A) = \sum_{A=1}^{n \cdot m} R_A(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{n}_A. \quad (2.22)$$

Avec cette dernière expression, les dérivées  $\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{n}^h = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{,\xi}^h & \mathbf{n}_{,\eta}^h & \mathbf{0} \end{bmatrix}$  requiert uniquement les dérivées premières de  $R_A(\xi, \eta)$ , ce qui rend la normale compatible avec l'intégration réduite tout en diminuant le coût numérique [Adam 2015b].

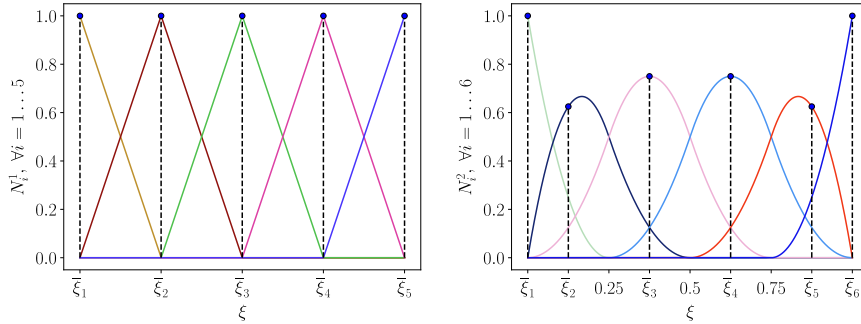


FIGURE 2.8 – Abscisses de Gréville repérées par des ronds bleus. Gauche : fonctions linéaires. Droite : fonctions quadratiques.

### 2.5.2 Intégration réduite

L'IGA permet de représenter de manière exacte une géométrie régulière ce qui nous permet ici de définir une normale précise sur l'ensemble de la coque (à l'exception des points où la continuité est réduite). Malheureusement, il est désormais connu que les éléments de type coque épaisse souffrent de verrouillage numérique, quelques exemples étant donnés dans [Belytschko 2000, Hughes 2000] pour des polynômes de Lagrange d'ordre faible. Ce verrouillage en membrane et cisaillement est dû à un conflit d'ordre entre les différents termes composant l'énergie de déformation et malgré la haute régularité permise par les fonctions NURBS, l'IGA souffre également de ce verrouillage [Echter 2010]. Une élévation d'ordre (raffinement- $p$  ou raffinement- $k$ ) peut réduire le verrouillage au prix d'un temps de calcul plus important [Rank 1998]. Nous passerons cette difficulté en étendant la règle de quadrature réduite, donnée dans [Adam 2015b], à des géométries multipatch. Cette règle réduit le nombre de points d'intégration de un selon chaque direction pour les éléments dans les coins et de  $r_k + 1$  pour les éléments intérieurs en utilisant l'avantage de la haute régularité  $r_k$  entre les éléments permise par l'isogéométrie. Par conséquent, l'utilisation de normales exactes s'avère incompatible avec la règle d'intégration réduite proposée car, comme précédemment souligné, le fait d'utiliser une normale exacte nécessite de calculer les dérivées premières et secondes du vecteur position. Ainsi, nous utiliserons les normales reconstruites développées dans (2.21). Enfin, nous utiliserons une règle d'intégration réduite similaire pour les termes de couplage aux interfaces. L'intégration des termes d'interface sera effectuée sur un espace parent commun. Pour ce faire, nous effectuons une projection symétrique *knot-to-segment* (KTS) pour tous les vecteurs noeuds de chaque côté des interfaces  $\gamma_{kl}$  en créant des sous-divisions de l'espace parent. Un exemple de projections KTS, représentées dans l'espace physique, est montré sur la Figure 2.9 pour une plaque constituée de quatre patches.

Les intégrales mortier et les termes de pénalisation peuvent ensuite être évalués sur chaque élément joignant deux noeuds successifs de l'espace parent commun, i.e., sur quatre éléments pour  $\tilde{\gamma}_{21}$  et  $\tilde{\gamma}_{31}$  et six éléments pour  $\tilde{\gamma}_{42}$  et  $\tilde{\gamma}_{43}$ . En notant  $p_k$  et  $p_l$  l'ordre des fonctions de base des patches  $\Omega_k$  et  $\Omega_l$ , une règle de quadrature complète pour chaque élément de  $\tilde{\gamma}_{kl}$  nécessite  $n_{\text{GPC}} = E_{\text{sup}} \left\lceil \frac{(p_k + p_l) + 1}{2} \right\rceil$  points d'intégration. Afin de réduire le coût numérique, nous procé-

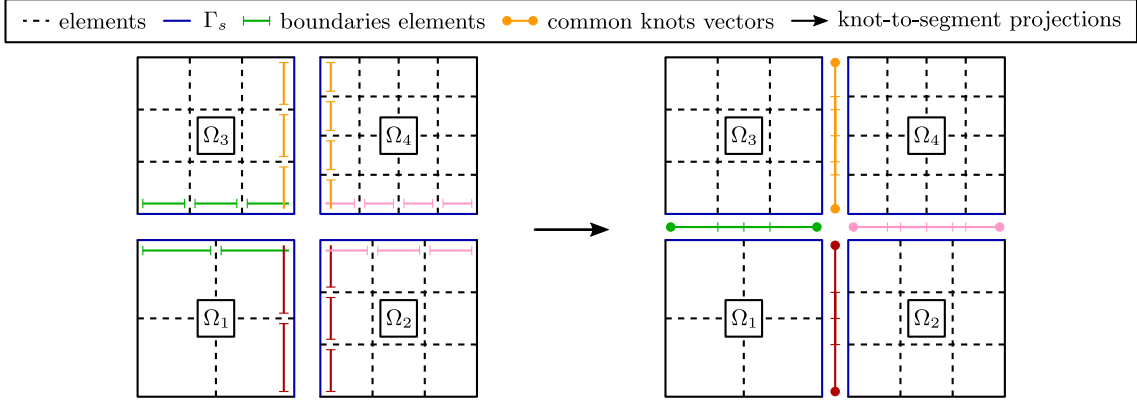


FIGURE 2.9 – Création de vecteurs noeuds communs pour chaque interface. Après projection *knot-to-segment*, on obtient une grille de l'espace parent divisé construit sur ce nouvel ensemble étendu de vecteurs noeuds communs, avec quatre éléments pour  $\gamma_{21}$  et  $\gamma_{31}$  et six éléments pour  $\gamma_{42}$  et  $\gamma_{43}$ .

derons comme pour l'intégration des patches, i.e., nous prendrons  $n_{GPC} - 1$  points à chaque extrémité des vecteurs noeuds communs et un seul point sinon (Figure 2.10). L'Annexe 2.D donne plus de détails sur les différents choix de schéma d'intégration.

### 2.5.3 Stabilité numérique

Afin de valider numériquement la pertinence du choix de la discrétisation précédente, on commence par regarder la stabilité du problème discret (2.19). Sous forme matricielle, ce problème s'écrit [Malkus 1981]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{struc}} & \mathbf{C}^\lambda \\ (\mathbf{C}^\lambda)^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Soit  $\mathbf{Q}$  la matrice du produit scalaire  $L^2$  aux interfaces

$$\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\mu} = \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{\lambda}^h \boldsymbol{\mu}^h d\Gamma_s, \quad \forall (\boldsymbol{\lambda}^h, \boldsymbol{\mu}^h) \in M_h,$$

et soit la norme produit

$$\mathbf{N} = \mathbf{K}_{\text{struc}} \oplus \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{struc}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{bmatrix}.$$

En suivant [Malkus 1981], la stabilité numérique de (2.19) est caractérisée par la valeur propre négative de plus petite norme  $\sigma_{\min}$  du problème discret

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \sigma\mathbf{N}\mathbf{U}.$$

Plus en détails, après élimination de  $\boldsymbol{\lambda}$  dans ce problème aux valeurs propres, il est possible de montrer que  $|\sigma_{\min}^2 - \sigma_{\min}|$  est égal à la plus petite valeur propre positive  $s_{\min}$  du problème aux valeurs propres réduit [Malkus 1981, Théorème 4]

$$\mathbf{C}^\lambda \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{C}^\lambda)^T \mathbf{u} = s \mathbf{K}_{\text{struc}} \mathbf{u},$$

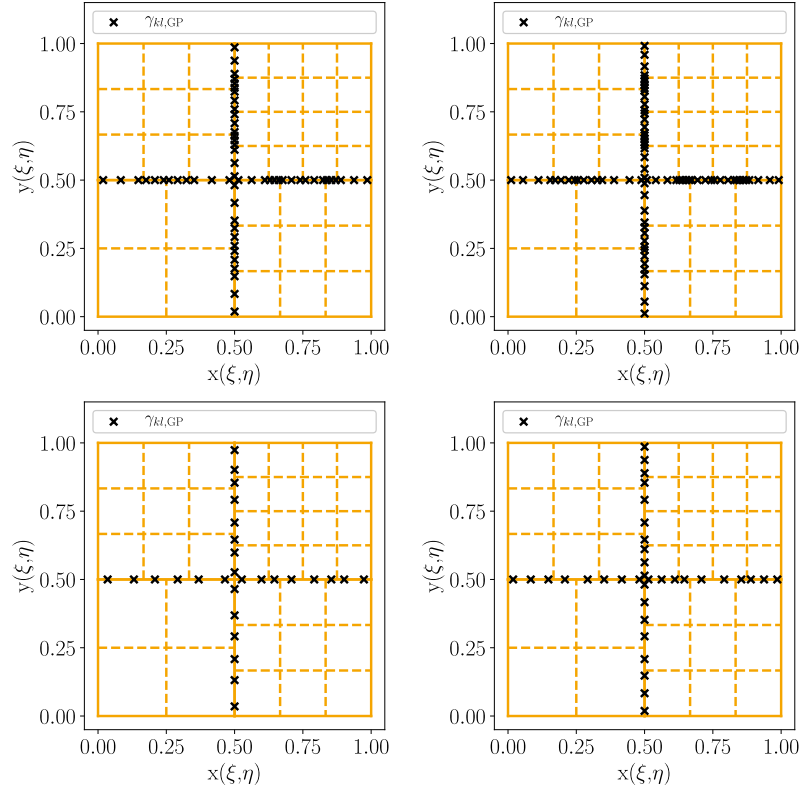


FIGURE 2.10 – Règles de quadrature pour quatre interfaces utilisant les vecteurs noeuds communs de la Figure 2.9. Gauche : fonctions quadratiques. Droite : fonctions cubiques. Haut : intégration complète. Bas : intégration réduite. L’intégration réduite est utilisée à la fois pour les termes duaux et de pénalité.

qui s’écrit également après division par  $\alpha(h)$

$$\mathbf{C}^\lambda \mathbf{Q}_h^{-1} (\mathbf{C}^\lambda)^T \mathbf{u} = \frac{s}{\alpha(h)} \mathbf{K}_{\text{struc}} \mathbf{u}, \quad (2.23)$$

où nous avons introduit la matrice  $\mathbf{Q}_h = \alpha_h \mathbf{Q}$  du produit  $L^2$  pondéré par  $\alpha(h)$ . En particulier, le choix  $\alpha(h) = h$  correspond à l’utilisation de la norme  $\|\cdot\|_{-1/2,h}$  introduite dans [Braess 1999] dans leur analyse des éléments mortier. Avec [Malkus 1981, Théorème 2], on obtient ainsi l’estimation globale inf-sup

$$\inf_{\boldsymbol{\mu} \in M_h} \sup_{\mathbf{v} \in V_h} \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{C}^\lambda \boldsymbol{\mu}}{\|\mathbf{v}\|_{\text{struc}} \|\boldsymbol{\mu}\|_h} = \sqrt{\frac{s_{\min}}{\alpha(h)}} = \sqrt{\frac{|\sigma_{\min}^2 - \sigma_{\min}|}{\alpha(h)}},$$

après avoir muni  $V_h$  et  $M_h$  respectivement de la norme structurelle en énergie  $\|\cdot\|_{\text{struc}}$  et la norme  $L^2$  pondéré par  $\alpha(h)$  notée  $\|\cdot\|_h$ .

On vérifie la stabilité sur le problème modèle de la Figure 2.11 comportant quatre patches encastés sur les bords extérieurs. Quatre valeurs d’épaisseur  $t$  sont considérées  $t \in$

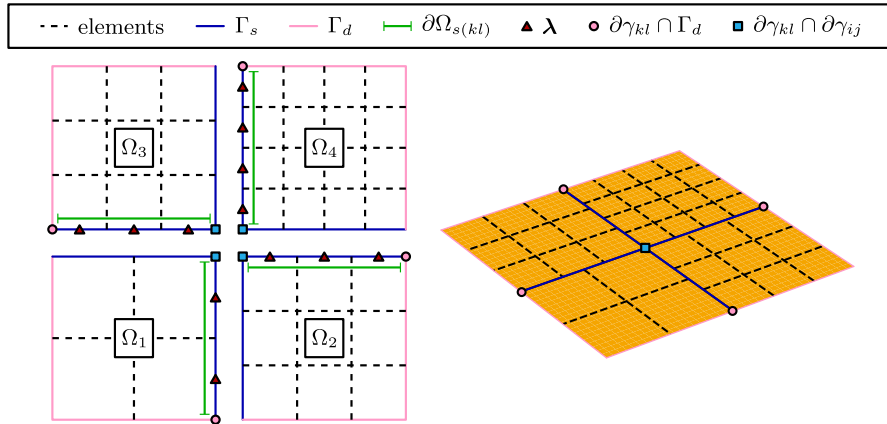


FIGURE 2.11 – Problème modèle de coque encastée pour la vérification de la stabilité numérique. Les quatre patches sont géométriquement conformes mais pas leurs discrétisations.

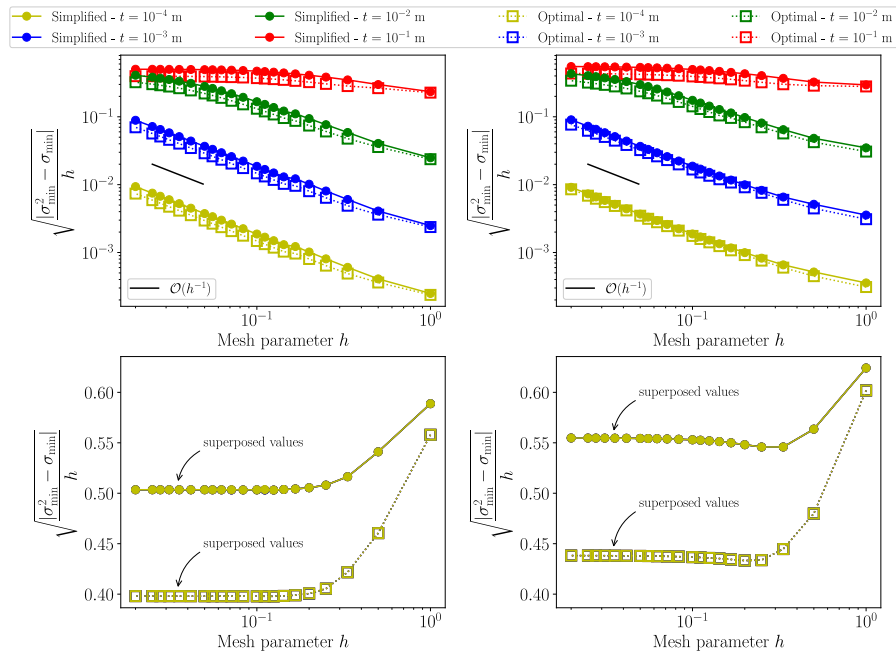


FIGURE 2.12 – Évolution de la constante de stabilité globale en fonction de l'épaisseur et de la taille du maillage pour un ordre  $p = 2$ . Quatre valeurs d'épaisseur sont considérées  $t \in \{10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}\}$  (m). Gauche : intégration complète. Droite : intégration réduite. Haut : la contribution du cisaillement est prise en compte. Bas : la contribution du cisaillement est corrigée en multipliant par un facteur  $t^2$  la partie en cisaillement.

$\{10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}\}$  (m). L'estimation global du inf-sup est évaluée, en utilisant la norme  $\|\cdot\|_{-1/2,h}$ , en fonction de sa dépendance- $h$  (Figure 2.12) et de sa dépendance- $p$  (Figure 2.13).

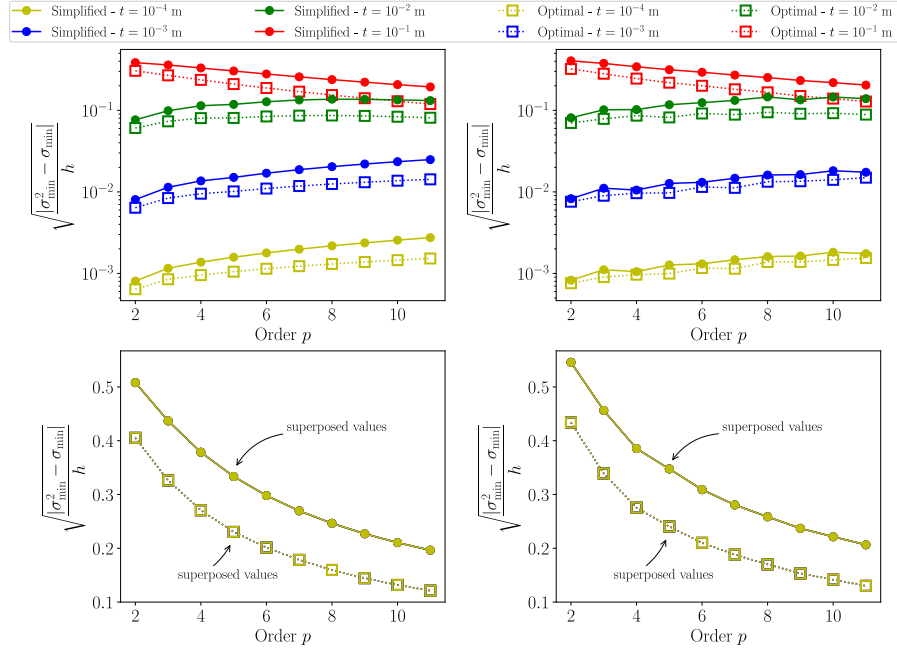


FIGURE 2.13 – Évolution de la constante de stabilité globale en fonction de l'épaisseur et de l'ordre d'approximation pour une taille de maillage  $h = 0.25$  (m). Quatre valeurs d'épaisseur sont considérées  $t \in \{10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}\}$  (m). Gauche : intégration complète. Droite : intégration réduite. Haut : la contribution du cisaillement est prise en compte. Bas : la contribution du cisaillement est corrigée en multipliant par un facteur  $t^2$  la partie en cisaillement.

On remarque que quand la contribution en cisaillement est prise en compte (ce qui correspond aux deux tracés du haut pour la dépendance en  $h$  et la dépendance en  $p$ ), une dépendance en  $\mathcal{O}(t^2)$  est clairement visible. Cette dépendance est liée aux termes de pénalisation du cisaillement qui sont présents dans la matrice de raideur  $\mathbf{K}_{\text{struc}}$  et qui vont perturber le second membre du problème aux valeurs propres (2.23), même en présence d'intégration réduite. Si nous utilisons l'espace à énergie nulle en cisaillement (i.e. on multiplie par  $t^2$  la contribution en cisaillement), nous sommes capable de supprimer ces modes artificiels de cisaillement et on obtient une estimation globale du inf-sup indépendante de l'épaisseur  $t$ . On observe ainsi la stabilité globale de notre stratégie de discrétisation avec une constante inf-sup bornée loin de zéro. Cette constante se dégrade légèrement quand l'ordre  $p$  des NURBS augmente.

## 2.6 Résultats numériques

On propose de valider les formulations multipatch et les règles de quadrature sur des exemples académiques et industriels. L'implémentation numérique a été réalisée sous Python avec une compilation à la volée par le LLVM grâce à la librairie Numba [Lam 2015]. Les matrices sont stockées au format sparse CSR avec la librairie SciPy [Jones 2001]. Ce choix nous permet d'utiliser des solveurs linéaires performant tel que le Pardiso [Schenk 2001] pour l'ana-



lyse de structure ou le Lanczos, inclus dans la librairie ARPACK [Lehoucq 1998], pour l'analyse aux valeurs propres. La projection KTS, permettant de construire un espace parent commun pour l'évaluation de l'intégrale mortier et des termes de pénalité, est assurée par l'algorithme L-BFGS-B permettant de résoudre le problème d'optimisation au point le plus proche sous contraintes de bornes en limitant la consommation de mémoire [Byrd 1995, Zhu 1997].

On utilise la description suivante afin de préciser le type d'élément et la règle de quadrature retenue

$$\text{RM } \underline{(1)} \ \underline{(2)} \ C \ \underline{(3)} \ \underline{(4)} \left\{ \begin{array}{l} (1) : \text{P ou S pour un élément plaque ou coque,} \\ (2) : \text{ordre des fonctions de base,} \\ (3) : \text{régularité des fonctions de base,} \\ (4) : \dots \text{ ou R pour intégration complète ou réduite.} \end{array} \right.$$

À titre d'exemple, l'élément RMP3C1 est un élément plaque de Reissner-Mindlin avec des fonctions de base d'ordre trois, une régularité  $C^1$  entre éléments et muni d'une intégration complète. De plus, un élément plaque contiendra cinq DOF, trois déplacements et deux rotations, alors qu'un élément coque en aura six en tenant compte des trois rotations de normale.

## 2.6.1 Plaque simplement supportée

### 2.6.1.1 Validation

La première étude concerne une plaque de longueur  $L$  et largeur  $l$  qui est simplement supportée sur ses bords extérieurs  $\Gamma_d$  et soumise à un chargement concentré  $\mathbf{F}$  en son centre, voir Figure 2.14.

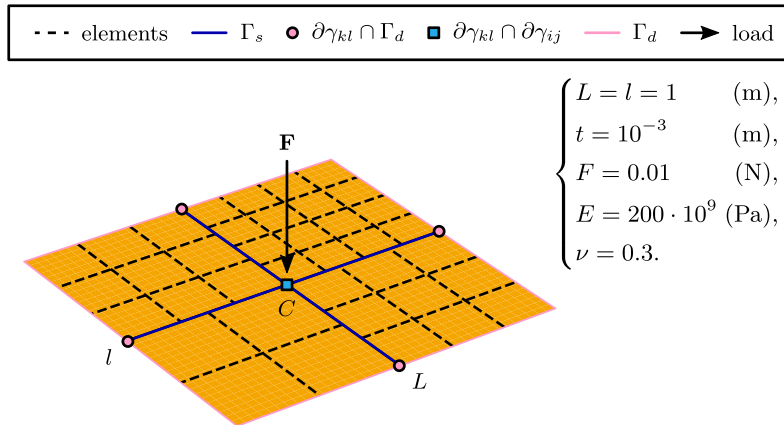


FIGURE 2.14 – Description de la géométrie et propriétés physiques pour une plaque simplement supportée. Quatre patchs géométriquement conformes avec des discrétisations non conformes allant de quatre à seize éléments.

La structure comprend quatre patchs avec un point singulier au centre dû à l'intersection des quatre interfaces. On utilise une approximation au premier ordre du problème tel que, en

séparant la déformation de membrane, flexion et cisaillement transverse

$$\mathbf{e}_m = \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ 0 \\ u_{,y} + v_{,x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\chi}_b = \begin{bmatrix} z\theta_{y,x} \\ -z\theta_{x,y} \\ 0 \\ z(\theta_{y,y} - \theta_{x,x}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_{,y} - \theta_x \\ w_{,x} + \theta_y \end{bmatrix},$$

on néglige la contribution de membrane  $\mathbf{e}_m$  et on ne considère que le déplacement hors-plan  $w$  et les deux rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$ . Par conséquent, il s'agit d'un problème de flexion pure qui peut être affecté uniquement par du verrouillage en cisaillement transverse. La solution analytique pour un problème de Kirchhoff-Love équivalent est obtenue par décomposition en série de la solution dans [Timoshenko 1959, Gould 2013]. Le déplacement maximal au centre de plaque vaut alors

$$w_C = w\left(\frac{L}{2}, \frac{l}{2}\right) = \frac{48F(1-\nu^2)}{\pi^4 Et^3 Ll} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\left(\frac{2m+1}{L}\right)^2 + \left(\frac{2n+1}{l}\right)^2\right)^2}.$$

Les premiers résultats, pour des NURBS quadratiques et avec l'approche mortier simplifiée, sont montrés sur la Figure 2.15. Le ratio  $w_C^h/w_C$ , entre la solution discrète et analytique, est tracé en fonction du nombre d'éléments par direction pour différentes formulations multipatch et règles de quadrature. La solution discrète  $w_C^h$  est obtenue en prenant la valeur moyenne des quatre points de contrôle situés au centre  $C$ . L'erreur  $|w_C - w_C^h|$  est présentée, en fonction du paramètre de maillage  $h$ , à nouveau pour différentes méthodes multipatch et d'intégration. Pour les méthodes primale et augmentée, le facteur de pénalité est fixé à  $\alpha_{kl} = 10^3 \cdot E$ . Un exemple de déplacement hors-plan est visible pour des maillages conformes (haut-gauche) et des maillages non conformes (haut-droite). On s'aperçoit grâce aux deux figures de gauche que les trois méthodes multipatch, avec une intégration complète, présentent des résultats similaires excepté pour la pénalité. Il s'agit d'un résultat attendu car, comme précédemment souligné, la méthode est variationnellement inconsistante sur  $\alpha_{kl}$ . Le fait de fixer le facteur de pénalité à une valeur constante ne permet pas d'assurer la condition de continuité de manière exacte. La méthode du lagrangien augmenté utilisant l'espace mortier simplifié est la plus efficace.

On remarque à partir des deux figures de droite que, pour l'approche augmentée, aucune différence n'est observée entre une règle de quadrature complète et réduite aux interfaces  $\gamma_{kl}$ , seul le coût numérique est affecté. En revanche, l'intégration réduite dans chaque patch  $\Omega_k$  permet de diminuer significativement le verrouillage en cisaillement transverse.

### 2.6.1.2 Approches simplifiée et optimale

On souhaite désormais comparer l'espace mortier simplifié à l'espace optimal proposé dans [Brivadis 2015]. Les solutions pour des approches duale et augmentée sont données sur la Figure 2.16 pour des intégrations complète et réduite et des fonctions de forme d'ordre  $p = 2$  à  $p = 4$ . On rappelle que pour l'approche simplifiée, l'espace dual n'est pas d'ordre optimal avec un terme additionnel en  $\sqrt{h}$  apparaissant dans l'estimation de convergence. Il s'agit de la conséquence du

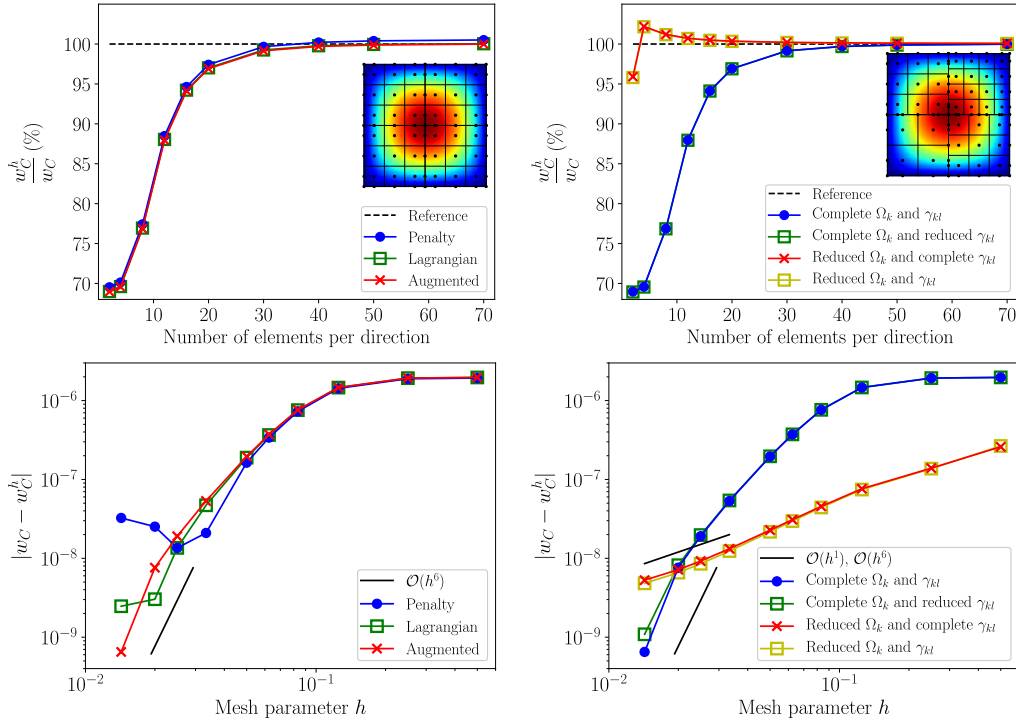


FIGURE 2.15 – Déplacement pour la plaque simplement supportée avec des NURBS quadratiques. Gauche : méthodes multipatch et intégration complète. Droite : règles d’intégration et approche augmentée. Haut : ratio  $w_C^h/w_C$ . Bas : erreur  $|w_C - w_C^h|$ . Les deux figures de droite, avec l’approche augmentée, ne montrent aucune différence entre une intégration complète et réduite aux interfaces  $kl$ , seul le coût numérique est affecté. En revanche, l’intégration réduite dans chaque patch  $k$  conduit à une diminution significative du verrouillage en cisaillement transverse.

non respect de la partition de l’unité sur les éléments supportant les fonctions de forme interpolantes aux points singuliers. Par conséquent, on peut voir des différences entre les approches simplifiée et optimale pour la formulation duale. Néanmoins, cette différence devient très faible lorsqu’on utilise l’approche augmentée. Le fait d’ajouter un terme primal de régularisation nous permet d’assurer localement la condition de continuité aux voisinages de chaque coin mortier.

### 2.6.1.3 Influence du facteur de pénalité

Nous avons utilisé pour les deux études ci-dessus un facteur de pénalité fixé à  $\alpha_{kl} = 10^3 \cdot E$  pour les méthodes primale et augmentée. Ce facteur peut paraître élevé, particulièrement pour l’approche augmentée, et donc une étude plus approfondie est nécessaire. Sachant que nous comparons les valeurs de  $w_C^h$  au centre de la plaque (point singulier), un couplage fort des conditions de continuité en ce point est nécessaire. Par conséquent, l’influence du facteur de pénalité ne sera pas négligeable pour l’approche simplifiée. L’erreur  $|w_C - w_C^h|$  est montrée sur la Figure 2.17 pour les deux règles de quadrature, trois paramètres de maillage  $h$  différents et

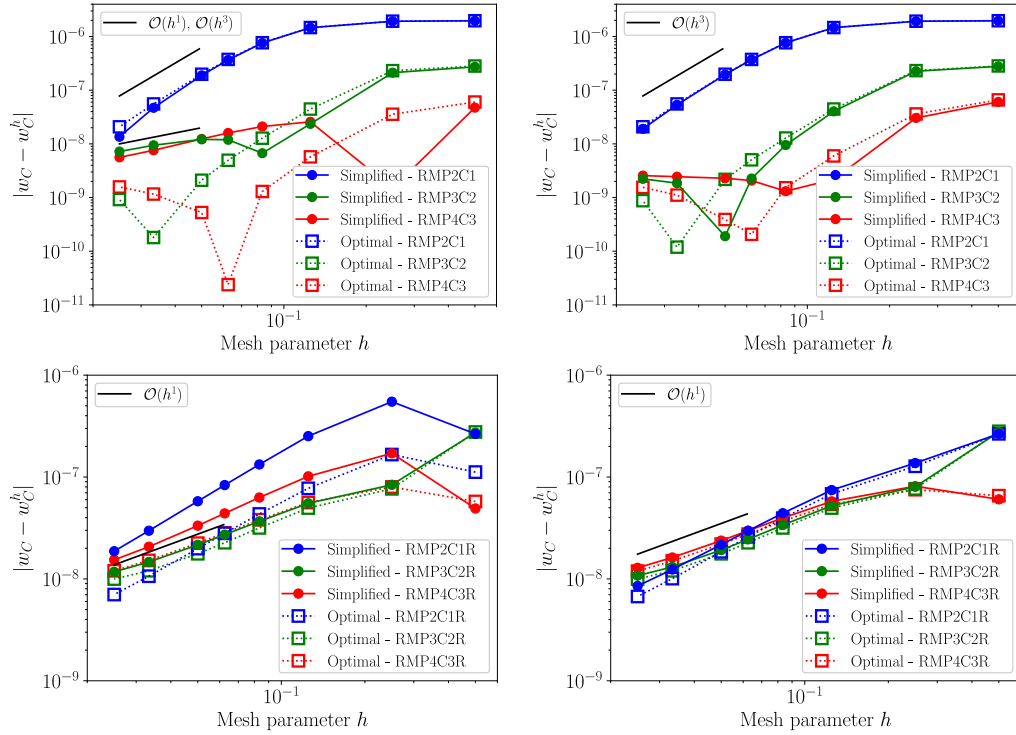


FIGURE 2.16 – Approches mortier simplifiée et optimale pour la plaque simplement supportée. Gauche : approche duale. Droite : approche augmentée. Haut : intégration complète. Bas : intégration réduite.

pour un facteur de pénalité  $\alpha_{kl} \in [10^{-6} \cdot E, 10^6 \cdot E]$ . Comme attendu, l'influence du facteur de pénalité est importante pour l'approche simplifiée alors qu'elle est négligeable pour l'optimale. En ce qui concerne la règle de quadrature complète (domaines et interfaces), le verrouillage en cisaillement est particulièrement visible pour les maillages fins et l'erreur peut augmenter pour des facteurs de pénalité élevés. Dans ce cas, l'approche duale simplifiée engendre artificiellement une faible erreur qui peut être trompeuse. Ce n'est plus vrai avec l'intégration réduite (appliquée pour chaque patch et interface) qui permet d'éliminer le phénomène de verrouillage. L'approche du lagrangien augmenté avec un espace mortier simplifié présente la même précision que les méthodes duale et augmentée optimale pour un facteur de pénalité  $\alpha_{kl} \geq 10 \cdot E/h$ . Cette valeur sera utilisée pour étudier l'influence de l'épaisseur sur la solution en déplacement.

### 2.6.1.4 Dépendance en épaisseur

La règle de quadrature réduite, appliquée ici pour chaque domaine et chaque interface, doit permettre d'obtenir une solution indépendante de l'épaisseur  $t$  en l'absence de verrouillage en cisaillement. Sachant que la solution analytique n'est valable que pour des éléments de Kirchhoff-Love, nous faisons varier pour nos essais le ratio d'élancement  $L/t$  entre une plaque modérément fine  $L/t = 10^3$  et une plaque très fine  $L/t = 10^5$ . Un chargement dépendant de l'épaisseur

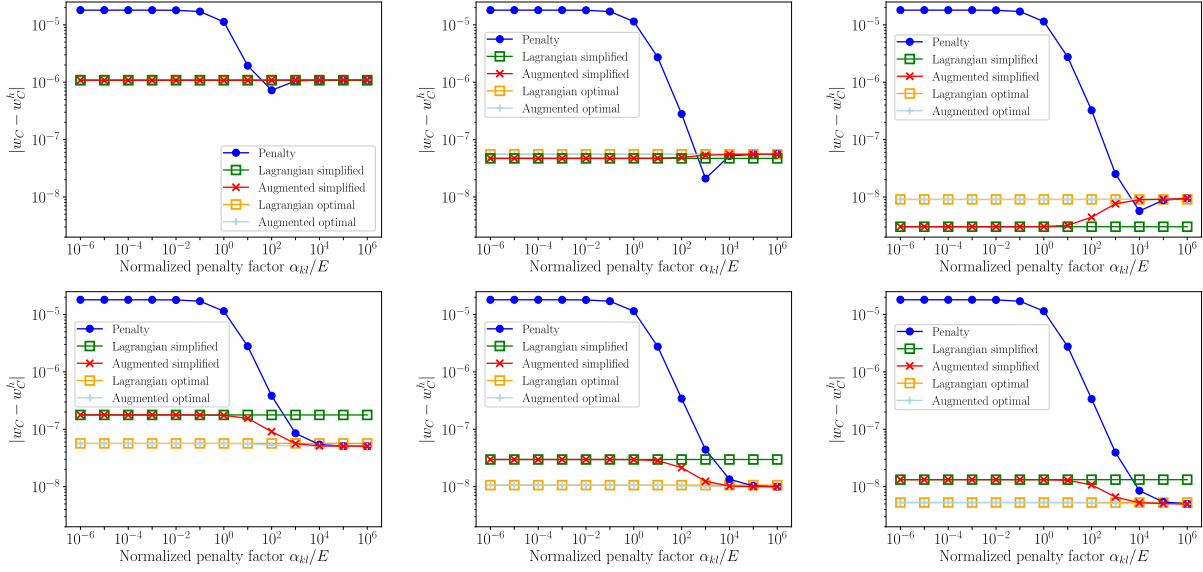


FIGURE 2.17 – Influence du facteur de pénalité sur la plaque simplement supportée avec des NURBS quadratiques. De gauche à droite :  $h = 1/10$ ,  $h = 1/30$  et  $h = 1/50$ . Haut : intégration complète. Bas : intégration réduite. La construction simplifiée de l’espace mortier permet d’obtenir une solution précise dès que le facteur de pénalité dépasse un certain seuil. On observe également la présence de verrouillage pour l’intégration complète.

$F = 10^7 \cdot t^3$  est appliqué de manière à conserver un déplacement hors-plan  $w_C$  constant. En considérant les deux règles de quadrature et les trois méthodes multipatch (incluant les variantes simplifiée et optimale) avec un facteur de pénalité de  $\alpha_{kl} \approx 30 \cdot E/h$ , l’erreur  $|w_C - w_C^h|$  est tracée sur la Figure 2.18. Comme précisé dans [Adam 2015b] pour des structures monopatch, l’intégration complète amène une solution qui dépend artificiellement de  $t$  et, naturellement, c’est toujours le cas pour des géométries multipatch. La règle de quadrature réduite permet d’éliminer en pratique le verrouillage en cisaillement. Un léger verrouillage résiduel peut néanmoins subsister sachant que pour certaines conditions limites et en particulier dans le cas d’une plaque simplement supportée, moins de points de Gauss pourrait être utilisés [Adam 2015b].

### 2.6.1.5 Analyse de fréquence propre

Dans le but de valider la règle de quadrature réduite détaillée dans [Adam 2015b] et implémentée ici pour des structures multipatch, on effectue une analyse modale. Cela permettra de valider les méthodes multipatch et de s’assurer qu’aucun mode à énergie nulle n’est présent. Pour cela, on considère le problème aux valeurs propres généralisé

$$\begin{aligned} \rho \omega^2 \mathbf{u} + \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) &= \mathbf{0} \quad \text{dans Vol,} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_d, \end{aligned}$$

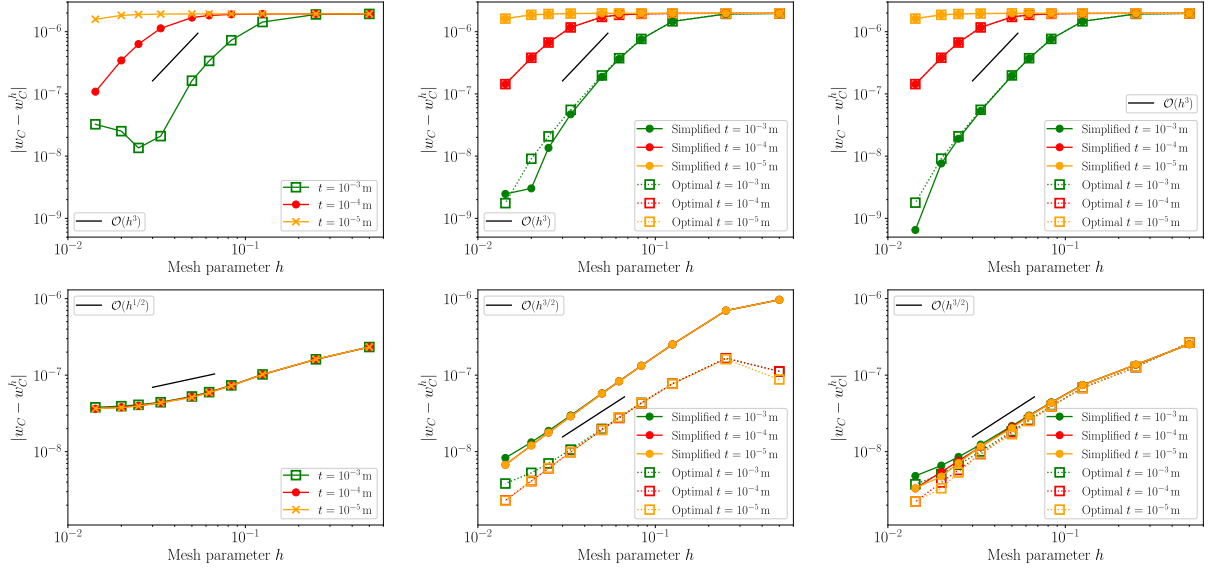


FIGURE 2.18 – Influence de l'épaisseur sur la plaque simplement supportée avec des NURBS quadratiques. De gauche à droite : méthodes multipatch primale, duale et augmentée. Haut : intégration complète. Bas : intégration réduite. Le verrouillage en cisaillement est clairement visible avec une solution dépendante de l'épaisseur tel que souligné par [Adam 2015b] lorsqu'on utilise une intégration complète dans les patches.

avec  $\rho$  la densité et  $\omega$  la fréquence naturelle. On suppose un état plan de contraintes en élasticité linéaire et isotropique. En plus des propriétés physiques de la Figure 2.14, la densité est fixée à  $\rho = 7500 \text{ kg.m}^{-3}$ . Après discrétisation spatiale nous devons donc résoudre

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = (\omega^h)^2 \mathbf{M}\mathbf{U},$$

où  $\mathbf{K}$  désigne la matrice de raideur globale et  $\mathbf{M}$  la matrice de masse globale

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_K \end{bmatrix}.$$

Il a été montré dans [Adam 2015b] que, avec l'intégration réduite, aucun mode à énergie nulle n'est obtenu si un nombre suffisant de points de Gauss est utilisé à chaque extrémité du patch, i.e., aux lieux d'accumulation des fonctions de base. Cette affirmation doit rester valable pour des géométries multipatch.

La géométrie étudiée est la même que pour l'analyse structurelle mais la plaque est désormais encadrée sur ses bords extérieurs. La plus petite valeur propre  $\omega_1^h$  est comparée sur la Figure 2.19 à la valeur de référence  $\omega_1$ , prise de [Harris 2002], pour différentes méthodes multipatch et règles de quadrature, chacune utilisée avec un espace dual simplifié. On utilise des NURBS quadratiques (gauche) et des fonctions cubiques (droite). Une référence numérique, issue du logiciel Abaqus Finite Element est également considérée à titre de comparaison.

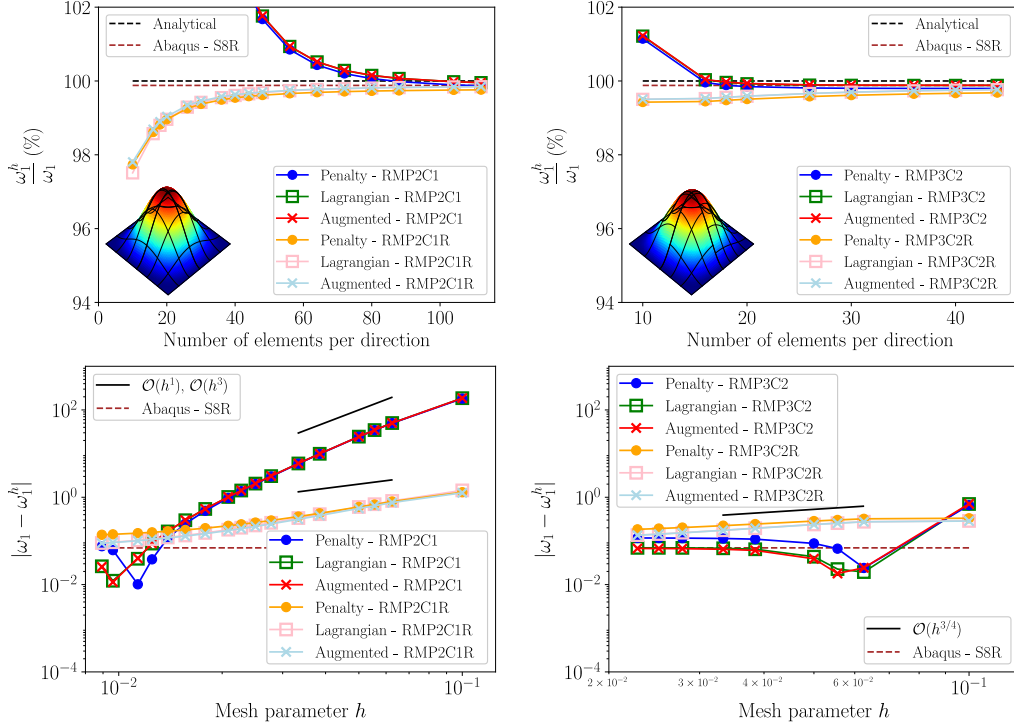


FIGURE 2.19 – Première valeur propre de la plaque encastée pour un espace mortier simplifié. Gauche : fonctions quadratiques. Droite : fonctions cubiques. Haut : ratio  $w_1^h/w_1$ . Bas : erreur  $|w_1 - w_1^h|$ .

Un exemple de solution est montré pour des maillages conformes (haut-gauche) et non conformes (haut-droite). De même que pour l’analyse structurelle, la méthode par pénalité est moins précise que les méthodes duale ou augmentée qui conduisent aux mêmes résultats. L’intégration réduite permet de réduire significativement le verrouillage pour des fonctions quadratiques mais n’est pas nécessaire pour des fonctions cubiques pour lesquelles le verrouillage numérique est naturellement moins important. Nous pouvons ajouter que, comme précédemment énoncé, aucun mode sablier n’est présent.

**Remarque 2.16.** La matrice de masse utilisée pour cette analyse modale est consistante. En notant  $\mathbf{M}_k = [M_{A_k B_k}]$ , pour  $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$ , la matrice de masse du patch  $\Omega_k$ , on définit la matrice de masse complète par

$$M_{A_k B_k} = \int_{\text{Vol}_k} \rho R_{A_k} R_{B_k} \, d\text{Vol}_k.$$

Afin de diminuer le coût numérique, l’utilisation d’une matrice de masse condensée (ou lumpée) a été envisagée. En utilisant la règle classique de sommation sur les lignes [Cottrell 2009], on

définit la matrice de masse condensée par

$$\tilde{M}_{A_k B_k} = \begin{cases} \sum_{B_k} \int_{\text{Vol}_k} \rho R_{A_k} R_{B_k} d\text{Vol}_k = \int_{\text{Vol}_k} \rho R_{A_k} d\text{Vol}_k & \text{pour } A_k = B_k, \\ 0 & \text{pour } A_k \neq B_k. \end{cases}$$

Les résultats obtenus avec une matrice de masse condensée sont identiques à ceux issus d'une résolution avec une matrice consistante. En particulier, aucun mode parasite n'a été observé pour l'ensemble des méthodes multipatch et règles de quadrature retenues. ■

### 2.6.2 Hémisphère pincé

On considère désormais une structure de type coque épaisse dont la solution est sensible au choix de construction des normales à la surface. Nous utiliserons ici les normales définies aux points de collocation de (2.22). Il s'agit d'un bon compromis entre précision et coût numérique et, de plus, c'est un choix compatible avec notre règle d'intégration réduite. La géométrie est issue du classique *shell obstacle course* dont le but est de proposer des méthodes de validation d'élément coque, voir [Belytschko 1985, MacNeal 1985]. Il s'agit d'un hémisphère de rayon  $R$  avec un angle zénital à  $18^\circ$  tel que présenté sur la Figure 2.20.

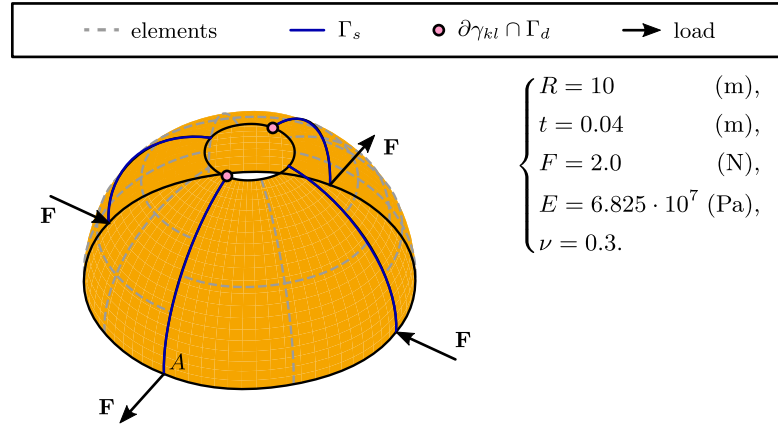


FIGURE 2.20 – Description de la géométrie et des propriétés physiques pour un hémisphère pincé. Les interfaces des patches sont représentées par des lignes bleues continues et les éléments par des lignes grises en pointillés.

La structure multipatch comporte quatre patches, ne possède aucun point singulier et est soumise à des efforts ponctuels égaux et opposés en ses quatre points cardinaux de l'équateur. Les mouvements de corps rigide sont éliminés en fixant deux points de l'arête supérieure et, hormis ces points, les deux extrémités sont libres. Ce test est caractérisé par des modes de flexion inextensible et doit garantir que l'élément ne souffre pas de verrouillage en membrane ou cisaillement. On note  $u_A^h$  le déplacement horizontal qui sera obtenu au point  $A$  et comparé à la solution analytique  $u_A = 9.3 \cdot 10^{-2}$  (m). Les résultats sont présentés de la même façon que



pour la plaque simplement supportée, voir Figure 2.21.

Le facteur de pénalité est fixé à  $\alpha_{kl} = 10^3 \cdot E$  pour les approches par pénalité et par lagrangien augmenté. Un exemple de déplacement horizontal est donné pour des maillages conformes (haut-gauche) et des maillages non conformes (haut-droite). On peut voir que, avec une intégration complète, les trois méthodes présentent des solutions identiques tel que mis en évidence par les figures de gauche. En ce qui concerne la règle de quadrature réduite associée à une approche augmentée, on observe qu'elle permet de réduire le verrouillage numérique. De plus, pour les maillages les plus fins, les taux de convergence sont similaires entre les règles de quadrature réduite et complète. L'intégration réduite développée ne semble pas aussi efficace que dans le cas de la plaque à cause des conditions limites. En effet, la règle de quadrature réduite est adaptée à des conditions limites de Dirichlet sur l'ensemble des arêtes extérieures. Par conséquent, pour des arêtes libres comme c'est le cas ici, la règle d'intégration est trop restrictive, plus de détails sont donnés dans [Adam 2015b]. Néanmoins, nous garderons cette règle de quadrature réduite indépendante des conditions limites de façon à être robuste sur les problèmes industriels qui vont suivre au prix d'un éventuel résidu de verrouillage numérique.

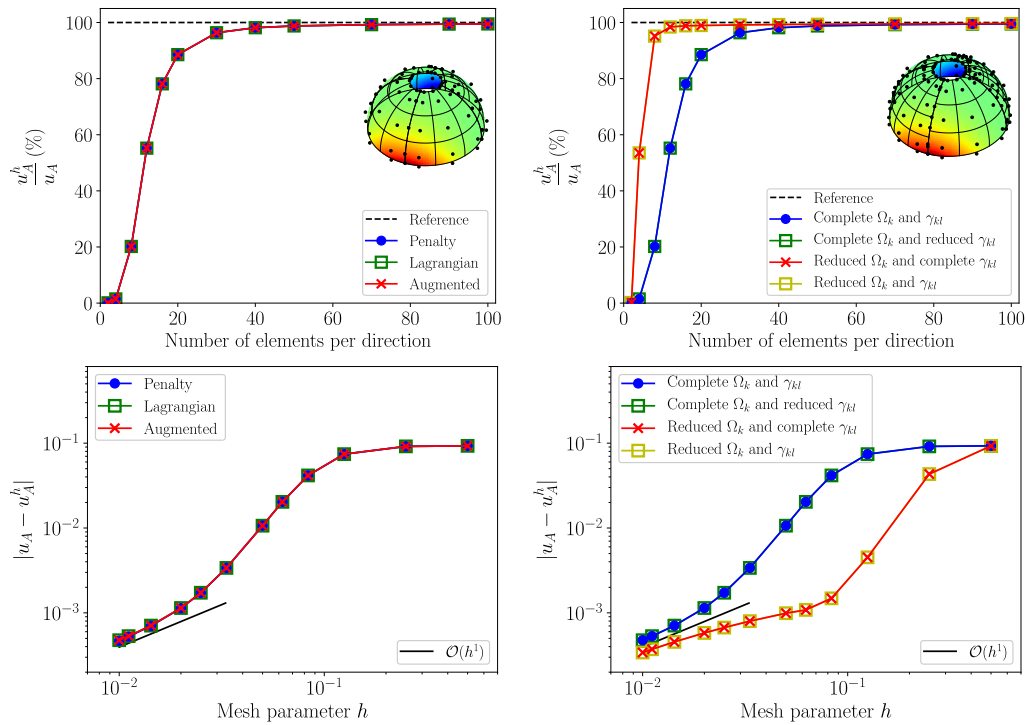


FIGURE 2.21 – Déplacement pour l'hémisphère pincé. Gauche : intégration complète et différentes méthodes multipatch. Droite : différentes règles de quadrature utilisant la même formulation du lagrangien augmenté simplifié. Haut : ratio  $u_A^h/u_A$ . Bas : erreur  $|u_A - u_A^h|$ .

### 2.6.3 Plaque trouée

Le dernier exemple académique considéré est une "plaque infinie", avec un trou circulaire en son centre, soumise à un effort de traction uniforme et distribué de  $T = F \cdot L = 10^5$  (N) à l'infini. Par des arguments de symétrie, seul un quart de la plaque est modélisé. Une solution analytique est renseignée dans [Gould 2013, Timoshenko 1951] et permet de prédire la valeur de la contrainte  $\sigma_{xx}$  le long de l'axe de traction. Néanmoins, cette solution est donnée pour une étude plane en 2D avec deux degrés de liberté en translation par point de contrôle. Par conséquent, l'utilisation d'un élément de type coque épaisse conduit à l'obtention d'une erreur asymptotique de  $4 \cdot 10^{-3}$  et, ainsi, nous prendrons comme solution de référence celle issue de la géométrie composée de deux patches discrétisés par le maillage le plus fin et des NURBS d'ordre quatre (Figure 2.22).

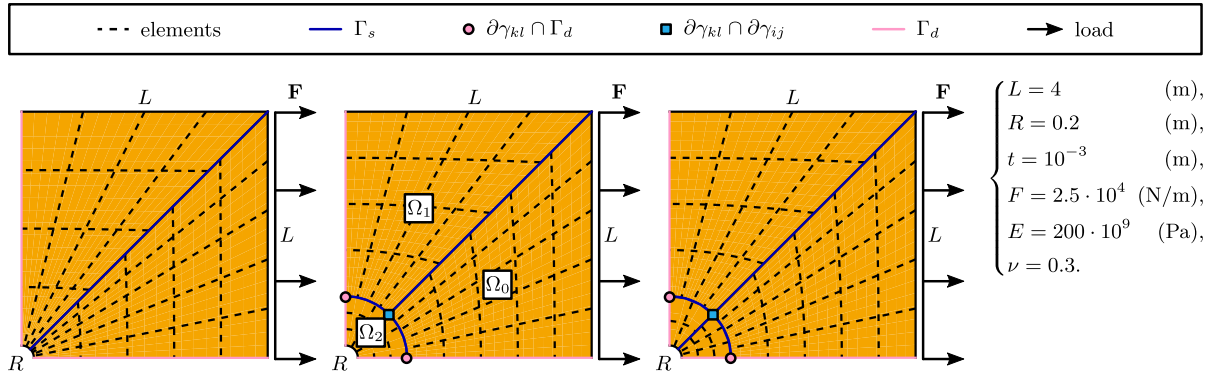


FIGURE 2.22 – Description de la géométrie et des propriétés physiques pour une plaque trouée. On présente trois partitionnements : le premier à gauche contient deux patches et aucun point singulier. Celui du centre est géométriquement non conforme avec trois patches et trois points singuliers. Le partitionnement de droite est constitué de quatre patches, il est géométriquement conforme et contient également trois points singuliers.

Pour le partitionnement de gauche, la structure est constituée de deux patches et aucun point singulier n'est présent. Naturellement, les approches mortier simplifiée et optimale présenteront les mêmes résultats. Les deux autres partitionnement, au centre et à droite, contiennent respectivement trois et quatre patches et présentent tous deux trois points singuliers issues des conditions limites et de l'intersection des interfaces. La paramétrisation avec trois patches contient des interfaces géométriquement non conformes alors que celle contenant quatre patches est uniquement constituée d'interfaces géométriquement conformes. La convergence est étudiée en utilisant la norme  $L^2$  brisée sur les contraintes

$$\|\sigma_{xx}\|_{\Sigma}^2 = \sum_k \|\sigma_{xx}\|_{L^2(\text{Vol}_k)}^2,$$

qui est équivalente à une norme  $H^1$  brisée sur les déplacements. L'erreur relative peut alors être

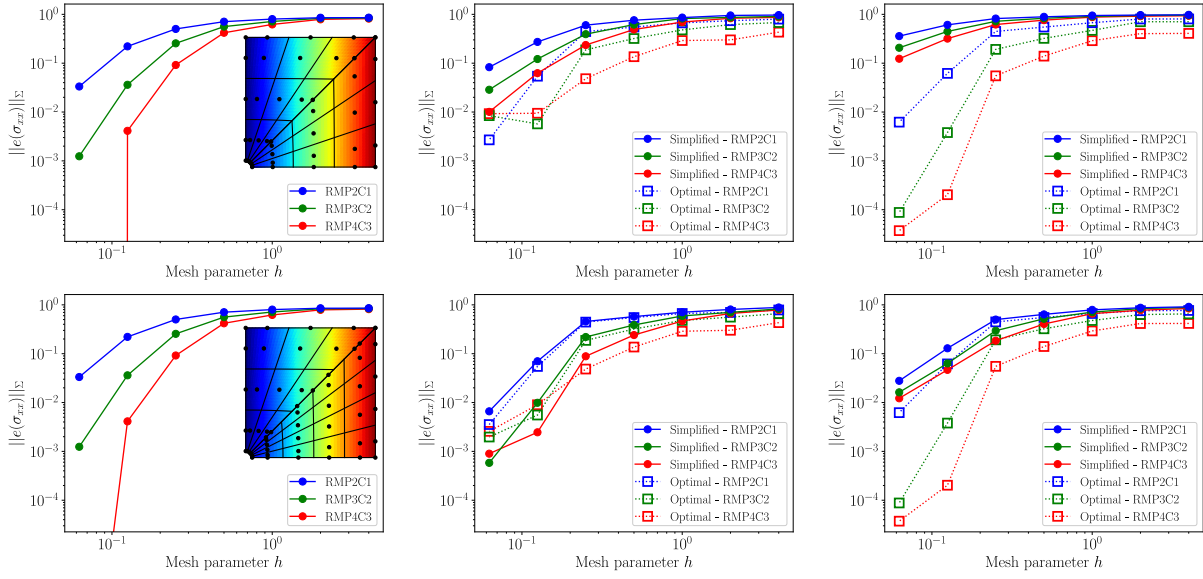


FIGURE 2.23 – Méthodes simplifiée et optimale pour la plaque trouée. De gauche à droite : paramétrisation avec deux, trois et quatre patches. Haut : approche duale. Bas : approche augmentée. On observe aucune influence majeure de la structure multipatch sur la précision des résultats.

évaluée par

$$\|e(\sigma_{xx})\|_{\Sigma} = \left| 1 - \frac{\|\sigma_{xx} - \sigma_{xx}^h\|_{\Sigma}}{\|\sigma_{xx} - \sigma_{xx}^{href}\|_{\Sigma}} \right|,$$

avec  $\sigma_{xx}^{href}$  correspondant à la solution obtenue par la paramétrisation constituée de deux patches avec le maillage le plus fin et des NURBS d'ordre quatre.

Ce problème n'est pas soumis à du verrouillage numérique et, par conséquent, nous présentons uniquement les solutions obtenues pour une intégration complète. Les résultats sont montrés sur la Figure 2.23 pour les trois type de paramétrisation. Des exemples de déplacement suivant l'axe de traction sont donnés pour le partitionnement contenant deux patches avec des maillages conformes (haut-gauche) et non conformes (bas-gauche). Le facteur de pénalité pour l'approche augmentée est fixé à  $\alpha_{kl} = 10 \cdot E/h$  afin de mettre en évidence les différences entre les approches simplifiée et optimale en fonction de la taille du maillage.

De manière évidente, les approches simplifiée et optimale conduisent aux mêmes résultats quand la géométrie est décrite par deux patches. En revanche, quand nous avons des coins mortiers, l'approche optimale associée à une formulation duale conserve une erreur plus faible que l'approche simplifiée. Ce point était particulièrement attendu car l'espace dual de l'approche simplifiée n'est pas d'ordre optimale avec un terme additionnel en  $\sqrt{h}$ . Néanmoins, quand nous ajoutons un terme de régularisation, ce qui correspond aux cas du bas, les méthodes simplifiée et optimale ont une convergence semblable avec notre choix  $\alpha_{kl} = 10 \cdot E/h$  pour le facteur de pénalité. On souligne qu'un facteur de pénalité plus élevé pourrait être utilisé pour l'approche

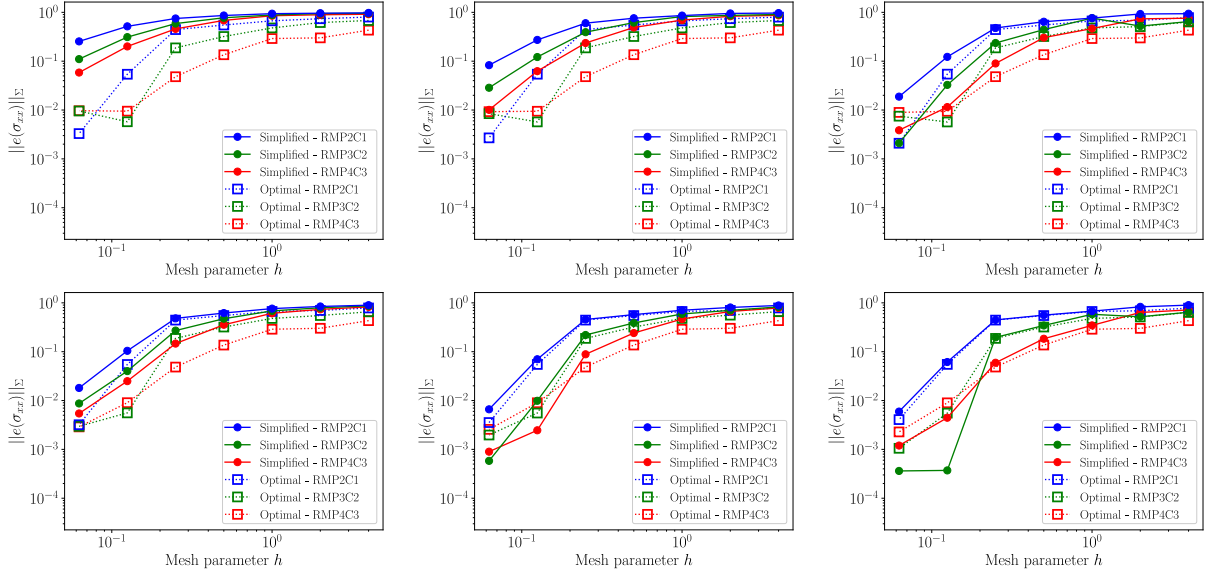


FIGURE 2.24 – Différents choix du côté mortier pour la plaque trouée constituée de trois patches. Gauche : situation de conformité géométrique esclave ( $\Omega_{s(10)} = \Omega_0$ ,  $\Omega_{s(20)} = \Omega_0$  et  $\Omega_{s(21)} = \Omega_1$ ). Centre : répartition équilibré du côté esclave ( $\Omega_{s(10)} = \Omega_0$ ,  $\Omega_{s(20)} = \Omega_2$  et  $\Omega_{s(21)} = \Omega_1$ ). Droite : situation complètement non conforme ( $\Omega_{s(10)} = \Omega_0$ ,  $\Omega_{s(20)} = \Omega_2$  et  $\Omega_{s(21)} = \Omega_2$ ). Haut : approche duale. Bas : approche augmentée. On observe aucune différence notable concernant le choix du côté mortier sur la précision des résultats.

augmentée simplifiée avec des NURBS d'ordre  $p = 3$  et  $p = 4$ . Le terme de pénalisation dans l'approche simplifiée est capable de maintenir la condition de continuité aux points singuliers.

En ce qui concerne les cas de non-conformité géométrique, les solutions de la Figure 2.23 sont obtenues en prenant chacun des trois patches comme côté mortier pour au moins une interface. Pour cette répartition équilibrée nous avons respectivement  $\Omega_{s(10)} = \Omega_0$ ,  $\Omega_{s(20)} = \Omega_2$  et  $\Omega_{s(21)} = \Omega_1$  comme côté esclave pour les interfaces  $\gamma_{10}$ ,  $\gamma_{20}$  et  $\gamma_{21}$ . Afin de montrer la robustesse de l'implémentation numérique, on présente sur la Figure 2.24 les erreurs obtenues pour le partitionnement constitué de trois patches avec différents choix de côté mortier. Les tracés de gauche sont obtenus dans le cas d'une conformité géométrique esclave ce qui a été le choix de [Brivadis 2015]. Au centre nous avons la répartition équilibrée déjà présentée. Pour les courbes de droite, nous avons pris  $\Omega_2$  comme côté esclave pour les interfaces géométriquement non conformes  $\gamma_{20}$  et  $\gamma_{21}$ . On obtient des convergences semblables pour les trois différentes stratégies. Les géométries industrielles qui vont suivre utiliseront la stratégie de répartition équilibrée du côté mortier.

### 2.6.4 Pignon droit

Les géométries qui vont suivre sont plus complexes et, par conséquent, aucune solution analytique n'est disponible. Ainsi, les solutions discrètes obtenues en IGA, avec une base duale

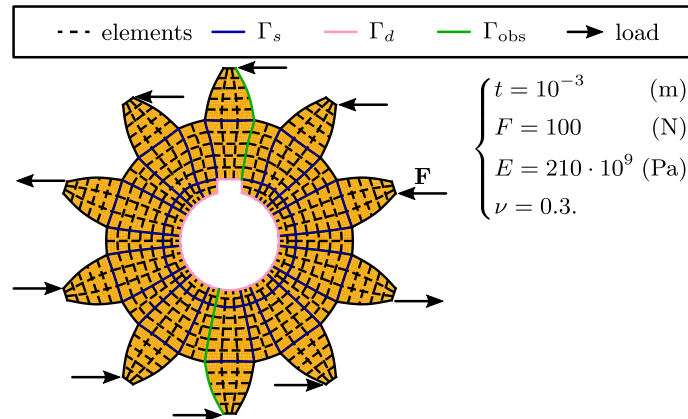


FIGURE 2.25 – Description de la géométrie et des propriétés physiques pour un pignon droit. Le partitionnement utilise 49 patchs et 67 interfaces.

simplifiée, seront comparées aux solutions numériques obtenues en éléments finis classique (avec des éléments de type coque épaisse) grâce au logiciel Abaqus. Après résolution d’un problème de minimisation, les coordonnées paramétriques  $(\xi, \eta)$  correspondantes aux noeuds d’Abaqus sont trouvées et, avec la transformation vers l’espace physique  $\mathbf{F}_k$ , les coordonnées physiques le sont également. De cette façon, les déplacements solution pourront être comparés.

La première géométrie industrielle est un pignon droit simplifié. Dans ce cas, toutes les interfaces sont géométriquement conformes. La structure est encastée en son centre et des forces ponctuelles sont appliquées sur chaque dent de manière à obtenir un chargement dans le plan, voir Figure 2.25.

Le domaine global  $\Omega$  est maillé en utilisant une taille homogène  $h \simeq 0.1$  (m) pour chaque patch  $\Omega_k$ . La structure est composée de 49 patchs avec 67 interfaces. On peut visualiser les déplacements obtenus pour des fonctions NURBS quadratiques sur la Figure 2.26.

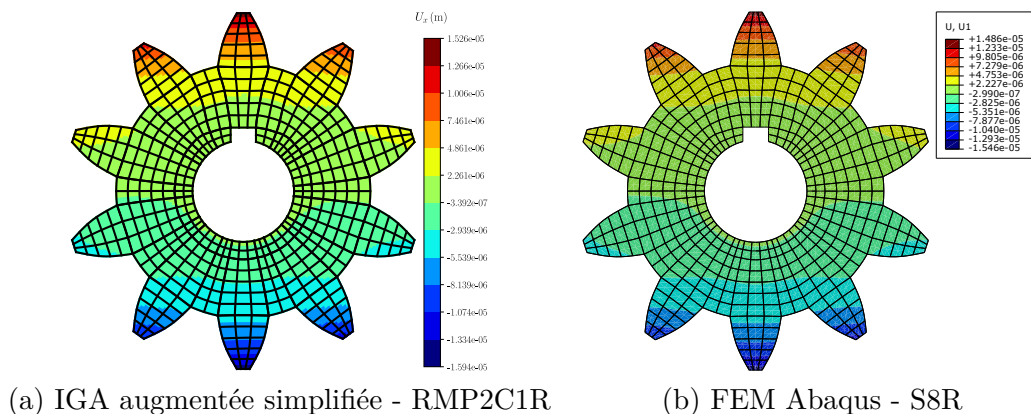


FIGURE 2.26 – Déplacement horizontal pour le problème de pignon droit.

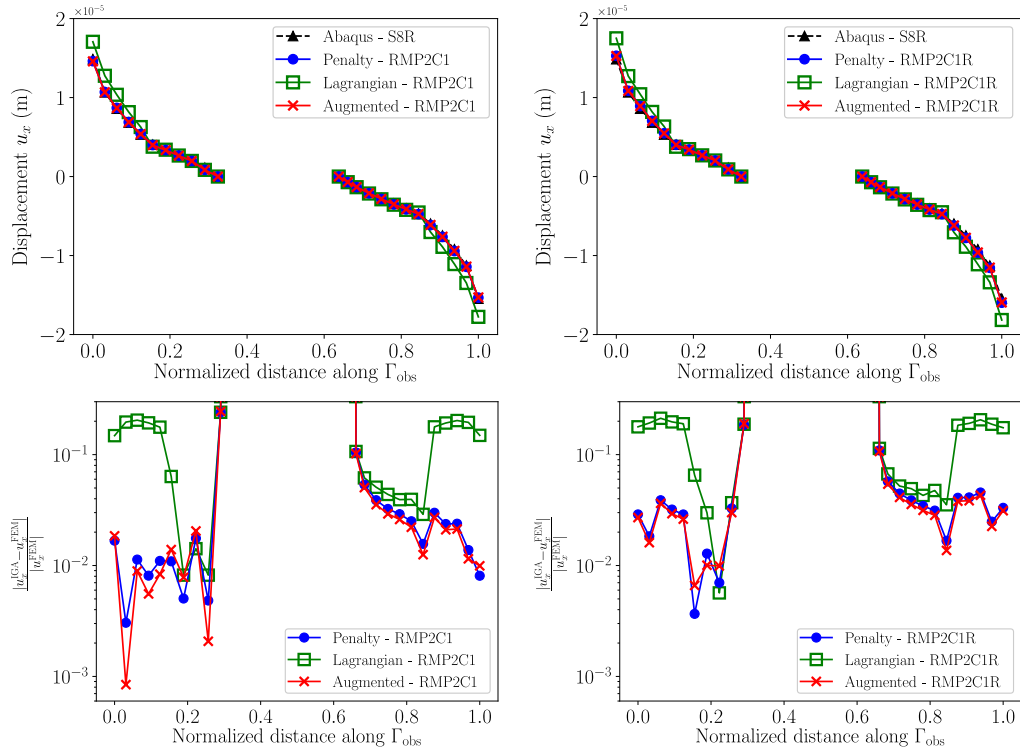


FIGURE 2.27 – Déplacement pour le pignon droit. Gauche : intégration complète. Droite : intégration réduite. Haut : déplacement  $u_x$ . Bas : écart relatif  $|u_x^{IGA} - u_x^{FEM}| / |u_x^{FEM}|$ .

En utilisant le même maillage pour les solutions issues de la méthode des éléments finis classique (FEM) et IGA, on observe des résultats semblables entre l’approche augmentée avec intégrations réduites et la référence numérique. Nous souhaitons désormais comparer les trois méthodes multipatch et les différentes règles de quadrature. Pour ce faire, on trace le déplacement horizontal le long de  $\Gamma_{obs}$  qui est visible en vert sur la Figure 2.25. Ces solutions sont montrées sur la Figure 2.27 pour des fonctions quadratiques avec intégrations complète et réduite sur les deux figures du haut. Les écarts entre les solutions issues de l’IGA et celles provenant de la FEM sont présentés en dessous. Les facteurs de pénalité sont fixés à  $\alpha_{kl} = 10^3 \cdot E$  pour les déplacements et rotations.

