



**HAL**  
open science

# Synthèse d'observateurs robustes pour des systèmes multivariables à retards multiples

Seifeddine Ben Warrad

► **To cite this version:**

Seifeddine Ben Warrad. Synthèse d'observateurs robustes pour des systèmes multivariables à retards multiples. Automatique / Robotique. INSAT, 2020. Français. NNT: . tel-03013536

**HAL Id: tel-03013536**

**<https://theses.hal.science/tel-03013536>**

Submitted on 24 Nov 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES  
APPLIQUEES ET DE TECHNOLOGIE



UNIVERSITE DE CARTHAGE

# THESE DE DOCTORAT

Discipline : Informatique industrielle

par

**Seifeddine Ben Warrad**

---

## **SYNTHESE D'OBSERVATEURS ROBUSTES POUR DES SYSTEMES MULTIVARIABLES A RETARDS MULTIPLES**

---

Soutenu le 26/09/2020 devant le jury composé de :

**M. Hichem Kallel**  
**M. Anis Sellami**  
**M. Hassani Messaoud**  
**M. Raouf Ketata**  
**Mme. Olfa Boubaker**

Professeur, INSAT  
Professeur, ENSIT  
Professeur, ENIM  
Professeur, INSAT  
Professeur, INSAT

**Président**  
**Rapporteur**  
**Rapporteur**  
**Examineur**  
**Directeur de thèse**

Unité de Recherche Energy, Robotics, Control and Optimization (ERCO)  
Institut National des Sciences Appliquées et Technologie (INSAT)

À mes parents Kamel et Souad ;

À mon frère Malek ;

À mon épouse Salma ;

À toute la famille ;

À tous mes amis ;

À tous ceux qui me sont chers ;

Je vous dédie ce travail

## Remerciements

Ces travaux de recherche ont été réalisés au sein de l'unité de recherche Energie, Robotique, Contrôle et Optimisation (ERCO) à l'Institut National des Sciences Appliquées et Technologie (INSAT).

J'exprime mes sincères remerciements à ma directrice de thèse Madame Olfa Boubaker, Professeur à l'INSAT, pour son enthousiasme, sa disponibilité, ses qualités humaines et son soutien tout au long de mes années de thèse. Je tiens à lui remercier pour ses conseils qui m'ont grandement aidés à mener à bien mes travaux de recherche.

Je souhaite remercier très chaleureusement tous les membres de jury qui ont accepté d'évaluer mes travaux de recherche. Je tiens à remercier particulièrement Monsieur Hichem Kallel, Professeur à l'INSAT, qui m'a fait l'honneur de présider le jury. Veuillez bien trouver ici le témoignage de mon profond respect.

J'exprime mes vifs remerciements également à Monsieur Anis Sellami, Professeur à l'ENSIT, pour le temps consacré à l'évaluation de ma thèse. Veuillez bien trouver ici le témoignage de ma profonde estime.

Je tiens à remercier Monsieur Hassani Messaoud, Professeur à l'ENIM, pour m'avoir fait l'honneur en acceptant de rapporter ce travail. Veuillez bien trouver ici le témoignage de mon profond respect.

J'adresse ma profonde gratitude également à Monsieur Raouf Ketata, Professeur à l'INSAT, pour avoir accepté d'examiner ce modeste travail. Qu'il trouve ici le témoignage de ma profonde gratitude.

Je ne peux pas clôturer ces remerciements sans exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur Mihai Lungu, Maître de Conférences à l'université de Graiova en Roumanie, Monsieur Quan Min Zhu, Professeur à l'Université de l'Ouest de l'Angleterre, Bristol, au Royaume-Uni et Monsieur Saleh Mobayen Maître de Conférences à l'université de Zanzan en Iran pour ses remarques et ses conseils constructifs et pour ses collaborations et ses suggestions scientifiques enrichissantes.



# Liste des Publications

## I. Articles de Journaux Scientifiques

- 1) Ben Warrad S., Boubaker O., Lungu M., Mobayen S., Full and Reduced-Order Unknown Input Observer Design for Linear Time-Delay Systems with Multiple Delays, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2018, 13 pages, 2018. **doi.org/10.1155/2018/1745734**
- 2) Ben Warrad S. & Boubaker O. Full Order Unknown Inputs Observer for Multiple Time-delay Systems, *International journal on smart sensing and intelligent systems*, vol. 9, no. 4. pp 1750-1775, December 2016. **DOI: 10.21307/ijssis-2017-938.**

## II. Chapitre d'ouvrage

- 3) Ben Warrad S., Boubaker O., Lungu M., Zhu Q., "On Unknown Input Observer Design for Linear Systems With Delays in States and Inputs," In: Olfa Boubaker, Quanmin Zhu, Magdi S. Mahmoud, José Ragot, Hamid Reza Karimi, Jorge Dávila *New Trends in Observer-based Control: An Introduction to Design Approaches and Engineering Applications (Vol.1)*, pp. 119-139, Elsevier Academic Press, 2019.

## III. Communications dans des Conférences Internationales avec Comité de Lecture

- 4) Ben Warrad S. & Boubaker O., "Design of Unknown Input Observers for Linear Systems with State and Input Delays," 15th IEEE International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (SSD'2018), Hammamet, Tunisia, Mars 2018, pp. 1161-1165. **DOI: 10.1109/SSD.2018.8570629**
- 5) Ben Warrad S. & Boubaker O., "Robust Observer for Multiple Time-Delay Systems with Unknown Inputs," IEEE International conference on Sciences and Techniques of Automatic Control & computer engineering (STA'2015), Monastir, Décembre 2015. **DOI: 10.1109/STA.2015.7505090.**

# Table des matières

<b>INTRODUCTION GENERALE</b> .....	<b>11</b>
<b>CHAPITRE 1: PRESENTATION ET MODELISATION DU BENCHMARK A QUATRE RESERVOIRS</b> .....	<b>16</b>
1.1.INTRODUCTION .....	17
1.2. DESCRIPTION DU PROCESSUS . .....	17
1.3.MODELISATION.....	18
1.3.1. <i>Modèle non linéaire</i> .....	18
1.3.2. <i>Modèle Linéaire</i> .....	19
1.3.3. <i>Pôles et zéros</i> .....	20
1.3.4. <i>Modèle à plusieurs retards</i> .....	22
1.4. SIMULATION DU PROCEDE .....	24
1.4.1. <i>Cas du modèle à minimum de phase</i> .....	24
1.4.2. <i>Cas du modèle à non-minimum de phase</i> .....	26
1.5. PROBLEMATIQUE ET CONTRIBUTION DE LA THESE .....	28
1.6.CONCLUSION.....	29
<b>CHAPITRE 2: CONTRIBUTION A LA MODELISATION DES SYSTEMES A MULTIPLES RETARDS</b> .....	<b>30</b>
2.1. INTRODUCTION .....	31_Toc536391754
2.2.MODELISATION D'UNE VARIABLE RETARDEE PAR UNE EQUATION AUX DERIVEES PARTIELLES.....	31
LA METHODE DE COLLOCATION ORTHOGONALE.....	32
2.3.1. <i>Mise en œuvre</i> .....	36
2.3.2. <i>Choix des fonctions de base</i> .....	33
2.3.3. <i>Choix du nombre de points de collocation</i> .....	34
2.3.4. <i>Choix de la position des points de collocation</i> .....	34
2.3.5. <i>Analyse théorique de l'approximation de l'erreur d'interpolation</i> .....	36
2.4. Modélisation d'un système linéaire retardé.....	38
2.5.CONTRIBUTION A LA MODELISATION D'UN SYSTEME A MULTIPLES RETARDS VIA LA METHODE DE COLLOCATION ORTHOGONALE .....	39
2.6.APPLICATION .....	41
2.7.CONCLUSION.....	45

<b>CHAPITRE 3: CONTRIBUTION A LA SYNTHÈSE D'OBSERVATEURS D'ORDRES PLEINS .....</b>	<b>46</b>
3.1. INTRODUCTION .....	47
3.2. ETAT DE L'ART.....	47
3.3. POSITION DU PROBLEME.....	49
3.4. OBSERVATEUR DE DIMENSION INFINIE .....	51
3.5. OBSERVATEUR DE DIMENSION FINIE.....	59
3.6. APPLICATION .....	63
3.7. CONCLUSION.....	73
<b>CHAPITRE 4: OBSERVATEURS ROBUSTES D'ORDRE PLEIN ET D'ORDRE REDUIT .....</b>	<b>75</b>
4.1. INTRODUCTION .....	76
4.2. POSITION DU PROBLEME.....	76
4.3. CONCEPTION D'UN OBSERVATEUR D'ORDRE PLEIN .....	78
4.4. CONCEPTION D'UN OBSERVATEUR D'ORDRE REDUIT .....	84
4.5. APPLICATION .....	90
4.5.1. <i>Implémentation de l'observateur à entrées inconnues d'ordre plein dépendant du retard.....</i>	<i>91</i>
4.5.2. <i>Implémentation de l'observateur à entrées inconnues d'ordre réduit dépendant du retard.....</i>	<i>92</i>
4.6. CONCLUSION.....	93
<b>CONCLUSION GENERALE .....</b>	<b>94</b>
<b>RÉFÉRENCES.....</b>	<b>97</b>
<b>ANNEXES .....</b>	<b>106</b>

# Table des Figures

Figure 1.1- Processus à quatre réservoirs .....	18
Figure 1.2- Evolution des variables d'état : Cas du modèle à minimum de phase .....	25
Figure 1.3- Evolution des variables d'état : Cas du modèle à minimum de phase avec retards multiples.....	26
Figure 1.4- Evolution des variables d'état : Cas du modèle à non minimum de phase ..	27
Figure 1.5- Evolution des des variables d'état : Cas du modèle à non minimum de phase avec retards multiples.....	28
Figure 2.1- Modélisation d'une variable retardée par un système à paramètres distribués .....	32
Figure 2.2- Niveaux réels dans leurs réservoirs et leurs approximations via la méthode de collocation orthogonale : Cas du modèle à minimum de phase.....	43
Figure 2.3- Niveaux réels dans leurs réservoirs et leurs approximations via la méthode de collocation orthogonale : Cas du modèle à non-minimum de phase .....	44
Figure 3.1- Schéma Synoptique de l'observateur à entrées inconnues (3.3) .....	58
Figure 3.2- Schéma Synoptique de l'observateur à entrées inconnues (3.4) .....	62
Figure 3.3- Dynamique de l'erreur d'estimation de l'observateur à entrées inconnues indépendant du retard via la méthode de Collocation.....	70
Figure 3.4- Dynamique de l'erreur d'approximation $\hat{r}(t) = \tilde{N}_r(t)$ pour l'observateur à entrées inconnues indepenant du retard via la méthode de Collocation.....	70
Figure 3.5- Niveaux des réservoirs réels et approximés via la méthode de Padé.....	71
Figure 3.6- Erreur d'estimation de l'obervateur à entrées inconnues indépendant du retard via la méthode de Padé .....	72
Figure 3.7- Dynamique de l'erreur d'approximation $\hat{r}(t) = \tilde{N}_r(t)$ pour l'observateur à entrées inonnues indepenant du retard via la méthode de Padé.....	72
Figure 3.8- Dynamique de l'erreur d'estimation de l'observateur à entrées inconnues dépendant du retard et indépendant du retard par les deux méthodes d'approximation.	73
Figure 4.1- Estimation des états du processus à quatre réservoirs via les observateurs à entrées inconnues d'ordre plein et d'ordre réduit .....	93

## Liste des Tableaux

Tableau 1.1- Nomenclature des paramètres du processus .....	19
Tableau 1.2- Paramètres du processus à quatre réservoirs [Johansson, 2000] .....	21
Tableau 1.3- Position des zéros en fonction des taux d'ouverture des vannes $\gamma_1$ et $\gamma_2$ .....	22
Tableau 1.4- Paramètres du modèle à minimum de phase [Johansson, 2000] .....	25
Tableau 1.5- Paramètres du modèle à non minimum de phase [Johansson, 2000] .....	27
Tableau 2.1- Position des points de collocation pour $N = 3$ .....	35
Tableau 2.2 - Performances de l'approximation des états via la méthode de collocation orthogonale : Cas du modèle à minimum de phase .....	44
Tableau 2.3 - Performances de l'approximation des états via la méthode de collocation orthogonale - Cas du modèle à minimum de phase .....	45

# Notations

## Ensembles et domaines

$\mathfrak{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathfrak{R}^n$	Espace réel euclidien de dimension $n$
$\mathfrak{R}^{n \times m}$	Ensemble de matrices réelles
$I_n$	Matrice identité de dimension $n$

## Matrices, opérations et lois matricielles

$R > 0, R \geq 0$	Matrice $R$ symétrique définie (semi-définie) positive
-------------------	--

$A^T$	Transposé de $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$
-------	--

$A^{-1}$	Inverse de $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$
----------	--

$(\cdot)^+$	Inverse généralisée
-------------	---------------------

$\Sigma$	Somme
----------	-------

$\Pi$	Produit
-------	---------

## Normes

$  $	Valeur absolue de $x$
------	-----------------------

$\  \ $	Norme euclidienne d'un vecteur ou norme spectrale d'une matrice
---------	---



# **Introduction générale**

Au cours des dernières décennies, l'analyse des systèmes à retards a connu un intérêt croissant dans la littérature. Dans ce cadre, ces systèmes sont fréquemment rencontrés dans de nombreuses applications telles que les applications hydrauliques, les applications automobiles et aussi dans les réseaux de télécommunication [El Haoussi et al., 2011], [Lai et al., 2016], [Zhang et al., 2016], [Li et al., 2014]. [Sanz et al., 2017], [Bououden et al., 2017] et [Cao et al., 2017]. Généralement, les retards décrivent les phénomènes de propagation, de transfert d'énergie ou de transmission de données. En outre, il est reconnu que l'apparition des retards est l'une des causes majeures de la perte de la stabilité et de la dégradation des performances [Boubaker et al., 2017]. Depuis les années soixante, le thème de la recherche sur les systèmes à retards a suscité beaucoup d'intérêt et a été considéré comme étant l'un des domaines de recherche essentiels de la théorie du contrôle pour lequel de nombreux travaux de recherche importants ont été consacrés. L'état de l'art présenté dans l'article récent [Mahmoud, 2017], les ouvrages de grande importance [Fridman, 2014], [Zhou, 2014] et [Witrant et al., 2016] ainsi que les nombreuses références dans ce domaine prouvent la richesse et l'impact de ce domaine.

Les retards peuvent apparaître sur les variables d'état, sur les entrées de contrôle ou aussi sur les sorties de mesure et, ignorer un certain nombre de ces retards dans la conception du contrôleur peut entraîner des dynamiques indésirables telles que les oscillations, les bifurcations, l'instabilité et même l'apparition des comportements chaotiques [Boubaker et al., 2017]. Dans ce cadre, la stabilisation des systèmes linéaires à retards a reçu une attention considérable et de nombreux résultats ont été rapportés très récemment dans la littérature [Zhang et al., 2017], [Qian et al., 2017] et [Cai et al., 2018]. Comme appuyé dans [Liu & Zhou, 2017], la plupart des travaux de recherche se concentrent sur la stabilisation des systèmes avec des retards appliqués sur les entrées sans se soucier des retards appliqués sur les états. De ce fait, très peu de travaux de recherche ont examiné le problème de stabilisation des systèmes avec retards multiples appliqués à la fois sur les états et sur les entrées. Dans ces quelques cas, le problème a été généralement résolu en supposant que toutes les variables d'état sont entièrement disponibles [El Haoussi et al., 2011] ou en utilisant des contrôleurs par retour de sortie [Belhaj & Boubaker, 2017]. Le problème de la stabilisation basé sur un observateur d'état pour les systèmes à retards multiples appliqués à la fois sur les états et sur les entrées est très rarement abordé [Liu & Zhou, 2017] et [Zhou et al., 2017]. Cette

question d'importance théorique et pratique reste jusqu'à présent un problème difficile pour de nombreuses classes de systèmes, en particulier celles soumises à des entrées inconnues, à des incertitudes et/ou à des saturations d'entrées.

Dans la théorie du contrôle, les systèmes de référence ou *Benchmark* sont un autre problème fondamental. Malgré leur structure simple, ces systèmes ont une dynamique riche et aboutit toujours à des problèmes de contrôle difficiles. Dans ce cadre, plusieurs systèmes de référence, forts intéressants, existent dans la littérature et sont fréquemment utilisés pour tester les nouveaux algorithmes de contrôle et d'estimation. Parmi ces benchmarks, nous pouvons citer le processus à trois réservoirs [Dormido et al., 2008], le système masse-ressort-amortisseur [Cairano et al., 2007], le système TORA [Jankovic et al., 1996], le pendule inversé sur chariot [Boubaker & Iriarte 2017], le pendule de Furuta [Fantoni & Lozano, 2002], le robot flexible à deux bras [Matsuno et al., 1994] ... Dans ce cadre et depuis les années 2000, le célèbre benchmark à quatre réservoirs [Johansson, 2000] et [Gatzke et al., 2000] a attiré l'attention des chercheurs car il a pu illustrer de nombreux concepts fondamentaux dans la théorie de l'estimation et du contrôle multivariable, en particulier la limitation de performance due aux zéros à non minimum de phase et leurs directions de sortie. De nombreux articles de recherche ont été consacrés au problème de la conception des observateurs et des lois de commande pour ce benchmark en temps continu et en temps discret sans toute fois tenir compte des retards dans la conception [Manaa et al., 2015], [Smida et al., 2015], [Xavier et al., 2018], [Gouta et al., 2017] et [Huang et al., 2017]. Malheureusement, les retards sont rarement pris en compte pour concevoir des contrôleurs pour de tels processus [El Haoussi et al., 2011] et [Shneiderman & Palmor, 2010] et à notre connaissance, des observateurs à entrées inconnues n'ont été jamais conçus pour un tel benchmark avec considération des retards.

Motivés par les travaux de [Lungu M & Lungu, 2012] sur les observateurs à entrées inconnues pour des systèmes linéaires sans retards et par l'approche de stabilisation pour les systèmes linéaires à retards multiples présentée dans [El Haoussi et al., 2011], nous tenterons dans cette thèse de résoudre le problème de synthèse d'observateurs à entrées inconnues du benchmark à quatre réservoirs soumis à des retards multiples. Les deux cas des observateurs dépendant du retard et indépendants des retards seront traités. Les observateurs d'ordre réduit et d'ordre plein seront aussi l'objet de nos contributions.

Contrairement aux travaux de [El Haoussi et al., 2011] où toutes les variables d'état du système à retards contrôlé sont supposées être mesurables par des capteurs, nos approches présentent des avantages potentiels pour les applications industrielles, car on considère la disponibilité d'un nombre inférieur de capteurs grâce à la synthèse des observateurs proposés. Cette conception contribue non seulement à réduire le coût de la mise en place du processus mais également à limiter le nombre de capteurs, qui peuvent s'avérer fragiles dans des environnements hostiles. Cette proposition peut réduire considérablement l'importance des pannes et des défauts. De plus, la fiabilité et la rapidité de la réponse du système peut être garantie grâce à une conception rigoureuse de l'estimateur d'état et un édifiant ajustement de ses paramètres.

Ce rapport est organisé en quatre chapitres. Le premier chapitre rappellera le benchmark à quatre réservoirs. Dans ce cadre, nous proposerons une description et une modélisation détaillée de ce processus. Ce chapitre se termine par un exposé des contributions de cette thèse par rapport à l'existant.

Le second chapitre se propose d'exposer une nouvelle méthodologie de la modélisation des systèmes linéaires multivariés à retards multiples. Nous étudierons en premier lieu la modélisation d'une seule variable retardée via les équations différentielles partielles. Nous détaillerons ensuite la méthode de collocation orthogonale qui nous permettra de transformer un système de dimension infinie, qui est dans notre cas le système retardé, en un système de dimension finie. L'extension de la modélisation d'une seule variable retardée sera enfin étendue à un système à retards multiples pour obtenir une nouvelle représentation d'état des systèmes linéaires à multiples retards. Le processus à quatre réservoirs sera appliqué afin de démontrer la validité et l'efficacité de la représentation d'état proposée.

Le troisième chapitre sera consacré à la conception de deux nouvelles approches d'observateurs à entrées inconnues. Nous exposerons tout à bord un état de l'art sur l'estimation des états pour les systèmes linéaires à temps continu avec retards. Exploitant le travail de modélisation établi au second chapitre, nous proposerons deux nouvelles approches de conception d'observateurs à entrées inconnues l'une dépendant du retard et la seconde indépendante du retard. Celles-ci seront appliquées sur le processus multivariable à quatre réservoirs pour le cas du modèle à non-minimum de phase. La validité de ces approches seront enfin mises en valeurs.

Le quatrième chapitre s'intéresse enfin à la stabilisation des systèmes multivariables à multiples retards à base d'observateurs. Tout d'abord, la conception des observateurs sera établie en deux approches : un observateur d'ordre plein et un autre observateur d'ordre réduit. La stabilité asymptotique des deux approches sera prouvée et les conditions d'existence des deux observateurs seront fournis. Nous illustrerons enfin l'applicabilité des approches proposées sur le même benchmark mais cette fois commandé par une loi de commande appropriée pour les systèmes à multiples retards, tirée de la littérature.

Une conclusion générale ainsi que des perspectives de ces travaux clôturent ce rapport.

# **Chapitre 1**

## **Présentation et modélisation du benchmark à quatre réservoirs**

## **1.1. Introduction**

Ce chapitre décrit le processus à quatre réservoirs largement utilisé comme benchmark dans la littérature dans le domaine de la théorie du contrôle. Ce système est présenté par la figure 1.1. Il peut être conçu en utilisant deux processus de double-réservoirs d'eau interconnectés et deux pompes. Bien que la configuration matérielle soit assez simple, le processus à quatre réservoirs peut illustrer plusieurs problèmes industriels multivariables difficiles non encore résolus. Ce chapitre se propose donc de faire une description de ce benchmark et de mettre le point sur les particularités de son modèle mathématique.

Ce premier chapitre sera organisé comme suit : dans le second paragraphe nous présenterons une description du processus à quatre réservoirs. Dans le troisième paragraphe, nous présenterons une modélisation non linéaire, linéariste, et linéariste à multiple retards de ce benchmark. Dans la section 1.4 nous exposerons l'évolution des variables d'état du procédé et nous analyserons sa dynamique via des résultats de simulation. Dans la cinquième partie nous présenterons enfin la problématique et la contribution de la thèse relative aux particularités et aux défis relevés par les modèles déjà exposés.

## **1.2. Description du processus**

Cette section décrit brièvement le processus à quatre réservoirs représentés par la figure 1.1. Il s'agit d'un processus multivariable constitué essentiellement par quatre réservoirs d'eau interconnectés et deux pompes. La sortie de chaque pompe est divisée en deux réservoirs. Le débit d'entrée de chaque réservoir est mesuré par un débitmètre électromagnétique et régulé par une vanne pneumatique. Les deux pompes transportent l'eau d'un bassin dans les quatre réservoirs. Les réservoirs en haut (réservoirs 3 et 4) débouchent dans le réservoir correspondant en bas (réservoirs 1 et 2), respectivement. Les vannes à trois voies sont émulées par un calcul approprié des points de consigne des boucles de régulation de débit selon le rapport considéré de la vanne à trois voies.

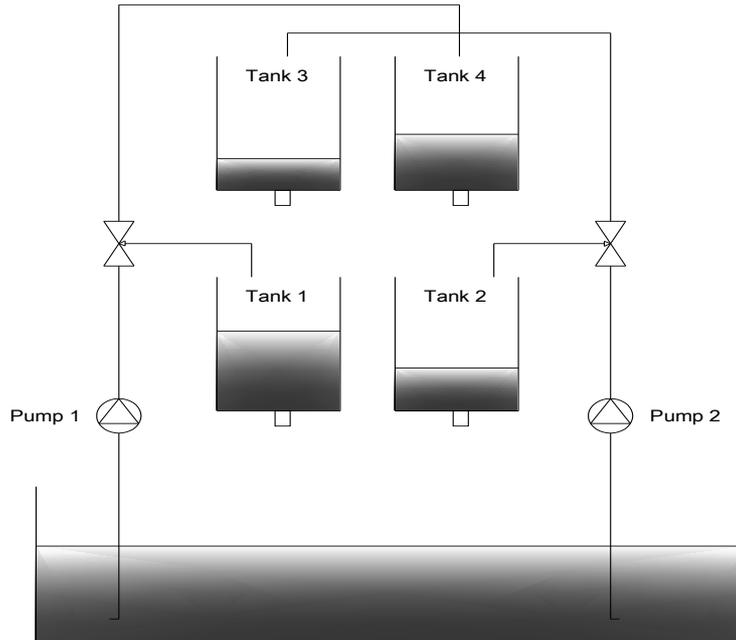


Figure 1.1- Processus à quatre réservoirs

### 1.3. Modélisation

#### 1.3.1. Modèle non linéaire

En considérant simultanément le débit entrant et sortant de tous les réservoirs, la dynamique non linéaire du processus à quatre réservoirs est donnée par [Johansson, 2000] :

$$\begin{aligned}
 \frac{dh_1}{dt} &= -\frac{a_1}{S_1} \sqrt{2gh_1} + \frac{a_3}{S_1} \sqrt{2gh_3} + \frac{\gamma_1 k_1 \vartheta_1}{S_1} \\
 \frac{dh_2}{dt} &= -\frac{a_2}{S_2} \sqrt{2gh_2} + \frac{a_4}{S_2} \sqrt{2gh_4} + \frac{\gamma_2 k_2 \vartheta_2}{S_2} \\
 \frac{dh_3}{dt} &= -\frac{a_3}{S_3} \sqrt{2gh_3} + \frac{(1-\gamma_2)k_2 \vartheta_2}{S_3} \\
 \frac{dh_4}{dt} &= -\frac{a_4}{S_4} \sqrt{2gh_4} + \frac{(1-\gamma_1)k_1 \vartheta_1}{S_4}
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Le niveau de chaque réservoir  $h_i$  ( $i=1\dots 4$ ) est mesuré au moyen d'un capteur de pression. Les entrées du processus sont les tensions d'entrée des pompes  $\vartheta_1$  et  $\vartheta_2$ . Les variables de sortie sont alors les niveaux dans les réservoirs 1 et 2 notés  $y_1$  et  $y_2$ . Le tableau 1.1 donne une nomenclature de tous les paramètres du processus pour  $i=1\dots 4$ .

Tableau 1.1- Nomenclature des paramètres du processus

$a_i$	Surface du tube de sortie du réservoir i
$S_i$	Surface du réservoir i
$\gamma_1$	Pourcentage d'eau dérivée vers les réservoirs 1 et 4
$\gamma_2$	Pourcentage d'eau dérivée vers les réservoirs 2 et 3
$k_1$	Gain de la pompe 1
$k_2$	Gain de la pompe 2
$g$	Constante de gravitation

### 1.3.2. Modèle Linéaire

Le modèle linéarisé autour des points d'équilibre  $\vartheta_{10}, \vartheta_{20}, h_{10}, h_{20}, h_{30}, h_{40}, y_{10}, y_{20}$  peut être exprimé par [Johansson, 2000] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

où

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{S_1} \sqrt{\frac{g}{2h_{10}}} & 0 & \frac{a_3}{S_1} \sqrt{\frac{g}{2h_{30}}} & 0 \\ 0 & -\frac{a_2}{S_2} \sqrt{\frac{g}{2h_{20}}} & 0 & \frac{a_4}{S_2} \sqrt{\frac{g}{2h_{40}}} \\ 0 & 0 & -\frac{a_3}{S_3} \sqrt{\frac{g}{2h_{30}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a_4}{S_4} \sqrt{\frac{g}{2h_{40}}} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{S_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{S_2} \\ 0 & \frac{(1-\gamma_2)k_2}{S_3} \\ \frac{(1-\gamma_1)k_1}{S_4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_c & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec  $k_c$  est le gain du capteur de niveau. Le vecteur d'état est défini par  $x = [h_1 - h_{10} \quad h_2 - h_{20} \quad h_3 - h_{30} \quad h_4 - h_{40}]^T$  où les quatre composantes représentent la variation des niveaux d'eau dans les réservoirs par rapport au point d'équilibre et  $u = [\vartheta_1 - \vartheta_{10} \quad \vartheta_2 - \vartheta_{20}]^T$  est le vecteur d'entrée.

La matrice de transfert correspondante du système (1.2) est donnée comme suit [Johansson, 2000] :

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 v_1}{1+sT_1} & \frac{(1-\gamma_2)v_1}{(1+sT_3)(1+sT_1)} \\ \frac{(1-\gamma_1)v_2}{(1+sT_4)(1+sT_2)} & \frac{\gamma_2 v_2}{1+sT_2} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

où

$$T_i = \frac{S_i}{a_i} \sqrt{\frac{2h_{i0}}{g}}$$

$$v_1 = T_1 k_1 k_c / S_1 \quad \text{et} \quad v_2 = T_2 k_2 k_c / S_2$$

Le déterminant de la fonction de transfert est donné par [Johansson, 2000] :

$$\det G(s) = \frac{\gamma_1 \gamma_2 v_1 v_2}{\prod_{i=1}^4 (1+sT_i)} \left[ (1+sT_3)(1+sT_4) - \frac{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)}{\gamma_1 \gamma_2} \right] \quad (1.4)$$

L'expression du déterminant (1.4) peut s'écrire sous cette forme

$$\det G(s) = \frac{\gamma_1 \gamma_2 v_1 v_2}{\prod_{i=1}^4 (1+sT_i)} \left[ (1+sT_3)(1+sT_4) - \eta \right] \quad (1.5)$$

avec :

$$\eta = \frac{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)}{\gamma_1 \gamma_2} \in [0 \infty[$$

### 1.3.3. Pôles et zéros

Pour calculer les pôles et les zéros du système, on considère les valeurs numériques des paramètres du processus qui sont récapitulées dans le Tableau 1.2.

