



HAL
open science

Prédiction modale du rayonnement d'ondes élastiques guidées par une source quelconque dans une structure fine - application au contrôle non destructif

Jordan Barras

► **To cite this version:**

Jordan Barras. Prédiction modale du rayonnement d'ondes élastiques guidées par une source quelconque dans une structure fine - application au contrôle non destructif. Acoustique [physics.class-ph]. Université Paris-Saclay, 2020. Français. NNT : 2020UPASG020 . tel-03010823

HAL Id: tel-03010823

<https://theses.hal.science/tel-03010823v1>

Submitted on 17 Nov 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Prédiction modale du rayonnement
d'ondes élastiques guidées par une source
quelconque dans une structure fine -
application au contrôle non destructif**

Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay

École doctorale n° 580, Sciences et technologies de l'information et de
la communication (STIC)
Spécialité de doctorat : Mathématiques et informatique
Unité de recherche : Université Paris-Saclay, CEA, Institut LIST, 91191, Gif-sur-Yvette
Réfèrent : Faculté des sciences d'Orsay

Thèse présentée et soutenue à Saclay, le 15 Octobre 2020, par

Jordan BARRAS

Composition du Jury

Didier CLOUTEAU Professeur, CentraleSupélec	Président
Marc DESCHAMPS Directeur de recherche CNRS, Université de Bordeaux	Rapporteur & Examineur
Sébastien GRONDEL Professeur, Université polytechnique des Hauts-de-France	Rapporteur & Examineur
Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA Directrice de recherche CNRS, ENSTA Paris	Examinatrice
Mike J.S. LOWE Professeur, Imperial College London	Examineur
Vincent PAGNEUX Directeur de recherche CNRS, Le Mans Université	Examineur
Alain LHÉMERY Directeur de recherche, CEA List	Directeur de thèse



Cette thèse a été préparée au

CEA/LIST/DISC/LSMA

Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives

Institut LIST | CEA Saclay Digitéo Labs

Bât. 565 - PC120

F-91191 Gif-sur-Yvette Codex

France

Avant-propos

Le contenu de ce manuscrit de thèse est l'aboutissement de trois années de travail, conséquentes mais qui me parurent fort agréables. Loin d'être le fruit d'une réflexion solitaire, ces résultats sont issus de l'intérêt que plusieurs personnes leur ont porté. Sans oublier les (très) nombreuses conversations moins ... sérieuses, qui rythmèrent mon quotidien pendant cette période. En ce sens, il me semble opportun d'adresser quelques remerciements.

Tout d'abord, je souhaite remercier les membres du jury pour m'avoir fait l'honneur d'examiner mes travaux. Les rapporteurs MM. Marc DESCHAMPS et Sébastien GRONDEL pour leur avis détaillé sur le manuscrit, M. Didier CLOUTEAU pour avoir présidé le jury, Mme Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA et MM. Mike LOWE et Vincent PAGNEUX pour avoir endossé le rôle d'examineurs.

Je remercie également Mme Clarisse POIDEVIN de m'avoir accueilli au sein du DISC et mes deux chefs de laboratoire successifs, MM. Sylvain CHATILLON et Édouard DEMALDENT. Au sein du DISC, mes pensées vont également à MM. Alexandre IMPÉRIALE, Olivier MESNIL, Nicolas LEYMARIE et Vahan BARONIAN qui ont suivi mon cheminement de thésard, m'ont fait profiter de leur expérience avec bienveillance et ont toujours été de bon conseil.

Cet exercice ne saurait être complet sans adresser mes chaleureux remerciements à M. Alain LHÉMERY, mon directeur et encadrant de thèse. Il m'a accordé sa confiance dès le début de cette aventure. Puis ce fut un florilège de discussions scientifiques (ou non) et d'anecdotes sur l'histoire de la communauté du CND. Je te le dis, toi aussi tu es un bon camarade !

Viens maintenant le tour de la *team* des *jeunes*, camarades de boustifaille et de pause café. Je commencerai par les plus vieux : Tom, Arnaud, Bastien, Kombossé, Olivier, Paul, Andrii et Samar. Il y a également mes contemporains : Tinh, Hajer, Corentin, Georges, Arthur, Alexandre, Imanol et Patrick. Sans oublier les petits nouveaux : André et Amond (à qui je

transmets le relai). Enfin, mes co-bureaux aux conversations déjantées Guillaume et Abdellahi ; ainsi que mes compagnons de virées parisiennes (finissant souvent au *Village*) Clément et Valentin.

Pour finir, je souhaite remercier mes amis et ma famille. Mes colocataires Robin, Alexis et Sarah pour m'avoir supporté ces dernières années et mes parents pour m'avoir encouragé depuis toujours. J'ai également une pensée pour ma grand-mère, Édith, qui aurait souhaité assister à ma soutenance.

À tous ceux que j'aurais omis et aux autres, je dis ... à très bientôt ! Pour l'heure, cher·e lecteur·rice, place aux pinceaux !



Index des abréviations et notations utilisées

Abréviations

CEA	Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives
CND	Contrôle Non-Destructif
EF	Méthode des Éléments Finis
EMAT	ElectroMagnetic Acoustic Transducer
EWM	Exponential Window Method
OG	Ondes (élastiques) Guidées
SAFE	Semi-Analytical Finite Elements method
SAFE- γ	SAFE à projection du nombre d'onde fixée
SHM	Structural Health Monitoring
TDR	Tracé Dynamique de Rayon
TRA	Tracé de Rayon Axial
TRP	Tracé de Rayon Paraxial

Notations tensorielles

Les grandeurs vectorielles, matricielles et tensorielles sont indifféremment notées en caractère droit et en gras alors que leur norme (et plus généralement toute grandeur scalaire) est notée en caractère standard et en italique. Exemple : le vecteur d'onde \mathbf{k} a pour norme $k = \|\mathbf{k}\|$.

Opérateurs courants

$(\cdot)^*$	conjugué d'un nombre ou vecteur à valeurs complexes
$(\cdot)^t$	transposée d'un vecteur ou d'une matrice
$ \cdot $	module d'un nombre complexe ou valeur absolue d'un nombre réel
$\ (\cdot)\ $	norme euclidienne d'un vecteur ; pour un vecteur complexe \mathbf{z} , $\ \mathbf{z}\ = \sqrt{\mathbf{z} \cdot \mathbf{z}^*}$
$\text{Re}[(\cdot)]$	partie réelle d'un nombre complexe
$\text{Im}[(\cdot)]$	partie imaginaire d'un nombre complexe
$\langle (\cdot) \rangle$	moyenne temporelle $\langle \cdot \rangle = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T (\cdot) dt$ ou en notation complexe $\langle \cdot \rangle = \frac{1}{2} (\cdot)(\cdot)^*$
$(\dot{\cdot})$	dérivée temporelle première
$(\ddot{\cdot})$	dérivée temporelle seconde
$(\widehat{\cdot})$	transformée de Fourier temporelle

Notations par ordre alphabétique

$\alpha_{i..f}$	facteur d'atténuation d'un pinceau
$\mathcal{A}^{(i)}$	facteur d'amplitude d'un pinceau
A_m	facteur de focalisation de Maris d'un mode m
\mathbf{C}	matrice de rigidité d'un matériau
$\mathcal{D}_{i..f}$	facteur de divergence d'un pinceau
e	demi-épaisseur de plaque
E_{tot}	énergie mécanique totale
$\mathcal{G}_{i..f}$	fonction de Green
i	unité imaginaire
$i..f$	indice correspondant à une séquence modale quelconque émergeant de la source selon le mode m_i et atteignant le point de calcul selon le mode m_f
\mathbf{k}, \mathbf{k}_m	vecteur d'onde (d'un mode m)
$KMAH$	nombre de caustiques sur le trajet d'un pinceau
$\mathbf{L}_{i..f}$	matrice d'évolution d'un pinceau
\mathbf{P}	vecteur de Poynting élastique
$\mathbf{q}_s(x, y)$	description spatiale du terme de source à la surface supérieure de la plaque

$q_t(t)$	description temporelle du terme de source
\mathbf{r}	point de calcul du champ d'onde guidée
\mathbf{R}_0	point courant sur la surface émettrice de la source
\mathbf{R}_C	centre de la surface émettrice de la source
\mathfrak{R}_{mn}	coefficients de réflexion en énergie
\mathbf{s}	vecteur lenteur
\mathbf{u}	champ de déplacement particulaire
\mathbf{v}_e	vitesse d'énergie
\mathbf{v}_g	vitesse de groupe
\mathbf{v}_p	vitesse de phase
\mathbf{W}_m	déformée modale du mode m
$\beta_m(\gamma, \omega)$	coefficient d'atténuation d'un mode guidé
γ	direction de phase
$\boldsymbol{\varepsilon}$	tenseur des déformations
$(\zeta_{\perp} = \rho; \zeta_{\parallel}; z)$	système de coordonnées dans le repère pinceau
$\boldsymbol{\eta}$	matrice de viscoélasticité d'un matériau
$\hat{\vartheta}_{i..f}$	terme de phase d'un pinceau
$(\lambda; \mu)$	coefficients de Lamé d'un matériau isotrope
\mathbf{E}	sensibilité au déplacement d'un transducteur piézoélectrique
$\Pi_{i..f}$	produit des coefficients de réflexion en énergie le long d'un pinceau
ρ_0	masse volumique
ρ, ρ_i	longueur du rayon axial d'un pinceau, d'un de ses segments
$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur des contraintes
φ	direction de phase
$\boldsymbol{\Psi} = (d\zeta^{\parallel} \quad ds_{\parallel})^t$	vecteur d'état d'un pinceau
ω	fréquence angulaire/ pulsation d'une onde monochromatique
Ω_m	relation de dispersion d'un mode guidé

Table des matières

Avant-propos	v
Index des abréviations et notations utilisées	vii
Table des matières	xi
Introduction	1
PREMIÈRE Partie : PROPAGATION EN MILIEU ISOTROPE	9
Chapitre 1 Méthode du pinceau modal en milieu isotrope	11
1.1 Présentation du formalisme et propagation depuis un point source	12
1.1.1 Définition du pinceau modal d'onde guidée	12
1.1.2 Propagation en milieu homogène	14
1.2 Réflexions dans une plaque de taille finie	15
1.2.1 Réflexion d'une onde plane sur une interface plane en incidence oblique	15
1.2.2 Matrice de réflexion	16
1.3 Évolution du vecteur d'état après de multiples réflexions	19
1.3.1 Construction de la matrice d'évolution globale	19
1.3.2 Matrice d'évolution en propagation inversée	20
1.4 Obtention du champ de déplacement particulière	21
1.4.1 Conservation de l'énergie transportée par un pinceau	21

1.4.2	Fonction de Green associée au pinceau	27
1.4.3	Exemples de calculs de champ	30
Chapitre 2	Champ rayonné par une source de taille finie	35
2.1	Calcul du champ rayonné par convolution surfacique	36
2.1.1	Cas général	36
2.1.2	Sources de contrainte uniforme	41
2.1.3	Sources en émission radiale	41
2.1.4	Étude de convergence	42
2.2	Validation numérique	45
2.3	Approximation de type Fraunhofer	50
2.3.1	Mise en équation de l'approximation	50
2.3.2	Modèles de sources analytiques	51
2.3.3	Exemple d'une source décrite de manière numérique	54
2.3.4	Comparaisons avec le calcul par convolution	56
2.3.5	Excitabilité modale du traducteur	59
2.4	Modélisation de la réception par un traducteur piézoélectrique	62
2.4.1	Sensibilité des traducteurs piézoélectriques	62
2.4.2	Approximation de Fraunhofer pour la réception	62
2.5	Décomposition modale des signaux calculés	64
DEUXIÈME Partie : PROPAGATION EN MILIEU ANISOTROPE		67
Chapitre 3	La méthode des pinceaux en milieu anisotrope	69
3.1	Définition d'un pinceau modal pour un mode guidé en milieu anisotrope	70
3.2	Construction des matrices d'évolution	72
3.2.1	Matrice de propagation	72
3.2.2	Matrice de réflexion	74
3.3	Atténuation des ondes guidées	77
3.3.1	Modélisation de l'atténuation dans le calcul des modes	77
3.3.2	Bilan d'énergie au sein d'un pinceau	80
3.4	Fonction de Green	82
3.5	Présence de caustiques dans la solution modale	85

3.5.1	Identification des caustiques modales	85
3.5.2	Calcul du champ de déplacement près des directions de caustique	87
Chapitre 4 Étude du modèle des pinceaux appliqué aux sources de taille finie en milieu anisotrope		95
4.1	Application de l'approximation de Fraunhofer	96
4.2	Validation numérique en milieu non atténuant	98
4.3	Analyse des signaux temporels calculés par le modèle des pinceaux	102
4.3.1	Décomposition modale des formes d'ondes	102
4.3.2	Effet de l'atténuation sur les signaux temporels	104
TROISIÈME Partie : PROPAGATION EN MILIEU INHOMOGÈNE		107
Chapitre 5 Formalisme des pinceaux aux rayons courbés		109
5.1	Étude de la propagation d'ondes guidées en régime hautes fréquences	110
5.2	Détermination des trajets d'énergie	115
5.2.1	Établissement du système de tracé du rayon axial	115
5.2.2	Résolution numérique par un schéma itératif	117
5.2.3	Cas des milieux isotropes homogènes	119
5.3	Évolution de l'amplitude le long du rayon axial	121
5.3.1	Système de tracé du rayon paraxial en coordonnées curvilignes	121
5.3.2	Système de tracé du rayon paraxial en coordonnées rayon-centrées	123
5.3.3	Définition de la matrice de propagation	127
5.3.4	Résolution du (TDR) par un schéma numérique itératif	130
5.3.5	Modèle de pinceaux simplifié	131
Chapitre 6 Exemples d'application du modèle des pinceaux en milieu inhomogène		135
6.1	Perte d'épaisseur localisée dans une plaque isotrope et plane	136
6.1.1	Formulation de la relation de dispersion locale	136
6.1.2	Tracé de rayons passant par le défaut	137
6.1.3	Influence de la perte d'épaisseur sur le champ de déplacement	142
6.2	Tomographie de distributions de contraintes multiaxiales	145
6.2.1	Brève introduction aux méthodes de tomographie par ondes guidées	145

6.2.2	Quantification de l'effet acousto-élastique dû à la présence de contraintes résiduelles	145
Conclusion		151
Bibliographie		155
Annexes		163
Annexe A	Calcul des modes guidés par la méthode SAFE	165
A.1	Présentation de la méthode SAFE	166
A.2	Analyse des résultats obtenus et post-traitements	169
A.3	Convergence et qualité des résultats	173
Annexe B	Calcul des coefficients de réflexion	177
B.1	Principe de la méthode	178
B.2	Calcul en milieu isotrope	179
B.3	Calcul en milieu composite stratifié	182
Annexe C	Écriture de la fonction de Green en champ direct	185
C.1	Problème 2D (onde plane)	186
C.2	Problème 3D (onde omnidirectionnelle)	187
C.3	Réécriture en fonction des termes pinceau	188
Annexe D	Trajets réfléchis entre deux points en milieu isotrope	189
D.1	Réflexion sans conversion de modes	190
D.2	Réflexion avec conversions de modes	191

Introduction

EN CONTRÔLE NON DESTRUCTIF (CND), l'usage de la simulation est fréquent. En effet, lorsque le contrôle sert à assurer un niveau de qualité et de sécurité réglementaire (nucléaire, aéronautique, équipements sous pression), il faut prouver que la solution proposée est optimale ou qu'elle répond bien au cahier des charges. La démonstration de performance - requise pour la qualification de la méthode - passe généralement par la simulation. Le but est alors d'évaluer les interactions d'un phénomène physique maîtrisé avec un ou plusieurs défauts présents dans la pièce. Plusieurs familles de méthodes de CND coexistent et font appel à des phénomènes de nature aussi variée que la propagation d'ondes ultrasonores, la circulation de courants de Foucault, la propagation de photons X ou encore la diffusion de chaleur dans la pièce à inspecter. Parmi les méthodes ultrasonores, la propagation d'ondes élastiques guidées (OG) dans des structures fines – au sens que leur longueur d'onde est du même ordre de grandeur qu'une ou deux dimensions caractéristiques de la pièce à inspecter – constitue un sujet de recherche très actif. En effet, contrairement aux ondes de volume, les OG sont capables de se propager sur de longues distances [1] : de l'ordre du mètre pour les guides de type plaque jusqu'au kilomètre pour les guides unidirectionnels (ex : rail de chemin de fer, pipeline). D'autre part, les OG sont sensibles aussi bien aux défauts superficiels (ex : entailles, corrosion) qu'aux défauts à cœur (inclusions, bulles d'air, fissures ou délaminages). Les ondes guidées sont notamment envisagées et parfois utilisées en contrôle santé intégré [2–5] (en anglais *SHM* pour *Structural Health Monitoring*). Un nombre restreint de traducteurs ultrasonores peuvent alors être intégrés à la structure de manière permanente afin de l'inspecter pendant toute sa durée de vie. Cependant, contrairement aux ondes de volume, les OG sont à la fois dispersives et multimodales. L'information contenue dans les signaux temporels mesurés expérimentalement est difficile à extraire ; l'analyse en est donc complexe. La simulation joue alors un rôle crucial dans le sens où elle permet de donner des clés de compréhension de la physique mise en jeu.

Plusieurs articles de synthèse ont dressé un état de l'art des méthodes de SHM, ou plus généralement de CND par OG. Dès 1997, CHIMENTI s'est intéressé à l'utilisation d'ondes

guidées dans le but de caractériser les propriétés mécaniques de plaques composites [6]. Depuis, de nombreux travaux ont permis d'étudier la propagation d'ondes guidées dans tous types de guides d'ondes ainsi que leur émission et leur réception par les transducteurs ultrasonores intégrés à la structure. L'application de méthodes de traitement du signal permet d'analyser l'information contenue dans les formes d'ondes mesurées afin d'identifier ou d'imager des défauts. Les pratiques de SHM qui se sont développées au cours des années ont été résumées en 2016 par MITRA et GOPALAKRISHNAN [7]. Cette étude présente également plusieurs axes de développement comme l'emploi d'algorithmes stochastiques, la compensation des variations de température, etc... Les recherches actuelles se concentrent sur la robustesse des méthodes de contrôle et leur intégration aux configurations industrielles aéronautiques, ferroviaires et nucléaires.

WILLBERG *et al.* ont publié une revue des différentes méthodes employées pour simuler la propagation d'ondes guidées dans le contexte du SHM [8]. Les auteurs classent ces dernières en trois catégories : les méthodes analytiques, les méthodes semi-analytiques et les méthodes entièrement numériques (différences finies, éléments finis). Les deux premières catégories sont particulièrement adaptées lorsqu'il s'agit d'obtenir les caractéristiques modales de la propagation d'une onde guidée à une fréquence donnée et en un nombre restreint de points. Cependant, ces méthodes ne permettent de traiter que des cas simples ou très particuliers. Elles font régulièrement l'hypothèse d'ondes planes, non générées par un transducteur ultrasonore. Elles permettent cependant une analyse fine des phénomènes physiques liés à la propagation d'une onde guidée. Citons par exemple les travaux de PAGNEUX et MAUREL qui - grâce à une formulation couplée du déplacement et de la contrainte - ont traité de manière modale le cas de la propagation d'une OG dans un guide d'épaisseur variable [9] ou inhomogène [10]. Les méthodes numériques nécessitent de calculer le champ de déplacement sur un ensemble de points répartis sur tout le volume du guide d'ondes ou sur sa surface dans le cas des éléments finis aux frontières [11]. Or, en CND, les mesures sont toujours effectuées en un nombre restreint de points. Le fait de mailler l'intégralité du guide d'ondes mène à des temps de calcul élevés (voire prohibitifs) dès lors que les dimensions du guide d'ondes sont grandes ; or la capacité des OG à se propager dans des pièces de grandes dimensions fait tout l'intérêt des méthodes les utilisant. De plus, les méthodes d'éléments finis temporelles ne donnent pas accès à l'information modale. Cependant, on peut utiliser ces méthodes pour traiter de nombreuses configurations réalistes et complexes de manière suffisamment générique.

Depuis plus de vingt-cinq ans, le CEA List développe la plateforme logicielle CIVA [12] qui fait aujourd'hui référence dans le domaine du CND. Son module ultrasonore se base sur le modèle du pinceau transitoire d'ondes de volume initialement développé par GENGEMBRE et LHÉMERY [13]. Ce dernier constitue une approche géométrique de la propagation d'ondes élastiques qui permet de suivre l'évolution de la courbure du front d'onde afin de remonter à l'évolution de l'amplitude de l'onde. Initialement développé pour les milieux aux propriétés homogènes par morceaux et anisotropes, les travaux de GARDAHAUT [14] ont permis de l'étendre à des milieux inhomogènes. Le modèle des pinceaux est alors capable de prédire la propagation d'une onde de volume à travers une soudure dans lesquelles la direction cristallographique locale du métal peut varier continûment, par exemple. Enfin, au sein de CIVA, les interactions d'une onde élastique avec un défaut sont modélisées en fonction des cas soit par différentes théories de la diffraction [15], soit en plaçant le défaut dans une boîte d'éléments finis dont les quantités aux frontières sont couplées avec un calcul de pinceaux [16].

Sont également intégrés dans CIVA des outils dédiés à la simulation modale d'ondes guidées. Tout d'abord des approches modales se basent sur un calcul des modes guidés à une fréquence donnée par la méthode SAFE (Semi-Analytical Finite Element). Cette dernière consiste à mailler la section d'un guide d'ondes afin d'obtenir les caractéristiques des modes guidés, *i.e.* leur nombre d'onde et leur déformée. La propagation de cette solution modale dans le guide d'onde est ensuite traitée de manière analytique. D'un point de vue historique, la méthode SAFE a été développée dès les années 1970 [17] sous des noms tels que *Infinite layer method* ou *Extended Ritz Technique*. Le but était alors d'étudier les modes guidés se propageant dans une plaque stratifiée. Cette méthode a depuis été largement employée et adaptée [18–21]. Parallèlement à cela, d'autres méthodes numériques ont été développées dans le but d'obtenir les modes guidés, comme la méthode THOMSON-HASKELL [22,23] ou encore les méthodes matricielles [24] à la base du logiciel Disperse, développé à l'Imperial College. Cependant, la méthode SAFE ne permet pas à elle seule de réaliser un modèle de rayonnement car elle fait l'hypothèse d'ondes planes se propageant dans un guide d'onde parfait et de dimensions infinies. JEZZINE [25,26] a été le premier à employer au CEA la méthode SAFE pour les guides unidirectionnels et a établi une formulation modale pour simuler une expérience de CND dans un tel guide avec prise en compte de l'émission et de la réception en traitant le cas de défauts dans le plan perpendiculaire à l'axe du guide. BARONIAN a par la suite développé une méthode hybride pour traiter les problèmes de diffraction par une inhomogénéité quelconque d'un guide unidirectionnel (défaut, jonction etc...), la diffraction étant traitée par un calcul aux éléments finis [27,28]. TAUPIN a étudié la diffraction par un raidisseur dans une plaque composite [29,30]. EL BAKKALI s'est intéressé au cas des tuyauteries comportant des parties coudées en généralisant la solution modale SAFE en coordonnées curvilignes et étudiant la diffraction à la jonction d'une section droite et d'une section coudée d'une tuyauterie de façon modale (raccordement modal) [31,32]. Ces travaux ont permis des simulations sur des guides de grande dimension pour des coûts en termes de temps de calcul relativement faibles. Dans tous les travaux qui ont été menés, les solutions sont formulées sur les bases modales des parties invariantes des guides. Les effets de diffraction par un défaut, une jonction ou toute variation par rapport au guide invariant, sont tous traduits par des coefficients modaux.

Plus récemment, STÉVENIN a proposé un modèle de pinceaux d'OG afin d'effectuer des calculs de champ de déplacement d'ondes omnidirectionnelles rayonnées dans des plaques métalliques ou composites multicouches [33,34]. Elle s'est inspirée du modèle de pinceaux transitoires d'ondes de volume qu'elle a adapté au cas des ondes guidées en le couplant à un formalisme de Green modal [35] qui permet de calculer, en l'absence de réflexion et de défaut, le champ de déplacement d'une OG générée par une source de contraintes située à la surface de la plaque. Son formalisme étant par essence décrit dans le domaine fréquentiel, il prédit la dispersion des paquets d'onde rayonnés et permet d'obtenir ces derniers comme des contributions modales séparées. Le cas de la réflexion d'une onde guidée sur un bord de plaque rectiligne a également été traité par STÉVENIN. Toutefois, l'implémentation informatique de son modèle ne permettait pas de traiter les réflexions multiples sur les bords d'une plaque de taille finie. Or ces dernières sont observées dans les signaux mesurés expérimentalement [36]. De plus, STÉVENIN a comparé son modèle à une mesure expérimentale du déplacement normal à la surface de la plaque. Cette validation ne permet cependant pas de conclure sur la capacité du modèle à rendre compte des phénomènes de conversions de modes complexes dus aux réflexions. Enfin, ce modèle ne permet pas encore de simuler l'interaction d'une onde guidée avec un quelconque type de défaut ou d'inhomogénéité.

CIVA possède par ailleurs un noyau de calculs éléments finis temporel, appelé ONDO, optimisé pour traiter des problèmes acoustiques ou élastodynamiques. Ce code peut également simuler le rayonnement d'une OG et son interaction avec un ou plusieurs défauts. En effet, les méthodes numériques telles que celle des éléments finis sont d'une grande utilité pour la simulation de CND par OG car elles sont assez génériques pour pouvoir prédire l'interaction d'une onde avec de nombreux types de défauts. Les dimensions d'un défaut dans un guide d'onde sont en principe inférieures à la longueur d'onde des modes guidés ; les modèles de diffraction sous approximation haute fréquence ne peuvent alors pas être raisonnablement utilisés. Un *benchmark* a été réalisé par Leckey *et al.* [37] dans le but d'évaluer l'aptitude de différents codes Éléments Finis (EF) à simuler des CND par OG en temps acceptable. Ils ont comparé des logiciels commerciaux tels qu'Abaqus, Ansys et Comsol. Ils ont également utilisé leur propre implémentation d'une méthode optimisée pour traiter des problèmes élastodynamiques [38,39]. Les performances de ONDO ayant pu être observées au CEA List le placent parmi les codes les plus efficaces, ses performances étant significativement supérieures à celles des autres codes commerciaux [40]. Toutefois, toutes ces méthodes sont soumises aux limitations des éléments finis temporels mentionnées plus haut. Une autre approche, issue d'une collaboration entre le laboratoire POEMS et le CEA List, consiste à utiliser des éléments finis dans le domaine fréquentiel en ne maillant que la région autour du défaut. La méthode de Half-Space matching [41] permet alors de reconstruire en tout point de la plaque le champ diffracté par un défaut soumis à une sollicitation modale sur les frontières du domaine éléments finis l'entourant.

En résumé, plusieurs familles de méthodes sont utilisées pour prédire le rayonnement d'ondes guidées. Dans le cas des guides unidirectionnels, le couplage d'un calcul de modes avec des codes numériques permet de simuler l'interaction d'une OG avec un défaut. D'autre part, il existe un modèle semi-analytique récent permettant de prédire le rayonnement d'ondes guidées omnidirectionnelles dans des plaques. Ce dernier peut être utilisé pour calculer le champ de déplacement particulière en un ensemble restreint de points d'intérêt de manière plus rapide qu'avec un code EF. Il permet également une analyse plus fine des formes d'ondes qu'il prédit. En effet, seule l'obtention des champs particuliers sous forme de décomposition modale permet une analyse mode à mode des signaux et ainsi la conception d'une procédure de contrôle adaptée à une configuration donnée. Toutefois, ce modèle n'a été que partiellement validé et l'implémentation informatique qui en a été faite n'a pas permis d'explorer toutes ses capacités. On sait cependant qu'il n'est pas capable de prédire l'interaction d'une onde guidée avec un défaut très localisé *i.e.* de dimension inférieure à la longueur d'onde. La solution la plus générique et performante semble donc s'inscrire dans la continuité de la démarche mise en place au CEA List pour la simulation d'ondes élastiques, c'est-à-dire par hybridation d'une approche de pinceaux pour les phases de propagation avec un code EF pour traiter les interactions avec les défauts localisés.

C'est dans ce contexte qu'interviennent ces travaux de thèse. Ils participent au développement du modèle de calcul de champ d'ondes guidées le plus performant et le plus générique possible. Ce modèle devra permettre de prédire le rayonnement d'une onde omnidirectionnelle émise par un traducteur ultrasonore quelconque. Il devra aussi prendre en compte les limites géométriques de la plaque et donc les réflexions des ondes sur celles-ci.

Enfin, le modèle adoptera l'approche modale qui fait la force des méthodes analytiques. Cette approche s'inscrit pleinement dans la démarche de modélisation et de simulation menée au CEA List. Il est ainsi possible de voir l'objectif de cette thèse comme l'adaptation du modèle de champ ultrasonore pour les ondes de volumes – intégré dans CIVA – au cas des ondes guidées. Le modèle du pinceau modal d'ondes guidées développé par STÉVENIN a permis de prendre en compte à la fois l'aspect dispersif et l'aspect modal des OG. Nous adopterons donc cette vision fréquentielle et nous l'étendrons aux guides d'ondes aux propriétés continûment variables (plaques courbes, inhomogènes, d'épaisseur variable), à la prise en compte de réflexions multiples sur les bords de plaque et formellement à la transmission d'une plaque à une autre, comme cela a été fait pour le modèle du pinceau transitoire d'ondes de volume. À terme, ce modèle pourra être couplé avec un code numérique ce qui permettra de développer un outil de simulation hybride d'interaction avec des défauts localisés.

Organisation du manuscrit

Ce document est divisé en trois parties qui se succèdent selon l'ordre des développements réalisés au cours de ces travaux. Tout d'abord, on se concentre sur la propagation d'ondes guidées dans des plaques métalliques, aux propriétés mécaniques isotropes. Dans un second temps, ce sont les milieux anisotropes qui sont impliqués. On cherche alors à étendre le modèle développé dans la première partie pour pouvoir prendre en compte les plaques en matériau composite, couramment utilisées dans le domaine de l'aéronautique. Enfin, le but de la troisième partie est d'obtenir un modèle plus général qui permette de prédire le rayonnement d'ondes guidées dans les plaques non planes (ex : pièces de fuselage d'un aéronef) ou possédant des caractéristiques inhomogènes pouvant être dues à certains types de défauts (ex : perte d'épaisseur par corrosion, présence de contraintes résiduelles). La démarche adoptée dans chacun des chapitres est résumée ci-après.

Chapitre 1. L'objectif est de développer un modèle semi-analytique de pinceaux permettant de prédire le rayonnement des ondes guidées en milieu isotrope et générées par une source de contrainte ponctuelle. En effet, les matériaux métalliques sont classiquement considérés comme des milieux isotropes. Or ces matériaux sont utilisés dans la plupart des domaines industriels qui font appel à des méthodes de CND. Pour cela, l'idée est de mettre en place un formalisme géométrique qui décrit la propagation d'OG en milieu infini afin de déterminer sous une approximation haute fréquence l'évolution de l'amplitude d'un mode guidé entre un point de calcul du champ de déplacement et le point source. Par la suite, ce formalisme est étendu aux réflexions multiples sur les bords de la plaque. On détermine d'abord les coefficients de réflexion décrivant les phénomènes de conversions de modes lors de la réflexion, puis on étudie l'effet de la réflexion d'un point de vue géométrique. Enfin, on étudie l'évolution de l'amplitude le long d'un trajet d'énergie à partir des paramètres d'état du pinceau. L'introduction d'un formalisme de Green modal permet finalement d'estimer quantitativement la valeur du champ de déplacement particulière. Ces développements ont également fait l'objet d'un article publié dans le journal *Ultrasonics* [42].

Chapitre 2. Le modèle de pinceaux est appliqué à des sources de contraintes surfaciques imposées sur un support de taille finie. Le but est alors d'estimer le champ de déplacement généré par un transducteur ultrasonore pouvant être de nature piézoélectrique ou utilisant des phénomènes de couplage électromécaniques (EMATs, patches magnétostrictifs).

La source étant considérée comme un ensemble de sources ponctuelles, les effets de diffraction de celle-ci sont pris en compte par la sommation des contributions de chacun de ces points. Une stratégie d'intégration permettant d'optimiser les calculs numériques est alors détaillée. Dans un second temps, ce modèle est vérifié en le comparant à un modèle numérique. Une approximation, raisonnable en champ lointain, est ensuite proposée dans le but de réduire au mieux les temps de calcul. Après avoir étudié le problème de l'émission, un modèle de réception par un transducteur piézoélectrique est introduit. Enfin, l'intérêt de ce modèle pour la simulation de configurations de contrôle est discuté.

Chapitre 3. Le formalisme du premier chapitre est étendu aux milieux anisotropes afin d'obtenir un modèle de rayonnement pour les plaques en matériau composite. La notion de pinceau est redéfinie en prenant en compte les caractéristiques des modes guidés en milieu anisotrope, en particulier de la non colinéarité de la lenteur et de la vitesse d'énergie. La démarche suivie est sensiblement la même que celle adoptée pour traiter le cas des milieux isotropes. Cependant, la plupart des matériaux composites utilisés par l'industrie sont dissipatifs. L'atténuation des ondes ne peut alors pas être négligée et des développements pour la prendre en compte sont détaillés. Enfin, après avoir remarqué que le modèle de pinceaux diverge à proximité des directions de focalisation infinie, une formulation alternative est recherchée. La méthode des pinceaux en milieu anisotrope a fait l'objet d'un article soumis au journal *NDT&E International* [43].

Chapitre 4. L'anisotropie du matériau n'a pas d'influence sur la prise en compte de la diffraction par une source de taille finie. Cependant, elle a un effet sur la validité de l'approximation de Fraunhofer dans certaines directions d'énergie. Après avoir quantifié cet effet, on conclut sur la validité de l'approximation de Fraunhofer en fonction de l'anisotropie des modes guidés. Dans un second temps, une validation numérique du modèle des pinceaux en milieu anisotrope est réalisée.

Chapitre 5. La propagation d'ondes guidées dans des plaques courbes et aux propriétés mécaniques inhomogènes est ensuite traitée. En injectant une solution correspondant à une fonction d'onde guidée dans l'équation de l'élastodynamique en régime haute fréquence, on remarque qu'il est possible de prédire le rayonnement de cette OG grâce à un formalisme de pinceaux. Ce dernier n'est valable que si les variations des propriétés de la plaque sont lentes. Les trajets d'énergie des pinceaux sont alors des courbes du plan médian de la plaque, déterminées par un schéma numérique itératif.

Chapitre 6. Enfin, deux cas d'application du modèle de pinceaux en milieu inhomogène sont présentés dans le dernier chapitre. On s'intéresse d'abord à un défaut de corrosion modélisé par une perte locale d'épaisseur dans une plaque plane métallique. Après avoir formulé la relation de dispersion locale, des exemples de lancers de rayons sont donnés dans le but d'analyser qualitativement l'effet de la corrosion sur les trajets d'énergie. Puis des cartographies mono fréquentielles de champ de déplacement sont présentées. La seconde application concerne la prédiction de temps de vol pour la caractérisation d'états de contraintes résiduelles conduisant par effet acousto-élastique à des variations de vitesse de modes.

Présentations en congrès scientifique

Ces travaux ont été présentés lors de plusieurs conférences où ils ont à chaque fois fait l'objet d'une communication orale puis d'échanges avec les acteurs académiques et industriels

du CND, et plus généralement de l'acoustique physique. Les références de ces communications sont données ci-après :

- [a] 18th Anglo French Physical Acoustic Conference, Janvier 2018
présentation orale
- [b] 1^{ères} Journées des Jeunes Chercheurs en Acoustique Physique, Juin 2019
pitch + poster
- [c] 11th Symposium on NDT in Aerospace, Novembre 2019
proceeding + présentation orale

PREMIÈRE PARTIE :

PROPAGATION EN MILIEU

ISOTROPE

Chapitre 1

Méthode du pinceau modal en milieu isotrope

L'objectif de ce premier chapitre est de définir une méthode semi-analytique permettant de calculer les champs de déplacements particuliers dus au rayonnement d'ondes guidées dans une plaque aux propriétés mécaniques isotropes (typiquement une plaque métallique), plane, d'épaisseur constante et de taille finie. La méthode développée, appelée « méthode du pinceau modal d'onde guidée » s'inspire de résultats bien connus de l'optique géométrique [44]. C'est aussi une méthode harmonique qui s'appuie sur la connaissance des modes guidés se propageant dans le milieu à la fréquence d'intérêt. Ces modes, qui dans les milieux isotropes et homogènes sont usuellement désignés suivant les propriétés de symétrie de leur profil de déplacement (SH : Shear Horizontal, A : Antisymmetrical, S : Symmetrical), peuvent être obtenus par résolution de l'équation de Rayleigh-Lamb [45] ou par une méthode dénommée Semi-Analytical Finite Element (SAFE) décrite en Annexe A.

Tout d'abord, le formalisme est décrit dans le cas simple de la plaque non bornée (sans réflexions) puis étendu au cas de la plaque bornée (avec réflexions). Enfin, un formalisme de Green modal est utilisé dans le but d'obtenir les champs de déplacements particuliers.

1.1. Présentation du formalisme et propagation depuis un point source

DANS UNE PLAQUE illimitée aux propriétés géométriques et d'élasticité invariantes par translation dans le plan de la plaque, toute onde élastique peut être décrite comme la superposition (combinaison linéaire) de modes guidés propres à cette plaque. Nous nous intéressons ici dans un premier temps à une plaque illimitée. Le milieu de propagation est donc une plaque isotrope et homogène non bornée suivant les directions \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y d'épaisseur $2e$ dont les surfaces inférieure et supérieure sont les plans d'équation $z = \pm e$. Une contrainte harmonique ponctuelle $\hat{\mathbf{q}}_0(\omega)$ est appliquée au point $\mathbf{R}_0(x_0, y_0, e)$ situé à la surface supérieure de la plaque. Tous les calculs étant effectués dans le domaine de Fourier, la dépendance de certaines grandeurs en ω pourra ne pas être indiquée explicitement afin de ne pas alourdir les notations.

1.1.1. Définition du pinceau modal d'onde guidée

On suppose que les modes pouvant se propager dans la plaque sont connus. Dès lors, toute onde peut être décomposée comme une combinaison de ces modes. L'étude séparée de l'évolution de chacune des composantes modales permet alors de traiter le rayonnement de l'onde dans sa globalité. On s'intéresse donc ici à l'évolution d'un mode donné¹. Un pinceau est un objet mathématique permettant de représenter simplement le rayonnement de cet unique mode guidé en régime harmonique à travers une approche géométrique. Il est constitué d'un ensemble de rayons ayant pour origine le point source \mathbf{R}_0 . Le premier de ces rayons, appelé *rayon axial*, relie le point source à la projection \mathbf{r}_e d'un point courant de la plaque $\mathbf{r}(x, y, z)$ sur la surface d'équation $z = e$. Le chemin suivi par ce rayon axial est un trajet d'énergie (plutôt appelé chemin de Fermat en optique géométrique) du mode guidé. Il s'agit encore d'un chemin qui minimise le temps de vol de l'onde. Les autres rayons constituant le pinceau forment une enveloppe de rayons qui divergent de manière infinitésimale du rayon axial. Ces rayons sont nommés *rayons paraxiaux* du pinceau.

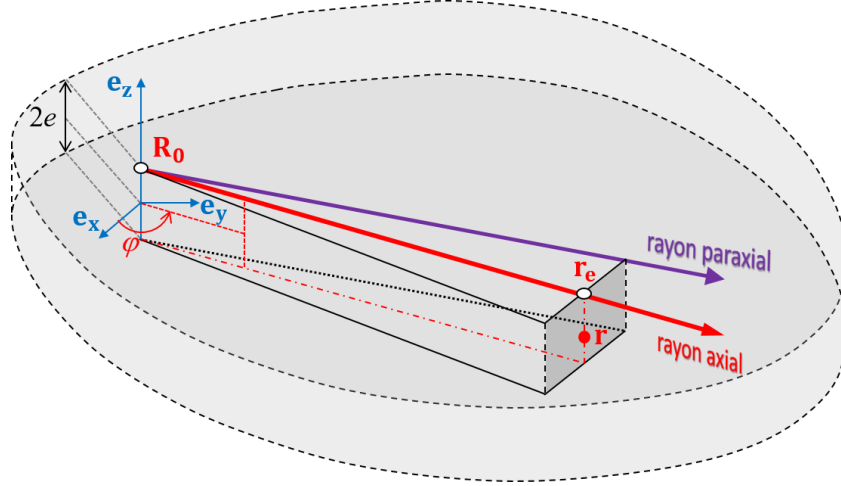
Le but est ici de prédire l'évolution de l'amplitude de l'onde le long du rayon axial en étudiant le comportement des rayons paraxiaux relativement au rayon axial. En effet, la contrainte ponctuelle appliquée est source d'une onde cylindrique qui se propage dans toutes les directions contenues dans le plan de la plaque. L'amplitude de l'onde diminue alors au fur et à mesure que la surface du front d'onde² s'agrandit. Ainsi, alors que le rayon axial pointe sur la composante (c'est-à-dire l'onde plane) de l'onde omnidirectionnelle que l'on décrit avec le pinceau, les rayons paraxiaux sont intimement liés à la courbure locale du front d'onde qui, comme nous allons le montrer ci-après, détermine la variation de l'amplitude en fonction de

¹ On se limite ici au seul cas des modes *propagatifs*. D'autres modes, modes *évanescents* et modes *inhomogènes*, existent mais ne se propagent pas pour les premiers ou s'atténuent très vite en s'éloignant de leur source pour les seconds. La problématique portant ici sur la propagation dans une plaque non bornée, ces modes ne sont pas pris en compte.

² L'appellation front d'onde pourrait ici paraître légèrement abusive car usuellement utilisée dans le domaine temporel, mais nous la garderons dans le sens où elle désigne toujours les surfaces d'égale phase.

la distance de propagation. Une vue schématique d'un pinceau faisant apparaître les rayons qui le composent est proposée sur la Figure 1.1.

Figure 1.1. Vue schématique d'un pinceau se propageant dans la direction φ depuis un point source \mathbf{R}_0 jusqu'au point de calcul de champ \mathbf{r} .



Un repère local nommé par la suite *repère du pinceau* est défini suivant le rayon axial. Son premier vecteur de base est le vecteur unitaire \mathbf{e}_\perp le long du rayon axial et orienté du point source vers le point de calcul. Son second vecteur de base \mathbf{e}_\parallel est choisi de sorte que le trièdre $(\mathbf{e}_\perp; \mathbf{e}_\parallel; \mathbf{e}_z)$ soit direct. Le système de coordonnées $(\rho = \zeta_\perp; \zeta_\parallel; z)$ représentant la position d'un rayon (par exemple paraxial) dans ce nouveau repère a pour origine le point source \mathbf{R}_0 . La distance ρ est donc la longueur parcourue le long du rayon axial entre \mathbf{r}_e et \mathbf{R}_0 tandis que ζ_\parallel est l'écart, orthogonal à la section transverse du pinceau, entre ces deux rayons à la distance de propagation ρ . Un pinceau est représenté à une position donnée par deux quantités associées à l'un de ses rayons paraxiaux. La première de ces quantités est l'écart infinitésimal de position entre le rayon axial et le rayon paraxial, noté $d\zeta_\parallel$ car tangent au front d'onde ; la seconde est l'écart infinitésimal de lenteur entre ces deux rayons noté ds_\parallel , la lenteur étant définie comme l'inverse de la vitesse de phase, soit $s = k/\omega$ ¹. Ensemble, ces quantités différentielles composent le *vecteur d'état* du pinceau :

$$\Psi := \begin{pmatrix} d\zeta_\parallel \\ ds_\parallel \end{pmatrix}. \quad (1.1.1)$$

L'étude de l'évolution de ce vecteur d'état le long du rayon axial est au cœur des paragraphes qui suivent (1.1.2 à 1.3.2).

¹ Le nombre d'onde k est une grandeur algébrique qui est égale à la norme du vecteur d'onde \mathbf{k} si ce vecteur d'onde est orienté dans le sens de propagation de l'énergie. Dans le cas contraire k est négatif et égal à l'opposé de cette norme ; on parle alors de *mode inverse* [46].

1.1.2. Propagation en milieu homogène

Intéressons-nous d'abord à l'évolution du vecteur d'état d'un pinceau entre deux positions (1) et (2) prises le long de son rayon axial et distantes de $\Delta\rho$. Lorsque le milieu est homogène, le rayon axial est la ligne droite que relie le point source et le point de calcul. Cette situation, et les quantités géométriques auxquelles elle fait appel, sont représentées sur la Figure 1.2. Par de simples constructions géométriques et en introduisant $d\theta$ comme étant l'angle entre la direction du rayon axial et celle du rayon paraxial, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{cases} d\zeta_{\parallel,2} = d\zeta_{\parallel,1} + \Delta\rho \tan d\theta & (1.1.2a) \\ ds_{\parallel,1} = s \cdot \sin d\theta & (1.1.2b) \\ ds_{\parallel,2} = ds_{\parallel,1} & (1.1.2c) \end{cases}$$

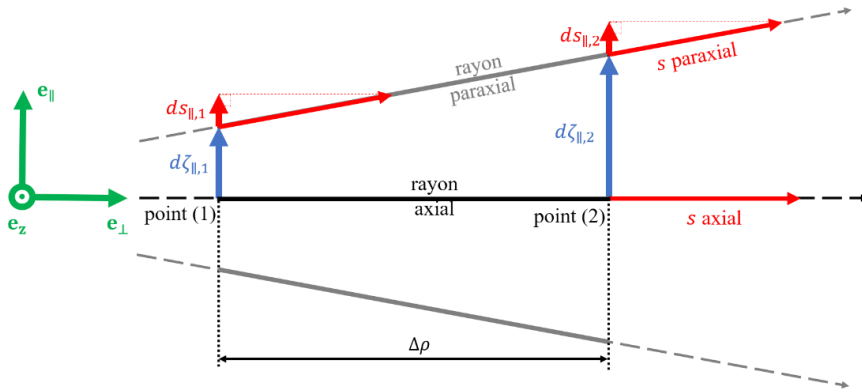


Figure 1.2. Vue de dessus d'un pinceau se propageant entre deux positions (1) et (2).

L'écart de lenteur est donc conservé durant la phase de propagation. De plus, l'angle $d\theta$ étant petit (l'angle exagérément grand de la figure a été tracé pour les seuls besoins de clarté), on obtient l'expression approchée de $d\zeta_{\parallel,2}$ en fonction de $d\zeta_{\parallel,1}$ et $ds_{\parallel,1}$:

$$d\zeta_{\parallel,2} \sim d\zeta_{\parallel,1} + \frac{\Delta\rho}{s} ds_{\parallel,1}. \quad (1.1.3)$$

À partir des équations (1.1.2c) et (1.1.3) on peut définir la matrice de propagation \mathbf{L}_{prop} qui relie le vecteur d'état Ψ_1 du pinceau à l'état (1) et le vecteur d'état Ψ_2 du pinceau à l'état (2) de la manière suivante :

$$\Psi_2 = \mathbf{L}_{\text{prop}} \Psi_1 = \begin{pmatrix} d\zeta_{\parallel,2} \\ ds_{\parallel,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta\rho/s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\zeta_{\parallel,1} \\ ds_{\parallel,1} \end{pmatrix}. \quad (1.1.6)$$

1.2. Réflexions dans une plaque de taille finie

On cherche maintenant à décrire l'évolution du vecteur d'état d'un pinceau dans le cas de la propagation dans une plaque de taille finie, impliquant que soient prises en compte une ou plusieurs réflexions. Pour cela, une étude de l'interaction d'une onde avec un bord de la plaque est d'abord réalisée dans le § 1.2.1 puis, de manière analogue à l'obtention de la matrice de propagation, nous traduisons l'évolution d'un pinceau dans cette interaction sous la forme d'une matrice de réflexion.

1.2.1. Réflexion d'une onde plane sur une interface plane en incidence oblique

Considérons tout d'abord la réflexion d'une onde plane constituée d'un unique mode en incidence oblique sur un bord plan dont la normale est orthogonale à \mathbf{e}_z . Il est encore possible de réaliser un parallèle avec l'optique géométrique en appliquant les lois de Snell-Descartes à ce problème. Ces lois assurent, au niveau du bord, l'égalité des composantes transverses des vecteurs d'onde (c'est-à-dire leur projection sur l'interface) du mode incident et d'un mode réfléchi¹. On a donc, pour un mode m incident dont la norme du vecteur d'onde est notée k_m et un mode n réfléchi dont la norme du vecteur d'onde est notée k_n

$$k_m \sin \theta_m = k_n \sin \theta_n. \quad (1.2.1)$$

Cette relation est représentée graphiquement sur la Figure 1.3a. On observe qu'il est courant que plusieurs modes réfléchis vérifient la relation précédente. Il y a alors *conversion de mode* lors de la réflexion : l'énergie portée par le mode incident est distribuée entre les différents modes réfléchis possibles suivant une répartition donnée par les coefficients de réflexion en énergie \mathfrak{R}_{mn} dont la méthode d'obtention est détaillée en Annexe B. La valeur des coefficients de réflexion est nulle pour tout angle d'incidence si la conversion concerne des modes ayant des symétries différentes. Autrement dit, les modes symétriques (respectivement antisymétriques) ne peuvent se convertir qu'en des modes symétriques (respectivement antisymétriques) ou des modes SH d'indice pair (respectivement impair).

De plus la conversion du mode m en mode n tels que $k_m > k_n$ possède un angle critique, qui vaut $\theta_{mn,crit} = \pm \sin^{-1}(k_n/k_m)$, au-delà duquel la conversion n'existe plus (voir Figure 1.3b sur laquelle des angles critiques pour quatre des huit cas de réflexion avec conversion de mode apparaissent clairement, comme par exemple SH₀-S₀).

Enfin, le calcul des coefficients fait appel à un certain nombre de modes dits *évanescents*. Ces derniers, qui sont en théorie en nombre infini, possèdent un nombre d'onde imaginaire pur. Contrairement aux modes dits *propagatifs*, ils sont incapables de se propager car immédiatement amortis. Le calcul des modes par la méthode SAFE fournit également des modes, dits *inhomogènes*, dont le nombre d'onde possède une partie réelle et une partie imaginaire non nulles. Ces derniers peuvent alors se propager sur de courtes distances (de

¹ Ce serait aussi valable si le cas traité était celui de la transmission d'un guide d'onde à un autre, les lois utilisées étant celles de la réfraction.

l'ordre de quelques longueurs d'onde) avant d'être entièrement amortis. Néanmoins, ces deux types de modes sont localement générés lors de la réflexion ce qui explique qu'ils doivent être pris en compte dans le calcul des coefficients de réflexion. Par la suite, les calculs de champ ne seront effectués en ne tenant compte que des seuls modes propagatifs. Par conséquent, le champ ne sera pas correctement prédit aux points où l'influence des modes évanescents ne peut être négligée. Cela inclut en particulier les points situés à la proximité immédiate de l'interface.

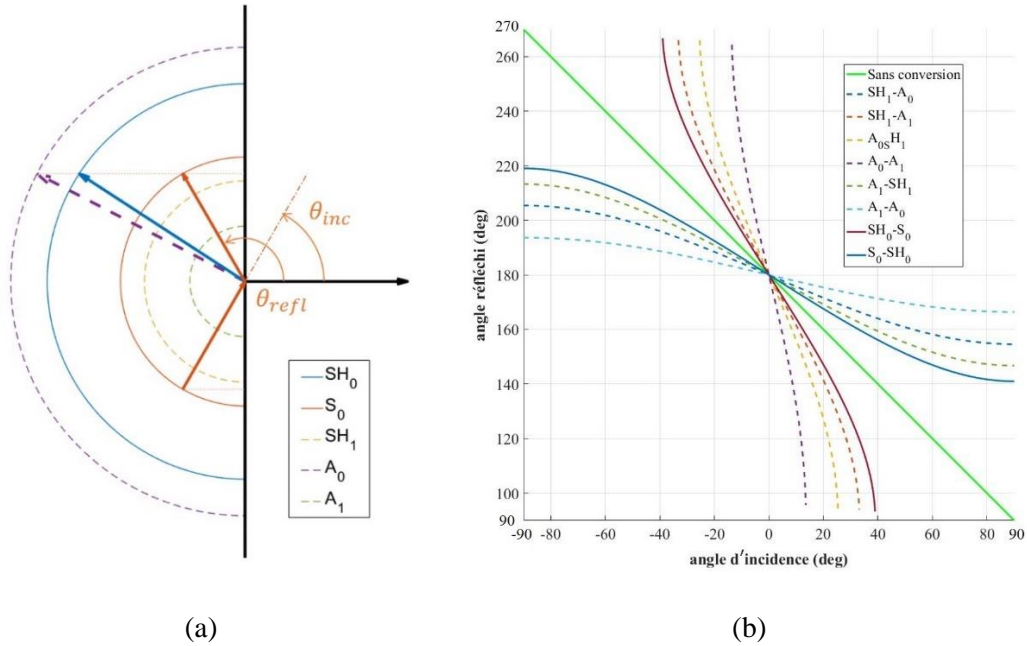


Figure 1.3. Application de la loi de Snell-Descartes aux modes présents dans une plaque d'aluminium d'épaisseur 3 mm à 600 kHz : illustration des modes et directions réfléchis pour A_0 incident dans la direction $\theta_{inc} = 30^\circ$ (a) et courbes des directions réfléchies en fonction des directions d'incidence pour chaque réflexion possible (b).

1.2.2. Matrice de réflexion

Étudions maintenant la réflexion d'un pinceau sur un bord potentiellement courbe Γ . Le rayon axial de ce pinceau intersecte Γ au point I . Au voisinage de ce point, le bord peut être décrit comme un cylindre de rayon κ^{-1} (κ étant la courbure locale du bord au point d'intersection) et de normale extérieure \mathbf{n} . Par la suite, le rayon de courbure sera toujours considéré grand devant les longueurs d'onde des modes afin que l'interaction du pinceau incident avec le bord puisse être décrite par des théories géométriques. Pour la réflexion, cela signifie que l'on ne pourra pas considérer les phénomènes spécifiques de diffraction aux points anguleux, et de manière générale, les phénomènes de diffraction complexes.

L'évolution du pinceau en réflexion sur ce bord est étudiée dans le repère local $(I; \mathbf{n}; \mathbf{t}; \mathbf{e}_z)$ avec le vecteur unitaire \mathbf{t} construit de sorte que le trièdre soit direct. Le rayon axial et un rayon paraxial du pinceau en incidence sur le bord sont représentés sur la Figure 1.4a puis en réflexion sur la Figure 1.4b. Sur ces schémas, le rayon axial et le rayon paraxial sont

considérés parallèles ce qui est une hypothèse locale raisonnable au vu des calculs géométriques et différentiels qui vont suivre. Au point I l'écart de position $d\zeta_{\parallel}(\rho)$ est alors en général discontinu. Ce saut brusque de valeur peut être déterminé à travers la projection commune de $d\zeta_{\parallel,1}$ et $d\zeta_{\parallel,2}$ sur l'interface plane virtuelle qui serait définie autour du point I si le bord était rectiligne. Cette projection est notée $\text{proj}_{\Gamma} d\zeta_{\parallel}$ sur la Figure 1.4 . En la calculant par des considérations géométriques avant et après réflexion, on obtient la relation suivante :

$$\frac{d\zeta_{\parallel,1}}{\cos \theta_1} - AB \sin \theta_1 = -\frac{d\zeta_{\parallel,2}}{\cos \theta_2} + AC \sin \theta_2 . \quad (1.2.2)$$

Les distances AB et AC étant des quantités d'ordre 2 de $d\zeta_{\parallel,1}$ et $d\zeta_{\parallel,2}$, elles peuvent raisonnablement être négligées ce qui donne l'expression approchée de $d\zeta_{\parallel,2}$ suivante :

$$d\zeta_{\parallel,2} \approx -\frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} d\zeta_{\parallel,1} . \quad (1.2.3)$$

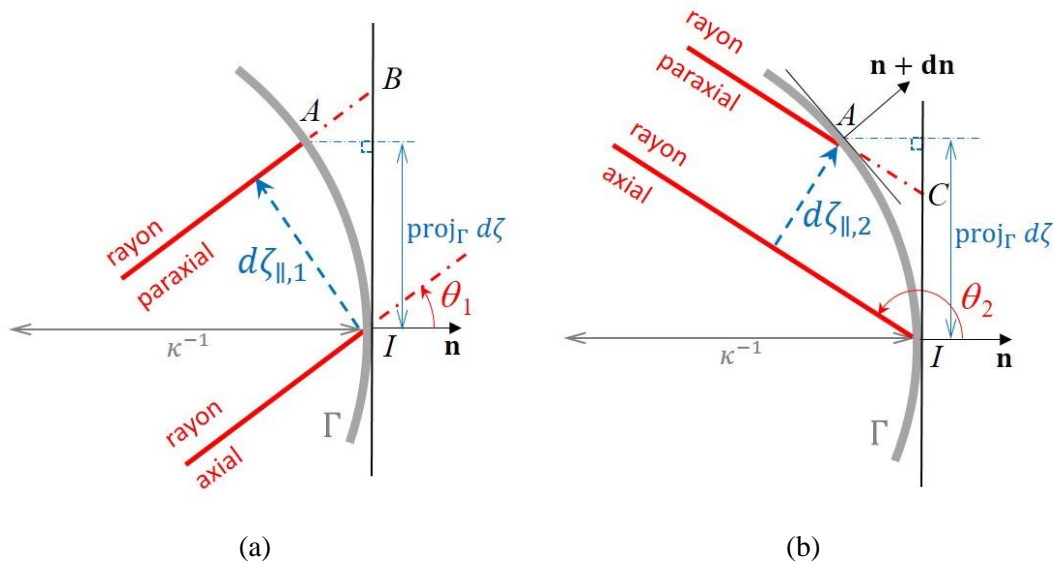


Figure 1.4. Rayons axial et paraxial d'un pinceau avant (a) et après (b) réflexion.

De même, l'expression de $ds_{\parallel,2}$ est obtenue grâce au calcul de la projection de l'écart de lenteur $\text{proj}_{\Gamma} ds_{\parallel}$. Exprimons d'abord cette projection avant réflexion. Si l'interface était plane, $ds_{\parallel,1}$ serait simplement projetée suivant la direction de \mathbf{n} et cette projection serait égale à $\cos \theta_1 ds_{\parallel,1}$. Si l'interface est courbe, le rayon paraxial doit être traité séparément du rayon axial. Que le bord soit plan ou courbé, le rayon axial intersectant Γ au point I , la projection du

vecteur lenteur qui lui est associé demeure donc inchangée. Ce n'est pas le cas pour le rayon paraxial qui se réfléchit au point A n'appartenant pas au bord droit virtuel. La projection du vecteur lenteur du rayon paraxial est donc effectuée selon la direction de la normale locale du bord ($\mathbf{n} + d\mathbf{n}$) ce qui implique que l'angle d'incidence est légèrement modifié par rapport au cas de la réflexion sur un bord plan. Si les vecteurs \mathbf{n} et $\mathbf{n} + d\mathbf{n}$ sont choisis comme étant unitaires alors $d\mathbf{n}$ est orthogonal à \mathbf{n} , car $d\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0$ est négligeable étant du 2^{ème} ordre. Alors la projection du vecteur lenteur du rayon paraxial est (sous une approximation au 1^{er} ordre) colinéaire à \mathbf{t} et à $d\mathbf{n}$. Elle est finalement égale à sa valeur obtenue pour un bord plan à laquelle on vient soustraire la quantité $s_1 \cos \theta_1 d\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}$ qui est due à la petite variation d'angle d'incidence. On a alors :

$$\text{proj}_\Gamma ds_{\parallel} = \cos \theta_1 ds_{\parallel,1} - s_1 \cos \theta_1 d\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}, \quad (1.2.4)$$

où s_1 est la lenteur du mode incident. De plus, on remarque que $\text{proj}_\Gamma d\zeta_{\parallel} = \kappa^{-1} d\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}$ et $\text{proj}_\Gamma d\zeta_{\parallel} \sim d\zeta_{\parallel,1} / \cos \theta_1$. En introduisant ces deux résultats dans l'équation (1.2.4), on obtient :

$$\text{proj}_\Gamma ds_{\parallel} = \cos \theta_1 ds_{\parallel,1} - s_1 \kappa d\zeta_{\parallel,1}. \quad (1.2.5)$$

Une relation similaire est obtenue pour les rayons réfléchis en prenant en compte un signe négatif devant le cosinus de l'angle de réflexion (comme dans l'équation (1.2.2)) et en remarquant que la projection de la lenteur du rayon paraxial est cette fois augmentée et non réduite du fait de la courbure. Finalement, en utilisant la loi de Snell-Descartes à l'interface, $ds_{\parallel,2}$ s'exprime en fonction de $ds_{\parallel,1}$ et $d\zeta_{\parallel,1}$ comme :

$$ds_{\parallel,2} = -\frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} ds_{\parallel,1} + \kappa \frac{s_1 \cos \theta_1 - s_2 \cos \theta_2}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} d\zeta_{\parallel,1}. \quad (1.2.6)$$

À partir des relations (1.2.3) et (1.2.6), on peut définir la matrice de réflexion $\mathbf{L}_{\text{réfl}}$. Cette matrice relie le vecteur d'état du pinceau avant réflexion Ψ_1 à celui après réflexion Ψ_2 de la manière suivante :

$$\Psi_2 = \begin{pmatrix} d\zeta_{\parallel,2} \\ ds_{\parallel,2} \end{pmatrix} = \mathbf{L}_{\text{réfl}} \Psi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} & 0 \\ \kappa \frac{s_1 \cos \theta_1 - s_2 \cos \theta_2}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} & -\frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\zeta_{\parallel,1} \\ ds_{\parallel,1} \end{pmatrix}. \quad (1.2.7)$$

Deux cas particuliers peuvent alors être distingués :

- Si la réflexion se fait sur un bord plan ($\kappa = 0$) alors $\mathbf{L}_{\text{réfl}}$ est diagonale. On retrouve l'expression proposée par Mathilde Stévenin dans son manuscrit de thèse [33,34].
- Si la réflexion se fait sur un bord plan et sans conversion de mode alors $\mathbf{L}_{\text{réfl}}$ est la matrice identité. Cette réflexion n'a alors pas d'influence sur la divergence du pinceau.

Une matrice très similaire peut être construite pour traiter la transmission d'un pinceau d'un guide d'onde à un autre. L'expression alors obtenue est la suivante :

$$\begin{aligned} \Psi_2 = \begin{pmatrix} d\zeta_{\parallel,2} \\ dS_{\parallel,2} \end{pmatrix} &= \mathbf{L}_{\text{trans}} \Psi_1 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} & 0 \\ \kappa \frac{s_2 \cos \theta_2 - s_1 \cos \theta_1}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} & \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\zeta_{\parallel,1} \\ dS_{\parallel,1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

Il n'y a pas de difficulté particulière à traiter ce problème. La différence, par rapport au cas de la réflexion, tient au fait que la transmission se fait entre deux guides d'onde aux caractéristiques différentes. Chacun de ces guides possède sa propre solution modale. Ainsi, les deux familles de modes interviennent aussi bien dans la détermination des angles de réfraction que dans le calcul des coefficients de transmission (qui tient compte des conditions limites spécifiques au cas traité).

1.3. Évolution du vecteur d'état après de multiples réflexions

1.3.1. Construction de la matrice d'évolution globale

Dès lors que le chemin suivi par un pinceau implique une ou plusieurs réflexions avec conversions de modes, ce pinceau n'est plus défini pour un mode mais pour chaque succession de modes qui existe. Ces successions, qui commencent par un trajet s'effectuant suivant le mode m_i (i pour initial) et se terminent par une propagation suivant le mode m_f (f pour final) seront par la suite nommées *séquences modales*. Ainsi, un pinceau associé à une telle séquence modale depuis le point source \mathbf{R}_0 jusqu'à un point de calcul \mathbf{r} possède une matrice d'évolution globale $\mathbf{L}_{i..f}$ prenant en compte toutes les phases élémentaires par lesquelles est passé le pinceau et qui le font évoluer. Ces phases se succédant, la matrice d'évolution est obtenue en mettant en cascade les matrices liées aux $N + 1$ phases de propagation et aux N réflexions de la manière suivante :

$$\boxed{\mathbf{L}_{i..f} = \mathbf{L}_{\text{prop}}^{(m_f)} \cdot \mathbf{L}_{\text{réfl}}^{(N)} \cdot \dots \cdot \mathbf{L}_{\text{réfl}}^{(1)} \cdot \mathbf{L}_{\text{prop}}^{(m_i)}} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.3.1)$$

dans laquelle alternent les matrices de propagation et celles de réflexion. On peut ainsi déduire le vecteur d'état au point \mathbf{r} de celui au point \mathbf{R}_0 par :

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r}) = \mathbf{L}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0)\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{R}_0), \quad (1.3.2)$$

la notation $(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0)$ indiquant que l'on part du point source \mathbf{R}_0 pour arriver au point de calcul \mathbf{r} . Le choix de cette notation anticipe l'écriture d'une fonction de Green, finalement donnée dans le § 1.4.2.

1.3.2. Matrice d'évolution en propagation inversée

Il peut être plus aisé de construire le trajet du pinceau en partant du point de calcul pour arriver à un point source. C'est en fait sous cette forme que la majorité des calculs sera réalisée, en particulier lorsque la source ne sera plus un point mais une surface (voir chapitre 2). Cela revient à inverser la séquence modale et à ce que les ondes se propagent avec des vecteurs d'onde pris dans le sens opposé à celui considéré pour la propagation directe (du point source au point de calcul). Selon le principe du retour inverse des ondes, le chemin suivi par le rayon axial reste inchangé.

On cherche alors la relation entre la matrice d'évolution $\mathbf{L}_{i..f}^b(\mathbf{R}_0; \mathbf{r})$ calculée en propagation inversée et la matrice $\mathbf{L}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0)$ calculée en propagation directe. Le repère rayon en propagation inversée ayant des vecteurs dirigés dans le sens opposé à celui en propagation directe, on a les relations suivantes entre les vecteurs d'état dans les deux sens de propagation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\Psi}^b(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -d\zeta_{\parallel}(\mathbf{r}) \\ ds_{\parallel}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{\Psi}^b(\mathbf{R}_0) = \begin{pmatrix} -d\zeta_{\parallel}(\mathbf{R}_0) \\ ds_{\parallel}(\mathbf{R}_0) \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (1.3.3a)$$

$$(1.3.3b)$$

Les coefficients de $\mathbf{L}_{i..f}^b(\mathbf{R}_0; \mathbf{r})$ sont donc reliés aux vecteurs d'état en propagation directe comme ci-dessous. On retrouve alors la définition de $\mathbf{L}_{i..f}(\mathbf{R}_0; \mathbf{r}) = \left(\mathbf{L}_{i..f}^b(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0)\right)^{-1}$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{R}_0) &= \begin{pmatrix} L_{11}^b(\mathbf{R}_0; \mathbf{r}) & -L_{12}^b(\mathbf{R}_0; \mathbf{r}) \\ -L_{21}^b(\mathbf{R}_0; \mathbf{r}) & L_{22}^b(\mathbf{R}_0; \mathbf{r}) \end{pmatrix} \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r}) \\ &= \left(\mathbf{L}_{i..f}^b(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0)\right)^{-1} \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Les matrices d'évolutions élémentaires obtenues dans les § 1.1.2 et 1.2.2 sont des matrices symplectiques (les propriétés symplectiques sont décrites dans le § 5.3.3). Une matrice d'évolution globale est par définition un produit de ces matrices élémentaires ; elle est donc elle aussi symplectique, inversible et son inverse est connue par une relation simple. Or, on peut remarquer que la matrice contenant les coefficients de $\mathbf{L}_{i..f}^b(\mathbf{R}_0; \mathbf{r})$ dans l'équation (1.3.4) est l'inverse de $\bar{\mathbf{L}}_{i..f}^b(\mathbf{R}_0; \mathbf{r})$ que l'on définit comme la matrice $\mathbf{L}_{i..f}^b(\mathbf{R}_0; \mathbf{r})$ dont on a permuté les coefficients diagonaux. Par identification, on obtient alors $\mathbf{L}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0) = \bar{\mathbf{L}}_{i..f}^b(\mathbf{R}_0; \mathbf{r})$. La matrice globale d'évolution du pinceau s'obtient donc par mise en cascade des matrices élémentaires obtenues en propagation inversée auxquelles on a permuté les coefficients diagonaux, soit :

$$\mathbf{L}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0) = \bar{\mathbf{L}}_{\text{prop}}^{b,(m_i)} \cdot \bar{\mathbf{L}}_{\text{réfl}}^{b,(1)} \cdot \dots \cdot \bar{\mathbf{L}}_{\text{réfl}}^{b,(N)} \cdot \bar{\mathbf{L}}_{\text{prop}}^{b,(m_f)}. \quad (1.3.5)$$

Cette fois, la composition se fait par la droite en raison du calcul de matrice inverse.

1.4. Obtention du champ de déplacement particulière

1.4.1. Conservation de l'énergie transportée par un pinceau

La prédiction de l'évolution de l'amplitude d'un mode guidé le long du trajet d'énergie d'un pinceau est le but recherché dans le développement de ce modèle. Nous nous attachons maintenant à faire la démonstration du lien existant entre la matrice d'évolution d'un pinceau et l'amplitude rayonnée. Un pinceau peut être vu comme une région de l'espace dans laquelle on vient confiner une quantité élémentaire d'énergie $dE(\varphi)$ émise par la source au voisinage d'une direction d'énergie φ . En d'autres termes, on fait l'hypothèse que cette énergie ne fuit pas à travers l'enveloppe latérale du pinceau, définie le long de ses rayons paraxiaux, mais n'est transmise qu'à travers sa section transverse (représentée en grisé sur la Figure 1.5). Ainsi, le flux de l'intensité acoustique¹ que traverse la surface $d\Omega_i$ (voir encore la Figure 1.5) définie à proximité du point source est conservé et est le même que celui qui traverse la surface $d\Omega_r$ située au point \mathbf{r} . De plus, lorsqu'un pinceau se divise en plusieurs pinceaux réfléchis après avoir subi une ou plusieurs réflexions avec conversion de mode, son énergie est répartie selon les coefficients de réflexions en énergie \mathfrak{R}_{mn} qui traduisent chacune de ces réflexions. L'énergie confinée dans un pinceau est donc, par rapport à celle contenue dans le pinceau initial, multipliée par le produit de ces différents coefficients de réflexion. Les flux d'intensité acoustique initiale ($\mathbf{I}_i = \mathbf{I}(\mathbf{R}_0)$) et finale ($\mathbf{I}_r = \mathbf{I}(\mathbf{r})$) à travers les surfaces transverses du pinceau sont donc liés par

¹ On définit l'intensité *acoustique* \mathbf{I} (même si l'on parle toujours bien d'une onde *élastique*) comme la moyenne temporelle de l'intensité acoustique instantanée, soit $\mathbf{I}(x, y, z) = \frac{1}{2} \text{Re}[i\omega\sigma(x, y, z)\mathbf{u}^*(x, y, z)]$.

$$\iint_{d\Lambda_r} \mathbf{I}_r \cdot \mathbf{e}_\perp dS = \Pi_{i..f} \iint_{d\Omega_i} \mathbf{I}_i \cdot \mathbf{e}_\perp dS, \quad (1.4.1)$$

où $\Pi_{i..f}$ désigne le produit des coefficients de réflexion en énergie associés à la séquence modale du pinceau, s'exprimant comme suit :

$$\Pi_{i..f} = \prod_{j=1}^N \mathfrak{R}_{mn}(j) \quad (1.4.2)$$

chacun des N coefficients $\mathfrak{R}_{mn}(j)$ prenant en compte l'angle d'incidence du mode m et l'angle de réflexion du mode n correspondant à la j -ième réflexion de la séquence modale $i..f$.

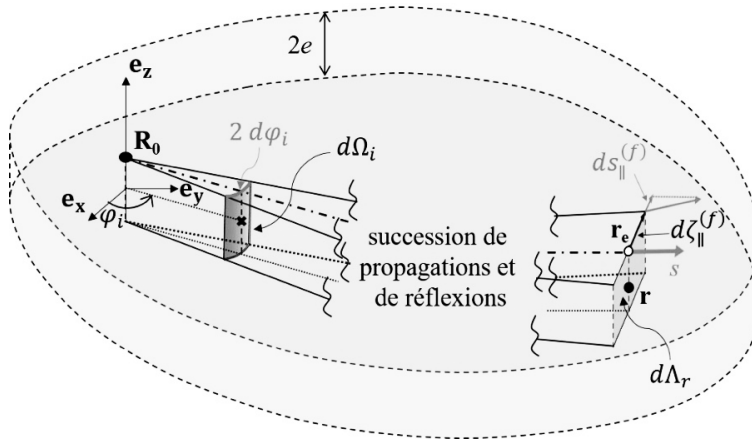


Figure 1.5. Représentation schématique d'un pinceau faisant apparaître les quantités $d\Omega_i$ et $d\Lambda_r$, utilisées pour mesurer la variation d'intensité le long du pinceau. Seuls les états initial et final sont représentés.

On peut alors mettre en avant l'existence d'un cas limite de la relation (1.4.1). En effet si $d\Lambda_r = 0$ alors $\|\mathbf{I}_r\| \rightarrow +\infty$. Cela correspond à une réalité physique : lorsqu'une infinité de rayons se croisent en des points du plan d'équation $z = e$ cela donne naissance à des phénomènes de focalisation situés le long de courbes appelées caustiques (géométriques) [47]. Le modèle pinceau diverge lorsque le point de calcul se trouve à proximité de, ou sur, une de ces courbes.

