



**HAL**  
open science

# Analyse spectrale et simulation numérique de cavités contenant un matériau négatif

Sandrine Bernard Paolantoni

► **To cite this version:**

Sandrine Bernard Paolantoni. Analyse spectrale et simulation numérique de cavités contenant un matériau négatif. Théorie spectrale [math.SP]. Institut Polytechnique de Paris, 2020. Français. NNT : 2020IPPAE005 . tel-02996725

**HAL Id: tel-02996725**

**<https://theses.hal.science/tel-02996725>**

Submitted on 9 Nov 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT  
POLYTECHNIQUE  
DE PARIS

NNT : 2020IPPAE005

Thèse de doctorat



# Analyse spectrale et simulation numérique de cavités contenant un matériau négatif

Thèse de doctorat de l'Institut Polytechnique de Paris  
préparée à ENSTA Paris

École doctorale n°574 Ecole Doctorale de Mathématiques  
Hadamard (EDMH)  
Spécialité de doctorat : Mathématiques appliquées

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 15 octobre 2020, par

**Sandrine Paolantoni**

Composition du Jury :

Eric Bonnetier Professeur, Université Grenoble-Alpes (Institut Fourier)	Président du jury
Monique Dauge Directrice de recherches CNRS, Université Rennes I (IRMAR)	Rapporteur
David Krejčířík Professeur, Czech Technical University (Department of Mathematics)	Rapporteur
Christophe Hazard Chargé de recherches, Ecole nationale supérieure de techniques avancées (UMA)	Directeur de thèse
Lucas Chesnel Chargé de recherches, INRIA, Ecole Polytechnique (DEFI)	Examineur
Guillaume Demesy Maître de conférences, Université d'Aix-Marseille (Institut Fresnel)	Examineur
Konstantin Pankrashkin Professeur, University of Oldenburg (Institute of Mathematics)	Examineur



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
0.1 Les matériaux négatifs . . . . .	5
0.2 Un problème modèle . . . . .	6
0.3 Une tentative de panorama . . . . .	9
0.3.1 Les matériaux négatifs à POEMS . . . . .	9
0.3.2 Les premiers travaux . . . . .	10
0.3.3 Et ensuite... . . . .	11
0.4 Notre démarche : une approche spectrale de la dispersion . . . . .	13
<b>1 Etude théorique du modèle de Drude non dissipatif</b>	<b>19</b>
1.1 Introduction . . . . .	19
1.2 Formulation of the problem and main results . . . . .	21
1.2.1 Original non-linear problem . . . . .	21
1.2.2 Linearization of the problem . . . . .	23
1.2.3 Main results . . . . .	26
1.3 Exploration of the spectrum . . . . .	27
1.3.1 Preliminaries . . . . .	27
1.3.2 Bulk resonance in the Drude material . . . . .	29
1.3.3 Surface resonance at the interface between both media . . . . .	30
1.3.4 Corner resonance at an inner vertex . . . . .	33
1.3.5 Corner resonance at a boundary vertex . . . . .	38
1.3.6 Proof of Theorem 1.2 . . . . .	39
1.4 Conclusion . . . . .	40
1.A Non-linear versus linear . . . . .	41
1.B Annexe : Les cas $\Lambda_m = 0$ et $\Lambda_e = 0$ . . . . .	44
<b>2 Étude numérique du modèle de Drude non dissipatif</b>	<b>47</b>
2.1 Du continu aux éléments finis . . . . .	47
2.2 Validation du code sur un cas test . . . . .	52
2.2.1 Étude théorique du cas test . . . . .	53
2.2.2 Étude numérique du cas test . . . . .	63
2.3 Résultats numériques dans la géométrie du camembert . . . . .	73
2.A Annexe : Comportement des fréquences particulières . . . . .	83
<b>3 Le modèle de Lorentz dissipatif</b>	<b>85</b>
3.1 Problème étudié et principaux résultats . . . . .	86
3.1.1 Problème de départ . . . . .	86
3.1.2 Linéarisation du problème . . . . .	89
3.1.3 Cadre et propriétés du problème linéarisé . . . . .	91

3.1.4	Principaux résultats . . . . .	95
3.2	Les différentes composantes du spectre essentiel . . . . .	98
3.2.1	Résultats préliminaires . . . . .	98
3.2.2	Résonance volumique dans le matériau négatif . . . . .	101
3.2.3	Résonance surfacique sur l'interface entre les deux milieux . . . . .	102
3.2.4	Résonance de coin sur un sommet intérieur . . . . .	104
3.2.5	Preuve du théorème 3.5 . . . . .	108
3.3	Modèle de Drude dissipatif . . . . .	112
3.3.1	Linéarisation du problème . . . . .	112
3.3.2	Résultats sur le spectre . . . . .	113
3.A	Annexe : Un résultat d'analyse complexe . . . . .	114
3.B	Deux opérateurs fermés . . . . .	115
<b>4</b>	<b>Interfaces courbes</b> . . . . .	<b>117</b>
4.1	Présentation du problème . . . . .	117
4.2	Ondes de surface . . . . .	119
4.2.1	Coordonnées curvilignes locales . . . . .	119
4.2.2	Changement de variable . . . . .	121
4.2.3	Plasmons de surface pour une courbure constante . . . . .	123
4.3	Une suite de Weyl . . . . .	127
4.4	Perspectives . . . . .	131

# Introduction

## 0.1 Les matériaux négatifs

Cette thèse est une contribution à la compréhension mathématique de modèles décrivant des matériaux particuliers, appelés ici *matériaux négatifs*, qui ont suscité beaucoup d'intérêt au sein des communautés de la physique et des mathématiques appliquées au cours des deux dernières décennies. Dans le domaine de l'électromagnétisme, la plupart des matériaux "ordinaires" sont décrits par (au moins) deux grandeurs positives : la permittivité électrique et la perméabilité magnétique. Un matériau *négatif* est un matériau pour lequel l'une au moins de ces deux grandeurs devient négative dans certaines plages fréquentielles. Une telle propriété donne naissance à des phénomènes inhabituels, notamment

- la localisation spatiale d'ondes électromagnétiques à la surface d'un matériau négatif, surtout connues sous le nom de *plasmons de surface*,
- le phénomène de *réfraction négative*, qui se traduit par le renversement de la direction de propagation d'un rayon transmis à l'interface entre un milieu négatif et un milieu ordinaire (on parle alors de "matériau à main gauche", ou "matériau d'indice négatif").

Ces propriétés extraordinaires sont toujours la trace à une échelle *macroscopique* d'une structure *microscopique* où se produit un phénomène de résonance particulier.

Le début de l'histoire des matériaux négatifs date en réalité de plus d'un siècle, notamment avec les travaux de Sommerfeld en 1899 ou de Zenneck en 1907 sur la description mathématique d'ondes radio se propageant à la surface d'un conducteur. Il ne s'agit pas ici de retracer toute cette histoire, qui appartient surtout à la communauté de l'électromagnétisme. On en trouvera cependant une description très complète par exemple dans le livre de Stefan Maier [59]. Les matériaux négatifs du 20ème siècle sont surtout des métaux précieux, comme l'or, dont la permittivité devient négative dans le régime fréquentiel du visible : on pourrait parler de matériaux "simplement négatifs" au sens où leur perméabilité magnétique reste positive. Les *plasmons de surface* apparaissent pour ces matériaux. Le phénomène de *réfraction négative* se produit quant à lui pour des matériaux "doublement négatifs", c'est-à-dire dont la permittivité et la perméabilité sont toutes les deux négatives. Ceux-ci ont été envisagés théoriquement par Victor Veselago [75] en 1968. Mais il faut attendre la fin du 20ème siècle pour que de tels matériaux puissent être réalisés. John Pendry fut le premier à identifier une façon pratique de créer un tel matériau et montra qu'il pourrait servir à réaliser une lentille plate parfaite [67]. Ce fut le début d'une spectaculaire effervescence autour de ces matériaux artificiels qualifiés généralement de *métamatériaux* et dont les applications potentielles ne cessent de se multiplier.

Le point de vue adopté dans cette thèse est celui des mathématiques appliquées, plus précisément celui de la théorie spectrale. Nous allons tenter dans cette introduction de dresser un panorama des différents travaux que l'on peut trouver dans la littérature des mathématiques appliquées sur les matériaux négatifs, sans prétendre en donner une image exhaustive. Nous nous appuyons pour cela sur un problème modèle, que nous allons présenter dans le paragraphe suivant et que nous retrouverons tout au long de la thèse.

## 0.2 Un problème modèle

Le problème que nous allons étudier est un problème scalaire qui peut être déduit des équations de Maxwell. C'est pourquoi nous conservons les notations habituelles de l'électromagnétisme, à savoir  $\varepsilon$  et  $\mu$  pour décrire les caractéristiques physiques d'un matériau. Dans le cadre de l'électromagnétisme, ces paramètres sont respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique. Mais notre problème modèle peut aussi modéliser d'autres phénomènes de propagation d'ondes. Nous présentons ici le cas bidimensionnel, auquel nous nous sommes limités dans cette thèse. L'intérêt de ce paragraphe est surtout qu'il va nous permettre de situer et de comprendre les liens entre les différents travaux que l'on peut trouver dans la littérature des mathématiques appliquées sur le thème des matériaux négatifs : ceci fait l'objet du paragraphe suivant.

### Définition du problème modèle

On considère un milieu de propagation, noté  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ . Dans les chapitres qui suivent, ce sera toujours une cavité bornée, mais dans cette introduction, ce peut être l'espace tout entier  $\mathbb{R}^2$ , ou l'extérieur d'un domaine borné. Ce milieu de propagation est partiellement rempli par un matériau négatif, occupant un domaine  $\mathcal{N} \subset \mathcal{C}$  qui sera toujours supposé *borné*, le reste étant du vide (ou un matériau "ordinaire" homogène), qui occupe donc le domaine  $\mathcal{V} := \mathcal{C} \setminus \mathcal{N}$ . On note  $\Sigma := \partial\mathcal{N} \cap \partial\mathcal{V}$  l'interface entre les deux milieux.

En régime fréquentiel, c'est-à-dire lorsqu'on s'intéresse aux vibrations monochromatiques de notre milieu de propagation à une fréquence fixée  $\omega$ , les propriétés physiques du milieu négatif sont décrites par deux paramètres, a priori complexes, notés  $\varepsilon_\omega^{\mathcal{N}}$  et  $\mu_\omega^{\mathcal{N}}$ . Ils dépendent nécessairement de la fréquence : un matériau négatif est toujours *dispersif*. Lorsque ces deux paramètres sont réels, le matériau est dit *conservatif*, alors que si l'un des deux (ou les deux) est de partie imaginaire strictement positive, le matériau est dit *dissipatif*, ce qui signifie que la propagation dans le milieu s'accompagne d'une perte d'énergie. On suppose que notre matériau est homogène, autrement dit que les deux paramètres  $\varepsilon_\omega^{\mathcal{N}}$  et  $\mu_\omega^{\mathcal{N}}$  sont constants dans tout le domaine  $\mathcal{N}$ . Dire que le matériau est négatif signifie que dans certaines zones fréquentielles, typiquement un intervalle de fréquences ou une union d'intervalles,  $\varepsilon_\omega^{\mathcal{N}}$  et/ou  $\mu_\omega^{\mathcal{N}}$  ont une partie réelle négative. En revanche, du côté du vide, ces deux paramètres seront supposés réels et positifs ; ils seront notés  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$ . Afin de décrire ces deux paramètres dans le milieu tout entier, on introduit les fonctions constantes par morceaux suivantes :

$$\varepsilon_\omega(x) := \varepsilon_0 \mathbf{1}_{\mathcal{V}}(x) + \varepsilon_\omega^{\mathcal{N}} \mathbf{1}_{\mathcal{N}}(x) \quad \text{and} \quad \mu_\omega(x) := \mu_0 \mathbf{1}_{\mathcal{V}}(x) + \mu_\omega^{\mathcal{N}} \mathbf{1}_{\mathcal{N}}(x)$$

pour tout  $x \in \mathcal{C}$ , où on a noté respectivement  $\mathbf{1}_{\mathcal{V}}$  et  $\mathbf{1}_{\mathcal{N}}$  les fonctions indicatrices de  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{N}$ .

L'équation de notre problème modèle peut être vue comme une équation de Helmholtz à coefficients variables, écrite sous la forme

$$\operatorname{div} \left( \frac{1}{\mu_\omega} \operatorname{grad} \varphi \right) + \omega^2 \varepsilon_\omega \varphi = f \quad \text{dans } \mathcal{C}, \quad (0.1)$$

où  $\omega$  désigne la fréquence et  $f$  une fonction donnée représentant l'excitation du système. Dans cette équation, les opérateurs  $\operatorname{grad}$  et  $\operatorname{div}$  sont à interpréter au sens des distributions, et toutes les quantités en présence sont supposées implicitement être de carré intégrable. Ainsi, cette équation

est une écriture condensée du problème de transmission suivant

$$\Delta\varphi + \omega^2 \varepsilon_\omega^\mathcal{N} \mu_\omega^\mathcal{N} \varphi = f \quad \text{dans } \mathcal{N}, \quad (0.2)$$

$$\Delta\varphi + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varphi = f \quad \text{dans } \mathcal{V}, \quad (0.3)$$

$$[\varphi]_\Sigma = 0 \text{ et } \left[ \frac{1}{\mu_\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right]_\Sigma = 0, \quad (0.4)$$

où la notation  $[X]_\Sigma$  désigne le saut de la fonction  $X$  à la traversée de  $\Sigma$  et  $n$  un vecteur unitaire normal à  $\Sigma$ . Autrement dit, on s'intéresse à deux équations de type Helmholtz (0.2) et (0.3), posées respectivement dans  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{V}$ , couplées par les conditions de transmission (0.4).

Ces équations doivent être complétées par des conditions aux limites si la frontière  $\partial\mathcal{C}$  de  $\mathcal{C}$  n'est pas vide, par exemple une condition de Dirichlet homogène

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{C}.$$

Enfin, dans le cas où  $\mathcal{C}$  est l'espace tout entier  $\mathbb{R}^2$  ou l'extérieur d'un domaine borné, il faut adjoindre à ces équations une condition de rayonnement qui s'écrit par exemple

$$\left| \frac{\partial\varphi}{\partial|x|} - i\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\varphi \right| = O(|x|^{-3/2}).$$

Pour comprendre la difficulté centrale de l'étude théorique de ce problème modèle, il suffit d'en écrire une formulation variationnelle. Nous nous plaçons pour cela dans le cas où le domaine de propagation  $\mathcal{C}$  est borné. Le choix d'une condition de Dirichlet homogène sur le bord  $\partial\mathcal{C}$  nous amène à introduire l'espace de Sobolev  $H_0^1(\mathcal{C})$ . Notre problème modèle s'écrit alors sous la forme variationnelle suivante : il s'agit de trouver  $\varphi \in H_0^1(\mathcal{C})$  tel que

$$\underbrace{\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\mu_\omega} \text{grad } \varphi \cdot \overline{\text{grad } \psi} \, dx}_{a(\varphi, \psi)} - \omega^2 \underbrace{\int_{\mathcal{C}} \varepsilon_\omega \varphi \bar{\psi} \, dx}_{b(\varphi, \psi)} = - \underbrace{\int_{\mathcal{C}} f \bar{\psi} \, dx}_{\ell(\psi)} \quad \text{pour tout } \psi \in H_0^1(\mathcal{C}). \quad (0.5)$$

Dans le cas d'un matériau "ordinaire" non dissipatif, où  $\mu_\omega^\mathcal{N}$  est un nombre réel positif (comme  $\mu_0$ ), la forme sesquilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est coercive sur  $H_0^1(\mathcal{C})$ . Elle définit en fait un produit scalaire sur  $H_0^1(\mathcal{C})$  dont la norme associée est équivalente à la norme usuelle. Ainsi, par le théorème de représentation de Riesz, on peut définir un opérateur  $\mathcal{B} : H_0^1(\mathcal{C}) \rightarrow H_0^1(\mathcal{C})$  et une fonction  $F \in H_0^1(\mathcal{C})$  par les relations

$$a(\mathcal{B}\varphi, \psi) = b(\varphi, \psi) \quad \text{et} \quad a(F, \psi) = \ell(\psi) \quad \text{pour tout } \psi \in H_0^1(\mathcal{C}),$$

de sorte que notre équation variationnelle s'écrit de façon équivalente

$$\varphi - \omega^2 \mathcal{B}\varphi = F \quad \text{dans } H_0^1(\mathcal{C}). \quad (0.6)$$

Le domaine  $\mathcal{C}$  étant supposé borné, l'injection canonique de  $H^1(\mathcal{C})$  dans  $L^2(\mathcal{C})$  est compacte, ce qui montre que  $\mathcal{B}$  est compact. Il s'agit donc ici d'une équation de Fredholm. Elle relève alors de l'alternative de Fredholm qui nous dit qu'elle est bien posée si et seulement si l'équation homogène associée (c'est-à-dire pour  $F = 0$ ) n'admet que la solution triviale  $\varphi = 0$ , autrement dit, si  $\omega^{-2}$  n'est pas valeur propre de  $\mathcal{B}$ . De plus, l'analyse numérique d'une telle équation est bien connue : on peut assurer la convergence des méthodes habituelle de discrétisation, évaluer l'ordre de convergence, etc. Ainsi, nous sommes là dans un cadre très bien connu tant sur le plan théorique que numérique.



Cependant, dans la situation qui nous intéresse ici, nous sortons de ce cadre : si  $\mu_\omega^N$  est un nombre réel négatif, la forme sesquilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  n'est plus coercive sur  $H_0^1(\mathcal{C})$ . Plus exactement, la coercivité de  $a(\cdot, \cdot)$  disparaît si la cavité  $\mathcal{C}$  contient à la fois un matériau positif ( $\mu > 0$ ) et un matériau négatif ( $\mu < 0$ ). Que peut-on alors dire de notre équation variationnelle dans ce cas ? Cette question, a priori purement théorique, cache en réalité les propriétés extraordinaires des matériaux négatifs qui, du point de vue des mathématiques appliquées, se traduisent par la présence d'un *spectre essentiel* inhabituel. Explorer ce spectre essentiel constitue la motivation centrale de cette thèse.

### Approximation quasi-statique

Nous introduisons maintenant un problème voisin de (0.1), souvent appelé approximation *quasi-statique*, qui joue un rôle essentiel dans l'étude des matériaux négatifs. Il s'agit formellement de passer à la limite  $\omega \rightarrow 0$  dans (0.1), ce qui revient donc simplement à retirer le terme  $\omega^2 \varepsilon_\omega \varphi$ , soit

$$\operatorname{div} \left( \frac{1}{\mu_\omega} \operatorname{grad} \varphi \right) = f \quad \text{dans } \mathcal{C}. \quad (0.7)$$

Pour cette nouvelle équation, si  $\mathcal{C}$  est  $\mathbb{R}^2$  tout entier, la condition de rayonnement doit être remplacée par une condition spécifiant le comportement à l'infini de  $\varphi$ , qui est nécessairement de la forme  $A \log |x| + B + o(1)$  en deux dimensions.

Une façon habituelle de s'intéresser à la résolution de cette dernière équation consiste à utiliser une représentation intégrale de  $\varphi$ , qui nous conduit à transformer l'équation (0.7) posée dans  $\mathcal{C}$  en une équation intégrale posée sur l'interface  $\Sigma$  : on "gagne" ainsi une dimension d'espace. Nous nous plaçons pour simplifier dans le cas où  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$ . Sans rentrer dans les détails techniques, contentons-nous de dire que l'on peut dans un premier temps se ramener au cas où  $f = 0$  avec une condition de transmission (0.4) inhomogène (un second membre non nul sur le saut des dérivées normales), ce qui permet alors de représenter  $\varphi$  sous la forme d'un potentiel de simple couche

$$\varphi(x) = \int_{\Sigma} \rho(y) G(x, y) d\sigma(y) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma,$$

où  $\rho$  est une densité à déterminer et  $G$  est la fonction de Green du laplacien en deux dimensions donnée par

$$G(x, y) := \frac{1}{2\pi} \log |x - y|.$$

En utilisant alors les propriétés usuelles des potentiels de simple et double couche, on se ramène à résoudre l'équation intégrale suivante portant sur la densité  $\rho$  :

$$\mathcal{K}\rho - \lambda_{\mathcal{K}} \rho = g \quad \text{où} \quad \lambda_{\mathcal{K}} := \frac{1}{2} \frac{1 + \mu_\omega^N / \mu_0}{1 - \mu_\omega^N / \mu_0} \quad (0.8)$$

et  $\mathcal{K}$ , appelé *opérateur de Neumann-Poincaré*, est défini par

$$\mathcal{K}\rho(x) := \int_{\Sigma} \rho(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_x} d\sigma(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \rho(y) \frac{(y - x) \cdot n_x}{|y - x|^2} d\sigma(y) \quad \text{pour tout } x \in \Sigma. \quad (0.9)$$

On voit ici qu'il est fondamental de connaître les propriétés de cet opérateur pour résoudre (0.8) qui, comme l'équation (0.6), apparaît comme une équation de Fredholm dans le cas de matériaux ordinaires. Mais en présence d'une interface entre matériau classique et matériau négatif, l'opérateur  $\mathcal{K}$  va posséder un spectre essentiel. Comme nous le verrons plus loin, de nombreuses études sont consacrées à cet opérateur.

Une autre façon d'aborder le problème quasi-statique consiste à introduire l'*opérateur de Poincaré variationnel* [57]. Pour cela, on commence par réécrire (0.7) sous forme variationnelle (analogue à (0.5)) :

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\mu_{\omega}} \operatorname{grad} \varphi \cdot \overline{\operatorname{grad} \psi} \, dx = - \int_{\mathcal{C}} f \bar{\psi} \, dx \quad \text{pour tout } \psi \in \mathcal{H},$$

où  $\mathcal{H} = H_0^1(\mathcal{C})$  si  $\mathcal{C}$  est borné (sinon c'est l'espace de Beppo-Levi habituel pour le Laplacien). On peut réécrire cette équation sous la forme

$$\int_{\mathcal{N}} \operatorname{grad} \varphi \cdot \overline{\operatorname{grad} \psi} \, dx - \frac{1}{1 - \mu_0/\mu_{\omega}^{\mathcal{N}}} \int_{\mathcal{C}} \operatorname{grad} \varphi \cdot \overline{\operatorname{grad} \psi} \, dx = \frac{\mu_0}{1 - \mu_0/\mu_{\omega}^{\mathcal{N}}} \int_{\mathcal{C}} f \bar{\psi} \, dx.$$

On introduit alors l'opérateur  $\mathcal{T} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , appelé *opérateur de Poincaré variationnel*, ainsi que la fonction  $F \in \mathcal{H}$  définis à l'aide du théorème de représentation de Riesz par

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \operatorname{grad}(\mathcal{T}\varphi) \cdot \overline{\operatorname{grad} \psi} \, dx &= \int_{\mathcal{N}} \operatorname{grad} \varphi \cdot \overline{\operatorname{grad} \psi} \, dx, \\ \int_{\mathcal{C}} \operatorname{grad} F \cdot \overline{\operatorname{grad} \psi} \, dx &= \int_{\mathcal{C}} f \bar{\psi} \, dx, \end{aligned} \quad (0.10)$$

pour tout  $\psi \in \mathcal{H}$ . Notre équation variationnelle s'écrit ainsi

$$\mathcal{T}\varphi - \lambda_{\mathcal{T}} \varphi = \mu_0 \lambda_{\mathcal{T}} F \quad \text{où} \quad \lambda_{\mathcal{T}} := \frac{1}{1 - \mu_0/\mu_{\omega}^{\mathcal{N}}}. \quad (0.11)$$

Ici encore, la résolution de cette équation dépend des propriétés spectrales de l'opérateur  $\mathcal{T}$ . En fait, on peut montrer que celles-ci sont directement reliées à celles de  $\mathcal{K}$  : le spectre de l'un se déduit de celui de l'autre par une simple translation de  $1/2$ , ce qui se comprend aisément à l'aide des définitions (0.8) et (0.11) de  $\lambda_{\mathcal{K}}$  et  $\lambda_{\mathcal{T}}$ , qui nous montrent que

$$\lambda_{\mathcal{K}} = \frac{1}{2} - \lambda_{\mathcal{T}}.$$

Cette présentation étant faite, nous sommes maintenant en mesure de faire un tour d'horizon de la littérature sur le thème qui nous intéresse ici.

## 0.3 Une tentative de panorama

Dans ce paragraphe, nous allons commencer par retracer rapidement l'histoire des matériaux négatifs au sein de l'équipe où s'est déroulée cette thèse : le laboratoire POEMS (Propagation d'Ondes : Etude Mathématique et Simulation) qui est une Unité Mixte de Recherche entre le CNRS, l'ENSTA-Paris et l'INRIA. Nous parlerons ensuite des travaux fondateurs (entre 1985 et 2000), puis des études mathématiques qui ont suivi la grande vague d'intérêt pour les *métamatériaux*, après 2000.

### 0.3.1 Les matériaux négatifs à POEMS

Le sujet de cette thèse s'inscrit dans la poursuite de travaux engagés depuis plus de 20 ans au laboratoire POEMS (avant que l'équipe POEMS ne prenne ce nom). L'histoire a commencé à la fin du siècle dernier sous l'impulsion d'Anne-Sophie Bonnet-Ben-Dhia dans le cadre de la

thèse de Karim Ramdani [70]. Le thème central de cette thèse était consacré aux milieux supraconducteurs, notamment au modèle dit de London qui conduit à une permittivité négative [23]. Les thèses suivantes ont été encadrées par le duo formé d'Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et de Patrick Ciarlet. Celle de C.M. Zwölf [76] a exploré de premières pistes pour palier la perte de coercivité et/ou de compacité liée à la présence d'un matériau négatif [17, 18, 20, 19]. Celles-ci sont arrivées à maturité au cours de la thèse de Lucas Chesnel [35], qui a marqué un progrès considérable dans l'étude théorique des matériaux négatifs, notamment par l'introduction de la méthode dite de *T-coercivité* [13, 14, 15]. Les travaux présentés dans ce manuscrit s'appuient en grande partie sur les résultats obtenus dans le cadre de la thèse de Lucas Chesnel. Enfin, la thèse de Camille Carvalho [31] s'est surtout focalisée sur le développement de méthodes numériques adaptées aux matériaux négatifs, tout particulièrement lorsque l'interface entre le matériau négatif et le milieu environnant possède des coins [11, 12].

### 0.3.2 Les premiers travaux

Il semble que les premiers travaux théoriques sur notre problème modèle reviennent à Martin Costabel et Ernst Peter Stephan, dans un article [41] de 1985 consacré précisément à la résolution de (0.1) par équations intégrales, lorsque le domaine de propagation occupe l'espace tout entier (pour toutes dimensions d'espace). Ils montrent en particulier que dans le cas où l'interface  $\Sigma$  entre les deux milieux est  $\mathcal{C}^\infty$ , ce problème est bien posé si et seulement si

$$\frac{\mu_\omega^{\mathcal{N}}}{\mu_0} \neq -1.$$

Ce rapport  $\mu_\omega^{\mathcal{N}}/\mu_0$ , qui intervient notamment dans les définitions (0.8) et (0.11) de  $\lambda_{\mathcal{K}}$  et  $\lambda_{\mathcal{T}}$ , joue un rôle clef dans tout ce qui va suivre. Cette quantité représente un *contraste* entre les deux milieux. On pourrait considérer aussi le contraste  $\varepsilon_\omega^{\mathcal{N}}/\varepsilon_0$ . Celui-ci joue un rôle analogue au précédent dans les équations de Maxwell, mais n'a aucun intérêt pour notre problème scalaire. Le seul contraste qui importe ici est celui qui apparaît dans les conditions de transmission (0.4).

Le résultat de [41] nous dit que  $-1$  est une valeur critique pour le contraste  $\mu_\omega^{\mathcal{N}}/\mu_0$ . Que se passe-t-il pour cette valeur précise du contraste ? Il faut attendre une dizaine d'années pour voir apparaître de premiers éléments de réponse : l'article [65] de Petri Ola de 1995 s'intéresse à la régularité des solutions de notre problème modèle (0.1). Il montre notamment (dans le cas de la dimension supérieure ou égale à 3, toujours pour une interface  $\mathcal{C}^\infty$ ) que les résultats usuels de régularité elliptique s'appliquent dans le cas non-critique, alors qu'il y a une perte d'un ordre de dérivation dans le cas critique.

Qu'en est-il des frontières qui ne sont pas  $\mathcal{C}^\infty$  ? A notre connaissance, la première étude sur le sujet date de 1997 et revient à Monique Dauge. Celle-ci a en effet proposé à un de ses étudiants, Benjamin Texier, de revisiter la théorie de Kondrat'ev pour étudier la régularité de la solution du problème (0.7) en deux dimensions lorsque l'interface possède un coin [44]. Cette étude concerne le cas non-critique. Le cas critique est abordé deux ans plus tard dans le cadre d'une collaboration entre Monique Dauge, Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et Karim Ramdani, au début de l'histoire des matériaux négatifs dans l'équipe POEMS. Leur article [21] montre grâce à l'utilisation de la transformation de Mellin que dans le cas (bidimensionnel) où l'interface présente un coin, il n'y a plus simplement une valeur critique du contraste en  $\mu_\omega^{\mathcal{N}}/\mu_0 = -1$ , mais tout un intervalle critique, situé autour de la valeur  $-1$ , qui dépend de l'angle du coin. Par exemple, pour un angle droit, l'intervalle critique est  $[-3, -1/3]$ .

Les résultats qui sont démontrés dans cet article méritent d'être détaillés (ce qui nous aidera à comprendre les travaux postérieurs). Il concernent les propriétés de l'opérateur  $\operatorname{div}(\mu_\omega^{-1} \operatorname{grad})$  apparaissant dans notre problème modèle (0.1) ou dans son approximation quasi-statique (0.7). Dans

l'optique d'une approche spectrale, il est naturel de considérer cet opérateur en tant qu'*opérateur non borné* sur  $L^2(\mathcal{C})$  en posant

$$D(\mathcal{A}) := \left\{ \varphi \in H_0^1(\mathcal{C}); \operatorname{div}(\mu_\omega^{-1} \operatorname{grad} \varphi) \in L^2(\mathcal{C}) \right\}, \quad (0.12)$$

$$\mathcal{A}\varphi := -\operatorname{div}(\mu_\omega^{-1} \operatorname{grad} \varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in D(\mathcal{A}). \quad (0.13)$$

Il est bien connu que si  $\mu_\omega$  est à valeurs réelles positives, cet opérateur est *auto-adjoint*, positif (du fait du choix du signe  $-$  dans (0.13)) et à résolvante compacte (si  $\mathcal{C}$  est borné). Cette dernière propriété montre en particulier que le spectre de  $\mathcal{A}$  est constitué uniquement de valeurs propres de multiplicité finie. Ces résultats reposent notamment sur la coercivité de la forme sesquilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  introduite en (0.5). Que peut-on dire si  $\mu_\omega$  change de signe à la traversée de l'interface  $\Sigma$ ? Les réponses de [21] sont les suivantes.

- Si l'interface est régulière,  $\mathcal{A}$  est un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte si le contraste  $\mu_\omega^N/\mu_0$  ne prend pas la valeur critique  $-1$  (ce qui découle de [41]).
- Si l'interface possède un coin,  $\mathcal{A}$  est auto-adjoint pour un contraste en dehors de l'intervalle critique  $[-3, -1/3]$  (cas d'un angle droit). Pour un contraste dans l'intervalle critique,  $\mathcal{A}$  n'est plus auto-adjoint, mais il est symétrique et il est possible de construire différentes extensions auto-adjointes de  $\mathcal{A}$  à l'aide de *fonctions singulières*  $S^\pm$  dont le comportement au voisinage du coin est de la forme

$$S^\pm(r, \theta) = r^{\pm i\eta} \Phi(\theta) = e^{\pm i\eta \log r} \Phi(\theta) \quad (0.14)$$

où  $(r, \theta)$  désignent les coordonnées polaires centrées sur le coin,  $\eta$  est un paramètre réel dépendant du contraste, et  $\Phi(\theta)$  désigne la modulation angulaire, déterminée elle aussi par le contraste. Ces fonctions sont donc hautement oscillantes près du coin (il est facile de voir que leur gradient n'est pas de carré intégrable du fait de ces oscillations).

### 0.3.3 Et ensuite...

#### Autour des valeurs critiques du contraste

Les travaux effectués dans le cadre de la thèse de Lucas Chesnel [35] ont donné un nouvel éclairage sur les valeurs critiques du contraste évoquées ci-dessus, grâce la notion de *T-coercivité*. Comme nous l'avons mentionné à propos de la formulation variationnelle (0.5), la forme sesquilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  n'est plus coercive dès que  $\mu_\omega$  change de signe. La T-coercivité permet en quelque sorte de retrouver une coercivité cachée du problème, et ce précisément en dehors des valeurs critiques du contraste. On peut ainsi montrer qu'en dehors de ces valeurs critiques, notre problème modèle (0.1) et son approximation quasi-statique (0.7) sont bien posés au sens où ils relèvent de l'alternative de Fredholm. Ceci est démontré dans [13] en considérant un cadre fonctionnel différent de (0.12)-(0.13) pour l'opérateur  $\operatorname{div}(\mu_\omega^{-1} \operatorname{grad})$ , vu non plus comme un opérateur non borné, mais plutôt comme l'opérateur borné

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}} : H_0^1(\mathcal{C}) &\longrightarrow H^{-1}(\mathcal{C}) \\ \varphi &\longmapsto -\operatorname{div}(\mu_\omega^{-1} \operatorname{grad} \varphi) \end{aligned} \quad (0.15)$$

qui est un opérateur de Fredholm (d'indice 0) en dehors des valeurs critiques. Cette approche a été ensuite généralisée aux équations de Maxwell [14, 15], ainsi qu'à un opérateur de type bi-laplacien [36] de la forme  $\Delta\mu_\omega^{-1}\Delta$ . La notion de T-coercivité est aussi très utile sur le plan numérique : elle a permis de développer des méthodes d'approximation stables en utilisant la T-coercivité au niveau discret, ce qui a conduit notamment à la notion de *maillage T-conforme* [12, 32].

Si le contraste prend la valeur critique  $-1$ , que peut-on dire de l'opérateur  $\mathcal{A}$  défini en (0.12)-(0.13)? La première réponse semble être apportée par J. Behrndt et D. Krejčířík dans [10] dans le cas d'une géométrie très particulière où  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{V}$  sont deux carrés identiques reliés par un côté  $\Sigma$ . Il est en effet montré que pour le contraste critique  $-1$ , l'opérateur  $-\operatorname{div}(\mu_\omega^{-1} \operatorname{grad})$  est auto-adjoint si, au lieu de (0.12), on choisit comme domaine

$$D(\mathcal{A}) := \left\{ \varphi \in L^2(\mathcal{C}); \Delta\varphi|_{\mathcal{V} \text{ ou } \mathcal{N}} \in L^2(\mathcal{V} \text{ ou } \mathcal{N}), \varphi|_{\partial\mathcal{C}} = 0 \text{ et } [\varphi]_\Sigma = \left[ \frac{1}{\mu_\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right]_\Sigma = 0 \right\}.$$

On voit ici qu'on n'impose plus à  $\varphi$  d'appartenir à  $H_0^1(\mathcal{C})$  (ce qui demande de prendre quelques précautions pour définir la trace de  $\varphi$  sur  $\partial\mathcal{C}$  et les sauts de  $\varphi$  et de sa dérivée normale sur  $\Sigma$ ). Il est montré dans [10] que le spectre de  $\mathcal{A}$  est alors constitué de la valeur propre 0 qui est de multiplicité infinie et de deux suites de valeurs propres de multiplicité finie tendant vers  $+\infty$  et  $-\infty$ . Le noyau de  $\mathcal{A}$  constitue précisément l'espace des plasmons de surface (solutions du problème (0.7) pour  $f = 0$ ). Certains de ces plasmons possèdent un comportement singulier au voisinage de l'interface (au sens où ils n'appartiennent à aucun espace  $H^s$  pour  $s > 0$ ). Ces résultats ont été généralisés dans [30, 66] pour une interface régulière quelconque, ainsi qu'aux dimensions supérieures à 2.

Ces études sont à rapprocher des travaux très récents de Monique Dauge et Serge Nicaise [42, 43] qui permettent d'établir une équivalence entre 1) une propriété locale d'ellipticité, c'est-à-dire une propriété d'inversibilité de symboles définis localement (à l'intérieur d'un domaine, à l'interface, ou sur un coin) et 2) le caractère Fredholm de l'opérateur  $\tilde{\mathcal{A}}$  défini en (0.15), qui est une propriété globale.

## Études mathématiques des résonances plasmoniques

Dans le cas d'une interface  $\Sigma$  régulière, la valeur critique  $-1$  du contraste est associée à la notion de *plasmons de surface* mise en évidence par les physiciens. Sur un plan mathématique, la notion de *valeur propre plasmonique* est introduite par D. Grieser dans [52] comme étant toute valeur du contraste  $\mu_\omega^{\mathcal{N}}/\mu_0$  pour laquelle le problème quasi-statique (0.7) admet une solution non nulle pour  $f = 0$ . Il montre notamment que ces valeurs s'accumulent autour de la valeur critique  $-1$  du contraste et étudie les fonctions propres associées, qui sont précisément les plasmons de surface. Cette accumulation se traduit par la présence inhabituelle d'un point de *spectre essentiel* pour les divers opérateurs évoqués plus haut.

L'une des applications des plasmons de surface qui a le plus motivé la communauté des mathématiques appliquées est la notion d'*invisibilité* (ou de *camouflage* : "cloaking"), c'est-à-dire la possibilité de créer des dispositifs permettant de rendre un objet invisible. La littérature sur le sujet est abondante. On pourra consulter en particulier [2, 27, 56, 60, 63, 64].

Une autre application importante concerne l'exploitation des plasmons de surface pour l'imagerie, plus précisément l'utilisation de la très forte luminescence visible observée au voisinage de nanoparticules de métaux nobles en interaction avec la lumière. Ce phénomène est étudié notamment dans [3, 4, 5, 6, 7]. Ces travaux reposent sur l'étude de l'opérateur de Neumann-Poincaré  $\mathcal{K}$  défini en (0.9). Ils s'intéressent aussi au passage à la limite entre le modèle fréquentiel (0.1) et son approximation quasi-statique (0.7). La compréhension de ces phénomènes qui se produisent à une échelle nanométrique fait l'objet de diverses études asymptotiques. Citons [25] qui étudie le comportement asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Poincaré variationnel  $\mathcal{T}$  défini en (0.10) lorsque la distance entre deux particules de matériau négatif tend vers 0. Citons aussi [39] qui s'intéresse au comportement asymptotique des valeurs propres de l'opérateur  $\tilde{\mathcal{A}}$  défini en (0.15) (à  $\omega$  fixé), lorsque le diamètre de la particule tend vers 0.

### Études liées à la présence de coins

Les travaux concernant les coins sont beaucoup moins nombreux que ceux qui concernent les frontières régulières.

Revenons un instant sur les fonctions singulières  $S^\pm$  définies en (0.14). Celles-ci ont été interprétées comme des *ondes de trou noir*, au sens où elles se propagent vers le coin sans provoquer aucune réflexion : elles n'atteignent jamais vraiment le coin car leur vitesse de propagation tend vers 0 avec la distance au coin, de sorte que toute l'énergie qui se propage vers le coin y reste accumulée. Le coin se comporte ainsi comme un trou noir. Il joue un rôle analogue à l'infini dans un problème de diffraction. Ceci a été justifié mathématiquement dans [16] par un principe d'absorption limite et simulé numériquement [11] par une adaptation au voisinage du coin de la technique bien connue des PML (Perfectly Matched Layers).

Tout comme dans le cas d'une frontière régulière, les intervalles critiques associés aux coins correspondent à des intervalles de spectre essentiel des opérateurs  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{T}$  définis en (0.8) et (0.11).

- Pour l'opérateur de Neumann-Poincaré  $\mathcal{K}$ , ceci est démontré dans [69] par une technique assez abstraite qui permet de considérer le cas d'un polygone courbe. Cette étude est poursuivie dans [68] qui démontre qu'il s'agit de spectre *absolument continu* (il n'y a pas de spectre singulièrement continu) et établit un principe d'absorption limite au voisinage de tout point de ce spectre.
- Pour l'opérateur de Poincaré variationnel  $\mathcal{T}$ , ceci est étudié dans [26] par une technique plus explicite (construction d'une suite de Weyl) dans le cas d'un polygone droit. Le cas plus singulier d'une inclusion de matériau négatif en forme de nœud papillon (deux coins qui se touchent) est traité dans [24].

La question de l'existence de valeurs propres plongées dans le spectre essentiel associé à un coin est explorée dans [58] : leur existence est démontrée dans certaines situations particulières. Dans le prolongement de cette idée, il est possible de définir des résonances complexes (souvent appelées quasi-modes ou fréquences de diffusion pour les problèmes de diffraction) qui quantifient l'interaction entre le milieu de propagation et le coin ; leur caractérisation et leur calcul peuvent être effectués par une technique de PML adaptée au coin [22].

Notons pour terminer que d'un point de vue physique ou expérimental, un coin parfait ne peut exister, puisqu'on peut toujours se placer à une échelle spatiale où le coin va devenir arrondi. Pour un coin arrondi (régulier), la seule valeur critique du contraste est  $-1$ , alors que pour un coin parfait, il s'agit d'un intervalle. Il est donc légitime de se demander comment s'effectue la transition d'un coin arrondi à un coin parfait. Des éléments de réponse sont donnés dans [37, 38].

## 0.4 Notre démarche : une approche spectrale de la dispersion

Dans la plupart des travaux évoqués ci-dessus qui s'intéressent au problème modèle (0.1), la fréquence est fixée et seule compte la valeur du contraste  $\mu_\omega^N / \mu_0$ . Le point de vue adopté dans cette thèse consiste à s'intéresser à ce problème en considérant la fréquence  $\omega$  comme un paramètre spectral. L'intérêt d'une telle approche est notamment d'obtenir des informations précises sur le problème transitoire sous-jacent (voir par exemple [33]).

Dans le cas de l'approximation quasi-statique, la fréquence n'intervient qu'au travers du contraste, et on peut donc se permettre de choisir le contraste lui-même comme paramètre spectral, ou toute fonction de ce contraste, comme par exemple les valeurs  $\lambda_{\mathcal{K}}$  et  $\lambda_{\mathcal{T}}$  définie en (0.8) et (0.11). Les études spectrales des opérateurs de Neumann-Poincaré ou de Poincaré variationnel

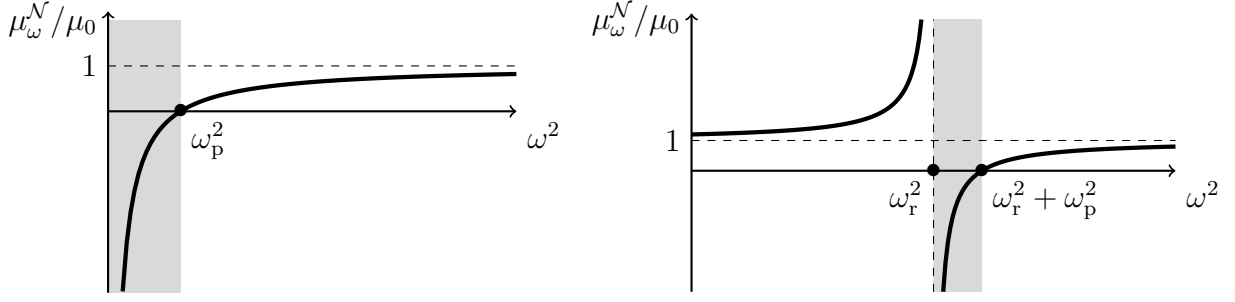


FIGURE 0.1 – Comportement de  $\mu_\omega^N$ . A gauche : pour le modèle de Drude non dissipatif. A droite : pour le modèle de Lorentz non dissipatif. En gris : la plage de fréquences dans laquelle le matériau a un comportement négatif.

évoquées ci-dessus peuvent donc être traduites en termes de fréquence en inversant la relation  $\omega \mapsto \lambda_\mathcal{C}$  ou  $\omega \mapsto \lambda_\mathcal{T}$ .

Les choses ne sont plus si simples pour le problème modèle (0.1), puisque la fréquence n'intervient plus seulement au travers du contraste. Une étude spectrale en fréquence nécessite donc de savoir précisément comment  $\varepsilon_\omega^N$  et  $\mu_\omega^N$  dépendent de la fréquence. Dans les différents modèles que nous allons considérer dans cette thèse, la dépendance est rationnelle. Ceux qui décrivent  $\varepsilon_\omega^N$  et  $\mu_\omega^N$  étant similaires, on se concentre sur  $\mu_\omega^N$ . Les modèles que l'on utilise sont de la forme

$$\mu_\omega^N := \mu_0 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_r^2 + i\gamma\omega} \right) \quad (0.16)$$

où  $\omega_p$  (fréquence plasma),  $\omega_r$  (fréquence de résonance) et  $\gamma$  (dissipation) sont des constantes positives qui caractérisent le matériau. Lorsque  $\omega_r = 0$ , on parle de *modèle de Drude*, sinon on parle de *modèle de Lorentz*. De plus, le modèle (de Drude ou de Lorentz) est dit *conservatif* si  $\gamma = 0$ , et *dissipatif* si  $\gamma \neq 0$ . Le modèle le plus simple est donc le celui de Drude non dissipatif. Dans ce cas, l'expression de  $\mu_\omega^N$  donnée en (0.16) devient

$$\mu_\omega^N := \mu_0 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

et on peut voir en figure 0.1 (à gauche) l'allure de  $\omega \mapsto \mu_\omega^N$ . Dans le cas du modèle de Drude non dissipatif, le matériau a donc un comportement négatif à basse fréquence (plus précisément pour  $\omega^2 < \omega_p^2$ ).

Dans le cas du modèle de Lorentz non dissipatif, l'expression de  $\mu_\omega^N$  donnée en (0.16) devient

$$\mu_\omega^N := \mu_0 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_r^2} \right)$$

et l'allure de  $\omega \mapsto \mu_\omega^N$  est montrée en figure 0.1 (à droite). Dans ce cas, le comportement négatif du matériau a lieu pour des fréquences proches de  $\pm\omega_r$  (plus précisément pour  $\omega_r^2 < \omega^2 < \omega_r^2 + \omega_p^2$ ). Que ce soit dans le cas du modèle de Drude ou de celui de Lorentz, lorsqu'on ajoute une petite dissipation, c'est la partie réelle de  $\mu_\omega^N$  qui devient négative dans une plage fréquentielle proche du cas non dissipatif.

Comme nous l'avons indiqué plus tôt dans cette introduction, c'est le paramètre  $\mu_\omega$ , et non  $\varepsilon_\omega$ , qui est clef dans l'étude du problème (0.1), car c'est lui qui apparaît dans les conditions de

transmission (0.4) . Lorsqu'on remplace  $\mu_\omega$  par son expression (0.16) dans (0.1), cette dernière peut se réécrire

$$\operatorname{div} \left( \left[ 1 + \mathbf{1}_{\mathcal{N}} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_r^2 + i\gamma\omega - \omega_p^2} \right] \operatorname{grad} \varphi \right) + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_\omega^{\mathcal{N}} \varphi = 0.$$

On remarque que dès que le milieu  $\mathcal{N}$  est non vide, à cause de la dépendance en  $\omega$  de  $\mu_\omega^{\mathcal{N}}$ , l'équation (0.1) est un problème aux valeurs propres non linéaire en  $\omega$ . Heureusement, on peut pallier ce problème grâce à l'introduction de variables auxiliaires, qui permettent de construire un problème de plus grande dimension, mais linéaire en  $\omega$ . Ce problème augmenté peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \varphi \\ U \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \varphi \\ U \end{pmatrix} \quad (0.17)$$

où  $U$  contient les variables auxiliaires, et où l'opérateur  $\mathcal{A}$  ne dépend pas de  $\omega$ . La construction de  $\mathcal{A}$  dépend du modèle choisi pour  $\mu_\omega^{\mathcal{N}}$ , et cet opérateur est autoadjoint dans les cas non dissipatifs (Drude ou Lorentz). Cette thèse se consacre à l'étude du spectre, et plus particulièrement du spectre essentiel de cet opérateur, en se basant sur la construction de suites singulières, ou suites de Weyl. Ce manuscrit est composé de quatre chapitres.

Les chapitres 1 et 3 sont consacrés à l'*étude théorique* du cas où les milieux  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{V}$  sont *polygonaux* (voir figure 0.2, à gauche). Le premier chapitre détaille l'étude du modèle le plus simple : celui de *Drude non dissipatif*, et le troisième celle du modèle le plus général : celui de *Lorentz* (dissipatif ou non). On présente également dans ce chapitre le cas du modèle de *Drude dissipatif*, de façon moins détaillée, puisqu'il est similaire au cas de Lorentz dissipatif. Dans chacun des cas, on construit un problème augmenté de la forme (0.17) avec le cadre fonctionnel adapté, puis on en étudie le spectre essentiel. On montre que ce dernier possède plusieurs composantes, liées à différents phénomènes de résonance, toujours associés aux mêmes valeurs du contraste  $\kappa_\omega := \mu_\omega^{\mathcal{N}}/\mu_0$ . Du point de vue fréquentiel, ces phénomènes dépendent du modèle choisi (0.16). On est donc amené à inverser la relation  $\omega \rightarrow \kappa_\omega$  : on obtient les deux antécédents

$$\omega_\kappa^\pm := \begin{cases} \frac{-i\gamma \pm \sqrt{4(\omega_r^2 + \omega_p^2/(1-\kappa)) - \gamma^2}}{2} & \text{si } 4(\omega_r^2 + \omega_p^2/(1-\kappa)) - \gamma^2 > 0 \\ \frac{-i\gamma \pm i\sqrt{-4(\omega_r^2 + \omega_p^2/(1-\kappa)) + \gamma^2}}{2} & \text{si } 4(\omega_r^2 + \omega_p^2/(1-\kappa)) - \gamma^2 < 0. \end{cases}$$

On distingue alors trois composantes du spectre essentiel liées à des phénomènes de résonance, montrées en figure 0.4 :

- $\omega_\infty^\pm$  (= 0 pour Drude non dissipatif), associé à une résonance volumique dans le milieu  $\mathcal{N}$  tout entier ;
- $\omega_{-1}^\pm$  (=  $\pm\omega_p/\sqrt{2}$  pour Drude non dissipatif), associé à une résonance surfacique au niveau de n'importe quel point régulier de l'interface entre les milieux  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{V}$  : la suite singulière construite pour ce point de spectre essentiel repose sur les fameux *plasmons de surface* cités plus tôt dans cette introduction ;
- un continuum autour de la valeur  $\omega_{-1}^\pm$ , associé à une résonance de coin au niveau d'un sommet de l'interface. Ce continuum dépend l'angle de ce coin, et correspond à un intervalle de contrastes autour de la valeur  $-1$  ( $\kappa \in [-1/3, 1/3]$  dans le cas d'un angle droit), que l'on retrouve notamment dans [21], [13] et [35]. Les suites singulières associées aux points de ce continuum repose sur les fonctions singulières (0.14), ou *ondes de trou noir*.

Le deuxième chapitre est consacré à l'*étude numérique du modèle de Drude non dissipatif*. Il consiste à expérimenter l'effet d'une discrétisation éléments finis du problème augmenté introduit



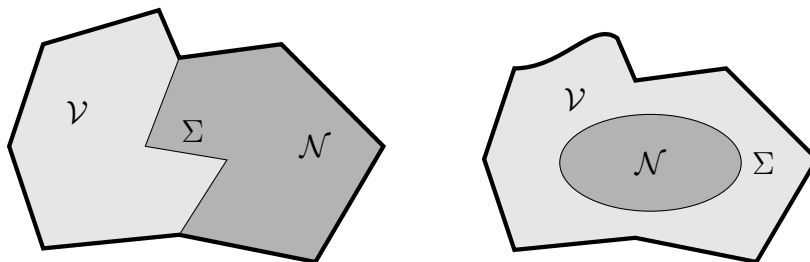


FIGURE 0.2 – Géométries de la cavité étudiées : à gauche : dans les chapitres 1 et 3 ; à droite : dans le chapitre 4

dans le chapitre 1, afin d’observer comment se retrouvent numériquement les différents phénomènes de résonance. Ce passage au numérique n’a en effet rien d’évident car un spectre essentiel ne peut évidemment pas se retrouver dans un problème discret. Ce type d’expérimentations numériques est l’un des centres d’intérêt de certains chercheurs de l’institut Fresnel (Marseille), laboratoire avec lequel nous avons eu l’occasion d’échanger à plusieurs reprises. Ils se focalisent plutôt sur les équations de Maxwell, c’est pourquoi c’est le contraste des permittivités qui a chez eux un rôle clef, mais des phénomènes similaires à ceux notre étude sont observés pour les mêmes valeurs de ce contraste. On pourra en particulier regarder [45], [28] et [29]. Dans le troisième chapitre de ce manuscrit, on fait d’abord l’étude d’un cas test, celui d’un rectangle coupé en deux parallèlement à l’un des côtés (voir figure 0.3, à gauche), dans lequel on peut calculer algébriquement les fonctions propres et trouver une équation de dispersion, afin de pouvoir vérifier la cohérence des éléments propres calculés numériquement. Ensuite, on fait l’étude d’une géométrie type contenant tous les phénomènes de résonance espérés : celle d’un camembert dont une portion est composée de matériau négatif (voir figure 0.3, à droite). Les conclusions qu’on peut tirer de ces expérimentations numériques sont les suivantes :

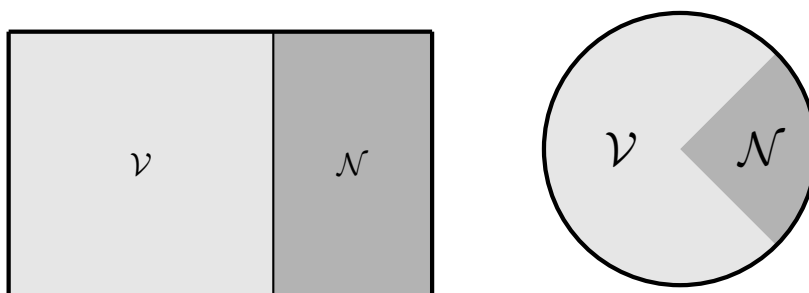


FIGURE 0.3 – Géométries de la cavité utilisées dans les simulations numériques

- La résonance volumique n’a aucun mal à être observée numériquement : les éléments propres sont bien calculés.
- Sans précaution particulière dans le choix du maillage, les éléments propres liés à la résonance surfacique sont mal calculés : les valeurs propres s’étalent beaucoup trop autour de la valeur  $\omega_p^2/2$ , et les fonctions propres associées correspondent à la vibration de quelques mailles seulement au niveau de l’interface : elles ne correspondent à rien de physique. Plus on raffine le maillage au voisinage de l’interface, plus on trouve d’éléments propres mal calculés. En revanche, on parvient à éviter ce problème en construisant un maillage symétrique par rapport à l’interface au voisinage de cette dernière (technique utilisée notamment dans

[31], [35] et [22]).

- On trouve des fonctions propres correspondant à une résonance de coin associées à des valeurs propres situées sur l'intervalle théorique de spectre essentiel, mais les valeurs propres numériques ne recouvrent pas du tout l'intervalle. En fait, on se rend compte qu'on ne peut pas espérer d'accumulation des valeurs propres numériques sur l'intervalle entier, même pour des maillages très précis au voisinage du coin.

Dans les chapitres 1 et 2, puisque la fréquence  $\omega$  n'apparaît qu'au carré dans le modèle de Drude non dissipatif, on posera  $\lambda = \omega^2$  et on prendra  $\lambda$  comme paramètre spectral. De plus, on notera  $\Lambda_m := \omega_p^2$  afin de simplifier le modèle de Drude en

$$\kappa_\omega^{\mathcal{N}} = \left(1 - \frac{\Lambda_m}{\lambda}\right).$$

Enfin, le quatrième chapitre traite le cas de *frontières courbes* pour le modèle de *Drude non dissipatif*. Plus précisément, on fait le choix d'une inclusion de matériau négatif  $\mathcal{N}$  dans la cavité (voir figure 0.2, à droite), où l'interface  $\partial\mathcal{N}$  entre les deux milieux est de classe  $\mathcal{C}^3$ . Ce chapitre est surtout consacré aux plasmons de surface pour une frontière courbe. Dans le chapitre 1, la construction de suites de Weyl pour le contraste -1 repose sur la connaissance des plasmons de surface apparaissant sur une interface rectiligne. Ceux-ci ne peuvent malheureusement pas être utilisés pour une interface courbe. En introduisant de nouveaux plasmons pour une interface de courbure constante, on montre comment généraliser la démarche du chapitre 1.

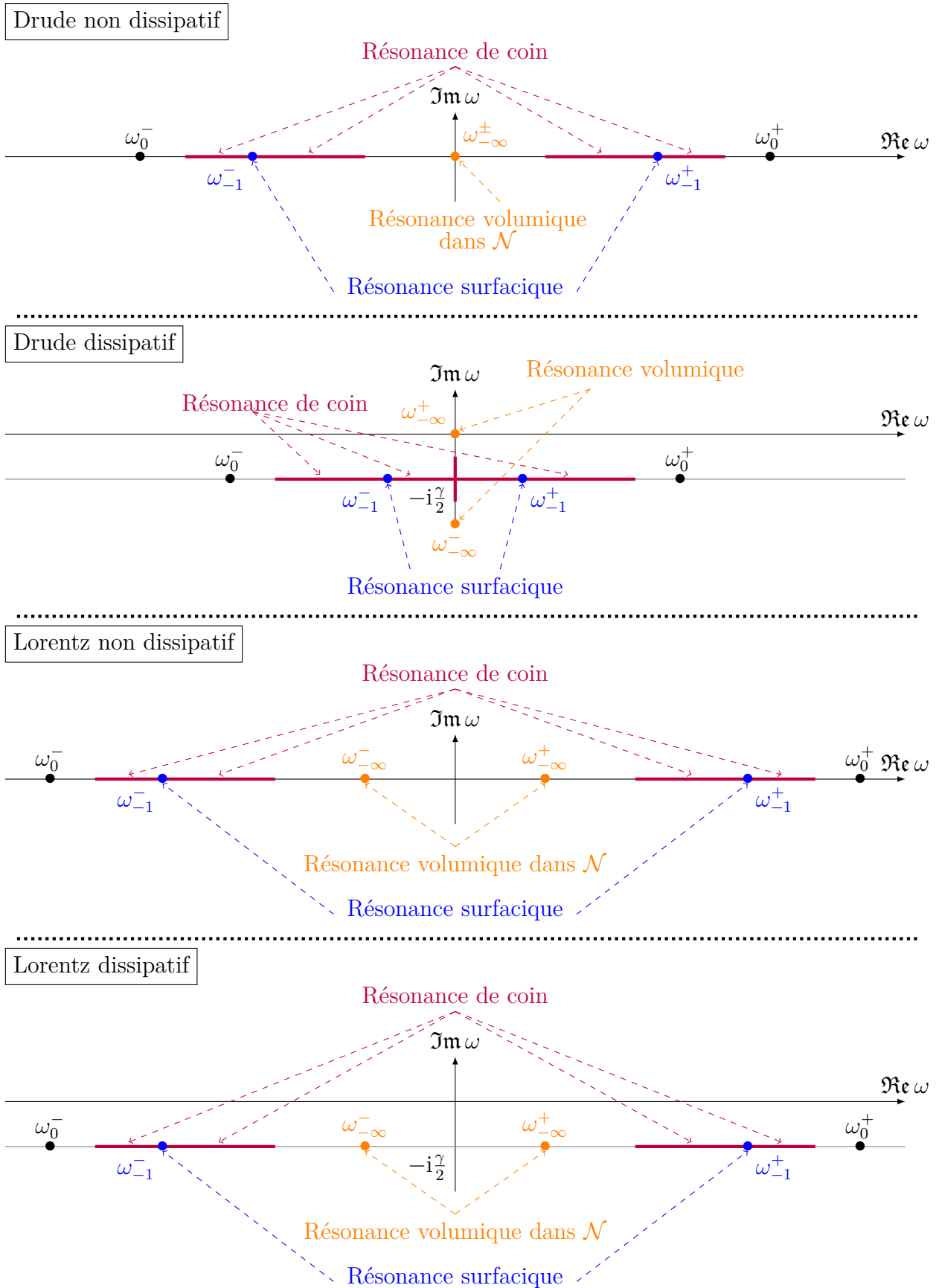


FIGURE 0.4 – Allure du spectre essentiel de l’opérateur  $\mathcal{A}$  ou  $\mathbb{A}$  pour les différents modèles. Pour le modèle de Lorentz dissipatif, on prend le cas d’une petite dissipation ( $\gamma^2 < 4\omega_r^2$ ). Les indices  $x$  des fréquences  $\omega_x^\pm$  correspondent aux valeurs du contraste  $\mu_\omega^{\mathcal{N}}/\mu_0$  associées.

# Chapitre 1

## Etude théorique du modèle de Drude non dissipatif

Ce chapitre a fait l'objet de l'article [54], qui est à paraître aux annales Henri Lebesgue. Il est présenté ici tel qu'il a été accepté, donc laissé en anglais. Seule l'annexe 1.B, rédigée en français, a été ajoutée au contenu de l'article.

### 1.1 Introduction

An electromagnetic *negative-index material* (NIM), often also called left-handed material, is a material whose microscopic structure leads to an unusual macroscopic behavior : in some frequency range(s), both macroscopic electric permittivity and magnetic permeability (or at least their real parts) become *negative*. Such materials were first introduced theoretically in the late sixties by Veselago [75] who exhibited the concept of negative refraction. The potentialities of NIMs for practical applications were investigated about 30 years later, mainly after the famous paper by Pendry [67] who opened the quest for spectacular devices such as the perfect flat lens or the invisibility cloak. Since then, these extraordinary materials have generated a great effervescence among the communities of physicists and mathematicians. Surprisingly very little has been achieved in the spectral analysis of systems involving a NIM. The present paper intends to bring a contribution in this framework. Its purpose is to show on a simple example that the presence of an interface between a NIM and a usual material is responsible for an *essential spectrum*.

One inherent difficulty of the spectral analysis of NIMs follows from an intrinsic physical property of such materials : *frequency dispersion*. Indeed, an electromagnetic NIM is necessarily a dispersive material in the sense that in the frequency domain, its permittivity and permeability (thus also the wave velocity) depend on the frequency. As a consequence, contrary to the case of a usual dielectric medium, the time-harmonic Maxwell's equations depend non-linearly on the frequency. Hence, when looking for the spectrum of an electromagnetic device involving a NIM, one has to solve a non-linear eigenvalue problem. This issue is very rarely mentioned in the mathematical literature. Indeed, most existing works concern the behavior of NIMs in the frequency domain, that is, propagation of time-harmonic waves at a given frequency. Our study relies on these works, which enlighten the fundamental role played by the *contrasts*, that is, the respective ratios of permittivity and permeability across the interface. The first study in this context is due to Costabel and Stephan [41] in the mid-eighties. They considered a scalar transmission problem (which involves only one contrast) and showed by an integral equation technique that in the case of a smooth interface, the transmission problem is well-posed if and only if the contrast is different from the critical value  $-1$ . The detailed study of this critical

value of the contrast is achieved in [65] and more recently in [30], both for smooth interfaces. The case of a two-dimensional non-smooth interface was tackled about fifteen years after the pioneering work of Costabel and Stephan : it was understood in [21] that in the presence of a corner, this critical value becomes a critical interval (which contains  $-1$ ) depending on the angle of the corner. About another fifteen years later, the elegant T-coercivity technique gave a new light on these critical sets for two- and three-dimensional scalar transmission problems [13, 62], as well as Maxwell's equations [14, 15]. An alternative point of view, based on the so-called Neumann–Poincaré operator, has received recently a resurgence of interest [2, 5, 8, 26, 69] : it provides another way to investigate these critical sets. From a physical point of view, the critical sets of the contrast are related to remarkable physical phenomena. On the one hand, the critical value  $-1$  associated to a smooth interface ensures the existence of surface waves (localized near the interface) called *surface plasmons* [50, 52]. On the other hand, the critical interval associated with a corner on the interface gives rise to a possible concentration of energy near the vertex, which has been interpreted as a “black hole” effect at the corner [11].

There are very few papers in the literature which deal directly with the non-linear eigenvalue problem resulting from *frequency dispersion*. Let us cite for instance [40] where some generic well-posedness results are established thanks to Fredholm's analytical theory, with various applications to metamaterials. In cases where the dependence on the spectral parameter is rational, it is possible to get rid of the spectral non-linearity by introducing suitable auxiliary fields. The initial non-linear eigenvalue problem can then be re-written as a linear one which involves both original and auxiliary fields. This *augmented formulation* technique actually comes within a general approach for rational operator valued functions which can be related with block operator matrices. It has a long history which seems to start at the end of the 70's with the concept of *transfer function* [9] and was then widely developed under the name *Schur complement* borrowed from the theory of matrices [61, 74]. Similar ideas also apply for the numerical solution of rational eigenvalue problems [53, 71]. From a theoretical point of view, this approach was used for instance in [1] to study completeness properties of a family of eigenvectors of a rational operator valued function. More recently, it is developed in [47] to establish min-max characterizations of eigenvalues of some kinds of rational operator functions, with applications to photonics which are closed to the problem addressed in the present paper. The augmented formulation approach is used in [33] to achieve a complete spectral analysis of Maxwell's equations in the case of a plane interface between a NIM and vacuum. It is also developed in [29] to perform the numerical calculation of modes for cavities or photonic crystals containing a dissipative NIM. Let us finally mention that in the context of Maxwell's equations, the idea of introducing auxiliary fields was investigated by Tip [72] in dissipative and dispersive linear media. Compared to the Schur complement technique, the originality of the augmented formulation proposed by Tip concerns dissipative problems for which a suitable choice of auxiliary variables leads to a *selfadjoint* operator. The same idea applies actually in a very wide frame of systems [48] which observe two fundamental assumptions : causality (causes precede effects) and passivity (nothing comes from nothing).

The aim of the present paper is to explore the spectrum of the *linear augmented formulation* constructed from the initial *non-linear* eigenvalue problem, considering an elementary situation. Firstly, instead of the three-dimensional Maxwell's equations, we deal with a two-dimensional scalar equation (which can be derived from Maxwell's equations in a medium which is invariant in one space direction). Secondly, we choose the simplest existing model of NIM, namely the non dissipative Drude model, for which negativity occurs at low frequencies. Finally, we consider the case of a bounded cavity consisting of two polygonal parts : one part filled with a Drude material and the complementary part filled with vacuum. We will see that contrary to a cavity filled with

a usual dielectric (for which the spectrum is always purely discrete : it is made of a sequence of positive eigenvalues which tends to  $+\infty$ ), the presence of the Drude material gives rise to various components of an *essential spectrum* corresponding to various unusual *resonance* phenomena :

(i) A low frequency *bulk resonance* : the zero frequency is an accumulation point of positive eigenvalues whose associated eigenvectors are confined in the Drude material.

(ii) A *surface resonance* : for the particular frequency which corresponds to the critical value  $-1$  of the contrast, localized highly oscillating vibrations are possible near any “regular point” of the interface between the Drude material and the vacuum (by “regular point”, we mean a point which is not a vertex of a corner).

(iii) A *corner resonance* : for any frequency in the frequency intervals which correspond to the critical intervals of the contrast associated to each corner, localized highly oscillating vibrations are possible near the vertex, which is related to the “black hole” phenomenon.

A crucial issue will remain open at the end of the paper : what is the relation between the essential spectrum of the *linear augmented formulation* studied here and that of the initial *non-linear problem* ? Can we deduce from our results that the latter has the same components of essential spectrum ? In some situations, the answer to such a question follows from general results (which is one of the main objectives of spectral theory of block operator matrices, see [74]). Unfortunately, none of these general results applies to our situation and we are unable to give here a satisfying answer to this delicate question.

The paper is organized as follows. In section 1.2, we present our scalar problem as well as its augmented formulation and give the main results of the paper. Section 1.3 is devoted to the proof of these results, which mainly consists in investigating the above mentioned resonance phenomena using the notion of *Weyl sequences*. We conclude with some perspectives. Finally section 1.A presents a short discussion about the tricky question of the relation between the respective essential spectra of both linear and non-linear problems.

Throughout the paper, we use the following notations for usual functional spaces. For an open set  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d \geq 1$ ), we denote by  $\mathcal{D}(\Omega)$  the space of infinitely differentiable functions with compact support contained in  $\Omega$ , by  $L^2(\Omega)$  the space of square integrable functions in  $\Omega$ , by  $H^s(\Omega)$ , for  $s \in \mathbb{R}$ , the usual Sobolev space of order  $s$  and by  $H_0^1(\Omega)$  the closure of  $\mathcal{D}(\Omega)$  in  $H^1(\Omega)$ . Moreover, in order to avoid the appearance of non meaningful constants in inequalities, we employ the symbols  $\lesssim$  and  $\gtrsim$  which mean that the inequality is satisfied up to a positive factor which does not depend on the parameters involved in the inequality (for instance,  $|f(x)| \lesssim 1$  means that  $f$  is bounded).

## 1.2 Formulation of the problem and main results

### 1.2.1 Original non-linear problem

Our aim is to study the spectral properties of a two-dimensional bounded cavity partially filled with a NIM. We consider a polygonal cavity  $\mathcal{C}$  (bounded open set of  $\mathbb{R}^2$ ) divided into two open polygonal domains  $\mathcal{N}$  and  $\mathcal{V}$  (such that  $\overline{\mathcal{N}} \cup \overline{\mathcal{V}} = \overline{\mathcal{C}}$  and  $\mathcal{N} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ , see Figure 1.1). As these notations suggest,  $\mathcal{N}$  and  $\mathcal{V}$  are filled respectively with a NIM and vacuum. We denote by  $\Sigma$  the interface between  $\mathcal{N}$  and  $\mathcal{V}$  (that is,  $\Sigma := \partial\mathcal{N} \cap \partial\mathcal{V}$ ), which clearly consists of one or several polygonal curve(s). In the case of several curves, we assume that they do not intersect (in particular checkerboard-like cavities are excluded).