Tableau 1.2- Paramètres du processus à quatre réservoirs [Johansson, 2000]

Paramètres	Description	Valeurs	Unités
$S_1, S_3$	Surface des réservoirs 1 et 3	28.000	[cm <sup>2</sup> ]
$S_2, S_4$	Surface des réservoirs 2 et 4	32.000	[cm <sup>2</sup> ]
$a_1, a_3$	Surface du tube de sortie des réservoirs 1 et 3	0.071	[cm <sup>2</sup> ]
$a_2, a_4$	Surface du tube de sortie des réservoirs 2 et 4	0.057	[cm <sup>2</sup> ]
$k_c$	Gain du capteur de niveau	0.500	[V/cm]
$g$	Constante de gravitation	981	[cm/s <sup>2</sup> ]

En se référant aux paramètres du processus donnés dans le tableau 1.2, les valeurs propres du processus à quatre réservoirs sont toujours à parties réelles négatives. Le système linéaire (1.2) est toujours stable.

Le système admet aussi deux zéros de transmission multivariables, qui peuvent être déterminés par les zéros de leur déterminant (1.5) de la fonction de transfert (1.3) tels que :

$$z_1(\eta) = \frac{-(T_3 + T_4) + \sqrt{(T_3 - T_4)^2 + 4T_3T_4\eta}}{2T_3T_4} \quad (1.6)$$

$$z_2(\eta) = \frac{-(T_3 + T_4) - \sqrt{(T_3 - T_4)^2 + 4T_3T_4\eta}}{2T_3T_4} \quad (1.7)$$

Le zéro multivariable ajustable (1.6) peut être attribué au demi-plan droit ou au demi-plan gauche. L'ajustement de la position des vannes détermine si le système est à minimum de phase ou à non-minimum de phase vu que dans l'expression (1.6) nous avons  $\eta = \frac{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)}{\gamma_1\gamma_2} \in [0 \infty[$ . La position des zéros peut être alors indiqué en

termes des taux d'ouverture des vannes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  tels qu'expliqués dans le Tableau 1.3.

Plus de détails à ce propos sont donnés dans [Johansson, 2000].

Tableau 1.3- Position des zéros en fonction des taux d'ouverture des vannes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$

	$z_1$	$z_2$	Comportement du système
$1 < \gamma_1 + \gamma_2 < 2$	Négatif	Négatif	Minimum de phase
$\gamma_1 + \gamma_2 = 1$	Zéro	Négatif	Limite
$0 < \gamma_1 + \gamma_2 < 1$	Positif	Négatif	Non minimum de phase

La position des zéros multivariables dans le demi-plan gauche ou demi-plan droit a une interprétation physique simple. Soit le débit  $q_i$  à travers la pompe  $i$  et assumons que  $q_1 = q_2 = q$ . Ainsi, le débit des réservoirs inférieurs est supérieur au débit des réservoirs supérieurs si  $\gamma_1 + \gamma_2 > 1$ , c'est à dire, si le système est à minimum de phase. Le débit des réservoirs inférieurs est inférieur à celui des réservoirs supérieurs si le système est à non-minimum de phase. Dans ce cas,  $0 < \gamma_1 + \gamma_2 < 1$ . Il est à noter qu'il serait facile de commander  $y_1$  avec  $u_1$  et  $y_2$  avec  $u_2$ , si la plupart des débits s'acheminent directement aux réservoirs inférieurs. Le problème de commande est particulièrement difficile si le débit total des réservoirs à gauche (réservoirs 1 et 3) est égal au débit total s'acheminant vers les réservoirs à droite (réservoirs 2 et 4). Cela correspond à  $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$  ou à un zéro multivariable à l'origine. Ainsi, il y a une relation immédiate entre la position des zéros du modèle et l'intuition physique de commander le processus à 4 réservoirs [Johansson, 2000].

#### **1.3.4. Modèle à plusieurs retards**

En outre, pour une description plus réaliste du processus, nous considérons que le processus du quadruple réservoir est affecté par des retards, dans ce cas, les équations différentielles du processus sont décrites par [El Haoussi et al., 2011] :

$$\begin{aligned}
 \frac{dh_1}{dt} &= -\frac{a_1}{S_1} \sqrt{2gh_1} + \frac{a_3}{S_1} \sqrt{2gh_3(t-t_1)} + \frac{\gamma_1 k_1 \vartheta_1(t-t_5)}{S_1} \\
 \frac{dh_2}{dt} &= -\frac{a_2}{S_2} \sqrt{2gh_2} + \frac{a_4}{S_2} \sqrt{2gh_4(t-t_2)} + \frac{\gamma_2 k_2 \vartheta_2(t-t_6)}{S_2} \\
 \frac{dh_3}{dt} &= -\frac{a_3}{S_3} \sqrt{2gh_3} + \frac{(1-\gamma_2)k_2 \vartheta_2(t-t_3)}{S_3} \\
 \frac{dh_4}{dt} &= -\frac{a_4}{S_4} \sqrt{2gh_4} + \frac{(1-\gamma_1)k_1 \vartheta_1(t-t_4)}{S_4}
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Supposons que les retards de transport sont parfaitement symétriques, nous pouvons écrire  $t_1 = t_2$ ,  $t_3 = t_4$  et  $t_5 = t_6$ . En linéarisant le système non linéaire (1.8) autour du point d'équilibre, on peut obtenir le modèle multivariable avec plusieurs retards [El Haoussi et al., 2011] :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau_1) + B_0 u(t - \tau_2) + B_1 u(t - \tau_3) + Dd(t) \\
 y(t) &= Cx(t)
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

avec

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{S_1} \sqrt{\frac{g}{2h_{10}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a_2}{S_2} \sqrt{\frac{g}{2h_{20}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a_3}{S_3} \sqrt{\frac{g}{2h_{30}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a_4}{S_4} \sqrt{\frac{g}{2h_{40}}} \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{S_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{S_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{a_3}{S_1} \sqrt{\frac{g}{2h_{30}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_4}{S_2} \sqrt{\frac{g}{2h_{40}}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-\gamma_2)k_2}{S_3} \\ \frac{(1-\gamma_1)k_1}{S_4} & 0 \end{bmatrix}, \\
 C &= \begin{bmatrix} k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_c & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

où  $d(t) \in \mathcal{R}^q$  est le vecteur des perturbations dont les éléments sont des fonctions inconnues de temps,  $A_0 \in \mathcal{R}^{4 \times 4}$ ,  $A_1 \in \mathcal{R}^{4 \times 4}$ ,  $B_0 \in \mathcal{R}^{4 \times 2}$ ,  $B_1 \in \mathcal{R}^{4 \times 2}$ ,  $C \in \mathcal{R}^{2 \times 4}$ , et

$D \in \mathcal{R}^{4 \times q}$  sont des matrices constante, tandis que  $\tau_1 = t_1$ ,  $\tau_2 = t_5$  et  $\tau_3 = t_3$  sont des retards constants.

**Remarque 1.1 :** En utilisant l'hypothèse que déjà mentionnée les retards de transport sont parfaitement symétrique (figure 1.1) nous pouvons écrire  $t_1 = t_2$ ,  $t_3 = t_4$  et  $t_5 = t_6$  et en se référant à la figure 1.1 les retards sont appliqués sur les entrées du processus : les tensions d'entrée des pompes  $\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{G}_2$ .

#### **1.4. Simulation du procédé**

Pour les résultats de simulation du modèle à minimum phase et à non-minimum phase, les valeurs numériques sont prises telles que pour le signal d'entrée on a  $u(t) = \sin(2\pi ft)$  et  $f = 50\text{Hz}$ .

##### **1.4.1. Cas du modèle à minimum de phase**

La figure 1.2 montre l'évolution des variables d'état du procédé à quatre réservoirs en utilisant le modèle (1.2) dans le cas de zéros à minimum de phase. Celui-ci est obtenu en utilisant les paramètres du Tableau 1.4.

Pour avoir une description plus réaliste du processus, les retards de transport entre les vannes et les réservoirs sont pris en considération. Pour évaluer l'effet de ces retards sur la dynamique du système, nous considérerons le modèle (1.9) pour les valeurs de retards  $\tau_1 = 5\text{s}$ ,  $\tau_2 = 2\text{s}$ ,  $\tau_3 = 4\text{s}$ . La Figure 1.3 montre l'évolution des niveaux dans les réservoirs simulés pour le modèle (1.9) en utilisant la fonction prédéfinie DDE disponible sous le logiciel Matlab. Il est clair que la dynamique du système est affectée par ces retards sans toutefois le déstabiliser.

Tableau 1.4- Paramètres du modèle à minimum de phase [Johansson, 2000]

Paramètres	Description	Valeurs numériques	Unité
$h_1^0, h_2^0$	Niveau d'eau dans les réservoirs 1 et 2	12.400, 12.700	[cm]
$h_3^0, h_4^0$	Niveau d'eau dans les réservoirs 3 et 4	1.800, 1.400	[cm]
$g_1^0, g_2^0$	Voltage de l'entrée i (pompe i)	3.000, 3.000	[V]
$k_1, k_2$	Gain de la pompe i	3.330, 3.350	[cm <sup>3</sup> /V.s]
$\gamma_1, \gamma_2$	Pourcentage d'eau dérivée vers les réservoirs 1, 2, 3 et 4	0.700, 0.600	-

**Remarque 1.2 :** même si le comportement du système à minimum de phase et à non minimum de phase ne dépend que des gains des pompes, nous avons opté par l'utilisation des mêmes valeurs numérique de la référence [Johansson, 2000] article de base pour le processus à quatre réservoirs cité dans des certains références.

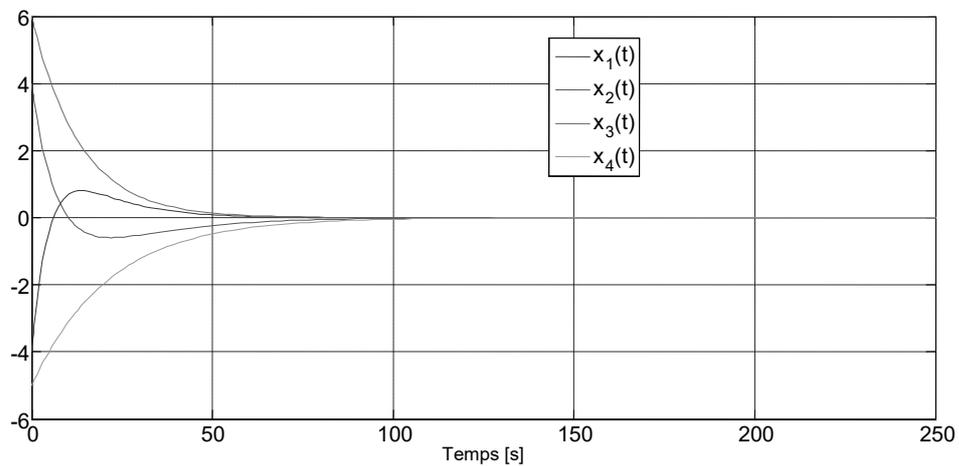


Figure1.2- Evolution des variables d'état : Cas du modèle à minimum de phase

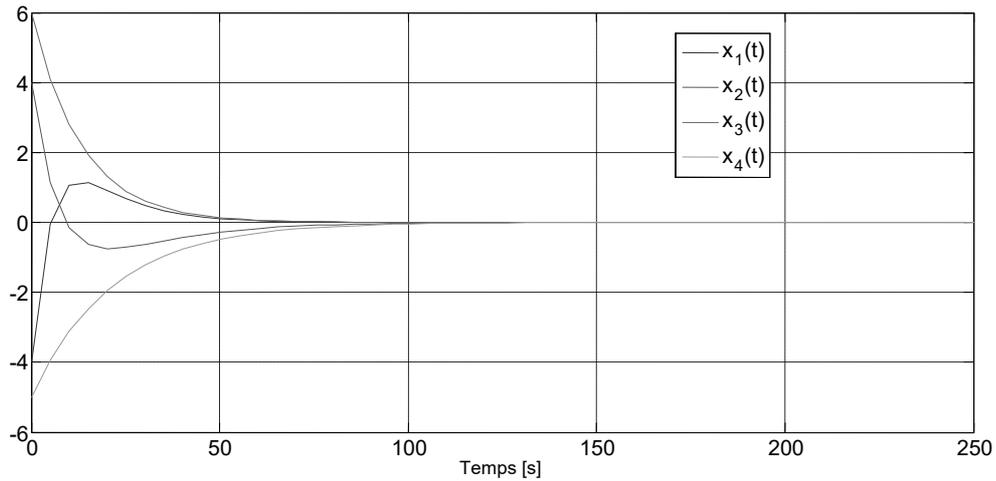


Figure 1.3- Evolution des variables d'état : Cas du modèle à minimum de phase avec retards multiples  $\tau_1 = 5s, \tau_2 = 2s, \tau_3 = 4s$

#### 1.4.2. Cas du modèle à non-minimum de phase

Le Tableau 1.5 donne les valeurs numériques des paramètres du modèle à non minimum de phase du processus à quatre réservoirs. La Figure 1.4 montre l'évolution des variables d'état du modèle (1.2) à non minimum de phase sans retards alors que la Figure 1.5 montre l'évolution du système (1.9) dans le cas du modèle à non minimum de phase pour les retards  $\tau_1 = 5s, \tau_2 = 2s, \tau_3 = 4s$ . Particulièrement, c'est sur cette dernière figure, que la dynamique des zéros instables est bien observée au niveau de l'évolution des deux réservoirs 1 et 2 où les courbes mentionnent des dépassements importants dans le sens inverse de leur stabilisation.

Tableau 1.5- Paramètres du modèle à non minimum de phase [Johansson, 2000]

Paramètres	Description	Valeur numérique	Unité
$h_1^0, h_2^0$	Niveau d'eau dans les réservoirs 1 et 2	12.600, 13.000	[cm]
$h_3^0, h_4^0$	Niveau d'eau dans les réservoirs 3 et 4	4.800, 4.900	[cm]
$g_1^0, g_2^0$	Voltage de l'entrée i (pompe i)	3.150, 3.150	[V]
$k_1, k_2$	Gain de la pompe i	3.150, 3.290	[cm <sup>3</sup> /V.s]
$\gamma_1, \gamma_2$	Pourcentage d'eau dérivée vers les réservoirs 1, 2, 3 et 4	0.430, 0.340	-

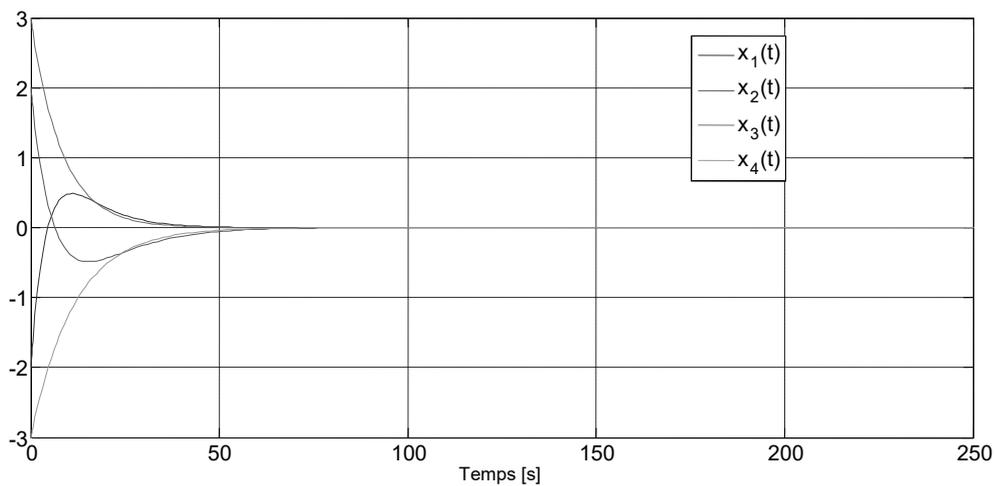


Figure 1.4- Evolution des variables d'état : Cas du modèle à non minimum de phase

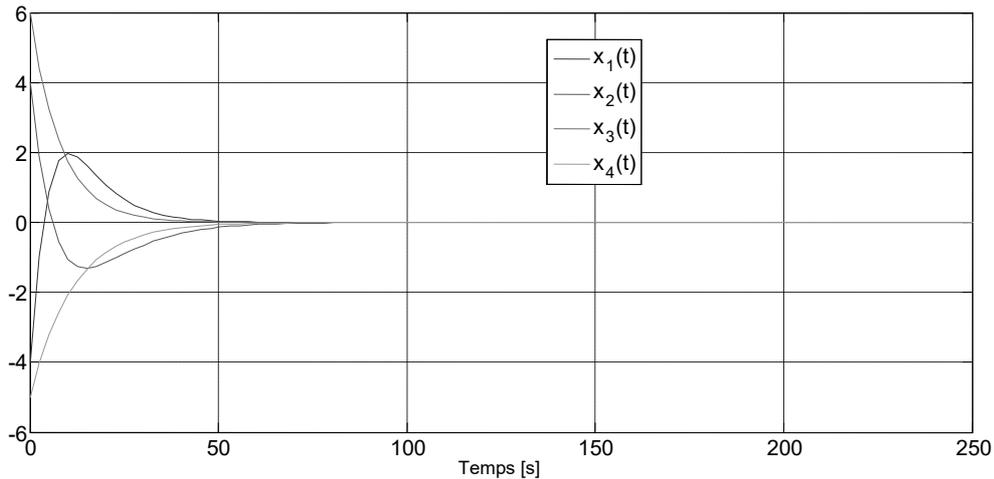


Figure 1.5- Evolution des niveaux dans les réservoirs : Cas du modèle à non minimum de phase avec retards multiples  $\tau_1 = 5s, \tau_2 = 2s, \tau_3 = 4s$

### 1.5. Problématique et contribution de la thèse

Plusieurs systèmes de référence très intéressants existent dans la littérature et sont fréquemment utilisés comme systèmes fondamentaux pour tester les algorithmes d'estimation et de contrôle émergents dans de nombreuses applications. Dans ce cadre et depuis les années 2000, le benchmark à quatre réservoirs a attiré l'attention des chercheurs car il peut illustrer de nombreux concepts fondamentaux dans l'estimation et le contrôle des systèmes multivariables, en particulier la limitation de performance due aux zéros à non minimum de phase et leurs directions de sortie.

D'autre part, Les systèmes industriels sont généralement de nature multivariable. Ils peuvent être soumis à des retards multiples sur les états et aussi sur les entrées de commande. L'apparition des retards dans la dynamique des processus industriels a été considérée donc comme un phénomène naturel mais inévitable pour l'analyse et la synthèse de ces systèmes. Il existe certains travaux de recherche dans ce sens, mais très peu ont réussi à proposer des solutions pour la stabilisation des systèmes à multiples retards. Cependant, à notre connaissance, ni des observateurs à entrées inconnues ni des observateurs à entrées inconnues basés sur des lois de commande n'ont été proposés dans ce sens.

Motivés par les travaux de recherche de Lungu & Lungu [Lungu & Lungu, 2012] sur les observateurs à entrées inconnues pour les systèmes linéaires multivariables sans retards, nous développerons dans cette thèse une extension de ces travaux aux problèmes de la

conception des observateurs à entrées inconnues avec plusieurs retards sur les états et aussi sur les entrées non seulement en boucle ouverte mais aussi pour des observateurs basés sur une loi de commande tirée de la littérature. Différents types d'algorithmes seront proposés dans ce sens :

- Des observateurs de dimension finie et aussi de dimension infinie dépendant des retards et indépendants des retards,
- Des observateurs d'ordre plein et aussi d'ordre réduit.

Le processus à quatre réservoirs sera utilisé pour illustrer l'efficacité des nouvelles approches proposées pour le cas du modèle à non minimum de phase.

## **1.6. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la modélisation et la simulation du processus à quatre réservoirs. Nous avons détaillé le modèle du processus pour les deux cas des modèles à minimum de phase et à non minimum de phase. Pour avoir une description plus réaliste du processus à quatre réservoirs, nous avons étudié le système linéaire autour d'un point de fonctionnement avec des retards sur l'état et aussi sur les commandes.

L'étude établie dans ce chapitre a permis de mettre en évidence que l'apparition des retards dans la dynamique des processus industriels peut détériorer la dynamique du système. Il est aussi à noter que l'apparition de ces retards rend plus difficile la synthèse de ces systèmes. Afin de traiter ce problème, nous proposerons dans le cadre du chapitre suivant de développer un modèle d'état qui nous permettra de résoudre le problème de la synthèse des systèmes à retards multiples.

## **Chapitre 2**

# **Contribution à la modélisation des systèmes à multiple retards**

## **2.1. Introduction**

La science de l'Automatique consiste à l'étude des systèmes réels des différentes disciplines scientifiques pour des fins de contrôle. Pour ce faire, l'obtention d'un modèle assez précis du système réel est toujours nécessaire. La modélisation d'un système réel exige une connaissance précise des phénomènes physiques intervenant pour le processus et une aptitude à les représenter par des équations mathématiques. Par exemple, on constate que les phénomènes des retards apparaissent naturellement dans les processus physiques et nécessitent une attention particulière qui est souvent négligée. Ceci est motivé par le fait que le retard est un phénomène inévitable pour plusieurs applications [Richard, 2003]. Il doit être pris en compte pour la conception des lois de commande et des estimateurs d'état et des paramètres.

De ce fait, nous proposerons dans ce chapitre la modélisation d'un système à multiples retards en utilisant la méthode de collocation orthogonale permettant de transformer le modèle de dimension infinie d'un système retardé décrit par un ensemble d'équations différentielles à dérivées partielles, pour lequel la synthèse des observateurs et des lois de commande s'avère difficile, en à un système de dimension finie décrit par un ensemble d'équations différentielles ordinaires linéaires.

Ce deuxième chapitre sera organisé comme suit : dans le second paragraphe nous présenterons le principe de la modélisation d'une variable retardée par une équation aux dérivées partielles. Dans la troisième section nous étudierons une approximation d'un système de dimension infinie par la méthode de collocation orthogonale en respectant un certain nombre de paramètres lors de l'utilisation de cette méthode. Dans les sections 2.4 et 2.5 nous appliquerons les derniers principes pour la modélisation d'un système à multiples retards via la méthode de collocation orthogonale. Dans la sixième partie nous montrerons l'efficacité de la méthode de collocation orthogonale grâce aux résultats de simulation réalisés en utilisant le benchmark à quatre réservoirs.

## **2.2. Modélisation d'une variable retardée par une équation aux dérivées partielles**

Chaque variable retardée, décrite par la figure 2.1, peut être modélisée par un système à paramètres distribués (appelé aussi système de dimension infinie) décrit par l'équation aux dérivées partielles suivante [Damak, 1994], [Richard, 2003] :

$$\frac{\partial X(z, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} \frac{\partial X(z, t)}{\partial z} \quad (2.1)$$

avec la condition aux limites :

$$v(t) = X(0, t) \quad (2.2)$$

et l'équation de sortie :

$$v(t - \tau) = X(1, t) \quad (2.3)$$

où  $t$  et  $z$  sont respectivement la variable temporelle et la variable pseudo-spatiale.  $v(t)$ ,  $X(z, t)$  and  $v(t - \tau)$  sont respectivement la variable d'entrée, la variable d'état et la sortie du bloc de retard.  $\tau$  étant un retard constant.

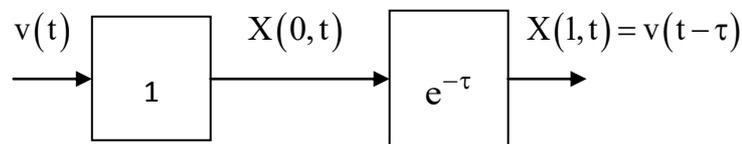


Figure 2.1- Modélisation d'une variable retardée par un système à paramètres distribués

### **2.3. La méthode de collocation orthogonale**

Le modèle du système à paramètres distribués décrit par l'équation différentielle à dérivées partielles (2.1) avec la condition aux limites (2.2) et l'équation de sortie (2.3) peut être transformé en un modèle en équations différentielles ordinaires en utilisant l'une des méthodes d'approximation fonctionnelles. Dans ce cas, la méthode de collocation orthogonale peut être utile. Cette méthode [Villadsen & Michelsen, 1978], [Nihtila et al., 1994] et [Wysocki, 1984] appartient au groupe de méthodes dites de résidus pondérés dont le principe est l'approximation d'une fonction générale par des fonctions plus simples. Cette méthode est particulièrement adaptée au calcul numérique par rapport à d'autres méthodes d'approximation. La méthode de collocation est l'une des méthodes des résidus pondérés les plus utilisées pour plusieurs raisons. En effet, d'une part l'établissement du système différentiel ordinaire s'effectue sans calcul d'intégrales grâce au choix de la fonction de Dirac. D'autre part, la nature des variables d'état est conservée contrairement aux autres méthodes.

Le principe de la méthode de collocation orthogonale consiste à chercher une approximation sous la forme d'une équation différentielle ordinaire en utilisant la formulation suivante [Boubaker, 2000] :

$$X(z, t) = \sum_{i=1}^{N+1} x_i(t) \phi_i(z) \quad (2.4)$$

où  $t$  est la variable temporelle,  $x_i(t)$  est la valeur de  $X(z, t)$  aux  $(N+2)$  points de l'espace appelés points de collocation et les  $\phi_i$  sont des fonctions de base évaluées aux points de collocation.

Le choix d'un certain nombre de paramètres lors de l'utilisation de la méthode de collocation orthogonale doit être bien respecté :

- Les fonctions de base  $\phi_i$ ,
- Le nombre des points de collocation  $N$ ,
- La position des points de collocation.

La dénomination de la méthode de collocation orthogonale provient du fait que les points de collocation sont confondus avec les points d'interpolation [Villadsen & Michelsen, 1978].

### **2.3.1. Choix des fonctions de base**

Dans la littérature, pour le choix des fonctions de base, la plupart des travaux font appel aux polynômes de Lagrange vue leurs propriétés intéressantes. En effet il a été montré par des exemples numériques qu'une bonne approximation facile à mettre en œuvre est obtenue en utilisant les polynômes de Lagrange avec un nombre très limité de points de collocation [Villadsen. & Michelsen, 1978], [Wysocki, 1983].

Les polynômes d'interpolation de Lagrange  $L_j(z)$  de degré  $(N+1)$  définis à l'aide de  $(N+2)$  points d'interpolation  $z_i$  sont donnés par [Boubaker, 2000]:

$$L_j(z) = \frac{P_{N+2}(z)}{(z - z_j) P'_{N+2}(z_j)} \quad (2.5)$$

où :

$$P_{N+2}(z) = (z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{N+1})$$

$$P'_{N+2}(z_i) = \frac{d}{dz}(P_{N+2}(z_i))$$

Les polynômes d'interpolation de Lagrange  $L_j(z)$  vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} L_j(z_i) = 1 & \text{si } i = j \\ L_j(z_i) = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.6)$$

Les points de collocation  $(z_i, i = 0, 1, \dots, N)$  sont choisis comme suit :

$$z_0 = 0 < z_1 < \dots < z_{N-1} < z_N = 1$$

Il est aussi possible de vérifier qu'aux points de collocation nous avons toujours  $X(z_i, t) = x_i(t)$ . Les fonctions  $x_i(t)$  représentent donc les valeurs de la solution approximée aux points de collocation  $z_i$ .

### **2.3.2. Choix du nombre de points de collocation**

L'utilisation de la méthode de collocation orthogonale nécessite une grande importance au choix du nombre de points de collocation  $N$  car il détermine l'ordre du système et par conséquent le nombre d'équations à résoudre et il influe énormément sur la précision de la solution obtenue. Ce choix dépend de plusieurs facteurs relatifs au modèle tel que la dynamique, la dimension du domaine spatial et des capteurs, les non-linéarités du modèle. Le but est de trouver un compromis entre la précision de la solution et la complexité du modèle. Il est souhaitable sur le plan numérique de faire changer la position des points de collocation plutôt que d'augmenter le nombre de points [Boubaker et al., 2001].