Au point source, le vecteur d'état du pinceau (alors associé au mode initial de la séquence modale) n'est composé que d'une petite variation paraxiale de longueur due à l'angle $d\varphi_i$ imposé entre le rayon axial et le rayon paraxial. Les rayons eux-mêmes étant confondus, on a :

$$\Psi(\mathbf{R}_0) = \Psi^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ ds_{\parallel}^{(i)} \end{pmatrix}. \quad (1.4.3)$$

De plus, la surface transverse initiale $d\Omega_i$ s'exprime en fonction du produit de l'angle initial $d\varphi_i$ et de l'épaisseur de la plaque. En calculant géométriquement $\sin d\varphi_i = ds_{\parallel}^{(i)}/s_{m_i}$, on obtient :

$$d\Omega_i = (2e)(2d\varphi_i) \sim (2e) \left(2 \frac{ds_{\parallel}^{(i)}}{s_{m_i}} \right), \quad (1.4.4)$$

s_{m_i} étant la lenteur du mode initial. Au point de calcul \mathbf{r} , le vecteur d'état du pinceau qui se propage maintenant selon le mode final m_f est noté

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Psi^{(f)} = \begin{pmatrix} d\zeta_{\parallel}^{(f)} \\ ds_{\parallel}^{(f)} \end{pmatrix}. \quad (1.4.5)$$

La surface transverse du pinceau au point de calcul étant plane, on l'obtient simplement en fonction de l'écart de position entre les rayons et de l'épaisseur :

$$d\Lambda_r = (2e) \left(2d\zeta_{\parallel}^{(f)} \right). \quad (1.4.6)$$

Les relations (1.4.4) et (1.4.6) sont maintenant insérées dans l'équation (1.4.1) et on note I l'intégrale d'une intensité acoustique suivant l'épaisseur de la plaque. Les termes d'intensité acoustique sont isolés dans le membre de gauche alors que les expressions des surfaces et le produit des coefficients de réflexion le sont dans le membre de droite. L'épaisseur du guide étant constante, on simplifie par $4e$ l'équation ainsi obtenue. Ce faisant, on voit apparaître dans le membre de droite la définition du coefficient supérieur droit $L_{12} = d\zeta_{\parallel}^{(f)}/ds_{\parallel}^{(i)}$ de la matrice d'évolution globale (voir équation (1.3.1)). Les intensités acoustiques étant positives (car l'onde associée au pinceau est toujours progressive), seule la partie positive de $s_{m_i}L_{12}$ est prise en compte. Le rapport des intensités acoustiques s'exprime alors comme suit :

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{\Pi_{i..f}}{|s_{m_i}L_{12}|}. \quad (1.4.7)$$

Nous cherchons maintenant à trouver une relation entre l'intensité acoustique et l'amplitude de l'onde au point de calcul. En ce point, le champ de déplacement est une grandeur vectorielle décrite suivant la déformée modale $\mathbf{W}_{m_f}(\varphi_f, z, \omega)$ du mode final m_f de la séquence modale, dans la direction d'énergie φ_f du rayon axial au point \mathbf{r} (donc à la position

z de ce point dans l'épaisseur). Dans le but de modéliser simplement l'amplitude du champ de déplacement $\hat{\mathbf{u}}_{i..f}(\mathbf{r}, \omega)$ indépendamment de celle de la déformée modale, la grandeur complexe (et scalaire) $\hat{U}_{i..f}$ est introduite et la déformée modale est normalisée. Finalement, l'évolution de la phase de l'onde le long du rayon axial est décrite par le terme $\hat{\vartheta}_{i..f}$ qui prend en compte la longueur et le nombre d'onde de tous les chemins élémentaires empruntés par le pinceau. Le champ de déplacement au point \mathbf{r} est finalement modélisé par l'*ansatz* suivante :

$$\hat{\mathbf{u}}_{i..f}(\mathbf{r}, \omega) := \frac{\mathbf{W}_{m_f}(\varphi_f, z, \omega)}{\|\mathbf{W}_{m_f}(\varphi_f, z, \omega)\|} \hat{U}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0, \omega) \exp\{i\hat{\vartheta}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0, \omega)\}. \quad (1.4.8)$$

La déformée modale $\mathbf{W}_{m_f}(\varphi_f, z, \omega)$ est connue car obtenue lors du calcul modal. Il reste alors à déterminer les termes $\hat{U}_{i..f}$ et $\hat{\vartheta}_{i..f}$ qui sont intrinsèquement liés au trajet suivi par le pinceau dans la séquence modale considérée (d'où les notations $i..f$ et $(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0)$ qui signifie : calculé au point \mathbf{r} , en partant du point \mathbf{R}_0 et en suivant la séquence modale $i..f$).

Détermination de l'amplitude $\hat{U}_{i..f}$

L'intensité acoustique peut maintenant être exprimée à partir de la moyenne temporelle du vecteur de Poynting, définie par [48] :

$$\langle \mathbf{P}_{\text{Poynt}} \rangle := \frac{1}{2} \text{Re} \left[i\omega \int_{z=-e}^e \boldsymbol{\sigma} \mathbf{u}^* dz \right], \quad (1.4.9)$$

qui est colinéaire à \mathbf{e}_1 (direction d'énergie du pinceau et par extension de l'onde). On notera alors que $I_r = \|\langle \mathbf{P}_{\text{Poynt}} \rangle\|$. La vitesse d'énergie du mode peut aussi être définie en fonction du vecteur de Poynting et de l'énergie mécanique totale E_{tot} de la manière suivante :

$$v_e^{(m_f)} := \frac{\|\langle \mathbf{P}_{\text{Poynt}} \rangle\|}{E_{tot}}. \quad (1.4.10)$$

En l'absence d'atténuation, E_{tot} est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. L'application du théorème de Poynting sur les frontières du pinceau nous indique que l'énergie potentielle est égale à l'énergie cinétique car le flux du vecteur de Poynting à travers cette surface est considéré nul. On exprime alors l'énergie totale en fonction de l'énergie cinétique :

$$E_{tot} = 2 \frac{\omega^2}{4} \rho_0 \|\hat{\mathbf{u}}_{i..f}\|^2 = \frac{\omega^2}{2} \rho_0 |\hat{U}_{i..f}|^2, \quad (1.4.11)$$

avec ρ_0 la masse volumique du matériau. En combinant les équations (1.4.7), (1.4.9), (1.4.10) et (1.4.11), on obtient finalement l'expression de $\hat{U}_{i..f}$ suivante :

$$|\hat{U}_{i..f}| = \left(\frac{2}{\rho_0 \omega^2 v_e^{(m_f)} |s_{m_i} L_{12}|} \Pi_{i..f} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{I_i}. \quad (1.4.12)$$

Si un trajet sans réflexion est considéré on peut, en remplaçant L_{12} par son expression au sein de la matrice de propagation, écrire :

$$|\hat{U}_{i..f}| = \left(\frac{2}{\rho_0 \omega^2 v_e^{(m_f)} \Delta \rho} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{I_i} \propto \frac{1}{\sqrt{\Delta \rho}} \quad (1.4.13)$$

On retrouve alors le facteur de décroissance de l'amplitude d'une onde cylindrique en champ lointain. La quantité $s_{m_i} L_{12}$ s'identifie alors au rayon de courbure du front d'onde au point de calcul.

Détermination du terme de phase $\hat{\vartheta}_{i..f}$

L'évolution de la phase le long du rayon axial $\hat{\vartheta}_{i..f}$ est liée à différents phénomènes et peut être décrite comme composée de trois termes :

Tout d'abord, elle fait apparaître la périodicité spatiale de chacun des modes de la séquence modale (*i.e.* le nombre d'onde k_j du j -ième mode de la séquence) sur chacune des distances de propagation ρ_j de ces modes.

Le second terme permet de prendre en compte les déphasages intervenant lors de l'interaction du pinceau avec les bords de la plaque. Ces déphasages correspondent à la phase des coefficients de réflexion en amplitude, que l'on notera $\phi r_{mn}(j, \omega)$.

Le dernier terme est lié aux phénomènes de caustiques géométriques déjà mentionnés dans cette section. Lorsqu'un pinceau passe par une caustique, la courbure du front d'onde associé est modifiée. Cela se traduit par un saut de phase qu'il est nécessaire de déterminer. D'un point de vue géométrique, un point de caustique se traduit par l'annulation de l'aire de la surface transverse du pinceau. On appelle *caustique de première espèce* le cas où la surface transverse est réduite à un segment (voir Figure 1.6a) et *caustique de seconde espèce* sa dégénérescence en un point (voir Figure 1.6b). Les rayons d'un pinceau modal d'onde guidée

sont compris dans le plan de la plaque. Seules les caustiques de premières espèces sont alors possibles. Ces dernières correspondent à une inversion du signe de $d\zeta_{\parallel}$ et donc de celui de L_{12} , à chaque point de caustique. S'il n'y avait pas de valeur absolue dans la relation (1.4.12), on obtiendrait un déphasage de $\pi/2$. Ce déphasage correspond au passage du pinceau par un unique point de caustique de première espèce. Si plusieurs points de caustiques sont rencontrés, il faut compter les sauts de phase de manière cumulative. En pratique, il suffit de compter le nombre de points de caustiques en étudiant le signe de la matrice d'évolution après chaque phase de propagation élémentaire. Dans la littérature, le nombre de points de caustiques est nommé *indice KMAH*^{1,2} (pour Keller-Maslov-Arnold-Hörmander) [8].

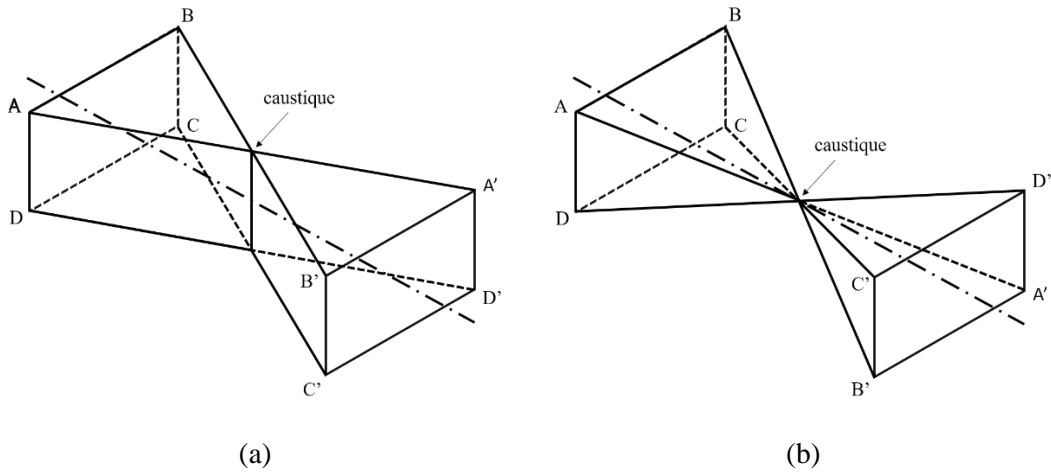


Figure 1.6. Représentation schématique du passage d'un pinceau à travers deux types de caustiques. (a) caustique de première espèce, la surface transverse du pinceau est localement dégénérée en un segment tandis que celle de droite (b) correspond à une caustique de deuxième espèce (non possible pour un pinceau modal d'onde guidée).

On peut alors écrire la phase associée à la séquence modale considérée sous la forme suivante :

$$\hat{\vartheta}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0, \omega) := \frac{\pi}{2} KMAH(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0, \omega) + \sum_{j=1}^N \phi r_{mn}(j, \omega) - \sum_{j=m_i}^{m_f} k_j(\omega) \rho_j. \quad (1.4.14)$$

¹ Il s'agit d'une définition simplifiée de l'indice KMAH qui ne s'applique qu'aux points de caustiques de première espèce. En effet, une caustique de seconde espèce devrait être comptée deux fois et le déphasage résultant serait de π .

² L'indice KMAH en propagation inversée est le même qu'en propagation en sens direct. Cette réciprocity est loin d'être triviale car la position des points de caustiques n'est en règle générale pas la même suivant le sens de propagation.

Le signe *moins* placé devant le second terme est simplement dû au choix de la convention “ $e^{i(\omega t - kr)}$ ” pour décrire les ondes progressives.

1.4.2. Fonction de Green associée au pinceau

Il reste maintenant à trouver l’expression de l’intensité acoustique initiale I_i qui est le seul terme encore indéterminé dans l’équation (1.4.12). Nous allons pour cela utiliser le formalisme développé par NUÑEZ *et al.* [49] pour les ondes planes puis étendu par VELICHKO et WILCOX [35] aux ondes omnidirectionnelles. Ce formalisme consiste en l’écriture d’un tenseur de Green modal qui, multiplié par le terme de source, permet d’obtenir l’expression du champ de déplacement dans un guide d’ondes de taille infinie. Deux approximations ont été formulées par VELICHKO et WILCOX. Seuls les modes propagatifs sont pris en compte et les calculs d’intégrales dans le domaine des fréquences spatiales ont été réalisés par la méthode de la phase stationnaire (qui est une approximation haute fréquence). De cela résulte le fait que ce formalisme n’est valable en principe qu’en champ lointain *i.e.* pour des distances de propagation supérieures à quelques longueurs d’onde. Nous reviendrons sur ce point lors de la validation du modèle développé dans le chapitre 2. Un résumé de cet article est fait en Annexe C du fait de l’importance qu’il a pour formuler notre propre modèle. Seules les notations de l’article publié y sont modifiées pour être cohérentes avec les nôtres et faciliter la lecture générale de cette thèse.

En utilisant ce tenseur de Green pour les matériaux isotropes et avec nos notations, on obtient par identification une expression de l’intensité acoustique initiale. En effet, on se place alors avant toute réflexion, ce qui nous permet d’appliquer directement la formule de VELICHKO et WILCOX. Après quelques calculs algébriques sans difficultés particulières autres que celle des notations, on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{I_i} e^{i \arg(\hat{U}_{i,f})} &= \frac{\omega^2}{8\langle P_{m_i} \rangle} \left(\frac{|k_{m_i}| \rho_0 v_e^{(m_i)}}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{W}_{m_i}(\varphi_i, z, \omega)\| i e^{i \frac{\pi}{4} \text{sign}(k_{m_i})} \\ &\times \left(\mathbf{W}_{m_i}^*(\varphi_i, e, \omega) \right)^t \hat{\mathbf{q}}_0(\mathbf{R}_0), \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

où $\langle P_{m_i} \rangle$ est le flux de puissance moyen du mode initial m_i à travers la surface perpendiculaire à la direction de propagation de ce mode, défini par :

$$\langle P_{m_i} \rangle := \int \frac{1}{2} \text{Re} \left[i\omega \int_{z=-e}^e \boldsymbol{\sigma} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_\perp dz \right] dz. \quad (1.4.16)$$

En injectant cette relation, ainsi que les équations (1.4.12) et (1.4.14) dans l’équation (1.4.8), une nouvelle expression de la fonction de Green appelée *fonction de Green généralisée* ou *fonction de Green pinceau* est obtenue :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0, \omega) &= \mathcal{D}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0, \omega) \mathcal{A}^{(i)}(\mathbf{R}_0, \omega) \mathbf{W}_{m_f}(\varphi_f, z, \omega) \\ &\times \left(\mathbf{W}_{m_i}^*(\varphi_i, e, \omega) \right)^t \exp[i\hat{\vartheta}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0, \omega)] + \mathcal{O}\left(\rho^{-\frac{3}{2}}\right), \quad \rho \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.4.17)$$

Cette formule est composée de plusieurs termes définis ci-après et dont il est possible de donner une interprétation physique. Tout d'abord, le facteur de divergence $\mathcal{D}_{i..f}$ que l'on écrit

$$\mathcal{D}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0, \omega) := \left(\frac{\Pi_{i..f}}{|S_{m_i} L_{12}|} \frac{v_e^{(m_i)}}{v_e^{(m_f)}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\|\mathbf{W}_{m_i}(\varphi_i, z, \omega)\|}{\|\mathbf{W}_{m_f}(\varphi_f, z, \omega)\|}, \text{ en } [\text{m}^{-\frac{1}{2}}], \quad (1.4.18)$$

décrit la variation d'amplitude de l'onde le long du rayon axial du pinceau. Il fait notamment intervenir le produit des coefficients de réflexion $\Pi_{i..f}$ et le coefficient L_{12} de la matrice d'évolution de la séquence modale, donnée par l'équation 1.3.1. Ensuite, le facteur d'amplitude $\mathcal{A}^{(i)}$ tel que

$$\mathcal{A}^{(i)}(\mathbf{R}_0, \omega) := \frac{i\omega}{4\langle P_{m_i} \rangle} \left(\frac{|k_{m_i}|}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4} \text{sign}(k_{m_i})}, \text{ en } [\text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-1/2}], \quad (1.4.19)$$

représente l'excitabilité du mode initial. En d'autres termes, il traduit (avec la déformée du mode initial à la surface de la plaque $\mathbf{W}_{m_i}^*(\varphi_i, e, \omega)$) l'énergie rayonnée par la source sous la forme du mode m_i . Le déplacement du mode final $\mathbf{W}_{m_f}(\varphi_f, z, \omega)$ sert, comme introduit dans l'équation (1.4.8), à rendre compte du fait que l'onde se propage au point de calcul suivant le mode m_f . Le terme de phase $\hat{\vartheta}_{i..f}$ est celui défini par l'équation (1.4.14). Le signe du nombre d'onde k_{m_i} est positif si le vecteur d'onde et la vitesse d'énergie sont orientés dans le même sens. Enfin, la quantité qui devient négligeable au fur et à mesure que la distance de propagation augmente vient de l'approximation faite en ne considérant que les modes propagatifs. Elle peut donc être vue comme la contribution des modes inhomogènes, qui est non nulle à proximité du point source.

On obtient finalement l'expression du champ de déplacement particulière en faisant la somme des contributions de chacune des séquences modales existant entre le point source et le point de calcul. Cela s'écrit :

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, \omega) = \mathcal{G}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0, \omega) \hat{\mathbf{q}}_0(\omega) = \sum_{i..f} \mathcal{G}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0, \omega) \hat{\mathbf{q}}_0(\omega). \quad (1.4.20)$$

Pour obtenir la reconstruction temporelle $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ du champ de déplacement au point \mathbf{r} il suffit alors d'effectuer le calcul pour toutes les fréquences d'intérêt et de réaliser une synthèse de Fourier.

Remarque 1 :

Contrairement au modèle du pinceau transitoire développé pour les ondes élastiques de volume [13,50], les trajets des pinceaux modaux d'ondes guidées dépendent en général de la fréquence ; du moins pour les trajets impliquant au moins une réflexion avec conversion de mode (du fait de la dispersion) .

Remarque 2 :

Le modèle actuel est capable de prendre en compte les réflexions sur des bords légèrement courbes et réguliers. En revanche, il ne peut pas modéliser la diffraction d'une onde guidée par un coin (de plaque rectangulaire par exemple). Des travaux récents ont été effectués en ce sens pour traiter la diffraction d'une onde élastique de volume par un dièdre [51,52]. Ainsi, il est possible qu'un modèle de diffraction par un coin de plaque puisse être développé dans le but de venir compléter celui du pinceau modal.

Remarque 3 :

La reconstruction temporelle peut être faussée par des phénomènes de repliement de spectre dans deux situations :

- La fenêtre temporelle doit être assez longue pour contenir le signal calculé en entier. Ainsi, plus les dimensions de la plaque seront élevées et plus le nombre de réflexions sera important, plus le nombre de fréquences à considérer pour effectuer une synthèse temporelle juste sera élevé. Le poids de cet inconvénient en termes de temps de calcul peut toutefois être allégé. Connaissant le temps vol minimal et le temps de vol maximal de chaque paquet d'onde, une fenêtre temporelle définie de manière optimale pour chaque contribution peut être utilisée.
- La présence d'une fréquence de coupure au sein de la bande de fréquences excitées par la source est aussi source de repliement. Dans ce cas, ce sont les contributions de composantes spectrales à vitesse de groupe nulle (ou très faible) qui sont à l'origine de ce phénomène. Ce problème peut être résolu en introduisant une faible partie imaginaire à la fréquence afin de contourner les pôles de la transformée de Fourier inverse, autrement dit en effectuant l'opération :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, \omega - i\eta) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.4.21)$$

Dans la littérature, cette méthode est appelée Exponential Window Method (EWM) [53,54]. Le paramètre η est choisi en fonction de la longueur de la fenêtre temporelle.

Remarque 4 :

La méthode du pinceau modal est strictement équivalente à la méthode de la phase stationnaire avec un développement limité du terme de phase à l'ordre 2. Cette équivalence est triviale à démontrer en champ direct car on retrouve alors exactement l'expression de la formule de VELICHKO. Mathilde STÉVENIN l'a démontré dans le cas d'une réflexion unique sur un bord droit dans son manuscrit de thèse [33]. Néanmoins, la méthode des pinceaux est plus aisée à appliquer dans des cas génériques. En effet, elle vient substituer des manipulations d'équations assez calculatoires par de simples produits de matrices d'évolution.

Remarque 5 :

Il est aussi possible d'obtenir le champ de contrainte en appliquant la loi de Hooke à partir de l'expression du champ de déplacement (1.4.20). Les dérivées spatiales du facteur de divergences sont négligées car variant en $\rho^{-\frac{3}{2}}$. Ainsi, on obtient alors une fonction de Green *version contrainte* $\mathcal{G}_{i..f}^C(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0, \omega) \in M_{6,3}(\mathbb{C})$ permettant d'obtenir les six composantes indépendantes du tenseur des contraintes au point \mathbf{r} . Son expression est alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{i..f}^C(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0, \omega) &= \mathcal{D}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0, \omega) \mathcal{A}^{(i)}(\mathbf{R}_0, \omega) \boldsymbol{\sigma}_{m_f}(\varphi_f, z, \omega) \\ &\times \left(\mathbf{W}_{m_i}^*(\varphi_i, e, \omega) \right)^t \exp[i\hat{\vartheta}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0, \omega)] + \mathcal{O}\left(\rho^{-\frac{3}{2}}\right), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.4.22)$$

La déformée modale \mathbf{W}_{m_f} a été remplacée par le profil de contraintes modal $\boldsymbol{\sigma}_{m_f}$ (que l'on peut obtenir comme dans l'Annexe A).

1.4.3. Exemples de calculs de champ

Le modèle présenté dans ce chapitre va maintenant être illustré par deux exemples simples de calcul de champ. Dans ces deux situations, le mode S_0 est généré par une source ponctuelle de contrainte normale à la surface de la plaque et située au point (0,0,e). L'excitation temporelle appliquée est un *tone burst* (signal harmonique fenêtré par une fenêtre de Hann) de 5 cycles et de fréquence centrale 200 kHz. Le milieu de propagation est une plaque en aluminium de 3 mm d'épaisseur. La norme du champ de déplacement du mode S_0 à $t = 48$ μs est représentée sur la Figure 1.7a. Les détails concernant l'implémentation informatique de ce modèle sont donnés dans le chapitre 2 ainsi que dans l'annexe D. Ici on ne s'intéresse qu'au cas de la source ponctuelle, c'est-à-dire un cas plus simple que ceux présentés dans les parties mentionnées ci-avant.

1^{ère} situation : réflexion sur un bord droit d'équation $x = 500$ mm

Lors de la réflexion sur un bord droit, le mode incident vient impacter le bord dans une large gamme d'angles d'incidence. On se situe ici en dessous de la première fréquence de coupure ; le mode S_0 n'est alors susceptible de se convertir qu'en les modes symétriques fondamentaux *i.e.* il ne peut se convertir qu'en lui-même ou en SH_0 . Ces conversions sont visibles sur la Figure 1.7b qui fait apparaître la norme du champ de déplacement à $t = 170$ μs (et donc après réflexion). On peut noter qu'elles suivent le comportement décrit par les

coefficients de réflexion calculés en Annexe B : en incidence normale seul S_0 est réfléchi alors que plus d'énergie est transmise à SH_0 au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'incidence normale. On peut aussi remarquer que l'amplitude du champ réfléchi est inférieure à celle du champ incident car le front d'onde s'est élargi tant avant qu'après réflexion.

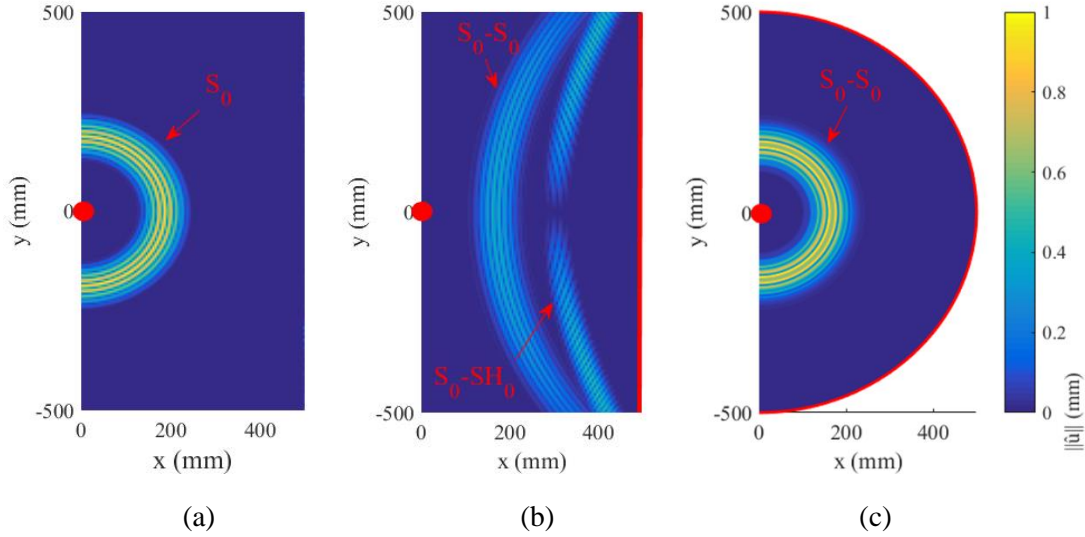


Figure 1.7. Exemples de champs calculés en ne prenant en compte que le rayonnement du mode S_0 : (a) mode incident à $t = 48 \mu\text{s}$, (b) réflexion sur un bord plan à $t = 170 \mu\text{s}$ et (c) réflexion sur un bord cylindrique à $t = 170 \mu\text{s}$.

2nde situation : réflexion sur un bord cylindrique de rayon 500 mm et dont l'axe passe par le point source

La réflexion sur un bord cylindrique centré sur le point source est un cas très particulier de réflexion sur un bord courbe. Dans cette situation, le mode incident ne peut impacter le bord qu'en incidence normale. Compte tenu de ce qui a déjà été dit sur la réflexion du mode S_0 dans ce matériau, il n'y a alors pas de conversion de mode et la contribution réfléchie se propage suivant le rayon axial du pinceau incident. Sur la Figure 1.7c on peut aussi noter que l'amplitude du champ réfléchi est comparable à celle du champ incident. En effet, après réflexion, la surface décrite par le front d'onde diminue. On obtient alors comme un phénomène de rétro-propagation de l'onde. Cela peut se démontrer à l'aide du calcul de la matrice d'évolution. Considérons un point situé à une distance r du point source. Le vecteur d'état du pinceau en ce point et en champ direct *i.e.* avant réflexion vaut :

$$\Psi_{\text{avant refl}} = \begin{pmatrix} r/s \\ 1 \end{pmatrix} ds_{\parallel}. \quad (1.4.23)$$

Le vecteur d'état correspondant au pinceau après réflexion s'obtient en mettant en cascade les deux matrices de propagation et la matrice de réflexion, soit :

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{après refl}} &= \begin{pmatrix} 1 & (\kappa^{-1} - r)/s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\kappa s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \kappa^{-1}/s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ ds_{\parallel} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r/s \\ -1 \end{pmatrix} ds_{\parallel}. \end{aligned} \tag{1.4.24}$$

L'écart de position entre le rayon axial et le rayon paraxial étant le même dans ces deux cas, on vérifie bien que l'amplitude de l'onde sera elle aussi égale. De plus, les composantes du vecteur d'état après réflexion sont de signe opposé ce qui montre que les rayons de ce pinceau sont en train de se rapprocher (*i.e.* le pinceau *converge*) ce qui est cohérent avec la rétro-propagation. Dans cet exemple, l'influence du terme non diagonal de la matrice de réflexion est notable. C'est en effet lui qui, en prenant en compte les effets de courbure locale du bord, vient modifier le comportement du pinceau pour le faire passer de divergeant à convergeant.

Résumé des principaux résultats du chapitre :

Ce chapitre était dédié au développement d'un modèle permettant de prédire le rayonnement par une source ponctuelle d'ondes guidées omnidirectionnelles dans des plaques de taille finie. On s'est appuyé sur la stratégie de développement utilisée au CEA pour le calcul de champs en ondes de volume, qui avait consisté à étendre un modèle semi-analytique existant (mais limité à des cas simples ou particuliers) à des cas de propagation complexe grâce à une méthode géométrique. Cette stratégie a plus récemment été utilisée dans le cadre des ondes guidées par Mathilde STÉVENIN qui a tout d'abord traité ce problème par la méthode de la phase stationnaire avant d'introduire le pinceau modal d'ondes guidées. Notre contribution dans ce chapitre a consisté à reprendre et préciser ce formalisme, et à étendre le domaine d'applicabilité en traitant les cas de réflexions multiples sur des bords potentiellement courbes, de la transmission.

Dans un premier temps, la propagation d'un mode guidé dans une plaque non bornée a été étudiée. Avec la méthode des pinceaux, cela revient à construire une matrice qui dépend de la distance de propagation et des caractéristiques du mode. Puis le cas de la (ou des multiples) réflexion(s) a été traité. Là encore, cela passe par l'établissement d'une matrice traduisant l'évolution du vecteur d'état du pinceau. Finalement, le lien entre matrice d'évolution et amplitude du champ de déplacement a été fait. Une fonction de Green modale, basée sur des développements réalisés dans la littérature mais étendue à la plaque bornée a alors été trouvée. L'expression du champ de déplacement est alors donnée.

Il est important de préciser les hypothèses et limites de ce modèle afin d'en définir le domaine de validité. Tout d'abord, s'agissant d'un modèle géométrique, il suppose une approximation haute fréquence. Autrement dit, les dimensions caractéristiques de la plaque (rayons de courbure des bords par exemples) sont considérées très grandes devant les longueurs d'onde afin d'éviter les phénomènes de diffraction (qui ne sont pas pris en compte du fait de la nature géométrique intrinsèque du modèle). Ce modèle ne permet donc pas encore

de traiter la diffraction par un point anguleux. De plus, seules les contributions des modes propagatifs sont calculées. Le modèle n'est donc pas valide dans les zones où les modes évanescents ont un effet significatif : près du point source et près des bords de la plaque. Ce dernier point ne pose en revanche pas de problème particulier en contrôle non destructif car les points de mesure sont généralement situés assez loin des bords.

Enfin, cette méthode présente l'avantage d'être entièrement modale. Elle ne nécessite aucune discrétisation dans le plan de la plaque : le temps de calcul est alors très peu dépendant des distances de propagation.

Dans les exemples donnés dans le chapitre, une source de contrainte ponctuelle est utilisée. L'objet du chapitre suivant sera d'appliquer la méthode du pinceau telle que présentée ici à des configurations plus réalistes en prenant en compte le champ de contraintes surfaciques rayonné par une source de taille finie. Nous reviendrons aussi sur ce modèle dans les chapitres 3 et 5 afin de l'étendre au cas du rayonnement des ondes guidées dans les matériaux anisotropes, puis dans les matériaux inhomogènes et les plaques courbes.

Chapitre 2

Champ rayonné par une source de taille finie

Dans ce chapitre, la méthode du pinceau modal est appliquée dans le but de modéliser l'émission et le rayonnement d'une onde guidée par un transducteur ultrasonore classiquement utilisé en contrôle non-destructif. Cela inclut les transducteurs piézo-électriques, les EMATs (ElectroMagnetic Acoustic Transducers), les patches magnétostrictifs et plus généralement tout type de transducteur pouvant être modélisé par une source de contrainte surfacique. Plusieurs approches sont proposées afin d'optimiser l'implémentation informatique de ce modèle. Un modèle de réception par capteur piézo-électrique est aussi étudié et des validations du modèle sont effectuées. Enfin, ce chapitre se conclut par une discussion des résultats obtenus et notamment par l'intérêt que présente l'obtention des champs particuliers sous la forme de leur décomposition modale.

2.1. Calcul du champ rayonné par convolution surfacique

2.1.1. Cas général

PLUSIEURS TECHNOLOGIES de transducteurs ultrasonores sont utilisées en contrôle non-destructif ou en contrôle santé intégré (CSI). La première famille d'émetteurs, qui est la plus courante, regroupe les céramiques piézoélectriques. Un signal électrique (tension) est appliqué sur des électrodes placées de part et d'autre de l'élément piézoélectrique qui se déforme sous l'effet de ce champ électrique. La surface inférieure du transducteur vient alors imposer un champ de contrainte à la surface supérieure de la plaque (voir Figure 2.1). Une couche de couplant (ou de colle pour les configurations CSI) est appliquée afin d'assurer de bonnes conditions de transmission de contrainte entre le transducteur et la pièce à inspecter.

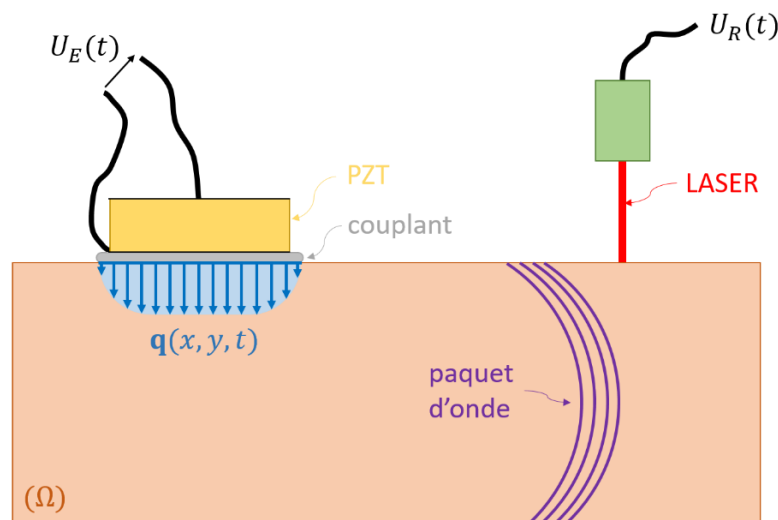


Figure 2.1. Configuration classique en laboratoire : émission par un transducteur à effet piézo-électrique, mesure du champ de déplacement à la surface par un interféromètre LASER.

Concernant les transducteurs EMATs, un couple aimant-bobine impose un champ magnétique statique et un champ électromagnétique dynamique (courants de Foucault). Suivant que la pièce conductrice est magnétique ou pas, différents phénomènes de transduction (dynamiques) dans un volume d'épaisseur très petite devant la longueur d'onde des ondes élastiques prennent place : force de Lorentz, d'aimantation, traction magnétique, déformation magnétostrictive [55,56] engendrent des champs de forces dynamiques dans une plaque ferromagnétique. Ces différents phénomènes peuvent être décrits sous la forme de contraintes surfaciques équivalentes (dans le cas d'une surface plane, [57] et dans le cas d'une surface courbe, [58]).

Les patches magnétostrictifs fonctionnent de façon assez similaire aux EMATs. Un fin matériau magnétostrictif pré-aimanté ou aimanté par un aimant permanent est excité électromagnétiquement par une bobine électrique et collé à la pièce. Les phénomènes de transduction ont lieu dans l'épaisseur du patch sur une profondeur de quelques épaisseurs de peau (très faibles dans un matériau magnétique aux fréquences considérées), pour l'essentiel par effet

magnétostrictif et il a été montré que l'on pouvait modéliser la source élastique créée par une distribution de contraintes surfaciques à l'interface colle/pièce [59].

Dans tous ces cas, le terme de source est une quantité vectorielle \mathbf{q} agissant à la surface (supérieure) de la plaque sur un support correspondant à la position du traducteur. Par soucis de simplicité, cette quantité sera par la suite toujours considérée comme une fonction à variables séparées dont la description spatiale est donnée par le champ vectoriel \mathbf{q}_s et l'évolution temporelle par la fonction scalaire q_t , soit

$$\mathbf{q}(x, y, t) = \mathbf{q}_s(x, y) \cdot q_t(t) \quad (2.1.1)$$

Cette hypothèse ne résulte cependant pas d'une limite du modèle, qui peut être étendu à des descriptions de sources plus complexes. Les calculs de champ étant effectués dans le domaine fréquentiel, on utilisera plutôt sa transformée de Fourier temporelle $\hat{\mathbf{q}}$ qui est obtenue grâce au seul calcul de la transformée de Fourier $\hat{q}_t(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \int q_t(t) e^{-i\omega t} dt$.

En reprenant le formalisme développé dans le chapitre 1, on peut voir ce problème comme le calcul du champ émis par un continuum de points sources situés sous le traducteur. Le champ de déplacement en résultant est alors obtenu sous la forme d'une convolution surfacique de la fonction de Green $\mathcal{G}_{i..f}$ décrivant le rayonnement de l'onde guidée suivant la séquence modale $i..f$ depuis chacun des points de la source \mathbf{R}_0 par le terme de source correspondant. On a alors :

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, \omega) = \iint_{Source} \left\{ \sum_{i..f} \mathcal{G}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0, \omega) \right\} \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{R}_0, \omega) dS(\mathbf{R}_0). \quad (2.1.2)$$

Stratégie d'intégration en coordonnées pseudo-polaires centrées sur le point de calcul

La recherche de trajets reliant un point source et un point de calcul fixés est en règle général un problème très contraint. Afin de relâcher cette contrainte, le point source n'est pas fixé et la recherche de trajets se fait depuis le point de calcul jusqu'à un point quelconque de la source. Certains des termes contenus dans la fonction de Green $\mathcal{G}_{i..f}$ sont indépendants de la longueur du rayon axial avant rebond : il s'agit du facteur d'amplitude $\mathcal{A}^{(i)}$ et des déformées modales. Les variations du facteur de divergence $\mathcal{D}_{i..f}$ ainsi que celles du terme de phase $\hat{\vartheta}_{i..f}$ selon la longueur du rayon sont connues de manière analytique sur cette partie du trajet. Un changement de variables est alors proposé ; il repose sur un système de coordonnées centré sur le point de calcul dont le jeu de coordonnées est la longueur du rayon axial du pinceau, ρ , et l'orientation de ce rayon au niveau du point de calcul donnée par l'angle $\theta = \varphi_f + \pi$. L'équation (2.1.2) devient alors :

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, \omega) \simeq \sum_{i..f} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{A}^{(i)}(\mathbf{R}_0, \omega) \mathbf{W}_{m_f}(\varphi_f, z, \omega) \left(\mathbf{W}_{m_i}^*(\varphi_i, e, \omega) \right)^t \mathfrak{Z}(\theta) d\theta \right\}. \quad (2.1.3)$$

où $\mathfrak{I}(\theta)$ correspond à l'intégrale linéique suivant le rayon axial des pinceaux dans la direction courante θ pour les longueurs de rayon axial $\rho \in [\rho^-(\theta); \rho^+(\theta)]$ (voir Figure 2.2) :

$$\mathfrak{I}(\theta) = \int_{\rho^-=0}^{\rho^+(\theta)-\rho^-(\theta)} \mathcal{D}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0, \omega) \exp[i\hat{\vartheta}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0, \omega)] \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{R}_0, \omega) \times |J(\rho' + \rho^-(\theta), \theta)| d\rho' \quad (2.1.4)$$

Dans cette expression, J désigne le déterminant de la matrice Jacobienne associée au changement de variables, dont l'expression est :

$$J(\rho, \theta) = -\cos \varphi_i \frac{\partial y^-}{\partial \theta} + \sin \varphi_i \frac{\partial x^-}{\partial \theta} + [\rho - \rho^-(\theta)] \frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta} \quad (2.1.5)$$

où $(x^-(\theta); y^-(\theta))$ sont les coordonnées cartésiennes du point du rayon axial pour lequel $\rho = \rho^-(\theta)$.

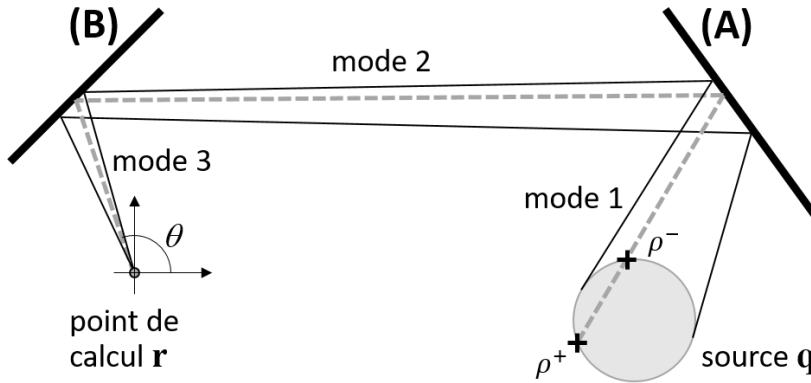


Figure 2.2. Représentation schématique d'un ensemble de rayons reliant un point de calcul de champ à une source circulaire suivant la séquence modale {mode 1 ; mode 2 ; mode 3}.

En pratique, les trajets sont obtenus de manière numérique par de simples calculs géométriques. Cependant en fonction du nombre de fréquences, du nombre de séquences modales, la recherche des trajets peut devenir coûteuse en temps de calcul. La méthode d'intégration ici proposée permet d'optimiser le nombre de lancer de rayons car, pour une direction θ donnée, tout un ensemble de points source (répartis le long d'une ligne) est obtenu. De plus, cela permet de passer d'un problème (contraint) de recherche de trajets entre deux points à un problème d'intersection de rayons avec une surface.

Algorithme de lancer de rayons

Dans un souci de généralité, les trajets sont obtenus par itération sur le nombre de réflexions. Cette procédure est détaillée dans l'algorithme 2.1. Des méthodes plus optimisées peuvent être utilisées dans des cas particuliers : nombre de réflexions limité, bords rectilignes (voir Annexe D), bords perpendiculaires ou parallèles entre eux. Avec cet algorithme un certain nombre de rayons envoyés depuis le point de calcul ne sont pas conservés car ils n'arrivent pas à la source, et sont donc non-contributifs. L'objectif est alors d'assurer une discrétisation qui représente suffisamment les phénomènes d'interférences dus aux

interactions des contributions émises par les différents points de la source tout en limitant le calcul de trajets non contributifs au champ. Une solution est alors d'effectuer un premier balayage rapide des bords afin d'identifier les directions angulaires autour desquelles se trouvent des trajets contributifs. En raffinant petit à petit autour de ces directions, un encadrement des différents secteurs angulaires contenant un ensemble continu de rayons cote à cote atteignant la source est obtenu. Il ne reste alors qu'à effectuer un lancer de rayon final suivant le nombre de directions choisi et composé uniquement de rayons que l'on sait contributifs.

Algorithme 2.1. Lancer de rayon

Entrées : séquence modale $\{m_0 ; m_1 ; \dots ; m_N\}$, point de calcul \mathbf{r} , directions de lancer $\tilde{\theta}_i$
Sortie : rayons reliant la source au point de calcul

Début

Initialisation des rayons au point de calcul, avec le mode m_N et dans les directions $\tilde{\theta}_i$;
 $N \leftarrow$ longueur de la séquence modale ;
 $n \leftarrow 0$;

Tant que $n \leq N$ faire**Si $n = N$ faire**

Intersection des rayons avec la source ;
 Ne garder que les rayons dont l'intersection avec la source est non vide ;
 Calcul de la matrice de propagation ;

Sinon faire

Intersection des rayons avec les bords de la plaque ;
 Calcul de la matrice de propagation ;
 Calcul des angles de réflexion pour la conversion de mode $m_{N-(n-1)} \rightarrow m_{N-n}$;
 Calcul des coefficients de réflexion ;
 Calcul de la matrice de réflexion ;

Fin si

$n \leftarrow n + 1$;

Fin tant que

Retourner les rayons ayant atteint la source ;

Fin

Afin de l'illustrer, cette procédure implémentée sous MATLAB est appliquée aux deux premières réflexions dans une plaque rectangulaire (voir Figure 2.3a-c). On remarque alors que, pour une même séquence modale, les secteurs angulaires mentionnés plus haut sont en général étroits au niveau du point de calcul et bien distincts les uns des autres. Par la suite, un tel ensemble de pinceaux qui suivent la même séquence modale et dont les rayons axiaux forment un ensemble continu sera nommé *paquet de pinceaux*. L'intégrale angulaire apparaissant dans l'équation (2.1.3) est alors réalisable paquet par paquet.

Dès l'instant où tous les bords sont rectilignes, un paquet de pinceau représente, pour une séquence modale donnée, les réflexions sur des bords agencés dans un certain ordre. Ainsi dans le cas présent où seuls les trois modes fondamentaux existent, on obtient :

- En champ direct, $3N_{\tilde{\theta}}$ rayons ($N_{\tilde{\theta}}$ étant le nombre de rayons au sein d'un paquet).

- Sachant que les modes SH_0 et S_0 se convertissent entre eux, pour un nombre n de réflexions on obtient $12nN_{\bar{\theta}}$ rayons pour les séquences modales sans aucune conversion de mode auxquels il faut rajouter les rayons des $2^{n+1} - 2$ séquences modales avec au moins une conversion de mode.

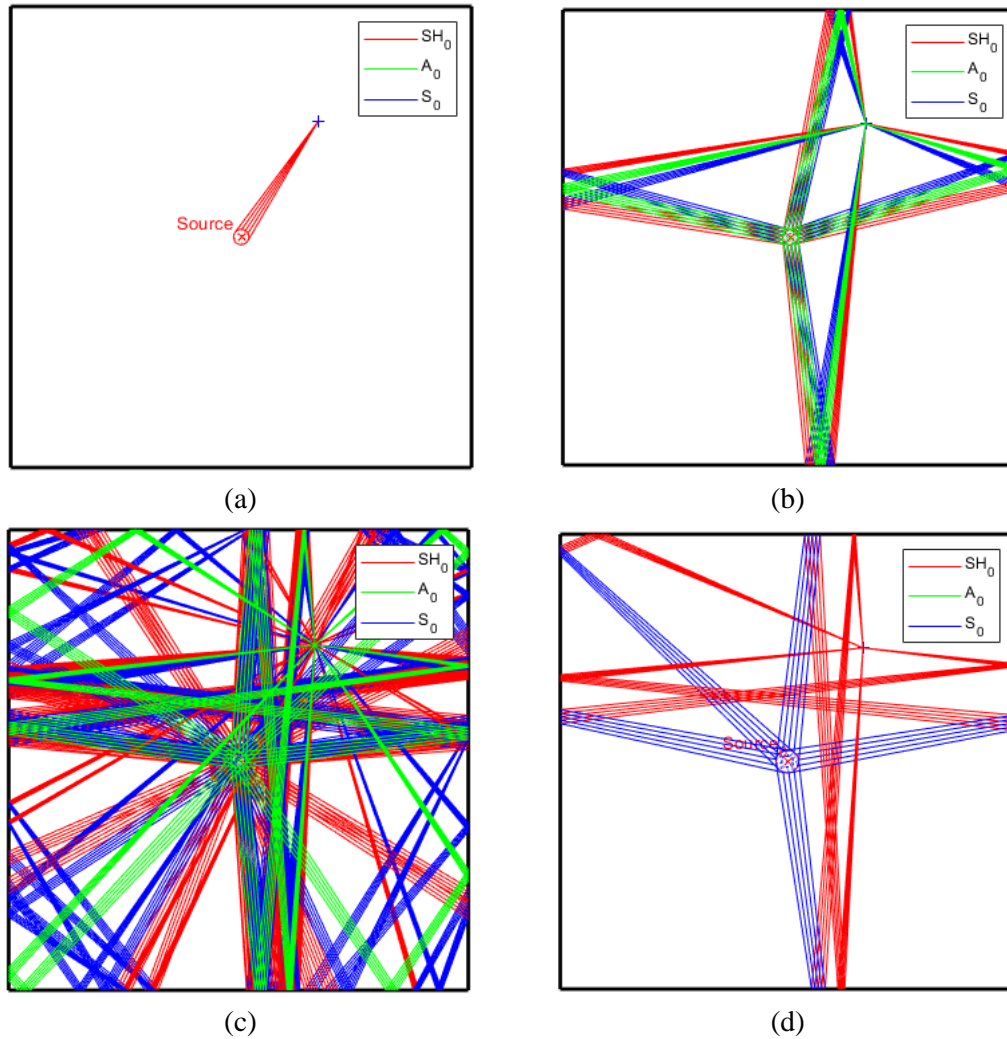


Figure 2.3. Lancer de rayons dans une plaque rectangulaire en aluminium (3 mm d'épaisseur) à 100 kHz. Rayons axiaux en champ direct (a), après une réflexion (b), après deux réflexions (c) et détail de la séquence modale $\{S_0; SH_0; SH_0\}$ (d).

Comme l'illustre la Figure 2.3, le nombre de rayons croît rapidement au fur et à mesure que l'on augmente le nombre de réflexions et l'information portée par chacun des rayons se noie alors dans le flot d'information globale. Afin de garder une approche déterministe et des temps de calcul raisonnables, on limitera par la suite les études à la seconde réflexion. La coda des signaux temporels obtenus sera alors non exhaustive, ce qui n'est pas grave au vu des applications visées.

2.1.2. Sources de contrainte uniforme

La modélisation des traducteurs piézoélectriques étant souvent complexe, des modèles d'émission idéalisés sont régulièrement utilisés. Pour les traducteurs ultrasonores à large-bande passante typiquement utilisés en contrôle non-destructif, il est généralement considéré que l'élément piézoélectrique vibre dans son mode fondamental d'épaisseur et qu'il peut être généralement modélisé comme une source de contrainte normale à la surface à laquelle il est appliqué. La description spatiale du terme de source devient alors en tout point de la surface émettrice :

$$\mathbf{q}_s(x, y) = q_{s,0} \mathbf{e}_z. \quad (2.1.6)$$

Les termes d'amplitude variant beaucoup plus lentement que les termes de phase, le facteur de divergence peut être considéré comme constant dans une direction donnée et égal à sa valeur obtenue pour le point source $\mathbf{R}_M(\theta) = \mathbf{R}_0 \left(\frac{\rho^-(\theta) + \rho^+(\theta)}{2}; \theta \right)$ situé au milieu du segment d'intersection courant. La relation (2.1.4) s'écrit alors :

$$\mathfrak{S}(\theta) \sim \mathcal{D}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_M(\theta), \omega) \mathfrak{S}'(\theta) q_{s,0} \hat{q}_t(\omega) \mathbf{e}_z, \quad (2.1.7)$$

avec

$$\mathfrak{S}'(\theta) = \int_{\rho'=0}^{\rho^+(\theta) - \rho^-(\theta)} |J(\rho' + \rho^-(\theta), \theta)| \exp[i\hat{\vartheta}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0, \omega)] d\rho'. \quad (2.1.8)$$

Le calcul de $\mathfrak{S}'(\theta)$ est réalisé grâce à une intégration par parties. Après quelques manipulations algébriques, on obtient alors son expression analytique :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}'(\theta) = & \left(\prod_{j=1}^N e^{i\phi r_{mn}(j)} \prod_{j=m_i}^{m_f} e^{-ik_j \rho_j} \right) \left(e^{-ik_{m_i}(\rho^+ - \rho^-)} [\text{sign}(J(\rho^+, \theta)) \right. \\ & \left. + ik_{m_i} |J(\rho^+, \theta)|] - [\text{sign}(J(\rho^-, \theta)) + ik_{m_i} |J(\rho^-, \theta)|] \right) / k_{m_i}^2. \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Au sein de cette relation, $\rho_{m_i}(\theta)$ est la longueur de la partie du rayon avant réflexion avec comme point source $(x^-(\theta); y^-(\theta))$. Le nombre N correspond au nombre de réflexions.

2.1.3. Sources en émission radiale

Dans les applications de contrôle santé intégré reposant sur la génération et la réception d'ondes guidées où de nombreux éléments piézoélectriques (fonctionnant comme émetteurs et récepteurs) sont mis en œuvre ; des pastilles piézoélectriques fines non amorties (voir Figure 2.4a) directement collées à la surface de la pièce sont souvent utilisées [60]. Elles présentent

le double avantage d'être peu coûteuses et légères. Aux fréquences utilisées, ces pastilles vibrent essentiellement en mode radial, créant à la surface une distribution de contraintes tangentielles. CRAWLEY et DE LUIS [61] ont de plus montré que si les conditions de couplage sont considérées parfaites (épaisseur de couplant très faible) alors le champ de contraintes exercées par la pastille n'est non nul qu'au voisinage des bords du traducteur. Ainsi pour une source circulaire de centre \mathbf{R}_c et de rayon r , représentée sur la Figure 2.4b, on a comme source idéalisée :

$$\mathbf{q}_s(\mathbf{R}_0) = (\cos \alpha \quad \sin \alpha \quad 0)^t \delta(\|\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_c\| - r) q_{s,0}, \quad (2.1.10)$$

avec $\delta(x) = 1$ si x est nul et $\delta(x) = 0$ sinon. L'intégration ne se faisant que sur le bord de la source, l'équation (2.1.2) est alors remplacée par :

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, \omega) = \oint \left\{ \sum_{i..f} \mathcal{G}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0(r, \alpha), \omega) \right\} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} q_{s,0} \hat{q}_t(\omega) r d\alpha. \quad (2.1.11)$$

L'algorithme de lancer de rayon est utilisé de la même manière que précédemment. Il permet d'obtenir, pour chaque direction de lancer, le trajet des pinceaux pour le point le plus proche et le point le plus éloigné appartenant tous deux au bord de la source (éventuellement confondus quand le trajet arrive tangentiellement au bord).

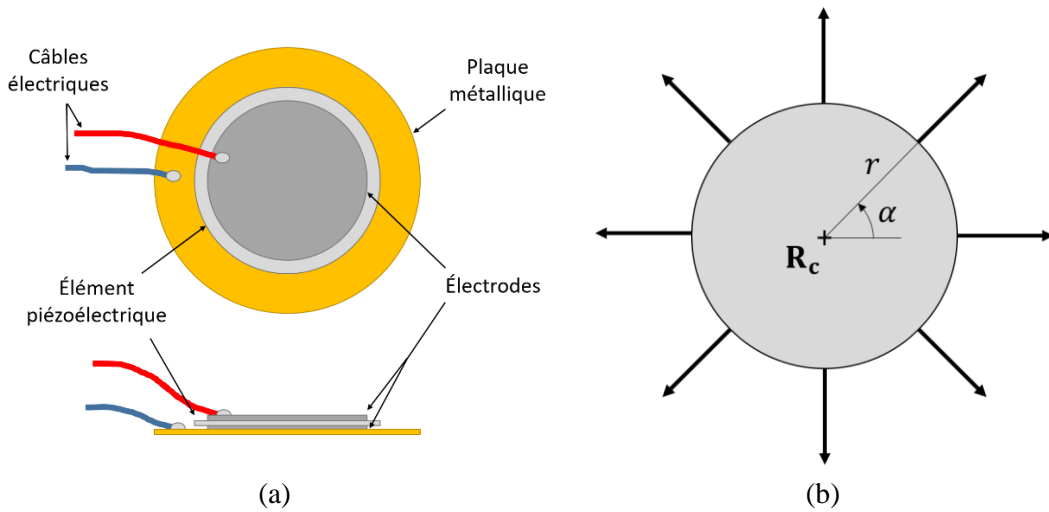


Figure 2.4. Représentation schématique d'une pastille piézoélectrique (a) et de son modèle d'émission pour des conditions de couplage parfaites (b).

2.1.4. Étude de convergence

Il importe d'étudier l'influence des critères de discrétisation de la surface sous le traducteur sur la valeur du champ de déplacement, opérée par l'algorithme de lancer de rayons. Comme mentionné dans le § 2.1.1, le nombre de rayons par paquet de pinceau est maîtrisé.

C'est donc ce paramètre, noté $N_{\bar{\theta}}$, dont on cherche la valeur optimale. Cette recherche se fait relativement à un niveau de tolérance $\epsilon^{(tol)}$ donné par rapport à la valeur de référence $\hat{\mathbf{u}}^{(ref)}$ obtenue quand $N_{\bar{\theta}} \rightarrow +\infty$. L'erreur relative est estimée par :

$$\epsilon^{(N_{\bar{\theta}})}(\mathbf{r}, \omega) := \left\| \frac{\hat{\mathbf{u}}^{(N_{\bar{\theta}})}(\mathbf{r}, \omega) - \hat{\mathbf{u}}^{(ref)}(\mathbf{r}, \omega)}{\hat{\mathbf{u}}^{(ref)}(\mathbf{r}, \omega)} \right\|_{\infty}. \quad (2.1.12)$$

La valeur optimale du paramètre est donc la plus petite valeur de $N_{\bar{\theta}}$ à partir de laquelle $\epsilon^{(N_{\bar{\theta}})} \leq \epsilon^{(tol)}$.

L'erreur est calculée pour plusieurs valeurs de $N_{\bar{\theta}}$ dans une plaque de 600 mm de côté. Dans un premier temps les directions de lancer sont réparties de manière uniforme et l'intégrale angulaire est évaluée par la méthode de Simpson ($N_{\bar{\theta}}$ est donc impair et vaut au minimum 3). Afin de n'évaluer que l'effet de la géométrie et des longueurs d'onde sur l'erreur, seuls des modèles de sources « simples » (uniforme, radiale) sont ici utilisés¹. Cette étude est réalisée pour un ensemble de points de calcul répartis aléatoirement à la surface de la plaque afin de la rendre indépendante de la position du point de calcul. Les résultats présentés sur la Figure 2.5 montrent que la valeur optimale du paramètre $N_{\bar{\theta}}^{(opt)}$ dépend de la fréquence (*i.e.* des longueurs d'onde), des dimensions et de la géométrie de la source.

Étudier l'influence de ces paramètres est en général très complexe car aucune relation simple n'apparaît de façon évidente. Gallien DELATTRE, dans le cadre de son stage de fin d'étude effectué au CEA List [62], a adopté une approche empirique en faisant varier le couple (dimensions de la source ; longueur d'onde) dans des plages d'utilisation courantes. Il a ensuite effectué une régression gaussienne de $N_{\bar{\theta}}^{(opt)}(\epsilon^{(tol)})$ qui permet d'obtenir une estimation du nombre optimal de rayons en fonction d'un niveau de précision fixé par l'utilisateur. Ce stage a aussi permis de proposer deux pistes alternatives :

- L'utilisation d'algorithmes d'apprentissage automatique afin d'aller plus loin que la solution par régression et ainsi de pouvoir introduire de nouvelles bases de données.
- La mise en place d'un lancer de rayons progressif pour lequel on vient mesurer à chaque pas la vitesse de convergence en ajoutant des rayons jusqu'à ce que cette vitesse soit inférieure à une valeur seuil.

¹ Lorsque le terme de source présente des variations spatiales importantes, le pas de discrétisation doit bien entendu permettre de rendre compte de ces variations.

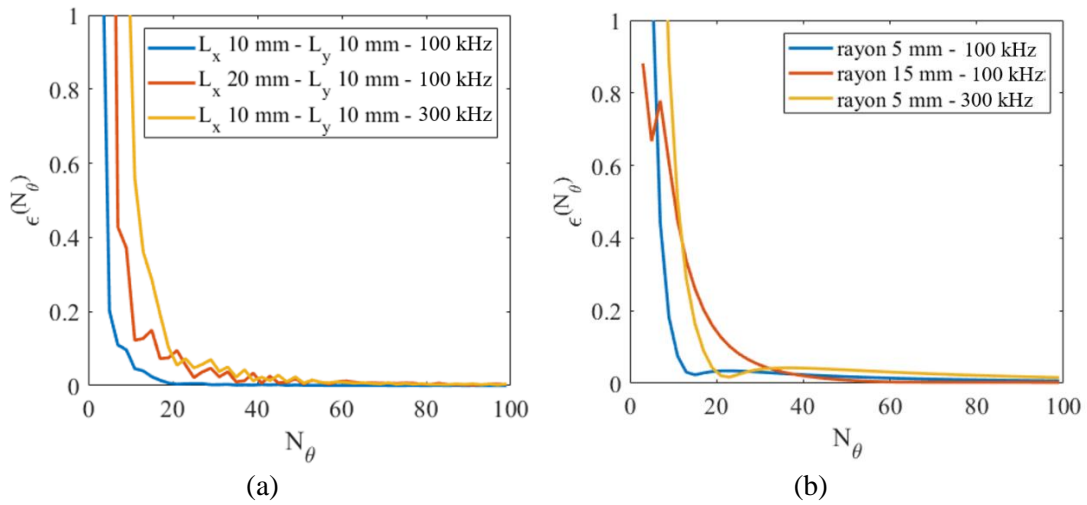


Figure 2.5. Convergence de la valeur de $\hat{\mathbf{u}}^{(N_{\theta})}$ dans diverses configurations pour une source rectangulaire en émission uniforme (a) et une source circulaire en émission radiale (b).

Dans le cas où le terme de source est réparti sur toute la surface sous le traducteur¹, l'erreur d'interpolation faite lors de l'application de la méthode de Simpson est plus importante dans les zones de forte variation de $\mathfrak{F}(\theta)$. Cela est en particulier vrai près des bornes de l'intégrale angulaire, où la distance $\rho^+(\theta) - \rho^-(\theta)$ varie fortement. Le lancer de rayon est maintenant effectué sur un support de directions $\tilde{\theta}_i$ non-uniforme. Ce dernier est basé sur un support uniforme dont les intervalles près des bornes ont été subdivisés une ou plusieurs fois, selon ce que nécessite l'application de la méthode de Simpson (voir Figure 2.6a). Les résultats présentés sur la Figure 2.6b montrent alors que le gain obtenu en fonction du nombre de subdivisions devient plus important lorsque la précision attendue est plus élevée.

En résumé, la convergence est assurée en maîtrisant le nombre de rayons par paquet de pinceau. Une première étude, effectuée avec des lancers de rayons à support uniforme, a montré que ce nombre de rayons est relié à un niveau de tolérance sur la valeur du champ de déplacement. Cela facilite l'implémentation de la méthode des pinceaux dans un logiciel commercial tel que CIVA. L'utilisateur (qui n'est pas un expert de cette méthode) vient fixer un niveau de précision souhaité et une routine détermine alors de manière automatique le nombre de rayons optimal pour assurer le meilleur rapport temps de calcul/précision. Dans des plages d'utilisation courantes, $N_{\theta}^{(opt)}$ varie entre 10 et 100 rayons par paquet. Une seconde étude a montré que si l'on vient raffiner le lancer de rayons près des bornes de d'intégration, alors la valeur de $N_{\theta}^{(opt)}$ pour un niveau de précision élevé est nettement inférieure à celle obtenue avec un simple lancer de rayons à support uniforme. Dans l'exemple donné sur la Figure 2.6b, pour un niveau de tolérance de 0,5 %, le nombre de rayons optimal est respectivement divisé par 2 et par 3 pour les deux premiers niveaux de raffinement.

¹ C'est-à-dire en excluant les sources en émission radiales pour lesquelles la contrainte imposée par le traducteur est linéique.

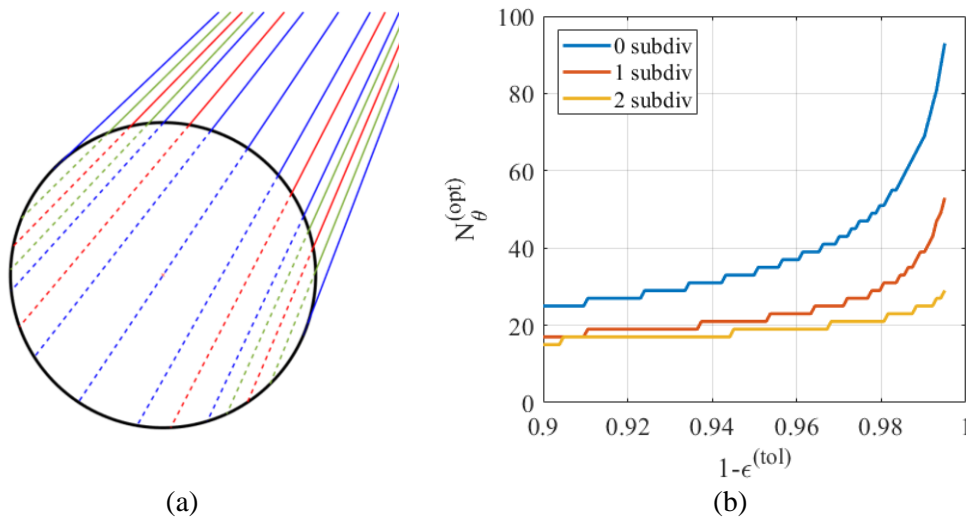


Figure 2.6. Intégration sur un support non-uniforme : (a) représentation des rayons (en bleu les rayons correspondant au support uniforme, en rouge puis en vert ceux rajoutés par les subdivisions) ; (b) nombre de rayons optimal en fonction de la tolérance avec et sans subdivisions.

2.2. Validation numérique

Les résultats obtenus avec la méthode des pinces sont comparés à ceux fournis par une méthode entièrement numérique (méthode des éléments finis). Cette comparaison peut être réalisée en tout point de la plaque, ce qui n'est pas le cas des validations expérimentales qui consistent à mesurer des champs particuliers (de déplacement ou de vitesse) sur les surfaces d'une plaque. De plus, nous ne disposons pas d'outils de mesure de champs vectoriels (type interféromètre LASER 3D) pour réaliser cette étude. Une simulation numérique nous a donc paru plus adaptée pour étudier les phénomènes complexes mis en jeu. En particulier, certaines conversions de modes (par exemple de S_0 en SH_0) sont plus facilement identifiables en ne regardant le champ de déplacement que sur certains axes.

Description du cas d'étude

La configuration choisie consiste en une plaque carrée de deux mètres de côté et en aluminium (trois millimètres d'épaisseur). Ces dimensions ont été choisies assez grandes pour obtenir des paquets d'onde séparés en temps, et ainsi rendre la lecture des signaux plus aisée. Les coefficients de Lamé de ce matériau sont $(\lambda ; \mu) = (50,23 \text{ GPa} ; 25,95 \text{ GPa})$ et sa masse volumique $\rho_0 = 2700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Une source circulaire de rayon 5 mm en émission uniforme et normale au plan de la plaque est située au centre de celle-ci. Une excitation temporelle impulsionnelle est appliquée à cette source. Il s'agit d'un signal harmonique à 100 kHz multiplié par une fenêtre de Hann afin de former une ondelette de trois cycles (voir Figure 2.7a). La bande de fréquences excitée par ce signal est située en dessous de la première fréquence de coupure des modes guidés (voir Figure 2.7b). Le champ de déplacement est calculé en trois points de la plaque. Les points *A* et *B* sont tous deux situés loin de la source tandis que le point *C* est placé très près du bord de celle-ci (voir Figure 2.7c).

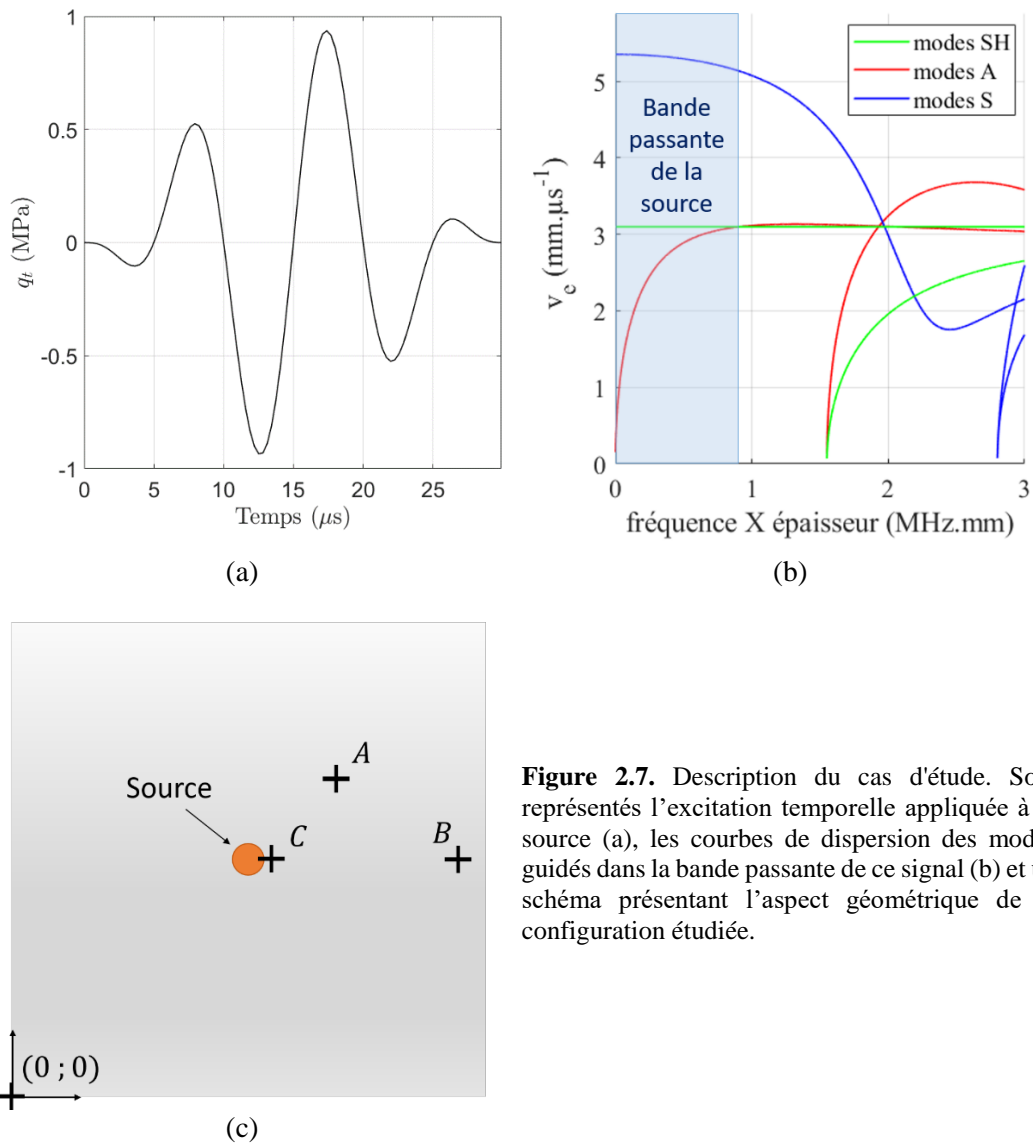


Figure 2.7. Description du cas d'étude. Sont représentés l'excitation temporelle appliquée à la source (a), les courbes de dispersion des modes guidés dans la bande passante de ce signal (b) et un schéma présentant l'aspect géométrique de la configuration étudiée.

Présentation de l'outil de validation

Le code éléments finis utilisé pour effectuer cette comparaison est un logiciel développé au CEA LIST, nommé ONDO. Il s'agit d'une implémentation de la méthode temporelle des éléments finis spectraux, optimisée pour résoudre des problèmes d'acoustique ou d'élastodynamique. Ce code a de plus été validé de manière expérimentale (voir [63]).

Le solveur de ONDO est basé sur un schéma explicite. Une condition CFL doit donc être respectée pour que la méthode converge. Le pas de discrétisation spatiale est choisi en fonction de la longueur d'onde la plus petite (qui correspond ici à la composante la plus haute fréquence du mode A_0). Le pas de temps est alors donné par la condition CFL. De plus, la valeur de la contrainte imposée a été apodisée près des bords de la source afin d'assurer la continuité du champ de contrainte. Cette apodisation est dans le cas présent effectuée sur un anneau de largeur 0.1 mm. Le terme de source de la configuration éléments finis est donc

légèrement différent de celui du calcul par la méthode des pincesaux. Les effets de cette apodisation seront considérés négligeables.

Résultats obtenus en champ lointain

Tout d'abord, les résultats obtenus au point A de coordonnées $(1400 ; 1200 ; 1)$ et au point B de coordonnées $(1910 ; 1000 ; 1,5)$ sont présentés sur la Figure 2.8 et la Figure 2.9. Les lancers de rayons ont été effectués jusqu'à la seconde réflexion et les critères de convergence ont été respectés. Le pas en fréquence a été choisi de sorte que la reconstruction temporelle se fasse sur une fenêtre de 10 ms, ce qui permet de contenir le signal calculé en entier et ainsi d'éviter le repliement. Les formes d'onde telles qu'elles sont présentées ont été coupées à 1 ms qui correspond au dernier pas de temps de la simulation éléments finis. Cela permet d'éviter l'introduction de contributions issues de trois réflexions (ou plus), que l'on a choisi de ne pas calculer.

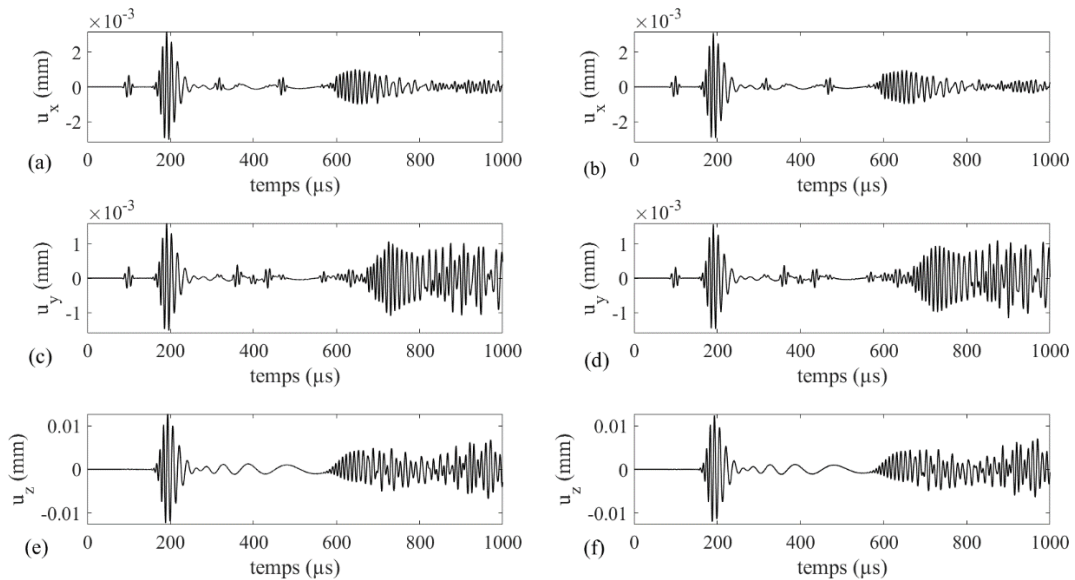


Figure 2.8. Formes d'onde au point A $(1400 ; 1200 ; 1)$. Les résultats présentés dans la colonne de gauche correspondent à ceux obtenus par la méthode des pincesaux. Les résultats obtenus grâce à ONDO sont présentés dans la colonne de droite.

