



HAL
open science

Traitement d'image en optique adaptative : estimation paramétrique de la réponse impulsionnelle et déconvolution

Romain Fétick

► **To cite this version:**

Romain Fétick. Traitement d'image en optique adaptative : estimation paramétrique de la réponse impulsionnelle et déconvolution. Optique [physics.optics]. Aix Marseille Université, 2020. Français. NNT : . tel-03017091

HAL Id: tel-03017091

<https://theses.hal.science/tel-03017091>

Submitted on 20 Nov 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AIX MARSEILLE UNIVERSITÉ
ECOLE DOCTORALE 352
UMR7326 LABORATOIRE D'ASTROPHYSIQUE DE MARSEILLE

DISCIPLINE : PHYSIQUE ET SCIENCES DE LA MATIÈRE
SPÉCIALITÉ : OPTIQUE, PHOTONIQUE ET TRAITEMENT D'IMAGES

Traitement d'image en optique adaptative : estimation paramétrique de la réponse impulsionnelle et déconvolution

Romain Jan-Lou FÉTICK

| | | |
|----------------------|---------------------------|----------------|
| <u>Directeurs</u> : | Thierry FUSCO | ONERA/LAM |
| | Laurent MUGNIER | ONERA |
| <u>Rapporteurs</u> : | David MOUILLET | IPAG |
| | Jean-François GIOVANNELLI | IMS Bordeaux |
| <u>Présidente</u> : | Magali DELEUIL | LAM |
| <u>Examineurs</u> : | Benoît NEICHEL | LAM |
| | Karine PERRAUT | IPAG |
| | Franck MARCHIS | SETI Institute |

Soutenue le 1^{er} Octobre 2020 à Marseille

Résumé - Abstract

Traitement d'image en optique adaptative : estimation paramétrique de la réponse impulsionnelle et déconvolution

La résolution des images astronomiques est sévèrement dégradée par la turbulence atmosphérique. La réponse impulsionnelle (Point Spread Function, PSF) du système d'imagerie, télescope et atmosphère, est étendue et ne permet pas d'atteindre la limite de diffraction d'un télescope de quelques dizaines de centimètres dans le visible. L'optique adaptative (OA) est une correction en temps réel de la turbulence atmosphérique qui augmente considérablement la résolution du système. Cependant la correction d'OA est seulement partielle, affectant particulièrement la résolution d'imagerie aux courtes longueurs d'ondes. La déconvolution est une technique de traitement a posteriori qui permet de restaurer l'information contenue dans l'image mais qui a été atténuée par la turbulence. Cette déconvolution nécessite l'utilisation de la PSF du système, souvent inconnue ou incorrectement estimée. Le travail présenté ici montre l'intérêt d'utiliser un modèle paramétrique de PSF en traitement d'image. Les deux grands axes de ce travail sont alors i) la création et validation d'un modèle de PSF adapté à la correction OA et ii) l'utilisation de ce modèle de PSF pour la déconvolution. Le modèle proposé ici inclut des paramètres physiques, dont le paramètre de Fried qui indique la force de la turbulence ou la variance de phase corrigée par OA. Grâce à son origine physique, ce modèle de PSF corrigée par OA est précis sur la forme de la PSF et ses paramètres peuvent être déterminés par des données de la boucle OA. La robustesse et adaptabilité du modèle sont validées notamment sur l'imageur SPHERE/Zimpol et sur le spectro-imageur MUSE du VLT. Ensuite le modèle est utilisé en déconvolution d'images astronomiques. Nous montrons que la déconvolution jointe qui estime à la fois la PSF et l'objet est dégénérée. A la place nous appliquons une technique dite de marginalisation : l'image est utilisée pour estimer dans un premier temps uniquement la PSF. Nous démontrons la consistance de cette approche. Puis, dans un second temps, la PSF estimée est injectée dans un algorithme de déconvolution classique (non myope, à PSF fixée). Les techniques de déconvolution avec PSF paramétriques sont appliquées à l'ESO Large Program d'observation d'astéroïdes de la ceinture principale.

Image post-processing with adaptive optics : parametric point-spread-function identification and deconvolution

Imaging resolution is severely reduced in astronomy due to the atmospheric turbulence. The resulting Point Spread Function (PSF) is large and is equivalent to the one of a diffraction limited telescope of a dozen of centimetres in the visible. Adaptive Optics (AO) is a real time compensation of the turbulence significantly increasing the resolution. However AO correction is only partial, damaging especially the shorter wavelengths. The deconvolution post-processing technique restores the information contained in the image although attenuated by the turbulence effect. This deconvolution requires the input of the PSF, often unknown or poorly known in ground-based astronomy. The current work focuses on i) writing and validating a PSF model dedicated to AO observations, and ii) the use of this PSF model for deconvolution purposes. The PSF model developed here includes physical parameters such as the Fried parameter or the AO residual phase variance. Thanks to this physical origin, this PSF model precisely fits the AO PSF shape and its parameters may be constrained by telemetry. Robustness and versatility of the model are proven on the SPHERE/Zimpol imager and the MUSE spectro-imager from VLT. Then the model is used for deconvolution of astronomical images. We show that the joint deconvolution, which estimates simultaneously the object and the PSF, is degenerated. Instead we use the marginal approach : the image is used to estimate first the PSF, the object is estimated only in a second step. These deconvolution techniques using parametric PSF are applied on asteroid images from the ESO Large Program.

Remerciements

En arrivant en thèse je croyais la formation académique terminée en même temps que le master. Douce erreur, car le doctorat est effectivement une formation en soi. J'ai beaucoup appris de mes superviseurs, et je suppose que les compétences acquises au cours de cette thèse se situent au confluent de leurs domaines de prédilection respectifs. Laurent m'a transmis un peu de sa rigueur mathématique, de sa précision et de sa recherche implacable des détails. Thierry, avec sa connaissance de l'OA, possède cette approche physique et intuitive du fonctionnement du système optique dans sa globalité. Benoît, quant à lui, cherche toujours les applications astronomiques du travail : quitte à travailler, autant travailler utilement ! Le plus important est leur effort constant de suivi de la thèse. Je remarque que trop de doctorants sont délaissés par leurs superviseurs, ce qui est à mon avis un défaut. Etre titulaire d'une Habilitation à Diriger des Recherches ne signifie pas simplement être un signe-papier ou un cherche-financement. L'aspect formation du doctorant, la volonté de faire mûrir des travaux de recherche en groupe et simplement la présence humaine ne peuvent être délaissés. Thierry, Laurent et Benoît ne l'ont pas oublié. Leur bonne humeur a également été appréciée, particulièrement lors des périodes sporadiques de recherches infructueuses. De plus, le soutien permanent et la gentillesse inégalable de Françoise ont été d'un très grand secours. Sans son aide, bien des doctorants se seraient perdus dans des méandres administratifs obscurs face à des fonctionnaires peu émotifs. Merci beaucoup à toi, Françoise, tu apportes un peu de lumière et réconfort dans ce monde.

Le labo a également été le lieu de rencontre d'individus hétéroclites, toutefois regroupés sous la même bannière de l'optique. J'ai rêvé aux merveilleux récits des aventures sud-américaines et africaines de Thibault. Ton âme d'enfant, ta tranquillité, ta franchise et ta bonne humeur te suivent partout. Surtout ne change rien ! Sabri, tu es doté des mêmes qualités, alors... ne change rien non plus. Je te souhaite une vie remplie de jeux de mots, de calembours et d'agressions variées à la langue française. Kelly et Vincent, le duo comique, vous avez été des sources inépuisables de bons moments. Je ne m'en fais pas, nous nous reverrons sûrement. Nous ne pourrions plus nous passer du petit plaisir matinal de nous assener de grands coups de

bô. Mélanie, à la fois discrète et déjantée, j'ai été heureux de te connaître et d'avoir passé l'épreuve de la soutenance en même temps que toi et ce cher Sabristi. Olivier et Frédéric, ce n'est qu'un au revoir, nous nous reverrons bientôt... lors de fréquentes pauses cafés à venir.

Ces années de thèse ont surtout été l'occasion de découvrir la vie à la Marseillaise... et à la Colombienne. J'étais bien loin de me douter que mon court chemin depuis l'Occitanie croiserait alors la route transatlantique de Valentina. En arrivant en France, elle a apporté dans ses valises les couleurs d'or, d'azur et de pourpre de son pays. Ces couleurs flamboyantes de la Tierra Querida ont largement égayé ces dernières années. Leurs teintes se sont ancrées dans ma vie, ma vie s'est encreée de leurs teintes. Les playas de Tairona, la laguna de Guatavita, et l'accueil chaleureux des Colombiens resteront sans aucun doute les plus beaux souvenirs de cette période.

Enfin merci papa et maman. C'est une évidence qu'il me faut toutefois rappeler : si j'en suis arrivé là c'est grâce à vous, vos choix ont définitivement forgé mon chemin. Et je finis forcément par la meilleure, ma petite soeur ! Avec son goût prononcé pour l'ironie et son esprit (un peu trop) critique, on ne s'ennuie jamais. Nous partageons souvent ce mélange d'humour acéré et de réflexions profondes, sans vraiment savoir où finit l'un et où commence l'autre. Tu m'as beaucoup appris et beaucoup aidé, peut être même plus que tu ne le penses.

* * *

La nature nous offre quelques beautés dont nous oublions souvent de profiter. Une colline qui se dénude de sa brume matinale, l'odeur suave de la forêt après la pluie, le ressac régulier des vagues se brisant sur les rochers, la silhouette sombre d'une chaîne montagneuse prise dans les violentes couleurs du crépuscule. Les vrais habitants de la Terre sont les animaux qui peuplent ces espaces. Mais il semble que l'esprit cognitif humain soit surtout doté d'un ego démesuré qui le place en enfant-roi au centre de l'Univers. La science devrait remettre un peu d'ordre dans ces esprits. Le darwinisme et l'astronomie nous donnent une grande leçon d'humilité et de simplicité, qui à mon sens sont incompatibles avec une destruction acharnée de la nature afin d'assouvir les besoins égoïstes et futiles de notre société.

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| I | Nécessité et limitations de l'optique adaptative | 1 |
| 1 | Formation d'image en présence de turbulence | 2 |
| 1.1 | L'origine de la turbulence | 3 |
| 1.2 | Effet de la turbulence en optique | 5 |
| 1.2.1 | Modification de l'indice optique | 5 |
| 1.2.2 | Les paramètres intégrés sur la ligne de visée | 6 |
| 1.2.3 | La mesure des conditions de turbulence | 8 |
| 1.3 | Propagation d'une onde électromagnétique | 9 |
| 1.3.1 | L'hypothèse couches minces | 9 |
| 1.3.2 | Statistique de la phase turbulente | 11 |
| 1.4 | Formation d'image longue pose : la PSF | 12 |
| 1.4.1 | Longue pose versus courte pose | 12 |
| 1.4.2 | Propriétés de la PSF longue pose | 15 |
| 1.4.3 | Le rapport de Strehl | 16 |
| 1.5 | Image d'un objet étendu | 18 |
| 1.5.1 | Formalisme continu | 18 |
| 1.5.2 | Formalisme discrétisé | 19 |
| 2 | L'optique adaptative | 22 |
| 2.1 | Description de l'optique adaptative (OA) | 23 |
| 2.1.1 | Développement de l'OA | 23 |
| 2.1.2 | Principe général de fonctionnement | 23 |
| 2.1.3 | La « zoologie » de l'OA | 28 |
| 2.1.4 | Télémétrie | 28 |
| 2.2 | Imagerie en optique adaptative | 29 |
| 2.2.1 | Budget d'erreur | 29 |
| 2.2.2 | Modification de la statistique de la phase | 30 |
| 2.2.3 | La PSF et la FTO corrigées par OA | 31 |
| 2.3 | Instruments actuels équipés d'OA | 34 |
| 2.3.1 | VLT/SPHERE/Zimpol | 34 |
| 2.3.2 | VLT/MUSE | 37 |