### **2.3.3. Choix de la position des points de collocation**

Le choix de la position des points de collocation est un problème très délicat car il influe énormément sur la précision de la solution. Il a été révélé que les positions optimales des points de collocation sont les zéros de polynômes orthogonaux [Lefèvre et al., 2000]. Les points de collocation internes  $N$  optimaux sont obtenus en calculant les zéros des polynômes de Jacobi orthogonaux  $P_N^{(\alpha, \beta)}$  ayant la propriété suivante [Lefèvre et al., 2000] :

$$P_N^{(\alpha,\beta)} = (z - g_N(\alpha,\beta))P_{N-1}^{(\alpha,\beta)} - h_N(\alpha,\beta)P_{N-2}^{(\alpha,\beta)} \quad (2.7)$$

avec  $P_0^{(\alpha,\beta)} = 1$  et où les coefficients  $h_N(\alpha,\beta)$  sont définis comme suit :

$$h_N(\alpha,\beta) := \begin{cases} \text{Si } N > 2 \\ \frac{(N-1)(N+\alpha-1)(N+\beta-1)(N+\alpha+\beta-1)}{(2N+\alpha+\beta-1)(2N+\alpha+\beta-2)^2(2N+\alpha+\beta-3)} \\ \text{Si } N = 2 \\ \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha+\beta+2)^2(\alpha+\beta+3)} \end{cases}$$

$$g_N(\alpha,\beta) := \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(2N+\alpha+\beta-1)^2 - 1} \right) & \text{si } N > 1 \\ \frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2} & \text{si } N = 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où  $\alpha, \beta$  sont deux paramètres constants affectant la position des points de collocation.

Le Tableau 2.1 renseigne sur l'influence des paramètres  $(\alpha, \beta)$  sur la position des points de collocation illustré pour le cas particulier où le nombre de points de collocation est choisi tel que  $N=3$ .

Tableau 2.1- Position des points de collocation pour  $N = 3$

$\alpha$	$\beta$	Remarques	Position des points de collocation
0	0	Distribution uniforme de zéros.	$z_0 = 0, z_1 = 0.1127, z_2 = 0.5000, z_3 = 0.8873, z_4 = 1.$
1	1	Position symétrique de zéros.	$z_0 = 0, z_1 = 0.1727, z_2 = 0.5000, z_3 = 0.8273, z_4 = 1.$
1	-0.5	Variables symétriques en espace.	$z_0 = 0, z_1 = 0.1319, z_2 = 0.458, z_3 = 0.8096, z_4 = 1.$
Petit	>1	Davantage de zéros du coté de $z = z_{N+1}$ .	$z_0 = 0, z_1 = 0.4730, z_2 = 0.7080, z_3 = 0.9517, z_4 = 1.$
>1	Petit	Davantage de zéros du coté de $z = z_0$ .	$z_0 = 0, z_1 = 0.0303, z_2 = 0.1568, z_3 = 0.3754, z_4 = 1.$

**Remarque 2.1 :** les valeurs numériques des positions des points de collocation sont obtenues en calculant les zéros du polynôme (2.7) en utilisant des fonctions prédéfinies numériques pour  $N=3$  et  $(\alpha, \beta)$  données par les deux premières colonnes du tableau 2.1

### 2.3.4. Mise en œuvre

Par utilisation de la méthode de collocation orthogonale chaque variable  $X(z_i, t)$  est approximée en une somme finie de produits de fonctions dépendant de la variable d'espace  $z$  et de la variable temporelle  $t$  décrite par la relation (2.4) en utilisant les polynômes de Lagrange comme fonctions de base tels que:

$$X(z, t) = \sum_{i=1}^{N+1} x_i(t) L_i(z)$$

$$x_i(t) = X(z = z_i, t) \quad (2.8)$$

Cette approximation est définie en un nombre de points de collocation choisis selon l'intervalle au quel appartient le paramètre de  $N$  défini par (2.7) et qui sont les points d'interpolation des polynômes de Lagrange définie par la relation (2.5).

Les dérivées temporelles et spatiales aux points  $z_i$  sont exprimées comme suit :

$$\frac{\partial X(z, t)}{\partial t} \Big|_{z=z_i} = \frac{dx_i(t)}{dt} \quad (2.9a)$$

$$\frac{\partial X(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=z_i} = \sum_{j=0}^{N+1} l_{ij} x_j(t) \quad (2.9b)$$

où :

$$l_{ij} = \frac{dL_j(z)}{dz} \Big|_{z=z_i} \quad (2.10)$$

Les points de collocation internes seront calculés par les zéros des polynômes de Jacobi définis par (2.7) ou encore par la forme récurrente suivante [Boubaker et al., 1997] :

$$P_N^{(\alpha, \beta)} = \sum_{i=0}^N (-1)^{(N-i)} \gamma_i x_i$$

$$\gamma_i = \frac{N-i+1}{i} \frac{N+i+\alpha+\beta}{i+\beta} \quad (2.11)$$

$$\gamma_0 = 1, \quad \alpha, \beta > -1$$

### 2.3.5. Analyse théorique de l'approximation de l'erreur d'interpolation

L'erreur d'interpolation est l'un des facteurs importants qui détermine la qualité de l'approximation par la méthode de collocation orthogonale. Généralement, l'erreur d'interpolation peut introduire des perturbations de la dynamique du système étudié menant même à sa déstabilisation. Nous consacrons cette partie à l'analyse théorique de l'approximation de l'erreur d'interpolation entre le modèle de dimension infinie et le modèle de dimension finie. Notons que cette analyse est valable pour tout système à retards approché via cette méthode. Dans ce qui suit, on utilisera la formule de Cauchy pour prouver que cette erreur est bornée. Notons que la position des points de collocation joue un rôle important, comme elle influe sur la convergence de l'erreur d'interpolation.

Si nous considérons la formule de Cauchy pour l'erreur d'interpolation définie par [Lefèvre et al., 2000] :

$$e_N(z, t) = X(z, t) - \sum_{i=1}^{N+1} x_i(t) L_i(z) \quad (2.12)$$

et si nous supposons que la solution inconnue  $X(z, t)$  est suffisamment différentiable et continu, [Lefèvre et al., 2000] ont démontré que :

$$e_N(z, t) := v(z) \frac{X_z^{N+1}(\eta(z), t)}{(N+1)!} \quad (2.13)$$

où  $X_z^{N+1}$  est une fonction qui dépend de  $\eta(z)$  à minimiser et :

$$v(z) := \prod_{i=0}^N (z - z_i) \quad (2.14)$$

tel que :

$$\eta(z) \in [-1, +1] \quad (2.15)$$

Les polynômes de Chebyshev, qui sont un cas particulier des polynômes de Jacobi et qui sont obtenus pour  $\beta = \alpha = -\frac{1}{2}$ , ont la norme minimale de  $v(z)$  définie comme suit :

$$\|v(z)\|_{\infty} = \left\| \prod_{k=1}^{N-1} (z - z_k^*) \right\|_{\infty} = 2^{-(N-2)} \quad (2.16)$$

Ainsi, la norme minimale de l'erreur d'interpolation est donnée par :

$$\|e_N\|_\infty \leq \frac{\|X_Z^{(N+1)}(\cdot, t)\|_\infty}{(N+1)!2^{N-2}} \quad (2.17)$$

et où les racines des polynômes de Chebyshev sont donnés par :

$$z_k^* := \cos\left(\pi \frac{2k+1}{2(N-1)}\right) \quad \text{pour } k = 0 \dots N-2 \quad (2.18)$$

Nous pouvons alors conclure que l'erreur d'interpolation est toujours bornée quand  $\beta = \alpha = -0.5$ . C'est pour cette raison que nous adopterons ce choix pour le reste du chapitre.

#### **2.4. Modélisation d'un système linéaire retardé**

Considérons le système linéaire à un seul retard dans l'entrée décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_v x(t) + B_v u(t-h) \\ y(t) &= C_v^T x(t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

où  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathfrak{R}^m$  est le vecteur d'entrée.  $A_v$ ,  $B_v$  et  $C_v$  sont des matrices constantes avec des dimensions appropriées. Le retard  $h$  est une constante positive. Il a été démontré dans [Boubaker, 2000] que le système d'équation (2.19) peut être équivalent à un système à paramètres répartis pouvant être décrit par l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial w(z, t)}{\partial t} = -\frac{1}{h} \frac{\partial w(z, t)}{\partial z}; \quad 0 \leq z \leq 1, \quad (2.20)$$

avec la condition aux limites suivantes :

$$u(t) = w(0, t) \quad (2.21)$$

et l'équation de sortie suivante :

$$u(t-h) = w(1, t) \quad (2.22)$$

Si on applique la méthode de collocation orthogonale pour approximer le système retardé ou de dimension infinie (2.19), Celui-ci peut être alors approximé par un système de dimension finie à  $(N + 1)$  équations différentielles ordinaires décrit par la représentation d'état suivante :

$$\dot{x}_h = -\frac{1}{h} [A_h x_h - B_h u(t)] \quad (2.23)$$

$$y_h = C_h x_h$$

avec

$$\begin{aligned} x_h &= [x_{h1}(t) \quad x_{h2}(t) \quad \cdots \quad x_{h(N+1)}(t)]^T \in \mathfrak{R}^{(N+1) \times 1} \\ A_h &= [l_{ij}] \in \mathfrak{R}^{(N+1) \times (N+1)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, (N+1) \\ B_h &= [l_{i0}] \in \mathfrak{R}^{(N+1) \times 1}, \quad i = 1, 2, \dots, (N+1) \\ C_h &= [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \in \mathfrak{R}^{1 \times (N+1)} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Les coefficients  $l_{ij}$  et  $l_{i0}$  sont donnés par l'expression (2.10). L'entrée  $u(t)$  est définie par la condition aux limites (2.21).

### **2.5. Contribution à la modélisation d'un système à multiples retards via la méthode de collocation orthogonale**

Considérons la classe des systèmes multivariables linéaires invariants dans le temps de dimension infinie avec multiples retards et des entrées inconnues décrits par [Ben Warrad & Boubaker, 2016a] :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau_1) + B_0 u(t - \tau_2) + B_1 u(t - \tau_3) + Dd(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.25)$$

où  $x(t) \in \mathcal{R}^n$  est le vecteur d'état du modèle,  $u(t) \in \mathcal{R}^m$  l'entrée du processus,  $y(t) \in \mathcal{R}^p$  le vecteur de sortie,  $d(t) \in \mathcal{R}^q$  est le vecteur des perturbations dont les éléments sont des fonctions inconnues de temps et  $A_0 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ,  $A_1 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ,  $B_0 \in \mathcal{R}^{n \times m}$ ,  $B_1 \in \mathcal{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathcal{R}^{p \times n}$ , et  $D \in \mathcal{R}^{n \times q}$  sont des matrices constantes avec de dimensions appropriées, tandis que  $\tau_1, \tau_2$ , et  $\tau_3$  sont des retards constants.

Il est clair qu'il n'existe pas de méthodes appropriées pour l'analyse et la synthèse du

système décrit par l'expression (2.25). L'objectif est donc de l'écrire sous une forme de représentation d'état appropriée pour les objectifs précédents. Pour ce faire, si on transforme chaque variable retardée  $x(t - \tau_1)$ ,  $u(t - \tau_2)$  et  $u(t - \tau_3)$  en une variable de dimension infinie tel que exposé dans la section précédente puis appliquons la méthode de collocation orthogonale, il est possible alors d'approximer les trois vecteurs retardés  $x(t - \tau_1)$ ,  $u(t - \tau_2)$  et  $u(t - \tau_3)$  par les équations différentielles ordinaires suivantes [Ben Warrad & Boubaker, 2016a], [Ben Warrad & Boubaker, 2016b]:

$$\dot{\omega}_1(t) = -\frac{1}{\tau_1} \bar{A}_1 \omega_1 + \frac{1}{\tau_1} \bar{B}_1 x(t) \quad (2.26)$$

$$\dot{\omega}_2(t) = -\frac{1}{\tau_2} \bar{A}_2 \omega_2 + \frac{1}{\tau_2} \bar{B}_2 u(t) \quad (2.27)$$

$$\dot{\omega}_3(t) = -\frac{1}{\tau_3} \bar{A}_3 \omega_3 + \frac{1}{\tau_3} \bar{B}_3 u(t) \quad (2.28)$$

augmenté des conditions aux limites  $u(t) = \omega_1(0, t) = \omega_2(0, t) = \omega_3(0, t)$  et de sorties suivantes :

$$x(t - \tau_1) = \omega_1(1, t) = \bar{C}_1 \omega_1(t) \quad (2.29)$$

$$u(t - \tau_2) = \omega_2(1, t) = \bar{C}_2 \omega_2(t) \quad (2.30)$$

$$u(t - \tau_3) = \omega_3(1, t) = \bar{C}_3 \omega_3(t) \quad (2.31)$$

Ainsi, en utilisant les équations (2.29), (2.30) et (2.31), le système (2.25) peut être écrit comme :

$$\dot{\chi}(t) = A_0 x(t) + A_1 \bar{C}_1 \omega_1 + B_0 \bar{C}_2 \omega_2 + B_1 \bar{C}_3 \omega_3 + Dd(t) \quad (2.32)$$

Supposons que  $\chi^T = \left[ x^T(t) \ \omega_1^T(t) \ \omega_2^T(t) \ \omega_3^T(t) \right]$  est le vecteur d'état du nouveau système augmenté et  $\tilde{y} = \tilde{C}\chi = [C \ \tilde{C}_1 \ \tilde{C}_2 \ \tilde{C}_3]^T \chi$  son vecteur de sortie. En imposant la contrainte  $n = N + 1$ , on peut déduire que la dynamique du système augmenté peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\chi}(t) &= \tilde{A}\chi(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{D}d(t) \\ \tilde{y}(t) &= \tilde{C}\chi(t) \end{aligned} \quad (2.33)$$

où

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 \bar{C}_1 & B_0 \bar{C}_2 & B_1 \bar{C}_3 \\ \frac{1}{\tau_1} \bar{B}_1 & -\frac{1}{\tau_1} \bar{A}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_2} \bar{A}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_3} \bar{A}_3 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{4n \times 4n}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\tau_2} \bar{B}_2 \\ \frac{1}{\tau_3} \bar{B}_3 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{4n \times m}$$

$$\tilde{C} = [C \quad \bar{C}_1 \quad \bar{C}_2 \quad \bar{C}_3] \in \mathfrak{R}^{p \times 4n}, \tilde{D} = \begin{bmatrix} D \\ 0_{(3n \times q)} \end{bmatrix}$$

avec pour  $k=1,2,3$  :

$$\bar{A}_k = [a_{k,ij}] = [1_{ij}] \in \mathfrak{R}^{(N+1) \times (N+1)}, \quad i, j = 1, \dots, N+1,$$

$$\bar{B}_1 = [1_{0j} \quad \dots \quad 1_{0j}] \in \mathfrak{R}^{(N+1) \times n}, \quad i = 1, \dots, N+1$$

$$\bar{B}_2 = \bar{B}_3 = [1_{0j} \quad \dots \quad 1_{0j}] \in \mathfrak{R}^{(N+1) \times m}, \quad i = 1, \dots, N+1$$

$$\bar{C}_1 = [c_{1,ij}]^T \in \mathfrak{R}^{n \times (N+1)}$$

$$\bar{C}_2 = \bar{C}_3 = [c_{2,ij}]^T = [c_{3,ij}]^T \in \mathfrak{R}^{m \times (N+1)}$$

$$c_{1,ij} = c_{2,ij} = c_{3,ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 1, \dots, N \\ 1 & \text{si } j = N+1 \end{cases}$$

## 2.6. Application

Afin de valider le modèle D'état (2.33) proposé précédemment pour les systèmes à multiples retards, nous utiliserons le processus de quatre réservoirs qui a été bien décrit dans le premier chapitre. Rappelons que le modèle à multiples retards de ce processus est décrit au premier chapitre par la relation (1.9).

Nous proposons le signal d'entrée est égale  $u(t) = s \sin(\pi t)$  et ainsi les vecteurs de conditions initiales  $\chi(0) = [-4 \ 4 \ 6 \ -5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  pour le système de dimension finie (2.33) simulé en utilisant la fonction prédéfinie sur le logiciel Matlab ode45,  $x(0) = [-4 \ 4 \ 6 \ -5]^T$  pour le système de dimension infinie (2.25) simulé en utilisant la fonction prédéfinie sur le logiciel Matlab dde et les retards constants  $\tau_1 = 5s, \tau_2 = 2s, \tau_3 = 4s$ .

Pour assurer un compromis entre la complexité du modèle (2.25) et la précision du système (2.32), nous avons opté les valeurs numériques suivantes  $N = 3$ ,  $\beta = \alpha = -0.5$ .

Dans ce cas, les points de collocation sont donnés par :

$$z_0 = 0, z_1 = 0.1727, z_2 = 0.5, z_3 = 0.8273 \text{ et } z_4 = 1.$$

On trouve ainsi les matrices suivantes :

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3.4915 & -1.5275 & 0.5180 \\ -2.6732 & -0.0000 & 2.6732 & -0.7500 \\ 1.5275 & -3.4915 & -0.0000 & 2.4820 \\ -2.8203 & 5.3333 & -13.5130 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_1 = \begin{bmatrix} -2.4820 & -2.4820 & -2.4820 & -2.4820 \\ 0.7500 & 0.7500 & 0.7500 & 0.7500 \\ -0.5180 & -0.5180 & -0.5180 & -0.5180 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \bar{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3.4915 & -1.5275 & 0.5180 \\ -2.6732 & -0.0000 & 2.6732 & -0.7500 \\ 1.5275 & -3.4915 & -0.0000 & 2.4820 \\ -2.8203 & 5.3333 & -13.5130 & 10 \end{bmatrix}, \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} -2.4820 & -2.4820 \\ 0.75 & 0.75 \\ -0.5180 & -0.5180 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3.4915 & -1.5275 & 0.5180 \\ -2.6732 & -0.0000 & 2.6732 & -0.7500 \\ 1.5275 & -3.4915 & -0.0000 & 2.4820 \\ -2.8203 & 5.3333 & -13.5130 & 10 \end{bmatrix}, \bar{B}_3 = \begin{bmatrix} -2.4820 & -2.4820 \\ 0.75 & 0.75 \\ -0.5180 & -0.5180 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La figure 2.2 et la figure 2.3 décrivent respectivement l'évolution des variables d'état qui représentent les niveaux dans les quatre réservoirs pour le modèle retardé (2.25) et le modèle approximé (2.32) dans les deux cas non minimum de phase et minimum de phase.

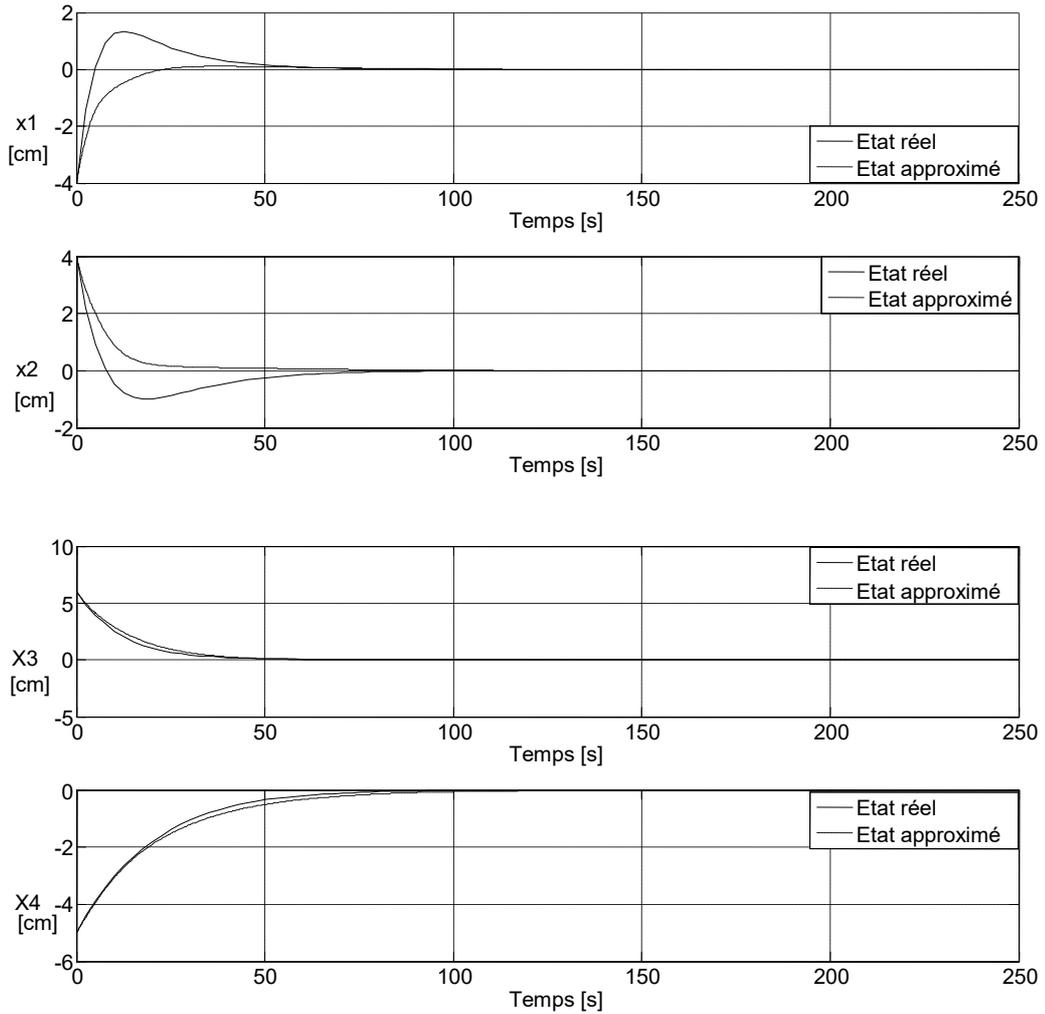


Figure. 2.2- Etats réels et états approximés via la méthode de collocation orthogonale :  
Cas du modèle à minimum de phase

Les résultats obtenus dans le tableau 2.2 et le Tableau 2.3 présentent une évaluation de l'erreur d'approximation de la méthode d'approximation proposée au sens d'une moyenne quadratique défini par un critère RMSE calculé pour chaque état du système en utilisant une interpolation selon l'expression suivante (pour  $i=1\dots 4$ ) :

$$\text{RMSE}(x_i) = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{k=1}^k (x_i - \chi_i)^2} \quad (2.37)$$

avec  $k$  le nombre de points d'interpolation sur un horizon de 250 s. La méthode d'interpolation a été utilisée pour ramener les deux modèles (2.25) et (2.33) à la même base temporelle. Les deux fonctions RMSE et interp1 disponibles sur Matlab ont été utilisées pour atteindre un tel objectif.

Tableau 2.2: Performances de l'approximation sur les états via la méthode de collocation orthogonale : Cas du modèle à minimum de phase

Variable d'état	RMSE (cm)
$x_1$	0.0744
$x_2$	0.0705
$x_3$	0.0669
$x_4$	0.0777

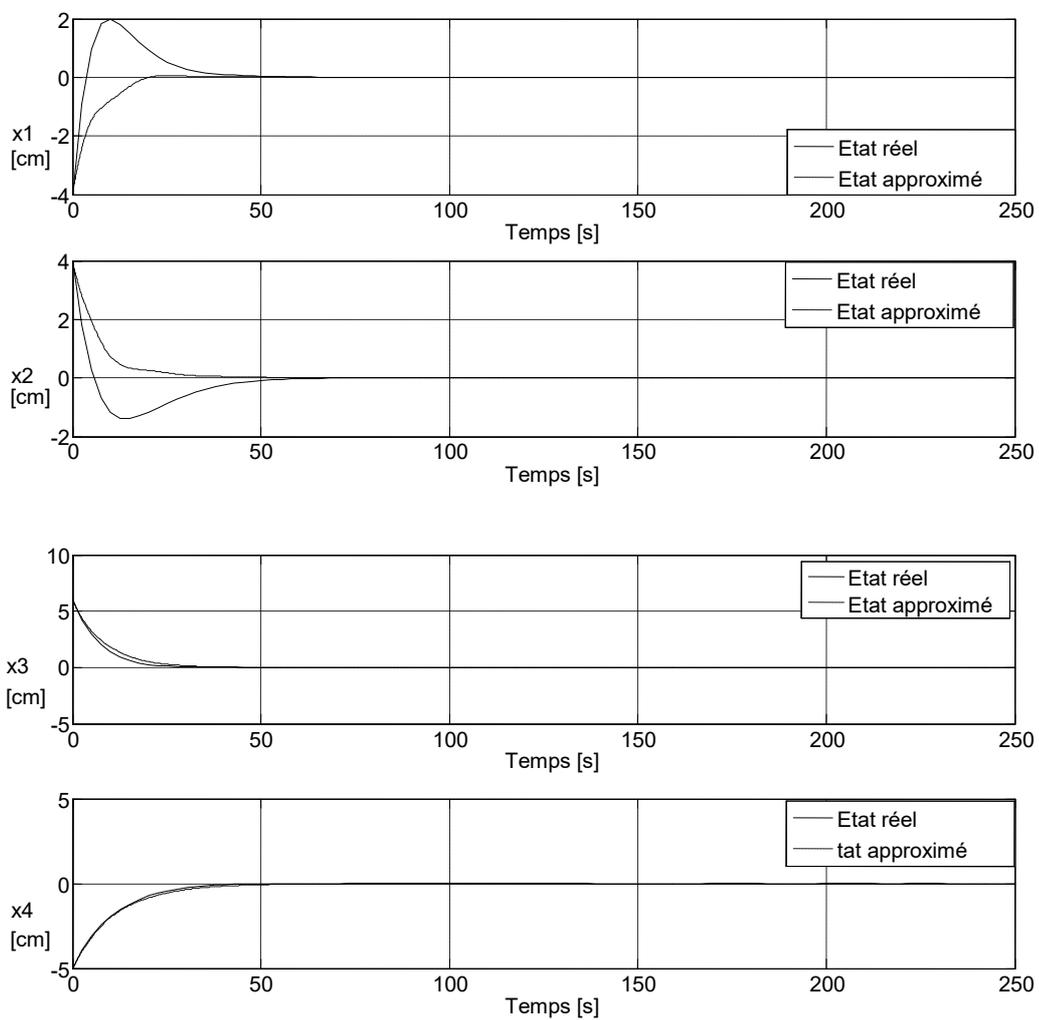


Figure. 2.3- Etats réels et Etats approximés via la méthode de collocation orthogonale : Cas du modèle à non-minimum de phase

Tableau 2.3: Performances de l'approximation sur les états via la méthode de collocation orthogonale : Cas du modèle à non minimum de phase

Variable d'état	RMSE (cm)
$x_1$	0.0805
$x_2$	0.0854
$x_3$	0.0493
$x_4$	0.0594

Les résultats obtenus montrent l'efficacité de l'application de la méthode de collocation pour les deux cas du modèle à minimum et à non minimum de phase.

## **2.7. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle représentation d'état des systèmes à multiples retards en utilisant la méthode de collocation orthogonale. Le principe de cette méthode de collocation orthogonale est de rechercher une approximation sous la forme d'équations aux dérivées ordinaires en respectant un certain nombre de paramètres. Le benchmark à quatre réservoirs a été utilisé pour illustrer l'efficacité de la nouvelle modélisation et ceux pour l'étude des deux cas du modèle à minimum de phase et du modèle à non minimum de phase. Les résultats de la simulation ont montré l'efficacité de la méthode d'approximation proposée. Dans le chapitre suivant, nous exploiterons les modèles mathématiques proposés dans ce chapitre pour proposer une nouvelle approche de synthèse des observateurs à entrées inconnues.

## **Chapitre 3**

### **Contribution à la synthèse d'observateurs d'ordres pleins**

### **3.1. Introduction**

Dans ce chapitre, nous étudions deux approches différentes de conception des observateurs d'ordre plein avec des entrées inconnues et multiples retards sur les états et sur les entrées. Deux approches de conception seront proposées: un observateur à entrées inconnues dépendant du retard et un second indépendant du retard; on montrera que le problème des observateurs d'ordre plein pour les systèmes linéaires avec des retards et des entrées inconnues peut être réduit au cas standard: le vecteur d'entrée inconnu n'interfère pas dans les équations de l'observateur. Les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité asymptotique et les conditions d'existence des deux observateurs sont fournies, une analyse comparative étant également établie. D'autre part, nous montrerons aussi l'efficacité des algorithmes proposés sur le processus à quatre réservoirs dans le cas du modèle à non minimum de phase.

Ce troisième chapitre sera organisé comme suit : dans le second paragraphe nous présenterons un état de l'art sur l'estimation des états pour les systèmes linéaires invariants dans le temps avec multiples retards. Dans le troisième paragraphe, nous exposerons la position du problème de l'observateur à entrées inconnues de dimension finie et de dimension infinie. Dans les sections 3.4 et 3.5 nous présenterons les approches de conception, les théorèmes pour les preuves de stabilité et les conditions d'existence des deux observateurs robustes. Dans la sixième partie nous montrerons l'efficacité des approches proposées grâce aux résultats de simulation sur le processus à quatre réservoirs.

### **3.2. Etat de l'art**

Les systèmes à retards sont fréquemment rencontrés dans diverses applications d'ingénierie telles que les procédés chimiques et biologiques, les systèmes hydrauliques et les procédés de fabrication. Au cours des dernières décennies, l'apparition de retards dans les systèmes dynamiques a été diagnostiquée comme étant l'une des principales causes de perte de stabilité, de dégradation des performances et de la robustesse [Gu, et al, 2003], [Kharitonov, 1999], [Dugar & Verriest, 1997] et [Niculescu, 2001]. Dans ce cadre, d'énormes efforts de recherche ont été développés pour traiter ce phénomène considéré comme étant inévitable. Toutefois, malgré le grand intérêt donné durant ces dernières années au problème de la synthèse des systèmes avec un seul retard

[Keviczky & Bányász, 2007] et [Xu & Lam, 2008], peu d'attention a été accordée aux systèmes à retards multiples.