On peut voir que les éléments ne souffrent pas de verrouillage car nous obtenons les mêmes résultats pour les intégrations complète et réduite. Cependant, on observe qu’en choisissant un espace dual simplifié, la méthode duale est moins précise que la formulation du lagrangien augmenté à cause d’un nombre important de points singuliers.

### 2.6.5 Rail latéral

On considère maintenant un rail latéral issu de l’industrie automobile et modélisé par une structure de type coque épaisse. Comme pour le pignon droit, chaque interface est géométri-

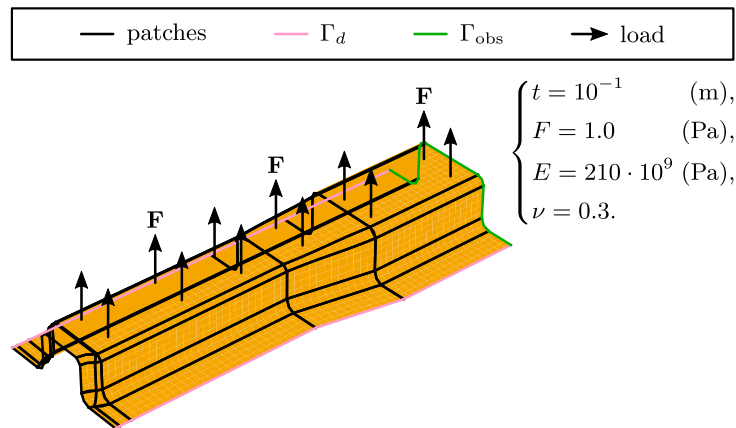


FIGURE 2.28 – Description de la géométrie et des propriétés physiques pour un rail latéral de véhicule. Le partitionnement engendre 45 patchs et 76 interfaces.

quement conforme (Figure 2.28).

La structure est composée de 45 patchs avec 76 interfaces. Une pression verticale constante  $F$  est appliquée sur trois des surfaces supérieures. Deux arêtes extérieures, visibles en rose sur la Figure 2.28, sont encastées. Nous allons comparer les résultats d’IGA, avec un maillage de 1946 éléments quadratiques, et FEM qui sera notre référence numérique avec 11 550 éléments quadratiques. Le déplacement vertical sera mesuré, comme précédemment détaillé, le long de l’arête  $\Gamma_{obs}$ . Dans un premier temps, on visualise ces déplacements pour les deux solutions sur la Figure 2.29.

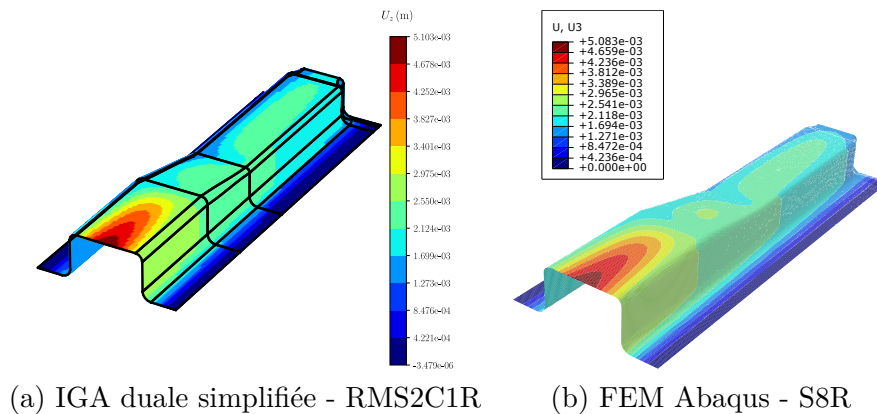


FIGURE 2.29 – Déplacement vertical pour le problème de rail latéral.

Après une première validation qualitative entre l’approche duale avec un traitement simplifié de l’espace mortier et la solution FEM, on compare les méthodes multipatch et les règles de quadrature sur la Figure 2.30. Les figures de gauche correspondent à une intégration complète alors que celles de droite proviennent d’une intégration réduite. Cette étude a mis en évidence



un problème majeur de la méthode par pénalité, il s'agit de la sensibilité de la solution au choix du facteur de pénalité. Prendre  $\alpha_{kl} = 10^3 \cdot E$  pour les déplacements et rotations conduit à un manque de précision sur le déplacement vertical. Par conséquent, les facteurs de pénalité sont fixés à  $\alpha_{kl} \simeq 10^{-4} \cdot E$  pour les déplacements et  $\alpha_{kl} \simeq E$  pour les rotations pour l'approche pénalisée. Concernant la méthode augmentée, ce choix était bien moins sensible d'où l'utilisation d'un unique facteur de pénalité  $\alpha_{kl} = 10^{-5} \cdot E$  pour les déplacements et rotations.

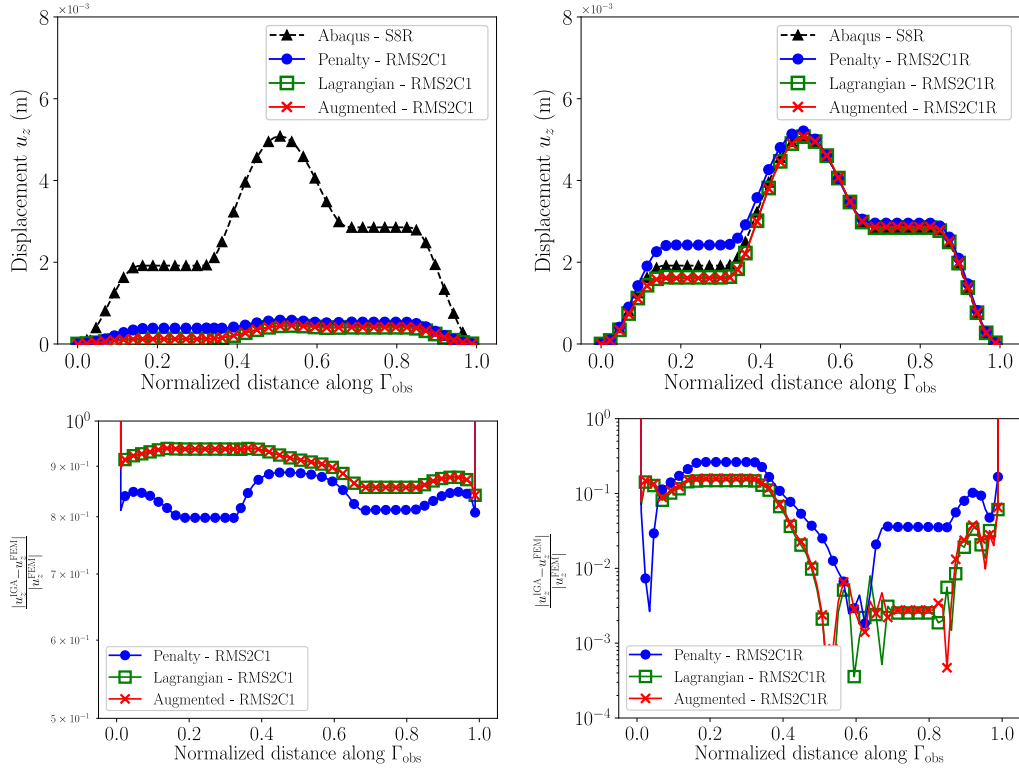


FIGURE 2.30 – Déplacement pour le rail latéral. Gauche : intégration complète. Droite : intégration réduite. Haut : déplacement  $u_z$ . Bas : écart relatif  $|u_z^{\text{IGA}} - u_z^{\text{FEM}}| / |u_z^{\text{FEM}}|$ .

On peut voir dans un premier temps que les éléments souffrent d'un verrouillage numérique car les trois formulations multipatch ne permettent pas de retrouver la référence en utilisant une intégration complète. La règle d'intégration réduite semble essentielle pour des NURBS quadratiques sur ce genre de problème industriel. À l'inverse du problème de pignon droit, l'approche duale avec un espace mortier simplifié ne souffre d'aucun manque de précision. Cela est dû au fait que l'on utilise un maillage fin et, par conséquent, la base duale est assez riche même après la suppression des fonctions interpolantes aux points singuliers.

### 2.6.6 Carter d'huile

Le dernier exemple requiert plus de robustesse, en particulier sur la création des vecteurs noeuds communs sur chaque interface. La structure est un carter d'huile pour lequel la surface



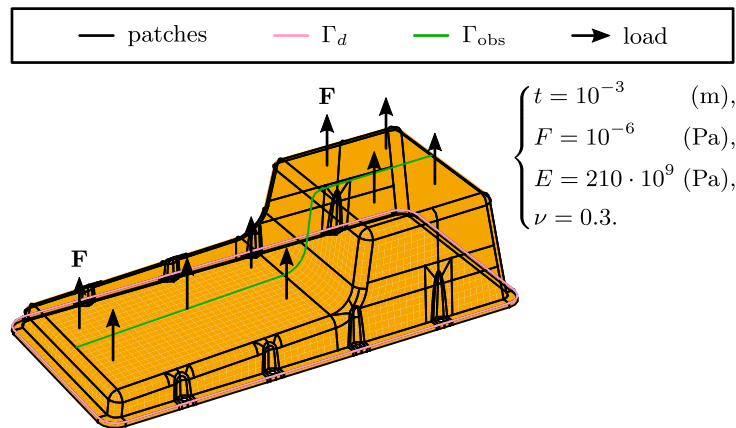


FIGURE 2.31 – Description de la géométrie et des propriétés physiques pour un carter d’huile.

moyenne a été extraite d’une pièce volumique créée dans un logiciel de CAD. Sa complexité justifie notre préférence pour notre traitement simplifié des points singuliers en comparaison de la construction optimale qui est difficilement applicable ici. Ce cas présente de nombreuses interfaces géométriquement non conformes et de différents type tel que détaillé dans la Remarque 2.17. Une description de la géométrie, ses patchs et propriétés est donnée sur la Figure 2.31.

Cette structure est constituée de 279 domaines avec 525 interfaces. Une pression verticale constante est appliquée sur deux de ses surfaces supérieures et le partie basse  $\Gamma_d$  est encastrée. Nous allons comparer la pénalité et les approches duale et augmentée, avec un espace mortier simplifié, associées à l’intégration réduite. Pour les déplacements et rotations, les facteurs de pénalité sont respectivement fixés à  $\alpha_{kl} = 10^3 \cdot E$  et  $\alpha_{kl} = 10^{-5} \cdot E$  pour l’approche primale et augmentée. Les déplacements verticaux peuvent être observés sur la Figure 2.32 pour les deux solutions IGA et FEM.

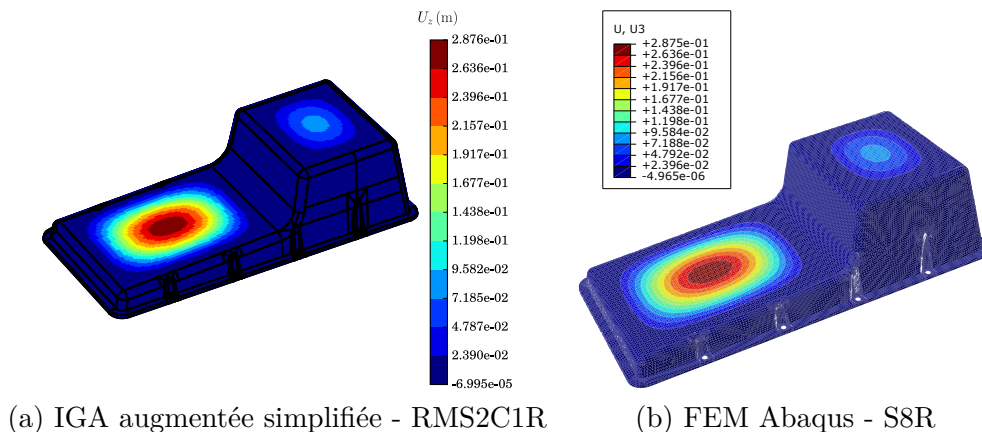


FIGURE 2.32 – Déplacement vertical pour le problème du carter d’huile.

On utilise 1047 (resp. 1570) éléments quadratiques pour les maillages des deux surfaces su-

périeures en IGA (resp. FEM). Nous obtenons des résultats semblables pour les trois approches multipatch tel que montré par les valeurs du déplacement vertical et de la rotation horizontale le long de  $\Gamma_{\text{obs}}$  (Figure 2.33). Malgré un maillage plus grossier pour le modèle IGA, les déplacements et rotations sont similaires aux solutions numériques de référence données par Abaqus.

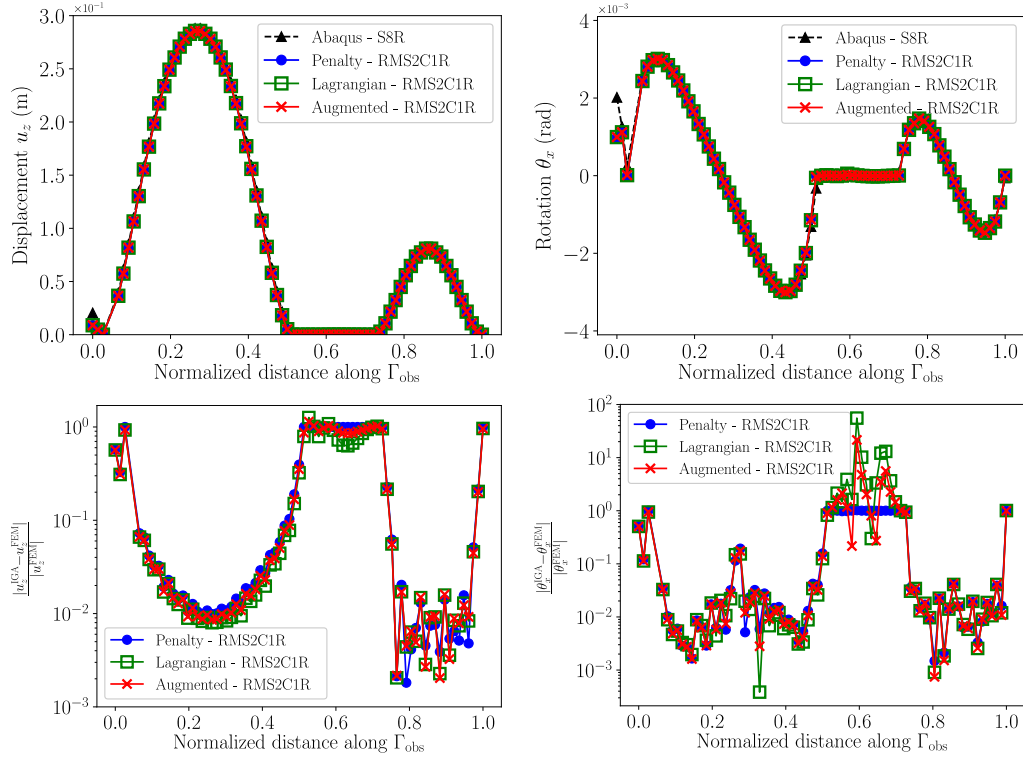


FIGURE 2.33 – Solutions pour le carter d’huile. Gauche : déplacement  $u_z$ . Droite : rotation  $\theta_x$ . Haut : déplacement/rotation. Bas : écart relatif  $|\{u_z/\theta_x\}^{\text{IGA}} - \{u_z/\theta_x\}^{\text{FEM}}| / |\{u_z/\theta_x\}^{\text{FEM}}|$ .

**Remarque 2.17.** Le carter d’huile contient beaucoup d’interfaces géométriquement conformes et non conformes. Une illustration de cette complexité est donnée sur la Figure 2.34 représentant le patch  $\Omega_7$  dans l’espace paramétrique et ses quatre interfaces représentées par des lignes noires. On peut y voir trois situations de conformité géométrique avec des maillages non conformes (a), des maillages hiérarchiques (b) et des maillages conformes (d). La situation (c) est géométriquement non conforme mais avec des maillages conformes. Par conséquent, les vecteurs noeuds communs  $\Xi^c$  sont différents, i.e.,  $\Xi_7^c = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$  et  $\Xi_{212}^c \simeq \{0, 0.08, 0.16, 0.25, 0.32\}$  respectivement pour  $\Omega_7$  et  $\Omega_{212}$ . ■

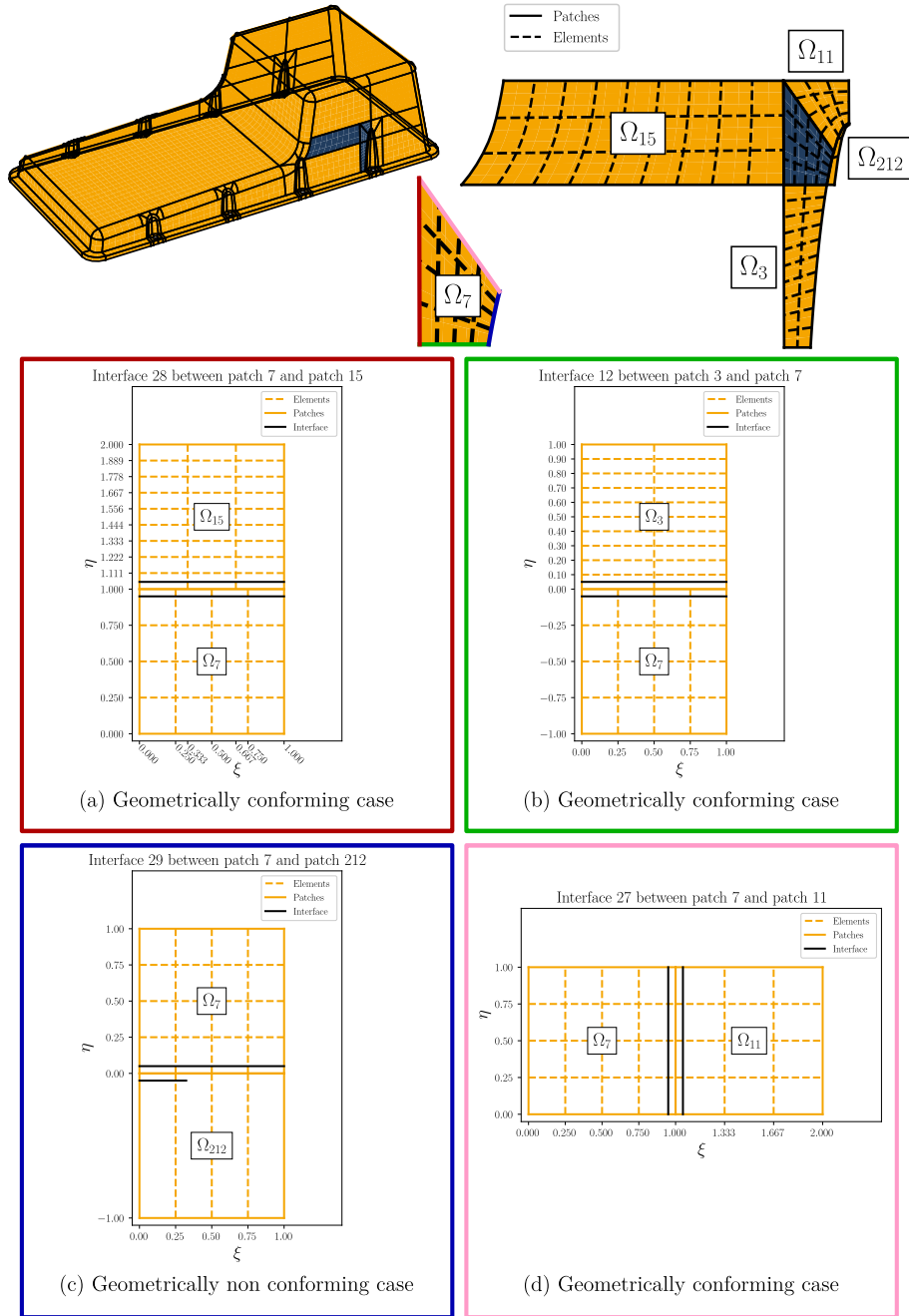


FIGURE 2.34 – Interfaces du patch  $\Omega_7$  dans l'espace paramétrique pour le carter d'huile.

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé et analysé des méthodes multipatch en isogéométrie pour des structures de type coque épaisse en détaillant des choix d'espaces mortier judicieux afin d'imposer la continuité interpatch et en introduisant un terme de régularisation pour aboutir au lagrangien augmenté à des fins de robustesse. Nous avons adapté la stratégie d'espace mortier proposée dans [Brivadis 2015] au problème de coque épaisse. Cette dernière utilise un ordre de couplage égal, pris de l'espace primal, et nécessite uniquement une réduction locale de l'espace dual au voisinage des points singuliers. Afin de traiter le cas de situations complexes rencontrées pour des pièces réelles issues de l'industrie, nous avons proposé et évalué théoriquement et numériquement une correction plus simple de l'espace dual en supprimant les fonctions de base interpolantes à chaque extrémité de l'interface sans aucune modification supplémentaire. La stabilité de l'approche simplifiée est assurée au prix d'un ordre de convergence non optimal pour l'espace dual. Néanmoins, ajouter un terme de régularisation, ce qui correspond à la méthode augmentée, permet de corriger ce manque de précision.

Au final, en combinant la stratégie de couplage avec une reconstruction adéquate des normales à la surface à partir de vecteurs de contrôle construits en des points spécifiques dans l'espace paramétrique, et avec la règle de quadrature réduite proposée dans [Adam 2015b] correctement étendue à un environnement multipatch, nous avons pu traiter une grande variété de problèmes académiques et industriels significatifs. Cela nous a permis de réduire significativement le verrouillage numérique sans introduire de mode sablier. Cette démarche nous a également permis de résoudre des problèmes complexes avec des interfaces géométriquement non conformes, qui sont fréquemment rencontrées dans la pratique, mais qui étaient jusqu'alors rarement traités dans la littérature. En particulier, cette technique semble bien adaptée à des structures d'épaisseur modérée, décrites par un grand nombre de patches de degré modérée avec un grand nombre éventuel d'interfaces non conformes. Ainsi, cette démarche constitue une voie prometteuse afin d'introduire l'IGA dans les applications industrielles.

## Annexes

### 2.A Compléments sur le modèle de coque

#### 2.A.1 Géométrie différentielle sur la surface

La géométrie différentielle et l'analyse du modèle de coque sont étudiés en détails dans [Chapelle 2011] sous le nom de *basic shell model*. On utilise ici les mêmes notations pour arriver à l'obtention de la continuité et coercivité de la forme bilinéaire associée au modèle de coque. Dans la suite, les lettres grecques feront référence aux quantités de la surface moyenne avec  $(\alpha, \beta, \lambda, \mu) \in \{1, 2\}$  alors que les lettres latines correspondront à celles dans le volume avec  $(i, j, k, l) \in \{1, 2, 3\}$ . On choisit de noter les quantités exprimées dans la base covariante par des indices alors qu'un exposant fera référence aux quantités exprimées dans la base contravariante. Soit  $p(X_p, Y_p, Z_p)$  un point de la surface moyenne  $\Omega$  dans le repère cartésien global. Chaque point de  $\Omega$  a pour coordonnées paramétriques  $(\xi^1, \xi^2) \in \widehat{\Omega}(0, 1)^2$  afin de condenser l'écriture.

La base covariante est définie par

$$\mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}_p(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^\alpha}, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \{1, 2\},$$

pour chaque point de la surface moyenne. La base contravariante (ou duale)  $(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2)$  est notée

$$\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta = \delta_\alpha^\beta, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \{1, 2\}, \quad (2.24)$$

avec  $\delta$  le symbole de Kronecker. Nous pouvons ainsi définir la première forme fondamentale de la surface, c'est à dire la restriction du tenseur métrique 3D au plan tangent, par ses composantes covariantes (resp. contravariantes)

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta \quad (\text{resp. } a^{\alpha\beta} = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta).$$

En utilisant la convention de sommation d'Einstein, on peut ainsi passer de composantes covariantes à contravariantes par  $v^\alpha = a^{\alpha\beta} v_\beta$ , pour un vecteur  $\mathbf{v}(\xi^1, \xi^2)$  quelconque. On définit l'élément de surface infinitésimale  $d\widehat{\Omega}$  par

$$d\widehat{\Omega} = |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2| d\xi^1 d\xi^2 = \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2,$$

avec

$$a = \det(a_{\alpha\beta}) = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 = |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|^2 = |\mathbf{a}_1|^2 + |\mathbf{a}_2|^2 - (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)^2 \geq 0.$$

La preuve est établie dans [Chapelle 2011, pp. 27 et 39]. Afin de simplifier les notations, on note  $\mathbf{a}_3$  le vecteur normal unitaire défini par

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|}. \quad (2.25)$$

Soit  $\mathbf{b}$  la seconde forme fondamentale (également appelée tenseur des courbures) associée à la surface moyenne telle que

$$b_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta}.$$

---

## 2.A. Compléments sur le modèle de coque

Pour définir les courbures classiques associées à la surface moyenne, on développe la définition de  $b_{\alpha\beta}$  par

$$b_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta} = -\mathbf{a}_{3,\beta} \cdot \mathbf{a}_\alpha, \quad (2.26)$$

grâce à la relation (2.25). Après conversion en composantes duales on écrit

$$b_\beta^\alpha = a^{\alpha\lambda} b_{\lambda\beta} = -a^{\alpha\lambda} \mathbf{a}_{3,\beta} \cdot \mathbf{a}_\lambda = -\mathbf{a}_{3,\beta} \cdot \mathbf{a}^\alpha = \mathbf{a}_3 \cdot (\mathbf{a}^\alpha)_{,\beta}. \quad (2.27)$$

Avec l'expression  $b_\beta^\alpha = \mathbf{a}_3 \cdot (\mathbf{a}^\alpha)_{,\beta}$ , on peut expliciter respectivement les courbures moyenne  $H$  et de Gauss  $K$  grâce aux invariants de  $\mathbf{b}$  telles que

$$H = \frac{1}{2} (b_1^1 + b_2^2) = \text{Tr}(\mathbf{b}), \quad \text{et} \quad K = b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2 = \det(\mathbf{b}).$$

Enfin, pour compléter le cadre de l'étude, on écrit la troisième forme fondamentale de  $\Omega$  par

$$c_{\alpha\beta} = b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta}.$$

On s'intéresse désormais à la dérivation covariante d'un tenseur de surface. Soit  $\mathbf{u}(\xi^1, \xi^2)$  un vecteur défini par ses deux coordonnées paramétriques. On définit la dérivée de  $\mathbf{u}$ , le long d'une courbe appartenant à la surface moyenne et paramétrée par  $(\xi^1(x), \xi^2(x))$ , telle que

$$\frac{d}{dx} [\mathbf{u}(\xi^1(x), \xi^2(x))] = \frac{d\xi^\alpha}{dx}(x) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^\alpha} = (\xi^\alpha)'(x) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^\alpha} \quad (2.28)$$

On développe le terme de droite par

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^\alpha} &= u_{\beta,\alpha} \mathbf{a}^\beta + u_\beta (\mathbf{a}^\beta)_{,\alpha} \\ &= u_{\beta,\alpha} \mathbf{a}^\beta + u_\lambda (\mathbf{a}^\lambda)_{,\alpha}. \end{aligned}$$

Afin d'exprimer  $(\mathbf{a}^\lambda)_{,\alpha}$  en fonction de  $\mathbf{a}^\beta$ , on décompose le terme en une partie tangentielle et une partie normale avec  $\mathbf{a}_3$  le vecteur unitaire normal au plan tangent. En utilisant la relation  $(\mathbf{a}^\lambda)_{,\alpha} = \left( (\mathbf{a}^\lambda)_{,\alpha} \cdot \mathbf{a}_\beta \right) \mathbf{a}^\beta + \left( (\mathbf{a}^\lambda)_{,\alpha} \cdot \mathbf{a}_3 \right) \mathbf{a}_3$  on peut écrire

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^\alpha} = \left( u_{\beta,\alpha} + u_\lambda (\mathbf{a}^\lambda)_{,\alpha} \cdot \mathbf{a}_\beta \right) \mathbf{a}^\beta + \left( u_\lambda (\mathbf{a}^\lambda)_{,\alpha} \cdot \mathbf{a}_3 \right) \mathbf{a}_3. \quad (2.29)$$

On définit les symboles de Christoffel  $\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda$ , représentant l'évolution des vecteurs de base grâce à leur dérivée covariante, par

$$\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda = \mathbf{a}_{\beta,\alpha} \cdot \mathbf{a}^\lambda = -\mathbf{a}_\beta \cdot (\mathbf{a}^\lambda)_{,\alpha},$$

la seconde égalité étant déduite de la définition de la base duale (2.24). On peut désormais exprimer (2.29) par la dérivée covariante

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^\alpha} = \left( u_{\beta,\alpha} - u_\lambda \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda \right) \mathbf{a}^\beta + \left( u_\lambda (\mathbf{a}^\lambda)_{,\alpha} \cdot \mathbf{a}_3 \right) \mathbf{a}_3 = \left( u_{\beta,\alpha} - u_\lambda \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda \right) \mathbf{a}^\beta + b_\alpha^\lambda u_\lambda \mathbf{a}_3,$$

la seconde égalité étant permise par l'expression (2.27). En notant  $\mathbf{v}$  le vecteur tangent à la courbe  $(\xi^1(x), \xi^2(x))$  tel que  $v^\alpha = (\xi^\alpha)'(x)$ , on définit le gradient surfacique du vecteur  $\mathbf{u}$  par  $\nabla \mathbf{u}$ . Il s'agit d'un tenseur de surface d'ordre 2 dont le produit scalaire par  $\mathbf{v}$  donne la partie tangentielle de (2.28). En notant  $u_{\beta|\alpha}$  les composantes covariantes-covariantes de  $\nabla \mathbf{u}$  on a

$$u_{\beta|\alpha} = u_{\beta,\alpha} - u_\lambda \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda, \quad (2.30)$$

où  $u_{\beta|\alpha}$  est la dérivée covariante surfacique de  $u_\beta$ . Finalement, on peut simplifier l'expression (2.28) par

$$\frac{d}{dx} [\mathbf{u}(\xi^1(x), \xi^2(x))] = v^\alpha (u_{\beta|\alpha} \mathbf{a}^\beta + b_\alpha^\lambda u_\lambda \mathbf{a}_3). \quad (2.31)$$

### 2.A.2 Géométrie différentielle dans le volume

Soit  $q(X_q, Y_q, Z_q)$  un point quelconque situé dans le volume  $V$  de la coque. Les coordonnées  $\mathbf{x}_q$  sont données par

$$\mathbf{x}_q(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \mathbf{x}_p(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \mathbf{a}_3(\xi^1, \xi^2)$$

pour  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in V$  le domaine 3D tel que

$$V = \left\{ (\xi^1, \xi^2) \in \widehat{\Omega}(0, 1)^2, \xi^3 \in \left[ -\frac{t}{2}, \frac{t}{2} \right] \right\}, \quad (2.32)$$

avec  $t$  l'épaisseur constante de la coque. Les composantes covariantes dans le volume sont notées  $g_{mn}$  telles que

$$g_{mn} = \mathbf{g}_m \cdot \mathbf{g}_n, \quad \forall (m, n) \in \{1, 2, 3\}.$$

De même que précédemment, pour la base contravariante on utilise la définition

$$\mathbf{g}_m \cdot \mathbf{g}^n = \delta_m^n, \quad \forall (m, n) \in \{1, 2, 3\}.$$

On définit également le volume infinitésimal  $dV$  par

$$dV = |\mathbf{g}_1 \cdot (\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3)| d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = |[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]| d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3,$$

avec  $[\cdot]$  désignant le produit mixte et  $g = \det(g_{mn})$  (démonstration présente dans [Chapelle 2011, pp. 19]). On s'intéresse désormais aux vecteurs de base covariants 3D, en commençant par le plan tangent

$$\mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}_q(\xi^1, \xi^2, \xi^3)}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{x}_p(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^\alpha} + \xi^3 \mathbf{a}_3(\xi^1, \xi^2)_{,\alpha} = \mathbf{a}_\alpha + \xi^3 \mathbf{a}_{3,\alpha}.$$

Par définition de la normale unitaire au plan tangent,  $\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 1$  implique  $\mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_3 = 0$  après dérivation, ce qui signifie que  $\mathbf{a}_{3,\alpha}$  appartient au plan tangent. On peut donc écrire la relation en composantes covariantes

$$\mathbf{a}_{3,\alpha} = (\mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_\lambda) \mathbf{a}^\lambda.$$

La définition (2.26) permet de réécrire l'expression précédente telle que

$$\mathbf{a}_{3,\alpha} = -b_{\alpha\lambda} \mathbf{a}^\lambda = -b_\alpha^\lambda \mathbf{a}_\lambda. \quad (2.33)$$

Ainsi, les vecteurs de base covariants 3D associés au plan tangent se notent plus simplement par

$$\mathbf{g}_\alpha = (\delta_\alpha^\lambda - \xi^3 b_\alpha^\lambda) \mathbf{a}_\lambda. \quad (2.34)$$

On a de plus

$$\mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}_q(\xi^1, \xi^2, \xi^3)}{\partial \xi^3} = \mathbf{a}_3. \quad (2.35)$$

Il est désormais possible d'expliciter l'ensemble des composantes covariantes du tenseur métrique 3D par

$$\begin{cases} g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta = a_{\alpha\beta} - 2\xi^3 b_{\alpha\beta} + (\xi^3)^2 c_{\alpha\beta}, \\ g_{\alpha 3} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_3 = 0, \\ g_{33} = \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_3 = 1. \end{cases}$$

On remarque que les trois formes fondamentales associées à la surface moyenne sont suffisantes pour décrire simplement les vecteurs de base pour le tenseur métrique 3D. On peut également écrire la quantité  $g$ , permettant l'évaluation de  $dV$ , par les deux premières formes fondamentales

$$g = a \left( 1 - 2H\xi^3 + K(\xi^3)^2 \right)^2,$$

dont la preuve est dans [Chapelle 2011, pp. 39]. La dérivation covariante d'un tenseur 3D étant semblable à celle présentée dans la section précédente, elle ne sera pas présentée.

### 2.A.3 Déformations linéarisées

En considérant un modèle linéaire, on rappelle l'expression du déplacement d'un point  $q$  quelconque

$$\mathbf{u}_q(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \mathbf{u}_p(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \theta_\lambda(\xi^1, \xi^2) \mathbf{a}^\lambda(\xi^1, \xi^2). \quad (2.36)$$

Par définition de la base contravariante, le déplacement  $\xi^3 \theta_1 \mathbf{a}^1$  (resp.  $\xi^3 \theta_2 \mathbf{a}^2$ ) correspond à une rotation infinitésimale autour de  $\mathbf{a}_2$  (resp.  $\mathbf{a}_1$ ). Pour une analyse linéaire, on écrit les composantes du tenseur des déformations pour le déplacement (2.2) par

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{u}_{q,j} + \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{u}_{q,i}), \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}. \quad (2.37)$$

On souhaite écrire les composantes des déformations en fonction des déplacements  $\mathbf{u}_p$  et des rotations  $\boldsymbol{\theta} = \theta_\lambda \mathbf{a}^\lambda$ . En différenciant partie tangentielle et normale, on a

$$\frac{\partial \mathbf{u}_p}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} (u_\lambda \mathbf{a}^\lambda + u_3 \mathbf{a}_3).$$

Grâce à la définition de la dérivée covariante 2D issue de (2.30), comme pour l'expression (2.31), on a

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} (u_\lambda \mathbf{a}^\lambda) = u_{\lambda|\alpha} \mathbf{a}^\lambda + b_\alpha^\lambda u_\lambda \mathbf{a}_3.$$



On développe l'expression de départ en dérivant le terme normal tel que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}_p}{\partial \xi^\alpha} &= u_{\lambda|\alpha} \mathbf{a}^\lambda + b_\alpha^\lambda u_\lambda \mathbf{a}_3 + u_{3,\alpha} \mathbf{a}_3 + u_3 \mathbf{a}_{3,\alpha} \\ &= (u_{\lambda|\alpha} - b_{\lambda\alpha} u_3) \mathbf{a}^\lambda + (u_{3,\alpha} + b_\alpha^\lambda u_\lambda) \mathbf{a}_3,\end{aligned}\quad (2.38)$$

en utilisant la relation (2.33). De la même façon pour les rotations, on note

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} (\theta_\lambda \mathbf{a}^\lambda) = \theta_{\lambda|\alpha} \mathbf{a}^\lambda + b_\alpha^\lambda \theta_\lambda \mathbf{a}_3.$$

Les dérivées dans l'espace tangent et normal d'un point  $q$  quelconque sont

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}_q}{\partial \xi^\alpha} = (u_{\lambda|\alpha} - b_{\lambda\alpha} u_3 + \xi^3 \theta_{\lambda|\alpha}) \mathbf{a}^\lambda + (u_{3,\alpha} + b_\alpha^\lambda u_\lambda + \xi^3 b_\alpha^\lambda \theta_\lambda) \mathbf{a}_3, \\ \frac{\partial \mathbf{u}_q}{\partial \xi^3} = \theta_\lambda \mathbf{a}^\lambda. \end{cases}$$

En injectant les expressions (2.34) et (2.35) de  $\mathbf{g}_i$  ainsi que les dérivées partielles de  $\mathbf{u}_q$  dans le déplacement (2.36), on obtient

$$\begin{cases} \varepsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}_p) + \xi^3 \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{u}_p, \boldsymbol{\theta}) - (\xi^3)^2 \kappa_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\theta}), & \forall (\alpha, \beta) \in \{1, 2\}, \\ \varepsilon_{\alpha 3} = \gamma_\alpha(\mathbf{u}_p, \boldsymbol{\theta}), & \forall \alpha \in \{1, 2\}, \\ \varepsilon_{33} = 0. \end{cases}$$

On détaille les différents termes précédents, notamment les déformations de membrane  $e$ , de flexion  $\chi$  et de cisaillement transverse  $\gamma$ , par

$$\begin{cases} e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}_p) = \frac{1}{2}(u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} u_3, \\ \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{u}_p, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}(\theta_{\alpha|\beta} + \theta_{\beta|\alpha} - b_\beta^\lambda u_{\lambda|\alpha} - b_\alpha^\lambda u_{\lambda|\beta}) + c_{\alpha\beta} u_3, \\ \kappa_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}(b_\beta^\lambda \theta_{\lambda|\alpha} + b_\alpha^\lambda \theta_{\lambda|\beta}), \\ \gamma_\alpha(\mathbf{u}_p, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}(\theta_\alpha + u_{3,\alpha} + b_\alpha^\lambda u_\lambda). \end{cases}\quad (2.39)$$

#### 2.A.4 Loi de comportement

Il reste à définir les contraintes, liées aux déformations par la loi de comportement  $\mathbf{C}$ . En utilisant un matériau linéaire élastique, isotrope et homogène, la loi de Hooke classique permet d'écrire en base locale

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad \forall (i, j, k, l) \in \{1, 2, 3\},$$

avec le tenseur de comportement  $\mathbf{C}$  d'ordre 4 défini par le module de Young  $E$  et le coefficient de poisson  $\nu$  tel que

$$C^{ijkl} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} g^{ij} g^{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)} (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}), \quad \forall (i, j, k, l) \in \{1, 2, 3\}.$$

---

## 2.A. Compléments sur le modèle de coque

On s'attache désormais à préciser ces équations dans le cas d'une base curviligne attachée à la surface moyenne. Avec les relations précédemment établies  $\mathbf{g}^3 = \mathbf{g}_3$ ,  $g^{33} = 1$  et  $g^{\alpha 3} = 0$ , on écrit les simplifications

$$\begin{aligned} C^{\alpha\beta\lambda 3} &= C^{\alpha\beta 3\lambda} = C^{\lambda 3\alpha\beta} = C^{3\lambda\alpha\beta} = 0, & \forall (\alpha, \beta, \lambda) \in \{1, 2\}, \\ C^{\alpha 333} &= C^{3\alpha 33} = C^{33\alpha 3} = C^{333\alpha} = 0, & \forall \alpha \in \{1, 2\}. \end{aligned}$$

Les contraintes s'écrivent alors

$$\begin{cases} \sigma^{\alpha\beta} = H^{\alpha\beta\lambda\mu} \varepsilon_{\lambda\mu}, \\ \sigma^{\alpha 3} = \frac{1}{2} G^{\alpha\lambda} \varepsilon_{\lambda 3}, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)} (g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} + g^{\alpha\mu} g^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu} g^{\alpha\beta} g^{\lambda\mu}), \\ G^{\alpha\lambda} = \frac{2E}{1+\nu} g^{\alpha\lambda}. \end{cases} \quad (2.40)$$

### 2.A.5 Analyse du modèle monopatch

Certaines démonstrations de [Chapelle 2011] seront reprises. On considère l'espace des déplacements-rotations  $H_d^1(\Omega)$  défini par (2.4), auquel on lui associe la norme

$$\|\mathbf{v}_p, \boldsymbol{\vartheta}\|_{H_d^1}^2 = \|\mathbf{v}_p\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\boldsymbol{\vartheta}\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (2.41)$$

On définit également la norme euclidienne classique  $\|\cdot\|_E$  associée à la base  $(\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3)$  pour un tenseur  $\mathbf{Y}$  du second ordre tel que

$$\|\mathbf{Y}\|_E^2 = Y_{mn} g^{mk} g^{nl} Y_{kl}, \quad (2.42)$$

avec le produit intérieur correspondant

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_E = X_{mn} g^{mk} g^{nl} Y_{kl}.$$

On a en particulier pour un tenseur du premier ordre

$$\|\mathbf{y}\|_E^2 = \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = y_m g^{mn} y_n \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_E = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_m g^{mn} y_n.$$

En développant les expressions des déformations dans l'équation (2.5), on écrit la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= a((\mathbf{u}_p, \boldsymbol{\theta}), (\mathbf{v}_p, \boldsymbol{\vartheta})) = \int_V H^{\alpha\beta\lambda\mu} \left( e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}_p) + \xi^3 \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{u}_p, \boldsymbol{\theta}) - (\xi^3)^2 \kappa_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\theta}) \right) \\ &\quad \times \left( e_{\lambda\mu}(\mathbf{v}_p) + \xi^3 \chi_{\lambda\mu}(\mathbf{v}_p, \boldsymbol{\vartheta}) - (\xi^3)^2 \kappa_{\lambda\mu}(\boldsymbol{\vartheta}) \right) dV \\ &\quad + \int_V G^{\alpha\lambda} \gamma_\alpha(\mathbf{u}_p, \boldsymbol{\theta}) \gamma_\lambda(\mathbf{v}_p, \boldsymbol{\vartheta}) dV. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Afin d'établir la coercivité et la continuité de (2.43) pour un patch donné, il est nécessaire de lier les quantités surfaciques aux quantités volumiques.

**Lemme 2.18.** *Sous l'hypothèse de régularité 2.4 et à condition que l'épaisseur soit petite au sens d'avoir  $1 - 2H\xi^3 + K(\xi^3)^2 > 0$ , il existe des constantes  $(c_i, C_i) > 0 \forall i \in \{1, 2, 3\}$  indépendantes de  $t$  tel que, pour tout  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in V$  défini par (2.32), on puisse écrire*

$$c_1 \sqrt{a}(\xi^1, \xi^2) \leq \sqrt{g}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \leq C_1 \sqrt{a}(\xi^1, \xi^2), \quad (2.44)$$

$$c_2 a^{\alpha\beta}(\xi^1, \xi^2) X_\alpha X_\beta \leq g^{\alpha\beta}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) X_\alpha X_\beta \leq C_2 a^{\alpha\beta}(\xi^1, \xi^2) X_\alpha X_\beta, \quad \forall (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} c_3 a^{\alpha\lambda}(\xi^1, \xi^2) a^{\beta\mu}(\xi^1, \xi^2) Y_{\alpha\beta} Y_{\lambda\mu} \\ \leq g^{\alpha\lambda}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) g^{\beta\mu}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) Y_{\alpha\beta} Y_{\lambda\mu} \\ \leq C_3 a^{\alpha\lambda}(\xi^1, \xi^2) a^{\beta\mu}(\xi^1, \xi^2) Y_{\alpha\beta} Y_{\lambda\mu}, \quad \forall (Y_{11}, Y_{12}, Y_{21}, Y_{22}) \in \mathbb{R}^4. \end{aligned} \quad (2.46)$$

□

La preuve est renseignée dans [Chapelle 2011, pp. 126] avec en particulier l'équivalence des conditions  $1 - 2H\xi^3 + K(\xi^3)^2 > 0$  et  $t < 2|R_{\min}|$  avec  $R_{\min}$  le plus petit rayon de courbure de la surface moyenne.

**Proposition 2.19.** *Soit  $N(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  la forme bilinéaire définie par*

$$N(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{e}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\boldsymbol{\gamma}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + t^2 \|\boldsymbol{\chi}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + t^4 \|\boldsymbol{\kappa}\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (2.47)$$

où  $t$  dénote l'épaisseur de la coque. Nous avons l'équivalence

$$\frac{1}{Et} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \simeq N(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H_d^1(\Omega). \quad \square$$

**Preuve.** On rappelle que deux formes  $a(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  et  $N(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  sont équivalentes si et seulement si il existe des constantes  $c$  et  $C$  strictement positives et indépendantes de  $t$  et  $E$  tel que

$$cN(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq CN(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H_d^1(\Omega).$$

Soient  $(\mathbf{v}_p, \boldsymbol{\vartheta}) \in H_d^1(\Omega)$  des fonctions test arbitraires. On utilise les lois de comportement (2.40) pour obtenir l'équivalence

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \simeq \int_V g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} \left( e_{\alpha\beta} + \xi^3 \chi_{\alpha\beta} - (\xi^3)^2 \kappa_{\alpha\beta} \right) \\ \times \left( e_{\lambda\mu} + \xi^3 \chi_{\lambda\mu} - (\xi^3)^2 \kappa_{\lambda\mu} \right) dV + \int_V g^{\alpha\lambda} \gamma_\alpha \gamma_\lambda dV. \end{aligned}$$

On rappelle que  $dV = \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$ . En appliquant la relation (2.44) à  $dV$  et les expressions (2.45) et (2.46) respectivement à la partie en cisaillement et à celle en membrane-flexion de  $a(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \simeq \int_V a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} \left( e_{\alpha\beta} + \xi^3 \chi_{\alpha\beta} - (\xi^3)^2 \kappa_{\alpha\beta} \right) \\ \times \left( e_{\lambda\mu} + \xi^3 \chi_{\lambda\mu} - (\xi^3)^2 \kappa_{\lambda\mu} \right) \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 + \int_V a^{\alpha\lambda} \gamma_\alpha \gamma_\lambda \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3. \end{aligned}$$

## 2.A. Compléments sur le modèle de coque

Il est désormais possible de se ramener à une intégrale sur la surface moyenne en intégrant les différents termes selon  $\xi^3$  le long de l'épaisseur  $t$  de la coque. On a l'équivalence

$$\frac{1}{Et} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \simeq \int_{\Omega} \left[ a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} \left( e_{\alpha\beta} e_{\lambda\mu} + \frac{t^2}{12} \chi_{\alpha\beta} \chi_{\lambda\mu} - \frac{t^2}{6} e_{\alpha\beta} \kappa_{\lambda\mu} + \frac{t^4}{80} \kappa_{\alpha\beta} \kappa_{\lambda\mu} \right) + a^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \right] d\Omega.$$

On s'intéresse alors au terme mixte  $e_{\alpha\beta} \kappa_{\lambda\mu}$  et on note  $r$  un réel strictement positif. En utilisant la norme euclidienne (2.42) associée à la base  $(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3)$  on a

$$|t^2 a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} e_{\alpha\beta} \kappa_{\lambda\mu}| = \left| \langle \mathbf{e}, t^2 \boldsymbol{\kappa} \rangle_E \right| = \left| \left\langle \sqrt{r} \mathbf{e}, \frac{t^2}{\sqrt{r}} \boldsymbol{\kappa} \right\rangle_E \right|.$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz on écrit

$$\begin{aligned} |t^2 a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} e_{\alpha\beta} \kappa_{\lambda\mu}| &\leq \|\sqrt{r} \mathbf{e}\|_E \left\| \frac{t^2}{\sqrt{r}} \boldsymbol{\kappa} \right\|_E \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \|\sqrt{r} \mathbf{e}\|_E^2 + \left\| \frac{t^2}{\sqrt{r}} \boldsymbol{\kappa} \right\|_E^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left( r \|\mathbf{e}\|_E^2 + \frac{t^4}{r} \|\boldsymbol{\kappa}\|_E^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{2} a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} \left( r e_{\alpha\beta} e_{\lambda\mu} + \frac{t^4}{r} \kappa_{\alpha\beta} \kappa_{\lambda\mu} \right). \end{aligned}$$

On choisit  $r = 10$  afin de simplifier rapidement le terme  $\kappa_{\alpha\beta} \kappa_{\lambda\mu}$  tel que

$$\begin{cases} \frac{1}{Et} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \int_{\Omega} \left[ a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} \left( \frac{1}{6} e_{\alpha\beta} e_{\lambda\mu} + \frac{t^2}{12} \chi_{\alpha\beta} \chi_{\lambda\mu} + \frac{t^4}{240} \kappa_{\alpha\beta} \kappa_{\lambda\mu} \right) + a^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \right] d\Omega, \\ \frac{1}{Et} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq \int_{\Omega} \left[ a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} \left( \frac{11}{6} e_{\alpha\beta} e_{\lambda\mu} + \frac{t^2}{12} \chi_{\alpha\beta} \chi_{\lambda\mu} + \frac{5}{240} t^4 \kappa_{\alpha\beta} \kappa_{\lambda\mu} \right) + a^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \right] d\Omega. \end{cases}$$

Ainsi, nous obtenons les deux inégalités

$$\begin{cases} \frac{1}{Et} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{6} |\mathbf{e}|^2 + |\boldsymbol{\gamma}|^2 + \frac{t^2}{12} |\boldsymbol{\chi}|^2 + \frac{t^4}{240} |\boldsymbol{\kappa}|^2 \right] d\Omega, \\ \frac{1}{Et} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq \int_{\Omega} \left[ \frac{11}{6} |\mathbf{e}|^2 + |\boldsymbol{\gamma}|^2 + \frac{t^2}{12} |\boldsymbol{\chi}|^2 + \frac{5}{240} t^4 |\boldsymbol{\kappa}|^2 \right] d\Omega, \end{cases}$$

d'où finalement, en notant  $c$  et  $C$  des constantes strictement positives indépendantes de  $t$  et  $E$  l'inégalité

$$cN(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq \frac{1}{Et} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq CN(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H_d^1(\Omega), \quad (2.48)$$

permettant de conclure cette preuve. ■

**Lemme 2.20** (Mouvements de corps rigide monopatch). *Soient  $\mathbf{v}_p \in H^1(\Omega)$  et  $\boldsymbol{\vartheta} \in H^1(\Omega)$ . On suppose une déformation nulle telle que  $(\mathbf{e}(\mathbf{v}_p), \boldsymbol{\chi}(\mathbf{v}_p, \boldsymbol{\vartheta}), \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{v}_p, \boldsymbol{\vartheta})) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$  sur l'ensemble*

de la surface  $\Omega$ . Alors le déplacement (2.36) d'un point  $q$  quelconque de  $V$  correspond à un mouvement de corps rigide infinitésimal. En d'autres termes, il existe un vecteur de translation  $\mathbf{T}$  et un vecteur de rotation infinitésimal  $\mathbf{R}$  tel que

$$\begin{cases} \mathbf{v}_p(\xi^1, \xi^2) = \mathbf{T} + \mathbf{R} \times \mathbf{x}_p(\xi^1, \xi^2), \\ \boldsymbol{\vartheta}(\xi^1, \xi^2) = \mathbf{R} \times \mathbf{a}_3(\xi^1, \xi^2), \end{cases}$$

ce qui implique

$$\mathbf{v}_q(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \mathbf{T} + \mathbf{R} \times \underbrace{(\mathbf{x}_p(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \mathbf{a}_3(\xi^1, \xi^2))}_{\mathbf{x}_q(\xi^1, \xi^2, \xi^3)}. \quad \square$$

On retrouve la démonstration de ce lemme dans [Chapelle 2011, pp. 118-119].

**Proposition 2.21** (Équivalence des normes - monopatch). *L'expression (2.47) définit une norme sur  $H_d^1(\Omega)$ . Cette norme est équivalente à celle associée à  $H_d^1(\Omega)$  au sens suivant*

$$N(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq c(t) \|\mathbf{v}\|_{H_d^1(\Omega)}^2, \quad (2.49)$$

et

$$C(t) \|\mathbf{v}\|_{H_d^1(\Omega)}^2 \geq N(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - t^4 \|\boldsymbol{\kappa}\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (2.50)$$

avec  $c(t)$  et  $C(t)$  des constantes strictement positives dépendantes de l'épaisseur.  $\square$

La preuve par contradiction est présentée dans [Chapelle 2011, pp. 120-121] sachant que, par le lemme 2.20, le seul mouvement de corps rigide permis avec les conditions limites imposées correspond à un déplacement nul. Les arguments de la démonstration sont par ailleurs ré-utilisés pour l'équivalence des normes dans le cas multipatch.

**Corollaire 2.22** (Continuité et coercivité). *La fonction  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  est continue, plus précisément il s'agit d'une forme bilinéaire sur  $H_d^1(\Omega)$ . Si de plus le lemme 2.20, associé aux conditions limites imposées, permet de justifier l'absence de mouvements de corps rigide, alors la forme  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  est coercive sur  $H_d^1(\Omega)$ .  $\square$*

**Preuve.** On montre dans un premier temps la coercivité. Pour cela, on utilise successivement les relations (2.48) et (2.49) afin d'écrire

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq Etc_2 N(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq Etc_2 c(t) \|\mathbf{v}\|_{H_d^1(\Omega)}^2. \quad (2.51)$$

L'expression (2.51) établit directement la coercivité de  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ . Il reste alors à montrer la continuité en partant de la relation (2.50) tel que

$$N(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq C(t) \|\mathbf{v}\|_{H_d^1(\Omega)}^2 + t^4 \|\boldsymbol{\kappa}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Avec l'expression (2.39) de  $\boldsymbol{\kappa}$  utilisant la dérivée covariante exprimée en (2.30) sur  $\boldsymbol{\vartheta}$ , on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned}
N(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &\leq C(t) \|\mathbf{v}\|_{H_d^1(\Omega)}^2 + t^4 \|\boldsymbol{\kappa}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq C(t) \|\mathbf{v}\|_{H_d^1(\Omega)}^2 + t^4 \|\boldsymbol{\vartheta}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\
&\leq \tilde{C}(t) \|\mathbf{v}\|_{H_d^1(\Omega)}^2.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Finalement, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que les relations (2.48) et (2.52) on obtient

$$\begin{aligned}
|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &\leq \sqrt{a(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \sqrt{a(\mathbf{v}, \mathbf{v})} \\
&\leq EtC_2 \sqrt{N(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \sqrt{N(\mathbf{v}, \mathbf{v})} \\
&\leq EtC_2 \tilde{C}(t) \|\mathbf{u}\|_{H_d^1(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{H_d^1(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

La relation (2.53) montre la continuité de  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  et conclut la démonstration. ■

**Remarque 2.23.** La constante de coercivité ne varie pas de manière uniforme en  $t$ , avec des termes en  $\mathcal{O}(t)$  pour les composantes en cisaillement et membrane et des termes en  $\mathcal{O}(t^3)$  sur les composantes de flexion. Cette différence d'ordre selon l'épaisseur est à l'origine du verrouillage numérique traité par la règle d'intégration présentée dans ce chapitre. ■

## 2.B Coque linéaire en coordonnées cartésiennes

Le but de cette annexe est de transformer la formulation variationnelle (2.5) de manière à ne pas développer le travail des efforts intérieurs en base locale, mais de le calculer directement en base cartésienne. Les déplacements dans (2.2) sont donnés pour une normale exacte

$$\mathbf{n} = \mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|_2}.$$

On rappelle la définition d'une normale interpolée  $\mathbf{n}^h(\xi, \eta)$  par

$$\mathbf{n}(\xi, \eta) \approx \mathbf{n}^h(\xi, \eta) = \sum_{A=1}^{n-m} R_A(\xi, \eta) \mathbf{n}_A,$$

avec les normales  $\mathbf{n}_A$  construites en des points de collocation donnés. L'intérêt d'utiliser une normale approchée est détaillé dans la partie intégration réduite.

On définit la matrice de passage de la base cartésienne globale à la base locale covariante pour les points situés sur la surface moyenne  $\Omega$ , i.e. pour  $\zeta \equiv \xi^3 = 0$ , par

$$\mathbf{F}_{\zeta=0} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{n} \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

À partir de l'expression (2.54), nous allons définir la matrice gradient de la transformation, envoyant l'espace paramétrique  $\{(\xi, \eta, \zeta)\}$  vers l'espace physique  $\{\mathbf{x}\}$ , par

$$\mathbf{F}_{\zeta} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{,\xi} & \mathbf{x}_{,\eta} & \frac{t}{2} \mathbf{x}_{,\zeta} \end{bmatrix} = \mathbf{F}_{\zeta=0} + \frac{t}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{,\xi} & \mathbf{n}_{,\eta} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

La jacobienne de la transformation de l'espace paramétrique vers l'espace physique, en se rappelant de l'expression du vecteur position (2.1), vaut

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{\zeta}^T = \sum_{A=1}^{n-m} R_{A,\xi} \mathbf{X}_A^T + \frac{t}{2} (\zeta \mathbf{n})_{,\xi}. \quad (2.55)$$

On peut choisir d'utiliser la jacobienne de la représentation exacte de la coque ou celle associée à une représentation approchée en utilisant les normales  $\mathbf{n}_A$  définies aux points de collocation choisis. L'équation (2.55) va nous permettre d'évaluer les dérivées des fonctions de forme dans l'espace physique tel que

$$R_{A,\mathbf{x}} = \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^{-1} R_{A,\xi} \quad \text{et} \quad \tilde{R}_{A,\mathbf{x}} = \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^{-1} \tilde{R}_{A,\xi} \quad \text{avec} \quad \tilde{R}_A = \frac{t}{2} \zeta R_A, \quad \forall \zeta \in [-1, 1].$$

Avant d'écrire le lien entre les déplacements et déformations ou contraintes, il est nécessaire de relier ces grandeurs entre l'espace local précédemment défini et l'espace cartésien global. Sachant que la base locale (2.54) n'a pas de sens physique, il est nécessaire de la rendre ortho-normale. Nous effectuons alors le choix arbitraire (non unique) suivant

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|_2}, \quad \mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|} \quad \text{et} \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{t}_1.$$

## 2.B. Coque linéaire en coordonnées cartésiennes

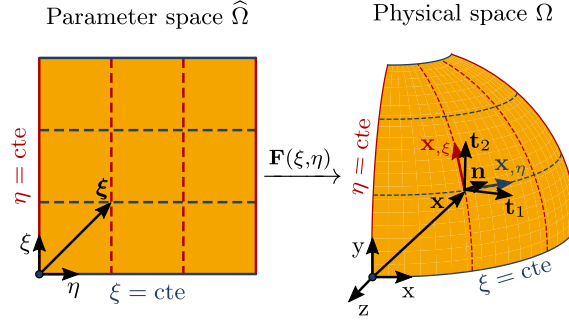


FIGURE 2.B.1 – Représentation de la base locale orthonormée dans l'espace physique.

On peut alors définir la matrice de passage  $\mathbf{P} = [\mathbf{t}_1 \quad \mathbf{t}_2 \quad \mathbf{n}]$  de la base cartésienne globale à la base locale orthonormée. L'exposant  $g$  (resp.  $l$ ) désigne une grandeur dans l'espace global (resp. local). Par soucis de clarté, les crochets  $[\cdot]$  désigne un tenseur d'ordre deux alors que l'absence de crochet renvoie à son équivalent en notation de Voigt.

Sachant que la loi de comportement est définie dans le repère local et que nous souhaitons appliquer l'état plan de contraintes  $\sigma_{33} = 0$ , on note la transformation

$$[\sigma^g] = \mathbf{P}[\sigma^l]\mathbf{P}^T \quad \text{et} \quad [\epsilon^g] = \mathbf{P}[\epsilon^l]\mathbf{P}^T.$$

En notation de Voigt nous obtenons  $\sigma^g = \mathbf{Q}\sigma^l$  et  $\epsilon^g = \mathbf{Q}\epsilon^l$  avec les contraintes locales  $\sigma^l = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} = 0 \quad 2\sigma_{12} \quad 2\sigma_{23} \quad 2\sigma_{31}]^T$ . Il en est de même pour la matrice de comportement  $\mathbf{C}^g = \mathbf{Q}\mathbf{C}^l\mathbf{Q}^T$ . On donne la loi de Hooke classique en contraintes planes dans le repère local

$$\sigma^l = \mathbf{C}^l \epsilon^l \quad \text{avec} \quad \mathbf{C}^l = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k\frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k\frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.56)$$

et  $k$  le facteur de correction en cisaillement, généralement pris comme égal à  $\frac{5}{6}$ .

On note  $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})$  le vecteur contenant les six degrés de liberté pour l'ensemble des points de contrôle. Soit  $\mathbf{B}$  l'opérateur reliant les déplacements aux déformations dans le repère global avec  $\mathbf{B}^u$  correspondant aux déplacements et  $\mathbf{B}^\theta$  aux rotations de normale tel que

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1^u \quad \mathbf{B}_1^\theta \quad \cdots \quad \mathbf{B}_A^u \quad \mathbf{B}_A^\theta \quad \cdots \quad \mathbf{B}_{n-m}^u \quad \mathbf{B}_{n-m}^\theta].$$



Les déformations sont évaluées par la relation  $\epsilon^g = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{,x} + (\mathbf{u}_{,x})^T) = \mathbf{B}\mathbf{U}$  avec

$$\mathbf{B}_A^u = \begin{bmatrix} R_{A,x} & 0 & 0 \\ 0 & R_{A,y} & 0 \\ 0 & 0 & R_{A,z} \\ R_{A,y} & R_{A,x} & 0 \\ 0 & R_{A,z} & R_{A,y} \\ R_{A,z} & 0 & R_{A,x} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

et

$$\mathbf{B}_A^\theta = \begin{bmatrix} 0 & (\tilde{R}_{An^z})_{,x} & -(\tilde{R}_{An^y})_{,x} \\ -(\tilde{R}_{An^z})_{,y} & 0 & (\tilde{R}_{An^x})_{,y} \\ (\tilde{R}_{An^y})_{,z} & -(\tilde{R}_{An^x})_{,z} & 0 \\ -(\tilde{R}_{An^z})_{,x} & (\tilde{R}_{An^z})_{,y} & (\tilde{R}_{An^x})_{,x} - (\tilde{R}_{An^y})_{,y} \\ (\tilde{R}_{An^y})_{,y} - (\tilde{R}_{An^z})_{,z} & -(\tilde{R}_{An^x})_{,y} & (\tilde{R}_{An^x})_{,z} \\ (\tilde{R}_{An^y})_{,x} & (\tilde{R}_{An^z})_{,z} - (\tilde{R}_{An^x})_{,x} & -(\tilde{R}_{An^y})_{,z} \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

L'expression (2.58) est valable pour une normale exacte. Avec une normale approchée, celle-ci s'écrit plus simplement par

$$\mathbf{B}_A^\theta = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{R}_{A,x}n_A^z & -\tilde{R}_{A,x}n_A^y \\ -\tilde{R}_{A,y}n_A^z & 0 & \tilde{R}_{A,y}n_A^x \\ \tilde{R}_{A,z}n_A^y & -\tilde{R}_{A,z}n_A^x & 0 \\ -\tilde{R}_{A,x}n_A^z & \tilde{R}_{A,y}n_A^z & \tilde{R}_{A,x}n_A^x - \tilde{R}_{A,y}n_A^y \\ \tilde{R}_{A,y}n_A^y - \tilde{R}_{A,z}n_A^z & -\tilde{R}_{A,y}n_A^x & \tilde{R}_{A,z}n_A^x \\ \tilde{R}_{A,x}n_A^y & \tilde{R}_{A,z}n_A^z - \tilde{R}_{A,x}n_A^x & -\tilde{R}_{A,z}n_A^y \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

Il est désormais possible d'écrire de manière classique le vecteur des forces intérieures

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C}^g \epsilon^g dV,$$

avec  $V = \Omega \times [-t/2, t/2]$  le volume de la coque. Enfin, la matrice de raideur est définie par

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C}^g \mathbf{B} dV.$$

En approximation isogéométrique, le problème (2.5) consiste à trouver le vecteur de degré de liberté

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \quad \boldsymbol{\theta}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_A \quad \boldsymbol{\theta}_A \quad \cdots \quad \mathbf{u}_{n \cdot m} \quad \boldsymbol{\theta}_{n \cdot m}]^T,$$

solution du système matriciel

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F},$$

avec  $\mathbf{F}$  le vecteur des efforts extérieurs approchés par les fonctions NURBS tel que

$$\begin{cases} \mathbf{F}_A^u = \int_{\Omega} (\mathbf{f}_s + t\mathbf{f}_v) R_A d\Omega + \int_{\Gamma_n} \mathbf{g}_p R_A d\Gamma_n, \\ \mathbf{F}_A^\theta = \int_V \mathbf{f}_v \tilde{R}_A dV + \int_{\Gamma_n} \mathbf{m}_p R_A d\Gamma_n. \end{cases}$$

## 2.C Système à résoudre pour le couplage de deux patches

L'exemple de la Figure 2.4 est repris afin d'écrire explicitement les matrices de couplage. Dans ce cas, le squelette  $\Gamma_s$  n'est constitué que d'une seule composante  $\gamma_{21}$ . On rappelle la notation  $R_A$  (resp.  $\tilde{R}_A$ ) désignant les fonctions de forme NURBS en déplacement (resp. rotation). On définit l'interpolation NURBS, avec  $\mathbf{u}_k = ((\mathbf{u}_p)_k, \boldsymbol{\theta}_k) \in V_{k,h} \times V_{k,h}$  pour  $k = \{1, 2\}$ , par

$$\mathbf{u}_k = ((\mathbf{u}_p)_k, \boldsymbol{\theta}_k) = \sum_i \mathbf{R}_k^i u_k^i.$$

Ici  $i = i(A, B)$  correspond au numéro global du degré de liberté  $B = \{1, \dots, 6\}$  du noeud  $A = \{1, \dots, n_k \cdot m_k\}$ . Si  $\mathbf{e}_B \in \mathbb{R}^6$  est le vecteur unitaire dans la direction  $B$ , la fonction de base  $\mathbf{R}_k^i$  est définie par

$$\begin{cases} \mathbf{R}_k^i = R_k^A \mathbf{e}_B, & \text{si } B \leq 3 \text{ (déplacement),} \\ \mathbf{R}_k^i = \tilde{R}_k^A \mathbf{e}_B, & \text{si } B > 3 \text{ (rotation).} \end{cases}$$

**Exemple de système pénalisé.** En utilisant la forme bilinéaire (2.15) et en omettant l'écriture de l'opérateur trace pour clarifier l'écriture, on a

$$\begin{aligned} b_{21}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) &= \int_{\gamma_{21}} (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \, d\gamma_{21} \\ &\stackrel{\text{NURBS}}{=} \int_{\gamma_{21}} \left( \sum_i \mathbf{R}_2^i u_2^i - \sum_i \mathbf{R}_1^i u_1^i \right) \left( \sum_j \mathbf{R}_2^j v_2^j - \sum_j \mathbf{R}_1^j v_1^j \right) \, d\gamma_{21} \\ &= \int_{\gamma_{21}} \sum_i \sum_j \left( \underbrace{\mathbf{R}_1^i \mathbf{R}_1^j}_{K_{1,(i,j)}^p} u_1^i v_1^j - \underbrace{\mathbf{R}_1^i \mathbf{R}_2^j}_{C_{1,(i,j)}^p} u_1^i v_2^j - \underbrace{\mathbf{R}_2^i \mathbf{R}_1^j}_{C_{2,(i,j)}^p} u_2^i v_1^j + \underbrace{\mathbf{R}_2^i \mathbf{R}_2^j}_{K_{2,(i,j)}^p} u_2^i v_2^j \right) \, d\gamma_{21}. \end{aligned}$$

On obtient alors les matrices de pénalité

$$\begin{aligned} K_{k,(i,j)}^p &= \alpha_{ij} \langle \mathbf{R}_k^i, \mathbf{R}_k^j \rangle_{L^2(\gamma_{21})}, \\ C_{1,(i,j)}^p &= -\alpha_{ij} \langle \mathbf{R}_1^i, \mathbf{R}_2^j \rangle_{L^2(\gamma_{21})}, \\ C_{2,(i,j)}^p &= -\alpha_{ij} \langle \mathbf{R}_2^i, \mathbf{R}_1^j \rangle_{L^2(\gamma_{21})}, \end{aligned}$$

avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\gamma_{21})}$  le produit classique dans  $L^2$  le long de  $\gamma_{21}$ . On remarque l'égalité  $\mathbf{C}_1^p = (\mathbf{C}_2^p)^T$  par symétrie du produit dans  $L^2(\gamma_{21})$ . On note  $\mathbf{K}_k$ , pour  $k = \{1, 2\}$ , les matrices de raideur des deux patches issus de  $a_k(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)$  et  $\mathbf{F}_k$  les vecteurs des efforts extérieurs issus de  $L_k(\mathbf{v}_k)$ . Le système à résoudre s'écrit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_1^p & \mathbf{C}_1^p \\ \mathbf{C}_2^p & \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_2^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix}.$$

**Exemple de système dualisé.** Les duaux des déplacements et rotations  $\lambda_{21} \in M_{21,h}$  sont interpolés par les fonctions NURBS tel que

$$\lambda_{21} = \sum_i \mathbf{R}_{21}^{i,\lambda} \lambda_{21}^i,$$

avec  $\mathbf{R}^{i,\lambda} = R^{A,\lambda} \mathbf{e}_B$  ou  $\mathbf{R}^{i,\lambda} = \tilde{R}^{A,\lambda} \mathbf{e}_B$  suivant que le degré de liberté  $i(A, B)$  corresponde à un déplacement ou une rotation. En notant  $k$  le côté esclave  $s(21)$  choisi, on a

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{21}^{i,\lambda} = \text{Tr}_{21} R_k^{A,\lambda} \mathbf{e}_B, & \text{si } B \leq 3 \text{ (déplacement),} \\ \mathbf{R}_{21}^{i,\lambda} = \text{Tr}_{21} \tilde{R}_k^{A,\lambda} \mathbf{e}_B, & \text{si } B > 3 \text{ (rotation).} \end{cases}$$

Avec la forme bilinéaire (2.16) et en omettant l'écriture de l'opérateur trace on obtient

$$\begin{aligned} c_{21}(\lambda_{21}, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) &= \int_{\gamma_{21}} \lambda_{21} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \, d\gamma_{21} \\ &\stackrel{\text{NURBS}}{=} \int_{\gamma_{21}} \sum_i \mathbf{R}_{21}^{i,\lambda} \lambda_{21}^i \left( \sum_j \mathbf{R}_1^j v_1^j - \sum_j \mathbf{R}_2^j v_2^j \right) \, d\gamma_{21} \\ &= \int_{\gamma_{21}} \sum_i \sum_j \left( \underbrace{\mathbf{R}_{21}^{i,\lambda} \mathbf{R}_1^j}_{C_{1,(i,j)}^\lambda} \lambda_{21}^i v_1^j - \underbrace{\mathbf{R}_{21}^{i,\lambda} \mathbf{R}_2^j}_{C_{2,(i,j)}^\lambda} \lambda_{21}^i v_2^j \right) \, d\gamma_{21}, \end{aligned}$$

avec les matrices de couplage

$$C_{k,(i,j)}^\lambda = (-1)^{k+1} \langle \mathbf{R}_{21}^{i,\lambda}, \mathbf{R}_k^j \rangle_{L^2(\gamma_{21})}.$$

Le système à résoudre dans le cas d'un problème dualisé est

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{0} & (\mathbf{C}_1^\lambda)^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_2 & (\mathbf{C}_2^\lambda)^T \\ \mathbf{C}_1^\lambda & \mathbf{C}_2^\lambda & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \lambda_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Naturellement, la taille du système augmente avec l'introduction d'inconnues supplémentaires. Le bloc de zéros visible dans la matrice de raideur est caractéristique d'un problème de point-selle.