| | | |
|---|--|-----------|
| 2.3.3 | OCA/ODISSEE | 42 |
| II Modélisation physique de la PSF corrigée par OA | | 43 |
| 3 | Etat de l'art en modélisation de PSF | 44 |
| 3.1 | Importance de la PSF en post-traitement | 45 |
| 3.2 | Modélisation de la PSF | 45 |
| 3.2.1 | Combinaison linéaire de vecteurs libres | 46 |
| 3.2.2 | Modèle parcimonieux non linéaire | 47 |
| 3.3 | Estimation de la PSF à partir des données | 49 |
| 3.3.1 | PSF estimée par image d'une étoile | 49 |
| 3.3.2 | Reconstruction des données de télémétrie | 50 |
| 3.3.3 | Estimation parcimonieuse en plan focal | 50 |
| 3.4 | Analyse de modèles existants de PSF | 51 |
| 3.4.1 | Modèles de la PSF turbulente | 51 |
| 3.4.2 | Modèles de la PSF corrigée par OA | 55 |
| 4 | Développement d'un modèle précis de PSF | 60 |
| 4.1 | Description de la PSF en ordres convolutifs | 61 |
| 4.2 | PSFAO ₁₉ : un modèle de PSF adapté à la correction OA | 63 |
| 4.2.1 | Écriture du modèle | 63 |
| 4.2.2 | Les deux paramètres principaux : r_0 et σ_{OA}^2 | 69 |
| 4.2.3 | Extension en large bande spectrale | 69 |
| 5 | Validations du modèle PSFAO₁₉ | 73 |
| 5.1 | Méthode d'ajustement | 74 |
| 5.2 | Validation en simulations | 77 |
| 5.2.1 | OOMA | 77 |
| 5.2.2 | Simulation de GEMS/GSAOI sur R136 | 84 |
| 5.3 | Validation sur données expérimentales | 86 |
| 5.3.1 | Images en visible de SPHERE/ZIMPOL | 86 |
| 5.3.2 | Ajustements sur différents instruments d'OA | 88 |
| 5.3.3 | Cubes de l'IFS MUSE | 95 |
| 5.4 | Applications du modèle | 98 |
| 5.4.1 | Détermination du paramètre de Fried en plan focal | 98 |
| 5.4.2 | Photométrie en champ réduit | 103 |
| 5.4.3 | Etudes d'amas stellaires avec PAMPELMUSE | 105 |

| | | |
|------------|--|------------|
| III | Estimation de la PSF et déconvolution | 125 |
| 6 | État de l’art en déconvolution | 126 |
| 6.1 | Les problèmes inverses | 127 |
| 6.1.1 | La modélisation | 127 |
| 6.1.2 | Des problèmes mal posés | 129 |
| 6.1.3 | L’estimation statistique | 130 |
| 6.2 | La déconvolution classique | 130 |
| 6.2.1 | Le problème direct de convolution | 130 |
| 6.2.2 | La solution moindres carrés et filtre inverse | 131 |
| 6.2.3 | La vision bayésienne : maximum <i>a posteriori</i> | 132 |
| 6.2.4 | La vision bayésienne : moyenne <i>a posteriori</i> | 137 |
| 6.3 | La déconvolution « myope » et « aveugle » | 139 |
| 6.3.1 | Problème d’estimation de PSF en déconvolution | 139 |
| 6.3.2 | La déconvolution jointe avec Mistral | 140 |
| 7 | Exploitation de PSF paramétriques en déconvolution | 143 |
| 7.1 | Le ESO <i>Large Program</i> d’observation d’astéroïdes | 144 |
| 7.1.1 | Présentation du programme | 144 |
| 7.1.2 | L’astéroïde Vesta | 146 |
| 7.2 | Difficultés de déconvolution avec PSF sur étoile | 148 |
| 7.3 | Déconvolution avec des PSFs paramétriques | 150 |
| 7.3.1 | Utilisation d’un modèle simple de PSF | 150 |
| 7.3.2 | Déconvolution de Vesta avec une Moffat | 152 |
| 7.3.3 | Déconvolution de Vesta avec PSFAO ₁₉ | 158 |
| 7.3.4 | Changement de stratégie du <i>Large Program</i> | 159 |
| 8 | Estimation de la PSF par l’approche marginalisée | 162 |
| 8.1 | Dégénérescence de la méthode jointe | 163 |
| 8.2 | L’approche marginale | 169 |
| 8.3 | AMIRAL : estimation d’une combinaison linéaire de PSF | 174 |
| 8.3.1 | Description de la méthode | 174 |
| 8.3.2 | Application sur données OBSSAT | 174 |
| 8.4 | P-AMIRAL : paramétrisation non-linéaire de la PSF | 177 |
| 8.4.1 | Description de la méthode | 177 |
| 8.4.2 | Validation sur données simulées | 178 |
| 8.4.3 | Application sur données SPHERE | 186 |
| 8.5 | Conclusion et perspectives de la marginalisation | 189 |
| | Conclusion | 219 |

| | | |
|----------|---|------------|
| A | Gradients d'une fonction de Moffat | 223 |
| A.1 | Définitions | 223 |
| A.2 | Dérivées intermédiaires | 224 |
| A.3 | Dérivées de la Moffat | 225 |
| B | Gradients du modèle PSFAO₁₉ | 226 |
| B.1 | Dérivées de la DSP | 226 |
| B.2 | Dérivées de la PSF et FTO | 227 |
| C | Solution analytique du critère marginal par rapport à k | 228 |
| | Liste des publications | 229 |
| | Bibliographie | 231 |

Abréviations et notations

| Notation | Définition |
|---------------------------------|--|
| \triangleq | Egal par définition |
| \vec{x} | Vecteur bidimensionnel |
| $\vec{\mathbf{x}}$ (en gras) | Vecteur tridimensionnel |
| ∇ | Opérateur gradient |
| $\mathcal{F}\{\cdot\}$ | Opérateur de transformation de Fourier |
| \tilde{x} | Transformée de Fourier de x . Ainsi $\tilde{x} = \mathcal{F}\{x\}$ |
| x^* | Complexe conjugué de x |
| \hat{x} | Estimation de x |
| \mathbf{x} (en gras) | Fonction x discrétisée spatialement |
| $x \star y$ | Convolution continue de x par y |
| $\star^n x$ | Convolution d'ordre n de x |
| $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ | Convolution discrète de \mathbf{x} par \mathbf{y} |
| $\ \mathbf{x}\ $ | Norme de \mathbf{x} (norme $L2$ par défaut) |
| B_x | Auto-corrélation de x |
| D_x | Fonction de structure de x |
| W_x | Densité Spectrale de Puissance de x |
| III | Opérateur de discrétisation sur les pixels |
| δ | Distribution de Dirac, ou paramètre de seuil (pour les régularisations) |
| arg max | Opérateur argument maximum d'une fonction |
| $\{x_k\}$ | Ensemble des éléments x_k |

| Symbole | Définition |
|-----------------------|--|
| D | Diamètre du télescope |
| h | Fonction d'étalement du point (PSF) |
| λ | Longueur d'onde |
| $\vec{\mathbf{E}}$ | Champ électrique |
| ϕ | Phase de l'onde électromagnétique |
| C_n^2 | Constante de structure de l'indice de réfraction |
| L_0 | Grande échelle de la turbulence |
| r_0 | Paramètre de Fried |
| S_R | Rapport de Strehl |
| f | Fréquence spatiale de la phase |
| σ_n^2 | Variance du bruit dans l'image |
| σ_{OA}^2 | Variance de phase des fréquences corrigées par OA |
| f_{OA} | Fréquence de coupure spatiale du système d'OA |
| z | Altitude |
| s | <i>Seeing</i> ou échantillonnage (<i>sampling</i>) |
| $\mathbf{\Omega}$ | Paramètres d'un modèle de PSF |
| $h_{\mathbf{\Omega}}$ | PSF paramétrée par $\mathbf{\Omega}$ |
| β | Loi de puissance de la fonction de Moffat |
| γ | Flux d'une étoile |
| ζ | Fond du ciel présent sur une image |
| L_1 | Norme en valeur absolue |
| L_2 | Norme quadratique |
| $L_1 - L_2$ | Norme quadratique pour les faibles valeurs, et linéaire pour les grandes valeurs |
| J_v | Critère d'attache aux données |
| J_o | Critère de régularisation sur l'objet |

| Abréviation | Type | Définition |
|---------------------|---------------|--|
| AMIRAL | <i>algo</i> | Automatic Myopic Image Restoration ALgorithm |
| DSP | – | Densité Spectrale de Puissance |
| ELT | <i>instru</i> | Extremely Large Telescope |
| EQM | – | Ecart Quadratique Moyen |
| ESO | <i>org</i> | European Southern Observatory |
| FTO | – | Fonction de Transfert Optique |
| GALACSI | <i>instru</i> | Ground Atmospheric Layer Adaptive Optics for Spectroscopic Imaging |
| LAM | <i>org</i> | Laboratoire d'Astrophysique de Marseille |
| LP | – | Large Program (d'observation de l'ESO) |
| MAP | – | Maximum <i>a posteriori</i> |
| MISTRAL | <i>algo</i> | Myopic Iterative STep-preserving Restoration ALgorithm |
| MUSE | <i>instru</i> | Multi-Unit Spectroscopic Explorer |
| OA | – | Optique Adaptative |
| OASIS | <i>algo</i> | Optimized Astrophysical Simulator for Imaging System |
| ONERA | <i>org</i> | Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales |
| OOMAO | <i>algo</i> | Object-Oriented Matlab Adaptive Optics |
| P-AMIRAL | <i>algo</i> | Parametric-AMIRAL |
| PSF | – | Point Spread Function |
| PSFAO ₁₉ | <i>algo</i> | Modèle de PSF corrigé par OA |
| SNR | – | Signal to Noise Ratio |
| SAXO | <i>instru</i> | SPHERE Adaptive optics for eXoplanets Observation |
| SPARTA | – | Standard Platform for Adaptive optics Real Time Applications |
| SPHERE | <i>instru</i> | Spectro Polarimetric High-contrast Exoplanet REsearch |
| VLT | <i>instru</i> | Very Large Telescope |
| VMLM-B | <i>algo</i> | Variable Metric Limited Memory - Bounded |
| ZIMPOL | <i>instru</i> | Zurich IMaging POLarimeter |

Types :*algo* : algorithme, méthode, modèle, code*instru* : instrument, télescope*org* : organisme, laboratoire

– : conceptuel, général, autre

Introduction : le contexte

Une brève histoire de l'astronomie

Grâce aux fouilles archéologiques, on peut estimer que l'astronomie date de l'époque de l'âge du bronze (de 3000 à 1000 av. JC.), voire du Néolithique (de 8000 à 3000 av. JC.). Les structures mégalithiques de l'époque révèlent des alignements astronomiques avec les équinoxes ou les solstices solaires. L'astronomie était alors certainement liée à des croyances, rites religieux et calendriers agraires.

Cependant la science astronomique débute réellement à l'Antiquité grâce au développement des mathématiques. La connaissance de l'astronomie est attestée dans les grandes civilisations de l'histoire : grecque, arabe, chinoise, amérindienne... L'astronomie grecque a notamment permis de calculer la position des astres dans le ciel, de dresser des catalogues d'étoiles, de mesurer la circonférence de la Terre, de découvrir la précession des équinoxes, et de remettre en cause le géocentrisme. Toutefois, les observations s'effectuaient à l'oeil nu, ce qui limitait la précision des mesures et bloqua longtemps la progression de cette science. De plus l'astronomie en Europe a été fortement freinée durant plusieurs siècles par un pouvoir religieux omnipotent et prônant le géocentrisme.

La Renaissance du XVème siècle est un changement profond de la société ; les arts, la philosophie et les sciences antiques sont redécouverts et influencent les artistes et scientifiques de l'époque. L'utilisation de la lunette par Galilée au XVIIème siècle représente une avancée majeure pour l'astronomie. Dès lors cette science devient dépendante des avancées technologiques, d'abord en optique, puis des plaques photographiques chimiques et enfin des détecteurs numériques. Ces améliorations techniques permettent de gagner en sensibilité et en résolution instrumentales. En dépassant la limite biologique de l'oeil puis la limite technologique de qualité des optiques, l'astronomie se retrouve alors confrontée à la limite naturelle de la turbulence atmosphérique. Cette turbulence perturbe la propagation de la lumière entre les objets du ciel et l'observateur, ce qui limite la résolution d'observation. De plus l'opacité de l'atmosphère dans certaines longueurs d'ondes comme les UV, rayons

gamma, rayons X, et certaines bandes de l'infrarouge (Fig. 1) empêche complètement l'observation dans ces bandes spectrales. Pas de photon, pas d'observation.

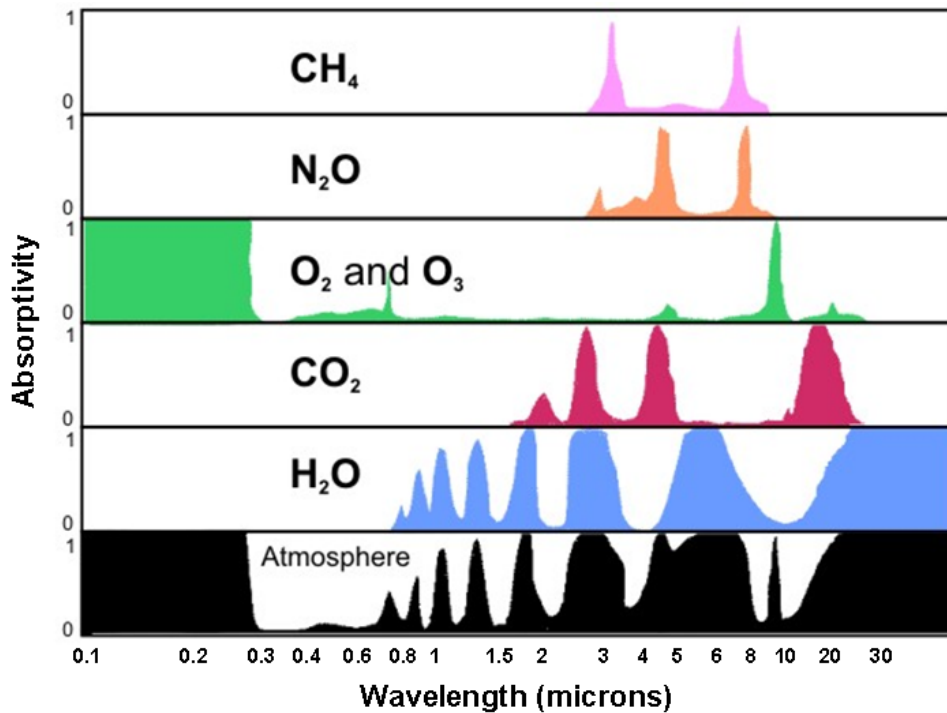


FIGURE 1 – Absorption de différents composés chimiques présents dans l'atmosphère (couleur) et leur total (noir). La fenêtre visible est située entre $0.4\mu\text{m}$ et $0.8\mu\text{m}$. Source : Penn State University, Dpt of meteorology.