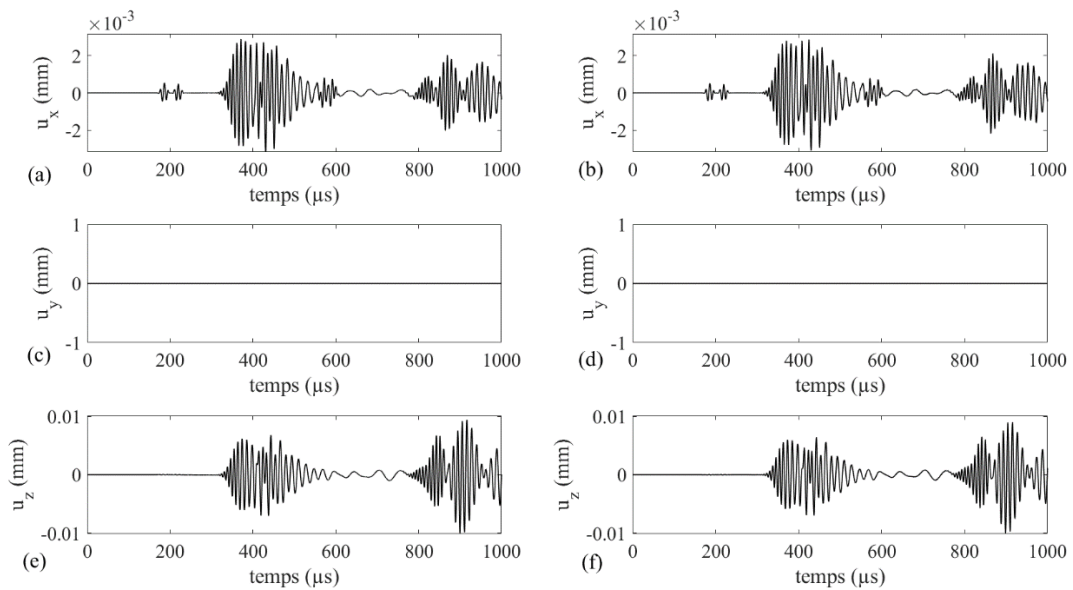


Figure 2.9. Formes d'onde au point B (1910 ; 1000 ; 1,5). Les résultats présentés dans la colonne de gauche correspondent à ceux obtenus par la méthode des pinceaux. Les résultats obtenus grâce à ONDO sont présentés dans la colonne de droite.

Un excellent accord est observé entre les résultats calculés par ONDO et ceux calculés par la méthode des pinceaux. Aucune normalisation des signaux n'ayant été effectuée, cette comparaison est quantitative. Les signaux de la Figure 2.8c-d sont représentés sur un même axe sur la Figure 2.10. Les paquets d'onde aux temps d'arrivée les plus courts coïncident presque parfaitement. Des différences plus importantes apparaissent à partir de 600 μs . Cet écart peut résulter de plusieurs facteurs. Tout d'abord, on voit bien que certaines contributions réfléchies (probablement issues des réflexion du mode S_0 , peu dispersives) sont nettement plus rapides que d'autres. Ainsi, des paquets d'onde provenant d'un nombre de réflexions supérieur ou égal à trois sont susceptibles d'interférer avec des paquets d'onde issus d'une seule réflexion mais dont la vitesse est moins élevée. Dans ce cas, la restriction du calcul par la méthode des pinceaux à la seconde réflexion peut-être en cause de l'écart observé. D'autre part, des phénomènes de diffraction aux coins de la plaque (non pris en compte par la méthode des pinceaux) peuvent aussi entrer en compte. De plus, le calcul par éléments finis n'est pas exempt d'erreurs. Il se peut qu'il ait légèrement dévié de la solution du problème selon un écart qui se propage et s'amplifie de pas de temps en pas de temps. Enfin, les deux simulations sont réalisées avec des paramètres qui diffèrent quelque peu (apodisation du terme de source par exemple). Néanmoins, cette erreur est marginale et la démarche de validation menée ici reste très concluante.

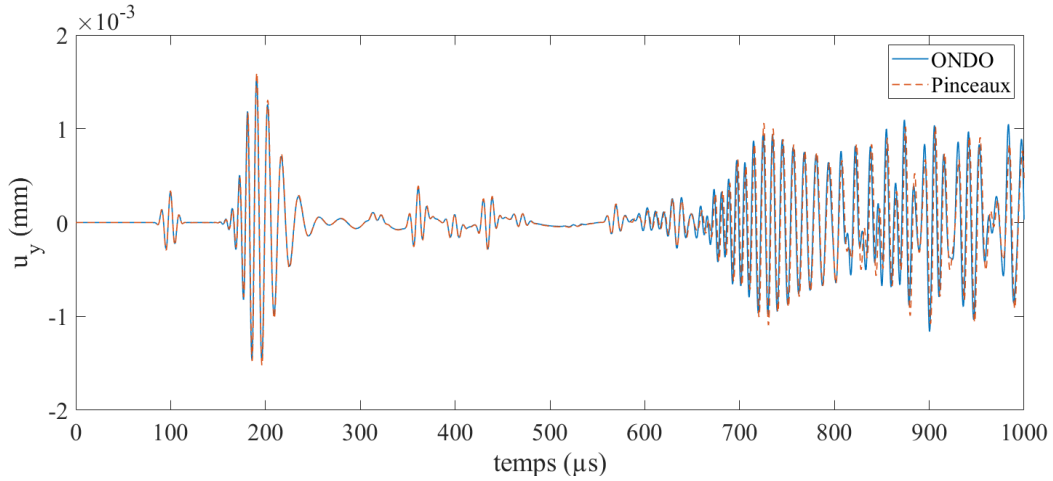


Figure 2.10. Superposition des formes d’ondes (de la composante y du déplacement) calculées au point A.

Résultats obtenus en champ proche

Plaçons-nous maintenant en dehors des limites de validité de la méthode des pinceaux. Le point C de coordonnées (1010 ; 1000 ; 1,5) est situé à 5 mm du bord de la source. Les contributions de champ direct calculées en ce point sont donc en dehors de l’approximation de champ lointain faite au chapitre 1. Les formes d’onde obtenues en ce point sont représentées sur la Figure 2.11 et coupées à 50 μs afin de ne faire apparaître que les contributions en champ direct. On voit que l’écart entre le calcul par éléments finis et le calcul par la méthode des pinceaux est plus important qu’en champ lointain. L’amplitude relative des différentes oscillations n’est pas parfaitement respectée et un léger déphasage de cycles est observé. Toutefois, ces résultats ne sont pas aberrants et permettent de donner une idée précise de la solution en champ proche.

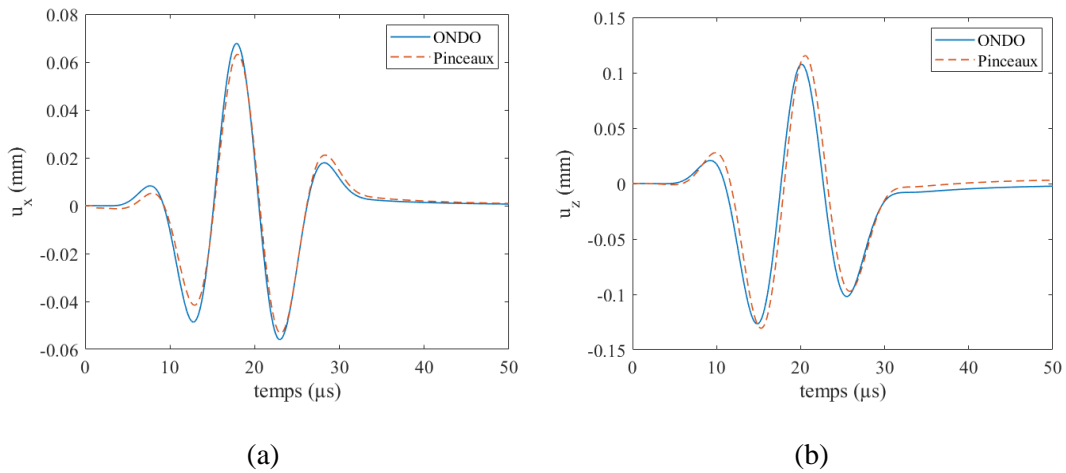


Figure 2.11. Contributions de champ direct au point C suivant la composante x (a) et la composante z (b).

En conclusion, la méthode des pincesaux a été validée à travers une comparaison avec une méthode numérique. Les résultats obtenus en champ lointain (à plusieurs longueurs d'onde de la source) sont très satisfaisants. En champ proche, le calcul de champ ne prend pas en compte les contributions des modes évanescents localement rayonnés. Il mène donc à un résultat faux (et c'est un fait qu'il convient de mentionner) mais restant représentatif de la solution exacte du problème.

2.3. Approximation de type Fraunhofer

Lorsque le traducteur est suffisamment éloigné du point de calcul, ou plutôt lorsque la longueur des rayons est très grande devant les dimensions de la source, alors le secteur angulaire décrit au sein d'un même paquet de pincesaux est très restreint. Ainsi, les contributions de tous les points de la source sont rayonnées avec des directions de phase très proches. Cette situation correspond à une diffraction en champ lointain (ou diffraction de Fraunhofer), dont le domaine de validité est usuellement défini par :

$$\forall \mathbf{R}_0, \mathbf{R}_0' \in \text{Source}, \quad \frac{\|\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_0'\|^2}{\lambda_m} \ll \rho(\mathbf{r}; \mathbf{R}_c), \quad (2.3.1)$$

\mathbf{R}_c étant le point central de la source, λ_m la longueur d'onde du mode m et ρ la longueur du rayon axial du pinceau. Dans cette section, une approximation inspirée de la diffraction de Fraunhofer est développée dans le but de simplifier le calcul du champ de déplacement particulière. Ces résultats sont ensuite comparés à ceux obtenus avec la méthode présentée dans la section précédente.

2.3.1. Mise en équation de l'approximation

Sous l'approximation de Fraunhofer, on considère que la distance de propagation vers le point de calcul varie peu lorsque le point \mathbf{R}_0 parcourt la surface émettrice. Les termes d'amplitude peuvent alors être considérés constants et égaux à leur valeur obtenue pour $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_c$. En revanche, il faut être plus précis pour les termes de phase, qui peuvent avoir des variations rapides d'un point source à un autre. Par exemple, il y a opposition de phase entre deux points d'un même rayon distants de $\lambda_m/2$. Un développement limité de $\hat{\vartheta}_{i..f}$ à l'ordre 1 est alors effectué. En résumé, cette approximation conduit à écrire les relations asymptotiques suivantes :

$$\exp[i\hat{\vartheta}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0, \omega)] \simeq \exp[i\hat{\vartheta}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_c, \omega)] \exp[i\mathbf{k}_{m_i} \cdot (\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_c)], \quad (2.3.2)$$

$$\mathcal{D}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0, \omega) \simeq \mathcal{D}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_c, \omega). \quad (2.3.3)$$

Les coefficients de réflexion sont pris constants pour tous les pincesaux au sein d'un même paquet. Cette hypothèse suit la logique de l'approximation : une seule direction de phase est considérée et donc une seule suite de coefficients associés à cette direction. Prendre la valeur en \mathbf{R}_c permet en quelque sorte de moyennner les valeurs de ces coefficients. En effet, un coefficient de réflexion (que ce soit en énergie ou en amplitude) peut être grossièrement

approché par une fonction linéaire de l'angle d'incidence au voisinage d'un de ces angles, sauf s'il s'agit d'angle critique (auquel cas il y a discontinuité).

En injectant les relations précédentes dans l'équation (2.1.2), qui donne l'expression du champ de déplacement émis par le traducteur, on obtient :

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, \omega) \simeq \sum_{i..f} \left\{ \mathcal{G}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_c, \omega) \iint_{Source} \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{R}_0, \omega) \exp[i\mathbf{k}_{m_i} \cdot (\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_c)] dS(\mathbf{R}_0) \right\}. \quad (2.3.4)$$

Apparaît alors la définition de la transformée de Fourier spatiale du terme de source, exprimée dans la direction initiale du pinceau central $\varphi_{i,c}$. Cette grandeur est par la suite notée $\hat{\mathbf{Q}}(\varphi, k, \omega)$. La nouvelle expression du champ de déplacement est alors :

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, \omega) \simeq \sum_{i..f} \mathcal{G}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_c, \omega) \hat{\mathbf{Q}}(\varphi_{i,c}, k_{m_i}, \omega). \quad (2.3.5)$$

Seul le pinceau qui relie le centre de la source au point de calcul intervient. Ce trajet est obtenu par les algorithmes optimisés présentés en Annexe D. Le lancer de rayons s'en trouve alors grandement simplifié, tout comme le calcul de champ lui-même qui est alors obtenu par une simple somme (discrète) de produits matriciels. La transformée de Fourier spatiale du terme de source peut être pré-calculée. Cette approximation conduit donc à une expression très compacte dont l'évaluation numérique est *a priori* beaucoup moins coûteuse en temps de calcul que celle de l'expression générale sans l'approximation de Fraunhofer.

Les erreurs potentielles faites dans cette approximation si des pinceaux sont incidents sur un bord avec un angle proche d'un angle critique constituent cependant une limite de cette nouvelle approche. Si le trajet reliant le point central de la source au point de calcul fait intervenir un angle de réflexion qui se trouve au-delà d'un angle critique, la valeur du champ de déplacement sera nulle alors que certains points de la source rayonnent de l'énergie en direction du point de calcul. *A contrario*, s'il fait intervenir un angle de réflexion qui passe juste en deçà de sa valeur critique, tous les points de la source contribueront à la valeur du champ de déplacement alors que ce n'est pas le cas.

2.3.2. Modèles de sources analytiques

Si le traducteur est modélisé par une des descriptions simples de source données dans les § 2.1.2 et 2.1.3, alors la transformée de Fourier spatiale de la source est connue analytiquement. Cherchons les différentes expressions de \mathbf{Q}_s (définie telle que $\hat{\mathbf{Q}}(\varphi, k, \omega) = \mathbf{Q}_s(\varphi, k) \hat{q}_t(\omega)$) pour les modèles de traducteurs les plus simples.

Exemple : source rectangulaire de contrainte normale

Prenons un traducteur rectangulaire de dimensions $(L_x ; L_y)$ en émission uniforme normale au plan de la paque (voir Figure 2.12a). Le terme de source associé est de la forme :

$$\mathbf{q}_s(x', y') = q_{s,0} \mathbf{e}_z. \quad (2.3.6)$$

Le système de coordonnées (x', y') a pour origine le centre de la source, ce qui permet de simplifier les expressions. On a alors l'expression de sa transformée de Fourier spatiale :

$$\mathbf{Q}_s(\varphi, k) = q_{s,0} \mathbf{e}_z \int_{-\frac{L_x}{2}}^{\frac{L_x}{2}} e^{ikx' \cos \varphi} dx' \int_{-\frac{L_y}{2}}^{\frac{L_y}{2}} e^{iky' \sin \varphi} dy'. \quad (2.3.7)$$

La fonction $f : X \rightarrow e^{iAX}$, avec A non nul et X réel, s'intègre simplement sur un intervalle $\left[-\frac{X_0}{2} ; \frac{X_0}{2}\right]$ et cette intégrale vaut :

$$\int_{-\frac{X_0}{2}}^{\frac{X_0}{2}} e^{iAX} dX = X_0 \operatorname{sinc} \left(A \frac{X_0}{2} \right), \quad (2.3.8)$$

où sinc est la fonction sinus cardinal. Cette relation est encore valable pour $A = 0$, cas dans lequel l'intégrale est triviale et vaut X_0 . En posant $A = k \sin \varphi$ (resp. $A = k \cos \varphi$) et $X_0 = L_y$ (resp. $X_0 = L_x$), on obtient l'expression de la projection de \mathbf{Q}_s suivante :

$$\mathbf{Q}_s(\varphi, k) = q_{s,0} L_x L_y \operatorname{sinc} \left(k \frac{L_x}{2} \cos \varphi \right) \operatorname{sinc} \left(k \frac{L_y}{2} \sin \varphi \right) \mathbf{e}_z. \quad (2.3.9)$$

Il ne reste alors qu'à évaluer cette expression pour le couple $(\varphi_{i,c}, k_{m_i})$ correspondant au *trajet de Fraunhofer* de chacune des séquences modales.

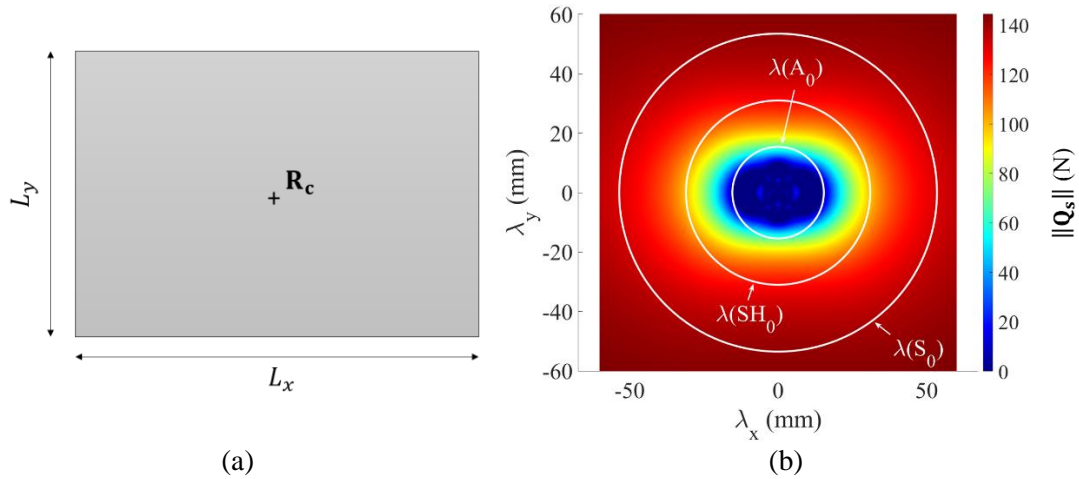


Figure 2.12. Description d'une source rectangulaire ($L_x = 15$ mm ; $L_y = 10$ mm). Représentation schématique de la source (a) et norme de la transformée de Fourier spatiale en fonction de la longueur d'onde (b). La longueur d'onde des modes propagatifs (plaque en aluminium 3 mm à 100kHz) est représentée en blanc.

La valeur de \mathbf{Q}_s pour une source rectangulaire de dimensions indiquées dans la légende (choisies arbitrairement) est représentée sur la Figure 2.12b. Le calcul de champ ne fait intervenir que les valeurs spectrales correspondant aux longueurs d'onde des différents modes propagatifs. En faisant apparaître ces valeurs sur le graphique précédent, on peut faire deux remarques :

- À une fréquence donnée, les modes ne sont pas tous excités par la même intensité de contrainte¹. Dans l'exemple qui est ici donné, la contrainte est mieux transmise au mode S_0 qu'au mode A_0 .
- Cette source possède une directivité, ce qui n'est pas surprenant car elle n'est pas invariante par rotation autour de son centre. Ainsi le mode A_0 est excité majoritairement autour de la direction \mathbf{e}_y .

Ces considérations sont reprises et complétées dans le § 2.3.5 afin de définir une notion d'excitabilité modale d'un transducteur.

Expression de \mathbf{Q}_s pour les différents modèles de sources simples

Des calculs similaires à ceux qui viennent d'être détaillés peuvent être réalisés pour les autres types de transducteurs simples. Leur démonstration ne sera pas faite ici car elle ne présente aucune difficulté particulière. Les résultats sont présentés dans le Tableau 2.1. Dans le cas des sources circulaires de rayon r , J_1 correspond à une fonction de Bessel de première espèce définie par :

$$J_1(X) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\tau - X \sin \tau) d\tau. \quad (2.3.10)$$

¹ Le cas d'une source ponctuelle fait exception. La source est décrite par un Dirac dans le domaine spatial, donc \mathbf{Q}_s est constant dans le domaine dual.

De plus, le modèle de source circulaire de contrainte radiale correspond à celui présenté dans le § 2.1.3. La description spatiale du terme de source qui y est associé est donnée dans l'équation (2.1.10).

Tableau 2.1. Transformée de Fourier spatiale \mathbf{Q}_s de sources décrites de manière analytique.

émission	circulaire	rectangulaire
piston	$2\pi r^2 \frac{J_1(k_{m_i} r)}{k_{m_i} r} q_{s,0} \mathbf{e}_z$	$L_x L_y \operatorname{sinc}\left(\frac{L_x}{2} k_{m_i} \cos \varphi_{i,c}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{L_y}{2} k_{m_i} \sin \varphi_{i,c}\right) q_{s,0} \mathbf{e}_z$
radiale	$-2\pi r J_1(k_{m_i} r) \begin{pmatrix} \cos \varphi_{i,c} \\ \sin \varphi_{i,c} \\ 0 \end{pmatrix} q_{s,0}$	Ne correspond pas à un modèle de transducteur piézoélectrique

2.3.3. Exemple d'une source décrite de manière numérique

L'utilisation de patches magnétostrictifs permet d'émettre des champs élastiques spécifiques impossibles à générer à l'aide de sources de type piézoélectrique simples. En particulier G. COUSIN les utilise, dans le cadre de son doctorat mené au CEA List, afin de rayonner de manière préférentielle le mode SH_0 ; qui a la particularité d'être non dispersif.

Un exemple de champ de contrainte imposé à l'interface entre un patch et une plaque en aluminium est donné dans la Figure 2.13. Les calculs électromécaniques ayant permis d'obtenir ces valeurs ne seront pas détaillées et sont indépendants des travaux présentés dans ce manuscrit. La valeur de σ_{yz} est élevée sous la majeure partie du patch, ce qui est susceptible d'émettre des ondes de cisaillement dans la direction de \mathbf{e}_x . D'autre part, l'intensité de \mathbf{Q}_s est maximale pour des valeurs spectrales correspondants au nombre d'onde du mode SH_0 . La génération ce mode semble donc bien favorisée dans cette configuration. Le calcul du champ de déplacement sous l'approximation de Fraunhofer est possible grâce à l'évaluation numérique de la transformée de Fourier spatiale du terme de source. Les résultats présentés dans la Figure 2.14 confirment les hypothèses préalablement faites sur la génération du mode SH_0 . A titre de comparaison, les amplitudes maximales relatives des modes A_0 et S_0 sont respectivement de 0,22 et 0,13. La sélection de modes souhaitée a donc bien été effectuée.

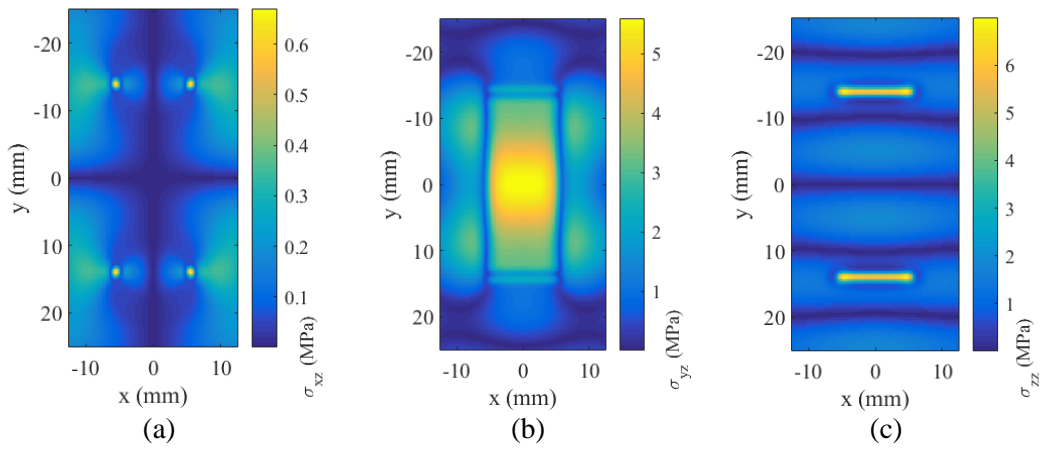


Figure 2.13. Contrainte imposée à la surface de la plaque par un patch magnétostrictif. Description spatiale des composantes du tenseur des contraintes ((a), (b) et (c)) et norme de leur transformée de Fourier spatiale (d). Les nombres d'onde des modes fondamentaux à 150 kHz sont représentés par des cercles blancs.

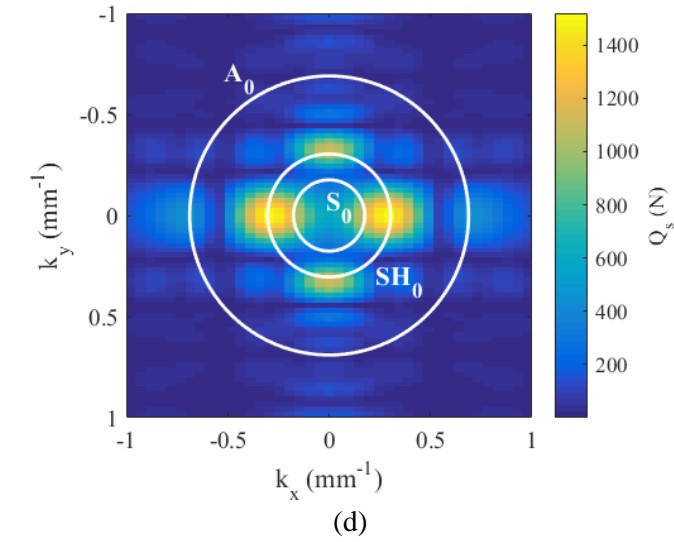


Figure 2.14. Faisceau d'ondes SH généré par un patch magnétostrictif. Norme du champ de déplacement normalisé rayonné par le mode SH_0 à 150 kHz.

Dans le cas de sources décrites de manière numérique, l'utilisation des composantes spectrales du terme de source permet donc de s'affranchir d'une intégration numérique coûteuse calculée à la volée pendant l'exécution du code. Le calcul de la transformée de Fourier peut faire l'objet d'un pré-calcul spécifique à chaque type de source. Enfin, un calcul séparé de la fonction de Green correspondant à chaque trajet et des termes de sources permettrait à moindre coût la réalisation d'études paramétriques permettant d'optimiser le choix des paramètres d'un traducteur ultrasonore pour une configuration de contrôle donnée.

2.3.4. Comparaisons avec le calcul par convolution

Les résultats obtenus à l'aide de la méthode utilisant l'approximation de Fraunhofer sont maintenant comparés à ceux calculés en prenant en compte de manière explicite tous les points de la source, qui jouent alors le rôle de résultats de référence.

Domaine de validité en champ lointain

L'approximation est valable si la condition (2.3.1) est vérifiée. Cela s'observe en représentant l'erreur relative entre les deux méthodes tout en faisant varier la distance entre le point de calcul et le centre de la source. Dans un premier temps, les réflexions ne sont pas considérées afin de n'étudier que l'influence de la diffraction en champ proche/lointain.

Une source circulaire de diamètre \varnothing en émission uniforme normale au plan de la plaque est choisie. Sur la Figure 2.15a, l'erreur relative obtenue pour différentes valeurs de longueur d'onde et de diamètre est représentée. La définition de cette erreur est la même que celle introduite par l'équation (2.1.12). On vérifie bien que les deux solutions convergent pour des valeurs de ρ élevées. De plus, l'erreur relative ne semble dépendre que de la valeur de

$$F := \frac{\varnothing^2}{\lambda_m}, \quad (2.3.11)$$

qui provient du membre de gauche de la relation (2.3.1). Cette quantité, parfois appelée *nombre de Fresnel* [64], peut d'ailleurs être utilisée comme critère de validité *a priori* et ainsi déterminer une distance minimale définissant le champ lointain (au sens de la diffraction de Fraunhofer).

Pour une source rectangulaire, l'erreur possède une directivité. Dans l'exemple présenté sur la Figure 2.15b le nombre de Fresnel vaut 13. Pour des valeurs de ρ au moins un ordre de grandeur au-dessus, l'erreur est majorée par 1% dans toutes les directions. Dans ce cas l'approximation reste donc assez précise pour des distances de propagation assez courtes.

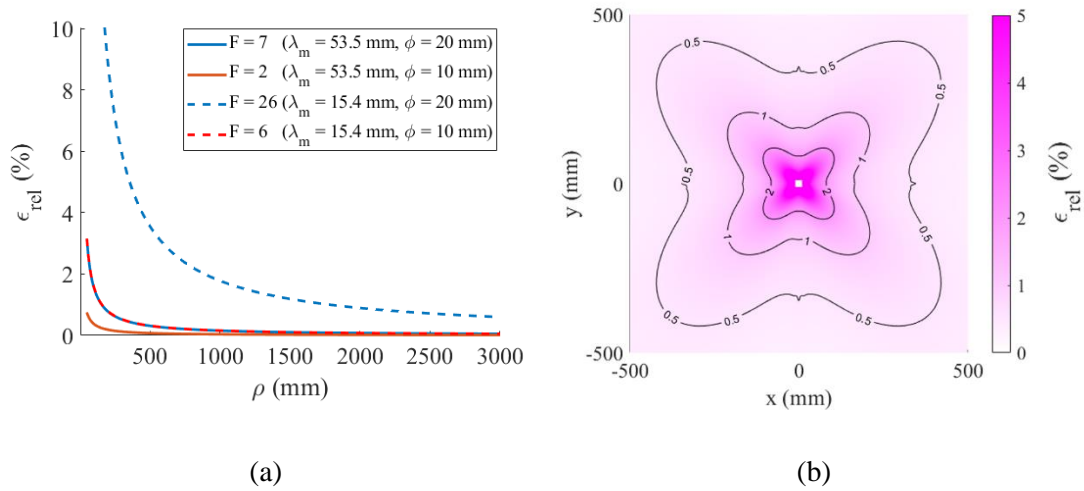


Figure 2.15. Erreur relative (en %) commise en utilisant l'approximation de Fraunhofer en fonction de la distance de propagation pour une source circulaire (a) et une source carrée de côté 15 mm pour $\lambda_m = 15.4$ mm (b).

Excitation temporelle et plaque de taille finie

L'approximation est maintenant évaluée pour des séquences modales de champs directs ou avec une seule réflexion. Une excitation temporelle est choisie afin de pouvoir plus facilement évaluer les contributions en champ réfléchi, apparaissant en général pour des temps d'arrivée plus longs que ceux des contributions en champ direct. Il est dans ce cas plus pratique d'utiliser un estimateur d'erreur scalaire pour tout un signal temporel. C'est pourquoi le choix de cet estimateur s'est porté sur l'erreur RMS (pour *Root-Mean-Square*), défini comme suit :

$$\mathbf{RMS}(x, y) := \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\mathbf{u}_t^{(Fraun)}(x, y, d) - \mathbf{u}_t^{(ref)}(x, y, d) \right)^2}, \quad (2.3.12)$$

où T est le nombre de pas de temps, $\mathbf{u}_t^{(Fraun)}$ (respectivement $\mathbf{u}_t^{(ref)}$) est la valeur du champ de déplacement obtenue par le calcul par l'approximation (respectivement par convolution) au pas de temps t .

Le champ de déplacement est calculé avec et sans approximation sur une grille régulière située à la surface supérieure d'une plaque de géométrie rectangulaire. La source de contrainte (en émission uniforme) est appliquée sur un disque de rayon 5 mm situé au centre de la plaque. La Figure 2.16a-b montre un bon accord apparent entre les résultats obtenus par chacune des deux méthodes à $t = 500 \mu\text{s}$. Cela est confirmé pour toute la longueur des formes d'onde par la valeur de l'erreur RMS (voir Figure 2.16c), qui est deux ordres de grandeur en dessous de celui de la valeur du champ de déplacement.

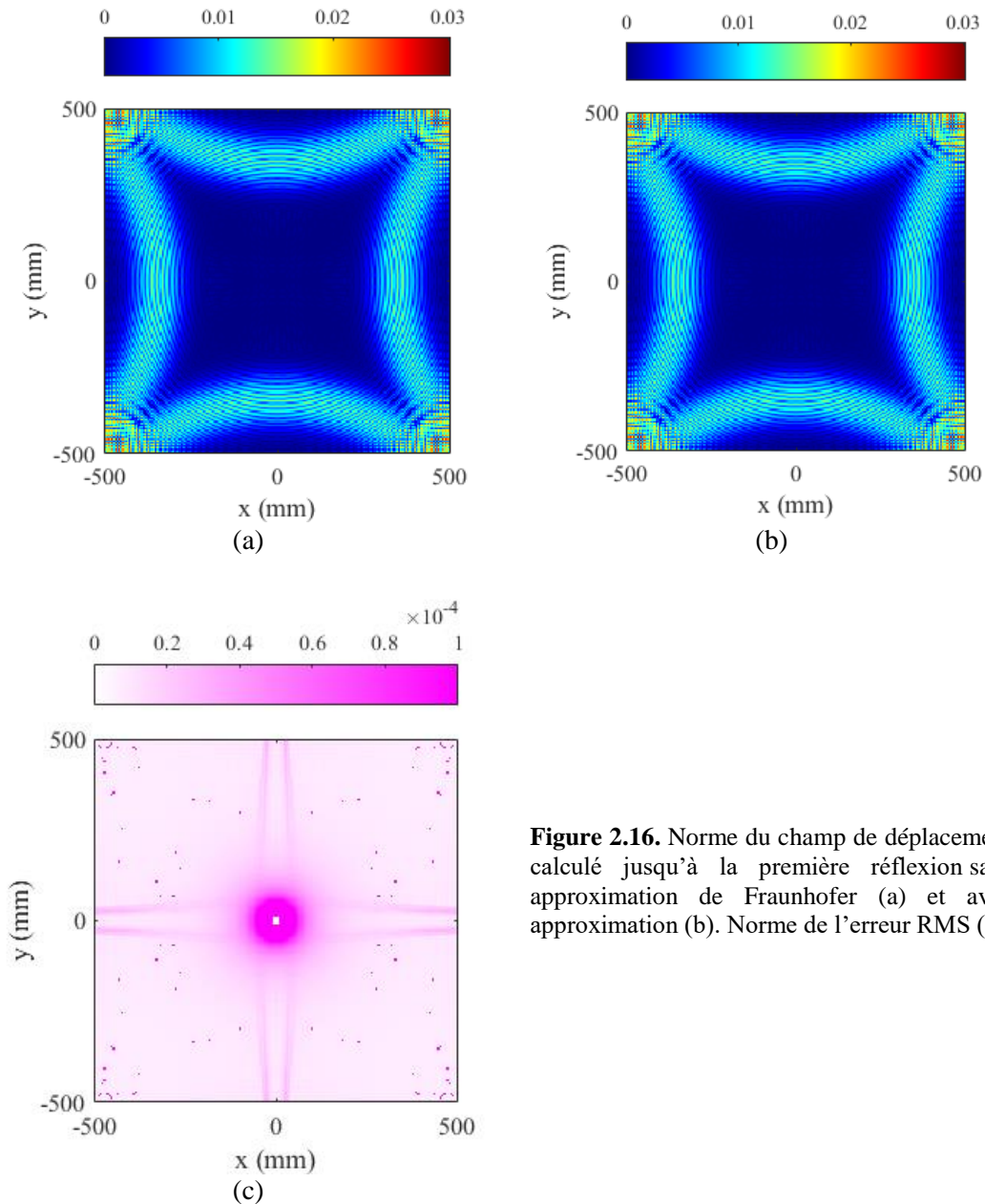


Figure 2.16. Norme du champ de déplacement calculé jusqu'à la première réflexion sans approximation de Fraunhofer (a) et avec approximation (b). Norme de l'erreur RMS (c).

En se plaçant en un point isolé, il est possible d'augmenter le nombre de réflexions tout en gardant des temps de calcul raisonnables. Ceci a été fait pour établir la Figure 2.17 qui montre une forme d'onde comportant des contributions allant jusqu'à la seconde réflexion en un point se situant dans le domaine de validité de l'approximation. Un très bon accord est observé dans les résultats calculés par le modèle de référence avec intégration complète sur la source et le calcul réalisé avec l'approximation de Fraunhofer, pour les différents paquets d'onde, et ce peu importe nombre de réflexions. L'approximation de Fraunhofer en champ direct et en réflexion est donc validée, ce qui constitue un résultat inédit. En effet, ce type d'approximation n'a, à notre connaissance, jamais été utilisé pour traiter ce type de problèmes (les travaux de STÉVENIN ayant inspiré ces développements mis à part n'ayant concerné que le cas du champ direct [34]).

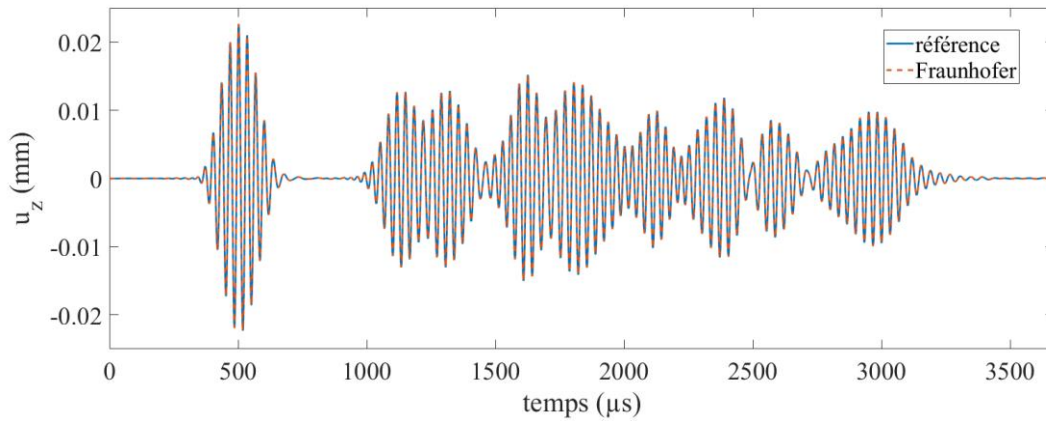


Figure 2.17. Déplacement hors-plan au point de coordonnées (240 ; 120 ; 1,5) calculé jusqu'à la seconde réflexion.

Enfin, la mise en place de ce nouveau formalisme avait pour objectif d'augmenter les performances numériques de l'implémentation de la méthode des pinceaux. À travers le calcul des résultats présentés ci-dessus, un gain en temps de calcul d'un facteur dix a été observé. Ceci peut encore être optimisé grâce à l'utilisation d'algorithmes parallélisés.

2.3.5. Excitabilité modale du transducteur

En contrôle non-destructif le choix d'un transducteur se fait en fonction des longueurs d'onde que l'on souhaite émettre afin de détecter ou de caractériser un défaut. En particulier les méthodes de contrôle par ondes guidées sont fréquemment basées sur l'utilisation d'un nombre restreint de modes. Le choix du transducteur va alors dans le sens de favoriser l'émission de ces modes, et de défavoriser celle des autres modes. On fait alors une *sélection de modes* [65–68]. Les méthodes utilisées pour définir une excitabilité de l'onde guidée consistent en général à mesurer (expérimentalement ou à partir de simulations numériques) l'amplitude du champ de déplacement dans plusieurs directions autour du transducteur [69]. Il est aussi possible de définir cette excitabilité à partir des déformées modales et de formules analytiques (comme cela a été fait dans l'Annexe C). La grandeur obtenue est alors modale, ce qui la rend plus intéressante pour des applications en CND/SHM. Nous proposons ici d'aller un peu plus loin en intégrant la contrainte émise par la source à cette excitabilité.

La transformée de Fourier spatiale du terme de source traduit le spectre (au sens des longueurs d'ondes) susceptible d'être émis par le transducteur et rayonné en champ lointain. Cependant cette information, à elle seule, ne permet pas de prédire quels modes seront générés. Il faut pour cela prendre en compte le couplage entre la description vectorielle du terme de source et celle de chacun des modes guidés. L'expression du champ de déplacement (et en particulier celle de la fonction de Green) en champ direct fournit les outils nécessaires. En s'affranchissant du facteur de divergence et du terme de phase (qui traduisent la propagation d'un mode guidé mais pas son émission) ainsi que la déformée modale au point de calcul, il ne reste que des termes liés à l'émission du mode. L'excitabilité du mode m est ainsi définie comme suit :

$$\boxed{\mathcal{E}_m(\varphi, \omega) := \mathcal{A}^{(m)}(\varphi, \omega) (\mathbf{W}_m^*(\varphi, e, \omega))^t \widehat{\mathbf{Q}}(\varphi, k_m, \omega)}, \quad (2.3.13)$$

Contrairement au champ de déplacement, cette grandeur est scalaire et ne dépend pas de la position dans l'épaisseur. Elle est donc aussi plus simple à utiliser.

Quelques exemples d'excitabilités modales sont présentés ci-dessous et les caractéristiques de ces différentes sources sont étudiées.

- Une source circulaire en émission uniforme génère majoritairement le mode A_0 à basse fréquence (jusqu'à 0,5 MHz.mm dans l'exemple donné sur la Figure 2.18). Il y a alors sélection de mode dans cette gamme de fréquences. Ce comportement évolue ensuite fortement avec la fréquence. Par exemple, autour de 3,3 MHz.mm, c'est le mode S_2 qui devient majoritaire.
- Une source circulaire en émission circonférentielle radiale (voir Figure 2.19) ne possède pas cette caractéristique de sélection de mode à basse fréquence. Elle peut en revanche être utilisée dans le but d'augmenter l'amplitude du mode S_0 (qui est peu dispersif à basse fréquence) par rapport à celle du mode A_0 .
- Une source rectangulaire possède une directivité, c'est-à-dire que l'excitabilité varie en fonction de la direction d'énergie. Cette caractéristique peut être utilisée pour faciliter la localisation d'un défaut, et dans ce cas l'excitabilité doit être une donnée d'entrée de l'algorithme de localisation. Cependant, avec ce type de sources, certains modes ne peuvent être utilisés dans les directions des diagonales de la source car l'excitabilité est nulle ou faible autour de ces directions.

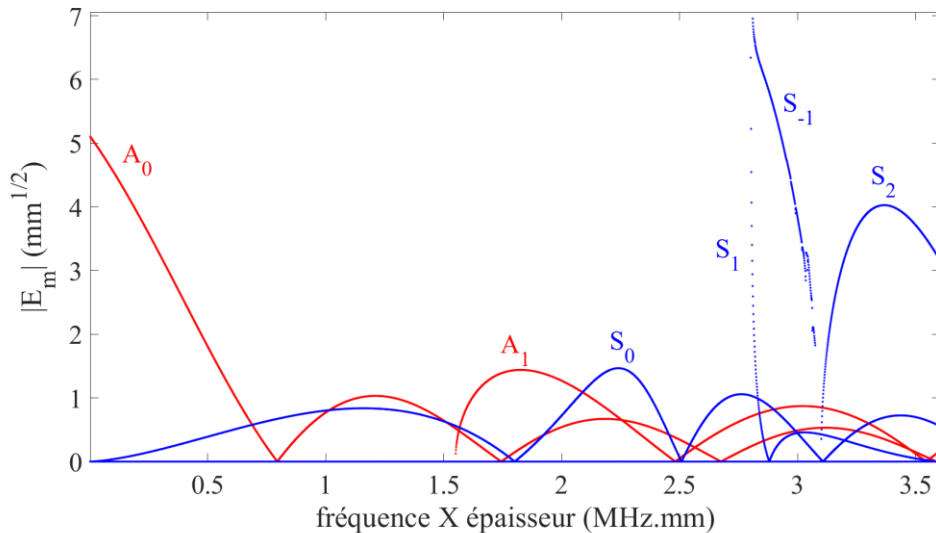


Figure 2.18. Excitabilité modale d'une source circulaire de rayon 5 mm en émission uniforme en fonction de la fréquence.

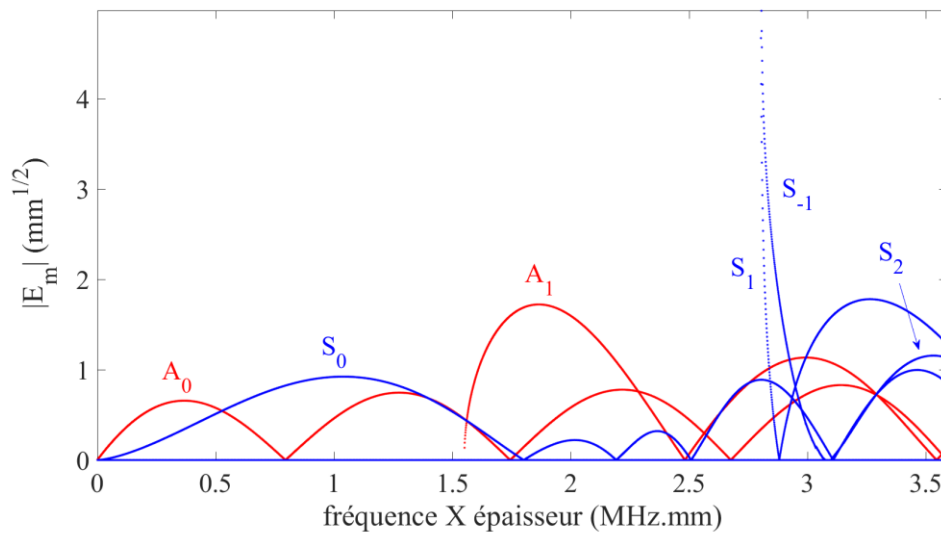


Figure 2.19. Excitabilité modale d'une source circulaire de rayon 5 mm en émission circonférentielle radiale en fonction de la fréquence.

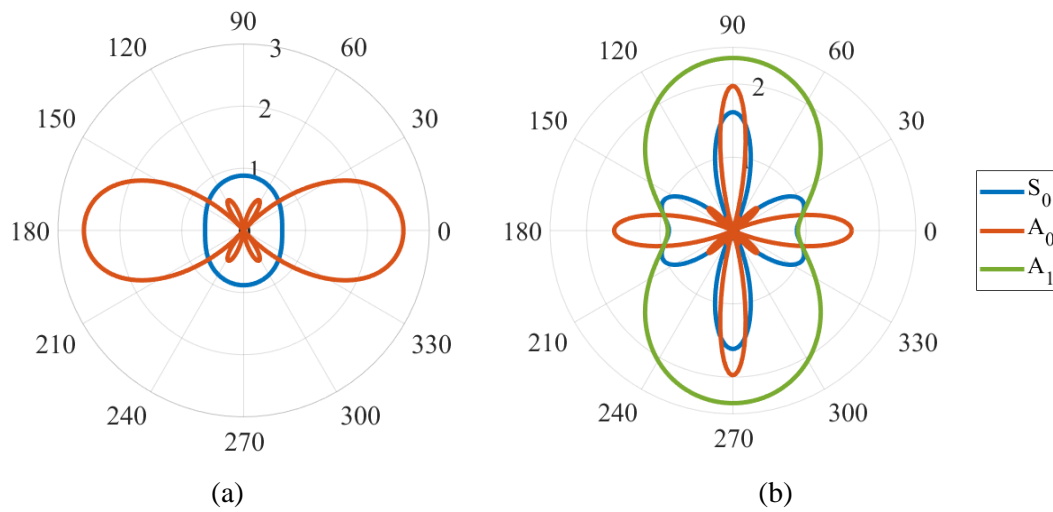


Figure 2.20. Excitabilité modale d'une source rectangulaire ($L_x = 15$ mm ; $L_y = 10$ mm) en fonction de la direction d'énergie à 200 kHz (a) et 600 kHz (b).

2.4. Modélisation de la réception par un transducteur piézoélectrique

Des transducteurs ultrasonores sont utilisés pour mesurer le champ rayonné dans les configurations industrielles de CND et de SHM. Nous allons détailler dans ce paragraphe comment modéliser le signal reçu par un transducteur piézoélectrique à partir du déplacement particulaire à la surface sous ce transducteur.

2.4.1. Sensibilité des transducteurs piézoélectriques

L'application du principe de réciprocité permet de relier les quantités électriques au niveau des câbles du capteur et les champs élastiques sous la surface de ce dernier. On va considérer deux situations : celle (R) où le transducteur est soumis à une onde de vitesse particulaire $\hat{\mathbf{v}}$ et la situation E dans laquelle le même transducteur est un émetteur. Le détail des calculs est disponible dans le manuscrit de thèse de BOULAY [70]. La contrainte sous le transducteur dans la situation R étant nulle, d'après les conditions limites à la surface de la plaque si l'on considère que la présence du capteur n'a pas d'influence sur les champs élastiques, la tension reçue par le transducteur s'exprime comme :

$$\hat{U}_R(\omega) = \frac{1}{\hat{I}_E(\omega)} \iint_R \hat{\mathbf{q}}_E(\mathbf{r}, \omega) \cdot \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, \omega) dS(\mathbf{r}), \quad (2.4.1)$$

où \hat{I}_E et $\hat{\mathbf{q}}_E$ sont respectivement l'intensité du courant électrique et la traction sous la surface du capteur lorsque celui-ci est utilisé en émission. Réécrivons cette équation en fonction du déplacement particulaire $\hat{\mathbf{u}}$. On obtient :

$$\hat{U}_R(\omega) = \iint_R \boldsymbol{\Xi}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, \omega) dS(\mathbf{r}). \quad (2.4.2)$$

La sensibilité au déplacement $\boldsymbol{\Xi}$ (en $\text{V} \cdot \text{mm}^{-3}$) du transducteur est définie comme :

$$\boxed{\boldsymbol{\Xi}(\mathbf{r}, \omega) := i\omega \frac{\hat{\mathbf{q}}_E(\mathbf{r}, \omega)}{\hat{I}_E(\omega)}}. \quad (2.4.3)$$

La quantité $\hat{\mathbf{q}}_E$ correspond à la contrainte qu'aurait imposée le transducteur s'il avait été en émission ; elle a donc la même description vectorielle que le modèle de source correspondant. Il n'est pas nécessaire de chercher à calculer \hat{I}_E . Cette quantité étant proportionnelle à l'intensité de $\hat{\mathbf{q}}_E$, leur rapport définit un modèle de sensibilité du transducteur suivant la fréquence. Le modèle le plus simple consiste à prendre ce rapport constant.

2.4.2. Approximation de Fraunhofer pour la réception

L'application d'une approximation de type Fraunhofer au sein de l'équation (2.4.2) revient à considérer que tous les points du récepteur sont soumis à une même onde plane. Les

variations des termes d'amplitude du déplacement sont faibles sous la surface du récepteur. On fait alors l'hypothèse que cette amplitude est égale à celle au point central \mathbf{R}_c du transducteur. Le déplacement peut être extrait de l'intégrale et on a la relation suivante :

$$\hat{U}_R(\omega) \approx \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{R}_c, \omega) \cdot \iint_R \boldsymbol{\Xi}(\mathbf{r}, \omega) \exp[i\mathbf{k}_{m_f} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}_c)] dS(\mathbf{r}) \quad (2.4.4)$$

Tout comme dans le cas de l'approximation de Fraunhofer en émission, on reconnaît l'expression de la transformée de Fourier 2D spatiale de $\boldsymbol{\Xi}$. L'équation précédente se présente donc de manière plus simple sous la forme :

$$\boxed{\hat{U}_R(\omega) \approx \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{R}_c, \omega) \cdot \hat{\boldsymbol{\Xi}}(\mathbf{k}_{m_f}, \omega)}, \quad (2.4.5)$$

avec $\hat{\boldsymbol{\Xi}}$ la transformée de Fourier 2D de la sensibilité.

L'utilisation de l'approximation de Fraunhofer pour la réception est validée d'après les signaux présentés sur le Figure 2.21. La configuration est similaire à celle utilisée pour la validation présentée dans le § 2.2. Au lieu de calculer le champ de déplacement au point A , on calcule la tension électrique reçue par un transducteur de centre A . L'émetteur et le récepteur sont donc distants de 447 mm. Pour la Figure 2.21a, la sensibilité est uniquement dirigée suivant l'axe \mathbf{e}_z . Le transducteur n'est donc sensible qu'à la composante hors plan du déplacement, le signal ressemble à la forme d'onde de la Figure 2.9e. Un transducteur en émission circonférentielle radiale est modélisé pour obtenir la Figure 2.21b. Ce dernier n'est sensible qu'aux composantes dans le plan de la plaque, ce qui explique que l'amplitude relative des contributions des modes symétriques vis-à-vis de celle des modes antisymétriques est plus importante.

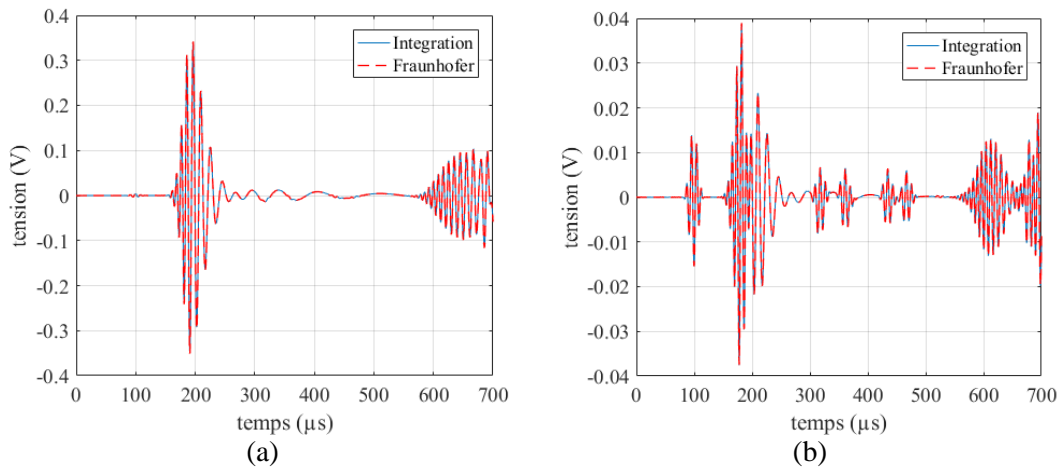


Figure 2.21. Signal électrique reçu par un transducteur piézoélectrique, calcul avec et sans approximation de Fraunhofer. Pour la figure de gauche, un transducteur carré de 10 mm de côté en mode piston (contrainte uniforme suivant \mathbf{e}_z) a été utilisé. Sur la figure de droite, un transducteur circulaire de rayon 5 mm et en émission circonférentielle radiale a été employé.

2.5. Décomposition modale des signaux calculés

Le modèle des pinceaux étant une approche fondamentalement modale, il est possible de visualiser les déplacements calculés sous forme de décomposition modale sans aucun calcul supplémentaire. Ceci permet d'isoler des informations cruciales pour la compréhension de la physique mise en jeu dans le rayonnement d'une onde guidée. En s'appuyant sur l'exemple donné dans la Figure 2.10, on voit que des paquets d'ondes auparavant superposés sont maintenant aisément identifiables (voir Figure 2.22). Ceci est particulièrement vrai pour les réflexions des modes symétriques (peu dispersifs) qui interviennent en même temps que la fin du paquet d'ondes correspondant au mode A_0 (très dispersif) en champ direct. De plus, nous pouvons remarquer la présence de paquets d'ondes se propageant selon le mode SH_0 , alors que ce mode n'est pas excité à l'émission. Ces contributions sont issues des conversions de modes lors des réflexions du mode S_0 . Grâce à la validation effectuée dans le § 2.2, on peut alors conclure que le modèle développé permet de prédire de manière à la fois qualitative et quantitative les conversions de modes aux interfaces.

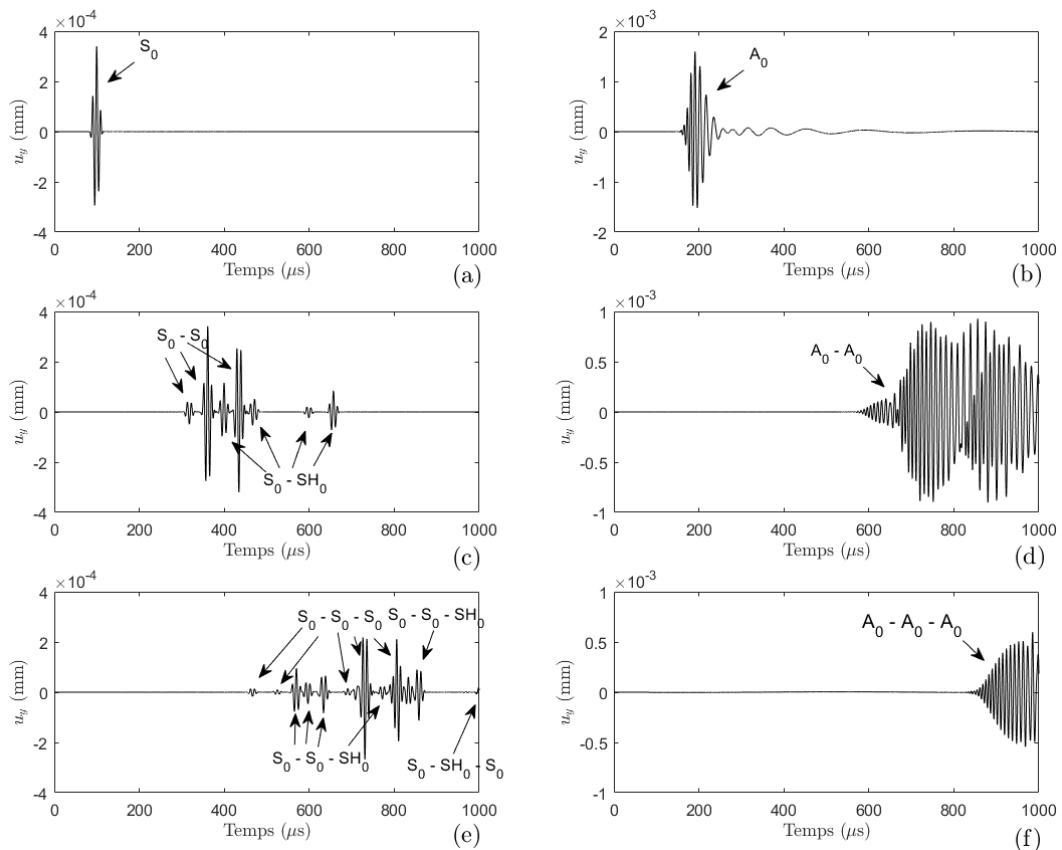


Figure 2.22. Décomposition modale du signal représenté sur la Figure 2.10. Les contributions des modes symétriques sont classées dans la colonne de gauche et celles des modes antisymétriques dans la colonne de droite. Chacune des lignes correspond respectivement au champ direct, à la 1^{ère} réflexion et à la 2^{nde} réflexion.

La représentation modale est un outil pouvant s'avérer très performant dans le cadre de la conception d'une méthode de contrôle. Quelques exemples dans lesquels son application s'avérerait déterminante sont listés ci-après.

- Dans le cadre des méthodes uniquement basées sur les contributions en champ direct, on peut en isolant les contributions réfléchies s'assurer sans ambiguïté que ces dernières n'interfèrent pas avec les mesures réalisées sur le champ direct.
- Dans une démarche de sélection de mode, connaître la décomposition modale d'un signal permet de choisir le ou les modes les plus intéressants pour un problème donné et permet de vérifier aisément si la démarche mise en place pour la sélection de ces modes a été efficace.
- L'information modale pourrait être exploitée par des modèles d'inversion de signaux mesurés.

Résumé des principaux résultats du chapitre :

Ce chapitre a consisté à exploiter le modèle du pinceau modal d'OG en milieu isotrope pour le calcul de champ de déplacement dans les configurations de CND. Après avoir remarqué que l'effet des traducteurs ultrasonores sur la pièce à inspecter peut être modélisé par une distribution de contraintes à la surface de cette pièce, le champ de déplacement généré par de telles sources a été défini comme la somme continue du champ de déplacement généré par chacun des points de cette surface émettrice. On a développé un algorithme de lancer de rayons, permettant de déterminer de manière optimisée les trajets axiaux des pinceaux reliant la source à un point de calcul de champ. L'erreur d'intégration est alors contrôlée par le nombre de directions d'énergie qui sont considérées pour le lancer de rayons.

On a ensuite effectué une validation de ce modèle par comparaison avec un code éléments finis. Un excellent accord entre les résultats obtenus par chacune de ces deux méthodes a été observé. Le modèle des pinceaux a ainsi prouvé qu'il était capable de prédire le rayonnement d'ondes guidées de manière à la fois qualitative et quantitative. Ces résultats ont fait l'objet d'une publication dans une revue scientifique [42].

Dans un troisième temps, une approximation de type diffraction de Fraunhofer a été employée dans le but de réduire les temps de calcul liés à la fois au lancer de rayon et à l'intégration sur la surface de la source. Les calculs réalisés sous cette approximation sont très performants et précis, dès lors que le point de calcul se situe à quelques longueurs d'onde de la source. STÉVENIN avait déjà utilisé cette approximation dans le seul cas du champ direct et montré son intérêt. Notre étude a permis d'en établir un critère de validité. De plus, le fait de voir le coefficient de Fraunhofer comme la transformée de Fourier spatiale de la source généralise l'approche et permet la prise en compte des sources au comportement complexe (ex : EMATs, patches magnétostrictifs) avec un coût en temps de calcul réduit. Enfin, une excitabilité modale a été définie. Cette dernière permet de quantifier, avec très peu de calculs, l'amplitude avec laquelle un mode propagatif est généré par une source de contrainte donnée. Les développements réalisés dans ce paragraphe feront prochainement l'objet d'une publication.

Les développements réalisés pour traiter l'émission d'OG ont été transposés au cas de la réception par un traducteur piézoélectrique. La sensibilité d'un tel capteur au champ de déplacement se propageant sous sa surface en contact avec la plaque est définie grâce à l'application du principe de réciprocité. Il permet cependant d'établir une similitude entre le

cas de l'émission et celui de la réception. De part cette similitude, l'approximation de Fraunhofer a été tout naturellement appliquée à la réception. Elle apparaît même plus pertinente que dans le cas de l'émission car (i) le but du CND par OG est de propager des ondes sur de longues distance et donc de placer le récepteur loin de la source ; (ii) l'approximation permet de s'affranchir du lancer de rayon et de l'intégration sur le récepteur pour chaque point du récepteur, alors que dans le cas de l'émission on ne gagne que le temps du lancer de rayon pour un point de calcul. Enfin, avec ce modèle de réception on est en mesure d'effectuer des comparaisons expérimentales, moyennant une modélisation réaliste des traducteurs.

Le chapitre se conclut sur une discussion sur l'intérêt de l'aspect modal du modèle de pinceaux. Quelques exemples de situations propres au CND / SHM dans lesquelles cet aspect présente des avantages certains sont présentés.

DEUXIÈME PARTIE :

PROPAGATION EN MILIEU

ANISOTROPE

Chapitre 3

La méthode des pinceaux en milieu anisotrope

Les matériaux composites sont beaucoup utilisés dans certaines industries et en particulier par le secteur aéronautique [4]. Des exigences de norme (ou des exigences métier) mènent à un besoin de certification et de contrôle des structures en matériau composite. Le concept de contrôle santé intégré se développe. Parmi les méthodes de contrôle, celles reposant sur l'utilisation des ondes élastiques guidées sont particulièrement l'objet d'études compte tenu des avantages potentiels qu'elles présentent. Et la simulation prend évidemment toute sa place pour faciliter leur développement. La simulation de ces contrôles doit alors évidemment prendre en compte des caractéristiques mécaniques anisotropes. Dans ce but, ce chapitre vise à étendre la méthode des pinceaux aux milieux anisotropes. Dans les différents exemples que nous serons amenés à donner, nous nous intéressons uniquement aux composites multicouches constitués d'un empilement de plis de fibres unidirectionnelles [71] symétriques par rapport au plan médian de la plaque. Dans un premier temps, une nouvelle définition de pinceau modal d'ondes guidées est donnée. Cette définition permet d'adapter le modèle aux caractéristiques d'anisotropie des modes guidés et permet d'obtenir l'expression de nouvelles matrices d'évolution. Le caractère atténuant des matériaux sera aussi pris en compte afin d'obtenir un modèle plus réaliste. Enfin, nous verrons qu'une forte anisotropie des modes

guidés, en créant des zones de focalisation du champ de déplacement, peut constituer une limite du modèle pinceau. Une formulation alternative sera alors proposée.

3.1. Définition d'un pinceau modal pour un mode guidé en milieu anisotrope

IL EST TOUT D'ABORD nécessaire d'étudier les caractéristiques des modes guidés dans les matériaux anisotropes afin de déterminer en quoi la propagation dans les matériaux isotropes en est un cas particulier. Le problème élastodynamique décrivant la propagation d'une onde plane dans la *direction de phase* γ est maintenant dépendant de cette direction (voir Annexe A). En effet, les coefficients élastiques du matériau ne sont plus invariants par rotation dans le plan de la plaque. Une famille de modes est donc obtenue par direction de phase. Les coefficients élastiques évoluant de façon continue d'une direction de phase à une autre, les caractéristiques des modes sont elles aussi continues. Une représentation couramment choisie consiste à représenter la lenteur des modes (qui est proportionnelle à leur nombre d'onde), à une fréquence donnée, en fonction de la direction de phase (voir Figure 3.1). Ce type de graphique est appelé courbes de lenteur. Les modes guidés d'un matériau isotrope possèdent des courbes de lenteur circulaires. L'influence des effets d'anisotropie sur un mode guidé peut alors se mesurer par l'écart de sa courbe de lenteur par rapport à un cercle. Une conséquence de cette dépendance en γ est que la vitesse de groupe (qui vaut $\mathbf{v}_g = \partial\omega/\partial k_x \mathbf{e}_x + \partial\omega/\partial k_y \mathbf{e}_y$ et est donc colinéaire à la normale à la courbe de lenteur) n'est plus colinéaire au vecteur lenteur. Comme énoncé dans l'Annexe A, la vitesse de groupe est remplacée par la vitesse d'énergie \mathbf{v}_e . Cela ne fait aucune différence car le milieu est - à ce stade et provisoirement - non atténuant et ces deux vitesses sont égales. La direction de la vitesse d'énergie est par la suite nommée *direction d'énergie* et notée φ . On suppose d'abord que, pour tout mode guidé, la fonction qui à γ associe φ est une bijection de $[0; 2\pi[$ dans $[0; 2\pi[$. Chaque direction d'énergie correspond donc à une seule contribution de phase. Les cas dans lesquels cette hypothèse n'est pas vérifiée sont traités dans le § 3.5.

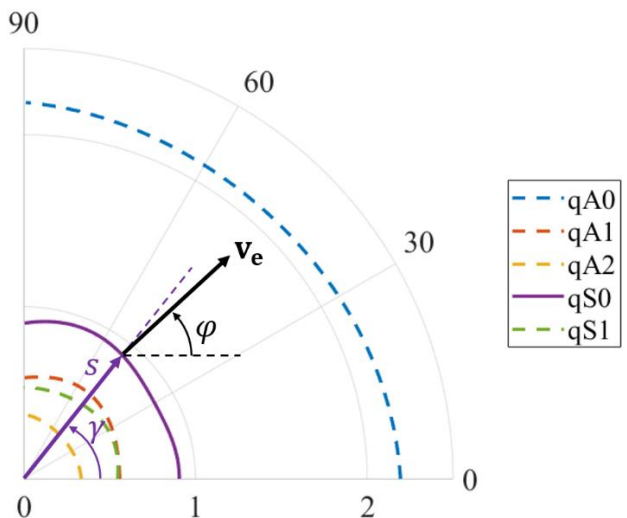
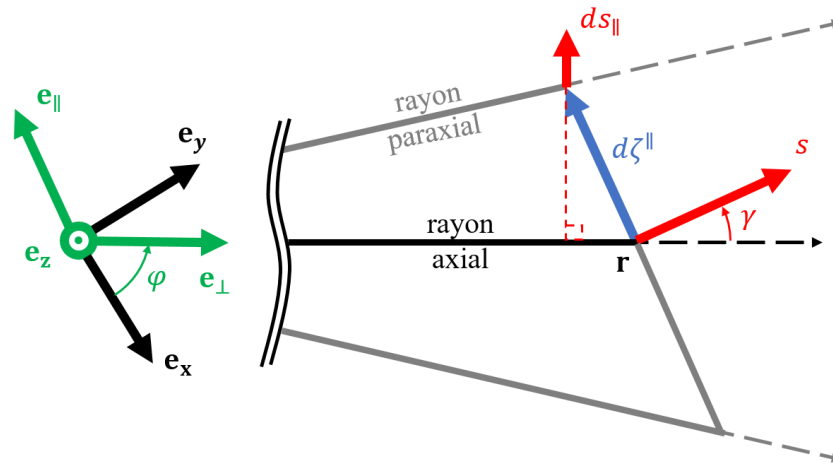


Figure 3.1. Exemple de courbes de lenteur (partielles) dans un milieu stratifié avec représentation de la vitesse d'énergie (normale à la courbe de lenteur) en un point donné.

Le paramétrage d'un pinceau doit prendre en compte les deux directions d'un mode guidé. Son rayon axial suit la direction d'énergie, c'est-à-dire la direction qui permet de relier le point de calcul à un point source. La distance parcourue le long de ce rayon est toujours notée ρ . L'écart infinitésimal de position correspond à la distance entre le rayon axial et un rayon paraxial pour une valeur de ρ donnée ; c'est une quantité tangente au front d'onde. Le repère rayon est par conséquent défini comme un repère normé dont le premier vecteur de base \mathbf{e}_\perp est colinéaire à la direction d'énergie du rayon axial et le second vecteur de base \mathbf{e}_\parallel est tangent au front d'onde (ou orthogonal au vecteur lenteur)¹. L'écart infinitésimal de position correspond à la seconde coordonnée contravariante, notée $d\zeta^\parallel$, de ce repère. L'écart infinitésimal de lenteur est obtenu en faisant la différence des vecteurs lenteurs pour deux directions de phases voisines. Il est alors tangent à la courbe des lenteurs, donc orthogonal à la direction d'énergie. Cette quantité vectorielle est ainsi entièrement représentée par sa seconde coordonnée covariante ds_\parallel . Ce paramétrage et les différentes quantités associées sont représentés sur la Figure 3.2.

Figure 3.2. Représentation schématique d'un pinceau en vue de dessus au point de calcul \mathbf{r}



Le vecteur d'état d'un pinceau en milieu anisotrope a pour expression :

$$\Psi := \begin{pmatrix} d\zeta^\parallel \\ ds_\parallel \end{pmatrix}. \quad (3.1.1)$$

Là encore, Ψ est étroitement lié à la notion de courbure locale du front d'onde et connaître son évolution permet de connaître l'évolution de l'amplitude du champ de déplacement.

¹ Comme dans le cas isotrope, le trièdre $(\mathbf{e}_\perp ; \mathbf{e}_\parallel ; \mathbf{e}_z)$ est direct mais n'est en règle générale plus orthogonal. Deux systèmes de coordonnées sont alors définis. Les coordonnées contravariantes (repérées par un exposant, par exemple $d\zeta^\parallel$) sont obtenues par projections effectuées parallèlement aux axes du repère. Les coordonnées covariantes (repérées par une notation indicielle) sont obtenues par projections orthogonales sur les axes du repère.

3.2. Construction des matrices d'évolution

3.2.1. Matrice de propagation

Étudions l'évolution d'un pinceau se propageant sur une distance $\Delta\rho$, passant ainsi d'un état (1) à un état (2), comme indiqué sur la Figure 3.3a. Au point source, la direction d'énergie du rayon paraxial diverge de celle du rayon axial d'une (petite) quantité $d\varphi$. La distance de propagation étant grande devant $d\zeta^{\parallel}$, on a la relation au premier ordre suivante :

$$\frac{d\zeta_2^{\parallel} - d\zeta_1^{\parallel}}{\Delta\rho} = \tan d\varphi \sim d\varphi. \quad (3.2.1)$$

L'angle entre les deux rayons reste constant au cours de la propagation donc l'écart de leur longueur est conservé. De plus, $d\varphi$ peut s'exprimer à l'aide d'une relation sur les lenteurs. Le vecteur lenteur du rayon paraxial forme un angle $d\gamma = A_m(\gamma)d\varphi$ avec le vecteur lenteur du rayon axial (voir Figure 3.3b) avec $A_m = \partial\gamma/\partial\varphi$ le *facteur de focalisation de Maris* du mode m [72]. Par construction géométrique, on a alors :

$$\frac{ds_{\parallel}}{\cos(\gamma - \varphi)} = \left(s + \frac{\partial s}{\partial \gamma} A_m(\gamma) d\varphi \right) \sin(A_m(\gamma) d\varphi) \sim s \cdot A_m(\gamma) d\varphi. \quad (3.2.2)$$

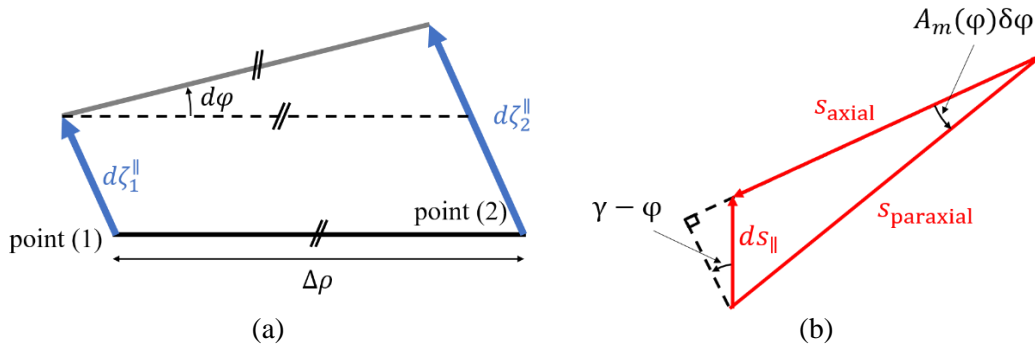


Figure 3.3. Propagation d'un pinceau entre deux états (1) et (2). Construction géométrique des rayons entre ces deux états (a) et de leur lenteur (b).