D'un autre coté, le problème de l'estimation des variables d'état est un problème de grande importance pour de nombreuses applications [Pappas & Zohdy, 2014] et [Xiao et al., 2016]. Pour les systèmes multivariables linéaires invariants dans le temps avec retard, seuls quelques résultats élaborés dans ce sens peuvent être trouvés dans la littérature où deux types d'approches existent : les observateurs dépendants du retard [Fu et al., 2004] et [Darouach, 2010] et les observateurs indépendants du retard [Zheng et al., 2015] et [Fattouh & Sename, 1999]. Rappelons que plusieurs travaux de recherche ont été accordés depuis plusieurs décennies à la conception d'observateurs à entrées inconnues pour les systèmes linéaires invariants dans le temps sans retard [Boubaker, 2005], [Darouach et al., 1994], [Lungu M & Lungu, 2012] et [Gao et al., 2016]. Cependant, quand il s'agit d'inclure plusieurs retards dans le modèle qui pourraient apparaître dans les états, les entrées ou les sorties, la conception de l'observateur devient certainement plus compliquée. L'un des rares documents de recherche traitant le problème de conception des observateurs d'entrée inconnues avec retard se trouve dans [Koenig et al., 2004].

Les observateurs dépendants du retard ont des modèles plus complexes car ils utilisent l'information du retard pour estimer les fonctions désirées alors que les observateurs indépendants du retard n'ont besoin d'aucune information sur le retard pour atteindre le même objectif. Dans ce cadre, différentes approches ont été suggérées : l'approche de dimension infinie [Salamon, 1980], l'approche basée sur les fonctions de Lyapunov incluant la théorie de Lyapunov-Krasovskii [Darouach, 2010] ou la théorie de Lyapunov-Razumikhin [Sename, 2001].

Motivés par les travaux mentionnés ci-dessus sur les observateurs à entrées inconnues pour des systèmes linéaires sans retard et par les approches d'estimation pour les systèmes linéaires à retards multiples, nous proposerons dans la partie suivante de résoudre le problème de synthèse d'observateurs à entrées inconnues du benchmark à quatre réservoirs soumis à des retards multiples dans les états et aussi dans les entrées. Les deux cas des observateurs dépendant du retard et indépendants des retards seront aussi traités ci.

### 3.3. Position du problème

Considérons la classe des systèmes multivariables linéaires invariants dans le temps décrits par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau_1) + B_0 u(t - \tau_2) + B_1 u(t - \tau_3) + Dd(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $x(t) \in \mathcal{R}^n$  est le vecteur d'état du modèle  $u(t) \in \mathcal{R}^m$  l'entrée du processus,  $y(t) \in \mathcal{R}^p$  le vecteur de sortie,  $d(t) \in \mathcal{R}^q$  est le vecteur des perturbations des entrées inconnues,  $A_0 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ,  $A_1 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ,  $B_0 \in \mathcal{R}^{n \times m}$ ,  $B_1 \in \mathcal{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathcal{R}^{p \times n}$ , et  $D \in \mathcal{R}^{n \times q}$  sont des matrices constantes avec de dimensions appropriées, tandis que  $\tau_1, \tau_2$ , et  $\tau_3$  sont des retards constants.

Soit le système de dimension finie obtenu à partir du système (3.1) en utilisant l'une des méthodes d'approximation (par exemple la méthode de collocation orthogonale présentée au chapitre précédent ou la méthode de Padé [Baker & Graves, 1996]) :

$$\begin{cases} \dot{\chi}(t) = \tilde{A}\chi(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{D}d(t) \\ \tilde{y}(t) = \tilde{C}\chi(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $\chi(t) \in \mathcal{R}^{n'}$  et  $\tilde{y}(t) \in \mathcal{R}^p$  sont respectivement le nouveau vecteur d'état et le nouveau vecteur de sortie du système approximé de dimension augmentée.  $\tilde{A} \in \mathcal{R}^{n' \times n'}$ ,  $\tilde{B} \in \mathcal{R}^{n' \times m}$ ,  $\tilde{C} \in \mathcal{R}^{p \times n'}$ , et  $\tilde{D} \in \mathcal{R}^{n' \times q}$  sont des matrices constantes.

L'objectif est de concevoir deux approches d'observateurs à entrées inconnues pour le système (3.1):

- Un observateur à entrées inconnues de dimension infinie (dépendant des retards) décrit par [Ben Warrad & Boubaker, 2018a] :

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = N\zeta(t) + M\zeta(t - \tau_1) + Ly(t) + Jy(t - \tau_1) + G_0 u(t - \tau_2) + G_1 u(t - \tau_3), \\ \hat{x}(t) = \zeta(t) - Ey(t), \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $\zeta(t) \in \mathcal{R}^n$  et  $\hat{x}(t) \in \mathcal{R}^n$  sont respectivement le vecteur d'état de l'observateur et le vecteur d'état estimé.  $N, M, L, J, G_0, G_1$ , et  $E$  sont des matrices inconnues de dimensions appropriées à calculer de façon à garantir que  $\hat{x}(t)$  converge

asymptotiquement vers  $x(t)$  sous les hypothèses suivantes :

A1)  $p \geq q$ ;

A2)  $\text{rang}(D) = q$  et  $\text{rang}(C) = p$ ;

A3) les paires  $(A_0, C)$  et  $(A_1, C)$  sont observables (au moins détectables)

- Un observateur à entrées inconnues de dimension finie (indépendant des retards) décrit par [Ben Warrad & Boubaker, 2016a], [Ben Warrad & Boubaker, 2016b] :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\zeta}}(t) = \tilde{N}\tilde{\zeta}(t) + \tilde{L}\tilde{y}(t) + \tilde{G}u(t), \\ \hat{\chi}(t) = \tilde{\zeta}(t) - \tilde{E}\tilde{y}(t) - Qr(t), \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $\tilde{\zeta}(t) \in \mathcal{R}^{n'}$  est le vecteur d'état de l'observateur,  $r(t) = \hat{\chi}(t) - Tx(t)$  est le vecteur d'erreur d'approximation,  $T \in \mathcal{R}^{n' \times n}$  est une matrice constante de rang plein et  $\hat{\chi}(t) \in \mathcal{R}^{n'}$  le vecteur estimé de  $\chi(t)$ .  $\tilde{N}, \tilde{L}, \tilde{G}$ , et  $\tilde{E}$  sont des matrices inconnues de dimensions appropriées à calculer sachant que  $\hat{\chi}(t)$  converge asymptotiquement vers  $\chi(t)$ .  $Q$  est un paramètre constant choisi afin de donner des performances à l'observateur (3.4).

L'observateur (3.4) sera conçu telles que les hypothèses suivantes sont vérifiées:

A4)  $p \geq q$ ;

A5)  $\text{rang}(\tilde{D}) = q$  et  $\text{rang}(\tilde{C}) = p$ ;

A6) La paire  $(\tilde{A}, \tilde{C})$  est observable (au moins détectable);

**Lemme 3.1** [Mahmoud, 2017]

Considérons le système linéaire retardé sur l'état décrit par :

$$\dot{\xi}(t) = A_v \xi(t) + A_d \xi(t - \tau) \quad (3.5)$$

où  $A_v$  et  $A_d$  sont des matrices de dimensions appropriées, tandis que  $\tau$  est un des retards constants.

Le système à retard (3.5) est asymptotiquement stable pour tout  $\tau \geq 0$  s'il existe des matrices  $R > 0$ ,  $S > 0$  et  $W$  vérifiant :

$$RA_v + A_v^T R + RA_d S^{-1} A_d^T R + S + W = 0 \quad (3.6)$$

où d'une manière équivalente vérifiant l'inégalité matricielle linéaire (LMI) suivante :

$$\begin{bmatrix} RA_v + A_v^T R + S & RA_d \\ \bullet & -S \end{bmatrix} < 0 \quad (3.7)$$

### 3.4. Observateur de dimension infinie

#### Théorème 3.1:

Considérons le système à multiples retards (3.1) avec les trois hypothèses (A1-A3) présentées ci-dessus; l'observateur à entrées inconnues dépendant des retards (3.3) est convergent ( $e(t) = \hat{x}(t) - x(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ ) avec un taux de convergence arbitraire pour tout  $x(0)$ ,  $d(t)$  et  $u(t)$  et pour tout retard, s'il existe des matrices  $R > 0$ ,  $S > 0$  satisfaisant l'inégalité matricielle:

$$\begin{bmatrix} RN + N^T R + S & RM \\ \bullet & -S \end{bmatrix} < 0 \quad (3.8)$$

et s'il existe une matrice  $P = (I + EC) \in \mathcal{R}^{n \times n}$  telle que les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} NP + LC - PA_0 = 0, \\ MP + JC - PA_1 = 0, \\ G_0 - PB_0 = 0, \\ G_1 - PB_1 = 0, \\ PD = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

#### Démonstration

On définit le vecteur d'erreur d'estimation comme suit :

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t) = \zeta(t) - x(t) - Ey(t) = \zeta(t) - (I + EC)x(t). \quad (3.10)$$

La dynamique du vecteur d'erreur d'estimation est donnée par:

$$\dot{e}(t) = \dot{\zeta}(t) - (I + EC)\dot{x}(t). \quad (3.11)$$

En utilisant (3.1) et (3.3) la dynamique de l'erreur d'estimation s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & N e(t) + M e(t - \tau_1) + [N(I + EC) + LC - (I + EC)A_0] x(t) \\ & + [M(I + EC) + JC - (I + EC)A_1] x(t - \tau_1) + [G_0 - (I + EC)B_0] u(t - \tau_2) \\ & + [G_1 - (I + EC)B_1] u(t - \tau_3) - (I + EC)D d(t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Considérons la matrice  $P = (I + EC) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ; la dynamique de l'erreur (3.12) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & N e(t) + M e(t - \tau_1) + (NP + LC - PA_0) x(t) + (MP + JC - PA_1) x(t - \tau_1) \\ & + (G_0 - PB_0) u(t - \tau_2) + (G_1 - PB_1) u(t - \tau_3) - PD d(t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Si les conditions (3.9) sont satisfaites, la dynamique de l'erreur d'estimation de l'observateur est donnée par :

$$\dot{e}(t) = N e(t) + M e(t - \tau_1); \quad (3.14)$$

En utilisant le Lemme 3.1, la stabilité asymptotique du système (3.14) et par suite de l'observateur à entrées inconnues (3.4) est toujours vérifiée si l'inégalité (3.8) est satisfaite.

La détermination des matrices  $N$ ,  $M$ ,  $L$ ,  $J$  et  $P$  à partir des premières, deuxièmes et cinquièmes équations (3.9) est une tâche difficile car nous devons calculer cinq matrices en utilisant seulement trois équations. Afin d'utiliser les résultats bien connus pour l'observateur d'ordre plein sans entrées inconnues, considérons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} K_0 &= L + NE, \\ K_1 &= J + ME, \end{aligned} \quad (3.15)$$

Les deux premières équations (3.9) deviennent :

$$\begin{aligned} N &= PA_0 - K_0 C, \\ M &= PA_1 - K_1 C. \end{aligned} \quad (3.16)$$

En utilisant maintenant les relations de (3.16), le système (3.3) peut être écrit comme :

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = (PA_0 - K_0 C)\zeta(t) + (PA_1 - K_1 C)\zeta(t - \tau_1) + Ly(t) \\ \quad + Jy(t - \tau_1) + G_0 u(t - \tau_2) + G_1 u(t - \tau_3), \\ \hat{x}(t) = \zeta(t) - Ey(t). \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\text{Posons maintenant } \zeta(t) = \begin{bmatrix} \zeta(t) \\ \zeta(t-\tau_1) \end{bmatrix}, X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau_1) \end{bmatrix}, U(t) = \begin{bmatrix} u(t-\tau_2) \\ u(t-\tau_3) \end{bmatrix};$$

le système (3.17) s'écrit sous cette forme :

$$\dot{\zeta}(t) = (\bar{P}\bar{A} - \bar{K}\bar{C})\zeta(t) + \bar{L}X(t) + \bar{G}U(t), \quad (3.18)$$

avec :

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & P \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} A_0 & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & A_1 \end{bmatrix}, \bar{K} = \begin{bmatrix} K_0 & 0_{n \times p} \\ 0_{n \times p} & K_1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0_{p \times n} \\ 0_{p \times n} & C \end{bmatrix}, \bar{L} = \begin{bmatrix} LC & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & JC \end{bmatrix}, \bar{G} = \begin{bmatrix} G_0 & 0_{n \times m} \\ 0_{n \times m} & G_1 \end{bmatrix}.$$

Le système (3.18) est décrit par deux sous-systèmes découplés. Si chaque sous-système est observable (au moins détectable), alors le système complet (3.18) est également observable (détectable). Par conséquent, les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de l'observateur (3.3) sont données par le théorème suivant:

**Théorème 3.2:** Pour le système linéaire invariant dans le temps à retards décrit par les équations (3.1), l'observateur d'ordre plein existe si et seulement si:

1)  $\text{rang}(CD) = q;$

2)  $\text{rang} \begin{bmatrix} sP - PA_0 \\ C \end{bmatrix} = n, (\forall) s \in \mathbf{C}, \text{Re}(s) \geq 0;$  (3.19)

3)  $\text{rang} \begin{bmatrix} sP - PA_1 \\ C \end{bmatrix} = n, (\forall) s \in \mathbf{C}, \text{Re}(s) \geq 0.$  (3.20)

**Démonstration:** La démonstration du théorème est une extension de l'approche de [Darouach et al., 1994].

Comme le système (3.18) est considéré sous la forme d'une équation standard d'observateur, les matrices  $K_0$  et  $K_1$  peuvent être calculées de sorte que l'observateur (3.3) soit asymptotiquement stable si et seulement si les paires  $(PA_0, C)$  et  $(PA_1, C)$  sont observables, d'où:

$$\text{rang} \begin{bmatrix} sI_n - PA_0 \\ C \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} sI_n - PA_1 \\ C \end{bmatrix} = n, (\forall) s \in \mathbf{C}, \text{Re}(s) \geq 0, \text{ ou équivalente à}$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} I_n & sE \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_n - PA_0 \\ C \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} sP - PA_0 \\ C \end{bmatrix}, (\forall) s \in \mathbf{C}, \text{Re}(s) \geq 0,$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} I_n & sE \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_n - PA_1 \\ C \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} sP - PA_1 \\ C \end{bmatrix}, (\forall) s \in \mathbf{C}, \text{Re}(s) \geq 0.$$

Pour calculer  $N$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $J$ ,  $P$ ,  $G_1$  et  $G_2$ , on partitionne les matrices  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $C$ ,  $N$ ,  $M$ ,  $P$ ,  $L$  et  $J$  comme suit [Lungu & Lungu, 2012] :

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} A_{0(11)} & A_{0(12)} \\ A_{0(21)} & A_{0(22)} \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} A_{1(11)} & A_{1(12)} \\ A_{1(21)} & A_{1(22)} \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} C_1^T \\ C_2^T \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}, \\ M &= \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

où

$$\begin{aligned} A_0 &\in \mathcal{R}^{n \times n}, A_{0(11)} \in \mathcal{R}^{(n-p) \times (n-p)}, A_{0(12)} \in \mathcal{R}^{(n-p) \times p}, A_{0(21)} \in \mathcal{R}^{p \times (n-p)}, A_{0(22)} \in \mathcal{R}^{p \times p}, \\ A_1 &\in \mathcal{R}^{n \times n}, A_{1(11)} \in \mathcal{R}^{(n-p) \times (n-p)}, A_{1(12)} \in \mathcal{R}^{(n-p) \times p}, A_{1(21)} \in \mathcal{R}^{p \times (n-p)}, A_{1(22)} \in \mathcal{R}^{p \times p}, \\ N &\in \mathcal{R}^{n \times n}, N_{11} \in \mathcal{R}^{(n-p) \times (n-p)}, N_{12} \in \mathcal{R}^{(n-p) \times p}, N_{21} \in \mathcal{R}^{p \times (n-p)}, N_{22} \in \mathcal{R}^{p \times p}, \\ M &\in \mathcal{R}^{n \times n}, M_{11} \in \mathcal{R}^{(n-p) \times (n-p)}, M_{12} \in \mathcal{R}^{(n-p) \times p}, M_{21} \in \mathcal{R}^{p \times (n-p)}, M_{22} \in \mathcal{R}^{p \times p}, \\ P &\in \mathcal{R}^{n \times n}, P_{11} \in \mathcal{R}^{(n-p) \times (n-p)}, P_{12} \in \mathcal{R}^{(n-p) \times p}, P_{21} \in \mathcal{R}^{p \times (n-p)}, P_{22} \in \mathcal{R}^{p \times p}, \\ L &\in \mathcal{R}^{n \times p}, L_1 \in \mathcal{R}^{(n-p) \times p}, L_2 \in \mathcal{R}^{p \times p}, J \in \mathcal{R}^{n \times p}, J_1 \in \mathcal{R}^{(n-p) \times p}, J_2 \in \mathcal{R}^{p \times p}, \\ C &\in \mathcal{R}^{p \times n}, C_1 \in \mathcal{R}^{p \times (n-p)}, C_2 \in \mathcal{R}^{p \times p}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

La conception de l'observateur est basée sur le théorème suivant :

### Théorème 3.3

Si les conditions de rang dans le théorème 3.2 sont satisfaites et que les paires  $(A_0, C)$  et  $(A_1, C)$  sont observables (au moins détectables), l'observateur à entrées inconnues (3.3) peut être conçu pour le système (3.1) si les conditions suivantes sont vérifiées:

$$\begin{aligned}
 E &= -D(CD)^+, \\
 P &= I_n - D(CD)^+ C, \\
 G_0 &= PB_0, \\
 G_1 &= PB_1, \\
 N &= \begin{bmatrix} N_{11} & \left( F_{12} - (F_{11} - F_{12}P_{22}^+P_{21})(C_1 - C_2P_{22}^+P_{21})^+ C_2 \right) P_{22}^+ \\ N_{21} & \left( F_{22} - (F_{21} - F_{22}P_{22}^+P_{21})(C_1 - C_2P_{22}^+P_{21})^+ C_2 \right) P_{22}^+ \end{bmatrix}, \\
 M &= \begin{bmatrix} M_{11} & \left( V_{12} - (V_{11} - V_{12}P_{22}^+P_{21})(C_1 - C_2P_{22}^+P_{21})^+ C_2 \right) P_{22}^+ \\ M_{21} & \left( V_{22} - (V_{21} - V_{22}P_{22}^+P_{21})(C_1 - C_2P_{22}^+P_{21})^+ C_2 \right) P_{22}^+ \end{bmatrix}, \\
 L &= \begin{bmatrix} \left( F_{11} - F_{12}P_{22}^+P_{21} \right) (C_1 - C_2P_{22}^+P_{21})^+ \\ \left( F_{21} - F_{22}P_{22}^+P_{21} \right) (C_1 - C_2P_{22}^+P_{21})^+ \end{bmatrix}, \\
 J &= \begin{bmatrix} \left( V_{11} - V_{12}P_{22}^+P_{21} \right) (C_1 - C_2P_{22}^+P_{21})^+ \\ \left( V_{21} - V_{22}P_{22}^+P_{21} \right) (C_1 - C_2P_{22}^+P_{21})^+ \end{bmatrix}, \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 F_{11} &= P_{11}A_{0(11)} + P_{12}A_{0(21)} - N_{11}P_{11}, \\
 F_{12} &= P_{11}A_{0(12)} + P_{12}A_{0(22)} - N_{11}P_{12}, \\
 F_{21} &= P_{21}A_{0(11)} + P_{22}A_{0(21)} - N_{21}P_{11}, \\
 F_{22} &= P_{21}A_{0(12)} + P_{22}A_{0(22)} - N_{21}P_{21}, \\
 V_{11} &= P_{11}A_{1(11)} + P_{12}A_{1(21)} - M_{11}P_{11}, \\
 V_{12} &= P_{11}A_{1(12)} + P_{12}A_{1(22)} - M_{11}P_{12}, \\
 V_{21} &= P_{21}A_{1(11)} + P_{22}A_{1(21)} - M_{21}P_{11}, \\
 V_{22} &= P_{21}A_{1(12)} + P_{22}A_{1(22)} - M_{21}P_{21}, \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

Alors que  $N_{11}$ ,  $N_{12}$ ,  $M_{21}$  et  $M_{22}$  sont des matrices aléatoires.  $P_{22}$  devrait être une matrice de rang plein.

**Démonstration :** Si  $\text{rang}(CD) = q$ , c'est à dire la matrice  $(CD)$  de rang plein, nous pouvons utiliser le pseudo-inverse de  $(CD)$ , donnée dans [Darouach et al., 1994] telle que  $(CD)^+ = \left[ (CD)^T (CD) \right]^{-1} (CD)^T$ . En se référant de cette pseudo-inverse, nous pouvons résoudre la cinquième équation (3.9); on obtient successivement:

$$(I + EC)D = 0 \Leftrightarrow D + ECD = 0 \Leftrightarrow E = -D(CD)^+ . \quad (3.25)$$

Avec cela, on obtient  $P = I_n + EC = I_n - D(CD)^+ C$ . En remplaçant  $P$  dans la troisième et la quatrième équations (3.9), on obtient:

$$G_0 = PB_0 = (I_n - D(CD)^+ C)B_0, G_1 = PB_1 = (I_n - D(CD)^+ C)B_1 .$$

Maintenant substituons l'équation (3.21) dans les deux premières équations (3.9), on obtient:

$$\begin{cases} N_{11}P_{11} + N_{12}P_{21} + L_1C_1 - P_{11}A_{0(11)} - P_{12}A_{0(21)} = 0_{(n-p) \times (n-p)}, \\ N_{11}P_{12} + N_{12}P_{22} + L_1C_2 - P_{11}A_{0(12)} - P_{12}A_{0(22)} = 0_{(n-p) \times p}, \\ N_{21}P_{11} + N_{22}P_{21} + L_2C_1 - P_{21}A_{0(11)} - P_{22}A_{0(21)} = 0_{p \times (n-p)}, \\ N_{21}P_{12} + N_{22}P_{22} + L_2C_2 - P_{21}A_{0(12)} - P_{22}A_{0(22)} = 0_{p \times p} \end{cases} \quad (3.26)$$

et

$$\begin{cases} M_{11}P_{11} + M_{12}P_{21} + J_1C_1 - P_{11}A_{1(11)} - P_{12}A_{1(21)} = 0_{(n-p) \times (n-p)}, \\ M_{11}P_{12} + M_{12}P_{22} + J_1C_2 - P_{11}A_{1(12)} - P_{12}A_{1(22)} = 0_{(n-p) \times p}, \\ M_{21}P_{11} + M_{22}P_{21} + J_2C_1 - P_{21}A_{1(11)} - P_{22}A_{1(21)} = 0_{p \times (n-p)}, \\ M_{21}P_{12} + M_{22}P_{22} + J_2C_2 - P_{21}A_{1(12)} - P_{22}A_{1(22)} = 0_{p \times p} . \end{cases} \quad (3.27)$$

En utilisant les quatre premières équations de (3.24), le système (3.26) peut s'écrire en deux systèmes telles que:

$$\begin{cases} N_{12}P_{21} + L_1C_1 = F_{11}, \\ N_{12}P_{22} + L_1C_2 = F_{12}, \end{cases} \quad (3.28)$$

$$\begin{cases} N_{22}P_{22} + L_2C_2 = F_{22}, \\ N_{22}P_{21} + L_2C_1 = F_{21}. \end{cases} \quad (3.29)$$

En résolvant les deux systèmes (3.28) et (3.29), nous obtenons:

$$\begin{aligned} L_1 &= (F_{11} - F_{12}P_{22}^+P_{21}) (C_1 - C_2P_{22}^+P_{21})^+, \\ L_2 &= (F_{21} - F_{22}P_{22}^+P_{21}) (C_1 - C_2P_{22}^+P_{21})^+, \\ N_{12} &= (F_{12} - (F_{11} - F_{12}P_{22}^+P_{21})(C_1 - C_2P_{22}^+P_{21})^+ C_2) P_{22}^+, \\ N_{22} &= (F_{22} - (F_{21} - F_{22}P_{22}^+P_{21})(C_1 - C_2P_{22}^+P_{21})^+ C_2) P_{22}^+. \end{aligned} \quad (3.30)$$

De même, en utilisant les quatres dernières équations de (3.24), le système (3.27) peut s'écrire en deux systèmes telles que:

$$\begin{cases} M_{12}P_{21} + J_1C_1 = V_{11}, \\ M_{12}P_{22} + J_1C_2 = V_{12}, \end{cases} \quad (3.31)$$

$$\begin{cases} M_{22}P_{22} + J_2C_2 = V_{22}, \\ M_{22}P_{21} + J_2C_1 = V_{21}. \end{cases} \quad (3.32)$$

En résolvant les deux systèmes (3.31) et (3.32), nous obtenons:

$$\begin{aligned} J_1 &= (V_{11} - V_{12}P_{22}^+P_{21})(C_1 - C_2P_{22}^+P_{21})^+, \\ J_2 &= (V_{21} - V_{22}P_{22}^+P_{21})(C_1 - C_2P_{22}^+P_{21})^+, \\ M_{12} &= (V_{12} - (V_{11} - V_{12}P_{22}^+P_{21})(C_1 - C_2P_{22}^+P_{21})^+ C_2)P_{22}^+, \\ M_{22} &= (V_{22} - (V_{21} - V_{22}P_{22}^+P_{21})(C_1 - C_2P_{22}^+P_{21})^+ C_2)P_{22}^+. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Les matrices  $N$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $J$ ,  $P$ ,  $G_0$  et  $G_1$  ont été déterminées avec succès avec  $N_{11}$ ,  $N_{21}$ ,  $M_{11}$  et  $M_{21}$  choisies aléatoirement. Selon le théorème 3.1, les matrices obtenues  $N$  et  $M$  doivent satisfaire la contrainte (3.8). Si cette condition est satisfaite,  $e(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . D'autre part les matrices  $N_{11}$ ,  $N_{21}$ ,  $M_{11}$  et  $M_{21}$  peuvent être choisies et les matrices de (3.21) sont de nouveau calculées jusqu'à ce que la contrainte (3.8) soit vérifiée.

**Remarque 3.1 :** Le choix aléatoire des matrices  $N_{11}$ ,  $N_{21}$ ,  $M_{11}$  et  $M_{21}$  influence la dynamique du vecteur d'état de l'observateur qui risque de boucler indéfiniment et qui entraîne une limitation de cette méthode à améliorer dans travaux ultérieurs.

La figure 3.1 montre le diagramme associé à l'ensemble du système et l'observateur. Dans l'implémentation logicielle de l'algorithme proposé, la réalisation de la contrainte (3.8) sera faite selon une approche itérative.

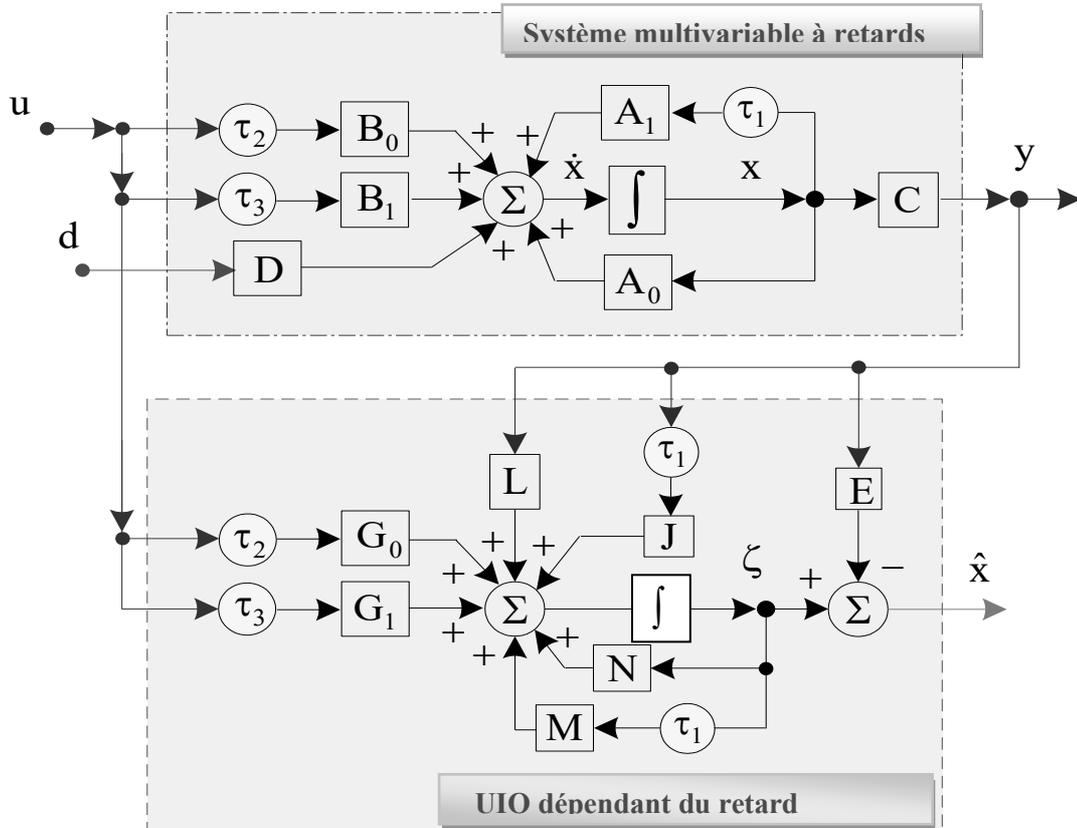


Figure. 3.1- Schéma Synoptique de l'observateur à entrées inconnues (3.3)

L'algorithme associé à l'observateur dépendant du retard est résumé ci-dessous:

**Algorithme 3.1** – Conception de l'observateur à entrées inconnues dépendant du retard

**Étape 1 :** En se référant au système (3.1), vérifier les trois hypothèses A1-A3.

**Étape 2:** Si les conditions d'existence données dans le théorème 3.2 sont vraies, on calcule la matrice inverse généralisée  $(CD)^+$  associée à la matrice  $(CD)$ ; la matrice  $E$  en se référant à la première équation (3.23); ensuite, on calcule respectivement les matrices  $P$ ,  $G_0$  et  $G_1$  avec la deuxième, la troisième et la quatrième équation du système (3.23).