Dans les années 60 et 70, les blocs occidental et soviétique se livrent à la conquête spatiale dans un but politique et stratégique. Alors que le monde entier se demande avec angoisse qui a la plus grosse fusée, les scientifiques commencent à apercevoir la possibilité d'effectuer de l'astronomie directement depuis l'espace. Dans les décennies qui suivent, les télescopes spatiaux de l'ESA ou de la NASA rapportent de précieuses informations dans une très large gamme spectrale, depuis le fond diffus cosmologique (Planck, ESA) jusqu'aux événements à haute énergie (Newton, ESA), en passant évidemment par les images spectaculaires du Hubble Space Telescope (HST, NASA). Les télescopes spatiaux ont encore un bel avenir devant eux, avec les projets comme le prochain James Webb Space Telescope (JWST, NASA). Pour autant, le développement du spatial ne signe pas la fin des télescopes au sol. On aurait tort de voir un antagonisme entre télescopes spatiaux et télescopes sol, les

deux sont complémentaires.



FIGURE 2 – Scène astrophysique (à gauche) observée par un télescope de 1 m (au milieu) et un télescope de 25 cm (à droite). Seul l’effet de la diffraction est considéré. Simulation réalisée à partir d’une image du Hubble Space Telescope (NASA).

Dans les fenêtres spectrales passantes de l’atmosphère les télescopes au sol dominent par leurs dimensions et masse de leurs instruments. Le Very Large Telescope (VLT) de l’European Southern Observatory (ESO), installé dans le désert d’Atacama au Chili, est constitué de 4 grands télescopes de 8m de diamètre chacun. En mode interférométrique plusieurs télescopes peuvent combiner leurs faisceaux, de manière cohérente, pour obtenir la résolution équivalente à un télescope de près de 200m de diamètre. Quant au futur Extremely Large Telescope (ELT), il s’agit d’un mastodonte de 39m de diamètre. Cette course au gigantisme permet de collecter plus de photons (au carré du diamètre pour une pupille pleine) et de repousser la limite de diffraction en λ/D de résolution du télescope : plus un télescope est large, plus il est capable théoriquement de discerner des détails fins (Fig. 2). Les instruments scientifiques montés sur de tels télescopes peuvent atteindre plusieurs centaines de kilogrammes à plusieurs tonnes et éventuellement nécessiter des étages cryogéniques massifs et gourmands en énergie. A contrario, les télescopes spatiaux sont limités en taille et masse par le lanceur. Les dimensions sont également limitées par des contraintes budgétaires, chaque kilogramme envoyé dans l’espace coûtant cher (~ 10 k€/kg). Enfin, les opérations de maintenance ou d’amélioration sont beaucoup plus complexes, voire impossibles, dans l’espace. Selon ces compromis, notamment selon la fenêtre spectrale considérée, il pourra être plus intéressant de développer un instrument au sol ou dans l’espace. Pour les instruments au sol, il faut cependant trouver une parade à la turbulence atmosphérique afin d’augmenter la résolution des images.

Les observations au sol de nos jours

Afin de compenser les effets délétères de la turbulence atmosphérique, les systèmes dits d'optique adaptative (OA) ont vu le jour. Ces systèmes corrigent en temps réel la turbulence atmosphérique grâce à un miroir déformable actionné à une cadence d'environ 100 – 1000 Hz. La résolution d'observation est alors grandement augmentée, cependant le système n'est pas parfait et des résidus de turbulence produisent encore du flou sur l'image. Le problème de ce flou est de réduire les informations disponibles aux astronomes.

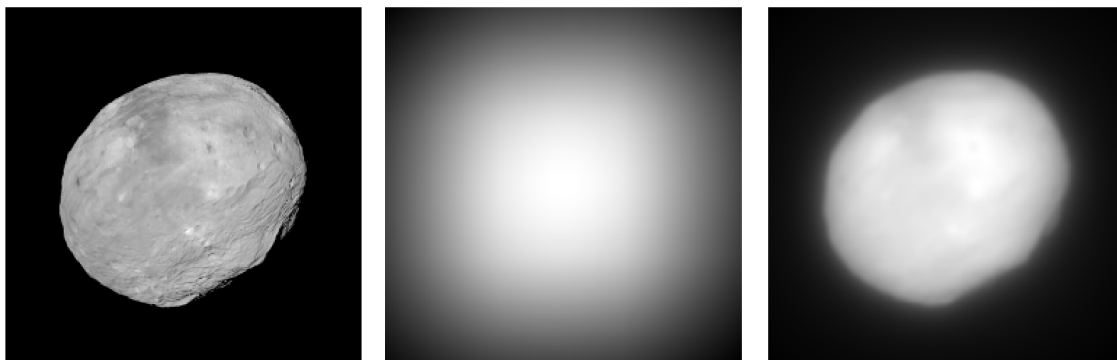


FIGURE 3 – Astéroïde 4-Vesta de la ceinture principale (à gauche) simulé par le logiciel OASIS à partir de données de la sonde spatiale NASA/Dawn. L'astéroïde mesure environ 500km de diamètre, et est projeté ici à une résolution de 3.6 mas/pixel. Image sans système d'OA (milieu), et avec un système d'OA extrême (droite). Simulations.

La figure 3 illustre ce problème soulevé par les astronomes du Laboratoire d'Astrophysique de Marseille (LAM), et qui a donné naissance à cette thèse. A gauche de la figure se trouve l'astéroïde Vesta de la ceinture principale entre Mars et Jupiter, reconstitué en haute résolution à partir d'images de la sonde spatiale NASA/Dawn. Sans système d'OA, les astronomes observent une large tache qui ne permet même pas de déterminer la forme de l'astéroïde. Avec un système d'OA, la forme générale, les gros cratères et les variations d'albédo sont visibles. Toutefois, les détails fins sont perdus.

Dans ce cas spécifique, il n'y a aucun intérêt astrophysique à observer l'astéroïde depuis le sol, avec une résolution bien moindre que celle de la sonde spatiale. L'objectif ici est avant tout de quantifier les détails perdus par les résidus de turbulence, de tester des techniques de traitement d'image et de caractériser leurs performances. Ensuite ces techniques peuvent être appliquées sur tous les astéroïdes qui n'ont pas eu l'opportunité d'être visités par une sonde spatiale.

Les problèmes de la déconvolution

Les images obtenues par OA ne sont pas suffisantes pour retrouver les bords nets de l'objet. Or cette information est nécessaire aux astronomes car ils pourraient en déduire le volume exact de l'objet, ce qui donne accès à la densité (si la masse est connue, par orbite képlérienne d'un éventuel compagnon) et au volume d'excavation des impacts. Les détails fins, tels les petits cratères, ne sont pas visibles non plus, ce qui empêche d'effectuer de l'étude de cratérisation de surface.

Il est possible de retrouver plus de détails sur l'objet en appliquant une technique de traitement d'image appelée déconvolution. Cette technique permet de retrouver de l'information présente dans l'image mais floutée par la fonction d'étalement du point (PSF, pour Point Spread Function, en anglais). Toutefois il est nécessaire de connaître ou d'estimer cette PSF pour déconvoluer correctement. Sans cette information, il est impossible de déconvoluer, et donc de retrouver les détails de l'objet observé. Dans certains cas la PSF est obtenue par image d'une étoile brillante, mais il existe beaucoup de cas où il n'y a pas d'étoile dans le champ, comme pour l'observation d'astéroïdes en champ étroit. Il s'agit donc de ce travail de thèse : comment estimer correctement la PSF ? Comment l'utiliser pour les techniques de déconvolution ? Le but de l'ensemble de ces travaux est de trouver *in fine* une solution satisfaisante aux astronomes, qui leur permette d'extraire au mieux l'information scientifique contenue dans l'image d'un objet du ciel.

Ce travail se découpe en trois parties successives, qui correspondent logiquement aux trois grandes parties de cette thèse :

- I. Nécessité et limitations de l'optique adaptative
- II. Modélisation physique de la PSF corrigée par OA
- III. Estimation de la PSF et déconvolution

La première partie introduit les concepts et notions fondamentales nécessaires pour l'ensemble de la thèse. Les parties suivantes constituent le corps du travail sur la modélisation de la PSF corrigée par optique adaptative, puis sur l'utilisation de ce modèle en déconvolution. Les articles scientifiques relatifs à chaque partie sont inclus en fin de celles-ci. Bonne lecture.

Première partie

Nécessité et limitations de l'optique adaptative

Chapitre 1

Formation d'image en présence de turbulence

Résumé

La turbulence atmosphérique se traduit par des changements d'indice optique, donc par des effets délétères sur l'observation d'objets du ciel. Ces effets sont plus prononcés aux courtes longueurs d'onde, notamment dans le visible. Ce chapitre est une présentation des phénomènes atmosphériques mis en jeu, depuis l'origine de la turbulence jusqu'aux problèmes d'imagerie engendrés. Nous posons les notions et équations de base nécessaires à la compréhension de l'ensemble de cette thèse.

Sommaire

| | | |
|------------|---|-----------|
| 1.1 | L'origine de la turbulence | 3 |
| 1.2 | Effet de la turbulence en optique | 5 |
| 1.2.1 | Modification de l'indice optique | 5 |
| 1.2.2 | Les paramètres intégrés sur la ligne de visée | 6 |
| 1.2.3 | La mesure des conditions de turbulence | 8 |
| 1.3 | Propagation d'une onde électromagnétique | 9 |
| 1.3.1 | L'hypothèse couches minces | 9 |
| 1.3.2 | Statistique de la phase turbulente | 11 |
| 1.4 | Formation d'image longue pose : la PSF | 12 |
| 1.4.1 | Longue pose versus courte pose | 12 |
| 1.4.2 | Propriétés de la PSF longue pose | 15 |
| 1.4.3 | Le rapport de Strehl | 16 |
| 1.5 | Image d'un objet étendu | 18 |
| 1.5.1 | Formalisme continu | 18 |
| 1.5.2 | Formalisme discrétisé | 19 |

1.1 L'origine de la turbulence

A grande échelle, l'atmosphère est le siège de phénomènes météorologiques de mouvements de convection de grandes masses d'air. Le nombre de Reynolds de l'écoulement est $R_e = VL/\nu$, avec les valeurs caractéristiques de vitesse $V \sim 1 \text{ ms}^{-1}$, de taille $L \sim 10 \text{ m}$, et de viscosité cinématique $\nu \sim 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. On trouve un nombre de Reynolds grand, de l'ordre de $R_e \sim 10^6$ [Roddir, 1981]. Cette valeur de Reynolds est caractéristique des écoulements turbulents. Les grands flux d'air ne demeurent pas laminaires, mais ils se brisent en tourbillons de plus en plus petits, chacun emportant une petite quantité de l'énergie cinétique initiale, ce qui crée une cascade d'énergie des grands volumes d'air vers les petits volumes. La grande complexité des phénomènes physiques¹ mis en jeu ne permet pas de prédire précisément la dynamique de chaque volume fluide élémentaire. Leur comportement est considéré comme aléatoire et nous ne pouvons en donner qu'un comportement statistique. Kolmogorov [1941] a montré théoriquement que la densité d'énergie turbulente présente à la pulsation spatiale $\omega = 2\pi f$ est donnée par

$$E_c(\omega) = \mathcal{C}_K \epsilon^{2/3} \omega^{-5/3} \quad (1.1)$$

où ϵ est le taux de dissipation de l'énergie (dépendant de la viscosité cinématique du fluide) et $\mathcal{C}_K \simeq 0.5$ la constante de Kolmogorov déterminée empiriquement [Sreenivasan, 1995]. Cette formule peut également s'écrire vectoriellement sur les pulsations par conservation de l'énergie dans un volume élémentaire des pulsations

$$E_c(\omega) d\omega = E_c(\vec{\omega}) 4\pi\omega^2 d\omega \quad (1.2)$$

où l'on a noté différemment le vecteur tridimensionnel $\vec{\omega}$ et sa norme $\omega = |\vec{\omega}|$. On en déduit la relation

$$E_c(\vec{\omega}) = \frac{\mathcal{C}_K \epsilon^{2/3}}{4\pi} \omega^{-11/3} \quad (1.3)$$

où la densité d'énergie est calculée au point tridimensionnel $\vec{\omega}$, mais ne dépend que de sa norme ω par isotropie du milieu. Ce spectre de Kolmogorov est validé empiriquement sur une large plage de fréquences (ou pulsations) spatiales, appelée domaine inertiel. Cependant cette loi en $\omega^{-11/3}$ diverge en zéro, c'est à dire que l'énergie tend vers l'infini pour les grands volumes turbulents. Une grande échelle \mathcal{L}_0 a été introduite par Von Karman [1948] au modèle de Kolmogorov pour saturer l'énergie quand $\omega \rightarrow 0$, ce qui représente la taille maximale des masses d'air qui

1. Les équations de Navier-Stokes (en 1823 et 1845) décrivent les écoulements fluides. Cependant ces équations sont non-linéaires et aucune solution analytique n'a été trouvée.

suivent le modèle de Kolmogorov. Le spectre de Von-Karman s'écrit ²

$$E_c(\vec{\omega}) = \frac{C_K \epsilon^{2/3}}{4\pi} \left[\left(\frac{1}{\mathcal{L}_0} \right)^2 + \omega^2 \right]^{-11/6} \quad (1.4)$$

Typiquement $\mathcal{L}_0 \sim 10 - 100$ m pour l'atmosphère terrestre. Pour $\omega \ll 1/\mathcal{L}_0$ un plateau (saturation) apparaît dans la densité spectrale d'énergie, pour $\omega \gg 1/\mathcal{L}_0$ on retrouve le modèle de Kolmogorov en $\omega^{-11/3}$.

