



Quelques propriétés géométriques et dynamiques globales des structures Lagrangiennes de contact

Martin Mion-Mouton

► To cite this version:

Martin Mion-Mouton. Quelques propriétés géométriques et dynamiques globales des structures Lagrangiennes de contact. Géométrie différentielle [math.DG]. Université de Strasbourg, 2020. Français. NNT : . tel-03013231v1

HAL Id: tel-03013231

<https://theses.hal.science/tel-03013231v1>

Submitted on 4 Jan 2021 (v1), last revised 10 Apr 2022 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

INSTITUT DE
RECHERCHE
MATHÉMATIQUE
AVANCÉE

UMR 7501

Strasbourg

présentée pour obtenir le grade de docteur de
l'Université de Strasbourg
Spécialité MATHÉMATIQUES

Martin Mion-Mouton

**Quelques propriétés géométriques et
dynamiques globales des structures
Lagrangiennes de contact**

Soutenue le 11 décembre 2020
devant la commission d'examen

Charles Frances, directeur de thèse
Thierry Barbot, rapporteur
Elisha Falbel, rapporteur
Sylvain Crovisier, examinateur
Sorin Dumitrescu, examinateur
Olivier Guichard, examinateur
Ana Rechtman, examinatrice

irma.math.unistra.fr

Quelques propriétés géométriques et dynamiques globales des structures Lagrangiennes de contact

Martin Mion-Mouton

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université de Strasbourg

Thèse de doctorat sous la direction de
Charles Frances

11 décembre 2020

Martin Mion-Mouton, Quelques propriétés géométriques et dynamiques globales des structures Lagrangiennes de contact, thèse de doctorat, Université de Strasbourg, décembre 2020.

Ce texte est mis à disposition sous licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 4.0 International. Pour voir une copie de cette licence, visitez

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.fr>

ou écrivez à Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Résumé

Cette thèse a pour objet l'étude des interactions entre certaines propriétés géométriques des structures Lagrangiennes de contact, et certaines propriétés dynamiques de leurs automorphismes. On s'intéresse en particulier aux difféomorphismes partiellement hyperboliques des variétés compactes de dimension trois, dont les trois distributions invariantes sont lisses, et dont les distributions stable et instable engendrent une distribution de contact. Ces deux dernières distributions définissent une structure Lagrangienne de contact, dont l'analyse nous permet de classifier les difféomorphismes partiellement hyperboliques étudiés.

Notre outil fondamental pour l'étude des structures Lagrangiennes de contact est la géométrie de Cartan normale qui leur est associée, dont nous exposons en détail le problème d'équivalence. Ces géométries de Cartan sont modélées sur l'espace des droites projectives pointées de $\mathbb{RP}^2$, homogène sous l'action de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$. L'étude de la géométrie de cet espace modèle et des motifs dynamiques de l'action de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ sur ce dernier, nous permettent de construire des compactifications de certaines structures Lagrangiennes de contact Kleiniennes, sur lesquelles nous obtenons des exemples d'automorphismes Lagrangiens de contact non-conservatifs.

Abstract

In this PhD thesis, we study the interactions between some geometrical properties of Lagrangian contact structures, and some dynamical properties of their automorphisms. We study those three-dimensional partially hyperbolic diffeomorphisms, whose three invariant distributions are smooth, and whose stable and unstable distributions generate a contact distribution. These last two distributions define a Lagrangian contact structure, whose analysis allows us to classify the investigated partially hyperbolic diffeomorphisms.

Our principal tool to study Lagrangian contact structures is their normal Cartan geometry, whose equivalence problem is described in detail. These Cartan geometries are modelled on the space of pointed projective lines of $\mathbb{RP}^2$, homogeneous under the action of $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$. The study of the geometry of this model space, and of the dynamical patterns of the action of $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$, allow us to construct compactifications of some Kleinian Lagrangian contact structures, on which we obtain examples of non-conservative Lagrangian contact automorphisms.

Remerciements

Je suis très heureux de terminer et commencer à la fois, en remerciant Charles Frances pour ce que ma thèse lui doit et ce que je lui dois personnellement. Depuis mon stage de M1 il y a plus de quatre ans, il m'est impossible de me représenter l'étendue de ce que Charles m'a appris et apporté en mathématiques, et à quel point il a inspiré ma manière de les voir, de les faire, et de les apprécier. Tout particulièrement, je lui suis reconnaissant pour les questions passionnantes qu'il m'a proposées, mêlant subtilement la géométrie et la dynamique, et pour la manière vivante qu'il m'a transmise de les traiter, en les faisant apparaître au tableau comme des personnages animés. Durant ces quatre années, Charles m'a accompagné et encouragé sans relâche, avec une attention et une disponibilité constantes, un engagement sincère, et une profonde gentillesse. Charles, je te remercie tout particulièrement pour les discussions ouvertes que nous avons, dont les sujets dépassent souvent largement les mathématiques ! Je suis heureux d'avoir travaillé avec toi et de t'avoir rencontré.

Je tiens à remercier Thierry Barbot et Elisha Falbel pour l'honneur qu'ils me font de rapporter ma thèse. Depuis le début et tout au long de ma thèse, Thierry m'a généreusement apporté son expérience et son regard, souvent inattendu et toujours précieux, ainsi que ses conseils bienveillants sur mon travail. Pour tout cela, je le remercie profondément, et tout particulièrement pour son invitation à la conférence organisée à l'IMPA, et pour tout ce qui va avec. Je suis également honoré de compter Sylvain Crovisier, Sorin Dumitrescu, Olivier Guichard et Ana Rechtman dans mon jury de thèse. Je les remercie pour leurs conseils, pour les questions enrichissantes qu'ils m'ont proposées et pour l'attention qu'ils ont porté à mon travail.

Depuis le début de mon M2, j'ai eu la chance de croiser la route de différent·e·s mathématicien·ne·s bienveillant·e·s, qui ont enrichi mon regard sur les mathématiques, et sur celles et ceux qui les font. Tout d'abord, je tiens à remercier Étienne Ghys, sans lequel je ne serais pas venu faire à Strasbourg la connaissance de Charles Frances (et sans lequel mon sujet de thèse n'aurait peut-être pas existé !). Je suis également très heureux d'avoir pu rencontrer et échanger avec Uirá Matos de Almeida en France puis au Brésil. Je remercie profondément André Salles de Carvalho, pour son accueil chaleureux à São Paulo et les discussions enrichissantes que nous y avons eues. Je suis très honoré de l'intérêt que Rafael Potrie a manifesté pour mon travail, et je le remercie pour les différentes questions qu'il m'a suggérées. Depuis le début de ma thèse, j'ai eu la chance de bénéficier de la présence régulière de mon « grand frère de thèse », Vincent Pecastaing, dont les nombreux conseils ont largement dépassé les mathématiques et m'ont été précieux : merci à lui ! Je tiens également à remercier les collègues à Strasbourg, dont l'expérience et la présence bienveillante au laboratoire m'ont bien souvent encouragé, mathématiquement, pratiquement et moralement. Je pense tout particulièrement à Michaël Gutnic, Pierre Py et Margherita Sandon.

Je souhaite remercier profondément toutes les personnes qui œuvrent en silence, mais sans lesquelles il n'y aurait ni thèse ni fac. Celles qui viennent invisiblement avant que les bureaux et les salles ne se remplissent et après qu'ils se vident, faire le ménage et vider les poubelles, pour faire en sorte que ces lieux puissent être utilisés (et malgré des conditions de travail rendues parfois difficiles par la sous-traitance de ces emplois en dehors de l'université). Toutes les

personnes qui font tourner la boutique à l'UFR de Maths-Infos, je pense tout particulièrement à Daniel Grosson. Les différents secrétariats, de la fac, du laboratoire et de l'école doctorale. Je remercie également toutes et tous les étudiant·e·s que j'ai croisé·e·s, qui m'ont beaucoup appris, et qui m'ont aidé sans le savoir à supporter bien des moments difficiles de la thèse.

Je voudrais également profiter de ce moment pour remercier différent·e·s enseignant·e·s que j'ai eu la chance de rencontrer, et qui m'ont toutes et tous, quel que soit leur apprentissage, encouragé à me questionner, à essayer de répondre, et à réessayer encore. Merci à Mr Pauly, pour sa patience face à nos échanges de mails à une époque où je le questionnais sur la compatibilité des relations d'ordre avec les opérations algébriques ... un dimanche matin ! Merci à Mr Alès, pour m'avoir offert un après-midi en Seconde mon plus grand émerveillement scientifique : le calcul du diamètre de la Terre par Ératosthène, à l'aide des rayons du soleil et de la trigonométrie. Merci à Mr Germain, qui m'a apporté les fondements de ce que je sais des maths, tout en me donnant, par son humour et sa disponibilité, l'envie de découvrir ces drôles d'objets. En m'apprenant à leur donner vie dans ma tête et à leur donner corps sur une feuille, vous m'avez offert les clés du monde mathématique (c'est un peu comme si vous m'aviez fait faire mes premiers pas mathématiques, dans une randonnée, en m'apprenant à utiliser une carte !). Merci à Mr Massias, pour les mémorables séances d'exercices de physique du vendredi après-midi, où l'on pallabrait une heure entre nous pour essayer de comprendre le problème proposé pendant qu'il nous regardait avec un sourire mystérieux en bas de l'amphi, avant d'admirer sa résolution au tableau, de l'ordre du miracle ! Merci à Sylvain Courte et Alexandre Vérine, pour avoir fait naître mon intérêt pour la géométrie lors de leur groupe de lecture sur la théorie des nœuds, mais surtout pour leur disponibilité et leur attention, qui m'a inspiré confiance dans celles et ceux qui font des maths. Enfin, merci à Catherine Favre, Hervé le Goff et Roxane Butterfly pour tout ce qu'elles et il m'ont appris.

Ces professeur·e·s inspirant·e·s m'ont permis et donné envie de croire au sens et à la valeur profonde de la création et de la transmission, tant des savoirs que des cultures, qui ne seront jamais et ne doivent surtout pas être « rentables », ainsi qu'à l'importance de l'existence de lieux où les gens puissent faire cela ensemble et librement, dans les meilleures conditions, et à leur manière commune qui est nécessairement la bonne. Au moment où cette thèse est imprimée, je suis inquiet de la détermination avec laquelle les espaces indépendants d'épanouissement de la réflexion et de la création, ainsi que les conditions d'accès pour toutes et tous aux savoirs et à la culture, sont mis en danger par certaines décisions actuelles. Cependant, je sais que les enseignant·e·s, les personnels des universités, ainsi que les étudiant·e·s, feront leur possible pour continuer à faire vivre cela malgré tout.

C'est également, je crois, le moment de remercier Mickaël Crampon, que je ne connais pas (enfin je crois), et qui ne me connaît pas (enfin je crois), mais dont le manuscrit de thèse traînait dans l'armoire de mon bureau (peut-être a-t-il eu le même ?), et dont les remerciements ont joué le rôle d'une oasis à un moment-clé de ma thèse. Un de ces jours où j'atteignais l'overdose de maths (je pense que c'était le premier été, lorsque je croulais sous les fibrés vectoriels en essayant de comprendre le problème d'équivalence), j'ai trouvé ce texte, où un auteur qui racontait de belles maths (le flot géodésique d'une géométrie de Hilbert), prenait le temps de parler d'autre chose que de maths, de ce qui compte, et assumait un positionnement politique. J'avais littéralement l'impression qu'il était là, tout souriant dans mon bureau, et qu'il me disait « Allez, ne fais pas cette tête là, garde espoir, le rôle des maths n'est pas écrit, il est à écrire par celles et ceux qui en font ». Mes remerciements sont bien plus vieux-jeu, mais je le remercie, lui et toutes celles et ceux qui, comme Matthieu Dussaule, proposent dans leur manuscrit de thèse une analyse et un discours dissonant sur le fonctionnement actuel de l'université et du monde de la recherche. Vos paroles nous sont précieuses.

Le « premier cercle » pendant la thèse, c'est le bureau. Je remercie donc très fort mes co-bureaux, Alexander, Kien, et Jérémy, qui m'ont accompagné (et supporté) tous les jours (ou presque). Ma thèse est également inséparable de toutes et tous les doctorant·e·s du laboratoire. J'ai bien trop peur d'oublier des noms pour m'essayer au fameux exercice dit « de la liste de toutes et tous les doctorant·e·s ». Alors je botte en touche, en vous disant merci pour votre soutien quotidien, vos conseils, votre patience à m'écouter attentivement pendant le déjeuner me plaindre que tel réseau du groupe d'Heisenberg ne soit pas d'indice fini dans tel autre¹, vos blagues pendant ce même déjeuner qui réussissent enfin à me faire décrocher de ce réseau, pour les pauses café, pour les pauses pas café ... Et, last but not least, merci aux vénérables anciens qui nous ont transmis la respectable coutume du groupe de travail du jeudi soir ... ils se reconnaîtront !

Je me rappelle assez précisément de toutes celles et ceux qui étaient à mes côtés quand je rédigeais cette thèse, et je voudrais les remercier à travers les lieux où nous nous trouvions ensemble. D'abord mon bureau et le bureau 114 pour le chapitre cinq, puis l'appartement rue Dareau pour le chapitre un, Ajaz pour le chapitre deux, la bibliothèque de l'UFR de Maths (quasi déserte en cette fin août ...) pour les chapitres trois et quatre, et enfin pour le chapitre six, mon appartement, les voisins d'en face – en dessous, la boulangerie Journet, mon bureau, et de nouveau le bureau 114.

Décidément, ce bureau 114 joue un grand rôle dans ma thèse. J'ai eu la grande chance d'y rencontrer, au beau milieu de cette thèse et de l'endroit où je la faisais, trois amis extraordinaires, Francisco, Valdo et Pierre-Alexandre (que je n'aurais peut-être jamais rencontrés si je n'avais pas fait une petite fixette sur les propriétés géométriques et dynamiques des structures Lagrangiennes de contact). Vous m'avez offert une famille d'adoption à Strasbourg, et rien que pour vous rencontrer, je serais prêt à repartir pour trois années encore (si on s'y met à quatre).

Ces années de la thèse sont particulièrement attachées pour moi aux ami·e·s que j'ai rencontré·e·s en venant ici à Strasbourg. Parfois, je les ai croisés en recroisant la route des percussions, parfois j'ai découvert la danse avec eux (pour m'avoir tant aidé à garder le moral, Lindy Spot est devenu le co-producteur officiel de ma thèse), et parfois même nous nous sommes rencontrés sans faire ni l'un ni l'autre.

C'est aussi pour faire des maths que j'étais allé à Lyon (il y a maintenant 6 ans ... ?), et j'ai eu la chance d'y rencontrer des ami·e·s comme on en rencontre peut-être peu dans une vie (enfin je dis ça, je verrai bien à la fin). J'y ai aussi découvert pour la première fois, avec Alan et Ulysse, le plaisir de parler de maths avec des amis, et je crois pouvoir dire que votre rencontre m'a convaincu de donner sa chance aux maths et à la science.

Mais que vous soyez à Strasbourg, ou plus à l'Ouest, ou encore plus à l'Ouest de l'autre côté de la Manche, ou plus au Sud, ou encore plus au Sud de l'autre côté de la Méditerranée, je vous dédie ma thèse à vous toutes et tous, mes ami·e·s. Car ce qui me reste de ces années, après ces quelques pages de maths, c'est du temps vécu avec vous.

Enfin, je ne peux pas exprimer tout ce que je dois à ma famille. Ce que vous m'apportez, je n'en connais pas le nom (peut-être la vie). Je terminerai donc en remerciant ma mère, mon père, mes sœurs Fanny et Juliette, Alicia et Édouard, mon frère Laurent, et en envoyant une pensée toute particulière à mes fantastiques neveux Jacob et Octave.

1. Au plus quatre, d'indice au plus quatre !

Table des matières

Résumé	iii
Remerciements	v
Table des matières	ix
Introduction	1
1 Quelques aspects des structures Lagrangiennes de contact	1
1.1 Géométrie des EDO scalaires d'ordre deux	1
1.2 Espace homogène modèle et géométries de Cartan associées	3
1.3 Systèmes dynamiques et structures Lagrangiennes de contact	4
2 Principaux résultats	5
2.1 Difféomorphismes partiellement hyperboliques de contact en dimension trois	5
2.2 Compactifications de structures Lagrangiennes de contact Kleiniennes . .	7
Deux conventions et quatre notations	9
1 Invitation aux structures Lagrangiennes de contact	11
1.1 Premiers exemples en dimension trois	11
1.1.1 Au dessus des surfaces Riemanniennes	11
1.1.2 L'espace homogène modèle de dimension trois	13
1.1.3 Automorphismes et rigidité des structures Lagrangiennes de contact . . .	14
1.1.4 Une structure Lagrangienne de contact invariante à gauche sur $SL_2(\mathbb{R})$. .	16
1.1.5 Une première structure Lagrangienne de contact au dessus de $\mathbf{H}^2$	17
1.2 Exemples dynamiques en dimension trois	17
1.2.1 Flot géodésique des surfaces hyperboliques	18
1.2.2 Flots Anosov de contact en dimension trois	18
1.2.3 Difféomorphismes partiellement hyperboliques de type contact	20
1.3 Structures Lagrangiennes de contact en dimension supérieure	22
1.3.1 Définition en dimension supérieure	22
1.3.2 Au dessus des variétés projectives	24
1.3.3 Une structure invariante à gauche sur $Heis(2n + 1)$	25
1.3.4 Flots Anosov de contact en dimension supérieure	26
1.3.5 Géométries de chemins généralisées	27
2 Géométrie de l'espace modèle	29
2.1 Structure Lagrangienne de contact standard du modèle	29
2.1.1 Point de vue géométrique	29
2.1.2 Point de vue algébrique	30
2.2 Quelques objets géométriques dans l'espace modèle	32
2.2.1 Hypersurfaces α - β et β - α	32
2.2.2 Application duale	34

2.2.3	Chaînettes de l'espace modèle	34
2.2.4	Configurations des surfaces α - β et β - α en dimension trois	36
2.3	Quelques ouverts homogènes de l'espace modèle	37
2.3.1	Espace des hyperplans affines pointés	37
2.3.2	Ouvert de type Lorenzien	38
2.3.3	Ouvert de type tore	39
2.4	Cartes affines	40
2.4.1	Carte affine standard	40
2.4.2	Objets géométriques dans une carte affine	42
3	Problème d'équivalence pour les géométries paraboliques	43
3.1	Géométries de Cartan paraboliques	44
3.1.1	(G, X) -structures	44
3.1.2	Géométries de Cartan	46
3.1.3	Le problème d'équivalence pour les géométries de Cartan	52
3.1.4	Géométries de Klein paraboliques	54
3.2	D'une structure sur la base vers une géométrie de Cartan	56
3.2.1	G_0 -structures filtrées	56
3.2.2	G_0 -structure filtrée induite par une géométrie de Cartan régulière	60
3.2.3	Existence d'une géométrie de Cartan admissible	62
3.3	Condition de normalisation	64
3.3.1	Ce que l'on attend d'une condition de normalisation	64
3.3.2	Différence entre deux connexions de Cartan admissibles	65
3.3.3	Normalisation par le noyau d'une co-différentielle	69
3.4	Équivalence avec les géométries de Cartan paraboliques normales	71
3.4.1	Où les gradués associés s'expliquent	71
3.4.2	Quasi-unicité d'une connexion normale	73
3.4.3	Existence d'une connexion normale	74
3.4.4	Conclusion	75
3.5	Courbure harmonique	76
4	Géométrie de Cartan normale d'une structure Lagrangienne de contact	77
4.1	Problème d'équivalence pour les structures Lagrangiennes de contact	77
4.1.1	Quelques préliminaires	77
4.1.2	Propriétés de la géométrie de Cartan normale	79
4.2	Courbure d'une structure Lagrangienne de contact de dimension trois	82
4.2.1	Calcul de la condition de normalisation	82
4.2.2	Calcul de la courbure harmonique	85
4.3	Chaînettes d'une structure Lagrangienne de contact	86
4.3.1	Développement de courbes dans une géométrie de Cartan	87
4.3.2	Définition des chaînettes	89
4.3.3	Rigidité des automorphismes à l'ordre deux	90
5	Difféomorphismes partiellement hyperboliques de contact en dimension trois	93
5.1	Introduction	94
5.1.1	Principal results	94
5.1.2	A rigid geometric structure preserved by partially hyperbolic diffeomorphisms	96
5.1.3	Organization of the paper	97
5.2	Three-dimensional Lagrangian contact structures	98
5.2.1	Homogeneous model space	98
5.2.2	Lagrangian contact structures as Cartan geometries	99

5.2.3	Normal Cartan geometry of a Lagrangian contact structure	101
5.2.4	Killing fields of Lagrangian contact structures	104
5.3	Quasi homogeneity and flatness of the structure	106
5.3.1	Quasi homogeneity of the enhanced Lagrangian contact structure	106
5.3.2	Flatness of the Lagrangian contact structure	108
5.4	Local model of the enhanced Lagrangian contact structure	111
5.4.1	Two algebraic models	111
5.4.2	Two homogeneous open subsets of the model space	112
5.4.3	From the infinitesimal model to the local model	114
5.5	Classification of the infinitesimal model	117
5.5.1	Algebraic reduction	117
5.5.2	Two further properties of the infinitesimal model	119
5.5.3	End of the classification	120
5.6	Global structure	121
5.6.1	Local homogeneity of the enhanced Lagrangian contact structure	122
5.6.2	Reduction of the holonomy group	125
5.7	Completeness of the structure	126
5.8	Conclusion	129
5.8.1	End of the proof of Theorem A.2	129
5.8.2	Proof of Theorem A.1	132
6	Dynamique de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ sur l'espace modèle et compactifications	133
6.1	Position du problème	134
6.1.1	Ensemble dynamiquement associé à l'action d'une suite	134
6.1.2	Décomposition KAK dans $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$	135
6.1.3	Directions asymptotiques à l'infini dans $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$	136
6.2	Dynamique de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{RP}^2$ et $\mathbb{RP}_*^2$	138
6.2.1	Quelque remarques générales	138
6.2.2	Type attractif	138
6.2.3	Type répulsif	140
6.2.4	Type mixte	141
6.2.5	Conséquences sur $\mathbb{RP}_*^2$	143
6.3	Dynamique de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ sur l'espace modèle	144
6.3.1	Type attractif	144
6.3.2	Type répulsif	145
6.3.3	Type mixte	146
6.4	Preuve du théorème B	147
6.4.1	Cas d'une trompette hyperbolique	148
6.4.2	Cas d'un groupe de Schottky quelconque	150
6.4.3	Conclusion de la preuve du théorème B	155
6.4.4	Une extension maximale non compacte et une question	158
	Bibliographie	161

Introduction

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux interactions d'une structure géométrique nommée *structure Lagrangienne de contact* avec ses symétries. Plus précisément, nous cherchons à comprendre les contraintes que certaines hypothèses *dynamiques* sur les automorphismes imposent sur la structure géométrique étudiée.

1 Quelques aspects des structures Lagrangiennes de contact

Nous consacrons les quatre premiers chapitres de cette thèse à un portrait général des structures Lagrangiennes de contact. Nous y introduisons de nombreux exemples de structures Lagrangiennes de contact, et nous décrivons plusieurs aspects importants dans l'étude de ces structures, que nous allons succinctement parcourir dans la première partie de cette introduction. Commençons tout d'abord par introduire la notion de structure Lagrangienne de contact en partant d'un ancien problème, étudié depuis Lie et Cartan au moins : comment « géométriser » l'étude des équations différentielles ordinaires scalaires d'ordre deux ?

1.1 Géométrie des EDO scalaires d'ordre deux

Considérons une équation différentielle ordinaire scalaire d'ordre deux de la forme

$$(E_F) : y''(t) = F(t, y(t), y'(t)), \quad (1)$$

où F ainsi que la fonction inconnue y sont lisses et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ces équations seront simplement nommées *EDO scalaires d'ordre deux* par la suite). Une démarche constante en mathématiques est de chercher à réduire l'étude d'une situation a priori compliquée à celle d'une situation de référence qui soit plus simple. Dans notre cas, cela nous amène naturellement à la question suivante : (E_F) est-elle « équivalente » à l'équation $y'' = 0$? Bien évidemment, cette question n'a aucun sens si l'on ne précise pas la notion d'équivalence choisie. L'utilisation de changements de coordonnées nous mènerait vers une résolution analytique de cette question, ce que nous souhaitons éviter. Nous allons donc adopter un point de vue géométrique, en associant à toute solution y de (E_F) son graphe $\gamma_y(t) := (t, y(t))$ dans $\mathbb{R}^2$. L'équation (E_F) étant d'ordre deux, pour tout $(t, u, v) \in \mathbb{R}^3$ il existe une unique solution y de (E_F) telle que $y(t) = u$ et $y'(t) = v$. Ou en d'autres termes, il existe un unique graphe γ_y passant par $x = (t, u) \in \mathbb{R}^2$ et tangent à la direction non-v verticale $l = \mathbb{R}(1, v) \in \mathbf{P}(\mathbf{T}_x \mathbb{R}^2)$. En notant $\mathcal{C}_F$ l'ensemble des graphes *non-paramétrés* des solutions de (E_F) , il existe donc exactement une courbe de $\mathcal{C}_F$ passant par chaque point du plan et dans chaque direction tangente non-v verticale. Nous laissons de côté l'aspect analytique de la résolution de (E_F) pour nous intéresser à l'étude géométrique de cette famille de courbes non-paramétrées, que nous appellerons *géométrie de chemins* associée à (E_F) . Dans le cas de l'équation différentielle triviale $y'' = 0$, ces courbes sont simplement les droites affines du plan.

Nous dirons que deux EDO scalaires d'ordre deux sont *localement équivalentes* s'il existe en tout point un difféomorphisme local du plan envoyant la géométrie de chemins de l'une sur celle de l'autre. Ceci peut être vu comme une généralisation des changements de coordonnées

opérés usuellement sur les EDO, avec le point de vue géométrique que nous avons adopté. À la lumière de cette notion d'équivalence, nous pouvons maintenant préciser la question que nous nous posons.

Question 1. Les EDO scalaire d'ordre deux sont-elles toutes localement équivalentes à l'équation $y'' = 0$?

En d'autres termes, peut-on redresser l'ensemble des graphes non-paramétrés des solutions de toute EDO scalaire d'ordre deux, sur l'ensemble des droites affines du plan ? Il ne semble pas évident et encore moins souhaitable de répondre à cette question par le calcul, et nous allons maintenant la traduire géométriquement à l'aide des *structures Lagrangiennes de contact* de dimension trois.

Soit $\mathbf{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$ le projectivisé du fibré tangent à $\mathbb{R}^2$, dont nous notons $\pi_\alpha: \mathbf{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ la projection canonique (c'est un fibré en $\mathbb{R}\mathbf{P}^1$ au dessus de $\mathbb{R}^2$), et $\mathcal{E}_\alpha = \text{Ker } D\pi_\alpha$ la distribution de dimension un tangente aux fibres. Avec $S \subset \mathbf{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$ la section correspondant à la direction tangente verticale, nous notons $M := \mathbf{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2) \setminus S$. Toute sous-variété $\mathcal{F}$ de dimension un de $\mathbb{R}^2$ se relève naturellement dans $\mathbf{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$ en sa *prolongation* $\mathcal{F}^{(1)} := \{T_x \mathcal{F} \mid x \in \mathcal{F}\}$, et la propriété de la géométrie de chemins $\mathcal{C}_F$ montre précisément qu'il passe, par tout point de M , la prolongation d'une unique courbe de $\mathcal{C}_F$. En d'autres termes, l'ensemble des relevés des courbes de $\mathcal{C}_F$ forme un feuilletage (lisse) de dimension un de M , dont nous notons $\mathcal{E}_F$ la distribution tangente (qui est toujours transverse à $\mathcal{E}_\alpha$). Un difféomorphisme local f de $\mathbb{R}^2$ agit sur $\mathbf{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$ via sa prolongation $f^{(1)}(l) = D_{\pi_\alpha(l)} f(l)$, et f échange les géométries de chemins respectives de deux EDO (E_F) et (E_G) si, et seulement si $f^{(1)}$ préserve M , et $(f^{(1)})^* \mathcal{E}_G = \mathcal{E}_F$. Afin de pouvoir entièrement travailler dans M , il nous reste à caractériser les difféomorphismes locaux de M qui sont les prolongations de difféomorphismes locaux du plan. On vérifie facilement que ce sont exactement ceux qui préservent la distribution verticale $\mathcal{E}_\alpha$. Un difféomorphisme local ϕ de M est donc la prolongation d'un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ échangeant les géométries de chemins $\mathcal{C}_F$ et $\mathcal{C}_G$, si et seulement si $\phi^* \mathcal{E}_\alpha = \mathcal{E}_\alpha$ et $\phi^* \mathcal{E}_G = \mathcal{E}_F$. Nous résumons les observations que nous avons faites par l'affirmation suivante.

La classification locale des EDO scalaires d'ordre deux est équivalente à celle des couples $(\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{E}_F)$.

Pour répondre à cette nouvelle question, nous devons comprendre la structure géométrique $(\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{E}_F)$. Considérons la distribution lisse de dimension deux définie sur $\mathbf{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$ par $H(l) = D_l \pi_\alpha^{-1}(l)$, de sorte qu'une courbe de $\mathbf{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$ est la prolongation d'une courbe de $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si elle est tangente à H en tout point. En particulier H contient $\mathcal{E}_\alpha$, ainsi que toutes les distributions $\mathcal{E}_F$ associées aux EDO d'ordre deux. Plus précisément, ces dernières sont exactement les distributions lisses de M contenues dans H et transverses à $\mathcal{E}_\alpha$. Il est facile de remarquer que H n'est intégrable en aucun point. Supposons en effet par l'absurde que H admette une surface intégrale Σ . Puisque $\mathcal{E}_\alpha \subset H$, l'intersection de Σ avec toute fibre de π_α est un ouvert de cette dernière, ce qui montre que $\mathcal{F} = \pi_\alpha(\Sigma)$ est une sous-variété de dimension un de $\mathbb{R}^2$ (quitte à rétrécir Σ). En tout point x de $\mathcal{F}$, on a alors $T_x \mathcal{F} = D_l \pi_\alpha(T_l \Sigma) = l$ pour tout $l \in \pi_\alpha^{-1}(x) \cap \Sigma$, ce qui est impossible car $\pi_\alpha^{-1}(x) \cap \Sigma$ n'est pas réduit à un point. Un calcul en coordonnées montre plus précisément que H est une distribution *de contact*, i.e. que pour tout couple X, Y de champs de vecteurs locaux engendrant H localement, le crochet de Lie $[X, Y]$ est en dehors de H .

Selon le théorème de Darboux, les distributions de contact sont toutes localement équivalentes. On peut montrer que les couples (E, ξ) constitués d'une distribution E de dimension un contenue dans une distribution de contact ξ de dimension deux le sont également (voir [Olv95, Theorem 11.11]). Si (E^α, E^β) est un couple de distributions lisses et transverses de dimension un telles que $E^\alpha \oplus E^\beta$ est de contact, il existe donc un difféomorphisme ϕ tel que $\phi^* E^\alpha = \mathcal{E}_\alpha$ et $\phi^*(E^\alpha \oplus E^\beta) = H$. La distribution $\phi^* E^\beta$ est alors transverse à $\mathcal{E}_\alpha$ et contenue dans H , donc

associée à une EDO d'ordre deux du plan. Le moment est maintenant venu de donner un nom à la structure géométrique (E^α, E^β) que nous avons mise en évidence.

Définition. Une *structure Lagrangienne de contact* sur une variété de dimension trois est un couple $\mathcal{L} = (E^\alpha, E^\beta)$ de distributions lisses et transverses de dimension un, telles que $E^\alpha \oplus E^\beta$ est une distribution de contact.

Avec cette définition, nous venons précisément de montrer que les couples $(\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{E}_F)$ associés aux EDO scalaires d'ordre deux sont localement équivalents aux structures Lagrangiennes de contact de dimension trois. Notre affirmation précédente se traduit donc de la manière suivante.

La classification locale des EDO scalaires d'ordre deux est équivalente à celle des structures Lagrangiennes de contact de dimension trois.

Le nom de structure Lagrangienne de contact semble être introduit pour la première fois par Takeuchi dans [Tak94]. On peut voir a posteriori une première apparition implicite de cette structure dans le travail de Tresse, qui exhibe dans [Tre96] des invariants locaux pour les EDO scalaires d'ordre deux. Élie Cartan semble toutefois être le premier à définir une *structure géométrique* en lien avec l'étude de ces EDO dans [Car24b], où il interprète les invariants de Tresse comme la courbure de cette structure (que nous appellerons bientôt *géométrie de Cartan*).

Dans le premier chapitre, nous rencontrerons de nombreux exemples de structures Lagrangiennes de contact dans diverses situations. Nous verrons en particulier que la construction classique que nous venons de décrire se généralise naturellement, en munissant le fibré unitaire tangent de toute surface Riemannienne Σ d'une structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}_\Sigma$. Si Σ est de plus une surface hyperbolique, nous mettrons également en évidence sur $T^1\Sigma$ une seconde structure Lagrangienne de contact notée $\mathcal{L}_\Sigma^{su}$, qui sera cette fois invariante par le flot géodésique. Si Σ est compacte, $\mathcal{L}_\Sigma^{su}$ sera donnée par les distributions stable et instable du flot géodésique, qui est alors de type Anosov.

1.2 Espace homogène modèle et géométries de Cartan associées

À la fin du premier chapitre, nous généraliserons la notion de structure Lagrangienne de contact, que nous définirons sur une variété M de dimension impaire $2n+1$ quelconque comme un couple $\mathcal{L} = (E^\alpha, E^\beta)$ de distributions lisses et transverses de dimension n , tel que $E^\alpha \oplus E^\beta$ est une distribution de contact de M dont E^α et E^β sont des sous-distributions Legendriennes. Au lieu de donner la définition précise de cette dernière notion, contentons-nous dans cette introduction de décrire l'exemple qui nous servira de « modèle » pour les structures Lagrangiennes de contact.

Ces dernières ont en effet la caractéristique fondamentale de posséder un *espace homogène modèle*, qui est en dimension $2n+1$ l'espace des hyperplans projectifs pointés (m, H) de $\mathbb{R}\mathbf{P}^{n+1}$, où $H \subset \mathbb{R}\mathbf{P}^{n+1}$ est un hyperplan projectif et $m \in H$. Cet espace noté $\mathbf{X}_{2n+1}$ est muni d'une structure Lagrangienne de contact standard, dont les distributions α et β correspondent aux feuilletages de dimension n obtenus respectivement en fixant le point m et en faisant varier l'hyperplan projectif qui le contient, et en fixant inversement H tout en faisant varier le point considéré sur H . L'action naturelle de $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ sur $\mathbf{X}_{2n+1}$ étant transitive, $\mathbf{X}_{2n+1}$ s'identifie à l'espace homogène $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})/\mathbf{P}_{n+2}$, où $\mathbf{P}_{n+2}$ est le stabilisateur de l'hyperplan projectif pointé $(\mathbb{R}e_1, \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n+1}))$.

Le deuxième chapitre sera consacré à une étude détaillée des propriétés géométriques de cet espace modèle. Nous verrons en particulier que $\mathbf{P}(\mathbb{R}^2)$, muni de la structure Lagrangienne de contact associée à l'équation différentielle $y'' = 0$, est isomorphe à un ouvert de $\mathbf{X}_3$, et qu'il en va de même pour les deux structures Lagrangiennes de contact $\mathcal{L}_{\mathbf{H}^2}$ et $\mathcal{L}_{\mathbf{H}^2}^{su}$ définies sur $T^1\mathbf{H}^2$. L'espace modèle apparaîtra ainsi comme une compactification de ces différents exemples, tout comme la sphère $\mathbf{S}^2$ est une compactification conforme de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbf{H}^2$. Nous en déduirons en

particulier que pour toute surface hyperbolique compacte, la structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}_{\Sigma}^{su}$ invariante par le flot géodésique est (à indice deux près) *Kleinienne*, *i.e.* isomorphe à un quotient compact d'un ouvert de $\mathbf{X}_3$.

Tout cela est bien beau, mais nous n'avons pour le moment pas répondu à notre question 1 initiale au sujet des équations différentielles ordinaires d'ordre deux. La structure Lagrangienne de contact de $\mathbf{P}(\mathbb{TR}^2)$ associée à l'équation $y'' = 0$ étant localement isomorphe à $\mathbf{X}_3$, nous pouvons reformuler la question 1 une dernière fois sous la forme suivante.

Question 2. Les structures Lagrangiennes de contact de dimension trois sont-elles toutes localement isomorphes à $\mathbf{X}_3$?

En géométrie Riemannienne, la notion de *courbure* répond à cette question : une variété Riemannienne de dimension n est localement isométrique à $\mathbb{R}^n$ muni de sa métrique euclidienne standard si, et seulement si sa courbure est nulle. Nous souhaiterions disposer d'une notion de courbure pour les structures Lagrangiennes de contact vérifiant la même propriété, l'espace homogène modèle $\mathbf{X}_{2n+1}$ que nous avons défini précédemment remplaçant $\mathbb{R}^n$. Dans cet objectif, nous introduirons au chapitre trois pour tout espace homogène G/P un type de structure géométrique nommé *géométrie de Cartan modelée sur G/P* en référence à Élie Cartan qui l'a originellement introduite. Ces structures sont en un sens que nous préciserons des « versions courbes » de l'espace homogène G/P , et leur intérêt principal est précisément l'existence d'une courbure dont l'annulation est équivalente à être *plate*, c'est à dire localement isomorphe à l'espace homogène modèle G/P .

Nous remarquerons facilement que toute géométrie de Cartan modelée sur $\mathbf{X}_{2n+1}$ induit naturellement une structure Lagrangienne de contact de dimension $2n + 1$. Le problème inverse est en revanche difficile : comment associer à une structure Lagrangienne de contact donnée une géométrie de Cartan modelée sur $\mathbf{X}_{2n+1}$ et « aussi unique que possible », appelée *géométrie de Cartan normale* ? Cette question est connue sous le nom de *problème d'équivalence*, et nous présentons dans le chapitre trois sa résolution pour une famille d'espaces homogènes modèles nommés *géométries de Klein paraboliques*, qui contient $\mathbf{X}_{2n+1}$. Les résultats énoncés dans ce chapitre ne sont en aucun cas nouveaux, et sont dûs à toute une série de travaux remontant à Tanaka dans [Tan79]. Pour notre part nous nous reposons sur la preuve exposée dans [ČS09, §3.1], tout en choisissant un point de vue légèrement différent de celui des auteurs sur la structure de base, et en mettant l'accent sur certains arguments qui nous semblent importants.

Dans le quatrième chapitre, nous appliquons la résolution du problème d'équivalence aux structures Lagrangiennes de contact, dont nous décrivons explicitement la courbure en dimension trois. Les structures Lagrangiennes de contact en dimension trois ont donc des invariant locaux et ne sont pas toutes localement isomorphes à $\mathbf{X}_3$, ce qui répond à la question 1 que nous nous posions initialement.

Les équations scalaires d'ordre deux ne sont pas toutes localement équivalentes à $y'' = 0$.

Dans ce quatrième chapitre, nous introduisons également les *chaînettes* d'une structure Lagrangienne de contact, qui nous permettent de montrer que tout automorphisme d'une structure Lagrangienne de contact connexe ayant un 2-jet trivial en un point est égal à l'identité.

1.3 Systèmes dynamiques et structures Lagrangiennes de contact

Ce résultat sur leurs automorphismes suggère que les structures Lagrangiennes de contact sont *rigides*, au sens où leurs automorphismes sont fortement contraints. Avec ce point de vue, il semble naturel de penser que l'existence d'un automorphisme ayant une « dynamique riche » est peu probable, et qu'elle devrait imposer à la structure géométrique d'être très particulière, très « symétrique ». Cette idée générale sur les structures rigides peut sembler naïve, mais elle se révèle très fertile et est à l'origine de nombreux résultats (voir par exemple [GD91]). Elle se

manifeste en particulier d'une très belle manière dans un résultat d'Étienne Ghys sur les *flots Anosov de contact* en dimension trois, que nous présentons maintenant.

Soit (φ^t) un flot lisse de difféomorphismes sur une variété compacte M , n'ayant aucun point fixe sur M . On dit que (φ^t) est *Anosov* s'il existe deux distributions non-nulles E^s et E^u sur M , préservées par $D\varphi^t$, telles que $TM = E^s \oplus E^0 \oplus E^u$ avec E^0 la direction du flot, et vérifiant les conditions suivantes par rapport à une métrique Riemannienne quelconque sur M .

- La *distribution stable* E^s est *uniformément contractée* par (φ^t) : il existe deux constantes $C > 0$ et $0 < \lambda < 1$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in M$ et $v \in E^s(x)$,

$$\|D_x \varphi^t(v)\| \leq C \lambda^t \|v\|. \quad (2)$$

- La *distribution instable* E^u est *uniformément dilatée* par (φ^t) , i.e. uniformément contractée par (φ^{-t}) .

Ces conditions dynamiques sont un exemple typique de ce que l'on entend par « dynamique riche ». Un exemple célèbre de flot Anosov en dimension trois est donné par le *flot géodésique* d'une surface hyperbolique compacte, agissant sur son fibré unitaire tangent. Les distributions stable et instable d'un flot Anosov sont en général très peu régulières (seulement Hölder continues), mais dans le cas du flot géodésique d'une surface hyperbolique, on peut les décrire précisément et montrer qu'elles sont lisses et que $E^s \oplus E^u$ est *de contact*. En d'autres termes, (E^s, E^u) est dans ce cas une structure Lagrangienne de contact, qui est précisément la structure $\mathcal{L}_{\Sigma}^{su}$ évoquée plus haut.

Théorème (Ghys [Ghy87]²). *Soit (φ^t) un flot d'Anosov sur une variété compacte et connexe de dimension trois. Si E^s et E^u sont lisses, et si $E^s \oplus E^u$ est de contact, alors à équivalence orbitale et revêtements finis près, (φ^t) est le flot géodésique d'une surface hyperbolique compacte.*

On peut trouver dans [Ghy87] une description algébrique des flots obtenus, que nous nommerons par la suite *flots Anosov de contact algébriques* de dimension trois. Le résultat de Ghys correspond précisément à l'idée générale que nous avons évoquée précédemment : l'existence d'un flot Anosov dans le groupe d'automorphismes de la structure Lagrangienne de contact (E^s, E^u) lui impose une forme particulièrement « symétrique », ce qui permet de déterminer (φ^t) .

2 Principaux résultats

Les chapitres 5 et 6 que nous présentons maintenant contiennent les résultats originaux de cette thèse.

2.1 Difféomorphismes partiellement hyperboliques de contact en dimension trois

Le principal travail de cette thèse a consisté à étudier la question présentée précédemment pour les flots Anosov de contact en dimension trois, en passant d'un groupe continu d'automorphismes à un groupe discret, c'est à dire en remplaçant le flot (φ^t) par un automorphisme f . Dans le cas continu, E^0 fournit d'emblée une donnée géométrique supplémentaire préservée par le flot, qui n'existe pas a priori dans le cas discret. Afin de conserver cette distribution transverse, nous considérons donc pour structure géométrique un triplet (E^s, E^u, E^c) sur une variété M de dimension trois, où (E^s, E^u) est une structure Lagrangienne de contact et E^c une distribution lisse de dimension un transverse à $E^s \oplus E^u$, i.e. telle que $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$. Une telle structure sera nommée *structure Lagrangienne de contact enrichie* de dimension trois. L'analogue discret d'un flot Anosov de contact est alors un automorphisme f de la structure

2. Le résultat prouvé par Ghys est en réalité plus précis car il traite également le cas où $E^s \oplus E^u$ n'est pas de contact, mais ce dernier ne nous intéressera pas ici.

Lagrangienne de contact enrichie $\mathcal{S} = (E^s, E^u, E^c)$ (*i.e.* un difféomorphisme de M préservant chacune de ses trois distributions), qui contracte uniformément (respectivement dilate uniformément) E^s (resp. E^u) au sens de l'inégalité (1.2.2). Tout temps non-nul d'un flot Anosov de contact vérifie évidemment ces conditions en posant $E^c = E^0$, mais avant d'aller plus loin une question s'impose : existe-t-il un exemple d'automorphisme f de ce type qui ne s'intègre pas en un flot Anosov ?

Nous construirons au chapitre 1 un exemple de difféomorphisme f répondant positivement à cette question sur une *nil-variété*, *i.e.* sur un quotient $\Gamma \backslash \text{Heis}(3)$ du groupe d'Heisenberg par un réseau cocompact (voir paragraphe 1.2.3). Le difféomorphisme f de $\Gamma \backslash \text{Heis}(3)$ que nous décrirons est induit par un *automorphisme affine* de $\text{Heis}(3)$, c'est à dire par la composition d'un automorphisme de groupe ϕ de $\text{Heis}(3)$ avec une translation, qui est *partiellement hyperbolique* au sens suivant. La différentielle de ϕ en l'identité est diagonalisable, et a une valeur propre λ^c de valeur absolue égale à 1 et deux autres valeurs propres de valeurs absolues respectives $|\lambda^s| < 1$ et $|\lambda^u| > 1$. Les directions propres respectives dans $\mathfrak{heis}(3)$ de ces trois valeurs propres λ^c , λ^s et λ^u induisent sur la nil-variété $\Gamma \backslash \text{Heis}(3)$ trois distributions E^c , E^s et E^u qui sont préservées par f , et E^s (respectivement E^u) est de plus contractée (resp. dilatée) uniformément par f au sens de l'inégalité (1.2.2). Les exemples de ce type seront appelés *automorphismes affines partiellement hyperboliques de nil-variétés*.

Nous verrons au chapitre 2 (voir remarque 2.3.5) que la structure Lagrangienne de contact (E^s, E^u) préservée par un flot Anosov de contact algébrique de dimension trois est (à revêtement fini près) isomorphe à un quotient compact d'un ouvert Y_t de l'espace modèle $\mathbf{X}_3$. Nous verrons qu'il en va de même pour un automorphisme affine partiellement hyperbolique d'une nil-variété, dont la structure Lagrangienne de contact sous-jacente (E^s, E^u) est isomorphe à un quotient compact d'un ouvert Y_a de $\mathbf{X}_3$ non-isomorphe à Y_t (voir remarque 2.4.3). Plus précisément, les structures Lagrangiennes de contact *enrichies* (E^s, E^u, E^c) préservées par chacune de ces deux familles d'exemples sont isomorphes aux quotients de structures Lagrangiennes de contact enrichies $\mathcal{S}_t$ et $\mathcal{S}_a$ sur Y_t et Y_a .

Le théorème suivant constitue le résultat principal de cette thèse. Il affirme que nous avons presque décrit tous les exemples possibles de la situation étudiée.

Théorème A. *Soit M une variété compacte, connexe et orientable de dimension trois, munie d'une structure Lagrangienne de contact enrichie $\mathcal{S} = (E^s, E^u, E^c)$. On suppose que $\mathcal{S}$ admet un automorphisme f préservant l'orientation de M et vérifiant les conditions suivantes.*

- *Chacune des distributions E^s et E^u est soit uniformément contractée, soit uniformément dilatée par f .*
- *Tous les points de M sont non-errants par rapport à f .*

Alors à revêtements et quotients finis près, $(M, \mathcal{S})$ est un quotient compact de $(Y_t, \mathcal{S}_t)$ ou de $(Y_a, \mathcal{S}_a)$, et on a la description suivante pour f .

1. *Dans le premier cas, une puissance finie de f est un temps non-nul d'un flot Anosov de contact algébrique de dimension trois.*
2. *Dans le second cas, un relevé fini de f est un automorphisme affine partiellement hyperbolique d'une nil-variété.*

Les automorphismes f obtenus dans les cas 1 et 2 de ce théorème sont des exemples de *difféomorphismes partiellement hyperboliques*, qui seront précisément définis à la définition 1.2.8. Le théorème A sera précisé au chapitre 5 (voir Theorem A.2), et a pour corollaire immédiat l'énoncé suivant du point de vue des difféomorphismes partiellement hyperboliques.

Corollaire. *Soit M une variété compacte, connexe et orientable de dimension trois, et soit f un difféomorphisme partiellement hyperbolique de M préservant l'orientation et vérifiant les conditions suivantes.*

- Les distributions stable, instable et centrale de f sont lisses.
- $E^s \oplus E^u$ est une distribution de contact de M .
- Tous les points de M sont non-errants par rapport à f .

On a alors l'alternative suivante.

1. Soit une puissance finie de f est C^∞ -conjuguée à un temps non-nul d'un flot Anosov de contact algébrique de dimension trois,
2. ou bien un relevé fini de f est C^∞ -conjugué à un automorphisme affine partiellement hyperbolique d'une nil-variété.

Rappelons qu'un point $x \in M$ est *non-errant* pour f s'il existe une suite (x_k) convergeant vers x et une suite (n_k) tendant vers $+\infty$ telle que $(f^{n_k}(x_k))$ converge vers x . L'hypothèse faite dans l'énoncé du théorème A sur les points non-errants de f est en particulier vérifiée par tout difféomorphisme *conservatif*, *i.e.* préservant sur M une mesure borélienne finie de support total et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Réciproquement, les exemples 1. et 2. apparaissant dans le théorème A sont tous deux conservatifs.

L'idée générale dans la preuve de cet énoncé est d'utiliser les propriétés dynamiques de f pour comprendre la structure géométrique $\mathcal{S}$. Plus précisément, nous montrons d'une part que la structure Lagrangienne de contact (E^s, E^u) est une structure Kleinienne $\Gamma \backslash \Omega$, et nous utilisons d'autre part la distribution transverse E^c pour montrer que Ω est égal à Y_t ou Y_a . Cette classification géométrique constitue l'essentiel de la preuve, la détermination de f étant alors réduite à un travail algébrique simple. Le chapitre 5 de cette thèse, qui reproduit la prépublication [MM20] écrite en anglais, est consacré à la preuve du Théorème A. Ce chapitre peut donc se lire indépendamment des autres, mais la lectrice³ familière des chapitres 1 à 4 en aura une compréhension bien plus poussée. La preuve du théorème A utilise en effet d'une manière fondamentale la géométrie de l'espace modèle $\mathbf{X}_3$ (chapitre 2) ainsi que la géométrie de Cartan normale associée à une structure Lagrangienne de contact (chapitres 3 et 4).

2.2 Compactifications de structures Lagrangiennes de contact Kleiniennes

Si une surface hyperbolique Σ est non-compacte, alors son fibré unitaire tangent l'est également, et il n'y a donc aucun sens à décrire son flot géodésique (φ^t) par les propriétés Anosov. Néanmoins, $T^1\Sigma$ est toujours munie d'une structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}_\Sigma^{su}$ invariante par (φ^t) . Une question intéressante, tout autant d'un point de vue géométrique que d'un point de vue dynamique, est alors de comprendre si $\mathcal{L}_\Sigma^{su}$ se *compactifie*, *i.e.* s'il existe une structure Lagrangienne de contact compacte $(M, \mathcal{L})$ dans laquelle $(T^1\Sigma, \mathcal{L}_\Sigma^{su})$ se plonge (et dont $(M, \mathcal{L})$ sera alors appelé une *compactification*). Cette question est notre motivation principale pour étudier dans le chapitre 6 les propriétés dynamiques de l'action de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathbf{X}_3$. En effet, $(T^1\Sigma, \mathcal{L}_\Sigma^{su})$ étant un quotient compact $\Gamma \backslash Y_t$, la recherche d'une compactification consiste à trouver un ouvert Ω de $\mathbf{X}_3$ contenant Y_t , et où le sous-groupe discret $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ agisse librement, proprement et cocompactement.

Dans [Bar10], ce type de question est étudié par Barbot avec un point de vue générique. Il exhibe, pour toute représentation *Anosov* d'un groupe de surface dans $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$, un ouvert de $\mathbf{X}_3$ où la représentation agit proprement. Dans [FT15], Falbel et Thebaldi introduisent une méthode de construction de structure Lagrangienne de contact plate sur une 3-variété hyperbolique ouverte, par le recollement de tétraèdres définis dans $\mathbf{X}_3$.

Dans notre cas, nous nous intéressons à l'action d'un sous-groupe donné de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$, ce qui nous oblige à étudier au cas par cas la dynamique de ses éléments sur $\mathbf{X}_3$. Nous obtenons différents résultats dont nous résumons les principaux aspects dans l'énoncé suivant.

3. Dans différents de ses textes, Michèle Audin use des termes lectrice et lecteur selon la règle suivante : les deux termes s'alternent, une fois sur deux à tour de rôle (voir par exemple l'excellent livre de géométrie [Aud12]). J'ai trouvé que cette idée (fort oulipienne!) était une belle manière, astucieuse et intelligente, de questionner la nature d'une convention en la remplaçant par une autre. Je me suis donc permis d'emprunter son idée pour adopter la même règle dans ma thèse.

Théorème B. *Soit Σ une surface topologique connexe non-compacte dont le groupe fondamental est de type fini. Il existe alors sur Σ une métrique hyperbolique complète pour laquelle on a les résultats suivants.*

1. *La structure Lagrangienne de contact $(T^1\Sigma, \mathcal{L}_\Sigma^{su})$ admet une compactification Lagrangienne de contact plate $(M, \mathcal{L}_M)$.*
2. *Le flot géodésique de $T^1\Sigma$ se prolonge sur M en un flot $(\bar{\varphi}^t)$ non-conservatif d'automorphismes de $\mathcal{L}_M$. Plus précisément, il existe un ouvert O dense dans M , ainsi qu'un fermé attractif $\mathcal{F}^+$ qui est une union finie de cercles, qui vérifient la condition suivante. Pour tout compact $K \subset O$ et toute suite réelle (t_n) telle que $\lim t_n = +\infty$, si $(\bar{\varphi}^{t_n}(K))$ converge pour la topologie de Hausdorff alors sa limite est contenue dans $\mathcal{F}^+$.*

Nous relierons à indices finis près la compactification $(M, \mathcal{L})$ à une structure Kleinienne $\Gamma \backslash \Omega$, où $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ est un sous-groupe discret agissant librement, proprement et cocompactement sur un ouvert $\Omega \subset \mathbf{X}_3$. À la proposition 6.4.6, nous décrirons le bord $\mathbf{X}_3 \setminus \Omega$ de cet ouvert comme un ensemble limite pour l'action de Γ sur $\mathbf{X}_3$, ce qui nous permettra en particulier de préciser la topologie de $\mathbf{X}_3 \setminus \Omega$. Nous montrerons par ailleurs à la proposition 6.4.4 que si Γ est monogène, *i.e.* si Σ est une trompette hyperbolique, alors la structure Kleinienne $\Gamma \backslash \Omega$ est homéomorphe au produit d'un cercle par une surface compacte connexe de genre deux.

Les deux théorèmes énoncés peuvent être résumés de la manière suivante. Le théorème A constitue une première étape dans la classification des automorphismes Lagrangiens de contact conservatifs en dimension trois qui engendrent un groupe de difféomorphismes non-relativement compact pour la topologie compacte-ouverte. Le théorème B nous fournit de son côté des exemples intéressants d'automorphismes Lagrangiens de contact non conservatifs en dimension trois, sur des variétés dont la topologie est non-triviale.

Deux conventions et quatre notations

Sauf mention explicite du contraire, tous les objets de géométrie différentielle considérés dans cette thèse (variétés, champs de vecteurs, distributions, champs de tenseurs quelconques, applications, ...) seront *lisses*, *i.e.* $\mathcal{C}^\infty$. Nous le répèterons parfois lorsque la régularité d'un objet ne sera pas immédiate, mais aussi rarement que possible pour éviter d'alourdir inutilement la rédaction. De la même manière, toutes les variétés seront implicitement supposées sans bord (y compris les surfaces).

Soit G un groupe agissant sur un espace X à gauche (respectivement à droite). Nous noterons toujours $L_g: x \in X \mapsto g \cdot x \in X$ (resp. $R_g: x \in X \mapsto x \cdot g \in X$) la translation à gauche (resp. à droite) par $g \in G$ sur X (en particulier, nous utilisons ces notations pour l'action de G sur lui même à gauche et à droite). Pour $x \in X$, nous noterons inversement $\theta_x: g \in G \mapsto g \cdot x \in X$ l'application orbitale en x . Si rien n'est précisé, $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k, e_n$ désigneront les n vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (par exemple : $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$).

Chapitre 1

Invitation aux structures Lagrangiennes de contact

Dans ce chapitre introductif, nous introduisons la notion de structure Lagrangienne de contact et nous en présentons de nombreux exemples. Nous avons choisi de nous restreindre tout d'abord à la dimension trois, dans laquelle cette notion apparaît le plus naturellement, et où se dérouleront nos résultats des chapitres 5 et 6. Nous présentons ensuite deux exemples de structures Lagrangiennes de contact de dimension trois venant des systèmes dynamiques, respectivement préservés par un flot Anosov de contact et un difféomorphisme partiellement hyperbolique. Ces exemples seront particulièrement important pour nous, car ils constituent la motivation du chapitre 5 et de son résultat principal. Nous terminons en généralisant à la dimension impaire quelconque la notion de structure Lagrangienne de contact.

1.1 Premiers exemples en dimension trois

Dans l'introduction, nous avons associé à une équation différentielle ordinaire scalaire d'ordre deux l'ensemble des graphes de ses solutions locales, obtenant ainsi une courbe passant par chaque point et dans chaque direction tangente. C'est l'étude de ces courbes sous l'action des difféomorphismes locaux du plan qui nous a naturellement mené à l'introduction d'une *structure Lagrangienne de contact* sur le projectivisé du fibré tangent à $\mathbb{R}^2$. Nous généralisons maintenant cette construction au dessus de n'importe quelle surface munie d'une famille de courbes du même type.

1.1.1 Au dessus des surfaces Riemanniennes

Soit S une surface, et $M := \mathbf{P}(TS)$ le projectivisé de son fibré tangent. C'est un $\mathbb{R}\mathbf{P}^1$ -fibré au dessus de S dont on note $\pi: M \rightarrow S$ la projection canonique, la fibre d'un point $p \in S$ étant l'espace projectif $\mathbf{P}(T_p S)$. Soit $\mathcal{C}$ une famille de courbes lisses non-paramétrées dans S , telle que pour tout $p \in S$ et $l \in \mathbf{P}(T_p S)$, il existe une unique courbe de $\mathcal{C}$ passant par p dans la direction l . Toute courbe $c \in \mathcal{C}$ se relève canoniquement dans M en une courbe $c^{(1)} = \{T_p c \mid p \in c\}$ appelée *prolongation* de c , et notre hypothèse sur $\mathcal{C}$ assure que l'ensemble des prolongations des courbes de $\mathcal{C}$ soit un feuilletage de dimension un de M , dont chaque feuille est transverse aux fibres de π . On note $E_{\mathcal{C}}$ la distribution de dimension un de M tangente à ce feuilletage, et on dira que $\mathcal{C}$ est une *géométrie de chemins* sur S si $E_{\mathcal{C}}$ est lisse. On définit une distribution H de dimension deux sur $\mathbf{P}(TS)$ en posant $H(l) = D_l \pi^{-1}(l)$ pour tout $l \in \mathbf{P}(TS)$.

Définition 1.1.1. Une distribution ξ de dimension deux sur une variété M de dimension trois est dite *de contact* si en tout point $x \in M$, et pour tout couple (X, Y) de champs de vecteurs locaux tels que $\xi = \text{Vect}(X, Y)$ au voisinage de x , $[X, Y](x) \notin \xi(x)$.

Lemme 1.1.2. *H est une distribution de contact sur $\mathbf{P}(\text{TS})$, et pour toute géométrie de chemins $\mathcal{C}$ sur S , la distribution $E_{\mathcal{C}}$ associée est contenue dans H .*

Démonstration. Ce résultat est local, et il suffit donc de le prouver pour $S = \mathbb{R}^2$, et en dehors de la section de $\mathbf{P}(\text{T}\mathbb{R}^2)$ correspondant à la direction verticale $\mathbb{R}\frac{\partial}{\partial y}$. On peut donc utiliser les coordonnées de $\mathbf{P}(\text{T}\mathbb{R}^2)$ dans lesquelles $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ correspond au point $(x, y) + \mathbb{R}(\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y})$ de $\mathbf{P}(\text{T}\mathbb{R}^2)$, si bien que H est engendrée par les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y}$. Or $[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y}] = \frac{\partial}{\partial y}$ n'appartient pas à H , qui est donc bien une distribution de contact.

Soient $\mathcal{C}$ une géométrie de chemin sur une surface S , $p \in S$ et $l \in \mathbf{P}(\text{T}_p S)$. Notons $c(l)$ l'unique courbe de $\mathcal{C}$ passant par p dans la direction l . Puisque $\pi(c^{(1)}(l)) = c(l)$, $D\pi(\text{T}_l c^{(1)}(l)) = \text{T}_p c(l)$. Or $\text{T}_p c(l) = l$ par définition et $E_{\mathcal{C}}(l) = \text{T}_l c^{(1)}(l)$. Donc $D\pi(E_{\mathcal{C}}(l)) = l$, i.e. $E_{\mathcal{C}}(l) \subset H(l)$. $\square$

Définition 1.1.3. Une *structure Lagrangienne de contact* sur une variété M de dimension trois est la donnée d'un couple $\mathcal{L} = (E^\alpha, E^\beta)$ de distributions lisses de dimension un sur M , qui sont transverses et dont la somme est une distribution de contact. Les feuilles de la distribution E^α (respectivement E^β) sont appelées les *feuilles α* (resp. *feuilles β*) de la structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}$, et sont notées $\mathcal{F}^\alpha(x)$ (resp. $\mathcal{F}^\beta(x)$) pour $x \in M$.

Nous notons V la *distribution verticale* du fibré $\mathbf{P}(\text{TS})$, i.e. la direction tangente aux fibres de π . Puisque $V \subset H$ et $E_{\mathcal{C}}$ est transverse à V , toute géométrie de chemins $\mathcal{C}$ sur une surface S induit sur $\mathbf{P}(\text{TS})$ une structure Lagrangienne de contact $(V, E_{\mathcal{C}})$.

En pratique, les géométries de chemins qui nous intéressent sont induites par une structure géométrique plus fine. Par exemple, les géodésiques d'une connexion linéaire ∇ définissent sur S une géométrie de chemins. L'ensemble des connexions linéaires ayant les même géodésiques que ∇ , i.e. définissant la même géométrie de chemins, forment sa *classe projective* qui est notée $[\nabla]$. La donnée d'une classe projective de connexions linéaires sur S est appelée *structure projective*, et la géométrie de chemins qui lui est associée munit donc $\mathbf{P}(\text{TS})$ d'une structure Lagrangienne de contact, que nous noterons simplement $\mathcal{L}_S$ lorsque la structure projective considérée sur S ne fera aucun doute.

En particulier si Σ est une surface Riemannienne, alors ses géodésiques forment une géométrie de chemins qui induit sur $\mathbf{P}(\text{T}\Sigma)$ une structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}_\Sigma$. On peut remonter cette structure sur le fibré unitaire tangent via le revêtement double $\text{T}^1\Sigma \rightarrow \mathbf{P}(\text{T}\Sigma)$, et la structure obtenue sur $\text{T}^1\Sigma$ sera encore notée $\mathcal{L}_\Sigma$. Ses feuilles α restent les fibres de la projection canonique $\text{T}^1\Sigma \rightarrow \Sigma$, et ses feuilles β sont les orbites du flot géodésique. Notons que le flot géodésique n'envoie pas une fibre de la projection $\text{T}^1\Sigma \rightarrow \Sigma$ sur une autre fibre (il induirait dans le cas contraire un flot sur Σ), et que $\mathcal{L}_\Sigma$ n'est donc pas invariante par le flot géodésique. Le cas des surfaces Riemanniennes nous importera tout particulièrement par la suite, et nous résumons les principaux résultats obtenus dans l'énoncé suivant.

Proposition 1.1.4. *Si Σ est une surface Riemannienne, alors $\text{T}^1\Sigma$ ainsi que $\mathbf{P}(\text{T}\Sigma)$ sont canoniquement munies de structures Lagrangiennes de contact qui sont toutes deux notées $\mathcal{L}_\Sigma$. Elles sont non-invariantes par le flot géodésique, et la projection canonique $\text{T}^1\Sigma \rightarrow \mathbf{P}(\text{T}\Sigma)$ est un revêtement double entre ces deux structures.*

Pour le moment, nous avons construit des structures Lagrangiennes de contact sur des fibrés en cercles au dessus des surfaces. Le résultat suivant montre cependant que l'existence d'une structure Lagrangienne de contact ne dépend en rien de la topologie de la variété de dimension trois considérée.

Proposition 1.1.5. *Toute variété compacte et orientable de dimension trois admet une structure Lagrangienne de contact.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème de Martinet-Lutz, affirmant que tout champ de plans sur M est homotope à une structure de contact (voir [Mar71] et [Lut71]).

Puisque M est une variété compacte et orientable de dimension trois, elle est parallélisable, et on choisit à partir de maintenant une identification de $TM \rightarrow M$ avec le fibré trivial $M \times \mathbb{R}^3 \rightarrow M$. Considérons la distribution D de dimension deux sur M égale à $D = M \times (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$ dans cette trivialisation. Selon le théorème de Martinet-Lutz, D est homotope à une distribution de contact H sur M , qui est orientable et dont on choisit une orientation. Le seul problème consiste à s'assurer que le fibré vectoriel H soit trivial. Si c'est le cas, H se scinde en effet en deux sous-distributions de dimension un, qui définissent une structure Lagrangienne de contact sur M . Notons $\phi: M \rightarrow \mathbf{S}^2$ l'application lisse envoyant $x \in M$ sur le vecteur unitaire normal sortant à $H(x) \subset \mathbb{R}^3$, et $\psi: M \rightarrow \mathbf{S}^2$ l'application constante égale à e_3 . Alors $D = \psi^* \mathbf{TS}^2$ et $H = \phi^* \mathbf{TS}^2$, et puisque ϕ et ψ sont homotopes car H et D le sont, H et D sont donc isomorphes en tant que fibrés vectoriels. Puisque D est trivial, H l'est donc également, ce qui conclut la preuve. $\square$

1.1.2 L'espace homogène modèle de dimension trois

La géométrie de chemins associée à la métrique euclidienne standard de $\mathbb{R}^2$ est simplement l'ensemble des droites affines du plan (qui sont les solutions de l'équation différentielle $y'' = 0$ discutée dans l'introduction). Pour décrire d'une manière plus géométrique la structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^2}$ induite sur $\mathbf{P}(\mathbf{TR}^2)$ par cette géométrie de chemins, nous introduisons la définition suivante.

Définition 1.1.6. Nous notons $\mathbf{X}^a$ l'espace des droites affines pointées (p, L) du plan (où $L \subset \mathbb{R}^2$ est une droite affine et $p \in L$).

Nous identifierons $\mathbf{P}(\mathbf{TR}^2)$ à $\mathbf{X}^a$ en associant $l \in \mathbf{P}(T_x \mathbb{R}^2)$ à la droite affine $x + l$ pointée en x . Par cette identification, $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^2}$ correspond sur $\mathbf{X}^a$ à une structure Lagrangienne de contact que nous notons $\mathcal{L}_{\mathbf{X}^a}$. Les feuilles α de $\mathcal{L}_{\mathbf{X}^a}$ sont les fibres de la projection $(p, L) \in \mathbf{X}^a \mapsto p \in \mathbb{R}^2$ et consistent donc à fixer un point $p \in \mathbb{R}^2$ et à faire varier la droite affine qui le contient. Ses feuilles β consistent inversement à fixer une droite affine L et à déplacer un point le long de cette droite.

Le plan projectif $\mathbb{RP}^2$ muni de sa structure projective standard dont les géodésiques sont les droites projectives, est une *compactification* du plan affine au sens suivant : $\mathbb{R}^2$ s'identifie à un ouvert affine de $\mathbb{RP}^2$, de telle sorte que toute droite affine de $\mathbb{R}^2$ s'envoie sur une droite projective de $\mathbb{RP}^2$ privée d'un point. La même idée va nous fournir une compactification de $\mathbf{X}^a$ au niveau des structures Lagrangiennes de contact. Le plongement de $\mathbb{R}^2$ comme un ouvert affine de $\mathbb{RP}^2$ induit en effet un plongement de $\mathbf{P}(\mathbf{TR}^2)$ dans $\mathbf{P}(\mathbf{TRP}^2)$, et puisque le premier préserve les structures projectives, le second envoie $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^2}$ sur $\mathcal{L}_{\mathbb{RP}^2}$. Comme nous l'avons fait précédemment avec $\mathbf{P}(\mathbf{TR}^2)$, regardons $\mathbf{P}(\mathbf{TRP}^2)$ avec un point de vue plus géométrique.

Définition 1.1.7. Nous notons $\mathbf{X}$ l'espace des droites projectives pointées (m, D) de $\mathbb{RP}^2$ (où $D \subset \mathbb{RP}^2$ est une droite projective et $m \in D$), et nous l'appelons *espace homogène modèle* des structures Lagrangiennes de contact de dimension trois.

L'espace modèle $\mathbf{X}$ s'identifie naturellement à $\mathbf{P}(\mathbf{TRP}^2)$ en associant $(m, D) \in \mathbf{X}$ à la direction tangente $T_m D \in \mathbf{P}(T \mathbb{RP}^2)$. Par cette identification, $\mathcal{L}_{\mathbb{RP}^2}$ correspond sur $\mathbf{X}$ à une structure Lagrangienne de contact que nous noterons $\mathcal{L}_{\mathbf{X}} = (\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{E}_\beta)$, et que nous nommerons *structure Lagrangienne de contact standard* de $\mathbf{X}$. Les feuilles α et β de $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$ ont des descriptions géométriques analogues à celles de $\mathcal{L}_{\mathbf{X}^a}$. Elles consistent respectivement à fixer un point de $\mathbb{RP}^2$ et à faire varier la droite projective qui le contient, ou à fixer une droite projective de $\mathbb{RP}^2$ et à déplacer un point sur cette droite. Mais au contraire de $\mathbf{X}^a$, dont les feuilles α sont des cercles alors que ses feuilles β sont des droites, la structure de $\mathbf{X}$ est tout à fait symétrique. En effet, $\mathbf{X} \subset \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2_*$ en notant $\mathbb{RP}^2_*$ l'espace des droites projectives de $\mathbb{RP}^2$, et nous disposons donc de deux projections naturelles

$$\pi_\alpha: (m, D) \in \mathbf{X} \mapsto m \in \mathbb{RP}^2 \text{ et } \pi_\beta: (m, D) \in \mathbf{X} \mapsto D \in \mathbb{RP}^2_*, \quad (1.1.1)$$

qui font respectivement de $\mathbf{X}$ un $\mathbb{RP}^1$ -fibré au dessus de $\mathbb{RP}^2$ et $\mathbb{RP}_*^2$. De plus les feuilles α de $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$ sont les fibres de π_α , et ses feuilles β celles de π_β . Ceci nous montre en particulier que les feuilles α et β de $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$ sont des plongements de $\mathbb{RP}^1$, que nous appellerons pour cette raison *cercles* α et *cercles* β de $\mathbf{X}$.

1.1.3 Automorphismes et rigidité des structures Lagrangiennes de contact

Dans la définition que nous avons choisie pour les structures Lagrangiennes de contact, l'ordre compte : la structure (E^β, E^α) est à priori distincte de la structure (E^α, E^β) , et elles n'ont aucune raison d'être isomorphes.

Définition 1.1.8. Un *isomorphisme* (respectivement local) entre deux structures Lagrangiennes de contact $(M_1, \mathcal{L}_1)$ et $(M_2, \mathcal{L}_2)$ est un difféomorphisme $f: M_1 \rightarrow M_2$ (resp. local) tel que $f^*E_2^\alpha = E_1^\alpha$ et $f^*E_2^\beta = E_1^\beta$, où $\mathcal{L}_1 = (E_1^\alpha, E_1^\beta)$ et $\mathcal{L}_2 = (E_2^\alpha, E_2^\beta)$. Un *automorphisme* (resp. local) d'une structure Lagrangienne de contact $(M, \mathcal{L})$ est un isomorphisme de $(M, \mathcal{L})$ dans elle-même.

Exemple 1.1.9. Soit S une surface projective. Tout difféomorphisme f de S agit sur $\mathbf{P}(TS)$ via $f^{(1)}(l) = Df(l)$. Si f préserve la structure projective de S , alors on vérifie facilement que $f^{(1)}$ est un automorphisme de $\mathcal{L}_S$. On peut en fait montrer que tous les automorphismes de $\mathcal{L}_S$ sont de cette forme.

Le groupe $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ préserve la relation d'incidence $m \in D$ dans $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}_*^2$, et agit donc naturellement sur l'espace modèle $\mathbf{X}$ des structures Lagrangiennes de contact défini au paragraphe précédent. Pour la même raison, son action préserve de plus les feuilletages par cercles α et β , *i.e.* préserve la structure Lagrangienne de contact standard $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$ de $\mathbf{X}$.

Proposition 1.1.10. *Le groupe d'automorphismes de $(\mathbf{X}, \mathcal{L}_{\mathbf{X}})$ est égal à $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$. L'espace modèle $(\mathbf{X}, \mathcal{L}_{\mathbf{X}})$ est donc bien homogène, car son groupe d'automorphismes $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathbf{X}$.*

Démonstration. Soit f un difféomorphisme de $\mathbf{X}$ préservant $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$. Puisque f préserve le feuilletage par cercles α , il induit un difféomorphisme $\bar{f}$ de $\mathbb{RP}^2$, dont f est un relevé via la projection π_α . Or f préserve $\mathcal{E}_\beta$, donc $\bar{f}$ envoie droite projective sur droite projective. Ceci montre que $\bar{f}$ est une transformation projective selon un résultat classique parfois appelé théorème fondamental de la géométrie projective (voir [Sam89, Theorem 7 p.32]), *i.e.* que f correspond à l'action d'un élément de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$. En voyant $\mathbf{X}$ comme l'ensemble des drapeaux complets de $\mathbb{R}^3$, on constate par ailleurs immédiatement que $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathbf{X}$. $\square$

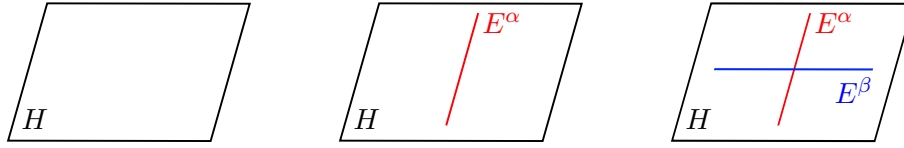
Au paragraphe précédent, nous avons introduit $\mathbf{X}$ comme une compactification de la structure Lagrangienne de contact $(\mathbf{P}(\mathrm{TR}^2), \mathcal{L}_{\mathbb{R}^2})$, au même titre que $\mathbb{RP}^2$ est une compactification du plan affine $\mathbb{R}^2$. Le plan projectif $\mathbb{RP}^2$ étant le modèle plat des structures projectives sur les surfaces, nous poursuivons cette analogie en adoptant la définition suivante.

Définition 1.1.11. Une structure Lagrangienne de contact de dimension trois est dite *plate* si elle est localement isomorphe à $(\mathbf{X}, \mathcal{L}_{\mathbf{X}})$ en tout point.

Exemple 1.1.12. Par exemple, si S est une surface munie d'une structure projective, alors on peut montrer que la structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}_S$ induite sur $\mathbf{P}(TS)$ est plate si, et seulement si S est plate (*i.e.* localement isomorphe à la structure projective $\mathbb{RP}^2$).

Il est connu que les distributions de dimension un, sur les variétés d'une dimension fixée, sont toutes localement équivalentes. Le théorème de redressement du flot fournit en effet, pour toute distribution E de dimension un, un système de coordonnées locales redressant E sur $\mathbb{R} \frac{\partial}{\partial x_1}$. À partir de la dimension deux en revanche, un large spectre de géométries locales distinctes existent. Concernant les distributions d'hyperplans sur les variétés de dimension impaire, les distributions

FIGURE 1.1.1 – Rigidité des structures Lagrangiennes de contact.



de contact et les distributions intégrables constituent les deux comportements locaux extrêmes sur cet éventail (qui est bien plus large, par ailleurs, que ces deux seules possibilités). Notons que dans chacune de ces deux familles, les distributions sont toutes localement équivalentes. Pour les distributions intégrables, il suffit de considérer une carte feuilletée du feuilletage associé. Concernant les distributions de contact, c'est le contenu du théorème de Darboux (voir [Gei08, Theorem 2.5.1]). En dimension trois, on peut en fait être plus précis : les couples (E, H) , où E est une distribution de dimension un contenue dans une distribution de contact H de dimension deux, sont localement équivalents. Ceci peut être vu comme un résultat de *redressement simultané* d'une distribution de dimension un et d'une distribution de contact la contenant.¹

Lemme 1.1.13. *Soit M une variété de dimension trois, H une distribution de contact sur M et $E \subset H$ une distribution de dimension un. Au voisinage de tout point de M , il existe un système de coordonnées locales (x, y, z) dans lesquelles $E = \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial x}$ et $H = \text{Vect}(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z})$.*

Démonstration. Nous désignerons par (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Puisque le résultat est local, on peut supposer que M est un voisinage ouvert de $p = (0, 0, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$, $E(p) = \mathbb{R}e_1$, et $H(p) = \text{Vect}(e_1, e_2)$. Par le théorème de redressement du flot, on peut même supposer, quitte à restreindre M , que $E = \mathbb{R}e_1$ (car $(x, y, z) \mapsto \varphi_X^x(0, y, z)$ est un difféomorphisme local en p , avec (φ_X^t) le flot d'un champ de vecteur qui engendre E au voisinage de p). Soit $\Sigma = (\{0\} \times \mathbb{R}^2) \cap M$, c'est une surface contenant p et transverse à E , dont $D = H \cap T\Sigma$ est une distribution de dimension un (quitte à restreindre Σ). De nouveau, on peut redresser D sur Σ , à l'aide d'un difféomorphisme φ d'un voisinage U de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$ sur un voisinage V de p dans Σ , tel que $\varphi(0, 0) = p$ et $\varphi^*D = \mathbb{R}e_1$. Selon le théorème d'inversion locale, quitte à restreindre U et V , il existe alors un voisinage I de 0 dans $\mathbb{R}$ tel que $\phi: (x, y, z) \in I \times U \mapsto \varphi(y, z) + xe_1 \in I \times V$ est un difféomorphisme. Par construction, $\phi^*D = \mathbb{R}e_2$ en restriction à Σ , donc par continuité de H , $(\phi^*H) \cap \text{Vect}(e_2, e_3) = \mathbb{R}(e_2 + fe_3)$ sur un voisinage W de p , avec $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse (car $D = (H \cap \text{Vect}(e_2, e_3))|_\Sigma$). Puisque ϕ préserve E , on peut donc finalement supposer que $E = \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial x}$ et $H = \text{Vect}(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} + f \frac{\partial}{\partial z})$ avec $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse. Or $[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} + f \frac{\partial}{\partial z}] = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \notin H$ car H est de contact, donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ ne s'annule pas. Par suite, $\psi: (x, y, z) \in M \mapsto (f(x, y, z), y, z) \in \mathbb{R}^3$ est un difféomorphisme local en p par théorème d'inversion locale. Par construction, $\psi_*E = \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial x}$ et $\psi_*H = \text{Vect}(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z})$, ce qui termine la preuve. $\square$

Si l'on ajoute une distribution de dimension un dans une distribution de contact, la structure obtenue demeure donc (localement) tout aussi souple. À l'inverse, nous verrons au chapitre 4 que les structures Lagrangiennes de contact admettent des invariants locaux s'exprimant sous la forme d'une *courbure*, dont l'annulation équivaut à la platitude. La frontière est donc fine entre ces différents comportements : le simple ajout d'une seconde distribution de dimension un fait des structures Lagrangiennes de contact des structures *rigides*, ce qu'illustre la figure 1.1.1. Cette notion de rigidité prendra au chapitre 4 le sens plus précis suivant : l'ensemble des « symétries infinitésimales » d'une structure Lagrangienne de contact est en tout point un espace vectoriel

1. Le lemme 1.1.13 est une précision du théorème de Darboux en dimension trois. L'approche la plus fréquemment adoptée pour prouver ce dernier consiste à utiliser l'« astuce de Moser », mais il semble difficile d'adapter cette méthode pour contrôler une distribution fixée contenue dans la distribution de contact. Emmanuel Giroux m'a appris la jolie démonstration qui suit, dont l'approche purement géométrique fournit naturellement la précision attendue.

de dimension finie, appelé *algèbre des champs de Killing locaux* (voir la proposition 4.1.7). Nous obtiendrons cette rigidité en interprétant aux chapitres 3 et 4 les structures Lagrangiennes de contact comme des « versions courbes » de l'espace homogène modèle $\mathbf{X}$, grâce à la notion de *géométrie de Cartan*.

1.1.4 Une structure Lagrangienne de contact invariante à gauche sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

Les structures Lagrangiennes de contact invariantes à gauche sur les groupes de Lie fournissent de nouveaux exemples naturels. Commençons avec un point de vue assez général.

Soit G un groupe de Lie de dimension trois dont on note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie, et soit D^α et D^β deux droites transverses dans $\mathfrak{g}$ dont la somme n'est pas une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. On note $\mathcal{L} = (E^\alpha, E^\beta) = (\widetilde{D^\alpha}, \widetilde{D^\beta})$ le couple de distributions invariantes à gauche engendrées par ces deux droites. Avec $v^\alpha \in D^\alpha$ et $v^\beta \in D^\beta$ deux vecteurs non-nuls, la distribution $E^\alpha \oplus E^\beta$ est engendrée par les champs de vecteurs invariants à gauche $V^\alpha = \widetilde{v^\alpha}$ et $V^\beta = \widetilde{v^\beta}$, définis par $V^\varepsilon(g) = D_e L_g(v^\varepsilon)$ pour $g \in G$ et ε égal à α ou β . Or $[V^\alpha, V^\beta](g) = D_e L_g([v^\alpha, v^\beta]) \notin E^\alpha \oplus E^\beta$, car $D^\alpha \oplus D^\beta$ n'est pas une sous-algèbre donc ne contient pas $[v^\alpha, v^\beta]$. Donc $E^\alpha \oplus E^\beta$ est une distribution de contact et $\mathcal{L}$ est une structure Lagrangienne de contact invariante à gauche sur G .

Réciproquement, si $\mathcal{L} = (E^\alpha, E^\beta)$ est une structure Lagrangienne de contact invariante à gauche sur G , alors $(D^\alpha, D^\beta) = \mathcal{L}(e)$ est un couple de droites transverses de $\mathfrak{g}$ dont la somme n'est pas une sous-algèbre. Un tel couple sera appelé une *structure Lagrangienne de contact infinitésimale* sur $\mathfrak{g}$, et toutes les structures Lagrangiennes de contact invariantes à gauche sur G sont donc induites par une structure infinitésimale sur $\mathfrak{g}$.

Dans le cas de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2$, une structure Lagrangienne de contact infinitésimale nous intéressera particulièrement par la nature de ses automorphismes. On utilise pour $\mathfrak{sl}_2$ la base suivante :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.1.2)$$

dont les éléments entretiennent les relations de crochets $[E, F] = H$, $[H, E] = 2E$, et $[H, F] = -2F$. Le couple de droites $(\mathbb{R}E, \mathbb{R}F)$ est une structure Lagrangienne de contact infinitésimale, qui induit sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ une structure invariante à gauche notée $\mathcal{L}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$. Plus généralement, si G est égal à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ou $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$, alors $(\mathbb{R}E, \mathbb{R}F)$ engendre sur G une structure Lagrangienne de contact invariante à gauche que l'on note $\mathcal{L}_G = (E^\alpha, E^\beta)$. En notant $\{a^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ le groupe à un paramètre engendré dans G par $H \in \mathfrak{sl}_2$, on a le résultat suivant.

Lemme 1.1.14. *Soit $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ou $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$.*

1. *Quitte à intervertir ses distributions α et β , $\mathcal{L}_G$ est l'unique structure Lagrangienne de contact sur G qui soit invariante à gauche par G , et invariante à droite par $\{a^t\}$.*
2. *Il existe un unique isomorphisme de groupe de Lie ϕ de G dont la différentielle en l'identité est égale à $A \in \mathfrak{sl}_2 \mapsto -{}^t A \in \mathfrak{sl}_2$. Cet isomorphisme renverse les distributions de $\mathcal{L}_G$: $\phi^*(E^\alpha, E^\beta) = (E^\beta, E^\alpha)$.*

Démonstration. 1. L'action adjointe de H préservant $(\mathbb{R}E, \mathbb{R}F)$, $\mathrm{Ad}(a^t)$ préserve $(\mathbb{R}E, \mathbb{R}F)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui montre que le flot (R_{a^t}) de translations à droite préserve $\mathcal{L}_G$. Soit réciproquement une structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}$ sur G vérifiant les conditions du lemme. Il existe alors une structure Lagrangienne de contact infinitésimale (D^α, D^β) dans $\mathfrak{sl}_2$ telle que $\mathcal{L} = (\widetilde{D^\alpha}, \widetilde{D^\beta})$. Elle est invariante à droite par $\{a^t\}$ si et seulement si pour $\varepsilon = \alpha$ et β , et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $D_e R_{a^t}(D^\varepsilon) = D_e L_{a^t}(D^\varepsilon)$, i.e. $\mathrm{Ad}(a^t)(D^\varepsilon) = D^\varepsilon$. Or $\mathrm{Ad}(a^t) = \exp(t \mathrm{ad}(H))$, donc c'est le cas si et seulement si $\mathrm{ad}(H)(D^\varepsilon) = D^\varepsilon$. Puisque $\mathrm{ad}(H)$ est diagonalisable, ses seules droites stables sont ses droites propres $\mathbb{R}E$, $\mathbb{R}F$ et $\mathbb{R}H$. Les relations de crochets imposent alors

à (D^α, D^β) d'être égal à $(\mathbb{R}E, \mathbb{R}F)$ ou à $(\mathbb{R}F, \mathbb{R}E)$, ce qui conclut la preuve.

2. L'isomorphisme d'algèbre de Lie $\varphi: A \mapsto -{}^t A$ s'intègre en un unique isomorphisme $\tilde{\varphi}$ de groupes de Lie sur le revêtement universel $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Le centre Z de $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, et nous en choisissons un générateur z . Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que G est isomorphe à $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})/\langle z^k \rangle$. Comme tout isomorphisme de groupes de Lie, $\tilde{\varphi}$ préserve le centre, et envoie donc $\langle z^k \rangle$ sur un sous-groupe de Z d'indice k , *i.e.* sur $\langle z^k \rangle$ lui-même. Par suite, $\tilde{\varphi}$ passe au quotient en un isomorphisme de groupes de Lie de G , dont la différentielle en l'identité est φ . Puisque $\varphi^{-1}(D^\alpha, D^\beta) = (D^\beta, D^\alpha)$, on a bien $\phi^*(E^\alpha, E^\beta) = (E^\beta, E^\alpha)$. $\square$

1.1.5 Une première structure Lagrangienne de contact au dessus de $\mathbf{H}^2$

Nous revenons maintenant aux structures Lagrangiennes de contact définies au paragraphe 1.1.1 au dessus des surfaces Riemanniennes. Considérons le modèle projectif de Klein du plan hyperbolique $\mathbf{H}^2$, que nous identifions donc à l'ouvert des droites de type temps de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,2} = (\mathbb{R}^3, q^{1,2})$, où $q^{1,2}$ est la forme quadratique Lorentzienne $q^{1,2}(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Dans ce modèle, les géodésiques de $\mathbf{H}^2$ sont des segments de droites projectives, et le groupe des isométries de $\mathbf{H}^2$ préservant son orientation est égal à la composante neutre $\mathrm{SO}^0(1, 2)$ de $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})}(q^{1,2})$, qui agit simplement transitivement sur $\mathrm{T}^1\mathbf{H}^2$.

Nous disposons sur $\mathrm{T}^1\mathbf{H}^2$ de la structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}_{\mathbf{H}^2}$ induite par la métrique hyperbolique (voir proposition 1.1.4). Par ailleurs, toute structure Lagrangienne de contact invariante à gauche sur $\mathrm{SO}^0(1, 2)$ induit sur $\mathrm{T}^1\mathbf{H}^2$ une structure Lagrangienne de contact $\mathrm{SO}^0(1, 2)$ -invariante, grâce à l'action simplement transitive de $\mathrm{SO}^0(1, 2)$ sur $\mathrm{T}^1\mathbf{H}^2$. En notant

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$(\mathbb{R}A, \mathbb{R}B)$ est une structure Lagrangienne de contact infinitésimale sur $\mathfrak{so}(1, 2)$, qui induit donc sur $\mathrm{SO}^0(1, 2)$ une structure Lagrangienne de contact invariante à gauche notée $\mathcal{L}_{\mathrm{SO}^0(1, 2)}$.

Remarque 1.1.15. Bien que $\mathrm{SO}^0(1, 2)$ soit isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, nous verrons au chapitre 2 (voir remarque 2.3.5) que la structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}_{\mathrm{SO}^0(1, 2)}$ que nous venons de définir n'est pas isomorphe à la structure $\mathcal{L}_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}$ que nous avons étudiée sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ dans le lemme 1.1.14.

La droite $[e_3] = \mathbb{R}e_3 \in \mathbb{RP}^2$ appartient à $\mathbf{H}^2 = [q^{1,2} < 0] \subset \mathbb{RP}^2$, et nous notons $u \in \mathrm{T}_{[e_3]}\mathbf{H}^2$ un vecteur unitaire dirigeant la géodésique de $\mathbf{H}^2$ contenue dans la droite projective $[e_1, e_3] = [\mathrm{Vect}(e_2, e_3)] \subset \mathbb{RP}^2$.

Proposition 1.1.16. *L'action de $\mathrm{SO}^0(1, 2)$ sur $u \in \mathrm{T}^1\mathbf{H}^2$ induit un isomorphisme de $\mathcal{L}_{\mathrm{SO}^0(1, 2)}$ sur $\mathcal{L}_{\mathbf{H}^2}$.*

Démonstration. Le groupe à un paramètre engendré par A est le stabilisateur dans $\mathrm{SO}^0(1, 2)$ de $[e_3] \in \mathbf{H}^2$, et agit donc simplement transitivement sur $\mathrm{T}_{[e_3]}^1\mathbf{H}^2$ qui est la feuille α de u . Par ailleurs, on vérifie facilement que l'orbite de $[e_3]$ sous l'action du groupe à un paramètre engendré par B est la géodésique de $\mathbf{H}^2$ passant par $[e_3]$ et contenue dans $[e_1, e_3]$. On a donc $\exp(\mathbb{R}A) \cdot u = \mathcal{F}^\alpha(u)$ et $\exp(\mathbb{R}B) \cdot u = \mathcal{F}^\beta(u)$. Les sous-groupes à un paramètre $\exp(\mathbb{R}A)$ et $\exp(\mathbb{R}B)$ étant les feuilles respectives des distributions $\mathbb{R}\tilde{A}$ et $\mathbb{R}\tilde{B}$ en e , et les structures $\mathcal{L}_{\mathrm{SO}^0(1, 2)}$ et $\mathcal{L}_{\mathbf{H}^2}$ étant toutes deux invariantes à gauche par $\mathrm{SO}^0(1, 2)$, on en déduit que $\theta_u^*\mathcal{L}_{\mathbf{H}^2} = \mathcal{L}_{\mathrm{SO}^0(1, 2)}$ en notant $\theta_u: g \in \mathrm{SO}^0(1, 2) \mapsto g \cdot u \in \mathrm{T}^1\mathbf{H}^2$ l'application orbitale en u . $\square$

1.2 Exemples dynamiques en dimension trois

Dans cette section, nous allons partir de certains systèmes dynamiques, et construire des structures Lagrangiennes de contact préservées par ces systèmes.

1.2.1 Flot géodésique des surfaces hyperboliques

Nous avons remarqué précédemment que la structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}_\Sigma$ induite sur le fibré unitaire tangent d'une surface Riemannienne Σ n'est pas invariante par son flot géodésique (voir proposition 1.1.4). Nous allons maintenant définir sur $T^1\mathbf{H}^2$ une seconde structure qui le sera, dans le cas particulier d'une surface hyperbolique.

Définition 1.2.1. Nous appellerons *surface hyperbolique* une surface connexe et orientable munie d'une métrique Riemannienne complète à courbure constante égale à -1 .

Nous utilisons ici le modèle du demi-plan de Poincaré pour le plan hyperbolique $\mathbf{H}^2 = \{x + iy \mid y > 0\}$, de sorte que $\text{Isom}^+(\mathbf{H}^2) = \text{PSL}_2(\mathbb{R})$. Soit $u \in T_i\mathbf{H}^2$ un vecteur unitaire dirigeant la géodésique qui décrit la demi-droite imaginaire $\mathbb{R}_+^*i$. L'action de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ étant simplement transitive sur $T^1\mathbf{H}^2$, le choix de u pour point-base identifie $T^1\mathbf{H}^2$ à $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ par l'application orbitale $\theta_u: g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R}) \mapsto g \cdot u \in T^1\mathbf{H}^2$. La structure Lagrangienne de contact invariante à gauche $\mathcal{L}_{\text{PSL}_2(\mathbb{R})}$ définie sur $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ au lemme 1.1.14 induit donc sur $T^1\mathbf{H}^2$ une structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}_{\mathbf{H}^2}^{su} := \theta_u^* \mathcal{L}_{\text{PSL}_2(\mathbb{R})}$.

Proposition 1.2.2. 1. Par construction, l'action de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur $u \in T^1\mathbf{H}^2$ induit un isomorphisme de $\mathcal{L}_{\text{PSL}_2(\mathbb{R})}$ sur $\mathcal{L}_{\mathbf{H}^2}^{su}$. De plus, $\mathcal{L}_{\mathbf{H}^2}^{su}$ est la seule structure Lagrangienne de contact de $T^1\mathbf{H}^2$ qui soit invariante par les isométries de $\mathbf{H}^2$ et par son flot géodésique.
2. Pour toute surface hyperbolique Σ , $\mathcal{L}_{\mathbf{H}^2}^{su}$ passe au quotient en une structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}_\Sigma^{su}$ sur $T^1\Sigma$, invariante par les isométries de Σ et par son flot géodésique.

Démonstration. 1. L'application orbitale $\theta_u: \text{PSL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow T^1\mathbf{H}^2$ conjugue en effet le flot géodésique de $T^1\mathbf{H}^2$ au flot (R_{at}) par translations à droite du groupe à un paramètre engendré par $H \in \mathfrak{sl}_2$. Le lemme 1.1.14 implique alors immédiatement le résultat annoncé.

2. Pour toute surface hyperbolique Σ , il existe un sous-groupe discret Γ de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ tel que Σ soit isométrique au quotient $\Gamma \backslash \mathbf{H}^2$, et $T^1\Sigma$ s'identifie alors au quotient $\Gamma \backslash T^1\mathbf{H}^2$. La structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}_{\mathbf{H}^2}^{su}$ passe donc au quotient sur $T^1\Sigma$ en une structure vérifiant les propriétés annoncées. $\square$

Soulignons que les feuilles α et β de $\mathcal{L}_\Sigma^{su}$ sont les horocycles du flot géodésique de Σ , et que $\mathcal{L}_\Sigma^{su}$ n'est pas associée à une géométrie de chemin sur Σ (par exemple car ses feuilles α sont toutes non-compactes). Nous verrons plus tard que $\mathcal{L}_{\mathbf{H}^2}$ et $\mathcal{L}_{\mathbf{H}^2}^{su}$ sont toutes deux localement isomorphes à $\mathbf{X}$ et donc localement isomorphes entre elles, mais ne sont pas globalement isomorphes (voir remarque 2.3.5).

Remarque 1.2.3. Puisque $\text{SO}^0(1, 2)$ et $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ sont isomorphes, les propositions 1.1.16 et 1.2.2 montrent que les deux structures Lagrangiennes de contact $\mathcal{L}_{\mathbf{H}^2}$ et $\mathcal{L}_{\mathbf{H}^2}^{su}$ mises en évidence sur $T^1\mathbf{H}^2$ proviennent en définitive de deux structures invariantes à gauche différentes sur le même groupe $\text{SO}^0(1, 2) \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{R})$.

1.2.2 Flots Anosov de contact en dimension trois

Nous supposons maintenant que la surface hyperbolique $\Sigma = \Gamma \backslash \mathbf{H}^2$ est compacte, avec $\Gamma \subset \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ un réseau cocompact agissant librement et proprement sur $\mathbf{H}^2$. Nous nous intréressons maintenant aux propriétés dynamiques de son flot géodésique, conjugué au flot (R_{at}) sur $\Gamma \backslash \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ comme nous l'avons vu au paragraphe précédent. Rappelons que pour $h \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$, en notant $\text{conj}_h: g \mapsto hgh^{-1}$, on a $\text{Ad}(h) = D_e \text{conj}_h$, si bien que $D_g R_h \circ D_e L_g = D_e L_{gh} \circ \text{Ad}(h^{-1})$. Les relations de crochets $[H, E] = 2E$ et $[H, F] = 2F$ dans $\mathfrak{sl}_2$ induisent alors dans $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ les égalités suivantes :

$$(R_{at})_* \tilde{E} = e^{-2t} \tilde{E} \text{ et } (R_{at})_* \tilde{F} = e^{2t} \tilde{F}. \quad (1.2.1)$$

Définition 1.2.4. Un flot non-singulier² $(\varphi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur une variété compacte M est dit *Anosov* s'il préserve deux distributions non-nulles E^s et E^u sur M , telles que $TM = E^s \oplus E^0 \oplus E^u$ avec E^0 la direction du flot, et qui vérifient les conditions suivantes par rapport à une métrique Riemannienne quelconque sur M .

- La *distribution stable* E^s est *uniformément contractée* par (φ^t) : il existe deux constantes $C > 0$ et $0 < \lambda < 1$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in M$ et $v \in E^s(x)$,

$$\|D_x \varphi^t(v)\| \leq C \lambda^t \|v\|. \quad (1.2.2)$$

- La *distribution instable* E^u est *uniformément dilatée* par (φ^t) , i.e. uniformément contractée par (φ^{-t}) .

Les égalités (1.2.1) montrent immédiatement que le flot géodésique de $\Sigma = \Gamma \backslash \mathbf{H}^2$ est un flot Anosov de $T^1\Sigma \equiv \Gamma \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, dont les distributions stable et instable sont les distributions α et β de la structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}_{\Sigma}^{su}$ définie à la proposition 1.2.2 (ce qui explique la notation $\mathcal{L}_{\Sigma}^{su}$). La description algébrique de ces flots géodésiques va nous permettre de les déformer pour en obtenir de nouveaux. Nous commençons par travailler sur le revêtement universel $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ pour obtenir des revêtements finis. Soit $\tilde{\Gamma}_0$ un réseau cocompact de $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$.

Fait 1.2.5. Le flot (R_{a^t}) agissant sur $\tilde{\Gamma}_0 \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ est un flot Anosov, dont les distributions stable et instable sont induites par la structure Lagrangienne de contact invariante à gauche $\mathcal{L}_{\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})}$ définie au lemme 1.1.14. De plus, si la projection Γ_0 de $\tilde{\Gamma}_0$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est sans torsion, alors l'action de (R_{a^t}) sur $\tilde{\Gamma}_0 \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ est un revêtement fini du flot géodésique d'une surface hyperbolique compacte.

Démonstration. Le fait que (R_{a^t}) soit Anosov ainsi que la description de ses distributions stable et instable découlent immédiatement des égalités (1.2.1). Supposons que Γ_0 est sans torsion. Notons que Γ_0 est un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, qui est cocompact car $\tilde{\Gamma}_0$ l'est. L'action de Γ_0 sur $\mathbf{H}^2$ est libre et propre car Γ_0 est sans torsion, et $\Gamma_0 \backslash \mathbf{H}^2$ est donc une surface hyperbolique compacte. Notons Z le centre de $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$, de sorte que $\tilde{\Gamma}_0 \cap Z$ soit le noyau de la projection canonique $\tilde{\Gamma}_0 \rightarrow \Gamma_0$. Un résultat connu sous le nom de *finitude du niveau*⁴ implique que $\tilde{\Gamma}_0 \cap Z$ est d'indice fini dans Z , ce qui montre que le revêtement $\tilde{\Gamma}_0 \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \Gamma_0 \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est également d'indice fini et termine la preuve. $\square$

Nous notons $\tilde{A} = \{a^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ le groupe à un paramètre de $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ engendré par H , et nous définissons une action à gauche de $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) \times \tilde{A}$ sur $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ en posant $(g, a) \cdot x = gxa$. Soit $u: \tilde{\Gamma}_0 \rightarrow \tilde{A}$ un morphisme tel que le *groupe-graphe*

$$\tilde{\Gamma} := \left\{ (\gamma, u(\gamma)) \mid \gamma \in \tilde{\Gamma}_0 \right\} \subset \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) \times \tilde{A}$$

de u agisse librement proprement et cocompactement sur $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$. On dira dans ce cas que u est *admissible*, selon la définition de Salein dans [Sal99]. Le flot (R_{a^t}) agit sur $\tilde{\Gamma} \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ car $\tilde{A}$ est abélien.

Fait 1.2.6. (R_{a^t}) est un flot Anosov de $\tilde{\Gamma} \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$, avec distributions invariantes induites par $\mathcal{L}_{\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})}$. Ces exemples seront appelés *flots Anosov de contact algébriques*.

Démonstration. Nous ne connaissons pas de preuve algébrique simple de cette affirmation, que nous justifierons avec les arguments suivants. Le travail de Zeghib dans [Zeg96, Prop. 4.2 p.868] montre que (R_{a^t}) est *quasi-Anosov* avec la définition de Mañé, et Mañé prouve dans [Mañ77, Theorem A] que les flots quasi-Anosov de dimension trois sont Anosov. $\square$

2. I.e. n'ayant aucun point fixe, ou encore tel que le champ de vecteurs $\frac{d}{dt}\varphi^t$ ne s'annule pas.

3. Cette condition est indépendante de la métrique choisie car M est supposée compacte.

4. Cet énoncé est initialement prouvé par Kulkarni-Raymond dans [KR85] avec une preuve incomplète, puis prouvé dans [Sal99, Théorème 3.3.2.3].

Les flots Anosov de contact algébriques sont décrits par Ghys dans [Ghy87], où il prouve un résultat de classification impliquant l'énoncé suivant.

Théorème 1.2.7 (Ghys). *Soit (φ^t) un flot Anosov lisse et orientable sur une variété compacte et orientable de dimension trois. Si ses distributions stable et instable sont lisses et si $E^s \oplus E^u$ est de contact (i.e. si (E^s, E^u) est une structure Lagrangienne de contact), alors (φ^t) est un flot Anosov de contact algébrique.*

1.2.3 Difféomorphismes partiellement hyperboliques de type contact

Nous souhaiterions maintenant construire des structures Lagrangiennes de contact préservées par des systèmes dynamiques discrets. Le temps un d'un flot Anosov de contact algébrique en fournit un premier exemple, que nous allons généraliser à partir de la définition suivante.

Définition 1.2.8. Un difféomorphisme f d'une variété compacte M est dit *partiellement hyperbolique* s'il préserve un scindement $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ de son fibré tangent en trois distributions non-nulles, vérifiant les conditions dynamiques suivantes par rapport à une métrique Riemannienne quelconque sur M .

- La *distribution stable* E^s est *uniformément contractée* par f , i.e. il existe deux constantes $C > 0$ et $0 < \lambda < 1$ telles que pour tout $x \in M$ et $v^s \in E^s(x)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\|D_x f^n(v^s)\| \leq C \lambda^n \|v^s\|. \quad (1.2.3)$$

- La *distribution instable* E^u est *uniformément dilatée* par f , i.e. uniformément contractée par f^{-1} .
- Le scindement est *dominé*, i.e. il existe un entier N non-nul tel que pour tout $x \in M$, et tous vecteurs unitaires $v^s \in E^s(x)$, $v^c \in E^c(x)$ et $v^u \in E^u(x)$,

$$\|D_x f^N(v^s)\| < \|D_x f^N(v^c)\| < \|D_x f^N(v^u)\|. \quad (1.2.4)$$

E^c est appelée la *distribution centrale* de f .

Il est clair que si (φ^t) est un flot Anosov, alors pour tout $t \neq 0$ le difféomorphisme φ^t est partiellement hyperbolique. Cependant, cette notion offre de nouvelles perspectives, car il en existe également des exemples de difféomorphismes partiellement hyperboliques qui ne s'intègrent pas en un flot Anosov. Considérons le groupe d'Heisenberg $\text{Heis}(3)$, constitué des matrices de la forme

$$[x, y, z] = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.2.5)$$

avec $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Fait 1.2.9. Il existe un difféomorphisme partiellement hyperbolique d'un quotient compact de $\text{Heis}(3)$, qui n'est le temps un d'aucun flot Anosov, et dont les distributions stable et instable forment une structure Lagrangienne de contact (E^s, E^u) qui est induite par une structure invariante à gauche sur $\text{Heis}(3)$.

Démonstration. Notons Γ le réseau cocompact de $\text{Heis}(3)$ constitué des matrices $[x, y, z]$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$ et $z \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Soit φ l'automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{heis}(3)$ de $\text{Heis}(3)$ dont la matrice dans la base $X = [1, 0, 0]$, $Y = [0, 1, 0]$, $Z = [0, 0, 1]$ est égale à

$$\text{Mat}_{(X,Y,Z)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où l'on conserve la notation $[x, y, z]$ introduite dans (1.2.5) pour les éléments de $\mathfrak{heis}(3)$, la diagonale étant nulle. Alors φ est diagonalisable, avec une droite propre $D^s \subset \text{Vect}(X, Y)$ associée à une valeur propre $0 < \lambda_s < 1$, une droite propre $D^u \subset \text{Vect}(X, Y)$ associée à la valeur propre $\lambda_u = \frac{1}{\lambda_s} > 1$, et $\mathbb{R}Z$ pour dernière droite propre associée à la valeur propre 1. Puisque $\text{Heis}(3)$ est simplement connexe, il existe un unique automorphisme de groupe ϕ de $\text{Heis}(3)$ tel que $D_e\phi = \varphi$, et cette égalité impose à ϕ de préserver les distributions invariantes à gauche $\tilde{D}^s, \tilde{D}^u$ et $\mathbb{R}\tilde{Z}$. On vérifie de plus facilement que l'exponentielle envoie l'ensemble $\mathfrak{heis}_{\mathbb{Z}}(3)$ des matrices à coefficients entiers de $\mathfrak{heis}(3)$ sur Γ , et puisque φ préserve $\mathfrak{heis}_{\mathbb{Z}}(3)$, ϕ préserve donc Γ . Ainsi, ϕ passe au quotient en un difféomorphisme f de $M = \Gamma \backslash \text{Heis}(3)$, qui préserve trois distributions lisses E^s, E^u et E^c respectivement induites par $\tilde{D}^s, \tilde{D}^u$ et $\mathbb{R}\tilde{Z}$. Les valeurs propres de φ assurent que E^s (respectivement E^u) est uniformément contractée (resp. dilatée) par f , et que le scindement $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ est dominé, *i.e.* que f est un difféomorphisme partiellement hyperbolique de M . La relation de crochet $[X, Y] = Z$ dans $\mathfrak{heis}(3)$ montre par ailleurs que $\text{Vect}(D^s, D^u) = \text{Vect}(X, Y)$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathfrak{heis}(3)$, et donc que (E^s, E^u) est une structure Lagrangienne de contact sur M .

De plus, l'action induite par f sur le groupe fondamental de M est conjuguée à la restriction de ϕ au réseau Γ . Or les réseaux des groupes nilpotents sont rigides, donc $\phi|_{\Gamma}$ est non trivial (car $\phi \neq \text{id}$). Ceci interdit à f d'être isotope à id_M , et en particulier, f n'est donc le temps 1 d'aucun flot Anosov. $\square$

La définition qui suit généralise l'exemple que nous venons de construire.

Proposition-Définition 1.2.10. Soit ϕ un automorphisme de $\text{Heis}(3)$ tel que $D_e\phi$ soit diagonalisable avec au moins une valeur propre de valeur absolue différente de 1, et soient $g \in \text{Heis}(3)$ et Γ un réseau cocompact de $\text{Heis}(3)$. L'automorphisme affine $L_g \circ \phi$ de $\text{Heis}(3)$ passe au quotient en un difféomorphisme de la nil-variété $\Gamma \backslash \text{Heis}(3)$ si, et seulement si $g\phi(\Gamma)g^{-1} = \Gamma$. Dans ce cas, le difféomorphisme induit est partiellement hyperbolique, ses trois directions invariantes sont lisses, et $E^s \oplus E^u$ est une distribution de contact. Les difféomorphismes obtenus de cette manière seront appelés *automorphismes affines partiellement hyperboliques de nil-variétés*.

Démonstration. La première affirmation est une vérification immédiate. On suppose maintenant que $L_g \circ \phi$ passe au quotient en un difféomorphisme f de la variété compacte $\Gamma \backslash \text{Heis}(3)$. On sait déjà que $\varphi := D_e\phi$ préserve le centre $\mathbb{R}Z$, qui est donc une droite propre pour une certaine valeur propre λ^c . Notons λ et μ les deux autres valeurs propres de φ , éventuellement confondues, en convenant que $|\lambda| \leq |\mu|$. La somme des droites propres (respectivement le plan propre) associées à λ et μ ne contenant pas $\mathbb{R}Z$, ce plan n'est pas une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{heis}(3)$, et il existe donc deux vecteurs propres v et w , respectivement associés aux valeurs propres λ et μ , et tels que $[v, w] \neq 0$. Puisque $[v, w] \in \mathbb{R}Z$, on a alors $\lambda^c[v, w] = \varphi([v, w]) = [\varphi(v), \varphi(w)] = \lambda\mu[v, w]$, d'où $\lambda^c = \lambda\mu$. Selon le raisonnement conduit à la fin du paragraphe 5.8.1.a, on a par ailleurs $\lambda^c\lambda\mu = \lambda^2\mu^2 = 1$ car $\Gamma \backslash \text{Heis}(3)$ est compacte, d'où $|\lambda| = |\mu|^{-1}$ et $|\lambda^c| = 1$. Notre hypothèse sur les valeurs propres de φ impose donc finalement $|\lambda| < 1 = |\lambda^c| < |\mu|$. Ceci montre facilement que f est un difféomorphisme partiellement hyperbolique, dont les distributions stable, instable et centrale sont respectivement induites par les distributions invariantes à gauche engendrées par les droites propres D^s, D^u et $\mathbb{R}Z$ respectivement associées à λ, μ et $\lambda\mu$. Puisque $[D^s, D^u] = \mathbb{R}Z$, ceci explique les propriétés énoncées. $\square$

Remarque 1.2.11. De plus, ces difféomorphismes partiellement hyperboliques ont une « forme normale » très simple. En effet, il existe selon le lemme 1.3.10 un automorphisme ψ de $\text{Heis}(3)$ tel que $D_e\psi$ envoie la droite propre de $D_e\phi$ associée à λ (respectivement μ) sur $\mathbb{R}X$ (resp. $\mathbb{R}Y$). Alors $\phi' := \psi \circ \phi \circ \psi^{-1}$ est un automorphisme de $\text{Heis}(3)$ tel que $D_e\phi'$ est diagonalisable avec droites propres $\mathbb{R}X, \mathbb{R}Y$ et $\mathbb{R}Z$ respectivement associées aux valeurs propres λ, μ et $\lambda\mu$. En

d'autres termes :

$$\phi' \left(\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda x & \lambda \mu z \\ 0 & 1 & \mu y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.2.6)$$

De plus, en posant $g' = \psi(g)$ et $\Gamma' = \psi(\Gamma)$, on a $\psi \circ (L_g \circ \phi) \circ \psi^{-1} = L_{g'} \circ \phi'$ et $g'\phi'(\Gamma')g'^{-1} = \Gamma'$, donc $L_{g'} \circ \phi'$ passe au quotient en un difféomorphisme f' de la nil-variété $\Gamma' \backslash \text{Heis}(3)$, et ψ induit un difféomorphisme naturel $\bar{\psi}: \Gamma \backslash \text{Heis}(3) \rightarrow \Gamma' \backslash \text{Heis}(3)$ tel que $f' \circ \bar{\psi} = \bar{\psi} \circ f$. Finalement, tout automorphisme affine partiellement hyperbolique d'une nil-variété est conjugué à un exemple construit à partir d'un automorphisme de la forme (1.2.6).