**Étape 3 :** On partitionne les matrices  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $C$ ,  $N$ ,  $M$ ,  $P$ ,  $L$  et  $J$  selon (3.21) -(3.22).

**Étape 4 :** On choisit les matrices aléatoires  $N_{11}$ ,  $N_{21}$ ,  $M_{11}$  et  $M_{21}$ , d'où les matrices de (3.24) sont déterminées.

**Étape 5 :** On résout les systèmes (3.28), (3.29), (3.31) et (3.32) et les matrices  $N$ ,  $M$ ,  $L$

et J sont alors construites.

**Etape 6 :** En utilisant les matrices conçues N et M, l'inégalité matricielle linéaire (3.8) est résolue ; si (3.8) est vérifiée, alors l'observateur à entrées inconnues (3.3) peut être correctement conçu ; sinon, les étapes 4-6 sont répétées jusqu'à ce que la condition (3.8) soit remplie.

### 3.5. Observateur de dimension finie

#### Théorème 3.4

Pour le système (3.1) sous les hypothèses A4-A6, l'observateur indépendant du retard d'ordre plein (3.4) est convergent pour toutes les dynamiques d'erreur d'approximation décrites par  $\dot{r}(t) = \tilde{N}r(t)$ , s'il existe une matrice symétrique et positive  $\tilde{R} \in \mathcal{R}^{n' \times n'}$  vérifiant l'inégalité matricielle suivante :

$$\tilde{N}^T \tilde{R} + \tilde{R} \tilde{N} < 0, \quad (3.34)$$

et s'il existe une matrice  $\tilde{P} = (I + \tilde{E}\tilde{C}) \in \mathcal{R}^{n' \times n'}$  telles que les conditions suivantes sont satisfaites:

$$\begin{cases} \tilde{N}\tilde{P} + \tilde{L}\tilde{C} - \tilde{P}\tilde{A} = 0, \\ \tilde{G} - \tilde{P}\tilde{B} = 0, \\ \tilde{P}\tilde{D} = 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

**Démonstration :** Soit le vecteur d'erreur d'estimation défini par :

$$\tilde{e}(t) = \hat{\chi}(t) - \chi(t) = \tilde{\zeta}(t) - \chi(t) - \tilde{E}\tilde{y}(t) - Qr(t) = \tilde{\zeta}(t) - (I + \tilde{E}\tilde{C})\chi(t) - Qr(t). \quad (3.36)$$

La dynamique du vecteur d'erreur d'estimation est donnée par cette égalité :

$$\dot{\tilde{e}}(t) = \dot{\tilde{\zeta}}(t) - (I + \tilde{E}\tilde{C})\dot{\chi}(t) - Q\dot{r}(t). \quad (3.37)$$

En utilisant les équations (3.2) et (3.4), la dynamique de l'erreur d'estimation devient (annexe A) :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{e}}(t) = & \tilde{N}\tilde{e}(t) + \left[ \tilde{N}(I + \tilde{E}\tilde{C}) + \tilde{L}\tilde{C} - (I + \tilde{E}\tilde{C})\tilde{A} \right] \chi(t) + \left[ \tilde{G} - (I + \tilde{E}\tilde{C})\tilde{B} \right] u(t) \\ & - (I + \tilde{E}\tilde{C})\tilde{D}\dot{d}(t) - Q[\dot{r}(t) - \tilde{N}r(t)]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Considérons la matrice  $\tilde{P} = (I + \tilde{E}\tilde{C}) \in \mathcal{R}^{n' \times n'}$ ; la dynamique de l'erreur (3.38) s'écrit sous

la forme suivante :

$$\dot{\tilde{e}}(t) = \tilde{N}\tilde{e}(t) + (\tilde{N}\tilde{P} + \tilde{L}\tilde{C} - \tilde{P}\tilde{A})\chi(t) + (\tilde{G} - \tilde{P}\tilde{B})u(t) - \tilde{P}\tilde{D}d(t) - Q(\dot{r}(t) - \tilde{N}r(t)). \quad (3.39)$$

Si les conditions (3.35) et  $\dot{r}(t) = \tilde{N}r(t)$  sont satisfaites alors la dynamique de l'erreur de l'observateur (3.39) devient  $\dot{\tilde{e}}(t) = \tilde{N}\tilde{e}(t)$ , qui mène  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{e}(t) = 0$  à si la condition (3.34) est vérifiée.

Comme dans le cas de la conception de l'observateur à entrées inconnues dépendant du retard, la détermination de la matrice  $\tilde{N}$  peut être réalisée dans une approche itérative jusqu'à ce que la condition (3.34) soit vérifiée.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de l'observateur à entrées inconnues (3.4) sont données par le théorème suivant:

**Théorème 3.5 :** Pour le système linéaire invariant dans le temps décrit par les équations (3.1), l'observateur d'ordre plein existe si et seulement si:

- 1)  $\text{rang}(\tilde{C}\tilde{D}) = q$ ;
- 2)  $\text{rang} \begin{bmatrix} \tilde{s}\tilde{P} - \tilde{P}\tilde{A} \\ \tilde{C} \end{bmatrix} = n, (\forall) \tilde{s} \in \mathbf{C}, \text{Re}(\tilde{s}) \geq 0$ .

**Démonstration:** la preuve du théorème 3.2 est principalement basée sur les résultats de [Darouach et al., 1994].

Pour calculer les matrices  $\tilde{N}, \tilde{L}, \tilde{G}, \tilde{E}, \tilde{P}$ , et  $Q$  de l'observateur (3.4), nous partitionnons les matrices  $\tilde{A}, \tilde{C}, \tilde{N}, \tilde{P}$ , et  $\tilde{L}$  comme suit [Lungu & Lungu, 2012] :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \tilde{C}^T = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_2 \end{bmatrix}, \tilde{N} = \begin{bmatrix} \tilde{N}_{11} & \tilde{N}_{12} \\ \tilde{N}_{21} & \tilde{N}_{22} \end{bmatrix}, \tilde{P} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & \tilde{P}_{12} \\ \tilde{P}_{21} & \tilde{P}_{22} \end{bmatrix}, \tilde{L} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{A} &\in \mathcal{R}^{n \times n}, \tilde{A}_{11} \in \mathcal{R}^{(n-p) \times (n-p)}, \tilde{A}_{12} \in \mathcal{R}^{(n-p) \times p}, \tilde{A}_{21} \in \mathcal{R}^{p \times (n-p)}, \tilde{A}_{22} \in \mathcal{R}^{p \times p}, \\ \tilde{N} &\in \mathcal{R}^{n \times n}, \tilde{N}_{11} \in \mathcal{R}^{(n-p) \times (n-p)}, \tilde{N}_{12} \in \mathcal{R}^{(n-p) \times p}, \tilde{N}_{21} \in \mathcal{R}^{p \times (n-p)}, \tilde{N}_{22} \in \mathcal{R}^{p \times p}, \\ \tilde{P} &\in \mathcal{R}^{n \times n}, \tilde{P}_{11} \in \mathcal{R}^{(n-p) \times (n-p)}, \tilde{P}_{12} \in \mathcal{R}^{(n-p) \times p}, \tilde{P}_{21} \in \mathcal{R}^{p \times (n-p)}, \tilde{P}_{22} \in \mathcal{R}^{p \times p}, \\ \tilde{L} &\in \mathcal{R}^{n \times p}, \tilde{L}_1 \in \mathcal{R}^{(n-p) \times p}, \tilde{L}_2 \in \mathcal{R}^{p \times p}, \\ \tilde{C} &\in \mathcal{R}^{p \times n}, \tilde{C}_1^T \in \mathcal{R}^{p \times (n-p)}, \tilde{C}_2^T \in \mathcal{R}^{p \times p}. \end{aligned}$$

La conception de l'observateur est donnée dans le théorème suivant:

**Théorème 3.6**

Si les conditions de rang dans le théorème 3.5 sont satisfaites et que la paire  $(\tilde{A}, \tilde{C})$  est observable (au moins détectable), l'observateur à entrées inconnues indépendant du retard (3.4) peut être conçu pour le système (3.2) si les conditions suivantes sont vérifiées:

$$\begin{aligned}
 \tilde{E} &= -\tilde{D}(\tilde{C}\tilde{D})^+, \\
 \tilde{P} &= I - \tilde{D}(\tilde{C}\tilde{D})^+ \tilde{C}, \\
 \tilde{G} &= \tilde{P}\tilde{B}, \\
 \tilde{N} &= \begin{bmatrix} \tilde{N}_{11} & \left( \tilde{F}_{12} - (\tilde{F}_{11} - \tilde{F}_{12}\tilde{P}_{22}^+\tilde{P}_{21}) (\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2\tilde{P}_{22}^+\tilde{P}_{21})^+ \tilde{C}_2 \right) \tilde{P}_{22}^+ \\ \tilde{N}_{21} & \left( \tilde{F}_{22} - (\tilde{F}_{21} - \tilde{F}_{22}\tilde{P}_{22}^+\tilde{P}_{21}) (\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2\tilde{P}_{22}^+\tilde{P}_{21})^+ \tilde{C}_2 \right) \tilde{P}_{22}^+ \end{bmatrix}, \\
 \tilde{L} &= \begin{bmatrix} \left( \tilde{F}_{11} - \tilde{F}_{12}\tilde{P}_{22}^+\tilde{P}_{21} \right) (\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2\tilde{P}_{22}^+\tilde{P}_{21})^+ \\ \left( \tilde{F}_{21} - \tilde{F}_{22}\tilde{P}_{22}^+\tilde{P}_{21} \right) (\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2\tilde{P}_{22}^+\tilde{P}_{21})^+ \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

où

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_{11} &= \tilde{P}_{11}\tilde{A}_{11} + \tilde{P}_{12}\tilde{A}_{21} - \tilde{N}_{11}\tilde{P}_{11}, \\
 \tilde{F}_{12} &= \tilde{P}_{11}\tilde{A}_{12} + \tilde{P}_{12}\tilde{A}_{22} - \tilde{N}_{11}\tilde{P}_{12}, \\
 \tilde{F}_{21} &= \tilde{P}_{21}\tilde{A}_{11} + \tilde{P}_{22}\tilde{A}_{21} - \tilde{N}_{21}\tilde{P}_{11}, \\
 \tilde{F}_{22} &= \tilde{P}_{21}\tilde{A}_{12} + \tilde{P}_{22}\tilde{A}_{22} - \tilde{N}_{21}\tilde{P}_{21},
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

tandis que  $\tilde{N}_{11}$  et  $\tilde{N}_{21}$  sont des matrices choisies aléatoirement.  $\tilde{P}_{22}$  devrait être une matrice de rang plein.

**Démonstration :** La démonstration du théorème 3.6 est similaire à la démonstration du théorème 3.3.

La figure 3.2 montre le diagramme associé à l'ensemble du système multivariable linéaire invariant dans le temps à multiples retards et l'observateur à entrée inconnue indépendant du retard.

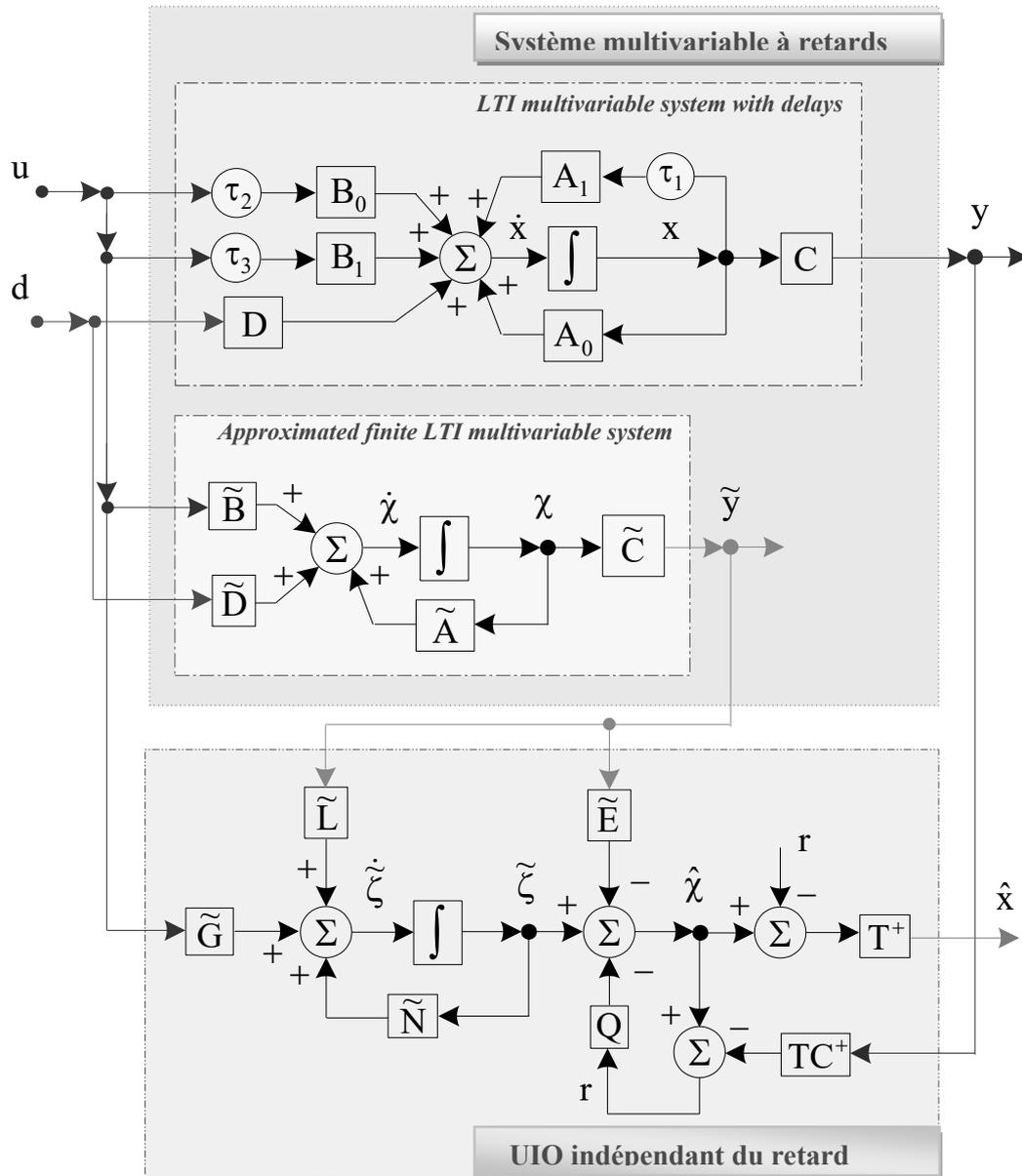


Figure. 3.2- Schéma Synoptique de l'observateur à entrées inconnues (3.4)

L'algorithme associé à l'observateur indépendant du retard est résumé ci-dessous :

**Algorithme 3.2 -**

**Étape 1 :** Calculer le système de dimension finie (3.2) en utilisant l'une des méthodes d'approximation [Baker & Graves. 1996] et [Ben Warrad & Boubaker, 2016a].

**Étape 2 :** En se référant au système (3.2), vérifier les trois hypothèses A4-A6.

**Étape 3:** Si les conditions d'existence données dans le théorème 3.5 sont vraies, on calcule la matrice inverse généralisée  $(\tilde{C}\tilde{D})^+$  liée à la matrice  $(\tilde{C}\tilde{D})$ ; on calcule la

matrice  $\tilde{E}$  à travers la première équation du système (3.41); ensuite, on calcule les matrices  $\tilde{P}$  et  $\tilde{G}$  avec la deuxième et la troisième équation du système (3.41).

**Étape 4 :** On partitionne les matrices  $\tilde{A}, \tilde{C}, \tilde{N}, \tilde{P}$ , et  $\tilde{L}$  selon (3.40).

**Étape 5 :** On choisit les matrices aléatoires  $\tilde{N}_{11}$  et  $\tilde{N}_{21}$ ; les matrices relatives à (3.42) sont alors déterminées.

**Étape 6 :** On calcule les matrices  $\tilde{N}$  et  $\tilde{L}$  selon (3.41) et (3.42). En utilisant la matrice calculée  $\tilde{N}$ , l'inégalité matricielle linéaire (3.34) est résolue par rapport à  $\tilde{R}$ ; s'il existe une matrice symétrique et positive  $\tilde{R} \in \mathcal{R}^{n' \times n'}$  qui vérifie (3.34), l'observateur à entrées inconnues (3.4) peut être correctement conçu; sinon, les étapes 5 et 6 seront répétées jusqu'à ce que cette condition (3.34) soit vérifiée.

### 3.6. Application

Le processus à quatre réservoirs dans le cas du modèle à non-minimum phase et multiple retards décrit au premier chapitre est utilisé pour montrer l'efficacité des deux approches d'observation proposées précédemment.

Pour les résultats de simulation, le signal d'entrée est pris tel que  $u(t) = \sin(2\pi ft)$  alors que l'entrée inconnue est fixée à  $d(t) = 0.3 \sin(2\pi ft)$  avec une matrice constante  $\tilde{D}^T = \begin{bmatrix} D & 0_{(n'-n) \times q} \end{bmatrix}$  avec  $D = [40 \ 50 \ 0 \ 60]^T$ . Le vecteur des conditions initiales est fixé à  $\chi(0) = [-4 \ 4 \ 6 \ -5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  et les retards constant à  $\tau_1 = 5s, \tau_2 = 2s, \tau_3 = 4s$ .

#### - Implémentation de l'observateur à entrées inconnues dépendant du retard

Il est facile de vérifier les trois hypothèses A1-A3 pour le système (1). Notez que:

- $\text{rang}(D) = 1$
- $\text{rang}(C) = 2$
- $(A_0, C)$  et  $(A_1, C)$  est detectable.

L'inverse généralisé de la matrice  $(CD)$  est calculée comme suit

$$(CD)^+ = [0.019 \quad 0.024]$$

En utilisant (3.23), la matrice E est donnée par :

$$E = \begin{bmatrix} -0.78 & -0.975 \\ -0.975 & -1.219 \\ 0 & 0 \\ -1.17 & -1.1463 \end{bmatrix}$$

avec la matrice E déduite ci-dessus, la matrice P est obtenue comme :

$$P = \begin{bmatrix} 0.609 & -0.487 & 0 & 0 \\ -0.487 & 0.39 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.585 & -0.731 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et nous pouvons calculer  $G_0$  et  $G_1$ , respectivement telles que :

$$G_0 = \begin{bmatrix} 0.029 & -0.017 \\ -0.023 & 0.013 \\ 0 & 0 \\ -0.028 & -0.025 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.077 \\ 0.055 & 0 \end{bmatrix}$$

Selon (3.21), nous obtenons :

$$N_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad N_{22} = \begin{bmatrix} -0.025 & 0 \\ 0 & -0.017 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1.2 & -0.964 \\ -0.960 & 0.771 \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} -0.243 & 0.195 \\ -0.246 & 0.1851 \end{bmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 0.015 & -0.008 \\ -0.012 & 0.007 \end{bmatrix} \quad M_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.015 & -0.013 \end{bmatrix}$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1.209 & -0.988 \\ -0.967 & 0.790 \end{bmatrix} \quad J_2 = \begin{bmatrix} -0.243 & 0.195 \\ -0.259 & 0.176 \end{bmatrix}$$

et nous pouvons déduire que :

$$N = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -0.025 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -0.017 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1.2 & -0.964 \\ -0.960 & 0.771 \\ -0.243 & 0.195 \\ -0.246 & 0.195 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0.015 & -0.008 \\ 0 & -1 & -0.012 & 0.007 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -0.015 & -0.013 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 1.209 & -0.988 \\ -0.967 & 0.790 \\ -0.243 & 0.195 \\ -0.259 & 0.176 \end{bmatrix}$$

et il est facile de vérifier que l'inégalité matricielle linéaire (3.8) est vérifiée et que l'observateur à entrées inconnues dépendant du retard est correctement réalisé.

**- Implémentation de l'observateur à entrées inconnues indépendant du retard par utilisation de la méthode de collocation orthogonale**

Les matrices et les vecteurs associés à l'équation (3.2) de la procédure d'approximation méthode de collocation ont été donnés au deuxième chapitre. Pour assurer un compromis entre la complexité du modèle et la précision de l'approximation, nous avons opté pour les valeurs numériques suivantes  $N=3$ ,  $\alpha = \beta = -0.5$ . Notez également que  $N = 3$  est imposé par le problème de conception de l'observateur. Les retards constants ont été fixés à  $\tau_1 = 5s, \tau_2 = 2s$ , et  $\tau_3 = 4s$ .

D'après l'algorithme 3.2, la mise en œuvre de l'observateur indépendant du retard, on obtient les paramètres de l'observateur par la méthode de collocation suivants:

La matrice E est donnée par :

$$\tilde{E}^T = \begin{bmatrix} -0.780 & -0.975 & 0 & -1.17 & 0 & \dots & 0 \\ -0.975 & -1.219 & 0 & -1.463 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

En utilisant la matrice  $\tilde{E}$  ci-dessus, la matrice P est donnée par :

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 0.608 & -0.487 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -0.487 & 0.390 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -0.585 & -0.731 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d'où le gain de l'observateur à entrées inconnues indépendant du retard  $\tilde{G}$  est égale à :

$$\tilde{G}^T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -5.598 & 1.50 & -0.401 & 0.5 & -2.799 & 0.75 & -0.2 & 0.25 \\ 0 & \dots & 0 & -5.598 & 1.50 & -0.401 & 0.5 & -2.799 & 0.75 & -0.2 & 0.25 \end{bmatrix}$$

et nous pouvons déduire que :

$$\tilde{N}_{12}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.288 & -1.154 \\ 0 & 0 & 0.077 & 0.055 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.201 & 0.750 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{N}_{22} = \begin{bmatrix} 2.598 & -2.799 \\ 4.976 & -4.75 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{L}_1^T = \begin{bmatrix} 1.2 & -0.961 & 0 & -1.152 & -4.478 & 1.2 & -0.321 & 0.4 & \dots & 0 \\ 0.964 & 0.771 & 0 & -1.447 & -4.478 & 1.2 & -0.321 & 0.4 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{L}_2 = \begin{bmatrix} 0.926 & 1.658 \\ 0.926 & 1.658 \end{bmatrix}$$

**- Implémentation de l'observateur à entrées inconnues indépendant des retards avec la Méthode de Padé**

En utilisant la fonction Padé disponible sur le logiciel MatLab avec un ordre d'approximation choisi égal à un, le modèle d'approximation (3.2) est donné par:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.199 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.098 & 0 & 0.048 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.142 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0698 & 0 & 0.035 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.123 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.075 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.087 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.055 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.123 & 0 & -0.048 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.087 & 0 & -0.035 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.077 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.055 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{C}^T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{D} = \begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 0 \\ 60 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que

- $\text{rang}(\tilde{D}) = 1$ ,
- $\text{rang}(\tilde{C}) = 2$ ,
- $(\tilde{A}, \tilde{C})$  est détectable,

La matrice inverse généralisé  $(\tilde{C}\tilde{D})$  est donnée par :

$$(\tilde{C}\tilde{D})^+ = \begin{bmatrix} 0.019 & 0.024 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On peut déduire que :

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} -0.78 & -0.975 & 0 & -1.170 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.975 & -1.219 & 0 & -1.463 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

En utilisant la matrice  $\tilde{E}$  ci-dessus, on peut calculer la matrice suivante :

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 0.609 & -0.487 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.487 & 0.390 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.585 & -0.731 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons calculer le gain de l'observateur à entrées inconnues indépendant du retard G tel que :

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.075 & 0.042 & -0.029 & 0.017 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.06 & -0.034 & 0.023 & -0.013 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.077 \\ 0 & 0 & 0.072 & 0.063 & 0.028 & 0.025 & -0.055 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On peut déduire la matrice  $\tilde{N}$  sachant que :

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} \tilde{N}_{11} & \tilde{N}_{12} \\ \tilde{N}_{21} & \tilde{N}_{22} \end{bmatrix}$$

Sachant que  $\tilde{N}_{11}$  et  $\tilde{N}_{21}$  sont des matrices aléatoires choisies telles que :

$$\tilde{N}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.06 & -0.034 & 0.029 & -0.017 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.048 & 0.027 & -0.023 & 0.013 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.077 \\ 0 & 0 & -0.057 & -0.051 & -0.028 & -0.025 & 0.055 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{N}_{22} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Maintenant nous calculons le gain  $\tilde{L}$

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 \end{bmatrix}$$

Telles que :

$$\tilde{L}_1 = \begin{bmatrix} 0.976 & -0.836 \\ -0.781 & 0.669 \\ 0 & 0 \\ -0.937 & -1.255 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{L}_2 = \begin{bmatrix} 0.926 & 0.926 & 0.926 & 0.926 & 0.926 & 0.926 & 0.926 & 0.926 \\ 1.658 & 1.658 & 1.658 & 1.658 & 1.658 & 1.658 & 1.658 & 1.658 \end{bmatrix}^T$$

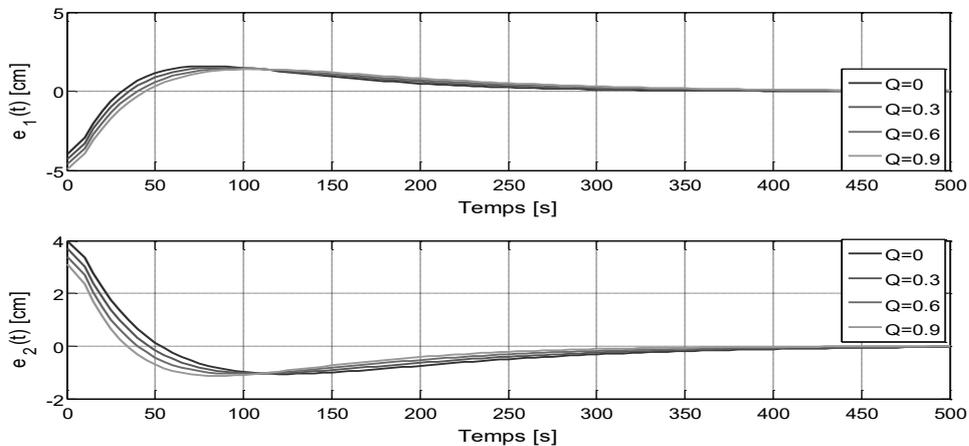
Il est facile de vérifier que l'inégalité matricielle linéaire (3.34) est remplie et que l'observateur à entrées inconnues est bien conçu.

### Résultats de simulation

La figure 3.5 montre l'évolution des variables d'état du modèle de dimension infini (3.1) ainsi que celles du modèle approximé (3.2), obtenues par l'approximation de Padé.

Les figures 3.3 et 3.6 montrent la dynamique d'erreur d'estimation indépendante du retard (3.34) par les deux méthodes d'approximation: collocation orthogonale et Padé pour différentes valeurs de Q (Q = 0, 0.3, 0.6 et 0.9), tandis que les figures 3.4 et 3.7 montrent la dynamique d'erreur donnée par  $r(t) = \hat{\chi}(t) - T_x(t)$ . Nous pouvons voir que la dernière erreur converge vers zéro en un temps fini approximativement égal à 10 s pour les deux méthodes d'approximation.

la figure 3.8 représente le vecteur d'erreur zéro d'estimation entre l'observateur indépendant du retard (3.4) et le système retardé (3.1), ainsi que l'erreur d'estimation entre l'observateur dépendant du retard (3.3) et le système retardé (3.1) par deux méthodes d'approximation et pour Q = 0,9.