Une petite échelle $l_0 \sim 10^{-3} - 10^{-2}$ m peut également être introduite pour prendre en compte des effets de dissipation thermique de l'énergie turbulente aux très grandes fréquences (petites dimensions). Les effets de la petite échelle l_0 sont importants pour une description thermo-dynamique de la turbulence, mais négligeables pour la propagation d'ondes électromagnétiques dans notre cas d'étude. La petite échelle sera donc omise dans la suite de ce document.

La turbulence atmosphérique conduit alors à des brassages de volumes d'air ayant différentes propriétés physiques telles la température ou l'humidité. L'atmosphère est un milieu hétérogène. Les travaux successifs d'Obukhov [1949] et de Tatarskii [1961] ont permis de montrer que les variations de température $\Delta T \triangleq T - \langle T \rangle$ suivent également la loi de Kolmogorov en $f^{-11/3}$. La densité spectrale de puissance (DSP) des variations de température est

$$W_{\Delta T}(\vec{\mathbf{f}}) = 0.033 (2\pi)^{-2/3} C_T^2 f^{-11/3} \quad (1.5)$$

avec C_T^2 la constante de structure des variations de température. Quant à la fonction de structure de ces variations, elle vaut

$$\begin{aligned} D_{\Delta T}(\vec{\rho}, z) &\triangleq \langle [\Delta T(\vec{\mathbf{r}}, t) - \Delta T(\vec{\mathbf{r}} + \vec{\rho}, t)]^2 \rangle \\ &= C_T^2(z) \rho^{2/3} \end{aligned} \quad (1.6)$$

où $\langle \cdot \rangle$ dénote une moyenne des réalisations, $\vec{\mathbf{r}} = (x, y, z)$ dénote la position, dont la composante z est l'altitude. La contribution spatiale $\vec{\mathbf{r}}$ disparaît de $D_{\Delta T}(\vec{\rho}, z)$ en supposant que le processus est spatialement stationnaire (dans le plan horizontal). Seule demeure la contribution de l'altitude z dans le $C_T^2(z)$, ce qui rend compte de l'aspect stratifié à grande échelle de l'atmosphère. La dépendance correspondante en f_z a été omise dans l'équation 1.5 car les variations sur z sont très basses fréquences spatiales, comparé aux fréquences du régime inertiel de Kolmogorov. En d'autres termes, la dimension caractéristique de la stratification verticale de l'atmosphère

2. Ce spectre peut également s'écrire en fonction de la fréquence $f = \omega/(2\pi)$ en considérant la conservation de l'énergie sur un volume $d\omega^3$ élémentaire et le volume conjugué df^3 .

est largement supérieure à la dimension des tourbillons [Roddier, 1981]. L'équation 1.5 est donc valide uniquement dans le régime inertiel et non pas aux très basses fréquences. De même l'équation 1.6 n'est valide que pour ρ inférieur à la taille caractéristique maximale des tourbillons.

1.2 Effet de la turbulence en optique

1.2.1 Modification de l'indice optique

En optique, on s'intéresse à l'indice de réfraction optique de l'air, noté n . Il dépend de la densité locale du gaz selon la loi de Gladstone-Dale³ et de la concentration en aérosols dans le gaz, dont l'humidité. Cette concentration en aérosols est supposée suffisamment constante pour ne pas interférer avec les observations astronomiques [Roddier, 1981]. L'indice optique n'est donc affecté que par la densité locale du gaz. Dans le cas de l'air, qui est un gaz parfait d'indice de réfraction proche de l'unité, la loi de Gladstone-Dale s'écrit

$$n(\vec{r}, t, \lambda) - 1 = K_G(\lambda) \frac{P(\vec{r}, t)}{T(\vec{r}, t)} \quad (1.7)$$

La constante K_G dépend uniquement de la longueur d'onde, et traduit les interactions onde-matière. Pour l'air, dans la gamme d'ondes visibles $K_G \sim 8 \times 10^{-7} \text{ m s}^2 \text{ K kg}^{-1}$. Pour les observations au télescope nous nous intéressons plus particulièrement aux variations d'indice optique qui perturbent l'image. On note $\Delta n(\vec{r}, t, \lambda)$ les variations de l'indice de réfraction optique autour de sa moyenne. Les variations de pression dues à la turbulence sont négligeables. Par contre les particules d'air ne sont pas à l'équilibre thermique, les variations de température subsistent alors dans l'expression de la variation de l'indice optique. Un développement limité au 1^{er} ordre donne

$$\Delta n(\vec{r}, t, \lambda) = -K_G(\lambda) \frac{P_0(z)}{T_0^2(z)} \Delta T(\vec{r}, t) \quad (1.8)$$

où $P_0(z)$ et $T_0(z)$ sont les valeurs moyennes de la pression et température en une altitude z donnée. Le développement limité est valide car ΔT est de l'ordre de grandeur du degré, tandis que $T_0 \sim 270 \text{ K}$, on a bien $\Delta T \ll T_0$. L'indice de réfraction optique suit donc linéairement les variations aléatoires de la température. On définit alors la constante de structure de l'indice de réfraction en fonction de celle de la température

$$C_n^2(z, \lambda) = \left(K_G(\lambda) \frac{P_0(z)}{T_0^2(z)} \right)^2 C_T^2 \quad (1.9)$$

3. La loi de Gladstone-Dale a été déterminée empiriquement en 1864. Elle est généralisée par les relations théoriques de Clausius-Mossotti et Lorentz-Lorenz (1869).

Tout comme le C_T^2 , le C_n^2 dépend de l'altitude z . De plus il dépend de λ , mais cette dépendance est négligeable sur la bande spectrale qui nous intéresse, à savoir le visible et proche infrarouge. En utilisant l'équation 1.5, la DSP de l'indice de réfraction est alors

$$W_n(\vec{\mathbf{f}}) = 0.033 (2\pi)^{-2/3} C_n^2(z) f^{-11/3} \quad (1.10)$$

De même, en utilisant l'équation 1.6 on obtient la fonction de structure

$$D_{\Delta n}(\vec{\rho}, z) = C_n^2(z) \rho^{2/3} \quad (1.11)$$

Bien que le C_n^2 fluctue au cours du temps, la dépendance temporelle n'apparaît pas si la durée d'observation t_{obs} est inférieure au temps caractéristique d'évolution du C_n^2 . Des évolutions notables de la turbulence apparaissent au cours des saisons, à cause du cycle jour/nuit dû au réchauffement solaire de l'atmosphère, mais également sur des échelles de temps plus petites allant de quelques heures à quelques minutes sous les effets du vent. Le C_n^2 dépend également du lieu considéré et de la topographie du site d'observation via les interactions sol/atmosphère telles le vent ou les courants thermiques. Une mesure de C_n^2 est montré sur la figure 1.1 et permet de visualiser des variations à la fois en altitude et en temps. La turbulence est majoritairement située près du sol, à une altitude inférieure à 1 km. Quelques autres couches apparaissent en altitude, souvent à cause de forts vents qui augmentent le nombre de Reynolds et favorisent la turbulence.

1.2.2 Les paramètres intégrés sur la ligne de visée

En optique, une grandeur d'intérêt est la valeur intégrée du C_n^2 sur la ligne de visée. Fried [1966] a introduit la grandeur r_0 , calculée en mètres, qui traduit la force de turbulence intégrée. Le paramètre de Fried correspond au diamètre équivalent d'un télescope qui donnerait (en l'absence de turbulence) la même résolution angulaire qu'un télescope de diamètre infini en présence d'atmosphère turbulente. Pour un spectre de Kolmogorov le paramètre de Fried s'écrit

$$r_0 = \left[0.42 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{\cos \gamma} \int_0^{+\infty} C_n^2(z) dz \right]^{-3/5} \quad (1.12)$$

avec γ l'angle zénithal de la ligne de visée. La valeur du $C_n^2(z)$ peut être complexe à déterminer pour toute altitude z . Le paramètre de Fried condense alors l'information sur le profil de turbulence en une seule valeur. L'évolution du paramètre de Fried est en $\lambda^{6/5}$, ce qui en fait un paramètre chromatique. Les courtes longueurs d'onde sont plus affectées par la turbulence que les grandes longueurs d'onde. Pour donner un ordre de grandeur typique du site de Paranal $r_0 \sim 15$ cm à $\lambda = 500$ nm et au

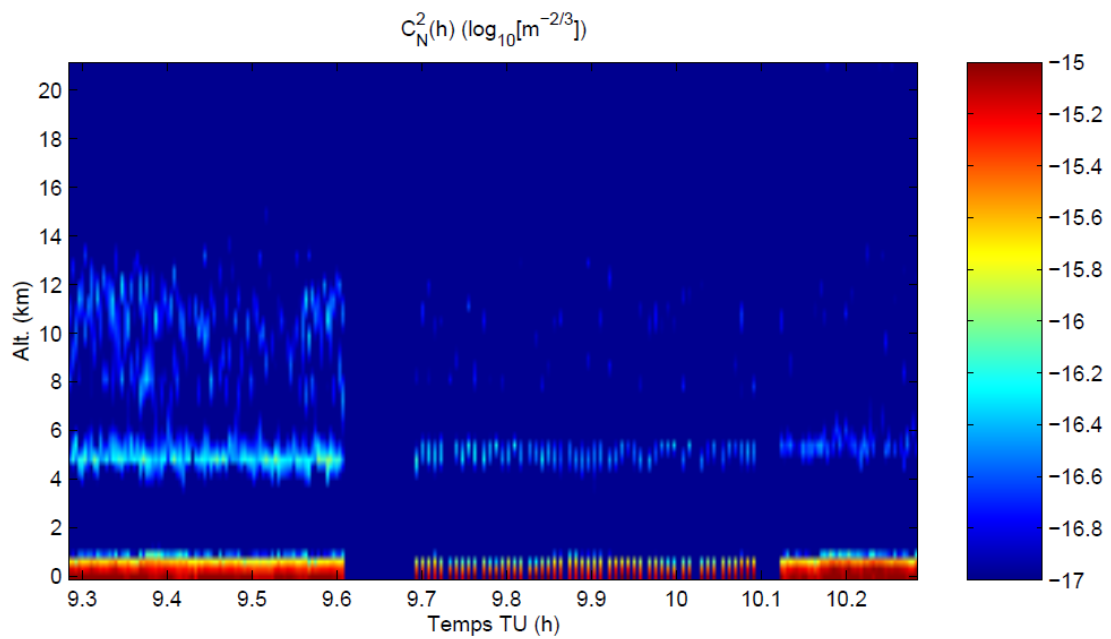


FIGURE 1.1 – Profil de $C_n^2(z)$ mesuré par SCIDAR à Mauna Kea. Les laps de temps à C_n^2 complètement nul correspondent à une absence de mesure. L'altitude du télescope est utilisée comme origine des altitudes. Echelle logarithmique d'intensité. Figure extraite de la thèse de Maire [2007].

zénith ($\cos \gamma = 1$). C'est à dire qu'en l'absence de système de compensation de la turbulence atmosphérique, les télescopes à Paranal seraient limités dans le visible à la résolution d'un télescope équivalent d'environ 15 cm de diamètre. Ces valeurs seront discutées plus en détails dans les prochains chapitres de cette thèse, mais permettent d'ores et déjà de fixer des ordres de grandeurs de la turbulence et de percevoir son effet délétère sur l'imagerie. A partir du paramètre de Fried on définit le *seeing* (en radian), qui est la résolution angulaire due à la turbulence.

$$s = \frac{\lambda}{r_0} \quad (1.13)$$

L'évolution chromatique du *seeing* n'est qu'en $\lambda^{-1/5}$, ce qui en fait un paramètre quasi-achromatique, plus plat spectralement que le paramètre de Fried. Le seeing est souvent utilisé en astronomie pour décrire la qualité du ciel. L'ordre de grandeur du *seeing* est une seconde d'arc pour les sites astronomiques, avec toutefois de fortes variabilités en fonction du lieu et de l'époque.