En insérant la relation (3.2.2) dans l'équation (3.2.1) et en formulant la conservation de ds_{\parallel} , les composantes du vecteur d'état au point (2) s'expriment en fonction de celles au point (1) de la manière suivante :

$$\begin{cases} d\zeta_2^{\parallel} = d\zeta_1^{\parallel} + \frac{\Delta\rho}{A_m(\gamma) s \cos(\gamma - \varphi)} ds_{\parallel,1} & (3.2.3) \\ ds_{\parallel,2} = ds_{\parallel,1} & (3.2.4) \end{cases}$$

La matrice de propagation du pinceau entre l'état (1) et l'état (2) est construite, à partir des deux relations précédentes, de la manière suivante :

$$\mathbf{L}_{\text{propa}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\Delta\rho}{A_m(\gamma) s \cos(\gamma - \varphi)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2.5)$$

Remarque 1 :

Le facteur de Maris possède une signification physique particulière. Du fait de l'anisotropie du mode guidé, la distribution des directions de phase sur les directions d'énergie n'est pas uniforme. Ainsi il peut y avoir une grande variété de directions de phase au voisinage d'une seule direction d'énergie, ce qui crée une zone de focalisation autour de cette direction. Les facteurs de Maris correspondants aux courbes de lenteurs présentées dans la Figure 3.1 sont tracés sur la Figure 3.4a. Les courbes de lenteur sont rappelées sur la Figure 3.4b où on a représenté la vitesse d'énergie pour l'ensemble des directions de phase. Dans les zones de focalisation, la valeur de A_m augmente. Le coefficient supérieur droit de la matrice de propagation est alors plus faible, le pinceau diverge moins fortement et l'amplitude du champ de déplacement est plus grande. Le facteur de Maris permet de facilement rendre compte des phénomènes de focalisation.

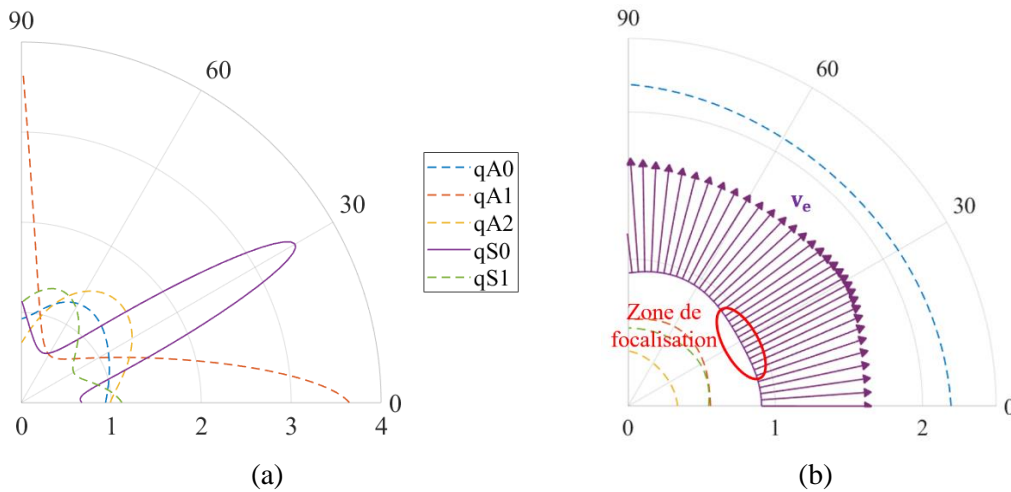


Figure 3.4. Illustration du phénomène de focalisation pour un mode en milieu anisotrope. La valeur du facteur de Maris est plus importante (a) dans les zones où la direction d'énergie varie peu en fonction de la direction de phase (b).

Remarque 2 :

Dans le cas particulier où le matériau est isotrope, on a $A_m = 1$ et $\gamma \equiv \varphi$. On retrouve alors l'expression de la matrice de propagation en milieu isotrope (voir équation (1.1.6)).

3.2.2. Matrice de réflexion

Réflexion d'une onde plane sur un bord droit

L'étude de la réflexion d'une onde plane en incidence oblique sur un bord rectiligne permet à la fois de calculer les coefficients de réflexion associés et d'obtenir les directions de propagation des modes réfléchis. La méthode de calcul des coefficients de réflexion, à partir d'une condition de bord libre, est détaillée en Annexe B. Un exemple y est aussi proposé.

Soit un mode m se propageant dans la direction γ_m et en incidence oblique sur un bord de normale \mathbf{n} (formant un angle θ_n avec l'axe x du repère de la plaque). La loi de Snell-Descartes stipule que, suite à l'interaction de cette onde avec le bord, un mode n peut être généré dans la direction γ_n si la relation suivante est vérifiée :

$$\mathbf{k}_m(\gamma_m) \cdot \mathbf{t} = \mathbf{k}_n(\gamma_n) \cdot \mathbf{t}, \quad (3.2.6)$$

le vecteur \mathbf{t} étant unitaire et tangent au bord. Cette équation peut se résoudre par diverses méthodes numériques. Une première approche consiste à résoudre une équation de type $f_{\gamma_m}(\gamma_n) = 0$ par une méthode de recherche de zéros. Cependant, ces solutions sont implicitement obtenues à travers la résolution de la méthode SAFE à projection du nombre d'onde constante (voir Annexe B) utilisée pour calculer les coefficients de réflexion. Cette autre approche sera donc préférée.

Les solutions de l'équation (3.2.6) ne correspondent pas toutes à des contributions réfléchies. En effet, les contributions réfléchies sont les seules dont la vitesse d'énergie est orientée dans le sens du bord vers la plaque (voir Figure 3.5).

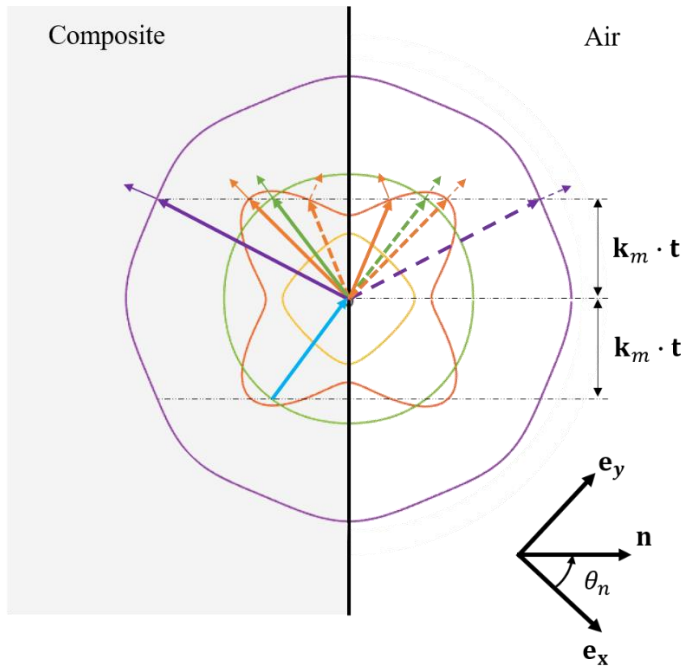


Figure 3.5. Illustration de la loi de Snell-Descartes. La longueur du mode incident est représentée en trait continu bleu. La longueur des modes qui respectent la relation (3.2.6) apparaît en trait continu s'il s'agit de contributions réfléchies ($\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{n} < 0$); en trait interrompu sinon.

Enfin, la réflexion d'un mode guidé en milieu anisotrope dépend de l'orientation du bord par rapport au repère de la plaque (et donc par rapport à l'orientation des courbes de

lenteur). Ceci porte à quatre le nombre de paramètres des coefficients de réflexions et directions réfléchies (les autres paramètres étant la fréquence, l'angle d'incidence, le couple de mode incident / mode réfléchi).

Réflexion d'un pinceau sur un bord courbe

Le but est maintenant de construire la matrice de réflexion d'un pinceau sur un bord courbe. Les différents paramètres géométriques utilisés dans cette étude ont été présentés dans le § 1.2.2 et sont rappelés sur la Figure 3.6. La différence avec le cas isotrope tient au fait que les rayons du pinceau suivent les directions d'énergie alors que ses lenteurs suivent la direction de phase. Pour les constructions géométriques qui suivent, il est alors essentiel de porter une attention toute particulière à l'angle adéquat pour chaque situation.

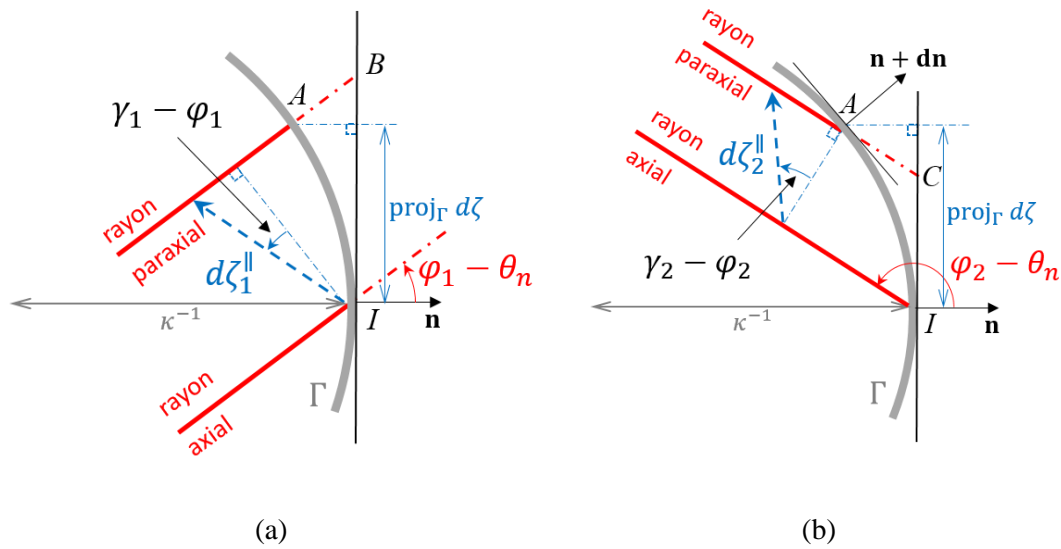


Figure 3.6. Rayons d'un pinceau en milieu anisotrope avant (a) et après (b) réflexion sur un bord courbe.

Le rayon axial intersecte le bord au point I tandis que le rayon paraxial l'intersecte au point A . Ceci étant vrai aussi bien à l'état « avant réflexion » qu'à l'état « après réflexion », une relation géométrique entre ces deux états est obtenue en calculant la quantité $\text{proj}_\Gamma d\zeta$ dans les deux situations. Cette relation est la suivante :

$$\frac{\cos(\gamma_1 - \varphi_1)}{\cos(\gamma_1 - \theta_n)} d\zeta_1^\parallel - AB \sin(\gamma_1 - \theta_n) = -\frac{\cos(\gamma_2 - \varphi_2)}{\cos(\gamma_2 - \theta_n)} d\zeta_2^\parallel + AC \sin(\gamma_2 - \theta_n). \quad (3.2.7)$$

Les distances AB et AC sont alors négligées car petites devant $d\zeta_1^\parallel$ et $d\zeta_2^\parallel$. Après quelques manipulations algébriques simples, on obtient :

$$d\zeta_2^\parallel \approx -\frac{\theta_2}{\theta_1} d\zeta_1^\parallel, \quad (3.2.8)$$

avec

$$\theta_i = \frac{\cos(\gamma_i - \theta_n)}{\cos(\gamma_i - \varphi_i)}, \quad i = 1 \text{ ou } 2. \quad (3.2.9)$$

Une relation sur les écarts de lenteur est obtenue grâce à la loi de Snell-Descartes et donc en exprimant la projection de l'écart de lenteur sur le bord, notée $\text{proj}_\Gamma ds$. Dans un premier temps, on suppose que la réflexion se fait sur le bord droit Γ_d normal à Γ au point I . On se place à l'état « avant réflexion ». Le vecteur écart de lenteur est exprimé le repère local du bord ($I; \mathbf{n}; \mathbf{t}; \mathbf{e}_z$) afin de calculer sa projection. Pour ce faire, on définit la matrice de rotation d'angle θ_n , notée \mathbf{P} , qui permet de passer du repère lié à la plaque (système de coordonnées $(x \ y)^t$) au repère lié au bord. De plus, le vecteur écart de lenteur est représenté naturellement dans le repère du pinceau par les coordonnées covariantes $(0 \ ds_{\parallel,1})^t$. Pour effectuer le changement de repère, il est nécessaire de passer par ses coordonnées contravariantes. La relations de passage entre le repère lié à la plaque et le repère du pinceau est la suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \zeta^\perp \\ \zeta^\parallel \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \gamma \\ \sin \varphi & \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^\perp \\ \zeta^\parallel \end{pmatrix}. \quad (3.2.10)$$

À partir de là, un vecteur exprimé dans le système de coordonnées covariantes du repère pinceau a pour coordonnées dans le repère lié à la plaque¹ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\mathbf{Q}^{-1})^t \begin{pmatrix} \zeta^\perp \\ \zeta^\parallel \end{pmatrix}. \quad (3.2.11)$$

En prenant en compte cette relation, la projection de l'écart de lenteur sur le bord Γ_d vaut :

$$\text{proj}_{\Gamma_d} ds = \left[\mathbf{P}(\mathbf{Q}^{-1})^t \begin{pmatrix} 0 \\ ds_{\parallel,1} \end{pmatrix} \right] \cdot \mathbf{t}. \quad (3.2.12)$$

Plaçons-nous maintenant dans le cas où le bord est courbe. La projection de l'écart de lenteur se trouve alors réduite de $s_1 \cos(\gamma_1 - \theta_n) \mathbf{dn} \cdot \mathbf{t}$ de la même manière que celle développée dans le cas isotrope (voir § 1.2.2).

De plus, on remarque que $\text{proj}_\Gamma d\zeta = \kappa^{-1} \mathbf{dn} \cdot \mathbf{t}$ et $\text{proj}_\Gamma d\zeta \sim d\zeta_1^\parallel / \theta_1$. On a alors :

$$\text{proj}_\Gamma ds = \text{proj}_{\Gamma_d} ds - s_1 \kappa \cos(\gamma_1 - \theta_n) \theta_1^{-1} d\zeta_1^\parallel. \quad (3.2.13)$$

¹ Si \mathbf{X} est le vecteur ligne contenant les coordonnées covariantes (ou contravariantes vu qu'il s'agit d'un repère orthonormé) d'un vecteur dans le repère lié à la plaque et \mathbf{Y} est le vecteur ligne contenant les coordonnées covariantes de ce vecteur dans le repère du pinceau, alors la relation de changement de système de coordonnées covariantes est $\mathbf{Y} = \mathbf{XQ}$ (les composantes se transforment dans le « même sens » que les vecteurs de base, d'où l'appellation « coordonnées covariantes »). En composant par \mathbf{Q}^{-1} par la droite et en transposant les membres, on arrive à $\mathbf{X}^t = (\mathbf{Q}^{-1})^t \mathbf{Y}^t$.

Une relation similaire est obtenue pour le pinceau après réflexion en respectant les précautions de signe détaillées là encore dans le § 1.2.2. En combinant les deux expressions de $\text{proj}_r ds$, on obtient l'expression de $ds_{\parallel,2}$ en fonction de $d\zeta_1^{\parallel}$ et $ds_{\parallel,1}$. Après quelques calculs matriciels et trigonométriques (c'est-à-dire après avoir calculé $\mathbf{P}(\mathbf{Q}^{-1})^t$), on obtient :

$$ds_{\parallel,2} = \frac{s_1 \kappa \cos(\gamma_1 - \theta_n) - s_2 \kappa \cos(\gamma_2 - \theta_n)}{\Theta_1 \Theta_2} d\zeta_1^{\parallel} - \frac{\Theta_1}{\Theta_2} ds_{\parallel,1} \quad (3.2.14)$$

En utilisant les relations (3.2.8) et (3.2.14), le vecteur d'état du pinceau après réflexion est obtenu en fonction de ses composantes avant réflexion. Finalement, la matrice de réflexion d'un pinceau en milieu anisotrope est construite de la manière suivante :

$$\mathbf{L}^{\text{refl}} = \begin{pmatrix} -\frac{\Theta_2}{\Theta_1} & 0 \\ \kappa \frac{s_1 \cos(\gamma_1 - \theta_n) - s_2 \cos(\gamma_2 - \theta_n)}{\Theta_1 \Theta_2} & -\frac{\Theta_1}{\Theta_2} \end{pmatrix}. \quad (3.2.15)$$

Cette expression est compatible avec celle obtenue dans le cas isotrope (voir équation 1.2.7), cas particulier dans lequel $\Theta_i \equiv \cos \theta_i$.

3.3. Atténuation des ondes guidées

Les matériaux composites ont des capacités de dissipation d'énergie portée par les ondes élastiques par effet viscoélastique (sous forme de chaleur) beaucoup plus élevées que les matériaux métalliques. Par exemple, les matériaux CFRP (pour *Carbon Fiber Reinforced Polymer*) sont constitués de fibres de carbone noyées dans une matrice en polymère (par exemple une résine époxy). Cette matrice est responsable du comportement viscoélastique du matériau [73] qui a une influence certaine sur l'amplitude du déplacement des ondes se propageant dans ce milieu. De plus, les matériaux composites possèdent une micro-structure régulière à l'origine de phénomènes de diffraction des ondes, voire de diffraction multiple, qui est également à l'origine d'une perte d'énergie des ondes. On retrouve également dans les métaux des phénomènes de diffraction liés à la microstructure (généralement non régulière) qui engendrent de l'atténuation. Notre objectif n'étant pas de caractériser ces phénomènes mais de permettre leur prise en compte dans le modèle des pinceaux, on les regroupera par la suite sous le terme générique de viscoélasticité pour plus de simplicité dans le propos.

3.3.1. Modélisation de l'atténuation dans le calcul des modes

Plusieurs modèles de solides viscoélastiques sont couramment utilisés dans la littérature. Le premier, et probablement le plus connu, est le modèle de Kelvin-Voigt. Dans le cadre d'une sollicitation en traction, un matériau de Kelvin-Voigt réagit comme un système composé d'un ressort élastique et d'un amortisseur visqueux montés en parallèle. Ainsi, si E est le module élastique et η est la viscosité de l'amortisseur, alors le système est gouverné par l'équation suivante :

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}(t). \quad (3.3.1)$$

Ce modèle se généralise pour tout type de déformation. Ainsi généralisé, et en considérant une excitation harmonique, le modèle conduit à réécrire la loi de Hooke à l'aide d'une matrice des coefficients d'élasticité à valeurs complexes telle que :

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + i\omega\boldsymbol{\eta}^{(KV)}, \quad (3.3.2)$$

où \mathbf{C} correspond à la matrice d'un matériau purement élastique et $\boldsymbol{\eta}^{(KV)}$ est une matrice de viscosité [74]. Ce modèle propose donc une dépendance linéaire des termes atténuants en fonction de la fréquence. De manière plus générale, tous les solides viscoélastiques ont une sensibilité en fréquence lorsqu'ils sont soumis à une excitation dynamique.

On peut aussi faire l'hypothèse que la partie imaginaire de $\tilde{\mathbf{C}}$ ne dépend pas de la fréquence. Dans ce cas on obtient le modèle hystérétique décrit par :

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + i\boldsymbol{\eta}^{(H)}. \quad (3.3.3)$$

Les coefficients de viscosité sont alors mesurés à une seule fréquence et décrivent le comportement viscoélastique du matériau dans une certaine gamme de fréquence autour de la fréquence de mesure.

Les coefficients d'élasticité complexes sont alors utilisés en entrée du calcul SAFE [75]. En effet, la description des modèles de viscoélasticité donnée plus haut est pleinement compatible avec la manière de calculer les modes fréquence par fréquence¹. L'implémentation du code de calcul de modes dans les milieux atténuants à partir d'un code pour les milieux élastiques existant est donc quasiment immédiate. Les nombres d'onde des modes propagatifs deviennent également des nombres complexes et la notation suivante est introduite :

$$\tilde{k}_m(\gamma) = k_m(\gamma) - i \operatorname{sign}(\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{v}_e) \beta_m(\gamma). \quad (3.3.4)$$

Leur partie imaginaire $\beta_m \geq 0$, correspond à une enveloppe de la fonction d'onde qui décroît exponentiellement au fur et à mesure que la distance de propagation augmente. Le terme β_m correspond alors à l'atténuation du mode guidé (en Neper par mètre). La distinction entre modes propagatifs et modes évanescents (et les inhomogènes) se fait alors en comparant la partie réelle et la partie imaginaire du flux de puissance $\langle P_m \rangle$ du mode. Si $\operatorname{Re}[\langle P_m \rangle] \gg \operatorname{Im}[\langle P_m \rangle]$ alors le mode n'est pas assez atténué pour être évanescents ; il est donc propagatif.

Prenons maintenant comme exemple le cas d'un matériau composite composé de 16 couches de plis de fibres unidirectionnelles empilés selon la séquence d'orientations $[45^\circ; 0^\circ; 135^\circ; 90^\circ; 45^\circ; 0^\circ; 135^\circ; 90^\circ]_S$. Chacun de ces plis a une épaisseur de 133.75 μm , l'épaisseur totale de la plaque est donc de 2.14 mm. La modèle de viscoélasticité utilisé est le

¹ Cela est aussi vrai pour des modèles de viscoélasticités plus complexes (voir [76]). Dès l'instant où ces modèles se traduisent par une matrice de coefficients complexes qui dépendent de la fréquence, il suffit de donner la bonne valeur de $\tilde{\mathbf{C}}$ à l'algorithme de calcul de mode à chacune des itérations en fréquence, et ce, peu importe le modèle utilisé.

modèle hystérétique. Les différents coefficients d'élasticité et d'atténuation du matériau sont présentés dans les Tableau 3.1-2.

Tableau 3.1. Coefficients élastiques d'un pli du composite 16 couches exprimés pour une orientation des fibres formant un angle de 0° avec \mathbf{e}_x .

Propriété	Valeur						Unité
Densité	1.56						g. cm^{-3}
Coefficients d'élasticité							
$c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}$	145.5	5.0	5.0	0	0	0	GPa
$c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24}, c_{25}, c_{26}$	5.0	11.5	5.3	0	0	0	GPa
$c_{31}, c_{32}, c_{33}, c_{34}, c_{35}, c_{36}$	5.0	5.258	11.5	0	0	0	GPa
$c_{41}, c_{42}, c_{43}, c_{44}, c_{45}, c_{46}$	0	0	0	3.1	0	0	GPa
$c_{51}, c_{52}, c_{53}, c_{54}, c_{55}, c_{56}$	0	0	0	0	5.2	0	GPa
$c_{61}, c_{62}, c_{63}, c_{64}, c_{65}, c_{66}$	0	0	0	0	0	5.2	GPa

Tableau 3.2. Coefficients d'atténuation d'un pli du composite 16 couches exprimés pour une orientation des fibres formant un angle de 0° avec \mathbf{e}_x .

Propriété	Valeur						Unité
Densité	1.56						g. cm^{-3}
Coefficients d'élasticité							
$\eta_{11}, \eta_{12}, \eta_{13}, \eta_{14}, \eta_{15}, \eta_{16}$	10	0.7	0.7	0	0	0	GPa
$\eta_{21}, \eta_{22}, \eta_{23}, \eta_{24}, \eta_{25}, \eta_{26}$	0.7	0.8	0.4	0	0	0	GPa
$\eta_{31}, \eta_{32}, \eta_{33}, \eta_{34}, \eta_{35}, \eta_{36}$	0.7	0.4	0.8	0	0	0	GPa
$\eta_{41}, \eta_{42}, \eta_{43}, \eta_{44}, \eta_{45}, \eta_{46}$	0	0	0	0.2	0	0	GPa
$\eta_{51}, \eta_{52}, \eta_{53}, \eta_{54}, \eta_{55}, \eta_{56}$	0	0	0	0	0.4	0	GPa
$\eta_{61}, \eta_{62}, \eta_{63}, \eta_{64}, \eta_{65}, \eta_{66}$	0	0	0	0	0	0.4	GPa

Les modes guidés sont calculés par la méthode SAFE dans la direction de phase $\gamma = 0^\circ$. Les valeurs des nombres d'ondes et de l'atténuation sont représentées sur la Figure 3.7. On peut remarquer que le comportement des courbes d'atténuation pour des fréquences inférieures à la première fréquence de coupure semble linéaire. En revanche, à plus haute fréquence (et en particulier à proximité des fréquences de coupure) certains modes voient la valeur de leur atténuation augmenter brusquement, voire diverger. Si l'on couple cela au fait que l'atténuation tend globalement à augmenter avec la fréquence, on peut dire qu'en pratique seules les contributions basses fréquences se propagent dans les plaques en composite. On peut aussi observer sur la Figure 3.7a que les courbes de dispersion du matériau atténuant sont très

proches de celles du matériau purement élastique correspondant. Les écarts les plus importants sont localisés aux fréquences de coupures et aux croisements des courbes.

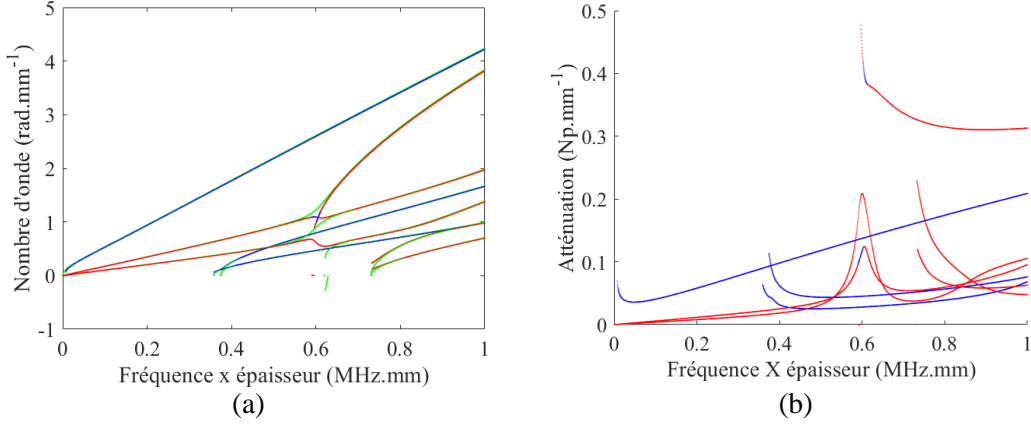


Figure 3.7. Courbes de dispersion (a) et d'atténuation (b) d'un matériau CFRP composé de 16 plis. Les points rouges correspondent aux modes symétriques et les points bleus aux modes antisymétriques. Sur la Figure (a), les courbes vertes correspondent aux nombres d'onde obtenus pour le matériau purement élastique correspondant (en prenant en compte seulement la partie réelle des coefficients élastiques).

3.3.2. Bilan d'énergie au sein d'un pinceau

Établissons maintenant le bilan de l'énergie transportée par le pinceau. On fait tout d'abord l'hypothèse réaliste que les pertes d'énergies dues à la viscosité du matériau se font suivant la direction d'énergie. Ainsi, le flux d'intensité acoustique traversant les surfaces latérales du pinceau est nul. Il ne reste alors que le flux d'intensité acoustique entrant par la section $d\Omega_i$ et sortant par la section $d\Lambda_r$ (se référer aux notations détaillées dans la § 1.4.1) ainsi que l'énergie dissipée au sein du volume délimité par les surfaces du pinceau. Nous choisissons, conformément à l'écriture faite dans le cas isotrope sans atténuation, de décrire le déplacement particulière sous la forme générique suivante :

$$\hat{\mathbf{u}}_{i..f}(\mathbf{r}, \omega) := a_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0) \frac{\mathbf{W}_{m_f}(\gamma_f, z)}{\|\mathbf{W}_{m_f}(\gamma_f, z)\|} \hat{U}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0) \exp\{i\hat{\vartheta}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0)\}. \quad (3.3.5)$$

Cette expression est celle proposée comme *ansatz* au chapitre 1 pour laquelle les (nouveaux) termes exponentiellement décroissants ont été isolés dans le terme d'atténuation :

$$a_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0) := \exp\left\{-\sum_{j=m_i}^{m_f} \beta_j \cos(\gamma_j - \varphi_j) \rho_j\right\}. \quad (3.3.6)$$

Le terme de phase $\hat{\vartheta}_{i..f}$ ne fait alors intervenir que la partie réelle des nombres d'onde. Les termes d'atténuation ayant été isolés, le bilan d'énergie peut être réalisé comme si le matériau était élastique. En effet, les modèles de viscoélasticités utilisés ici sont des modèles à l'échelle macroscopique. L'atténuation est donc décrite comme un phénomène global et cumulatif uniquement traduit par $a_{i..f}$. Les calculs qui suivent seront donc réalisés en prenant $a_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0) = 1$ (cas sans amortissement) puis la vraie valeur de $a_{i..f}$ sera réintroduite une fois l'expression de $\hat{\mathbf{u}}_{i..f}$ (sans amortissement) obtenue. Il s'agit d'une conjecture qui n'est pas moins réaliste que de considérer la physique régissant les équations de mouvement dans les matériaux composites comme résultant de la mécanique des milieux continus. Les phénomènes locaux de viscosité et de diffraction par les fibres sont homogénéisés à l'échelle macroscopique et cette homogénéisation intervient aussi dans la manière de conduire les calculs.

Le rapport entre l'intensité acoustique au point de calcul et celle au point source est égal au rapport des surfaces transverses du pinceau $d\Omega_i/d\Lambda_r$ multiplié par le produit des coefficients de réflexion en énergie $\Pi_{i..f}$. Au point source, le vecteur d'état du pinceau est de la forme :

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{R}_0) = \boldsymbol{\Psi}^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ ds_{\parallel}^{(i)} \end{pmatrix}. \quad (3.3.7)$$

En remarquant que $\sin d\varphi_i = ds_{\parallel}^{(i)} / (s_{m_i} \cos(\gamma_i - \varphi_i))$, on obtient l'expression de l'aire de la surface transverse initiale du pinceau :

$$d\Omega_i = (2e)(2d\varphi_i) = (2e) \left(\frac{2 ds_{\parallel}^{(i)}}{s_{m_i} \cos(\gamma_i - \varphi_i)} \right). \quad (3.3.8)$$

De plus, l'aire de la surface transverse du pinceau au point de calcul vaut simplement $d\Lambda_r = (2e)(2d\zeta^{\parallel(i)})$. Le rapport des intensités acoustiques dépend alors des composantes du vecteur d'état de la façon suivante :

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{\Pi_{i..f}}{|s_{m_i} \cos(\gamma_i - \varphi_i) L_{12}|}. \quad (3.3.9)$$

L'énergie mécanique totale est calculée dans le but d'exprimer I_r en fonction de $\hat{U}_{i..f}$ (voir équations (1.4.9-13)). En introduisant cette relation dans l'équation (3.3.9) et après quelques manipulations algébriques, on obtient finalement l'expression :

$$|\hat{U}_{i..f}| = \left(\frac{2 \Pi_{i..f}}{\rho_0 \omega^2 v_e^{(m_f)} |s_{m_i} \cos(\gamma_i - \varphi_i) L_{12}|} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{I_i}. \quad (3.3.10)$$

L'amplitude du champ de déplacement a ainsi été reliée à la matrice d'évolution du pinceau. Comme dans le cas isotrope (voir relation (1.4.13)), si la séquence modale décrite par le pinceau ne comporte pas de réflexion alors $|\hat{U}_{i..f}|$ décroît en $\rho^{-1/2}$. Mais contrairement au

cas isotrope, le front d'onde n'est plus cylindrique. En effet, la vitesse dépend maintenant de la direction. Le facteur de Maris influe sur l'amplitude qui n'est elle aussi plus répartie de manière isotrope ; ce qui apparaît dans l'expression L_{12} . Plus généralement, la quantité $s_{m_i} \cos(\gamma_i - \varphi_i) L_{12}$ est le rayon de courbure local du front d'onde au point de calcul \mathbf{r} .

3.4. Fonction de Green

Afin d'obtenir une expression finale du champ de déplacement particulière, on cherche maintenant à exprimer l'intensité acoustique initiale I_i . Pour cela, on se réfère à l'expression du champ de déplacement en champ direct donnée dans l'Annexe C. Par identification des termes intervenants dans les relations (3.3.5) et (C.2.5), on obtient alors :

$$\begin{aligned} \sqrt{I_i} e^{i \arg(\hat{u}_{i..f})} &= \frac{\omega^2 |k_{m_i}|}{4 \langle P_{m_i} \rangle} \left(\frac{\rho_0 v_e^{(m_i)}}{4\pi A_{m_i} \left| \frac{\partial^2 \hat{\vartheta}_{m_i}}{\partial \gamma_i^2} \right|} \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{W}_{m_i}(\gamma_i, z, \omega)\| \\ &\times i e^{-i \frac{\pi}{4} \text{sign}\left(\frac{\partial^2 \hat{\vartheta}_{m_i}}{\partial \gamma_i^2}\right)} \left(\mathbf{W}_{m_i}^*(\gamma_i, e, \omega)\right)^t \hat{\mathbf{q}}_0(\mathbf{R}_0), \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Cette expression est ensuite injectée dans la relation (3.3.10) puis dans la relation (3.3.5). La fonction de Green associée au pinceau qui suit la séquence modale $i..f$, part du point source \mathbf{R}_0 et atteint le point de calcul \mathbf{r} est finalement obtenue. Son expression est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0) &= a_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0) \mathcal{D}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0) \mathcal{A}^{(i)}(\mathbf{R}_0) \mathbf{W}_{m_f}(\varphi_f, z) \\ &\times \left(\mathbf{W}_{m_i}^*(\varphi_i, e)\right)^t \exp[i\hat{\vartheta}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0)] + \mathcal{O}\left(\rho^{-\frac{3}{2}}\right), \rho \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Tout comme dans le cas isotrope, il s'agit d'une expression valable en champ lointain. Il y figure le facteur d'atténuation $a_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0)$, déjà défini par la relation (3.3.6), qui avait été écarté depuis la recherche de la relation liant les intensités acoustiques. Ce terme décrit la manière dont le champ de déplacement est amorti selon l'atténuation des modes guidés composant la séquence modale du pinceau. Il s'agit d'un facteur multiplicatif dont la valeur diminue lorsque la longueur du rayon axial du pinceau augmente. Le facteur de divergence, dont la définition est :

$$\mathcal{D}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0) := \left(\frac{\Pi_{i..f} v_e^{(m_i)}}{|A_{m_i} s_{m_i} \cos(\gamma_i - \varphi_i) L_{12}| v_e^{(m_f)}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\|\mathbf{W}_{m_i}(\gamma_i, z)\|}{\|\mathbf{W}_{m_f}(\gamma_f, z)\|}, \quad (3.4.3)$$

traduit quant à lui l'évolution de l'amplitude du déplacement due à la courbure du front d'onde. Cela prend en compte à la fois la décroissance en $\rho^{-1/2}$ correspondant à l'élargissement du front d'onde pendant les phases de propagation, les modifications de courbure du front d'onde lors des réflexions avec et sans conversion de modes et enfin les effets de focalisation des modes guidés en milieu anisotrope. Le facteur de divergence est de plus un terme obtenu à travers le formalisme du pinceau, d'où la présence de L_{12} , membre de la matrice d'évolution du pinceau.

Le dernier terme d'amplitude est le facteur d'amplitude du mode initial, au point source, que l'on définit comme :

$$\mathcal{A}^{(i)}(\mathbf{R}_0) := \frac{i\omega |k_{m_i}|}{4\langle P_{m_i} \rangle} \left(\frac{1}{2\pi \left| \frac{\partial^2 \hat{\vartheta}_{m_i}}{\partial \gamma_i^2} \right|} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4} \text{sign}\left(\frac{\partial^2 \hat{\vartheta}_{m_i}}{\partial \gamma_i^2}\right)}. \quad (3.4.4)$$

Ce terme permet de rendre compte de l'énergie transmise sous la forme du mode m_i par le point source \mathbf{R}_0 .

Enfin, la fonction de Green fait intervenir le terme de phase $\hat{\vartheta}_{i..f}$. Ce terme rend compte de plusieurs effets intervenant sur la phase de $\hat{\mathbf{u}}_{i..f}$. Le premier provient de la périodicité spatiale des modes guidés. Pour un mode j se propageant sur une distance ρ_j dans la direction d'énergie φ_j , elle est égale à $k_j \cos(\gamma_j - \varphi_j) \rho_j$. De plus, à chacune des N réflexions il existe un déphasage ϕr_{mn} correspondant à la phase du coefficient de réflexion en amplitude. Enfin, lorsque les bords de la plaque sont courbes, cela peut générer des caustiques responsables d'un déphasage déterminé par le facteur $KMAH$ (voir § 1.4.1) associé au trajet du pinceau. On a alors l'expression de $\hat{\vartheta}_{i..f}$ suivante :

$$\hat{\vartheta}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0) := \frac{\pi}{2} KMAH(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0) + \sum_{j=1}^N \phi r_{mn}(j) - \sum_{j=m_i}^{m_f} k_j \cos(\gamma_j - \varphi_j) \rho_j. \quad (3.4.5)$$

Là encore, si l'on se place dans le cas particulier d'un matériau isotrope, on retrouve l'expression de la fonction de Green donnée dans le chapitre 1.

Exemple de calcul du déplacement et effet de l'atténuation

Un exemple de calcul du champ de déplacement de l'onde guidée se propageant à la fréquence de 100 kHz dans le CFRP 16 couches (voir Tableau 3.1 et Tableau 3.2), avec réflexion sur le bord d'équation $x = 250$ mm, est présenté sur la Figure 3.8. Les modes symétriques étant faiblement atténués (voir Figure 3.7b), des interférences constructives et destructives entre le champ incident et le champ réfléchi sont nettement identifiables sur les Figure 3.8a à d. En revanche, le mode qA_0 est fortement amorti, le champ réfléchi qui lui est associé est donc quasi nul. Cet exemple met en avant le fait que, pour les matériaux composites, il est en pratique bien souvent suffisant de limiter les calculs à la première réflexion pour obtenir une prédiction complète du champ de déplacement à distance des bords.

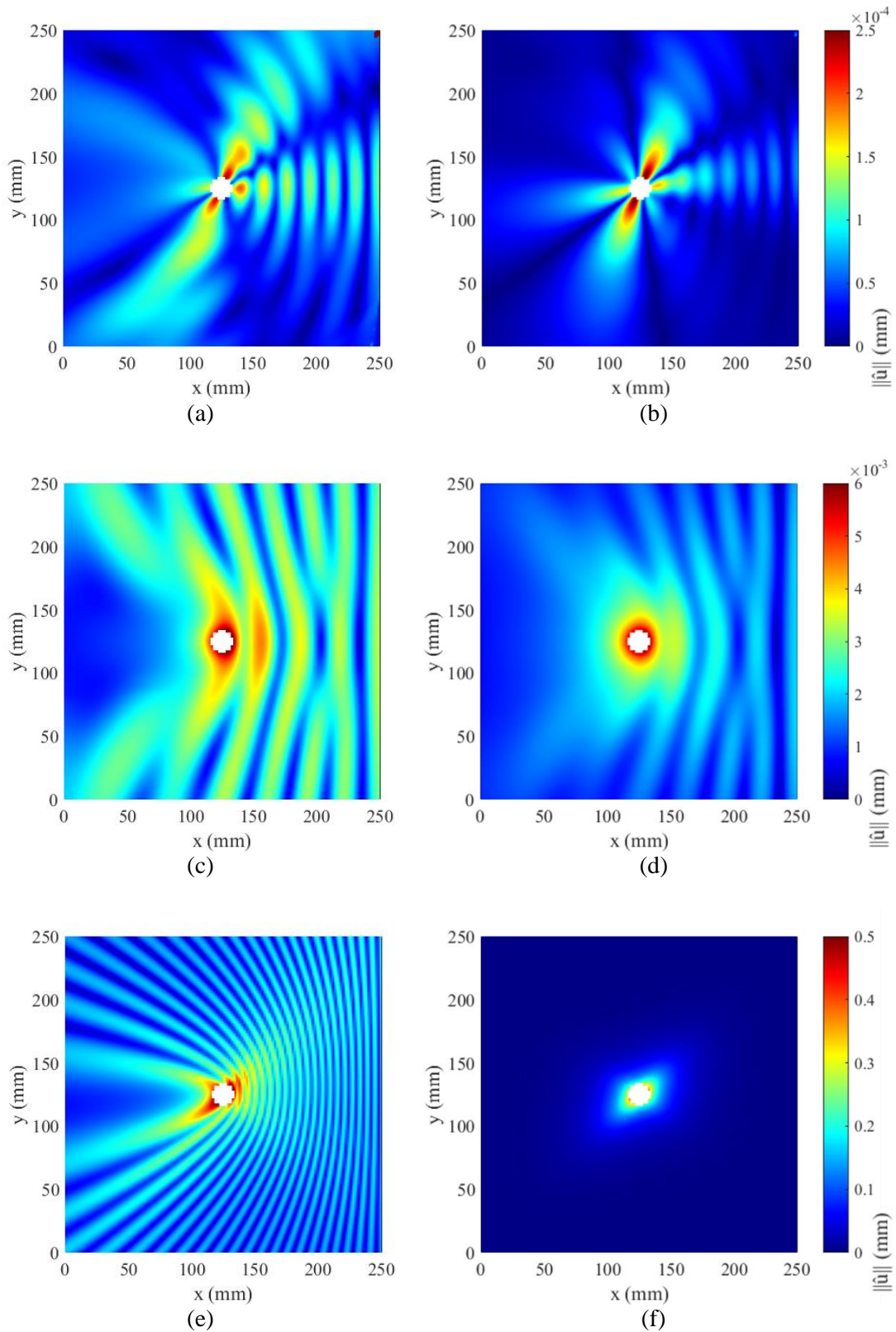


Figure 3.8. Cartographies de la norme du déplacement à 100 kHz en milieu non atténuant (colonne de gauche) et en milieu atténuant (colonne de droite). Déplacement généré par le mode qS_0 ((a) et (b)), par le mode qS_1 ((c) et (d)) et par le mode qA_0 ((e) et (f)).

3.5. Présence de caustiques dans la solution modale

3.5.1. Identification des caustiques modales

Au début de ce chapitre, nous avons fait l'hypothèse que pour un mode donné, une direction d'énergie correspond toujours à une unique direction de phase. Si ce postulat est vérifié pour de nombreux matériaux et à des fréquences relativement faibles, il est faux dans le cas général. Pour le démontrer, prenons l'exemple d'un matériau composé de 8 plis (la séquence d'orientation des plis étant $[45^\circ; 135^\circ; 0^\circ; 90^\circ]_s$) de fibres de carbone croisées et d'épaisseur 125 μm . Avec ce type de composite – pour lequel l'orientation des fibres varie en fonction de la position dans le plan médian de la plaque mais aussi en fonction de l'épaisseur – il n'est pas possible d'utiliser la méthode SAFE. Il est cependant possible d'homogénéiser chaque couche, on obtient alors les coefficients d'élasticité présentés dans le Tableau 3.3. Dans cet exemple, les coefficients d'atténuation sont considérés nuls.

Tableau 3.3. Coefficients élastiques d'un pli du composite 8 couches exprimés pour une orientation des fibres formant un angle de 0° avec \mathbf{e}_x .

Propriété	Valeur						Unité
Densité	1.56						g. cm^{-3}
Coefficients d'élasticité							
$c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}$	64.24	5.60	7.73	0	0	0	GPa
$c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24}, c_{25}, c_{26}$	5.60	70.78	8.39	0	0	0	GPa
$c_{31}, c_{32}, c_{33}, c_{34}, c_{35}, c_{36}$	7.73	8.39	13.30	0	0	0	GPa
$c_{41}, c_{42}, c_{43}, c_{44}, c_{45}, c_{46}$	0	0	0	2.97	0	0	GPa
$c_{51}, c_{52}, c_{53}, c_{54}, c_{55}, c_{56}$	0	0	0	0	3.06	0	GPa
$c_{61}, c_{62}, c_{63}, c_{64}, c_{65}, c_{66}$	0	0	0	0	0	4.70	GPa

Les modes guidés se propageant dans ce matériau sont calculés à la fréquence de 800 kHz. Par la suite, on s'intéresse en particulier au mode propagatif qA_1 . La courbe de lentueur de ce mode est représentée sur la Figure 3.9a. Contrairement aux exemples précédemment évoqués dans ce chapitre, cette courbe a pour particularité de posséder huit points d'inflexion. En ces points, le facteur de focalisation de Maris $A_m = \partial\gamma/\partial\varphi$ (représenté sur la Figure 3.9c) diverge et tend vers l'infini. Il n'est donc pas possible d'appliquer la méthode des pinceaux dans ces directions. En effet, lorsque le facteur de Maris tend vers l'infini, la matrice de propagation du pinceau tend vers la matrice identité. Les rayons paraxiaux restent alors confondus avec le rayon axial sur toute sa longueur. Ainsi la valeur du champ de déplacement diverge dans ces directions (ce qui ne représente pas une réalité physique), appelées *directions de caustique*.

On s'intéresse maintenant à la forme du front d'onde du mode guidé qA_1 . Pour cela, sa vitesse d'énergie est représentée en fonction de la direction d'énergie. Comme on peut le voir sur la Figure 3.9b, chacune des directions de caustique correspond à un points de

rebroussement du front d'onde. Pour une direction d'énergie donnée il y a maintenant une, deux ou trois directions de phase correspondantes. Du côté de la direction de caustique où trois contributions de phase coexistent, le facteur de Maris (voir Figure 3.9c) des deux contributions les plus proches l'une de l'autre augmente au fur et à mesure que l'on se rapproche de la direction de la caustique. Ce sont donc uniquement ces deux contributions qui se situent en dehors du domaine de validité de la méthode des pinceaux. Alors qu'elles apparaissent géométriquement comme si elles étaient séparées, leur contribution ne peut pas être traitée par une simple somme linéaire (interférentielle). Un traitement particulier est nécessaire.

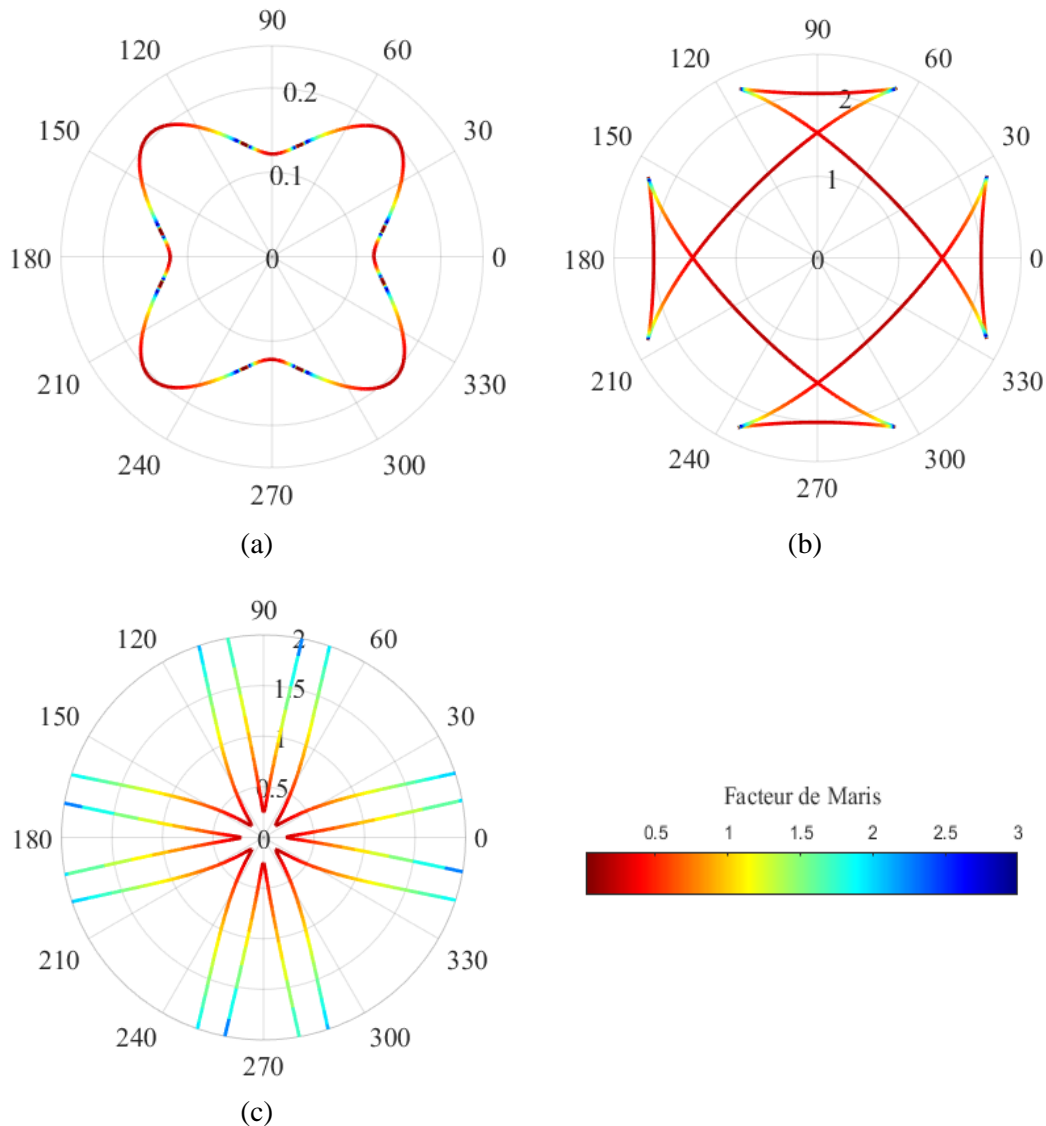


Figure 3.9. Présentation d'un mode guidé possédant des directions de caustique : courbe de lenteur (a), vitesse d'énergie en fonction de la direction d'énergie (b), facteur de Maris en fonction de la direction de phase (c). Les niveaux de couleur sur ces trois figures correspondent à la valeur du facteur de Maris (échelle de couleur en bas à droite).

D'après GENGEMBRE [13], deux contributions de phase ne sont pas séparables si la différence entre leurs temps de vol est d'un ordre inférieur ou égal à celui de $1/\omega$. En notant

$\phi_m(\gamma, \varphi) = k_m(\gamma) \cos(\gamma - \varphi)$ la fonction de phase du mode m , on obtient un critère qui s'exprime en fonction de la longueur du rayon axial du pinceau. La méthode des pincesaux est ainsi inutilisable si, dans la direction d'énergie φ , il existe deux contributions de phase n_1 et n_2 telles que :

$$|\phi_m(\gamma_{n_2}, \varphi) - \phi_m(\gamma_{n_1}, \varphi)| < \frac{1}{\rho}. \quad (3.5.1)$$

Ce critère ne permet de fournir qu'un ordre de grandeur de séparabilité (ou non) des contributions de phase. Des conditions de raccordement plus spécifiques reliant la solution donnée par la méthode des pincesaux et une solution développée pour prendre en compte le système $\{n_1 + n_2\}$ sont données dans le paragraphe suivant.

3.5.2. Calcul du champ de déplacement près des directions de caustique

Pour calculer le champ de déplacement associé à deux contributions de phase n_1 et n_2 se propageant dans la même direction d'énergie et située près d'une direction de caustique, nous allons utiliser la méthode de la phase stationnaire. Ce travail a déjà été effectué, notamment par STÉVENIN [77,78]. Dans ce paragraphe, nous allons faire un rappel des calculs qu'elle a effectués puis étudier le raccordement entre la solution *près des caustiques* et la solution *loin des caustiques*. La fonction de Green (en champ direct) décrivant la propagation d'un mode m se décompose comme suit :

$$\mathbf{g}_m(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0) = \mathbf{g}_{m,(n_1+n_2)}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0) + \sum_{i \geq 3} g_{m,n_i}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0). \quad (3.5.2)$$

Il s'agit de la somme des fonctions de Green de chaque contribution de phase, les deux contributions proches de la caustique ayant été regroupées en une seule. Le calcul de g_{m,n_i} pour $i \geq 3$ ne pose pas de difficulté particulière et s'effectue comme ce qui est décrit dans la section 3.4. Le calcul de $\mathbf{g}_{m,(n_1+n_2)}$ requiert au contraire une attention particulière et constitue l'objectif des développements effectués dans cette section. Tout d'abord, considérons n_1 et n_2 telles que :

$$\phi_m(\gamma_{n_1}, \varphi) < \phi_m(\gamma_{n_2}, \varphi) \quad (3.5.3)$$

La fonction de Green peut se décomposer selon ses composantes spectrales par sa transformée de Fourier spatiale. Pour le mode m , cela revient à écrire :

$$\mathbf{g}_{m,(n_1+n_2)}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_m(\gamma, z) |k_m(\gamma)| e^{-i\rho\phi_m(\gamma, \varphi)} d\gamma, \quad (3.5.4)$$

où \mathbf{G}_m est le résidu de la transformée de Fourier spatiale \mathbf{G} de la fonction de Green associé à la contribution de phase $(n_1 + n_2)$, soit :

$$\mathbf{G}_m(\gamma, z) = i \operatorname{res} \mathbf{G}(k, z)|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_m(\gamma)} \quad (3.5.5)$$

Pour utiliser la méthode de la phase stationnaire, un développement limité de la fonction de phase est réalisé. Au voisinage des directions de caustique, la courbe de lenteur du mode guidé se comporte comme une fonction antisymétrique, tout comme la fonction sinus au voisinage de zéro. Un changement de variable astucieux des variables (γ, φ) vers les variables (u, φ) , est donc appliqué à ϕ_m afin de considérer un développement limité polynomial caractéristique de la fonction sinus. Ce développement, effectué au troisième ordre¹, est de la forme :

$$\phi_m(\gamma, \varphi) = P_m(u, \varphi) = L(\varphi) + S(\varphi)u - \frac{u^3}{3} \quad (3.5.6)$$

Aux points de phase stationnaire, la dérivée de la fonction de phase s'annule. Avec le nouveau système de coordonnées, les points de phase stationnaire u_i sont donc les valeurs de u qui vérifient $\partial P_m / \partial u = 0$. La résolution de cette équation permet d'aboutir à :

$$\sqrt{S(\varphi)} = \pm u_i. \quad (3.5.7)$$

Chacune des valeurs de u_i correspond à une des directions de phase γ_{n_1} et γ_{n_2} . Dans la direction de la caustique, on alors $u_1 = u_2 = 0$. Dans cette étude, γ_{n_1} et γ_{n_2} sont supposées distinctes. Il découle donc de la relation (3.5.7) que $u_1 = -u_2$. Le choix est fait de donner le signe positif à u_2 . On fait alors la somme, puis la différence de $\phi_m(\gamma_{n_1}, \varphi)$ et $\phi_m(\gamma_{n_2}, \varphi)$. Après quelques manipulations algébriques, les deux relations suivantes sont obtenues :

$$\left\{ \begin{array}{l} L(\varphi) = \frac{\phi_m(\gamma_{n_1}, \varphi) + \phi_m(\gamma_{n_2}, \varphi)}{2} \\ S(\varphi) = \left[\frac{3}{4} (\phi_m(\gamma_{n_2}, \varphi) - \phi_m(\gamma_{n_1}, \varphi)) \right]^{\frac{2}{3}} \end{array} \right. \quad (3.5.8)$$

L'expression du développement limité de ϕ_m est alors entièrement déterminée avec des termes connus. Cette dernière est maintenant introduite dans la relation (3.5.3) et le changement de variable est effectué au sein de l'intégrale. Cela revient à écrire :

$$d\gamma = \left| \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right| du \quad (3.5.9)$$

La relation (3.5.4) devient alors :

¹ Le choix de l'ordre 3 permet de prendre en compte l'aspect « antisymétrique » de la courbe des lenteurs au voisinage de son point d'inflexion. Par comparaison la méthode des pinceaux est équivalente à la méthode de la phase stationnaire avec un développement du terme de phase à l'ordre 2.

$$\mathbf{g}_{m,(n_1+n_2)}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{B}(u) e^{-i\rho P_m(u,\varphi)} du, \quad (3.5.10)$$

avec $\mathbf{B}(u)$, le module de l'intégrant. On fait alors de \mathbf{B} un développement asymptotique à l'ordre 1 (ce qui est suffisant car il s'agit d'un terme d'amplitude), ce qui donne :

$$\mathbf{B}(u) = \mathbf{G}_m(\gamma, z) |k_m(\gamma)| \left| \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right| = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} u. \quad (3.5.11)$$

Ce terme s'exprime aux deux points de phase stationnaire comme $\mathbf{B}(u_1) = \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \sqrt{S(\varphi)}$ et $\mathbf{B}(u_2) = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \sqrt{S(\varphi)}$. À partir de ces deux relations, il est possible de donner les expressions de $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{B}(u_1) + \mathbf{B}(u_2)}{2} \end{array} \right. \quad (3.5.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{B}(u_2) - \mathbf{B}(u_1)}{2\sqrt{S(\varphi)}} \end{array} \right. \quad (3.5.13)$$

On peut maintenant introduire les développements asymptotiques de $\mathbf{B}(u)$ et $P_m(u, \varphi)$ dans le calcul de $\mathbf{g}_{m,(n_1+n_2)}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0)$. On a alors :

$$\mathbf{g}_{m,(n_1+n_2)}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0) = [\boldsymbol{\alpha} I(\rho, \varphi) + \boldsymbol{\beta} I'(\rho, \varphi)] e^{-i\rho L(\varphi)}, \quad (3.5.14)$$

où les intégrales $I(\rho, \varphi)$ et $I'(\rho, \varphi)$ sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} I(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -i\rho \left(S(\varphi)u - \frac{u^3}{3} \right) \right\} du \\ I'(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u \exp \left\{ -i\rho \left(S(\varphi)u - \frac{u^3}{3} \right) \right\} du \end{array} \right. \quad (3.5.15)$$

Pour calculer ces intégrales, un nouveau changement de variable est effectué en posant $\tau = \rho^{\frac{1}{3}} u$. Les expressions de I et I' deviennent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} I(\rho, \varphi) = \frac{\rho^{-\frac{1}{3}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \left(\left(-\rho^{\frac{2}{3}} S(\varphi) \right) \tau - \frac{\tau^3}{3} \right) \right\} d\tau \\ \\ = \rho^{-\frac{1}{3}} \text{Ai} \left(-\rho^{\frac{2}{3}} S(\varphi) \right) \end{array} \right. \quad (3.5.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I'(\rho, \varphi) = \frac{\rho^{-\frac{2}{3}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tau \exp \left\{ -i \rho \left(\left(-\rho^{\frac{2}{3}} S(\varphi) \right) \tau - \frac{\tau^3}{3} \right) \right\} d\tau \\ \\ = -i \rho^{-\frac{2}{3}} \text{Ai}' \left(-\rho^{\frac{2}{3}} S(\varphi) \right) \end{array} \right. \quad (3.5.17)$$

où l'on reconnaît la fonction d'Airy Ai et sa dérivée première Ai' [79]. Les termes en $\rho^{-\frac{2}{3}}$ étant négligeables devant les termes en $\rho^{-\frac{1}{3}}$, seuls les termes portés par $I(\rho, \varphi)$ sont conservés dans l'expression de la fonction de Green en champ lointain. On a ainsi :

$$\mathbf{g}_{m,(n_1+n_2)}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0) = \rho^{-\frac{1}{3}} \text{Ai} \left(-\rho^{\frac{2}{3}} S(\varphi) \right) \left(\frac{\mathbf{B}(u_1) + \mathbf{B}(u_2)}{2} \right) e^{-i\rho L(\varphi)} \quad (3.5.18)$$

Il ne reste plus alors qu'à trouver une expression explicite de $\mathbf{B}(u_1)$ et $\mathbf{B}(u_2)$ en revenant à l'équation (3.5.11). Afin d'exprimer $\partial\gamma/\partial u$, on développe $\partial^2 P_m/\partial u^2$, ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 P_m}{\partial u^2} = 2u = \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial \gamma^2} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial u} \right)^2 + \frac{\partial \phi_m}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial u^2}. \quad (3.5.19)$$

Aux points de phase stationnaire, $\partial \phi_m / \partial \gamma$ s'annule. On peut donc isoler $\partial \gamma / \partial u$ dans l'équation précédente. Ce résultat est ensuite introduit dans l'expression de $\mathbf{B}(u_i)$. De plus, en prenant en compte que $|u_i| = \sqrt{S(\varphi)}$, on a enfin :

$$\mathbf{B}(u_i) = \mathbf{G}_m(\gamma_{n_i}, z) |k_m(\gamma_{n_i})| \sqrt{\frac{2\sqrt{S(\varphi)}}{\left| \frac{\partial^2 \phi_m(\gamma_{n_i}, \varphi)}{\partial \gamma^2} \right|}}. \quad (3.5.20)$$

Le tenseur $\mathbf{G}_m(\gamma_{n_i}, z)$ s'exprime simplement comme décrit dans l'Annexe C et vaut :

$$\mathbf{G}_m(\gamma_{n_i}, z) = \frac{i\omega}{4(P_m(\gamma_{n_i}))\sqrt{2\pi}} \mathbf{W}_m(\gamma_{n_i}, z) \left(\mathbf{W}_m^*(\gamma_{n_i}, e) \right)^t. \quad (3.5.21)$$

L'expression finale de $\mathbf{g}_{m,(n_1+n_2)}$ est obtenue en faisant appel à la fois à des termes calculés dans cette section et à des termes de la fonction de Green loin des caustiques. Son écriture est :

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_{m,(n_1+n_2)}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0) &= \rho^{-\frac{1}{3}} \text{Ai} \left(-\rho^{\frac{2}{3}} S(\varphi) \right) \frac{\sqrt{2\sqrt{S(\varphi)}}}{2} e^{-i\rho L(\varphi)} \\
&\times \sum_{i \in \{1;2\}} \left[\frac{i\omega |k_m(\gamma_{n_i})|}{4\langle P_m(\gamma_{n_i}) \rangle} \frac{1}{\sqrt{2\pi \left| \frac{\partial^2 \phi_m(\gamma_{n_i}, \varphi)}{\partial \gamma^2} \right|}} \mathbf{W}_m(\gamma_{n_i}, z) \left(\mathbf{W}_m^*(\gamma_{n_i}, e) \right)^t \right].
\end{aligned} \tag{3.5.22}$$

La décroissance de l'amplitude du champ de déplacement en fonction de la distance se fait en $\rho^{-1/3}$, à la différence de la fonction de Green à distance des caustiques où elle varie en $\rho^{-1/2}$. À proximité des caustiques l'amplitude du déplacement décroît donc moins rapidement, ce qui semble logique car il s'agit d'une zone de focalisation.

Lorsque les contributions de phase n_1 et n_2 s'éloignent l'une de l'autre, elles peuvent de nouveau être traitées séparément et $\mathbf{g}_{m,(n_1+n_2)}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0)$ doit converger vers la somme de $\mathbf{g}_{m,n_1}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0)$ et de $\mathbf{g}_{m,n_2}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0)$. On remarque alors que lorsque

$$\phi_m(\gamma_{n_2}, \varphi) - \phi_m(\gamma_{n_1}, \varphi) = \frac{\pi}{2\rho}, \tag{3.5.23}$$

l'argument de $\mathbf{g}_{m,(n_1+n_2)}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0)$ étant égal à celui de $\mathbf{g}_{m,n_1}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0) + \mathbf{g}_{m,n_2}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0)$. Cette condition est très similaire au critère (3.5.1) et permet de définir, pour chaque direction de caustique, une courbe du plan dont l'équation implicite est de la forme $f(\rho, \varphi) = 0$ sur laquelle s'effectue le raccordement continu entre la solution pour le système $\{n_1 + n_2\}$ et celle pour n_1 et n_2 séparées. Un facteur multiplicatif C_0 permet d'exprimer $\mathbf{g}_{m,(n_1+n_2)}$ en fonction de \mathbf{g}_{m,n_1} et \mathbf{g}_{m,n_2} sur la zone de raccord. On a alors :

$$\mathbf{g}_{m,(n_1+n_2)}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0) = C_0 [\mathbf{g}_{m,n_1}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0) + \mathbf{g}_{m,n_2}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0)], \tag{3.5.24}$$

avec C_0 la constante réelle telle que :

$$C_0 := \rho^{-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} \text{Ai} \left(-\rho^{\frac{2}{3}} S(\varphi) \right) \frac{\sqrt{2\sqrt{S(\varphi)}}}{2} \Bigg|_{S(\varphi) = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^{\frac{2}{3}}} \tag{3.5.25}$$

$$\approx 0,3873.$$

Afin d'assurer la continuité des solutions au point de raccord, le facteur multiplicatif $1/C_0$ est appliqué à $\mathbf{g}_{m,(n_1+n_2)}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0)$.

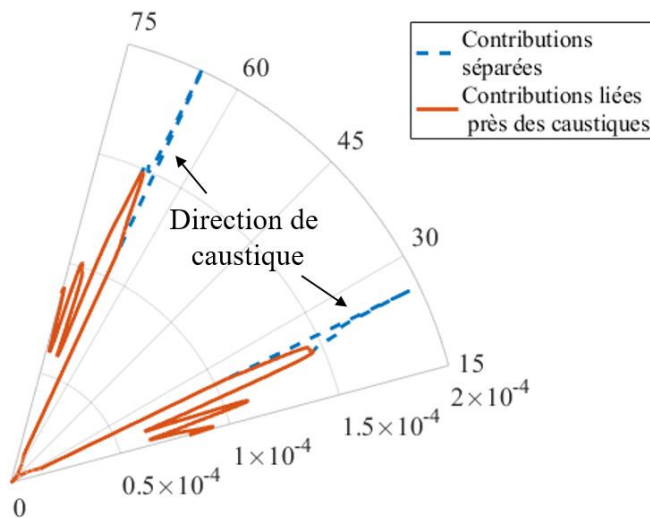


Figure 3.10. Application de la formulation adaptée à proximité de caustiques. Norme du déplacement du mode qA_1 mesuré à 300 mm du point source à 800 kHz. Le matériau utilisé est celui décrit dans le Tableau 3.3.

La Figure 3.10 présente une application de la formule développée dans ce paragraphe. Il s'agit d'un calcul du champ de déplacement en des points situés sur un arc de cercle centré sur le point source et de rayon 300 mm. Alors que la valeur du déplacement diverge à proximité des directions de caustique si toutes les contributions de phase sont considérées séparables, cette valeur se retrouve lissée lorsque les contributions de phase proches sont regroupées, c'est-à-dire ; si l'on tient compte de leur coalescence. De plus, au fur et à mesure que l'on se rapproche de la direction de caustique, l'amplitude du déplacement décroît pour se rapprocher de sa valeur au-delà de la caustique (où une seule contribution de phase existe) sans pour autant l'atteindre. Cette discontinuité provient du fait que le modèle de fonction d'onde utilisé n'est pas capable de rendre compte d'une partie de l'énergie rayonnée au-delà du point de rebroussement du front d'onde. D'autres modèles tel que celui des ondes planes inhomogènes auquel se sont intéressés Deschamps et Poncelet [80], prédisent l'existence de modes prolongeant de manière régulière le front d'onde du mode réel aux points de rebroussement. Avec de telles considérations, la valeur du déplacement reste continue lors du passage de la caustique. Mais les contributions en question ne peuvent plus être traitées suivant une approche géométrique car on ne peut pas y associer un rayon réel.

Résumé des principaux résultats du chapitre :

Il est possible de définir un formalisme de pinceaux adapté à la prédiction des formes d'ondes guidées en milieu anisotrope. Ce modèle s'utilise de manière similaire à celui développé pour les milieux isotropes mais vient y ajouter la prise en compte de la directivité de l'onde - au front d'onde de géométrie non-triviale - générée par un point source. Les développements réalisés dans ce chapitre constituent en ce sens une généralisation de ceux présents dans le chapitre 1.

De plus, les ondes guidées rayonnées dans les matériaux composites sont en règle générale amorties de manière non négligeables par des phénomènes de viscoélasticité, de diffusion multiple par les fibres, etc... Le domaine d'étude a ainsi été élargi au cas des milieux dissipatifs afin de modéliser les effets d'atténuation des ondes à l'échelle macroscopique. La nature harmonique du modèle des pinceaux permet d'intégrer une large gamme de modèles de dissipation ; il est donc naturellement adapté à la prise en compte de ces phénomènes.

Enfin, le cas limite de la focalisation infinie a été étudié. Le modèle de pinceaux diverge au voisinage des directions de caustiques d'un mode guidé. Ce problème a été partiellement traité grâce au développement d'une formulation adaptée à ce cas. Cependant, cette solution nécessite l'abandon du formalisme des pinceaux et n'est valable qu'en champ direct. Elle permet néanmoins de traiter un spectre assez large de cas dans le sens où les directions de caustiques sont le plus susceptibles d'apparaître à raisonnablement haute fréquence, c'est-à-dire dans un domaine où l'atténuation est forte et donc l'importance du champ réfléchi moindre. Le développement d'un modèle semi-analytique permettant de traiter ces cas limites de manière plus complète est envisageable, mais aussi plus complexe. L'adaptation des travaux récents de JACQUET [81], qui a mis en place un modèle de faisceaux gaussiens dans le cadre du CND par ondes de volumes, au rayonnement des ondes guidées est une piste qu'il serait pertinent d'envisager.

Chapitre 4

Étude du modèle des pinceaux appliqué aux sources de taille finie en milieu anisotrope

La prédiction par la méthode des pinceaux du rayonnement d'une onde guidée générée par une source de taille finie se fait de façon similaire, que l'on soit en milieu isotrope ou en milieu anisotrope, dès lors que l'on intègre les contributions de chaque point source sur la surface émettrice. Cependant, on est en droit de s'interroger sur la validité de l'approximation de Fraunhofer dans ces milieux et si validité il y a, dans quelles conditions elle s'applique. Dans un second temps, une validation numérique est effectuée.

4.1. Application de l'approximation de Fraunhofer

LE CALCUL du champ de déplacement sous l'approximation de Fraunhofer a montré qu'il était possible de simplifier grandement la simulation d'une onde rayonnée par une source de taille finie. Ainsi, l'évaluation d'une convolution surfacique (qui est en règle générale coûteuse en temps de calcul, d'autant plus qu'elle est effectuée à chaque fréquence) peut être remplacée par le simple produit par la transformée de Fourier spatiale du terme de source. Il est donc naturel de vouloir utiliser cette approximation pour les ondes rayonnées aussi bien dans les milieux isotropes que dans les milieux anisotropes. Cherchons donc à formuler cette approximation, tout d'abord dans le cas d'un milieu infini.

Le développement limité à l'ordre 1 du terme de phase et celui à l'ordre 0 du terme d'amplitude, effectués au voisinage du point central de la source \mathbf{R}_c , s'écrivent :

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta}_m(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0) &\simeq \hat{\vartheta}_m(\mathbf{r}; \mathbf{R}_c) + \mathbf{k}_m \cdot (\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_c) \\ &+ A_m \left[-\frac{\partial k_m}{\partial \gamma} \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \varphi \\ -\sin \gamma \sin \varphi \end{pmatrix} + k_m \begin{pmatrix} \sin \gamma \cos \varphi \\ \cos \gamma \sin \varphi \end{pmatrix} \right] \cdot (\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_c) \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

$$\mathcal{D}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0, \omega) \simeq \mathcal{D}_{i..f}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_c, \omega). \quad (4.1.2)$$

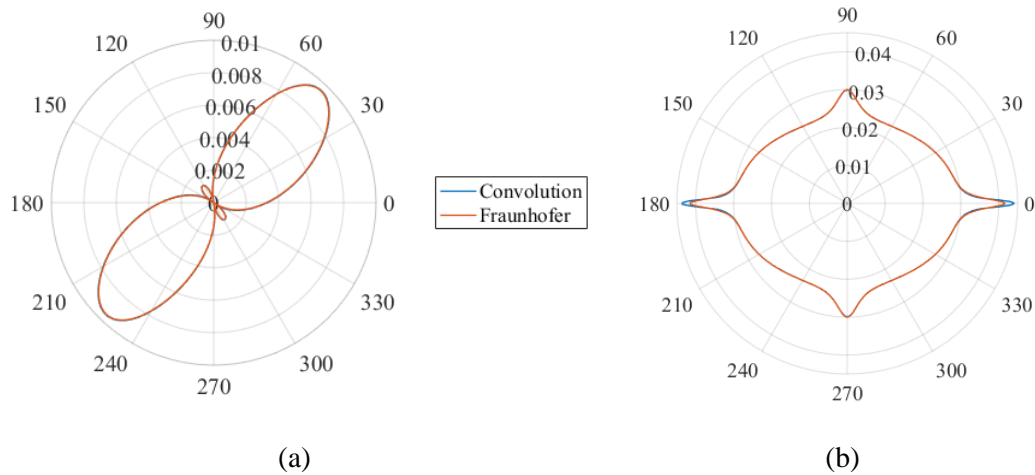
On remarque alors que pour pouvoir raisonnablement appliquer la formule (2.3.2), et donc l'approximation de Fraunhofer, il faut que les variations du nombre d'onde en fonction de la direction de phase soient lentes et que la valeur du facteur de Maris soit bornée. Du point de vue physique, cela revient à dire que le mode guidé a un comportement quasi isotrope et/ou qu'il ne possède pas de direction de focalisation. En effet, cette approximation consiste à faire l'hypothèse que la source génère - dans la direction d'observation considérée - une onde plane composée d'une unique direction de phase. Or, en milieu anisotrope, les phénomènes de focalisation font que de nombreuses contributions de phase peuvent se propager autour d'une même direction d'énergie.