**Exemple de système augmenté.** Sachant que l'approche augmenté est la combinaison des méthodes primale et duale, on utilise les matrices de couplage précédentes pour obtenir le système augmenté à résoudre

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_1^p & \mathbf{C}_1^p & (\mathbf{C}_1^\lambda)^T \\ \mathbf{C}_2^p & \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_2^p & (\mathbf{C}_2^\lambda)^T \\ \mathbf{C}_1^\lambda & \mathbf{C}_2^\lambda & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \lambda_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

## 2.D Compléments sur l'intégration réduite

### 2.D.1 Intégration réduite dans les patches

Afin de compléter l'étude, l'intégration réduite des différents termes composant l'énergie de déformation est détaillée. Il s'agit simplement de présenter le travail de [Adam 2014, Adam 2015b] afin de comprendre la démarche permettant d'obtenir une diminution significative du verrouillage numérique. On précise que le terme intégration complète fait référence à une intégration exacte, c'est à dire une intégration Gaussienne à  $n$  points. En notant  $[a, b]$  l'intervalle d'évaluation d'une fonction  $g$ , on obtient après discrétisation l'approximation

$$\int_a^b g(x)\bar{w}(x) dx \simeq \sum_{i=1}^n w_i g(x_i),$$

avec  $\bar{w} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction de pondération et  $w_i$  les poids de Gauss associés à chaque noeud  $x_i$  qui sont les racines de la famille de polynômes orthogonaux choisie pour le produit scalaire associé à  $L^2$ . Nous avons choisi une intégration de Gauss-Legendre dont on rappelle qu'un nombre de points

$$n_{\text{GPC}} = E_{\text{sup}} \left[ \frac{2p + 1}{2} \right] \quad (2.60)$$

est nécessaire pour intégrer exactement un polynôme d'ordre  $2p$  (ici  $E_{\text{sup}}[\cdot]$  correspond à la partie entière supérieure). Néanmoins, il est connu qu'une intégration complète pour des éléments de type plaque/coque épaisse amène un verrouillage en cisaillement/membrane causé par un champ dit inconsistant. On utilise donc l'intégration réduite de [Adam 2014, Adam 2015b] dont l'un des avantages consiste à utiliser un même nombre de points pour les termes de membrane, flexion et cisaillement contrairement aux intégrations sélectives classiques ce qui en fait une méthode adaptée à l'étude de géométries plus complexes. Le phénomène de verrouillage est présenté sur une poutre courbe de Timoshenko soumise à un chargement dans le plan. On note  $L$  sa longueur,  $R$  son rayon de courbure constant et  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  le repère de Serret-Frenet associé (voir Figure 2.D.1).

Dans ce repère local, les déplacements le long de la fibre moyenne sont notés  $\mathbf{u}(s)$  et les rotations de la section transverse  $\boldsymbol{\theta}(s)$  tel que

$$\mathbf{u}(s) = \begin{bmatrix} u_t(s) & u_n(s) & 0 \end{bmatrix}^T \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\theta}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \theta_b(s) \end{bmatrix}^T.$$

On applique un moment par unité de longueur dépendant de l'épaisseur  $t$  de la poutre

$$\mathbf{m}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & m(s) \end{bmatrix}^T, \quad \text{avec} \quad m(s) = EI \left( \frac{\pi}{2L} \right)^2 \sin \left( \frac{\pi}{2L} s \right),$$

avec  $E$  le module de Young et  $I = \frac{bt^3}{12}$  le moment d'inertie pour une poutre de largeur  $b$ . Ce chargement permet d'imposer un état de flexion pur avec des énergies de cisaillement transverse et de membrane nulles. Il s'agit d'un test classique afin de tester le verrouillage membrane/cisaillement transverse pour une poutre courbe. Le phénomène de verrouillage amène une solution artificiellement dépendante de  $t$  car le problème de flexion pur est alors susceptible

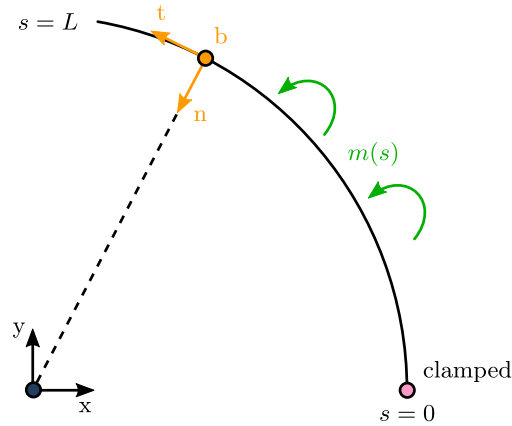


FIGURE 2.D.1 – Description du problème de poutre pour l'étude du verrouillage.

d'être régi par les énergies de membrane et de cisaillement transverse induites par projection de la solution continue sur l'espace des fonctions polynomiales par morceaux. Dans un contexte de petites déformations en élasticité linéaire, les déformations de membrane, cisaillement transverse et flexion s'écrivent respectivement

$$\begin{cases} e_m(s) = u_{t,s}(s) - \frac{u_n(s)}{R}, & \forall s \in [0, L], \\ \gamma_s(s) = \frac{u_t(s)}{R} + u_{n,s}(s) - \theta_b(s), & \forall s \in [0, L], \\ \chi_b(s) = \theta_{b,s}(s), & \forall s \in [0, L]. \end{cases}$$

D'un point de vue mathématiques, les verrouillages en membrane et cisaillement transverse ont la même origine, les énergies  $e_m$  et  $\gamma_s$  contiennent des termes dérivatifs et non dérivatifs. C'est en ce sens que le verrouillage est causé par un champ dit inconsistant, avec des termes d'ordre différent dans l'énergie de déformation qu'il est pourtant nécessaire d'intégrer avec un même nombre de points de Gauss dans le cas d'une intégration complète. Par la suite, on se concentre sur le verrouillage en cisaillement transverse sachant que la quadrature réduite proposée diminue également le verrouillage en membrane, la seule différence vient du fait que le verrouillage en cisaillement apparait pour un rapport  $L/t \gg 1$  et celui en membrane pour  $L/t \gg R/L$  [Adam 2014].

### 2.D.1.1 Éléments finis de Lagrange quadratiques

On étudie dans un premier temps le verrouillage sur des éléments finis classiques de Lagrange, d'ordre quadratique et régularité  $C^0$ . Par soucis de clarté, on note  $w$  le déplacement normal  $u_n$  et  $\theta$  la rotation de la section transverse. On divise la poutre en  $n_e$  éléments de longueur  $2L$  tel que chaque élément  $i \in [1, n_e]$  possède six degrés de liberté, voir Figure 2.D.2.

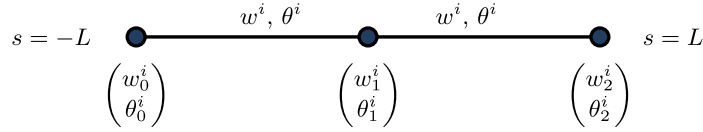


FIGURE 2.D.2 – Élément poutre quadratique de Timoshenko.

Le champ de déplacement de l'élément  $i$  vaut

$$\begin{aligned} w^i(s) &= w_0^i + w_1^i \frac{s}{L} + w_2^i \left(\frac{s}{L}\right)^2, \\ \theta^i(s) &= \theta_0^i + \theta_1^i \frac{s}{L} + \theta_2^i \left(\frac{s}{L}\right)^2, \end{aligned}$$

il est polynomial par morceaux en base locale. La condition de continuité  $C^0$  entre deux éléments successifs donnent les relations

$$\begin{aligned} w_0^i + w_1^i + w_2^i &= w_0^{i+1} - w_1^{i+1} + w_2^{i+1}, \\ \theta_0^i + \theta_1^i + \theta_2^i &= \theta_0^{i+1} - \theta_1^{i+1} + \theta_2^{i+1}. \end{aligned}$$

En développant les déformations de cisaillement et flexion dans la base  $\left[1, s/L, 1 - 3(s/L)^2\right]$  formée par les polynômes de Legendre, on obtient les expressions

$$\begin{aligned} \gamma_s^i(s) &= \left(\frac{w_1^i}{L} - \theta_0^i - \frac{\theta_2^i}{3}\right) + \left(\frac{2w_2^i}{L} - \theta_1^i\right) \frac{s}{L} + \frac{\theta_2^i}{3} \left(1 - 3\left(\frac{s}{L}\right)^2\right), \\ \chi_b^i(s) &= \frac{\theta_1^i}{L} + \frac{2\theta_2^i}{L} \frac{s}{L}. \end{aligned}$$

À partir de ces relations et en notant  $H_s = GA$ , avec  $G$  le module de cisaillement et  $A$  l'aire de la section, et  $H_b = EI$ , on définit les énergies correspondantes pour chaque élément  $i$

$$\begin{aligned} W_s^i &= \frac{1}{2} H_s \int_i (\gamma_s^i)^2 ds = LH_s \left[ \underbrace{\left(\frac{w_1^i}{L} - \theta_0^i - \frac{\theta_2^i}{3}\right)^2}_{1 \text{ GP}} + \frac{1}{3} \underbrace{\left(\frac{2w_2^i}{L} - \theta_1^i\right)^2}_{2 \text{ GP}} + \frac{4(\theta_2^i)^2}{3 \text{ GP}} \right], \\ W_b^i &= \frac{1}{2} H_b \int_i (\chi_b^i)^2 ds = LH_b \left[ \underbrace{\left(\frac{\theta_1^i}{L}\right)^2}_{1 \text{ GP}} + \frac{4}{3} \underbrace{\left(\frac{\theta_2^i}{L}\right)^2}_{2 \text{ GP}} \right]. \end{aligned}$$

La notation "x GP" indiquent qu'au moins x noeuds d'intégration sont requis pour retenir le terme considéré selon la quadrature décrite par (2.60). Sous la contrainte d'une poutre infiniment

mince, l'énergie de cisaillement transverse doit s'annuler, d'où

$$\begin{aligned}\frac{w_1^i}{L} - \theta_0^i - \frac{\theta_2^i}{3} &\xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0, \\ \frac{2w_2^i}{L} - \theta_1^i &\xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0, \\ \theta_2^i &\xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0.\end{aligned}$$

Les deux premières équations sont physiques et représentent un champ consistant car elles contiennent des inconnues à la fois en déplacement et en rotation. En revanche, la dernière équation n'a pas de sens physique, elle n'inclut qu'une inconnue en rotation. Dans le cas limite  $L \rightarrow 0$ , la troisième équation s'écrit  $\theta_{,ss} \rightarrow 0$ . Cette contrainte artificielle est due à l'utilisation de trois points de Gauss dans le cas d'une intégration complète. On observe également que, lorsque  $t \rightarrow 0$  on a

$$W_b^i \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} LH_b \left( \frac{\theta_1^i}{L} \right)^2 \quad \text{car} \quad \theta_2^i \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0,$$

l'énergie de flexion ne s'annule pas mais sa convergence est simplement réduite (elle serait annulée avec des éléments linéaires de Lagrange). En ce sens, l'augmentation de l'ordre des fonctions de base ne supprime pas le verrouillage mais permet d'atténuer la diminution du taux de convergence.

L'utilisation d'une règle de quadrature réduite à deux points de Gauss permettra d'éliminer cette contrainte purement numérique et d'obtenir des éléments libres de verrouillage. Dans ce cas, l'énergie de flexion est inchangée et le dernier terme pour le cisaillement est supprimé tel que

$$\begin{aligned}W_s^i &= LH_s \left[ \left( \frac{w_1^i}{L} - \theta_0^i - \frac{\theta_2^i}{3} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{2w_2^i}{L} - \theta_1^i \right)^2 \right], \\ W_b^i &= LH_b \left[ \left( \frac{\theta_1^i}{L} \right)^2 + \frac{4}{3} \left( \frac{\theta_2^i}{L} \right)^2 \right].\end{aligned}$$

### 2.D.1.2 Éléments finis B-splines quadratiques

On reprend le même raisonnement précédent mais en tenant compte de la régularité  $C^1$  permise par les fonctions B-splines quadratiques. On rappelle les trois conditions obtenues avec une intégration complète pour une poutre infiniment mince

$$\frac{w_1^i}{L} - \theta_0^i - \frac{\theta_2^i}{3} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0, \tag{2.61}$$

$$\frac{2w_2^i}{L} - \theta_1^i \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0, \tag{2.62}$$

$$\theta_2^i \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0, \tag{2.63}$$

avec les conditions de continuité  $C^0$

$$w_0^i + w_1^i + w_2^i = w_0^{i+1} - w_1^{i+1} + w_2^{i+1}, \quad (2.64)$$

$$\theta_0^i + \theta_1^i + \theta_2^i = \theta_0^{i+1} - \theta_1^{i+1} + \theta_2^{i+1}. \quad (2.65)$$

Il est désormais possible de satisfaire une continuité  $C^1$  entre éléments qui implique en plus

$$w_1^i + 2w_2^i = w_1^{i+1} - 2w_2^{i+1}, \quad (2.66)$$

$$\theta_1^i + 2\theta_2^i = \theta_1^{i+1} - 2\theta_2^{i+1}. \quad (2.67)$$

En injectant les expressions (2.61) et (2.62) pour les éléments  $i$  et  $i + 1$  dans (2.66), on obtient

$$\theta_0^i + \theta_1^i + \frac{\theta_2^i}{3} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \theta_0^{i+1} - \theta_1^{i+1} + \frac{\theta_2^{i+1}}{3}. \quad (2.68)$$

On injecte alors l'expression (2.65) dans (2.68) tel que

$$\theta_2^i \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \theta_2^{i+1}. \quad (2.69)$$

La continuité  $C^1$  impose une nouvelle contrainte  $\theta_2^i \rightarrow \theta_2^{i+1}$ , entre les éléments  $i$  et  $i + 1$ , pour une poutre infiniment mince. On peut exprimer les expressions (2.63) et (2.69) par

$$\theta_{,ss} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \theta_{,ss} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \text{cte},$$

de tel sorte à remarquer que la contrainte artificielle (2.63) est renforcée par une plus haute régularité permise par les B-splines. Ainsi, abaisser le nombre de points de Gauss à deux comme précédemment permettra d'éliminer la contrainte  $\theta_{,ss} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$  mais pas  $\theta_{,ss} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \text{cte}$  engendrée par la continuité  $C^1$ . Le nombre total de points de Gauss doit être diminué. On s'intéresse alors aux inconnues en rotation et au nombre d'équations associé. Si l'on considère une poutre formée d'un seul élément, l'intégration à deux points précédente s'applique avec trois inconnues  $\theta_i^1$ ,  $i \in \{0, 1, 2\}$ , pour trois équations

$$\frac{w_1^1}{L} - \theta_0^1 - \frac{\theta_2^1}{3} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0, \quad (\text{deux points de Gauss}),$$

$$\frac{2w_2^1}{L} - \theta_1^1 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0, \quad (\text{deux points de Gauss}),$$

$$\theta_0^1 = 0, \quad (\text{condition limite}).$$

En ajoutant un deuxième élément avec trois inconnues  $\theta_i^2$ ,  $i \in \{0, 1, 2\}$ , une intégration à deux points amène quatre équations

$$\frac{w_1^2}{L} - \theta_0^2 - \frac{\theta_2^2}{3} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0, \quad (\text{deux points de Gauss}),$$

$$\frac{2w_2^2}{L} - \theta_1^2 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0, \quad (\text{deux points de Gauss}),$$

$$\theta_0^1 + \theta_1^1 + \theta_2^1 = \theta_0^2 - \theta_1^2 + \theta_2^2, \quad (\text{continuité } C^0),$$

$$\theta_1^1 + 2\theta_2^1 = \theta_1^2 - 2\theta_2^2. \quad (\text{continuité } C^1).$$


---



Dans ce cas, une équation artificielle supplémentaire induit un verrouillage. En intégrant avec un seul point l'élément suivant, on obtient le système constitué de trois équations

$$\begin{aligned} \frac{w_1^2}{L} - \theta_0^2 - \frac{\theta_2^2}{3} &\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0, & (\text{un point de Gauss}), \\ \theta_0^1 + \theta_1^1 + \theta_2^1 &= \theta_0^2 - \theta_1^2 + \theta_2^2, & (\text{continuité } C^0), \\ \theta_1^1 + 2\theta_2^1 &= \theta_1^2 - 2\theta_2^2, & (\text{continuité } C^1), \end{aligned}$$

qui n'est désormais plus surcontraint. Par conséquent, le verrouillage apparaît lorsque plus d'équations que d'inconnues sont présentes. Pour s'affranchir du phénomène de verrouillage, chaque élément ajouté sera intégré avec un seul point de Gauss. L'unique condition limite d'encastrement impose cependant qu'un élément, choisi arbitrairement, soit intégré avec deux points de Gauss. On propose ici de prendre un élément du bord, où il y a une accumulation de points de contrôles et donc de fonctions B-splines, afin de s'assurer du bon conditionnement de la matrice de raideur [Adam 2014, Adam 2015b]. Le raisonnement pour des éléments B-splines cubiques peut être directement déduit de l'approche précédente en rajoutant, si besoin, la condition de continuité  $C^2$ .

**Remarque 2.24.** Par construction de la règle de quadrature précédente, aucun mode à énergie nulle n'est généré grâce à un nombre suffisant de points de Gauss à l'extrémité (resp. aux extrémités) de la structure encastree sur un bord (resp. ses deux bords) [Adam 2014, Adam 2015b]. Un nombre insuffisant de points d'intégration aux extrémités conduit à l'obtention d'un système indéterminé (plus d'inconnues que d'équations) et sera à l'origine de modes sabliers. À contrario, un nombre de points d'intégration trop élevé conduira à des équations supplémentaires et artificielles d'où l'apparition d'un verrouillage. Dans l'idéal, un nombre égal d'équations et d'inconnues permet à la fois d'éviter tout mode à énergie nulle mais aussi de supprimer complètement le verrouillage. ■

### 2.D.1.3 Quadrature réduite pour des plaques et coques

Les éléments coques et plaques étant simplement construits par produit tensoriel des fonctions de base, la règle de quadrature précédente est directement applicable. En revanche, afin d'anticiper des conditions limites quelconques, les deux extrémités de la structure auront un nombre de points d'intégration plus élevé. Ceci permet d'éviter l'obtention de modes sabliers mais sera à l'origine d'un verrouillage résidu dans le cas où certains bords de la structure ne seraient pas contraints [Adam 2014, Adam 2015b]. On résume les règles de quadrature complète et réduite pour des fonctions de base d'ordre  $p_k$  et régularité  $r_k$  sur chaque domaine  $\widehat{\Omega}_k$ .

**Quadrature complète sur  $\widehat{\Omega}_k$  (exacte pour des polynômes d'ordre  $2p_k$ ).**

$$n_{\text{GPC}} = E_{\text{sup}} \left[ \frac{2p_k + 1}{2} \right]$$

**Quadrature réduite sur  $\widehat{\Omega}_k$ .**

$$n_{\text{GPR}} = \begin{cases} \{n_{\text{GPC}} - 1, n_{\text{GPC}} - 1\} & \text{pour un élément de coin,} \\ \{n_{\text{GPC}} - r_k - 1, n_{\text{GPC}} - 1\}, & \text{pour un élément de bord horizontal,} \\ \{n_{\text{GPC}} - 1, n_{\text{GPC}} - r_k - 1\}, & \text{pour un élément de bord vertical,} \\ \{n_{\text{GPC}} - r_k - 1, n_{\text{GPC}} - r_k - 1\}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est important de noter qu'en plus de réduire significativement le verrouillage en membrane et cisaillement transverse, l'intégration réduite permet de diminuer le coût numérique d'un calcul. Cette affirmation est d'autant plus vraie que la régularité choisie est élevée. En effet, une haute régularité signifie des conditions de continuité supplémentaire à prendre en compte et donc une diminution du nombre de points d'intégration dans les éléments adjacents. Par conséquent, l'intégration réduite cumule à la fois précision et faible coût numérique.

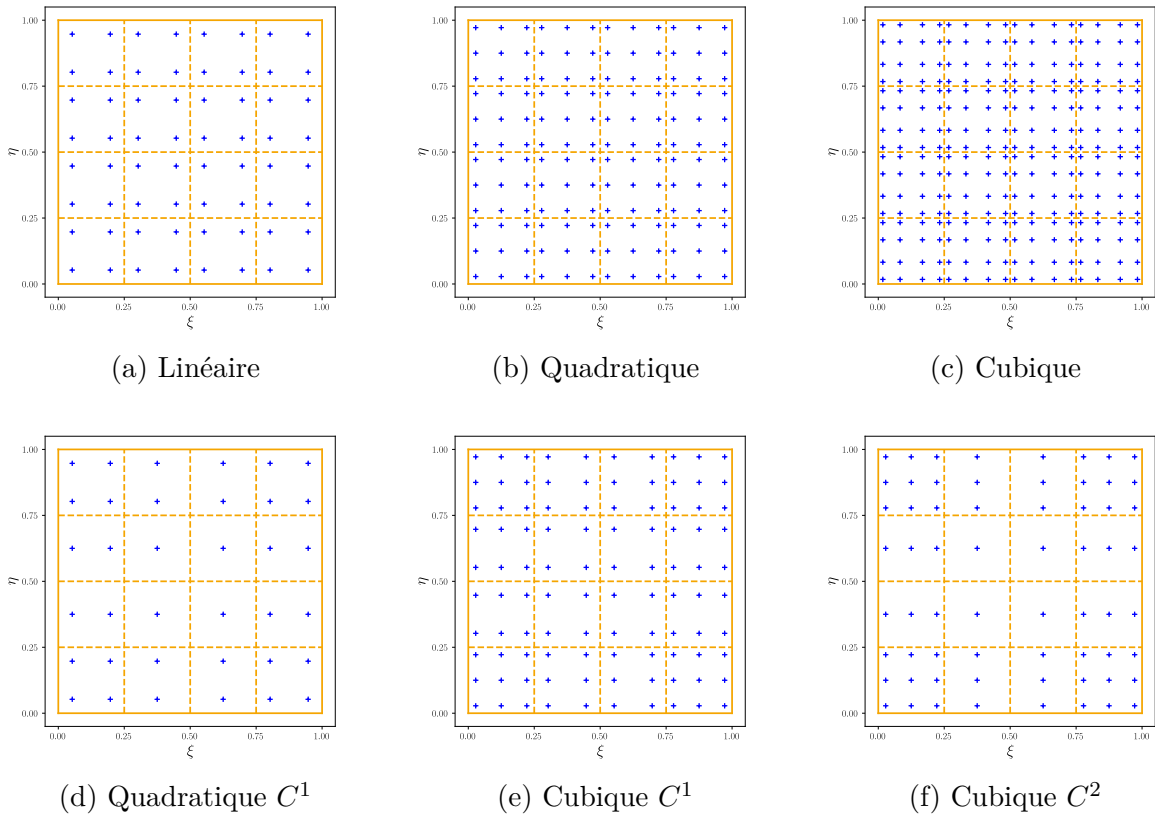


FIGURE 2.D.3 – Schémas de quadrature pour chaque patch  $\Omega_k$  représentés dans l'espace paramétrique. Haut : intégration complète. Bas : intégration réduite. Pour l'intégration réduite, une augmentation de la régularité engendre une diminution du nombre de points de Gauss.

### 2.D.2 Intégration réduite aux interfaces

Par changements de variable successifs, l'intégrale le long d'une interface  $\gamma$  dans l'espace physique est d'abord transformée en intégrale pondérée dans l'espace paramétrique  $\hat{\gamma}$  puis dans l'espace parent tel que  $\tilde{\gamma} \in (0, 1)$  soit le parent de chaque élément  $\hat{\gamma}_e$  formant l'interface. On rappelle que le scalaire  $W(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{A=1}^{n \cdot m} N_A(\boldsymbol{\xi}) w_A$  est la fonction somme des poids  $w_A$  associés aux fonctions B-splines  $N_A(\boldsymbol{\xi})$  utilisée pour obtenir des fonctions NURBS. On note  $f, \hat{f} \in \text{span}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \{R_i^p(\xi)\}$  et  $\tilde{f}$  respectivement une variable à évaluer le long de  $\gamma, \hat{\gamma}$  et  $\tilde{\gamma}$  avec les transformations

$$\hat{f} = (f \circ \mathbf{F}) \cdot W \quad \text{et} \quad \tilde{f} = (\hat{f} \circ \hat{\mathbf{F}}_e).$$

En notant  $e$  un élément de l'interface, on a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f \, d\gamma &\stackrel{\mathbf{F}}{=} \int_{\hat{\gamma}} (f \circ \mathbf{F}) \cdot \det(\mathbf{F}) \, d\hat{\gamma} \\ &= \sum_e \int_{\hat{\gamma}_e} (f \circ \mathbf{F}) \cdot \det(\mathbf{F}) \, d\hat{\gamma}_e \\ &\stackrel{\hat{\mathbf{F}}_e}{=} \sum_e \int_{\tilde{\gamma}} ((f \circ \mathbf{F}) \circ \hat{\mathbf{F}}_e) \cdot \det(\mathbf{F}) \cdot \det(\hat{\mathbf{F}}_e) \, d\tilde{\gamma} \\ &= \sum_e \int_{\tilde{\gamma}} \tilde{f} \cdot W^{-1} \cdot \det(\mathbf{F}) \cdot \det(\hat{\mathbf{F}}_e) \, d\tilde{\gamma}. \end{aligned}$$

La création de l'espace parent  $\tilde{\gamma}_{kl}$ , pour l'interface de composante  $kl$ , est réalisée par la projection KTS décrite en Section 2.5. Il s'agit d'une projection au point le plus proche symétrique, i.e. en changeant de côté esclave afin de projeter l'ensemble des noeuds qui forment une interface. Il est nécessaire de résoudre un problème de minimisation sous contraintes de borne sur les coordonnées paramétriques  $\xi_m$  de chaque noeud maître tel que le problème à résoudre soit de la forme

$$\min_{\xi_m \in \tilde{\gamma}_{m(kl)}} d(\xi_s, \xi_m), \quad \text{avec} \quad \min(\Xi_m) \leq \xi_m \leq \max(\Xi_m),$$

où  $\Xi_m$  est le vecteur noeud côté maître. L'algorithme L-BFGS-B est utilisé pour la résolution de ce problème d'optimisation, il présente l'avantage d'une utilisation mémoire modérée et permet de respecter les contraintes de bornes associées aux vecteurs noeuds [Byrd 1995, Zhu 1997].

On rappelle que la règle de quadrature complète nécessite

$$n_{\text{GPC}} = \mathbf{E}_{\text{sup}} \left[ \frac{(p_k + p_l) + 1}{2} \right],$$

points d'intégration sur chaque élément de  $\tilde{\gamma}_{kl}$ , avec  $p_k$  et  $p_l$  l'ordre des fonctions de base des patches  $\Omega_k$  et  $\Omega_l$ .

Par extension de la quadrature réduite précédente, on propose également une règle d'intégration réduite pour l'intégrale de couplage qui doit permettre de diminuer le coût numérique sans avoir d'impact sur le verrouillage. Afin d'éviter une perte de positivité de la matrice de couplage, un nombre de points d'intégration minimum est nécessaire aux extrémités de l'interface,

## 2.D. Compléments sur l'intégration réduite

c'est à dire aux lieux d'accumulation des fonctions de base. Par conséquent, nous proposons d'utiliser un nombre de points de Gauss réduit

$$n_{\text{GPR}} = \begin{cases} n_{\text{GPC}} - 1, & \text{aux extrémités de l'interface,} \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

### 2.D.3 Résumé des schémas de quadrature

	Quadrature complète	Quadrature réduite
+ Patch $\Omega_k$	$n_{\text{GPC}} = E_{\text{sup}} \left[ \frac{2p_k + 1}{2} \right]$	$n_{\text{GPR}} = \begin{cases} \{n_{\text{GPC}} - 1, n_{\text{GPC}} - 1\} \\ \{n_{\text{GPC}} - r_k - 1, n_{\text{GPC}} - 1\} \\ \{n_{\text{GPC}} - 1, n_{\text{GPC}} - r_k - 1\} \\ \{n_{\text{GPC}} - r_k - 1, n_{\text{GPC}} - r_k - 1\} \end{cases}$
○ Interface $\gamma_{kl}$	$n_{\text{GPC}} = E_{\text{sup}} \left[ \frac{(p_k + p_l) + 1}{2} \right]$	$n_{\text{GPR}} = \begin{cases} n_{\text{GPC}} - 1 \\ 1 \end{cases}$

Exemple avec quatre patches et fonctions de base quadratiques  $C^1$

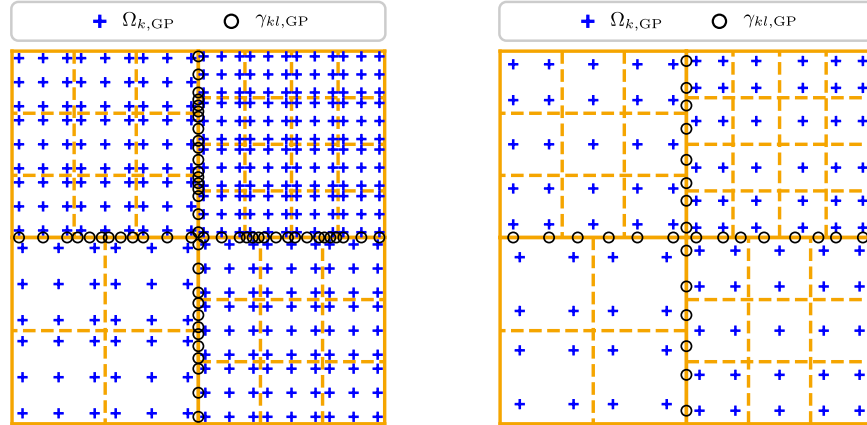


TABLE 2.D.1 – Résumé des règles d'intégration pour des géométries multipatch.



# Modèle de coque épaisse en grandes transformations

---

## Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>86</b>
<b>3.2</b>	<b>Déplacements avec grandes rotations</b>	<b>88</b>
<b>3.3</b>	<b>Tenseur des déformations de Green-Lagrange</b>	<b>89</b>
<b>3.4</b>	<b>Loi de comportement</b>	<b>90</b>
<b>3.5</b>	<b>Écriture du problème non linéaire</b>	<b>91</b>
<b>3.6</b>	<b>Résolution par la méthode de Newton-Raphson</b>	<b>95</b>
<b>3.7</b>	<b>Matrice de rigidité tangente</b>	<b>96</b>
3.7.1	Partie matérielle de la matrice de raideur tangente	96
3.7.2	Partie géométrique de la matrice de raideur tangente	96
<b>3.8</b>	<b>Application à un problème multipatch</b>	<b>100</b>
3.8.1	Équivalence d'écriture pour l'équilibre dans le volume	100
3.8.2	Problème multipatch augmenté discret en grandes transformations	101
3.8.3	Résolution par la méthode de Newton-Raphson	103
<b>3.9</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>105</b>
3.9.1	Stabilisation numérique des rotations	105
3.9.2	Plaque en porte-à-faux	106
3.9.2.1	Monopatch	107
3.9.2.2	Multipatch	107
3.9.3	Hémisphère pincé	109
3.9.3.1	Monopatch	110
3.9.3.2	Multipatch	110
3.9.4	Cylindre étiré	112
3.9.4.1	Monopatch	113
3.9.4.2	Multipatch	113
<b>3.10</b>	<b>Conclusion</b>	<b>116</b>
<b>Annexes</b>		<b>117</b>
<b>3.A</b>	<b>Dérivées première <math>\mathbf{D}</math> et seconde <math>\mathbf{D}</math> du gradient ponctuel</b>	<b>117</b>
<b>3.B</b>	<b>Variante de la FLT avec une normale actualisée</b>	<b>127</b>
3.B.1	Composition des rotations finies	127
3.B.2	Calcul incrémental des déplacements et normales	129
3.B.3	Application de la méthode de Newton-Raphson	130
<b>3.C</b>	<b>Angles d'Euler pour la paramétrisation des rotations</b>	<b>133</b>

---

### 3.1 Introduction

L'IGA présente l'avantage non négligeable de travailler sur la géométrie exacte, telle que définie dans un logiciel de CAD. Afin de profiter de cet atout, nous proposons d'étendre l'analyse précédente au cas des grandes transformations, c'est à dire en prenant en compte la partie non linéaire des déformations. Sachant que les longueurs caractéristiques de la surface moyenne d'une coque épaisse sont nettement supérieures à son épaisseur, il est fréquent de considérer que la géométrie est sujette à des grands déplacements et à des déformations modérées. Par conséquent, il va être nécessaire de choisir une méthode de résolution adaptée au cas des non-linéarités géométriques.

Parmi ces méthodes, les plus répandues sont la formulation lagrangienne totale (FLT) et la formulation lagrangienne actualisée (FLA), voir par exemple [Bathe 1975, Bathe 1980, Crisfield 1996a, Crisfield 1996b]. Dans un premier temps, on propose de donner les caractéristiques de chacune afin de résoudre un problème de coque non linéaire par la méthode isogéométrique. On associera à ces méthodes un schéma de résolution itératif de type Newton-Raphson qui sera discuté par la suite.

**Formulation lagrangienne totale :** le principe des travaux virtuels sera appliqué par rapport à la configuration initiale  $V_0$  de la coque. L'équation de mouvement est alors notée

$$\delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} = \int_{V_0} \delta \mathbf{E}^T \mathbf{S} \, dV_0 - \delta W_{\text{ext}} = 0,$$

avec la mesure des déformations de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  et le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$ . En appliquant le schéma de Newton-Raphson, la matrice de rigidité tangente, établie par la suite, vaut

$$\mathbf{K}_t = \int_{V_0} \mathbf{B}_{\text{nl}}^T(\mathbf{u}) \mathbf{C}_0 \mathbf{B}_{\text{nl}}(\mathbf{u}) \, dV_0 + \int_{V_0} \dot{\mathbf{D}}^T(\mathbf{u}) \hat{\mathbf{S}} \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) \, dV_0 + \int_{V_0} \ddot{\mathbf{D}}^T(\mathbf{u}) (\mathbf{H} + \mathbf{D}^T \mathbf{A})^T \mathbf{S} \, dV_0.$$

Le premier terme, c'est à dire la partie matérielle de la matrice de rigidité, est assez complexe à évaluer puisqu'il comprend l'opérateur non linéaire  $\mathbf{B}_{\text{nl}}(\mathbf{u})$ , reliant les déplacements aux points de contrôle à la déformation linéarisée, dû à l'intégration par rapport à  $V_0$ . De même, la partie géométrique ou contraintes initiales, c'est à dire les deux termes de droite, est également relativement complexe à déterminer puisqu'elle est constituée des opérateurs non linéaires  $\dot{\mathbf{D}}(\mathbf{u})$  et  $\ddot{\mathbf{D}}(\mathbf{u})$  correspondant respectivement aux dérivées première et seconde du gradient des déplacements par rapport aux degrés de liberté. En revanche, les contraintes  $\mathbf{S}$  vont pouvoir simplement s'ajouter au cours des incréments de résolution car elles se ramènent toutes à la configuration initiale. Sachant qu'en IGA le degré des fonctions de forme peut être élevé et que, par conséquent, le support de chaque fonction peut être élargi, l'évaluation de la matrice de rigidité peut rapidement devenir coûteuse. Néanmoins, l'ensemble des intégrations étant réalisées sur  $V_0$ , les fonctions de forme ramenées à l'espace physique peuvent être stockées et utilisées pour mettre à jour la matrice de rigidité tangente. De plus, les matrices de couplage multipatch peuvent être évaluées une seule fois pour l'ensemble de la résolution itérative.

**Formulation lagrangienne actualisée :** dans ce cas, la géométrie est actualisée à chaque incrément  $i$  de force. L'équation de mouvement devient

$$\delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} = \int_{V_i} \delta \mathbf{E}^T \mathbf{S} \, dV_i - \delta W_{\text{ext}} = 0.$$

En supposant des petits déplacements, en particulier des petites rotations, entre les configurations  $V_i$  et  $V_{i+1}$ , la matrice de rigidité tangente est représentée dans ce cas par

$$\mathbf{K}_t = \int_{V_i} \mathbf{B}_1^T \mathbf{C}_i \mathbf{B}_1 \, dV_i + \int_{V_i} \dot{\mathbf{D}}_1^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} \dot{\mathbf{D}}_1 \, dV_i.$$

Cette fois la partie matérielle est simple à évaluer par l'opérateur  $\mathbf{B}_1$  reliant les déplacements (supposés infinitésimaux) aux points de contrôle à la déformation. La partie géométrique est également simple à déterminer, avec l'opérateur linéaire  $\dot{\mathbf{D}}_1$  indépendant du déplacement, mais peut néanmoins être coûteuse. En effet, sachant que la géométrie est mise à jour, les contraintes doivent être rapportées à la géométrie actualisée. Pour cela, on écrit l'égalité des vecteurs contraintes entre la configuration initiale et déformée d'où l'on obtient, par la formule de Nanson, la relation

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{F}_x \mathbf{S} \mathbf{F}_x^T}{\det(\mathbf{F}_x)},$$

avec  $\mathbf{F}_x$  le gradient de la transformation entre la configuration  $V_i$  et  $V_{i+1}$ . Ce tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  doit être évalué à chaque itération ce qui peut représenter un coût numérique non négligeable. De plus, les fonctions de forme et leurs dérivées ne peuvent plus être stockées dans l'espace physique mais seulement dans l'espace paramétrique (dans lequel leurs valeurs sont invariantes) ce qui rajoute un coût numérique supplémentaire. De même, il sera nécessaire d'évaluer les matrices de couplage multipatch pour chaque configuration actualisée.

Par conséquent, nous avons fait le choix de la FLT, tel que présentée dans [Adam 2015a] et inspirée de [Crisfield 1996a, Crisfield 1996b], afin de résoudre un problème de coque en grands déplacements. Il reste alors à préciser l'écriture choisie afin de paramétrer les rotations associées au modèle de coque épaisse. La littérature est très fournie quant à une paramétrisation par les angles d'Euler [Bathe 1975, Surana 1983, Stander 1989]. En reprenant les propos de [Crisfield 1996a, Section 8.2], il s'avère que dans les premiers modèles de coque non linéaire [Ramm 1976, Bathe 1980], la discrétisation par les fonctions de forme était appliquée au dernier moment, notamment après la linéarisation de l'équation de mouvement. Par conséquent, la matrice tangente obtenue n'était pas consistante ce qui a été montré dans un premier temps par Frey et Cescotto [Frey 1977] puis par Surana [Surana 1983]. Les travaux plus récents prennent en compte ce terme [Surana 1983, Stander 1989, Crisfield 1996a], équivalent de la partie géométrique de  $\mathbf{K}_t$  contenant le second gradient  $\ddot{\mathbf{D}}(\mathbf{u})$  pour les angles d'Euler, dont l'influence est qualifiée de non négligeable dès que la rotation totale devient grande [Stander 1989]. Néanmoins, avec une paramétrisation par les angles d'Euler associée à la FLT précédente, le fait de faire un choix quant à la séquence des rotations aboutit inévitablement à l'obtention d'un vecteur des efforts intérieurs approché à cause de l'absence de commutativité des rotations finies dans l'espace. Ce point est mis en évidence sur l'Annexe 3.C. Dans le but d'obtenir un



bilan des efforts exact issu de la FLT, nous avons choisi une paramétrisation axio-angulaire des rotations, c'est à dire l'utilisation d'un scalaire, la magnitude de la rotation, ainsi que d'un vecteur directeur.

Dans ce chapitre, nous adopterons cette paramétrisation axio-angulaire associée à l'utilisation de la normale en configuration initiale. Les formules de rotation de Rodrigues permettront de mettre à jour la rotation totale sans émettre l'hypothèse de variations incrémentales infinitésimales et sans devoir composer les rotations finies. Cela permettra également d'obtenir un vecteur des efforts intérieurs exact et de conserver les six degrés de liberté par point de contrôle au lieu de ré-écrire l'ensemble de la formulation en fonction de cinq degrés de liberté comprenant les deux angles d'Euler exprimés dans la base locale de l'élément. Afin de vérifier les résultats obtenus, la FLT présentée dans [Adam 2015a] a également été développée. Il s'agit dans ce cas de supposer une variation incrémentale infinitésimale des rotations et d'utiliser la normale à la coque en configuration actuelle. L'algèbre des quaternions permet alors d'actualiser les normales de manière simple et efficace, voir l'Annexe 3.B pour plus de détails.

Ainsi, nous souhaitons résoudre un problème de coque non linéaire en grands déplacements et grandes rotations par une FLT associée à une paramétrisation axio-angulaire des rotations et à l'utilisation d'une normale en configuration initiale. Pour cela, le chapitre est divisé en huit parties distinctes. Dans les Sections 3.2, 3.3 et 3.4 nous développerons respectivement l'écriture des grands déplacements, le tenseur des déformations et la loi de comportement appliquée. Les Sections 3.5, 3.6 et 3.7 concerneront l'écriture du problème non linéaire, sa linéarisation par la méthode de Newton-Raphson et l'obtention de la matrice tangente qui en résulte dans le cas d'un problème monopatch. Enfin, nous appliquerons le cas des grands déplacements à un problème multipatch en Section 3.8 avant de présenter les résultats numériques dans la dernière partie de ce chapitre.

### 3.2 Déplacements avec grandes rotations

On rappelle que, pour un point  $q$  quelconque de la coque, dans une description isogéométrique avec une normale approchée le vecteur déplacement est donné par

$$\mathbf{u}_q(\boldsymbol{\xi}_q) = \sum_{A=1}^{n-m} R_A(\boldsymbol{\xi}_p) \left( \mathbf{U}_A + \frac{t}{2} \zeta(\mathbf{n}_A(\boldsymbol{\theta}_A) - \mathbf{n}_{A,0}) \right) = \sum_{A=1}^{n-m} R_A(\boldsymbol{\xi}_p) \left( \mathbf{U}_A + \frac{t}{2} \zeta(\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_A) - \mathbf{I}_3) \mathbf{n}_{A,0} \right), \quad (3.1)$$

avec  $\mathbf{n}_{A,0}$  la normale initiale et  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_A)$  la matrice de rotation associée au pseudo-vecteur de rotation  $\boldsymbol{\theta}_A$ . Dans le cas des petites rotations, nous avons la simplification

$$(\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_A) - \mathbf{I}_3) \mathbf{n}_{A,0} \simeq \boldsymbol{\theta}_A \times \mathbf{n}_{A,0} \simeq \boldsymbol{\theta}_A \times \mathbf{n}_A,$$

ce qui n'est plus le cas désormais. On considère alors la paramétrisation axio-angulaire  $(\mathbf{e}, \theta)$  afin de définir l'opérateur de rotation  $\mathbf{R}$  qui est orthogonal, de déterminant unitaire et possède

---

### 3.3. Tenseur des déformations de Green-Lagrange

les valeurs propres  $\{1, \exp(i\theta), \exp(-i\theta)\}$  tel que dans  $\mathbb{R}^3$  on ait

$$\mathbf{R}(\mathbf{e}, \theta) = \mathbf{I}_3 + (1 - \cos(\theta))[\mathbf{e}\times][\mathbf{e}\times] + \sin(\theta)[\mathbf{e}\times],$$

avec  $\|\mathbf{e}\| = 1$  et le tenseur anti-symétrique  $[\mathbf{e}\times]$  définit par

$$[\mathbf{e}\times]\mathbf{v} = \mathbf{e} \times \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$$

On note  $\boldsymbol{\theta}$  le pseudo-vecteur, qui n'est pas un vecteur puisqu'il ne possède pas la propriété d'additivité pour des rotations finies dans  $\mathbb{R}^3$ , de norme  $\theta$  et direction  $\mathbf{e}$  tel que  $\boldsymbol{\theta} = \theta\mathbf{e} = \|\boldsymbol{\theta}\|\mathbf{e}$ . On peut donc écrire l'opérateur  $\mathbf{R}$  selon la formule de Rodrigues

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I}_3 + \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2}[\boldsymbol{\theta}\times][\boldsymbol{\theta}\times] + \frac{\sin(\theta)}{\theta}[\boldsymbol{\theta}\times], \quad (3.2)$$

ou encore, sachant que  $\boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} - [\boldsymbol{\theta}\times][\boldsymbol{\theta}\times] = \theta^2\mathbf{I}_3$  dans une base euclidienne, par l'expression

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) = \cos(\theta)\mathbf{I}_3 + \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2}\boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} + \frac{\sin(\theta)}{\theta}[\boldsymbol{\theta}\times]. \quad (3.3)$$

En utilisant les développements en série de Taylor des fonctions sinus et cosinus, il est également possible d'écrire  $\mathbf{R}$  sous une forme exponentielle équivalente

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) = \exp([\boldsymbol{\theta}\times]) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\boldsymbol{\theta}\times]^k}{k!}.$$

### 3.3 Tenseur des déformations de Green-Lagrange

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange est adapté au cas des grands déplacements pour des déformations continues. Dans le cas d'une FLT, l'ensemble des expressions, en particulier les intégrales de volume pour le principe des travaux virtuels, seront exprimées par rapport à la configuration initiale  $\mathbf{X}$ . Afin de simplifier les notations, nous considérons dans un premier temps un problème monopatch tel que les indices en référence aux patches  $k$  seront omis. Dans ce cas, la position actuelle des points matériels s'écrit simplement  $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}_q$ . On rappelle l'expression du gradient de la transformation  $\mathbf{F}_\mathbf{x}$  reliant la configuration actuelle  $\mathbf{x}$  à celle de référence  $\mathbf{X}$  par

$$\mathbf{F}_\mathbf{x} = \mathbf{I}_3 + \mathbf{u}_{q,\mathbf{X}} = \mathbf{I}_3 + \mathbf{D},$$

avec  $\mathbf{I}_3$  le tenseur identité en dimension trois et  $\mathbf{D}$  la dérivée du déplacement ponctuel par rapport aux positions initiales. On peut alors expliciter la mesure des déformations sous forme tensorielle par

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_\mathbf{x}^T \mathbf{F}_\mathbf{x} - \mathbf{I}_3) = \frac{1}{2}(\mathbf{D} + \mathbf{D}^T + \mathbf{D}^T \mathbf{D}).$$

Il est évident qu'en simplifiant l'expression précédente au premier ordre, le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  correspond au tenseur symétrique non quadratique  $\boldsymbol{\epsilon}$ . On peut ainsi décomposer, comme tout tenseur d'ordre deux, le gradient du déplacement en une partie symétrique  $\boldsymbol{\epsilon}$  et une partie antisymétrique  $\boldsymbol{\omega}$  tel que

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{q,\mathbf{X}} + \mathbf{u}_{q,\mathbf{X}}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{q,\mathbf{X}} - \mathbf{u}_{q,\mathbf{X}}^T) = \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\omega},$$

avec respectivement  $\boldsymbol{\epsilon}$  et  $\boldsymbol{\omega}$  les tenseurs des déformations et des rotations. On obtient alors directement l'expression du tenseur symétrique  $\mathbf{E}$  en fonction de sa forme au premier ordre  $\boldsymbol{\epsilon}$  par

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{2}\mathbf{D}^T\mathbf{D}.$$

### 3.4 Loi de comportement

Nous considérons le même matériau que précédemment, c'est à dire un matériau élastique homogène et isotrope associé à une hypothèse de contraintes planes. En d'autres termes, nous utiliserons une adaptation de la loi de Hooke classique au cas des grandes transformations selon un modèle hyperélastique. Le plus simple de ces modèles est la loi de Saint Venant-Kirchhoff, dont le tenseur des rigidités  $\mathbf{C}$  permet de relier les déformations de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  à son dual, le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff noté  $\mathbf{S}$ . Sachant que le modèle hyperélastique suppose l'existence d'un potentiel densité d'énergie interne  $\Psi$  tel que  $\mathbf{S}$  puisse être obtenu par dérivation de ce potentiel par rapport aux déformations, celui-ci vaut dans notre cas

$$\Psi(\mathbf{E}) = \frac{\lambda^*}{2} [\text{Tr}(\mathbf{E})]^2 + \mu^* \text{Tr}(\mathbf{E}^2),$$

avec  $\lambda^*$  et  $\mu^*$  les coefficients de Lamé en contraintes planes, voir par exemple [Curnier 1994, Section 6.6.1], tel que

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{E\nu}{1 - \nu^2} \quad \text{et} \quad \mu^* = \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)},$$

avec respectivement  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $E$  et  $\nu$  les coefficients de Lamé classiques, le module de Young et le coefficient de Poisson. Nous obtenons alors une écriture simple reliant les contraintes aux déformations par

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} = \lambda^* \text{Tr}(\mathbf{E})\mathbf{I}_3 + 2\mu^* \mathbf{E}.$$

Finalement, nous avons en notation de Voigt et dans la base locale associée à l'élément coque la relation

$$\mathbf{S}^l = \mathbf{C}_0^l \mathbf{E}^l,$$

associée à l'hypothèse des contraintes planes  $S_{33}^l = 0$ . En anticipant une résolution incrémentale, on exprime naturellement les variations de contrainte en fonction des variations de déformation  $\Delta \mathbf{S}^l = \mathbf{C}_0^l \Delta \mathbf{E}^l$ . Le tenseur du comportement sera toujours défini à partir de la configuration initiale et on rappelle son expression en notation de Voigt dans la base locale par

$$\mathbf{C}_0^l = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k \frac{1 - \nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix},$$

avec  $k$  le facteur de correction en cisaillement pris comme égal à  $5/6$ .

### 3.5 Écriture du problème non linéaire

Avant d'appliquer le principe des travaux virtuels, nous allons expliciter la différentielle du tenseur des déformations par rapport au champ de déplacement de la coque. On précise que l'ensemble des résultats ont été vérifiés grâce au logiciel Maple [Maple 2014]. Nous commençons par donner l'expression des déformations  $\mathbf{E}$  en notation de Voigt

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{XX} \\ E_{YY} \\ E_{ZZ} \\ \gamma_{XY} \\ \gamma_{YZ} \\ \gamma_{ZX} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_{,X} \\ v_{,Y} \\ w_{,Z} \\ u_{,Y} + v_{,X} \\ v_{,Z} + w_{,Y} \\ u_{,Z} + w_{,X} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\epsilon}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(u_{,X}^2 + v_{,X}^2 + w_{,X}^2) \\ \frac{1}{2}(u_{,Y}^2 + v_{,Y}^2 + w_{,Y}^2) \\ \frac{1}{2}(u_{,Z}^2 + v_{,Z}^2 + w_{,Z}^2) \\ u_{,X}u_{,Y} + v_{,X}v_{,Y} + w_{,X}w_{,Y} \\ u_{,Y}u_{,Z} + v_{,Y}v_{,Z} + w_{,Y}w_{,Z} \\ u_{,X}u_{,Z} + v_{,X}v_{,Z} + w_{,X}w_{,Z} \end{bmatrix}}_{\frac{1}{2}\mathbf{D}^T\mathbf{D}}, \quad (3.4)$$

avec  $u, v$  et  $w$  les composantes du déplacement  $\mathbf{u}_q$  d'un point  $q$  quelconque de la coque exprimées dans le repère cartésien global. En se rappelant de l'expression du déplacement en grandes rotations avec une normale approchée (3.1), on peut écrire la matrice  $\mathbf{D}$  sous la forme

$$\mathbf{D} = \mathbf{u}_{q,\mathbf{x}} = \sum_A \mathbf{R}_{A,\mathbf{x}} \otimes \mathbf{U}_A + \tilde{\mathbf{R}}_{A,\mathbf{x}} \otimes (\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_A) - \mathbf{I}_3) \mathbf{n}_{A,0}, \quad (3.5)$$

avec  $\tilde{\mathbf{R}}_{A,\mathbf{x}} = z\mathbf{R}_{A,\mathbf{x}}$  les dérivées des fonctions NURBS associées aux rotations,  $\mathbf{n}_{A,0}$  la normale initiale au point de contrôle  $A$  et  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_A)$  la matrice de rotation associée au pseudo-vecteur de rotation  $\boldsymbol{\theta}_A$ . L'ensemble des gradients sont évalués en coordonnées cartésiennes par rapport à la configuration initiale. On note respectivement

$$\mathbf{U}_A = [U_{AX} \ U_{AY} \ U_{AZ}]^T, \quad \boldsymbol{\theta}_A = [\theta_{AX} \ \theta_{AY} \ \theta_{AZ}]^T \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_{A,0} = [n_{AX,0} \ n_{AY,0} \ n_{AZ,0}]^T,$$

le vecteur des translations, le pseudo-vecteur des rotations et la normale initiale exprimés dans le repère cartésien global. Alors, on peut utiliser la formule de Rodrigues (3.2) afin d'obtenir

$$(\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_A) - \mathbf{I}_3) \mathbf{n}_{A,0} = \frac{1 - \cos(\|\boldsymbol{\theta}_A\|)}{\|\boldsymbol{\theta}_A\|^2} \boldsymbol{\theta}_A \times (\boldsymbol{\theta}_A \times \mathbf{n}_{A,0}) + \frac{\sin(\|\boldsymbol{\theta}_A\|)}{\|\boldsymbol{\theta}_A\|} (\boldsymbol{\theta}_A \times \mathbf{n}_{A,0}).$$

Pour clarifier l'écriture, on notera par la suite

$$c_A(\boldsymbol{\theta}_A) = \frac{1 - \cos(\|\boldsymbol{\theta}_A\|)}{\|\boldsymbol{\theta}_A\|^2} \quad \text{et} \quad s_A(\boldsymbol{\theta}_A) = \frac{\sin(\|\boldsymbol{\theta}_A\|)}{\|\boldsymbol{\theta}_A\|},$$

et on introduit les fonctions auxiliaires

$$\begin{cases} \tilde{D}_{AXY}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_A(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AX}n_{AY,0} - \theta_{AY}n_{AX,0}) + s_A(\boldsymbol{\theta}_A)n_{AZ,0}, \\ \tilde{D}_{AYZ}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_A(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AY}n_{AZ,0} - \theta_{AZ}n_{AY,0}) + s_A(\boldsymbol{\theta}_A)n_{AX,0}, \\ \tilde{D}_{AXZ}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_A(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AZ}n_{AX,0} - \theta_{AX}n_{AZ,0}) + s_A(\boldsymbol{\theta}_A)n_{AY,0}. \end{cases}$$

On obtient alors l'expression décrivant la variation des normales

$$(\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_A) - \mathbf{I}_3) \mathbf{n}_{A,0} = (c_A(\boldsymbol{\theta}_A) [\boldsymbol{\theta}_A \times] + s_A(\boldsymbol{\theta}_A)) (\boldsymbol{\theta}_A \times \mathbf{n}_{A,0}) = \begin{bmatrix} \theta_{AY} \tilde{D}_{AXY}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AZ} \tilde{D}_{AXZ}(\boldsymbol{\theta}_A) \\ \theta_{AZ} \tilde{D}_{AYZ}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AX} \tilde{D}_{AXY}(\boldsymbol{\theta}_A) \\ \theta_{AX} \tilde{D}_{AXZ}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AY} \tilde{D}_{AYZ}(\boldsymbol{\theta}_A) \end{bmatrix}.$$

Il est désormais possible d'exprimer le gradient des déplacements ponctuels  $\mathbf{D}$  en notation de Voigt, avec la simplification d'écriture  $\mathbf{u}_A = (\mathbf{U}_A, \boldsymbol{\theta}_A)$ , par la relation

$$\mathbf{D} = \mathbf{u}_{q,\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} u_{,X} & u_{,Y} & u_{,Z} & v_{,X} & v_{,Y} & v_{,Z} & w_{,X} & w_{,Y} & w_{,Z} \end{bmatrix}^T \underset{\text{NURBS}}{=} \sum_{A=1}^{n \cdot m} \mathbf{D}_A(\mathbf{u}_A), \quad (3.6)$$

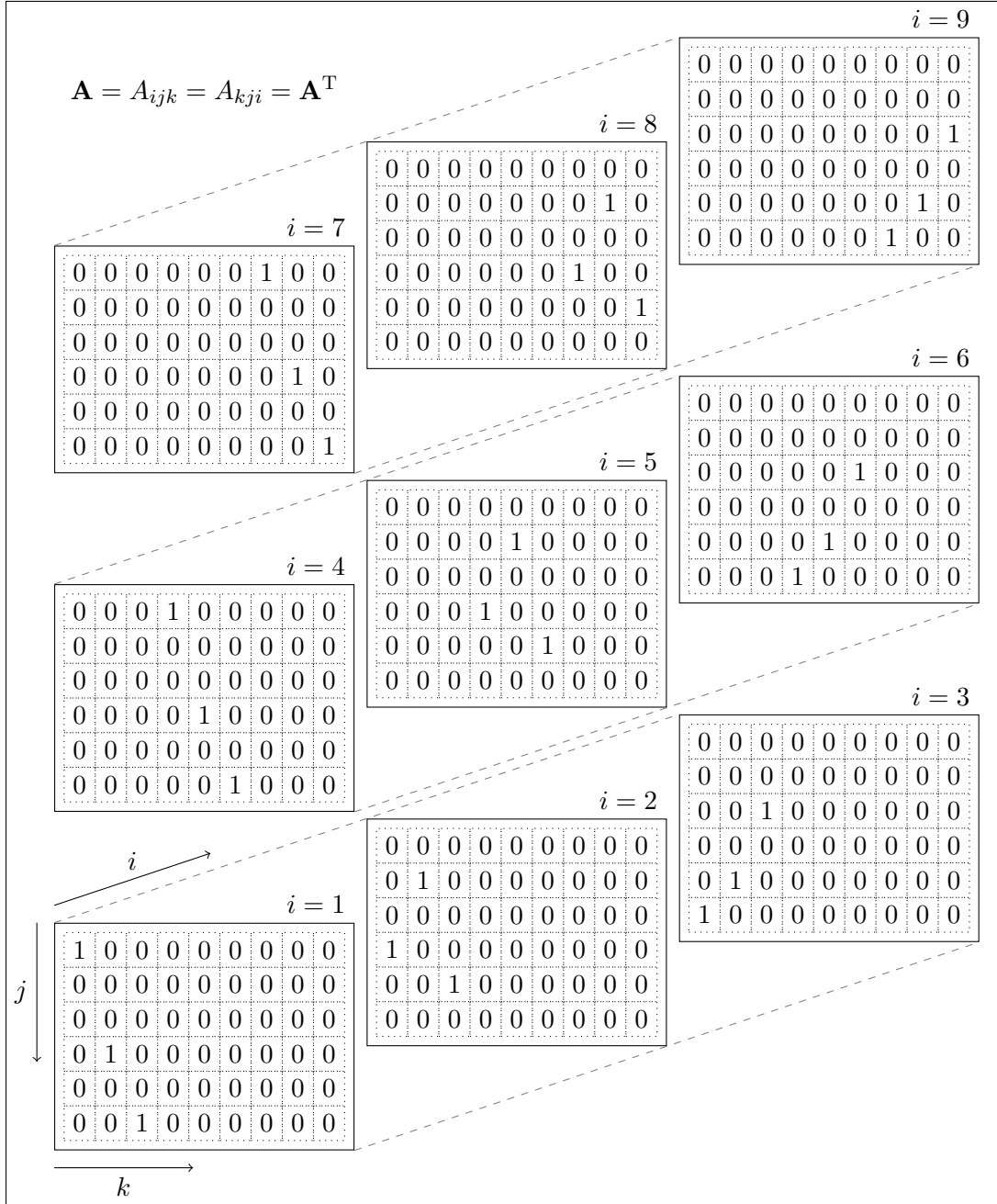
avec notamment, pour le point de contrôle  $A$ , l'expression

$$\mathbf{D}_A(\mathbf{u}_A) = \begin{bmatrix} R_{A,X} U_{AX} + \tilde{R}_{A,X} \left( \theta_{AY} \tilde{D}_{AXY}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AZ} \tilde{D}_{AXZ}(\boldsymbol{\theta}_A) \right) \\ R_{A,Y} U_{AX} + \tilde{R}_{A,Y} \left( \theta_{AY} \tilde{D}_{AXY}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AZ} \tilde{D}_{AXZ}(\boldsymbol{\theta}_A) \right) \\ R_{A,Z} U_{AX} + \tilde{R}_{A,Z} \left( \theta_{AY} \tilde{D}_{AXY}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AZ} \tilde{D}_{AXZ}(\boldsymbol{\theta}_A) \right) \\ R_{A,X} U_{AY} + \tilde{R}_{A,X} \left( \theta_{AZ} \tilde{D}_{AYZ}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AX} \tilde{D}_{AXY}(\boldsymbol{\theta}_A) \right) \\ R_{A,Y} U_{AY} + \tilde{R}_{A,Y} \left( \theta_{AZ} \tilde{D}_{AYZ}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AX} \tilde{D}_{AXY}(\boldsymbol{\theta}_A) \right) \\ R_{A,Z} U_{AY} + \tilde{R}_{A,Z} \left( \theta_{AZ} \tilde{D}_{AYZ}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AX} \tilde{D}_{AXY}(\boldsymbol{\theta}_A) \right) \\ R_{A,X} U_{AZ} + \tilde{R}_{A,X} \left( \theta_{AX} \tilde{D}_{AXZ}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AY} \tilde{D}_{AYZ}(\boldsymbol{\theta}_A) \right) \\ R_{A,Y} U_{AZ} + \tilde{R}_{A,Y} \left( \theta_{AX} \tilde{D}_{AXZ}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AY} \tilde{D}_{AYZ}(\boldsymbol{\theta}_A) \right) \\ R_{A,Z} U_{AZ} + \tilde{R}_{A,Z} \left( \theta_{AX} \tilde{D}_{AXZ}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AY} \tilde{D}_{AYZ}(\boldsymbol{\theta}_A) \right) \end{bmatrix}.$$

On souhaite désormais écrire les déformations de Green-Lagrange (3.4) sous une forme compacte, toujours en notation de Voigt. Pour cela, on commence par sa partie au premier ordre  $\boldsymbol{\epsilon}$  qui peut être décrite par la relation

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{H} \mathbf{D}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tel que  $\mathbf{H}$  permette d'obtenir la partie symétrique et au premier ordre de  $\mathbf{E}$ , toujours avec des gradients évalués en coordonnées cartésiennes par rapport à la configuration de référence.



Concernant la partie quadratique de  $\mathbf{E}$ , celle-ci peut également être décrite en notation de Voigt en utilisant le tenseur  $\mathbf{A}$  d'ordre trois tel que

$$\frac{1}{2} [\mathbf{D}]^T [\mathbf{D}] = \frac{1}{2} \mathbf{D}^T \mathbf{A} \mathbf{D}, \quad \dim(\mathbf{A}) = (9 \times 6 \times 9),$$

avec  $\mathbf{D}$  l'équivalent en notation de Voigt de la matrice  $[\mathbf{D}]$ . On souligne alors le fait que  $\mathbf{A}$  est symétrique, c'est à dire  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  soit pour ce tenseur d'ordre trois  $A_{ijk} = A_{kji}$ , avec la représentation de  $\mathbf{A}$  ci-dessus.

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange peut alors être mis sous une forme condensée, en notation de Voigt, de manière semblable à ce qui est proposé dans [Crisfield 1996a, Adam 2015a]

$$\mathbf{E} = \mathbf{H}\mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{D}^T\mathbf{A}\mathbf{D}. \quad (3.7)$$

Sachant que c'est la déformation virtuelle  $\delta\mathbf{E}$  qui intervient dans l'équation du mouvement, on s'attache désormais à développer ce terme. À partir de l'expression (3.7) on a

$$\delta\mathbf{E} = \mathbf{H}\delta\mathbf{D} + \frac{1}{2}\delta\mathbf{D}^T\mathbf{A}\mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{D}^T\mathbf{A}\delta\mathbf{D},$$

c'est à dire, en utilisant la symétrie de  $\mathbf{A}$ ,

$$\delta\mathbf{E} = (\mathbf{H} + \mathbf{D}^T\mathbf{A})\delta\mathbf{D}. \quad (3.8)$$

Il reste alors à développer la variation virtuelle du gradient ponctuel  $\delta\mathbf{D}$ . En utilisant la relation (3.6) on écrit

$$\delta\mathbf{D} = \sum_{A=1}^{n \cdot m} \frac{\partial \mathbf{D}_A}{\partial \mathbf{u}_A} \delta \mathbf{u}_A = \sum_{A=1}^{n \cdot m} \dot{\mathbf{D}}_A(\boldsymbol{\theta}_A) \delta \mathbf{u}_A = \dot{\mathbf{D}} \delta \mathbf{u}, \quad \dim(\dot{\mathbf{D}}) = (9 \times 6n \cdot m), \quad (3.9)$$

tel que la contribution de chaque point de contrôle soit notée

$$\dot{\mathbf{D}} = [\dot{\mathbf{D}}_1(\boldsymbol{\theta}_1), \dots, \dot{\mathbf{D}}_A(\boldsymbol{\theta}_A), \dots, \dot{\mathbf{D}}_{n \cdot m}(\boldsymbol{\theta}_{n \cdot m})], \quad \dim(\dot{\mathbf{D}}_A(\boldsymbol{\theta}_A)) = (9 \times 6),$$

avec la simplification d'écriture  $\dot{\mathbf{D}}_A(\boldsymbol{\theta}_A) = \partial \mathbf{D}_A / \partial \mathbf{u}_A$  qui rend compte de l'indépendance de  $\dot{\mathbf{D}}_A$  par rapport aux degrés de liberté en translation  $\mathbf{U}_A$ . Afin de compléter le cadre de l'étude, on précise l'expression de  $\dot{\mathbf{D}}_A(\boldsymbol{\theta}_A)$ , nécessitant l'évaluation des neuf dérivées premières de  $\tilde{D}_{AXY}(\boldsymbol{\theta}_A)$ ,  $\tilde{D}_{AYZ}(\boldsymbol{\theta}_A)$  et  $\tilde{D}_{AXZ}(\boldsymbol{\theta}_A)$  par rapport aux degrés de liberté correspondant aux rotations, sur l'Annexe 3.A. Finalement, en injectant (3.9) dans (3.8) on obtient les déformations virtuelles

$$\delta\mathbf{E} = (\mathbf{H} + \mathbf{D}^T\mathbf{A})\dot{\mathbf{D}}\delta\mathbf{u} = \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{u})\delta\mathbf{u}. \quad (3.10)$$

Nous souhaitons exprimer les travaux virtuels des efforts intérieurs non plus sur la configuration courante comme c'était le cas dans l'hypothèse des petites perturbations avec le tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ , mais sur la configuration initiale. Le travail virtuel des forces intérieures dans le repère global est classiquement défini, voir par exemple [Crisfield 1996a, Bathe 1980, Stander 1989], par

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{V_0} \delta\mathbf{E}^T \mathbf{S} \, dV_0, \quad (3.11)$$

avec  $V_0$  le volume de la coque à l'instant initial (cette expression peut être obtenue à partir de la formulation forte correspondante comme précisé en Section 3.8.1). Nous obtenons alors les efforts intérieurs définis sur la configuration initiale grâce à la relation (3.10) tel que

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}) = \int_{V_0} \mathbf{B}_{nl}^T(\mathbf{u}) \mathbf{S}(\mathbf{u}) \, dV_0. \quad (3.12)$$

En notant  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  les efforts extérieurs, supposés constants et définis sur la configuration initiale, le problème non linéaire à résoudre peut s'écrire

$$\delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} = 0 \quad \text{soit} \quad \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0}. \quad (3.13)$$

**Remarque 3.1.** Par soucis de simplicité, nous avons utilisé dans la définition de  $\mathbf{D}$  une normale interpolée à partir de ses valeurs aux points de collocation  $\mathbf{n}_A$  (correspondant aux abscisses de Gréville). Une définition équivalente avec l'utilisation d'une normale exacte est possible en remplaçant  $\mathbf{n}_{A,0}$  par  $\mathbf{n}_{0,\mathbf{x}}$  dans (3.5), c'est à dire en dérivant les composantes de la normale par rapport aux positions initiales dans le repère cartésien global. ■

## 3.6 Résolution par la méthode de Newton-Raphson

On souhaite désormais résoudre le problème non linéaire (3.13) par une méthode itérative. Pour cela, on part du travail virtuel des efforts intérieurs (3.11) afin d'en déduire sa variation incrémentale

$$\Delta(\delta W_{\text{int}}) = \int_{V_0} \Delta(\delta \mathbf{E})^T \mathbf{S} + \delta \mathbf{E}^T \Delta \mathbf{S} \, dV_0.$$

En utilisant l'expression (3.10), on développe l'égalité précédente tel que

$$\Delta(\delta W_{\text{int}}) = \delta \mathbf{u}^T \left( \int_{V_0} \Delta \mathbf{B}_{\text{nl}}^T(\mathbf{u}) \mathbf{S} \, dV_0 + \int_{V_0} \mathbf{B}_{\text{nl}}^T(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{S} \, dV_0 \right). \quad (3.14)$$

Afin de résoudre ce problème, un schéma itératif de type Newton-Raphson est envisagé [Bathe 1980, Surana 1983, Stander 1989, Crisfield 1996a]

$$\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}^i + \Delta \mathbf{u}^{i+1}) \simeq \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}^i) + \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}^i)}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{F}_{\text{ext}}^{i+1}. \quad (3.15)$$

La pente  $\partial \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}^i) / \partial \mathbf{u}$  est appelée matrice de rigidité tangente et sera notée  $\mathbf{K}_t$ . La variation incrémentale du travail virtuel des efforts intérieurs est approchée par

$$\begin{aligned} \Delta(\delta W_{\text{int}}) &= \delta \mathbf{u}^T \left( \int_{V_0} \Delta \mathbf{B}_{\text{nl}}^T(\mathbf{u}) \mathbf{S} \, dV_0 + \int_{V_0} \mathbf{B}_{\text{nl}}^T(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{S} \, dV_0 \right) \\ &\simeq \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_t \Delta \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Cette méthode converge de manière quadratique si l'écart entre chaque solution incrémentale est faible. Ainsi, avec la paramétrisation axio-angulaire des rotations et l'utilisation de la normale initiale, nous n'aurons pas besoin de supposer des variations incrémentales infinitésimales des déplacements. Le fait de considérer des rotations incrémentales infinitésimales est néanmoins particulièrement répandue dans la littérature [Bathe 1980, Stander 1989, Crisfield 1996a, Section 8.2] mais également dans des logiciels éléments finis tel que Code\_Aster [Trinh 2009, chapitre 3]. C'est d'ailleurs cette hypothèse qui a été émise pour la variante proposée dans l'Annexe 3.B qui utilise la normale en configuration courante et nécessite donc de composer les grandes rotations. Concernant la méthode par les angles d'Euler, qui requiert naturellement de composer les grandes rotations, une alternative originale a été proposée par Surana [Surana 1983]. Malgré cette proposition, l'association d'une FLT avec les angles d'Euler engendre toujours l'utilisation d'un vecteur des efforts intérieurs approchés au sens où il est dépendant de la séquence des rotations choisie. On complète cette étude en montrant dans l'Annexe 3.C d'une part l'absence de commutativité des grandes rotations et d'autre part la proposition de moyenniser les séquences de rotation afin de pouvoir utiliser des incréments de déplacement plus important en conservant la convergence du schéma de Newton-Raphson si les angles d'Euler sont envisagés [Surana 1983].



### 3.7 Matrice de rigidité tangente

Dans ce qui va suivre, on s'attache à trouver l'expression de  $\mathbf{K}_t$  grâce à la relation

$$\mathbf{K}_t \Delta \mathbf{u} \simeq \left( \underbrace{\int_{V_0} \Delta \mathbf{B}_{nl}^T(\mathbf{u}) \mathbf{S} dV_0}_{\text{partie géométrique}} + \underbrace{\int_{V_0} \mathbf{B}_{nl}^T(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{S} dV_0}_{\text{partie matérielle}} \right).$$

L'expression précédente contient deux termes dont le premier correspond à la partie géométrique, ou contraintes initiales, de la matrice de rigidité tangente. Le second terme décrit quant à lui la partie matérielle de  $\mathbf{K}_t$ .

#### 3.7.1 Partie matérielle de la matrice de raideur tangente

Nous commençons par développer le terme  $\mathbf{B}_{nl}^T(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{S}$ . En utilisant la loi de comportement en Section 3.4, il est possible d'écrire la variation incrémentale des contraintes

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbf{C}_0 \Delta \mathbf{E}.$$

En adoptant la même démarche que pour la variation virtuelle de  $\mathbf{E}$ , qui s'écrit grâce à l'équation (3.10)  $\delta \mathbf{E} = \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{u}) \delta \mathbf{u}$ , la variation incrémentale des déformations de Green-Lagrange se développe par

$$\Delta \mathbf{E} = \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{u}.$$

On obtient alors  $\mathbf{B}_{nl}^T(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{S} = \mathbf{B}_{nl}^T(\mathbf{u}) \mathbf{C}_0 \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{u}$  d'où le premier terme  $\mathbf{K}_{t1}$  qui représente la partie matérielle de la matrice de rigidité tangente tel que

$$\mathbf{K}_{t1} = \int_{V_0} \mathbf{B}_{nl}^T(\mathbf{u}) \mathbf{C}_0 \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{u}) dV_0. \quad (3.17)$$

On remarque naturellement qu'avec la loi de Saint-Venant Kirchhoff, hyperélastique isotrope et homogène, la partie matérielle de la matrice de raideur tangente est symétrique.