1.2.3 La mesure des conditions de turbulence

L'effet fortement délétère de la turbulence est un facteur limitant et donc un enjeu crucial pour l'observation astronomique. En conséquence, différents instruments ont été développés pour caractériser et mesurer la turbulence. Les instruments cités ci-dessous se basent tous sur des mesures optiques de la turbulence :

- SCIDAR (*SCIntillation Detection And Ranging*)
Analyse de l'autocorrélation angulaire de la scintillation d'étoiles doubles sur la pupille du télescope [Vernin and Roddier, 1973].
- SLODAR (*SLOpe Detection And Ranging*)
Détection sur un senseur de front d'onde des angles d'arrivée du front d'onde turbulent d'étoiles doubles [Wilson, 2002].
- MASS (*Multi Aperture Scintillation Sensor*)
Analyse de la scintillation d'une étoile au travers de quatre anneaux [Kornilov and Tokovinin, 2001].
- DIMM (*Differential Image Motion Monitor*)
Donne une mesure intégrée du profil de turbulence via le paramètre de Fried r_0 . Ce paramètre est mesuré par le mouvement relatif sur le détecteur de deux images d'une même étoile [Sarazin and Roddier, 1990].

1.3 Propagation d'une onde électromagnétique

1.3.1 L'hypothèse couches minces

La lumière est considérée dans l'ensemble de cette thèse sous le formalisme ondulatoire des champs électromagnétiques. La résolution des équations de Maxwell⁴ pour un milieu hétérogène [Goodman, 1968] donne l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta \vec{\mathbf{E}} + 2\vec{\nabla}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\nabla} \ln n(\vec{\mathbf{r}}, t)) - \frac{n^2(\vec{\mathbf{r}}, t)}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.14)$$

Afin de diminuer la complexité de cette équation, il faut faire appel à des hypothèses simplificatrices. L'hypothèse de Roddier [1981] stipule que les couches turbulentes sont optiquement minces et réparties de manière discrète selon l'altitude. Le seul effet d'une couche mince à l'altitude z_m est de déphaser l'onde incidente de la quantité

$$\delta\phi_m(\vec{\mathbf{r}}, t) = \frac{2\pi}{\lambda} \int_{z_m}^{z_m + \delta z} n(\vec{\mathbf{r}}, t) dz \quad (1.15)$$

Entre ces couches turbulentes déphasantes, l'atmosphère est considérée comme homogène, ce qui simplifie l'équation de propagation. On obtient l'équation linéaire aux dérivées partielles de Helmholtz

$$\Delta \vec{\mathbf{E}} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.16)$$

Il est alors possible d'écrire la propagation de l'onde entre deux plans horizontaux parallèles, en z et z' , ce qui constitue la solution intégrale de Rayleigh-Sommerfeld⁵ [Sommerfeld, 1954]. Cependant cette solution sous forme intégrale est lourde et ne possède pas de solution simple. L'approximation de Fresnel⁶ considère un régime de propagation lointaine, comparativement à l'extension du champ électromagnétique, ce qui simplifie la solution générale de Rayleigh-Sommerfeld. La solution approchée de Fresnel permet d'écrire la propagation du champ électromagnétique comme un

4. James Clerk Maxwell (1831 - 1879). Physicien et mathématicien écossais, connu surtout pour ses travaux majeurs en électromagnétisme et sur la description ondulatoire de la lumière. Il trouva notamment la célérité de la lumière.

5. La solution générale de Rayleigh-Sommerfeld est donnée par l'intégrale

$$E(x', y', z') = -\frac{i}{\lambda} \iint E(x, y, z) \frac{e^{ikR}}{R} \cos \chi \, dx \, dy$$

avec χ l'angle de diffraction et R la distance entre les deux points courants (x, y, z) et (x', y', z') .

6. L'approximation de Fresnel est un développement limité de la solution de Rayleigh-Sommerfeld pour les grandes distances de propagation $(z' - z)^2 \gg (x' - x)^2 + (y' - y)^2$. Ainsi le terme R se simplifie en factorisant par $(z' - z)^2$. De plus $\cos \chi \simeq 1$.

produit de convolution entre le champ électromagnétique et un noyau de propagation

$$E(x', y', z') = E(x, y, z) \star \mathbb{F}(\vec{r}, |z' - z|) \quad (1.17)$$

où la convolution, notée \star , ne porte que sur $\vec{r} = (x, y)$, et non pas sur l'altitude z . La seule variable dans le noyau $\mathbb{F}(\vec{r}, |z' - z|)$ est donc la variable de position \vec{r} , la distance $|z' - z|$ étant fixée par la position des deux plans parallèles. Le noyau de propagation est défini comme

$$\mathbb{F}(\vec{r}, |z' - z|) \triangleq \frac{-i \exp\{ik|z' - z|\}}{\lambda|z' - z|} \exp\left\{\frac{ik(x^2 + y^2)}{2|z' - z|}\right\} \quad (1.18)$$

Ce noyau est constitué d'un terme d'atténuation d'amplitude en $1/(\lambda|z' - z|)$, d'un terme de déphasage global $-i \exp\{ik|z' - z|\}$ dû à la propagation verticale de l'onde, et finalement d'un terme de déphasage quadratique en $\exp\left\{\frac{ik(x^2 + y^2)}{2|z' - z|}\right\}$ qui provoque des effets dispersifs sur l'onde électromagnétique.

En résumé, l'atmosphère selon Roddier est donc décomposée en une succession d'écrans de phase (Eq.1.15) parallèles et optiquement minces. Ces écrans sont séparés par des zones de propagation libre dans le cadre de l'approximation de Fresnel (Eq.1.17). Un schéma de principe est donné Fig.1.2.

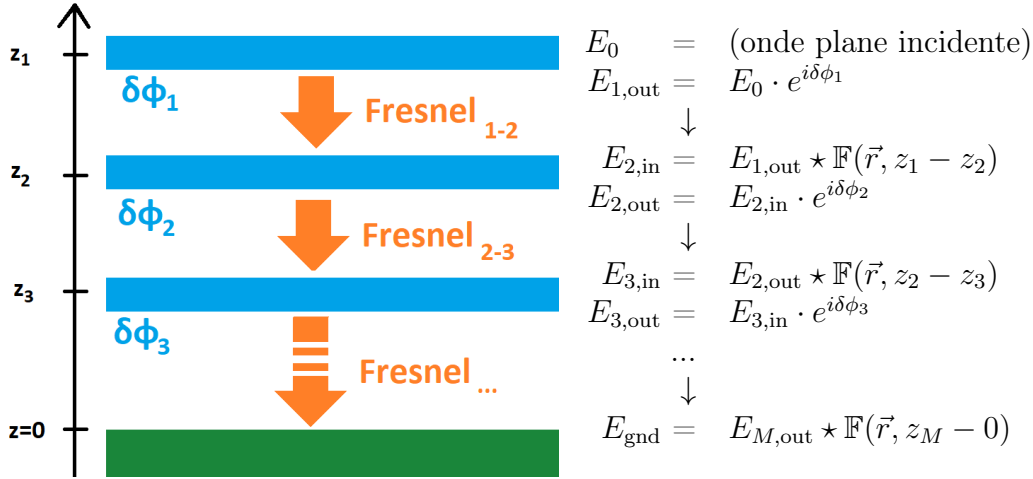


FIGURE 1.2 – Décomposition de l'atmosphère en successions de M couches minces turbulentes (en bleu sur la figure) selon Roddier, dont le seul effet est de déphaser l'onde de $\delta\phi_m(\vec{r}, t)$ entre le champ d'entrée (*in*) et le champ de sortie (*out*). Entre ces couches turbulentes, l'onde électromagnétique se déplace librement avec l'approximation de Fresnel (flèches).

1.3.2 Statistique de la phase turbulente

Les convolutions successives par le noyau \mathbb{F} sont responsables du phénomène de diffraction. Ce phénomène peut être observé à l'oeil nu en cas de forte turbulence car il est à l'origine du scintillement des étoiles. En cas de faible turbulence et de faibles distances de propagation, les effets de diffraction peuvent être négligés [Roddier, 1981]. L'atmosphère est alors modélisée par une somme d'écrans de phase décorrélés les uns des autres, suivant la même statistique spatiale (modèle Kolmogorov ou Von-Karman), mais de force différente selon leurs $C_n^2(z_m)$ respectifs. L'amplitude de l'onde électromagnétique n'est pas perturbée par l'atmosphère, cette amplitude est alors considérée spatialement constante dans la pupille du télescope. Quant à la phase de l'onde électromagnétique au niveau du sol, elle s'écrit simplement comme la somme des écrans de phase

$$\phi(\vec{r}, t) = \sum_{m=1}^M \delta\phi_m(\vec{r}, t) \quad (1.19)$$

Afin de trouver la statistique de chaque écran de phase on utilise les équations 1.11 et 1.15. En considérant encore une fois que l'épaisseur δz_m d'une couche est bien plus grande que la dimension des tourbillons, on obtient pour une seule couche

$$D_{\phi_m}(\vec{\rho}, z_m) = 2.91 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 C_n^2(z_m) \delta z_m \rho^{5/3} \quad (1.20)$$

Etant donné que les écrans de phase sont statistiquement indépendants, une sommation des écrans de phase conduit à une simple sommation de leurs fonctions de structure. On peut alors écrire la fonction de structure de la phase totale ϕ vue au sol en fonction du paramètre de Fried r_0

$$D_\phi(\vec{\rho}) = 6.88 \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^{5/3} \quad (1.21)$$

On voit donc le r_0 apparaître directement comme une dimension caractéristique de cohérence de la phase. Un r_0 élevé se traduit par une fonction de structure faible, et donc par de faibles variations spatiales de la phase. Quant à la DSP de la phase, elle s'écrit

$$W_\phi(\vec{f}) = 0.023 r_0^{-5/3} f^{-11/3} \quad (1.22)$$

Cette équation n'est valide que dans le domaine inertiel de Kolmogorov. Si on veut l'étendre aux basses fréquences on peut utiliser une grande échelle L_0 . Cette grande échelle L_0 est optique tandis que le \mathcal{L}_0 de Von-Karman est une échelle dynamique de la turbulence. Les deux sont reliées, mais il n'y a pas de consensus sur la définition

exacte du L_0 en fonction de \mathcal{L}_0 [Conan, 2000, Maire, 2007]. Avec cette grande échelle optique L_0 , type Von-Karman, la DSP de la phase électromagnétique devient

$$W_\phi(\vec{f}) = 0.023 r_0^{-5/3} \left[\left(\frac{1}{L_0} \right)^2 + f^2 \right]^{-11/6} \quad (1.23)$$

La différence entre les spectres de la phase selon les modèles de Kolmogorov et de Von-Karman est illustrée sur la figure 1.3.

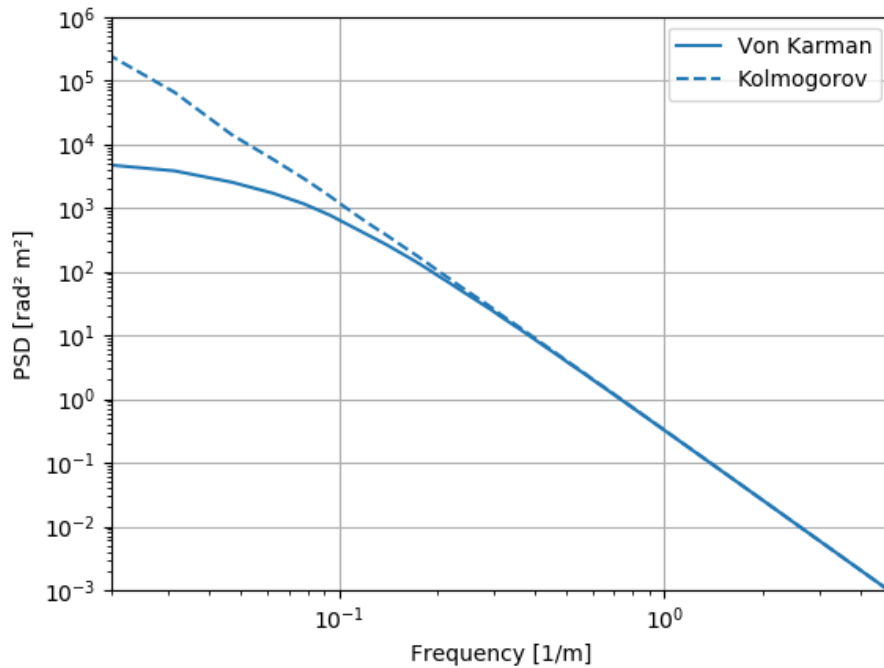


FIGURE 1.3 – DSP de la phase turbulente en utilisant un spectre de Kolmogorov et un spectre de Von-Karman ($L_0 = 15$ m). Dans les deux cas $r_0 = 20$ cm. Le régime inertiel est le domaine de validité du modèle de Kolmogorov $f \gg 1/L_0$. La petite échelle est omise.