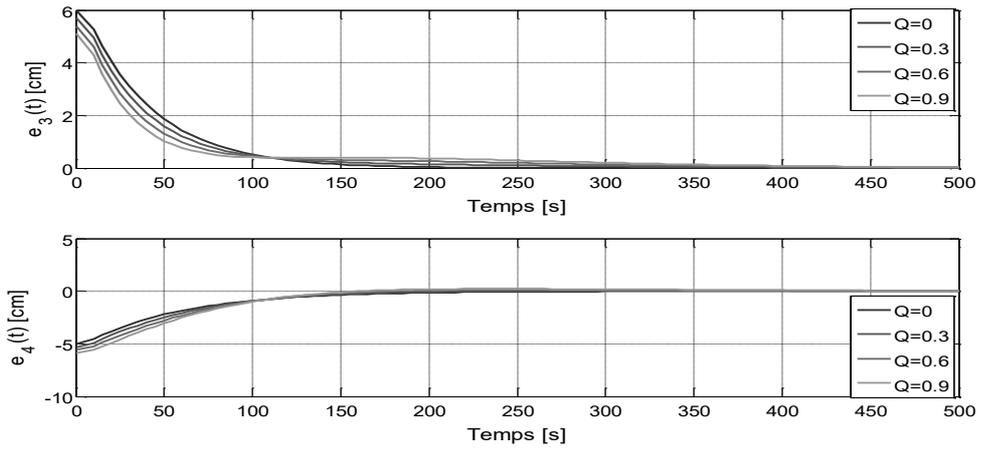


Figure3.3- Dynamique de l'erreur d'estimation de l'observateur à entrées inconnues indépendante du retard via la méthode de Collocation

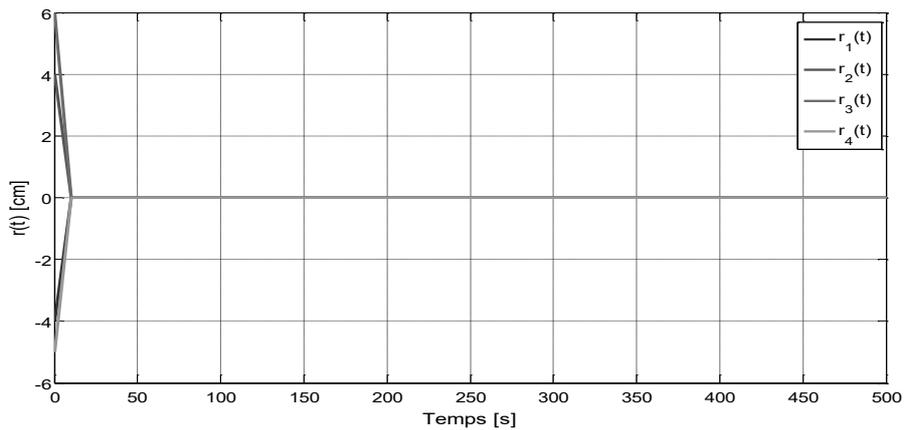


Figure 3.4- Dynamique de l'erreur d'approximation  $\hat{r}(t) = \tilde{N}r(t)$  pour l'observateur à entrées inconnues indépendante du retard via la méthode de Collocation

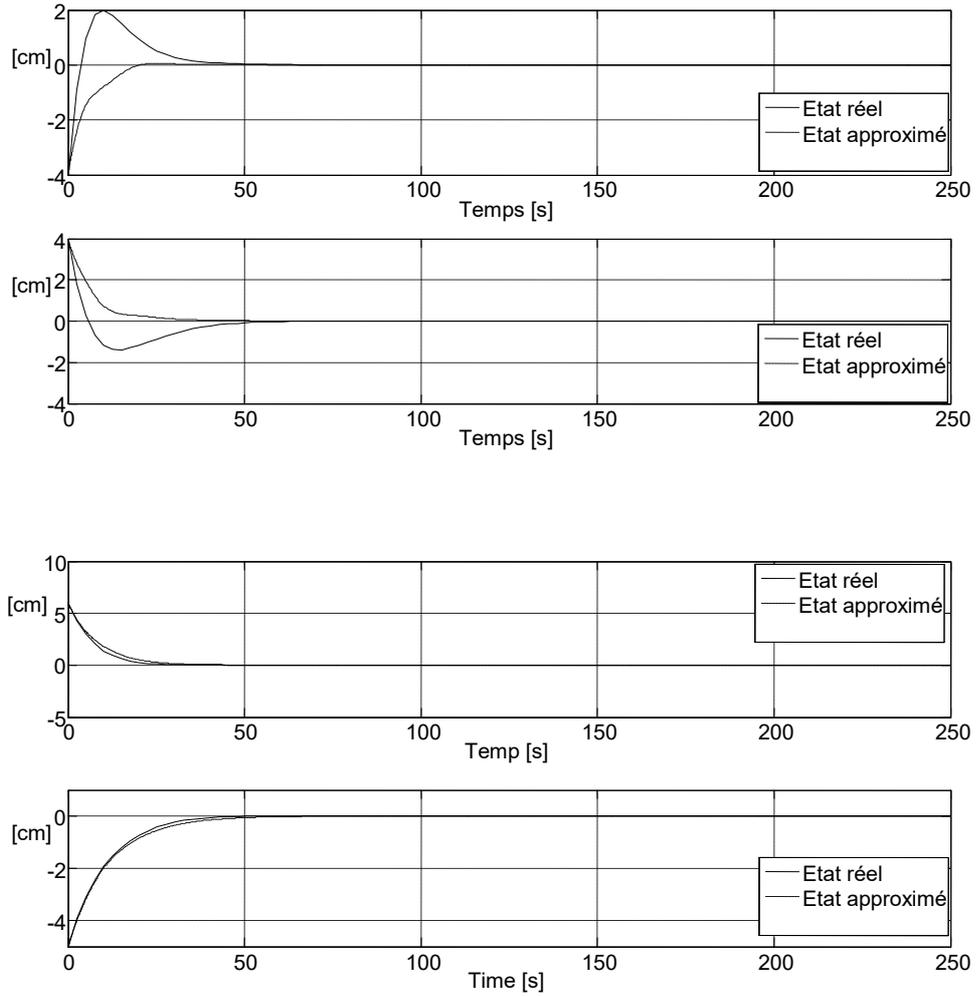
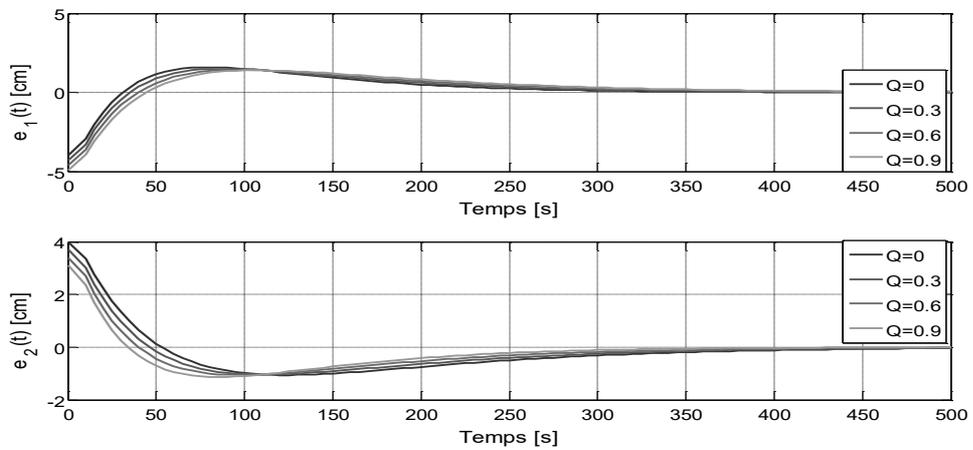


Figure. 3.5- Niveaux des réservoirs réels et approximés via la méthode de Padé



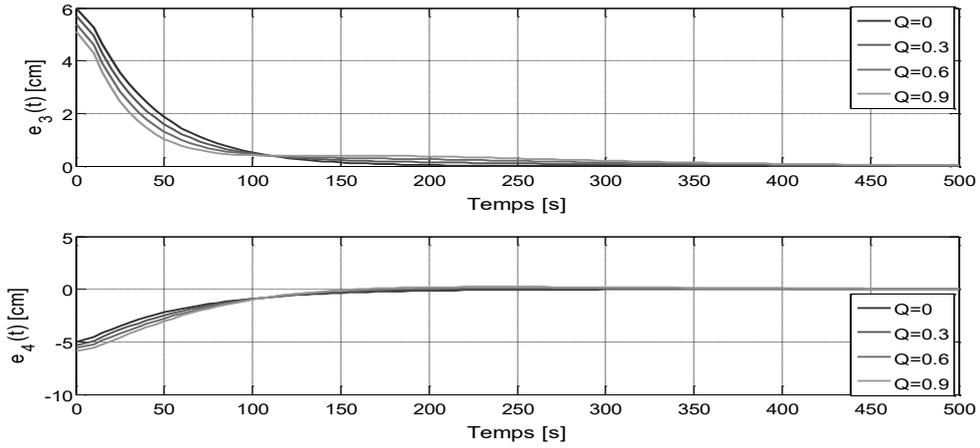


Figure 3.6- Erreur d'estimation de l'observateur à entrées inconnues indépendante du retard via la méthode de Padé

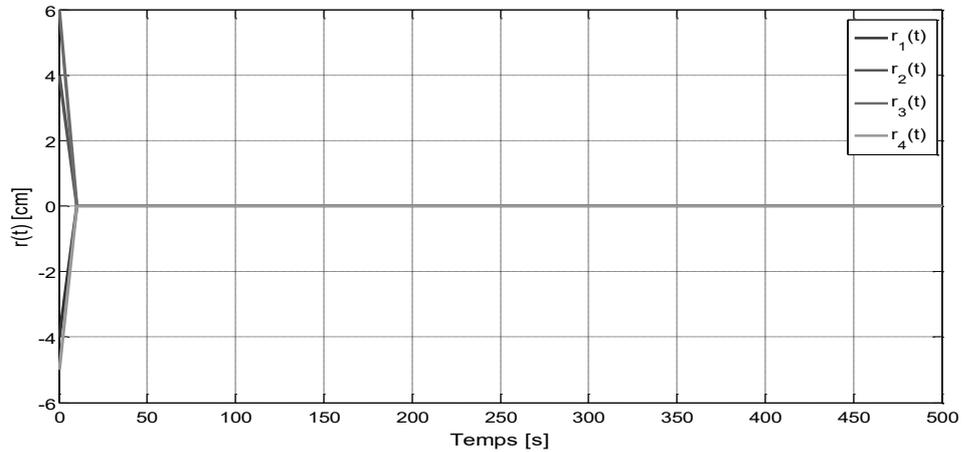
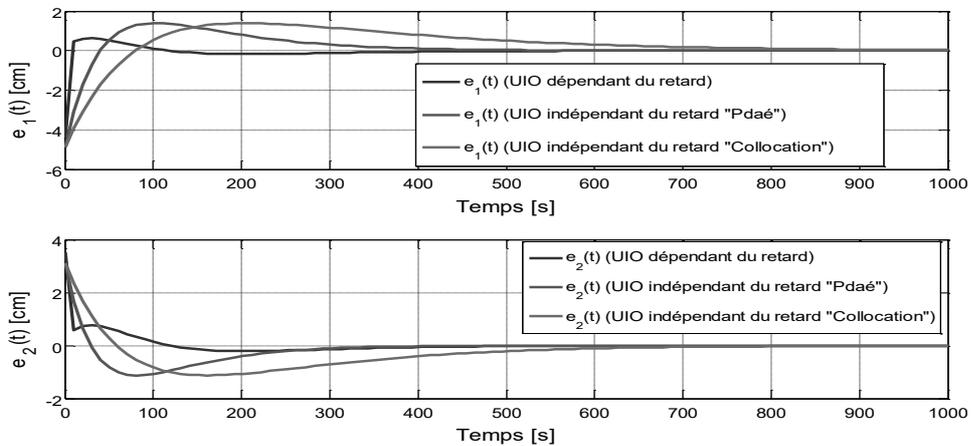


Figure 3.7- Dynamique de l'erreur d'approximation  $\dot{r}(t) = \tilde{N}r(t)$  pour l'observateur à entrées inconnues indépendante du retard via la méthode de Padé



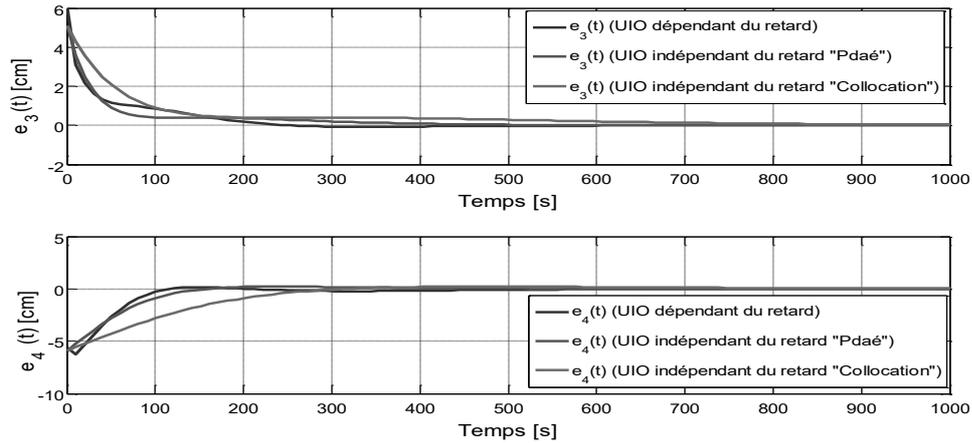


Figure 3.8- Dynamique de l'erreur d'estimation de l'observateur à entrées inconnues dépendant du retard et indépendant du retard par les deux méthodes d'approximation

Nous pouvons facilement remarquer que les observateurs conçus sont asymptotiquement stables et reconstruisent correctement les états réels sous les entrées inconnues et les retards multiples. En effet, on peut aussi facilement voir que la convergence de vitesse de l'observateur à entrées inconnues dépendant du retard est supérieure à celui indépendant du retard.

Les deux algorithmes proposés dans ce chapitre ont des propriétés distinctives par rapport aux autres approches disponibles. L'observateur dépendant du retard a un modèle à dimension infinie alors que le retard indépendant a un modèle à dimension finie. De plus, comme l'observateur indépendant ne nécessite aucune information sur le retard, il est plus pratique dans des applications réelles. Nous pouvons aussi facilement remarquer que l'observateur dépendant du retard est asymptotiquement stable et reconstruit les états réels sous les entrées inconnues et les retards multiples.

### 3.7. Conclusion

Dans ce chapitre, deux approches de conception d'observateurs robustes à entrées inconnues pour les systèmes linéaire invariant dans le temps avec retards multiples ont été élaborés. La première méthode a proposé un observateur dépendant du retard tandis que la seconde a suggéré la conception d'un observateur indépendant du retard. Le processus à quatre réservoirs est utilisé pour illustrer l'efficacité des deux méthodes proposées pour l'étude de cas du modèle à non minimum de phase.

Les résultats de la simulation ont montré l'efficacité des algorithmes proposés en boucle

ouverte. On trouvera une étude parallèle à celle élaborée dans le cadre de ce chapitre dans [Ben Warrad et al., 2019] dont l'objectif est synthétiser un observateur à entrées inconnues dépendant des retards et un second indépendant des retards pour une classe des systèmes à multiples retards différente de celle décrite dans (3.1) et assez considérée dans la littérature. Celle-ci introduit un seul retard sur les états et un seul retard sur les entrées.

Dans le chapitre suivant, nous développerons une extension des approches proposées dans ce chapitre pour le cas des observateurs à entrées inconnues d'ordre plein et aussi d'ordre réduit conçues pour le système contrôlé via une loi commande multivariable stabilisante tenant compte des retards multiples.

**Chapitre 4**  
**Observateurs Robustes d'ordre plein**  
**et d'ordre réduit**

### 4.1. Introduction

Dans ce chapitre, deux approches d'estimation d'état des systèmes linéaires multivariés à temps continu soumis à des entrées inconnues et caractérisés par de retards multiples sur les états et sur les entrées seront proposés. La première approche propose un observateur d'état robuste d'ordre plein alors que la seconde aboutit à la synthèse d'un observateur robuste d'ordre réduit. Les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité asymptotique et les conditions d'existence des deux observateurs seront fournies. L'efficacité des algorithmes proposés est illustrée à l'aide du processus à quatre réservoirs pour le cas du modèle de phase non minimum contrôlé via une commande par retour d'état. Pour éviter des instabilités du système dues aux retards, une loi de commande qui tient compte des retards multiples, tirée de la littérature, est aussi appliquée en boucle fermée.

Ce quatrième chapitre sera organisé comme suit : Dans le second paragraphe, nous présenterons la position du problème pour les deux observateurs à entrées inconnues d'ordre plein et d'ordre réduit. Dans les sections 4.3 et 4.4 les approches de conception des deux observateurs robustes seront présentées, les preuves de stabilité asymptotique ainsi que les conditions d'existence seront exposées. L'efficacité des approches proposées sera enfin validée, dans le dernier paragraphe, via des résultats de simulation sur le processus à quatre réservoirs.

### 4.2. Position du problème

Considérons la classe des systèmes multivariés à multiples retards décrits par [Ben Warrad et al., 2018b] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - \tau_0) + \sum_{i=0}^k (B_i u(t - \tau_{i+1})) + Dd(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $x(t) \in \mathcal{R}^n$  est le vecteur d'état du modèle  $u(t) \in \mathcal{R}^m$  l'entrée du processus,  $y(t) \in \mathcal{R}^p$  le vecteur de sortie,  $d(t) \in \mathcal{R}^q$  est le vecteur des perturbations dont les éléments sont des fonctions inconnues de temps et  $A_0 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ,  $A_1 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathcal{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathcal{R}^{p \times n}$ , et  $D \in \mathcal{R}^{n \times q}$  sont des matrices constantes avec de dimensions appropriées.  $\tau_0$  et  $\tau_{i+1}$  sont des retards constants pour  $i=0, \dots, k$ .

L'objectif de ce chapitre est de concevoir deux approches différentes d'estimateurs d'état à entrées inconnues pour le système (4.1):

- Un observateur à entrées inconnues d'ordre plein dépendant du retard décrit par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\zeta}}(t) = N\zeta(t) + Ly(t) + Jy(t - \tau_0) + \sum_{i=0}^k G_i u(t - \tau_{i+1}), \\ \hat{x}(t) = \zeta(t) - Ey(t), \end{cases} \quad (4.2)$$

avec  $\zeta(t) \in \mathcal{R}^n$  et  $\hat{x}(t) \in \mathcal{R}^n$  sont respectivement les vecteurs d'état estimés de l'observateur et du système. Le vecteur de sortie  $y(t) = Cx(t)$ ,  $N, L, J, E$  et  $G_i$  ( $i=0 \dots k$ ) sont des matrices inconnues de dimensions appropriées à calculer de telle sorte que  $\hat{x}(t)$  converge asymptotiquement vers  $x(t)$  sous les hypothèses suivantes:

A1)  $\text{rang}(D) = q$ ;

A2)  $\text{rang}(C) = p$ ;

A3) les paire  $(A_0, C)$  est observable (au moins détectable).

- Un observateur à entrées inconnues d'ordre réduit dépendant du retard :

L'estimation du vecteur d'état  $x(t)$  est obtenue par l'estimation du vecteur  $\bar{\zeta}(t) = Fx(t)$ ,  $F \in \mathcal{R}^{s \times n}$ , où  $\bar{\zeta}(t) \in \mathcal{R}^s$  est un vecteur composé d'une partie des états du système ou une combinaison de ces derniers. La dynamique du l'observateur à entrées inconnues d'ordre réduit dépendant du retard est donnée par :

$$\begin{cases} Z\dot{\hat{\bar{\zeta}}}(t) = \bar{N}\hat{\bar{\zeta}}(t) + \bar{L}y(t) + \bar{J}y(t - \tau_0) + \sum_{i=0}^k \bar{G}_i u(t - \tau_{i+1}), \\ \hat{x}(t) = H\hat{\bar{\zeta}}(t) + \bar{E}y(t), \end{cases} \quad (4.3)$$

avec  $\hat{\bar{\zeta}}(t) \in \mathcal{R}^s$   $\hat{x}(t) \in \mathcal{R}^n$  sont les vecteurs d'état estimés de l'observateur et du système respectivement. Le vecteur de sortie  $y(t) = Cx(t)$ ,  $\bar{N} \in \mathcal{R}^{s \times s}$ ,  $\bar{L} \in \mathcal{R}^{s \times p}$ ,  $\bar{J} \in \mathcal{R}^{s \times p}$ ,  $\bar{G}_i \in \mathcal{R}^{s \times m}$  pour ( $i=0 \dots k$ ),  $H \in \mathcal{R}^{n \times s}$ ,  $\bar{E} \in \mathcal{R}^{n \times p}$ ,  $F \in \mathcal{R}^{s \times n}$  et  $Z \in \mathcal{R}^{s \times s}$  sont des matrices inconnues de dimensions appropriées à calculer telles que  $\hat{\bar{\zeta}}(t)$  et  $\hat{x}(t)$  convergent asymptotiquement, respectivement, vers  $\bar{\zeta}(t)$  et  $x(t)$  sous les

hypothèses suivantes:

A4)  $\text{rank}(D) = q$ ;

A5)  $\text{rank}(C) = p$ ;

A6) la paire  $(A_0, C)$  est observable (au moins détectable);

A7)  $n > s > p \geq q$ ;

A8)  $n = p + q$ .

**Remarque 4.1:** Pour la procédure de conception d'observateur d'ordre réduit, une forme particulière pour la matrice  $C$  peut être choisie tel que  $C = \begin{bmatrix} C_1 & 0_{p \times q} \end{bmatrix}$  où  $C_1 \in \mathcal{R}^{p \times p}$  est une matrice de rang plein (non singulière). Ceci n'est pas restrictif tant que la matrice  $C$  est un vecteur ligne de rang plein (conditions A2  $\equiv$  A5) et qu'il y aura toujours une transformation orthogonale qui conduit à l'équation:  $y(t) = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$ .

Pour les deux observateurs d'ordre plein (4.2) et d'ordre réduit (4.3), le système sera contrôlé via une loi de commande par retour d'état stabilisante en dépit des retards décrite par (annexe B) :

$$u = K\hat{x}(t) \tag{4.4}$$

où  $K \in \mathcal{R}^{m \times n}$  est un gain de stabilisation du système (4.1) qui tiendra compte des retards multiples dans la conception du contrôleur (par exemple l'approche proposée dans [El Haoussi et al., 2011] dans le cas où  $k = 1$ ).

### 4.3. Conception d'un observateur d'ordre plein

La nouvelle approche devrait rendre le problème de conception équivalent au problème standard de la conception des observateurs lorsque toutes les entrées sont connues. Les conditions de convergence globale de l'observateur d'entrée inconnue d'ordre plein pour les systèmes avec multiples retards sont concentrées dans le théorème suivant:

**Théorème 4.1** [Ben Warrad et al., 2018b] :

Considérons le système (4.1) avec les hypothèses (A1-A3) présentées ci-dessus. l'observateur à entrées inconnues d'ordre plein (4.2) est convergent ( $e(t) \rightarrow 0$  lorsque

$t \rightarrow \infty$ ) pour tout  $x(0)$ ,  $d(t)$  et  $u(t)$  et pour tout retard constant, s'il existe une matrice  $R \in \mathcal{R}^{n \times n}$  symétrique et définie-positive qui vérifie l'inégalité matricielle suivante :

$$N^T R + RN < 0 \quad (4.5)$$

et si la matrice  $P = (I + EC) \in \mathcal{R}^{n \times n}$  vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} NP + LC - PA_0 = 0, \\ JC - PA_1 = 0 \\ G_i - PB_i = 0 \quad \forall i = 0 \dots k, \\ PD = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

**Preuve:**

Définir le vecteur d'erreur de reconstruction de l'observateur comme étant la différence entre l'état estimé  $\hat{x}(t)$  décrit par la deuxième équation (4.2) et le vecteur d'état associé au système (4.1) comme:

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t) = \zeta(t) - x(t) - Ey(t) = \zeta(t) - (I + EC)x(t). \quad (4.7)$$

la dynamique du vecteur d'erreur d'estimation est alors donnée par:

$$\dot{e}(t) = \dot{\zeta}(t) - (I + EC)\dot{x}(t). \quad (4.8)$$

En utilisant (4.1) et (4.2) la dynamique de l'erreur d'estimation devient :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = Ne(t) + [N(I + EC) + LC - (I + EC)A_0]x(t) + [JC - (I + EC)A_1]x(t - \tau_0) \\ + \sum_{i=0}^k ([G_i - (I + EC)B_i]u(t - \tau_{i+1})) - (I + EC)Dd(t). \end{aligned} \quad (4.9)$$

En utilisant la matrice,  $P = (I + EC)$  la dynamique de l'erreur (4.9) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = Ne(t) + (NP + LC - PA_0)x(t) + (JC - PA_1)x(t - \tau_0) \\ + \sum_{i=0}^k ((G_i - PB_i)u(t - \tau_{i+1})) - PDd(t). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Si les conditions (4.6) sont satisfaites, la dynamique de l'erreur de l'observateur est la suivante :  $\dot{e}(t) = Ne(t)$ ; la première condition pour que l'observateur à entrées inconnues soit asymptotiquement stable est liée à la matrice  $N$  qui devrait être Hurwitz

soit donc à l'inégalité matricielle (4.5) qui doit être vérifiée.

Le calcul des matrices N, L, J et P à partir de la première, de la deuxième et de la quatrième équation de (4.6) est une tâche difficile car nous devons calculer quatre matrices en utilisant seulement trois équations. Afin d'utiliser les résultats bien connus obtenus pour l'observateur d'ordre plein classique sans entrées inconnues [Darouach et al., 1994] par moyen de la notation:

$$K_0 = L + NE, \quad (4.11)$$

la première équation (4.6) devient:

$$N = PA_0 - K_0 C. \quad (4.12)$$

En utilisant maintenant l'équation (4.11) et (4.12), l'observateur (4.2) peut être écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = (PA_0 - K_0 C)\zeta(t) + Ly(t) + Jy(t - \tau_0) + \sum_{i=0}^k G_i u(t - \tau_{i+1}), \\ \hat{x}(t) = \zeta(t) - Ey(t). \end{cases} \quad (4.13)$$

Si la paire  $(PA_0, C)$  n'est pas observable, le calcul de la matrice  $K_0$  est fait de sorte que l'observateur soit asymptotiquement stable si et seulement si  $(PA_0, C)$  est détectable [Darouach et al., 1994]. En extension de l'approche [Darouach et al., 1994], nous pouvons conclure que les conditions nécessaires et suffisantes pour concevoir un observateur stable sont données par le théorème suivant :

**Theorem 4.2** [Darouach et al., 1994] :

Pour le système (4.1), l'observateur d'ordre plein (4.13) existe si et seulement si:

1)  $\text{rang}(CD) = q$ ;

2)  $\text{rang} \begin{bmatrix} sP - PA_0 \\ C \end{bmatrix} = n, (\forall) s \in \mathbf{C}, \text{Re}(s) \geq 0$ ;

**Preuve:**

La preuve du théorème est une extension de l'approche de [Darouach et al., 1994]. Étant donné que le système (4.13) se présente sous la forme d'une équation d'observateur standard, la matrice  $K_0$  peut être calculée de sorte que l'observateur (4.2) soit

asymptotiquement stable si et seulement si la paire  $(PA_0, C)$  est observable.

Pour calculer  $N, L, J, P,$  and  $G_i,$  nous partitionnons les matrices  $A_0, A_1, C, N, P, L, J$  comme partitionnées suit:

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} A_{0(11)} & A_{0(12)} \\ A_{0(21)} & A_{0(22)} \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} A_{1(11)} & A_{1(12)} \\ A_{1(21)} & A_{1(22)} \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} C_1^T \\ C_2^T \end{bmatrix}, \\ N &= \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

où

$$\begin{aligned} A_0 &\in \mathcal{R}^{n \times n}, A_{0(11)} \in \mathcal{R}^{(n-p) \times (n-p)}, A_{0(12)} \in \mathcal{R}^{(n-p) \times p}, A_{0(21)} \in \mathcal{R}^{p \times (n-p)}, A_{0(22)} \in \mathcal{R}^{p \times p}, \\ A_1 &\in \mathcal{R}^{n \times n}, A_{1(11)} \in \mathcal{R}^{(n-p) \times (n-p)}, A_{1(12)} \in \mathcal{R}^{(n-p) \times p}, A_{1(21)} \in \mathcal{R}^{p \times (n-p)}, A_{1(22)} \in \mathcal{R}^{p \times p}, \\ N &\in \mathcal{R}^{n \times n}, N_{11} \in \mathcal{R}^{(n-p) \times (n-p)}, N_{12} \in \mathcal{R}^{(n-p) \times p}, N_{21} \in \mathcal{R}^{p \times (n-p)}, N_{22} \in \mathcal{R}^{p \times p}, \\ P &\in \mathcal{R}^{n \times n}, P_{11} \in \mathcal{R}^{(n-p) \times (n-p)}, P_{12} \in \mathcal{R}^{(n-p) \times p}, P_{21} \in \mathcal{R}^{p \times (n-p)}, P_{22} \in \mathcal{R}^{p \times p}, \\ L &\in \mathcal{R}^{n \times p}, L_1 \in \mathcal{R}^{(n-p) \times p}, L_2 \in \mathcal{R}^{p \times p}, J \in \mathcal{R}^{n \times p}, J_1 \in \mathcal{R}^{(n-p) \times p}, J_2 \in \mathcal{R}^{p \times p}, \\ C &\in \mathcal{R}^{p \times n}, C_1 \in \mathcal{R}^{p \times (n-p)}, C_2 \in \mathcal{R}^{p \times p}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

La conception de l'observateur est concentrée dans le théorème suivant:

**Théorème 4.3** [Ben Warrad & Boubaker, 2018b]:

Si les conditions de rang dans le théorème 4.2 sont satisfaites, l'observateur à entrées inconnues (4.2) peut être conçu pour le système (4.1) si les conditions suivantes sont vérifiées:

$$\begin{aligned} E &= D(CD)^+ C, \\ P &= I_n - D(CD)^+ C, \\ G_i &= PB_i \text{ pour } i = 0 \dots k, \\ J &= PA_1 C^+, \\ N &= \begin{bmatrix} N_{11} & \left( F_{12} - (F_{11} - F_{12} P_{22}^{-1} P_{21}) (C_1 - C_2 P_{22}^{-1} P_{21})^+ C_2 \right) P_{22}^{-1} \\ N_{21} & \left( F_{22} - (F_{21} - F_{22} P_{22}^{-1} P_{21}) (C_1 - C_2 P_{22}^{-1} P_{21})^+ C_2 \right) P_{22}^{-1} \end{bmatrix}, \\ L &= \begin{bmatrix} \left( F_{11} - F_{12} P_{22}^{-1} P_{21} \right) (C_1 - C_2 P_{22}^{-1} P_{21})^+ \\ \left( F_{21} - F_{22} P_{22}^{-1} P_{21} \right) (C_1 - C_2 P_{22}^{-1} P_{21})^+ \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

où

$$\begin{aligned}
 F_{11} &= P_{11}A_{0(11)} + P_{12}A_{0(21)} - N_{11}P_{11}, \\
 F_{12} &= P_{11}A_{0(12)} + P_{12}A_{0(22)} - N_{11}P_{12}, \\
 F_{21} &= P_{21}A_{0(11)} + P_{22}A_{0(21)} - N_{21}P_{11}, \\
 F_{22} &= P_{21}A_{0(12)} + P_{22}A_{0(22)} - N_{21}P_{21},
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

tandis que  $N_{11}$  et  $N_{21}$  sont des matrices arbitrairement ;  $P_{22}$  devrait être une matrice non singulière.