Comme c'est le cas pour les flots d'Anosov, les distributions invariantes d'un difféomorphisme partiellement hyperbolique sont en général seulement continues. Les automorphismes affines partiellement hyperboliques de nil-variétés sont donc tout à fait particuliers, car E^s , E^u et E^c sont toutes trois lisses. Plus précisément, (E^s, E^u) est une structure Lagrangienne de contact induite par une structure invariante à gauche sur $\text{Heis}(3)$.

La classification générale des difféomorphismes partiellement hyperboliques en dimension trois fait l'objet d'une recherche intense, dont on peut trouver un exposé relativement récent dans [HP18]. Dans le chapitre 5 de cette thèse, nous nous intéresserons au cas particulier où (E^s, E^u) est une structure Lagrangienne de contact et E^c est lisse. Si tous les points de f sont de plus *non-errants*, nous prouverons alors qu'à indices et itérées finies près, f est soit un temps non-nul d'un flot Anosov de contact algébrique, soit un automorphisme affine partiellement hyperbolique d'une nil-variété (voir théorème A.1). Notre outil principal dans cette preuve sera la *géométrie de Cartan* associée à toute structure Lagrangienne de contact, décrite aux chapitres 3 et 4, et le lien qu'elle fournit avec l'espace homogène modèle $\mathbf{X}$.

1.3 Structures Lagrangiennes de contact en dimension supérieure

Nous souhaitons maintenant généraliser à toute dimension impaire la notion de structure Lagrangienne de contact définie au paragraphe 1.1.1 pour la dimension trois. Mais quel sens donner à cette notion en dimension supérieure? Nous avons déjà évoqué à plusieurs reprises l'importance de l'espace homogène modèle $\mathbf{X}$ des structures Lagrangiennes de contact de dimension trois, et nous souhaitons conserver un objet du même type en dimension supérieure. Cette idée va guider les définitions que nous introduirons.

1.3.1 Définition en dimension supérieure

L'espace des droites projectives pointées $\mathbf{X}$ se généralise naturellement en dimension supérieure par la définition suivante.

Définition 1.3.1. Pour $n \geq 1$, nous notons $\mathbf{X}_{2n+1}$ l'espace des hyperplans projectifs pointés (m, H) de $\mathbb{RP}^{n+1}$ (où $H \subset \mathbb{RP}^{n+1}$ est un hyperplan projectif et $m \in H$), et nous l'appelons *espace homogène modèle* des structures Lagrangiennes de contact en dimension $2n + 1$.⁵

La structure Lagrangienne de contact standard $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$ de $\mathbf{X}$ se généralise naturellement sur $\mathbf{X}_{2n+1}$ par le couple $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_{2n+1}} = (\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{E}_\beta)$ de distributions de dimension n dont les feuilles sont les fibres respectives des projections $\pi_\alpha: (m, H) \in \mathbf{X}_{2n+1} \mapsto m \in \mathbb{RP}^{n+1}$ et $\pi_\beta: (m, H) \in \mathbf{X}_{2n+1} \mapsto H \in \mathbb{RP}_*^{n+1}$ (où $\mathbb{RP}_*^{n+1}$ désigne l'ensemble des hyperplans projectifs de $\mathbb{RP}^{n+1}$). Nous étudierons en détail au chapitre 2 l'espace $(\mathbf{X}_{2n+1}, \mathcal{L}_{\mathbf{X}_{2n+1}})$. Pour le moment, nous l'utilisons uniquement comme inspiration pour définir la notion de structure Lagrangienne de contact en dimension supérieure. Comme c'est le cas en dimension trois, on montre que $\mathcal{E}_\alpha \oplus \mathcal{E}_\beta$ est une distribution de contact (cela apparaîtra comme une conséquence du lemme 1.3.7).

5. D'une manière légèrement anachronique.

Définition 1.3.2. Soit M une variété de dimension impaire égale à $2n + 1$, et α une 1-forme sur M ne s'annulant pas. On dit que α est une *forme de contact* si $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ ne s'annule pas sur M . On appellera *distribution de contact* une distribution lisse d'hyperplans qui est localement le noyau d'une forme de contact en tout point, et on appellera *structure de contact* la donnée d'une distribution de contact.

Remarque 1.3.3. 1. De façon équivalente, une 1-forme α ne s'annulant pas sur une variété M est de contact si, et seulement si en tout point $x \in M$, la restriction de $d\alpha(x)$ à $\text{Ker } \alpha(x)$ est non-dégénérée, *i.e.* est symplectique (voir par exemple [Gei08, Remark 1.3.7]). Pour α une 1-forme et X, Y deux champs de vecteurs sur M , on rappelle la *formule de Cartan* :

$$d\alpha(X, Y) = X \cdot \alpha(Y) - Y \cdot \alpha(X) - \alpha([X, Y]). \quad (1.3.1)$$

En particulier si X et Y sont deux champs de vecteurs locaux à valeur dans $\text{Ker } \alpha$, alors $d\alpha(X, Y) \neq 0$ si et seulement si $[X, Y] \notin \text{Ker } \alpha$. On en déduit que H est une distribution de contact de M si, et seulement si pour tout champ de vecteur local X à valeurs dans H , il existe un champ de vecteur local Y à valeurs dans H tel que $[X, Y] \notin H$. En particulier, la définition 1.1.1 de distribution de contact donnée précédemment dans le cas particulier de la dimension trois correspond donc bien à la définition générale 1.3.2 que nous venons d'introduire. 2. Si deux 1-formes α et β ont localement pour noyau la même distribution d'hyperplans, alors $\beta = f\alpha$ pour une certaine fonction f ne s'annulant pas sur M . On a donc $\beta \wedge (d\beta)^n = f^{n+1}\alpha \wedge (d\alpha)^n$, et α est une forme de contact si et seulement si β l'est. Par conséquent, le fait d'être de contact ne dépend que de la distribution et pas de la 1-forme, ce qui donne un sens à la notion de structure de contact.

Par analogie avec $(\mathbf{X}_{2n+1}, \mathcal{L}_{\mathbf{X}_{2n+1}})$, une structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}$ sur une variété M de dimension $2n + 1$ sera donc un couple $\mathcal{L} = (E^\alpha, E^\beta)$ de distributions lisses de dimension n dont la somme est une distribution de contact. Quelles conditions locales doit-on individuellement imposer sur les distributions E^α et E^β ? Les distributions de dimension un étant toutes localement équivalentes, cette question ne se posait pas en dimension trois. En revanche, à partir de la dimension deux les distributions ont des invariants locaux, et notre objectif étant d'obtenir une structure rigide, il semble peu probable que l'on puisse laisser une liberté totale sur la nature locale de E^α et E^β .

Rappelons qu'une distribution E sur une variété M est dite *intégrable* s'il existe un feuilletage $\mathcal{F}$ de M qui *intègre* E , *i.e.* tel qu'en tout point $x \in M$, $T_x(\mathcal{F}(x)) = E(x)$. Selon le théorème de Frobenius, ceci est équivalent à ce que E soit *involutive*, *i.e.* que pour tout couple (X, Y) de champs de vecteurs locaux à valeurs dans E , $[X, Y] \in E$ (voir par exemple [Sha97, Chapter 2 Theorem 4.1]). La condition d'intégrabilité est en ce sens la plus éloignée possible de celle de contact.

Les distributions $\mathcal{E}_\alpha$ et $\mathcal{E}_\beta$ de $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_{2n+1}}$ sont par définition individuellement intégrables, et ont pour feuilles les fibres des projections π_α et π_β . Dans le cas général l'hypothèse d'intégrabilité sur les distributions α et β d'une structure Lagrangienne de contact sera cependant trop restrictive, et nous allons donc considérer des sous-distributions spécifiques d'une distribution de contact, qui en un certain sens se rapprochent le plus possible de l'intégrabilité.

Rappelons qu'une forme bilinéaire b sur un espace vectoriel réel V de dimension finie est dite *symplectique* si elle est antisymétrique et non-dégénérée, et que V est alors nécessairement de dimension paire. En notant $\dim V = 2n$, un sous-espace W de V est dit *isotrope* si la restriction de b à $W \times W$ est identiquement nulle, *i.e.* si $W \subset W^\perp = \{u \in V \mid b(u, W) = 0\}$. Puisque b est non-dégénérée, $\dim W + \dim W^\perp = \dim V = 2n$ pour tout sous-espace, et un sous-espace isotrope est donc de dimension au plus n . On dit que W est *Lagrangien* s'il est isotrope et de dimension maximale, et il est alors de dimension n (pour plus de détails, voir par exemple [Gei08, §1.3]).

Comme on l'a vu dans la remarque 1.3.3, pour toute distribution de contact H et toute 1-forme α ayant localement H pour noyau, α est de contact et $(H(x), d\alpha(x))$ est un espace vectoriel symplectique en tout point où α est définie. Une autre 1-forme β ayant localement le même noyau H est un multiple de α par une fonction lisse ne s'annulant pas, et en tout point où ces deux 1-formes sont définies, les sous-espaces isotropes (respectivement Lagrangiens) de $(H(x), d\alpha(x))$ sont donc les mêmes que ceux de $(H(x), d\beta(x))$. Ces sous-espaces ne dépendent donc pas de la 1-forme choisie, mais seulement de la distribution H , ce qui autorise la définition suivante.

Définition 1.3.4. Soit H une distribution de contact sur une variété M de dimension $2n + 1$. Une sous-distribution lisse $E \subset H$ sera dite *isotrope* si $E(x)$ est en tout point un sous-espace isotrope de $H(x)$, et *Legendrienne* si elle est isotrope et de dimension maximale, *i.e.* de dimension n .

Remarque 1.3.5. Selon la formule de Cartan (1.3.1), une sous-distribution $E \subset H$ est donc isotrope si, et seulement si en tout point $x \in M$, et pour tout couple de champs de vecteurs X et Y localement définis et à valeurs dans E au voisinage de x , on a $X \cdot \alpha(Y) - Y \cdot \alpha(X) - \alpha([X, Y]) = 0$ au voisinage de x . Puisque $\alpha(X)$ et $\alpha(Y)$ sont identiquement nulles, cette identité équivaut à $\alpha([X, Y]) = 0$, ou encore à ce que $[X, Y]$ soit à valeurs dans H . On obtient donc les caractérisations suivantes pour une variété M de dimension $2n + 1$ munie d'une structure de contact H .

1. Une sous-distribution $E \subset H$ est isotrope si, et seulement si pour tout couple X, Y de champs de vecteurs locaux à valeurs dans E , $[X, Y]$ est à valeurs dans H .
2. Une sous-distribution $E \subset H$ est Legendrienne si, et seulement si elle est isotrope et de dimension maximale, *i.e.* de dimension n . En particulier, toute sous-distribution intégrable de dimension n de H est Legendrienne.

Ceci nous amène enfin à la définition suivante.

Définition 1.3.6. Une *structure Lagrangienne de contact* sur une variété de dimension impaire $2n+1$ est la donnée d'un couple (E^α, E^β) de distributions lisses de dimension n , telles que $E^\alpha \oplus E^\beta$ soit une distribution de contact dont E^α et E^β sont des sous-distributions Legendriennes. Si E^α (respectivement E^β) est intégrable, son feuilletage intégral est noté $\mathcal{F}^\alpha$ (resp. $\mathcal{F}^\beta$).

La structure $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_{2n+1}} = (\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{E}_\beta)$ mise en évidence sur l'espace homogène modèle $\mathbf{X}_{2n+1}$ est donc bien une structure Lagrangienne de contact.

1.3.2 Au dessus des variétés projectives

La construction faite au paragraphe 1.1.1 a un analogue immédiat en dimension supérieure, qui nous donnera une famille d'exemples généralisant l'espace modèle $(\mathbf{X}_{2n+1}, \mathcal{L}_{\mathbf{X}_{2n+1}})$.

Soient N une variété de dimension $n + 1 \geq 2$, et $\pi : M = \text{Gr}_n(N) \rightarrow N$ le fibré des Grassmanniennes des hyperplans tangents à N . C'est une variété de dimension $2n + 1$, classiquement nommée *espace des éléments de contact* de N (voir par exemple [Gei08, §1.2]). En tout hyperplan tangent $m \in M$, on pose $H(m) = D_m \pi^{-1}(m)$, ce qui définit une distribution de codimension un sur M , appelée *distribution de contact tautologique* de M . On peut décrire H plus géométriquement de la manière suivante. Pour toute hypersurface Σ de N passant par le point $x = \pi(m)$ et telle que $T_x \Sigma = m$, considérons le relevé canonique $\tilde{\Sigma} = \{(q, T_q \Sigma) \mid q \in \Sigma\}$ de Σ dans M , qui est une sous-variété de dimension n de M passant par m . L'ensemble des sous-espaces $T_m \tilde{\Sigma}$ de dimension n obtenus de cette manière, à partir des relevés des hypersurfaces Σ passant par x et tangentes à m , engendre un hyperplan dans $T_m M$ qui est égal à $H(m)$.

On considère maintenant une connexion linéaire sans torsion ∇ sur N , et le transport parallèle qu'elle définit. Soient $m \in M$, $x = \pi(m)$, et $v \in m$ un vecteur tangent en x . En notant γ la géodésique de ∇ passant par x dans la direction v , le transport parallèle de l'hyperplan m le

long de γ définit un relevé naturel passant par m de γ dans M , que nous noterons $\tilde{\gamma}$. On peut vérifier que l'ensemble des dérivées en m de ces relevés $\tilde{\gamma}$ des géodésiques de ∇ tangentes à m engendrent dans $T_m M$ un sous-espace vectoriel de dimension n , que nous noterons $E_\nabla(m)$. Par construction, $E_\nabla(m)$ est contenu dans la distribution de contact tautologique H , et est transverse à la distribution verticale $V = \text{Ker } D\pi$ du fibré M .

On peut également décrire E_∇ d'une manière plus formelle, qui a le mérite de montrer que E_∇ est bien une distribution lisse de dimension n . La connexion linéaire ∇ est induite par une connexion principale sur le $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ -fibré principal des repères tangents de N , et M étant un fibré associé du fibré des repères, il hérite donc d'une *connexion générale* induite par ∇ . Une telle connexion est simplement la donnée d'une distribution D_∇ horizontale sur M , *i.e.* transverse à la distribution verticale V de M . On peut alors vérifier que $E_\nabla = D_\nabla \cap H$.

Le lemme 1.1.2 a l'analogie suivant en dimension supérieure.

Lemme 1.3.7. *1. La distribution tautologique H de $M = \text{Gr}_n(N) \rightarrow N$ est une distribution de contact dont V est une sous-distribution Legendrienne.*
2. Si N est munie d'une structure projective $[\nabla]$ sans torsion, alors E_∇ ne dépend que de $[\nabla]$ et est une sous-distribution Legendrienne de H que nous noterons $E_{[\nabla]}$.

Il est connu que H est bien une distribution de contact, la preuve se fait en coordonnées d'une manière analogue au lemme 1.1.2 pour la dimension trois (voir par exemple [Gei08, Lemma 1.2.3]). La distribution verticale V du fibré π étant intégrable, elle est en particulier Legendrienne. La deuxième affirmation du lemme est prouvée dans [Tak94, Lemma 4.1 et Theorem 4.2] (voir aussi [ČS09, §4.4.2]). Dans ces références, le point de vue utilisé est celui du fibré $\mathbf{P}(T^*N)$, projectivisé du fibré cotangent à N . Puisque ce dernier s'identifie canoniquement à $\text{Gr}_n(N)$ en prenant le noyau des formes linéaires correspondantes, ces deux points de vue sont équivalents.

Si $[\nabla]$ est une structure projective sans torsion sur N , le couple $(V, E_{[\nabla]})$ est donc une structure Lagrangienne de contact sur $\text{Gr}_n(N)$, que nous noterons simplement $\mathcal{L}_N$ si la structure projective considérée sur N ne fait aucun doute. En particulier, si N est une variété Riemannienne, alors $\mathcal{L}_N$ désigne la structure Lagrangienne de contact induite sur $\text{Gr}_n(N)$ par la classe projective de sa connexion de Levi-Civita.

Remarque 1.3.8. L'espace homogène modèle $\mathbf{X}_{2n+1}$ s'identifie naturellement au fibré des hyperplans tangents à $\mathbb{R}\mathbf{P}^{n+1}$ ($(m, H) \in \mathbf{X}_{2n+1}$ correspondant à $T_m H$). À travers cette identification, $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_{2n+1}}$ correspond précisément à la structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}_{\mathbb{R}\mathbf{P}^{n+1}}$ induite sur $\text{Gr}_n(\mathbb{R}\mathbf{P}^{n+1})$ par la structure projective standard de $\mathbb{R}\mathbf{P}^{n+1}$.

Le nom de structure Lagrangienne de contact semble être utilisé pour la première fois par Takeuchi dans [Tak94]. Dans cet article, il décrit les exemples ci-dessus à partir des structures projectives, et donne une première construction de la géométrie de Cartan associée à une structure Lagrangienne de contact.

1.3.3 Une structure invariante à gauche sur $\text{Heis}(2n+1)$

Nous décrivons maintenant un exemple algébrique de structure Lagrangienne de contact. Considérons le groupe d'Heisenberg de dimension $2n+1$, noté $\text{Heis}(2n+1)$ et défini comme le sous-groupe de $\text{SL}_{n+2}(\mathbb{R})$ constitué des matrices s'écrivant par blocs sous la forme

$$[X, Y, z] = \begin{pmatrix} 1 & X & z \\ 0 & I_n & Y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.3.2)$$

où $X, Y \in \mathbb{R}^n$ et $z \in \mathbb{R}$. On utilisera pour son algèbre de Lie $\mathfrak{heis}(2n+1)$ la base suivante :

$$X_i = [e_i, 0, 0], Y_i = [0, e_i, 0], Z = [0, 0, 1]. \quad (1.3.3)$$

On utilise la même notation $[X, Y, z]$ introduite ci-dessus dans (1.3.2) pour $\mathfrak{heis}(2n+1)$ (les diagonales des matrices étant nulles), et e_i désigne le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Les vecteurs de cette base entretiennent alors les relations de crochets suivantes : $[X_i, Y_j] = \delta_{i,j}Z$ et $[X_i, X_j] = [Y_i, Y_j] = [Z, X_i] = [Z, Y_i] = 0$, pour tous $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$. Considérons les sous-algèbres abéliennes $D^\alpha = \text{Vect}(X_i, 1 \leq i \leq n)$ et $D^\beta = \text{Vect}(Y_i, 1 \leq i \leq n)$ de $\mathfrak{heis}(2n+1)$, et les distributions invariantes à gauche associées $E^\alpha = \widetilde{D^\alpha}$ et $E^\beta = \widetilde{D^\beta}$ sur $\text{Heis}(2n+1)$.

Lemme 1.3.9. *Le couple $\mathcal{L}_{\text{Heis}(2n+1)} = (E^\alpha, E^\beta)$ est une structure Lagrangienne de contact invariante à gauche sur $\text{Heis}(2n+1)$, et $E^\alpha \oplus E^\beta$ est isomorphe à la structure de contact $\text{Ker}(dz - \sum_{i=1}^n x_i dy_i)$ sur $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Démonstration. On note $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$, et on considère la carte globale $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z) \in \mathbb{R}^{2n+1} \mapsto [X, Y, z] \in \text{Heis}(2n+1)$, dont on note respectivement $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\frac{\partial}{\partial y_i}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$ les champs de vecteurs coordonnées, et dx_i , dy_i , dz les 1-formes différentielles associées. Avec les notations de (1.3.2), la loi de groupe de $\text{Heis}(2n+1)$ est donnée par : $[X, Y, z] \times [X', Y', z'] = [X+X', Y+Y', z+\langle X, Y' \rangle + z']$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire standard de $\mathbb{R}^n$. Un calcul rapide nous donne alors les relations suivantes : $\tilde{X}_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\tilde{Y}_i = \frac{\partial}{\partial y_i} + x_i \frac{\partial}{\partial z}$ et $\tilde{Z} = \frac{\partial}{\partial z}$. Par conséquent, $E^\alpha \oplus E^\beta = \text{Vect}(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i} + x_i \frac{\partial}{\partial z}, 1 \leq i \leq n)$, et en posant $\alpha = dz - \sum_{i=1}^n x_i dy_i$, on a $\text{Ker } \alpha = E^\alpha \oplus E^\beta$. Or α est la forme de contact standard de $\mathbb{R}^{2n+1}$ lue dans les coordonnées globales de $\text{Heis}(2n+1)$, donc $E^\alpha \oplus E^\beta$ est une distribution de contact. Puisque D^α et D^β sont des sous-algèbres abéliennes de $\mathfrak{heis}(2n+1)$, les distributions invariantes à gauche E^α et E^β qui leur sont associées sont intégrables. Selon la remarque 1.3.5 ce sont donc des sous-distributions Legendriennes de $E^\alpha \oplus E^\beta$, et (E^α, E^β) est bien une structure Lagrangienne de contact. $\square$

En dimension trois, on simplifie nos notations en notant $X = X_1$ et $Y = Y_1$.

Lemme 1.3.10. *Pour toute structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}$ invariante à gauche sur $\text{Heis}(3)$, il existe un automorphisme de groupe ϕ de $\text{Heis}(3)$ tel que $\phi^* \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Heis}(3)}$.*

Démonstration. Il existe $v, w \in \mathfrak{heis}(3)$ tel que $\mathcal{L} = (\mathbb{R}\tilde{v}, \mathbb{R}\tilde{w})$, et on a $[v, w] \notin \text{Vect}(v, w)$. Notons $v = aX + bY + cZ$ et $w = a'X + b'Y + c'Z$. Alors $[v, w] = (ab' - ba')Z$, donc $ab' - ba' \neq 0$. L'automorphisme d'algèbre de Lie φ de $\mathfrak{heis}(3)$ dont la matrice dans la base (X, Y, Z) est égale à $\begin{pmatrix} a & a' & 0 \\ b & b' & 0 \\ c & c' & ab' - ba' \end{pmatrix}$ envoie (X, Y) sur (v, w) . Puisque $\text{Heis}(3)$ est simplement connexe, il existe un automorphisme ϕ de $\text{Heis}(3)$ dont la différentielle en l'identité est égale à φ . Puisque ϕ est un automorphisme, $D_e \phi(X, Y) = (v, w)$ implique $\phi^* \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Heis}(3)}$. $\square$

En grande dimension, l'étude des structures Lagrangiennes de contact invariantes à gauche sur les groupes de Lie est non-triviale. Pour commencer, on ne sait pas, à ma connaissance, quels groupes de Lie admettent une structure de contact invariante à gauche (voir par exemple [Dia04]).

1.3.4 Flots Anosov de contact en dimension supérieure

Nous terminons ce chapitre en donnant des exemples de structures Lagrangiennes de contact de dimension supérieure provenant de la dynamique.

Le flot géodésique de toute variété Riemannienne à courbure sectionnelle strictement négative est de type Anosov. Cela a été prouvé par Anosov lui-même dans [Ano69], l'étude de ces flots étant sa motivation d'origine pour introduire cette propriété. Pour obtenir des distributions stable et instable lisses, nous nous restreignons au cas de variétés qui sont de plus *localement symétriques* (voir par exemple [Hel01]).

Fait 1.3.11. Les distributions stable et instable du flot géodésique (φ^t) d'une variété Riemannienne compacte localement symétrique à courbure strictement négative forment une structure Lagrangienne de contact (E^s, E^u) qui est préservée par le flot Anosov (φ^t) .

Démonstration. Soit (φ^t) le flot géodésique d'une variété Riemannienne compacte localement symétrique à courbure strictement négative, agissant sur son fibré unitaire tangent que l'on note M . On note X le champ de vecteurs qui engendre (φ^t) , et E^s (respectivement E^u) sa distribution stable (resp. instable), et on admet que E^s et E^u sont lisses (voir par exemple [BFL92, §7]). Soit α la 1-forme canonique de (φ^t) , définie sur M par les égalités $\alpha(X) \equiv 1$ et $\alpha|_{E^s \oplus E^u} \equiv 0$. Elle est préservée par le flot géodésique, tout comme la forme de Liouville de M , que l'on note θ . Soit $x \in M$ et $v \in E^s(x)$. Par compacité de M , il existe une suite $t_n \in \mathbb{R}$ partant à l'infini telle que $\varphi^{t_n}(x)$ converge. Puisque E^s est uniformément contractée par (φ^t) , on en déduit que $\theta_{\varphi^{t_n}(x)}(D_x \varphi^{t_n}(v)) = \theta_x(v)$ tend vers 0. Ainsi θ est nulle en restriction à E^s , et il en va de même sur E^u (en remplaçant φ^t par φ^{-t}). La définition de θ impliquant par ailleurs $\theta(X) \equiv 1$, α coïncide finalement avec la forme de Liouville de M . Or cette dernière est une forme de contact, donc $E^s \oplus E^u$ est bien une distribution de contact. Le même raisonnement montre que $d\alpha$ est nulle en restriction à $E^s \times E^s$ et $E^u \times E^u$, i.e. que E^s et E^u sont des sous-distributions Legendriennes de $E^s \oplus E^u$. Le couple (E^s, E^u) est donc une structure Lagrangienne de contact sur M , préservée par le flot Anosov (φ^t) . $\square$

Dans [BFL92], Benoist, Foulon et Labourie généralisent le théorème 5.1.1 de Ghys, en prouvant un résultat de classification qui implique l'énoncé suivant.

Theorem 1.3.12 (Benoist, Foulon, Labourie). *Soit (φ^t) un flot d'Anosov lisse, tel que E^s et E^u sont lisses, et tels que $E^s \oplus E^u$ soit une distribution de contact. Alors (E^s, E^u) est une structure Lagrangienne de contact, et quitte à changer son paramétrage ou à en prendre un revêtement fini, (φ^t) est le flot géodésique d'une variété Riemannienne compacte localement symétrique à courbure strictement négative.*

1.3.5 Géométries de chemins généralisées

À la lecture du paragraphe 1.3.2, on peut légitimement se demander pourquoi l'on considère en dimension quelconque le fibré des hyperplans tangents, et non plus simplement le projectivisé du fibré tangent comme en dimension deux. Observons brièvement ce que l'on obtiendrait sur ce dernier. Nous considérons donc une variété N de dimension $n + 1$, munie d'une structure projective sans torsion $[\nabla]$, ainsi que son fibré $\pi: M = \mathbf{P}(TN) \rightarrow N$. Soit $l \in M$, γ la géodésique de $[\nabla]$ passant par $\pi(l)$ dans la direction l , et $\tilde{\gamma} = \{T_p \gamma \mid p \in \gamma\} \subset M$ sa prolongation. La même démarche qu'au paragraphe 1.1.1 nous amène à définir sur M une distribution E de dimension un en posant $E(l) = T_l \tilde{\gamma}$. cette distribution est transverse à la distribution verticale V du fibré $\pi: M \rightarrow N$, et est contenue dans la distribution de contact tautologique H de $\mathbf{P}(TN)$, qui est définie de la même manière qu'en dimension deux. En revanche si $\dim N \geq 3$, alors $E \oplus V$ est strictement contenue dans H . Dans ce cas, la structure (E, V) obtenue sur M n'est donc pas Lagrangienne de contact, et est appelée *géométrie de chemins généralisée* dans la littérature.

Le modèle homogène de ces structures est donné par l'espace des droites projectives pointées de $\mathbb{R}\mathbf{P}^{n+1}$ en toute dimension. Cet espace s'identifie au quotient de $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ par le stabilisateur de $([e_1], [e_1, e_2])$, qui est le sous-groupe parabolique $Q_{2,n}$ des matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} a & b & B \\ 0 & c & \\ 0 & & C \end{bmatrix},$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, B a 2 lignes et n colonnes, et $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

On peut trouver une description détaillée des géométries de chemins généralisées dans [ČS09, §4.4.3]. Il y est prouvé qu'elles se décrivent également comme des géométries de Cartan, modélées cette fois sur l'espace homogène $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})/Q_{2,n}$.

Chapitre 2

Géométrie de l'espace modèle

Dans ce chapitre nous revenons en détail sur la géométrie de l'espace modèle $\mathbf{X}_{2n+1}$ des structures Lagrangiennes de contact. Nous commençons par le définir précisément, et par interpréter sa structure Lagrangienne de contact standard $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_{2n+1}}$ avec un point de vue algébrique, pour la traduire dans le quotient $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})/\mathbf{P}_{n+2}$ auquel s'identifie $\mathbf{X}_{2n+1}$. Nous introduisons ensuite deux familles d'objets géométriques naturels dans $\mathbf{X}_{2n+1}$, les surfaces α - β et β - α d'une part, et les chaînettes d'autre part. Nous utilisons les surfaces α - β et β - α pour définir différents ouverts de $\mathbf{X}_{2n+1}$, homogènes sous l'action de certains sous-groupes de $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$, et que nous identifierons à des exemples rencontrés dans le premier chapitre. Ceci nous permettra en particulier de montrer que la structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}_{\Sigma}^{su}$ invariante par le flot géodésique construite dans le premier chapitre sur le fibré unitaire tangent d'une surface hyperbolique Σ , est (à indice deux près) une *structure Kleinienne*, *i.e.* est un quotient d'un ouvert de $\mathbf{X}_3$ par un sous-groupe discret de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ agissant librement et proprement. Nous terminons ce chapitre en décrivant une famille de cartes affines identifiant certains ouverts de $\mathbf{X}_{2n+1}$ à $\mathbb{R}^{2n+1}$.

2.1 Structure Lagrangienne de contact standard du modèle

Nous avons rapidement rencontré au chapitre 1 l'espace homogène modèle des structures Lagrangiennes de contact, et nous commençons par rappeler sa définition et ses premières propriétés.

2.1.1 Point de vue géométrique

Soit $\mathbb{R}\mathbf{P}^{n+1}$ l'espace projectif de dimension $n+1$, *i.e.* l'espace des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+2}$. Pour $x = (x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2} \setminus \{0\}$, nous utilisons les coordonnées homogènes standards $[x_1 : \dots : x_{n+2}]$ pour désigner la projection de x dans $\mathbb{R}\mathbf{P}^{n+1}$, et plus généralement pour $P \subset \mathbb{R}^{n+2}$ nous noterons $[P]$ la projection dans $\mathbb{R}\mathbf{P}^{n+1}$ de l'espace vectoriel engendré par P . Nous appellerons *hyperplan projectif* de $\mathbb{R}\mathbf{P}^{n+1}$ la projection d'un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^{n+2}$. Dans $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$, un hyperplan projectif est plus simplement une *droite projective*. L'espace des hyperplans projectifs de $\mathbb{R}\mathbf{P}^{n+1}$ sera noté $\mathbb{R}\mathbf{P}_*^{n+1}$, et un *hyperplan projectif pointé* est un couple $(m, H) \in \mathbb{R}\mathbf{P}^{n+1} \times \mathbb{R}\mathbf{P}_*^{n+1}$ tel que $m \in H$.

Définition 2.1.1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'*espace homogène modèle* des structures Lagrangienne de contact de dimension $2n+1$ est l'ensemble $\mathbf{X}_{2n+1}$ des hyperplans projectifs pointés de $\mathbb{R}\mathbf{P}^{n+1}$. Les projections naturelles

$$\pi_\alpha : (m, H) \in \mathbf{X}_{2n+1} \mapsto m \in \mathbb{R}\mathbf{P}^{n+1} \text{ et } \pi_\beta : (m, H) \in \mathbf{X}_{2n+1} \mapsto H \in \mathbb{R}\mathbf{P}_*^{n+1} \quad (2.1.1)$$

font de $\mathbf{X}_{2n+1}$ un $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ -fibré au dessus de $\mathbb{R}\mathbf{P}^{n+1}$ et $\mathbb{R}\mathbf{P}_*^{n+1}$. On notera respectivement $\mathcal{E}_\alpha$ et $\mathcal{E}_\beta$ les distributions verticales des fibrés π_α et π_β , et on appellera $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_{2n+1}} = (\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{E}_\beta)$ la *structure*

Lagrangienne de contact standard de $\mathbf{X}_{2n+1}$. Les fibres de π_α et π_β sont les feuilles intégrales de $\mathcal{E}_\alpha$ et $\mathcal{E}_\beta$, et seront respectivement notées $\mathcal{C}_\alpha(x)$ et $\mathcal{C}_\beta(x)$. Pour $n = 1$ on notera $\mathbf{X} := \mathbf{X}_3$ et $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_3} := \mathcal{L}_{\mathbf{X}}$. Les feuilles α (respectivement β) de $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$ sont des plongements de $\mathbb{RP}^1$, qui seront appelés *cercles* α (resp. β) de $\mathbf{X}$.

Pour tout $(m, H) \in \mathbf{X}_{2n+1}$, la feuille α de (m, H) consiste à fixer le point m et à changer l'hyperplan projectif H qui le contient. Puisqu'elle ne dépend que de m , on notera parfois :

$$\mathcal{C}_\alpha(m) := \mathcal{C}_\alpha(m, H) = \{(m, K) \mid K \ni m\}.$$

Sa feuille β consiste quand à elle à fixer l'hyperplan projectif H et à déplacer m sur H :

$$\mathcal{C}_\beta(H) := \mathcal{C}_\beta(m, H) = \{(p, H) \mid p \in H\}.$$

Intéressons-nous maintenant aux automorphismes de $\mathbf{X}_{2n+1}$. Le quotient de $\mathrm{GL}_{n+2}(\mathbb{R})$ par son centre $\mathbb{R}\mathrm{id}$ est désigné par $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$, et on notera $[A] \in \mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ la classe de $A \in \mathrm{GL}_{n+2}(\mathbb{R})$. L'action projective diagonale de $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}\mathbf{P}^{n+1} \times \mathbb{R}\mathbf{P}_*^{n+1}$ préserve la relation d'incidence $m \in H$, et induit donc une action naturelle de $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ sur $\mathbf{X}_{2n+1}$. Cette action est transitive, et préserve les feuilletages α et β , *i.e.* préserve $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_{2n+1}}$. Nous avons déjà vu au chapitre 1 que $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ est le groupe d'automorphismes de $(\mathbf{X}, \mathcal{L}_{\mathbf{X}})$ (voir proposition 1.1.10), et ce résultat se généralise en dimension supérieure :

$$\mathrm{Aut}(\mathbf{X}_{2n+1}, \mathcal{L}_{\mathbf{X}_{2n+1}}) = \mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R}).$$

Nous prouverons plus précisément au chapitre 4 que tout automorphisme local de $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_{2n+1}}$ est la restriction d'un élément de $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ (voir théorème 4.1.8). Nous notons $(e_1, \dots, e_{n+2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+2}$, et si rien n'est précisé nous choisirons toujours pour point-base de $\mathbf{X}_{2n+1}$ le point

$$o = ([e_1], [e_1, \dots, e_{n+1}]) \in \mathbf{X}_{2n+1}. \quad (2.1.2)$$

Le stabilisateur de o dans $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe fermé $\mathbf{P}_{n+2}$ décrit par blocs de la manière suivante :

$$\mathbf{P}_{n+2} = \left\{ \begin{bmatrix} a & X & z \\ 0 & B & Y \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R}^*, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), X, Y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R} \right\}. \quad (2.1.3)$$

L'application orbitale en o

$$\theta_o : g \in \mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R}) \mapsto g \cdot o \in \mathbf{X}_{2n+1}$$

induit un difféomorphisme $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ -équivariant $\bar{\theta}_o$ du quotient $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})/\mathbf{P}_{n+2}$ sur $\mathbf{X}_{2n+1}$. Par défaut, nous utiliserons toujours cette identification, mais il faut bien entendu noter que le choix d'un autre point-base dans $\mathbf{X}_{2n+1}$ change le stabilisateur pour l'un des conjugués de $\mathbf{P}_{n+2}$ dans $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$.

2.1.2 Point de vue algébrique

Nous allons maintenant utiliser l'identification $\mathbf{X}_{2n+1} \equiv \mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})/\mathbf{P}_{n+2}$ pour interpréter la structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_{2n+1}}$ avec un point de vue algébrique.

La projection de $\mathrm{SL}_{n+2}(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ est un isomorphisme si n est impair. Si n est pair, elle est de noyau $\{\pm \mathrm{id}\}$, et son image est le sous-groupe d'indice 2 de $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ constitué des (images dans $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ des) matrices de déterminant positif. Dans tous les cas, sa différentielle en l'identité est un isomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{sl}_{n+2}$ sur $\mathfrak{pgl}_{n+2}$, par lequel on identifiera toujours ces deux algèbres de Lie. Pour tout $p \in \mathbf{P}_{n+2}$, l'action adjointe $\mathrm{Ad}(p)$ de p sur $\mathfrak{sl}_{n+2}$

préserve $\mathfrak{p}_{n+2}$, et passe donc au quotient sur $\mathfrak{sl}_{n+2}/\mathfrak{p}_{n+2}$ en un isomorphisme que nous noterons $\overline{\text{Ad}}(p)$. Par définition de $\overline{\text{Ad}}$, la projection canonique $\pi_{\mathfrak{p}_{n+2}} : \mathfrak{sl}_{n+2} \rightarrow \mathfrak{sl}_{n+2}/\mathfrak{p}_{n+2}$ est équivariante pour les actions respectives Ad et $\overline{\text{Ad}}$ de $\mathbf{P}_{n+2}$ sur $\mathfrak{sl}_{n+2}$ et $\mathfrak{sl}_{n+2}/\mathfrak{p}_{n+2}$.

Nous allons utiliser un point de vue plus confortable pour manipuler l'action $\overline{\text{Ad}}(\mathbf{P}_{n+2})$. Pour $U, V \in \mathbb{R}^n$ et $w \in \mathbb{R}$, nous noterons

$$[U, V, w] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ V & 0 & 0 \\ w & U & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_{n+2}. \quad (2.1.4)$$

L'ensemble des matrices de cette forme est une sous-algèbre de $\mathfrak{sl}_{n+2}$ que nous noterons $\mathfrak{sl}_{n+2}^-$, telle que $\mathfrak{sl}_{n+2} = \mathfrak{p}_{n+2} \oplus \mathfrak{sl}_{n+2}^-$. En notant $\pi_- : \mathfrak{sl}_{n+2} \rightarrow \mathfrak{sl}_{n+2}^-$ la projection sur $\mathfrak{sl}_{n+2}^-$ parallèlement à $\mathfrak{p}_{n+2}$, on définit une représentation Ad^- de $\mathbf{P}_{n+2}$ sur $\mathfrak{sl}_{n+2}^-$ en posant, pour $p \in \mathbf{P}_{n+2}$ et $v \in \mathfrak{sl}_{n+2}^-$:

$$\text{Ad}^-(p) \cdot v = \pi_-(\text{Ad}(p) \cdot v).$$

Par définition de Ad^- , la restriction à $\mathfrak{sl}_{n+2}^-$ de la projection canonique $\pi_{\mathfrak{p}_{n+2}}$ est un isomorphisme $\pi_{\mathfrak{p}_{n+2}}|_{\mathfrak{sl}_{n+2}^-} : \mathfrak{sl}_{n+2}^- \rightarrow \mathfrak{sl}_{n+2}/\mathfrak{p}_{n+2}$ équivariant pour les actions respectives Ad^- et $\overline{\text{Ad}}$ de $\mathbf{P}_{n+2}$ sur $\mathfrak{sl}_{n+2}^-$ et $\mathfrak{sl}_{n+2}/\mathfrak{p}_{n+2}$. L'action adjointe de

$$p = \begin{bmatrix} a & X & z \\ 0 & B & Y \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \in \mathbf{P}_{n+2} \quad (2.1.5)$$

sur $\mathfrak{sl}_{n+2}^-$ est égale à :

$$\text{Ad}^-(p) \cdot [U, V, w] = [cUB^{-1} - a^{-1}cwXB^{-1}, a^{-1}BV + a^{-1}wY, a^{-1}cw] \quad (2.1.6)$$

en utilisant la notation (2.1.4). On en déduit en particulier que

$$\text{Ker}(\overline{\text{Ad}}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & \text{id} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}. \quad (2.1.7)$$

Par ailleurs, les projections dans $\mathfrak{sl}_{n+2}/\mathfrak{p}_{n+2}$ des deux sous-algèbres abéliennes

$$\mathfrak{g}^\alpha = \{[U, 0, 0] \mid U \in \mathbb{R}^n\} \text{ et } \mathfrak{g}^\beta = \{[0, V, 0] \mid V \in \mathbb{R}^n\} \quad (2.1.8)$$

de $\mathfrak{sl}_{n+2}^-$ sont $\overline{\text{Ad}}(\mathbf{P}_{n+2})$ -invariantes.

Proposition 2.1.2. 1. Les distributions invariantes à gauche $\widetilde{\mathfrak{g}}^\alpha$ et $\widetilde{\mathfrak{g}}^\beta$ de $\text{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ passent au quotient dans $\text{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})/\mathbf{P}_{n+2}$, en deux distributions respectivement notées $\mathcal{E}_\alpha^{\text{alg}}$ et $\mathcal{E}_\beta^{\text{alg}}$.

2. L'application orbitale $\overline{\theta}_o : g\mathbf{P}_{n+2} \in \text{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})/\mathbf{P}_{n+2} \mapsto g \cdot o \in \mathbf{X}_{2n+1}$ est un isomorphisme de structures Lagrangiennes de contact de $(\mathcal{E}_\alpha^{\text{alg}}, \mathcal{E}_\beta^{\text{alg}})$ sur $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_{2n+1}} = (\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{E}_\beta)$.

3. Soit E^α et E^β deux distributions transverses de dimension n sur $\mathbf{X}_{2n+1}$, invariantes par $\text{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$. Alors quitte à intervertir E^α et E^β , $(E^\alpha, E^\beta) = \mathcal{L}_{\mathbf{X}_{2n+1}}$.

Démonstration. 1. En notant π la projection canonique de $\text{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ dans $\text{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})/\mathbf{P}_{n+2}$, il suffit de vérifier que pour tout $p \in \mathbf{P}_{n+2}$, $D_e\pi(\mathfrak{g}^\varepsilon) = D_p\pi \circ D_eL_p(\mathfrak{g}^\varepsilon)$, avec $\varepsilon = \alpha$ ou β . Or $\pi \circ L_p = \pi \circ R_{p^{-1}} \circ L_p$, et la différentielle de la conjugaison par p est égale à $\text{Ad}(p)$, d'où $D_p\pi \circ D_eL_p(\mathfrak{g}^\varepsilon) = D_e\pi(\text{Ad}(p) \cdot \mathfrak{g}^\varepsilon)$. Puisque $D_e\pi$ est simplement la projection canonique de $\mathfrak{sl}_{n+2}$ dans $\mathfrak{sl}_{n+2}/\mathfrak{p}_{n+2}$, et que $\overline{\mathfrak{g}^\varepsilon}$ est $\overline{\text{Ad}}(\mathbf{P}_{n+2})$ -invariante, ceci conclut la preuve.

2. Soit $U = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors $\exp([U, 0, 0]) \cdot [e_1, \dots, e_{n+1}] = [e_1, e_i + u_{i-1}e_{n+2}, 2] \leq$

$i \leq n+1]$. Par suite, $\exp(\mathfrak{g}^\alpha) \cdot o$ est un ouvert de $\mathcal{C}_\alpha(o)$, d'où $\bar{\theta}_o^* \mathcal{E}_\alpha(o) = E^\alpha(e)$. Puisque ces deux distributions sont $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ -invariantes, on en déduit que $\bar{\theta}_o^* \mathcal{E}_\alpha = E^\alpha$. De même avec $V = (v_1, \dots, v_n)$, $\exp([0, V, 0]) \cdot [e_1] = [1 : v_1 : \dots : v_n : 0]$, donc $\exp(\mathfrak{g}^\beta) \cdot o$ est un ouvert de $\mathcal{C}_\beta(o)$, et $\bar{\theta}_o^* \mathcal{E}_\beta = E^\beta$.

3. En identifiant $\mathbf{X}_{2n+1}$ à $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})/\mathbf{P}_{n+2}$ via $\bar{\theta}_o$, (E^α, E^β) provient d'un couple $\mathrm{Ad}^-(\mathbf{P}_{n+2})$ -invariant (D^α, D^β) de sous-espaces transverses de dimension n dans $\mathfrak{sl}_{n+2}^-$. Tout d'abord, $\mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^\beta$ est le seul hyperplan de $\mathfrak{sl}_{n+2}^-$ préservé par l'action de $\mathrm{Ad}^-(\mathbf{P}_{n+2})$. En effet tout hyperplan de $\mathfrak{sl}_{n+2}^-$ différent de $\mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^\beta$ correspond à un hyperplan affine de $\mathbb{R}^{2n}$ par la carte affine $\mathbf{P}([U, V, 1]) \in \mathbf{P}(\mathfrak{sl}_{n+2}^-) \mapsto (U, V) \in \mathbb{R}^{2n}$, or l'action de $\mathrm{Ad}^-(\mathbf{P}_{n+2})$ lue dans cette carte contient l'ensemble des translations de $\mathbb{R}^{2n}$, et ne stabilise donc aucun hyperplan affine de $\mathbb{R}^{2n}$. Ainsi $D^\alpha \oplus D^\beta = \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^\beta$. De plus, $\mathfrak{g}^\alpha$ et $\mathfrak{g}^\beta$ sont les seuls sous-espaces de dimension n de $\mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^\beta$ stabilisés par $\mathrm{Ad}^-(\mathbf{P}_{n+2})$, donc quitte à intervertir les distributions α et β , $(D^\alpha, D^\beta) = (\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta)$, ce qui termine la preuve. $\square$

2.2 Quelques objets géométriques dans l'espace modèle

Dans cette section, nous introduisons différents objets géométriques de l'espace homogène modèle dont l'étude dans la suite du texte se révélera féconde.

Définition 2.2.1. Pour $m \in \mathbb{R}\mathbf{P}^{n+1}$, l'ensemble des hyperplans projectifs de $\mathbb{R}\mathbf{P}^{n+1}$ contenant m sera noté $m^* \subset \mathbb{R}\mathbf{P}_*^{n+1}$, et appelé *hyperplan projectif dual de m* .

2.2.1 Hypersurfaces α - β et β - α

Deux hypersurfaces se dégagent naturellement en tout point de $\mathbf{X}_{2n+1}$.

Définition 2.2.2. Pour $x = (m, H) \in \mathbf{X}_{2n+1}$, l'ensemble

$$\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(x) = \{(p, K) \in \mathbf{X}_{2n+1} \mid K \ni m\} = \pi_\beta^{-1}(m^*) \quad (2.2.1)$$

sera appelé l'*hypersurface α - β de x* , et

$$\mathcal{S}_{\beta,\alpha}(x) = \{(p, K) \in \mathbf{X}_{2n+1} \mid p \in H\} = \pi_\alpha^{-1}(H) \quad (2.2.2)$$

son *hypersurface β - α* .

Puisque $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(x)$ ne dépend que de $m = \pi_\alpha(x)$ et que $\mathcal{S}_{\beta,\alpha}(x)$ ne dépend que de $H = \pi_\beta(x)$, nous noterons également

$$\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(m) = \mathcal{S}_{\alpha,\beta}(m, H) \text{ et } \mathcal{S}_{\beta,\alpha}(H) = \mathcal{S}_{\beta,\alpha}(m, H).$$

Les projections π_α et π_β étant des fibrés de fibre $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$, il est clair que $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(x)$ et $\mathcal{S}_{\beta,\alpha}(x)$ sont des hypersurfaces compactes. Ces dernières peuvent également être décrites de la manière suivante :

$$\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(x) = \cup_{y \in \mathcal{C}_\alpha(x)} \mathcal{C}_\beta(x) \text{ et } \mathcal{S}_{\beta,\alpha}(x) = \cup_{y \in \mathcal{C}_\beta(x)} \mathcal{C}_\alpha(y).$$

Notons que $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(x)$ ne peut être tangente à $\mathcal{E}_\alpha \oplus \mathcal{E}_\beta$ car cette dernière est une distribution de contact. On vérifie plus précisément que $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(x)$ n'est tangente à $\mathcal{E}_\alpha \oplus \mathcal{E}_\beta$ que le long de $\mathcal{C}_\alpha(x)$. De même pour $\mathcal{S}_{\beta,\alpha}(x)$, qui ne l'est que le long de $\mathcal{C}_\beta(x)$. De plus, ni les surfaces α - β ni les surfaces β - α ne forment un feuilletage de $\mathbf{X}_{2n+1}$. Deux points ont par exemple la même surface α - β si et seulement si ils sont sur la même feuille α , donc si $y \in \mathcal{S}_{\alpha,\beta}(x) \setminus \mathcal{C}_\alpha(x)$, alors $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(x) \neq \mathcal{S}_{\alpha,\beta}(y)$ bien que ces deux surfaces soient non-disjointes car elles contiennent toutes deux y (il en va de même pour $\mathcal{S}_{\beta,\alpha}(x)$ et $\mathcal{S}_{\beta,\alpha}(y)$ si $y \in \mathcal{S}_{\beta,\alpha}(x) \setminus \mathcal{C}_\beta(x)$). Nous préciserons au paragraphe 2.2.4 les différentes intersections possibles entre surfaces α - β et β - α .

Enfin, les intersections des feuilles α et β s'interprètent aisément en fonction des hypersurfaces α - β et β - α . Soit x et y dans $\mathbf{X}_{2n+1}$, et notons $m = \pi_\alpha(x) \in \mathbb{RP}^{n+1}$ et $H = \pi_\beta(y) \in \mathbb{RP}_*^{n+1}$. Si $\mathcal{C}_\alpha(x)$ et $\mathcal{C}_\beta(y)$ sont non-disjointes, alors leur intersection est égale au point (m, H) . On en déduit donc les équivalences suivantes.

$$\mathcal{C}_\alpha(x) \cap \mathcal{C}_\beta(y) \neq \emptyset \iff m \in H \iff y \in \mathcal{S}_{\alpha,\beta}(x) \iff x \in \mathcal{S}_{\beta,\alpha}(y)$$

Plaçons nous dans l'espace modèle $\mathbf{X} = \mathbf{X}_3$ de dimension trois. Les distributions α et β de $\mathcal{L}_\mathbf{X}$ définissent sur toute surface α - β (respectivement β - α) S de $\mathbf{X}$ une distribution de dimension un, ce qui montre que S est de genre 1 selon le théorème de Poincaré-Hopf. Puisque S est par ailleurs compacte et connexe, elle est donc homéomorphe à un tore si elle est orientable, et à une bouteille de Klein si elle est non-orientable.

Lemme 2.2.3. *Les surfaces α - β et β - α de $\mathbf{X}$ ne sont pas orientables, et sont donc homéomorphes à des bouteilles de Klein.*

Démonstration. Nous le prouvons uniquement pour les surfaces α - β , l'argument étant analogue pour les surfaces β - α . De plus il suffit par $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ -invariance de le prouver pour la surface $S = \mathcal{S}_{\alpha,\beta}(o)$, où $o = ([e_1], [e_1, e_2])$. Une variété M est orientable si et seulement si l'orientation est préservée le long de tout lacet au sens suivant. Si $\gamma: [0; 1] \rightarrow M$ est un lacet de M basé en p , alors pour toute orientation ε de $T_p M$ il existe un unique choix continu $(\varepsilon_t)_t$ d'orientations le long de γ tel que $\varepsilon_0 = \varepsilon$. On dit que γ *préserve l'orientation* si pour toute orientation ε de $T_p M$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_1$. Soit $\alpha: [0; 1] \rightarrow \mathcal{C}_\alpha(o)$ un lacet lisse basé en o , injectif sur $[0; 1]$, et régulier (i.e. tel que $\gamma'(t)$ ne s'annule pas). Soit $\beta: [0; 1] \rightarrow \mathcal{C}_\beta(o)$ un paramétrage injectif lisse et régulier de $\mathcal{C}_\beta(o)$, correspondant au parcours de $\mathcal{C}_\beta(o) \equiv [e_1, e_2]$ dans le sens trigonométrique positif. Soit ε l'orientation de $T_o S$ définie par la base ordonnée $(\alpha'(0), \beta'(0))$, et $(\varepsilon_t)_t$ l'unique orientation continue de S le long de α partant de ε en $t = 0$. L'orientation ε_1 de $T_o S$ ainsi que l'orientation de $\mathcal{C}_\alpha(o)$ définie par $\alpha'(1)$ définissent une orientation de $\mathcal{C}_\beta(o) \equiv [e_1, e_2]$, dont on vérifie facilement qu'elle correspond au parcours de $[e_1, e_2]$ dans le sens trigonométrique négatif. En d'autres termes, $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_0$ donc α ne préserve pas l'orientation, ce qui montre que S est non-orientable. $\square$

Nous décrivons maintenant les stabilisateurs dans $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ des différents objets géométriques rencontrés dans $\mathbf{X}_{2n+1}$.

Lemme 2.2.4. *Pour $x = (m, H) \in \mathbf{X}_{2n+1}$, $\mathrm{Stab}(\mathcal{C}_\alpha(x)) = \mathrm{Stab}(\mathcal{S}_{\beta,\alpha}(x)) = \mathrm{Stab}(m)$, et $\mathrm{Stab}(\mathcal{C}_\beta(x)) = \mathrm{Stab}(\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(x)) = \mathrm{Stab}(H)$. De plus, $\pi_\beta|_{\mathcal{C}_\alpha(x)}$ est un difféomorphisme de $\mathcal{C}_\alpha(x)$ sur m^* équivariant pour l'action de $\mathrm{Stab}(m)$, et $\pi_\alpha|_{\mathcal{C}_\beta(x)}$ est un difféomorphisme de $\mathcal{C}_\beta(x)$ sur H équivariant pour l'action de $\mathrm{Stab}(H)$. En particulier pour $x = o$,*

$$\mathrm{Stab}(\mathcal{C}_\alpha(o)) = \left\{ \begin{bmatrix} a & X \\ 0 & B \end{bmatrix} \right\} \text{ et } \mathrm{Stab}(\mathcal{C}_\beta(o)) = \left\{ \begin{bmatrix} A & X \\ 0 & b \end{bmatrix} \right\},$$

et les noyaux de leurs actions respectives sur $\mathcal{C}_\alpha(o)$ et $\mathcal{C}_\beta(o)$ sont

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & X \\ 0 & \mathrm{id} \end{bmatrix} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{bmatrix} \mathrm{id} & X \\ 0 & b \end{bmatrix} \right\}. \quad (2.2.3)$$

Démonstration. L'égalité $\mathrm{Stab}(\mathcal{S}_{\beta,\alpha}(x)) = \mathrm{Stab}(H)$ est immédiate. Il est clair que $\mathrm{Stab}(m) \subset \mathrm{Stab}(\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(x))$, et pour prouver l'inclusion réciproque nous considérons $n+1$ hyperplans projectifs $H_1^0, \dots, H_{n+1}^0$ tels que $\cap_i H_i^0 = m$. Soit $g \in \mathrm{Stab}(\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(x))$. Pour tout i , $m \in H_i^0$ donc $m \in g \cdot H_i^0$, d'où $\cap_i g \cdot H_i^0 = m$. Ainsi $g \cdot m \in \cap_i g \cdot H_i^0 = m$, i.e. $g \in \mathrm{Stab}(m)$, et $\mathrm{Stab}(\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(x)) = \mathrm{Stab}(m)$. Le reste des affirmations résulte de calculs directs. $\square$

2.2.2 Application duale

Dans notre définition de structure Lagrangienne de contact, l'ordre des deux distributions compte, mais nous pourrions définir une notion de *structure Lagrangienne de contact faible*, définie par une paire non-ordonnée $\mathcal{L}_{faible} = \{E^\alpha, E^\beta\}$ induite par une structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L} = (E^\alpha, E^\beta)$. Ces deux structures diffèrent peu, en particulier du point de vue de leurs automorphismes. En effet, s'il existe un difféomorphisme échangeant E^α et E^β , alors le groupe d'automorphismes de $\mathcal{L}$ est d'indice deux dans celui de $\mathcal{L}_{faible}$. C'est le cas pour l'espace modèle. Nous munissons $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique, par rapport auquel nous prenons les orthogonaux.

Définition 2.2.5. Le difféomorphisme suivant entre l'espace projectif et son dual

$$\tau: m \in \mathbb{RP}^{n+1} \mapsto [m^\perp] \in \mathbb{RP}_*^{n+1} \quad (2.2.4)$$

sera appelé l'*application duale de $\mathbb{RP}^{n+1}$* , sa réciproque est $\tau^{-1}: H \mapsto H^\perp$. L'involution

$$\kappa: (m, H) \in \mathbf{X}_{2n+1} \mapsto (\tau^{-1}(H), \tau(m)) \in \mathbf{X}_{2n+1} \quad (2.2.5)$$

sera appelée l'*application duale de $\mathbf{X}_{2n+1}$* .

L'application duale échange les distributions α et β de la structure Lagrangienne de contact standard de $\mathbf{X}_{2n+1}$. Plus précisément pour $x \in \mathbf{X}_{2n+1}$, $\kappa(\mathcal{C}_\alpha(x)) = \mathcal{C}_\beta(\kappa(x))$, $\kappa(\mathcal{C}_\beta(x)) = \mathcal{C}_\alpha(\kappa(x))$, $\kappa(\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(x)) = \mathcal{S}_{\beta,\alpha}(\kappa(x))$ et $\kappa(\mathcal{S}_{\beta,\alpha}(x)) = \mathcal{S}_{\alpha,\beta}(\kappa(x))$.

Remarque 2.2.6. Tout hyperplan projectif dual est l'image par l'application duale d'un hyperplan projectif. Plus précisément pour tout $H \in \mathbb{RP}_*^{n+1}$, $\tau(H) = (\tau^{-1}(H))^*$.

Pour $g \in \mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}^{n+2}$, $(g \cdot v)^\perp = (g^*)^{-1} \cdot (v^\perp)$, avec $g^* = {}^t g$ l'endomorphisme adjoint de g . Par suite, τ et κ sont toutes deux équivariantes pour le morphisme involutif

$$\Theta: g \in \mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R}) \mapsto {}^t g^{-1} \in \mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R}), \quad (2.2.6)$$

unique morphisme de $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ dont la différentielle en l'identité est l'involution de Cartan

$$M \in \mathfrak{sl}_{n+2} \mapsto -{}^t M \in \mathfrak{sl}_{n+2}. \quad (2.2.7)$$

2.2.3 Chaînettes de l'espace modèle

Nous définissons maintenant dans toute direction transverse à la distribution de contact $\mathcal{E}_\alpha \oplus \mathcal{E}_\beta$ une courbe distinguée dans $\mathbf{X}_{2n+1}$, que nous appellerons *chaînette* et dont la description géométrique est la suivante. Si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n+2}$ de codimension k , alors sa projection $[V]$ dans $\mathbb{RP}^{n+1}$ est appelée *sous-espace projectif de codimension k* . Soient $x = (m, H) \in \mathbf{X}_{2n+1}$, ainsi que

- D une droite projective de $\mathbb{RP}^{n+1}$ contenant m et non contenue dans H ,
- et K un sous-espace projectif de codimension deux de $\mathbb{RP}^{n+1}$ contenu dans H ,

tels que $D \cap K = \emptyset$.

Définition 2.2.7. L'ensemble des hyperplans projectifs contenant K et pointés sur D sera noté

$$\mathcal{C}_{D,K} = \{(p, [p, K]) \mid p \in D\} \subset \mathbf{X}_{2n+1}, \quad (2.2.8)$$

et appelé la *chaînette définie par D et K* .

Pour tout $p \in D$, avec $K^0 \subset \mathbb{R}^{n+2}$ le sous-espace vectoriel de codimension deux tel que $K = [K^0]$, on a noté $[p, K] = [p, K^0]$. Puisque $D \cap K = \emptyset$, $[p, K]$ est bien un hyperplan projectif, donc $\mathcal{C}_{D,K}$ est bien définie. L'application $p \in D \mapsto (p, [p, K]) \in \mathbf{X}_{2n+1}$ étant continue, $\mathcal{C}_{D,K}$ est un cercle topologique plongé dans $\mathbf{X}_{2n+1}$. Par ailleurs, puisque $m \in D$ et $K \subset H$, $x \in \mathcal{C}_{D,K}$. Enfin, D n'étant pas contenue dans H , $D \cap H = \{m\}$ et donc $\mathcal{C}_{D,K} \cap \mathcal{C}_\beta(x) = \{x\} = \mathcal{C}_{D,K} \cap \mathcal{C}_\alpha(x)$.

Exemple 2.2.8. Dans le cas de la dimension trois, les chaînettes de $\mathbf{X} = \mathbf{X}_3$ sont les cercles de la forme

$$\mathcal{C}_{D,m} = \{(p, [p, m]) \mid p \in D\},$$

avec D une droite projective de $\mathbb{RP}^2$ et $m \in \mathbb{RP}^2 \setminus D$.

Notons $\mathcal{C}_0$ la chaînette de $\mathbf{X}_{2n+1}$ définie par $D_0 = [e_1, e_{n+2}]$ et $K_0 = [e_2, \dots, e_{n+1}]$. Pour tout couple (D, K) , où D est une droite projective disjointe d'un sous-espace projectif K de codimension deux, il existe $g \in \mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ tel que $g \cdot D_0 = D$ et $g \cdot K_0 = K$, *i.e.* envoyant $\mathcal{C}_0$ sur $\mathcal{C}_{D,K}$. Analysons maintenant plus précisément le cas de la chaînette $\mathcal{C}_0$. Il existe deux hyperplans projectifs H_1 et H_2 tels que $H_1 \cap H_2 = K_0$, et si $g \in \mathrm{Stab}(\mathcal{C}_0)$, alors $g \cdot K_0 = g \cdot H_1 \cap g \cdot H_2$ est un sous-espace projectif de codimension deux contenant K_0 , *i.e.* $g \cdot K_0 = K_0$. Puisque g stabilise également D_0 , on obtient finalement :

$$\mathrm{Stab}(\mathcal{C}_0) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & A & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}^*, A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \right\}. \quad (2.2.9)$$

On envoie $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{Stab}(\mathcal{C}_0)$ à travers les morphismes suivants :

$$\varphi: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & I_n & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix}, \phi: A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2.10)$$

Alors $K := \phi(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ est le noyau de l'action de $\mathrm{Stab}(\mathcal{C}_0)$ sur $\mathcal{C}_0$, et puisque $\varphi(\lambda M)\phi(\lambda \mathrm{id}) = \varphi(M)$ dans $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$, φ passe au quotient en un plongement de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{Stab}(\mathcal{C}_0)/K$, ce qui définit en particulier une action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{C}_0$. En identifiant $\mathbb{RP}^1$ à D_0 via $[x : y] \mapsto [x : 0 : \dots : 0 : y]$, la carte $p \in \mathbb{RP}^2 \mapsto (p, [p, K_0])$ est $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ -équivariante pour cette action.

Nous décrivons maintenant des paramétrages spécifiques des chaînettes, qui nous permettent en particulier de montrer l'existence d'une chaînette dans chaque direction transverse à la distribution de contact $\mathcal{E}_\alpha \oplus \mathcal{E}_\beta$. Rappelons que $\mathbf{X}_{2n+1}$ est identifié à $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})/\mathbf{P}_{n+2}$ par l'application orbitale

$$\overline{\theta}_o: g\mathbf{P}_{n+2} \in \mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})/\mathbf{P}_{n+2} \mapsto g \cdot o \in \mathbf{X}_{2n+1}$$

en o , et que $T_o\mathbf{X}_{2n+1}$ est donc identifié à $\mathfrak{sl}_{n+2}/\mathfrak{p}_{n+2}$ par $D_{\mathbf{P}_{n+2}}\overline{\theta}_o$. Par conséquent pour $p \in \mathbf{P}_{n+2}$, l'action de $D_o L_p$ sur $T_o\mathbf{X}_{2n+1}$ correspond à celle de $\overline{\mathrm{Ad}}(p)$ sur $\mathfrak{sl}_{n+2}/\mathfrak{p}_{n+2}$. Nous posons

$$e_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_{n+2},$$

i.e. $e_0 = [0, 0, 1]$ avec la notation (2.1.4), et nous notons $\gamma_0: t \in \mathbb{R} \mapsto \theta_o(\exp(te_0)) \in \mathbf{X}_{2n+1}$ et $o' = ([e_{n+2}], [e_2, \dots, e_{n+2}]) \in \mathcal{C}_0$.

Proposition 2.2.9. 1. Soit $p \in \mathbf{P}_{n+2}$. Alors $t \in \mathbb{R} \mapsto p\gamma_0(t)$ est un paramétrage de la chaînette $\mathcal{C} = p \cdot \mathcal{C}_0$ privée de $p \cdot o'$, que l'on appellera paramétrage projectif de $\mathcal{C}$.

2. Pour tout $x \in \mathbf{X}_{2n+1}$ et $l \in \mathbf{P}(T_o\mathbf{X}_{2n+1}) \setminus (\mathcal{E}_\alpha(x) \oplus \mathcal{E}_\beta(x))$ une direction tangente en dehors de la distribution de contact, il existe une unique chaînette de $\mathbf{X}_{2n+1}$ passant par x et tangente à l .

3. Pour tout $p \in \mathbf{P}_{n+2}$, si $\overline{\mathrm{Ad}}(p) \cdot \mathbb{R}\overline{e}_0 = \mathbb{R}\overline{e}_0$ alors il existe $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $p\gamma_0(t) = \gamma_0(\frac{at}{1+bt})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $1+bt \neq 0$.

Démonstration. 1. Un calcul immédiat montre en effet que $\gamma_0(\mathbb{R}) = \mathcal{C}_{D_0, K_0} \setminus \{o'\}$.

2. L'action de $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ sur $\mathbf{X}_{2n+1}$ étant transitive, il suffit de le prouver pour $x = o$. Selon la première partie de la proposition, $\mathcal{C}_0$ est tangente en o à $l_0 = \mathbb{R}\overline{e}_0$ qui est transverse à la distribution de contact, donc toute chaînette reste transverse à la distribution de contact en

o car cette dernière est préservée par l'action de $\mathbf{P}_{n+2}$. De plus le calcul (2.1.6) de l'action adjointe de $\mathbf{P}_{n+2}$ nous montre que $\mathbf{P}_{n+2}$ agit transitivement sur les directions de $\mathfrak{sl}_{n+2}/\mathfrak{p}_{n+2}$ non contenues dans l'image de $\mathfrak{g}_{-1}^\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-1}^\beta$ dans $\mathfrak{sl}_{n+2}/\mathfrak{p}_{n+2}$. La première partie de la proposition implique alors qu'il existe une chaînette tangente à toute direction transverse, et il nous suffit de montrer son unicité pour la direction l_0 . Soit $\mathcal{C}$ une chaînette tangente à l_0 en o , et $p \in \mathbf{P}_{n+2}$ tel que $\mathcal{C} = p \cdot \mathcal{C}_0$. Alors selon la première partie de la proposition, $\overline{\text{Ad}}(p) \cdot l_0 = l_0$, donc selon (2.1.6), p est de la forme

$$p = \begin{pmatrix} a & 0 & z \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad (2.2.11)$$

avec $a, c \in \mathbb{R}^*$, $B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{R}$. Ceci montre que p stabilise D_0 et K_0 , et donc que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$.

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $p\gamma_0(t) = \theta_o(\exp(t \text{Ad}(p) \cdot e_0))$. Puisque $\overline{\text{Ad}}(p) \cdot l_0 = l_0$, p est de la forme (2.2.11), et on en déduit que

$$\text{Ad}(p) \cdot e_0 = \begin{pmatrix} a^{-1}z & 0 & -a^{-1}c^{-1}z^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ a^{-1}c & 0 & -a^{-1}z \end{pmatrix},$$

et donc que

$$\exp(t \text{Ad}(p) \cdot e_0) = \begin{bmatrix} 1 + ta^{-1}z & 0 & -ta^{-1}c^{-1}z^2 \\ 0 & I_n & 0 \\ ta^{-1}c & 0 & 1 - ta^{-1}z \end{bmatrix}.$$

On vérifie alors que pour $t \in \mathbb{R}$ tel que $1 + ta^{-1}z \neq 0$, $\exp(t \text{Ad}(p) \cdot e_0) = \exp(\frac{ta^{-1}c}{1+ta^{-1}z}e_0)p(t)$, où $p(t)$ est la courbe de P définie pour $t \in \mathbb{R}$ tel que $1 + ta^{-1}z \neq 0$ par

$$p(t) = \begin{bmatrix} 1 + ta^{-1}z & 0 & -ta^{-1}c^{-1}z^2 \\ 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+ta^{-1}z} \end{bmatrix}.$$

Par suite pour $t \in \mathbb{R}$ tel que $1 + ta^{-1}z \neq 0$, $p\gamma_0(t) = \theta_o(\exp(\frac{ta^{-1}c}{1+ta^{-1}z}e_0)) = \gamma_0(\frac{At}{1+Bt})$ avec $A = a^{-1}c \in \mathbb{R}^*$ et $B = a^{-1}z \in \mathbb{R}$. $\square$

Ces chaînettes jouent un rôle important dans l'étude des structure Lagrangiennes de contact. Nous verrons en effet au paragraphe 4.3.2 du chapitre 4 que la géométrie de Cartan normale associée à une structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}$ sur une variété M permet de faire un lien entre les courbes de M et celles de l'espace homogène modèle $\mathbf{X}_{2n+1}$, et de rapatrier les chaînettes du modèle en une famille de courbes de M . On obtiendra en tout point $x \in M$, et pour toute direction tangente transverse à la distribution de contact, une unique chaînette passant par x dans la direction l . L'analyse de ces courbes sera plus aisée que celles des feuilles α et β , qui sont de dimension supérieure à un au delà de la dimension trois.

2.2.4 Configurations des surfaces α - β et β - α en dimension trois

Aux chapitres 5 et 6, nous travaillerons exclusivement dans l'espace modèle $\mathbf{X}$ de dimension trois, et il nous sera utile de comprendre les différentes intersections possibles entre les objets géométriques de $\mathbf{X}$.

Tout d'abord, un cercle alpha $\mathcal{C}_\alpha(x)$ et un cercle beta $\mathcal{C}_\beta(y)$ sont non-disjoints si, et seulement si $x \in \mathcal{S}_{\beta,\alpha}(y)$ (ce qui est équivalent à $y \in \mathcal{S}_{\beta,\alpha}(x)$, ou encore à $\pi_\alpha(x) \in \pi_\beta(y)$), et dans ce cas ils s'intersectent selon un point.

Toute surface α - β $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$ contient intégralement un unique cercle alpha $\mathcal{C}_\alpha$ que nous appellerons *âme* de $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$, et qui vérifie $\mathcal{S}_{\alpha,\beta} = \cup_{x \in \mathcal{C}_\alpha} \mathcal{C}_\beta(x)$. L'intersection de $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$ avec tout autre cercle α

est un point. Un cercle β est pour sa part soit intégralement contenu dans $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$ (s'il intersecte son âme), soit disjoint de $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$ (s'il est disjoint de son âme). De manière analogue, toute surface β - α $\mathcal{S}_{\beta,\alpha}$ contient intégralement un unique cercle β qui est son âme (vérifiant $\mathcal{S}_{\beta,\alpha} = \cup_{x \in \mathcal{C}_\beta} \mathcal{C}_\alpha(x)$), et son intersection avec tout autre cercle β est un point, alors qu'un cercle α est soit intégralement contenu dans $\mathcal{S}_{\beta,\alpha}$, soit disjoint de $\mathcal{S}_{\beta,\alpha}$.

Deux surfaces indifféremment α - β ou β - α s'intersectent toujours. Plus précisément, deux surfaces α - β (respectivement β - α) non confondues s'intersectent selon un cercle β (resp. α). L'intersection entre une surface α - β $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(x)$ et une surface β - α $\mathcal{S}_{\beta,\alpha}(y)$ est plus intéressante car deux cas sont possibles. Le cas *générique* est celui où $x \notin \mathcal{S}_{\beta,\alpha}(y)$ (i.e. $y \notin \mathcal{S}_{\alpha,\beta}(x)$, ou encore $\pi_\alpha(x) \notin \pi_\beta(y)$). Dans ce cas $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(x) \cap \mathcal{S}_{\beta,\alpha}(y)$ est une *chaînette* de $\mathbf{X}$ (qui est égale à $\mathcal{C}_{\pi_\beta(y), \pi_\alpha(x)}$, voir l'exemple 2.2.8). Le cas où $x \in \mathcal{S}_{\beta,\alpha}(y)$ est en quelque sorte un cas *dégénéré*. Dans ce cas en effet, $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(x) \cap \mathcal{S}_{\beta,\alpha}(y)$ n'est pas une sous-variété car elle est l'union d'un cercle α et d'un cercle β (qui sont respectivement l'âme de $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(x)$ et celle de $\mathcal{S}_{\beta,\alpha}(y)$) qui s'intersectent selon le point $(\pi_\alpha(x), \pi_\beta(y)) \in \mathcal{S}_{\alpha,\beta}(x) \cap \mathcal{S}_{\beta,\alpha}(y)$.

Remarque 2.2.10. Puisque l'action de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ préserve la relation $m \in D$, les deux types différents de couples $(\mathcal{S}_{\alpha,\beta}, \mathcal{S}_{\beta,\alpha})$ que nous venons de décrire, respectivement génériques ou dégénérés, sont préservés par l'action de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$. Plus précisément, l'action de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ est *transitive* sur l'ensemble des couples $(\mathcal{S}_{\alpha,\beta}, \mathcal{S}_{\beta,\alpha})$ de type générique, ainsi que sur l'ensemble des couples de type dégénéré (car elle est transitive sur $(\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}_*^2) \setminus \mathbf{X}$, ainsi que sur $\mathbf{X}$).

2.3 Quelques ouverts homogènes de l'espace modèle

Une manière naturelle d'obtenir des ouverts de $\mathbf{X}_{2n+1}$ « assez symétriques », i.e. admettant un stabilisateur dans $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ qui soit au moins non trivial et peut-être particulièrement intéressant, est de retirer à $\mathbf{X}_{2n+1}$ certaines des hypersurfaces α - β et β - α que nous avons définies précédemment. Dans les deux derniers paragraphes de ce chapitre, nous allons étudier la géométrie de certains ouverts de $\mathbf{X}_{2n+1}$ obtenu de cette manière. Notre objectif est entre autres d'interpréter ces ouverts comme les structures Lagrangiennes de contact associées à certaines variétés Riemanniennes à courbure constante.

Rappelons que pour toute variété Riemannienne N , nous avons défini au paragraphe 1.3.2 du chapitre 1 une structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}_N$ sur le fibré $\mathrm{Gr}_n(N)$ des Grassmanniennes des hyperplans tangents à N .

2.3.1 Espace des hyperplans affines pointés

L'espace des droites affines pointées de $\mathbb{R}^2$ défini au chapitre 1 (voir définition 1.1.6) se généralise naturellement en dimension quelconque de la manière suivante.

Définition 2.3.1. Nous notons $\mathbf{X}_{2n+1}^a$ l'*espace des hyperplans affines pointés* (p, H) de $\mathbb{R}^{n+1}$ (où $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est un hyperplan affine et $p \in H$). Nous le munissons de la structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_{2n+1}^a}$ dont les distributions sont intégrables, et dont les feuilles α et β de $(p, H) \in \mathbf{X}_{2n+1}^a$ sont décrites de la manière suivante :

$$\mathcal{F}^\alpha(p, H) = \{(p, K) \mid K \ni p\} \text{ et } \mathcal{F}^\beta(p, H) = \{(q, H) \mid q \in H\}.$$

Pour $A \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $V \in \mathbb{R}^{n+1}$, nous notons $A+V$ la transformation affine $X \mapsto A(X) + V$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Sauf mention explicite du contraire, nous interprétons toujours le groupe $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^{n+1})$ des transformations affines de $\mathbb{R}^{n+1}$ comme un sous-groupe de $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ à travers le plongement

$$j: A + V \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^{n+1}) \mapsto \begin{bmatrix} A & V \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R}), \quad (2.3.1)$$

de sorte que $\text{Aff}(\mathbb{R}^{n+1}) \equiv j(\text{Aff}(\mathbb{R}^{n+1}))$ est le stabilisateur dans $\text{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ de l'hyperplan projectif

$$\mathcal{H} := [e_1, \dots, e_{n+1}] \subset \mathbb{RP}^{n+1}.$$

Proposition 2.3.2. 1. L'espace $(\mathbf{X}_{2n+1}^a, \mathcal{L}_{\mathbf{X}_{2n+1}^a})$ s'identifie d'une part à $(\text{Gr}_n(\mathbb{R}^{n+1}), \mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n+1}})$, et d'autre part à l'ouvert $\mathbf{X}_{2n+1} \setminus \mathcal{S}_{\beta, \alpha}(\mathcal{H})$ de $\mathbf{X}_{2n+1}$ de manière $\text{Aff}(\mathbb{R}^{n+1})$ -équivariante.
2. De plus, $\mathbf{X}_{2n+1} \setminus \mathcal{S}_{\beta, \alpha}(\mathcal{H})$ est homogène sous l'action de $\text{Aff}(\mathbb{R}^{n+1})$, dont les deux autres orbites dans $\mathbf{X}_{2n+1}$ sont $\mathcal{C}_{\beta}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{S}_{\beta, \alpha}(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{C}_{\beta}(\mathcal{H})$.

Démonstration. 1. L'application $(p, H) \in \mathbf{X}_{2n+1}^a \mapsto T_p H \in \text{Gr}_n(T_x \mathbb{R}^{n+1})$ est un difféomorphisme, dont on vérifie facilement qu'il envoie $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_{2n+1}^a}$ sur $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n+1}}$. Nous identifions $\mathbb{R}^{n+1}$ à $\mathbb{RP}^{n+1} \setminus \mathcal{H}$ de manière j -équivariante à travers la carte affine

$$J: (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto [x_1 : \dots, x_{n+1} : 1] \in \mathbb{RP}^{n+1} \setminus \mathcal{H}, \quad (2.3.2)$$

par laquelle les hyperplans affines de $\mathbb{R}^{n+1}$ correspondent aux hyperplans projectifs de $\mathbb{RP}^{n+1}$ distincts de $\mathcal{H}$ (notons qu'en identifiant $\mathcal{H}^a := \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n+1}) + e_{n+2}$ à $\mathbb{R}^{n+1}$ par translation, on a $J(m \cap \mathcal{H}^a) = m$ pour tout $m \in \mathbb{RP}^{n+1} \setminus \mathcal{H}$). Ceci induit un plongement j -équivariant $(p, H) \mapsto (J(p), J(H))$ de $\mathbf{X}_{2n+1}^a$ dans $\mathbf{X}_{2n+1}$ que nous notons encore J , et dont l'image est l'ouvert $\pi_{\alpha}^{-1}(\mathbb{RP}^{n+1} \setminus \mathcal{H}) = \mathbf{X}_{2n+1} \setminus \mathcal{S}_{\beta, \alpha}(\mathcal{H})$ de $\mathbf{X}_{2n+1}$. Par construction, J envoie les feuilletages α et β de $\mathbf{X}_{2n+1}^a$ sur ceux de $\mathbf{X}_{2n+1}$, i.e. est un isomorphisme de $\mathbf{X}_{2n+1}^a$ sur $\mathbf{X}_{2n+1}$.

2. L'action de $\text{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{RP}^n$ étant transitive, $\mathcal{C}_{\beta}(\mathcal{H})$ est bien une orbite de $\text{Aff}(\mathbb{R}^{n+1})$. Pour prouver que $\mathcal{S}_{\beta, \alpha}(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{C}_{\beta}(\mathcal{H})$ est une orbite de $\text{Aff}(\mathbb{R}^{n+1})$, il faut vérifier que $\text{Stab}_{\text{Aff}(\mathbb{R}^{n+1})}([e_1])$ agit transitivement sur les hyperplans projectifs contenant $[e_1]$ et distincts de $\mathcal{H}$. Via J , ceux-ci correspondent aux hyperplans affines de $\mathbb{R}^{n+1}$ contenant $[e_1]$, et quitte à faire agir les translations, on peut se restreindre aux hyperplans vectoriels. Or $\text{Stab}_{\text{GL}_{n+1}(\mathbb{R})}([e_1])$ agit transitivement sur les hyperplans vectoriels contenant $[e_1]$, donc $\mathcal{S}_{\beta, \alpha}(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{C}_{\beta}(\mathcal{H})$ est bien une orbite de $\text{Aff}(\mathbb{R}^{n+1})$. Enfin, $J(\mathbf{X}_{2n+1}^a)$ est une orbite de $\text{Aff}(\mathbb{R}^{n+1})$ car $\text{Aff}(\mathbb{R}^{n+1})$ agit transitivement sur $\mathbf{X}_{2n+1}^a$. $\square$

Nous identifierons toujours $\mathbf{X}_{2n+1}^a$ à l'ouvert $\mathbf{X}_{2n+1} \setminus \mathcal{S}_{\beta, \alpha}(\mathcal{H})$ par le plongement

$$J: \mathbf{X}_{2n+1}^a \rightarrow \mathbf{X}_{2n+1}$$

décrit dans la preuve ci-dessus, et tous les ouverts de $\mathbf{X}_{2n+1}$ que nous allons étudier seront contenus dans $\mathbf{X}_{2n+1}^a \equiv \mathbf{X}_{2n+1} \setminus \mathcal{S}_{\beta, \alpha}(\mathcal{H})$.

Notons que la description que nous avons faite pourrait évidemment être transposée pour n'importe quel hyperplan projectif $\mathcal{K}$. Le stabilisateur de $\mathcal{K}$ dans $\text{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ est conjugué à $\text{Aff}(\mathbb{R}^{n+1})$, et cette conjugaison définit une action de $\text{Aff}(\mathbb{R}^{n+1})$ sur $\mathbf{X}_{2n+1}$ qui a pour orbites $\mathcal{C}_{\beta}(\mathcal{K})$, $\mathcal{S}_{\beta, \alpha}(\mathcal{K}) \setminus \mathcal{C}_{\beta}(\mathcal{K})$ ainsi que l'orbite ouverte $\mathbf{X} \setminus \mathcal{S}_{\beta, \alpha}(\mathcal{K})$. La structure obtenue en retirant à $\mathbf{X}_{2n+1}$ une surface β - α est donc celle de $\mathbf{X}_{2n+1}^a$, à conjugaison près par $\text{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$.

2.3.2 Ouvert de type Lorenzien

Nous notons $\mathbb{R}^{1, n+1}$ et appelons *espace de Minkowski* l'espace $\mathbb{R}^{n+2}$ muni de la forme quadratique Lorentzienne $q^{1, n+1}(x_1, \dots, x_{n+2}) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 - x_{n+2}^2$. Nous utilisons le modèle projectif de Klein pour l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^{n+1}$, que nous identifions donc à l'ouvert $[q^{1, n+1} < 0] \subset \mathbb{RP}^{n+1}$ des droites de type temps de $\mathbb{R}^{1, n+1}$, contenu dans $\mathbb{RP}^{n+1} \setminus \mathcal{H}$. Dans ce modèle, le groupe des isométries de $\mathbf{H}^{n+1}$ préservant son orientation est égal à la composante neutre $\text{SO}^0(1, n+1)$ de $\text{Stab}_{\text{GL}_{n+2}(\mathbb{R})}(q^{1, n+1})$.

Proposition 2.3.3. L'espace $(\text{Gr}_n(\mathbf{H}^{n+1}), \mathcal{L}_{\mathbf{H}^{n+1}})$ est naturellement isomorphe à l'ouvert de type Lorentzien $\mathbf{Y}_{\mathbf{L}} := \pi_{\alpha}^{-1}(\mathbf{H}^{n+1})$ de $\mathbf{X}_{2n+1}$, qui est homogène sous l'action de $\text{SO}^0(1, n+1)$ et contenu dans $\mathbf{X}_{2n+1}^a \equiv \mathbf{X}_{2n+1} \setminus \mathcal{S}_{\beta, \alpha}(\mathcal{H})$.

Démonstration. Les géodésiques de $\mathbf{H}^{n+1}$ dans le modèle projectif de Klein sont des segments de droites projectives. Par suite, le difféomorphisme $(m, H) \in \mathbf{X}_{2n+1} \mapsto T_m H \in \text{Gr}_n(\mathbb{RP}^{n+1})$ se restreint en une identification $\text{SO}^0(1, n+1)$ -équivariante de $Y_{\mathbf{L}} = \pi_{\alpha}^{-1}([q^{1,n+1} < 0]) \subset \mathbf{X}_{2n+1}$ avec $\text{Gr}_n(\mathbf{H}^{n+1})$, qui envoie $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_{2n+1}}$ sur $\mathcal{L}_{\mathbf{H}^n}$. Puisque l'action de $\text{SO}^0(1, n+1)$ sur $\text{Gr}_n(\mathbf{H}^{n+1})$ est transitive, elle est donc transitive sur $Y_{\mathbf{L}}$. Enfin, puisque $[q^{1,n+1} < 0] \subset \mathbb{RP}^{n+1} \setminus \mathcal{H}$, il est clair que $Y_{\mathbf{L}} \subset \mathbf{X}_{2n+1} \setminus \mathcal{S}_{\beta, \alpha}(\mathcal{H})$. $\square$

Dans le cas particulier de la dimension trois, l'action de $\text{SO}^0(1, 2)$ sur $T^1\mathbf{H}^2$ est simplement transitive, et $(T^1\mathbf{H}^2, \mathcal{L}_{\mathbf{H}^2})$ est un revêtement double de $Y_{\mathbf{L}}$.¹ Il est de plus possible de décrire précisément les autres orbites de $\text{SO}^0(1, 2)$ dans $\mathbf{X}$ (voir par exemple [Bar10, Remark 3.17 p.169]). En particulier, on remarque facilement que $Y_{\mathbf{L}}$ n'est pas la seule orbite ouverte de $\text{SO}^0(1, 2)$, *i.e.* que $\mathbf{X} \setminus Y_{\mathbf{L}}$ est d'intérieur non-vide.

2.3.3 Ouvert de type tore

Dans ce paragraphe, nous travaillons exclusivement dans l'espace modèle $\mathbf{X} = \mathbf{X}_3$ de dimension 3. Nous utilisons le travail fait au paragraphe 2.3.1, en voyant $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ comme un sous-groupe de $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$ via le plongement j (voir (2.3.1)), et en identifiant $\mathbf{X} \setminus \mathcal{S}_{\beta, \alpha}[e_1, e_2]$ à l'espace $\mathbf{X}^a$ des droites affines pointées de $\mathbb{R}^2$ via J (voir proposition 2.3.2). L'intersection $\mathcal{S}_{\beta, \alpha}[e_1, e_2] \cap \mathcal{S}_{\alpha, \beta}[e_3]$ est la chaînette de $\mathbf{X}$ définie par $[e_1, e_2]$ et $[e_3]$, que nous noterons $\mathcal{C}$ (voir exemple 2.2.8). Nous munissons $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ de sa structure Lagrangienne de contact invariante à gauche $\mathcal{L}_{\text{SL}_2(\mathbb{R})}$, définie au paragraphe 1.1.4 et engendrée par les droites $(\mathbb{R}E, \mathbb{R}F)$ dans $\mathfrak{sl}_2$.

Proposition 2.3.4. 1. Les orbites de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbf{X}$ sont les suivantes :

- trois orbites de dimension un, qui sont les cercles topologiques $\mathcal{C}_{\alpha}[e_3]$, $\mathcal{C}_{\beta}[e_1, e_2]$ et $\mathcal{C}$;
- deux orbites de dimension deux, qui sont les rubans de Möbius $\mathcal{S}_{\alpha, \beta}[e_3] \setminus (\mathcal{C}_{\alpha}[e_3] \cup \mathcal{C})$ et $\mathcal{S}_{\beta, \alpha}[e_1, e_2] \setminus (\mathcal{C}_{\beta}[e_1, e_2] \cup \mathcal{C})$;
- et une orbite ouverte où $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ agit simplement transitivement, qui est le tore solide $Y_{\mathbf{t}} := \mathbf{X} \setminus (\mathcal{S}_{\beta, \alpha}[e_1, e_2] \cup \mathcal{S}_{\alpha, \beta}[e_3])$, correspondant dans $\mathbf{X}^a$ à l'ensemble des droites affines pointées de $\mathbb{R}^2$ ne passant pas par l'origine.

2. De plus, l'action de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathfrak{o}_{\mathbf{t}} = J(e_1 + \mathbb{R}e_2) \in Y_{\mathbf{t}}$ induit un isomorphisme de $(\text{SL}_2(\mathbb{R}), \mathcal{L}_{\text{SL}_2(\mathbb{R})})$ sur $Y_{\mathbf{t}}$.

Démonstration. 1. L'action de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{RP}^1$ étant transitive, il est clair que $\mathcal{C}_{\alpha}[e_3]$, $\mathcal{C}_{\beta}[e_1, e_2]$ et $\mathcal{C}$ sont des orbites de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbf{X}$. Pour prouver que $\mathcal{S}_{\beta, \alpha}[e_1, e_2] \setminus (\mathcal{C}_{\beta}[e_1, e_2] \cup \mathcal{C})$ est une orbite de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$, nous devons vérifier que $\text{Stab}_{\text{SL}_2(\mathbb{R})}([e_1])$ agit transitivement sur $[e_2, e_3] \setminus \{[e_2], [e_3]\}$. C'est le cas car l'action de $\{(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{smallmatrix})\}$ sur $\mathbb{RP}^1 \setminus \{[e_1], [e_2]\}$ est transitive. Le même argument montre que $\mathcal{S}_{\alpha, \beta}[e_3] \setminus (\mathcal{C}_{\alpha}[e_3] \cup \mathcal{C})$ est bien une orbite de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$. Enfin, $Y_{\mathbf{t}} = \mathbf{X} \setminus (\mathcal{S}_{\beta, \alpha}[e_1, e_2] \cup \mathcal{S}_{\alpha, \beta}[e_3])$ est l'image par J des droites affines pointées de $\mathbb{R}^2$ ne contenant pas l'origine. Puisque $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur le plan privé de l'origine, il suffit d'observer l'action de $\text{Stab}_{\text{SL}_2(\mathbb{R})}(e_1) = \{(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})\}$. Or $\mathcal{F}^{\alpha}(e_1) \cap Y_{\mathbf{t}}$ correspond via J à l'ensemble des droites affines de $\mathbb{R}^2$, passant par e_1 et non-horizontales. L'action de $\{(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})\}$ sur ces dernières étant simplement transitive, $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ agit simplement transitivement sur l'ouvert $Y_{\mathbf{t}}$.

2. L'orbite de la droite affine pointée $\mathfrak{o}_{\mathbf{t}} = e_1 + \mathbb{R}e_2$ sous l'action de $\exp(\mathbb{R}E) = \{(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})\}_{t \in \mathbb{R}}$ est égale à l'ensemble des droites affines pointées en e_1 et non-horizontales, *i.e.* à $\mathcal{F}^{\alpha}(\mathfrak{o}_{\mathbf{t}}) \cap Y_{\mathbf{t}}$. De même, l'orbite de $\mathfrak{o}_{\mathbf{t}}$ sous l'action de $\exp(\mathbb{R}F) = \{(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{smallmatrix})\}_{t \in \mathbb{R}}$ est égale à l'ensemble des pointages de $e_1 + \mathbb{R}e_2$, *i.e.* à $\mathcal{F}^{\beta}(\mathfrak{o}_{\mathbf{t}}) \cap Y_{\mathbf{t}}$. Ceci conclut la preuve par $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ -invariance des deux structures considérées. $\square$

Remarque 2.3.5. Selon la proposition 1.2.2, $(\text{PSL}_2(\mathbb{R}), \mathcal{L}_{\text{PSL}_2(\mathbb{R})})$ est isomorphe à la structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}_{\mathbf{H}^2}^{su}$ de $T^1\mathbf{H}^2$ invariante par son flot géodésique. La proposition 2.3.4 que nous venons de prouver montre donc que la projection canonique $\pi : \text{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{R})$

1. En dimension supérieure en revanche, $\text{SO}^0(1, n+1)$ ne s'identifie plus à indice fini près à $Y_{\mathbf{L}}$.

induit un revêtement double π -équivariant de $Y_{\mathbf{t}}$ sur $(T^1\mathbf{H}^2, \mathcal{L}_{\mathbf{H}^2}^{su})$. Par conséquent pour toute surface hyperbolique $\Sigma = \bar{\Gamma} \backslash \mathbf{H}^2$, avec $\bar{\Gamma} \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ un sous-groupe discret agissant librement et proprement sur $\mathbf{H}^2$, la structure Lagrangienne de contact $(T^1\Sigma, \mathcal{L}_{\Sigma}^{su})$ est un quotient double de la structure Kleinienne $\Gamma \backslash Y_{\mathbf{t}}$, où $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est un sous-groupe discret tel que $\bar{\Gamma} = \pi(\Gamma)$. En effet $(T^1\Sigma, \mathcal{L}_{\Sigma}^{su})$ est isomorphe à $\bar{\Gamma} \backslash T^1\mathbf{H}^2$ muni de la structure induite par $\mathcal{L}_{\mathbf{H}^2}^{su}$.

Les propositions 2.3.3 et 2.3.4 montrent que les deux structures Lagrangiennes de contact naturelles $\mathcal{L}_{\mathbf{H}^2}$ et $\mathcal{L}_{\mathbf{H}^2}^{su}$ de $T^1\mathbf{H}^2$ sont (à indice deux près) respectivement isomorphes aux ouverts $Y_{\mathbf{L}}$ et $Y_{\mathbf{t}}$ de $\mathbf{X}$. Elle sont en particulier toutes deux localement isomorphes à $\mathbf{X}$, bien qu'elles ne soient pas globalement isomorphes entre elles. En effet selon le théorème 4.1.8, un isomorphisme entre $Y_{\mathbf{t}}$ et $Y_{\mathbf{L}}$ serait la restriction d'un élément de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$, or $\mathbf{X} \setminus Y_{\mathbf{t}} = \mathcal{S}_{\beta, \alpha}[e_1, e_2] \cup \mathcal{S}_{\alpha, \beta}[e_3]$ est d'intérieur vide alors que $\mathbf{X} \setminus Y_{\mathbf{L}}$ ne l'est pas. En lien avec la remarque 1.2.3, soulignons que les deux structures $Y_{\mathbf{t}}$ et $Y_{\mathbf{L}}$ correspondent aux deux plongements distincts de $\mathfrak{sl}_2$ dans $\mathfrak{sl}_3$, réalisés au niveau des groupes de Lie par les sous-groupes $\mathrm{SO}^0(1, 2)$ et $j(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$.

En particulier, les deux structures Lagrangiennes de contact invariantes à gauche $\mathcal{L}_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}$ et $\mathcal{L}_{\mathrm{SO}^0(1, 2)}$ ne sont donc pas isomorphes.

Dans [Bar10], Barbot s'intéresse à certaines représentation dans $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ de groupes de surfaces Γ , dites *Anosov*, et exhibe pour une représentation de ce type un ouvert de $\mathbf{X}$ où l'action de Γ pour cette représentation est propre et cocompacte. Dans le cas d'un sous-groupe discret cocompact de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ plongé dans $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ par j , cet ouvert de discontinuité est simplement $Y_{\mathbf{t}}$ (voir [Bar10, §2.5.5 p.165]). Dans le cas général, il faut imaginer la représentation comme une déformation de réseaux de ce type, et Barbot prouve alors qu'un ouvert de discontinuité jouant le rôle de $Y_{\mathbf{t}}$ subsiste, mais que sa frontière n'est plus régulière. Ce type de travail a été par la suite généralisé pour d'autres groupes de Lie que $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$, les espaces homogènes jouant le rôle de $\mathbf{X}$ étant dans ce cas d'autres espaces de drapeaux (voir par exemple [GGKW17]).

2.4 Cartes affines

Nous consacrons cette dernière section à la description de cartes affines de $\mathbf{X}_{2n+1}$, décrites par l'action simplement transitive du groupe de Heisenberg

$$\mathrm{Heis}(2n+1) = \left\{ [X, Y, z] = \begin{pmatrix} 1 & X & z \\ 0 & I_n & Y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (2.4.1)$$

sur certains ouverts. Rappelons que $\mathcal{H} = [e_1, \dots, e_{n+1}]$, et que l'ouvert $\mathbf{X}_{2n+1} \setminus \mathcal{S}_{\beta, \alpha}(\mathcal{H})$ de $\mathbf{X}_{2n+1}$ est identifié de manière $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^{n+1})$ -équivariante à $\mathbf{X}_{2n+1}^a$ via J (voir paragraphe 2.3.1).

2.4.1 Carte affine standard

Nous appellerons *ouvert affine* de $\mathbf{X}_{2n+1}$ l'ouvert

$$Y_{\mathbf{a}} := \mathbf{X} \setminus (\mathcal{S}_{\beta, \alpha}(\mathcal{H}) \cup \mathcal{S}_{\alpha, \beta}[e_1]). \quad (2.4.2)$$

En interprétant $Y_{\mathbf{a}}$ comme un ouvert de $\mathbf{X}_{2n+1}^a$, $Y_{\mathbf{a}}$ correspond à l'ensemble des hyperplans affines pointés de $\mathbb{R}^{n+1}$ dont la direction vectorielle ne contient pas $[e_1]$. Nous munissons $\mathrm{Heis}(2n+1)$ de sa structure Lagrangienne de contact invariante à gauche $\mathcal{L}_{\mathrm{Heis}(2n+1)}$ définie au paragraphe 1.3.3.

Proposition 2.4.1. *$\mathrm{Heis}(2n+1)$ agit simplement transitivement sur $Y_{\mathbf{a}}$. De plus l'action de $\mathrm{Heis}(2n+1)$ en $o' = ([e_{n+2}], [e_2, \dots, e_{n+2}]) \in Y_{\mathbf{a}}$ induit un isomorphisme de $(\mathrm{Heis}(2n+1), \mathcal{L}_{\mathrm{Heis}(2n+1)})$ sur $Y_{\mathbf{a}}$.*

Démonstration. Puisque $\text{Heis}(2n+1)$ préserve $[e_1]$ et $\mathcal{H}$, il préserve $Y_{\mathbf{a}}$. En utilisant la notation (2.4.1), $[0, \mathbb{R}^n, 0] \cdot o' = \mathcal{C}_\beta(o')$. Puisque $\text{Heis}(2n+1) \subset j(\text{Aff}(\mathbb{R}^{n+1}))$, nous pouvons interpréter $\text{Heis}(2n+1)$ comme un sous-groupe de $\text{Aff}(\mathbb{R}^{n+1})$, et le stabilisateur de l'origine dans $\text{Heis}(2n+1) \subset \text{Aff}(\mathbb{R}^{n+1})$ est alors le sous-groupe des transformations linéaires de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{R}),$$

où $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Une telle transformation envoie $\text{Vect}(e_2, \dots, e_{n+1})$ sur $\text{Vect}(x_{i-1}e_1 + e_i, 2 \leq i \leq n+1)$. Si H est un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$, il contient $[e_1]$ si, et seulement si son orthogonal euclidien $H^\perp$ est contenu dans $[e_2, \dots, e_{n+1}]$. Puisque $\text{Vect}(x_{i-1}e_1 + e_i, 2 \leq i \leq n+1)^\perp = \mathbb{R}(e_1 - \sum_{i=2}^{n+1} x_{i-1}e_i)$, il est alors clair que l'action de $\text{Stab}_{\text{Heis}(2n+1)}(0, \dots, 0)$ agit simplement transitivement sur les hyperplans vectoriels ne contenant pas $[e_1]$. En particulier, $[\mathbb{R}^n, 0, 0] \cdot o' = \mathcal{C}_\alpha(o')$. Ceci montre que $\text{Heis}(2n+1)$ agit simplement transitivement sur $Y_{\mathbf{a}}$, et que $\theta_{o'}^* \mathcal{L}_{\mathbf{X}_{2n+1}}(o') = \mathcal{L}_{\text{Heis}(2n+1)}(\text{id})$. Puisque ces deux structures sont $\text{Heis}(2n+1)$ -invariantes, $\theta_{o'}$ est donc bien un isomorphisme global de structures Lagrangiennes de contact. $\square$

Ceci nous autorise à définir une carte $\psi: Y_{\mathbf{a}} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ comme la réciproque de l'action de $\text{Heis}(2n+1)$:

$$\psi^{-1}(x, Y, Z) = [Z, Y, x] \cdot o', \quad (2.4.3)$$

où $x \in \mathbb{R}$ et $Y, Z \in \mathbb{R}^n$ sont respectivement identifiés au vecteur colonne et au vecteur ligne correspondant. Notons que $\psi(o') = (0, \dots, 0)$, et que $\pi_\alpha \circ \psi^{-1}(x, Y, Z) = J(x, Y)$.

Exemple 2.4.2. En dimension trois, $Y_{\mathbf{a}} = \mathbf{X} \setminus (\mathcal{S}_{\beta, \alpha}[e_1, e_2] \cup \mathcal{S}_{\alpha, \beta}[e_1])$ est l'ouvert des droites affines pointées non-parallèles à $\mathbb{R}e_1$, et $\psi^{-1}(x, y, z)$ est la droite affine $(x, y) + \mathbb{R}(z, 1)$ pointée en (x, y) .

Remarque 2.4.3. Au paragraphe 2.3.3, nous avons retiré à $\mathbf{X}$ l'union de la surface $\mathcal{S}_{\beta, \alpha}[e_1, e_2]$ et de la surface $\mathcal{S}_{\alpha, \beta}[e_3]$, qui sont en position générique *i.e.* vérifient $[e_3] \notin [e_1, e_2]$ (voir paragraphe 2.2.4). Dans ce premier cas nous avons obtenu l'ouvert $Y_{\mathbf{t}}$, dont la structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}_\Sigma^s = (E^s, E^u)$ préservée par le flot géodésique d'une surface hyperbolique compacte Σ est un quotient compact (à indice deux près).

Nous étudions maintenant l'autre cas, en retirant à $\mathbf{X}$ les deux surfaces $\mathcal{S}_{\beta, \alpha}[e_1, e_2]$ et $\mathcal{S}_{\alpha, \beta}[e_1]$, qui sont en position dégénérée car $[e_1] \in [e_1, e_2]$, et nous obtenons l'ouvert affine $Y_{\mathbf{a}}$. Nous avons vu au paragraphe 1.2.3 que la structure Lagrangienne de contact (E^s, E^u) préservée par un automorphisme affine partiellement hyperbolique de nil-variété est induite par une structure Lagrangienne de contact invariante à gauche sur $\text{Heis}(3)$, qui est isomorphe à $\mathcal{L}_{\text{Heis}(3)}$ selon le lemme 1.3.10. La proposition 2.4.1 nous montre donc que la structure Lagrangienne de contact préservée par tout automorphisme affine partiellement hyperbolique de nil-variété est un quotient compact de $Y_{\mathbf{a}}$.

En d'autres termes, les deux familles d'exemples du théorème A de classification que nous prouverons au chapitre 5 sur les difféomorphismes partiellement hyperbolique de type contact, sont géométriquement décrites par les ouverts $Y_{\mathbf{t}}$ et $Y_{\mathbf{a}}$. Or, selon la remarque 2.2.10, il n'existe aucun élément de $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$ envoyant $Y_{\mathbf{t}}$ sur $Y_{\mathbf{a}}$, donc que ces deux structures Lagrangiennes de contact ne sont pas globalement isomorphes (car selon le théorème 4.1.8, un isomorphisme entre ces deux structures est nécessairement la restriction de l'action d'un élément de $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$). Ceci motive d'ores et déjà l'apparition de l'ouvert $Y_{\mathbf{a}}$.

Notons que le stabilisateur de $Y_{\mathbf{a}}$ dans $\text{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ est $\text{Stab}(Y_{\mathbf{a}}) = \text{Stab}(\mathcal{H}) \cap \text{Stab}([e_1]) = \mathbf{P}_{n+2}$. On définit un plongement $\rho: \mathbf{P}_{n+2} \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{R}^{2n+1})$ en posant

$$\rho: \begin{bmatrix} a & X & z \\ 0 & B & Y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & X & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & {}^t B^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ Y \\ {}^t B^{-1} {}^t X \end{pmatrix}. \quad (2.4.4)$$

Lemme 2.4.4. *L'isomorphisme $\psi: Y_{\mathbf{a}} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ est ρ -équivariant.*

Démonstration. Soit $p \in Y_{\mathbf{a}}$, et notons $\psi(p) = (u, V, W) \in \mathbb{R}^{2n+1}$, de sorte que $p = [W, V, u] \cdot o'$. En notant

$$g = \begin{bmatrix} a & X & z \\ 0 & B & Y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{P}_{n+2},$$

on vérifie que

$$g \times \begin{bmatrix} 1 & W & u \\ 0 & I_n & V \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & aWB^{-1} + XB^{-1} & au + XV + z \\ 0 & I_n & BV + Y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

où le dernier élément est dans $\text{Stab}(o')$. Par suite, $g \cdot p = [aWB^{-1} + XB^{-1}, BV + Y, au + XV + z] \cdot o'$. Le vecteur ligne $aWB^{-1} + XB^{-1}$ s'identifiant au vecteur colonne $a {}^t B^{-1} {}^t W + {}^t B^{-1} {}^t X$, on a donc bien $\psi(g \cdot p) = \rho(g) \cdot (u, V, W)$ en identifiant (u, V, W) au vecteur colonne correspondant, ce qui montre la ρ -équivariance de ψ . $\square$

Pour tout $x \in \mathbf{X}_{2n+1}$, $\Omega(x) = \mathbf{X} \setminus (\mathcal{S}_{\beta, \alpha}(x) \cup \mathcal{S}_{\alpha, \beta}(x))$ est un ouvert de $\mathbf{X}$ contenant $\kappa(x)$, de sorte que $Y_{\mathbf{a}} = \Omega(o)$. Pour tout $g \in \text{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$, $\Omega(g \cdot x) = g \cdot \Omega(x)$, et

$$\psi_g = \psi \circ L_{g^{-1}}: \Omega(g \cdot o) \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$$

est une *carte affine* de $\Omega(g \cdot o)$ qui vérifie $\psi_g(g \cdot o') = (0, \dots, 0)$. Puisque $\text{Stab}(\Omega(g \cdot o)) = g\mathbf{P}_{n+2}g^{-1}$, en posant $\rho_g: h \in \text{Stab}(\Omega(g \cdot o)) \mapsto \rho(g^{-1}hg) \in \text{Aff}(\mathbb{R}^{2n+1})$, ψ_g est ρ_g -équivariante. Si $g \cdot o = h \cdot o$, alors ψ_g et ψ_h sont deux cartes affines du même ouvert, et puisque $g^{-1}h \in \mathbf{P}_{n+2}$, le changement de carte associé est $\psi_g \circ \psi_h^{-1} = \rho(g^{-1}h) \in \text{Aff}(\mathbb{R}^{2n+1})$.

2.4.2 Objets géométriques dans une carte affine

Les objets géométriques de $Y_{\mathbf{a}}$ ont la description géométrique suivante dans la carte affine ψ .

Proposition 2.4.5. *1. Les feuilles α de $Y_{\mathbf{a}}$ sont les n -plans affines parallèles à $\{0\}^{n+1} \times \mathbb{R}^n$, et le feuilletage α est en particulier invariant par translations. Les feuilles β de $Y_{\mathbf{a}}$ sont des n -plans affines dont la direction vectorielle est contenue dans $\mathbb{R}^{n+1} \times \{0\}^n$, et le feuilletage β est invariant par les translations selon $\mathbb{R}^{n+1} \times \{0\}^n$.*

2. La structure de contact lue dans la carte affine est $\psi_(\mathcal{E}_{\alpha} \oplus \mathcal{E}_{\beta}) = \text{Ker}(dx - \sum_{i=1}^n z_i dy_i)$.*

3. En dimension trois, une surface α - β est un hélicoïde tournant autour de la direction verticale $\mathbb{R}e_3$, et une surface β - α est un plan affine dont la direction vectorielle contient $\mathbb{R}e_3$.

Démonstration. 1. Nous avons remarqué plus haut que $\pi_{\alpha} \circ \psi^{-1}$ est la projection sur le premier facteur de $\mathbb{R}^{2n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^n$, ce qui implique immédiatement les deux affirmations. D'autre part, $[0, \mathbb{R}^n, 0] \cdot o' = \mathcal{C}_{\beta}(o') \cap Y_{\mathbf{a}}$, donc $\psi(\mathcal{C}_{\beta}(o') \cap Y_{\mathbf{a}}) = \{0\} \times \mathbb{R}^n \times \{0\}^n$. Si $g \in \mathbf{P}_{n+2}$ et $x = g \cdot o$, alors par invariance du feuilletage β , $\psi(\mathcal{C}_{\beta}(x) \cap Y_{\mathbf{a}}) = \rho(g) \cdot \{0\} \times \mathbb{R}^n \times \{0\}^n$. Or la partie linéaire de $\rho(g)$ préserve $\mathbb{R}^{n+1} \times \{0\}^n$, donc les feuilles β de $Y_{\mathbf{a}}$ sont bien des n -plans affines dont la direction vectorielle est contenue dans $\mathbb{R}^{n+1} \times \{0\}^n$, et « tourne autour de $\{0\}^{n+1} \times \mathbb{R}^n$ ».

2. En effet selon la proposition 2.4.1, $(\theta_{o'})_*(\mathcal{E}_{\alpha} \oplus \mathcal{E}_{\beta})$ est la structure de contact sous-jacente à $\mathcal{L}_{\text{Heis}(2n+1)}$, qui est égale à $\text{Ker}(dz - \sum_{i=1}^n x_i dy_i)$ dans les coordonnées canoniques de $\text{Heis}(2n+1)$ selon le lemme 1.3.9.

3. Ceci est une conséquence immédiate de la description des feuilles α et β . $\square$

Chapitre 3

Problème d'équivalence pour les géométries paraboliques

Dans la seconde moitié du 19^{ème} siècle, différents systèmes géométriques se côtoient : la géométrie affine classique, mais également des géométries non-euclidiennes, ainsi que les travaux de Riemann jetant les bases de la notion de variété Riemannienne. Cependant, il n'existe pas de cadre de pensée qui permettent de comprendre simultanément ces différentes visions, et de donner un sens à l'appellation commune de « géométrie ». En effet ces géométries sont distinguées et opposées par les différentes natures et propriétés des objets qui y sont étudiés. En 1872, dans son cours inaugural à l'université d'Erlangen, Félix Klein propose de se concentrer, non pas sur les *objets* particuliers à chacune de ces géométries, ni même sur les propriétés *individuelles* qu'on y étudie, mais sur les *relations* entre ces objets qui préservent ces propriétés. En termes mathématiques, il place le *groupe de symétries* d'une géométrie au cœur de son étude, et découvre que de nombreuses propriétés géométriques intrinsèques se traduisent à travers l'*action* d'un groupe de transformations particulier.

L'approche de Klein est connue sous le nom de *programme d'Erlangen* (voir [Kle21]) et a profondément contribué à la transformation de la géométrie jusqu'à ce que l'on en connaît aujourd'hui. En ce qui nous concerne, les travaux de Félix Klein et Sophus Lie nous mènent à la définition suivante, qui sera le point de départ de ce que nous appellerons géométrie.

Définition 3.0.1. Une *géométrie de Klein* est un espace homogène connexe $\mathbf{X} = G/P$, où G est un groupe de Lie et P un sous-groupe fermé de G , tels que l'action naturelle à gauche de G sur $\mathbf{X}$ est fidèle¹.

Avec un autre point de vue, une géométrie de Klein est un espace $\mathbf{X}$ muni d'une structure géométrique $\mathcal{S}_{\mathbf{X}}$ dont le groupe d'automorphismes G agit transitivement sur $\mathbf{X}$. L'idée de la définition précédente est précisément d'utiliser G pour étudier $\mathcal{S}_{\mathbf{X}}$, à travers l'identification $\mathbf{X} \equiv G/P$ induite par l'action transitive de G (où P est le stabilisateur d'un point quelconque de $\mathbf{X}$).