We consider in this paper the simplest model of NIM, known as the non-dissipative Drude model, for which the electric permittivity and the magnetic permeability are respectively defined

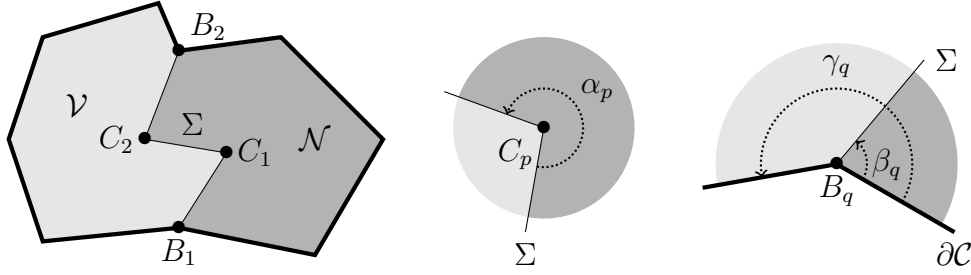


FIGURE 1.1 – Left : The polygonal cavity  $\mathcal{C}$  divided into  $\mathcal{N}$  (NIM : dark gray) and  $\mathcal{V}$  (vacuum : light gray). Middle : an inner vertex  $C_p$  of the interface  $\Sigma$  between  $\mathcal{N}$  and  $\mathcal{V}$ . Right : a boundary vertex  $B_q$  of  $\Sigma$ .

in the frequency domain by

$$\varepsilon_\lambda^{\mathcal{N}} := \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\Lambda_e}{\lambda}\right) \quad \text{and} \quad \mu_\lambda^{\mathcal{N}} := \mu_0 \left(1 - \frac{\Lambda_m}{\lambda}\right), \quad (1.1)$$

where  $\lambda := \omega^2$  denotes the square of the (circular) frequency,  $\varepsilon_0$  and  $\mu_0$  are the permittivity and the permeability of the vacuum and the coefficients  $\Lambda_e$  and  $\Lambda_m$  are positive constants which characterize the Drude material. Such a material is a negative material at low frequencies (since  $\varepsilon_\lambda^{\mathcal{N}} < 0$  if  $0 < \lambda < \Lambda_e$ , respectively  $\mu_\lambda^{\mathcal{N}} < 0$  if  $0 < \lambda < \Lambda_m$ ) and behaves like the vacuum at high frequencies (since  $\varepsilon_\lambda^{\mathcal{N}} \rightarrow \varepsilon_0$  and  $\mu_\lambda^{\mathcal{N}} \rightarrow \mu_0$  when  $\lambda \rightarrow +\infty$ ). Note that the ratio  $\mu_\lambda^{\mathcal{N}}/\mu_0$  (respectively,  $\varepsilon_\lambda^{\mathcal{N}}/\varepsilon_0$ ) is equal to the critical value  $-1$  if  $\lambda = \Lambda_m/2$  (respectively,  $\lambda = \Lambda_e/2$ ).

In  $\mathcal{V}$ , the permittivity and permeability are those of the vacuum, which leads us to introduce two piecewise constant functions defined in the cavity  $\mathcal{C}$  by

$$\varepsilon_\lambda(x) := \varepsilon_0 \left(1 - \mathbf{1}_{\mathcal{N}}(x) \frac{\Lambda_e}{\lambda}\right) \quad \text{and} \quad \mu_\lambda(x) := \mu_0 \left(1 - \mathbf{1}_{\mathcal{N}}(x) \frac{\Lambda_m}{\lambda}\right) \quad (1.2)$$

for  $x \in \mathcal{C}$ , where  $\mathbf{1}_{\mathcal{N}}$  denotes the indicator function of  $\mathcal{N}$ . The starting point of our study is the following eigenvalue problem, which describes the *resonances* of the cavity :

Find  $\lambda \in \mathbb{C}$  and a nonzero  $\varphi \in H_0^1(\mathcal{C})$  such that

$$\operatorname{div} \left( \frac{1}{\mu_\lambda} \operatorname{grad} \varphi \right) + \lambda \varepsilon_\lambda \varphi = 0 \quad \text{in } \mathcal{C}. \quad (1.3)$$

The latter equation has to be understood in the distributional sense. In other words, the above problem is a condensed form of the following system :

$$\Delta \varphi + \lambda \varepsilon_\lambda^{\mathcal{N}} \mu_\lambda^{\mathcal{N}} \varphi = 0 \quad \text{in } \mathcal{N}, \quad (1.4a)$$

$$\Delta \varphi + \lambda \varepsilon_0 \mu_0 \varphi = 0 \quad \text{in } \mathcal{V}, \quad (1.4b)$$

$$[\varphi]_\Sigma = 0 \quad \text{and} \quad \left[ \frac{1}{\mu_\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_\Sigma = 0, \quad (1.4c)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{on } \partial \mathcal{C}, \quad (1.4d)$$

where  $[f]_\Sigma$  denotes the jump of a function  $f$  across  $\Sigma$ , that is, the difference of the traces of  $f$  obtained from both sides. In the transmission conditions (1.4c),  $n$  denotes a unit normal to

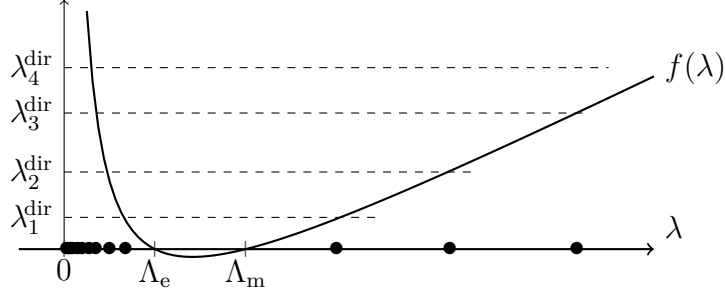


FIGURE 1.2 – The dots on the  $\lambda$ -axis represent the inverse image of  $\sigma(-\Delta^{\text{dir}}) = \{\lambda_n^{\text{dir}}; n \geq 1\}$  under the function  $f$  defined in (3.6) (in the case  $\Lambda_e < \Lambda_m$ ).

$\Sigma$ . These conditions couple the Helmholtz equations (1.4a) and (1.4b) on both sides of  $\Sigma$ . The Dirichlet boundary condition (1.4d) is contained in the choice of the Sobolev space  $H_0^1(\mathcal{C})$  for  $\varphi$ .

The above eigenvalue problem is clearly *non-linear* with respect to  $\lambda$ , unless  $\mathcal{N}$  is empty (*i.e.*,  $\mathcal{C}$  only contains vacuum). In this latter case, (1.3) is linear since it reduces to (1.4b)-(1.4d), which means that  $\lambda \varepsilon_0 \mu_0$  is an eigenvalue of the Dirichlet Laplacian, that is, the selfadjoint operator  $-\Delta^{\text{dir}}$  defined by

$$-\Delta^{\text{dir}} \varphi := -\Delta \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(-\Delta^{\text{dir}}) := \left\{ \varphi \in H_0^1(\mathcal{C}); \Delta \varphi \in L^2(\mathcal{C}) \right\}. \quad (1.5)$$

It is well known that the spectrum  $\sigma(-\Delta^{\text{dir}})$  of this operator is purely discrete : it is composed of a sequence of positive eigenvalues of finite multiplicity which tends to  $+\infty$ .

On the other hand, if  $\mathcal{V} = \emptyset$  (*i.e.*, if  $\mathcal{C}$  only contains the Drude material), (1.3) reduces to (1.4a)-(1.4d), which means that  $\lambda \varepsilon_\lambda^\mathcal{N} \mu_\lambda^\mathcal{N}$  is an eigenvalue of the operator  $-\Delta^{\text{dir}}$  defined above. Hence the set of eigenvalues of our non-linear problem is simply the inverse image of  $\sigma(-\Delta^{\text{dir}})$  under the function  $f$  defined by

$$f(\lambda) := \lambda \varepsilon_\lambda^\mathcal{N} \mu_\lambda^\mathcal{N} = \lambda \varepsilon_0 \mu_0 \left( 1 - \frac{\Lambda_e}{\lambda} \right) \left( 1 - \frac{\Lambda_m}{\lambda} \right), \quad (1.6)$$

which is represented in Figure 1.2. As  $f(\lambda)$  tends to  $+\infty$  when  $\lambda$  goes to 0 or  $+\infty$ , the eigenvalues accumulate at  $+\infty$  as well as 0.

Of course, when both vacuum and Drude material are present in the cavity, such simple arguments can no longer be used. As mentioned in the introduction, general techniques of block operator matrices allow us to transform the non-linear eigenvalue problem (1.3) into a *linear* one which involves a *selfadjoint* operator, thanks to the introduction of an additional unknown. This is the object of the following subsection.

## 1.2.2 Linearization of the problem

Let us first introduce some notations. We denote by  $\mathcal{R} : L^2(\mathcal{C}) \rightarrow L^2(\mathcal{N})$  the operator of restriction from  $\mathcal{C}$  to  $\mathcal{N}$  and by  $\mathcal{R}^* : L^2(\mathcal{N}) \rightarrow L^2(\mathcal{C})$  the operator of extension by 0 from  $\mathcal{N}$  to  $\mathcal{C}$ , that is, for all  $(\varphi, \psi) \in L^2(\mathcal{C}) \times L^2(\mathcal{N})$ ,

$$\mathcal{R}\varphi := \varphi|_{\mathcal{N}} \quad \text{and} \quad \mathcal{R}^*\psi(x) := \begin{cases} \psi(x) & \text{if } x \in \mathcal{N}, \\ 0 & \text{if } x \in \mathcal{V}. \end{cases}$$



These operators are clearly adjoint to each other since

$$\int_{\mathcal{N}} \mathcal{R}\varphi(x) \overline{\psi(x)} dx = \int_{\mathcal{C}} \varphi(x) \overline{\mathcal{R}^*\psi(x)} dx.$$

Note that  $\mathcal{R}\mathcal{R}^*$  is the identity in  $L^2(\mathcal{N})$ , whereas  $\mathcal{R}^*\mathcal{R}$  is the operator of multiplication by  $\mathbf{1}_{\mathcal{N}}$  in  $L^2(\mathcal{C})$ . We shall keep the same notations  $\mathcal{R}$  and  $\mathcal{R}^*$  if  $\varphi$  and  $\psi$  are replaced by vector-valued functions in  $L^2(\mathcal{C})^2 \times L^2(\mathcal{N})^2$ .

The construction of a linear eigenvalue problem equivalent to (1.3) is quite simple. We assume in the sequel that  $\lambda \neq \Lambda_m$ , so that  $\mu_\lambda^{-1}$  remains bounded. Note that for  $\lambda = 0$ , problem (1.3) still makes sense provided we replace  $(\mu_\lambda^{\mathcal{N}})^{-1}$  and  $\lambda \varepsilon_\lambda^{\mathcal{N}}$  by their limiting values, respectively, 0 and  $-\varepsilon_0 \Lambda_e$ . Using the definition (1.2) of  $\varepsilon_\lambda$  and  $\mu_\lambda$ , which shows in particular that

$$\frac{1}{\mu_\lambda} = \frac{1}{\mu_0} \left( 1 + \mathbf{1}_{\mathcal{N}} \frac{\Lambda_m}{\lambda - \Lambda_m} \right),$$

we can rewrite (1.3) in the form

$$\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \operatorname{div} \left\{ \left( 1 + \mathbf{1}_{\mathcal{N}} \frac{\Lambda_m}{\lambda - \Lambda_m} \right) \operatorname{grad} \varphi \right\} + (\lambda - \mathbf{1}_{\mathcal{N}} \Lambda_e) \varphi = 0.$$

Hence, setting

$$u := \frac{\Lambda_m}{\lambda - \Lambda_m} \mathcal{R} \operatorname{grad} \varphi, \quad (1.7)$$

equation (1.3) is equivalent to

$$\frac{-1}{\varepsilon_0 \mu_0} \operatorname{div} \{ \operatorname{grad} \varphi + \mathcal{R}^* u \} + \mathbf{1}_{\mathcal{N}} \Lambda_e \varphi = \lambda \varphi \quad \text{in } \mathcal{C}, \quad (1.8a)$$

$$\Lambda_m \mathcal{R} \operatorname{grad} \varphi + \Lambda_m u = \lambda u \quad \text{in } \mathcal{N}, \quad (1.8b)$$

where the latter equation is nothing but the definition (1.7) of  $u$ . In this system of equations,  $\lambda$  only appears in the right-hand side : it is a *linear* eigenvalue problem for the pair  $(\varphi, u)$ . To sum up, if  $\lambda \neq \Lambda_m$ , a function  $\varphi \in H_0^1(\mathcal{C})$  is a solution to (1.3) if and only if  $(\varphi, u) \in H_0^1(\mathcal{C}) \times L^2(\mathcal{N})^2$  satisfies

$$\mathbb{A} \begin{pmatrix} \varphi \\ u \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \varphi \\ u \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

where

$$\mathbb{A} \begin{pmatrix} \varphi \\ u \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{-1}{\varepsilon_0 \mu_0} \operatorname{div} \{ \operatorname{grad} \varphi + \mathcal{R}^* u \} + \mathbf{1}_{\mathcal{N}} \Lambda_e \varphi \\ \Lambda_m \mathcal{R} \operatorname{grad} \varphi + \Lambda_m u \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

It remains to make precise the proper functional framework in which  $\mathbb{A}$  is selfadjoint. Consider the Hilbert space

$$\mathcal{H} := L^2(\mathcal{C}) \times L^2(\mathcal{N})^2$$

equipped with the inner product

$$\left( (\varphi, u), (\varphi', u') \right)_{\mathcal{H}} := \varepsilon_0 \mu_0 \int_{\mathcal{C}} \varphi(x) \overline{\varphi'(x)} dx + \frac{1}{\Lambda_m} \int_{\mathcal{N}} u(x) \cdot \overline{u'(x)} dx. \quad (1.11)$$

**Proposition 1.1.** *The operator  $\mathbb{A}$  defined by (1.10) with domain*

$$D(\mathbb{A}) := \left\{ (\varphi, u) \in H_0^1(\mathcal{C}) \times L^2(\mathcal{N})^2; \operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi + \mathcal{R}^* u) \in L^2(\mathcal{C}) \right\} \quad (1.12)$$

*is selfadjoint and non-negative in  $\mathcal{H}$ .*

**Proof :** Consider the following sesquilinear form  $a$  defined for all pairs  $\Phi := (\varphi, u)$  and  $\Phi' := (\varphi', u')$  in  $D(a) := H_0^1(\mathcal{C}) \times L^2(\mathcal{N})^2$  equipped with the usual norm, denoted by  $\|\cdot\|_{D(a)}$  :

$$a(\Phi, \Phi') := \int_{\mathcal{C}} (\text{grad } \varphi + \mathcal{R}^* u) \cdot \overline{(\text{grad } \varphi' + \mathcal{R}^* u')} dx + \Lambda_e \varepsilon_0 \mu_0 \int_{\mathcal{N}} \varphi \overline{\varphi'} dx.$$

Thanks to Green's formula, we deduce from the definition (1.10) of  $\mathbb{A}$  that

$$(\mathbb{A}\Phi, \Phi')_{\mathcal{H}} = a(\Phi, \Phi') \quad \forall \Phi \in D(\mathbb{A}), \quad \forall \Phi' \in D(a). \quad (1.13)$$

It is clear that  $a$  is continuous, non-negative and symmetric in  $D(a)$ , which is continuously embedded in  $\mathcal{H}$ . Hence, if there exist  $\lambda \in \mathbb{R}$  and  $m > 0$  such that

$$a(\Phi, \Phi) + \lambda \|\Phi\|_{\mathcal{H}}^2 \geq m \|\Phi\|_{D(a)}^2 \quad \forall \Phi \in D(a), \quad (1.14)$$

it is well-known [55, Theorem 2.1, p. 322] that (1.13) defines a unique non-negative selfadjoint operator  $\mathbb{A}$  with domain

$$D(\mathbb{A}) := \left\{ \Phi \in D(a); \exists \Psi \in \mathcal{H}, \forall \Phi' \in D(a), a(\Phi, \Phi') = (\Psi, \Phi')_{\mathcal{H}} \right\}.$$

It is easy to see that this definition coincide with (1.12). In order to check inequality (1.14), note that for any  $\lambda > 0$ , we have

$$\begin{aligned} \|\text{grad } \varphi + \mathcal{R}^* u\|_{L^2(\mathcal{C})}^2 &= \left\| \sqrt{\frac{\Lambda_m}{\lambda}} \text{grad } \varphi + \sqrt{\frac{\lambda}{\Lambda_m}} \mathcal{R}^* u \right\|_{L^2(\mathcal{C})}^2 \\ &\quad + \left(1 - \frac{\Lambda_m}{\lambda}\right) \|\text{grad } \varphi\|_{L^2(\mathcal{C})}^2 + \left(1 - \frac{\lambda}{\Lambda_m}\right) \|u\|_{L^2(\mathcal{N})}^2. \end{aligned}$$

As a consequence,

$$a(\Phi, \Phi) + \lambda \|\Phi\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \left(1 - \frac{\Lambda_m}{\lambda}\right) \|\text{grad } \varphi\|_{L^2(\mathcal{C})}^2 + \lambda \varepsilon_0 \mu_0 \|\varphi\|_{L^2(\mathcal{C})}^2 + \|u\|_{L^2(\mathcal{N})}^2.$$

So, if  $\lambda > \Lambda_m$ , inequality (1.14) holds with  $m = \min(1 - \Lambda_m/\lambda, \lambda \varepsilon_0 \mu_0, 1)$ .  $\square$

Summing up, the above linearization process amounts to identifying the *point spectrum*  $\sigma_p(\mathbb{A})$  of  $\mathbb{A}$  with that of a rational family of operators associated to the original non-linear problem (1.3). It seems natural to consider here the family  $\mathbb{C} \setminus \{\Lambda_m\} \ni \lambda \mapsto \mathbb{S}_\lambda$  of unbounded operators defined in  $L^2(\mathcal{C})$  by

$$D(\mathbb{S}_\lambda) := \left\{ \varphi \in H_0^1(\mathcal{C}); \text{div}(\mu_\lambda^{-1} \text{grad } \varphi) \in L^2(\mathcal{C}) \right\} \quad \text{and} \quad (1.15)$$

$$\mathbb{S}_\lambda \varphi := -\text{div}(\mu_\lambda^{-1} \text{grad } \varphi) - \lambda \varepsilon_\lambda \varphi \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{S}_\lambda). \quad (1.16)$$

Thus if we define

$$\sigma_p(\mathbb{S}_\lambda) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\Lambda_m\}; \text{Ker}(\mathbb{S}_\lambda) \neq \{0\} \right\}, \quad (1.17)$$

we have proved that  $\sigma_p(\mathbb{S}_\lambda) = \sigma_p(\mathbb{A}) \setminus \{\Lambda_m\}$ .

Proposition 1.1 tells us that the spectrum  $\sigma(\mathbb{A})$  of  $\mathbb{A}$  is real and non-negative. Contrary to the case of a cavity filled by ordinary materials, this spectrum is not only *discrete*. The rest of the paper is precisely to describe and analyze the content of the *essential spectrum*  $\sigma_{\text{ess}}(\mathbb{A})$  of  $\mathbb{A}$ . The latter should reasonably be expected to coincide with that of  $\mathbb{S}_\lambda$ . Unfortunately, we are not able to prove rigorously such a plausible assertion. Some explanations about this awkward question are given in the Appendix.

### 1.2.3 Main results

Recall (see, e.g., [46]) that the *discrete spectrum*  $\sigma_{\text{disc}}(\mathbb{A})$  is the set of isolated eigenvalues of finite multiplicity. The *essential spectrum* is its complement in the spectrum, that is,  $\sigma_{\text{ess}}(\mathbb{A}) := \sigma(\mathbb{A}) \setminus \sigma_{\text{disc}}(\mathbb{A})$ , which contains either accumulation points of the spectrum or isolated eigenvalues of infinite multiplicity. Our study of  $\sigma_{\text{ess}}(\mathbb{A})$  is based on a convenient characterization of the essential spectrum : a real number  $\lambda$  belongs to  $\sigma_{\text{ess}}(\mathbb{A})$  if and only if there exists a sequence  $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(\mathbb{A})$  such that

$$\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbb{A}\Phi_n - \lambda\Phi_n\|_{\mathcal{H}} = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\Phi_n, \Psi)_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall \Psi \in \mathcal{H},$$

which is called a *Weyl sequence* for  $\lambda$  (or a *singular sequence*). The two first conditions actually characterize any point of  $\sigma(\mathbb{A})$ , whereas the last one (weak convergence to 0) is specific to  $\sigma_{\text{ess}}(\mathbb{A})$ .

We summarize below the main results of the paper about the various components of  $\sigma_{\text{ess}}(\mathbb{A})$ .

First, the value  $\lambda = \Lambda_m$  is an eigenvalue of infinite multiplicity of  $\mathbb{A}$  (see Proposition 1.3). The non-linear eigenvalue problem (1.3) does not make sense for this particular value, since  $\mu_\lambda^{-1}$  becomes infinite in  $\mathcal{N}$ . We will see that this eigenvalue of  $\mathbb{A}$  is actually an *artifact* of the augmented formulation (see Remark 1.4).

The other components of  $\sigma_{\text{ess}}(\mathbb{A})$  correspond to various unusual *resonance* phenomena. A *bulk resonance* in the Drude material corresponds to the value  $\lambda = 0$ , which is an accumulation point of the discrete spectrum. A *surface resonance* at the interface  $\Sigma$  between  $\mathcal{N}$  and  $\mathcal{V}$  corresponds to the value  $\lambda = \Lambda_m/2$ . Finally, a *corner resonance* at every vertex of the interface  $\Sigma$  gives rise to a continuous set in the essential spectrum. To make this set precise, we have to distinguish between the *inner vertices*  $\{C_p \in \Sigma; p = 1, \dots, P\}$  located inside  $\mathcal{C}$  and the *boundary vertices*  $\{B_q \in \Sigma; q = 1, \dots, Q\}$  located on the boundary  $\partial\mathcal{C}$  (see Figure 1.1). On the one hand, for an inner vertex  $C_p$ , the corner resonance is observed in two intervals which are symmetric with respect to  $\Lambda_m/2$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_p &:= \left\{ \lambda \in \mathbb{R}; 0 < \left| \lambda - \frac{\Lambda_m}{2} \right| < \frac{\Lambda_m}{2} \left| 1 - \frac{\alpha_p}{\pi} \right| \right\} \\ &= \left] \frac{\Lambda_m}{2} \left( 1 - \left| 1 - \frac{\alpha_p}{\pi} \right| \right), \frac{\Lambda_m}{2} \left[ \cup \right] \frac{\Lambda_m}{2}, \frac{\Lambda_m}{2} \left( 1 + \left| 1 - \frac{\alpha_p}{\pi} \right| \right) \right[ , \end{aligned} \quad (1.18)$$

where  $\alpha_p \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$  denotes the angle of the Drude sector as shown in Figure 1.1. We see that if  $\alpha_p$  is close to 0 or  $2\pi$  (which means that the corner is sharp either in  $\mathcal{N}$  or in  $\mathcal{V}$ ), this set fills almost  $]0, \Lambda_m[ \setminus \{\Lambda_m/2\}$ , whereas if  $\alpha_p$  is close to  $\pi$ , this set concentrates near  $\Lambda_m/2$  (it becomes empty if  $\alpha_p = \pi$ , *i.e.*, no corner). On the other hand, for a boundary vertex  $B_q$ , the corner resonance is observed in only one interval defined by

$$\mathcal{I}_q := \left] \frac{\Lambda_m}{2} \min \left( 1, \frac{2\beta_q}{\gamma_q} \right), \frac{\Lambda_m}{2} \max \left( 1, \frac{2\beta_q}{\gamma_q} \right) \right[ , \quad (1.19)$$

where the angles  $\beta_q, \gamma_q \in (0, 2\pi)$  are defined in Figure 1.1. As above, if  $\beta_q/\gamma_q$  is close to 0 (respectively, to 1), this set fills almost  $]0, \Lambda_m/2[$  (respectively  $]\Lambda_m/2, \Lambda_m[$ ), whereas if  $\beta_q/\gamma_q$  is close to 1/2, this set concentrates near  $\Lambda_m/2$  and becomes empty if  $\beta_q = \gamma_q/2$ .

The main result of this paper is the following theorem whose proof is the subject of the next section (in particular section 1.3.6).

**Théorème 1.2.** *Suppose that  $\mathcal{N} \neq \emptyset$  and  $\mathcal{V} \neq \emptyset$ . Then the essential spectrum  $\sigma_{\text{ess}}(\mathbb{A}) \subset \sigma(\mathbb{A}) \subset [0, +\infty)$  of  $\mathbb{A}$  is given by*

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathbb{A}) = \{0, \Lambda_m/2, \Lambda_m\} \cup \bigcup_{p=1, P} \overline{\mathcal{J}_p} \cup \bigcup_{q=1, Q} \overline{\mathcal{I}_q}.$$

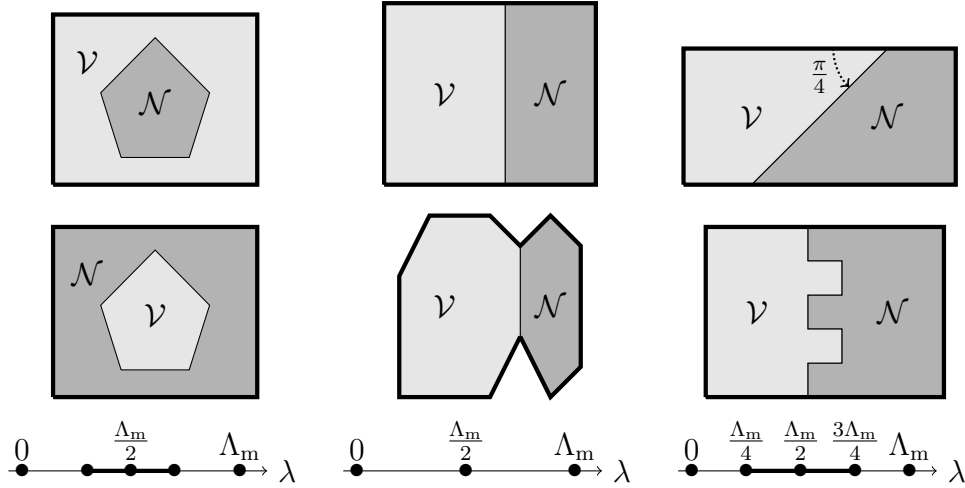


FIGURE 1.3 – Examples of cavities leading to an essential spectrum which is symmetric with respect to  $\Lambda_m/2$ . Each column shows two different cavities leading to the same essential spectrum represented by dots and a thick line on the  $\lambda$ -axis.

Moreover the eigenvalues of the discrete spectrum  $\sigma_{\text{disc}}(\mathbb{A})$  accumulate at 0 and  $+\infty$ .

Figures 1.3 and 1.4 show various examples which illustrate this theorem.

In Figure 1.3, each cavity has an essential spectrum which is symmetric with respect to  $\Lambda_m/2$ . This clearly holds if there is no boundary vertex  $B_q$  (that is, if  $\Sigma \cap \partial\mathcal{C} = \emptyset$ ), since the sets  $\mathcal{J}_p$  are symmetric. This is shown in the left column where we notice that the essential spectrum remains unchanged if we interchange both media, since  $\mathcal{J}_p$  is unchanged if  $\alpha_p$  is replaced by  $2\pi - \alpha_p$ . The middle column highlights the fact that  $\mathcal{I}_q = \emptyset$  if  $\beta_q = \gamma_q/2$ , that is, if the angles of both Drude and vacuum sectors at a boundary vertex  $B_q$  are equal. Finally, the right column illustrates the fact that  $\mathcal{I}_q$  is equal to one of the two intervals which compose  $\mathcal{J}_p$  if  $2\beta_q/\gamma_q = \alpha_p/\pi$ . Hence, two very different cavities may have the same essential spectrum.

Figure 1.4 shows examples of cavities leading to an essential spectrum which is no longer symmetric with respect to  $\Lambda_m/2$ . We notice that if we interchange both media, the new essential spectrum is simply deduced from the initial one by a symmetry with respect to  $\Lambda_m/2$ , which holds true for all cavities considered here.

## 1.3 Exploration of the spectrum

### 1.3.1 Preliminaries

We first consider the two particular values  $\lambda = 0$  and  $\lambda = \Lambda_m$ , which are poles of  $\varepsilon_\lambda^{\mathcal{N}}$  and  $(\mu_\lambda^{\mathcal{N}})^{-1}$  respectively (see (1.1)). The following proposition tells us that 0 is not an eigenvalue of  $\mathbb{A}$ , whereas  $\Lambda_m$  is an *eigenvalue of infinite multiplicity* of  $\mathbb{A}$ .

**Proposition 1.3.** *We have  $\text{Ker } \mathbb{A} = \{0\}$  and  $\text{Ker}(\mathbb{A} - \Lambda_m \mathbb{I}) = \mathcal{H}_\infty \oplus \mathcal{H}_0$  where  $\mathcal{H}_\infty := \{(0, u) \in \mathcal{H}; \text{div } u = 0 \text{ in } \mathcal{N} \text{ and } u \cdot n = 0 \text{ on } \Sigma\}$  is of infinite dimension whereas  $\mathcal{H}_0$  is a finite dimensional subspace of  $\mathcal{H}$ .*

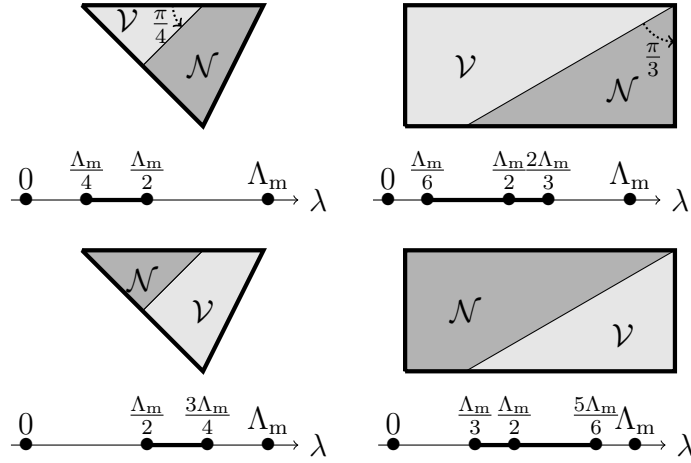


FIGURE 1.4 – Examples of cavities leading to an essential spectrum which is not symmetric with respect to  $\Lambda_m/2$ . In each column, the domains filled by the Drude material and vacuum are interchanged.

**Proof :** Suppose that  $(\varphi, u) \in \text{Ker } \mathbb{A}$ , which means that  $(\varphi, u) \in D(\mathbb{A})$  satisfies (1.8a) and (1.8b) with  $\lambda = 0$ . Equation (1.8b) shows that  $u = -\mathcal{R} \text{grad } \varphi$ , so that (1.8a) becomes

$$\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \text{div}(\mathbf{1}_{\mathcal{V}} \text{grad } \varphi) = \Lambda_e \mathbf{1}_{\mathcal{N}} \varphi \quad \text{in } \mathcal{C}.$$

The left-hand side of this equation vanishes in  $\mathcal{N}$ , therefore  $\varphi = 0$  in  $\mathcal{N}$ , which implies that  $u = 0$ . Moreover, this equation shows that  $\Delta \varphi = 0$  in  $\mathcal{V}$ . The trace of  $\varphi$  vanishes on  $\partial \mathcal{V} \cap \partial \mathcal{C}$  (since  $\varphi \in H_0^1(\mathcal{C})$ ) as well as on  $\Sigma$  (since  $\varphi$  is continuous across  $\Sigma$ , see (1.4c)), which implies that  $\varphi = 0$  in  $\mathcal{V}$ . We conclude that  $(\varphi, u) = (0, 0)$ .

Suppose now that  $(\varphi, u) \in \text{Ker}(\mathbb{A} - \Lambda_m \mathbb{I})$ , which means that  $(\varphi, u) \in D(\mathbb{A})$  satisfies (1.8a) and (1.8b) with  $\lambda = \Lambda_m$ , that is,

$$\begin{aligned} \frac{-1}{\varepsilon_0 \mu_0} \text{div} \{ \text{grad } \varphi + \mathcal{R}^* u \} + (\mathbf{1}_{\mathcal{N}} \Lambda_e - \Lambda_m) \varphi &= 0 \quad \text{in } \mathcal{C}, \\ \mathcal{R} \text{grad } \varphi &= 0 \quad \text{in } \mathcal{N}. \end{aligned}$$

The latter equation implies that  $\varphi$  is constant in  $\mathcal{N}$ . Assuming for simplicity that  $\partial \mathcal{N} \cap \partial \mathcal{C} \neq \emptyset$ , this constant must vanish (since  $\varphi|_{\partial \mathcal{C}} = 0$ ), so the former equation shows on the one hand that  $\varphi_{\mathcal{V}} := \varphi|_{\mathcal{V}}$  is a solution in  $H_0^1(\mathcal{V})$  to

$$-\Delta \varphi_{\mathcal{V}} - \varepsilon_0 \mu_0 \Lambda_m \varphi_{\mathcal{V}} = 0 \quad \text{in } \mathcal{V},$$

and on the other hand that  $u$  satisfies

$$\text{div } u = 0 \quad \text{in } \mathcal{N} \quad \text{and} \quad u \cdot n = \frac{\partial \varphi_{\mathcal{V}}}{\partial n} \quad \text{on } \Sigma.$$

If  $\varepsilon_0 \mu_0 \Lambda_m$  is not an eigenvalue of the Dirichlet Laplacian in  $\mathcal{V}$ , we conclude that  $\varphi_{\mathcal{V}} = 0$ . This shows that  $\text{Ker}(\mathbb{A} - \Lambda_m \mathbb{I})$  coincide in this case with the subspace  $\mathcal{H}_{\infty}$  defined in the proposition, whose dimension is clearly infinite since it contains all pairs  $(0, \text{curl}_{2\text{D}} \psi)$  where  $\psi \in H^1(\mathcal{N})$  satisfies  $\psi|_{\Sigma} = 0$  (here,  $\text{curl}_{2\text{D}}$  denotes the two-dimensional curl of a scalar function, *i.e.*,  $\text{curl}_{2\text{D}} \psi := (\partial \psi / \partial y, -\partial \psi / \partial x)$ ).

But if by chance,  $\varepsilon_0\mu_0\Lambda_m$  is an eigenvalue of the Dirichlet Laplacian in  $\mathcal{V}$ , then  $\varphi_{\mathcal{V}}$  can be any associated eigenfunction, which yields element  $(\phi, u) \in \text{Ker}(\mathbb{A} - \Lambda_m\mathbb{I})$  with  $\phi \neq 0$ . Hence in this case,  $\text{Ker}(\mathbb{A} - \Lambda_m\mathbb{I})$  does not reduce to  $\mathcal{H}_{\infty}$ , but the orthogonal complement of  $\mathcal{H}_{\infty}$  in  $\text{Ker}(\mathbb{A} - \Lambda_m\mathbb{I})$  has necessarily a finite dimension since the eigenvalues of the Dirichlet Laplacian have a finite multiplicity.

The above arguments are easily adapted if  $\partial\mathcal{N} \cap \partial\mathcal{C} = \emptyset$ .  $\square$

**Remark 1.4.** *The above proposition shows that the fact that  $\Lambda_m$  belongs to the essential spectrum of  $\mathbb{A}$  is related to the infinite dimensional subspace  $\mathcal{H}_{\infty}$ . The eigenfunctions  $(\varphi, u)$  of this subspace are such that  $\varphi = 0$ . Hence these states cannot be revealed by the nonlinear eigenvalue problem (1.3). This is why  $\Lambda_m$  can be seen as an artifact of the augmented formulation (1.9).*

### 1.3.2 Bulk resonance in the Drude material

As mentioned in section 1.2.3, each point of the essential spectrum of  $\mathbb{A}$  (except  $\Lambda_m$ ) is related to an unusual resonance phenomenon. The case of  $\lambda = 0$  is related to the existence at low frequencies of highly oscillating vibrations which are confined in the Drude material. Assuming  $\partial\mathcal{V} \cap \partial\mathcal{C} \neq \emptyset$  (which is not necessary in Proposition 1.5 below), this can be understood intuitively from (1.4a)–(1.4d) by first noticing that in the second transmission condition of (1.4c),  $1/\mu_{\lambda}^{\mathcal{N}}$  tends to 0 when  $\lambda$  tends to 0, which shows that on the vacuum side, the normal derivative of  $\varphi$  must be small. Hence, in the vacuum,  $\varphi$  is close to a solution to the Helmholtz equation (1.4b) which vanishes on  $\partial\mathcal{V} \cap \partial\mathcal{C}$  and such that  $\partial\varphi/\partial n = 0$  on  $\Sigma$ . The eigenvalues  $\lambda$  of this problem are positive (thanks to the assumption  $\partial\mathcal{V} \cap \partial\mathcal{C} \neq \emptyset$ ), so the only possible solution for small  $\lambda$  is  $\varphi|_{\mathcal{V}} = 0$ , which means that  $\varphi$  is confined in  $\mathcal{N}$ . Besides, we have seen in section 1.2.1 that in a cavity which only contains a Drude material, eigenvalues accumulate at 0. This gives the idea of the construction of a Weyl sequence for  $\lambda = 0$ .

Consider a sequence  $(\varphi_n^{\mathcal{N}})$  of eigenfunctions of the Dirichlet Laplacian in  $\mathcal{N}$ , *i.e.*, a sequence of nonzero solutions  $\varphi_n^{\mathcal{N}} \in H_0^1(\mathcal{N})$  to  $-\Delta\varphi_n^{\mathcal{N}} = \lambda_n\varphi_n^{\mathcal{N}}$ , where  $(\lambda_n)$  is the sequence of associated eigenvalues, which tends to  $+\infty$ . The idea is simply to extend  $\varphi_n^{\mathcal{N}}$  by 0 in  $\mathcal{V}$  and introduce the corresponding auxiliary unknown defined by (1.7) with  $\lambda = 0$ .

**Proposition 1.5.** *Let  $\Phi_n := (\varphi_n, u_n)$  where  $\varphi_n := \mathcal{R}^*\varphi_n^{\mathcal{N}}$  and  $u_n := -\mathcal{R}\text{grad}\varphi_n$ . Then  $\Phi_n/\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}$  is a Weyl sequence for  $\lambda = 0$ .*

**Proof :** As  $\varphi_n^{\mathcal{N}} \in H_0^1(\mathcal{N})$ , we have  $\text{grad}(\mathcal{R}^*\varphi_n^{\mathcal{N}}) = \mathcal{R}^*\text{grad}\varphi_n^{\mathcal{N}}$ , so  $\varphi_n \in H_0^1(\mathcal{C})$  and  $u_n = -\text{grad}\varphi_n^{\mathcal{N}} \in L^2(\mathcal{N})$ . Moreover,  $\text{div}(\text{grad}\varphi_n + \mathcal{R}^*u_n) = 0$ , which shows that  $\Phi_n \in \text{D}(\mathbb{A})$  (see (1.12)).

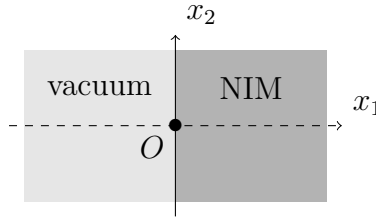
Besides, from the definition (1.10) of  $\mathbb{A}$ , we see that  $\mathbb{A}\Phi_n = (\mathbf{1}_{\mathcal{N}}\Lambda_e\varphi_n, 0)$ , so

$$\frac{\|\mathbb{A}\Phi_n\|_{\mathcal{H}}}{\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}} \lesssim \frac{\|\varphi_n^{\mathcal{N}}\|_{L^2(\mathcal{N})}}{\|u_n\|_{L^2(\mathcal{N})}} = \frac{\|\varphi_n^{\mathcal{N}}\|_{L^2(\mathcal{N})}}{\|\text{grad}\varphi_n^{\mathcal{N}}\|_{L^2(\mathcal{N})}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}},$$

where the last equality follows from the definition of  $\varphi_n^{\mathcal{N}}$ . As  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ , we deduce that 0 is in the spectrum of operator  $\mathbb{A}$ .

It is not necessary here to check the weak convergence to 0 of  $\Phi_n/\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}$ . Indeed, Proposition 1.3 tells us that 0 is not an eigenvalue of  $\mathbb{A}$ , so it belongs necessarily to its essential spectrum.  $\square$

We show in the next subsections that the other components of the essential spectrum of  $\mathbb{A}$  are located outside a vicinity of 0. In other words, 0 is an isolated point of  $\sigma_{\text{ess}}(\mathbb{A})$ . Therefore, as it is not an eigenvalue, 0 is an accumulation point of  $\sigma_{\text{disc}}(\mathbb{A})$ , as in the case  $\mathcal{V} = \emptyset$  mentioned in

FIGURE 1.5 – Cartesian coordinates near a point of the interface  $\Sigma$ .

section 1.2.1. The following proposition confirms the initial intuitive assertion of this subsection : the eigenfunctions associated to eigenvalues close to 0 are actually confined in the Drude material.

**Proposition 1.6.** *Assume that  $\partial\mathcal{V} \cap \partial\mathcal{C} \neq \emptyset$ . Let  $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$  be a sequence of  $\sigma_{\text{disc}}(\mathbb{A})$  which tends to 0 and  $\Phi_j = (\varphi_j, u_j)$  a sequence of associated eigenvectors chosen such that  $\|\Phi_j\|_{\mathcal{H}} = 1$ . Then the restrictions  $\varphi_j|_{\mathcal{V}}$  tend to 0 in  $H^1(\mathcal{V})$ .*

**Proof :** In section 1.2.2, we have seen that the linear eigenvalue equation  $A\Phi_j = \lambda_j \Phi_j$  is equivalent to the initial nonlinear one

$$\operatorname{div} \left( \frac{1}{\mu_{\lambda_j}} \operatorname{grad} \varphi_j \right) + \lambda_j \varepsilon_{\lambda_j} \varphi_j = 0 \quad \text{in } \mathcal{C},$$

together with  $u_j = \Lambda_m (\lambda_j - \Lambda_m)^{-1} \mathcal{R} \operatorname{grad} \varphi_j$ . Using Green's formula, we deduce from the above equation that

$$\int_{\mathcal{C}} \left( \frac{1}{\mu_{\lambda_j}} |\operatorname{grad} \varphi_j|^2 - \lambda_j \varepsilon_{\lambda_j} |\varphi_j|^2 \right) dx = 0.$$

Splitting the integral in two parts on  $\mathcal{V}$  and  $\mathcal{N}$  and gathering the terms with same sign yields

$$\frac{1}{\mu_0} \int_{\mathcal{V}} |\operatorname{grad} \varphi_j|^2 dx + \lambda_j |\varepsilon_{\lambda_j}^{\mathcal{N}}| \int_{\mathcal{N}} |\varphi_j|^2 dx = \frac{1}{|\mu_{\lambda_j}^{\mathcal{N}}|} \int_{\mathcal{N}} |\operatorname{grad} \varphi_j|^2 dx + \lambda_j \varepsilon_0 \int_{\mathcal{V}} |\varphi_j|^2 dx.$$

The right-hand side of this equality tends to 0, for both integrals are bounded (since  $\|\Phi_j\|_{\mathcal{H}} = 1$ ) and both factors  $1/\mu_{\lambda_j}^{\mathcal{N}}$  and  $\lambda_j$  tend to 0. Therefore the left-hand side also tends to 0, which implies that  $\operatorname{grad} \varphi_j|_{\mathcal{V}} \rightarrow 0$  in  $L^2(\mathcal{V})$ . Thanks to the assumption  $\partial\mathcal{V} \cap \partial\mathcal{C} \neq \emptyset$ , Poincaré's inequality then shows that  $\varphi_j|_{\mathcal{V}}$  tend to 0 in  $H^1(\mathcal{V})$ .  $\square$

### 1.3.3 Surface resonance at the interface between both media

We prove now that  $\lambda = \Lambda_m/2$  also belongs to the essential spectrum. This value corresponds to the case where  $\mu_{\lambda}^{\mathcal{N}} = -\mu_0$ , that is, the critical value  $-1$  of the contrast  $\mu_{\lambda}^{\mathcal{N}}/\mu_0$ , which is known to lead to an ill-posed time-harmonic problem (see the references quoted in the introduction). As shown below, it is related to the existence of highly oscillating vibrations that can be localized near any point of the interface  $\Sigma$  except the vertices. We first show how such *surface waves* can be derived from our initial equation (1.3).

#### Surface waves

Consider the case of a rectilinear interface between two half-planes. Choose a Cartesian coordinate system  $(O, x_1, x_2)$  so that the half-plane  $x_1 > 0$  is filled by our NIM, whereas  $x_1 < 0$

contains vacuum (see Figure 1.5). Consider then the equation

$$\operatorname{div} \left( \frac{1}{\mu_{\Lambda_m/2}} \operatorname{grad} \psi \right) = 0, \quad (1.20)$$

which is deduced from (1.3) with  $\lambda = \Lambda_m/2$  by removing the term  $\lambda \varepsilon_\lambda \varphi$  (as shown in the following, this term acts as a “small” perturbation for highly oscillating solutions). It is readily seen that for any  $k > 0$ , the function  $\exp(ik(x_2 + i|x_1|))$  is a solution to (1.20). It represents a surface wave which propagates in the direction of the interface and decreases exponentially as  $x_1 \rightarrow \pm\infty$ . Any superposition of such surface waves (for various  $k$ ) is still solution to (1.20). In particular, for a given  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ , the function  $\psi$  defined by

$$\psi(x) = \psi(x_1, x_2) := \int_{\mathbb{R}^+} f(k) e^{ik(x_2 + i|x_1|)} dk$$

is a solution to (1.20), as well as

$$\psi_n(x) := \psi(nx_1, nx_2) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) e^{ik(x_2 + i|x_1|)} dk \quad \text{for } n \geq 1.$$

**Remark 1.7.** *By successive integrations par parts, we see that  $\psi(x) = o(|x|^{-p})$  for all  $p \in \mathbb{N}$  as  $|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  goes to  $+\infty$ , and the same holds for the first-order partial derivatives of  $\psi$  (note that  $\partial\psi/\partial x_1$  is discontinuous across  $x_1 = 0$ ). This shows in particular that  $\psi \in H^1(\mathbb{R}^2)$ . Hence  $\psi$  represents vibrations which are localized in a bounded region near the interface, whereas  $\psi_n$  becomes more and more confined near  $O$  as  $n$  increases. Notice that  $\psi$  (as well as  $\psi_n$ ) is symmetric with respect to  $x_1 = 0$ , that is,  $\psi(-x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2)$ .*

## A Weyl sequence

Returning to our cavity, we are now able to construct a Weyl sequence for  $\lambda = \Lambda_m/2$ . Suppose that the center  $O$  of our coordinate system  $(O, x_1, x_2)$  is a given point of the interface  $\Sigma$  different from the vertices and that the  $x_1$  and  $x_2$ -axes are chosen such that our medium is described by Figure 1.5 in a vicinity of  $O$ . More precisely, this means that one can choose a given small enough  $R > 0$  such that  $B_R \subset \mathcal{C}$ ,  $\mathcal{N} \cap B_R \subset \{x_1 > 0\}$  and  $\mathcal{V} \cap B_R \subset \{x_1 < 0\}$ , where we have denoted  $B_R := \{x \in \mathbb{R}^2; |x| \leq R\}$  the ball of radius  $R$  centered at  $O$ . Let us then define

$$\varphi_n := \psi_n \chi \quad \text{and} \quad u_n := -2\mathcal{R} \operatorname{grad} \varphi_n, \quad (1.21)$$

where  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  is a cutoff function which vanishes outside  $B_R$ , is equal to 1 in some ball  $B_{R_1}$  with  $0 < R_1 < R$  and is symmetric with respect to  $x_1 = 0$ , that is,  $\chi(-x_1, x_2) = \chi(x_1, x_2)$ . Note that the above definition of  $u_n$  follows from (1.7) with  $\lambda = \Lambda_m/2$ .

**Proposition 1.8.** *Let  $\Phi_n := (\varphi_n, u_n)$  defined by (1.21). Then  $\Phi_n/\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}$  is a Weyl sequence for  $\lambda = \Lambda_m/2$ .*

**Proof :** (i) Let us first prove that  $\Phi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$ . It is clear that  $\psi_n$  is a  $\mathcal{C}^\infty$  function in both half-planes  $\pm x_1 > 0$  and is continuous at the interface  $x_1 = 0$ . Hence  $\varphi_n \in H_0^1(\mathcal{C})$  (since  $\chi = 0$  on  $\partial\mathcal{C}$ ), which implies that  $u_n \in L^2(\mathcal{N})^2$ . It remains to check that  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi_n + \mathcal{R}^* u_n) = -\operatorname{div}(s_1 \operatorname{grad} \varphi_n)$  belongs to  $L^2(\mathcal{C})$ , where  $s_1$  denotes the sign function  $s_1(x_1, x_2) := \operatorname{sgn} x_1$ . As  $\varphi_n$  is smooth on both sides of the interface, this amounts to proving that  $s_1 \partial\varphi_n/\partial x_1$  is continuous across the interface. We have

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} = \psi_n \frac{\partial\chi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_n}{\partial x_1} \chi.$$



As  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  is symmetric with respect to  $x_1 = 0$ , its partial derivative  $\partial\chi/\partial x_1$  vanishes on the interface. On the other hand,  $\psi_n$  is continuous but not differentiable on the interface. However it is symmetric with respect to  $x_1 = 0$ , so that  $s_1 \partial\psi_n/\partial x_1$  is continuous across the interface, which yields the desired result.

(ii) We prove now that  $\|\mathbb{A}\Phi_n - (\Lambda_m/2)\Phi_n\|_{\mathcal{H}}/\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}$  tends to 0 as  $n \rightarrow \infty$ . First, using the fact that  $\psi_n$  is solution to (1.20) where  $\mu_{\Lambda_m/2} = -s_1\mu_0$ , we infer that

$$\mathbb{A}\Phi_n - \frac{\Lambda_m}{2}\Phi_n = \begin{pmatrix} \frac{s_1}{\varepsilon_0\mu_0} \left( 2 \operatorname{grad} \psi_n \cdot \operatorname{grad} \chi + \psi_n \Delta \chi \right) + \left( \mathbf{1}_{\mathcal{N}} \Lambda_e - \frac{\Lambda_m}{2} \right) \psi_n \chi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

As  $\operatorname{grad} \chi$  and  $\Delta \chi$  vanish outside  $B_R \setminus B_{R_1}$ , we deduce

$$\left\| \mathbb{A}\Phi_n - \frac{\Lambda_m}{2}\Phi_n \right\|_{\mathcal{H}} \lesssim \|\psi_n\|_{H^1(B_R \setminus B_{R_1})} + \|\psi_n\|_{L^2(B_R)}.$$

Both terms of the right-hand side tend to 0 as  $n \rightarrow \infty$ , which follows from the fact that  $\psi \in H^1(\mathbb{R}^2)$  (see Remark 1.7). Indeed, by a simple change of variable  $nx \mapsto x$ , we have on the one hand,

$$\|\psi_n\|_{L^2(B_R)}^2 = \int_{B_R} |\psi(nx)|^2 dx = \frac{1}{n^2} \int_{B_{nR}} |\psi(x)|^2 dx \leq \frac{1}{n^2} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \rightarrow 0 \quad (1.22)$$

and on the other hand, for  $j = 1, 2$ ,

$$\left\| \frac{\partial \psi_n}{\partial x_j} \right\|_{L^2(B_R \setminus B_{R_1})}^2 = \int_{B_{nR} \setminus B_{nR_1}} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) \right|^2 dx \leq \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus B_{nR_1})}^2 \rightarrow 0. \quad (1.23)$$

It remains to check that  $\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}} \gtrsim 1$ . First notice that

$$\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}} \gtrsim \|u_n\|_{L^2(\mathcal{N})^2} \gtrsim \left\| \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\mathcal{N})} \geq \left\| \frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} \chi \right\|_{L^2(\mathcal{N})} - \left\| \psi_n \frac{\partial \chi}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\mathcal{N})}.$$

As  $\chi = 1$  in  $B_{R_1}$  and  $\chi = 0$  outside  $B_R$ , we infer that

$$\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}} \gtrsim \left\| \frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} \right\|_{L^2(B_{R_1}^+)} - \|\psi_n\|_{L^2(B_R^+)} \left\| \frac{\partial \chi}{\partial x_1} \right\|_{L^2(B_R^+)},$$

where we have denoted  $B_R^+ := B_R \cap \mathcal{N}$ . We know from (1.22) that  $\|\psi_n\|_{L^2(B_R)}$  tends to 0, thus so does  $\|\psi_n\|_{L^2(B_R^+)}$ . Moreover, similarly as in (1.23), we have

$$\left\| \frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} \right\|_{L^2(B_{R_1}^+)}^2 = \int_{B_{nR_1}^+} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x) \right|^2 dx \rightarrow \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})}^2 > 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

We conclude that  $\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}} \gtrsim 1$  for large enough  $n$ , so  $\|\mathbb{A}\Phi_n - (\Lambda_m/2)\Phi_n\|_{\mathcal{H}}/\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}$  tends to 0 as  $n \rightarrow \infty$ .

(iii) Lastly, we prove that  $\Phi_n$  converges weakly to 0 as  $n \rightarrow \infty$  (so the same holds true for  $\Phi_n/\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}$  since  $\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}} \gtrsim 1$ ). For any given  $\Phi' := (\varphi', u') \in \mathcal{D}(\mathcal{C}) \times \mathcal{D}(\mathcal{N})^2$ , we have

$$\left| (\Phi_n, \Phi')_{\mathcal{H}} \right| \lesssim \int_{B_R} \left( |\psi(nx)| + n |\operatorname{grad} \psi(nx)| \right) dx.$$

So, using again the change of variable  $nx \mapsto x$ , we deduce that

$$\left| (\Phi_n, \Phi')_{\mathcal{H}} \right| \lesssim \int_{B_{nR}} \left( \frac{1}{n^2} |\psi(x)| + \frac{1}{n} |\operatorname{grad} \psi(x)| \right) dx.$$

As  $\psi(x) = o(|x|^{-p})$  and  $\operatorname{grad} \psi(x) = o(|x|^{-p})$  for all  $p \in \mathbb{N}$  as  $|x| \rightarrow +\infty$  (see Remark 1.7), we infer that  $\psi$  and both components of  $\operatorname{grad} \psi$  belong to  $L^1(\mathbb{R}^2)$ . The conclusion follows.  $\square$

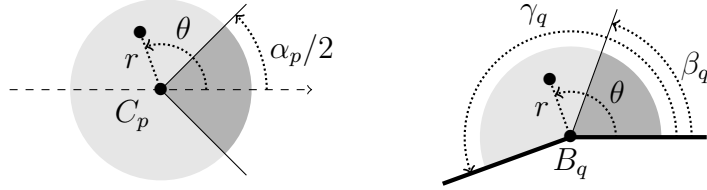


FIGURE 1.6 – Polar coordinates near an inner vertex  $C_p$  (left) and near a boundary vertex  $B_q$  (right).

### 1.3.4 Corner resonance at an inner vertex

It remains to deal with the intervals of essential spectrum  $\mathcal{J}_p$  and  $\mathcal{I}_q$  defined in section 1.2.3, associated respectively with the inner and boundary vertices of the interface  $\Sigma$  between  $\mathcal{N}$  and  $\mathcal{V}$ . In this subsection, we consider the case of an inner vertex  $C_p$  near which the NIM fills a sector of angle  $\alpha_p \in (0, 2\pi)$  (see Figure 1.1). The next subsection is devoted to boundary vertices.

#### Black hole waves

The part of the essential spectrum that we study here is related to the existence of highly oscillating vibrations localized near  $C_p$ , which have been interpreted as a “black hole” phenomenon in [11]. We first recall the construction of the so-called *black hole waves*, first introduced in [21]. As in section 1.3.3, we are interested in solutions to

$$\operatorname{div}(\mu_\lambda^{-1} \operatorname{grad} \psi_\lambda) = 0 \quad \text{in the whole plane } \mathbb{R}^2, \quad (1.24)$$

but instead of a plane interface, we suppose now that the two sectors of NIM and vacuum defined near  $C_p$  are extended up to infinity. More precisely, by choosing polar coordinates  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times (-\pi, +\pi]$  centered at  $C_p$  and such that the Drude sector corresponds to  $|\theta| < \alpha_p/2$  (see Figure 1.6, left), this equation writes equivalently as

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial r} \right) + \mu_\lambda \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\mu_\lambda} \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial \theta} \right) = 0$$

where  $\mu_\lambda = \mu_\lambda(\theta)$  is defined by  $\mu_\lambda(\theta) = \mu_\lambda^{\mathcal{N}}$  if  $|\theta| < \alpha_p/2$  and  $\mu_\lambda(\theta) = \mu_0$  if  $|\theta| > \alpha_p/2$ . In this situation, we can use the technique of separation of variables (which would have not been possible without removing the term  $\lambda \varepsilon_\lambda \varphi$  in (1.3)), which yields

$$\psi_\lambda(r, \theta) = r^{i\eta_\lambda} m_\lambda(\theta), \quad (1.25)$$

where  $\eta_\lambda$  is a complex parameter and the angular modulation  $m_\lambda$  is a  $2\pi$ -periodic solution to

$$\mu_\lambda \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{\mu_\lambda} \frac{dm_\lambda}{d\theta} \right) - \eta_\lambda^2 m_\lambda = 0 \quad \text{in } (-\pi, +\pi). \quad (1.26)$$

It is easily seen that this equation admits a non-trivial solution if and only if  $\eta_\lambda$  satisfies the dispersion equation

$$\left( \frac{\sinh(\eta_\lambda(\pi - \alpha_p))}{\sinh(\eta_\lambda \pi)} \right)^2 = \left( \frac{\mu_0 + \mu_\lambda^{\mathcal{N}}}{\mu_0 - \mu_\lambda^{\mathcal{N}}} \right)^2 \quad \text{where} \quad \frac{\mu_0 + \mu_\lambda^{\mathcal{N}}}{\mu_0 - \mu_\lambda^{\mathcal{N}}} = \frac{\lambda - \Lambda_m/2}{\Lambda_m/2}. \quad (1.27)$$

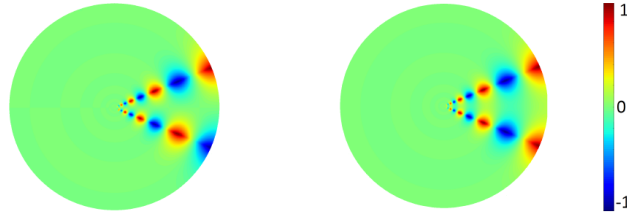


FIGURE 1.7 – For  $\alpha_p = \pi/4$ , representation of the real part of the black hole wave  $r^{i\eta_\lambda} m_\lambda(\theta)$  for  $\lambda = \Lambda_m/4$  (left,  $m_\lambda$  given by (1.28)) and  $\lambda = 3\Lambda_m/4$  (right,  $m_\lambda$  given by (1.29)).

We are actually interested in *real solutions*  $\eta_\lambda$  of this equation. Indeed, in this case, the radial behavior  $r^{i\eta_\lambda} = \exp(i\eta_\lambda \log r)$  of  $\psi_\lambda$  has a constant amplitude and is increasingly oscillating as  $r$  goes to 0. Because of these oscillations,  $\text{grad } \psi_\lambda$  is not square-integrable near  $C_p$  (indeed  $|\partial\psi_\lambda(r, \theta)/\partial r| \gtrsim r^{-1}$ ). From a physical point of view, this means that any vicinity of  $C_p$  contains an infinite energy. In fact,  $\psi_\lambda$  represents a wave which propagates towards the corner and whose energy accumulates near this corner, which explains its interpretation as a *black hole wave*.

Without loss of generality, we can restrict ourselves to positive  $\eta_\lambda$ . Noticing that the function  $(0, +\infty) \ni \eta \mapsto \left| \frac{\sinh(\eta(\pi - \alpha_p))}{\sinh(\eta\pi)} \right|$  is strictly decreasing with range  $(0, |1 - \alpha_p/\pi|)$ , we infer that (1.27) has a unique solution  $\eta_\lambda \in (0, +\infty)$  if and only if

$$0 < \left| \lambda - \frac{\Lambda_m}{2} \right| < \frac{\Lambda_m}{2} \left| 1 - \frac{\alpha_p}{\pi} \right|,$$

which leads to the definition (1.18) of  $\mathcal{J}_p$ . Moreover, when  $\lambda$  varies in one of the two intervals which compose  $\mathcal{J}_p$ , the solution  $\eta_\lambda$  ranges from  $+\infty$  (as  $\lambda \rightarrow \Lambda_m/2$ ) to 0 (as  $\lambda \rightarrow \{1 \pm |1 - \alpha_p/\pi|\} \Lambda_m/2$ ).

For a given  $\lambda \in \mathcal{J}_p$ , the expression of the corresponding solution  $m_\lambda$  to (1.26) depends on the respective signs of the quantities inside both squared terms in (1.27). Two situations occur. On the one hand, if  $(\alpha_p < \pi$  and  $\lambda < \Lambda_m/2$ ) or  $(\alpha_p > \pi$  and  $\lambda > \Lambda_m/2$ ), then the angular modulation  $m_\lambda$  is given (up to a complex factor) by

$$m_\lambda(\theta) := \begin{cases} \frac{\sinh(\eta_\lambda \theta)}{\sinh(\eta_\lambda \alpha_p/2)} & \text{if } |\theta| < \frac{\alpha_p}{2}, \\ \frac{\text{sgn}(\theta) \sinh(\eta_\lambda(\pi - |\theta|))}{\sinh(\eta_\lambda(\pi - \alpha_p/2))} & \text{if } |\theta| > \frac{\alpha_p}{2}. \end{cases} \quad (1.28)$$

On the other hand, if  $(\alpha_p < \pi$  and  $\lambda > \Lambda_m/2$ ) or  $(\alpha_p > \pi$  and  $\lambda < \Lambda_m/2$ ), then

$$m_\lambda(\theta) := \begin{cases} \frac{\cosh(\eta_\lambda \theta)}{\cosh(\eta_\lambda \alpha_p/2)} & \text{if } |\theta| < \frac{\alpha_p}{2}, \\ \frac{\cosh(\eta_\lambda(\pi - |\theta|))}{\cosh(\eta_\lambda(\pi - \alpha_p/2))} & \text{if } |\theta| > \frac{\alpha_p}{2}. \end{cases} \quad (1.29)$$

These formulas are illustrated by Figure 1.7 which represents the associated black hole wave defined by (1.25) in two particular cases that correspond to the same  $\eta_\lambda$ . Both figures are very similar : both represent surface waves which propagate along the interfaces and concentrate near the vertex. The main difference is the symmetry or skew-symmetry with respect to the symmetry axis of the corner.

### Weyl sequences

Black hole waves are the basic ingredients for the construction of Weyl sequences here. As mentioned above, the gradient of  $\psi_\lambda$  is not square-integrable near  $C_p$  because of its increasingly oscillating behavior. Hence, a natural idea for a Weyl sequence is to truncate  $\psi_\lambda$  using a sequence of cutoff functions whose supports get closer and closer to  $C_p$ . As shown at the end of this subsection, this is a bad idea! A proper idea to define a Weyl sequence for a given  $\lambda_* \in \mathcal{J}_p$  consists in considering continuous superpositions of the black hole waves  $\psi_\lambda$ , choosing smooth densities of superposition with increasingly small supports near  $\lambda_*$ . Such superpositions regularize the behavior of the black hole waves near the corner (thanks to the smoothness of the densities) and resemble more and more  $\psi_{\lambda_*}$  (thanks to the increasingly small supports).

From a practical point of view, it is actually more convenient to consider superpositions with respect to the variable  $\eta$  (instead of  $\lambda$ ) near  $\eta_* := \eta_{\lambda_*} \in (0, +\infty)$ . This leads to introduce the inverse function  $\eta \mapsto \lambda(\eta)$  of  $\lambda \mapsto \eta_\lambda$  considered in the half part of  $\mathcal{J}_p$  which contain our given  $\lambda_*$ . We deduce from (1.27) that this function is given by

$$\lambda(\eta) = \frac{\Lambda_m}{2} \left( 1 + \operatorname{sgn} \left( \lambda_* - \frac{\Lambda_m}{2} \right) \frac{\sinh(\eta |\pi - \alpha_p|)}{\sinh(\eta \pi)} \right), \quad \forall \eta \in (0, +\infty).$$

Then, for all integer  $n \geq 1$ , we define

$$\begin{pmatrix} \varphi_n \\ u_n \end{pmatrix} := \chi \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_n \\ \tilde{u}_n \end{pmatrix} \quad \text{where} \quad \begin{cases} \tilde{\varphi}_n := \int_{\mathbb{R}} f_n(\eta) \psi_{\lambda(\eta)} d\eta & \text{and} \\ \tilde{u}_n := \int_{\mathbb{R}} f_n(\eta) \frac{\Lambda_m}{\lambda(\eta) - \Lambda_m} \mathcal{R} \operatorname{grad} \psi_{\lambda(\eta)} d\eta, \end{cases} \quad (1.30)$$

where  $\chi$  and  $f_n$  are chosen as follows. First choose some  $R > 0$  such that  $\mathcal{N} \cap B_R$  and  $\mathcal{V} \cap B_R$  are contained respectively in the sectors  $|\theta| < \alpha_p/2$  and  $|\theta| > \alpha_p/2$ . On the one hand,  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  is a cutoff function with support in the ball  $B_R$  of radius  $R$  centered at  $C_p$  and equal to 1 in  $B_{R_1}$  for some  $R_1 \in (0, R)$ . On the other hand, for a given function  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  with support contained in  $(-\eta_*, +\eta_*)$  and such that  $\int_{\mathbb{R}} f(\eta) d\eta = 1$ , we define  $f_n(\eta) := n f(n(\eta - \eta_*))$  for all  $n \geq 1$  (it is an easy exercise to prove that  $f_n$  tends to the Dirac measure at  $\eta_*$  in the distributional sense). Note finally that, as in section 1.3.3, the above definition of  $\tilde{u}_n$  follows from that of  $\tilde{\varphi}_n$  using (1.7) inside the integral.

**Proposition 1.9.** *Let  $\Phi_n := (\varphi_n, u_n)$  defined by (1.30). Then  $\Phi_n / \|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}$  is a Weyl sequence for  $\lambda_* \in \mathcal{J}_p$ .*

**Proof:** (i) Let us first examine some general properties of  $\tilde{\varphi}_n$  and  $\tilde{u}_n$ , in particular their behavior near the vertex. Using the change of variables  $\xi = n(\eta - \eta_*)$ , we have

$$|\tilde{\varphi}_n(r, \theta)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(\xi) r^{i(\eta_* + \xi/n)} m_{\eta_* + \xi/n}(\theta) d\xi \right| \lesssim 1, \quad (1.31)$$

since the sequence of functions  $(\xi, \theta) \mapsto m_{\eta_* + \xi/n}(\theta)$  is uniformly bounded. Setting  $g_n(\xi, \theta) := f(\xi) m_{\eta_* + \xi/n}(\theta)$  and integrating by parts yields

$$|\tilde{\varphi}_n(r, \theta)| = \left| \frac{n r^{i\eta_*}}{i \log r} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial g_n}{\partial \xi}(\xi, \theta) r^{i\xi/n} d\xi \right| \lesssim \frac{n}{|\log r|},$$

which shows that unlike  $\psi_\lambda$ , each function  $\tilde{\varphi}_n$  tends to 0 as  $r \rightarrow 0$ .

Similar arguments can be used for both components of  $\text{grad } \tilde{\varphi}_n$  and  $\tilde{u}_n$ . The only change is the appearance of a factor  $r^{-1}$ . We obtain on the one hand

$$|\text{grad } \tilde{\varphi}_n(r, \theta)| \lesssim \frac{1}{r} \quad \text{and} \quad |\tilde{u}_n(r, \theta)| \lesssim \frac{1}{r}, \quad (1.32)$$

and on the other hand

$$|\text{grad } \tilde{\varphi}_n(r, \theta)| \lesssim \frac{n}{r |\log r|} \quad \text{and} \quad |\tilde{u}_n(r, \theta)| \lesssim \frac{n}{r |\log r|}. \quad (1.33)$$

(ii) We check now that  $\Phi_n \in D(\mathbb{A})$ . First, (1.31) shows that  $\tilde{\varphi}_n \in L^2(\mathcal{C})$  and  $\|\tilde{\varphi}_n\|_{L^2(\mathcal{C})}$  is bounded, so the same holds true for  $\varphi_n$ . Then, as  $r^{-1}|\log r|^{-2}$  is integrable near  $r = 0$ , (1.33) shows that  $\text{grad } \tilde{\varphi}_n \in L^2(\mathcal{C})^2$  and  $\tilde{u}_n \in L^2(\mathcal{N})^2$ , so  $\varphi_n \in H_0^1(\mathcal{C})$  (since  $\chi$  vanishes near  $\partial\mathcal{C}$ ) and  $u_n \in L^2(\mathcal{N})^2$ . It remains to check that  $\text{div}(\text{grad } \varphi_n + \mathcal{R}^*u_n) \in L^2(\mathcal{C})$ . We have

$$\text{div}(\text{grad } \varphi_n + \mathcal{R}^*u_n) = \chi \text{div}(\text{grad } \tilde{\varphi}_n + \mathcal{R}^*\tilde{u}_n) + \text{grad } \chi \cdot \left(2 \text{grad } \tilde{\varphi}_n + \mathcal{R}^*\tilde{u}_n\right) + (\Delta\chi) \tilde{\varphi}_n.$$

The first term of the right-hand side writes as

$$\chi \text{div}(\text{grad } \tilde{\varphi}_n + \mathcal{R}^*\tilde{u}_n) = \chi \int_{\mathbb{R}} f_n(\eta) \text{div} \left( \frac{\mu_0}{\mu_{\lambda(\eta)}} \text{grad } \psi_{\lambda(\eta)} \right) d\eta,$$

which vanishes since  $\psi_{\lambda(\eta)}$  satisfies (1.24). Both remaining terms belong to  $L^2(\mathcal{C})$ , for  $\tilde{\varphi}_n$ ,  $\text{grad } \tilde{\varphi}_n$  and  $\mathcal{R}^*\tilde{u}_n$  are square integrable in  $\mathcal{C}$ , which yields the desired result. Moreover, we can notice that these terms are bounded in  $L^2(\mathcal{C})$ , which follows from (1.31) and (1.32) and the fact that  $\text{grad } \chi$  and  $\Delta\chi$  vanish near  $C_p$ . Hence  $\text{div}(\text{grad } \varphi_n + \mathcal{R}^*u_n)$  is bounded in  $L^2(\mathcal{C})$ .

(iii) Let us prove that  $\mathbb{A}\Phi_n - \lambda_*\Phi_n$  is bounded in  $\mathcal{H}$ . We have

$$\mathbb{A}\Phi_n - \lambda_*\Phi_n = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\varepsilon_0\mu_0} \text{div} \{ \text{grad } \varphi_n + \mathcal{R}^*u_n \} + (\mathbf{1}_{\mathcal{N}} \Lambda_e - \lambda_*) \varphi_n \\ \Lambda_m \mathcal{R} \text{grad } \varphi_n + (\Lambda_m - \lambda_*) u_n \end{pmatrix}.$$

The first component is bounded in  $L^2(\mathcal{C})$  since we have just seen that  $\text{div}(\text{grad } \varphi_n + \mathcal{R}^*u_n)$  and  $\varphi_n$  are bounded in  $L^2(\mathcal{C})$ . The second component can be split as

$$\Lambda_m (\mathcal{R} \text{grad } \chi) \tilde{\varphi}_n + \chi (\Lambda_m \mathcal{R} \text{grad } \tilde{\varphi}_n + (\Lambda_m - \lambda_*) \tilde{u}_n).$$

The first term is clearly bounded in  $L^2(\mathcal{N})^2$  (by (1.31)) and the second writes as  $\chi \Lambda_m I_n$  where

$$I_n := \int_{\mathbb{R}} f_n(\eta) \frac{\lambda(\eta) - \lambda_*}{\lambda(\eta) - \Lambda_m} \mathcal{R} \text{grad } \psi_{\lambda(\eta)} d\eta.$$

We can use the same arguments as in (i) to study this integral, noticing that

$$\frac{\lambda(\eta) - \lambda_*}{\lambda(\eta) - \Lambda_m} = (\eta - \eta_*) \tau(\eta)$$

where  $\tau \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$  (since  $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$ ,  $\lambda(\eta_*) = \lambda_*$  and  $\lambda(\eta) - \Lambda_m$  never vanishes). Using the change of variables  $\xi = n(\eta - \eta_*)$ , the integral becomes

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \frac{\xi}{n} \tau(\eta_* + \xi/n) \mathcal{R} \text{grad } \psi_{\lambda(\eta_* + \xi/n)} d\xi.$$

Compared with the case of  $\text{grad } \tilde{\varphi}_n$  and  $\tilde{u}_n$  considered in (i), the only change lies in the factor  $n^{-1}$ . Hence, instead of (1.33), an integration by parts shows that  $|I_n(r, \theta)| \lesssim r^{-1} |\log r|^{-1}$ , which implies that  $I_n$  is bounded in  $L^2(\mathcal{N})^2$  and yields the conclusion.