**Preuve:**

Puisque  $\text{rank}(CD) = q$ , alors la matrice  $(CD)$  a de rang plein colonne, nous pouvons utiliser le pseudo-inverse de  $(CD)$ , donné par  $(CD)^+ = [(CD)^T(CD)]^{-1}(CD)^T$ . A travers de cette matrice pseudo-inverse, nous pouvons résoudre la quatrième équation de (4.6); on obtient successivement::

$$(I + EC)D = 0 \Leftrightarrow D + ECD = 0 \Leftrightarrow E = -D(CD)^+ \tag{4.18}$$

Avec ceci, on obtient  $P = I_n + EC = I_n - D(CD)^+ C$ . En Remplaçant  $P$  dans la troisième équation (4.6), on obtient  $G_i = PB_i = (I_n - D(CD)^+ C)B_i$ . Maintenant, on substituant l'équation (4.14) dans la première équation de (4.6), on obtient

$$\begin{cases}
 N_{11}P_{11} + N_{12}P_{21} + L_1C_1 - P_{11}A_{0(11)} - P_{12}A_{0(21)} = 0_{(n-p) \times (n-p)}, \\
 N_{11}P_{12} + N_{12}P_{22} + L_1C_2 - P_{11}A_{0(12)} - P_{12}A_{0(22)} = 0_{(n-p) \times p}, \\
 N_{21}P_{11} + N_{22}P_{21} + L_2C_1 - P_{21}A_{0(11)} - P_{22}A_{0(21)} = 0_{p \times (n-p)}, \\
 N_{21}P_{12} + N_{22}P_{22} + L_2C_2 - P_{21}A_{0(12)} - P_{22}A_{0(22)} = 0_{p \times p}
 \end{cases} \tag{4.19}$$

En utilisant les quatre premières équations de (4.17), le système (4.19) est divisé en deux sous-systèmes tels que:

$$\begin{cases}
 N_{12}P_{21} + L_1C_1 = F_{11}, \\
 N_{12}P_{22} + L_1C_2 = F_{12},
 \end{cases} \tag{4.20}$$

$$\begin{cases}
 N_{22}P_{22} + L_2C_2 = F_{22}, \\
 N_{22}P_{21} + L_2C_1 = F_{21}.
 \end{cases} \tag{4.21}$$

Sous l'hypothèse que la matrice  $(C_1 - C_2P_{22}^{-1}P_{21}) \in \mathcal{R}^{p \times (n-p)}$  est de rang plein. En résolvant les systèmes (4.20) et (4.21), on obtient:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= (F_{11} - F_{12}P_{22}^{-1}P_{21})(C_1 - C_2P_{22}^{-1}P_{21})^+, \\
 L_2 &= (F_{21} - F_{22}P_{22}^{-1}P_{21})(C_1 - C_2P_{22}^{-1}P_{21})^+, \\
 N_{12} &= (F_{12} - (F_{11} - F_{12}P_{22}^{-1}P_{21})(C_1 - C_2P_{22}^{-1}P_{21})^+ C_2)P_{22}^{-1}, \\
 N_{22} &= (F_{22} - (F_{21} - F_{22}P_{22}^{-1}P_{21})(C_1 - C_2P_{22}^{-1}P_{21})^+ C_2)P_{22}^{-1}.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

On résoud maintenant la seconde équation (4.6), nous obtenons

$$J = PA_1(C)^+ \tag{4.23}$$

Les matrices inconnues d'observateur à entrées inconnues d'ordre plein dépendant du retard (4.2), c'est-à-dire  $N$ ,  $L$ ,  $J$ ,  $P$ , et  $G_i$ , peuvent être déterminées avec succès par rapport aux matrices  $N_{11}$  et  $N_{21}$  choisies de manière aléatoire. Selon le théorème 4.1, la matrice  $N$  obtenue doit satisfaire trois contraintes: 1) il existe une matrice symétrique et définie-positive  $R \in \mathcal{R}^{n \times n}$  qui vérifie l'inégalité matricielle linéaire (4.5); 2) la paire  $(PA_0, C)$  est observable. Si ces deux conditions sont satisfaites, la matrice  $N$  a été obtenue correctement, la dynamique de l'erreur d'observateur a une forme homogène avec un taux de convergence arbitraire pour tout  $x(0)$ ,  $d(t)$  et  $u(t)$  et pour tout retard. Sinon, d'autres matrices aléatoires  $N_{11}, N_{21}$  sont choisies, les matrices de (4.17) sont à nouveau calculées et les systèmes (4.20) et (4.21) sont à nouveau résolus jusqu'à ce que les contraintes présentées ci-dessus soient remplies. En conclusion, aucune condition concernant l'observabilité ou la détectabilité du paire  $(PA_0, C)$  n'est nécessaire dans notre approche de conception, et par conséquent, la seule condition d'existence de l'observateur est  $\text{rank}(CD) = q$ . maintenant, la preuve du théorème est complète.

L'algorithme associé à l'observateur dépendant du retard d'ordre plein est résumé ci-dessous:

**Algorithme 4.1 – Conception de l'observateur à entrées inconnues d'ordre plein**

**Etape 1:** En tenant Compte du système (4.1), vérifier les trois hypothèses ci-dessus A1-A3.

**Etape 2:** Si les conditions d'existence données dans le théorème 4.2 sont vraies, on calcule la matrice inverse généralisée  $(CD)^+$  liée à la matrice  $(CD)$ ; en utilisant cette matrice, on calcule la matrice  $E$  au moyen de la première equation du système (4.16);

ensuite, on calcule respectivement les matrices  $P, G_i$  ( $\forall i=1 \dots k$ ) avec la deuxième, la troisième (4.16).

**Étape 3 :** On partitionne les matrices  $A_0, A_1, C, N, P, L$  et  $J$  selon (4.14).

**Étape 4 :** On choisit les matrices arbitraires  $N_{11}$  et  $N_{21}$ ; les matrices de l'équation (4.17) sont déterminées.

**Étape 5 :** On résout les systèmes (4.20) et (4.21) d'où les matrices  $N, L$  et  $J$  sont construites.

**Étape 6 :** A l'aide de la matrice  $N$  calculée, l'inégalité matricielle linéaire (4.5) est résolue par rapport à  $R$ ; aussi, on calcule les valeurs propres du matrice  $N$ ; si les deux contraintes suivantes sont satisfaites: 1) il existe une matrice  $R \in \mathcal{R}^{n \times n}$  symétrique et définie-positive vérifiant (4.5); 2) la paire  $(PA_0, C)$  est observable (au moins détectable), la matrice  $N$  a été obtenue correctement; sinon, les étapes 4-6 sont répétées jusqu'à ce que les trois conditions soient remplies.

**Étape 7 :** L'observateur décrit par les équations (4.2) est complètement conçu et l'historique temporel des états estimés du système peut être obtenu.

#### **4.4. Conception d'un observateur d'ordre réduit**

La nouvelle approche devrait rendre le problème de conception équivalent au problème standard de la conception des observateurs lorsque toutes les entrées sont connues. Les conditions de convergence globales de l'observateur à entrées inconnues d'ordre réduit pour les systèmes avec des retards multiples sont concentrées dans le théorème suivant:

##### **Théorème 4.4 [Ben Warrad et al., 2018b] :**

Considérons le système (4.1) sous les cinq hypothèses (A4 à A8) présentées ci-dessus; l'observateur à entrées inconnues (4.2) est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une matrice  $\bar{R} \in \mathcal{R}^{s \times s}$  symétrique et définie positive vérifiant l'inégalité matricielle linéaire suivante :

$$\tilde{N}^T \bar{R} + \bar{R} \tilde{N} < 0 \tag{4.24}$$

où  $\tilde{N} = Z^{-1} \bar{N}$  , et s'il existe un vecteur  $\bar{\zeta}(t) = Fx(t)$  tel que les conditions suivantes sont

satisfaites:

$$\begin{cases} \bar{N}F + \bar{L}C - ZFA_0 = 0, \\ \bar{J}C - ZFA_1 = 0, \\ \bar{G}_i - ZFB_i = 0 \quad \forall i = 0 \dots k, \\ ZFD = 0, \\ \bar{E}C + HF = I_n; \end{cases} \quad (4.25)$$

**Preuve:**

Définir le vecteur d'erreur d'observation défini comme la différence entre le vecteur d'estimation  $\hat{\zeta}(t)$  décrit par la deuxième équation (4.3) et le vecteur d'état associé au système (4.1) est donné comme suit:

$$\bar{e}(t) = \hat{\zeta}(t) - \bar{\zeta}(t) \quad (4.26)$$

En utilisant l'équation (4.1), (4.3) et (4.4), la dynamique de l'erreur d'estimation devient:

$$\begin{aligned} Z\dot{\bar{e}}(t) = & \bar{N}\bar{e}(t) + [\bar{N}F - ZFA_0 + \bar{L}C]x(t) + [\bar{J}C - ZFA_1]x(t - \tau_0) + \\ & + \sum_{i=0}^k ([\bar{G}_i - ZFB_i]u(t - \tau_{i+1})) - ZFDd(t). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Si  $\bar{N}F + \bar{L}C - ZFA_0 = 0$ ,  $\bar{J}C - ZFA_1 = 0$ ,  $\bar{G}_i - ZFB_i = 0 \quad \forall i = 0 \dots k$ ,  $ZFD = 0$  alors la dynamique de l'erreur (4.27) peut s'écrire sous cette forme :

$$\dot{\bar{e}}(t) = \tilde{N}\bar{e}(t) \quad (4.28)$$

où  $\tilde{N} = Z^{-1}\bar{N}$

On définit maintenant l'erreur d'estimation de l'état comme suit  $e_x(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ .

De (4.1) et (4.3), nous obtenons  $e_x(t) = (HF - I_n + \bar{E}C)x(t)$ .

Si  $HF - I_n + \bar{E}C = 0$  alors  $e_x(t) = 0$  pour tout  $x(t)$ .

De plus, si la condition (4.24) est satisfaite alors la dynamique d'erreur de l'observateur (4.28) est asymptotiquement stable. Maintenant, la preuve du théorème 4.4 est complète.

Synthèse des gains de l'observateur

Pour calculer les matrices  $F$ ,  $Z$ ,  $\bar{E}$ ,  $\bar{N}$ ,  $\bar{L}$ ,  $\bar{J}$ ,  $H$  et  $\bar{G}_i$ , nous partitionnons les matrices  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $C$ ,  $\bar{N}$ ,  $H$ ,  $\bar{L}$ ,  $\bar{J}$ ,  $F$ ,  $Z$  et  $D$  comme suit:

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} A_{0(11)} & A_{0(12)} \\ A_{0(21)} & A_{0(22)} \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} A_{1(11)} & A_{1(12)} \\ A_{1(21)} & A_{1(22)} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_1 & 0_{p \times q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}, \\ \bar{N} &= \begin{bmatrix} \bar{N}_{11} & \bar{N}_{12} \\ \bar{N}_{21} & \bar{N}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{N}_1 & \bar{N}_2 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}, \bar{L} = \begin{bmatrix} \bar{L}_1 \\ \bar{L}_2 \end{bmatrix}, \bar{J} = \begin{bmatrix} \bar{J}_1 \\ \bar{J}_2 \end{bmatrix}, \bar{E} = \begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \end{bmatrix}, \\ F &= \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{p \times q} & I_{p \times p} \\ 0_{(s-p) \times q} & 0_{(s-p) \times p} \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \end{bmatrix}, Z_1 = \begin{bmatrix} Z_{11} \\ Z_{21} \end{bmatrix}, Z_2 = \begin{bmatrix} Z_{12} \\ Z_{22} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

où

$$\begin{aligned} A_0 &\in \mathcal{R}^{n \times n}, A_{0(11)} \in \mathcal{R}^{q \times q}, A_{0(12)} \in \mathcal{R}^{q \times p}, A_{0(21)} \in \mathcal{R}^{p \times q}, A_{0(22)} \in \mathcal{R}^{p \times p}, \\ A_1 &\in \mathcal{R}^{n \times n}, A_{1(11)} \in \mathcal{R}^{q \times q}, A_{1(12)} \in \mathcal{R}^{q \times p}, A_{1(21)} \in \mathcal{R}^{p \times q}, A_{1(22)} \in \mathcal{R}^{p \times p}, \\ \bar{N} &\in \mathcal{R}^{s \times s}, \bar{N}_{11} \in \mathcal{R}^{q \times p}, \bar{N}_{12} \in \mathcal{R}^{q \times (s-p)}, \bar{N}_{21} \in \mathcal{R}^{(s-q) \times p}, \bar{N}_{22} \in \mathcal{R}^{(s-q) \times (s-p)}, \\ H &\in \mathcal{R}^{n \times s}, H_{11} \in \mathcal{R}^{q \times p}, H_{12} \in \mathcal{R}^{q \times (s-p)}, H_{21} \in \mathcal{R}^{p \times p}, H_{22} \in \mathcal{R}^{p \times (s-p)}, \\ \bar{L} &\in \mathcal{R}^{s \times p}, \bar{L}_1 \in \mathcal{R}^{q \times p}, \bar{L}_2 \in \mathcal{R}^{(s-q) \times p}, \bar{J} \in \mathcal{R}^{s \times p}, \bar{J}_1 \in \mathcal{R}^{q \times p}, \bar{J}_2 \in \mathcal{R}^{(s-q) \times p}, \\ \bar{E} &\in \mathcal{R}^{n \times p}, \bar{E}_1 \in \mathcal{R}^{q \times p}, \bar{E}_2 \in \mathcal{R}^{p \times p}, D \in \mathcal{R}^{n \times q}, D_1 \in \mathcal{R}^{q \times q}, D_2 \in \mathcal{R}^{p \times q}, \\ Z &\in \mathcal{R}^{s \times s}, Z_{11} \in \mathcal{R}^{q \times p}, Z_{12} \in \mathcal{R}^{q \times (s-p)}, Z_{21} \in \mathcal{R}^{(s-q) \times p}, Z_{22} \in \mathcal{R}^{(s-q) \times (s-p)}, \\ Z_1 &\in \mathcal{R}^{s \times p}, Z_2 \in \mathcal{R}^{s \times (s-p)}, \bar{N}_1 \in \mathcal{R}^{s \times p}, \bar{N}_2 \in \mathcal{R}^{s \times (s-p)}, \\ C &\in \mathcal{R}^{p \times n}, C_1 \in \mathcal{R}^{p \times p}, \tilde{C}_1 \in \mathcal{R}^{p \times q}, \tilde{C}_2 \in \mathcal{R}^{p \times p}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

La conception de l'observateur à entrées inconnues d'ordre réduit est concentrée dans le théorème suivant:

**Theoreme 4.5** [Ben Warrad et al., 2018b]:

Considérons le système multivariable (4.1) sous les hypothèses A4-A8; l'observateur à entrée inconnue d'ordre réduit dépendant du retard (4.3) est asymptotiquement stable si et seulement si les conditions suivantes sont remplies:

- 1) Il existe une matrices  $\bar{R} > 0$ , satisfaisant L'inégalité matricielle linéaire (4.24),
- 3) Les matrices  $Z$ ,  $\bar{G}_i$ ,  $\bar{N}$ ,  $\bar{L}$ ,  $\bar{J}$ ,  $\bar{E}$  et  $H$  sont données par:

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= I_{s \times p} - \bar{D}_2 (C_1 D_2)^+ C_1, \\
 \bar{G}_i &= \begin{bmatrix} 0_{s \times q} & Z_1 \end{bmatrix} B_i \quad \forall i = 1 \cdots k, \\
 \bar{N} &= \begin{bmatrix} Z_1 (A_{0(14)} - A_{0(13)} \tilde{C}_1^+ \tilde{C}_2) & \bar{N}_2 \end{bmatrix}, \\
 \bar{L} &= Z_1 A_{0(21)} \tilde{C}_1^+, \\
 \bar{J} &= (ZFA_1) C^+, \\
 \bar{E} &= \begin{bmatrix} \tilde{C}_1^+ \\ I_p - \tilde{C}_1 (C_1 \tilde{C}_1)^+ C_1 \end{bmatrix}, \\
 \bar{H} &= \begin{bmatrix} -\tilde{C}_1^+ \tilde{C}_2 & 0_{q \times (s-p)} \\ I_p - \tilde{C}_2 + \tilde{C}_1 (C_1 \tilde{C}_1)^+ C_1 \tilde{C}_2 & 0_{p \times (s-p)} \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Lorsque les matrices  $Z_2 \in \mathcal{R}^{s \times (s-p)}$  et  $\bar{N}_2 \in \mathcal{R}^{s \times (s-p)}$  sont choisies arbitrairement,  $\tilde{C}_1 \in \mathcal{R}^{p \times q}$  et  $\tilde{C}_2 \in \mathcal{R}^{p \times p}$  sont des sous-matrices de la matrice  $C$ , et  $\bar{D}_2 = I_{s \times p} D_2$ .

**Preuve :**

En utilisant les équations (4.29) et (4.30), la quatrième équation de (4.25) devient :

$$Z_1 D_2 = 0_{s \times q}, \tag{4.32}$$

Pour calculer la matrice  $Z_1$  à partir de cette équation, on peut choisir :

$$Z_1 = I_{s \times p} + T_1 C_1, \tag{4.33}$$

avec  $T_1 \in \mathcal{R}^{s \times p}$  une matrice inconnue à calculer. De plus la notation  $\bar{D}_2 = I_{s \times p} D_2$ , on obtient  $T_1 = -\bar{D}_2 (C_1 D_2)^+$ , où  $(C_1 D_2)^+$  est le pseudo-inverse généralisée de  $(C_1 D_2)$ , donnée par  $(C_1 D_2)^+ = [(C_1 D_2)^T (C_1 D_2)]^{-1} (C_1 D_2)^T$ . Selon l'hypothèse A5 et du fait que la matrice  $C_1$  est de rang plein, on peut conclure que  $\text{rang}(C_1 D_2) = q$ , et le pseudo-inverse généralisé de  $(C_1 D_2)$  peut toujours être obtenue.

L'équation (4.33) peut s'écrire comme suit :

$$Z_1 = I_{s \times p} - \bar{D}_2 (C_1 D_2)^+ C_1, \quad (4.34)$$

et la matrice  $Z_2 \in \mathcal{R}^{s \times (s-p)}$  est choisie arbitraire.

En utilisant l'expression de la matrice  $Z$ , la troisième équation de (4.25), on obtient l'expression du matrice  $\bar{G}_1$ .

Nous choisissons arbitrairement les matrices  $N_{12}$  et  $N_{22}$ , par conséquence, la matrice  $\bar{N}_2$  est choisie arbitrairement. En utilisant la forme de la matrice  $C$  donnée dans (4.29) et (4.30), c'est-à-dire  $C = [C_1 \ 0_{p \times q}] = [\tilde{C}_1 \ \tilde{C}_2]$ , la première équation de (4.25) peut être écrite sous la forme d'un système matriciel comme suit :

$$\begin{cases} -Z_{11} A_{0(21)} + \bar{L}_1 \tilde{C}_1 = 0_{q \times q}, \\ \bar{N}_{11} - Z_{11} A_{0(22)} + \bar{L}_1 \tilde{C}_2 = 0_{q \times p}, \\ -Z_{21} A_{0(21)} + \bar{L}_2 \tilde{C}_1 = 0_{(s-q) \times q}, \\ \bar{N}_{21} - Z_{21} A_{0(22)} + \bar{L}_2 \tilde{C}_2 = 0_{(s-q) \times p}; \end{cases} \quad (4.35)$$

En résolvant le système (4.35), on obtient:

$$\begin{aligned} \bar{N}_{11} &= Z_{11} (A_{0(22)} - A_{0(21)} \tilde{C}_1^+ \tilde{C}_2), & \bar{L}_1 &= Z_{11} A_{0(21)} \tilde{C}_1^+, \\ \bar{N}_{21} &= Z_{21} (A_{0(22)} - A_{0(21)} \tilde{C}_1^+ \tilde{C}_2), & \bar{L}_2 &= Z_{21} A_{0(21)} \tilde{C}_1^+; \end{aligned} \quad (4.36)$$

en ayant à l'esprit que  $p \geq q$ , il en résulte que  $\tilde{C}_1$  est une sous-matrice de la matrice non singulière  $C_1$ ; alors on en déduit que la matrice  $\tilde{C}_1$  est de rang plein c'est à dire  $\text{rank}(\tilde{C}_1) = q$ .

En résolvant la deuxième équation dans le système (4.25), nous obtenons :

$$\bar{J} = (ZFA_1)C^+. \quad (4.37)$$

En utilisant (4.29) et (4.30), la cinquième équation dans le système (4.25) peut être transformée en un système matriciel comme suit :

$$\begin{cases} \bar{E}_1 \tilde{C}_1 = I_q, \\ \bar{E}_1 \tilde{C}_2 + H_{11} = 0_{q \times p}, \\ \bar{E}_2 \tilde{C}_1 = 0_{p \times q}, \\ \bar{E}_2 \tilde{C}_2 + H_{21} = I_p; \end{cases} \quad (4.38)$$

A partir des deux premières équations du système (4.38), on obtient :  $\bar{E}_1 = \tilde{C}_1^+$  et  $H_{11} = -\bar{E}_1 \tilde{C}_2 = -\tilde{C}_1^+ \tilde{C}_2$ ; d'autre part, la matrice  $\bar{E}_2$  est calculée à partir de la troisième équation du système (4.35) comme suit :

$$\bar{E}_2 = I_p + T_2 C_1, \quad (4.39)$$

où  $T_2 \in \mathcal{R}^{p \times p}$  est une matrice inconnue à calculer. Car  $C_1 \in \mathcal{R}^{p \times p}$  est une matrice non singulière et  $\text{rank}(\tilde{C}_1) = q$ , on obtient :  $\text{rank}(C_1 \tilde{C}_1) = q$ , c'est-à-dire  $(C_1 \tilde{C}_1)$  est une matrice de rang plein colonne. On obtient successivement:  $T_2 = -\tilde{C}_1 (C_1 \tilde{C}_1)^+$  et  $\bar{E}_2 = I_p - \tilde{C}_1 (C_1 \tilde{C}_1)^+ C_1$ . De la quatrième équation du système (4.38), nous obtenons  $H_{12} = I_p - \tilde{C}_2 + \tilde{C}_1 (C_1 \tilde{C}_1)^+ C_1 \tilde{C}_2$ ; par concaténation des matrices  $\bar{E}_1, \bar{E}_2, H_{11}, H_{21}, H_{12} = 0_{q \times (s-p)}$  et  $H_{22} = 0_{p \times (s-p)}$ , les deux dernières équations (4.31) sont obtenues.

Maintenant, la démonstration du théorème 4.5 est complète.

#### **Algorithme 4.2 – Conception de l'observateur à entrées inconnues d'ordre réduit**

**Etape 1:** En tenant compte du système (4.1), vérifier les quatres hypothèses A4-A8.

**Etape 2:** La matrice  $F$  de l'équation (4.29) est choisie; les matrices  $A_0, A_1, C, D, \bar{N}, H, \bar{L}, \bar{J}, \bar{E}$ , et  $Z$  ont partitionnées selon (4.29) et (4.30). Les matrices  $Z_{12}$  et  $Z_{22}$ , et par suite suite la matrice  $Z_2$ , sont choisies abitraires; les matrices  $Z$  et  $\bar{G}_i \forall i = 1 \dots k$  sont obtenues en utilisant la relaion (4.31).

**Etape 3:** Les matrices  $\bar{N}_{12}, \bar{N}_{22}$  et par suite la matrice  $\bar{N}_2$  sont choisies de manière arbitraire; en résolvant le système (4.35) par rapport à  $\bar{N}_{11}, \bar{N}_{21}, \bar{L}_1, \bar{L}_2$ , ces quatre matrices sont obtenues en utilisant (4.3); ensuite les matrices  $\bar{N}, \bar{J}$  et  $\bar{L}$  sont calculées en

utilisant (4.31). Les matrices  $\bar{E}$  et  $H$  sont calculées en résolvant le système (4.38).

**Etape 4:** En utilisant la matrice calculée ci-dessus  $\bar{N}$ , on vérifie s'il existe une matrice  $\bar{R} \in \mathcal{R}^{n \times n}$  symétrique définie positive qui vérifie (4.24); la matrice  $\bar{N}$  a été obtenue correctement; sinon, les étapes 2 à 4 sont répétées jusqu'à ce que cette condition soit remplie.

**Etape 5 :** L'observateur décrit par les équations (4.3) est complètement conçu et l'historique temporel des états estimés du système peut être obtenu.

#### 4.5. Application

Le processus à quatre réservoirs décrit au premier chapitre est utilisé pour montrer l'efficacité des algorithmes d'estimation d'état proposés dans ce chapitre.

Pour les résultats de simulation les matrices associées au modèle (4.1) pour le cas particulier où  $k = 1$ , ou encore du modèle (1.9) décrit au premier chapitre, sont données par [Ben Warrad et al., 2018b]:

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.0021 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0021 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0424 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0424 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} 0.1113 \times \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0.1042 \times \gamma_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0424 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0424 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & (1-\gamma_2) \times 0.1042 \\ (1-\gamma_1) \times 0.1042 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D^T = \begin{bmatrix} 10 & 20 & -12 & 15 \\ -23 & 28 & 30 & -36 \end{bmatrix}.$$

Ces dernières matrices ont été obtenues pour les paramètres physiques suivants du processus à quatre réservoirs décrit au premier chapitre par (1.9) tels que:

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = \pi \left( \frac{D_1}{2} \right)^2,$$

avec  $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = 9.2 \text{ cm},$

$$h_{max} = 50 \text{ cm}, h_{i0} = \frac{h_{max}}{2} = 25 \text{ cm}, g = 981 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2},$$

$$a_1 = a_2 = \pi \left( \frac{d_1}{2} \right) \text{ avec } d_1 = 0.2 \text{ cm},$$

$$a_3 = a_4 = \pi \left( \frac{d_3}{2} \right)^2 \text{ avec } d_3 = 0.9$$

$$k_1 = 7.39, k_2 = 6.92.$$

On prendra aussi :

$$\gamma_1 = 0.333, \gamma_2 = 0.307.$$

$$\tau_1 = 5 \text{ s}, \tau_2 = 2 \text{ s}, \tau_3 = 4 \text{ s}.$$

Pour les observateurs à entrées inconnues, le vecteur des conditions initiales est pris tel que :

$$x(0) = [-4 \quad 4 \quad 6 \quad -5]^T,$$

Le gain de contrôle (4.5) a été tiré de la bibliographie [El Haoussi et al., 2011] :

$$K = \begin{bmatrix} -0.1603 & -0.1765 & -0.0795 & -0.2073 \\ -0.1977 & -0.1579 & -0.2288 & -0.0772 \end{bmatrix}$$

#### 4.5.1. Implémentation de l'observateur à entrées inconnues d'ordre plein

L'application de l'Algorithme 4.1 donne:

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1.264 & -0.032 \\ -1.54 & 0.02 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.26 & -0.032 & 1 & 0 \\ -1.54 & -0.020 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.046 & -0.01 \\ -0.057 & 0.06 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.072 \\ 0.074 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -0.0424 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -0.0424 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.05 & -0.013 \\ -0.06 & 0.08 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.043 & 0.095 \\ -0.025 & 0.017 \end{bmatrix}.$$

### 4.5.2. Implémentation de l'observateur à entrées inconnues d'ordre réduit dépendant du retard

Pour l'application de l'Algorithme 4.2, nous fixons  $n = 4$ ,  $m = 2$ ,  $p = 2$ ,  $q = 2$ ,  $s = 3$ . Les résultats de simulation donnent les résultats suivants:

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{G}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0 \\ 0 & 0.07 \end{bmatrix}, \bar{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.072 \\ 0.074 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{N} = 10^{13} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2.945 \\ 0 & 0 & 0.46 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.05 & -0.013 \\ -0.06 & 0.08 \end{bmatrix}, \bar{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.043 & 0.095 \\ -0.025 & 0.017 \end{bmatrix},$$

$$Z = 10^{-14} \begin{bmatrix} 0.2220 & -0.0439 & 0.5255 \\ 0.1377 & 0.0111 & 0.8992 \\ 0 & 0 & 0.9452 \end{bmatrix}$$

La figure 4.1 montre l'efficacité de deux observateurs (4.2) et (4.3) conçus pour le processus à quatre réservoirs en boucle fermée pour lesquelles les variables  $h_1$  et  $h_2$  (variation des niveaux d'eau dans les réservoirs 1 et 2) sont mesurées et seules les variables  $h_3$  et  $h_4$  (variation des niveaux d'eau dans les réservoirs 3 et 4) sont estimées. Les nouvelles procédures de conception des observateurs d'ordre plein et d'ordre réduit sont également efficaces car elles peuvent être réalisées selon des algorithmes bien déterminés qui assure la stabilité asymptotique. Le principal avantage de la nouvelle procédure de conception d'observateur d'ordre réduit pour le système à multiple retards proposé est la diminution du nombre des capteurs nécessaires et par conséquent le nombre de pannes qui peuvent en découler.