Le premier exemple de géométrie de Klein reste bien entendu l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de sa métrique euclidienne standard, vu comme l'espace homogène $(\mathbb{R}^n \rtimes O(n))/O(n)$. Un exemple qui nous intéressera plus particulièrement est l'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ muni de la structure projective définie par ses droites projectives, identifié à $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{R})/Q_{n+1}$ où $Q_{n+1} = \mathrm{Stab}([e_1])$ (notons que $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{R})$ est non connexe si $n+1$ est pair). On peut également citer la *sphère conforme* $\mathbf{S}^n$, *i.e.* la sphère ronde munie de sa structure Riemannienne conforme. Pour obtenir le groupe d'automorphismes de cette structure conforme, il est commode (bien que cela puisse sembler surprenant) de voir $\mathbf{S}^n$ comme l'ensemble des droites isotropes de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n+1}$

1. Certains auteurs n'imposent pas cette condition, et nomment *effectives* les géométries de Klein qui la vérifient. Pour notre part nous garderons toujours cette hypothèse, et nous l'incluons donc dans la définition.

de signature Lorentzienne $(1, n+1)$, ce qui identifie $\mathbf{S}^n$ à $\mathrm{PO}(1, n+1)/P$ avec P le stabilisateur d'une droite isotrope. Un analogue complexe naturel de cette construction est la *sphère CR* définie comme l'espace des droites complexes isotropes de l'espace hermitien $\mathbb{C}^{1, n+1}$ de signature $(1, n+1)$. Cet espace est homéomorphe à $\mathbf{S}^{2n+1}$ et s'identifie à $\mathrm{PSU}(1, n+1)/P$ avec P le stabilisateur d'une droite complexe isotrope. Mais la géométrie de Klein qui nous intéressera le plus reste bien entendu l'espace homogène modèle $\mathbf{X}_{2n+1} = \mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})/\mathbf{P}_{n+2}$ des structures Lagrangiennes de contact muni de sa structure standard $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_{2n+1}}$, que nous avons étudié dans le chapitre précédent.

Chacune des structures géométriques G -invariantes des géométries de Klein G/P que nous avons présentées se généralise à des variétés quelconques. On obtient alors respectivement les métriques Riemanniennes, les structures projectives, les structures Riemanniennes conformes, les structures CR, et enfin, les structures Lagrangiennes de contact. On peut alors se demander si les structures générales sont *modélées* sur l'espace homogène de départ G/P . Par exemple, est-il possible de relier toute structure Lagrangienne de contact à $\mathbf{X}_{2n+1}$? Plus précisément, peut-on voir toute structure Lagrangienne de contact comme une généralisation de $\mathbf{X}_{2n+1}$?

Dans la première section de ce chapitre, nous définissons sur toute variété M de dimension $\dim \mathbf{X}$ la notion de *géométrie de Cartan modélée sur* une géométrie de Klein $\mathbf{X}$. Ces structures géométriques dues à Élie Cartan constituent une réponse à la question précédente. Nous verrons en effet que les géométries de Cartan modélées sur $\mathbf{X}$ se rapprochent autant que possible de ce que l'on entendrait par une *version courbe* de l'espace homogène modèle $\mathbf{X}$. La référence principale pour cette introduction aux géométries de Cartan est [Sha97]. Notre objectif est *in fine* de montrer qu'une géométrie de Cartan modélée sur $\mathbf{X}$ est équivalente à la donnée d'une structure géométrique sur M du même type que la structure G -invariante d'origine de $\mathbf{X}$. Par exemple, une structure Lagrangienne de contact sur une variété M sera équivalente à une géométrie de Cartan modélée sur $\mathbf{X}_{2n+1}$, qui sera dite *normale*.

Pour parvenir à cette description, nous nous concentrons dans le reste du chapitre sur une famille particulière de géométries de Klein dites *paraboliques*, à laquelle appartient $\mathbf{X}_{2n+1}$. Pour ces dernières nous résolvons le *problème d'équivalence*, *i.e.* nous établissons le dictionnaire entre géométries de Cartan et structures géométriques concrètes associées sur la variété de base. L'idée de la résolution du problème d'équivalence que nous présentons remonte à Tanaka dans [Tan79], et les résultats présentés dans ce chapitre sont ensuite dûs à différents auteurs qui ont graduellement simplifié cette approche. Pour notre part, nous nous reposons sur la théorie exposée dans [ČS09, §3.1], dont nous nous efforçons de rendre aussi accessible que possible la démarche. Nous choisirons un point de vue légèrement différent de celui des auteurs sur la structure de base, et nous mettrons l'accent sur certains arguments en remplaçant l'utilisation des « tractor bundles » par celle d'applications équivariantes.

3.1 Géométries de Cartan paraboliques

Dans tout ce chapitre, $\mathbf{X} = G/P$ désigne une géométrie de Klein *quelconque*, et non pas l'espace homogène modèle des structures Lagrangiennes de contact de dimension trois, que nous noterons dans ce chapitre $\mathbf{X}_3$.

3.1.1 (G, X) -structures

Nous avons annoncé les géométries de Cartan comme une généralisation des géométries de Klein. On peut plus précisément dire que les géométries de Cartan sont aux géométries de Klein ce que les variétés Riemanniennes sont à l'espace euclidien : des « versions courbes » d'un espace

modèle.² On sait qu'en géométrie Riemannienne, les plus simples de ces versions courbes restent celles qui sont plates, c'est à dire dont la courbure est nulle, ou encore qui sont localement isométriques à l'espace euclidien. De la même manière, les plus simples des géométries de Cartan devraient donc être celles qui sont *localement* modelées sur la géométrie de Klein, *i.e.* obtenues en recollant des morceaux de la géométrie de Klein par des symétries de cette dernière. Les géométries construites de cette manière sont appelées $(G, \mathbf{X})$ -structures, et nous prenons le temps de les introduire dans ce premier paragraphe (pour plus de détails, nous renvoyons à [Thu97]).

Autorisons-nous tout d'abord un bref anachronisme pour affirmer que l'action de G sur $\mathbf{X}$ est *analytique* pour toute géométrie de Klein : si deux éléments g et h de G ont la même action sur un ouvert non-vide de $\mathbf{X}$, alors $g = h$ (ceci sera prouvé dans la remarque 3.1.8). Cette simple propriété est à peu près la seule nécessaire pour pouvoir dire des choses intéressantes sur les $(G, \mathbf{X})$ -structures. Nous copions maintenant la définition d'une variété en gardant en tête la géométrie de Klein. Sur une variété M de dimension $\dim \mathbf{X}$, un $(G, \mathbf{X})$ -atlas est un atlas de cartes de M à valeurs dans $\mathbf{X}$ dont les changements de carte sont les restrictions d'éléments de G , et deux $(G, \mathbf{X})$ -atlas sont dits *compatibles* si leur union est encore un $(G, \mathbf{X})$ -atlas.

Définition 3.1.1. Une $(G, \mathbf{X})$ -structure sur une variété M de dimension $\dim \mathbf{X}$ est la donnée d'un $(G, \mathbf{X})$ -atlas maximal, et on appelle $(G, \mathbf{X})$ -variété une variété munie d'une $(G, \mathbf{X})$ -structure.³

Cette définition suit très précisément l'esprit du programme d'Erlangen de Klein. Tout objet défini dans le langage de la géométrie différentielle sur $\mathbf{X}$ et invariant par G fait en effet sens sur une $(G, \mathbf{X})$ -variété. Par exemple sur toute $(\mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n), \mathbb{R}^n)$ -variété on peut tirer en arrière la métrique euclidienne standard de $\mathbb{R}^n$ par toute carte d'un $(\mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n), \mathbb{R}^n)$ -atlas, et les métriques locales ainsi obtenues se recollent puisque les changements de cartes préservent la métrique euclidienne. Les $(\mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n), \mathbb{R}^n)$ -variétés sont donc simplement les variétés Riemanniennes plates.

On peut également lire les symétries de la structure géométrique obtenue dans les cartes d'un $(G, \mathbf{X})$ -atlas. Un $(G, \mathbf{X})$ -morphisme entre deux $(G, \mathbf{X})$ -variétés est un difféomorphisme local dont la lecture dans $\mathbf{X}$, à travers tout jeu de cartes des $(G, \mathbf{X})$ -atlas, est la restriction d'un élément de G . Un $(G, \mathbf{X})$ -automorphisme d'une $(G, \mathbf{X})$ -variété M est un difféomorphisme de M qui est un $(G, \mathbf{X})$ -morphisme, et le groupe des automorphisme de M est noté $\mathrm{Aut}(M)$. Si $\pi_M : \tilde{M} \rightarrow M$ désigne le revêtement universel de M , alors $\tilde{M}$ est toujours muni de la $(G, \mathbf{X})$ -structure pour laquelle π_M est un $(G, \mathbf{X})$ -morphisme. Pour cette structure, le groupe fondamental de M agit par automorphismes de $\tilde{M}$, *i.e.* $\pi_1(M) \subset \mathrm{Aut}(\tilde{M})$. L'outil principal pour l'étude des $(G, \mathbf{X})$ -structures est l'existence sur le revêtement universel d'une extension globale des cartes du $(G, \mathbf{X})$ -atlas.

Théorème 3.1.2. Soit M une $(G, \mathbf{X})$ -variété connexe. Il existe alors un $(G, \mathbf{X})$ -morphisme $\delta : \tilde{M} \rightarrow \mathbf{X}$, appelé application développante, qui est équivariant pour un morphisme $\rho : \mathrm{Aut}(\tilde{M}) \rightarrow G$ appelé morphisme d'holonomie.

Remarquons qu'inversement, puisque $\pi_1(M) \subset \mathrm{Aut}(\tilde{M})$, le couple (δ, ρ) caractérise la $(G, \mathbf{X})$ -structure de M en décrétant que δ soit un $(G, \mathbf{X})$ -morphisme. Pour tout $g \in G$, le couple $(g \circ \delta, g\rho g^{-1})$ définit sur M la même $(G, \mathbf{X})$ -structure que (δ, ρ) .

Les exemples les plus simples de $(G, \mathbf{X})$ -structures sont les quotients de $\mathbf{X}$ par des sous-groupes discrets de G agissant librement et proprement sur $\mathbf{X}$. Sous réserve que $\mathbf{X}$ soit simple-

2. Et en ce sens, elles constituent véritablement une belle synthèse entre deux des avancées majeures en ce qui concerne la géométrie au cours du 19^{ème} siècle : les travaux de Klein et Riemann.

3. La notion de (G, X) -structure fait sens et demeure féconde pour des couples (G, X) bien plus généraux, où G est seulement un sous-groupe de difféomorphismes d'une variété X , qui n'agit pas nécessairement transitivement sur X (voir par exemple [Thu97]).

ment connexe, ils correspondent aux cas où la structure est *complète*, *i.e.* où l'application développante $\delta: \tilde{M} \rightarrow \mathbf{X}$ est un revêtement. Pour l'espace euclidien par exemple, les $(\mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n), \mathbb{R}^n)$ -structures complètes et compactes sont les tores plats.

Le quotient d'un ouvert Ω de $\mathbf{X}$ par un sous-groupe discret de G agissant librement et proprement sur Ω est appelé une structure *Kleinienne* de $\mathbf{X}$. Nous avons déjà rencontré au chapitre 1 des exemples de structures Kleiniennes sur l'espace modèle $\mathbf{X}_3 = \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})/\mathbf{P}_{\min}$ des structures Lagrangiennes de contact de dimension trois. Si Σ est une surface hyperbolique, nous avons défini au chapitre 1 une structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}_\Sigma^{su}$ invariante par le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent $T^1\Sigma$ (voir propositions 1.2.2). Nous avons vu qu'à indice deux près, $\mathcal{L}_\Sigma^{su}$ est un quotient de l'unique orbite ouverte Y_t de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbf{X}_3$ (voir proposition 2.3.4 et remarque 2.3.5). La structure Lagrangienne de contact préservée par un automorphisme partiellement hyperbolique de nil-variété (voir paragraphe 1.2.3) est également une structure Kleinienne, quotient de l'ouvert affine $Y_a \subset \mathbf{X}_3$ (voir remarque 2.4.3).

Dans notre classification des difféomorphismes partiellement hyperboliques de type contact au chapitre 5 (voir Theorem A.1), notre premier objectif sera précisément de montrer que la structure Lagrangienne de contact préservée par le difféomorphisme partiellement hyperbolique est Kleinienne, dans le but de se ramener ensuite à l'un des deux exemples précédents : quotient d'un ouvert de Y_t ou de Y_a .

3.1.2 Géométries de Cartan

De la même manière que les variétés Riemanniennes ne sont en général modélées sur les espaces euclidiens que d'une manière infinitésimale, et qu'elles ne leur sont localement isométriques que si leur courbure est nulle, nous souhaitons avec les géométries de Cartan définir une structure géométrique qui ne retient de la géométrie de Klein modèle $\mathbf{X} = G/P$ que ses aspects *infinitésimaux*. Dans ce but, commençons par interpréter la géométrie de Klein à travers des notions différentielles dans l'esprit du programme d'Erlangen : nous cherchons sur $\mathbf{X}$ une structure géométrique différentielle dont les symétries soient exactement données par l'action de G .

Un premier objet s'impose naturellement pour faire apparaître le groupe de Lie G : le P -fibré principal au dessus de $\mathbf{X}$ défini par la projection canonique $\pi_G: G \rightarrow \mathbf{X} = G/P$. Maintenant que G est apparu, un second objet naturel est la 1-forme différentielle $\omega_G: TG \rightarrow \mathfrak{g}$ appelée *forme de Maurer-Cartan* de G , définie sur G et à valeurs dans son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, pour laquelle pour tout $v \in \mathfrak{g}$, le champ de vecteurs invariant à gauche $\tilde{v}$ engendré sur G par v est ω_G -constant, *i.e.* $\omega_G(\tilde{v}) \equiv v$. En d'autres termes pour tout $g \in G$ et $v \in T_g G$, $\omega_g(v) = D_g L_{g^{-1}}(v) \in \mathfrak{g}$.

Définition 3.1.3. Le couple $\mathcal{C}_\mathbf{X}$ formé par le fibré principal $\pi_G: G \rightarrow \mathbf{X}$ et la forme de Maurer-Cartan ω_G sera appelé *géométrie de Cartan canonique du modèle*.

Une définition naturelle pour un automorphisme local de $\mathcal{C}_\mathbf{X}$ est la suivante. Un difféomorphisme local f entre deux ouverts de $\mathbf{X}$ est un *automorphisme local* de $\mathcal{C}_\mathbf{X}$, si f se relève en un automorphisme local $\hat{f}$ du fibré principal $\pi_G: G \rightarrow \mathbf{X}$ (*i.e.* en un difféomorphisme local $\hat{f}$ entre deux ouverts de G qui est équivariant pour l'action à droite de P), tel que $\hat{f}$ préserve la forme de Maurer-Cartan (*i.e.* $\hat{f}^* \omega_G = \omega_G$). Pour tout $g \in G$, l'action à gauche de g sur $\mathbf{X}$ est un automorphisme de $\mathcal{C}_\mathbf{X}$, car la forme de Maurer-Cartan est par construction invariante à gauche par G . Le résultat ci-dessous nous indique que tous les automorphismes de $\mathcal{C}_\mathbf{X}$ sont de cette forme.

Proposition 3.1.4. Soit $f: U \rightarrow V$ un difféomorphisme local entre deux ouverts connexes de $\mathbf{X}$, qui se relève en un difféomorphisme local P -équivariant $\hat{f}$ de $\pi_G^{-1}(U)$ sur $\pi_G^{-1}(V)$, tel que $\hat{f}$ préserve ω_G . Il existe alors $g \in G$ tel que f est la restriction à U de l'action à gauche de g .

Démonstration. Soit $x = g_0 P \in U$, $h_0 = \hat{f}(g_0)$, et $g = h_0 g_0^{-1}$. Alors $\varphi = L_{g^{-1}} \circ \hat{f}$, défini sur $\pi_G^{-1}(U)$, est P -équivariant, préserve ω_G , et fixe g_0 .

Lemme 3.1.5. *Soit W un ouvert connexe de G , et φ un difféomorphisme local défini sur U et à valeurs dans G qui préserve ω_G et fixe un point de W . Alors $\varphi = \text{id}_W$.*

Démonstration. L'ensemble $E := \{x \in W \mid \varphi(x) = x\}$ est fermé et non-vide. Pour $x \in G$ et $v \in \mathfrak{g}$, on pose $\exp(x, v) = \varphi_v^1(x) = x \exp(v)$ (où $\tilde{v}$ désigne le champ de vecteurs invariant à gauche engendré par v sur G). Puisque φ préserve ω_G , $\varphi(\exp(x, v)) = \exp(\varphi(x), v)$. Or $\exp(x, \mathfrak{g})$ est un voisinage ouvert de x pour tout $x \in G$, donc E est ouvert, *i.e.* égal à W par connexité. $\square$

Le lemme ci-dessus impose à φ d'être égal à l'identité dans la composante connexe U^0 de $\pi_G^{-1}(U)$ contenant g_0 . Or φ est P -équivariant et $U^0 P = \pi_G^{-1}(U)$, d'où $\hat{f} = L_g$, ce qui conclut la preuve. $\square$

La proposition précédente nous dit donc que $\mathcal{C}_{\mathbf{X}}$ a exactement pour automorphismes locaux les restrictions d'éléments de G . En d'autres termes, $\mathcal{C}_{\mathbf{X}}$ répond précisément à la question que nous nous étions posée : c'est une structure géométrique différentielle sur $\mathbf{X}$ dont G est le groupe de symétries.

3.1.2.a Définition

La géométrie de Cartan canonique de $\mathbf{X}$ semble donc le modèle idéal pour définir une notion géométrique « infinitésimalement modelée » sur $\mathbf{X}$. Par analogie avec $\mathcal{C}_{\mathbf{X}}$, il est naturel de définir une géométrie de Cartan sur M comme la donnée d'un P -fibré principal $\hat{M}$ au dessus de M , muni d'une 1-forme ω à valeurs dans $\mathfrak{g}$. La seule incertitude porte sur les propriétés à imposer sur cette 1-forme, que nous énonçons maintenant et que nous discuterons après la définition.

Définition 3.1.6. Une *géométrie de Cartan modelée sur $\mathbf{X}$* est un couple $(M, \mathcal{C})$, où M est une variété de dimension $\dim \mathbf{X}$, et $\mathcal{C} = (\hat{M}, \omega)$ est un couple formé d'un P -fibré principal $\pi: \hat{M} \rightarrow M$ au dessus de M appelée *fibré de Cartan*, et d'une 1-forme différentielle $\omega: T\hat{M} \rightarrow \mathfrak{g}$ sur $\hat{M}$ et à valeurs dans $\mathfrak{g}$ appelée *connexion de Cartan*, vérifiant les trois conditions suivantes.

1. En tout point $\hat{x} \in \hat{M}$, $\omega_{\hat{x}}$ est un isomorphisme linéaire de $T_{\hat{x}}\hat{M}$ sur $\mathfrak{g}$.
2. Pour tout $v \in \mathfrak{p}$, le champ de vecteurs fondamental engendré par v est ω -constant : $\omega(v^\dagger) \equiv v$, où $v^\dagger(\hat{x}) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \hat{x} \cdot \exp(tv)$ pour tout $\hat{x} \in \hat{M}$.
3. ω est P -équivariante, *i.e.* pour tout $p \in P$, $R_p^* \omega = \text{Ad}(p)^{-1} \circ \omega$.

On dira également que $\mathcal{C}$ elle-même est une géométrie de Cartan modelée sur $\mathbf{X}$ définie sur la variété M , et on appellera M la *variété de base* de la géométrie de Cartan $(M, \mathcal{C})$.

Vérifions que la forme de Maurer-Cartan ω_G vérifie bien les trois propriétés ci-dessus, ce qui nous montrera que $\mathcal{C}_{\mathbf{X}}$ est bien une géométrie de Cartan. La première condition signifie que ω est un *parallélisme*, et est évidemment vérifiée par ω_G . Il est assez naturel d'imposer cette condition sur la connexion de Cartan, car nous avons déjà vu lors de la preuve de la proposition 3.1.4 que l'existence d'un parallélisme impose une certaine rigidité aux automorphismes, ce qui correspond à ce que nous cherchons. Dans G , le champ de vecteurs fondamental $v^\dagger$ est simplement le champ de vecteurs invariant à gauche engendré par $v \in \mathfrak{p}$, et ω_G vérifie donc tautologiquement la seconde condition. On peut la comprendre comme une condition de compatibilité entre l'action à droite de P et la connexion de Cartan : à travers les champs de vecteurs ω -constant, ω définit une action de l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ sur $\hat{M}$, et la seconde condition impose que cette action coïncide avec celle du fibré de Cartan. Enfin, un rapide calcul montre que ω_G vérifie bien la troisième condition. C'est lors des calculs utilisant la connexion de Cartan que la présence de cette dernière condition s'explique, car elle s'avère nécessaire pour comprendre le comportement de ω vis à vis de l'action de P .

La connexion de Cartan ω est en particulier un parallélisme, *i.e.* identifie chaque espace tangent de $\hat{M}$ avec $\mathfrak{g}$. Mais c'est une identification des espaces tangents *de* M avec le quotient

$\mathfrak{g}/\mathfrak{p} = T_P \mathbf{X}$ que l'on attend de ω , puisque l'on souhaite identifier M avec $\mathbf{X}$ de manière infinitésimale. La seconde condition sur ω nous assure en particulier que l'espace vertical $\text{Ker } D\pi$ du P -fibré principal $\pi: \hat{M} \rightarrow M$ est égal à $\omega^{-1}(\mathfrak{p})$, si bien qu'en tout point $\hat{x} \in \hat{M}$, $\omega_{\hat{x}}$ induit un isomorphisme linéaire de $T_{\hat{x}}\hat{M}/\text{Ker } D\pi$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$. Par suite, avec $x = \pi(\hat{x}) \in M$, $\omega_{\hat{x}}$ induit un isomorphisme $i_{\hat{x}}: T_x M \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$, qui est la seule application rendant le diagramme ci-dessous commutatif.

$$\begin{array}{ccc} T_{\hat{x}}\hat{M} & \xrightarrow{\omega_{\hat{x}}} & \mathfrak{g} \\ \downarrow D_{\hat{x}}\pi & & \downarrow \\ T_x M & \xrightarrow{i_{\hat{x}}} & \mathfrak{g}/\mathfrak{p} \end{array} \quad (3.1.1)$$

Évidemment, cette identification dépend fortement du point $\hat{x}$ choisi dans la fibre de x , et c'est là que la troisième condition sur la connexion de Cartan intervient. En effet puisque $D\pi \circ DR_p = D\pi$, et $R_p^* \omega = \text{Ad}(p)^{-1} \circ \omega$, le diagramme (3.1.1) nous montre que pour tout $p \in P$, on a :

$$i_{\hat{x} \cdot p} = \overline{\text{Ad}}(p)^{-1} \circ i_{\hat{x}}, \quad (3.1.2)$$

où $\overline{\text{Ad}}$ est la représentation quotient de P sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ induite par la représentation adjointe de G (restreinte à P).

3.1.2.b Où l'on prend un peu de recul

La notion de géométrie de Cartan fut introduite par Élie Cartan sous le nom d'« espaces généralisés » dans les années 1920. Elle n'est initialement pas introduite sous la forme globale que nous utilisons aujourd'hui, à travers un fibré principal muni d'une forme équivariante, car ces notions n'existaient pas encore. La formulation initiale de Cartan est locale et définie sur la variété M de base. Cartan considère des 1-formes locales sur M à valeurs dans $\mathfrak{g}$, appelées *jauges locales*, qui induisent en tout point un isomorphisme de l'espace tangent avec $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$. Ces différentes jauges locales vérifient entre elles une relation faisant intervenir l'action adjointe de P , similaire à la relation d'équivariance vérifiée par une connexion de Cartan. Pour plus d'informations sur le point de vue des jauges, et pour comprendre comment le fibré de Cartan apparaît à partir d'elles, nous renvoyons le lecteur à [Sha97, Chapter 5 §1 et §2].

Prenons un dernier recul sur les objets rencontrés. Le fibré de Cartan peut être vu comme une « version courbe » de G , contenant l'action à droite de P . Nous avons finalement gardé de G l'existence d'un parallélisme, ainsi que la structure de P -fibré principal le reliant à $\mathbf{X}$. Les trois conditions imposées sur la connexion de Cartan nous permettent de plus d'identifier chaque espace tangent de M avec $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$, modulo action de $\overline{\text{Ad}}(P)$. Ceci est cohérent avec ce qui se passe sur $\mathbf{X}$, où tout tenseur G -invariant provient d'un tenseur $\overline{\text{Ad}}(P)$ -invariant sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$. La géométrie de Cartan $(\hat{M}, \omega)$ semble donc remplir le rôle que l'on lui avait assigné : imiter l'espace homogène modèle $\mathbf{X}$ de manière infinitésimale.

3.1.2.c Isomorphismes

Un isomorphisme entre deux géométries de Cartan $(M_1, \hat{M}_1, \omega_1)$ et $(M_2, \hat{M}_2, \omega_2)$ modelées sur la même géométrie de Klein G/P est un difféomorphisme $f: M_1 \rightarrow M_2$ qui se relève en une application lisse $\hat{f}: \hat{M}_1 \rightarrow \hat{M}_2$ entre les fibrés de Cartan, qui est P -équivariante et telle que $\hat{f}^* \omega_2 = \omega_1$ (un tel relevé $\hat{f}$ est nécessairement un difféomorphisme⁴). La proposition 3.1.7 ci-dessous, démontrée dans [Sha97, Chapter 5 Theorem 3.5], montre qu'un tel relevé $\hat{f}$ de f est *unique* s'il existe.⁵ Nous noterons systématiquement $\hat{f}$ l'unique relevé d'un isomorphisme f qui vérifie ces conditions.

4. En effet la première condition impose à $\hat{f}$ d'être tout aussi bijective que f , et la seconde lui impose d'être un difféomorphisme local.

5. Ce résultat utilise l'hypothèse de fidélité de l'action de G sur $\mathbf{X}$ que nous avons choisi d'inclure dans notre définition 3.0.1 d'une géométrie de Klein, ce qui montre *a posteriori* l'intérêt de cette convention. Par ailleurs même

Proposition 3.1.7. *Soient F et G deux applications P -équivariantes de $\hat{M}_1$ sur $\hat{M}_2$, induisant entre M_1 et M_2 la même application. Si $F^*\omega_2 = G^*\omega_2 = \omega_1$, alors $F = G$.*

Remarque 3.1.8. Ceci montre en particulier que pour toute géométrie de Klein $\mathbf{X} = G/P$, l'action de G sur $\mathbf{X}$ est analytique : si l'action de deux éléments g et h de G coïncide sur un ouvert non-vide U de $\mathbf{X}$, alors $g = h$. En effet, $L_g|_{\pi_G^{-1}(U)}$ et $L_h|_{\pi_G^{-1}(U)}$ sont alors deux applications P -équivariantes sur G qui préservent toutes deux la forme de Maurer-Cartan ω_G , et qui induisent la même application sur U . Selon la proposition 3.1.7, on a donc $L_g = L_h$ sur $\pi_G^{-1}(U)$, et par suite $g = h$. Toute géométrie de Klein est donc un modèle de $(G, \mathbf{X})$ -structures, comme nous l'avions affirmé au paragraphe 3.1.1.

Nous appellerons *isomorphisme au dessus de f* entre deux P -fibrés principaux $\hat{M}_1$ et $\hat{M}_2$, tout difféomorphisme P -équivariant $\hat{f}: \hat{M}_1 \rightarrow \hat{M}_2$ dont l'application induite entre les bases est $f: M_1 \rightarrow M_2$ ($\hat{f}$ sera appelé *automorphisme* si $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$). Tout ouvert $U \subset M$ d'une géométrie de Cartan $(M, \mathcal{C})$ est muni de la géométrie de Cartan $\mathcal{C}|_U$, obtenue en restreignant le fibré ainsi que la connexion de Cartan de $\mathcal{C}$ au dessus de U . Un *isomorphisme local* entre deux géométries de Cartan $(M_1, \mathcal{C}_1)$ et $(M_2, \mathcal{C}_2)$ est simplement un difféomorphisme local $f: M_1 \rightarrow M_2$, dont la restriction à tout ouvert $U \subset M_1$ assez petit est un isomorphisme entre les géométries de Cartan induites $\mathcal{C}_1|_U$ et $\mathcal{C}_2|_{f(U)}$. Notons que grâce à la proposition 3.1.7, les relevés locaux $\hat{f}|_U$ de f au dessus de tels ouverts se recollent en un relevé global $\hat{f}: \hat{M}_1 \rightarrow \hat{M}_2$ de f , qui est un difféomorphisme local P -équivariant tel que $\hat{f}^*\omega_2 = \omega_1$ (et un tel relevé $\hat{f}$ est de nouveau unique). Un isomorphisme d'une géométrie de Cartan $(M, \mathcal{C})$ dans elle-même sera nommé *automorphisme* de $(M, \mathcal{C})$. Le résultat suivant nous indique que le groupe $\text{Aut}(M, \mathcal{C})$ des automorphismes d'une géométrie de Cartan connexe agit *librement* sur le fibré de Cartan.

Proposition 3.1.9. *Soient f et g deux automorphismes locaux d'une géométrie de Cartan connexe $(M, \mathcal{C})$. Si $\hat{f}$ et $\hat{g}$ ont la même valeur en un point du fibré de Cartan, alors $f = g$.*

Démonstration. Notons $E = \{\hat{x} \in \hat{M} \mid \hat{f}(\hat{x}) = \hat{g}(\hat{x})\}$, qui est fermé, non-vide par hypothèse, et invariant par l'action de P car $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont P -équivariants. La preuve du lemme 3.1.5 nous indique que E est ouvert (en remplaçant $\tilde{v}$ par $\omega^{-1}(v)$ pour $v \in \mathfrak{g}$).⁶ Un tel ensemble est nécessairement égal à $\hat{M}$ par connexité de M . En effet soient $\hat{x} \in E$ et $\hat{y} \in \hat{M}$, $\gamma: [0; 1] \rightarrow M$ un chemin continu allant de $x = \pi(\hat{x})$ à $y = \pi(\hat{y})$ (existant par connexité de M), et $\hat{\gamma}: [0; 1] \rightarrow \hat{M}$ un relevé continu de γ tel que $\hat{\gamma}(0) = \hat{x}$. Il suffit de montrer que $\hat{\gamma}(1) \in E$, car il est dans la même fibre que $\hat{y}$ et E est P -invariant. Or $F = \{t \in [0; 1] \mid \hat{\gamma}(t) \in E\}$ contient 0 par hypothèse, et est ouvert et fermé car E l'est, donc $F = [0; 1]$ par connexité, d'où $\hat{\gamma}(1) \in E$, ce qui conclut la preuve. $\square$

Remarque 3.1.10. Les deux résultats précédents montrent en particulier que les automorphismes locaux d'une géométrie de Cartan sur une variété connexe M sont déterminés par leur *germe* en un point. En effet si deux automorphismes locaux f et g coïncident sur un ouvert connexe et non-vide U , alors selon la proposition 3.1.7, $\hat{f} = \hat{g}$ en restriction à $\pi^{-1}(U) \subset \hat{M}$, donc $f|_U = g|_U$ selon la proposition 3.1.9.

3.1.2.d Champs de Killing

Nous fixons à partir de maintenant une variété M munie d'une géométrie de Cartan $\mathcal{C} = (\hat{M}, \omega)$. Un *champ de Killing* (respectivement *champ de Killing local*) de $\mathcal{C}$ est un champ de vecteurs sur M (resp. sur un ouvert de M) dont le flot local est formé d'automorphismes locaux de $\mathcal{C}$. Pour $U \subset M$ un ouvert, on notera $\mathfrak{Kill}(U, \mathcal{C})$ l'ensemble des champs de Killing locaux

si le noyau $N = \{g \in G \mid \forall x \in \mathbf{X}, g \cdot x = x\}$ de l'action de G sur $\mathbf{X}$ est non-trivial, on peut toujours se ramener à l'hypothèse voulue sans perdre aucune information. On peut en effet poser $G' = G/N$ et $P' = P/(P \cap N)$ car N est distingué dans G , et $\mathbf{X}$ s'identifie alors à l'espace homogène G'/P' , sur lequel G' agit fidèlement.

6. Ce lemme est en réalité un résultat général sur les parallélismes.

de $\mathcal{C}$ définis sur U . Pour tout champ de Killing X de $\mathcal{C}$, on notera $\hat{X}$ le champ de vecteurs de $\hat{M}$ qui engendre le flot $(\varphi_X^t)_t$. Selon la proposition 3.1.7, c'est l'unique relevé P -invariant de X (i.e. vérifiant $R_p^* \hat{X} = \hat{X}$ pour tout $p \in P$) dont le flot préserve ω . Par définition de la dérivée de Lie, le flot d'un champ de vecteurs ξ sur $\hat{M}$ préserve ω si et seulement si $\mathcal{L}_\xi \omega = 0$, d'où la caractérisation suivante.

Lemme 3.1.11. *Un champ de vecteurs X de M est un champ de Killing de $\mathcal{C}$ si, et seulement si il se relève en champ de vecteurs P -invariant $\hat{X}$ de $\hat{M}$ tel que $\mathcal{L}_{\hat{X}} \omega = 0$.*

Remarque 3.1.12. La linéarité de la dérivée de Lie et son comportement par rapport au crochet de Lie nous permettent de déduire de ce résultat que l'ensemble $\mathfrak{Kill}(M, \mathcal{C})$ des champs de Killing de $(M, \mathcal{C})$ est une sous-algèbre de Lie des champs de vecteurs de M .

Rappelons que deux application f et g ont le même germe en un point x si elles coïncident sur un voisinage de x , et que l'on appelle *germe de f en x* , que l'on notera $[f]_x$, la classe de f pour cette relation d'équivalence. En tout point $x \in M$, on note $\mathfrak{kill}_{\mathcal{C}}^{\text{loc}}(x)$ l'ensemble des germes de champs de Killing de $\mathcal{C}$ en x , que l'on munit de la structure d'algèbre de Lie définie en déclarant que l'application $X \mapsto [X]_x$ envoyant un champ de Killing local de $\mathcal{C}$ sur son germe en x est un morphisme d'algèbres de Lie.

La proposition 3.1.9 et la remarque 3.1.10 ci-dessus se traduisent immédiatement pour les champs de Killing sous la forme suivante.

Lemme 3.1.13. *Si M est connexe, on a les résultats suivants.*

1. *Pour tout $\hat{x} \in \hat{M}$, l'application linéaire $X \in \mathfrak{Kill}(M, \mathcal{C}) \mapsto \omega_{\hat{x}}(\hat{X}_{\hat{x}}) \in \mathfrak{g}$ est injective. En particulier, $\dim \mathfrak{Kill}(M, \mathcal{C}) \leq \dim \mathfrak{g}$.*
2. *Pour tout $x \in M$, l'application $X \in \mathfrak{Kill}(M, \mathcal{C}) \mapsto [X]_x \in \mathfrak{kill}_{\mathcal{C}}^{\text{loc}}(x)$ envoyant un champ de Killing sur son germe en x est injective.*

Remarque 3.1.14. Si X est un champ de Killing de $\mathcal{C}$ défini au voisinage de $x \in M$, alors pour $\hat{x} \in \pi^{-1}(x)$, $\omega_{\hat{x}}(\hat{X}_{\hat{x}})$ ne dépend que de la valeur de X au voisinage de x . L'application $[X]_x \in \mathfrak{kill}_{\mathcal{C}}^{\text{loc}}(x) \mapsto \omega_{\hat{x}}(\hat{X}_{\hat{x}}) \in \mathfrak{g}$ est donc bien définie, et injective selon le lemme 3.1.13. L'algèbre de Lie $\mathfrak{kill}_{\mathcal{C}}^{\text{loc}}(x)$ est donc de dimension finie inférieure à $\dim \mathfrak{g}$. On peut en fait aller plus loin : $\mathfrak{kill}_{\mathcal{C}}^{\text{loc}}(x)$ se réalise comme une algèbre de champs de Killing concrets, définis sur un voisinage assez petit de x .

Il existe en effet une suite décroissante U_i de voisinages ouverts connexes de x tels que $\cap_{i \in \mathbb{N}} U_i = \{x\}$. Selon le lemme 3.1.13, les applications $X \in \mathfrak{Kill}(U_i, \mathcal{C}) \mapsto X|_{U_{i+1}} \in \mathfrak{Kill}(U_{i+1}, \mathcal{C})$ et $X \in \mathfrak{Kill}(U_i, \mathcal{C}) \mapsto [X]_x \in \mathfrak{kill}_{\mathcal{C}}^{\text{loc}}(x)$ sont injectives pour tout i . La suite $\dim \mathfrak{Kill}(U_i, \mathcal{C})$ est donc croissante et majorée, i.e. constante à partir d'un certain rang, et égale à $\dim \mathfrak{kill}_{\mathcal{C}}^{\text{loc}}(x)$ car $\cap_{i \in \mathbb{N}} U_i = \{x\}$. Il existe donc un voisinage ouvert connexe U de x tel que l'application

$$X \in \mathfrak{Kill}(U, \mathcal{C}) \mapsto [X]_x \in \mathfrak{kill}_{\mathcal{C}}^{\text{loc}}(x) \quad (3.1.3)$$

soit un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Les champs de Killing sont les « symétries infinitésimales » de la géométrie de Cartan. Dans le cas du modèle $\mathbf{X}$, ils proviennent des champs de vecteurs invariants à droite de G , et nous venons de voir qu'en tout point, la dimension des champs de Killing locaux d'une géométrie de Cartan modélée sur $\mathbf{X}$ est au plus $\dim \mathfrak{g}$. En ce sens, $\mathbf{X}$ est la géométrie de Cartan « la plus symétrique ». ⁷

7. En réalité, elle n'est pas nécessairement la seule à atteindre cette borne. Dans le cas de la géométrie Riemannienne par exemple, les deux autres espaces complets simplement connexes et à courbure constante, $\mathbf{S}^n$ et $\mathbf{H}^n$, l'atteignent également.

3.1.2.e Courbure

Nous en arrivons à la notion de courbure, qui est certainement la plus importante en ce qui concerne les géométries de Cartan, car elle justifie en grande partie leur intérêt géométrique. La définition ci-dessous remplace la courbure d'une connexion affine dans le cas de la géométrie de Cartan $\mathcal{C} = (\hat{M}, \omega)$.

Définition 3.1.15. La *forme de courbure* de ω est la 2-forme Ω à valeurs dans $\mathfrak{g}$, définie sur $\hat{M}$ par la relation suivante pour tout $\hat{x} \in \hat{M}$ et $v, w \in T_{\hat{x}}\hat{M}$:

$$\Omega(v, w) = d\omega(v, w) + [\omega(v), \omega(w)]. \quad (3.1.4)$$

À l'aide de la connexion ω , la manipulation de la forme de courbure est grandement simplifiée. Elle est en effet équivalente à une fonction sur $\hat{M}$ à valeurs dans un espace vectoriel, la *fonction de courbure* $K: \hat{M} \rightarrow \mathcal{L}(\Lambda^2 \mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ (que nous appellerons en général plus simplement la *courbure* de $\mathcal{C}$) définie par la relation

$$K(\hat{x})(X, Y) = \Omega_{\hat{x}}(\omega_{\hat{x}}^{-1}(X), \omega_{\hat{x}}^{-1}(Y)) \quad (3.1.5)$$

pour $X, Y \in \mathfrak{g}$. Or si v ou w est vertical, *i.e.* tangent aux fibres de $\hat{M}$, alors $\Omega(v, w) = 0$ (voir [Sha97, Chapter 5 Corollary 3.10]). On en déduit que $K(X, Y) = 0$ si X ou Y est dans $\mathfrak{p}$, si bien que pour tout $\hat{x} \in \hat{M}$, $K(\hat{x})$ induit une forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$. Nous noterons encore

$$K: \hat{M} \rightarrow \mathcal{L}(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), \mathfrak{g}), \quad (3.1.6)$$

l'application induite.

Quel est l'intérêt d'un tel objet ? La courbure de la géométrie de Cartan canonique de $\mathbf{X}$ est nulle. C'est une simple conséquence de la formule de Cartan pour $d\omega_G$ écrite pour deux champs de vecteurs invariant à gauche $\tilde{v}$ et $\tilde{w}$, et du fait que $\omega_G([\tilde{v}, \tilde{w}]) = [v, w]$ par définition du crochet de Lie de $\mathfrak{g}$, pour tous $v, w \in \mathfrak{g}$ (la relation $d\omega_G(v, w) + [\omega_G(v), \omega_G(w)] = 0$ est appelée *équation structurelle* de ω_G , voir [Sha97, Chapter 3 §3] pour plus de détails). L'intérêt principal des géométries de Cartan réside dans la réciproque de ce fait (voir par exemple [Sha97, Chapter 5 Theorem 5.1] pour une preuve du résultat ci-dessous).

Théorème 3.1.16. *Une géométrie de Cartan modélée sur $\mathbf{X}$ est localement isomorphe en tout point à la géométrie de Cartan canonique de $\mathbf{X}$ si, et seulement si sa courbure est identiquement nulle.*

Il existe alors un atlas de cartes de M dans $\mathbf{X}$ qui sont des isomorphismes de géométries de Cartan, et selon la proposition 3.1.4, les changements de carte de cet atlas sont les restrictions d'éléments de G . En d'autres termes, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 3.1.17. *Soit $(M, \mathcal{C})$ une géométrie de Cartan modélée sur $\mathbf{X}$. La courbure de $\mathcal{C}$ est nulle si, et seulement si $\mathcal{C}$ est induite par une $(G, \mathbf{X})$ -structure sur M .*

Les géométries de Cartan à courbure nulle seront dites *plates*. Le résultat ci-dessus nous montre que la courbure d'une géométrie de Cartan joue le même rôle que celle des variétés Riemanniennes : les $(G, \mathbf{X})$ -structures correspondent aux géométries de Cartan plates, de la même manière que les variétés Riemanniennes plates sont celles qui sont localement isométriques à $\mathbb{R}^n$.

Comme toujours avec les géométries de Cartan, nous disposons avec la courbure d'un objet défini non pas sur la base M , mais sur le fibré de Cartan, et nous devons donc observer son interaction avec l'action à droite de P pour obtenir des informations pertinentes. La représentation $\overline{\text{Ad}}$ de P sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ induit une représentation sur $\mathcal{L}(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), \mathfrak{g})$ définie pour $p \in P$ et $\varphi \in \mathcal{L}(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), \mathfrak{g})$ par :

$$p \cdot \varphi: u \wedge v \mapsto \text{Ad}(p) \cdot (\varphi(\overline{\text{Ad}}(p)^{-1} \cdot u, \overline{\text{Ad}}(p)^{-1} \cdot v)). \quad (3.1.7)$$

Nous définissons également une action à droite de P sur $L(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), \mathfrak{g})$ en posant $\varphi \cdot p := p^{-1} \cdot \varphi$. La fonction de courbure K de toute géométrie de Cartan est alors P -équivariante (voir [Sha97, Chapter 5 Lemma 3.23]). Enfin, K est préservée par tout automorphisme local de $\mathcal{C} : K \circ \hat{f} = K$ pour tout automorphisme local f .

3.1.3 Le problème d'équivalence pour les géométries de Cartan

L'introduction de la géométrie de Klein $\mathbf{X} = G/P$ visait à étudier une structure géométrique $\mathcal{S}_{\mathbf{X}}$ définie sur $\mathbf{X}$ à travers son groupe de symétries G . Pour $\mathbf{X}_{2n+1}$, $\mathcal{S}_{\mathbf{X}_{2n+1}}$ est par exemple la structure Lagrangienne de contact standard $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_{2n+1}}$. Pour garder ce point de vue, nous avons défini des structures géométriques généralisant graduellement $(\mathbf{X}, \mathcal{S}_{\mathbf{X}})$, tout d'abord localement avec les $(G, \mathbf{X})$ -structures puis d'une manière infinitésimale avec les géométries de Cartan. Or la structure géométrique G -invariante $\mathcal{S}_{\mathbf{X}}$ provient en général d'un objet $\overline{\text{Ad}}(P)$ -invariant sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$, et nous avons mis en avant au paragraphe 3.1.2.a des identifications $\overline{\text{Ad}}(P)$ -équivariantes des espaces tangents de M avec $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ (voir (3.1.2)). On imagine donc qu'il est facile, à partir d'une géométrie de Cartan $(M, \mathcal{C})$ modelée sur $\mathbf{X}$, d'obtenir sur M une structure géométrique $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$ du même type que $\mathcal{S}_{\mathbf{X}}$. Regardons ce que cela donne dans le cas de l'espace modèle $\mathbf{X}_{2n+1}$ des structures Lagrangiennes de contact.

3.1.3.a D'une géométrie de Cartan vers une structure sur la base

Soient M une variété de dimension $2n+1$, et $\mathcal{C} = (\hat{M}, \omega)$ une géométrie de Cartan sur M modelée sur $\mathbf{X}_{2n+1} = \text{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})/\mathbf{P}_{n+2}$. Soient $x \in M$, $\hat{x} \in \pi^{-1}(x)$, et $i_{\hat{x}} : T_x M \rightarrow \mathfrak{sl}_{n+2}/\mathfrak{p}_{n+2}$ l'isomorphisme défini au paragraphe 3.1.2.a (voir (3.1.1)). On a vu au paragraphe 2.1.2 que les projections des sous-algèbres

$$\mathfrak{g}_{-1}^{\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 \end{pmatrix} \middle| U \in \mathbb{R}^n \right\} \text{ et } \mathfrak{g}_{-1}^{\beta} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ {}^t V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| V \in \mathbb{R}^n \right\}$$

de $\mathfrak{sl}_{n+2}$ dans $\mathfrak{sl}_{n+2}/\mathfrak{p}_{n+2}$, notées $\overline{\mathfrak{g}_{-1}^{\alpha}}$ et $\overline{\mathfrak{g}_{-1}^{\beta}}$, sont invariantes sous l'action de $\overline{\text{Ad}}(\mathbf{P}_{n+2})$ (voir proposition 2.1.2). Les sous-espaces $E_{\mathcal{C}}^{\alpha}(x) = i_{\hat{x}}^{-1}(\overline{\mathfrak{g}_{-1}^{\alpha}})$ et $E_{\mathcal{C}}^{\beta}(x) = i_{\hat{x}}^{-1}(\overline{\mathfrak{g}_{-1}^{\beta}})$ de $T_x M$ ne dépendent donc que x selon la relation (3.1.2), et définissent ainsi deux distributions lisses et transverses de dimension n sur M .

Si $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathbf{X}_{2n+1}}$ est la géométrie de Cartan canonique de $\mathbf{X}_{2n+1}$, alors $E_{\mathcal{C}}^{\alpha}$ et $E_{\mathcal{C}}^{\beta}$ sont simplement les projections dans $\mathbf{X}_{2n+1} = \text{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})/\mathbf{P}_{n+2}$ des distributions invariantes à gauche de $\text{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ engendrées par $\mathfrak{g}_{-1}^{\alpha}$ et $\mathfrak{g}_{-1}^{\beta}$. Selon la proposition 2.1.2, $(E_{\mathcal{C}}^{\alpha}, E_{\mathcal{C}}^{\beta})$ est donc la structure Lagrangienne de contact standard $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_{2n+1}}$ de $\mathbf{X}_{2n+1}$. La structure $\mathcal{L}_{\mathcal{C}} := (E_{\mathcal{C}}^{\alpha}, E_{\mathcal{C}}^{\beta})$ est ainsi la généralisation naturelle à toute géométrie de Cartan modelée sur $\mathbf{X}_{2n+1}$ de la structure d'origine de $\mathbf{X}_{2n+1}$. Nous dirons qu'une géométrie de Cartan modelée sur une géométrie de Klein G/P est *sans torsion* si sa fonction de courbure est à valeurs dans $\mathfrak{p}$.

Proposition 3.1.18. *Soient M une variété de dimension $2n+1$ et $\mathcal{C} = (\hat{M}, \omega)$ une géométrie de Cartan sur M modelée sur $\mathbf{X}_{2n+1}$. Si $\mathcal{C}$ est sans torsion, alors $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ est une structure Lagrangienne de contact sur M .*

Démonstration. Dans la preuve, nous noterons $E^{\alpha} = E_{\mathcal{C}}^{\alpha}$, $E^{\beta} = E_{\mathcal{C}}^{\beta}$ et $H = E^{\alpha} \oplus E^{\beta}$, et puisque les propriétés à prouver sont locales, on peut supposer que H est le noyau d'une 1-forme α . On pose $\mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{g}_{-1}^{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-1}^{\beta}$ et

$$\mathfrak{g}_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathfrak{sl}_{n+2},$$

de sorte qu'en posant $\mathfrak{g}_- = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1}$, on a $\mathfrak{sl}_{n+2} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{p}_{n+2}$. Nous utilisons maintenant le lemme 3.1.19 prouvé ci-dessous avec la sous-algèbre $\mathfrak{g}_-$, supplémentaire de $\mathfrak{p}_{n+2}$ dans $\mathfrak{sl}_{n+2}$. Soient $\hat{x} \in \hat{M}$ et $x = \pi(\hat{x})$. Pour $v, w \in H_x$, la preuve du lemme 3.1.19 montre que les extensions $\tilde{v}$ et $\tilde{w}$ sont à valeurs dans H , de sorte que $d\alpha_x(v, w) = v \cdot \alpha(\tilde{v}) - w \cdot \alpha(\tilde{w}) - \alpha([\tilde{v}, \tilde{w}]_x) = -\alpha([\tilde{v}, \tilde{w}]_x)$ selon la formule de Cartan. L'égalité (3.1.8) nous montre alors que $d\alpha_x(v, w) = 0$ si, et seulement si $[V, W] - K_{\hat{x}}(V, W) \in \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{p}_{n+2}$, où $V, W \in \mathfrak{g}_{-1}$ sont les uniques éléments vérifiant $v = D_{\hat{x}}\pi \circ \omega_{\hat{x}}^{-1}(V)$ et $w = D_{\hat{x}}\pi \circ \omega_{\hat{x}}^{-1}(W)$. Or $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{-1}] \subset \mathfrak{g}_{-2}$ et $K(V, W) \in \mathfrak{p}_{n+2}$ par hypothèse, donc $d\alpha_x(v, w) = 0$ si, et seulement si $[V, W] = 0$. Puisque la forme bilinéaire

$$(A, B) \in \mathfrak{g}_{-1} \times \mathfrak{g}_{-1} \mapsto [A, B] \in \mathfrak{g}_{-2} \simeq \mathbb{R}$$

est non-dégénérée, on en déduit donc que $(d\alpha_x)|_{H_x \times H_x}$ est non-dégénérée, ce qui montre que H est de contact au voisinage de x selon la remarque 1.3.3. De plus, les sous-algèbres $\mathfrak{g}_{-1}^\alpha$ et $\mathfrak{g}_{-1}^\beta$ sont abéliennes donc la restriction de $d\alpha_x$ à $E^\alpha(x) \times E^\alpha(x)$ et à $E^\beta(x) \times E^\beta(x)$ est identiquement nulle, *i.e.* E^α et E^β sont des sous-distributions Legendriennes de H (voir définition 1.3.4). Ainsi, (E^α, E^β) est bien une structure Lagrangienne de contact. $\square$

Le lemme ci-dessous nous sera utile à plusieurs reprises par la suite. Il est valide pour toute géométrie de Klein G/P , et pour tout choix d'un sous-espace vectoriel $\mathfrak{g}_- \subset \mathfrak{g}$ supplémentaire de $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{g}$. Sous cette hypothèse, si $(M, \hat{M}, \omega)$ est une géométrie de Cartan modélée sur G/P et $\hat{x} \in \hat{M}$, alors en notant $x = \pi(\hat{x})$, il existe pour tout $v \in T_x M$ un unique vecteur $V \in \mathfrak{g}_-$ tel que $v = D_{\hat{x}}\pi \circ \omega_{\hat{x}}^{-1}(V)$.

Lemme 3.1.19. *Soit $\hat{x} \in \hat{M}$. Il existe alors un voisinage U de $x = \pi(\hat{x})$, ainsi qu'une application $\mathbb{R}$ -linéaire $v \in T_x M \mapsto \tilde{v} \in \mathfrak{X}(U)$, telle que $\tilde{v}(x) = v$ pour tout v , et vérifiant la propriété suivante. Pour tous $v, w \in T_x M$, si $V, W \in \mathfrak{g}_-$ vérifient $v = D_{\hat{x}}\pi \circ \omega_{\hat{x}}^{-1}(V)$ et $w = D_{\hat{x}}\pi \circ \omega_{\hat{x}}^{-1}(W)$ alors on a :*

$$[\tilde{v}, \tilde{w}]_x = D_{\hat{x}}\pi \circ \omega_{\hat{x}}^{-1}([V, W] - K_{\hat{x}}(V, W)). \quad (3.1.8)$$

Démonstration. Pour tout $A \in \mathfrak{g}$, on note $\tilde{A} := \omega^{-1}(A)$ le *champ de vecteurs ω -constant* engendré par A . Le flot de $\tilde{A}$ existe localement, et on note $\exp(\hat{x}, A) := \varphi_{\tilde{A}}^1(\hat{x})$ sa valeur au temps 1 en $\hat{x}$. Il existe en particulier un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathfrak{g}_-$ tel que $\phi = \exp(\hat{x}, \cdot) : A \in U \mapsto \exp(\hat{x}, A) \in \hat{M}$ est bien définie. Par définition $D_0\phi = \omega_{\hat{x}}^{-1}|_{\mathfrak{g}_-}$, si bien que $D_{\hat{x}}\pi \circ D_0\phi$ est un isomorphisme sur $T_x M$. Quitte à restreindre U et M , on peut donc supposer que $\varphi := \pi \circ \phi$ est un difféomorphisme de U sur M , et $\sigma : x \in M \mapsto \phi \circ \varphi^{-1}(x) \in \hat{M}$ est alors une section globale de π passant par $\hat{x}$. De plus par construction, $T_{\hat{x}}(\sigma(M)) = \omega_{\hat{x}}^{-1}(\mathfrak{g}_-)$. Pour tout $v \in T_x M$, en notant $V \in \mathfrak{g}_-$ tel que $v = D_{\hat{x}}\pi \circ \omega_{\hat{x}}^{-1}(V)$, on définit alors un champ de vecteur P -invariant $\hat{v}$ sur $\hat{M}$ en décrétant que $\hat{v}$ coïncide avec $\tilde{V}$ sur $\sigma(M)$, puis en saturant par l'action de P sur $\hat{M}$. En particulier, $\hat{v}$ se projette donc sur un champ de vecteur $\tilde{v}$ défini sur M , de sorte que $\tilde{v}(x) = v$ et $v \mapsto \tilde{v}$ est linéaire. De plus, puisque $\tilde{v} = \pi_* \hat{v}$, on en déduit que $[\tilde{v}, \tilde{w}]_x = D_{\hat{x}}\pi([\hat{v}, \hat{w}]_{\hat{x}})$. Il ne nous reste donc plus qu'à montrer que $\omega_{\hat{x}}([\hat{v}, \hat{w}]_{\hat{x}}) = [V, W] - K_{\hat{x}}(V, W)$.

La formule de Cartan nous donne $\omega_{\hat{x}}([\hat{v}, \hat{w}]_{\hat{x}}) = \hat{v}_{\hat{x}} \cdot \omega(\hat{w}) - \hat{w}_{\hat{x}} \cdot \omega(\hat{v}) - d\omega_{\hat{x}}(\hat{v}, \hat{w})$. Or par construction, $\hat{w}$ coïncide avec $\tilde{W}$ sur $\sigma(M)$, qui est stable par le flot de $\tilde{W}$ en $\hat{x}$, donc par celui de $\hat{w}$. Puisque $\hat{v}_{\hat{x}}$ est tangent à $\sigma(M)$ où $\omega(\hat{w})$ est constant égal à W , on en déduit donc que $\hat{v}_{\hat{x}} \cdot \omega(\hat{w}) = 0$. Pour les mêmes raisons, on prouve que $\hat{w}_{\hat{x}} \cdot \omega(\hat{v}) = 0$. Finalement, $\omega_{\hat{x}}([\hat{v}, \hat{w}]_{\hat{x}}) = -d\omega_{\hat{x}}(\hat{v}, \hat{w})$, qui est égal à $-K_{\hat{x}}(V, W) + [V, W]$ par définition de la courbure, ce qui conclut la preuve. $\square$

Remarque 3.1.20. Supposons que $\mathfrak{g}$ admette une filtration $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-k} \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_k \neq \{0\}$ de longueur $2k + 1$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, qui soit préservée par l'action adjointe de P et telle que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{p}$ (c'est par exemple le cas si G/P est une géométrie de Klein parabolique, voir Définition 3.1.21). Alors pour tout $-k \leq i \leq -1$, $\omega^{-1}(\mathfrak{g}^i)$ est une distribution P -invariante de la géométrie de Cartan $\hat{M}$ par équivariance de ω , et passe donc au quotient sur M en une distribution que

nous noterons TM^i . Supposons alors que dans le lemme précédent, $v \in TM^i$ pour un certain $-k \leq i \leq -1$. Alors le vecteur $V \in \mathfrak{g}_-$ tel que $v = D_{\hat{x}}\pi \circ \omega_{\hat{x}}^{-1}(V)$ est dans $\mathfrak{g}^i$, donc le champ de vecteurs $\hat{v}$ construit dans la preuve est à valeurs dans $\omega^{-1}(\mathfrak{g}^i)$, et par suite $\tilde{v}$ reste à valeurs dans TM^i .

3.1.3.b Problème d'équivalence

La construction dont nous venons de donner un exemple, associant à toute géométrie de Cartan modélée sur $\mathbf{X}$ une structure géométrique du même type que $\mathcal{S}_{\mathbf{X}}$, n'aura cependant d'intérêt que si l'on est capable de remonter en sens inverse, *i.e.* si l'on sait associer à toute structure géométrique $\mathcal{S}$ du même type que $\mathcal{S}_{\mathbf{X}}$ une géométrie de Cartan modélée sur $\mathbf{X}$. Le problème, une fois que l'on en trouve une, est qu'il existe en général de nombreuses connexions de Cartan induisant la même structure sur la base. On doit donc trouver une *condition de normalisation* pour distinguer certaines de ces connexions de Cartan, et obtenir l'équivalence voulue entre structures sur la base et géométries de Cartan.

Cette question est connue sous le nom de *problème d'équivalence* pour la géométrie $\mathbf{X}$. C'est à priori un problème difficile, qui fut originellement résolu au cas par cas. Dans le cas des métriques Riemanniennes cependant, la construction d'une géométrie de Cartan normale modélée sur $(\mathbb{R}^n \rtimes O(n))/O(n)$ demeure naturelle, et nous renvoyons par exemple à l'excellente présentation de Sharpe dans [Sha97, Chapter 6] pour se familiariser avec le principe de problème d'équivalence. Dans le cas d'une *structure conforme Riemannienne* en revanche, la construction d'une géométrie de Cartan associée modélée sur la sphère conforme $\mathbf{S}^n$ est bien plus complexe. Elle est originellement due à Cartan dans [Car24a] par la méthode du repère mobile, demandant de lourds calculs en coordonnées (voir par exemple [Sha97, Chapter 7] pour une présentation moderne).

Dans le reste de ce chapitre, nous présentons une résolution unifiée du problème d'équivalence pour toute une famille de géométries de Klein, dites *paraboliques*. En effet, la résolution du problème d'équivalence pour les structures Lagrangiennes de contact, *i.e.* pour le cas de $\mathbf{X}_{2n+1}$, n'est pas plus simple que sa résolution pour toutes les géométries de Klein paraboliques. L'intérêt de ce point de vue est précisément qu'il évite d'avoir à passer par des calculs locaux en coordonnées, et qu'il unifie la compréhension des géométries de Cartan. L'idée fondatrice est de se ramener à la structure algébrique de $\mathfrak{g}$ (qui sera supposée semi-simple) et de considérer des graduations de cette dernière (reliées à son système de racines). Ce point de vue semble apparaître initialement dans les travaux de Tanaka (voir [Tan79]), et les résultats que nous allons présenter sont dus à différents auteurs qui ont graduellement simplifié cette approche et unifiés ces travaux. Pour notre part, nous nous sommes exclusivement appuyés sur [ČS09, §3.2], et nous nous efforçons de donner une présentation aussi géométrique que possible de cette théorie.

3.1.4 Géométries de Klein paraboliques

Nous rappelons qu'une *gradation* d'un espace vectoriel V (que nous supposons toujours de dimension finie) est simplement une décomposition de V selon une somme directe $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ de sous-espaces. Toute gradation induit sur V une *filtration*, par la suite décroissante de sous-espaces $V^i = \bigoplus_{j \geq i} V_j$. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie munie d'une gradation $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_a \oplus \mathfrak{g}_{a+1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{b-1} \oplus \mathfrak{g}_b$, où $a \leq b \in \mathbb{Z}$. Nous dirons que $\{\mathfrak{g}_i\}$ fait de $\mathfrak{g}$ une *algèbre de Lie graduée* si pour tout $a \leq i, j \leq b$ on a :

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}, \quad (3.1.9)$$

où par convention, $\mathfrak{g}_i = \{0\}$ si $i < a$ ou $i > b$. Dans ce cas, la filtration $\{\mathfrak{g}^i\}$ induite sur $\mathfrak{g}$ en fait une *algèbre de Lie filtrée* (*i.e.* les composantes de la filtration vérifient la condition (3.1.9) en remplaçant $\mathfrak{g}_i$ par $\mathfrak{g}^i$, où par convention $\mathfrak{g}^i = \mathfrak{g}$ si $i \leq a$ et $\mathfrak{g}^i = \{0\}$ si $i > b$).

Définition 3.1.21. Une *géométrie de Klein parabolique infinitésimale* est un couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ d'algèbres de Lie vérifiant les conditions suivantes :

1. $\mathfrak{g}$ est semi-simple réelle, et est munie d'une $|k|$ -gradation $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$ qui en fait une algèbre de Lie graduée (avec $k \geq 1$) ;
2. $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$, on l'appelle la *sous-algèbre parabolique* de $\mathfrak{g}$;
3. la sous-algèbre $\mathfrak{g}_- := \mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ est engendrée comme algèbre de Lie par $\mathfrak{g}_{-1}$.

Une géométrie de Klein G/P sera dite *parabolique* et associée à la géométrie de Klein parabolique infinitésimale $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ si elle vérifie les conditions suivantes :

1. G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$;
2. P est un sous-groupe fermé de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ tel que $\text{Ad}(P) \cdot \mathfrak{g}^i = \mathfrak{g}^i$ pour tout $-k \leq i \leq k$, qui sera appelé *sous-groupe parabolique* de la géométrie de Klein ;
3. $(\text{Ker Ad}) \cap P = \{\text{id}\}$.⁸

Une géométrie de Cartan sera dite *parabolique* si elle est modelée sur une géométrie de Klein parabolique.

Exemples 3.1.22. 1. L'espace homogène modèle $\mathbf{X}_{2n+1}$ des structures Lagrangiennes de contact est bien une géométrie de Klein (car l'action de $\text{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}\mathbf{P}^{n+1}$ est fidèle), et nous allons maintenant voir que cette géométrie est parabolique. La géométrie de Klein infinitésimale sous-jacente est le couple $(\mathfrak{sl}_{n+2}, \mathfrak{p}_{n+2})$, où l'algèbre de Lie simple $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+2}$ est munie de la $|2|$ -gradation décrite par blocs de la manière suivante :

$$\mathfrak{sl}_{n+2} = \begin{pmatrix} \mathfrak{g}_0 & \mathfrak{g}_1^\beta & \mathfrak{g}_2 \\ \mathfrak{g}_{-1}^\beta & \mathfrak{g}_0 & \mathfrak{g}_1^\alpha \\ \mathfrak{g}_{-2} & \mathfrak{g}_{-1}^\alpha & \mathfrak{g}_0 \end{pmatrix}, \quad (3.1.10)$$

où les blocs $\mathfrak{g}_{\pm 2}$ sont de taille 1×1 , les blocs $\mathfrak{g}_1^\beta$ et $\mathfrak{g}_{-1}^\alpha$ sont des lignes de taille n et les blocs $\mathfrak{g}_1^\alpha$ et $\mathfrak{g}_{-1}^\beta$ des colonnes de taille n . En posant $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1^\alpha \oplus \mathfrak{g}_1^\beta$ et $\mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{g}_{-1}^\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-1}^\beta$, on a bien $\mathfrak{p}_{n+2} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, et on vérifie aisément que le crochet de Lie de $\mathfrak{sl}_{n+2}$ respecte cette graduation. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_- = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ est isomorphe à $\mathfrak{heis}(2n+1)$ via $v \mapsto -{}^t v$, donc $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{-1}] = \mathfrak{g}_{-2}$ et la troisième condition sur les géométries paraboliques infinitésimales est bien vérifiée. Par définition de la condition de graduation, $\text{ad}(\mathfrak{p}_{n+2}) = \text{ad}(\mathfrak{g}^0)$ préserve chaque composante de la filtration, et l'on en déduit aisément que $\text{Ad}(\mathbf{P}_{n+2})$ fait de même. Enfin, puisque le centre de $\text{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ est trivial, $(\text{Ker Ad}_{\text{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})}) \cap \mathbf{P}_{n+2}$ est bien trivial, donc $\mathbf{X}_{2n+1} = \text{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})/\mathbf{P}_{n+2}$ est finalement une géométrie de Klein parabolique associée à $(\mathfrak{sl}_{n+2}, \mathfrak{p}_{n+2})$.

2. L'espace projectif $\mathbb{R}\mathbf{P}^n = \text{PGL}_{n+1}(\mathbb{R})/Q_{n+1}$ ainsi que la sphère conforme $\mathbf{S}^n = \text{PO}(1, n+1)/P$ sont deux géométries de Klein paraboliques pour lesquelles la filtration de $\mathfrak{g}$ est triviale, *i.e.* de longueur un (voir [ČS09, §4.1.5 et §4.1.2] pour plus de détails à leurs sujets). La sphère CR $\text{PSU}(1, n+1)/P$ est une géométrie de Klein parabolique dont la filtration de $\mathfrak{g}$ est de longueur deux, tout comme pour $\mathbf{X}_{2n+1}$ (voir [ČS09, §4.2.4]).

3. Un contre-exemple important de géométrie de Klein qui n'est pas parabolique est tout simplement l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n \rtimes \text{O}(n))/\text{O}(n)$, car $\mathbb{R}^n \rtimes \mathfrak{so}(n)$ n'est pas semi-simple. Le problème d'équivalence pour les métriques Riemanniennes ne rentre donc pas dans le cadre de notre travail.

Remarque 3.1.23. Le rôle des conditions algébriques imposées sur une géométrie de Klein parabolique s'expliquera naturellement au cours du reste du chapitre. Nous verrons en particulier

8. Cette dernière condition n'est pas imposée dans [ČS09]. Elle permet cependant de clarifier l'interprétation géométrique de la théorie (nous précisons dans une prochaine note de bas de page le moment où elle joue son rôle), tout en étant vérifiée dans la plupart des situations intéressantes (et en particulier dans le cas des structures Lagrangiennes de contact). Nous décidons donc de l'imposer immédiatement.

que la graduation de $\mathfrak{g}$ résume l'essentiel de l'information algébrique pertinente dont nous aurons besoin.

Si l'on approfondit l'étude des géométries de Cartan paraboliques, on s'aperçoit que les notions que nous avons introduites plus tôt (gradation de l'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$, et sous-groupe parabolique P) sont intimement liées à des notions plus standard de la théorie de structure des algèbres de Lie (nous renvoyons à [ČS09, §3.2] à ce sujet). En d'autres termes, l'utilisation de ces notions est une manière concise d'utiliser des notions d'algèbres de Lie sans avoir à en parler.

3.2 D'une structure sur la base vers une géométrie de Cartan

Puisque nous étudions le problème d'équivalence pour différentes géométries de Klein, nous ne pourrions bien sûr pas distinguer dans notre raisonnement les structures géométriques $\mathcal{S}_{\mathbf{X}}$ particulières à chaque espace modèle $\mathbf{X}$. Notre première tâche est donc dans cette section de définir les structures géométriques de référence sur la base M , que nous appellerons G_0 -structures filtrées. Ce sont des analogues aux G -structures standard, en présence d'une filtration du fibré tangent. Nous verrons ensuite pourquoi une géométrie de Cartan induit sur la variété de base une G_0 -structure filtrée, sous réserve que sa courbure vérifie une condition dite de *régularité*. Nous terminerons cette section en montrant que toute G_0 -structure filtrée est en réalité induite par une géométrie de Cartan régulière.

Dans toute la suite de ce chapitre, $\mathbf{X} = G/P$ est une géométrie de Klein parabolique de dimension n , associée à la géométrie infinitésimale $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ dont nous notons $\{\mathfrak{g}_i\}_{i=-k, \dots, k}$ la $|k|$ -gradation, $\{\mathfrak{g}^i\}_{i=-k, \dots, k}$ la filtration associée, et $\mathfrak{g}_- := \mathfrak{g}_{-k} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ la sous-algèbre nilpotente inférieure.

3.2.1 G_0 -structures filtrées

La structure principale dont nous disposons sur $\mathfrak{g}$ est sa graduation, mais puisque l'action adjointe de P , groupe de structure d'un futur fibré de Cartan, préserve seulement la *filtration* associée, on se doute que la structure induite sur la base sera également une filtration.

3.2.1.a Variétés filtrées localement modelées sur $\mathfrak{g}_-$

Pour toute variété M , on définit d'une manière analogue aux espaces vectoriels une filtration de TM comme une suite décroissante $TM = TM^{-k} \supset \dots \supset TM^{-1} \neq \{0\}$ de distributions, et par convention, on pose $TM^i = TM$ pour tout $i < -k$ et $TM^i = \{0\}$ pour tout $i \geq 0$. Toute distribution non-triviale ξ sur M correspond ainsi à la filtration $TM = TM^{-2} \supset TM^{-1} = \xi$ de longueur deux.

Définition 3.2.1. Une *variété filtrée de type $\mathfrak{g}_-$* est une variété M munie d'une filtration $\{TM^i\}_{i=-k, \dots, -1}$ telle que $\dim TM^i = \dim \mathfrak{g}^i - \dim \mathfrak{p}$ pour tout $i = -k, \dots, -1$ (en particulier $\dim M = \dim \mathbf{X}$), et vérifiant la condition de compatibilité suivante. Pour tout i et j , si X et Y sont des champs de vecteurs à valeurs respectives dans TM^i et TM^j , alors le crochet de Lie $[X, Y]$ est à valeurs dans TM^{i+j} .

Notons que dans le cas d'une filtration de longueur deux (*i.e.* dans le cas d'une seule distribution ξ), la condition de compatibilité d'une variété filtrée est tautologiquement vérifiée. À toute variété filtrée $(M, \{TM^i\})$ nous associons son *fibré gradué associé* $T^{\text{gr}}M$, défini comme la somme directe abstraite des fibrés quotients $T^{\text{gr}}M_i := TM^i/TM^{i+1}$ pour i allant de $-k$ à -1 . Par exemple, dans le cas de la filtration associée à une distribution ξ , le fibré gradué associé est la somme directe du fibré en droite $TM/\xi = T^{\text{gr}}M_{-2}$ et de la distribution $\xi = T^{\text{gr}}M_{-1}$.

Notre notion de variété filtrée est pour le moment relativement vide. Elle ne nous permet pas, par exemple, de caractériser les filtrations de longueur deux qui correspondent aux distributions de contact. Pour pouvoir le faire, nous souhaiterions coder l'information géométrique d'« intégrabilité » des distributions à travers une structure algébrique sur chaque espace tangent. Puisque le crochet de Lie des champs de vecteurs n'est pas une application tensorielle, *i.e.* n'induit pas une application bilinéaire point par point, nous nous tournons vers le fibré gradué associé $T^{\text{gr}}M$. Pour tout i , notons $p_i: TM^i \rightarrow T^{\text{gr}}M_i$ la projection canonique. Alors pour tout i et j , si $X \in \Gamma(TM^i)$ et $Y \in \Gamma(TM^j)$ sont des sections respectives de TM^i et TM^j , la condition de compatibilité des variétés filtrées autorise la définition suivante :

$$\mathcal{L}(p_i(X), p_j(Y)) := p_{i+j}([X, Y]) \in \Gamma(TM^{i+j}). \quad (3.2.1)$$

Lemme 3.2.2. *L'application $\mathcal{L}$ est tensorielle, et le recollement de ces applications définit sur $T^{\text{gr}}M$ un champ de crochets de Lie appelé crochet de Levi de la variété filtrée $(M, \{TM^i\})$, que nous noterons encore $\mathcal{L}$. Pour tout $x \in M$, $(T_x^{\text{gr}}M, \mathcal{L}_x)$ est une algèbre de Lie graduée.*

Démonstration. Nous notons $\Gamma(E)$ l'espace des sections d'un fibré vectoriel E . L'application

$$\begin{aligned} \Gamma(TM^i) \times \Gamma(TM^j) &\longrightarrow \Gamma(T^{\text{gr}}M_{i+j}) \\ (X, Y) &\longmapsto p_{i+j} \circ [X, Y] \end{aligned}$$

est $C^\infty(M)$ -bilinéaire car pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, $[fX, Y] = f[X, Y] - (Y \cdot f)X$, dont le second terme est à valeurs dans TM^{i+j+1} car $i \geq i + j + 1$ puisque $j < 0$. La valeur en tout point x de ce tenseur est une application bilinéaire alternée de $T_x M^i \times T_x M^j$ dans $T_x^{\text{gr}}M_{i+j}$. Or si X est à valeurs dans TM^{i+1} ou Y à valeurs dans TM^{j+1} , alors $[X, Y]$ est à valeurs dans TM^{i+j+1} donc $(p_{i+j} \circ [X, Y])_x = 0$. L'application précédente passe donc bien au quotient en une application bilinéaire alternée $\mathcal{L}_x: T_x^{\text{gr}}M_i \times T_x^{\text{gr}}M_j \rightarrow T_x^{\text{gr}}M_{i+j}$. De plus, $\mathcal{L}_x$ vérifie l'identité de Jacobi car le crochet de Lie des champs de vecteurs la vérifie, donc $\mathcal{L}_x$ est un crochet de Lie. Sa restriction (3.2.1) à chaque composante $T^{\text{gr}}M_i \times T^{\text{gr}}M_j$ respecte par définition la graduation, si bien que $(T_x^{\text{gr}}M, \mathcal{L}_x)$ est par construction une algèbre de Lie graduée en tout point. $\square$

Bien que $T^{\text{gr}}M$ et TM soient isomorphes en tant que fibrés vectoriels, et que l'on puisse, plus précisément, construire une graduation de TM qui soit isomorphe à celle de $T^{\text{gr}}M$, la filtration de TM n'induit aucune graduation canonique de TM . Pour la même raison, il est impossible de définir le crochet de Levi sur TM directement. En d'autres termes, nous sommes forcés de nous éloigner des espaces tangents « concrets », mais nous y gagnons une structure supplémentaire.

Exemple 3.2.3. Soit $(M, \{TM^i\})$ une variété filtrée dont la composante TM^l est intégrable. Si deux champs de vecteurs X et Y sont à valeurs dans TM^l , alors $[X, Y] \in TM^l$, or $TM^l \subset TM^{2l+1}$ car $l \leq 2l + 1$ puisque $l < 0$, donc $\mathcal{L}(p_l(X), p_l(Y)) = p_{2l}([X, Y]) = 0$. En d'autres termes, l'intégrabilité de TM^l se traduit au niveau du crochet de Levi en disant que $T_x^{\text{gr}}M_l$ munie de la restriction de $\mathcal{L}_x$ est une sous-algèbre abélienne en tout point.

Pour caractériser algébriquement les structures de contact, nous allons devoir donner un sens aux crochets de Levi « constants » et non-triviaux.

Définition 3.2.4. Une variété filtrée $(M, \{TM^i\})$ de type $\mathfrak{g}_-$ sera dite *localement modelée sur $\mathfrak{g}_-$* si $(T_x^{\text{gr}}M, \mathcal{L}_x)$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_-$ en tout point en tant qu'algèbre de Lie graduée.

Exemple 3.2.5. Une distribution d'hyperplans ξ sur une variété M de dimension $2n + 1$ est de contact si, et seulement si la filtration associée $TM = TM^{-2} \supset TM^{-1} = \xi$ est localement modelée sur $\mathfrak{heis}(2n + 1)$ (voir chapitre 4, lemme 4.1.2).

3.2.1.b G_0 -réduction du fibré des repères d'algèbres de Lie graduées

Nous savons désormais caractériser les distributions de contact, mais aucune filtration supplémentaire ne nous permettra de traiter simultanément les deux sous-distributions Legendriennes E^α et E^β d'une structure Lagrangienne de contact. Pour prendre en compte E^α et E^β , l'idée est d'adapter à notre situation filtrée la notion standard de G -structure.

Une G -structure sur une variété M consiste à choisir une *réduction* du fibré des repères $\mathcal{R}(TM)$ de TM (fibré principal au dessus de M de groupe de structure $GL_n(\mathbb{R})$) à un sous-groupe fermé G de $GL_n(\mathbb{R})$. Rappelons qu'une réduction de $\mathcal{R}(TM)$ à G , aussi appelée G -réduction, est simplement un sous-fibré $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}(TM)$ qui est un G -fibré principal pour l'action de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{R}(TM)$. Une $O(n)$ -structure correspond par exemple à une métrique Riemannienne sur M .

On peut plus généralement considérer le fibré des repères de n'importe quel fibré vectoriel sur M , et si $(M, \{TM^i\})$ est une variété filtrée localement modelée sur $\mathfrak{g}_-$, on s'intéressera au fibré des repères de son fibré gradué associé $T^{\text{gr}}M$. Nous choisirons $\mathfrak{g}_-$ comme espace vectoriel modèle pour les fibres de $T^{\text{gr}}M$, et nous verrons le fibré des repères de $T^{\text{gr}}M$ comme l'ensemble des isomorphismes linéaires $u: \mathfrak{g}_- \rightarrow T_x^{\text{gr}}M$. Le groupe de structure de $\mathcal{R}(T^{\text{gr}}M)$ est donc $GL(\mathfrak{g}_-)$. Pour prendre en compte toute la structure que nous avons mise en évidence, on se restreint au sous-fibré de $\mathcal{R}(T^{\text{gr}}M)$ constitué des repères qui sont des *isomorphismes d'algèbres de Lie graduées* de $\mathfrak{g}_-$ sur $(T_x^{\text{gr}}M, \mathcal{L}_x)$, *i.e.* qui préservent les crochets de Lie ainsi que les graduations. C'est une réduction de $\mathcal{R}(T^{\text{gr}}M)$ que nous noterons $p: \mathcal{R}^{\text{gr}}(M) \rightarrow M$ et que nous appellerons *fibré des repères d'algèbres de Lie graduées* de $T^{\text{gr}}M$. Le groupe de structure de $\mathcal{R}^{\text{gr}}(M)$ est le groupe $\text{Aut}^{\text{gr}}(\mathfrak{g}_-)$ des automorphismes d'algèbre de Lie graduée de $\mathfrak{g}_-$.

Remarque 3.2.6. Ce fibré nous montre que si $(M, \{TM^i\})$ est localement modelée sur $\mathfrak{g}_-$, alors au dessus de tout ouvert $U \subset M$ assez petit, le fibré en algèbres de Lie graduées $(T^{\text{gr}}M, \mathcal{L})$ est effectivement *localement isomorphe* au fibré trivial $U \times \mathfrak{g}_- \rightarrow U$. En d'autres termes, la condition ponctuelle d'isomorphisme de la définition 3.2.4 suffit à assurer l'isomorphisme local. En effet si $\sigma: U \rightarrow \mathcal{R}^{\text{gr}}(M)$ est une section de $p: \mathcal{R}^{\text{gr}}(M) \rightarrow M$ au dessus de U , alors $(x, v) \in U \times \mathfrak{g}_- \mapsto \sigma(x)(v) \in T_x^{\text{gr}}M$ est une trivialisatoin de $T^{\text{gr}}M$ au dessus de U dont la restriction à chaque fibre est un isomorphisme d'algèbres de Lie graduées.

Nous souhaitons maintenant considérer des réductions de $\mathcal{R}^{\text{gr}}(M)$ dans le but d'affiner la structure géométrique induite sur la base. Pour faire le lien avec la géométrie de Klein parabolique G/P , nous cherchons donc un sous-groupe $G_0 \subset P$ dont l'action adjointe préserve individuellement les composantes de la graduation de $\mathfrak{g}_-$. Les hypothèses algébriques sur la géométrie de Klein parabolique infinitésimale $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ imposent alors (à indices fini près) à G_0 de préserver chacune des composantes de la graduation de $\mathfrak{g}$ (voir par exemple [ČS09, Lemma 3.1.3]), ce qui nous amène à introduire le *sous-groupe de Levi*

$$G_0 := \{g \in P \mid \forall i = -k, \dots, k, \text{Ad}(\mathfrak{g}_i) = \mathfrak{g}_i\} \quad (3.2.2)$$

de la géométrie de Klein parabolique $\mathbf{X} = G/P$, qui est un sous-groupe fermé de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ (voir par exemple [ČS09, Lemma 3.1.3]).

En notant $\pi_-: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_-$ la projection sur $\mathfrak{g}_-$ parallèlement à $\mathfrak{p}$, nous désignons par Ad^- la représentation de P sur $\mathfrak{g}_-$ définie pour $p \in P$ et $v \in \mathfrak{g}_-$ par

$$\text{Ad}^-(p) \cdot v = \pi_-(\text{Ad}(p) \cdot v). \quad (3.2.3)$$

La projection π_- induit un isomorphisme de $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ vers $\mathfrak{g}_-$ qui est équivariant pour les actions $\overline{\text{Ad}}$ et Ad^- de P sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{g}_-$. Puisque G_0 préserve $\mathfrak{g}_-$, pour tout $g \in G_0$ on a simplement $\text{Ad}^-(g) = \text{Ad}(g)|_{\mathfrak{g}_-}$, et puisque $\text{Ad}(G_0)$ préserve la graduation de $\mathfrak{g}$ par construction, on a finalement $\text{Ad}^-(G_0) \subset \text{Aut}^{\text{gr}}(\mathfrak{g}_-)$. Notons enfin que $\text{Ad}|_P: P \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ est injective par hypothèse sur la géométrie de Klein parabolique G/P , donc $\text{Ad}^-|_{G_0}: G_0 \rightarrow \text{Ad}^-(G_0)$ est un isomorphisme.⁹

9. C'est ici que notre hypothèse $(\text{Ker Ad}) \cap P = \{\text{id}\}$ joue son rôle. Elle nous permet en effet de définir une

Définition 3.2.7. Nous appellerons G_0 -structure filtrée modelée sur G/P sur une variété M un couple $(\{TM^i\}, \mathcal{R})$, où la filtration $\{TM^i\}$ fait de M une variété filtrée localement modelée sur $\mathfrak{g}_-$, et où $\mathcal{R}$ est une $\text{Ad}^-(G_0)$ -réduction de $\mathcal{R}^{\text{gr}}(M)$.

Les G_0 -structures filtrées sont les structures géométriques de base que nous considérons sur les variétés. L'objectif du reste de ce chapitre est d'expliquer pourquoi ces structures sont équivalentes à des géométries de Cartan *normales* modelées sur $\mathbf{X}$. Le travail restant pour une géométrie de Klein parabolique $\mathbf{X} = G/P$ donnée et en présence d'une structure G -invariante $\mathcal{S}_{\mathbf{X}}$ sur $\mathbf{X}$, est de comprendre pourquoi la donnée d'une G_0 -structure filtrée sur une variété M est équivalente à une structure géométrique $\mathcal{S}_M$ sur M , « de type $\mathcal{S}_{\mathbf{X}}$ ».

Exemples 3.2.8. 1. Dans le cas de l'espace modèle $\mathbf{X}_{2n+1}$ des structures Lagrangiennes de contact, nous verrons qu'une structure Lagrangienne de contact sur une variété de dimension $2n+1$ est équivalente à une G_0 -structure filtrée modelée sur $\mathbf{X}_{2n+1}$ (voir chapitre 4, proposition 4.1.4). 2. Dans le cas de la sphère conforme $\mathbf{S}^n = \text{PO}(1, n+1)/P$ la filtration d'une G_0 -structure filtrée est triviale, donc $\mathcal{R}^{\text{gr}}(M)$ est simplement le fibré des repères de TM , et toute l'information est contenue dans la G_0 -réduction de $\mathcal{R}(M)$. On vérifie que G_0 est dans ce cas le groupe conforme $\text{Conf}(\mathbb{R}^n) \simeq \text{O}(n) \rtimes \mathbb{R}^*$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ (voir [ČS09, §4.1.2]), ce qui montre que toute G_0 -réduction de $\mathcal{R}(M)$ est équivalente à une *structure Riemannienne conforme*, i.e. à une classe conforme de métriques Riemanniennes. Dans le cas de la sphère CR $\text{PSU}(1, n+1)/P$, la filtration d'une G_0 -structure filtrée est de longueur deux, et on montre qu'une G_0 -structure filtrée est équivalente à une *structure presque CR non-dégénérée et partiellement intégrable* (voir [ČS09, §4.2.4]).

3.2.1.c Isomorphismes de G_0 -structures filtrées

Soient $\mathcal{S}_1 = (\{TM_1^i\}, \mathcal{R}_1)$ et $\mathcal{S}_2 = (\{TM_2^i\}, \mathcal{R}_2)$ deux G_0 -structures filtrées modelées sur G/P , respectivement définies sur deux variétés M_1 et M_2 . Si $f: M_1 \rightarrow M_2$ est un difféomorphisme préservant les filtrations, i.e. tel que $f^*TM_2^i = TM_1^i$ pour tout i , alors $Df: TM_1 \rightarrow TM_2$ induit un isomorphisme $D^{gr}f$ entre les fibrés gradués associés (caractérisé pour tout i par $D^{gr}f \circ p_i^1 = p_i^2 \circ Df$, où $p_i^k: TM_k^i \rightarrow (T^{\text{gr}}M_k)_i$ désigne la projection canonique pour $k = 1$ ou 2). Il existe de plus un relevé naturel de f en un isomorphisme

$$f^{(1)}: \mathcal{R}(T^{\text{gr}}M_1) \rightarrow \mathcal{R}(T^{\text{gr}}M_2)$$

que nous appellerons *prolongation de f* , défini pour tout $u \in \mathcal{R}(T^{\text{gr}}M_1)$ au dessus de $x \in M_1$ par $f^{(1)}(u) = D_x^{gr}f \circ u \in \mathcal{R}(T^{\text{gr}}M_2)$. Cette définition montre immédiatement que $f^{(1)}$ est bien $\text{GL}(\mathfrak{g}_-)$ -équivariant (car l'action de $\text{GL}(\mathfrak{g}_-)$ est à droite). De plus, l'égalité $f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y]$ pour deux champs de vecteurs X et Y sur M_2 assure que si $u: \mathfrak{g}_- \rightarrow T_x^{\text{gr}}M_1$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie graduées pour le crochet de Levi sur M_1 , alors $f^{(1)}(u): \mathfrak{g}_- \rightarrow T_x^{\text{gr}}M_2$ en est un pour le crochet de Levi sur M_2 . En d'autres termes, $f^{(1)}$ se restreint en un isomorphisme de $\mathcal{R}^{\text{gr}}(M_1)$ sur $\mathcal{R}^{\text{gr}}(M_2)$.

Définition 3.2.9. On dira qu'un difféomorphisme $f: M_1 \rightarrow M_2$ est un *isomorphisme* entre deux G_0 -structures filtrées $\mathcal{S}_1 = (\{TM_1^i\}, \mathcal{R}_1)$ et $\mathcal{S}_2 = (\{TM_2^i\}, \mathcal{R}_2)$ de même modèle, si $f^*TM_2^i = TM_1^i$ pour tout i , et si $f^{(1)}(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{R}_2$.

Exemple 3.2.10. Soit $\mathcal{L}$ une structure Lagrangienne de contact sur une variété M . Alors les automorphismes de $\mathcal{L}$ sont exactement ceux de sa G_0 -structure filtrée associée (voir exemple 3.2.8 et proposition 4.1.4).

G_0 -structure filtrée simplement comme une réduction du fibré des repères gradués. Si $\text{Ad}|_P$ n'était pas injective, nous devrions définir une G_0 -structure filtrée comme un morphisme allant d'un G_0 -fibré principal abstrait dans $\mathcal{R}^{\text{gr}}(M)$, ce qui nous plaît moins.

3.2.2 G_0 -structure filtrée induite par une géométrie de Cartan régulière

Nous montrons maintenant que toute géométrie de Cartan $\mathcal{C} = (\pi: \hat{M} \rightarrow M, \omega)$ modelée sur G/P induit sur M une G_0 -structure filtrée de même modèle.

La filtration induite sur M est aisée à définir. En effet pour tout $i = -k, \dots, k$, la distribution $\mathrm{TM}^i := \omega^{-1}(\mathfrak{g}^i)$ est P -invariante sur $\hat{M}$ par P -équivariance de ω , et passe donc au quotient sur M . Puisque TM^0 est l'espace vertical du fibré $\pi: \hat{M} \rightarrow M$ car $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{p}$, toutes les composantes positives de la filtration de la filtration $\{\mathrm{TM}^i\}_i$ s'annulent une fois projetées sur M , mais ses composantes strictement négatives définissent en revanche une filtration non-triviale de TM . Pour tout $i = -k, \dots, -1$, notons

$$\mathrm{TM}^i := \pi_*(\omega^{-1}(\mathfrak{g}^i)) \quad (3.2.4)$$

la sous-distribution obtenue en projetant TM^i sur M . Nous appellerons $\{\mathrm{TM}^i\}_{i=-k, \dots, -1}$ la *filtration induite* sur M par la géométrie de Cartan $\mathcal{C}$ (ou par la connexion de Cartan ω si le fibré $\hat{M}$ est fixé). Le résultat ci-dessous nous donne une condition sur la fonction de courbure K de la géométrie de Cartan $\mathcal{C}$ pour que $(M, \{\mathrm{TM}^i\})$ soit une variété filtrée.

Lemme 3.2.11. *La filtration induite sur M par la géométrie de Cartan $\mathcal{C}$ est préservée par le crochet de Lie des champs de vecteurs si, et seulement si pour tout $i, j < 0$, $K(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j) \subset \mathfrak{g}^{i+j}$.*

Démonstration. Soient $i, j < 0$. Alors TM^i et TM^j sont tous deux contenus dans TM^{i+j+1} , et de la même manière que dans le lemme 3.2.2 au sujet du crochet de Levi, on en déduit que l'application

$$\begin{aligned} T: \Gamma(\mathrm{TM}^i) \times \Gamma(\mathrm{TM}^j) &\longrightarrow \Gamma(\mathrm{TM}/\mathrm{TM}^{i+j+1}) \\ (\xi, \eta) &\longmapsto [\xi, \eta] \end{aligned}$$

est $\mathcal{C}^\infty$ -bilinéaire. Ceci nous autorise à calculer la valeur de T à partir de n'importe quel couple de sections locales de TM^i et TM^j . En particulier, pour $\hat{x} \in \hat{M}$, $x = \pi(\hat{x})$, $v \in \mathrm{T}_x M^i$ et $w \in \mathrm{T}_x M^j$, on peut choisir les extensions $\tilde{v}$ et $\tilde{w}$ données par le lemme 3.1.19. En effet, $\tilde{v}$ et $\tilde{w}$ restent respectivement à valeur dans TM^i et TM^j selon la remarque 3.1.20. Par conséquent, $T_x(v, w) = [\tilde{v}, \tilde{w}]_x$ est selon la relation (3.1.8) la classe de $D_{\hat{x}}\pi \circ \omega_{\hat{x}}^{-1}([V, W] - K_{\hat{x}}(V, W))$ dans $\mathrm{T}_x M / \mathrm{T}_x M^{i+j+1}$, où $V \in \mathfrak{g}_i$ et $W \in \mathfrak{g}_j$ vérifient $v = D_{\hat{x}}\pi \circ \omega_{\hat{x}}^{-1}(V)$ et $w = D_{\hat{x}}\pi \circ \omega_{\hat{x}}^{-1}(W)$. Or le crochet de Lie respecte la filtration $\{\mathrm{TM}^i\}_i$ si, et seulement si $T_x(v, w) \in \mathrm{T}_x M^{i+j} / \mathrm{T}_x M^{i+j+1}$, ce qui est donc le cas si, et seulement si $[V, W] - K_{\hat{x}}(V, W) \in \mathfrak{g}^{i+j}$ par définition de la filtration induite par $\mathcal{C}$. Puisque $[V, W] \in \mathfrak{g}^{i+j}$ car $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie graduée, ceci est précisément équivalent à $K_{\hat{x}}(V, W) \in \mathfrak{g}^{i+j}$, ce qui termine la preuve. $\square$

Nous supposons désormais que K vérifie la condition du lemme 3.2.11, si bien que $(M, \{\mathrm{TM}^i\})$ est une variété filtrée dont nous notons $p: \mathcal{R}^{\mathrm{gr}}(M) \rightarrow M$ le fibré des repères d'algèbres de Lie graduées. Pour commencer, nous associons à tout point $\hat{x} \in \hat{M}$ un repère de l'espace vectoriel gradué $\mathrm{T}_x^{\mathrm{gr}} M$, avec $x = \pi(\hat{x})$. Pour tout $-k \leq i \leq -1$, $D_{\hat{x}}\pi \circ \omega_{\hat{x}}^{-1}$ envoie $\mathfrak{g}_i$ sur $\mathrm{T}_x M^i$ par définition de la filtration induite par $\mathcal{C}$. De plus pour $V \in \mathfrak{g}_i$, si $D_{\hat{x}}\pi \circ \omega_{\hat{x}}^{-1}(V) \in \mathrm{T}_x M^{i+1}$, alors $V \in \mathfrak{g}^{i+1} + \mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}^{i+1}$, donc $V = 0$ puisque $V \in \mathfrak{g}_i$. En notant $p_i: \mathrm{TM}^i \rightarrow \mathrm{T}_x^{\mathrm{gr}} M_i$ la projection canonique, ceci montre que

$$\Phi_{\mathcal{C}}(\hat{x})|_{\mathfrak{g}_i} := p_i \circ D_{\hat{x}}\pi \circ \omega_{\hat{x}}^{-1}|_{\mathfrak{g}_i}: \mathfrak{g}_i \rightarrow \mathrm{T}_x^{\mathrm{gr}} M_i \quad (3.2.5)$$

est un isomorphisme de $\mathfrak{g}_i$ sur $\mathrm{T}_x^{\mathrm{gr}} M_i$ pour tout $-k \leq i \leq -1$. On note $\Phi_{\mathcal{C}}(\hat{x}): \mathfrak{g}_- \rightarrow \mathrm{T}_x^{\mathrm{gr}} M$ le recollement de ces applications, qui est par construction un repère de l'espace vectoriel gradué $\mathrm{T}_x^{\mathrm{gr}} M$. L'équivariance de ω montre facilement que l'application lisse $\Phi_{\mathcal{C}}: \hat{M} \rightarrow \mathcal{R}(\mathrm{T}^{\mathrm{gr}} M)$ que nous venons de définir est équivariante pour le morphisme $\mathrm{Ad}^-: P \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}_-)$ (ceci est analogue à la preuve de la relation d'équivariance (3.1.2) prouvée précédemment pour les isomorphismes $i_{\hat{x}}$). Un bon candidat pour une réduction de $\mathcal{R}^{\mathrm{gr}}(M)$ semble donc être $\Phi_{\mathcal{C}}(\hat{M})$. La sous-algèbre

nilpotente $\mathfrak{p}_+ := \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$ de $\mathfrak{p}$ nous sera utile pour confirmer cette intuition. Elle vérifie la décomposition suivante dont on peut trouver une preuve dans [ČS09, Theorem 3.1.3].

Lemme 3.2.12. *L'application $(g, X) \in G_0 \times \mathfrak{p}_+ \mapsto g \exp(X) \in P$ est un difféomorphisme.*

En particulier, $P_+ := \exp(\mathfrak{p}_+)$ est un sous-groupe fermé de P , distingué dans P car $\text{Ad}(P)$ préserve $\mathfrak{p}_+$. De plus $P = G_0 P_+$, et l'inclusion de G_0 dans P induit un isomorphisme de G_0 sur P/P_+ .

Lemme 3.2.13. 1. *L'application Φ_C est constante sur les fibres de P_+ .*

2. *Son image $\mathcal{R}_C := \Phi_C(\hat{M})$ est contenue dans le sous-fibré $\mathcal{R}^{\text{gr}}(M)$ des repères d'algèbres de Lie graduées si, et seulement si pour tout $i, j < 0$, $K(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j) \subset \mathfrak{g}^{i+j+1}$. Dans ce cas, $\Phi_C(\hat{M})$ est une $\text{Ad}^-(G_0)$ -réduction de $\mathcal{R}^{\text{gr}}(M)$.*

Démonstration. 1. Soient $\hat{x} \in \hat{M}$, $X \in \mathfrak{p}_+$ et $p = \exp(X)$. Pour montrer que $\Phi_C(\hat{x} \cdot p) = \Phi_C(\hat{x})$, nous devons montrer pour tout $-k \leq i \leq -1$ que $D_{\hat{x} \cdot p} \pi \circ \omega_{\hat{x} \cdot p}^{-1} - D_{\hat{x}} \pi \circ \omega_{\hat{x}}^{-1} = D_{\hat{x}} \pi \circ \omega_{\hat{x}}^{-1} \circ (\text{Ad}(p) - \text{id})$ envoie $\mathfrak{g}_i$ sur $T_{\pi(\hat{x})} M^{i+1}$. Par définition de la filtration induite par $\mathcal{C}$, ceci revient à montrer que $(\text{Ad}(p) - \text{id})(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{g}^{i+1}$. Or $\text{Ad}(p) = \exp(\text{ad } X)$ et $X \in \mathfrak{p}_+$, donc pour tout $V \in \mathfrak{g}_i$, $\text{Ad}(p) \cdot V - V = [X, V] + \frac{1}{2}[X, [X, V]] + \cdots \in \mathfrak{g}^{i+1}$ car le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$ préserve sa filtration.

2. Fixons $i, j < 0$. Soient $\hat{x} \in \hat{M}$, $x = \pi(\hat{x})$, ainsi que $v \in T_x M^i$ et $w \in T_x M^j$ de projections $\bar{v} = p_i(v) \in T_x^{\text{gr}} M_i$ et $\bar{w} = p_j(w) \in T_x^{\text{gr}} M_j$ dans les gradués associés. Soient $V \in \mathfrak{g}_i$ et $W \in \mathfrak{g}_j$ tels que $\bar{v} = \Phi_C(\hat{x})(V)$ et $\bar{w} = \Phi_C(\hat{x})(W)$. Avec $\tilde{v}$ et $\tilde{w}$ les champs de vecteurs prolongeant v et w donnés par le lemme 3.1.19, le crochet de Levi de $\bar{v}$ et $\bar{w}$ vaut $\mathcal{L}_x(\bar{v}, \bar{w}) = p_{i+j}([\tilde{v}, \tilde{w}]_x) = \Phi_C(\hat{x})([V, W]) - p_{i+j} \circ D_{\hat{x}} \pi \circ \omega_{\hat{x}}^{-1}(K_{\hat{x}}(V, W))$ selon la relation (3.1.8) et par définition de Φ_C . Or $\Phi_C(\hat{x})$ est un morphisme d'algèbres de Lie si, et seulement si $\Phi_C(\hat{x})([V, W]) = \mathcal{L}_x(\bar{v}, \bar{w})$, ce qui équivaut à $D_{\hat{x}} \pi \circ \omega_{\hat{x}}^{-1}(K_{\hat{x}}(V, W)) \in T_x M^{i+j+1}$ selon la relation précédente, i.e. à $K_{\hat{x}}(V, W) \in \mathfrak{g}^{i+j+1}$ par définition de la filtration induite par $\mathcal{C}$.

Supposons $\Phi_C(\hat{M})$ contenu dans $\mathcal{R}^{\text{gr}}(M)$. Soit $\hat{x} \in \hat{M}$ et $p \in P$, que l'on décompose sous la forme $p = gp_+$ avec $g \in G_0$ et $p_+ \in P_+$ grâce au lemme 3.2.12. Puisque $\Phi_C(\hat{x} \cdot gp_+) = \Phi_C(\hat{x} \cdot g)$ selon le premier résultat du lemme, on a $\Phi_C(\hat{x} \cdot p) = \Phi_C(\hat{x}) \circ \text{Ad}^-(g)$ par Ad^- -équivariance de Φ_C . Ceci montre précisément que $\Phi_C(\hat{M})$ est une $\text{Ad}^-(G_0)$ -réduction de $\mathcal{R}^{\text{gr}}(M)$. $\square$

Les lemmes 3.2.11 et 3.2.13 motivent l'introduction d'une classe particulière de géométries de Cartan.

Définition 3.2.14. Une connexion de Cartan modelée sur G/P sera dite *régulière* si pour tous $i, j < 0$, sa fonction de courbure K vérifie $K(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j) \subset \mathfrak{g}^{i+j+1}$. Une géométrie de Cartan sera dite régulière si sa connexion de Cartan l'est.

Nous résumons les résultats obtenus dans l'énoncé suivant.

Proposition 3.2.15. 1. *Toute géométrie de Cartan régulière $\mathcal{C} = (\hat{M}, \omega)$ sur une variété M induit sur M une G_0 -structure filtrée $(\{TM^i\}, \mathcal{R}_C)$ de même modèle que $\mathcal{C}$, que nous noterons $\mathcal{S}_C$. Nous dirons également dans ce cas que $\mathcal{C}$ est une géométrie de Cartan admissible pour la G_0 -structure filtrée $\mathcal{S}_C$.*

2. *L'application $\Phi_C: \hat{M} \rightarrow \mathcal{R}_C$ est un P_+ -fibré principal.*

3. *Soit $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux géométries de Cartan régulières de même modèle sur deux variété M_1 et M_2 . Alors tout isomorphisme entre les géométries de Cartan $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ est un isomorphisme entre les G_0 -structures filtrées induites $\mathcal{S}_{\mathcal{C}_1}$ et $\mathcal{S}_{\mathcal{C}_2}$.*

Démonstration. 1. Ceci résume les résultats des lemmes 3.2.11 et 3.2.13.

2. C'est une reformulation du fait que Φ_C est P_+ -invariante, prouvé au lemme 3.2.13.

3. Soit $\hat{f}: \hat{M}_1 \rightarrow \hat{M}_2$ le relevé P -équivariant de f tel que $\hat{f}^* \omega_2 = \omega_1$. Il est immédiat d'après la définition des filtrations induites que $\hat{f}^* TM_2^i = TM_1^i$ pour tout $i < 0$. Il nous reste donc à montrer que la prolongation $f^{(1)}$ de f vérifie $f^{(1)}(\mathcal{R}_{\mathcal{C}_1}) \subset \mathcal{R}_{\mathcal{C}_2}$, et il suffit pour cela de montrer que $f^{(1)} \circ \Phi_{\mathcal{C}_1} = \Phi_{\mathcal{C}_2} \circ \hat{f}$. Or pour tout $\hat{x} \in \hat{M}_1$, par définition de $f^{(1)}$ on a bien $f^{(1)} \circ \Phi_{\mathcal{C}_1}(\hat{x}) = p_i \circ D_{\hat{f}(\hat{x})} \pi_2 \circ (\omega_2)_{\hat{f}(\hat{x})} = \Phi_{\mathcal{C}_2} \circ \hat{f}(\hat{x})$ car $\hat{f}^* \omega_2 = \omega_1$. $\square$

3.2.3 Existence d'une géométrie de Cartan admissible

Nous souhaitons maintenant remonter de la structure sur la base vers la géométrie de Cartan. Ayant fixé sur M une G_0 -structure filtrée $\mathcal{S} = (\{TM^i\}, \mathcal{R})$ modélisée sur $\mathbf{X}$, construisons sur M une géométrie de Cartan modélisée sur $\mathbf{X}$ dont la G_0 -structure filtrée induite est $\mathcal{S}$. Nous noterons $p: \mathcal{R} \rightarrow M$ la restriction à $\mathcal{R}$ de la projection canonique du fibré $\mathcal{R}^{\text{gr}}(M)$.

Une première étape importante pour se rapprocher d'une géométrie de Cartan est d'associer à $\mathcal{S}$ des 1-formes à valeurs dans des algèbres de Lie. La filtration de TM se relève naturellement à $\mathcal{R}$ en une filtration $\text{Ad}^-(G_0)$ -invariante en posant $T\mathcal{R}^i = p^*TM^i$ pour tout $i = -k, \dots, -1$. Pour tout $-k \leq i \leq -1$, nous définissons une 1-forme $\Theta_i: T\mathcal{R}^i \rightarrow \mathfrak{g}_i$ appelée *i^{ème} forme tautologique partielle* de $\mathcal{R}$ en posant pour $u \in \mathcal{R}$ et $v \in T_u\mathcal{R}^i$:

$$(\Theta_i)_u(v) = u^{-1}(p_i \circ D_u p(v)). \quad (3.2.6)$$

Rappelons qu'avec $x = p(u)$, $u: \mathfrak{g}_- \rightarrow T_x^{\text{gr}}M$ est un isomorphisme qui respecte les graduations, et que $p_i: TM^i \rightarrow T_x^{\text{gr}}M_i$ est la projection canonique. Les 1-formes différentielles partielles Θ_i constituent l'analogie naïf de la forme tautologique du fibré des repères dans le cadre filtré. Ce sont les prémisses de la connexion de Cartan que nous cherchons, et nous allons les compléter dans le résultat suivant.

Proposition 3.2.16. *Pour toute G_0 -structure filtrée $\mathcal{S} = (\{TM^i\}, \mathcal{R})$ modélisée sur $\mathbf{X}$, il existe une connexion de Cartan régulière ω définie sur le P -fibré principal $\hat{\mathcal{R}} := \mathcal{R} \times_{G_0} P$ et à valeurs dans $\mathfrak{g}$, telle que $\mathcal{S}$ soit induite par la géométrie de Cartan $(\hat{\mathcal{R}}, \omega)$. En particulier, toute G_0 -structure filtrée est induite par une géométrie de Cartan régulière.*

Démonstration. Définissons tout d'abord le P -fibré principal dont il est question. L'action à droite de G_0 sur $\mathcal{R} \times P$ définie par $(u, q) \cdot g = (u \cdot \text{Ad}^-(g), g^{-1}q)$ pour $u \in \mathcal{R}$, $q \in P$ et $g \in G_0$, est libre et propre. On peut donc considérer son quotient $\hat{\mathcal{R}} := (\mathcal{R} \times P)/G_0$ qui est noté $\mathcal{R} \times_{G_0} P$. Nous noterons $[u, q]$ la classe de $(u, q) \in \mathcal{R} \times P$ dans le quotient $\hat{\mathcal{R}}$. Alors $[u, q] \cdot q' := [u, qq']$ définit une action à droite de P sur $\hat{\mathcal{R}}$ qui fait de la projection $\pi: [u, q] \in \hat{\mathcal{R}} \mapsto p(u) \in M$ un P -fibré principal, avec $p: \mathcal{R} \rightarrow M$ la $\text{Ad}^-(G_0)$ -réduction $\mathcal{R}$ de notre G_0 -structure filtrée $\mathcal{S}$. Laissons provisoirement de côté le P -fibré principal $\hat{\mathcal{R}}$ pour nous préoccuper de la connexion de Cartan.

Une *connexion de Ehresmann* sur $\mathcal{R}$ est une 1-forme $\alpha: T\mathcal{R} \rightarrow \mathfrak{g}_0$ qui est équivariante (i.e. vérifie $R_g^*\alpha = g^{-1} \circ \alpha$ pour tout $g \in \text{Ad}^-(G_0)$), et qui reproduit l'action des champs de vecteurs fondamentaux (i.e. vérifie $\alpha(X^\dagger) \equiv X$ pour tout $X \in \text{Lie}(\text{Ad}^-(G_0))$, avec $X^\dagger(u) = \frac{d}{dt}|_{t=0} u \cdot \exp(tX)$ pour $u \in \mathcal{R}$). Cette seconde condition assure en particulier que $\text{Ker } \alpha$ est transverse aux fibres de $p: \mathcal{R} \rightarrow M$ en tout point.

Fait 3.2.17. Il existe une connexion de Ehresmann α sur $\mathcal{R}$.

Schéma de démonstration. La condition $\alpha(X^\dagger) \equiv X$ impose la valeur d'une connexion de Ehresmann dans la direction de la fibre de p , et on vérifie facilement qu'elle assure également l'équivariance de α dans ces directions. Pour définir α dans les autres directions, on procède localement. Sur un G_0 -fibré principal trivial $U \times G_0 \rightarrow G_0$, on peut poser $\alpha \equiv 0$ dans la direction horizontale TU , pour obtenir une connexion de Ehresmann locale. Il suffit alors de recoller par une partition de l'unité les 1-formes ainsi définies sur des trivialisations locales du fibré $p: \mathcal{R} \rightarrow M$. $\square$

L'orthogonal de TM^{-k+1} pour une métrique Riemannienne lisse sur M fournit un supplémentaire lisse S de TM^{-k+1} dans TM . Notons $\bar{\pi}_{-k+1}$ la projection linéaire de TM sur TM^{-k+1} parallèlement à S . En procédant de même, on construit pour tout $i = -k+1, \dots, -1$ un morphisme lisse et surjectif $\bar{\pi}_i: TM \rightarrow TM^i$ de fibrés vectoriels qui est une projection sur TM^i (i.e. tel que $\bar{\pi}_i|_{TM^i} = \text{id}_{TM^i}$), et l'on complète tout ceci par $\bar{\pi}_{-k} = \text{id}_{TM}$. Notons $H := \text{Ker } \alpha$ le noyau de notre connexion de Ehresmann, ainsi que $H^i := H \cap T\mathcal{R}^i$ pour tout $i = -k, \dots, -1$.

Puisque H est transverse à $\text{Ker } Dp$, $Dp|_H: H \rightarrow TM$ est un isomorphisme en tout point, et on peut donc relever $\bar{\pi}_i$ en un morphisme lisse et surjectif $\pi_i: T\mathcal{R} \rightarrow H^i$ de fibrés vectoriels qui est une projection sur H^i (caractérisée par $Dp \circ \pi_i = \bar{\pi}_i \circ Dp$). De plus, $\pi_i(H^i) \subset TM^i$ par construction, et π_i est $\text{Ad}^-(G_0)$ -invariante car Dp l'est. Nous pouvons finalement définir une 1-forme $\Theta: T\mathcal{R} \rightarrow \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0$ en posant $\Theta := \sum_{i=-k}^{-1} \Theta_i \circ \pi_i + \alpha$.

Fait 3.2.18. Θ est un isomorphisme en tout point, et est $\text{Ad}^-(G_0)$ -équivariante.

Démonstration. Supposons que $\Theta(v) = 0$ pour $v \in T\mathcal{R}$. Alors $\alpha(v) = 0$ donc $v \in H = H^{-k}$, or $\pi_{-k}|_H = \text{id}_H$ donc $\pi_{-k}(v) = v$ et par suite $\Theta_{-k}(v) = 0$. Selon (3.2.6), ceci signifie que $p_{-k} \circ Dp(v) = 0$, i.e. que $Dp(v) \in TM^{-k+1}$ et donc que $v \in T\mathcal{R}^{-k+1} \cap H = H^{-k+1}$. De proche en proche, on montre finalement que $\Theta_{-1}(v) = 0$ donc $v \in (\text{Ker } Dp) \cap H = \{0\}$. Ceci montre que Θ est un isomorphisme en tout point.