1.4 Formation d'image longue pose : la PSF

1.4.1 Longue pose versus courte pose

L'approximation de Fresnel a permis de simplifier la solution de propagation de Rayleigh-Sommerfeld : le champ électrique est propagé entre deux plans parallèles

par le noyau de Fresnel \mathbb{F} selon l'équation 1.17. Une approximation plus forte est l'approximation en champ lointain de Fraunhofer. Les champs électromagnétiques propagés sur une grande distance sont Fourier-conjugués. De même si on considère un système optique, la conjugaison optique entre plan pupille et plan focal s'effectue par transformation de Fourier des champs électromagnétiques [Goodman, 1968]. Le schéma de la figure 1.4 présente un système optique avec le formalisme de transformations de Fourier successives. L'intensité instantanée mesurée dans un plan focal est le carré du champ électromagnétique, ainsi

$$\begin{aligned} I(x', y') &\propto \langle |E(x', y')|^2 \rangle \\ &\propto \left\langle \left| \mathcal{F} \left\{ E(x, y) P(x, y) \right\} \left(\frac{x'}{\lambda F}, \frac{y'}{\lambda F} \right) \right|^2 \right\rangle \end{aligned} \quad (1.24)$$

avec I l'intensité en plan focal, F la distance focale du système optique, E le champ électromagnétique en plan pupille et P la fonction de transmission de la pupille. La mesure de l'intensité est une moyenne sur une durée grande devant la période de vibration du champ électromagnétique. Si on appelle ν la fréquence de vibration du champ électromagnétique et τ_D le temps de pose du détecteur, on obtient toujours pour les longueurs d'onde optiques

$$1/\nu \ll \tau_D \quad (1.25)$$

Dans le cas où un point source est observé, par exemple une étoile, le champ électrique au sommet de l'atmosphère est plan. Un champ électrique non plan au niveau de la pupille du télescope est alors uniquement le fait de la turbulence atmosphérique. De plus ce champ est tronqué par la pupille de dimension finie. L'intensité mesurée est alors dispersée sur le détecteur à cause de ces effets de turbulence et de pupille finie. Dans le cas où un point source est observé, la tâche correspondante sur le détecteur est nommée fonction d'étalement du point, ou *point spread function* en anglais, abrégé PSF. Nous utiliserons ici le terme anglophone de PSF, ce qui est motivé par l'usage, même dans un milieu francophone. Pour deux champs électromagnétiques *incohérents* (!), l'équation 1.24 est linéaire, car les moyennes des termes croisés s'annulent. La PSF est alors également désignée comme étant la « réponse impulsionnelle » du système, en utilisant la terminologie relative aux systèmes linéaires. La PSF sera notée h .

Deux régimes d'imagerie apparaissent selon le temps de pose comparativement avec le temps caractéristique de variation de la turbulence $\tau_T \sim 10$ ms. Si le temps de pose est inférieur au temps caractéristique de variation de la turbulence $\tau_D \ll \tau_T$, il s'agit du régime courte pose. Dans ce régime l'atmosphère se comporte comme un écran de phase aléatoire, mais immobile durant le temps d'exposition. L'intensité

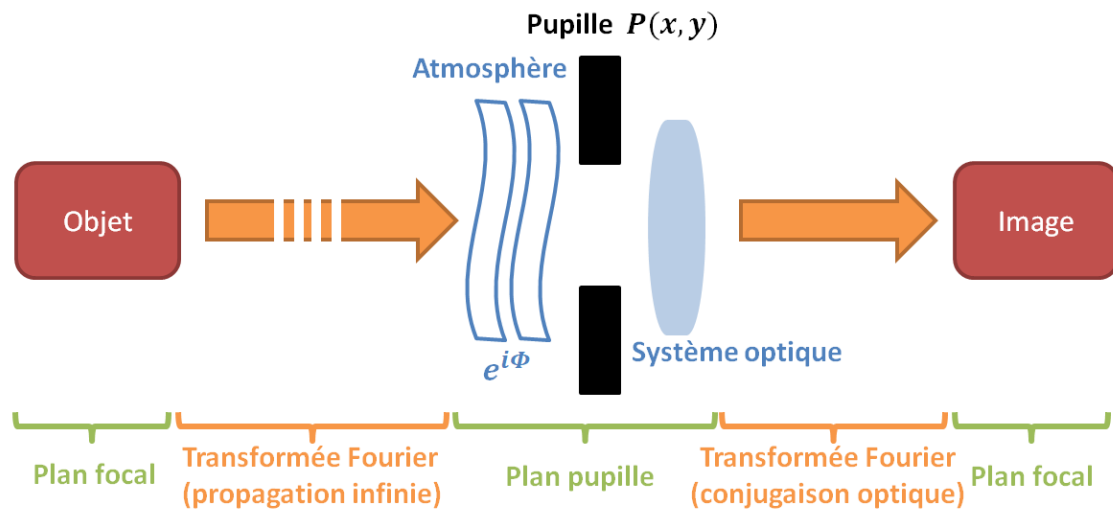


FIGURE 1.4 – Schéma de propagation de l’onde électromagnétique entre l’objet observé et son image en plan focal. Les conjugaisons entre les différents plans (vert) s’effectuent par transformée de Fourier (orange). En l’absence de scintillation l’atmosphère est un phaseur dans le plan pupille.

de la PSF est éclatée de manière aléatoire sur le détecteur en plusieurs tâches lumineuses appelées *speckles* (ou « tavelures » en français). Ces *speckles* conservent de l’information à haute fréquence angulaire sur l’objet observé, ce qui donne lieu à la technique d’imagerie de *speckles* [Labeyrie, 1970] : une série d’images courtes pose est acquise. Chaque image conserve une partie de l’information de l’objet observé par le télescope, la taille caractéristique des *speckles* étant λ/D (Fig. 1.5). En les combinant adroitement (somme du module carré des transformées de Fourier) il est possible de retrouver une grande partie de cette information angulaire. Cependant cette technique n’est possible que pour des observations à fort flux, car les faibles temps de pose réduisent dramatiquement le rapport signal à bruit (*signal to noise ratio*, SNR).

A l’opposé se trouve la technique d’imagerie longue pose $\tau_D \gg \tau_T$. Le flux est intégré sur une longue durée, ce qui permet d’augmenter le rapport signal à bruit. L’inconvénient est alors de moyenniser complètement les effets de la turbulence. Les *speckles* de la PSF courte pose se moyennent pour donner une large tâche de la PSF longue pose, de taille caractéristique λ/r_0 au lieu de λ/D . Pour $r_0 \ll D$, la tâche turbulente est beaucoup plus large que la tâche de diffraction. Une large tâche de PSF correspond à une forte perte de résolution sur l’objet observé, c’est le prix à payer pour obtenir un rapport signal à bruit suffisant. La différence entre PSF

courte pose et longue pose peut être visualisée sur la figure 1.5. Le travail de cette thèse se base sur des observations longue pose, nous nous concentrons alors sur une description plus précise de cette PSF longue pose.

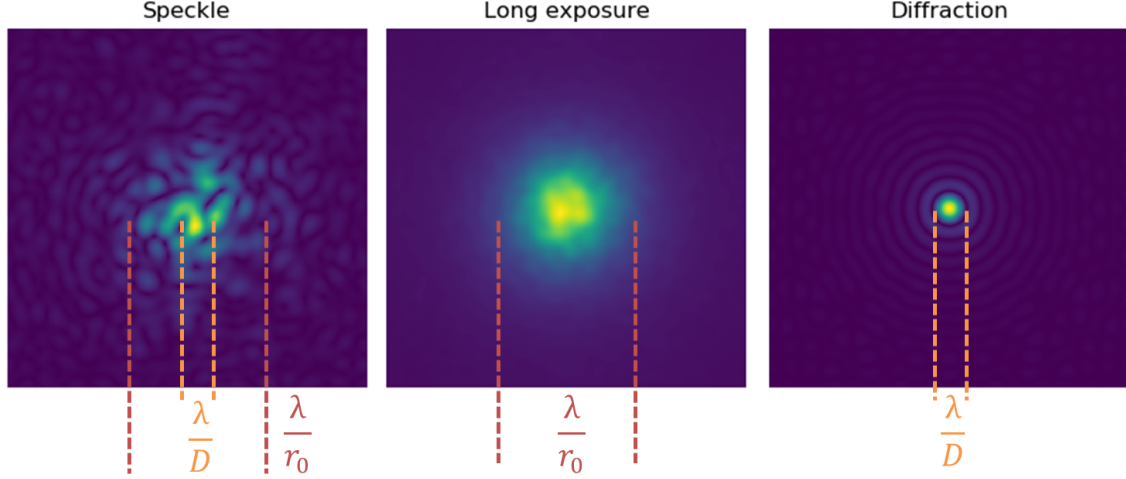


FIGURE 1.5 – Simulation de PSF dans trois cas observationnels. À gauche : PSF courte pose composée de *speckles* qui conservent une partie de l'information angulaire. Au milieu : PSF longue pose, qui est une large tâche causée par le mouvement des *speckles* sur la durée. À droite : PSF idéale de l'instrument à la diffraction (tâche d'Airy), qui est la limite de résolution de l'instrument. Le rapport diamètre du télescope sur paramètre de Fried vaut $D/r_0 = 5$ pour les deux simulations en présence de turbulence.

1.4.2 Propriétés de la PSF longue pose

La PSF longue pose moyenne temporellement les effets de la turbulence. Cette PSF longue pose dépend donc de la statistique de la turbulence. L'équation 1.24 montre que la PSF est la densité spectrale de puissance (DSP) du champ électromagnétique vu par la pupille. Or le théorème de Wiener-Khintchine énonce que la DSP est la transformée de Fourier de l'autocorrélation. Ainsi

$$\mathcal{F}^{-1} \{h\} (\vec{\rho}/\lambda) = \frac{1}{S} \iint \langle E(\vec{r}) E^*(\vec{r} + \vec{\rho}) \rangle P(\vec{r}) P^*(\vec{r} + \vec{\rho}) d\vec{r} \quad (1.26)$$

avec S la surface de la pupille pour normaliser la PSF en énergie, et $\vec{\rho}/\lambda$ une variable angulaire. Par propriété mathématique d'involution de la transformée de Fourier, au changement de signe de coordonnées près, on obtient

$$\mathcal{F}^{-1} \{h\} (\vec{\rho}/\lambda) = \mathcal{F} \{h\} (-\vec{\rho}/\lambda) \triangleq \tilde{h}(-\vec{\rho}/\lambda) \quad (1.27)$$

La transformée de Fourier de la PSF ($\mathcal{F}\{h\} \triangleq \tilde{h}$) est appelée fonction de transfert optique, et notée⁷ FTO. Le champ électromagnétique est supposé stationnaire sur la pupille, il ne dépend plus statistiquement de la variable d'intégration \vec{r} . L'autocorrélation est factorisée en un produit de deux autocorrélations, B_E portant sur l'onde électromagnétique et B_T sur la pupille [Roddiier, 1981]

$$\tilde{h}(-\vec{\rho}/\lambda) = B_E(\vec{\rho}) B_T(\vec{\rho}) \quad (1.28)$$

L'autocorrélation du champ électromagnétique est

$$\begin{aligned} B_E(\vec{\rho}) &\triangleq \langle E(\vec{r}) E^*(\vec{r} + \vec{\rho}) \rangle \\ &= \langle \exp \{ i\phi(\vec{r}) - i\phi(\vec{r} + \vec{\rho}) \} \rangle \end{aligned} \quad (1.29)$$

Etant donné que la phase ϕ est la somme d'un grand nombre de réalisations indépendantes de phases ϕ_m de moyennes nulles, par le théorème de central limite on en déduit que ϕ a une statistique gaussienne de moyenne nulle. On reconnaît alors B_E comme la fonction caractéristique d'une loi de probabilité gaussienne, évaluée en 1. Cette fonction est une gaussienne et vaut

$$\begin{aligned} B_E(\vec{\rho}) &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle |\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r} + \vec{\rho})|^2 \rangle \right\} \\ &= \exp \{ -D_\phi(\vec{\rho})/2 \} \end{aligned} \quad (1.30)$$

Ce résultat important montre que l'autocorrélation du champ électromagnétique est en exponentielle de la fonction de structure de la phase. Dans le cas d'une phase turbulente de Kolmogorov, on obtient le résultat connu

$$B_E(\vec{\rho}) = \exp \left\{ -3.44 (\rho/r_0)^{5/3} \right\} \quad (1.31)$$

Comme la puissance 5/3 est proche de 2, l'autocorrélation du champ électrique est proche d'une fonction gaussienne.