#### 3.7.2 Partie géométrique de la matrice de raideur tangente

On s'intéresse désormais au terme  $\Delta \mathbf{B}_{nl}^T(\mathbf{u}) \mathbf{S}$  afin de construire  $\mathbf{K}_\sigma$  qui représente la partie géométrique ou de contraintes initiales de  $\mathbf{K}_t$ . On reprend l'expression de  $\mathbf{B}_{nl}(\mathbf{u})$  donnée par la relation (3.10) afin d'en déduire sa variation incrémentale

$$\Delta \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{u}) = \underbrace{\Delta \mathbf{D}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{D}}}_{\text{classique}} + \underbrace{(\mathbf{H} + \mathbf{D}^T \mathbf{A}) \Delta \dot{\mathbf{D}}}_{\text{non-linéarité de la paramétrisation des déplacements}}. \quad (3.18)$$

Le premier terme correspond à la raideur géométrique usuelle alors que le second est lié à la non-linéarité du gradient induite par les grandes rotations. Avec la même démarche que celle qui a permis d'obtenir  $\delta \mathbf{D}$  par la relation (3.9), la variation incrémentale du gradient des déplacements ponctuels se note

$$\Delta \mathbf{D} = \dot{\mathbf{D}} \Delta \mathbf{u}. \quad (3.19)$$

On note le tenseur d'ordre trois  $\mathring{\mathbf{D}} = \partial \mathring{\mathbf{D}} / \partial \mathbf{u}$  tel qu'en notation indiciel nous pouvons exprimer la variation itérative de  $\mathring{\mathbf{D}}$  par

$$\Delta \dot{D}_{ij} = \frac{\partial \dot{D}_{ij}}{\partial u_k} \Delta u_k = \ddot{D}_{ijk} \Delta u_k, \quad \text{avec} \quad \dim(\ddot{\mathbf{D}}) = (9 \times 6n \cdot m \times 6n \cdot m), \quad (3.20)$$

et tel que la contribution de chaque point de contrôle soit notée

$$\ddot{\mathbf{D}} = \left[ \ddot{\mathbf{D}}_1(\boldsymbol{\theta}_1), \dots, \ddot{\mathbf{D}}_A(\boldsymbol{\theta}_A), \dots, \ddot{\mathbf{D}}_{n \cdot m}(\boldsymbol{\theta}_{n \cdot m}) \right], \quad \dim(\ddot{\mathbf{D}}_A(\boldsymbol{\theta}_A)) = (9 \times 6 \times 6).$$

De même que pour la dérivée première, on donne l'expression de  $\ddot{\mathbf{D}}_A(\boldsymbol{\theta}_A)$ , nécessitant l'évaluation des vingt-sept dérivées secondes de  $\ddot{D}_{AXY}(\boldsymbol{\theta}_A)$ ,  $\ddot{D}_{AYZ}(\boldsymbol{\theta}_A)$  et  $\ddot{D}_{AXZ}(\boldsymbol{\theta}_A)$  sur l'Annexe 3.A. Finalement, en injectant les relations (3.19) et (3.20) dans l'expression (3.18), nous pouvons écrire

$$\Delta \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{u}) = \Delta \mathbf{u}^T \mathring{\mathbf{D}}^T \mathbf{A} \mathring{\mathbf{D}} + (\mathbf{H} + \mathbf{D}^T \mathbf{A}) \ddot{\mathbf{D}} \Delta \mathbf{u}.$$

La partie géométrique de la matrice de rigidité tangente se décompose donc en deux termes

$$\int_{V_0} \Delta \mathbf{B}_{nl}^T(\mathbf{u}) \mathbf{S} \, dV_0 \simeq \underbrace{\int_{V_0} \mathring{\mathbf{D}}^T \mathbf{A} \mathring{\mathbf{D}} \Delta \mathbf{u} \mathbf{S} \, dV_0}_{\mathbf{K}_{\sigma 1} \Delta \mathbf{u}} + \underbrace{\int_{V_0} \Delta \mathbf{u}^T \mathring{\mathbf{D}}^T (\mathbf{H} + \mathbf{D}^T \mathbf{A})^T \mathbf{S} \, dV_0}_{\Delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{\sigma 2}^T}$$

avec pour rappel  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ .

**Partie géométrique classique  $\mathbf{K}_{\sigma 1}$  :** en utilisant le produit tensoriel  $\hat{S}_{ik} = A_{ijk} S_j$ , semblable à celui décrit dans [Crisfield 1996a, Adam 2015a], nous obtenons l'expression équivalente

$$\mathbf{K}_{\sigma 1} \Delta \mathbf{u} = \int_{V_0} \mathring{\mathbf{D}}^T \mathbf{A} \mathring{\mathbf{D}} \Delta \mathbf{u} \mathbf{S} \, dV_0 = \int_{V_0} \mathring{\mathbf{D}}^T \hat{\mathbf{S}} \mathring{\mathbf{D}} \Delta \mathbf{u} \, dV_0,$$

avec, en notant  $[\mathbf{S}]$  la forme matricielle du tenseur  $\mathbf{S}$ , l'expression de  $\hat{\mathbf{S}}$  donnée par

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{A} \mathbf{S} = [\mathbf{S}] \oplus [\mathbf{S}] \oplus [\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{S}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\mathbf{S}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathbf{S}] \end{bmatrix}.$$

La première partie géométrique de la matrice de raideur tangente vaut alors

$$\mathbf{K}_{\sigma 1} = \int_{V_0} \mathring{\mathbf{D}}^T \hat{\mathbf{S}} \mathring{\mathbf{D}} \, dV_0. \quad (3.21)$$

La symétrie de  $\mathbf{K}_{\sigma 1}$  est assurée par celle de  $\hat{\mathbf{S}}$ .

**Partie géométrique liée à la non-linéarité des déplacements  $\mathbf{K}_{\sigma 2}$  :** le théorème de Schwarz appliqué à  $\mathring{\mathbf{D}}$  assure la symétrie de  $\mathring{\mathbf{D}}$  par rapport aux degrés de liberté en rotation et, par conséquent, la symétrie de  $\mathbf{K}_{\sigma 2}$ . Ce point est notamment détaillé sur l'Annexe 3.A. Ainsi, la raideur tangente liée à la non-linéarité de la paramétrisation des déplacements vaut

$$\mathbf{K}_{\sigma 2} = \int_{V_0} \mathring{\mathbf{D}}^T (\mathbf{H} + \mathbf{D}^T \mathbf{A})^T \mathbf{S} \, dV_0. \quad (3.22)$$

Par définition de  $\ddot{\mathbf{D}}$ , la contribution de chaque point de contrôle est découplée tel que l'on puisse écrire

$$\mathbf{K}_{\sigma 2} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\sigma 2(11)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\sigma 2(AA)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\sigma 2(n \cdot m \ n \cdot m)} \end{bmatrix}.$$

Chaque terme issu d'un point de contrôle  $A$  peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{K}_{\sigma 2(AA)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{K}_{\sigma 2(AA,ij)} \end{bmatrix}, \quad \forall \{i, j\} \in \{4, 5, 6\}.$$

Cette contribution dans la partie géométrique de la matrice tangente n'étant pas classique, on propose de développer les neuf termes de  $\mathbf{K}_{\sigma 2(AA)}$ . Pour cela, nous utilisons l'ensemble des expressions  $\ddot{D}_{Aijk}(\boldsymbol{\theta}_A)$ ,  $i \in \{1 \dots 9\}$  et  $\{j, k\} \in \{1 \dots 6\}$ , détaillées sur l'Annexe 3.A ainsi que le vecteur des contraintes, en notation de Voigt, suivant

$$\mathbf{S} = [S_{XX} \ S_{YY} \ S_{ZZ} \ S_{XY} \ S_{YZ} \ S_{XZ}]^T.$$

**Termes diagonaux :**

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\sigma 2(AA,44)} = & \ddot{D}_{A144}(\boldsymbol{\theta}_A) ((1 + u_X)S_{XX} + u_Y S_{XY} + u_Z S_{XZ}) \\ & + \ddot{D}_{A244}(\boldsymbol{\theta}_A) (u_Y S_{YY} + (1 + u_X)S_{XY} + u_Z S_{YZ}) \\ & + \ddot{D}_{A344}(\boldsymbol{\theta}_A) (u_Z S_{ZZ} + u_Y S_{YZ} + (1 + u_X)S_{XZ}) \\ & + \ddot{D}_{A444}(\boldsymbol{\theta}_A) (v_X S_{XX} + (1 + v_Y)S_{XY} + v_Z S_{XZ}) \\ & + \ddot{D}_{A544}(\boldsymbol{\theta}_A) ((1 + v_Y)S_{YY} + v_X S_{XY} + v_Z S_{YZ}) \\ & + \ddot{D}_{A644}(\boldsymbol{\theta}_A) (v_Z S_{ZZ} + (1 + v_Y)S_{YZ} + v_X S_{XZ}) \\ & + \ddot{D}_{A744}(\boldsymbol{\theta}_A) (w_X S_{XX} + w_Y S_{XY} + (1 + w_Z)S_{XZ}) \\ & + \ddot{D}_{A844}(\boldsymbol{\theta}_A) (w_Y S_{YY} + w_X S_{XY} + (1 + w_Z)S_{YZ}) \\ & + \ddot{D}_{A944}(\boldsymbol{\theta}_A) ((1 + w_Z)S_{ZZ} + w_Y S_{YZ} + w_X S_{XZ}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\sigma 2(AA,55)} = & \ddot{D}_{A155}(\boldsymbol{\theta}_A) ((1 + u_X)S_{XX} + u_Y S_{XY} + u_Z S_{XZ}) \\ & + \ddot{D}_{A255}(\boldsymbol{\theta}_A) (u_Y S_{YY} + (1 + u_X)S_{XY} + u_Z S_{YZ}) \\ & + \ddot{D}_{A355}(\boldsymbol{\theta}_A) (u_Z S_{ZZ} + u_Y S_{YZ} + (1 + u_X)S_{XZ}) \\ & + \ddot{D}_{A455}(\boldsymbol{\theta}_A) (v_X S_{XX} + (1 + v_Y)S_{XY} + v_Z S_{XZ}) \\ & + \ddot{D}_{A555}(\boldsymbol{\theta}_A) ((1 + v_Y)S_{YY} + v_X S_{XY} + v_Z S_{YZ}) \\ & + \ddot{D}_{A655}(\boldsymbol{\theta}_A) (v_Z S_{ZZ} + (1 + v_Y)S_{YZ} + v_X S_{XZ}) \\ & + \ddot{D}_{A755}(\boldsymbol{\theta}_A) (w_X S_{XX} + w_Y S_{XY} + (1 + w_Z)S_{XZ}) \\ & + \ddot{D}_{A855}(\boldsymbol{\theta}_A) (w_Y S_{YY} + w_X S_{XY} + (1 + w_Z)S_{YZ}) \\ & + \ddot{D}_{A955}(\boldsymbol{\theta}_A) ((1 + w_Z)S_{ZZ} + w_Y S_{YZ} + w_X S_{XZ}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\sigma 2(AA,66)} = & \ddot{D}_{A166}(\boldsymbol{\theta}_A) ((1 + u, X)S_{XX} + u, Y S_{XY} + u, Z S_{XZ}) \\
& + \ddot{D}_{A266}(\boldsymbol{\theta}_A) (u, Y S_{YY} + (1 + u, X)S_{XY} + u, Z S_{YZ}) \\
& + \ddot{D}_{A366}(\boldsymbol{\theta}_A) (u, Z S_{ZZ} + u, Y S_{YZ} + (1 + u, X)S_{XZ}) \\
& + \ddot{D}_{A466}(\boldsymbol{\theta}_A) (v, X S_{XX} + (1 + v, Y)S_{XY} + v, Z S_{XZ}) \\
& + \ddot{D}_{A566}(\boldsymbol{\theta}_A) ((1 + v, Y)S_{YY} + v, X S_{XY} + v, Z S_{YZ}) \\
& + \ddot{D}_{A666}(\boldsymbol{\theta}_A) (v, Z S_{ZZ} + (1 + v, Y)S_{YZ} + v, X S_{XZ}) \\
& + \ddot{D}_{A766}(\boldsymbol{\theta}_A) (w, X S_{XX} + w, Y S_{XY} + (1 + w, Z)S_{XZ}) \\
& + \ddot{D}_{A866}(\boldsymbol{\theta}_A) (w, Y S_{YY} + w, X S_{XY} + (1 + w, Z)S_{YZ}) \\
& + \ddot{D}_{A966}(\boldsymbol{\theta}_A) ((1 + w, Z)S_{ZZ} + w, Y S_{YZ} + w, X S_{XZ}),
\end{aligned}$$

Termes extra-diagonaux :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\sigma 2(AA,54)} = \mathbf{K}_{\sigma 2(AA,45)} = & \ddot{D}_{A154}(\boldsymbol{\theta}_A) ((1 + u, X)S_{XX} + u, Y S_{XY} + u, Z S_{XZ}) \\
& + \ddot{D}_{A254}(\boldsymbol{\theta}_A) (u, Y S_{YY} + (1 + u, X)S_{XY} + u, Z S_{YZ}) \\
& + \ddot{D}_{A354}(\boldsymbol{\theta}_A) (u, Z S_{ZZ} + u, Y S_{YZ} + (1 + u, X)S_{XZ}) \\
& + \ddot{D}_{A454}(\boldsymbol{\theta}_A) (v, X S_{XX} + (1 + v, Y)S_{XY} + v, Z S_{XZ}) \\
& + \ddot{D}_{A554}(\boldsymbol{\theta}_A) ((1 + v, Y)S_{YY} + v, X S_{XY} + v, Z S_{YZ}) \\
& + \ddot{D}_{A654}(\boldsymbol{\theta}_A) (v, Z S_{ZZ} + (1 + v, Y)S_{YZ} + v, X S_{XZ}) \\
& + \ddot{D}_{A754}(\boldsymbol{\theta}_A) (w, X S_{XX} + w, Y S_{XY} + (1 + w, Z)S_{XZ}) \\
& + \ddot{D}_{A854}(\boldsymbol{\theta}_A) (w, Y S_{YY} + w, X S_{XY} + (1 + w, Z)S_{YZ}) \\
& + \ddot{D}_{A954}(\boldsymbol{\theta}_A) ((1 + w, Z)S_{ZZ} + w, Y S_{YZ} + w, X S_{XZ}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\sigma 2(AA,64)} = \mathbf{K}_{\sigma 2(AA,46)} = & \ddot{D}_{A164}(\boldsymbol{\theta}_A) ((1 + u, X)S_{XX} + u, Y S_{XY} + u, Z S_{XZ}) \\
& + \ddot{D}_{A264}(\boldsymbol{\theta}_A) (u, Y S_{YY} + (1 + u, X)S_{XY} + u, Z S_{YZ}) \\
& + \ddot{D}_{A364}(\boldsymbol{\theta}_A) (u, Z S_{ZZ} + u, Y S_{YZ} + (1 + u, X)S_{XZ}) \\
& + \ddot{D}_{A464}(\boldsymbol{\theta}_A) (v, X S_{XX} + (1 + v, Y)S_{XY} + v, Z S_{XZ}) \\
& + \ddot{D}_{A564}(\boldsymbol{\theta}_A) ((1 + v, Y)S_{YY} + v, X S_{XY} + v, Z S_{YZ}) \\
& + \ddot{D}_{A664}(\boldsymbol{\theta}_A) (v, Z S_{ZZ} + (1 + v, Y)S_{YZ} + v, X S_{XZ}) \\
& + \ddot{D}_{A764}(\boldsymbol{\theta}_A) (w, X S_{XX} + w, Y S_{XY} + (1 + w, Z)S_{XZ}) \\
& + \ddot{D}_{A864}(\boldsymbol{\theta}_A) (w, Y S_{YY} + w, X S_{XY} + (1 + w, Z)S_{YZ}) \\
& + \ddot{D}_{A964}(\boldsymbol{\theta}_A) ((1 + w, Z)S_{ZZ} + w, Y S_{YZ} + w, X S_{XZ}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\sigma 2(AA,65)} = \mathbf{K}_{\sigma 2(AA,56)} = & \ddot{D}_{A165}(\boldsymbol{\theta}_A) ((1 + u_{,X})S_{XX} + u_{,Y}S_{XY} + u_{,Z}S_{XZ}) \\
& + \ddot{D}_{A265}(\boldsymbol{\theta}_A) (u_{,Y}S_{YY} + (1 + u_{,X})S_{XY} + u_{,Z}S_{YZ}) \\
& + \ddot{D}_{A365}(\boldsymbol{\theta}_A) (u_{,Z}S_{ZZ} + u_{,Y}S_{YZ} + (1 + u_{,X})S_{XZ}) \\
& + \ddot{D}_{A465}(\boldsymbol{\theta}_A) (v_{,X}S_{XX} + (1 + v_{,Y})S_{XY} + v_{,Z}S_{XZ}) \\
& + \ddot{D}_{A565}(\boldsymbol{\theta}_A) ((1 + v_{,Y})S_{YY} + v_{,X}S_{XY} + v_{,Z}S_{YZ}) \\
& + \ddot{D}_{A665}(\boldsymbol{\theta}_A) (v_{,Z}S_{ZZ} + (1 + v_{,Y})S_{YZ} + v_{,X}S_{XZ}) \\
& + \ddot{D}_{A765}(\boldsymbol{\theta}_A) (w_{,X}S_{XX} + w_{,Y}S_{XY} + (1 + w_{,Z})S_{XZ}) \\
& + \ddot{D}_{A865}(\boldsymbol{\theta}_A) (w_{,Y}S_{YY} + w_{,X}S_{XY} + (1 + w_{,Z})S_{YZ}) \\
& + \ddot{D}_{A965}(\boldsymbol{\theta}_A) ((1 + w_{,Z})S_{ZZ} + w_{,Y}S_{YZ} + w_{,X}S_{XZ}).
\end{aligned}$$

Finalement, en se rappelant de la variation itérative des travaux virtuels intérieurs (3.16), le problème (3.13) linéarisé consiste à résoudre

$$\Delta(\delta W_{\text{int}}) - \delta W_{\text{res}} = 0, \quad (3.23)$$

avec  $\delta W_{\text{res}}$  le résidu de l'équation d'équilibre ( $-\delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}}$ ) de l'itération courante pour l'incrément de chargement actuel. Le résidu  $\delta W_{\text{res}}$  est l'incrément de chargement  $\Delta(\delta W_{\text{ext}})$  si la valeur prédite du champ de déplacement correspond à la valeur d'équilibre au pas de chargement précédent. En utilisant les trois expressions des matrices tangente (3.17), (3.21) et (3.22), nous développons  $\Delta(\delta W_{\text{int}}) = \delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u})$  par

$$\Delta(\delta W_{\text{int}}) \simeq \delta \mathbf{u}^T \underbrace{(\mathbf{K}_{t1} + \mathbf{K}_{\sigma 1} + \mathbf{K}_{\sigma 2})}_{\mathbf{K}_t} \Delta \mathbf{u} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{K}_{t1} = \int_{V_0} \mathbf{B}_{\text{nl}}^T(\mathbf{u}) \mathbf{C}_0 \mathbf{B}_{\text{nl}}(\mathbf{u}) dV_0, \\ \mathbf{K}_{\sigma 1} = \int_{V_0} \dot{\mathbf{D}}^T \hat{\mathbf{S}} \dot{\mathbf{D}} dV_0, \\ \mathbf{K}_{\sigma 2} = \int_{V_0} \ddot{\mathbf{D}}^T (\mathbf{H} + \mathbf{D}^T \mathbf{A})^T \mathbf{S} dV_0. \end{cases} \quad (3.24)$$

## 3.8 Application à un problème multipatch

### 3.8.1 Équivalence d'écriture pour l'équilibre dans le volume

Avant d'appliquer la méthode précédente au cas multipatch, on souhaite écrire le travail virtuel des efforts intérieurs de manière classique, c'est à dire avec une formulation purement continue laissant apparaître le déplacement virtuel  $\delta \mathbf{u}_q$  d'un point  $q$  quelconque de la coque. On rappelle que le produit de l'équation locale d'équilibre par une fonction test s'écrit dans le cas des grandes transformations

$$\int_{V_0} \delta \mathbf{u}_q \cdot \text{div}_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\Pi}) dV_0,$$

avec  $\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{F}_x \mathbf{S}$  le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff qui n'est pas symétrique. En utilisant successivement une intégration par parties et le théorème de Gauss-Ostrogradski,

l'expression précédente peut se mettre sous la forme du terme recherché ainsi que d'un autre terme alimentant les travaux virtuels extérieurs tel que

$$\int_{V_0} \delta \mathbf{u}_q \cdot \operatorname{div}_{\mathbf{X}}(\mathbf{\Pi}) \, dV_0 = \int_{V_0} (\delta \mathbf{u}_{q,\mathbf{X}})^{\mathbf{T}} \cdot (\mathbf{F}_{\mathbf{x}} \mathbf{S}) \, dV_0 + \delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}}.$$

Il est également possible de montrer que

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{V_0} (\delta \mathbf{u}_{q,\mathbf{X}})^{\mathbf{T}} \cdot (\mathbf{F}_{\mathbf{x}} \mathbf{S}) \, dV_0 = \int_{V_0} \delta \mathbf{E}^{\mathbf{T}} \mathbf{S} \, dV_0,$$

afin de retrouver l'expression (3.11). Pour cela, nous partons de la définition  $2\mathbf{E} = \mathbf{F}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{T}} \mathbf{F}_{\mathbf{x}} - \mathbf{I}_3$  afin d'obtenir l'équivalent purement continu de (3.10) tel que

$$\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} \left( \delta \mathbf{D}^{\mathbf{T}} \mathbf{F}_{\mathbf{x}} + \mathbf{F}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{T}} \delta \mathbf{D} + \mathcal{O}(\delta \mathbf{D}^{\mathbf{T}} \delta \mathbf{D}) \right),$$

avec  $\delta \mathbf{F}_{\mathbf{x}} = \delta \mathbf{D} = \delta \mathbf{u}_{q,\mathbf{X}}$  et pour lequel le dernier terme est négligeable. Par conséquent on montre bien l'égalité précédente avec notamment, compte tenu de la symétrie de  $\mathbf{S}$ ,

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} &= \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV_0 \\ &= \frac{1}{2} \int_{V_0} \mathbf{S} : (\mathbf{F}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{T}} \delta \mathbf{D} + \delta \mathbf{D}^{\mathbf{T}} \mathbf{F}_{\mathbf{x}}) \, dV_0 \\ &= \int_{V_0} \mathbf{S} : \mathbf{F}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{T}} \delta \mathbf{D} \, dV_0 \\ &= \int_{V_0} \mathbf{F}_{\mathbf{x}} \mathbf{S} : \delta \mathbf{D} \, dV_0. \end{aligned}$$

#### 3.8.2 Problème multipatch augmenté discret en grandes transformations

On souhaite désormais appliquer le cas des grandes transformations en formulation lagrangienne totale aux problèmes multipatch. Pour cela, nous conservons la numérotation  $k \in \{1, \dots, K\}$  en référence au patch de surface moyenne  $\Omega_k$  ainsi que l'écriture  $\gamma_{kl}$  pour désigner l'interface de composante  $kl$  du squelette formé par l'union des interfaces. En revanche, afin d'être cohérent avec une FLT, l'ensemble des intégrations, c'est à dire dans le volume, sur la surface moyenne et pour les termes de couplage, seront effectuées sur la configuration initiale. Par conséquent, la notation suivante sera utilisée

$$\begin{cases} \text{surface moyenne initiale : } \Omega_0^k, \\ \text{volume initial : } V_0^k = \Omega_0^k \times [-t/2, t/2], \\ \text{interface de composante } kl \text{ initiale : } \Gamma_{kl}. \end{cases}$$

De même pour les espaces associés aux déplacements et multiplicateurs de Lagrange qui sont définis sur la configuration initiale mais dont la notation reste inchangée par rapport au

cas des petites perturbations afin de simplifier l'écriture. On utilisera donc les espaces discrets locaux

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{k,h}(\Omega_0^k) \subset V_k(\Omega_0^k) = \left\{ \delta \mathbf{u} = (\delta \mathbf{u}_p, \delta \boldsymbol{\theta}) \in H^1(\Omega_0^k) \times H^1(\Omega_0^k), \delta \mathbf{u}_p|_{\Gamma_d^u} = \mathbf{0}, \delta \boldsymbol{\theta}|_{\Gamma_d^\theta} = \mathbf{0} \right\}, \\ M_{kl,h}(\Gamma_{kl}) \subset L^2(\Gamma_{kl})^2, \end{array} \right.$$

ainsi que les espaces brisés

$$V_h = \prod_k V_{k,h}(\Omega_0^k) \quad \text{et} \quad M_h = \prod_{k>l} M_{kl,h}(\Gamma_{kl}).$$

Le travail virtuel des efforts intérieurs pour le problème multipatch s'obtient alors en utilisant l'expression (3.11) et par différentiation des termes de couplage

$$\delta W_{\text{int}}^{\text{MP}} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_k \int_{V_0^k} \delta \mathbf{E}_k^{\text{T}} \mathbf{S}_k \, dV_0^k + \sum_{k>l} \int_{\Gamma_{kl}} \alpha_{kl} (\text{Tr}_{kl} \mathbf{u}_k - \text{Tr}_{kl} \mathbf{u}_l) (\text{Tr}_{kl} \delta \mathbf{u}_k - \text{Tr}_{kl} \delta \mathbf{u}_l) \, d\Gamma_{kl} \\ \quad + \sum_{k>l} \int_{\Gamma_{kl}} \boldsymbol{\lambda}_{kl} (\text{Tr}_{kl} \delta \mathbf{u}_k - \text{Tr}_{kl} \delta \mathbf{u}_l) \, d\Gamma_{kl}, \\ \sum_{k>l} \int_{\Gamma_{kl}} \delta \boldsymbol{\lambda}_{kl} (\text{Tr}_{kl} \mathbf{u}_k - \text{Tr}_{kl} \mathbf{u}_l) \, d\Gamma_{kl}, \end{array} \right. \quad (3.25)$$

avec respectivement  $\delta \mathbf{E}_k = \delta \mathbf{E}(\delta \mathbf{u}_k)$  et  $\mathbf{S}_k = \mathbf{S}(\mathbf{u}_k)$  la restriction des déformations de Green-Lagrange et des secondes contraintes de Piola-Kirchhoff au patch  $\Omega_0^k$ . On peut mettre cette dernière expression sous une forme analogue à celle issue d'un problème multipatch en petites perturbations. Il est alors nécessaire de rappeler les formes bilinéaires continues à l'origine du couplage par un lagrangien augmenté

$$b_{kl} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathbf{u}_k, \delta \mathbf{u}_k) \mapsto \int_{\Gamma_{kl}} (\text{Tr}_{kl} \mathbf{u}_k - \text{Tr}_{kl} \mathbf{u}_l, \text{Tr}_{kl} \delta \mathbf{u}_k - \text{Tr}_{kl} \delta \mathbf{u}_l) \, d\Gamma_{kl},$$

et pour la partie couplage dual

$$c_{kl} : L^2(\Gamma_{kl})^2 \times L^2(\Gamma_{kl})^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\boldsymbol{\lambda}_{kl}, \mathbf{u}_{kl}) \mapsto \int_{\Gamma_{kl}} \boldsymbol{\lambda}_{kl} \mathbf{u}_{kl} \, d\Gamma_{kl}.$$

L'équivalence des notations de la section 3.8.1 permet de considérer les formes locales non linéaire et linéaire suivantes

$$a_k(\mathbf{u}_k, \delta \mathbf{u}_k) = \int_{V_0^k} \delta \mathbf{E}_k^{\text{T}} \mathbf{S}_k \, dV_0^k, \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} L_k(\delta \mathbf{u}_k) &= \int_{V_0^k} [(\mathbf{f}_{v0})_k \cdot \delta \mathbf{u}_k] \, dV_0^k + \int_{\Omega_0^k} [(\mathbf{f}_{s0})_k \cdot \delta \mathbf{u}_k] \, d\Omega_0^k \\ &\quad + \int_{\Gamma_n} [(\delta \mathbf{u}_p)_k \cdot (\mathbf{g}_{p0})_k + \delta \boldsymbol{\theta}_k \cdot (\mathbf{m}_{p0})_k] \, d\Gamma_n, \end{aligned} \quad (3.27)$$

avec les efforts extérieurs supposés constants et définis sur la configuration initiale ainsi que  $\delta \mathbf{u}|_{\Omega_k} = \delta \mathbf{u}_k = ((\delta \mathbf{u}_p)_k, \delta \boldsymbol{\theta}_k)$  la restriction des déplacements et rotations au patch  $\Omega_k$ . Les problèmes discrets pour les trois formulations multipatch peuvent ensuite être écrits de manière

semblable au cas des petites perturbations, sachant que les intégrations sont effectuées sur la configuration initiale et que les tenseurs des déformations  $\boldsymbol{\epsilon}$  et contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  sont respectivement remplacés par  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{S}$ . Par conséquent, le problème non linéaire discret augmenté consiste à trouver  $\{\mathbf{u}_k\} \in V_h$  et  $\{\boldsymbol{\lambda}_{kl}\} \in M_h$  tel que  $\forall \{\delta \mathbf{u}_k\} \in V_h$  et  $\forall \{\delta \boldsymbol{\lambda}_{kl}\} \in M_h$  on ait

$$\begin{aligned} \sum_k a_k(\mathbf{u}_k, \delta \mathbf{u}_k) + \sum_{k>l} \alpha_{kl} b_{kl}(\mathbf{u}_k, \delta \mathbf{u}_k) + \sum_{k>l} c_{kl}(\boldsymbol{\lambda}_{kl}, \text{Tr}_{kl} \delta \mathbf{u}_k - \text{Tr}_{kl} \delta \mathbf{u}_l) &= \sum_k L_k(\delta \mathbf{u}_k), \\ \sum_{k>l} c_{kl}(\delta \boldsymbol{\lambda}_{kl}, \text{Tr}_{kl} \mathbf{u}_k - \text{Tr}_{kl} \mathbf{u}_l) &= 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

### 3.8.3 Résolution par la méthode de Newton-Raphson

Nous souhaitons résoudre le problème non linéaire (3.28) par la méthode de Newton-Raphson. Pour cela, nous allons développer la variation incrémentale du travail virtuel des efforts intérieurs (3.25) sous la forme

$$\Delta(\delta W_{\text{int}}^{\text{MP}}) = \Delta(\delta W_{\text{E}}^{\text{MP}}) + \Delta(\delta W_{\text{p}}^{\text{MP}}) + \Delta(\delta W_{\lambda}^{\text{MP}}), \quad (3.29)$$

avec respectivement  $\Delta(\delta W_{\text{E}}^{\text{MP}})$ ,  $\Delta(\delta W_{\text{p}}^{\text{MP}})$  et  $\Delta(\delta W_{\lambda}^{\text{MP}})$  la variation itérative du travail virtuel associée à la déformation, au couplage primal et au couplage dual.

Le premier terme a été développé pour un domaine monopatch avec la raideur tangente (3.24), il est donc possible de l'adapter simplement aux problèmes multipatch avec l'expression

$$\Delta(\delta W_{\text{E}}^{\text{MP}}) = \sum_k \int_{V_0^k} \Delta(\delta \mathbf{E}_k)^{\text{T}} \mathbf{S}_k + \delta \mathbf{E}_k^{\text{T}} \Delta \mathbf{S}_k \, dV_0^k \underset{\text{NURBS}}{\simeq} \sum_k \delta \mathbf{u}_k^{\text{T}} \mathbf{K}_{t,k} \Delta \mathbf{u}_k. \quad (3.30)$$

La variation itérative du couplage primal peut à son tour être mise sous la forme

$$\Delta(\delta W_{\text{p}}^{\text{MP}}) = \sum_{k>l} \int_{\Gamma_{kl}} \alpha_{kl} (\text{Tr}_{kl} \Delta \mathbf{u}_k - \text{Tr}_{kl} \Delta \mathbf{u}_l) (\text{Tr}_{kl} \delta \mathbf{u}_k - \text{Tr}_{kl} \delta \mathbf{u}_l),$$

sachant que par définition des fonctions test  $\Delta(\delta \mathbf{u}_k) = \mathbf{0}$ ,  $\forall k$ . Après discrétisation par les fonctions de forme NURBS, la matrice de couplage primale se note

$$\Delta(\delta W_{\text{p}}^{\text{MP}}) \underset{\text{NURBS}}{=} \sum_{k>l} \alpha_{kl} (\delta \mathbf{u}_k - \delta \mathbf{u}_l)^{\text{T}} (\mathbf{K}_{p,k} + \mathbf{K}_{p,l} + \mathbf{C}_{p,k} + \mathbf{C}_{p,l}) (\Delta \mathbf{u}_k - \Delta \mathbf{u}_l). \quad (3.31)$$

On rappelle la notation utilisée dans le chapitre multipatch concernant  $\mathbf{K}_p$  et  $\mathbf{C}_p$  qui sont respectivement la matrice d'auto-couplage (raideur appliquée sur un même patch) et la matrice de couplage reliant les deux patches à lier.

Il reste alors à exprimer la variation incrémentale du travail intérieur associé au couplage dual  $\Delta(\delta W_{\lambda}^{\text{MP}})$ . En utilisant (3.25) on a

$$\Delta(\delta W_{\lambda}^{\text{MP}}) = \begin{cases} \sum_{k>l} \int_{\Gamma_{kl}} \Delta \boldsymbol{\lambda}_{kl} (\text{Tr}_{kl} \delta \mathbf{u}_k - \text{Tr}_{kl} \delta \mathbf{u}_l) \, d\Gamma_{kl}, \\ \sum_{k>l} \int_{\Gamma_{kl}} \delta \boldsymbol{\lambda}_{kl} (\text{Tr}_{kl} \Delta \mathbf{u}_k - \text{Tr}_{kl} \Delta \mathbf{u}_l) \, d\Gamma_{kl}. \end{cases}$$



avec la variation des fonctions test primales  $\Delta(\delta\mathbf{u}_k) = \mathbf{0}$ ,  $\forall k$ , et duales  $\Delta(\delta\boldsymbol{\lambda}_{kl}) = \mathbf{0}$ ,  $\forall kl$ . La variation itérative du travail intérieur pour le couplage dual, après discrétisation par les fonctions NURBS, s'écrit

$$\Delta(\delta W_\lambda^{\text{MP}}) \underset{\text{NURBS}}{=} \begin{cases} \sum_{k>l} (\delta\mathbf{u}_k - \delta\mathbf{u}_l)^T \mathbf{C}_\lambda^T \Delta\boldsymbol{\lambda}_{kl}, \\ \sum_{k>l} \delta\boldsymbol{\lambda}_{kl} \mathbf{C}_\lambda (\Delta\mathbf{u}_k - \Delta\mathbf{u}_l). \end{cases} \quad (3.32)$$

De même que pour les variables primales, les grandeurs duales vont s'actualiser simplement tel que

$$\boldsymbol{\lambda}_{kl}^{i+1} = \boldsymbol{\lambda}_{kl}^i + \Delta\boldsymbol{\lambda}_{kl}^{i+1}, \quad \forall kl.$$

Finalement, en injectant les expressions (3.30), (3.31) et (3.32) dans (3.29), on écrit la variation itérative du travail virtuel des efforts intérieurs pour un problème multipatch avec couplage par lagrangien augmenté

$$\Delta(\delta W_{\text{int}}^{\text{MP}}) \simeq \begin{cases} \sum_k \int_{V_0^k} \Delta(\delta\mathbf{E}_k)^T \mathbf{S}_k + \delta\mathbf{E}_k^T \Delta\mathbf{S}_k \, dV_0^k \\ \quad + \sum_{k>l} \int_{\Gamma_{kl}} \alpha_{kl} (\text{Tr}_{kl}\Delta\mathbf{u}_k - \text{Tr}_{kl}\Delta\mathbf{u}_l) (\text{Tr}_{kl}\delta\mathbf{u}_k - \text{Tr}_{kl}\delta\mathbf{u}_l) \, d\Gamma_{kl} \\ \quad + \sum_{k>l} \int_{\Gamma_{kl}} \Delta\boldsymbol{\lambda}_{kl} (\text{Tr}_{kl}\delta\mathbf{u}_k - \text{Tr}_{kl}\delta\mathbf{u}_l) \, d\Gamma_{kl}, \\ \sum_{k>l} \int_{\Gamma_{kl}} \delta\boldsymbol{\lambda}_{kl} (\text{Tr}_{kl}\Delta\mathbf{u}_k - \text{Tr}_{kl}\Delta\mathbf{u}_l) \, d\Gamma_{kl}. \end{cases} \quad (3.33)$$

La relation (3.33) permet d'obtenir l'équivalent du problème linéarisé (3.23) pour un domaine multipatch tel que

$$\Delta(\delta W_{\text{int}}^{\text{MP}}) - \delta W_{\text{res}}^{\text{MP}} = 0, \quad (3.34)$$

avec pour second membre  $\delta W_{\text{res}}^{\text{MP}}$  qui correspond au résidu  $(-\delta W_{\text{int}}^{\text{MP}} + \delta W_{\text{ext}}^{\text{MP}})$  de l'itération courante. On rappelle que

$$\delta W_{\text{res}}^{\text{MP}} = \Delta(\delta W_{\text{ext}}^{\text{MP}}) = \begin{cases} \int_{V_0^k} [\Delta(\mathbf{f}_{v0})_k \cdot \delta\mathbf{u}_k] \, dV_0^k + \int_{\Omega_0^k} [\Delta(\mathbf{f}_{s0})_k \cdot \delta\mathbf{u}_k] \, d\Omega_0^k \\ \quad + \int_{\Gamma_n} [(\delta\mathbf{u}_p)_k \cdot \Delta(\mathbf{g}_{p0})_k + \delta\boldsymbol{\theta}_k \cdot \Delta(\mathbf{m}_{p0})_k] \, d\Gamma_n, \\ 0, \end{cases}$$

si la valeur prédite du champ de déplacement correspond à la valeur d'équilibre de l'incrément de chargement précédent. En utilisant les notations du chapitre concernant les méthodes de couplage, le problème multipatch en grands déplacements linéarisé par le schéma de Newton-Raphson consiste à trouver  $\{\mathbf{u}_k\} \in V_h$  et  $\{\boldsymbol{\lambda}_{kl}\} \in M_h$  tel que  $\forall \{\delta\mathbf{u}_k\} \in V_h$  et  $\forall \{\delta\boldsymbol{\lambda}_{kl}\} \in M_h$  on ait

$$\begin{aligned} \sum_k \Delta a_k(\mathbf{u}_k, \delta\mathbf{u}_k) + \sum_{k>l} \alpha_{kl} b_{kl}(\Delta\mathbf{u}_k, \delta\mathbf{u}_k) + \sum_{k>l} c_{kl} (\Delta\boldsymbol{\lambda}_{kl}, \text{Tr}_{kl}\delta\mathbf{u}_k - \text{Tr}_{kl}\delta\mathbf{u}_l) = \sum_k \Delta L_k(\delta\mathbf{u}_k), \\ \sum_{k>l} c_{kl} (\delta\boldsymbol{\lambda}_{kl}, \text{Tr}_{kl}\Delta\mathbf{u}_k - \text{Tr}_{kl}\Delta\mathbf{u}_l) = 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Sous forme matricielle, nous obtenons l'écriture équivalente

$$\left[ \mathbf{K}_t \oplus \mathbf{K}_p \oplus \mathbf{C}_p \oplus \mathbf{C}_\lambda \right] \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} & \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{F}_{\text{ext}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T. \quad (3.36)$$

Un avantage non négligeable de la FLT par rapport à une méthode actualisée consiste à évaluer une seule fois les fonctions de forme et leurs dérivées sur la configuration initiale dans l'espace physique et les stocker pour la résolution. Le stockage des NURBS permettra de mettre à jour simplement les efforts intérieurs et extérieurs. Pour les matrices de couplage  $\mathbf{K}_p$ ,  $\mathbf{C}_p$  et  $\mathbf{C}_\lambda$ , sachant qu'elles sont construites grâce aux produits des NURBS sur la configuration initiale, c'est à dire le long de chaque  $\Gamma_{kl}$ , elles pourront directement être stockées et utilisées pour l'ensemble des résolutions incrémentales.

**Remarque 3.2.** Nous soulignons le fait que, comme dans le cas du multipatch en petites perturbations, nous assurons la continuité au sens faible des rotations de normale  $\boldsymbol{\theta}$  mais pas directement celle des normales. En outre, un faible écart peut apparaître sur les normales aux interfaces dont la valeur dépend de la précision apportée sur la découpe de la géométrie initiale. ■

## 3.9 Résultats numériques

Le développement numérique du modèle de coque non linéaire est le prolongement du cas linéaire avec, en particulier, l'utilisation du même solveur direct. L'ensemble est développé sous Python avec une compilation à l'exécution grâce à la librairie Numba [Lam 2015]. Les matrices sont toujours stockées au format sparse CSR avec la librairie SciPy [Jones 2001]. Les résolutions directes du système tangent se font par le Pardiso [Schenk 2001] qui représente un réel atout dans le cas de ce modèle non linéaire pour lequel le nombre de résolutions peut rapidement devenir important. La désignation de l'élément coque considéré est identique au chapitre précédent. À titre d'exemple, on rappelle que l'élément RMP2C1R est une plaque épaisse de type Reissner-Mindlin avec des fonctions de base quadratiques, une régularité  $C^1$  entre éléments et une intégration réduite alors que l'élément RMS3C2 est une coque épaisse d'ordre trois avec continuité  $C^2$  et intégration complète.

L'ensemble des résultats qui vont suivre concerne la FLT avec l'utilisation d'une normale en configuration initiale. On précise que chacune de ces études a également été réalisée avec une normale actualisée grâce aux quaternions (voir Annexe 3.B) afin de vérifier les résultats obtenus. Les solutions étant sensiblement identiques, seules les études avec une FLT utilisant la normale initiale sont présentées. Afin de faciliter l'implémentation numérique de la FLT utilisant la normale initiale, la partie géométrique  $\mathbf{K}_{\sigma_2}$  sera négligée dans la matrice de raideur de la méthode de Newton-Raphson pour l'ensemble des études.

### 3.9.1 Stabilisation numérique des rotations

Avant de présenter les divers cas d'étude, nous portons l'attention sur le fait qu'il puisse être nécessaire d'ajouter une raideur artificielle sur les degrés de liberté en rotation. En effet,

sachant que les rotations de normale peuvent être importantes, il est possible qu'au moins une des normales se retrouve alignée avec l'un des axes du repère cartésien global. Dans ce cas d'alignement singulier, il existe un mouvement de corps rigide en rotation autour de cet axe qui est susceptible de dégrader le conditionnement de la matrice de raideur tangente. Ce défaut peut ainsi provoquer la divergence du schéma de Newton-Raphson. Afin d'éviter cela, une raideur artificielle est ajoutée sur les degrés de liberté en rotation au niveau de la matrice de raideur tangente locale de chaque élément. En notant  $\mathbf{K}_{tloc(AA)}$  la raideur tangente locale associée au point de contrôle  $A$ , on définit la matrice de raideur artificielle sur les degrés de liberté en rotation par

$$\mathbf{K}_{spur(AA)} = \alpha_{spur} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{n}_A \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{n}_A \end{bmatrix}.$$

La constante  $\alpha_{spur}$  peut par exemple dépendre de la rotation maximale de  $\mathbf{K}_{tloc(AA)}$ , de la somme des rotations ou encore être indépendante de tout paramètre. En négligeant la partie géométrique  $\mathbf{K}_{\sigma 2}$ , la matrice de raideur tangente aura donc pour expression

$$\mathbf{K}_t \simeq \mathbf{K}_{t1} + \mathbf{K}_{\sigma 1} + \mathbf{K}_{spur} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{K}_{t1} = \int_{V_0} \mathbf{B}_{nl}^T(\mathbf{u}) \mathbf{C}_0 \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{u}) dV_0, \\ \mathbf{K}_{\sigma 1} = \int_{V_0} \dot{\mathbf{D}}^T \widehat{\mathbf{S}} \dot{\mathbf{D}} dV_0. \end{cases}$$

#### 3.9.2 Plaque en porte-à-faux

Les benchmarks qui vont suivre sont tous issus de l'article de Sze et al. [Sze 2004] qui est une référence pour la validation d'un modèle de coque non linéaire. Dans cet article, le logiciel Abaqus, avec des éléments linéaires de type coque épaisse et de dénomination S4R, est utilisé. Les solutions IGA seront donc comparées aux résultats FEM d'Abaqus sur des exemples proposés par Sze et al. Chaque étude sera proposée en version monopatch et multipatch, notamment afin de garantir l'efficacité du lagrangien augmenté avec traitement simplifié des points singuliers dans le cas des grands déplacements. Les paramètres de simulation seront donnés pour chaque cas.

Cette première validation concerne une plaque en porte-à-faux de longueur  $L$  et largeur  $l$ . Comme précisé sur la Figure 3.1, l'une des extrémités est encastrée alors qu'un effort linéique est appliqué à son opposé. Il s'agit d'un essai classique de verrouillage en cisaillement qui permettra de mettre en évidence l'intérêt de l'intégration réduite. Dans la version multipatch, la plaque est composée de quatre patchs disposés dans le sens longitudinal de la structure. Aucun point singulier n'est présent pour cette étude. Les mêmes conditions limites sont appliquées pour la version monopatch. Un seul élément est utilisé dans le sens transverse de la plaque (axe  $\mathbf{y}$ ). Les déplacements verticaux  $w_{tip}$  selon l'axe  $\mathbf{z}$  et horizontaux  $u_{tip}$  selon l'axe  $\mathbf{x}$  seront comparés à la référence. Dans notre cas, la moyenne des déplacements des trois points de contrôle en bout de plaque sera utilisée.

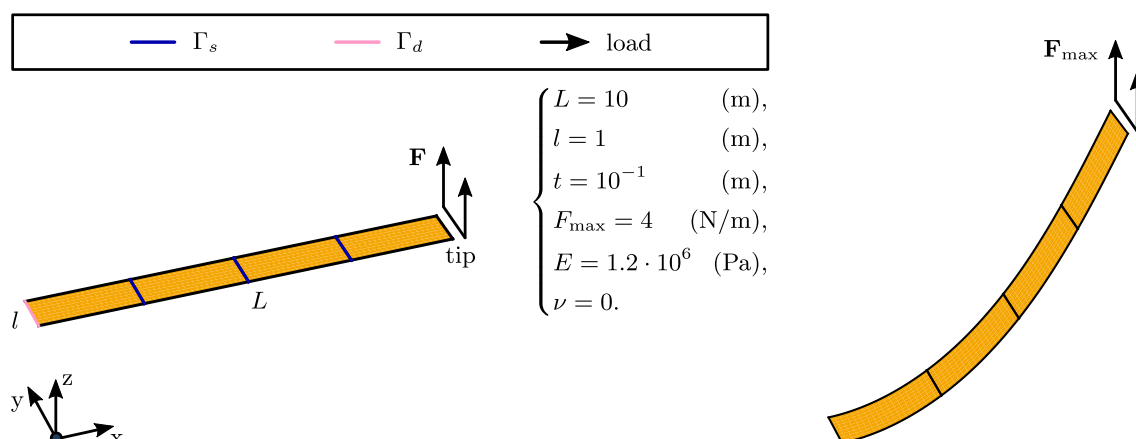


FIGURE 3.1 – Gauche : géométrie et propriétés pour une plaque en porte-à-faux. Droite : plaque en configuration déformée.

### 3.9.2.1 Monopatch

#### Paramètres de simulation :

- modèle de coque non linéaire (FLT avec normale initiale),
- utilisation de la normale approchée aux abscisses de Gréville,
- intégration dans l'épaisseur avec deux points de Gauss,
- incrément d'effort constant de  $0.05 \cdot F_{\max}$ ,
- tolérance de 0.1% en effort pour la convergence du Newton-Raphson.

L'évolution du chargement  $F/F_{\max}$  est tracée en fonction du déplacement horizontal  $u$  (en noir) et vertical  $w$  (en marron) sur la Figure 3.2 pour trois maillages distincts et deux méthodes d'intégration. Un exemple qualitatif de déplacement horizontal (haut) et vertical (bas) est visible sur cette même figure. Comme attendu, le problème est soumis à du verrouillage en cisaillement ce qui est visible avec l'efficacité de la méthode d'intégration réduite. Ce premier problème a permis de valider le modèle de coque non linéaire sur un cas simple et monopatch.

### 3.9.2.2 Multipatch

#### Paramètres de simulation :

- modèle de coque non linéaire (FLT avec normale initiale),
- méthode multipatch par lagrangien augmenté simplifié avec intégration réduite (pénalisé de  $\alpha = 10^{-3} \cdot E$ ),
- utilisation de la normale approchée aux abscisses de Gréville,
- intégration dans l'épaisseur avec deux points de Gauss,
- incrément d'effort constant de  $0.05 \cdot F_{\max}$ ,
- tolérance de 0.1% en effort pour la convergence du Newton-Raphson.

### Chapitre 3. Modèle de coque épaisse en grandes transformations

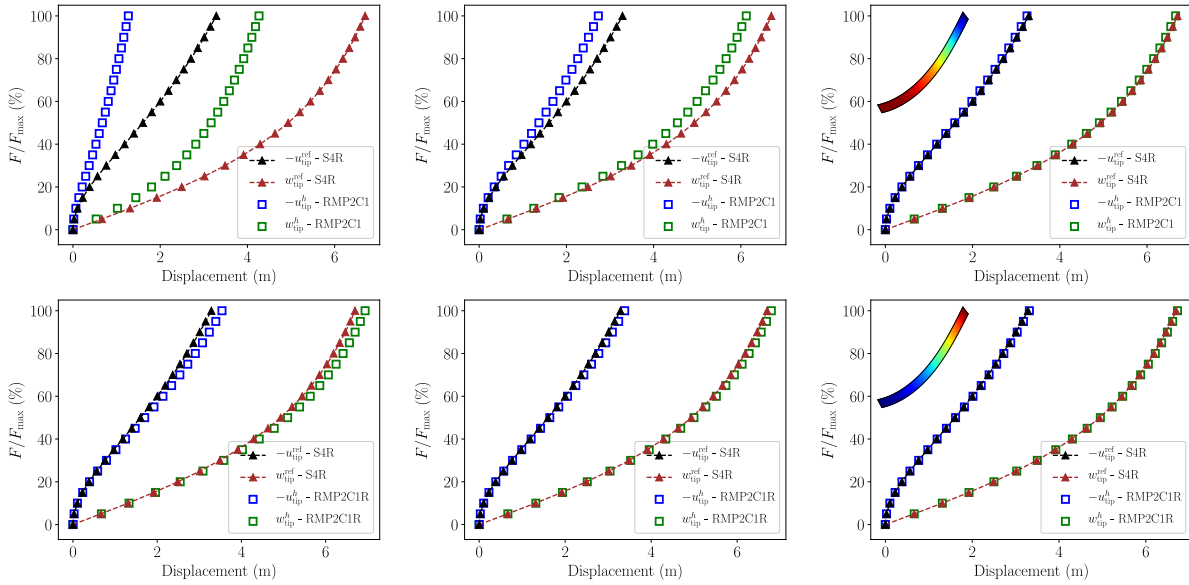


FIGURE 3.2 – Chargement normalisé en fonction du déplacement à l’extrémité de la plaque monopatch en porte-à-faux. Haut : intégration complète. Bas : intégration réduite. Gauche à droite : maillage de taille  $h = 0.25$  (m),  $h = 0.125$  (m) et  $h = 0.0625$  (m).

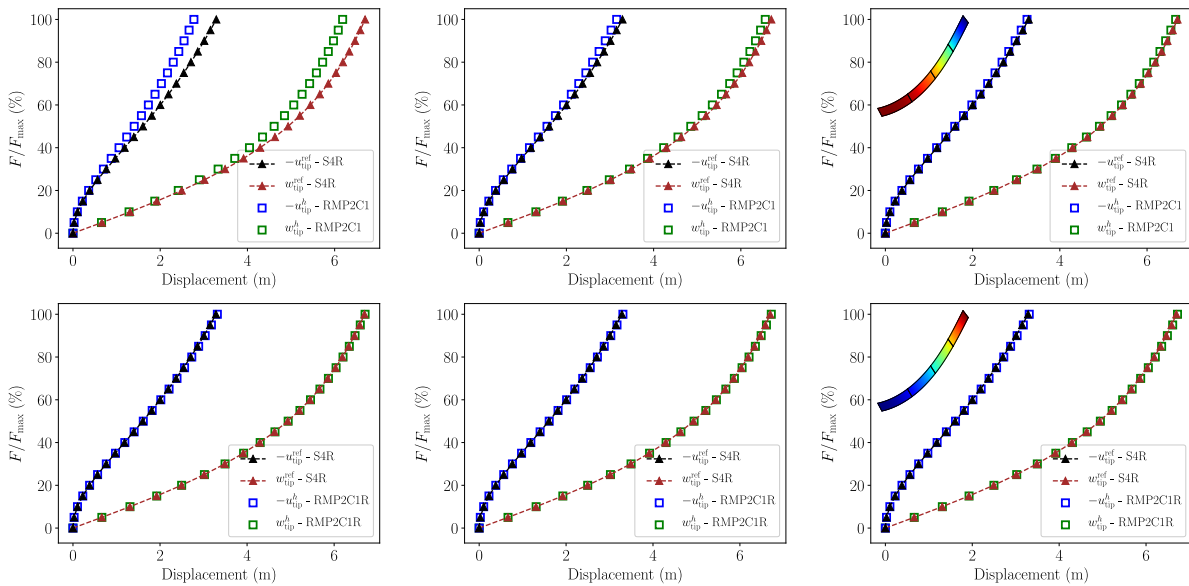


FIGURE 3.3 – Chargement normalisé en fonction du déplacement à l’extrémité de la plaque multipatch en porte-à-faux. Haut : intégration complète. Bas : intégration réduite. Gauche à droite : maillage de taille  $h = 0.5$  (m),  $h \simeq 0.33$  (m) et  $h = 0.25$  (m).

Le lagrangien augmenté simplifié est utilisé dans ce cas avec un facteur de pénalité faible puisqu'aucun point singulier n'est présent pour cette étude. Il n'est donc pas nécessaire de compenser l'espace dual non optimal par un facteur de pénalité élevé. L'évolution du chargement  $F/F_{\max}$  est tracée en fonction du déplacement horizontal  $u$  (en noir) et vertical  $w$  (en marron) sur la Figure 3.3 pour trois maillages et les deux méthodes d'intégration des différents termes constituant l'énergie. Un exemple qualitatif de déplacement horizontal (haut) et vertical (bas) est visible sur cette même figure.

On constate une fois de plus l'efficacité de l'intégration réduite sur ce problème. Les solutions obtenues sont identiques au cas monopatch à taille de maillage équivalente. Les tailles  $h = 0.5$  (m) et  $h = 0.25$  (m) du cas multipatch sont respectivement identiques aux tailles  $h = 0.125$  (m) et  $h = 0.0625$  (m) de la version monopatch. Cette première géométrie a permis de valider la FLT utilisant la normale initiale en monopatch et multipatch sur un cas de plaque épaisse. Ces points sont désormais à valider sur des exemples utilisant des élément de type coque épaisse.

### 3.9.3 Hémisphère pincé

Ce problème est rigoureusement identique à celui étudié dans le cas du modèle de coque linéaire. La seule différence vient de l'amplitude de l'effort qui est deux cent fois plus importante comme proposé dans [Sze 2004]. Pour rappel, il s'agit d'un hémisphère de rayon  $R$  avec un trou défini par un angle zénital de  $18^\circ$ . Dans sa version multipatch, la structure est composée de quatre patches. Des efforts ponctuels sont appliqués aux quatre points cardinaux de l'équateur comme représenté sur la Figure 3.4.

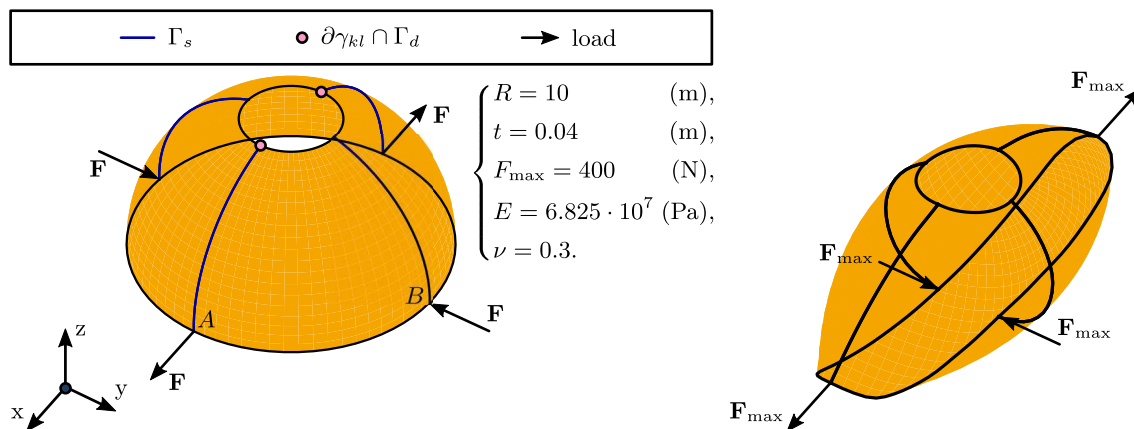


FIGURE 3.4 – Gauche : géométrie et propriétés pour un hémisphère pincé. Droite : hémisphère en configuration déformée.

Afin d'éviter des mouvements de corps rigide, deux noeuds sont bloqués sur la partie supérieure de l'hémisphère. Il s'agit des deux seuls points singuliers puisqu'aucun coin mortier issu d'une éventuelle intersection d'interfaces n'est présent. Comme dans le cas linéaire, cet essai

caractérise des modes de flexion inextensible et permet de s'assurer que l'élément ne souffre pas de verrouillage en membrane ou en cisaillement transverse. Concernant la version monopatch, seul un quart de l'hémisphère est étudié en appliquant les conditions de symétrie adéquates et un seul noeud est bloqué afin d'éviter des mouvements de corps rigide. Les déplacements seront relevés en deux points d'application de l'effort concentré notés  $A$  et  $B$ . Il s'agit des déplacements selon la direction radiale de l'hémisphère, c'est à dire respectivement  $u_A^h$  le long de l'axe  $\mathbf{x}$  au point  $A$  et  $v_B^h$  le long de l'axe  $\mathbf{y}$  au point  $B$ . Dans la version multipatch, c'est la moyenne des déplacements des deux patches joints aux points  $A$  et  $B$  qui est considérée.

### 3.9.3.1 Monopatch

#### Paramètres de simulation :

- modèle de coque non linéaire (FLT avec normale initiale),
- utilisation de la normale approchée aux abscisses de Gréville,
- intégration dans l'épaisseur avec deux points de Gauss,
- incrément d'effort constant de  $0.05 \cdot F_{\max}$ ,
- tolérance de 0.1% en effort pour la convergence du Newton-Raphson.

L'évolution du chargement  $F/F_{\max}$  est tracée en fonction du déplacement sur la Figure 3.5 pour trois maillages distincts et deux méthodes d'intégration. Un exemple qualitatif de déplacement le long de l'axe  $\mathbf{x}$  pour le point  $A$  (haut) et le long de l'axe  $\mathbf{y}$  pour le point  $B$  (bas) est visible sur cette même figure.

L'intégration réduite permet de diminuer significativement le verrouillage numérique en présentant une faible erreur sur les deux solutions en déplacement par rapport à l'intégration complète. Cet essai permet de valider l'implémentation du modèle de coque épaisse non linéaire sur une géométrie monopatch simple.

### 3.9.3.2 Multipatch

#### Paramètres de simulation :

- modèle de coque non linéaire (FLT avec normale initiale),
- méthode multipatch par lagrangien augmenté industriel avec intégration réduite (pénalisé de  $\alpha = 10^{-3} \cdot E$ ),
- utilisation de la normale approchée aux abscisses de Gréville,
- intégration dans l'épaisseur avec deux points de Gauss,
- incrément d'effort constant de  $0.05 \cdot F_{\max}$ ,
- tolérance de 0.5% en effort pour la convergence du Newton-Raphson.

De même que pour la plaque en porte-à-faux, sans coin mortier issu de l'intersection d'interfaces, un faible facteur de pénalité suffit à obtenir une solution en déplacement précise. La tolérance en effort pour la convergence du schéma de Newton-Raphson est augmenté dans ce cas à 0.5% afin de réduire le coût numérique des six résolutions. L'évolution du chargement  $F/F_{\max}$

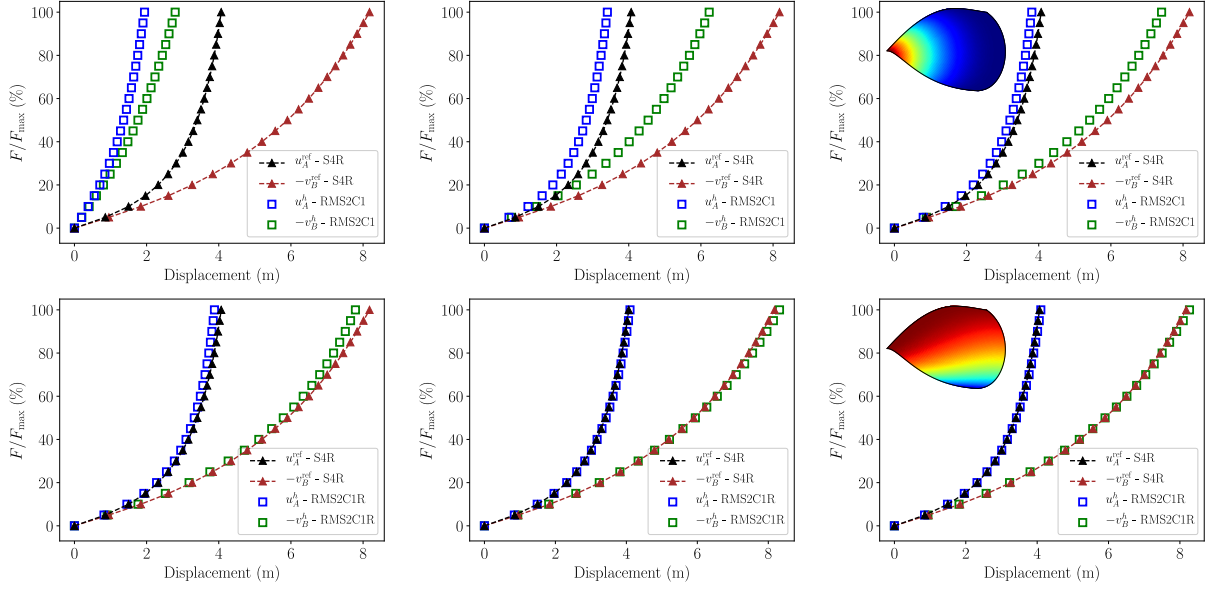


FIGURE 3.5 – Chargement normalisé en fonction du déplacement aux points  $A$  et  $B$  de l’hémisphère pincé monopatch. Haut : intégration complète. Bas : intégration réduite. Gauche à droite : maillage de taille  $h = 0.125$  (m),  $h = 0.0625$  (m) et  $h \simeq 0.04167$  (m).

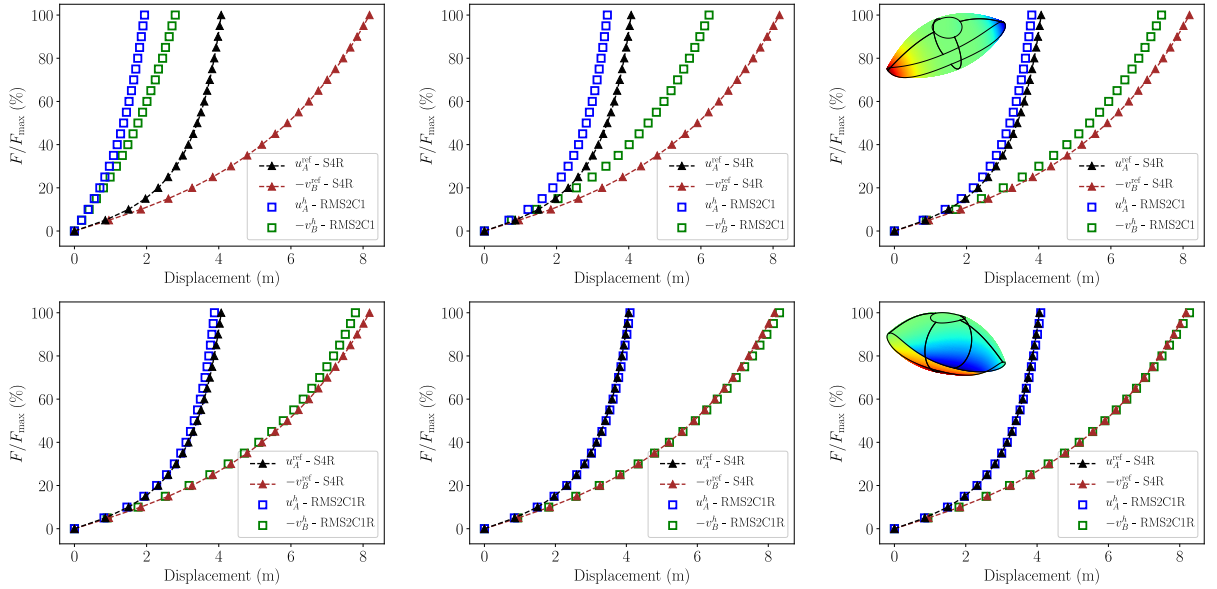


FIGURE 3.6 – Chargement normalisé en fonction du déplacement aux points  $A$  et  $B$  de l’hémisphère pincé multipatch. Haut : intégration complète. Bas : intégration réduite. Gauche à droite : maillage de taille  $h = 0.125$  (m),  $h = 0.0625$  (m) et  $h \simeq 0.04167$  (m).



est tracée en fonction du déplacement sur la Figure 3.6 pour trois maillages ainsi que deux méthodes de quadrature différentes. Un exemple qualitatif de déplacement le long de l'axe  $\mathbf{x}$  pour le point  $A$  (haut) et le long de l'axe  $\mathbf{y}$  pour le point  $B$  (bas) est visible sur cette même figure.

Les résultats obtenus dans le cas multipatch sont sensiblement identiques à l'étude en version monopatch, en particulier sur l'efficacité de l'intégration réduite. Le lagrangien augmenté industriel permet d'appliquer les conditions de continuité, au sens faible, de manière efficace sur un problème de coque non linéaire ne comportant aucun coin mortier issu de l'intersection d'interfaces.

### 3.9.4 Cylindre étiré

La dernière étude, également proposée par Sze et al. [Sze 2004], concerne un cylindre qui va être étiré par des efforts radiaux ponctuels. Le cylindre de longueur  $L$  et rayon  $R$  est, pour une étude complète, constitué de huit patches. En utilisant des arguments de symétrie, la version multipatch du problème comportera simplement quatre patches, notamment afin d'accélérer la résolution numérique. La structure et l'effort radial ponctuel sont représentés sur la Figure 3.7. Afin d'éviter des mouvements de corps rigide, deux noeuds sont bloqués dans la direction longitudinale du cylindre (axe  $\mathbf{y}$ ) sur sa partie inférieure et deux noeuds sont bloqués horizontalement (axe  $\mathbf{x}$ ) sur sa partie supérieure. Pour la version monopatch, des conditions supplémentaires de symétrie sont appliquées et aucun noeud n'est bloqué. Les déplacements radiaux seront relevés aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$  en moyennant la valeur des solutions obtenues sur chaque patch dans la version multipatch. Par conséquent, le déplacement vertical  $w_A^h$  selon l'axe  $\mathbf{z}$  au point  $A$ , horizontal  $u_B^h$  selon l'axe  $\mathbf{x}$  au point  $B$  et horizontal  $u_C^h$  selon l'axe  $\mathbf{x}$  au point  $C$  sera relevé.

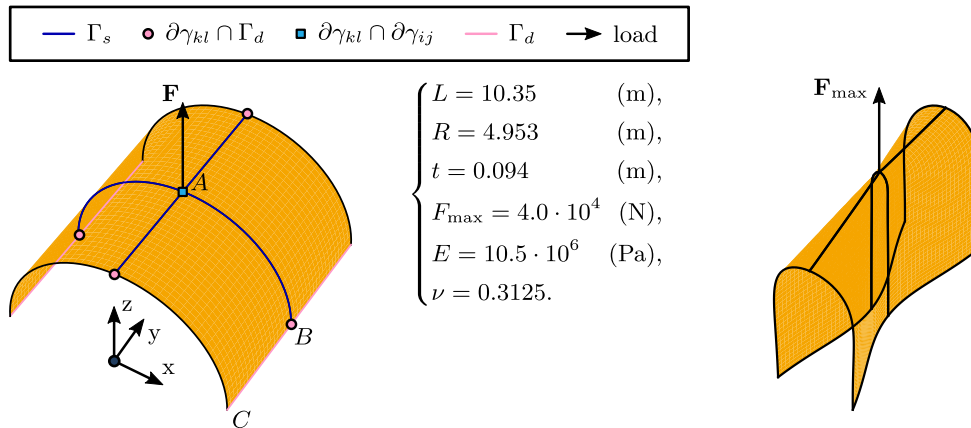


FIGURE 3.7 – Gauche : géométrie et propriétés pour un cylindre étiré. Droite : cylindre en configuration déformée.

Un point singulier issu de l'intersection d'interfaces est présent, dans la version multipatch du problème, et correspond au point  $A$ . L'enjeu de l'étude sera donc double puisqu'elle permettra à la fois de valider le lagrangien augmenté simplifié pour un modèle de coque non linéaire sur

un problème comportant un coin mortier mais également de montrer la robustesse du schéma de Newton-Raphson soumis à des changements de pente significatifs.

#### 3.9.4.1 Monopatch

**Paramètres de simulation :**

- modèle de coque non linéaire (FLT avec normale initiale),
- utilisation de la normale approchée aux abscisses de Gréville,
- intégration dans l'épaisseur avec deux points de Gauss,
- incrément d'effort variable de  $\left[0.025 \times 19 \quad 0.00625 \times 8 \quad 0.025 \times 19\right] \cdot F_{\max}$ ,
- tolérance de 0.1% en effort pour la convergence du Newton-Raphson.

L'incrément d'effort n'est pas constant afin de garantir la convergence du schéma de Newton-Raphson soumis à un changement de pente important en milieu de calcul. Comme pour les études précédentes, l'évolution du chargement  $F/F_{\max}$  est tracée en fonction du déplacement sur la Figure 3.8 pour trois maillages et deux méthodes d'intégration différentes. Un exemple qualitatif de déplacement le long de l'axe  $\mathbf{x}$  (haut) et le long de l'axe  $\mathbf{z}$  (bas) est visible sur cette même figure.

Une fois de plus, l'intégration réduite permet d'obtenir une solution précise pour des maillages relativement grossiers. On constate néanmoins que, comme dans le cas de l'hémisphère pincé linéaire, si l'erreur en déplacement est plus faible pour des maillages grossiers avec intégration réduite, le taux de convergence est également plus faible. En effet, pour les maillages fins, l'intégration complète permet de retrouver précisément les déplacements référence alors qu'une erreur subsiste encore pour l'intégration réduite qui nécessiterait de raffiner davantage le maillage. La robustesse du schéma de Newton-Raphson, en utilisant uniquement le premier gradient dans la matrice de raideur tangente, est mise en évidence dans ce cas monopatch.

#### 3.9.4.2 Multipatch

**Paramètres de simulation :**

- modèle de coque non linéaire (FLT avec normale initiale),
- méthode multipatch par lagrangien augmenté simplifié avec intégration réduite (pénalisé de  $\alpha = 10^3 \cdot E$ ),
- utilisation de la normale approchée aux abscisses de Gréville,
- intégration dans l'épaisseur avec deux points de Gauss,
- incrément variable  $\begin{cases} \left[0.025 \times 18 \quad 0.005 \times 10 \quad 0.025 \times 20\right] \cdot F_{\max} & \text{pour } h = 0.125 \text{ (m)}, \\ \left[0.025 \times 19 \quad 0.00625 \times 8 \quad 0.025 \times 19\right] \cdot F_{\max} & \text{sinon,} \end{cases}$
- tolérance de 0.5% en effort pour la convergence du Newton-Raphson.

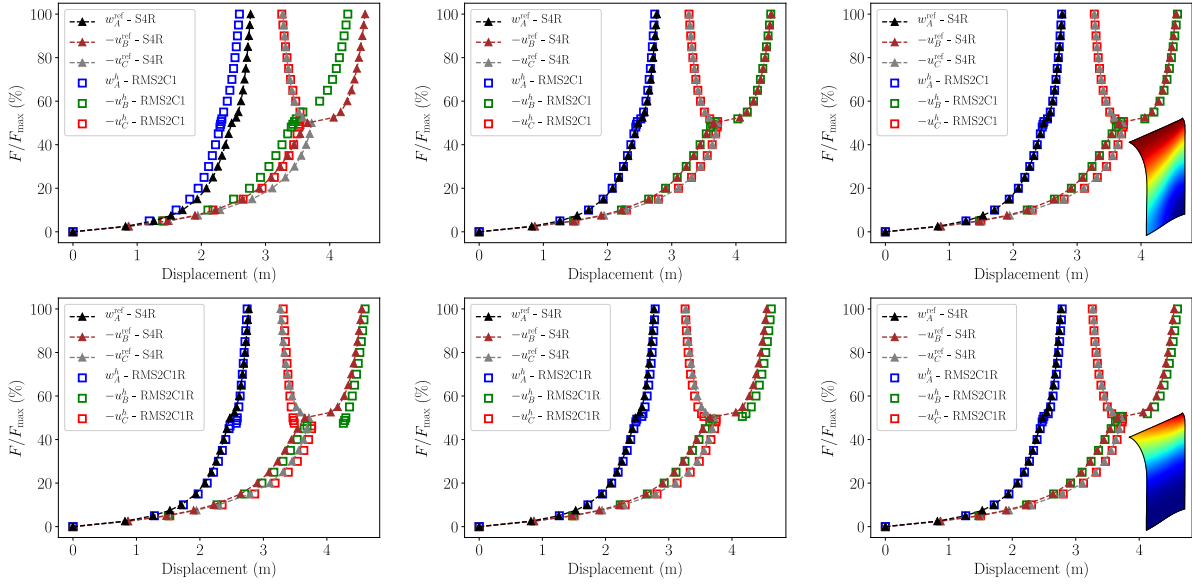


FIGURE 3.8 – Chargement normalisé en fonction du déplacement aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$  du cylindre étiré monopatch (par soucis de clarté, un incrément sur deux est représenté). Haut : intégration complète. Bas : intégration réduite. Gauche à droite : maillage de taille  $h = 0.125$  (m),  $h = 0.0625$  (m) et  $h \simeq 0.04167$  (m).