Afin de quantifier l'erreur produite en effectuant l'approximation, des calculs de champ sont effectués dans deux matériaux différents. Le premier est le composite 16 couches utilisé dans le chapitre 3 tandis que le second est un composite 4 couches, d'épaisseur totale 1 mm et dont les coefficients d'élasticités sont donnés dans le Tableau 4.1. La séquence d'orientation des plis de ce second matériau est $[0^\circ; 90^\circ]_5$. La séquence d'orientation des plis du composite 16 couches est plus régulière que celle du composite 4 couches. Ceci permet de lisser les effets d'anisotropie sur les modes guidés et tend à éviter les phénomènes de focalisation. On peut alors s'attendre à ce que l'approximation de Fraunhofer soit plus valable dans le composite 16 couches que dans le composite 4 couches. Par la suite, on ne s'intéresse qu'au déplacement du mode qA_0 qui, pour les deux matériaux, ne possède aucune direction de caustique. Ce mode possède, toujours pour ces deux matériaux, une courbe de lenteur nettement distincte du cercle, ce qui indique qu'il subit néanmoins des effets d'anisotropie et ne peut être considéré comme quasi isotrope, ce qui diminuerait la pertinence de cette étude.

Tableau 4.1. Coefficients d'élasticité du composite 4 couches.

Propriété	Valeur						Unité
Densité	1.60						g. cm^{-3}
Coefficients d'élasticité							
$c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}$	123.4	5.6	5.6	0	0	0	GPa
$c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24}, c_{25}, c_{26}$	5.6	11.5	6.4	0	0	0	GPa
$c_{31}, c_{32}, c_{33}, c_{34}, c_{35}, c_{36}$	5.6	6.4	11.5	0	0	0	GPa
$c_{41}, c_{42}, c_{43}, c_{44}, c_{45}, c_{46}$	0	0	0	2.6	0	0	GPa
$c_{51}, c_{52}, c_{53}, c_{54}, c_{55}, c_{56}$	0	0	0	0	4.5	0	GPa
$c_{61}, c_{62}, c_{63}, c_{64}, c_{65}, c_{66}$	0	0	0	0	0	4.5	GPa

Le déplacement de l'onde guidée suivant le mode qA_0 est calculé à une distance de 100 mm du centre de la source. Cette source est de rayon 5 mm, émet une contrainte uniforme et normale au plan de la plaque et a une fréquence d'excitation de 300 kHz. Le module de la composante z du déplacement résultant de ces simulations est représenté sur la Figure 4.1. En ce qui concerne le composite 16 couches, qui ne présente pas pour ce mode et cette fréquence de zone de focalisation ($A_m < 1,5$), l'application de l'approximation de Fraunhofer mène à des résultats très proches de ceux obtenus avec le calcul par convolution surfacique complète. En revanche, pour le composite 4 couches, les résultats divergent légèrement autour des directions d'énergie 0° et 180° . Cela correspond à des valeurs du coefficient de Maris légèrement supérieures à 3.

**Figure 4.1.** Évaluation de l'approximation de Fraunhofer en milieu anisotrope pour le composite 16 couches (a) et le composite 4 couches (b).

En conclusion, l'approximation de Fraunhofer est valide en milieu anisotrope pour les modes dont la valeur du facteur de Maris reste inférieure à une valeur seuil qui semble être de 3. En conséquence, elle n'est absolument pas applicable autour des directions de caustique. Son application nécessite donc une étude des propriétés des modes guidés à chacune des fréquences d'intérêt.

4.2. Validation numérique en milieu non atténuant

Nous allons maintenant procéder à une validation numérique de la méthode des pinceaux en milieu anisotrope. Les résultats fournis par cette dernière seront comparés à des résultats obtenus avec le code ONDO (sommairement décrit dans le § 2.2). La pertinence de cette comparaison vient du fait que ces deux méthodes sont des approches radicalement différentes, l'une étant entièrement numérique et temporelle tandis que l'autre est semi-analytique et harmonique. La plaque choisie pour effectuer cette validation est en composite 16 couches (voir caractéristiques mécaniques dans le Tableau 3.1) et a pour dimensions $2000 \text{ mm} \times 2000 \text{ mm} \times 2,14 \text{ mm}$. Les coefficients d'atténuation sont considérés nuls afin d'obtenir une comparaison valable avec le code élément fini (qui ne propose pas encore à ce jour d'intégrer des modèles viscoélastiques). La source est située au centre de cette plaque (son centre est au point de coordonnées $(1000 ; 1000 ; 1,07)$), a un diamètre de 10 mm et applique une contrainte uniforme et normale à la surface de la plaque. Une excitation temporelle consistant en un *tone burst* de 10 cycles et de fréquence centrale 100 kHz est appliqué. Une représentation de la norme du champ de déplacement à la surface supérieure de la plaque, telle que calculée par ONDO, à quatre instants est fournie sur la Figure ci-dessous.

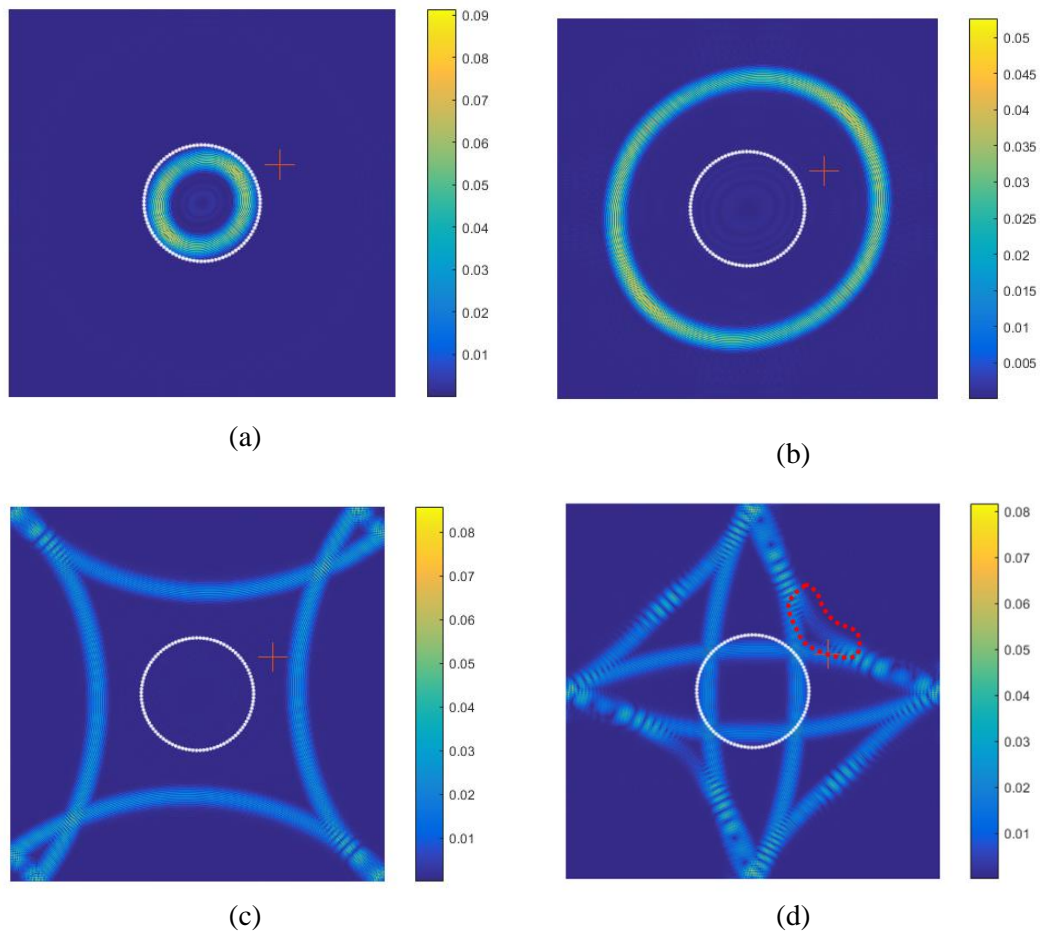


Figure 4.2. Cartographies du champ de déplacement calculé par ONDO à la surface de la plaque à $t=200 \mu\text{s}$ (a), $t=500 \mu\text{s}$ (b), $t=1000 \mu\text{s}$ et $t=1500 \mu\text{s}$.

Évaluation de la directivité de l'onde en champ direct

Tout d'abord, l'influence de la direction d'énergie sur l'amplitude du champ de déplacement est évaluée. Le champ de déplacement est calculé, sans prendre en compte les réflexions sur les bords de la plaque, en 99 points situés à 300 mm du centre de la source (points blanc sur la Figure 4.2). Les signaux sont coupés à $t_{\max} = 500 \mu\text{s}$, ce qui permet de ne prendre en compte que les contributions de champ direct des formes d'onde calculées par ONDO. La directivité de l'onde guidée est représentée par le maximum de l'enveloppe des signaux obtenus ainsi que le temps pour lequel ils sont atteints. Un très bon accord est alors observé entre les résultats fournis par chacune des méthodes. Les pics présents sur la Figure 4.3d et la Figure 4.3e sont simplement dus à la valeur quasi nulle de u_x et u_y dans ces directions ; le calcul des temps d'arrivée correspondants n'a alors pas de sens.

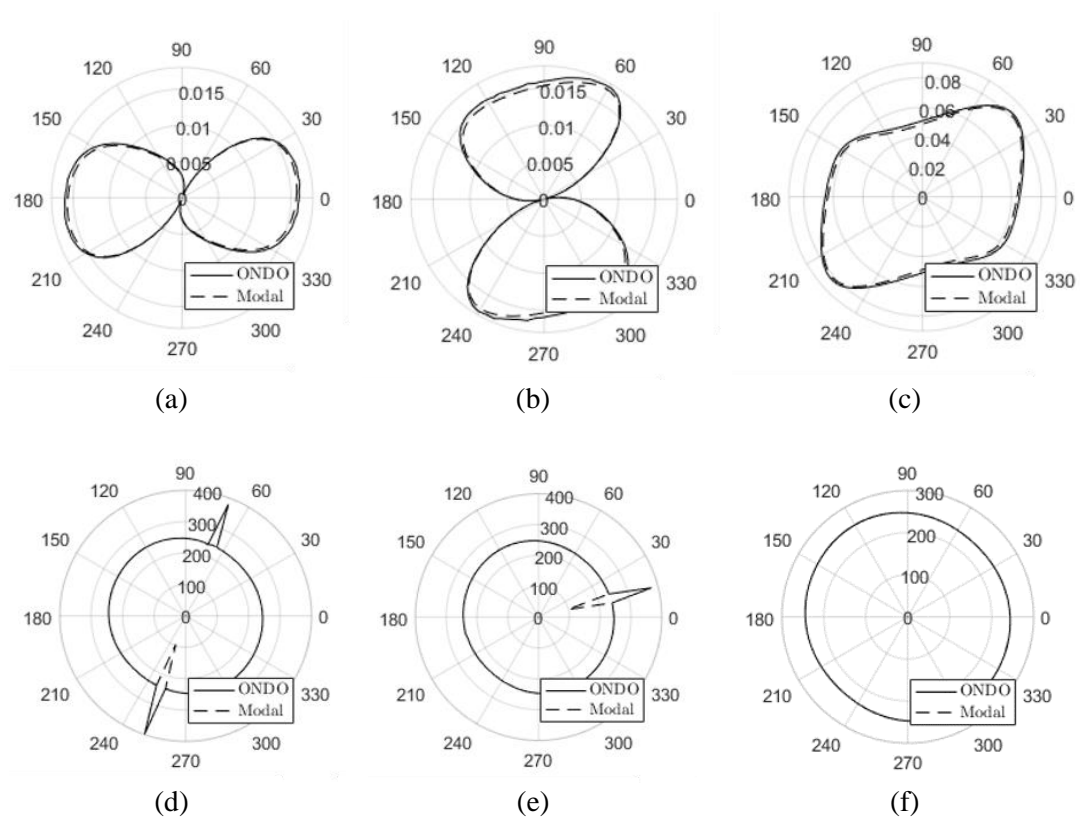


Figure 4.3. Comparaison des signaux en champ direct. La première correspond aux maximums d'enveloppe de u_x (a), u_y (b) et u_z (c). Sur la seconde ligne apparaissent les temps d'arrivée correspondants.

Calcul du champ de déplacement au point de coordonnées (1400 ; 1200 ; 1, 07)

Intéressons-nous maintenant au calcul du champ de déplacement en un point arbitrairement choisi (représenté par une croix rouge sur la Figure 4.2) avec prise en compte des trois premières réflexions. Les résultats obtenus sont présentés dans la Figure 4.4 et la Figure 4.5. La comparaison de ces signaux semble excellente mis à part quelques paquets d'ondes qui semblent ne pas avoir été calculés par la méthode des pinceaux. Deux explications

peuvent alors être avancées. Tout d'abord, les premières contributions manquantes sur les composantes x et y du déplacement sont des contributions de modes symétriques (dont la composante z est très faible comparée à celle des modes antisymétriques). Il peut alors simplement s'agir de contributions issues de quatre réflexions ou plus mais portées par des modes à vitesse d'énergie élevée.

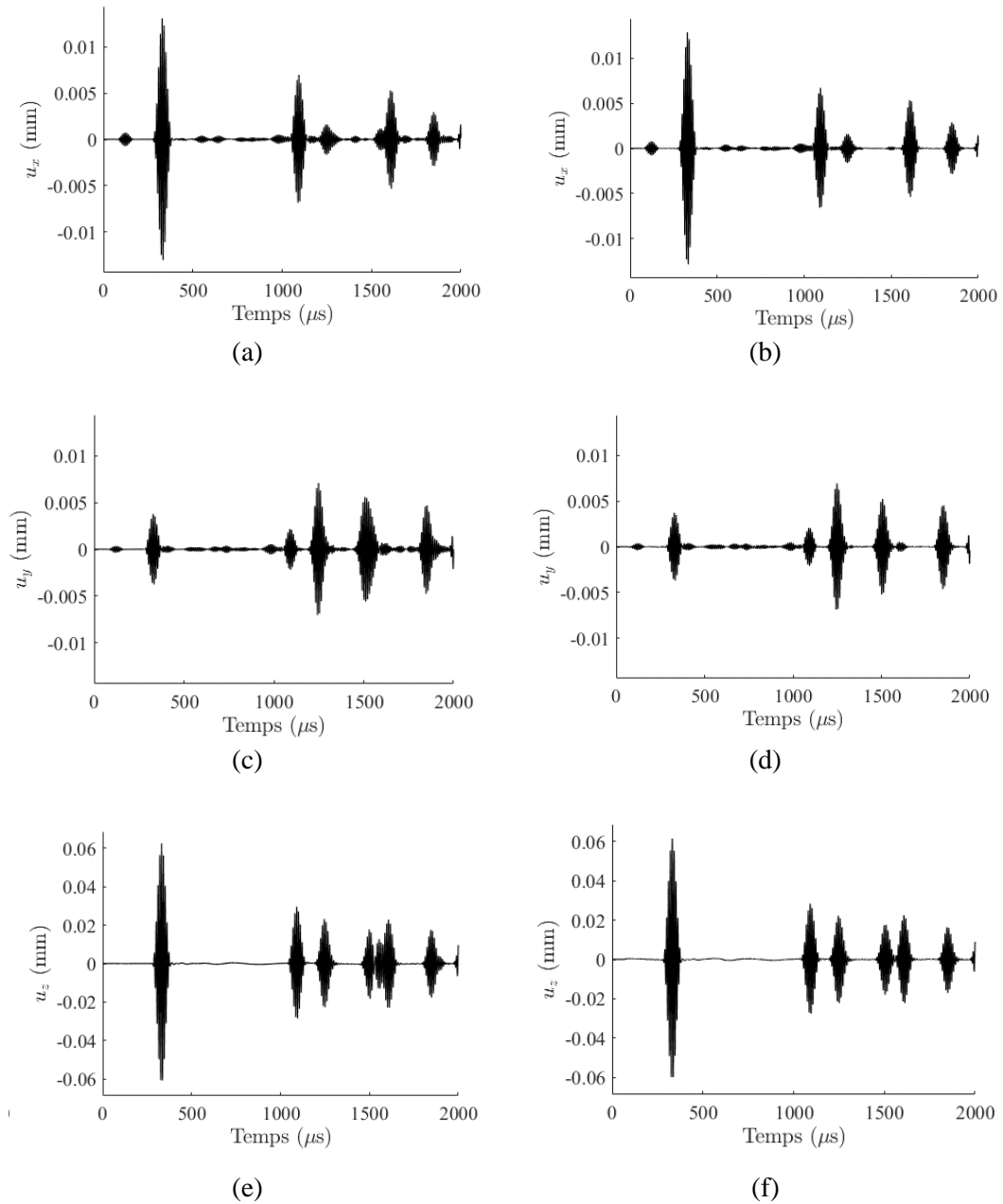


Figure 4.4. Formes d'ondes au point de coordonnées (1400 ;1200 ;1,07). Les signaux présentés dans la colonne de gauche correspondent à ceux obtenus grâce à ONDO. Les signaux obtenus par la méthode des pinces sont présentés dans la colonne de droite. Les lignes correspondent respectivement aux composantes u_x , u_y et u_z .

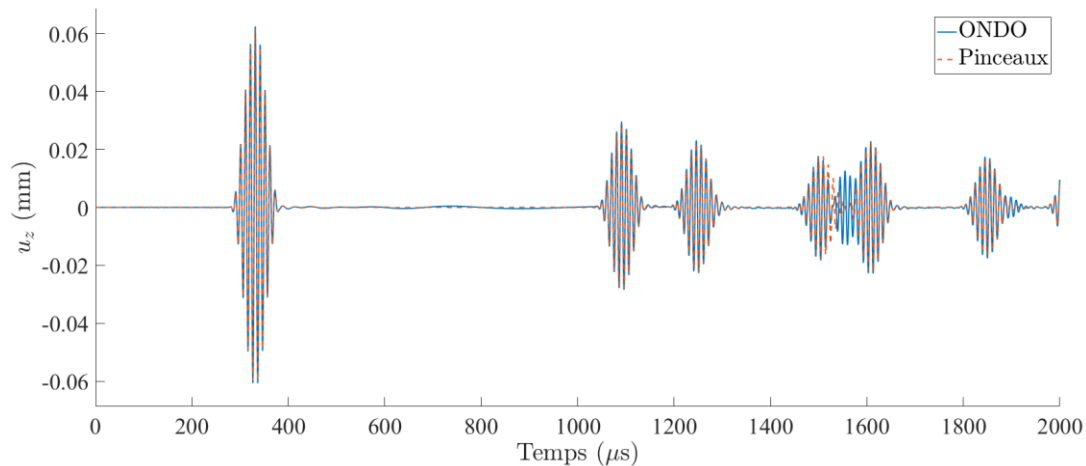


Figure 4.5. Superposition des formes d'ondes (de la composante z du déplacement) au point de coordonnées $(1400 ; 1200 ; 1,07)$.

De plus, le point de calcul se situe sur le trajet d'au moins une contribution issue de la diffraction par le coin supérieur droit de la plaque lors de la réflexion du mode qA_0 . Cette contribution est entourée en trait pointillé sur la Figure 4.2d. Elle suit le trajet d'énergie représenté sur la Figure 4.6a dont la longueur est de 2414 mm. En prenant en compte la vitesse d'énergie du mode qA_0 dans la direction d'énergie $\pi/4$ ($1.61 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$), un simple calcul montre que le temps d'arrivée du début du paquet d'onde est $1499 \mu\text{s}$. Le maximum de l'excitation se situant à $50 \mu\text{s}$, cela explique la présence d'un paquet d'ondes non calculé par la méthode des pinceaux dont le maximum d'amplitude se situe à $1549 \mu\text{s}$ sur la Figure 4.5.

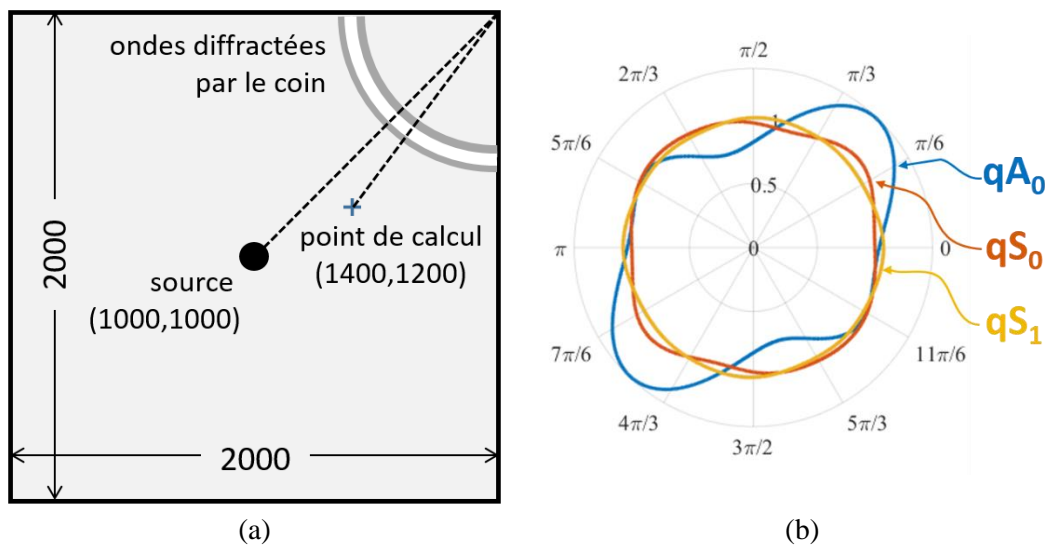


Figure 4.6. Diffraction d'une OG par le coin supérieur droit d'une plaque : trajet d'énergie des contributions diffractées (a) et facteur de Maris des modes à 100 kHz.

De plus, dans le cas considéré ici, la valeur du facteur de Maris du mode qA_0 est maximale autour de la direction d'énergie correspondant au trajet d'énergie qui interagit avec le coin de la pièce. Le comportement des autres modes est quasi isotrope, la valeur de leur facteur de Maris reste proche de 1. L'amplitude du paquet d'onde diffracté est donc à son maximum. Les

différences observées ne sont alors pas dues à une erreur commise par le modèle mais par des phénomènes qu'il n'a pu prévoir. Cette validation est concluante et a permis de mettre en avant les points à améliorer dans le modèle.

4.3. Analyse des signaux temporels calculés par le modèle des pinceaux

4.3.1. Décomposition modale des formes d'ondes

Le signal montré Figure 4.4b est maintenant représenté sous la forme de sa décomposition modale (voir Figure 4.7 à Figure 4.10). Le choix a été fait de classer ces contributions selon le nombre de réflexions qui leur est associé ainsi que selon leur mode initial. À l'émission, les trois modes fondamentaux sont générés avec des amplitudes très différentes. La représentation en amplitude des contributions du mode qS_0 et du mode qS_1 ont donc été agrandies d'un facteur respectif de 500 et de 10. On remarque que certaines (troisièmes) réflexions des modes symétriques apparaissent avant les premières réflexions de qA_0 . Ceci confirme ce qui a été avancé dans le paragraphe précédent sur la probable présence de paquets d'ondes issus de quatre réflexions ou plus et localisés autour de $1400 \mu s$.

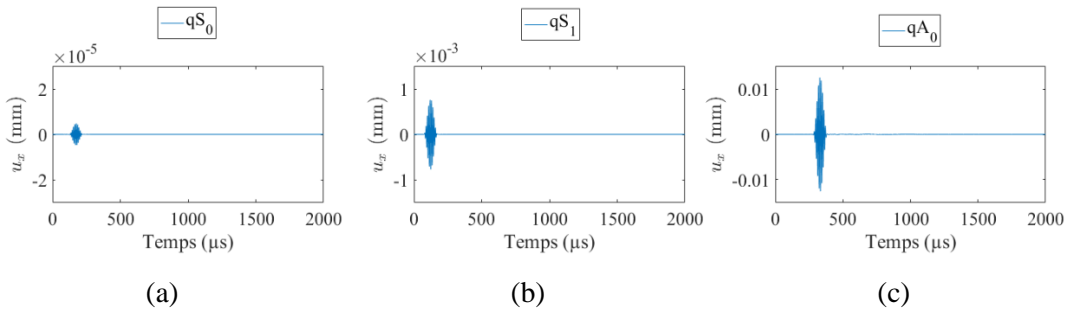


Figure 4.7. Décomposition modale de la composante x du déplacement au point de coordonnées $(1400 ; 1200 ; 1,07)$ en champ direct.

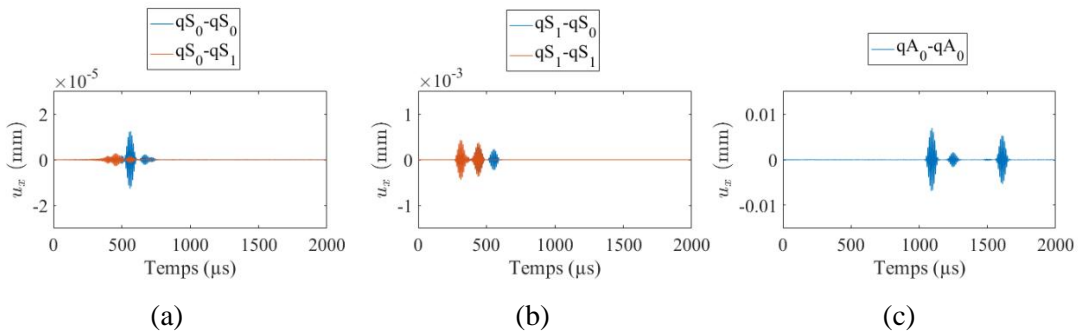


Figure 4.8. Décomposition modale de la composante x du déplacement au point de coordonnées $(1400 ; 1200 ; 1,07)$ après une réflexion.

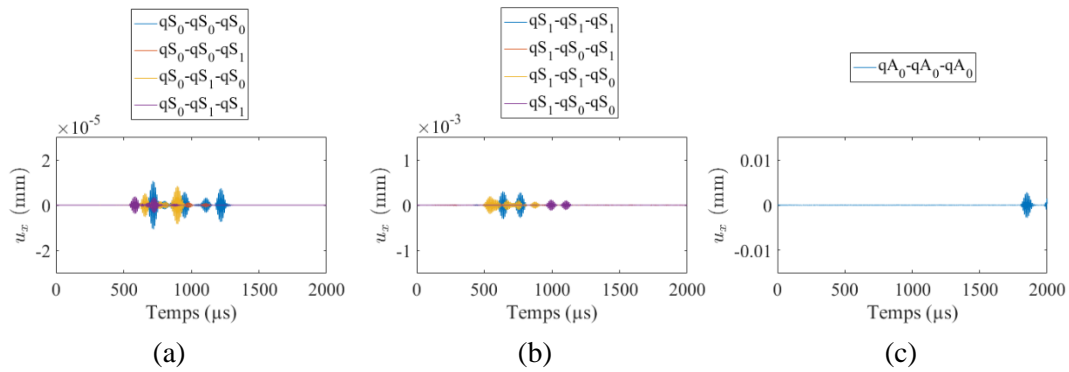


Figure 4.9. Décomposition modale de la composante x du déplacement au point de coordonnées (1400 ;1200 ;1,07) après deux réflexions.

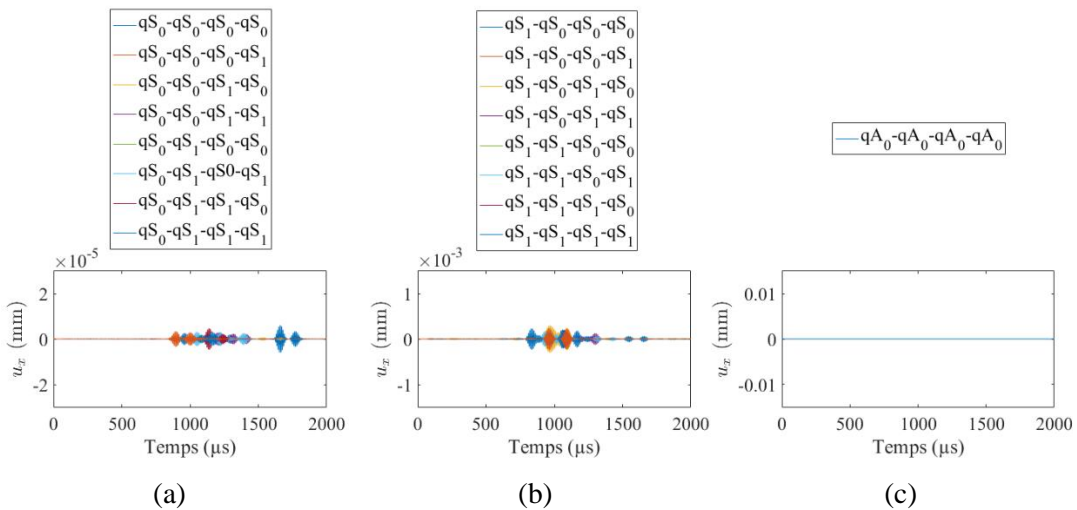


Figure 4.10. Décomposition modale de la composante x du déplacement au point de coordonnées (1400 ;1200 ;1,07) après trois réflexions.

On voit que sur les deux dernières figures, que ce qui aurait pu être confondu avec du bruit sur le signal global résulte en réalité de la superposition de paquets d’ondes bien distincts et identifiables. En pratique, les méthodes déterministes employées en SHM n’utilisent pas de contributions issues de plus d’une réflexion. Néanmoins, leur prédiction est intéressante pour plusieurs raisons. (i) Cela permet de les identifier sur les signaux obtenus par mesure expérimentale, quitte à les retirer dans les simulations par la suite. (ii) Ces contributions permettent alors de déterminer la longueur de la fenêtre temporelle à considérer pour rester dans le domaine de validité de la méthode de contrôle étudiée. (iii) Dans le cadre d’une approche stochastique [82,83], elles peuvent être utilisées afin d’alimenter un modèle d’inversion ; dans ce cas la connaissance modale constitue une information supplémentaire à exploiter par ce modèle.

4.3.2. Effet de l'atténuation sur les signaux temporels

La validation effectuée au § 4.2 n'ayant pas permis d'étudier le comportement viscoélastique du matériau utilisé, on se propose maintenant d'intégrer aux calculs le modèle d'atténuation évoqué pour ce matériau au chapitre 3. On rappelle que le mode qA_0 avait été identifié comme fortement atténué. Le calcul est donc réalisé dans la même configuration que celle employée pour mener à bien la validation. Les résultats présentés Figure 3.11 montrent que le mode qS_1 devient le mode prépondérant. On aperçoit également le paquet d'onde du mode qA_0 en champ direct, dont l'amplitude est très faible en comparaison de ce qui avait pu être observé pour le matériau purement élastique. Les contributions réfléchies ont été totalement amorties. La forme d'ondes temporelle obtenue en présence d'atténuation est alors extrêmement simple. Toutefois, les dimensions de la plaque étudiée sont relativement élevées (deux mètres de côté). Il n'est pas surprenant que les ondes s'atténuent avant même de se réfléchir. De plus, la valeur du coefficient d'atténuation η_{xx} (voir Tableau 3.2) paraît quelque peu singulière, ce qui peut accentuer l'amortissement des paquets d'ondes

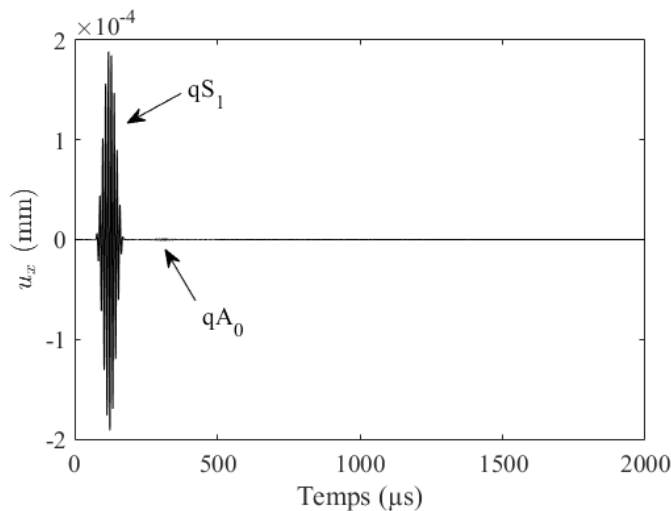


Figure 4.11. Prise en compte de l'atténuation dans le calcul du déplacement au point de coordonnées (1400 ; 1200 ; 1,07).

L'introduction d'un modèle de viscoélasticité vient cependant modifier de manière extrême la forme de signaux temporels obtenus. La prise en compte de l'atténuation est donc nécessaire dès lors qu'il s'agit de comparer les prédictions faites par la simulation avec des résultats expérimentaux. Les modèles de viscoélasticité étant définis en fonction de la fréquence, les modèles harmoniques sont intrinsèquement adaptés à leur introduction. En particulier, le modèle des pinceaux les prend en compte de manière naturelle. Là encore, la connaissance modale est un atout. En effet, suivant la valeur de l'atténuation de chacun des modes guidés, le calcul peut être restreint aux modes modérément amortis, ce qui permet de réduire les temps de calcul.

Résumé des principaux résultats du chapitre :

Ce chapitre a permis d'évaluer la capacité du modèle des pinceaux à prédire de manière quantitative le champ de déplacement d'ondes guidées dans le contexte du contrôle non-destructif de plaques en composite. Tout d'abord, les conditions d'application de

l'approximation de Fraunhofer ont été déterminées. Cette dernière n'est valide que pour les modes dont le comportement se rapproche de celui d'un mode guidé en milieu isotrope ; soit des modes pour lesquels le facteur de Maris reste inférieur à 3.

Dans un second temps, le modèle des pinceaux a été validé en milieu non atténuant. Comme dans le cas des milieux isotropes, l'aspect modal de la méthode présente des avantages pour la conception de méthodes de contrôle.

Enfin, on a montré que le modèle est adapté aux matériaux viscoélastiques, dont les composites en fibre de carbone. Il est compatible avec toute la gamme des modèles de solides viscoélastiques existants. Il faudrait cependant effectuer une validation expérimentale - avec un matériau ayant été précisément caractérisé - afin de confirmer la validité du modèle en milieu atténuant.

TROISIÈME PARTIE :

**PROPAGATION EN MILIEU
INHOMOGÈNE**

Chapitre 5

Formalisme des pinceaux aux rayons courbés

Dans les parties précédentes, nous nous sommes limités au rayonnement des ondes guidées dans des plaques planes, d'épaisseur constante et dont les propriétés mécaniques sont considérées homogènes dans les directions orthogonales à la section du guide d'ondes. Un formalisme de pinceaux modaux a été développé, étudié puis validé. Son intérêt pour la simulation de CND par ondes guidées a été démontré. L'objectif de cette troisième partie est de relâcher les hypothèses faites sur le milieu de propagation afin de définir un formalisme de pinceau généralisé, lorsque cela est possible. Ce chapitre 5 est à ce titre dédié au développement des aspects formels de ce modèle. En partant de la formulation élastodynamique du problème, on verra qu'il est possible de décrire la propagation d'une onde guidée sous l'hypothèse que les variations locales des propriétés du milieu soient assez régulières et lentes. Les rayons des pinceaux ainsi obtenus sont alors des courbes qui suivent la métrique de la plaque dont la détermination devient un enjeu majeur.

5.1. Étude de la propagation d'ondes guidées en régime hautes fréquences

LA PROPAGATION d'ondes élastiques dans des milieux inhomogènes est un sujet largement traité dans la littérature scientifique. En particulier cela a constitué l'objet de nombreuses études dans le domaine de la géophysique pendant la seconde partie du XX^e siècle. Les applications visées furent alors la prédiction de champs sismiques se propageant au sein des différentes couches de la croûte terrestre en prenant en compte les propriétés locales des roches traversées. Des développements ont aussi été réalisés pour les ondes de surfaces comme les ondes de Rayleigh (dispersives car se propageant sur des surfaces courbes) et les ondes de Love. Des ouvrages tels que ceux de ČERVENÝ [84], CHAPMAN [85] et SLAWINSKI [86] traitent de façon très complète l'application de méthodes rayons pour ces cas d'étude. GARDAHAUT a adapté ces modèles pour prédire le rayonnement d'ondes de volumes dans des soudures austénitiques [14]. Les développements qui suivent visent à adapter de manière assez générique ces travaux antérieurs dans le cadre des ondes guidées.

L'équation du mouvement régissant la propagation d'ondes élastiques est l'équation fondamentale de l'élastodynamique. Elle est issue du principe fondamental de la dynamique appliqué à un élément de volume du milieu de propagation dans lequel le champ de contrainte a été substitué par son expression en fonction du tenseur des déformations, obtenue grâce à la loi de Hooke dite généralisée. Le tenseur des déformations dans sa forme linéarisée ne dépend que des variations spatiales du champ de déplacement particulière. De plus, dans le cas d'un guide d'ondes omnidirectionnel (de type plaque) dans l'air, des conditions limites sur chacune des surfaces du guide d'onde permettent un déplacement superficiel libre. Ceci revient à imposer une condition de Dirichlet sur la contrainte qui agit à travers les interfaces du guide. En régime harmonique, on a ainsi l'équation de mouvement suivante :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{u}})) - \omega^2 \rho_0 \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma \\ \boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Gamma \end{cases} \quad \begin{matrix} (5.1.1a) \\ (5.1.1b) \end{matrix}$$

En régime haute fréquence, on peut considérer que les solutions de ce problème décrivant des ondes progressives sont constituées d'une fonction d'amplitude aux variations lentes et d'une fonction de phase aux variations nettement plus rapides. Cette séparation des échelles est une caractéristique très courante en mécanique (et plus particulièrement en mécanique quantique). D'un point de vue mathématique, cela revient à trouver les solutions d'une équation aux dérivées partielles dans laquelle le terme de dérivation d'ordre le plus élevé (ici $\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}))$) est multiplié par un scalaire très petit ($1/\omega^2 \rightarrow 0$ quand $\omega \rightarrow \infty$). Les solutions sont alors données sous la forme d'un développement asymptotique de Wentzel-Kramers-Brillouin-Jeffreys (WKBJ), c'est-à-dire

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, Z) = \hat{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, Z) e^{-\frac{i}{\delta} S(\mathbf{x})} \quad \text{avec} \quad \hat{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, Z) = \sum_{n=0}^N \delta^n \hat{\mathbf{U}}_n(\mathbf{x}, Z) + \mathcal{O}(\delta^{N+1}) \quad (5.1.2)$$

avec \mathbf{x} le vecteur position projeté sur la surface médiane de la plaque et exprimé à travers les coordonnées (contravariantes) $(x^1 \ x^2)^t$ d'un repère normé curviligne y étant associé. Le

paramètre δ est un facteur d'échelle permettant de traiter le problème sous une approximation haute fréquence tout en gardant un comportement d'onde guidée. En effet, dans les configurations utiles pour le CND, les longueurs d'ondes sont globalement du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la plaque. Ainsi pour une plaque de demi-épaisseur constante et fixée $d_\delta = \delta D$ dans le domaine réel Γ , les ondes se propagent à la fréquence angulaire $\omega_\delta = \omega/\delta$. Lorsque δ tend vers zéro, l'épaisseur du guide est aussi petite que la fréquence est grande. Une approximation haute fréquence peut alors être appliquée tout en gardant un produit fréquence \times épaisseur modérément faible. Dans le domaine virtuel Γ_δ de demi-épaisseur D , la coordonnée dans l'épaisseur du guide est $Z = x^3/\delta \in [-D; D]$. En remarquant que $d\Gamma = \delta d\Gamma_\delta$, la formulation variationnelle du problème (5.1.1) s'écrit

$$\int_{\Gamma_\delta} (\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}))^t : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}}) \delta d\Gamma_\delta - \frac{\omega^2}{\delta^2} \int_{\Gamma_\delta} \rho_0 \hat{\mathbf{v}}^t \hat{\mathbf{u}} \delta d\Gamma_\delta = 0 \quad (5.1.3)$$

La solution proposée dans l'équation (5.1.2) est insérée dans cette nouvelle formulation. Le calcul des dérivées spatiales du déplacement fait intervenir la dérivée covariante dont la définition, pour un vecteur \mathbf{X} et par rapport à la coordonnée x^j , est

$$\nabla_j \mathbf{X} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^j} + X^k \Gamma_{jk}^i \right) \mathbf{e}_i, \quad (5.1.4)$$

où les Γ_{jk}^i sont les symboles de Christoffel représentant l'évolution des vecteurs de base obtenus à partir du tenseur métrique. L'application de cette formule au déplacement donne

$$\nabla_j \hat{\mathbf{u}} = \left(\nabla_j \hat{\mathbf{U}} - \frac{i}{\delta} \frac{\partial S}{\partial x^j} \right) e^{-\frac{i}{\delta} S(\mathbf{x})}. \quad (5.1.5)$$

Le détail de $\nabla_j \hat{\mathbf{U}}$ ne sera par la suite pas explicité dans un souci de généralité. Ce terme dépend en effet de la métrique du milieu et son expression ne mène vraisemblablement à des simplifications que dans des cas particuliers. Le tenseur des déformations est alors obtenu. La notation de Voigt permet de passer d'une écriture tensorielle à l'écriture matricielle suivante¹

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}}) = \left[(\mathbf{L}_1 \nabla_1 + \mathbf{L}_2 \nabla_2) + \frac{1}{\delta} \left(\mathbf{L}_3 \frac{\partial}{\partial Z} - i \mathbf{L}_1 \frac{\partial S}{\partial x^1} - i \mathbf{L}_2 \frac{\partial S}{\partial x^2} \right) \right] \hat{\mathbf{U}} e^{-\frac{i}{\delta} S(\mathbf{x})}. \quad (5.1.6)$$

La relation (5.1.3) s'exprime maintenant directement en fonction de $\hat{\mathbf{U}}$ et S . De plus, par linéarité de la connexion ∇_j , on obtient un développement asymptotique de la formulation variationnelle à partir de celui du déplacement. L'épaisseur de la plaque est ensuite discrétisée sur une base d'éléments finis. Sur chaque élément (e), une matrice d'interpolation $\mathbf{N}^{(e)}(Z)$ relie les déplacements $\hat{\mathbf{U}}_n(\mathbf{x}, Z)$ aux déplacements nodaux $\tilde{\mathbf{U}}_n^{(e)}(\mathbf{x})$. Les matrices suivantes sont alors introduites :

¹ Les matrices \mathbf{L}_1 , \mathbf{L}_2 et \mathbf{L}_3 servent à distribuer les termes lors de l'application de la notation de Voigt. Elles sont définies dans l'Annexe A (cas dans lequel le repère est orthonormé). On a alors les correspondances suivantes $\mathbf{L}_1 \equiv \mathbf{L}_x$, $\mathbf{L}_2 \equiv \mathbf{L}_y$ et $\mathbf{L}_3 \equiv \mathbf{L}_z$.

$$\begin{cases} \mathbf{B}_1^{(e)}(Z) = \mathbf{L}_1 \mathbf{N}^{(e)}(Z) & (5.1.7a) \\ \mathbf{B}_2^{(e)}(Z) = \mathbf{L}_2 \mathbf{N}^{(e)}(Z). & (5.1.7b) \\ \mathbf{B}_3^{(e)}(Z) = \mathbf{L}_3 \mathbf{N}_Z^{(e)}(Z) & (5.1.7c) \end{cases}$$

avec $\mathbf{N}_Z^{(e)}$ la dérivée de $\mathbf{N}^{(e)}$ par rapport à Z .

On s'intéresse plus particulièrement aux deux premiers termes du développement limité de $\hat{\mathbf{u}}$. Le calcul du développement de la formulation variationnelle du problème en ses termes dépendants des différentes puissances de δ n'est volontairement pas entièrement explicité afin de ne pas alourdir le propos, d'autant que les relations mathématiques en résultant n'auront que peu d'intérêt pratique par la suite. Cependant, elles permettent d'introduire et de justifier la résolution du problème de la propagation d'ondes dans des guides courbes et inhomogènes par des méthodes de rayons.

Terme d'ordre δ^{-1}

Chacun des termes du développement asymptotique de (5.1.3) de puissance négative s'annule lorsque $\delta \rightarrow 0$. Intéressons-nous en premier lieu au terme prépondérant, c'est-à-dire celui d'ordre δ^{-1} . Pour chaque élément (e) , on a

$$\left\{ \int_{(e)} \left(\mathbf{B}_3 + i\mathbf{B}_1 \frac{\partial S}{\partial x^1} + i\mathbf{B}_2 \frac{\partial S}{\partial x^2} \right)^t \mathbf{C} \left(\mathbf{B}_3 - i\mathbf{B}_1 \frac{\partial S}{\partial x^1} - i\mathbf{B}_2 \frac{\partial S}{\partial x^2} \right) dZ \right. \\ \left. - \omega^2 \int_{(e)} \rho \mathbf{N}^t \mathbf{N} dz \right\} \tilde{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{0} \quad (5.1.8)$$

Ces relations matricielles sont assemblées entre elles pour obtenir un système d'équations sur toute l'épaisseur de la plaque. On définit alors les matrices de rigidité \mathbf{K}_{ij} et la matrice de masse \mathbf{M} suivantes

$$\left\{ \mathbf{K}_{ij} = \bigcup_{e=1}^{N_e} \int_{(e)} \left(\mathbf{B}_i^{(e)} \right)^t \mathbf{C}^{(e)} \mathbf{B}_j^{(e)} dZ \right. \quad (5.1.9a)$$

$$\left. \mathbf{M} = \bigcup_{e=1}^{N_e} \int_{(e)} \rho_0 \left(\mathbf{N}^{(e)} \right)^t \mathbf{N}^{(e)} dZ \right. \quad (5.1.9b)$$

En remarquant que S est le terme de phase du déplacement, ses variations spatiales sont assimilables à un vecteur d'onde local

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} S. \quad (5.1.10)$$

L'opérateur $\nabla_{\mathbf{x}}$ correspond au gradient suivant les composantes x^1 et x^2 de la position. De la même façon, $\nabla_{\mathbf{k}}$ représentera le gradient par rapport aux composantes spectrales. Les composantes du vecteur d'onde k_1 et k_2 sont insérées dans l'équation (5.1.8). On obtient alors

$$\{\mathbf{K}_{33} + k_1^2 \mathbf{K}_{11} + k_2^2 \mathbf{K}_{22} + ik_1(\mathbf{K}_{13} - \mathbf{K}_{13}^t) + ik_2(\mathbf{K}_{23} - \mathbf{K}_{23}^t) + k_1 k_2(\mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{12}^t) - \omega^2 \mathbf{M}\} \tilde{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{0}, \quad (5.1.11)$$

qui correspond exactement à la relation (A.1.16), utilisée pour le calcul des modes guidés par la méthode SAFE à la pulsation ω . La seule différence fondamentale avec le cas des guides d'ondes homogènes vient du fait que les solutions modales dépendent de la position. Ainsi, notre problème haute fréquence revient à dire que, à l'ordre le plus élevé, la propagation des ondes guidées respecte en tout point de la plaque la relation de dispersion locale

$$\boxed{\Omega_m(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \omega} \quad (5.1.12)$$

dans laquelle la pulsation ω est fixée alors que la position \mathbf{x} et le vecteur d'onde $\mathbf{k}(\mathbf{x})$ varient et sont, en dehors des conditions initiales, à déterminer. La relation (5.1.12) est usuellement nommée *équation eikonale* [87]. En optique, elle régit la trajectoire des rayons lumineux. Pour les ondes élastiques de volume, elle est généralement définie en fonction de la vitesse de phase locale $c(\mathbf{x}) = \omega/k$ d'un mode longitudinal ou transverse, suivant le cas étudié. Pour les modes guidés, on voit qu'elle est définie séparément pour chacun des modes. Les variations des propriétés du milieu doivent alors être suffisamment régulières et lentes pour que Ω_m soit elle aussi régulière. Dans le cas contraire, il n'est pas possible de garantir l'obtention de sa solution sous forme de rayons associés à un unique mode guidé. La résolution de l'équation eikonale sous forme de rayons est détaillée dans le § 5.2.

Enfin, les déplacements nodaux $\tilde{\mathbf{U}}_0$ sont des vecteurs propres du système SAFE local. Si $\mathbf{W}_m^{\mathbf{x}, \mathbf{k}}(z)$ est la déformée modale du mode m à la position \mathbf{x} , alors

$$\hat{\mathbf{U}}_0(\mathbf{x}, Z) = \hat{U}_m(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{W}_m^{\mathbf{x}, \mathbf{k}}(z)}{\|\mathbf{W}_m^{\mathbf{x}, \mathbf{k}}(z)\|} \quad (5.1.13)$$

où \hat{U}_m est une amplitude complexe qui varie en fonction de la position. À ce stade, rien n'est connu sur \hat{U}_m et ses variations.

Terme d'ordre δ^0

Travaillons maintenant sur le terme suivant, celui d'ordre 0. Les matrices élémentaires sont assemblées comme indiqué précédemment et on substitue les variations spatiales de $S(\mathbf{x})$ par les composantes du vecteur d'onde. Une relation faisant intervenir les déplacements nodaux $\tilde{\mathbf{U}}_0$ et $\tilde{\mathbf{U}}_1$ est alors obtenue. Cette relation, qui fait aussi intervenir les dérivées covariantes de ces déplacements (que l'on s'était gardé d'explicitier) est la suivante :

$$\begin{aligned}
& \left\{ i \left(\nabla_1(\tilde{\mathbf{V}}^t) \mathbf{K}_{13} \tilde{\mathbf{U}}_0 - \tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{K}_{13}^t \nabla_1(\tilde{\mathbf{U}}_0) \right) + i \left(\nabla_2(\tilde{\mathbf{V}}^t) \mathbf{K}_{23} \tilde{\mathbf{U}}_0 - \tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{K}_{23}^t \nabla_2(\tilde{\mathbf{U}}_0) \right) \right. \\
& \quad + k_1 \left(\nabla_1(\tilde{\mathbf{V}}^t) \mathbf{K}_{11} \tilde{\mathbf{U}}_0 + \tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{K}_{11}^t \nabla_1(\tilde{\mathbf{U}}_0) \right) \\
& \quad + k_2 \left(\nabla_2(\tilde{\mathbf{V}}^t) \mathbf{K}_{22} \tilde{\mathbf{U}}_0 + \tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{K}_{22}^t \nabla_2(\tilde{\mathbf{U}}_0) \right) \\
& \quad + k_1 \left(\nabla_2(\tilde{\mathbf{V}}^t) \mathbf{K}_{12} \tilde{\mathbf{U}}_0 + \tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{K}_{12}^t \nabla_2(\tilde{\mathbf{U}}_0) \right) \\
& \quad \left. + k_2 \left(\nabla_1(\tilde{\mathbf{V}}^t) \mathbf{K}_{12} \tilde{\mathbf{U}}_0 + \tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{K}_{12}^t \nabla_1(\tilde{\mathbf{U}}_0) \right) \right\} \\
& - i \tilde{\mathbf{V}}^t \{ \mathbf{K}_{33} + k_1^2 \mathbf{K}_{11} + k_2^2 \mathbf{K}_{22} + i k_1 (\mathbf{K}_{13} - \mathbf{K}_{13}^t) \\
& + i k_2 (\mathbf{K}_{23} - \mathbf{K}_{23}^t) + k_1 k_2 (\mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{12}^t) - \omega^2 \mathbf{M} \} \tilde{\mathbf{U}}_1 = 0.
\end{aligned} \tag{5.1.14}$$

Si l'on prend $\mathbf{v} = -\mathbf{N} \tilde{\mathbf{U}}_0 e^{\frac{i}{\delta} S(\mathbf{x})}$ qui est un vecteur propre (à gauche) de l'équation (5.1.11), alors on peut remarquer que le membre porté par $\tilde{\mathbf{U}}_1$ dans l'équation précédente s'annule. De plus, on pourrait montrer que :

$$\begin{cases} \nabla_i \left(\tilde{\mathbf{U}}_0^t (\mathbf{K}_{ij} + \mathbf{K}_{ji}) \tilde{\mathbf{U}}_0 \right) = \nabla_i \left(\tilde{\mathbf{U}}_0^t \right) \mathbf{K}_{ij} \tilde{\mathbf{U}}_0 + \tilde{\mathbf{U}}_0^t \mathbf{K}_{ji} \nabla_i(\tilde{\mathbf{U}}_0) \\ \nabla_i \left(\tilde{\mathbf{U}}_0^t (\mathbf{K}_{i3} - \mathbf{K}_{3i}) \tilde{\mathbf{U}}_0 \right) = \nabla_i \left(\tilde{\mathbf{U}}_0^t \right) \mathbf{K}_{i3} \tilde{\mathbf{U}}_0 - \tilde{\mathbf{U}}_0^t \mathbf{K}_{3i} \nabla_i(\tilde{\mathbf{U}}_0) \end{cases} \tag{5.1.15}$$

Une relation remarquablement simple est alors obtenue en ne prenant que le module de l'équation de transport [88]. Là encore, les calculs intermédiaires ne sont pas détaillés, la finalité du résultat souhaitée étant explicative et non pratique. On reconnaît l'expression de gradient (par rapport à \mathbf{k}) de l'équation eikonale. L'équation de transport devient alors

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(|\hat{\mathcal{U}}_m(\mathbf{x})|^2 \nabla_{\mathbf{k}} \Omega_m(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \right) = 0. \tag{5.1.16}$$

De plus, $\nabla_{\mathbf{k}} \Omega_m(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ s'identifie à la vitesse de groupe \mathbf{V}_g . Afin de simplifier le problème, plaçons-nous dans un milieu non atténuant. La vitesse de groupe est ainsi égale à la vitesse d'énergie \mathbf{V}_e . Finalement, on obtient :

$$\boxed{\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(|\hat{\mathcal{U}}_m(\mathbf{x})|^2 \mathbf{V}_e \right) = 0.} \tag{5.1.17}$$

Ce résultat est intéressant car il démontre un lien fort entre variations d'amplitude et vitesse d'énergie. En fait, l'évolution de l'amplitude d'une onde guidée suit le chemin d'énergie de cette onde. Sans cela il ne serait pas possible d'évaluer l'amplitude de $\hat{\mathbf{u}}$ par une méthode de pinces, qui consiste à confiner l'énergie émise par la source entre deux rayons proches l'un de l'autre. Afin de calculer $\hat{\mathcal{U}}_m(\mathbf{x})$ dans le cas du champ rayonné par une excitation ponctuelle, il suffit alors déterminer le trajet d'un rayon paraxial divergeant d'une solution de l'équation eikonale. Ceci est traité dans le § 5.3.

5.2. Détermination des trajets d'énergie

5.2.1. Établissement du système de tracé du rayon axial

Tout d'abord, nous allons chercher à résoudre l'équation eikonale. Nous verrons alors que ses solutions permettent de définir la notion de rayon axial d'un pinceau en milieu inhomogène et pour les plaques courbes. La méthode permettant de la résoudre sous forme de trajets consiste à la considérer sous sa forme hamiltonienne. À partir de la relation de dispersion (5.1.12), on définit l'Hamiltonien \mathcal{H}_m par :

$$\mathcal{H}_m(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \Omega_m(\mathbf{x}, \mathbf{k}) - \omega. \quad (5.2.1)$$

On remarque que l'équation eikonale $\mathcal{H}_m(\mathbf{x}, \mathbf{k} = \nabla_{\mathbf{x}}S) = 0$ est de type Hamilton-Jacobi, la phase $S(\mathbf{x})$ jouant le rôle d'une action. L'équation eikonale se résout dans l'espace des phases $(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \in \mathbb{R}^4$ selon les équations canoniques du mouvement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \nabla_{\mathbf{k}}\mathcal{H}_m(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \\ \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{H}_m(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \end{array} \right. \quad (5.2.2a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \nabla_{\mathbf{k}}\mathcal{H}_m(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \\ \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{H}_m(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \end{array} \right. \quad (5.2.2b)$$

Puisque cette étude se situe dans le domaine fréquentiel, il n'est pas naturel d'explicitier la formulation finale en fonction du temps t . Utilisons plutôt une unité de distance en définissant l'abscisse curviligne ρ suivant la relation $d\rho/dt = v_e$. Après avoir paramétré le système (5.2.2) en fonction de ρ , les solutions de l'équation eikonale sont obtenues sous la forme de bi-caractéristiques $(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{k}(\rho))$ de l'espace des phases. La projection de ces solutions dans l'espace physique des positions $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ correspond aux trajets d'énergie, aussi nommés rayons axiaux, suivis par le mode m pour chacune des conditions initiales $(\mathbf{x}_0, \mathbf{k}_0)$ vérifiant $\mathcal{H}_m(\mathbf{x}_0, \mathbf{k}_0) = 0$. Le système de tracé des rayons axiaux (TRA) décrivant le comportement local de ces derniers s'écrit finalement :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{x}}{d\rho} = \frac{1}{v_e} \nabla_{\mathbf{k}}\mathcal{H}_m(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \\ \frac{d\mathbf{k}}{d\rho} = -\frac{1}{v_e} \nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{H}_m(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \end{array} \right.} \quad (5.2.3a)$$

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{x}}{d\rho} = \frac{1}{v_e} \nabla_{\mathbf{k}}\mathcal{H}_m(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \\ \frac{d\mathbf{k}}{d\rho} = -\frac{1}{v_e} \nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{H}_m(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \end{array} \right.} \quad (5.2.3b)$$

La première équation décrit le fait que le rayon axial est tangent à la direction d'énergie du mode pour tout $\rho \geq 0$. Elle donne également cette direction d'énergie ainsi que $v_e = \|\nabla_{\mathbf{k}}\mathcal{H}_m(\mathbf{x}, \mathbf{k})\|$. La seconde détermine l'évolution de la direction de phase le long du rayon axial. Ces deux relations sont couplées et doivent être résolues simultanément.

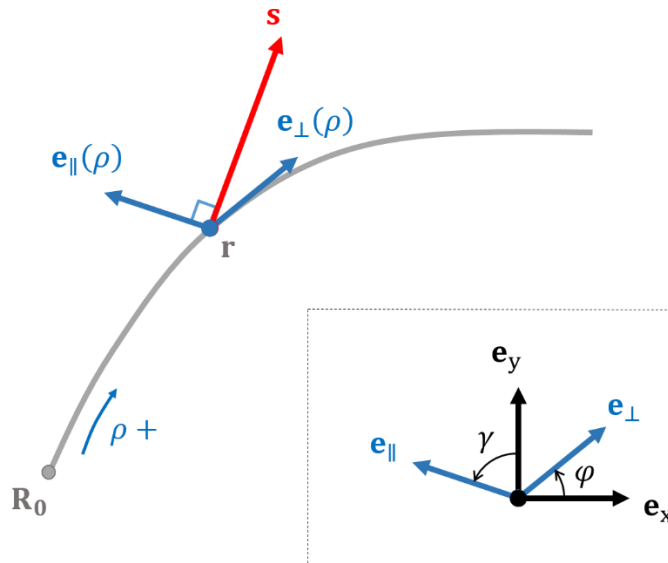


Figure 5.1. Représentation schématique d'un rayon axial dans une plaque plane inhomogène.

Les équations d'Hamilton permettent également de calculer le temps de vol $T(\rho)$. En effet, une troisième équation canonique stipule que $dS/dt = \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} \mathcal{H}_m(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_e$. Si l'on intègre cette équation sur la longueur parcourue par le rayon axial, on obtient :

$$\hat{\vartheta}_m(\rho) = -S(\rho) = - \int_{\rho'=0}^{\rho} \mathbf{k}(\rho') \cdot \mathbf{e}_{\perp}(\rho') d\rho', \quad (5.2.4)$$

avec $\hat{\vartheta}_m$ la notation choisie dans les chapitres précédents pour ce terme de phase. Cette intégrale peut être calculée après avoir résolu le (TRA). Elle fait intervenir l'ensemble des caractéristiques des solutions de ce dernier, c'est-à-dire aussi bien le rayon dans l'espace physique que sa description dans l'espace spectral.

En milieu inhomogène et pour les plaques courbes, la résolution du (TRA) permet donc d'obtenir les trajets d'énergie d'un mode guidé sous la forme de courbes du plan médian de la plaque. Cependant, pour que ces trajets existent, il faut que Ω_m soit de classe C^1 sur \mathbb{R}^4 . Ainsi, les variations des propriétés inhomogènes doivent être continues et suffisamment lentes pour que, d'un point de la plaque à un autre, l'évolution des caractéristiques des modes guidés soit progressive. Les performances numériques du modèle dépendent ainsi fortement de la façon dont Ω_m est obtenue. Dans le cas le plus général, il est nécessaire d'effectuer un calcul de modes en chacun des points de la plaque et pour chaque direction du vecteur d'onde possible. Or, les variations spatiales de la relation de dispersion sont supposées régulières et lentes. Il est alors possible de l'évaluer sur une grille de positions régulière puis de procéder par interpolation. Cependant, cette solution reste coûteuse et doit être évitée lorsque la situation permet de simplifier le problème. Nous verrons en effet dans le chapitre 6 que certains cas d'applications ne demandent que le calcul des modes en un point unique de la plaque. En conclusion, il n'existe pas de méthode qui soit à la fois générique et performante pour décrire la relation de dispersion locale. L'implémentation du (TRA) dépendra donc des cas d'application visés.

5.2.2. Résolution numérique par un schéma itératif

En règle générale, le trajet des rayons axiaux ne peut pas être obtenu analytiquement. Il est alors fait appel à un schéma numérique qui résout le (TRA) par itérations successives sur une abscisse curviligne ρ discrétisée. Le (TRA) revient à résoudre un système d'équations différentielles ordinaires d'inconnue $\mathbf{y}(\rho) \in \mathbb{R}^4$ avec pour condition initiale le point $\mathbf{y}^{(0)}$ se situant sur l'hypersurface $\mathcal{H}_m = 0$. Le problème se présente alors sous la forme vectorielle :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{d\rho} = \mathbf{f}(\rho, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(\rho_0) = \mathbf{y}^{(0)}, \end{cases} \quad (5.2.5)$$

où \mathbf{y} et \mathbf{f} sont définies par

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}(\rho, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}_m}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \mathcal{H}_m}{\partial y_4} \\ -\frac{\partial \mathcal{H}_m}{\partial y_1} \\ -\frac{\partial \mathcal{H}_m}{\partial y_2} \end{pmatrix}. \quad (5.2.6)$$

Les méthodes de Runge-Kutta sont classiquement utilisées pour la résolution de telles équations. Le principe consiste à utiliser une formule de quadrature pour évaluer les valeurs de $\mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{y}(\rho_n)$ pour $N + 1$ valeurs discrètes de l'abscisse curviligne, notées ρ_n , espacées d'un pas $\Delta\rho$. Le couple $(\rho_n ; \mathbf{y}^{(n)})$ est alors évalué pas-à-pas par la relation de récurrence :

$$\forall n \in [0 ; N - 1], \quad \begin{cases} \mathbf{y}^{(n+1)} = \mathbf{y}^{(n)} + \Delta\rho \sum_{i=1}^p b_i \mathbf{k}_i \\ \rho_{n+1} = \rho_n + \Delta\rho. \end{cases} \quad (5.2.7)$$

Si la méthode est explicite, les \mathbf{k}_i valent

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{f} \left(\rho_n + c_i \Delta\rho, \mathbf{y}^{(n)} + \Delta\rho \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \mathbf{k}_j \right). \quad (5.2.8)$$

Les différents coefficients a_{ij} , b_i et c_i sont donnés dans le *tableau de Butcher* [89] de la méthode ; ils sont donc déterminés par le choix de la méthode et de son ordre. Le calcul de chacun des \mathbf{k}_i requiert d'évaluation des quatre dérivées partielles premières de l'hamiltonien. Les relations de dispersion étant obtenues sous forme numérique – par la méthode SAFE – ces dérivées sont approchées par des différences finies. Pour une méthode d'ordre p , il faut donc évaluer $4p$ différences finies à chaque pas.

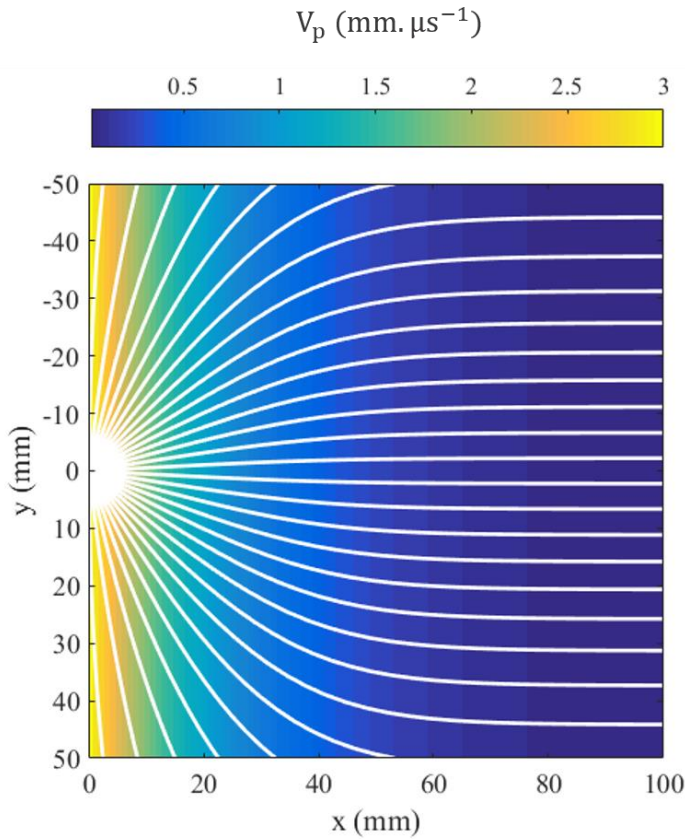


Figure 5.2. Tracé de rayons dans une plaque plane localement isotrope pour un mode suivant la loi de vitesse $v_p(x_1, x_2) = v_{p,0} e^{\alpha x_1}$ avec $\alpha < 0$.

Après avoir testé plusieurs méthodes d'ordres différents, la méthode de Dormand-Prince a été choisie [90,91]. Il s'agit d'une méthode explicite permettant d'obtenir deux solutions : la première d'ordre 4 et la seconde d'ordre 5. La fonction \mathbf{f} est évaluée en 7 points par pas, ces points étant communs pour l'ordre 4 et l'ordre 5. De plus, le dernier \mathbf{k}_i d'un pas est égal au premier du pas suivant. Cette propriété est désignée dans la littérature anglophone par l'expression *First Same As Last* (FSAL) ; elle permet de légèrement limiter le nombre d'évaluations de \mathbf{f} . Seule la solution d'ordre 5 est gardée, la différence entre cette dernière et la solution d'ordre 4 pouvant être utilisée pour estimer l'erreur commise (à l'ordre 4). La méthode de Dormand-Prince est donc particulièrement adaptée à la mise en place d'un algorithme d'adaptation du pas. Un niveau de tolérance sur l'erreur admissible est fixé arbitrairement. Cette tolérance est notée ε_{tol} . Au pas n , la solution du (TRA) est obtenue avec une erreur estimée ε_{n+1} . Si $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_{tol}$, la solution est gardée et on passe au pas suivant. Dans le cas contraire, on reprend le calcul avec une largeur de pas plus faible. Dans tous les cas, le calcul suivant est réalisé avec la largeur de pas actualisée :

$$\Delta\rho \leftarrow 0.9 \cdot \Delta\rho \cdot \min\left(\max\left(\left(\frac{\varepsilon_{tol}}{\varepsilon_{n+1}}\right)^{1/5}; \alpha\right); \beta\right). \quad (5.2.9)$$

En principe, l'erreur attendue à l'essai suivant devrait se situer autour de $0.9 \varepsilon_{tol}$. La dénomination *largeur de pas optimale* est alors souvent utilisée pour désigner cette méthode d'adaptation. Les paramètres α et β permettent de restreindre les variations de $\Delta\rho$ afin d'éviter qu'il augmente trop – au risque de rater des variations très localisées de \mathbf{y} – ou que, *a contrario*,

il soit spontanément réduit avant même que ces zones soient atteintes. Des valeurs usuelles de ces paramètres sont $\alpha = 0.3$ et $\beta = 2$.

Les méthodes de Runge-Kutta sont aisément vectorisables. Cet aspect est d'un grand intérêt dans le cadre de cette étude car, dans la plupart des cas, on cherche à déterminer simultanément tout un ensemble de rayons. Il suffit alors d'assembler au sein d'un vecteur $\mathbf{Y}^{(n)}$ chacun des vecteurs $\mathbf{y}^{(n),i}$ correspondants au i -ème rayon et de modifier \mathbf{f} en conséquence afin de décrire le système (5.2.5) avec une fonction $\mathbf{F}(\rho, \mathbf{Y}^{(n)})$. Enfin, la méthode de Dormand-Prince est la méthode utilisée par défaut par la fonction ODE45 de MATLAB, ainsi que dans de nombreux autres solveurs. Cependant, ces implémentations ne sont pas particulièrement adaptées à notre problème. En effet, elles calculent des solutions sur des intervalles de longueur donnée. Or la longueur d'un rayon reliant un point source à un point de calcul n'est pas connue *a priori*. Ce schéma numérique a donc été ré-implémenté avec une condition d'arrêt satisfaisant les exigences du problème traité.

5.2.3. Cas des milieux isotropes homogènes

Lorsque le milieu de propagation est localement isotrope, il n'est plus utile de considérer de manière indépendante les coordonnées du vecteur d'onde au sein de la relation de dispersion. En effet, cette dernière est alors indépendante de la direction du vecteur d'onde. On pose alors :

$$\tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}, k) \equiv \Omega_m(\mathbf{x}, \mathbf{k}). \quad (5.2.10)$$

La lenteur s est définie, en fonction de ces composantes, par :

$$k^2 = g^{ij} k_i k_j, \quad (5.2.11)$$

où les g^{ij} sont les coefficients contravariants du tenseur métrique \mathbf{G} . En partant de cette définition, on montre que les dérivées partielles premières de k ont pour expression :

$$\frac{\partial k}{\partial k_i} = k^{-1} g^{ij} k_j = k^{-1} k^i, \quad (5.2.12a)$$

$$\left(\frac{\partial k}{\partial x^i} \right)_{k_1, k_2} = (2k)^{-1} \frac{\partial g^{mn}}{\partial x^i} k_m k_n. \quad (5.2.12b)$$

Il est alors possible de réécrire le (TRA) en détaillant le calcul de $dx^i/dt = (\partial \tilde{\Omega}_m / \partial k)(\partial k / \partial k_i)$ et $dk_i/dt = -(\partial \tilde{\Omega}_m / \partial k)(\partial k / \partial x^i) - (\partial \tilde{\Omega}_m / \partial k)(\partial k / \partial x^i)_{k_1, k_2}$. On obtient finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx^i}{d\rho} = k^{-1} k^i \end{array} \right. \quad (5.2.13a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dk_i}{d\rho} = \frac{\partial k}{\partial x^i} - (2k)^{-1} \frac{\partial g^{mn}}{\partial x^i} k_m k_n. \end{array} \right. \quad (5.2.13b)$$

L'équation (5.2.13b) indique que les variations du vecteur d'onde sont régies par deux phénomènes. (i) Les variations locales de la relation de dispersion influent à la fois sur la norme et la direction de \mathbf{k}^1 ; cela est représenté par le terme $\partial k / \partial x^i$. (ii) La métrique du milieu intervient également à travers les variations spatiales du tenseur métrique. Si le milieu est homogène et de courbure relativement faible, on a alors $\partial k / \partial x^i = 0$. Dans ce cas, le nombre d'équations du (TRA) peut être réduit. En effet la vitesse étant constante (en norme) il suffit de déterminer sa direction, qui est aussi celle de l'énergie. On multiplie l'équation (5.2.13a) par \mathbf{G} et on la dérive suivant ρ . Les dérivées spatiales des composantes covariantes du vecteur d'onde sont données par la relation (5.2.13b). Le tenseur métrique ne dépendant pas explicitement des dérivées de la position, on a $dg_{ki}/d\rho = (dg_{ki}/dx^j)(dx^j/d\rho)$. En utilisant les propriétés de symétrie du tenseur métrique et la nullité de sa dérivée covariante, puis en multipliant l'équation obtenue par \mathbf{G}^{-1} , on obtient finalement :

$$\boxed{\frac{d^2 x^m}{d\rho^2} + \Gamma_{ij}^m \frac{dx^i}{d\rho} \frac{dx^j}{d\rho} = 0.} \quad (5.2.14)$$

On reconnaît alors l'équation des géodésiques. En milieu isotrope et en l'absence d'inhomogénéités, les trajets d'énergie correspondent donc aux géodésiques² reliant un point source à un point de calcul. Des algorithmes optimisés pour la recherche de géodésiques [93,94] peuvent alors être utilisés afin de résoudre le (TRA) en des temps plus courts qu'avec des méthodes de Runge-Kutta. Dans les cas de géométries de plaques simples, les trajectoires des rayons axiaux sont connues analytiquement. C'est le cas du cylindre pour lequel les géodésiques sont des portions d'hélices (voir Figure 5.3) ou de la sphère pour laquelle les géodésiques sont des arcs du grand cercle. Ce cas particulier de résolution du (TRA) s'avère très utile pour la simulation d'états sains de pièces aéronautiques, par exemple de nacelles ou d'autres pièces de fuselage. Il est aussi adapté à la recherche de rayons dans le cadre de la tomographie de pièces tubulaires. Le tube est d'ailleurs un parfait exemple de l'existence de plusieurs trajets en champ directs reliant le même point source et le même point de calcul. Dans ce cas il en existe une infinité, deux par tour qu'effectue le rayon autour du tube. En effet, pour un tube d'axe x et de rayon R , les rayons axiaux ayant effectué n tours sont paramétrés en coordonnées cylindriques $(r ; \theta ; x)$ par le système :

$$\forall \tau \in]-\pi ; \pi[, \quad \begin{cases} r = R \\ \theta(\tau) = \varepsilon(\tau + 2\pi n) + \theta_0, \\ x(\tau) = \alpha(\tau + 2\pi n) + x_0 \end{cases} \quad (5.2.14)$$

¹ Dans le cas où le rapport entre le rayon de courbure de la plaque et son épaisseur est supérieur à 10 [92], les caractéristiques des modes se propageant dans cette plaque sont assimilables à ceux se propageant dans une plaque plane de même épaisseur. Le caractère local de la relation de dispersion est alors uniquement dû aux inhomogénéités élastiques. Dans le cas contraire, la courbure locale doit être intégrée au calcul des modes.