Si $r_0 \ll D$, la FTO est dominée par le terme de la phase turbulente. L'observation est limitée par la turbulence atmosphérique et non pas le télescope. La FTO est proche d'une fonction gaussienne ; sa transformée de Fourier, la PSF, l'est également en approximation.

1.4.3 Le rapport de Strehl

En optique on définit le rapport de Strehl comme le rapport entre l'intensité au centre de la PSF du système h sur l'intensité au centre de la PSF théorique à la

7. Bien que PSF soit un acronyme anglais, la FTO est un acronyme français. Le choix est régi par l'usage parmi la communauté.

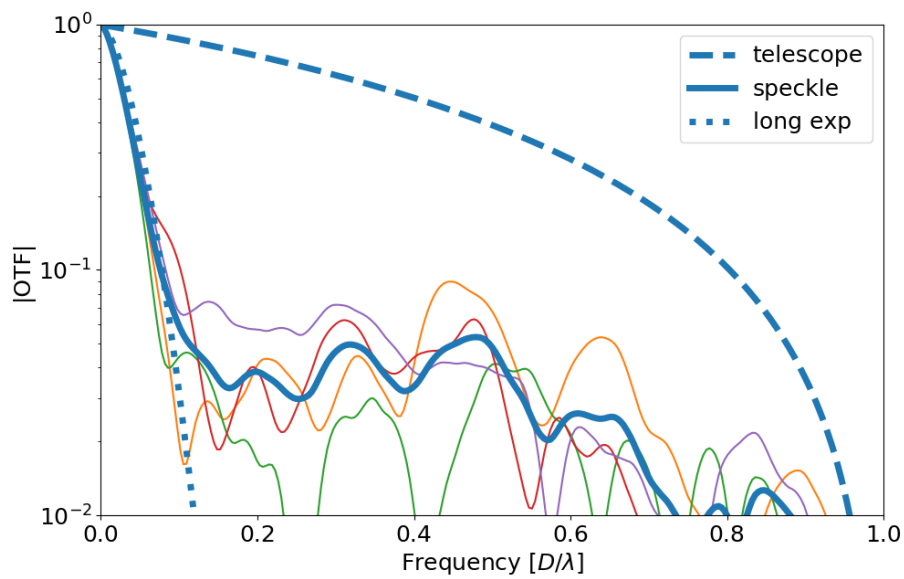


FIGURE 1.6 – Valeur absolue de la FTO pour trois cas d’imagerie : télescope à la limite de diffraction (tirets), longue pose turbulente (pointillés) et imagerie de *speckles* (trait continu). L’imagerie de *speckles* (trait continu épais bleu) est la moyenne de chaque image courte pose (traits continus fins de différentes couleurs). La simulation a été effectuée pour $D/r_0 = 10$.

diffraction h_T :

$$S_R \triangleq \frac{h(0)}{h_T(0)} \quad (1.32)$$

Etant donné que la diffraction correspond au cas physique limite, on a toujours $S_R \leq 1$. Ce rapport fondamental évalue la qualité du système optique complet télescope et atmosphère. Pour les grands télescopes au sol, l'atmosphère est de loin le facteur limitant du Strehl.

Dans les grandes longueurs d'onde (infrarouge), la diffraction est large et l'atmosphère perturbe moins la phase de l'onde incidente, il en résulte un meilleur rapport de Strehl que pour les faibles longueurs d'onde (visible). L'observation dans le visible est beaucoup plus ardue que dans l'infrarouge. Dans le cas de faibles erreurs de phase, le rapport de Strehl peut s'écrire comme l'approximation de l'énergie cohérente [Maréchal, 1948]

$$S_R \simeq \exp \{-\sigma^2\} \quad (1.33)$$

avec σ^2 la variance de la phase sur la pupille.

1.5 Image d'un objet étendu

1.5.1 Formalisme continu

Si on considère un objet étendu, chaque élément de surface de l'objet émet une onde lumineuse incohérente avec les autres éléments de surface. La réponse du système optique est donc linéaire vis-à-vis de chaque élément de surface de l'objet. L'image de cet objet en plan focal est alors

$$i(\vec{r}) = \iint o(\vec{\rho}) h(\vec{r}, \vec{\rho}) d\vec{\rho} \quad (1.34)$$

où o est la distribution d'intensité lumineuse de l'objet. Quant à $h(\vec{r}, \vec{\rho})$ il s'agit de la réponse impulsionnelle du système, qui dépend à la fois de la position sur le détecteur \vec{r} et de la position de l'objet dans le ciel $\vec{\rho}$. Le fait que la PSF h puisse varier dans le champ de vue est appelé « anisoplanétisme ». Ce phénomène peut avoir plusieurs origines physiques, par exemple la distribution verticale du profil de turbulence C_n^2 : la lumière provenant de deux angles de vue différents ne traverse pas le même volume turbulent.

Dans la zone où la réponse impulsionnelle est quasiment identique en tout point de la scène observée (domaine isoplanétique) l'observation d'un objet étendu s'écrit comme

$$i(\vec{r}) = \iint o(\vec{\rho}) h(\vec{r} - \vec{\rho}) d\vec{\rho} \quad (1.35)$$

On reconnaît un produit de convolution entre l'objet et la PSF

$$i(\vec{r}) = \{o \star h\}(\vec{r}) \quad (1.36)$$

Une propriété intéressante du produit de convolution est sa transformation en un simple produit « fréquence à fréquence » dans le domaine de Fourier. En effectuant la transformée de Fourier de l'équation précédente on obtient

$$\tilde{i}(\vec{f}) = \tilde{o}(\vec{f}) \cdot \tilde{h}(\vec{f}) \quad (1.37)$$

La FTO agit donc comme un filtre sur chaque fréquence de l'objet. Comme $|\tilde{h}| \leq 1$, les fréquences de l'objet sont atténuées voire annulées. C'est particulièrement le cas des hautes fréquences, annulées à cause de la turbulence et la pupille finie du télescope.

1.5.2 Formalisme discrétisé

Les détecteurs numériques sont pixelisés, l'équation d'imagerie précédente est alors discrétisée. De plus chaque pixel souffre d'un bruit de mesure qui a plusieurs origines. Voici une liste non exhaustive de quelques sources de bruit :

- Arrivée aléatoire des photons. Les interactions lumière-matière se font de manière quantifiée. L'arrivée des quantas d'énergie, les photons, sur le détecteur est aléatoire et suit une loi de Poisson. Ce bruit est intrinsèque à la source, et ne peut pas être diminué technologiquement, à moins d'augmenter le flux reçu grâce à une plus grande surface collectrice ou grâce à une amélioration de la transmission de l'instrument.
- Bruit thermique (du fond, *background*). Le ciel et les instruments chauds rayonnent, surtout en infrarouge. Ce rayonnement est mesuré par le détecteur s'il opère dans la même gamme spectrale.
- Bruit de lecture. L'électronique de lecture ajoute du bruit lors du comptage des électrons. Ce bruit est supposé Gaussien dans la plupart des cas. Les progrès de l'électronique de lecture ont fortement réduit ce bruit au cours des dernières décennies.
- Bruit thermique (du détecteur, *dark*). La température du détecteur peut être suffisante pour arracher des électrons du semi-conducteur. Lors de la lecture, ces électrons thermiques sont comptés à tort comme des impacts de photons. Les caméras en astronomie sont généralement refroidies, ce qui limite ce bruit.

Ces bruits sont additifs, ce qui permet d'écrire l'équation d'imagerie discrète

$$\mathbf{i} = \mathbf{III}(h_D \star h \star o) + \mathbf{n} \quad (1.38)$$

où la notation en gras signale une quantité discrétisée, le symbole III est l'opérateur de discrétisation, et \mathbf{n} est le bruit supposé additif présent à chaque pixel. La convolution \star est continue, car elle porte sur h et o qui sont continus. La PSF du détecteur h_D prend en compte l'intégration sur les pixels.

Afin d'obtenir des quantités de même nature, et numériquement manipulables, nous allons discrétiser l'objet et la PSF. Pour ce faire, l'objet est décomposé linéairement sur une famille finie de fonctions élémentaires u_k . Ces fonctions u_k sont définies à partir de la fonction u_0 , et chacune décalée de $k\Delta$. Dans un but de simplicité, le pas Δ est choisi identique au pas de pixelisation de l'image. Ainsi

$$u_k(x) = u_0(x - k\Delta) \quad (1.39)$$

La décomposition de l'objet sur cette famille s'écrit

$$\begin{aligned} o(x) &= \sum_{k=1}^K o_k u_k(x) + \varepsilon(x) \\ &= \sum_{k=1}^K o_k u_0(x - k\Delta) + \varepsilon(x) \end{aligned} \quad (1.40)$$

où o_k sont les coefficients de la décomposition sur la famille et $\varepsilon(x)$ le résidu. Le choix d'une famille adaptée permet d'obtenir un résidu faible. En utilisant cette décomposition de l'objet on obtient une écriture de la convolution

$$\begin{aligned} \text{III}(h_D \star h \star o)_m &\triangleq \int (h_D \star h)(m\Delta - x) o(x) dx \\ &\simeq \sum_{k=1}^K o_k \int (h_D \star h)(m\Delta - x) u_0(x - k\Delta) dx \\ &\simeq \sum_{k=1}^K o_k (h_D \star h \star u_0)(m\Delta - k\Delta) \end{aligned} \quad (1.41)$$

où l'on a négligé le terme en ε . Alors en définissant une PSF discrétisée selon

$$\mathbf{h}_k \triangleq (h_D \star h \star u_0)(k\Delta) \quad (1.42)$$

on obtient l'approximation entre convolution continue et discrète

$$\text{III}(h_D \star h \star o) \simeq \mathbf{h} \otimes \mathbf{o} \quad (1.43)$$

où \otimes représente une convolution discrète et \mathbf{o} l'ensemble des o_k . Ainsi l'équation d'imagerie discrète est

$$\mathbf{i} = \mathbf{h} \otimes \mathbf{o} + \mathbf{n} \quad (1.44)$$

Cette équation discrète est souvent utilisée numériquement. Le choix de la base permet de remonter des quantités discrètes aux quantités continues. On peut par exemple choisir

$$u_0(x) = \frac{1}{\Delta} \text{sinc}(\pi x / \Delta) \quad (1.45)$$

Les autres u_k se déduisent de u_0 par simple translation. Le choix de cette base de sinus cardinaux permet d'obtenir une transformée de Fourier \tilde{u}_0 comme étant une fonction porte de largeur $1/\Delta$. La PSF discrétisée est ainsi une version filtrée passe-bas, à la fréquence de Shannon-Nyquist de l'échantillonnage de l'image, de la PSF continue.

Conclusion du chapitre

Ce chapitre a posé les notions et équations de base de l'imagerie astronomique depuis des télescopes au sol. L'un des problèmes majeurs de ces observations est la présence de la turbulence atmosphérique, laquelle « floute » les images et contraint fortement la résolution angulaire. Une fois l'image longue pose acquise, l'information haute résolution est définitivement perdue. Il faut alors agir en amont du capteur pour compenser au mieux cette turbulence et restaurer, au moins en partie, l'information. C'est le principe de l'optique adaptative, qui sera présenté au chapitre suivant.

Chapitre 2

L'optique adaptative

Résumé

L'optique adaptative (OA) est une méthode de compensation en temps réel de la turbulence par un miroir déformable. Elle permet de retrouver des images très résolues, à la limite de diffraction, en particulier en infrarouge (turbulence plus stable, correction plus aisée). Mais aux longueurs d'onde plus courtes, comme dans le visible, la correction n'est que partielle. Ce chapitre donne une description générale du fonctionnement d'un système d'OA. La fonction d'étalement du point (PSF) de l'OA présente une forme particulière. Comprendre cette forme est importante pour la partie suivante sur la modélisation de PSF. Ce chapitre présente également plusieurs instruments équipés d'OA. Les PSF et images issues de ces instruments seront utilisées par la suite.