Par construction, Θ_i est $\text{Ad}^-(G_0)$ -équivariante pour tout $i = -k, \dots, -1$. En effet pour tout $g \in \text{Ad}^-(G_0)$, $u \in \mathcal{R}$ et $v \in T_u\mathcal{R}^i$, $(\Theta_i)_{u \cdot g}(D_u R_g(v)) = g^{-1} \circ u^{-1}(p_i \circ D_{u \cdot g} p \circ D_u R_g(v)) = g^{-1} \circ u^{-1}(p_i \circ D_u p(v)) = g^{-1} \circ (\Theta_i)_u(v)$. Puisque π_i est $\text{Ad}^-(G_0)$ -invariante, on en déduit que $\Theta_i \circ \pi_i$ est également $\text{Ad}^-(G_0)$ -équivariante. Or α l'est car c'est une connexion de Ehresmann, donc Θ est bien équivariante. $\square$

Revenons maintenant au P -fibré principal $\hat{\mathcal{R}} = (\mathcal{R} \times P)/G_0$ défini au début de la preuve. Soulignons que $\mathcal{R}$ se plonge de manière G_0 -équivariante dans $\hat{\mathcal{R}}$ via $\iota: u \in \mathcal{R} \mapsto [u, e] \in \hat{\mathcal{R}}$ ($\iota(u \cdot \text{Ad}^-(g)) = \iota(u) \cdot g$ pour tout $g \in G_0$). De plus, $\phi: (u, q) \in \mathcal{R} \times P_+ \mapsto \iota(u) \cdot q \in \hat{\mathcal{R}}$ est un difféomorphisme. En effet pour $\hat{x} \in \hat{\mathcal{R}}$, il existe $u \in \iota(\mathcal{R})$ dans la fibre de $\hat{x}$, i.e. il existe $q \in P$ tel que $\hat{x} = u \cdot q$. Or selon le lemme 3.2.12, il existe $g \in G_0$ et $r \in P_+$ tels que $q = gr$, et $u \cdot g \in \iota(\mathcal{R})$ car ι est G_0 -équivariante, donc $\hat{x} \in \iota(\mathcal{R}) \cdot r$. Ceci montre que ϕ est surjective, qui est par ailleurs un difféomorphisme local par théorème d'inversion local, et est clairement injective. Pour tout $(u, q) \in \mathcal{R} \times P_+$, en notant $\hat{x} = u \cdot q$, $\varphi: (v, X) \in T_u\mathcal{R} \times \mathfrak{p}_+ \mapsto D_u \iota(v) + X_{\hat{x}}^\dagger$ est un isomorphisme linéaire. Les identifications ϕ et φ nous autorisent à définir une 1-forme $\omega: T\hat{\mathcal{R}} \rightarrow \mathfrak{g}$ par la formule suivante, pour $u \in \mathcal{R}$, $q \in P_+$, $v \in T_u\mathcal{R}$ et $X \in \mathfrak{p}_+$, en notant $\hat{x} = \iota(u) \cdot q$:

$$\omega_{\hat{x}}(D_{\iota(u)} R_q \circ D_u \iota(v) + X_{\hat{x}}^\dagger) = \text{Ad}(q)^{-1} \circ \Theta_u(v) + X.$$

Cette 1-forme est un isomorphisme en tout point car $T\hat{\mathcal{R}} = T(\iota(\mathcal{R})) \oplus \text{Ker } D\pi$ et Θ est un isomorphisme en tout point. L'équivariance de Θ et ι ainsi que celle des champs de vecteurs fondamentaux assure que ω est P -équivariante. Enfin, ω reproduit les champs de vecteurs fondamentaux de l'action de P_+ sur $\hat{\mathcal{R}}$ par construction, et reproduit les champs de vecteurs fondamentaux de l'action de G_0 car α est une connexion de Ehresmann. Finalement, ω est une connexion de Cartan sur $\hat{\mathcal{R}}$, et il ne nous reste donc plus qu'à vérifier que la G_0 -structure filtrée induite par $\mathcal{C} = (\hat{\mathcal{R}}, \omega)$ est bien la G_0 -structure filtrée d'origine $\mathcal{S} = (\mathcal{R}, \{TM^i\})$.

La définition de ω assure que pour tout $i = -k, \dots, -1$, $\iota^*(\omega^{-1}(\mathfrak{g}^i)) = T\mathcal{R}^i = p^*TM^i$. Or $\pi \circ \iota = p: \mathcal{R} \rightarrow M$ par construction, d'où $\iota^*(\omega^{-1}(\mathfrak{g}^i)) = \iota^*(\pi^*TM^i)$, donc $\omega^{-1}(\mathfrak{g}^i) = \pi^*TM^i$, i.e. la filtration induite par $\mathcal{C}$ est bien $\{TM^i\}$. Soit $u \in \mathcal{R}$ et $\hat{x} := \iota(u)$. Alors selon (3.2.5) pour tout $-k \leq i \leq -1$, $\Phi_{\mathcal{C}}(\hat{x})|_{\mathfrak{g}_i} = p_i \circ D_{\hat{x}} \pi \circ \omega_{\hat{x}}^{-1}|_{\mathfrak{g}_i}$, i.e. $\Phi_{\mathcal{C}}(\hat{x})|_{\mathfrak{g}_i} = p_i \circ D_u p \circ \Theta_u^{-1}|_{\mathfrak{g}_i}$ par définition de ω et car $\pi \circ \iota = p$. Or par définition des formes tautologiques partielles on a $p_i \circ D_u p = u \circ (\Theta_i)_u$ sur $T\mathcal{R}^i$ (voir (3.2.6)), d'où $\Phi_{\mathcal{C}}(\hat{x})|_{\mathfrak{g}_i} = u \circ (\Theta_i)_u \circ \Theta_u^{-1}|_{\mathfrak{g}_i}$. On veut montrer que $\Phi_{\mathcal{C}}(\hat{x})|_{\mathfrak{g}_i} = u|_{\mathfrak{g}_i}$, et il ne nous reste plus qu'à montrer que pour $V \in \mathfrak{g}_i$, avec $v := \Theta_u^{-1}(V) \in T\mathcal{R}^i$, on a $\Theta_u(v) = (\Theta_i)_u(v)$. Or Θ se restreint en un isomorphisme de H sur $\mathfrak{g}_-$ donc $\alpha(v) = 0$, et par ailleurs s'il existait $j \neq i$ tel que $(\Theta_j)_u \circ \pi_j(v) \neq 0$, alors $\Theta_u(v) = V$ n'appartiendrait pas à $\mathfrak{g}_i$. Puisque $\pi_i|_{H^i} = \text{id}_{H^i}$, on a donc $\Theta_u(v) = (\Theta_i)_u(v)$.

On a donc montré que $\Phi_{\mathcal{C}} \circ \iota = \text{id}_{\mathcal{R}}$. Puisque $\Phi_{\mathcal{C}}$ est P_+ -invariante selon le lemme 3.2.13, cela montre que $\Phi_{\mathcal{C}}(\hat{\mathcal{R}}) = \mathcal{R}$. En particulier $\Phi_{\mathcal{C}}(\hat{\mathcal{R}})$ est contenu dans $\mathcal{R}^{\text{gr}}(M)$ donc $\mathcal{C}$ est régulière selon la proposition 3.2.13, et sa G_0 -structure filtrée induite est bien égale à $\mathcal{S}$. $\square$

3.3 Condition de normalisation

Différents choix sont faits dans la preuve de la proposition 3.2.16, aboutissant à différentes géométries de Cartan qui induisent la même G_0 -structure filtrée. L'étape difficile, et dans laquelle réside tout l'intérêt d'une résolution générale du problème d'équivalence, est de distinguer parmi toutes celles-ci une géométrie de Cartan de référence, ce qui sera nécessaire pour étudier la structure sous-jacente. Notre problème est donc de distinguer, parmi toutes les connexions de Cartan possibles, celles que nous allons autoriser et que nous nommerons *normales*. Dans cette section, nous allons motiver l'introduction de la condition de normalisation pour comprendre son origine et son intérêt, en admettant provisoirement certains résultats qui seront prouvés dans la section suivante.

3.3.1 Ce que l'on attend d'une condition de normalisation

Nous connaissons d'ores et déjà l'importance de la fonction de courbure d'une géométrie de Cartan, car l'annulation de la courbure caractérise les géométries de Cartan localement isomorphes à $\mathbf{X}$ selon le théorème 3.1.16. Il semble donc raisonnable, pour chercher à contraindre une connexion de Cartan, de contraindre sa courbure. Cette dernière est P -équivariante et prend *a priori* ses valeurs dans $L(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), \mathfrak{g})$. La contraindre consiste donc à choisir un sous-espace P -invariant W_K de $L(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), \mathfrak{g})$, que nous appellerons *module des courbures normales*, qui soit de dimension assez petite pour obtenir l'unicité voulue, et assez grande pour qu'il existe bien une connexion de Cartan vérifiant cette condition et induisant la G_0 -structure filtrée d'origine. Nous dirons qu'une connexion de Cartan est *normale* si elle est régulière et si sa courbure prend ses valeurs dans W_K , et nous dirons qu'une géométrie de Cartan est *normale* si sa connexion de Cartan est normale. Admettons provisoirement que l'on ait trouvé un module des courbures normales W_K vérifiant la propriété de *quasi-unicité locale* suivante.

Proposition 3.3.1. *Supposons que $H^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^1 = \{0\}$, et soit $\pi: \hat{M} \rightarrow M$ un P -fibré principal trivialisable. Si $\tilde{\omega}$ et ω sont deux connexions de Cartan normales sur $\hat{M}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$ qui induisent la même G_0 -structure filtrée sur M , alors il existe un automorphisme φ de $\hat{M}$ recouvrant id_M et tel que $\varphi^*\tilde{\omega} = \omega$.*

Ce résultat sera prouvé et précisé à la proposition 3.4.6, pour se libérer de l'hypothèse de trivialité du fibré de Cartan et obtenir une quasi-unicité globale de la connexion normale associée à une G_0 -structure filtrée. Nous laissons provisoirement de côté l'hypothèse $H^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^1 = \{0\}$, qui est une condition algébrique sur le couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_-)$ que nous discuterons plus bas (voir paragraphes 3.3.2.a, 3.3.2.b et 3.4.1.a). Pour le moment, la quasi-unicité locale d'une connexion normale est exactement ce dont nous avons besoin pour relever les isomorphismes de la G_0 -structure filtrée aux fibrés de Cartan.

Proposition 3.3.2. *Supposons que $H^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^1 = \{0\}$. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux géométries de Cartan normales de même modèle sur deux variétés M_1 et M_2 . Alors tout isomorphisme entre les G_0 -structures filtrées induites $\mathcal{S}_{\mathcal{C}_1}$ et $\mathcal{S}_{\mathcal{C}_2}$ est un isomorphisme entre les géométries de Cartan $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.*

Démonstration. Notons $\mathcal{C}_1 = (\hat{M}_1, \omega_1)$ et $\mathcal{C}_2 = (\hat{M}_2, \omega_2)$ les géométries de Cartan normales, et soit $f: M_1 \rightarrow M_2$ un isomorphisme de $\mathcal{S}_{\mathcal{C}_1}$ sur $\mathcal{S}_{\mathcal{C}_2}$. Il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ (respectivement $\{V_i\}$) de M_1 (resp. M_2) tel que le P -fibré principal $\hat{M}_1$ (resp. $\hat{M}_2$) soit trivialisable au dessus de chaque U_i et chaque V_i (i.e. tel que $\pi_1^{-1}(U_i) \simeq U_i \times P$ et $\pi_2^{-1}(V_i) \simeq V_i \times P$ de manière P -équivariante). Pour de tels recouvrements, il existe pour tout couple d'indices i, j tel que $W_{i,j} := U_i \cap f^{-1}(V_j) \neq \emptyset$ un relevé P -équivariant $\phi_{i,j}: \hat{W}_{i,j} = \pi_1^{-1}(W_{i,j}) \rightarrow \pi_2^{-1}(f(W_{i,j}))$ de $f|_{W_{i,j}}$ (sur un fibré principal trivial $U_i \times P$, il suffit en effet de poser $\phi_{i,j}(x, p) = (f(x), p)$). Posons $\omega := \phi_{i,j}^*\omega_2$, et notons $\mathcal{C}$ la géométrie de Cartan $(\hat{M}_1|_{W_{i,j}}, \omega)$ (où $\hat{M}_1|_{W_{i,j}}$ désigne le P -fibré principal $\pi_1|_{\hat{W}_{i,j}}: \hat{W}_{i,j} \rightarrow W_{i,j}$). Alors $f|_{W_{i,j}}$ est par construction un isomorphisme entre

les géométries de Cartan $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_2|_{f(W_{i,j})}$, puisqu'il se relève en une application P -équivariante $\phi_{i,j}$ entre leurs fibrés de Cartan telle que $\phi_{i,j}^* \omega_2 = \omega$. Selon la proposition 3.2.15, $f|_{W_{i,j}}$ est donc un isomorphisme entre les G_0 -structures filtrées induites $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{S}_{\mathcal{C}_2}|_{f(W_{i,j})}$. Or f est par hypothèse un isomorphisme de $\mathcal{S}_{\mathcal{C}_1}$ sur $\mathcal{S}_{\mathcal{C}_2}$, donc $\mathcal{S}_{\mathcal{C}} = \mathcal{S}_{\mathcal{C}_1}|_{W_{i,j}}$. Par ailleurs, ω est une connexion de Cartan normale. En effet puisque ω_2 est supposée normale, sa courbure K prend ses valeurs dans le module W_K des courbures normales, et la courbure de $\omega = \phi_{i,j}^* \omega_2$ étant égale à $K \circ \phi_{i,j}$, elle prend donc également ses valeurs dans W_K . Finalement $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1|_{W_{i,j}}$ sont deux géométries de Cartan normales, dont les fibrés de Cartan sont trivialisables, et induisant sur $W_{i,j}$ la même G_0 -structure filtrée. Selon la proposition 3.3.1, il existe donc un automorphisme $\psi_{i,j}$ du fibré principal $\hat{M}_1|_{W_{i,j}}$ au dessus de $\text{id}_{W_{i,j}}$, tel que $\psi_{i,j}^* \omega = \omega_1$ en restriction à $\hat{W}_{i,j}$. L'application $\Phi_{i,j} := \phi_{i,j} \circ \psi_{i,j}$ est alors un relevé P -équivariant de $f|_{W_{i,j}}$ entre les fibrés de Cartan $\hat{M}_1|_{W_{i,j}}$ et $\hat{M}_2|_{f(W_{i,j})}$, vérifiant $\Phi_{i,j}^* \omega_2 = \omega_1$.

Or selon la proposition 3.1.7, un tel relevé de $f|_{W_{i,j}}$ est unique s'il existe. Les applications $\Phi_{i,j}$ se recollent donc en une application P -équivariante globale $\Phi: \hat{M}_1 \rightarrow \hat{M}_2$ telle que $\Phi^* \omega_2 = \omega_1$, qui est un relevé de $f: M_1 \rightarrow M_2$. Ceci montre que f est un isomorphisme de géométries de Cartan, et termine la preuve. $\square$

Ce résultat est exactement celui que nous souhaitons obtenir, car il nous assure une réelle équivalence entre les structures sur la base et les géométries de Cartan normales associées. Notre objectif est donc désormais de trouver un module de courbures normales W_K vérifiant la proposition 3.3.1.

3.3.2 Différence entre deux connexions de Cartan admissibles

Rappelons que $\pi_-: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_-$ désigne la projection sur $\mathfrak{g}_-$ parallèlement à $\mathfrak{p}$, et induit un isomorphisme entre la représentation $\overline{\text{Ad}}$ de P sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ et sa représentation Ad^- sur $\mathfrak{g}_-$ (définie par $\text{Ad}^-(p) \cdot v = \pi_-(\text{Ad}(p) \cdot v)$), par lequel nous identifions ces deux représentations (voir (3.2.3), paragraphe 3.2.1.b). Jusqu'à la fin de ce chapitre, nous utiliserons cette identification pour interpréter la courbure K de toute géométrie de Cartan modelée sur G/P comme une application sur $\hat{M}$ à valeurs dans $L(\Lambda^2 \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$, et équivariante pour l'action de P .

Afin de trouver un bon candidat pour le module des courbures normales, notre premier travail consiste à « mesurer » la différence entre les courbures de deux connexions de Cartan induisant la même G_0 -structure filtrée sur la base. Pour le faire efficacement, deux notions algébriques nous seront utiles.

3.3.2.a Cohomologie de $\mathfrak{g}_-$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$

Pour tout $d \in \mathbb{N}$, on appelle $C^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) := L(\Lambda^d \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ le $k^{\text{ème}}$ espace de cochaînes de la cohomologie de $\mathfrak{g}_-$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$. Par convention $C^0(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) = L(\Lambda^0 \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, et on remarque que la courbure K d'une géométrie de Cartan modelée sur G/P est à valeurs dans $C^2(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) = L(\Lambda^2 \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$. L'application de cobord $\partial: C^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) \rightarrow C^{d+1}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ est définie de la manière suivante pour $\phi \in C^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ et $X_0, \dots, X_d \in \mathfrak{g}_-$:

$$\begin{aligned} \partial\phi(X_0, \dots, X_d) &:= \sum_{i=0}^d (-1)^i [X_i, \phi(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_d)] \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq d} (-1)^{i+j} \phi([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_d), \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

où $\widehat{X}_i$ désigne l'omission de X_i . En particulier si $\psi \in \mathfrak{g}$ on a $(\partial\psi)(X) = [X, \psi]$, et si $\phi \in L(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) = C^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ on a $\partial\phi(X, Y) = [X, \phi(Y)] + [\phi(X), Y] - \phi([X, Y])$. On vérifie que $\partial \circ \partial = 0$, de sorte que l'espace $B^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) := \partial(C^{d-1}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}))$ des k -cobords est contenu dans l'espace $Z^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) := \text{Ker } \partial \subset C^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ des k -cocycles. Leur quotient $H^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) := Z^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})/B^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$

est appelé $k^{\text{ème}}$ *espace de cohomologie* de $\mathfrak{g}_-$ à coefficients dans $\mathfrak{g}$. On vérifie facilement que ∂ est équivariante pour l'action adjointe de G_0 , car pour tout $g \in G_0$, $\text{Ad}(g)$ est un automorphisme de $\mathfrak{g}_-$.

La définition des espaces de cochaînes, de l'application de cobord et des espaces de cohomologie fait sens pour toute représentation de $\mathfrak{g}_-$ de dimension finie (voir [ČS09, §2.1.9] pour plus de détails), mais nous utiliserons pour notre part exclusivement la représentation ad .

3.3.2.b Filtration par les degrés d'homogénéités et gradués associés

Soient $(V, \{V^i\})$ et $(W, \{W^i\})$ deux espaces vectoriels filtrés. Une application linéaire $L: V \rightarrow W$ sera dite de *degré d'homogénéité* k si pour tout i , $L(V^i) \subset W^{i+k}$. Par exemple, L préserve les filtrations si, et seulement si elle est de degré d'homogénéité 0. L'action adjointe de P sur $\mathfrak{g}$ est donc de degré d'homogénéité 0. Si L est de degré d'homogénéité k , alors par définition pour tout $l \leq k$, L est de degré d'homogénéité l . En notant $\text{L}(V, W)^k$ le sous-espace des applications linéaires de degré d'homogénéité k , $\{\text{L}(V, W)^k\}$ est donc une filtration de $\text{L}(V, W)$. Nous généralisons cette notion en disant qu'une application d -multilinéaire $L: V_1 \times \cdots \times V_d \rightarrow W$ est de degré d'homogénéité k si pour tout $(i_1, \dots, i_d)$, on a $L(V_1^{i_1} \times \cdots \times V_d^{i_d}) \subset W^{i_1 + \cdots + i_d + k}$, et nous considérons la filtration $\{\text{L}(V_1, \dots, V_d; W)^k\}$ par les degrés d'homogénéité.

La sous-algèbre $\mathfrak{g}_-$ est toujours munie de la filtration $\mathfrak{g}_-^i = \mathfrak{g}^i \cap \mathfrak{g}_-$ induite par celle de $\mathfrak{g}$. Pour $d \in \mathbb{N}$, nous munirons $\text{L}(\Lambda^d \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) = C^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ de la filtration par le degré d'homogénéité des applications. Pour tout l , nous appellerons également *gradués associés* à la filtration de $C^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ les quotients $\text{L}(\Lambda^d \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^l / \text{L}(\Lambda^d \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^{l+1}$, que nous noterons $\text{gr}_l(C^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}))$ ou encore $\text{L}^{\text{gr}}(\Lambda^d \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l$.

3.3.2.c Formule de changement de courbure

Un détail technique va avoir son importance par la suite. La donnée géométrique que nous avons associée à une géométrie de Cartan régulière $\mathcal{C}$ est le *sous-fibré* $\mathcal{R}_{\mathcal{C}} = \Phi_{\mathcal{C}}(\hat{M})$ du fibré des repères d'algèbres de Lie graduées $\mathcal{R}^{\text{gr}}(M)$, qui « oublie » le fibré de Cartan $\hat{M}$ (à la différence du plongement $\Phi_{\mathcal{C}}: \hat{M} \rightarrow \mathcal{R}$). Ceci donne un sens géométrique concret à la donnée sur la base, mais nous oblige à une restriction d'ordre topologique sur les fibrés de Cartan considérés.

Définition 3.3.3. Un P -fibré principal $\pi: \hat{M} \rightarrow M$ sera dit *régulier* si la projection canonique $\hat{M} \rightarrow \hat{M}/P_+$ admet une section globale G_0 -équivariante.

Ceci étant, cette restriction n'entrave en rien notre recherche d'une équivalence entre géométries de Cartan et G_0 -structures filtrées, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 3.3.4. Soit $\mathcal{S} = (\{TM^i\}, \mathcal{R})$ une G_0 -structure filtrée sur une variété M .

1. Le P -fibré principal $\hat{\mathcal{R}} := \mathcal{R} \times_{G_0} P$ est régulier. En particulier, toute G_0 -structure filtrée est induite par une géométrie de Cartan régulière dont le fibré de Cartan est régulier.
2. Si $\mathcal{C}$ est une géométrie de Cartan admissible pour $\mathcal{S}$ dont le fibré de Cartan $\hat{M}$ est régulier, alors $\hat{M}$ est isomorphe à $\hat{\mathcal{R}}$ en tant que P -fibré principal au dessus de M .

Démonstration. 1. Rappelons que $\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \times_{G_0} P$ est le quotient de $\hat{\mathcal{R}} \times P$ par l'action à droite de G_0 définie par $(u, q) \cdot g = (u \cdot \text{Ad}^-(g), g^{-1}q)$ pour $u \in \mathcal{R}$, $q \in P$ et $g \in G_0$. En notant $[u, q]$ la classe de $(u, q) \in \mathcal{R} \times P$ dans $\hat{\mathcal{R}}$, $\iota: u \in \mathcal{R} \mapsto [u, e] \in \hat{\mathcal{R}}$ est un plongement G_0 -équivariant qui induit un isomorphisme G_0 -équivariant $\bar{\iota}: \mathcal{R} \rightarrow \hat{\mathcal{R}}/P_+$, et $\iota \circ \bar{\iota}^{-1}: \hat{\mathcal{R}}/P_+ \rightarrow \hat{\mathcal{R}}$ est donc une section globale G_0 -équivariante. La seconde affirmation découle alors directement de la proposition 3.2.16.

2. Supposons que $\hat{M} \rightarrow \hat{M}/P_+$ admette une section globale G_0 -équivariante σ . Selon la proposition 3.2.15, $\Phi_{\mathcal{C}}: \hat{M} \rightarrow \mathcal{R}$ est un P_+ -fibré principal et induit donc un isomorphisme $\bar{\Phi}_{\mathcal{C}}: \hat{M}/P_+ \rightarrow \mathcal{R}$ de G_0 -fibrés principaux. Alors $\hat{\sigma} := \sigma \circ \bar{\Phi}_{\mathcal{C}}^{-1}: \mathcal{R} \rightarrow \hat{M}$ est un plongement G_0 -équivariant qui induit un isomorphisme $[u, q] \in \hat{\mathcal{R}} \mapsto \hat{\sigma}(u) \cdot q \in \hat{M}$ de P -fibrés principaux au dessus de id_M . $\square$

Remarque 3.3.5. La restriction à l'hypothèse de régularité du fibré de Cartan sera en pratique bénigne, car tout P -fibré principal est *localement régulier*, comme le montre le résultat suivant.

Fait. Si un P -fibré principal $\pi: \hat{M} \rightarrow M$ est trivialisable, alors la projection canonique $\pi_0: \hat{M} \rightarrow \hat{M}_0 := \hat{M}/P_+$ admet une section globale G_0 -équivariante.

Démonstration. Ceci est une conséquence du fait que $(g, q) \in G_0 \times P_+ \mapsto gq \in P$ soit un difféomorphisme (voir lemme 3.2.12). En effet, la projection canonique $\tau: P \rightarrow P/P_+$ se restreint donc en un isomorphisme de G_0 sur P/P_+ dont l'on note $\iota: P/P_+ \rightarrow G_0$ la réciproque. Puisque π est trivialisable, il admet une section globale $\sigma: M \rightarrow \hat{M}$, et on note $p: \hat{M} \rightarrow P$ l'unique application vérifiant $\hat{x} = \sigma \circ \pi(\hat{x}) \cdot p(\hat{x})$. Pour $x_0 = \pi_0(\hat{x})$, on pose $j(x_0) = \sigma \circ \pi(\hat{x}) \cdot \iota \circ \tau \circ p(\hat{x})$. On vérifie que ceci définit bien une application $j: \hat{M}_0 \rightarrow \hat{M}$, qui constitue par construction une section globale ι -équivariante de π_0 , ce que l'on cherchait. $\square$

Par conséquent, puisque tout P -fibré principal $\pi: \hat{M} \rightarrow M$ est localement trivial, il existe un voisinage ouvert U de tout point $x \in M$ tel que la restriction de π à $\pi^{-1}(U)$ soit un P -fibré principal régulier.

Nous étudions maintenant la différence entre deux connexions de Cartan ω et $\tilde{\omega}$, modelées sur G/P et définies sur le même P -fibré principal $\pi: \hat{M} \rightarrow M$. Puisque ces deux 1-formes reproduisent les champs de vecteurs fondamentaux de l'action de P sur $\hat{M}$ (voir définition 3.1.6), elles coïncident en particulier sur la distribution verticale de $\hat{M}$, et $\varphi(\hat{x}) = (\tilde{\omega}_{\hat{x}} - \omega_{\hat{x}}) \circ \omega_{\hat{x}}^{-1}$ s'annule donc sur $\mathfrak{p}$ pour tout $\hat{x} \in \hat{M}$. Par conséquent, puisque $\text{Ad}^-(p) \circ \pi_- = \pi_- \circ \text{Ad}(p)$ pour tout $p \in P$ par définition de Ad^- , en posant $\phi(\hat{x}) = \varphi(\hat{x})|_{\mathfrak{g}_-}$ pour tout $\hat{x} \in \hat{M}$, on a $\phi(\hat{x}) \circ \text{Ad}^-(p) = \varphi(\hat{x}) \circ \text{Ad}(p)$. Ceci montre que $\phi: \hat{M} \rightarrow \mathbf{L}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ est P -équivariante pour l'action à droite de P sur $\mathbf{L}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ définie par $L \cdot p = \text{Ad}(p)^{-1} \circ L \circ \text{Ad}^-(p)$. L'application ϕ est caractérisée pour tout $\hat{x} \in \hat{M}$ par $\tilde{\omega}_{\hat{x}} = \omega_{\hat{x}} + \phi(\hat{x}) \circ \pi_- \circ \omega_{\hat{x}}$, ce que nous noterons

$$\tilde{\omega} = (\text{id} + \phi \circ \pi_-) \circ \omega.$$

Le résultat suivant donne une formule de changement de courbure, reliant celle de ω (notée K) à celle de $\tilde{\omega}$ (notée $\tilde{K}$), en fonction de $\partial\phi$ et d'un « reste » $R(\phi)$ de degré d'homogénéité supérieur.

Proposition 3.3.6. 1. Les connexions de Cartan ω et $\tilde{\omega}$ induisent la même filtration sur TM si, et seulement si ϕ est à valeurs dans les applications de degré d'homogénéité 0. Si ϕ est à valeurs dans les applications de degré d'homogénéité 1, alors elles induisent la même G_0 -structure filtrée. 2. Si le P -fibré principal $\pi: \hat{M} \rightarrow M$ est régulier et si $\tilde{\omega}$ et ω induisent la même G_0 -structure filtrée sur M , alors il existe un automorphisme φ de $\hat{M}$ au dessus de id_M tel que $\varphi^*\tilde{\omega} - \omega$ envoie $\omega^{-1}(\mathfrak{g}^i)$ dans $\mathfrak{g}^{i+1}$ pour tout $-k \leq i \leq -1$. 3. Supposons que ϕ est à valeurs dans les applications de degré d'homogénéité $l \geq 1$ et que ω est régulière. Alors $\tilde{\omega}$ est régulière, et

$$\tilde{K} = K + \partial\phi + R(\phi),$$

où $R(\phi)$ est à valeurs dans les applications de degré d'homogénéité $l + 1$ de $\mathbf{L}(\Lambda^2 \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$.

Démonstration. 1. Les filtrations de TM définies par $\tilde{\omega}$ et ω sont égales si, et seulement si pour tout $i < 0$, $\tilde{\omega}^{-1}(\mathfrak{g}^i)$ et $\omega^{-1}(\mathfrak{g}^i)$ ont la même projection sur TM , ce qui est le cas si et seulement si $\tilde{\omega}^{-1}(\mathfrak{g}^i) \subset \omega^{-1}(\mathfrak{g}^i) + \text{Ker } D\pi$. Or $\text{Ker } D\pi = \omega^{-1}(\mathfrak{p}) \subset \omega^{-1}(\mathfrak{g}^i)$ donc $\omega^{-1}(\mathfrak{g}^i) + \text{Ker } D\pi = \omega^{-1}(\mathfrak{g}^i)$. Puisque $\tilde{\omega}$ et ω sont des isomorphismes en tout point, les filtrations induites sur TM sont donc identiques si, et seulement si $\tilde{\omega}^{-1}(\mathfrak{g}^i) = \omega^{-1}(\mathfrak{g}^i)$ pour tout $i < 0$. Ceci est équivalent à ce que $\tilde{\omega} - \omega$ envoie $\omega^{-1}(\mathfrak{g}^i)$ dans $\mathfrak{g}^i$, i.e. à ce que ϕ soit de degré d'homogénéité 0.

On suppose maintenant que $\tilde{\omega}$ et ω définissent la même filtration sur M , et on note $\tilde{\mathcal{C}}$ la géométrie de Cartan $(\hat{M}, \tilde{\omega})$. Selon la définition (3.2.5), $\Phi_{\mathcal{C}} = \Phi_{\tilde{\mathcal{C}}}$ si, et seulement si pour tout $-k \leq i \leq -1$, on a $(\omega_{\hat{x}}^{-1} - \tilde{\omega}_{\hat{x}}^{-1})(\mathfrak{g}_i) \subset \tilde{\omega}_{\hat{x}}^{-1}(\mathfrak{g}^{i+1})$ pour tout $\hat{x} \in \hat{M}$. Ceci équivaut à $\phi(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{g}^{i+1}$

en précomposant par $\tilde{\omega}_{\hat{x}}$ (car $\tilde{\omega} = (\text{id} + \phi \circ \pi_-) \circ \omega$), ce qui prouve l'implication annoncée.

2. Notons $\mathcal{R} = \Phi_{\mathcal{C}}(\hat{M}) = \Phi_{\tilde{\mathcal{C}}}(\hat{M})$ l' $\text{Ad}^-(G_0)$ -réduction commune définie par les géométries de Cartan $\mathcal{C}$ et $\tilde{\mathcal{C}}$. Selon le lemme 3.2.13, $\Phi_{\mathcal{C}}$ et $\Phi_{\tilde{\mathcal{C}}}$ sont P_+ -invariantes et passent donc au quotient sur $\hat{M}_0 := \hat{M}/P_+$ en deux applications G_0 -équivariantes que nous notons respectivement $\bar{\Phi}_{\mathcal{C}}$ et $\bar{\Phi}_{\tilde{\mathcal{C}}}$ (rappelons que P_+ est distingué dans P , que l'inclusion de G_0 dans P induit un isomorphisme $G_0 \simeq P/P_+$ selon le lemme 3.2.12, et que $\hat{M}_0$ hérite d'une action de $G_0 \simeq P/P_+$ qui en fait un G_0 -fibré principal). L'action de $\text{Ad}^-(G_0)$ étant libre sur $\mathcal{R}$, ces deux applications sont des isomorphismes G_0 -équivariant entre $\hat{M}_0$ et $\mathcal{R}$ au dessus de id_M , et il existe donc un automorphisme $\bar{\varphi}$ de $\hat{M}_0$ au dessus de id_M vérifiant $\bar{\Phi}_{\tilde{\mathcal{C}}} \circ \bar{\varphi} = \bar{\Phi}_{\mathcal{C}}$. Puisque $\hat{M}$ est régulier, $\hat{M} \rightarrow \hat{M}_0$ admet une section globale G_0 -équivariante σ , ce qui permet de définir un relevé P -équivariant de $\bar{\varphi}$ en posant $\varphi(\sigma(u) \cdot p) = \sigma \circ \bar{\varphi}(u) \cdot p$ pour tout $(u, p) \in \hat{M}_0 \times P_+$. Par construction, φ est un automorphisme de $\hat{M}$ au dessus de id_M qui vérifie $\Phi_{\tilde{\mathcal{C}}} \circ \varphi = \Phi_{\mathcal{C}}$. Or en notant $\mathcal{C}'$ la géométrie de Cartan $(\hat{M}, \varphi^* \tilde{\omega})$, l'identité (3.2.13) montre que $\Phi_{\mathcal{C}'} = \Phi_{\tilde{\mathcal{C}}} \circ \varphi$ (car φ recouvre id_M). Par suite $\Phi_{\mathcal{C}'} = \Phi_{\mathcal{C}}$, et selon la première de la proposition cela implique bien que $\varphi^* \tilde{\omega} - \omega$ envoie $\omega^{-1}(\mathfrak{g}^i)$ dans $\mathfrak{g}^{i+1}$ pour tout $-k \leq i \leq -1$.

3. En particulier, $\tilde{\omega}$ et ω définissent alors la même G_0 -structure filtrée selon la première partie de la proposition, ce qui impose à $\tilde{\omega}$ d'être également régulière selon le lemme 3.2.13. Nous notons $\psi: \hat{M} \rightarrow \mathbf{L}(\mathfrak{g})$ l'application définie en tout $\hat{x} \in \hat{M}$ par $\psi(\hat{x}) = \phi(\hat{x}) \circ \pi_-$. Par construction pour tout $i < 0$, $\psi(\mathfrak{g}^i) \subset \mathfrak{g}^{i+l}$ puisque $\phi(\hat{x})$ est de degré d'homogénéité l . Nous notons également $\Phi := \tilde{\omega} - \omega$, qui est une 1-forme vérifiant $\Phi_{\hat{x}}(v) = \psi(\hat{x}) \circ \omega_{\hat{x}}(v)$. Soient X, Y deux champs de vecteurs sur $\hat{M}$ définis au voisinage de $\hat{x} \in \hat{M}$, et notons v, w leurs évaluations respectives en $\hat{x}$. Par formule de Cartan, $d\Phi(v, w) = v \cdot \Phi(Y) - w \cdot \Phi(X) - \Phi_{\hat{x}}([X, Y])$. Puisque $\Phi(Y) = \text{ev} \circ (\psi, \omega(Y))$ avec $\text{ev}: (L, v) \mapsto L(v)$ bilinéaire, on a $v \cdot \Phi(Y) = D\psi(v) \cdot \omega_{\hat{x}}(w) + \psi(\hat{x})(v \cdot \omega(Y))$. De même, $w \cdot \Phi(X) = D\psi(w) \cdot \omega_{\hat{x}}(v) + \psi(\hat{x})(w \cdot \omega(X))$. Or $d\omega(v, w) = v \cdot \omega(Y) - w \cdot \omega(X) - \omega_{\hat{x}}([X, Y])$ et $\Phi_{\hat{x}}([X, Y]) = \psi(\hat{x})(\omega_{\hat{x}}([X, Y]))$, donc on obtient finalement :

$$d\tilde{\omega}(v, w) - d\omega(v, w) = \psi(d\omega(v, w)) + D\psi(v) \cdot \omega(w) - D\psi(w) \cdot \omega(v).$$

Par ailleurs :

$$[\tilde{\omega}(v), \tilde{\omega}(w)] - [\omega(v), \omega(w)] = [\omega(v), \psi \circ \omega(w)] + [\psi \circ \omega(v), \omega(w)] + [\psi \circ \omega(v), \psi \circ \omega(w)].$$

Notons $\tilde{\Omega}$ et Ω les formes de courbure respectives de $\tilde{\omega}$ et ω , et rappelons que la courbure est définie par $\Omega(v, w) = d\omega(v, w) + [\omega(v), \omega(w)]$. On déduit alors des deux égalités précédentes la relation ci-dessous :

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}(v, w) - \Omega(v, w) &= [\omega(v), \psi \circ \omega(w)] + [\psi \circ \omega(v), \omega(w)] - \psi([\omega(v), \omega(w)]) \\ &\quad + [\psi \circ \omega(v), \psi \circ \omega(w)] + \psi(\Omega(v, w)) + D\psi(v) \cdot \omega(w) - D\psi(w) \cdot \omega(v). \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

À partir de maintenant, X et Y sont deux vecteurs de $\mathfrak{g}_-$, et nous notons $v = \omega_{\hat{x}}^{-1}(X)$ et $w = \omega_{\hat{x}}^{-1}(Y)$, de sorte que $\Omega(v, w) = K(X, Y)$. Par définition de $\tilde{K}$, $\tilde{\Omega}(v, w) = \tilde{K}(\tilde{\omega}(v), \tilde{\omega}(w))$, donc puisque $\tilde{\omega} = (\text{id} + \psi) \circ \omega$ on a en revanche $\tilde{\Omega}(v, w) = \tilde{K}(X, Y) + S(X, Y)$ en notant $S(X, Y) = \tilde{K}(\psi(X), Y) + \tilde{K}(X, \psi(Y)) + \tilde{K}(\psi(X), \psi(Y))$. Puisque X et Y sont dans $\mathfrak{g}_-$ et que $\psi = \phi \circ \pi_-$, on a par ailleurs $[\omega(v), \psi \circ \omega(w)] + [\psi \circ \omega(v), \omega(w)] - \psi([\omega(v), \omega(w)]) = \partial\phi(X, Y)$. En posant $R = \tilde{K} - K - \partial\phi$, le calcul (3.3.2) nous montre donc que

$$R(\hat{x})(X, Y) = [\psi(\hat{x})(X), \psi(\hat{x})(Y)] + \psi(\hat{x})(K(X, Y)) + D\psi(v) \cdot Y - D\psi(w) \cdot X - S(X, Y), \quad (3.3.3)$$

et il nous reste plus qu'à prouver que $R(\hat{x})$ est de degré d'homogénéité $l + 1$.

Supposons que $X \in \mathfrak{g}_-^i$ et $Y \in \mathfrak{g}_-^j$, avec $i, j < 0$. Tout d'abord, $S(X, Y) \in \mathfrak{g}^{i+j+1}$ car $\tilde{K}$ est de degré d'homogénéité 1 par régularité, et ψ est de degré d'homogénéité $l \geq 1$ par hypothèse. Puisque $l \geq 1$, $\mathfrak{g}^{i+j+2l} \subset \mathfrak{g}^{i+j+l+1}$, donc $[\psi(\hat{x})(X), \psi(\hat{x})(Y)] \in \mathfrak{g}^{i+j+l+1}$. Par régularité de ω ,

$K(X, Y) \in \mathfrak{g}^{i+j+l}$, et donc $\psi(\hat{x})(K(X, Y)) \in \mathfrak{g}^{i+j+l+1}$ également. Soit γ une courbe passant par $\hat{x}$ telle que $\gamma'(0) = v$. Alors $D\psi(v) \cdot Y = \frac{d}{ds}|_{s=0} \psi(\gamma(s)) \cdot Y$ est la dérivée d'une courbe à valeurs dans $\mathfrak{g}^{j+l}$, donc $D\psi(v) \cdot Y \in \mathfrak{g}^{j+l}$. Or $j+l \geq i+j+l+1$ car $i < 0$, d'où $D\psi(v) \cdot Y \in \mathfrak{g}^{i+j+l+1}$, et pour la même raison on a $D\psi(w) \cdot X \in \mathfrak{g}^{i+j+l+1}$. Ainsi $R(\hat{x})$ est de degré d'homogénéité $l+1$, ce qui termine la preuve. $\square$

3.3.3 Normalisation par le noyau d'une co-différentielle

La formule de changement de courbure de la proposition 3.3.6 constitue notre point de départ pour définir le module des courbures normales. Soient $\tilde{\omega}$ et ω deux connexions de Cartan reliées par une application ϕ comme au paragraphe précédent, et imaginons un instant que l'on puisse oublier le reste $R(\phi)$ dans la formule de changement de courbure, *i.e.* que $\tilde{K} = K + \partial\phi$. Supposons de plus que l'on dispose d'une application linéaire P -équivariante

$$\partial^*: L(\Lambda^2 \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) \rightarrow L(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) \quad (3.3.4)$$

telle que $\text{Im } \partial \cap \text{Ker } \partial^* = \{0\}$, et enfin que $\partial: L(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) \rightarrow L(\Lambda^2 \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ soit injective. Puisque ∂^* est P -équivariante, le sous-espace $\text{Ker } \partial^*$ est P -invariant, et si $\tilde{K}$ et K sont toutes deux à valeurs dans $\text{Ker } \partial^*$, alors $\partial^* \partial\phi = 0$, donc $\partial\phi = 0$ par hypothèse sur ∂^* et $\phi = 0$ par injectivité de ∂ . Ainsi $\tilde{\omega} = \omega$, et $\text{Ker } \partial^*$ semble donc un très bon candidat pour un module des courbures normales puisqu'il assure l'unicité d'une connexion normale, ce qui dépasse nos attentes (voir proposition 3.3.1).

Bien entendu, la situation est compliquée techniquement par l'existence du reste $R(\phi)$ et par le fait que $\text{Ker } \partial$ est non-nul (ce qui explique que nous ne cherchions pas à obtenir l'unicité). Cependant, une *co-différentielle* de la forme (3.3.4) vérifiant $\text{Im } \partial \cap \text{Ker } \partial^* = \{0\}$ demeure un bon candidat pour définir la condition de normalisation, et c'est avec cet objectif en tête que nous allons définir ∂^* .

3.3.3.a Codifférentielle de Kostant

Revenons aux espaces de cochaînes $C^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) = L(\Lambda^d \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ définis précédemment, entre lesquels nous disposons d'une différentielle G_0 -équivariante $\partial: C^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) \rightarrow C^{d+1}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$. Nous souhaitons maintenant définir une application $\partial^*: C^{d+1}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) \rightarrow C^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ allant un sens inverse, et qui soit également une différentielle (*i.e.* $\partial^* \circ \partial^* = 0$). Cependant nous avons vu précédemment que ∂^* doit être non plus seulement G_0 -équivariante, mais P -équivariante pour que son noyau soit P -invariant. Le prix à payer pour obtenir l'équivariance selon P , est de passer par quelques considérations algébriques.

Soit B la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. C'est une forme bilinéaire symétrique et G -invariante sur $\mathfrak{g}$, non-dégénérée car $\mathfrak{g}$ est semi-simple. Notons que B induit un isomorphisme G -équivariant entre $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$, défini par $X \mapsto B(X, \cdot)$. On peut montrer que la restriction de B à $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}_+$ est nulle (voir [ČS09, Proposition 3.1.2]), si bien que B induit une forme bilinéaire symétrique $\mathfrak{g}/\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ qui est encore P -invariante et non-dégénérée (car B l'est et $B|_{\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}_+} \equiv 0$). On en déduit comme précédemment un isomorphisme P -équivariant entre $\mathfrak{p}_+$ et $(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^*$, et donc entre $\mathfrak{p}_+$ et $\mathfrak{g}_-^*$ en utilisant l'identification P -équivariante induite par π_- entre $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{g}_-$. Nous disposons donc finalement de deux isomorphismes P -équivariants $\mathfrak{p}_+ \simeq \mathfrak{g}_-^*$ et $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$, qui induisent pour tout $d \in \mathbb{N}$ un isomorphisme P -équivariant entre $\Lambda^d \mathfrak{p}_+ \otimes \mathfrak{g}^*$ et $\Lambda^d \mathfrak{g}_-^* \otimes \mathfrak{g} = C^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$. Nous promettons à la lectrice que cette débauche d'identifications équivariantes est presque terminée.

En posant $C^d(\mathfrak{p}_+, \mathfrak{g}) = L(\Lambda^d \mathfrak{p}_+, \mathfrak{g})$, nous reprenons la même définition (3.3.1) pour le cobord $\partial_{\mathfrak{p}_+}: C^d(\mathfrak{p}_+, \mathfrak{g}) \rightarrow C^{d+1}(\mathfrak{p}_+, \mathfrak{g})$, qui vérifie bien sûr la même relation $\partial_{\mathfrak{p}_+} \circ \partial_{\mathfrak{p}_+} = 0$. L'intérêt est ici que l'action adjointe de P préserve $\mathfrak{p}_+$, si bien que $\partial_{\mathfrak{p}_+}$ est P -équivariante. Puisque $C^d(\mathfrak{p}_+, \mathfrak{g}) = \Lambda^d \mathfrak{p}_+^* \otimes \mathfrak{g}$, le dual de $C^d(\mathfrak{p}_+, \mathfrak{g})$ s'identifie à $\Lambda^d \mathfrak{p}_+ \otimes \mathfrak{g}^*$, et l'application duale de $\partial_{\mathfrak{p}_+}$ est donc une application P -équivariante de $\Lambda^{d+1} \mathfrak{p}_+ \otimes \mathfrak{g}^*$ vers $\Lambda^d \mathfrak{p}_+ \otimes \mathfrak{g}^*$. En utilisant les identifications $\Lambda^d \mathfrak{p}_+ \otimes$

$\mathfrak{g}^* \equiv C^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ définies précédemment, on obtient finalement une application P -équivariante

$$\partial^*: C^{d+1}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) \rightarrow C^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}),$$

que nous appellerons *codifférentielle de Kostant*, et qui vérifie $\partial^* \circ \partial^* = 0$. Tous nos efforts ne sont pas vains, car cet objet nous permet de définir la condition de normalisation.

Définition 3.3.7. Nous dirons qu'une connexion de Cartan est *normale* si elle est régulière, et si sa courbure K vérifie $\partial^* K = 0$, *i.e.* prend ses valeurs dans $\text{Ker } \partial^*$. Nous dirons qu'une géométrie de Cartan parabolique est *normale* si sa connexion de Cartan est normale et si son fibré de Cartan est régulier.

3.3.3.b Décomposition de Hodge et gradués associés

À partir de ces deux différentielles allant en sens inverse l'une de l'autre, nous définissons le *Laplacien de Kostant*

$$\square := \partial \circ \partial^* + \partial^* \circ \partial: C^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) \rightarrow C^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}),$$

qui est un endomorphisme G_0 -équivariant de $C^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$. La *décomposition de Hodge* (3.3.5) ci-dessous nous confirme que nous avons visé juste, car ∂^* vérifie bien l'identité $\text{Im } \partial \cap \text{Ker } \partial^* = \{0\}$ que nous cherchions au début de la section 3.3.3.

Proposition 3.3.8. 1. Pour tout $d \in \mathbb{N}$,

$$C^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) = \text{Im } \partial^* \oplus \text{Ker } \square \oplus \text{Im } \partial, \quad (3.3.5)$$

et de plus $\text{Im } \partial^* \oplus \text{Ker } \square = \text{Ker } \partial^*$ et $\text{Ker } \square \oplus \text{Im } \partial = \text{Ker } \partial$.

2. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, $\square$ préserve $\text{Im } \partial$ et $\text{Im } \partial^*$ dans $C^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$, et sa restriction à $\text{Im } \partial$ et $\text{Im } \partial^*$ est un isomorphisme.

Démonstration. 1. Voir [ČS09, Proposition 3.1.11] et [ČS09, Theorem 3.3.1].

2. Soit $f \in C^{d-1}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$. Alors $\square \partial f = \partial \partial^* \partial f$ car $\partial \partial f = 0$, donc $\square \partial f \in \text{Im } \partial$. De même $\square \partial^* f = \partial^* \partial \partial^* f \in \text{Im } \partial^*$, ce qui prouve la première partie de l'énoncé. Or $\text{Ker } \square \cap \text{Im } \partial = \text{Ker } \square \cap \text{Im } \partial^* = \{0\}$ selon la décomposition de Hodge (3.3.5), donc $\square$ se restreint en un isomorphisme de $\text{Im } \partial$ et de $\text{Im } \partial^*$. $\square$

On vérifie facilement à partir de sa définition (3.3.1) que ∂ est de degré d'homogénéité 0, *i.e.* préserve le degré d'homogénéité des applications. Il en va de même pour ∂^* puisqu'elle est définie à partir de ∂_{p+} , et donc pour $\square$. Reprenons les notations de la proposition 3.3.6, et supposons $\tilde{\omega}$ et ω normales, et ϕ de degré d'homogénéité $l \geq 1$. Selon la formule de changement de courbure, $\partial^* \partial \phi = -\partial^* R(\phi)$ est alors de degré d'homogénéité $l + 1$, et c'est donc dans le gradué associé $\mathbb{L}^{\text{gr}}(\Lambda^2 \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l = \mathbb{L}(\Lambda^2 \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^l / \mathbb{L}(\Lambda^2 \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^{l+1}$ que l'égalité $\overline{\partial^* \partial \phi} = 0$ a lieu. Pour pouvoir mener à bien le raisonnement esquissé au début de la section 3.3.3, tout en prenant en compte le reste $R(\phi)$, nous allons donc avoir besoin d'une décomposition de Hodge au sein des gradués associés.

Toute application linéaire $L: V \rightarrow W$ entre deux espaces vectoriels filtrés qui préserve les filtrations $\{V^i\}$ et $\{W^i\}$, passe au quotient en une application linéaire $\text{gr } L: \bigoplus_i V^i / V^{i+1} \rightarrow \bigoplus_i W^i / W^{i+1}$ entre les espaces gradués associés, définie par $(\text{gr } L)(\bar{v}) = \overline{L(v)}$ pour tout i et $v \in V^i$. Ainsi ∂ , ∂^* et $\square$ induisent pour tout l des applications notées $\text{gr } \partial$, $\text{gr } \partial^*$ et $\text{gr } \square$ entre les gradués associés $\mathbb{L}^{\text{gr}}(\Lambda^d \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l$, et la décomposition de Hodge (3.3.5) passe au quotient. Pour tout l , on a :

$$\mathbb{L}^{\text{gr}}(\Lambda^d \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l = \text{Im}(\text{gr } \partial^*) \oplus \text{Ker}(\text{gr } \square) \oplus \text{Im}(\text{gr } \partial), \quad (3.3.6)$$

où $\text{Im}(\text{gr } \partial^*) \oplus \text{Ker}(\text{gr } \square) = \text{Ker}(\text{gr } \partial^*)$ et $\text{Ker}(\text{gr } \square) \oplus \text{Im}(\text{gr } \partial) = \text{Ker}(\text{gr } \partial)$. De même pour tout $p \in P$, l'action adjointe de p préserve la filtration de $\mathfrak{g}$ et donc celle de $\mathbb{L}(\Lambda^d \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$, et induit ainsi un isomorphisme de $\mathbb{L}^{\text{gr}}(\Lambda^d \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l$. Ceci induit une représentation de P sur $\mathbb{L}^{\text{gr}}(\Lambda^d \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l$, par rapport à laquelle $\text{gr } \partial$ et $\text{gr } \square$ sont G_0 -équivariantes, et $\text{gr } \partial^*$ est P -équivariante.

3.4 Équivalence avec les géométries de Cartan paraboliques normales

Nous prouvons maintenant la quasi-unicité d'une connexion normale annoncée à la proposition 3.3.1, que nous avons utilisée pour relever les morphismes dans la proposition 3.3.2. Nous allons suivre le schéma de preuve esquissé au début du paragraphe 3.3.3. Il ne nous restera alors plus qu'à vérifier que toute G_0 -structure filtrée régulière est induite par une connexion normale.

3.4.1 Où les gradués associés s'expliquent

Nous devons tout d'abord traiter un problème que nous avons pour le moment laissé de côté. Au début du paragraphe 3.3.3, nous avons supposé $\partial: \mathcal{L}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{L}(\Lambda^2 \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ injective. Cela est faux, mais nous verrons plus bas que l'égalité $\text{Ker } \partial \cap \mathcal{L}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^1 = \partial(\mathfrak{g}^1)$ nous suffira pour obtenir la quasi-unicité.

3.4.1.a Une condition cohomologique

Les hypothèses faites sur la géométrie parabolique infinitésimale, selon lesquelles l'algèbre de Lie graduée $\mathfrak{g}$ est semi-simple et $\mathfrak{g}_-$ est engendrée comme algèbre de Lie par $\mathfrak{g}_{-1}$, sont cruciales dans la preuve du résultat ci-dessous que l'on peut trouver dans [ČS09, Proposition 3.1.2].

Lemme 3.4.1. *Soit $i > 0$ et $A \in \mathfrak{g}_i$ tel que $[\mathfrak{g}_{-1}, A] = 0$. Alors $A = 0$.*

Pour tout $d \in \mathbb{N}$, la filtration de $C^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ par le degré d'homogénéité des applications passe au quotient sur l'espace de cohomologie $H^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$. En notant $\tau: Z^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) \rightarrow H^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ la projection canonique, on pose $H^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^k := \tau(Z^d(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^k)$. C'est sous la forme suivante que l'annulation de la première composante de cette filtration nous sera utile.

Proposition 3.4.2. *Supposons que $H^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^1 = \{0\}$. Ceci équivaut à $\text{Ker } \partial \cap \mathcal{L}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^1 = \partial(\mathfrak{g}^1)$, et pour tout $l > 0$, $\text{gr } \partial$ est alors un isomorphisme de $\mathfrak{g}^l / \mathfrak{g}^{l+1}$ sur $\text{Ker}(\text{gr } \partial) \subset \mathcal{L}^{\text{gr}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l$.*

Démonstration. La condition $H^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^1 = \{0\}$ signifie simplement que $\text{Ker } \partial \cap \mathcal{L}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^1 \subset Z^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) = \partial(\mathfrak{g})$. Or ∂ étant de degré d'homogénéité 0, on a $\mathcal{L}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^l \cap \partial(\mathfrak{g}) = \partial(\mathfrak{g}^l)$, d'où finalement $\text{Ker } \partial \cap \mathcal{L}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^l = \partial(\mathfrak{g}^l)$. Au quotient, on en déduit que $\text{gr } \partial(\mathfrak{g}^l / \mathfrak{g}^{l+1}) = \text{Ker}(\text{gr } \partial) \subset \mathcal{L}^{\text{gr}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l$, et il ne reste donc plus qu'à montrer que $\text{Ker}(\text{gr } \partial) = \{0\}$. Soit $A \in \mathfrak{g}^l$, dont on note $A = A_l + \dots + A_k$ la décomposition dans la graduation de $\mathfrak{g}$, et $\bar{A}$ la projection dans $\mathfrak{g}^l / \mathfrak{g}^{l+1}$. Supposons que $(\text{gr } \partial)(\bar{A}) = 0$, i.e. que $\partial A \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^{l+1}$. Pour $v \in \mathfrak{g}_{-1} \subset \mathfrak{g}^{-1}$, on a alors $\sum_{i=l}^k [v, A_i] = [v, A] = \partial A(v) \in \mathfrak{g}^l$. Or pour tout $l \leq i \leq k$, $[v, A_i] \in \mathfrak{g}_{i-1}$, donc $[v, A_i]$ est précisément la composante de $[v, A]$ dans $\mathfrak{g}_{i-1}$. Puisque $[v, A] \in \mathfrak{g}^l$, on a donc $[v, A_i] = 0$. Finalement $[\mathfrak{g}_{-1}, A_l] = 0$, or $A_l \in \mathfrak{g}_l$ avec $l > 0$, donc selon le lemme 3.4.1, $A_l = 0$. Ainsi $A \in \mathfrak{g}^{l+1}$ et donc $\bar{A} = 0$, ce qui conclut la preuve de la proposition. $\square$

Remarque 3.4.3. Cette mystérieuse condition algébrique est en réalité vérifiée pour la plupart des géométries de Klein parabolique (voir [ČS09, Proposition 3.3.7] qui décrit algébriquement les uniques cas où elle ne l'est pas¹⁰). Les seules géométries paraboliques qui ne la vérifie pas sont les structures projectives et les structures projectives de contact (voir [ČS09, p.271]). En particulier, $\mathbf{X}_{2n+1}$, la sphère conforme $\mathbf{S}^n$ ainsi que la sphère CR $\text{PSU}(1, n+1)/P$ vérifient toutes trois $H^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^1 = \{0\}$.

10. Notons que $\mathfrak{g}_0$ ne contient aucun idéal simple de $\mathfrak{g}$ si, et seulement si le noyau de la géométrie de Klein parabolique est discret (voir [ČS09, Proposition 3.1.4]). La condition imposée dans [ČS09, Proposition 3.3.7] est donc trivialement vérifiée dans notre cas.

3.4.1.b De l'algèbre aux fibrés principaux

Nous allons maintenant interpréter la décomposition de Hodge, propriété algébrique *ponctuelle* sur nos applications ∂ , ∂^* et $\square$, en des propriétés sur les applications équivariantes que nous allons manipuler.

Rappelons qu'avec $\mathfrak{p}_+ = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_k$ et $P_+ = \exp(\mathfrak{p}_+)$ le sous-groupe fermé et connexe de P associé, P_+ est distingué dans P et P/P_+ est isomorphe à G_0 (voir lemme 3.2.12). Par suite en notant $\pi_0: \hat{M} \rightarrow \hat{M}_0 := \hat{M}/P_+$ la projection canonique, la projection $\pi: \hat{M} \rightarrow M$ du fibré de Cartan passe au quotient en un G_0 -fibré principal $\pi_0: \hat{M}_0 \rightarrow M$.

Pour tout $p \in P_+$, $\text{Ad}(p) - \text{id}$ est de degré d'homogénéité 1. En effet, $p = \exp(v)$ avec $v \in \mathfrak{p}_+$, donc pour $-k \leq i \leq k$ et $w \in \mathfrak{g}^i$, $\text{Ad}(p) \cdot w - w = \exp(\text{ad } v) \cdot w - w = [v, w] + \frac{1}{2}[v, [v, w]] + \dots \in \mathfrak{g}^{i+1}$. En particulier $\text{Ad}(p)$ préserve la filtration et induit donc pour tout i un isomorphisme $\text{gr } \text{Ad}(p)$ de $\mathfrak{g}^i/\mathfrak{g}^{i+1}$. Mais puisque $\text{Ad}(p) - \text{id}$ est de degré d'homogénéité 1, $\text{gr } \text{Ad}(p) - \text{id} = 0$, i.e. P_+ agit trivialement sur le gradué associé à $\mathfrak{g}$. Cette remarque fondamentale va nous permettre de prouver la proposition 3.4.4 ci-dessous, qui constitue le passage crucial de l'algèbre aux fibrés principaux. Par convention, $L(\Lambda^0 \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

Proposition 3.4.4. 1. Soit $d, l \in \mathbb{N}$. Si $f: \hat{M} \rightarrow L^{\text{gr}}(\Lambda^d \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l$ est une application lisse P -équivariante, alors il existe une unique application G_0 -équivariante $f_0: \hat{M}_0 \rightarrow L^{\text{gr}}(\Lambda^d \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l$ telle que $f_0 \circ \pi_0 = f$, et f_0 est lisse. Réciproquement si $f: \hat{M}_0 \rightarrow L^{\text{gr}}(\Lambda^d \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l$ est lisse et G_0 -équivariante, alors $\hat{f} := f \circ \pi_0 \rightarrow L^{\text{gr}}(\Lambda^d \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l$ est lisse et P -équivariante.

2. Soit $l \geq 1$, et $f: \hat{M} \rightarrow L(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^l \cap (\text{Im } \partial^*)$ une application P -équivariante lisse. Il existe alors une application P -équivariante lisse $\phi: \hat{M} \rightarrow L(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^l$ telle que $\partial^* \partial \phi$ et f soient égales modulo $L(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^{l+1}$.

3. Supposons que $H^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^1 = \{0\}$, et soit $f: \hat{M} \rightarrow L(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^l$ une application P -équivariante lisse, telle que ∂f est de degré d'homogénéité $l+1$ avec $l \geq 1$. Il existe alors une application P -équivariante lisse $\psi: \hat{M} \rightarrow \mathfrak{g}^l$, telle que $\partial \psi$ et f soient égales modulo $L(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^{l+1}$.

Démonstration. 1. Tout d'abord, on déduit facilement de la remarque précédant l'énoncé que l'action de P_+ sur le gradué associé à $L(\Lambda^d \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ est également triviale. Nous le prouvons pour $d = 1$ pour éviter d'alourdir notre propos, mais le cas général se traite de la même manière. Soit $f \in L(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^l$, $p \in P_+$, $i < 0$ et $v \in \mathfrak{g}_-^i$. Il suffit de prouver que $(p \cdot f)(v) - f(v) \in \mathfrak{g}^{i+l+1}$, avec $(p \cdot f)(v) = \text{Ad}(p) \cdot f(\text{Ad}^-(p)^{-1} \cdot v)$. Or $\text{Ad}^-(p)^{-1} \cdot v - v \in \mathfrak{g}_-^{i+1}$ car $\text{Ad}(p) - \text{id}$ est de degré d'homogénéité 1, donc $f(\text{Ad}^-(p)^{-1} \cdot v) - f(v) \in \mathfrak{g}^{i+l+1}$ car f est de degré d'homogénéité l , et d'autre part $\text{Ad}(p) \cdot f(v) - f(v) \in \mathfrak{g}^{i+l+1}$ car $f(v) \in \mathfrak{g}^{i+l}$.

Par suite, l'application P -équivariante f est constante sur les orbites de P_+ , et l'application $f_0(\hat{x} \cdot P_+) := f(\hat{x})$ est donc bien définie. Elle est clairement lisse, et est G_0 -équivariante car pour $g \in G_0$, $f_0((\hat{x} \cdot P_+) \cdot g) = f_0((\hat{x} \cdot g) \cdot P_+) = f(\hat{x}) \cdot g = f_0(\hat{x} \cdot P_+) \cdot g$. Réciproquement, l'application $\hat{f} := f \circ \pi_0$ est clairement lisse, et est P -équivariante car f est G_0 -équivariante, π_0 est P_+ -équivariante, et P_+ agit trivialement.

2. La projection de f dans $L^{\text{gr}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l$ est P -équivariante, et induit donc selon la première partie de la proposition une application G_0 -équivariante lisse $f_0: \hat{M}_0 \rightarrow L^{\text{gr}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l$, telle que $f_0 \circ \pi_0 = f$. En particulier, f_0 est à valeurs dans $\text{Im}(\text{gr } \partial^*) \subset L^{\text{gr}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l$. Or $\square$ est un isomorphisme de $\text{Im } \partial^*$ selon la proposition 3.3.8, donc $\text{gr } \square$ est un isomorphisme de $\text{Im}(\text{gr } \partial^*)$. Il existe ainsi une application $g = (\text{gr } \square)^{-1} \circ f_0: \hat{M}_0 \rightarrow L^{\text{gr}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l$ à valeurs dans $\text{Im}(\text{gr } \partial^*)$ et telle que $(\text{gr } \square) \circ g = f_0$, qui est encore lisse, et qui demeure G_0 -équivariante puisque $\square$ l'est. L'application P -équivariante $\hat{g} = g \circ \pi_0$ vérifie $(\text{gr } \square) \circ \hat{g} = \hat{f}$, et nous souhaitons relever $\hat{g}$ en une application $\phi: \hat{M} \rightarrow L(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^l$ qui soit encore P -équivariante. En choisissant une section quelconque de la projection linéaire $L(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^l \rightarrow L^{\text{gr}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l$, il est facile d'obtenir un relevé de $\hat{g}$, mais ce dernier n'aura aucune raison d'être P -équivariant. Pour trouver un relevé équivariant, il est utile d'introduire les *fibrés vectoriels associés*.

Soit $E = \hat{M} \times_P L(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^l$ le fibré vectoriel au dessus de M associé à la représentation de P sur $L(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^l$. Rappelons que E est le quotient de $\hat{M} \times L(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^l$ par l'action à droite de P définie par

$(\hat{x}, v) \cdot p = (\hat{x} \cdot p, v \cdot p)$. Toute application P -équivariante $\varphi: \hat{M} \rightarrow \mathbf{L}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^l$ correspond à la section s_φ de E définie par $s_\varphi(x) = [\hat{x}, \varphi(\hat{x})]$, et ceci définit une bijection entre applications équivariantes lisses et sections lisses du fibré vectoriel associé. Nous notons F le sous-fibré $\hat{M} \times_P \mathbf{L}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^{l+1}$ de E , et $G = E/F$ le fibré quotient, égal à $\hat{M} \times_P \mathbf{L}^{\text{gr}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l$. En choisissant une métrique Riemannienne lisse sur les fibres du fibré vectoriel E , l'orthogonal de F est un sous-fibré lisse de E en restriction auquel la projection sur G est un isomorphisme, et on peut utiliser cet isomorphisme pour relever toute section lisse de G en une section lisse de E .

L'application P -équivariante $\hat{g}: \hat{M} \rightarrow \mathbf{L}^{\text{gr}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l$ est lisse, et correspond donc à une section s lisse de G , qui se relève en une section $\tilde{s}$ lisse de E selon la discussion précédente. Cette dernière correspond à une application P -équivariante lisse $\phi: \hat{M} \rightarrow \mathbf{L}^{\text{gr}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^l$ dont la projection $\bar{\phi}$ dans $\mathbf{L}^{\text{gr}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l$ est égale à $\hat{g}$. En particulier $\bar{\phi}$ est à valeurs dans $\text{Im}(\text{gr } \partial^*)$, donc $\partial^* \partial \phi$ et $\square \phi$ sont égales modulo $\mathbf{L}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^{l+1}$, puisque $(\text{gr } \partial^*) \circ (\text{gr } \partial^*) = 0$. Or $\square \phi$ et f sont égales modulo $\mathbf{L}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^{l+1}$ par définition de g , donc $\partial^* \partial \phi = f$ modulo $\mathbf{L}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^{l+1}$, ce qui termine la preuve.

3. La projection de f dans $\mathbf{L}^{\text{gr}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l$ est P -équivariante, et induit donc une application G_0 -équivariante lisse $f_0: \hat{M}_0 \rightarrow \mathbf{L}^{\text{gr}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l$ telle que $f_0 \circ \pi_0 = f$. En particulier, f_0 est à valeurs dans $\text{Ker}(\text{gr } \partial) \subset \mathbf{L}^{\text{gr}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l$. Puisque $H^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^1 = \{0\}$, il existe selon la proposition 3.4.2 une application $g = (\text{gr } \partial)^{-1} \circ f_0: \hat{M}_0 \rightarrow \mathfrak{g}^l / \mathfrak{g}^{l+1}$, qui reste lisse et demeure G_0 -équivariante car ∂ l'est. Notons $\hat{g} = g \circ \pi_0$ l'application P -équivariante induite. Par le même procédé que dans la seconde partie de la proposition, il existe une application P -équivariante lisse $\psi: \hat{M} \rightarrow \mathfrak{g}^l$ qui se projette sur $\hat{g}$. Par définition de g , on a alors $\partial \psi = f$ modulo $\mathbf{L}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^{l+1}$. $\square$

Remarque 3.4.5. Nous avons traversé dans le résultat précédent le problème technique principal concernant la normalisation : nous souhaitons utiliser les applications ∂ et $\square$, mais ces dernières ne sont pas P -équivariantes mais seulement G_0 -équivariantes. Nous sommes donc bien forcés, d'une part de nous ramener au G_0 -fibré $\hat{M}_0$ pour pouvoir appliquer ∂ et $\square$, et d'autre part de tout projeter dans les gradués associés, pour obtenir l'équivalence entre applications G_0 -équivariantes et applications P -équivariantes. Ceci explique l'introduction de $\hat{M}_0$ et de la G_0 -structure filtrée associée, et montre également que nous ne pouvons malheureusement pas faire l'économie des gradués associés.

Nous obtenons finalement une application P -équivariante à valeurs dans un gradué associé $\mathbf{L}^{\text{gr}}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l$, et la difficulté est d'en déduire un relevé dans $\mathbf{L}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^l$ qui demeure équivariant. Nous avons vu que le passage par les fibrés vectoriels associés permet de contourner ce problème, car il est facile de relever une section d'un fibré vectoriel. Dans [ČS09], ces fibrés associés sont des cas particuliers de *tractor bundles*, au sein desquels les auteurs exposent l'essentiel de la théorie. Dans la présentation que nous donnons ici, nous nous sommes au contraire efforcés de ne raisonner qu'avec les applications équivariantes tant que cela est possible, et de souligner l'unique moment où l'utilisation d'un fibré vectoriel associé est inévitable.

3.4.2 Quasi-unicité d'une connexion normale

Supposons que la géométrie de Cartan $\mathcal{C} = (\hat{M}, \omega)$ est normale. On rappelle que $\text{T}\hat{M}^i = \omega^{-1}(\mathfrak{g}^i)$ pour tout i . Nous pouvons enfin prouver la quasi-unicité d'une connexion normale, annoncée dans la proposition 3.3.1. Rappelons qu'un P -fibré principal $\pi: \hat{M} \rightarrow M$ est dit *régulier* si la projection canonique $\hat{M} \rightarrow \hat{M}/P_+$ admet une section globale G_0 -équivariante, et que tout P -fibré principal trivialisable est régulier (voir définition 3.3.3 et remarque 3.3.5).

Proposition 3.4.6. *Supposons que $H^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^1 = \{0\}$.*

1. *Soit $\tilde{\omega}$ une connexion de Cartan normale sur $\hat{M}$, telle que pour un certain $l \geq 1$, $\tilde{\omega} - \omega$ envoie $\text{T}\hat{M}^i$ sur $\mathfrak{g}^{i+l}$ pour tout $i < 0$. Il existe alors un automorphisme φ de $\hat{M}$ recouvrant id_M , et tel que $\varphi^* \tilde{\omega} - \omega$ envoie $\text{T}\hat{M}^i$ sur $\mathfrak{g}^{i+l+1}$ pour tout $i < 0$.*
2. *Si le P -fibré principal $\hat{M}$ est régulier, et si $\tilde{\omega}$ est une connexion de Cartan normale sur $\hat{M}$ induisant la même G_0 -structure filtrée que ω , alors il existe un automorphisme φ de $\hat{M}$ recouvrant id_M et tel que $\varphi^* \tilde{\omega} = \omega$.*

Démonstration. 1. Notons $\phi: \hat{M} \rightarrow \mathbf{L}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ l'application P -équivariante telle que $\tilde{\omega} = (\text{id} + \phi \circ \pi_-) \circ \omega$, de sorte que l'hypothèse faite sur $\tilde{\omega}$ est équivalente à $\phi \in \mathbf{L}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^l$. Selon la proposition 3.3.6, les fonctions de courbure respectives $\tilde{K}$ et K des connexions $\tilde{\omega}$ et ω vérifient $\tilde{K} = K + \partial\phi + R(\phi)$ où $R(\phi)$ est à valeurs dans les applications de degré d'homogénéité $l+1$, et puisque $\tilde{\omega}$ et ω sont normales, on en déduit $\partial^*\partial\phi = -\partial^*R(\phi)$. Or ∂^* est de degré d'homogénéité nul, donc $\partial^*R(\phi)$ est de degré d'homogénéité $l+1$, si bien que $\overline{\partial^*\partial\phi} = 0$ dans le gradué associé $\mathbf{L}^{gr}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l$. La projection de $\partial\phi$ dans $\mathbf{L}^{gr}(\Lambda^2\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l$ est donc dans $\text{Im}(\text{gr } \partial) \cap \text{Ker}(\text{gr } \partial^*)$. Mais cette intersection est nulle selon la décomposition de Hodge (3.3.6), donc $\overline{\partial\phi} = 0$, i.e. $\partial\phi$ est de degré d'homogénéité $l+1$. Selon la proposition 3.4.4, il existe donc une application P -équivariante $\psi: \hat{M} \rightarrow \mathfrak{g}^l$, telle que $\partial\psi$ soit égale à $-\phi$ modulo $\mathbf{L}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^{l+1}$.

Nous définissons une application φ de $\hat{M}$ dans lui-même en posant $\varphi(\hat{x}) = \hat{x} \cdot \exp(\psi(\hat{x}))$ pour tout $\hat{x} \in \hat{M}$. Pour $p \in P$, puisque ψ est P -équivariante on a $\varphi(\hat{x} \cdot p) = \hat{x} \cdot p \cdot \exp(\text{Ad}(p)^{-1} \cdot \psi(\hat{x})) = \hat{x} \cdot p \cdot p^{-1} \exp(\psi(\hat{x}))p = \varphi(\hat{x}) \cdot p$, donc φ est bien un automorphisme de $\hat{M}$ au dessus de id_M . Il ne nous reste plus qu'à vérifier que $\varphi^*\tilde{\omega} - \omega$ envoie $T\hat{M}^i$ sur $\mathfrak{g}^{i+l+1}$ pour tout $i < 0$. En fixant $\hat{x} \in \hat{M}$ et $v \in T_{\hat{x}}\hat{M}$, nous devons donc montrer que $(\varphi^*\tilde{\omega})_{\hat{x}}(v) = \tilde{\omega}_{\varphi(\hat{x})}(D_{\hat{x}}\varphi(v))$ est égal à $\omega_{\hat{x}}(v)$ modulo $\mathfrak{g}^{i+l+1}$. Nous utiliserons pour cela les notations suivantes : $V = \omega_{\hat{x}}(v)$ et $\tilde{V} = \tilde{\omega}_{\hat{x}}(v) = V + \phi(\hat{x})(V)$ ($V, \tilde{V} \in \mathfrak{g}^i$), $\hat{y} = \varphi(\hat{x})$, $f = \exp \circ \psi: \hat{M} \rightarrow P$, $X = \psi(\hat{x}) \in \mathfrak{g}^l$, et $p = \exp(X) = f(\hat{x})$. En notant $\theta_{\hat{x}}: p \in P \mapsto \hat{x} \cdot p \in \hat{M}$ l'application orbitale en $\hat{x}$, l'égalité ci-dessous résulte d'un simple calcul de différentielles.

$$D_{\hat{x}}\varphi(v) = D_{\hat{x}}R_p(v) + D_p\theta_{\hat{x}} \circ D_{\hat{x}}f(v) \quad (3.4.1)$$

Par P -équivariance, $\tilde{\omega}_{\hat{y}}(D_{\hat{x}}R_p(v)) = \text{Ad}(p^{-1}) \cdot \tilde{V}$. Puisque $\text{Ad}(p^{-1}) = \exp(-\text{ad } X)$, où $X \in \mathfrak{g}^l$ avec $l \geq 1$, on a $\text{Ad}(p^{-1}) \cdot \tilde{V} = \tilde{V} - [X, \tilde{V}]$ modulo $\mathfrak{g}^{i+l+1}$. Or $\tilde{V} - [X, \tilde{V}] = V + \phi(\hat{x})(V) - [X, V] - [X, \phi(\hat{x})(V)]$, et puisque $\phi(\hat{x})$ est de degré d'homogénéité l , le dernier terme de cette somme est dans $\mathfrak{g}^{i+2l}$, lui-même contenu dans $\mathfrak{g}^{i+l+1}$ car $l \geq 1$. Par ailleurs $-[X, V] = [V, \psi(\hat{x})] = \partial\psi(\hat{x})(V)$ par définition de l'application de cobord, et $\phi(\hat{x}) + \partial\psi(\hat{x})$ est de degré d'homogénéité $l+1$ par hypothèse. Finalement, on a donc $\tilde{\omega}_{\hat{y}}(D_{\hat{x}}R_p(v)) = V$ modulo $\mathfrak{g}^{i+l+1}$.

D'autre part, $D_p\theta_{\hat{x}} \circ D_{\hat{x}}f(v) = D_e\theta_{\hat{y}}((f^*\omega_P)_{\hat{x}}(v))$, où ω_P désigne la forme de Maurer-Cartan de P (car $\theta_{\hat{x}} \circ f = \theta_{\hat{y}} \circ L_{p^{-1}} \circ f$). Puisque $\tilde{\omega}$ reproduit les champs de vecteurs fondamentaux de l'action de P , on a donc $\tilde{\omega}_{\hat{y}}(D_p\theta_{\hat{x}} \circ D_{\hat{x}}f(v)) = (f^*\omega_P)_{\hat{x}}(v)$. Or ψ étant à valeurs dans $\mathfrak{g}^l$, f est à valeurs dans le sous-groupe connexe H de P d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^l$, donc Df est à valeurs dans TH et $f^*\omega_P$ est à valeurs dans $\omega_P(TH) = \mathfrak{g}^l \subset \mathfrak{g}^{i+l+1}$ car $i < 0$. Par conséquent $\tilde{\omega}_{\hat{y}}(D_p\theta_{\hat{x}} \circ D_{\hat{x}}f(v)) \in \mathfrak{g}^{i+l+1}$.

On déduit des deux calculs précédents et de l'égalité (3.4.1) que $(\varphi^*\tilde{\omega})_{\hat{x}}(v) = \omega_{\hat{x}}(v)$ modulo $\mathfrak{g}^{i+l+1}$, ce qui termine la preuve.

2. Puisque $\tilde{\omega}$ et ω définissent la même G_0 -structure filtrée et puisque $\hat{M}$ est régulier, il existe selon la proposition 3.3.6 un automorphisme φ_1 de $\hat{M}$ au dessus de id_M tel que $\varphi_1^*\tilde{\omega} - \omega$ envoie $T\hat{M}^i$ sur $\mathfrak{g}^{i+1}$ pour tout $i < 0$. Selon la première partie de la proposition, il existe donc un automorphisme φ_2 de $\hat{M}$ au dessus de id_M , tel que $(\varphi_1 \circ \varphi_2)^*\tilde{\omega} - \omega$ envoie $T\hat{M}^i$ sur $\mathfrak{g}^{i+2}$ pour tout $i < 0$. En appliquant $2k-1$ fois supplémentaires la première partie de la proposition, et en composant les automorphismes obtenus, on aboutit finalement à un automorphisme φ de $\hat{M}$ au dessus de id_M , tel que $\varphi^*\tilde{\omega} - \omega$ envoie $T\hat{M}^i$ sur $\mathfrak{g}^{i+2k+1}$ pour tout $i < 0$. Ceci impose $\varphi^*\tilde{\omega} - \omega = 0$ car $\mathfrak{g}^{k+1} = \{0\}$, donc φ vérifie la propriété voulue. $\square$

3.4.3 Existence d'une connexion normale

La proposition 3.2.16 nous a montré que toute G_0 -structure filtrée est induite par une géométrie de Cartan régulière $(\hat{M}, \omega)$. Il ne nous reste plus qu'à modifier ω en lui « ajoutant » une application $\phi: \hat{M} \rightarrow \mathbf{L}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ bien choisie, afin d'obtenir une connexion de Cartan normale. Nous désignons par K la fonction de courbure de ω .

Proposition 3.4.7. 1. Supposons qu'il existe $l \geq 1$ tel que ∂^*K soit à valeurs dans les applications de degré d'homogénéité l de $L(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$. Il existe alors une connexion de Cartan $\tilde{\omega}$ sur $\hat{M}$ induisant la même G_0 -structure filtrée que ω , et telle que $\partial^*\tilde{K}$ soit à valeurs dans les applications de degré d'homogénéité $l+1$ (où $\tilde{K}$ est la fonction de courbure de $\tilde{\omega}$).

2. Toute G_0 -structure filtrée est induite par une géométrie de Cartan parabolique normale de même modèle dont le fibré de Cartan est régulier.

Démonstration. 1. Puisque ∂^* est P -équivariante, l'application $-\partial^*K$ est P -équivariante et à valeurs dans $L(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^l \cap (\text{Im } \partial^*)$. Selon la proposition 3.4.4, il existe donc une application $\phi: \hat{M} \rightarrow L(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^l$, P -équivariante et telle que $\partial^*\partial\phi + \partial^*K \in L(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^{l+1}$. Pour tout $\hat{x} \in \hat{M}$ on pose $\tilde{\omega}_{\hat{x}} = (\text{id} + \phi(\hat{x}) \circ \pi_-) \circ \omega_{\hat{x}}$. Ceci définit une 1-forme $\tilde{\omega} \in \Omega^1(\hat{M}, \mathfrak{g})$ qui, par construction, est P -équivariante et reproduit les champs de vecteurs fondamentaux de l'action de P . Pour montrer que $\tilde{\omega}$ est une connexion de Cartan, nous devons donc simplement vérifier que $\tilde{\omega}_{\hat{x}}: T_{\hat{x}}\hat{M} \rightarrow \mathfrak{g}$ est un isomorphisme en tout point, et il suffit pour cela de s'assurer que $L := \text{id} + \phi(\hat{x}) \circ \pi_-$ est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$. Pour tout i et $v \in \mathfrak{g}_i$, $L(v) - v \in \mathfrak{g}^{i+1}$ car $\phi(\hat{x})$ est de degré d'homogénéité $l \geq 1$. En particulier si $v \in \mathfrak{g}^k$ et $L(v) = 0$, alors $v \in \mathfrak{g}^{k+1} = \{0\}$. Soit $v \in \mathfrak{g}^{k-1}$, que l'on décompose comme $v = v_{k-1} + v_k$ dans $\mathfrak{g}^{k-1} = \mathfrak{g}_{k-1} \oplus \mathfrak{g}_k$. Si $L(v) = 0$, alors $v_{k-1} \in -v_k + \mathfrak{g}^k = \mathfrak{g}^k$, i.e. $v_{k-1} = 0$ car $\mathfrak{g}_{k-1} \cap \mathfrak{g}^k = \{0\}$. Finalement $v \in \mathfrak{g}^k \cap (\text{Ker } L)$, donc $v = 0$. De proche en proche, on montre de cette manière que $\text{Ker } L = \{0\}$, ce qui nous confirme que $\tilde{\omega}$ est bien une connexion de Cartan. Puisque ϕ est à valeurs dans les applications de degré d'homogénéité $l \geq 1$, $\tilde{\omega}$ induit la même G_0 -structure filtrée que ω selon la proposition 3.3.6.

Notons $\tilde{K}$ la fonction de courbure de $\tilde{\omega}$. Selon la proposition 3.3.6, $\tilde{K} = K + \partial\phi + R(\phi)$ où $R(\phi)$ est à valeurs dans les applications de degré d'homogénéité $l+1$. Or ∂^* est de degré d'homogénéité nul donc $\partial^*R(\phi)$ est encore de degré d'homogénéité $l+1$, et $\partial^*K + \partial^*\partial\phi$ l'est également par hypothèse sur ϕ . Ainsi $\partial^*\tilde{K} = \partial^*K + \partial^*\partial\phi + \partial^*R(\phi)$ est de degré d'homogénéité $l+1$, ce qui termine la preuve.

2. Selon la proposition 3.2.16, toute G_0 -structure filtrée $\mathcal{S}$ est induite par une géométrie de Cartan régulière $\mathcal{C}$, et selon le lemme 3.3.4, on peut de plus supposer le fibré de Cartan régulier. Par régularité de $\mathcal{C}$, sa courbure K est de degré d'homogénéité 1 et puisque ∂^* est de degré d'homogénéité nul, ∂^*K est donc de degré d'homogénéité 1 en tout point. La première partie de la proposition nous permet alors de modifier ω , pour obtenir une connexion de Cartan que l'on note encore ω , induisant la même G_0 -structure filtrée et dont la fonction de courbure K vérifie $\partial^*K \in L(\Lambda^2\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^2$. En appliquant $3k-1$ fois supplémentaires la première partie de la proposition, on peut donc supposer que ∂^*K est de degré d'homogénéité $3k+1$, ce qui impose $\partial^*K = 0$ car $\mathfrak{g}^{k+1} = \{0\}$. La connexion de Cartan obtenue est donc normale, et induit la même G_0 -structure filtrée que la géométrie de Cartan initiale. $\square$

3.4.4 Conclusion

L'énoncé suivant résume les résultats obtenus dans les propositions 3.4.7 et 3.3.2.

Théorème 3.4.8. Soit G/P une géométrie de Klein parabolique telle que $H^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^1 = \{0\}$. Alors toute G_0 -structure filtrée modelée sur G/P est induite par une géométrie de Cartan normale modelée sur G/P , et les isomorphismes entre G_0 -structures filtrées et géométries de Cartan normales associées coïncident.

Exemple 3.4.9. Selon la remarque 3.4.3, les espaces homogènes modèles $\mathbf{X}_{2n+1}$, $\mathbf{S}^n$ et $\text{PSU}(1, n+1)/P$ vérifient tous trois $H^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^1 = \{0\}$. Nous avons décrit à l'exemple 3.2.8 les G_0 -structures filtrées associées à ces trois espaces, et le théorème 3.4.8 prouve donc l'équivalence entre structures Lagrangiennes de contact (respectivement structures Riemanniennes conformes, resp. structures presque CR non-dégénérées et partiellement intégrable), et géométries de Cartan modelées sur $\mathbf{X}_{2n+1}$ (resp. $\mathbf{S}^n$, resp. $\text{PSU}(1, n+1)$).

Si $H^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^1 \neq \{0\}$, comme c'est le cas pour $\mathbb{RP}^n = \text{PGL}_{n+1}(\mathbb{R})/Q_{n+1}$, il est encore possible d'obtenir une équivalence avec des structures sous-jacentes sur la base mais ces dernières sont

plus fines (voir [ČS09, §3.1.16 et §3.1.15], et [ČS09, §4.1.6] pour le cas particulier des structures projectives).

3.5 Courbure harmonique

Nous concluons ce chapitre en évoquant la notion de *courbure harmonique* d'une géométrie de Cartan parabolique normale $\mathcal{C} = (\hat{M}, \omega)$ modélée sur G/P , de fonction de courbure K , et dont on note $\hat{M}_0 = \hat{M}/P_+$ le G_0 -fibré principal induit.

Selon la décomposition de Hodge (3.3.5), la projection canonique $p^*: \text{Ker } \partial^* \rightarrow \text{Ker } \partial^* / \text{Im } \partial^*$ se restreint en un isomorphisme entre $\text{Ker } \square$ et $\text{Ker } \partial^* / \text{Im } \partial^*$. De plus, on vérifie que l'action de P_+ sur $\text{Ker } \partial^* / \text{Im } \partial^*$ est triviale (voir [ČS09, Corollary 3.1.11]). L'application P -équivariante $p^* \circ K: \hat{M} \rightarrow \text{Ker } \partial^* / \text{Im } \partial^*$ passe donc au quotient en une application G_0 -équivariante $\bar{K}: \hat{M}_0 \rightarrow \text{Ker } \partial^* / \text{Im } \partial^*$. Par ailleurs, l'isomorphisme $p^*|_{\text{Ker } \square}: \text{Ker } \square \rightarrow \text{Ker } \partial^* / \text{Im } \partial^*$ est G_0 -équivariant car $\text{Ker } \square$ est stable par G_0 .

Définition 3.5.1. Nous appellerons *courbure harmonique* de $\mathcal{C}$ et nous noterons $K_H: \hat{M}_0 \rightarrow \text{Ker } \square$ l'application $(p^*|_{\text{Ker } \square})^{-1} \circ \bar{K}$.

La courbure harmonique est en particulier une application G_0 -équivariante. La projection $\text{Ker } \partial \rightarrow \text{Ker } \partial / \text{Im } \partial = H^2(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ induit également un isomorphisme G_0 -équivariant de $\text{Ker } \square$ sur $H^2(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ (toujours selon la décomposition de Hodge), et la courbure harmonique peut donc également être vue comme une application G_0 -équivariante de $\hat{M}_0$ dans $H^2(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ (c'est le point de vue adopté dans [ČS09, §3.1.12]). On peut se demander à quel point la courbure harmonique K_H caractérise l'ensemble de la géométrie de Cartan, et le résultat ci-dessous, démontré dans [ČS09, Theorem 3.1.12], répond partiellement à cette question.

Théorème 3.5.2. *Si la courbure harmonique K_H d'une géométrie de Cartan parabolique normale $\mathcal{C}$ est identiquement nulle, alors $\mathcal{C}$ est plate.*

Les auteurs annoncent plus précisément avant l'énoncé de ce théorème que la courbure harmonique caractérise entièrement la courbure de toute géométrie de Cartan parabolique normale.¹¹ En ce qui nous concerne, nous donnerons au chapitre suivant une preuve élémentaire du théorème 3.5.2 dans le cas des structures Lagrangiennes de contact de dimension trois (voir théorème 4.2.4).

11. Et anoncent la preuve de ce résultat dans un second volume de [ČS09].

Chapitre 4

Géométrie de Cartan normale d'une structure Lagrangienne de contact

Dans ce chapitre, nous appliquons tout d'abord les résultats du chapitre précédent aux structures Lagrangiennes de contact, pour obtenir leur équivalence avec les géométries de Cartan normales modelées sur $\mathbf{X}_{2n+1}$. Nous précisons ensuite en dimension trois la condition de normalisation, en montrant que la courbure de toute géométrie de Cartan normale modelée sur $\mathbf{X}_3$ est à valeur dans une sous- $\mathbf{P}_{min}$ -représentation W_K de dimension quatre du module $\text{Ker } \partial^* \subset \text{L}(\Lambda^2(\mathfrak{sl}_3)_-, \mathfrak{sl}_3)$ des courbures normales, et en calculant explicitement cette sous-représentation. Nous avons vu à la fin du chapitre précédent qu'il suffit en réalité de connaître une certaine réduction de la courbure, appelée *courbure harmonique*, pour caractériser la platitude d'une géométrie de Cartan parabolique. Nous allons déterminer explicitement le G_0 -module W_H où aboutit la courbure harmonique d'une connexion de Cartan normale modelée sur $\mathbf{X}_3$. La connaissance de W_H nous sera nécessaire pour pouvoir mettre en pratique au chapitre 5 l'équivalence des structures Lagrangiennes de contact avec les géométries de Cartan modelées sur $\mathbf{X}_3$. Enfin, nous terminons ce chapitre en présentant la notion de *chaînettes* d'une structure Lagrangienne de contact. Nous utilisons les chaînettes pour prouver que tout automorphisme d'une structure Lagrangienne de contact fixant un point, et dont le 2-jet est trivial en ce point, est trivial sur la composante connexe de ce point fixe.

4.1 Problème d'équivalence pour les structures Lagrangiennes de contact

Dans cette section, nous noterons $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+2}$ pour alléger les notations. Rappelons que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie graduée pour la $|2|$ -gradation

$$\mathfrak{sl}_{n+2} = \begin{pmatrix} \mathfrak{g}_0 & \mathfrak{g}_1^\beta & \mathfrak{g}_2 \\ \mathfrak{g}_{-1}^\beta & \mathfrak{g}_0 & \mathfrak{g}_1^\alpha \\ \mathfrak{g}_{-2} & \mathfrak{g}_{-1}^\alpha & \mathfrak{g}_0 \end{pmatrix}, \quad (4.1.1)$$

où les blocs $\mathfrak{g}_{\pm 2}$ sont de taille 1×1 , les blocs $\mathfrak{g}_1^\beta$ et $\mathfrak{g}_{-1}^\alpha$ sont des lignes de taille n , et les blocs $\mathfrak{g}_1^\alpha$ et $\mathfrak{g}_{-1}^\beta$ des colonnes de taille n . Nous munissons également $\mathfrak{g}$ de la filtration $\mathfrak{g}^i := \oplus_{j \geq i} \mathfrak{g}_j$ associée, de sorte que $\mathfrak{p}_{n+2} = \mathfrak{g}^0$. Nous avons vu au paragraphe 3.1.4 que ceci fait de l'espace modèle $\mathbf{X}_{2n+1} = \text{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})/\mathbf{P}_{n+2}$ des structures Lagrangiennes de contact une géométrie de Klein parabolique (voir exemple 3.1.22 pour plus de détails).

4.1.1 Quelques préliminaires

La sous-algèbre $\mathfrak{g}_- = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ est isomorphe à $\mathfrak{heis}(2n+1)$ via $v \mapsto -{}^t v$. Nous noterons Z un générateur de $\mathfrak{g}_{-2}$ (qui est le centre de $\mathfrak{g}_-$). Les sous-algèbres $\mathfrak{g}_{-1}^\alpha$ et $\mathfrak{g}_{-1}^\beta$ sont abéliennes et

isomorphes à $\mathbb{R}^n$, et pour $X \in \mathfrak{g}_{-1}^\beta$ et $Y \in \mathfrak{g}_{-1}^\alpha$, on identifiera toujours X (respectivement Y) au vecteur-colonne (resp. vecteur-ligne) de taille n associé. On a alors $YX \in \mathbb{R}$, et

$$[Y, X] = YX \cdot Z \in \mathfrak{g}_{-2}. \quad (4.1.2)$$

Lemme 4.1.1. *Soit $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie de dimension $2n + 1$, munie d'un $|2|$ -graduation $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{-2} \oplus \mathfrak{h}_{-1}$ telle que $\dim \mathfrak{h}_{-1} = 2n$ et $\dim \mathfrak{h}_{-2} = 1$. Alors $\mathfrak{h}$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_-$ si, et seulement si l'application bilinéaire alternée*

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{-1} \times \mathfrak{h}_{-1} &\longrightarrow \mathfrak{h}_{-2} \\ (X, Y) &\longmapsto [X, Y] \end{aligned}$$

est non-dégénérée.

Démonstration. Il est clair que $\mathfrak{g}_-$ vérifie bien ces conditions. Réciproquement, soit $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie les respectant, et Z un générateur de $\mathfrak{h}_{-2}$. En identifiant $\mathfrak{h}_{-2}$ à $\mathbb{R}$, la classification des formes bilinéaires alternées non-dégénérées montre qu'il existe une base $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$ de $\mathfrak{h}_{-1}$, telle que $[X_i, X_j] = 0$, $[Y_i, Y_j] = 0$, et $[X_i, Y_j] = \delta_{i,j}Z$ pour tous i, j (voir par exemple [Gei08, Proposition 1.3.5]). Ce sont précisément les relations de crochets de $\mathfrak{g}_-$, et $\mathfrak{h}$ est donc bien isomorphe à $\mathfrak{g}_-$. $\square$

Rappelons qu'une distribution d'hyperplans H sur une variété M est équivalente à la donnée de la filtration $TM = TM^{-2} \supset TM^{-1} = H$, qui induit le fibré gradué associé $T^{\text{gr}}M = (TM/H) \oplus H$ au dessus de M . Nous avons défini au paragraphe 3.2.1.a un champ de crochets de Lie $\mathcal{L}$ sur $T^{\text{gr}}M$, appelé crochet de Levi, et nous interprétons maintenant les structures de contact (définies au paragraphe 1.3.1) à travers $\mathcal{L}$.

Lemme 4.1.2. *Une distribution d'hyperplans H sur une variété M de dimension $2n + 1$ est de contact si, et seulement si elle fait de $(M, \{TM^i\}_{i=-2,-1})$ une variété filtrée localement modelée sur $\mathfrak{g}_-$.*

Démonstration. Puisque la filtration est de longueur deux, elle est trivialement préservée par le crochet de Lie des champs de vecteurs, i.e. $(M, \{TM^i\}_{i=-2,-1})$ est tautologiquement une variété filtrée. Soient $x \in M$, α une 1-forme définie au voisinage de x telle que $H = \text{Ker } \alpha$ localement, $v, w \in H_x$, et X, Y des champs de vecteurs locaux à valeur dans H tels que $X_x = v$ et $Y_x = w$. Alors $-\bar{\alpha}_x: \bar{v} \in T_x M / H_x \mapsto -\alpha_x(v) \in \mathbb{R}$ est un isomorphisme, et par définition du crochet de Levi et formule de Cartan, puisque $\alpha(X) \equiv \alpha(Y) \equiv 0$, on a $-\bar{\alpha}_x(\mathcal{L}_x(v, w)) = v \cdot \alpha(Y) - w \cdot \alpha(X) - \alpha_x([X, Y]_x) = d\alpha_x(v, w)$. Ainsi $\mathcal{L}_x$ est non-dégénéré si, et seulement si $d\alpha_x$ est non-dégénérée, ce qui est équivalent à ce que H soit de contact au voisinage de x selon la remarque 1.3.3. Or selon le lemme 4.1.1, $(T_x^{\text{gr}}M, \mathcal{L}_x)$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_-$ si et seulement si $\mathcal{L}_x$ est non-dégénéré, ce qui termine la preuve car la propriété de contact est locale. $\square$

Le sous-groupe de Levi $G_0 \subset \mathbf{P}_{n+2}$ de la géométrie parabolique $\text{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})/\mathbf{P}_{n+2}$ est l'ensemble des éléments de la forme

$$g_0 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

avec $a, c \in \mathbb{R}^*$ et $B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Pour $X \in \mathfrak{g}_{-1}^\beta$ et $Y \in \mathfrak{g}_{-1}^\alpha$, on a alors

$$\text{Ad}^-(g_0) \cdot (X + Y + \lambda Z) = a^{-1}B \cdot X + a^{-1}c\lambda z + cY \cdot B^{-1}. \quad (4.1.3)$$

Cette relation nous montre que G_0 agit sur $\mathfrak{g}_-$ par automorphismes d'algèbre de Lie graduée en préservant la décomposition $\mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{g}_{-1}^\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-1}^\beta$, et que le morphisme $\text{Ad}^-|_{G_0}$ est injectif.

Lemme 4.1.3. *Le morphisme injectif $\text{Ad}^-|_{G_0}: G_0 \rightarrow \text{Aut}^{\text{gr}}(\mathfrak{g}_-)$ a pour image le sous-groupe constitué des automorphismes d'algèbre de Lie graduée de $\mathfrak{g}_-$ préservant la décomposition $\mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{g}_{-1}^\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-1}^\beta$.*

Démonstration. Soit $g \in \text{Aut}^{\text{gr}}(\mathfrak{g}_-)$ préservant cette décomposition, et notons $g^\beta \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ la restriction de g à $\mathfrak{g}_{-1}^\beta$. Alors pour $Y \in \mathfrak{g}_{-1}^\alpha$ et $X \in \mathfrak{g}_{-1}^\beta$, en notant $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $g \cdot Z = \lambda Z$, on a $(\lambda Y(g^\beta)^{-1})(g^\beta X) \cdot Z = g((YX) \cdot Z) = g \cdot [Y, X]$ selon la relation (4.1.2), or $[g \cdot Y, g \cdot X] = (g \cdot Y)(g^\beta X) \cdot Z$ car g est un morphisme d'algèbres de Lie. Ainsi $g \cdot Y = \lambda Y(g^\beta)^{-1}$, ce qui montre que $g \in \text{Ad}^-(G_0)$. $\square$

4.1.2 Propriétés de la géométrie de Cartan normale

Nous interprétons maintenant les structures Lagrangiennes de contact en termes de G_0 -structures filtrées.

Proposition 4.1.4. *1. Sur une variété de dimension $2n + 1$, il existe une correspondance bi-univoque entre structures Lagrangiennes de contact et G_0 -structure filtrées modelées sur $\mathbf{X}_{2n+1}$.*

2. De plus, les isomorphismes entre deux structures Lagrangiennes de contact coïncident avec les isomorphismes entre les G_0 -structures filtrées associées.

Démonstration. 1. Soit $(\{TM^i\}, \mathcal{R}_0)$ une G_0 -structure filtrée modelée sur $\mathbf{X}_{2n+1}$ sur une variété M , et notons $p: \mathcal{R}^{\text{gr}}(M) \rightarrow M$ le fibré des repères gradués, et p_0 sa restriction à $\mathcal{R}_0$. Selon le lemme 4.1.2, TM^{-1} est une distribution de contact sur M . Soit $x \in M$, et $u, u' \in p_0^{-1}(x)$. Il existe alors $g \in \text{Ad}^-(G_0)$ tel que $u' = u \circ g$, or g préserve $\mathfrak{g}_{-1}^\alpha$ et $\mathfrak{g}_{-1}^\beta$ selon le lemme 4.1.3, donc $u(\mathfrak{g}_{-1}^\alpha) = u'(\mathfrak{g}_{-1}^\alpha)$ et $u(\mathfrak{g}_{-1}^\beta) = u'(\mathfrak{g}_{-1}^\beta)$. Les sous-espaces $E^\alpha(x) = u(\mathfrak{g}_{-1}^\alpha)$ et $E^\beta(x) = u(\mathfrak{g}_{-1}^\beta)$ ne dépendent donc que x , et sont tous deux contenus dans $T_x^{\text{gr}} M_{-1} = T_x M^{-1}$. Ceci définit sur M deux distributions de dimension n telles que $TM^{-1} = E^\alpha \oplus E^\beta$, qui sont lisses car $\mathcal{R}_0$ admet des sections locales lisses. De plus si X et Y sont deux champs de vecteurs à valeurs dans E^α , puisque u est un repère d'algèbre de Lie graduée on a

$$u^{-1}(p_2([X, Y]_x)) = u^{-1}(\mathcal{L}_x(X_x, Y_x)) = [u^{-1}(X_x), u^{-1}(Y_x)] \in \mathfrak{g}_{-2}$$

par définition du crochet de Levi, où $p_2: TM = TM^{-2} \rightarrow T^{\text{gr}} M_{-2}$ désigne la projection canonique. Or $[u^{-1}(X_x), u^{-1}(Y_x)] = 0$ car $\mathfrak{g}_{-1}^\alpha$ est abélienne, et par suite $p_2([X, Y]_x) = 0$, i.e. $[X, Y]_x \in T_x M^{-1}$. Selon la remarque 1.3.5, E^α est donc une sous-distribution Legendrienne de TM^{-1} , et il en va de même pour E^β . La G_0 -structure filtrée considérée induit donc sur M la structure Lagrangienne de contact (E^α, E^β) .

Soit maintenant (E^α, E^β) une structure Lagrangienne de contact sur M . On pose $TM^{-2} = TM$, $TM^{-1} = E^\alpha \oplus E^\beta$, et $p: \mathcal{R}^{\text{gr}}(M) \rightarrow M$ le fibré des repères d'algèbres de Lie graduées de la variété filtrée $(M, \{TM^i\}_{i=-2, -1})$. Soit :

$$\mathcal{R}_0 := \bigcup_{x \in M} \left\{ u \in p^{-1}(x) \mid E^\alpha(x) = u(\mathfrak{g}_{-1}^\alpha) \text{ et } E^\beta(x) = u(\mathfrak{g}_{-1}^\beta) \right\} \subset \mathcal{R}^{\text{gr}}(M),$$

et notons p_0 la restriction de p à $\mathcal{R}_0$. Les distributions E^α et E^β étant lisses, $\mathcal{R}_0$ est une sous-variété lisse de $\mathcal{R}^{\text{gr}}(M)$. Puisque E^α et E^β sont lagrangiennes, pour tout $x \in M$ et $u \in p^{-1}(x)$ les sous-espaces $V^\alpha = u^{-1}(E^\alpha(x))$ et $V^\beta = u^{-1}(E^\beta(x))$ de $\mathfrak{g}_{-1}$ sont isotropes pour la forme symplectique $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g}_{-1} \rightarrow \mathfrak{g}_{-2} \simeq \mathbb{R}$ (voir paragraphe 1.3.1 pour plus de détails sur ces notions).

Fait. Soit (V, b) un espace vectoriel symplectique de dimension $2n$, et $V^\alpha, V^\beta, W^\alpha$ et W^β des sous-espaces isotropes de dimension n tels que $V = V^\alpha \oplus V^\beta = W^\alpha \oplus W^\beta$. Il existe alors un isomorphisme ϕ de V , préservant b et envoyant V^α sur W^α , et V^β sur W^β .

Démonstration. Soit $(v_1^\alpha, \dots, v_n^\alpha)$ une base de V^α . Il existe alors une base $(v_1^\beta, \dots, v_n^\beta)$ de V^β telle que $b(v_i^\alpha, v_j^\beta) = \delta_{i,j}$ pour tous i, j . De même avec $(w_1^\alpha, \dots, w_n^\alpha)$ une base de W^α , il existe une base $(w_1^\beta, \dots, w_n^\beta)$ de W^β vérifiant $b(w_i^\alpha, w_j^\beta) = \delta_{i,j}$. L'automorphisme ϕ de V défini par $\phi(v_i^\alpha) = w_i^\alpha$ et $\phi(v_i^\beta) = w_i^\beta$ préserve alors b et vérifie les conditions voulues. $\square$

Il existe donc un automorphisme ϕ de l'espace vectoriel symplectique $(\mathfrak{g}_{-1}, [\cdot, \cdot])$ (où $\mathfrak{g}_{-2}$ est identifiée à $\mathbb{R}$) tel que $\phi(u^{-1}(E^\alpha(x))) = \mathfrak{g}_{-1}^\alpha$ et $\phi(u^{-1}(E^\beta(x))) = \mathfrak{g}_{-1}^\beta$, et il existe une unique manière d'étendre ϕ en un automorphisme g de l'algèbre de Lie graduée $\mathfrak{g}_-$ (si $X \in \mathfrak{g}_{-1}^\alpha$ et $Y \in \mathfrak{g}_{-1}^\beta$ vérifient $YX = 1$ en les identifiant à leurs vecteur-colonne et vecteur-ligne associé, alors $g(Z) = (\phi(Y)\phi(X)) \cdot Z$ convient selon la relation (4.1.2)). Par construction, $u \circ g^{-1} \in p_0^{-1}(x)$, ce qui montre que $p_0^{-1}(x) \neq \emptyset$ en tout point. De plus si $u, u' \in p_0^{-1}(x)$, alors $u'^{-1} \circ u \in \text{Aut}^{\text{gr}}(\mathfrak{g}_{-1})$ préserve la décomposition de $\mathfrak{g}_{-1}$, donc $u' \circ u^{-1} \in \text{Ad}^-(G_0)$ selon le lemme 4.1.3. Le sous-fibré $\mathcal{R}_0$ est donc bien une $\text{Ad}^-(G_0)$ -réduction de $\mathcal{R}^{\text{gr}}(M)$, qui induit par construction la structure lagrangienne de contact (E^α, E^β) d'origine.

2. Nous raisonnons sur une seule structure Lagrangienne de contact pour éviter d'alourdir les notations. Soit f un difféomorphisme préservant la structure de contact $H = E^\alpha \oplus E^\beta$, *i.e.* préservant la filtration $\{TM^i\}_{i=-2, -1}$ associée. La correspondance bi-univoque présentée précédemment montre clairement que f préserve la décomposition $H = E^\alpha \oplus E^\beta$, *i.e.* préserve la structure Lagrangienne de contact, si et seulement si sa prolongation $f^{(1)}$ à $\mathcal{R}^{\text{gr}}(M)$ préserve la $\text{Ad}^-(G_0)$ -réduction $\mathcal{R}_0$ associée (voir paragraphe 3.2.3 pour plus de détails). $\square$

Puisque la condition cohomologique $H^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^1 = \{0\}$ est vérifiée dans le cas de $\mathbf{X}_{2n+1}$ (voir remarque 3.4.3), le théorème 3.4.8 prouvé au chapitre précédent montre que les G_0 -structures filtrées modelées sur $\mathbf{X}_{2n+1}$ sont équivalentes aux géométries de Cartan normales modelées sur $\mathbf{X}_{2n+1}$. On déduit donc de la proposition 4.1.4 l'équivalence suivante.

Corollaire 4.1.5. *1. La donnée d'une structure Lagrangienne de contact sur une variété de dimension $2n + 1$ est équivalente à celle d'une géométrie de Cartan normale modelée sur $\mathbf{X}_{2n+1}$.*
2. De plus, les isomorphismes entre deux structures Lagrangiennes de contact coïncident avec les isomorphismes entre deux géométries de Cartan normales associées, et les champs de Killing d'une structure Lagrangienne de contact coïncident avec ceux d'une géométrie de Cartan normale associée.

Remarque 4.1.6. Notons que la structure Lagrangienne de contact ainsi associée à une géométrie de Cartan normale modelée sur $\mathbf{X}_{2n+1}$ coïncide avec la structure que nous avons trouvée bien plus simplement au paragraphe 3.1.3.a. Notre gain par rapport à cette première définition est la possibilité de remonter vers la géométrie de Cartan, ce qui aurait été impossible sans la théorie développée au chapitre précédent. Ceci nous récompense de tous nos efforts.

Dans la suite, nous nous autoriserons à parler de la géométrie de Cartan normale d'une structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}$, pour parler de l'une des géométries de Cartan normales modelées sur $\mathbf{X}_{2n+1}$ et associées à $\mathcal{L}$. Grâce au corollaire 4.1.5, les automorphismes et champs de Killing d'une structure Lagrangienne de contact héritent des propriétés générales de ceux des géométries de Cartan, dont nous résumons les principaux aspects dans le résultat suivant (voir remarques 3.1.10 et 3.1.14 et lemme 3.1.13). On note $\mathfrak{Kill}(U, \mathcal{L})$ (respectivement $\mathfrak{Kill}_{\mathcal{L}}^{\text{loc}}(x)$) l'algèbre de Lie des champs de Killing locaux d'une structure Lagrangienne de contact $(M, \mathcal{L})$ définis sur un ouvert $U \subset M$ (resp. l'algèbre de Lie des germes de champs de Killing de $\mathcal{L}$ en $x \in M$).

Proposition 4.1.7. *Soit $(M, \mathcal{L})$ une structure Lagrangienne de contact connexe de dimension $2n + 1$.*

1. Les automorphismes et champs de Killing de $\mathcal{L}$ sont déterminés par leur germe en un point.
2. Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert connexe U de x tel $X \in \mathfrak{Kill}(U, \mathcal{L}) \mapsto [X]_x \in \mathfrak{kill}_{\mathcal{L}}^{\text{loc}}(x)$ est un isomorphisme d'algèbre de Lie, et $\dim \mathfrak{kill}_{\mathcal{L}}^{\text{loc}}(x) \leq \dim \mathfrak{sl}_{n+2}$.

Notons que la connexion de la géométrie de Cartan canonique $\mathcal{C}_{\mathbf{X}_{2n+1}}$ de $\mathbf{X}_{2n+1}$ est normale puisque sa courbure est nulle, et rappelons qu'elle induit par ailleurs sur $\mathbf{X}_{2n+1}$ la structure Lagrangienne de contact standard $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_{2n+1}}$ selon la proposition 2.1.2. En d'autres termes, $\mathcal{C}_{\mathbf{X}_{2n+1}}$ est la géométrie de Cartan normale de $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_{2n+1}}$, et la proposition 3.1.4 au sujet des géométries de Cartan canoniques se traduit alors par le résultat suivant.

Théorème 4.1.8. *Tout automorphisme local de $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_{2n+1}}$ entre deux ouverts connexes de $\mathbf{X}_{2n+1}$ est la restriction de l'action d'un élément de $\text{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$.*

Nous terminons ce paragraphe en caractérisant l'intégrabilité des sous-distributions Legendriennes d'une structure Lagrangienne de contact à l'aide de la courbure.

Proposition 4.1.9. *Soit $\mathcal{L} = (E^\alpha, E^\beta)$ une structure Lagrangienne de contact sur une variété M de dimension $2n + 1$, et $(\hat{M}, \omega)$ la géométrie de Cartan normale de $\mathcal{L}$, dont on note K la courbure. Alors E^α (respectivement E^β) est intégrable si, et seulement si $K(\mathfrak{g}_{-1}^\alpha, \mathfrak{g}_{-1}^\alpha) \subset \mathfrak{g}_{-1}^\alpha \oplus \mathfrak{p}_{n+2}$ (resp. $K(\mathfrak{g}_{-1}^\beta, \mathfrak{g}_{-1}^\beta) \subset \mathfrak{g}_{-1}^\beta \oplus \mathfrak{p}_{n+2}$).*

Démonstration. Nous raisonnons pour E^α , la preuve étant la même pour E^β . De plus puisque les résultats à prouver sont locaux, nous pouvons supposer que E^α admet un repère $(X_1, \dots, X_n)$ (i.e. $E^\alpha = \text{Vect}(X_i)$ sur M), et que $\pi: \hat{M} \rightarrow M$ est trivial, si bien que tout champ de vecteurs sur M admet un relevé $\mathbf{P}_{n+2}$ -invariant $\hat{X}$. Puisque $\text{Ad}(\mathbf{P}_{n+2})$ préserve la filtration de $\mathfrak{sl}_{n+2}$, la distribution $\hat{E}^\alpha = \omega^{-1}(\mathfrak{g}_{-1}^\alpha \oplus \mathfrak{p}_{n+2})$ est $\mathbf{P}_{n+2}$ -invariante, et vérifie $D\pi(\hat{E}^\alpha) = E^\alpha$.