(iv) It remains to prove that  $\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}$  tends to  $\infty$  as  $n \rightarrow \infty$ . First notice that  $\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}} \gtrsim \|u_n \cdot e_r\|_{L^2(\mathcal{N})}$ , where  $e_r$  is the unit local basis vector in the radial direction. For all  $r \in (0, R_1)$  and  $\theta \in (-\pi, +\pi]$ , we have  $\chi(r, \theta) = 1$ , so

$$u_n \cdot e_r(r, \theta) = \frac{r^{i\eta_*}}{r} \int_{\mathbb{R}} f(\xi) g\left(\eta_* + \frac{\xi}{n}, \theta\right) r^{i\xi/n} d\xi \quad \text{where} \quad g(\eta, \theta) := \frac{i\Lambda_m \eta m_{\lambda(\eta)}(\theta)}{\lambda(\eta) - \Lambda_m}.$$

By the Lebesgue dominated convergence theorem, we see that the above integral tends to  $g(\eta_*, \theta)$  as  $n \rightarrow \infty$  (recall that we have chosen  $f$  such that  $\int_{\mathbb{R}} f(\xi) d\xi = 1$ ). In order to estimate the rate of convergence, define

$$D_n(r, \theta) := \int_{\mathbb{R}} f(\xi) g\left(\eta_* + \frac{\xi}{n}, \theta\right) r^{i\xi/n} d\xi - g(\eta_*, \theta),$$

which can be rewritten as the sum

$$\int_{\mathbb{R}} f(\xi) \left( g\left(\eta_* + \frac{\xi}{n}, \theta\right) - g(\eta_*, \theta) \right) r^{i\xi/n} d\xi + g(\eta_*, \theta) \int_{\mathbb{R}} f(\xi) (r^{i\xi/n} - 1) d\xi.$$

On the one hand, we deduce from the differentiability of  $\lambda(\eta)$  and  $m_{\lambda(\eta)}$  with respect to  $\eta$  that  $|g(\eta_* + \xi/n, \theta) - g(\eta_*, \theta)| \lesssim 1/n$  (uniformly with respect to  $\xi$  in the support of  $f$  and  $\theta \in (-\pi, +\pi]$ ). On the other hand, we have  $|r^{i\xi/n} - 1| \lesssim |\log r|/n$  (since  $|e^{ix} - 1| \leq |x|$  for all  $x \in \mathbb{R}$ ). As a consequence,  $|D_n(r, \theta)| \lesssim (1 + |\log r|)/n$ . Assuming for simplicity that  $R_1 < 1$  (so that  $|\log r| > |\log R_1| > 0$  for all  $r \in (0, R_1)$ ), this shows that there exists a constant  $C > 0$  such that

$$\left| u_n \cdot e_r(r, \theta) - \frac{r^{i\eta_*}}{r} g(\eta_*, \theta) \right| \leq C \frac{|\log r|}{r n}, \quad \forall r \in (0, R_1), \quad \forall \theta \in (-\pi, +\pi].$$

Therefore, by the triangle inequality (squared), we infer that

$$|u_n \cdot e_r(r, \theta)|^2 \geq \frac{|g(\eta_*, \theta)|^2}{2r^2} - C^2 \frac{|\log r|^2}{n^2 r^2}, \quad \forall r \in (0, R_1), \quad \forall \theta \in (-\pi, +\pi].$$

As  $g(\theta, \eta^*)$  is not zero everywhere in  $(-\pi, \pi)$ , one can find an interval  $(\theta_1, \theta_2) \subset (-\pi, \pi)$  and a constant  $g_{\min} > 0$  such that  $|g(\theta, \eta^*)| \geq g_{\min}$  for all  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ . Hence, for any  $s > 0$  and  $n \geq n_s := \max\{1, s^{-1} |\log R_1|\}$ , we have

$$\|u_n \cdot e_r\|_{L^2(\mathcal{N})}^2 \geq (\theta_2 - \theta_1) \int_{e^{-sn}}^{R_1} \left( \frac{g_{\min}^2}{2} - C^2 \frac{|\log r|^2}{n^2} \right) \frac{dr}{r}.$$

Notice that  $|\log r|/n < s$  in the interval of integration. So, choosing  $s = g_{\min}/(2C)$ , we infer that for all  $n > n_s$ ,

$$\|u_n \cdot e_r\|_{L^2(\mathcal{N})}^2 \geq (\theta_2 - \theta_1) \int_{e^{-sn}}^{R_1} \frac{g_{\min}^2}{4} \frac{dr}{r} \gtrsim \log R_1 + sn.$$

To sum up, we have proved that  $\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}} \gtrsim \sqrt{n}$  for large enough  $n$ . Together with (iii), this shows that  $\|(\mathbb{A}\Phi_n - \lambda_*\Phi_n)\|_{\mathcal{H}}/\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}$  tends to 0, which means that  $\lambda_*$  belongs to the spectrum of  $\mathbb{A}$ .

To conclude, we do not need to check the weak convergence to 0 of  $\Phi_n/\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}$ . Indeed we know now that any point of  $\mathcal{J}_p$  belongs to  $\sigma(\mathbb{A})$ . Hence it is an accumulation point of  $\sigma(\mathbb{A})$ , so it belongs to  $\sigma_{\text{ess}}(\mathbb{A})$ .  $\square$

### A natural but bad idea

At first glance, the above construction of a Weyl sequence for a given  $\lambda \in \mathcal{J}_p$  may seem complicated and one can legitimately wonder if there is no simpler way to deduce a Weyl sequence from the black hole waves. In particular, a natural idea (applied in [26] for the Neumann-Poincaré operator) is to truncate  $\psi_\lambda$  closer and closer to  $C_p$ , by setting for instance  $\Phi_n := (\varphi_n, u_n)$  with

$$\varphi_n(x) := \chi_n(|x|) \psi_\lambda(x) \quad \text{and} \quad u_n(x) := \chi_n(|x|) \frac{\Lambda_m}{\lambda - \Lambda_m} \mathcal{R} \operatorname{grad} \psi_\lambda(x).$$

where  $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$  is a sequence of radial real-valued functions such that  $\chi_n(r) = 0$  if  $r < 1/n$  or  $r > R$ , whereas  $\chi_n(r) = 1$  if  $2/n < r < R/2$  (where  $R$  is chosen as in (1.30)). It is easy to see that  $\Phi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$  for all  $n \in \mathbb{N}$ . But  $\Phi_n / \|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}$  is not a Weyl sequence for  $\lambda$ . Indeed the ratio  $\|\mathbb{A}\Phi_n - \lambda \Phi_n\|_{\mathcal{H}} / \|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}$  does not tend to 0 as  $n \rightarrow \infty$ . To see this, notice that  $|\psi_\lambda(r, \theta)| \lesssim 1$  and  $|\operatorname{grad} \psi_\lambda(r, \theta)| \lesssim r^{-1}$  in  $B_R$ , which shows on the one hand that

$$\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}^2 \lesssim \int_0^R |\chi_n(r)|^2 r \, dr + \int_0^R \frac{|\chi_n(r)|^2}{r} \, dr \lesssim \int_0^R \frac{|\chi_n(r)|^2}{r} \, dr.$$

On the other hand, using the fact that  $\partial \psi_\lambda / \partial r = i\eta_\lambda \psi_\lambda / r$ , we obtain

$$\mathbb{A}\Phi_n - \lambda \Phi_n = \left( \left( \left\{ \frac{-\Delta \chi_n}{\varepsilon_0 \mu_0} + (\mathbf{1}_{\mathcal{N}} \Lambda_e - \lambda) \chi_n \right\} - i \left\{ \frac{\eta_\lambda}{\varepsilon_0 \mu_0} \left( 1 + \frac{\mu_0}{\mu_\lambda} \right) \frac{\chi'_n}{r} \right\} \right) \psi_\lambda \right). \\ \Lambda_m \mathcal{R}(\psi_\lambda \operatorname{grad} \chi_n)$$

Noticing that both terms in braces in the first component are real and  $|\psi_\lambda(r, \theta)| = |m_\lambda(\theta)|$ , we deduce that

$$\|\mathbb{A}\Phi_n - \lambda \Phi_n\|_{\mathcal{H}}^2 \gtrsim \int_0^R \frac{|\chi'_n(r)|^2}{r} \, dr$$

As a consequence

$$\frac{\|\mathbb{A}\Phi_n - \lambda \Phi_n\|_{\mathcal{H}}^2}{\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}^2} \gtrsim \int_0^R \frac{|\chi'_n(r)|^2}{r} \, dr \Big/ \int_0^R \frac{|\chi_n(r)|^2}{r} \, dr.$$

The right-hand side cannot tend to 0. Otherwise it would contradict the inequality

$$\int_0^R \frac{|\chi_n(r)|^2}{r} \, dr \leq \frac{R^2}{4} \int_0^R \frac{|\chi'_n(r)|^2}{r} \, dr,$$

which follows from the expression  $\chi_n(r) = \int_0^r \sqrt{s} (\chi'_n(s) / \sqrt{s}) \, ds$  and Cauchy-Schwarz inequality.

### 1.3.5 Corner resonance at a boundary vertex

The construction of Weyl sequences associated to a boundary vertex  $B_q$  is exactly the same as for inner vertices. The only difference lies in the expression of the black hole wave  $\psi_\lambda$ . As in section 1.3.4, this function is still solution to (1.24), but instead of the whole plane  $\mathbb{R}^2$ , we consider now an infinite sector of angle  $\gamma_q$  divided in two sub-sectors of angles  $\beta_q$  and  $\gamma_q - \beta_q$  filled respectively by our NIM and vacuum (see Figure 1.6, right). Moreover  $\psi_\lambda$  must vanish on the boundary of the sector of angle  $\gamma_q$ . Using polar coordinates as shown in Figure 1.6, separation of variables yields again  $\psi_\lambda(r, \theta) = r^{i\eta_\lambda} m_\lambda(\theta)$ , where  $\eta_\lambda \in \mathbb{C}$  and  $m_\lambda$  is a solution to (1.26) in  $(0, \gamma_q)$  which satisfies the boundary conditions  $m_\lambda(0) = m_\lambda(\gamma_q) = 0$ . One can readily check that this equation admits a non-trivial solution if and only if  $\eta_\lambda$  satisfies the dispersion equation

$$\mu_\lambda^{\mathcal{N}} \tanh(\eta_\lambda \beta_q) + \mu_0 \tanh(\eta_\lambda (\gamma_q - \beta_q)) = 0. \quad (1.34)$$

Again we are only interested in positive real solutions  $\eta_\lambda$  to this equation. By a simple monotonicity argument, we see that it admits a unique solution if and only if  $\lambda$  belongs to the interval  $\mathcal{I}_q$  defined in (1.19). In this case, we conclude that the angular modulation of the black hole wave is given (up to a complex factor) by

$$m_\lambda(\theta) := \begin{cases} \frac{\sinh(\eta_\lambda \theta)}{\sinh(\eta_\lambda \beta_q)} & \text{if } 0 < \theta < \beta_q, \\ \frac{\sinh(\eta_\lambda(\gamma_q - \theta))}{\sinh(\eta_\lambda(\gamma_q - \beta_q))} & \text{if } \beta_q < \theta < \gamma_q. \end{cases}$$

We can remark that this expression can be deduced from (1.28) by a simple angular dilation which consists in replacing simultaneously in (1.26)  $\theta$  by  $\theta \pi / \gamma_q$  and  $\eta_\lambda$  by  $\eta_\lambda \gamma_q / \pi$  and choosing  $\alpha_p = 2\beta_q \pi / \gamma_q$ . Actually, the same angular dilation also connects the dispersion equation (1.27) with (1.34), since the latter can be written equivalently

$$\frac{\sinh(\eta_\lambda(\gamma_q - 2\beta_q))}{\sinh(\eta_\lambda \gamma_q)} = -\frac{\mu_0 + \mu_\lambda^{\mathcal{N}}}{\mu_0 - \mu_\lambda^{\mathcal{N}}}$$

This remark is related to the comment made about the examples of cavities shown in the right column of fig. 1.3.

Thanks to this new black hole wave adapted to a boundary vertex  $B_q$ , we can reuse the definition (1.30) of  $(\varphi_n, u_n)$  and follow exactly the same lines as in the proof of Proposition 1.9, which yields :

**Proposition 1.10.** *Let  $\Phi_n := (\varphi_n, u_n)$  defined by (1.30) with the above definition of  $\psi_\lambda(r, \theta) = r^{i\eta_\lambda} m_\lambda(\theta)$ . Then  $\Phi_n / \|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}$  is a Weyl sequence for  $\lambda_* \in \mathcal{I}_q$ .*

### 1.3.6 Proof of Theorem 1.2

We can now collect the results of the preceding subsections. We have constructed Weyl sequences for  $\lambda = 0$  (Proposition 1.5),  $\lambda = \Lambda_m/2$  (Proposition 1.8),  $\lambda \in \mathcal{J}_p$  for  $p = 1, \dots, P$  (Proposition 1.9) and  $\lambda \in \mathcal{I}_q$  for  $q = 1, \dots, Q$  (Proposition 1.10). Moreover, Proposition 1.3 tells us that  $\lambda = \Lambda_m$  is an eigenvalue of infinite multiplicity. Hence all these points belongs to  $\sigma_{\text{ess}}(\mathbb{A})$ . As the essential spectrum is closed, we have proved that

$$\sigma_{\text{all}} := \{0, \Lambda_m/2, \Lambda_m\} \cup \bigcup_{p=1, P} \overline{\mathcal{J}_p} \cup \bigcup_{q=1, Q} \overline{\mathcal{I}_q} \subset \sigma_{\text{ess}}(\mathbb{A}).$$

It remains to check that there is no other point in  $\sigma_{\text{ess}}(\mathbb{A})$ , that is,  $\sigma_{\text{all}} \supset \sigma_{\text{ess}}(\mathbb{A})$ . To do this, we use the following characterization of the complementary of the essential spectrum [46] : a point  $\lambda \in \mathbb{R}$  does not belong to  $\sigma_{\text{ess}}(\mathbb{A})$  if and only if  $\mathbb{A} - \lambda I$  is a semi-Fredholm operator (*i.e.*, its range is closed and its kernel is finite dimensional)<sup>1</sup>. We thus have to check this property for all  $\lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \sigma_{\text{all}}$ .

1. On utilise abusivement le terme "semi-Fredholm". En effet, le terme "semi-Fredholm" regroupe habituellement deux catégories d'opérateurs (voir définition 3.14 dans [46]). La première catégorie correspond aux opérateurs dits semi-Fredholm de type +, notés  $\mathcal{F}_+$  dans [46], qui sont les opérateurs dont l'image est fermée et le noyau est de dimension finie. La deuxième catégorie correspond aux opérateurs dits semi-Fredholm de type -, notés  $\mathcal{F}_-$  dans [46], qui sont les opérateurs dont l'image est fermée et de codimension finie. Nous parlons ici d'opérateur semi-Fredholm pour parler en réalité seulement des opérateurs semi-Fredholm de type +.



This result is far from obvious. Fortunately, it can be easily deduced from an existing nearby result proved in [13], which involves a functional framework that is slightly different from ours. Keeping our notations, this paper studies the operator  $A : H_0^1(\mathcal{C}) \rightarrow H^{-1}(\mathcal{C})$  defined by  $A\varphi := -\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \varphi)$  where  $\sigma$  is a bounded real-valued function such that  $|\sigma(x)| \geq c$  for almost every  $x \in \mathcal{C}$ , for some constant  $c > 0$ , and which is positive in  $\mathcal{V}$  and negative in  $\mathcal{N}$ . Here we are only interested in the case where  $\sigma$  is constant in both subdomains  $\mathcal{V}$  and  $\mathcal{N}$ . Denoting by  $\sigma_{\mathcal{N}} < 0$  and  $\sigma_{\mathcal{V}} > 0$  these constants, we define the contrast between both media by  $\kappa := \sigma_{\mathcal{N}}/\sigma_{\mathcal{V}}$ . Theorem 4.3 of [13], proved by means of the so-called T-coercivity technique, provides sufficient conditions on  $\kappa$  for  $A$  to be a Fredholm operator, thus *a fortiori* a semi-Fredholm operator. These conditions exclude a set of critical values of the contrast which always contains  $-1$ . This set is the union of critical intervals associated to the vertices of the interface  $\Sigma$  which are defined as follows. For an inner vertex  $C_p$ , the critical interval is

$$\mathcal{K}(C_p) := [-\rho_p, -\rho_p^{-1}] \quad \text{where} \quad \rho_p := \max \left\{ \frac{\alpha_p}{2\pi - \alpha_p}, \frac{2\pi - \alpha_p}{\alpha_p} \right\} > 1,$$

whereas for a boundary vertex  $B_q$ , it is given by

$$\mathcal{K}(B_q) := \left[ \min \left\{ -1, \frac{-\beta_q}{\gamma_q - \beta_q} \right\}, \max \left\{ -1, \frac{-\beta_q}{\gamma_q - \beta_q} \right\} \right].$$

For our model problem, the contrast is a function of  $\lambda$  given by  $\kappa_\lambda = (1 - \Lambda_m/\lambda)^{-1}$  (see (1.1)), which is negative for all  $\lambda \in (0, \Lambda_m)$ . Using (1.18) and (1.19), it is then readily seen that  $\kappa_\lambda \in \mathcal{K}(C_p)$  if and only if  $\lambda \in \overline{\mathcal{J}}_p$ , whereas  $\kappa_\lambda \in \mathcal{K}(B_q)$  if and only if  $\lambda \in \overline{\mathcal{I}}_q$ . As a consequence we know that for all  $\lambda \in (0, \Lambda_m)$  which does not belong to the union of these closed intervals, the operator  $\varphi \mapsto \operatorname{div}(\mu_\lambda^{-1} \operatorname{grad} \varphi)$  considered from  $H_0^1(\mathcal{C})$  to  $H^{-1}(\mathcal{C})$  is Fredholm. Besides, the fact that it is also Fredholm for all  $\lambda > \Lambda_m$  is a straightforward consequence of Lax–Milgram theorem which actually shows that it is an isomorphism. Hence, by virtue of the compactness of the embedding  $H_0^1(\mathcal{C}) \subset L^2(\mathcal{C})$ , the operator

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{S}}_\lambda : H_0^1(\mathcal{C}) &\longrightarrow H^{-1}(\mathcal{C}) \\ \varphi &\longmapsto -\operatorname{div}(\mu_\lambda^{-1} \operatorname{grad} \varphi) - \lambda \varepsilon_\lambda \varphi \end{aligned}$$

is Fredholm, thus semi-Fredholm, for all  $\lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \sigma_{\text{all}}$ .

This implies that  $\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}$  is a semi-Fredholm operator for all  $\lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \sigma_{\text{all}}$ , which follows from two results proved in the Appendix where we introduce the operator  $\widetilde{\mathbb{S}}_\lambda = \varepsilon_0^{-1} \widehat{\mathbb{S}}_\lambda$  (see (1.37)). Indeed, the first implication of Lemma 1.11 tells us that  $\operatorname{Ran}(\mathbb{A} - \lambda)$  is closed in  $\mathcal{H}$  if  $\operatorname{Ran}(\widetilde{\mathbb{S}}_\lambda)$  is closed in  $H^{-1}(\mathcal{C})$ , whereas (1.41) shows that  $\operatorname{Ker}(\mathbb{A} - \lambda)$  is finite dimensional if  $\operatorname{Ker}(\widetilde{\mathbb{S}}_\lambda)$  is so. This concludes the proof of the equality  $\sigma_{\text{all}} = \sigma_{\text{ess}}(\mathbb{A})$ .

Finally, as regards the two accumulation points  $0$  and  $+\infty$  of the discrete spectrum  $\sigma_{\text{disc}}(\mathbb{A})$ , we have already justified in section 1.3.2 the case of  $0$ . For  $+\infty$ , recall that  $\mathbb{A}$  is an unbounded selfadjoint operator, so its spectrum is necessarily unbounded. We have proved that its essential spectrum is contained in  $[0, \Lambda_m]$ , hence there is a sequence of eigenvalues of  $\sigma_{\text{disc}}(\mathbb{A})$  which tends to  $+\infty$ . This completes the proof of Theorem 1.2.

## 1.4 Conclusion

In this paper, we have explored in a simple academic situation the spectral effects of an interface between vacuum and a negative-index material. Much more needs to be done to deal

with more involved situations. In particular, it should be interesting to understand whether the results obtained here extend to cavities with piecewise smooth (curved) boundaries. Besides, instead of the Drude model studied here, one could consider a Lorentz model [50, 51], for which negativity arises near a non-zero frequency : the Drude's laws (1.1) are replaced by

$$\varepsilon_\lambda^{\mathcal{N}} := \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{\Lambda_e}{\lambda - \lambda_e} \right) \quad \text{and} \quad \mu_\lambda^{\mathcal{N}} := \mu_0 \left( 1 - \frac{\Lambda_m}{\lambda - \lambda_m} \right),$$

where  $\Lambda_e$ ,  $\lambda_e$ ,  $\Lambda_m$  and  $\lambda_m$  are non-negative coefficients which characterize the medium. For generalized Lorentz material [73],  $\varepsilon_\lambda^{\mathcal{N}}$  and  $\mu_\lambda^{\mathcal{N}}$  express as finite sums of similar terms. The case of dissipative media should also be studied (see [34] for an overview of the possible models). Finally, it seems necessary to tackle three-dimensional problems, for scalar and vector propagation equations, in particular Maxwell's equations. Works in these directions are in progress.

## 1.A Non-linear versus linear

In this appendix, we go back to the links between the initial non-linear eigenvalue problem (1.3) and its linearized version (1.9) studied in the present paper, more precisely, the link between the spectrum of the rational family of operators  $\lambda \mapsto \mathbb{S}_\lambda$  defined in (1.15)-(1.16) and that of operator  $\mathbb{A}$  defined in (1.10)-(1.12). We have seen in section 1.2.2 that their respective point spectra coincide. But what can be said about the other components of their spectra? Such an issue comes within spectral theory of block operator matrices [74] which explores in particular the relation between the spectrum of a block operator matrix, here our operator  $\mathbb{A}$ , and that of its *Schur complement*, here the family  $\mathbb{S}_\lambda$ . Unfortunately, general results of this theory cannot apply here. This is mainly due to the fact that the domain of  $\mathbb{S}_\lambda$  depends on  $\lambda$ , which is related to the coupling between both fields  $\varphi$  and  $u$  in the definition of the domain of  $\mathbb{A}$ .

In order to make this difficulty clear, we first introduce bounded operators  $\tilde{\mathbb{S}}_\lambda$  and  $\tilde{\mathbb{A}}$  similar to  $\mathbb{S}_\lambda$  and  $\mathbb{A}$  but acting in a different functional framework. In addition to the Hilbert space  $\mathcal{H} := L^2(\mathcal{C}) \times L^2(\mathcal{N})^2$  defined in section 1.2.2, consider the Hilbert spaces

$$\mathcal{H}^1 := H_0^1(\mathcal{C}) \times L^2(\mathcal{N})^2 \quad \text{and} \quad \mathcal{H}^{-1} := H^{-1}(\mathcal{C}) \times L^2(\mathcal{N})^2 \quad (1.35)$$

which are dual to each other if  $\mathcal{H}$  is identified with its own dual. Hence we have  $\mathcal{H}^1 \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}^{-1}$  where both embeddings are continuous and dense. Moreover, the duality product between  $\mathcal{H}^1$  and  $\mathcal{H}^{-1}$  appears as an extension of the inner product  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$  given by (1.11) in the sense that  $\langle X, Y \rangle = (X, Y)_{\mathcal{H}}$  for all  $X \in \mathcal{H}$  and  $Y \in \mathcal{H}^1$ . We then define the bounded block operator matrix  $\tilde{\mathbb{A}} : \mathcal{H}^1 \rightarrow \mathcal{H}^{-1}$  by

$$\tilde{\mathbb{A}} := \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & C \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{-1}{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta + \mathbf{1}_{\mathcal{N}} \Lambda_e & \frac{-1}{\varepsilon_0 \mu_0} \operatorname{div} \mathcal{R}^* \\ \Lambda_m \mathcal{R} \operatorname{grad} & \Lambda_m \end{pmatrix}, \quad (1.36)$$

where  $A : H_0^1(\mathcal{C}) \rightarrow H^{-1}(\mathcal{C})$ ,  $B : H^1(\mathcal{C}) \rightarrow L^2(\mathcal{N})^2$ ,  $B^* : L^2(\mathcal{N})^2 \rightarrow H^{-1}(\mathcal{C})$  and  $C : L^2(\mathcal{N})^2 \rightarrow L^2(\mathcal{N})^2$  are bounded operators (note that the fact that  $B$  and  $B^*$  are adjoint to each other results from the choice of the inner product (1.11)). The so-called Frobenius-Schur factorization provides the link between  $\tilde{\mathbb{A}} - \lambda$  and its Schur complement

$$\tilde{\mathbb{S}}_\lambda := A - \lambda - B^* (C - \lambda)^{-1} B.$$

It can be written for all  $\lambda$  in the resolvent set of  $C$  as

$$\tilde{\mathbb{A}} - \lambda = \hat{\mathcal{T}}_\lambda \mathcal{D}_\lambda \check{\mathcal{T}}_\lambda \quad \text{where}$$

$$\mathcal{D}_\lambda := \begin{pmatrix} \tilde{\mathbb{S}}_\lambda & 0 \\ 0 & C - \lambda \end{pmatrix}, \quad \check{\mathcal{T}}_\lambda := \begin{pmatrix} I & 0 \\ (C - \lambda)^{-1}B & I \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \hat{\mathcal{T}}_\lambda := \begin{pmatrix} I & B^*(C - \lambda)^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

The same calculation as in section 1.2.2 shows that the Schur complement is given here by

$$\tilde{\mathbb{S}}_\lambda \varphi = \frac{1}{\varepsilon_0} \left( -\operatorname{div} \left( \frac{1}{\mu_\lambda} \operatorname{grad} \varphi \right) - \lambda \varepsilon_\lambda \varphi \right), \quad (1.37)$$

which appears as a bounded operator from  $H_0^1(\mathcal{C})$  to  $H^{-1}(\mathcal{C})$ . The other term of the diagonal block operator matrix  $\mathcal{D}_\lambda : \mathcal{H}^1 \rightarrow \mathcal{H}^{-1}$  is simply  $C - \lambda = \Lambda_m - \lambda$ . Finally, for all  $\lambda \neq \Lambda_m$ , the triangular block operator matrix  $\check{\mathcal{T}}_\lambda$  is an automorphism of  $\mathcal{H}^1$  :

$$\check{\mathcal{T}}_\lambda := \begin{pmatrix} I & 0 \\ \check{B}_\lambda & I \end{pmatrix} \quad \text{where} \quad \check{B}_\lambda := \frac{B}{\Lambda_m - \lambda} = \frac{\Lambda_m}{\Lambda_m - \lambda} \mathcal{R} \operatorname{grad},$$

whereas  $\hat{\mathcal{T}}_\lambda$  appears as an automorphism of  $\mathcal{H}^{-1}$ . Denoting  $\hat{B}_\lambda := (\Lambda_m - \lambda)^{-1}B^*$ , the above Frobenius-Schur factorization can be rewritten

$$(\tilde{\mathbb{A}} - \lambda) \begin{pmatrix} \varphi \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbb{S}}_\lambda \varphi + (\Lambda_m - \lambda) \hat{B}_\lambda (\check{B}_\lambda \varphi + u) \\ (\Lambda_m - \lambda) (\check{B}_\lambda \varphi + u) \end{pmatrix}, \quad \forall \lambda \neq \Lambda_m, \quad \forall \begin{pmatrix} \varphi \\ u \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^1, \quad (1.38)$$

from which we deduce in particular that

$$(\tilde{\mathbb{A}} - \lambda) \begin{pmatrix} \varphi \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix} \iff \{u = -\check{B}_\lambda \varphi \text{ and } \psi = \tilde{\mathbb{S}}_\lambda \varphi\}. \quad (1.39)$$

It is readily seen that the initial definitions (1.10)-(1.12) and (1.15)-(1.16) of  $\mathbb{A}$  and  $\mathbb{S}_\lambda$  can now be reformulated equivalently as

$$\begin{aligned} \mathbb{A}X &= \tilde{\mathbb{A}}X, \quad \forall X \in \operatorname{D}(\mathbb{A}) = \{X \in \mathcal{H}^1; \tilde{\mathbb{A}}X \in \mathcal{H}\} \quad \text{and} \\ \mathbb{S}_\lambda \varphi &= \varepsilon_0 \tilde{\mathbb{S}}_\lambda \varphi, \quad \forall \varphi \in \operatorname{D}(\mathbb{S}_\lambda) = \{\varphi \in H_0^1(\mathcal{C}); \tilde{\mathbb{S}}_\lambda \varphi \in L^2(\mathcal{C})\}. \end{aligned}$$

Note that (1.39) implies that

$$\varphi \in \operatorname{D}(\mathbb{S}_\lambda) \iff \begin{pmatrix} \varphi \\ -\check{B}_\lambda \varphi \end{pmatrix} \in \operatorname{D}(\mathbb{A}), \quad (1.40)$$

as well as

$$\varphi \in \operatorname{Ker}(\mathbb{S}_\lambda) = \operatorname{Ker}(\tilde{\mathbb{S}}_\lambda) \iff \begin{pmatrix} \varphi \\ -\check{B}_\lambda \varphi \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(\mathbb{A} - \lambda) = \operatorname{Ker}(\tilde{\mathbb{A}} - \lambda). \quad (1.41)$$

The latter equivalence is nothing but a condensed expression of the linearization process of section 1.2.2, that is, the equality of the respective point spectra of  $\mathbb{A}$  and  $\mathbb{S}_\lambda$  (see (1.17)). What can be said about their respective *essential spectra*? First recall that for  $\mathbb{A}$ , the various possible definition of  $\sigma_{\operatorname{ess}}(\mathbb{A})$  coincide since  $\mathbb{A}$  is selfadjoint [46, Theorem 1.6, p. 417]. This is no longer true for  $\mathbb{S}_\lambda$  which is symmetric but not necessarily selfadjoint (see below). Following [74, §2.4], define

$$\sigma_{\operatorname{ess}}(\mathbb{S}_\lambda) := \{\lambda \in \mathbb{C}; \mathbb{S}_\lambda \text{ is not Fredholm}\},$$

where we recall that  $\mathbb{S}_\lambda$  is said to be Fredholm if it is a closed operator whose range  $\operatorname{Ran}(\mathbb{S}_\lambda)$  is closed and both nullity  $\dim(\operatorname{Ker}(\mathbb{S}_\lambda))$  and deficiency  $\dim(L^2(\mathcal{C})/\operatorname{Ran}(\mathbb{S}_\lambda))$  are finite. Hence

relating the respective essential spectra of  $\mathbb{A}$  and  $\mathbb{S}_\lambda$  amounts to relating their respective Fredholmness. This is where the problem lies : we did not succeed in proving any such relation ! The difficulty arises from the fact that there is no Frobenius-Schur factorization connecting directly  $\mathbb{A} - \lambda$  and  $\mathbb{S}_\lambda$ . This is mainly due to the impossibility of relating all the elements of  $D(\mathbb{A})$  with those of  $D(\mathbb{S}_\lambda)$ . Indeed (1.40) provides only a partial relation : many elements  $X = (\varphi, u)$  of  $D(\mathbb{A})$  are such that  $\varphi \notin D(\mathbb{S}_\lambda)$ . The difficulty is twofold. On the one hand, if  $\mathbb{S}_\lambda$  is Fredholm, we cannot prove that  $\text{Ran}(\mathbb{A} - \lambda)$  is closed. As shown in Lemma 1.11 below, we need a stronger assumption, namely that  $\text{Ran}(\tilde{\mathbb{S}}_\lambda)$  is closed in  $H^{-1}(\mathcal{C})$ . On the other hand, if  $\mathbb{A} - \lambda$  is Fredholm, we can prove that  $\text{Ran}(\mathbb{S}_\lambda)$  is closed (this is the second implication of Lemma 1.11), but not that the operator  $\mathbb{S}_\lambda$  itself is closed !

**Lemma 1.11.** *For all  $\lambda \neq \Lambda_m$ , we have (i)  $\implies$  (ii)  $\implies$  (iii) where*

- (i) :  $\text{Ran}(\tilde{\mathbb{S}}_\lambda)$  closed in  $H^{-1}(\mathcal{C})$ ,
- (ii) :  $\text{Ran}(\mathbb{A} - \lambda)$  closed in  $\mathcal{H}$ ,
- (iii) :  $\text{Ran}(\mathbb{S}_\lambda)$  closed in  $L^2(\mathcal{C})$ .

**Proof :** For the first implication, assume that  $\text{Ran}(\tilde{\mathbb{S}}_\lambda)$  is closed in  $H^{-1}(\mathcal{C})$  and consider a sequence  $(X_n) \in D(\mathbb{A})^{\mathbb{N}}$  such that  $Y_n := (\mathbb{A} - \lambda)X_n$  converges in  $\mathcal{H}$  to some  $Y$ . Denote  $X_n = (\varphi_n, u_n)$ ,  $Y_n = (\psi_n, v_n)$  and  $Y = (\psi, v)$ . As  $\mathcal{H}$  is continuously embedded in  $\mathcal{H}^{-1}$ , the convergence  $Y_n \rightarrow Y$  holds true *a fortiori* in  $\mathcal{H}^{-1}$ , which means from (1.38) that

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{S}}_\lambda \varphi_n + (\Lambda_m - \lambda) \hat{B}_\lambda (\check{B}_\lambda \varphi_n + u_n) &\rightarrow \psi \quad \text{in } H^{-1}(\mathcal{C}), \\ (\Lambda_m - \lambda) (\check{B}_\lambda \varphi_n + u_n) &\rightarrow v \quad \text{in } L^2(\mathcal{N})^2. \end{aligned}$$

As  $\hat{B}_\lambda$  is continuous from  $L^2(\mathcal{N})^2$  to  $H^{-1}(\mathcal{C})$ , we deduce that  $\mathcal{S}_\lambda \varphi_n \rightarrow \psi - \hat{B}_\lambda v$  in  $H^{-1}(\mathcal{C})$ . Hence there exists  $\varphi \in H_0^1(\mathcal{C})$  such that  $\tilde{\mathbb{S}}_\lambda \varphi = \psi - \hat{B}_\lambda v$ , since  $\text{Ran}(\tilde{\mathbb{S}}_\lambda)$  is closed. Setting  $X := (\varphi, u)$  with  $u := (\Lambda_m - \lambda)^{-1}v - \check{B}_\lambda \varphi$ , we have by construction  $(\hat{\mathbb{A}} - \lambda)X = Y \in \mathcal{H}$ , so  $X \in D(\mathbb{A})$  and  $(\mathbb{A} - \lambda)X = Y$ , which shows that  $\text{Ran}(\mathbb{A} - \lambda)$  is closed in  $\mathcal{H}$ .

For the second implication, consider a sequence  $(\varphi_n) \in D(\mathbb{S}_\lambda)^{\mathbb{N}}$  such that  $\psi_n := \mathbb{S}_\lambda \varphi_n$  converges in  $L^2(\mathcal{C})$  to some  $\psi$ . Setting  $X_n := (\varphi_n, -\check{B}_\lambda \varphi_n)$ , which belongs to  $D(\mathbb{A})$  by (1.40), we deduce from (1.39) that

$$(\mathbb{A} - \lambda) X_n = \begin{pmatrix} \mathbb{S}_\lambda \varphi_n \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow Y := \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in } \mathcal{H}.$$

As  $\text{Ran}(\mathbb{A} - \lambda)$  is assumed closed in  $\mathcal{H}$ , there exists  $X := (\varphi, u) \in D(\mathbb{A})$  such that  $(\mathbb{A} - \lambda)X = Y$ . Relation (1.39) then shows that  $u = -\check{B}_\lambda \varphi$  and  $\psi = \tilde{\mathbb{S}}_\lambda \varphi$ . Hence  $\varphi \in D(\mathbb{S}_\lambda)$  and  $\psi = \mathbb{S}_\lambda \varphi$ , which shows that  $\text{Ran}(\mathbb{S}_\lambda)$  is closed in  $L^2(\mathcal{C})$ .  $\square$

To sum up, the present paper gives no information about the essential spectrum of  $\mathbb{S}_\lambda$ . There are few results about this operator in the literature. A necessary and sufficient condition for  $\mathbb{S}_\lambda$  to be selfadjoint was shown in [21] : it corresponds exactly to  $\lambda \notin \sigma_{\text{ess}}(\mathbb{A})$ . Besides for some geometric situations which exclude corner resonances, it is proved in [30, 66] that  $\mathbb{S}_\lambda$  is selfadjoint with compact resolvent for  $\lambda \notin \{0, \Lambda_m/2\}$ , whereas it is not closed but is essentially selfadjoint if  $\lambda = \Lambda_m/2$  (the case  $\lambda = 0$  is not dealt with). This shows that  $\{\Lambda_m/2\} \subset \sigma_{\text{ess}}(\mathbb{S}_\lambda) \subset \{0, \Lambda_m/2\}$  in these situations, which supports the natural conjecture that  $\sigma_{\text{ess}}(\mathbb{S}_\lambda) = \sigma_{\text{ess}}(\mathbb{A}) \setminus \{\Lambda_m\}$ .

In view of the above discussion, one can legitimately wonder if the definition (1.15)-(1.16) of the non-linear family of operators  $\lambda \mapsto \mathbb{S}_\lambda$  is well suited to tackle the spectral properties

of the physical model studied here. Our feeling is that the nonlinear formulation hides some essential features of the problem, which are unveiled in the linear formulation. One of these features is *energy conservation* which seems no longer ensured since  $\mathbb{S}_\lambda$  is not selfadjoint for all  $\lambda$ . Actually a natural definition of energy for the linear model is  $\|(\varphi, u)\|_{\mathcal{H}}^2/2$  (see (1.11)). It involves  $\|u\|_{L^2(\mathcal{N}^2)}$  which plays a crucial role in the construction of the Weyl sequences in section 1.3. This contribution is hidden in the nonlinear formulation, which prevents us to deduce Weyl sequences for  $\mathbb{S}_\lambda$  from those we have constructed for  $\mathbb{A}$ . To our knowledge, the construction of Weyl sequences for  $\mathbb{S}_\lambda$  remains an open question.

## Acknowledgment

The authors gratefully acknowledge the referees for their careful reading of the manuscript and their helpful comments and suggestions. In particular, both referees raised the delicate question of the relation between the respective spectra of the non-linear and linear formulations, which was completely ignored in the first version of the manuscript!

## 1.B Annexe : Les cas $\Lambda_m = 0$ et $\Lambda_e = 0$

Dans tout ce chapitre on a supposé que la perméabilité  $\mu_\lambda$  et la permittivité  $\varepsilon_\lambda$  étaient toutes les deux décrites par le modèle de Drude non dissipatif, c'est-à-dire que  $\Lambda_m > 0$  et  $\Lambda_e > 0$ . On peut donc se demander ce qu'il se passe si  $\Lambda_m$  ou  $\Lambda_e$  est nul.

Commençons par remarquer que le problème augmenté n'a aucun sens si  $\Lambda_m = 0$ , c'est pourquoi on ne peut parler que du problème non linéaire dans ce cas-là.

On rappelle que si  $\Lambda_e = \Lambda_m = 0$ , cela correspond à avoir uniquement du vide dans la cavité et le problème non linéaire (1.3) devient

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi &= \varepsilon_0\mu_0\lambda\varphi \quad \text{dans } \mathcal{C} \\ \varphi &= 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{C}, \end{aligned}$$

ce qui revient à dire que  $\varepsilon_0\mu_0\lambda$  est valeur propre de l'opérateur  $-\Delta^{\text{dir}}$  défini en (1.5). On a donc un spectre purement discret qui consiste en une suite de valeurs propres qui tend vers l'infini.

De même, si  $\Lambda_m = 0$  mais  $\Lambda_e \neq 0$ , le problème non linéaire (1.3) devient

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\Delta\varphi + \mathbf{1}_{\mathcal{N}}\Lambda_e\varphi &= \lambda\varphi \quad \text{dans } \mathcal{C} \\ \varphi &= 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{C}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, le spectre du problème ne peut évidemment plus se déduire de celui du laplacien de Dirichlet. Mais on peut encore affirmer que celui-ci est purement discret et formé d'une suite de valeurs propres qui tend vers  $+\infty$ . On vérifie en effet très facilement que l'opérateur  $A$  défini par

$$A\varphi := -\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\Delta\varphi + \mathbf{1}_{\mathcal{N}}\Lambda_e\varphi, \forall \varphi \in \text{D}(A) := \{\varphi \in H_0^1(\mathcal{C}); \Delta\varphi \in L^2(\mathcal{C})\}$$

est un opérateur auto-adjoint, positif, à résolvante compacte.

Intéressons-nous à présent au cas où  $\Lambda_m \neq 0$  et  $\Lambda_e = 0$ . Dans ce cas-là, on peut bien s'intéresser au spectre du problème augmenté, et les suites singulières construites dans les cas des résonances surfacique et de coin restent les mêmes. En effet, les calculs faits dans les sections 1.3.3, 1.3.4 et 1.3.5 restent valables en prenant  $\Lambda_e = 0$ . En revanche, la résonance volumique avec accumulation en 0 change. Pour le voir, on peut commencer par regarder le cas d'une cavité uniquement

composée de matériau négatif. Comme montré en sous-section 1.2.1,  $\lambda$  est solution de (1.3) si et seulement si  $f(\lambda) := \lambda \varepsilon_\lambda \mu_\lambda$  est valeur propre de  $-\Delta^{\text{dir}}$ . Mais si  $\Lambda_e = 0$ , on a  $f(\lambda) = \varepsilon_0 \mu_0 (\lambda - \Lambda_m)$ , quantité qui ne tend pas vers  $+\infty$  lorsque  $\lambda$  tend vers 0. On perd donc l'accumulation des valeurs propres en 0. Cependant, on peut montrer que 0 est toujours dans le spectre essentiel de l'opérateur  $\mathbb{A}$  :

**Proposition 1.12.** *Si  $\Lambda_e = 0$  et  $\Lambda_m \neq 0$ , 0 est valeur propre de multiplicité infinie de l'opérateur  $\mathbb{A}$ .*

**Proof :** Soit  $(\varphi, u) \in D(\mathbb{A})$ . Alors  $(\varphi, u) \in \text{Ker}(\mathbb{A})$  si et seulement si

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{grad } \varphi + \mathcal{R}^* u) &= 0 \\ \mathcal{R} \text{ grad } \varphi + u &= 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en injectant la deuxième ligne dans la première, si et seulement si

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{1}_{\mathcal{V}} \text{ grad } \varphi) &= 0 \\ \mathcal{R} \text{ grad } \varphi + u &= 0, \end{aligned}$$

Ainsi, tout couple  $(\varphi, u)$  où  $\varphi \in H_0^1(\mathcal{C})$  est à support dans  $\mathcal{N}$  et où  $u = -\mathcal{R} \text{ grad } \varphi$  est dans  $\text{Ker}(\mathbb{A})$ . Cela représente un ensemble de dimension infinie, dans lequel on retrouve la résonance volumique dans le milieu  $\mathcal{N}$ .  $\square$

On peut se demander si dans ce cas, l'appartenance de la valeur 0 au spectre essentiel de l'opérateur  $\mathbb{A}$  est toujours liée à un phénomène de résonance volumique dans le milieu négatif. Autrement dit, un vecteur propre associé à la valeur propre 0 vérifie-t-il forcément  $\varphi = 0$  dans  $\mathcal{V}$  (sauf éventuellement pour un espace de dimension finie) ? Dans le cas où  $\mathcal{C} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ ,  $\varphi$  vérifie  $\Delta \varphi = 0$  dans  $\mathcal{V}$  et sa trace s'annule sur  $\mathcal{C} \cap \mathcal{V}$ . Donc on a forcément  $\varphi = 0$  dans le vide. En revanche, si  $\mathcal{C} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ , il est a priori possible que  $\varphi$  ne soit pas identiquement nulle dans le vide, mais comme dans l'étude de  $\text{Ker}(\mathbb{A} - \Lambda_m \mathbf{I})$  à la sous section 1.3.1, cela n'ajouterait qu'un ensemble de dimension finie.

Ainsi, dans le cas où  $\Lambda_e = 0 \neq \Lambda_m$ , 0 est dans le spectre essentiel de l'opérateur  $\mathbb{A}$ , et cela est lié à une résonance volumique dans le milieu  $\mathcal{N}$ .



## Chapitre 2

# Étude numérique du modèle de Drude non dissipatif

Le but ici est d'étudier numériquement les propriétés spectrales d'une cavité 2D bornée, composée en partie de matériau négatif. Le cadre reste le même que dans le chapitre précédent, puisqu'il s'agit d'observer numériquement les résultats théoriques qui y sont présentés, mais un petit rappel sera fait dans la première section.

Le chapitre est organisé comme ceci : en section 2.1 est expliqué le cheminement qui va du problème continu traité dans le chapitre précédent à sa résolution numérique ; en section 2.2 est présentée l'étude d'un cas test, avec à la fois le calcul algébrique des solutions et les tests numériques associés afin de vérifier le fonctionnement du code ; et enfin, en section 2.3, sont présentés les résultats numériques dans le cas d'une géométrie regroupant tous les phénomènes de résonance présentés dans le chapitre précédent.

### 2.1 Du continu aux éléments finis

Commençons par un petit rappel du cadre. On considère une cavité  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ . On se restreint, comme dans le chapitre précédent, au cas des cavités polygonales (voir figure 2.1). Cette cavité est divisée en deux domaines, eux-mêmes polygonaux,  $\mathcal{N}$ , composé de matériau négatif, et  $\mathcal{V}$ , composé de vide. Nous conservons également le modèle de Drude non dissipatif pour le matériau négatif, ce qui correspond à la permittivité électrique et à la perméabilité magnétique suivantes dans le cadre fréquentiel :

$$\varepsilon_{\lambda}^{\mathcal{N}} := \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{\Lambda_e}{\lambda} \right) \quad \mu_{\lambda}^{\mathcal{N}} := \mu_0 \left( 1 - \frac{\Lambda_m}{\lambda} \right),$$

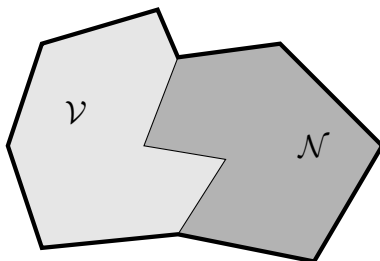


FIGURE 2.1 – Exemple de cavité polygonale.



où l'on rappelle que  $\lambda = \omega^2$  correspond au carré de la fréquence, et  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$  sont respectivement la permittivité et la perméabilité dans le vide. Cela conduit à définir les fonctions constantes par morceaux suivantes :

$$\varepsilon_\lambda(x) := \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{\Lambda_e}{\lambda} \mathbf{1}_{\mathcal{N}}(x) \right) \quad \mu_\lambda(x) := \mu_0 \left( 1 - \frac{\Lambda_m}{\lambda} \mathbf{1}_{\mathcal{N}}(x) \right) \quad \text{pour } x \in \mathcal{C}$$

où  $\mathbf{1}_{\mathcal{N}}$  est la fonction indicatrice du domaine  $\mathcal{N}$ .

Le point de départ de notre étude est le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \lambda \in \mathbb{C} \text{ et } \varphi \in H_0^1(\mathcal{C}) \text{ non nulle tels que} \\ \text{div} \left( \frac{1}{\mu_\lambda} \text{grad}(\varphi) \right) + \lambda \varepsilon_\lambda \varphi = 0 \text{ dans } \mathcal{C}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Ce problème est non linéaire à cause de la dépendance de  $\mu_\lambda$  en  $\lambda$ , mais on a vu dans le chapitre précédent comment le linéariser. C'est en effet sur le problème linéaire augmenté que la résolution numérique se base.

Rappelons d'abord quelques notations : on note  $\mathcal{R} : L^2(\mathcal{C}) \rightarrow L^2(\mathcal{N})$  l'opérateur de restriction de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{N}$ , et  $\mathcal{R}^* : L^2(\mathcal{N}) \rightarrow L^2(\mathcal{C})$  l'opérateur de prolongement par 0 d'une fonction définie sur  $\mathcal{N}$  à la cavité entière. On considère l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} := L^2(\mathcal{C}) \times L^2(\mathcal{N})^2$$

muni du produit scalaire

$$\left( (\varphi, u), (\varphi', u') \right)_{\mathcal{H}} := \varepsilon_0 \mu_0 \int_{\mathcal{C}} \varphi \overline{\varphi'} dx + \frac{1}{\Lambda_m} \int_{\mathcal{N}} u \cdot \overline{u'} dx. \quad (2.2)$$

On a vu au chapitre précédent que si  $\lambda \neq \Lambda_m$ , le problème (2.1) est équivalent à trouver  $(\varphi, u) \in H_0^1(\mathcal{C}) \times L^2(\mathcal{N})^2$  tel que

$$\mathbb{A} \begin{pmatrix} \varphi \\ u \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \varphi \\ u \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

où

$$\mathbb{A} \begin{pmatrix} \varphi \\ u \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{-1}{\varepsilon_0 \mu_0} \text{div}\{\text{grad} \varphi + \mathcal{R}^* u\} + \mathbf{1}_{\mathcal{N}} \Lambda_e \varphi \\ \Lambda_m \mathcal{R} \text{grad} \varphi + \Lambda_m u \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

et que cet opérateur, défini sur le domaine

$$D(\mathbb{A}) := \left\{ (\varphi, u) \in H_0^1(\mathcal{C}) \times L^2(\mathcal{N})^2; \text{div}(\text{grad} \varphi + \mathcal{R}^* u) \in L^2(\mathcal{C}) \right\},$$

est autoadjoint et positif.

On rappelle dans la figure 2.2 l'allure du spectre de l'opérateur  $\mathbb{A}$ .

Celui-ci est lié à trois phénomènes de résonance :

- deux types de résonances volumiques liées chacune à une accumulation du spectre discret de l'opérateur  $\mathbb{A}$  : dans la cavité entière, phénomène classique ne nécessitant pas la présence de matériau négatif dans la cavité (accumulation des valeurs propres en  $+\infty$ ), et dans le seul milieu négatif  $\mathcal{N}$  (accumulation des valeurs propres en 0, valeur qui est de ce fait dans le spectre essentiel de  $\mathbb{A}$ );
- surfacique au niveau de n'importe quel point de l'interface où celle-ci est rectiligne ( point de spectre essentiel en  $\Lambda_m/2$ );

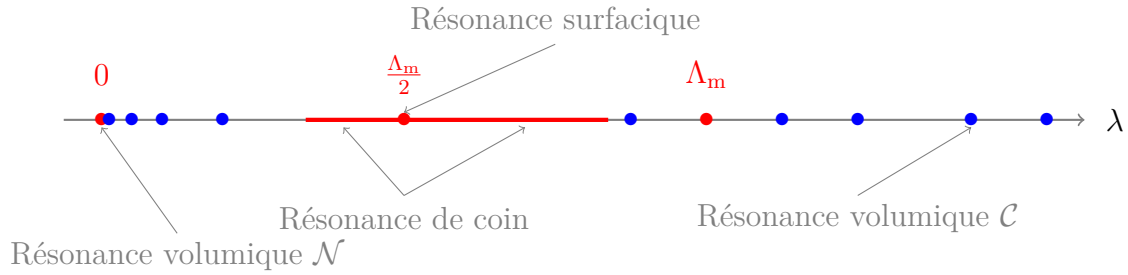


FIGURE 2.2 – Allure du spectre de l’opérateur  $\mathbb{A}$  et phénomènes de résonance associés : En rouge, le spectre essentiel et en bleu, le spectre discret.

— de coin au niveau d’un sommet de l’interface (les deux intervalles de spectre essentiel autour de la valeur  $\Lambda_m/2$ ).

Ce qui nous intéresse dans ce chapitre est d’explorer l’effet d’une discrétisation éléments finis du problème augmenté (2.3), et d’observer comment les différents phénomènes de résonance sont restitués par le problème discret. Ce passage au numérique n’a rien d’évident et il serait vain de chercher à le justifier rigoureusement (il s’agit plutôt d’une expérimentation numérique) : en effet, les phénomènes théoriques qui nous intéressent sont liés à du spectre essentiel, qui ne peut pas se retrouver en dimension finie.

Pour cette discrétisation éléments finis, on commence par introduire la formulation variationnelle de ce problème.

**Proposition 2.1.** Soit  $D(a) := H_0^1(\mathcal{C}) \times L^2(\mathcal{N})^2$ . Le problème (2.3) est équivalent à :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \lambda \in \mathbb{C} \text{ et un couple non nul } (\varphi, u) \in D(a) \text{ tels que} \\ a((\varphi, u), (\psi, v)) = \lambda((\varphi, u), (\psi, v))_{\mathcal{H}} \quad \forall (\psi, v) \in D(a) \end{cases} \quad (2.5)$$

où

$$a((\varphi, u), (\psi, v)) := \int_{\mathcal{C}} (\text{grad } \varphi + \mathcal{R}^*u) \cdot \overline{(\text{grad } \psi + \mathcal{R}^*v)} \, dx + \Lambda_e \varepsilon_0 \mu_0 \int_{\mathcal{N}} \varphi \bar{\psi} \, dx.$$

*Démonstration.* C’est une conséquence des calculs faits dans la preuve de la proposition 1.1.  $\square$

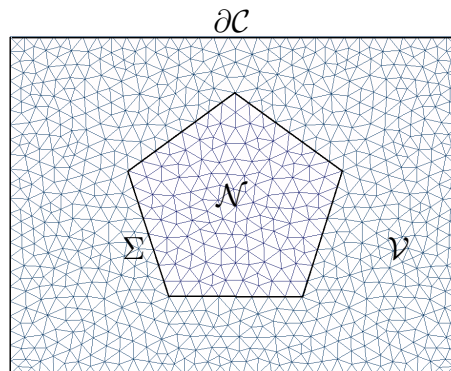


FIGURE 2.3 – Maillage d’une cavité rectangulaire avec un pentagone contenant du matériau négatif.

Pour approcher les solutions de (2.5), on construit un sous espace  $V$  de dimension finie de  $D(a)$ . On utilise pour cela une approximation de Galerkin : on choisit un sous-espace de dimension

finie  $H^\varphi := \text{vect}(w_i^\varphi)$  de  $H_0^1(\mathcal{C})$  et un sous-espace de dimension finie  $H^u := \text{vect}(w_i^u)$  de  $L^2(\mathcal{N})^2$ . On peut alors définir un problème approché en remplaçant simplement  $D(a)$  par  $H^\varphi \times H^u$  dans le problème continu (2.5). Celui-ci s'écrit sous la forme du système matriciel suivant :

$$AX = \lambda MX \quad (2.6)$$

où  $X$  est le vecteur formé des coordonnées de la solution  $(\varphi, u)$  du problème approché, soit

$$X := \begin{pmatrix} \vdots \\ \varphi_i \\ \vdots \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \varphi &= \sum \varphi_i w_i^\varphi, \\ u &= \sum u_i w_i^u \end{aligned}$$

et  $A$  et  $M$  sont les matrices définies par

$$A := \left( \begin{array}{c|c} \int_{\mathcal{C}} \text{grad } w_j^\varphi \cdot \overline{\text{grad } w_i^\varphi} \, dx + \Lambda_e \varepsilon_0 \mu_0 \int_{\mathcal{N}} w_j^\varphi \overline{w_i^\varphi} \, dx & \int_{\mathcal{C}} \mathcal{R}^* w_j^u \cdot \overline{\text{grad } w_i^\varphi} \, dx \\ \hline \int_{\mathcal{C}} \text{grad } w_j^\varphi \cdot \overline{\mathcal{R}^* w_i^u} \, dx & \int_{\mathcal{C}} \mathcal{R}^* w_j^u \cdot \overline{\mathcal{R}^* w_i^u} \, dx \end{array} \right)$$

et

$$M := \left( \begin{array}{c|c} \varepsilon_0 \mu_0 \int_{\mathcal{C}} w_j^\varphi \overline{w_i^\varphi} \, dx & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \frac{1}{\Lambda_m} \int_{\mathcal{N}} w_j^u \cdot \overline{w_i^u} \, dx \end{array} \right),$$

la matrice  $A$  résultant de la forme bilinéaire  $a$ , et la matrice  $M$  du choix du produit scalaire dans  $\mathcal{H}$ .

Ici, pour les espaces  $H^\varphi$  et  $H^u$ , on choisit des espaces de polynômes par morceaux dont la construction repose sur le choix d'un maillage (méthode des éléments finis). Ici, l'espace de polynômes par morceaux que l'on choisit pour approcher une composante est l'espace P1 (Lagrange d'ordre 1) : on construit un maillage en simplexes (des triangles puisque nous travaillons en deux dimensions) de la cavité  $\overline{\mathcal{C}}$  (en prenant soin qu'aucun triangle ne soit à la fois dans les deux milieux  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{V}$ , voir figure 2.3) ; alors, on note  $w_i$  le polynôme affine par morceaux (sur chaque triangle) qui vaut 1 sur le  $i$ -ième nœud du maillage et 0 sur les autres. Les  $w_i^\varphi$  ne sont autres que les  $w_i$  tels que le  $i$ -ième nœud soit dans  $\mathcal{C}$  (l'inconnue  $\varphi$  étant dans  $H_0^1(\mathcal{C})$ , elle est nulle sur  $\partial\mathcal{C}$ ). Pour la construction des  $w_i^u$ , il faut prendre en compte que l'inconnue  $u$  a deux composantes et qu'elle n'est définie que sur  $\mathcal{N}$  : les  $w_i^u$  ne sont autres que les  $(\mathcal{R}w_j, 0)$  et les  $(0, \mathcal{R}w_k)$  tels que les  $j$ -ièmes et les  $k$ -ièmes nœuds du maillage soient dans  $\overline{\mathcal{N}}$ .

Le caractère autoadjoint positif de l'opérateur  $\mathbb{A}$  implique que la matrice  $A$  est symétrique et positive : son spectre est lui aussi inclus dans  $\mathbb{R}^+$ .

Ce qui nous intéresse dans ce problème, c'est de retrouver les différents phénomènes de résonance présentés dans le chapitre précédent, correspondant aux différentes composantes du spectre essentiel de l'opérateur  $\mathbb{A}$ . Bien sûr, aucun spectre continu ne sera observé ici du fait du caractère discret du problème (2.6), mais lorsqu'on raffine le maillage, on peut s'attendre à observer la densification du spectre de la matrice  $A$  au niveau du spectre essentiel de l'opérateur  $\mathbb{A}$ , ainsi qu'à reconnaître les différents phénomènes de résonance dans le comportement des vecteurs propres associés. Pour retrouver ces différents phénomènes, il faut chercher les valeurs propres de la matrice  $A$  proches des valeurs correspondantes du spectre essentiel de  $\mathbb{A}$ . L'outil de résolution (ici ARPACK) permettant de calculer les plus petites valeurs propres (et vecteurs propres associés) d'une matrice, on introduit un paramètre, appelé ici "shift", qui va permettre de chercher les valeurs propres proches de cette valeur. Concrètement, si l'on veut avoir accès aux valeurs propres proches d'un shift  $\lambda_0$ , il suffit de remarquer que

$$AX = \lambda MX \Leftrightarrow (A - \lambda_0 M)X = (\lambda - \lambda_0)MX.$$

Si on calcule les plus petites valeurs propres de la matrice  $A - \lambda_0 M$ , il suffit de leur ajouter la valeur  $\lambda_0$  pour obtenir les valeurs propres de  $A$  proches de la valeur  $\lambda_0$ , et les vecteurs propres associés sont les mêmes. Dans le code ci-dessous, cette démarche est intégrée à l'appel de "eigenolve", fonction qui fait la recherche des éléments propres. En pratique, les valeurs intéressantes pour le shift sont :

- une valeur grande devant  $\Lambda_m$  pour retrouver les résonances volumiques dans la cavité entière ;
- une valeur petite devant  $\Lambda_m$  pour les résonances volumiques dans le matériau négatif ;
- $\Lambda_m/2$  pour les résonances surfaciques ;
- des valeurs situées dans les intervalles de spectre essentiel pour les résonances de coin.

Voici le code qui réalise l'ensemble de la démarche qui vient d'être décrite, qui utilise la librairie éléments finis XLiFE++, codée en C++ et développée au sein de notre équipe de recherche, POEMS, à l'Unité de Mathématiques Appliquées de l'ENSTA.

```
// Definition des parametres du probleme
Real h=0.5,l=0.4,L=1.2; // dimensions du domaine
Real Lambda_e=0.25, Lambda_m=0.25, epsilon0=1.,mu0=1.; // constantes du probleme
Number n_points=20; // nombre de points du maillage par unite de longueur
Real shift_vpr= 100.; // choix du shift

// Geometrie du domaine
Number nxd=(L-1)*n_points, ny=h*n_points, nxv=1*n_points;
// calcul du nombre de points du maillage pour les differents segments
Rectangle D(_origin=Point(1, 0.) , __length =L-1 , __ylength =h , __nodes=Numbers(nxd,ny, nxd, ny) ,
  __domain_name="omegad" , __side_names=Strings("Gamma","Gamma","Gamma","Sigma"));
// construction du milieu Drude en nommant sa frontiere : Gamma pour la frontiere de C et Sigma pour
  l interface
Rectangle V(_origin=Point(0. , 0.) , __length =l , __ylength =h , __nodes=Numbers(nxv , ny*d, nxv, ny) ,
  __domain_name="omegav" , __side_names=Strings("Gamma","GammSigma","Gamma","Gamma"));
// construction du milieu Vide
Geometry C=D+V;
// construction de la cavite comme union des deux milieux

Mesh mesh(C, triangle, 1, gmsh); // maillage du domaine C

Domain OmegaD = mesh.domain("omegad");
Domain OmegaC = mesh.domain("Omega");
Domain Gamma = mesh.domain("Gamma");
//nom des domaines pour la formulation variationnelle

// Espaces pour interpolation
Space VkC(OmegaC, P1, "VkC", true);
// premiere inconnue, scalaire, choix de l approximation P1
Unknown phi(VkC, "phi");
TestFunction psi(phi, "psi");
// fonction test associee a l inconnue
```

```

Space VkD(OmegaD, P0, "VkD", false);
// deuxieme inconnue, vectorielle de dimension 2, choix de l approximation P0
Unknown u(VkD, "u", 2);
TestFunction v(u, "v");

// Formes bilineaires

BilinearForm auv = intg(OmegaC, grad(phi) | grad(psi)) + Lambda_e * epsilon0 * mu0 * intg(OmegaD, phi *
psi) + intg(OmegaD, u | v)
+ intg(OmegaD, u | grad(psi)) + intg(OmegaD, grad(phi) | v);
// forme bilineaire apparaissant dans la formulation variationnelle

BilinearForm muv = epsilon0 * mu0 * intg(OmegaC, phi * psi) + 1./Lambda_m * intg(OmegaD, u | v);
// forme bilineaire qui correspond au choix du produit scalaire

EssentialConditions ecs=(phi|Gamma = 0);
// prise en compte de la condition de bord phi=0

// Matrices elements finis

TermMatrix M(muv, ecs, ReductionMethod(_pseudoReduction, 1), "M");
// matrice de masse
TermMatrix A(auv, ecs, ReductionMethod(_pseudoReduction, 444), "A");
// matrice de l'operateur dont on veut calculer les valeurs propres

A.toGlobal(_cs, _dual);
M.toGlobal(_cs, _dual);
// les matrices etant definies par blocs, il faut les concatener

//Calcul des elements propres

EigenElements eigs =eigenSolve(A, M, _nev=10, _sigma=shift_vpr);

thePrintStream << eigs.values;
saveToFile("eigs", eigs.vectors, vtu);
//Sauvegarde des elements propres
}

```

## 2.2 Validation du code sur un cas test

Dans cette section, on va s'intéresser à la résolution numérique décrite précédemment dans le cas d'une géométrie particulière : celle d'un rectangle coupé en deux parallèlement à un des côtés (voir figure 2.4). Le domaine  $\mathcal{V}$  occupe ici le rectangle  $[0, l] \times [0, h]$  et le domaine  $\mathcal{N}$  le rectangle  $[l, L] \times [0, h]$ . Cette géométrie a la particularité de permettre une résolution algébrique de (2.1),

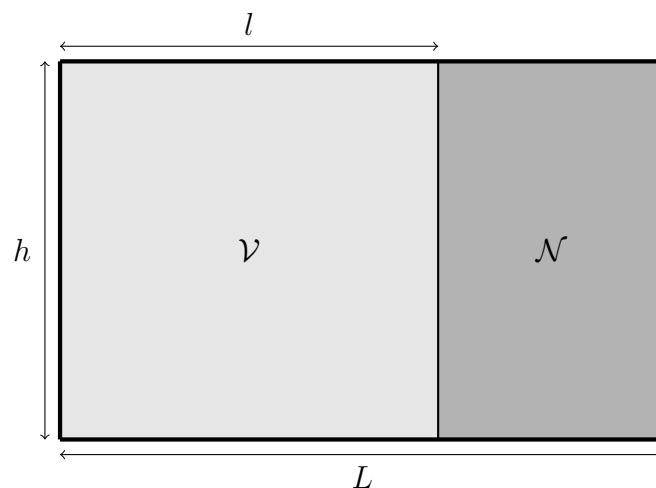


FIGURE 2.4 – Domaine  $\mathcal{C}$ .

grâce à laquelle on peut obtenir l'expression des solutions  $\varphi$  ainsi qu'une équation de dispersion, dont les valeurs propres sont solutions. Pour vérifier que notre résolution numérique est fiable, il est donc intéressant de mener le plus loin possible le calcul des éléments propres, afin de pouvoir

les comparer à ceux que l'on trouve numériquement. Dans un premier temps, dans le paragraphe 2.2.1, est donc présentée l'étude "à la main" du problème (2.1) pour la géométrie du rectangle ; et dans le paragraphe 2.2.2 sont présentés les résultats numériques liés à cette même géométrie.

Le théorème 1.2 permet de connaître le spectre essentiel de l'opérateur  $\mathbb{A}$ . Puisqu'il y a présence de matériau négatif,  $0 \in \sigma_{\text{ess}}(\mathbb{A})$ . L'interface étant rectiligne, on a  $\Lambda_m/2 \in \sigma_{\text{ess}}(\mathbb{A})$ , mais il n'y a aucun intervalle de spectre essentiel lié à un sommet intérieur. Enfin, pour ce qui est des deux coins extérieurs, on a, avec les notations de la figure 1.1 :  $\nu_q = 2\beta_q$  : (1.19) affirme donc qu'il n'y a pas non plus d'intervalle de spectre essentiel lié à un coin extérieur. Ainsi, on a

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathbb{A}) = \left\{ 0, \frac{\Lambda_m}{2}, \Lambda_m \right\}.$$

### 2.2.1 Étude théorique du cas test

On rappelle que si  $\lambda \neq \Lambda_m$ , une fonction  $\varphi \in H_0^1(\mathcal{C})$  est solution du problème (2.1) si et seulement si le couple  $(\varphi, u) \in H_0^1(\mathcal{C}) \times L^2(\mathcal{N})^2$  est solution du problème augmenté (2.3). Excepté pour  $\Lambda_m$ , on peut donc résoudre indifféremment un problème ou l'autre. Numériquement, avec les outils utilisés, il faut que le problème soit linéaire en la valeur propre, et c'est donc le problème augmenté qui est utilisé. En revanche, pour un calcul à la main des éléments propres dans une géométrie particulière, il est plus aisé de résoudre le problème (2.1). Pour récupérer les éléments propres de l'opérateur augmenté  $\mathbb{A}$  à partir des solutions  $(\lambda, \varphi) \in \mathbb{C} \times H_0^1(\mathcal{C})$ , il suffit alors de prendre

$$u = \frac{\Lambda_m}{\lambda - \Lambda_m} \mathcal{R} \text{grad } \varphi \in L^2(\mathcal{N})^2.$$

On a déjà vu dans le chapitre précédent que 0 n'était pas valeur propre de l'opérateur  $\mathbb{A}$  (sauf dans le cas  $\Lambda_e = 0$ ) et que  $\Lambda_m$  était valeur propre de  $\mathbb{A}$  de multiplicité infinie (et ce pour n'importe quelle géométrie). La recherche des solutions du problème (2.1) permet donc de reconstituer les éléments propres de l'opérateur  $\mathbb{A}$  ; c'est l'objet de la proposition 2.2.

**Proposition 2.2.** *Les valeurs propres de l'opérateur  $\mathbb{A}$  différentes de  $\Lambda_m$  et 0 sont les solutions sur  $\mathbb{R}_*^+$  de la famille d'équations de dispersion paramétrées par  $n \in \mathbb{N}^*$*

$$\left(1 - \frac{\Lambda_m}{\lambda}\right) \frac{\tanh(b_n(\lambda)(l-L))}{b_n(\lambda)} = \frac{\tanh(a_n(\lambda)l)}{a_n(\lambda)} \quad (2.7)$$

où

$$\begin{aligned} a_n(\lambda) &:= \sqrt{\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 - \lambda\varepsilon_0\mu_0} \\ b_n(\lambda) &:= \sqrt{\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 - \lambda\varepsilon_0\mu_0 \left(1 - \frac{\Lambda_m}{\lambda}\right) \left(1 - \frac{\Lambda_e}{\lambda}\right)} \end{aligned} \quad (2.8)$$

pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , où l'on étend la fonction racine définie sur  $\mathbb{R}^+$  à  $\mathbb{C}$  par : pour  $z := r e^{i\theta}$  avec  $\theta \in (-\pi, \pi]$ ,  $\sqrt{z} := \sqrt{r} e^{i\theta/2}$ .

Les fonctions propres associées  $(\varphi, u)$  sont, à coefficient multiplicatif près, de la forme

$$\varphi_{n,\lambda}(x_1, x_2) = \sin\left(\frac{n\pi}{h}x_2\right) \times \begin{cases} \frac{\sinh(a_n(\lambda)x_1)}{\sinh(a_n(\lambda)l)} & \text{si } x < l \\ \frac{\sinh(b_n(\lambda)(x_1 - L))}{\sinh(b_n(\lambda)(l - L))} & \text{si } x > l \end{cases} \quad (2.9)$$

$$u_{n,\lambda} = \frac{\Lambda_m}{\lambda - \Lambda_m} \mathcal{R} \operatorname{grad} \varphi_{n,\lambda}$$

où  $\lambda$  est solution de l'équation de dispersion.

**Remarque 2.3.** Le choix de la détermination de la racine complexe est ici arbitraire, et les expressions des  $\varphi_{n,\lambda}$  n'en dépendent pas.