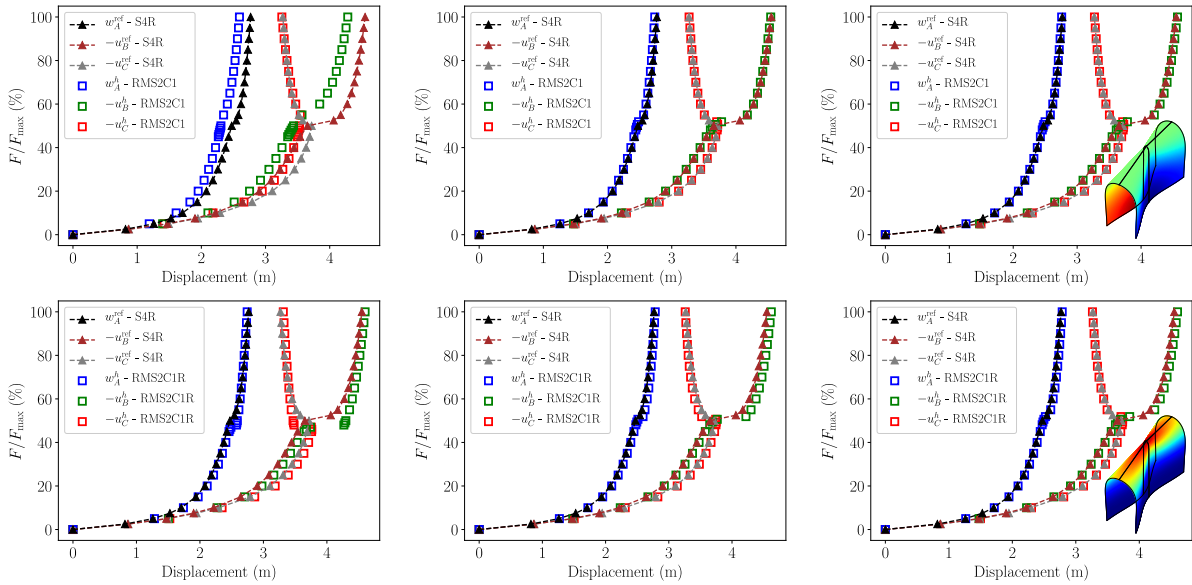


FIGURE 3.9 – Chargement normalisé en fonction du déplacement aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$  du cylindre étiré multipatch (par soucis de clarté, un incrément sur deux est représenté). Haut : intégration complète. Bas : intégration réduite. Gauche à droite : maillage de taille  $h = 0.125$  (m),  $h = 0.0625$  (m) et  $h \simeq 0.04167$  (m).

La partie primale du couplage multipatch est importante dans ce cas puisque l'effort ponctuel est directement appliqué sur le coin mortier. Par conséquent un facteur de pénalité de  $\alpha = 10^3 \cdot E$  est appliqué, identique à la plupart des facteurs utilisés lors des études linéaires. L'évolution du chargement  $F/F_{\max}$  est tracée en fonction du déplacement sur la Figure 3.9 pour trois maillages distincts et les deux méthodes de quadrature proposées. Un exemple qualitatif de déplacement le long de l'axe  $\mathbf{x}$  (haut) et le long de l'axe  $\mathbf{z}$  (bas) est visible sur cette même figure.

Un facteur de pénalité plus élevé permet de retrouver sensiblement les mêmes solutions en déplacement que dans le cas monopatch. Cette dernière étude a permis de finaliser la validation de la FLT utilisant la normale initiale (mais également actualisée même si les résultats ne sont pas présentés). Le lagrangien augmenté avec traitement simplifié des coins mortiers est tout aussi robuste que dans le cas du modèle de coque linéaire. Enfin, on souligne le fait que malgré l'approximation qui consiste à négliger la seconde partie de la matrice tangente géométrique  $\mathbf{K}_{\sigma 2}$ , le schéma de Newton-Raphson est robuste et permet de traiter des cas plus complexes comme le cylindre étiré multipatch.

### 3.10 Conclusion

La FLT présentée dans ce chapitre a permis de résoudre des problèmes de coque épaisse monopatch et multipatch soumis à des non-linéarités géométriques. Après linéarisation de l'équation de mouvement par un schéma itératif de type Newton-Raphson, la variation des efforts intérieurs lors d'un incrément de force, c'est à dire la matrice de raideur tangente, a pu être évaluée afin de prédire les déplacements et rotations pour chaque itération. En utilisant la normale en configuration initiale, reconstruite par interpolation des vecteurs de contrôle définis aux abscisses de Gréville, les formules de Rodrigues associées à une paramétrisation axio-angulaire des rotations ont permis d'obtenir un bilan des efforts exact sans aucune hypothèse supplémentaire, en particulier sans supposer des variations incrémentales infinitésimales sur les déplacements. Malgré la complexité de la raideur tangente, notamment avec le second gradient des déplacements  $\mathbf{\ddot{D}}$ , le coût numérique de cette approche reste raisonnable car l'ensemble des fonctions de forme, incluant les fonctions interpolantes pour chaque patch  $\Omega_k$  et pour chaque interface  $\gamma_{kl}$  en multipatch, sont stockées dans l'espace physique et réutilisées à chaque itération.

Cette approche permet également de s'affranchir de composer les rotations finies comme c'est le cas pour une normale prise en configuration déformée. Cette seconde méthode, détaillée sur l'Annexe 3.B, a également été développée afin de comparer les résultats obtenus. Dans ce cas, l'algèbre des quaternions permet de composer simplement les grandes rotations et l'évaluation de la raideur tangente est simplifiée sous l'hypothèse des variations incrémentales infinitésimales. Avec les incréments en effort utilisés pour les six essais numériques, cette variante de la FLT permet de retrouver des solutions sensiblement identiques à la formulation utilisant la normale initiale et peut donc s'avérer être une alternative intéressante, dans un contexte industriel, si une attention particulière est portée sur les incréments en effort.

La robustesse et la précision de la méthode augmentée avec traitement simplifié des points singuliers a pu être mis en évidence sur des problèmes régis par des grands déplacements et des grandes rotations de normale. Dans ce cas, l'influence du facteur de pénalité est d'autant plus importante, notamment pour des problèmes comportant des points singuliers, afin d'assurer les conditions de continuité puisque les sauts de déplacement aux interfaces peuvent rapidement devenir non négligeables. De manière plus générale, nous avons montré que l'implémentation numérique est robuste avec un faible nombre d'incrémentaires nécessaires sur des problèmes qui sont susceptibles de comporter des changements de pente importants et ce même en négligeant le second gradient des déplacements. Par conséquent, la FLT utilisant les normales initiales et, sous certaines précautions, sa variante avec des normales actuelles permettent d'étendre le domaine d'application de l'IGA en résolvant de manière rigoureuse des problèmes possédant des non-linéarités géométriques fréquemment rencontrés dans l'industrie.

## Annexes

### 3.A Dérivées première $\dot{\mathbf{D}}$ et seconde $\ddot{\mathbf{D}}$ du gradient ponctuel

L'ensemble des relations qui vont suivre ont été obtenues à l'aide du logiciel de calcul formel Maple [Maple 2014]. On rappelle l'expression décrivant la variation de normale à l'abscisse de Gréville  $A$  par

$$(\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_A) - \mathbf{I}_3) \mathbf{n}_{A,0} = (c_A(\boldsymbol{\theta}_A) [\boldsymbol{\theta}_A \times] + s_A(\boldsymbol{\theta}_A)) (\boldsymbol{\theta}_A \times \mathbf{n}_{A,0}) = \begin{bmatrix} \theta_{AY} \tilde{D}_{AXY}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AZ} \tilde{D}_{AXZ}(\boldsymbol{\theta}_A) \\ \theta_{AZ} \tilde{D}_{AYZ}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AX} \tilde{D}_{AXY}(\boldsymbol{\theta}_A) \\ \theta_{AX} \tilde{D}_{AXZ}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AY} \tilde{D}_{AYZ}(\boldsymbol{\theta}_A) \end{bmatrix},$$

avec les simplifications de notation

$$c_A(\boldsymbol{\theta}_A) = \frac{1 - \cos(\|\boldsymbol{\theta}_A\|)}{\|\boldsymbol{\theta}_A\|^2} \quad \text{et} \quad s_A(\boldsymbol{\theta}_A) = \frac{\sin(\|\boldsymbol{\theta}_A\|)}{\|\boldsymbol{\theta}_A\|},$$

ainsi que

$$\begin{cases} \tilde{D}_{AXY}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_A(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AX} n_{AY,0} - \theta_{AY} n_{AX,0}) + s_A(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AZ,0}, \\ \tilde{D}_{AYZ}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_A(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AY} n_{AZ,0} - \theta_{AZ} n_{AY,0}) + s_A(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AX,0}, \\ \tilde{D}_{AXZ}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_A(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AZ} n_{AX,0} - \theta_{AX} n_{AZ,0}) + s_A(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AY,0}. \end{cases}$$

**Expression de la dérivée première  $\dot{\mathbf{D}}_A$  :** on commence par donner les dérivées premières de  $c_A(\boldsymbol{\theta}_A)$  et  $s_A(\boldsymbol{\theta}_A)$  par rapport aux degrés de liberté correspondant aux rotations

$$\begin{cases} c_{A,\theta_{AI}}(\boldsymbol{\theta}_A) = \frac{\theta_{AI}}{\|\boldsymbol{\theta}_A\|^2} (s_A(\boldsymbol{\theta}_A) - 2c_A(\boldsymbol{\theta}_A)), \\ s_{A,\theta_{AI}}(\boldsymbol{\theta}_A) = \frac{\theta_{AI}}{\|\boldsymbol{\theta}_A\|^2} (1 - \|\boldsymbol{\theta}_A\|^2 c_A(\boldsymbol{\theta}_A) - s_A(\boldsymbol{\theta}_A)), \quad \forall I \in \{X, Y, Z\}. \end{cases}$$

On détaille les neuf dérivées premières intervenant dans l'expression de  $\dot{\mathbf{D}}_A(\boldsymbol{\theta}_A)$  tel que

$$\begin{cases} \tilde{D}_{AXY,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_{A,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AX} n_{AY,0} - \theta_{AY} n_{AX,0}) + c_A(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AY,0} + s_{A,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AZ,0}, \\ \tilde{D}_{AXY,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_{A,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AX} n_{AY,0} - \theta_{AY} n_{AX,0}) - c_A(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AX,0} + s_{A,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AZ,0}, \\ \tilde{D}_{AXY,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_{A,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AX} n_{AY,0} - \theta_{AY} n_{AX,0}) + s_{A,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AZ,0}, \\ \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_{A,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AY} n_{AZ,0} - \theta_{AZ} n_{AY,0}) + s_{A,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AX,0}, \\ \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_{A,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AY} n_{AZ,0} - \theta_{AZ} n_{AY,0}) + c_A(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AZ,0} + s_{A,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AX,0}, \\ \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_{A,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AY} n_{AZ,0} - \theta_{AZ} n_{AY,0}) - c_A(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AY,0} + s_{A,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AX,0}, \\ \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_{A,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AZ} n_{AX,0} - \theta_{AX} n_{AZ,0}) - c_A(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AZ,0} + s_{A,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AY,0}, \\ \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_{A,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AZ} n_{AX,0} - \theta_{AX} n_{AZ,0}) + s_{A,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AY,0}, \\ \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_{A,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AZ} n_{AX,0} - \theta_{AX} n_{AZ,0}) + c_A(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AX,0} + s_{A,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AY,0}. \end{cases}$$

Sachant que  $\delta \mathbf{D} = \sum_{A=1}^{n \cdot m} \dot{\mathbf{D}}_A(\boldsymbol{\theta}_A) \delta \mathbf{u}_A = \dot{\mathbf{D}} \delta \mathbf{u}$ , on donne l'expression de la contribution  $\dot{\mathbf{D}}_A(\boldsymbol{\theta}_A)$

$$\dot{\mathbf{D}}_A(\boldsymbol{\theta}_A) = \begin{bmatrix} R_{A,X} & 0 & 0 & \dot{D}_{A14}(\boldsymbol{\theta}_A) & \dot{D}_{A15}(\boldsymbol{\theta}_A) & \dot{D}_{A16}(\boldsymbol{\theta}_A) \\ R_{A,Y} & 0 & 0 & \dot{D}_{A24}(\boldsymbol{\theta}_A) & \dot{D}_{A25}(\boldsymbol{\theta}_A) & \dot{D}_{A26}(\boldsymbol{\theta}_A) \\ R_{A,Z} & 0 & 0 & \dot{D}_{A34}(\boldsymbol{\theta}_A) & \dot{D}_{A35}(\boldsymbol{\theta}_A) & \dot{D}_{A36}(\boldsymbol{\theta}_A) \\ 0 & R_{A,X} & 0 & \dot{D}_{A44}(\boldsymbol{\theta}_A) & \dot{D}_{A45}(\boldsymbol{\theta}_A) & \dot{D}_{A46}(\boldsymbol{\theta}_A) \\ 0 & R_{A,Y} & 0 & \dot{D}_{A54}(\boldsymbol{\theta}_A) & \dot{D}_{A55}(\boldsymbol{\theta}_A) & \dot{D}_{A56}(\boldsymbol{\theta}_A) \\ 0 & R_{A,Z} & 0 & \dot{D}_{A64}(\boldsymbol{\theta}_A) & \dot{D}_{A65}(\boldsymbol{\theta}_A) & \dot{D}_{A66}(\boldsymbol{\theta}_A) \\ 0 & 0 & R_{A,X} & \dot{D}_{A74}(\boldsymbol{\theta}_A) & \dot{D}_{A75}(\boldsymbol{\theta}_A) & \dot{D}_{A76}(\boldsymbol{\theta}_A) \\ 0 & 0 & R_{A,Y} & \dot{D}_{A84}(\boldsymbol{\theta}_A) & \dot{D}_{A85}(\boldsymbol{\theta}_A) & \dot{D}_{A86}(\boldsymbol{\theta}_A) \\ 0 & 0 & R_{A,Z} & \dot{D}_{A94}(\boldsymbol{\theta}_A) & \dot{D}_{A95}(\boldsymbol{\theta}_A) & \dot{D}_{A96}(\boldsymbol{\theta}_A) \end{bmatrix},$$

avec chaque composante

$$\begin{aligned} \dot{D}_{A14}(\boldsymbol{\theta}_A) &= \tilde{R}_{A,X} \left( \theta_{AY} \tilde{D}_{AXY,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AZ} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\ \dot{D}_{A24}(\boldsymbol{\theta}_A) &= \tilde{R}_{A,Y} \left( \theta_{AY} \tilde{D}_{AXY,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AZ} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\ \dot{D}_{A34}(\boldsymbol{\theta}_A) &= \tilde{R}_{A,Z} \left( \theta_{AY} \tilde{D}_{AXY,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AZ} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\ \dot{D}_{A15}(\boldsymbol{\theta}_A) &= \tilde{R}_{A,X} \left( \theta_{AY} \tilde{D}_{AXY,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) + \tilde{D}_{AXY}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AZ} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\ \dot{D}_{A25}(\boldsymbol{\theta}_A) &= \tilde{R}_{A,Y} \left( \theta_{AY} \tilde{D}_{AXY,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) + \tilde{D}_{AXY}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AZ} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\ \dot{D}_{A35}(\boldsymbol{\theta}_A) &= \tilde{R}_{A,Z} \left( \theta_{AY} \tilde{D}_{AXY,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) + \tilde{D}_{AXY}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AZ} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\ \dot{D}_{A16}(\boldsymbol{\theta}_A) &= \tilde{R}_{A,X} \left( \theta_{AY} \tilde{D}_{AXY,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \tilde{D}_{AXZ}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AZ} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\ \dot{D}_{A26}(\boldsymbol{\theta}_A) &= \tilde{R}_{A,Y} \left( \theta_{AY} \tilde{D}_{AXY,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \tilde{D}_{AXZ}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AZ} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\ \dot{D}_{A36}(\boldsymbol{\theta}_A) &= \tilde{R}_{A,Z} \left( \theta_{AY} \tilde{D}_{AXY,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \tilde{D}_{AXZ}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AZ} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\ \dot{D}_{A44}(\boldsymbol{\theta}_A) &= \tilde{R}_{A,X} \left( \theta_{AZ} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \tilde{D}_{AXY}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AX} \tilde{D}_{AXY,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\ \dot{D}_{A54}(\boldsymbol{\theta}_A) &= \tilde{R}_{A,Y} \left( \theta_{AZ} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \tilde{D}_{AXY}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AX} \tilde{D}_{AXY,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\ \dot{D}_{A64}(\boldsymbol{\theta}_A) &= \tilde{R}_{A,Z} \left( \theta_{AZ} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \tilde{D}_{AXY}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AX} \tilde{D}_{AXY,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\ \dot{D}_{A45}(\boldsymbol{\theta}_A) &= \tilde{R}_{A,X} \left( \theta_{AZ} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AX} \tilde{D}_{AXY,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\ \dot{D}_{A55}(\boldsymbol{\theta}_A) &= \tilde{R}_{A,Y} \left( \theta_{AZ} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AX} \tilde{D}_{AXY,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\ \dot{D}_{A65}(\boldsymbol{\theta}_A) &= \tilde{R}_{A,Z} \left( \theta_{AZ} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AX} \tilde{D}_{AXY,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\ \dot{D}_{A46}(\boldsymbol{\theta}_A) &= \tilde{R}_{A,X} \left( \theta_{AZ} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) + \tilde{D}_{AYZ}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AX} \tilde{D}_{AXY,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\ \dot{D}_{A56}(\boldsymbol{\theta}_A) &= \tilde{R}_{A,Y} \left( \theta_{AZ} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) + \tilde{D}_{AYZ}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AX} \tilde{D}_{AXY,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\ \dot{D}_{A66}(\boldsymbol{\theta}_A) &= \tilde{R}_{A,Z} \left( \theta_{AZ} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) + \tilde{D}_{AYZ}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AX} \tilde{D}_{AXY,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \end{aligned}$$

---

### 3.A. Dérivées première $\tilde{\mathbf{D}}$ et seconde $\ddot{\mathbf{D}}$ du gradient ponctuel

$$\begin{aligned}
\dot{D}_{A74}(\boldsymbol{\theta}_A) &= \tilde{R}_{A,X} \left( \theta_{AX} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) + \tilde{D}_{AXZ}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AY} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\
\dot{D}_{A84}(\boldsymbol{\theta}_A) &= \tilde{R}_{A,Y} \left( \theta_{AX} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) + \tilde{D}_{AXZ}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AY} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\
\dot{D}_{A94}(\boldsymbol{\theta}_A) &= \tilde{R}_{A,Z} \left( \theta_{AX} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) + \tilde{D}_{AXZ}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AY} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\
\dot{D}_{A75}(\boldsymbol{\theta}_A) &= \tilde{R}_{A,X} \left( \theta_{AX} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \tilde{D}_{AYZ}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AY} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\
\dot{D}_{A85}(\boldsymbol{\theta}_A) &= \tilde{R}_{A,Y} \left( \theta_{AX} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \tilde{D}_{AYZ}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AY} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\
\dot{D}_{A95}(\boldsymbol{\theta}_A) &= \tilde{R}_{A,Z} \left( \theta_{AX} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \tilde{D}_{AYZ}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AY} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\
\dot{D}_{A76}(\boldsymbol{\theta}_A) &= \tilde{R}_{A,X} \left( \theta_{AX} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AY} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\
\dot{D}_{A86}(\boldsymbol{\theta}_A) &= \tilde{R}_{A,Y} \left( \theta_{AX} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AY} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\
\dot{D}_{A96}(\boldsymbol{\theta}_A) &= \tilde{R}_{A,Z} \left( \theta_{AX} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AY} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right).
\end{aligned}$$

**Expression de la dérivée seconde  $\ddot{\mathbf{D}}_A$  :** les dérivées secondes de  $c_A(\boldsymbol{\theta}_A)$  et  $s_A(\boldsymbol{\theta}_A)$  sont

$$\left\{ \begin{array}{l}
c_{A,\theta_{AI}\theta_{AJ}}(\boldsymbol{\theta}_A) = \frac{\theta_{AI}\theta_{AJ}}{\|\boldsymbol{\theta}_A\|^4} \left( 1 + c_A(\boldsymbol{\theta}_A)(8 - \|\boldsymbol{\theta}_A\|^2) - 5s_A(\boldsymbol{\theta}_A) \right) \\
\quad + \frac{\delta_{IJ}}{\|\boldsymbol{\theta}_A\|^2} (s_A(\boldsymbol{\theta}_A) - 2c_A(\boldsymbol{\theta}_A)), \\
s_{A,\theta_{AI}\theta_{AJ}}(\boldsymbol{\theta}_A) = \frac{\theta_{AI}\theta_{AJ}}{\|\boldsymbol{\theta}_A\|^4} \left( 3(\|\boldsymbol{\theta}_A\|^2 c_A(\boldsymbol{\theta}_A) - 1) + s_A(\boldsymbol{\theta}_A)(3 - \|\boldsymbol{\theta}_A\|^2) \right) \\
\quad + \frac{\delta_{IJ}}{\|\boldsymbol{\theta}_A\|^2} \left( 1 - \|\boldsymbol{\theta}_A\|^2 c_A(\boldsymbol{\theta}_A) - s_A(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \quad \forall \{I, J\} \in \{X, Y, Z\},
\end{array} \right.$$

avec  $\delta_{IJ}$  le symbole de Kronecker classique. Nous pouvons alors exprimer les vingt-sept dérivées secondes intervenant dans l'expression de  $\ddot{\mathbf{D}}_A(\boldsymbol{\theta}_A)$ . On souligne le fait qu'en appliquant le théorème de Schwarz à  $\tilde{D}_{AXY}(\boldsymbol{\theta}_A)$ ,  $\tilde{D}_{AYZ}(\boldsymbol{\theta}_A)$  et  $\tilde{D}_{AXZ}(\boldsymbol{\theta}_A)$ , le nombre de dérivées nécessaire est réduit à dix-huit. On obtient alors,  $\forall \{I, J\} \in \{X, Y, Z\}$ , les termes suivants.



$$\frac{\partial^2 \tilde{D}_{AXY}}{\partial \theta_{AJ} \partial \theta_{AI}} \left\{ \begin{array}{l}
 \tilde{D}_{AXY, \theta_{AX} \theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_{A, \theta_{AX} \theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AX} n_{AY,0} - \theta_{AY} n_{AX,0}) + 2c_{A, \theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AY,0} \\
 \quad + s_{A, \theta_{AX} \theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AZ,0}, \\
 \tilde{D}_{AXY, \theta_{AX} \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_{A, \theta_{AX} \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AX} n_{AY,0} - \theta_{AY} n_{AX,0}) - c_{A, \theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AX,0} \\
 \quad + c_{A, \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AY,0} + s_{A, \theta_{AX} \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AZ,0}, \\
 \tilde{D}_{AXY, \theta_{AX} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_{A, \theta_{AX} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AX} n_{AY,0} - \theta_{AY} n_{AX,0}) + c_{A, \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AY,0} \\
 \quad + s_{A, \theta_{AX} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AZ,0}, \\
 \tilde{D}_{AXY, \theta_{AY} \theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) = \tilde{D}_{AXY, \theta_{AX} \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A), \\
 \tilde{D}_{AXY, \theta_{AY} \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_{A, \theta_{AY} \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AX} n_{AY,0} - \theta_{AY} n_{AX,0}) - 2c_{A, \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AX,0} \\
 \quad + s_{A, \theta_{AY} \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AZ,0}, \\
 \tilde{D}_{AXY, \theta_{AY} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_{A, \theta_{AY} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AX} n_{AY,0} - \theta_{AY} n_{AX,0}) - c_{A, \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AX,0} \\
 \quad + s_{A, \theta_{AY} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AZ,0}, \\
 \tilde{D}_{AXY, \theta_{AZ} \theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) = \tilde{D}_{AXY, \theta_{AX} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A), \\
 \tilde{D}_{AXY, \theta_{AZ} \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) = \tilde{D}_{AXY, \theta_{AY} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A), \\
 \tilde{D}_{AXY, \theta_{AZ} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_{A, \theta_{AZ} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AX} n_{AY,0} - \theta_{AY} n_{AX,0}) + s_{A, \theta_{AZ} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AZ,0},
 \end{array} \right.$$
  

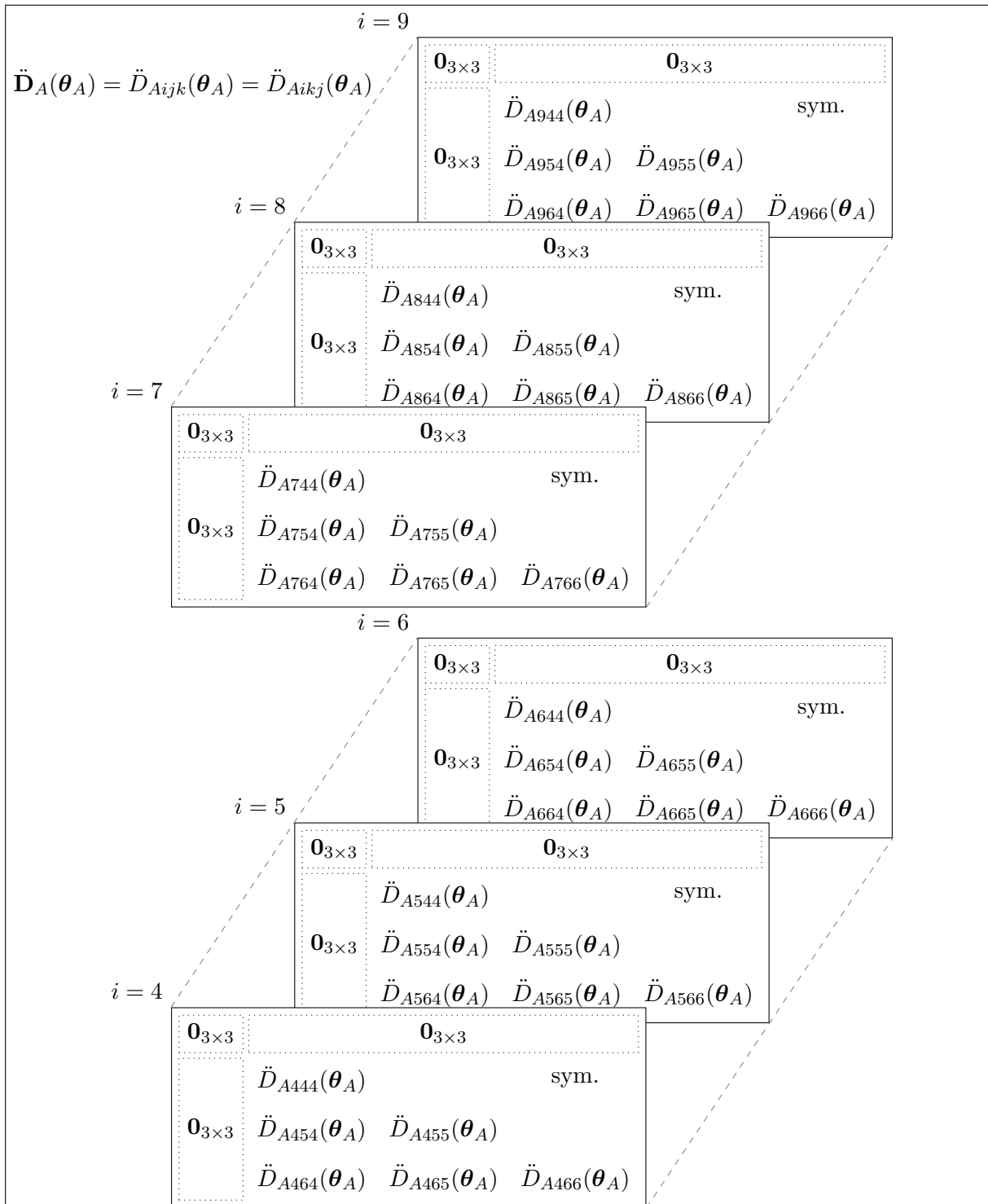
$$\frac{\partial^2 \tilde{D}_{AYZ}}{\partial \theta_{AJ} \partial \theta_{AI}} \left\{ \begin{array}{l}
 \tilde{D}_{AYZ, \theta_{AX} \theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_{A, \theta_{AX} \theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AY} n_{AZ,0} - \theta_{AZ} n_{AY,0}) + s_{A, \theta_{AX} \theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AX,0}, \\
 \tilde{D}_{AYZ, \theta_{AX} \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_{A, \theta_{AX} \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AY} n_{AZ,0} - \theta_{AZ} n_{AY,0}) + c_{A, \theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AZ,0} \\
 \quad + s_{A, \theta_{AX} \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AX,0}, \\
 \tilde{D}_{AYZ, \theta_{AX} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_{A, \theta_{AX} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AY} n_{AZ,0} - \theta_{AZ} n_{AY,0}) - c_{A, \theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AY,0} \\
 \quad + s_{A, \theta_{AX} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AX,0}, \\
 \tilde{D}_{AYZ, \theta_{AY} \theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) = \tilde{D}_{AYZ, \theta_{AX} \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A), \\
 \tilde{D}_{AYZ, \theta_{AY} \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_{A, \theta_{AY} \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AY} n_{AZ,0} - \theta_{AZ} n_{AY,0}) + 2c_{A, \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AZ,0} \\
 \quad + s_{A, \theta_{AY} \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AX,0}, \\
 \tilde{D}_{AYZ, \theta_{AY} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_{A, \theta_{AY} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AY} n_{AZ,0} - \theta_{AZ} n_{AY,0}) - c_{A, \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AY,0} \\
 \quad + c_{A, \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AZ,0} + s_{A, \theta_{AY} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AX,0}, \\
 \tilde{D}_{AYZ, \theta_{AZ} \theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) = \tilde{D}_{AYZ, \theta_{AX} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A), \\
 \tilde{D}_{AYZ, \theta_{AZ} \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) = \tilde{D}_{AYZ, \theta_{AY} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A), \\
 \tilde{D}_{AYZ, \theta_{AZ} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_{A, \theta_{AZ} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AY} n_{AZ,0} - \theta_{AZ} n_{AY,0}) - 2c_{A, \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AY,0} \\
 \quad + s_{A, \theta_{AZ} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AX,0},
 \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{D}_{AXZ}}{\partial \theta_{AJ} \partial \theta_{AI}} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{D}_{AXZ, \theta_{AX} \theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_{A, \theta_{AX} \theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AZ} n_{AX,0} - \theta_{AX} n_{AZ,0}) - 2c_{A, \theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AZ,0} \\ \quad + s_{A, \theta_{AX} \theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AY,0}, \\ \tilde{D}_{AXZ, \theta_{AX} \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_{A, \theta_{AX} \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AZ} n_{AX,0} - \theta_{AX} n_{AZ,0}) - c_{A, \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AZ,0} \\ \quad + s_{A, \theta_{AX} \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AY,0}, \\ \tilde{D}_{AXZ, \theta_{AX} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_{A, \theta_{AX} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AZ} n_{AX,0} - \theta_{AX} n_{AZ,0}) + c_{A, \theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AX,0} \\ \quad - c_{A, \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AZ,0} + s_{A, \theta_{AX} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AY,0}, \\ \tilde{D}_{AXZ, \theta_{AY} \theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) = \tilde{D}_{AXZ, \theta_{AX} \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A), \\ \tilde{D}_{AXZ, \theta_{AY} \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_{A, \theta_{AY} \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AZ} n_{AX,0} - \theta_{AX} n_{AZ,0}) + s_{A, \theta_{AY} \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AY,0} \\ \tilde{D}_{AXZ, \theta_{AY} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_{A, \theta_{AY} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AZ} n_{AX,0} - \theta_{AX} n_{AZ,0}) + c_{A, \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AX,0} \\ \quad + s_{A, \theta_{AY} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AY,0}, \\ \tilde{D}_{AXZ, \theta_{AZ} \theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) = \tilde{D}_{AXZ, \theta_{AX} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A), \\ \tilde{D}_{AXZ, \theta_{AZ} \theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) = \tilde{D}_{AXZ, \theta_{AY} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A), \\ \tilde{D}_{AXZ, \theta_{AZ} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) = c_{A, \theta_{AZ} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A)(\theta_{AZ} n_{AX,0} - \theta_{AX} n_{AZ,0}) + 2c_{A, \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AX,0} \\ \quad + s_{A, \theta_{AZ} \theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) n_{AY,0}. \end{array} \right.$$

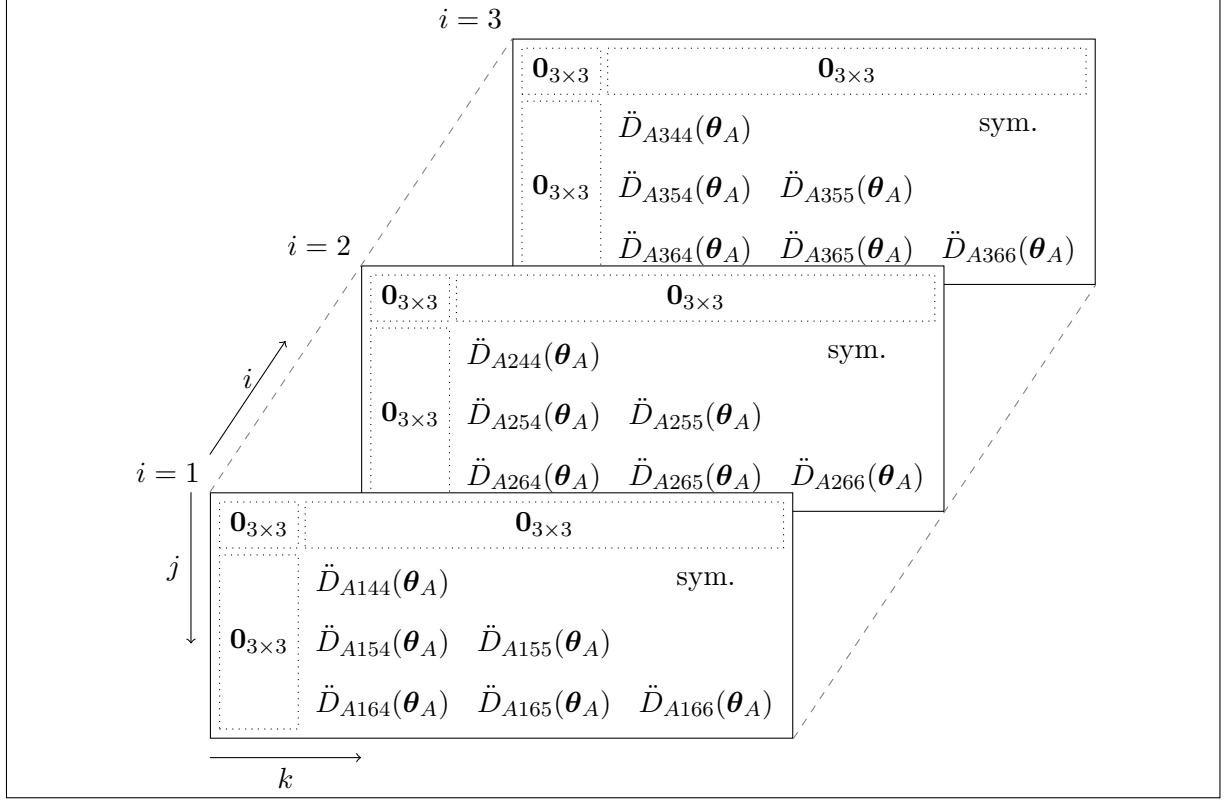
Le tenseur d'ordre trois  $\ddot{\mathbf{D}} = \partial \dot{\mathbf{D}} / \partial \mathbf{u}$  est composé des contributions de chaque point de contrôle  $A$  tel que

$$\ddot{\mathbf{D}} = [\ddot{\mathbf{D}}_1(\boldsymbol{\theta}_1), \dots, \ddot{\mathbf{D}}_A(\boldsymbol{\theta}_A), \dots, \ddot{\mathbf{D}}_{n \cdot m}(\boldsymbol{\theta}_{n \cdot m})], \quad \dim(\ddot{\mathbf{D}}_A(\boldsymbol{\theta}_A)) = (9 \times 6 \times 6).$$

Le théorème de Schwarz assure la symétrie de  $\ddot{\mathbf{D}}_A(\boldsymbol{\theta}_A)$ , par rapport aux degrés de liberté en rotation, tel que l'on puisse affirmer  $\ddot{D}_{Aijk}(\boldsymbol{\theta}_A) = \ddot{D}_{Aikj}(\boldsymbol{\theta}_A)$ . Cette symétrie engendre naturellement celle de la matrice tangente  $\mathbf{K}_{\sigma^2}$  issue de la non linéarité de la paramétrisation des déplacements. On propose alors la représentation de  $\ddot{\mathbf{D}}_A(\boldsymbol{\theta}_A)$  suivante.



### 3.A. Dérivées première $\tilde{\mathbf{D}}$ et seconde $\ddot{\mathbf{D}}$ du gradient ponctuel



Il reste alors à préciser les expressions des cinquante-quatre termes, en tenant compte de la symétrie, constituant  $\ddot{\mathbf{D}}_A(\theta_A)$ .

$$\left. \begin{aligned}
 \ddot{D}_{A144}(\theta_A) &= \tilde{R}_{A,X} \left( \theta_{AY} \tilde{D}_{AXY, \theta_{AX} \theta_{AX}}(\theta_A) - \theta_{AZ} \tilde{D}_{AXZ, \theta_{AX} \theta_{AX}}(\theta_A) \right), \\
 \ddot{D}_{A155}(\theta_A) &= \tilde{R}_{A,X} \left( \theta_{AY} \tilde{D}_{AXY, \theta_{AY} \theta_{AY}}(\theta_A) + 2\tilde{D}_{AXY, \theta_{AY}}(\theta_A) - \theta_{AZ} \tilde{D}_{AXZ, \theta_{AY} \theta_{AY}}(\theta_A) \right), \\
 \ddot{D}_{A166}(\theta_A) &= \tilde{R}_{A,X} \left( \theta_{AY} \tilde{D}_{AXY, \theta_{AZ} \theta_{AZ}}(\theta_A) - 2\tilde{D}_{AXZ, \theta_{AZ}}(\theta_A) - \theta_{AZ} \tilde{D}_{AXZ, \theta_{AZ} \theta_{AZ}}(\theta_A) \right), \\
 \ddot{D}_{A154}(\theta_A) &= \ddot{D}_{A145}(\theta_A) \\
 &= \tilde{R}_{A,X} \left( \theta_{AY} \tilde{D}_{AXY, \theta_{AY} \theta_{AX}}(\theta_A) + \tilde{D}_{AXY, \theta_{AX}}(\theta_A) - \theta_{AZ} \tilde{D}_{AXZ, \theta_{AY} \theta_{AX}}(\theta_A) \right), \\
 \ddot{D}_{A164}(\theta_A) &= \ddot{D}_{A146}(\theta_A) \\
 &= \tilde{R}_{A,X} \left( \theta_{AY} \tilde{D}_{AXY, \theta_{AZ} \theta_{AX}}(\theta_A) - \tilde{D}_{AXZ, \theta_{AX}}(\theta_A) - \theta_{AZ} \tilde{D}_{AXZ, \theta_{AZ} \theta_{AX}}(\theta_A) \right), \\
 \ddot{D}_{A165}(\theta_A) &= \ddot{D}_{A156}(\theta_A) \\
 &= \tilde{R}_{A,X} \left( \theta_{AY} \tilde{D}_{AXY, \theta_{AZ} \theta_{AY}}(\theta_A) + \tilde{D}_{AXY, \theta_{AZ}}(\theta_A) \right. \\
 &\quad \left. - \tilde{D}_{AXZ, \theta_{AY}}(\theta_A) - \theta_{AZ} \tilde{D}_{AXZ, \theta_{AZ} \theta_{AY}}(\theta_A) \right),
 \end{aligned} \right\} i = 1$$





$$\begin{cases}
 \ddot{D}_{A844}(\boldsymbol{\theta}_A) = \tilde{R}_{A,Y} \left( \theta_{AX} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AX}\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) + 2\tilde{D}_{AXZ,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AY} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AX}\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\
 \ddot{D}_{A855}(\boldsymbol{\theta}_A) = \tilde{R}_{A,Y} \left( \theta_{AX} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AY}\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) - 2\tilde{D}_{AYZ,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AY} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AY}\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\
 \ddot{D}_{A866}(\boldsymbol{\theta}_A) = \tilde{R}_{A,Y} \left( \theta_{AX} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AZ}\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AY} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AZ}\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\
 \ddot{D}_{A854}(\boldsymbol{\theta}_A) = \ddot{D}_{A845}(\boldsymbol{\theta}_A) \\
 \quad = \tilde{R}_{A,Y} \left( \theta_{AX} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AY}\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) + \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right. \\
 \quad \quad \left. - \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AY} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AY}\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\
 \ddot{D}_{A864}(\boldsymbol{\theta}_A) = \ddot{D}_{A846}(\boldsymbol{\theta}_A) \\
 \quad = \tilde{R}_{A,Y} \left( \theta_{AX} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AX}\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) + \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AY} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AX}\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\
 \ddot{D}_{A865}(\boldsymbol{\theta}_A) = \ddot{D}_{A856}(\boldsymbol{\theta}_A) \\
 \quad = \tilde{R}_{A,Y} \left( \theta_{AX} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AY}\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AY} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AY}\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\
 \ddot{D}_{A944}(\boldsymbol{\theta}_A) = \tilde{R}_{A,Z} \left( \theta_{AX} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AX}\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) + 2\tilde{D}_{AXZ,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AY} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AX}\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\
 \ddot{D}_{A955}(\boldsymbol{\theta}_A) = \tilde{R}_{A,Z} \left( \theta_{AX} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AY}\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) - 2\tilde{D}_{AYZ,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AY} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AY}\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\
 \ddot{D}_{A966}(\boldsymbol{\theta}_A) = \tilde{R}_{A,Z} \left( \theta_{AX} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AZ}\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AY} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AZ}\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\
 \ddot{D}_{A954}(\boldsymbol{\theta}_A) = \ddot{D}_{A945}(\boldsymbol{\theta}_A) \\
 \quad = \tilde{R}_{A,Z} \left( \theta_{AX} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AY}\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) + \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AY}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right. \\
 \quad \quad \left. - \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AY} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AY}\theta_{AX}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\
 \ddot{D}_{A964}(\boldsymbol{\theta}_A) = \ddot{D}_{A946}(\boldsymbol{\theta}_A) \\
 \quad = \tilde{R}_{A,Z} \left( \theta_{AX} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AX}\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) + \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AY} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AX}\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right), \\
 \ddot{D}_{A965}(\boldsymbol{\theta}_A) = \ddot{D}_{A956}(\boldsymbol{\theta}_A) \\
 \quad = \tilde{R}_{A,Z} \left( \theta_{AX} \tilde{D}_{AXZ,\theta_{AY}\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) - \theta_{AY} \tilde{D}_{AYZ,\theta_{AY}\theta_{AZ}}(\boldsymbol{\theta}_A) \right).
 \end{cases}$$

## 3.B Variante de la FLT avec une normale actualisée

### 3.B.1 Composition des rotations finies

Cette démarche est largement inspirée de celle présentée dans [Adam 2015a]. La principale difficulté vient du fait qu'en utilisant la normale en configuration actuelle, il sera nécessaire de composer des grandes rotations. Les rotations finies dans  $\mathbb{R}^3$  ne sont pas nécessairement additives ou commutatives, comme c'est le cas dans le plan ou pour des petites rotations [Crisfield 1996b, Section 16]. L'algèbre des quaternions va permettre de donner une solution simple afin de combiner ces rotations. On rappelle l'opérateur  $\mathbf{R}$  défini selon la formule de Rodrigues

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I}_3 + \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta} \times][\boldsymbol{\theta} \times] + \frac{\sin(\theta)}{\theta} [\boldsymbol{\theta} \times].$$

En utilisant les développements en série de Taylor des fonctions sinus et cosinus, on peut écrire  $\mathbf{R}$  sous une forme exponentielle équivalente

$$\mathbf{R} = \exp([\boldsymbol{\theta} \times]) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\boldsymbol{\theta} \times]^k}{k!}.$$

Avec les relations de trigonométrie classique, il est possible d'exprimer l'opérateur de rotation  $\mathbf{R}$  à partir de deux paramètres dépendants

$$\begin{aligned} r_0 &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \\ \mathbf{r} &= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{\boldsymbol{\theta}}{\|\boldsymbol{\theta}\|}, \end{aligned}$$

avec le lien  $r_0^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 1$ . Ces paramètres du quaternion unitaire  $r = (r_0, \mathbf{r})$  permettent d'écrire l'opérateur de rotation équivalent de (3.2) et (3.3) tel que

$$\mathbf{R} = \exp([\boldsymbol{\theta} \times]) = (2r_0^2 - 1)\mathbf{I}_3 + 2r_0 [\mathbf{r} \times] + 2\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}. \quad (3.37)$$

Les quaternions généralisent les nombres complexes et sont définis à partir d'un scalaire et d'un vecteur. On donne quelques propriétés liées au quaternion  $q = (q_0, \mathbf{q})$

addition	$q^1 + q^2 = (q_0^1 + q_0^2, \mathbf{q}^1 + \mathbf{q}^2),$
multiplication scalaire	$\lambda q = (\lambda q_0, \lambda \mathbf{q}),$
produit	$q^1 \circ q^2 = (q_0^1 q_0^2 - \mathbf{q}^1 \cdot \mathbf{q}^2, q_0^1 \mathbf{q}^2 + q_0^2 \mathbf{q}^1 + \mathbf{q}^1 \times \mathbf{q}^2),$
conjugué	$\bar{q} = (q_0, -\mathbf{q}),$
norme	$\ q\  = q_0^2 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q},$
inverse	$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\ q\ }.$

Un quaternion unitaire  $r$ , avec  $\|r\| = 1$ , peut toujours être écrit sous la forme

$$r = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)\mathbf{n}),$$



avec  $\mathbf{n}$  unitaire. Nous appelons  $\mathbf{x}$  un vecteur unitaire obtenu par la rotation d'un vecteur initial  $\mathbf{X}$ . On souligne le fait qu'un vecteur peut être considéré comme un quaternion de paramètre scalaire nul. Ainsi, le vecteur unitaire  $\mathbf{X}$  correspond au quaternion unitaire  $X = (0, \mathbf{X})$  et nous pouvons appliquer le produit de quaternions précédemment énoncé. Grâce aux relations de trigonométrie classique ainsi que l'identité vectorielle  $\mathbf{n} \times (\mathbf{X} \times \mathbf{n}) = \mathbf{X} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{X})\mathbf{n}$ , nous obtenons

$$r \circ \mathbf{X} \circ r^{-1} = (\cos(2\alpha)\mathbf{I}_3 + \sin(2\alpha)[\mathbf{n}\times] + (1 - 2\cos(2\alpha))\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{X}.$$

En comparant l'expression précédente à la relation (3.3), on observe que l'on a effectué une rotation d'angle  $2\alpha$  et d'axe  $\mathbf{n}$ . Finalement, pour obtenir un vecteur  $\mathbf{x}$  issu d'une rotation d'angle  $\theta$  et d'axe  $\mathbf{e}$  à partir d'un vecteur initial  $\mathbf{X}$ , on utilise le quaternion

$$r = \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{e} \right) \quad (3.38)$$

et on applique deux multiplications au sens des quaternions

$$\mathbf{x} = r \circ \mathbf{X} \circ r^{-1}.$$

Nous pouvons alors composer simplement des grandes rotations. Soit une rotation totale  $\mathbf{R}$  composée de deux rotations successives  $\mathbf{R}_1$  puis  $\mathbf{R}_2$  tel que  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1$ . Ces rotations sont paramétrées par les quaternions  $r^1$  et  $r^2$ . On appelle  $\mathbf{X}$  le vecteur initial,  $\mathbf{x}_1$  le vecteur obtenu par la rotation  $\mathbf{R}_1$  de  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{x}_2$  le vecteur obtenu par la rotation  $\mathbf{R}_2$  de  $\mathbf{x}_1$ . Alors on écrit la composition des rotations

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= r^1 \circ \mathbf{X} \circ (r^1)^{-1}, \\ \mathbf{x}_2 &= r^2 \circ \mathbf{x}_1 \circ (r^2)^{-1} \\ &= r^2 \circ (r^1 \circ \mathbf{X} \circ (r^1)^{-1}) \circ (r^2)^{-1} \\ &= (r^2 \circ r^1) \circ \mathbf{X} \circ (r^2 \circ r^1)^{-1}. \end{aligned}$$

En d'autres termes, la rotation composée  $\mathbf{R}$  est paramétrée par le quaternion  $r = r^2 \circ r^1$  avec

$$r = r^2 \circ r^1 = \left( r_0^2 r_0^1 - \mathbf{r}^2 \cdot \mathbf{r}^1, r_0^2 \mathbf{r}^1 + r_0^1 \mathbf{r}^2 + \mathbf{r}^2 \times \mathbf{r}^1 \right).$$

On voit clairement que la composition des rotations dans  $\mathbb{R}^3$  n'est pas commutative à cause du produit vectoriel  $\mathbf{r}^2 \times \mathbf{r}^1$ . La propriété de non-additivité des pseudo-vecteurs de rotation est détaillée par Crisfield [Crisfield 1996b, Section 16.11] et présentée brièvement dans la section suivante.

**Remarque 3.3.** Pour des petites rotations, si on considère une rotation composée  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1$ , on a au premier ordre

$$\mathbf{R} = \exp([\boldsymbol{\theta}\times]) = \exp([\boldsymbol{\theta}_1\times]) \exp([\boldsymbol{\theta}_2\times]) \simeq \mathbf{I}_3 + [\boldsymbol{\theta}_1\times] + [\boldsymbol{\theta}_2\times] = \exp([\boldsymbol{\theta}_1\times] + [\boldsymbol{\theta}_2\times]).$$

En outre, la composée de deux rotations infinitésimales est caractérisée par

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2, \\ [\boldsymbol{\theta}\times] &= [\boldsymbol{\theta}_1\times] + [\boldsymbol{\theta}_2\times], \end{aligned}$$

c'est à dire que l'opérateur de rotation est commutatif et le pseudo-vecteur associé est additif. Il ne s'agit donc pas d'un pseudo-vecteur comme pour les rotations finies mais bien d'un vecteur de rotation. ■

### 3.B.2 Calcul incrémental des déplacements et normales

Nous partons d'une itération  $i$  connue avec en particulier la rotation totale  $\mathbf{R}_i$ , c'est à dire sa paramétrisation par le quaternion unitaire  $r^i$ . Nous connaissons également le champ des déplacements  $(\mathbf{U}_i, \boldsymbol{\theta}_i)$  et sa variation actuelle  $(\Delta\mathbf{U}_{i+1}, \Delta\boldsymbol{\theta}_{i+1})$ . La mise à jour du champ des déplacements est instantanée avec

$$\mathbf{u}_{i+1} = (\mathbf{U}_{i+1}, \boldsymbol{\theta}_{i+1}) = (\mathbf{U}_i + \Delta\mathbf{U}_{i+1}, \boldsymbol{\theta}_i + \Delta\boldsymbol{\theta}_{i+1}).$$

On souligne le fait que les angles peuvent être simplement ajoutés mais, comme précisé dans la section précédente, les opérateurs de rotation ne possèdent pas la propriété d'additivité, c'est à dire

$$\mathbf{R}([\Delta\boldsymbol{\theta}_{i+1} \times])\mathbf{R}([\boldsymbol{\theta}_i \times]) \neq \mathbf{R}([\Delta\boldsymbol{\theta}_{i+1} \times] + [\boldsymbol{\theta}_i \times]),$$

même lorsque la variation  $\Delta\boldsymbol{\theta}_{i+1}$  est infinitésimale. Cela a notamment été montré par Crisfield [Crisfield 1996b, Section 16.11] en distinguant le pseudo-vecteur non additif  $\Delta\boldsymbol{\theta}_{i+1}$  du pseudo-vecteur additif  $\Delta\boldsymbol{\theta}_{i+1}^{\text{add}}$  défini par

$$\mathbf{R}([\Delta\boldsymbol{\theta}_{i+1} \times])\mathbf{R}([\boldsymbol{\theta}_i \times]) = \mathbf{R}([\Delta\boldsymbol{\theta}_{i+1}^{\text{add}} \times] + [\boldsymbol{\theta}_i \times]).$$

Alors, pour des petites variations incrémentales, il est possible de montrer [Crisfield 1996b, équations 16.89 et 16.90]

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_{i+1} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_i)\Delta\boldsymbol{\theta}_{i+1}^{\text{add}},$$

avec

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_i) = \left( \frac{\sin(\|\boldsymbol{\theta}_i\|)}{\|\boldsymbol{\theta}_i\|} \mathbf{I}_3 + \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(\|\boldsymbol{\theta}_i\|/2)}{\|\boldsymbol{\theta}_i\|/2} \right)^2 [\boldsymbol{\theta}_i \times] + \left( 1 - \frac{\sin(\|\boldsymbol{\theta}_i\|)}{\|\boldsymbol{\theta}_i\|} \right) \frac{\boldsymbol{\theta}_i \otimes \boldsymbol{\theta}_i}{\|\boldsymbol{\theta}_i\|^2} \right).$$

Lorsque les rotations tendent vers zéro,  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_i)$  tend vers le tenseur identité  $\mathbf{I}_3$  et nous retrouvons la propriété d'additivité énoncée dans la Remarque 3.3 pour des rotations infinitésimales. Le pseudo-vecteur additif peut être évalué en inversant  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_i)$  [Crisfield 1996b, équations 16.93 et 16.94] tel que

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_{i+1}^{\text{add}} = \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_i)\Delta\boldsymbol{\theta}_{i+1},$$

avec

$$\mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_i) = \left( \frac{\|\boldsymbol{\theta}_i\|}{2} \cot\left(\frac{\|\boldsymbol{\theta}_i\|}{2}\right) \mathbf{I}_3 - \left[ \frac{\|\boldsymbol{\theta}_i\|}{2} \times \right] + \left( 1 - \frac{\|\boldsymbol{\theta}_i\|}{2} \cot\left(\frac{\|\boldsymbol{\theta}_i\|}{2}\right) \right) \frac{\boldsymbol{\theta}_i \otimes \boldsymbol{\theta}_i}{\|\boldsymbol{\theta}_i\|^2} \right).$$

Afin d'éviter l'évaluation fastidieuse de  $\mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_i)$  à chaque itération pour calculer la variation incrémentale additive  $\Delta\boldsymbol{\theta}_{i+1}^{\text{add}}$ , nous utiliserons les quaternions pour composer les grandes rotations dans  $\mathbb{R}^3$ . Dans ce cas, pour actualiser les rotations finies  $\boldsymbol{\theta}_i$  grâce aux variations  $\Delta\boldsymbol{\theta}_{i+1}$ , on évalue le quaternion  $\Delta r^{i+1}$  qui paramètre la rotation itérative

$$\Delta r^{i+1} = (\Delta r_0^{i+1}, \Delta \mathbf{r}^{i+1}) = \left( \cos\left(\frac{\|\Delta\boldsymbol{\theta}_{i+1}\|}{2}\right), \sin\left(\frac{\|\Delta\boldsymbol{\theta}_{i+1}\|}{2}\right) \frac{\Delta\boldsymbol{\theta}_{i+1}}{\|\Delta\boldsymbol{\theta}_{i+1}\|} \right). \quad (3.39)$$

La normale peut être actualisée simplement, en utilisant les relations (3.37) et (3.39), grâce à l'expression

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n}^{i+1} &= \mathbf{R}([\Delta\boldsymbol{\theta}_{i+1}\times]) \mathbf{R}([\boldsymbol{\theta}_i\times]) \mathbf{n}^0 \\
 &= \mathbf{R}([\Delta\boldsymbol{\theta}_{i+1}\times]) \mathbf{n}^i \\
 &= \left( (2(\Delta r_0^{i+1})^2 - 1) \mathbf{I}_3 + 2\Delta r_0^{i+1}[\Delta\mathbf{r}^{i+1}\times] + 2\Delta\mathbf{r}^{i+1} \otimes \Delta\mathbf{r}^{i+1} \right) \mathbf{n}^i \\
 &= \left( 2(\Delta r_0^{i+1})^2 - 1 \right) \mathbf{n}^i + 2\Delta r_0^{i+1} \Delta\mathbf{r}^{i+1} \times \mathbf{n}^i + 2(\Delta\mathbf{r}^{i+1} \cdot \mathbf{n}^i) \Delta\mathbf{r}^{i+1}. \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

**Remarque 3.4.** L'algèbre des quaternions permet de donner une écriture compacte, efficace et numériquement stable des rotations quelconques dans l'espace. De plus, en utilisant une paramétrisation axio-angulaire  $(\mathbf{e}, \theta)$ , on évite d'une part le problème d'alignement singulier (ou blocage de cardan) qui est susceptible d'apparaître en utilisant les angles d'Euler, qui permettent d'effectuer une rotation globale à partir de plusieurs rotations successives, mais aussi et surtout l'utilisation d'efforts intérieurs approchés, lorsqu'on utilise une FLT, au sens où ils sont dépendants de la séquence des rotations choisie. L'Annexe 3.C permet de préciser ces affirmations. ■

### 3.B.3 Application de la méthode de Newton-Raphson

Afin de dissocier cette variante de la méthode FLT présentée dans le corps du chapitre, on note  $\mathbf{D}_q = \mathbf{D}(\mathbf{n}_A)$  le gradient des déplacements ponctuels dépendant de la normale actualisée par les quaternions (naturellement cette normale dépend toujours du pseudo-vecteur des rotations  $\boldsymbol{\theta}_A$ ). L'équation (3.8) donne les déformations virtuelles

$$\delta\mathbf{E} = \left( \mathbf{H} + \mathbf{D}_q^T \mathbf{A} \right) \delta\mathbf{D}_q.$$

La variation virtuelle du gradient des déplacements en fonction de la normale actuelle s'écrit

$$\begin{aligned}
 \delta\mathbf{D}_q &= \sum_A \mathbf{R}_{A,\mathbf{x}} \otimes \delta\mathbf{U}_A + \tilde{\mathbf{R}}_{A,\mathbf{x}} \otimes [\delta(\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_A) - \mathbf{I}_3) \mathbf{n}_{A,0}], \\
 &= \sum_A \mathbf{R}_{A,\mathbf{x}} \otimes \delta\mathbf{U}_A + \tilde{\mathbf{R}}_{A,\mathbf{x}} \otimes [\delta\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_A) \mathbf{n}_{A,0}], \\
 &= \sum_A \mathbf{R}_{A,\mathbf{x}} \otimes \delta\mathbf{U}_A + \tilde{\mathbf{R}}_{A,\mathbf{x}} \otimes [\delta\boldsymbol{\theta}_A \times \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_A) \mathbf{n}_{A,0}], \\
 &= \sum_A \mathbf{R}_{A,\mathbf{x}} \otimes \delta\mathbf{U}_A + \tilde{\mathbf{R}}_{A,\mathbf{x}} \otimes [\delta\boldsymbol{\theta}_A \times \mathbf{n}_A(\boldsymbol{\theta}_A)], \\
 &= \sum_A \dot{\mathbf{D}}_{q,A}(\mathbf{n}_A) \delta\mathbf{u}_A.
 \end{aligned}$$

Il s'agit d'une relation équivalente à (3.9) mais écrite explicitement selon la normale actualisée. L'expression de  $\dot{\mathbf{D}}_{q,A}(\mathbf{n}_A)$  est plus simple que celle de  $\dot{\mathbf{D}}_A(\boldsymbol{\theta}_A)$  détaillée en Annexe 3.A et également moins coûteuse d'un point de vue numérique puisqu'un nombre important de termes

sont nuls tel que

$$\dot{\mathbf{D}}_{q,A}(\mathbf{n}_A) = \begin{bmatrix} R_{A,X} & 0 & 0 & 0 & \tilde{R}_{A,X}n_{AZ} & -\tilde{R}_{A,X}n_{AY} \\ R_{A,Y} & 0 & 0 & 0 & \tilde{R}_{A,Y}n_{AZ} & -\tilde{R}_{A,Y}n_{AY} \\ R_{A,Z} & 0 & 0 & 0 & \tilde{R}_{A,Z}n_{AZ} & -\tilde{R}_{A,Z}n_{AY} \\ 0 & R_{A,X} & 0 & -\tilde{R}_{A,X}n_{AZ} & 0 & \tilde{R}_{A,X}n_{AX} \\ 0 & R_{A,Y} & 0 & -\tilde{R}_{A,Y}n_{AZ} & 0 & \tilde{R}_{A,Y}n_{AX} \\ 0 & R_{A,Z} & 0 & -\tilde{R}_{A,Z}n_{AZ} & 0 & \tilde{R}_{A,Z}n_{AX} \\ 0 & 0 & R_{A,X} & \tilde{R}_{A,X}n_{AY} & -\tilde{R}_{A,X}n_{AX} & 0 \\ 0 & 0 & R_{A,Y} & \tilde{R}_{A,Y}n_{AY} & -\tilde{R}_{A,Y}n_{AX} & 0 \\ 0 & 0 & R_{A,Z} & \tilde{R}_{A,Z}n_{AY} & -\tilde{R}_{A,Z}n_{AX} & 0 \end{bmatrix}.$$

On remarque que  $\dot{\mathbf{D}}_{q,A}(\mathbf{n}_A)$  peut être directement obtenu en limitant  $\dot{\mathbf{D}}_A(\boldsymbol{\theta}_A)$  au premier ordre tout en prenant la normale actualisée. Les déformations virtuelles sont alors notées

$$\delta \mathbf{E} = \left( \mathbf{H} + \mathbf{D}_q^T \mathbf{A} \right) \dot{\mathbf{D}}_q \delta \mathbf{u} = \mathbf{B}_{\text{nlq}}(\mathbf{u}) \delta \mathbf{u}.$$

Les efforts intérieurs étant défini, nous obtenons après application du schéma de Newton-Raphson l'expression

$$\mathbf{K}_t \Delta \mathbf{u} \simeq \left( \underbrace{\int_{V_0} \Delta \mathbf{B}_{\text{nlq}}^T(\mathbf{u}) \mathbf{S} \, dV_0}_{\text{partie géométrique}} + \underbrace{\int_{V_0} \mathbf{B}_{\text{nlq}}^T(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{S} \, dV_0}_{\text{partie matérielle}} \right).$$

Afin de simplifier le développement, nous allons émettre l'hypothèse que les variations incrémentales des rotations sont infinitésimales. Il s'agit d'une hypothèse particulièrement fréquente pour les coques [Bathe 1980, Stander 1989, Crisfield 1996a, Section 8.2] et notamment appliquée dans des logiciels éléments finis tel que Code\_Aster [Trinh 2009, Chapitre 3].

**Hypothèse 3.5** (Variation incrémentale des rotations infinitésimale). Pour la variante de la FLT utilisant une normale actualisée grâce à l'algèbre des quaternions, nous supposons que la variation incrémentale des rotations est infinitésimale. En ce sens, la variation incrémentale du gradient ponctuel des déplacements vaut

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{D}_q &= \sum_A \mathbf{R}_{A,\mathbf{x}} \otimes \Delta \mathbf{U}_A + \tilde{\mathbf{R}}_{A,\mathbf{x}} \otimes [\Delta (\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_A) - \mathbf{I}_3) \mathbf{n}_{A,0}], \\ &= \sum_A \mathbf{R}_{A,\mathbf{x}} \otimes \Delta \mathbf{U}_A + \tilde{\mathbf{R}}_{A,\mathbf{x}} \otimes [\Delta \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_A) \mathbf{n}_{A,0}], \\ &= \sum_A \mathbf{R}_{A,\mathbf{x}} \otimes \Delta \mathbf{U}_A + \tilde{\mathbf{R}}_{A,\mathbf{x}} \otimes [\Delta \boldsymbol{\theta}_A \times \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_A) \mathbf{n}_{A,0}], \\ &= \sum_A \mathbf{R}_{A,\mathbf{x}} \otimes \Delta \mathbf{U}_A + \tilde{\mathbf{R}}_{A,\mathbf{x}} \otimes [\Delta \boldsymbol{\theta}_A \times \mathbf{n}_A(\boldsymbol{\theta}_A)], \\ &= \sum_A \dot{\mathbf{D}}_{q,A}(\mathbf{n}_A) \Delta \mathbf{u}_A. \end{aligned}$$

Ainsi, l'expression de  $\Delta \mathbf{D}_q$  est semblable à celle de  $\delta \mathbf{D}_q$ . ■

Après application de cette hypothèse, on obtient la variation incrémentale du tenseur des déformations

$$\Delta \mathbf{E} = \left( \mathbf{H} + \mathbf{D}_q^T \mathbf{A} \right) \dot{\mathbf{D}}_q \Delta \mathbf{u} = \mathbf{B}_{\text{nl}q}(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{u},$$

et par conséquent la partie matérielle de la matrice de raideur tangente

$$\mathbf{K}_{t1q} = \int_{V_0} \mathbf{B}_{\text{nl}q}^T(\mathbf{u}) \mathbf{C}_0 \mathbf{B}_{\text{nl}q}(\mathbf{u}) dV_0.$$

Concernant la partie géométrique, on obtient le terme  $\Delta \mathbf{B}_{\text{nl}q}$  de manière identique à l'approche utilisant une normale initiale tel que

$$\Delta \mathbf{B}_{\text{nl}q}(\mathbf{u}) = \underbrace{\Delta \mathbf{D}_q^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{D}}_q}_{\text{classique}} + \underbrace{(\mathbf{H} + \mathbf{D}_q^T \mathbf{A}) \Delta \dot{\mathbf{D}}_q}_{\text{non-linéarité de la paramétrisation des déplacements}}.$$

Le développement de la partie géométrique classique est identique à la version de la FLT utilisant la normale non déformée. Cette dernière a pour expression

$$\mathbf{K}_{\sigma 1q} = \int_{V_0} \dot{\mathbf{D}}_q^T \hat{\mathbf{S}} \dot{\mathbf{D}}_q dV_0.$$

La seconde partie géométrique  $\mathbf{K}_{\sigma 2q}$  peut être simplement négligée dans ce cas. En effet, sous l'hypothèse des variations incrémentales infinitésimales, nous avons

$$\begin{aligned} \Delta(\delta \mathbf{D}_q) &= \sum_A \tilde{\mathbf{R}}_{A,\mathbf{x}} \otimes [\delta \boldsymbol{\theta}_A \times \Delta \mathbf{n}_A(\boldsymbol{\theta}_A)], \\ &= \sum_A \tilde{\mathbf{R}}_{A,\mathbf{x}} \otimes [\delta \boldsymbol{\theta}_A \times \Delta \boldsymbol{\theta}_A \times \Delta \mathbf{n}_A(\boldsymbol{\theta}_A)], \\ &= \sum_A \ddot{\mathbf{D}}_{q,A}(\mathbf{n}_A) \Delta \mathbf{u}_A, \\ &= \sum_A \Delta \dot{\mathbf{D}}_{q,A}(\mathbf{n}_A). \end{aligned}$$

Sachant que les variations virtuelles et incrémentales sont infinitésimales, nous pouvons dans ce cas simplement négligé le terme du second ordre  $\mathbf{K}_{\sigma 2q}$ .

En appliquant le schéma de Newton-Raphson, sous l'hypothèse des variations incrémentales infinitésimales, nous développons  $\Delta(\delta W_{\text{int}q}) = \delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{F}_{\text{int}q}(\mathbf{u})$  par

$$\Delta(\delta W_{\text{int}q}) \simeq \delta \mathbf{u}^T \underbrace{(\mathbf{K}_{t1q} + \mathbf{K}_{\sigma 1q})}_{\mathbf{K}_{tq}} \Delta \mathbf{u} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{K}_{t1q} = \int_{V_0} \mathbf{B}_{\text{nl}q}^T(\mathbf{u}) \mathbf{C}_0 \mathbf{B}_{\text{nl}q}(\mathbf{u}) dV_0, \\ \mathbf{K}_{\sigma 1q} = \int_{V_0} \dot{\mathbf{D}}_q^T \hat{\mathbf{S}} \dot{\mathbf{D}}_q dV_0. \end{cases}$$

Cette variante de la FLT utilisant la normale actualisée est plus simple d'implémentation mais également plus légère d'un point de vue numérique puisqu'un grand nombre de termes sont nuls dans la matrice de raideur tangente. Il s'agit donc d'une version moins précise, notamment parce qu'elle exige des variations incrémentales infinitésimales, mais à portée industrielle pertinente au sens où son implémentation dans des codes éléments finis existants est simplifiée.

### 3.C Angles d'Euler pour la paramétrisation des rotations

Au contraire d'une paramétrisation axio-angulaire, les angles d'Euler sont fréquemment utilisés pour les rotations de normale concernant des modèles de plaque et coque non linéaires [Bathe 1980, Surana 1983, Stander 1989, Crisfield 1996a]. Son écriture est moins compacte et peut présenter certains défauts tel que l'alignement singulier (ou blocage de cardan) mais aussi et surtout l'utilisation d'un vecteur des efforts intérieurs approché, pour une FLT, au sens où il est dépendant de la séquence des rotations d'Euler choisie. Néanmoins, cette méthode permet de montrer explicitement l'absence de commutativité des grandes rotations dans l'espace. Dans cette annexe, nous nous intéresserons également à la proposition originale de Surana [Surana 1983] qui offre une alternative afin d'obtenir une meilleure convergence de la méthode de Newton-Raphson dans le cas où les rotations ne sont plus nécessairement infinitésimales. La matrice de rigidité pourra alors être directement écrite en fonction du choix de la rotation incrémentale composée par les rotations successives d'Euler. L'obtention de  $\mathbf{K}_t$  étant semblable à celle issue d'une paramétrisation axio-angulaire, nous renvoyons dans le cas d'une paramétrisation par les angles d'Euler à Surana [Surana 1983] ou Crisfield [Crisfield 1996a, Section 8.2.1].

On commence par rappeler le vecteur déplacement (3.1), d'un point  $q$  quelconque de la coque, avec une normale approchée défini grâce aux abscisses de Greville

$$\mathbf{u}_q(\boldsymbol{\xi}_q) = \sum_{A=1}^{n \cdot m} R_A(\boldsymbol{\xi}_p) \left( \mathbf{U}_A + \frac{t}{2} \zeta(\mathbf{n}_A(\boldsymbol{\theta}_A) - \mathbf{n}_{A,0}) \right) = \sum_{A=1}^{n \cdot m} R_A(\boldsymbol{\xi}_p) \left( \mathbf{U}_A + \frac{t}{2} \zeta(\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_A) - \mathbf{I}_3) \mathbf{n}_{A,0} \right).$$

Nous utiliserons désormais les angles d'Euler à la place des paramètres axio-angulaire. Pour cela, on définit d'abord l'espace local orthonormé associé à l'élément coque en configuration initial ( $\mathbf{T}_{1A}, \mathbf{T}_{2A}, \mathbf{T}_{3A} \equiv \mathbf{n}_{A,0}$ ) et en configuration finale ( $\mathbf{t}_{1A}, \mathbf{t}_{2A}, \mathbf{t}_{3A} \equiv \mathbf{n}_A$ ). Afin de ne pas confondre les angles d'Euler avec les composantes du pseudo-vecteur des rotations  $\boldsymbol{\theta}_A$  exprimées dans le repère cartésien global, on notera respectivement  $\alpha_A$  et  $\beta_A$  les rotations autour de  $\mathbf{T}_{2A}$  et  $\mathbf{T}_{1A}$ . On rappelle également que l'indice  $A$  fait référence à l'abscisse de Greville du point de contrôle correspondant. La représentation de l'espace local ainsi que des paramètres d'Euler est donnée sur la Figure 3.C.1.