Nous prouvons tout d'abord que E^α est involutive si, et seulement si $\hat{E}^\alpha$ l'est. Supposons E^α involutive, et choisissons un relevé $\mathbf{P}_{n+2}$ -invariant $\{\hat{X}_i\}$ du repère de E^α . On a alors $\text{Vect}(\hat{X}_i) \oplus V = \hat{E}^\alpha$, où $V = \omega^{-1}(\mathfrak{p}_{n+2})$ désigne la distribution verticale. Soit $\{\hat{Y}_i\}_{i=1, \dots, p}$ un repère $\mathbf{P}_{n+2}$ -invariant de V . Pour tous i, j , puisque $D\pi([\hat{X}_i, \hat{X}_j]) = [X_i, X_j] \in E^\alpha$, $[\hat{X}_i, \hat{X}_j] \in \hat{E}^\alpha$, et $[\hat{Y}_i, \hat{Y}_j] \in V$ puisque V est intégrable (car tangente aux fibres). De plus $D\pi(Y_i) = 0$, donc $D\pi([\hat{X}_i, \hat{Y}_j]) = 0$ et $[\hat{X}_i, \hat{Y}_j] \in V \subset \hat{E}^\alpha$. Puisque $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_p$ est un repère de $\hat{E}^\alpha$, ceci montre que $\hat{E}^\alpha$ est involutive. Supposons réciproquement $\hat{E}^\alpha$ involutive. Alors pour tous champs de vecteurs X, Y à valeurs dans E^α , et $\hat{X}, \hat{Y}$ des relevés $\mathbf{P}_{n+2}$ -invariants, $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ sont dans $\hat{E}^\alpha$, donc $[\hat{X}, \hat{Y}] \in \hat{E}^\alpha$. Ainsi $[X, Y] = D\pi([\hat{X}, \hat{Y}]) \in E^\alpha$, ce qui montre que E^α est involutive.

Nous montrons enfin que $\hat{E}^\alpha$ est involutive si, et seulement si $K(\mathfrak{g}_{-1}^\alpha, \mathfrak{g}_{-1}^\alpha) \subset \mathfrak{g}_{-1}^\alpha \oplus \mathfrak{p}_{n+2}$. Pour tous $V, W \in \mathfrak{g}_{-1}^\alpha \oplus \mathfrak{p}_{n+2}$, en notant $\tilde{V}, \tilde{W}$ les champs de vecteurs ω -constants associés :

$$\omega([\tilde{V}, \tilde{W}]) = [V, W] - K(V, W). \quad (4.1.4)$$

En effet par définition de la forme de courbure, $K(V, W) = d\omega(\tilde{V}, \tilde{W}) + [V, W]$, et selon la formule de Cartan $d\omega(\tilde{V}, \tilde{W}) = \tilde{V} \cdot \omega(\tilde{W}) - \tilde{W} \cdot \omega(\tilde{V}) - \omega([\tilde{V}, \tilde{W}])$. Or $\tilde{V}$ et $\tilde{W}$ sont ω -constants donc $\omega([\tilde{V}, \tilde{W}]) = -d\omega(\tilde{V}, \tilde{W})$, ce qui prouve la relation (4.1.4). Ainsi $[\tilde{V}, \tilde{W}] \in \hat{E}^\alpha$ si, et seulement si $[V, W] - K(V, W) \in \mathfrak{g}_{-1}^\alpha \oplus \mathfrak{p}_{n+2}$. Or $[V, W] \in \mathfrak{g}_{-1}^\alpha \oplus \mathfrak{p}_{n+2}$, car $\mathfrak{g}_{-1}^\alpha$ est abélienne, et car $[\mathfrak{p}_{n+2}, \mathfrak{g}_{-1}^\alpha] \subset \mathfrak{g}_{-1}^\alpha \oplus \mathfrak{p}_{n+2}$ puisque $\overline{\mathfrak{g}_{-1}^\alpha}$ est $\text{Ad}(\mathbf{P}_{n+2})$ -invariante (voir paragraphe 2.1.2). Finalement $[\tilde{V}, \tilde{W}] \in \hat{E}^\alpha$ si, et seulement si $K(V, W) \in \mathfrak{g}_{-1}^\alpha \oplus \mathfrak{p}_{n+2}$. Or selon le même raisonnement que précédemment, puisque V est intégrable, $\hat{E}^\alpha$ est involutive si, et seulement si $[\tilde{V}_i, \tilde{V}_j] \in \hat{E}^\alpha$ pour $V_1, \dots, V_n$ une base de $\mathfrak{g}_{-1}^\alpha$. Ceci termine la preuve de la seconde équivalence, et donc la preuve de la proposition. $\square$

4.2 Courbure d'une structure Lagrangienne de contact de dimension trois

Nous allons maintenant rendre le corollaire 4.1.5 tout à fait explicite dans le cas de la dimension trois, en déterminant la sous-représentation W_K de dimension quatre de $L(\Lambda^2(\mathfrak{sl}_3)_-, \mathfrak{sl}_3)$ dans lequel la courbure d'une connexion normale prend ses valeurs. Dans cette section, nous noterons $\mathbf{X} = \mathbf{X}_3$, et $\mathcal{C} = (\hat{M}, \omega)$ désigne une géométrie de Cartan normale modélisée sur $\mathbf{X}$, de forme de courbure Ω et de fonction de courbure K .

4.2.1 Calcul de la condition de normalisation

La codifférentielle de Kostant $\partial^*: L(\Lambda^2(\mathfrak{sl}_3)_-, \mathfrak{sl}_3) \rightarrow L((\mathfrak{sl}_3)_-, \mathfrak{sl}_3)$ a été définie au paragraphe 3.3.3.a à partir de l'application de cobord d'une manière duale. Pour déterminer son noyau, nous aurons besoin de l'expression suivante de ∂^* en terme d'applications, prouvée dans [ČS09, Lemma 3.1.11] pour toute géométrie parabolique infinitésimale $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$.

Lemme 4.2.1. *Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une base de $\mathfrak{g}_-$, et $(Y_1, \dots, Y_n)$ la base duale de $\mathfrak{p}_+$ relativement à la forme de Killing B de $\mathfrak{g}$ (i.e. vérifiant $B(X_i, Y_j) = \delta_{i,j}$ pour tous i, j). Soit $\phi \in L(\Lambda^2 \mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ telle que $\phi(v, w) = 0$ si v ou w est dans $\mathfrak{p}$. Alors pour tout $X \in \mathfrak{g}$:*

$$\partial^* \phi(X) = 2 \sum_{i=1}^n [Y_i, \phi(X, X_i)] - \sum_{i=1}^n \phi([Y_i, X], X_i). \quad (4.2.1)$$

La courbure de toute connexion de Cartan vérifie l'identité de Bianchi

$$d\Omega = [\Omega, \omega] \quad (4.2.2)$$

prouvée dans [Sha97, Chapter 5 Lemma 3.30]. En notant $m: X \otimes Y \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \mapsto [X, Y] \in \mathfrak{g}$, la 3-forme différentielle $[\Omega, \omega]$ est définie par $[\Omega, \omega] = m \circ (\Omega \wedge \omega)$ (voir [Sha97, §1.5 p.60] pour plus de détails à ce sujet). L'identité de Bianchi impose des restrictions algébriques *a priori* sur Ω , et la courbure d'une connexion de Cartan normale vérifie donc *a posteriori* des conditions plus fortes que $\partial^* K = 0$. Dans le cas du modèle $\mathbf{X} = \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})/\mathbf{P}_{min}$, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 4.2.2. *1. On a $\dim \mathrm{Ker} \partial^* \leq 9$.
2. De plus, la courbure de toute connexion de Cartan normale à valeurs dans $\mathfrak{sl}_3$ est à valeurs dans une sous- $\mathbf{P}_{min}$ -représentation de $\mathrm{Ker} \partial^*$ de dimension 4, notée W_K et égale à*

$$\left\{ K \in L(\Lambda^2(\mathfrak{sl}_3)_-, \mathfrak{sl}_3) \mid K(e_\alpha, e_0) \in \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K(e_\beta, e_0) \in \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K(e_\alpha, e_\beta) = 0 \right\}, \quad (4.2.3)$$

que l'on appellera module des courbures normales.

Dans la définition de W_K , nous avons utilisé la base suivante de $\mathfrak{sl}_3$ que nous noterons $\mathcal{B}$:

$$\begin{cases} e^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ e^\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ e_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ e_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

et dont les membres entretiennent les relations de crochets ci-dessous (les crochets n'apparaissant pas sont nuls).

$$(4.2.4) \left\{ \begin{array}{l} [e^\beta, e^\alpha] = e^0, [e^0, e_1] = -e^0, [e^0, e_2] = -e^0, \\ [e^0, e_\alpha] = e^\beta, [e^\beta, e_1] = -2e^\beta, [e^\beta, e_2] = e^\beta, \\ [e^0, e_\beta] = -e^\alpha, [e^\alpha, e_1] = e^\alpha, [e^\alpha, e_2] = -2e^\alpha, \\ [e^0, e_0] = e_1 + e_2, [e^\beta, e_\epsilon] = \delta_{\epsilon, \beta} e_1 \text{ et } [e^\alpha, e_\epsilon] = \delta_{\epsilon, \alpha} e_2 \text{ pour } \epsilon = \beta \text{ ou } \alpha, \\ [e_0, e^\alpha] = -e_\beta, [e_\beta, e_1] = 2e_\beta, [e_\beta, e_2] = -e_\beta, \\ [e_0, e^\beta] = e_\alpha, [e_\alpha, e_1] = -e_\alpha, [e_\alpha, e_2] = 2e_\alpha, \\ [e_\beta, e_\alpha] = -e_0, [e_0, e_1] = e_0, [e_0, e_2] = e_0. \end{array} \right.$$

Nous adopterons de plus une notation réduite pour les coordonnées d'un vecteur $A \in \mathfrak{sl}_3$ dans la base $\mathcal{B}$: A^0 désigne la coordonnée de A selon e^0 , A_0 sa coordonnée selon e_0 , et ainsi de suite. Nous décomposerons la connexion de Cartan ω sous la forme

$$\omega = \sum_{e \in \mathcal{B}} \omega_e e,$$

où pour tout vecteur $e \in \mathcal{B}$, ω_e est une 1-forme à valeurs réelles que nous appellerons *1-forme coordonnée de ω selon e* , et nous ferons de même avec la forme de courbure Ω selon des 2-formes coordonnées Ω_e . Nous utiliserons parfois la notation alternative $\omega_0 = \omega_{e_0}$, $\omega_\alpha = \omega_{e_\alpha}$, et ainsi de suite, et les mêmes notations pour les 2-formes coordonnées Ω_e . Enfin, nous décomposons K selon la base $(e_\alpha \wedge e_0, e_\beta \wedge e_0, e_\beta \wedge e_\alpha)$ de $\Lambda^2(\mathfrak{sl}_3)_-$, en notant

$$\left\{ \begin{array}{l} M = K(e_\alpha, e_0) \\ N = K(e_\beta, e_0) \\ O = K(e_\beta, e_\alpha) \end{array} \right.$$

ses composantes, qui sont des applications définies sur $\hat{M}$ et à valeurs dans $\mathfrak{sl}_3$.

Démonstration de la proposition 4.2.2. 1. Soit $K \in \text{Ker } \partial^* \subset \text{L}(\Lambda^2(\mathfrak{sl}_3)_-, \mathfrak{sl}_3)$. La forme de Killing de $\mathfrak{sl}_3$ vérifie $B(X, Y) = 6 \text{tr}(XY)$, donc la base de $(\mathfrak{p}_{\min})_+$ duale de (e_β, e_α, e_0) par rapport à B est $(\frac{e^\beta}{6}, \frac{e^\alpha}{6}, \frac{e^0}{6})$. L'équation (4.2.1) appliquée à la courbure K pour $X = e_\beta$, puis $X = e_\alpha$, et enfin $X = e_0$, donne les trois équations suivantes.

$$\begin{aligned} [e^\alpha, O] &= -[e^0, N], \\ [e^\beta, O] &= [e^0, M], \\ O &= [e^\beta, N] + [e^\alpha, M] \end{aligned}$$

Les relations de crochets (4.2.4) nous permettent de projeter ces équations dans la base $\mathcal{B}$, et d'obtenir les trois systèmes d'équations scalaires ci-dessous.

$$\left\{ \begin{array}{ll} -O^\beta & = N_1 + N_2 \\ O_1 - 2O_2 & = N_\beta \\ 0 & = N_\alpha \\ O_\alpha & = -N_0 \\ 0 & = N_0 \\ O_0 & = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.2.5a) \\ (4.2.5b) \end{array}$$

$$\begin{cases} O^\alpha & = -M_1 - M_2 \\ -2O_1 + O_2 & = M_\alpha \\ 0 & = M_\beta \\ O_\beta & = M_0 \\ 0 & = M_0 \\ O_0 & = 0 \end{cases} \quad (4.2.6a)$$

$$\begin{cases} O^0 & = M^\beta - N^\alpha \\ O^\beta & = 2N_1 - N_2 \end{cases} \quad (4.2.7a)$$

$$\begin{cases} O^\alpha & = -M_1 + 2M_2 \end{cases} \quad (4.2.7b)$$

$$\begin{cases} O_1 & = -N_\beta \end{cases} \quad (4.2.7c)$$

$$\begin{cases} O_2 & = -M_\alpha \end{cases} \quad (4.2.7d)$$

$$\begin{cases} O_\beta & = -M_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} O_\alpha & = N_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} O_0 & = 0 \end{cases}$$

Ces systèmes fournissent immédiatement plusieurs relations supplémentaires : selon (4.2.5a) et (4.2.7a), $N_1 = 0$ donc $O^\beta = -N_2$; selon (4.2.6a) et (4.2.7b), $M_2 = 0$ donc $O^\alpha = -M_1$; et selon (4.2.5b) et (4.2.7c), $O_1 = O_2$ donc $N_\beta = M_\alpha = -O_1 = -O_2$ selon (4.2.7c) et (4.2.7d). Les composantes O , N , et M de tout $K \in \text{Ker } \partial^*$ vérifient donc le système ci-dessous.

$$(4.2.8) \begin{cases} N_\beta = M_\alpha = -O_1 = -O_2 & (4.2.8a) \\ N_1 = 0, O^\beta = -N_2 & (4.2.8b) \\ M_2 = 0, O^\alpha = -M_1 & (4.2.8c) \\ O^0 = M^\beta - N^\alpha & (4.2.8d) \\ O \in \mathfrak{p}_{min} \\ N_0 = M_0 = N_\alpha = M_\beta = 0 \end{cases}$$

Ce système nous montre en particulier que O est déterminée par N et M , et que N et M vérifient par ailleurs 7 équations scalaires indépendantes. L'espace des éléments $K \in \mathcal{L}(\Lambda^2(\mathfrak{sl}_3)_-, \mathfrak{sl}_3)$ est donc de dimension $16 - 7 = 9$, ce qui montre bien que $\dim \text{Ker } \partial^* \leq 9$.

2. Nous supposons désormais que K est la fonction de courbure d'une géométrie de Cartan normale modelée sur $\mathbf{X}$. Nous allons annuler de nouvelles composantes de K à l'aide de l'identité de Bianchi (4.2.2), dont la projection dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\sum_{e \in \mathcal{B}} d\Omega_e e = \sum_{e, f \in \mathcal{B}} (\Omega_e \wedge \omega_f)[e, f], \quad (4.2.9)$$

où pour tout $e \in \mathcal{B}$,

$$\Omega_e = (\omega_\alpha \wedge \omega_0)M_e + (\omega_\beta \wedge \omega_0)N_e + (\omega_\beta \wedge \omega_\alpha)O_e \quad (4.2.10)$$

par définition des formes coordonnées. Pour tout $\hat{x} \in \hat{M}$, $(\omega_{\hat{x}}^{-1}(e))_{e \in \mathcal{B}}$ est une base de $T_{\hat{x}}\hat{M}$ car la connexion de Cartan est un isomorphisme, et $(\omega_e(\hat{x}))_{e \in \mathcal{B}}$ est la base duale de $(T_{\hat{x}}\hat{M})^*$. La 3-forme $\omega_\beta \wedge \omega_\alpha \wedge \omega_0$ ne s'annule donc en aucun point de $\hat{M}$, ce que nous utiliserons de façon répétée.

Puisque $M_0 = N_0 = O_0$ selon (4.2.8), $\Omega_0 = d\Omega_0 = 0$, et on obtient $0 = (M_\alpha + N_\beta)\omega_\alpha \wedge \omega_0 \wedge \omega_\beta$ en projetant (4.2.9) selon e_0 . Ainsi $N_\beta = -M_\alpha$, d'où selon les équations (4.2.8a) $N_\beta = M_\alpha = 0 = O_1 = O_2$. On sait donc désormais que $O \in \mathfrak{p}_+$ et $N, M \in \mathfrak{p}_{min}$, et en particulier $\Omega_\alpha = \Omega_\beta = 0$.

En projetant (4.2.9) selon e_β , on obtient donc $0 = \omega_\beta \wedge \omega_\alpha \wedge \omega_0(O^\alpha - 2M_1 - M_2)$, i.e. $O^\alpha = 2M_1 + M_2$, d'où $O^\alpha = M_1 = 0$ selon les équations (4.2.8c). En projetant selon e_α , on a

$0 = \omega_\beta \wedge \omega_\alpha \wedge \omega_0(-O^\beta - N_1 + 2N_2)$, donc $O^\beta = N_1 - 2N_2$, d'où $O^\beta = N_2 = 0$ selon les équations (4.2.8b). On sait maintenant que $\Omega \in \mathfrak{p}_+$ (donc $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$), et que O^0 est la seule forme coordonnée non-nulle de O .

On projette enfin (4.2.9) selon e_1 et e_2 , et on obtient respectivement $0 = \omega_\beta \wedge \omega_\alpha \wedge \omega_0(O^0 + M^\beta)$ et $0 = \omega_\beta \wedge \omega_\alpha \wedge \omega_0(O^0 - N^\alpha)$. Ainsi $O^0 = -M^\beta$ et $O^0 = N^\alpha$, d'où $2M^\beta = N^\alpha$ et $2N^\alpha = M^\beta$ selon l'équation (4.2.8d), et donc $O^0 = M^\beta = N^\alpha = 0$. Finalement $O = 0$, et (M^α, M^0) , ainsi que (N^β, N^0) sont les seules formes coordonnées non-nulles de M et N , ce qui prouve que $K \in W_K$. $\square$

Nous noterons K_A, K_A^0, K_B, K_B^0 les composantes de la courbure K d'une connexion normale à valeurs dans $\mathfrak{sl}_3$, définies par :

$$K(e_\alpha, e_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K_A^0 \\ 0 & 0 & K_A^0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K(e_\beta, e_0) = \begin{pmatrix} 0 & K_B & K_B^0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.11)$$

Rappelons que l'action de $\mathbf{P}_{min}$ sur $L(\Lambda^2(\mathfrak{sl}_3)_-, \mathfrak{sl}_3)$ (pour laquelle la courbure est $\mathbf{P}_{min}$ -équivariante) est définie pour $p \in \mathbf{P}_{min}$ par

$$p \cdot K : (u, v) \mapsto \text{Ad}(p) \cdot (K(\text{Ad}^-(p)^{-1} \cdot u, \text{Ad}^-(p)^{-1} \cdot v)).$$

On vérifie que W_K est stable pour cette action, et que pour

$$p = \begin{pmatrix} a & x & z \\ 0 & a^{-1}b^{-1} & y \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \in \mathbf{P}_{min}$$

et $K \in W_K$, les composantes de $p \cdot K \in W_K$ sont :

$$(4.2.12) \quad \begin{cases} (p \cdot K)_A = a^{-1}b^{-5}K_A \\ (p \cdot K)_A^0 = ab^{-4}K_A^0 + b^{-4}xK_A \\ (p \cdot K)_B = a^5bK_B, \\ (p \cdot K)_B^0 = a^4b^{-1}K_B^0 - a^5yK_B \end{cases}$$

en utilisant les notations (4.2.11).

4.2.2 Calcul de la courbure harmonique

Nous avons introduit au paragraphe 3.3.3.a le Laplacien de Kostant

$$\square = \partial \circ \partial^* + \partial^* \circ \partial : L(\Lambda^2(\mathfrak{sl}_3)_-, \mathfrak{sl}_3) \rightarrow L(\Lambda^2(\mathfrak{sl}_3)_-, \mathfrak{sl}_3),$$

et nous avons vu au paragraphe 3.5 que la courbure d'une géométrie de Cartan normale induit une application G_0 -équivariante $K_H : \hat{M}_0 \rightarrow \text{Ker} \square$ appelée courbure harmonique, où $\hat{M}_0 = \hat{M}/P_+ \rightarrow M$ est le G_0 -fibré principal au dessus de M induit par le fibré de Cartan $\pi : \hat{M} \rightarrow M$. L'intérêt de cette réduction de la courbure est fourni par le théorème 3.5.2, affirmant que l'annulation de K_H implique en réalité celle de K . L'action de $\mathbf{P}_{min}$ sur W_K (voir (4.2.12)) montre que le sous-espace

$$W_H = \left\{ K \in W_K \mid K_B^0 = K_A^0 = 0 \right\} \quad (4.2.13)$$

de dimension deux n'est pas $\mathbf{P}_{min}$ -invariant, mais qu'il est G_0 -invariant (rappelons que G_0 est simplement le sous-groupe des matrices diagonales de $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$).

Proposition 4.2.3. *On a $\text{Ker} \square = W_H$, i.e. le noyau du laplacien de Kostant est égal à la sous- G_0 -représentation W_H , que l'on appellera module des courbures harmoniques. En particulier, si $K \in W_H$ alors $K = 0$.*

Démonstration. Montrons d'abord que $\dim(\partial^*(L(\Lambda^3(\mathfrak{sl}_3)_-, \mathfrak{sl}_3))) = 7$. On a vu au paragraphe 3.3.3.a que $L(\Lambda^3(\mathfrak{sl}_3)_-, \mathfrak{sl}_3)$ s'identifie à $\Lambda^3(\mathfrak{p}_{min})_+ \otimes \mathfrak{sl}_3$ par la forme de Killing, et il suffit donc de montrer que $\partial^*(\Lambda^3(\mathfrak{p}_{min})_+ \otimes \mathfrak{sl}_3)$ est de dimension 7. L'expression de ∂^* sur les tenseurs élémentaires donnée dans [CS09, §3.1.11 p.262] montre que $\partial^*(e^0 \wedge e^\beta \wedge e^\alpha \otimes e^0) = 0$, et que pour e un vecteur de la base $\mathcal{B}$ différent de e^0 , les images $\partial^*(e^0 \wedge e^\beta \wedge e^\alpha \otimes e)$ sont deux à deux indépendantes. Ceci montre que $\dim \text{Im } \partial^* = 7$, or selon la décomposition de Hodge 3.3.5, $\text{Im } \partial^*$ est complémentaire de $\text{Ker } \square$ dans $\text{Ker } \partial^*$, et nous avons vu à la proposition 4.2.2 que $\dim \text{Ker } \partial^* \leq 9$. Finalement $\dim \text{Ker } \square \leq 2$, et il nous suffit donc de montrer que $W_H \subset \text{Ker } \square$ pour en déduire l'égalité.

Soit $\phi \in W_H$. Alors par définition de ∂ , $\partial\phi(e_0, e_\beta, e_\alpha) = 0$, et $\partial^*\phi = 0$ puisque ϕ est en particulier une courbure normale. Or $\partial \circ \partial = \partial^* \circ \partial^* = 0$, d'où $\square\phi = 0$, ce qui termine la preuve de la première affirmation. La seconde est une conséquence du théorème 3.5.2. $\square$

La courbure harmonique K_H d'une géométrie de Cartan normale modélée sur $\mathbf{X}$ dont la courbure K est décrite par (4.2.11) est donc égale à :

$$K_H : (e_\alpha, e_0) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_A \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (e_\beta, e_0) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & K_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.14)$$

L'action de $\mathbf{P}_{min}$ sur W_K (voir (4.2.12)) montre que

$$W_K^\alpha = \left\{ K \in W_K \mid K_A = K_A^0 = 0 \right\} \quad (4.2.15)$$

est un sous-espace $\mathbf{P}_{min}$ -invariant de W_K , et qu'il en va de même pour

$$W_K^\beta = \left\{ K \in W_K \mid K_B = K_B^0 = 0 \right\}. \quad (4.2.16)$$

Par conséquent, si la fonction de courbure d'une géométrie de Cartan modélée sur $\mathbf{X}$ a ses valeurs dans W_K^α ou W_K^β sur un ouvert $U \subset \hat{M}$, alors c'est le cas sur $\pi^{-1}(\pi(U))$, si bien que cela a un sens sur l'ouvert $\pi(U)$ de la variété de base. En d'autres termes, le fait qu'une courbure soit *de type* W_K^α ou *de type* W_K^β a un réel sens géométrique.

Théorème 4.2.4. *Soit $\mathcal{C}$ une géométrie de Cartan normale modélée sur $\mathbf{X}$ de fonction de courbure K . Si $K_A = 0$ alors $K \in W_K^\alpha$, et si $K_B = 0$ alors $K \in W_K^\beta$. En particulier, si $K_H = 0$ alors $K = 0$.*

Démonstration. Supposons que $K_A = 0$, si bien que Ω est à valeurs dans $\text{Vect}(e^0, e^\beta)$. En particulier $\Omega^\alpha = 0$ et donc $d\Omega^\alpha = 0$. En projetant l'identité de Bianchi (4.2.9) selon e^α et grâce aux relations de crochets (4.2.4), on en déduit que $0 = -(\omega_\alpha \wedge \omega_0 \wedge \omega_\beta)M^0$ (voir (4.2.10)). Or $M^0 = K_A^0$ et $\omega_\alpha \wedge \omega_0 \wedge \omega_\beta$ ne s'annule jamais, d'où $K_A^0 = 0$. Si $K_B = 0$ alors $\Omega^\beta = 0$, et en projetant l'identité de Bianchi selon e^β , le même type de raisonnement montre que $K_B^0 = 0$.

Si $K_H = 0$, alors $K \in W_K^\alpha \cap W_K^\beta = \{0\}$, ce qui termine la preuve. $\square$

Ceci montre donc le théorème 3.5.2 d'une manière élémentaire dans le cas de $\mathbf{X}$: la courbure harmonique d'une géométrie de Cartan normale modélée sur $\mathbf{X}$ caractérise sa platitude. Plus précisément, K_H caractérise les courbures à valeurs dans W_K^α ou W_K^β .

4.3 Chaînettes d'une structure Lagrangienne de contact

Dans cette section, nous allons donner une interprétation très concrète à l'idée générale selon laquelle une géométrie de Cartan relie la variété de base M à l'espace homogène modèle $\mathbf{X} = G/P$: en tout point du fibré de Cartan, toute courbe sur M est associée à une courbe dans $\mathbf{X}$ passant par $eP \in \mathbf{X}$.

4.3.1 Développement de courbes dans une géométrie de Cartan

Soit $\mathbf{X} = G/P$ une géométrie de Klein, pour laquelle on pose $o = eP \in \mathbf{X}$. Nous considérons dans tout ce paragraphe une géométrie de Cartan $(M, \mathcal{C}) = (M, \hat{M}, \omega)$ modelée sur $\mathbf{X}$.

Soit $\alpha: I \rightarrow M$ une courbe d'image relativement compacte, avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert contenant 0, et notons $x = \alpha(0) \in M$. Pour tout $\hat{x} \in \pi^{-1}(x)$, on peut relever α d'une infinité de manières en une courbe $\hat{\alpha}: I \rightarrow \hat{M}$ sur $\hat{M}$ vérifiant $\pi \circ \hat{\alpha} = \alpha$ et $\hat{\alpha}(0) = \hat{x}$, et l'on appellera *relevé de α à partir de $\hat{x}$* une telle courbe $\hat{\alpha}$. Pour un relevé $\hat{\alpha}$ donné à partir de $\hat{x}$, il existe une unique courbe $\beta: I \rightarrow G$ telle que $\beta(0) = e$ et vérifiant l'équation

$$\hat{\alpha}^* \omega = \beta^* \omega_G, \quad (4.3.1)$$

où ω_G désigne la forme de Maurer-Cartan de G . L'équation (4.3.1) se lit en effet dans des cartes locales comme une équation différentielle ordinaire sur les coordonnées de β , et admet donc une unique solution locale avec condition initiale $\beta(0) = e$ fixée. Les solutions locales obtenues se recollent ensuite par compacité relative de $\alpha(I)$ (pour plus de détails, voir [Sha97, Chapter 3 Theorem 6.1 et Theorem 7.1]). On appellera β le *développement de $\hat{\alpha}$ dans G* .

Un autre relevé $\hat{\alpha}'$ de α à partir de $\hat{x}$ diffère de $\hat{\alpha}$ par une application lisse $p: I \rightarrow P$ telle que $\hat{\alpha}' = \hat{\alpha} \cdot p$ et $p(0) = e$, uniquement déterminée car l'action de P sur $\hat{M}$ est libre. Nous allons utiliser le résultat ci-dessous pour montrer que $(\beta p): I \rightarrow G$ est le développement de $\hat{\alpha}'$ dans G .

Lemme 4.3.1. *Soient N une variété, et $f: N \rightarrow \hat{M}$, $p: N \rightarrow P$ deux applications lisses. En notant $\psi = f \cdot p: N \rightarrow \hat{M}$ l'application lisse définie par $\psi(x) = f(x) \cdot p(x)$ pour $x \in N$, et ω_P la forme de Maurer-Cartan de P , on a :*

$$\psi^* \omega = \text{Ad}(p^{-1}) \cdot f^* \omega + p^* \omega_P. \quad (4.3.2)$$

Démonstration. Décomposons ψ comme $\psi = \mu \circ (f, p) \circ \Delta$ où $\mu(\hat{x}, g) = \hat{x} \cdot g$ et $\Delta(\hat{x}) = (\hat{x}, \hat{x})$. Pour $\hat{x} \in \hat{M}$, $v \in T_{\hat{x}} \hat{M}$, $g \in P$, et $w \in T_g P$, en notant $W = \omega_P(g)(w) \in \mathfrak{p}$ on a $D_{(\hat{x}, g)} \mu(v, w) = D_{\hat{x}} R_g(v) + W_{\hat{x}, g}^\dagger$, où $W^\dagger(\hat{x}) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \hat{x} \cdot \exp(tW)$ désigne le champ de vecteurs fondamental engendré par W . Donc pour $x \in N$ et $v \in T_x N$, en notant $V = (p^* \omega_P)_x(v) \in \mathfrak{p}$, on obtient $(\psi^* \omega)_x(v) = (\mu^* \omega)_{(f(x), p(x))}(Df(v), Dp(v)) = \omega_{f(x), p(x)}(DR_{p(x)} \circ Df(v) + V_{f(x), p(x)}^\dagger)$. Cette dernière expression est bien égale à $\text{Ad}(p(x))^{-1} \cdot (f^* \omega)_x(v) + (p^* \omega_P)_x(v)$ car la connexion de Cartan est équivariante et reproduit les champs de vecteurs fondamentaux. $\square$

En appliquant l'égalité (4.3.2) à la géométrie de Cartan $(\hat{M}, \omega)$ puis à la géométrie de Cartan canonique du modèle G/P , on obtient $\hat{\alpha}'^* \omega = \text{Ad}(p^{-1}) \cdot \hat{\alpha}^* \omega + p^* \omega_P = \text{Ad}(p)^{-1} \cdot \beta^* \omega_G + p^* \omega_P = (\beta p)^* \omega_G$. Or on a également $(\beta p)(0) = e$ car $p(0) = e$, donc βp est bien le développement de $\hat{\alpha}'$ dans G par unicité d'une courbe vérifiant ces deux conditions.

Les développements dans G de $\hat{\alpha}$ et $\hat{\alpha}'$ se projettent ainsi dans $\mathbf{X}$ sur la même courbe $\pi_{\mathbf{X}} \circ \beta = \pi_{\mathbf{X}} \circ (\beta p): I \rightarrow \mathbf{X}$ (où l'on note $\pi_{\mathbf{X}}: G \rightarrow G/P = \mathbf{X}$ la projection canonique). Cette dernière ne dépend finalement que de α et de $\hat{x}$, et on l'appellera le *développement de α à partir de $\hat{x}$* , noté $\text{Dev}_{\hat{x}} \alpha: I \rightarrow \mathbf{X}$. Notons que par construction, $(\text{Dev}_{\hat{x}} \alpha)(0) = o$.

Proposition 4.3.2. *Soient $\hat{x} \in \hat{M}$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, et notons $x = \pi(\hat{x})$. Alors le développement à partir de $\hat{x}$ définit une bijection $\alpha \mapsto \text{Dev}_{\hat{x}} \alpha$ entre les courbes $\alpha: I \rightarrow M$ telles que $\alpha(0) = x$ d'image relativement compacte dans M , et les courbes $\beta: I \rightarrow \mathbf{X}$ telles que $\beta(0) = o$ d'image relativement compacte dans $\mathbf{X}$.*

Démonstration. Soient $\alpha: I \rightarrow M$ et $\beta: I \rightarrow M$ deux courbes ayant le même développement γ à partir de $\hat{x}$. Avec $\hat{\gamma}: I \rightarrow G$ un relèvement de γ dans G à partir de e , il existe alors des relevés $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ de α et β dans $\hat{M}$ à partir de $\hat{x}$ vérifiant $\hat{\alpha}^* \omega = \hat{\gamma}^* \omega_G = \hat{\beta}^* \omega$. Ceci impose $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ par unicité, et donc $\alpha = \beta$. $\square$

Notons que si $\alpha: I \rightarrow M$ se développe sur $\gamma: I \rightarrow \mathbf{X}$, alors $\alpha'(0) = i_{\hat{x}}^{-1}(\gamma'(0))$, où l'on rappelle que $i_{\hat{x}}: T_{\hat{x}}M \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ est l'unique isomorphisme tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif.

$$\begin{array}{ccc} T_{\hat{x}}\hat{M} & \xrightarrow{\omega_{\hat{x}}} & \mathfrak{g} \\ \downarrow D_{\hat{x}}\pi & & \downarrow \\ T_x M & \xrightarrow{i_{\hat{x}}} & \mathfrak{g}/\mathfrak{p} \end{array}$$

Le développement d'une courbe paramétrée est une courbe paramétrée, et les relations que nous écrirons sur $\text{Dev}_{\hat{x}}\alpha$ seront bien des relations entre courbes paramétrées, et pas seulement sur leurs images.

Si f est un automorphisme de la géométrie de Cartan $\mathcal{C}$ fixant un point x , son *holonomie en* $\hat{x} \in \pi^{-1}(x)$ est définie comme l'unique élément $p \in P$ tel que $\hat{f}(\hat{x}) = \hat{x} \cdot p^{-1}$. Pour tout $q \in P$, l'holonomie de f en $\hat{x} \cdot q$ est alors égale à $q^{-1}pq$. L'holonomie de f dépend donc du point choisi dans la fibre de x , et seule sa classe de conjugaison dans P est uniquement déterminée.

Proposition 4.3.3. 1. Pour $p \in P$, les développements de α à partir de $\hat{x}$ et $\hat{x} \cdot p^{-1}$ vérifient

$$\text{Dev}_{\hat{x} \cdot p^{-1}} \alpha = p(\text{Dev}_{\hat{x}} \alpha). \quad (4.3.3)$$

2. Pour f un automorphisme de la géométrie de Cartan fixant $x = \alpha(0)$ et d'holonomie p en $\hat{x} \in \pi^{-1}(x)$, on a :

$$\text{Dev}_{\hat{x}}(f \circ \alpha) = p^{-1}(\text{Dev}_{\hat{x}} \alpha). \quad (4.3.4)$$

Démonstration. Soit $\hat{\alpha}$ un relevé de α à partir de $\hat{x}$ et β son développement dans G , de sorte que $\text{Dev}_{\hat{x}} \alpha = \pi_{\mathbf{X}} \circ \beta$.

1. Puisque p est dans ce cas une fonction constante, l'égalité (4.3.2) devient $(\hat{\alpha} \cdot p^{-1})^* \omega = \text{Ad}(p) \cdot \hat{\alpha}^* \omega = \text{Ad}(p) \cdot \beta^* \omega_G = (\beta p^{-1})^* \omega_G = (p \beta p^{-1})^* \omega_G$, la dernière égalité venant de l'invariance par translation à gauche de la forme de Maurer-Cartan. Or $(p \beta p^{-1})(0) = e$, donc par unicité $p \beta p^{-1}$ est le développement dans G de $\hat{\alpha} \cdot p^{-1}$, et le développement de α à partir de $\hat{x} \cdot p^{-1}$ est donc égal à $\pi_{\mathbf{X}} \circ (p \beta p^{-1}) = p(\pi_{\mathbf{X}} \circ \beta) = p \text{Dev}_{\hat{x}} \alpha$.

2. La composée $\hat{f} \circ \hat{\alpha}$ est un relevé de $f \circ \alpha$ à partir de $\hat{f}(\hat{x}) = \hat{x} \cdot p^{-1}$, et on a d'autre part $(\hat{f} \circ \hat{\alpha})^* \omega = \hat{\alpha}^* \omega = \beta^* \omega_G$ car $\hat{f}$ préserve ω . Ceci montre que β est le développement de $\hat{f} \circ \hat{\alpha}$ dans G , d'où $\text{Dev}_{\hat{x} \cdot p^{-1}}(f \circ \alpha) = \pi_{\mathbf{X}} \circ \beta = \text{Dev}_{\hat{x}} \alpha$. Selon la relation (4.3.3), on a donc $p \text{Dev}_{\hat{x}}(f \circ \alpha) = \text{Dev}_{\hat{x}} \alpha$, ce qui conclut la preuve. $\square$

Dans le cas des structures lagrangiennes de contact, on a l'interprétation suivante.

Proposition 4.3.4. Soit M une variété de dimension $2n+1$ munie d'une structure lagrangienne de contact (E^α, E^β) , et $\mathcal{C}$ sa géométrie de Cartan normale. Une courbe γ sur M est alors tangente à E^α (respectivement E^β) en tout point si, et seulement si elle se développe en tout point de $\pi^{-1}(\gamma(0))$ sur une courbe contenue dans la feuille α (respectivement β) de $\mathbf{X}_{2n+1}$ passant par o .

Démonstration. Le résultat étant local on peut supposer l'intervalle de définition de γ assez petit pour qu'elle se relève en une courbe $\hat{\gamma}$ sur $\hat{M}$, dont on note β le développement dans G . Alors par définition, γ est tangente à E^α si et seulement si pour tout temps t , $p(\hat{\gamma}^* \omega(t)) \in p(\mathfrak{g}_{-1}^\alpha)$, où $p: \mathfrak{sl}_{n+2} \rightarrow \mathfrak{sl}_{n+2}/\mathfrak{p}_{n+2}$ est la projection canonique. Or $p(\hat{\gamma}^* \omega(t)) \in p(\mathfrak{g}_{-1}^\alpha)$ si, et seulement si $\beta^* \omega_G = \hat{\gamma}^* \omega$ est à valeurs dans $\mathfrak{g}_{-1}^\alpha \oplus \mathfrak{p}_{n+2}$, ce qui équivaut à dire que $\text{Dev}_{\hat{\gamma}(0)} \gamma = \pi_{\mathbf{X}} \circ \beta$ est tangent en tout point à $p(\mathfrak{g}_{-1}^\alpha)$, i.e. contenu dans la feuille α de o par définition de la structure Lagrangienne de contact standard. $\square$

4.3.2 Définition des chaînettes

Si $\mathcal{G}$ est un ensemble de courbes P -invariant dans le modèle $\mathbf{X}$, alors pour toute géométrie de Cartan $\mathcal{C} = (\hat{M}, \omega)$ modelée sur $\mathbf{X}$ sur une variété M , $\mathcal{G}$ donne naissance dans M à un ensemble de courbes distinguées $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$, défini en décrétant qu'une courbe γ dans M appartient à $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ si, et seulement si elle se développe à partir de tout $\hat{x} \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ sur une portion d'une courbe de $\mathcal{G}$ (grâce à la première propriété de la proposition 4.3.3, cette condition est indépendante de $\hat{x} \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ car $\mathcal{G}$ est supposé P -invariant). Dans le cas des variétés Riemanniennes par exemple, nous considérons sur $\mathbb{R}^n$ l'ensemble $\mathcal{G}$ des droites vectorielles. Alors si (M, g) est une variété Riemannienne induite par une géométrie de Cartan $\mathcal{C}$ modelée sur $\mathbb{R}^n$, les courbes $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ associées à $\mathcal{G}$ sont simplement les géodésiques de (M, g) . L'utilisation de telles courbes distinguées est particulièrement féconde pour l'étude des géométries paraboliques (voir par exemple [CSŽ04]).

Dans le cas des structures Lagrangiennes de contact, nous allons utiliser pour $\mathcal{G}$ l'ensemble des *paramétrages projectifs des chaînettes* de l'espace modèle $\mathbf{X}_{2n+1}$, définis au paragraphe 2.2.3. Nous fixons jusqu'à la fin de la section 4.3 une structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L} = (E^\alpha, E^\beta)$ sur une variété M de dimension $2n + 1$, dont nous notons $\mathcal{C} = (\hat{M}, \omega)$ la géométrie de Cartan normale modelée sur $\mathbf{X}_{2n+1}$ et $\pi: \hat{M} \rightarrow M$ le fibré de Cartan. Nous notons également I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0.

Définition 4.3.5. Une courbe $\gamma: I \rightarrow M$ d'image relativement compacte est une *chaînette paramétrée* de $\mathcal{L}$ si elle se développe en tout point de $\pi^{-1}(\gamma(0))$ sur un ouvert d'un paramétrage projectif d'une chaînette de $\mathbf{X}_{2n+1}$. Une sous-variété connexe $\mathcal{F}$ de dimension un de M est une *chaînette* de $\mathcal{L}$, si tout point de $\mathcal{F}$ admet un voisinage ouvert connexe dans $\mathcal{F}$ qui est l'image d'une chaînette paramétrée, et si $\mathcal{F}$ est maximale de la sorte.

On déduit de la description des chaînettes de $\mathbf{X}_{2n+1}$ faite à la proposition 2.2.9 le résultat suivant.

- Proposition 4.3.6.**
1. Toute chaînette de $\mathcal{L}$ est transverse en tout point à la distribution de contact $E^\alpha \oplus E^\beta$.
 2. Si α et β sont deux chaînettes paramétrées de $\mathcal{L}$ telles que $\alpha(0) = \beta(0)$ et tangentes à la même direction en 0, alors α et β diffèrent d'un reparamétrage projectif, i.e. il existe $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ deux réels non nuls tels que $\beta(t) = \alpha(\frac{at}{1+bt})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $1 + bt \neq 0$.
 3. Pour tout $x \in M$ et $l \in \mathbf{P}(\mathbf{T}_x M) \setminus (E^\alpha \oplus E^\beta)(x)$, il existe une unique chaînette de $\mathcal{L}$ passant par x dans la direction l , que nous noterons $\mathcal{C}_{x,l}$.
 4. Les chaînettes de $\mathbf{X}_{2n+1}$ au sens de la définition 4.3.5 sont exactement celles que nous avons décrites géométriquement à la définition 2.2.7.

Démonstration. 1. C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.2.9, et du fait que $E^\alpha \oplus E^\beta = D\pi(\omega^{-1}(\mathfrak{g}_{-1}^\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-1}^\beta))$.

2. Nous notons $\gamma_0: t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(te_0) \cdot o \in \mathbf{X}_{2n+1}$ comme à la proposition 2.2.9. Par définition des paramétrages projectifs des chaînettes de $\mathbf{X}_{2n+1}$, il existe $\hat{x}, \hat{x}' \in \pi^{-1}(\alpha(0))$ tels que $\text{Dev}_{\hat{x}} \alpha = \gamma_0$ et $\text{Dev}_{\hat{x}'} \beta = \gamma_0$. Soit $p \in \mathbf{P}_{n+2}$ tel que $\hat{x}' = \hat{x} \cdot p$. Alors $\text{Dev}_{\hat{x}'} \alpha = p(\text{Dev}_{\hat{x}} \alpha)$ selon la proposition 4.3.3, donc selon la proposition 2.2.9 il existe $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $\text{Dev}_{\hat{x}'}(t) = \gamma_0(\frac{at}{1+bt}) = \text{Dev}_{\hat{x}'} \beta(\frac{at}{1+bt})$. Ainsi en notant $I = \{t \in \mathbb{R} \mid 1 + bt \neq 0\}$, les courbes $t \in I \mapsto \beta(\frac{at}{1+bt})$ et $t \in I \mapsto \alpha(t)$ ont le même développement en $\hat{x}'$ sur chacune de leur composante connexes, i.e. sont égales selon la proposition 4.3.2.

3. Soient $\hat{x} \in \pi^{-1}(x)$, $p \in \mathbf{P}_{n+2}$, et $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$ la courbe telle que $x = \alpha(0)$ et $\text{Dev}_{\hat{x} \cdot p} \alpha = \gamma_0$. Selon la relation (4.3.1), on a alors $\mathbb{R}\alpha'(0) = i_{\hat{x} \cdot p}^{-1}(l_0)$, or $i_{\hat{x} \cdot p} = \overline{\text{Ad}}(p)^{-1} \circ i_{\hat{x}}$ (voir (3.1.2)), donc $\mathbb{R}\alpha'(0) = i_{\hat{x}}^{-1}(\overline{\text{Ad}}(p)(l_0))$. Puisque $\overline{\text{Ad}}(\mathbf{P}_{n+2})$ agit transitivement sur les directions transverses à la distribution de contact, on peut donc choisir $p \in \mathbf{P}_{n+2}$ pour que $\mathbb{R}\alpha'(0) = l$. Il existe donc une chaînette paramétrée passant par x dans la direction l , ce qui nous autorise à définir $\mathcal{C}_{x,l}$.

comme l'union des sous-variétés connexes de dimension un passant par x et tangentes à l , dont tout point admet un voisinage ouvert connexe qui est l'image d'une chaînette paramétrée. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont les images de deux chaînettes paramétrées passant par $x \in M$ dans la direction l , alors la seconde partie de la proposition montre qu'un voisinage ouvert de x dans $\mathcal{F}$ coïncide avec un voisinage ouvert de x dans $\mathcal{F}'$. Ceci montre que $\mathcal{C}_{x,l}$ est une sous-variété connexe de dimension un vérifiant la condition voulue, et $\mathcal{C}_{x,l}$ est maximale de la sorte par construction. Ainsi $\mathcal{C}_{x,l}$ est une chaînette, qui contient par construction toute chaînette passant par x dans la direction l , donc qui lui est égale par maximalité. Ceci montre l'unicité et termine la preuve.

4. C'est le cas pour celles qui passent par o par définition. Soit $x = g \cdot o \in \mathbf{X}_{2n+1}$ avec $g \in \mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$, $\gamma: I \rightarrow \mathbf{X}_{2n+1}$ une chaînette paramétrée en x , $\hat{\gamma}$ un relevé de γ dans $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ passant par g , et notons exceptionnellement ω la forme de Maurer-Cartan de $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$. Alors $(g^{-1}\hat{\gamma})^*\omega = \omega$ par $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ -invariance de ω , donc $\pi_{\mathbf{X}_{2n+1}} \circ (g^{-1}\hat{\gamma}) = g^{-1}\gamma$ est une chaînette paramétrée passant par o , *i.e.* une chaînette géométrique. Or l'ensemble des chaînettes géométriques est stable par $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$, donc γ est une chaînette géométrique en x . $\square$

L'ensemble des chaînettes non paramétrées d'une structure Lagrangienne de contact définit une géométrie de chemins « partielle », au sens où il n'existe un chemin que dans les directions non-tangentes à la distribution de contact. Dans [ČS09, §5.3.14], cette donnée est nommée *géométrie de chemins généralisée* des chaînettes, et est reliée à la structure Lagrangienne de contact initiale par des résultats initialement obtenus dans [ČŽ09]. Les auteurs montrent en particulier qu'une structure Lagrangienne de contact est quasi-équivalente à la géométrie de chemins généralisée de ses chaînettes, en prouvant le résultat suivant (voir [ČS09, Corollary 5.3.15] ou [ČŽ09, Theorem 4.4 et Corollary 4.4]).

Théorème 4.3.7 (Čap-Žadník). *Soit $\mathcal{L} = (E^\alpha, E^\beta)$ une structure Lagrangienne de contact sur une variété M . Si f est un difféomorphisme de M qui préserve $E^\alpha \oplus E^\beta$, et qui préserve la géométrie de chemins généralisée des chaînettes de $\mathcal{L}$, alors soit f préserve $\mathcal{L}$, soit f échange E^α et E^β .*

4.3.3 Rigidité des automorphismes à l'ordre deux

Pour $r \geq 1$, on dira que deux courbes $\alpha: I \rightarrow M$ et $\beta: I \rightarrow M$ ont le même r -jet en 0 si pour tout $0 \leq k \leq r$ on a $(\varphi \circ \alpha)^{(k)}(0) = (\varphi \circ \beta)^{(k)}(0)$ pour toute carte locale $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ définie au voisinage de $\alpha(0) = \beta(0)$. On vérifie facilement que cette notion est indépendante de la carte choisie, et on dit qu'une application $f: M \rightarrow M$ a un r -jet trivial en $x \in M$ si pour toute courbe $\alpha: I \rightarrow M$ passant par x en 0, $f \circ \alpha$ a le même r -jet que α en 0. C'est équivalent à dire que dans toute carte locale, f a le même développement limité que id_M en x jusqu'à l'ordre r , et cela impose en particulier $f(x) = x$ et $D_x f = \mathrm{id}_{T_x M}$. Notons que la notion de développement est compatible avec les jets : si deux courbes α et β ont le même r -jet en 0, alors leurs développements dans $\mathbf{X}$ en tout point $\hat{x} \in \pi^{-1}(\alpha(0))$ ont le même r -jet en 0.

Théorème 4.3.8. *Soit f un automorphisme d'une structure lagrangienne de contact connexe $(M, \mathcal{L})$. Si le jet d'ordre 2 de f est trivial en un point de M , alors $f = \mathrm{id}_M$.*

Démonstration. Supposons le 2-jet de f trivial en $x \in M$. Soit α une chaînette paramétrée passant par x , $\hat{x} \in \pi^{-1}(x)$ tel que α se développe en $\hat{x}$ sur $\gamma_0(t) = \pi_{\mathbf{X}_{2n+1}}(\exp(te_0))$, et notons p l'holonomie de f en $\hat{x}$, *i.e.* $\hat{x}' := \hat{f}(\hat{x}) = \hat{x} \cdot p^{-1}$. On a $D_{\hat{x}'} \pi \circ D_{\hat{x}} \hat{f} = D_x f \circ D_{\hat{x}} \pi$, et puisque $\hat{f}$ préserve ω , en notant $\phi: \mathfrak{sl}_{n+2} \rightarrow \mathfrak{sl}_{n+2}/\mathfrak{p}_{n+2}$ la projection canonique on en déduit $D_{\hat{x}'} \pi \circ \omega_{\hat{x}'}^{-1} = D_x f \circ i_{\hat{x}}^{-1} \circ \phi$ en précomposant par $\omega_{\hat{x}}^{-1}$. Or $D_{\hat{x}'} \pi \circ \omega_{\hat{x}'}^{-1} = i_{\hat{x}'}^{-1} \circ \phi = i_{\hat{x}}^{-1} \circ \overline{\mathrm{Ad}}(p) \circ \phi$ selon (3.1.2), d'où

$$D_x f = i_{\hat{x}}^{-1} \circ \overline{\mathrm{Ad}}(p) \circ i_{\hat{x}}.$$

Puisque $D_x f = \text{id}$, on a donc $\overline{\text{Ad}}(p) = \text{id}$, ce qui impose à p d'être de la forme

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & \text{id} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

selon (2.1.6). Selon la proposition 4.3.3, $(\text{Dev}_{\hat{x}}(f \circ \alpha))(t) = p^{-1}(\text{Dev}_{\hat{x}} \alpha)(t) = p^{-1}\gamma_0(t)$, or $p^{-1}\gamma_0(t) = \gamma_0(\frac{t}{1-zt})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $1 - zt \neq 0$ selon la preuve du lemme 2.2.9, d'où

$$f \circ \alpha(t) = \alpha\left(\frac{t}{1-zt}\right) \quad (4.3.5)$$

pour tout t assez proche de 0 selon la proposition 4.3.2. Puisque le raisonnement est local autour de x , on peut supposer que M est un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Selon (4.3.5), on a alors $(f \circ \alpha)'(t) = (1-zt)^{-2}\alpha'(\frac{t}{1-zt})$ et $(f \circ \alpha)''(t) = 2z(1-zt)^{-3}\alpha'(\frac{t}{1-zt}) + (1-zt)^{-4}\alpha''(\frac{t}{1-zt})$ pour tout t proche de 0. Le 2-jet de f étant trivial en x , $2z\alpha'(0) + \alpha''(0) = (f \circ \alpha)''(0) = \alpha''(0)$, d'où $z = 0$ puisque $\alpha'(0) \neq 0$. Par suite $p = e$ et $\hat{f}(\hat{x}) = \hat{x}$, ce qui impose $\hat{f} = \text{id}_{\hat{M}}$ selon la proposition 3.1.9, et termine la preuve. $\square$

Chapitre 5

Difféomorphismes partiellement hyperboliques de contact en dimension trois

Un difféomorphisme f d'une variété compacte M de dimension trois est dit *partiellement hyperbolique* s'il préserve une décomposition $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ de son fibré tangent en trois distributions continues de dimension un, tel que E^s (respectivement E^u) est uniformément contractée (resp. dilatée) par f , et tel que la décomposition est dominée (cette définition sera précisée plus bas, voir Définition 5.1.2). En général, les trois distributions invariantes d'un difféomorphisme partiellement hyperbolique sont peu régulières. Dans ce chapitre, nous étudions l'impact sur la rigidité de la dynamique de certaines propriétés géométriques sur ces distributions. Plus précisément, nous les supposons toutes trois lisses et nous supposons $E^s \oplus E^u$ de contact. L'énoncé ci-dessous résume l'essentiel des résultats obtenus sous ces hypothèses.

Théorème A. *Soit M une variété compacte, connexe et orientable de dimension trois, et soit f un difféomorphisme partiellement hyperbolique de M préservant l'orientation et vérifiant les conditions suivantes.*

- *Les distributions stable, instable et centrale de f sont lisses.*
- *$E^s \oplus E^u$ est une distribution de contact de M .*
- *L'ensemble non-errant de f est égal à M .*

On a alors l'alternative suivante.

1. *Soit une puissance finie de f est conjuguée à un temps non-nul d'un flot Anosov de contact algébrique de dimension trois,*
2. *ou bien un relevé fini de f est conjugué à un automorphisme partiellement hyperbolique d'une nil-variété.*

Cet énoncé sera précisé au cours du chapitre, pour obtenir le théorème A annoncé dans l'introduction (voir Proposition 5.6.5 et Corollary 5.8.2), ainsi qu'un raffinement de ce dernier (voir Theorem A.2). Ce chapitre écrit en anglais est pour l'essentiel une reproduction de la prépublication [MM20]. Nous utiliserons la description géométrique détaillée des structures Lagrangiennes de contact faite dans les chapitres précédents pour classifier la structure géométrique (E^s, E^u, E^c) sous-jacente au difféomorphisme partiellement hyperbolique f , ce qui nous permettra ensuite de décrire f . Une familiarité avec la géométrie de Cartan normale associée à une structure Lagrangienne de contact de dimension trois ainsi qu'avec la géométrie de l'espace modèle sera donc utile pour s'approprier les arguments développés dans ce chapitre. Ceci étant, il peut tout à fait se lire de manière indépendante, car toutes les notions qui y sont utilisées sont introduites à nouveau au paragraphe 5.2.

5.1 Introduction

In a lot of natural situations, a differentiable dynamical system on a smooth manifold preserves a geometric structure on the tangent bundle, defined by invariant distributions. For instance, if it preserves a Borel measure, then Oseledec's theorem provides an almost-everywhere defined splitting of the tangent bundle, given by the rates of expansion or contraction of the tangent vectors by the differentials of the dynamics.

Although invariant geometric structures naturally arise, they are in general highly non-regular (Oseledec's decomposition is for instance only measurable), and this lack of regularity allows a lot of flexibility of the dynamics : former examples can be deformed in order to produce a lot of new ones. In contrast, the smoothness of the invariant distributions puts a strong restriction on the system, and the known examples with smooth (*i.e.* C^∞) distributions are in general "very symmetric" : typically, they arise from compact quotient of Lie groups, with action by affine automorphisms.

It is thus natural to ask to what extent the geometric structure preserved by the dynamics makes the situation rigid, and especially *why*.

Let us give a paradigmatic example of rigidity with the following result of Étienne Ghys concerning three-dimensional Anosov flows (the statement proved by Ghys in [Ghy87] is more precise than the one given below).

Theorem 5.1.1 ([Ghy87]). *Let (φ^t) be an Anosov flow of a three-dimensional closed connected manifold. If the stable and unstable distributions of (φ^t) are smooth, then :*

- *either (φ^t) is smoothly conjugated to the suspension flow of a hyperbolic automorphism of the two-torus,*
- *or (φ^t) is smoothly orbit equivalent to a finite covering of the geodesic flow of a compact hyperbolic surface.*

We recall that a smooth non-singular flow (φ^t) of a compact manifold M is *Anosov* if its differentials preserve two distributions E^s and E^u , respectively called the stable and unstable distribution of (φ^t) , satisfying $TM = E^s \oplus \mathbb{R} \frac{d\varphi^t}{dt} \oplus E^u$ and such that E^s is *uniformly contracted* by (φ^t) , and E^u *uniformly expanded* by (φ^t) .

Under the smoothness assumption of E^s and E^u , Ghys notices that the plane distribution $E^s \oplus E^u$ can only have two extreme geometrical behaviours : either it integrates into a foliation, or it is a *contact distribution* (*i.e.* it is locally the kernel of a contact one-form). In the first case, former results of Plante and Franks conclude the proof, and lead to the suspension examples. The work of Ghys in [Ghy87] is therefore almost entirely devoted to three-dimensional *contact-Anosov flows*, *i.e.* when E^s and E^u are smooth, and $E^s \oplus E^u$ is contact. Under these geometrical assumptions, the pair (E^s, E^u) is a *rigid geometric structure* preserved by the Anosov flow, which makes the classification possible and leads to the finite coverings of geodesic flows.

In this paper, we investigate the same kind of geometrical rigidity conditions, but for the discrete-time analogs of Anosov flows that are the *partially hyperbolic diffeomorphisms*.

5.1.1 Principal results

We refer to [CP15] for a very complete introduction to partially hyperbolic diffeomorphisms, for which we use the following definition.

Définition 5.1.2. A smooth diffeomorphism f of a compact manifold M is *partially hyperbolic* if it preserves a splitting $TM = E^s \oplus E^u \oplus E^c$ of the tangent bundle into three non-zero continuous distributions, satisfying the following dynamical conditions with respect to some Riemannian metric on M .

- The *stable distribution* E^s is *uniformly contracted* by f , *i.e.* there is a non-zero integer N such that for any $x \in M$ and any unit vector $v^s \in E^s(x)$,

$$\|D_x f^N(v^s)\| < 1.$$

- The *unstable distribution* E^u is *uniformly expanded* by f , *i.e.* uniformly contracted by f^{-1} .
- The splitting is dominated, *i.e.* there is a non-zero integer N such that for any $x \in M$, and any unit vectors $v^s \in E^s(x)$, $v^c \in E^c(x)$, and $v^u \in E^u(x)$,

$$\|D_x f^N(v^s)\| < \|D_x f^N(v^c)\| < \|D_x f^N(v^u)\|.$$

E^c is called the *central distribution*.

The three invariant distributions of a partially hyperbolic diffeomorphism have in general no reasons to be differentiable, but we study in this paper the particular case when they are *smooth*, *i.e.* $\mathcal{C}^\infty$, and when $E^s \oplus E^u$ is furthermore a *contact distribution*.

The (non-zero) time maps of the contact-Anosov flows appearing in Ghys Theorem 5.1.1 give us the first examples satisfying these geometrical conditions. They have the following nice algebraic description (see [Ghy87] for more details). Let us denote by $\tilde{A} = \{a^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ the one-parameter subgroup of the universal cover $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ generated by $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2$. Then for any cocompact lattice Γ_0 of $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$, the flow (R_{a^t}) of right translations by $\tilde{A}$ on the quotient $\Gamma_0 \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ is a finite covering of the geodesic flow of a compact hyperbolic surface (up to a constant rescaling of the time by a factor $\frac{1}{2}$), and is thus Anosov. Moreover, if a morphism $u: \Gamma_0 \rightarrow \tilde{A}$ is such that the graph-group $\Gamma = \{(\gamma, u(\gamma)) \mid \gamma \in \Gamma_0\}$ acts freely, properly and cocompactly on $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ by the action $(g, a) \cdot x = gxa$, then (R_{a^t}) still induces an Anosov flow of the quotient $\Gamma \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, which is a time-change of the former one (non-trivial if $u \neq \mathrm{id}$). We will call these flows the *three-dimensional algebraic contact-Anosov flows*.

In contrast, the following algebraic examples are the time-map of none Anosov flow. For $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{*2}$, we consider the automorphism

$$\varphi_{\lambda, \mu}: \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Heis}(3) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \lambda x & \lambda \mu z \\ 0 & 1 & \mu y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Heis}(3) \quad (5.1.1)$$

of the Heisenberg group. If $\varphi = \varphi_{\lambda, \mu}$, $g \in \mathrm{Heis}(3)$, Γ is a cocompact lattice of $\mathrm{Heis}(3)$, and $g\varphi(\Gamma)g^{-1} = \Gamma$, then $L_g \circ \varphi(\Gamma x) = \Gamma(g\varphi(x))$ is a well-defined diffeomorphism of the *nil-Heis(3)-manifold* $\Gamma \backslash \mathrm{Heis}(3)$. If we moreover assume that either $|\lambda| < 1$ and $|\mu| > 1$, or the opposite, then $L_g \circ \varphi$ is a partially hyperbolic diffeomorphism, whose invariant distributions are smooth, and such that $E^s \oplus E^u$ is contact (see Paragraph 5.4.1.b). Concrete examples of cocompact lattices preserved by such automorphisms indeed exist, and we will call $L_g \circ \varphi$ a *partially hyperbolic affine automorphism*.

The principal result of this paper is that, assuming all points are non-wandering, there are no other examples than the two families we described precedently.

Theorem A.1. *Let M be a closed, connected and orientable three-dimensional manifold, and f be a partially hyperbolic diffeomorphism of M such that*

- *the stable, unstable, and central distributions E^s , E^u and E^c of f are smooth,*
- *$E^s \oplus E^u$ is a contact distribution,*
- *and the non-wandering set $NW(f)$ equals M .*

Then we have the following description.

1. Either some finite power of f is smoothly conjugated to a non-zero time-map of a three-dimensional algebraic contact-Anosov flow,
2. or f lifts by a smooth covering of order at most 4 to a partially hyperbolic affine automorphism of a nil-Heis(3)-manifold.

Actually, our geometrical conditions are so rigid that the uniformity of the contraction and the expansion of the diffeomorphism will be obtained as a byproduct.

Définition 5.1.3. We will say that a distribution E of a compact manifold M is *weakly contracted* by a diffeomorphism f , if for some Riemannian metric on M , we have for any $x \in M$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|D_x f^n|_E\| = 0 \text{ or } \lim_{n \rightarrow -\infty} \|D_x f^n|_E\| = 0.$$

We emphasize that the “direction” of weak contraction can *a priori* change from point to point, and that this notion is unchanged when replacing f by f^{-1} .

Theorem A.2. *Let M be a closed, connected and orientable three-dimensional manifold, endowed with a smooth splitting $TM = E^\alpha \oplus E^\beta \oplus E^c$ such that $E^\alpha \oplus E^\beta$ is a contact distribution. Let f be a smooth diffeomorphism of M that preserves this splitting, and such that*

- *each of the distributions E^α and E^β is weakly contracted by f ,*
- *and f has a dense orbit.*

Then the conclusions of Theorem A.1 hold. In particular, f is a partially hyperbolic diffeomorphism.

Theorem A.1 will directly follow from Theorem A.2 by an argument of Brin, as explained in Paragraph 5.8.2 at the end of this paper. We also give in this paragraph the precise statement of Theorem A.1, that does not use any domination hypothesis on E^c (see Corollary 5.8.2). The rest of the paper is devoted to the proof of Theorem A.2.

The classification question for partially hyperbolic diffeomorphisms in dimension three has led to a lot of works in the recent years, and significant progress has been made concerning the general case, as can be seen for instance in the survey [HP18]. Recently, different additional rigidity conditions have also been studied.

Carrasco, Pujals and Rodriguez-Hertz obtain in [CPRH19] a classification result under the smoothness assumption of invariant distributions. On the contrary of Theorem A.1, no additional geometrical condition is assumed, but the authors assume that the differential of the partially hyperbolic diffeomorphism is constant when read in the global frame given by three smooth vector fields generating these distributions. The geometric structure (E^s, E^u, E^c) defined by such a partially hyperbolic diffeomorphism is in general not rigid, and their result is obtained through dynamical arguments.

Beside the smoothness assumption on invariant distributions, Bonatti and Zhang obtain in [BZ19] different rigidity results in the continuous category, under specific dynamical assumptions.

5.1.2 A rigid geometric structure preserved by partially hyperbolic diffeomorphisms

Roughly speaking, a *rigid geometric structure* is a structure with “few automorphisms”. More precisely, they are those smooth geometric structures whose Lie algebra of local Killing fields (*i.e.* local vector fields whose flow preserves the structure) is everywhere finite-dimensional.

As d’Ambra and Gromov pointed out in [GD91], it is natural to believe that rigid geometric structures preserved by rich dynamical systems have to be particularly peculiar : “*one does not expect rigid geometry to be accompanied by rich dynamics*” ([GD91, §0.3 p.21]). It seems thus reasonable to look for classification results in these situations. The general idea is that rich

dynamical properties will imply strong restrictions on the rigid geometric structure, inducing in return a rigidity of the dynamical system itself.

Several rigid geometric structures can be preserved by a contact-Anosov flow (φ^t) . First of all, (φ^t) always preserves a contact one-form α defined by $\alpha(\frac{d\varphi^t}{dt}) = 1$ and $\alpha|_{E^s \oplus E^u} = 0$. If the dimension is $2n + 1$, the induced volume form $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ is then preserved by (φ^t) , *i.e.* contact-Anosov flows are always *conservative*. For contact-Anosov flows of any odd dimension, (φ^t) moreover preserves a natural linear connection on the tangent bundle, initially defined by Kanai in [Kan88]. An invariant connection of this kind allowed for example Benoist, Foulon and Labourie to obtain a classification result for contact-Anosov flows of any odd dimension in [BFL92].

While these invariant rigid geometric structures require the existence of a continuous one-parameter flow, we study in this paper rigid geometric structures preserved by *discrete-time* dynamics.

The transition from a flow to a diffeomorphism completely changes the situation. From a dynamical point of view, partially hyperbolic diffeomorphisms of “contact” type do not anymore preserve a contact one-form, and are thus (*a priori*) not conservative (which explains the extra hypothesis on non-wandering points). From a geometrical point of view, the difficulties that appear are analog to the ones of a conformal geometry in contrast with a metric geometry, for example the invariant Kanai connection does not anymore exist. This situation requires to look for a new rigid geometric structure.

A contact plane distribution is far from being rigid : according to Darboux’s theorem, they are all locally isomorphic. A single smooth one-dimensional distribution in a contact plane distribution is still not sufficient to make it rigid. But if the stable and unstable distributions of the partially hyperbolic diffeomorphism are smooth and of contact sum, then the *pair* (E^s, E^u) is a rigid geometric structure, called a *Lagrangian contact structure*.

For this structure, the invariant Kanai connection will be replaced by another type of connection called a *Cartan connection*, that defines a *Cartan geometry* (actually, this Cartan geometry partially appears in [Ghy87], but under the disguised form of “the geometry of second-order ordinary differential equations”). The strength of Cartan geometries is to link the Lagrangian contact structures with the *homogeneous model space* $\mathbf{X} = \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})/\mathbf{P}_{min}$ of complete flags of $\mathbb{R}^3$ (where $\mathbf{P}_{min}$ is the subgroup of upper-triangular matrices). In particular, the *flat* Lagrangian contact structures, *i.e.* the ones whose *curvature* identically vanishes, are locally isomorphic to $\mathbf{X}$ (see Paragraphs 5.2.2.b and 5.2.3.b). The geometry of $\mathbf{X}$ will thus play a prominent role in this paper.

In [Bar10], Barbot also studies the geometry of $\mathbf{X}$ and the dynamics of $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$, but with a different approach. His purpose is among others to construct Anosov representations in $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$, and compact quotients of open subsets of $\mathbf{X}$.

5.1.3 Organization of the paper

This paper is organised in the following way. Section 5.2 introduces several notions and results about three-dimensional Lagrangian contact structures, that will be used in the whole paper. At the end of the paper in Paragraph 5.8.2, we prove Theorem A.1 from Theorem A.2, and the rest of the paper is devoted to the proof of Theorem A.2. In Section 5.3, we begin this proof by showing that the triplet $\mathcal{S} = (E^\alpha, E^\beta, E^c)$ is *quasi-homogeneous*, *i.e.* locally homogeneous in restriction to a dense open subset Ω of M , and that its isotropy on Ω is non-trivial. This implies that the Lagrangian contact structure (E^α, E^β) is *flat*, *i.e.* that M has a $(\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R}), \mathbf{X})$ -structure. In Section 5.4, we refine this description, proving that $\mathcal{S}|_\Omega$ is locally isomorphic to one of two possible homogeneous models $(Y_t, \mathcal{S}_t)$ or $(Y_a, \mathcal{S}_a)$. This relies on a technical classification of the underlying infinitesimal model, done in Section 5.5. A critical step is to show in Section 5.6 that the open dense subset Ω is actually equal to M , implying that M has a (H, Y) -structure, with

two possible models (H_t, Y_t) or (H_a, Y_a) . We prove in Section 5.7 that this (H, Y) -structure is complete, implying that $(M, \mathcal{S})$ is a compact quotient $\Gamma \backslash Y$ of one of these two models, with Γ a discrete subgroup of $H = \text{Aut}(Y)$. This description allows us to conclude the proof of Theorem A.2 in Paragraph 5.8.1.

Conventions and notations

From now on, every differential geometric object will be supposed to be smooth (*i.e.* $\mathcal{C}^\infty$) if nothing is precised, and the manifolds will be supposed to be boundaryless.

The flow of a vector field X is denoted by (φ_X^t) . The Lie algebra of a Lie group G is denoted by $\mathfrak{g}$, and for any $v \in \mathfrak{g}$, we denote by $\tilde{v}$ the left-invariant vector field of G generated by v . If $\Theta: G \times M \rightarrow M$ is a smooth group action (on the left or the right) of G on a manifold M , then the orbital map of the action at $x \in M$ is denoted by $\theta_x = \Theta(\cdot, x)$, and we denote by $L_g = \Theta(g, \cdot)$ the translation by $g \in G$ if the action is on the left (respectively by R_g if the action is on the right). For any $v \in \mathfrak{g}$ we denote by $v^\dagger$ the *fundamental vector field of the action generated by v* , defined for $x \in M$ by $v^\dagger(x) = D_e \theta_x(v)$.

Acknowledgments

I would like to thank Charles Frances for proposing this subject to me, and for the precious advices that he offers me.

5.2 Three-dimensional Lagrangian contact structures

The rigid geometric structures that will be studied in the rest of this paper are the following.

Définition 5.2.1. A *Lagrangian contact structure* $\mathcal{L}$ on a three-dimensional manifold M is a pair $\mathcal{L} = (E^\alpha, E^\beta)$ of transverse one-dimensional smooth distributions, such that $E^\alpha \oplus E^\beta$ is a contact distribution. An *enhanced Lagrangian contact structure* $\mathcal{S}$ on M is a triplet $\mathcal{S} = (E^\alpha, E^\beta, E^c)$ of one-dimensional smooth distributions such that $TM = E^\alpha \oplus E^\beta \oplus E^c$, and $E^\alpha \oplus E^\beta$ is a contact distribution.

A (local) isomorphism between two Lagrangian contact structures is a (local) diffeomorphism that individually preserves the distributions α and β , and the (local) isomorphisms of enhanced Lagrangian contact structures preserve in addition the central distribution E^c .

We first define what will be for us the most important example of three-dimensional Lagrangian contact structure.

5.2.1 Homogeneous model space

We will call *projective line* the projection in $\mathbb{RP}^2$ of a plane of $\mathbb{R}^3$, and we denote by $\mathbb{RP}_*^2$ the set of projective lines of $\mathbb{RP}^2$ (called the *dual projective plane*). For any subset Q of $\mathbb{R}^{n+1}$ we denote by $[Q]$ the projection in $\mathbb{RP}^n$ of the linear subspace of $\mathbb{R}^{n+1}$ generated by Q .

A *pointed projective line* is a pair (m, D) with $D \in \mathbb{RP}_*^2$ and $m \in D$, and we denote by

$$\mathbf{X} = \left\{ (m, D) \mid D \in \mathbb{RP}_*^2, m \in D \right\} \subset \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}_*^2$$

the *space of pointed projective lines*. In other words, $\mathbf{X}$ is the space of complete flags of $\mathbb{R}^3$. We will denote in the whole paper by

$$\mathbf{G} = \text{PGL}_3(\mathbb{R})$$

the group of projective transformations of $\mathbb{RP}^2$. As the projective action of $\mathbf{G}$ on $\mathbb{RP}^2$ and $\mathbb{RP}_*^2$ preserves the incidence relation $m \in D$, it induces a natural diagonal action of $\mathbf{G}$ on

$\mathbf{X} \subset \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}_*^2$. The action of $\mathbf{G}$ on $\mathbf{X}$ is *transitive*, and the stabilizer in $\mathbf{G}$ of the base-point $o = ([e_1], [e_1, e_2])$ of $\mathbf{X}$ is the subgroup

$$\text{Stab}_{\mathbf{G}}(o) = \mathbf{P}_{\min} = \left\{ \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \right\} < \mathbf{G}$$

of upper-triangular matrices. From now on, we will identify $\mathbf{X}$ and $\mathbf{G}/\mathbf{P}_{\min}$ by the orbital map $\bar{\theta}_o: \mathbf{G}/\mathbf{P}_{\min} \rightarrow \mathbf{X}$ at o . The homogeneous space $\mathbf{X}$ is a $\mathbb{RP}^1$ -bundle over $\mathbb{RP}^2$ and $\mathbb{RP}_*^2$ through the coordinate projections

$$\pi_\alpha: (m, D) \in \mathbf{X} \mapsto m \in \mathbb{RP}^2 \text{ and } \pi_\beta: (m, D) \in \mathbf{X} \mapsto D \in \mathbb{RP}_*^2. \quad (5.2.1)$$

For $x = (m, D) \in \mathbf{X}$, we will denote by $\mathcal{C}_\alpha(x) = \mathcal{C}_\alpha(m)$ (respectively $\mathcal{C}_\beta(x) = \mathcal{C}_\beta(D)$) the fiber of x with respect to π_α (resp. π_β), and we will call it the α -circle (resp. the β -circle) of x . We denote by

$$\mathcal{E}_\alpha = \text{Ker}(D\pi_\alpha) \text{ and } \mathcal{E}_\beta = \text{Ker}(D\pi_\beta),$$

the one-dimensional vertical distributions of these bundles, tangent respectively to the foliations by α and β -circles. The sum $\mathcal{E}_\alpha \oplus \mathcal{E}_\beta$ is contact and we will call $\mathcal{L}_{\mathbf{X}} = (\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{E}_\beta)$ the *standard Lagrangian contact structure* of $\mathbf{X}$.

Lemma 5.2.2. *The group $\mathbf{G}$ is the group of automorphisms of the standard Lagrangian contact structure $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$. In particular, the structure $(\mathbf{X}, \mathcal{L}_{\mathbf{X}})$ is homogeneous.*

Démonstration. First of all, the action of $\mathbf{G}$ preserves the foliations of $\mathbf{X}$ by α and β -circles, *i.e.* preserves the structure $\mathcal{L}_{\mathbf{X}} = (\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{E}_\beta)$. Conversely, if f is a diffeomorphism of $\mathbf{X}$ that preserves $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$, the fact that f preserves the foliation by α -circles simply means that it induces a diffeomorphism $\bar{f}$ of $\mathbb{RP}^2$ for which f is a lift through the projection π_α . As f moreover preserves the foliation by β -circles, $\bar{f}$ maps any projective line to a projective line. This implies that $\bar{f}$ is a projective transformation according to a classical result of projective geometry (proved for example in [Sam89, Theorem 7 p.32]), *i.e.* that f is induced by the action of an element of $\mathbf{G}$. $\square$

5.2.2 Lagrangian contact structures as Cartan geometries

We now introduce the Cartan geometries modelled on the homogeneous space $\mathbf{G}/\mathbf{P}_{\min}$, and make the link with Lagrangian contact structures. This notion will be our principal technical tool to deal with Lagrangian contact structures. We refer the reader to [Sha97] or [ČS09] for further details about Cartan geometries in a more general context.

5.2.2.a Cartan geometries modelled on $\mathbf{G}/\mathbf{P}_{\min}$

Définition 5.2.3. A *Cartan geometry* $\mathcal{C} = (\hat{M}, \omega)$ modelled on $\mathbf{G}/\mathbf{P}_{\min}$ on a three-dimensional manifold M is the data of a $\mathbf{P}_{\min}$ -principal bundle over M denoted by $\pi: \hat{M} \rightarrow M$ and called the *Cartan bundle*, together with a $\mathfrak{g}$ -valued one-form $\omega: T\hat{M} \rightarrow \mathfrak{g}$ on $\hat{M}$ called the *Cartan connection*, that satisfies the three following properties :

1. ω defines a *parallelism* of $\hat{M}$, *i.e.* for any $\hat{x} \in \hat{M}$, $\omega_{\hat{x}}$ is a linear isomorphism from $T_{\hat{x}}\hat{M}$ to $\mathfrak{g}$,
2. ω reproduces the fundamental vector fields of the right action of $\mathbf{P}_{\min}$, *i.e.* for any $v \in \mathfrak{g}$ and $\hat{x} \in \hat{M}$ we have : $v^\dagger(\hat{x}) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\hat{x} \cdot e^{tv} = \omega_{\hat{x}}^{-1}(v)$,
3. and ω is $\mathbf{P}_{\min}$ -equivariant, *i.e.* for any $p \in \mathbf{P}_{\min}$ and $\hat{x} \in \hat{M}$ we have : $R_p^*\omega = \text{Ad}(p)^{-1} \circ \omega$ (where $\text{Ad}(p)$ stands for the adjoint action of p).

A (local) automorphism f of the Cartan geometry $\mathcal{C}$ between two open sets U and V of M is a (local) diffeomorphism from U to V that lifts to a $\mathbf{P}_{min}$ -equivariant (local) diffeomorphism $\hat{f}$ between $\pi^{-1}(U)$ and $\pi^{-1}(V)$, such that $\hat{f}$ preserves the Cartan connexion ω (i.e. $\hat{f}^*\omega = \omega$).

Example 5.2.4. The homogeneous model space $\mathbf{X}$ is endowed with the *Cartan geometry of the model* $\mathcal{C}_{\mathbf{X}} = (\mathbf{G}, \omega_{\mathbf{G}})$, given by the canonical $\mathbf{P}_{min}$ -bundle $\pi_{\mathbf{G}}: \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{P}_{min} = \mathbf{X}$ over $\mathbf{X}$, together with the Maurer-Cartan one-form $\omega_{\mathbf{G}}: T\mathbf{G} \rightarrow \mathfrak{g}$ defined by $\omega_{\mathbf{G}}(\tilde{v}) \equiv v$ on the left-invariant vector fields of $\mathbf{G}$.

We consider for the rest of the subsection a Cartan geometry $(M, \mathcal{C}) = (M, \hat{M}, \omega)$ modelled on $\mathbf{G}/\mathbf{P}_{min}$.

5.2.2.b Curvature of a Cartan geometry

The following definition replaces the curvature of a Riemannian metric in the case of Cartan geometries.

Définition 5.2.5. The *curvature form* of $\mathcal{C}$ is the $\mathfrak{g}$ -valued two-form Ω of $\hat{M}$ defined by the following relation for two vector fields X and Y on $\hat{M}$:

$$\Omega(X, Y) = d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)]. \quad (5.2.2)$$

Thanks to the connection ω , the curvature form Ω is equivalent to a *curvature map* $K: \hat{M} \rightarrow \mathbf{L}(\Lambda^2 \mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ on $\hat{M}$ (that we will often simply call the *curvature* of $\mathcal{C}$), having values in the vector space of $\mathfrak{g}$ -valued alternated bilinear maps on $\mathfrak{g}$, and defined by the following relation for $\hat{x} \in \hat{M}$ and $v, w \in \mathfrak{g}$:

$$K_{\hat{x}}(v, w) = \Omega(\omega_{\hat{x}}^{-1}(v), \omega_{\hat{x}}^{-1}(w)). \quad (5.2.3)$$

We will say that the Cartan geometry $\mathcal{C}$ (or the Cartan connection ω) is *torsion-free* if $K_{\hat{x}}(v, w) \in \mathfrak{p}_{min}$ for any $\hat{x} \in \hat{M}$ and $v, w \in \mathfrak{g}$.

If v or w is tangent to the fiber of the principal bundle $\hat{M}$, then the curvature form satisfies $\Omega(v, w) = 0$ (this is proved in [Sha97, Chapter 5 Corollary 3.10]). As ω maps the tangent space of the fibers to $\mathfrak{p}_{min}$ (because the fundamental vector fields are ω -invariant), this implies that the curvature $K(v, w)$ vanishes whenever v or w is in $\mathfrak{p}_{min}$. As a consequence at any point $\hat{x} \in \hat{M}$, $K_{\hat{x}}$ induces a $\mathfrak{g}$ -valued alternated bilinear map on $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{min}$, and we will identify in the sequel K with the induced map

$$K: \hat{M} \rightarrow \mathbf{L}(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{min}), \mathfrak{g}). \quad (5.2.4)$$

The adjoint action of $\mathbf{P}_{min}$ induces a linear left action on $\mathbf{L}(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{min}), \mathfrak{g})$ defined for $p \in \mathbf{P}_{min}$ and $K \in \mathbf{L}(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{min}), \mathfrak{g})$ by

$$p \cdot K: u \wedge v \mapsto \text{Ad}(p) \cdot (K(\overline{\text{Ad}}(p)^{-1} \cdot u, \overline{\text{Ad}}(p)^{-1} \cdot v)). \quad (5.2.5)$$

Using the linear right action of $\mathbf{P}_{min}$ on $\mathbf{L}(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{min}), \mathfrak{g})$ defined by $K \cdot p := p^{-1} \cdot K$, K is $\mathbf{P}_{min}$ -equivariant (this is proved in [Sha97, Chapter 5 Lemma 3.23]), and K is moreover preserved by any local automorphism f of the Cartan geometry (i.e. $K \circ \hat{f} = K$ for any automorphism).

5.2.2.c Lagrangian contact structure induced by a Cartan geometry

At any point $x \in M$ and for any $\hat{x} \in \pi^{-1}(x)$, we denote by $i_{\hat{x}}: T_x M \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{min}$ the unique isomorphism satisfying

$$i_{\hat{x}} \circ D_{\hat{x}} \pi = \overline{\omega}_{\hat{x}}, \quad (5.2.6)$$

where $\overline{\omega}$ denotes the projection of ω on $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{min}$. As the adjoint action of $\mathbf{P}_{min}$ preserves $\mathfrak{p}_{min}$, it induces a representation $\overline{\text{Ad}}: \mathbf{P}_{min} \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{min})$ on the quotient, and the equivariance of ω implies the following relation for any $p \in \mathbf{P}_{min}$:

$$i_{\hat{x} \cdot p} = \overline{\text{Ad}}(p)^{-1} \circ i_{\hat{x}}. \quad (5.2.7)$$

This relation shows that any $\overline{\text{Ad}}(\mathbf{P}_{\min})$ -invariant object on $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{\min}$ gives rise, through the isomorphisms $i_{\hat{x}}$, to a well-defined object on the tangent bundle of M . Let us apply this idea to define a Lagrangian contact structure on M associated to the Cartan geometry $\mathcal{C}$. We introduce

$$e_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, e_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2.8)$$

defining a basis $(\bar{e}_{\alpha}, \bar{e}_{\beta}, \bar{e}_0)$ of $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{\min}$, in which the matrix of the adjoint action of

$$p = \begin{pmatrix} a & x & z \\ 0 & a^{-1}b^{-1} & y \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \in \mathbf{P}_{\min}$$

is equal to

$$\text{Mat}_{(\bar{e}_{\alpha}, \bar{e}_{\beta}, \bar{e}_0)}(\overline{\text{Ad}}(p)) = \begin{pmatrix} a^{-2}b^{-1} & 0 & a^{-1}y \\ 0 & ab^2 & -b^2x \\ 0 & 0 & a^{-1}b \end{pmatrix}. \quad (5.2.9)$$

In particular, the adjoint action of $\mathbf{P}_{\min}$ individually preserves the lines $\mathbb{R}\bar{e}_{\alpha}$ and $\mathbb{R}\bar{e}_{\beta}$ of $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{\min}$. Together with the relation (5.2.7), this shows that for $x \in M$, the lines $i_{\hat{x}}^{-1}(\mathbb{R}\bar{e}_{\alpha})$ and $i_{\hat{x}}^{-1}(\mathbb{R}\bar{e}_{\beta})$ of $T_x M$ do not depend on the lift $\hat{x}$ of x . The Cartan geometry $\mathcal{C}$ induces thus two one-dimensional distributions $E_{\mathcal{C}}^{\alpha}(x) = i_{\hat{x}}^{-1}(\mathbb{R}\bar{e}_{\alpha})$ and $E_{\mathcal{C}}^{\beta}(x) = i_{\hat{x}}^{-1}(\mathbb{R}\bar{e}_{\beta})$ on M , and the curvature of $\mathcal{C}$ will say when do those distributions define a Lagrangian contact structure.

Lemma 5.2.6. *Any torsion-free Cartan geometry $(M, \mathcal{C})$ modelled on $\mathbf{G}/\mathbf{P}_{\min}$ induces a Lagrangian contact structure $(E_{\mathcal{C}}^{\alpha}, E_{\mathcal{C}}^{\beta})$ on the three-dimensional base manifold M .*

Sketch of proof. For $x \in M$, considering a local section of the Cartan bundle over x , we can push down by π the ω -constant vector fields $\tilde{e}_{\alpha}$ and $\tilde{e}_{\beta}$ of $\hat{M}$ (characterized by $\omega(\tilde{e}_{\varepsilon}) \equiv e_{\varepsilon}$) to local vector fields X_{α} and X_{β} of M defined on a neighbourhood of x , that respectively generate the distributions $E_{\mathcal{C}}^{\alpha}$ and $E_{\mathcal{C}}^{\beta}$. If K has values in $\mathfrak{p}_{\min}$, the identity $\omega([\tilde{e}_{\alpha}, \tilde{e}_{\beta}]) = [e_{\alpha}, e_{\beta}] - K(e_{\alpha}, e_{\beta})$ (deduced from Cartan's formula for the differential of a one-form) implies easily that $[X_{\alpha}, X_{\beta}] \notin \text{Vect}(X_{\alpha}, X_{\beta})$ in the neighbourhood of x , finishing the proof. $\square$

Remark 5.2.7. In the case of the Cartan geometry of the model, it is easy to check that $(E_{\mathcal{C}_{\mathbf{X}}}^{\alpha}, E_{\mathcal{C}_{\mathbf{X}}}^{\beta})$ is the standard Lagrangian contact structure $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$ of $\mathbf{X}$.

5.2.3 Normal Cartan geometry of a Lagrangian contact structure

Any three-dimensional Lagrangian contact structure is actually induced by a torsion-free Cartan geometry modelled on $\mathbf{G}/\mathbf{P}_{\min}$. This equivalence between three-dimensional Lagrangian contact structures and Cartan geometries modelled on $\mathbf{G}/\mathbf{P}_{\min}$ was discovered by Élie Cartan, who developed this notion and after whom these geometries are named.

5.2.3.a Equivalence problem for Lagrangian contact structures

A given three-dimensional Lagrangian contact structure is induced by several Cartan connections, and to obtain an equivalence between both formulations, we have to choose a particular one. This choice will be done through a *normalisation condition* on the curvature. Using the basis $(\bar{e}_{\alpha} \wedge \bar{e}_0, \bar{e}_{\beta} \wedge \bar{e}_0, \bar{e}_{\alpha} \wedge \bar{e}_{\beta})$ of $\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{\min})$, we consider the following four-dimensional subspace of $L(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{\min}), \mathfrak{g})$:

$$W_K = \left\{ K: \bar{e}_{\alpha} \wedge \bar{e}_0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & K_{\alpha}^{\alpha} \\ 0 & 0 & K_{\alpha}^{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_{\beta} \wedge \bar{e}_0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & K_{\beta}^{\beta} & K_{\beta}^{\beta} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_{\alpha} \wedge \bar{e}_{\beta} \mapsto 0 \right\}. \quad (5.2.10)$$

The linear action of $\mathbf{P}_{\min}$ preserves W_K , that will be called the *space of normal curvatures*. Theorem 5.2.8 below is proved in [DK16, Theorem 3 p.14], where the normalisation condition is

explicitely calculated through Cartan's *method of equivalence* (see also [ČS09, Theorem 3.1.14 p.271 and Paragraph 4.2.3] that makes the link with general parabolic Cartan geometries).

Theorem 5.2.8 (E. Cartan, [DK16], [ČS09]). *For any Lagrangian contact structure $\mathcal{L}$ on a three-dimensional manifold M , there exists a torsion-free Cartan geometry modelled on $\mathbf{G}/\mathbf{P}_{\min}$ inducing $\mathcal{L}$ on M , and whose curvature map has values in the space W_K of normal curvatures. Such a Cartan geometry is unique (up to action of principal bundle automorphisms covering the identity on M), and will be called the normal Cartan geometry of $\mathcal{L}$.*

Furthermore, if $(M_1, \mathcal{L}_1)$ and $(M_2, \mathcal{L}_2)$ are two three-dimensional Lagrangian contact structures, and $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ are the associated normal Cartan geometries, then the (local) isomorphisms between $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$ and the (local) isomorphism between $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ are the same. This a direct consequence of the unicity of the normal Cartan geometry. The curvature map $K: \hat{M} \rightarrow W_K$ of the normal Cartan geometry of a three-dimensional Lagrangian contact structure $\mathcal{L}$ will simply be called *the curvature of $\mathcal{L}$* .

5.2.3.b Flat Lagrangian contact structures

The homogeneous model space $(\mathbf{X}, \mathcal{L}_{\mathbf{X}})$ verifies the following analog of Liouville's theorem.

Theorem 5.2.9. *For any connected open subsets U and V of the homogeneous model space $\mathbf{X}$, and any diffeomorphism f from U to V that preserves its standard Lagrangian contact structure $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$, there exists $g \in \mathbf{G}$ such that f is the restriction to U of the translation by g .*

Démonstration. The Maurer-Cartan form $\omega_{\mathbf{G}}$ satisfies for any tangent vectors v and w the structural equation $d\omega_{\mathbf{G}}(v, w) + [\omega_{\mathbf{G}}(v), \omega_{\mathbf{G}}(w)] = 0$ (see [Sha97, §3.3 p.108]), implying that the curvature of the Cartan connection $\omega_{\mathbf{G}}$ is zero. Therefore, the curvature satisfies the normalisation condition of Theorem 5.2.8, and $\mathcal{C}_{\mathbf{X}}$ is a normal Cartan geometry on $\mathbf{X}$ modelled on $\mathbf{G}/\mathbf{P}_{\min}$ and associated to $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$ (see Remark 5.2.7). According to Theorem 5.2.8, any local isomorphism of $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$ between two connected open subset U and V of $\mathbf{X}$ lifts therefore to a local isomorphism of the Cartan geometry $\mathcal{C}_{\mathbf{X}}$ between $\pi_{\mathbf{G}}^{-1}(U)$ and $\pi_{\mathbf{G}}^{-1}(V)$, and such an automorphism is the left translation by an element of $\mathbf{G}$ according to [Sha97, Chapter 5 Theorem 5.2]. $\square$

A three-dimensional Lagrangian contact structure $(M, \mathcal{L})$ is *flat* if the curvature of the normal Cartan geometry of $\mathcal{L}$ vanishes identically. According to the proof of Theorem 5.2.9, the model space is flat, and since this property is local, any Lagrangian contact structure locally isomorphic to $(\mathbf{X}, \mathcal{L}_{\mathbf{X}})$ is flat.

The power of Cartan geometries lies in the converse of this statement : any flat three-dimensional Lagrangian contact structure $\mathcal{L}$ is locally isomorphic to the homogeneous model space (see [Sha97, Theorem 5.1 and Theorem 5.2 p. 212]). There exists in this case an atlas of charts from M to $\mathbf{X}$ consisting of local isomorphisms of Lagrangian contact structures from $\mathcal{L}$ to $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$, and whose transition maps are restrictions of left translations by elements of $\mathbf{G}$ (according to Theorem 5.2.9). A maximal atlas satisfying these conditions is called a $(\mathbf{G}, \mathbf{X})$ -structure on M . Any $(\mathbf{G}, \mathbf{X})$ -structure conversely induces on M a Lagrangian contact structure $\mathcal{L}$ locally isomorphic to $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$, whose charts are local isomorphisms from $\mathcal{L}$ to $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$.

Theorem 5.2.10. *Any flat three-dimensional Lagrangian contact structure $(M, \mathcal{L})$ is induced by a $(\mathbf{G}, \mathbf{X})$ -structure on M .*

Denoting by $\pi_M: \tilde{M} \rightarrow M$ the universal cover of M , we recall that any $(\mathbf{G}, \mathbf{X})$ -structure on M is described by a local diffeomorphism $\delta: \tilde{M} \rightarrow \mathbf{X}$ called the *developping map*, that is equivariant for a morphism $\rho: \pi_1(M) \rightarrow \mathbf{G}$ called the *holonomy morphism* (see for example [Thu97, §3.4 p.139-141]). Moreover for any $g \in \mathbf{G}$, the pair $(g \circ \delta, g\rho g^{-1})$ of developping map and holonomy morphism describes the same $(\mathbf{G}, \mathbf{X})$ -structure. The Lagrangian contact structure $\mathcal{L}$ induced by a $(\mathbf{G}, \mathbf{X})$ -structure is characterized by : $\delta^* \mathcal{L}_{\mathbf{X}} = \pi_M^* \mathcal{L}$.

5.2.3.c Harmonic curvature

For $K \in W_K$ an element of the space of normal curvatures defined by

$$K : \bar{e}_\alpha \wedge \bar{e}_0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & K^\alpha \\ 0 & 0 & K_\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_\beta \wedge \bar{e}_0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & K_\beta & K^\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_\alpha \wedge \bar{e}_\beta \mapsto 0,$$

and

$$p = \begin{pmatrix} a & x & z \\ 0 & a^{-1}b^{-1} & y \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \in \mathbf{P}_{min},$$

the adjoint action (5.2.9) of $\mathbf{P}_{min}$ given in Paragraph 5.2.3 enables to compute the components $\cdot_\alpha$ and $\cdot_\beta$ of $p \cdot K \in W_K$:

$$(p \cdot K)_\alpha = a^{-1}b^{-5}K_\alpha, (p \cdot K)_\beta = a^5bK_\beta. \quad (5.2.11)$$

These expressions show in particular that the two-dimensional subspace $W_H = \{K \in W_K \mid K_\alpha = K_\beta = 0\}$ of W_K is preserved by the linear action of $\mathbf{P}_{min}$.

Proposition 5.2.11. *If the curvature map of a three-dimensional Lagrangian contact structure $\mathcal{L}$ has values in the subspace W_H (i.e. if K_α and K_β identically vanish), then $\mathcal{L}$ is flat.*

The following remark will be useful in the proof of this result : $\mathfrak{sl}_3$ is a *two-graded* Lie algebra, the graduation being defined by the following subspaces $(\mathfrak{g})_i$ for $i = -2, \dots, 2$:

$$\mathfrak{sl}_3 = \begin{pmatrix} (\mathfrak{g})_0 & (\mathfrak{g})_1 & (\mathfrak{g})_2 \\ (\mathfrak{g})_{-1} & (\mathfrak{g})_0 & (\mathfrak{g})_1 \\ (\mathfrak{g})_{-2} & (\mathfrak{g})_{-1} & (\mathfrak{g})_0 \end{pmatrix}. \quad (5.2.12)$$

The graduation property of $\mathfrak{sl}_3$ simply means that for any i and j we have $[(\mathfrak{g})_i, (\mathfrak{g})_j] \subset (\mathfrak{g})_{i+j}$, (where $(\mathfrak{g})_i = \{0\}$ for any $|i| > 2$). This graduation of $\mathfrak{sl}_3$ gives rise to a filtration defined by $\mathfrak{g}^i = \bigoplus_{j \geq i} (\mathfrak{g})_j$, with respect to which $\mathfrak{sl}_3$ is a filtered Lie algebra, i.e. $[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] \subset \mathfrak{g}^{i+j}$ (with $\mathfrak{g}^i = \mathfrak{g}$ for $i \leq -2$ and $\mathfrak{g}^i = \{0\}$ for $i > 2$).

Proof of Proposition 5.2.11. Let $(M, \hat{M}, \omega)$ be a normal Cartan geometry modelled on $\mathbf{G}/\mathbf{P}_{min}$. We introduce the following basis of $\mathfrak{sl}_3$:

$e_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, e_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, e^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e^\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, that we denote $\mathcal{B}$. We denote the coordinate of the Cartan connection ω with respect to an element e of the basis $\mathcal{B}$ as a real-valued one-form ω_e on $\hat{M}$, such that $\omega = \sum_{e \in \mathcal{B}} \omega_e e$. In the same way, the curvature form Ω of ω will be denoted as $\Omega = \sum_{e \in \mathcal{B}} \Omega_e e$, where the Ω_e 's are real-valued two-forms on $\hat{M}$. According to the form (5.2.10) of the curvature map stated in Theorem 5.2.8, if $K_\alpha = K_\beta = 0$ identically, then the only non-zero two-form Ω_e is $\Omega^0 = K^\alpha \omega_\alpha \wedge \omega_0 + K^\beta \omega_\beta \wedge \omega_0$. The Bianchi identity proved in [Sha97, Chapter 5 Lemma 3.30] gives $d\Omega = [\Omega, \omega]$, where $[\Omega, \omega] = L \circ (\Omega \wedge \omega)$ with $L : v \otimes w \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \mapsto [v, w] \in \mathfrak{g}$ (see [Sha97, Chapter 1.5 p.61] for this definition). The graduation property of $\mathfrak{sl}_3$ exposed in the beginning of the paragraph implies $[e^0, \mathfrak{g}^+] = \{0\}$, and we have the following Lie brackets relations between the elements of $\mathcal{B}$: $[e^0, e_0] = e_1 + e_2$, $[e^0, e_\alpha] = e^\beta$, $[e^0, e_\beta] = -e^\alpha$, $[e^0, e_1] = [e^0, e_2] = -e^0$. We finally obtain the following equalities by projecting the Bianchi identity to $\mathbb{R}e^\beta$ and $\mathbb{R}e^\alpha$:

$$0 = -K^\alpha \omega_\alpha \wedge \omega_0 \wedge \omega_\beta, 0 = K^\beta \omega_\beta \wedge \omega_0 \wedge \omega_\alpha.$$

As $(\omega_\alpha, \omega_0, \omega_\beta)$ is at each point $\hat{x} \in \hat{M}$ a basis of the dual space $(\omega_{\hat{x}}^{-1}((\mathfrak{g})_{-2} \oplus (\mathfrak{g})_{-1})))^*$, the three-form $\omega_\alpha \wedge \omega_0 \wedge \omega_\beta$ does not vanish, and the above equalities imply therefore $K^\alpha = K^\beta = 0$ identically, i.e. $K = 0$ as announced. $\square$

Remark 5.2.12. The components K_α and K_β of the curvature actually encode the *harmonic curvature* of a normal Cartan geometry modelled on $\mathbf{G}/\mathbf{P}_{min}$, that is known to be the only obstruction to the flatness for parabolic Cartan geometries. With this point of view, the above Proposition 5.2.11 is the manifestation in the specific case of Lagrangian contact structures of a general phenomena arising for any parabolic geometry (see for example [ČS09, Theorem 3.1.12]).

5.2.3.d Normal generalized Cartan geometry of an enhanced Lagrangian contact structure

Let $\mathcal{S} = (E^\alpha, E^\beta, E^c)$ be an enhanced Lagrangian contact structure on a three-dimensional manifold M , and $\mathcal{C} = (\hat{M}, \omega)$ be the normal Cartan geometry of the underlying Lagrangian contact structure (E^α, E^β) . Using the isomorphisms $i_{\hat{x}}$ defined in (5.2.6), the transverse distribution E^c is encoded by the map

$$\varphi: \hat{x} \in \hat{M} \mapsto i_{\hat{x}}(E_{\pi(\hat{x})}^c) \in \mathbb{V},$$

having values in the open subset

$$\mathbb{V} = \{L \in \mathbf{P}(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{min}) \mid L \not\subset \text{Vect}(\bar{e}_\alpha, \bar{e}_\beta)\}$$

of $\mathbf{P}(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{min})$. Endowing $\mathbb{V}$ with the right $\mathbf{P}_{min}$ -action defined by $L \cdot p = \overline{\text{Ad}}(p)^{-1}(L)$, φ is $\mathbf{P}_{min}$ -equivariant. Conversely, any $\mathbf{P}_{min}$ -equivariant application $\varphi: \hat{M} \rightarrow \mathbb{V}$ defines a transverse distribution $E_{\pi(\hat{x})}^c = i_{\hat{x}}^{-1}(\varphi(\hat{x}))$ compatible with the Lagrangian contact structure (E^α, E^β) .

Définition 5.2.13. $(\mathcal{C}, \varphi) = (\hat{M}, \omega, \varphi)$ will be called *the normal generalized Cartan geometry* of the enhanced Lagrangian contact structure $\mathcal{S}$.

5.2.4 Killing fields of Lagrangian contact structures

5.2.4.a Some classical properties of Killing fields

A (local) *Killing field* of a Lagrangian contact structure $(M, \mathcal{L})$ is a (local) vector field X of M whose flow preserves $\mathcal{L}$. The Killing fields of an enhanced Lagrangian contact structure $\mathcal{S}$ are defined in the same way. We will denote by $\mathfrak{Kill}(U, \mathcal{L})$ the subalgebra of Killing fields of $\mathcal{L}$ defined on an open subset $U \subset M$, and by $\mathfrak{kill}_{\mathcal{L}}^{loc}(x)$ the Lie algebra of germs of Killing fields of $\mathcal{L}$ defined on a neighbourhood of x .

The following statement summarizes important properties of Killing fields, coming from their description through Cartan geometries and well-known in this context. The results are stated for Lagrangian contact structures, but are true as well for enhanced Lagrangian contact structures.

Lemma 5.2.14. *Let M be a three-dimensional connected manifold endowed with a Lagrangian contact structure $\mathcal{L}$, and $\mathcal{C} = (\hat{M}, \omega)$ be a normal Cartan geometry on M associated to $\mathcal{L}$.*

1. *If $\hat{f}$ is a $\mathbf{P}_{min}$ -equivariant diffeomorphism of $\hat{M}$ that covers id_M and preserves ω , then $\hat{f} = \text{id}_{\hat{M}}$. If $\hat{X}$ is a $\mathbf{P}_{min}$ -invariant vector field on $\hat{M}$ whose flow preserves ω and whose projection on M vanishes, then $\hat{X} = 0$. As a consequence, the lift of a local automorphism f (respectively Killing field X) of $\mathcal{L}$ to a $\mathbf{P}_{min}$ -equivariant diffeomorphism $\hat{f}$ of $\hat{M}$ that preserves ω (resp. to a $\mathbf{P}_{min}$ -invariant vector field $\hat{X}$ on $\hat{M}$ whose flow preserves ω), is unique.*
2. *If the lift $\hat{X}$ of a Killing field X of $\mathcal{L}$ vanishes at some point $\hat{x}$, then $X = 0$. In other words, the linear map $X \in \mathfrak{Kill}(M, \mathcal{L}) \mapsto \omega_{\hat{x}}(\hat{X}_{\hat{x}}) \in \mathfrak{g}$ is injective.*
3. *The Lie algebra morphism $X \in \mathfrak{Kill}(M, \mathcal{L}) \mapsto [X]_x \in \mathfrak{kill}_{\mathcal{L}}^{loc}(x)$ sending a Killing field of $\mathcal{L}$ to its germ at x is injective.*

Sketch of proof. 1. The first assertion is a direct consequence of [ČS09, Proposition 1.5.3] for Cartan geometries modelled on $\mathbf{G}/\mathbf{P}_{min}$, and implies the second one.

2. Let us assume that a local automorphism $\hat{f}$ of $\mathcal{C}$ fixes a point $\hat{x} \in \hat{M}$. Then as $\hat{f}$ preserves the parallelism defined by ω , a classical argument implies that $\hat{f}$ is trivial on the connected component of $\hat{x}$. This remark easily implies the assertion about Killing fields.

3. According to [BFM09, Lemma 7.1], a local automorphism that is trivial in the neighbourhood of x is trivial on the connected component of its domain of definition that contains x . This result easily implies the statement concerning Killing fields. $\square$

Remark 5.2.15. The second statement of the previous lemma shows in particular that for any connected open neighbourhood U of $x \in M$, the dimension of $\mathfrak{Kill}(U, \mathcal{L})$ is bounded from above by $\dim \mathfrak{g} = 8$. Therefore, if we consider a decreasing sequence of connected open neighbourhoods U_i of x such that $\cap_i U_i = \{x\}$, then $\dim \mathfrak{Kill}(U_i, \mathcal{L})$ is constant for i large enough. This proves the existence of a connected open neighbourhood U of x such that

$$X \in \mathfrak{Kill}(U, \mathcal{L}) \mapsto [X]_x \in \mathfrak{kill}_{\mathcal{L}}^{loc}(x)$$

is a Lie algebra isomorphism.

The following Lemma is the translation of Theorem 5.2.9 for Killing fields of $(\mathbf{X}, \mathcal{L}_{\mathbf{X}})$.

Lemma 5.2.16. 1. *At any point $x \in \mathbf{X}$, the Lie algebra of local Killing fields of $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$ at x is identified with $\mathfrak{g}$ through the fundamental vector fields of the action. In other words, the application $v \in \mathfrak{g} \mapsto [v^\dagger]_x \in \mathfrak{kill}_{\mathcal{L}_{\mathbf{X}}}^{loc}(x)$ sending $v \in \mathfrak{g}$ to the germ of $v^\dagger$ at x , is an anti-isomorphism of Lie algebras.*

2. *Any local Killing field of $(\mathbf{X}, \mathcal{L}_{\mathbf{X}})$ defined on a connected neighbourhood of a point $x \in \mathbf{X}$ is the restriction of a global Killing field defined on $\mathbf{X}$. In other words, $X \in \mathfrak{Kill}(\mathbf{X}, \mathcal{L}_{\mathbf{X}}) \mapsto [X]_x \in \mathfrak{kill}_{\mathcal{L}_{\mathbf{X}}}^{loc}(x)$ is a Lie algebra isomorphism.*

Démonstration. 1. If $v^\dagger$ is trivial in the neighbourhood of x , then for any $t \in \mathbb{R}$, e^{tv} acts trivially on an open neighbourhood of x . But the action of $\mathbf{G}$ on $\mathbf{X}$ is *analytic* : if g and h in $\mathbf{G}$ have the same action on some non-empty open subset of $\mathbf{X}$, then $g = h$ (because the linear subspace generated by the pre-image in $\mathbb{R}^3$ of a non-empty open subset of $\mathbb{RP}^2$ is equal to $\mathbb{R}^3$). Therefore, $e^{tv} = \text{id}$ for any $t \in \mathbb{R}$ and $v = 0$. The application $v \mapsto [v^\dagger]_x$ is thus injective, and as $\dim \mathfrak{kill}_{\mathcal{L}_{\mathbf{X}}}^{loc}(x) \leq \dim \mathfrak{g}$ according to the third assertion of Lemma 5.2.14, it is an isomorphism. Finally, $v \mapsto v^\dagger$ is known to be an anti-morphism of Lie algebras.

2. Any local Killing field at x is the restriction of $v^\dagger$ for some $v \in \mathfrak{g}$ according to the first assertion, and extends therefore to a Killing field defined on $\mathbf{X}$. $\square$

5.2.4.b Total curvature map of an enhanced Lagrangian contact structure

Let $(\mathcal{C}, \varphi) = (\hat{M}, \omega, \varphi)$ be the normal Cartan geometry of a three-dimensional enhanced Lagrangian contact structure $(M, \mathcal{S})$. With $K: \hat{M} \rightarrow W_K$ the curvature map of $\mathcal{C}$, we define the curvature map

$$\mathcal{K} := (K, \varphi): \hat{M} \rightarrow W_{\mathcal{K}} := W_K \times \mathbb{V},$$

of the enhanced Lagrangian contact structure $(M, \mathcal{S})$, which is $\mathbf{P}_{min}$ -equivariant for the right diagonal action of $\mathbf{P}_{min}$ on $W_{\mathcal{K}}$.

If W is any manifold endowed with a right action of $\mathbf{P}_{min}$, we define $B(W) := \{(w, l) \mid w \in W, l \in \mathbf{L}(\mathfrak{g}, T_w W)\}$ (this is a vector bundle over W), that we endow with the right $\mathbf{P}_{min}$ -action $(w, l) \cdot p = (w \cdot p, D_w R_p \circ l \circ \text{Ad}(p))$. For any smooth $\mathbf{P}_{min}$ -equivariant map $\psi: \hat{M} \rightarrow W$, we define a $\mathbf{P}_{min}$ -equivariant map $D^1 \psi: \hat{M} \rightarrow B(W)$ encoding the differential of ψ as follows : $D^1 \psi(\hat{x}) = (\psi(\hat{x}), D_{\hat{x}} \psi \circ \omega_{\hat{x}}^{-1})$. We also define inductively $B^{k+1}(W) = B(B^k(W))$ and $D^{k+1} \psi = D(D^k \psi): \hat{M} \rightarrow B^{k+1}(W)$ for any $k \in \mathbb{N}$ (with $B^0(W) = W$ and $D^0 \phi = \phi$).

Denoting $m = \dim \mathfrak{g} = 8$, we define $W_{\mathcal{K}^{tot}} := B^m(W_{\mathcal{K}})$, and the *total curvature*

$$\mathcal{K}^{tot} := D^m \mathcal{K}: \hat{M} \rightarrow W_{\mathcal{K}^{tot}}$$

of the enhanced Lagrangian contact structure $\mathcal{S}$. The total curvature $\mathcal{K}^{tot}$ is $\mathbf{P}_{min}$ -equivariant and preserved by local automorphisms of $\mathcal{S}$ (*i.e.* for any such local automorphism f we have $\mathcal{K}^{tot} \circ \hat{f} = \mathcal{K}^{tot}$). We also define for $k \in \mathbb{N}^*$ the space of Killing generators of order k by $\text{Kill}^k(\hat{x}) = \omega_{\hat{x}}(\text{Ker}(D_{\hat{x}} D^{k-1} \mathcal{K})) \subset \mathfrak{g}$, and the space of Killing generators of total order by $\text{Kill}^{tot}(\hat{x}) = \text{Kill}^{m+1}(\hat{x}) = \omega_{\hat{x}}(\text{Ker}(D_{\hat{x}} \mathcal{K}^{tot})) \subset \mathfrak{g}$.

5.2.4.c Gromov's theory

The *integrability locus* of $\hat{M}$ is defined as the set $\hat{M}^{int}$ of those points $\hat{x} \in \hat{M}$ such that for any $v \in \text{Kill}^{tot}(\hat{x})$, there exists a local Killing field X of $\mathcal{S}$ defined around $\pi(\hat{x})$ and such that $\omega_{\hat{x}}(\hat{X}_{\hat{x}}) = v$. It is easy to check that $\hat{M}^{int}$ is a $\mathbf{P}_{min}$ -equivariant set, and we define the *integrability locus* of M as $M^{int} = \pi(\hat{M}^{int})$.