**Remarque 2.4.** Pour un entier naturel  $n$  donné, il peut y avoir plusieurs solutions  $\lambda$  de l'équation de dispersion (2.7). En revanche, rien ne permet d'affirmer qu'un réel  $\lambda$  est solution de (2.7) pour différentes valeurs de  $n$ , on ne sait donc a priori pas si les valeurs propres trouvées sont multiples.

*Démonstration.* On a vu juste avant la proposition qu'il fallait et suffisait de résoudre le problème (2.1).

(i) On va voir que l'on peut séparer les variables pour le résoudre. Soit  $\varphi$  une solution du problème (2.1). Alors  $\varphi \in L^2(]0, L[ \times ]0, h[)$ . Soit  $x_1 \in ]0, L[ : x_2 \mapsto \varphi(x_1, x_2)$  est dans  $L^2(]0, h[)$ . On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\xi_n : x_2 \mapsto \sqrt{\frac{2}{h}} \sin\left(\frac{n\pi}{h}x_2\right).$$

$\{\xi_n, n \in \mathbb{N}^*\}$  est une base hilbertienne de  $L^2(]0, h[)$  (ce sont les fonctions propres de l'opérateur transverse de  $\mathbb{A}$ , qui est auto-adjoint à résolvante compacte). Il existe donc une suite  $(\varphi_n(x_1))_{n \in \mathbb{N}^*}$  telle que

$$\varphi(x_1, \cdot) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \varphi_n(x_1) \xi_n$$

où pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\varphi_n(x_1) = \int_{]0, h[} \varphi(x_1, x_2) \xi_n(x_2) dx_2.$$

$\varphi$  étant solution de (2.1), les  $\varphi_n$  sont dans  $H_0^1(]0, L[)$  (puisque  $\varphi \in H_0^1(\mathcal{C})$ ), et

$$\int_{]0, h[} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\mu_\lambda(x_1)} \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{\mu_\lambda(x_1)} \frac{\partial^2 \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + \lambda \varepsilon_\lambda(x_1) \varphi(x_1, x_2) \right) \xi_n(x_2) dx_2 = 0.$$

Puisque  $\xi_n'' = -\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \xi_n$ , deux intégrations par parties donnent

$$\int_{]0, h[} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\mu_\lambda(x_1)} \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right) - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \frac{1}{\mu_\lambda(x_1)} \varphi(x_1, x_2) + \lambda \varepsilon_\lambda(x_1) \varphi(x_1, x_2) \right) \xi_n(x_2) dx_2 = 0.$$

Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre donne finalement (en n'oubliant pas la condition de Dirichlet puisque  $\varphi_n \in H_0^1(]0, L[)$ )

$$\mu_\lambda(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\mu_\lambda(x_1)} \varphi_n'(x_1) \right) + \left( \lambda \mu_\lambda(x_1) \varepsilon_\lambda(x_1) - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \right) \varphi_n(x_1) = 0 \quad \text{pour } x_1 \in ]0, L[ \quad (2.10)$$

$$\varphi_n(0) = \varphi_n(L) = 0.$$

Réciproquement, si  $(\lambda, \varphi_n)$  solution de (2.10),  $\varphi := \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \varphi_n(x_1) \sin\left(\frac{n\pi}{h}x_2\right)$  est bien solution du problème (2.1).

Pour trouver les solutions de (2.1), il suffit donc de les chercher sous la forme  $\varphi_n(x_1) \sin\left(\frac{n\pi}{h}x_2\right)$ , où  $(\lambda, \varphi_n)$  solution de (2.10).

(ii) Notons  $k_n := \frac{n\pi}{h}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). L'équation (2.10) se réécrit, en distinguant les domaines  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{N}$  en introduisant les conditions de transmission sur la frontière entre ces deux milieux :

$$\begin{aligned} \varphi_n''(x_1) - (k_n^2 - \lambda\varepsilon_0\mu_0)\varphi_n(x_1) &= 0 && \text{pour } x_1 \in ]0, l[ \\ \varphi_n''(x_1) - \left(k_n^2 - \lambda\varepsilon_0\mu_0 \left(1 - \frac{\Lambda_m}{\lambda}\right) \left(1 - \frac{\Lambda_e}{\lambda}\right)\right) \varphi_n(x_1) &= 0 && \text{pour } x_1 \in ]l, L[ \\ \varphi_n(0) = \varphi_n(L) &= 0 \\ [\varphi_n]_{x_1=l} = 0 \quad \left[ \frac{1}{\mu\lambda} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \right]_{x_1=l} &= 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

où  $[f]_{x_1=l}$  désigne le saut de la fonction  $f$  à la frontière  $x_1 = l$ . Cela conduit à introduire les notations

$$\begin{aligned} a_n(\lambda) &:= \sqrt{k_n^2 - \lambda\varepsilon_0\mu_0} \\ b_n(\lambda) &:= \sqrt{k_n^2 - \lambda\varepsilon_0\mu_0 \left(1 - \frac{\Lambda_m}{\lambda}\right) \left(1 - \frac{\Lambda_e}{\lambda}\right)} \end{aligned}$$

où la racine complexe est définie dans la proposition, puisque les solutions du problème (2.11) sont, pour  $x_1 < l$ , combinaisons linéaires de  $\exp(a_n(\lambda)x_1)$  et  $\exp(-a_n(\lambda)x_1)$ , et pour  $x_1 > l$ , combinaisons linéaires de  $\exp(b_n(\lambda)x_1)$  et  $\exp(-b_n(\lambda)x_1)$  (on ne considère pas ici les cas où  $a_n(\lambda) = 0$  ou  $b_n(\lambda) = 0$ , qui feront l'objet de la remarque 2.5). Quatre constantes apparaissent donc pour exprimer ces combinaisons linéaires, et les conditions de bord et de transmission de (2.11) conduisent à quatre équations qui vont les déterminer. En fait,  $\varphi_n$  étant solution d'un problème linéaire, il reste forcément une de ces constantes dont les autres dépendent, et la dernière des équations prise en compte devient finalement une équation en  $\lambda$ , c'est-à-dire l'équation de dispersion. Ainsi, après prise en compte des quatre équations, on obtient :

$$\varphi_n(x_1) = \begin{cases} C \frac{\sinh(a_n(\lambda)x_1)}{\sinh(a_n(\lambda)l)} & \text{si } x_1 < l \\ C \frac{\sinh(b_n(\lambda)(x_1 - L))}{\sinh(b_n(\lambda)(l - L))} & \text{si } x_1 > l \end{cases}$$

et

$$\left(1 - \frac{\Lambda_m}{\lambda}\right) \frac{\tanh(b_n(\lambda)(l - L))}{b_n(\lambda)} = \frac{\tanh(a_n(\lambda)l)}{a_n(\lambda)}.$$

Réciproquement, si on considère de tels  $\varphi_n$  et  $\lambda$ , on vérifie aisément que  $\varphi(x_1, x_2) = \varphi_n(x_1) \sin(k_n x_2) \in H_0^1(\mathcal{C})$  et que

$$\operatorname{div} \left( \frac{1}{\mu\lambda} \operatorname{grad}(\varphi) \right) + \lambda\varepsilon_\lambda \varphi = 0 \quad \text{dans } \mathcal{C}.$$

□

**Remarque 2.5.** Si  $b_n(\lambda) = 0$  ou  $a_n(\lambda) = 0$ , les solutions  $\varphi_n$  et l'équation de dispersion s'obtiennent en faisant un équivalent quand  $b_n(\lambda)$  tend vers 0 ou  $a_n(\lambda)$  tend vers 0 de (2.9) et (2.7).

L'équation de dispersion (2.7) est difficilement résoluble algébriquement. Cependant, une localisation de ses racines permet de retrouver les accumulations en  $+\infty$ , 0 et  $\Lambda_m/2$ , et de valider les calculs numériques faits dans le paragraphe suivant.

La première observation que l'on peut faire est que selon le signe de  $a_n^2(\lambda)$  et  $b_n^2(\lambda)$ , les tangentes sont soit classiques soit hyperboliques. Cette étude de signe permet donc d'en dire plus sur l'allure



de l'équation de dispersion. En effet, dans le cas où l'on a une tangente classique, comme on le verra plus concrètement dans les figures 2.7, 2.6 et 2.8, il y aura une plus grande concentration de solutions que dans le cas de tangentes hyperboliques.

Discutons donc le signe de  $a_n^2(\lambda)$  et  $b_n^2(\lambda)$ . Commençons par l'étude du signe de  $a_n(\lambda)^2$ . On a directement, en reprenant son expression donnée en (2.8) :

$$a_n(\lambda)^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda < \lambda_{a,n}$$

où

$$\lambda_{a,n} := \frac{n^2\pi^2}{h\varepsilon_0\mu_0}. \quad (2.12)$$

En ce qui concerne  $b_n(\lambda)^2$ , en le remplaçant par son expression donnée en (2.8), on a

$$b_n(\lambda)^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \left( \frac{n^2\pi^2}{h\varepsilon_0\mu_0} + \Lambda_e + \Lambda_m \right) \lambda + \Lambda_e\Lambda_m < 0.$$

Le discriminant de cette équation vaut

$$\Delta := \left( \frac{n^2\pi^2}{h\varepsilon_0\mu_0} + \Lambda_e + \Lambda_m \right)^2 - 4\Lambda_e\Lambda_m = \left( \frac{n^2\pi^2}{h\varepsilon_0\mu_0} + \Lambda_e - \Lambda_m \right)^2 + 4\frac{n^2\pi^2}{h\varepsilon_0\mu_0}\Lambda_m > 0.$$

Les deux racines du trinôme étudié sont donc

$$\begin{aligned} \lambda_{b,n}^N &:= \frac{1}{2} \left( \frac{n^2\pi^2}{h\varepsilon_0\mu_0} + \Lambda_e + \Lambda_m - \sqrt{\Delta} \right), \\ \lambda_{b,n}^P &:= \frac{1}{2} \left( \frac{n^2\pi^2}{h\varepsilon_0\mu_0} + \Lambda_e + \Lambda_m + \sqrt{\Delta} \right). \end{aligned}$$

Or,

$$\left( \frac{n^2\pi^2}{h\varepsilon_0\mu_0} + \Lambda_e + \Lambda_m \right)^2 - \Delta = 4\Lambda_e\Lambda_m \geq 0.$$

Donc ces deux racines sont positives. Ainsi, on a

$$b_n(\lambda)^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda_{b,n}^N < \lambda < \lambda_{b,n}^P.$$

L'équation de dispersion se réécrit donc comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Cas 1 : } & \left( 1 - \frac{\Lambda_m}{\lambda} \right) \frac{\tanh(|b_n(\lambda)|(l-L))}{|b_n(\lambda)|} = \frac{\tanh(|a_n(\lambda)|l)}{|a_n(\lambda)|} & \text{si } \lambda \in ]\lambda_{b,n}^N, \lambda_{b,n}^P[ \cap ]0, \lambda_{a,n}[ \\ \text{Cas 2 : } & \left( 1 - \frac{\Lambda_m}{\lambda} \right) \frac{\tanh(|b_n(\lambda)|(l-L))}{|b_n(\lambda)|} = \frac{\tan(|a_n(\lambda)|l)}{|a_n(\lambda)|} & \text{si } \lambda \in ]\lambda_{b,n}^N, \lambda_{b,n}^P[ \cap ]\lambda_{a,n}, \infty[ \\ \text{Cas 3 : } & \left( 1 - \frac{\Lambda_m}{\lambda} \right) \frac{\tan(|b_n(\lambda)|(l-L))}{|b_n(\lambda)|} = \frac{\tanh(|a_n(\lambda)|l)}{|a_n(\lambda)|} & \text{si } \lambda \in ]0, \lambda_{a,n}[ \setminus ]\lambda_{b,n}^N, \lambda_{b,n}^P[ \\ \text{Cas 4 : } & \left( 1 - \frac{\Lambda_m}{\lambda} \right) \frac{\tan(|b_n(\lambda)|(l-L))}{|b_n(\lambda)|} = \frac{\tan(|a_n(\lambda)|l)}{|a_n(\lambda)|} & \text{si } \lambda \in ]\lambda_{a,n}, \infty[ \setminus ]\lambda_{b,n}^N, \lambda_{b,n}^P[. \end{aligned}$$

Voyons à présent quand les différents cas se présentent : quand, en fonction de  $\lambda$  et  $n$ , se trouve-t-on dans chacun des cas ? Pour cela, il faut faire l'étude des fréquences particulières  $\lambda_{b,n}^P$ ,  $\lambda_{b,n}^N$  et  $\lambda_{a,n}$ . Cela est résumé dans la figure 2.5.

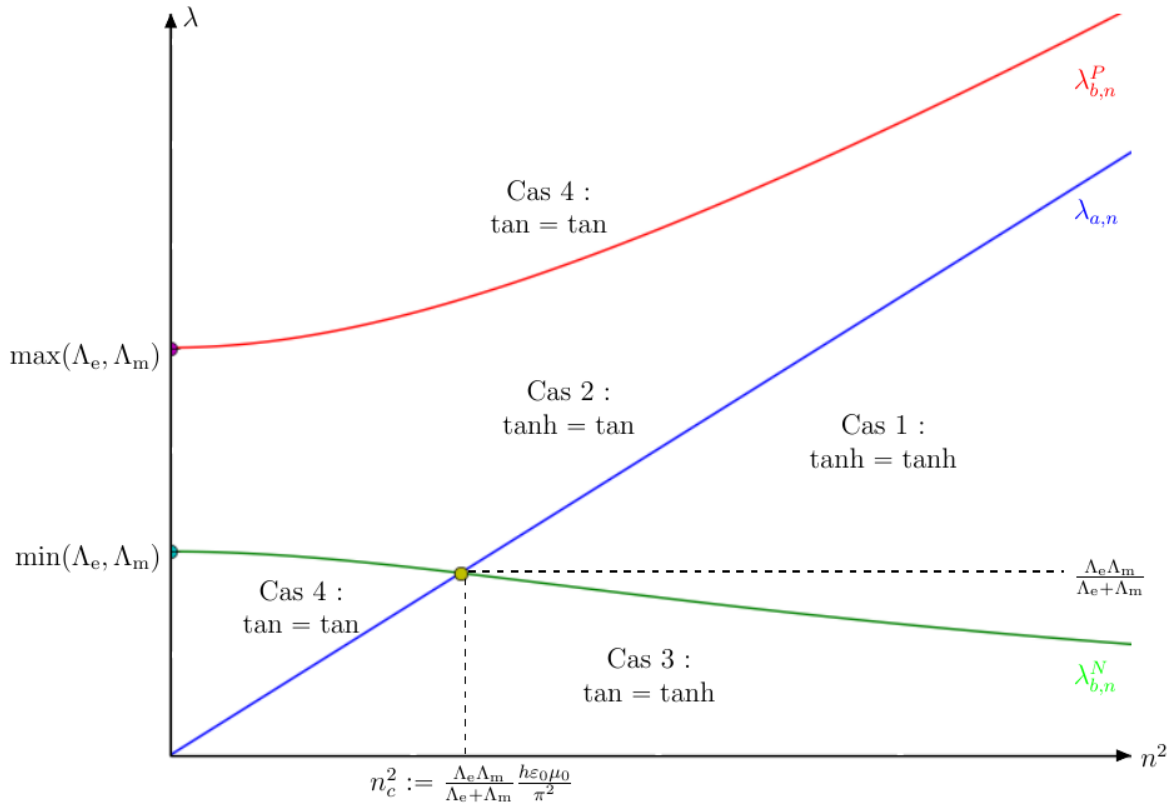


FIGURE 2.5 – Comportement des fréquences particulières  $\lambda_{a,n}$ ,  $\lambda_{b,n}^N$  et  $\lambda_{b,n}^P$  en fonction de  $n^2$ , avec les différents cas pour l'équation de dispersion.

**Remarque 2.6.** Ces fréquences particulières apparaissent également dans [33], où elles représentent aussi des limites entre différents cas dans le cadre de l'étude d'une interface entre matériau classique et matériau négatif.

**Remarque 2.7.** Dans la figure 2.5, les valeurs et comportements asymptotiques peuvent se prouver par le calcul, qui est fait en annexe 2.A.

La figure 2.5 nous montre la forme des deux branches de l'équation de dispersion selon les valeurs de  $n$  et de  $\lambda$ . On y voit qu'il y a trois cas selon la valeur de  $n$  par rapport à celle de  $n_c$  (défini en figure 2.5) : ces trois cas sont montrés dans les figures 2.6, 2.7 et 2.8, où sont tracés les deux membres de l'équation de dispersion en fonction de  $\lambda$  pour des valeurs fixées de  $n$  respectivement inférieure, égale et supérieure à  $n_c$ . Dans ces figures, on peut observer une accumulation (à  $n$  fixé) des solutions dans les zones où il y a une tangente classique.

### Accumulation en 0

Sur les figures 2.6, 2.7 et 2.8, on visualise l'impact d'avoir une tangente non hyperbolique au voisinage de  $\lambda = 0$  : entre deux points successifs de non définition de la tangente, il y a un point d'intersection des deux courbes et donc une solution de l'équation de dispersion. Cela est vrai uniquement si  $\Lambda_e > 0$  (voir figure 2.5).

**Proposition 2.8.** Si  $\Lambda_e > 0$ , pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation de dispersion admet une suite de racines qui tend vers 0.

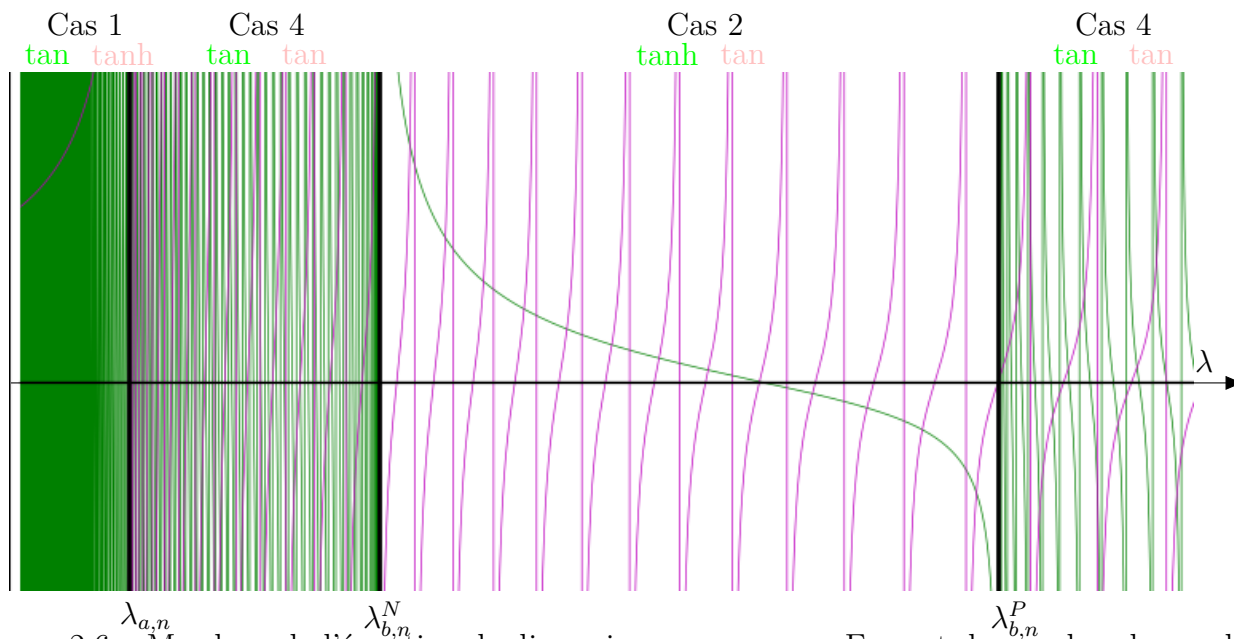


FIGURE 2.6 – Membres de l'équation de dispersion pour  $n < n_c$ . En vert, le membre de gauche, et en rose le membre de droite.

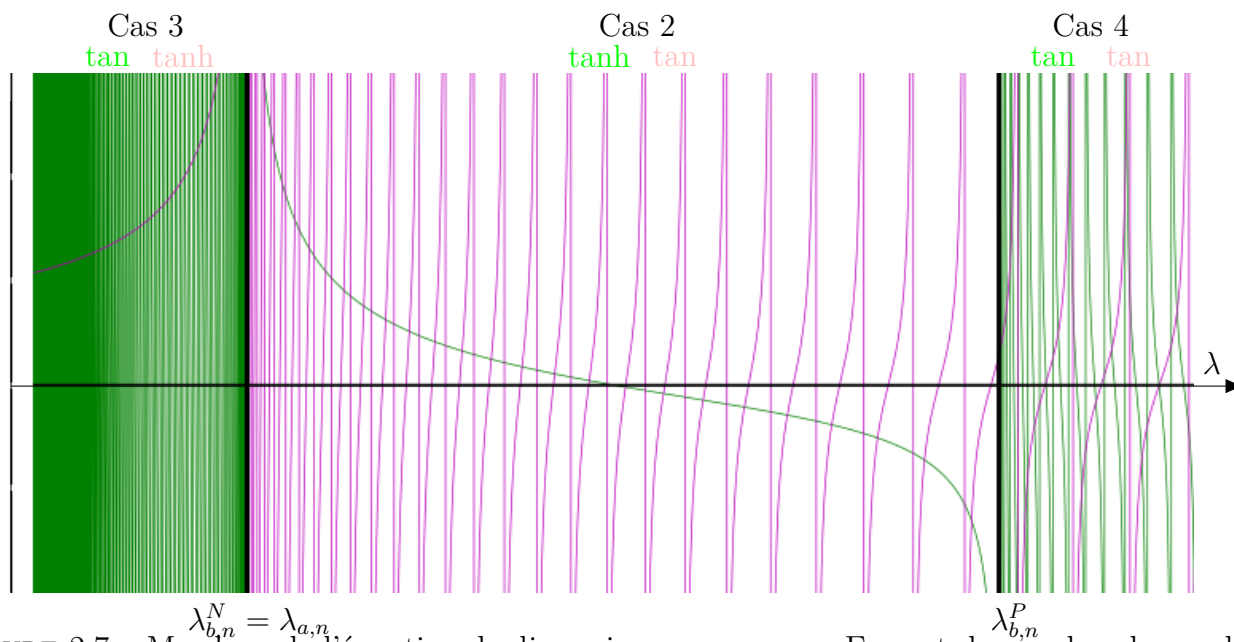


FIGURE 2.7 – Membres de l'équation de dispersion pour  $n = n_c$ . En vert, le membre de gauche, et en rose le membre de droite.

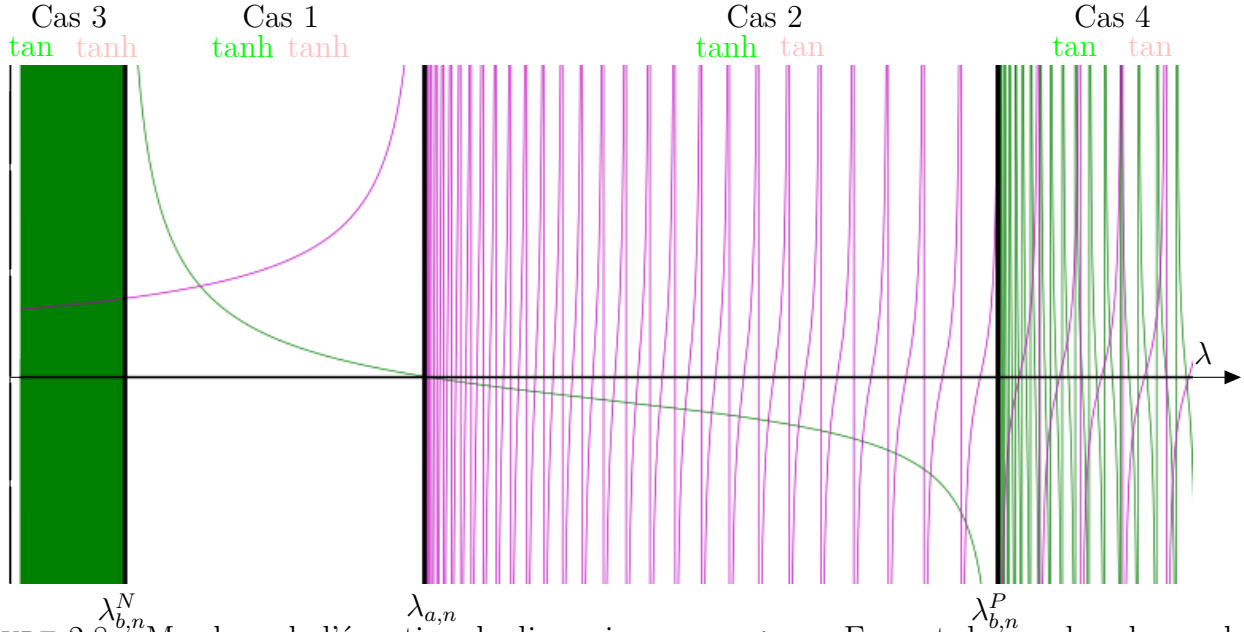


FIGURE 2.8 – Membres de l'équation de dispersion pour  $n > n_c$ . En vert, le membre de gauche, et en rose le membre de droite.

*Démonstration.* Raisonnons à  $n$  fixé. Pour  $\lambda < \min(\lambda_{a,n}, \lambda_{b,n}^N)$ , c'est le cas 3 de l'équation de dispersion qui se présente. Le membre de droite de l'équation de dispersion vaut

$$\frac{\tanh(|a_n(\lambda)|l)}{|a_n(\lambda)|},$$

qui est continu sur  $]0, \min(\lambda_{a,n}, \lambda_{b,n}^N)[$ . Et le membre de gauche vaut

$$\left(1 - \frac{\Lambda_m}{\lambda}\right) \frac{\tan(|b_n(\lambda)|(l-L))}{|b_n(\lambda)|},$$

et effectue une surjection sur  $\mathbb{R}$  entre deux points consécutifs de non définition de la tangente. Il y a donc une solution (au moins) de l'équation de dispersion entre deux  $\lambda$  successifs qui vérifient

$$|b_n(\lambda)|(L-l) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (2.13)$$

En mettant (2.13) au carré, en rappelant que pour  $\lambda < \lambda_{b,n}^N$ , on a  $b_n(\lambda)^2 < 0$ , on obtient que les points où  $\tan(b_n(\lambda)(L-l))$  n'est pas définie sont les solutions de

$$\left(\varepsilon_0\mu_0\lambda\left(1 - \frac{\Lambda_m}{\lambda}\right)\left(1 - \frac{\Lambda_e}{\lambda}\right) - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2\right)(L-l)^2 = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2,$$

c'est-à-dire de

$$\lambda^2 - \left(\Lambda_e + \Lambda_m + \left(\frac{n^2}{h^2} + \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2}{(L-l)^2}\right) \frac{\pi^2}{\varepsilon_0\mu_0}\right)\lambda + \Lambda_e\Lambda_m = 0. \quad (2.14)$$

Le discriminant de cette équation est

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta} &:= \left( \Lambda_e + \Lambda_m + \left( \frac{n^2}{h^2} + \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2}{(L-l)^2} \right) \frac{\pi^2}{\varepsilon_0 \mu_0} \right)^2 - 4\Lambda_e \Lambda_m \\ &= \left( \Lambda_e - \Lambda_m + \left( \frac{n^2}{h^2} + \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2}{(L-l)^2} \right) \frac{\pi^2}{\varepsilon_0 \mu_0} \right)^2 + 4\Lambda_m \left( \frac{n^2}{h^2} + \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2}{(L-l)^2} \right) \frac{\pi^2}{\varepsilon_0 \mu_0} \\ &> 0.\end{aligned}$$

L'une des deux racines vaut donc

$$\lambda_k^N := \frac{1}{2} \left( \left( \Lambda_e + \Lambda_m + \left( \frac{n^2}{h^2} + \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2}{(L-l)^2} \right) \frac{\pi^2}{\varepsilon_0 \mu_0} \right) - \sqrt{\tilde{\Delta}} \right).$$

En utilisant la première expression de  $\tilde{\Delta}$ , on a directement  $\lambda_k^N > 0$ . De plus, en notant

$$Y := \frac{n^2 \pi^2}{\varepsilon_0 \mu_0 h^2} > 0 \text{ et } Z := \frac{\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2}{\varepsilon_0 \mu_0 (L-l)^2} > 0$$

on a, en utilisant les expressions de  $\lambda_k^N$  et  $\lambda_{b,n}^N$  :

$$\begin{aligned}\lambda_k^N &< \lambda_{b,n}^N \\ \Leftrightarrow Z - \sqrt{(Y + Z + \Lambda_e + \Lambda_m)^2 - 4\Lambda_e \Lambda_m} &< -\sqrt{(Y + \Lambda_e + \Lambda_m)^2 - 4\Lambda_e \Lambda_m} \\ \Leftrightarrow Z + \sqrt{(Y + \Lambda_e + \Lambda_m)^2 - 4\Lambda_e \Lambda_m} &< \sqrt{(Y + Z + \Lambda_e + \Lambda_m)^2 - 4\Lambda_e \Lambda_m}.\end{aligned}$$

D'où, en mettant au carré et en développant :

$$\begin{aligned}\lambda_k^N &< \lambda_{b,n}^N \\ \Leftrightarrow Z^2 + (Y + \Lambda_e + \Lambda_m)^2 + 2Z\sqrt{(Y + \Lambda_e + \Lambda_m)^2 - 4\Lambda_e \Lambda_m} &< (Y + Z + \Lambda_e + \Lambda_m)^2 \\ \Leftrightarrow 2Z\sqrt{(Y + \Lambda_e + \Lambda_m)^2 - 4\Lambda_e \Lambda_m} &< 2Z(Y + \Lambda_e + \Lambda_m),\end{aligned}$$

ce qui est toujours le cas puisque  $Z > 0$ . Ainsi, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda_k^N < \lambda_{b,n}^N$  donc  $\lambda_k^N$  est bien un point de non définition de  $\tan(b_n(\lambda)(L-l))$  sur l'intervalle  $]0, \lambda_{b,n}^N[$ .

Voyons maintenant le comportement de  $\lambda_k^N$  quand  $k$  tend vers l'infini (à  $n$  fixé). Notons

$$u_k := \left( \Lambda_e + \Lambda_m + \left( \frac{n^2}{h^2} + \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2}{(L-l)^2} \right) \frac{\pi^2}{\varepsilon_0 \mu_0} \right).$$

Alors  $u_k$  tend vers l'infini quand  $k$  tend vers l'infini et

$$\begin{aligned}\lambda_k^N &= \frac{1}{2} \left( u_k - \sqrt{u_k^2 - 4\Lambda_e \Lambda_m} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( u_k - u_k \sqrt{1 - \frac{4\Lambda_e \Lambda_m}{u_k^2}} \right) \\ &\underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{2} \left( u_k - u_k \left( 1 - \frac{2\Lambda_e \Lambda_m}{u_k^2} \right) \right) + o\left(\frac{1}{u_k}\right) \\ &\underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{\Lambda_e \Lambda_m}{u_k} + o\left(\frac{1}{u_k}\right).\end{aligned}$$

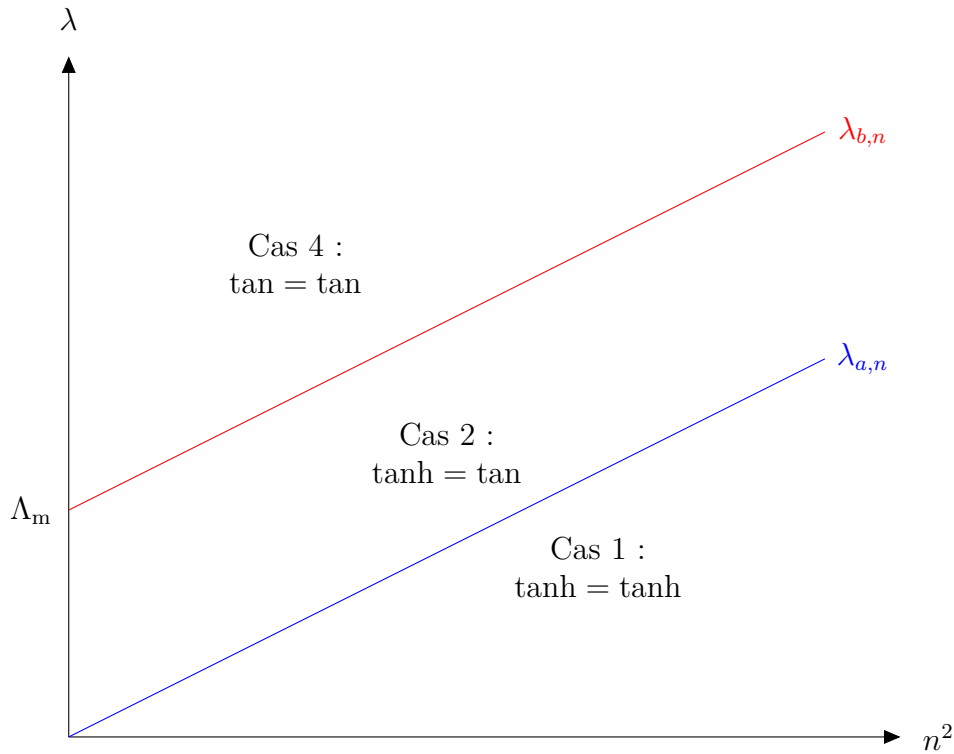


FIGURE 2.9 – Cas particulier  $\Lambda_e = 0$  : Comportement des fréquences particulières  $\lambda_{a,n}$  et  $\lambda_{b,n}^P$  en fonction de  $n^2$ , avec les différents cas pour l'équation de dispersion.

Donc on a une suite  $(\lambda_k^N)_k$  qui tend vers 0 avec une solution de l'équation de dispersion entre deux éléments de la suite. Il y a donc une suite de solutions de l'équation de dispersion qui tend vers 0.

□

Regardons maintenant le cas particulier où  $\Lambda_e = 0$ . Alors l'équation  $b_n(\lambda)^2 = 0$  n'a plus qu'une solution :  $\lambda_{b,n}^P$ , et les différents cas pour l'équation de dispersion se retrouvent en figure 2.9. On voit que pour toute valeur de  $n$ , au voisinage de  $\lambda = 0$ , on se trouve dans le cas où il y a deux tangentes hyperboliques dans l'équation de dispersion, et il n'y a donc pas d'accumulation en 0. Voici en figure 2.10 l'allure des deux membres de l'équation de dispersion. On voit en effet que pour  $n$  fixé, il n'y a plus accumulation en 0 des valeurs propres. De plus, si on note, pour tout  $n$ ,  $\lambda_n$  une solution de l'équation de dispersion pour le paramètre  $n$ , en faisant un équivalent quand  $n$  tend vers l'infini dans l'équation de dispersion évaluée en  $\lambda_n$ , on obtient que

$$1 - \frac{\Lambda_m}{\lambda_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

donc forcément  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ . Ainsi, il n'y a pas d'accumulation de valeurs propres en 0 non plus en faisant tendre  $n$  vers l'infini.

### Accumulation en l'infini

Pour voir l'accumulation des valeurs propres en l'infini, on peut raisonner comme pour l'accumulation en 0 : dans tous les cas, au voisinage de l'infini, on se trouve dans le cas 4 de l'équation de dispersion : celui où il y a deux tangentes. Il y aura une solution de l'équation au moins entre

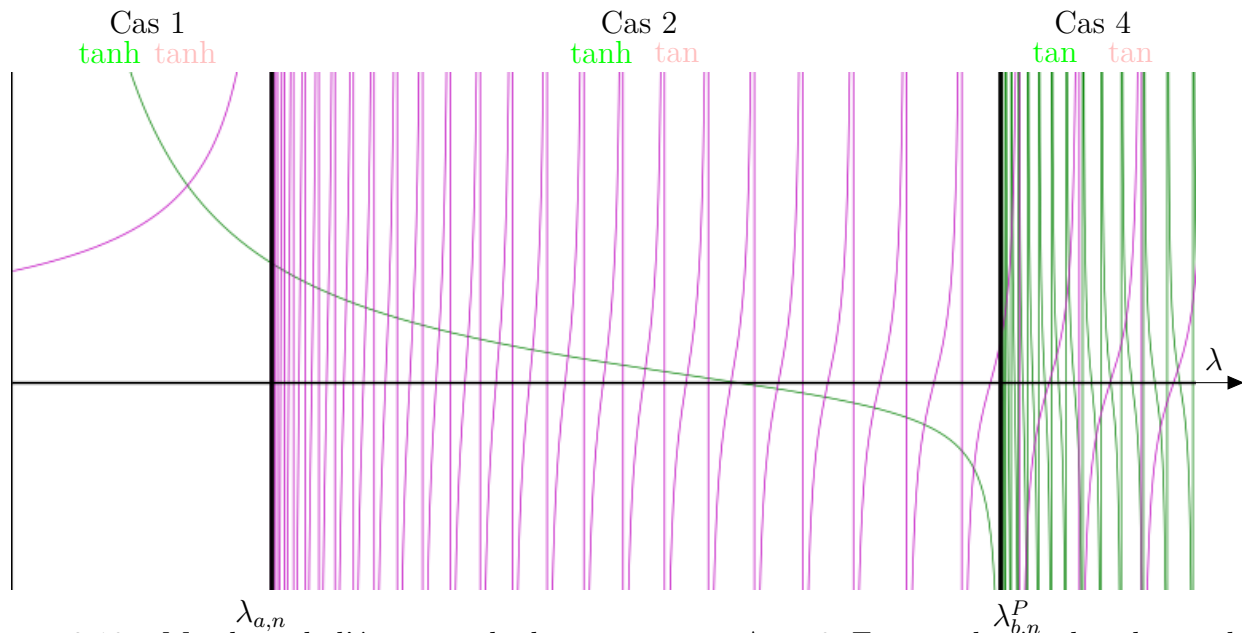


FIGURE 2.10 – Membres de l'équation de dispersion pour  $\Lambda_e = 0$ . En vert, le membre de gauche, et en rose le membre de droite.

deux points successifs de non définition d'une tangente donnée. Puisque les calculs ont été faits sur l'une des deux pour l'accumulation en 0, on va donc étudier le comportement des points de non définition de  $\tan(|b_n(\lambda)|(l-L))$

**Proposition 2.9.** *Pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation de dispersion admet une suite de racines qui tend vers  $+\infty$ .*

*Démonstration.* On a vu dans la preuve de la proposition (2.8) que les points de non définition de  $\tan(b_n(\lambda)(L-l))$  sont solutions de l'équation 2.14. L'une des deux solutions de cette équation était inférieure à  $\lambda_{b,n}^N$ , mais on montre de même que l'autre, donnée par

$$\lambda_k^P := \frac{1}{2} \left( \left( \Lambda_e + \Lambda_m + \left( \frac{n^2}{h^2} + \frac{(k + \frac{1}{2})^2}{(L-l)^2} \right) \frac{\pi^2}{\varepsilon_0 \mu_0} \right) + \sqrt{\tilde{\Delta}} \right)$$

est supérieure à  $\lambda_{b,n}^P$ .

De manière similaire à la preuve de la proposition 2.8 et en utilisant les mêmes notations, on montre de plus que

$$\lambda_k^P \underset{k \rightarrow \infty}{=} u_k + o\left(\frac{1}{u_k}\right) \underset{k \rightarrow \infty}{\rightarrow} +\infty.$$

□

### Résonance surfacique en $\Lambda_m/2$

En évaluant l'équation de dispersion en  $\Lambda_m/2$ , il n'est pas évident de voir si cette valeur en est bien solution. En faisant cette évaluation numériquement pour différentes valeurs des paramètres, on observe que, sauf cas particuliers,  $\Lambda_m/2$  n'est pas solution de l'équation de dispersion. Dans le cas général,  $\Lambda_m/2$  n'est donc pas valeur propre de l'opérateur  $\mathbb{A}$ . Sachant que cette valeur est dans son spectre essentiel, c'est donc qu'il y a une accumulation de valeurs propres en  $\Lambda_m/2$ .

Voyons s'il peut y avoir une accumulation des solutions de l'équation de dispersion à  $n$  fixé. Puisque  $x \mapsto \tanh(x)/x$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^+$  et que  $x \mapsto \tan(x)/x$  effectue une bijection de  $] -\pi/2, \pi/2[$  dans  $\mathbb{R}$ , dans le cas où l'équation de dispersion comporte une tangente classique et une tangente hyperbolique, il y a un nombre fini de solutions de l'équation de dispersion entre deux points successifs de non définition de la tangente classique. Sur l'intervalle où les deux tangentes sont hyperboliques, il y a exactement une solution de l'équation de dispersion. (Le cas de deux tangentes classiques ne se produit pas au voisinage de  $\Lambda_m/2$  : voir figure 2.5). Ainsi, il y a une accumulation des solutions de l'équation de dispersion (à  $n$  fixé) seulement aux endroits où il y a accumulation des points de non définition de la tangente, c'est-à-dire là où  $a_n(\lambda)$  ou  $b_n(\lambda)$  tendent vers l'infini, i.e. en 0 en l'infini. Il n'y a donc pas d'accumulation des solutions de l'équation de dispersion en  $\Lambda_m/2$  à  $n$  fixé. Ainsi, lorsque  $\Lambda_m/2$  n'est pas valeur propre de l'opérateur  $\mathbb{A}$ , il y a une accumulation des valeurs propres de  $\mathbb{A}$  en  $\Lambda_m/2$ , et il faut faire tendre  $n$  vers  $+\infty$  pour voir cette accumulation. En fait, dans les cas où il n'y a pas accumulation des valeurs propres de  $\mathbb{A}$  en  $\Lambda_m/2$ , c'est-à-dire lorsque  $\Lambda_m/2$  est valeur propre de multiplicité infinie de  $\mathbb{A}$ , on a tout de même besoin de faire tendre  $n$  vers  $+\infty$  pour observer la dimension infinie de l'espace propre associé à  $\Lambda_m/2$ . En effet, à  $n$  fixé, si  $\Lambda_m/2$  est solution de l'équation de dispersion, le vecteur propre associé est défini par (2.9) : il y a un seul vecteur propre par valeur de  $n$ .

**Remarque 2.10.** *Un cas particulier : si on a  $\Lambda_e = \Lambda_m$ , on a  $a_n(\Lambda_m/2) = b_n(\Lambda_m/2)$ . L'équation de dispersion en  $\Lambda_m/2$  se transforme donc en :*

$$-a_n \left( \frac{\Lambda_m}{2} \right) \tanh \left( a_n \left( \frac{\Lambda_m}{2} \right) (l - L) \right) = a_n \left( \frac{\Lambda_m}{2} \right) \tanh \left( a_n \left( \frac{\Lambda_m}{2} \right) l \right).$$

*Si on ajoute de plus un caractère symétrique à la cavité (ie  $l = L - l$ ), alors l'équation de dispersion est vérifiée trivialement pour tout  $n$  en  $\Lambda_m/2$ . On est ici dans le cas où  $\Lambda_m/2$  est valeur propre de multiplicité infinie de l'opérateur  $\mathbb{A}$ .*

## 2.2.2 Étude numérique du cas test

Ici, le but est de rester dans le cadre de la géométrie du paragraphe précédent : celle d'un rectangle coupé en deux, pour confronter les résultats obtenus avec `XLiFE++` et les résultats théoriques obtenus dans le paragraphe 2.2.1, afin de vérifier le fonctionnement de notre code. On regardera en particulier si les valeurs propres sont bien calculées numériquement grâce à l'équation de dispersion obtenue précédemment, et si l'allure des vecteurs propres est cohérente avec les expressions explicites de la proposition 2.2. Voici, dans la figure 2.11, les différentes valeurs numériques prises pour les simulations.

On va séparer les résultats en fonction du choix du maillage : on commence par un maillage simple et naïf (maillage uniforme), et ensuite on fera évoluer ce maillage afin de mieux observer les résultats escomptés.

### Maillage uniforme

On commence par choisir un maillage uniforme de la cavité, c'est-à-dire un maillage où l'on impose le même nombre de nœuds par unité de longueur sur toute la frontière de la cavité ainsi que sur l'interface. La figure 2.12 montre un tel maillage. Il y est volontairement grossier afin que l'image soit lisible, mais pour les simulations, le maillage utilisé est évidemment plus précis.

Tout d'abord, en figure 2.13, voici la vue globale que l'on peut avoir des éléments propres calculés par `XLiFE++` (pour un maillage de 100 nœuds par unité de longueur) : on trouve bien 3 groupements de valeurs propres : un proche de 0, associé à des fonctions propres localisées dans



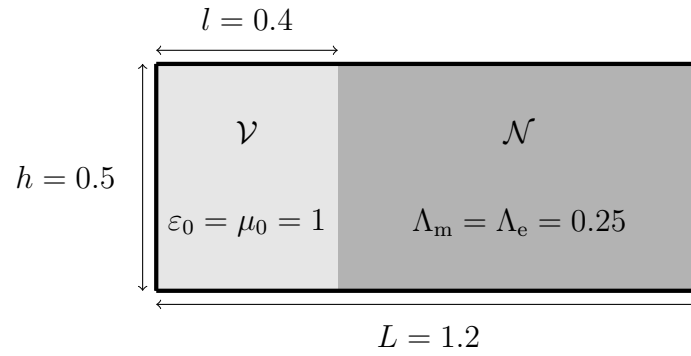


FIGURE 2.11 – Domaine utilisé pour les simulations avec valeurs numériques.

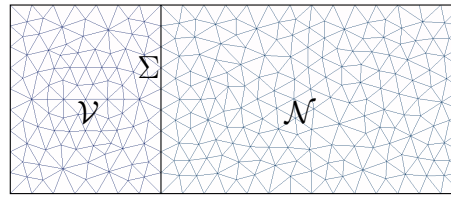


FIGURE 2.12 – Maillage uniforme d'une cavité rectangulaire.

le matériau négatif, un proche de la valeur  $\Lambda_m/2$ , associé à des fonctions propres localisées sur l'interface, et un contenant des valeurs très grandes devant  $\Lambda_m$ , associé à des fonctions propres excitant toute la cavité. Regardons à présent ces phénomènes un par un.

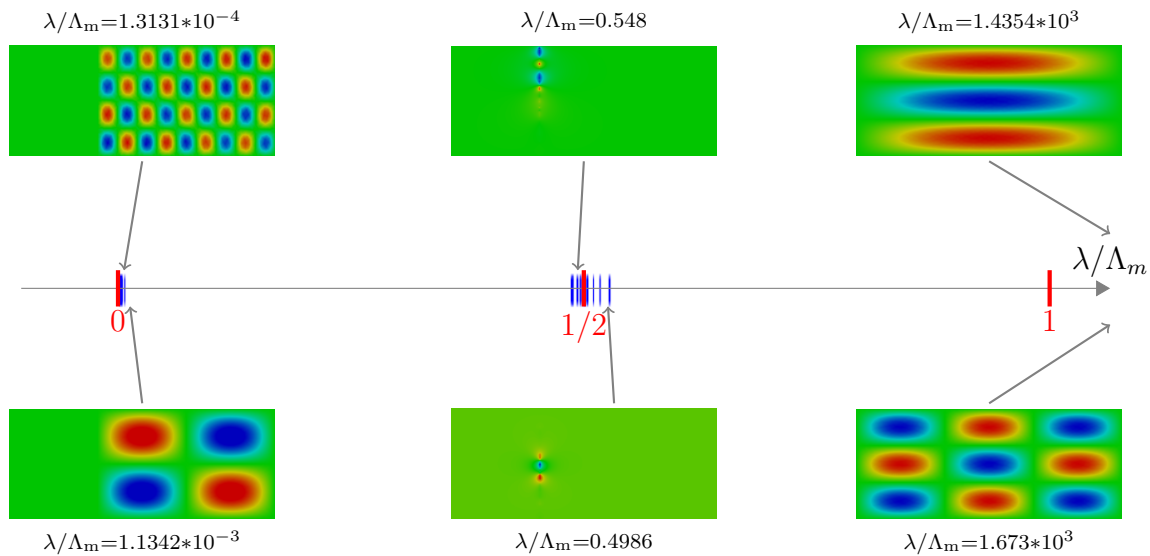
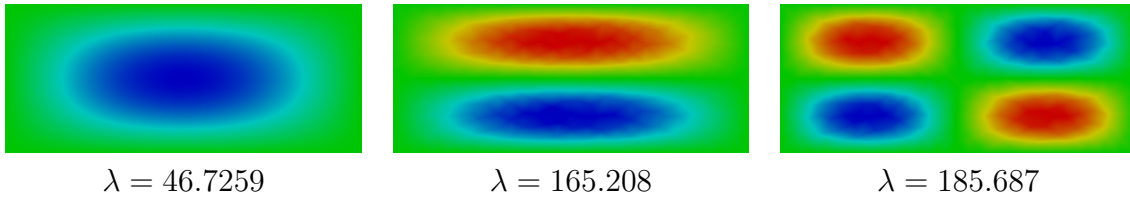
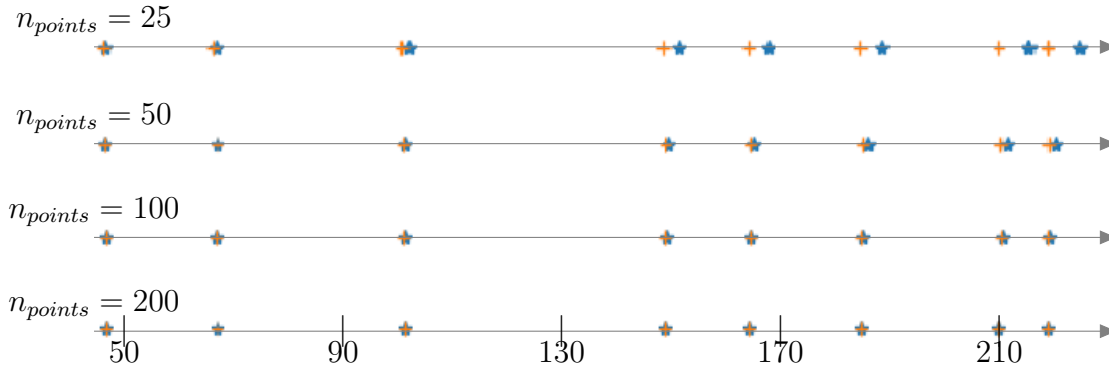


FIGURE 2.13 – Éléments propres calculés avec XLiFE++. En rouge : le spectre essentiel calculé théoriquement dans le chapitre précédent. En bleu, les valeurs propres discrètes obtenues avec XLiFE++, fléchées depuis les fonctions propres associées.

Pour le phénomène de résonance volumique dans la cavité entière, pour des valeurs propres s'accumulant en  $+\infty$ , comme expliqué dans le paragraphe 2.1, on choisit un shift grand devant la valeur de  $\Lambda_m$  et on calcule les valeurs propres proches de ce shift. On prend ici un shift égal à 150, et on regarde les 6 valeurs propres les plus proches. Voici en figure 2.14 l'allure de quelques

FIGURE 2.14 – Fonctions propres pour  $\lambda$  grand devant  $\Lambda_m$ .FIGURE 2.15 – Valeurs propres calculées numériquement pour un shift de 150 et différentes valeurs de  $n_{points}$  (nombre de nœuds du maillage par unité de longueur). En étoile bleue, celles qui sont calculées avec **XLiFE++**, et en croix orange celles que l'on obtient après une méthode de Newton pour l'équation de dispersion.

fonctions propres obtenues avec un tel shift . On reconnaît bel et bien une résonance volumique dans la cavité entière.

Il s'agit maintenant de vérifier que les valeurs propres sont bien calculées, et pour cela, on se sert de l'équation de dispersion (2.7) trouvée dans le paragraphe 2.2.1. Pour cela, on résout numériquement cette dernière avec la méthode de Newton. Puisque l'équation a de nombreux points de non définition (à cause des tangentes), il faut initialiser correctement l'algorithme : on choisit de l'initialiser en la valeur propre calculée par **XLiFE++**, il reste à voir si la méthode de Newton converge vers une valeur proche. Il y a tout de même une difficulté dans cette méthode, qui réside dans le fait que l'équation dépend d'un paramètre  $n$ , lié au nombre d'oscillations dans la direction de l'interface. Il est donc nécessaire de regarder l'allure de la fonction propre, afin de savoir pour quelle valeur de  $n$  il faut résoudre l'équation. Par exemple, dans la figure 2.14, dans la fonction propre de gauche, il y a une seule oscillation verticale :  $n = 1$ , alors que dans les deux de droite, il y en a deux :  $n = 2$ .

Voici donc en figure 2.15, les valeurs propres calculées avec **XLiFE++** pour différentes précisions du maillage et celles que l'on obtient après leur avoir appliqué la méthode de Newton.

Et voici dans le tableau suivant, les huit premières valeurs propres plus grandes que  $\Lambda_m$  trouvées par **XLiFE++** pour différentes précisions du maillage. Chaque colonne correspond à une précision de maillage (le nombre indiqué correspondant à  $n_{points}$ ), sauf la dernière qui donne les valeurs calculées après méthode de Newton sur l'équation de dispersion.

XLiFE++25	XLiFE++50	XLiFE++100	XLiFE++200	Newton
46.9834	46.7799	46.7362	46.7259	46.7225
67.7501	67.3277	67.2353	67.2137	67.2067
102.779	101.776	101.563	101.513	101.4968
152.187	150.085	149.622	149.513	149.478
168.501	165.885	165.34	165.208	165.166
189.731	186.543	185.853	185.687	185.633
216.52	212.367	211.445	211.226	211.156
225.785	221.22	220.243	220.008	219.932

Dans le tableau suivant sont indiquées les erreurs relatives correspondantes : chaque ligne correspond à la même ligne dans le tableau précédent.

XLiFE++25	XLiFE++50	XLiFE++100	XLiFE++200
$5.58 * 10^{-3}$	$1.22 * 10^{-3}$	$2.93 * 10^{-4}$	$7.28 * 10^{-5}$
$8.09 * 10^{-3}$	$1.80 * 10^{-3}$	$4.26 * 10^{-4}$	$1.04 * 10^{-4}$
$1.26 * 10^{-2}$	$2.75 * 10^{-3}$	$6.52 * 10^{-4}$	$1.60 * 10^{-4}$
$1.81 * 10^{-2}$	$4.06 * 10^{-3}$	$9.63 * 10^{-4}$	$2.34 * 10^{-4}$
$2.02 * 10^{-2}$	$4.35 * 10^{-3}$	$1.05 * 10^{-3}$	$2.54 * 10^{-4}$
$2.21 * 10^{-2}$	$4.90 * 10^{-3}$	$1.18 * 10^{-3}$	$2.91 * 10^{-4}$
$2.54 * 10^{-2}$	$5.74 * 10^{-3}$	$1.37 * 10^{-3}$	$3.31 * 10^{-4}$
$2.66 * 10^{-2}$	$5.86 * 10^{-3}$	$1.41 * 10^{-3}$	$3.46 * 10^{-4}$

On a bien une précision de plus en plus satisfaisante lorsque l'on raffine le maillage ; et on observe qu'à maillage donné, la précision baisse quand la valeur propre augmente : en effet, les vecteurs propres correspondant possèdent de plus en plus d'oscillations et sont donc moins bien approchés par le maillage.

Étant donné que l'on a une expression analytique des fonctions propres (dans la proposition 2.2), on vérifie aussi que les fonctions propres calculées avec XLiFE++ correspondent bien à celles calculées théoriquement et qui sont associées aux valeurs propres obtenues après Newton. C'est bien le cas : deux valeurs propres associées (celle de XLiFE++ et celle après Newton) correspondent bien à la même fonction propre. Le calcul fait avec XLiFE++ est donc bien cohérent pour les grandes valeurs propres.

Passons à présent à l'accumulation en 0. On ne change rien aux valeurs numériques citées précédemment, si ce n'est celle du shift : ici on prend un shift de 0.01. Voici en figure 2.16 trois des fonctions propres obtenues avec XLiFE++ pour ce shift. On reconnaît bien le phénomène de résonance volumique dans le matériau négatif. Voyons maintenant si les valeurs propres obtenues sont correctes. Pour cela, on utilise la même méthode que pour les grandes valeurs propres : on résout numériquement l'équation de dispersion avec une méthode de Newton que l'on initialise grâce aux valeurs propres calculées avec XLiFE++. Là encore, il faut savoir quel paramètre  $n$  il faut choisir dans l'équation de dispersion, en regardant l'allure de chaque fonction propre. Ce travail a été réalisé sur les 50 premières valeurs propres. Dans la figure 2.16 sont montrées les valeurs propres calculées avec XLiFE++ pour différentes précisions du maillage et celles qui sont calculées en python avec l'équation de dispersion, ainsi que quelques fonctions propres associées.

Là encore, les valeurs propres calculées par XLiFE++ semblent correctes, et plus elles sont petites, plus il faut raffiner le maillage pour les calculer précisément car les fonctions propres associées sont de plus en plus oscillantes.

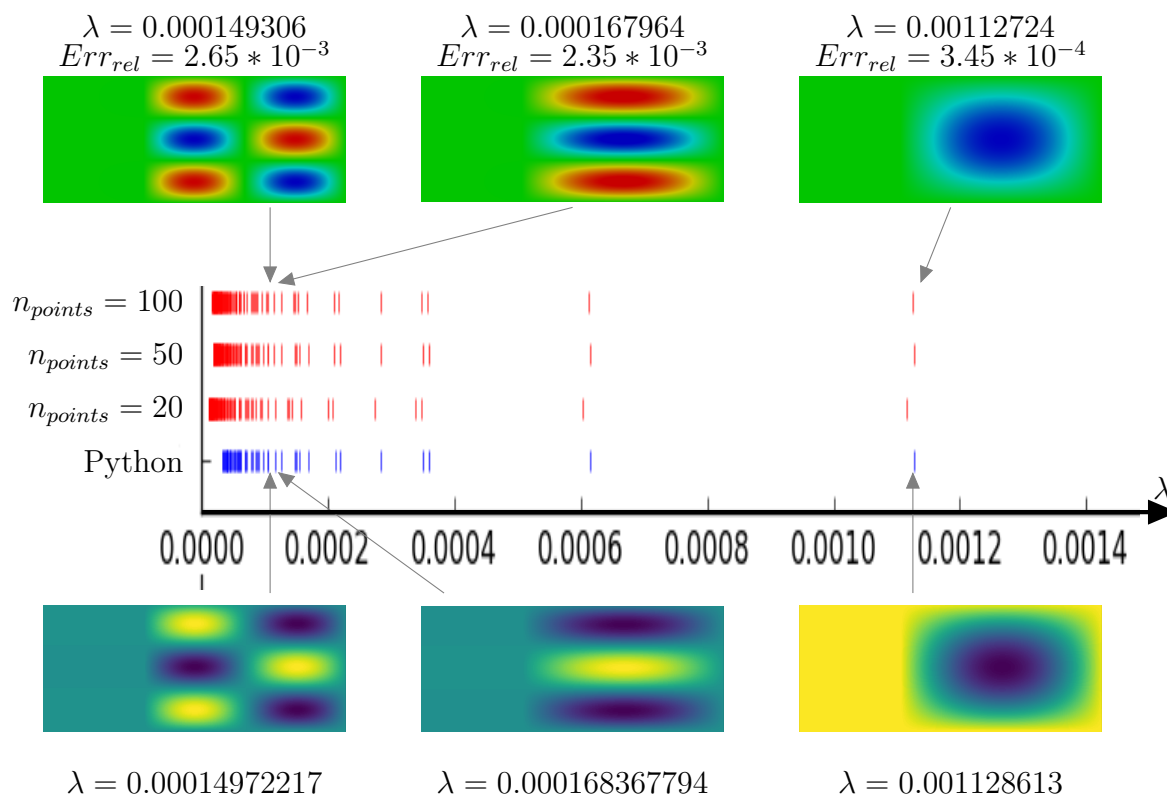
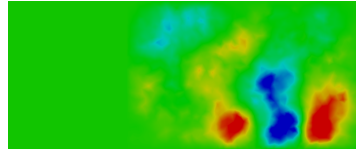
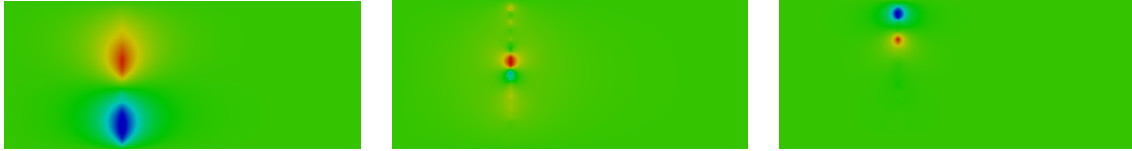


FIGURE 2.16 – Éléments propres numériques pour un shift de 0.01. En rouge, les valeurs propres calculées avec XLiFE++ pour différentes précisions du maillage, en bleu celles obtenues avec python à partir de l'équation de dispersion. En haut, trois fonctions propres calculées avec XLiFE++ pour la précision maximale avec les valeurs propres correspondantes et l'erreur relative sur ces valeurs propres. En bas, les trois fonctions propres correspondantes obtenues avec python et les valeurs propres associées.

FIGURE 2.17 – Fonction propre pour  $\lambda = 2.16 * 10^{-19}$  dans le cas où  $\Lambda_e = 0$ .FIGURE 2.18 – Fonctions propres pour  $\lambda$  proche de  $\Lambda_m/2$ .

**Remarque 2.11.** Dans le cas où l'on prend  $\Lambda_e = 0$ , avec *XLiFE++*, on ne trouve que des valeurs propres inférieures à  $10^{-17}$ , concentrées dans le matériau négatif, et les vecteurs propres associés ne ressemblent à rien de particulier (voir un exemple en figure 2.17). Pour rapprocher cela de l'étude théorique, on rappelle que dans le paragraphe 2.2.1, on a vu qu'il n'y avait plus d'accumulation en 0 de valeurs propres non nulles. En revanche, dans le chapitre 1, en section 1.B, on a vu que dans ce cas précis, 0 est valeur propre de multiplicité infinie associée à des vecteurs propres concentrés dans le matériau négatif, qui vérifient simplement  $u = -\mathcal{R} \text{grad } \varphi$  pour n'importe quel  $\varphi \in H_0^1(\mathcal{C})$  à support dans  $\mathcal{N}$ . Il est donc cohérent de trouver ce genre de fonctions propres.

Passons à la résonance surfacique. On ne change à nouveau rien aux valeurs numériques choisies jusque là, et on prend un shift de 0.125, qui correspond à la valeur de  $\Lambda_m/2$ . Voici en figure 2.18 trois des fonctions propres obtenues pour ce shift. L'allure des fonctions propres semble satisfaisante : on reconnaît bien le phénomène de résonance surfacique décrit dans le chapitre 1 : les fonctions propres montrent des oscillations dans la direction de l'interface localisées autour d'un point de l'interface. Ici, pour calculer numériquement les valeurs propres à partir de l'équation de dispersion, on peut se baser sur ce que l'on observe en figure 2.8 : à  $n > n_c$  fixé, l'équation de dispersion n'a qu'une seule solution entre  $\lambda_{b,n}^N$  et  $\lambda_{a,n}$ . Il est donc possible de résoudre l'équation de dispersion par dichotomie sur un intervalle inclus dans  $]\lambda_{b,n}^N, \lambda_{a,n}[$ , qui contient bien  $\Lambda_m/2$  pour  $n$  assez grand. De cette façon, on peut trouver une suite de valeurs propres qui tend vers  $\Lambda_m/2$ . La mise en application de cette méthode confirme numériquement le postulat fait : on parvient bien, pour chaque valeur de  $n$ , à trouver une solution de l'équation de dispersion de cette manière. Les valeurs propres calculées à partir de l'équation de dispersion en python et celles qui sont calculées avec *XLiFE++* sont montrées en figure 2.20, respectivement en rouge et en bleu. Malgré l'allure a priori pertinente des fonction propres, les valeurs de  $\lambda$  ne sont pas solutions de l'équation de dispersion, et on n'observe pas d'accumulation des valeurs propres avec *XLiFE++* en  $\Lambda_m/2$ .

A ce stade, on peut penser que le choix du maillage n'est pas approprié. En effet, on cherche à observer des fonction propres très oscillantes au niveau de l'interface, on peut donc penser que le maillage utilisé était trop grossier dans cette région, et on peut espérer obtenir de meilleurs résultats avec un maillage plus fin autour de l'interface.

### Maillage raffiné à l'interface

Dans ce paragraphe, on change de maillage pour les simulations. On désire augmenter la densité de nœuds au voisinage de l'interface, et pour cela, on augmente le nombre de nœuds sur

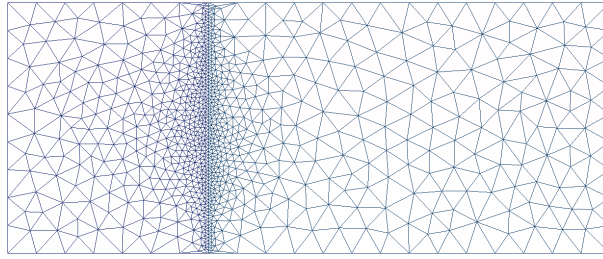


FIGURE 2.19 – Maillage d’une cavité rectangulaire raffinée au niveau de l’interface.

l’interface lorsque l’on construit la géométrie de la cavité dans **XLiFE++**. Le nouveau maillage est montré en figure 2.19.

Voici, en figure 2.20, les éléments propres calculés avec python à partir de l’équation de dispersion et avec **XLiFE++** pour différents maillages. Dans cette figure, le nombre  $n_{points}$  représente le nombre de nœuds par unité de longueur sur la frontière de la cavité, et  $d$  est le rapport entre le nombre de nœuds par unité de longueur sur l’interface et celui sur la frontière. Par exemple,  $d = 2$  signifie que la distance entre deux nœuds voisins est deux fois moins importante sur l’interface que sur la frontière : le maillage est deux fois plus précis sur l’interface.

En raffinant le maillage au voisinage de l’interface, on trouve de plus en plus de valeurs propres au voisinage de  $\Lambda_m/2$  : il y a bien une accumulation autour de cette valeur. Le fait d’utiliser un maillage raffiné à l’interface permet de gagner significativement en temps de calcul par rapport à une densification dans la cavité entière. En revanche, les valeurs propres calculées avec **XLiFE++** s’étendent énormément et vont beaucoup plus loin de  $\Lambda_m/2$  que les valeurs propres théoriques : beaucoup d’entre elles ne correspondent pas à des solutions de l’équation de dispersion. Quant à l’allure des fonctions propres : celles qui sont tracées avec python à partir de leur expression algébrique (donnée en (2.9)) excitent la totalité de l’interface (pas d’atténuation dans la direction  $x_2$ ), alors que celles qui sont obtenues avec **XLiFE++** ont un comportement localisé autour d’un point donné de l’interface. Ce comportement est d’autant plus localisé que la valeur propre calculée est loin de  $\Lambda_m/2$  : pour les plus éloignées, il est nécessaire de zoomer pour déceler les oscillations qui correspondent à la vibration de quelques mailles seulement (voir fonction propre pour  $\lambda = 0.11662$  dans la figure 2.20). Finalement, plus on raffine le maillage, plus on trouve des valeurs propres loin de  $\Lambda_m/2$  : cela ne permet pas de mieux calculer les éléments propres.

### Maillage symétrique autour de l’interface

Dans différents travaux numériques sur les ondes plasmoniques, notamment dans [31], [35] et [22], il a été remarqué que des maillages symétriques par rapport à la surface de propagation de ces ondes permettraient de mieux les calculer. Ici, tout en maintenant un raffinement du maillage au voisinage de l’interface, on impose une symétrie du maillage par rapport à l’interface. Pour cela, on construit d’abord le plus petit des deux milieux (ici  $\mathcal{V}$ ), puis son symétrique par rapport à l’interface  $\Sigma$ . Enfin, on complète le milieu  $\mathcal{N}$  par la portion non encore construite. Un tel maillage est montré en figure 2.21.

Dans la figure 2.22, on montre les éléments propres calculés avec **XLiFE++** pour le maillage non symétrique du paragraphe précédent, pour le maillage symétrique, et ceux obtenus avec python à partir de l’équation de dispersion. On prend la même précision pour les deux maillages ( $n_{points} = 50$  et  $d = 4$ ). Avec le maillage symétrique, l’étalement des valeurs propres a disparu. Les valeurs propres calculées correspondent bien aux solutions de l’équation de dispersion (erreur relative de l’ordre de  $10^{-5}$ ). Les cinq premières fonctions propres ont exactement la même allure que celles calculées à partir de leur expression algébrique : elles ne sont plus concentrées au voisinage

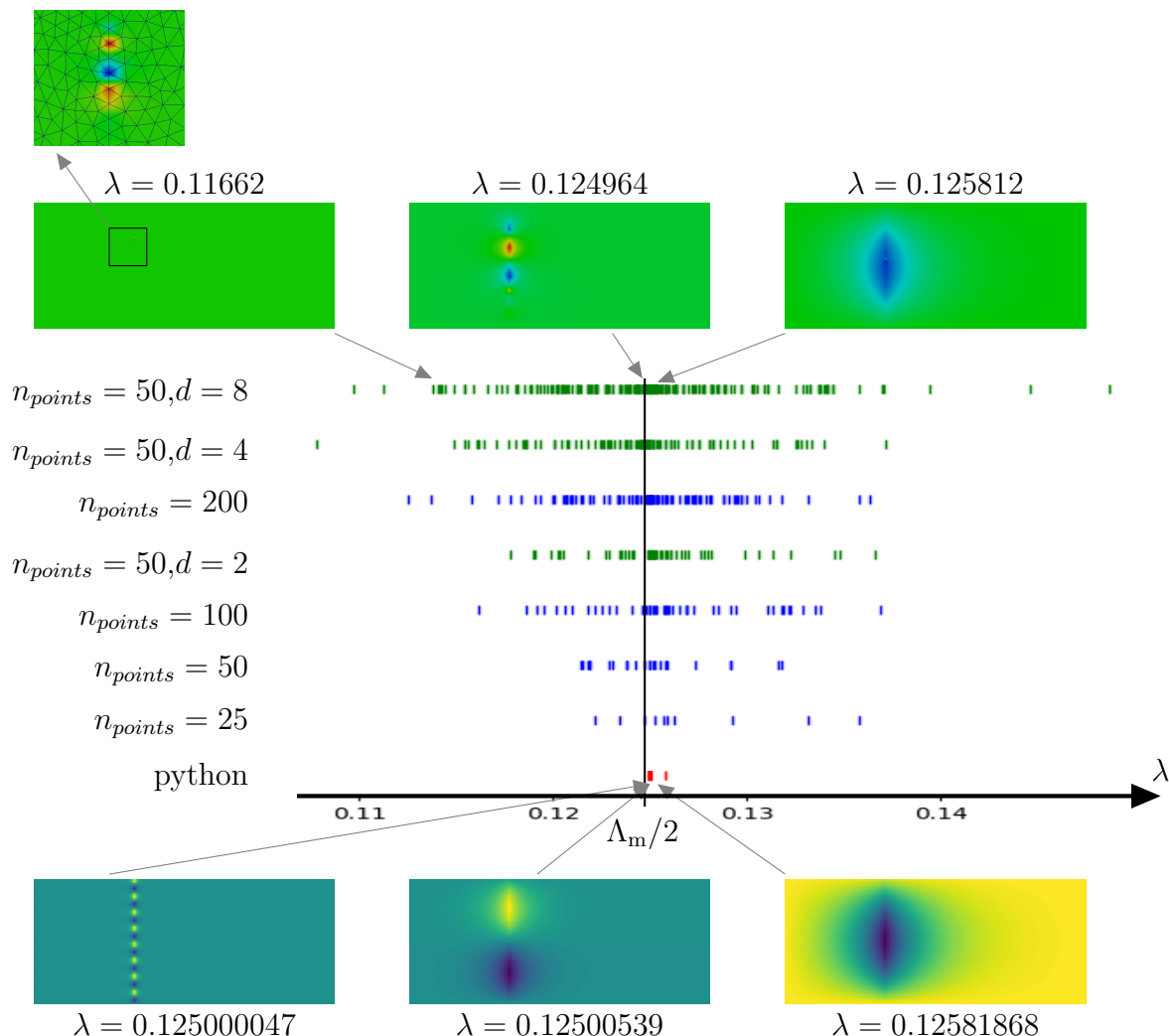


FIGURE 2.20 – Éléments propres numériques pour un shift de 0.125. En bleu, les valeurs propres calculées avec XLiFE++ pour des maillages uniformes de différentes précisions, en vert, les valeurs propres calculées avec XLiFE++ pour des maillages raffinés à l’interface d’une même précision sur la frontière de la cavité, mais pour différents raffinages à l’interface, et en rouge celles obtenues avec python à partir de l’équation de dispersion. En haut, trois fonctions propres calculées avec XLiFE++ pour la précision maximale avec les valeurs propres correspondantes. En bas, trois fonctions propres obtenues avec python.