Le déplacement peut alors s'écrire en fonction de  $\alpha_A$  et  $\beta_A$  tel que

$$\mathbf{u}_q(\boldsymbol{\xi}_q) = \sum_{A=1}^{n \cdot m} R_A(\boldsymbol{\xi}_p) \left( \mathbf{U}_A + \frac{t}{2} \zeta \underbrace{(\mathbf{n}_A(\alpha_A, \beta_A) - \mathbf{n}_{A,0})}_{\mathbf{F}_A(\alpha_A, \beta_A)} \right) = \sum_{A=1}^{n \cdot m} R_A(\boldsymbol{\xi}_p) \left( \mathbf{U}_A + \frac{t}{2} \zeta \mathbf{F}_A(\alpha_A, \beta_A) \right).$$

L'avantage d'une telle écriture est de pouvoir écrire la matrice de rigidité tangente directement en fonction du choix de  $\mathbf{F}_A(\alpha_A, \beta_A)$ , comme proposé par Surana [Surana 1983]. Il s'agit bien de choisir  $\mathbf{F}_A(\alpha_A, \beta_A)$  car, comme précédemment énoncé, les rotations ne sont pas commutatives dans l'espace. Avec la convention choisie pour les angles d'Euler en Figure 3.C.1, les matrices

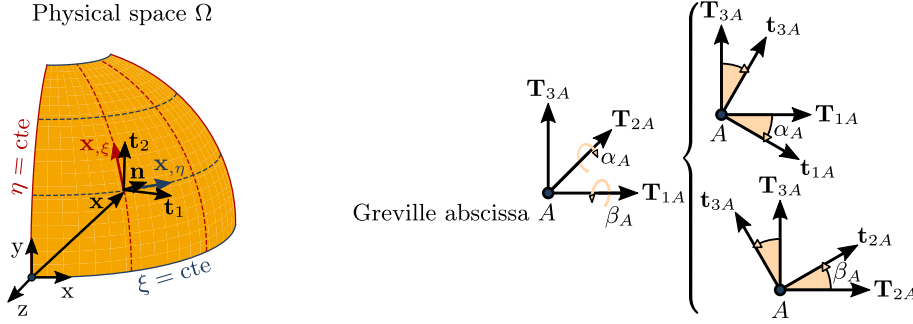


FIGURE 3.C.1 – Paramétrisation de la rotation par les angles d'Euler. Gauche : espace local orthonormé de l'élément coque. Droite : angles d'Euler dans le repère local.

de rotations dans l'espace local orthonormé s'écrivent

$$\mathbf{R}_{t_{2A}}(\alpha_A) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_A) & 0 & -\sin(\alpha_A) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha_A) & 0 & \cos(\alpha_A) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_{t_{1A}}(\beta_A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta_A) & \sin(\beta_A) \\ 0 & -\sin(\beta_A) & \cos(\beta_A) \end{bmatrix}.$$

**Premier cas :** la séquence de rotations est  $\alpha_A \rightarrow \beta_A$ , c'est à dire  $\mathbf{R}_{\text{tot}}^1 = \mathbf{R}_{t_{1A}}(\beta_A)\mathbf{R}_{t_{2A}}(\alpha_A)$ . Dans ce cas on obtient l'expression

$$\mathbf{F}_A^1(\alpha_A, \beta_A) = \sin(\alpha_A) \cos(\beta_A) \mathbf{T}_{1A} - \sin(\beta_A) \mathbf{T}_{2A} + (\cos(\alpha_A) \cos(\beta_A) - 1) \mathbf{T}_{3A}. \quad (3.41)$$

**Deuxième cas :** la séquence de rotations est  $\beta_A \rightarrow \alpha_A$ , c'est à dire  $\mathbf{R}_{\text{tot}}^2 = \mathbf{R}_{t_{2A}}(\alpha_A)\mathbf{R}_{t_{1A}}(\beta_A)$ . Dans ce cas on obtient l'expression

$$\mathbf{F}_A^2(\alpha_A, \beta_A) = \sin(\alpha_A) \mathbf{T}_{1A} - \cos(\alpha_A) \sin(\beta_A) \mathbf{T}_{2A} + (\cos(\alpha_A) \cos(\beta_A) - 1) \mathbf{T}_{3A}. \quad (3.42)$$

**Troisième cas :** Surana [Surana 1983] propose une moyenne des deux séquences de rotation précédentes avec  $\mathbf{R}_{\text{tot}}^3 = \frac{1}{2} (\mathbf{R}_{\text{tot}}^1 + \mathbf{R}_{\text{tot}}^2)$  tel que

$$\mathbf{F}_A^3(\alpha_A, \beta_A) = \frac{1}{2} \left( \mathbf{F}_A^1(\alpha_A, \beta_A) + \mathbf{F}_A^2(\alpha_A, \beta_A) \right). \quad (3.43)$$

On peut remarquer que dans le cas de rotations infinitésimales avec  $\sin(\alpha_A) \simeq \alpha_A$ ,  $\sin(\beta_A) \simeq \beta_A$ ,  $\cos(\alpha_A) \simeq 1$  et  $\cos(\beta_A) \simeq 1$  on obtient l'expression utilisée par Bathe et al. [Bathe 1980]

$$\mathbf{F}_A^1(\alpha_A, \beta_A) = \mathbf{F}_A^2(\alpha_A, \beta_A) = \mathbf{F}_A^3(\alpha_A, \beta_A) = \mathbf{F}_A(\alpha_A, \beta_A) = \alpha_A \mathbf{T}_{1A} - \beta_A \mathbf{T}_{2A}.$$

Les dérivées des trois possibilités de rotation précédentes par rapport aux paramètres d'Euler

### 3.C. Angles d'Euler pour la paramétrisation des rotations

---

sont

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{F}_A^1}{\partial \alpha_A} = \cos(\alpha_A) \cos(\beta_A) \mathbf{T}_{1A} - \sin(\alpha_A) \cos(\beta_A) \mathbf{T}_{3A}, \\ \frac{\partial \mathbf{F}_A^1}{\partial \beta_A} = -\sin(\alpha_A) \sin(\beta_A) \mathbf{T}_{1A} - \cos(\beta_A) \mathbf{T}_{2A} - \cos(\alpha_A) \sin(\beta_A) \mathbf{T}_{3A}, \end{cases} \quad (3.44)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{F}_A^2}{\partial \alpha_A} = \cos(\alpha_A) \mathbf{T}_{1A} + \sin(\alpha_A) \sin(\beta_A) \mathbf{T}_{2A} - \sin(\alpha_A) \cos(\beta_A) \mathbf{T}_{3A}, \\ \frac{\partial \mathbf{F}_A^2}{\partial \beta_A} = -\cos(\alpha_A) \cos(\beta_A) \mathbf{T}_{2A} - \cos(\alpha_A) \sin(\beta_A) \mathbf{T}_{3A}, \end{cases} \quad (3.45)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{F}_A^3}{\partial \alpha_A} = \frac{1}{2} (\cos(\alpha_A) \cos(\beta_A) + \cos(\alpha_A)) \mathbf{T}_{1A} + \frac{1}{2} \sin(\alpha_A) \sin(\beta_A) \mathbf{T}_{2A} - \sin(\alpha_A) \cos(\beta_A) \mathbf{T}_{3A}, \\ \frac{\partial \mathbf{F}_A^3}{\partial \beta_A} = -\frac{1}{2} \sin(\alpha_A) \sin(\beta_A) \mathbf{T}_{1A} - \frac{1}{2} (\cos(\beta_A) + \cos(\alpha_A) \cos(\beta_A)) \mathbf{T}_{2A} - \cos(\alpha_A) \sin(\beta_A) \mathbf{T}_{3A}. \end{cases} \quad (3.46)$$

Afin de mettre en évidence le domaine de validité des trois propositions précédentes, on distingue quatre possibilités en fonction des valeurs de  $\alpha_A$  et  $\beta_A$ .

**Possibilité 1 :**  $\mathbf{F}_A$  ne dépend que de  $\alpha_A$  avec en particulier  $\beta_A = 0$ . Alors, pour  $\alpha_A \neq 0$  et  $\beta_A = 0$ ,  $\mathbf{F}_A$  doit satisfaire les relations

$$\mathbf{F}_A = \mathbf{F}_A(\alpha_A), \quad \mathbf{F}_A \neq \mathbf{F}_A(\beta_A) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{F}_A}{\partial \beta_A} = \mathbf{0} \text{ ou } \mathbf{cte}.$$

Pour la première proposition, on injecte  $\beta_A = 0$  dans les relations (3.41) et (3.44) pour obtenir

$$\begin{cases} \mathbf{F}_A^1 = \sin(\alpha_A) \mathbf{T}_{1A} + (\cos(\alpha_A) - 1) \mathbf{T}_{3A}, \\ \frac{\partial \mathbf{F}_A^1}{\partial \alpha_A} = \cos(\alpha_A) \mathbf{T}_{1A} - \sin(\alpha_A) \mathbf{T}_{3A}, \\ \frac{\partial \mathbf{F}_A^1}{\partial \beta_A} = -\mathbf{T}_{2A} = \mathbf{cte}. \end{cases}$$

De même pour la seconde proposition en injectant  $\beta_A = 0$  dans (3.42) et (3.45) tel que

$$\begin{cases} \mathbf{F}_A^2 = \sin(\alpha_A) \mathbf{T}_{1A} + (\cos(\alpha_A) - 1) \mathbf{T}_{3A}, \\ \frac{\partial \mathbf{F}_A^2}{\partial \alpha_A} = \cos(\alpha_A) \mathbf{T}_{1A} - \sin(\alpha_A) \mathbf{T}_{3A}, \\ \frac{\partial \mathbf{F}_A^2}{\partial \beta_A} = -\cos(\alpha_A) \mathbf{T}_{2A} \neq \mathbf{0} \text{ ou } \mathbf{cte}. \end{cases}$$

Il est alors clair que la condition  $\partial \mathbf{F}_A / \partial \beta_A = \mathbf{0}$  ou  $\mathbf{cte}$  n'est pas respectée par la fonction  $\mathbf{F}_A^2$ . Par conséquent, pour un déplacement généré par les rotations  $\alpha_A \neq 0$  et  $\beta_A = 0$ , seul le choix



$\mathbf{F}_A^1$  décrit par (3.41) est correct.

**Possibilité 2 :** on considère désormais le cas  $\alpha_A = 0$  et  $\beta_A \neq 0$  tel que  $\mathbf{F}_A$  doit satisfaire les relations

$$\mathbf{F}_A = \mathbf{F}_A(\beta_A), \quad \mathbf{F}_A \neq \mathbf{F}_A(\alpha_A) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{F}_A}{\partial \alpha_A} = \mathbf{0} \text{ ou cte.}$$

Avec les expressions (3.41) et (3.44) sous la condition  $\alpha_A = 0$ , on obtient pour la première proposition

$$\begin{cases} \mathbf{F}_A^1 = -\sin(\beta_A)\mathbf{T}_{2A} + (\cos(\beta_A) - 1)\mathbf{T}_{3A}, \\ \frac{\partial \mathbf{F}_A^1}{\partial \alpha_A} = \cos(\beta_A)\mathbf{T}_{1A} \neq \mathbf{0} \text{ ou cte,} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_A^1}{\partial \beta_A} = -\cos(\beta_A)\mathbf{T}_{2A} - \sin(\beta_A)\mathbf{T}_{3A}. \end{cases}$$

Pour le second choix on injecte également  $\alpha_A = 0$  dans (3.42) et (3.45) afin d'obtenir

$$\begin{cases} \mathbf{F}_A^2 = -\sin(\beta_A)\mathbf{T}_{2A} + (\cos(\beta_A) - 1)\mathbf{T}_{3A}, \\ \frac{\partial \mathbf{F}_A^2}{\partial \alpha_A} = \mathbf{T}_{1A} = \text{cte,} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_A^2}{\partial \beta_A} = -\cos(\beta_A)\mathbf{T}_{2A} - \sin(\beta_A)\mathbf{T}_{3A}. \end{cases}$$

Naturellement, dans le cas où  $\alpha_A = 0$  et  $\beta_A \neq 0$ , seul  $\mathbf{F}_A^2$  décrit par (3.42) est correct car la condition  $\partial \mathbf{F}_A / \partial \alpha_A = \mathbf{0}$  ou cte n'est pas respectée par la fonction  $\mathbf{F}_A^1$ .

**Possibilité 3 :** dans le cas où  $\alpha_A = 0$  et  $\beta_A = 0$ , c'est à dire lorsque  $\mathbf{F}_A$  ne dépend ni de  $\alpha_A$  ni de  $\beta_A$ , les trois choix (3.41), (3.42) et (3.43) sont corrects.

**Possibilité 4 (cas général) :** enfin, pour  $\alpha_A \neq 0$  et  $\beta_A \neq 0$ , il apparaît alors évident qu'aucun des deux choix  $\mathbf{F}_A^1$  ou  $\mathbf{F}_A^2$  n'est correct pour des grandes rotations. La première possibilité serait de faire l'hypothèse des rotations infinitésimales déjà discutée dans cette section. Le second choix, émis par Surana [Surana 1983], est d'utiliser  $\mathbf{F}_A^3$  décrit en (3.43). Cette possibilité a notamment été validée et comparée à  $\mathbf{F}_A^1$  et  $\mathbf{F}_A^2$  sur plusieurs exemples numériques en montrant des résultats moyennés, c'est à dire à mi-chemin entre un résultat complètement erroné et un résultat correct issu de  $\mathbf{F}_A^1$  ou  $\mathbf{F}_A^2$  en fonction du problème considéré. Une interprétation physique, également apportée par [Surana 1983], consiste à considérer l'ensemble des points accessibles par les rotations  $\alpha_A$  et  $\beta_A$  dans l'espace  $(\mathbf{T}_{1A}, \mathbf{T}_{2A}, \mathbf{T}_{3A} \equiv \mathbf{n}_{A,0})$ , c'est à dire la sphère unité. Si  $\mathbf{F}_A^1$  et  $\mathbf{F}_A^2$  engendrent un déplacement identique (par exemple en rotations infinitésimales), ils représentent deux chemins possibles sur cette sphère unité afin d'arriver au même point. Le choix  $\mathbf{F}_A^3$  peut alors être vu comme un chemin moyen entre les deux chemins précédents.

---

### 3.C. Angles d'Euler pour la paramétrisation des rotations

---

On soulignera le fait que, même si le choix  $\mathbf{F}_A^3$  de (3.43) permet de considérer de plus grandes rotations indépendamment du problème envisagé (c'est à dire la convergence du schéma de Newton-Raphson), la formulation n'en reste pas moins inconsistante, pour une FLT, au sens où la rotation totale reste approchée à cause du choix de la séquence des rotations. Cette méthode n'a pas été envisagée pour cette raison mais également car le problème doit être entièrement ré-écrit pour cinq degrés de liberté par point de contrôle avec  $\mathbf{U}_A = [U_{AX} \ U_{AY} \ U_{AZ} \ \alpha_A \ \beta_A]^T$ , voir [Crisfield 1996a, Bathe 1980, Surana 1983] pour plus de détails.



# Contact pour des coques épaisses

---

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>139</b>
<b>4.2</b>	<b>Cinématique du contact</b>	<b>142</b>
4.2.1	Géométrie	142
4.2.2	Appariement et repères locaux	144
4.2.3	Distance normale de contact	146
<b>4.3</b>	<b>Contact unilatéral sans frottement en quasi-statique</b>	<b>148</b>
4.3.1	Loi de Hertz-Signorini-Moreau	148
4.3.2	Hypothèse quasi-statique	149
4.3.3	Travail virtuel de contact pour des coques épaisses multipatch	149
4.3.4	Méthode primale pour l'application des conditions de contact	151
4.3.5	Méthode duale pour l'application des conditions de contact	152
4.3.6	Méthode primale-duale pour l'application des conditions de contact	153
4.3.7	Formulations faibles du contact multipatch en grandes transformations	155
<b>4.4</b>	<b>Discrétisation des intégrales de contact</b>	<b>157</b>
4.4.1	Points de collocation pour la discrétisation de la surface de contact	157
4.4.2	Post-traitement des efforts de contact	158
<b>4.5</b>	<b>Aspects numériques pour le problème non linéaire</b>	<b>161</b>
4.5.1	Méthode de type point-fixe pour la non-linéarité d'appariement	161
4.5.2	Méthode des statuts traitant la non-linéarité de contact	162
4.5.3	Écritures matricielles du contact multipatch en grandes transformations	163
<b>4.6</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>167</b>
4.6.1	Contact hertzien en 2D	167
4.6.2	Contact cylindre-plan en 3D	176
4.6.3	Contact cylindre-plan en 3D soumis à des grandes transformations	179
<b>4.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>183</b>

---

## 4.1 Introduction

Les problèmes d'interface sont généralement sensibles aux erreurs liées à la discrétisation spatiale de la géométrie. Les méthodes de couplage multipatch qui ont été présentées n'y étaient que partiellement confrontées car l'élément mortier a été mis en place dans l'espace paramétrique 2D permettant de réduire les erreurs d'intégration. Désormais, nous souhaitons

nous intéresser aux problèmes de contact pour lesquels la géométrie joue un rôle primordial sur la qualité des résultats obtenus. Le traitement du contact unilatéral en IGA est pertinent afin de mettre en évidence l'intérêt d'utiliser des grandeurs cinématiques exactes, en particulier en présence de grands déplacements et de grandes rotations de normale. Le fait de ne pas avoir à évaluer une normale dite moyennée à cause d'une continuité  $C^0$  entre éléments, comme c'est le cas pour des interpolations classiques de Lagrange, va notamment permettre d'obtenir des efforts de contact plus réguliers.

Les techniques de discrétisation du problème de contact appliquées à l'IGA se sont développées au cours des dix dernières années et constituent toujours un axe de recherche important. Parmi elles nous trouvons notamment les méthodes Gauss-point-to-segment (GPTS) [Temizer 2011, Lu 2011, De Lorenzis 2011, Dimitri 2014] ou plus généralement knot-to-segment (KTS) qui se distinguent des méthodes mortier [Temizer 2011, Temizer 2012, De Lorenzis 2012, Seitz 2016] par leur façon d'assurer les conditions de contact. Une review des différentes techniques de discrétisation du contact en IGA est proposée par De Lorenzis et al. [De Lorenzis 2014]. La formulation KTS consiste à assurer les conditions de contact en un nombre prédéfini de points d'intégration (points de Gauss dans le cas du GPTS) sur chaque élément du domaine esclave. L'approche KTS est la plus utilisée pour la simplicité de sa formulation, de son implémentation ainsi que de son coût numérique réduit par rapport aux méthodes mortier. L'unique inconvénient d'une résolution de type KTS vient du fait que la solution obtenue sur l'effort normal de contact peut être oscillante. Pour une approche primale, le système à résoudre peut être surcontraint si le problème de contact est résolu en un trop grand nombre de points de quadrature et ce défaut peut s'amplifier avec le facteur de pénalité et l'ordre des fonctions de base [Temizer 2011, De Lorenzis 2011]. Fischer et Wriggers [Fischer 2005] ont néanmoins montré que la méthode GPTS assure le classique test du patch de contact (parfois appelé patch de Taylor) [Papadopoulos 1992, Zavarise 2009], aux erreurs d'intégration près, qui est une condition nécessaire pour l'obtention d'une solution correcte. Un schéma de post-traitement des efforts de contact, initialement proposé par Sauer [Sauer 2013], peut permettre de s'affranchir des oscillations liées à la méthode KTS. Il s'agit en fait d'utiliser une pression moyenne en chaque point de contrôle, telle qu'utilisée par le mortar-KTS de Temizer et al. [Temizer 2011], par Tur et al. [Tur 2009] et [Kopačka 2018]. Les méthodes mortier quant à elles assurent les conditions de contact au sens faible, par opposition aux conditions assurées de manière ponctuelle par les algorithmes KTS. Elles requièrent la vérification de la condition inf-sup. Il est possible de montrer qu'un nombre insuffisant de points de quadrature peut entraîner la violation de la condition inf-sup [De Lorenzis 2011, Dimitri 2014]. La stabilité inf-sup, dans le cas du contact frottant, est en particulier discutée dans [Alart 1991] avec une condition sur la valeur du coefficient de frottement ou dans [Laborde 2008] de manière générale. Le coût numérique de cette approche, passant notamment par l'évaluation de l'ensemble des intégrales mortier, en fait une méthode difficilement applicable dans un contexte industriel, sauf à utiliser des intégrations réduites. On souligne le fait que la méthode augmentée proposée dans ce chapitre peut tout de même être vue comme une approche mortier au sens où nous allons introduire un espace de multiplicateur mais, contrairement au couplage multipatch, nous ne

développerons pas la segmentation mortier.

Comme pour le problème de couplage multipatch, le traitement du contact est envisageable par pénalité, par approche duale ou encore avec un multiplicateur dit augmenté. Sachant que la principale difficulté de ce type de problème est d'obtenir une résolution numérique simple et robuste, la méthode par pénalité est fréquemment employée en IGA. C'est par exemple le cas de [Lu 2011] qui propose de traiter le problème de contact régularisé en s'attachant à la précision apportée sur l'évaluation de l'intégrale de contact grâce à un algorithme en deux passes. La pénalité a également été mis en oeuvre pour des problèmes de contact en thermomécanique par Temizer et al. [Temizer 2011] avec, en particulier, la méthode mortar-KTS permettant de diminuer les oscillations sur les pressions de contact. Outre le fait qu'il soit nécessaire de choisir judicieusement le facteur de pénalité, le principal défaut provient de la régularisation des lois de contact qui ne sont pas respectées de manière exacte.

La méthode duale n'est pas utilisée en pratique pour traiter le problème de contact car, bien que l'existence et l'unicité de la solution soit montrée dans [Haslinger 1996] et que la loi de contact soit traitée de façon exacte, la convergence numérique de ce problème de point-selle dépend fortement de l'espace dual ainsi que du schéma de résolution choisi. Sachant que la loi de contact est transférée aux variables duales, cette dernière peut s'écrire sous la forme d'une inégalité, dont l'obtention est détaillée dans [Haslinger 1996], et nécessite donc la mise en place d'une résolution numérique adaptée. L'inégalité issue des lois de contact peut être transformée en une simple égalité par l'ajout d'un terme de pénalité dans la pression de contact, cette variante est appelée méthode primale-duale ou augmentée.

La méthode primale-duale ou du lagrangien augmenté, permet de palier aux problèmes de convergence de l'approche duale en régularisant la fonctionnelle associée. Il s'agit de la méthode la plus fréquemment employée pour sa robustesse notamment pour des résolutions de type Newton. Par rapport à la pénalité, elle présente l'avantage d'utiliser une loi de contact exacte. De plus, la loi de contact peut se résumer en une simple égalité ce qui est un atout majeur face à la méthode duale. Dans le cas d'éléments finis classiques, cette méthode est largement répandue avec des applications pour le contact non frottant en petites déformations en 2D [Hüeber 2005], 3D [Flemisch 2007], en petites déformations avec frottement [Hüeber 2008] ou encore en grandes transformations sans frottement [Popp 2009, Popp 2010] et avec frottement [Gitterle 2010]. La méthode primale-duale a ensuite été portée en IGA par Seitz et al. [Seitz 2016] pour la résolution d'un problème de contact frottant en grandes transformations. Seitz et al. propose d'écrire les intégrales de contact aux points de contrôle, en utilisant une base duale identique à la base primale (méthode standard) ou en construisant un espace dual bi-orthogonal. Lorsque les bases primale et duale sont identiques, les conditions de contact ne sont pas découplées aux points de contrôle avec un couplage qui dépend de l'ordre des fonctions de base. Pour des raisons pratiques évidentes, les lois de contact sont tout de même assurées de manières indépendantes aux points de contrôle, voir par exemple [Temizer 2011, De Lorenzis 2011, Temizer 2012, De Lorenzis 2012], ce qui peut être vu comme un lumping [Seitz 2016]. L'intérêt de construire une base duale bi-orthogonale est de permettre

un découplage de l'égalité de contact en chaque point de contrôle. Cette méthode nécessite néanmoins la construction d'une base duale à part entière mais également la mise en place d'un post-traitement permettant de visualiser les efforts de contact réels. De plus, la méthode standard avec lumping ou la méthode bi-orthogonale nécessitent l'évaluation précise des intégrales mortiers et notamment de la fonction gap continue. Ce point est notamment traité dans [Seitz 2016] par une intégration précise grâce à une segmentation mortier 3D, également présenté en 2D par Kim et al. [Kim 2012], ce qui peut s'avérer coûteux pour des pièces complexes. Pour plus de détails sur la méthode du lagrangien augmenté appliquée au contact frottant voir [Simo 1992, Klarbring 1995, Pietrzak 1999, Renard 2013]. Plus généralement, le livre de Wriggers [Wriggers 2006] propose une revue exhaustive sur les méthodes de résolution numérique d'un problème de contact.

L'enjeu de ce chapitre sera donc le traitement du contact unilatéral sans frottement pour des coques épaisses déformables multipatch en grandes transformations. Pour cela, une méthode originale hybride KTS-mortier, utilisée avec un espace dual de multiplicateurs de contact, permettra l'étude de pièces industrielles grâce à sa simplicité de mise en oeuvre. La méthode mortier classique, comprenant la segmentation mortier également appelée intégration adaptée dans [Zarroug 2002, Ben Dhia 2002b], n'a pas été retenue pour des raisons de coût numérique et de temps de développement nécessaire à sa mise en place. Plusieurs schémas d'intégration seront envisagés afin d'observer l'influence d'un tel choix sur les oscillations des efforts de contact. Pour rappel, ces oscillations peuvent être dues à l'association de la projection discrète KTS et un facteur de pénalité élevé pour la méthode primale ou une discrétisation KTS avec soit un nombre trop faible de points d'intégration (violation du inf-sup) soit un couplage des conditions de contact pour la méthode primale-duale. Afin de s'affranchir des oscillations liées à ce type de projection, un schéma de post-traitement des efforts de contact sera également proposé. La méthode par pénalité sera comparée au lagrangien augmenté, avec une approche complètement lagrangienne, sur un cas simple dans un premier temps afin de mettre en avant la précision et la robustesse de la méthode primale-duale.

Ce chapitre est constitué de quatre sections principales permettant d'aborder les différents aspects d'un problème non linéaire de contact. La cinématique du contact, comprenant les définitions des repères locaux et l'appariement des domaines, sera abordée en premier dans la Section 4.2. Les méthodes d'application des conditions de contact sans frottement seront ensuite détaillées en Section 4.3. La Section 4.5 portera sur les méthodes numériques et la résolution discrète du problème de contact en IGA. Enfin, quelques exemples de résultats obtenus dans le cas des petites et grandes transformations seront présentés dans la Section 4.6.

## 4.2 Cinématique du contact

### 4.2.1 Géométrie

Afin de présenter la modélisation retenue pour le contact sans frottement en isogéométrie, nous considérons un problème constitué de deux coques épaisses pouvant faire partie de la même

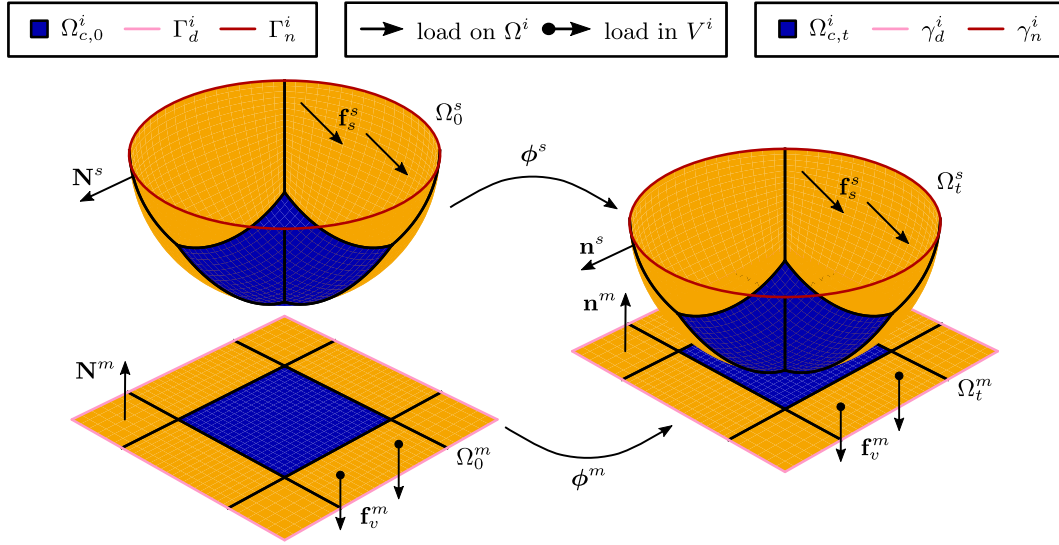


FIGURE 4.1 – Exemple d'un problème de contact avec des coques épaisses déformables multipatch.

structure multipatch. L'ensemble de l'analyse concernera un contact sur des coques déformables. On considère le problème modèle de la Figure 4.1, sachant que par simplicité les coques ne sont pas en contact à l'instant initial. L'approche maître-esclave étant également retenue afin de définir une hiérarchie entre les deux domaines, on note  $\Omega_0^s$  et  $\Omega_0^m$  respectivement les domaines esclave et maître dans la configuration initiale ainsi que  $\Omega_t^s$  et  $\Omega_t^m$  leurs images dans la configuration actuelle. On définit l'application de transport  $\phi^i$  de chaque domaine  $\Omega^i$ , pour  $i \in \{s, m\}$ , tel que

$$\phi^i : \Omega_0^i \times [0, T] \rightarrow \Omega_t^i, \quad (\mathbf{X}^i, t) \mapsto \mathbf{x}^i(t),$$

avec respectivement  $\mathbf{X}^i$  et  $\mathbf{x}^i$  les coordonnées cartésiennes d'un point matériel situé sur la surface externe de la coque dans la configuration initiale et déformée. On peut ainsi définir le champ des déplacements associé à la trajectoire  $\phi^i$  par la relation  $\mathbf{u}^i(\mathbf{X}^i, t) = \mathbf{x}^i(t) - \mathbf{X}^i$ ,  $i \in \{s, m\}$ . On rappelle que la frontière de chaque patch composant les domaines maître et esclave est à minima  $C^1$  par morceaux de tel façon à ce que la normale sortante  $\mathbf{n}^i$  (et naturellement la base locale) puisse être définie de manière unique presque partout sur l'ensemble des deux géométries en contact, à chaque instant  $t \in [0, T]$ .

Les bords soumis à des conditions de Dirichlet et Neumann sont notés respectivement  $\Gamma_d^i$  et  $\Gamma_n^i$  sur la configuration initiale et  $\gamma_d^i$  et  $\gamma_n^i$  sur la configuration actualisée. De même pour la surface potentiel de contact notée  $\Omega_{c,0}^i$  à l'instant initial et  $\Omega_{c,t}^i$  sinon. Afin de simplifier l'écriture du problème multipatch, on considèrera dans toute la suite un seul domaine, éventuellement non connexe, multipatch regroupant les entités maître et esclave. L'auto-contact, c'est à dire le contact au sein d'une même entité, est exclu de l'étude. La partie fermée de l'ensemble du



domaine multipatch se note

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^K \bar{\Omega}_k, \quad \Omega_{k_1} \cap \Omega_{k_2} = \emptyset \text{ avec } k_1 \neq k_2.$$

Les efforts externes volumiques et surfaciques sont notés  $\mathbf{f}_v^i$  et  $\mathbf{f}_s^i$  et agissent respectivement sur  $\Omega_{f_v}^i \times [-t/2, t/2]$  et  $\Omega_{f_s}^i$ . On considère qu'aucun chargement extérieur n'est appliqué sur la surface potentiellement en contact tel que

$$\Omega_c^i \cap (\Omega_{f_v}^i \cup \Omega_{f_s}^i) = \emptyset.$$

Enfin, les normales sortantes pour les deux domaines sont notées  $\mathbf{N}^i$  et  $\mathbf{n}^i$ ,  $i \in \{s, m\}$ , respectivement sur la configuration initiale et actuelle et peuvent être évaluées à partir de la base locale associée à la surface moyenne de la coque

$$\mathbf{N}^i(\xi, \eta) = \frac{\mathbf{A}_1^i \times \mathbf{A}_2^i}{\|\mathbf{A}_1^i \times \mathbf{A}_2^i\|_2} \quad \text{et} \quad \mathbf{n}^i(\xi, \eta) = \frac{\mathbf{a}_1^i \times \mathbf{a}_2^i}{\|\mathbf{a}_1^i \times \mathbf{a}_2^i\|_2}.$$

#### 4.2.2 Appariement et repères locaux

Nous souhaitons ici établir une bijection entre les deux domaines en contact. En effet, sachant que les termes liés au contact seront traités en des points de collocation par un algorithme KTS, il est nécessaire de trouver l'ensemble des points  $\mathbf{x}^m = \mathbf{P}_x(\mathbf{x}^s) \in \Omega_c^m$  sur la surface maître susceptibles d'être en contact avec les points  $\mathbf{x}^s \in \Omega_c^s$  de la surface esclave. L'opérateur de projection dans l'espace physique  $\mathbf{P}_x$  est noté

$$\mathbf{P}_x : \Omega_c^s \rightarrow \Omega_c^m, \quad \mathbf{x}^s \mapsto \mathbf{x}^m,$$

qui peut également être défini sur la configuration initiale. En pratique, la projection est faite dans l'espace paramétrique avec des contraintes de borne sur les deux directions  $\boldsymbol{\xi}^m = (\xi^m, \eta^m) \in \hat{\Omega}_c^m$  grâce à l'opérateur  $\mathbf{P}_\xi$  tel que

$$\mathbf{P}_\xi : \hat{\Omega}_c^s \rightarrow \hat{\Omega}_c^m, \quad \boldsymbol{\xi}^s \mapsto \boldsymbol{\xi}^m.$$

On remarque qu'il s'agit de la même projection que celle effectuée pour la création des vecteurs noeuds communs dans le cas du couplage multipatch. C'est également l'algorithme L-BFGS-B [Byrd 1995, Zhu 1997] qui est utilisé dans le cas présent.

Deux approches sont alors possibles afin de définir l'opérateur de projection. La première possibilité, parfois appelée ray tracing, est d'utiliser la normale esclave  $\mathbf{n}^s$  afin de trouver le point correspondant sur la surface maître, voir [Puso 2004, Seitz 2016]. L'autre choix est d'effectuer une projection au point le plus proche, notamment proposé dans [Curnier 1995], ce qui revient à effectuer une projection orthogonale de  $\mathbf{x}^s$  selon la normale maître  $\mathbf{n}^m$ . Dans ce dernier cas, l'existence et l'unicité de la solution ne sont pas assurés ce qui peut avoir un impact non négligeable sur la solution du problème de contact, voir [Konyukhov 2008] pour la résolution d'un problème type point le plus proche. Néanmoins, la haute régularité des fonctions B-splines

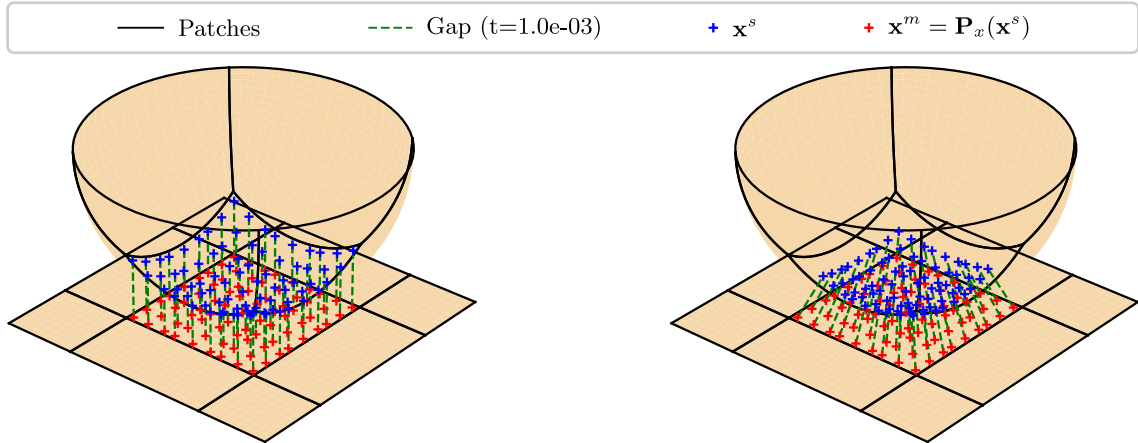


FIGURE 4.2 – Méthodes classiques d’appariement. Gauche : projection au point le plus proche, normale  $\mathbf{n}^m$ . Droite : projection de type ray tracing, normale  $\mathbf{n}^s$ . La sphère est la surface esclave et le plan la surface maître.

permet d’atténuer l’importance de ces conditions, voir de s’en affranchir moyennant des hypothèses préalables sur la géométrie considérée. Les deux choix de projection sont présentés sur la Figure 4.2. Dans notre cas, nous retenons la méthode par projection au point le plus proche pour sa simplicité de mise en oeuvre parce qu’elle permet de s’affranchir de l’évaluation de la normale esclave en chaque point de collocation. Il s’agira donc de résoudre le problème

$$\mathbf{x}^m = \mathbf{P}_x(\mathbf{x}^s) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \Omega_c^m} \|\mathbf{x}^s - \mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x}^s \in \Omega_c^s. \tag{4.1}$$

Par construction nous aurons une normale  $\mathbf{n}^m$  portée par le vecteur  $\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m$  et orientée par le signe de  $\mathbf{X}^s - \mathbf{X}^m$  avant déplacement. L’évaluation de la normale de contact actualisée  $\mathbf{n}^m$  sera effectuée en utilisant la base locale covariante de l’élément coque après actualisation fictive de la géométrie. Cette approche permet de considérer les deux variantes de la FLT car les quaternions permettent de composer les rotations et donc d’obtenir la normale actualisée mais pas les formules de Rodrigues qui utilisent uniquement la normale initiale et qui ne permettent pas de composer les rotations finies dans l’espace (et donc l’évaluation de  $\mathbf{n}^m$ ).

Afin de définir les repères locaux pour le problème de contact, on distingue désormais trois situations géométriques. La première correspond à un cas surface-to-surface (STS) où deux coques épaisses sont en contact le long de leurs épaisseurs. On définit également le cas edge-to-surface (ETS) pour compléter le cadre du discours mais qui ne sera pas utilisé par la suite. Enfin, une situation de contact edge-to-edge (ETE) permettra de donner une première validation, notamment par un contact hertzien, des méthodes retenues. Dans ce dernier cas, les deux coques seront en contact le long du contour  $\Gamma_c^i$  et l’influence de l’épaisseur sera limitée. De même que pour un contact surfacique, on considèrera qu’aucune condition de Dirichlet ou de Neumann n’est appliquée sur la zone potentiellement en contact tel que

$$\Gamma_c^i \cap (\Gamma_d^i \cup \Gamma_n^i) = \emptyset.$$

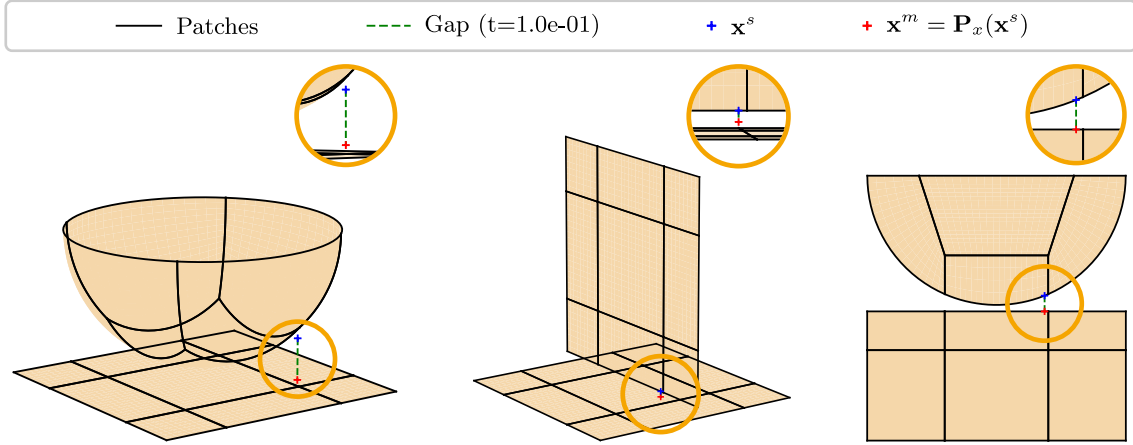


FIGURE 4.3 – Représentation des situations géométriques de contact. Gauche : contact STS avec prise en compte des épaisseurs pour l'appariement. Centre : contact ETS avec prise en compte d'une seule épaisseur pour l'appariement. Droite : contact ETE sans prise en compte des épaisseurs pour l'appariement.

Les trois situations sont représentées sur la Figure 4.3 avec, en particulier, l'appariement des domaines en fonction du type de contact. La base locale covariante pour le contact peut alors être définie en fonction de la situation géométrique du problème. En effet, si un domaine maître ou esclave entre en contact selon l'un de ses contours, i.e. selon  $\Gamma_c^i$ , nous utiliserons la restriction du tenseur métrique 3D au plan tangent pour obtenir, en un point  $p$  situé sur la surface moyenne, le repère local

$$\mathbf{A}_\alpha^i = \frac{\partial \mathbf{X}_p^i(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^\alpha} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}_3^i = \frac{\mathbf{A}_1^i \times \mathbf{A}_2^i}{\|\mathbf{A}_1^i \times \mathbf{A}_2^i\|_2}, \quad \forall \alpha \in \{1, 2\}, \quad \forall i \in \{s, m\},$$

dans la configuration initiale. En revanche, si le contact a lieu sur la surface de la coque, il sera nécessaire de considérer les vecteurs de base covariants 3D dont on rappelle la définition pour un point  $q$  quelconque

$$\mathbf{G}_\alpha^i = \frac{\partial \mathbf{X}_q^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3)}{\partial \xi^\alpha} = \mathbf{A}_\alpha^i + \xi^3 \mathbf{A}_{3,\alpha}^i \quad \text{et} \quad \mathbf{G}_3^i = \mathbf{A}_3^i = \frac{\mathbf{A}_1^i \times \mathbf{A}_2^i}{\|\mathbf{A}_1^i \times \mathbf{A}_2^i\|_2}, \quad \forall \alpha \in \{1, 2\}, \quad \forall i \in \{s, m\},$$

également exprimés dans la configuration initiale. Dans ce cas, la coordonnée paramétrique selon l'épaisseur est fixée à  $\xi^3 = -1$  ou  $\xi^3 = 1$  en fonction du côté de la coque en contact. Dans le cas général, on souligne la nécessité de prendre en compte les courbures de la coque afin de définir les deux vecteurs tangents nécessaires en cas de contact frottant surfacique (STS ou ETS).

### 4.2.3 Distance normale de contact

Le vecteur distance ou gap  $\mathbf{g}$  permet de quantifier l'écart entre les deux structures à chaque instant. En utilisant la projection au point le plus proche de (4.1), on définit le vecteur distance

par

$$\mathbf{g} = \mathbf{x}^s - \mathbf{P}_x(\mathbf{x}^s) = \mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m. \quad (4.2)$$

L'orientation pratique du vecteur distance  $\mathbf{g}$ , après projection au point le plus proche, est visible sur la Figure 4.4.

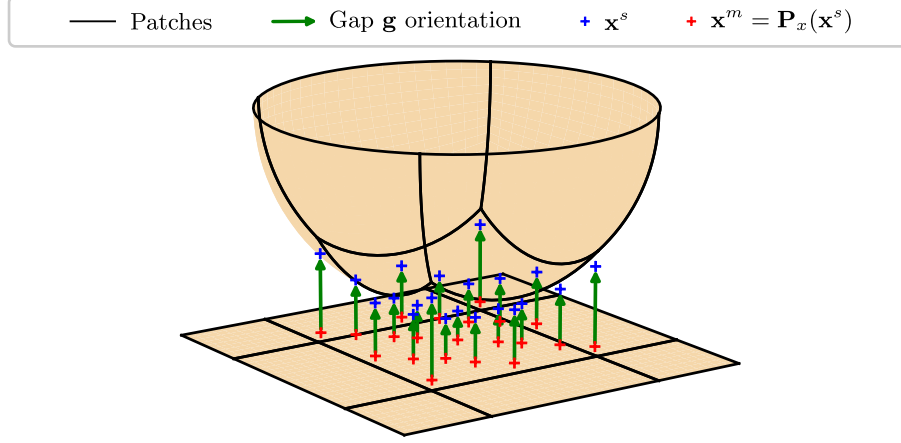


FIGURE 4.4 – Orientation du vecteur distance  $\mathbf{g}$  du domaine maître vers le domaine l'esclave.

On définit également la distance normale algébrique  $g_n$  à partir du vecteur gap  $\mathbf{g}$  avec la convention de signe suivante

$$g_n = \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}^m = (\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m) \cdot \mathbf{n}^m. \quad (4.3)$$

Le scalaire  $g_n$  correspond à la distance normale de contact et son signe permet de distinguer trois statuts géométriques caractérisant un problème de contact. Avec la convention de signe choisie, nous pouvons résumer ces différents cas par

$$\begin{cases} \text{absence de contact :} & g_n > 0, \\ \text{contact parfait :} & g_n = 0, \\ \text{interpénétration :} & g_n < 0. \end{cases}$$

On peut également écrire la distance  $g_n$  en fonction du déplacement, ce qui permettra par la suite de développer les formulations faibles tenant compte du contact. Afin de simplifier l'étude, nous négligerons le déplacement issu de la rotation des normales associé au modèle de coque épaisse. Ainsi, pour l'ensemble des contributions liées au contact, seules les translations  $\mathbf{u}_p$ , pour un point  $p$  appartenant à la surface moyenne de la coque, seront considérées. Sous cette hypothèse, la distance normale de contact se note

$$\begin{aligned} g_n &= (\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m) \cdot \mathbf{n}^m \\ &= (\mathbf{u}_p^s - \mathbf{u}_p^m) \cdot \mathbf{n}^m + (\mathbf{X}^s - \mathbf{X}^m) \cdot \mathbf{n}^m \\ &= [\mathbf{u}]_n + [\mathbf{X}]_n, \end{aligned} \quad (4.4)$$

avec  $[\mathbf{X}]_n$  la distance normale algébrique de contact en configuration initiale et  $[\mathbf{u}]_n$  le saut en déplacement

$$[\mathbf{u}]_n := (\mathbf{u}_p^s - \mathbf{u}_p^m) \cdot \mathbf{n}^m.$$

En petites transformations, le saut  $[\mathbf{u}]_n$  est une fonction linéaire du champ de déplacement car, dans ce cas, la projection  $\mathbf{x}^m$  et la normale  $\mathbf{n}^m$  sont définies une fois pour toute en chaque point  $\mathbf{x}^s$ . Dans le cas des grandes transformations, le problème présentera une non-linéarité dite d'appariement, présentée par la suite, car l'opérateur de projection  $\mathbf{P}_x$  et la normale  $\mathbf{n}^m$  dépendent du déplacement. La distance normale de contact pour le problème non linéaire d'appariement peut s'écrire

$$g_n = (\mathbf{x}^s - (\mathbf{P}_x(\mathbf{x}^s))(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n}^m(\mathbf{u}).$$

### 4.3 Contact unilatéral sans frottement en quasi-statique

#### 4.3.1 Loi de Hertz-Signorini-Moreau

Lorsque le contact est établi, la troisième loi de Newton nous indique que les efforts de contact sur l'esclave et le maître ont la même norme et direction mais sont de sens opposés. Nous avons donc à chaque instant  $t \in [0, T]$  la relation

$$\mathbf{p}^i da_0 = \boldsymbol{\sigma}^i \cdot \mathbf{n}^i da, \quad \boldsymbol{\sigma}^s \cdot \mathbf{n}^s = -\boldsymbol{\sigma}^m \cdot \mathbf{n}^m,$$

avec  $\mathbf{p}^i$  une densité d'effort de contact mesurée par unité de surface non déformée. Nous pouvons écrire l'expression précédente, en rappelant que le frottement n'est pas pris en compte dans l'étude, à partir du vecteur contrainte de contact correspondant pour aboutir à

$$\boldsymbol{\sigma}^m \cdot \mathbf{n}^m da = p_n \mathbf{n}^m da_0^s = -\boldsymbol{\sigma}^s \cdot \mathbf{n}^s da. \quad (4.5)$$

Des notations précédentes nous déduisons la loi de contact, également appelée loi de Hertz-Signorini-Moreau, reliant la pression normale de contact  $p_n$  à la distance normale de contact  $g_n$ . Avec les conventions de signe précédemment établies, les trois relations sont résumées par

$$\begin{cases} \text{condition de non-interpénétration :} & g_n \geq 0, \\ \text{condition de compression :} & p_n \leq 0, \\ \text{relation de complémentarité :} & g_n p_n = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

La première relation assure que les domaines maître et esclave ne se chevauchent pas, la seconde évite le cas non physique de la traction et enfin la relation de complémentarité précise que si le contact est actif ( $g_n = 0$ ) la force est compressive alors que s'il est inactif ( $g_n > 0$ ) les domaines sont séparés et la force de contact est nulle. La loi de contact unilatéral est présentée graphiquement sur la Figure 4.5.

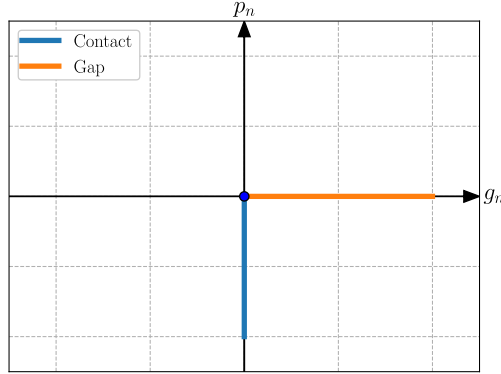


FIGURE 4.5 – Représentation graphique des lois de Hertz-Signorini-Moreau.

#### 4.3.2 Hypothèse quasi-statique

Dans la continuité du chapitre portant sur les grands déplacements, nous allons considérer que les déformations sont suffisamment lentes par rapport au chargement imposé pour que le problème puisse être qualifié de quasi-statique. En conséquence, l'inertie ainsi que l'accélération des structures susceptibles d'être en contact sont négligées. L'évolution du temps  $t = \{0 < T_1 < \dots < T^f = T\}$  est remplacée par l'évolution du chargement extérieur correspondant  $\mathbf{F}_{\text{ext}} = \{\mathbf{F}_{\text{ext}}^0, \mathbf{F}_{\text{ext}}^1, \dots, \mathbf{F}_{\text{ext}}^f\}$ . Chaque effort extérieur sera obtenu par des incréments successifs tel que

$$\mathbf{F}_{\text{ext}}^{i+1} = \mathbf{F}_{\text{ext}}^i + \Delta \mathbf{F}_{\text{ext}}^{i+1}.$$

#### 4.3.3 Travail virtuel de contact pour des coques épaisses multipatch

Le problème de contact étant proche de celui lié au couplage multipatch, les méthodes de résolution numérique considérées ici sont analogues. Une des principales différences vient du fait que les efforts de contact n'agissent qu'en compression afin de maintenir l'équilibre globale du système. Avec les notations précédentes, nous souhaitons ajouter à la formulation faible multipatch le terme de contact. On rappelle que la densité d'effort liée au contact est notée sur la configuration initiale ou déformée

$$\begin{cases} \mathbf{p}^i = \boldsymbol{\Pi}^i \cdot \mathbf{N}^i & \text{sur } \Omega_{c,0}^i, \\ \mathbf{p}^i da_0 = \boldsymbol{\sigma}^i \cdot \mathbf{n}^i da & \text{sur } \Omega_{c,t}^i, \quad \forall i \in \{s, m\}, \end{cases}$$

avec notamment  $\boldsymbol{\Pi}$  le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff. Sachant qu'une surface de contact peut également regrouper plusieurs patches, les domaines maître et esclave susceptibles d'être en contact se notent

$$\bar{\Omega}_c^i = \bigcup_{k \in C(i)} \bar{\Omega}_k, \quad \Omega_{k_1} \cap \Omega_{k_2} = \emptyset \text{ avec } k_1 \neq k_2, \quad \forall i \in \{s, m\},$$

avec  $C(i)$  la liste des patches qui peuvent entrer en contact côté esclave pour  $i = s$  ou maître pour  $i = m$ . De même que pour les grandes transformations, l'ensemble des intégrations seront

réalisées sur la configuration initiale selon une approche complètement lagrangienne, notamment utilisée pour le contact dans [Zarroug 2002]. Nous pouvons alors développer le terme de contact à introduire dans la formulation faible par

$$\sum_i \int_{\Omega_c^i} \boldsymbol{\sigma}^i \cdot \mathbf{n}^i \cdot \delta \mathbf{u}_p^i \, d\Omega_c^i, \quad \forall \{\delta \mathbf{u}_p\} \in V_h = \prod_k V_h^k.$$

Par choix d'un domaine esclave  $\Omega_{c,0}^s$ , nous pouvons simplifier le terme précédent grâce au principe d'action-réaction (4.5) par

$$\sum_i \int_{\Omega_c^i} \boldsymbol{\sigma}^i \cdot \mathbf{n}^i \cdot \delta \mathbf{u}_p^i \, d\Omega_c^i = \int_{\Omega_{c,0}^s} \mathbf{p}^s (\delta \mathbf{u}_p^s - \delta \mathbf{u}_p^m) \, d\Omega_{c,0}^s.$$

Nous rappelons que l'appariement des domaines maître et esclave a été réalisé par une projection au point le plus proche définie par l'opérateur  $\mathbf{P}_x$  de (4.1). En ce sens, le saut de déplacement virtuel dépend uniquement des positions des points de collocation sur la surface esclave tel que

$$(\delta \mathbf{u}_p^s - \delta \mathbf{u}_p^m)(\mathbf{X}^s) = \delta \mathbf{u}_p^s(\mathbf{x}^s) - \delta \mathbf{u}_p^m(\mathbf{P}_x(\mathbf{x}^s)), \quad \forall \mathbf{X}^s \in \Omega_{c,0}^s.$$

En choisissant la notation  $[\cdot]$  pour désigner le saut en déplacement, on simplifie l'écriture précédente avec

$$\delta \mathbf{u}_p^s - \delta \mathbf{u}_p^m = [\delta \mathbf{u}].$$

En l'absence de frottement, le problème n'est constitué que d'une partie normale. Avec la notation  $p_n = p_n^s = -\mathbf{p}^s \cdot \mathbf{n}^m$  tel que  $p_n < 0$  en cas de contact, on peut résumer le problème de contact par sa projection sur la normale  $\mathbf{n}^m$  tel que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{c,0}^s} \mathbf{p}^s (\delta \mathbf{u}_p^s - \delta \mathbf{u}_p^m) \, d\Omega_{c,0}^s &= - \int_{\Omega_{c,0}^s} p_n [\delta \mathbf{u}] \cdot \mathbf{n}^m \, d\Omega_{c,0}^s \\ &= - \int_{\Omega_{c,0}^s} p_n [\delta \mathbf{u}]_n \, d\Omega_{c,0}^s. \end{aligned}$$

La forme général du terme de contact pour des coques épaisses multipatch est

$$- \int_{\Omega_{c,0}^s} p_n [\delta \mathbf{u}]_n \, d\Omega_{c,0}^s, \quad \forall \{\delta \mathbf{u}\} \in V_h = \prod_k V_h^k. \quad (4.7)$$

Sachant que nous avons discrétisé la surface de contact en des points de collocation par un algorithme de type KTS, l'expression (4.7) peut se mettre sous une forme discrétisée plus pratique. Soit  $\mathbf{c}$  l'ensemble des points de collocation situés sur la surface de contact esclave et  $\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{P}_x(\mathbf{c})$  leurs projections, en configuration actuelle, sur la surface maître tel que  $[\delta \mathbf{u}]_n(\mathbf{c}) = (\delta \mathbf{u}_p(\mathbf{c}) - \delta \mathbf{u}_p(\bar{\mathbf{c}})) \cdot \mathbf{n}^m(\bar{\mathbf{c}})$ . Alors l'expression précédente se résume à

$$- \sum_{\mathbf{c}} \omega(\mathbf{c}) |\det(\mathbf{J}(\mathbf{c}))| p_n(\mathbf{c}) [\delta \mathbf{u}]_n(\mathbf{c}), \quad \forall \{\delta \mathbf{u}\} \in V_h = \prod_k V_h^k, \quad (4.8)$$

avec  $\omega(\mathbf{c})$  et  $\det(\mathbf{J}(\mathbf{c}))$  respectivement le poids et le déterminant de la jacobienne de la transformation au point de collocation  $\mathbf{c}$  considéré, avec une jacobienne calculée en configuration de référence.

#### 4.3.4 Méthode primale pour l'application des conditions de contact

La méthode par pénalité a déjà été développée pour le couplage multipatch. Celle-ci peut se résumer en l'action d'un ressort qui, dans le cas du contact, travaille en compression. La raideur de ce ressort, c'est à dire le coefficient de pénalité, selon la normale à la surface maître est noté  $\alpha_n > 0$ . Le problème de contact unilatéral peut alors être formulé sous la forme d'un problème de minimisation sans contrainte. Après régularisation des lois de Hertz-Signorini-Moreau, la nouvelle loi de contact unilatéral s'écrit

$$p_n = \begin{cases} \alpha_n g_n & \text{si } g_n < 0, \\ 0 & \text{si } g_n \geq 0, \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \text{contact : } g_n < 0, & p_n = \alpha_n g_n < 0, & p_n g_n \neq 0, \\ \text{absence de contact : } g_n \geq 0, & p_n = 0, & p_n g_n = 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Cette loi régularisée autorise une interpénétration des solides et n'est donc qu'une approximation de la loi de contact. Par conséquent, l'effort de contact peut être évalué de manière continue en fonction de la distance normale de contact  $g_n$  mais uniquement de façon approchée. La loi de contact exacte serait retrouvée si  $\alpha_n$  tendait vers l'infini, ce qui n'est pas applicable en pratique. L'avantage de la méthode reste sa facilité d'implémentation aux dépens de la qualité des résultats obtenus puisque  $\alpha_n$  doit être suffisamment petit afin d'éviter des problèmes de conditionnement sur la matrice de raideur multipatch. Une représentation graphique de la loi de contact régularisée est proposée sur la Figure 4.6.

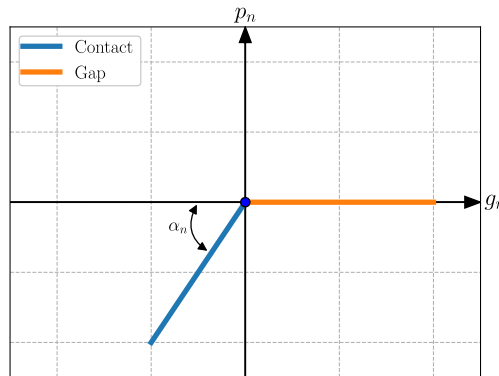


FIGURE 4.6 – Représentation graphique des lois de Hertz-Signorini-Moreau régularisées.

Introduisons l'opérateur  $\chi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  par

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0, \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Il s'agit la fonction indicatrice de  $\mathbb{R}^-$  parfois définie à partir des crochets de Macaulay. On remplace donc ici la loi (4.9) par

$$p_n = \alpha_n \chi(p_n) g_n. \quad (4.10)$$



En utilisant les relations (4.4), (4.7) et (4.10), on écrit le terme de contact avec l'approche primale

$$- \int_{\Omega_{c,0}^s} \alpha_n \chi(p_n) g_n [\delta \mathbf{u}]_n \, d\Omega_{c,0}^s, \quad \forall \{\delta \mathbf{u}\} \in V_h = \prod_k V_h^k. \quad (4.11)$$

Avec la discrétisation KTS des surfaces de contact proposée en (4.8), on obtient l'expression

$$- \sum_{\mathbf{c}} \omega(\mathbf{c}) |\det(\mathbf{J}(\mathbf{c}))| \alpha_n \chi(p_n(\mathbf{c})) g_n(\mathbf{c}) [\delta \mathbf{u}]_n(\mathbf{c}), \quad \forall \{\delta \mathbf{u}\} \in V_h = \prod_k V_h^k.$$

Comme précédemment énoncé, si le nombre de points de collocation  $\mathbf{c}$  est trop important, le système à résoudre est surcontraint. De manière semblable au verrouillage en membrane/cisaillement pour les coques, un nombre excessif d'équations sur les conditions de contact aboutira à l'obtention d'un verrouillage numérique par manque de solutions discrètes satisfaisant la condition de contact en tout point de collocation. Plus le facteur de pénalité, assurant ces conditions de contact, sera élevé et plus le verrouillage sera important. Ce système surcontraint se traduit par une solution oscillante sur les efforts de contact [Temizer 2011, De Lorenzis 2011, Kopačka 2018].

#### 4.3.5 Méthode duale pour l'application des conditions de contact

Dans ce cas nous allons introduire de nouvelles variables, notées  $\lambda$ , représentant les efforts de contact en compression à l'interface. Contrairement à l'approche primale, les lois de contact ne sont pas régularisées et seront donc traitées de manière exacte. En revanche, le système à résoudre sera composé d'inconnues supplémentaires. De plus, cette méthode, qui n'autorise aucune interpénétration, suppose que les surfaces potentielles de contact sont parfaitement décrites et ne permet donc pas de traiter le cas de surface présentant des aspérités. La densité d'effort de contact correspond alors au multiplicateur de Lagrange dans la direction normale

$$p_n = \lambda_n = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}^m = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{n}^m. \quad (4.12)$$

Nous pouvons alors exprimer les lois de Hertz-Signorini-Moreau non régularisées

$$\begin{cases} g_n \geq 0, \\ \lambda_n \leq 0, \\ g_n \lambda_n = 0, \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \text{contact : } g_n = 0, \quad \lambda_n < 0, \quad \lambda_n g_n = 0, \\ \text{absence de contact : } g_n > 0, \quad \lambda_n = 0, \quad \lambda_n g_n = 0. \end{cases}$$

Il est nécessaire d'introduire l'espace des multiplicateurs de Lagrange. Nous choisissons de placer les inconnues duales aux points de contrôle du domaine esclave  $\Omega_{c,0}^s$ , de manière analogue au couplage multipatch. On introduit ainsi un espace discret

$$W_h^s \subset L^2(\Omega_{c,0}^s).$$

Comme précisé par Hübner et al. [Hübner 2005], la solution faible d'un problème de contact avec la méthode duale peut être obtenue par un problème de minimisation [Haslinger 1980, Boieri 1987] ou de manière équivalente en satisfaisant une inégalité variationnelle. Nous présentons ici brièvement la méthode duale écrite sous la forme d'un problème de point-selle

---

### 4.3. Contact unilatéral sans frottement en quasi-statique

avec une loi de contact transférée aux variables duales s'écrivant sous la forme d'une inégalité [Haslinger 1996, Hübner 2005, Seitz 2016]. Pour cela, on définit l'ensemble discret convexe global

$$\overline{W}_h^s = \left\{ \delta\lambda_n \in W_h^s, \quad \int_{\Omega_{c,0}^s} \delta\lambda_n [\mathbf{u}]_n \, d\Omega_{c,0}^s \leq 0, \quad \forall \{[\mathbf{u}]_n\} \in \text{Tr}(V_h) \text{ avec } [\mathbf{u}]_n \geq 0 \right\}.$$

Nous pouvons alors utiliser les expressions (4.7) et (4.12) afin d'obtenir les travaux virtuels de contact issu d'une approche duale

$$- \int_{\Omega_{c,0}^s} \lambda_n [\delta\mathbf{u}]_n \, d\Omega_{c,0}^s, \quad \forall \{\delta\mathbf{u}\} \in V_h = \prod_k V_h^k. \quad (4.13)$$

L'inégalité de contact, notamment obtenue dans [Haslinger 1996] et explicitée dans [Hübner 2005, Seitz 2016], peut se mettre sous la forme faible suivante

$$\int_{\Omega_{c,0}^s} (\lambda_n - \delta\lambda_n) g_n \, d\Omega_{c,0}^s \leq 0, \quad \forall \{\delta\lambda_n\} \in \overline{W}_h^s, \quad \{\lambda_n\} \in \overline{W}_h^s. \quad (4.14)$$

L'existence et l'unicité de la solution sont montrées par Haslinger et al. [Haslinger 1996]. Bien que les lois de contact soient traitées de manière exactes, une telle méthode nécessite une résolution numérique adaptée à l'inégalité précédente. L'ajout d'un terme de pénalité dans la pression de contact (4.12) permettra de transformer la forme faible des lois de contact en une simple égalité.

#### 4.3.6 Méthode primale-duale pour l'application des conditions de contact

Il s'agit de la méthode la plus fréquemment employée du fait de sa robustesse et précision, voir par exemple [Alart 1991, Pietrzak 1999, Ben Dhia 2000, Renard 2013]. Le principe consiste à ajouter un terme de pénalité dans l'effort de contact de la méthode duale. Ce terme supplémentaire permettra notamment de palier aux problèmes de convergence de la méthode duale grâce à la régularisation  $\frac{\alpha_n}{2} \int_{\Omega_{c,0}^s} g_n^2 \, d\Omega_{c,0}^s$  ajoutée dans la fonctionnelle associée ce qui en fait une méthode adaptée aux résolutions de type Newton. Il sera également inutile de considérer un facteur de pénalité  $\alpha_n$  élevé puisque la condition de contact est déjà traitée par les inconnues duales. Des discussions autour de l'existence et l'unicité de la solution sont présentées dans [Laborde 2008], en particulier dans le cas du contact frottant avec une condition nécessaire et suffisante de majoration sur le coefficient de frottement [Alart 1991]. Nous reprenons donc la formulation du lagrangien augmenté telle que présentée dans [Alart 1991], généralisée pour le frottement dans [Ben Dhia 2002b], à laquelle nous associerons par la suite une résolution numérique dite de contraintes actives [Zarroug 2002]. La force de contact augmentée du terme de pénalité se définit comme

$$p_n = \lambda_n + \alpha_n g_n. \quad (4.15)$$

Les lois de contact dépendantes du multiplicateur augmenté  $p_n$  se résument à

$$\lambda_n = \chi(p_n) p_n \quad (4.16)$$

c'est à dire

$$\begin{cases} \text{contact : } g_n = 0, & p_n = \lambda_n < 0, & p_n g_n = \lambda_n g_n = 0, \\ \text{absence de contact : } g_n > 0, & \lambda_n = 0, & p_n = \alpha_n g_n > 0, & \lambda_n g_n = 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

Un avantage majeur de la méthode primale-duale en regard de la méthode duale est de pouvoir résumer les relations (4.16) ou (4.17) à une unique égalité équivalente

$$\chi(p_n)p_n - \lambda_n = 0, \quad \text{avec } p_n = \lambda_n + \alpha_n g_n. \quad (4.18)$$

L'expression (4.18) va nous permettre d'ajouter les lois de contact dans la formulation faible de façon simple et directe. En utilisant les résultats (4.4), (4.13) et (4.18) on obtient le terme de contact

$$- \int_{\Omega_{c,0}^s} \lambda_n [\delta \mathbf{u}]_n \, d\Omega_{c,0}^s \rightarrow - \int_{\Omega_{c,0}^s} \chi(\lambda_n + \alpha_n g_n) (\lambda_n + \alpha_n g_n) [\delta \mathbf{u}]_n \, d\Omega_{c,0}^s, \quad \forall \{\delta \mathbf{u}\} \in V_h = \prod_k V_h^k. \quad (4.19)$$

Il reste alors à prendre en compte la condition dualisée des lois de contact, ce qui est simplifié par l'égalité (4.18) de laquelle nous obtenons au sens faible

$$\int_{\Omega_{c,0}^s} \frac{1}{\alpha_n} (\chi(p_n)p_n - \lambda_n) \delta \lambda_n \, d\Omega_{c,0}^s = 0, \quad \text{avec } p_n = \lambda_n + \alpha_n g_n, \quad \forall \{\delta \lambda_n\} \in W_h^s. \quad (4.20)$$

On définit l'interpolation par les fonctions NURBS des variables primales et duales associées au contact avec les espaces discrets suivants.

**Interpolation NURBS des variables primales pour le contact :** sachant que les degrés de liberté en rotation ne sont pas pris en compte pour le contact, nous utiliserons l'interpolation NURBS pour chaque patch potentiellement en contact  $k \in C(i)$  des domaines  $i \in \{s, m\}$

$$\mathbf{u}_p^k = \sum_j \mathbf{R}_j^k u_{p,j}^k, \quad (4.21)$$

avec  $j = j(A, B)$  le numéro global du point de contrôle  $A = \{1, \dots, n^k \cdot m^k\}$  correspondant au degré de liberté  $B = \{1, 2, 3\}$ . Dans ce cas, si  $\mathbf{e}_B \in \mathbb{R}^3$  est le vecteur unitaire dans la direction  $B$ , alors  $\mathbf{R}_j^k = R_A^k \mathbf{e}_B$ .

**Interpolation NURBS des variables duales pour le contact :** nous utilisons les mêmes fonctions d'interpolation que pour la base primale, sans modification supplémentaire. On définit alors l'interpolation des variables scalaires duales pour chaque patch potentiellement en contact  $k \in C(s)$  du domaine esclave par

$$\lambda_C^k = \sum_j R_j^k \lambda_j^k, \quad (4.22)$$

avec dans ce cas simplement  $j = A = \{1, \dots, n^k \cdot m^k\}$  le numéro global du point de contrôle.

---

### 4.3. Contact unilatéral sans frottement en quasi-statique

Comme pour la méthode primale, on peut écrire le terme de contact et la loi de contact dualisée après discrétisation de la surface de contact aux points de collocation  $\mathbf{c}$  par

$$\left\{ \begin{array}{l} - \sum_{\mathbf{c}} \omega(\mathbf{c}) |\det(\mathbf{J}(\mathbf{c}))| \chi(p_n(\mathbf{c})) (\lambda_n(\mathbf{c}) + \alpha_n g_n(\mathbf{c})) [\delta \mathbf{u}]_n(\mathbf{c}), \quad \forall \{\delta \mathbf{u}\} \in V_h = \prod_k V_h^k, \\ \sum_{\mathbf{c}} \omega(\mathbf{c}) |\det(\mathbf{J}(\mathbf{c}))| \frac{1}{\alpha_n} (\chi(p_n(\mathbf{c})) (\lambda_n(\mathbf{c}) + \alpha_n g_n(\mathbf{c})) - \lambda_n(\mathbf{c})) \delta \lambda_n(\mathbf{c}) = 0, \quad \forall \{\delta \lambda_n\} \in W_h^s, \end{array} \right. \quad (4.23)$$

avec  $p_n(\mathbf{c}) = \lambda_n(\mathbf{c}) + \alpha_n g_n(\mathbf{c})$ . On rappelle que, dans notre cas, nous allons utiliser le même espace de multiplicateur que la méthode des mortiers mais en localisant les zones potentielles de contact (méthode KTS) à partir des points de collocation.

En choisissant un espace dual identique à l'espace primal, la condition inf-sup continue est instantanément vérifiée par construction en norme  $L^2$ . En prenant  $[\delta \mathbf{u}]_n = \lambda_n$ , on obtient une constante inf-sup unitaire tel que

$$\inf_{\lambda_n \in W_h^s} \sup_{\delta \mathbf{u} \in V_h} \frac{\int_{\Omega_{c,0}^s} \lambda_n [\delta \mathbf{u}]_n \, d\Omega_{c,0}^s}{\|\lambda_n\|_{L^2(\Omega_{c,0}^s)} \|\delta \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_{c,0}^s)}} = \frac{\langle \lambda_n, \lambda_n \rangle_{L^2(\Omega_{c,0}^s)}}{\|\lambda_n\|_{L^2(\Omega_{c,0}^s)}^2} = 1.$$

Après discrétisation KTS de la surface de contact, la condition inf-sup pour le contact peut se mettre sous la forme

$$\inf_{\lambda_n \in W_h^s} \sup_{\delta \mathbf{u} \in V_h} \frac{\sum_{\mathbf{c}} \omega(\mathbf{c}) |\det(\mathbf{J}(\mathbf{c}))| \lambda_n(\mathbf{c}) [\delta \mathbf{u}]_n(\mathbf{c})}{\|\lambda_n\|_{L^2(\Omega_{c,0}^s)} \|\delta \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_{c,0}^s)}} \geq \inf_{\lambda_n \in W_h^s} \frac{\sum_{\mathbf{c}} \omega(\mathbf{c}) |\det(\mathbf{J}(\mathbf{c}))| \lambda_n^2(\mathbf{c})}{\|\lambda_n\|_{L^2(\Omega_{c,0}^s)}^2} = C.$$

Si dans le domaine continu la condition inf-sup est assurée, elle ne l'est plus après discrétisation aux points  $\mathbf{c}$  de collocation. Un nombre trop faible de points d'intégration peut entraîner une violation du inf-sup car  $\sum_{\mathbf{c}} \omega(\mathbf{c}) |\det(\mathbf{J}(\mathbf{c}))| \lambda_n^2(\mathbf{c})$  n'est plus défini positif, c'est à dire qu'il ne s'agit plus d'un produit scalaire sur  $W_h^s$ . En d'autres termes, en notant

$$\text{Ker}(W_h^s) = \left\{ \lambda_n \in W_h^s, \sum_{\mathbf{c}} \omega(\mathbf{c}) |\det(\mathbf{J}(\mathbf{c}))| \lambda_n(\mathbf{c}) [\delta \mathbf{u}]_n(\mathbf{c}) = 0, \forall \delta \mathbf{u} \in V_h \right\},$$

il existe  $\lambda_n^{\text{Ker}} \in \text{Ker}(W_h^s)$  tel que  $\sum_{\mathbf{c}} \omega(\mathbf{c}) |\det(\mathbf{J}(\mathbf{c}))| (\lambda_n(\mathbf{c}) + \lambda_n^{\text{Ker}}(\mathbf{c})) [\delta \mathbf{u}]_n(\mathbf{c})$  soit solution du problème de contact. Cette violation du inf-sup aboutit ainsi à l'obtention de modes sabliers sur le multiplicateur de contact, par manquement du nombre d'équations par rapport au nombre d'inconnues recherchées, ce qui a notamment été discuté dans la partie verrouillage pour les coques.