Theorem 5.2.17 (Integrability theorem). *Let $(M, \mathcal{S})$ be a three-dimensional enhanced Lagrangian contact structure of total curvature $\mathcal{K}^{tot}$, and $\hat{M}$ be its normal Cartan bundle. Then the integrability locus $\hat{M}^{int}$ of $\hat{M}$ is equal to the set of points $\hat{x} \in \hat{M}$ where the rank of $D_{\hat{x}} \mathcal{K}^{tot}$ is locally constant. In particular, $\hat{M}^{int}$ is open and dense, and so is the integrability locus M^{int} of M .*

Gromov investigates in [Gro88] the integration of “jets” of Killing fields for very general rigid geometric structures, and proves results related to the above Theorem. In the case of three-dimensional enhanced Lagrangian contact structures, the equivalence with normal generalized Cartan geometries allows to avoid the notion of jets of Killing fields, replaced by the one of Killing generators of total order. In this setting, Theorem 5.2.17 is a consequence of [Pec16, Theorem 4.19]. We use here a modification of the statement of Pecastaing proved by Frances in [Fra16, Theorem 2.2]. The proof of the statement of Frances for *generalized* Cartan geometries is straightforward by following the lines of the proof he does for Cartan geometries, and using [Pec16, Lemma 4.20 and Lemma 4.9].

5.3 Quasi homogeneity and flatness of the structure

From now on and until Paragraph 5.8.2, we are under the hypotheses of Theorem A.2 and we adopt its notations. M is thus a three-dimensional compact connected and orientable manifold, $\mathcal{S} = (E^\alpha, E^\beta, E^c)$ is an enhanced Lagrangian contact structure on M , and we denote by $\mathcal{L} = (E^\alpha, E^\beta)$ its underlying Lagrangian contact structure. Finally, f is an orientation-preserving automorphism of $(M, \mathcal{S})$ such that :

- each of the distributions E^α and E^β is weakly contracted by f (see Definition 5.1.3),
- and f has a dense orbit.

In particular, the non-wandering set $NW(f) = NW(f^{-1})$ equals M . We recall that in this case, the set $\text{Rec}(f)$ (respectively $\text{Rec}(f^{-1})$) of recurrent points of f (respectively f^{-1}) is a dense G_δ -subset of M . Therefore, $\text{Rec}(f) \cap \text{Rec}(f^{-1})$ is dense in M as well.

5.3.1 Quasi homogeneity of the enhanced Lagrangian contact structure

At a point $x \in M$, we introduce the subalgebra

$$\mathfrak{is}_S^{loc}(x) = \left\{ X \in \mathfrak{kill}_S^{loc}(x) \mid X(x) = 0 \right\} \quad (5.3.1)$$

of local Killing fields vanishing at x , that we call the *isotropy subalgebra* of $\mathcal{S}$.

Définition 5.3.1. The Kill^{loc} -orbit (for $\mathcal{S}$, respectively $\mathcal{L}$) of a point $x \in M$ is the set of points that can be reached from x by flowing along finitely many local Killing fields of $\mathcal{S}$ (respectively $\mathcal{L}$). An enhanced Lagrangian contact structure $(M, \mathcal{S})$ (resp. a Lagrangian contact structure $(M, \mathcal{L})$) is *locally homogeneous* if any connected component of M is a Kill^{loc} -orbit.

The first claim of the following Proposition is a consequence of Gromov’s “open-dense orbit theorem”, and the second one is a reformulation in the context of enhanced Lagrangian contact structures of a work done by Frances in [Fra16, Proposition 5.1] for pseudo-Riemannian structures.

Proposition 5.3.2. *There exists an open and dense subset Ω of M , such that the enhanced Lagrangian contact structure $\mathcal{S}$ is locally homogeneous in restriction to Ω . Moreover for any $x \in \Omega$, the isotropy subalgebra $\mathfrak{is}_{\mathcal{S}}^{loc}(x)$ is non-trivial.*

Démonstration. Since $\mathcal{S}$ has an automorphism f with a dense orbit, Gromov’s dense orbit theorem directly implies the first claim (see [Gro88, Corollary 3.3.A], and [Pec16, Theorem 4.13] for a proof in the case of generalized Cartan geometries). Since the integrability locus M^{int} is open and dense (see Theorem 5.2.17), and $\text{Rec}(f) \cap \text{Rec}(f^{-1})$ is dense in M , there finally exists a point $x \in \Omega \cap M^{int} \cap \text{Rec}(f) \cap \text{Rec}(f^{-1})$. We show now that $\mathfrak{is}_{\mathcal{S}}^{loc}(x)$ is non-zero.

Let us denote by $(\hat{M}, \omega, \varphi)$ the normal generalized Cartan geometry of $\mathcal{S}$ (see Definition 5.2.13), and choose a lift $\hat{x} \in \pi^{-1}(x)$ in the Cartan bundle. Possibly replacing f by f^{-1} , we have $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|D_x f^n|_{E^\alpha}\| = 0$, and by hypothesis on x , there exists a strictly increasing sequence n_k of integers such that $f^{n_k}(x)$ converges to x , implying the existence of a sequence $p_k \in \mathbf{P}_{min}$ such that $\hat{f}^{n_k}(\hat{x}) \cdot p_k^{-1}$ converges to $\hat{x}$. We claim that the sequence $\hat{f}^{n_k}(\hat{x})$ has to leave every compact subset of $\hat{M}$, implying that p_k also leaves every compact subset of $\mathbf{P}_{min}$. In fact, if not, some subsequence $(\hat{f}^{n'_k}(\hat{x}))$ converges in $\hat{M}$, implying that $(\hat{f}^{n'_k})$ converges to some diffeomorphism of $\hat{M}$ for the $\mathcal{C}^\infty$ -topology, because $\hat{f}$ preserves the parallelism defined by ω (see [Kob95, Theorem I.3.2]). Therefore, $(f^{n'_k})$ also converges for the $\mathcal{C}^\infty$ -topology to some diffeomorphism of M , contradicting $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|D_x f^{n'_k}|_{E^\alpha}\| = 0$.

The sequel of the proof of [Fra16, Proposition 5.1] will enable us to conclude, using the total curvature $\mathcal{K}^{tot}: \hat{M} \rightarrow W_{\mathcal{K}^{tot}}$ of the generalized Cartan geometry associated to $\mathcal{S}$ (see Paragraph 5.2.4.c). By $\mathbf{P}_{min}$ -equivariance of the total curvature and its invariance by automorphisms, $p_k \cdot \mathcal{K}^{tot}(\hat{x}) = \mathcal{K}^{tot}(\hat{f}^{n_k}(\hat{x}) \cdot p_k^{-1})$ converges to $\mathcal{K}^{tot}(\hat{x})$. The manifold $W_{\mathcal{K}^{tot}}$ has a canonical structure of algebraic variety for which the action of $\mathbf{P}_{min}$ is algebraic (because its action on the space W_K of normal curvatures and on the algebraic variety $\mathbb{V} \subset \mathbf{P}(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{min})$ are algebraic, see [Pec16, Remark 4.16] for more details). Therefore, the orbits of the action of $\mathbf{P}_{min}$ on $W_{\mathcal{K}^{tot}}$ are locally closed, and are thus imbedded submanifolds. In particular, there exists a sequence $\varepsilon_k \in \mathbf{P}_{min}$ converging to the identity and such that $p_k \cdot \mathcal{K}^{tot}(\hat{x}) = \varepsilon_k \cdot \mathcal{K}^{tot}(\hat{x})$, i.e. such that $\varepsilon_k^{-1} p_k \in \text{Stab}_{\mathbf{P}_{min}}(\mathcal{K}^{tot}(\hat{x}))$. As $\varepsilon_k^{-1} p_k$ leaves every compact subset of $\mathbf{P}_{min}$, $\text{Stab}_{\mathbf{P}_{min}}(\mathcal{K}^{tot}(\hat{x})) < \mathbf{P}_{min}$ is non-compact. But $\text{Stab}_{\mathbf{P}_{min}}(\mathcal{K}^{tot}(\hat{x}))$ is an algebraic subgroup of $\mathbf{P}_{min}$ and has thus a finite number of connected components, finally implying that its identity component is also non-compact.

There exists thus a non-zero vector $v \in \mathfrak{p}_{min}$ in the Lie algebra of $\text{Stab}_{\mathbf{P}_{min}}(\mathcal{K}^{tot}(\hat{x}))$. For any $t \in \mathbb{R}$ we have by hypothesis $\mathcal{K}^{tot}(\hat{x} \cdot \exp(tv)) = \mathcal{K}^{tot}(\hat{x}) \cdot \exp(tv) = \mathcal{K}^{tot}(\hat{x})$, and deriving this equality at $t = 0$ we obtain $D_{\hat{x}} \mathcal{K}^{tot}(\omega_{\hat{x}}^{-1}(v)) = 0$, i.e. $v \in \omega_{\hat{x}}(\text{Ker}(D_{\hat{x}} \mathcal{K}^{tot})) = \text{Kill}^{tot}(\hat{x})$. As $\hat{x}$ is in the integrability locus $\hat{M}^{int}$ of $\hat{M}$, there exists a local Killing field $X \in \mathfrak{kill}_{\mathcal{S}}^{loc}(x)$ such that $\omega_{\hat{x}}(\hat{X}_{\hat{x}}) = v \neq 0$, implying in particular that $X \neq 0$ and $X(x) = 0$, i.e. that $X \in \mathfrak{is}_{\mathcal{S}}^{loc}(x) \setminus \{0\}$.

The isotropy subalgebra at any point $y \in \Omega$ being linearly isomorphic to the one at x because Ω is an Aut^{loc} -orbit, $\mathfrak{is}_{\mathcal{S}}^{loc}(y)$ is finally non-zero at any point $y \in \Omega$, which finishes the proof of the corollary. $\square$

5.3.2 Flatness of the Lagrangian contact structure

In particular, the underlying Lagrangian contact structure $\mathcal{L} = (E^\alpha, E^\beta)$ is also locally homogeneous with non-zero isotropy in restriction to the open and dense subset Ω . The following result due to Tresse in [Tre96] (see also [KT17, §4.5.2]) implies that $\mathcal{L}|_\Omega$ is flat.

Theorem 5.3.3 (Tresse [Tre96]). *Any three-dimensional locally homogeneous connected Lagrangian contact structure with non-zero isotropy is flat.*

By density of Ω and continuity of the curvature, the Lagrangian contact structure $(M, \mathcal{L})$ is therefore flat, and according to Paragraph 5.2.3.b, we obtain the following.

Corollary 5.3.4. *The Lagrangian contact structure $\mathcal{L}$ is described by a $(\mathbf{G}, \mathbf{X})$ -structure on M .*

The rest of this paragraph is devoted to give a self-contained proof of Tresse's Theorem 5.3.3. We consider a locally homogeneous Lagrangian contact structure $\mathcal{L}$ with non-zero isotropy defined on a three-dimensional connected manifold M . We denote by $(M, \mathcal{C}) = (M, \hat{M}, \omega)$ the normal Cartan geometry of $\mathcal{L}$, and by $K: \hat{M} \rightarrow W_K$ its curvature map. Choosing $x \in M$ and $\hat{x} \in \hat{M}$, it suffices to prove that $K(\hat{x}) = 0$ by local homogeneity of $\mathcal{C}$. We will denote by

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{kil}_\mathcal{L}^{loc}(x) \text{ and } \mathfrak{i} = \mathfrak{is}_\mathcal{L}^{loc}(x)$$

the algebra of local Killing fields of $\mathcal{L}$ at x and its isotropy subalgebra. As $\mathcal{L}$ is locally homogeneous, $\text{ev}_x(\mathfrak{h}) := \{X(x) \mid X \in \mathfrak{h}\} = T_x M$, and in particular $\dim \mathfrak{h} - \dim \mathfrak{i} = 3$. The following result gives us a sufficient condition for the vanishing of the curvature.

Lemma 5.3.5. *Let f be a local automorphism of a locally homogeneous three-dimensional Lagrangian contact structure $(M, \mathcal{L})$ fixing a point $x \in M$, let $\hat{x} \in \pi^{-1}(x)$ be a lift of x in the normal Cartan bundle of $\mathcal{L}$, and let $p \in \mathbf{P}_{min}$ be the holonomy of $\hat{f}$ at $\hat{x}$, characterized by $\hat{f}(\hat{x}) = \hat{x} \cdot p^{-1}$. If $p = \exp(v)$ with*

$$v = \begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & -a - b & * \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}_{min} \text{ such that } b \neq -5a \text{ and } a \neq -5b, \quad (5.3.2)$$

then $\mathcal{L}$ is flat.

Démonstration. Since the curvature K is preserved by $\hat{f}$ and $\mathbf{P}_{min}$ -equivariant (see paragraph 5.2.3), we obtain $p \cdot K(\hat{x}) = K(\hat{x} \cdot p^{-1}) = K(\hat{f}(\hat{x})) = K(\hat{x})$, where the holonomy p is of the form

$$p = \begin{pmatrix} \lambda & * & * \\ 0 & \lambda^{-1}\mu^{-1} & * \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

with $\mu \neq \lambda^{-5}$ and $\lambda \neq \mu^{-5}$ by hypothesis. According to the expression of the components $(p.K)_\alpha$ and $(p.K)_\beta$ of the curvature given in (5.2.11), we have $\lambda\mu^5 K(\hat{x})_\alpha = K(\hat{x})_\alpha$ and $\lambda^5\mu K(\hat{x})_\beta = K(\hat{x})_\beta$, implying $K(\hat{x})_\alpha = K(\hat{x})_\beta = 0$. The structure being locally homogeneous and the subspace $W_H = \{K \in W_K \mid K_\alpha = K_\beta = 0\}$ being $\mathbf{P}_{min}$ -invariant, K has values in W_H on a neighbourhood of $\hat{x}$, and therefore $K = 0$ on this neighbourhood according to Proposition 5.2.11. By local homogeneity, $\mathcal{L}$ is flat. $\square$

We introduce the Cartan subalgebra $\mathfrak{a} \simeq \mathbb{R}^2$ of diagonal matrices of $\mathfrak{p}_{min}$, and the projection $p: \mathfrak{p}_{min} \rightarrow \mathfrak{a}$ on $\mathfrak{a}$ parallel to $\mathfrak{heis}(3)$, which is a Lie algebra morphism. The following linear map will play an important role in the proof :

$$\phi: X \in \mathfrak{i} \mapsto p(\omega_{\hat{x}}(\hat{X}_{\hat{x}})) \in \mathfrak{a}.$$

Fact 5.3.6. *If there exists $X \in \mathfrak{i}$ such that $\phi(X)$ satisfies the hypotheses (5.3.2) of Lemma 5.3.5, then $\mathcal{L}$ is flat.*

Démonstration. We have the following relation for any $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{\hat{X}}^t(\hat{x}) = \hat{x} \cdot \exp(t\omega_{\hat{x}}(\hat{X}_{\hat{x}})). \quad (5.3.3)$$

Denoting by $p(t)$ the element of $\mathbf{P}_{min}$ such that $\varphi_{\hat{X}}^t(\hat{x}) = \hat{x} \cdot p(t)$, $\{p(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ is a one-parameter subgroup. There exists thus $w \in \mathfrak{p}_{min}$ such that $p(t) = \exp(tw)$, and deriving the relation $\varphi_{\hat{X}}^t(\hat{x}) = \hat{x} \cdot \exp(tw)$ at $t = 0$ we obtain $\omega_{\hat{x}}(\hat{X}_{\hat{x}}) = w$ (because the Cartan connection ω reproduces the fundamental vector fields of the action of $\mathbf{P}_{min}$). There exists thus an automorphism φ of $(M, \mathcal{L})$ fixing x and such that $\hat{\varphi}(\hat{x}) = \hat{x} \cdot \exp(\omega_{\hat{x}}(\hat{X}_{\hat{x}}))^{-1}$. As $\phi(X) = p(\omega_{\hat{x}}(\hat{X}_{\hat{x}}))$ satisfies the conditions (5.3.2), $\omega_{\hat{x}}(\hat{X}_{\hat{x}})$ also does, and Lemma 5.3.5 implies that $\mathcal{L}$ is flat. $\square$

Fact. *If $\text{Ker}(\phi) \neq \{0\}$ then $\mathcal{L}$ is flat.*

Démonstration. There exists then $X \in \mathfrak{i}$ such that $v := \omega_{\hat{x}}(\hat{X}_{\hat{x}}) \in \mathfrak{heis}(3) = (\mathfrak{g})^1$, i.e.

$$v = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

We first assume that $(a, b) \neq (0, 0)$. For an element of the form $w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \end{pmatrix}$ in $\mathfrak{g}$, we have $[v, w] = \begin{pmatrix} aa' & bb' & *aa' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & -bb' \end{pmatrix}$, and as $a \neq 0$ or $b \neq 0$, there exists such an element $w \in \mathfrak{g}$ satisfying $[v, w] = \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & -1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ or $[v, w] = \begin{pmatrix} 0 & * & 0 \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. As $\mathcal{L}$ is locally homogeneous, there exists a Killing field $Y \in \mathfrak{h}$ such that $Y_o = D_{\hat{x}}\pi(\omega_{\hat{x}}^{-1}(w))$, implying $\omega_{\hat{x}}(\hat{Y}_{\hat{x}}) = w + w_0$ with $w_0 \in \mathfrak{p}_{min} = (\mathfrak{g})^0$. We now use the relation

$$\omega([\hat{X}, \hat{Y}]) = -[\omega(\hat{X}), \omega(\hat{Y})] + K(\omega(\hat{X}), \omega(\hat{Y})). \quad (5.3.4)$$

verified for any Killing fields of the Cartan geometry $\mathcal{C}$, that will be proved at the end of this demonstration. We obtain $\omega_{\hat{x}}([\hat{X}, \hat{Y}]_{\hat{x}}) = -[v, w] + [v, w_0] + K(v, w + w_0) \in \mathfrak{p}_{min}$, where $[v, w_0] \in (\mathfrak{g})^1$ according to the filtration property of $\mathfrak{g}$, and $K(v, w + w_0) = 0$ because $v \in \mathfrak{p}_{min}$ (see Paragraph 5.2.3). In particular $[X, Y] \in \mathfrak{i}$, and $\phi([X, Y])$ is equal to one of the diagonal matrices $[1, -1, 0]$ or $[0, 1, -1]$, that both satisfy the condition (5.3.2). Therefore $\mathcal{L}$ is flat according to Fact 5.3.6.

If $a = b = 0$, we can find an element $w \in \mathfrak{g}$ such that $[v, w] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, and by the same argument as above we find $Y \in \mathfrak{h}$ such that $[X, Y] \in \mathfrak{i}$ and $\phi([X, Y]) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. As this element of $\mathfrak{a}$ satisfies the conditions (5.3.2), $\mathcal{L}$ is flat by Fact 5.3.6.

We now prove the relation (5.3.4) for two Killing fields X and Y of the Cartan geometry $\mathcal{C}$. Since the flow of X preserves ω , the Lie derivative $L_X\omega$ vanishes identically, and applying Cartan's formula $L_X = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d$ to Y , we obtain $Y \cdot \omega(X) + d\omega(X, Y) = 0$. Cartan's formula $d\omega(X, Y) = X \cdot \omega(Y) - Y \cdot \omega(X) - \omega([X, Y])$ implies $X \cdot \omega(Y) = \omega([X, Y])$, and as $L_Y\omega = 0$ as well, we also have $-Y \cdot \omega(X) = \omega([X, Y])$. Equation (5.3.4) then follows from the definition of the curvature. $\square$

Fact. *If $\phi(\mathfrak{i}) = \mathfrak{a}$ then $\mathcal{L}$ is flat.*

Démonstration. There exists in this case a Killing field $X \in \mathfrak{i}$ such that $\phi(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, which satisfies the hypotheses (5.3.2), implying that $\mathcal{L}$ is flat according to Fact 5.3.6. $\square$

It remains to handle the case when ϕ is injective, and $\phi(\mathfrak{i})$ is one-dimensional. There exists then $V \in \mathfrak{i}$ such that $\mathfrak{i} = \mathbb{R}V$, and we can moreover assume without loss of generality that

$v := \omega_{\hat{x}}(\hat{V}_{\hat{x}}) \in \mathfrak{p}_{min}$ does not verify the condition (5.3.2) (if it does, then $\mathcal{L}$ is flat according to Fact 5.3.6). In other words, denoting the components of v in $\mathfrak{a}$ by

$$\phi(V) = p(v) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a-b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \in \mathfrak{a},$$

with $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, we assume that

$$\text{either } a = -5b \neq 0, \text{ or } b = -5a \neq 0. \quad (5.3.5)$$

Since $v \in \mathfrak{p}_{min}$, the curvature part of the relation (5.3.4) vanishes, and for any $X \in \mathfrak{h}$ we have :

$$\omega_{\hat{x}}(\widehat{[V, X]}_{\hat{x}}) = -[v, \omega_{\hat{x}}(\hat{X}_{\hat{x}})]. \quad (5.3.6)$$

The linear map

$$\varphi: X \in \mathfrak{h} \mapsto \omega_{\hat{x}}(\hat{X}_{\hat{x}}) \in \mathfrak{g}$$

is injective according to Lemma 5.2.14, and as $\text{ev}_x(\mathfrak{h}) = T_x M$ by local homogeneity, φ induces an isomorphism $\bar{\varphi}$ between $\mathfrak{h}/\mathfrak{i}$ and $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{min}$. Using the notations (5.2.8) in Paragraph 5.2.2.c for the basis $(\bar{e}_{\alpha}, \bar{e}_{\beta}, \bar{e}_0)$ of $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{min}$, there exists X, Y , and Z in $\mathfrak{h}$ such that $\varphi(X) \in e_{\alpha} + \mathfrak{p}_{min}$, $\varphi(Y) \in e_{\beta} + \mathfrak{p}_{min}$, and $\varphi(Z) \in e_0 + \mathfrak{p}_{min}$. According to (5.3.6), $\bar{\varphi}$ intertwines the adjoint action of V on $\mathfrak{h}/\mathfrak{i}$ and the adjoint action of $-v$ on $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{min}$, implying

$$\text{Mat}_{(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})}(\overline{\text{ad}}(V)) = \text{Mat}_{(\bar{e}_{\alpha}, \bar{e}_{\beta}, \bar{e}_0)}(\overline{\text{ad}}(-v)) = \begin{pmatrix} -a-2b & 0 & * \\ 0 & 2a+b & * \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}. \quad (5.3.7)$$

We will denote by $A = -a - 2b$ and $B = 2a + b$ the eigenvalues of $\overline{\text{ad}}(V)$ with respect to $\bar{X}$ and $\bar{Y}$. Our hypotheses (5.3.5) on a and b imply $A \neq 0$ and $B \neq 0$, allowing us to choose X and Y in $\mathfrak{h}$ satisfying

$$[V, X] = AX \text{ and } [V, Y] = BY.$$

In fact, if $X \in \mathfrak{h}$ satisfies $\bar{\varphi}(X + \mathfrak{i}) = \bar{e}_{\alpha}$, there exists $\lambda \in \mathbb{R}$ such that $[V, X] = aX + \lambda V$ according to (5.3.7), and $X' = X + \frac{\lambda}{A}V$ satisfies then $[V, X'] = AX'$. We deal with the case of Y by the same computations.

The Jacobi identity yields $[V, [X, Y]] = (A + B)[X, Y]$, implying in particular that $[X, Y] \notin \text{Vect}(X, Y, V)$ since $A + B$ is distinct from A , B and 0 . A second application of the same identity gives $[V, [X, [X, Y]]] = (2A + B)[X, [X, Y]]$ and $[V, [Y, [X, Y]]] = (A + 2B)[Y, [X, Y]]$. Furthermore, if $[X, [X, Y]] \neq 0$, then $2A + B$ is an eigenvalue of $\text{ad}(V) \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h})$, and is thus equal to one of the eigenvalues A , B , or $A + B$ (since $\dim \mathfrak{h} = 4$ and $2A + B \neq 0$). But the equalities $2A + B = A + B$ or $2A + B = B$ would contradict $A \neq 0$, and the equality $2A + B = A$ would likewise contradict our hypotheses on a and b . Consequently, $[X, [X, Y]] = 0$, and for the same reasons $[Y, [X, Y]] = 0$.

As a consequence, $\mathcal{E} := \text{Vect}(X, Y, [X, Y])$ is a subalgebra of $\mathfrak{h}$ isomorphic to $\mathfrak{heis}(3)$. There is a connected open neighbourhood U of x such that the injective linear map $X \in \mathfrak{Kill}(U, \mathcal{L}) \mapsto [X]_x \in \mathfrak{kill}_{\mathcal{L}}^{loc}(x)$ is an isomorphism (see Remark 5.2.15), and there is thus an injective Lie algebra morphism $\iota: \mathfrak{heis}(3) \rightarrow \mathfrak{Kill}(U, \mathcal{L})$ of image $\mathcal{E}$. According to the work of Palais in [Pal57], chapter II Theorem XI and its corollary, there exists a (unique) local action of $\text{Heis}(3)$ on U that integrates this infinitesimal action, *i.e.* such that $X^{\dagger} = \iota(X)|_U$ for any $X \in \mathfrak{heis}(3)$. In particular, the local action of $\text{Heis}(3)$ on U preserves $\mathcal{L}$, and as $\iota(\mathfrak{heis}(3)) \cap \mathfrak{i} = \{0\}$, the orbital map at x is a $\text{Heis}(3)$ -equivariant embedding. The Lagrangian contact structure $\mathcal{L}$ is thus locally isomorphic to a left-invariant Lagrangian contact structure on $\text{Heis}(3)$. The following lemma implies then that $\mathcal{L}$ is flat, finishing the proof of Theorem 5.3.3.

Lemma 5.3.7. *Any left-invariant Lagrangian contact structure on $\text{Heis}(3)$ is flat.*

Démonstration. The left-invariant Lagrangian contact structure $\mathcal{M}_0 = (\mathbb{R}\tilde{X}, \mathbb{R}\tilde{Y})$ of $\text{Heis}(3)$ generated by $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ and $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ is flat. In fact, we will see in Paragraph 5.4.2.c that $(\text{Heis}(3), \mathcal{M}_0)$ is isomorphic to an open subset of the homogeneous model space $(\mathbf{X}, \mathcal{L}_{\mathbf{X}})$. Considering a left-invariant Lagrangian contact structure $\mathcal{M}$ on $\text{Heis}(3)$, it suffices thus to find an isomorphism of Lagrangian contact structures from $\mathcal{M}_0$ to $\mathcal{M}$ to prove our claim.

There exists $v, w \in \mathfrak{heis}(3)$ such that $\mathcal{M} = (\mathbb{R}\tilde{v}, \mathbb{R}\tilde{w})$, and as $\mathbb{R}\tilde{v} \oplus \mathbb{R}\tilde{w}$ is a contact distribution, $[v, w] \notin \text{Vect}(v, w)$. Denoting $Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v = aX + bY + cZ$, and $w = a'X + b'Y + c'Z$, we have $[v, w] = (ab' - ba')Z$, which implies $ab' - ba' \neq 0$. The Lie algebra automorphism φ of $\mathfrak{heis}(3)$ whose matrix in the basis (X, Y, Z) is $\begin{pmatrix} a & a' & 0 \\ b & b' & 0 \\ c & c' & ab' - ba' \end{pmatrix}$ sends (X, Y) to (v, w) , and as $\text{Heis}(3)$ is simply-connected, there exists a Lie group automorphism ϕ of $\text{Heis}(3)$ whose differential at identity is φ . Since ϕ is an automorphism, $D_e\phi(X, Y) = (v, w)$ implies $\phi^*\tilde{v} = \tilde{X}$ and $\phi^*\tilde{w} = \tilde{Y}$, *i.e.* ϕ is an isomorphism of Lagrangian contact structures from $\mathcal{M}_0$ to $\mathcal{M}$. $\square$

5.4 Local model of the enhanced Lagrangian contact structure

In the previous section, we proved that the Lagrangian contact structure $\mathcal{L}$ is locally isomorphic to the homogeneous model space $(\mathbf{X}, \mathcal{L}_{\mathbf{X}})$, and thus described by a $(\mathbf{G}, \mathbf{X})$ -structure on M . The classical strategy is then to reduce the possibilities for the images of the developing map $\delta: \tilde{M} \rightarrow M$ and of the holonomy morphism $\rho: \pi_1(M) \rightarrow \mathbf{G}$ of this structure.

In the case studied by Ghys in [Ghy87] of an Anosov flow preserving the structure, the holonomy group $\rho(\pi_1(M)) \subset \mathbf{G}$ is centralized by a one-parameter subgroup of $\mathbf{G}$, which reduce dramatically the possibilities for $\rho(\pi_1(M))$. But in the case of a discrete-time dynamics, we do not have any relevant algebraic restriction of this kind on $\rho(\pi_1(M))$.

For this reason, we have to look not only at the local homogeneity of $\mathcal{L}$ on Ω , but at the local homogeneity of the whole *enhanced* Lagrangian contact structure $\mathcal{S} = (E^\alpha, E^\beta, E^c)$ on this open dense subset. In this section, we will show that in restriction to Ω , $\mathcal{S}$ is locally isomorphic to an *infinitesimal homogeneous model*, that preserves a distribution transverse to the contact plane.

5.4.1 Two algebraic models

We begin by describing this models in an algebraic way.

5.4.1.a Left-invariant structure on $\text{SL}_2(\mathbb{R})$

We will use the following basis for the Lie algebra $\mathfrak{sl}_2$ of $\text{SL}_2(\mathbb{R})$:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ and } H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.4.1)$$

The Lie bracket relation $[E, F] = H$ between these three vectors shows that they define a left-invariant enhanced Lagrangian contact structure $\mathcal{S}_{\text{SL}_2(\mathbb{R})} = (\mathbb{R}\tilde{E}, \mathbb{R}\tilde{F}, \mathbb{R}\tilde{H})$ on $\text{SL}_2(\mathbb{R})$. Moreover, the right action of the one-parameter subgroup A generated by H preserves $\mathcal{S}_{\text{SL}_2(\mathbb{R})}$. We endow the universal cover $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ of $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ with the pullback of $\mathcal{S}_{\text{SL}_2(\mathbb{R})}$, so that the right action of the one-parameter subgroup $\tilde{A}$ of $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ generated by H preserves $\mathcal{S}_{\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})}$.

Let Γ_0 be a cocompact lattice of $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$, and $u: \Gamma_0 \rightarrow \tilde{A}$ be a morphism whose graph-group $\Gamma = \{(\gamma, u(\gamma)) \mid \gamma \in \Gamma_0\}$ acts freely, properly, and cocompactly on $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$, *via* the action $(g, a) \cdot x = gxa$ (these morphisms are called *admissible* by Salein and studied in detail in his thesis [Sal99]). Then the standard structure of $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ is preserved by Γ , and $\Gamma \backslash \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ is endowed with the induced enhanced Lagrangian contact structure $\mathcal{S}$, whose distributions are exactly the invariant distributions of the algebraic contact-Anosov flow (R_{a^t}) on $\Gamma \backslash \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$.

5.4.1.b Left-invariant structure on $\text{Heis}(3)$

We will use the following basis for the Lie algebra $\mathfrak{heis}(3)$ of $\text{Heis}(3)$:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

According to the Lie bracket relation $[X, Y] = Z$, $\mathcal{S}_{\text{Heis}(3)} = (\mathbb{R}\tilde{X}, \mathbb{R}\tilde{Y}, \mathbb{R}\tilde{Z})$ is a left-invariant enhanced Lagrangian contact structure on $\text{Heis}(3)$. The subgroup

$$\mathcal{A} = \left\{ \varphi_{\lambda, \mu} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{*2} \right\}$$

of automorphisms introduced in the introduction (see (5.1.1)) is exactly the subgroup of $\text{Aut}(\text{Heis}(3))$ preserving $\mathcal{S}_{\text{Heis}(3)}$.

Any cocompact lattice Γ of $\text{Heis}(3)$ preserves $\mathcal{S}_{\text{Heis}(3)}$, and the quotient $\Gamma \backslash \text{Heis}(3)$ will always be endowed with the induced enhanced Lagrangian contact structure $\mathcal{S}$. The invariant distributions of a partially hyperbolic affine automorphism $L_g \circ \varphi$ of $\Gamma \backslash \text{Heis}(3)$, with $g \in \text{Heis}(3)$ and $\varphi \in \mathcal{A}$, are precisely given by $\mathcal{S}$.

5.4.2 Two homogeneous open subsets of the model space

The left-invariant structures of $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ and $\text{Heis}(3)$ can be geometrically imbedded in $\mathbf{X}$ as homogeneous open subsets, that will be the local models of the enhanced Lagrangian contact structure $\mathcal{S}$ in restriction to Ω .

5.4.2.a Some specific surfaces of $\mathbf{X}$, and one affine chart

For D a projective line of $\mathbb{RP}^2$, we define the $\beta - \alpha$ surface

$$\mathcal{S}_{\beta, \alpha}(D) = \pi_{\alpha}^{-1}(D) = \cup_{y \in \mathcal{C}_{\beta}(D)} \mathcal{C}_{\alpha}(y),$$

and for $m \in \mathbb{RP}^2$, the analog $\alpha - \beta$ surface

$$\mathcal{S}_{\alpha, \beta}(m) = \pi_{\beta}^{-1}(\{L \in \mathbb{RP}_*^2 \mid m \in L\}) = \cup_{y \in \mathcal{C}_{\alpha}(m)} \mathcal{C}_{\beta}(y).$$

The open subset

$$\Omega_a := \mathbf{X} \setminus \mathcal{S}_{\beta, \alpha}([e_1, e_2])$$

of $\mathbf{X}$, composed by pointed projective lines (m, D) for which $m \notin [e_1, e_2]$, will be identified with the set $\mathbf{X}_a$ of pointed affine lines of $\mathbb{R}^2$ as follows :

$$\phi_a: (m, D) \in \Omega_a \mapsto (m \cap P, D \cap P) \in \mathbf{X}_a, \quad (5.4.2)$$

where $\text{Vect}(e_1, e_2) + (0, 0, 1)$ is identified with $\mathbb{R}^2$ by translation. The diffeomorphism ϕ_a is moreover equivariant for the canonical identification

$$\begin{bmatrix} A & X \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Stab}_{\mathbf{G}}(\Omega_a) \mapsto A + X \in \text{Aff}(\mathbb{R}^2) \quad (5.4.3)$$

of $\text{Stab}_{\mathbf{G}}(\Omega_a)$ with the group of affine transformations of $\mathbb{R}^2$.

5.4.2.b The open subset $Y_{\mathbf{t}}$

We will embed $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ in $\mathbf{G}$ as follows :

$$\iota: g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mapsto \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{G}.$$

The resulting copy S_0 of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ acts simply transitively at $o_{\mathbf{t}} = ([1, 0, 1], [(1, 0, 1), e_2]) = \phi_a^{-1}(e_1 + \mathbb{R}e_2) \in \Omega_a$, and its orbit $Y_{\mathbf{t}} = S_0 \cdot o_{\mathbf{t}}$ can be described as

$$Y_{\mathbf{t}} = \Omega_a \setminus S_{\alpha, \beta}[e_3] = \phi_a^{-1} \left(\left\{ m + L \mid m \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, L \in \mathbb{R}\mathbf{P}^1 \setminus \{\mathbb{R}m\} \right\} \right).$$

The left-invariant structure of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ induces on $Y_{\mathbf{t}}$ a S_0 -invariant enhanced Lagrangian contact structure

$$\mathcal{S}_{\mathbf{t}} = (\theta_{o_{\mathbf{t}}} \circ \iota)_* \mathcal{S}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}, \quad (5.4.4)$$

which is *compatible with $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$* in the sense that its α and β -distributions coincide with the ones of $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$, and whose central distribution is entirely described by its value at $o_{\mathbf{t}}$:

$$\mathcal{E}_{\mathbf{t}}^c(o_{\mathbf{t}}) = \mathbb{R}H_0^\dagger(o_{\mathbf{t}}), \text{ where } H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.4.5)$$

We denote by $A^\pm$ the subgroup of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ composed by diagonal matrices. The right action of $A^\pm$ preserves $\mathcal{S}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$, and the direct product $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times A^\pm$ acts on $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ by $(g, a) \cdot h = gha$. The isomorphism from $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ to $(Y_{\mathbf{t}}, \mathcal{S}_{\mathbf{t}})$ given by the orbital map at $o_{\mathbf{t}}$ is equivariant for the identification

$$\left(g, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times A^\pm \mapsto \lambda g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}). \quad (5.4.6)$$

In particular,

$$H_{\mathbf{t}} := \begin{bmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

is contained in the automorphism group of $(Y_{\mathbf{t}}, \mathcal{S}_{\mathbf{t}})$.

5.4.2.c The open subset $Y_{\mathbf{a}}$

The action of $\mathrm{Heis}(3)$ at $o_{\mathbf{a}} = ([e_3], [e_3, e_2]) = \phi_a^{-1}((0, 0) + \mathbb{R}e_2) \in \Omega_a$ is simply transitive, and its orbit $Y_{\mathbf{a}} = \mathrm{Heis}(3) \cdot o_{\mathbf{a}}$ can be described as

$$Y_{\mathbf{a}} = \Omega_a \setminus S_{\alpha, \beta}[e_1] = \phi_a^{-1} \left(\left\{ m + L \mid m \in \mathbb{R}^2, L \in \mathbb{R}\mathbf{P}^1 \setminus \{\mathbb{R}e_1\} \right\} \right).$$

We endow $Y_{\mathbf{a}}$ with the $\mathrm{Heis}(3)$ -invariant enhanced Lagrangian contact structure

$$\mathcal{S}_{\mathbf{a}} = (\theta_{o_{\mathbf{a}}} |_{\mathrm{Heis}(3)})_* \mathcal{S}_{\mathrm{Heis}(3)} \quad (5.4.7)$$

which is compatible with $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$, and whose central distribution is entirely determined by

$$\mathcal{E}_{\mathbf{a}}^c(o_{\mathbf{a}}) = \mathbb{R}Z^\dagger(o_{\mathbf{a}}). \quad (5.4.8)$$

Let us recall that $\mathcal{A}$ is the subgroup of automorphisms of $\mathrm{Heis}(3)$ that moreover preserve $\mathcal{S}_{\mathrm{Heis}(3)}$ (see Paragraph 5.4.1.b). The group of affine automorphisms $L_g \circ \varphi$ of $\mathrm{Heis}(3)$, where $g \in \mathrm{Heis}(3)$ and $\varphi \in \mathcal{A}$, will be seen as a semi-direct subgroup $\mathrm{Heis}(3) \rtimes \mathcal{A}$. With this notation, the isomorphism from $(Y_{\mathbf{a}}, \mathcal{S}_{\mathbf{a}})$ to $\mathrm{Heis}(3)$ given by the orbital map at $o_{\mathbf{a}}$ is equivariant for the identification

$$\begin{bmatrix} \lambda & x & z \\ 0 & \lambda^{-1}\mu^{-1} & y \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \in \mathbf{P}_{min} \mapsto \left(\begin{pmatrix} 1 & \lambda\mu x & \mu^{-1}z \\ 0 & 1 & \mu^{-1}y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \varphi_{\lambda^2\mu, \lambda^{-1}\mu^{-2}} \right) \in \mathrm{Heis}(3) \rtimes \mathcal{A}, \quad (5.4.9)$$

and in particular, $H_{\mathbf{a}} := \mathbf{P}_{min}$ is contained in the automorphism group of $(Y_{\mathbf{a}}, \mathcal{S}_{\mathbf{a}})$.

5.4.3 From the infinitesimal model to the local model

We take back the notations of Theorem A.2. We recall that $\pi_M: \tilde{M} \rightarrow M$ denotes the universal cover of M and that Ω is a dense and open subset of M where $\mathcal{S}$ is locally homogeneous (see Proposition 5.3.2). We will denote $\tilde{\mathcal{S}} = \pi_M^* \mathcal{S} = (\tilde{E}^\alpha, \tilde{E}^\beta, \tilde{E}^c)$, $\tilde{\Omega} = \pi_M^{-1}(\Omega)$, and $\delta: \tilde{M} \rightarrow \mathbf{X}$ a developping map of the $(\mathbf{G}, \mathbf{X})$ -structure of M describing the Lagrangian contact structure $\mathcal{L}$ (see Corollary 5.3.4 and Paragraph 5.2.3.b). We finally choose for this whole section a connected component O of $\tilde{\Omega}$, *i.e.* an open Kill^{loc} -orbit of $\tilde{\mathcal{S}}$.

Our goal in this section is to describe the local model of $\tilde{\mathcal{S}}$ in restriction to O .

5.4.3.a Infinitesimal model

At any point of $\mathbf{X}$, we will identify the Lie algebra of local Killing fields of $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$ with $\mathfrak{g}$ through the fundamental vector fields of the action of $\mathbf{G}$ (see Lemma 5.2.16). Since the developping map δ is a local isomorphism from $\tilde{\mathcal{L}}$ to $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$, it induces at each point $x \in \tilde{M}$ an isomorphism

$$\delta^*: v \in \mathfrak{g} = \mathfrak{kill}_{\mathcal{L}_{\mathbf{X}}}^{loc}(\delta(x)) \mapsto \delta^*v \in \mathfrak{kill}_{\tilde{\mathcal{L}}}^{loc}(x), \quad (5.4.10)$$

of Lie algebras, whose inverse will be denoted by $\delta_*: \mathfrak{kill}_{\tilde{\mathcal{L}}}^{loc}(x) \rightarrow \mathfrak{g}$. For $X \in \mathfrak{kill}_{\tilde{\mathcal{L}}}^{loc}(x)$ and $t \in \mathbb{R}$ for which $\varphi_X^t(x)$ exists, denoting $v = \delta_*[X]_x \in \mathfrak{g}$, we have

$$\delta(\varphi_X^t(x)) = e^{tv} \cdot \delta(x). \quad (5.4.11)$$

Lemma 5.4.1. *There exists a subalgebra $\mathfrak{h}$ of $\mathfrak{g}$ such that*

$$\mathfrak{kill}(O, \tilde{\mathcal{S}}|_O) = (\delta^*\mathfrak{h})|_O = \{(\delta^*v)|_O \mid v \in \mathfrak{h}\}.$$

Moreover, any local Killing field of $\tilde{\mathcal{S}}$ on O extends to the whole Kill^{loc} -orbit O .

Démonstration. It suffices to show that the subalgebra $\mathfrak{h}(x) = \delta_* \mathfrak{kill}_{\tilde{\mathcal{S}}}^{loc}(x)$ is locally constant on O . This will in fact imply by connexity of O that $\mathfrak{h}(x)$ is constant equal to some Lie subalgebra $\mathfrak{h}$ on O , and then $(\delta^*\mathfrak{h})|_O \subset \mathfrak{kill}(O, \tilde{\mathcal{S}}|_O)$. But for $x \in O$, $\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{kill}_{\tilde{\mathcal{S}}}^{loc}(x) \geq \mathfrak{kill}(O, \tilde{\mathcal{S}}|_O)$ (see Lemma 5.2.14), and this inclusion is thus an equality.

For any $x \in O$ there exists an open connected neighbourhood U of x such that any local Killing field of $\tilde{\mathcal{S}}$ at x extends to a Killing field defined on U (see Remark 5.2.15), and for any $y \in U$ we have thus $\mathfrak{h}(x) \subset \mathfrak{h}(y)$. But $\mathfrak{h}(x)$ and $\mathfrak{h}(y)$ have the same dimension since x and y are in the same Kill^{loc} -orbit of $\tilde{\mathcal{S}}$, and this inclusion is thus an equality. This shows that $\mathfrak{h}(x)$ is locally constant and finishes the proof. $\square$

We denote from now on by H the connected Lie subgroup of $\mathbf{G}$ of subalgebra $\mathfrak{h}$. It is not necessarily closed in $\mathbf{G}$, but the action of H on $\mathbf{X}$ is smooth for the structure of immersed submanifold of H .

Lemma 5.4.2. *All the points of $\delta(O)$ are in the same orbit Y under the action of H . In particular, Y is open.*

Démonstration. We consider x and y in O , and we want to find $h \in H$ such that $\delta(y) = h \cdot \delta(x)$. By hypothesis, as x and y are in the same Kill^{loc} -orbit of $\tilde{\mathcal{S}}$, there exists a finite number of points $x_1 = x, \dots, x_n = y$ such that for any $i \leq n-1$ there exists a local Killing field X_i of $\tilde{\mathcal{S}}$ satisfying $x_{i+1} = \varphi_{X_i}^1(x_i)$. According to Lemma 5.4.1, there exists for each i an element $v_i \in \mathfrak{h}$ such that $X_i = \delta^*v_i$, and we have $\delta(x_{i+1}) = e^{v_i} \delta(x_i)$ according to the equation (5.4.11), implying $\delta(y) = e^{v_{n-1}} \dots e^{v_1} \delta(x) \in H \cdot \delta(x)$. $\square$

We choose from now on a point $x \in O$, we denote $x_0 = \delta(x) \in Y$, and we consider the isotropy subalgebra

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{stab}_{\mathfrak{h}}(x_0) := \{v \in \mathfrak{h} \mid v(x_0) = 0\} \quad (5.4.12)$$

of $\mathfrak{h}$ at x_0 , characterized by $\delta^* \mathfrak{i} = \mathfrak{is}_{\tilde{\mathcal{S}}}^{loc}(x)$. Since the orbit Y of x_0 under H is open, $\dim \mathfrak{h} - \dim \mathfrak{i} = 3$, and $\mathfrak{i}$ is non-trivial according to Proposition 5.3.2. We also denote $\mathcal{E}^c(x_0) = D_x \delta(\tilde{E}^c(x))$, and $\mathfrak{h}/\mathfrak{i} = D^\alpha \oplus D^\beta \oplus D^c$ the splitting sent to $T_{x_0}Y = (\mathcal{E}_\alpha \oplus \mathcal{E}_\beta \oplus \mathcal{E}^c)(x_0)$ by the isomorphism $\overline{D}_e \theta_{x_0}$ induced by the orbital map at x_0 .

- Lemma 5.4.3.** 1. The adjoint representation $\overline{\text{ad}}: \mathfrak{i} \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{h}/\mathfrak{i})$ preserves the line D^c in $\mathfrak{h}/\mathfrak{i}$, i.e. for any $v \in \mathfrak{i}$ we have $\overline{\text{ad}}(v)(D^c) \subset D^c$.
2. There exists in the neighbourhood of x_0 an unique H -invariant germ of a smooth one-dimensional distribution $\mathcal{E}^c$ that extends $\mathcal{E}^c(x_0)$ on a neighbourhood of x_0 , and this distribution is everywhere transverse to $\mathcal{E}_\alpha \oplus \mathcal{E}_\beta$.
3. The developping map δ is an isomorphism between the enhanced Lagrangian contact structures $\tilde{\mathcal{S}}$ and $\mathcal{S}_Y := (\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{E}_\beta, \mathcal{E}^c)$, from a neighbourhood of x to a neighbourhood of x_0 .
4. $\mathfrak{h} = \mathfrak{kill}_{\mathcal{S}_Y}^{loc}(x_0)$ and $\mathfrak{i} = \mathfrak{is}_{\mathcal{S}_Y}^{loc}(x_0)$.
5. If $I = \text{Stab}_H(x_0)$ is a connected subgroup of H , then there exists an unique H -invariant smooth one-dimensional distribution $\mathcal{E}^c$ that extends $\mathcal{E}^c(x_0)$ on the whole open orbit Y , and $\mathcal{E}^c$ is transverse to $\mathcal{E}_\alpha \oplus \mathcal{E}_\beta$. Furthermore, $\delta|_O$ is a local isomorphism from $(O, \tilde{\mathcal{S}}|_O)$ to $(Y, \mathcal{S}_Y)$.

Démonstration. 1. For $v \in \mathfrak{i}$, denoting $X = \delta^* v \in \mathfrak{is}_{\tilde{\mathcal{S}}}^{loc}(x)$, equation (5.4.11) implies $\mathcal{E}^c(x_0) = D_{x_0} e^{tv}(\mathcal{E}^c(x_0))$ for any $t \in \mathbb{R}$, and thus $D^c = \overline{\text{Ad}}(e^{tv}) \cdot D^c = \exp(\overline{\text{tad}}(v)) \cdot D^c$. Derivating this last equality at $t = 0$, we obtain $\overline{\text{ad}}(v) \cdot D^c \subset D^c$.

2. The group $I = \text{Stab}_H(x_0)$ and its identity component I^0 are closed in H for its topology of immersed submanifold, and the orbital map at x_0 induces a local diffeomorphism $\bar{\theta}_{x_0}: H/I^0 \rightarrow Y$, equivariant for the action of H . We saw previously that $\overline{\text{Ad}}(\exp(\mathfrak{i}))$ preserves D^c , implying that the subgroup $\{i \in I^0 \mid \overline{\text{Ad}}(i) \cdot D^c = D^c\}$ is equal to I^0 by connexity, i.e. that I^0 preserves D^c . Therefore, H/I^0 supports an unique H -invariant smooth one-dimensional distribution extending D^c , that can be pushed by $\bar{\theta}_{x_0}: H/I^0 \rightarrow Y$, to a H -invariant distribution extending $\mathcal{E}^c(x_0)$ on a neighbourhood of x_0 . Conversely, the pullback of any H -invariant distribution extending $\mathcal{E}^c(x_0)$ on a neighbourhood of x_0 is H -invariant on H/I^0 , which proves the unicity of the germ of $\mathcal{E}^c$. As it is preserved by H , it must remain transverse to $\mathcal{E}_\alpha \oplus \mathcal{E}_\beta$.

3. For y sufficiently close to x , there exists $X \in \mathfrak{kill}(O, \tilde{\mathcal{S}}|_O)$ such that $y = \varphi_X^1(x)$. Denoting $y_0 = \delta(y)$ and $v \in \mathfrak{h}$ such that $\delta^* v = X$, we have $D_{y_0} e^{-v} \circ D_y \delta(\tilde{E}^c(y)) = D_x \delta \circ D_y \varphi_X^{-1}(\tilde{E}^c(y)) = \mathcal{E}^c(x_0)$, implying $D_y \delta(\tilde{E}^c(y)) = \mathcal{E}^c(y_0)$ by H -invariance of $\mathcal{E}^c$.

4. This is a direct consequence of $\delta^* \mathfrak{h} = \mathfrak{kill}_{\tilde{\mathcal{S}}}^{loc}(x)$, $\delta^* \mathfrak{i} = \mathfrak{is}_{\tilde{\mathcal{S}}}^{loc}(x)$, and of the fact that δ is a local isomorphism from $\tilde{\mathcal{S}}$ to $\mathcal{S}_Y$ at x .

5. Concerning the first assertion, the orbital map at x_0 induces a H -equivariant diffeomorphism from H/I to Y , and we saw in the proof of the second assertion that $H/I^0 = H/I$ supports an unique H -invariant distribution extending D^c on H/I^0 , which stays transverse to the contact plane.

The set $\mathcal{E}$ of points $y \in O$ such that δ is a local isomorphism in the neighbourhood of y is open and non-empty, and we only have to prove that $\mathcal{E}$ is closed to conclude by connexity of O . Let $z \in O$ be an adherent point of $\mathcal{E}$, and let us denote $z_0 = \delta(z)$. There exists a point $y \in \mathcal{E}$ sufficiently close to z such that, for some Killing field X of $\tilde{\mathcal{S}}$, $z = \varphi_X^1(y)$. Denoting $v \in \mathfrak{h}$ such that $X = \delta^* v$, we have $D_{z_0} e^{-v} \circ D_z \delta(\tilde{E}^c(z)) = D_y \delta \circ D_z \varphi_X^{-1}(\tilde{E}^c(z)) = \mathcal{E}^c(y_0)$, implying $D_z \delta(\tilde{E}^c(z)) = \mathcal{E}^c(z_0)$ by H -invariance of $\mathcal{E}^c$. By local homogeneity of $\mathcal{S}|_O$, we can reach all the points of some neighbourhood U of z in O by a Killing field, and the same computation as before shows that $\delta|_U$ is a local isomorphism, i.e. that $z \in \mathcal{E}$. $\square$

5.4.3.b Local model of an open Kill^{loc} -orbit

We will call

$$\kappa: (m, D) \in \mathbf{X} \mapsto (D^\perp, m^\perp) \in \mathbf{X} \quad (5.4.13)$$

the *flip diffeomorphism* of the homogeneous model space. This involution switches the distributions $\mathcal{E}_\alpha$ and $\mathcal{E}_\beta$ of the standard Lagrangian contact structure, and is moreover equivariant for the Lie group morphism $\Theta: g \mapsto {}^t g^{-1}$ of $\mathbf{G}$.

Consequently, interverting the distributions E^α and E^β of the Lagrangian contact structure of M is equivalent to composing the developping map δ with κ . At the level of the subalgebra $\mathfrak{h}$ introduced in the previous paragraph, it is equivalent to apply the Lie algebra morphism $D_e \Theta = \theta: A \mapsto -{}^t A$.

Denoting

$$(5.4.14) \quad \begin{cases} \mathfrak{h}_{\mathbf{t}} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -\text{tr}(A) \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{gl}_2 \right\}, \\ \mathfrak{h}_{\mathbf{a}} = \mathfrak{p}_{\min}, \end{cases}$$

we will prove in the next section that :

Proposition 5.4.4. *Up to conjugacy in $\mathbf{G}$ or image by $\theta = -{}^t \cdot$, $\mathfrak{h}$ is equal to $\mathfrak{h}_{\mathbf{t}}$ or $\mathfrak{h}_{\mathbf{a}}$.*

To deduce a local information about $\tilde{\mathcal{S}}|_O$ from this infinitesimal classification, it only remains to look at the action of the connected Lie subgroups $H_{\mathbf{t}}^0 := \text{GL}_2^+(\mathbb{R})$ and $H_{\mathbf{a}}^0 = \mathbf{P}_{\min}^+$ of $\mathbf{G}$, of respective Lie algebras $\mathfrak{h}_{\mathbf{t}}$ and $\mathfrak{h}_{\mathbf{a}}$.

Proposition 5.4.5. *1. $Y_{\mathbf{t}}$ (respectively $Y_{\mathbf{a}}$) is the only open orbit of $H_{\mathbf{t}}^0$ (resp. of $H_{\mathbf{a}}^0$) on $\mathbf{X}$.
2. $\mathcal{S}_{\mathbf{t}}$ (respectively $\mathcal{S}_{\mathbf{a}}$) is the only $H_{\mathbf{t}}^0$ -invariant (resp. $H_{\mathbf{a}}^0$ -invariant) enhanced Lagrangian contact structure of $Y_{\mathbf{t}}$ (resp. $Y_{\mathbf{a}}$) that is compatible with $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$.*

Démonstration. 1. Both of these groups are contained in $\text{Stab}_{\mathbf{G}}[e_1, e_2] = \{ \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid A \in \text{GL}_2(\mathbb{R}), X \in \mathbb{R}^2 \}$, that preserves the surface $S_{\beta, \alpha}[e_1, e_2]$, and whose only open orbit is thus $\Omega_a = \mathbf{X} \setminus S_{\beta, \alpha}[e_1, e_2]$. Any open orbit of one these groups is therefore contained in Ω_a . Since $H_{\mathbf{t}}^0$ preserves the surface $S_{\alpha, \beta}[e_3]$, any open orbit of $H_{\mathbf{t}}^0$ is contained in $Y_{\mathbf{t}} = \mathbf{X} \setminus (S_{\beta, \alpha}[e_1, e_2] \cup S_{\alpha, \beta}[e_3]) = H_{\mathbf{t}}^0 \cdot o_{\mathbf{t}}$. In the same way, since $H_{\mathbf{a}}^0$ preserves $S_{\alpha, \beta}[e_1]$, any open orbit of $H_{\mathbf{a}}^0$ is contained in $Y_{\mathbf{a}} = \mathbf{X} \setminus (S_{\beta, \alpha}[e_1, e_2] \cup S_{\alpha, \beta}[e_1]) = H_{\mathbf{a}}^0 \cdot o_{\mathbf{a}}$.
2. We start with $Y_{\mathbf{t}}$, and we denote

$$\mathfrak{i}_{\mathbf{t}} = \text{Lie}(\text{Stab}_{H_{\mathbf{t}}^0}(o_{\mathbf{t}})) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -2a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\},$$

and

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

The standard Lagrangian contact structure of $\mathbf{X}$ satisfies $\mathbb{R}E^\dagger(o_{\mathbf{t}}) = \mathcal{E}_\alpha(o_{\mathbf{t}})$ and $\mathbb{R}F^\dagger(o_{\mathbf{t}}) = \mathcal{E}_\beta(o_{\mathbf{t}})$, and for $a \in \mathbb{R}$, the adjoint action of the diagonal element $[a, -2a, a]$ of $\mathfrak{i}_{\mathbf{t}}$ has the following diagonal matrix in the basis $(\bar{E}, \bar{F}, \bar{H})$ of $\mathfrak{h}/\mathfrak{i}$:

$$\text{Mat}_{(\bar{E}, \bar{F}, \bar{H})}(\overline{\text{ad}}([a, -2a, a])) = [3a, -3a, 0].$$

Any line D^c of $\mathfrak{h}_{\mathbf{t}}/\mathfrak{i}_{\mathbf{t}}$ that is transverse to $\text{Vect}(\bar{E}, \bar{F})$ has projective coordinates $[x, y, 1]$ in the basis $(\bar{E}, \bar{F}, \bar{H})$ for some $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, and $\overline{\text{ad}}([a, -2a, a])(D^c)$ is therefore generated by the vector of coordinates $(3ax, -3ay, 0)$. The only transverse line stabilized by $\overline{\text{ad}}(\mathfrak{i}_{\mathbf{t}})$ is therefore $\mathbb{R}\bar{H}$, and $\mathcal{E}_{\mathbf{t}}^c$ is the only $H_{\mathbf{t}}^0$ -invariant distribution of $Y_{\mathbf{t}}$ transverse to $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$.

Let us denote

$$\mathfrak{i}_{\mathbf{a}} = \text{Lie}(\text{Stab}_{H_{\mathbf{a}}^0}(o_{\mathbf{a}})) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a-b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

and

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.4.15)$$

We have $\mathbb{R}X^\dagger(o_{\mathbf{a}}) = \mathcal{E}_\alpha(o_{\mathbf{a}})$, $\mathbb{R}Y^\dagger(o_{\mathbf{a}}) = \mathcal{E}_\beta(o_{\mathbf{a}})$, and for $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, the adjoint action of the diagonal element $[a, -a-b, b]$ of $\mathfrak{i}_{\mathbf{a}}$ has the following diagonal matrix in the basis $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ of $\mathfrak{p}_{\min}/\mathfrak{i}_{\mathbf{a}}$

$$\text{Mat}_{(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})}(\overline{\text{ad}}([a, -a-b, b])) = [2a+b, -a-2b, a-b]. \quad (5.4.16)$$

Any line D^c of $\mathfrak{p}_{\min}/\mathfrak{i}_{\mathbf{a}}$ that is transverse to $\text{Vect}(\bar{X}, \bar{Y})$ has projective coordinates of the form $[x, y, 1]$ in the basis $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ for some $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, and $\overline{\text{ad}}([a, -a-b, b])(D^c)$ is therefore generated by the vector of coordinates $((2a+b)x, (-a-2b)y, a-b)$. The only transverse line stabilized by $\overline{\text{ad}}(\mathfrak{i}_{\mathbf{a}})$ is therefore $\mathbb{R}\bar{Z}$, and $\mathcal{E}_{\mathbf{a}}^c$ is the only $H_{\mathbf{a}}^0$ -invariant distribution of $Y_{\mathbf{a}}$ transverse to $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$. $\square$

We can finally describe the local geometry of O , which is a connected component of $\tilde{\Omega} = \pi_M^{-1}(\Omega)$.

Corollary 5.4.6. *Up to inversion of the distributions E^α and E^β , the restriction $\delta|_O$ of the developping map to O is a local isomorphism from $(O, \tilde{\mathcal{S}}|_O)$ to $(Y_{\mathbf{t}}, \mathcal{S}_{\mathbf{t}})$, or to $(Y_{\mathbf{a}}, \mathcal{S}_{\mathbf{a}})$.*

Démonstration. The inversion of the distributions E^α and E^β is equivalent to apply θ to $\mathfrak{h}$, and the conjugation of $\mathfrak{h}$ by $g \in \mathbf{G}$ is equivalent to replace the developping map δ by $g \circ \delta$ (that describes the same $(\mathbf{G}, \mathbf{X})$ -structure on M). According to Proposition 5.4.4, we can thus assume that $\mathfrak{h}$ is equal to $\mathfrak{h}_{\mathbf{t}}$ or $\mathfrak{h}_{\mathbf{a}}$, and the open orbit Y is therefore equal to $Y_{\mathbf{t}}$ (respectively $Y_{\mathbf{a}}$) according to Proposition 5.4.5. Since the isotropy subgroups $\text{Stab}_{H_{\mathbf{t}}^0}(o_{\mathbf{t}})$ and $\text{Stab}_{H_{\mathbf{a}}^0}(o_{\mathbf{a}})$ are connected, there exists a $H_{\mathbf{t}}^0$ -invariant (resp. $H_{\mathbf{a}}^0$ -invariant) enhanced Lagrangian contact structure $\mathcal{S}_Y$ on Y that is compatible with $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$ and such that $\delta|_O$ is a local isomorphism from $(O, \tilde{\mathcal{S}}|_O)$ to $(Y, \mathcal{S}_Y)$ (see Lemma 5.4.3). According to Proposition 5.4.5, $\mathcal{S}_Y$ is equal to $\mathcal{S}_{\mathbf{t}}$ (resp. $\mathcal{S}_{\mathbf{a}}$). $\square$

5.5 Classification of the infinitesimal model

The goal of this section is to prove Proposition 5.4.4. Let us recall that the Lie subalgebras $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{h}$ of $\mathfrak{g}$ are characterized by $(\delta^*\mathfrak{h})|_O = \mathfrak{Kil}(O, \tilde{\mathcal{S}}|_O)$ and $[\delta^*\mathfrak{i}]_x = \mathfrak{is}_{\tilde{\mathcal{S}}}^{\text{loc}}(x)$ (see Lemma 5.4.1 and (5.4.12)).

5.5.1 Algebraic reduction

We first prove some purely algebraic restrictions on $\mathfrak{h}$.

Lemma 5.5.1. *The dimension of $\mathfrak{h}$ is either 4 or 5.*

Démonstration. Possibly translating the developping map by an element of $\mathbf{G}$, we can assume that $x_0 = o = ([e_1], [e_1, e_2]) \in \mathbf{X}$, and since the adjoint action of $\mathbf{P}_{\min}$ on the lines of $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{\min}$ transverse to $\text{Vect}(\bar{e}_\alpha, \bar{e}_\beta)$ is transitive (see Paragraph 5.2.2), we can moreover assume that $D^c = \overline{D_e\theta_o}(\mathbb{R}\bar{e}_0)$ with $e_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. As a consequence, $\mathfrak{i} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}_{\min}$ is contained in

$$\mathfrak{o} = \left\{ v \in \mathfrak{p}_{\min} \mid \overline{\text{ad}}(v)(\mathbb{R}\bar{e}_0) \subset \mathbb{R}\bar{e}_0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & z \\ 0 & -a-b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \mid (a, b, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}. \quad (5.5.1)$$

Denoting $e^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{o}$, we now prove that $\mathfrak{i} \cap \mathbb{R}e^0 = \{0\}$, implying $\dim \mathfrak{i} \leq 2$ and finishing the proof of the Lemma, since $\mathfrak{i}$ is non-zero and $\dim \mathfrak{h} - \dim \mathfrak{i} = 3$.

Let us assume by contradiction that $e^0 \in \mathfrak{i}$. As $\mathfrak{h} + \mathfrak{p}_{\min} = \mathfrak{g}$ (because the orbit of o under H is open), there exists $v \in \mathfrak{h}$ and $w \in \mathfrak{p}_{\min}$ such that $e_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = v + w$. But $[v, e^0] \in \mathfrak{h}$, and $[w, e^0] \in \mathbb{R}e^0 \subset \mathfrak{i}$ since $w \in \mathfrak{p}_{\min}$, finally implying that $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [e_\beta, e^0] = [v, e^0] + [w, e^0] \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}_{\min} = \mathfrak{i} \subset \mathfrak{o}$, which contradicts the description of $\mathfrak{o}$ in (5.5.1). $\square$

Let

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{s} \ltimes_\phi \mathfrak{r}, \quad (5.5.2)$$

be the Levi decomposition of $\mathfrak{h}$, where $\mathfrak{s}$ is a semi-simple subalgebra of $\mathfrak{h}$ (or is trivial if $\mathfrak{h}$ is solvable), $\mathfrak{r}$ is the solvable radical of $\mathfrak{h}$ (it is an ideal of $\mathfrak{h}$), and ϕ is the restriction of the adjoint representation $\text{ad}: \mathfrak{h} \rightarrow \text{Der } \mathfrak{h}$ ($\phi: \mathfrak{s} \rightarrow \text{Der } \mathfrak{r}$ describes the bracket in $\mathfrak{h}$ by $[v, w] = \phi(v)(w)$ for $v \in \mathfrak{s}$ and $w \in \mathfrak{r}$).

A proper semi-simple subalgebra of $\mathfrak{sl}_3$ of dimension less than 5 is three-dimensional, and is thus isomorphic to $\mathfrak{sl}_2$ or to $\mathfrak{so}(3)$. Moreover, up to conjugacy in $\text{SL}_3(\mathbb{R})$, the only embedding of $\mathfrak{so}(3)$ in $\mathfrak{sl}_3$ is the inclusion, and the only embeddings of $\mathfrak{sl}_2$ in $\mathfrak{sl}_3$ are

$$\mathfrak{s}_0 := \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{sl}_2 \right\} \text{ and } \mathfrak{so}(1, 2). \quad (5.5.3)$$

If $\mathfrak{h}$ is not solvable, $\mathfrak{s}$ is thus equal to $\mathfrak{s}_0$, $\mathfrak{so}(1, 2)$ or $\mathfrak{so}(3)$ up to conjugacy in $\text{SL}_3(\mathbb{R})$. The centralizers of these subalgebras in $\mathfrak{sl}_3$ are

$$\begin{cases} C_{\mathfrak{sl}_3}(\mathfrak{so}(1, 2)) = C_{\mathfrak{sl}_3}(\mathfrak{so}(3)) = \{0\}, \\ C_{\mathfrak{sl}_3}(\mathfrak{s}_0) = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & -2x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}. \end{cases} \quad (5.5.4)$$

Lemma 5.5.2. *Up to conjugacy in $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ or image by $\theta = -^t \cdot$, we have the following results.*

1. If $\mathfrak{h}$ is not solvable, then

(a) $\mathfrak{s}$ is equal to $\mathfrak{s}_0$,

(b) and $\mathfrak{h}$ is equal to $\mathfrak{h}_t$ or to

$$\mathfrak{h}_1 = \mathbb{R}^2 \ltimes \mathfrak{sl}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{sl}_2, X \in \mathbb{R}^2 \right\}. \quad (5.5.5)$$

2. If $\mathfrak{h}$ is solvable, then either $\mathfrak{h}$ is contained in $\mathfrak{h}_a = \mathfrak{p}_{\min}$, or equal to

$$\mathfrak{h}_2 = \mathbb{R}^2 \ltimes \mathfrak{sim}(\mathbb{R}^2) = \left\{ \begin{pmatrix} A & -X \\ 0 & -\text{tr } A \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{sim}(\mathbb{R}^2), X \in \mathbb{R}^2 \right\}, \quad (5.5.6)$$

$$\text{where } \mathfrak{sim}(\mathbb{R}^2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Démonstration. 1.a) Let us assume by contradiction that $\mathfrak{s}$ is conjugated to $\mathfrak{so}(1, 2)$ or $\mathfrak{so}(3)$, implying that $C_{\mathfrak{sl}_3} \mathfrak{s} = \{0\}$ according to (5.5.4). Since $\mathfrak{s}$ is simple, if the Lie algebra morphism ϕ is not injective then it is trivial, implying $\mathfrak{r} \subset C_{\mathfrak{sl}_3} \mathfrak{s} = \{0\}$ and thus $\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{s} = 3$ which contradicts Lemma 5.5.1. Our hypothesis on $\mathfrak{s}$ implies therefore that ϕ is injective, and in particular that $\dim \text{Der } \mathfrak{r} \geq \dim \mathfrak{s} = 3$.

Since $\dim \mathfrak{s} = 3$, the solvable radical $\mathfrak{r}$ is of dimension 1 or 2 according to Lemma 5.5.1, and is thus isomorphic to $\mathbb{R}$, $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$, or $\mathbb{R}^2$. But if $\mathfrak{r}$ is isomorphic to $\mathbb{R}$ or $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$, then $\text{Der } \mathfrak{r}$ is of dimension 1 or 2 which contradicts the injectivity of ϕ , and $\mathfrak{r}$ is thus isomorphic to $\mathbb{R}^2$. Since $\mathfrak{so}(3)$ has no non-zero two-dimensional representation, this implies that $\mathfrak{s}$ is conjugated to $\mathfrak{so}(1, 2)$. The connected Lie subgroup H of $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ of Lie algebra $\mathfrak{h}$ contains then $\text{SO}^0(1, 2)$, and its adjoint action induces thus by restriction a two-dimensional representation ϕ of $\text{SO}^0(1, 2)$ on $\mathfrak{r}$ (because $\mathfrak{r}$ is an ideal of $\mathfrak{h}$). Since $\text{SO}^0(1, 2)$ is isomorphic to $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$, ϕ is trivial, implying that ϕ is trivial as well, which contradicts the injectivity of ϕ . Finally, $\mathfrak{s}$ is conjugated to $\mathfrak{s}_0$.

1.b) Let us assume by contradiction that $\mathfrak{r}$ is isomorphic to $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$. Then $\text{Der } \mathfrak{r}$ is two-dimensional

and ϕ is thus non-injective, *i.e.* trivial by simplicity of $\mathfrak{s}_0$. But $\mathfrak{r}$ is then contained in the centralizer of $\mathfrak{s}_0$ which is one-dimensional according to (5.5.4), contradicting the original hypothesis. Therefore, $\mathfrak{r}$ is isomorphic to $\mathbb{R}^2$ or $\mathbb{R}$.

We first assume that $\mathfrak{r}$ is isomorphic to $\mathbb{R}^2$, implying that ϕ is injective (otherwise $\mathfrak{r} \subset C_{\mathfrak{sl}_3} \mathfrak{s}_0$ which is one-dimensional). We use the linear mapping $\text{ev}_{e_3}|_{\mathfrak{r}}: M \in \mathfrak{r} \mapsto M(e_3) \in \mathbb{R}^3$ and discuss according to the dimension of its image $\mathfrak{r}(e_3)$. Let us emphasize that $\mathfrak{r}$ is normalized by the connected Lie subgroup S_0 of $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ of Lie algebra $\mathfrak{s}_0$, and that $\mathfrak{r}(e_3)$ is thus preserved by S_0 . If $\mathfrak{r}(e_3)$ is a plane then $\mathfrak{r}(e_3) = \text{Vect}(e_1, e_2)$ since it is preserved by S_0 , and $\text{ev}_{e_3}|_{\mathfrak{r}}$ is moreover injective. There exists $v \in \mathfrak{r}$ such that $\text{ev}_{e_3}(v) = e_1$, and with $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2$ and $u = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{s}_0$ we have $\text{ev}_{e_3}([u, v]) = e_1 = \text{ev}_{e_3}(v)$. This implies $[u, v] = v$ by injectivity of $\text{ev}_{e_3}|_{\mathfrak{r}}$, and finally $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix}$ for some $x \in \mathbb{R}$. The same reasoning with $w \in \mathfrak{r}$ such that $\text{ev}_{e_3}(w) = e_2$ and $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2$, implies that $w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$ for some $y \in \mathbb{R}$. Since $\mathfrak{r}$ is abelian we have $[v, w] = 0$, which implies $x = y = 0$ and proves that $\mathfrak{r} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R}^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *i.e.* that $\mathfrak{h} = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathfrak{sl}_2$. If $\mathfrak{r}(e_3) = \{0\}$, then $p|_{\mathfrak{r}}$ is injective, implying $p(\mathfrak{r}) = \mathbb{R}^2$. Therefore $\dim(\theta(\mathfrak{r}))(e_3) = 2$ which brings us back to the first case, and $\theta(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathfrak{sl}_2$. Finally, $\dim \mathfrak{r}(e_3) = 1$ is impossible. Otherwise, $\mathfrak{r}' = \ker \text{ev}_{e_3} \cap \mathfrak{r}$ is one-dimensional, and since $p: \begin{pmatrix} B & 0 \\ X & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{r}' \mapsto X \in \mathbb{R}^2$ is injective (because $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{s}_0 = \{0\}$), $p(\mathfrak{r}')$ is a line of $\mathbb{R}^2$. But for $w \in \mathfrak{r}'$ and $v = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{s}_0$ we have $p([v, w]) = -p(w)A$, *i.e.* $p(\mathfrak{r}')$ is preserved by $\mathfrak{sl}_2$ and cannot be a line.

We now assume that $\mathfrak{r}$ is isomorphic to $\mathbb{R}$. Then ϕ is non-injective and thus trivial, implying $\mathfrak{r} \subset C_{\mathfrak{sl}_3} \mathfrak{s}_0$. This inclusion is an equality by equality of dimensions, proving $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{t}}$.

2. As $\mathfrak{h}$ is solvable, it preserves a complex line in $\mathbb{C}^3$ according to Levi's theorem. More precisely, either $\mathfrak{h}$ preserves a real line, or it preserves a plane on which it acts by similarities. The second case implies $\mathfrak{h} \subset \mathbb{R}^2 \rtimes \mathfrak{sim}(\mathbb{R}^2) = \mathfrak{h}_2$ up to conjugacy in $\text{SL}_3(\mathbb{R})$. In the first case we can assume that $\mathfrak{h}$ preserves $\mathbb{R}e_1$, and if the representation $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathfrak{h} \mapsto A \in \mathfrak{gl}_2$ also preserves a real line, then $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{p}_{\min} = \mathfrak{h}_{\mathbf{a}}$ up to conjugacy. If not, then $\theta(\mathfrak{h}) \subset \left\{ \begin{pmatrix} -\text{tr } A & 0 \\ X & A \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{sim}(\mathbb{R}^2), X \in \mathbb{R}^2 \right\}$, according to the same remark than before. This last subalgebra being conjugated to $\mathbb{R}^2 \rtimes \mathfrak{sim}(\mathbb{R}^2) = \mathfrak{h}_2$, this concludes the proof of the lemma. $\square$

5.5.2 Two further properties of the infinitesimal model

We now prove two further properties of the infinitesimal model $(\mathfrak{h}, \mathfrak{i})$, in order to eliminate the “exotic” cases $\mathfrak{h}_1$ and $\mathfrak{h}_2$ that appeared in the algebraic classification of Lemma 5.5.2.

Lemma 5.5.3. *Let $\mathfrak{l}$ be a subalgebra of $\mathfrak{g}$ containing $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{j} = \text{stab}_{\mathfrak{l}}(x_0)$ be the isotropy at x_0 , and D^c be the line of $\mathfrak{l}/\mathfrak{j}$ sent to $\mathcal{E}^c(x_0)$ by the orbital map at x_0 . If $\overline{\text{ad}}(\mathfrak{j})(D^c) \subset D^c$, then $\mathfrak{l} = \mathfrak{h}$.*

Démonstration. Let us denote by L the connected subgroup of $\mathbf{G}$ of Lie algebra $\mathfrak{l}$, and by J^0 the identity component of $J = \text{Stab}_L(x_0)$. As $\overline{\text{ad}}(\mathfrak{j})$ preserves D^c , $\overline{\text{Ad}}(\exp(\mathfrak{j}))$ preserves D^c , and the subgroup of elements $j \in J^0$ such that $\overline{\text{Ad}}(j)$ preserves D^c is thus equal to J^0 by connexity. The construction made in the second assertion of Lemma 5.4.3 is thus valid for L/J^0 , and proves the existence of an unique L -invariant enhanced Lagrangian contact structure $\mathcal{S}'_Y$ extending $(\mathcal{E}_\alpha(x_0), \mathcal{E}_\beta(x_0), \mathcal{E}^c(x_0))$ in the neighbourhood of x_0 . As $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{l}$, $H \subset L$, and $\mathcal{S}'_Y$ is thus H -invariant, implying $\mathcal{S}'_Y = \mathcal{S}_Y$ by the unicity of such a structure. Therefore $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{fill}_{\mathcal{S}_Y}^{\text{loc}}(x_0) = \mathfrak{h}$, which concludes the proof. $\square$

Lemma 5.5.4. *Let us assume that $\mathfrak{i}$ is one-dimensional, and let v be a non-zero element of $\mathfrak{i}$. Then the eigenvalues of $\overline{\text{ad}}(v) \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h}/\mathfrak{i})$ with respect to the eigenlines D^α and D^β are non-zero.*

Démonstration. We already know that $\overline{\text{ad}}(\mathfrak{i})$ is diagonalizable with eigenlines D^α , D^β , and D^c (see Lemma 5.4.3). The proof is the same for the eigenvalues of both eigenlines D^α and D^β , and we only do it for D^α . By density of $\text{Rec}(f) \cap \text{Rec}(f^{-1})$ in M (see the introduction of Section

5.3), there exists $x \in O$ such that $\bar{x} = \pi_M(x) \in \text{Rec}(f) \cap \text{Rec}(f^{-1})$, and possibly replacing f by f^{-1} , we have $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|D_{\bar{x}} f^n|_{E^\alpha(\bar{x})}\|_M = 0$ for a given Riemannian metric that we fix on M .

By hypothesis on $\bar{x}$, there exists a sequence (γ_k) in $\pi_1(M)$ and a strictly increasing sequence (n_k) of integers such that $\gamma_k \tilde{f}^{n_k}(x)$ converges to x , and we can moreover assume up to extraction that $x_k \in O$ for any k , implying that $\gamma_k \tilde{f}^{n_k}$ preserves O . Endowing $\tilde{M}$ with the pullback $\tilde{\mu}_M$ of the Riemannian metric of M , we have $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|D_x(\gamma_k \tilde{f}^{n_k})|_{\tilde{E}^\alpha(x)}\|_{\tilde{\mu}_M} = 0$ (since $\pi_1(M)$ acts by isometries).

Liouville's theorem 5.2.9 for the homogeneous model space $(\mathbf{X}, \mathcal{L}_{\mathbf{X}})$ implies the existence of a unique sequence (g_k) in $\mathbf{G}$ satisfying

$$\delta \circ \gamma_k \tilde{f}^{n_k} = g_k \circ \delta \text{ on a neighbourhood of } x. \quad (5.5.7)$$

Denoting $x_0 = \delta(x)$, $g_k \cdot x_0 = \delta \circ \gamma_k \tilde{f}^{n_k}(x) \in Y = H \cdot x_0$ converges to x_0 , and there exists thus a sequence $h_k \in H$ converging to the identity in $\mathbf{G}$ and such that $h_k \cdot x_0 = g_k \cdot x_0$. Since δ is a local isomorphism from $\tilde{S}|_O$ to S_Y on a neighbourhood of x , the equation (5.5.7) defining g_k shows that g_k preserves S_Y on a neighbourhood of x_0 . By H -invariance of S_Y , $i_k = h_k^{-1} g_k$ also preserves S_Y , and i_k is thus contained in the closed subgroup

$$I := \{i \in \text{Stab}_{\mathbf{G}}(x_0) \mid i \text{ preserves } S_Y \text{ on a neighbourhood of } x_0\}$$

of $\mathbf{G}$. The Lie algebra of I is equal to $\mathfrak{i}$ because $\mathfrak{is}_{S_Y}^{\text{loc}}(x_0) = \mathfrak{i}$ (see Lemma 5.4.3).

Fact. $I = \{i \in \text{Stab}_{\mathbf{G}}(x_0) \mid \text{Ad}(i) \cdot \mathfrak{h} = \mathfrak{h} \text{ and } \overline{\text{Ad}}(i) \cdot D^c = D^c\}$. In particular I is algebraic and has a finite number of connected components.

Démonstration. For $i \in I$ and $v \in \mathfrak{h}$, the relation $D_{x_0} i \circ D_e \theta_{x_0} = D_e \theta_{x_0} \circ \text{Ad}(i)$ implies $i^{-1*} v^\dagger = (\text{Ad}(i) \cdot v)^\dagger$. Since i is a local automorphism of S_Y and $v^\dagger$ a Killing field of S_Y , $(\text{Ad}(i) \cdot v)^\dagger$ is also a Killing field of S_Y , implying $\text{Ad}(i) \cdot v \in \mathfrak{h}$ since $\mathfrak{kill}_{S_Y}^{\text{loc}}(x_0) = \mathfrak{h}^\dagger$ (see Lemma 5.4.3). Moreover, $D_{x_0} i(\mathcal{E}_{x_0}^c) = \mathcal{E}_{x_0}^c$ implies $\overline{\text{Ad}}(i) \cdot D^c = D^c$.

Let us conversely assume that $i \in \text{Stab}_{\mathbf{G}}(x_0)$ satisfies $\text{Ad}(i) \cdot \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ and $\overline{\text{Ad}}(i) \cdot D^c = D^c$. We consider $v \in \mathfrak{h}$ sufficiently close to 0, such that with $h = e^v \in H$ and $y = h \cdot x_0 \in Y$, S_Y is defined at y . Since $\overline{\text{Ad}}(i) \cdot D^c = D^c$, $D_{x_0} L_i(\mathcal{E}^c(x_0)) = \mathcal{E}^c(x_0)$, and $h' := i h i^{-1} = e^{\text{Ad}(i) \cdot v} \in H$ because $\text{Ad}(i) \cdot \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$. By H -invariance of $\mathcal{E}^c$, we obtain $D_y i(\mathcal{E}^c(y)) = D_{x_0} h' \circ D_{x_0} i(\mathcal{E}^c(x_0)) = \mathcal{E}^c(i \cdot y)$, proving that $i \in I$. $\square$

We can thus assume up to extraction that (i_k) lies in a given connected component of I , and there exists then $g \in I$ such that $j_k = g i_k$ is contained in the identity component I^0 . We endow $\mathbf{X}$ with a Riemannian metric $\mu_{\mathbf{X}}$, and denote by $\tilde{\mu}_{\mathbf{X}} = \delta^* \mu_{\mathbf{X}}$ its pullback on $\tilde{M}$. Since $(\gamma_k \tilde{f}^{n_k}(x))$ is relatively compact in $\tilde{M}$, the metrics $\tilde{\mu}_M$ and $\tilde{\mu}_{\mathbf{X}}$ are equivalent in restriction to $(\gamma_k \tilde{f}^{n_k}(x))$, and the limit stated above for $\tilde{\mu}_M$ is thus valid for $\tilde{\mu}_{\mathbf{X}}$, implying $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|D_{x_0} g_k|_{\mathcal{E}_\alpha(x_0)}\|_{\mu_{\mathbf{X}}} = 0$. As $j_k = g h_k^{-1} g_k$ with $(g h_k^{-1})$ relatively compact in $\mathbf{G}$, we also have $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|D_{x_0} j_k|_{\mathcal{E}_\alpha(x_0)}\|_{\mu_{\mathbf{X}}} = 0$.

I^0 being connected and one-dimensional, there exists a non-zero $v \in \mathfrak{i}$ and a sequence $t_k \in \mathbb{R}$ such that $i_k = \exp(t_k v)$, implying that $D_{x_0} j_k$ is conjugated by the orbital map to $\exp(t_k \overline{\text{ad}}(v))$, and thus $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\exp(t_k \overline{\text{ad}}(v))|_{D^\alpha}\| = 0$. Denoting by λ_α the eigenvalue of $\overline{\text{ad}}(v)$ with respect to D^α , $\exp(t_k \overline{\text{ad}}(v))|_{D^\alpha} = \exp(\lambda_\alpha t_k) \text{id}_{D^\alpha}$ implies then $\lambda_\alpha \neq 0$. $\square$

5.5.3 End of the classification

We now put into our analysis the geometrical and dynamical properties of $\mathfrak{h}$ proved above.

Lemma 5.5.5. $\mathfrak{h}_1 = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathfrak{sl}_2$ does not satisfy the geometrical conditions of Lemma 5.4.3.

Démonstration. The only open orbit of the connected Lie subgroup H_1 of $\mathbf{G}$ of Lie algebra $\mathfrak{h}_1$ is the open subset Ω_a defined in Paragraph 5.4.2.a. If $H_1 \cdot x_0$ is open for some point $x_0 \in \mathbf{X}$, we can thus assume that $x_0 = ([e_3], [e_3, e_1]) \in \Omega_a$ up to conjugacy in H_1 , implying that $\mathfrak{i}_1 = \text{Lie}(\text{Stab}_{H_1}(x_0)) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Denoting $v_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ and $v_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}_1$, we have $\mathbb{R}v_\alpha^\dagger(x_0) = \mathcal{E}_\alpha(x_0)$ and $\mathbb{R}v_\beta^\dagger(x_0) = \mathcal{E}_\beta(x_0)$, and defining $v_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ and $i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{i}_1$, the matrix of $\overline{\text{ad}}(i)$ in the basis $(\bar{v}_\alpha, \bar{v}_\beta, \bar{v}_c)$ of $\mathfrak{h}_1/\mathfrak{i}_1$ is

$$\text{Mat}_{(\bar{v}_\alpha, \bar{v}_\beta, \bar{v}_c)} \overline{\text{ad}}(i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Any line of $\mathfrak{h}_1/\mathfrak{i}_1$ that is transverse to $\text{Vect}(\bar{v}_\alpha, \bar{v}_\beta)$ has projective coordinates $[a, b, 1]$ in the basis $(\bar{v}_\alpha, \bar{v}_\beta, \bar{v}_c)$ for some $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, and $\overline{\text{ad}}(i)(D^c)$ has thus coordinates $[0, 1, 0]$. This proves that $\overline{\text{ad}}(i)(D^c) \not\subset D^c$, i.e. that $\mathfrak{h}_1$ does not satisfy the geometrical conditions of Lemma 5.4.3. $\square$

Lemma 5.5.6. *If $\mathfrak{h}$ is a four-dimensional subalgebra of $\mathfrak{h}_a = \mathfrak{p}_{\min}$, or is equal to $\mathfrak{h}_2 = \mathbb{R}^2 \rtimes \text{sim}(\mathbb{R}^2)$, then $\mathfrak{h}$ does not respect both the geometrical conditions of Lemma 5.4.3 and the dynamical condition of Lemma 5.5.4.*

Démonstration. We first assume that $\mathfrak{h}$ is a four-dimensional subalgebra of $\mathfrak{p}_{\min}$. Therefore $H \subset \mathbf{P}_{\min}$, and if $H \cdot x_0$ is open then $x_0 \in Y_a$ according to Proposition 5.4.5. We can thus assume up to conjugacy in H that $x_0 = o_a = ([e_3], [e_3, e_2]) \in Y_a$, implying that

$$\mathfrak{i} = \text{stab}_{\mathfrak{h}}(o_a) \subset \mathfrak{i}_a = \text{stab}_{\mathfrak{p}_{\min}}(o_a) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a-b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Let $D^c \subset \mathfrak{h}/\mathfrak{i}$ be a line preserved by $\overline{\text{ad}}(i)$, and such that $D_e \bar{\theta}_{o_a}(D^c)$ is transverse to $(\mathcal{E}_\alpha \oplus \mathcal{E}_\beta)(o_a)$. Since $\mathfrak{h}$ is a proper subalgebra of $\mathfrak{p}_{\min}$, Lemma 5.5.3 implies that $\overline{\text{ad}}(\mathfrak{i}_a)(D^c) \not\subset D^c$, and thus that $\text{stab}_{\mathfrak{i}_a}(D^c) = \left\{ v \in \mathfrak{i}_a \mid \overline{\text{ad}}(v)(D^c) \subset D^c \right\} = \mathfrak{i}$ is one-dimensional. Any line D^c of $\mathfrak{p}_{\min}/\mathfrak{i}_a$ which is transverse to the contact plane has projective coordinates $[x, y, 1]$ in the basis $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ of $\mathfrak{p}_{\min}/\mathfrak{i}_a$, for some $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (see Proposition 5.4.6), and according to (5.4.16), we have :

- if $x = y = 0$, i.e. $D^c = \mathbb{R}\bar{Z}$, then $\text{stab}_{\mathfrak{i}_a}(\mathbb{R}\bar{Z}) = \mathfrak{i}_a$;
- if $x = 0$ and $y \neq 0$, i.e. $D^c = D_Y^c(t) := \mathbb{R}(\bar{Z} + t\bar{Y})$ for some $t \in \mathbb{R}$, then $\text{stab}_{\mathfrak{i}_a}(D_Y^c(t))$ is equal to the line $\mathfrak{i}_Y$ generated by the diagonal matrix $[1, 1, -2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;
- if $x \neq 0$ and $y = 0$, i.e. $D^c = D_X^c(t) := \mathbb{R}(\bar{Z} + t\bar{X})$ for some $t \in \mathbb{R}$, then $\text{stab}_{\mathfrak{i}_a}(D_X^c(t))$ is equal to the line $\mathfrak{i}_X$ generated by the diagonal matrix $[-2, 1, 1] = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- if $x \neq 0$ and $y \neq 0$, then $\text{stab}_{\mathfrak{i}_a}(D^c) = \{0\}$.

The only transverse lines with a one-dimensional stabilizer being $D_X^c(t)$ and $D_Y^c(t)$, $\mathfrak{i}$ is equal to $\mathfrak{i}_X$ or $\mathfrak{i}_Y$. But $\text{Mat}_{(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})} \overline{\text{ad}}([1, 1, -2]) = [0, 3, 3]$ and $\text{Mat}_{(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})} \overline{\text{ad}}([-2, 1, 1]) = [-3, 0, -3]$ according to (5.4.16), i.e. the elements of $\mathfrak{i}_X$ and $\mathfrak{i}_Y$ have zero eigenvalue with respect to either the α or the β -direction, proving that $\mathfrak{h}$ does not satisfy the dynamical condition of Lemma 5.5.4.

In the same way, if $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_2$, then we can assume that $x_0 = o_a \in \Omega_a$ up to conjugacy in $H_2 = \mathbb{R}^2 \rtimes \text{Sim}(\mathbb{R}^2)$, implying $\mathfrak{i}_2 = \text{stab}_{\mathfrak{h}_2}(o_a) = \mathfrak{i}_Y$ defined above. We saw that the elements of $\mathfrak{i}_Y$ have zero eigenvalue with respect to the α -direction, proving that $\mathfrak{h}_2$ does not satisfy the dynamical condition of Lemma 5.5.4. $\square$

Proposition 5.4.4 now directly follows from Lemmas 5.5.2, 5.5.5 and 5.5.6.

5.6 Global structure

From the local model that we determined for the enhanced Lagrangian contact structure $\mathcal{S}$, we will now deduce a global information.

5.6.1 Local homogeneity of the enhanced Lagrangian contact structure

So far, we only have informations on a dense and open subset Ω of M (see Propositions 5.3.2 and 5.4.6), and the first step to obtain a global information is to prove the following.

Proposition 5.6.1. *The open dense subset Ω equals M , i.e. $\mathcal{S}$ is locally homogeneous on M .*

We will denote in this paragraph by $(\mathcal{C}, \varphi) = (\hat{M}, \omega, \varphi)$ the normal generalized Cartan geometry of the enhanced Lagrangian contact structure $\tilde{\mathcal{S}} = \pi_M^* \mathcal{S}$ of $\tilde{M}$, and by $\mathcal{K}^{tot}: \hat{M} \rightarrow W_{\mathcal{K}^{tot}}$ its total curvature (see Paragraphs 5.2.3.d and 5.2.4.b). We recall that $\tilde{\Omega} = \pi_M^{-1}(\Omega) \subset \tilde{M}$, and that the projection of the Cartan bundle is denoted by $\pi: \hat{M} \rightarrow \tilde{M}$.

We also recall that the local homogeneity of $\tilde{\mathcal{S}}|_{\tilde{\Omega}}$ means that the connected components of $\tilde{\Omega}$ are exactly its Kill^{loc} -orbits (see Definition 5.3.1). Since the rank of $D\mathcal{K}^{tot}$ is invariant by the right action of $\mathbf{P}_{min}$ and by the flow of Killing fields, this shows that $\text{rk}(D\mathcal{K}^{tot})$ is constant over any connected component of $\tilde{\Omega}$.

We choose for this whole paragraph a connected component O of $\tilde{\Omega}$ (i.e. a Kill^{loc} -orbit of $\tilde{\mathcal{S}}$) such that $\text{rk}(D_{\hat{x}}\mathcal{K}^{tot})$ for $\hat{x} \in \pi^{-1}(O)$ is maximal among $\text{rk}(D_{\hat{x}}\mathcal{K}^{tot})$ for $\hat{x} \in \pi^{-1}(\tilde{\Omega})$. We will denote by $(Y, \mathcal{S}_Y)$ the local model of $\tilde{\mathcal{S}}|_O$, equal to $(Y_{\mathbf{t}}, \mathcal{S}_{\mathbf{t}})$ or $(Y_{\mathbf{a}}, \mathcal{S}_{\mathbf{a}})$ and such that $\delta|_O: (O, \tilde{\mathcal{S}}|_O) \rightarrow (Y, \mathcal{S}_Y)$ is a local isomorphism (see Corollary 5.4.6). We still denote by $\mathfrak{h}$ the subalgebra of Killing fields of $\mathcal{S}_Y$, respectively equal to $\mathfrak{h}_{\mathbf{t}}$ or $\mathfrak{h}_{\mathbf{a}}$ (see Proposition 5.4.4), and by H the corresponding Lie connected subgroup

$$H_{\mathbf{t}}^0 = \begin{bmatrix} \text{GL}_2^+(\mathbb{R}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ or } H_{\mathbf{a}}^0 = \mathbf{P}_{min}^+,$$

of $\mathbf{G}$ of Lie algebra $\mathfrak{h}$, preserving $\mathcal{S}_Y$.

We recall that $\delta: \tilde{M} \rightarrow \mathbf{X}$ denotes the developping map of the $(\mathbf{G}, \mathbf{X})$ -structure of M describing the flat Lagrangian contact structure $\mathcal{L}$ (see Proposition 5.3.4).

Lemma 5.6.2. *The boundary of O is mapped to $\mathbf{X} \setminus Y$ by the developping map : $\delta(\partial O) \subset \mathbf{X} \setminus Y$.*

Démonstration. Let us assume by contradiction that there exists $x \in \partial O$ such that $x_0 = \delta(x) \in Y$. The pullback $\tilde{\mathfrak{h}} := \delta^* \mathfrak{h} = \{\delta^* v \mid v \in \mathfrak{h}\}$ is a subalgebra of vector fields on $\tilde{M}$, such that $\mathfrak{Kill}(O, \tilde{\mathcal{S}}|_O) = \tilde{\mathfrak{h}}|_O$ according to Lemma 5.4.1. As $x_0 \in Y$, there exists an open and convex neighbourhood W_0 of 0 in $\mathfrak{h}$ such that $V = \exp(W_0) \cdot x_0 \subset Y$ is an open neighbourhood of x_0 . Denoting $W = \delta^* W_0 \subset \tilde{\mathfrak{h}}$, $U = \{\varphi_X^1(x) \mid X \in W\}$ is thus an open neighbourhood of x , and possibly shrinking W_0 , we can moreover assume that $\delta|_U$ is a diffeomorphism from U to V . As $x \in \partial O$, there exists $y \in U \cap O$, and $X \in W$ such that $x = \varphi_X^1(y)$, implying that $\varphi_X^t(y) \in U$ for any $t \in [0; 1]$, and thus $\delta(\varphi_X^t(y)) \in V \subset Y$. Denoting $t_0 = \inf \{t \in [0; 1] \mid \varphi_X^t(y) \in \partial O\}$, $t_0 > 0$ because O is open, and $\varphi_X^{t_0}(y) \in \partial O$ because ∂O is closed. Replacing x by $\varphi_X^{t_0}(y)$ and X by $\frac{X}{t_0} \in W$, we finally have $y \in O$, $x = \varphi_X^1(y) \in \partial O$, and for any $t \in [0; 1[$, $\varphi_X^t(y) \in O$, with $X|_O \in \text{Kill}(O, \tilde{\mathcal{S}}|_O)$.

Choosing $\hat{y} \in \pi^{-1}(y)$, the invariance of $D^1\mathcal{K}^{tot}$ by local automorphisms and the fact that φ_X^t is a local automorphism of $(\mathcal{C}, \varphi)$ on the neighbourhood of y for any $t \in [0; 1[$ implies $D^1\mathcal{K}^{tot}(\varphi_X^t(\hat{y})) = D^1\mathcal{K}^{tot}(\hat{y})$ for any $t \in [0; 1[$. Denoting $\hat{x} = \varphi_X^1(\hat{y})$, we obtain $D^1\mathcal{K}^{tot}(\hat{x}) = D^1\mathcal{K}^{tot}(\hat{y})$ by continuity, i.e. $\mathcal{K}^{tot}(\hat{x}) = \mathcal{K}^{tot}(\hat{y})$ and $D_{\hat{x}}\mathcal{K}^{tot} \circ \omega_{\hat{x}}^{-1} = D_{\hat{y}}\mathcal{K}^{tot} \circ \omega_{\hat{y}}^{-1}$.

This implies $\hat{x} \in \hat{M}^{int}$. In fact as the rank of $D\mathcal{K}^{tot}$ can only increase locally, there is an open neighbourhood $\mathcal{U}$ of $\hat{x}$ where the rank of $D\mathcal{K}^{tot}$ is greater than $\text{rk}(D_{\hat{x}}\mathcal{K}^{tot})$. Let us assume by contradiction that the open subset of $\mathcal{U}$ where $\text{rk}(D_{\hat{z}}\mathcal{K}^{tot}) > \text{rk}(D_{\hat{x}}\mathcal{K}^{tot})$ is non-empty. Then by density of $\pi^{-1}(\tilde{\Omega})$, there exists $\hat{z} \in \pi^{-1}(\tilde{\Omega})$ such that $\text{rk}(D_{\hat{z}}\mathcal{K}^{tot}) > \text{rk}(D_{\hat{x}}\mathcal{K}^{tot})$. But $\text{rk}(D_{\hat{x}}\mathcal{K}^{tot}) = \text{rk}(D_{\hat{y}}\mathcal{K}^{tot})$ because $D^1\mathcal{K}^{tot}(\hat{x}) = D^1\mathcal{K}^{tot}(\hat{y})$, and thus $\text{rk}(D_{\hat{z}}\mathcal{K}^{tot}) > \text{rk}(D_{\hat{y}}\mathcal{K}^{tot})$ with $\hat{y} \in \pi^{-1}(O)$, which contradicts our hypothesis of maximality of $\text{rk}(D\mathcal{K}^{tot})$ on O . Therefore $\text{rk}(D\mathcal{K}^{tot})$ is constant on the open neighbourhood $\mathcal{U}$ of $\hat{x}$, proving that $\hat{x} \in \hat{M}^{int}$ according to Integrability theorem 5.2.17.

As the Kill^{loc} -orbit O of y is open, $\omega_{\hat{y}}^{-1}(\mathfrak{p}_{min}) + \text{Ker}(D_{\hat{y}}\mathcal{K}^{tot}) = T_{\hat{y}}\hat{M}$, and therefore $\omega_{\hat{x}}^{-1}(\mathfrak{p}_{min}) + \text{Ker}(D_{\hat{x}}\mathcal{K}^{tot}) = T_{\hat{x}}\hat{M}$ because $D_{\hat{x}}\mathcal{K}^{tot} \circ \omega_{\hat{x}}^{-1} = D_{\hat{y}}\mathcal{K}^{tot} \circ \omega_{\hat{y}}^{-1}$. Since $\hat{x} \in \hat{M}^{int}$, for any $v \in \text{Ker}(D_{\hat{x}}\mathcal{K}^{tot})$ there is a local Killing field X of $\tilde{\mathcal{S}}$ defined in the neighbourhood of x such that $\hat{X}_{\hat{x}} = v$. But $\omega_{\hat{x}}^{-1}(\mathfrak{p}_{min}) + \text{Ker}(D_{\hat{x}}\mathcal{K}^{tot}) = T_{\hat{x}}\hat{M}$, and we thus have $\{X_x \mid X \in \mathfrak{kill}_{\tilde{\mathcal{S}}}^{loc}(x)\} = T_x\tilde{M}$, implying that the Kill^{loc} -orbit of x is open. Since $x \in \partial O$, the Kill^{loc} -orbit of x intersects thus the Kill^{loc} -orbit O , i.e. $x \in O$, which contradicts our initial hypothesis. This contradiction concludes the proof of the lemma. $\square$

Lemma 5.6.2 allows us to reduce the study of the central direction $\tilde{E}^c$ on the boundary of O , to the study of the central direction $\mathcal{E}^c$ on the boundary of Y . We first do some geometrical remarks about the open subsets $Y_{\mathbf{a}}$ and $Y_{\mathbf{t}}$ of $\mathbf{X}$, defined in Paragraphs 5.4.2.b and 5.4.2.c.

Let us recall that, denoting $D_{\infty} = [e_1, e_2]$, $m_{\mathbf{t}} = [e_3]$ and $m_{\mathbf{a}} = [e_1]$, we have

$$Y_{\mathbf{t}} = \mathbf{X} \setminus (S_{\beta, \alpha}(D_{\infty}) \cup S_{\alpha, \beta}(m_{\mathbf{t}})) \text{ and } Y_{\mathbf{a}} = \mathbf{X} \setminus (S_{\beta, \alpha}(D_{\infty}) \cup S_{\beta, \alpha}(m_{\mathbf{a}})).$$

In particular, for $\varepsilon = \mathbf{a}$ and $\mathbf{t} : \mathbf{X} \setminus Y_{\varepsilon} = \partial Y_{\varepsilon} = S_{\beta, \alpha}(D_{\infty}) \cup S_{\alpha, \beta}(m_{\varepsilon})$.

We define in both cases

$$\mathcal{G} := \{x \in \partial Y \mid \mathcal{C}_{\alpha}(x) \not\subset \partial Y \text{ or } \mathcal{C}_{\beta}(x) \not\subset \partial Y\}.$$

It is easy to check that for $\varepsilon = \mathbf{a}$ and $\mathbf{t}$, we have

$$\mathcal{G}_{\varepsilon} = \partial Y_{\varepsilon} \setminus \{\mathcal{C}_{\beta}(D_{\infty}) \cup \mathcal{C}_{\alpha}(m_{\varepsilon}) \cup (S_{\beta, \alpha}(D_{\infty}) \cap S_{\alpha, \beta}(m_{\varepsilon}))\},$$

and that for any $x \in \mathcal{G}$, if $\mathcal{C}^{\varepsilon}(x) \not\subset \partial Y$ for $\varepsilon = \alpha$ or β , then $\mathcal{C}^{\varepsilon}(x) \setminus \{x\} \subset Y$.

We have $S_{\beta, \alpha}(D_{\infty}) \cap S_{\alpha, \beta}(m_{\mathbf{a}}) = \mathcal{C}_{\beta}(D_{\infty}) \cup \mathcal{C}_{\alpha}(m_{\mathbf{a}})$, and $S_{\beta, \alpha}(D_{\infty}) \cap S_{\alpha, \beta}(m_{\mathbf{t}})$ is equal to the chain defined by $(m_{\mathbf{t}}, D_{\infty})$, denoted by $\mathcal{C}(m_{\mathbf{t}}, D_{\infty})$ and defined as follows :

$$\mathcal{C}(m_{\mathbf{t}}, D_{\infty}) := \{(m, [m, m_{\mathbf{t}}]) \mid m \in D_{\infty}\}.$$

Finally, we will use the following description of the respective orbits of H on $\mathcal{G}$:

1. the orbits of $H_{\mathbf{t}}^0$ on $\mathcal{G}_{\mathbf{t}}$ are $\mathcal{G}_{\mathbf{t}}^1 = S_{\alpha, \beta}(m_{\mathbf{t}}) \setminus (\mathcal{C}_{\alpha}(m_{\mathbf{t}}) \cup \mathcal{C}(m_{\mathbf{t}}, D_{\infty}))$ where $\mathcal{C}_{\alpha}(x) \setminus \{x\} \subset Y_{\mathbf{t}}$, and $\mathcal{G}_{\mathbf{t}}^2 = S_{\beta, \alpha}(D_{\infty}) \setminus (\mathcal{C}_{\beta}(D_{\infty}) \cup \mathcal{C}(m_{\mathbf{t}}, D_{\infty}))$ where $\mathcal{C}_{\beta}(x) \setminus \{x\} \subset Y_{\mathbf{t}}$;
2. the orbits of $H_{\mathbf{a}}^0$ on $\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$ are $\mathcal{G}_{\mathbf{a}}^1 = S_{\alpha, \beta}(m_{\mathbf{a}}) \setminus (\mathcal{C}_{\alpha}(m_{\mathbf{a}}) \cup \mathcal{C}_{\beta}(D_{\infty}))$ where $\mathcal{C}_{\alpha}(x) \setminus \{x\} \subset Y_{\mathbf{a}}$ and $\mathcal{G}_{\mathbf{a}}^2 = S_{\beta, \alpha}(D_{\infty}) \setminus (\mathcal{C}_{\alpha}(m_{\mathbf{a}}) \cup \mathcal{C}_{\beta}(D_{\infty}))$ where $\mathcal{C}_{\beta}(x) \setminus \{x\} \subset Y_{\mathbf{a}}$.

We will now prove that the central direction $\mathcal{E}^c$ degenerates along the α and β -circles when converging to a point of $\mathcal{G}$.

Lemma 5.6.3. *Let $\gamma : [0; 1] \rightarrow \mathbf{X}$ be a smooth path such that $\gamma([0; 1]) \subset Y$, $x = \gamma(0) \in \mathcal{G}$, and $\gamma([0; 1])$ is entirely contained in $\mathcal{C}_{\alpha}(x)$, or entirely contained in $\mathcal{C}_{\beta}(x)$. Then $\mathcal{E}^c(\gamma(t))$ converges at $t = 0$ to a line contained in $(\mathcal{E}_{\alpha} \oplus \mathcal{E}_{\beta})(x)$.*

Démonstration. As the action of H on Y preserves $\mathcal{E}^c$, it will be sufficient to prove this result for one point of each of the two orbits of H on $\mathcal{G}$ described above, in each of the two cases $Y_{\mathbf{t}}$ or $Y_{\mathbf{a}}$. We thus have only four cases to handle, and we saw that in each case, either $\mathcal{C}_{\alpha}(x) \setminus \{x\} \subset Y$ and $\mathcal{C}_{\beta}(x) \subset \partial Y$, or the contrary. We thus have only one possibility to consider for γ in each of these four cases, either that $\gamma([0; 1]) \subset \mathcal{C}_{\alpha}(x)$, or that $\gamma([0; 1]) \subset \mathcal{C}_{\beta}(x)$. To clarify our strategy, let x be a point of $\mathcal{G}_{\mu}^i$ for $\mu = \mathbf{t}$ or $\mathbf{a}$ and $i = 1$ or 2 , and let us consider the following data :

- a one-parameter subgroup $\{g^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ of $\mathbf{G}$ such that, denoting $x(t) = g^t \cdot x$, we have $\{x(t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \mathcal{C}^{\varepsilon}(x) \setminus \{y\}$, with $y \in \mathcal{C}^{\varepsilon}(x) \cap Y$, and $\varepsilon = \alpha$ or β according to the case considered,
- a one-parameter subgroup $\{h^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ of H such that $g^t \cdot x = x(t) = h^{t^{-1}} \cdot y$ for any $t \in \mathbb{R}^*$,
- A in $\mathfrak{g}$ such that $D_e \theta_y(\mathbb{R}A) = \mathcal{E}^c(y)$, where $\theta_y : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{X}$ is the orbital map at y ,

– and $g_0 \in \mathbf{G}$ such that $g_0 \cdot x = o$ where $o = ([e_1], [e_1, e_2])$ is the usual base-point of $\mathbf{X}$. Then for any $t \in \mathbb{R}^*$ we have $D_{x(t)}(g_0 g^{-t})(\mathcal{E}^c(x(t))) = D_e \theta_o(\mathbb{R} \text{Ad}(g_0 g^{-t} h^{t^{-1}}) \cdot A)$. Denoting by $p: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{\min}$ the canonical projection, let us assume that $p(\mathbb{R} \text{Ad}(g_0 g^{-t} h^{t^{-1}}) \cdot A)$ converges at $t = 0$ to a line contained in $\text{Vect}(\bar{e}_\alpha, \bar{e}_\beta)$. Then $D_e \theta_o(\mathbb{R} \text{Ad}(g_0 g^{-t} h^{t^{-1}}) \cdot A) \subset T_o \mathbf{X}$ converges to a line $L \subset (\mathcal{E}_\alpha \oplus \mathcal{E}_\beta)(o)$, and as $g^t g_0^{-1}$ converges to g_0^{-1} at $t = 0$, we deduce by continuity that $\mathcal{E}^c(x(t))$ converges at $t = 0$ to $D_o g_0^{-1}(L)$, contained in $(\mathcal{E}_\alpha \oplus \mathcal{E}_\beta)(x)$, because g_0^{-1} preserves $\mathcal{E}_\alpha \oplus \mathcal{E}_\beta$.

In conclusion, we only have to find, in each of the four cases $\mu = \mathbf{t}$ or $\mathbf{a}$ and $i = 1$ or 2 , a point $x \in \mathcal{G}_\mu^i$, together with g^t , h^t , A , and g_0 satisfying the above conditions, and to prove that $p(\mathbb{R} \text{Ad}(g_0 g^{-t} h^{t^{-1}}) \cdot A)$ converges at $t = 0$ to a line contained in $\text{Vect}(\bar{e}_\alpha, \bar{e}_\beta)$.

We begin with $Y_{\mathbf{t}}$, for which we choose for both orbits $\mathcal{G}_{\mathbf{t}}^1$ and $\mathcal{G}_{\mathbf{t}}^2$ the point $y := o_{\mathbf{t}} = ([1, 0, 1], [(1, 0, 1), e_2]) \in Y_{\mathbf{t}}$. Let us recall that in this case, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ satisfies $\mathcal{E}^c(o_{\mathbf{t}}) = D_e \theta_{o_{\mathbf{t}}}(\mathbb{R}A)$ (see Paragraph 5.4.2.b).

- For $\mathcal{G}_{\mathbf{t}}^1$, choosing $x = ([1, 0, 1], [(1, 0, 1), e_1]) = ([1, 0, 1], [e_1, e_3])$, $g_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, and the one-parameter subgroups $g^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ of $\mathbf{G}$ and $h^t = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ of $H_{\mathbf{t}}^0$ such that $g^t \cdot x = h^{t^{-1}} \cdot o_{\mathbf{t}} \in \mathcal{C}_\alpha(x)$, we obtain :

$$\text{Ad}(g_0 g^{-t} h^{t^{-1}}) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2t^{-1} \\ 1 & -2 & -2t^{-1} \\ -t & t & 1 \end{pmatrix},$$

and thus $p(\mathbb{R} \text{Ad}(g_0 g^{-t} h^{t^{-1}}) \cdot A)$ converges at $t = 0$ to $\mathbb{R}\bar{e}_\beta$.

- For $\mathcal{G}_{\mathbf{t}}^2$, choosing $x = ([e_2], [e_2, (1, 0, 1)])$, $g_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, and the one-parameter subgroups $g^t = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ of $\mathbf{G}$ and $h^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ of $H_{\mathbf{t}}^0$ such that $g^t \cdot x = h^{t^{-1}} \cdot o_{\mathbf{t}} \in \mathcal{C}_\beta(x)$, we obtain

$$\text{Ad}(g_0 g^{-t} h^{t^{-1}}) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2t^{-1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

and thus $p(\mathbb{R} \text{Ad}(g_0 g^{-t} h^{t^{-1}}) \cdot A)$ converges at $t = 0$ to $\mathbb{R}\bar{e}_\alpha$.

We now consider the case of $Y_{\mathbf{a}}$, for which we choose for both orbits $\mathcal{G}_{\mathbf{a}}^1$ and $\mathcal{G}_{\mathbf{a}}^2$ the point $y := o_{\mathbf{a}} = ([e_3], [e_3, e_2]) \in Y_{\mathbf{a}}$, and we recall that in this case $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ satisfies the above condition $\mathcal{E}^c(o_{\mathbf{a}}) = D_e \theta_{o_{\mathbf{a}}}(\mathbb{R}A)$ (see Paragraph 5.4.2.c).