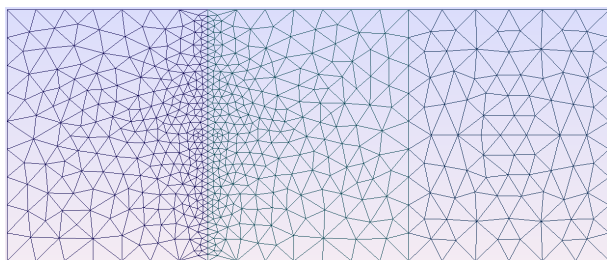


FIGURE 2.21 – Maillage d’une cavité rectangulaire raffinée au niveau de l’interface et symétrique par rapport à celle-ci.

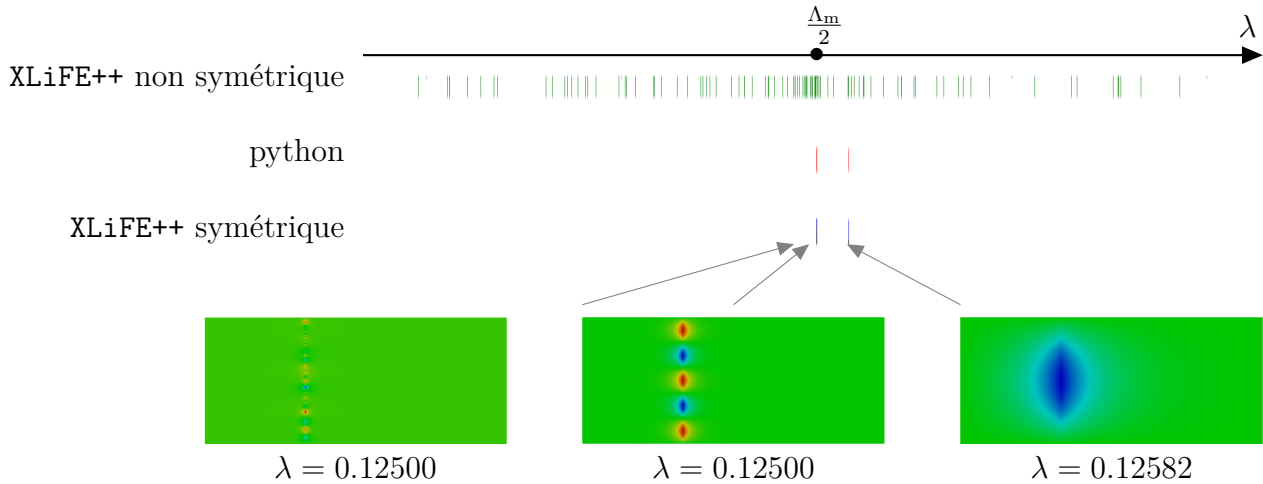


FIGURE 2.22 – Éléments propres numériques pour un shift de  $\Lambda_m/2 = 0.125$ . En vert, les valeurs propres calculées avec XLiFE++ pour un maillage non symétrique, avec  $n_{points} = 50$  et  $d = 4$ , en bleu celles obtenues avec XLiFE++ pour un maillage symétrique de même précision. En rouge, les valeurs propres calculées avec python à partir de l'équation de dispersion. En bas, trois fonctions propres calculées avec XLiFE++ pour le maillage symétrique.

d'un point de l'interface, contrairement à celles qui étaient obtenues à partir du maillage non symétrique. En revanche, dès la sixième, même si les fonctions propres ont un comportement qui recouvre l'ensemble de l'interface, elles ne ressemblent plus à celles que l'on doit obtenir (avec leurs expressions algébrique). En effet, les valeurs propres (aussi bien calculées avec XLiFE++ qu'avec python) sont toutes tellement proches de  $\Lambda_m/2$  que la différence n'est pas faite numériquement : les fonctions propres observées sont probablement une superposition de plusieurs étant considérées comme étant associées à la même valeur propre. On avait d'ailleurs observé en remarque 2.10 que dans le cas d'une cavité symétrique par rapport à l'interface avec  $\Lambda_e = \Lambda_m$ ,  $\Lambda_m/2$  était valeur propre de multiplicité infinie de l'opérateur  $\mathbb{A}$ .

Afin d'éviter d'avoir une convergence trop rapide des valeurs propres vers  $\Lambda_m/2$ , on refait donc la comparaison entre le calcul d'XLiFE++ pour le maillage symétrique et le calcul de python à partir de l'équation de dispersion en changeant la valeur de  $\Lambda_e$ , afin de ne plus avoir  $\Lambda_e = \Lambda_m$ . Cette comparaison est faite dans la figure 2.23, pour  $\Lambda_e = 0.1$ . Dans cette figure, on ne fait plus apparaître les valeurs propres obtenues avec un maillage non symétrique : les valeurs propres calculées avec le maillage symétrique et avec l'équation de dispersion sont beaucoup plus localisées autour de la valeur  $\Lambda_m/2$ , on fait donc un zoom sur ces valeurs dans la figure 2.23. L'accumulation est moins brutale que dans le cas  $\Lambda_e = \Lambda_m$ , ce qui permet de différencier visuellement les valeurs propres sur l'axe. Tant que le maillage est assez fin pour observer les oscillations, des valeurs propres sont calculées avec une erreur relative de l'ordre de  $10^{-6}$  (cette erreur augmente quand les oscillations deviennent petites), et les fonctions propres associées ont la même allure que celles obtenues à partir de leur expression algébrique.

Finalement, on a observé un résultat contre-intuitif : quand on raffine le maillage au voisinage de l'interface sans prendre de précaution particulière, on obtient de plus en plus de valeurs propres au voisinage de  $\Lambda_m/2$ , mais celles-ci n'ont rien à voir avec le problème continu. Elles correspondent à un étalement des valeurs propres bien plus important, et surtout, les fonctions propres associées reviennent pour la plupart à des vibrations très localisées de quelques mailles du maillage situées contre l'interface (ce qui explique qu'on en trouve de plus en plus). Mais en choisissant un maillage



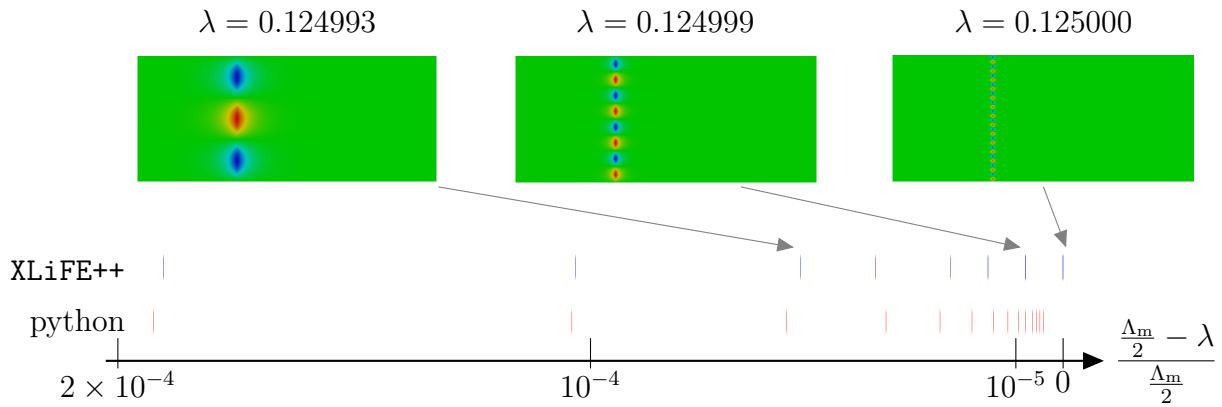


FIGURE 2.23 – Éléments propres numériques pour un shift de  $\Lambda_m/2 = 0.125$  pour un maillage symétrique, où on a changé la valeur de  $\Lambda_e$  pour avoir  $\Lambda_e \neq \Lambda_m$  : ici, on prend  $\Lambda_e = 0.1$ . On fait un zoom qui permet de différencier visuellement les valeurs propres. En bleu, les valeurs propres calculées avec XLiFE++ pour un maillage avec  $n_{points} = 50$  et  $d = 4$ . En rouge, les valeurs propres calculées avec python à partir de l'équation de dispersion. En haut, trois fonctions propres calculées avec XLiFE++. L'axe est gradué afin d'apprécier l'écart relatif des valeurs propres avec la valeur de  $\Lambda_m/2$ .

symétrique dans un voisinage de l'interface (en suivant les idées développées dans [31], [35] et [22], on supprime ces valeurs propres parasites, même si nous n'avons à ce jour pas trouvé d'explication à ce phénomène).

## 2.3 Résultats numériques dans la géométrie du camembert

Dans cette section, maintenant que le code `XLiFE++` est validé, il s'agit de l'utiliser dans une autre géométrie regroupant l'ensemble des phénomènes de résonance mis en évidence dans le chapitre 1. Pour cela, on fait le choix d'un disque contenant un secteur angulaire composé de matériau négatif. La cavité  $\mathcal{C}$  est un disque de rayon  $r = 1$ , le milieu  $\mathcal{N}$  est un secteur angulaire d'angle  $\alpha = \pi/2$  et le milieu  $\mathcal{V}$  le reste de la cavité. Les valeurs numériques choisies sont récapitulées en figure 2.24.

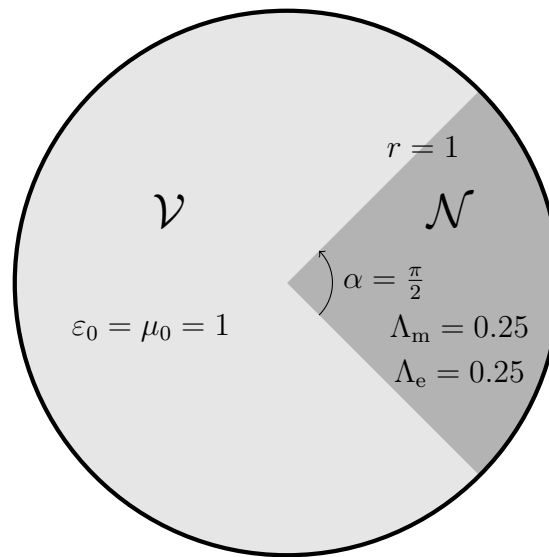


FIGURE 2.24 – Domaine utilisé pour les simulations avec valeurs numériques.

Les résultats numériques seront organisés de la même façon que pour le rectangle : en fonction du choix du maillage, que l'on fera à nouveau évoluer du plus naïf au plus adapté.

### Maillage uniforme

On commence tout d'abord par prendre un maillage uniforme de la cavité (voir figure 2.25). Encore une fois, pour des raisons de lisibilité de l'image, ce maillage est grossier et est moins précis que celui qui est utilisé dans les simulations.

Afin de voir l'ensemble des phénomènes sur un même axe, voici tout d'abord, en figure 2.26, les éléments propres calculés pour un tel maillage (100 nœuds par unité de longueur) avec une échelle logarithmique pour les valeurs propres. Seules les fonctions propres correspondant aux accumulations en 0 et en l'infini sont montrées (les autres feront l'objet de la figure 2.27). Ces deux accumulations n'ont aucun mal à être observées.

Pour les phénomènes se situant sur l'intervalle de spectre essentiel, voici en figure 2.27 les éléments propres obtenus avec `XLiFE++` pour le même maillage, où l'axe est cette fois-ci linéaire. Les accumulations en 0 et l'infini ne sont plus visibles sur un tel axe, mais on y voit mieux la répartition des valeurs propres numériques sur l'intervalle de spectre essentiel.

Tout comme dans le cas du rectangle, on trouve peu d'ondes de surface si on ne raffine pas le maillage au voisinage de l'interface. Pour ce qui est de la résonance de coin, on ne voit pas d'accumulation particulière sur l'intervalle.

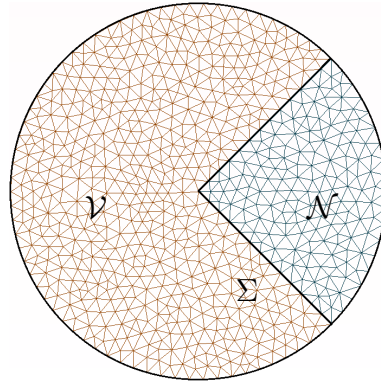


FIGURE 2.25 – Maillage uniforme d'une cavité circulaire.

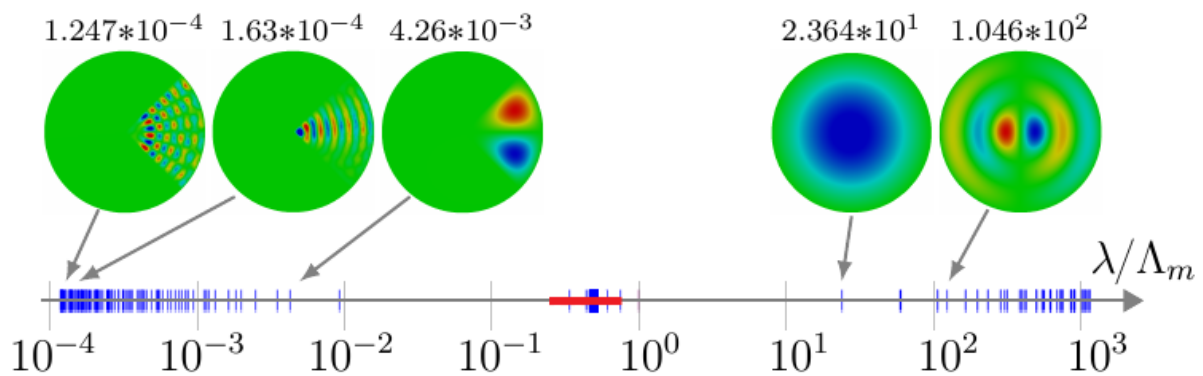


FIGURE 2.26 – Éléments propres calculés avec XLiFE++ pour un maillage uniforme. En rouge : le spectre essentiel calculé théoriquement dans le chapitre précédent. En bleu, les valeurs propres discrètes obtenues avec XLiFE++, fléchées depuis les fonctions propres associées. L'axe est en échelle logarithmique et les valeurs données sont celles du rapport  $\lambda/\Lambda_m$ .

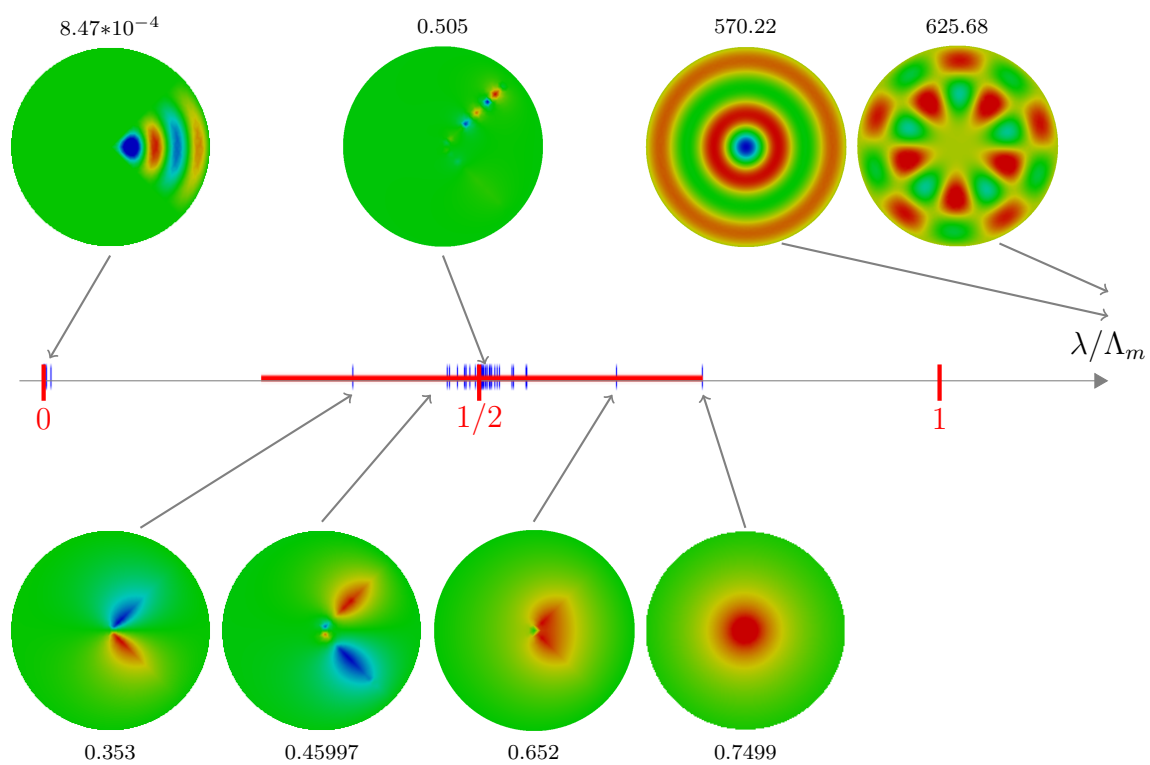


FIGURE 2.27 – Éléments propres calculés avec XLiFE++ pour un maillage uniforme. En rouge : le spectre essentiel calculé théoriquement dans le chapitre précédent. En bleu, les valeurs propres discrètes obtenues avec XLiFE++, fléchées depuis les fonctions propres associées. L'axe est en échelle logarithmique et les valeurs données sont celles du rapport  $\lambda/\Lambda_m$ .

### Maillage raffiné à l'interface

Dans un deuxième temps, on utilise un maillage raffiné au niveau de l'interface : on augmente simplement le nombre de nœuds du maillage sur l'interface, comme on l'avait fait dans le cas du rectangle (voir figure 2.28).

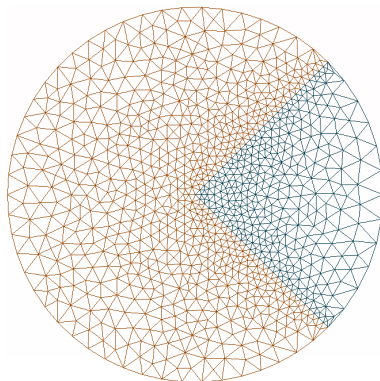


FIGURE 2.28 – Maillage d'une cavité circulaire densifié au niveau de l'interface.

Comme pour le rectangle, avec un tel maillage, on a un étalement des valeurs propres correspondant à des ondes de surface autour de  $\Lambda_m/2$ . Quant aux ondes de trou noir, on ne trouve pas significativement mieux que pour le maillage uniforme : avoir un maillage de l'ordre de 5 fois plus fin sur la surface ne suffit pas à observer les oscillations au voisinage du coin, et on trouve les mêmes valeurs propres sur l'intervalle qu'avec le maillage uniforme. Il faut énormément raffiner pour observer le comportement au niveau du coin, c'est pourquoi un troisième maillage peut-être envisagé, plus adapté que ceux qui ont été utilisés jusque là, qui permettra d'observer des petites oscillations au voisinage du coin, et donc, on l'espère, une accumulation des valeurs propres sur l'intervalle théorique de spectre essentiel.

### Maillage raffiné à l'interface et vers le coin

Pour ce nouveau maillage, il s'agit donc d'être plus fin au voisinage du coin. Concrètement, on agit sur la distance entre deux nœuds voisins sur l'interface de la manière suivante : on impose la distance entre les deux premiers nœuds au coin, ainsi que celle entre les deux derniers (ceux qui sont contre la frontière de la cavité), et on fait évoluer la distance entre les nœuds intermédiaires comme une suite géométrique. Si on note  $d_n$  ( $n \leq N - 1$ ) la distance entre le nœud  $n$  et le nœud  $n + 1$  (le nœud 0 étant le coin et le nœud  $N$  étant sur la frontière), on impose  $d_0$  et  $d_{N-1}$  et on a

$$d_n = d_0 \frac{b^n - 1}{b - 1} \quad \text{où } b = \frac{r - d_0}{r - d_N} \quad \text{et } N = E \left( 1 + \frac{\log(d_{N-1}) - \log(d_0)}{\log(b)} \right)$$

où  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$ . On rappelle qu'ici, on a pris  $r = 1$ . Un tel maillage est montré en figure 2.29. Avec un tel maillage, voici en figure 2.30 ce que l'on obtient avec XLiFE++.

Ici, il n'y a rien à ajouter quant aux résonances volumiques et surfacique par rapport aux précédents maillages. Pour ce qu'il se passe au niveau de l'intervalle théorique de spectre essentiel, il y a plusieurs choses à observer. Tout d'abord, au voisinage de  $\Lambda_m/2$ , la densité de valeurs propres est encore plus importante que dans le cas du maillage raffiné uniformément sur l'interface. Il y a toujours un étalement de valeurs propres à ce niveau-là, mais à présent, il y a deux types de vecteurs propres associés : sur la figure 2.30, on peut observer deux valeurs propres très

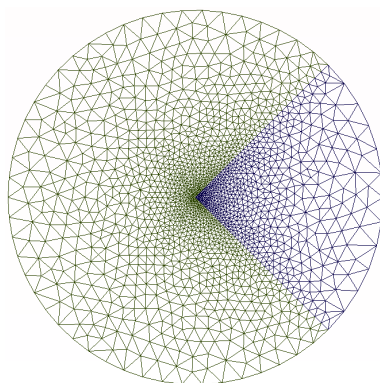


FIGURE 2.29 – Maillage d’une cavité circulaire densifié au niveau de l’interface, et exponentiellement vers le coin.

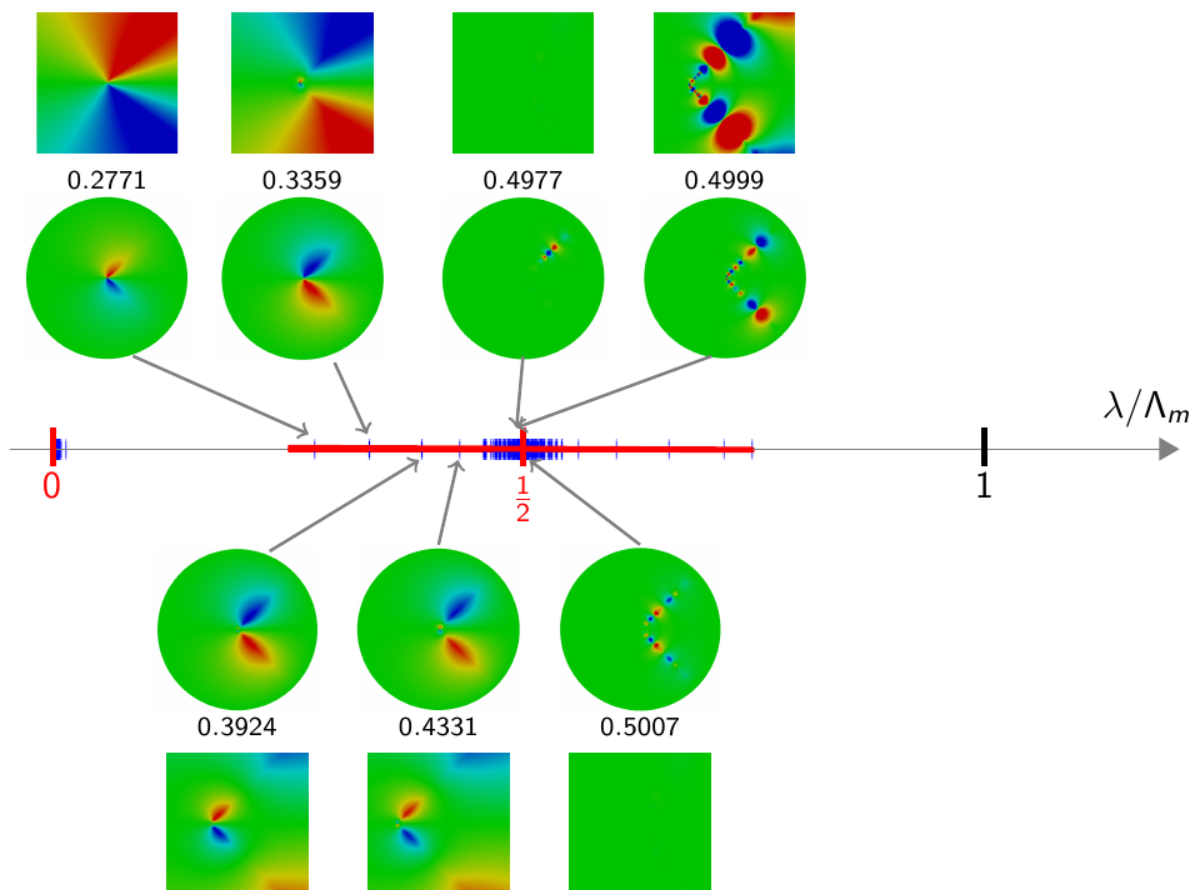


FIGURE 2.30 – Éléments propres calculés avec XLiFE++ pour le maillage raffiné au voisinage du coin. En rouge : le spectre essentiel calculé théoriquement dans le chapitre précédent. En bleu, les valeurs propres discrètes obtenues avec XLiFE++, fléchées depuis les fonctions propres associées. Au dessus / en dessous des fonctions propres : un zoom de celles-ci au voisinage du coin. Les valeurs données sont celles de  $\lambda/\Lambda_m$ .

proches ( $\lambda/\Lambda_m = 0.4977$  et  $\lambda/\Lambda_m = 0.4999$ ), mais qui ne relèvent pas du même phénomène de résonance. En effet, lorsque l'on zoome sur le coin, on peut voir que la fonction propre associée à  $\lambda/\Lambda_m = 0.4999$  a un comportement très oscillant au voisinage du coin : c'est une onde de trou noir, alors que celle qui est associée à  $\lambda/\Lambda_m = 0.4977$  est nulle au voisinage du coin : c'est une onde de surface. Dans le nuage de valeurs propres autour de la valeur  $\Lambda_m/2$ , il y a donc un mélange entre les ondes de trou noir et l'étalement des ondes de surface. Lorsque l'on s'éloigne de  $\Lambda_m/2$  dans l'intervalle, les fonctions propres ont uniquement un comportement d'ondes de trou noir, comme on peut le vérifier en zoomant sur le coin. En revanche, les valeurs propres sont très espacées et l'intervalle n'est pas recouvert de valeurs propres. Les valeurs propres liées à l'effet trou noir sont beaucoup plus concentrées autour de la valeur  $\Lambda_m/2$  que sur le reste de l'intervalle.

Ainsi, contrairement à ce qu'on aurait pu espérer, même un maillage raffiné au voisinage du coin (le maillage utilisé pour la figure 2.30 impose une distance entre les deux premiers nœuds proches du coin de l'ordre de  $10^{-4}$ ) ne permet pas d'observer d'accumulation des valeurs propres sur tout l'intervalle de spectre essentiel.

### Maillage raffiné à l'interface, au coin, et symétrique par rapport à l'interface

Tout comme pour le cas du rectangle, on essaie ici de faire disparaître l'étalement des valeurs propres correspondant à des ondes surfaciques. On se sert donc ici d'un maillage symétrique par rapport à l'interface. Pour le concevoir, on construit d'abord le milieu  $\mathcal{N}$  en deux fois (la portion  $\mathcal{N}_1$  correspondant à  $\theta \in ]0, \alpha/2[$  et la portion  $\mathcal{N}_2$  correspondant à  $\theta \in ]-\alpha/2, 0[$ , voir figure 2.31). Ensuite, on construit la partie  $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$  correspondant à  $\theta \in ]\alpha/2, \alpha[$  comme le symétrique de  $\mathcal{N}_1$  par rapport à l'axe  $\theta = \alpha/2$ , la partie du milieu  $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}$  correspondant à  $\theta \in ]-\alpha, -\alpha/2[$  comme le symétrique de  $\mathcal{N}_2$  par rapport à l'axe  $\theta = -\alpha/2$ . Enfin, on complète la cavité avec la portion qui n'a pas encore été construite. Un tel maillage est montré en figure 2.31.

En figure 2.32, on montre les éléments propres obtenus avec **XLiFE++** pour un tel maillage. On remarque que l'étalement des valeurs propres correspondant à des ondes de surface a disparu. Il n'y a plus alternance d'ondes de surface et d'ondes de trou noir sur l'intervalle théorique de spectre essentiel : les ondes de surfaces sont associées à des valeurs propres très concentrées autour de la valeur  $\Lambda_m/2$ , et les valeurs propres que l'on distingue visuellement de  $\Lambda_m/2$  sont toutes associées à des ondes de trou noir. On observe cependant que les valeurs propres associées à des ondes de trou noir s'accumulent aussi en  $\Lambda_m/2$ .

Ainsi, contrairement à ce qu'on s'attendait à observer numériquement, quel que soit le maillage utilisé, le continuum spectral du problème de départ ne semble pas être restitué par une discrétisation par éléments finis. En dehors de  $\Lambda_m/2$ , aucune densification de valeurs propres numériques n'est observée.

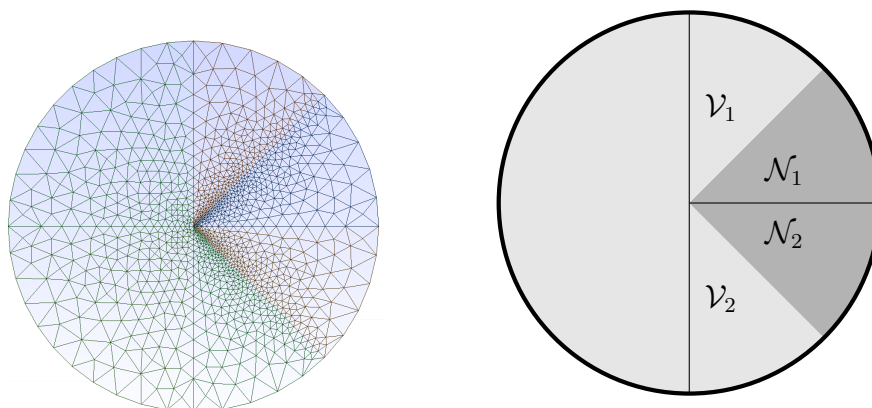


FIGURE 2.31 – Maillage d’une cavité circulaire densifié au niveau de l’interface et du coin, symétrique par rapport à l’interface.

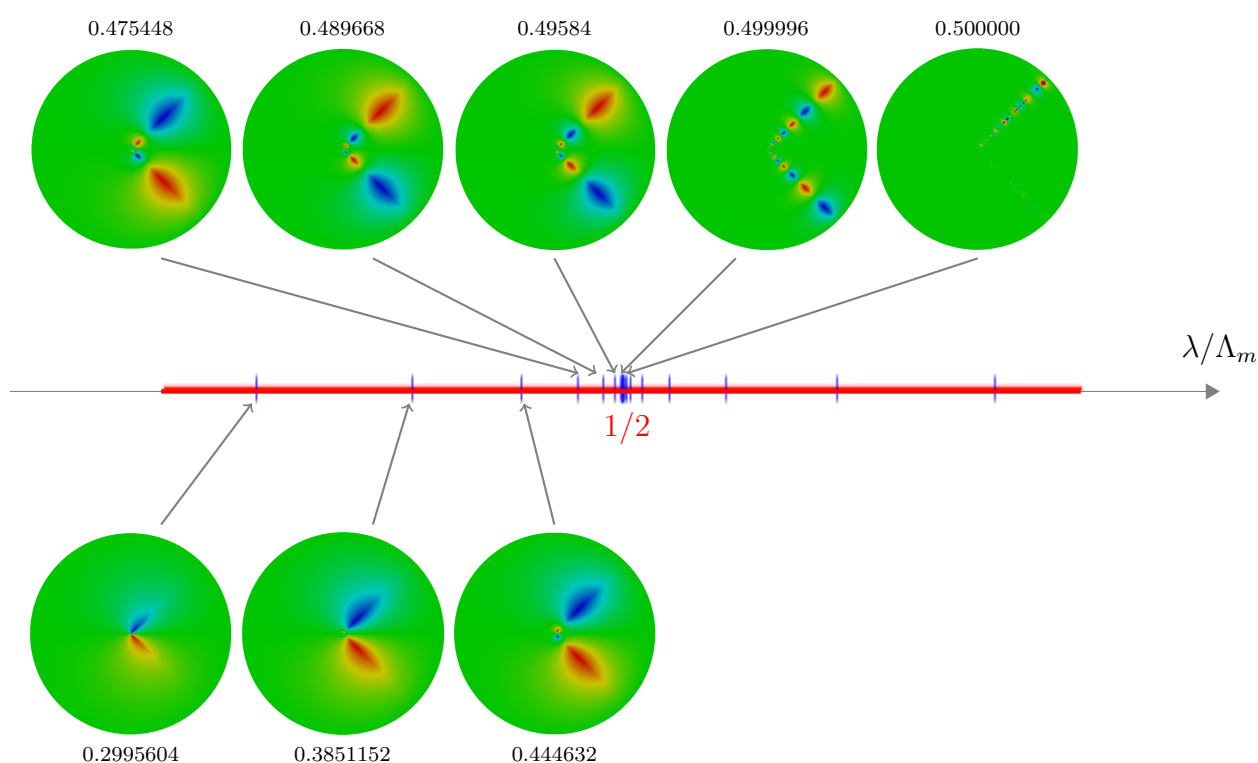


FIGURE 2.32 – Éléments propres calculés avec **XLiFE++** pour un maillage raffiné à l’interface et vers le coin, symétrique par rapport à l’interface. En rouge : le spectre essentiel calculé théoriquement dans le chapitre précédent. En bleu, les valeurs propres discrètes obtenues avec **XLiFE++**, fléchées depuis les fonctions propres associées. Avec les fonctions propres, les valeurs de  $\lambda/\Lambda_m$  correspondant.



### Absence d'accumulation des valeurs propres sur l'intervalle de spectre essentiel

A posteriori, il existe une explication à ce phénomène qui aurait pu être intuitée. L'idée suivante a été suggérée par Lucas Chesnel, de l'INRIA. Le comportement des fonctions propres que l'on espérait observer est concentré au niveau du coin : dans un disque donné centré au coin, il est censé y avoir une infinité d'oscillations. Mais le maillage a une précision finie. Regardons cela à partir du problème non linéaire de départ.

On rappelle le problème (2.1) :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left( \frac{1}{\mu_\lambda} \operatorname{grad} \varphi \right) + \lambda \varepsilon_\lambda \varphi &= 0 \quad \text{dans } \mathcal{C} \\ \varphi &= 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{aligned}$$

La première ligne se réécrit, en coordonnées polaires, de la façon suivante :

$$r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \mu_\lambda \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\mu_\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \mu_\lambda \varepsilon_\lambda \lambda r^2 \varphi = 0.$$

Ou encore, en coordonnées  $(z, \theta) := (\ln(r), \theta)$  :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \mu_\lambda(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\mu_\lambda(\theta)} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \mu_\lambda(\theta) \varepsilon_\lambda(\theta) \lambda e^{2z} \varphi = 0. \quad (2.15)$$

Ces dernières coordonnées reviennent à voir la cavité  $\mathcal{C}$  comme le guide d'onde semi infini  $] -\infty, 0] \times ] -\pi, \pi[$  (en fixant le rayon de la cavité à 1 pour plus de simplicité), où la condition de Dirichlet se retrouve en  $z = 0$ , et où l'on ajoute une condition de périodicité en  $\theta = \pm\pi$ . Dans ce guide, le coin du camembert se retrouve en  $z \rightarrow -\infty$ . Ce guide est montré en figure 2.33.

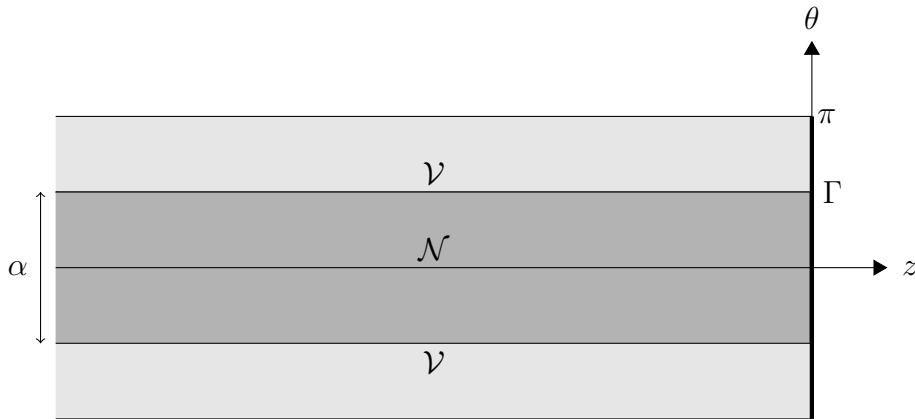


FIGURE 2.33 – Guide semi-infini équivalent à la cavité en coordonnées  $(z, \theta)$ .

Le dernier terme montre que l'on ne peut pas résoudre l'équation (2.15) en effectuant une séparation de variables. En revanche, étant donné que  $e^{2z}$  tend vers 0 quand  $z$  tend  $-\infty$ , on peut avoir l'intuition qu'il ne change pas grand chose au comportement des solutions au niveau du coin. D'ailleurs, dans le paragraphe 1.3.4, les ondes de trou noir sont construites à partir du problème (2.1) auquel on a retiré ce terme. On considère donc dans la suite le problème simplifié

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \mu_\lambda(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\mu_\lambda(\theta)} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (2.16)$$

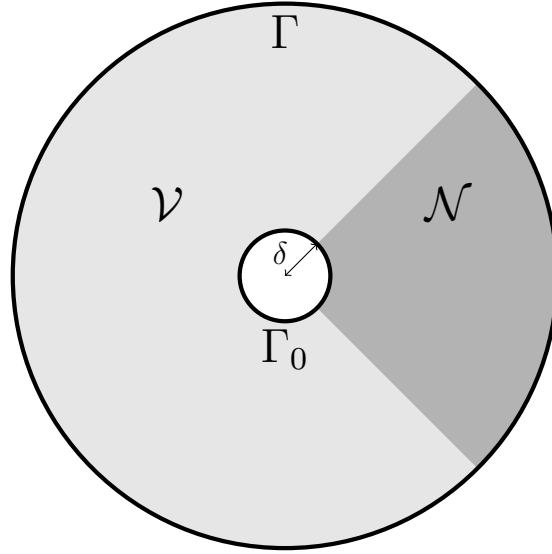


FIGURE 2.34 – Camembert tronqué.

avec condition de Dirichlet sur  $\partial\mathcal{C}$ . En reprenant les calculs faits dans le paragraphe 1.3.4, on trouve

$$\varphi(z, \theta) = \sin(\eta z) m_\eta(\theta)$$

$$\lambda^\pm(\eta) = \frac{\Lambda_m}{2} \left( 1 \pm \frac{\sinh(\eta(\pi - \alpha))}{\sinh(\eta\pi)} \right)$$

où  $\eta \in \mathbb{R}$ ,  $m_\eta$  la modulation angulaire définie en (1.29). L'étude de la fonction  $\lambda^\pm(\eta)$  conduit à l'intervalle de spectre essentiel étudié jusque là. Le guide d'onde semi-infini montré en figure 2.33 conduit donc à un continuum de valeurs propres.

Pour prendre en compte la limite de précision du maillage utilisé dans les simulations, on peut considérer la situation théorique du même camembert, mais tronqué au voisinage du coin (comme montré en figure 2.34) : on retire à la cavité un disque centré au coin de rayon  $\delta$ , qui correspond moralement à un voisinage du coin dans lequel le maillage n'est plus assez précis pour voir des oscillations dans le cadre des simulations. Sur la frontière  $\Gamma_0$  on choisit de mettre une condition de Neumann, mais ce choix reste arbitraire et des conditions de Dirichlet ne changent pas les résultats qui vont suivre.

Ce camembert tronqué, dans les coordonnées  $(z, \theta)$ , devient le guide tronqué montré en figure 2.35. Les solutions du problème (2.16) (avec conditions de Dirichlet sur  $\Gamma$  et de Neumann sur  $\Gamma_0$ ) sont alors les mêmes que dans le guide non tronqué, mais avec

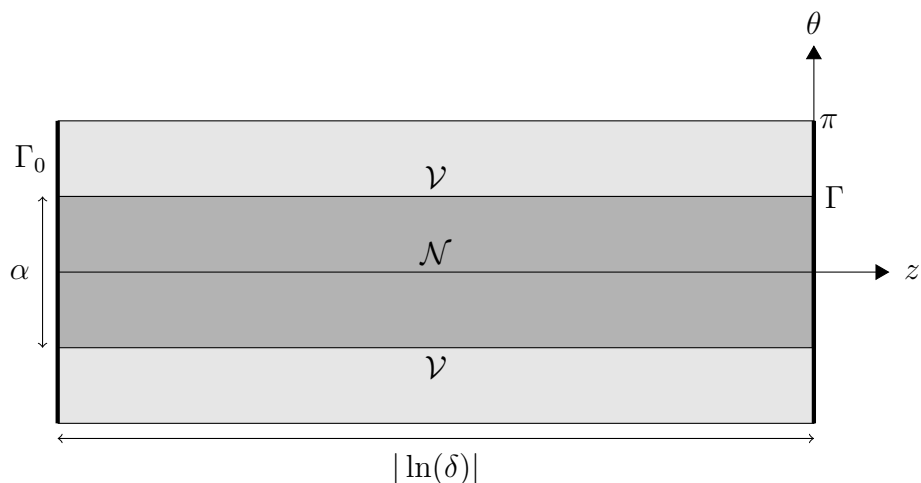
$$\eta = \frac{\pi/2 + k\pi}{\ln(\delta)} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

On perd donc le continuum puisqu'il ne reste plus que les

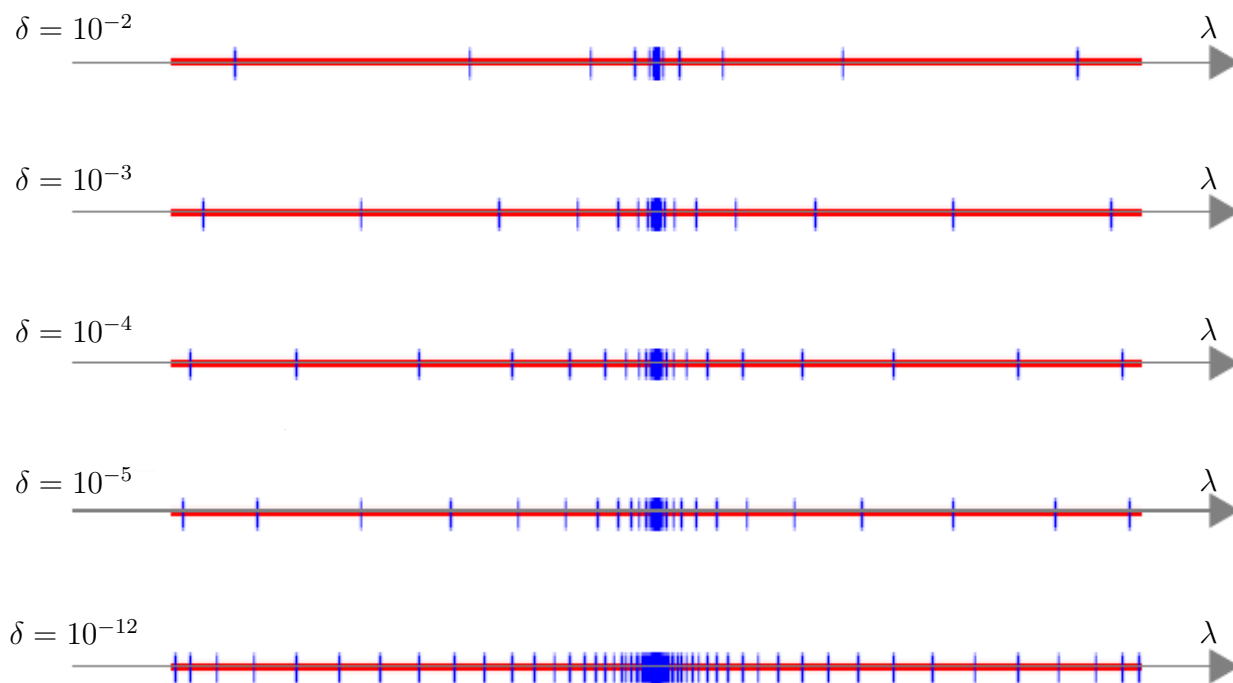
$$\lambda_k^\pm = \frac{\Lambda_m}{2} \left( 1 \pm \frac{\sinh\left(\frac{\pi/2+k\pi}{\ln(\delta)}(\pi - \alpha)\right)}{\sinh\left(\frac{\pi/2+k\pi}{\ln(\delta)}\pi\right)} \right) \quad , \quad k \in \mathbb{Z},$$

ce qui parcourt un ensemble discret de l'intervalle précédent. On a

$$\lambda_k^\pm \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{\Lambda_m}{2}$$

FIGURE 2.35 – Guide fini équivalent à la cavité tronquée en coordonnées  $(z, \theta)$ .

et on retrouve une accumulation en  $\Lambda_m/2$  de part et d'autre de cette valeur (comme observé avec le maillage symétrique). En revanche, les valeurs propres les plus proches des extrémités de l'intervalle de spectre essentiel de  $\mathbb{A}$  sont les  $\lambda_k^\pm$  correspondant aux petites valeurs de  $k$ . Ces extrémités ne sont donc jamais atteintes, et les valeurs propres sont visiblement espacées les unes des autres (il faudrait prendre un  $\delta$  incroyablement petit pour les voir se rapprocher). Afin de mieux visualiser, voici, dans la figure 2.36, la répartition des  $\lambda_k^\pm$  pour différentes valeurs de  $\delta$ .

FIGURE 2.36 – Répartition des  $\lambda_k^\pm$  (en bleu) sur l'intervalle de spectre essentiel (en rouge) pour différentes valeurs de  $\delta$ .

En effet, même pour des valeurs très faibles de  $\delta$  ( $\delta = 10^{-12}$ ), on n'observe pas d'accumulation sur tout l'intervalle. Lorsque  $\delta$  diminue, les valeurs propres sont de plus en plus proches les unes

des autres et la distance entre les  $\lambda_1^\pm$  et les extrémités de l'intervalles devient de plus en plus petite, mais cette évolution est très lente et il faut prendre plusieurs ordres de grandeur d'écart pour  $\delta$  avant de voir une différence significative dans la densité des valeurs sur l'intervalle. En comparant la position des  $\lambda_k^\pm$  avec celle des valeurs propres calculées avec **XLiFE++**, le résultat des simulations de la figure 2.32 est semblable à l'axe obtenu pour  $\delta = 10^{-3}$ , ce qui correspond à la valeur choisie pour  $d_0$  dans la résolution numérique (écart entre le nœud du coin et son plus proche voisin).

On comprend donc pourquoi on ne peut espérer observer une accumulation des valeurs propres numériques sur tout l'intervalle de spectre essentiel théorique, même pour des maillages très précis au voisinage du coin.

## 2.A Annexe : Comportement des fréquences particulières

Premièrement, en  $n = 0$ , on a  $\Delta = (\Lambda_e - \Lambda_m)^2$ , et donc

$$\begin{aligned}\lambda_{b,0}^N &= \frac{1}{2}(\Lambda_e + \Lambda_m - |\Lambda_e - \Lambda_m|) = \min(\Lambda_e, \Lambda_m), \\ \lambda_{b,0}^P &= \frac{1}{2}(\Lambda_e + \Lambda_m + |\Lambda_e - \Lambda_m|) = \max(\Lambda_e, \Lambda_m), \\ \lambda_{a,0} &= 0.\end{aligned}$$

Deuxièmement, concernant la position relative de  $\lambda_{b,n}^N$ ,  $\lambda_{b,n}^P$  et  $\lambda_{a,n}$ , on a tout d'abord, avec le calcul précédent,

$$\lambda_{a,0} < \lambda_{b,0}^N \leq \lambda_{b,0}^P.$$

De plus, en utilisant leurs expressions,  $\lambda_{a,n} < \lambda_{b,n}^N$  si et seulement si

$$\frac{n^2 \pi^2}{h \varepsilon_0 \mu_0} - (\Lambda_e + \Lambda_m) < -\sqrt{\Delta},$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$\frac{n^2 \pi^2}{h \varepsilon_0 \mu_0} - (\Lambda_e + \Lambda_m) < 0 \text{ et } \left( \frac{n^2 \pi^2}{h \varepsilon_0 \mu_0} - (\Lambda_e + \Lambda_m) \right)^2 > \Delta.$$

La première condition est équivalente à

$$n^2 < (\Lambda_e + \Lambda_m) \frac{h \varepsilon_0 \mu_0}{\pi^2}$$

et la deuxième, en remplaçant  $\Delta$  par son expression, à

$$n^2 < \frac{\Lambda_e \Lambda_m}{\Lambda_e + \Lambda_m} \frac{h \varepsilon_0 \mu_0}{\pi^2}.$$

Or,

$$\Lambda_e + \Lambda_m = \frac{(\Lambda_e + \Lambda_m)^2}{\Lambda_e + \Lambda_m} = \frac{2\Lambda_e \Lambda_m + \Lambda_e^2 + \Lambda_m^2}{\Lambda_e + \Lambda_m} \geq \frac{\Lambda_e \Lambda_m}{\Lambda_e + \Lambda_m}.$$

On en déduit que  $\lambda_{a,n} < \lambda_{b,n}^N$  si et seulement si

$$n^2 < n_c^2 := \frac{\Lambda_e \Lambda_m}{\Lambda_e + \Lambda_m} \frac{h \varepsilon_0 \mu_0}{\pi^2}. \quad (2.17)$$

Et c'est ainsi que l'on conclut sur la position relative de  $\lambda_{a,n}$  et  $\lambda_{b,n}^N$ .

Puisque  $\lambda_{b,n}^P - \lambda_{b,n}^N = 2\sqrt{(\Delta)} > 0$  pour  $n > 0$ , on a donc  $\lambda_{a,n} < \lambda_{b,n}^N < \lambda_{b,n}^P$  pour  $0 < n < n_c$ .

Il reste à comparer  $\lambda_{a,n}$  et  $\lambda_{b,n}^P$  pour  $n > n_c$ . En procédant de même que pour la comparaison de  $\lambda_{a,n}$  et  $\lambda_{b,n}^N$ , on a  $\lambda_{b,n}^P < \lambda_{a,n}$  si et seulement si

$$\frac{n^2\pi^2}{h\varepsilon_0\mu_0} - (\Lambda_e + \Lambda_m) > 0 \text{ et } \left( \frac{n^2\pi^2}{h\varepsilon_0\mu_0} - (\Lambda_e + \Lambda_m) \right)^2 > \Delta.$$

et les calculs faits pour  $\lambda_{a,n}$  et  $\lambda_{b,n}^N$  montrent que ces deux conditions sont incompatibles. On a donc, pour  $n > n_c$  :

$$\lambda_{b,n}^P > \lambda_{a,n} > \lambda_{b,n}^N.$$

Enfin, il reste à décrire le comportement de ces trois fréquences lorsque  $n$  tend vers l'infini. Commençons par  $\lambda_{b,n}^N$ . En la remplaçant par son expression, on a

$$\begin{aligned} \lambda_{b,n}^N &= \frac{1}{2} \left( \frac{n^2\pi^2}{h\varepsilon_0\mu_0} + \Lambda_e + \Lambda_m - \left( \frac{n^2\pi^2}{h\varepsilon_0\mu_0} + \Lambda_e + \Lambda_m \right) \sqrt{1 - \frac{4\Lambda_e\Lambda_m}{\left( \frac{n^2\pi^2}{h\varepsilon_0\mu_0} + \Lambda_e + \Lambda_m \right)^2}} \right) \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} \left( \frac{n^2\pi^2}{h\varepsilon_0\mu_0} + \Lambda_e + \Lambda_m - \left( \frac{n^2\pi^2}{h\varepsilon_0\mu_0} + \Lambda_e + \Lambda_m \right) \left[ 1 - \frac{2\Lambda_e\Lambda_m}{\left( \frac{n^2\pi^2}{h\varepsilon_0\mu_0} + \Lambda_e + \Lambda_m \right)^2} \right] \right) \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Lambda_e\Lambda_m}{\frac{n^2\pi^2}{h\varepsilon_0\mu_0} + \Lambda_e + \Lambda_m} \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0. \end{aligned}$$

De manière similaire, on a

$$\lambda_{b,n}^P \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^2\pi^2}{h\varepsilon_0\mu_0} + \Lambda_e + \Lambda_m \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \lambda_{a,n} \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} \infty.$$

# Chapitre 3

## Le modèle de Lorentz dissipatif

Le but de ce chapitre est d'étendre l'étude faite dans le chapitre 1 à d'autres modèles pour le matériau négatif. En effet, il y était étudié le modèle de Drude non dissipatif, alors que l'on se concentre ici sur le modèle de Lorentz avec dissipation ; et on abordera également le cas du modèle de Drude dissipatif. L'objectif est d'étudier le spectre essentiel d'une formulation augmentée obtenue à partir du même problème non linéaire que dans le chapitre 1, dans une cavité composée partiellement de matériau négatif décrit avec ces nouveaux modèles.

Dans les chapitres précédents, on a vu le spectre essentiel en terme de fréquence : on s'est intéressé aux valeurs de  $\lambda = \omega^2$  qui faisaient partie du spectre essentiel de l'opérateur  $\mathbb{A}$ . Ici, on va plutôt raisonner en terme de contraste, c'est-à-dire en terme de rapport entre les perméabilités magnétiques des deux milieux :  $\mu_\lambda^N / \mu_0$ . En effet, cette notion permet de faire le lien entre les différents modèles, puisque nous allons voir que les spectres essentiels des différents modèles étudiés dans cette thèse se ramènent aux mêmes valeurs de ce contraste.

Le modèle de Drude non dissipatif avait ainsi mis en lumière trois phénomènes de résonances associés à trois valeurs ou plages de valeurs pour le contraste des perméabilités magnétiques :

- Une résonance volumique dans le matériau négatif, lorsque le contraste tend vers  $-\infty$  ( $\lambda = 0$  pour le modèle de Drude non dissipatif) ;
- Une résonance surfacique au niveau de l'interface entre le matériau négatif et le vide pour le contraste  $-1$ , correspondant à des ondes très oscillantes dans la direction de l'interface et localisées autour de n'importe quel point régulier de l'interface ( $\lambda = \Lambda_m/2$  pour le modèle de Drude non dissipatif) ;
- Une résonance de coin au niveau d'un sommet de l'interface, menant à ce qu'on appelle un effet "trou noir" pour deux intervalles de contrastes de part et d'autre de la valeur  $-1$  ( $\lambda \in \mathcal{J}_p$  et  $\lambda \in \mathcal{I}_q$  pour le modèle de Drude non dissipatif, où les intervalles  $\mathcal{J}_p$  et  $\mathcal{I}_q$  sont définis en (1.18) et (1.19)).

Nous allons voir que ces trois phénomènes se retrouvent dans les modèles de Drude dissipatif et de Lorentz, pour les mêmes valeurs du contraste, mais ces valeurs ne correspondent pas aux mêmes fréquences.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : les deux premières sections sont consacrées au modèle de Lorentz : en section 3.1 est rappelé le problème initial, sa formulation augmentée est introduite et les principaux résultats sont présentés, et la section 3.2 présente la démonstration de ces résultats. En section 3.3 sont présentés les résultats équivalents pour le modèle de Drude dissipatif, avec des démonstrations moins détaillées car similaires à celles du modèle de Lorentz.

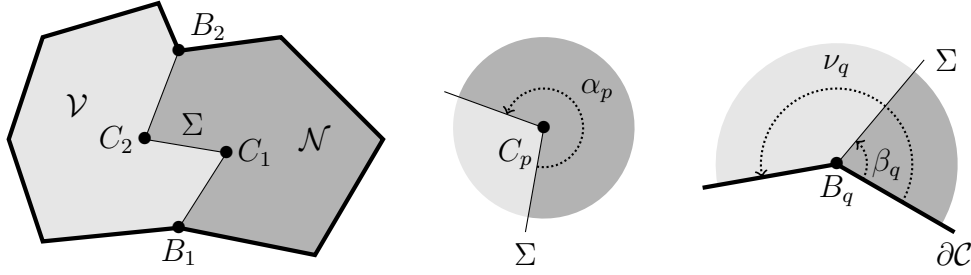


FIGURE 3.1 – A gauche : La cavité polygonale  $\mathcal{C}$  divisée en  $\mathcal{N}$  (NIM : gris foncé) et  $\mathcal{V}$  (vide : gris clair). Au milieu : un sommet intérieur  $C_p$  de l'interface  $\Sigma$  entre  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{V}$ . A droite : un sommet extérieur  $B_q$  de  $\Sigma$ .

## 3.1 Problème étudié et principaux résultats

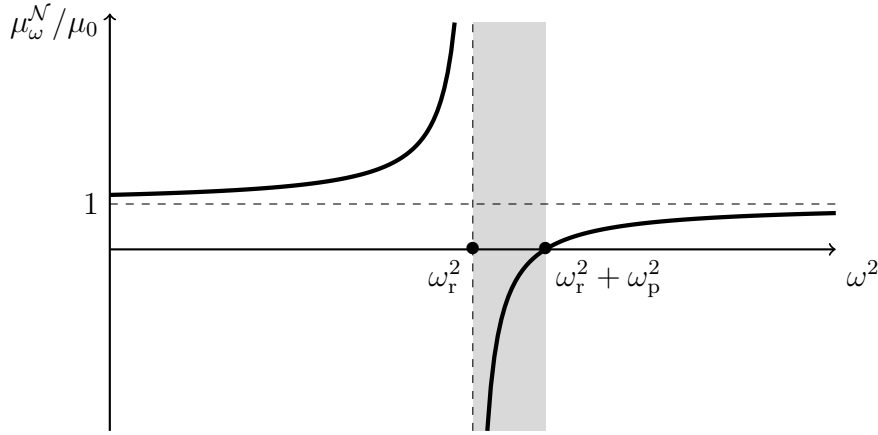
### 3.1.1 Problème de départ

Le but est d'étudier les propriétés spectrales d'une cavité bidimensionnelle bornée composée, en partie, de matériau négatif. De même que dans le chapitre 1, on considère une cavité polygonale  $\mathcal{C}$  (ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ ) divisée en deux domaines polygonaux  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{V}$  (avec  $\overline{\mathcal{N}} \cup \overline{\mathcal{V}} = \overline{\mathcal{C}}$  et  $\mathcal{N} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ ), composés respectivement de matériau négatif et de vide. On note  $\Sigma$  l'interface entre ces deux milieux (i.e.  $\Sigma = \partial\mathcal{N} \cap \partial\mathcal{V}$ ), qui est donc dans le cas présent une ou plusieurs lignes brisées (qui ne s'intersectent pas). Une telle cavité est montrée en figure 3.1.

On considère à présent un modèle plus général pour le matériau négatif : le modèle de Lorentz, mais uniquement pour la perméabilité magnétique. En effet, le modèle choisi pour la permittivité électrique ne change pas le spectre essentiel : on a vu dans le chapitre 1 que prendre le modèle de Drude non dissipatif ou le modèle du vide pour  $\varepsilon_\lambda$  ne modifiait pas le spectre essentiel de l'opérateur  $\mathbb{A}$  ; de plus, dans [13], d'où est issu le résultat qui nous permet d'affirmer que notre étude du spectre essentiel est complète une fois les différentes résonances traitées, le modèle choisi pour la permittivité électrique n'a pas la moindre incidence sur les résultats, voir paragraphe 1.3.6. Dans le milieu  $\mathcal{N}$ , on prend donc

$$\varepsilon_\omega^\mathcal{N} := \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad \mu_\omega^\mathcal{N} := \mu_0 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_r^2 + i\gamma\omega} \right) \quad (3.1)$$

où les coefficients  $\omega_p > 0$  (fréquence plasma),  $\omega_r > 0$  (fréquence de résonance) et  $\gamma \geq 0$  (dissipation) caractérisent le matériau. En ce qui concerne le modèle de la perméabilité magnétique, on peut remarquer qu'en prenant  $\omega_r = 0$  et  $\gamma = 0$ , on retrouve le modèle de Drude non dissipatif du chapitre 1 (en posant  $\Lambda_m = \omega_p^2$ ). En fixant seulement  $\omega_r = 0$ , on obtient le modèle de Drude dissipatif, et en fixant seulement  $\gamma = 0$ , le modèle de Lorentz non dissipatif. La figure 3.2 montre le comportement de  $\mu_\omega^\mathcal{N}$  dans ce dernier cas. Pour le modèle de Lorentz non dissipatif, on voit que le matériau a un comportement négatif pour  $\omega^2 \in ]\omega_r^2, \omega_r^2 + \omega_p^2[$  (zone grisée dans la figure 3.2). Dans le modèle de Drude non dissipatif, le comportement négatif avait lieu pour des fréquences proches de 0, alors que dans le modèle de Lorentz non dissipatif, il a lieu dans une plage de fréquences voisine de  $\pm\omega_r$ , qui sont les pôles de  $\mu_\omega^\mathcal{N}$ . Dans le cas où  $\gamma > 0$ , ces pôles deviennent

FIGURE 3.2 – Comportement de  $\mu_\omega$  pour le modèle de Lorentz non dissipatif.

complexes. Nous les noterons dans la suite :

$$\omega_{-\infty}^{\pm} := \begin{cases} \frac{-i\gamma \pm \sqrt{4\omega_r^2 - \gamma^2}}{2} & \text{si } 4\omega_r^2 - \gamma^2 > 0 \\ \frac{-i\gamma \pm i\sqrt{\gamma^2 - 4\omega_r^2}}{2} & \text{si } 4\omega_r^2 - \gamma^2 < 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Dans le cas général où on a  $\gamma \neq 0$ , le modèle ne fait pas seulement intervenir des termes en  $\omega^2$ , mais aussi en  $\omega$ , c'est pourquoi on ne peut plus, contrairement au chapitre 1, raisonner en  $\lambda = \omega^2$ , et on travaille directement en  $\omega$ .

Comme expliqué en introduction de ce chapitre, ce n'est pas la valeur de la perméabilité magnétique du matériau négatif  $\mu_\omega^{\mathcal{N}}$  qui est importante, mais le rapport entre cette valeur et la perméabilité du vide  $\mu_0$ . C'est pourquoi on définit ici le modèle de Lorentz directement pour le *contraste*  $\kappa_\omega^{\mathcal{N}} := \mu_\omega^{\mathcal{N}}/\mu_0$ . On introduit donc la fonction constante par morceaux définie dans la cavité  $\mathcal{C}$  tout entière par

$$\kappa_\omega := \begin{cases} 1 & \text{dans } \mathcal{V}; \\ \kappa_\omega^{\mathcal{N}} := 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_r^2 + i\gamma\omega} & \text{dans } \mathcal{N}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Dans la suite, pour simplifier les calculs et sans perte de généralité, on prendra  $\mu_0 = \varepsilon_0 = 1$ . Le problème de départ de ce chapitre est finalement le problème aux valeurs propres suivant, qui décrit les résonances de la cavité :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \omega \in \mathbb{C} \text{ et } \varphi \in H_0^1(\mathcal{C}) \text{ non nulle tels que} \\ &\text{div} \left( \frac{1}{\kappa_\omega} \text{grad } \varphi \right) + \omega^2 \varphi = 0 \quad \text{dans } \mathcal{C}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

cette équation étant à comprendre au sens des distributions.



En d'autres termes, le problème ci-dessus est une forme condensée du système suivant :

$$\Delta\varphi + \omega^2 \kappa_\omega^\mathcal{N} \varphi = 0 \quad \text{dans } \mathcal{N}, \quad (3.5a)$$

$$\Delta\varphi + \omega^2 \varphi = 0 \quad \text{dans } \mathcal{V}, \quad (3.5b)$$

$$[\varphi]_\Sigma = 0 \quad \text{et} \quad \left[ \frac{1}{\kappa_\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right]_\Sigma = 0, \quad (3.5c)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{C}. \quad (3.5d)$$

Le problème aux valeurs propres ci-dessus est clairement *non linéaire* par rapport à  $\omega$  (et à  $\omega^2$ ), sauf si  $\mathcal{N}$  est vide (*i.e.*  $\mathcal{C}$  ne contient que du vide). Ce cas-là a été expliqué au chapitre 1 dans le paragraphe 1.2.1 en se ramenant à l'étude du spectre de l'opérateur autoadjoint  $-\Delta^{\text{dir}}$  défini par

$$-\Delta^{\text{dir}}\varphi := -\Delta\varphi, \quad \forall\varphi \in \text{D}(-\Delta^{\text{dir}}) := \left\{ \varphi \in H_0^1(\mathcal{C}); \Delta\varphi \in L^2(\mathcal{C}) \right\}.$$

En revanche, dans le cas où  $\mathcal{V} = \emptyset$ , de manière similaire au paragraphe 1.2.1 du chapitre 1, les valeurs propres de notre problème non linéaire sont simplement l'image réciproque de  $\sigma(-\Delta^{\text{dir}})$  par la fonction  $f$  définie par

$$f(\omega) := \omega^2 \kappa_\omega^\mathcal{N} = \omega^2 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_r^2 + i\gamma\omega} \right). \quad (3.6)$$

On rappelle que le spectre  $\sigma(-\Delta^{\text{dir}})$  est purement discret : il est composé d'une suite de valeurs propres de multiplicité finie qui tend vers  $+\infty$ . En notant  $(\lambda_n)$  cette suite de valeurs propres, on peut exprimer facilement les solutions  $\omega_n$  de notre problème non linéaire en fonction des  $\lambda_n$  dans le cas non dissipatif. En effet, dans le cas où  $\gamma = 0$ , les  $\omega_n$  tels que  $f(\omega_n) = \lambda_n$  sont solutions d'une équation bicarrée :

$$\omega_n^4 - \omega_n^2 (\omega_p^2 + \omega_r^2 + \lambda_n) + \omega_r^2 \lambda_n = 0.$$

On a donc quatre solutions pour chaque  $n$  :

$$\omega_n = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left( \omega_p^2 + \omega_r^2 + \lambda_n \pm \sqrt{(\omega_p^2 + \omega_r^2 + \lambda_n)^2 - 4\lambda_n\omega_r^2} \right)}.$$

De manière immédiate, puisque  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  on a

$$\pm \sqrt{\frac{1}{2} \left( \omega_p^2 + \omega_r^2 + \lambda_n + \sqrt{(\omega_p^2 + \omega_r^2 + \lambda_n)^2 - 4\lambda_n\omega_r^2} \right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm\infty.$$

De plus,

$$\begin{aligned} & \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left( \omega_p^2 + \omega_r^2 + \lambda_n - \sqrt{(\omega_p^2 + \omega_r^2 + \lambda_n)^2 - 4\lambda_n\omega_r^2} \right)} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left( \omega_p^2 + \omega_r^2 + \lambda_n - \sqrt{(\omega_p^2 - \omega_r^2 + \lambda_n)^2 + 4\omega_p^2\omega_r^2} \right)} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left( \omega_p^2 + \omega_r^2 + \lambda_n - (\omega_p^2 - \omega_r^2 + \lambda_n) \sqrt{1 + \frac{4\omega_p^2\omega_r^2}{(\omega_p^2 - \omega_r^2 + \lambda_n)^2}} \right)} \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{=} \pm \sqrt{\omega_r^2 + O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm\omega_r. \end{aligned}$$

L'étude asymptotique de ces  $\omega_n$  montre ainsi quatre accumulations : une en  $+\infty$ , une en  $-\infty$ , une en  $\omega_r$  et une en  $-\omega_r$ . Mais dans le cas dissipatif, même s'il existe des formules explicites pour résoudre les équations de degré 4, ces dernières sont très longues et l'étude asymptotique à partir de ces formules est bien trop pénible. Dans le cas général, on préfère donc utiliser un résultat général d'analyse complexe, qui est expliqué dans l'annexe 3.A. Puisque  $|\lambda_n| \rightarrow \infty$ , la proposition 3.18 montre que pour tout pôle de  $f$ , il existe une suite  $(\omega_n)$  tendant vers ce pôle tel que pour tout  $n$  (suffisamment grand),  $f(\omega_n) = \lambda_n$ . Il y a donc aussi dans le cas général (où  $\gamma$  n'est pas forcément nul) une accumulation des valeurs propres de notre problème non linéaire en les deux pôles de  $\kappa_\omega^{\mathcal{N}}$ . Les solutions  $\varphi_n$  associées ne sont autres que les fonctions propres de  $-\Delta^{\text{dir}}$  associées aux  $\lambda_n$ .

Dans le cas général où les deux milieux  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{N}$  sont présents dans la cavité, on ne peut pas raisonner directement sur le problème non linéaire. Le paragraphe suivant présente sa linéarisation.

### 3.1.2 Linéarisation du problème

Dans ce paragraphe, on va voir comment construire un problème aux valeurs propres *linéaire* équivalent à (3.4). Rappelons pour cela deux notations utiles. Soit  $\mathcal{R} : L^2(\mathcal{C}) \rightarrow L^2(\mathcal{N})$  l'opérateur de restriction de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{N}$ , et  $\mathcal{R}^* : L^2(\mathcal{N}) \rightarrow L^2(\mathcal{C})$  l'opérateur de prolongement par 0 de  $\mathcal{N}$  à  $\mathcal{C}$ ; c'est-à-dire, pour tout  $(\varphi, \psi) \in L^2(\mathcal{C}) \times L^2(\mathcal{N})$ ,

$$\mathcal{R}\varphi := \varphi|_{\mathcal{N}} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}^*\psi(x) := \begin{cases} \psi(x) & \text{si } x \in \mathcal{N} \\ 0 & \text{si } x \in \mathcal{V}. \end{cases}$$

Rappelons que ces opérateurs sont adjoints l'un de l'autre, puisque

$$\int_{\mathcal{N}} \mathcal{R}\varphi(x) \overline{\psi(x)} \, dx = \int_{\mathcal{C}} \varphi(x) \overline{\mathcal{R}^*\psi(x)} \, dx.$$

Rappelons également que  $\mathcal{R}\mathcal{R}^*$  est l'identité de  $L^2(\mathcal{N})$ , alors que  $\mathcal{R}^*\mathcal{R}$  est l'opérateur de multiplication par  $\mathbf{1}_{\mathcal{N}}$  dans  $L^2(\mathcal{C})$ ,  $\mathbf{1}_{\mathcal{N}}$  étant la fonction indicatrice du milieu  $\mathcal{N}$ . Les notations  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}^*$  restent les mêmes, qu'on les applique à des fonctions à valeurs scalaires ou vectorielles.