#### 4.3.7 Formulations faibles du contact multipatch en grandes transformations

On souhaite ici exprimer les formulations faibles associées aux trois méthodes de contact précédentes pour un problème multipatch, dont le couplage est assuré par le lagrangien augmenté simplifié, soumis à de grands déplacements. Afin de ne pas confondre les variables associées au problème multipatch à celles utilisées pour le contact, on note  $\lambda_{\text{MP}}$  et  $\lambda_{\text{C}}$  respectivement les

multiplicateurs de Lagrange pour le problème multipatch et celui de contact ainsi que  $\alpha_{\text{MP}}$  et  $\alpha_{\text{C}}$  respectivement les facteurs de pénalité pour la continuité multipatch et le contact. En basant sur les notations des formes bilinéaires et linéaires détaillées dans le chapitre portant sur les grandes transformations, on rappelle les expressions suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \sum_k a_k(\mathbf{u}_k, \delta \mathbf{u}_k), \quad \forall \{\delta \mathbf{u}\} \in V_h = \prod_k V_k^h, \\ L(\delta \mathbf{u}) = \sum_k L_k(\delta \mathbf{u}_k), \quad \forall \{\delta \mathbf{u}\} \in V_h = \prod_k V_k^h, \\ b(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \sum_{k>l} \alpha_{\text{MP}} b_k(\mathbf{u}_k, \delta \mathbf{u}_k), \quad \forall \{\delta \mathbf{u}\} \in V_h = \prod_k V_k^h, \\ c(\boldsymbol{\lambda}_{\text{MP}}, \delta \mathbf{u}) = \sum_{k>l} c_{kl}(\boldsymbol{\lambda}_{\text{MP},kl}, \text{Tr}_{kl} \delta \mathbf{u}_k - \text{Tr}_{kl} \delta \mathbf{u}_l), \quad \forall \{\delta \mathbf{u}\} \in V_h = \prod_k V_k^h, \\ c(\delta \boldsymbol{\lambda}_{\text{MP}}, \mathbf{u}) = \sum_{k>l} c_{kl}(\delta \boldsymbol{\lambda}_{\text{MP},kl}, \text{Tr}_{kl} \mathbf{u}_k - \text{Tr}_{kl} \mathbf{u}_l), \quad \forall \{\delta \boldsymbol{\lambda}_{\text{MP}}\} \in M_h = \prod_{k>l} M_{kl,h}. \end{array} \right.$$

On souligne une fois de plus le fait que cette approche est complètement lagrangienne. En effet, la formulation lagrangienne totale développée pour les grands déplacements est associée à une approche lagrangienne pour le contact et, par conséquent, l'ensemble des intégrations seront réalisées sur la configuration initiale. Nous pouvons alors expliciter les formulations faibles à partir des trois méthodes de résolution du contact précédentes.

**Méthode primale.** En utilisant le terme de contact pénalisé (4.10), le problème consiste à : trouver  $\{\mathbf{u}\} \in V_h$  et  $\{\boldsymbol{\lambda}_{\text{MP}}\} \in M_h$  tel que  $\forall \{\delta \mathbf{u}\} \in V_h$  et  $\forall \{\delta \boldsymbol{\lambda}_{\text{MP}}\} \in M_h$  on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + b(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + c(\boldsymbol{\lambda}_{\text{MP}}, \delta \mathbf{u}) + \int_{\Omega_{c,0}^s} \alpha_{\text{C}} \chi(p_n) g_n [\delta \mathbf{u}]_n \, d\Omega_{c,0}^s = L(\delta \mathbf{u}), \\ c(\delta \boldsymbol{\lambda}_{\text{MP}}, \mathbf{u}) = 0 \end{array} \right. \quad (4.24)$$

avec  $p_n = \alpha_{\text{C}} g_n$ .

**Méthode duale.** La relation (4.12) nous rappelle que la force de contact s'écrit  $p_n = \lambda_{\text{C}}$ . Alors, en utilisant le travail virtuel de contact (4.13) ainsi que l'inégalité de contact (4.14), le problème de type point-selle se résume à : trouver  $\{\mathbf{u}\} \in V_h$ ,  $\{\boldsymbol{\lambda}_{\text{MP}}\} \in M_h$  et  $\{\lambda_{\text{C}}\} \in \overline{W}_h^s$  tel que  $\forall \{\delta \mathbf{u}\} \in V_h$ ,  $\forall \{\delta \boldsymbol{\lambda}_{\text{MP}}\} \in M_h$  et  $\forall \{\delta \lambda_{\text{C}}\} \in \overline{W}_h^s$  on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + b(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + c(\boldsymbol{\lambda}_{\text{MP}}, \delta \mathbf{u}) + \int_{\Omega_{c,0}^s} \lambda_{\text{C}} [\delta \mathbf{u}]_n \, d\Omega_{c,0}^s = L(\delta \mathbf{u}), \\ \int_{\Omega_{c,0}^s} (\lambda_{\text{C}} - \delta \lambda_{\text{C}}) g_n \, d\Omega_{c,0}^s \leq 0, \\ c(\delta \boldsymbol{\lambda}_{\text{MP}}, \mathbf{u}) = 0. \end{array} \right. \quad (4.25)$$

**Méthode primale-duale.** On utilise alors le travail virtuel de contact (4.19) et la condition de contact dualisée (4.20) afin d'écrire le problème : trouver  $\{\mathbf{u}\} \in V_h$ ,  $\{\boldsymbol{\lambda}_{\text{MP}}\} \in M_h$  et  $\{\lambda_{\text{C}}\} \in$

$W_h^s$  tel que  $\forall \{\delta \mathbf{u}\} \in V_h, \forall \{\delta \boldsymbol{\lambda}_{\text{MP}}\} \in M_h$  et  $\forall \{\delta \lambda_C\} \in W_h^s$  on ait

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + b(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + c(\boldsymbol{\lambda}_{\text{MP}}, \delta \mathbf{u}) \\ \quad + \int_{\Omega_{c,0}^s} \chi(p_n)(\lambda_C + \alpha_C g_n) [\delta \mathbf{u}]_n \, d\Omega_{c,0}^s = L(\delta \mathbf{u}), \\ \int_{\Omega_{c,0}^s} \frac{1}{\alpha_C} (\chi(p_n)(\lambda_C + \alpha_C g_n) - \lambda_C) \delta \lambda_C \, d\Omega_{c,0}^s = 0, \\ c(\delta \boldsymbol{\lambda}_{\text{MP}}, \mathbf{u}) = 0, \end{cases} \quad (4.26)$$

avec  $p_n = \lambda_C + \alpha_C g_n$ .

## 4.4 Discrétisation des intégrales de contact

### 4.4.1 Points de collocation pour la discrétisation de la surface de contact

Comme annoncé en introduction de ce chapitre, nous utiliserons une formulation de type KTS [Temizer 2011, Lu 2011, De Lorenzis 2011, Dimitri 2014] afin de localiser les zones potentielles de contact. Cette dernière se distingue des méthodes mortier [Temizer 2011, Temizer 2012, De Lorenzis 2012, Seitz 2016] en assurant les conditions liées au contact en un nombre prédéfini de points de collocation même si dans notre cas précis nous utilisons le même espace de multiplicateur que la méthode des mortiers. Il s'agit d'une méthode simple à mettre en place et peu coûteuse d'un point de vue numérique et semble ainsi adaptée à l'étude de géométries industrielles. Le principal défaut de cette méthode concerne les oscillations de pression  $\lambda_n$  qu'elle est susceptible d'engendrer. Pour l'approche primale, ces oscillations sont le résultat d'un système surcontraint en imposant les lois de contact en un trop grand nombre de points de collocation [Temizer 2011, De Lorenzis 2011, Kopačka 2018]. D'une part, pour les approches duale et augmentée, si le nombre de points d'intégration est insuffisant, la violation ou l'affaiblissement de la condition inf-sup engendrera une perte de stabilité du multiplicateur et donc l'obtention d'une solution erronée ou oscillante [De Lorenzis 2011, Dimitri 2014]. Nous allons comparer trois schémas d'intégration, pour la résolution du problème de contact, afin d'observer l'évolution de l'effort de contact après discrétisation KTS des surfaces.

Les deux premières méthodes de quadrature proposées pour la discrétisation du contact sont de type GPTS. Les points de collocation  $\mathbf{c}$  pour la résolution du contact seront les points d'intégration de Gauss, identiques à ceux utilisés pour l'évaluation des différents termes d'énergie associés au modèle de coque. L'intégration gaussienne complète sera notamment comparée à l'intégration réduite qui a permis de réduire le verrouillage en membrane et cisaillement transverse pour notre modèle de coque épaisse.

Les méthodes GPTS seront ensuite comparées à une intégration approchée de type Newton-Cotes, formule (4.27). L'idée est de se rapprocher des segmentations mortier pour l'intégration des termes de contact [Seitz 2016, Kim 2012], parfois appelées intégrations adaptées [Zarroug 2002], qui peuvent être difficiles à implémenter (en particulier en 3D) et peuvent avoir

un coût numérique plus important qu'une simple discrétisation KTS se basant uniquement sur la surface esclave. Ces inconvénients ont motivé notre choix d'utiliser un schéma enrichi plus simple de type Newton-Cotes. On retrouve dans [Zarroug 2002] une comparaison entre l'intégration adaptée et une intégration en sous-éléments réguliers associée à un schéma de type Newton-Cotes. Dans un cadre industriel, nous comparerons les approches GPTS à une méthode KTS de type Newton-Cotes avec division en sous-éléments réguliers. Le principe de cette méthode est de diviser chaque élément parent du domaine esclave en sous-éléments fictifs qui ne serviront qu'à l'intégration numérique des termes de contact. Cela permet notamment de conserver une certaine précision sans avoir à utiliser un ordre élevé pour le schéma de type Newton-Cotes. Contrairement à une intégration adaptée, tous les éléments parents de contact sont raffinés de manière identique. On divise l'élément parent  $\tilde{\Omega} = (0, 1)^2$  en  $n\tilde{e}$  sous-éléments virtuels semblables  $\tilde{\Omega}_e$ . Chaque sous-élément est intégré avec un schéma de type Newton-Cotes identique en un nombre de points d'intégration noté  $n\tilde{x}$ . Alors l'intégrale sur l'élément de référence peut être approchée par

$$\int_{\tilde{\Omega}} f d\tilde{x} \simeq \sum_{i=1}^{n\tilde{e}} \int_{\tilde{\Omega}_e} f d\tilde{x} \simeq \sum_{i=1}^{n\tilde{e}} \sum_{j=1}^{n\tilde{x}} \omega_{ij} f(\tilde{x}_{ij}), \quad (4.27)$$

avec  $\omega_{ij}$  le poids correspondant au point d'intégration  $\tilde{x}_{ij}$  pour  $j = \{1, \dots, n\tilde{x}\}$  points d'intégration et  $i = \{1, \dots, n\tilde{e}\}$  sous-éléments fictifs. Un exemple de quadrature de type Newton-Cotes avec sous-éléments réguliers est montré sur la Figure 4.7. Cette méthode garantit la vérification du inf-sup, pour les méthodes duale et augmentée, si le nombre de sous-divisions est suffisant. Malgré sa simplicité d'implémentation et le fait qu'elle permette de choisir le nombre de points de contact générés, elle peut rapidement devenir coûteuse numériquement en fonction du nombre de sous-divisions et naturellement de l'ordre de la méthode de Newton-Cotes.

#### 4.4.2 Post-traitement des efforts de contact

D'autre part, dans l'approche duale, le multiplicateur  $\lambda$  représente les pressions au sens faible dans  $\text{Tr}(V'_h)$  et ne garantit pas une convergence point par point. Un post-traitement est envisagé pour traiter les oscillations sur les pressions normales de contact. Pour rappel, ces solutions oscillatoires peuvent apparaître si le facteur de pénalité est trop élevé pour l'approche primale. En ce qui concerne la méthode duale ou augmentée, la loi de pression locale aux points  $\mathbf{c}$  est  $q_n(\mathbf{c}) = \chi(p_n(\mathbf{c}))p_n(\mathbf{c})$  avec  $p_n(\mathbf{c}) = \lambda_n(\mathbf{c}) + \alpha_n g_n(\mathbf{c})$ . Dans l'approche mise en oeuvre, l'égalité  $\lambda_n = q_n$  est écrite au sens faible dans (4.23) d'où des oscillations possibles de la différence  $q_n - \lambda_n$  et de  $\lambda_n$ .

Le post-traitement de l'effort normal, proposé à l'origine par Sauer [Sauer 2013], commence par l'évaluation de la pression de contact en chaque point de contrôle  $A$  tel que

$$p_{n,A} = \frac{\sum_{\mathbf{c}} \omega(\mathbf{c}) |\det(\mathbf{J}(\mathbf{c}))| R_A(\mathbf{c}) \chi(p_n(\mathbf{c})) p_n(\mathbf{c})}{\sum_{\mathbf{c}} \omega(\mathbf{c}) |\det(\mathbf{J}(\mathbf{c}))| R_A(\mathbf{c})} \simeq \frac{\int_{\Omega_{c,0}^s} R_A \chi(p_n) p_n d\Omega_{c,0}^s}{\int_{\Omega_{c,0}^s} R_A d\Omega_{c,0}^s}, \quad (4.28)$$

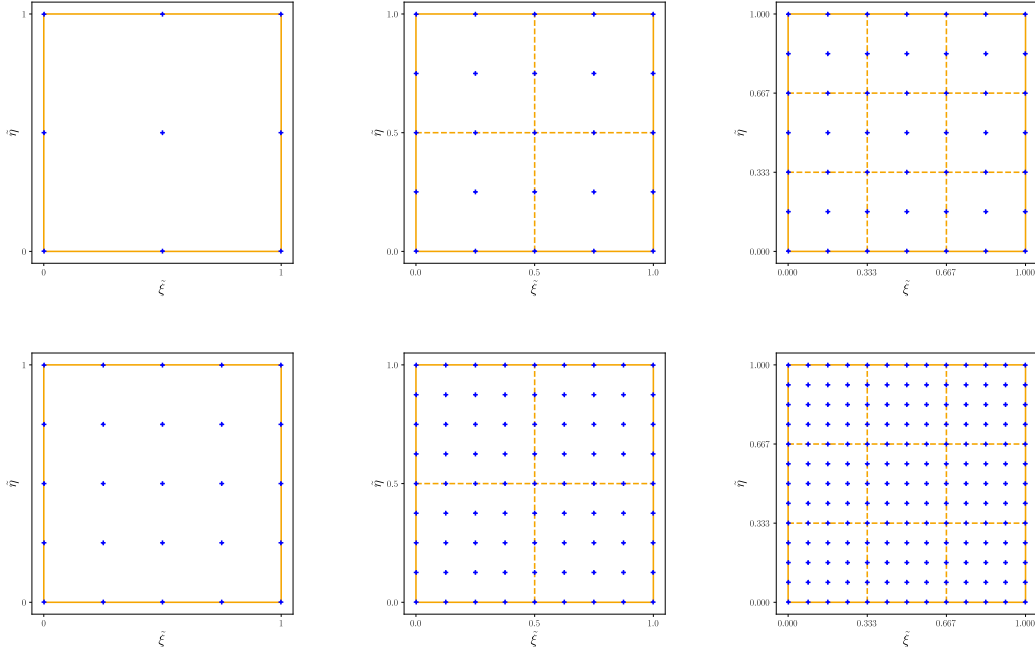


FIGURE 4.7 – Intégration de Newton-Cotes sur  $\tilde{\Omega}$  avec sous-éléments réguliers. Haut : ordre deux (Simpson 1/3). Bas : ordre quatre (Boole-Villarceau). Gauche : sans sous-division. Centre : avec une sous-division. Droite : avec deux sous-divisiones.

avec  $\mathbf{c}$  l'ensemble des points de collocation choisis. Nous pouvons ensuite, à partir des pressions moyennes définies aux points de contrôle, utiliser l'interpolation NURBS classique

$$p_{\text{NURBS}} = \sum_A R_A p_{n,A}, \quad (4.29)$$

afin de déterminer un effort de contact moyen en tout point de la coque potentiellement en contact. On souligne le fait que, contrairement à ce qui a été proposé dans [Temizer 2011, Tur 2009], cette pression moyenne n'est évaluée qu'une seule fois, après avoir complètement résolu le problème de contact. Cela permettra notamment de réduire le coût numérique, dans un contexte industriel, en s'affranchissant de l'évaluation de cette intégrale mortier, dite moyennée, à chaque itération de chargement, de géométrie et de statut.

**Remarque 4.1.** Cette moyenne locale sur les pressions de contact a également été utilisée pour évaluer les déformations et contraintes en tout point de la coque à partir de celles évaluées aux points d'intégration. Nous pouvons ainsi évaluer les déformations sur la surface à une hauteur  $z$  quelconque par la moyenne

$$\varepsilon_A = \frac{\sum_{\mathbf{c}} \omega(\mathbf{c}) |\det(\mathbf{J}(\mathbf{c}))| R_A(\mathbf{c}) \varepsilon(\mathbf{c})}{\sum_{\mathbf{c}} \omega(\mathbf{c}) |\det(\mathbf{J}(\mathbf{c}))| R_A(\mathbf{c})}, \quad \text{et l'interpolation } \varepsilon_{\text{NURBS}} = \sum_A R_A \varepsilon_A,$$



de même pour les contraintes

$$\sigma_A = \frac{\sum_{\mathbf{c}} \omega(\mathbf{c}) |\det(\mathbf{J}(\mathbf{c}))| R_A(\mathbf{c}) \sigma(\mathbf{c})}{\sum_{\mathbf{c}} \omega(\mathbf{c}) |\det(\mathbf{J}(\mathbf{c}))| R_A(\mathbf{c})}, \quad \text{et l'interpolation } \sigma_{\text{NURBS}} = \sum_A R_A \sigma_A.$$

En utilisant l'interpolation NURBS sur les pressions de contact, les déformations ou les contraintes, nous obtenons un champ solution régulier en tout point de la coque. Néanmoins, un effet d'aliasing, c'est à dire d'oscillations, peut naturellement apparaître dû à une interpolation  $C^p$  de grandeurs  $C^p$  par morceaux. ■

**Remarque 4.2.** Comme précisé en introduction du chapitre, l'évaluation de l'intégrale de contact par la méthode KTS introduit naturellement un couplage des conditions de contact aux points de contrôle du domaine esclave, pouvant engendrer des oscillations sur les efforts de contact. Il est également possible de mettre en place une méthode mortier en imposant les conditions de contact aux points de contrôle ou aux abscisses de Gréville correspondantes par exemple. Dans ce cas, les équations de contact (4.23) peuvent être modifiées et écrites après discrétisation NURBS par

$$\begin{cases} - \sum_{\mathbf{c}} \omega(\mathbf{c}) |\det(\mathbf{J}(\mathbf{c}))| \sum_A \chi(p_{n,A}) R_A(\mathbf{c}) p_{n,A} [\delta \mathbf{u}]_n^h(\mathbf{c}), & \forall \{\delta \mathbf{u}\} \in V_h = \prod_k V_h^k, \\ \sum_{\mathbf{c}} \omega(\mathbf{c}) |\det(\mathbf{J}(\mathbf{c}))| \frac{1}{\alpha_n} \sum_A R_A(\mathbf{c}) (\chi(p_{n,A}) p_{n,A} - \lambda_{n,A}) \sum_B R_B(\mathbf{c}) \delta \lambda_{n,B} = 0, & \forall \{\delta \lambda_n\} \in W_h^s, \end{cases}$$

avec  $[\delta \mathbf{u}]_n^h$  le saut normal discret des déplacements virtuels et  $p_{n,A} = \lambda_{n,A} + \alpha_n g_{n,A}$  nécessitant la définition de la fonction gap continu

$$g_{n,A} = \int_{\Omega_{c,0}^s} R_A g_n(\mathbf{c}) \, d\Omega_{c,0}^s.$$

Seitz et al. [Seitz 2016] ont montré que cette méthode ne permettait pas de découpler les conditions de contact aux points de contrôle avec une pression de contact qui peut être oscillante. Cette méthode dite primale-duale standard peut être interprétée comme un lumping puisque dans la pratique les conditions de contact sont quand même assurées de manière indépendante sur chaque point de contrôle [Temizer 2011, De Lorenzis 2011, Temizer 2012, De Lorenzis 2012]. Afin de respecter le découplage des conditions de contact aux points de contrôle, Seitz et al. proposent la construction de la base bi-orthogonale

$$\int_{\Omega_{c,0}^s} \phi_A R_B^s \, d\Omega_{c,0}^s = \delta_{AB} \int_{\Omega_{c,0}^s} R_B^s \, d\Omega_{c,0}^s,$$

avec  $\delta_{AB}$  le symbole de Kronecker classique. En pratique, cette base est construite par combinaisons linéaires des fonctions NURBS primales et les résultats montrent des pressions de contact sans oscillations [Seitz 2016]. Ces méthodes n'ont pas été retenues dans un cadre industriel car elles nécessitent une intégration précise des termes de contact, notamment pour évaluer la fonction gap continu, et donc le développement d'une segmentation mortier 3D. De plus, la méthode bi-orthogonale requiert l'évaluation d'une base duale supplémentaire ainsi qu'un post-traitement adapté des efforts de contact. ■

## 4.5 Aspects numériques pour le problème non linéaire

### 4.5.1 Méthode de type point-fixe pour la non-linéarité d'appariement

La non-linéarité d'appariement apparaît dans le cadre des grandes transformations. Dans ce contexte, l'opérateur de projection  $\mathbf{P}_x$  et la normale  $\mathbf{n}^m$  seront dépendants du déplacement et la distance normale de contact s'écrit

$$g_n = (\mathbf{x}^s - (\mathbf{P}_x(\mathbf{x}^s))(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n}^m(\mathbf{u}).$$

En d'autres termes nous ne pouvons pas connaître à priori le couple de points

$$(\mathbf{x}^s(\mathbf{c}), \mathbf{P}_x(\mathbf{x}^s(\mathbf{c}))) = (\mathbf{x}^s(\mathbf{c}), \mathbf{x}^m(\bar{\mathbf{c}}))$$

qui vont entrer en contact sans connaître à priori le champ de déplacement. Ce problème non linéaire peut être résolu par une stratégie itérative de type point-fixe.

Le principe est de faire une première projection (algorithme du point le plus proche) sur la configuration initiale et d'obtenir une première solution approchée. Cette solution servira à prédire le déplacement par (4.26) puis à actualiser fictivement la géométrie afin de déterminer un nouvel appariement jusqu'à l'itération suivante et ainsi de suite. La convergence sera obtenue si l'écart entre les positions des points projetés  $\mathbf{x}^m(\bar{\mathbf{c}})$  et l'écart de normale entre deux itérations successives sont inférieurs à une tolérance fixée. On rappelle que l'actualisation de la normale de contact  $\mathbf{n}^m$  au cours des itérations d'appariement sera effectuée en utilisant la base locale de l'élément coque après actualisation fictive de la géométrie. La méthode est présentée succinctement sur l'Algorithme 1.

**Algorithm 1:** Fixed-point algorithm for unilateral frictionless contact problems.

<p><b>1: Inputs:</b></p> <p>2: <math>\varepsilon_P</math>: tolerance on projected points positions.</p> <p>3: <math>\varepsilon_n</math>: tolerance on contact normals.</p> <p><b>4: Initialization:</b></p> <p>5: Compute first contact knots pairs <math>(\mathbf{x}^s(\mathbf{c}), \mathbf{x}^m(\bar{\mathbf{c}}))^0</math> and normals <math>\mathbf{n}^{m,0}(\bar{\mathbf{c}})</math>, <math>\forall \mathbf{c} \in \Omega_{c,0}^s</math>.</p> <p>6: <b>Loop on:</b> <i>geometry</i> <math>j</math>. <span style="float: right;">// Fixed-point algorithm.</span></p> <p>7: Consider <math>(\mathbf{x}^s(\mathbf{c}), \mathbf{x}^m(\bar{\mathbf{c}}))^j</math> and <math>\mathbf{n}^{m,j}(\bar{\mathbf{c}})</math>.</p> <p>8: Solve the mechanical problem to find <math>\mathbf{u}^{j+1}</math>, <math>\lambda_{MP}^{j+1}</math> and <math>\lambda_C^{j+1}</math>.</p> <p>9: Compute <math>(\mathbf{x}^s(\mathbf{c}), \mathbf{x}^m(\bar{\mathbf{c}}))^{j+1}</math> and <math>\mathbf{n}^{m,j+1}(\bar{\mathbf{c}})</math> after a temporary update of the geometry <math>(\mathbf{X} + \mathbf{u})</math>.</p> <p>10: <b>If</b> <math>\frac{\ \mathbf{x}^{m,j+1}(\bar{\mathbf{c}}) - \mathbf{x}^{m,j}(\bar{\mathbf{c}})\ }{\ \mathbf{x}^{m,j+1}(\bar{\mathbf{c}})\ } &gt; \varepsilon_P</math> or <math>\frac{\ \mathbf{n}^{m,j+1}(\bar{\mathbf{c}}) - \mathbf{n}^{m,j}(\bar{\mathbf{c}})\ }{\ \mathbf{n}^{m,j+1}(\bar{\mathbf{c}})\ } &gt; \varepsilon_n</math> <b>then:</b></p> <p>11:     <math>j \leftarrow j + 1</math>.</p> <p>12: <b>Else:</b></p> <p>13:     <b>Exit</b> loop on geometry <math>j</math>.</p>
--

### 4.5.2 Méthode des statuts traitant la non-linéarité de contact

Le problème de contact est non linéaire au sens où nous ne connaissons pas, à priori, la surface de la coque qui va être réellement en contact. En d'autres termes, nous ne pouvons pas connaître à l'avance la valeur de  $\chi(p_n(\mathbf{c}))$ , c'est à dire si les points de collocation seront effectivement contactants ou non. Afin de traiter ce problème, nous adoptons une stratégie itérative de type prédiction-correction appelée méthode des statuts ou méthode des contraintes actives [Dumont 1995, Ben Dhia 2002a, Ben Dhia 2002b]. Cette méthode a notamment été développée dans le Code\_Aster et est en particulier détaillée dans la note d'Abbas [Abbas 2019].

Le principe de la méthode est, dans un premier temps, d'associer un statut au point de collocation en fonction de la valeur de  $\chi(p_n(\mathbf{c}))$ . On prédit le statut de chaque point de collocation, on effectue la résolution du système linéaire classique  $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$  puis on vérifie si le statut des points de collocation a changé. Le schéma itératif est convergé une fois que le statut de l'ensemble des points de collocation demeure inchangé. La méthode converge au sens de Newton (en un nombre d'itérations inférieur ou égal à deux fois le nombre maximal de liaisons) si un seul statut, celui qui viole le plus les conditions de contact, est changé à la fois, pour plus de détails voir [Abbas 2019, Hoppe 2006, Wong 2011]. Dans notre cas, nous utiliserons l'approche de [Zarroug 2002] qui consiste à changer l'ensemble des statuts violant les contraintes de contact. L'algorithme est ainsi plus rapide, adapté au contexte industriel, mais la convergence n'est pas assurée car certains statuts, en particulier sur les bords de la région de contact, peuvent entrer dans un état cyclique. Si tel est le cas il est naturellement possible de ne changer qu'un seul statut à la fois afin de s'assurer de la convergence du schéma. Cette méthode est résumée sur l'Algorithme 2.

Avec cette résolution de type prédiction-correction, le problème non linéaire de contact se ramène à une succession de problèmes linéaires à résoudre jusqu'à convergence des statuts. Les écritures matricielles des problèmes décrits dans la Section 4.3.7 peuvent désormais être présentées.

**Algorithm 2:** Active-set algorithm for unilateral frictionless contact problems (step 8 of Algorithm 1).

```

1: Initialization:
2:   First prediction of status  $\chi^0(\mathbf{c})$ .
   // 1D array with values equal to 1 for contacting points and 0 otherwise.
3: Loop on: contact status  $k$ . // Active-set algorithm.
4:   Consider the status prediction  $\chi^k(\mathbf{c})$ .
5:   Solve the mechanical problem to find  $\mathbf{u}^{k+1}$ ,  $\lambda_{\text{MP}}^{k+1}$  and  $\lambda_{\text{C}}^{k+1}$ .
6:   Loop on: collocation points  $c \in \mathbf{c}$ . // Compute new status  $\chi^{k+1}(\mathbf{c})$ .
7:     If  $\chi^k(c) = 0$  then: // Check normal gap for non-contacting points.
8:       If  $g_n^{k+1}(c) < 0$  then:
9:          $\chi^{k+1}(c) = 1$ .
10:      Else:
11:         $\chi^{k+1}(c) = 0$ .
12:      Else: // Check normal pressure for contacting points.
13:        If  $p_n^{k+1}(c) < 0$  then:
14:           $\chi^{k+1}(c) = 1$ .
15:        Else:
16:           $\chi^{k+1}(c) = 0$ .
17:   If  $\chi^{k+1}(\mathbf{c}) \neq \chi^k(\mathbf{c})$  then:
18:      $k \leftarrow k + 1$ .
19:   Else:
20:     Exit status loop  $k$ .

```

### 4.5.3 Écritures matricielles du contact multipatch en grandes transformations

Nous avons présenté trois méthodes qui permettent d'appliquer les conditions de contact. La méthode duale se distingue des deux autres car, avec la démarche proposée, elle nécessite la vérification de l'inégalité variationnelle (4.14) et n'est donc pas compatible en l'état avec la méthode des statuts. Dans la suite de ce chapitre nous nous attacherons donc à résoudre le problème de contact par la méthode primale ou augmentée.

Nous commençons par rappeler l'écriture matricielle de la forme bilinéaire  $a(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$ , de la partie primale du couplage multipatch  $b(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$  ainsi que de la partie duale du couplage multipatch  $c(\lambda_{\text{MP}}, \delta \mathbf{u})$ . La variation incrémentale de  $a(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$  est toujours notée  $\mathbf{K}_t$  et correspond à la matrice de rigidité tangente de la structure composée d'une partie matérielle  $\mathbf{K}_{t1}$  et de deux parties géométriques  $\mathbf{K}_{\sigma 1}$  et  $\mathbf{K}_{\sigma 2}$  tel que  $\mathbf{K}_t = \mathbf{K}_{t1} + \mathbf{K}_{\sigma 1} + \mathbf{K}_{\sigma 2}$  détaillée par l'expression (3.24) du deuxième chapitre. La partie primale du couplage multipatch  $b(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$  est composée d'une partie dite d'auto-couplage notée  $\mathbf{K}_{\text{MP}}$  ainsi que d'une partie reliant les fonctions de forme des

deux patches à lier notée  $\mathbf{C}_{\text{MP}}$ . Enfin, la partie duale du couplage multipatch  $c(\boldsymbol{\lambda}_{\text{MP}}, \delta \mathbf{u})$  sera notée  $\mathbf{C}_{\lambda\text{MP}}$ . En omettant pour le moment le problème de contact, on rappelle que le problème multipatch en grandes transformations consiste à résoudre itérativement, pour les domaines maître et esclave, le système (3.36) réécrit

$$\left[ \mathbf{K}_t \oplus \mathbf{K}_{\text{MP}} \oplus \mathbf{C}_{\text{MP}} \oplus \mathbf{C}_{\lambda\text{MP}} \right] \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} & \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{F}_{\text{ext}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T.$$

Si on reprend l'exemple d'application pour deux patches  $k = \{1, 2\}$  à coupler présenté dans l'Annexe 2.C du premier chapitre, on obtient pour le couplage augmenté avec traitement simplifié des coins mortiers un système linéaire donné par

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_t^1 + \mathbf{K}_{\text{MP}}^1 & \mathbf{C}_{\text{MP}}^1 & (\mathbf{C}_{\lambda\text{MP}}^1)^T \\ \mathbf{C}_{\text{MP}}^2 & \mathbf{K}_t^2 + \mathbf{K}_{\text{MP}}^2 & (\mathbf{C}_{\lambda\text{MP}}^2)^T \\ \mathbf{C}_{\lambda\text{MP}}^1 & \mathbf{C}_{\lambda\text{MP}}^2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^1 \\ \Delta \mathbf{u}^2 \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}_{\text{MP}}^{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{F}_{\text{ext}}^1 \\ \Delta \mathbf{F}_{\text{ext}}^2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Nous souhaitons alors expliciter l'écriture matricielle du terme de contact et, le cas échéant, celle de la loi de contact dualisée. On rappelle que nous avons discrétisé les multiplicateurs de contact par (4.22). Dans ce qui va suivre, le terme  $\langle \chi(p_n) \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega_{c,0}^s)}$  désigne le produit intérieur des termes de contacts actifs par rapport à la surface de contact esclave en configuration initiale tel que pour deux fonctions  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  quelconques on ait

$$\langle \chi(p_n) \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_{L^2(\Omega_{c,0}^s)} = \sum_{\mathbf{c}} \omega(\mathbf{c}) |\det(\mathbf{J}(\mathbf{c}))| \chi(p_n(\mathbf{c})) \mathbf{f}(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{c}).$$

Ainsi, pour la méthode primale-duale, il est évident que le terme  $\langle (1 - \chi(p_n)) \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega_{c,0}^s)}$  fera référence aux termes de contact inactifs.

**Méthode primale.** En utilisant l'interpolation (4.21) dans le terme de contact (4.11), on obtient les six matrices de contact

$$\begin{cases} K_{c,(j,p)}^s = \alpha_C \left\langle \chi(p_n) \mathbf{R}_j^s \cdot \mathbf{n}^m, \mathbf{R}_p^s \cdot \mathbf{n}^m \right\rangle_{L^2(\Omega_{c,0}^s)}, \\ K_{c,(j,p)}^m = \alpha_C \left\langle \chi(p_n) \mathbf{R}_j^m \cdot \mathbf{n}^m, \mathbf{R}_p^m \cdot \mathbf{n}^m \right\rangle_{L^2(\Omega_{c,0}^s)}, \\ C_{c,(j,p)}^s = -\alpha_C \left\langle \chi(p_n) \mathbf{R}_j^s \cdot \mathbf{n}^m, \mathbf{R}_p^m \cdot \mathbf{n}^m \right\rangle_{L^2(\Omega_{c,0}^s)}, \\ C_{c,(j,p)}^m = -\alpha_C \left\langle \chi(p_n) \mathbf{R}_j^m \cdot \mathbf{n}^m, \mathbf{R}_p^s \cdot \mathbf{n}^m \right\rangle_{L^2(\Omega_{c,0}^s)}, \\ F_{G,(p)}^s = -\alpha_C \left\langle \chi(p_n) (\mathbf{X}^s - \mathbf{X}^m) \cdot \mathbf{n}^m, \mathbf{R}_p^s \cdot \mathbf{n}^m \right\rangle_{L^2(\Omega_{c,0}^s)}, \\ F_{G,(p)}^m = \alpha_C \left\langle \chi(p_n) (\mathbf{X}^s - \mathbf{X}^m) \cdot \mathbf{n}^m, \mathbf{R}_p^m \cdot \mathbf{n}^m \right\rangle_{L^2(\Omega_{c,0}^s)}. \end{cases} \quad (4.30)$$

On remarque que par symétrie du produit dans  $L^2$  on a  $\mathbf{C}_c^s = (\mathbf{C}_c^m)^T$ . Le problème de contact, avec couplage multipatch par lagrangien augmenté simplifié, par une approche primale en grandes transformations se résume à la résolution incrémentale (telle que détaillée sur

l'Algorithme 3) du système linéaire  $\mathbf{K}\Delta\mathbf{U} = \Delta\mathbf{F}$  avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K} = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_t^s \oplus \mathbf{K}_c^s \oplus \mathbf{K}_{MP}^s \oplus \mathbf{C}_{MP}^s) & (\mathbf{C}_{\lambda MP}^s)^T & & & \\ & \mathbf{C}_{\lambda MP}^s & & & \\ & \mathbf{C}_c^s & & (\mathbf{K}_t^m \oplus \mathbf{K}_c^m \oplus \mathbf{K}_{MP}^m \oplus \mathbf{C}_{MP}^m) & (\mathbf{C}_{\lambda MP}^m)^T \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{C}_{\lambda MP}^m & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \Delta\mathbf{U} = [\Delta\mathbf{u}^s \quad \Delta\lambda_{MP}^s \quad \Delta\mathbf{u}^m \quad \Delta\lambda_{MP}^m]^T, \\ \Delta\mathbf{F} = [(\Delta\mathbf{F}_{\text{ext}}^s + \mathbf{F}_G^s) \quad \mathbf{0} \quad (\Delta\mathbf{F}_{\text{ext}}^m + \mathbf{F}_G^m) \quad \mathbf{0}]^T. \end{array} \right. \quad (4.31)$$

**Méthode primale-duale.** En introduisant les interpolations (4.21) et (4.22) dans le terme de contact (4.19) et la loi de contact dualisée (4.20), on écrit les dix termes de contact (4.32), les six qui proviennent de la partie primale déjà présentée en (4.30) et les quatre nouvelles

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{\lambda C, (j,p)}^s = \langle \chi(p_n) R_j^s, \mathbf{R}_p^s \cdot \mathbf{n}^m \rangle_{L^2(\Omega_{c,0}^s)}, \\ C_{\lambda C, (j,p)}^m = - \langle \chi(p_n) R_j^s, \mathbf{R}_p^m \cdot \mathbf{n}^m \rangle_{L^2(\Omega_{c,0}^s)}, \\ F_{\lambda G, (j)}^s = - \langle \chi(p_n) (\mathbf{X}^s - \mathbf{X}^m) \cdot \mathbf{n}^m, R_j^s \rangle_{L^2(\Omega_{c,0}^s)}, \\ D_{\lambda C, (j,p)}^s = \frac{-1}{\alpha_C} \langle (1 - \chi(p_n)) R_j^s, R_p^s \rangle_{L^2(\Omega_{c,0}^s)}. \end{array} \right. \quad (4.32)$$

Par conséquent le problème de contact, avec couplage multipatch par lagrangien augmenté simplifié, par une approche primale-duale en grandes transformations se résume à la résolution incrémentale du système linéaire  $\mathbf{K}\Delta\mathbf{U} = \Delta\mathbf{F}$  avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K} = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_t^s \oplus \mathbf{K}_c^s \oplus \mathbf{K}_{MP}^s \oplus \mathbf{C}_{MP}^s) & (\mathbf{C}_{\lambda MP}^s)^T & & & & & \\ & \mathbf{C}_{\lambda MP}^s & & & & & \\ & \mathbf{C}_c^s & & (\mathbf{K}_t^m \oplus \mathbf{K}_c^m \oplus \mathbf{K}_{MP}^m \oplus \mathbf{C}_{MP}^m) & (\mathbf{C}_{\lambda MP}^m)^T & (\mathbf{C}_{\lambda C}^m)^T & \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{C}_{\lambda MP}^m & & \mathbf{0} & \\ & \mathbf{C}_{\lambda C}^s & & \mathbf{C}_{\lambda C}^m & & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{\lambda C}^s \end{bmatrix}, \\ \Delta\mathbf{U} = [\Delta\mathbf{u}^s \quad \Delta\lambda_{MP}^s \quad \Delta\mathbf{u}^m \quad \Delta\lambda_{MP}^m \quad \Delta\lambda_C^s]^T, \\ \Delta\mathbf{F} = [(\Delta\mathbf{F}_{\text{ext}}^s + \mathbf{F}_G^s) \quad \mathbf{0} \quad (\Delta\mathbf{F}_{\text{ext}}^m + \mathbf{F}_G^m) \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{F}_{\lambda G}^s]^T. \end{array} \right. \quad (4.33)$$

L'Algorithme 3 présente le schéma de résolution numérique de ce problème en utilisant la méthode de Newton-Raphson décrite dans le chapitre portant sur les grandes transformations (étape 5 de l'Algorithme 2 et boucle 14 de l'Algorithme 3). Sous l'hypothèse des petites perturbations, cet algorithme peut être largement simplifié en supprimant la boucle 9 portant sur les incréments de chargement et la boucle 10 sur la géométrie de contact. De plus, la boucle 14 du Newton-Raphson sera alors remplacée par la résolution directe du système  $\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}$ .

**Algorithm 3:** General steps for the resolution of a multipatch contact problem for shell structures undergoing finite deformations in quasi-static.

```

1: Inputs:
2:   nIncF. // Number of loading increments.
3:    $\varepsilon_{NR}$ ,  $\varepsilon_P$  and  $\varepsilon_n$ . // Tolerance: global equilibrium, projected points and normals.
4:   maxIter. // Maximum number of iterations for the Newton-Raphson loop.
5: Initialization:
6:   Compute first contact knots pairs  $(\mathbf{x}^s(\mathbf{c}), \mathbf{x}^m(\bar{\mathbf{c}}))^0$  and normals  $\mathbf{n}^{m,0}(\bar{\mathbf{c}})$ ,  $\forall \mathbf{c} \in \Omega_{c,0}^s$ .
7:   First prediction of status  $\chi^0(\mathbf{c})$ .
8:   Compute and store coupling arrays  $(\mathbf{K}_{MP}, \mathbf{C}_{MP}, \mathbf{C}_{\lambda MP})$  for the augmented method.
9: Loop on: force increment  $i \in \{0, \dots, nIncF - 1\}$ . // Total lagrangian formulation.
10: Loop on: geometry  $j$ . // Fixed-point algorithm.
11:   Recover contact knots pairs  $(\mathbf{x}^s(\mathbf{c}), \mathbf{x}^m(\bar{\mathbf{c}}))^j$  and normals  $\mathbf{n}^{m,j}(\bar{\mathbf{c}})$ .
12:   Loop on: contact status  $k$ . // Active-set algorithm.
13:     Recover the status prediction  $\chi^k(\mathbf{c})$  and compute contact arrays (4.30) and (4.32).
14:     Loop on: non-linear displacements and rotations  $l$ . // Newton-Raphson.
15:       Solve the linear problem  $\mathbf{K}^l \Delta \mathbf{U}^l = \Delta \mathbf{F}^l$  corresponding to (4.33).
16:       If  $l < \text{maxIter}$  and  $\|\mathbf{F}_{\text{int}}^l - \mathbf{F}_{\text{ext}}^l\| > \varepsilon_{NR} \|\mathbf{F}_{\text{ext}}^l\|$  then:
17:         |  $l \leftarrow l + 1$ .
18:       Else:
19:         | Exit non-linear loop  $l$  and return  $\Delta \mathbf{U} = \Delta \mathbf{U}^l$ .
20:     Compute  $\chi^{k+1}(\mathbf{c})$  after intermediate projection  $(\mathbf{x}^s(\mathbf{c}), \mathbf{x}^m(\bar{\mathbf{c}}))^{k+1}$  and  $\mathbf{n}^{m,k+1}(\bar{\mathbf{c}})$  based on a temporary update of the geometry  $(\mathbf{X} + \mathbf{U} + \Delta \mathbf{U})$ .
21:     If  $\chi^{k+1}(\mathbf{c}) \neq \chi^k(\mathbf{c})$  then:
22:       |  $k \leftarrow k + 1$ .
23:     Else:
24:       | Exit status loop  $k$ .
25:   Set  $\mathbf{x}^{m,j+1}(\bar{\mathbf{c}}) \leftarrow \mathbf{x}^{m,k+1}(\bar{\mathbf{c}})$  and  $\mathbf{n}^{m,j+1}(\bar{\mathbf{c}}) \leftarrow \mathbf{n}^{m,k+1}(\bar{\mathbf{c}})$ .
26:   If  $\frac{\|\mathbf{x}^{m,j+1}(\bar{\mathbf{c}}) - \mathbf{x}^{m,j}(\bar{\mathbf{c}})\|}{\|\mathbf{x}^{m,j+1}(\bar{\mathbf{c}})\|} > \varepsilon_P$  or  $\frac{\|\mathbf{n}^{m,j+1}(\bar{\mathbf{c}}) - \mathbf{n}^{m,j}(\bar{\mathbf{c}})\|}{\|\mathbf{n}^{m,j+1}(\bar{\mathbf{c}})\|} > \varepsilon_n$  then:
27:     |  $j \leftarrow j + 1$ .
28:   Else:
29:     | Exit loop on geometry  $j$ .
30:    $\mathbf{U} = \mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}$ .
31:   If  $i < nIncF$  then:
32:     |  $i \leftarrow i + 1$ .
33:   Else:
34:     | Exit loop on force increment  $i$  and return  $\{\mathbf{U}\}$ .

```

## 4.6 Résultats numériques

La validation numérique porte sur le contact sans frottement de coques épaisses multipatch déformables. Pour cela, un développement sous Python en association avec Numba [Lam 2015] a été mis en place. L'ensemble des matrices sont stockées au format sparse CSR avec SciPy [Jones 2001] et la résolution directe des systèmes linéaires se fera à partir de la bibliothèque Pardiso [Schenk 2001]. On rappelle également que l'appariement des domaines potentiellement en contact se fait par l'algorithme L-BFGS-B [Byrd 1995, Zhu 1997]. La nomenclature des éléments coques est identique aux résultats numériques des chapitres précédents. À titre d'exemple, l'élément RMP2C1 concerne une plaque de type Reissner-Mindlin d'ordre deux et régularité  $C^1$  avec intégration complète alors que l'élément RMS3C2R correspond à une coque de type Reissner-Mindlin d'ordre trois et régularité  $C^2$  avec intégration réduite. Le premier exemple traité permettra de valider de manière précise la méthode de contact retenue et de visualiser les éventuelles oscillations sur les efforts de contact. Par la suite, des exemples sur des géométries plus complexes puis en grandes transformations seront proposés. Les paramètres de simulation seront détaillés pour chaque exemple traité.

### 4.6.1 Contact hertzien en 2D

Ce premier exemple doit permettre de valider les différentes méthodes d'application des conditions de contact de manière précise et pertinente. Sachant qu'aucun exemple de référence n'a pu être trouvé dans la littérature concernant le contact entre des coques épaisses, le modèle hertzien classique a dû être envisagé. Il s'agit donc d'un contact qui se fera sur les arêtes des plaques en contact, comme précédemment détaillé avec la discrétisation edge-to-edge (ETE) sur la Figure 4.3 à droite. La géométrie, les propriétés matériaux et le chargement sont décrits sur la Figure 4.8.

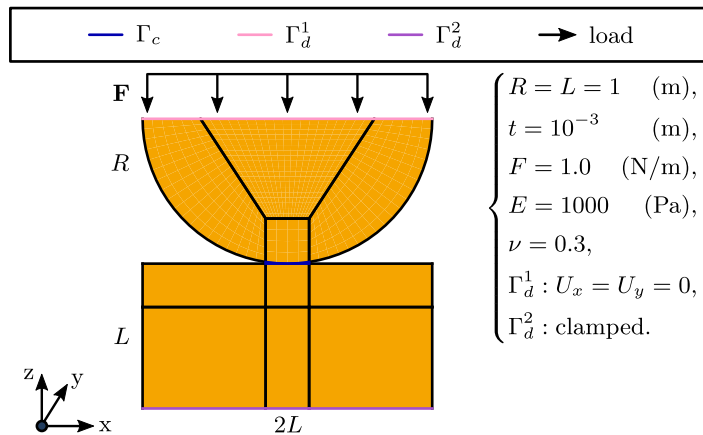


FIGURE 4.8 – Géométrie et propriétés pour un contact hertzien en 2D. Construction d'une géométrie à deux corps et dix patches géométriquement conformes.

Un demi-disque déformable, de rayon  $R = 1$  (m) et composé de quatre patches, est en contact



avec un plan déformable, de longueur  $2L = R$  et composé de six patches. Les deux structures sont constituées du même matériau élastique, homogène et isotrope. La partie inférieure du plan est encastée sur  $\Gamma_d^2$  alors que, pour éviter des déplacements hors-plan et des glissements au contact, la partie supérieure  $\Gamma_d^1$  du demi-disque a ses degrés de liberté  $U_x$  et  $U_y$  bloqués. L'épaisseur des plaques  $t$  est donnée à titre indicatif mais est choisie suffisamment élevée pour éviter des déplacements hors-plan. Un effort linéique vertical est appliqué sur la partie supérieure du demi-disque afin d'avoir une force totale de  $P = (2R) \cdot F = 2$  (N) suffisamment faible pour permettre une comparaison avec les résultats analytiques (chargement et propriétés matériaux semblables à ceux utilisés par Lu [Lu 2011]). On précise également que les valeurs de références, voir par exemple [Johnson 1987], sont obtenues pour un problème 3D, éventuellement ramené en 2D dans l'hypothèse de déformations ou contraintes planes. Pour l'exemple numérique, il s'agit de plaques en contraintes planes composées d'énergies de membrane, flexion et cisaillement. La comparaison avec les valeurs analytiques ne sera donc donnée qu'à titre indicatif afin de vérifier la cohérence des résultats obtenus. La demi-largeur de contact doit être de  $a = \sqrt{4PR/\pi E^*}$ , environ 0.068 (m) pour ce problème, avec  $E^* = E/2(1 - \nu^2)$ . La pression de contact maximale est évaluée par  $p_n^{\max} = 2P/(\pi a) \simeq 18.7$  (Pa). Les résultats IGA seront également comparés à un résultat de référence FEM classique, éléments en contraintes planes CPS8R d'Abaqus, utilisant leur méthode par défaut pour assurer les conditions de contact. Une illustration des contraintes selon l'axe de la normale au contact est donnée sur la Figure 4.9. De manière qualitative, le résultat attendu  $\sigma_{zz}^{\max} = -p_n^{\max}$  est retrouvé pour les méthodes IGA et FEM avec des éléments de contact de tailles semblables  $h \simeq 0.0166$  (m).

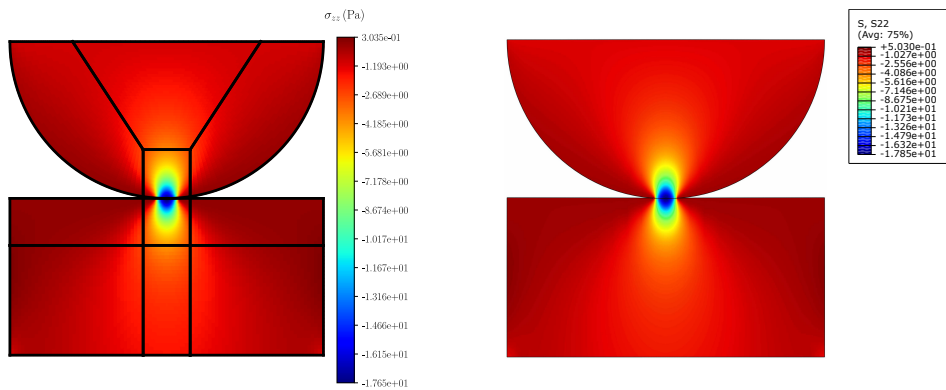


FIGURE 4.9 – Contraintes  $\sigma_{zz}$  selon l'axe de contact. Gauche : IGA et lagrangien augmenté - RMP2C1. Droite : FEM et Abaqus - CPS8R.

Avant de tracer les différentes pressions de contact obtenues, on précise les options numériques choisies et notamment utilisées pour obtenir les contraintes de la Figure 4.9.

**Paramètres de simulation :**

- étude linéaire en petits déplacements et petites déformations (Algorithme 3 simplifié),

- méthode multipatch par lagrangien augmenté simplifié avec intégration complète ( $\alpha_{MP} = 10^3 \cdot E$ ),
- intégration complète des différents termes d'énergie avec normale exacte,
- intégration dans l'épaisseur avec deux points de Gauss,
- méthode de contact primale ( $\alpha_C = 25 \cdot E$ ) où primale-duale ( $\alpha_C = 10^{-3} \cdot E$ ),
- utilisation de la normale exacte en 2D pour le contact.

On s'intéresse dans un premier temps à comparer le traitement du contact par la méthode primale et par la méthode du lagrangien augmenté. En utilisant une intégration gaussienne complète pour les termes de contact, ces deux méthodes sont comparées pour trois maillages distincts sur la Figure 4.10. Pour la méthode primale, le facteur de pénalité est fixé à  $\alpha_C = 25 \cdot E$  alors qu'il vaut  $\alpha_C = 10^{-3} \cdot E$  pour l'approche primale-duale. Les pressions normales de contact obtenues aux points d'intégration  $p_{KTS}$  sont en bleues et celles post-traitées  $p_{NURBS}$ , par les relations (4.28) et (4.29), sont en rouge (avec les valeurs  $p_{n,A}$  aux points de contrôle représentées par des ronds rouges).

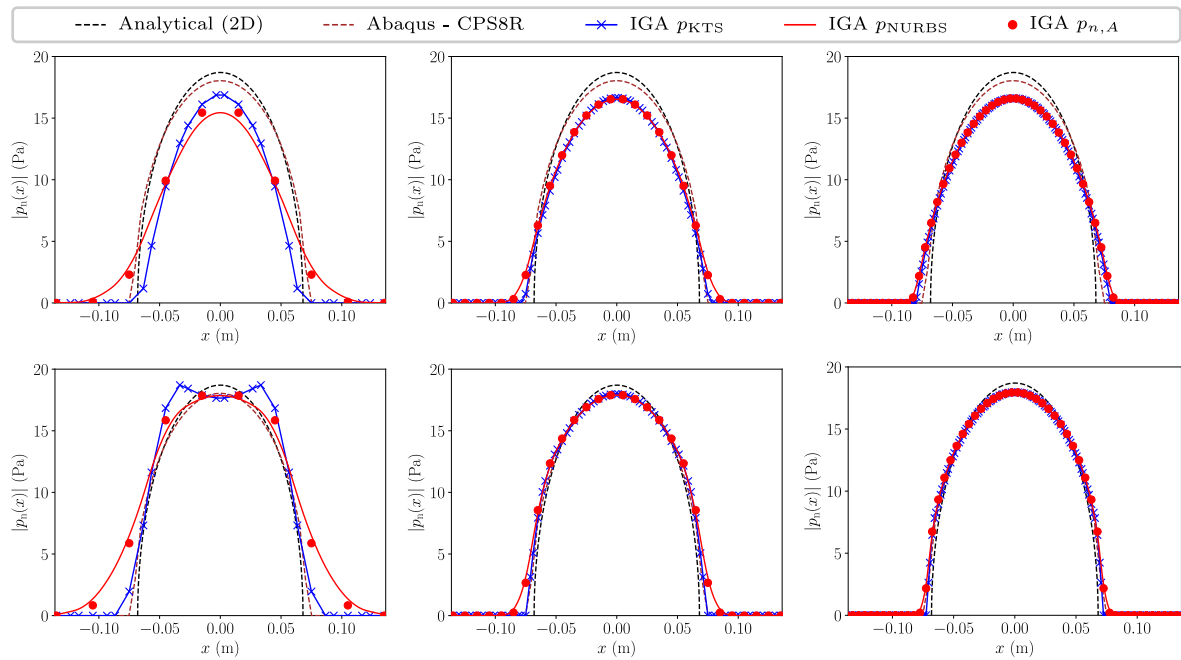


FIGURE 4.10 – Pression normale de contact pour un problème hertzien 2D avec intégration gaussienne complète et élément RMP2C1 (les ronds rouges représentent les pressions moyennées pour chaque point de contrôle). Haut : méthode primale. Bas : méthode primale-duale. Gauche à droite : paramètre de maillage  $h = 0.1$  (m),  $h \simeq 0.0333$  (m) et  $h \simeq 0.0166$  (m).

Afin de compléter le cadre de l'étude, on montre également l'écart sur les pressions normales de contact entre Abaqus et notre solution IGA pour les approches primale et augmenté sur la Figure 4.11. Ces écarts sont obtenus en utilisant l'interpolation linéaire de la Figure 4.10.

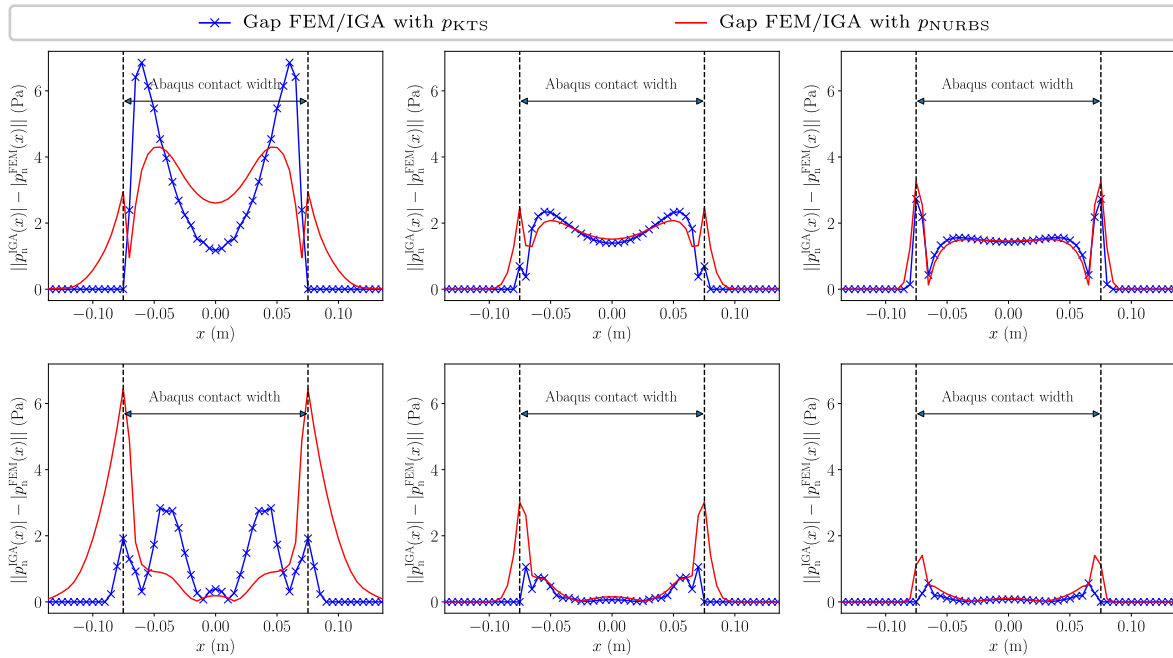


FIGURE 4.11 – Écart sur la pression normale de contact pour un problème hertzien 2D entre la solution FEM issue d’Abaqus (élément CPS8R) et notre solution IGA (élément RMP2C1). L’écart avec les pressions aux points d’intégration  $p_{KTS}$  est en bleu et celui avec les pressions post-traitées  $p_{NURBS}$  est en rouge. Haut : méthode primale. Bas : méthode primale-duale. Gauche à droite : paramètre de maillage  $h = 0.1$  (m),  $h \simeq 0.0333$  (m) et  $h \simeq 0.0166$  (m).

Comme attendu, la méthode primale ne permet pas de retrouver précisément le profil de pression ni même la pression maximale au centre de la zone de contact. La régularisation des lois de contact est une hypothèse trop forte dans le cadre d’un contact hertzien. Pour améliorer la qualité des résultats, il serait possible d’augmenter le facteur de pénalité. Néanmoins, deux problèmes se posent si ce facteur est trop élevé. Comme précisé dans les sections précédentes, un facteur de pénalité élevé peut entraîner une solution en pression oscillante ce qui peut néanmoins être évité grâce au post-traitement mis en place. Le second point concerne la convergence de la méthode des statuts et donc la robustesse de l’algorithme. Sachant que pour des raisons de coût numérique, notamment sur des géométries complexes, l’ensemble des statuts est modifié à chaque itération, la convergence au sens de Newton n’est pas assurée. Ainsi, il est apparu que pour la méthode primale avec un facteur de pénalité élevé, le statut des points d’intégration au bord de la zone de contact pouvait entrer dans un état cyclique et empêcher la convergence de l’algorithme. À l’inverse, la méthode primale-duale permet de retrouver les profils et valeurs de pression attendus, notamment par rapport à Abaqus. En plus d’être indépendante du coefficient de pénalité choisi, l’approche augmentée s’est montrée robuste concernant la convergence des statuts et ce même en modifiant l’ensemble des statuts à chaque itération. Pour des raisons de précision et robustesse, la méthode augmentée est donc à privilégier. Pour le maillage le plus grossier, on souligne le caractère oscillatoire de la pression

de contact, avec l'approche primale-duale, causé par le couplage des conditions de contact qui ne sont pas indépendantes en chaque point de contrôle et qui sont soumises au support élargi des fonctions NURBS en IGA. On remarque également le fait que le support sur  $p + 1$  éléments des NURBS introduit naturellement un élargissement erroné de la zone de contact pour la pression  $p_{\text{NURBS}}$  post-traitée, ce qui peut être considéré comme négligeable pour des maillages fins mais pas pour des tailles d'élément  $h$  plus importantes.

Afin de visualiser le couplage des conditions de contact pour l'approche primale-duale, on propose de représenter la pression normale de contact pour des NURBS d'ordre  $p = 3$  à  $p = 5$  et pour quatre méthodes d'intégration des termes de contact sur la Figure 4.12 avec une taille de maillage au contact fixe  $h = 0.04$  (m).

On souligne dans un premier temps la vérification numérique de la condition inf-sup, pour les quatre méthodes d'intégration présentées, grâce à un nombre de points de collocation suffisant. Aucun mode sablier n'a été observé pour l'ensemble des résultats obtenus. Les oscillations obtenues après intégration gaussienne complète ne sont pas atténuées pour des intégrations de Newton-Cotes d'ordre deux et quatre avec une sous-division (résultat également observé sans sous-division). Ainsi, augmenter le nombre de points de collocation pour le contact ne permet pas de régulariser les pressions de contact alors que le coût numérique est supérieur. L'intérêt des méthodes de type Newton-Cotes avec sous-divisions régulières serait de proposer une localisation et un nombre de points d'intégration ajustables afin d'améliorer la convergence de la méthode des statuts.

L'intégration réduite en revanche permet de limiter les oscillations issues du couplage des différents termes de contact. En plus de diminuer le coût numérique, la quadrature gaussienne réduite permet, grâce à un nombre de points de Gauss restreint, de s'approcher d'un découplage des conditions de contact. La convergence de la méthode des statuts dépend fortement du nombre de points d'intégration. Pour des maillages fins ou un ordre  $p$  élevé, les variations de statut sont moins probables que pour une intégration complète. En revanche, si le nombre de points d'intégration est trop faible (maillage grossier et/ou NURBS d'ordre faible), la qualité des solutions obtenues peut s'avérer insuffisante et la convergence de la méthode des statuts peut être plus délicate en s'accordant sur un statut erroné, en particulier aux bords du contact.

Le post-traitement de la pression de contact a permis de s'affranchir du couplage des conditions de contact pour la méthode augmenté mais induit naturellement un élargissement de la zone de contact si le maillage est grossier. L'efficacité de l'intégration réduite est montrée sur la Figure 4.13 qui permet de la comparer à la quadrature complète avec un maillage fin. Sur cet exemple, le nombre de points d'intégration est suffisamment élevé pour permettre d'obtenir la convergence des statuts avec la quadrature réduite (et naturellement la quadrature complète). Par conséquent, on observe que la solution obtenue avec une intégration réduite est identique à celle issue d'une intégration complète mais pour un coût numérique inférieur.

On conclut cette étude en donnant une première validation de l'Algorithme 3 complet, i.e. celui permettant de traiter le cas des grandes transformations. Dans ce cas, la boucle 9 sur

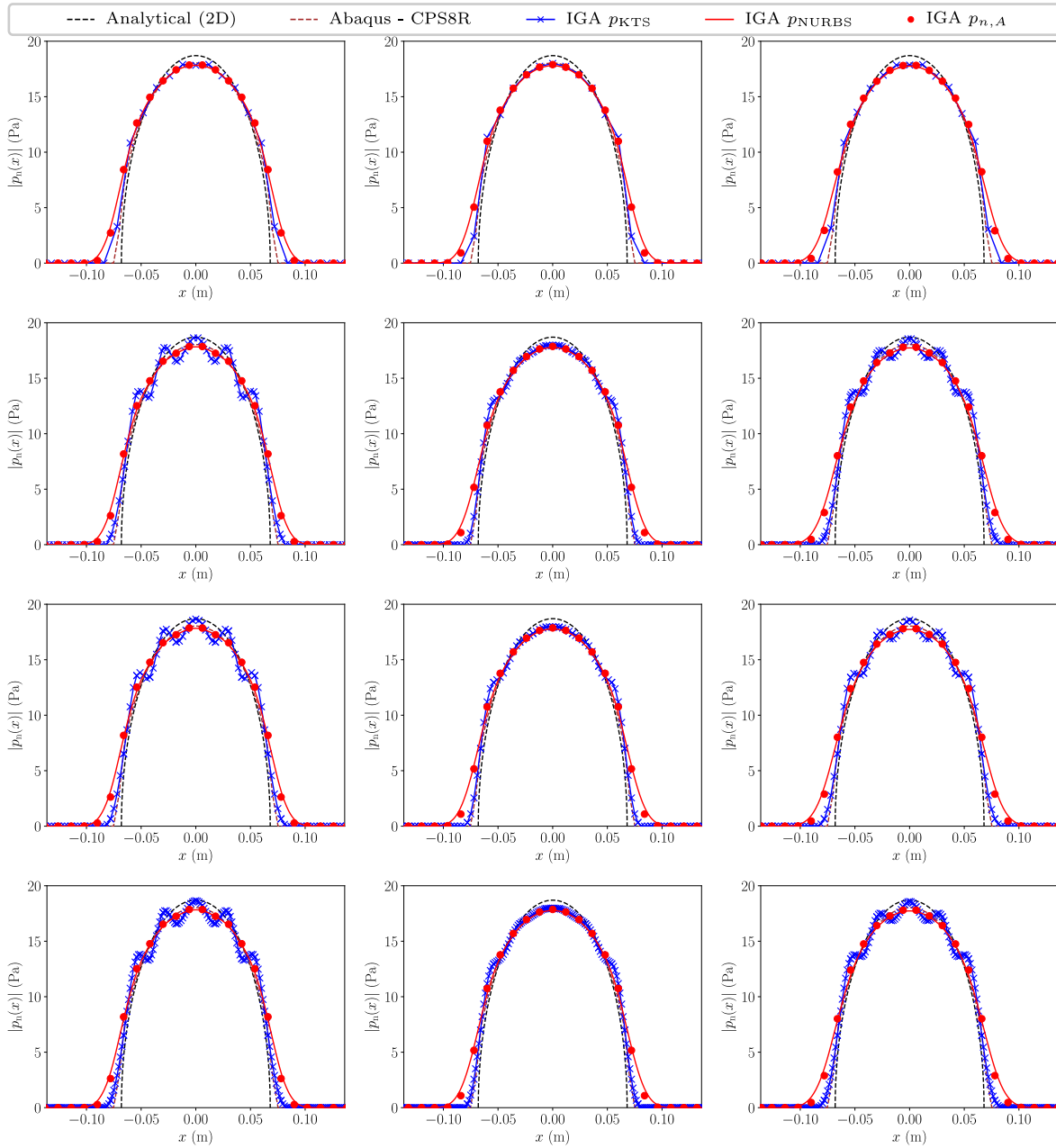


FIGURE 4.12 – Pression normale de contact pour un problème hertzien 2D avec approche primale-duale et  $h = 0.04$  (m) (les ronds rouges représentent les pressions moyennées pour chaque point de contrôle). Haut en bas : intégration gaussienne réduite, gaussienne complète, Newton-Cotes d'ordre 2 avec une sous-division et Newton-Cotes d'ordre 4 avec une sous-division. Gauche à droite : élément RMP3C2, RMP4C3 et RMP5C4.

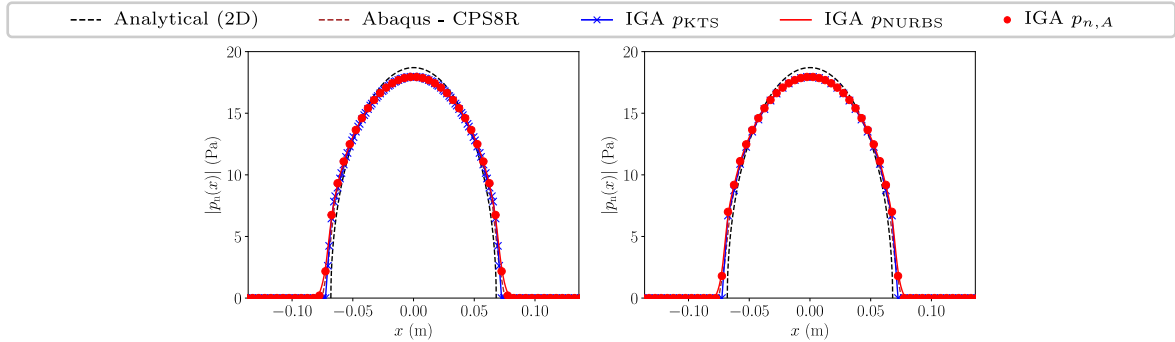


FIGURE 4.13 – Pression normale de contact pour un problème hertzien 2D avec approche primale-duale,  $h \simeq 0.0166$  (m) et élément RMP2C1 (les ronds rouges représentent les pressions moyennées pour chaque point de contrôle). Gauche : intégration gaussienne complète. Droite : intégration gaussienne réduite. La finesse du maillage permet d’obtenir la convergence des statuts pour les deux méthodes de quadrature d’où l’obtention d’une solution identique mais avec un coût numérique inférieur pour la quadrature réduite.

les incréments de chargement (avec un schéma itératif de type Newton-Raphson) ainsi que la boucle 10 portant sur la géométrie de contact (avec une méthode de type point-fixe) sont actives. On souligne le fait qu’il s’agisse toujours du problème en petits déplacements et petites déformations de la Figure 4.8 mais résolu ici avec un algorithme capable de traiter le cas des grandes transformations. On donne dans ce cas les nouveaux paramètres de simulation suivants.

#### Paramètres de simulation :

- modèle de coque non linéaire, FLT avec normale initiale ou actualisée (Algorithme 3 complet),
- méthode multipatch par lagrangien augmenté simplifié avec intégration complète ( $\alpha_{MP} = 10^3 \cdot E$ ),
- intégration complète des différents termes d’énergie avec normale interpolée (abscisses de Gréville),
- intégration dans l’épaisseur avec deux points de Gauss,
- méthode de contact primale ( $\alpha_C = 25 \cdot E$ ) ou primale-duale ( $\alpha_C = 10^{-3} \cdot E$ ) avec quadrature gaussienne complète,
- utilisation de la normale exacte en 2D pour le contact,
- incrément d’effort constant de  $0.5 \cdot F_{max}$ ,
- tolérance de  $\varepsilon_{NR} = 0.5\%$  en effort pour la convergence du Newton-Raphson,
- tolérances de  $\varepsilon_n = 1.5\%$  et  $\varepsilon_P = 0.1\%$  respectivement sur la normale de contact et la projection au point le plus proche pour la méthode du point-fixe.

La précision  $\varepsilon_n$  requise sur la normale de contact est plus élevée que celle sur la projection  $\varepsilon_P$  afin de limiter le coût numérique du calcul. Sans un tel choix, une composante non négligeable

de la normale de contact dans la direction longitudinale du contact (axe  $\mathbf{x}$ ) empêcherait d'obtenir une convergence rapide sur la géométrie de contact.

En suivant la même démarche que pour la Figure 4.11, on trace l'écart entre les pressions normales de contact issues d'Abaqus avec celles issues des méthodes primale et primale-duale en IGA pour deux maillages distincts. On compare les solutions obtenues avec l'Algorithme 3 simplifié (à gauche), l'Algorithme 3 complet avec une FLT utilisant la normale initiale (au centre) et l'Algorithme 3 complet avec une FLT utilisant la normale actualisée (à droite) sur la Figure 4.14.

Les solutions obtenues avec l'Algorithme 3 complet et les deux versions de la FLT sont rigoureusement identiques. En ce qui concerne la comparaison entre l'Algorithme 3 simplifié et complet, les résultats sont analogues avec toutefois un écart plus important au centre de la zone de contact pour l'Algorithme 3 complet associé à la méthode primale-duale. Cet écart peut s'expliquer par l'utilisation d'une normale de contact approchée. Avec la précision sur la géométrie de contact choisie, la boucle 10 n'est constituée que d'une seule itération d'où l'utilisation d'une normale de contact approchée pour le second incrément de chargement. Cet essai permet en tout cas de valider l'implémentation numérique de l'Algorithme 3 complet, i.e. celui permettant de traiter le cas des grandes transformations, sur un cas simple en petits déplacements avec un coût numérique faible (une seule itération sur la géométrie de contact et deux incréments de chargement).