- For $\mathcal{G}_{\mathbf{a}}^1$, choosing $x = ([e_3], [e_3, e_1])$, $g_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, and the one-parameter subgroups $g^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ of $\mathbf{G}$ and $h^t = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ of $H_{\mathbf{a}}^0$ such that $g^t \cdot x = h^{t^{-1}} \cdot o_{\mathbf{a}} \in \mathcal{C}_\alpha(x)$, we obtain :

$$\text{Ad}(g_0 g^{-t} h^{t^{-1}}) \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -t & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

and thus $p(\mathbb{R} \text{Ad}(g_0 g^{-t} h^{t^{-1}}) \cdot A)$ converges at $t = 0$ to $\mathbb{R}\bar{e}_\beta$.

- For $\mathcal{G}_{\mathbf{a}}^2$, choosing $x = ([e_2], [e_2, e_3])$, $g_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, and the one-parameter subgroups $g^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ of $\mathbf{G}$ and $h^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ of $H_{\mathbf{a}}^0$ such that $g^t \cdot x = h^{t^{-1}} \cdot o_{\mathbf{a}} \in \mathcal{C}_\beta(x)$, we obtain

$$\text{Ad}(g_0 g^{-t} h^{t^{-1}}) \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

and thus $p(\mathbb{R} \text{Ad}(g_0 g^{-t} h^{t^{-1}}) \cdot A)$ converges at $t = 0$ to $\mathbb{R}\bar{e}_\alpha$.

According to the discussion above, this concludes the proof of the lemma. $\square$

We are now able to prove the proposition 5.6.1.

Proof of the proposition 5.6.1. Let us assume by contradiction that $\Omega \neq M$. We choose a connected component O of $\tilde{\Omega}$ such that the rank of $D_{\hat{x}}\mathcal{K}^{tot}$ for $\hat{x} \in \pi^{-1}(O)$ is maximal among the rank of $D_{\hat{x}}\mathcal{K}^{tot}$ for $\hat{x} \in \pi^{-1}(\tilde{\Omega})$. As $\emptyset \neq O \neq \tilde{M}$ by hypothesis, there exists $x \in \partial O$, and as $\tilde{E}^\alpha \oplus \tilde{E}^\beta$ is contact, [Sus73, Theorem 4.1] implies the existence of a piecewise smooth path $\gamma: [0; 1] \rightarrow \tilde{M}$ constituted of a finite concatenation of segments of α and β -leaves, joining $x = \gamma(1)$ to a point $y = \gamma(0) \in O$. Denoting $t_0 = \inf \{t \in [0; 1] \mid \gamma(t) \in \partial O\}$, $t_0 > 0$ and $\gamma(t_0) \in \partial O$. Replacing x by $\gamma(t_0)$, keeping only the last smooth arc of γ , replacing y by the origin of this arc, and choosing a parametrization of this arc by $[0; 1]$, we finally end with a smooth path $\gamma: [0; 1] \rightarrow \tilde{M}$ such that $\gamma([0; 1]) \subset O$, $x = \gamma(1) \in \partial O$, and $\gamma([0; 1])$ is entirely contained in a same α or β -leaf. The proof being the same in the two cases, we assume that $\gamma([0; 1]) \subset \tilde{\mathcal{F}}^\alpha(x)$ to fix the ideas. Denoting $x_0 = \delta(x)$, $x_0 \in \mathbf{X} \setminus Y$ according to Lemma 5.6.2, and $\delta(\gamma([0; 1])) \subset Y$ because $\delta(O) \subset Y$ (see Lemma 5.4.2). Finally $\delta(\gamma([0; 1]))$ is an open interval of $C^\alpha(x_0)$ contained in Y , and $x_0 \in \mathbf{X} \setminus Y$, i.e. $x_0 \in \mathcal{G}$. Denoting $\gamma_0(t) = \delta(\gamma(t))$, Lemma 5.6.3 implies therefore that $\mathcal{E}^c(\gamma_0(t))$ converges to a line $D_0^c \subset (\mathcal{E}_\alpha \oplus \mathcal{E}_\beta)(x_0)$ at $t = 1$. As $\delta|_O$ is a local isomorphism between $\tilde{\mathcal{S}}|_O$ and $\mathcal{S}_Y$, we have $\tilde{E}^c(\gamma(t)) = (D_{\gamma(t)}\delta)^{-1}(\mathcal{E}^c(\gamma_0(t)))$ for any $t \in [0; 1]$, implying $\tilde{E}^c(x) = (D_x\delta)^{-1}(D_0^c)$ by continuity. Since δ is a local isomorphism between the Lagrangian contact structures $\tilde{\mathcal{L}}$ and $\mathcal{L}_\mathbf{X}$, this implies that $\tilde{E}^c(x) \subset (\tilde{E}^\alpha \oplus \tilde{E}^\beta)(x)$, which contradicts the definition of the transverse distribution $\tilde{E}^c$. This contradiction concludes the proof of the proposition. $\square$

5.6.2 Reduction of the holonomy group

We first describe the global and local automorphisms of the models $(Y_t, \mathcal{S}_t)$ and $(Y_a, \mathcal{S}_a)$.

Proposition 5.6.4. 1. $\text{Aut}(Y_t, \mathcal{S}_t) = H_t = \begin{bmatrix} \text{GL}_2(\mathbb{R}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ and $\text{Aut}(Y_a, \mathcal{S}_a) = H_a = \mathbf{P}_{min}$.
 2. Let $(Y, \mathcal{S}_Y)$ be one of the two models $(Y_t, \mathcal{S}_t)$ or $(Y_a, \mathcal{S}_a)$. Then any local isomorphism of $\mathcal{S}_Y$ between two connected open subsets of Y is the restriction of the action of a global automorphism of $\text{Aut}(Y, \mathcal{S}_Y)$.

Démonstration. 1. The inclusions $H_t \subset \text{Aut}(Y_t, \mathcal{S}_t)$ and $H_a \subset \text{Aut}(Y_a, \mathcal{S}_a)$ were explained in Paragraphs 5.4.2.b and 5.4.2.c. Since the automorphism groups are contained in the stabilizers of the open subsets, the equalities follow because $H_t = \text{Stab}_\mathbf{G}(Y_t)$ and $H_a = \text{Stab}_\mathbf{G}(Y_a)$.

2. Let us emphasize that $\text{Aut}(Y, \mathcal{S}_Y)$ is precisely the normalizer of $\mathfrak{h}$ in $\mathbf{G}$. Let φ be a local automorphism of $\mathcal{S}_Y$ between two connected open subsets U and V of Y . For any $v \in \mathfrak{h}$, since $v|_V$ is a Killing field of $\mathcal{S}_Y$, $\varphi^*(v|_V)$ is a Killing field of $\mathcal{S}_Y$, and therefore $\varphi^*(v|_V) = w|_U$ for some $w \in \mathfrak{h}$. But φ is in particular a local automorphism of the Lagrangian contact structure $\mathcal{L}_\mathbf{X}$ of $\mathbf{X}$, and is thus the restriction to an open subset $U \subset Y$ of the left translation by an element $g \in \mathbf{G}$, according to Theorem 5.2.9. Therefore $w|_U = \varphi_*(v|_V) = (\text{Ad}(g) \cdot v)|_U$, implying that $\text{Ad}(g) \cdot v = w \in \mathfrak{h}$ since the action of $\mathbf{G}$ is analytic (see Lemma 5.2.16). Consequently, $g \in \text{Nor}_\mathbf{G}(\mathfrak{h}) = \text{Aut}(Y, \mathcal{S}_Y)$. $\square$

Let us recall that $\rho: \pi_1(M) \rightarrow \mathbf{G}$ denotes the holonomy morphism associated to the developping map $\delta: \tilde{M} \rightarrow \mathbf{X}$ of the $(\mathbf{G}, \mathbf{X})$ -structure of M (see Corollary 5.3.4 and Paragraph 5.2.3.b).

Proposition 5.6.5. The holonomy group $\rho(\pi_1(M))$ is contained in $\text{Aut}(Y, \mathcal{S}_Y)$. Consequently, M has either a (H_t, Y_t) -structure or a (H_a, Y_a) -structure, and its developping map is a local isomorphism of enhanced Lagrangian contact structures from $\tilde{\mathcal{S}}$ to $\mathcal{S}_t$ (respectively $\mathcal{S}_a$).

Démonstration. According to Proposition 5.6.1, $\mathcal{S}$ is locally homogeneous, and we thus deduce from Proposition 5.4.6 that, up to interversion of the distributions E^α and E^β , the developping map δ of the $(\mathbf{G}, \mathbf{X})$ -structure of M can be chosen to be a local isomorphism from $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{S}})$ to one of the two models $(Y_t, \mathcal{S}_t)$ or $(Y_a, \mathcal{S}_a)$. According to Liouville's theorem 5.6.4 proved for these

two models, the holonomy morphism has moreover values in the corresponding automorphism group $H_{\mathbf{t}}$ (respectively $H_{\mathbf{a}}$) described in the same result, and M is finally endowed with a $(H_{\mathbf{t}}, Y_{\mathbf{t}})$ -structure (resp. $(H_{\mathbf{a}}, Y_{\mathbf{a}})$ -structure). Concerning the interversion of E^α and E^β , it is easy to construct for both models $(Y_{\mathbf{t}}, \mathcal{S}_{\mathbf{t}})$ and $(Y_{\mathbf{a}}, \mathcal{S}_{\mathbf{a}})$, a diffeomorphism of Y interverting the distributions $\mathcal{E}_\alpha$ and $\mathcal{E}_\beta$ and fixing the transverse distribution $\mathcal{E}_Y^c$. In other words for these both models, the structures $(\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{E}_\beta, \mathcal{E}_Y^c)$ and $(\mathcal{E}_\beta, \mathcal{E}_\alpha, \mathcal{E}_Y^c)$ are isomorphic, so that *a posteriori*, the order of the distributions E^α and E^β in the statement of Proposition 5.6.5 does not matter. $\square$

5.7 Completeness of the structure

We will denote by $(\mathcal{H}, Y)$ the local model of $\mathcal{S}$, which is either $(H_{\mathbf{t}}, Y_{\mathbf{t}})$ or $(H_{\mathbf{a}}, Y_{\mathbf{a}})$, and by $\delta: \tilde{M} \rightarrow Y$ and $\rho: \pi_1(M) \rightarrow \mathcal{H}$ the developping map and holonomy morphism of the $(\mathcal{H}, Y)$ -structure of M . The goal of this section is to prove that :

Proposition 5.7.1. *The developping map δ is a covering map from $\tilde{M}$ to Y .*

It is a known fact that a local diffeomorphism satisfying the path-lifting property is a covering map (the reader can for example look for a proof in [DC76, §5.6, Proposition 6 p. 383]). According to the following statement, it will actually be sufficient to prove the path-lifting property in the α , β , and central directions to prove that δ is a covering map.

Lemma 5.7.2. *Let $h: N \rightarrow B$ be a local diffeomorphism between two smooth three-dimensional manifolds, B being connected. We assume that there is a smooth splitting $E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 = \text{TB}$ of the tangent bundle of B into three one-dimensional smooth distributions, such that for any $i \in \{1, 2, 3\}$, $x \in \text{Im}(h)$, and $\tilde{x} \in h^{-1}(x)$, any path tangent to E_i and starting from x entirely lifts through h to a path starting from $\tilde{x}$. Then h is a covering map from N to B (and in particular, h is surjective).*

Démonstration. Since h is a local diffeomorphism, it suffices to prove that our hypothesis implies the lift of any path. By compactness, it is sufficient to locally lift the paths in B , around any point. We choose $x \in B$ and a sufficiently small open neighbourhood U of x , such that there are three smooth vector fields X , Y and Z generating E_1 , E_2 and E_3 on U , and $\varepsilon > 0$ such that $(t, u, v) \in]-\varepsilon; \varepsilon[^3 \mapsto \phi(t, u, v) := \varphi_X^t \circ \varphi_Y^u \circ \varphi_Z^v(x) \in U$ is well-defined, and is a diffeomorphism (this exists according to Inverse mapping theorem). Let us choose $\tilde{x} \in h^{-1}(x)$. Then, denoting by $\tilde{X} = h^*X$, $\tilde{Y} = h^*Y$ and $\tilde{Z} = h^*Z$ the pullbacks, the property of path-lifting in the directions E_1 , E_2 and E_3 , and from any point, implies that $\tilde{\phi}(t, u, v) := \varphi_{\tilde{X}}^t \circ \varphi_{\tilde{Y}}^u \circ \varphi_{\tilde{Z}}^v(\tilde{x})$ is well-defined on $]-\varepsilon; \varepsilon[^3$. If $\gamma: [0; 1] \rightarrow U$ is a continuous path starting from x and contained in U , there are three continuous maps t , u and v from $[0; 1]$ to $]-\varepsilon; \varepsilon[$ such that $\gamma(s) = \phi(t(s), u(s), v(s))$. Since $h \circ \tilde{\phi} = \phi$ by construction, $\tilde{\gamma}(s) := \tilde{\phi}(t(s), u(s), v(s))$ is then a lift of γ starting from $\tilde{x}$, which finishes the proof. $\square$

Remark 5.7.3. In our case, proving that the paths in $\delta(\tilde{M})$ in the α -direction (respectively β or central direction) lift to $\tilde{M}$ is equivalent to prove that for any $x \in \delta(\tilde{M})$ and $\tilde{x} \in \delta^{-1}(x)$, we have the following equality :

$$\delta(\tilde{\mathcal{F}}^\alpha(\tilde{x})) = \mathcal{C}_\alpha(x) \cap \delta(\tilde{M}),$$

(respectively the same equality for β -leaves and circles, or for central leaves).

We start by proving that the image of any α (respectively β) leaf in $\tilde{M}$ miss exactly one point in the associated α -circle (respectively β -circle). We recall that $\partial Y = \mathbf{X} \setminus Y$, as explained before Lemma 5.6.3.

Lemma 5.7.4. *For any $\tilde{x} \in \tilde{M}$, denoting $x = \delta(\tilde{x})$, there exists $x^* \in \mathcal{C}_\beta(x) \cap \partial Y$ such that $\delta(\tilde{\mathcal{F}}^\beta(\tilde{x})) = \mathcal{C}_\beta(x) \setminus \{x^*\} = \mathcal{C}_\beta(x) \cap Y$. The same happens for α -leaves and their associated α -circles.*

Démonstration. We will only write the proof for β -leaves and β -circles as in the statement, the case of the α -direction being the same. Denoting $\bar{x} = \pi_M(\tilde{x})$, and possibly replacing f by f^{-1} , we have $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|D_{\bar{x}} f^n|_{E^\alpha(\bar{x})}\|_M = 0$ for some fixed Riemannian metric on M .

The description of the open subsets Y_t and Y_a in Paragraphs 5.4.2.b and 5.4.2.c easily shows that in these both cases, the intersection of any β -circle (respectively α -circle) with Y miss exactly one point of the circle. In other words, the intersection $\mathcal{C}_\beta(x) \cap \partial Y$ is a single point $\{x^*\}$, and as a consequence $\delta(\tilde{\mathcal{F}}^\beta(\tilde{x})) \subset \mathcal{C}_\beta(x) \setminus \{x^*\} = \mathcal{C}_\beta(x) \cap Y$. To finish the proof of the lemma, we only have to prove that $\delta(\tilde{\mathcal{F}}^\beta(\tilde{x}))$ cannot miss more than one point of $\mathcal{C}_\beta(x)$. To achieve this, we assume by contradiction that there exists $x^- \neq x^+ \in \mathcal{C}_\beta(x) \setminus \{x, x^*\}$ such that :

$$\delta(\tilde{\mathcal{F}}^\beta(\tilde{x})) =]x^-; x^+[\subsetneq \mathcal{C}_\beta(x) \setminus \{x^*\}, \quad (5.7.1)$$

where $]x^-; x^+[$ is the connected component of $\mathcal{C}_\beta(x) \setminus \{x^-, x^+\}$ that contains x .

Since M is compact, there exists a strictly increasing sequence (n_k) of positive integers such that, denoting $\bar{x} = \pi_M(\tilde{x})$, $\bar{x}_k = f^{n_k}(\bar{x})$ converges to a point $\bar{x}_\infty \in M$, and as $M = \pi_1(M) \backslash \tilde{M}$, there furthermore exists a sequence $\gamma_k \in \pi_1(M)$ such that $\tilde{x}_k := \gamma_k \cdot \tilde{f}^{n_k}(\tilde{x})$ converges to a lift $\tilde{x}_\infty$ of $\bar{x}_\infty$. As $\gamma_k \tilde{f}^{n_k}$ is an automorphism of the Lagrangian contact structure $\tilde{\mathcal{L}}$ and δ a local isomorphism from $\tilde{\mathcal{L}}$ to $\mathcal{L}_X$, Theorem 5.2.9 implies the existence of a unique sequence $g_k \in \mathbf{G}$ satisfying

$$\delta(\gamma_k \cdot \tilde{f}^{n_k}(\tilde{x})) = g_k \cdot \delta(\tilde{x}).$$

We denote $x_k = \delta(\tilde{x}_k) = g_k(x)$, that converges to $x_\infty := \delta(\tilde{x}_\infty)$. Denoting $x_k^- = g_k(x^-)$ and $x_k^+ = g_k(x^+)$, x_k , x_k^- and x_k^+ are three distinct points of $\mathcal{C}_\beta(x_k)$ for any k . By compactness of X , we can assume up to extraction that x_k^- and x_k^+ respectively converge to points x_∞^- and x_∞^+ of $\mathcal{C}_\beta(x_\infty)$, and the hypothesis (5.7.1) allows us to obtain the following crucial statement.

Fact 5.7.5. $x_\infty \neq x_\infty^-$, and $x_\infty \neq x_\infty^+$.

Démonstration. Let us assume by contradiction that $x_\infty^- = x_\infty$. Considering a neighbourhood U of $\tilde{x}_\infty$ such that $\delta|_U$ is injective, we can choose $\tilde{y}_\infty \in (\tilde{\mathcal{F}}^\beta(\tilde{x}_\infty) \cap U) \setminus \{\tilde{x}_\infty\}$. There exists a sequence $\tilde{y}_k \in \tilde{\mathcal{F}}^\beta(\tilde{x}_k)$ converging to $\tilde{y}_\infty$, and possibly changing $\tilde{y}_\infty$, we can moreover assume that $\delta(\tilde{y}_k) \in]x_k^-; x_k^+[$, implying that $\delta(\tilde{y}_\infty) \in [x_\infty^-; x_\infty]$ by continuity. But as $x_\infty^- = x_\infty$, $[x_\infty^-; x_\infty] = \{x_\infty\}$, and therefore $\delta(\tilde{y}_\infty) = x_\infty = \delta(\tilde{x}_\infty)$, implying $\tilde{y}_\infty = \tilde{x}_\infty$ by injectivity of $\delta|_U$, which contradicts our hypothesis on $\tilde{y}_\infty$. In the same way, we obtain $x_\infty \neq x_\infty^+$. $\square$

The subgroup $\mathrm{SO}(3)$ of $\mathbf{G}$ acts transitively on X , and we can thus choose $\phi \in \mathrm{SO}(3)$ and a sequence (ϕ_k) in $\mathrm{SO}(3)$, satisfying $\phi(o) = o$ and $\phi_k(x_k) = o$ for any k (we recall that $o = ([e_1], [e_1, e_2])$). Since $\mathrm{Stab}_{\mathrm{SO}(3)}(\mathcal{C}_\beta(o)) = \begin{bmatrix} \mathrm{SO}(2) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ acts transitively on $\mathcal{C}_\beta(o)$, we can moreover assume that $\phi(x^+) = o^+$ and $\phi_k(x_k^+) = o^+$, where $o^+ = ([e_2], [e_1, e_2]) \in \mathcal{C}_\beta(o)$. For any k , $\phi_k \circ g_k \circ \phi^{-1}$ is an element of $\mathrm{Stab}_{\mathbf{G}}(o) \cap \mathrm{Stab}_{\mathbf{G}}(o^+)$, i.e. is of the form $\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & \lambda_k & y \\ 0 & 0 & \mu_k \end{bmatrix}$. But $\begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$ acts trivially in restriction to $\mathcal{C}_\beta(o)$, and $A_k := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ satisfies thus :

$$g_k|_{\mathcal{C}_\beta(x)} = \phi_k^{-1} \circ A_k \circ \phi|_{\mathcal{C}_\beta(x)}.$$

The following commutative diagram summarizes the situation.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{C}_\beta(o) & \xleftarrow{\phi} & \mathcal{C}_\beta(x) & \xleftarrow{\delta} & \tilde{\mathcal{F}}^\beta(\tilde{x}) & \xrightarrow{\pi_M} & \mathcal{F}^\beta(\bar{x}) \\ \downarrow A_k & & \downarrow g_k & & \downarrow \gamma_k \tilde{f}^{n_k} & & \downarrow f^{n_k} \\ \mathcal{C}_\beta(o) & \xleftarrow{\phi_k} & \mathcal{C}_\beta(x_k) & \xleftarrow{\delta} & \tilde{\mathcal{F}}^\beta(\tilde{x}_k) & \xrightarrow{\pi_M} & \mathcal{F}^\beta(\bar{x}_k) \end{array} \quad (5.7.2)$$

The action of $A_k \in \mathbf{G}$ on $\mathcal{C}_\beta(o)$ is conjugated to the action of the projective transformations $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_k \end{bmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ on $\mathbb{RP}^1$, *i.e.* to the action of the homotheties of ratio λ_k on $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. By this conjugation, o corresponds to 0, o^+ to ∞ , and $o^- := \phi(x^-) \in \mathcal{C}_\beta(o) \setminus \{o, o^+\}$ corresponds to a non-zero point of $\mathbb{R}$. Fact 5.7.5 implies that $A_k(o^-) = \phi_k(x_k^-) \in \mathcal{C}_\beta(o)$ stays bounded away from o (since $\phi_k \in \mathrm{SO}(3)$), and therefore that λ_k is bounded away from 0.

On the other hand, endowing $\tilde{M}$ with the pullback of the Riemannian metric of M , the diagram (5.7.2) implies $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| D_{\tilde{x}}(\gamma_k \tilde{f}^{n_k})|_{\tilde{E}^\beta(\tilde{x})} \right\|_{\tilde{M}} = 0$ (since $\pi_1(M)$ acts by isometries). Fixing any Riemannian metric on $\mathbf{X}$, as $(\tilde{x}_k)$ is relatively compact we also have $\lim \left\| D_x g_k|_{\mathcal{E}_\beta(x)} \right\|_{\mathbf{X}} = 0$, and since (ϕ_k) and (x_k) are relatively compact as well, we finally obtain $\lim \left\| D_o A_k|_{\mathcal{E}_\beta(x)} \right\|_{\mathbf{X}} = 0$.

This contradicts the fact that λ_k is bounded away from 0, and this contradiction concludes the proof of the lemma. $\square$

Lemma 5.7.4 allows us to easily infer the path-lifting property in the α and β -directions.

Corollary 5.7.6. *1. For any $x \in \delta(\tilde{M})$, $\mathcal{C}_\alpha(x) \cap \delta(\tilde{M}) = \mathcal{C}_\alpha(x) \cap Y$ and $\mathcal{C}_\beta(x) \cap \delta(\tilde{M}) = \mathcal{C}_\beta(x) \cap Y$.*

2. The paths in $\delta(\tilde{M})$ in the α and β -directions lift to $\tilde{M}$ from any point.

Démonstration. We only write the proof of the statements for the α -direction, the case of the β -direction being formally the same.

1. For any $\tilde{x} \in \tilde{M}$, denoting $\delta(\tilde{x}) = x$, we know that $\partial Y \cap \mathcal{C}_\alpha(x)$ is equal to a single point $\{x^*\}$ that satisfies $\mathcal{C}_\alpha(x) \setminus \{x^*\} = \mathcal{C}_\alpha(x) \cap Y$. Furthermore, $\delta(\tilde{\mathcal{F}}^\alpha(\tilde{x})) = \mathcal{C}_\alpha(x) \setminus \{x^*\} = \mathcal{C}_\alpha(x) \cap Y$ according to Lemma 5.7.4. As $\mathcal{C}_\alpha(x) \cap \delta(\tilde{M}) \subset \cup_{\tilde{x} \in \delta^{-1}(x)} \delta(\tilde{\mathcal{F}}^\alpha(\tilde{x})) = \mathcal{C}_\alpha(x) \cap Y$, we finally obtain $\mathcal{C}_\alpha(x) \cap \delta(\tilde{M}) = \mathcal{C}_\alpha(x) \cap Y$.

2. Together with Lemma 5.7.4, we finally have $\delta(\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{x})) = \mathcal{C}_\alpha(x) \cap \delta(\tilde{M})$, for any $x \in \delta(\tilde{M})$ and $\tilde{x} \in \delta^{-1}(x)$. According to the remark 5.7.3, this proves that any path starting from x in the α -direction lifts to $\tilde{M}$ from $\tilde{x}$. $\square$

The accessibility property of Lagrangian contact structures allows us to deduce that :

Corollary 5.7.7. *The developping map is surjective : $\delta(\tilde{M}) = Y$.*

Démonstration. Let x be a point of the non-empty subset $\delta(\tilde{M})$, and y be any point in Y . Restricting the Lagrangian contact structure $\mathcal{L}_{\mathbf{X}} = (\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{E}_\beta)$ of $\mathbf{X}$ to the connected open subset Y , [Sus73, Theorem 4.1] implies the existence of a finite number $x = x_1, \dots, x_n = y$ of points of Y such that for any $i = 1, \dots, n-1$, $x_{i+1} \in \mathcal{C}_\alpha(x_i) \cap Y$ or $x_{i+1} \in \mathcal{C}_\beta(x_i) \cap Y$. Applying the first statement of Corollary 5.7.6, we deduce by a direct finite recurrence that for any i , $x_i \in \delta(\tilde{M})$, so that $y \in \delta(\tilde{M})$. $\square$

We finally prove that the central paths also lift, by a specific method for each model.

Lemma 5.7.8. *In the case of $Y_{\mathbf{t}}$, any central path starting at any point $x \in Y_{\mathbf{t}}$ lifts in $\tilde{M}$ from any point $\tilde{x} \in \delta^{-1}(x)$.*

Démonstration. Let us recall that $H_{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Aut}(Y_{\mathbf{t}}, \mathcal{S}_{\mathbf{t}})$ and $o_{\mathbf{t}} = ([1, 0, 1], [(1, 0, 1), e_2]) \in Y_{\mathbf{t}}$. Since $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ is central in $\mathfrak{h}_{\mathbf{t}}$, the Killing field $Z^\dagger$ of $\mathcal{S}_{\mathbf{t}}$ associated to Z is $H_{\mathbf{t}}$ -invariant. As $\mathcal{E}_{\mathbf{t}}^c(o_{\mathbf{t}}) = \mathbb{R}Z^\dagger(o_{\mathbf{t}})$ (see Paragraph 5.4.2.b) and $\mathcal{E}^c$ is $H_{\mathbf{t}}$ -invariant as well, $Z^\dagger$ actually generates the transverse distribution on $Y_{\mathbf{t}}$. At any point $x \in Y_{\mathbf{t}}$, we thus have $\mathcal{F}_{\mathbf{t}}^c(x) = \exp(\mathbb{R}Z) \cdot x$. Now, as the holonomy group $\rho(\pi_1(M))$ is contained in $H_{\mathbf{t}}$ according to Proposition 5.6.5, it leaves $Z^\dagger$ invariant, and the pullback $\tilde{X} := \delta^* Z^\dagger$ is thus preserved by the fundamental group $\pi_1(M)$. This allows us to push $\tilde{X}$ down on M , to a Killing field X generating the central direction E^c . As M is compact, X is a complete vector field, and as $\pi_M : \tilde{M} \rightarrow M$ is a covering map, the pullback $\pi_M^* X = \tilde{X}$

is also complete, implying that for any $\tilde{x} \in \tilde{M}$, the central leaf at $\tilde{x}$ is simply the integral curve of $\tilde{X} = \delta^* Z^\dagger$ at $\tilde{x}$. For any $x \in Y_{\mathbf{t}}$ and $\tilde{x} \in \delta^{-1}(x)$ (which is non-empty because $\delta(\tilde{M}) = Y_{\mathbf{t}}$ according to Corollary 5.7.7) we thus have $\delta(\tilde{\mathcal{F}}^c(\tilde{x})) = \left\{ \delta(\varphi_{\tilde{X}}^t(\tilde{x})) \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \exp(\mathbb{R}Z) \cdot x = \mathcal{F}_{\mathbf{t}}^c(x)$. This finishes the proof of the lemma according to Remark 5.7.3. $\square$

Lemma 5.7.9. *In the case of $Y_{\mathbf{a}}$, any central path starting at any point $x \in Y_{\mathbf{a}}$ lifts in $\tilde{M}$ from any point $\tilde{x} \in \delta^{-1}(x)$.*

Démonstration. Let us first emphasize that the argument used in the previous lemma for the case of $Y_{\mathbf{t}}$ does not work here, because the center of $\mathfrak{h}_{\mathbf{a}}$ is trivial.

We identify $Y_{\mathbf{a}}$ with $\mathbb{R}^3$ through $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto ([x, y, 1], [(x, y, 1), (z, 1, 0)]) \in Y_{\mathbf{a}}$, and we consider the following vector fields of $Y_{\mathbf{a}}$ in these global coordinates :

$$X^\alpha(x, y, z) = e_3, X^\beta(x, y, z) = (z, 1, 0), X^c(x, y, z) = e_1.$$

These vector fields are complete and generate the enhanced Lagrangian contact structure $\mathcal{S}_{\mathbf{a}} = (\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{E}_\beta, \mathcal{E}_{\mathbf{a}}^c)$ on $Y_{\mathbf{a}}$ (see Paragraph 5.4.2.c). Since the paths tangent to the α and β -distributions entirely lift to $\tilde{M}$ according to Corollary 5.7.6, we deduce that the pullbacks $\tilde{X}^\alpha = \delta^* X^\alpha$ and $\tilde{X}^\beta = \delta^* X^\beta$ are complete as well. We can furthermore realize the flow of the central vector field X^c by $\alpha - \beta$ curves through the following equalities :

$$\begin{cases} \varphi_{X^\beta}^{-t} \circ \varphi_{X^\alpha}^{-t} \circ \varphi_{X^\beta}^t \circ \varphi_{X^\alpha}^t(x) = x + t^2 e_1 = \varphi_{X^c}^{t^2}(x), \\ \varphi_{X^\beta}^t \circ \varphi_{X^\alpha}^{-t} \circ \varphi_{X^\beta}^{-t} \circ \varphi_{X^\alpha}^t(x) = x - t^2 e_1 = \varphi_{X^c}^{-t^2}(x). \end{cases}$$

The same equalities are thus true for the pullbacks $\tilde{X}^\alpha$, $\tilde{X}^\beta$, and $\tilde{X}^c = \delta^* X^c$, and since the flows of $\tilde{X}^\alpha$ and $\tilde{X}^\beta$ are defined for all times, these equalities show that $\tilde{X}^c$ is also complete. The completeness of $\tilde{X}^c$ allows us to lift any central path of $Y_{\mathbf{a}}$ from any point of $\tilde{M}$, and concludes the proof of the lemma. $\square$

End of the proof of Proposition 5.7.1. According to Corollary 5.7.6 and to Lemmas 5.7.8 and 5.7.9, the local diffeomorphism δ satisfies the path-lifting property on Y in the α , β , and central directions, and is thus a covering map from $\tilde{M}$ to Y according to Lemma 5.7.2. $\square$

5.8 Conclusion

5.8.1 End of the proof of Theorem A.2

The work that has been done so far tells us that for one of the two models $(\mathcal{H}, Y, \mathcal{S}_Y) = (H_{\mathbf{t}}, Y_{\mathbf{t}}, \mathcal{S}_{\mathbf{t}})$ or $(H_{\mathbf{a}}, Y_{\mathbf{a}}, \mathcal{S}_{\mathbf{a}})$, M is a $(\mathcal{H}, Y)$ -manifold whose developping map $\delta: \tilde{M} \rightarrow Y$ is a covering map satisfying $\delta^* \mathcal{S}_Y = \tilde{\mathcal{S}}$. With these informations, we will finish the proof of Theorem A.2. We will use the link between the geometrical and algebraic point of views on the models $(Y_{\mathbf{t}}, \mathcal{S}_{\mathbf{t}})$ and $(Y_{\mathbf{a}}, \mathcal{S}_{\mathbf{a}})$, explained in Paragraphs 5.4.1 and 5.4.2.

5.8.1.a Case of $(Y_{\mathbf{a}}, \mathcal{S}_{\mathbf{a}})$

We first assume that $(M, \mathcal{S})$ is locally isomorphic to $(Y_{\mathbf{a}}, \mathcal{S}_{\mathbf{a}})$. Since $Y_{\mathbf{a}}$ is simply connected (because homeomorphic to $\text{Heis}(3)$), the covering map $\delta: \tilde{M} \rightarrow Y_{\mathbf{a}}$ is actually a diffeomorphism in this case. Since the developping map conjugates the action of $\pi_1(M)$ on $\tilde{M}$ to the action of the holonomy group $\Gamma = \rho(\pi_1(M)) \subset H_{\mathbf{a}}$ on $Y_{\mathbf{a}}$, we can assume without loss of generality that M is a compact quotient $\Gamma \backslash Y_{\mathbf{a}}$, with Γ a discrete subgroup of $H_{\mathbf{a}}$ acting freely, properly, and cocompactly. Since f is an automorphism of $(M, \mathcal{S})$, we moreover deduce from Proposition 5.6.4 that $f \in \text{Nor}_{H_{\mathbf{a}}}(\Gamma)$.

We saw in Paragraph 5.4.2.c that the identification between $\text{Heis}(3)$ and $Y_{\mathbf{a}}$ given by the orbital map at $o_{\mathbf{a}}$ conjugates the action of $H_{\mathbf{a}}$ on $Y_{\mathbf{a}}$, and the action of the semi-direct product

$\text{Heis}(3) \rtimes \mathcal{A}$ of affine automorphisms of $\text{Heis}(3)$ preserving its left-invariant structure. We can thus assume that M is a quotient $\Gamma \backslash \text{Heis}(3)$, with Γ a discrete subgroup of $\text{Heis}(3) \rtimes \mathcal{A}$ acting freely, properly, and cocompactly on $\text{Heis}(3)$, and that $f \in \text{Nor}_{\text{Heis}(3) \rtimes \mathcal{A}}(\Gamma)$.

Denoting $[x, y, z] = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, the identification $[x, y, z] \in \text{Heis}(3) \mapsto (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ of $\text{Heis}(3)$ with $\mathbb{R}^3$ is equivariant for the following injective morphism from $\text{Heis}(3) \rtimes \mathcal{A}$ to the affine transformations of $\mathbb{R}^3$:

$$\Theta: ([x, y, z], \varphi_{\lambda, \mu}) \in \text{Heis}(3) \rtimes \mathcal{A} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & \mu x & \lambda \mu \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \text{Aff}(\mathbb{R}^3).$$

M is thus diffeomorphic to the quotient $\Lambda \backslash \mathbb{R}^3$, where $\Lambda := \Theta(\Gamma)$ is a discrete subgroup of affine transformations of $\mathbb{R}^3$ contained in $S := \Theta(\text{Heis}(3) \rtimes \mathcal{A})$, acting freely, properly and cocompactly on $\mathbb{R}^3$. Since S is solvable (because $\text{Heis}(3) \rtimes \mathcal{A} \simeq \mathbf{P}_{\min}$ is), the work of Fried and Goldmann in [FG83] (more precisely Theorem 1.4, Corollary 1.5 and Paragraphs 3 and 4 of this paper) implies the existence of a so-called *crystallographic hull* C of Λ . This group C is a closed subgroup of S containing Λ , and whose identity component C^0 satisfies the following assumptions : $\Lambda \cap C^0$ has finite index in Λ and is cocompact in C^0 , C^0 acts simply transitively on $\mathbb{R}^3$, and C^0 is isomorphic to $\mathbb{R}^3$, $\text{Heis}(3)$, or Sol . One can easily check that S does not contain any subgroup isomorphic to $\mathbb{R}^3$, that the subgroups of S isomorphic to Sol do not act simply transitively on $\mathbb{R}^3$, and that $\Theta(\text{Heis}(3))$ is the only subgroup of S isomorphic to $\text{Heis}(3)$. Finally, C^0 is equal to $\Theta(\text{Heis}(3))$, and therefore, $\Lambda \cap \Theta(\text{Heis}(3))$ has finite index in Λ and is cocompact in $\Theta(\text{Heis}(3))$. As a consequence, $\Gamma_0 := \Gamma \cap \text{Heis}(3)$ has finite index in Γ and is a cocompact lattice of $\text{Heis}(3)$.

The morphism $p: (g, \varphi) \in \text{Heis}(3) \rtimes \mathcal{A} \mapsto \varphi \in \mathcal{A}$ having a kernel equal to $\text{Heis}(3)$, Γ/Γ_0 is isomorphic to $p(\Gamma) \subset \mathcal{A}$. But $\mathcal{A}$ is isomorphic to $(\mathbb{R}^*)^2$, and a finite subgroup of $\mathcal{A}$ is thus contained in the subgroup $\{\varphi_{\pm 1, \pm 1}\}$ of cardinal 4, implying that Γ_0 is a subgroup of Γ of index at most 4. Let us denote $f = (g, \varphi) \in \text{Nor}_{\text{Heis}(3) \rtimes \mathcal{A}}(\Gamma)$. Then we have $g\varphi(\Gamma_0)g^{-1} = \Gamma_0$, and the affine automorphism $x \mapsto g\varphi(x)$ induces therefore a diffeomorphism $\check{f}$ of $\check{M} := \Gamma_0 \backslash \text{Heis}(3)$ through $\check{f}(x\Gamma_0) = g\varphi(x)\Gamma_0$. The canonical projection $\check{\pi}: \check{M} = \Gamma_0 \backslash \text{Heis}(3) \rightarrow M = \Gamma \backslash \text{Heis}(3)$ is a covering of finite order equal to the index of Γ_0 in Γ , and we have $\check{\pi} \circ \check{f} = f \circ \check{\pi}$.

We know that φ is equal to $\varphi_{\lambda, \mu}$ for some $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}^*)^2$ (see (5.1.1)), and it only remains to show that $|\lambda| < 1$ and $|\mu| > 1$, or the contrary, to conclude that $\check{f}$ is a partially hyperbolic affine automorphism of $\text{Heis}(3)$. Let us assume by contradiction that $|\lambda| < 1$ and $|\mu| < 1$. Choosing a left-invariant volume form ν on $\text{Heis}(3)$, we have $((D_e \varphi)^* \nu)_e = \lambda^2 \mu^2 \nu_e$, and ν induces a volume form $\bar{\nu}$ on $\check{M} = \Gamma_0 \backslash \text{Heis}(3)$ such that $\check{f}^* \bar{\nu} = \lambda^2 \mu^2 \bar{\nu}$, because L_g preserves ν . As $\check{f}$ is a diffeomorphism of the compact manifold $\check{M}$, we must have $\int_{\check{M}} \bar{\nu} = \int_{\check{M}} \check{f}^* \bar{\nu} = \lambda^2 \mu^2 \int_{\check{M}} \bar{\nu}$, which is a contradiction because $\int_{\check{M}} \bar{\nu} \neq 0$ and $\lambda^2 \mu^2 < 1$. The same argument shows that we cannot have $|\lambda| > 1$ and $|\mu| > 1$ neither, which finishes the proof of Theorem A.2 in the case of the local model $(Y_{\mathbf{a}}, \mathcal{S}_{\mathbf{a}})$.

5.8.1.b Case of $(Y_{\mathbf{t}}, \mathcal{S}_{\mathbf{t}})$

We now assume that $\mathcal{S}$ is locally isomorphic to $(Y_{\mathbf{t}}, \mathcal{S}_{\mathbf{t}})$. Identifying $Y_{\mathbf{t}}$ with $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ as explained in Paragraph 5.4.2.b, we can lift the developping map $\delta: \tilde{M} \rightarrow Y_{\mathbf{t}}$ to a map $\tilde{\delta}: \tilde{M} \rightarrow \tilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ through the universal cover morphism $\pi_{\text{SL}_2(\mathbb{R})}: \tilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{R})$. As δ is a covering map according to Proposition 5.7.1, $\tilde{\delta}$ is a diffeomorphism because $\tilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ is simply connected. As M is supposed to be orientable, $\pi_1(M)$ preserves its orientation, implying that the holonomy group $\rho(\pi_1(M))$ is contained in the subgroup $H_{\mathbf{t}}^+ = \text{GL}_2^+(\mathbb{R})$ of elements of positive determinant. We

saw in Paragraph 5.4.2.b that the diffeomorphism $\theta_{o_t} \circ \iota: \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow Y_t$ conjugates the action of $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ on Y_t and the action of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times A$ on $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. As $\pi_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ is equivariant for the projection $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) \times \tilde{A} \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times A$, we finally conclude that the diffeomorphism $\tilde{\delta}: \tilde{M} \rightarrow \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ is equivariant for a morphism $\tilde{\rho}: \pi_1(M) \rightarrow \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) \times \tilde{A}$. We can thus assume that M is a quotient $\tilde{\Gamma} \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$, with $\tilde{\Gamma}$ a discrete subgroup of $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) \times \tilde{A}$ acting freely, properly, and cocompactly on $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$. Possibly replacing f by f^2 , we can assume that f preserves the orientation of M , and Proposition 5.6.4 implies then that $f = L_g \circ R_{a^t}$ with $(g, a^t) \in \mathrm{Nor}_{\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) \times \tilde{A}}(\tilde{\Gamma})$.

Denoting by $r_1: \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) \times \tilde{A} \rightarrow \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ the projection on the first factor, and $\tilde{\Gamma}_0 := r_1(\tilde{\Gamma}) \subset \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$, we now prove the following result.

Fact 5.8.1. *$\tilde{\Gamma}_0$ is a cocompact lattice of $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$, and $\tilde{\Gamma}$ is the graph-group $\mathrm{gr}(\tilde{u}, \tilde{\Gamma}_0)$ of a morphism $\tilde{u}: \tilde{\Gamma} \rightarrow \tilde{A}$.*

Démonstration. Choosing a generator z of the center $\tilde{\mathcal{Z}}$ of $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$, the finiteness of the level proved by Salein in [Sal99, Theorem 3.3.2.3] implies the existence of a non-zero integer $k \in \mathbb{N}^*$ such that $\tilde{\Gamma} \cap (\tilde{\mathcal{Z}} \times \{e\}) = \langle (z^k, e) \rangle$. We will denote by $\langle g \rangle$ the group generated by an element g , and we introduce the group $\mathrm{PSL}_2^{(k)}(\mathbb{R}) := \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) / \langle z^k \rangle$ and denote by $p_k: \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2^{(k)}(\mathbb{R})$ its universal cover. Then, denoting $A_k = p_k(\tilde{A})$ and $\Gamma_k := (p_k \times p_k)(\tilde{\Gamma}) < \mathrm{PSL}_2^{(k)}(\mathbb{R}) \times A_k$, p_k induces a diffeomorphism $\bar{p}_k: \tilde{\Gamma} \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \Gamma_k \backslash \mathrm{PSL}_2^{(k)}(\mathbb{R})$ (because $\mathrm{Ker} p_k = \langle z^k \rangle$ and $(z^k, e) \in \tilde{\Gamma}$), implying in particular that Γ_k acts freely, properly, and cocompactly on $\mathrm{PSL}_2^{(k)}(\mathbb{R})$.

We can now apply the work of Kulkarni-Raymond in [KR85] to Γ_k . We denote by $\pi: \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ the universal cover morphism of $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ (of kernel $\tilde{\mathcal{Z}}$), and by $\pi_k: \mathrm{PSL}_2^{(k)}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ the induced k -fold covering by $\mathrm{PSL}_2^{(k)}(\mathbb{R})$. Then, with $\Gamma = (\pi \times \pi)(\tilde{\Gamma})$ and $\Gamma_0 = r_1(\Gamma) < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ the projection on the first factor, the form [Tho14, Lemma 4.3.1] of Kulkarni-Raymond's results proved by Tholozan implies that Γ_0 is a cocompact lattice of $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, and that $\pi_k \circ r_1|_{\Gamma_k}$ is injective.

The first assertion ensures that $\tilde{\Gamma}_0$ is discrete in $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$. The second one implies that $\Gamma = \mathrm{gr}(u, \Gamma_0)$ is the graph-group of a morphism $u: \Gamma_0 \rightarrow A = \pi(\tilde{A})$. Since $r_1|_{\tilde{\Gamma}}$ is also injective, this implies that $\tilde{\Gamma}$ is the graph of a morphism $\tilde{u}: \tilde{\Gamma}_0 \rightarrow \tilde{A}$, trivial on $\tilde{\Gamma}_0 \cap \tilde{\mathcal{Z}}$.

Since $\tilde{\mathcal{Z}} \cap \tilde{\Gamma}_0 = \langle z^k \rangle$ is finite, the projection $\tilde{\Gamma}_0 \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \Gamma_0 \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ has finite fibers, implying that $\tilde{\Gamma}$ is a cocompact lattice as $\Gamma_0 \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ is compact. $\square$

The projection $\Gamma_0 = \pi(\tilde{\Gamma}_0)$ is a cocompact lattice of $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ according to the proof of Fact 5.8.1, and $\Gamma_0 \backslash \mathrm{Nor}_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}(\Gamma_0)$ is thus finite. Therefore, $\tilde{\Gamma}_0 \backslash \mathrm{Nor}_{\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})}(\tilde{\Gamma}_0)$ is finite as well since the projection $\tilde{\Gamma}_0 \backslash \mathrm{Nor}_{\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})}(\tilde{\Gamma}_0) \rightarrow \Gamma_0 \backslash \mathrm{Nor}_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}(\Gamma_0)$ has finite fibers ($\tilde{\mathcal{Z}} \cap \tilde{\Gamma}_0 = \langle z^k \rangle$ is finite according to the finiteness of the level).

Recall that $f = L_g \circ R_a$, where $(g, a^t) \in \mathrm{Nor}_{\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) \times \tilde{A}}(\tilde{\Gamma})$. Therefore $g \in \mathrm{Nor}_{\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})}(\tilde{\Gamma}_0)$, and since $\tilde{\Gamma}_0 \backslash \mathrm{Nor}_{\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})}(\tilde{\Gamma}_0)$ is finite, there exists $n \in \mathbb{N}^*$ such that $\gamma := g^n \in \tilde{\Gamma}_0$. Denoting $a := a^n \tilde{u}(\gamma)^{-1}$, we have $f^n = L_\gamma \circ R_{a^n} = R_a \circ (L_\gamma \circ R_{\tilde{u}(\gamma)})$. But $L_\gamma \circ R_{\tilde{u}(\gamma)}$ acts trivially on the quotient $\tilde{\Gamma} \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$, and therefore $f = R_a$ is a non-zero time-map of the algebraic contact-Anosov flow (R_{a^t}) on $\tilde{\Gamma} \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$.

Let us underline that (R_{a^t}) is indeed Anosov, because the work of Zeghib in [Zeg96, Prop. 4.2 p.868] proves that (R_{a^t}) is *quasi-Anosov* with the definition of Mañé, and Mañé proves in [Mañ77, Theorem A] that three-dimensional quasi-Anosov flows are Anosov.

This concludes the proof of Theorem A.2 in the case where $\mathcal{S}$ is locally isomorphic to $(Y_t, \mathcal{S}_t)$, and concludes thus its whole proof.

5.8.2 Proof of Theorem A.1

Theorem A.2 directly implies Theorem A.1 stated in the introduction thanks to an argument of Brin. More precisely, we obtain the following refined version of Theorem A.1, where no domination is required on the central direction, and where the two remaining directions can *a priori* be both contracted, or both expanded.

Corollary 5.8.2. *Let M be a closed, connected and orientable three-dimensional manifold, endowed with a smooth splitting $TM = E^\alpha \oplus E^\beta \oplus E^c$ such that $E^\alpha \oplus E^\beta$ is a contact distribution. Let f be a diffeomorphism of M that preserves this splitting, and such that*

- *each of the distributions E^α and E^β is either uniformly contracted, or uniformly expanded by f ,*
- *and $NW(f) = M$.*

Then the conclusions of Theorem A.1 hold. In particular, f is a partially hyperbolic diffeomorphism.

Démonstration. Since $E^\alpha \oplus E^\beta$ is contact and M connected, any two points of M are linked by the concatenation of a finite number of paths, tangent either to E^α or to E^β (this is for example a consequence of the work of Sussmann in [Sus73, Theorem 4.1]). In other words, the pair $(\mathcal{F}^\alpha, \mathcal{F}^\beta)$ of foliations associated to (E^α, E^β) is topologically transitive in the terminology of Brin in [Bri75]. Our hypothesis of uniform contraction or expansion of the distributions E^α and E^β directly implies that $\mathcal{F}^\alpha$ and $\mathcal{F}^\beta$ are uniformly contracted or expanded in the terminology of [Bri75]. Since $NW(f) = M$ by hypothesis, [Bri75, Theorem 1.1] implies that f is topologically transitive. In fact, although Brin states his result assuming that one of the distributions is contracted, and the other one expanded, it is easy to see that his proof does in fact not use this assumption, and that the same proof works if both distributions are expanded, or both contracted.

We are now under the hypotheses of Theorem A.2, and its conclusions hold. □

Chapitre 6

Dynamique de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ sur l'espace modèle et compactifications

Dans ce dernier chapitre, nous travaillerons uniquement dans l'espace homogène modèle $\mathbf{X} = \mathbf{X}_3$ des structures Lagrangiennes de contact de dimension trois, et nous noterons $\mathbf{G} = \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$. Notre première motivation est de décrire les différents types dynamiques possibles pour l'action sur $\mathbf{X}$ d'une suite (g_n) partant à l'infini dans $\mathbf{G}$. Dans le premier paragraphe, nous précisons d'une part ce que nous entendons par « décrire la dynamique », et d'autre part comment nous allons nous y prendre. Nous étudions ensuite l'action de $\mathbf{G}$ sur $\mathbf{X}$ d'une manière systématique, en nous fondant sur son action sur $\mathbb{RP}^2$ et $\mathbb{RP}_*^2$. Notre seconde motivation est d'utiliser cette analyse pour construire dans le dernier paragraphe de ce chapitre des compactifications de certaines structures Lagrangiennes de contact *Kleiniennes*, *i.e.* de quotients d'ouverts de $\mathbf{X}$ par des sous-groupes discrets de $\mathbf{G}$ agissant librement et proprement. Si Σ est une surface hyperbolique non-compacte, nous nous intéressons à la structure Lagrangienne de contact $\mathcal{L}_\Sigma^{su}$ de $T^1\Sigma$ invariante par son flot géodésique, qui est Kleinienne selon la remarque 2.3.5. Pour certains quotients Σ de $\mathbf{H}^2$ par des sous-groupes de Schottky de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, nous construisons une *compactification* de $(T^1\Sigma, \mathcal{L}_\Sigma^{su})$, c'est à dire un plongement $f: T^1\Sigma \rightarrow M$ de la structure Lagrangienne de contact $(T^1\Sigma, \mathcal{L}_\Sigma^{su})$ dans une structure Lagrangienne de contact compacte $(M, \mathcal{L})$. Nous étudions par ailleurs les propriétés dynamiques de la prolongation du flot géodésique de $T^1\Sigma$ sur cette compactification M . Plus précisément, l'objectif du dernier paragraphe de ce chapitre est de prouver le théorème B annoncé dans l'introduction, dont nous rappelons ici l'énoncé par commodité.

Théorème B. *Soit Σ une surface topologique connexe non-compacte dont le groupe fondamental est de type fini. Il existe alors sur Σ une métrique hyperbolique complète pour laquelle on a les résultats suivants.*

- 1. La structure Lagrangienne de contact $(T^1\Sigma, \mathcal{L}_\Sigma^{su})$ admet une compactification Lagrangienne de contact plate $(M, \mathcal{L}_M)$.*
- 2. Le flot géodésique de $T^1\Sigma$ se prolonge sur M en un flot $(\bar{\varphi}^t)$ non-conservatif d'automorphismes de $\mathcal{L}_M$. Plus précisément, il existe un ouvert O dense dans M , ainsi qu'un fermé attractif $\mathcal{F}^+$ qui est une union finie de cercles, qui vérifient la condition suivante. Pour tout compact $K \subset O$ et toute suite réelle (t_n) telle que $\lim t_n = +\infty$, si $(\bar{\varphi}^{t_n}(K))$ converge pour la topologie de Hausdorff alors sa limite est contenue dans $\mathcal{F}^+$.*

Nous relierons à indices finis près la compactification $(M, \mathcal{L})$ à une structure Kleinienne $\Gamma \backslash \Omega$, où $\Gamma \subset \mathbf{G}$ est un sous-groupe discret agissant librement, proprement et cocompactement sur un ouvert $\Omega \subset \mathbf{X}$. À la proposition 6.4.6, nous décrirons le bord $\mathbf{X} \setminus \Omega$ de cet ouvert comme un ensemble limite pour l'action de Γ sur $\mathbf{X}$, ce qui nous permettra en particulier de préciser la topologie de $\mathbf{X} \setminus \Omega$. Nous montrerons par ailleurs à la proposition 6.4.4 que si Γ est monogène, *i.e.* si Σ est une trompette hyperbolique, alors la structure Kleinienne $\Gamma \backslash \Omega$ est homéomorphe au produit d'un cercle par une surface compacte connexe de genre deux.

6.1 Position du problème

Avant de nous intéresser au cas de $\mathbf{G}$ agissant sur $\mathbf{X}$, quelques brèves remarques générales nous seront utiles.

6.1.1 Ensemble dynamiquement associé à l'action d'une suite

D'une manière générale, l'ensemble dynamiquement associé à un point x d'un espace métrique compact M pour l'action d'une suite (g_n) d'homéomorphismes de M , est le fermé $\mathcal{D}_{(g_n)}(x)$ de M constitué de l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites $(g_n(x_n))$, pour toute suite (x_n) de M convergeant vers x . En symboles, cela donne :

$$\mathcal{D}_{(g_n)}(x) = \left\{ \text{valeurs d'adhérences de } (g_n(x_n)) \mid (x_n) \in M^{\mathbb{N}}, \lim x_n = x \right\}. \quad (6.1.1)$$

L'égalité

$$\mathcal{D}_{(g_n)}(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{\bigcup_{k \geq n} g_k \left(B_f \left(x, \frac{1}{n} \right) \right)},$$

où $B_f \left(x, \frac{1}{n} \right)$ désigne la boule fermée de centre x et rayon $\frac{1}{n}$, montre que $\mathcal{D}_{(g_n)}(x)$ est fermé dans M , donc compact. Par ailleurs, M étant supposé compact, $\mathcal{D}_{(g_n)}(x)$ est toujours non-vide. Cette notion n'a bien entendu d'intérêt que pour les suites d'homéomorphismes (g_n) partant à l'infini pour la topologie compacte-ouverte, *i.e.* sortant définitivement de tout compact de $\mathrm{Homeo}(M)$ à partir d'un certain rang. En effet si (g_n) converge uniformément vers g_∞ (sur un voisinage de x), alors $\mathcal{D}_{(g_n)}(x)$ est simplement le singleton $g_\infty(x)$, et il n'y a aucune surprise. Si (g_n) part à l'infini, on s'attend en revanche à voir émerger des *fermés répulsifs* dans M , en dehors desquels les ensembles dynamiquement associés à tous points sont d'autres fermés, dits *attractifs*.

Les ensembles dynamiquement associés permettent en particulier de comprendre si l'action de sous-groupes d'homéomorphismes est propre sur certains ouverts de M . Pour Γ un sous-groupe d'homéomorphismes de M et $x \in M$, nous noterons $\mathcal{D}_\Gamma(x)$ l'union des $\mathcal{D}_{(g_n)}(x)$, pour (g_n) n'importe quelle suite de Γ partant à l'infini pour la topologie compacte-ouverte.

$$\mathcal{D}_\Gamma(x) = \bigcup_{(g_n) \in \Gamma^{\mathbb{N}}, g_n \rightarrow \infty} \mathcal{D}_{(g_n)}(x).$$

Nous dirons que deux points x et y de M sont *dynamiquement reliés* par l'action de Γ si $y \in \mathcal{D}_\Gamma(x)$. Puisque Γ est un sous-groupe et que l'inversion est continue pour la topologie compacte-ouverte (car M est compact), cette relation est symétrique. La caractérisation suivante de la propriété de l'action d'un groupe topologique métrisable G sur un espace métrique X nous sera fort utile.

Lemme 6.1.1. *L'action de G sur X est propre si, et seulement si pour toute suite convergente (x_n) dans X , et toute suite (g_n) partant à l'infini dans G , $(g_n \cdot x_n)$ est non-relativement compacte.*

Puisque M est un espace métrique compact, la topologie compacte-ouverte sur $\mathrm{Homeo}(M)$ est métrisable, et l'énoncé ci-dessous est alors une simple traduction du lemme 6.1.1 à l'aide des ensembles dynamiquement associés.

Lemme 6.1.2. *Soit Γ un sous-groupe d'homéomorphismes de M muni de la topologie compacte-ouverte, et Ω un ouvert de M . Alors l'action de Γ sur Ω est propre si, et seulement s'il n'existe aucun couple de points de Ω dynamiquement reliés pour l'action de Γ .*

Les ensembles dynamiquement associés aux points de M sont également intimement reliés à la convergence des compacts de M sous l'action d'une suite (g_n) . Pour expliquer cette relation, nous supposons désormais que M est une *variété compacte*, que nous munissons d'une

distance d induite par une métrique Riemannienne. La distance de Hausdorff d_H induite par d sur l'espace $\mathcal{K}(M)$ des compacts de M est définie pour $K, L \in \mathcal{K}(M)$ par $d_H(K, L) = \inf \{r > 0 \mid K \subset L_r \text{ et } L \subset K_r\}$, où $K_r = \{x \in M \mid d(x, K) \leq r\}$. On vérifie qu'on a également :

$$d_H(K, L) = \max(\max_{p \in K} d(p, L), \max_{p \in L} d(p, K)).$$

La topologie induite sur $\mathcal{K}(M)$ par d_H est indépendante de la métrique Riemannienne originellement choisie sur M , car les distances de Hausdorff induites par deux métriques Riemanniennes différentes sont bi-Lipschitz équivalentes par compacité de M . Pour toute variété compacte M , nous munirons $\mathcal{K}(M)$ de la topologie métrisable définie par ces distances de Hausdorff, que nous nommerons *topologie de Hausdorff*. Un résultat classique affirme que $\mathcal{K}(M)$ est compact pour cette topologie. On peut maintenant interpréter la convergence dans $\mathcal{K}(M)$ en terme d'ensembles dynamiquement associés.

Lemme 6.1.3. *Soit (g_n) une suite d'homéomorphismes d'une variété compacte M .*

1. *Soit K un compact de M , tel que $g_n(K)$ converge vers un compact K_∞ pour la topologie de Hausdorff. Alors $\bigcup_{x \in \overset{\circ}{K}} \mathcal{D}_{(g_n)}(x) \subset K_\infty \subset \bigcup_{x \in K} \mathcal{D}_{(g_n)}(x)$.*
2. *Soit K un compact de M d'intérieur non-vide, et $K_\infty \in \mathcal{K}(M)$ tel que $\bigcup_{x \in K} \mathcal{D}_{(g_n)}(x) \subset K_\infty \subset \bigcup_{x \in \overset{\circ}{K}} \mathcal{D}_{(g_n)}(x)$. Alors $g_n(K)$ converge vers K_∞ pour la topologie de Hausdorff.*

Démonstration. 1. Soit en effet $y = \lim g_n(x_n)$ avec x_n convergeant vers $x \in \overset{\circ}{K}$. Alors à partir d'un certain rang $g_n(x_n) \in g_n(K)$, et donc $d(g_n(x_n), K_\infty) \leq d_H(g_n(K), K_\infty)$, ainsi $d(y, K_\infty) = \lim d(g_n(x_n), K_\infty) = 0$, i.e. $y \in K_\infty$ car ce dernier est fermé. Soit réciproquement $y \in K_\infty$. Pour tout $r > 0$, à partir d'un certain rang $y \in K_\infty \subset (g_n(K))_r$. On peut donc trouver un entier n aussi grand que voulu et $x_n \in K$, tels que $d(y, g_n(x_n)) \leq r$. Quitte à extraire une sous-suite de (g_n) , il existe donc une suite $x_n \in K$ telle que $g_n(x_n)$ converge vers y . Quitte à extraire de nouveau, on peut supposer que (x_n) converge vers un point $x \in K$ par compacité, et alors $y \in \mathcal{D}_{(a_n)}(x)$.

2. En effet, K_∞ est alors l'unique valeur d'adhérence de la suite $(g_n(K))$ selon la première assertion du lemme. Puisque $\mathcal{K}(M)$ est un espace compact métrisable, ceci impose à $(g_n(K))$ de converger vers K_∞ . $\square$

6.1.2 Décomposition KAK dans $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$

Revenons maintenant à $\mathbf{G}$ et à son action sur $\mathbf{X}$. Dans tout ce texte, nous dirons simplement que $g \in \mathbf{G} = \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ est *diagonalisable* pour signifier que, pour tout $g_0 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ dans la classe de g (i.e. tel que $g = \mathbb{R}^* g_0$), g_0 est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Si $g \in \mathbf{G}$ est diagonalisable, alors la dynamique de la suite $g_n = g^n$ est conjuguée à celle d'une suite (a^n) , avec $a \in \mathbf{G}$ diagonale. Pour une suite (g_n) quelconque dans $\mathbf{G}$, nous souhaiterions nous ramener à ce même cas simple d'une suite d'éléments de

$$A = \left\{ [\alpha, \beta, \gamma] := \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix} \in \mathbf{G} \mid \alpha, \beta, \gamma > 0 \right\} \subset \mathbf{G}, \quad (6.1.2)$$

sous-groupe des éléments diagonaux de $\mathbf{G}$ à coefficients positifs. Si deux suites (g_n) et (a_n) dans $\mathbf{G}$ vérifient $g_n = k_n a_n l_n$, où (k_n) et (l_n) convergent dans $\mathbf{G}$, respectivement vers k_∞ et l_∞ , alors les ensembles dynamiquement associés à (g_n) se déduisent de ceux de (a_n) . Concrètement, on a pour tout $x \in \mathbf{X}$ l'égalité

$$\mathcal{D}_{(g_n)}(x) = k_\infty \mathcal{D}_{(a_n)}(l_\infty(x)). \quad (6.1.3)$$

Les perturbations compactes d'une suite (g_n) ne changent donc pas la nature de sa dynamique, mais déplacent simplement les ensembles dynamiquement associés.

Or $\mathbf{G} = KAK$ avec $K := \mathrm{PO}(3)$, *i.e.* tout élément $g \in \mathbf{G}$ se décompose sous la forme $g = kal$, avec $k, l \in K$ et $a \in A$. Cette écriture est appelée la *décomposition de Cartan* de $\mathbf{G}$. Notons que si le couple $(k, l) \in K^2$ est non-unique, $a \in A$ est en revanche unique à permutation près de ses coefficients, qui ne sont rien d'autre que les valeurs singulières de g , *i.e.* les racines carrées des valeurs propres de la matrice symétrique définie positive tgg . En effet si $g = kal$ alors $g = (kl)(l^{-1}al)$, où $kl \in K$ et $l^{-1}al$ est symétrique. On reconnaît ici la décomposition polaire de g , dont on sait qu'elle est unique, et que sa partie symétrique renferme les valeurs singulières.

Toute matrice diagonale est conjuguée par une matrice de transposition à un élément $a \in A$ dont les coefficients sont ordonnés dans l'ordre croissant, *i.e.* tels que $\alpha(a) \geq \beta(a) \geq \gamma(a) > 0$, ce que nous appellerons la *forme standard* de a . L'ensemble des éléments standards de A sera noté A^+ (notons que A^+ n'est pas un sous-groupe de $\mathbf{G}$, mais seulement un semi-groupe). Tout $g \in \mathbf{G}$ admet une décomposition $g = kal$ avec $(k, l) \in K^2$ et $a \in A^+$, ce que nous appellerons une *décomposition standard* de g . L'élément $a \in A^+$ est unique dans cette décomposition, il sera appelé *projection de Cartan* de g et noté $a(g) \in A^+$. On notera également $\alpha(g) = \alpha(a)$, $\beta(g) = \beta(a)$, et $\gamma(g) = \gamma(a)$. Cette décomposition standard ainsi que la relation (6.1.3) nous permettent de nous restreindre à l'étude des suites d'éléments de A^+ .

6.1.3 Directions asymptotiques à l'infini dans $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$

On dira qu'une suite $a_n = [\alpha_n, \beta_n, \gamma_n]$ de A^+ *part simplement à l'infini* si les suites $\frac{\alpha_n}{\beta_n} \geq 1$, $\frac{\alpha_n}{\gamma_n} \geq 1$ et $\frac{\beta_n}{\gamma_n} \geq 1$ ont toutes trois une limite dans $[1; +\infty]$. Avec cette définition, toute suite de A^+ partant à l'infini admet une sous-suite partant simplement à l'infini. On dira plus généralement qu'une suite $g_n \in \mathbf{G}$ quelconque *part simplement à l'infini* si elle admet une décomposition standard dont les facteurs dans K convergent, et telle que $a(g_n) \in A^+$ part simplement à l'infini. Par compacité de K , toute suite partant à l'infini dans $\mathbf{G}$ admet donc une sous-suite partant simplement à l'infini.

Fait 6.1.4. Pour toute suite $a_n = [\alpha_n, \beta_n, \gamma_n] \in A^+$ partant simplement à l'infini, $\lim \frac{\alpha_n}{\gamma_n} = +\infty$.

Démonstration. Puisque $a_n = \frac{1}{\gamma_n}a_n$ dans $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$, on peut supposer que $\alpha_n \geq 1$ et $\gamma_n = 1$. Supposons par l'absurde que (a_n) part simplement à l'infini et que $\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim \alpha_n$ est finie. Alors (a_n) est majorée par une constante C , donc $\alpha_n \in [1; C]$. Par suite $\frac{\beta_n}{\gamma_n} \in [1; \alpha_n]$ est également bornée, ce qui contredit le fait que $a_n = [\alpha_n, \beta_n, 1]$ parte à l'infini. $\square$

La dynamique d'une suite $a_n \in A^+$ partant simplement à l'infini ne dépend donc que de $\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n}$ et de $\lim \frac{\beta_n}{\gamma_n}$.

Définition 6.1.5. Soit (g_n) une suite de $\mathbf{G}$ partant simplement à l'infini, et $[\alpha_n, \beta_n, \gamma_n] := a(g_n) \in A^+$ sa projection de Cartan. Si $\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = +\infty$ et $\lim \frac{\beta_n}{\gamma_n} < +\infty$, la suite (g_n) est dite de type *attractif*. Si $\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} < +\infty$ et $\lim \frac{\beta_n}{\gamma_n} = +\infty$, la suite (g_n) est dite de type *répulsif*. Si $\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim \frac{\beta_n}{\gamma_n} = +\infty$, la suite (g_n) est dite de type *mixte*.

6.1.3.a Interprétation dans les chambres de Weyl

Ces trois directions asymptotiques pour les suites de A^+ partant à l'infini sont reliées aux *chambres de Weyl* de l'algèbre de Lie

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \nu \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_3 \right\}$$

de A . Soit V le sous-espace des matrices diagonales de $\mathfrak{gl}_3$, et (e_1, e_2, e_3) la base de V^* duale de la base $([1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1])$ de V . L'ensemble des *racines réduites* de $\mathfrak{a}$ est alors $\Sigma =$

$\{e_i - e_j \mid i \neq j\} \subset \mathfrak{a}^*$, et les *chambres de Weyl* de $\mathfrak{a}$ sont les 6 composantes connexes de $\mathfrak{a} \setminus \bigcup_{\alpha \in \Sigma} \text{Ker } \alpha$. Le demi-cône

$$\mathfrak{a}^+ = \{v \in \mathfrak{a} \mid (e_1 - e_2)(v) \geq 0 \text{ et } (e_2 - e_3)(v) \geq 0\}$$

de $\mathfrak{a}$ tel que $A^+ = \exp(\mathfrak{a}^+)$, est l'adhérence de la chambre de Weyl où $e_1 - e_3$ est positive et qui est délimitée supérieurement par le mur $M_+ = \text{Ker}(e_1 - e_2)$, et inférieurement par le mur $M_- = \text{Ker}(e_2 - e_3)$. Soit $a_n \in A^+$ et $v_n \in \mathfrak{a}^+$ telle que $a_n = \exp(v_n)$. Alors (a_n) tend vers l'infini si, et seulement si $\|v_n\|$ tend vers l'infini (pour une métrique euclidienne quelconque sur $\mathfrak{a}$), et (a_n) tend simplement vers l'infini si, et seulement si les distances $d(v_n, M_-)$ et $d(v_n, M_+)$ aux murs de $\mathfrak{a}^+$ convergent dans $[0; +\infty]$. De plus, $\lim d(v_n, M_+) < +\infty$ et $\lim d(v_n, M_-) = +\infty$ (respectivement $\lim d(v_n, M_+) = +\infty$ et $\lim d(v_n, M_-) < +\infty$, respectivement $\lim d(v_n, M_+) = \lim d(v_n, M_-) = +\infty$) si, et seulement si (a_n) est de type répulsif (resp. attractif, resp. mixte).

En d'autres termes, (a_n) est de type répulsif (resp. attractif) si, et seulement si (v_n) tend asymptotiquement vers une parallèle au mur supérieur (resp. inférieur), et est de type mixte si, et seulement si (v_n) ne tend asymptotiquement vers aucune parallèle à l'un des deux murs.

6.1.3.b Propriétés des types dynamiques

Lemme 6.1.6. *Soit (g_n) une suite de $\mathbf{G}$ partant simplement à l'infini. Si (g_n) est de type attractif (respectivement répulsif, resp. mixte), alors (g_n^{-1}) part simplement à l'infini et est de type répulsif (resp. attractif, resp. mixte).*

Démonstration. Grâce à la décomposition standard, il suffit de le prouver pour $a_n \in A^+$ partant simplement à l'infini, et nous supposons de plus (a_n) de type attractif, le raisonnement étant analogue dans les autres cas. Dans ce cas, $a_n^* := [\gamma_n^{-1}, \beta_n^{-1}, \alpha_n^{-1}] \in A^+$ part simplement à l'infini de type répulsif, et avec

$$g_0 = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix} = g_0^{-1} \in K, \quad (6.1.4)$$

on a $a_n^{-1} = g_0 a_n^* g_0^{-1}$, ce qui montre que (a_n^{-1}) est de type répulsif. $\square$

Les types attractifs et répulsifs sont donc duaux l'un de l'autre pour l'inversion, alors que le type mixte est son propre dual. Cette disparité trouve une explication naturelle dans la traduction des trois directions asymptotiques à travers les chambres de Weyl. En effet l'application $v = [\lambda, \mu, \nu] \in \mathfrak{a}^+ \mapsto v^* = [-\nu, -\mu, -\lambda]$ est une symétrie de la chambre de Weyl $\mathfrak{a}^+$ qui échange ses deux murs.

Lemme 6.1.7. 1. *Soit (g_n) une suite de $\mathbf{G}$ admettant une décomposition de la forme $g_n = k_n a_n l_n$, où (k_n) et (l_n) sont relativement compactes, et (a_n) est une suite de A^+ partant simplement à l'infini. Alors toute sous-suite de (g_n) partant simplement à l'infini a le même type dynamique que (a_n) .¹*

2. *Soit $g \in \mathbf{G}$ diagonalisable et $g_0 \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que $g = \mathbb{R}^* g_0$. Alors (g^n) part à l'infini si, et seulement si les valeurs absolues $\alpha \geq \beta \geq \gamma > 0$ des trois valeurs propres de g_0 comptées avec multiplicité sont deux à deux distinctes. Elle part simplement à l'infini si, et seulement si ces trois valeurs propres sont de plus positives. Les sous-suites de (g^n) partant simplement à l'infini sont toutes du même type :*

- *attractif si $\alpha > \beta = \gamma$, on dira alors que g est de type attractif;*
- *répulsif si $\alpha = \beta > \gamma$, on dira alors que g est de type répulsif;*
- *et mixte si $\alpha > \beta > \gamma$, on dira alors que g est de type mixte, ou loxodromique.*

1. Notons que (a_n) est à priori différente de la projection de Cartan $(a(g_n))$ de (g_n) , car (k_n) et (l_n) ne sont pas supposées contenues dans K .

Démonstration du lemme 6.1.7. 1. Il suffit de le prouver pour une suite de A^+ grâce à la décomposition standard. Or si (a_n) et (b_n) sont deux suites de A^+ tendant simplement vers l'infini, et s'il existe k_n et l_n deux suites relativement compactes telles que $a_n = k_n b_n l_n$, alors la dynamique des suites a_n et b_n sur $\mathbb{RP}^2$ décrite au paragraphe 6.2 montre que a_n et b_n ont le même type dynamique.

2. C'est une conséquence immédiate de la première partie du lemme. $\square$

6.2 Dynamique de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{RP}^2$ et $\mathbb{RP}_*^2$

Nous commençons par décrire les propriétés dynamiques de l'action de $\mathbf{G}$ sur $\mathbb{RP}^2$, d'où découleront directement celles de son action sur $\mathbb{RP}_*^2$ par dualité. Ces résultats sont sans nul doute classiques, mais nous avons cru bon de les établir d'une manière systématique.

6.2.1 Quelques remarques générales

Rappelons que pour $P \subset \mathbb{R}^3$, nous notons $[P]$ la projection dans $\mathbb{RP}^2$ du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par P . L'action de $\mathbf{G}$ est transitive sur les triplets de points distincts de $\mathbb{RP}^2$. Elle n'est en revanche pas simplement transitive sur ces triplets, et pour la comprendre plus précisément il suffit d'étudier l'action de A , qui est la composante neutre de $\mathrm{Stab}_{\mathbf{G}}([e_1], [e_2], [e_3])$. Cette action a exactement trois points fixes $[e_1]$, $[e_2]$, $[e_3]$ (de plus, tout élément loxodromique de A a exactement ces trois points pour points fixes). Elle stabilise les trois droites projectives associées $[e_1, e_2]$, $[e_1, e_3]$ et $[e_2, e_3]$, et a six orbites de dimension un, qui sont les composantes connexes des complémentaires des trois points fixes de A dans ces trois droites projectives. Le complémentaire de ces trois droites projectives dans $\mathbb{RP}^2$ a quatre composantes connexes, qui sont les quatre orbites ouvertes de A . En utilisant la carte affine $(x, y) \mapsto [x : y : 1]$ pour l'ouvert affine $\mathbb{RP}^2 \setminus [e_1, e_2]$, ces quatre orbites ouvertes sont les quatre cadrans de $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{R}e_1 \cup \mathbb{R}e_2\}$.

6.2.2 Type attractif

Rappelons que $\mathbb{RP}_*^2$ désigne l'ensemble des droites projectives de $\mathbb{RP}^2$, et que pour $p \in \mathbb{RP}^2$, $p^* = \{D \in \mathbb{RP}_*^2 \mid D \ni p\} \subset \mathbb{RP}_*^2$, et est appelé *droite projective duale* de p .

Lemme 6.2.1. *Soit (g_n) une suite de $\mathbf{G}$ partant simplement à l'infini de type attractif. Il existe une droite projective $\mathcal{C}^-$ et un point p_+ dans $\mathbb{RP}^2$, respectivement appelés cercle répulsif et point attractif de (g_n) , ainsi qu'un difféomorphisme $\hat{g}_\infty : \mathcal{C}^- \rightarrow (p_+)^*$, uniquement déterminés par (g_n) et vérifiant les propriétés suivantes.*

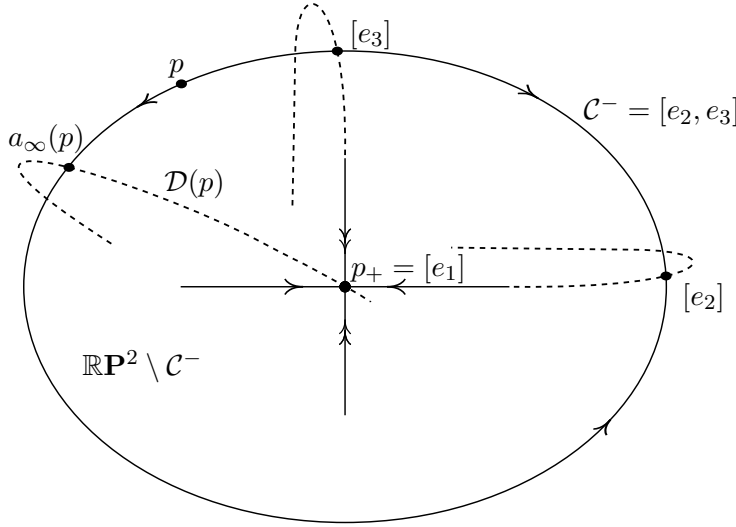
1. Pour tout $p \in \mathbb{RP}^2 \setminus \mathcal{C}^-$, $\mathcal{D}_{(g_n)}(p) = p_+$.
2. Pour $p \in \mathcal{C}^-$, $\mathcal{D}_{(g_n)}(p) = \hat{g}_\infty(p)$. En particulier, l'ensemble des $\mathcal{D}_{(g_n)}(p) \setminus \{p_+\}$ pour $p \in \mathcal{C}^-$ forme un feuilletage de $\mathbb{RP}^2 \setminus \{p_+\}$.
3. Il existe un morphisme $\rho_\infty : \mathrm{Stab}_{\mathbf{G}}(\mathcal{C}^-) \rightarrow \mathrm{Stab}_{\mathbf{G}}(\mathcal{C}^-) \cap \mathrm{Stab}_{\mathbf{G}}(p_+)$, tel que $\hat{g}_\infty$ soit ρ_∞ -équivariant.

De plus si (g_n) est contenue dans A^+ , alors $p_+ = [e_1]$ et $\mathcal{C}^- = [e_2, e_3]$.

Grâce à la décomposition standard, il suffit de prouver cette description pour les suites de A^+ partant simplement à l'infini de type attractif. On suppose donc que $g_n = a_n \in A^+$, et on écrit

$$a_n = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \beta_n & \\ & & \gamma_n \end{bmatrix}$$

cette suite. On a alors $\lim \beta_n = \lim \gamma_n = 0$, et $\lim \frac{\gamma_n}{\beta_n} = \lambda_\infty \in]0; 1]$. Dans la carte affine standard $\varphi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto [1 : x : y] \in \mathbb{RP}^2 \setminus [e_2, e_3]$, a_n agit comme l'application linéaire $\begin{pmatrix} \beta_n & \\ & \gamma_n \end{pmatrix}$, ce qui

FIGURE 6.2.1 – Schéma d'une dynamique attractive dans A^+ .

indique que $p_+ = [e_1] = \varphi^{-1}(0, 0)$ est un point fixe attractif de (a_n) , et $C^- = [e_2, e_3]$ un cercle répulsif. De plus, a_n agit sur C^- par $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & \frac{\gamma_n}{\beta_n} \end{bmatrix}$, et l'action de $(a_n|_{C^-})$ converge donc uniformément vers la transformation hyperbolique

$$a_\infty := \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \lambda_\infty \end{bmatrix}$$

de C^- . Cette situation est résumée par la figure 6.2.1.

Démonstration du lemme 6.2.1. 1. Il suffit de montrer que $\mathcal{D}_{(a_n)}(p) \subset [e_1]$ car $\mathcal{D}_{(a_n)}(p)$ est non-vide, $\mathbb{RP}^2$ étant compact. Soit $p_n \in \mathbb{RP}^2$ convergeant vers $[e_1]$. Alors à partir d'un certain rang, p_n est en dehors de $[e_2, e_3]$, i.e. s'écrit sous la forme $[1 : x_n : y_n]$ avec (x_n, y_n) convergeant vers $(0, 0)$, si bien que $a_n(p_n) = [1 : \beta_n x_n : \gamma_n y_n]$ converge vers $[e_1]$.

2. La transformation recherchée est $\hat{a}_\infty(p) = [p_+, a_\infty(p)]$. Montrons d'abord que $\mathcal{D}_{(a_n)}(p) \subset [p_+, a_\infty(p)]$. On suppose que $p \neq [e_3]$, la preuve étant identique en supposant $p \neq [e_2]$. Il existe donc $y \in \mathbb{R}$ tel que $p = [0 : 1 : y]$, et on peut de plus se restreindre aux suites p_n de la forme $[1 : x_n : y_n] \in \mathbb{RP}^2 \setminus C^-$ convergeant vers p . On a donc $\lim \frac{1}{x_n} = 0$ et $\lim \frac{y_n}{x_n} = y$, et quitte à extraire une sous-suite de a_n , on suppose que $a_n(p_n) = [1 : \beta_n x_n : \gamma_n y_n]$ converge vers $q \in \mathbb{RP}^2$. On suppose d'abord que $q \in [e_2, e_3]$, i.e. que $\lim \|(\beta_n x_n, \gamma_n y_n)\| = +\infty$. Si $|\beta_n x_n|$ ne converge pas vers $+\infty$, alors quitte à extraire on peut supposer $(\beta_n x_n)$ bornée, et puisque $\lim \|(\beta_n x_n, \gamma_n y_n)\| = +\infty$, on obtient $\lim \left| \frac{\gamma_n y_n}{\beta_n x_n} \right| = +\infty$, ce qui contredit $\lim \frac{y_n}{x_n} = y$ et $\lim \frac{\gamma_n}{\beta_n} = \lambda_\infty$. Ainsi $\lim |\beta_n x_n| = +\infty$, et puisque $\lim \frac{\gamma_n y_n}{\beta_n x_n} = \lambda_\infty y$, $a_n(p_n) = [\frac{1}{\beta_n x_n} : 1 : \frac{\gamma_n y_n}{\beta_n x_n}]$ converge vers $[0 : 1 : \lambda_\infty y] = a_\infty(p)$. On suppose maintenant que $q = [1 : x_\infty : y_\infty] \in \mathbb{RP}^2 \setminus C^-$. Alors $\frac{y_\infty}{x_\infty} = \lim \frac{\gamma_n y_n}{\beta_n x_n} = \lambda_\infty y$, i.e. $q \in [e_1, (0, 1, \lambda_\infty y)] = [e_1, a_\infty(p)]$.

Il nous reste à montrer que $[p_+, a_\infty(p)] \subset \mathcal{D}_{(a_n)}(p)$. Pour $t \in \mathbb{R}^*$, et $q = [1 : t : \lambda_\infty y t] \in [p_+, a_\infty(p)] \cap (\mathbb{RP}^2 \setminus C^-)$, $p_n := [1 : \frac{t}{\beta_n} : \frac{y t}{\beta_n}]$ converge vers p et $a_n(p_n)$ vers q . Ainsi $[p_+, a_\infty(p)] \setminus \{p_+, a_\infty(p)\}$ est contenu dans $\mathcal{D}_{(a_n)}(p)$, et puisque ce dernier est fermé, cela prouve l'inclusion $[p_+, a_\infty(p)] \subset \mathcal{D}_{(a_n)}(p)$.

3. Notons $b_\infty = [1, \lambda_\infty] \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ la restriction de a_∞ à C^- . Alors le morphisme suivant convient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & g \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b_\infty g b_\infty^{-1} \end{pmatrix}.$$

□

Exemple 6.2.2. Soit $g \in \mathbf{G}$ un élément diagonalisable de type attractif, *i.e.* dont les valeurs absolues des valeurs propres de $g_0 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que $g = \mathbb{R}^* g_0$, comptées avec multiplicité, vérifient $\alpha > \beta = \gamma$. Soit $p_+ \in \mathbb{RP}^2$ la droite propre associée à α , et $\mathcal{C}^- \in \mathbb{RP}_*^2$ le plan propre associé à $\beta = \gamma$. On déduit facilement de la preuve précédente que toute sous-suite de (g^n) partant simplement à l'infini admet p_+ pour point attractif, et $\mathcal{C}^-$ pour cercle répulsif.

6.2.3 Type répulsif

Lemme 6.2.3. *Soit (g_n) une suite de $\mathbf{G}$ partant simplement à l'infini de type répulsif. Il existe une droite projective $\mathcal{C}^+$ et un point p_- dans $\mathbb{RP}^2$, respectivement appelés cercle attractif et point répulsif de (g_n) , ainsi qu'une fibration localement triviale $\bar{g}_\infty: \mathbb{RP}^2 \setminus \{p_-\} \rightarrow \mathcal{C}^+$, dont les fibres sont les droites projectives contenant p_- (privées de p_-), uniquement déterminés par (g_n) et vérifiant les propriétés suivantes.*

1. Pour $p \in \mathbb{RP}^2 \setminus \{p_-\}$, $\mathcal{D}_{(g_n)}(p) = \bar{g}_\infty(p)$. En particulier, $\bigcup_{p \neq p_-} \mathcal{D}_{(g_n)}(p) = \mathcal{C}^+$.
2. $\mathcal{D}_{(g_n)}(p_-) = \mathbb{RP}^2$.
3. Il existe un morphisme $\rho_\infty: \mathrm{Stab}_{\mathbf{G}}(p_-) \rightarrow \mathrm{Stab}_{\mathbf{G}}(\mathcal{C}^+) \cap \mathrm{Stab}_{\mathbf{G}}(p_-)$, tel que $\bar{g}_\infty$ soit ρ_∞ -équivariant.

De plus si (g_n) est contenue dans A^+ , alors $p_- = [e_3]$ et $\mathcal{C}^+ = [e_1, e_2]$.

Comme précédemment, il suffit de prouver cette description pour les suites de A^+ partant simplement à l'infini de type répulsif. On suppose donc que $g_n = a_n \in A^+$, et on écrit

$$a_n = \begin{bmatrix} \alpha_n & & \\ & \beta_n & \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

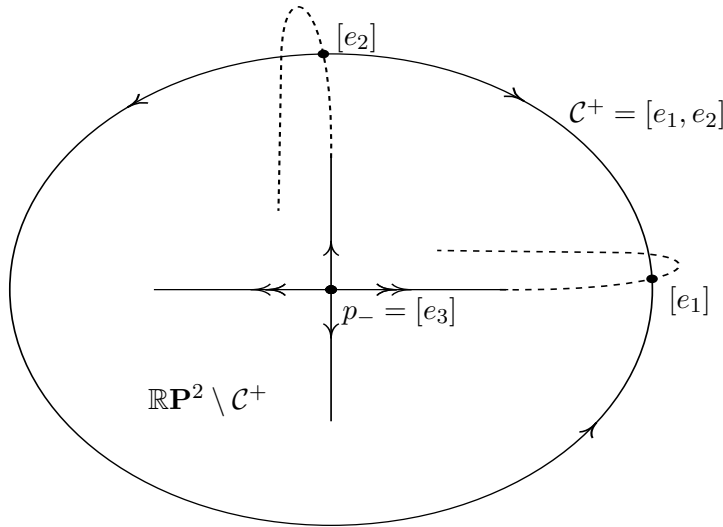
de sorte que $\lim \alpha_n = \lim \beta_n = +\infty$, et $\lim \frac{\beta_n}{\alpha_n} = \lambda_\infty \in]0; 1]$. Dans la carte affine standard $\varphi: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto [x : y : 1] \in \mathbb{RP}^2 \setminus [e_1, e_2]$, a_n agit comme l'application linéaire $\begin{pmatrix} \alpha_n & \\ & \beta_n \end{pmatrix}$, ce qui indique que $p_- = [e_3] = \varphi^{-1}(0, 0)$ est un point fixe répulsif de (a_n) , et $\mathcal{C}^+ = [e_1, e_2]$ un cercle stable attractif. Par ailleurs, a_n agit sur $\mathcal{C}^+$ comme $\begin{bmatrix} 1 & \\ & \frac{\beta_n}{\alpha_n} \end{bmatrix}$, et l'action de $(a_n|_{\mathcal{C}^+})$ converge donc uniformément vers la transformation hyperbolique

$$a_\infty := \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \lambda_\infty & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

de $\mathcal{C}^+$. Cette situation est résumée par la figure 6.2.2.

Démonstration du lemme 6.2.3. 1. La fibration recherchée est $\bar{a}_\infty(p) = a_\infty([p_-, p] \cap \mathcal{C}^+)$. Puisque $\mathcal{D}_{(a_n)}(p)$ est non-vide, il suffit de montrer que si $q \in \mathcal{D}_{(a_n)}(p)$, alors $q = a_\infty([p_-, p] \cap \mathcal{C}^+)$. Quitte à extraire une sous-suite de (a_n) , on peut supposer qu'il existe une suite p_n convergeant vers p , telle que $q_n := a_n(p_n)$ converge vers q . En posant $g_0 = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}$ et $b_n = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \beta_n^{-1} \\ & & \alpha_n^{-1} \end{bmatrix}$, (b_n) est une suite standard de type attractif et $a_n^{-1} = g_0 b_n g_0^{-1}$. La suite $q'_n := g_0^{-1}(q_n)$ converge vers $g_0^{-1}(q)$, et $b_n(q'_n)$ converge vers $g_0^{-1}(p) \neq [e_1]$ par hypothèse. Selon le lemme 6.2.1, ceci implique que $g_0^{-1}(q) \in [e_2, e_3]$, et selon le lemme 6.2.1, on sait alors que $g_0^{-1}(p) \in [b_\infty^-(g_0^{-1}(q)), e_1]$. Or $b_\infty^- = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \lambda_\infty \end{bmatrix}$, et donc $g_0 b_\infty^- g_0^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_\infty & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = (a_\infty)^{-1}$. Ainsi $p \in [(a_\infty)^{-1}(q), e_3]$, *i.e.* $q = a_\infty([p, e_3] \cap [e_1, e_2])$, ce qui termine la preuve.

2. Soit $q = [x : y : 1] \in \mathbb{RP}^2 \setminus \mathcal{C}^+$, alors $p_n := [\frac{x}{\alpha_n} : \frac{y}{\beta_n} : 1]$ converge vers p_- , et $a_n(p_n) = q$ converge vers q . Ainsi $\mathbb{RP}^2 \setminus \mathcal{C}^+$ est contenu dans $\mathcal{D}_{(a_n)}(p_-)$, ce qui termine la preuve du lemme

FIGURE 6.2.2 – Schéma d'une dynamique répulsive dans A^+ .

puisque cet ensemble est fermé.

3. Notons $b_\infty = [1, \lambda_\infty] \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ la restriction de a_∞ à C^+ . Alors le morphisme suivant convient :

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b_\infty g b_\infty^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.2.1)$$

□

Exemple 6.2.4. Soit $g \in \mathbf{G}$ un élément diagonalisable de type répulsif, *i.e.* dont les valeurs absolues des valeurs propres de $g_0 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que $g = \mathbb{R}^* g_0$, comptées avec multiplicité, vérifient $\alpha = \beta > \gamma$. Soit $p_- \in \mathbb{RP}^2$ la droite propre associée à γ , et $C^+ \in \mathbb{RP}_*^2$ le plan propre associé à $\alpha = \beta$. On déduit facilement de la preuve précédente que toute sous-suite de (g^n) partant simplement à l'infini admet p_- pour point répulsif, et C^+ pour cercle attractif.

6.2.4 Type mixte

Lemme 6.2.5. Soit (g_n) une suite de $\mathbf{G}$ partant simplement à l'infini de type mixte. Il existe deux droites projectives C^- et C^+ , et deux points $p_- \in C^-$ et $p_+ \in C^+$, respectivement appelés cercle (respectivement point) attractif (resp. répulsif) de g_n , uniquement déterminés par (g_n) et vérifiant les propriétés suivantes.

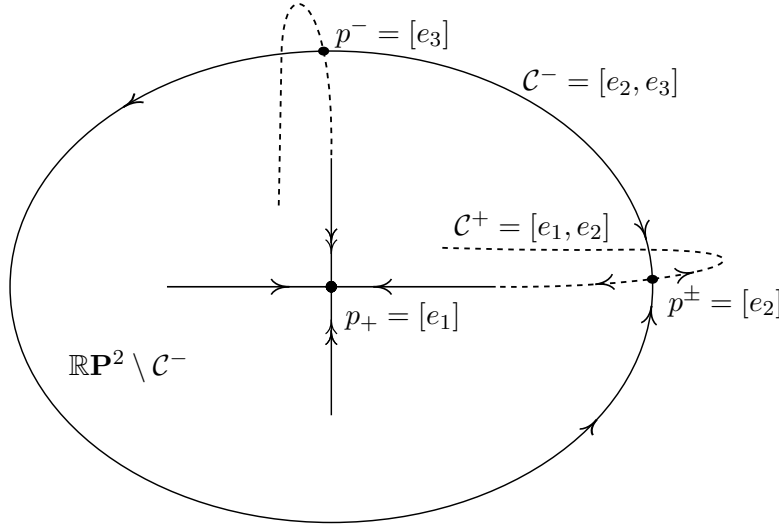
1. Pour tout $p \in \mathbb{RP}^2 \setminus C^-$, $\mathcal{D}_{(g_n)}(p) = \{p_+\}$.
2. Pour tout $p \in C^- \setminus \{p_-\}$, $\mathcal{D}_{(g_n)}(p) = C^+$.
3. Et $\mathcal{D}_{(g_n)}(p_-) = \mathbb{RP}^2$.

Si C^- et C^+ sont distinctes, on appelle $p_\pm = C^- \cap C^+$ le point selle de la suite (g_n) . Si (g_n) est contenue dans A^+ , alors $p_+ = [e_1]$, $p_\pm = [e_2]$ et $p_- = [e_3]$.

Comme précédemment, on suppose que $g_n = a_n \in A^+$, et on l'écrit sous la forme

$$a_n = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \beta_n & \\ & & \gamma_n \end{bmatrix},$$

de sorte que $\lim \beta_n = \lim \gamma_n = \lim \frac{\gamma_n}{\beta_n} = 0$. Dans la carte affine standard $\varphi: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto [1 : x : y] \in \mathbb{RP}^2 \setminus [e_2, e_3]$, a_n agit comme l'application linéaire $\begin{pmatrix} \beta_n & \\ & \gamma_n \end{pmatrix}$, ce qui montre que $p_+ = [e_1] = \varphi^{-1}(0, 0)$ est un point fixe attractif, et $C^- = [e_2, e_3]$ un cercle stable répulsif. De

FIGURE 6.2.3 – Schéma d'une dynamique mixte dans A^+ .

plus, (a_n) agit sur C^- par la suite de transformations hyperboliques $\begin{bmatrix} 1 & \\ & \frac{\gamma_n}{\beta_n} \end{bmatrix}$, et l'action de $(a_n|_{C^- \setminus [e_3]})$ converge donc uniformément vers le point $[e_2]$. Ainsi $p_- = [e_3]$ est un point répulsif, et $p_{\pm} = [e_2]$ est un point selle. Cette situation est résumée par la figure 6.2.3.

Démonstration du lemme 6.2.5. 1. La preuve de cette première assertion est identique à celle du lemme 6.2.1.

2. Soit $p = [0 : 1 : y] \in C^- \setminus \{p_-\}$, avec $y \in \mathbb{R}$. Si une suite p_n de C^- converge vers p , il est clair que $p_{\pm}$ est l'unique valeur d'adhérence de $a_n(p_n)$. Si $p_n = [1 : x_n : y_n]$ converge vers p , alors $\lim \frac{1}{x_n} = 0$ et $\lim \frac{y_n}{x_n} = y$. Ainsi $\lim \frac{\gamma_n y_n}{\beta_n x_n} = 0$, et donc si $a_n(p_n) = [1 : \beta_n x_n : \gamma_n y_n]$ converge vers $q \in [e_2, e_3]$, alors $q = [e_2]$. Si $q = [1 : x_{\infty} : y_{\infty}] \notin [e_2, e_3]$, alors $\lim \frac{\gamma_n y_n}{\beta_n x_n} = 0$ implique que $y_{\infty} = 0$, i.e. $q \in [e_1, e_2]$. On a donc montré que $\mathcal{D}_{(a_n)}(p) \subset C^+$. Réciproquement, avec $q = [1 : t : 0] \in C^+ \setminus \{[e_2], [e_1]\}$ où $t \in \mathbb{R}^*$, $p_n = [1 : \frac{t}{\beta_n} : \frac{ty}{\beta_n}]$ converge vers p et $a_n(p_n) = [1 : t : ty \frac{\gamma_n}{\beta_n}]$ converge vers q . Ainsi $C^+ \setminus \{[e_2], [e_1]\} \subset \mathcal{D}_{(a_n)}(p)$, ce qui prouve l'égalité voulue car $\mathcal{D}_{(a_n)}(p)$ est fermé.

3. Soit $q = [1 : x : y] \in \mathbb{RP}^2 \setminus ([e_2, e_3] \cup [e_1, e_2])$, i.e. $y \neq 0$. Alors $p_n = [1 : \frac{x}{\beta_n} : \frac{y}{\gamma_n}]$ converge vers $[e_3]$ et $a_n(p_n) = q$ converge vers q . Ceci montre que $\mathbb{RP}^2 = \mathcal{D}_{(a_n)}(p_-)$ car ce dernier est fermé. $\square$

Exemple 6.2.6. Soit $g \in \mathbf{G}$ un élément diagonalisable loxodromique, i.e. ayant trois valeurs propres de valeurs absolues distinctes, et soient p_+ , $p_{\pm}$ et p_- les droites propres de $g_0 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que $g = \mathbb{R}^* g_0$, ordonnées par ordre décroissant des valeurs absolues des valeurs propres. Ces trois points de $\mathbb{RP}^2$ sont respectivement le point attractif, le point selle, et le point répulsif de toute sous-suite de (g^n) partant simplement à l'infini, et ses cercles attractif et répulsif sont $C^- = [p_+, p_{\pm}]$ et $C^+ = [p_-, p_{\pm}]$.

Remarque 6.2.7. Nous avons vu dans le lemme 6.1.6 que l'inverse d'une suite $g_n \in \mathbf{G}$ partant simplement à l'infini de type attractif (respectivement répulsif, respectivement mixte) est de type répulsif (resp. attractif, resp. mixte). Nous allons maintenant montrer que les objets répulsifs (respectivement attractifs) de (g_n^{-1}) sont les objets attractifs (resp. répulsifs) correspondant de (g_n) . Comme d'habitude, il suffit de prouver ces relations pour des suites de A^+ grâce à la décomposition standard.

Soit $a_n = [\alpha_n, \beta_n, \gamma_n]$ de A^+ partant simplement à l'infini de type attractif. Rappelons que $a_n^* = [\gamma_n^{-1}, \beta_n^{-1}, \alpha_n^{-1}] \in A^+$ part simplement à l'infini de type répulsif, et qu'avec $g_0 = g_0^{-1} \in K$

défini au lemme 6.1.6, on a $a_n^{-1} = g_0 a_n^* g_0^{-1}$. Cette conjugaison et la relation (6.1.3) impliquent les égalités $p_-(a_n^{-1}) = g_0(p_-(a_n^*))$ et $\mathcal{C}^+(a_n^{-1}) = g_0(\mathcal{C}^+(a_n^*))$ entre les objets répulsif et attractif respectifs des suites (a_n^{-1}) et (a_n^*) . Or $p_-(a_n^*) = g_0(p_+(a_n))$ et $\mathcal{C}^+(a_n^*) = g_0(\mathcal{C}^-(a_n))$ selon les lemmes 6.2.3 et 6.2.1, d'où les égalités

$$p_-(a_n^{-1}) = p_+(a_n) \text{ et } \mathcal{C}^+(a_n^{-1}) = \mathcal{C}^-(a_n). \quad (6.2.2)$$

De même, si (a_n) est de type répulsif ou mixte, alors les objets attractifs de (a_n^{-1}) sont les objets répulsifs correspondants de (a_n) , et inversement.

Il ne nous reste plus qu'à relier les applications $\hat{g}_\infty$ et $\bar{g}_\infty$ des lemmes 6.2.1 et 6.2.3 entre une suite et son inverse. Soient $a_n = [\alpha_n : \beta_n : \gamma_n]$ une suite de A^+ partant simplement à l'infini de type attractif, et $p \neq [e_1] = p_-(a_n^{-1})$. Alors selon le lemme 6.2.3, $\overline{a^{-1}}_\infty(p) = \mathcal{D}_{(a_n^{-1})}(p) = g_0 \circ \overline{a^*}_\infty \circ g_0^{-1}(p)$, où $\overline{a^*}_\infty(q) = a_\infty^*([e_3, q] \cap [e_1, e_2])$, $a_\infty^* = [1, \lambda_\infty, *] \in A$, et $\lambda_\infty = \lim \frac{\gamma_n}{\beta_n}$. Par suite $\mathcal{D}_{(a_n^{-1})}(p) = [*, \lambda_\infty, 1]([e_1, p] \cap [e_2, e_3]) = a_\infty^{-1}([e_1, p] \cap [e_2, e_3]) = \hat{a}_\infty^{-1}([e_1, p])$, i.e. pour tout $p \neq p_+ := p_-(a_n^{-1})$ on a

$$\overline{a^{-1}}_\infty(p) = (\hat{a}_\infty)^{-1}([p_+, p]). \quad (6.2.3)$$

De la même manière, si (a_n) est de type répulsif, alors pour tout $p \in \mathcal{C}^-(a_n^{-1})$:

$$\widehat{a^{-1}}_\infty(p) = \overline{(\hat{a}_\infty)^{-1}(p)}. \quad (6.2.4)$$

6.2.5 Conséquences sur $\mathbb{RP}_*^2$

Comme nous l'avons vu au paragraphe 2.2.2, l'application duale $\tau: p \in \mathbb{RP}^2 \mapsto p^\perp \in \mathbb{RP}_*^2$ est équivariante pour le morphisme $g \in \mathbf{G} \mapsto {}^t g^{-1} \in \mathbf{G}$, et conjugue donc l'action de $\mathbf{G}$ sur l'espace $\mathbb{RP}_*^2$ des droites projectives de $\mathbb{RP}^2$ à son action sur $\mathbb{RP}^2$. La dynamique de $\mathbf{G}$ sur $\mathbb{RP}_*^2$ est donc moralement la même que celle que nous avons décrite sur $\mathbb{RP}^2$, les types dynamiques étant inversés selon le lemme 6.1.6. Les relations unissant les objets dynamiques d'une suite de $\mathbf{G}$ dans $\mathbb{RP}_*^2$ à ceux dans $\mathbb{RP}^2$ sont pour cette même raison les plus naturelles que l'on pourrait attendre. Pour clarifier les idées et simplifier notre travail ultérieur, nous énonçons tout de même le résultat suivant.

Lemme 6.2.8. *Soit (g_n) une suite partant simplement à l'infini dans $\mathbf{G}$.*

1. *Supposons (g_n) de type attractif, et notons p_+ et $\mathcal{C}^-$ son point attractif et son cercle répulsif dans $\mathbb{RP}^2$, ainsi que $\hat{g}_\infty: \mathcal{C}^- \rightarrow (p_+)^*$ le difféomorphisme introduit au lemme 6.2.1. Alors $D_- = \mathcal{C}^- \in \mathbb{RP}_*^2$ est le point répulsif de l'action de (g_n) sur $\mathbb{RP}_*^2$, et $\mathcal{C}^+ = (p_+)^*$ est son cercle attractif. Plus précisément, on a les résultats suivants.*
 - (a) *Soit $\bar{g}_\infty^*: D \in \mathbb{RP}_*^2 \setminus \{D_-\} \mapsto \hat{g}_\infty(D \cap D_-) \in \mathcal{C}^+$, fibration localement triviale dont les fibres sont les droites projectives duales contenant D_- (privées de D_-). Pour $D \in \mathbb{RP}_*^2 \setminus D_-$, on a $\mathcal{D}_{(g_n)}(D) = \bar{g}_\infty^*(D)$.*
 - (b) $\mathcal{D}_{(g_n)}(D_-) = \mathbb{RP}_*^2$.
2. *Supposons (g_n) de type répulsif, et notons p_- et $\mathcal{C}^+$ son point répulsif et son cercle attractif dans $\mathbb{RP}^2$, ainsi que $\bar{g}_\infty: \mathbb{RP}^2 \setminus \{p_-\} \rightarrow \mathcal{C}^+$ la fibration introduite au lemme 6.2.3. Alors $D_+ = \mathcal{C}^+ \in \mathbb{RP}_*^2$ est le point attractif de l'action de (g_n) sur $\mathbb{RP}_*^2$, et $\mathcal{C}^- = (p_-)^*$ est son cercle répulsif. Plus précisément, on a les résultats suivants.*
 - (a) *Pour $D \in \mathbb{RP}_*^2 \setminus \mathcal{C}^-$, $\mathcal{D}_{(g_n)}(D) = D_+$.*
 - (b) *Soit $\hat{g}_\infty^*: D \in \mathcal{C}^- \mapsto \bar{g}_\infty(D \cap \tau(p_-)) \in \mathcal{C}^+ = D_+$, qui est un difféomorphisme. Alors pour $D \in \mathcal{C}^-$, $\mathcal{D}_{(g_n)}(D) = (\hat{g}_\infty^*(D))^*$.*
3. *Supposons (g_n) de type mixte, et notons p_- , p_+ , $\mathcal{C}^-$ et $\mathcal{C}^+$ ses points et cercles attractifs et répulsifs dans $\mathbb{RP}^2$. Alors $\mathcal{C}_*^- = (p_-)^*$ et $\mathcal{C}_*^+ = (p_+)^*$ sont les cercles répulsif et attractif de l'action de (g_n) sur $\mathbb{RP}_*^2$, et $D_- = \mathcal{C}^-$ et $D_+ = \mathcal{C}^+$ ses points répulsif et attractif. Plus précisément, on a les résultats suivants.*

- (a) Pour $D \in \mathbb{RP}_*^2 \setminus \mathcal{C}_*^-$, $\mathcal{D}_{(g_n)}(D) = D_+$.
- (b) Pour $D \in \mathcal{C}_*^- \setminus \{D_-\}$, $\mathcal{D}_{(g_n)}(D) = \mathcal{C}_*^+$.
- (c) Et $\mathcal{D}_{(g_n)}(D_-) = \mathbb{RP}_*^2$.

Démonstration. Le cas général se déduit aisément du cas d'une suite $a_n \in A^+$ partant simplement à l'infini. En faisant agir a_n sur $\mathbb{RP}_*^2$ et a_n^{-1} sur $\mathbb{RP}^2$, la relation d'équivariance de τ donne $a_n = \tau \circ a_n^{-1} \circ \tau^{-1}$ car a_n est diagonale, et pour tout $D \in \mathbb{RP}_*^2$ on a donc

$$\mathcal{D}_{(a_n)}(D) = \tau(\mathcal{D}_{(a_n^{-1})}(\tau^{-1}(D))). \quad (6.2.5)$$

Dans le cas attractif par exemple, on en déduit que $D_-(a_n) = \tau(p_-(a_n^{-1}))$, or $p_-(a_n^{-1}) = p_+(a_n)$ selon la remarque 6.2.7 (voir (6.2.2)), d'où $D_-(a_n) = [e_2, e_3] = \mathcal{C}^-(a_n)$. De la même manière dans tous les autres cas, la nature des objets répulsifs et attractifs de (a_n) dans $\mathbb{RP}_*^2$ est une conséquence immédiate de la relation (6.2.5) et de la remarque 6.2.7. Le seul point nécessitant une certaine attention est la nature des applications $\bar{a}_\infty^*$ et $\hat{a}_\infty^*$.

1.a) Pour $D \neq D_- = \tau(p_+)$, $\bar{a}_\infty^*(D) = \mathcal{D}_{(a_n)}(D) = \tau(\bar{a}_\infty^{-1}(\tau^{-1}(D)))$ selon la relation (6.2.5), i.e. $\bar{a}_\infty^*(D) = a_\infty(\tau([p_+, \tau^{-1}(D)] \cap D_-))$ selon la relation (6.2.3). Or $\tau([p_+, \tau^{-1}(D)] \cap D_-) = [D_- \cap D, p_+]$, d'où finalement $\bar{a}_\infty^*(D) = \hat{a}_\infty(D_- \cap D)$.

2.b) Pour $D \in \mathcal{C}^- = \tau(\mathcal{C}^+)$, $\hat{a}_\infty^*(D) = \mathcal{D}_{(a_n)}(D) = \tau([a_\infty^{-1}(\tau^{-1}(D)), p_-])$ selon les relations (6.2.5) et (6.2.4). Or $\tau \circ a_\infty^{-1} \circ \tau^{-1}(D) = a_\infty(D)$, d'où $\hat{a}_\infty^*(D) = (a_\infty(D \cap \tau(p_-)))^* = (\bar{a}_\infty(D \cap \tau(p_-)))^*$. $\square$

6.3 Dynamique de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ sur l'espace modèle

Rappelons qu'en dimension trois, les feuilles α et β d'un point $x = (m, D) \in \mathbf{X}$ sont des cercles, décrits par

$$\mathcal{C}_\alpha(x) = \{(m, L) \mid L \ni m\} \text{ et } \mathcal{C}_\beta(x) = \{(p, D) \mid p \in D\},$$

et que leurs surfaces α - β et β - α sont des bouteilles de Klein définies par :

$$\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(x) = \cup_{y \in \mathcal{C}_\alpha(x)} \mathcal{C}_\beta(y) \text{ et } \mathcal{S}_{\beta,\alpha}(x) = \cup_{y \in \mathcal{C}_\beta(x)} \mathcal{C}_\alpha(y).$$

Le cercle $\mathcal{C}_\alpha(x)$ (respectivement $\mathcal{C}_\beta(x)$) est l'âme de $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(x)$ (resp. $\mathcal{S}_{\beta,\alpha}(x)$), c'est l'unique cercle α (resp. β) intégralement contenu dans $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(x)$ (resp. $\mathcal{S}_{\beta,\alpha}(x)$).

De plus, nous avons vu au paragraphe 2.2.4 que deux configurations sont possibles pour l'intersection d'une surface $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(x)$ et d'une surface $\mathcal{S}_{\beta,\alpha}(y)$. Dans le cas générique $x \notin \mathcal{S}_{\beta,\alpha}(y)$, $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(x) \cap \mathcal{S}_{\beta,\alpha}(y)$ est une chaînette. Dans le cas dégénéré $x \in \mathcal{S}_{\beta,\alpha}(y)$, $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(x) \cap \mathcal{S}_{\beta,\alpha}(y)$ est l'union des âmes respectives de $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(x)$ et $\mathcal{S}_{\beta,\alpha}(y)$. Chacune de ces deux configurations est préservée par l'action de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$.

Remarque 6.3.1. Notons que l'action de A sur $\mathbf{X}$ a exactement six points fixes qui sont $([e_1], [e_1, e_2])$, $([e_1], [e_1, e_3])$, $([e_2], [e_2, e_1])$, $([e_2], [e_2, e_3])$, $([e_3], [e_3, e_1])$, $([e_3], [e_3, e_2])$. Plus précisément, tout élément loxodromique de A a exactement ces six points pour points fixes.

6.3.1 Type attractif

Soit (g_n) une suite de $\mathbf{G}$ partant simplement à l'infini de type attractif, de point attractif p_+ et de cercle répulsif D_- dans $\mathbb{RP}^2$. On définit $\mathcal{C}_\beta^- = \mathcal{C}_\beta(D_-) \subset \mathcal{S}_{\beta,\alpha}^- = \mathcal{S}_{\beta,\alpha}(D_-)$ et $\mathcal{C}_\alpha^+ = \mathcal{C}_\alpha(p_+) \subset \mathcal{S}_{\alpha,\beta}^+ = \mathcal{S}_{\alpha,\beta}(p_+)$, et on utilise les applications $\bar{g}_\infty^*$ et $\hat{g}_\infty$ définies aux lemmes 6.2.8 et 6.2.1.