On suppose dans ce qui suit que  $\omega \neq 0$  et  $\kappa_\omega^{\mathcal{N}} \neq 0$  (ces cas seront traités dans le paragraphe 3.2.1). En effet, le problème (3.4) n'est pas défini pour  $\kappa_\omega^{\mathcal{N}} = 0$ ; la nécessité de considérer un  $\omega$  non nul sera observée dès la première étape du procédé de linéarisation. La démarche est à peu près similaire à celle qui est utilisée au chapitre 1 : il s'agit de se débarrasser des termes problématiques (qui empêchent la linéarité de l'équation (3.4)) en introduisant de nouvelles variables. En revanche, ici, c'est  $\omega$ , et non  $\lambda = \omega^2$ , qui va jouer le rôle de la valeur propre. Réécrivons donc (3.4) en isolant le terme  $\omega\varphi$ . Pour cela, il suffit de la diviser par  $\omega$ , ce que l'on peut faire puisqu'on a supposé  $\omega \neq 0$ , ce qui donne

$$-\operatorname{div} \left( \frac{1}{\omega\kappa_\omega} \operatorname{grad} \varphi \right) = \omega\varphi.$$

On peut ici poser

$$p := \frac{1}{\omega\kappa_\omega} \operatorname{grad} \varphi \tag{3.7}$$

et alors, l'équation (3.4) est équivalente à

$$-\operatorname{div} p = \omega\varphi, \tag{3.8a}$$

$$\frac{1}{\kappa_\omega} \operatorname{grad} \varphi = \omega p \tag{3.8b}$$

où la deuxième équation n'est autre que la définition (3.7) de  $p$ . Cette dernière équation peut se réécrire

$$\left(1 + \frac{1 - \kappa_\omega}{\kappa_\omega}\right) \text{grad } \varphi = \omega p.$$

En remarquant que dans  $\mathcal{V}$ , on a  $1 - \kappa_\omega = 0$ , on introduit cette fois une nouvelle inconnue définie uniquement sur  $\mathcal{N}$  par

$$v := \frac{1 - \kappa_\omega^{\mathcal{N}}}{\kappa_\omega^{\mathcal{N}}} \mathcal{R} \text{grad } \varphi. \quad (3.9)$$

Alors, l'équation (3.8b) est équivalente à

$$\text{grad } \varphi + \mathcal{R}^* v = \omega p, \quad (3.10a)$$

$$\frac{1 - \kappa_\omega^{\mathcal{N}}}{\kappa_\omega^{\mathcal{N}}} \mathcal{R} \text{grad } \varphi = v. \quad (3.10b)$$

Cette dernière équation peut se réécrire, en remplaçant  $\kappa_\omega^{\mathcal{N}}$  par son expression et en utilisant (3.7),

$$\omega \omega_p^2 \mathcal{R} p = (\omega^2 - \omega_r^2 + i\gamma\omega) v$$

c'est-à-dire, en divisant par  $\omega$  et en isolant le terme  $\omega v$ ,

$$\omega_p^2 \mathcal{R} p + \frac{\omega_r^2}{\omega} v - i\gamma v = \omega v. \quad (3.11)$$

Il reste alors un terme problématique dans l'équation (3.11), et il est nécessaire de poser

$$u := \frac{1}{\omega} v. \quad (3.12)$$

L'équation de départ (3.4) est alors équivalente à

$$\begin{aligned} -\text{div } p &= \omega \varphi && \text{dans } \mathcal{C} \\ \text{grad } \varphi + \mathcal{R}^* v &= \omega p && \text{dans } \mathcal{C} \\ v &= \omega u && \text{dans } \mathcal{N} \\ \omega_p^2 \mathcal{R} p + \omega_r^2 u - i\gamma v &= \omega v && \text{dans } \mathcal{N} \end{aligned} \quad (3.13)$$

ce qui correspond à un problème aux valeurs propres linéaire en  $\omega$  pour  $(\varphi, p, u, v)$ .

Pour résumer, si  $\omega \neq 0$  et  $\kappa_\omega^{\mathcal{N}} \neq 0$ , alors une fonction  $\varphi \in H_0^1(\mathcal{C})$  est solution de (3.4) si et seulement si  $(\varphi, p, u, v) \in H_0^1(\mathcal{C}) \times L^2(\mathcal{C})^2 \times L^2(\mathcal{N})^2 \times L^2(\mathcal{N})^2$  vérifie

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \varphi \\ p \\ u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & -\text{div} & 0 & 0 \\ \text{grad} & 0 & 0 & \mathcal{R}^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \omega_p^2 \mathcal{R} & \omega_r^2 & -i\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ p \\ u \\ v \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \varphi \\ p \\ u \\ v \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Pour cela, il a suffi de définir les inconnues supplémentaires  $p$ ,  $u$  et  $v$  à partir de  $\varphi$  par

$$\begin{cases} p &= \frac{1}{\omega \kappa_\omega} \text{grad } \varphi \\ u &= \frac{1 - \kappa_\omega^{\mathcal{N}}}{\omega \kappa_\omega^{\mathcal{N}}} \mathcal{R} \text{grad } \varphi \\ v &= \frac{1 - \kappa_\omega^{\mathcal{N}}}{\kappa_\omega^{\mathcal{N}}} \mathcal{R} \text{grad } \varphi. \end{cases} \quad (3.15)$$

**Remarque 3.1.** Dans le cas du modèle de Lorentz non dissipatif,  $\omega$  n'apparaît pas seul dans (3.4) et on aurait pu travailler en  $\lambda = \omega^2$ , comme dans le chapitre 1. On aurait alors eu seulement besoin de deux inconnues : l'opérateur  $\mathbb{A}$  étudié dans le chapitre 1 aurait alors été défini par

$$\mathbb{A} \begin{pmatrix} \varphi \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -\operatorname{div}\{\operatorname{grad} \varphi + \mathcal{R}^*v\} \\ \omega_p^2 \mathcal{R} \operatorname{grad} \varphi + (\omega_p^2 + \omega_r^2)v \end{pmatrix}$$

en rappelant que  $\Lambda_e = 0$  et  $\Lambda_m = \omega_p^2$ . En fait, la seule différence est le terme  $\omega_r^2 v$ . Mais si on veut étudier un problème aux valeurs propres en  $\omega$  et non en  $\omega^2$ , ce qui est nécessaire si on veut étudier le cas général où  $\gamma$  est éventuellement non nul, il est nécessaire de considérer un modèle à quatre variables.

Dans les sections qui suivent, on s'intéresse à l'étude de l'opérateur  $\mathcal{A}$ .

### 3.1.3 Cadre et propriétés du problème linéarisé

Commençons par définir un cadre fonctionnel pour l'opérateur  $\mathcal{A}$  dans lequel ce dernier est autoadjoint dans le cas non dissipatif. En effet, dans le cas dissipatif, le terme en  $i\gamma$  ne permet pas à l'opérateur  $\mathcal{A}$  d'être autoadjoint. Pour cela, considérons l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} := L^2(\mathcal{C}) \times L^2(\mathcal{C})^2 \times L^2(\mathcal{N})^2 \times L^2(\mathcal{N})^2$$

muni du produit scalaire défini, pour tous  $X := (\varphi, p, u, v)^T$  et  $X' := (\varphi', p', u', v')^T$ , par :

$$(X, X')_{\mathcal{H}} := (\varphi, \varphi')_{L^2(\mathcal{C})} + (p, p')_{L^2(\mathcal{C})^2} + \omega_p^{-2} \omega_r^2 (u, u')_{L^2(\mathcal{N})^2} + \omega_p^{-2} (v, v')_{L^2(\mathcal{N})^2}. \quad (3.16)$$

Dans la suite, on note  $H(\operatorname{div}; \mathcal{C}) := \{p \in L^2(\mathcal{C})^2, \operatorname{div} p \in L^2(\mathcal{C})\}$ .

**Proposition 3.2.** L'opérateur  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  défini par (3.14), où

$$D(\mathcal{A}) := H_0^1(\mathcal{C}) \times H(\operatorname{div}; \mathcal{C}) \times L^2(\mathcal{N})^2 \times L^2(\mathcal{N})^2, \quad (3.17)$$

est fermé à domaine dense. De plus, il est autoadjoint si  $\gamma = 0$ .

*Démonstration.* (i) Commençons par remarquer que  $D(\mathcal{A})$  est bien dense dans  $\mathcal{H}$  (car  $H_0^1(\mathcal{C})$  est dense dans  $L^2(\mathcal{C})$  et  $H(\operatorname{div}; \mathcal{C})$  dense dans  $L^2(\mathcal{C})^2$ ).

(ii) Montrons que  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{H}$  est fermé. Pour cela, prenons une suite  $(X_n) \in D(\mathcal{A})^{\mathbb{N}}$ ,  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{H}$  tels que  $X_n \rightarrow X$  dans  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{A}X_n \rightarrow Y$  dans  $\mathcal{H}$  : montrons qu'alors  $X \in D(\mathcal{A})$  et que  $\mathcal{A}X = Y$ .

On notera  $X = (\varphi, p, u, v)$ ,  $X_n = (\varphi_n, p_n, u_n, v_n)$  et  $Y = (\varphi^s, p^s, u^s, v^s)$ . Puisque  $X \in \mathcal{H}$ , il faut montrer que  $\varphi \in H_0^1(\mathcal{C})$ ,  $p \in H(\operatorname{div}; \mathcal{C})$  et que  $\mathcal{A}X = Y$ .

Tout d'abord,  $\mathcal{A}X_n \rightarrow Y$  dans  $\mathcal{H}$ , c'est-à-dire, avec (3.14) :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} p_n &\rightarrow \varphi^s \quad \text{dans } L^2(\mathcal{C}) \\ \operatorname{grad} \varphi_n + \mathcal{R}^* v_n &\rightarrow p^s \quad \text{dans } L^2(\mathcal{C})^2 \\ v_n &\rightarrow u^s \quad \text{dans } L^2(\mathcal{N})^2 \\ \omega_p^2 \mathcal{R} p_n + \omega_r^2 u_n - i\gamma v_n &\rightarrow v^s \quad \text{dans } L^2(\mathcal{N})^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Or, puisque  $X_n \rightarrow X$  dans  $\mathcal{H}$ , on a

$$\begin{aligned} v_n &\rightarrow v \quad \text{dans } L^2(\mathcal{N})^2 \\ \omega_p^2 \mathcal{R} p_n + \omega_r^2 u_n - i\gamma v_n &\rightarrow \omega_p^2 \mathcal{R} p + \omega_r^2 u - i\gamma v \quad \text{dans } L^2(\mathcal{N})^2. \end{aligned}$$

Par unicité de la limite, les troisième et quatrième lignes de (3.18) donnent

$$\begin{aligned} v &= u_s \\ \omega_p^2 \mathcal{R}p + \omega_r^2 u - i\gamma v &= v^s. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ensuite, puisque  $v_n \rightarrow v$  dans  $L^2(\mathcal{N})^2$ , avec la deuxième ligne de (3.18), on a  $\text{grad } \varphi_n \rightarrow p^s - \mathcal{R}^*v$  dans  $L^2(\mathcal{C})^2$ . De plus, pour tout  $n$ ,  $\varphi_n \in H_0^1(\mathcal{C})$  puisque  $X_n \in \text{D}(\mathcal{A})$  et  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  dans  $L^2(\mathcal{C})$ . L'opérateur

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 : \quad H_0^1(\mathcal{C}) \subset L^2(\mathcal{C}) &\longrightarrow L^2(\mathcal{C})^2 \\ \varphi &\longmapsto \text{grad } \varphi \end{aligned} \quad (3.20)$$

étant fermé (voir annexe 3.B), on a donc

$$\varphi \in H_0^1(\mathcal{C}) \quad \text{et} \quad \text{grad } \varphi = p^s - \mathcal{R}^*v. \quad (3.21)$$

Enfin, la première ligne de (3.18) donne  $\text{div } p_n \rightarrow -\varphi^s$  dans  $L^2(\mathcal{C})$ . Or, pour tout  $n$ ,  $p_n \in H(\text{div}; \mathcal{C})$  puisque  $X_n \in \text{D}(\mathcal{A})$  et  $p_n \rightarrow p$  dans  $L^2(\mathcal{C})^2$ . L'opérateur

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2 : \quad H(\text{div}, \mathcal{C}) \subset L^2(\mathcal{C})^2 &\longrightarrow L^2(\mathcal{C}) \\ p &\longmapsto \text{div } p \end{aligned} \quad (3.22)$$

étant fermé (voir annexe 3.B), on a donc

$$p \in H(\text{div}; \mathcal{C}) \quad \text{et} \quad \text{div } p = -\varphi^s. \quad (3.23)$$

Finalement, (3.19), (3.21) et (3.23) montrent qu'on a bien  $X \in \text{D}(\mathcal{A})$  et  $\mathcal{A}\varphi = Y$ .

(iii) Fixons  $\gamma = 0$  et montrons qu'alors l'opérateur  $\mathcal{A}$  est autoadjoint. Commençons par montrer que  $\mathcal{A}$  est symétrique. Soient donc  $X := (\varphi, p, u, v)^T$  et  $X' := (\varphi', p', u', v')^T$  deux éléments de  $\text{D}(\mathcal{A})$ . Alors

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}X, X')_{\mathcal{H}} &= \int_{\mathcal{C}} -\text{div } p \overline{\varphi'} + \int_{\mathcal{C}} \text{grad } \varphi \overline{p'} + \int_{\mathcal{C}} \mathcal{R}^*v \overline{p'} \\ &\quad + \omega_p^{-2} \omega_r^2 \int_{\mathcal{N}} v \overline{u'} + \int_{\mathcal{N}} \mathcal{R}p \overline{v'} + \omega_p^{-2} \omega_r^2 \int_{\mathcal{N}} u \overline{v'}. \end{aligned}$$

En utilisant une formule de Green sur les deux premiers termes et en rappelant que  $\mathcal{R}^*$  est l'adjoint de  $\mathcal{R}$ , on obtient

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}X, X')_{\mathcal{H}} &= \int_{\mathcal{C}} p \overline{\text{grad } \varphi'} - \int_{\mathcal{C}} \varphi \overline{\text{div } p'} + \int_{\mathcal{N}} v \overline{\mathcal{R}p'} \\ &\quad + \omega_p^{-2} \omega_r^2 \int_{\mathcal{N}} v \overline{u'} + \int_{\mathcal{C}} p \overline{\mathcal{R}^*v'} + \omega_p^{-2} \omega_r^2 \int_{\mathcal{N}} u \overline{v'}, \end{aligned}$$

i.e.  $(\mathcal{A}X, X')_{\mathcal{H}} = (X, \mathcal{A}X')_{\mathcal{H}}$ . L'opérateur  $\mathcal{A}$  est donc symétrique.

Il reste à vérifier que le domaine de  $\mathcal{A}^*$  est bien inclus dans  $\text{D}(\mathcal{A})$ . Par définition, ce domaine est

$$\text{D}(\mathcal{A}^*) := \left\{ X' \in \mathcal{H}, \exists c \geq 0, \forall X \in \text{D}(\mathcal{A}) : |(X', \mathcal{A}X)_{\mathcal{H}}| \leq c \|X\|_{\mathcal{H}} \right\}. \quad (3.24)$$

Soit donc  $X' := (\varphi', p', u', v') \in \text{D}(\mathcal{A}^*)$  et montrons que  $p' \in H(\text{div}, \mathcal{C})$  et  $\varphi' \in H_0^1(\mathcal{C})$ .

Commençons par  $p'$ . En prenant  $p = 0$ ,  $u = 0$  et  $v = 0$  dans la définition (3.24) de  $\text{D}(\mathcal{A}^*)$ , on a donc une constante  $c \geq 0$  telle que

$$\forall \varphi \in H_0^1(\mathcal{C}) : \left| \int_{\mathcal{C}} p' \overline{\text{grad } \varphi} \right| \leq c \|\varphi\|_{L^2(\mathcal{C})}.$$

D'après la définition du domaine de l'adjoint,  $p'$  est donc dans  $D(\mathcal{B}_1^*)$  où l'opérateur  $\mathcal{B}_1$  est défini par (3.20). Or,  $\mathcal{B}_1^* = \mathcal{B}_2$  où  $\mathcal{B}_2$  est défini par (3.22). D'où  $p' \in H(\text{div}, \mathcal{C})$ .

Passons à  $\varphi'$ . En prenant  $\varphi = 0$ ,  $u = 0$  et  $v = 0$  dans la définition (3.24) de  $D(\mathcal{A}^*)$ , on a donc une constante  $c_{\text{ext}} \geq 0$  telle que

$$\forall p \in H(\text{div}, \mathcal{C}) : \left| \int_{\mathcal{C}} \varphi' \overline{\text{div } p} + \int_{\mathcal{N}} u' \overline{\mathcal{R}p} \right| \leq c_{\text{ext}} \|p\|_{L^2(\mathcal{C})^2} \quad (3.25)$$

Or, avec Cauchy-Schwarz dans  $L^2(\mathcal{N})^2$ , on a

$$\left| \int_{\mathcal{N}} u' \overline{\mathcal{R}p} \right| \leq \|u'\|_{L^2(\mathcal{N})^2} \|p\|_{L^2(\mathcal{N})^2} \leq \|u'\|_{L^2(\mathcal{N})^2} \|p\|_{L^2(\mathcal{C})^2} \quad (3.26)$$

L'inégalité triangulaire sur le membre de gauche de (3.25) et (3.26) donnent

$$\forall p \in H(\text{div}, \mathcal{C}) : \left| \int_{\mathcal{C}} \varphi' \overline{\text{div } p} \right| \leq (c_{\text{ext}} + \|u'\|_{L^2(\mathcal{N})^2}) \|p\|_{L^2(\mathcal{C})^2}.$$

D'après la définition du domaine de l'adjoint,  $\varphi'$  est donc dans  $D(\mathcal{B}_2^*)$ . Or,  $\mathcal{B}_2^* = \mathcal{B}_1$ . D'où  $\varphi' \in H_0^1(\mathcal{C})$ .

Ainsi,  $(\varphi', p', u', v') \in D(\mathcal{A})$ .

Donc  $D(\mathcal{A}^*) \subset D(\mathcal{A})$ .

Finalement, l'opérateur  $\mathcal{A}$  est bien autoadjoint. □

Dans la suite, on va étudier le *spectre essentiel* de l'opérateur  $\mathcal{A}$ . On rappelle que dans le cas d'un opérateur non autoadjoint, il existe différentes définitions du spectre essentiel, qui ne coïncident pas forcément. On en rappelle ici 4, avec les égalités qui ont lieu dans le cas d'opérateurs fermés à domaine dense, ce qui est le cas ici. Ces résultats sont rassemblés dans l'annexe A.1 de la thèse de Benjamin Goursaud [49].

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ess},1}(\mathcal{A}) &= \sigma(\mathcal{A}) \setminus \left\{ \text{valeurs propres de multiplicité finie isolées dans le spectre} \right\} \\ \sigma_{\text{ess},2}(\mathcal{A}) &= \mathbb{C} \setminus \left\{ \omega \text{ tq } \mathcal{A} - \omega I \text{ est Fredholm d'indice } 0 \right\} = \bigcap_{\mathcal{K} \text{ compact}} \sigma(\mathcal{A} + \mathcal{K}) \\ \sigma_{\text{ess},3}(\mathcal{A}) &= \mathbb{C} \setminus \left\{ \omega \text{ tq } \mathcal{A} - \omega I \text{ est Fredholm} \right\} \\ \sigma_{\text{ess},4}(\mathcal{A}) &= \mathbb{C} \setminus \left\{ \omega \text{ tq } \mathcal{A} - \omega I \text{ est semi-Fredholm} \right\} = \left\{ \omega \in \mathbb{C}, \exists \text{ une suite de Weyl pour } \omega \right\} \end{aligned} \quad (3.27)$$

On rappelle pour cela qu'un opérateur  $T$  est

- semi-Fredholm<sup>1</sup> si son image est fermée et son noyau est de dimension finie ;
- Fredholm si son image est de codimension finie et son noyau est de dimension finie ;
- Fredholm d'indice 0 s'il est Fredholm et si  $\text{Ind}T := \dim(\text{Ker}(L)) - \text{codim}(\text{Im}(T)) = 0$ .

---

1. On utilise abusivement le terme "semi-Fredholm". En effet, le terme "semi-Fredholm" regroupe habituellement deux catégories d'opérateurs (voir définition 3.14 dans [46]). La première catégorie correspond aux opérateurs dits semi-Fredholm de type +, notés  $\mathcal{F}_+$  dans [46], qui sont les opérateurs dont l'image est fermée et le noyau est de dimension finie. La deuxième catégorie correspond aux opérateurs dits semi-Fredholm de type -, notés  $\mathcal{F}_-$  dans [46], qui sont les opérateurs dont l'image est fermée et de codimension finie. Nous parlons ici d'opérateur semi-Fredholm pour parler en réalité seulement des opérateurs semi-Fredholm de type +.

La liste des différentes définitions du spectre essentiel ci-dessus n'est pas exhaustive : on trouvera les autres notamment dans [46]. De plus, la numérotation de ces différentes définitions n'est pas celle que l'on retrouve dans [46] : on utilise un ordre inverse.

On a toujours  $\sigma_{\text{ess},4}(\mathcal{A}) \subset \sigma_{\text{ess},3}(\mathcal{A}) \subset \sigma_{\text{ess},2}(\mathcal{A}) \subset \sigma_{\text{ess},1}(\mathcal{A})$ . Dans le cas non dissipatif, puisque  $\mathcal{A}$  est autoadjoint, il y a égalité dans ces inclusions. Mais dans le cas général, on ne sait a priori pas si ces inclusions sont strictes ou pas. En fait, dans la suite, c'est toujours  $\sigma_{\text{ess},4}(\mathcal{A})$  que l'on utilise : en effet, ce dernier est compatible avec les outils utilisés dans le chapitre 1, certains calculs qui y sont faits pourront ainsi être réutilisés. Il existe toutefois un résultat pour montrer que les différentes définitions coïncident, mais ce-dernier nécessite de connaître l'allure de  $\sigma_{\text{ess},4}(\mathcal{A})$  (qui correspond à la proposition A.9 de [49]) :

**Proposition 3.3.** *Soit  $\mathcal{A}$  un opérateur fermé de domaine dense. Si, pour  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , chaque composante connexe de  $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess},j}(\mathcal{A})$  contient un point de l'ensemble résolvant de  $\mathcal{A}$ , alors  $\sigma_{\text{ess},j}(\mathcal{A}) = \sigma_{\text{ess},1}(\mathcal{A})$ .*

Il s'agira donc, une fois  $\sigma_{\text{ess},4}(\mathcal{A})$  déterminé, d'utiliser cette proposition pour montrer que toutes les différentes définitions du spectre essentiel citées en (3.27) coïncident ( $\sigma_{\text{ess},4}(\mathcal{A})$  et  $\sigma_{\text{ess},1}(\mathcal{A})$  étant chacun à une extrémité de la chaîne d'inclusion des définitions).

La proposition 3.2 montre que dans le cas non dissipatif ( $\gamma = 0$ ), le spectre de l'opérateur  $\mathcal{A}$  est réel. Dans le cas général, il faut bien sûr considérer le plan complexe tout entier pour la recherche des éléments propres. La proposition qui suit donne un autre résultat sur la répartition de ce spectre, qu'il y ait ou non de la dissipation.

**Proposition 3.4.** *Le spectre de l'opérateur  $\mathcal{A}$  est symétrique par rapport à l'axe imaginaire.*

*Démonstration.* (i) Commençons par observer ce résultat de symétrie sur les valeurs propres de  $\mathcal{A}$ .

Soit  $\omega$  une valeur propre de  $\mathcal{A}$  et  $X := (\varphi, p, u, v)^T$  un vecteur propre associé. Cela signifie que  $X \in D(\mathcal{A})$  et

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} p &= \omega \varphi \\ \operatorname{grad} \varphi + \mathcal{R}^* v &= \omega p \\ v &= \omega u \\ \omega_p^2 \mathcal{R} p + \omega_r^2 u - i\gamma v &= \omega v. \end{aligned}$$

En conjuguant chaque ligne et prenant l'opposé des lignes 1 et 4, ce système est équivalent à

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(-\bar{p}) &= -\bar{\omega} \bar{\varphi} \\ \operatorname{grad} \bar{\varphi} + \mathcal{R}^* \bar{v} &= -\bar{\omega} (-\bar{p}) \\ \bar{v} &= -\bar{\omega} (-\bar{u}) \\ \omega_p^2 \mathcal{R}(-\bar{p}) + \omega_r^2 (-\bar{u}) - i\gamma \bar{v} &= -\bar{\omega} \bar{v}, \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\omega$  est valeur propre de  $\mathcal{A}$  associée à  $(\varphi, p, u, v)$  si et seulement si  $-\bar{\omega}$  est valeur propre de  $\mathcal{A}$  associée à  $(\bar{\varphi}, -\bar{p}, -\bar{u}, \bar{v})$ . Cela veut dire que les valeurs propres de l'opérateur  $\mathcal{A}$  sont symétriques par rapport à l'axe imaginaire. Montrons que ce résultat est en fait valable pour tout le spectre de  $\mathcal{A}$ .

(ii) Pour montrer cette propriété de symétrie sur le spectre de  $\mathcal{A}$ , on passe par l'ensemble résolvant de cet opérateur. Notons  $\rho(\mathcal{A})$  l'ensemble résolvant de  $\mathcal{A}$  et montrons que  $\omega \in \rho(\mathcal{A})$  si et seulement si  $-\bar{\omega} \in \rho(\mathcal{A})$ .

Soient  $X := (\varphi, p, u, v)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  et  $F := (\varphi_s, p_s, u_s, v_s)^T \in \mathcal{H}$ . Notons  $\widetilde{X} := (\overline{\varphi}, -\overline{p}, -\overline{u}, \overline{v})$  et  $\widetilde{F} := (\overline{\varphi}_s, -\overline{p}_s, -\overline{u}_s, \overline{v}_s)$ . Alors, avec (3.14) :

$$(\mathcal{A} - \omega)X = F \Leftrightarrow \begin{cases} -\operatorname{div} p - \omega \varphi = \varphi_s \\ \operatorname{grad} \varphi + \mathcal{R}^* v - \omega p = p_s \\ v - \omega u = u_s \\ \omega_p^2 \mathcal{R} p + \omega_r^2 u - i\gamma v - \omega v = v_s. \end{cases}$$

En conjuguant chaque ligne et prenant l'opposé des lignes 1 et 4, ce système est équivalent à

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(-\overline{p}) - (-\overline{\omega}) \overline{\varphi} &= -\overline{\varphi}_s \\ \operatorname{grad} \overline{\varphi} + \mathcal{R}^* \overline{v} - (-\overline{\omega}) (-\overline{p}) &= \overline{p}_s \\ \overline{v} - (-\overline{\omega}) (-\overline{u}) &= \overline{u}_s \\ \omega_p^2 \mathcal{R}(-\overline{p}) + \omega_r^2 (-\overline{u}) - i\gamma \overline{v} - (-\overline{\omega}) \overline{v}, &= -\overline{v}_s \end{aligned}$$

ce qui équivaut à dire que  $(A - (-\overline{\omega}))\widetilde{X} = -\widetilde{F}$ .

Puisque les problèmes  $(\mathcal{A} - \omega)X = F$  et  $(A - (-\overline{\omega}))\widetilde{X} = -\widetilde{F}$  sont équivalents,  $\omega \in \rho(\mathcal{A})$  si et seulement si  $-\overline{\omega} \in \rho(\mathcal{A})$ .

Ainsi,  $\omega$  est dans le spectre de  $\mathcal{A}$  si et seulement si  $-\overline{\omega}$  est dans le spectre de  $\mathcal{A}$ . □

### 3.1.4 Principaux résultats

Puisque l'on raisonne en terme de contraste et qu'un point du spectre correspond à une valeur de  $\omega$ , il convient tout d'abord d'avoir une relation qui permet d'obtenir la ou les valeurs de  $\omega$  correspondant à une valeur de  $\kappa_\omega^{\mathcal{N}}$  donnée. Ce sont uniquement les contrastes négatifs qui nous intéressent, c'est pourquoi on résout l'équation  $\kappa_\omega^{\mathcal{N}} = \kappa$  d'inconnue  $\omega$  pour  $\kappa$  réel négatif, ce qui mène à définir pour tout  $\kappa \in (-\infty, 0)$ ,

$$\omega_\kappa^\pm := \begin{cases} \frac{-i\gamma \pm \sqrt{4(\omega_r^2 + \omega_p^2/(1-\kappa)) - \gamma^2}}{2} & \text{si } 4(\omega_r^2 + \omega_p^2/(1-\kappa)) - \gamma^2 > 0 \\ \frac{-i\gamma \pm i\sqrt{-4(\omega_r^2 + \omega_p^2/(1-\kappa)) + \gamma^2}}{2} & \text{si } 4(\omega_r^2 + \omega_p^2/(1-\kappa)) - \gamma^2 < 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

Premièrement, on peut s'intéresser aux valeurs de  $\omega$  correspondant aux cas que l'on a exclus pour l'équivalence des problèmes non linéaire et augmenté, c'est-à-dire tels que  $\omega = 0$  ou  $\kappa_\omega^{\mathcal{N}} = 0$ . Les valeurs 0 et  $\omega_0^\pm$  sont valeurs propres de multiplicité infinie de l'opérateur  $\mathcal{A}$ , alors que le problème (3.4) n'est pas défini en  $\omega_0^\pm$  (puisque  $\kappa^{-1}$  devient infini). Cela fait l'objet de la proposition 3.8. Ces valeurs sont donc dans le spectre essentiel de l'opérateur  $\mathcal{A}$ .

Les autres composantes du spectre essentiel de  $\mathcal{A}$  correspondent aux mêmes phénomènes de résonance que ceux qui ont été mis en évidence dans le chapitre 1, associées aux mêmes valeurs du contraste. Une *résonance volumique* dans le matériau négatif correspond à

$$\omega_\infty^\pm := \lim_{\kappa \rightarrow -\infty} \omega_\kappa^\pm = \begin{cases} \frac{-i\gamma \pm \sqrt{4\omega_r^2 - \gamma^2}}{2} & \text{si } 4\omega_r^2 - \gamma^2 > 0 \\ \frac{-i\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_r^2}}{2} & \text{si } 4\omega_r^2 - \gamma^2 < 0. \end{cases}$$



Une *résonance surfacique* sur l'interface  $\Sigma$  entre  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{V}$  correspond à la valeur  $\omega_{-1}^{\pm}$ . Enfin, une *résonance de coin* à chaque sommet de l'interface  $\Sigma$  donne lieu à un ensemble continu de spectre essentiel. Pour être plus précis, il convient de distinguer les sommets intérieurs  $\{C_p \in \Sigma; p = 1, \dots, P\}$  situés dans la cavité (ouverte)  $\mathcal{C}$ , et les sommets extérieurs  $\{B_q \in \Sigma; q = 1, \dots, Q\}$  situés sur la frontière  $\partial\mathcal{C}$  de la cavité (voir figure 3.1). Pour un sommet intérieur  $C_p$ , la résonance de coin est observée pour  $\mathcal{J}_p^{\pm} := \{\omega_{\kappa}^{\pm}, \kappa \in \mathcal{K}_{\text{int}}(\alpha_p)\}$  avec

$$\mathcal{K}_{\text{int}}(\alpha_p) := \left] -c_{\text{int}}(\alpha_p), -\frac{1}{c_{\text{int}}(\alpha_p)} \right[ \setminus \{-1\} \quad \text{avec} \quad c_{\text{int}}(\alpha_p) := \max\left(\frac{2\pi - \alpha_p}{\alpha_p}, \frac{\alpha_p}{2\pi - \alpha_p}\right) \quad (3.29)$$

où  $\alpha_p \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$  est l'angle du milieu négatif montré en figure 3.1. En termes de valeurs propres, en regardant la définition (3.28) de  $\omega_{\kappa}^{\pm}$ , cela correspond à l'intérieur de deux segments ou lignes brisées autour de la valeur  $\omega_{-1}^{\pm}$ . En fonction de la valeur des paramètres  $\omega_p$ ,  $\omega_r$  et  $\gamma$ , ces ensembles peuvent se retrouver sur la droite  $\Im\mathbf{m}(z) = -\gamma/2$ , sur l'axe imaginaire ou sur les deux (voir figure 3.3). On voit que quand  $\alpha_p$  est proche de 0,  $\mathcal{K}_{\text{int}}$  remplit presque toute la demi-droite réelle strictement négative (privée de  $-1$ ), alors que quand  $\alpha_p$  est proche de  $\pi$ ,  $\mathcal{K}_{\text{int}}$  est presque vide et concentré autour de la valeur  $-1$  (il devient vide lorsque  $\alpha_p = \pi$ , c'est-à-dire lorsqu'il n'y a plus de coin).

Pour un sommet extérieur  $B_q$ , la résonance de coin est observée pour  $\mathcal{I}_p^{\pm} := \{\omega_{\kappa}^{\pm}, \kappa \in \mathcal{K}_{\text{ext}}(\beta_q, \nu_q)\}$  avec

$$\mathcal{K}_{\text{ext}}(\beta_q, \nu_q) := \left] \min(-c_{\text{ext}}(\beta_q, \nu_q), -1), \max(-c_{\text{ext}}(\beta_q, \nu_q), -1) \right[ \quad \text{où} \quad c_{\text{ext}}(\beta_q, \nu_q) := \frac{\nu_q - \beta_q}{\beta_q} \quad (3.30)$$

où les angles  $\beta_q$  et  $\nu_q$  sont définis dans la figure 3.1. En termes de valeurs propres, cela correspond à l'intérieur d'un segment ou d'une ligne brisée (montré en figure 3.4). Ainsi, si  $\beta_q < \nu_q/2$ , cet intervalle de contrastes est inclus dans  $] -\infty, -1[$ , le remplissant presque en entier pour  $\beta_q$  proche de 0 alors que si  $\beta_q > \nu_q/2$ ,  $\mathcal{K}_{\text{ext}}(\beta_q, \nu_q)$  est inclus dans  $] -1, 0[$ , le remplissant presque complètement lorsque  $\beta_q$  est proche de  $\nu_q$ . Pour  $\beta_q = \nu_q/2$ ,  $\mathcal{K}_{\text{ext}}(\beta_q, \nu_q)$  disparaît.

Le principal résultat de ce chapitre est le théorème suivant, dont la preuve fait l'objet de la prochaine section.

**Théorème 3.5.** *Supposons que  $\mathcal{N} \neq \emptyset$  et que  $\mathcal{V} \neq \emptyset$ . Alors le spectre essentiel  $\sigma_{\text{ess},4}(\mathcal{A}) \subset \{i\mathbb{R}\} \cup (\mathbb{R} - i\gamma/2)$  de l'opérateur  $\mathcal{A}$  est donné par*

$$\sigma_{\text{ess},4}(\mathcal{A}) = \{0, \omega_0^{\pm}, \omega_{-1}^{\pm}, \omega_{-\infty}^{\pm}\} \cup \bigcup_{p=1,P} \overline{\mathcal{J}_p^{\pm}} \cup \bigcup_{q=1,Q} \overline{\mathcal{I}_q^{\pm}}$$

et

$$\sigma_{\text{ess},1}(\mathcal{A}) = \sigma_{\text{ess},2}(\mathcal{A}) = \sigma_{\text{ess},3}(\mathcal{A}) = \sigma_{\text{ess},4}(\mathcal{A}).$$

**Remarque 3.6.** *Dans le théorème 1.2 pour le cas du modèle de Drude non dissipatif, il y a un résultat d'accumulation du spectre discret (en  $\lambda = 0$ ). Un résultat similaire pour le modèle de Lorentz serait une accumulation du spectre discret en  $\omega_{-\infty}^{\pm}$ . Même si dans la suite, on montre que  $\omega_{-\infty}^{\pm}$  n'est pas valeur propre de multiplicité infinie, on ne peut pas affirmer pour autant que c'est un point d'accumulation du spectre, car si  $\gamma \neq 0$ , l'opérateur  $\mathcal{A}$  n'est pas autoadjoint. Ce résultat d'accumulation est donc peut-être vrai dans le cas général, mais on ne sait le montrer que dans le cas non dissipatif.*

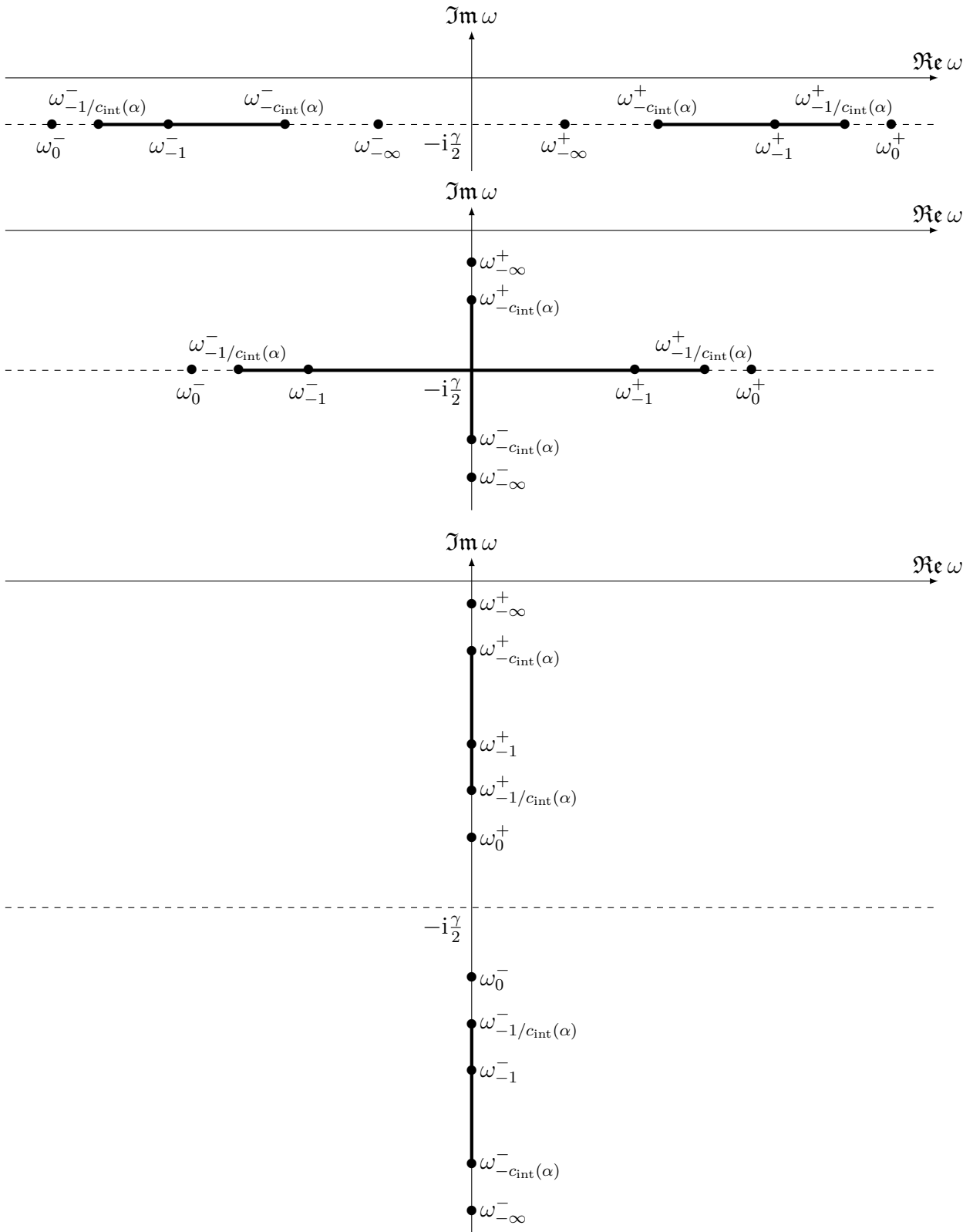


FIGURE 3.3 – Spectre essentiel d’une cavité contenant un seul sommet : un sommet intérieur d’angle  $\alpha$ . En haut, le cas où  $\gamma^2 - 4\omega_r^2 < 0$  : tout le spectre essentiel est de partie imaginaire  $-i\gamma$ . Au milieu, le cas où  $\gamma^2 - 4\omega_r^2 > 0 > \gamma^2 - 4(\omega_r^2 + \omega_p^2)$ . En bas, le cas où  $0 < \gamma^2 - 4(\omega_r^2 + \omega_p^2)$  : tout le spectre essentiel est imaginaire pur. Dans tous les cas, les éléments du spectre essentiel ont une partie imaginaire négative.

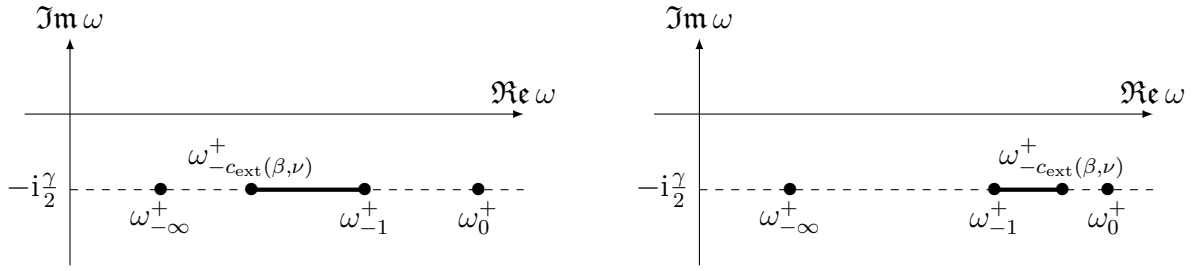


FIGURE 3.4 – Spectre essentiel d’une cavité contenant un seul sommet : un sommet extérieur défini par les angles  $\beta$  et  $\nu$ . A gauche : cas où  $\beta < \nu/2$ . A droite : cas où  $\beta > \nu/2$ . Ici, on se place dans le cas où  $\gamma - 4\omega_r^2 < 0$  et on ne trace que la partie de ce spectre essentiel de partie imaginaire positive, le reste pouvant être obtenu par symétrie par rapport à l’axe imaginaire. Dans le cas où  $\gamma - 4\omega_r^2 > 0$ , une partie (ou la totalité) du spectre essentiel peut se retrouver sur l’axe imaginaire, de manière similaire à la figure 3.3.

## 3.2 Les différentes composantes du spectre essentiel

Dans cette section, pour simplifier les notations, on ne traitera que la partie en  $\omega_\kappa^+$  (la partie en  $\omega_\kappa^-$  se traitant de manière identique), et pour simplifier les notations, on ne notera plus les "+" en exposant, ni des  $\omega_\kappa$ , ni des intervalles. De plus, pour éviter de distinguer les cas selon le signe de  $4(\omega_r^2 + \omega_p^2)/(1 - \kappa) - \gamma^2$ , on notera, pour  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\sqrt{x} := \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ i\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

### 3.2.1 Résultats préliminaires

On considère d’abord les valeurs  $\omega = 0$  et  $\omega_0$ , pour lesquelles on n’a pas équivalence entre le problème non linéaire et la formulation augmentée, ainsi que  $\omega_{-\infty}$ , qui ne correspond pas à une valeur finie du contraste. Les propositions suivantes nous disent que 0 et  $\omega_0$  sont *valeurs propres de multiplicité infinie* de  $\mathcal{A}$ , alors que  $\omega_{-\infty}$  n’est dans le cas général pas valeur propre de  $\mathcal{A}$ , et au plus valeur propre de multiplicité finie dans certains cas très précis.

**Proposition 3.7.** *On a  $\text{Ker}(\mathcal{A} - \omega_{-\infty}\text{I}) = \{0\}$  si  $\gamma \neq 0$ , et  $\text{Ker}(\mathcal{A} - \omega_{-\infty}\text{I})$  est de dimension finie si  $\gamma = 0$ .*

*Démonstration.* Soit  $(\varphi, p, u, v) \in \text{D}(\mathcal{A})$ . Alors

$$(\varphi, p, u, v) \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \omega_{-\infty}\text{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} -\text{div } p = \omega_{-\infty} \varphi \\ \text{grad } \varphi + \mathcal{R}^*v = \omega_{-\infty} p \\ v = \omega_{-\infty} u \\ \omega_p^2 \mathcal{R}p + \omega_r^2 u - i\gamma v = \omega_{-\infty} v. \end{cases}$$

En rappelant que  $\omega_{-\infty}$  vérifie  $\omega_{-\infty}^2 - \omega_r^2 + i\gamma \omega_{-\infty} = 0$ , on obtient, en remplaçant  $v$  par  $\omega_{-\infty} u$  dans les lignes 2 et 4,

$$(\varphi, p, u, v) \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \omega_{-\infty}\text{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} -\text{div } p = \omega_{-\infty} \varphi \\ \text{grad } \varphi + \omega_{-\infty} \mathcal{R}^*u = \omega_{-\infty} p \\ v = \omega_{-\infty} u \\ \omega_p^2 \mathcal{R}p = (\omega_{-\infty}^2 - \omega_r^2 + i\gamma \omega_{-\infty})u = 0. \end{cases}$$

Donc, si  $(\varphi, p, u, v) \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \omega_{-\infty}\text{I})$ , alors on a, dans  $\mathcal{N}$  :  $p = 0$  (avec la ligne 4), puis  $\varphi = 0$  (avec la ligne 1), puis  $u = 0$  (avec la ligne 2), et enfin  $v = 0$  (avec la ligne 3). Dans  $\mathcal{V}$ , on a

$$\begin{cases} -\text{div } p = \omega_{-\infty} \varphi \\ \text{grad } \varphi = \omega_{-\infty} p, \end{cases}$$

d'où  $-\Delta\varphi = \omega_{-\infty}^2\varphi$  dans  $\mathcal{V}$ , avec  $\varphi = 0$  sur  $\partial V$  (condition de Dirichlet sur  $\partial C$  et continuité de  $\varphi$  à travers  $\Sigma$ ). Il existe des solutions non nulles à ce problème si et seulement si  $\omega_{-\infty}^2$  est valeur propre du Laplacien dans  $\mathcal{V}$  avec condition de Dirichlet sur  $\partial V$ . On sait que cet opérateur a un spectre purement discret inclus dans  $\mathbb{R}^+$ .

Or, si  $\gamma \neq 0$ ,  $\omega_{-\infty} \notin \mathbb{R}$ , donc  $\omega_{-\infty}^2 \notin \mathbb{R}^+$ , d'où  $\varphi = 0$ . On a donc aussi  $p = 0$ . Finalement, si  $(\varphi, p, u, v) \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \omega_{-\infty}\text{I})$ , alors  $(\varphi, p, u, v) = (0, 0, 0, 0)$ .

Si  $\gamma = 0$ , il est possible de trouver des solutions non nulles, mais elles formeraient un espace vectoriel de dimension fini, que l'on peut noter  $\mathcal{E}$ . Alors, on aurait  $\text{Ker}(\mathcal{A} - \omega_{-\infty}\text{I}) = \{(\varphi, -1/\omega_{-\infty} \text{grad } \varphi), \varphi|_{\mathcal{N}} = 0 \text{ et } \varphi|_{\mathcal{V}} \in \mathcal{E}\}$ , qui est de dimension finie. □

### Proposition 3.8.

$$\text{Ker}(\mathcal{A}) = \{ (0, p, -\omega_p^2/\omega_r^2 \mathcal{R}p, 0) \in \text{D}(\mathcal{A}), \text{div } p = 0 \}$$

est de dimension infinie.

$$\text{Ker}(\mathcal{A} - \omega_0\text{I}) = \mathcal{H}_\infty \oplus \mathcal{H}_0$$

où

$$\mathcal{H}_\infty := \{ (0, p, \mathcal{R}p, \omega_0\mathcal{R}p) \in \text{D}(\mathcal{A}), p = 0 \text{ dans } \mathcal{V}, \text{div } p = 0 \text{ dans } \mathcal{N} \text{ et } p.n = 0 \text{ sur } \Sigma \}$$

est de dimension infinie.  $\mathcal{H}_0$  est vide si  $\gamma \neq 0$ , et au plus de dimension finie si  $\gamma = 0$ .

*Démonstration.* Commençons par étudier  $\text{Ker}(\mathcal{A})$ . Soit  $(\varphi, p, u, v) \in \text{D}(\mathcal{A})$ . Alors

$$(\varphi, p, u, v) \in \text{Ker}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \begin{cases} -\text{div } p = 0 \\ \text{grad } \varphi + \mathcal{R}^*v = 0 \\ v = 0 \\ \omega_p^2 \mathcal{R}p + \omega_r^2 u - i\gamma v = 0. \end{cases}$$

En utilisant le fait que  $\varphi = 0$  sur  $\partial C$  (car  $\varphi \in H_0^1(\mathcal{C})$ ) et en utilisant la troisième ligne dans la deuxième, on obtient que

$$(\varphi, p, u, v) \in \text{Ker}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{div } p = 0 \\ \varphi = 0 \\ v = 0 \\ u = -\frac{\omega_p^2}{\omega_r^2} \mathcal{R}p \end{cases}$$

et on retrouve bien  $\text{Ker}(\mathcal{A}) = \{(0, p, -\omega_p^2/\omega_r^2 \mathcal{R}p, 0) \in \text{D}(\mathcal{A}), \text{div } p = 0\}$ . Cet espace est de dimension infinie. En effet, il suffit de prendre  $p := \text{rot}_{2D}(\psi)$  où  $\psi \in H^1(\mathcal{C})$  pour que  $(0, p, -\omega_p^2/\omega_r^2 \mathcal{R}p, 0)$  soit dans cet ensemble.

Passons à l'étude de  $\text{Ker}(\mathcal{A} - \omega_0 \mathbf{I})$ . Soit  $(\varphi, p, u, v) \in \text{D}(\mathcal{A})$ . Alors

$$(\varphi, p, u, v) \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \omega_0 \mathbf{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} -\text{div } p = \omega_0 \varphi \\ \text{grad } \varphi + \mathcal{R}^* v = \omega_0 p \\ v = \omega_0 u \\ \omega_p^2 \mathcal{R} p + \omega_r^2 u - i\gamma v = \omega_0 v. \end{cases}$$

En rappelant que  $\omega_0$  vérifie  $\omega_0^2 - \omega_r^2 + i\gamma \omega_0 = \omega_p^2$  et en remplaçant  $v$  par  $\omega_0 u$  dans les lignes 2 et 4, on obtient que

$$(\varphi, p, u, v) \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \omega_0 \mathbf{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} -\text{div } p = \omega_0 \varphi \\ \text{grad } \varphi + \omega_0 \mathcal{R}^* u = \omega_0 p \\ v = \omega_0 u \\ \mathcal{R} p = u. \end{cases}$$

La deuxième équation, dans  $\mathcal{N}$ , en utilisant la quatrième, signifie que  $\varphi$  est constante dans  $\mathcal{N}$ . Dans un souci de simplification, supposons que  $\partial \mathcal{N} \cap \partial \mathcal{C} \neq \emptyset$ . Cela signifie alors que  $\varphi = 0$  dans  $\mathcal{N}$ , et donc que  $\text{div } p = 0$  dans  $\mathcal{N}$ .

Les deux premières équations dans  $\mathcal{V}$  donnent  $-\Delta \varphi = \omega_0^2 \varphi$ , et on a  $\varphi = 0$  sur  $\partial \mathcal{V}$  (condition de Dirichlet sur  $\partial \mathcal{C}$  et continuité de  $\varphi$  sur  $\Sigma$ ).

Si  $\gamma \neq 0$ ,  $\omega_0 \notin \mathbb{R}$  et de même que dans la preuve de la proposition précédente, on obtient  $\varphi = 0$  dans  $\mathcal{V}$ , et donc  $p = 0$  dans  $\mathcal{V}$ . Dans ce cas, on a

$$(\varphi, p, u, v) \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \omega_0 \mathbf{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0 \text{ dans } \mathcal{V} \\ \text{div } p = 0 \text{ dans } \mathcal{N} \\ p \cdot n = 0 \text{ sur } \Sigma \\ \varphi = 0 \\ u = \mathcal{R} p \\ v = \omega_0 u \end{cases}$$

et on retrouve bien  $\mathcal{H}_\infty$ . Pour vérifier qu'il est de dimension infinie, il suffit de lui trouver un sous-ensemble de dimension infinie. Soit  $\psi \in H^1(\mathcal{C})$  de support inclus dans  $\mathcal{N}$ , et  $p = \text{rot}_{2D} \psi$ . Alors on a bien  $(0, p, \mathcal{R} p, \omega_0 \mathcal{R} p) \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \omega_0 \mathbf{I})$ . L'ensemble formé par de telles fonctions  $\psi$  étant de dimension infini, on obtient bien que  $\text{Ker}(\mathcal{A} - \omega_0 \mathbf{I})$  est de dimension infinie.

Dans le cas où  $\gamma = 0$ ,  $\omega_0^2$  pourrait, par chance, être une valeur propre du Laplacien avec condition de Dirichlet dans  $\mathcal{V}$ . Et alors on pourrait avoir des éléments de  $\text{Ker}(\mathcal{A} - \omega_0 \mathbf{I})$  pour lesquels  $\varphi$  n'est pas nulle dans  $\mathcal{V}$ . Mais alors, l'orthogonal de  $\mathcal{H}_\infty$  dans  $\text{Ker}(\mathcal{A} - \omega_0 \mathbf{I})$  serait nécessairement de dimension finie puisque le Laplacien avec condition de Dirichlet n'a que des valeurs propres de multiplicité finie.

Si  $\partial \mathcal{N} \cap \partial \mathcal{C} = \emptyset$ , on n'a plus directement  $\varphi = 0$  et  $\text{div } p = 0$  dans  $\mathcal{N}$ , mais seulement  $\varphi = K$  où  $K$  est une constante et  $\text{div } p = \omega_0 K$  dans  $\mathcal{N}$ . Puisque la différence entre deux champs de vecteurs de même divergence est de divergence nulle, cela ajouterait seulement en espace de dimension 1 dans l'orthogonal de  $\mathcal{H}_\infty \oplus \mathcal{H}_0$  : l'espace engendré par  $(\mathbf{1}_{\mathcal{N}}, \mathcal{R}^* p_0, \mathcal{R} p_0, \omega_0 \mathcal{R} p_0)$ , où  $p_0$  est une solution particulière de  $\text{div } p = \omega_0$  dans  $\mathcal{N}$ .

□

### 3.2.2 Résonance volumique dans le matériau négatif

Comme mentionné au paragraphe 3.1.4, chaque point du spectre essentiel (exceptés 0 et  $\omega_0$ ) correspond à un phénomène de résonance particulier. Ici, on s'intéresse au contraste  $\kappa = -\infty$ , c'est-à-dire au point

$$\omega_{-\infty} = \frac{-i\gamma + \sqrt{4\omega_r^2 - \gamma^2}}{2},$$

qui correspond à une *résonance volumique* dans le milieu  $\mathcal{N}$ . De la même façon que dans le paragraphe 1.3.2, on peut voir que les fonctions propres associées à des valeurs propres proches de  $\omega_{-\infty}$  sont concentrées dans le milieu  $\mathcal{N}$ . De plus, on a vu dans le paragraphe 3.1.1 que dans le cas d'une cavité contenant uniquement un matériau négatif, il y avait une accumulation des valeurs propres en  $\omega_{-\infty}$ . Cela donne donc la même idée que dans le paragraphe 1.3.2 pour construire une suite de Weyl pour  $\omega = \omega_{-\infty}$ . Considérons une suite  $(\varphi_n^{\mathcal{N}})_n$  de fonctions propres du Laplacien aux conditions de Dirichlet dans  $\mathcal{N}$ , c'est-à-dire une suite de fonctions non nulles  $\varphi_n^{\mathcal{N}} \in H_0^1(\mathcal{N})$  solutions de  $-\Delta \varphi_n^{\mathcal{N}} = \lambda_n \varphi_n^{\mathcal{N}}$ , où  $(\lambda_n)_n$  est la suite de valeurs propres associées, qui tend vers  $+\infty$ . L'idée est simplement de prolonger les  $\varphi_n^{\mathcal{N}}$  par 0 dans  $\mathcal{V}$  et d'introduire les variables auxiliaires  $p, u, v$  correspondantes données en (3.15) pour  $\omega = \omega_{-\infty}$ .

**Proposition 3.9.** *Soit  $X_n := (\varphi_n, p_n, u_n, v_n)$  où  $\varphi_n := \mathcal{R}^* \varphi_n^{\mathcal{N}}$ ,  $p_n := 0$ ,  $u_n := -\frac{1}{\omega_{-\infty}} \mathcal{R} \text{grad } \varphi_n$  et  $v_n := -\mathcal{R} \text{grad } \varphi_n$ . Alors  $X_n / \|X_n\|_{\mathcal{H}}$  est une suite de Weyl pour  $\omega = \omega_{-\infty}$ .*

*Démonstration.* (i) Commençons par montrer que pour tout  $n$ ,  $X_n$  est bien dans  $D(\mathcal{A})$ . Puisque  $\varphi_n^{\mathcal{N}} \in H_0^1(\mathcal{N})$ , on a  $\text{grad}(\mathcal{R}^* \varphi_n^{\mathcal{N}}) = \mathcal{R}^* \text{grad } \varphi_n^{\mathcal{N}}$ , donc  $\varphi_n \in H_0^1(\mathcal{C})$ . De plus,  $u_n = -\frac{1}{\omega_{-\infty}} \mathcal{R} \text{grad } \varphi_n \in L^2(\mathcal{N})$ ,  $v_n = -\mathcal{R} \text{grad } \varphi_n \in L^2(\mathcal{N})$  et  $p_n = 0 \in H(\text{div}, \mathcal{C})$ . On a donc bien  $X_n \in D(\mathcal{A})$ .

(ii) Passons maintenant à la propriété de convergence forte des suites singulières. Avec la définition (3.14) de  $\mathcal{A}$ , on a  $\mathcal{A}X_n - \omega_{-\infty}X_n = (-\omega_{-\infty}\varphi_n, 0, 0, 0)$ , donc

$$\frac{\|\mathcal{A}X_n - \omega_{-\infty}X_n\|_{\mathcal{H}}}{\|X_n\|_{\mathcal{H}}} \lesssim \frac{\|\varphi_n^{\mathcal{N}}\|_{L^2(\mathcal{N})}}{\|v_n\|_{L^2(\mathcal{N})^2}} = \frac{\|\varphi_n^{\mathcal{N}}\|_{L^2(\mathcal{N})}}{\|\text{grad } \varphi_n^{\mathcal{N}}\|_{L^2(\mathcal{N})^2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \rightarrow 0,$$

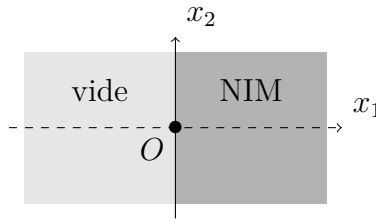
où la dernière égalité vient de la définition de  $\varphi_n^{\mathcal{N}}$ . On en déduit que  $\omega_{-\infty}$  est dans le spectre de  $\mathcal{A}$ .

(iii) La proposition 3.7 montre que  $\omega_{-\infty}$  n'est pas valeur propre de  $\mathcal{A}$ .  $\omega_{-\infty}$  ne peut donc pas être dans le spectre discret de  $\mathcal{A}$ . Dans le cas où  $\gamma \neq 0$ , malheureusement, à ce stade, nous ne savons pas si  $\sigma_{\text{ess},4}(\mathcal{A})$  et  $\sigma_{\text{ess},1}(\mathcal{A})$  coïncident, cela ne donne donc pas d'information sur le fait que  $\omega_{-\infty}$  est dans le spectre essentiel  $\sigma_{\text{ess},4}(\mathcal{A})$  de l'opérateur  $\mathcal{A}$ . C'est pourquoi il est nécessaire de montrer que  $X_n / \|X_n\|_{\mathcal{H}}$  tend faiblement vers 0. Soit donc  $X := (\varphi, p, u, v) \in \mathcal{D}(\mathcal{C}) \times \mathcal{D}(\mathcal{C})^2 \times \mathcal{D}(\mathcal{N})^2 \times \mathcal{D}(\mathcal{N})^2$ .

$$\left( \frac{X_n}{\|X_n\|_{\mathcal{H}}}, X \right)_{\mathcal{H}} = \frac{\int_{\mathcal{N}} \varphi_n^{\mathcal{N}} \bar{\varphi} - \omega_p^{-2} \int_{\mathcal{N}} \text{grad } \varphi_n^{\mathcal{N}} \left( \frac{\omega_r^2}{\omega_{-\infty}^2} \bar{u} + \bar{v} \right)}{\sqrt{\|\varphi_n^{\mathcal{N}}\|_{L^2(\mathcal{N})}^2 + \omega_p^{-2} \left( \frac{\omega_r^2}{\omega_{-\infty}^2} + 1 \right) \|\text{grad } \varphi_n^{\mathcal{N}}\|_{L^2(\mathcal{N})^2}^2}}.$$

En utilisant une formule de Green dans la deuxième intégrale et en utilisant le fait que  $\|\text{grad } \varphi_n^{\mathcal{N}}\|_{\mathcal{N}}^2 = \lambda_n \|\varphi_n^{\mathcal{N}}\|_{\mathcal{N}}^2$ , on obtient

$$\left( \frac{X_n}{\|X_n\|_{\mathcal{H}}}, X \right)_{\mathcal{H}} = \frac{\int_{\mathcal{N}} \varphi_n^{\mathcal{N}} \left[ \bar{\varphi} + \omega_p^{-2} \text{div} \left( \frac{\omega_r^2}{\omega_{-\infty}^2} \bar{u} + \bar{v} \right) \right]}{\sqrt{\|\varphi_n^{\mathcal{N}}\|_{L^2(\mathcal{N})}^2 \left[ 1 + \omega_p^{-2} \left( \frac{\omega_r^2}{\omega_{-\infty}^2} + 1 \right) \lambda_n \right]}}.$$

FIGURE 3.5 – Coordonnées cartésiennes au voisinage d'un point de l'interface  $\Sigma$ .

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du fait que  $\varphi$ ,  $u$ ,  $v$  sont bornées ainsi que leurs dérivées, on a

$$\left( \frac{X_n}{\|X_n\|_{\mathcal{H}}}, X \right)_{\mathcal{H}} \lesssim \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_p^{-2} \left( \frac{\omega_r^2}{\omega_{-\infty}^2} + 1 \right) \lambda_n}} \rightarrow 0.$$

Ainsi,  $X_n/\|X_n\|_{\mathcal{H}}$  tend faiblement vers 0 et est donc une suite singulière pour  $\omega_{-\infty}$ . □

### 3.2.3 Résonance surfacique sur l'interface entre les deux milieux

Il s'agit à présent de montrer que

$$\omega_{-1} := \frac{-i\gamma + \sqrt{4(\omega_r^2 + \omega_p^2/2) - \gamma^2}}{2}$$

est dans le spectre essentiel de l'opérateur  $\mathcal{A}$ . Pour cela, on va, comme dans le chapitre 1, construire une suite singulière à partir d'*ondes de surfaces* dérivant de notre problème initial (3.4).

#### Rappel sur les ondes de surface

On rappelle qu'il s'agit de commencer par considérer le cas d'une interface rectiligne entre deux demi-plans. On choisit les coordonnées cartésiennes  $(O, x_1, x_2)$  de telle sorte que le demi-plan  $x_1 > 0$  soit constitué de NIM et le demi-plan  $x_1 < 0$  de vide (voir figure 3.5). Considérons l'équation

$$\operatorname{div} \left( \operatorname{sgn}(x_1) \operatorname{grad} \psi \right) = 0, \quad (3.31)$$

qui n'est autre que l'équation (3.4) pour  $\kappa_{\omega}^{\mathcal{N}} = -1$  à laquelle on a retiré le terme  $\omega^2 \psi$  (vu comme une "petite" perturbation, voir chapitre 1). On rappelle que pour tout  $k > 0$ , la fonction  $\exp \left( ik(x_2 + ix_1) \right)$  est solution de (3.31). Ce sont des ondes de surfaces qui se propagent dans la direction de l'interface et décroissent exponentiellement quand  $x_1 \rightarrow \pm\infty$ . Toute superposition de telles ondes de surface (pour différents  $k$ ) est toujours solution de (3.31). En particulier, pour n'importe quel  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ , la fonction  $\psi$  définie par

$$\psi(x) = \psi(x_1, x_2) := \int_{\mathbb{R}^+} f(k) e^{ik(x_2 + i|x_1|)} dk$$

est solution de (3.31), de même que

$$\psi_n(x) := \psi(nx_1, nx_2) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{n} f \left( \frac{k}{n} \right) e^{ik(x_2 + i|x_1|)} dk \quad \text{pour } n \geq 1.$$

### Une suite de Weyl

Retournons au cas de la cavité polygonale. Supposons que le centre  $O$  des coordonnées  $(O, x_1, x_2)$  est un point donné de l'interface  $\Sigma$  différent des sommets, et choisissons les directions  $x_1$  et  $x_2$  de telle sorte que notre milieu soit décrit par la figure 3.5 dans un voisinage de  $O$ . Plus précisément, pour un  $R > 0$  suffisamment petit tel que  $B_R \subset \mathcal{C}$ ,  $\mathcal{N} \cap B_R \subset \{x_1 > 0\}$  et  $\mathcal{V} \cap B_R \subset \{x_1 < 0\}$ , où l'on note  $B_R := \{x \in \mathbb{R}^2, |x| < R\}$  la boule centrée en  $O$  et de rayon  $R$ . On définit

$$\varphi_n := \psi_n \chi, \quad p_n := -\frac{\operatorname{sgn}(x_1)}{\omega_{-1}} \operatorname{grad} \varphi_n, \quad u_n := 2\mathcal{R}p_n \quad \text{et} \quad v_n := \omega_{-1}u_n \quad (3.32)$$

où  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  est une fonction de troncature qui s'annule en dehors de  $B_R$ , qui vaut identiquement 1 dans une certaine boule  $B_{R_1}$  avec  $0 < R_1 < R$  et qui est symétrique par rapport à l'axe  $x_1 = 0$  (c'est-à-dire  $\chi(-x_1, x_2) = \chi(x_1, x_2)$ ). Les définitions de  $p_n$ ,  $u_n$  et  $v_n$  ne sont autres que (3.15) pour  $\kappa_\omega^{\mathcal{N}} = -1$ .

**Proposition 3.10.** *Soit  $X_n := (\varphi_n, p_n, u_n, v_n)$  définie par (3.32). Alors  $X_n/\|X_n\|_{\mathcal{H}}$  est une suite de Weyl pour  $\omega = \omega_{-1}$ .*

*Démonstration.* La preuve de cette proposition est très similaire à celle de la proposition 1.8 correspondant au cas du modèle de Drude non dissipatif. Cette-dernière sera donc évoquée souvent ici, afin de ne pas refaire des calculs identiques.

(i) Commençons par montrer que  $X_n$  est dans  $D(\mathcal{A})$ .  $\varphi_n$  est identique à celle de la proposition 1.8 : elle est bien dans  $H_0^1(\mathcal{C})$ . De ce fait,  $p_n \in L^2(\mathcal{C})$ ,  $u_n \in L^2(\mathcal{N})^2$  et  $v_n \in L^2(\mathcal{N})^2$ . Enfin, on a montré dans la proposition 1.8 que  $\operatorname{div}(\operatorname{sgn}(x_1) \operatorname{grad} \varphi_n) \in L^2(\mathcal{C})$ , donc  $p_n \in H(\operatorname{div}, \mathcal{C})$ .

(ii) Montrons à présent que  $\|\mathcal{A}X_n - \omega_{-1}X_n\|_{\mathcal{H}}/\|X_n\|_{\mathcal{H}}$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. Grâce aux définitions de  $p_n$ ,  $u_n$  et  $v_n$  à partir de  $\varphi_n$ , on a

$$\mathcal{A}X_n - \omega_{-1}X_n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega_{-1}} \operatorname{div}(\operatorname{sgn}(x_1) \operatorname{grad} \varphi_n) - \omega_{-1}\varphi_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or, puisque  $\psi_n$  est solution de (3.31), on a  $\operatorname{div}(\operatorname{sgn}(x_1) \operatorname{grad} \varphi_n) = 2 \operatorname{grad} \psi_n \cdot \operatorname{grad} \chi + \psi_n \Delta \chi$ . Donc

$$\|\mathcal{A}X_n - \omega_{-1}X_n\|_{\mathcal{H}} \lesssim \|\psi_n\|_{H^1(B_R \setminus B_{R_1})} + \|\psi_n\|_{L^2(B_R)}.$$

Cette quantité tend vers 0 d'après les calculs du point (ii) de la preuve de la proposition 1.8.

De la même manière que dans la proposition 1.8, on montre aussi que  $\|X_n\|_{\mathcal{H}} \gtrsim 1$ .

(iii) Reste à prouver que  $X_n/\|X_n\|_{\mathcal{H}}$  converge faiblement vers 0. Il suffit donc de montrer que  $X_n$  tend faiblement vers 0, puisque  $\|X_n\|_{\mathcal{H}} \gtrsim 1$ . Pour tout  $X' \in \mathcal{D}(\mathcal{C}) \times \mathcal{D}(\mathcal{C})^2 \times \mathcal{D}(\mathcal{N})^2 \times \mathcal{D}(\mathcal{N})^2$ , de la même façon que dans la proposition 1.8, on a

$$|(X_n, X')_{\mathcal{H}}| \lesssim \int_{B_R} (|\psi(nx)| + n|\operatorname{grad} \psi(nx)|) dx,$$

quantité qui tend vers 0 (montré dans le point (iii) de la preuve de la proposition 1.8).  $\square$



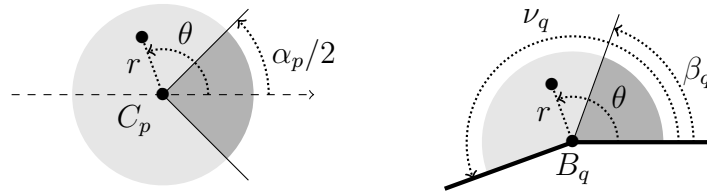


FIGURE 3.6 – Coordonnées polaires pour un sommet intérieur  $C_p$  (à gauche) et pour un sommet extérieur  $B_q$  (à droite).

### 3.2.4 Résonance de coin sur un sommet intérieur

Ici, il s'agit de montrer que les intervalles  $\mathcal{J}_p$  définis avec (3.29), associés à des sommets intérieurs dans l'interface  $\Sigma$ , sont dans le spectre essentiel de l'opérateur  $\mathcal{A}$ . Dans ce paragraphe, on considère le cas d'un sommet intérieur  $C_p$ , au voisinage duquel le matériau négatif constitue un secteur angulaire d'angle  $\alpha_p \in (0, 2\pi)$  (voir figure 3.1).