² Ceci est en général faux en milieu anisotrope. Par exemple, dans le cas d'un composite fibré, si l'orientation des fibres par rapport aux vecteurs de base est variable alors le trajet d'énergie n'est pas nécessairement une géodésique.

avec $\varepsilon = 1$ ou -1 et $(R; \theta_0; x_0)$ les coordonnées cylindriques du point source. Pour chacune des valeurs de ε , la valeur de α est obtenue en résolvant les conditions $\theta(\tau_r) = \theta_r + 2\pi\varepsilon n$ et $x(\tau_r) = x_r$ où $(R; \theta_r; x_r)$ sont les coordonnées cylindriques du point de calcul.

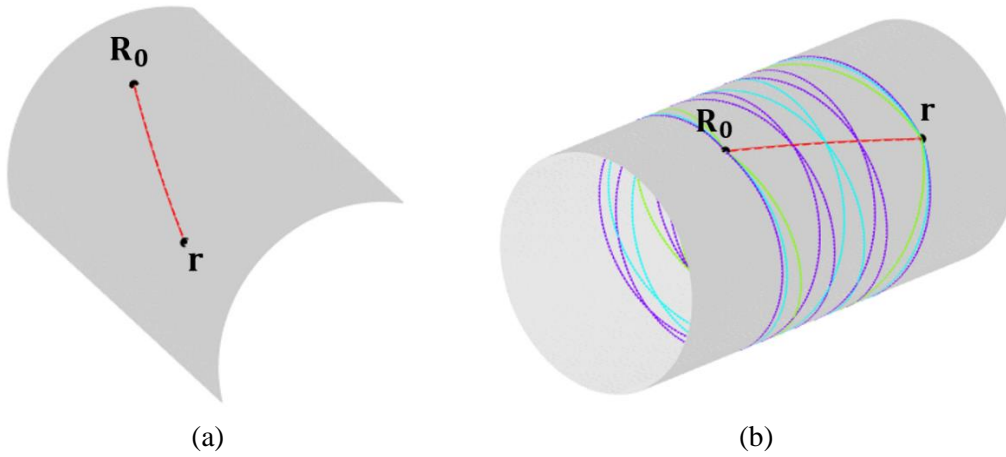


Figure 5.3. Trajets d'énergie dans les plaques de géométrie cylindrique. Portion de cylindre (a) et cylindre complet (b) [rouge : 0 tours, vert : 1 tour, bleu : 2 tours, violet : 3 tours.

En pratique, le nombre de tours à considérer pour le calcul du champ de déplacement est tronqué selon des considérations sur l'amplitude associée à chaque rayon. En effet, la distance de propagation augmente avec le nombre de tours, en conséquence l'amplitude décroît jusqu'à devenir négligeable.

5.3. Évolution de l'amplitude le long du rayon axial

Afin d'évaluer l'évolution de l'amplitude de l'onde le long d'un rayon axial, on cherche à déterminer un rayon paraxial à ce dernier. À partir du (TRA), un système de tracé du rayon paraxial (TRP) est alors obtenu.

5.3.1. Système de tracé du rayon paraxial en coordonnées curvilignes

Un rayon paraxial est, par définition, un rayon qui diverge infinitésimalement de son rayon axial tout en ayant la même origine. Ainsi, un rayon paraxial est une solution de l'équation eikonale dont les conditions initiales ont subi une faible perturbation par rapport à celles du rayon axial qui lui est associé. Il existe plusieurs façons de définir cette perturbation. Cependant les rayons d'un pinceau suivent la direction d'un mode guidé, il est donc naturel de l'introduire sous la forme d'un écart infinitésimal de direction d'énergie. Cet écart est noté $\delta\varphi_0$. Pour un rayon axial, noté Λ , ayant pour conditions initiales $(\mathbf{x}_0^\Lambda, \mathbf{k}_0^\Lambda)$, les conditions initiales d'un rayon paraxial $(\mathbf{x}_0, \mathbf{k}_0)$ sont alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^\Lambda \\ \mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_0^\Lambda + \left. \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \varphi_0} \right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} \delta \varphi_0 \end{array} \right. \quad (5.3.1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^\Lambda \\ \mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_0^\Lambda + \left. \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \varphi_0} \right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} \delta \varphi_0 \end{array} \right. \quad (5.3.1b)$$

Les perturbations $-\delta\varphi_0$, $2\delta\varphi_0$, ou encore l'écart de direction de phase $\delta\gamma_0$ mènent elles aussi à des rayons paraxiaux. De plus, certaines méthodes de rayons font appel à des rayons non confondus à l'origine [84]. Cet aspect n'est pas traité ici. Au final, le modèle ne dépend pas du choix du rayon paraxial. En effet, plus que les écarts dus à la perturbation, c'est leur évolution qui est étudiée. Or, comme nous le verrons plus tard, $\delta\varphi_0$ est factorisé de façon à ce qu'il n'intervienne pas dans les termes d'évolution.

Les équations composant le (TRA) sont dérivées partiellement par rapport à φ_0 afin d'obtenir des relations différentielles traduisant le comportement de \mathbf{x} et \mathbf{s} au voisinage du rayon axial pour les conditions initiales (5.3.1). La commutativité de $\partial/\partial\varphi_0$ et de d/dt est utilisée. On obtient alors le *système de tracé dynamique de rayon* (TDR) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \varphi_0} \right)_t = \frac{\partial^2 \mathcal{H}_m}{\partial x^j \partial k_i} \left(\frac{\partial x^j}{\partial \varphi_0} \right)_t + \frac{\partial^2 \mathcal{H}_m}{\partial k_j \partial k_i} \left(\frac{\partial k_j}{\partial \varphi_0} \right)_t \end{array} \right. \quad (5.3.2a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial k_i}{\partial \varphi_0} \right)_t = - \frac{\partial^2 \mathcal{H}_m}{\partial x^j \partial x^i} \left(\frac{\partial x^j}{\partial \varphi_0} \right)_t - \frac{\partial^2 \mathcal{H}_m}{\partial k_j \partial x^i} \left(\frac{\partial k_j}{\partial \varphi_0} \right)_t \end{array} \right. \quad (5.3.2b)$$

Ce dernier peut être paramétré en fonction de l'abscisse curviligne du rayon axial en divisant chacun de ses membres par v_e . De plus en posant $X_i = (\partial x^i / \partial \varphi_0)_\rho$ et $K_i^{(x)} = (\partial k_i / \partial \varphi_0)_\rho$, qui sont les inconnues du (TDR), ce dernier s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{d}{d\rho} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{K}^{(x)} \end{pmatrix} = \frac{1}{v_e} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(x)} & \mathbf{B}^{(x)} \\ -\mathbf{C}^{(x)} & -\mathbf{D}^{(x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{K}^{(x)} \end{pmatrix}. \quad (5.3.3)$$

où les matrices $\mathbf{A}^{(x)}$, $\mathbf{B}^{(x)}$, $\mathbf{C}^{(x)}$ et $\mathbf{D}^{(x)}$ contiennent les dérivées secondes croisées de l'hamiltonien, soit :

$$\mathbf{A}^{(x)} = \nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{k}} \mathcal{H}_m \quad , \quad \mathbf{B}^{(x)} = \nabla_{\mathbf{k}} \nabla_{\mathbf{k}} \mathcal{H}_m \quad , \quad (5.3.4a-b)$$

$$\mathbf{C}^{(x)} = \nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{H}_m \quad , \quad \mathbf{D}^{(x)} = \nabla_{\mathbf{k}} \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{H}_m. \quad (5.3.4c-d)$$

D'après leur définition, ces matrices vérifient les relations de symétrie $B_{ij}^{(x)} = B_{ji}^{(x)}$, $C_{ij}^{(x)} = C_{ji}^{(x)}$ et $A_{ij}^{(x)} = D_{ji}^{(x)}$.

D'autre part, les solutions du (TDR) se doivent de suivre la même relation de dispersion que le rayon axial ; elles sont alors également solution de l'équation eikonale. Concrètement, l'équation $\partial \mathcal{H}_m / \partial \varphi_0 = 0$ doit être vérifiée. Les quantités X_i et $K_i^{(x)}$ doivent alors respecter la relation de contrainte

$$\left(\frac{d\mathbf{x}}{d\rho}\right)^t \mathbf{K}^{(x)} - \left(\frac{d\mathbf{k}}{d\rho}\right)^t \mathbf{X} = 0 \quad (5.3.5)$$

pour toute valeur de ρ . En réalité, dès lors que les conditions initiales vérifient la relation de contrainte, la résolution du (TDR) assure le respect de celle-ci le long du rayon.

À partir du (TDR), on obtient les écarts de position et de vecteur d'onde entre le rayon paraxial et le rayon axial, notées $\delta\mathbf{x} = (\partial\mathbf{x}/\partial\varphi_0)_\rho \delta\varphi_0$ et $\delta\mathbf{k} = (\partial\mathbf{k}/\partial\varphi_0)_\rho \delta\varphi_0$. Les coordonnées $(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{k}(\rho))$ du rayon paraxial sont alors déterminées à partir des solutions du (TRA) et du (TDR) selon les relations :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(\rho) = \mathbf{x}^\Lambda(\rho) + \delta\mathbf{x}(\rho) \\ \mathbf{k}(\rho) = \mathbf{k}^\Lambda(\rho) + \delta\mathbf{k}(\rho) \end{cases} \quad (5.3.6a)$$

$$(5.3.6b)$$

Les conditions initiales de $\delta\mathbf{x}$ et $\delta\mathbf{k}$ vérifient alors elles aussi la relation de contrainte. En pratique, il n'est pas nécessaire de déterminer explicitement le rayon paraxial. La résolution du (TDR) à elle seule permet de déterminer le comportement du rayon axial et, de plus, est indépendante du choix de la perturbation initiale.

5.3.2. Système de tracé du rayon paraxial en coordonnées rayon-centrées

Si le (TRP) peut tout-à-fait être résolu dans le repère de la plaque, ce choix de repère n'est en revanche pas le plus adapté lorsqu'il s'agit de déterminer des écarts paraxiaux avec le rayon axial. Il semble alors plus pertinent de le résoudre dans le repère du rayon axial $(\mathbf{e}_\perp(\rho), \mathbf{e}_\parallel(\rho))$. Les coordonnées d'un rayon paraxial, notées x'^1 et x'^2 dans le repère de la plaque, s'expriment en fonction des coordonnées du rayon axial comme :

$$\mathbf{x}(\rho, \delta\zeta^\parallel) = \mathbf{x}^\Lambda(\rho) + \mathbf{e}_\parallel(\rho) \delta\zeta^\parallel. \quad (5.3.7)$$

La quantité $\delta\zeta^\parallel$ est l'écart paraxial de position entre les deux rayons pour une valeur de ρ donnée. Le faire apparaître à ce stade des calculs permettra de mieux l'isoler pour étudier ses variations par la suite. La matrice de transformation \mathbf{H} permet de passer des coordonnées rayon-centrées $(\zeta^1 = \rho, \zeta^2)$ aux coordonnées dans le repère de la plaque. Ses coefficients sont donnés par les relations $H_{ij} = \partial x^i / \partial \zeta^j$. Or $d\mathbf{x}/d\rho$ est un vecteur unitaire colinéaire à la direction d'énergie φ du rayon axial. D'autre part, on sait que l'écart de position entre les rayons est une quantité tangente au front d'onde, donc colinéaire à \mathbf{e}_\parallel (dont la norme n'est à ce stade pas fixée). Ainsi, la matrice de transformation a pour expression

$$\mathbf{H} = (\mathbf{e}_\perp \quad \mathbf{e}_\parallel). \quad (5.3.8)$$

La matrice de transformation inverse permettant de passer des coordonnées dans le repère de la plaque aux coordonnées rayon-centrées est notée $\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H}^{-1} = (\mathbf{e}^\perp \quad \mathbf{e}^\parallel)^t$. Les matrices de transformation étant l'inverse l'une de l'autre, elles respectent les relations :

$$H_{k1} = v_e^k / v_e \quad , \quad \bar{H}_{1i} = k_i^{(x)} / (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_\perp), \quad (5.3.9a-b)$$

$$H_{im} \bar{H}_{mj} = \delta_{ij} \quad , \quad \bar{H}_{mi} H_{in} = \delta_{mn} . \quad (5.3.9c-d)$$

On cherche maintenant à exprimer le (TDR) en fonction des coordonnées dans le repère rayon-centré. Tout d'abord, après avoir rappelé que $k_i^{(x)} = \partial S / \partial x^i$ et $k_m^{(\zeta)} = \partial S / \partial \zeta^m$, on obtient une nouvelle expression du (TRA) :

$$\frac{dx^i}{d\rho} = H_{im} \frac{d\zeta^m}{d\rho}, \quad (5.3.10a)$$

$$\frac{dk_i^{(x)}}{d\rho} = \frac{d}{d\rho} (\bar{H}_{mi} k_m^{(\zeta)}) = \bar{H}_{mi} \frac{dk_m^{(\zeta)}}{d\rho} + k_m^{(\zeta)} \frac{d}{d\rho} (\bar{H}_{mi}). \quad (5.3.10b)$$

Les notations $Z_m = (\partial \zeta^m / \partial \varphi_0)_\rho$ et $K_m^{(\zeta)} = (\partial k_m^{(\zeta)} / \partial \varphi_0)_\rho$ sont maintenant introduites comme équivalents de X_i et $K_i^{(x)}$ en coordonnées rayon-centrées. Afin d'établir une séparation entre les deux systèmes de coordonnées, les grandeurs dans le repère rayon-centré seront par la suite indicées par m et n . Ces quantités s'expriment, selon le schéma suivi pour les relations (5.3.4), comme :

$$\mathbf{Z} = \bar{\mathbf{H}} \mathbf{X} \quad , \quad \mathbf{K}^{(\zeta)} = \mathbf{H}^t \mathbf{K}^{(x)} + \mathbf{F} \mathbf{Z} \quad (5.3.11a-b)$$

avec

$$F_{mn} = k_i^{(x)} \frac{\partial x^i}{\partial \zeta^m \partial \zeta^n} = k_i^{(x)} \frac{\partial}{\partial \zeta^m} H_{in}. \quad (5.3.12)$$

Des relations (5.3.11) découlent les relations de passage inverse :

$$\mathbf{X} = \mathbf{H} \mathbf{Z} \quad , \quad \mathbf{K}^{(x)} = \bar{\mathbf{H}}^t (\mathbf{K}^{(\zeta)} - \mathbf{F} \mathbf{Z}) \quad (5.3.13a-b)$$

Les relations (5.3.4) et (5.3.7) sont insérées dans le (TRD) décrit dans les équations (5.3.2). L'équation portant initialement sur \mathbf{X} est alors multipliée par $\bar{\mathbf{H}}$ tandis que l'équation portant sur $\mathbf{K}^{(x)}$ est multipliée par \mathbf{H}^t . Après des calculs algébriques longs mais sans difficulté particulière, les expressions de $d\mathbf{Z}/d\rho$ et de $d\mathbf{K}^{(\zeta)}/d\rho$ sont isolées, et on obtient alors le (TDR) en coordonnées rayon-centrées :

$$\frac{d}{d\rho} \begin{pmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{K}^{(\zeta)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(\zeta)} & \mathbf{B}^{(\zeta)} \\ -\mathbf{C}^{(\zeta)} & -\mathbf{D}^{(\zeta)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{K}^{(\zeta)} \end{pmatrix}. \quad (5.3.14)$$

Afin d'obtenir une formulation semblable à celle dans le repère de la plaque, les coefficients des matrices $\mathbf{A}^{(\zeta)}$, $\mathbf{B}^{(\zeta)}$, $\mathbf{C}^{(\zeta)}$ et $\mathbf{D}^{(\zeta)}$ sont définis tels que :

$$\mathbf{A}^{(\zeta)} = \bar{\mathbf{A}}^{(\zeta)} - \bar{\mathbf{B}}^{(\zeta)} \mathbf{F} - \bar{\mathbf{H}} \frac{d\mathbf{H}}{d\rho}, \quad (5.3.15a)$$

$$\mathbf{B}^{(\zeta)} = \bar{\mathbf{B}}^{(\zeta)}, \quad (5.3.15b)$$

$$\mathbf{C}^{(\zeta)} = \bar{\mathbf{C}}^{(\zeta)} - \bar{\mathbf{D}}^{(\zeta)} \mathbf{F} - \mathbf{F} \mathbf{A}^{(\zeta)} - \mathbf{H}^t \frac{d}{d\rho} (\bar{\mathbf{H}}^t \mathbf{F}), \quad (5.3.15c)$$

$$\mathbf{D}^{(\zeta)} = \bar{\mathbf{D}}^{(\zeta)} - \mathbf{F} \bar{\mathbf{B}}^{(\zeta)} + \mathbf{H}^t \frac{d\bar{\mathbf{H}}^t}{d\rho}, \quad (5.3.15d)$$

avec

$$\bar{\mathbf{A}}^{(\zeta)} = \frac{1}{v_e} \bar{\mathbf{H}} \mathbf{A}^{(x)} \mathbf{H}, \quad \bar{\mathbf{B}}^{(\zeta)} = \frac{1}{v_e} \bar{\mathbf{H}} \mathbf{B}^{(x)} \bar{\mathbf{H}}^t, \quad (5.3.16a-b)$$

$$\bar{\mathbf{C}}^{(\zeta)} = \frac{1}{v_e} \mathbf{H}^t \mathbf{C}^{(x)} \mathbf{H}, \quad \bar{\mathbf{D}}^{(\zeta)} = \frac{1}{v_e} \mathbf{H}^t \mathbf{D}^{(x)} \bar{\mathbf{H}}^t. \quad (5.3.16c-d)$$

Ces matrices vérifient les mêmes relations de symétrie que leurs équivalents dans le repère de la plaque, soit $B_{ij}^{(\zeta)} = B_{ji}^{(\zeta)}$, $C_{ij}^{(\zeta)} = C_{ji}^{(\zeta)}$ et $A_{ij}^{(\zeta)} = D_{ji}^{(\zeta)}$. Comme cela est démontré dans [95]¹, les relations $B_{ij}^{(x)} \bar{H}_{1j} = H_{i1}$ et (5.3.9) stipulent que les termes non diagonaux de $\mathbf{B}^{(\zeta)}$ s'annulent. D'autre part, \mathbf{H} ne dépend pas de ζ^2 . Le passage aux coordonnées rayon-centrées permet donc d'obtenir les simplifications suivantes :

$$\mathbf{B}^{(\zeta)} = \begin{pmatrix} B_{11}^{(\zeta)} & 0 \\ 0 & B_{22}^{(\zeta)} \end{pmatrix}, \quad F_{22} = 0. \quad (5.3.17a-b)$$

La relation de contrainte est triviale dans le repère rayon centré. Cette dernière s'exprime de la même manière que dans la relation (5.3.5) en substituant les termes du repère de la plaque par les termes en coordonnées rayon-centrées. Formellement, cela revient à dériver un hamiltonien exprimé en fonction des coordonnées rayon-centrées. En considérant la forme extrêmement simple des ζ^m le long du rayon axial et le fait que $Z_1 = (\partial\rho/\partial\varphi_0)_\rho = 0$, la relation de contrainte devient :

$$K_1^{(\zeta)} = 0. \quad (5.3.18)$$

¹ Attention cependant à ne pas appliquer aveuglément toutes les simplifications développées dans la référence. La plupart d'entre elles se basent sur une homogénéité de l'hamiltonien par rapport aux coordonnées du nombre d'onde. Cette relation n'est valable que dans le cas des ondes de volume.

Il n'y a alors pas d'écart de lenteur entre le rayon axial et le rayon paraxial suivant la direction du rayon axial. Considérant cela, on s'aperçoit que le système (5.3.14) peut se décomposer en deux sous-systèmes indépendants : le premier est un système d'équation différentielles ordinaires de $(Z_1 ; K_1^{(\zeta)})$ tandis que le second porte sur $(Z_2 ; K_2^{(\zeta)})$.

Projection du (TDR) suivant l'axe du rayon axial

Dans le repère rayon-centré, le système d'équation permettant d'obtenir $Z_1(\rho)$ et $K_1^{(\zeta)}(\rho)$ est trivial. D'après la définition de Z_1 et la relation (5.3.18), il s'exprime simplement de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ K_1^{(\zeta)} \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (5.3.19)$$

Ce système n'apporte aucune information utile concernant l'évolution de l'amplitude de l'onde le long du rayon axial. Il indique cependant qu'il suffit d'étudier les variations des quantités $Z_2(\rho)$ et $K_2^{(\zeta)}(\rho)$. Par la suite, nous nous intéresserons donc uniquement à la détermination de ces dernières.

Projection de (TDR) suivant la direction tangente au front d'onde

Tâchons maintenant de simplifier le plus possible l'expression des coefficients $A_{22}^{(\zeta)}$, $B_{22}^{(\zeta)}$, $C_{22}^{(\zeta)}$ et $D_{22}^{(\zeta)}$. D'après les relations (5.3.17), on a $B_{2i}^{(\zeta)} F_{i2} = 0$. De plus comme Z_1 est constant et $Z_2 \neq 0$ (en dehors de points isolés), on a $A_{12}^{(\zeta)} = D_{21}^{(\zeta)} = 0$. Pour que \mathbf{e}_{\parallel} soit unitaire et tangent au front d'onde, il doit vérifier l'équation différentielle du premier ordre [96] :

$$\frac{d}{d\rho} \mathbf{e}_{\parallel} = -(\mathbf{k}^t \mathbf{k})^{-1} (\mathbf{e}_{\parallel}^t \mathbf{k}_{,\rho}) \mathbf{k}, \quad (5.3.20)$$

où $\mathbf{k}_{,\rho} = d\mathbf{k}/d\rho = d\mathbf{k}^{(x)}/d\rho$. Les quatre coefficients du (TDR) ont donc pour expression :

$$A_{22}^{(\zeta)} = (\mathbf{e}_{\parallel})^t \mathbf{A}^{(x)} \mathbf{e}_{\parallel} - f, \quad B_{22}^{(\zeta)} = (\mathbf{e}_{\parallel})^t \mathbf{B}^{(x)} \mathbf{e}_{\parallel}, \quad (5.3.21a-b)$$

$$C_{22}^{(\zeta)} = (\mathbf{e}_{\parallel})^t (\mathbf{C}^{(x)} - \mathbf{k}_{,\rho} (\mathbf{k}_{,\rho})^t) \mathbf{e}_{\parallel}, \quad D_{22}^{(\zeta)} = (\mathbf{e}_{\parallel})^t \mathbf{D}^{(x)} \mathbf{e}_{\parallel} + f, \quad (5.3.21c-d)$$

avec

$$f = (\mathbf{e}_{\parallel})^t \frac{d}{d\rho} \mathbf{e}_{\parallel}. \quad (5.3.22)$$

Finalement, le (TDR) se réduit sous la forme d'un système de deux équations différentielles ordinaires données par :

$$\boxed{\frac{d}{d\rho} \begin{pmatrix} Z_2 \\ K_2^{(\zeta)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{22}^{(\zeta)} & B_{22}^{(\zeta)} \\ -C_{22}^{(\zeta)} & -D_{22}^{(\zeta)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_2 \\ K_2^{(\zeta)} \end{pmatrix}.} \quad (5.3.23)$$

En le multipliant par $\delta\varphi_0$, on obtient directement les écarts en position et en nombre d'onde entre le rayon axial et le rayon paraxial.

5.3.3. Définition de la matrice de propagation

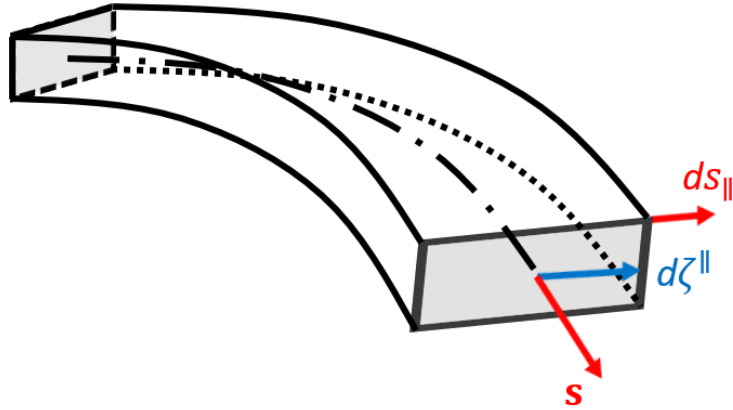


Figure 5.4. Représentation schématique d'un pinceau aux rayons courbes (cas localement isotrope)

Le système de tracé du rayon paraxial en coordonnées rayon-centrées est obtenu en multipliant les membres du (TDR) par $\delta\varphi_0$. On remarque alors que les quantités $\delta\zeta^2 = (\partial\zeta^2/\partial\varphi_0)_\rho \delta\varphi_0$ et $\delta k_2 = (\partial k_2/\partial\varphi_0)_\rho \delta\varphi_0$ correspondent aux composantes du vecteur d'état d'un pinceau, tel que défini dans le chapitre 3 et illustré sur la Figure 5.4. Ce dernier est noté $\Psi = (d\zeta^{\parallel} \quad ds_{\parallel} = \delta k_2/\omega)^t$. Le (TRP) représente alors l'évolution de Ψ lorsque le pinceau est propagé sur une distance $d\rho$, soit

$$\frac{d}{d\rho} \Psi = \delta\mathbf{L}(\rho)\Psi, \quad (5.3.24)$$

où $\delta\mathbf{L}$ est la matrice de propagation différentielle définie par :

$$\delta\mathbf{L}(\rho) = \begin{pmatrix} A_{22}^{(\zeta)} & \omega B_{22}^{(\zeta)} \\ -C_{22}^{(\zeta)}/\omega & -D_{22}^{(\zeta)} \end{pmatrix}. \quad (5.3.25)$$

La matrice de propagation du pinceau, notée \mathbf{L}_{prop} , est alors la matrice intégrale de $\delta\mathbf{L}$ qui est égale à la matrice identité au point source. Elle est solution du système :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{d}{d\rho} \mathbf{L}_{\text{prop}} = \boldsymbol{\delta L}(\rho) \mathbf{L}_{\text{prop}} \\ \mathbf{L}_{\text{prop}}(\mathbf{R}_0; \mathbf{R}_0) = \mathbf{I}. \end{cases}} \quad (5.3.26)$$

Ce dernier peut être résolu simultanément avec le (TRA). La matrice de propagation ainsi obtenue est utilisée de manière analogue à celle développée dans le cas des milieux homogènes et plans afin d'évaluer l'amplitude de l'onde décrite par le pinceau.

Propriétés symplectiques

Les propriétés symplectiques des matrices de propagation ont été abondamment commentées par ČERVENÝ. Une matrice $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ est dite symplectique si elle vérifie la relation suivante :

$$\mathbf{M}^t \mathbf{J} \mathbf{M} = \mathbf{J}, \quad (5.3.27)$$

avec $\mathbf{J} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.3.28)$$

En utilisant la relation $d\mathbf{L}_{\text{prop}}/d\rho = \boldsymbol{\delta L} \mathbf{L}_{\text{prop}}$, on a

$$\frac{d}{d\rho} (\mathbf{L}_{\text{prop}}^t \mathbf{J} \mathbf{L}_{\text{prop}}) = \mathbf{L}_{\text{prop}}^t (\boldsymbol{\delta L}^t \mathbf{J} + \mathbf{J} \boldsymbol{\delta L}) \mathbf{L}_{\text{prop}}. \quad (5.3.29)$$

La matrice $\mathbf{L}_{\text{prop}}^t \mathbf{J} \mathbf{L}_{\text{prop}}$ est donc constante si $\boldsymbol{\delta L}^t \mathbf{J} + \mathbf{J} \boldsymbol{\delta L} = \mathbf{0}$. Cette condition est vérifiée du fait des conditions de symétrie des coefficients de $\boldsymbol{\delta L}$. De plus, on vérifie également que $\mathbf{L}_{\text{prop}}^t(\mathbf{R}_0; \mathbf{R}_0) \mathbf{J} \mathbf{L}_{\text{prop}}(\mathbf{R}_0; \mathbf{R}_0) = \mathbf{J}$. Ceci démontre que toute matrice de propagation est symplectique. Cette propriété permet d'introduire des caractéristiques intéressantes :

- Le produit de deux matrices symplectiques est une matrice symplectique. Ainsi, les matrices d'évolution globales obtenues par mise en cascade (voir § 1.3.1) de plusieurs matrices de propagation et de réflexion – dont il est aussi possible de montrer qu'elles sont symplectiques – sont aussi des matrices symplectiques.
- Toute matrice de propagation (ou matrice d'évolution globale) est inversible et son inverse se calcule simplement comme :

$$\mathbf{L}_{\text{prop}}^{-1} = -\mathbf{J} \mathbf{L}_{\text{prop}}^t \mathbf{J}. \quad (5.3.30)$$

- En utilisant le fait que $\mathbf{L}_{\text{prop}}(\mathbf{R}_0; \mathbf{R}_0) = \mathbf{I}$ et en considérant la mise en cascade suivante : $\mathbf{R}_0 \rightarrow \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{R}_0$, on trouve :

$$\mathbf{L}_{\text{prop}}^{-1}(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0) = \mathbf{L}_{\text{prop}}(\mathbf{R}_0; \mathbf{r}). \quad (5.3.31)$$

Ces trois points sont essentiels à la mise en place d'un lancer de rayon en propagation inversée, tel qu'il est introduit dans le § 1.3.2.

Matrice de propagation pour une plaque plane d'anisotropie homogène

Lorsque la plaque est plane et présente la même anisotropie en tout point, le (TDR) est grandement simplifié. En effet, la relation de dispersion perd son caractère local ; elle s'écrit alors $\omega = \Omega_m(\mathbf{k})$. Le (TRA) décrit alors simplement des rayons rectilignes dont la direction est identique à celle de la condition initiale sur la lenteur. De manière plus générale toutes les dérivées de \mathcal{H}_m suivant \mathbf{x} s'annulent. Par conséquent, $\mathbf{A}^{(\zeta)} = \mathbf{C}^{(\zeta)} = \mathbf{D}^{(\zeta)} = \mathbf{0}$. La matrice $\mathbf{B}^{(x)}$ est constante et ses coefficients peuvent être déterminés en exprimant $k_1^{(x)}$, $k_2^{(x)}$ en fonction de la direction de phase γ et v_e^1 , v_e^2 en fonction de la direction d'énergie φ . Après avoir appliqué le changement de repère vers les coordonnées rayon-centrées, on obtient $B_{22}^{(\zeta)} = (A_m(\varphi) k \cos(\gamma - \varphi))^{-1}$. On a donc :

$$\delta\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{A_m(\varphi) s \cos(\gamma - \varphi)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.3.32)$$

L'intégration de $\delta\mathbf{L}$ le long du rayon axial – avec pour condition initiale $\mathbf{L}_{\text{prop}}(\mathbf{R}_0; \mathbf{R}_0) = \mathbf{I}$ – mène à une expression analytique de la matrice de propagation analogue à celle présentée dans le chapitre 3. On vérifie ainsi que le modèle de pinceaux en milieu inhomogène et courbe permet bien de retrouver les expressions du modèle en milieu homogène et plan, dont il constitue une généralisation.

Principe de conservation d'énergie dans le pinceau

Dans le cadre des guides d'ondes aux propriétés continûment variables, l'épaisseur du guide peut être amenée à varier. Le rapport des intensités acoustiques (voir la relation (1.4.7)) doit alors faire intervenir l'épaisseur locale du guide à la fois au point source et au point de calcul. Ce rapport d'intensités acoustiques est donc multiplié par le rapport de l'épaisseur au point source sur celle au point de calcul. Or, ce rapport intervient également dans le calcul du flux du vecteur de Poynting. Il se retrouve donc simplifié dans l'écriture de la fonction de Green, qui reste inchangée. Les variations d'épaisseurs de la structure n'ont donc pas d'effet sur cet aspect du calcul. En revanche, elles peuvent mener à des concentrations ou déconcentrations d'énergie traduites par la trajectoire des rayons. De plus, on suppose que les variations sont assez lentes pour que les modes guidés ne se convertissent pas. En d'autres termes, en chaque point de la plaque les caractéristiques des modes guidés sont différentes mais entre deux points proches tout se passe comme si un mode guidé se convertissait en lui-même avec un coefficient de transmission de un. Ainsi, peu importe que les variations d'épaisseur se fassent sur la surface supérieure, inférieure ou soient réparties, le résultat est le même. En revanche, si les variations d'épaisseurs sont brusques (par rapport à la longueur d'onde) alors le mode est susceptible d'être transmis ou réfléchi sous la forme de plusieurs modes propagatifs et évanescents.

5.3.4. Résolution du (TDR) par un schéma numérique itératif

La construction complète d'un pinceau consiste à la fois à déterminer son rayon axial et sa matrice de propagation. Le rayon axial est obtenu par résolution numérique du système (5.2.5). Afin de calculer la matrice de propagation, on y ajoute le système d'équations différentielles régissant l'évolution de \mathbf{L}_{prop} (voir équation (5.3.26)). Le système à résoudre est alors de la même forme que le système (5.2.5), pour lequel on a :

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ k_1 \\ k_2 \\ L_{11} \\ L_{12} \\ L_{21} \\ L_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}(\rho, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}_m}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \mathcal{H}_m}{\partial y_4} \\ -\frac{\partial \mathcal{H}_m}{\partial y_1} \\ -\frac{\partial \mathcal{H}_m}{\partial y_2} \\ A_{22}^{(\zeta)} y_5 + B_{22}^{(\zeta)} y_7 \\ A_{22}^{(\zeta)} y_6 + B_{22}^{(\zeta)} y_8 \\ -C_{22}^{(\zeta)} y_5 - D_{22}^{(\zeta)} y_7 \\ -C_{22}^{(\zeta)} y_6 - D_{22}^{(\zeta)} y_8 \end{pmatrix}. \quad (5.3.33)$$

À chaque évaluation de \mathbf{f} , les quatre dérivées partielles premières et les seize dérivées partielles secondes de \mathcal{H}_m sont approchées par des différences finies. Si une approche par différences finies centrées est choisie – ce qui permet de limiter le nombre d'évaluations de \mathcal{H}_m pour les dérivées secondes – il faut alors réaliser au total 41 évaluations de \mathcal{H}_m par évaluation de \mathbf{f} : 8 pour le (TRA) et 33 pour le (TDR). Sans même prendre en compte les calculs de passage en coordonnées rayon-centrées, on voit alors que l'ajout du (TDR) alourdit considérablement le coût numérique de chaque itération. De plus, on observe en pratique que le (TDR) conditionne dans la plupart des cas l'erreur commise à chaque pas. L'algorithme de tracé de rayons atteint donc le point de calcul (ou la source en propagation inversée) après un nombre plus important d'itérations qu'avec la seule résolution du (TRA). Si cela est nécessaire pour assurer la précision de \mathbf{L}_{prop} , c'est en revanche inutile pour représenter les positions du rayon axial.

Dans le cas où les inhomogénéités sont localisées dans une zone relativement restreinte de la plaque, il est préférable de limiter le calcul suivant la méthode itérative à cette région de la plaque. En dehors de celle-ci, les trajets sont déterminés analytiquement et la mise en cascade des matrices de propagation obtenues dans chacune des régions de l'espace permet de reconstruire la matrice d'évolution globale.

Une autre problématique liée au modèle des pinceaux en milieu inhomogène est le comptage des points de caustique. Cette notion a déjà été introduite dans le § 1.4.1. Pour rappel, un point de caustique correspond à une annulation de l'aire de la surface transverse du pinceau. Lorsqu'un pinceau passe par un de ces points, la courbure du front d'onde qui y est associée change de signe et, conséquemment, le champ de déplacement est déphasé de $\pi/2$. De plus, ces déphasages sont cumulatifs. Ainsi, le déphasage total dû aux caustiques est égal à $\pi/2 \cdot KMAH(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0)$, le facteur $KMAH$ étant le nombre de caustiques sur le trajet d'énergie du pinceau. Lorsque le milieu est homogène, la rectitude des rayons impose qu'il y a au plus un point de caustique par trajet entre deux réflexions. Dans ce cas, les caustiques sont

uniquement dues à la courbure des bords sur lesquels l'onde se réfléchit¹. En revanche, lorsque le milieu est inhomogène², cette inhomogénéité peut également générer des caustiques. Les trajets étant courbes, le nombre de points caustiques rencontrés par un pinceau pendant une phase de propagation est alors potentiellement supérieur à un. L'étude du signe de $d\zeta^{\parallel}$ est un moyen efficace de détecter les points caustiques. En effet, à chaque point de caustique, le rayon paraxial passe de l'autre côté du rayon axial. Si l'état initial du pinceau est de la forme $\Psi(\mathbf{R}_0) = \begin{pmatrix} 0 & ds_{\parallel}^{(0)} \end{pmatrix}^t$ avec $ds_{\parallel}^{(0)} > 0$, le signe de $d\zeta^{\parallel}$ est égal à celui du coefficient L_{12} de la matrice d'évolution. Le comptage des points de caustiques revient alors à compter les changements de signes de L_{12} à chaque pas de l'algorithme de tracé de rayons. On suppose alors que la largeur de pas est suffisamment faible pour qu'il n'y ait au plus qu'un point de caustique entre deux itérations.

5.3.5. Modèle de pinceaux simplifié

Comme énoncé au paragraphe précédent, la résolution numérique du tracé dynamique de rayon est en règle générale complexe et peut mener à des temps de calcul élevés si de nombreux pinceaux doivent être déterminés. Il serait donc préférable de trouver un moyen de s'en affranchir, quitte à effectuer une approximation. Or, tout rayon paraxial est une solution de l'équation eikonale (car il vérifie la relation de contrainte (5.3.5)). Un rayon paraxial d'un pinceau $\mathcal{P}(\varphi_0)$ est donc également le rayon axial d'un pinceau $\mathcal{P}(\varphi_0 + \Delta\varphi_0)$, avec $\Delta\varphi_0$ l'écart angulaire initial entre les deux rayons. Lorsque deux rayons axiaux sont suffisamment proches – c'est-à-dire lorsque $\Delta\varphi_0$ est fini mais faible – on peut faire l'approximation que l'un est un rayon paraxial de l'autre. Or, dans le chapitre 2, les algorithmes de lancer de rayons ont été conçus de manière à déterminer les trajets d'énergie entre une source de taille finie et un point de calcul depuis le point de vue de ce dernier. Ces algorithmes permettent donc toujours d'obtenir un ensemble $(\Lambda_n)_{0 \leq n \leq N}$ de $N + 1$ trajets d'énergie proches deux à deux. Pour le n -ième trajet, avec $n < N$, le vecteur d'état est approché en utilisant l'écart angulaire $\Delta\varphi_n = \varphi_{n+1} - \varphi_n$ et l'écart de lenture $\Delta s_n = s_{n+1} \sin(\gamma_{n+1} - \varphi_{n+1} + \Delta\varphi_n) - s_n \sin(\gamma_n - \varphi_n)$. Ces quantités sont représentées sur la Figure 5.5. À l'état initial (i) et à l'état final (f), le vecteur d'état vaut

$$\Psi_n^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta s_n^{(i)} \end{pmatrix}, \quad (5.3.34a)$$

$$\Psi_n^{(f)} = \begin{pmatrix} \Delta\zeta_n^{\parallel,(f)} \\ \Delta s_n^{(f)} \end{pmatrix}. \quad (5.3.34b)$$

Ces deux expressions permettent de construire partiellement la matrice d'évolution approchée du pinceau \mathcal{P}_n , définie par $\Psi_n^{(f)} = \mathbf{L}_n \Psi_n^{(i)}$. On a alors :

¹ On ne s'intéresse ici qu'aux caustiques dites géométriques et non aux caustiques modales liées aux points d'inflexion des courbes de lenture en milieu anisotrope.

² C'est aussi le cas si la plaque est courbe. Dans ce cas, c'est la métrique qui génère les caustiques.

$$\mathbf{L}_n = \begin{pmatrix} \dots & \frac{\Delta\zeta_n^{\parallel,(f)}}{\Delta s_n^{(i)}} \\ \dots & \frac{\Delta s_n^{(f)}}{\Delta s_n^{(i)}} \end{pmatrix}. \quad (5.3.35)$$

La connaissance du terme supérieur droit de \mathbf{L}_n suffit pour le calcul du facteur de divergence du pinceau \mathcal{P}_n . Il est à noter qu'il est aussi possible d'utiliser le rayon Λ_{n-1} à la place du rayon Λ_{n+1} . Les valeurs des coefficients de la matrice d'évolution sont alors légèrement différentes. Ceci provient du fait que le comportement de Λ_{n-1} est différent de celui de Λ_{n+1} car ces rayons n'ont pas exactement suivi la même équation eikonale. Cet effet est moyenné si le calcul de \mathbf{L}_n prend en compte à la fois Λ_{n-1} et Λ_{n+1} . Plus généralement, il est possible d'améliorer l'estimation des quantités paraxiales en utilisant des méthodes d'interpolation d'ordre plus élevé [97], en prenant en compte un nombre de rayons plus important.

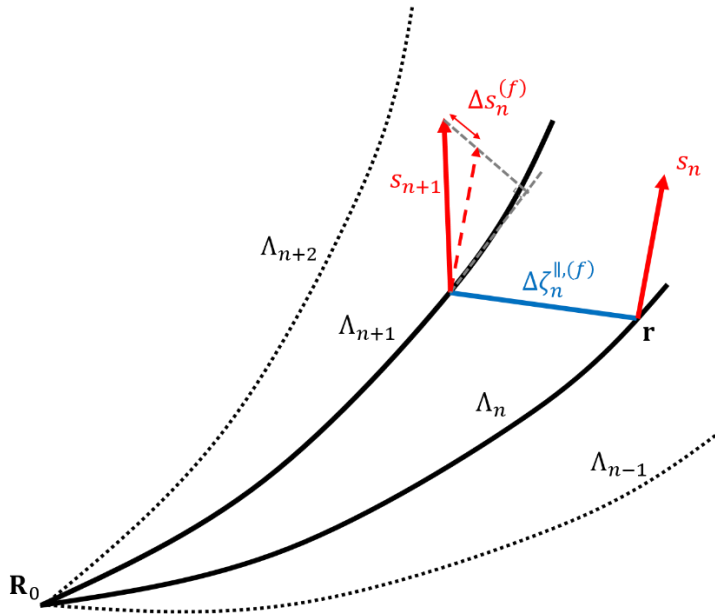


Figure 5.5. Modèle de pinceaux simplifié utilisant un rayon axial voisin afin d'approcher les quantités paraxiales.

Le comptage des points de caustiques s'effectue d'une manière légèrement différente de celle présentée dans le § 5.3.4. En effet, dans le cas du modèle de pinceaux dit *simplifié*, les positions du rayon paraxial sont directement connues. Il est préférable d'effectuer le calcul du facteur *KMAH* comme un post-traitement du lancer de rayons. Chaque rayon est alors discrétisé de manière arbitraire et le signe de $\Delta\zeta_n^{\parallel,(f)}$ est étudié en chacun de ces points, le facteur *KMAH* étant augmenté d'une unité à chaque inversion de signe.

Une démonstration de la convergence du modèle de pinceaux simplifié est donnée dans la Figure 5.6. On cherche à déterminer la valeur de L_{12} (et donc du facteur de divergence) du rayon rouge. Pour cela, plusieurs rayons plus ou moins voisins de ce dernier sont tracés. Sur la Figure 5.6a, on a également représenté la trajectoire du rayon paraxial (en trait interrompu noir) pour des valeurs de $\delta\varphi_0$ correspondant à l'angle entre chaque rayon noir et le rayon rouge. On remarque alors que le comportement du rayon paraxial diffère de plus en plus de celui des Λ_{n+i} au fur et à mesure que l'on $\delta\varphi_0$ augmente. Cela se traduit par le fait

que l'approximation décrite dans ce paragraphe n'est précise qu'à condition que les rayons soient suffisamment proches (voir Figure 5.6b).

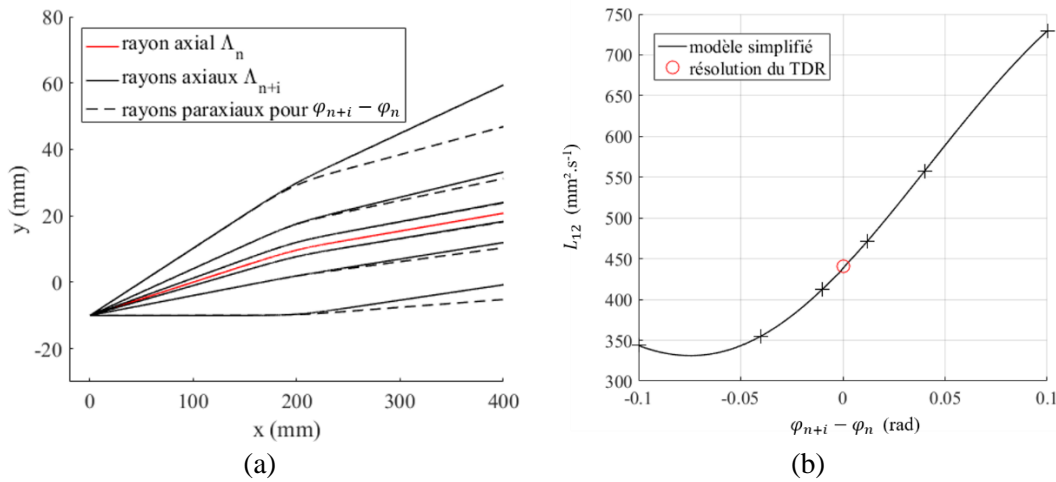


Figure 5.6. Convergence du modèle de pinceaux simplifié (rayons et solutions représentés en noir) vers la valeur de L_{12} obtenue par résolution de (TDR) (en rouge). Trajectoire des rayons (a) et valeur de L_{12} obtenue (b). Les rayons en trait continu noir sur la figure de gauche sont les rayons axiaux (obtenus par résolution du (TRA)) qui - utilisés en conjonction avec le rayon axial tracé en rouge - donnent les valeurs de L_{12} représentées par des croix noirs sur la figure de droite.

Résumé des principaux résultats du chapitre :

Ce chapitre a permis de définir un modèle de pinceaux pour les plaques courbées aux propriétés mécaniques continûment variables. L'utilisation de l'approximation WKBJ mène à un développement limité du problème elastodynamique dans le régime haute fréquence. Le terme principal décrit la trajectoire suivie par l'onde ; c'est le strict équivalent du chemin de Fermat (ou trajet d'énergie) utilisé comme rayon axial d'un pinceau dans les chapitres précédents. On montre de plus que l'amplitude de l'onde varie uniquement le long de ces trajets d'énergie, d'où l'idée d'étudier le comportement des rayons situés dans leur voisinage.

L'équation eikonale, dont les solutions sont les trajets d'énergie de l'onde, est aussi la relation de dispersion locale des modes guidés. Les trajets d'énergie sont donc déterminés à partir d'un calcul local des modes par la méthode SAFE. Suivant les cas, différentes approches sont à considérer. Dans le cas général, un schéma numérique itératif construit les rayons pas à pas, suivant des conditions initiales données. Si le milieu est homogène, alors les trajets d'énergie sont les géodésiques reliant un point source et le point de calcul du champ. Ainsi lorsque la géométrie de la plaque est simple (ex : cylindre, plaque plane), les solutions sont analytiques.

La trajectoire des rayons paraxiaux est obtenue par dérivation du système de tracé des rayons axiaux. Ce nouveau système d'équations, nommé système de tracé dynamique de rayon, est d'abord résolu dans le repère de la plaque (qui est le repère cartésien dans le cas

d'une plaque plane). Cependant, il y a plus d'intérêt à le résoudre dans un système de coordonnées centrées sur le rayon axial. En effet, les solutions du (TDR) sont les quantités différentielles qui composent le vecteur d'état du pinceau. On obtient alors un système d'équations différentielles ordinaires dont la résolution donne à la fois la trajectoire des rayons axiaux et les coefficients de la matrice d'évolution du pinceau. La présence éventuelle de caustiques est prise en compte en étudiant simplement les évolutions du signe de L_{12} entre chaque pas. Enfin, on remarque que la résolution du (TDR) est généralement complexe et coûteuse en temps de calcul. Pour pallier cela, on fait l'approximation que deux rayons voisins sont des rayons paraxiaux l'un de l'autre. La résolution du (TRA) d'un rayon proche se substitue alors à celle du (TDR).

Bien que le modèle développé dans ce chapitre soit plutôt générique, on se rend compte que la façon de l'appliquer varie en fonction du cas traité. Par conséquent, son implémentation informatique la plus performante n'est pas générique. Dans le chapitre suivant, nous verrons des cas d'application simples permettant d'illustrer cette remarque. Dans tous les cas, une matrice de propagation est obtenue. Cette dernière s'insère de manière transparente dans le modèle détaillé dans le présent chapitre, et ce peu importe la méthode de résolution du problème.

Chapitre 6

Exemples d'application du modèle des pinceaux en milieu inhomogène

Deux exemples d'application du modèle développé dans le chapitre précédent sont présentés dans ce dernier chapitre. Ces cas d'application concernent tous deux des plaques planes. Dans un premier temps, on s'intéresse à des simulations mettant en jeu un défaut de corrosion modélisé par une réduction localisée de l'épaisseur de la plaque. Après avoir formulé la relation de dispersion locale, des simulations sont réalisées afin d'étudier l'influence du défaut sur le champ de déplacement particulaire. Dans un second temps, on discute de l'intérêt du modèle pour l'application d'une méthode d'imagerie. En guise d'exemple, une simplification du modèle est utilisée dans le but de caractériser des états de contraintes résiduelles créés lors de la fabrication de la pièce.

6.1. Perte d'épaisseur localisée dans une plaque isotrope et plane

LA CARACTERISATION de l'état de corrosion d'une pièce mécanique est un problème courant en CND. C'est notamment un problème incontournable du contrôle de tubes de transport de fluides [98]. Le défaut est alors généralement considéré non critique si la perte d'épaisseur est inférieure à un certain pourcentage de l'épaisseur de la pièce saine. Pour notre part, nous nous intéresserons à des défauts de corrosion dans une plaque d'aluminium plane. Les propriétés et les causes de ces défauts sont de nature multiple et complexe. Ils résultent à la fois de phénomènes physicochimiques (oxydation) et mécaniques (fatigue, chocs). Par rapport à un état sain, on peut observer une réduction plus ou moins localisée de l'épaisseur de la plaque ainsi qu'une altération de ses propriétés mécaniques et de l'état de surface. Dans ce paragraphe, un défaut de corrosion est simplement modélisé par un profil de perte d'épaisseur régulier. On fait l'hypothèse que les longueurs d'ondes sont assez grandes pour moyenner les effets de diffraction dus à la rugosité.

6.1.1. Formulation de la relation de dispersion locale

Comme évoqué au § 5.2.2, il est nécessaire de déterminer la relation de dispersion en tout point de la plaque de la manière la plus efficace afin de réduire au maximum le temps mis par l'algorithme de tracé de rayons pour déterminer les trajets d'énergie. Dans le cas présent, les coefficients d'élasticité sont constants et le milieu est isotrope. Les variations d'épaisseur sont donc la seule source de variation spatiale des caractéristiques modales. En l'absence de corrosion, la plaque est d'épaisseur $2e_0$. Au niveau du défaut de corrosion, son épaisseur varie de Δe (voir Figure 6.1).

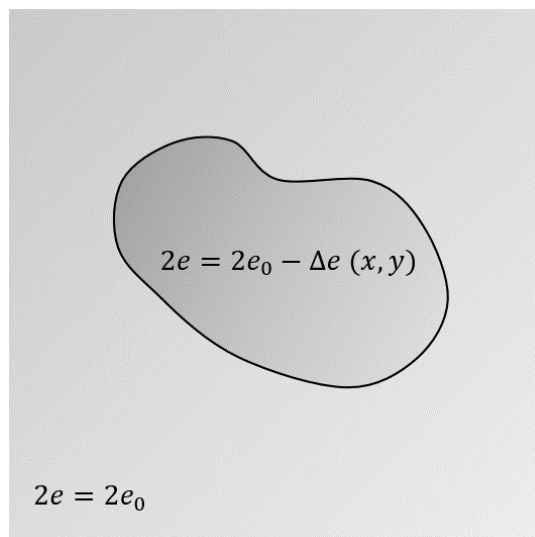


Figure 6.1. Perte d'épaisseur dans une plaque isotrope. La fonction de réduction locale d'épaisseur Δe est appliquée sur un support compact correspondant à la position du défaut de corrosion.

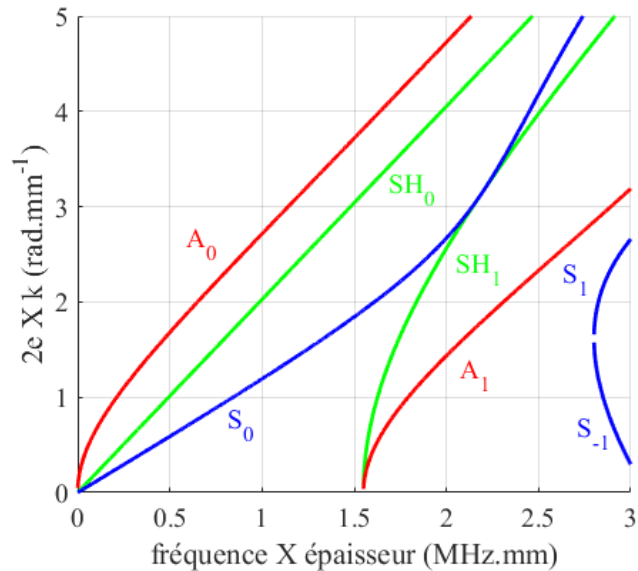
Il existe une manière de normaliser la relation de dispersion de façon à ce qu'elle soit indépendante de l'épaisseur. Cette dernière s'appuie sur le facteur d'échelle entre l'épaisseur du guide d'onde et la fréquence. Ainsi on représente souvent les courbes normalisées des

couples $(2e\omega, 2ek)$, $(2e\omega, v_p)$ et $(2e\omega, v_g)$ ¹. Les profils de déplacements modaux peuvent également être normalisés de cette manière. Il suffit alors de calculer les modes dans une plaque d'épaisseur arbitraire – par exemple $2e_0$ – ce qui permet de n'effectuer de calcul qu'en un unique point de la plaque. La valeur de $\Omega_m(\mathbf{x}, k)$ (voir relation (5.1.12)) est donc simplement obtenue en se plaçant sur la courbe de nombre d'onde en considérant le couple $(2e(\mathbf{x}), k)$. Du produit de la fréquence et de l'épaisseur ainsi obtenu, on déduit alors la valeur de la pulsation correspondante d'après la relation suivante :

$$e(\mathbf{x}) \Omega_m(\mathbf{x}, k) = e_0 \Omega_m(\mathbf{x}_0, k), \quad (6.1.1)$$

\mathbf{x}_0 étant une position quelconque en dehors du défaut. Le mode SH_0 est un cas particulier. En effet, comme il est non dispersif, ses variations de vitesse sont nulles. Le mode SH_0 n'est donc pas sensible au défaut de corrosion. Tout du moins, sa relation de dispersion ne dépend pas de l'épaisseur locale du guide. Ceci n'est plus vrai si l'on introduit des variations non nulles des coefficients d'élasticité car la vitesse du mode devient alors elle aussi variable.

Figure 6.2. Courbes de dispersion normalisées représentant le nombre d'onde en fonction du produit de la fréquence et de l'épaisseur.



Le cas d'étude présenté dans ce paragraphe constitue certainement une des plus simples applications non triviales du modèle rayon en milieu inhomogène. Par exemple, les méthodes d'imagerie de défaut de corrosion utilisent une distribution de vitesse – c'est-à-dire une simple grandeur scalaire – pour représenter un état défectueux [99,100]. Le propos qui a été développé plus haut en est un parfait équivalent.

6.1.2. Tracé de rayons passant par le défaut

Étudions maintenant l'influence de différents défauts de corrosion sur la trajectoire des trajets d'énergie d'une onde guidée. Le milieu étant localement isotrope, l'expression du

¹ Cette normalisation est aussi vraie pour les milieux composites multicouches mais ne présente que peu d'intérêt car elle consiste également à dilater la largeur des couches du même facteur que l'épaisseur totale. De plus, dans un tel milieu, les dégradations d'état de surface ne s'appliquent qu'aux couches superficielles. Il est donc nécessaire de calculer la relation de dispersion en chaque point

(TRA) donnée par la relation (5.2.13) est utilisée. De plus, la plaque est plane et le repère qui y est lié est orthonormé. Les coordonnées contravariantes se confondent alors avec les coordonnées covariantes. L'expression du (TRA) est ainsi la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{x}}{d\rho} = k^{-1}\mathbf{k} \\ \frac{d\mathbf{k}}{d\rho} = \nabla_{\mathbf{x}}k \end{array} \right. \quad (6.1.2a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{k}}{d\rho} = \nabla_{\mathbf{x}}k \end{array} \right. \quad (6.1.2b)$$

Ce système vérifie bien que la trajectoire des rayons axiaux est uniquement gouvernée par une distribution surfacique de nombre d'onde *i.e.* à une fréquence donnée de vitesses de phase.

Soit une réduction d'épaisseur de forme gaussienne elliptique paramétrée par la perte d'épaisseur maximale Δe_{max} , la rotation d'angle α et les demi-axes (D_x, D_y) . Faisons varier ces paramètres afin d'étudier leur influence sur la trajectoire des rayons axiaux des pinceaux qui traversent ce défaut. Dans un premier temps, pour un demi-axe de 50 mm, les rayons sont calculés pour deux valeurs de Δe_{max} distinctes. Ce calcul est effectué à la fois pour le mode A_0 (voir Figure 6.3) et pour le mode S_0 (voir Figure 6.4). La seconde valeur de Δe_{max} est un cas extrême car elle correspond à $\Delta e_{max} = e_0 = 1.5$ mm. Cela donne naissance à une caustique, nettement identifiable sur la Figure 6.3b. Plus le défaut est profond, plus le gradient de k est élevé (en norme) et donc plus les rayons du mode A_0 sont courbés. De plus, toujours dans le cas du mode A_0 , la pente de $v_p(2e\omega)$ au point d'intérêt est positive. La vitesse de phase diminue lorsque l'épaisseur diminue puis ré-augmente lorsque l'épaisseur se rapproche de e_0 . Ceci explique le comportement des rayons qui ont tendance à converger vers la droite d'équation $x = 0$ mm après avoir traversé le défaut. Pour le mode S_0 , on a l'effet inverse. Cependant, cela n'est pas visible sur la Figure 6.4 car les rayons sont très peu déviés par le défaut. En effet, la pente de $v_p(2e\omega)$ est plus faible que celle du mode A_0 , d'où des variations locales de vitesse moins marquées.

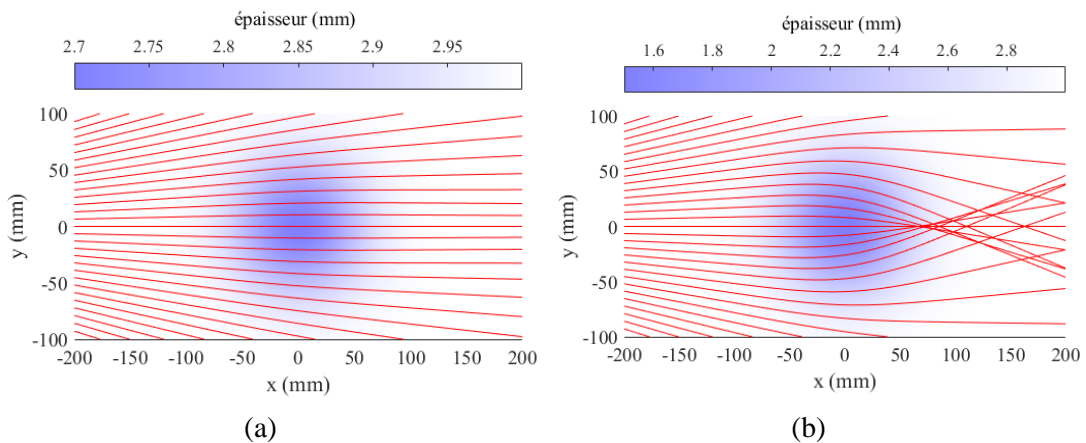


Figure 6.3. Tracé de rayons à 100 kHz (mode A_0) pour une perte d'épaisseur maximale de 10% de l'épaisseur totale (a), puis de 50% (b).

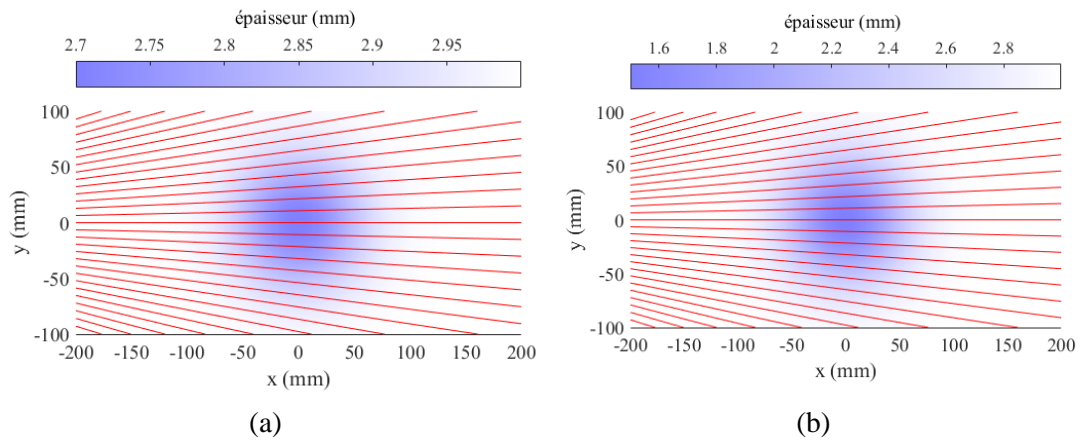


Figure 6.4. Tracé de rayons à 100 kHz (mode S_0) pour une perte d'épaisseur maximale de 10% de l'épaisseur totale (a), puis de 50% (b).

En milieu inhomogène, même les rayons non réfléchis sont dépendants de la fréquence. Cet effet est représenté sur la Figure 6.5. C'est là encore en observant la pente des courbes de dispersion que l'on peut expliquer pourquoi les rayons sont de moins en moins déviés au fur et à mesure que la fréquence augmente.

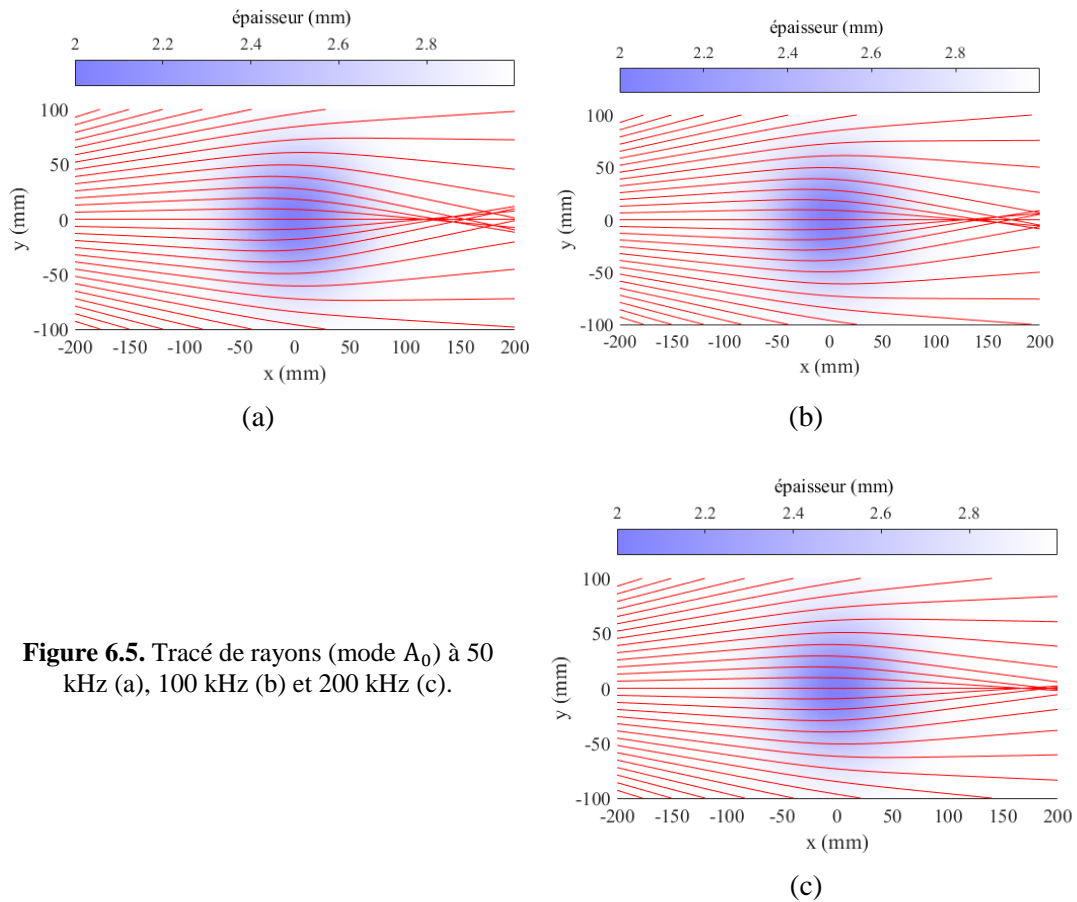


Figure 6.5. Tracé de rayons (mode A_0) à 50 kHz (a), 100 kHz (b) et 200 kHz (c).

Enfin, il reste à étudier l'influence de la forme du défaut. On prend alors $D_x \neq D_y$ et on applique au défaut des rotations d'angles différents. On observe alors sur la Figure 6.6 que selon l'angle avec lequel les rayons issus du point source (situé à $x = -500$ mm) attaquent le défaut, la trajectoire des rayons est très différente. En particulier, pour $\alpha = 90^\circ$, les rayons ne sont pratiquement pas déviés.

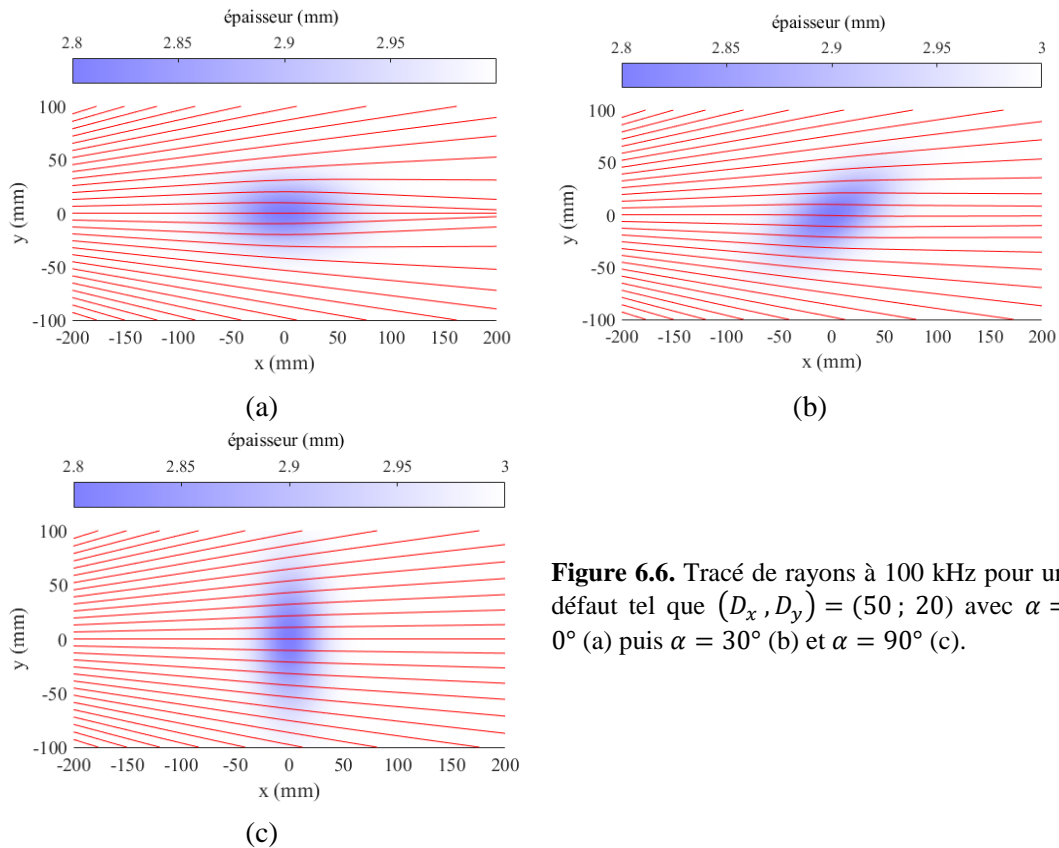


Figure 6.6. Tracé de rayons à 100 kHz pour un défaut tel que $(D_x, D_y) = (50; 20)$ avec $\alpha = 0^\circ$ (a) puis $\alpha = 30^\circ$ (b) et $\alpha = 90^\circ$ (c).

On définit également un profil de perte d'épaisseur à fond plat (voir Figure 6.7). Le diamètre de ce fond plat est noté L_2 tandis que le diamètre extérieur du défaut est noté L_1 . Entre les deux, un profil lisse assure la régularité, de classe C^2 , du profil de la surface de la plaque. Lorsqu'un rayon passe par la zone centrale du défaut, il devient rectiligne mais se propage à une vitesse différente de celle dans la plaque saine. Avec ce type de défaut, il est possible de construire un profil de perte d'épaisseur qui soit responsable d'un fort gradient de vitesse tout en ayant des dimensions conséquentes. Deux exemples de lancer de rayons sont présentés dans la Figure 6.8. On vérifie que les rayons ne sont courbés que dans les zones de variation d'épaisseur. Un comportement différent de celui du défaut gaussien est obtenu. On voit apparaître deux zones de focalisation.

Figure 6.7. Profil de défaut de corrosion à fond plat. La profondeur du fond du défaut a été exagérée.

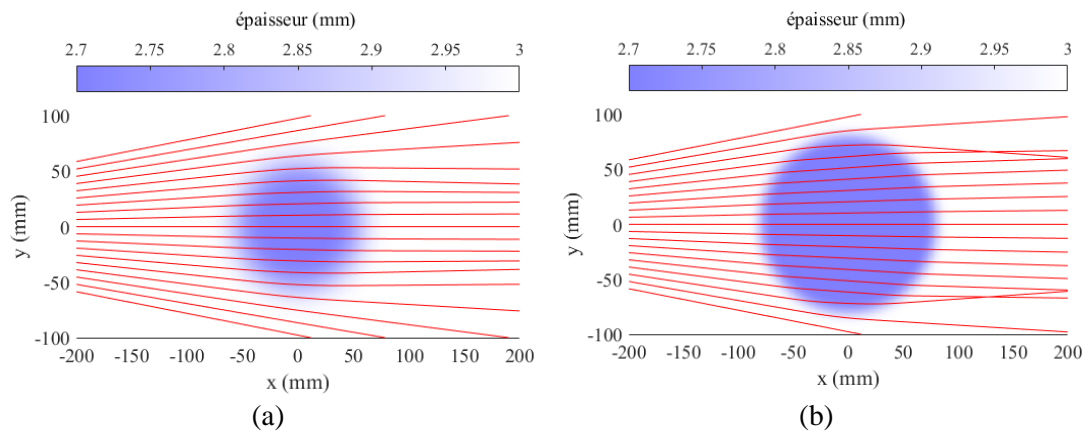
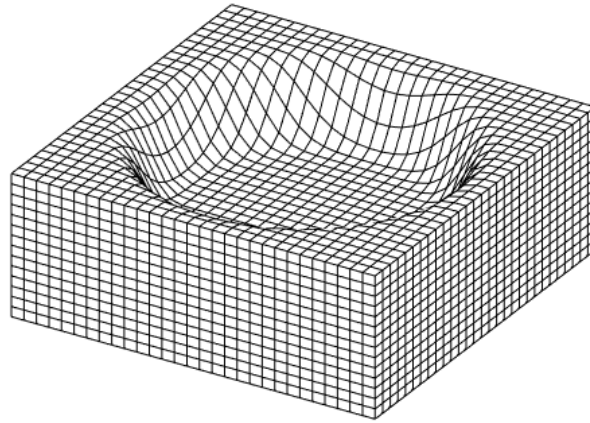


Figure 6.8. Tracé de rayons à 100 kHz pour un défaut à fond plat tel que $\Delta e_{max} = 0.3$ mm, $L_2 = 100$ mm. À gauche, le fond plat est de $L_2 = 10$ mm alors qu'à droite il est de $L_2 = 60$ mm.