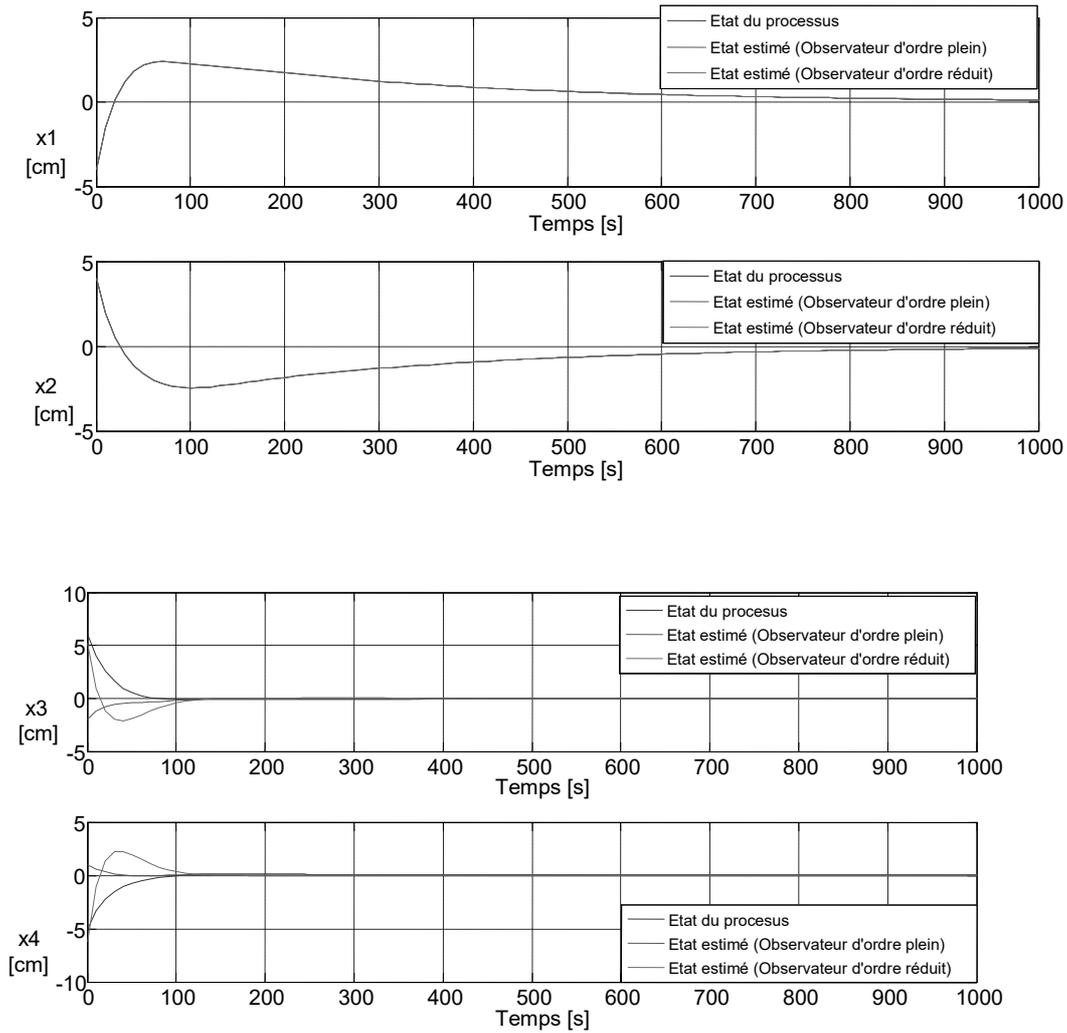


Figure 4.1- Estimation des états du processus à quatre réservoirs via les observateurs à entrées inconnues d'ordre plein et d'ordre réduit

#### 4.6. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé deux approches d'observateurs à entrées inconnues pour les systèmes linéaires à retards multiples: un observateur à entrées inconnues d'ordre complet et un observateur à entrées inconnues d'ordre réduit. Le processus à quatre réservoirs a été utilisé comme référence pour prouver l'efficacité des nouveaux algorithmes d'observateur pour le cas du modèle à non minimum de phase.

## **Conclusion générale**

Les travaux présentés dans ce mémoire apportent une contribution aux problèmes d'estimation d'état des systèmes linéaires à temps continu à retards multiples soumis à des entrées inconnues pour lesquels très peu de résultats sont disponibles. Pour résoudre ce problème difficile, plusieurs algorithmes ont été proposés dans le cadre de cette thèse pour des observateurs dépendants et indépendants des retards. Des solutions pour des observateurs d'ordre plein et aussi d'ordre réduits contrôlés via des lois de commande tenant compte des retards multiples ont été aussi proposés. Toutes les approches théoriques proposées ont été validées sur un benchmark.

Quoique les contributions présentées dans le cadre de ces travaux de thèse semblent être à caractère théorique, les retombées sur un plan industriel sont certaines. Pour ce faire, nous nous sommes intéressés à la modélisation et l'application de tous les résultats théoriques développés dans le cadre de cette thèse sur un processus à quatre réservoirs pour le cas du modèle à non minimum de phase intégrant des retards sur les états et aussi sur les entrées. Ce choix nous a permis d'illustrer l'application de nos résultats sur des systèmes multivariables intégrant les effets néfastes des zéros à non minimum de phase et des retards multiples.

Pour la modélisation des systèmes multivariables intégrant plusieurs retards et pour des objectifs de synthèse d'observateurs robustes, nous avons eu recours à la méthode de collocation orthogonale qui nous a permis de transformer le modèle de dimension infinie du système retardé décrit par un ensemble d'équations à dérivées partielles à un modèle de dimension finie régi par un système d'équations à dérivées ordinaires. Une nouvelle représentation d'état a été proposée dans ce sens et nous a permis d'apprécier la simplicité de la mise en œuvre de la méthode de collocation orthogonale malgré l'exigence du respect de certaines règles.

En se basant sur la nouvelle représentation d'état, deux approches d'observateurs à entrées inconnues ont été conçues : l'une dépendante des retards et la seconde indépendante des retards. Les conditions de convergence et de stabilité asymptotique des observateurs à entrées inconnues ont été formulées ainsi que les algorithmes de synthèse des deux observateurs.

L'une des principales contributions de cette thèse est la synthèse d'observateurs à entrées inconnues d'ordre plein mais aussi d'ordre réduit dépendants du retard à base de contrôleurs synthétisés pour des systèmes à multiples retards. Les preuves de stabilité

## *Conclusion générale*

---

des observateurs ont été bien établies ainsi que les algorithmes de synthèse de ces deux observateurs.

Dans le cadre de cette thèse seul le problème de la robustesse des observateurs par rapport aux entrées inconnues été considéré pour élaborer des observateurs à entrée inconnues d'ordre plein et d'ordre réduit. Nous avons considéré que des perturbations externes qui sont des entrées inconnues. Le cas des perturbations internes qui entraînent à des variations paramétriques ou à des retards variables sont considérés dans travaux ultérieurs. De plus des études complémentaires avec des observateurs à mode glissant feront aussi l'objet des projets ultérieurs. De plus la validation expérimentale sur des systèmes réels reste un point important à explorer. Par ailleurs, un autre problème lié à la mise en œuvre pratique peut survenir, celui de la discrétisation et d'échantillonnage du système. En effet, toute l'étude a été basée sur des systèmes continus.

## **Références**

[Baker & Graves, 1996] Baker G.A, Graves-Morris P. Padé Approximants, Cambridge U.P.

[Belhaj & Boubaker, 2017] Belhaj, W., & Boubaker, O., “MIMO PI controllers for LTI systems with multiple time delays based on ILMIs and sensitivity functions,” *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2017.

[Ben Warrad & Boubaker, 2016 a] Ben Warrad, S., Boubaker, O., “Robust Observer for Multiple Time-delay Systems with Unknown Inputs,” 16th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA), Monastir, 21-23 December 2015, pp. 859-864.

[Ben Warrad & Boubaker, 2016b] Ben Warrad S. & Boubaker O., “Full Order Unknown Inputs Observer for Multiple Time-delay Systems,” *International Journal on Smart Sensing and Intelligent Systems*, 9 (4): 1750-1775.

[Ben Warrad & Boubaker, 2018a] Ben Warrad S., Boubaker O., “Design of Unknown Input Observers for Linear Systems with State and Input Delays,” 15th IEEE International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (SSD), Hammamet, Tunisia, Mars 2018, pp. 1161-1165.

[Ben Warrad et al., 2018b] Ben Warrad S. & Boubaker O., Lungu M., Mobayen S., “Full and Reduced-Order Unknown Input Observer Design for Linear Time-Delay Systems with Multiple Delays,” *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2018, 13 pages, 2018. [doi.org/10.1155/2018/1745734](https://doi.org/10.1155/2018/1745734).

[Ben Warrad et al., 2019] Ben Warrad S., Boubaker O., Lungu M., Zhu, Q. , “On Unknown Inputs Observer Design for Linear Systems with Multiple Delays in States and Inputs,” In : *New Trends in Observer-based Control - An Introduction to Design Approaches and Engineering Applications*, Boubaker, O., Zhu, Q., Ragot, J., Mahmoud, M.S., Karimi, H.R., Davila, J. (ed.), Elsevier Academic Press: London, United Kingdom.

[Boubaker, 2000] Boubaker, O. “Estimation et Commande à Structure Variable des Systèmes de Dimension Infinie,” Thèse de doctorat en Génie Electrique de l'Ecole Nationale d'ingénieurs de Tunis.

- [Boubaker, 2005] Boubaker, O., “Robust Observers for Linear Systems with Unknown Inputs: a Review,” *International Journal on Automatic Control and System Engineering*, 5(2): 45-51.
- [Boubaker et al., 1997] Boubaker, O., R. M'hiri, M. Ksouri, and J. P. Babary. "Sliding Control of Linear Input Delay Systems." In *IMACS*, vol. 97, pp. 91-96. 1997.
- [Boubaker et al., 2001] Boubaker O., Babary J.P., Ksouri M., “MIMO sliding mode control of a distributed parameter denitrifying biofilter,” *Applied Mathematical Modelling*, 25 (8): 671-682.
- [Boubaker et al., 2017] Boubaker, O., Balas, V. E. , Benzaouia, A., Chaabane, M., Mahmoud, M. S., Zhu, Q. “Time-Delay Systems: Modeling, Analysis, Estimation, Control, and Synchronization,” *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 1398904, Vol. 2017.
- [Boubaker & Iriarte 2017] Boubaker O. & Iriarte, R. (ed.), “The Inverted Pendulum in Control Theory and Robotics: From Theory to New Innovations,” *Institution of Engineering and Technology (Vol. 111): London, United Kingdom*.
- [Bououden et al., 2017] Bououden, S., Chadli, M., Zhang, L., Yang, T., “Constrained Model Predictive Control for Time-varying Delay Systems: Application to an Active Car Suspension,” *International Journal of Control, Automation and Systems*, 14(1): 51-58
- [Cai et al., 2018] Cai, X., Bekiaris-Liberis, N., Krstic, M., “Input-to-State Stability and Inverse Optimality of Linear Time-Varying-Delay Predictor Feedbacks,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, 63(1): 233-240.
- [Cairano et al., 2007] Cairano, S. D., Bemporad, A., Kolmanovsky, I. V., Hrovat, D., “Model Predictive Control of Magnetically Actuated Mass Spring Dampers for Automotive Applications,” *International Journal of Control*, 80(11): 1701-1716.
- [Cao et al., 2017] Cao, W., Liu, Z., Chang, Y., Szumanowski, A. “Direct Yaw-Moment Control of All-Wheel-Independent-Drive Electric Vehicles with Network-Induced Delays through Parameter-Dependent Fuzzy SMC Approach,” *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 5170492, Vol. 2017.

[Damak, 1994] Damak T., “Modélisation, estimation et commande de procédés biotechnologiques de type hyperbolique,” Thèse de doctorat en Automatique de l'Université Paul Sabatier de Toulouse, Rapport LAAS N°94022 N° d'ordre 1671.

[Darouach, 2010] Darouach, M., “Full order unknown inputs observers design for delay systems,” *Asian Journal of Control*, 9(4): 426–434.

[Darouach et al., 1994] M. Darouach, M. Zasadzinsk & S. J. Xu, “Full-order observers for linear systems with unknown inputs”, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 39: 606-609.

[Dugar & Verriest, 1997] Dugar L., Verriest, E. I. “Stability and control of time delay systems”, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, London, Springer, Vol. 228.

[Dormido et al., 2008] Dormido, R., Vargas, H., Duro, N., Sanchez, J., Dormido-Canto, S., Farias, Dormido, S., “Development of a Web-based Control Laboratory for Automation Technicians: The Three-tank System,” *IEEE Transactions on Education*, 51(1), 35-44

[El Haoussi et al., 2011] El Haoussi ,F., Tissir ,E.H., Tadeo, F., Hmamed, A. “Delay-Dependent Stabilisation of Systems with Time-delayed State and Control: Application to a Quadruple-tank Process,” *International Journal of Systems Science*, 42:1, 41-49.

[Fantoni & Lozano , 2002] Fantoni, I., & Lozano, R. “Stabilization of the Furuta Pendulum around its Homoclinic Orbit,” *International Journal of Control*, 75(6), 390-398.

[Fattouh & Sename, 1999] Fattouh, A., Sename, O., Michel D., J., “An Unknown Input Observer Design for Linear Time-Delay Systems,” In: *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4222–4227.

[Fridman, 2014] Fridman, E., “Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control,”. Springer: Berlin.

[Fu et al. 2004] Fu, Y. M, Duan, G. R. and Song S. M, “Design of Unknown Input Observer for Linear Time-delay Systems,” *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 2 (4): 530-535.

- [Gao et al., 2016] Gao N., Darouach M., Voos H., Alma M., “New unified  $H_\infty$  dynamic observer design for linear systems with unknown inputs,” *Automatica*, 65: 43-52.
- [Gatzke et al., 2000] E.P. Gatzke, E.S. Meadows, C. Wang, F.J. Doyle, “Model Based Control of a four-tank system,” *Computers and Chemical Engineering*, 24 (2-7): 1503-1509.
- [Gouta et al., 2017] Gouta, H., Saïd, S. H., Barhoumi, N., & M’Sahli, F., “Generalized Predictive control for a Coupled Four Tank MIMO System Using a Continuous-discrete Time Observer,” *ISA transactions*, 67: 280-292.
- [Gouta et al., 2015] Gouta, H., Said, S. H., M’Sahli, F., “Observer-based Backstepping Liquid Level Controller for a Quadruple Tank Process,” 16th IEEE International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA), 2015, pp. 351-356.
- [Gu et al., 2003] K. Gu, V.L. Kharitonov and J. Chen, “Stability of Time-delay Systems”, Birkhauser: Boston.
- [Huang et al., 2017] Huang, C., Canuto, E., Novara, C., “The Four-tank Control Problem: Comparison of two disturbance rejection control solutions,” *ISA transactions*, 71, 252-271.
- [Jankovic et al.,1996] Jankovic, M., Fontaine, D., Kokotovic, P. V., “TORA example: Cascade-and passivity-based control designs,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 4(3), 292-297.
- [Johansson, 2000] Johansson, K. H., “The quadruple-Tank Process: A Multivariable Laboratory Process with an Adjustable Zero,” *IEEE Transactions on control systems technology*, 8(3), 456-465.
- [Keviczky & Bányász, 2007] Keviczky L. & Bányász Cs., “Robust Stability and Performance of Time-delay Control Systems,” *ISA Transactions*, 46 (2), 233-237.
- [Kharitonov, 1999] Kharitonov V. L., “Robust Stability Analysis of Time-delay Systems: A Survey”, *Annual Reviews in Control*, vol. 23, 1999, pp. 185-196.

[Koenig et al., 2004] Koenig, D., Marx B. and Sename, O., “Unknown Inputs Proportional Integral Observers for Descriptor Systems with Multiple Delays and Unknown Inputs”, In Proceeding of the American Control Conference, Boston.

[Lai et al., 2016] Lai, Z., Wu, P., Yang, S., and Wu, D. “A Control Method to Balance the Efficiency and Reliability of a Time-Delayed Pump-Valve System,” *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 5898209, Vol. 2016.

[Lefèvre et al., 2000] Lefèvre, L., Dochain, D., Feyeo F., Magnus, A. “Optimal Selection of Orthogonal Polynomials Applied to the Integration of Chemical Reactor equations by Collocation Methods,” *Computers and Chemical Engineering*, 24: 2571-2588.

[Li et al., 2014] Li, H., Jing, X., & Karimi, H. R. Output-Feedback-based  $H_{\infty}$  Control for Vehicle Suspension Systems with Control Delay. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 61(1): 436-446

[Liu & Zhou, 2017] Liu, Q., & Zhou, B., “Extended Observer based Feedback Control of Linear Systems with both State and Input Delays.,” *Journal of the Franklin Institute*, 354(18): 8232-8255.

[Lungu & Lungu, 2014] Lungu M & Lungu R., “Design of Full-order Observers for Systems with Unknown Inputs by using the Eigenstructure Assignment.,” *Asian Journal of Control*, 16 (5): 1470-1481.

[Lungu M & Lungu, 2012] Lungu M., Lungu R., “Full-order Observer Design for Linear Systems with Unknown Inputs,” *International Journal of Control*; 85 (10): 1602-1615.

[Mahmoud, 2017] Mahmoud, M. S. “Recent Progress in Stability and Stabilization of Systems with Time-delays,” *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 7354654, Vol. 2017.

[Manaa et al., 2015] Manaa, I., Barhoumi, N., M’Sahli, F., “Unknown Inputs Observers Design for a Class of Nonlinear Switched Systems,” *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 23 (1): 45-54.

[Matsuno et al., 1994] Matsuno, F., Asano, T., & Sakawa, Y., “Modeling and Quasi-Static Hybrid Position/force Control of Constrained Planar Two-link Flexible Manipulators,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 10 (3): 287-297.

[Niculescu, 2001] Niculescu, S.I., “Delay Effects on Stability”, Springer: New York.

[Nihtila et al., 1994] Nihtila, M.T., Damak T., Babary, J. P. “Recursive Input Delay Estimation in Linear Systems”, *IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation*, pp.4-6.

[Pappas & Zohdy, 2014] Pappas G. P., Zohdy M. A., “Extended Kalman Filtering and Pathloss modeling for Shadow Power Parameter Estimation in Mobile Wireless Communications”, *International Journal on Smart Sensing and Intelligent Systems*, 7 (2): 898-924.

[Qian et al., 2017] Qian, W., Yuan, M., Wang, L., Bu, X., & Yang, J., “Stabilization of Systems with Interval Time-varying Delay based on Delay Decomposing Approach,” *ISA transactions*, 70: 1-6.

[Richard, 2003] Richard J.P. “Time Delay Systems: an Overview of Some Recent Advances and Open Problems.” *Automatica* 39:1667-1694.

[Salamon, 1980] Salamon, D. “Observers and Duality Between Observation and State Feedback for Time Delay Systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25: 6: 1187-1192.

[Sanz et al., 2017] Sanz, R., Garcia, P., Zhong, Q. C., & Albertos, P., “Predictor-based Control of a Class of Time-delay Systems and its Application to Quadrotors,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 64(1): 459-469.

[Sename, 2001] Sename, O., “New trends in Design of Observers for Time-delay Systems,” *Kybernetika* , 37 (4): 427 - 458

[Shneiderman & Palmor, 2010] Shneiderman, D., & Palmor, Z. J., “Properties and Control of the Quadruple-tank Process with Multivariable Dead-times,” *Journal of Process Control*, 20(1): 18-28.

[Smida et al., 2015] Smida, F., Saïd, S. H., M'Sahli, F., “Cascade Unknown Input

Observers Applied to a Quadruple Tank Process,” 2015 12th IEEE International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (SSD), pp. 1-6.

[Villadsen & Michelsen, 1978] J.V. Villadsen & L. Michelsen, “Solution of Differential Equation Models by Polynomial Approximation”, Prentice Hall, London, UK.

[Witrant et al., 2016] Witrant, E., Fridman, E., Sename, O., Dugard, L. “Recent Results on Time-Delay Systems,” Springer International Publishing.

[Wysocki, 1984] M. Wysocki, “Application of Orthogonal Collocation to Simulation and Control for First Order Hyperbolic Systems”, Mathematics and Computers in Simulation, pp. 335-345.

[Xavier et al., 2018] Xavier, N., Bandyopadhyay, B., & Schmid, R. “Robust Non-Overshooting Tracking using Continuous Control for Linear Multivariable Systems. IET Control Theory & Applications, 12(7): 1006-1011.

[Xiao et al., 2016] Xiao, X., Zhang, Y., Wang J., and Du, H. “New Adaptive Sliding-Mode Observer Design for Sensorless Control of PMSM in Electric Vehicle Drive System”, International Journal on Smart Sensing and Intelligent Systems, 9 (1): 377-396.

[Xu & Lam, 2008] Xu S., Lam, J., “A Survey of Linear Matrix Inequality Techniques in Stability Analysis of Delay Systems,” International Journal of Systems Science, 39 (12): 1095-1113.

[Zhang et al., 2016] Zhang, F., Zong, S., Wang, X., Ren, X., “An Expert PI Controller with Dead Time Compensation of Monitor AGC in Hot Strip Mill,” Mathematical Problems in Engineering, Article ID 3041538, Vol. 2016.

[Zhang et al., 2017] Zhang, X. M., Han, Q. L., Seuret, A., Gouaisbaut, F., “An Improved Reciprocally Convex Inequality and an Augmented Lyapunov–Krasovskii Functional for Stability of Linear Systems with Time-varying Delay,” Automatica, 84: 221-226.

[Zheng et al., 2015] Zheng, G., Bejarano, F. J., Perruquett, W., Richard, J.P., “Unknown Input Observer for Linear Time-delay Systems,” Automatica, 61: pp. 35-43.

[Zhou, 2014] Zhou, B. “Truncated Predictor Feedback for Time-delay Systems,” Springer Berlin Heidelberg.

[Zhou et al., 2017] Zhou, B., Liu, Q., & Mazenc, F. “Stabilization of Linear Systems with both Input and State Delays by Observer–predictors,” *Automatica*, 83: 368-377.

# **Annexes**

## Annexe A

### Démonstration

Soit le vecteur d'erreur d'estimation défini par :

$$\tilde{e}(t) = \hat{\chi}(t) - \chi(t) \quad (\text{A.1})$$

En utilisant la deuxième équation de l'observateur (3.4) le vecteur d'erreur d'estimation s'écrit sous cette forme :

$$\tilde{e}(t) = \tilde{\zeta}(t) - \tilde{E}\tilde{y}(t) - Qr(t) - \chi(t) = \tilde{\zeta}(t) - (I + \tilde{E}\tilde{C})\chi(t) - Qr(t) \quad (\text{A.2})$$

La dynamique du vecteur d'erreur d'estimation est donnée par cette égalité :

$$\dot{\tilde{e}}(t) = \dot{\tilde{\zeta}}(t) - (I + \tilde{E}\tilde{C})\dot{\chi}(t) - Q\dot{r}(t) \quad (\text{A.3})$$

En utilisant les équations (3.2) et (3.4), la dynamique de l'erreur d'estimation devient :

$$\dot{\tilde{e}}(t) = \tilde{N}\tilde{\zeta}(t) + \tilde{L}\tilde{y}(t) + \tilde{G}u(t) - (I + \tilde{E}\tilde{C})\dot{\chi}(t) - Q\dot{r}(t) \quad (\text{A.4})$$

D'autre part, en remplaçant la première équation du système (3.2) dans l'équation (A.4) :

$$\dot{\tilde{e}}(t) = \tilde{N}\tilde{\zeta}(t) + \tilde{L}\tilde{y}(t) + \tilde{G}u(t) - (I + \tilde{E}\tilde{C})(\tilde{A}\chi(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{D}d(t)) - Q\dot{r}(t) \quad (\text{A.5})$$

En utilisant l'équation (A.2), l'équation (A.5) peut s'écrire sous cette forme :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{e}}(t) = \tilde{N}(\tilde{e}(t) + (I + \tilde{E}\tilde{C})\chi(t) + Qr(t)) + \tilde{L}\tilde{y}(t) + \tilde{G}u(t) \\ - (I + \tilde{E}\tilde{C})(\tilde{A}\chi(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{D}d(t)) - Q\dot{r}(t) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

L'équation (A.6) peut s'écrire sous cette forme :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{e}}(t) = \tilde{N}\tilde{e}(t) + [\tilde{N}(I + \tilde{E}\tilde{C}) + \tilde{L}\tilde{C} - (I + \tilde{E}\tilde{C})\tilde{A}]\chi(t) + [\tilde{G} - (I + \tilde{E}\tilde{C})\tilde{B}]u(t) \\ - (I + \tilde{E}\tilde{C})\tilde{D}d(t) - Q[\dot{r}(t) - \tilde{N}r(t)]. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

## Annexe B

### Commande du système à retard

**Lemme B.1** [El Haoussi et al., 2011] :

Le système décrit par (4.1) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices symétriques positives définies  $\tilde{P} = \tilde{P}^T > 0$ ,  $\tilde{Q}_j = \tilde{Q}_j^T > 0$ ,  $\tilde{R}_j = \tilde{R}_j^T > 0$ , des matrices de dimensions appropriées  $X_1, \bar{V}_{1j}, \bar{V}_{2j}$  and  $U$  et un scalaire  $\alpha$  telle que la condition suivante est vérifiée :

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & * & * & * & * & * & * & * \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & * & * & * & * & * & * \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & \Psi_{33} & * & * & * & * & * \\ \Psi_{41} & \Psi_{42} & 0 & \Psi_{44} & * & * & * & * \\ \Psi_{51} & \Psi_{52} & 0 & 0 & \Psi_{55} & * & * & * \\ \tau_1 \bar{V}_{11}^T & 0 & \tau_1 \bar{V}_{21}^T & 0 & 0 & -\tau_1 \tilde{R}_1 & * & * \\ \tau_2 \bar{V}_{12}^T & 0 & 0 & \tau_2 \bar{V}_{22}^T & 0 & 0 & -\tau_2 \tilde{R}_2 & * \\ \tau_3 \bar{V}_{13}^T & 0 & 0 & 0 & \tau_3 \bar{V}_{23}^T & 0 & 0 & -\tau_3 \tilde{R}_3 \end{bmatrix} < 0; \quad (\text{B.1})$$

où

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= A_0 X_1^T + X_1 A_0^T + \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_2 + \tilde{Q}_3 + V_{11} + V_{11}^T + V_{12} + V_{12}^T + V_{13} + V_{13}^T \\ \Psi_{21} &= P - X_1 + \alpha A_0 X_1^T, \\ \Psi_{22} &= -\alpha X_1^T - \alpha X_1 + \tau_1 \tilde{R}_1 + \tau_2 \tilde{R}_2 + \tau_3 \tilde{R}_3, \\ \Psi_{31} &= -V_{11}^T + V_{21} + X_1 A_1^T, \\ \Psi_{32} &= \alpha X_1 A_1^T, \\ \Psi_{33} &= -V_{21} - V_{21}^T - \tilde{Q}_1 \\ \Psi_{41} &= V_{12}^T + V_{22} + u^T B_0^T \\ \Psi_{42} &= \alpha u^T B_0^T, \\ \Psi_{44} &= -V_{22} - V_{22}^T - \tilde{Q}_2, \\ \Psi_{51} &= V_{23} - V_{13}^T u^T B_1^T, \\ \Psi_{52} &= \alpha u^T B_1^T, \\ \Psi_{55} &= -V_{23} - V_{23}^T - \tilde{Q}_3 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

La matrice de gain du retour qui stabilise le système est donnée par (4.4) avec  $K = UX_1^{-T}$ .