**Remarque 3.11.** *On ne détaille pas dans ce chapitre le cas des sommets extérieurs, car il se déduit du cas des sommets intérieurs exactement de la même façon que dans le paragraphe 1.3.5.*

#### Ondes de trou noir

On rappelle dans ce paragraphe comment on construit ce que l'on appelle des *ondes de trou noir* à partir du problème (3.4). Ce sont des vibrations localisées au voisinage du sommet  $C_p$ , très oscillantes, qui correspondent à l'interaction de deux ondes de surface au niveau du coin. Comme dans le paragraphe précédent, on s'intéresse non pas aux solutions du problème (3.4), mais à celles du problème simplifié

$$\operatorname{div} \left( \frac{1}{\kappa_\omega} \operatorname{grad} \psi_\omega \right) = 0 \quad \text{dans le plan entier } \mathbb{R}^2. \quad (3.33)$$

mais au lieu d'une interface plane, on suppose ici que les deux secteurs angulaires de matériau négatif et de vide définis au voisinage de  $C_p$  sont infinis. Plus précisément, on choisit ici les coordonnées polaires  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times (-\pi, \pi]$  centrées en  $C_p$  telles que le secteur de matériau négatif corresponde à  $|\theta| < \alpha_p/2$  (voir figure 3.6).

On a vu dans le chapitre 1 que les solutions d'un tel problème s'obtiennent par séparation de variables et sont de la forme

$$\psi_\omega(r, \theta) = r^{i\eta_\omega} m_\omega(\theta) \quad (3.34)$$

où  $\eta_\omega$  est un paramètre complexe et la modulation angulaire  $m_\omega$  est une solution  $2\pi$  périodique de

$$\kappa_\omega \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{\kappa_\omega} \frac{dm_\omega}{d\theta} \right) - \eta_\omega^2 m_\omega = 0 \quad \text{dans } (-\pi, \pi). \quad (3.35)$$

Cette équation admet des solutions non triviales si et seulement si  $\eta_\omega$  satisfait l'équation de dispersion

$$\left( \frac{\sinh(\eta_\omega(\pi - \alpha_p))}{\sinh(\eta_\omega\pi)} \right)^2 = \left( \frac{1 + \kappa_\omega^{\mathcal{N}}}{1 - \kappa_\omega^{\mathcal{N}}} \right)^2. \quad (3.36)$$

En fait, ce sont les solutions  $\eta_\omega$  réelles qui nous intéressent. En effet, dans ce cas-là, le comportement radial  $r^{i\eta_\omega}$  de  $\psi_\omega$  a une amplitude constante et est de plus en plus oscillant quand  $r$  tend

vers 0, ce qui correspond aux ondes de trou noir recherchées. Sans perte de généralité, on peut se restreindre à des  $\eta_\omega$  positifs. L'étude de la fonction constituant le membre de gauche de l'équation (3.36) (qui a été faite au chapitre 1) nous amène à retrouver  $\kappa_\omega^{\mathcal{N}} \in \mathcal{K}_{\text{int}}(\alpha_p)$  où  $\mathcal{K}_{\text{int}}(\alpha_p)$  est défini en (3.30), c'est-à-dire  $\omega \in \mathcal{J}_p$ .

La formule de  $m_\omega$  est la même que dans le chapitre 1 : elle est donnée en (1.28) et (1.29), dans lesquelles il suffit de remplacer les indices  $\lambda$  par  $\omega$ .

### Suites de Weyl

Comme dans le chapitre 1, les ondes de trou noir sont les ingrédients de base pour construire des suites de Weyl associées au coin. On rappelle que le gradient de  $\psi_\omega$  n'est pas de carré intégrable, et la méthode qui consisterait à tronquer brutalement  $\psi_\omega$  au voisinage du coin ne fonctionne pas non plus ici. De même que dans le chapitre 1, la construction d'une suite de Weyl associée à un  $\omega^* \in \mathcal{J}_p$  consiste à considérer des superpositions de différentes  $\psi_\omega$ , pour des densités régulières et de support de plus en plus concentrées au voisinage de  $\omega^*$ . Cela permet de régulariser le comportement des ondes de trou noir au niveau du coin (grâce à la régularité des densités utilisées) et le comportement de ces superpositions ressemble de plus en plus à  $\psi_{\omega^*}$  (grâce au choix du support des densités).

En pratique, il est plus commode de considérer des superpositions en  $\eta$ , et non en  $\omega$ , autour de  $\eta^* := \eta_{\omega^*} \in (0, +\infty)$ . Cela conduit à introduire la fonction réciproque  $\eta \rightarrow \omega(\eta)$  de  $\omega \rightarrow \eta_\omega$ , définie sur la partie de  $\mathcal{J}_p$  contenant  $\omega^*$ . On déduit de (3.36) que cette fonction est donnée par

$$\omega(\eta) = \frac{-i\gamma + \sqrt{4 \left[ \omega_r^2 + \frac{\omega_p^2}{2} \left( 1 + \operatorname{sgn}(\Re(\omega - \omega_{-1})) \frac{\sinh(\eta|\pi - \alpha_p|)}{\sinh(\eta\pi)} \right) \right]} - \gamma^2}{2}, \quad \forall \eta \in (0, +\infty).$$

Puis, pour tout  $n \geq 1$ , on définit

$$\begin{pmatrix} \varphi_n \\ p_n \\ u_n \\ v_n \end{pmatrix} := \chi \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}_n \\ \widetilde{p}_n \\ \widetilde{u}_n \\ \widetilde{v}_n \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \widetilde{\varphi}_n := \int_{\mathbb{R}} f_n(\eta) \psi_{\omega(\eta)} d\eta, \\ \widetilde{p}_n := \int_{\mathbb{R}} f_n(\eta) \frac{1}{\omega(\eta) \kappa_{\omega(\eta)}} \operatorname{grad} \psi_{\omega(\eta)} d\eta, \\ \widetilde{u}_n := \int_{\mathbb{R}} f_n(\eta) \frac{1 - \kappa_{\omega(\eta)}^{\mathcal{N}}}{\omega(\eta) \kappa_{\omega(\eta)}^{\mathcal{N}}} \mathcal{R} \operatorname{grad} \psi_{\omega(\eta)} d\eta, \\ \widetilde{v}_n := \int_{\mathbb{R}} f_n(\eta) \frac{1 - \kappa_{\omega(\eta)}^{\mathcal{N}}}{\kappa_{\omega(\eta)}^{\mathcal{N}}} \mathcal{R} \operatorname{grad} \psi_{\omega(\eta)} d\eta, \end{cases} \quad (3.37)$$

où  $\chi$  et  $f_n$  sont choisies comme suit. Tout d'abord, soit  $R > 0$  suffisamment petit pour que  $B_R \subset \mathcal{C}$  et tel que  $\mathcal{N} \cap B_R \subset \{|\theta| < \alpha_p/2\}$  et  $\mathcal{V} \cap B_R \subset \{|\theta| > \alpha_p/2\}$ . D'une part, soit  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  une fonction troncature à support inclus dans  $B_R$  et identiquement égale à 1 dans une certaine boule  $B_{R_1}$  (avec  $0 < R_1 < R_2$ ). D'autre part, soit  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  à support dans  $(-\eta^*, \eta^*)$  et telle que  $\int_{\mathbb{R}} f(\eta) d\eta = 1$ . On définit alors  $f_n(\eta) := n f(n(\eta - \eta^*))$  pour tout  $n \geq 1$  (de telle sorte que  $f_n$  tende vers le Dirac en  $\eta^*$  au sens des distributions). Enfin, les définitions de  $\widetilde{p}_n$ ,  $\widetilde{u}_n$  et  $\widetilde{v}_n$  ne sont autres que (3.15) que l'on a intégré.

**Proposition 3.12.** *Soit  $X_n := (\varphi_n, p_n, u_n, v_n)$  définie par (3.37). Alors  $X_n / \|X_n\|_{\mathcal{H}}$  est une suite de Weyl de  $\mathcal{A}$  pour  $\omega^* \in \mathcal{J}_p$ .*

*Démonstration.* Cette preuve s'appuie sur les calculs déjà faits dans la preuve de la proposition 1.9 du chapitre 1, qui sera donc souvent citée.

(i) De la même façon que dans le point (i) de la preuve de la proposition 1.9, on a les inégalités suivantes :

$$|\widetilde{\varphi}_n(r, \theta)| \lesssim 1 \quad \text{et} \quad |\text{grad } \widetilde{\varphi}_n(r, \theta)| \lesssim \frac{n}{r|\log(r)|}, \quad (3.38)$$

$$|\widetilde{p}_n(r, \theta)| \lesssim \frac{1}{r}, \quad |\widetilde{u}_n(r, \theta)| \lesssim \frac{1}{r}, \quad |\widetilde{v}_n(r, \theta)| \lesssim \frac{1}{r}, \quad (3.39)$$

$$|\widetilde{p}_n(r, \theta)| \lesssim \frac{n}{r|\log(r)|}, \quad |\widetilde{u}_n(r, \theta)| \lesssim \frac{n}{r|\log(r)|}, \quad |\widetilde{v}_n(r, \theta)| \lesssim \frac{n}{r|\log(r)|}. \quad (3.40)$$

(ii) Montrons que pour tout  $n$ ,  $X_n$  est bien dans  $D(\mathcal{A})$ . Les inégalités (3.38) et le support de  $\chi$  montrent que  $\varphi_n$  est dans  $H_0^1(\mathcal{C})$ . Les inégalités (3.40) montrent que  $p_n \in L^2(\mathcal{C})^2$ ,  $u_n \in L^2(\mathcal{N})^2$  et  $v_n \in L^2(\mathcal{N})^2$ . Reste à montrer que  $\text{div } p_n \in L^2(\mathcal{C})$ . On a  $\text{div } p_n = \chi \text{div } \widetilde{p}_n + \text{grad } \chi \cdot \widetilde{p}_n$ . Puisque  $\widetilde{p}_n \in L^2(\mathcal{C})^2$ , il suffit donc de montrer que  $\text{div } \widetilde{p}_n \in L^2(\mathcal{C})$ . Or,

$$\text{div } \widetilde{p}_n = \int_{\mathbb{R}} f_n(\eta) \frac{1}{\omega(\eta)} \text{div} \left( \frac{1}{\kappa_{\omega(\eta)}} \text{grad } \psi_{\omega(\eta)} \right) d\eta.$$

Ce terme est nul puisque  $\psi_{\omega(\eta)}$  est solution de (3.33). On a donc bien  $X_n \in D(\mathcal{A})$ .

(iii) Montrons maintenant que  $\|\mathcal{A}X_n - \omega^*X_n\|_{\mathcal{H}}$  est bornée. On a

$$\mathcal{A}X_n - \omega^*X_n = \begin{pmatrix} -\text{div } p_n - \omega^*\varphi_n \\ \text{grad } \varphi_n + \mathcal{R}^*v_n - \omega^*p_n \\ v_n - \omega^*u_n \\ \omega_p^2 \mathcal{R}p_n + \omega_r^2 u_n - i\gamma v_n - \omega^*v_n \end{pmatrix}.$$

On va maintenant montrer le caractère borné de chaque composante. Commençons par la première. Avec le calcul de  $\text{div } p_n$  fait en (i), il s'agit de montrer que  $\text{grad } \chi \cdot \widetilde{p}_n - \omega^*\varphi_n$  est bornée dans  $L^2(\mathcal{C})$ . Avec la première inégalité de (3.38),  $\omega^*\varphi_n$  est bornée dans  $L^2(\mathcal{C})$ . De plus, puisque  $\text{grad } \chi = 0$  dans  $B_{R_1}$ , avec (3.39),  $\text{grad } \chi \cdot \widetilde{p}_n$  est bornée dans  $L^2(\mathcal{C})$ .

Passons à la deuxième composante. Avec (3.37), cette composante vaut

$$\chi \int_{\mathbb{R}} f_n(\eta) \frac{\omega(\eta) - \omega^*}{\omega(\eta)\kappa_{\omega(\eta)}} \text{grad } \psi_{\omega(\eta)} d\eta.$$

Or,  $\eta \rightarrow \omega(\eta)\kappa_{\omega(\eta)}$  ne s'annule pas,  $\omega(\eta^*) = \omega^*$  et  $\eta \rightarrow \omega(\eta)$  et  $\eta \rightarrow \kappa_{\omega(\eta)}$  sont  $C^\infty$ . Il existe donc une fonction  $C^\infty$   $\tau_1$  telle que

$$\frac{\omega(\eta) - \omega^*}{\omega(\eta)\kappa_{\omega(\eta)}} = (\eta - \eta^*)\tau_1(\eta),$$

et on se ramène au calcul de  $I_n$  dans le point (iii) de la preuve de la proposition 1.9.

Les deux dernières composantes se traitent de manière similaire : en effet, en utilisant (3.37), la troisième et la quatrième composantes valent respectivement

$$\chi \int_{\mathbb{R}} f_n(\eta) \underbrace{\frac{1 - \kappa_{\omega(\eta)}}{\omega(\eta)\kappa_{\omega(\eta)}} (\omega(\eta) - \omega^*)}_{(\eta - \eta^*)\tau_2(\eta)} \text{grad } \psi_{\omega(\eta)} d\eta$$

et

$$\chi \int_{\mathbb{R}} f_n(\eta) \underbrace{\frac{1 - \kappa_{\omega(\eta)}}{\kappa_{\omega(\eta)}} (\omega(\eta) - \omega^*)}_{(\eta - \eta^*)\tau_3(\eta)} \operatorname{grad} \psi_{\omega(\eta)} d\eta$$

avec  $\tau_2$  et  $\tau_3 \in C^\infty$ .

(iv) Reste à montrer que  $\|X_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty$ . Commençons par voir que  $\|X_n\|_{\mathcal{H}} \geq \|p_n \cdot e_r\|_{L^2(B_{R_1})}$  où  $e_r$  est le vecteur unitaire radial des coordonnées polaires. Or, on a, puisque  $\chi = 1$  sur  $B_{R_1}$  :

$$p_n \cdot e_r = \int_{\mathbb{R}} f(n(\eta - \eta^*)) \frac{1}{\omega(\eta)\kappa_{\omega(\eta)}} \frac{i\eta}{r} r^{in} m_\eta(\theta) d\eta.$$

Avec le changement de variables  $\chi = n(\eta - \eta^*)$ , on a

$$p_n \cdot e_r = \frac{r^{in^*}}{r} \int_{\mathbb{R}} f(\chi) g\left(\eta^* + \frac{\chi}{n}, \theta\right) r^{in/n} d\chi \quad \text{avec} \quad g(\eta, \theta) := i\eta \frac{m_\eta(\theta)}{\omega(\eta)\kappa_{\omega(\eta)}}$$

et on revient sur le même calcul qu'au point (iv) de la proposition 1.9 : on obtient de même  $\|X_n\|_{\mathcal{H}} \gtrsim \sqrt{n}$  pour  $n$  assez grand.

Les points (iii) et (iv) montrent que  $\|\mathcal{A}X_n - \omega^*X_n\|_{\mathcal{H}}/\|X_n\|_{\mathcal{H}}$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini, ce qui implique que  $\omega^*$  est dans le spectre de l'opérateur  $\mathcal{A}$ .

(v) Dans la preuve de la proposition 1.9, on ne s'occupe pas de la convergence faible de la suite singulière, puisque tout point d'accumulation du spectre est directement dans le spectre essentiel de l'opérateur  $\mathbb{A}$ . Ici, on ne sait pas à ce stade si  $\sigma_{\text{ess},4}(\mathcal{A}) = \sigma_{\text{ess},1}(\mathcal{A})$ , il est donc nécessaire de montrer que  $X_n/\|X_n\|_{\mathcal{H}}$  tend faiblement vers 0 pour montrer que  $\omega^* \in \sigma_{\text{ess},4}(\mathcal{A})$ . Soit donc  $X' := (\varphi', p', u', v') \in \mathcal{D}(\mathcal{C}) \times \mathcal{D}(\mathcal{C})^2 \times \mathcal{D}(\mathcal{N})^2 \times \mathcal{D}(\mathcal{N})^2$ . On sait par le point (iv) que  $\|X_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty$ , il suffit donc de montrer que  $(X_n, X')_{\mathcal{H}}$  est bornée. Avec (3.37), on a

$$(X_n, X')_{\mathcal{H}} = (\widetilde{\varphi}_n \chi, \varphi')_{L^2(\mathcal{C})} + (\chi \widetilde{p}_n, p')_{L^2(\mathcal{C})^2} + \omega_p^{-2} \omega_f^2 (\chi \widetilde{u}_n, u')_{L^2(\mathcal{N})^2} + \omega_p^{-2} (\chi \widetilde{v}_n, v')_{L^2(\mathcal{N})^2}.$$

Tout d'abord, on a, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(\chi \widetilde{\varphi}_n, \varphi')_{L^2(\mathcal{C})}| \leq \|\chi \widetilde{\varphi}_n\|_{L^2(\mathcal{C})} \|\varphi'\|_{L^2(\mathcal{C})} \leq \|\widetilde{\varphi}_n\|_{L^2(\mathcal{C})} \|\varphi'\|_{L^2(\mathcal{C})} \lesssim 1,$$

la majoration de  $\|\widetilde{\varphi}_n\|_{L^2(\mathcal{C})}$  ayant été faite au point (i), et  $\varphi'$  étant dans  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ . Ensuite, avec (3.39), on a

$$\begin{aligned} |(\chi \widetilde{p}_n, p')_{L^2(\mathcal{C})^2}| &\lesssim \int_{r \in ]0, R[} \int_{\theta \in ]-\pi, \pi[} \frac{1}{r} |p'(r, \theta)| r d\theta dr \lesssim 1, \\ |(\chi \widetilde{u}_n, u')_{L^2(\mathcal{N})^2}| &\lesssim \int_{r \in ]0, R[} \int_{\theta \in ]-\alpha_p/2, \alpha_p/2[} \frac{1}{r} |u'(r, \theta)| r d\theta dr \lesssim 1, \\ |(\chi \widetilde{v}_n, v')_{L^2(\mathcal{N})^2}| &\lesssim \int_{r \in ]0, R[} \int_{\theta \in ]-\alpha_p/2, \alpha_p/2[} \frac{1}{r} |v'(r, \theta)| r d\theta dr \lesssim 1. \end{aligned}$$

Ainsi,  $(X_n, X')_{\mathcal{H}}$  est bornée, d'où  $X_n/\|X_n\|_{\mathcal{H}}$  tend faiblement vers 0. □

### 3.2.5 Preuve du théorème 3.5

On peut à présent réunir les résultats des précédents paragraphes. On a construit des suites de Weyl pour  $\omega_{-\infty}$  (proposition 3.9),  $\omega_{-1}$  (proposition 3.10), et  $\omega \in \mathcal{J}_p$  pour  $p = 1, \dots, P$  (proposition 3.12); pour  $\omega \in \mathcal{I}_q$  où  $q = 1, \dots, Q$ , voir remarque 3.11. De plus, la proposition 3.8 nous dit que 0 et  $\omega_0$  sont valeurs propres de multiplicité infinie de  $\mathcal{A}$ . Ainsi, tous ces points sont dans  $\sigma_{\text{ess},4}(\mathcal{A})$ . Notons

$$\sigma_{\text{all}} := \{0, \omega_0^\pm, \omega_{-1}^\pm, \omega_{-\infty}^\pm\} \cup \bigcup_{p=1, P} \overline{\mathcal{J}_p^\pm} \cup \bigcup_{q=1, Q} \overline{\mathcal{I}_q^\pm}.$$

Pour démontrer le théorème 3.5, il faut donc montrer qu'on a bien  $\sigma_{\text{all}} = \sigma_{\text{ess},4}$ , puis que  $\sigma_{\text{ess},4} = \sigma_{\text{ess},1}$ . Pour montrer ces deux résultats, on voudrait s'appuyer sur le problème non linéaire (3.4), c'est-à-dire relier les propriétés des opérateurs non bornés  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{S}_\omega$  défini pour tout  $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0, \omega_0^\pm\}$  par

$$D(\mathcal{S}_\omega) := \left\{ \varphi \in H_0^1(\mathcal{C}); \operatorname{div} \left( \frac{1}{\kappa_\omega} \operatorname{grad} \varphi \right) \in L^2(\mathcal{C}) \right\} \quad \text{et} \quad (3.41)$$

$$\mathcal{S}_\omega \varphi := -\operatorname{div} \left( \frac{1}{\omega \kappa_\omega} \operatorname{grad} \varphi \right) - \omega \varphi \quad \forall \varphi \in D(\mathcal{S}_\omega). \quad (3.42)$$

Malheureusement, le cadre fonctionnel de ces opérateurs n'est pas adapté pour faire ce lien. C'est pourquoi il faut d'abord introduire un nouveau cadre pour les problèmes non linéaire et augmenté, qui s'appuie sur la factorisation de Frobenius-Schur de manière similaire à l'annexe 1.A.

#### Factorisation de Frobenius-Schur

De même qu'en (1.35), on définit les espaces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2 &:= L^2(\mathcal{C})^2 \times L^2(\mathcal{N})^2 \times L^2(\mathcal{N})^2 \\ \mathcal{H}^1 &:= H_0^1(\mathcal{C}) \times \mathcal{L}^2 \\ \mathcal{H}^{-1} &:= H^{-1}(\mathcal{C}) \times \mathcal{L}^2 \end{aligned} \quad (3.43)$$

ainsi que l'opérateur  $\tilde{\mathcal{A}} : \mathcal{H}^1 \rightarrow \mathcal{H}^{-1}$  par

$$\tilde{\mathcal{A}} := \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & C \end{pmatrix} := \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & -\operatorname{div} & 0 & 0 \\ \operatorname{grad} & 0 & 0 & \mathcal{R}^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \omega_p^2 \mathcal{R} & \omega_r^2 & -i\gamma \end{array} \right) \quad (3.44)$$

où  $B : H_0^1(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{L}^2$ ,  $B^* : \mathcal{L}^2 \rightarrow H^{-1}(\mathcal{C})$  et  $C : \mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{L}^2$  sont des opérateurs bornés. Introduisons le complément de Schur de  $\tilde{\mathcal{A}}$

$$\tilde{\mathcal{S}}_\omega := A - \omega - B^*(C - \omega)^{-1}B.$$

On a

$$(C - \omega)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega \kappa_\omega} & \omega_r^2 \omega_p^{-2} \frac{\kappa_\omega^{\mathcal{N}} - 1}{\omega \kappa_\omega^{\mathcal{N}}} \mathcal{R}^* & \omega_p^{-2} \frac{\kappa_\omega^{\mathcal{N}} - 1}{\kappa_\omega^{\mathcal{N}}} \mathcal{R}^* \\ \frac{\kappa_\omega^{\mathcal{N}} - 1}{\omega \kappa_\omega^{\mathcal{N}}} \mathcal{R} & \omega_r^2 \omega_p^{-2} \frac{\kappa_\omega^{\mathcal{N}} - 1}{\omega \kappa_\omega^{\mathcal{N}}} - \frac{1}{\omega} & \omega_p^{-2} \frac{\kappa_\omega^{\mathcal{N}} - 1}{\kappa_\omega^{\mathcal{N}}} \\ \frac{\kappa_\omega^{\mathcal{N}} - 1}{\kappa_\omega^{\mathcal{N}}} \mathcal{R} & \omega_r^2 \omega_p^{-2} \frac{\kappa_\omega^{\mathcal{N}} - 1}{\kappa_\omega^{\mathcal{N}}} & \omega_p^{-2} \omega \frac{\kappa_\omega^{\mathcal{N}} - 1}{\kappa_\omega^{\mathcal{N}}} \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

On a donc, en remplaçant  $A$ ,  $B$ ,  $B^*$  et  $(C - \omega)^{-1}$  par leurs expressions :

$$\tilde{\mathcal{S}}_\omega \varphi = -\operatorname{div} \left( \frac{1}{\omega \kappa_\omega} \operatorname{grad} \varphi \right) - \omega \varphi, \quad (3.46)$$

qui est un opérateur borné de  $H_0^1(\mathcal{C})$  dans  $H^{-1}(\mathcal{C})$ . La factorisation de Frobenius-Schur s'écrit, pour  $\omega$  dans l'ensemble résolvant de  $C$  :

$$\tilde{\mathcal{A}} - \omega = \hat{\mathcal{T}}_\omega \mathcal{D}_\omega \check{\mathcal{T}}_\omega \quad \text{où}$$

$$\mathcal{D}_\omega := \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{S}}_\omega & 0 \\ 0 & C - \omega \end{pmatrix}, \quad \check{\mathcal{T}}_\omega := \begin{pmatrix} \text{I} & 0 \\ (C - \omega)^{-1} B & \text{I} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\mathcal{T}}_\omega := \begin{pmatrix} \text{I} & B^*(C - \omega)^{-1} \\ 0 & \text{I} \end{pmatrix}.$$

Avec (3.45),  $\omega$  est dans l'ensemble résolvant de  $(C - \omega)$  si et seulement si  $\omega \neq 0$  et  $\kappa_\omega^{\mathcal{N}} \neq 0$ , et on peut écrire

$$\check{\mathcal{T}}_\omega = \begin{pmatrix} \text{I} & 0 \\ \check{B}_\omega & \text{I} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \check{B}_\omega := - \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega \kappa_\omega} \\ \frac{1 - \kappa_\omega}{\omega \kappa_\omega} \mathcal{R} \\ \frac{1 - \kappa_\omega}{\kappa_\omega} \mathcal{R} \end{pmatrix} \operatorname{grad}. \quad (3.47)$$

On voit ainsi que  $\check{\mathcal{T}}_\omega$  est un automorphisme de  $\mathcal{H}^1$ , alors que  $\hat{\mathcal{T}}_\omega$  est un automorphisme de  $\mathcal{H}^{-1}$ . En notant  $\hat{B}_\omega := B^*(C - \omega)^{-1}$ , la factorisation de Frobenius-Schur permet d'écrire, pour  $\omega \neq 0$  et  $\kappa_\omega^{\mathcal{N}} \neq 0$  et pour tout  $(\varphi, U) := (\varphi, p, u, v) \in \mathcal{H}^1$  :

$$(\tilde{\mathcal{A}} - \omega) \begin{pmatrix} \varphi \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{S}}_\omega \varphi + \hat{B}_\omega (C - \omega) (\check{B}_\omega \varphi + U) \\ (C - \omega) (\check{B}_\omega \varphi + U) \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

En particulier :

$$(\tilde{\mathcal{A}} - \omega) \begin{pmatrix} \varphi \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \{U = -\check{B}_\omega \varphi \text{ et } \psi = \tilde{\mathcal{S}}_\omega \varphi\}. \quad (3.49)$$

Les définitions (3.14)-(3.17) et (3.41)-(3.42) de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{S}_\omega$  peuvent ainsi être reformulées en

$$\begin{aligned} \mathcal{A}X &= \tilde{\mathcal{A}}X \quad \forall X \in \operatorname{D}(\mathcal{A}) = \{X \in \mathcal{H}^1, \tilde{\mathcal{A}}X \in \mathcal{H}\}, \\ \mathcal{S}_\omega \varphi &= \tilde{\mathcal{S}}_\omega \varphi \quad \forall \varphi \in \operatorname{D}(\mathcal{S}_\omega) = \{\varphi \in H_0^1(\mathcal{C}), \tilde{\mathcal{S}}_\omega \varphi \in L^2(\mathcal{C})\}. \end{aligned}$$

On a alors, avec (3.49),

$$\varphi \in \operatorname{D}(\mathcal{S}_\omega) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varphi \\ -\check{B}_\omega \varphi \end{pmatrix} \in \operatorname{D}(\mathcal{A}) \quad (3.50)$$

ainsi que

$$\varphi \in \operatorname{Ker}(\mathcal{S}_\omega) = \operatorname{Ker}(\tilde{\mathcal{S}}_\omega) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varphi \\ -\check{B}_\omega \varphi \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A}) = \operatorname{Ker}(\tilde{\mathcal{A}}). \quad (3.51)$$

On reconnaît ici le procédé de linéarisation du problème (3.4) vu au paragraphe 3.1.2, puisque l'on a exclu les deux mêmes valeurs ( $\omega = 0$  et  $\kappa_\omega^{\mathcal{N}} = 0$ ) et l'expression de  $-\check{B}_\omega \varphi$  (donnée en (3.47)) correspond à la définition des variables augmentées (3.15). (3.51) montre l'égalité des spectres ponctuels de  $\mathcal{S}_\omega$  et de  $\mathcal{A}$ , où on définit celui de  $\mathcal{S}_\omega$  par

$$\sigma_p(\mathcal{S}_\omega) := \{\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0, \omega_0^\pm\}; \operatorname{Ker}(\mathcal{S}_\omega) \neq \{0\}\}.$$

En revanche, pour faire le lien entre le spectre essentiel de  $\mathcal{S}_\omega$  et celui de  $\mathcal{A}$ , on fait face aux mêmes difficultés que dans le cas du modèle de Drude non dissipatif (voir annexe 1.A), que l'on ne développera pas ici. Heureusement, ce lien n'est pas nécessaire à la démonstration du théorème 3.5.

**Preuve de  $\sigma_{\text{all}} = \sigma_{\text{ess},4}$**

Puisque le spectre essentiel est fermé, on a montré que  $\sigma_{\text{all}} \subset \sigma_{\text{ess},4}(\mathcal{A})$ . Il reste à vérifier qu'il n'y a aucun autre élément dans  $\sigma_{\text{ess},4}(\mathcal{A})$ , c'est-à-dire que  $\sigma_{\text{all}} \supset \sigma_{\text{ess},4}(\mathcal{A})$ . Pour cela, on rappelle qu'un point  $\omega$  n'est pas dans  $\sigma_{\text{ess},4}(\mathcal{A})$  si et seulement si  $\mathcal{A} - \omega\text{I}$  est un opérateur semi-Fredholm (c'est-à-dire d'image fermée et de noyau de dimension finie). On doit donc vérifier cette propriété pour tout  $\omega \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{all}}$ .

Pour cela, on va s'appuyer sur le complément de Schur  $\tilde{\mathcal{S}}_\omega$  défini en (3.46).

Le théorème 4.3 de [13] permet d'affirmer que

$$\begin{aligned} H_0^1(\mathcal{C}) &\longrightarrow H^{-1}(\mathcal{C}) \\ \varphi &\longmapsto -\operatorname{div} \left( \frac{1}{\omega \kappa_\omega} \operatorname{grad} \varphi \right) \end{aligned}$$

est Fredholm, donc semi-Fredholm, pour tout

$$\kappa := \frac{\omega \kappa_\omega^{\mathcal{N}}}{\omega} = \kappa_\omega^{\mathcal{N}} \in \mathbb{C} \setminus \left( \{0, -1\} \cup \bigcup_{p=1, P} \overline{\mathcal{K}_{\text{int}, p}} \cup \bigcup_{q=1, Q} \overline{\mathcal{K}_{\text{ext}, q}} \right),$$

ce qui correspond bien à  $\omega \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{all}}$ . L'inclusion  $H_0^1(\mathcal{C}) \subset L^2(\mathcal{C})$  étant compacte, c'est donc aussi le cas de  $\tilde{\mathcal{S}}_\omega$ . Il s'agit maintenant de montrer que le caractère semi-Fredholm de  $\tilde{\mathcal{S}}_\omega$  entraîne celui de  $\mathcal{A} - \omega\text{I}$ .

Commençons par remarquer que (3.51) montre que  $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \omega\text{I})$  est de dimension finie lorsque  $\operatorname{Ker}(\tilde{\mathcal{S}}_\omega)$  l'est. On peut conclure sur le caractère semi-Fredholm de  $(\mathcal{A} - \omega\text{I})$  grâce au lemme suivant.

**Lemme 3.13.** *Pour tout  $\omega \notin \{0, \omega_0^\pm\}$ , on a*

$$\operatorname{Ran}(\tilde{\mathcal{S}}_\omega) \text{ est fermé dans } H^{-1}(\mathcal{C}) \implies \operatorname{Ran}(\mathcal{A} - \omega\text{I}) \text{ est fermé dans } \mathcal{H}.$$

*Démonstration.* Supposons que  $\operatorname{Ran}(\tilde{\mathcal{S}}_\omega)$  soit fermé dans  $H^{-1}(\mathcal{C})$ . Soit une suite  $(X_n) := (\varphi_n, U_n) \in \operatorname{D}(\mathcal{A})^{\mathbb{N}}$  telle que  $Y_n := (\mathcal{A} - \omega)X_n$  converge dans  $\mathcal{H}$  vers un certain  $Y$ . On note  $Y_n = (\psi_n, V_n)$  et  $Y = (\psi, V)$ . L'inclusion  $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}^{-1}$  étant continue, puisque  $Y_n \rightarrow Y$  dans  $\mathcal{H}$ , on a donc aussi  $Y_n \rightarrow Y$  dans  $\mathcal{H}^{-1}$ . Avec (3.48), on a donc

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}_\omega \varphi_n + \hat{B}_\omega (C - \omega) (\check{B}_\omega \varphi_n + U_n) &\rightarrow \psi \text{ dans } H^{-1}(\mathcal{C}), \\ (C - \omega) (\check{B}_\omega \varphi_n + U_n) &\rightarrow V \text{ dans } \mathcal{L}^2. \end{aligned}$$

Puisque  $\hat{B}_\omega$  est continu de  $\mathcal{L}^2$  dans  $H^{-1}(\mathcal{C})$ , on en déduit que  $\tilde{\mathcal{S}}_\omega \varphi_n \rightarrow \psi - \hat{B}_\omega V$  dans  $H^{-1}(\mathcal{C})$ .  $\operatorname{Ran}(\tilde{\mathcal{S}}_\omega)$  étant fermé, il existe donc  $\varphi \in H_0^1(\mathcal{C})$  tel que  $\tilde{\mathcal{S}}_\omega \varphi = \psi - \hat{B}_\omega V$ . En posant  $U := (C - \omega)^{-1}V - \check{B}_\omega \varphi$  et  $X := (\varphi, U)$ , on a par construction  $(\tilde{\mathcal{A}} - \omega\text{I})X = Y$  où  $Y \in \mathcal{H}$ , d'où  $X \in \operatorname{D}(\mathcal{A})$  et  $(\mathcal{A} - \omega\text{I})X = Y$ , ce qui permet de conclure que  $\operatorname{Ran}(\mathcal{A} - \omega\text{I})$  est fermé.  $\square$

Ainsi,  $\mathcal{A} - \omega\text{I}$  est semi-Fredholm lorsque  $\tilde{\mathcal{S}}_\omega$  l'est.

On a donc bien  $\sigma_{\text{ess},4}(\mathcal{A}) = \sigma_{\text{all}}$ .

**Preuve de  $\sigma_{\text{ess},4} = \sigma_{\text{ess},1}$**

Maintenant que l'on connaît l'allure de  $\sigma_{\text{ess},4}(\mathcal{A})$ , montrons que ce dernier coïncide avec  $\sigma_{\text{ess},1}(\mathcal{A})$ . Pour cela, on utilise la proposition 3.3. L'opérateur  $\mathcal{A}$  est bien fermé à domaine dense d'après la proposition 3.2. De plus, en remarquant que  $\sigma_{\text{ess},4}(\mathcal{A}) \subset i\mathbb{R} \cup (-i\gamma + \mathbb{R})$  et qu'il est borné, on en déduit que  $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess},4}(\mathcal{A})$  est connexe : pour obtenir l'égalité des différentes définitions du spectre essentiel de l'opérateur  $\mathcal{A}$ , il suffit donc de montrer que l'ensemble résolvant de  $\mathcal{A}$  est non vide. Pour cela, on se sert à nouveau du complément de Schur  $\tilde{\mathcal{S}}_\omega$  grâce au lemme suivant.

**Lemme 3.14.** *Soit  $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0, \omega_0^\pm\}$ . Si  $\tilde{\mathcal{S}}_\omega : H_0^1(\mathcal{C}) \rightarrow H^{-1}(\mathcal{C})$  est inversible, alors  $\mathcal{A} - \omega I : D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{H}$  l'est aussi.*

*Démonstration.* Soit  $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0, \omega_0^\pm\}$ .

(i) Montrons tout d'abord que l'injectivité de  $\tilde{\mathcal{S}}_\omega$  entraîne celle de  $\mathcal{A} - \omega I$ . Supposons pour cela que  $\tilde{\mathcal{S}}_\omega$  est injectif, c'est-à-dire que  $\text{Ker}(\tilde{\mathcal{S}}_\omega) = \{0\}$ . Soit  $X := (\varphi, U) \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \omega I)$ . Alors on a  $(\tilde{\mathcal{A}} - \omega I)X = 0$ . Avec (3.49), on a donc  $\varphi \in \text{Ker}(\tilde{\mathcal{S}}_\omega)$  et  $U = -\tilde{B}_\omega \varphi$ , d'où  $\varphi = 0$ , puis  $U = 0$ . On a ainsi montré que  $\text{Ker}(\mathcal{A} - \omega I) = \{0\}$ .

(ii) Montrons maintenant que la surjectivité de  $\tilde{\mathcal{S}}_\omega$  entraîne celle de  $\mathcal{A} - \omega I$ . Supposons pour cela que  $\tilde{\mathcal{S}}_\omega$  est surjectif. Soit  $Y := (\psi, V) \in \mathcal{H}$ . Alors  $\psi - \hat{B}_\omega V \in H^{-1}(\mathcal{C})$ .  $\tilde{\mathcal{S}}_\omega$  étant surjectif, il existe  $\varphi \in H_0^1(\mathcal{C})$  tel que  $\tilde{\mathcal{S}}_\omega \varphi = \psi - \hat{B}_\omega V$ . Soit  $U := (C - \omega)^{-1}V - \tilde{B}_\omega \varphi$ . Alors  $X := (\varphi, U) \in \mathcal{H}^1$  et avec (3.48), on a  $(\tilde{\mathcal{A}} - \omega I)X = Y \in \mathcal{H}$ , d'où  $X \in D(\mathcal{A})$  et  $(\mathcal{A} - \omega I)X = Y \in \mathcal{H}$ . Ainsi,  $\mathcal{A} - \omega I$  est bien surjectif. □

Grâce au lemme 3.14, pour montrer que les différentes définitions du spectre essentiel de l'opérateur  $\mathbb{A}$  coïncident, il suffit donc de montrer qu'il existe une valeur de  $\omega$  dans  $\mathbb{C} \setminus \{0, \omega_0\}$  telle que  $\tilde{\mathcal{S}}_\omega$  est inversible, ce qui est équivalent à montrer qu'il existe  $\omega$  dans  $\mathbb{C} \setminus \{0, \omega_0\}$  telle que  $\omega \tilde{\mathcal{S}}_\omega$  est inversible.

Soit  $\mathbb{C} \setminus \{0, \omega_0\}$  et  $\psi \in H^{-1}(\mathcal{C})$ . Montrons qu'il existe un unique  $\varphi \in H_0^1(\mathcal{C})$  tel que  $\omega \tilde{\mathcal{S}}_\omega \varphi = \psi$ , c'est-à-dire tel que

$$-\text{div} \left( \frac{1}{\kappa_\omega} \text{grad } \varphi \right) - \omega^2 \varphi = \psi.$$

La formulation variationnelle de ce problème est

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \varphi \in H_0^1(\mathcal{C}) \text{ tel que} \\ &a(\varphi, \varphi') = b(\varphi') \quad \forall \varphi' \in H_0^1(\mathcal{C}) \end{aligned} \tag{3.52}$$

avec

$$\begin{aligned} a(\varphi, \varphi') &:= \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\kappa_\omega} \text{grad } \varphi \cdot \overline{\text{grad } \varphi'} - \omega^2 \int_{\mathcal{C}} \varphi \overline{\varphi'} \\ b(\varphi') &:= \langle \psi, \varphi' \rangle_{H^{-1}(\mathcal{C})}. \end{aligned}$$

Avec l'inégalité triangulaire et celle Cauchy-Schwarz dans  $L^2(\mathcal{C})^2$  et  $L^2(\mathcal{C})$ , on a

$$|a(\varphi, \varphi')| \leq \max \left( 1, \left| \frac{1}{\kappa_\omega} \right|, |\omega|^2 \right) \left( \|\text{grad } \varphi\|_{L^2(\mathcal{C})^2} \|\text{grad } \varphi'\|_{L^2(\mathcal{C})^2} + \|\varphi\|_{L^2(\mathcal{C})} \|\varphi'\|_{L^2(\mathcal{C})} \right)$$

puis, avec Cauchy Schwarz dans  $\mathbb{R}^2$  :

$$|a(\varphi, \varphi')| \leq \max \left( 1, \left| \frac{1}{\kappa_\omega} \right|, |\omega|^2 \right) \|\varphi\|_{H^1(\mathcal{C})} \|\varphi'\|_{H^1(\mathcal{C})}.$$



La forme sesquilinéaire  $a$  est donc continue.

De plus, on a

$$|b(\varphi')| \leq \|\psi\|_{H^{-1}(\mathcal{C})} \|\varphi'\|_{H^1(\mathcal{C})},$$

donc la forme linéaire  $b$  est continue.

Il reste à montrer la coercivité de  $a$ . Soit  $\omega = i\delta$  avec  $\delta > 0$ . Alors  $-\omega^2 \in \mathbb{R}^{+*}$  et

$$\frac{1}{\kappa_\omega^{\mathcal{N}}} = 1 - \frac{\omega_p^2}{-\delta^2 - \omega_r^2 - \gamma\delta} \in \mathbb{R}^{+*}.$$

On a donc

$$a(\varphi, \varphi) \geq \min\left(1, \frac{1}{\kappa_\omega^{\mathcal{N}}}, -\omega^2\right) \|\varphi\|_{H^1(\mathcal{C})}^2.$$

$a$  est donc coercive pour un tel  $\omega$  et le théorème de Lax Milgram permet d'affirmer que le problème (3.52) admet une unique solution.

Ainsi, pour  $\omega = i\delta$  avec  $\delta > 0$  et  $\omega \neq \omega_0$ ,  $\tilde{\mathcal{S}}_\omega$  est inversible, donc  $\mathcal{A} - \omega I$  aussi. L'ensemble résolvant de l'opérateur  $\mathcal{A}$  est bien non vide, et on a  $\sigma_{\text{ess},4}(\mathcal{A}) = \sigma_{\text{ess},1}(\mathcal{A})$ .

### 3.3 Modèle de Drude dissipatif

On va voir dans cette section que les résultats montrés pour le modèle de Lorentz sont similaires à ceux du modèle de Drude dissipatif. On peut d'ailleurs travailler dans un cadre fonctionnel très proche (et différent de celui du chapitre 1).

#### 3.3.1 Linéarisation du problème

##### Construction d'un problème augmenté linéaire

Dans le cas où  $\omega_r = 0$ , c'est-à-dire dans le cas du modèle de Drude (éventuellement dissipatif), on peut arrêter la linéarisation plus tôt que pour le modèle de Lorentz : en effet, on s'arrête à trois inconnues puisque l'équation (3.4) est équivalente à

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} p &= \omega \varphi & \text{dans } \mathcal{C} \\ \operatorname{grad} \varphi + \mathcal{R}^* v &= \omega p & \text{dans } \mathcal{C} \\ \omega_p^2 \mathcal{R} p - i\gamma v &= \omega v & \text{dans } \mathcal{N} \end{aligned} \quad (3.53)$$

ce qui correspond à un problème aux valeurs propres linéaire en  $\omega$  pour  $(\varphi, p, v)$ . On a vu dans le chapitre 1 que dans le cas du modèle de Drude non dissipatif ( $\omega_r = \gamma = 0$ ), deux inconnues étaient suffisantes pour obtenir un problème aux valeurs propres linéaire (en  $\omega^2$ ). Mais si on ajoute de la dissipation, on est obligé de considérer un problème aux valeurs propres en  $\omega$  et non en  $\omega^2$ . De plus, que le modèle de Drude soit dissipatif ou non, à partir du moment où l'on désire un problème en  $\omega$  et non en  $\omega^2$ , trois inconnues sont nécessaires, on ne peut pas faire mieux.

Dans la suite, toutes les démonstrations peuvent être similaires à celles du modèle de Lorentz : il suffit de leur retirer la variable  $u$ .

Ainsi, dans le cas du modèle de Drude (dissipatif ou non), si  $\omega \neq 0$  et  $\kappa_\omega^{\mathcal{N}} \neq 0$  alors une fonction  $\varphi \in H_0^1(\mathcal{C})$  est solution de (3.4) si et seulement si  $(\varphi, p, v) \in H_0^1(\mathcal{C}) \times L^2(\mathcal{C})^2 \times L^2(\mathcal{N})^2$  vérifie

$$\mathcal{A}_D \begin{pmatrix} \varphi \\ p \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{div} & 0 \\ \operatorname{grad} & 0 & \mathcal{R}^* \\ 0 & \omega_p^2 \mathcal{R} & -i\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ p \\ v \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \varphi \\ p \\ v \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Pour l'étude de l'opérateur  $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ , on peut considérer l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H}_{\mathcal{D}} := L^2(\mathcal{C}) \times L^2(\mathcal{C})^2 \times L^2(\mathcal{N})^2$$

muni du produit scalaire défini par, pour tous  $X := (\varphi, p, v)^T$  et  $X' := (\varphi', p', v')^T$  :

$$(X, X')_{\mathcal{H}} := (\varphi, \varphi')_{\mathcal{C}} + (p, p')_{\mathcal{C}} + \omega_{\text{p}}^{-2}(v, v')_{\mathcal{N}}. \quad (3.55)$$

L'opérateur  $\mathcal{A}_{\mathcal{D}} : D(\mathcal{A}_{\mathcal{D}}) \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{D}}$  défini par (3.54), où

$$D(\mathcal{A}_{\mathcal{D}}) := H_0^1(\mathcal{C}) \times H(\text{div}; \mathcal{C}) \times L^2(\mathcal{N})^2, \quad (3.56)$$

est fermé. De plus, il est autoadjoint si  $\gamma = 0$  (même preuve que pour Lorentz en retirant la variable  $u$ ).

De plus, en retirant de même la variable  $u$  de la démonstration, on obtient le résultat de symétrie pour le spectre de l'opérateur  $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$  : il est lui-aussi symétrique par rapport à l'axe imaginaire.

**Remarque 3.15.** *Dans le chapitre 1 sur le modèle de Drude non dissipatif, on travaille en  $\lambda = \omega^2$ , on obtient donc les  $\omega$  correspondant à du spectre essentiel de l'opérateur  $\mathbb{A}$  comme étant les  $\pm\sqrt{\lambda}$  pour  $\lambda \in \sigma_{\text{ess},4}(\mathbb{A})$ , et on peut retrouver ainsi la symétrie en  $\omega$ .*

### Factorisation de Frobenius-Schur

Tous les résultats obtenus dans le cadre du modèle de Lorentz restent valables, il suffit pour cela de changer les expressions de  $B$ ,  $B^*$  et  $C$  avec ces nouvelles définitions :

$$\tilde{\mathcal{A}}^{\mathcal{D}} := \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & C \end{pmatrix} := \left( \begin{array}{c|cc} 0 & -\text{div} & 0 \\ \text{grad} & 0 & \mathcal{R}^* \\ 0 & \omega_{\text{p}}^2 \mathcal{R} & -i\gamma \end{array} \right). \quad (3.57)$$

Le complément de Schur reste celui qui est défini en (3.46), et tous les calculs et démonstrations restent identiques.

### 3.3.2 Résultats sur le spectre

Les résultats sur le spectre pour le modèle de Drude dissipatif sont les mêmes que ceux du modèle de Lorentz en terme de contraste. Comme pour le modèle de Lorentz, on peut facilement résoudre l'équation  $\kappa_{\omega} = \kappa$  d'inconnue  $\omega$ , ce qui conduit à noter

$$\omega_{\kappa}^{\mathcal{D}\pm} := \begin{cases} \frac{-i\gamma \pm \sqrt{4\omega_{\text{p}}^2/(1-\kappa) - \gamma^2}}{2} & \text{si } \kappa > 1 - 4\frac{\omega_{\text{p}}^2}{\gamma^2} \\ \frac{-i\gamma \pm i\sqrt{\gamma^2 - 4\omega_{\text{p}}^2/(1-\kappa)}}{2} & \text{si } \kappa < 1 - 4\frac{\omega_{\text{p}}^2}{\gamma^2} \end{cases} \quad (3.58)$$

qui n'est ni plus ni moins que  $\omega_{\kappa}$  défini en (3.28) où l'on a pris  $\omega_{\text{r}} = 0$ . Pour un  $\kappa$  donné,  $\omega_{\kappa}$  est dans le spectre essentiel de  $\mathcal{A}$  (modèle de Lorentz) si et seulement si  $\omega_{\kappa}^{\mathcal{D}}$  est dans le spectre essentiel de  $\mathcal{A}^{\mathcal{D}}$  (modèle de Drude). En effet, toutes les démonstrations restent valables en retirant la variable  $u$ . De même que pour le modèle de Lorentz, le spectre essentiel se retrouve soit sur la droite  $\Im m(z) = -\gamma/2$ , soit sur l'axe imaginaire, selon les valeurs des paramètres  $\omega_{\text{p}}$  et  $\gamma$ . D'ailleurs, le contraste  $\kappa = -\infty$  donne toujours lieu à deux valeurs de  $\omega$  sur l'axe imaginaire : 0 et  $-i\gamma$ .

On peut définir pour les sommets intérieurs  $C_p : \mathcal{J}_p^{\pm} := \{\omega_{\kappa}^{\mathcal{D}\pm}, \kappa \in \mathcal{K}_{\text{int}}(\alpha_p)\}$  où  $\mathcal{K}_{\text{int}}(\alpha_p)$  est défini en (3.29), et pour les sommets extérieurs  $B_q : \mathcal{I}_q^{\pm} := \{\omega_{\kappa}^{\mathcal{D}\pm}, \kappa \in \mathcal{K}_{\text{ext}}(\beta_q, \nu_q)\}$  où  $\mathcal{K}_{\text{ext}}(\beta_q, \nu_q)$  est défini en (3.30).

On a donc le résultat suivant :

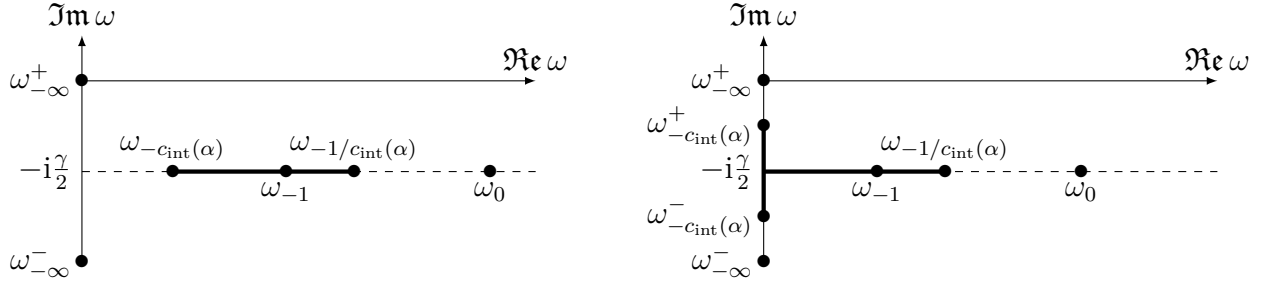


FIGURE 3.7 – Spectre essentiel d'une cavité contenant un seul sommet : un sommet intérieur d'angle  $\alpha$ . Ici, on ne trace que la partie de partie réelle positive, le reste pouvant être déduit d'une symétrie par rapport à l'axe imaginaire. A gauche, le cas où tout l'intervalle de spectre essentiel est inclus dans  $\mathbb{R} - i\gamma/2$ ; à droite : le cas où une partie de l'intervalle de spectre essentiel est sur  $i\mathbb{R}$ .

**Théorème 3.16.** *Supposons que  $\mathcal{N} \neq \emptyset$  et que  $\mathcal{V} \neq \emptyset$ . Alors le spectre essentiel  $\sigma_{\text{ess},4}(\mathcal{A}^{\mathcal{D}})$  de l'opérateur  $\mathcal{A}^{\mathcal{D}}$  est donné par*

$$\{0 = \omega_{-\infty}^+, \omega_0^{\pm}, \omega_{-1}^{\pm}, \omega_{-\infty}^-\} \cup \bigcup_{p=1,P} \overline{\mathcal{J}_p^{\pm}} \cup \bigcup_{q=1,Q} \overline{\mathcal{I}_q^{\pm}}.$$

et

$$\sigma_{\text{ess},1}(\mathcal{A}^{\mathcal{D}}) = \sigma_{\text{ess},2}(\mathcal{A}^{\mathcal{D}}) = \sigma_{\text{ess},3}(\mathcal{A}^{\mathcal{D}}) = \sigma_{\text{ess},4}(\mathcal{A}^{\mathcal{D}}).$$

### 3.A Annexe : Un résultat d'analyse complexe

**Lemme 3.17.** *Soit  $f$  méromorphe sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$ , et  $z_0$  un pôle de  $f$ . Alors il existe un voisinage  $V$  de  $z_0$  et  $r > 0$  tels que  $f(V \setminus \{z_0\}) = \{z \in \mathbb{C}, |z| > r\}$ . De plus, on peut choisir  $V$  tel que le seul pôle de  $f$  dans  $\overline{V}$  soit  $z_0$ .*

*Démonstration.* Soit  $n$  l'ordre de 0 en tant que pôle de  $f$ . Alors on peut choisir un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$  contenant  $z_0$  tel que  $\overline{U}$  ne contient aucun autre pôle de  $f$  et aucun zéro de  $f$ . Il existe alors  $h$  holomorphe sur  $U$  ne s'annulant pas sur  $U$  telle que

$$\forall z \in U \setminus \{z_0\}, f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^n}.$$

Considérons la fonction  $g$  définie sur  $U$  par

$$g(z) := \begin{cases} \frac{(z - z_0)^n}{h(z)} & \text{si } z \neq z_0, \\ 0 & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

Alors  $g$  est holomorphe sur  $U$  et

$$\forall z \in U \setminus \{z_0\} : g(z) \neq 0. \quad (3.59)$$

$g$  étant holomorphe et non constante sur  $U$ , le théorème de l'application ouverte permet d'affirmer que  $g(U)$  est ouvert, et que par conséquent il existe  $R > 0$  tel que  $B(0, R) \subset g(U)$ .

Soit  $V := g^{-1}(B(0, R))$ . On a par construction  $g(V) = B(0, R)$ . De plus,  $g(z_0) = 0 \in B(0, R)$  donc  $z_0 \in V$ . Donc, avec (3.59), on a

$$g(V \setminus \{z_0\}) = B(0, R) \setminus \{0\}.$$

On a donc

$$f(V \setminus \{z_0\}) = \frac{1}{g(V \setminus \{z_0\})} = \left\{ z \in \mathbb{C}, |z| > \frac{1}{R} \right\}.$$

On a ainsi le résultat escompté en posant  $r := 1/R$  (0 est bien le seul pôle de  $f$  dans  $\bar{V}$  car  $V \subset U$ ). □

**Proposition 3.18.** *Soit  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  une suite dont le module tend vers  $+\infty$ , et  $f$  une fonction méromorphe sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$  ayant un pôle en  $z_\infty \in \Omega$ . Alors il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  et une suite  $(z_n)_{n \geq n_0} \in \Omega^{\mathbb{N}}$  qui tend vers  $z_\infty$  tels que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $f(z_n) = \lambda_n$ .*

*Démonstration.* Avec le lemme 3.17, il existe un voisinage  $V \subset \Omega$  de  $z_\infty$  et  $r > 0$  tels que  $f(V \setminus \{z_0\}) = \{z \in \mathbb{C}, |z| > r\}$ . De plus, on peut choisir  $V$  afin que le seul pôle de  $f$  dans  $\bar{V}$  soit  $z_\infty$ .

Or,  $|\lambda_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  donc il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $|\lambda_n| > r$ .

Donc, pour  $n \geq n_0$ , il existe  $z_n \in V$  tel que  $f(z_n) = \lambda_n$ .

De plus, puisque  $z_\infty$  est le seul pôle de  $f$  dans  $\bar{V}$  et  $|f(z_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ , on a forcément  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_\infty$ . □

## 3.B Deux opérateurs fermés

Notons

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 : \quad H_0^1(\mathcal{C}) \subset L^2(\mathcal{C}) &\longrightarrow L^2(\mathcal{C})^2 \\ \varphi &\longmapsto \text{grad } \varphi \end{aligned} \tag{3.60}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2 : \quad H(\text{div}, \mathcal{C}) \subset L^2(\mathcal{C})^2 &\longrightarrow L^2(\mathcal{C}) \\ p &\longmapsto \text{div } p \end{aligned} \tag{3.61}$$

**Proposition 3.19.** *Les opérateurs  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  sont fermés.*

*Démonstration.* Commençons par  $\mathcal{B}_1$ . Soit  $(\varphi_n) \in H_0^1(\mathcal{C})^{\mathbb{N}}$ ,  $\varphi$  et  $V$  tels que  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  dans  $L^2(\mathcal{C})$  et  $\mathcal{B}_1 \varphi_n \rightarrow V$  dans  $L^2(\mathcal{C})^2$ .

Puisque  $(\varphi_n)$  et  $(\text{grad } \varphi_n)$  convergent respectivement dans  $L^2(\mathcal{C})$  et  $L^2(\mathcal{C})^2$ , elles sont de Cauchy. On en déduit que  $(\varphi_n)$  est de Cauchy dans  $H^1(\mathcal{C})$ , qui est complet. Donc  $(\varphi_n)$  converge dans  $H^1(\mathcal{C})$  vers un certain  $\psi$ .

Or,  $\|\varphi_n - \psi\|_{L^2(\mathcal{C})} \leq \|\varphi_n - \psi\|_{H^1(\mathcal{C})} \rightarrow 0$ , donc  $\varphi = \psi \in H^1(\mathcal{C})$ .

De plus,  $\|\text{grad } \varphi_n - \text{grad } \psi\|_{L^2(\mathcal{C})^2} \leq \|\varphi_n - \psi\|_{H^1(\mathcal{C})} \rightarrow 0$ , donc  $\text{grad } \psi = V$ . Mais  $\varphi = \psi$  donc  $V = \text{grad } \varphi$ .

Enfin, on a  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  dans  $H^1(\mathcal{C})$  et pour tout  $n : \text{Tr} \varphi_n = 0$ . Donc, par continuité de la trace (de  $H^1(\mathcal{C})$  dans  $L^2(\partial \mathcal{C})$ ),  $\text{Tr} \varphi = 0$ .

Ainsi,  $\varphi \in H_0^1(\mathcal{C})$  et  $\mathcal{B}_1 \varphi = V$ .

Passons à  $\mathcal{B}_2$ . Soit  $(p_n) \in H(\text{div}; \mathcal{C})^{\mathbb{N}}$ ,  $p$  et  $f$  tels que  $p_n \rightarrow p$  dans  $L^2(\mathcal{C})^2$  et  $\mathcal{B}_2 p_n \rightarrow f$  dans  $L^2(\mathcal{C})$ .

La même méthode que pour  $\mathcal{B}_1$  s'applique :  $(p_n)$  et  $(\operatorname{div} p_n)$  convergent respectivement dans  $L^2(\mathcal{C})^2$  et  $L^2(\mathcal{C})$ , donc sont de Cauchy. On en déduit que  $(p_n)$  est de Cauchy dans  $H(\operatorname{div}; \mathcal{C})$ , qui est complet, donc  $(p_n)$  converge dans  $H(\operatorname{div}; \mathcal{C})$  vers un certain  $q$ .

De même que pour  $\mathcal{B}_1$ , on en déduit la convergence de  $(p_n)$  vers  $q$  et de  $(\operatorname{div} p_n)$  vers  $\operatorname{div} q$  respectivement dans  $L^2(\mathcal{C})^2$  et  $L^2(\mathcal{C})$ , d'où  $q = p$  et  $\operatorname{div} p = \operatorname{div} q = f$ .

Ainsi,  $p \in H(\operatorname{div}; \mathcal{C})$  et  $\mathcal{B}_2 p = f$ .

□

# Chapitre 4

## Interfaces courbes

Dans le chapitre 1, on a étudié le spectre d'une cavité polygonale. Notamment, on a vu qu'une portion d'interface rectiligne entre le vide et le matériau négatif donnait lieu à des ondes de surface localisées au voisinage de n'importe quel point de cette portion rectiligne, ces ondes étant associées à un contraste  $-1$  des perméabilités magnétiques. L'aspect rectiligne de l'interface était nécessaire à la construction des suites singulières qui permettent de prouver ce résultat. Le but de ce chapitre est de l'étendre à une interface courbe suffisamment régulière : on traite ici le cas d'une inclusion de matériau négatif dans du vide, sans coin dans l'interface.

Dans la section 4.1, on rappelle le problème étudié, qui est le même que dans le chapitre 1 (seule la géométrie de la cavité change), afin de présenter le résultat principal de ce chapitre. La section 4.2 montre comment on peut construire des ondes de surface dans cette nouvelle géométrie. Enfin, la section 4.3 présente la construction d'une suite de Weyl dans ce nouveau cas.

### 4.1 Présentation du problème

Le but est d'étudier les propriétés spectrales d'une inclusion de matériau négatif dans du vide, dans le cas où l'interface est régulière, mais pas forcément rectiligne. On considère une cavité  $\mathcal{C}$  (ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ ), un domaine ouvert  $\mathcal{N}$  strictement inclus dans  $\mathcal{C}$  (i.e. tel que  $\overline{\mathcal{N}} \subset \mathcal{C}$ ) et un milieu  $\mathcal{V} := \mathcal{C} \setminus \overline{\mathcal{N}}$  (voir figure 4.1).  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{V}$  sont respectivement constitués de matériau négatif et de vide. On note  $\Sigma := \partial\mathcal{N}$  l'interface entre  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{V}$ . Ici, pour des raisons qui apparaîtront plus clairement dans les démonstrations, on suppose que l'interface est de classe  $\mathcal{C}^3$ .

On remarque que par rapport au chapitre 1, on autorise la partie régulière de l'interface à être courbe, mais on ne traite pas le cas des coins.

On considère le même modèle de matériau négatif qu'au chapitre 1, c'est-à-dire le modèle de Drude non dissipatif, c'est pourquoi on considère à nouveau les fonctions constantes par morceaux suivantes pour la permittivité électrique et la perméabilité magnétique dans la cavité :

$$\varepsilon_\lambda(x) := \varepsilon_0 \left( 1 - \mathbf{1}_{\mathcal{N}}(x) \frac{\Lambda_e}{\lambda} \right) \quad \text{et} \quad \mu_\lambda(x) := \mu_0 \left( 1 - \mathbf{1}_{\mathcal{N}}(x) \frac{\Lambda_m}{\lambda} \right)$$

pour  $x \in \mathcal{C}$ , où  $\mathbf{1}_{\mathcal{N}}$  est la fonction indicatrice de  $\mathcal{N}$ . Le point de départ de notre étude reste le problème suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \lambda \in \mathbb{C} \text{ et } \varphi \in H_0^1(\mathcal{C}) \text{ non nulle tels que} \\ &\operatorname{div} \left( \frac{1}{\mu_\lambda} \operatorname{grad} \varphi \right) + \lambda \varepsilon_\lambda \varphi = 0 \quad \text{dans } \mathcal{C}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

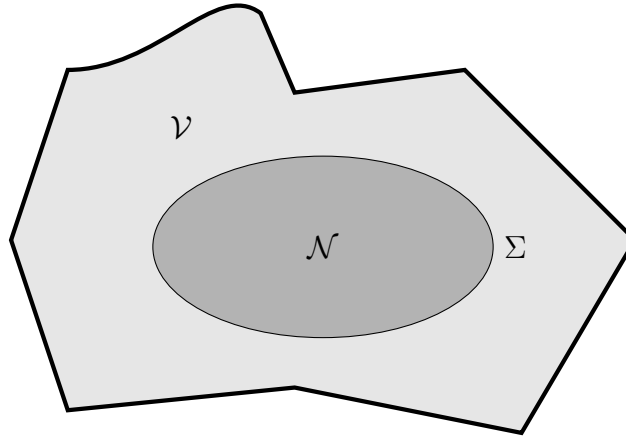


FIGURE 4.1 – Cavité  $\mathcal{C}$  composée de vide  $\mathcal{V}$  avec une inclusion de matériau négatif  $\mathcal{N}$  s epar es par une frontière  $\Sigma$ .

On rappelle que ce problème est non linéaire en  $\lambda$ , mais qu'on peut construire un problème augmenté équivalent (pour  $\lambda \neq \Lambda_m$ ) :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \lambda \in \mathbb{C} \text{ et } (\varphi, u) \in H_0^1(\mathcal{C}) \times L^2(\mathcal{N})^2 \text{ non nul tels que} \\ &\mathbb{A} \begin{pmatrix} \varphi \\ u \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \varphi \\ u \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.2)$$

où

$$\mathbb{A} \begin{pmatrix} \varphi \\ u \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{-1}{\varepsilon_0 \mu_0} \operatorname{div} \{ \operatorname{grad} \varphi + \mathcal{R}^* u \} + \mathbf{1}_{\mathcal{N}} \Lambda_e \varphi \\ \Lambda_m \mathcal{R} \operatorname{grad} \varphi + \Lambda_m u \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Pour rappel, on se place dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} := L^2(\mathcal{C}) \times L^2(\mathcal{N})^2$  muni du produit scalaire

$$\left( (\varphi, u), (\varphi', u') \right)_{\mathcal{H}} := \varepsilon_0 \mu_0 \int_{\mathcal{C}} \varphi(x) \overline{\varphi'(x)} dx + \frac{1}{\Lambda_m} \int_{\mathcal{N}} u(x) \cdot \overline{u'(x)} dx \quad (4.4)$$

et le domaine de l'opérateur  $\mathbb{A}$  est donn e par

$$D(\mathbb{A}) := \left\{ (\varphi, u) \in H_0^1(\mathcal{C}) \times L^2(\mathcal{N})^2; \operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi + \mathcal{R}^* u) \in L^2(\mathcal{C}) \right\}. \quad (4.5)$$

On rappelle que cet opérateur est autoadjoint et positif (d'après la proposition 1.1).

Le but de ce chapitre est de montrer le résultat suivant :

**Théorème 4.1.** *Le spectre essentiel de l'opérateur  $\mathbb{A}$  est*

$$\sigma_{ess}(\mathbb{A}) = \left\{ 0, \frac{\Lambda_m}{2}, \Lambda_m \right\}.$$

Pour démontrer ce théorème, une bonne partie du travail a déjà été fait. En effet, la démarche suivie dans les paragraphes 1.3.1 et 1.3.2 reste valable pour la géométrie consid eree dans ce chapitre. Ainsi, les propositions 1.3 et 1.5 nous disent que 0 et  $\Lambda_m$  font partie du spectre essentiel de  $\mathbb{A}$ . En revanche, le raisonnement du paragraphe 1.3.3 utilise de façon cruciale le fait que les deux milieux  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{N}$  sont polygonaux. Plus précisément, ce raisonnement pourrait être r eutilis e si l'on supposait que l'interface  $\Sigma$  contient une partie rectiligne. Que dire du cas général d'une

interface courbe quelconque ? C'est précisément l'objet de ce chapitre où nous allons voir que  $\Lambda_m/2$  appartient encore au spectre essentiel pour une interface  $\mathcal{C}^3$ .

Pour conclure, il reste à vérifier qu'aucun autre point n'est dans le spectre essentiel. Et là encore tout a déjà été fait. La démarche du paragraphe 1.3.6 s'applique encore ici. En effet, celle-ci repose sur le théorème 4.3 de [13] qui est vrai pour une interface  $\mathcal{C}^1$ .

Ainsi, le reste de ce chapitre est destiné à montrer que la valeur  $\Lambda_m/2$ , associée au contraste  $\mu_\lambda^N/\mu_0 = -1$ , appartient au spectre essentiel, en construisant encore des suites de Weyl pour cette valeur particulière.

## 4.2 Ondes de surface

Dans le paragraphe 1.3.3, la construction d'une suite de Weyl reposait sur la connaissance explicite d'*ondes de surface*, souvent appelées *plasmons de surface*, qui sont des ondes hautement oscillantes et localisées près de l'interface. Plus précisément, nous avons utilisé une suite de fonction  $\psi_n$  représentant des ondes de surface de plus en plus oscillantes et de plus en plus localisées au voisinage d'un point  $M_0$  situé sur une partie rectiligne de l'interface  $\Sigma$ . Ces fonctions ne sont pas exactement des solutions de notre équation (4.1) pour  $\lambda = \Lambda_m/2$ , mais de l'équation "simplifiée"

$$\operatorname{div} \left( \frac{1}{\mu_{\Lambda_m/2}} \operatorname{grad} \psi_n \right) = 0 \quad (4.6)$$

considérée dans un voisinage de  $M_0$ .

Pour traiter le cas de frontières courbes, il semblait assez naturel de réutiliser ces mêmes fonctions pour construire une suite de Weyl. En effet, les  $\psi_n$  étant de plus en plus localisées au voisinage d'un point, on peut s'attendre à ce que l'effet de la courbure soit de moins en moins visible : la courbe vue au microscope est bien peu différente de sa tangente. Malheureusement, l'intuition était fautive, comme nous le verrons plus loin (voir la fin du §4.3). La courbure semble en réalité jouer un rôle essentiel pour ces ondes de surface.

La bonne nouvelle est que nous sommes encore capables de construire explicitement des solutions de notre équation "simplifiée" (4.6) à condition de supposer que *la courbure est constante* sur une portion de l'interface  $\Sigma$ . Ces solutions, qui généralisent celles que nous avons construites dans le paragraphe 1.3.3 pour une portion d'interface rectiligne, nous permettront d'obtenir une suite de Weyl pour une interface quelconque (de courbure variable, supposée  $\mathcal{C}^1$ ).

Pour ce faire, nous allons commencer par introduire un système de coordonnées curvilignes locales pour une courbure variable et nous verrons ensuite comment exprimer les ondes de surfaces dans ce système de coordonnées lorsque la courbure est constante.

### 4.2.1 Coordonnées curvilignes locales

Soit  $M_0$  un point fixé de l'interface  $\Sigma$ . On suppose que dans un voisinage de  $M_0$ , l'interface  $\Sigma$  est représentée par une courbe paramétrée

$$]-l, +l[ \ni s \longmapsto M(s) \in \mathbb{R}^2,$$

où  $s$  désigne l'abscisse curviligne le long de  $\Sigma$  (comptée à partir de  $M_0 = M(0)$ ). On note  $\tau(s)$  et  $\nu(s)$  les vecteurs unitaires respectivement tangent et normal à  $\Sigma$  en  $M(s)$ , le second étant déduit du premier par une rotation d'angle  $+\pi/2$ , soit

$$\tau(s) = (\tau_1(s), \tau_2(s)) := \frac{dM(s)}{ds} \quad \text{et} \quad \nu(s) = (\nu_1(s), \nu_2(s)) := (-\tau_2(s), \tau_1(s)).$$



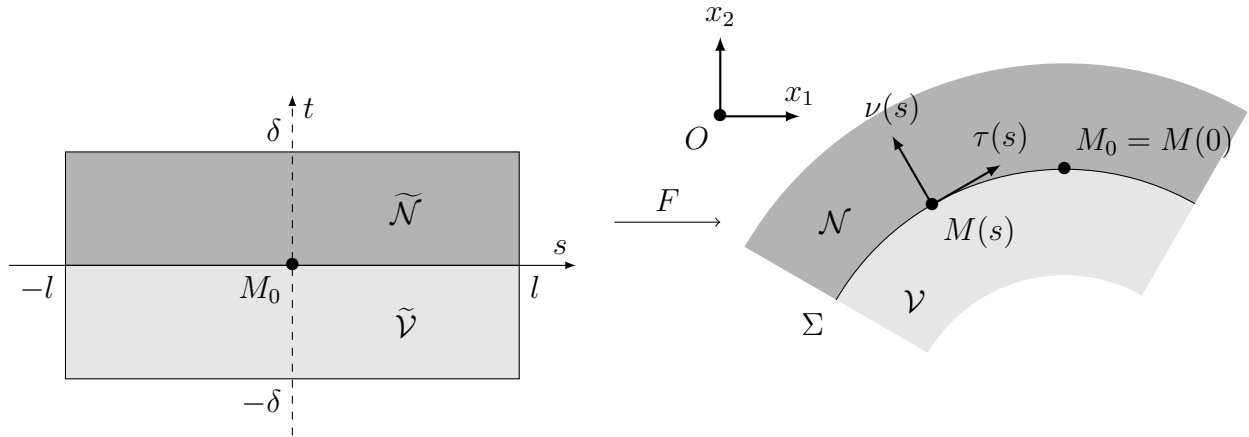


FIGURE 4.2 – A gauche : le rectangle  $\tilde{\mathcal{C}}$ . A droite : le voisinage tubulaire  $F(\tilde{\mathcal{C}})$  du point  $M_0$ .