En conclusion, des considérations pratiques sur les variations de vitesse des modes guidés permet d'estimer de manière qualitative le comportement des rayons. Néanmoins, le calcul de l'amplitude du champ de déplacement nécessite une estimation précise et quantitative de la trajectoire des rayons axiaux. Or ces trajectoires dépendent fortement des paramètres évoqués dans ce paragraphe, auxquels on aurait pu ajouter la distance entre le point source et le défaut. Cela montre bien l'intérêt d'avoir un modèle permettant de les déterminer. Enfin, le fait qu'un rayon soit non courbé ne signifie pas que l'amplitude du pinceau n'est pas affectée par le défaut. En reprenant les figures précédentes, on se rend compte qu'il existe un rayon qui suit la droite d'équation $x = 0$. Or le pinceau correspondant subit des variations de vitesses qui font que (i) son temps de vol est modifié par rapport au cas de la plaque saine et que (ii) il y a une concentration de rayons à son voisinage ce qui implique une zone de focalisation.

6.1.3. Influence de la perte d'épaisseur sur le champ de déplacement

Le but est maintenant de présenter un calcul du champ de déplacement d'une onde interagissant avec un défaut de corrosion. Une source circulaire de rayon 10 mm – générant une contrainte uniforme et normale à la surface de la plaque à la fréquence de 200 kHz – est centrée au point de coordonnées $(-250; 0)$. Un défaut gaussien est centré au point de coordonnées $(0; 0)$. Ses caractéristiques sont $\Delta e_{max} = 100 \mu\text{m}$, $D_x = D_y = 60 \text{ mm}$. Le champ de déplacement obtenu dans cette configuration, pour chacun des modes propagatifs excités par la source, est représenté sur la Figure 6.9. On retrouve le comportement déduit du lancer de rayons discuté au paragraphe précédent. Cette fois, l'effet du défaut sur le déplacement du mode S_0 est visible, bien qu'à trois ordres de grandeur en dessous de l'amplitude du déplacement. Le même calcul est effectué pour un défaut à fond plat dont les dimensions sont $\Delta e_{max} = 100 \mu\text{m}$, $L_1 = 60 \text{ mm}$ et $L_2 = 20 \text{ mm}$ (voir Figure 6.10). Les deux zones de focalisation prédites dans le paragraphe précédent sont nettement visibles.

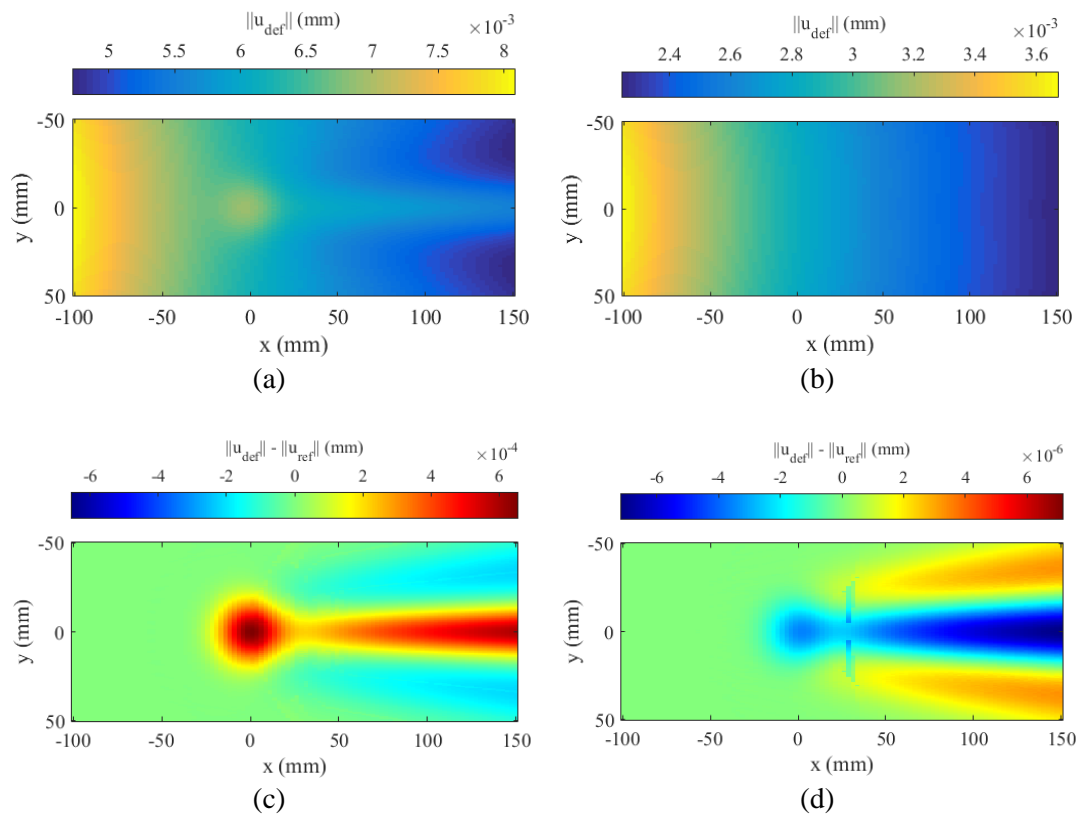


Figure 6.9. Cartographie du champ de déplacement pour un défaut gaussien. Le champ de déplacement associé au mode A_0 (resp. S_0) est présenté dans la colonne de gauche (resp. droite). La première ligne correspond au déplacement en présence du défaut tandis que la seconde correspond à la différence entre le cas avec défaut et le cas sans défaut.

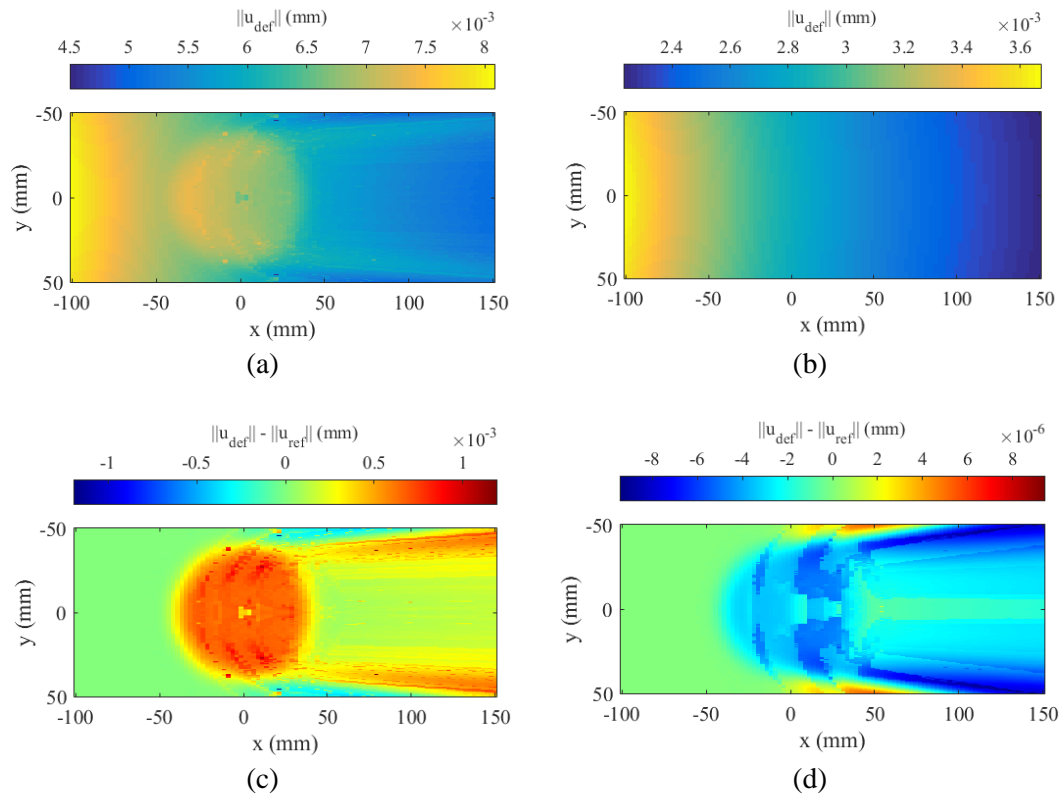


Figure 6.10. Cartographie du champ de déplacement pour un défaut à fond plat. Le champ de déplacement associé au mode A_0 (resp. S_0) est présenté dans la colonne de gauche (resp. droite). La première ligne correspond au déplacement en présence du défaut tandis que la seconde correspond à la différence entre le cas avec défaut et le cas sans défaut.

À partir du lancer de rayons, deux méthodes peuvent être utilisées afin d'obtenir la valeur du champ de déplacement. La première – qui est celle utilisée pour calculer les résultats précédemment présentés – consiste à résoudre le (TDR) comme indiqué au § 5.3.2. La seconde – celle que nous allons maintenant employer – consiste à utiliser le modèle de pinceaux simplifié présenté au § 5.3.5. Ce dernier est une approximation du premier qui n'en utilise aucun résultat autre que le trajet des rayons axiaux. Ces deux approches sont donc relativement indépendantes l'une de l'autre. Les mesures du champ de déplacement présentées sur la Figure 6.11 montrent que les deux méthodes fournissent des résultats similaires. En effet, l'écart (Figure 6.11b) entre les deux solutions est partout au moins deux ordres de grandeur plus faible que les valeurs du champ. De plus, la densité de rayons entre la source et un point de calcul n'a pas été augmentée pour le cas « pinceaux simplifiés ». Or dans ce cas, la distance entre les rayons voisins est essentielle car elle sert à déterminer le facteur de divergence des pinceaux. Il est alors *a priori* préférable de réduire l'espace entre deux rayons de façon à ce que l'un ait vraiment le comportement d'un rayon paraxial par rapport à l'autre tout au long de la propagation.

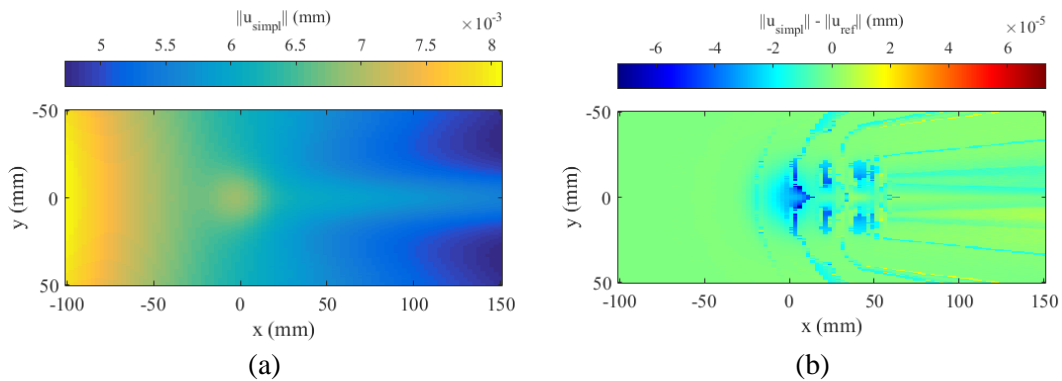


Figure 6.11. Application du modèle de pinces simplifié au cas de la perte d'épaisseur gaussienne : cartographie du champ de déplacement (a) et écart avec le calcul non simplifié

Nous avons ensuite cherché à valider ces résultats. ONDO propose des descriptions paramétriques de profil de perte d'épaisseur, ce qui pourrait permettre de s'en servir comme moyen de comparaison. Un exemple de calcul, correspondant à au défaut gaussien, est présenté dans la Figure 6.12. On observe bien le même effet que sur la Figure 6.9a et sur la Figure 6.11a, il y a focalisation autour de la droite d'équation $y = 0$. Toutefois, nous n'avons pas réussi à obtenir une validation quantitative. En effet, sur la Figure 6.11 on voit que l'effet de focalisation est plus diffus que dans les résultats obtenus par la méthode des pinces. Nous attribuons ces différences au fait que le maillage du défaut n'est pas strictement équivalent à la description analytique de ce dernier utilisée par la méthode des pinces. En effet, la valeur du champ de déplacement est très sensible à la forme de la perte d'épaisseur. Il faudrait alors mener une démarche de validation plus complète – d'autant que le but de ce modèle est d'étudier précisément l'effet d'une perte d'épaisseur donnée – en faisant également varier les dimensions du défaut (taille et profondeur) pour étudier les limites du modèle de pinces. Enfin, on peut légitimement se demander à quel point cette modélisation permet de représenter un défaut de corrosion réaliste (défaut qui possède une rugosité, des formes non régulières). La modélisation par éléments finis est soumise à des limitations comparables. Une campagne de validations expérimentales semble donc inévitable pour aller plus loin dans ce cas d'étude.

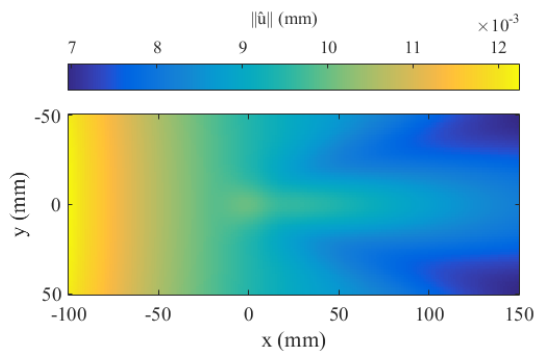


Figure 6.12. Cartographie mono fréquentielle du champ de déplacement du mode A_0 calculé avec ONDO (après application de la transformée de Fourier et isolement du mode) pour une configuration semblable à celle choisie pour les Figures 6.9 et 6.11. L'amplitude n'a pas été normalisée ce qui explique la différence d'échelle observée.

6.2. Tomographie de distributions de contraintes multiaxiales

L'état de contraintes résiduelles d'une pièce mécanique est un état de contraintes statiques et autoéquilibrées résultant de déformations plastiques hétérogènes. Elles apparaissent par exemple lors du laminage ou du pliage d'une tôle métallique, d'une soudure... Le contrôle de l'intensité de ces contraintes est un enjeu majeur du dimensionnement et de la tenue en fatigue des pièces métalliques. La thèse d'A. ABDERAHMANE – effectuée au CEA List – vise à les caractériser grâce à l'émission et à la réception de champs d'ondes élastiques guidées générés par des transducteurs EMATs. Une des approches qu'il a envisagées consiste à exploiter les variations de vitesse d'OG se propageant dans un milieu contraint. En disposant plusieurs transducteurs (en mode émetteur et récepteur à tour de rôle) autour de la zone à inspecter, des algorithmes de tomographie sont utilisés afin de reconstruire une image de la distribution de contraintes.

6.2.1. Brève introduction aux méthodes de tomographie par ondes guidées

En disposant des capteurs tout autour d'une zone à inspecter, il est possible d'émettre successivement des ondes interagissant avec les éventuels défauts présents dans cette zone sur un ensemble de directions d'énergie différentes. Une donnée de temps de vol est extraite des signaux mesurés par les différents récepteurs. Des algorithmes de tomographie, prenant ces temps de vol comme données d'entrée, permettent d'inverser le problème afin d'obtenir une image du ou des défauts. Suivant les caractéristiques (dimensions, nature) des défauts, plusieurs catégories de méthodes de tomographies coexistent :

- Celles qui se basent sur la propagation d'OG suivant des rayons droits font l'hypothèse que les variations de vitesse des modes guidés sont assez faibles pour pouvoir négliger la réfraction continue. Pour plus d'informations, voir [98,101,102].
- Celles qui utilisent des rayons courbés permettent de prendre en compte la réfraction continue [103,104]

D'autres méthodes permettent également de prendre la diffraction d'une OG par un défaut [105,106]. Nous ne les étudierons pas ici. Enfin, il est possible d'utiliser un état de référence *i.e.* les signaux reçus en l'absence de défaut. La donnée d'entrée de l'algorithme de tomographie est alors la différence de temps de vol entre l'état réel et l'état de référence.

6.2.2. Quantification de l'effet acousto-élastique dû à la présence de contraintes résiduelles

L'état de contrainte d'un milieu a un impact sur la vitesse des ondes élastiques qui s'y propagent. On nomme ce phénomène *effet acousto-élastique* [107,108]. Les variations de vitesse des ondes de volumes sont en général très faibles (de l'ordre de 0.1% pour des contraintes de 100 MPa). L'extraction de différences de temps de vol permettant de caractériser l'état de contraintes requiert donc des mesures très précises du champ de déplacement. En revanche, pour les OG, cette variation est de 1 à 2% pour des contraintes de

100 MPa. De plus, dans le cas des OG, la distance parcourue par l'onde est en général plus grande qu'avec les ondes de volume. Ainsi, l'effet acousto-élastique est facilement mesurable en superposant le signal mesuré et le signal de référence. Récemment, PEDDETI et SANTHANAM ont adapté la méthode SAFE [109] dans le but d'obtenir les courbes de dispersion d'OG en milieu contraint. ABDERAHMANE s'est servi de ce formalisme pour définir des modèles d'acousto-élasticité des modes guidés fondamentaux se propageant dans une plaque en aluminium. Il a obtenu les variations de vitesse de phase suivantes :

$$\Delta v_{SH_0} = a_{SH_0} \sigma_{xx}^R + b_{SH_0} \sigma_{zz}^R, \quad (6.2.1a)$$

$$\Delta v_{S_0/A_0} = [a_{S_0/A_0}(\omega) + c_{S_0/A_0}(\omega) \cos(2(\beta - \alpha))] \sigma_{xx}^R + b_{S_0/A_0}(\omega) \sigma_{zz}^R. \quad (6.2.1b)$$

où les a_* , b_* et c_* sont les coefficients d'acousto-élasticité de chacun des modes guidés, $(\sigma_{xx}^R, \sigma_{zz}^R)$ sont les composantes de la contrainte résiduelle¹, α est l'angle de propagation de l'onde et β est l'angle de la contrainte contenue dans le plan de la plaque.

Étudions maintenant l'effet de l'acousto-élasticité du point de vue des trajets d'énergie des pinceaux traversant la zone contrainte. Les variations de vitesse étant faibles, on peut faire l'hypothèse que le milieu est localement isotrope et que $\mathbf{k} + d\mathbf{k}$ est colinéaire à \mathbf{k} . On a alors

$$\frac{d\mathbf{k}}{d\rho} = \frac{\mathbf{k}}{k} \frac{dk}{d\rho}; \quad (6.2.2)$$

ainsi les rayons sont des lignes droites. Ce cas d'application du modèle de pinceaux en milieu inhomogène est donc trivial du point de vue du lancer de rayon. La phase de l'onde s'obtient en intégrant l'inverse de la vitesse de phase $v_p(\mathbf{x}) = v_{p,0} + \Delta v$, et donc par extension le nombre d'onde. Son expression est alors :

$$\hat{v}_m = -\omega \int_{\rho'=0}^{\rho} \frac{d\rho'}{v_p(\mathbf{x})}. \quad (6.2.3)$$

L'identification du maximum d'inter-corrélation entre le signal mesuré en l'absence de défaut et celui en présence de contraintes résiduelles permet d'obtenir une estimation de la différence de temps de vol due à ces contraintes. Un exemple est donné dans la Figure 6.13. Des transducteurs piézoélectriques sont disposés en cercle autour d'une zone présentant deux distributions gaussiennes de contrainte résiduelle σ_{zz} . La position des émetteurs est représentée par des croix noires tandis que celle des récepteurs l'est par des marqueurs circulaires. Entre chaque couple émetteur / récepteur, le trajet d'énergie de l'onde correspond soit à un rayon horizontal (en rouge), soit à un rayon vertical (en bleu). La différence de temps de vol (par rapport à l'état de référence) des trajets horizontaux apparaît à gauche de la figure. On distingue assez nettement le défaut centré en $(0; -200)$ pour lequel la différence de temps

¹ Les contraintes résiduelles sont ici uniquement données comme des fonctions de la position dans le plan médian de la plaque, ce qui amène à penser qu'elles sont uniformes dans l'épaisseur. Il est en fait possible de définir un profil de contraintes dans l'épaisseur paramétré par sa valeur en une position donnée.

de vol maximale est de $-0.17 \mu\text{s}$ du second défaut avec une différence de temps de vol de $0.025 \mu\text{s}$. Ceci est également vrai pour les rayons verticaux. Chaque orientation de rayons permet donc d'obtenir une projection de la distribution de contraintes résiduelles dans le plan orthogonal à cette orientation. Finalement, les défauts sont imagés en (i) augmentant le nombre de projections et (ii) en calculant une variation de vitesse homogène équivalente à partir des différences de temps de vol puis inversant les relations (6.2.1) pour retourner la valeur de la contrainte résiduelle.

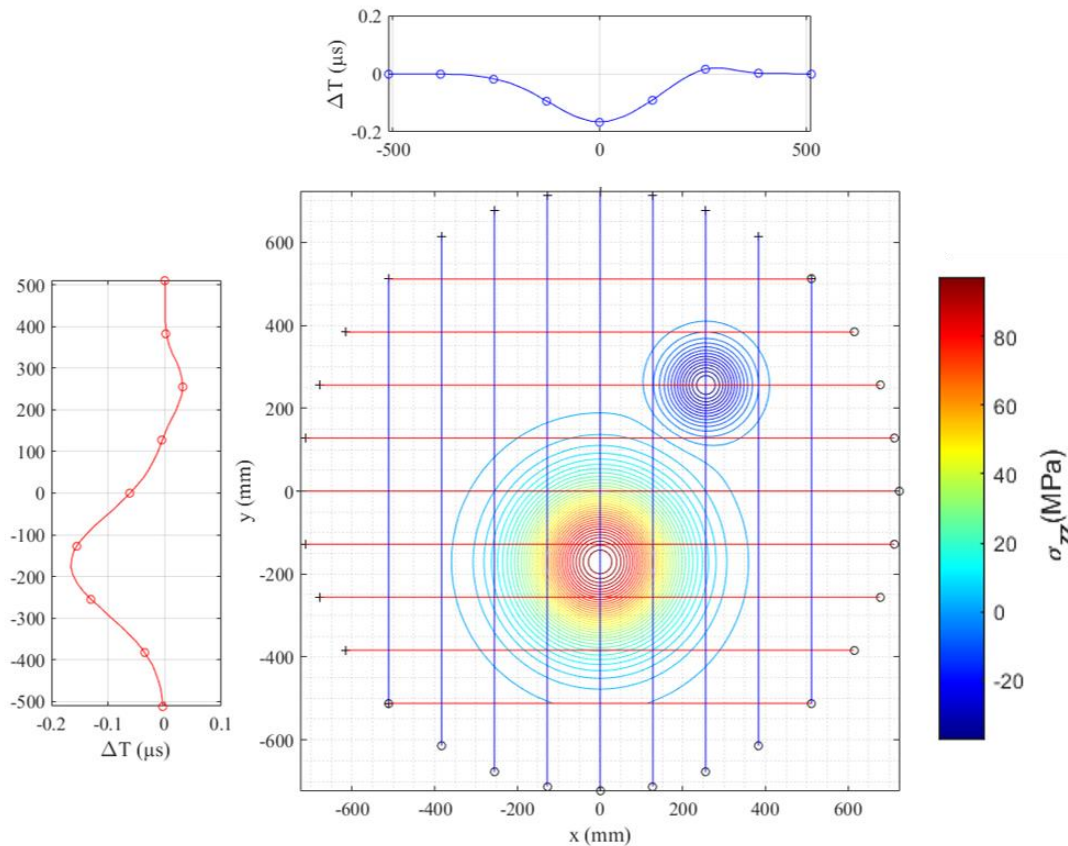


Figure 6.13. Tomographie (simplifiée) de contraintes résiduelles utilisant deux directions de projection : suivant l'axe x et l'axe y . Seule la propagation du mode A_0 est prise en compte. La figure centrale représente les niveaux de la contrainte σ_{zz} (uniforme dans l'épaisseur) ainsi que la position des capteurs. Les différences de temps de vol entre l'état contraint et l'état de référence sont présentées en haut (projection suivant y) et à gauche (projection suivant x).

L'utilisation du modèle de pinces permet dans ce cas d'étude de prendre en compte plusieurs phénomènes. Tout d'abord, la simulation d'un état sain de la pièce fournit les signaux correspondants à l'état de référence. Ces derniers intègrent à la fois les phénomènes de diffraction de l'émetteur, de propagation (et éventuellement) de réflexion de l'onde rayonnée et de sensibilité du récepteur au champ de vitesse. Ils peuvent donc être comparés aux signaux expérimentaux mesurés en situation de contrôle réelle. De plus, dans le cas de la plaque saine il n'y a aucune contre-indication à l'utilisation l'approximation de Fraunhofer à l'émission et à la réception. Ceci permet de réduire les temps de calcul, en particulier si l'on souhaite prendre en compte les réflexions sur les bords de la plaque. La simulation d'états précontraints permet de tester les algorithmes d'imagerie, en particulier tout ce qui concerne l'inversion, avec des

distributions de contraintes connues. Comme la courbure des rayons est négligeable, il est là encore possible d'utiliser l'approximation de Fraunhofer pour pouvoir réaliser un grand nombre de simulations - et donc une gamme étendue de distributions de contraintes différentes - en des temps raisonnables. Enfin, la connaissance de la décomposition modale des signaux peut être exploitée dans le but d'optimiser la détectabilité des contraintes résiduelles. En effet, les coefficients d'acousto-élasticité qui relient les variations de vitesse à l'intensité des contraintes dépendent à la fois des modes et de la fréquence (voir Figure 6.14). Ainsi il est judicieux d'émettre de manière préférentielle le mode présentant les variations de vitesse les plus marquées dans la bande de fréquence excitée. C'est là un des enjeux de la thèse d'A. ABDERAHMANE qui cherche à utiliser des traducteurs de type EMAT afin de profiter de leur aspect sans contact (et donc pouvoir faire du contrôle sur la chaîne de production). Il doit ainsi s'assurer que les modes excités par le traducteur de son choix sont pertinents pour caractériser les contraintes résiduelles. Notre modèle peut être utilisé à cette fin.

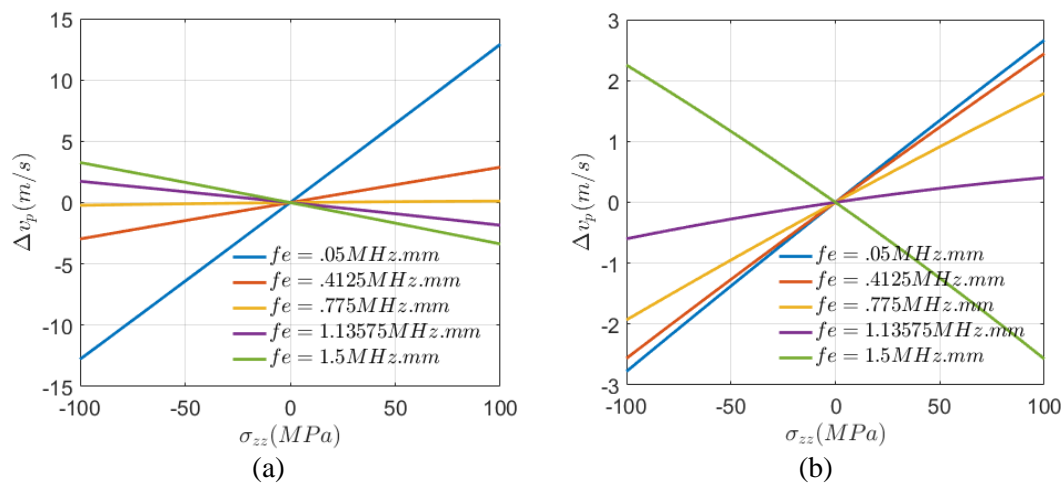


Figure 6.14. Variations de vitesse des premiers modes de Lamb dans l'aluminium en présence d'une contrainte normale σ_{zz} : valeurs pour le mode A_0 (a) et pour le mode S_0 (b) à cinq produits fréquence - épaisseur différents.

Pour finir, on pourrait imaginer adapter les méthodes de tomographie utilisant des rayons courbés au modèle de pinceau généralisé décrit dans le chapitre 5. On pourrait alors traiter des variations de vitesse fortes (mais toujours lentes et continues) et ainsi inspecter des guides d'épaisseur variable, par exemple.

Résumé des principaux résultats du chapitre :

On a vu dans ce chapitre que la présence de variations d'épaisseur lentes et régulières cause la réfraction des ondes guidées. Cette réfraction est modélisée par la trajectoire courbée des rayons axiaux des pinceaux. Ces trajectoires peuvent être déterminées par le modèle développé au chapitre précédent. Dans les plaques isotropes la perte d'épaisseur a un effet sur les relations de dispersion qui est facilement modélisable, sans avoir à déterminer ces

relations localement. Quelques exemples de lancers de rayons à travers une perte d'épaisseur ont été donnés. La trajectoire des rayons étant régie par le gradient du nombre d'onde, elle est très sensible à la géométrie de la perte d'épaisseur. Un calcul du champ de déplacement a permis de discuter les résultats de manière qualitative et a été l'occasion de valider le modèle de pinceaux simplifié, qui permet de réduire significativement les temps de calcul. Enfin, un calcul par éléments finis montre un comportement de l'onde similaire à celui obtenu avec le modèle de pinceaux, sans permettre de conclure quantitativement à la validité de l'un ou l'autre des modèles. Une étude complémentaire reste donc à mener.

Dans un second temps, nous nous sommes intéressés à la modélisation des variations de vitesse des modes guidés dues à un état précontraint de la plaque. La simulation d'un état sains et d'états présentant des distributions de contraintes résiduelles a permis de calculer des différences de temps de vol qui peuvent être utilisées comme données d'entrée d'un algorithme de tomographie capable d'inverser le problème et donc de caractériser l'état de contrainte. Cet exemple a illustré l'intérêt du modèle de pinceaux pour la conception d'une procédure de contrôle. Il constitue également un exemple d'application simple du modèle développé dans le chapitre précédent. Enfin, cela a permis de proposer un modèle de propagation compatible avec différents développements réalisés par A. ABDERAHMANE (émission/réception par un EMAT, modèle d'acousto-élasticité).

Conclusion

L'OBJECTIF DE CES TRAVAUX était de développer un modèle semi-analytique de calcul modal de champs d'ondes guidées rayonnées dans les structures de type plaque. Ce modèle devait être adapté aux besoins de simulation en CND. En d'autres termes, il devait permettre des calculs rapides de champs d'ondes émises et reçues par des traducteurs ultrasonores et se propageant sur de longues distances dans des plaques à usage industriel. Les travaux de STÉVENIN en ont constitué le point de départ. En effet, son modèle de pinceaux d'ondes guidées nous paraissait particulièrement performant pour simuler les cas envisagés. De plus, ce choix s'inscrit dans la continuité des développements de modélisation et de simulation réalisés au CEA List. Notamment, l'approche modale constitue un équivalent à la description en ondes L et T (et composées des deux) faite dans les modules ultrasonores de CIVA ; or la compréhension physique des phénomènes qu'apporte cette approche est essentielle pour les exploiter de façon optimale pour le développement des méthodes de CND. Ces travaux font donc appel à des compétences développées en interne au CEA de longue date et s'inscrivent naturellement dans la philosophie des modèles intégrés dans le logiciel de simulation CIVA. En grande partie, les développements théoriques effectués dans cette thèse ont été implémentés sous l'environnement MATLAB dans le but d'obtenir une preuve de faisabilité et de performance. De nombreuses optimisations de ces algorithmes (parallélisation) restent encore à développer avant qu'ils soient intégrés à CIVA.

Conclusion générale

Nous nous sommes d'abord concentrés sur la propagation d'ondes guidées dans les plaques planes aux propriétés isotropes. Le développement d'un modèle de pinceau modal d'ondes guidées a permis d'obtenir la valeur du champ de déplacement émis par une source de contrainte ponctuelle située à la surface de la plaque. L'originalité du modèle tient au fait qu'il prend en compte les réflexions multiples sur les bords de la plaque, que ce bord soit rectiligne ou soit courbé. Le calcul de l'ensemble des coefficients de réflexion permet au modèle de pinceau de rendre compte des phénomènes de conversion de mode dus à

l'interaction de l'onde incidente avec les bords. La contribution de chacune de ces conversions est aisément identifiable grâce à la décomposition modale – plus précisément en séquences modales dans le cas présent – des formes d'ondes calculées. Nous avons par la suite adapté le modèle afin de simuler des configurations de CND par ondes guidées réalistes. Il a donc fallu coupler le modèle de pinceaux (qui est un modèle de propagation) avec des modèles de traducteurs ultrasonores. Un tel traducteur est vu comme une source de contraintes appliquées sur une surface d'aire finie localisée à la surface de la plaque. La stratégie consiste alors à considérer toute source de taille finie comme un continuum de points source. Ceci est autant valable à l'émission qu'à la réception (pour laquelle un continuum de points récepteurs est sensible à la vitesse particulière) ; on peut donc simuler toute la chaîne de mesure des signaux. Afin d'optimiser les calculs numériques, une stratégie de lancer de rayons a été proposée. Elle consiste à partir du point de calcul du champ pour ensuite arriver à la surface de la source. De plus, lorsque la source et le point de calcul sont suffisamment éloignés, on a montré que l'utilisation d'une approximation de type diffraction de Fraunhofer permet d'obtenir des résultats très précis de manière très performante. Cette dernière s'avère particulièrement utile lorsque la source est complexe (ex : EMATs) car elle permet d'éviter des calculs d'intégrales réalisés à la volée. Le modèle des pinceaux a été comparé à un code d'éléments finis. Ces deux méthodes par essence très différentes fournissent des résultats très proches, ce qui a permis de conclure que le modèle de pinceaux fournissait des prédictions quantitatives des champs d'ondes guidées.

La prise en compte des matériaux composites – dont le contrôle est un enjeu industriel majeur – a demandé d'étendre le modèle de pinceaux aux milieux anisotropes. Un pré-calcul des modes guidés pouvant se propager dans toutes les directions possibles est d'abord réalisé par application de la méthode SAFE. L'anisotropie des modes guidés est ainsi caractérisée. En particulier, la détermination des vitesses d'énergie donne la forme du front d'onde associé à un mode guidé tandis que le facteur de Maris donne la focalisation dans chaque direction d'énergie. Ces quantités servent d'appui pour définir un formalisme de pinceau modal en milieu anisotrope dont la divergence permet de déterminer la courbure locale du front d'onde. Cependant, dans le voisinage des directions de forte focalisation, le modèle des pinceaux n'est plus applicable. Une formulation basée sur la méthode de la phase stationnaire est mise en place pour pallier ce problème. Cette dernière ne permet toutefois pas le calcul du champ réfléchi ; elle ne peut se substituer entièrement à une approche pinceaux. De même, l'approximation de Fraunhofer donne des résultats faux dans les zones de focalisation élevée. En revanche le modèle de pinceaux est particulièrement performant dans la prise en charge du comportement viscoélastique du matériau, responsable d'une atténuation conséquente des ondes en milieu composite. Là encore, cette atténuation a été modélisée de manière modale en calculant par la méthode SAFE les modes se propageant dans un solide visco-élastique. Enfin, une comparaison avec un code d'éléments finis est effectuée. On peut donc affirmer que le modèle de pinceaux est valide en milieu anisotrope, et notamment pour les matériaux composite type CFRP stratifiés.

Le modèle est par la suite étendu aux plaques aux propriétés mécaniques continûment variables ou aux plaques courbées. Il a fallu revenir aux fondamentaux de l'élastodynamique pour définir la notion de trajet d'énergie d'une OG dans de tels milieux. Ceci a permis de définir un modèle de pinceaux généralisé dont les rayons suivent les variations de la relation de dispersion des modes et sont déterminés par une méthode numérique itérative. Néanmoins, malgré le fait que ce modèle soit plutôt générique, son implémentation optimale dépend du cas traité. Deux cas d'application simples ont été étudiés. Le premier correspond à un calcul de champ dans une plaque isotrope comportant un défaut de corrosion pour lequel on a adopté

une analyse à la fois qualitative et quantitative des résultats obtenus. Le second – issu d’une collaboration avec la thèse d’A. ABDERAHMANE – consiste à étudier l’influence d’états de contraintes résiduelles sur la propagation d’ondes guidées. Le but est alors de concevoir une méthode d’inversion des temps de vol mesurés pour caractériser l’état de contrainte. Les modèles d’acousto-élasticité qui traduisent les variations de vitesse des ondes dépendent du mode considéré ; il était donc logique d’utiliser un outil de simulation modal, tel que le modèle de pinceaux, dans ce cas d’étude.

Le modèle de pinceau possède néanmoins de nombreuses limites inhérentes à son approche géométrique. Il n’est plus valable dès lors qu’il y a diffraction des ondes. Par exemple, il ne permet pas de prédire les échos issus d’interaction complexe entre le champ incident et le coin d’une plaque. De plus, dans des cas complexes où il faut évaluer la relation de dispersion des modes guidés en chaque point de la plaque, les temps de calcul deviennent prohibitifs. En réalité, les limites de la méthode des pinceaux correspondent aux limites de définition d’un guide d’ondes. Plus on s’éloigne du modèle standard de la plaque plane, homogène et de dimension infinie moins le modèle est adapté. Les développements effectués dans la troisième partie de ce manuscrit correspondent à notre avis au maximum de ce qu’il est possible de faire pour traiter la propagation d’ondes guidées par un modèle de pinceaux.

Perspectives pour les développements à venir

À l’issue de ces travaux, plusieurs axes d’évolution concernant la stratégie de modélisation modale des ondes guidées omnidirectionnelles peuvent être dégagés. Ces derniers concernent à la fois le calcul de champ, les calculs d’interaction avec un défaut ou alors visent des applications particulières. Les principaux sont listés ci-après.

Pour cette thèse, nous avons fait le choix de n’effectuer que des validations numériques dans le but d’étudier finement certains phénomènes difficilement mesurables expérimentalement. Une campagne de validations expérimentales pourrait maintenant être entreprise. Cette dernière permettrait de mettre à l’épreuve plusieurs modèles de traducteurs ultrasonores (en émission et en réception). Il serait également intéressant d’utiliser notre modèle avec une méthode de détermination expérimentale des coefficients de viscoélasticité d’un matériau composite. L’atténuation des ondes n’est en effet bien souvent pas suffisamment prise en compte, alors qu’elle est essentielle pour la modélisation des matériaux composites. De plus, la caractérisation de l’atténuation de chaque mode fait clairement partie de la démarche de sélection du (ou des) mode(s) utilisé(s) pour le contrôle.

Comme énoncé au § 1.4.2 et observé au § 4.2, les ondes sont susceptibles d’être diffractées par les coins anguleux de la plaque. Ces contributions diffractées ne sont pas calculées avec une approche de pinceaux. On pourrait donc envisager de coupler un calcul de coefficients de diffraction modaux (par une méthode qui reste à déterminer) avec le formalisme des pinceaux. Les coefficients de diffraction seraient ainsi utilisés de la même manière que les coefficients de réflexion. D’autre part, le calcul de champ en milieu anisotrope est limité si les modes possèdent des directions de caustique. En pratique, on ne peut pas définir de pinceaux sur des régions restreintes de la plaque ; cependant une formulation sous forme de faisceaux gaussiens et/ou d’ondes inhomogènes permettrait de compléter ce calcul de champ au voisinage des caustiques.

Le modèle de pinceaux à lui seul ne peut pas être à la base d’un code d’interaction défauts. En effet, si les dimensions d’un défaut sont inférieures à la longueur d’onde des modes

guidés alors l'onde qui interagit avec ce défaut est diffractée. Or, dans le cas des OG les longueurs d'onde sont en pratique de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la plaque. Ainsi, la plupart des défauts (ex : fissures, entailles, inclusions, défauts d'adhésion, etc ...) diffractent les ondes guidées. D'un autre côté, les méthodes d'éléments finis permettent de prédire l'interaction d'une onde guidée avec ces défauts mais sont peu performantes pour traiter la propagation dans les zones saines de la plaque. Elles ne donnent en règle général pas non plus accès à la décomposition modale des formes d'onde calculées. L'idée est donc de coupler ces deux approches : le défaut serait placé dans un domaine d'éléments finis dont les champs élastiques aux frontières seraient obtenus par un calcul semi-analytique. Le but est de développer une méthode d'éléments finis harmonique qui permette de garder une vision modale du champ de déplacement. On serait alors en mesure d'alimenter par des calculs séparés la boîte d'éléments finis contenant le défaut par les contributions de chaque mode guidé. Au sein du maillage, les phénomènes de diffraction complexes seraient pris en compte puis une description modale du champ de déplacement serait obtenue sur les frontières de ce domaine, à une distance du défaut suffisante pour rétablir un régime d'ondes guidées. Ainsi, l'interaction de chaque mode guidé avec le défaut serait modélisée par des coefficients de diffractions à la fois modaux et directionnels. Des travaux en ce sens ont été réalisés récemment [41] et une prochaine thèse aura pour objectif de réaliser le couplage souhaité. Le développement d'une telle méthode peut sembler long et complexe, mais son intérêt pour la prédiction des interactions d'ondes guidées avec un défaut dans des configurations de contrôle est considérable. Ce serait l'aboutissement des travaux réalisés dans cette thèse et permettrait de proposer un outil de simulation totalement inédit.

Bibliographie

- [1] P. Cawley, “Practical long range guided wave inspection - managing complexity,” *AIP Conf. Proc.* **657**, 22–40 (2003).
- [2] J. L. Rose, “A baseline and vision of ultrasonic guided wave inspection potential,” *Journal of Pressure Vessel Technology* **124**, 273–282 (2002).
- [3] V. Giurgiutiu and G. Santoni-Bottai, “Structural health monitoring of composite structures with piezoelectric-wafer active sensors,” *AIAA Journal* **49**, 565–581 (2011).
- [4] S. Grondel, J. Assaad, C. Delebarre and E. Moulin, “Health monitoring of a composite wingbox structure,” *Ultrasonics* **42**, 819–824 (2004).
- [5] D. Balageas, “Introduction au contrôle de santé intégré (Introduction to structural health monitoring),” *Revue de l'Électricité et de l'Électronique*, 31–40 (2006).
- [6] D. E. Chimenti, “Guided waves in plates and their use in materials characterization,” *Appl. Mech. Rev.* **50**, 247–284 (1997).
- [7] M. Mitra and S. Gopalakrishnan, “Guided wave based structural health monitoring: A review,” *Smart Mater. Struct.* **25**, 053001 (2016).
- [8] C. Willberg, S. Duczec, J. M. Vivar-Perez and Z. a. B. Ahmad, “Simulation methods for guided wave-based structural health monitoring: a review,” *Appl. Mech. Rev.* **67** (2015).
- [9] V. Pagneux and A. Maurel, “Lamb wave propagation in elastic waveguides with variable thickness,” *Proc. R. Soc. Math. Phys. Eng. Sci.* **462**, 1315–1339 (2006).
- [10] V. Pagneux and A. Maurel, “Lamb wave propagation in inhomogeneous elastic waveguides,” *Proc. R. Soc. Lond. Ser. Math. Phys. Eng. Sci.* **458**, 1913–1930 (2002).
- [11] J. M. Galán and R. Abascal, “Boundary element solution for the bidimensional scattering of guided waves in laminated plates,” *Comput. Struct.* **83**, 740–757 (2005).
- [12] “Informations sur les outils de simulation CIVA pour les ondes ultrasonores,” <http://www.extende.com/ultrasonic-testing-with-civa>.

- [13] N. Gengembre, *Modélisation du champ ultrasonore rayonné dans un solide anisotrope et hétérogène par un transducteur immergé*, Thèse de doctorat (Université Paris 7, 1999).
- [14] A. Gardahaut, *Développements d'outils de modélisation pour la propagation ultrasonore dans les soudures bimétalliques*, Thèse de doctorat (Université Paris 7, 2013).
- [15] M. Darmon, V. Dorval, A. Kamta Djakou, L. Fradkin and S. Chatillon, "A system model for ultrasonic NDT based on the Physical Theory of Diffraction (PTD)," *Ultrasonics* **64**, 115–127 (2016).
- [16] N. Gengembre, A. Lhémery, R. Omote, T. Fouquet and A. Schumm, "A semi-analytic-FEM hybrid model for simulating UT configurations involving complicated interactions of waves with defects," *AIP Conf. Proc.* **700**, 74–80 (2004).
- [17] S. B. Dong and R. B. Nelson, "On natural vibrations and waves in laminated orthotropic plates," *J. Appl. Mech.* **39**, 739–745 (1972).
- [18] G. R. Liu and J. D. Achenbach, "A strip element method for stress analysis of anisotropic linearly elastic solids," *J. Appl. Mech.* **61**, 270–277 (1994).
- [19] A. H. Shah, W. Zhuang, N. Popplewell, and J. B. C. Rogers, "Guided waves in thin-walled structural members," *J. Vib. Acoust.* **123**, 376–382 (2001).
- [20] M. V. Predoi, M. Castaings, B. Hosten and C. Bacon, "Wave propagation along transversely periodic structures," *J. Acoust. Soc. Am.* **121**, 1935–1944 (2007).
- [21] V. Hernández, J. Estrada, E. Moreno, S. Rodríguez and A. Mansur, "Numerical solution of a wave propagation problem along plate structures based on the isogeometric approach," *J. Theor. Comput. Acoust.* **26**, 1750030 (2018).
- [22] W. T. Thomson, "Transmission of elastic waves through a stratified solid medium," *J. Appl. Phys.* **21**, 89–93 (1950).
- [23] N. A. Haskell, "The dispersion of surface waves on multilayered media," *Bull. Seismol. Soc. Am.* **43**, 17–34 (1953).
- [24] M. J. S. Lowe, "Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control* **42**, 525–542 (1995).
- [25] K. Jezzine, *Approche modale pour la simulation globale de contrôles non-destructifs par ondes élastiques guidées*, Thèse de doctorat (Université Bordeaux 1, 2006).
- [26] K. Jezzine and A. Lhémery, "Simulation of guided wave inspection based on the reciprocity principle and the Semi-Analytical Finite Element Method," *AIP Conf. Proc.* **894**, 39–46 (2007).
- [27] V. Baronian, *Couplage des méthodes modale et éléments finis pour la diffraction des ondes élastiques guidées : application au contrôle non destructif*, Thèse de doctorat (École polytechnique, 2009).
- [28] V. Baronian, A. Lhémery and A.-S. Bonnet-BenDhia, "Simulation of non-destructive inspections and acoustic emission measurements involving guided waves," *J. Phys.: Conf. Ser.* **195**, 012001 (2009).
- [29] L. Taupin, *Modélisation des méthodes ultrasonores de surveillance de structures aéronautiques instrumentées en vue de leur optimisation*, Thèse de doctorat (École polytechnique, 2011).

- [30] L. Taupin, A. Lhémery, V. Baronian and A.-S. Bonnet-BenDhia, “Scattering of obliquely incident guided waves by a stiffener bonded to a plate,” *J. Phys.: Conf. Ser.* **353**, 012011 (2012).
- [31] M. El Bakkali, *Modélisation des contrôles non-destructifs par ondes ultrasonores guidées. Application aux contrôles de canalisations*, Thèse de doctorat (Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2015).
- [32] M. El Bakkali, A. Lhémery, V. Baronian and S. Grondel, “A modal formulation for the propagation of guided waves in straight and curved pipes and the scattering at their junction,” *J. Phys.: Conf. Ser.* **498**, 012012 (2014).
- [33] M. Stévenin, *Rayonnement des ondes ultrasonores guidées dans une structure mince et finie, métallique ou composite, en vue de son contrôle non-destructif*, Thèse de doctorat (Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2016).
- [34] M. Stévenin, A. Lhémery and S. Grondel, “A model to predict modal radiation by finite-sized sources in semi-infinite isotropic plates,” *J. Phys.: Conf. Ser.* **797**, 012005 (2017).
- [35] A. Velichko and P. D. Wilcox, “Modeling the excitation of guided waves in generally anisotropic multilayered media,” *J. Acoust. Soc. Am.* **121**, 60–69 (2007).
- [36] Z. A. B. Ahmad and U. Gabbert, “Simulation of Lamb wave reflections at plate edges using the semi-analytical finite element method,” *Ultrasonics* **52**, 815–820 (2012).
- [37] C. A. C. Leckey, K. R. Wheeler, V. N. Hafiychuk, H. Hafiychuk and D. A. Timuçin, “Simulation of guided-wave ultrasound propagation in composite laminates: Benchmark comparisons of numerical codes and experiment,” *Ultrasonics* **84**, 187–200 (2018).
- [38] C. A. C. Leckey, M. D. Rogge and F. Raymond Parker, “Guided waves in anisotropic and quasi-isotropic aerospace composites: Three-dimensional simulation and experiment,” *Ultrasonics* **54**, 385–394 (2014).
- [39] F. Schubert, A. Peiffer, B. Köhler and T. Sanderson, “The elastodynamic finite integration technique for waves in cylindrical geometries,” *J. Acoust. Soc. Am.* **104**, 2604 (1998).
- [40] O. Mesnil, A. Imperiale, E. Demaldent and B. Chapuis, “Validation of spectral finite element simulation tools dedicated to guided wave based structure health monitoring,” *AIP Conf. Proc.* **2102**, 050018 (2019).
- [41] Y. Tjandrawidjaja, *Some contributions to the analysis of the Half-Space Matching Method for scattering problems and extension to 3D elastic plates*, Thèse de doctorat (Université Paris-Saclay, 2019).
- [42] J. Barras, A. Lhémery and A. Impériale, “Modal pencil method for the radiation of guided wave fields in finite isotropic plates validated by a transient spectral finite element method,” *Ultrasonics* **103**, 106078 (2020).
- [43] J. Barras and A. Lhémery, “Modal pencil method for the radiation of guided wave fields in composite plates of finite size,” soumis à publication dans *NDT E Int.* (2020).
- [44] G. A. Deschamps, “Ray techniques in electromagnetics,” *Proc. IEEE* **60**, 1022–1035 (1972).
- [45] H. Lamb, “On waves in an elastic plate,” *Proc. R. Soc. Lond. A* **93**, 114–128 (1917).

- [46] P. L. Marston, “Negative group velocity Lamb waves on plates and applications to the scattering of sound by shells,” *J. Acoust. Soc. Am.* **113**, 2659–2662 (2003).
- [47] J. J. Stamnes, *Waves in focal regions : propagation, diffraction and focusing of light, sound and water waves*, CRC Press (A. Hilger, Bristol, 1986).
- [48] B. A. Auld, *Acoustic fields and waves in solids*, Krieger publishing company (John Wiley & Sons, Malabar (Florida), 1973).
- [49] I. Núñez, R. K. Ing, C. Negreira and M. Fink, “Transfer and Green functions based on modal analysis for Lamb waves generation,” *J. Acoust. Soc. Am.* **107**, 2370–2378 (2000).
- [50] N. Gengembre, A. Lhémery and P. Calmon, “Modeling of ultrasonics beam,” in *Materials and Acoustics Handbook*, M. Bruneau and C. Potel (John Wiley & Sons, 2013).
- [51] S. Chehade, *Modelling of the 3D scattering of elastic waves by complex structures for specimen echoes calculation. Application to ultrasonic NDT simulation*, Thèse de doctorat (Université Paris-Saclay, 2019).
- [52] S. Chehade, A. Kamta Djakou, M. Darmon and G. Lebeau, “The spectral functions method for acoustic wave diffraction by a stress-free wedge: Theory and validation,” *J. Comput. Phys.* **377**, 200–218 (2019).
- [53] G. R. Liu and J. D. Achenbach, “Strip element method to analyze wave scattering by cracks in anisotropic laminated plates,” *J. Appl. Mech.* **62**, 607–613 (1995).
- [54] N. Vasudevan and A. K. Mal, “Response of an elastic plate to localized transient sources,” *J. Appl. Mech.* **52**, 356–362 (1985).
- [55] B. Clause, *Modélisation des transducteurs électromagnétiques acoustiques (EMAT) pour le contrôle non-destructif (CND) de milieux ferromagnétiques*, Thèse de doctorat (Université Paris-Saclay, 2018).
- [56] B. Clause, A. Lhémery and H. Walaszek, “A model to predict the ultrasonic field radiated by magnetostrictive effects induced by EMAT in ferromagnetic parts,” *J. Phys.: Conf. Ser.* **797**, 012004 (2017).
- [57] C. Rouge, A. Lhémery and D. Ségur, “Transformation of body force localized near the surface of a half-space into equivalent surface stresses,” *J. Acoust. Soc. Am.* **134**, 2639–2646 (2013).
- [58] B. Clause and A. Lhémery, “Transformation of body force generated by non-contact sources of ultrasound in an isotropic solid of complex shape into equivalent surface stresses,” *Wave Motion* **60**, 135–148 (2016).
- [59] G. Cousin, A. Lhémery and S. Grondel, “A model to predict the elastic field radiated by a magnetostrictive patch transducer into an omnidirectional waveguide,” soumis à publication dans le *J. Phys.: Conf. Ser.* (2020).
- [60] V. Giurgiutiu and A. N. Zagrai, “Characterization of piezoelectric wafer active sensors,” *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* **11**, 959–976 (2000).
- [61] E. F. Crawley and J. de Luis, “Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures,” *AIAA Journal* **25**, 1373–1385 (1987).

- [62] G. Delattre, *Contribution au développement de modèles de rayonnement d'ondes élastiques guidées dans les plaques de taille finie pour la simulation CND/SHM*, Rapport de stage, Université Polytechnique Hauts-de-France, 2019.
- [63] A. Impériale, E. Demaldent, N. Leymarie, S. Chatillon and P. Calmon, "Smart numerical tools for the modelling of ultrasonic testing on curved composite structures," *AIP Conf. Proc.* **2102**, 130004 (2019).
- [64] Y. N. Makov, V. J. Sanchez-Morcillo, F. Camarena and V. Espinosa, "Nonlinear focal shift in focused ultrasonic transducers and its dependence on the Fresnel number," *J. Acoust. Soc. Am.* **123**, 3848 (2008).
- [65] P. Huthwaite, R. Ribichini, P. Cawley and M. J. S. Lowe, "Mode selection for corrosion detection in pipes and vessels via guided wave tomography," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control* **60**, 1165–1177 (2013).
- [66] J. L. Rose, A. Pilarski and J. J. Ditri, "An approach to guided wave mode selection for inspection of laminated plate," *J. Reinf. Plast. Compos.* **12**, 536–544 (1993).
- [67] J. P. Koduru, S. Momeni and J. L. Rose, "Phased annular array transducers for omnidirectional guided wave mode control in isotropic plate like structures," *Smart Mater. Struct.* **22**, 125022 (2013).
- [68] E. V. Glushkov, N. V. Glushkova, O. V. Kvasha and R. Lammering, "Selective Lamb mode excitation by piezoelectric coaxial ring actuators," *Smart Mater. Struct.* **19**, 035018 (2010).
- [69] Y. Shen and V. Giurgiutiu, "Excitability of guided waves in composites with PWAS transducers," *AIP Conf. Proc.* **1650**, 658–667 (2015).
- [70] N. Boulay, *Modélisation des capteurs d'émission acoustique en vue de la simulation d'un contrôle*, Thèse de doctorat (Université Paris-Saclay, 2017).
- [71] T. A. Collings, "Transverse compressive behaviour of unidirectional carbon fibre reinforced plastics," *Composites* **5**, 108–116 (1974).
- [72] H. J. Maris, "Enhancement of heat pulses in crystals due to elastic anisotropy," *J. Acoust. Soc. Am.* **50**, 812–818 (1971).
- [73] R. E. Challis, F. Blarel, M. E. Unwin, J. Paul and X. Guo, "Models of ultrasonic wave propagation in epoxy materials," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control* **56**, 1225–1237 (2009).
- [74] F. H. Quintanilla, Z. Fan, M. J. S. Lowe and R. V. Craster, "Guided waves' dispersion curves in anisotropic viscoelastic single- and multi-layered media," *Proc. R. Soc. Math. Phys. Eng. Sci.* **471**, 20150268 (2015).
- [75] L. Taupin, A. Lhémy and G. Inquiété, "A detailed study of guided wave propagation in a viscoelastic multilayered anisotropic plate," *J. Phys.: Conf. Ser.* **269**, 012002 (2011).
- [76] K. P. Soldatos, "The generalized viscoelastic spring," *Proc. R. Soc. Math. Phys. Eng. Sci.* **476**, 20190881 (2020).
- [77] A. Karmazin, E. Kirillova, W. Seemann and P. Syromyatnikov, "A study of time harmonic guided Lamb waves and their caustics in composite plates," *Ultrasonics* **53**, 283–293 (2013).

- [78] M. Stévenin, A. Lhémy and S. Grondel, “An efficient model to predict guided wave radiation by finite-sized sources in multilayered anisotropic plates with account of caustics,” *J. Phys.: Conf. Ser.* **684**, 012004 (2016).
- [79] G. B. Airy, *On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic*. (Cambridge, 1838).
- [80] M. Deschamps and O. Poncelet, “Complex ray in anisotropic solids: Extended Fermat’s principle,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. - S* **12**, 1623 (2019).
- [81] O. Jacquet, *Méthodes de faisceaux gaussiens pour la modélisation d’ondes de volume ultrasonores : application à la simulation du contrôle non-destructif*, Thèse de doctorat (Sorbonne université, 2018).
- [82] H. Jo, S.-H. Sim, T. Nagayama and B. F. Spencer, “Development and application of high-sensitivity wireless smart sensors for decentralized stochastic modal identification,” *J. Eng. Mech.* **138**, 683–694 (2012).
- [83] N. Eleftheroglou and T. Loutas, “Fatigue damage diagnostics and prognostics of composites utilizing structural health monitoring data and stochastic processes,” *SHM* **15**, 473-488 (2016).
- [84] V. Červený, *Seismic ray theory* (Cambridge University Press, 2001).
- [85] C. Chapman, *Fundamentals of seismic wave propagation* (Cambridge University Press, 2004).
- [86] M. A. Slawinski, *Waves and rays in elastic continua* (World Scientific, 2010).
- [87] W. W. Symes and J. Qian, “A slowness matching eulerian method for multivalued solutions of eikonal equations,” *J. Sci. Comput.* **19**, 501–526 (2003).
- [88] P. Gibert and E. Gay, “Medium frequency range analysis in non-homogeneous slender structures,” actes du 21ème Congrès Français de Mécanique (2013).
- [89] J. C. Butcher, “Coefficients for the study of Runge-Kutta integration processes,” *J. Aust. Math. Soc.* **3**, 185–201 (1963).
- [90] J. R. Dormand and P. J. Prince, “A family of embedded Runge-Kutta formulae,” *J. Comput. Appl. Math.* **6**, 19–26 (1980).
- [91] E. Hairer, S. P. Nørsett and G. Wanner, *Solving ordinary differential equations I: nonstiff problems*, 2nd ed. (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1993).
- [92] P. D. Wilcox, *Lamb wave inspection of large structures using Lamb wave inspection of large structures using permanently attached transducers*, Thèse de doctorat (Imperial College London, 1998).
- [93] D. Martínez, L. Velho and P. C. Carvalho, “Computing geodesics on triangular meshes,” *Comput. Graph.* **29**, 667–675 (2005).
- [94] M. Motamed and O. Runborg, “A multiple-patch phase space method for computing trajectories on manifolds with applications to wave propagation problems,” *Commun. Math. Sci.* **5**, 617–648 (2007).
- [95] L. Klimeš, “Transformations for dynamic ray tracing in anisotropic media,” *Wave Motion* **20**, 261–272 (1994).

- [96] L. Klimeš, “Ray-centred coordinate systems in anisotropic media,” *Stud. Geophys. Geod.* **50**, 431–447 (2006).
- [97] H. Chouh, *Simulations interactives de champ ultrasonore pour des configurations complexes de contrôle non destructif*, Thèse de doctorat (Université Lyon 1, 2016).
- [98] P. Bélanger and P. Cawley, “Feasibility of low frequency straight-ray guided wave tomography,” *NDT E Int.* **42**, 113–119 (2009).
- [99] A. Volker and J. Bloom, “Experimental results of guided wave travel time tomography,” *AIP Conf. Proc.* **1335**, 215–222 (2011).
- [100] T. Druet, *Tomographie passive par ondes guidées pour des applications de contrôle santé intégré*, Thèse de doctorat (Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2017).
- [101] J. C. P. McKeon and M. K. Hinders, “Parallel projection and crosshole Lamb wave contact scanning tomography,” *J. Acoust. Soc. Am.* **106**, 2568–2577 (1999).
- [102] E. V. Malyarenko and M. K. Hinders, “Fan beam and double crosshole Lamb wave tomography for mapping flaws in aging aircraft structures,” *J. Acoust. Soc. Am.* **108**, 1631–1639 (2000).
- [103] S. Li, K. Mueller, M. Jackowski, D. P. Dione and L. H. Staib, “Fast marching method to correct for refraction in ultrasound computed tomography,” *3rd IEEE Int. Symp. Biomed. Imaging Nano Macro* (2006).
- [104] C. L. Willey, F. Simonetti, P. B. Nagy and G. Instanes, “Guided wave tomography of pipes with high-order helical modes,” *NDT E Int.* **65**, 8–21 (2014).
- [105] C. H. Wang and L. R. F. Rose, “Plate-wave diffraction tomography for structural health monitoring,” *AIP Conf. Proc.* **657**, 1615–1622 (2003).
- [106] F. Simonetti and L. Huang, “From beamforming to diffraction tomography,” *J. Appl. Phys.* **103**, 103110 (2008).
- [107] S. Hauptert, J. Rivière, B. Anderson, Y. Ohara, T. J. Ulrich and P. Johnson, “Optimized dynamic acousto-elasticity applied to fatigue damage and stress corrosion cracking,” *J. Nondestruct. Eval.* **33**, 226–238 (2014).
- [108] J. J. Dike and G. C. Johnson, “Residual stress determination using acoustoelasticity,” *J. Appl. Mech.* **57**, 12–17 (1990).
- [109] K. Peddetti and S. Santhanam, “Dispersion curves for Lamb wave propagation in prestressed plates using a semi-analytical finite element analysis,” *J. Acoust. Soc. Am.* **143**, 829–840 (2018).
- [110] A. Bernard, M. J. S. Lowe and M. Deschamps, “Guided waves energy velocity in absorbing and non-absorbing plates,” *J. Acoust. Soc. Am.* **110**, 186–196 (2001).
- [111] G. Neau, *Ondes de Lamb dans des plaques anisotropes viscoélastiques : étude des fronts d’onde et atténuation*, Thèse de doctorat (Université Bordeaux 1, 2003).
- [112] K. Balasubramaniam and C. V. Krishnamurthy, “Ultrasonic guided wave energy behavior in laminated anisotropic plates,” *J. Sound Vib.* **296**, 968–978 (2006).
- [113] B. Gérardin, J. Laurent, C. Prada and A. Aubry, “Negative reflection of Lamb waves at a free edge: Tunable focusing and mimicking phase conjugation,” *J. Acoust. Soc. Am.* **140**, 591–600 (2016).

-
- [114] E. Le Clezio, M. Valentin Predoi, M. Castaings, B. Hosten and M. Rousseau, "Numerical predictions and experiments on the free-plate edge mode," *Ultrasonics* **41**, 25–40 (2003).
- [115] A. Gunawan and S. Hirose, "Reflection of obliquely incident guided waves by an edge of a plate," *Materials Transactions* **48**, 1236–1243 (2007).
- [116] W. B. Fraser, "Orthogonality relation for the Rayleigh–Lamb modes of vibration of a plate," *J. Acoust. Soc. Am.* **59**, 215–216 (1976).

Annexes

Annexe A

Calcul des modes guidés par la méthode SAFE

Dans cette annexe, le calcul des modes guidés par la méthode SAFE (pour Semi-Analytical Finite Elements) est détaillé. Cette méthode permet d'obtenir de manière numérique les nombres d'onde et déformées modales dans un guide d'ondes aux caractéristiques mécaniques anisotropes dans le plan de la plaque et hétérogènes dans l'épaisseur. Les variations dans le plan de la plaque sont traitées de manière analytique, ce qui rend la méthode SAFE pleinement compatible avec la méthode du pinceau modal

A.1. Présentation de la méthode SAFE

Établissement du problème élastodynamique sous forme intégrale

Soit une plaque d'épaisseur $2e$ dont les caractéristiques mécaniques sont décrites par le tenseur des coefficients d'élasticité \mathbf{C} (exprimé dans le repère $(\mathbf{e}_x; \mathbf{e}_y; \mathbf{e}_z)$ de la plaque) et la masse volumique ρ_0 considérée homogène. Les coefficients d'élasticité peuvent être ceux d'un matériau anisotrope selon les rotations dans le plan de la plaque et fortement hétérogènes dans l'épaisseur. Cependant cette hétérogénéité doit être constante dans le plan de la plaque. Le guide d'ondes élastiques ainsi décrit est noté

$$\Omega : \{\mathbf{x} = (x \ y \ z)^t \in \mathbb{R}^3, |z| \leq e\}. \quad (\text{A.1.1})$$

La notation de Voigt est utilisée afin de regrouper les composantes du tenseur des déformations et du tenseur des contraintes. On a alors les notations suivantes pour le déplacement particulière \mathbf{u} , le tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ et le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\mathbf{u} = [u_x \ u_y \ u_z]^t, \quad (\text{A.1.2})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ 2\varepsilon_{yz} \ 2\varepsilon_{xz} \ 2\varepsilon_{xy}]^t, \quad (\text{A.1.3})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{xz} \ \sigma_{xy}]^t. \quad (\text{A.1.4})$$

Le tenseur des déformations s'exprimant grâce aux dérivées spatiales du déplacement particulière, ces deux quantités sont donc liées par la relation matricielle suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\mathbf{L}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{L}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{L}_z \frac{\partial}{\partial z} \right] \mathbf{u}, \quad (\text{A.1.5})$$

avec

$$\mathbf{L}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{L}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1.6})$$

On cherche à résoudre l'équation de l'élastodynamique dans Ω munie d'une condition de contrainte normale libre aux frontières ($\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$ sur $\partial\Omega$ avec \mathbf{n} la normale extérieure aux frontières). En appliquant le principe des travaux virtuels, on a la forme faible suivante, dont l'inconnue est le champ de déplacement :

$$\int_{\Omega} (\delta \boldsymbol{\varepsilon})^t \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) dV - \rho_0 \int_{\Omega} (\delta \mathbf{u})^t \ddot{\mathbf{u}} dV = 0 \quad (\text{A.1.7})$$

Discrétisation de l'épaisseur par éléments finis de Lagrange

L'objet de cette étude étant la description d'une onde guidée se propageant avec un vecteur d'onde dont les composantes sont notées $(k_x; k_y)$ dans le plan de la plaque, le champ de déplacement est choisi comme une forme d'onde (vectorielle) de fréquence angulaire ω . L'*ansatz* ainsi prise possède des variations spatiales connues analytiquement (car uniquement liées à la périodicité spatiale en k_x, k_y) alors que sa description en fonction de l'épaisseur est en règle générale très complexe (les caractéristiques mécaniques du matériau pouvant être fortement hétérogènes suivant \mathbf{e}_z). L'idée principale proposée à travers la méthode SAFE est alors de discrétiser l'épaisseur du guide afin d'obtenir la description du déplacement en fonction de z par une méthode numérique en prenant en compte ses variations analytiques suivant x et y . Cette discrétisation est réalisée sur une base de N_e éléments finis de Lagrange (1D) d'ordre p . Le champ de déplacement \mathbf{u} se décompose alors sur le domaine élément fini et il s'écrit pour un élément e :

$$\mathbf{u}^{(e)}(x, y, z, t) = \mathbf{N}^{(e)}(z) \hat{\mathbf{U}}^{(e)} \exp\{i(\omega t - k_x x - k_y y)\}, \quad (\text{A.1.8})$$

où $\mathbf{N}^{(e)}(z)$ est la matrice d'interpolation de l'élément e et $\hat{\mathbf{U}}^{(e)}$ est un vecteur contenant les déplacements nodaux de cet élément. Ces deux termes sont de la forme :

$$\mathbf{N}^{(e)}(z) = \begin{bmatrix} \Phi_1^{(e),p}(z) & 0 & 0 & \Phi_{p+1}^{(e),p}(z) & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_1^{(e),p}(z) & 0 & \dots & 0 & \Phi_{p+1}^{(e),p}(z) & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_1^{(e),p}(z) & 0 & 0 & 0 & \Phi_{p+1}^{(e),p}(z) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1.9})$$

$$\hat{\mathbf{U}}^{(e)} = [U_x^{(e),1} \quad U_y^{(e),1} \quad U_z^{(e),1} \quad \dots \quad U_x^{(e),n} \quad U_y^{(e),n} \quad U_z^{(e),n}]^t, \quad (\text{A.1.10})$$

où les $\Phi_i^{(e),p}(z)$ sont les polynômes d'interpolation de Lagrange d'ordre p sur l'élément (e) . Le déplacement virtuel prend lui la forme suivante :

$$\delta \mathbf{u}^{(e)}(x, y, z, t) = \mathbf{N}^{(e)}(z) \delta \hat{\mathbf{U}}^{(e)} \exp\{i(-\omega t + k_x x + k_y y)\}, \quad (\text{A.1.11})$$

Après avoir introduit cette décomposition dans l'expression des déformations (équation (A.1.5)) et en remplaçant les dérivées suivant x et y par des multiplications par $-ik_x$ et $-ik_y$, on obtient :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \left[-ik_x \mathbf{B}_1^{(e)}(z) - ik_y \mathbf{B}_1^{(e)}(z) + \mathbf{B}_3^{(e)}(z) \right] \hat{\mathbf{U}}^{(e)} \exp\{i(\omega t - k_x x - k_y y)\}, \quad (\text{A.1.12})$$

avec les matrices $\mathbf{B}_j^{(e)}$ définies telles que : $\mathbf{B}_1^{(e)}(z) = \mathbf{L}_x \mathbf{N}^{(e)}(z)$, $\mathbf{B}_2^{(e)}(z) = \mathbf{L}_y \mathbf{N}^{(e)}(z)$ et $\mathbf{B}_3^{(e)}(z) = \mathbf{L}_z \mathbf{N}_{,z}^{(e)}(z)$, la matrice $\mathbf{N}_{,z}^{(e)}$ étant la dérivée de $\mathbf{N}^{(e)}$ par rapport à z .

Les expressions matricielles ainsi obtenues sont alors injectées dans l'équation (A.1.7). Les intégrations volumiques peuvent se réduire à des intégrales suivant l'épaisseur car les termes de phase de \mathbf{u} et de $\delta \mathbf{u}$ s'annihilent. Après avoir introduit $\hat{\mathbf{U}}$ comme étant l'assemblage des déplacements nodaux de chacun des éléments, l'équation (A.1.7) devient alors :

$$\delta \hat{\mathbf{U}}^t [k_x^2 \mathbf{K}_{11} + k_y^2 \mathbf{K}_{22} + k_x k_y (\mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{12}^t) + i k_x (\mathbf{K}_{13} - \mathbf{K}_{13}^t) + i k_y (\mathbf{K}_{23} - \mathbf{K}_{23}^t) + \mathbf{K}_{33} - \omega^2 \mathbf{M}] \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{0}, \quad (\text{A.1.13})$$

dans laquelle les matrices de rigidité \mathbf{K}_{ij} et la matrice de masse \mathbf{M} sont définies par :

$$\mathbf{K}_{ij} = \bigcup_{e=1}^{N_e} \int_{(e)} (\mathbf{B}_i^{(e)})^t \mathbf{c}^{(e)} \mathbf{B}_j^{(e)} dz \quad (\text{A.1.14})$$

$$\mathbf{M} = \bigcup_{e=1}^{N_e} \int_{(e)} \rho_0 (\mathbf{N}^{(e)})^t \mathbf{N}^{(e)} dz \quad (\text{A.1.15})$$

Problème aux valeurs propres

La direction de propagation de l'onde, notée γ , est définie telle que le vecteur d'onde \mathbf{k} ait pour expression $\mathbf{k} = k_x \cos \gamma \mathbf{e}_x + k_y \sin \gamma \mathbf{e}_y$. De plus, $\delta \mathbf{U}$ est choisi de manière arbitraire. L'équation (A.1.13) peut alors être vue comme un problème aux valeurs propres quadratique en $k = \|\mathbf{k}\|$, soit :

$$[\mathbf{A}_0 + k \mathbf{A}_1 + k^2 \mathbf{A}_2] \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{0}, \quad (\text{A.1.16})$$

où les matrices \mathbf{A}_i sont définies en fonction des matrices de rigidité, de la matrice de masse et de l'angle γ de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0 = \mathbf{K}_{33} - \omega^2 \mathbf{M} \\ \mathbf{A}_1 = i [\cos \gamma (\mathbf{K}_{13} - \mathbf{K}_{13}^t) + \sin \gamma (\mathbf{K}_{23} - \mathbf{K}_{23}^t)] \\ \mathbf{A}_2 = \cos^2 \gamma \mathbf{K}_{11} + \sin^2 \gamma \mathbf{K}_{22} + \cos \gamma \cos \gamma (\mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{12}^t) \end{cases} \quad (\text{A.1.17})$$

Il est possible de revenir à un problème aux valeurs propres linéaires en introduisant la variable $(k \hat{\mathbf{U}})$, faisant ainsi disparaître les termes d'ordre 2 au prix de doubler la taille du système. Ainsi, en combinant le système (A.1.16) et le système $\mathbf{A}_0 k \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{A}_0 (k \hat{\mathbf{U}})$, on obtient finalement :

$$\boxed{\left(\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}} \\ k\hat{\mathbf{U}} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.1.18})$$

Les matrices qui composent ce système sont symétriques. Dans le cas où \mathbf{C} est réelle (milieu sans atténuation) elles sont aussi réelles ; le système est donc aisément diagonalisable. Les valeurs propres de ce système correspondent aux nombres d'ondes des modes guidés tandis que la première moitié des vecteurs propres (*i.e.* la partie correspondant à $\hat{\mathbf{U}}$) correspond aux déformées modales aux nœuds du maillage dans le repère $(\mathbf{e}_x; \mathbf{e}_y; \mathbf{e}_z)$.

A.2. Analyse des résultats obtenus et post-traitements

Application aux matériaux isotropes

La méthode est appliquée dans le but d'obtenir les modes guidés dans une plaque en aluminium d'épaisseur 3 mm dont les coefficients de Lamé sont $(\lambda; \mu) = (50.23; 25.95)$ GPa et la masse volumique $\rho_0 = 2.7 \text{ g.cm}^{-3}$. La discrétisation communément choisie consiste en quelques éléments de Lagrange quadratiques (P2) par longueur d'onde. En effectuant le calcul pour des fréquences comprises entre 1 kHz et 3MHz, on obtient les courbes de dispersion (en nombre d'onde et vitesse d'énergie) représentées sur la Figure A.1.