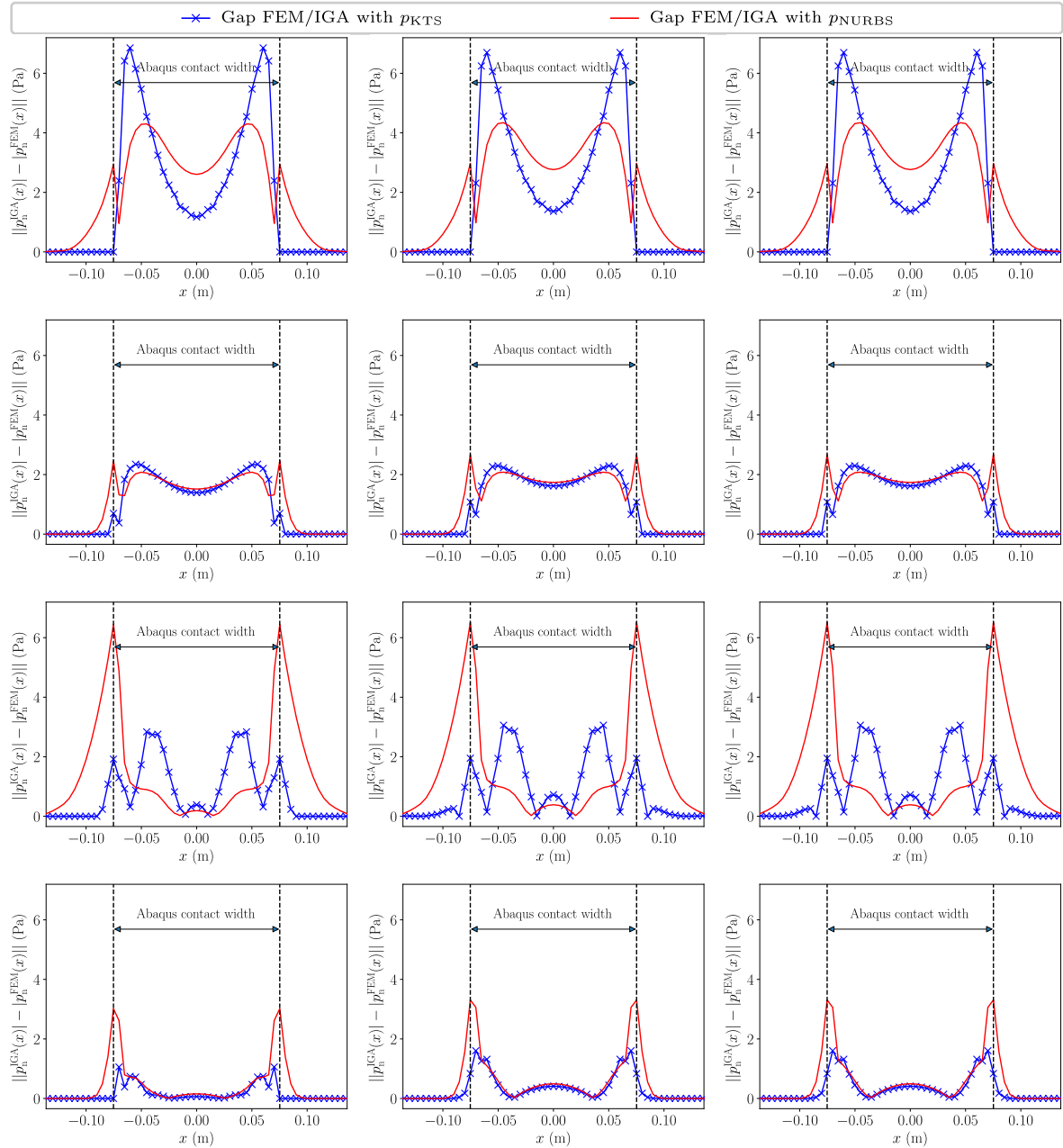


FIGURE 4.14 – Écart sur la pression normale de contact pour un problème hertzien 2D entre la solution FEM issue d’Abaqus (élément CPS8R) et notre solution IGA (élément RMP2C1). L’écart avec les pressions aux points d’intégration  $p_{KTS}$  est en bleu et celui avec les pressions post-traitées  $p_{NURBS}$  est en rouge. Haut en bas : méthode primale avec  $h = 0.1$  (m), méthode primale avec  $h \simeq 0.0333$  (m), méthode primale-duale avec  $h = 0.1$  (m) et méthode primale-duale avec  $h \simeq 0.0333$  (m). Gauche à droite : Algorithme 3 simplifié, Algorithme 3 complet avec FLT utilisant la normale initiale et Algorithme 3 complet avec FLT utilisant la normale actualisée.



### 4.6.2 Contact cylindre-plan en 3D

On propose de résoudre le problème de contact sans frottement entre une coque épaisse et une plaque épaisse, tous deux déformables et multipatch. Il s'agit dans ce cas d'un contact en 3D avec un appariement surface-to-surface (STS) tel que décrit par l'image de gauche sur la Figure 4.3. Les deux domaines, les propriétés matériaux ainsi que les conditions limites et chargements imposés sont donnés sur la Figure 4.15.

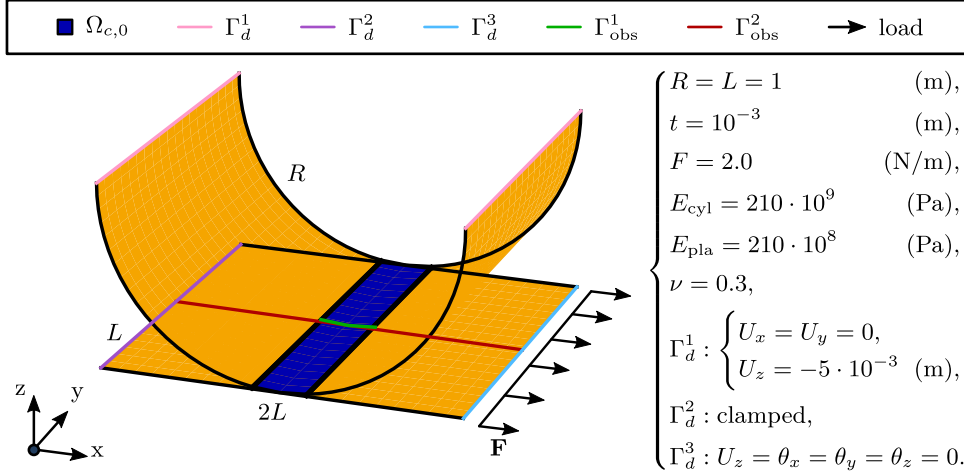


FIGURE 4.15 – Géométrie et propriétés pour un contact cylindre-plan en 3D. Construction d'une géométrie à deux corps et six patchs géométriquement conformes. On dessine les lignes  $\Gamma_{obs}^1$  et  $\Gamma_{obs}^2$  le long desquelles les solutions seront représentées sur les Figures 4.17 et 4.18.

Un demi-cylindre, de rayon  $R = 1$  (m), composé de trois patchs est en contact avec un plan, de longueur  $2L = R$ , également composé de trois patchs. Le plan est constitué d'un matériau beaucoup plus souple que le demi-cylindre, avec un module de Young  $E_{pla} = E_{cyl}/10$ , mais tous deux possèdent le même coefficient de Poisson. Un déplacement vertical est imposé sur les arêtes supérieures  $\Gamma_d^1$  du demi-cylindre et les déplacements  $U_x$  et  $U_y$  sont nuls de sorte à éviter respectivement un glissement du contact et un déplacement hors-plan. Le plan possède un bord  $\Gamma_d^2$  encastré et un bord  $\Gamma_d^3$  simplement supporté avec des rotations bloquées. Un effort linéique  $F = 2$  (N/m) est également appliqué sur  $\Gamma_d^3$ . Avec les conditions limites et efforts imposés, le plan est libre de subir une déformation  $\varepsilon_{xx}$  selon sa direction longitudinale. Il ne s'agit donc pas d'un problème de flexion pure mais bien d'une étude en traction/compression du plan. La résolution du problème de contact pourra donc se faire en limitant l'influence du verrouillage en membrane/cisaillement affectant les coques et plaques épaisses. Les allures des pressions normales de contact et des contraintes de Von Mises entre notre solution IGA et une solution FEM par Abaqus sont données sur la Figure 4.16. Pour cette illustration, la méthode primale-duale en IGA et FEM a été utilisée sur un maillage relativement grossier afin d'avoir une pression de contact visible, au sens répartie, mais proche du profil linéique attendu. Les illustrations précédentes et les différents tracés qui vont suivre ont été obtenus avec les paramètres de simulation suivants.

**Paramètres de simulation :**

- étude linéaire en petits déplacements et petites déformations (Algorithme 3 simplifié),
- méthode multipatch par lagrangien augmenté simplifié avec intégration complète ( $\alpha_{MP} = 10^3 \cdot E_{cyl}$ ),
- intégration réduite des différents termes d'énergie avec normale interpolée (abscisses de Gréville),
- intégration dans l'épaisseur avec deux points de Gauss,
- méthode de contact primale-duale avec quadrature de Gauss complète ( $\alpha_C = 10^{-4} \cdot E_{cyl}$ ),
- utilisation de la normale exacte en 3D pour le contact.

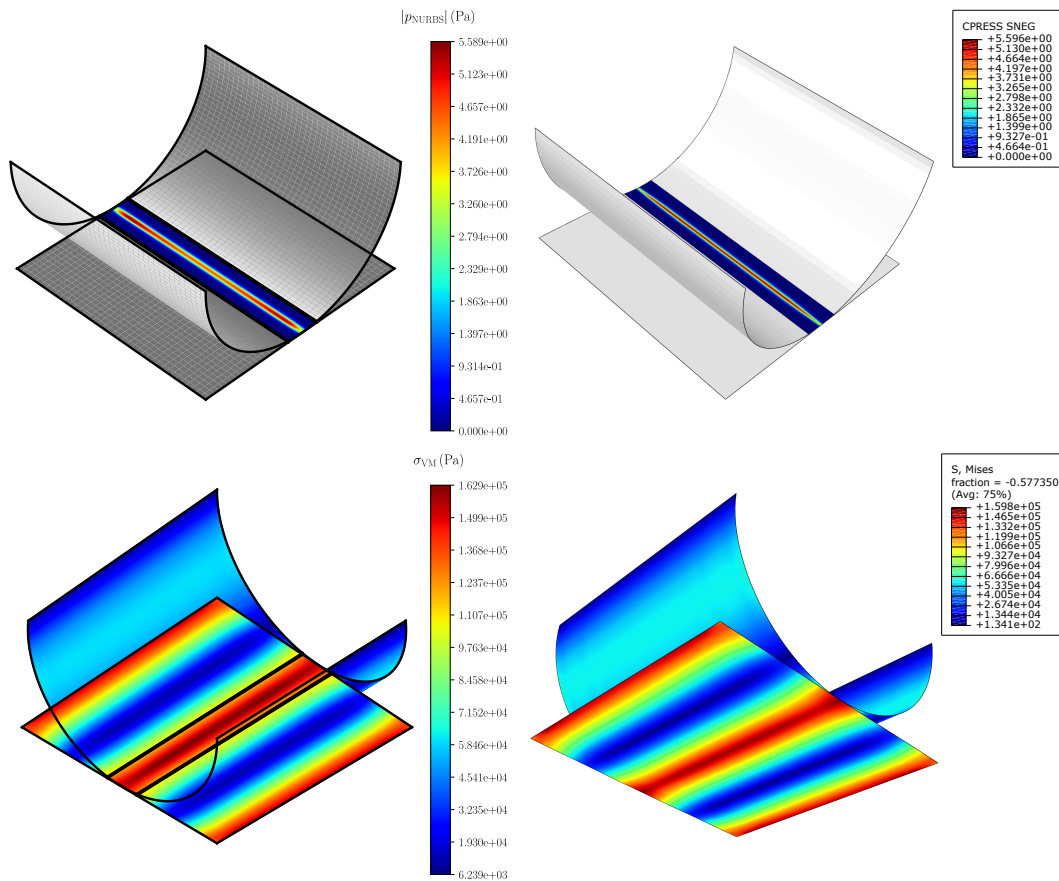


FIGURE 4.16 – Comparaison des pressions normales de contact et contraintes de Von Mises entre une solution IGA et FEM pour  $h = 0.05$  (m). Haut : pression de contact  $|p_n|$ . Bas : contraintes de Von Mises  $\sigma_{VM}$ . Gauche : IGA et lagrangien augmenté - RMS2C1R/RMP2C1R. Droite : Abaqus et lagrangien augmenté - S8R.

L'étude consiste à comparer les solutions IGA et FEM obtenues pour la méthode primale-duale avec une intégration gaussienne complète et un maillage fixe  $h \simeq 0.0166$  (m). L'approche par pénalité n'a pas été retenue dans ce cas pour les raisons de précision et robustesse évoquées lors du contact hertzien. On peut néanmoins souligner le fait que pour ce type de contact 3D moins rigide, des solutions sensiblement identiques sont obtenues avec la méthode primale.

Afin d'évaluer la qualité des solutions obtenues, on définit les chemins d'observation  $\Gamma_{\text{obs}}^1$  et  $\Gamma_{\text{obs}}^2$  visibles sur la Figure 4.15. Le chemin  $\Gamma_{\text{obs}}^1$  est situé sur le demi-cylindre, au centre du patch potentiellement en contact. Le chemin  $\Gamma_{\text{obs}}^2$  quant à lui est défini au centre du plan, selon sa direction longitudinale, sur les trois patches qui le composent. Les solutions en déplacement  $u_z$ , rotation  $\theta_y$  et pression normale de contact  $|p_n|$  le long de respectivement  $\Gamma_{\text{obs}}^2$ ,  $\Gamma_{\text{obs}}^2$  et  $\Gamma_{\text{obs}}^1$  sont sur la Figure 4.17.

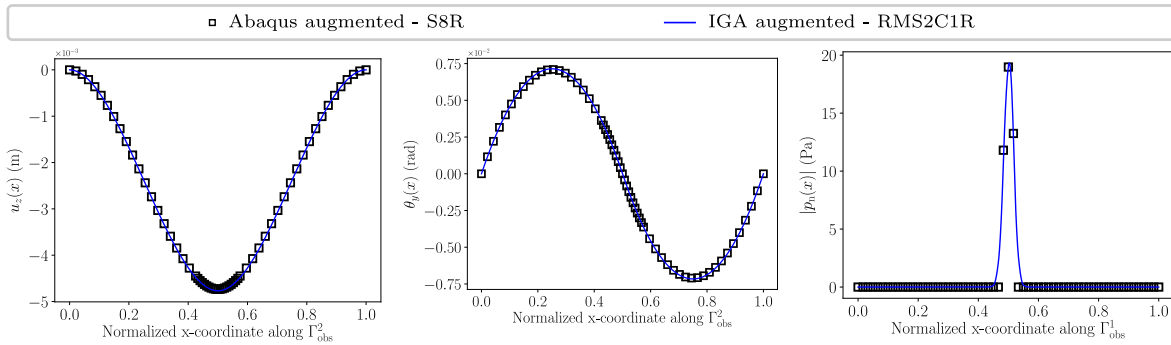


FIGURE 4.17 – Solutions en déplacement et pression du problème de contact cylindre-plan 3D en IGA et FEM avec une approche primale-duale pour  $h \simeq 0.0166$  (m). Gauche : déplacement vertical  $u_z$  le long de  $\Gamma_{\text{obs}}^2$ . Centre : rotation  $\theta_y$  le long de  $\Gamma_{\text{obs}}^2$ . Droite : pression normale de contact  $|p_n|$  le long de  $\Gamma_{\text{obs}}^1$ . Les chemins d'observation  $\Gamma_{\text{obs}}^1$  et  $\Gamma_{\text{obs}}^2$  sont représentés sur la Figure 4.15.

Pour les déplacements et rotations de normale, le profil et les valeurs relevés sont analogues à ceux issus d'une solution FEM classique par Abaqus. La continuité interpatch au sens faible des degrés de liberté en translation et rotation est assurée par le lagrangien augmenté avec traitement simplifié des coins mortiers. On ne constate aucune discontinuité des solutions aux interfaces des trois patches du plan par lesquels passe le chemin  $\Gamma_{\text{obs}}^2$ . La pression de contact le long de  $\Gamma_{\text{obs}}^1$  est également semblable à celle obtenue par Abaqus avec l'approche primale-duale. Sachant que c'est la pression post-traitée  $p_{\text{NURBS}}$  qui est utilisée, on observe comme pour le contact hertzien 2D un léger élargissement de la zone de contact qui dépend du maillage et du support des fonctions NURBS. Ces résultats sont complétés par les solutions en déformation et contrainte obtenues sur le plan, le long de  $\Gamma_{\text{obs}}^2$ , tel que décrit sur la Figure 4.18. Les déformations et contraintes sont également analogues à celles obtenues par Abaqus avec les éléments coque S8R.

Pour un contact 3D avec une discrétisation de type STS, la méthode primale-duale associe précision et robustesse tel que souligné lors de l'étude du contact hertzien en 2D. La méthode par

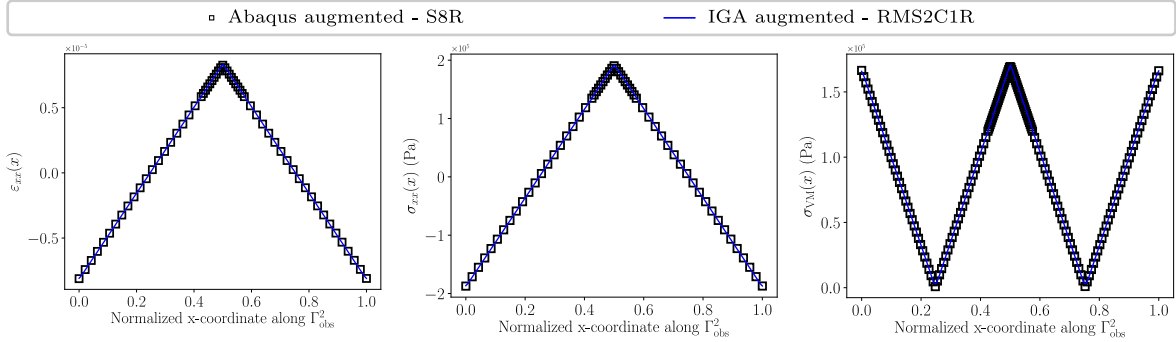


FIGURE 4.18 – Solutions en déformation et contrainte du problème de contact cylindre-plan 3D en IGA et FEM avec une approche primale-duale pour  $h \simeq 0.0166$  (m). Gauche : déformation  $\varepsilon_{xx}$  le long de  $\Gamma_{\text{obs}}^2$ . Centre : contrainte  $\sigma_{xx}$  le long de  $\Gamma_{\text{obs}}^2$ . Droite : contrainte équivalente  $\sigma_{VM}$  le long de  $\Gamma_{\text{obs}}^2$ . Les chemins d’observation  $\Gamma_{\text{obs}}^1$  et  $\Gamma_{\text{obs}}^2$  sont représentés sur la Figure 4.15.

pénalité n’est pas présentée afin de limiter le nombre de résultats mais les solutions obtenues sont analogues à l’approche augmenté, contrairement au contact hertzien qui nécessitait une rigidité de contact importante afin de retrouver la solution analytique. Les intégrations de type Newton-Cotes ne sont pas présentées car les résultats sont analogues à celles issues d’une quadrature gaussienne complète mais pour un coût numérique, en particulier en 3D, prohibitif. Si l’intégration réduite pour le contact semblait intéressante en 2D, ce n’est plus évident pour des contacts 3D. Le faible nombre de points d’intégration généré ne permet pas toujours d’obtenir la convergence de la méthode des statuts lorsque l’ensemble des statuts sont changés à la fois. Pour des géométries de contact 3D complexes, pour lesquelles changer un seul statut à chaque itération n’est pas envisageable, la quadrature gaussienne complète est donc à privilégier.

### 4.6.3 Contact cylindre-plan en 3D soumis à des grandes transformations

Pour cette dernière étude sur le contact, on propose de résoudre un problème en grandes transformations grâce à l’Algorithme 3 complet. Il s’agit également d’un contact entre une coque épaisse et une plaque épaisse, chacun déformable et multipatch, avec un appariement STS. La géométrie, les propriétés matériaux, le chargement imposé et un exemple de déformée sont donnés sur la Figure 4.19.

Il s’agit d’une géométrie de contact semblable au cas précédent. Un demi-cylindre de rayon  $R = 0.1$  (m) est en contact avec un plan rectangulaire de longueur  $L = 1$  (m) et largeur  $l = 0.2$  (m). Les deux corps sont constitués de trois patches. La plaque épaisse est constituée d’un matériau bien plus souple que le demi-cylindre avec notamment  $E_{\text{pla}} = E_{\text{cyl}}/10$ . Les arêtes  $\Gamma_d$  (condition de Dirichlet) correspondent à une condition limite d’encastrement et sont représentées en rose sur la Figure 4.19. Les solutions seront données le long du chemin  $\Gamma_{\text{obs}}$  dessiné en vert sur cette même figure. Un effort linéique est imposé à l’extrémité de la plaque et peut prendre les valeurs  $F_{\text{max}} = 3$  (N/m) ou  $F_{\text{max}} = 5$  (N/m).

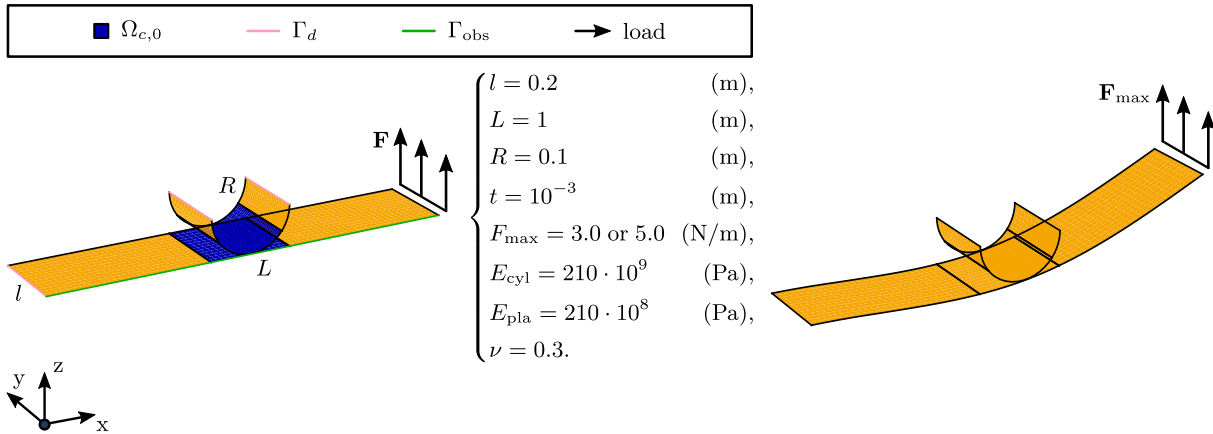


FIGURE 4.19 – Gauche : géométrie et propriétés pour un contact cylindre-plan en 3D soumis à de grandes transformations. Construction d’une géométrie à deux corps et six patches géométriquement conformes. Droite : géométrie déformée pour un chargement  $F_{\max} = 5$  (N/m).

Pour ce problème en grandes transformations, la convergence des statuts n’est pas assurée pour les maillages les plus raffinés et ce même avec une quadrature gaussienne complète ou une quadrature de type Newton-Cotes. Certains statuts rentrent dans un état cyclique, en particulier au bord de la zone de contact, ce qui engendre l’obtention de plusieurs solutions possibles en déplacement. Nous choisissons de prendre un maillage relativement grossier afin d’obtenir la convergence de la méthode des statuts (et naturellement celles sur la géométrie de contact et sur les incréments de chargement) au détriment de la précision sur la solution obtenue. Le maillage en IGA est constitué de 216 éléments quadratiques RMS2C1R/RMP2C1R, dont 72 éléments de contact, alors que le maillage FEM avec Abaqus contient 2620 éléments S8R, dont 780 éléments de contact. L’intérêt de cette étude sera, en plus de confirmer la validation de l’Algorithme 3 complet, de mettre en avant l’avantage d’utiliser des grandeurs cinématiques exactes en IGA en présentant des solutions IGA/FEM proches mais avec plus de dix fois moins d’éléments de contact pour le modèle IGA. Un exemple de solution, sur la rotation de normale  $\theta_y$  et le déplacement vertical  $u_z$ , entre la méthode FEM par Abaqus et l’approche par IGA est donné sur la Figure 4.20 pour un effort linéique  $F_{\max} = 3$  (N/m).

Les paramètres de simulation suivants ont été utilisés pour l’ensemble des solutions présentées.

**Paramètres de simulation :**

- modèle de coque non linéaire, FLT avec normale initiale ou actualisée (Algorithme 3 complet),
- méthode multipatch par lagrangien augmenté simplifié avec intégration complète ( $\alpha_{MP} = 10^3 \cdot E$ ),
- intégration réduite des différents termes d’énergie avec normale interpolée (abscisses de Gréville),

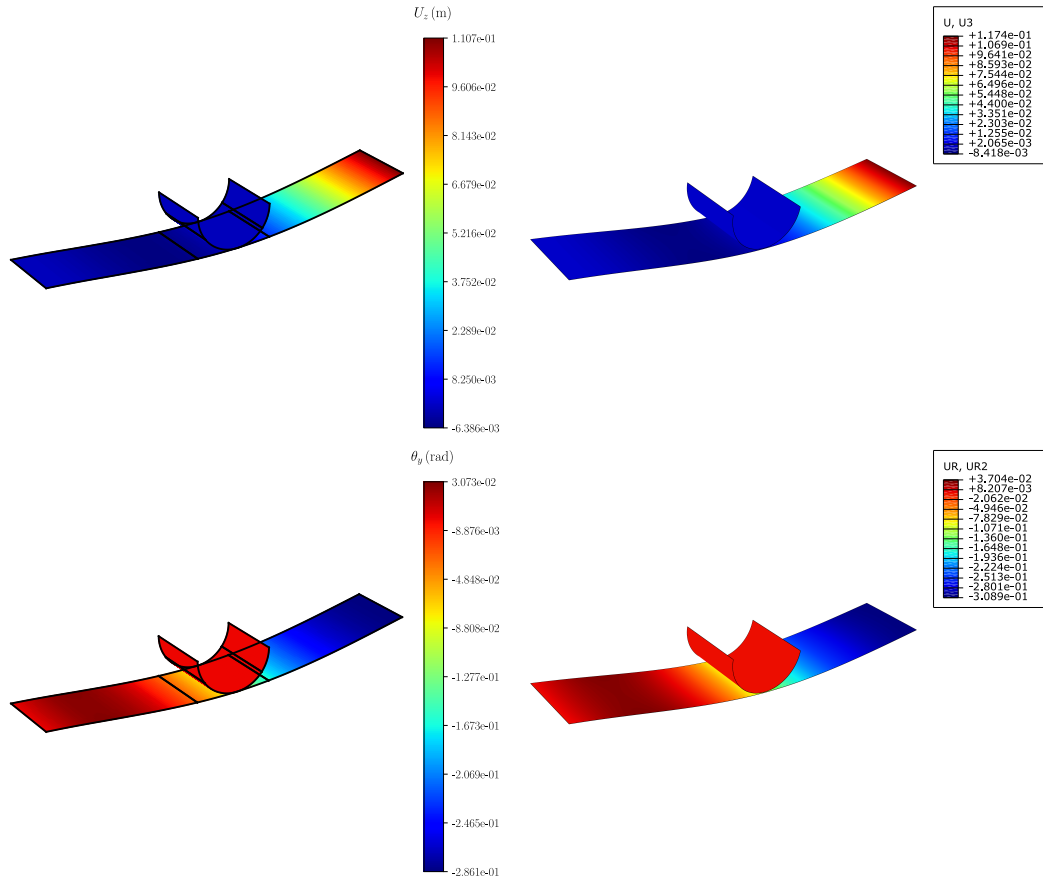


FIGURE 4.20 – Comparaison des rotations de normale  $\theta_y$  et déplacements verticaux  $u_z$  entre une solution IGA (216 éléments dont 72 de contact) et FEM (2620 éléments dont 780 de contact) pour un effort linéique  $F_{\max} = 3$  (N/m). Haut : déplacement vertical  $u_z$ . Bas : rotation de normale  $\theta_y$ . Gauche : IGA et lagrangien augmenté - RMS2C1R/RMP2C1R. Droite : Abaqus - S8R.

- intégration dans l'épaisseur avec deux points de Gauss,
- méthode de contact primale-duale avec quadrature gaussienne complète ( $\alpha_C = 10^{-4} \cdot E_{Cyl}$  ou  $\alpha_C = 2 \cdot 10^{-4} \cdot E_{Cyl}$  respectivement pour  $F_{\max} = 3$  (N/m) et  $F_{\max} = 5$  (N/m)),
- utilisation de la normale exacte en 3D pour le contact,
- incrément d'effort constant de  $0.2 \cdot F_{\max}$ ,
- tolérance de  $\varepsilon_{NR} = 0.5\%$  en effort pour la convergence du Newton-Raphson,
- tolérances de  $\varepsilon_n = 0.015\%$  et  $\varepsilon_P = 0.015\%$  respectivement sur la normale de contact et la projection au point le plus proche pour la méthode du point-fixe.

Les tolérances sur la normale de contact  $\varepsilon_n$  et sur la projection au point le plus proche  $\varepsilon_P$  sont bien plus faibles que pour le contact hertzien car le glissement au contact n'engendre pas une convergence lente sur la géométrie de contact (ces précisions ont pu être obtenues en

seulement deux itérations sur la géométrie de contact pour les cinq incréments de chargement). On choisit la méthode primale-duale (pour des raisons de précision et robustesse) associée à une quadrature gaussienne complète (pour assurer la convergence des statuts) afin de traiter le problème de contact 3D sans frottement. Les déplacements verticaux  $u_z$  et les rotations de normale  $\theta_y$  le long de  $\Gamma_{\text{obs}}$  sont tracés pour le modèle IGA avec une FLT utilisant la normale initiale ou actualisée et pour le modèle Abaqus sur la Figure 4.21.

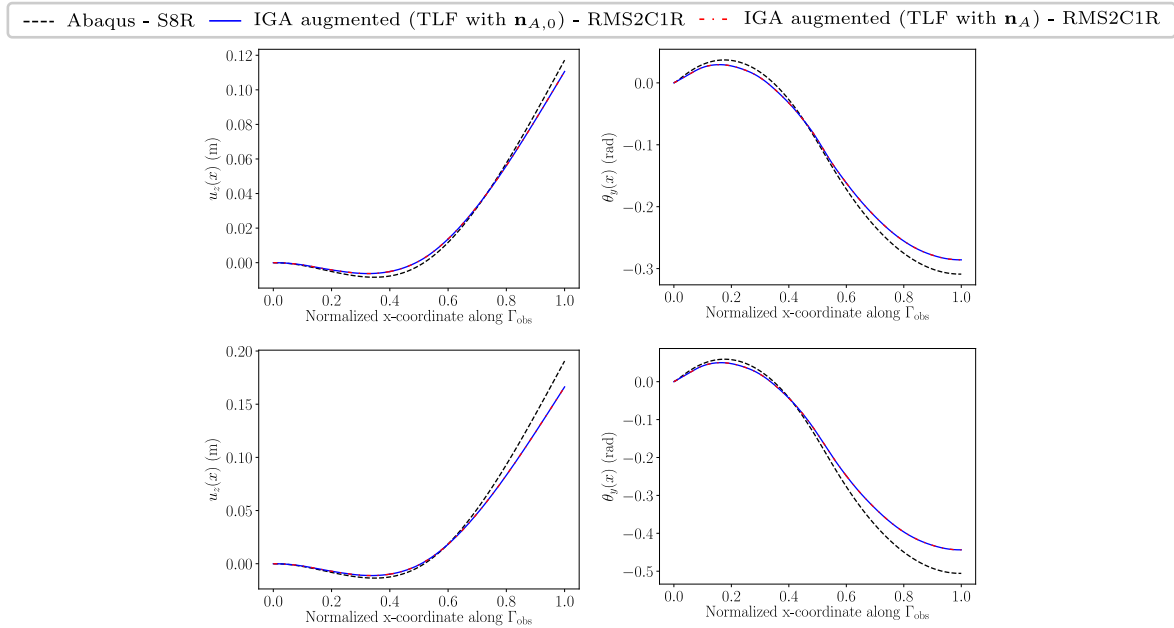


FIGURE 4.21 – Solutions en déplacement pour le problème de contact cylindre-plan 3D en grandes transformations pour les méthodes IGA, avec une approche primale-duale, (216 éléments dont 72 de contact) et FEM (2620 éléments dont 780 de contact). Gauche : déplacement vertical  $u_z$  le long de  $\Gamma_{\text{obs}}$ . Droite : rotation  $\theta_y$  le long de  $\Gamma_{\text{obs}}$ . Haut : effort  $F_{\text{max}} = 3$  (N/m). Bas : effort  $F_{\text{max}} = 5$  (N/m). La FLT avec normale initiale est la courbe bleue et celle utilisant la normale actuelle est la courbe en pointillé rouge.

De même que pour le contact hertzien, les deux approches par FLT présentent des solutions rigoureusement identiques. Par ailleurs, les solutions IGA sont proches de celles issues d’Abaqus avec, naturellement, un écart plus élevé à l’extrémité de la plaque. Cet écart est d’autant plus marqué que l’effort est important. Cette étude a permis d’une part de mettre en évidence la difficulté d’obtenir des statuts convergeant en grandes transformations d’où la nécessité d’implémenter une variante plus robuste de la méthode des statuts, i.e. une approche garantissant la convergence des statuts en conservant l’avantage de pouvoir changer l’ensemble des statuts violant les conditions de contact à chaque itération. D’autre part, nous avons pu faire ressortir la richesse des fonctions NURBS avec des solutions en déplacement semblables entre les modèles IGA et FEM en utilisant respectivement 72 et 780 éléments de contact pour 216 et 2620 éléments pour l’ensemble de la géométrie.

## 4.7 Conclusion

Au terme de cette étude, nous résumons les développements et propositions établis dans ce chapitre afin de traiter les problèmes de contact non frottant en IGA pour des structures minces déformables multipatch soumis à des grandes transformations. Une méthode de discrétisation Knot-To-Surface des intégrales de contact, écrite uniquement à partir de la géométrie esclave, a permis de résoudre l'ensemble des problèmes non linéaires de manière simple et peu coûteuse d'un point de vue numérique. Cette approche peut être vue comme une méthode mortier, car nous avons introduit un espace de multiplicateurs de contact correspondant aux points de contrôle de la surface esclave, mais elle évite l'évaluation fastidieuse des intégrales mortier et de la fonction gap. La projection au point le plus proche permet d'établir une bijection entre les deux corps potentiellement en contact de manière simple et robuste. Cet appariement a pu être proposé pour des situations géométriques de contact de type Edge-To-Edge et Surface-To-Surface afin de valider les différentes méthodes de contact sur des exemples possédant une solution analytique ou seulement une solution de référence numérique.

La principale difficulté du contact en grandes transformations vient du fait que plusieurs non-linéarités se cumulent et s'ajoutent dans notre cas à la complexité du modèle de coque épaisse. Les non-linéarités géométriques de déformation sont traitées par un schéma itératif de type Newton-Raphson avec les deux variantes de la Formulation Lagrangienne Totale (FLT) proposées dans le deuxième chapitre. Sur chaque exemple montré, nous avons souligné le fait que les solutions obtenues étaient rigoureusement identiques pour la FLT utilisant la normale en configuration initiale et celle utilisant la normale en configuration actualisée. En ce qui concerne les non-linéarités d'appariement, dues à la dépendance en déplacement de l'opérateur de projection  $\mathbf{P}_x$  et de la normale  $\mathbf{n}^m$ , celles-ci sont traitées par une méthode de type point-fixe. La précision requise sur la géométrie de contact peut être un facteur très influent sur la qualité des résultats obtenus et une précision trop importante peut ralentir la convergence de la méthode notamment avec la présence de glissement au contact. La méthode des statuts traite les non-linéarités de contact en permettant de trouver la surface de la coque qui va être réellement en contact. Il s'agit du point le plus complexe de ce chapitre car la convergence n'est pas garantie dans notre approche à visée industrielle où nous changeons l'ensemble des statuts à chaque itération. Les statuts peuvent entrer dans un état cyclique notamment pour des problèmes en grandes transformations et ce en fonction de la méthode d'application des conditions de contact et du choix des points de collocation.

Comme attendu, la méthode primale s'est avérée peu précise et robuste. L'augmentation du facteur de pénalité permettrait d'appliquer plus rigoureusement les conditions de contact mais cela peut engendrer des oscillations sur les pressions de contact ainsi que l'absence de convergence de la méthode des statuts. L'approche augmentée est particulièrement précise et robuste notamment en ce qui concerne la méthode des statuts. Le couplage des conditions de contact, qui ne sont pas indépendantes pour chaque point de contrôle, peut néanmoins engendrer des oscillations sur les pressions de contact. Un post-traitement de la pression de contact a été proposé et permet de s'affranchir de ces oscillations au coût d'un éventuel



élargissement de la zone de contact en fonction de la finesse du maillage. Dans certains cas, le choix des points de collocation permet également de réduire les oscillations sur la pression de contact.

C'est le cas de la quadrature gaussienne réduite qui, dans le cas du contact hertzien 2D, a permis de limiter les oscillations sur la pression de contact pour un coût numérique plus faible qu'une intégration complète ou de type Newton-Cotes. L'inconvénient d'un tel choix est que la convergence des statuts est plus difficile si le nombre de points de collocation est insuffisant, i.e. si le maillage est grossier ou l'ordre des fonctions de base est trop faible. C'est une approche qui peut être intéressante sur certains problèmes simples et spécifiques mais qui s'est avérée manquée de robustesse, en particulier sur le contact en 3D. Les méthodes de type Newton-Cotes présentent des résultats semblables à l'intégration gaussienne complète mais peuvent rapidement devenir coûteuses d'un point de vue numérique. L'intérêt de ces méthodes est de laisser une liberté quand au nombre de points de collocation ce qui peut faciliter la convergence des statuts.

La méthode augmentée associée à une intégration gaussienne complète pour la résolution du problème de contact semble donc être le choix à privilégier pour concilier précision, robustesse et faible coût numérique. C'est ce choix qui a été fait pour le dernier exemple numérique traitant un problème de contact 3D en grandes transformations. Cet exemple permet de mettre en exergue d'une part la nécessité de rendre plus robuste la méthode des statuts proposée afin d'en assurer la convergence dans le cas des grandes transformations et d'autre part la richesse des éléments isogéométriques. Avec un modèle IGA comportant plus de dix fois moins d'éléments de contact par rapport à un modèle FEM, nous avons été capable de retrouver des solutions en déplacement sensiblement identiques. L'approche isogéométrique prend ici tout son sens afin de traiter des problèmes cumulant plusieurs non-linéarités complexes tel que le contact en grandes transformations.

## CHAPITRE 5

# Épilogue

---

Afin d'introduire la méthode isogéométrique dans un contexte industriel exigeant lié à l'automobile, nous avons développé successivement des formulations de couplage multipatch, un modèle de coque non linéaire permettant de réaliser des essais numériques en grandes transformations et des méthodes de traitement du contact non frottant. En plus d'utiliser un modèle de coque épaisse complexe très largement utilisé dans le domaine du crash automobile, ces développements ont été combinés dans le but de pouvoir réaliser des essais numériques dont la complexité se rapproche de celle présente dans des codes de calculs FEM commerciaux. En associant l'IGA présentée dans le chapitre 1 aux couplages multipatch du chapitre 2 puis aux FLT du chapitre 3 et enfin aux méthodes de contact du chapitre 4, nous sommes parvenus à résoudre un problème de contact sans frottement pour des coques épaisses déformables multipatch soumises à de grandes transformations tout en limitant le verrouillage numérique.

Le premier chapitre a permis d'introduire les éléments de base en IGA avec notamment les fonctions de base B-splines ou NURBS qui permettent d'obtenir une régularité  $C^{p-1}$  entre éléments où  $p$  est l'ordre des fonctions d'interpolation. L'avantage de la méthode isogéométrique est d'utiliser les mêmes fonctions de forme permettant de décrire la géométrie pour interpoler les déplacements en tout point de la coque. La définition des différents espaces utiles et les différentes procédures de raffinement possibles ont été présentées afin de compléter les notions essentielles concernant l'approche isogéométrique.

Le deuxième chapitre propose l'analyse et le développement de méthodes multipatch avec des choix appropriés d'espaces mortier permettant d'assurer la continuité entre les patches au sens faible. La méthode du lagrangien augmenté s'est montrée particulièrement robuste sur l'ensemble des essais numériques présentés. En supprimant les fonctions de base interpolantes aux extrémités de chaque interface, nous avons proposé une méthode originale afin de traiter le cas de pièces complexes issues de l'industrie. L'espace dual simplifié a pu être validé analytiquement et numériquement avec notamment la vérification de la stabilité inf-sup. En revanche, afin de compenser le fait que l'espace dual proposé ne possède pas un ordre de convergence optimal et souffre donc d'un manque de précision, l'ajout d'un terme de pénalisation a été proposé : il s'agit de l'approche augmentée ou primale-duale. En associant le couplage multipatch à la règle de quadrature réduite et à la reconstruction judicieuse des normales aux abscisses de Gréville, nous avons pu traiter le cas de géométries complexes tel que le carter d'huile. Plus précisément, nous sommes capables d'assurer la continuité des déplacements pour des interfaces géométriquement conformes ou non conformes et ce indépendamment du choix des patches maître et esclave.

Afin de contribuer à l'introduction de l'IGA dans des applications industrielles, nous avons proposé dans le troisième chapitre de traiter le cas des grandes transformations avec, comme principale difficulté, la nécessité de prendre en compte les grandes rotations de normale. Pour cela, la Formulation Lagrangienne Totale (FLT) a été privilégiée par rapport à une Formulation Lagrangienne Actualisée car l'ensemble des fonctions de forme (y compris celles utilisées pour le couplage multipatch et le contact) peuvent être stockées dans l'espace physique et utilisées pour l'ensemble de la résolution itérative. De plus, les contraintes de Piola-Kirchhoff peuvent simplement s'ajouter au cours des itérations ce qui fait de la FLT un choix judicieux afin de réduire le coût numérique amené par les non-linéarités géométriques. La FLT a été proposée sous deux versions distinctes, chacune d'elle utilisant une paramétrisation axio-angulaire des rotations. La première utilise la normale en configuration initiale et ne nécessite pas de composer les rotations finies grâce aux formules de Rodrigues. Dans ce cas, nous obtenons un bilan des efforts exact sans avoir à supposer que les variations incrémentales des déplacements sont infinitésimales au prix d'une matrice de raideur tangente assez complexe et coûteuse numériquement. La seconde version de la FLT utilise la normale en configuration actualisée et nécessite la composition des grandes rotations par l'algèbre des quaternions. Il est nécessaire dans ce cas de supposer que les variations des déplacements sont infinitésimales mais la matrice de raideur tangente est grandement simplifiée et creuse, ce qui en fait une alternative intéressante dans un contexte industriel. Ainsi, la FLT utilisant la normale initiale et, sous certaines précautions, sa variante avec des normales actualisées permettent de résoudre des problèmes multipatch comportant des non-linéarités géométriques qui peuvent présenter des changements de pente important lors de la résolution itérative par le schéma de Newton-Raphson.

Nous ajoutons les bénéfices des deuxième et troisième chapitres au développement du contact non frottant dans le quatrième chapitre. Dans le but de conserver à la fois précision et faible coût numérique nécessaire aux applications industrielles, une discrétisation KTS des intégrales de contact a été proposée. Cette dernière peut être vue comme une méthode mortier au sens où nous avons introduit un espace de multiplicateurs mais sans devoir évaluer des intégrales de type mortier. Nous avons validé sur des exemples 2D (discrétisation ETE) et 3D (discrétisation STS) l'ensemble des aspects théoriques et numériques nécessaires à la résolution d'un problème de contact multipatch en grandes transformations. Le schéma itératif de type Newton-Raphson a permis de traiter les non-linéarités géométriques causées par les grands déplacements. La méthode du point-fixe a été développée pour prendre en compte les non-linéarités d'appariement afin d'obtenir précisément la géométrie de contact dans le cas des grands déplacements. La méthode des contraintes actives ou des statuts permet quant à elle de définir les zones de contact actives et inactives. Cette approche constitue la principale difficulté puisque la convergence est assurée uniquement si un seul statut est modifié à chaque itération. Nous souhaitons ici modifier l'ensemble des statuts à chaque itération afin d'accélérer drastiquement la résolution du problème de contact. Alors, les statuts peuvent entrer dans un état cyclique et empêcher la convergence du problème malgré la boucle portant sur la géométrie de contact avec la méthode du point-fixe. L'absence de convergence des statuts est d'autant plus marquée pour les grandes transformations et lorsqu'on choisit la quadrature réduite comme points de collocation pour la discrétisation KTS. L'intégration gaussienne complète

---

est à privilégier par rapport aux intégrations de type Newton-Cotes pour des raisons de coût numérique et par rapport à l'intégration réduite pour des raisons de robustesse. Naturellement et comme pour le problème de couplage multipatch, la méthode primale-duale est plus précise et robuste que la méthode par pénalité car elle permet d'assurer les conditions d'interface de manière exacte.

En somme, pour des applications industrielles nécessitant à la fois précision, robustesse et coût numérique modéré, nous recommandons d'utiliser les méthodes suivantes.

**Méthodes recommandées pour la résolution d'un problème de coques épaisses multipatch susceptibles d'entrer en contact et soumises à des grandes transformations :**

- Intégration réduite des différents termes d'énergie avec reconstruction des normales aux abscisses de Gréville,
- Méthode multipatch par lagrangien augmenté avec traitement simplifié des coins mortiers et intégration complète ou réduite des termes de couplage,
- Approche par FLT utilisant la normale initiale ou actualisée si les incréments de chargement sont suffisamment faibles,
- Méthode primale-duale pour le contact associée à une quadrature gaussienne complète pour la discrétisation KTS des intégrales de contact.

Il est clair qu'un travail d'industrialisation reste encore à accomplir sur la mise en oeuvre de manière robuste de la méthode des statuts. L'ensemble des méthodes développées pourrait s'appliquer à des structures trimmées en choisissant par exemple de réaliser les intégrations des différents termes d'énergie sur des approximations linéaires des éléments qui forment l'espace paramétrique trimmé. L'utilisation de pièces trimmées, directement issues d'un logiciel de CAD, permet de ne pas avoir à partitionner la géométrie, que ce soit manuellement ou par résolution d'un problème de Poisson, et ainsi de gagner du temps lors des validations numériques. L'introduction des non-linéarités matériaux constitue également une perspective intéressante afin de proposer une alternative IGA sérieuse par rapport aux logiciels commerciaux qui se basent presque exclusivement sur l'interpolation par les polynômes de Lagrange.



# Bibliographie

- [Abbas 2019] M. Abbas. *Éléments de contact dérivés d'une formulation hybride continue*. Note Code\_Aster du 05/12/2019, Clé R5.03.52, 2019. 162
- [Adam 2014] C. Adam, S. Bouabdallah, M. Zarroug and H. Maitournam. *Improved numerical integration for locking treatment in isogeometric structural elements, Part I : Beams*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 279, pages 1–28, 2014. 75, 76, 80
- [Adam 2015a] C. Adam. A contribution to static and dynamic isogeometric analysis of structures. Thèse de doctorat, École Polytechnique, 2015. 1, 4, 87, 88, 94, 97, 127
- [Adam 2015b] C. Adam, S. Bouabdallah, M. Zarroug and H. Maitournam. *Improved numerical integration for locking treatment in isogeometric structural elements. Part II : Plates and shells*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 284, pages 106–137, 2015. 4, 15, 34, 35, 44, 45, 48, 59, 75, 80
- [Alart 1991] P. Alart and A. Curnier. *A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 92, pages 353–375, 1991. 140, 153
- [Apostolatos 2014] A. Apostolatos, R. Schmidt, R. Wüchner and K.-U. Bletzinger. *A Nitsche-type formulation and comparison of the most common domain decomposition methods in isogeometric analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 97, pages 473–504, 2014. 13, 22
- [Babuška 1972] I. Babuška. *The Finite Element Method with Lagrangian Multipliers*. Numerische Mathematik, vol. 20, pages 179–192, 1972. 22
- [Babuška 1973] I. Babuška. *The Finite Element Method with Penalty*. Mathematics of Computation, vol. 27, pages 221–228, April 1973. 22
- [Banach 1932] S. Banach. *Théorie des Opérations Linéaires*. Warszawa, Monografje Matematyczne, 1932. 20
- [Bathe 1975] K.-J. Bathe, E. Ramm and E.L. Wilson. *Finite element formulations for large deformation dynamic analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 9, pages 353–386, 1975. 86, 87
- [Bathe 1980] K.-J. Bathe and S. Bolourchi. *A geometric and material nonlinear plate and shell element*. Computers & Structures, vol. 11, pages 23–48, 1980. 86, 87, 94, 95, 131, 133, 134, 137
- [Bathe 2001] K.-J. Bathe. *The inf-sup condition and its evaluation for mixed finite element methods*. Computers and Structures, vol. 79, pages 243–252, 2001. 22
- [Bazilevs 2006] Y. Bazilevs, L. Beirão da Veiga, J.A. Cottrell, T.J.R. Hughes and G. Sangalli. *Isogeometric Analysis : Approximation, stability and error estimates for h-refined meshes*. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, vol. 16, pages 1031–1090, 2006. 3, 24

- [Bazilevs 2012] Y. Bazilevs, M.-C. Hsu and M.A. Scott. *Isogeometric fluid-structure interaction analysis with emphasis on non-matching discretizations, and with application to wind turbines*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 249-252, pages 28–41, 2012. 3
- [Beirão da Veiga 2014] L. Beirão da Veiga, A. Buffa, G. Sangalli and R. Vázquez. *Mathematical analysis of variational isogeometric methods*. Acta Numerica, vol. 23, pages 157–287, 2014. 3
- [Belytschko 1985] T. Belytschko, H. Stolarski, W.K. Liu, N. Carpenter and J.S.-J. Ong. *Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 51, pages 221–258, 1985. 47
- [Belytschko 2000] T. Belytschko, W.K. Liu and B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley & Sons, 2000. 35
- [Ben Belgacem 1997] F. Ben Belgacem and Y. Maday. *The mortar element method for three dimensional finite elements*. R.A.I.R.O. Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, vol. 31, pages 289–302, 1997. 22, 24, 32
- [Ben Belgacem 1999] F. Ben Belgacem. *The mortar finite element method with Lagrange multipliers*. Numerische Mathematik, vol. 84, pages 173–197, 1999. 18, 22, 24, 27, 29
- [Ben Dhia 2000] H. Ben Dhia, I. Vautier and M. Zarroug. *Problèmes de contact frottant en grandes transformations : du continu au discret*. Revue Européenne des Éléments Finis, vol. 9, pages 243–261, 2000. 153
- [Ben Dhia 2002a] H. Ben Dhia and M. Zarroug. *Contact in the Arlequin Framework*. In Contact Mechanics, pages 403–410, Dordrecht, 2002. Springer Netherlands. 162
- [Ben Dhia 2002b] H. Ben Dhia and M. Zarroug. *Hybrid frictional contact particles-in elements*. Revue Européenne des Éléments Finis, vol. 11, pages 417–430, 2002. 142, 153, 162
- [Benson 2010] D.J. Benson, Y. Bazilevs, M.-C. Hsu and T.J.R. Hughes. *Isogeometric shell analysis : The Reissner-Mindlin shell*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 199, pages 276–289, 2010. 15
- [Benson 2011] D.J Benson, Y. Bazilevs, M.-C. Hsu and T.J.R. Hughes. *A large deformation, rotation-free, isogeometric shell*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 200, pages 1367–1378, 2011. 15
- [Boieri 1987] P. Boieri, F. Gastaldi and D. Kinderlehrer. *Existence, uniqueness, and regularity results for the two-body contact problem*. Applied Mathematics and Optimization, vol. 15, pages 251–277, 1987. 152
- [Braess 1998] D. Braess and W. Dahmen. *Stability Estimates of the Mortar Finite Element Method for 3-Dimensional Problems*. East-West Journal of Numerical Mathematics, vol. 6, pages 249–263, 1998. 24
- [Braess 1999] D. Braess, W. Dahmen and C. Wieners. *A Multigrid Algorithm For The Mortar Finite Element Method*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 37, pages 48–69, 1999. 21, 24, 25, 30, 37

- 
- [Breitenberger 2015] M. Breitenberger, A. Apostolatos, B. Philipp, R. Wüchner and K.-U. Bletzinger. *Analysis in computer aided design : Nonlinear isogeometric B-Rep analysis of shell structures*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 284, pages 401–457, 2015. 12
- [Brezzi 1974] F. Brezzi. *On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers*. R.A.I.R.O. Analyse Numérique, vol. 8, pages 129–151, 1974. 22
- [Brezzi 1991] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer, 1991. 22
- [Brivadis 2015] E. Brivadis, A. Buffa, B. Wohlmuth and L. Wunderlich. *Isogeometric mortar methods*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 284, pages 292–319, 2015. 3, 14, 18, 22, 23, 24, 26, 31, 32, 41, 51, 59
- [Buffa 2010] A. Buffa, G. Sangalli and R. Vázquez. *Isogeometric analysis in electromagnetics : B-splines approximation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 199, pages 1143–1152, 2010. 3
- [Byrd 1995] R.H. Byrd, P. Lu, J. Nocedal and C. Zhu. *A Limited Memory Algorithm for Bound Constrained Optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Journal on Scientific Computing, vol. 16, pages 1190–1208, 1995. 40, 82, 144, 167
- [Chapelle 2011] D. Chapelle and K.-J. Bathe. *The Finite Element Analysis of Shells - Fundamentals*. Second Edition. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011. 15, 16, 26, 27, 60, 62, 63, 65, 66, 68
- [Cohen 1980] E. Cohen, T. Lyche and R. Riesenfeld. *Discrete B-splines and subdivision techniques in computer-aided geometric design and computer graphics*. Computer Graphics and Image Processing, vol. 14, pages 87–111, 1980. 13
- [Cottrell 2006] J.A. Cottrell, A. Reali, Y. Bazilevs and T.J.R. Hughes. *Isogeometric analysis of structural vibrations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 195, no. 41, pages 5257–5296, 2006. 3
- [Cottrell 2009] J.A. Cottrell, T.J.R. Hughes and Y. Bazilevs. *Isogeometric Analysis : Toward Integration of CAD and FEA*. Wiley, 2009. 3, 5, 9, 46
- [Crisfield 1996a] M.A Crisfield. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 1*. Wiley, 1996. 86, 87, 94, 95, 97, 131, 133, 137
- [Crisfield 1996b] M.A Crisfield. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 2*. Wiley, 1996. 86, 87, 127, 128, 129
- [Curnier 1994] A. Curnier. *Computational Methods in Solid Mechanics*. Springer Netherlands, 1994. 90
- [Curnier 1995] A. Curnier, Q.-C. He and A. Klarbring. *Continuum Mechanics Modelling of Large Deformation Contact with Friction*, pages 145–158. Springer US, Boston, MA, 1995. 144
- [De Lorenzis 2011] L. De Lorenzis, I. Temizer, P. Wriggers and G. Zavarise. *A large deformation frictional contact formulation using NURBS-based isogeometric analysis*. International
-



## Bibliographie

---

- Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 87, pages 1278–1300, 2011. 140, 141, 152, 157, 160
- [De Lorenzis 2012] L. De Lorenzis, P. Wriggers and G. Zavarise. *A mortar formulation for 3D large deformation contact using NURBS-based isogeometric analysis and the augmented Lagrangian method*. Computational Mechanics, vol. 49, pages 1–20, 2012. 14, 140, 141, 157, 160
- [De Lorenzis 2014] L. De Lorenzis, P. Wriggers and T.J.R. Hughes. *Isogeometric contact : a review*. GAMM-Mitteilungen, vol. 37, pages 85–123, 2014. 140
- [Dimitri 2014] R. Dimitri, L. De Lorenzis, M.A. Scott, P. Wriggers, R.L. Taylor and G. Zavarise. *Isogeometric large deformation frictionless contact using T-splines*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 269, pages 394–414, 2014. 140, 157
- [Dittmann 2014] M. Dittmann, M. Franke, I. Temizer and C. Hesch. *Isogeometric Analysis and thermomechanical Mortar contact problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 274, pages 192–212, 2014. 14
- [Dumont 1995] G. Dumont. *Algorithme de contraintes actives et contact unilatéral sans frottement*. Revue Européenne des Éléments Finis, vol. 4, pages 55–73, 1995. 162
- [Echter 2010] R. Echter and M. Bischoff. *Numerical efficiency, locking and unlocking of NURBS finite elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 199, pages 374–382, 2010. 35
- [Farin 1997] G. Farin. *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design. A Practical Guide, Fourth Edition*. Academic Press, San Diego, 1997. 34
- [Fischer 2005] K.A Fischer and P. Wriggers. *Frictionless 2D Contact formulations for finite deformations based on the mortar method*. Computational Mechanics, vol. 36, pages 226–244, 2005. 140
- [Flemisch 2007] B. Flemisch and B.I. Wohlmuth. *Stable Lagrange multipliers for quadrilateral meshes of curved interfaces in 3D*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 196, pages 1589–1602, 2007. 141
- [Frey 1977] F. Frey and S. Cescotto. *Some new aspects of the incremental total Lagrangian description in nonlinear analysis*. In Int. Conf. 'Finite Elements in Nonlinear Mechanics', pages 5.1–5.20, Geilo, Norway, 1977. 87
- [Fritz 2004] A. Fritz, S. Hübner and B.I. Wohlmuth. *A comparison of mortar and Nitsche techniques for linear elasticity*. Calcolo, vol. 41, pages 115–137, June 2004. 22
- [Garcia 2019] D. Garcia, D. Pardo and V.M. Calo. *Refined isogeometric analysis for fluid mechanics and electromagnetics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 356, pages 598–628, 2019. 3
- [Gitterle 2010] M. Gitterle, A. Popp, M.W. Gee and W.A. Wall. *Finite deformation frictional mortar contact using a semi-smooth Newton method with consistent linearization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 84, pages 543–571, 2010. 141

- 
- [Glowinski 1989] R. Glowinski and P. Le Tallec. *Augmented Lagrangian and Operator-Splitting Methods in Nonlinear Mechanics*. Studies in Applied and Numerical Mathematics, 1989. 23
- [Gould 2013] P.L. Gould. *Introduction to Linear Elasticity*, Third Edition. Springer-Verlag, New York, 2013. 41, 49
- [Guo 2018] Y. Guo, J. Heller, T.J.R. Hughes, M. Ruess and D. Schillinger. *Variationally consistent isogeometric analysis of trimmed thin shells at finite deformations, based on the STEP exchange format*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 336, pages 39–79, 2018. 12
- [Harris 2002] C.M. Harris and A.G. Piersol. *Harris' Shock and Vibration Handbook*. McGraw-Hill, New York, 2002. 45
- [Haslinger 1980] J. Haslinger and I. Hlaváček. *Contact between elastic bodies. I. Continuous problems*. Aplikace matematiky, vol. 25, pages 324–347, 1980. 152
- [Haslinger 1996] J. Haslinger, I. Hlaváček and J. Nečas. *Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics*. In Finite Element Methods (Part 2), Numerical Methods for Solids (Part 2), volume 4 of *Handbook of Numerical Analysis*, pages 313–485. Elsevier, 1996. 141, 153
- [Hoppe 2006] R.H.W. Hoppe. *Optimization Theory*. University of Houston, 2006. 162
- [Hsu 2012] M.-C. Hsu and Y. Bazilevs. *Fluid-structure interaction modeling of wind turbines : Simulating the full machine*. Computational Mechanics, vol. 50, pages 821–833, 2012. 3
- [Hüeber 2005] S. Hüeber and B.I. Wohlmuth. *A primal-dual active set strategy for non-linear multibody contact problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 194, pages 3147–3166, 2005. 141, 152, 153
- [Hüeber 2008] S. Hüeber, G. Stadler and B.I. Wohlmuth. *A primal-dual active set algorithm for three-dimensional contact problems with Coulomb friction*. SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 30, pages 572–596, 2008. 141
- [Hughes 2000] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, 2000. 35
- [Hughes 2005] T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell and Y. Bazilevs. *Isogeometric analysis : CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 194, no. 39, pages 4135–4195, 2005. 2
- [Hughes 2014] T.J.R. Hughes, J.A. Evans and A. Reali. *Finite element and NURBS approximations of eigenvalue, boundary-value, and initial-value problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 272, pages 290–320, 2014. 3
- [Hughes 2017] T.J.R. Hughes and G. Sangalli. *Mathematics of Isogeometric Analysis : A Conspectus*. In : *Encyclopedia of Computational Mechanics Second Edition*, pages 1–40. American Cancer Society, 2017. 3
- [Hughes 2018] T.J.R. Hughes, G. Sangalli and M. Tani. *Isogeometric Analysis : Mathematical and Implementational Aspects, with Applications*. In : *Splines and PDEs : From Approximation Theory to Numerical Linear Algebra*. Lecture Notes in Mathematics, vol 2219, pages 237–315. Springer, Cham, 2018. 3
-

## Bibliographie

---

- [IGES/PDES Organization 1996] IGES/PDES Organization. Initial Graphics Exchange Specification : IGES 5.3. U.S. Product Data Association, North Charleston, South Carolina, 1996. 5
- [Johnson 1987] K.L. Johnson. Contact Mechanics. Cambridge University Press, Cambridge, 1987. 168
- [Jones 2001] E. Jones, T. Oliphant and P. Peterson. *SciPy : Open source scientific tools for Python*, 2001. 5, 39, 105, 167
- [Kiendl 2010] J. Kiendl, Y. Bazilevs, M.-C. Hsu, R. Wüchner and K.-U. Bletzinger. *The bending strip method for isogeometric analysis of Kirchhoff-Love shell structures comprised of multiple patches*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 199, pages 2403–2416, 2010. 13
- [Kim 2012] J.-Y. Kim and S.-K. Youn. *Isogeometric contact analysis using mortar method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 89, pages 1559–1581, 2012. 14, 142, 157
- [Klarbring 1995] A. Klarbring. *Large displacement frictional contact : A continuum framework for finite element discretization*. European Journal of Mechanics, A/Solids, vol. 14, pages 237–253, 1995. 142
- [Konyukhov 2008] A. Konyukhov and K. Schweizerhof. *On the solvability of closest point projection procedures in contact analysis : Analysis and solution strategy for surfaces of arbitrary geometry*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 197, pages 3045–3056, 2008. 144
- [Kopačka 2018] J. Kopačka. Efficient and Robust Numerical Solution of Contact Problems by the Finite Element Method. Thèse de doctorat, Czech Technical University, Prague, 2018. 140, 152, 157
- [Laborde 2008] P. Laborde and Y. Renard. *Fixed point strategies for elastostatic frictional contact problems*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, vol. 31, pages 415–441, 2008. 140, 153
- [Lam 2015] S.K. Lam, A. Pitrou and S. Seibert. *Numba : A LLVM-based Python JIT Compiler*. In Proceedings of the Second Workshop on the LLVM Compiler Infrastructure in HPC, LLVM '15, New York, NY, USA, 2015. 5, 39, 105, 167
- [Le Tallec 1995] P. Le Tallec and T. Sassi. *Domain Decomposition with Nonmatching Grids : Augmented Lagrangian Approach*. Mathematics of Computation, vol. 64, pages 1367–1396, 1995. 23
- [Lehoucq 1998] R.B. Lehoucq, D.C. Sorensen and C. Yang. ARPACK USERS GUIDE : Solution of Large Scale Eigenvalue Problems by Implicitly Restarted Arnoldi Methods. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 1998. 5, 40
- [Lei 2015] Z. Lei, F. Gillot and L. Jezequel. *A  $C^0/G^1$  multiple patches connection method in isogeometric analysis*. Applied Mathematical Modelling, vol. 39, no. 15, pages 4405–4420, 2015. 13

- [Lu 2011] J. Lu. *Isogeometric contact analysis : Geometric basis and formulation for frictionless contact*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 200, pages 726–741, 2011. 140, 141, 157, 168
- [MacNeal 1985] R.H. MacNeal and R.L. Harder. *A proposed standard set of problems to test finite element accuracy*. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 1, pages 3–20, 1985. 47
- [Malkus 1981] D.S. Malkus. *Eigenproblems associated with the discrete LBB condition for incompressible finite elements*. International Journal of Engineering Science, vol. 19, pages 1299–1310, 1981. 24, 36, 37
- [Maple 2014] Maple. *Version 18.00*. Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc, Waterloo, Ontario, 2014. 91, 117
- [Melenk 2012] J.M. Melenk and B. Wohlmuth. *Quasi-Optimal Approximation of Surface Based Lagrange Multipliers in Finite Element Methods*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 50, no. 4, pages 2064–2087, 2012. 29, 30
- [Nguyen 2014] V.P. Nguyen, P. Kerfriden, M. Brino, S.P.A. Bordas and E. Bonisoli. *Nitsche’s method for two and three dimensional NURBS patch coupling*. Computational Mechanics, vol. 53, pages 1163–1182, 2014. 14
- [Papadopoulos 1992] P. Papadopoulos and R.L. Taylor. *A mixed formulation for the finite element solution of contact problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 94, pages 373–389, 1992. 140
- [Piegl 1995] L. Piegl and W. Tiller. *The NURBS book*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995. 5, 7
- [Pietrzak 1999] G. Pietrzak and A. Curnier. *Large deformation frictional contact mechanics : continuum formulation and augmented Lagrangian treatment*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 177, pages 351–381, 1999. 142, 153
- [Popp 2009] A. Popp, M.W. Gee and W.A. Wall. *A finite deformation mortar contact formulation using a primal-dual active set strategy*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 79, pages 1354–1391, 2009. 141
- [Popp 2010] A. Popp, M. Gitterle, M.W. Gee and W.A. Wall. *A dual mortar approach for 3D finite deformation contact with consistent linearization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 83, pages 1428–1465, 2010. 141
- [Puso 2004] M.A. Puso and T.A. Laursen. *A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 193, pages 601–629, 2004. 144
- [Ramm 1976] E. Ramm. *A plate/shell element for large deflections and rotations*. In US-Germany Symp. on ‘Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis’. MIT-Press, 1976. 87
- [Rank 1998] E. Rank, R. Krause and K. Preusch. *On the accuracy of p-version elements for the Reissner Mindlin plate problem*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 43, pages 51–67, 1998. 35

- [Renard 2013] Y. Renard. *Generalized Newton's methods for the approximation and resolution of frictional contact problems in elasticity*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 256, pages 38–55, 2013. 142, 153
- [Sauer 2013] R.A. Sauer. *Local finite element enrichment strategies for 2D contact computations and a corresponding post-processing scheme*. Computational Mechanics, vol. 52, pages 301–319, 2013. 140, 158
- [Schenk 2001] O. Schenk, K. Gärtner, W. Fichtner and A. Stricker. *PARDISO : A High-performance Serial and Parallel Sparse Linear Solver in Semiconductor Device Simulation*. Future Generation Computer Systems, vol. 18, pages 69–78, 2001. 5, 39, 105, 167
- [Seitz 2016] A. Seitz, P. Farah, J. Kremheller, B.I. Wohlmuth, W.A. Wall and A. Popp. *Isogeometric dual mortar methods for computational contact mechanics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 301, pages 259–280, 2016. 14, 140, 141, 142, 144, 153, 157, 160
- [Simo 1992] J.C. Simo and T.A. Laursen. *An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction*. Computers & Structures, vol. 42, pages 97–116, 1992. 142
- [Stander 1989] N. Stander, A. Matzenmiller and E. Ramm. *An assessment of assumed strain methods in finite rotation shell analysis*. Engineering Computations, vol. 6, pages 58–66, 1989. 87, 94, 95, 131, 133
- [Surana 1983] K.S. Surana. *Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 19, pages 581–615, 1983. 87, 95, 133, 134, 136, 137
- [Sze 2004] K.Y. Sze, X.H. Liu and S.H. Lo. *Popular Benchmark Problems for Geometric Nonlinear Analysis of Shells*. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 40, pages 1551–1569, 2004. 106, 109, 112
- [Temizer 2011] I. Temizer, P. Wriggers and T.J.R. Hughes. *Contact treatment in isogeometric analysis with NURBS*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 200, pages 1100–1112, 2011. 140, 141, 152, 157, 159, 160
- [Temizer 2012] I. Temizer, P. Wriggers and T.J.R. Hughes. *Three-dimensional mortar-based frictional contact treatment in isogeometric analysis with NURBS*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 209-212, pages 115–128, 2012. 14, 140, 141, 157, 160
- [Teschemacher 2018] T. Teschemacher, A.M. Bauer, T. Oberbichler, M. Breitenberger, R. Rossi, R. Wüchner and K.-U. Bletzinger. *Realization of CAD-integrated shell simulation based on isogeometric B-Rep analysis*. Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences, vol. 5, page 19, 2018. 12
- [Timoshenko 1951] S. Timoshenko and J.N. Goodier. *Theory of elasticity*. McGraw-Hill, New York, 1951. 49
- [Timoshenko 1959] S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger. *Theory of Plates and Shells* (Engineering Societies Monographs), Second Edition. McGraw-Hill College, 1959. 41

- 
- [Trinh 2009] V.-D. Trinh. Formulation, développement et validation d'éléments finis de type coques volumiques sous-intégrés stabilisés utilisables pour des problèmes à cinématique et comportement non linéaires. Thèse de doctorat, Arts et Métiers ParisTech, 2009. 95, 131
- [Tur 2009] M. Tur, F.J. Fuenmayor and P. Wriggers. *A mortar-based frictional contact formulation for large deformations using Lagrange multipliers*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 198, pages 2860–2873, 2009. 140, 159
- [Wang 2017] C. Wang, M.C.H. Wu, F. Xu, M.-C. Hsu and Y. Bazilevs. *Modeling of a hydraulic arresting gear using fluid-structure interaction and isogeometric analysis*. Computers & Fluids, vol. 142, pages 3–14, 2017. 3
- [Wohlmuth 1999] B.I. Wohlmuth. *A residual based error estimator for mortar finite element discretizations*. Numerische Mathematik, vol. 84, pages 143–171, 1999. 24
- [Wohlmuth 2000] B.I. Wohlmuth. *A Mortar Finite Element Method Using Dual Spaces for the Lagrange Multiplier*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 38, pages 989–1012, 2000. 24
- [Wong 2011] E. Wong. Active set methods for quadratic programming. Thèse de doctorat, University of California, San Diego, 2011. 162
- [Wriggers 2006] P. Wriggers. Computational Contact Mechanics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006. 142
- [Yosida 1978] K. Yosida. Functional Analysis, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (Fifth Edition). Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978. 20
- [Zarroug 2002] M. Zarroug. Éléments mixtes de contact frottant en grandes transformations et applications. Thèse de doctorat, École centrale de Paris, 2002. 142, 150, 153, 157, 158, 162
- [Zavarise 2009] G. Zavarise and L. De Lorenzis. *A modified node-to-segment algorithm passing the contact patch test*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 79, pages 379–416, 2009. 140
- [Zhu 1997] C. Zhu, R.H. Byrd, P. Lu and J. Nocedal. *Algorithm 778 : L-BFGS-B : Fortran Subroutines for Large-scale Bound-constrained Optimization*. Association for Computing Machinery, Transactions on Mathematical Software, vol. 23, pages 550–560, 1997. 40, 82, 144, 167
- [Zienkiewicz 2005] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor and J.Z. Zhu. The Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals (6<sup>th</sup> edition). Elsevier, 2005. 22



**Titre :** Méthodes isogéométrique multipatch pour des coques épaisses non linéaires avec contact

**Mots clés :** Analyse isogéométrique, Coque épaisse, Verrouillage numérique, Méthodes multipatch, Grands déplacements, Contact sans frottement

**Résumé :** Le concept d'analyse isogéométrique généralise la méthode des éléments finis par l'utilisation de fonctions splines plus riches que les traditionnelles fonctions de Lagrange qui imposent l'approximation de la géométrie considérée. Sa principale motivation est de lier plus fortement la conception à l'analyse par l'utilisation des mêmes modèles géométriques comme supports pour la création et la simulation numérique. La méthode isogéométrique a connu ces dernières années une activité de recherche très soutenue et elle intéresse aussi bien le monde académique que le monde industriel. De par la construction des fonctions splines, la géométrie issue d'un logiciel de conception est nécessairement composée de plusieurs domaines (ou patches). La majeure partie des applications visées par les travaux publiés à ce jour concerne des pièces simples, constituées de quelques patches voir même d'un seul, et ne sont donc pas applicables au contexte industriel. Certains champs d'applications restent encore

à développer tel que le couplage multipatch ainsi que le contact afin de traiter de manière robuste et efficace des géométries complexes en petites et grandes transformations. Cette thèse s'inscrit dans un contexte industriel lié à l'automobile pour lequel la majorité des pièces sont des structures minces modélisables par des coques épaisses. L'un des principaux enjeux est de mettre en place la méthode isogéométrique multipatch, permettant l'utilisation de grandeurs cinématiques exactes, pour des coques de type Reissner-Mindlin nécessitant un traitement efficace du verrouillage numérique. Une méthode originale permettant de traiter le cas des grands déplacements, avec en particulier des grandes rotations de normale, est proposée. Le développement de méthodes de couplage multipatch et de contact non frottant associées à un modèle de coque épaisse non linéaire permet d'insérer la méthode isogéométrique dans un contexte industriel exigeant.

**Title :** Multipatch isogeometric methods for nonlinear thick shells with contact

**Keywords :** Isogeometric analysis, Thick shell, Numerical locking, Multipatch methods, Finite deformations, Frictionless contact

**Abstract :** The concept of isogeometric analysis generalizes the finite element method by the use of spline functions richer than the traditional Lagrange functions which impose an approximation of the considered geometry. Its main motivation is to link design with analysis by using the same geometrical models as supports for creation and numerical simulation. The isogeometric method have experimented these last years a very constant research activity and it is of interest to both the academic field and the industrial one. By construction of spline functions, the geometry created with a design software is necessarily composed of several domains (or patches). The majority of applications dealt with published work relates to simple parts, made of a few patches or even a single one, and are therefore not applicable to the industrial context. Some application fields still need to be de-

veloped, such as multipatch coupling and contact, in order to handle complex geometries in a robust and efficient way, combining accuracy and low computational cost. This thesis is strongly related to the automobile industry for which most of the geometries are thin structures and so can be modeled by thick shells. One of the main challenges will be to set up the multipatch isogeometric method, allowing the use of exact kinematic quantities, for Reissner-Mindlin shells requiring an efficient treatment of numerical locking. An original method concerning finite deformations, with large rotations of normal, will be proposed. The development of multipatch coupling and frictionless contact methods associated with a nonlinear thick shell model will allow the isogeometric method to be applied to a demanding industrial field.