On suppose pour fixer les idées que l'orientation de  $s$  est choisie de sorte que la normale  $\nu(s)$  soit dirigée vers  $\mathcal{N}$ , autrement dit, pointe dans la direction du matériau de Drude (voir figure 4.2). La courbure  $\kappa(s)$  en  $M(s)$  est définie par la relation

$$\frac{d\tau(s)}{ds} =: \kappa(s) \nu(s) \quad \text{ou, de manière équivalente,} \quad \frac{d\nu(s)}{ds} =: -\kappa(s) \tau(s).$$

On considère alors la transformation  $F$  définie par

$$F : \begin{array}{ccc} ]-l, +l[ \times ]-\delta, +\delta[ & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (s, t) & \longmapsto & M(s) + t \nu(s), \end{array} \quad (4.7)$$

où l'on suppose que  $l$  et  $\delta$  sont choisis assez petits de sorte que l'image par  $F$  du rectangle

$$\tilde{\mathcal{C}} := ]-l, +l[ \times ]-\delta, +\delta[$$

soit bien contenue dans la cavité  $\mathcal{C}$ . L'image de ce rectangle constitue un voisinage tubulaire de  $M_0$  (voir figure 4.2). Compte tenu des définitions ci-dessus, la matrice jacobienne de  $F$  dans la base  $(\tau(s), \nu(s))$  est donnée par

$$\mathbb{J}(s, t) := \begin{pmatrix} 1 - t \kappa(s) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Son déterminant est

$$\det \mathbb{J}(s, t) = 1 - t \kappa(s).$$

En plus de l'hypothèse ci-dessus pour  $\delta$ , nous supposons que

$$\delta \leq \frac{1}{2} \left( \sup_{s \in ]-l, +l[} |\kappa(s)| \right)^{-1},$$

de sorte que

$$\frac{1}{2} \leq 1 - t \kappa(s) \leq \frac{3}{2}, \quad \forall (s, t) \in \tilde{\mathcal{C}}. \quad (4.9)$$

Ainsi  $\det \mathbb{J}(s, t)$  ne s'annule pas dans  $\tilde{\mathcal{C}}$ , ce qui montre que  $F$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme local au voisinage de  $M_0$ . Quitte à considérer un rectangle plus petit inclus dans ce voisinage, on peut supposer que  $F$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme sur  $\tilde{\mathcal{C}}$ . Les calculs qui vont suivre reposent sur ce

changement de variable. Nous allons commencer par rassembler quelques propriétés élémentaires relatives à ce changement de variable qui nous seront très utiles. Nous noterons

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{N}} &:= ]-l, +l[ \times ]0, +\delta[ \quad \text{et} \\ \widetilde{\mathcal{V}} &:= ]-l, +l[ \times ]-\delta, 0[.\end{aligned}$$

Ainsi le voisinage tubulaire  $F(\widetilde{\mathcal{C}}) \subset \mathcal{C}$  de  $M_0$  se divise en deux parties  $F(\widetilde{\mathcal{N}})$  et  $F(\widetilde{\mathcal{V}})$  composées respectivement de matériau négatif et de vide.

### 4.2.2 Changement de variable

Pour toute fonction  $X : F(\widetilde{\mathcal{C}}) \rightarrow \mathbb{C}^d$  (avec  $d \geq 1$ ), on note  $\widetilde{X}$  la fonction

$$\widetilde{X} := X \circ F : \widetilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbb{C}^d.$$

Les notations  $\widetilde{\text{grad}}$  et  $\widetilde{\text{div}}$  désignent respectivement le gradient et la divergence par rapport aux variables  $(s, t)$ . On a les propriétés suivantes, valables pour un changement de variable quelconque :

$$\widetilde{\text{grad}} \varphi = \mathbb{J}^{-t} \widetilde{\text{grad}} \widetilde{\varphi}, \quad (4.10)$$

$$\widetilde{\text{div}} U = |\det \mathbb{J}|^{-1} \widetilde{\text{div}} \left( |\det \mathbb{J}| \mathbb{J}^{-1} \widetilde{U} \right). \quad (4.11)$$

La première est simplement la formule de dérivation d'une fonction composée qui s'écrit

$$\widetilde{\text{grad}} \widetilde{\varphi} = \widetilde{\text{grad}} (\varphi \circ F) = \mathbb{J}^t (\text{grad } \varphi) \circ F = \mathbb{J}^t \widetilde{\text{grad}} \varphi,$$

compte tenu de la définition de la matrice jacobienne. La seconde s'en déduit. En effet, pour toute fonction  $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{C}})$ , on a

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{\mathcal{C}}} \widetilde{\text{div}} U \widetilde{\varphi} |\det \mathbb{J}| \, ds \, dt &= \int_{F(\widetilde{\mathcal{C}})} (\text{div } U) \varphi \, dx && \text{(changement de variable } x = F(s, t)), \\ &= - \int_{F(\widetilde{\mathcal{C}})} U \cdot \text{grad } \varphi \, dx && \text{(intégration par parties),} \\ &= - \int_{\widetilde{\mathcal{C}}} \widetilde{U} \cdot \widetilde{\text{grad}} \varphi |\det \mathbb{J}| \, ds \, dt && \text{(changement de variable inverse),} \\ &= - \int_{\widetilde{\mathcal{C}}} \widetilde{U} \cdot \mathbb{J}^{-t} \widetilde{\text{grad}} \widetilde{\varphi} |\det \mathbb{J}| \, ds \, dt && \text{(formule (4.10)),} \\ &= \int_{\widetilde{\mathcal{C}}} \widetilde{\text{div}} \left( |\det \mathbb{J}| \mathbb{J}^{-1} \widetilde{U} \right) \widetilde{\varphi} \, ds \, dt && \text{(intégration par parties).}\end{aligned}$$

Les formules (4.10) et (4.11) nous permettent en particulier de récrire notre équation de départ (4.1) dans les coordonnées  $(s, t)$  (plus précisément, la restriction de cette équation au domaine tubulaire  $F(\widetilde{\mathcal{C}})$ ). On obtient immédiatement

$$h^{-1} \widetilde{\text{div}} \left( \frac{1}{\widetilde{\mu}_\lambda} \mathbb{H} \widetilde{\text{grad}} \widetilde{\varphi} \right) + \lambda \widetilde{\varepsilon}_\lambda \widetilde{\varphi} = 0 \quad \text{dans } \widetilde{\mathcal{C}}, \quad (4.12)$$

où on a noté

$$h := |\det \mathbb{J}| \quad \text{et} \quad \mathbb{H} := |\det \mathbb{J}| \mathbb{J}^{-1} \mathbb{J}^{-t},$$

c'est-à-dire

$$h(s, t) = 1 - t \kappa(s) \quad \text{et} \quad \mathbb{H}(s, t) = \begin{pmatrix} (1 - t \kappa(s))^{-1} & 0 \\ 0 & 1 - t \kappa(s) \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

La proposition ci-dessous nous montre que le changement de variable (4.7) transforme le caractère  $L^2$  d'une fonction ou de son gradient, ou de la divergence d'un champ de vecteurs. Ces propriétés nous seront très utiles dans la suite.

**Proposition 4.2.** *On a les équivalences suivantes :*

$$\begin{aligned} \varphi \in L^2(F(\tilde{\mathcal{C}})) &\iff \tilde{\varphi} \in L^2(\tilde{\mathcal{C}}), \\ \text{grad } \varphi \in L^2(F(\tilde{\mathcal{C}}))^2 &\iff \widetilde{\text{grad}} \tilde{\varphi} \in L^2(\tilde{\mathcal{C}})^2, \\ \text{div } U \in L^2(F(\tilde{\mathcal{C}})) &\iff \widetilde{\text{div}} (h \mathbb{J}^{-1} \tilde{U}) \in L^2(\tilde{\mathcal{C}}), \end{aligned}$$

et il existe des constantes positives  $c$  et  $C$  telles que

$$\begin{aligned} c \|\tilde{\varphi}\|_{L^2(\tilde{\mathcal{C}})} &\leq \|\varphi\|_{L^2(F(\tilde{\mathcal{C}}))} \leq C \|\tilde{\varphi}\|_{L^2(\tilde{\mathcal{C}})}, \\ c \|\widetilde{\text{grad}} \tilde{\varphi}\|_{L^2(\tilde{\mathcal{C}})^2} &\leq \|\text{grad } \varphi\|_{L^2(F(\tilde{\mathcal{C}}))^2} \leq C \|\widetilde{\text{grad}} \tilde{\varphi}\|_{L^2(\tilde{\mathcal{C}})^2}, \\ c \|\widetilde{\text{div}} (h \mathbb{J}^{-1} \tilde{U})\|_{L^2(\tilde{\mathcal{C}})} &\leq \|\text{div } U\|_{L^2(F(\tilde{\mathcal{C}}))} \leq C \|\widetilde{\text{div}} (h \mathbb{J}^{-1} \tilde{U})\|_{L^2(\tilde{\mathcal{C}})}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* La formule habituelle de changement de variable nous montre que

$$\int_{F(\tilde{\mathcal{C}})} |\varphi(x)|^2 dx = \int_{\tilde{\mathcal{C}}} |\tilde{\varphi}(s, t)|^2 h(s, t) ds dt$$

et on déduit alors de (4.9) que

$$\frac{1}{2} \int_{\tilde{\mathcal{C}}} |\tilde{\varphi}(s, t)|^2 ds dt \leq \int_{F(\tilde{\mathcal{C}})} |\varphi(x)|^2 dx \leq \frac{3}{2} \int_{\tilde{\mathcal{C}}} |\tilde{\varphi}(s, t)|^2 ds dt.$$

De la même façon, pour  $\text{grad } \varphi$ , on a d'après (4.10)

$$\int_{F(\tilde{\mathcal{C}})} |\text{grad } \varphi|^2 dx = \int_{\tilde{\mathcal{C}}} |\mathbb{J}^{-t} \widetilde{\text{grad}} \tilde{\varphi}|^2 h ds dt.$$

En utilisant à nouveau (4.9) et l'expression (4.8) de  $\mathbb{J}$ , on obtient

$$\frac{2}{9} \int_{\tilde{\mathcal{C}}} |\widetilde{\text{grad}} \tilde{\varphi}|^2 ds dt \leq \int_{F(\tilde{\mathcal{C}})} |\text{grad } \varphi|^2 dx \leq 6 \int_{\tilde{\mathcal{C}}} |\widetilde{\text{grad}} \tilde{\varphi}|^2 ds dt.$$

Enfin, pour  $\text{div } U$ , en utilisant (4.11), on obtient cette fois

$$\int_{F(\tilde{\mathcal{C}})} |\text{div } U|^2 dx = \int_{\tilde{\mathcal{C}}} |h^{-1} \widetilde{\text{div}} (h \mathbb{J}^{-1} \tilde{U})|^2 h ds dt,$$

d'où l'on déduit que

$$\frac{2}{3} \int_{\tilde{\mathcal{C}}} |\widetilde{\text{div}} (h \mathbb{J}^{-1} \tilde{U})|^2 ds dt \leq \int_{F(\tilde{\mathcal{C}})} |\text{div } U|^2 dx \leq 2 \int_{\tilde{\mathcal{C}}} |\widetilde{\text{div}} (h \mathbb{J}^{-1} \tilde{U})|^2 ds dt.$$

□

### 4.2.3 Plasmons de surface pour une courbure constante

#### Ondes guidées par l'interface

Nous supposons ici que dans notre voisinage tubulaire  $F(\tilde{\mathcal{C}})$  de  $M_0$ , la courbure de l'interface  $\Sigma$  est constante, soit

$$\kappa(s) = \kappa_0 \neq 0 \quad \forall s \in ]-l, +l[.$$

Dans ce cas particulier, nous noterons  $\mathbb{J}_0$  au lieu de  $\mathbb{J}$  la matrice jacobienne définie en (4.8), ainsi que  $h_0$  et  $\mathbb{H}_0$  au lieu de  $h$  et  $\mathbb{H}$  (voir (4.13)). Ces quantités sont maintenant des fonctions de la seule variable  $t$ .

Grâce à l'hypothèse ci-dessus, on va pouvoir construire explicitement des solutions de notre équation "simplifiée" (4.6) transformée en coordonnées  $(s, t)$ , autrement dit l'équation (4.12) pour  $\lambda = \Lambda_m/2$  sans le terme  $\lambda \tilde{\varepsilon}_\lambda \tilde{\varphi}$ . Rappelons que le cas  $\lambda = \Lambda_m/2$  correspond au contraste critique  $-1$  entre les deux milieux, soit  $\mu_{\Lambda_m/2}(x) = \mu_0$  si  $x \in \mathcal{V}$  et  $\mu_{\Lambda_m/2}(x) = -\mu_0$  si  $x \in \mathcal{N}$ , ce qui montre que  $\tilde{\mu}_{\Lambda_m/2}$  est une fonction de la seule variable  $t$  définie par

$$\tilde{\mu}_{\Lambda_m/2}(t) = \mu_0 \operatorname{sgn}(t), \quad \forall t \in ]-\delta, +\delta[.$$

Ainsi, l'équation des plasmons de surface est maintenant

$$\widetilde{\operatorname{div}} \left( \operatorname{sgn}(t) \mathbb{H}_0 \widetilde{\operatorname{grad}} \tilde{\varphi} \right) = 0 \quad \text{dans } \tilde{\mathcal{C}}. \quad (4.14)$$

Cette équation peut être réécrite plus explicitement

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s^2} + \operatorname{sgn}(t) (1 - \kappa_0 t) \frac{\partial}{\partial t} \left( \operatorname{sgn}(t) (1 - \kappa_0 t) \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \right) = 0 \quad \text{dans } ]-l, +l[ \times ]-\delta, +\delta[.$$

On voit ici que l'hypothèse d'une courbure constante nous permet de séparer les variables  $s$  et  $t$ . On trouve alors une famille de solutions dépendant d'un paramètre  $k > 0$  définies à une constante multiplicative près par

$$\tilde{w}_k(s, t) := e^{iks} (1 - \kappa_0 t)^{\operatorname{sgn}(t)k/\kappa_0} = \exp \left( iks + \operatorname{sgn}(t) \frac{k}{\kappa_0} \log(1 - \kappa_0 t) \right). \quad (4.15)$$

Quelques commentaires à propos de cette expression :

(i) Tout d'abord, il est clair qu'elle définit une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  de part et d'autre de l'interface, c'est-à-dire séparément dans  $\tilde{\mathcal{V}}$  et  $\tilde{\mathcal{N}}$ , et continue dans  $\tilde{\mathcal{C}}$ . On vérifie aisément qu'il s'agit bien d'une solution de (4.14) en remarquant que

$$\frac{\partial \tilde{w}_k}{\partial s}(s, t) = ik \tilde{w}_k(s, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{w}_k}{\partial t}(s, t) = \frac{-k \operatorname{sgn}(t)}{1 - \kappa_0 t} \tilde{w}_k(s, t). \quad (4.16)$$

Ces formules nous montrent clairement comment les dérivées successives se raccordent à l'interface. Par exemple  $\operatorname{sgn}(t) \partial \tilde{w}_k / \partial t$  est continue en  $t = 0$ , donc dérivable (au sens des distributions).

(ii) Nous nous limitons ici à des  $k > 0$  alors que pour tout  $k \in \mathbb{C}$ , la fonction  $\tilde{w}_k$  est encore solution de (4.14). La raison est simple : d'une part, lorsque  $k$  est *réel*,  $\tilde{w}_k$  est oscillante dans la direction de l'interface, et d'autre part, si  $k$  est *positif*,  $|\tilde{w}_k|$  est alors une fonction décroissante de  $|t|$ , autrement dit  $\tilde{w}_k$  est localisée près de l'interface. Il s'agit donc bien dans ce cas d'une onde de surface guidée par l'interface.

(iii) L'expression (4.15) de  $\tilde{w}_k$  n'a pas de sens lorsque  $\kappa_0 = 0$ , mais que si l'on fait tendre  $\kappa_0$  vers 0, alors  $\tilde{w}_k(s, t)$  tend vers  $\exp(ik(s + i|t|))$  pour  $(s, t)$  fixé, c'est-à-dire exactement l'onde de surface que nous avons introduite dans le paragraphe 1.3.3 pour une interface plane. Nous allons suivre ici la même démarche que dans ce paragraphe en construisant une suite de solutions de (4.14) de plus en plus localisées au voisinage de l'origine  $(s, t) = (0, 0)$ , obtenues en superposant les  $\tilde{w}_k$ .

### Une famille de plasmons de surface

On se donne une fonction  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$  (non nulle) et on définit pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\tilde{\psi}_n(s, t) := \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \tilde{w}_k(s, t) dk \quad \text{pour } (s, t) \in \tilde{\mathcal{C}}.$$

A l'aide du changement de variable  $k' = k/n$ , cette expression s'écrit aussi (en omettant le prime)

$$\tilde{\psi}_n(s, t) = \int_{\mathbb{R}^+} f(k) e^{nk\rho(s,t)} dk \quad \text{pour } (s, t) \in \tilde{\mathcal{C}}, \quad (4.17)$$

où on a noté

$$\rho(s, t) := is + \frac{\text{sgn}(t)}{\kappa_0} \log(1 - \kappa_0 t).$$

Comme  $\tilde{w}_k$  est solution de (4.14) pour tout  $k$ , il s'ensuit que  $\tilde{\psi}_n$  l'est aussi pour tout  $n \geq 1$ . De plus, elle est  $\mathcal{C}^\infty$  séparément dans  $\tilde{\mathcal{V}}$  et  $\tilde{\mathcal{N}}$ . La continuité de  $\tilde{w}_k$  en  $t = 0$  et la formule (4.16) nous montrent que

$$\tilde{\psi}_n \quad \text{et} \quad \text{sgn}(t) \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial t} \quad \text{sont continues en } t = 0. \quad (4.18)$$

Les expressions des dérivées de  $\tilde{\psi}_n$  découlent de (4.16) par le théorème de convergence dominée (en utilisant le fait que  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$  et que  $|\tilde{w}_{nk}(s, t)| \leq 1$  pour tout  $(s, t) \in \tilde{\mathcal{C}}$ ). Nous aurons besoin dans la suite des dérivées suivantes :

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial s}(s, t) = in \int_{\mathbb{R}^+} k f(k) e^{nk\rho(s,t)} dk, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial t}(s, t) = \frac{-n \text{sgn}(t)}{1 - \kappa_0 t} \int_{\mathbb{R}^+} k f(k) e^{nk\rho(s,t)} dk, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}_n}{\partial s^2}(s, t) = -n^2 \int_{\mathbb{R}^+} k^2 f(k) e^{nk\rho(s,t)} dk, \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \text{sgn}(t) \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial t} \right) (s, t) = \frac{n^2 \text{sgn}(t)}{(1 - \kappa_0 t)^2} \int_{\mathbb{R}^+} k^2 f(k) e^{nk\rho(s,t)} dk. \quad (4.22)$$

Pour vérifier que les  $\tilde{\psi}_n$  sont de plus en plus localisées au voisinage de l'origine lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on ne peut plus utiliser l'argument très simple que nous avons invoqué dans le paragraphe 1.3.3 pour une interface plane : on ne peut plus dire ici que  $\tilde{\psi}_n(s, t) = \tilde{\psi}_1(ns, nt)$ . En revanche, le comportement de  $\tilde{\psi}_n$  au voisinage de l'interface  $t = 0$  est très voisin des plasmons de surface que nous avons introduits pour une interface plane puisque

$$\rho(s, t) = is + |t| + O(t^2) \quad \text{lorsque } t \rightarrow 0.$$

Remarquons qu'en utilisant ce comportement ainsi que (4.9), on vérifie facilement qu'il existe deux constantes  $c_1 > 0$  et  $c_2 > 0$  telles que

$$c_1 \sqrt{s^2 + t^2} \leq |\rho(s, t)| \leq c_2 \sqrt{s^2 + t^2} \quad \text{pour tout } (s, t) \in \tilde{\mathcal{C}}. \quad (4.23)$$

La proposition suivante rassemble les propriétés sur les  $\tilde{\psi}_n$  dont nous aurons besoin dans la suite. Elle nous montre en particulier qu'en dehors d'un voisinage de l'origine, ces plasmons de surface décroissent très rapidement avec  $n$ . Nous verrons plus loin (dans la seconde étape de la démonstration du Théorème 4.4, point (ii)) que leur énergie se concentre effectivement près de l'origine.

**Proposition 4.3.** (i) (Estimations en norme  $L^2$  en dehors de l'origine). Soit  $\tilde{\mathcal{B}} \subset \tilde{\mathcal{C}}$  un voisinage fixé de l'origine  $(s, t) = (0, 0)$ . Alors

$$\left\| \tilde{\psi}_n \right\|_{L^2(\tilde{\mathcal{C}} \setminus \tilde{\mathcal{B}})} = O(n^{-p}) \quad \text{pour tout } p \geq 0$$

et le même résultat reste vrai pour les dérivées partielles (4.19) à (4.22) de  $\tilde{\psi}_n$ .

(ii) (Estimations en norme  $L^2$  sur tout le domaine). On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \tilde{\psi}_n \right\|_{L^2(\tilde{\mathcal{C}})} = 0$$

et le même résultat est vrai pour les fonctions  $\rho \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial s}$ ,  $\rho \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial t}$ ,  $\rho^2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_n}{\partial s^2}$  et  $\rho^2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \text{sgn}(t) \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial t} \right)$ .

(iii) (Estimations en norme  $L^1$  sur tout le domaine). On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial s} \right\|_{L^1(\tilde{\mathcal{C}})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial t} \right\|_{L^1(\tilde{\mathcal{C}})} = 0.$$

*Démonstration.* La plupart de ces estimations reposent sur des intégrations par parties, en utilisant simplement le fait que

$$\frac{\partial}{\partial k} e^{nk\rho(s,t)} = n\rho(s,t) e^{nk\rho(s,t)}.$$

(i) Commençons par l'utiliser dans l'expression (4.17) de  $\tilde{\psi}_n$ . Il vient

$$\tilde{\psi}_n(s, t) = \frac{-1}{n\rho(s, t)} \int_{\mathbb{R}^+} f'(k) e^{nk\rho(s,t)} dk \quad \text{pour } (s, t) \in \tilde{\mathcal{C}}.$$

On peut bien sûr itérer les intégrations par parties, ce qui montre que pour tout entier  $p \geq 0$ ,

$$\tilde{\psi}_n(s, t) = \left( \frac{-1}{n\rho(s, t)} \right)^p \int_{\mathbb{R}^+} f^{(p)}(k) e^{nk\rho(s,t)} dk \quad \text{pour } (s, t) \in \tilde{\mathcal{C}}.$$

Comme  $|e^{nk\rho(s,t)}| \leq 1$  pour tout  $(s, t) \in \tilde{\mathcal{C}}$ , il s'ensuit que

$$\left| \tilde{\psi}_n(s, t) \right| \leq \frac{1}{n^p |\rho(s, t)|^p} \|f^{(p)}\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \quad \text{pour } (s, t) \in \tilde{\mathcal{C}}. \quad (4.24)$$

Ainsi, si  $(s, t) \in \tilde{\mathcal{C}} \setminus \tilde{\mathcal{B}}$ , la quantité  $|\rho(s, t)|^{-p}$  est bornée d'après (4.23), par conséquent  $|\tilde{\psi}_n(s, t)| = O(n^{-p})$  uniformément par rapport à  $(s, t)$ . On en déduit que  $\left\| \tilde{\psi}_n \right\|_{L^2(\tilde{\mathcal{C}} \setminus \tilde{\mathcal{B}})} = O(n^{-p})$  pour tout  $p \geq 0$ .

On procède de même pour les dérivées de  $\tilde{\psi}_n$ . Par exemple, en intégrant par parties dans (4.19), on obtient

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial s}(s, t) = in \left( \frac{-1}{n\rho(s, t)} \right)^p \int_{\mathbb{R}^+} \frac{d^p}{dk^p} (k f(k)) e^{nk\rho(s,t)} dk, \quad (4.25)$$

ce qui montre que pour tout  $p \geq 0$ , il existe une constante  $C_p$  telle que

$$\left| \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial s}(s, t) \right| \leq \frac{C_p}{n^{p-1} |\rho(s, t)|^p} \quad \text{pour } (s, t) \in \tilde{\mathcal{C}}. \quad (4.26)$$

Dans le cas de la dérivée seconde (4.22), on a cette fois

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \operatorname{sgn}(t) \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial t} \right) (s, t) = \frac{n^2 \operatorname{sgn}(t)}{(1 - \kappa_0 t)^2} \left( \frac{-1}{n \rho(s, t)} \right)^p \int_{\mathbb{R}^+} \frac{d^p}{dk^p} \left( k^2 f(k) \right) e^{nk \rho(s, t)} dk, \quad (4.27)$$

ce qui, en utilisant (4.9), conduit à

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \left( \operatorname{sgn}(t) \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial t} \right) (s, t) \right| \leq \frac{C'_p}{n^{p-2} |\rho(s, t)|^p} \quad \text{pour } (s, t) \in \tilde{\mathcal{C}}. \quad (4.28)$$

(ii) Passons maintenant aux estimations sur le domaine  $\tilde{\mathcal{C}}$  tout entier. Commençons par le cas de  $\tilde{\psi}_n$  en repartant de son expression (4.17). Soit  $(s, t)$  un point fixé de  $\tilde{\mathcal{C}}$  tel que  $t \neq 0$  (autrement dit  $(s, t)$  n'est pas sur l'interface). On sait alors que  $\Re \rho(s, t) < 0$ . Il s'ensuit que pour tout  $k > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ f(k) e^{nk \rho(s, t)} \right\} = 0 \quad \text{et} \quad \left| f(k) e^{nk \rho(s, t)} \right| \leq |f(k)|.$$

Comme  $f$  est intégrable, le théorème de convergence dominée nous montre alors que  $\tilde{\psi}_n(s, t) \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . On peut ensuite appliquer une seconde fois le théorème de convergence dominée sur l'intégrale

$$\left\| \tilde{\psi}_n \right\|_{L^2(\tilde{\mathcal{C}})}^2 = \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \left| \tilde{\psi}_n(s, t) \right|^2 ds dt.$$

On vient en effet de montrer que l'intégrande tend vers 0 pour presque tout  $(s, t) \in \mathcal{C}$  (on exclut seulement le segment  $t = 0$ ) et on sait d'après (4.24) avec  $p = 0$  que celui-ci est borné uniformément par rapport à  $(s, t) \in \tilde{\mathcal{C}}$ . Il s'ensuit que  $\left\| \tilde{\psi}_n \right\|_{L^2(\tilde{\mathcal{C}})}$  tend vers 0.

Considérons maintenant le cas de  $\rho \partial \tilde{\psi}_n / \partial s$ . On ne part plus cette fois de l'expression (4.19), mais plutôt de la formule (4.25) pour  $p = 1$  qu'on peut récrire sous la forme

$$\rho(s, t) \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial s}(s, t) = -i \int_{\mathbb{R}^+} \frac{d}{dk} \left( k f(k) \right) e^{nk \rho(s, t)} dk.$$

Les mêmes arguments que ci-dessus nous montrent maintenant que pour tout  $(s, t) \in \tilde{\mathcal{C}}$  tel que  $t \neq 0$ , cette quantité tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Et l'inégalité (4.26) (encore pour  $p = 1$ ) nous dit que cette même quantité reste bornée uniformément par rapport à  $(s, t) \in \tilde{\mathcal{C}}$ . On en déduit que  $\left\| \rho \partial \tilde{\psi}_n / \partial s \right\|_{L^2(\tilde{\mathcal{C}})}$  tend vers 0.

Les autres dérivées se traitent de la même façon. Pour les dérivées secondes, on voit clairement qu'il faut maintenant choisir  $p = 2$  dans (4.27) et (4.28) pour faire disparaître les puissances de  $n$ , ce qui explique la présence de  $\rho^2$ . Ce poids ( $\rho$  pour les dérivées premières et  $\rho^2$  pour les dérivées secondes) compense les grandes valeurs des dérivées au voisinage de  $(0, 0)$ .

(iii) Pour démontrer les estimations en norme  $L^1$ , la démarche est similaire. Par exemple, pour  $\partial \tilde{\psi}_n / \partial s$ , nous utilisons à nouveau le théorème de convergence dominée sur l'intégrale

$$\left\| \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial s} \right\|_{L^1(\tilde{\mathcal{C}})} = \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \left| \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial s}(s, t) \right| ds dt.$$

Nous avons vu ci-dessus que l'intégrale tend vers 0 pour tout  $(s, t) \in \tilde{\mathcal{C}}$  tel que  $t \neq 0$  et l'inégalité (4.26) pour  $p = 1$  nous dit que cet intégrale est majorée par  $C_1 / |\rho(s, t)|$ . Or d'après (4.23), cette fonction est intégrable sur  $\tilde{\mathcal{C}}$ . Il s'ensuit que  $\left\| \partial \tilde{\psi}_n / \partial s \right\|_{L^1(\tilde{\mathcal{C}})}$  tend vers 0. Pour  $\partial \tilde{\psi}_n / \partial t$ , on procède de la même façon.  $\square$

### 4.3 Une suite de Weyl

Nous sommes maintenant en mesure de construire une suite de Weyl pour  $\lambda = \Lambda_m/2$  à partir des plasmons de surfaces  $\tilde{\psi}_n$  définis en (4.17). Le support des  $\tilde{\psi}_n$  étant le rectangle  $\tilde{\mathcal{C}}$  tout entier, il nous faut tout d'abord tronquer ces fonctions. Pour cela, on introduit une fonction  $\tilde{\chi} \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{C}})$  que l'on suppose *symétrique par rapport à la variable  $t$*  (c'est-à-dire :  $\tilde{\chi}(s, -t) = \tilde{\chi}(s, t)$ ) et telle que

$$\tilde{\chi}(s, t) = 1 \quad \text{pour tout } (s, t) \in \tilde{\mathcal{B}} := ]-r, +r[ \times ]-r, +r[,$$

où  $r > 0$  est un nombre fixé tel que  $r < \min(l, \delta)$  (autrement dit  $\tilde{\mathcal{B}}$  est strictement contenu dans  $\tilde{\mathcal{C}}$ ). On pose alors,

$$\tilde{\varphi}_n := \tilde{\chi} \tilde{\psi}_n \quad \text{pour tout } n \geq 1. \quad (4.29)$$

Il nous reste simplement à revenir dans les variables spatiales du problème initial. On définit ainsi, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\varphi_n := \begin{cases} \tilde{\varphi}_n \circ F^{-1} & \text{dans } F(\tilde{\mathcal{C}}) \\ 0 & \text{dans } \mathcal{C} \setminus F(\tilde{\mathcal{C}}) \end{cases} \quad \text{et} \quad u_n := -2\mathcal{R} \text{grad } \varphi_n, \quad (4.30)$$

où  $F$  est définie en (4.7). Le théorème suivant est le principal résultat de ce chapitre.

**Théorème 4.4.** *Soit  $\Phi_n := (\varphi_n, u_n)$  défini par (4.30). Alors  $\Phi_n / \|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}$  est une suite de Weyl de l'opérateur  $\mathbb{A}$  pour la valeur  $\lambda = \Lambda_m/2$ .*

La démonstration qui suit, décomposée en trois étapes, est analogue à celle de la Proposition 1.8. Elle est cependant plus compliquée, d'une part parce que les plasmons de surface ne sont plus aussi simples, mais aussi du fait que la courbure de l'interface n'est pas nécessairement constante (alors que les plasmons de surface sont calculés pour une courbure constante). Nous terminerons cette section par un paragraphe expliquant pourquoi on ne pouvait pas utiliser les plasmons de surface correspondant à une interface rectiligne.

#### Première étape

Il s'agit ici de vérifier que  $\Phi_n \in D(\mathbb{A})$  pour tout  $n \geq 1$  (la définition de  $D(\mathbb{A})$  étant rappelée en (4.5)). Comme  $u_n := -2\mathcal{R} \text{grad } \varphi_n$  et  $\mathcal{R}^* \mathcal{R} = \mathbf{1}_{\mathcal{N}}$ , ceci revient à vérifier que

$$\varphi_n \in H_0^1(\mathcal{C}) \quad \text{et} \quad \text{div} \left\{ (1 - 2\mathbf{1}_{\mathcal{N}}) \text{grad } \varphi_n \right\} \in L^2(\mathcal{C}).$$

D'après la proposition 4.2 et la définition (4.30) de  $\varphi_n$ , la première propriété est équivalente à dire que  $\tilde{\varphi}_n \in H^1(\tilde{\mathcal{C}})$  ou encore que  $\tilde{\psi}_n \in H^1(\tilde{\mathcal{C}})$ , ce que nous savons déjà puisque nous avons vu que  $\tilde{\psi}_n$  est  $\mathcal{C}^\infty$  séparément dans  $\tilde{\mathcal{V}}$  et  $\tilde{\mathcal{N}}$ , et est continue le long de l'interface  $t = 0$ .

Pour la seconde propriété, on utilise à nouveau la proposition 4.2 ainsi que la formule (4.10) qui nous montrent que cette propriété est équivalente à dire que

$$\widetilde{\text{div}} \left\{ (1 - 2\widetilde{\mathbf{1}}_{\mathcal{N}}) h \mathbb{J}^{-1} \mathbb{J}^{-t} \widetilde{\text{grad}} \tilde{\varphi}_n \right\} \in L^2(\tilde{\mathcal{C}}),$$

soit encore

$$\widetilde{\text{div}} \tilde{U}_n \in L^2(\tilde{\mathcal{C}}) \quad \text{où} \quad \tilde{U}_n := \text{sgn}(t) \mathbb{H} \widetilde{\text{grad}} \tilde{\varphi}_n, \quad (4.31)$$

compte tenu de la définition (4.13) de  $\mathbb{H}$  et du fait que  $1 - 2\widetilde{\mathbf{1}}_{\mathcal{N}}(t) = -\text{sgn}(t)$ . Comme précédemment, il est clair que les deux composantes de  $\tilde{U}_n$  sont  $\mathcal{C}^\infty$  de part et d'autre de l'interface



$t = 0$ . Pour que  $\widetilde{\operatorname{div}} \widetilde{U}_n$  appartienne à  $L^2(\widetilde{\mathcal{C}})$ , il faut et il suffit que la composante de  $\widetilde{U}_n$  normale à l'interface, c'est-à-dire la composante selon  $t$ , soit continue en  $t = 0$ . Celle-ci s'écrit

$$\widetilde{U}_n^{[t]}(s, t) = \operatorname{sgn}(t) (1 - t \kappa(s)) \frac{\partial \widetilde{\varphi}_n}{\partial t}(s, t) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \widetilde{\varphi}_n}{\partial t} = \widetilde{\chi} \frac{\partial \widetilde{\psi}_n}{\partial t} + \widetilde{\psi}_n \frac{\partial \widetilde{\chi}}{\partial t}.$$

Par hypothèse  $\widetilde{\chi}$  est continue en  $t = 0$ . De plus, on sait (cf. (4.18)) que  $\widetilde{\psi}_n$  et  $\operatorname{sgn}(t) \partial \widetilde{\varphi}_n / \partial t$  le sont aussi. Il reste à constater que c'est aussi le cas de  $\operatorname{sgn}(t) \partial \widetilde{\chi} / \partial t$  puisque nous avons supposé  $\widetilde{\chi}$  symétrique par rapport à la variable  $t$ , ce qui entraîne que  $\partial \widetilde{\chi} / \partial t = 0$  en  $t = 0$  (on aurait pu se contenter de cette seule hypothèse, sans supposer que  $\widetilde{\chi}$  était symétrique). Ainsi  $\widetilde{U}_n^{[t]}$  est bien continue en  $t = 0$ , ce qui achève la première étape.

### Seconde étape

C'est la partie la plus technique de la démonstration. Il s'agit de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbb{A} \Phi_n - (\Lambda_m/2) \Phi_n\|_{\mathcal{H}}}{\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}} = 0,$$

ce qui signifie que  $\Lambda_m/2$  est bien dans le spectre de  $\mathbb{A}$ . Pour cela, nous allons montrer d'une part que  $\|\mathbb{A} \Phi_n - (\Lambda_m/2) \Phi_n\|_{\mathcal{H}}$  tend vers 0, d'autre part que  $\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}$  est minorée par une constante strictement positive.

(i) D'après la définition 4.3 de  $\mathbb{A}$  et la définition (4.30) de  $\varphi_n$ , on a

$$\mathbb{A} \Phi_n - \frac{\Lambda_m}{2} \Phi_n = \begin{pmatrix} \theta_n \\ 0 \end{pmatrix},$$

où on a noté

$$\theta_n := \frac{-1}{\varepsilon_0 \mu_0} \operatorname{div} \left\{ (1 - 2 \mathbf{1}_{\mathcal{N}}) \operatorname{grad} \varphi_n \right\} + \left( \mathbf{1}_{\mathcal{N}} \Lambda_e - \frac{\Lambda_m}{2} \right) \varphi_n.$$

On a donc  $\|\mathbb{A} \Phi_n - (\Lambda_m/2) \Phi_n\|_{\mathcal{H}} = \|\theta_n\|_{L^2(\mathcal{C})}$ . Il est clair que le support de  $\theta_n$  est inclus dans le domaine tubulaire  $F(\widetilde{\mathcal{C}})$ , de sorte que  $\|\theta_n\|_{L^2(\mathcal{C})} = \|\theta_n\|_{L^2(F(\widetilde{\mathcal{C}}))}$ . On peut donc utiliser la proposition 4.2 pour  $\widetilde{\theta}_n := \theta_n \circ F$  : il nous suffit de vérifier que  $\|\widetilde{\theta}_n\|_{L^2(\widetilde{\mathcal{C}})}$  tend vers 0. D'après les calculs de la première étape, on a

$$\widetilde{\theta}_n = \frac{h^{-1}}{\varepsilon_0 \mu_0} \widetilde{\operatorname{div}} \widetilde{U}_n + \left( \mathbf{1}_{\mathcal{N}} \Lambda_e - \frac{\Lambda_m}{2} \right) \widetilde{\varphi}_n,$$

où  $\widetilde{U}_n$  est défini dans (4.31). Par conséquent,

$$\|\widetilde{\theta}_n\|_{L^2(\widetilde{\mathcal{C}})} \lesssim \|\widetilde{\operatorname{div}} \widetilde{U}_n\|_{L^2(\widetilde{\mathcal{C}})} + \|\widetilde{\varphi}_n\|_{L^2(\widetilde{\mathcal{C}})}.$$

Compte tenu de l'expression (4.29) de  $\widetilde{\varphi}_n$ , on sait déjà que

$$\|\widetilde{\varphi}_n\|_{L^2(\widetilde{\mathcal{C}})} \lesssim \|\widetilde{\psi}_n\|_{L^2(\widetilde{\mathcal{C}})} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty, \quad (4.32)$$

d'après le point (ii) de la proposition 4.3. Il nous reste donc à montrer que  $\|\widetilde{\operatorname{div}} \widetilde{U}_n\|_{L^2(\widetilde{\mathcal{C}})}$  tend vers 0 aussi, ce qui demande un peu plus d'effort. Tout d'abord, en utilisant à nouveau (4.29), on peut développer la divergence. On sait d'après la première étape que  $\widetilde{U}_n^{[t]}$  est continue en  $t = 0$ ; on obtient alors

$$\widetilde{\operatorname{div}} \widetilde{U}_n = \underbrace{\widetilde{\chi} \operatorname{div} \left( \operatorname{sgn}(t) \mathbb{H} \operatorname{grad} \widetilde{\psi}_n \right)}_{a_n} + \operatorname{sgn}(t) \underbrace{\left\{ 2 \mathbb{H} \operatorname{grad} \widetilde{\chi} \cdot \operatorname{grad} \widetilde{\psi}_n + \widetilde{\psi}_n \operatorname{div} \left( \mathbb{H} \operatorname{grad} \widetilde{\chi} \right) \right\}}_{b_n}.$$

Commençons par  $b_n$ . Comme  $\widetilde{\text{grad}} \tilde{\chi}$  s'annule dans  $\tilde{\mathcal{B}}$ , on a

$$\|b_n\|_{L^2(\tilde{\mathcal{C}})} \lesssim \|\tilde{\psi}_n\|_{H^1(\tilde{\mathcal{C}} \setminus \tilde{\mathcal{B}})},$$

où le terme de droite tend vers 0 d'après le point (i) de la proposition 4.3. Pour conclure, il nous reste à montrer que  $\|a_n\|_{L^2(\tilde{\mathcal{C}})}$  tend aussi vers 0. Pour cela, remarquons que si la courbure était constante dans notre domaine tubulaire, autrement dit, si  $\mathbb{H}(s, t) = \mathbb{H}_0(t)$  pour  $(s, t) \in \tilde{\mathcal{C}}$ , alors  $a_n$  serait identiquement nulle puisque  $\tilde{\psi}_n$  vérifie (4.14). Ceci nous suggère de récrire l'expression de  $a_n$  sous la forme

$$a_n = \widetilde{\text{div}} \left( \text{sgn}(t) (\mathbb{H} - \mathbb{H}_0) \widetilde{\text{grad}} \tilde{\psi}_n \right).$$

En utilisant l'expression (4.13) de  $\mathbb{H}$ , ce terme, une fois développé, vaut

$$\begin{aligned} a_n = & \frac{\text{sgn}(t) t \kappa'(s)}{(1 - t \kappa(s))^2} \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial s} + \frac{\text{sgn}(t) t (\kappa(s) - \kappa_0)}{(1 - t \kappa(s))(1 - t \kappa_0)} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_n}{\partial s^2} \\ & + \text{sgn}(t) (\kappa(s) - \kappa_0) \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial t} + t (\kappa(s) - \kappa_0) \frac{\partial}{\partial t} \left( \text{sgn}(t) \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (4.33)$$

C'est ici que nous avons besoin de notre hypothèse initiale sur la régularité  $\mathcal{C}^3$  de l'interface. La courbure  $\kappa(s)$  étant  $\mathcal{C}^1$ , la fonction  $\kappa'(s)$  est bornée et on sait par le théorème des accroissements finis qu'il existe une constante  $K$  telle que  $|\kappa(s) - \kappa_0| \leq K |s|$ . Ainsi, d'après (4.9), on a

$$\|a_n\|_{L^2(\tilde{\mathcal{C}})} \lesssim \left\| t \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial s} \right\|_{L^2(\tilde{\mathcal{C}})} + \left\| st \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_n}{\partial s^2} \right\|_{L^2(\tilde{\mathcal{C}})} + \left\| s \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial t} \right\|_{L^2(\tilde{\mathcal{C}})} + \left\| st \frac{\partial}{\partial t} \left( \text{sgn}(t) \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial t} \right) \right\|_{L^2(\tilde{\mathcal{C}})}. \quad (4.34)$$

Le fait que chacun des termes de droite tend vers 0 découle du point (ii) de la proposition 4.3 en remarquant simplement que d'après (4.23), les fonctions  $s/\rho(s, t)$  et  $t/\rho(s, t)$  sont bornées sur  $\tilde{\mathcal{C}}$ .

(ii) Pour achever cette seconde étape, il nous reste à montrer que

$$\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\varphi_n\|_{L^2(\mathcal{C})}^2 + \|u_n\|_{L^2(\mathcal{N})^2}^2 \gtrsim 1.$$

Il est clair que la contribution principale de  $\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}$  vient de la composante  $u_n := -2\mathcal{R} \text{grad} \varphi_n$  (voir (4.30)). En effet, d'après la proposition 4.2 et (4.32), on sait que

$$\|\varphi_n\|_{L^2(\mathcal{C})} \lesssim \|\tilde{\varphi}_n\|_{L^2(\tilde{\mathcal{C}})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (4.35)$$

En utilisant encore la Proposition 4.2, on a

$$\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}} \geq \|u_n\|_{L^2(\mathcal{N})^2} \gtrsim \left\| \widetilde{\text{grad}} \tilde{\varphi}_n \right\|_{L^2(\tilde{\mathcal{N}})^2} \geq \left\| \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial s} \right\|_{L^2(\tilde{\mathcal{N}} \cap \tilde{\mathcal{B}})}$$

où la dernière inégalité découle du fait que la fonction de troncature  $\chi$  est identiquement égale à 1 dans  $\tilde{\mathcal{B}}$  (notons qu'on a choisi ici de privilégier la dérivée par rapport à  $s$ , mais que la même démarche s'applique aussi avec la dérivée par rapport à  $t$ ). D'après (4.19), on a

$$\left\| \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial s} \right\|_{L^2(\tilde{\mathcal{N}} \cap \tilde{\mathcal{B}})}^2 = \int_{s=-r}^{+r} \int_{t=0}^r n^2 \left| \int_{\mathbb{R}^+} k f(k) e^{nk\rho(s,t)} dk \right|^2 ds dt,$$

puis, avec le changement de variables  $s' = ns$  et  $t' = nt$  (et en omettant les primes),

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial s} \right\|_{L^2(\tilde{\mathcal{N}} \cap \tilde{\mathcal{B}})}^2 &= \int_{s=-nr}^{+nr} \int_{t=0}^{nr} \left| \int_{\mathbb{R}^+} k f(k) e^{nk \rho(s/n, t/n)} dk \right|^2 ds dt \\ &\geq \int_{s=-r}^{+r} \int_{t=0}^r \left| \int_{\mathbb{R}^+} k f(k) e^{nk \rho(s/n, t/n)} dk \right|^2 ds dt. \end{aligned}$$

On peut alors passer à la limite  $n \rightarrow \infty$  par deux applications successives du théorème de convergence dominée (comme dans la démonstration de la proposition 4.3). On commence par remarquer que si  $(s, t)$  est un point fixé de  $\tilde{\mathcal{N}} \cap \tilde{\mathcal{B}}$  (donc tel que  $t > 0$ ), on a, pour tout  $k > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ k f(k) e^{nk \rho(s/n, t/n)} \right\} = \left\{ k f(k) e^{k(is+|t|)} \right\} \quad \text{et} \quad \left| k f(k) e^{nk \rho(s/n, t/n)} \right| \leq |k f(k)|,$$

ce qui montre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^+} k f(k) e^{nk \rho(s/n, t/n)} dk = \int_{\mathbb{R}^+} k f(k) e^{k(is+|t|)} dk.$$

Ensuite, comme

$$\left| \int_{\mathbb{R}^+} k f(k) e^{nk \rho(s/n, t/n)} dk \right| \leq \int_{\mathbb{R}^+} |k f(k)| dk,$$

on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{s=-r}^{+r} \int_{t=0}^r \left| \int_{\mathbb{R}^+} k f(k) e^{nk \rho(s/n, t/n)} dk \right|^2 ds dt = \int_{s=-r}^{+r} \int_{t=0}^r \left| \int_{\mathbb{R}^+} k f(k) e^{k(is+|t|)} dk \right|^2 ds dt.$$

Il reste à remarquer que le terme de droite est strictement positif, car la fonction intégrée est positive et non identiquement nulle. Ceci termine la démonstration du fait que  $\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}$  est minorée par une constante strictement positive.

### Troisième étape

Les deux premières étapes nous montrent que  $\lambda = \Lambda_m/2$  appartient bien au spectre de  $\mathbb{A}$ . Cette troisième et dernière étape est destinée à vérifier que  $\Phi_n/\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}$  tend faiblement vers 0 dans  $\mathcal{H}$ , et donc que  $\lambda = \Lambda_m/2$  est bien un point du *spectre essentiel* de  $\mathbb{A}$ .

Comme nous venons de voir que  $\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}} \gtrsim 1$ , nous devons vérifier que  $\Phi_n$  tend faiblement vers 0 dans  $\mathcal{H}$ , autrement dit que  $\varphi_n$  tend faiblement vers 0 dans  $L^2(\mathcal{C})$  et que  $u_n := -2\mathcal{R} \operatorname{grad} \varphi_n$  tend faiblement vers 0 dans  $L^2(\mathcal{N})^2$ . Le premier point est évident puisque  $\varphi_n$  tend fortement vers 0 dans  $L^2(\mathcal{C})$  (voir (4.35)). Pour vérifier le second, nous allons montrer que  $\operatorname{grad} \varphi_n$  tend vers 0 dans  $L^1(\mathcal{N})^2$ , ce qui entraîne bien la convergence faible dans  $L^2(\mathcal{N})^2$ . En effet, pour toute fonction  $v \in \mathcal{D}(\mathcal{N})^2$ , on a

$$\left| (\operatorname{grad} \varphi_n, v)_{L^2(\mathcal{N})^2} \right| \leq \left\| \operatorname{grad} \varphi_n \right\|_{L^1(\mathcal{N})^2} \|v\|_{L^\infty(\mathcal{N})^2}.$$

En utilisant les mêmes arguments que dans la démonstration de la proposition 4.2, on a

$$\left\| \operatorname{grad} \varphi_n \right\|_{L^1(\mathcal{N})^2} \lesssim \left\| \widetilde{\operatorname{grad} \tilde{\varphi}_n} \right\|_{L^1(\tilde{\mathcal{N}})^2}.$$

Comme  $\widetilde{\operatorname{grad} \tilde{\varphi}_n} = \tilde{\psi}_n \widetilde{\operatorname{grad} \tilde{\chi}} + \tilde{\chi} \widetilde{\operatorname{grad} \tilde{\psi}_n}$ , on a

$$\left\| \widetilde{\operatorname{grad} \tilde{\varphi}_n} \right\|_{L^1(\tilde{\mathcal{N}})^2} \lesssim \left\| \tilde{\psi}_n \right\|_{L^1(\tilde{\mathcal{N}})} + \left\| \widetilde{\operatorname{grad} \tilde{\psi}_n} \right\|_{L^1(\tilde{\mathcal{N}})^2}$$

Or on sait d'une part que

$$\left\| \tilde{\psi}_n \right\|_{L^1(\tilde{\mathcal{N}})} \lesssim \left\| \tilde{\psi}_n \right\|_{L^2(\tilde{\mathcal{N}})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

d'après (4.32), et d'autre part que  $\left\| \widetilde{\operatorname{grad} \tilde{\psi}_n} \right\|_{L^1(\tilde{\mathcal{N}})^2}$  tend vers 0 d'après le point (iii) de la proposition 4.3. Ceci achève la démonstration du théorème 4.4.

### Aurait-on pu faire plus simple ?

Comme nous l'avons mentionné au début de la section 4.2, il semblait *a priori* naturel de chercher à réutiliser pour une interface courbe les plasmons de surface que nous avons introduits dans le chapitre 1 pour une interface rectiligne. Les calculs ci-dessus nous permettent de comprendre *a posteriori* pourquoi l'idée n'était pas bonne.

L'intuition consistait simplement à déformer ces plasmons de surface à l'aide du changement de variable (4.7), ce qui reviendrait tout simplement à choisir une courbure nulle, soit  $\kappa_0 = 0$ , dans le paragraphe 4.2.3, autrement dit à prendre pour matrice  $\mathbb{H}_0(t)$  la matrice identité, et donc à remplacer notre définition (4.17) de  $\tilde{\psi}_n$  par

$$\tilde{\psi}_n(s, t) = \int_{\mathbb{R}^+} f(k) e^{nk(is+|t|)} dk \quad \text{pour } (s, t) \in \tilde{\mathcal{C}}. \quad (4.36)$$

Le problème se situe dans le point (i) de la seconde étape de la démonstration ci-dessus : on ne peut en effet plus montrer que  $\|\mathbb{A}\Phi_n - (\Lambda_m/2)\Phi_n\|_{\mathcal{H}}$  tend vers 0. En effet, pour  $\kappa_0 = 0$ , l'expression (4.33) de  $a_n$  devient

$$a_n = \frac{\operatorname{sgn}(t) t \kappa'(s)}{(1 - t \kappa(s))^2} \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial s} + \frac{\operatorname{sgn}(t) t \kappa(s)}{1 - t \kappa(s)} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_n}{\partial s^2} + \operatorname{sgn}(t) \kappa(s) \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial t} + t \kappa(s) \frac{\partial}{\partial t} \left( \operatorname{sgn}(t) \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial t} \right).$$

Ainsi, au lieu de (4.34), on a maintenant

$$\|a_n\|_{L^2(\tilde{\mathcal{C}})} \lesssim \left\| t \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial s} \right\|_{L^2(\tilde{\mathcal{C}})} + \left\| t \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_n}{\partial s^2} \right\|_{L^2(\tilde{\mathcal{C}})} + \left\| \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial t} \right\|_{L^2(\tilde{\mathcal{C}})} + \left\| t \frac{\partial}{\partial t} \left( \operatorname{sgn}(t) \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial t} \right) \right\|_{L^2(\tilde{\mathcal{C}})}.$$

On voit ici que le poids  $s$  qui apparaissait dans trois des quatre normes du terme de droite de (4.34) a disparu : seule la première norme est inchangée. Les autres ne tendent pas vers 0 : on sait en particulier que la troisième est minorée par une constante strictement positive.

Bien sûr, ces arguments ne constituent pas une démonstration qu'il est impossible d'utiliser les plasmons de surface (4.36) pour une frontière courbe. Il y a peut-être une façon plus astucieuse de le faire, mais nous ne l'avons pas trouvée.

## 4.4 Perspectives

Dans ce chapitre, nous nous sommes contentés de traiter le cas d'une interface régulière entre le matériau de Drude et le vide. Ceci peut laisser un goût d'inachevé, si on considère ce chapitre comme une extension du chapitre 1. Que peut-on dire du cas où le domaine occupé par le matériau de Drude est un polygone courbe ? Comment peut-on trouver le spectre essentiel associé à un "coin courbe" ? Par manque de temps (et par manque d'idée), nous n'avons pas pu avancer sur cette question, qui reste donc pour l'instant ouverte. Notons qu'à notre connaissance, les deux seuls articles qui considèrent des polygones courbes sont [69, 68]. Ces deux articles s'intéressent au spectre de l'opérateur de Neumann-Poincaré (voir (0.9)), mais ne nous permettent pas d'en tirer des informations pour notre problème.

Une autre question ouverte concerne la régularité de l'interface. Pour les besoins de la démonstration, nous avons supposé que l'interface était de classe  $\mathcal{C}^3$ . Pourrait-on affaiblir cette hypothèse ? Nous savons en effet que pour montrer qu'en dehors de 0,  $\Lambda_m/2$  et  $\Lambda_m$ , il n'y a pas de spectre essentiel, on peut se contenter d'une régularité  $\mathcal{C}^1$  de l'interface (voir le théorème 4.3 de [13]). La valeur  $\Lambda_m/2$  est-elle encore dans le spectre essentiel pour une interface  $\mathcal{C}^1$  ? On imagine difficilement répondre par la négative. Mais nous ne savons pas le démontrer.



# Bibliographie

- [1] V.M. Adamjan and H. Langer. Spectral properties of a class of rational operator valued functions. *J. Operator Theory*, 33(2) :259–277, 1995.
- [2] H. Ammari, G. Ciraolo, H. Kang, H. Lee, and G.W. Milton. Spectral theory of a Neumann–Poincaré-type operator and analysis of cloaking due to anomalous localized resonance. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 208 :667–692, 2013.
- [3] H. Ammari, Y. Deng, and P. Millien. Surface plasmon resonance of nanoparticles and applications in imaging. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 220 :109–153, 2016.
- [4] H. Ammari and P. Millien. Shape and size dependence of dipolar plasmonic resonance of nanoparticles. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 129 :242–265, 2019.
- [5] H. Ammari, P. Millien, M. Ruiz, and H. Zhang. Mathematical analysis of plasmonic nanoparticles : the scalar case. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 224 :597–658, 2017.
- [6] H. Ammari, M. Ruiz, S. Yu, and H. Zhang. Mathematical analysis of plasmonic resonances for nanoparticles : the full Maxwell equations. *Journal of Differential Equations*, 261(6) :3615–3669, 2016.
- [7] K. Ando, H. Kang, and H. Liu. Plasmon resonance with finite frequencies : a validation of the quasi-static approximation for diametrically small inclusions. *SIAM J. Appl. Math.*, 76 :731–749, 2016.
- [8] K.i Ando and H. Kang. Analysis of plasmon resonance on smooth domains using spectral properties of the Neumann–Poincaré operator. *J. Math. Anal. Appl.*, 435 :162–178, 2016.
- [9] H. Bart, I. Gohberg, and M.A. Kaashoek. *Minimal Factorization of Matrix and Operator Functions*. Operator Theory, Advances and Applications ; V. 1. Birkhäuser Verlag, Basel, 1979.
- [10] J. Behrndt and D. Krejčířík. An indefinite Laplacian on a rectangle. *Journal d’Analyse Mathématique*, 134(2) :501–522, 2018.
- [11] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, C. Carvalho, L. Chesnel, and P. Ciarlet Jr. On the use of Perfectly Matched Layers at corners for scattering problems with sign-changing coefficients. *J. of Comput. Phy.*, 322 :224–247, 2016.
- [12] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, C. Carvalho, and P. Ciarlet Jr. Mesh requirements for the finite element approximation of problems with sign-changing coefficients. *Numerische Mathematik*, 138 :801–838, 2018.
- [13] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, and P. Ciarlet Jr. T-coercivity for scalar interface problems between dielectrics and metamaterials. *Math. Mod. Num. Anal.*, 46 :1363–1387, 2012.
- [14] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, and P. Ciarlet Jr. T-coercivity for the Maxwell problem with sign-changing coefficients. *Comm. Partial Differential Equations*, 39 :1007–1031, 2014.

- [15] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, and P. Ciarlet Jr. Two-dimensional Maxwell's equations with sign-changing coefficients. *Appl. Numer. Math.*, 79 :29–41, 2014.
- [16] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, and X. Claeys. Radiation condition for a non-smooth interface between a dielectric and a metamaterial. *Math. Models Meth. App. Sci.*, 23(9) :1629–1662, 2013.
- [17] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, P. Ciarlet Jr., and C.M. Zwölf. Two- and three-field formulations for wave transmission between media with opposite sign dielectric constants. *J. Comput. Appl. Math.*, 204(2) :408–417, 2007.
- [18] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, P. Ciarlet Jr., and C.M. Zwölf. A new compactness result for electromagnetic waves. application to the transmission problem between dielectrics and metamaterials. *Math. Models Meth. App. Sci.*, 18(9) :1605–1631, 2008.
- [19] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, P. Ciarlet Jr., and C.M. Zwölf. Erratum to “Time-harmonic wave diffraction problems in materials with sign-shifting coefficients”. *J. Comput. Appl. Math.*, 234(8) :2616, 2010.
- [20] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, P. Ciarlet Jr., and C.M. Zwölf. Time-harmonic wave diffraction problems in materials with sign-shifting coefficients. *J. Comput. Appl. Math.*, 234(6) :1912–1919, 2010.
- [21] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, M. Dauge, and K. Ramdani. Analyse spectrale et singularités d'un problème de transmission non coercif. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 328 :717–720, 1999.
- [22] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, C. Hazard, and F. Monteghetti. Complex-scaling method for the plasmonic resonances of a 2D subwavelength particle with corners. En préparation.
- [23] A.-S. Bonnet-Ben Dhia and K. Ramdani. Mathematical analysis of conductive and superconductive transmission lines. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 60(6) :2087–2113, 2000.
- [24] E. Bonnetier, C. Dapogny, F. Triki, and H. Zhang. The plasmonic resonances of a bowtie antenna. *Analysis in Theory and Applications*, 2020. in press.
- [25] E. Bonnetier and F. Triki. On the spectrum of the Poincaré variational problem for two close-to-touching inclusions in 2D. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 209 :541–567, 2013.
- [26] E. Bonnetier and H. Zhang. Characterization of the essential spectrum of the Neumann-Poincaré operator in 2d domains with corner via weyl sequences. *Revista Matemática Iberoamericana*, 35(3) :925–948, 2019.
- [27] G. Bouchitté and B. Schweizer. Cloaking of small objects by anomalous localized resonance. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 63(4) :437–463, 2010.
- [28] Y. Brûlé. *Méthode des Éléments Finis pour les nanostructures métalliques : application au filtrage spectral dans le visible et extension au calcul modal en présence de dispersion*. PhD thesis, Ecole Centrale Marseille, 2016.
- [29] Y. Brûlé, B. Gralak, and G. Demésy. Calculation and analysis of the complex band structure of dispersive and dissipative two-dimensional photonic crystals. *J. Opt. Soc. Am. B*, 33 :691–702, 2016.
- [30] C. Cacciapuoti, K. Pankrashkin, and A. Posilicano. Self-adjoint indefinite laplacians. *J. Anal. Math.*, 139(1) :155–177, 2019.
- [31] C. Carvalho. *Étude mathématique et numérique de structures plasmoniques avec coins*. PhD thesis, ENSTA ParisTech, 2015.

- [32] C. Carvalho, L. Chesnel, and P. Ciarlet Jr. Eigenvalue problems with sign-changing coefficients. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 355(6) :671–675, 2017.
- [33] M. Cassier, C. Hazard, and P. Joly. Spectral theory for Maxwell’s equations at the interface of a metamaterial. Part I : Generalized Fourier transform. *Commun. Part. Diff. Eq.*, 42(11) :1707–1748, 2017.
- [34] M. Cassier, P. Joly, and M. Kachanovska. Mathematical models for dispersive electromagnetic waves : an overview. *Comput. Math. Appl.*, 74(11) :2792–2830, 2017.
- [35] L. Chesnel. *Etude de quelques problèmes de transmission avec changement de signe. Application aux métamatériaux*. PhD thesis, École Polytechnique, 2012.
- [36] L. Chesnel. Bilaplacian problems with a sign-changing coefficient. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 39 :4964–4979, 2016.
- [37] L. Chesnel, X. Claeys, and S.A. Nazarov. A curious instability phenomenon for a rounded corner in presence of a negative material. *Asympt. Anal.*, 88(1-2) :43–74, 2014.
- [38] L. Chesnel, X. Claeys, and S.A. Nazarov. Oscillating behaviour of the spectrum for a plasmonic problem in a domain with a rounded corner. *Math. Mod. Num. Anal.*, 52(4) :1285–1313, 2018.
- [39] L. Chesnel and S.A. Nazarov. Spectrum of a diffusion operator with coefficient changing sign over a small inclusion. *ZAMP*, 66(5) :2173–2196, 2015.
- [40] P. Cocquet, P. Mazet, and V. Mouysset. On the existence and uniqueness of a solution for some frequency-dependent partial differential equations coming from the modeling of metamaterials. *SIAM J. Math. Anal.*, 44(6) :3806–3833, 2012.
- [41] M. Costabel and E. Stephan. A direct boundary integral equation method for transmission problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 106 :367–413, 1985.
- [42] M. Dauge. An introduction to elliptic corner problems via the example of polygonal metamaterials. In *Spectral 2019 : Trending topics in spectral theory*, Aix-Marseille University (France), december 2019. doi : 10.13140/RG.2.2.12450.17600.
- [43] M. Dauge and S. Nicaise. Do polyhedral metamaterials comply with the standard model? In *9th Singular Days*, University of Kassel (Germany), september 2019. doi : 10.13140/RG.2.2.26946.73928.
- [44] M. Dauge and B. Texier. Problèmes de transmission non coercifs dans des polygones. Technical Report 97–27, IRMAR, Université de Rennes, France, 1997. hal-00562329.
- [45] G. Demésy, A. Nicolet, B. Gralak, C. Geuzaine, Campos, C., and J.E. Roman. Non-linear eigenvalue problems with getdp and slepc : Eigenmode computations of frequency-dispersive photonic open structures. *arXiv :1802.02363*, 2018.
- [46] D.E. Edmunds and W.D. Evans. *Spectral Theory and Differential Operators*. Oxford University Press, New York, 1987.
- [47] C. Engström, Langer H., and C. Tretter. Rational eigenvalue problems and applications to photonic crystals. *J. Math. Anal. Appl.*, 445(1) :240–279, 2017.
- [48] A. Figotin and J.H. Schenker. Hamiltonian treatment of time dispersive and dissipative media within the linear response theory. *J. Comput. Appl. Math.*, 204 :199–208, 2007.
- [49] B. Goursaud. *Etude mathématique et numérique de guides d’ondes ouverts non uniformes, par approche modale*. PhD thesis, ENSTA ParisTech, 2010.
- [50] B. Gralak and D. Maystre. Negative index materials and time-harmonic electromagnetic field. *C.R. Physique*, 13 :786–799, 2012.



- [51] B. Gralak and A. Tip. Macroscopic Maxwell's equations and negative index materials. *J. Math. Phys.*, 51(5) :052902, 2010.
- [52] D. Grieser. The plasmonic eigenvalue problem. *Rev. Math. Phys.*, 26 :1450005, 2014.
- [53] S. Güttel and F. Tisseur. The nonlinear eigenvalue problem. *Acta Numerica*, 26 :1–94, 2017.
- [54] C. Hazard and S. Paolantoni. Spectral analysis of polygonal cavities containing a negative-index material. *Annales Henri Lebesgue*, à paraître.
- [55] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [56] H. Kettunen, M. Lassas, and P. Ola. On absence and existence of the anomalous localized resonance without the quasi-static approximation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 78(1) :609–628, 2018.
- [57] D. Khavinson, M. Putinar, and H.S. Shapiro. Poincaré's variational problem in potential theory. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 185(1) :143–184, 2007.
- [58] W. Li and S.P. Shipman. Embedded eigenvalues for the neumann-poincare operator. *J. Integral Equations Applications*, 31(4) :505–534, 2019.
- [59] S.A. Maier. *Plasmonics : Fundamentals and Applications*. Springer, 2007.
- [60] G.W. Milton and N.-A.P. Nicorovici. On the cloaking effects associated with anomalous localized resonance. *Proc. R. Soc. A*, 462 :3027–3059, 2006.
- [61] R. Nagel. Towards a "matrix theory" for unbounded operator matrices. *Math. Z.*, 201(1) :57–68, 1989.
- [62] H.-M. Nguyen. Limiting absorption principle and well-posedness for the Helmholtz equation with sign changing coefficients. *J. Math. Pures Appl.*, 106 :342–374, 2016.
- [63] H.-M. Nguyen. Cloaking via anomalous localized resonance for doubly complementary media in the finite frequency regime. *Journal d'Analyse Mathématique*, 138(1) :157–184, 2019.
- [64] H.-M. Nguyen and L. Nguyen. Cloaking using complementary media for the helmholtz equation and a three spheres inequality for second order elliptic equations. *Transactions of the American Mathematical Society, Series B*, 2(3) :93–112, 2015.
- [65] P. Ola. Remarks on a transmission problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 196 :639–658, 1995.
- [66] K. Pankrashkin. On self-adjoint realizations of sign-indefinite Laplacians, 2018. hal-01960406.
- [67] B. Pendry. Negative refraction makes a perfect lens. *Phys. Rev. Lett.*, 85 :3966, 2000.
- [68] K.-M. Perfekt. Plasmonic eigenvalue problem for corners : limiting absorption principle and absolute continuity in the essential spectrum. *preprint*, 2019. arXiv 1911.12294.
- [69] K.-M. Perfekt and M. Putinar. The essential spectrum of the Neumann–Poincaré operator on a domain with corners. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 223 :1019–1033, 2017.
- [70] K. Ramdani. *Lignes supraconductrices : analyse mathématique et numérique*. PhD thesis, Université Paris 6, 1999.
- [71] Y. Su and Z. Bai. Solving rational eigenvalue problems via linearization. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 32(1) :201–216, 2011.
- [72] A. Tip. Linear absorptive dielectrics. *Phys. Rev. A*, 57 :4818–4841, 1998.
- [73] A. Tip. Linear dispersive dielectrics as limits of Drude-Lorentz systems. *Phys. Rev. E*, 69 :016610, 2004.
- [74] C. Tretter. *Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications*. Imperial College Press, London, 2008.

- [75] V.G. Veselago. The electrodynamics of substance with simultaneously negative values of  $\varepsilon$  and  $\mu$ . *Soviet Physics Uspekhi*, 10 :509–514, 1968.
- [76] C.M. Zwölf. *Méthodes variationnelles pour la modélisation des problèmes de transmission d'onde électromagnétique entre diélectrique et méta-matériau*. PhD thesis, Université Versailles-Saint-Quentin, 2008.

**Titre :** Analyse spectrale et simulation numérique de cavités contenant un matériau négatif.

**Mots Clefs :** Dispersion, matériaux négatifs, spectre essentiel, résonance.

**Résumé :** Cette thèse réalise une étude théorique et numérique du spectre de cavités partiellement composées de matériau négatif, c'est-à-dire de matériau pour lequel la perméabilité magnétique et/ou la permittivité électrique (ou au moins leur partie réelle) deviennent négatives dans certaines plages de fréquences. Cette étude s'inscrit dans la continuité des travaux engagés dans notre laboratoire qui se concentrent sur la propagation des ondes électromagnétiques en présence de matériau négatif, à fréquence fixée. L'objectif de cette thèse est de prendre en compte la dispersion fréquentielle, autrement dit la dépendance en fréquence de la perméabilité et de la permittivité, en considérant la fréquence comme paramètre spectral. Nous met-

tons en évidence le spectre essentiel résultant de la présence de matériau négatif ainsi que les phénomènes de résonance qui en découlent, pour différents modèles décrivant ce matériau. L'étude théorique se concentre sur le cas de cavités bidimensionnelles polygonales pour les modèles de Drude et de Lorentz (avec et sans dissipation). L'étude théorique du modèle le plus simple (Drude non dissipatif) est étendue au cas d'une interface courbe (mais régulière). Ce modèle fait également l'objet d'une étude numérique, visant à explorer l'effet d'une discrétisation éléments finis du problème théorique, et ainsi mettre en avant les difficultés à observer numériquement certains des phénomènes de résonance.

**Title :** Spectral analysis and numerical simulation of cavities containing a negative material.

**Keys words :** Dispersion, negative materials, essential spectrum, resonance.

**Abstract :** This thesis achieves a theoretical and numerical studies of cavities partially filled with a negative material, that is a material for which the magnetic permeability and/or the electric permittivity (or at least their real part) become negative in some frequency ranges. This study is part of the main thrust of the work started in our team focusing on the electromagnetic wave propagation in presence of such negative materials, at a given frequency. The purpose of this thesis is to take into account the frequency dispersion, that is the frequency dependence of the permeability and/or the permittivity, considering the frequency as the spectral parameter. We highlight the essential spectrum arising from the presence of negative material, as well as the resulting resonance phenomena, for different models describing this material. The theoretical study focuses on the case of polygonal bi-dimensional cavities for the Drude and the Lorentz models (with dissipation or not). The theoretical study of the simplest model (the non dissipative Drude model) is extended to the case of a curved (but regular) interface. This model is also the subject of a numerical study, aimed at exploring the effect of a finite element discretization of the theoretical problem, and thus highlight the difficulties to numerically notice some of the resonance phenomena.