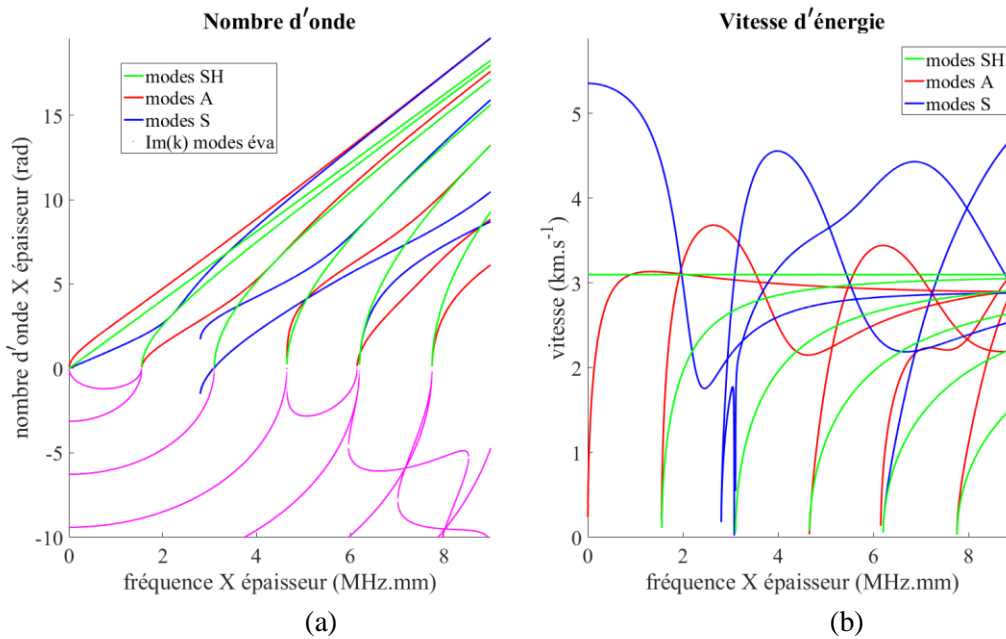


Figure A.1. Courbes de dispersion en nombre d'onde (a) et vitesse d'énergie (b) obtenues pour l'aluminium.

Les courbes représentées en magenta sur la Figure A.1a correspondent au nombre d'onde de certains des modes dits *évanescents*. En effet, la résolution du système (A.1.18) fournit trois types de modes classés suivant la nature de leur nombre d'onde :

- Les modes *propagatifs* ($k \in \mathbb{R}$) capables de se propager sur de longues distances. Ce sont ces modes utilisés dans le cadre des calculs de champ particulaire. Ils sont présents, à toute fréquence, en nombre fini.
- Les modes *évanescents* ($k \in i\mathbb{R}$) peuvent être générés localement (au niveau de la source ou de la réflexion sur un bord de plaque) mais voient leur amplitude décroître de manière exponentielle. Ils n'apportent en pratique une contribution non nulle que sur des distances courtes. Ces modes sont formellement en nombre infini à toute fréquence, mais en nombre fini dès lors qu'on les obtient par une quadrature numérique comme c'est le cas avec la méthode SAFE.
- Les modes *inhomogènes* ($k \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}, i\mathbb{R}\}$) sont dû à la taille finie du système SAFE. Ne pouvant décrire de manière complète la base modale (qui est de dimension infinie), la résolution du système génère alors ces modes. Tout comme les modes évanescent, ils ne contribuent au champ que sur de courtes distances.

La vitesse d'énergie est obtenue par post-traitement des résultats obtenus par la méthode SAFE. Elle est définie comme étant la norme de la moyenne temporelle du vecteur de Poynting \mathbf{P} divisé par la moyenne temporelle de l'énergie mécanique totale E_{tot} , soit

$$v_e := \frac{\|\langle \mathbf{P} \rangle\|}{\langle E_{tot} \rangle}, \quad (\text{A.2.1})$$

avec :

$$\langle \mathbf{P} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[- \int_{z=-e}^e \boldsymbol{\sigma} \dot{\mathbf{u}}^* dz \right], \quad (\text{A.2.2})$$

$$\langle E_{tot} \rangle = \frac{1}{4} \int_{z=-e}^e (\rho_0 \dot{\mathbf{u}}^t \dot{\mathbf{u}}^* + \boldsymbol{\varepsilon}^t \text{Re}(\mathbf{C}) \boldsymbol{\varepsilon}^*) dz. \quad (\text{A.2.3})$$

Dans ces expressions, le champ de déplacement \mathbf{u} correspond à la déformée de chacun des modes alors que le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ est obtenu à partir des coefficients élastiques et de la déformée modale (voir équation (A.1.5)). Dans le cas d'un milieu sans atténuation, comme c'est ici le cas, la vitesse d'énergie est égale à la vitesse de groupe $v_g := \partial\omega/\partial k$ [110]. Le calcul du vecteur de Poynting étant nécessaire à d'autres parties de ces travaux et la définition de la vitesse d'énergie pouvant être étendue aux milieux atténuants (contrairement à celle de la vitesse de groupe pour laquelle la différentiation de $\omega(k)$ n'est plus possible quand k devient complexe [111]), la vitesse d'énergie sera utilisée en lieu et place de la vitesse de groupe.

Les déformées modales des modes fondamentaux et des modes d'ordre 1 sont représentées sur la Figure A.2, l'amplitude des déplacements ayant été bien entendu exagérée. On y voit alors nettement les caractéristiques de symétrie de chacun de ces modes, notamment le découplage entre la polarisation des modes SH et celles des modes de Lamb.

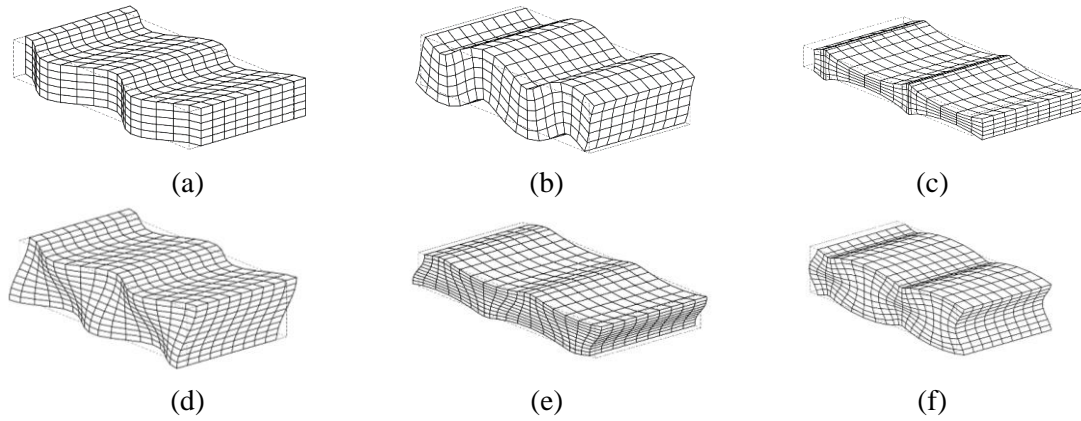


Figure A.2. Déformée modale des modes fondamentaux à 300 kHz [SH_0 (a), A_0 (b) et S_0 (c)] et des modes d'ordre 1 [SH_1 à 700 kHz (d), A_1 à 700 kHz (e) et S_1 à 1 MHz (f)].

Enfin, il est possible de détecter les fréquences de coupure ω_c qui correspondent à des fréquences pour lesquelles certains modes ont un nombre d'onde nul. En annulant k dans le système (A.1.16), les valeurs des fréquences de coupure sont obtenues en résolvant le problème aux valeurs propres suivant :

$$[\mathbf{K}_{33} - \omega_c^2 \mathbf{M}] \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{0} \quad (\text{A.2.4})$$

Application aux matériaux anisotropes

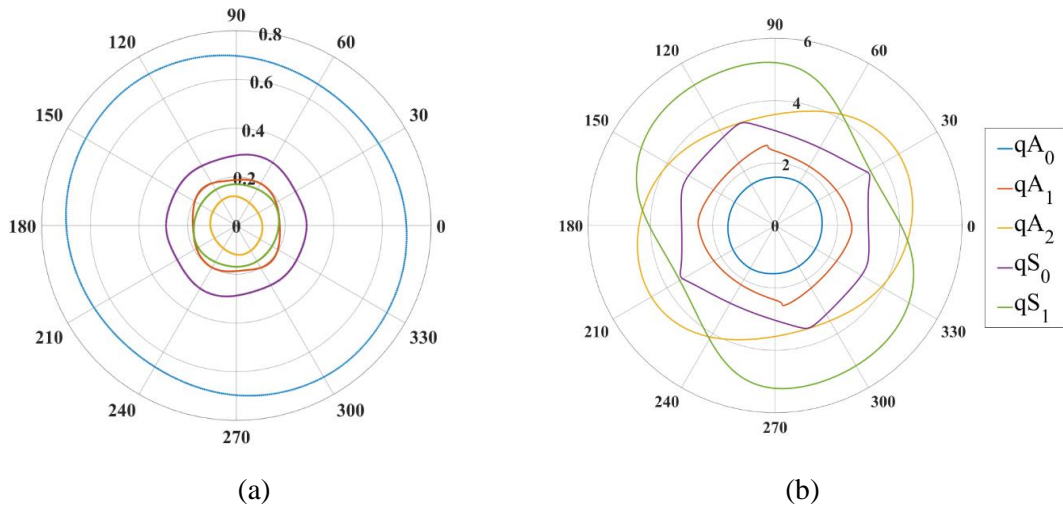
La méthode est maintenant appliquée à un matériau composite constitué de huit plis composés de fibres unidirectionnelles selon la séquence d'empilement $[45^\circ; -45^\circ; 0; 90^\circ]_S$. Les caractéristiques mécaniques d'un pli (pour une orientation des fibres selon la direction de \mathbf{e}_x) sont résumées dans le Tableau A.1.

Dès lors qu'un matériau anisotrope est considéré, il convient d'étudier les modes dans toutes les directions de phase γ possibles. La représentation classiquement choisie consiste alors à tracer la lenteur de chaque mode (qui est proportionnelle au nombre d'onde) en fonction des directions de phase (voir Figure A.3a). Dans les matériaux anisotropes il n'y a pas de découplage entre les modes SH et les modes de Lamb, contrairement aux modes guidés des matériaux isotropes. Néanmoins, tous les matériaux composites étudiés dans ce manuscrit sont constitués d'un assemblage de couches symétrique par rapport au plan médian de la plaque. Conséquemment, les déplacements des modes qui se propagent dans ces matériaux vérifient en partie les relations de symétrie des déplacements des modes en milieu isotrope. Ainsi ceux semblant symétriques (resp. antisymétriques) seront nommés modes qS_n (resp. qA_n), « q » signifiant *quasi*. La dénomination SH sera abandonnée à cause du couplage entre les trois polarisations de l'onde.

Si le matériau était isotrope, toutes les courbes de lenteur seraient circulaires ; l'écart que présente la courbe de lenteur d'un mode par rapport au cercle donne donc de bonnes indications sur la sensibilité de ce mode aux effets d'anisotropie.

Tableau A.1. Propriétés mécaniques d'un pli unidirectionnel

Propriété	Valeur						Unité
Densité	1.56						g. cm^{-3}
Coefficients élastiques							
$c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}$	145.5	5.0	5.0	0	0	0	GPa
$c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24}, c_{25}, c_{26}$	5.0	11.5	5.258	0	0	0	GPa
$c_{31}, c_{32}, c_{33}, c_{34}, c_{35}, c_{36}$	5.0	5.258	11.5	0	0	0	GPa
$c_{41}, c_{42}, c_{43}, c_{44}, c_{45}, c_{46}$	0	0	0	3.121	0	0	GPa
$c_{51}, c_{52}, c_{53}, c_{54}, c_{55}, c_{56}$	0	0	0	0	5.2	0	GPa
$c_{61}, c_{62}, c_{63}, c_{64}, c_{65}, c_{66}$	0	0	0	0	0	5.2	GPa

**Figure A.3.** Coubes de lenteur à 500 kHz en fonction des directions de phase (a) et vitesse d'énergie en fonction des directions d'énergie (b).

Les modes obtenus dans les matériaux anisotropes présentent une autre particularité qu'il est inutile de mentionner dans le cas des matériaux isotropes. En effet, leur direction d'énergie φ (qui est colinéaire à la normale à la courbe de lenteur [112]) n'est plus colinéaire à la direction de phase. On l'obtient cependant simplement en calculant la direction du vecteur de Poynting, soit

$$\varphi = \begin{cases} 2 \tan^{-1} \frac{\langle \mathbf{P} \rangle \cdot \mathbf{e}_y}{\|\langle \mathbf{P} \rangle\| + \langle \mathbf{P} \rangle \cdot \mathbf{e}_x} & \text{si } \langle \mathbf{P} \rangle \cdot \mathbf{e}_y \neq 0 \text{ et } \langle \mathbf{P} \rangle \cdot \mathbf{e}_x < 0 \\ \pi & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.2.5})$$

La représentation faite en Figure A.3b de la vitesse d'énergie en fonction de ces directions d'énergie donne alors la forme du front d'onde de chacun des modes.

Enfin, la question du classement des modes devient également plus complexe. En effet, les trois polarisations sont alors en règle générale couplées. Comme on peut l'observer sur la Figure A.4, la déformée du mode qS_0 évolue avec la fréquence, passant d'une ressemblance avec le mode SH_0 d'un guide isotrope à une ressemblance avec un mode S_0 à haute fréquence. Ainsi, tant que le matériau sera composé d'un assemblage de plis symétrique, les modes seront uniquement classés par leur symétrie par rapport à l'axe z : modes quasi-symétriques qS_n et quasi-antisymétriques qA_n .

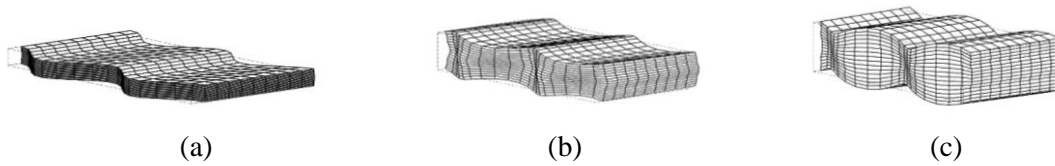


Figure A.4. Déformée modale du mode qS_0 à 200 kHz (a), 500 kHz (b) et 700 kHz (c).

A.3. Convergence et qualité des résultats

Ce paragraphe constitue un étude critique des résultats obtenus suivant la manière dont le maillage est réalisé. Une méthode, récemment introduite [21], reposant sur l'utilisation d'éléments finis isogéométriques est aussi discutée.

Discrétisation par éléments finis isogéométriques

Une B-spline de degré p est une combinaison linéaire de fonctions polynomiales positives par morceaux de degré p . Une base de B-spline a pour support un vecteur de k nœuds $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\}$ composé de coordonnées non décroissantes ($\xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_k$). Si tous ces nœuds sont équidistants le vecteur de nœuds est dit uniforme, alors que si le premier et le dernier nœud sont répétés $p + 1$ fois il est dit ouvert. Pour notre part, nous utiliseront un vecteur de nœud ouvert où chaque nœud à l'interface entre 2 couches sera aussi répété $p + 1$ fois afin d'adapter la base de B-splines aux couches du matériau. Les fonctions B-splines $\beta_{i,p}$ associées au vecteur de nœuds $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\}$ sont définies par récurrence sur leur degré de la manière suivante :

Pour $p = 0$:

$$\forall i \in [1, k-1], \forall \xi \in [\xi_1, \xi_k], \quad \beta_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.3.1})$$

Pour $p \geq 1$:

$$\forall i \in [1, k - (p + 1)], \forall \xi \in [\xi_1, \xi_k],$$

$$\beta_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} \beta_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \beta_{i+1,p-1}(\xi) \quad (\text{A.3.2})$$

D'après cette définition, la B-spline $\beta_{i,p}$ n'est non nulle que sur l'intervalle $[\xi_i, \xi_{i+p}[$. De plus, elle est de classe C^{p-1} sur $]\xi_i, \xi_{i+p}[$. Afin d'interpoler le déplacement particulière sur la base de B-splines ainsi obtenue, on discrétise l'épaisseur de la plaque en $n + 1$ points distincts $\{z_1, z_2, \dots, z_{n+1}\}$ (et donc en n éléments composés d'un nœud à chaque extrémité).

Si le guide est composé de q couches alors l'interpolation du champ de déplacement pour un point situé sur la couche j tel que $z \in [z_i, z_{i+1}[$ s'écrit

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}^{i+(j-1)(p-1)}(z) [\hat{\mathbf{U}}_{i+(j-1)(p-1)} \cdots \hat{\mathbf{U}}_{i+(j-1)(p-1)+p}]^t \exp\{i(\omega t - k_x x - k_y y)\} \quad (\text{A.3.3})$$

où la nouvelle matrice d'interpolation $\mathbf{N}^i(z)$ a pour expression :

$$\mathbf{N}^i(z) = \begin{bmatrix} \beta_{i,p}(z) & 0 & 0 & \beta_{i+p,p}(z) & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{i,p}(z) & 0 & \dots & 0 & \beta_{i+p,p}(z) & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{i,p}(z) & 0 & 0 & 0 & \beta_{i+p,p}(z) \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.4})$$

La dérivée de la B-spline $\beta_{i,p}$ vaut :

$$\forall \xi \in]\xi_1, \xi_k[, \quad \beta'_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} \beta_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \beta_{i+1,p-1}(\xi) \quad (\text{A.3.5})$$

Cette manière de définir la base de B-splines par couche garantit donc d'avoir des fonctions d'interpolation de classe C^2 sur toute une couche peu importe le nombre d'éléments choisis si les B-splines sont au moins d'ordre 3. Ce n'est pas le cas pour les fonctions d'interpolation de Lagrange qui ne sont pas dérivables aux points de jonction entre éléments (voir Figure A.5 et Figure A.6), ce qui nécessiterait de monter en ordre afin d'obtenir un élément par couche tout en gardant un nombre de nœuds comparable.

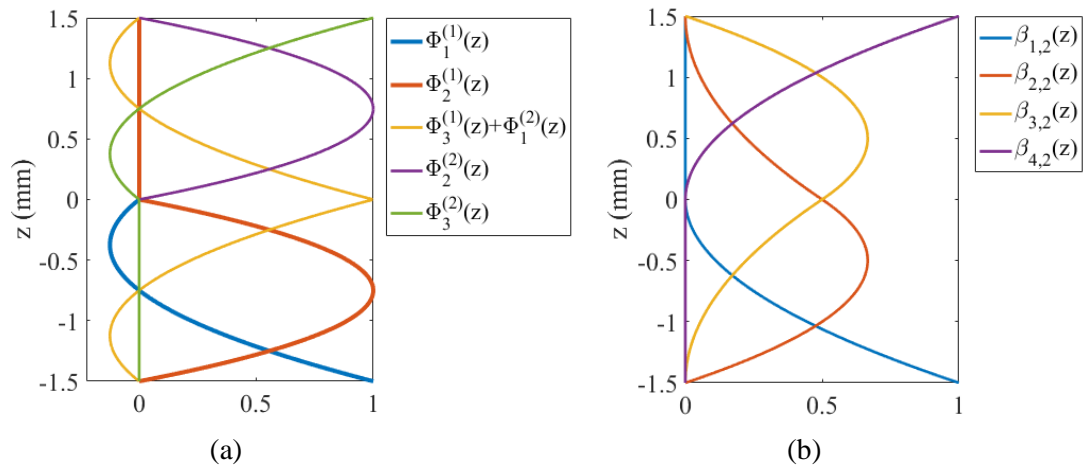


Figure A.5. Fonctions d'interpolation pour une couche composée de deux éléments : éléments de Lagrange (a) et B-splines (b) quadratiques.

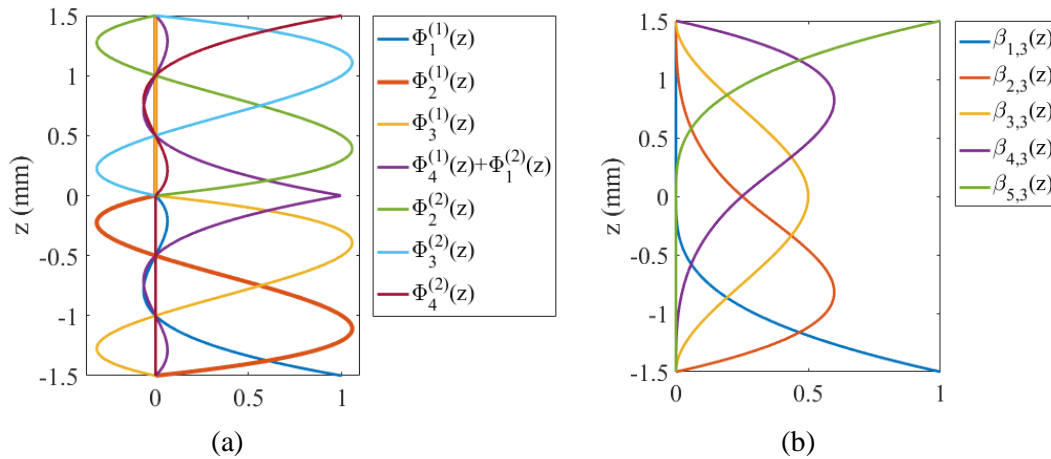


Figure A.6. Fonctions d'interpolation pour une couche composée de deux éléments : éléments de Lagrange (a) et B-splines (b) cubiques.

Comparaison des méthodes

Les méthodes de discrétisation sont maintenant comparées (à l'ordre 2 et à l'ordre 3). La perte de régularité énoncée plus haut avec utilisation d'éléments finis classiques intervient particulièrement lors du calcul des contraintes modales (qui est nécessaire notamment à l'évaluation du vecteur de Poynting). Ceci est vérifié pour le calcul des modes dans la plaque d'aluminium de 3 mm d'épaisseur (voir Figure A.7 et Figure A.8) avec un maillage (volontairement grossier) composé de 3 éléments. Si l'erreur absolue par rapport à la solution analytique est similaire pour des méthodes de même ordre, on vérifie bien une meilleure régularité lorsque les B-splines cubiques sont utilisées.

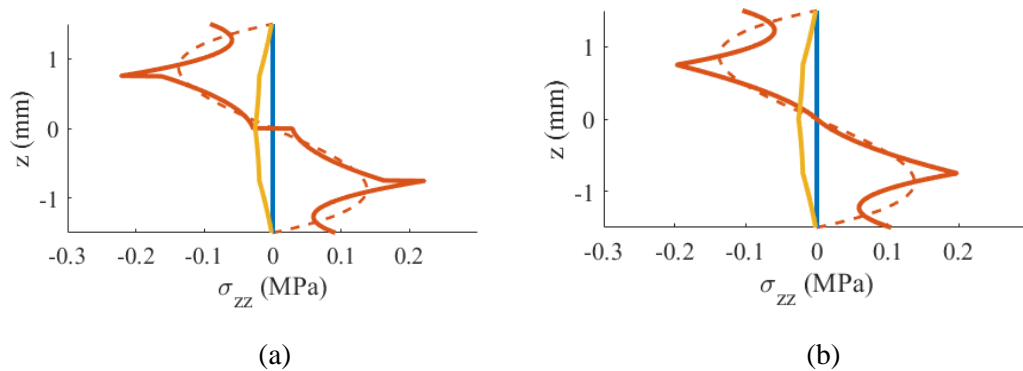


Figure A.7. Profil de contrainte modal σ_{zz} pour chacun des types d'interpolation : Lagrange quadratique (a) et B-spline quadratique (b). Les courbes en bleu correspondent au mode SH_0 , celles en rouge au mode A_0 et celles en jaune au mode S_0 . En trait interrompu apparaît le profil de contrainte analytique tandis que les courbes en trait plein correspondent à l'interpolation des contraintes nodales.

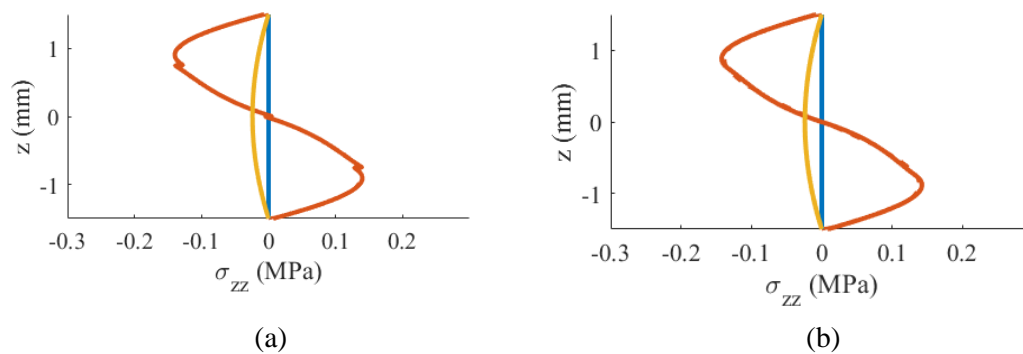


Figure A.8. Profil de contrainte modal σ_{zz} pour chacun des types d'interpolation : Lagrange cubique (a) et B-spline cubique (b). Les courbes en bleu correspondent au mode SH_0 , celles en rouge au mode A_0 et celles en jaune au mode S_0 . En trait interrompu apparaît le profil de contrainte analytique tandis que les courbes en trait plein correspondent à l'interpolation des contraintes nodales.

Le calcul des directions d'énergie fait appel à celui du vecteur de Poynting. Or ce dernier dépend de la contrainte, qu'il faut alors estimer correctement. Cela pose une réelle question sur la précision obtenue suivant la méthode employée. En pratique, l'erreur obtenue sur l'estimation de la direction d'énergie par deux méthodes de même ordre semble similaire. Ainsi les splines seront plutôt utilisées en présence de couches épaisses, qui nécessitent plusieurs éléments pour les mailler, afin d'assurer la régularité et de limiter le nombre de degré de libertés (l'assemblage des matrices élément finis sur une couche étant plus compact avec des éléments géométriques qu'avec des éléments de Lagrange).

Annexe B

Calcul des coefficients de réflexion

La méthode employée pour le calcul des coefficients de réflexion d'une onde guidée sur un bord droit est détaillée dans cette annexe. Après avoir défini ces coefficients et écrit le système d'équations à résoudre pour les obtenir, on précise la démarche à suivre pour les matériaux isotropes puis pour les composites multicouches. On discute également des variations des coefficients.

B.1. Principe de la méthode

Soit un mode guidé m en incidence oblique sur un bord droit Γ . Ce dernier est une interface solide/air d'impédance nulle. En tout point du bord, les déplacements particuliers sont libres. De même, l'absence d'effort extérieur impose que la contrainte normale au bord est nulle [113]. Ainsi, à la fréquence angulaire ω :

$$\forall z \in [-e, e], \quad \hat{\sigma}|_{\Gamma}(z, \omega) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad (\text{B.1.1})$$

où \mathbf{n} est un vecteur unitaire normal au bord et $\hat{\sigma}|_{\Gamma}$ est le tenseur de contraintes exprimé en un point du bord. Lors de la réflexion du mode m , n'importe quel mode n peut être généré. Ceci inclut les modes évanescents et inhomogènes qui peuvent avoir une contribution locale non nulle. Ces dernières contributions peuvent sous certaines conditions donner naissance à des ondes se propageant le long du bord [114]. Les travaux détaillés dans le corpus de ce manuscrit font essentiellement appel à des points d'observation localisés assez loin des bords ; on ne cherchera donc pas à modéliser les ondes rasantes évoquées précédemment. Cependant, elles sont prises en compte dans le bilan d'énergie de la réflexion à l'interface. Il est alors possible de décomposer la contrainte au bord comme la somme des contraintes du mode incident et des contraintes de tous les modes réfléchis possibles. En notant $\hat{\sigma}_{x'x'}^{(p)}$, $\hat{\sigma}_{x'y'}$ et $\hat{\sigma}_{x'z'}$ les composantes de la contrainte normale d'un mode p dans un repère lié à Γ , on a :

$$\forall z \in [-e, e], \quad \begin{cases} \hat{\sigma}_{x'x'}^{(m)}(z, \omega) + \sum_{n=1}^{\infty} r_{mn} \hat{\sigma}_{x'x'}^{(n)}(z, \omega) = 0 \\ \hat{\sigma}_{x'y'}^{(m)}(z, \omega) + \sum_{n=1}^{\infty} r_{mn} \hat{\sigma}_{x'y'}^{(n)}(z, \omega) = 0 \\ \hat{\sigma}_{x'z'}^{(m)}(z, \omega) + \sum_{n=1}^{\infty} r_{mn} \hat{\sigma}_{x'z'}^{(n)}(z, \omega) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.1.2})$$

où $r_{mn} \in \mathbb{C}$ est le *coefficient de réflexion en amplitude* qui traduit la conversion du mode m au mode n . Le module de ce coefficient représente le facteur multiplicatif à appliquer au profil de déplacement du mode n tandis que son argument donne le déphasage entre le déplacement du mode m et celui du mode n . Afin de résoudre le système de manière numérique, l'épaisseur du guide est discrétisée en P points distincts. Il peut par exemple s'agir des nœuds du maillage utilisé pour le calcul des modes. La base des modes réfléchie – qui est de dimension infinie – doit également être tronquée. La solution de sécurité consiste à utiliser l'intégralité des modes calculés par SAFE, ce qui constitue en soi une troncature qui reste une base. Nous avons de plus essayé de réduire le nombre de modes en ne sélectionnant que les premiers modes renvoyés par SAFE, en considérant que ceux-ci sont les plus énergétiques. Si cette hypothèse se vérifie, nous n'avons cependant pas réussi à trouver un critère permettant de déterminer de manière automatique combien de modes doivent être conservés. Avec une troncature de N modes, le système (B.1.2) se réécrit sous la forme matricielle :

$$[\boldsymbol{\sigma}^{(m)}]_{\{3PX1\}} + [\mathbf{M}^\sigma]_{\{3PXN\}}[\mathbf{r}]_{\{NX1\}} = \mathbf{0}, \quad (\text{B.1.3})$$

où $\boldsymbol{\sigma}^{(m)}$ est le vecteur qui contient les contraintes du mode incident, \mathbf{M}^σ est la matrice contenant les contraintes des modes réfléchis et l'inconnue du système \mathbf{r} rassemble les différents coefficients de réflexion en amplitude. L'équation (B.1.3) se résout par pseudo-inversion du système, c'est-à-dire en calculant l'inverse de $(\mathbf{M}^\sigma)^t \mathbf{M}^\sigma$. Cependant, cette matrice n'est en général pas bien conditionnée – en particulier lorsque le mode m est en incidence rasante du bord – ce qui peut occasionner des erreurs numériques importantes. La recherche d'une solution permettant d'améliorer le conditionnement n'a pas été traitée.

Une fois les coefficients de réflexion en amplitude obtenus, on en déduit les *coefficients de réflexion en énergie* – notés $\mathfrak{R}_{mn} \in \mathbb{R}$ – en faisant le rapport des flux de puissance modaux traversant l'interface. Ces flux de puissance sont donnés par une expression similaire à la relation (A.2.2), dont on fait le produit scalaire avec le vecteur unitaire normal au bord. Les coefficients de réflexion en énergie sont donc définis par :

$$\boxed{\mathfrak{R}_{mn} := \frac{\langle P_n \rangle}{\langle P_m \rangle} r_{mn} r_{mn}^*} \quad (\text{B.1.4})$$

Pour un mode incident donné, la somme sur les modes réfléchis des \mathfrak{R}_{mn} doit être égale à un pour qu'il y ait conservation d'énergie. Ce critère permet d'évaluer la qualité de la troncature de la base des modes réfléchis. Si le mode n est évanescent, alors son coefficient de réflexion en énergie est nul, car $\langle P_n \rangle = 0$. Il est important de noter que, pour appliquer la méthode présentée dans ce paragraphe, il est nécessaire d'exprimer les contraintes modales dans le repère lié à l'interface. Il faut alors connaître l'angle de réflexion de chacun des modes réfléchis. Les deux paragraphes suivants sont dédiés à la recherche des directions des modes réfléchis, d'abord dans le cas des milieux isotropes puis dans le cas des milieux composites.

B.2. Calcul en milieu isotrope

Les caractéristiques des modes guidés en milieu isotrope ne dépendent pas de la direction de propagation. Il suffit donc de les calculer dans une direction donnée puis d'effectuer une rotation de repère pour les obtenir dans une autre direction. GUNAWAN et HIROSE [115] ont proposé une méthode permettant d'obtenir les directions de réflexion à partir de la loi de Snell-Descartes. En effet, la projection du nombre d'onde des modes réfléchis sur la direction tangente au bord est égale à celle du mode incident, notée ξ_m . Comme le nombre d'onde k_n du mode réfléchi est connu, on obtient alors de manière immédiate le sinus de l'angle de réflexion θ_n . Son cosinus est déterminé par la relation $\cos^2 \theta_n = 1 - \sin^2 \theta_n$, son signe étant choisi négatif¹. Ainsi pour chaque mode réfléchi, la matrice de passage du repère lié à la direction de propagation au repère du bord a pour expression :

¹ Positif dans le cas d'un mode transmis.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -\frac{v_{mn}}{k_n} & -\frac{\xi_{mn}}{k_n} & 0 \\ \frac{\xi_{mn}}{k_n} & -\frac{v_{mn}}{k_n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2.1})$$

avec

$$v_{mn} = \pm \sqrt{k_n^2 - \xi_{mn}^2}. \quad (\text{B.2.2})$$

Les contraintes du mode réfléchi sont exprimées dans le repère du bord en appliquant la transformation $\mathbf{R}\boldsymbol{\sigma}^{(n)}\mathbf{R}^t$ à celles exprimées dans le repère lié à la propagation. Le système (B.1.3) est alors résolu en fonction de la fréquence, de l'angle d'incidence et du couple mode incident / mode réfléchi. Les coefficients de réflexion sont donc des fonctions de ces trois paramètres.

Des exemples de valeurs des coefficients de réflexion dans le plan angle d'incidence – produit de la fréquence et de l'épaisseur sont donnés dans les figures ci-après. Chacun des graphiques correspond à un couple mode incident / mode réfléchi.

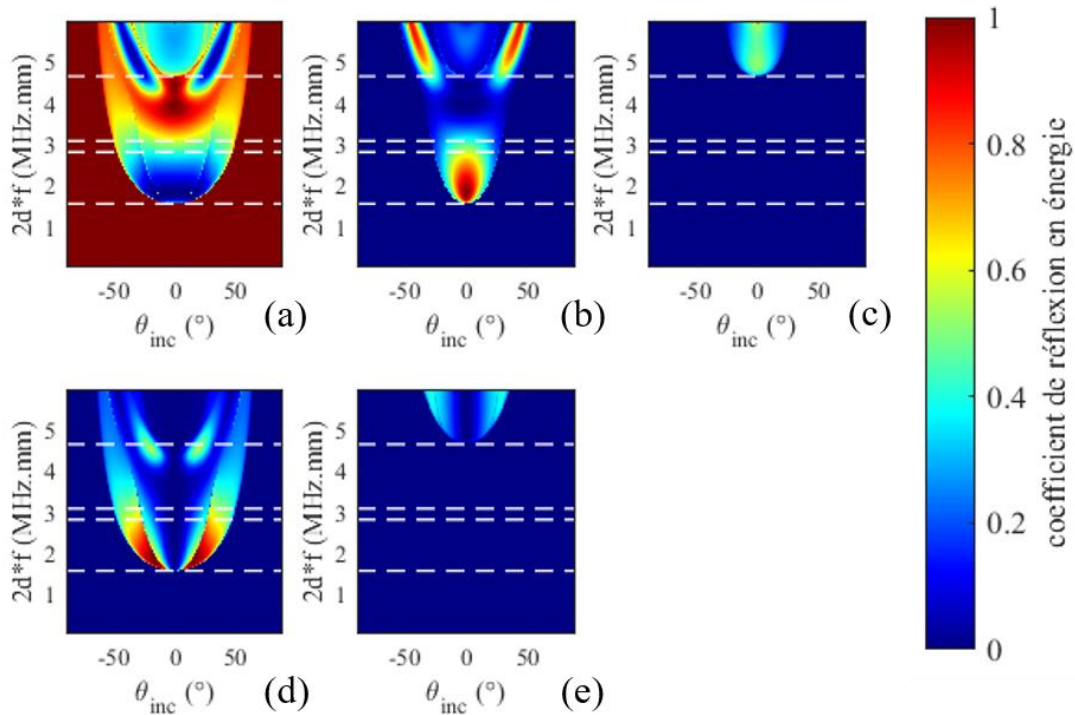


Figure B.1. Coefficients de réflexion en énergie avec le mode A_0 incident et les modes réfléchis : A_0 (a) , A_1 (b) , A_2 (c) , SH_1 (d) et SH_3 (e). Les fréquences de coupures sont représentées par des traits interrompus blancs.

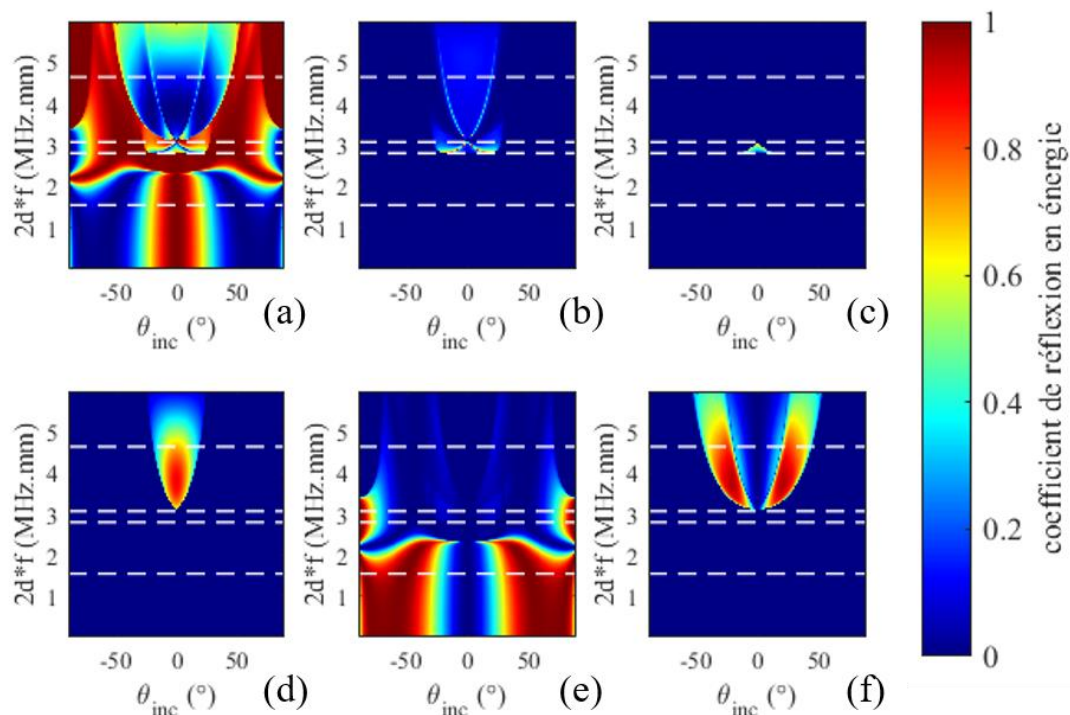


Figure B.2. Coefficients de réflexion en énergie avec le mode S_0 incident et les modes réfléchis : S_0 (a), S_1 (b), S_{-1} (c), S_2 (d), SH_0 (e) et SH_2 (f).

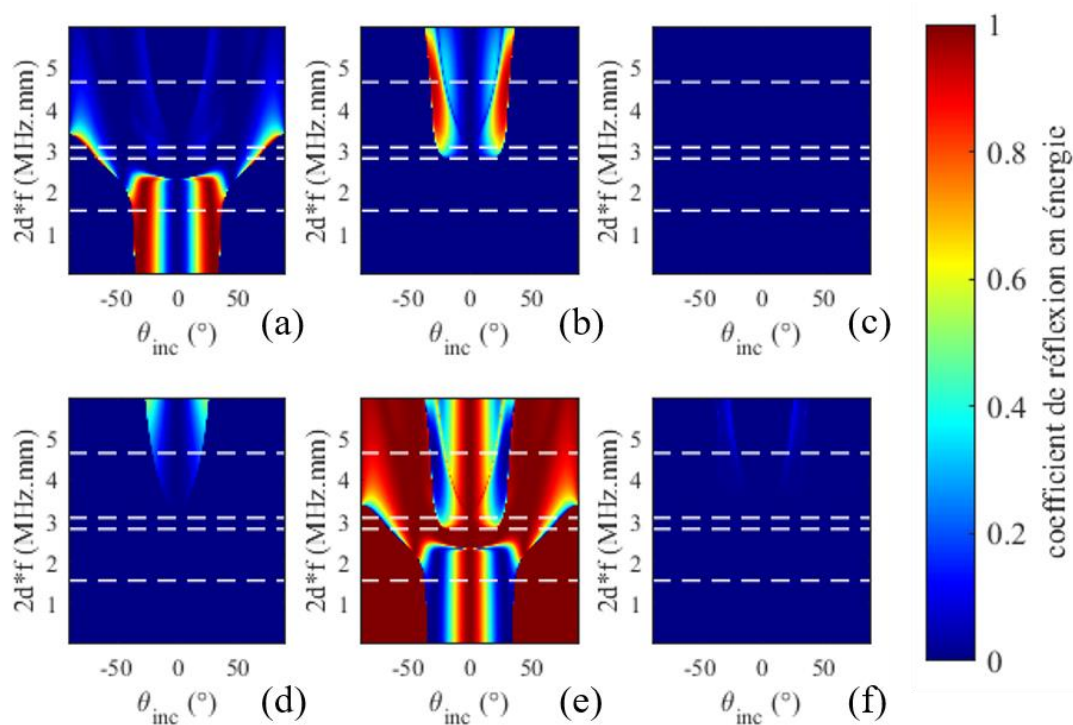


Figure B.3. Coefficients de réflexion en énergie avec le mode SH_0 incident et les modes réfléchis : S_0 (a), S_1 (b), S_{-1} (c), S_2 (d), SH_0 (e) et SH_2 (f).

En dessous de la première fréquence de coupure, les coefficients de réflexion en énergie varient très peu. Cette variation est légèrement plus rapide pour la phase des coefficients de réflexion en amplitude. Cependant, il suffit de quelques fréquences pour représenter l'évolution des coefficients à basse fréquence. Cette remarque est intéressante du point de vue des performances numériques car elle pourrait permettre une optimisation du calcul des coefficients de réflexion.

B.3. Calcul en milieu composite stratifié

Il n'existe pas de méthode permettant d'obtenir de manière simple les angles de réflexion¹ en milieu anisotrope car les nombres d'ondes des modes dépendent de la direction de propagation. On peut cependant toujours appliquer la loi de Snell-Descartes. Déterminer les directions de réflexion revient donc à considérer les modes dont la projection du nombre d'onde sur le bord est égale à celle du mode incident et dont la vitesse d'énergie est orientée vers l'intérieur de la plaque. TAUPIN a développé une méthode [30], appelée méthode SAFE- γ , permettant d'obtenir les modes ayant la même projection ξ de leur nombre d'onde. Cette méthode est détaillée ci-après.

Soit un bord dont la normale extérieure forme un angle θ avec l'axe x du repère plaque. Les coordonnées du nombre d'onde dans le repère plaque (k_x, k_y) s'expriment donc en fonction des coordonnées dans le repère lié à l'interface (k_x', k_y') de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_x' \\ k_y' = \xi \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3.1})$$

Par ailleurs, le système matriciel permettant d'obtenir les modes dans le repère de la plaque est donné par (voir équation A.1.13) :

$$\begin{aligned} & [k_x^2 \mathbf{K}_{11} + k_y^2 \mathbf{K}_{22} + k_x k_y (\mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{12}^t) + i k_x (\mathbf{K}_{13} - \mathbf{K}_{13}^t) \\ & + i k_y (\mathbf{K}_{23} - \mathbf{K}_{23}^t) + \mathbf{K}_{33} - \omega^2 \mathbf{M}] \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (\text{B.3.2})$$

Le changement de repère correspondant à la relation (B.3.1) y est introduit. Considérant ξ comme un paramètre, on a alors :

$$\left(\mathbf{A}_0^\xi + k_x' \mathbf{A}_1^\xi + k_x'^2 \mathbf{A}_2^\xi \right) \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{0}, \quad (\text{B.3.3})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0^\xi &= \xi^2 [\sin^2 \theta \mathbf{K}_{11} + \cos^2 \theta \mathbf{K}_{22} - \cos \theta \sin \theta (\mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{12}^t)] \\ &+ i \xi [\cos \theta (\mathbf{K}_{23} - \mathbf{K}_{23}^t) - \sin \theta (\mathbf{K}_{13} - \mathbf{K}_{13}^t)] + \mathbf{K}_{33} - \omega^2 \mathbf{M}, \end{aligned} \quad (\text{B.3.4a})$$

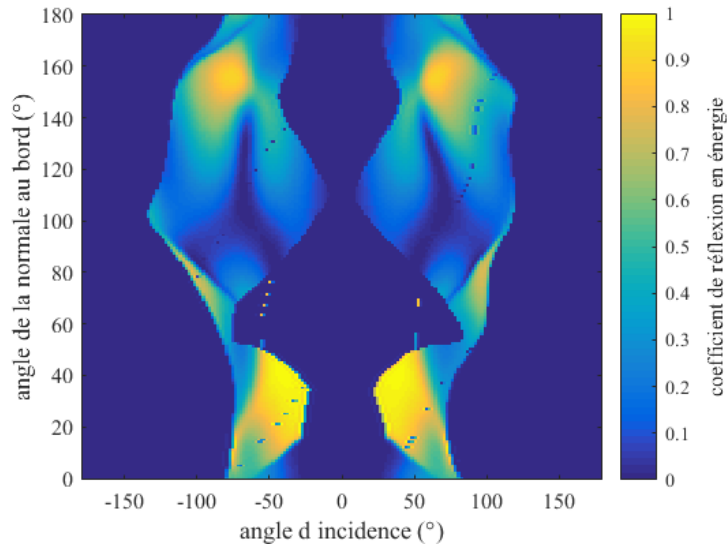
¹ En tout cas pas de méthode basée sur des rotations réelles, comme celle employée pour les milieux isotropes.

$$\mathbf{A}_1^\xi = \xi [2 \cos \theta \sin \theta (\mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{11}) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)(\mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{12}^t)] + i[\cos \theta (\mathbf{K}_{13} - \mathbf{K}_{13}^t) + \sin \theta (\mathbf{K}_{23} - \mathbf{K}_{23}^t)], \quad (\text{B.3.4b})$$

$$\mathbf{A}_2^\xi = \cos^2 \theta \mathbf{K}_{11} + \sin^2 \theta \mathbf{K}_{22} + \cos \theta \sin \theta (\mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{12}^t). \quad (\text{B.3.4c})$$

Les coefficients de réflexions dépendent de l'angle que forme la normale au bord par rapport aux fibres du matériau (voir Figure B.4). L'existence de ce paramètre supplémentaire pose un problème au niveau des temps de calcul des coefficients de réflexion pour des bords courbes ou d'orientation quelconque. En pratique, on se limitera à des bords droits, comme c'est le cas pour les plaques rectangulaires pour lesquelles il suffit de calculer coefficients pour les deux orientations de bords 0° et 90° (les orientations 180° et 270° étant déduites par symétrie centrale des coefficients élastiques).

Figure B.4. Influence de l'orientation du bord par rapport aux fibres pour la conversion $qS_0 - qS_1$. Composite 16 couches à 600 kHz.



Annexe C

Écriture de la fonction de Green en champ direct

Les résultats théoriques présentés dans l'article de VELICHKO et WILCOX [35] sont résumés dans cette annexe. Le rayonnement d'une onde guidée dans une plaque non bornée est modélisé par une fonction de Green modale qui est étendue, dans le corpus de ce manuscrit, au cas des plaques bornées.

Considérons une plaque anisotrope multicouche d'épaisseur totale $2e$, non bornée et munie d'un système de coordonnées cartésiennes. Comme dans le reste de ce manuscrit, z désigne la composante dans l'épaisseur de la plaque dont l'origine se situe au milieu de la plaque. Une contrainte harmonique $\hat{\mathbf{q}}e^{i\omega t}$ est appliquée sur une surface S appartenant à la surface supérieure de la plaque. Le champ de déplacement harmonique $\hat{\mathbf{u}}$ est alors relié au terme de contrainte $\hat{\mathbf{q}}$ par la fonction de Green \mathbf{g} . Son expression au point \mathbf{r} de coordonnées (x, y, z) est :

$$\hat{\mathbf{u}}(x, y, z) = \iint_S \mathbf{g}(x - x', y - y', z) \hat{\mathbf{q}}(x', y') dx' dy'. \quad (\text{C.0.1})$$

Le but est ici de trouver une expression de cette fonction de Green.

C.1. Problème 2D (onde plane)

Dans un premier temps, nous nous intéressons à la propagation d'une onde plane dans la direction formant un angle γ avec la direction de \mathbf{e}_x . Un nouveau système de coordonnées (ξ, τ, z) est donc défini suivant la rotation d'angle γ . La contrainte 2D imposée $\hat{\mathbf{q}}^{(2D)}$ est maintenant invariante suivant τ . Il est alors encore possible d'exprimer le champ de déplacement (cette fois-ci dû à l'excitation 2D) grâce à une fonction de Green. On décompose cette dernière, notée $\mathbf{g}^{(2D)}$, suivant ses composantes spectrales en utilisant sa transformée de Fourier spatiale $\mathbf{G}^{(2D)}$:

$$\mathbf{g}^{(2D)}(\gamma, \xi, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(2D)}(\gamma, k, z) e^{-ik\xi} dk \quad (\text{C.1.1})$$

Le théorème des résidus est utilisé pour réaliser le calcul d'intégrale. Ici, seuls les modes propagatifs ont été pris en compte ce qui constitue une approximation de $\mathbf{g}^{(2D)}$. L'application du théorème de résidus donne :

$$\mathbf{g}^{(2D)}(\gamma, \xi, z) = i \sum_m \text{res } \mathbf{G}^{(2D)}(\gamma, k, z) \Big|_{k=k_m} e^{-ik_m \xi}. \quad (\text{C.1.2})$$

Le nombre d'onde k_m correspond donc au nombre d'onde du mode propagatif m . NUÑEZ *et al.* [49] ont procédé différemment pour obtenir une expression de l'amplitude modale. En effet, en utilisant un principe de réciprocité et la bi-orthogonalité des modes (qui découle de la relation de FRASER [116]), on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_m^{(2D)}(\gamma, z) &= i \text{res } \mathbf{G}^{(2D)}(\gamma, k, z) \Big|_{k=k_m} \\ &= \frac{i\omega}{4\langle P_m \rangle} \mathbf{W}_m(\gamma, z) (\mathbf{W}_m^*(\gamma, e))^t. \end{aligned} \quad (\text{C.1.3})$$

Le tenseur $\mathbf{E}_m^{(2D)}$ correspond à l'excitabilité du mode m dans la direction de phase γ . Il s'agit du terme qui traduit la réponse du mode à une excitation vectorielle. Selon l'intensité de contrainte portée par chacune des composantes du terme de source, le mode sera plus ou moins excité. $\mathbf{E}_m^{(2D)}$ décrit ainsi la sensibilité de ce mode aux différents types de sollicitations pouvant être rencontrés. Cette expression fait intervenir la déformée modale du mode (exprimée dans le repère cartésien) ainsi que le flux moyen du vecteur de Poynting du mode à travers une section normale à la direction de propagation (voir § 1.4.1).

C.2. Problème 3D (onde omnidirectionnelle)

Revenons maintenant au cas de l'onde omnidirectionnelle. Comme dans le cas 2D, la fonction de Green s'écrit en fonction de sa transformée de Fourier spatiale \mathbf{G} . On effectue aussi le passage en coordonnées polaires (ρ, φ, z) centrées sur le point source \mathbf{R}_0 . On a alors :

$$\mathbf{g}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma=\varphi-\pi/2}^{\varphi+\pi/2} \int_{k \in \Gamma} \mathbf{G}(k \cos \gamma, k \sin \gamma, z) e^{-i\rho k \cos(\gamma-\varphi)} k \, dk \, d\gamma, \quad (\text{C.2.1})$$

où Γ est un contour du plan complexe qui inclut l'axe des réels positifs en contournant les pôles réels. Le domaine d'intégration peut, par symétrie, être réduit à $[\varphi - \pi/2; \varphi + \pi/2]$ ce qui revient à faire varier k sur $\Gamma \cup -\Gamma$. Le théorème des résidus est là encore appliqué. Ainsi, en ne considérant que les modes propagatifs, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\rho, \varphi, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_m \int_{\gamma=\varphi-\pi/2}^{\varphi+\pi/2} \mathbf{G}_m(\gamma, z) |k_m(\gamma)| e^{-i\rho \Phi_m(\gamma, \varphi)} d\gamma \\ &+ \mathcal{O}\left(\rho^{-\frac{3}{2}}\right), \quad \rho \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (\text{C.2.2})$$

avec

$$\mathbf{G}_m(\gamma, z) = i \operatorname{res} \mathbf{G}(k \cos \gamma, k \sin \gamma, z) |_{k=k_m(\gamma)}, \quad (\text{C.2.3})$$

$$\Phi_m(\gamma, \varphi) = k_m(\gamma) \cos(\gamma - \varphi). \quad (\text{C.2.4})$$

Le fait de ne prendre que les pôles réels génère une erreur, dont l'amplitude décroît avec la distance plus vite que celle des contributions des modes propagatifs. La formule ainsi obtenue n'est valable qu'en champ lointain, soit à quelques longueurs d'onde de la source de contrainte. Enfin, la méthode de la phase stationnaire est utilisée pour calculer l'intégrale restante. On fait alors l'hypothèse que les termes de phase varient plus rapidement que les termes d'amplitude, d'où l'expression « approximation haute fréquence ». On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_m(\rho, \varphi, z) &= \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{|k_m(\gamma_m)|}{\sqrt{2\pi|b_m|}} \exp\left\{-i\frac{\pi}{4}\text{sign}(b_m)\right\} \mathbf{E}_m^{(2D)}(\gamma_m, z) \\ &\times e^{-i\rho\Phi_m(\gamma_m, \varphi)} + \mathcal{O}\left(\rho^{-\frac{3}{2}}\right), \quad \rho \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (\text{C.2.5})$$

où γ_m est le point de phase stationnaire, c'est-à-dire la valeur de γ qui annule la dérivée première de Φ_m par rapport à γ . b_m est la dérivée seconde de Φ_m par rapport à γ , exprimée en γ_m . Le terme $\mathbf{E}_m^{(2D)}$ traduit l'excitabilité modale de l'onde plane se propageant dans la direction de phase stationnaire γ_m . La différence entre le cas de l'onde omnidirectionnelle et celui de l'onde plane réside dans la prise en compte de la courbure du front d'onde qui introduit des termes qui en dépendent. En particulier, la décroissance de \mathbf{g}_m en $\rho^{-1/2}$ correspond au fait que le front d'onde s'élargit au fur et à mesure que l'on s'éloigne du point source. Cependant, la description tensorielle de l'excitation d'un mode guidé, dans une direction donnée, par la contrainte surfacique appliquée au point source reste inchangée. Ceci permet alors de faire le lien entre le problème 2D et le problème 3D.

C.3. Réécriture en fonction des termes pinceau

Proposons maintenant une réécriture de cette fonction de Green en fonction des termes introduits dans les chapitres 1 et 3. Pour rappel, la fonction de Green associée au mode m s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_m(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0, \omega) &\simeq \mathcal{D}_m(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0, \omega) \mathcal{A}^{(m)}(\mathbf{R}_0, \omega) \mathbf{W}_m(\gamma_m, z, \omega) \\ &\times (\mathbf{W}_m^*(\gamma_m, e, \omega))^t \exp[i\hat{\vartheta}_m(\mathbf{r}; \mathbf{R}_0, \omega)]. \end{aligned} \quad (\text{C.3.1})$$

Les expressions des différents termes qui la composent, suivant le type du matériau, sont données dans le tableau ci-dessous :

Tableau C.1. Expression du facteur de divergence \mathcal{D}_m , du facteur d'amplitude $\mathcal{A}^{(m)}$ et de la phase $\hat{\vartheta}_m$ pour les matériaux isotropes et anisotropes

Quantité	Milieu isotrope	Milieu anisotrope
\mathcal{D}_m	$1/\sqrt{\rho}$	$1/\sqrt{\rho}$
$\mathcal{A}^{(m)}$	$\frac{i\omega}{4\langle P_m \rangle} \sqrt{\frac{ k_m }{2\pi}} \exp\left\{i\frac{\pi}{4}\text{sign}(k_m)\right\}$	$\frac{i\omega}{4\langle P_m(\gamma_m) \rangle} \frac{ k_m(\gamma_m) }{\sqrt{2\pi b_m }} \exp\left\{-i\frac{\pi}{4}\text{sign}(b_m)\right\}$
$\hat{\vartheta}_m$	$-\rho k_m$	$-\rho k_m(\gamma_m) \cos(\gamma_m - \varphi)$

Annexe D

Trajets réfléchis entre deux points en milieu isotrope

Pour les plaques planes isotropes, il est possible de développer des méthodes de lancer de rayons optimisées qui permettent de déterminer les trajets réfléchis soit analytiquement soit par des méthodes numériques simples et qui convergent en peu d'itérations. Cela est rendu possible par le fait que le nombre d'onde des modes est indépendant de la direction de phase. Cette étude a fait l'objet d'une partie du stage de Gallien DELATTRE [62]. Le but premier était de développer des méthodes de lancer de rayon point à point – et non plus point à surface – afin de pouvoir appliquer l'approximation de Fraunhofer à des contributions réfléchies. Ces méthodes peuvent tout aussi bien être appliquées lorsque l'approximation de Fraunhofer n'est pas employée.

D.1. Réflexion sans conversion de modes

Nous cherchons à déterminer le trajet d'énergie entre un point source S et un point de calcul C pour une séquence modale donnée comportant une réflexion. Dans le cas où il n'y a pas de conversion de modes, les trajets d'énergie peuvent être déterminés par simple construction géométrique des symétriques S' et C' des deux points d'intérêt par rapport au bord. La méthode de l'image se base sur le fait que l'intersection des droites (CS') et $(C'S)$ se situe au point de réflexion I (voir Figure D.1a). Cette méthode est à la fois simple à implémenter et très performante car elle ne nécessite que de calculer un des points symétriques. Par cohérence avec le lancer de rayons plus conventionnel détaillé dans le chapitre 2, faisons le choix de partir du point de calcul en construisant le symétrique de ce point.

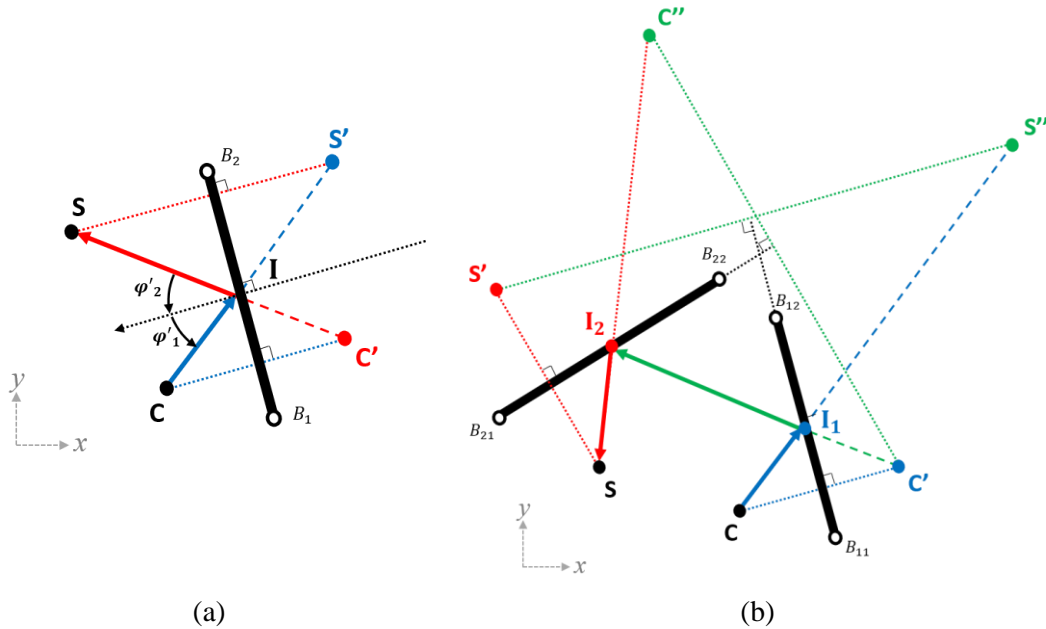


Figure D.1. Schéma de principe de la méthode de l'image appliquée à une réflexion (a) et deux réflexions (b).

De plus, la méthode de l'image s'étend facilement à de multiples réflexions. Si le trajet comporte deux réflexions – comme c'est le cas sur la Figure D.1b – le symétrique de C par rapport à un premier bord est d'abord construit ; puis son symétrique par rapport au second bord. On en déduit les points de réflexion I_2 puis I_1 . Le principe reste le même peu importe le nombre de réflexions mis en jeu, seul le nombre d'étapes change. Enfin, on pourrait montrer que pour une séquence modale fixée et un ordre de bord donné, il existe toujours une unique solution dès lors que deux bords ne sont pas des segments d'une même droite. Cependant, les points de réflexions ne sont pas nécessairement situés entre les limites B_{i1} et B_{i2} ; ce qui permet de déterminer si le trajet obtenu correspond à une réalité physique.

D.2. Réflexion avec conversions de modes

Cas à une réflexion

Intéressons-nous maintenant au cas où un mode de nombre d'onde k_1 se réfléchit en un mode de nombre d'onde k_2 avec $k_1 \neq k_2$. Par convention, on part toujours du point de calcul C , c'est-à-dire dans l'ordre inverse de la propagation réelle de l'onde. Soit $(O, \mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{y'})$ le repère local du bord et y'_I la position du point de réflexion dans ce repère. La loi de Snell-Descartes se formule sous la forme d'une équation polynomiale de degré 4 d'inconnue y'_I . Cette équation est la suivante :

$$a_4(y'_I)^4 + a_3(y'_I)^3 + a_2(y'_I)^2 + a_1 y'_I + a_0 = 0 \quad (\text{D.2.1})$$

avec

$$a_4 = k_1^2 - k_2^2, \quad (\text{D.2.2a})$$

$$a_3 = -2(k_1^2 - k_2^2)(y'_S + y'_C), \quad (\text{D.2.2b})$$

$$a_2 = (k_1^2 - k_2^2)((y'_S)^2 + 4y'_S y'_C + (y'_C)^2) + k_1^2(x'_C - x'_I)^2 - k_2^2(x'_I - x'_S)^2, \quad (\text{D.2.2c})$$

$$a_1 = -2[(k_1^2 - k_2^2)(y'_S y'_C)^2 + y'_C (y'_S)^2) + y'_S k_1^2 (x'_C - x'_I)^2 - y'_C k_2^2 (x'_I - x'_S)^2], \quad (\text{D.2.2d})$$

$$a_0 = (k_1^2 - k_2^2)(y'_S)^2 (y'_C)^2 + (y'_S)^2 k_1^2 (x'_C - x'_I)^2 - (y'_C)^2 k_2^2 (x'_I - x'_S)^2. \quad (\text{D.2.2e})$$

Plutôt que de résoudre cette équation de manière analytique – ce qui est possible mais déconseillé au vu de la sensibilité de la solution aux imprécisions numériques – l'application d'une méthode numérique est envisagée. L'équation (D.2.1) peut être vue comme un problème de recherche des racines du polynôme caractéristique d'une matrice, appelée *matrice compagne*, telle que :

$$\mathbf{M}_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0/a_4 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1/a_4 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2/a_4 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3/a_4 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.2.3})$$

Les valeurs propres de cette matrice mènent à au plus quatre solutions distinctes. Seules celles qui correspondent à une position située entre les limites du bord et entre les projetés orthogonaux¹ du point S et du point C sur le bord définissent des points de réflexion ayant une signification physique. De plus, cette méthode ne peut être appliquée que si il y a conversion de mode ($a_4 \neq 0$). Elle est donc à utiliser en complément de la méthode des images.

¹ Seulement si les deux nombres d'onde sont positifs. Dans le cas contraire, le point de réflexion se situe en dehors du segment entre les projetés de S et C .

Cas à deux réflexions

Pour trouver les trajets d'énergie correspondant à une double réflexion avec conversions de modes, on cherche la position des points de réflexion I_1 et I_2 . Cela revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} k_1 \sin \varphi'_1 = k_2 \sin \varphi'_{20} \\ k_2 \sin \varphi'_2 = k_3 \sin \varphi'_{30} \end{cases}, \quad (\text{D.2.4})$$

avec $k_1 \neq k_2$ et $k_2 \neq k_3$. Les différentes quantités géométriques sont définies dans la Figure D.2. Développons le système (D.2.4) à l'aide de ces quantités géométriques. En paramétrant la position des points de réflexion sur leur bord respectif, on obtient un système de deux équations polynomiales du 4^{ème} degré avec comme inconnues les paramètres t_i valant 0 au point B_{i1} et 1 au point B_{i2} . Cependant si des solutions analytiques de ce problème existent, elles sont loin d'être triviales. Même avec une approche numérique, cette vision en coordonnées cartésiennes n'est pas la plus adaptée. En effet si l'on cherche à appliquer la méthode de Newton en dimension deux, il faut disposer d'une initialisation qui soit assez proche de la solution. Or il est *a priori* difficile de trouver un couple $(t_{1,0}, t_{2,0})$ qui soit un bon candidat. Une autre approche – que nous allons adopter – consiste à garder l'idée du balayage des bords que l'on a appliquée au chapitre 2. Toutefois, ce balayage se fera ici de manière plus optimisée.

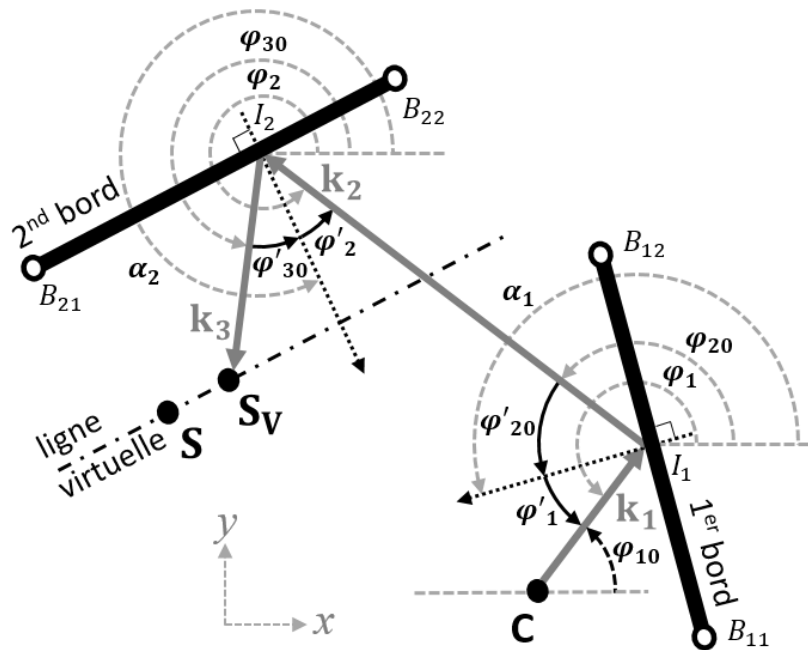


Figure D.2. Paramétrage géométrique pour le cas de la double réflexion avec conversions de modes

Procédons à un changement de paramétrage des angles dans le système (D.2.4) afin d'exprimer ce dernier en fonction des directions d'énergie φ_{10} , φ_{20} et φ_{30} . On obtient :

$$\begin{cases} k_1 \sin(\pi + \varphi_{10} - \alpha_1) = k_2 \sin(\alpha_1 - \varphi_{20}) \\ k_2 \sin(\pi + \varphi_{20} - \alpha_2) = k_3 \sin(\alpha_2 - \varphi_{30}) \end{cases}. \quad (\text{D.2.5})$$

On définit une ligne virtuelle, parallèle au second bord et passant par S . On nomme S_v le point d'intersection de cette droite avec le trajet d'énergie réfléchi par le second bord. Ainsi, si t_v est la distance entre S et S_v alors les solutions du problème sont les trajets pour lesquels $t_v(\varphi_{10})=0$ avec t_v tel que :

$$t_v = \frac{[b_2 t_2 + y_{21} - y_s] \cos \varphi_{30} - [a_2 t_2 + x_{21} - x_s] \sin \varphi_{30}}{b_2 \cos \varphi_{30} - a_2 \sin \varphi_{30}}, \quad (\text{D.2.6a})$$

$$\varphi_{30} = \sin^{-1} \left(-\frac{k_2}{k_3} \sin(\pi + \varphi_{20} - \alpha_2) \right), \quad (\text{D.2.6b})$$

$$\varphi_{20} = \sin^{-1} \left(-\frac{k_1}{k_2} \sin(\pi + \varphi_{10} - \alpha_2) \right). \quad (\text{D.2.6c})$$

Le vecteur $[a_2 \ b_2]^t$ est un vecteur directeur du 2nd bord et $B_{21}(x_{21}, y_{21})$. L'expression de la dérivée de $t_v(\varphi_{10})$ est analytique mais non donnée ici. La fonction $t_v(\varphi_{10})$ n'est pas définie sur tout l'intervalle $[0 ; 2\pi[$. Elle n'est en particulier pas définie pour les angles qui se situent au-delà d'un angle critique (voir Figure 1.3) ou lorsqu'un rayon est parallèle au bord sur lequel il se réfléchit. Elle est par contre continue et monotone sur les secteurs angulaires sur lesquels elle est définie. Pour résoudre $t_v(\varphi_{10})=0$ sur une de ces plages angulaires, on commence par initialiser φ_{10} au centre de celle-ci puis on applique la méthode de Newton. À chaque itération, deux situations peuvent se présenter. Si la nouvelle valeur de φ_{10} reste sur le bon secteur angulaire alors cette valeur est conservée. En revanche, si elle sort de la plage angulaire, on procède par dichotomie avec la valeur de φ_{10} précédente ce qui permet de rester dans le bon domaine de définition de t_v (mais converge moins vite vers la solution qu'avec Newton). Une fois les solutions obtenues pour chaque plage angulaire et chaque ordre d'enchaînement des bords, il convient d'effectuer un tri de ces solutions. Les trajets non retenus, car ne correspondant pas à une réalité physique, sont ceux :

- pour lesquels l'ordre d'enchaînement des points $C \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow S$ n'est pas respecté ;
- dont un des points de réflexion n'est pas situé entre les limites du bord auquel il appartient ;
- qui sont en intersection avec un des bords de la plaque sans que cette réflexion soit prévue ;
- pour lesquels l'algorithme n'a pas convergé vers le point S .

Titre : Prédiction modale du rayonnement d'ondes élastiques guidées par une source quelconque dans une structure fine - application au contrôle non destructif

Mots clés : ondes élastiques guidées, contrôle non-destructif, modélisation, simulation, méthodes rayons

Résumé : Cette thèse porte sur la modélisation de la propagation d'ondes élastiques guidées (OG) dans des structures fines - de type plaque - en vue de leur contrôle non-destructif (CND). Ces ondes sont générées par des transducteurs ultrasonores quelconques placés à la surface de la pièce - par exemple une céramique PZT ou un EMAT. On développe un modèle semi-analytique, nommé modèle du pinceau modal d'ondes guidées. Ce modèle se base sur les approximations de l'acoustique géométrique, ce qui le rend particulièrement performant du point de vue numérique et permet de simuler la propagation d'OG sur de longues distances plus rapidement qu'avec des modèles numériques classiques. Le champ de

déplacement est alors prédit seulement aux points d'intérêt. Un pinceau peut être utilisé pour traiter de façon générique les réflexions multiples d'une onde sur les bords latéraux de la plaque. Le modèle prend également en compte aussi bien les matériaux métalliques (isotropes) que les matériaux composites (anisotropes) ; la plaque peut également être courbée et avoir des propriétés mécaniques continûment variables. Les formes d'ondes sont obtenues sous la forme de leur décomposition modale, ce qui facilite grandement leur interprétation. Enfin, des comparaisons avec un modèle d'éléments finis permettent de valider l'approche de pinceaux.

Title: Modal prediction of elastic guided waves fields radiated by an arbitrary source in thin structures - application to nondestructive testing

Keywords: elastic guided waves, non-destructive testing, modelling, simulation, ray methods

Abstract: This thesis focuses on the modelling of the propagation of elastic guided waves (GW) in thin plate like structures for their non-destructive testing (NDT). These waves are generated by any ultrasonic transducer positioned on the surface of the piece - for example, a PZT ceramic or an EMAT. A semi-analytical model, the so-called GW modal pencil model, has been developed. It is based on the geometrical acoustic approximation, which makes it particularly efficient from a numerical point-of-view and able to simulate GW propagation over long distances faster than with conventional numerical models. The displacement field is then predicted only

at the points of interest. The pencil model can be used to generically deal with multiple reflections of GW on plate edges. It also takes into account plates made of either metallic (isotropic) or composite (anisotropic) materials. The plate can be curved and have continuously variable mechanical properties. The waveforms are obtained in the form of their modal decomposition, which greatly eases their interpretation. Finally, comparisons with a finite element model allow the pencil approach to be validated.