Lemme 6.3.2. *On définit une application surjective $\phi: \mathbf{X} \rightarrow \mathcal{C}_\alpha^+$ par $\phi(p, D) = (p_+, \hat{g}_\infty(D \cap D_-))$ si $x \notin \mathcal{C}_\beta^-$, et $\phi(p, D_-) = \hat{g}_\infty(p)$ sinon. La projection ϕ est en restriction à $\mathbf{X} \setminus \mathcal{C}_\beta^-$ une fibration dont les fibres sont des surfaces α - β , mais elle est singulière sur $\mathcal{C}_\beta^-$.*

1. Pour $x \in \mathbf{X} \setminus \mathcal{S}_{\beta,\alpha}^-$, $\mathcal{D}_{(g_n)}(x) = \phi(x)$.
2. Pour $x \in \mathcal{S}_{\beta,\alpha}^- \setminus \mathcal{C}_\beta^-$, $\mathcal{D}_{(g_n)}(x) = \mathcal{C}_\beta(\phi(x))$. En particulier les $\mathcal{D}_{(g_n)}(x)$ pour $x \in \mathcal{S}_{\beta,\alpha}^- \setminus \mathcal{C}_\beta^-$ forment un feuilletage de $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}^+$.
3. Pour $x \in \mathcal{C}_\beta^-$, $\mathcal{D}_{(g_n)}(x) = \mathcal{S}_{\beta,\alpha}(\phi(x))$. En particulier, $\bigcup_{x \in \mathcal{C}_\beta^-} \mathcal{D}_{(g_n)}(x) = \mathbf{X}$.
4. Avec $\rho_\infty: \mathrm{Stab}_{\mathbf{G}}(D_-) \rightarrow \mathrm{Stab}_{\mathbf{G}}(D_-) \cap \mathrm{Stab}_{\mathbf{G}}(p_+)$ le morphisme défini au lemme 6.2.1, ϕ est ρ_∞ -équivariante.

Démonstration. 1. Ceci découle directement du lemme 6.2.8, 1.a).

2. L'inclusion directe se prouve de la même manière que le premier cas, sachant que $D \cap D_- = p$ car $p \in D_- \neq D$, donc $\bar{g}_\infty^*(D) = \hat{g}_\infty(p)$. Réciproquement, soit $p_\infty \in \hat{g}_\infty(p)$. Alors selon le lemme 6.2.1 il existe $p_n \in \mathbb{RP}^2$ convergeant vers p tel que (quitte à extraire) $g_n(p_n)$ converge vers p_∞ . Puisqu'à partir d'un certain rang $p_n \notin p^\perp$, $D_n = [p_n, p^\perp \cap D]$ est bien définie, et $x_n = (p_n, D_n) \in \mathbf{X}$ converge vers x avec $g_n(x_n)$ convergeant vers $(p_\infty, \hat{g}_\infty(p))$.

3. L'inclusion directe est une conséquence immédiate du lemme 6.2.1. Réciproquement soit $x_\infty = (p_\infty, D_\infty) \in \mathcal{S}_{\beta,\alpha}(\hat{g}_\infty(p)) \setminus \mathcal{C}_\beta(\hat{g}_\infty(p))$. Selon le lemme 6.2.1 il existe une suite (p_n) dans $\mathbb{RP}^2$ convergeant vers p telle que $g_n(p_n)$ converge vers p_∞ (quitte à extraire). Avec $q \in D_\infty \setminus \{p_+, p_\infty\}$, $[g_n(p_n), q]$ est (à partir d'un certain rang) une droite projective convergeant vers D_∞ . Si $g_n^{-1}(q)$ converge (quitte à extraire) vers un point de D_- distinct de p , alors $D_n = [p_n, g_n^{-1}(q)]$ est (à partir d'un certain rang) une droite projective convergeant vers D_- , telle qu'avec $x_n = (p_n, D_n) \in \mathbf{X}$, $g_n(x_n)$ converge vers x_∞ , et donc $x_\infty \in \mathcal{D}_{(a_n)}(x)$. Or $q \neq p_+$, donc selon la remarque 6.2.7 et la relation (6.2.3), $g_n^{-1}(q)$ converge (quitte à extraire) vers $\hat{g}_\infty^{-1}([p_+, q])$, qui est un point de D_- . Ce point est bien distinct de p , car dans le cas contraire $q \in \hat{g}_\infty(p)$, si bien que D_∞ et $\hat{g}_\infty(p)$ contiennent toutes deux les deux points $q \neq p_\infty$, et donc $D_\infty = \hat{g}_\infty(p)$, ce qui contredit notre hypothèse initiale. Finalement $\mathcal{S}_{\beta,\alpha}(\hat{g}_\infty(p)) \setminus \mathcal{C}_\beta(\hat{g}_\infty(p))$ est contenu dans $\mathcal{D}_{(g_n)}(x)$, et puisque ce dernier est fermé, cela termine la preuve de l'égalité annoncée.

4. Cela découle directement de l'équivariance de $\hat{g}_\infty$. $\square$

Notons que si $p_+ \notin D_-$, alors $\mathcal{S}_{\beta,\alpha}^- \cap \mathcal{S}_{\alpha,\beta}^+$ est égal à la chaînette $\mathcal{C}(p_-, D_-)$, et $\mathcal{C}_\alpha^+ \cap \mathcal{S}_{\beta,\alpha}^- = \mathcal{C}_\beta^- \cap \mathcal{S}_{\alpha,\beta}^+ = \emptyset$ (voir le paragraphe 2.2.4 à ce sujet).

6.3.2 Type répulsif

On suppose maintenant (g_n) de type répulsif, et on considère son point répulsif p_- et son cercle attractif D_+ dans $\mathbb{RP}^2$. On définit $\mathcal{C}_\alpha^- = \mathcal{C}_\alpha(p_-) \subset \mathcal{S}_{\alpha,\beta}^- = \mathcal{S}_{\alpha,\beta}(p_-)$ et $\mathcal{C}_\beta^+ = \mathcal{C}_\beta(D_+) \subset \mathcal{S}_{\beta,\alpha}^+ = \mathcal{S}_{\beta,\alpha}(D_+)$, et on utilise les applications $\bar{g}_\infty$ et $\hat{g}_\infty^*$ définies aux lemmes 6.2.3 et 6.2.8.

Lemme 6.3.3. *On définit une application surjective $\phi: \mathbf{X} \rightarrow \mathcal{C}_\beta^+$ par $\phi(p, D) = (\bar{g}_\infty(p), D_+)$ si $x \notin \mathcal{C}_\alpha^-$, et $\phi(p_-, D) = (\hat{g}_\infty^*(D), D_+)$ sinon. La projection ϕ est en restriction à $\mathbf{X} \setminus \mathcal{C}_\alpha^-$ une fibration dont les fibres sont des surfaces β - α , mais elle est singulière sur $\mathcal{C}_\alpha^-$.*

1. Pour $x \in \mathbf{X} \setminus \mathcal{S}_{\alpha,\beta}^-$, $\mathcal{D}_{(g_n)}(x) = \phi(x)$.
2. Pour $x \in \mathcal{S}_{\alpha,\beta}^- \setminus \mathcal{C}_\alpha^-$, $\mathcal{D}_{(g_n)}(x) = \mathcal{C}_\alpha(\phi(x))$. En particulier les $\mathcal{D}_{(g_n)}(x)$ pour $x \in \mathcal{S}_{\alpha,\beta}^- \setminus \mathcal{C}_\alpha^-$ forment un feuilletage de $\mathcal{S}_{\beta,\alpha}^+$.
3. Pour $x \in \mathcal{C}_\alpha^-$, $\mathcal{D}_{(g_n)}(x) = \mathcal{S}_{\alpha,\beta}(\phi(x))$. En particulier, $\bigcup_{x \in \mathcal{C}_\alpha^-} \mathcal{D}_{(g_n)}(x) = \mathbf{X}$.
4. Avec $\rho_\infty: \mathrm{Stab}_{\mathbf{G}}(p_-) \rightarrow \mathrm{Stab}_{\mathbf{G}}(p_-) \cap \mathrm{Stab}_{\mathbf{G}}(D_+)$ le morphisme défini au lemme 6.2.1, ϕ est ρ_∞ -équivariante.

Démonstration. Nous avons vu au paragraphe 2.2.2 que l'application duale $\kappa: (p, D) \in \mathbf{X} \mapsto (\tau^{-1}(D), \tau(p)) \in \mathbf{X}$ est équivariante pour le morphisme $g \in \mathbf{G} \mapsto {}^t g^{-1} \in \mathbf{G}$, si bien que pour $g_n \in \mathbf{G}$, $g_n = \kappa \circ {}^t g_n^{-1} \circ \kappa^{-1}$, et donc pour $x \in \mathbf{X}$, $\mathcal{D}_{(g_n)}(x) = \kappa(\mathcal{D}_{({}^t g_n^{-1})}(\kappa^{-1}(x)))$. Il suffit de

prouver l'énoncé dans le cas de A^+ , et le résultat se déduit alors directement du lemme 6.3.2 et de la remarque 6.2.7, ainsi que des relations du paragraphe 2.2.2 pour l'application κ . $\square$

Notons que si $p_- \notin D_+$, alors $\mathcal{S}_{\beta,\alpha}(D_+) \cap \mathcal{S}_{\alpha,\beta}(p_-)$ est égal à la chaînette $\mathcal{C}(p_-, D_+)$, et $\mathcal{C}_\beta^+ \cap \mathcal{S}_{\alpha,\beta}^- = \mathcal{C}_\alpha^- \cap \mathcal{S}_{\beta,\alpha}^+ = \emptyset$.

6.3.3 Type mixte

On suppose maintenant (g_n) de type mixte, et on note p_+ et p_- ses points attractif et répulsif sur $\mathbb{RP}^2$, et D_+ et D_- ses points attractif et répulsifs sur $\mathbb{RP}_*^2$. On définit alors $\mathcal{C}_\beta^- = \mathcal{C}_\beta(D_-) \subset \mathcal{S}_{\beta,\alpha}^- = \mathcal{S}_{\beta,\alpha}(D_-)$, $\mathcal{C}_\alpha^- = \mathcal{C}_\alpha(p_-) \subset \mathcal{S}_{\alpha,\beta}^- = \mathcal{S}_{\alpha,\beta}(p_-)$, $x_- = (p_-, D_-) = \mathcal{C}_\alpha^- \cap \mathcal{C}_\beta^-$, $\mathcal{C}_\alpha^+ = \mathcal{C}_\alpha(p_+) \subset \mathcal{S}_{\alpha,\beta}^+ = \mathcal{S}_{\alpha,\beta}(p_+)$, $\mathcal{C}_\beta^+ = \mathcal{C}_\beta(D_+) \subset \mathcal{S}_{\beta,\alpha}^+ = \mathcal{S}_{\beta,\alpha}(D_+)$, et $x_+ = (p_+, D_+) = \mathcal{C}_\alpha^+ \cap \mathcal{C}_\beta^+$.

Lemme 6.3.4. 1. Pour $x \in \mathbf{X} \setminus (\mathcal{S}_{\beta,\alpha}^- \cup \mathcal{S}_{\alpha,\beta}^-)$, $\mathcal{D}_{(a_n)}(x) = x_+$.

2. Pour $x \in \mathcal{S}_{\alpha,\beta}^- \setminus \mathcal{S}_{\beta,\alpha}^-$, $\mathcal{D}_{(a_n)}(x) = \mathcal{C}_\alpha^+$.

3. Pour $x \in \mathcal{S}_{\beta,\alpha}^- \setminus \mathcal{S}_{\alpha,\beta}^-$, $\mathcal{D}_{(a_n)}(x) = \mathcal{C}_\beta^+$.

4. Pour $x \in \mathcal{C}_\alpha^- \setminus \{x_-\}$, $\mathcal{D}_{(a_n)}(x) = \mathcal{S}_{\alpha,\beta}^+$.

5. Pour $x \in \mathcal{C}_\beta^- \setminus \{x_-\}$, $\mathcal{D}_{(a_n)}(x) = \mathcal{S}_{\beta,\alpha}^+$.

6. $\mathcal{D}_{(a_n)}(x_-) = \mathbf{X}$.

Démonstration. On notera toujours $x = (p, D)$. Les inclusions directes sont des conséquences immédiates des lemmes 6.2.5 et 6.2.8, et on prouve donc uniquement les inclusions réciproques.

2. Soit $D_\infty \in (p_+)^*$. Puisque $D \in (p_-)^*$ mais $D \neq D_-$, il existe selon le lemme 6.2.8 une suite D_n convergeant vers D telle que $g_n(D_n)$ converge vers D_∞ . La suite $p_n = D_n \cap [p, D^\perp]$ est bien définie à partir d'un certain rang et converge vers p , donc $x_n = (p_n, D_n)$ converge vers x et vérifie $\lim g_n(x_n) = (p_+, D_\infty)$.

3. Pour $p_\infty \in D_+$, il existe selon le lemme 6.2.5 une suite p_n convergeant vers p telle que $\lim g_n(p_n) = p_\infty$, et alors en posant $D_n = [p_n, p^\perp \cap D]$, $x_n = (p_n, D_n)$ converge vers x et $\lim g_n(x_n) = (p_\infty, D_+)$.

4. On choisit $x_\infty = (p_\infty, D_\infty) \in \mathcal{S}_{\alpha,\beta}^+ \setminus (\mathcal{C}_\beta^+ \cup \mathcal{C}_\alpha^+)$ (en particulier $p_\infty \notin D_+$, sinon $D_\infty = [p_\infty, p_+] = D_+$ et $x \in \mathcal{C}_\beta^+$). Puisque $\mathcal{D}_{(g_n)}(x)$ est fermé il suffit de montrer que $x_\infty \in \mathcal{D}_{(g_n)}(x)$. Selon le lemme 6.2.8 il existe D_n convergeant vers D telle que $\lim g_n(D_n) = D_\infty$. On pose $q_n = g_n(D_n) \cap [p_\infty, D_\infty^\perp]$, qui est une suite de $\mathbb{RP}^2$ à partir d'un certain rang et converge vers p_∞ . Puisque $D_+ = D_-(g_n^{-1})$ selon la remarque 6.2.7, et $p_\infty \notin D_+$, $p_n := g_n^{-1}(q_n)$ converge vers $p_+(g_n^{-1}) = p_- = p$. Finalement $x_n = (p_n, D_n)$ converge vers x et $\lim g_n(x_n) = x_\infty \in \mathcal{D}_{(g_n)}(x)$.

5. Comme précédemment, on choisit $x_\infty = (p_\infty, D_\infty) \in \mathcal{S}_{\beta,\alpha}^+ \setminus (\mathcal{C}_\beta^+ \cup \mathcal{C}_\alpha^+)$ (en particulier $D_\infty \notin (p_+)^*$, sinon $p_\infty = D_\infty \cap D_+ = p_+$). On choisit une suite p_n convergeant vers p telle que $\lim g_n(p_n) = p_\infty$, donnée par le lemme 6.2.5, et on pose $L_n = [g_n(p_n), p_\infty^\perp \cap D_\infty]$, convergeant vers D_∞ . La dynamique de g_n^{-1} sur $\mathbb{RP}_*^2$ est mixte avec point attracteur D_- et cercle répulseur $(p_+)^*$, donc puisque $D_\infty \notin (p_+)^*$, $D_n := g_n^{-1}(L_n)$ converge vers D_- . Ainsi $x_n = (p_n, D_n)$ converge vers x et $\lim g_n(x_n) = x_\infty$.

6. Enfin, soit $D_\infty \notin (p_+)^*$ et $p_\infty \in D_\infty$ (donc $p \neq p_+$). Selon le lemme 6.2.5 il existe une suite convergeant vers $p = p_-$ telle que $\lim g_n(p_n) = p_\infty$. La suite $L_n = [g_n(p_n), p_\infty^\perp \cap D_\infty]$ de droites projectives est bien définie à partir d'un certain rang, et converge vers D_∞ . Puisque $D_\infty \notin (p_+)^*$, $D_n = g_n^{-1}(L_n)$ converge vers D_- , et donc $x_n = (p_n, D_n)$ converge vers x_- , et $\lim g_n(x_n) = (p_\infty, D_\infty)$. Ainsi $\mathbf{X} \setminus \mathcal{S}_{\alpha,\beta}(p_+) \subset \mathcal{D}_{(g_n)}(x_-)$, i.e. $\mathcal{D}_{(g_n)}(x_-) = \mathbf{X}$ car cet ensemble est fermé. $\square$

Un cas particulier important est celui où $p_- \notin D_+$ et $p_+ \notin D_-$, c'est par exemple le cas si $g_n \in A^+$ selon le lemme 6.2.5. Dans ce cas, notons $p_\pm = D_- \cap D_+$ le point selle de la suite (g_n) . Alors les objets définis précédemment entretiennent entre eux les relations suivantes :

$\mathcal{S}_{\beta,\alpha}^- \cap \mathcal{S}_{\alpha,\beta}^- = \mathcal{C}_\alpha^- \cup \mathcal{C}_\beta^-$, $\mathcal{C}_\alpha^- \cap \mathcal{C}_\beta^- = \{x_-\}$, $\mathcal{S}_{\beta,\alpha}^+ \cap \mathcal{S}_{\alpha,\beta}^+ = \mathcal{C}_\alpha^+ \cup \mathcal{C}_\beta^+$, $\mathcal{C}_\alpha^+ \cap \mathcal{C}_\beta^+ = \{x_+\}$, $\mathcal{S}_{\beta,\alpha}^- \cap \mathcal{S}_{\alpha,\beta}^+ = \mathcal{C}(p_+, D_-)$, $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}^- \cap \mathcal{S}_{\beta,\alpha}^+ = \mathcal{C}(p_-, D_+)$, $\mathcal{S}_{\beta,\alpha}^- \cap \mathcal{S}_{\beta,\alpha}^+ = \mathcal{C}_\alpha(p_\pm)$, $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}^- \cap \mathcal{S}_{\alpha,\beta}^+ = \mathcal{C}_\beta[p_+, p_-]$, et $\mathcal{C}_\alpha^- \cap \mathcal{C}_\beta^+ = \mathcal{C}_\alpha^- \cap \mathcal{C}_\alpha^+ = \mathcal{C}_\beta^- \cap \mathcal{C}_\beta^+ = \mathcal{C}_\beta^- \cap \mathcal{C}_\alpha^+ = \emptyset$.

Remarque 6.3.5. Les relations liant les objets dynamiques d'une suite (g_n) partant simplement à l'infini à ceux de son inverse, expliquées à la remarque 6.2.7, se traduisent immédiatement dans le cas de $\mathbf{X}$. Supposons (g_n) de type attractif. Alors la description dynamique de la suite (g_n^{-1}) est obtenue en lui appliquant l'énoncé du lemme 6.3.2, tout en échangeant les signes $+$ et $-$, en remplaçant p_+ par $\hat{g}_\infty^{-1}([p_+, p])$ et $\bar{g}_\infty(D)$ par D_- dans la première assertion, et en faisant les modifications analogues dans la suite de l'énoncé. On obtient le même type de dualité si (g_n) est de type attractif. Si (g_n) est de type mixte, la relation est plus simple : il suffit d'appliquer l'énoncé du lemme 6.3.4 à la suite (g_n^{-1}) tout en échangeant les signes $+$ et $-$.

6.4 Preuve du théorème B

Dans cette dernière section, nous utilisons le travail fait dans le reste du chapitre pour prouver le théorème B. Nous utiliserons les différentes notations suivantes dans toute la section. Tout d'abord, nous identifions $\mathbb{RP}^1$ à la droite projective $[e_1, e_2]$ de $\mathbb{RP}^2$ via $[x : y] \mapsto [x : y : 0]$, et nous notons $D_\infty = [e_1, e_2]$. Nous voyons $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ comme un sous-groupe de $\mathbf{G}$ à travers le plongement

$$j: A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{G}, \quad (6.4.1)$$

de sorte que $j(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ préserve D_∞ et fixe $[e_3]$, et que l'identification $\mathbb{RP}^1 \equiv D_\infty$ soit j -équivariante. Rappelons que selon les propositions 2.3.4 et 1.2.2, l'ouvert

$$Y_t = \mathbf{X} \setminus (\mathcal{S}_{\beta,\alpha}(D_\infty) \cup \mathcal{S}_{\alpha,\beta}[e_3])$$

est un revêtement double de $(T^1\mathbf{H}^2, \mathcal{L}_{\mathbf{H}^2}^{su})$, qui est équivariant pour la projection canonique $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Notons que $j(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) \subset \mathrm{Stab}_{\mathbf{G}}(Y_t)$. De plus, le flot géodésique de $T^1\mathbf{H}^2$ correspond dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ à (R_{a^t}) , donc la relation (5.4.6) montre qu'il se relève dans Y_t sur le flot diagonal $(j(e^t \mathrm{id}))$ de $j(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$.

Nous utiliserons également les quelques propriétés suivantes de l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{RP}^1$. En notant $a^t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $A_0 = \{a^t\}_{t \in \mathbb{R}}$, la décomposition de Cartan de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{O}(2)A_0\mathrm{O}(2)$. De la même manière que dans $\mathbf{G}$, on dira qu'une suite $g_n \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ de décomposition de Cartan $g_n = k_n a^{t_n} l_n$ part simplement à l'infini si k_n et l_n convergent dans $\mathrm{O}(2)$, et si t_n tend vers $+\infty$.

Lemme 6.4.1. 1. La dynamique sur $\mathbb{RP}^1$ d'une suite $h_n \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ partant simplement à l'infini est de type Nord-Sud, avec un point attractif $p_+(h_n) \in \mathbb{RP}^1$ et un point répulsif $p_-(h_n) \in \mathbb{RP}^1$ éventuellement confondus : pour tout $p \in \mathbb{RP}^1 \setminus p_-(h_n)$ et toute suite (p_n) convergeant vers p , $(h_n(p_n))$ converge vers $p_+(h_n)$.

2. Toute suite de $j(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ partant simplement à l'infini est de type mixte dans $\mathbf{G}$.

3. Soit $h_n \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ partant simplement à l'infini, et $g_n = j(h_n) \in \mathbf{G}$. Alors la suite (g_n) part simplement à l'infini de type mixte, ses points fixes attractif et répulsif dans $\mathbb{RP}^2$ sont $p_+(g_n) = p_+(h_n) \in D_\infty$ et $p_-(g_n) = p_-(h_n) \in D_\infty$ en utilisant l'identification $D_\infty \equiv \mathbb{RP}^1$, et son point-selle est $p_\pm = [e_3]$.

Démonstration. 1. Si $h_n = a^{t_n} \in A_0$, alors $p_-(h_n) = [e_2]$ et $p_+(h_n) = [e_1]$. En effet si (p_n) converge vers $p \neq [e_2]$, alors à partir d'un certain rang p_n est de la forme $p_n = [1 : x_n]$ où (x_n) est une suite réelle convergente, et donc $h_n(p_n) = [1 : e^{-2t_n} x_n]$ converge vers $[e_1]$. Le cas général s'en déduit aisément par décomposition de Cartan.

2. En effet, toute suite de $j(A_0)$ partant simplement à l'infini est de type mixte, et $j(\mathrm{O}(2)) \subset K$.
 3. Supposons que $h_n = a^{t_n} \in A_0$, et soit $p_n \in \mathbb{RP}^2$ convergeant vers un point de $\mathbb{RP}^2 \setminus [e_2, e_3]$. Alors à partir d'un certain rang p_n est de la forme $[1 : x_n : y_n]$ avec (x_n, y_n) convergente, et donc $g_n(p_n) = [1 : e^{-2t_n}x_n : e^{-t_n}y_n]$ converge vers $[e_1]$. Ceci montre que $[e_2, e_3]$ est le cercle répulsif de (g_n) et $[e_1]$ son point attractif. Soit maintenant $p_n \in \mathbb{RP}^2$ convergeant vers un point $p \in [e_2, e_3] \setminus \{[e_2]\}$. Alors à partir d'un certain rang $p_n = [x_n : y_n : 1]$ avec (x_n, y_n) convergente et $\lim x_n = 0$. Si $(|e^{t_n}x_n|)$ converge, alors quitte à extraire $\lim e^{t_n}x_n = x_\infty$ et $g_n(p_n) = [e^{t_n}x_n : e^{-t_n}y_n : 1]$ converge vers $[x_\infty : 0 : 1]$. Sinon $g_n(p_n) = [1 : \frac{e^{-t_n}y_n}{e^{t_n}x_n} : \frac{1}{e^{t_n}x_n}]$ converge vers $[e_1]$. On en déduit que $\mathcal{D}_{(g_n)}(p) = [e_1, e_3]$, et donc que $[e_2]$ est le point répulsif de (g_n) et $[e_1, e_3]$ son cercle attractif. Le cas général découle alors de la décomposition de Cartan. $\square$

6.4.1 Cas d'une trompette hyperbolique

Nous commençons par aborder le théorème B dans le cas le plus simple qui est celui d'une trompette hyperbolique. Soit $h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ un élément hyperbolique à valeurs propres positives dont on note $[h]$ l'image dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, et soit $\Gamma_0 \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ le sous-groupe engendré par $[h]$. Le quotient $\Sigma = \Gamma_0 \backslash \mathbf{H}^2$ est une surface hyperbolique non compacte homéomorphe à un cylindre, qui est nommée *trompette hyperbolique*. Nous notons $g := j(h) \in \mathbf{G}$, qui est un élément loxodromique à valeurs propres positives, et en notant Γ le sous-groupe de $\mathbf{G}$ engendré par g , la structure Kleinienne $N := \Gamma \backslash Y_{\mathbf{t}}$ est un revêtement double de $(T^1\Sigma, \mathcal{L}_{\Sigma}^{su})$. Nous allons dans ce paragraphe construire une compactification de N .

Notons $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$ l'unique groupe à un paramètre d'éléments loxodromiques de $\mathbf{G}$ tel que $g = g^1$. Selon le lemme 6.4.1, les points fixes attractif et répulsif p_- et p_+ de (g^t) sont deux points distincts sur la droite projective D_∞ , et son point-selle est $p_\pm = [e_3]$. Nous notons

$$\mathcal{C}_\alpha^+ = \mathcal{C}_\alpha(p_+), \mathcal{C}_\beta^+ = \mathcal{C}_\beta[p_+, e_3], \mathcal{C}_\alpha^- = \mathcal{C}_\alpha(p_-) \text{ et } \mathcal{C}_\beta^- = \mathcal{C}_\beta[p_-, e_3],$$

qui sont quatre cercles de $\mathbf{X}$ globalement fixés par (g^t) et respectivement attractifs et répulsifs pour ce flot (voir lemme 6.3.4). Les bouquets de cercles $B^+ = \mathcal{C}_\alpha^+ \cup \mathcal{C}_\beta^+$ et $B^- = \mathcal{C}_\alpha^- \cup \mathcal{C}_\beta^-$ sont disjoints dans $\mathbf{X}$, et nous notons

$$\Omega = \mathbf{X} \setminus (B^- \cup B^+)$$

leur extérieur. Par construction, Ω est un ouvert de $\mathbf{X}$ contenant $Y_{\mathbf{t}}$ et préservé par Γ . De plus tous les éléments non triviaux du groupe à un paramètre (g^t) ont les même six points fixes dans $\mathbf{X}$ qui sont sur $B^- \cup B^+$ selon la remarque 6.3.1, donc Γ agit librement sur Ω . Si l'on prouve que Γ agit proprement sur Ω , $\Gamma \backslash \Omega$ sera donc une structure Lagrangienne de contact Kleinienne dans laquelle $N = \Gamma \backslash Y_{\mathbf{t}}$ se plonge canoniquement. Si $\Gamma \backslash \Omega$ est de plus compacte, elle définira donc une compactification de N .

Définition 6.4.2. Un ouvert U contenu dans un ouvert $\Omega \subset \mathbf{X}$ est un *domaine fondamental* de l'action d'un groupe $\Gamma \subset \mathbf{G}$ sur Ω , si U ne contient pas deux points d'une même orbite de Γ , et si par ailleurs $\Omega = \cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\bar{U})$.

Lemme 6.4.3. Il existe un voisinage compact T^- de B^- , n'intersectant pas B^+ , aussi petit que l'on veut, et vérifiant les propriétés suivantes.

1. Le bord Σ^- de T^- est un plongement lisse d'une surface compacte connexe de genre deux, et toute courbe intégrale de (g^t) intersecte Σ^- au plus une fois.
2. L'application

$$\psi : (x, t) \in \Sigma^- \times \mathbb{R} \mapsto g^t(x) \in \Omega$$

est un difféomorphisme, tel que $\psi(\Sigma^- \times \mathbb{R}^-) = T^- \setminus B^-$.

3. En posant $T^+ := \mathbf{X} \setminus \mathrm{Int}(g(T^-))$, les suites $(g^{-n}(T^-))$ et $(g^n(T^+))$ convergent respectivement vers B^- et B^+ pour la topologie de Hausdorff.

4. En notant $U := \mathbf{X} \setminus (T^+ \cup T^-)$, on a $\Omega = \cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\bar{U})$. En d'autres termes, U est un domaine fondamental de l'action de Γ sur Ω .

Démonstration. 1. Quitte à tout conjuguer par un élément de $\mathbf{G}$, on peut supposer que $g \in A^+$, et dans ce cas g^t est de la forme

$$g^t = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} & & \\ & e^{\beta t} & \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

avec $\alpha > \beta > 0$. On a donc $\mathcal{C}_\alpha^- = \mathcal{C}_\alpha[e_3]$, $\mathcal{C}_\beta^- = \mathcal{C}_\beta[e_2, e_3]$, et on note $x_- = ([e_3], [e_2, e_3]) = \mathcal{C}_\alpha^- \cap \mathcal{C}_\beta^-$. On considère l'ouvert affine $Y_{\mathbf{a}} = \mathbf{X} \setminus (\mathcal{S}_{\beta, \alpha}[e_1, e_2] \cup \mathcal{S}_{\alpha, \beta}[e_1])$, préservé par g^t , et la carte affine standard $\psi: Y_{\mathbf{a}} \rightarrow \mathbb{R}^3$, définie par $\psi^{-1}(x, y, z) = ([x, y, 1], [(x, y, 1), (z, 1, 0)])$ et dans laquelle g^t est le flot linéaire diagonal :

$$a^t := \psi \circ g^t \circ \psi^{-1} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & & \\ & e^{\beta t} & \\ & & e^{(\alpha-\beta)t} \end{pmatrix}.$$

On peut en particulier trouver dans cette carte une boule fermée B aussi petite que l'on veut autour de $\psi^{-1}(0, 0, 0) = x_-$, dont le bord est transverse à g^t .

Nous allons maintenant construire un voisinage tubulaire compact A de $\mathcal{C}_\alpha^-$, à bord lisse et transverse à g^t . On a $\mathcal{C}_\alpha^- \cap Y_{\mathbf{a}} = \mathcal{C}_\alpha^- \setminus ([e_3], [e_3, e_1])$ et $\psi(\mathcal{C}_\alpha^- \cap Y_{\mathbf{a}}) = \{0\}^2 \times \mathbb{R}$. On peut trouver un cercle $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ autour de l'origine, aussi petit que l'on veut, qui soit transverse au flot linéaire diagonal $\begin{pmatrix} e^{\alpha t} & & \\ & e^{\beta t} & \\ & & e^{(\alpha-\beta)t} \end{pmatrix}$. En notant $D \subset \mathbb{R}^2$ le disque fermé bordé par γ , on considère dans la carte ψ le voisinage $A_0 = \{\psi^{-1}(x, y, z) \mid (x, y) \in D, z \in \mathbb{R}\}$ de $\mathcal{C}_\alpha^- \cap Y_{\mathbf{a}}$. La forme du flot a^t assure que A_0 est transverse aux courbes intégrales de g^t . Par ailleurs, pour tout (x, y) , $\psi^{-1}(x, y, z)$ converge lorsque z tend vers $\pm\infty$ vers $([x, y, 1], [(x, y, 1), e_1]) \in \mathcal{S}_{\alpha, \beta}[e_1]$, ce qui montre que l'adhérence A de A_0 dans $\mathbf{X}$ est un voisinage tubulaire compact à bord lisse de $\mathcal{C}_\alpha^-$. De plus, g^t préservant $Y_{\mathbf{a}}$, et puisque $Y_{\mathbf{a}} \cap A = A_0$, il nous suffit de vérifier que les courbes intégrales de g^t intersectent au plus une fois le bord de $A \setminus A_0$, égal à $\{([x, y, 1], [(x, y, 1), e_1]) \mid (x, y) \in \gamma\}$, ce qui est le cas par hypothèse sur le petit cercle γ . Le flot g^{-t} ayant pour point fixe répulsif $[e_1]$, le travail fait précédemment nous fournit un voisinage tubulaire compact C' de $\mathcal{C}_\alpha[e_1]$ aussi petit que l'on veut, à bord lisse et transverse à g^{-t} . Alors l'image $C = \tau(C')$ de C' par l'application duale de $\mathbf{X}$ est un voisinage tubulaire compact de $\mathcal{C}_\beta[e_2, e_3]$, aussi petit que l'on veut, à bord lisse et transverse à $\tau_{\mathbf{G}}(g^{-t}) = g^t$. S'ils sont pris assez petits, les deux voisinages A et C se recollent à B comme deux anses d'une sphère, et il est connu qu'une sphère à deux anses est une surface compacte connexe de genre deux. Le voisinage obtenu vérifie donc bien les propriétés annoncées.

2. Les courbes intégrales de g^t rencontrant Σ^- au plus une fois, cette application est bien un difféomorphisme local injectif, et la dynamique du flot g^t assure qu'il est surjectif. Supposons en effet par l'absurde qu'il existe $t > 0$ et $x \in \Sigma^-$ tel que $y = g^t(x) \in T^-$. Puisque $\Sigma^- \subset \mathbf{X} \setminus (\mathcal{S}_{\beta, \alpha}^- \cap \mathcal{S}_{\alpha, \beta}^-)$, selon le lemme 6.3.4, $\cup_{x \in \Sigma^-} \mathcal{D}_{(g^n)}(x) \subset \mathcal{C}_\alpha^+ \cup \mathcal{C}_\beta^+$. Quitte à extraire on peut supposer que $g^n(\Sigma^-)$ converge vers un compact K de $\mathbf{X}$ qui est contenu dans B^+ selon le lemme 6.1.3. En particulier, il existe $u > t$ tel que $g^u(x) \in \mathbf{X} \setminus T^-$, et par lemme du passage des douanes, il existe donc $t \leq s < u$ tel que $g^s(x) \in \Sigma^-$, ce qui contredit la transversalité de g^t et Σ^- car $s > 0$. Ainsi pour tout $t > 0$, $g^t(\Sigma^-) \subset \mathbf{X} \setminus T^-$, et le même raisonnement prouve l'inclusion analogue pour les temps négatifs.

3. Puisque $T^- \subset \mathbf{X} \setminus B^+$, selon le lemme 6.3.4 et la remarque 6.3.5 appliqués à la suite (g^{-n}) on a $\cup_{x \in T^-} \mathcal{D}_{(g^{-n})}(x) \subset B^-$. Par ailleurs, $x_1 := (p_-, [p_-, p_+]) \in \mathcal{S}_{\alpha, \beta}^+ \setminus \mathcal{S}_{\beta, \alpha}^+$ donc $\mathcal{D}_{(g^n)}(x_1) = \mathcal{C}_\alpha^-$, et $x_2 := (p_+, [p_+, p_-]) \in \mathcal{S}_{\beta, \alpha}^+ \setminus \mathcal{S}_{\alpha, \beta}^+$ donc $\mathcal{D}_{(g^n)}(x_2) = \mathcal{C}_\beta^-$. Puisque $x_1 \in \text{Int } T^-$ et $x_2 \in \text{Int } T^-$, on a donc $B^- = \mathcal{C}_\alpha^- \cup \mathcal{C}_\beta^- \subset \cup_{x \in \text{Int } T^-} \mathcal{D}_{(g^{-n})}(x)$. Selon le lemme 6.1.3, ceci impose à $(g^{-n}(T^-))$ de converger vers B^- . On montre de la même manière que $(g^n(T^+))$ converge vers B^+ .

4. Soit maintenant $x \in T^- \setminus B^-$. Notons $n > 0$ le premier rang à partir duquel $g^{-n}(T^-)$ ne

contient pas x . Alors $g^n(x) \in g(T^-) \setminus T^- \subset \bar{U}$. Le même argument montre que pour $x \in T^+ \subset B^+$, il existe $n > 0$ tel que $g^{-n}(x) \in \bar{U}$, et U est donc bien un domaine fondamental de l'action de Γ . $\square$

On déduit de ce lemme le résultat suivant.

Proposition 6.4.4. *1. Γ agit proprement discontinûment sur Ω , qui est un ouvert maximal de $\mathbf{X}$ vérifiant cette propriété. De plus, le quotient $\Gamma \backslash \Omega$ est compact.*

2. $\Gamma \backslash \Omega$ est homéomorphe au produit d'un cercle avec une surface compacte connexe de genre deux.

Démonstration. 1. Le lemme 6.3.4 indique que deux points de Ω ne sont pas dynamiquement reliés pour l'action de Γ , et l'action de Γ sur Ω est donc propre selon le lemme 6.1.2. On a par ailleurs déjà remarqué que tout élément g^t non trivial agit sans point fixe sur Ω , donc cette action est bien proprement discontinue. Par ailleurs, il est clair selon le lemme 6.3.4 que tout point de $B^+ \cup B^-$ est dynamiquement relié à un point de Ω , ce qui montre que l'action de Γ sur tout ouvert contenant strictement Ω n'est pas propre. Enfin, pour toute suite (x_n) dans $\Omega = \cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\bar{U})$, il existe une suite (γ_n) dans Γ telle que $\gamma_n \cdot x_n \in \bar{U}$, où $\bar{U}$ est un compact de Ω , donc $\Gamma \backslash \Omega$ est compact.

2. En munissant $\Sigma^- \times [0; 1]$ de la relation d'équivalence $(x, 0) \sim (x, 1)$, et en notant $p: \Omega \rightarrow \Gamma \backslash \Omega$ la projection canonique, l'application $[x, t] \mapsto p(g^t(x))$ est selon le lemme 6.4.3 un difféomorphisme de $\sim \backslash (\Sigma^- \times [0; 1])$ sur $\Gamma \backslash \Omega$, or le quotient $\sim \backslash (\Sigma^- \times [0; 1])$ est difféomorphe à $\Sigma^- \times \mathbf{S}^1$. $\square$

6.4.2 Cas d'un groupe de Schottky quelconque

Nous passons maintenant au cas d'un groupe de Schottky quelconque. Soit $d \geq 2$, et soient $h_1, \dots, h_d$ d éléments hyperboliques de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ à valeurs propres positives, dont les images $[h_i]$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sont un système de générateurs pour un sous-groupe de Schottky que l'on note $\Gamma_0 = \langle [h_1], \dots, [h_d] \rangle \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Cela signifie qu'il existe $2d$ demi-disques hyperboliques fermés E_i^+ et E_i^- dans $\mathbf{H}^2$, dont les adhérences dans $\partial \mathbf{H}^2$ contiennent respectivement les points fixes attractif et répulsif de $[h_i]$ sur $\partial \mathbf{H}^2$, dont les bords sont des géodésiques orthogonales aux axes des $[h_i]$ (i.e. à la géodésique de $\mathbf{H}^2$ reliant les deux points fixes de $[h_i]$ sur $\partial \mathbf{H}^2$), et tels que :

- $[h_i] \cdot (E_i^-) = \mathbf{H}^2 \setminus \mathrm{Int}(E_i^+)$ pour tout i ,
- et pour tout $k \neq l$, $(E_k^- \cup E_k^+) \cap (E_l^- \cup E_l^+) = \emptyset$.

On prouve alors que Γ_0 est un groupe libre, discret dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, et qu'il agit librement et proprement sur $\mathbf{H}^2$. Le quotient $\Sigma = \Gamma_0 \backslash \mathbf{H}^2$ est une surface hyperbolique non-compacte. Pour une preuve de ces résultats ainsi que différents détails et exemples au sujet des groupes de Schottky, nous renvoyons le lecteur à [Dal07, Chapitre 2].

Nous notons $g_i = j(h_i) \in \mathbf{G}$ pour tout i , et $\Gamma = \langle g_1, \dots, g_d \rangle$ le sous-groupe de $\mathbf{G}$ engendré par les g_i , de sorte que le quotient $N := \Gamma \backslash Y_{\mathbf{t}}$ est un revêtement double de $(\mathrm{T}^1 \Sigma, \mathcal{L}_{\Sigma}^{su})$. Dans ce paragraphe, nous allons construire une compactification M de la structure Lagrangienne de contact Kleinienne N , et nous allons étudier les propriétés dynamiques de la prolongation du relevé du flot géodésique de $\mathrm{T}^1 \Sigma$ dans M . Nous tirerons ensuite les bénéfices de notre travail pour conclure la preuve du théorème B dans le paragraphe suivant.

Notons que la restriction à $\langle h_1, \dots, h_d \rangle$ de la projection canonique $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ induit un isomorphisme de $\langle h_1, \dots, h_d \rangle$ sur Γ_0 , si bien que $j|_{\langle h_1, \dots, h_d \rangle}$ passe au quotient en un isomorphisme de Γ_0 sur Γ que l'on note encore j .

6.4.2.a Ouvert de discontinuité de Γ dans $\mathbf{X}$

Puisque $h_i \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est un élément hyperbolique à valeurs propres positives, $g_i \in \mathbf{G}$ est pour tout i un élément loxodromique à valeurs propres positives. De plus selon le lemme 6.4.1, le point fixe attractif p_+^i (respectivement répulsif p_-^i) de g_i dans $\mathbb{RP}^2$ est sur D_∞ et coïncide

avec le point fixe attractif (resp. répulsif) de h_i sur $\mathbb{RP}^1 \equiv D_\infty$, et les g_i ont tous pour même point-selle $p_\pm = [e_3]$. En particulier, les p_+^i et p_-^i sont deux à deux distincts car Γ_0 est un groupe de Schottky. Pour tout i , on note

$$B_i^+ = \mathcal{C}_\alpha(p_+^i) \cup \mathcal{C}_\beta[p_+^i, p_\pm] \text{ et } B_i^- = \mathcal{C}_\alpha(p_-^i) \cup \mathcal{C}_\beta[p_\pm, p_-^i].$$

Proposition 6.4.5. *Quitte à remplacer $(g_1, \dots, g_d)$ par $(g_1^r, \dots, g_d^r)$ pour un certain $r \in \mathbb{N}^*$, on a les résultats suivants.*

1. Γ est un sous-groupe discret de $\mathbf{G}$, et est librement engendré par $g_1, \dots, g_d$.
2. Il existe des voisinages compacts $T_i^\pm$ des bouquets de cercles $B_i^\pm$ qui sont deux à deux disjoints et tels que $g_i(T_i^-) = \mathbf{X} \setminus \text{Int}(T_i^+)$. Pour des voisinages $T_i^\pm$ vérifiant ces propriétés, on a les résultats suivants en notant $U_i = \mathbf{X} \setminus \{T_i^- \cup T_i^+\}$ et $U = \cap_{i=1}^d U_i$.
 - (a) $\Omega := \cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\bar{U})$ est ouvert.
 - (b) Γ agit proprement discontinûment sur Ω , et Ω est maximal pour cette propriété. En particulier, Ω ne dépend pas du choix des voisinages $T_i^\pm$.
 - (c) Le quotient $M := \Gamma \backslash \Omega$ est compact.

Démonstration. On a prouvé dans le lemme 6.4.3 que d'une part, le voisinage compact T_i^- de B_i^- peut être choisi aussi petit que voulu, et que d'autre part, avec $T_i^+ := \mathbf{X} \setminus \text{Int}(g_i(T_i^-))$, $g^n(T_i^+)$ converge vers B_i^+ pour la topologie de Hausdorff. Donc quitte à remplacer g_i par g_i^r pour $r \in \mathbb{N}^*$ assez grand, T_i^+ peut également être choisi aussi petit que voulu, si bien que $\mathbf{X} \setminus U_i$ peut finalement être choisi aussi proche que voulu de $B_i^+ \cup B_i^-$. Puisque les $B_i^+ \cup B_i^-$ sont deux à deux disjoints, on peut donc supposer, quitte à remplacer chaque g_i par g_i^r avec $r \in \mathbb{N}^*$ assez grand, que pour tout $i \neq j$, $\mathbf{X} \setminus U_i \subset U_j$. Puisque pour tout i , U_i est un ouvert non-vide, l'inclusion $\mathbf{X} \setminus U_i \subset U_j$ est toujours stricte, par connexité de $\mathbf{X}$, et $U := \cap_i U_i$ est donc un ouvert non-vide. Selon la proposition 6.4.4, pour tout $i = 1, \dots, d$ le sous-groupe discret $\langle g_i \rangle$ agit proprement discontinûment et cocompactement sur $\mathbf{X} \setminus (B_i^+ \cup B_i^-)$, et selon le lemme 6.4.3 U_i est un domaine fondamental de cette action.

Ces propriétés sur les domaines fondamentaux U_i permettent d'appliquer le lemme du ping-pong à Γ . Plus précisément nous lui appliquons [Fra04, Theorem 5], décrivant les propriétés des groupes « de type Schottky » en dehors du cadre de la géométrie hyperbolique. On en déduit que Γ est un groupe libre à d générateurs, que $\Omega = \cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\bar{U})$ est ouvert, et que Γ agit proprement discontinûment et cocompactement sur Ω .

La maximalité de Ω est une conséquence immédiate du fait que $\Gamma \backslash \Omega$ soit compact. Soit en effet Ω' un ouvert contenant strictement Ω et préservé par Γ , $x \in \Omega' \setminus \Omega$ un point sur la frontière de Ω , et $x_n \in \Omega$ convergeant vers x . Puisque $\Gamma \backslash \Omega$ est compact, il existe $\gamma_n \in \Gamma$ tel que $(\gamma_n \cdot x_n)$ converge dans Ω . De plus γ_n part nécessairement à l'infini dans Γ . En effet dans le cas contraire, on peut supposer quitte à extraire que γ_n converge vers $\gamma \in \Gamma$, et alors $\lim \gamma_n \cdot x_n = \gamma \cdot x \in \Omega$, ce qui est impossible car Γ préserve Ω et $x \notin \Omega$. On a donc exhibé une suite (x_n) convergente dans Ω' et une suite (γ_n) partant à l'infini dans Γ tel que $(\gamma_n \cdot x_n)$ converge dans Ω' , ce qui empêche l'action de Γ sur Ω' d'être propre selon le lemme 6.1.1. $\square$

À partir de maintenant, on remplace Γ par un sous-groupe $\langle g_1^r, \dots, g_d^r \rangle$ qui vérifie les propriétés de la proposition précédente, et que nous continuerons à appeler Γ .

6.4.2.b Ensemble limite de Γ dans $\mathbf{X}$

Nous décrivons maintenant le bord $\Lambda = \mathbf{X} \setminus \Omega$ de l'ouvert Ω . Pour cela, nous allons utiliser une propriété géométrique du groupe Γ : étant libre à $d \geq 2$ générateurs, il est hyperbolique au sens de Gromov, et on peut donc définir son bord $\partial\Gamma$, qui est muni d'une topologie naturelle le rendant homéomorphe à l'espace de Cantor, et donc en particulier compact. Pour l'usage que

nous allons en faire, le point de vue naïf qui suit sur $\partial\Gamma$ sera amplement suffisant pour justifier cet homéomorphisme (nous renvoyons à [GH90, §6.1 et 7.1] pour préciser cette notion).

Notons $\mathcal{A}$ l'alphabet $\{g_1, g_1^{-1}, \dots, g_d, g_d^{-1}\}$, de sorte que les éléments de Γ soient exactement les mots $\gamma = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_n}^{\varepsilon_n}$ sur l'alphabet $\mathcal{A}$ (où $1 \leq i_l \leq d$ et $\varepsilon_l \in \{\pm 1\}$ pour tout l) qui sont *réduits*, *i.e.* tels que pour tout $1 \leq l \leq n-1$, $\varepsilon_l i_l \neq -\varepsilon_{l+1} i_{l+1}$. Le bord $\partial\Gamma$ s'identifie alors à l'ensemble des mots réduits $g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_n}^{\varepsilon_n} \dots$ de longueur infinie. En identifiant ces derniers aux suites $(g_{i_n}^{\varepsilon_n})$ correspondantes d'éléments de $\mathcal{A}$, $\partial\Gamma$ est un sous-ensemble de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, dont la topologie est induite par la topologie produit de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Or $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est homéomorphe à l'espace de Cantor $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ car c'est un compact métrisable, totalement discontinu, et sans point isolé. Le bord $\partial\Gamma$ est donc un compact, métrisable et totalement discontinu comme fermé d'un tel espace, et il est par ailleurs clair qu'il ne contient aucun point isolé. Ces propriétés caractérisant les espaces de Cantor, $\partial\Gamma$ est bien homéomorphe à l'espace de Cantor. La même construction est valable pour Γ_0 et définit son bord $\partial\Gamma_0$. De plus j induit un homéomorphisme entre $\partial\Gamma_0$ et $\partial\Gamma$, que l'on notera encore j .

Nous réutilisons maintenant les voisinages compacts $T_i^{\pm}$ des bouquets de cercles $B_i^{\pm}$ introduits à la proposition 6.4.5, ainsi que le domaine fondamental $U = \cap_{i=1}^d U_i$ de l'action de Γ que nous avons construit à cette proposition, avec $U_i = \mathbf{X} \setminus (T_i^- \cup T_i^+)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, nous notons

$$\Omega_n = \cup_{|\gamma| \leq n} \gamma(\bar{U}) \text{ et } \Lambda_n = \mathbf{X} \setminus \Omega_n,$$

où $|\gamma|$ désigne la longueur du mot $\gamma \in \Gamma$. Notons que Ω_n est compact pour tout n , et que $\Omega = \cup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ et $\Lambda = \cap_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n$. Les voisinages $T_i^{\pm}$ étant deux à deux disjoints, $\bar{\Lambda}_0 = \sqcup_{i=1}^g (T_i^+ \sqcup T_i^-)$ a $2g$ composantes connexes. On associe à tout mot $\gamma_{n+1} = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_{n+1}}^{\varepsilon_{n+1}}$ de longueur $n+1$ le compact $K(\gamma_{n+1}) = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_n}^{\varepsilon_n} (T_{i_{n+1}}^{\varepsilon_{n+1}}) \subset \bar{\Lambda}_n$, qui est une composante connexe de $\bar{\Lambda}_n$. Ceci définit une bijection entre les mots de Γ de longueur $n+1$ et les composantes connexes de $\bar{\Lambda}_n$ (il y en a donc $2g \times (2g-1)^n$).

Soit $\gamma_{\infty} = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_n}^{\varepsilon_n} \dots \in \partial\Gamma$, $\gamma_n = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_n}^{\varepsilon_n} \in \Gamma$ la suite des sous-mots de γ_{∞} de longueurs finies, et $K(\gamma_n)$ la suite de compacts connexes associés. Notons que pour tout i , on a par construction $g_i^{\varepsilon}(T_i^{-\varepsilon}) = \mathbf{X} \setminus (\mathrm{Int} T_i^{\varepsilon})$ pour $\varepsilon \in \{\pm\}$, et rappelons que les $T_i^{\pm}$ sont deux à deux disjoints. Par suite si $(j, \delta) \neq (i, -\varepsilon)$, avec i et j quelconques et $\varepsilon, \delta \in \{\pm\}$, alors $T_j^{\delta} \subset \mathbf{X} \setminus T_i^{-\varepsilon}$, donc $g_i^{\varepsilon}(T_j^{\delta}) \subset \mathrm{Int} T_i^{\varepsilon}$. Les mots γ_n étant réduits, on en déduit que $g_{i_n}^{\varepsilon_n}(T_{i_{n+1}}^{\varepsilon_{n+1}}) \subset T_{i_n}^{\varepsilon_n}$ pour tout n . Par suite $K(\gamma_{n+1}) \subset K(\gamma_n)$, et on note

$$K(\gamma_{\infty}) := \cap_{n \in \mathbb{N}} K(\gamma_n) \subset \Lambda$$

l'intersection décroissante des $K(\gamma_n)$. C'est un compact connexe non-vide qui est également la limite de $(K(\gamma_n))$ pour la topologie de Hausdorff.

Proposition 6.4.6. *1. L'application K définie précédemment est un homéomorphisme de $\partial\Gamma$ vers l'espace des composantes connexes de Λ , muni de la topologie de Hausdorff sur les compacts de $\mathbf{X}$.*

2. Soit $\gamma_{\infty} \in \partial\Gamma$ et $\gamma_n \in \Gamma$ la suite des sous-mots de longueurs finies de γ_{∞} . Alors toute sous-suite (γ'_n) de (γ_n) partant simplement à l'infini est de type mixte, et en notant $p_+ \in D_{\infty}$ son point attractif dans $\mathbb{RP}^2$, $K(\gamma_{\infty})$ est le bouquet de cercles attractifs $\mathcal{C}_{\alpha}(p_+) \cup \mathcal{C}_{\beta}[p_+, e_3]$.

3. L'ouvert Ω ne dépend que de Γ .

Cette description interprète Λ comme un ensemble limite pour l'action de Γ dans $\mathbf{X}$, dont Ω est le complémentaire. Montrons que la proposition 6.4.6 nous permet de conclure la construction de la compactification de $N = \Gamma \backslash Y_{\mathbf{t}}$.

Corollaire 6.4.7. *L'ouvert Ω contient $Y_{\mathbf{t}}$, et $M = \Gamma \backslash \Omega$ est une compactification Lagrangienne de contact de $N = \Gamma \backslash Y_{\mathbf{t}}$.*

Démonstration. En effet pour tout $p_+ \in D_\infty$, $\mathcal{C}_\alpha(p_+) \subset \mathcal{S}_{\beta,\alpha}(D_\infty)$ et $\mathcal{C}_\beta[p_+, e_3] \subset \mathcal{S}_{\alpha,\beta}[e_3]$, donc selon la proposition 6.4.6, $\Lambda \subset \mathcal{S}_{\beta,\alpha}(D_\infty) \cup \mathcal{S}_{\alpha,\beta}[e_3] = \mathbf{X} \setminus Y_t$. Par suite $Y_t \subset \Omega$, et $N = \Gamma \setminus Y_t$ se plonge donc canoniquement dans $\Gamma \setminus \Omega$, qui est compact selon la proposition 6.4.5. $\square$

Démonstration de la proposition 6.4.6. 1. Soit x un point de Λ , dont on note C la composante connexe dans Λ , et C_n la composante connexe dans Λ_n pour tout n . La suite C_n étant décroissante, elle est nécessairement réalisée comme une suite $C_n = K(\gamma_n)$, pour $\gamma_n = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_n}^{\varepsilon_n}$. Pour tout n , $C \subset C_n$, et par suite $C \subset \bigcap_n C_n = K(\gamma_\infty)$, avec $\gamma_\infty = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_n}^{\varepsilon_n} \dots$ le point correspondant sur le bord de Γ . Par maximalité de la composante connexe, l'inclusion $C \subset K(\gamma_\infty)$ est une égalité. Ceci montre d'une part que $K(\gamma_\infty)$ est toujours une composante connexe de Λ (en prenant pour x un point quelconque de $K(\gamma_\infty)$), et d'autre part que K est surjective sur les composantes connexes de Λ . Il est par ailleurs clair que K est injective. En effet si $\gamma_\infty \neq \gamma'_\infty$, alors il existe n tel que $g_{i_n}^{\varepsilon_n} \neq g_{i'_n}^{\varepsilon'_n}$, et pour tout $k \geq n$, $K(g_{i_n}^{\varepsilon_n} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k})$ est alors contenu dans $T_{i_n}^{\varepsilon_n} \subset \text{Ext}(T_{i'_n}^{\varepsilon'_n})$, alors que $K(g_{i'_n}^{\varepsilon'_n} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k}) \subset T_{i'_n}^{\varepsilon'_n}$. Ceci montre que $K(\gamma_n)$ et $K(\gamma'_n)$ sont disjoints à partir d'un certain rang, et les intersections $K(\gamma_\infty)$ et $K(\gamma'_\infty)$ sont donc disjointes.

Il ne reste donc plus qu'à montrer que K est continue. En effet, $\partial\Gamma$ étant compact, cela montrera que K est un homéomorphisme. Pour une suite $\gamma_\infty^{(n)}$ de points de $\partial\Gamma$ convergeant vers γ_∞ , nous montrons que $K(\gamma_\infty^{(n)})$ converge vers $K(\gamma_\infty)$ pour la topologie de Hausdorff. Dire que $\gamma_\infty^{(n)}$ converge vers γ_∞ signifie qu'il existe une suite (k_n) d'entiers partant à l'infini et telle que pour tout n , $\gamma_\infty^{(n)}$ et γ_∞ ont les mêmes k_n premières lettres. Par conséquent, en notant $\gamma_{k_n}^{(n)}$ et γ_{k_n} les mots formés des k_n premières lettres, on a $K(\gamma_{k_n}^{(n)}) = K(\gamma_{k_n})$ qui converge vers $K(\gamma_\infty)$ par définition. Puisque $K(\gamma_\infty^{(n)}) \subset K(\gamma_{k_n}^{(n)})$, $K(\gamma_\infty)$ est donc la seule valeur d'adhérence de la suite $K(\gamma_\infty^{(n)})$, qui converge donc vers $K(\gamma_\infty)$ (car l'espace des compacts de $\mathbf{X}$ est compact pour la topologie de Hausdorff).

2. Soit $\gamma_\infty = (g_{i_n}^{\varepsilon_n}) \in \partial\Gamma$, et $\gamma_n = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_n}^{\varepsilon_n} \in \Gamma$, qui part à l'infini dans $\mathbf{G}$. On considère une sous-suite de γ_n partant simplement à l'infini, que l'on note encore γ_n . Par principe des tiroirs, on peut supposer que le mot γ_n se termine toujours par les lettres $g_a^{\varepsilon_a} g_b^{\varepsilon_b}$ (vérifiant $\varepsilon_a a \neq -\varepsilon_b b$), et ces modifications ne changent pas la limite $K(\gamma_\infty)$ de la suite $K(\gamma_n) = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_a^{\varepsilon_a} (T_b^{\varepsilon_b})$. À partir de maintenant, on retire la dernière lettre $g_b^{\varepsilon_b}$ à la suite γ_n , si bien que $K(\gamma_\infty) = \lim \gamma_n(T_b^{\varepsilon_b})$. Nous utilisons le lemme 6.3.4, ainsi que ses notations pour les objets dynamiques associés à (γ_n) . Puisque toute surface $\alpha - \beta$ rencontre tout cercle α , il existe un point $x \in (\mathcal{S}_{\alpha,\beta}^+ \setminus \mathcal{S}_{\beta,\alpha}^+) \cap \dot{T}_{i_1}^{-\varepsilon_1}$. Puisque $\gamma_n^{-1} = g_a^{-\varepsilon_a} \dots g_1^{-\varepsilon_1}$, l'ensemble dynamiquement associé à x pour γ_n^{-1} est contenu dans $T_a^{-\varepsilon_a}$, or $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}^+ \setminus \mathcal{S}_{\beta,\alpha}^+ = \mathcal{S}_{\alpha,\beta}^-(\gamma_n^{-1}) \setminus \mathcal{S}_{\beta,\alpha}^-(\gamma_n^{-1})$, donc $\mathcal{D}_{(\gamma_n^{-1})}(x) = \mathcal{C}_\alpha^+(\gamma_n^{-1}) = \mathcal{C}_\alpha^-$, et finalement $\mathcal{C}_\alpha^- \subset T_a^{-\varepsilon_a}$. De la même manière on montre que $\mathcal{C}_\beta^- \subset T_a^{-\varepsilon_a}$, et en particulier, $\mathcal{C}_\alpha^-$ et $\mathcal{C}_\beta^-$ sont disjoints de $T_b^{\varepsilon_b}$. Par suite pour tout $x \in T_b^{\varepsilon_b}$, $\mathcal{D}_{(\gamma_n)}(x) \subset \mathcal{C}_\alpha^+ \cup \mathcal{C}_\beta^+$, et donc $K(\gamma_\infty) \subset \mathcal{C}_\alpha^+ \cup \mathcal{C}_\beta^+$ selon le lemme 6.1.3. Par ailleurs il existe $x \in (\mathcal{S}_{\alpha,\beta}^- \setminus \mathcal{S}_{\beta,\alpha}^-) \cap \dot{T}_b^{\varepsilon_b}$ car toute surface $\alpha - \beta$ rencontre tout cercle α , de sorte que $\mathcal{D}_{(\gamma_n)}(x) = \mathcal{C}_\alpha^+ \subset K(\gamma_\infty)$, et de la même manière $\mathcal{C}_\beta^+ \subset K(\gamma_\infty)$ car $\mathcal{S}_{\beta,\alpha}^-$ rencontre $\dot{T}_b^{\varepsilon_b}$. Finalement, $K(\gamma_\infty) = \mathcal{C}_\alpha^+(\gamma_n) \cup \mathcal{C}_\beta^+(\gamma_n)$.

3. En effet, selon la première affirmation de cette proposition $\bigcup_{\gamma_\infty \in \partial\Gamma} K(\gamma_\infty) = \mathbf{X} \setminus \Omega$, où $K(\gamma_\infty)$ est entièrement déterminé par la dynamique de $\gamma_\infty \in \partial\Gamma$ selon la deuxième affirmation de la proposition. $\square$

6.4.2.c Dynamique du flot géodésique sur la compactification

Rappelons que le groupe à un paramètre

$$\varphi^t := j(e^t \text{id}) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.4.2)$$

de $\mathbf{G}$ représente le flot géodésique de $T^1\Sigma$ sur son revêtement double $N = \Gamma \backslash Y_{\mathbf{t}}$. Puisque (φ^t) fixe D_∞ point par point, il préserve Ω , et puisqu'il est centralisé par chacun des g_i , il passe au quotient sur $M = \Gamma \backslash \Omega$ en un flot que nous notons $(\bar{\varphi}^t)$. Le résultat ci-dessous demeure valide si Γ_0 est engendré par un unique élément hyperbolique, *i.e.* si Σ est une trompette hyperbolique.

Proposition 6.4.8. 1. *Le complémentaire de N dans M est une union finie de tores.*
 2. *Il existe un ouvert $O \subset N$ dense dans M , une union finie de cercles $\mathcal{F}^+ \subset M \setminus N$, ainsi qu'une application lisse et surjective $\Phi: O \rightarrow \mathcal{F}^+$, telle que pour tout $x \in O$, $\mathcal{D}_{(\bar{\varphi}^t)}(x) = \Phi(x)$.*
 3. *Pour tout compact $K \subset O$ et toute suite réelle (t_n) telle que $\lim t_n = +\infty$, si $(\bar{\varphi}^{t_n}(K))$ converge pour la topologie de Hausdorff, alors sa limite est contenue dans $\mathcal{F}^+$.*

Démonstration. 1. Puisque chacun des g_i fixe $[e_3]$ et D_∞ , Γ stabilise les cercles et surfaces répulsifs et attractifs du flot de type répulsif (φ^t) , qui sont $\mathcal{C}^- = \mathcal{C}_\alpha([e_3]) \subset \mathcal{S}^- = \mathcal{S}_{\alpha,\beta}([e_3])$ et $\mathcal{C}^+ = \mathcal{C}_\beta(D_\infty) \subset \mathcal{S}^+ = \mathcal{S}_{\beta,\alpha}(D_\infty)$. L'action de Γ sur l'intersection de chacun de ces fermés avec Ω étant propre, leurs images respectives par la projection canonique $\pi: \Omega \rightarrow \Gamma \backslash \Omega = M$, notées $\mathcal{F}^- \subset \mathcal{T}^-$ et $\mathcal{F}^+ \subset \mathcal{T}^+$, sont fermées et donc compactes puisque M est compacte. De plus, puisque $\Omega \setminus Y_{\mathbf{t}} = (\mathcal{S}^- \cup \mathcal{S}^+) \cap \Omega$, on a bien $M \setminus N = \mathcal{T}^- \cup \mathcal{T}^+$.

Toute composante connexe de la surface compacte $\mathcal{T}^+$ est un tore ou une bouteille de Klein car elle supporte une distribution de dimension un, et nous allons vérifier que c'est nécessairement un tore (il en va de même pour $\mathcal{T}^-$). Nous écrivons la preuve dans le cas où Γ est un groupe monogène $\langle g \rangle$ pour éviter d'alourdir les notations. Dans ce cas, $\mathcal{S}^+ = \cup_{p \in U} \mathcal{C}_\alpha(p)$, où $U := D_\infty \setminus \{p_-, p_+\}$ avec p_- et p_+ les points fixes respectivement répulsif et attractif de g . Si V est l'une des deux composantes connexes de U , alors $C := \cup_{p \in V} \mathcal{C}_\alpha(p)$ est un cylindre sur lequel g agit par translation, donc $\langle g \rangle \backslash C$ est un tore. Le même raisonnement sur l'autre composante connexe conclut la preuve.

2. Soit $\phi: \mathbf{X} \rightarrow \mathcal{C}^+$ la projection introduite au lemme 6.3.3 et associée au flot de type répulsif (φ^t) . Puisque Γ préserve le point répulsif $[e_3]$ de (φ^t) , $\phi: \mathbf{X} \rightarrow \mathcal{C}^+$ est ρ_∞ -équivariante pour l'action de Γ selon le lemme 6.3.3. Puisque Γ préserve également la droite projective attractive $[e_1, e_2]$ de (φ^t) , et puisque (φ^t) agit trivialement sur $[e_1, e_2]$, la construction de ρ_∞ montre de plus que $\rho_\infty|_\Gamma = \mathrm{id}_\Gamma$ (voir la relation (6.2.1)). Finalement ϕ est Γ -équivariante, ce qui montre que $U := Y_{\mathbf{t}} \setminus \phi^{-1}(\Lambda) \subset \mathbf{X} \setminus \mathcal{S}^-$ est Γ -invariant car Λ l'est. Puisque $\phi|_{\mathbf{X} \setminus \mathcal{C}^-}$ est lisse, U est un ouvert de $Y_{\mathbf{t}}$. De plus l'espace des composantes connexes de $\phi^{-1}(\Lambda) \cap Y_{\mathbf{t}}$ est homéomorphe à un ensemble de Cantor (car c'est le cas de $\mathcal{C}^+ \cap \Lambda$ selon la proposition 6.4.6), et chacune de ses composantes connexes est de dimension deux selon le lemme 6.3.3, donc le fermé $\phi^{-1}(\Lambda) \cap Y_{\mathbf{t}}$ est d'intérieur vide. Finalement en notant $\pi: \Omega \rightarrow \Gamma \backslash \Omega$ la projection canonique, $O := \pi(U) \subset N$ est un ouvert dense dans N , donc dans M .

Puisque $\phi|_U: U \rightarrow \mathcal{C}^+ \cap \Omega$ est lisse et Γ -équivariante, elle passe au quotient en une application lisse $\Phi: O \rightarrow \mathcal{F}^+ = \pi(\mathcal{C}^+)$. Puisque U est Γ -invariant, pour tout $\bar{x} \in O$ et pour tout $x \in \pi^{-1}(\bar{x})$ on a $x \in U$, donc $\mathcal{D}_{(\varphi^t)}(x) = \phi(x) \in \Omega$ selon le lemme 6.3.3, ce qui montre l'égalité $\Phi(\bar{x}) = \mathcal{D}_{(\bar{\varphi}^t)}(\bar{x})$ annoncée. En effet, si $x_n \in \Omega$ converge vers x de sorte que $\lim \varphi^{t_n}(x_n) = \phi(x)$, alors $\lim \pi(x_n) = \bar{x}$ et $\lim \bar{\varphi}^{t_n}(\pi(x_n)) = \Phi(\bar{x})$, ce qui montre que $\Phi(\bar{x}) \in \mathcal{D}_{(\bar{\varphi}^t)}(\bar{x})$. Réciproquement, si $\lim \bar{x}_n = \bar{x}$ et $\lim \bar{\varphi}^{t_n}(\bar{x}_n) = \bar{y} \in \mathcal{D}_{(\bar{\varphi}^t)}(\bar{x})$, alors puisque $\pi: \Omega \rightarrow M$ est un revêtement, on peut supposer que $\bar{x}_n = \pi(x_n)$ avec $\lim x_n = x$ et $\pi(x) = \bar{x}$. On a alors $\bar{\varphi}^{t_n}(\bar{x}_n) = \pi(\varphi^{t_n}(x_n))$, et puisque $\mathbf{X}$ est compact, on peut supposer quitte à extraire que $\varphi^{t_n}(x_n)$ converge. Puisque $\mathcal{D}_{(\varphi^t)}(x) = \phi(x)$ on a nécessairement $\lim \varphi^{t_n}(x_n) = \phi(x)$, d'où l'on déduit que $\bar{y} = \pi(\phi(x)) = \Phi(\bar{x})$.

3. Soit $K \subset O$ un compact, et $t_n \in \mathbb{R}$ tel que $\lim t_n = +\infty$ et $\lim \bar{\varphi}^{t_n}(K) = K_\infty$. Alors selon le lemme 6.1.3 et la propriété que nous venons de prouver sur les ensembles dynamiquement associés, $K_\infty \subset \Phi(K) \subset \mathcal{F}^+$. $\square$

6.4.3 Conclusion de la preuve du théorème B

Il nous reste maintenant à nous affranchir du revêtement d'indice deux pour obtenir une compactification de $T^1\Sigma$.

6.4.3.a Position du problème

Soit S une surface topologique compacte non-connexe dont le groupe fondamental est finiment engendré. Si S est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$, on pose $\Sigma = \mathbf{H}^2$. Sinon, il existe un groupe de Schottky Γ_0 dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tel que $\Sigma := \Gamma_0 \backslash \mathbf{H}^2$ est homéomorphe à S . On note $h_1, \dots, h_d$ des éléments hyperboliques de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ à valeurs propres positives dont les images $[h_1], \dots, [h_d]$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ forment un système de générateurs du groupe de Schottky $\Gamma_0 = \langle [h_1], \dots, [h_d] \rangle$ (au sens défini au début du paragraphe 6.4.2). Nous notons également $\tilde{\Gamma}_0 = \langle h_1, \dots, h_d \rangle \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ qui est un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, et en posant $g_i := j(h_i) \in \mathbf{G}$, nous notons $\Gamma = \langle g_1, \dots, g_d \rangle$ le sous-groupe discret de $\mathbf{G}$ engendré par les g_i (i.e. $\Gamma = j(\tilde{\Gamma}_0)$).

Selon la proposition 2.3.4, en notant $\mathbf{o}_t := ([1 : 0 : 1], [(1, 0, 1), (0, 1, 0)]) \in Y_t$, $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow j(g) \cdot \mathbf{o}_t \in Y_t$ est un isomorphisme j -équivariant entre les structures Lagrangiennes de contact $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \mathcal{L}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})})$ et Y_t , qui induit donc au quotient un isomorphisme $\tilde{\Gamma}_0 \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \simeq \Gamma \backslash Y_t$. Par ailleurs, la projection canonique $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est un revêtement d'indice deux de $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \mathcal{L}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})})$ sur $(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}), \mathcal{L}_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})})$, qui induit au quotient un revêtement d'indice deux $\tilde{\Gamma}_0 \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \Gamma_0 \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Or selon la proposition 1.2.2, $\Gamma_0 \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est isomorphe à $(T^1\Sigma, \mathcal{L}_{\Sigma}^{su})$. On obtient donc finalement un revêtement d'indice deux $p: \Gamma \backslash Y_t \rightarrow (T^1\Sigma, \mathcal{L}_{\Sigma}^{su})$. De plus,

$$g_0 := j(-\mathrm{id}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{G}$$

centralise Γ (car $\Gamma \subset j(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$, et $-\mathrm{id}$ centralise $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$) et passe donc en particulier au quotient en un automorphisme $\bar{g}_0$ de la structure Lagrangienne de contact Kleinienne $\Gamma \backslash Y_t$, qui est le seul automorphisme non-trivial du revêtement $p: \Gamma \backslash Y_t \rightarrow T^1\Sigma$ (car $L_{-\mathrm{id}}$ est le seul automorphisme non-trivial du revêtement $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$).

Selon la proposition 6.4.5 et le corollaire 6.4.7, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ ainsi qu'un ouvert Ω de $\mathbf{X}$ contenant Y_t , tels que $\Gamma' := \langle g_1^r, \dots, g_d^r \rangle \subset \mathbf{G}$ agisse librement, proprement et cocompactement sur Ω , et tels que l'action du flot $(j(e^t \mathrm{id}))_t$ sur $\Gamma' \backslash \Omega$ vérifie les propriétés dynamiques de la proposition 6.4.8. Posons $\Gamma'_0 := \langle [h_1^r], \dots, [h_d^r] \rangle \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Fait 6.4.9. Γ'_0 est un sous-groupe de Schottky de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, et $\Gamma'_0 \backslash \mathbf{H}^2$ est homéomorphe à $\Gamma_0 \backslash \mathbf{H}^2$.

Démonstration. Soient $E_i^\pm$ les demis-disques hyperboliques fermés apparaissant dans la définition du groupe de Schottky Γ_0 (voir début du paragraphe 6.4.2). Pour tout i , posons $E_i'^- = E_i^-$ et $E_i'^+ = \mathbf{H}^2 \setminus [h_i^r](\mathrm{Int} E_i'^-)$. Pour tout i , $[h_i^r]$ a le même point fixe répulsif (respectivement attractif) que $[h_i]$ sur $\partial \mathbf{H}^2$, qui est donc contenu dans l'adhérence de $E_i'^-$ dans $\partial \mathbf{H}^2$ (resp. dans celle de $E_i'^+$). De plus $E_i'^+ = \mathbf{H}^2 \setminus [h_i^r](\mathrm{Int} E_i'^-)$, donc $E_i'^+ = [h_i^{r-1}](E_i^+) \subset E_i^+$. Par suite pour tout $k \neq l$, on a encore $(E_k'^- \cup E_k'^+) \cap (E_l'^- \cup E_l'^+) = \emptyset$. Ceci montre que Γ'_0 est un sous-groupe de Schottky de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. De plus $\mathcal{D} := \mathbf{H}^2 \setminus \cup_i (E_i'^- \cup E_i'^+)$ est un domaine fondamental pour l'action de Γ_0 sur $\mathbf{H}^2$, et $\mathcal{D}' := \mathbf{H}^2 \setminus \cup_i (E_i'^- \cup E_i'^+)$ en est un pour l'action de Γ'_0 . En notant $\mathcal{C}_i^\pm = \partial E_i^\pm$ et $\mathcal{C}_i'^\pm = \partial E_i'^\pm$, on a $\partial \mathcal{D} = \cup_i (\mathcal{C}_i^- \cup \mathcal{C}_i^+)$ et $\partial \mathcal{D}' = \cup_i (\mathcal{C}_i'^- \cup \mathcal{C}_i'^+)$. On définit sur $\mathcal{D}$ une relation d'équivalence $\sim$ en posant pour seule relation non-triviale (i.e. différente de $x \sim x$) : $x \sim h_i^{-\varepsilon}(x)$ pour i quelconque, $\varepsilon = \pm$ et $x \in \mathcal{C}_i^\varepsilon$. On définit la relation $\sim'$ analogue sur $\mathcal{D}'$ avec $x \sim' h_i^{-\varepsilon r}(x)$ pour $x \in \mathcal{C}_i'^\varepsilon$. Alors $\Gamma_0 \backslash \mathbf{H}^2$ est homéomorphe à $\sim \backslash \mathcal{D}$ et $\Gamma'_0 \backslash \mathbf{H}^2$ à $\sim' \backslash \mathcal{D}'$. Il ne reste plus qu'à définir un homéomorphisme φ de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}'$ tel que $x \sim y$ si, et seulement si $x \sim' \varphi(x)$. Il existe $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d > 0$ tels qu'en posant $U_i = \mathbf{H}^2 \setminus [h_i^{1-\varepsilon_i}](E_i^-)$, U_i est pour tout i un demi-disque ouvert de $\mathbf{H}^2$ qui est un voisinage ouvert de E_i^+ , disjoint de U_k pour tout $k \neq i$, et de E_k^- pour tout k .

En restriction à $\mathbf{H}^2 \setminus \cup_i U_i$, on pose $\varphi = \mathrm{id}$. Sur chaque U_i , la situation est homéomorphe à la suivante : U_i s'identifie à $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}_i^+$ et $\mathcal{C}_i'^+$ s'envoyant sur deux droites horizontales. Il suffit alors de prolonger $x \in \mathcal{C}_i^+ \mapsto [h_i^{r-1}](x) \in \mathcal{C}_i'^+$ en un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$, pour que $\varphi|_{U_i}$ préserve les relations d'équivalences. On obtient finalement un homéomorphisme $\varphi: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ qui vérifie la propriété voulue, ce qui conclut la preuve. $\square$

Puisque seul le type topologique de la surface hyperbolique nous intéresse dans l'énoncé du théorème B, on peut donc remplacer dans la suite de la preuve Γ_0 par Γ'_0 , Σ par $\Gamma'_0 \backslash \mathbf{H}^2$ et Γ par Γ' . Alors Γ agit librement, proprement et cocompactement sur Ω , et $M := \Gamma \backslash \Omega$ est une compactification Lagrangienne de contact de $N := \Gamma \backslash Y_t$ qui vérifie les propriétés dynamiques de la proposition 6.4.8. Notons que si l'on est parti de la surface topologique $S = \mathbb{R}^2$, alors $\Sigma = \mathbf{H}^2$, donc $\Gamma = \{\mathrm{id}\}$, et $M = \mathbf{X}$ est une compactification de $N = Y_t$ qui vérifie les propriétés dynamiques voulues selon le lemme 6.3.3.

Le chemin semble maintenant tout tracé. Il ne nous reste plus qu'à quotienter le revêtement double $p: \Gamma \backslash Y_t \rightarrow T^1 \Sigma$ par son unique automorphisme non-trivial $\bar{g}_0$ pour obtenir un isomorphisme, et nous voudrions donc quotienter M par ce même automorphisme pour obtenir une compactification de $T^1 \Sigma$. C'est là qu'une difficulté nous arrête provisoirement : g_0 fixe des points sur Ω , et nous n'obtiendrons donc pas une variété au quotient. Ceci nous oblige à construire à partir de M une autre compactification de N , sur laquelle g_0 ne fixera aucun point.

6.4.3.b Dans un revêtement de $\mathbf{X}$ d'indice quatre

Considérons l'espace $\mathbf{P}^+(\mathbb{R}^3)$ des demi-droites de $\mathbb{R}^3$ (i.e. $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ quotienté par la relation d'équivalence $x \sim \lambda x$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$) que nous notons $\hat{\mathbf{S}}^2$, et son fibré des demi-droites tangentes que nous notons $\hat{\mathbf{X}} := \mathbf{P}^+(T\hat{\mathbf{S}}^2)$. Il existe une projection naturelle de $\hat{\mathbf{X}}$ sur l'espace modèle $\mathbf{X}$ définie par $\pi: \mathbb{R}_+^+ u \in \mathbf{P}^+(T_{[x]}\hat{\mathbf{S}}^2) \mapsto (\mathbb{R}x, \mathrm{Vect}(x, u)) \in \mathbf{X}$ et qui est un revêtement d'indice quatre. Nous munissons $\hat{\mathbf{X}}$ de la structure lagrangienne de contact $\mathcal{L}_{\hat{\mathbf{X}}} := \pi^* \mathcal{L}_{\mathbf{X}}$, de sorte que $\pi: \hat{\mathbf{X}} \rightarrow \mathbf{X}$ est un revêtement entre les structures Lagrangiennes de contact de $\hat{\mathbf{X}}$ et de $\mathbf{X}$. On peut remarquer que $\hat{\mathbf{X}}$ s'identifie à $T^1 \mathbf{S}^2$ via $u \in T_x^1 \mathbf{S}^2 \mapsto \mathbb{R}_+^+ u \in \mathbf{P}^+(T_{\mathbb{R}_+^+ x} \hat{\mathbf{S}}^2)$, qui est un isomorphisme entre les structures Lagrangiennes de contact $\mathcal{L}_{\mathbf{S}^2}$ et $\mathcal{L}_{\hat{\mathbf{X}}}$.

L'action de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ passe au quotient sur $\hat{\mathbf{S}}^2$, et induit donc une action de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ sur $\hat{\mathbf{X}}$. Cette action n'est pas fidèle, et nous munissons $\hat{\mathbf{X}}$ de l'action de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$[g] \cdot x := (\det g)g \cdot x$$

pour tout $[g] \in \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ et $x \in \hat{\mathbf{X}}$. Cette action est bien définie car pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $h = \lambda g$ on a $(\det h)h = \lambda^4(\det g)g$, et puisque $\lambda^4 > 0$, $(\det h)h$ et $(\det g)g$ ont la même action sur $\hat{\mathbf{X}}$. Le revêtement d'indice quatre $\pi: \hat{\mathbf{X}} \rightarrow \mathbf{X}$ est équivariant pour l'action de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ sur $\hat{\mathbf{X}}$.

Choisissons $\hat{o}_t \in \pi^{-1}(o_t)$. Alors $j(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ agit librement sur l'orbite de $\hat{o}_t$. En effet pour $g \in j(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$, si $g \cdot \hat{o}_t = \hat{o}_t$ alors $g \cdot o_t = o_t$ par équivariance de π , donc $g = \mathrm{id}$ car $j(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ agit librement sur Y_t . Par suite

$$\iota: g \cdot o_t \in Y_t \mapsto g \cdot \hat{o}_t \in \hat{\mathbf{X}}$$

est un plongement (où $g \in j(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$), qui est $j(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ -équivariant, et qui est une section de π au dessus de Y_t et à valeurs dans $\hat{\Omega} := \pi^{-1}(\Omega) \subset \hat{\mathbf{X}}$.

- Fait 6.4.10.* 1. Γ agit librement, proprement et cocompactement sur $\hat{\Omega}$.
 2. g_0 agit sans point fixe sur $\hat{\mathbf{X}}$.
 3. $\hat{\Gamma} := \langle \Gamma, g_0 \rangle = \Gamma \cup g_0 \Gamma$ est un sous-groupe discret de $\mathbf{G}$, qui stabilise Ω et $\hat{\Omega}$.
 4. $\hat{\Gamma}$ agit librement et proprement sur Y_t et $\hat{\Omega}$, et $\hat{\Gamma} \backslash \hat{\Omega}$ est compact.

Démonstration. 1. L'action de Γ sur $\hat{\Omega}$ est libre (respectivement propre) car elle l'est sur $\Omega = \pi(\hat{\Omega})$ et car π est Γ -équivariante. De plus π induit un revêtement $\bar{\pi}: \Gamma \backslash \hat{\Omega} \rightarrow \Gamma \backslash \Omega$ dont les fibres

sont finies, ce qui impose à $\Gamma \backslash \hat{\Omega}$ d'être compacte car $\Gamma \backslash \Omega$ l'est.

2. En effet les seuls points fixes de l'action de g_0 sur $\hat{\mathbf{S}}^2$ sont $N := \mathbb{R}_*^+(0, 0, 1)$ et $S := \mathbb{R}_*^+(0, 0, -1)$, donc les points fixes de g_0 sur $\hat{\mathbf{X}}$ sont contenus dans $\mathcal{F}^\alpha(N) \cup \mathcal{F}^\alpha(S)$. Or pour $x = N$ ou S , l'action de g_0 sur $\mathcal{F}^\alpha(x)$ est conjuguée à celle de Dg_0 sur $\mathbf{P}^+(\mathbf{T}_x \hat{\mathbf{S}}^2)$, donc à celle de $-\text{id}$ sur $\mathbf{P}^+(\mathbb{R}^2)$, qui n'a aucun point fixe.

3. Selon la proposition 6.4.6, $\mathbf{X} \backslash \Omega = \cup_{\gamma_\infty \in \partial\Gamma} (\mathcal{C}_\alpha(p_+(\gamma_\infty)) \cup \mathcal{C}_\beta[p_+(\gamma_\infty), e_3])$, où $p_+(\gamma_\infty) \in [e_1, e_2]$ est le point attractif commun dans $\mathbb{RP}^2$ de toutes les sous-suites de (γ_n) partant simplement à l'infini, avec (γ_n) la suite des sous-mots de longueurs finies de $\gamma_\infty \in \partial\Gamma$. Puisque g_0 agit trivialement sur $[e_1, e_2]$ et fixe $[e_3]$, il fixe donc $p_+(\gamma_\infty)$ et $[p_+(\gamma_\infty), e_3]$ pour tout $\gamma_\infty \in \partial\Gamma$, et stabilise donc les cercles α et β associés. Par suite g_0 stabilise $\mathbf{X} \backslash \Omega$, et donc Ω . Puisque Γ stabilise Ω par construction, $\hat{\Gamma}$ stabilise donc bien Ω , et il stabilise également $\hat{\Omega} = \pi^{-1}(\Omega)$ car π est $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$ -équivariante.

4. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite $\gamma_n \in \hat{\Gamma} = \Gamma \cup g_0\Gamma$ non-stationnaire et convergeant vers id . Alors $\{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est infini, et on peut donc supposer quitte à extraire que (γ_n) est entièrement contenue dans Γ , ou dans $g_0\Gamma$. Le premier cas contredirait le fait que Γ est discret. Dans le second cas, $(g_0^{-1}\gamma_n)$ est alors une suite convergente dans Γ , qui doit donc rester dans un ensemble compact, donc fini car Γ est discret, ce qui contredit le fait que (γ_n) est non-stationnaire.

Traisons maintenant de la liberté. On sait déjà que $\Gamma \subset j(\text{SL}_2(\mathbb{R}))$ agit librement sur Y_t (respectivement $\hat{\Omega}$), et il suffit donc de montrer que pour tout $\gamma \in \Gamma$, $g_0\gamma$ n'a aucun point fixe sur Y_t (resp. $\hat{\Omega}$). Notons que $g_0 \notin \Gamma$ car tout élément de Γ est hyperbolique, donc $g_0\gamma \neq \text{id}$. Pour $x \in Y_t$, $g_0\gamma \cdot x = x$ impose $g_0\gamma = \text{id}$ car $g_0 \in j(\text{SL}_2(\mathbb{R}))$ qui agit librement sur Y_t , ce qui contredit $g_0 \notin \Gamma$. Donc $\hat{\Gamma}$ agit librement sur Y_t . Supposons par l'absurde que $g_0\gamma \cdot x = x$ avec $x \in \hat{\Omega}$ et $\gamma \in \Gamma$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, une récurrence immédiate montre que $(g_0\gamma)^{2n} \cdot x = x$, or $(g_0\gamma)^{2n} = \gamma^{2n}$ car g_0 et γ commutent et g_0 est d'ordre deux, d'où $\gamma^{2n} \cdot x = x$ pour tout n . Par compacité de $\mathbf{X}$, il existe une suite $n_k \in \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\pi(\gamma^{2n_k} \cdot x) = \gamma^{2n_k} \cdot \pi(x) = \pi(x)$ converge vers un point x_∞ , et on a donc $x_\infty = \pi(x)$. Or $\pi(x) \in \Omega$, donc $\pi(x) \notin \mathcal{C}_\alpha^-(\gamma^{2n_k}) \cup \mathcal{C}_\beta^-(\gamma^{2n_k})$, car $\mathcal{C}_\alpha^-(\gamma^{2n_k}) \cup \mathcal{C}_\beta^-(\gamma^{2n_k}) = \mathcal{C}_\alpha(p_+(\gamma_\infty)) \cup \mathcal{C}_\beta[p_+(\gamma_\infty), e_3] \subset \mathbf{X} \backslash \Omega$, en posant $\gamma_\infty = \gamma^{-1}\gamma^{-1}\gamma^{-1} \dots \in \partial\Gamma$. Selon le lemme 6.3.4, on a donc $x_\infty \in \mathcal{C}_\alpha^+(\gamma^{2n_k}) \cup \mathcal{C}_\beta^+(\gamma^{2n_k})$, qui est contenu dans $\mathbf{X} \backslash \Omega$. Ceci contredit le fait que $\pi(x) = x_\infty \in \Omega$.

Nous montrons maintenant la propreté. Soit $U = Y_t$ ou $\hat{\Omega}$, et soient $x_n \in U$ convergente et $\gamma_n \in \hat{\Gamma}$ partant à l'infini. Nous devons montrer que $(\gamma_n \cdot x_n)$ est non-relativement compacte. Quitte à extraire, nous pouvons supposer par principe des tiroirs que (γ_n) est intégralement contenue dans Γ , ou dans $g_0\Gamma$, et nous pouvons de plus précomposer par g_0^{-1} car cela ne change ni les hypothèses ni la conclusion. On est alors ramené à la propreté de l'action de Γ sur U , que nous avons déjà vérifiée.

Enfin, $\hat{\Gamma} \backslash \hat{\Omega}$ est compact car il est l'image de l'espace compact $\Gamma \backslash \hat{\Omega}$ par la projection continue $\Gamma \cdot x \in \Gamma \backslash \hat{\Omega} \mapsto \hat{\Gamma} \cdot x \in \hat{\Gamma} \backslash \hat{\Omega}$, bien définie car $\Gamma \subset \hat{\Gamma}$. $\square$

Revenons maintenant à la situation à laquelle nous étions resté à la fin du paragraphe précédent. Le revêtement double $p: \Gamma \backslash Y_t \rightarrow \text{T}^1\Sigma$ passe au quotient sous l'action de $\bar{g}_0$ (qui est son unique automorphisme non-trivial), en un isomorphisme $\bar{p}: \hat{\Gamma} \backslash Y_t \rightarrow (\text{T}^1\Sigma, \mathcal{L}_\Sigma^{su})$ de structures Lagrangiennes de contact. D'autre part en posant $\hat{M} := \hat{\Gamma} \backslash \hat{\Omega}$, $\iota: Y_t \rightarrow \hat{\Omega}$ passe au quotient en un plongement $\bar{\iota}: \hat{\Gamma} \backslash Y_t \rightarrow \hat{M}$. Alors en posant $\hat{N} := \bar{\iota}(\hat{\Gamma} \backslash Y_t)$, $\bar{\iota} \circ (\bar{p})^{-1}$ est un plongement de $(\text{T}^1\Sigma, \mathcal{L}_\Sigma^{su})$ dans la structure Lagrangienne de contact compacte $\hat{M}$ (munie de la structure plate induite par celle de $\hat{\mathbf{X}}$), d'image $\hat{N}$.

Notons $\bar{\pi}: \Gamma \backslash \hat{\Omega} \rightarrow \Gamma \backslash \Omega = M$ le revêtement d'indice quatre induit par π , et $\hat{\pi}: \Gamma \backslash \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Gamma} \backslash \hat{\Omega} = \hat{M}$ le revêtement double canonique induit par l'inclusion du sous-groupe Γ d'indice deux dans $\hat{\Gamma}$. Soient $O \subset M$ l'ouvert dense dans M et $\mathcal{F}^+ \subset M$ l'union finie de cercles fournis par la proposition 6.4.8. Alors $\hat{O} := \hat{\pi}(\bar{\pi}^{-1}(O))$ est ouvert et dense dans $\hat{M}$ (car $\bar{\pi}$ et $\hat{\pi}$ sont continues, ouvertes et surjectives), et $\hat{\mathcal{F}}^+ := \hat{\pi}(\bar{\pi}^{-1}(\mathcal{F}^+))$ est une sous-variété compacte de dimension un (car $\bar{\pi}$ et $\hat{\pi}$ sont des revêtements), *i.e.* est une union finie de cercles. Le flot géodésique de $\text{T}^1\Sigma$

correspond dans $\hat{\Gamma} \backslash Y_t$ à $\varphi^t := j(e^t \mathrm{id})$, qui s'étend sur tout $\hat{M}$ en un flot d'automorphismes que nous notons encore (φ^t) .

Soit $K \subset \hat{O}$ un compact, et $t_n \in \mathbb{R}$ telle que $\lim t_n = +\infty$, tels que $\lim \varphi^{t_n}(K) = K_\infty$. Alors $K' = \hat{\pi}^{-1}(K)$ est un compact de $\Gamma \backslash \hat{\Omega}$ contenu dans $\bar{\pi}^{-1}(O)$. En effet, nous avons vu au cours de la preuve de la troisième affirmation du fait 6.4.10 que g_0 stabilise $\Lambda = \mathbf{X} \setminus \Omega$, donc en reprenant la définition de O dans la preuve de la proposition 6.4.8, on en déduit que g_0 stabilise $U := Y_t \setminus \phi^{-1}(\Lambda) \subset \mathbf{X}$, où $\phi: \mathbf{X} \rightarrow \mathcal{C}^+$ est la projection ρ_∞ -équivariante du lemme 6.3.3 (notons que $g_0 \in \mathrm{Stab}[e_3] \cap \mathrm{Stab}[e_1, e_2]$, donc $\rho_\infty(g_0) = g_0$). Ceci montre que g_0 stabilise O , qui est l'image de U par la projection canonique $\Omega \rightarrow \Gamma \backslash \Omega = M$. Puisque O est g_0 -invariant et que $\bar{\pi}$ est équivariante, $\bar{\pi}^{-1}(O)$ est donc g_0 -invariant, et puisque $\hat{\pi}(K') \subset \hat{\pi}(\bar{\pi}^{-1}(O))$, ceci impose $K' \subset \bar{\pi}^{-1}(O)$. Quitte à extraire, $(\varphi^{t_n}(K'))$ converge vers un compact K'_∞ , et puisque $\bar{\pi}(K') \subset O$, on a donc $\bar{\pi}(K'_\infty) = \lim \bar{\pi}(\varphi^{t_n}(K')) = \lim \varphi^{t_n}(\bar{\pi}(K')) \subset \mathcal{F}^+$, *i.e.* $K'_\infty \subset \bar{\pi}^{-1}(\mathcal{F}^+)$. Par ailleurs, $\hat{\pi}(K'_\infty) = \lim \hat{\pi}(\varphi^{t_n}(K')) = \lim \varphi^{t_n}(K) = K_\infty$, donc finalement $K_\infty \subset \hat{\pi}(\bar{\pi}^{-1}(\mathcal{F}^+)) = \hat{\mathcal{F}}^+$. Ceci montre que (φ^t) vérifie les propriétés dynamiques affirmées dans le théorème B pour les ensembles $\hat{O}$ et $\hat{\mathcal{F}}^+$.

Il ne nous reste plus qu'à montrer que ceci interdit à (φ^t) d'être conservatif pour terminer la preuve du théorème B. Soit μ une mesure borélienne sur $\hat{M}$ à densité par rapport à la mesure de Lebesgue, et soit K un compact de $\hat{O}$ d'intérieur non-vide (ceci existe car $\hat{O}$ est ouvert et non-vide). Par compacité de l'espace des compacts de $\hat{M}$, il existe une suite $t_n \in \mathbb{R}$ tendant vers $+\infty$ telle que $\varphi^{t_n}(K)$ converge pour la topologie de Hausdorff vers un compact K_∞ de $\hat{M}$, ce qui implique $\lim \mu(\varphi^{t_n}(K)) = \mu(K_\infty)$ par régularité de la mesure μ . Or μ est supposée absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, donc $\mu(K) > 0$ et $\mu(\mathcal{F}^+) = 0$, d'où $\mu(K_\infty) = 0$. À partir d'un certain rang, on a donc $\mu(\varphi^{t_n}(K)) < \mu(K)$, ce qui interdit à (φ^t) de préserver μ .

6.4.4 Une extension maximale non compacte et une question

Nous concluons ce chapitre, et cette thèse, en décrivant succinctement un exemple de structure Lagrangienne de contact Kleinienne de dimension trois admettant une extension maximale non-compacte. Ceci nous convaincra que la construction faite précédemment n'avait *a priori* aucune raison d'advenir.

On dira qu'une structure Lagrangienne de contact $(N, \mathcal{L}_N)$ est *maximale* si tout plongement de $(N, \mathcal{L}_N)$ dans une structure Lagrangienne de contact $(M, \mathcal{L}_M)$ est un isomorphisme. Si $(N, \mathcal{L}_N)$ se plonge dans une structure Lagrangienne de contact maximale $(M, \mathcal{L}_M)$, alors on dira que $(M, \mathcal{L}_M)$ est une *extension maximale* de $(N, \mathcal{L}_N)$.

Soient $h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ un élément parabolique, $[h]$ son image dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, et $\Gamma_0 \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ le sous-groupe engendré par $[h]$. Nous notons $g = j(h) \in \mathbf{G}$ et Γ le groupe engendré par g . Le quotient de $\mathbf{H}^2$ par Γ_0 est une surface hyperbolique non-compacte que nous notons Σ , qui contient un *cusp*. De plus $\Gamma \backslash Y_t$ est un revêtement double de $(T^1\Sigma, \mathcal{L}_\Sigma^{su})$. Soit $p_0 \in \mathbb{RP}^1 \equiv D_\infty$ l'unique point fixe de h , et posons

$$\Omega = \mathbf{X} \setminus (\mathcal{C}_\alpha[p_0] \cup \mathcal{C}_\beta[p_0, e_3]),$$

qui contient Y_t .

Proposition 6.4.11. 1. Γ agit proprement sur Ω , et Ω est l'ouvert maximal parmi les ouverts de $\mathbf{X}$ contenant Y_t sur lesquels Γ agit proprement.
2. L'action de Γ sur Ω est libre, et le quotient $\Gamma \backslash \Omega$ est une extension maximale de $\Gamma \backslash Y_t$.
3. De plus $\Gamma \backslash \Omega$ est non-compact.

Démonstration. 1. La suite (g^n) part simplement à l'infini dans $\mathbf{G}$ de type mixte, et $p_0 = p_+ = p_-$ est à la fois son point fixe attractif et répulsif sur $\mathbb{RP}^2$ selon le lemme 6.4.1, et $[p_0, e_3] = D_+ = D_-$ à la fois son cercle attractif et répulsif. Selon le lemme 6.3.4, l'ouvert $\Omega = \mathbf{X} \setminus (\mathcal{C}_\alpha[p_0] \cup \mathcal{C}_\beta[p_0, e_3])$ ne contient donc aucun couple de points dynamiquement reliés pour l'action de Γ , et est maximal

pour cette propriété parmi les ouverts contenant Y_t . Selon le lemme 6.1.2, Γ agit donc proprement sur Ω , et est maximal pour cette propriété.

2. Par ailleurs, la droite projective $[p_0, e_3]$ est exactement l'ensemble des points fixes de g sur $\mathbb{RP}^2$, et tout point fixe de g dans $\mathbf{X}$ est donc sur $\mathcal{S}_{\beta, \alpha}[p_0, e_3]$. Or si $p \in [p_0, e_3] \setminus \{p_0\}$, alors $\{D \cap D_\infty \mid D \in p^*\} = D_\infty$ donc l'action de g sur la droite projective duale p^* est conjuguée à celle de h sur $\mathbb{RP}^1$, si bien que $(p, [p_0, p]) = (p, [p_0, e_3])$ est le seul point fixe de $\mathcal{C}_\alpha(p)$. Les points fixes de g dans $\mathbf{X}$ sont finalement tous sur $\mathcal{C}_\beta[p_0, e_3] \cup \mathcal{C}_\alpha(p_0)$, donc l'action de Γ sur $\Omega = \mathbf{X} \setminus (\mathcal{C}_\alpha(p_0) \cup \mathcal{C}_\beta[p_0, e_3])$ est libre. Or Ω est un ouvert maximal où l'action de Γ est propre, donc [Fra12, Theorem 1.4] impose à la structure Lagrangienne de contact Kleinienne $\Gamma \backslash \Omega$ d'être maximale.

3. Quitte à conjuguer par un élément de $SL_2(\mathbb{R})$, on peut supposer que $h = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de point fixe attractif et répulsif $p_0 = [e_1]$. La surface $S := \mathcal{S}_{\beta, \alpha}[e_1, e_3] \cap \Omega = \mathcal{S}_{\beta, \alpha}[e_1, e_3] \setminus (\mathcal{C}_\alpha[e_1] \cup \mathcal{C}_\beta[e_1, e_3])$ est fermée dans Ω , et préservée par Γ (car g fixe $[e_1, e_3]$), donc Γ agit proprement sur S . En notant $\pi: \Omega \rightarrow \Gamma \backslash \Omega$ la projection canonique, on a $\pi^{-1}(\pi(S)) = S$, ce qui impose à $\pi(S)$ d'être fermé dans $\Gamma \backslash \Omega$. Or l'action de g sur S est conjuguée à celle de la translation $\text{id} + e_1$ sur $\mathbb{R}^2$ via $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto ([x : 0 : 1], [(x, 0, 1), (y, 1, 1)]) \in S$. Ainsi $\pi(S)$ est homéomorphe à un cylindre, et est donc non-compacte. Puisque $\pi(S)$ est fermée dans $M = \Gamma \backslash \Omega$, cela interdit à M d'être compacte.² $\square$

Bien que la structure Lagrangienne de contact $\Gamma \backslash \Omega$ soit maximale, cela n'interdit pas *a priori* l'existence d'une autre extension $(M, \mathcal{L})$ de $\Gamma \backslash Y_t$, qui ne se plongerait pas dans $\Gamma \backslash \Omega$.

Question 6.4.12. Peut-on prouver que toute extension de $\Gamma \backslash Y_t$ est non-compacte ?

La proposition 6.4.11 interdit d'ores et déjà à une extension compacte de $\Gamma \backslash Y_t$ d'être Kleinienne, car $\Gamma \backslash \Omega$ est l'*extension* Kleinienne maximale de $\Gamma \backslash Y_t$ selon le premier point de la proposition 6.4.11. Il semble en revanche *a priori* possible que $(M, \mathcal{L})$ soit une structure Lagrangienne de contact compacte, et que $\Gamma \backslash Y_t$ se plonge comme un ouvert U de M dont le complémentaire $M \setminus U$ est d'intérieur non-vide, et en restriction auquel $\mathcal{L}$ soit non-plate.

Une stratégie intéressante pour aborder la question 6.4.12 serait d'utiliser la dynamique du flot d'automorphismes de $\Gamma \backslash Y_t$ correspondant au flot géodésique de $T^1\Sigma$ pour contraindre la structure $\mathcal{L}$, et de chercher à annuler la courbure de $\mathcal{L}$ sur $M \setminus U$ (par exemple à l'aide de la théorie de Gromov que nous avons déjà utilisée au chapitre 5, et grâce à la courbure généralisée). Ceci pourrait imposer à $(M, \mathcal{L})$ d'être Kleinienne, et permettre de répondre positivement à la question 6.4.12.

2. Ou de ne pas l'être, telle est la question.

Bibliographie

- [Ano69] Dimitrii Viktorovich Anosov. Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature. 1969.
- [Aud12] Michèle Audin. *Géométrie (L3M1)*. EDP Sciences, December 2012.
- [Bar10] Thierry Barbot. Three-dimensional Anosov flag manifolds. *Geometry & Topology*, 14(1) :153–191, 2010.
- [BFL92] Yves Benoist, Patrick Foulon, and François Labourie. Flots d’Anosov à distributions stable et instable différentiables. *Journal of the American Mathematical Society*, 5(1) :33–74, 1992.
- [BFM09] Uri Bader, Charles Frances, and Karin Melnick. An Embedding Theorem for Automorphism Groups of Cartan Geometries. *Geometric and Functional Analysis*, 19(2) :333–355, September 2009.
- [Bri75] M. I. Brin. Topological transitivity of one class of dynamic systems and flows of frames on manifolds of negative curvature. *Functional Analysis and Its Applications*, 9(1) :8–16, January 1975.
- [BZ19] Christian Bonatti and Jinhua Zhang. Transitive partially hyperbolic diffeomorphisms with one-dimensional neutral center. *arXiv :1904.05295 [math]*, April 2019.
- [Car24a] Élie Cartan. Les espaces à connexion conforme. *Annales de la Société Polonaise de Mathématique*, 2 :171–221, 1924.
- [Car24b] Élie Cartan. Sur les variétés à connexion projective. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 52 :205–241, 1924.
- [CP15] Sylvain Crovisier and Rafael Potrie. Introduction to partially hyperbolic dynamics, *Lecture notes* for a minicourse at ICTP, July 2015. Available on the web-pages of the authors.
- [CPRH19] Pablo D. Carrasco, Enrique Pujals, and Federico Rodriguez-Hertz. Classification of partially hyperbolic diffeomorphisms under some rigid conditions. *arXiv :1903.09264 [math]*, March 2019.
- [ČS09] Andreas Čap and Jan Slovák. *Parabolic geometries I Background and general theory*, volume 154 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.
- [ČSŽ04] Andreas Čap, Jan Slovák, and Vojtěch Žádník. On Distinguished Curves in Parabolic Geometries. *Transformation Groups*, 9(2) :143–166, April 2004.
- [ČŽ09] Andreas Čap and Vojtěch Žádník. On the geometry of chains. *Journal of Differential Geometry*, 82(1) :1–33, 2009.
- [Dal07] Françoise Dal’Bo. *Trajectoires géodésiques et horocycliques*. EDP Sciences, Paris, May 2007.
- [DC76] Manfredo Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.

- [Dia04] Andre Diatta. Left Invariant Contact Structures on Lie Groups. *arXiv :math/0403555*, September 2004. arXiv : math/0403555.
- [DK16] Boris Doubrov and Boris Komrakov. The geometry of second-order ordinary differential equations. *arXiv :1602.00913 [math]*, February 2016.
- [FG83] David Fried and William M Goldman. Three-dimensional affine crystallographic groups. *Advances in Mathematics*, 47(1) :1–49, January 1983.
- [Fra04] Charles Frances. Lorentzian Kleinian groups. *Commentarii Mathematici Helvetici - COMMENT MATH HELV*, 80, January 2004.
- [Fra12] Charles Frances. About geometrically maximal manifolds. *Journal of Topology*, 5(2) :293–322, June 2012.
- [Fra16] Charles Frances. Variations on Gromov’s open-dense orbit theorem. *Bulletin de la Société mathématique de France*, 146, May 2016.
- [FT15] Elisha Falbel and Rafael Thebaldi. A flag structure on a cusped hyperbolic 3-manifold. *Pacific Journal of Mathematics*, 278(1) :51–78, September 2015.
- [GD91] Mikhail Gromov and Giuseppina D’Ambra. Lectures on transformation groups : geometry and dynamics. *Surveys in differential geometry*, 1991.
- [Gei08] Hansjörg Geiges. *An Introduction to Contact Topology*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [GGKW17] François Guéritaud, Olivier Guichard, Fanny Kassel, and Anna Wienhard. Anosov representations and proper actions. *Geometry & Topology*, 21(1) :485–584, 2017.
- [GH90] Ghys and de la Harpe. *Sur les Groupes Hyperboliques d’après Mikhael Gromov*. Progress in Mathematics. Birkhäuser Basel, 1990.
- [Ghy87] Étienne Ghys. Flots d’Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables. *Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure. Quatrième Série*, 20(2) :251–270, 1987.
- [Gro88] Michael Gromov. Rigid transformations groups. *Géométrie différentielle (Paris, 1986)*, 33 :65–139, 1988.
- [Hel01] Sigurdur Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*. American Mathematical Society, Providence, R.I, new ed edition, June 2001.
- [HP18] Andy Hammerlindl and Rafael Potrie. Partial hyperbolicity and classification : a survey. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 38(2), April 2018.
- [Kan88] Masahiko Kanai. Geodesic flows of negatively curved manifolds with smooth stable and unstable foliations. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 8(2) :215–239, June 1988.
- [Kle21] Félix Klein. Vergleichende betrachtungen über neuere geometrische forschungen. *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, 1921.
- [Kob95] Shoshichi Kobayashi. *Transformation Groups in Differential Geometry*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1995.
- [KR85] Ravi S. Kulkarni and Frank Raymond. 3-dimensional Lorentz space-forms and Seifert fiber spaces. *Journal of Differential Geometry*, 21(2) :231–268, 1985.
- [KT17] Boris Kruglikov and Dennis The. The gap phenomenon in parabolic geometries. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2017(723), January 2017.
- [Lut71] Robert Lutz. *Sur quelques propriétés des formes différentielles en dimension trois*. Thèse de doctorat, Université de Strasbourg, 1971.
- [Mañ77] Ricardo Mañé. Quasi-Anosov Diffeomorphisms and Hyperbolic Manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 229 :351–370, 1977.

- [Mar71] J. Martinet. Formes de Contact sur les Variétés de Dimension 3. In *Proceedings of Liverpool Singularities Symposium II*, Lecture Notes in Mathematics, pages 142–163, Berlin, Heidelberg, 1971. Springer.
- [MM20] Martin Mion-Mouton. Partially hyperbolic diffeomorphisms and Lagrangean contact structures, 2020. Preprint arXiv : 2002.10720.
- [Olv95] Peter J. Olver. *Equivalence, Invariants and Symmetry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [Pal57] Richard Palais. A global formulation of the Lie theory of transformation groups. *Memoirs of the American Mathematical Society*, January 1957.
- [Pec16] Vincent Pecastaing. On two theorems about local automorphisms of geometric structures. *Annales de l'institut Fourier*, 66(1) :175–208, 2016.
- [Sal99] François Salein. *Variétés anti-de-Sitter de dimension 3*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Lyon, 1999.
- [Sam89] Pierre Samuel. *Géométrie projective*. Presses universitaires de France. 1989.
- [Sha97] R.W. Sharpe. *Differential geometry : Cartan's generalization of Klein's Erlangen program*. Foreword by S. S. Chern. Berlin : Springer, 1997.
- [Sus73] Héctor J. Sussmann. Orbits of families of vector fields and integrability of distributions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 180 :171–188, 1973.
- [Tak94] Masaru Takeuchi. Lagrangean contact structures on projective cotangent bundles. *Osaka Journal of Mathematics*, 31(4) :837–860, 1994. Publisher : Osaka University and Osaka City University, Departments of Mathematics.
- [Tan79] Noboru Tanaka. On the equivalence problems associated with simple graded Lie algebras. *Hokkaido Mathematical Journal*, 8(1) :23–84, February 1979.
- [Tho14] Nicolas Tholozan. *Uniformisation des variétés pseudo-riemanniennes localement homogènes*. Thèse de doctorat, Université Nice Sophia Antipolis, 2014.
- [Thu97] William P. Thurston. *Three-Dimensional Geometry and Topology, Volume 1 : Volume 1*. Princeton University Press, 1997.
- [Tre96] A. Tresse. *Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre $y'' = w(x, y, y')$* . Preisschriften gekrönt und hrsg. von der Fürstlich Jablonowskischen gesellschaft zu Leipzig. XXXII. Nr. XIII der mathematische-naturwissenschaftlichen section. S. Hirzel, Leipzig, 1896.
- [Zeg96] Abdelghani Zeghib. Killing fields in compact Lorentz 3-manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 43(4) :859–894, 1996.

Cette thèse a pour objet l'étude des interactions entre certaines propriétés géométriques des structures Lagrangiennes de contact, et certaines propriétés dynamiques de leurs automorphismes. On s'intéresse en particulier aux difféomorphismes partiellement hyperboliques des variétés compactes de dimension trois, dont les trois distributions invariantes sont lisses, et dont les distributions stable et instable engendrent une distribution de contact. Ces deux dernières distributions définissent une structure Lagrangienne de contact, dont l'analyse nous permet de classer les difféomorphismes partiellement hyperboliques étudiés.

Notre outil fondamental pour l'étude des structures Lagrangiennes de contact est la géométrie de Cartan normale qui leur est associée, dont nous exposons en détail le problème d'équivalence. Ces géométries de Cartan sont modélées sur l'espace des droites projectives pointées de $\mathbb{RP}^2$, homogène sous l'action de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$. L'étude de la géométrie de cet espace modèle et des motifs dynamiques de l'action de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ sur ce dernier, nous permettent de construire des compactifications de certaines structures Lagrangiennes de contact Kleiniennes, sur lesquelles nous obtenons des exemples d'automorphismes Lagrangiens de contact non-conservatifs.

In this PhD thesis, we study the interactions between some geometrical properties of Lagrangian contact structures, and some dynamical properties of their automorphisms. We study those three-dimensional partially hyperbolic diffeomorphisms, whose three invariant distributions are smooth, and whose stable and unstable distributions generate a contact distribution. These last two distributions define a Lagrangian contact structure, whose analysis allows us to classify the investigated partially hyperbolic diffeomorphisms.

Our principal tool to study Lagrangian contact structures is their normal Cartan geometry, whose equivalence problem is described in detail. These Cartan geometries are modelled on the space of pointed projective lines of $\mathbb{RP}^2$, homogeneous under the action of $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$. The study of the geometry of this model space, and of the dynamical patterns of the action of $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$, allow us to construct compactifications of some Kleinian Lagrangian contact structures, on which we obtain examples of non-conservative Lagrangian contact automorphisms.



IRMA
Institut de Recherche
Mathématique Avancée

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
UMR 7501
Université de Strasbourg
CNRS
IRMA, UMR 7501
7 rue René Descartes
F-67000 STRASBOURG
Tél. 03 68 85 01 29
irma.math.unistra.fr
irma@math.unistra.fr



cnrs

Université
de Strasbourg

IRMA 2020/009
<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03013231>