Sommaire

| | | |
|------------|---|-----------|
| 2.1 | Description de l'optique adaptative (OA) | 23 |
| 2.1.1 | Développement de l'OA | 23 |
| 2.1.2 | Principe général de fonctionnement | 23 |
| 2.1.3 | La « zoologie » de l'OA | 28 |
| 2.1.4 | Téléométrie | 28 |
| 2.2 | Imagerie en optique adaptative | 29 |
| 2.2.1 | Budget d'erreur | 29 |
| 2.2.2 | Modification de la statistique de la phase | 30 |
| 2.2.3 | La PSF et la FTO corrigées par OA | 31 |
| 2.3 | Instruments actuels équipés d'OA | 34 |
| 2.3.1 | VLT/SPHERE/Zimpol | 34 |
| 2.3.2 | VLT/MUSE | 37 |
| 2.3.3 | OCA/ODISSEE | 42 |

2.1 Description de l’optique adaptative (OA)

2.1.1 Développement de l’OA

Comme on l’a démontré précédemment la turbulence atmosphérique entraîne la perte des hautes fréquences spatiales de l’objet, et ne permet donc pas l’observation des détails fins de l’objet inférieurs au *seeing* $s = \lambda/r_0$. Une fois l’image acquise sur le détecteur, une partie de l’information est définitivement perdue. Si on veut espérer conserver de l’information sur l’objet il faut alors agir en amont du capteur et compenser en temps réel la turbulence. Le concept d’optique adaptative (OA) est attribué à Babcock [1953]. Bien que l’idée date du début des années 50, il a fallu attendre pendant 30 – 40 ans la maturation de technologies adéquates pour réaliser les premiers systèmes d’OA en astronomie, tels COME-ON [Kern et al., 1989] et ADONIS [Beuzit et al., 1997] à La Silla (Chili) ou PUEO [Arsenault et al., 1994] au CFHT (Mauna Kea). De nos jours les systèmes d’OA équipent la plupart des grands télescopes du monde, dont le Keck [Wizinowich et al., 2003], GALACSI [Ströbele et al., 2012] et SAXO [Fusco et al., 2006, Fusco et al., 2016, Sauvage et al., 2010] au VLT, GEMS [Neichel et al., 2014, Rigaut et al., 2012] au Gemini. Le futur Extremely Large Telescope (ELT), actuellement en construction au Chili, sera également doté d’optique adaptative [Diolaiti et al., 2016, Fusco et al., 2010, Neichel et al., 2016].

Les scientifiques veulent des systèmes d’OA efficaces, c’est-à-dire une forte correction de la turbulence et donc une bonne résolution angulaire. De plus il est important d’assurer une grande couverture du ciel, le système doit pouvoir fonctionner sur des objets guides de faible flux, et pouvoir compenser l’anisoplanétisme afin d’aller observer des objets loin de l’objet guide de l’OA. Enfin il faut également que le système d’OA soit robuste, il doit assurer en permanence un certain niveau de correction et fonctionner avec le minimum d’interruptions techniques.

2.1.2 Principe général de fonctionnement

L’optique adaptative est un système de compensation en temps réel de la phase turbulente, fonctionnant à des fréquences allant de quelques centaines de Hertz pour les systèmes les plus modestes jusqu’à plus d’un kiloHertz pour les plus performants. La compensation est effectuée par un miroir déformable, dont la forme s’adapte en permanence à la forme du front d’onde turbulent. L’objectif est d’obtenir un front d’onde plan en sortie du système d’OA, ce qui permet de focaliser correctement la lumière sur le détecteur et d’éviter l’apparition de *speckles* (en courte pose) ou d’une large tâche (en longue pose). Un système d’OA est composé au minimum des trois éléments suivants [Roddier, 1999] :

— Détecteur de front d’onde, *wavefront sensor* (WFS) [Rousset, 1999]. Ce sys-

tème fourni une mesure de la phase instantanée de l’onde électromagnétique ou de ses dérivées spatiales (*slopes*).

- Unité de calcul, *real time computer* (RTC) [Madec, 1999]. Elle traite les mesures envoyées par le WFS, reconstruit le front d’onde turbulent, et les traduit en commandes pour le miroir déformable.
- Miroir déformable, *deformable mirror* (DM) [Séchaud, 1999]. Ce miroir est monté sur un ensemble d’actionneurs qui le déforment afin de compenser les écarts de phase mesurés par le WFS.

L’ensemble est un système automatisé fonctionnant en boucle fermée avec une rétroaction de la mesure vers les actionneurs. La figure 2.1 résume le fonctionnement d’un système d’OA.

Le miroir déformable est constitué d’un nombre limité d’actionneurs. Il en résulte une fréquence spatiale maximale au delà de laquelle le système d’OA ne peut pas corriger. Cette fréquence est notée f_{OA} et est appelée fréquence de coupure de l’OA. Sa valeur est donnée par

$$f_{OA} \simeq \frac{N_{act}}{2D} \quad (2.1)$$

avec D le diamètre du miroir primaire et N_{act} le nombre linéaire d’actionneurs. La valeur exacte de la fréquence de coupure de l’OA, f_{OA} , dépend de la configuration géométrique des actionneurs ; mais aussi de la mesure et de l’estimation du front d’onde, car il n’est pas possible de corriger ce qui n’a pas été préalablement estimé. Dans tous les cas, les fréquences de la phase turbulente supérieures à f_{OA} ne sont pas corrigées par le système d’OA et contribuent à perturber l’image scientifique. Toutes les fréquences inférieures à f_{OA} sont corrigées par l’OA. La correction des basses-fréquences n’est toutefois pas parfaite, des résidus basses-fréquences de turbulence passent au travers du système d’OA et produisent un flou résiduel sur l’image.

La détection de front d’onde

La phase de l’onde électromagnétique, en infrarouge et visible, n’est pas une quantité directement mesurable par un détecteur, car les oscillations de l’onde sont trop rapides. Pour cela il faut tout d’abord coder la phase en une information d’intensité qui, elle, est mesurable. Plusieurs détecteurs de front d’onde sont utilisés en astronomie. Parmi eux se trouve l’analyseur de Shack-Hartmann [Platt and Shack, 1971] qui mesure les pentes locales de la phase. Pour ce faire une matrice de micro-lentilles est disposée dans un plan pupille. Chaque micro-lentille forme une image sur un détecteur en plan focal. Le barycentre de chacune des sous-images donne la pente locale du front d’onde (Fig. 2.2). Augmenter le nombre de sous-pupilles permet d’augmenter le nombre de mesures de la phase. Cependant en augmentant le

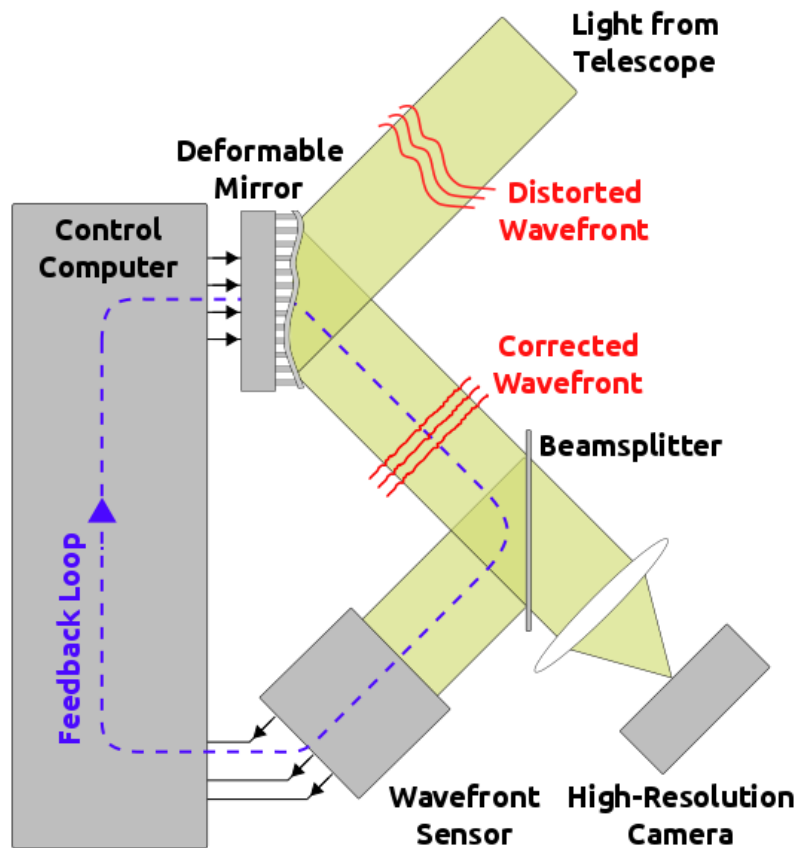


FIGURE 2.1 – Schéma de fonctionnement d'un système d'OA. Le front d'onde en provenance du télescope est déformé par la turbulence. Une lame séparatrice (*beam-splitter*) envoie la majeure partie du flux sur la caméra scientifique, mais renvoie une partie du flux vers le détecteur de front d'onde. Les mesures de celui-ci sont collectées par l'ordinateur en temps réel, puis les commandes sont envoyées au miroir déformable afin de corriger le front d'onde. Le tout fonctionne en boucle fermée. Source : *mavis-ao.org*

nombre de sous-pupilles le flux par sous-pupille est réduit, le SNR est donc réduit et le bruit de mesure perturbe la boucle de correction de l'OA.

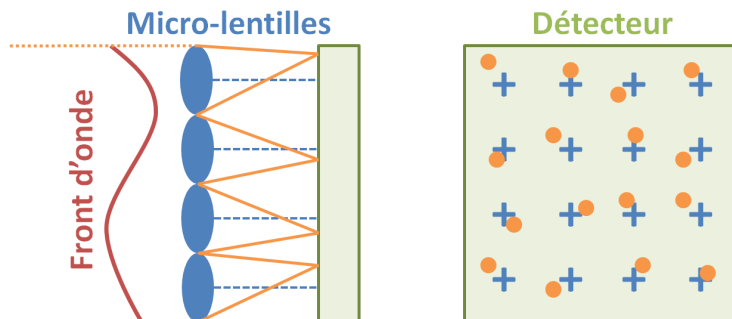


FIGURE 2.2 – Schéma d'un détecteur de Shack-Hartmann vu de profil (à gauche) et de face (à droite). Les croix bleues représentent les centres géométriques de chaque sous-pupille, les points orange représentent les spots lumineux.

Une technique en plein essor est la détection de front d'onde par une pyramide [Fauvarque, 2017, 2019, Ragazzoni, 1996]. Le faisceau est envoyé sur le sommet d'une pyramide à N faces, ce qui permet de le découper selon le principe du couteau de Foucault (Fig. 2.3). Les N images résultantes sont récupérées sur un détecteur puis combinées numériquement pour en extraire les pentes du front d'onde. Le détecteur pyramidal offre une mesure plus sensible de la phase que le détecteur de Shack-Hartmann, surtout en faible phase résiduelle [Esposito and Riccardi, 2001]. La grande sensibilité de la pyramide se fait au détriment d'une dynamique réduite. La technique de modulation du faisceau sur la pyramide augmente la dynamique, ce qui permet d'adapter la détection à de fortes turbulences.

L'estimation de la phase

La phase ϕ arrivant sur le détecteur de front d'onde est mathématiquement décomposable sur une base de modes. Par exemple les polynômes de Zernike [Noll, 1976, von F. Zernike, 1934] sont adaptés aux aberrations à géométrie circulaire présentes en optique. Toutefois l'occultation centrale des télescopes détruit l'orthogonalité de ces modes, de plus ils ne sont pas statistiquement décorrelés pour la phase électromagnétique. Les modes de Karhunen-Loève de la phase turbulente sont particulièrement utilisés en OA car ils sont justement construits pour être statistiquement décorrelés. Quelque soit la base de modes choisie, le détecteur de front d'onde fournit idéalement une mesure linéaire vis-à-vis de ces modes. En pratique la zone de réponse linéaire d'un détecteur est limitée, car sa dynamique est aussi

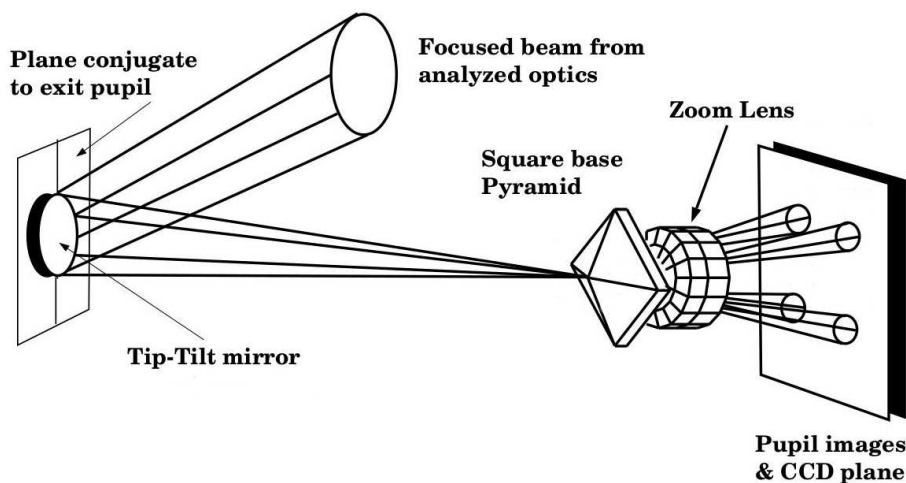


FIGURE 2.3 – Schéma de la détection de front d'onde par une pyramide avec possibilité de modulation. Crédit : Esposito

limitée, entraînant l'apparition de phénomènes de saturation dans les mesures. Le système d'OA est toutefois supposé travailler dans son régime linéaire, ce qui permet d'utiliser un formalisme matriciel

$$m = D\phi + n \quad (2.2)$$

avec ϕ la phase, D la matrice de mesure, n le bruit de mesure, et m la mesure. L'estimation de la phase à partir des mesures est un problème inverse¹. L'objectif est de trouver une estimation $\hat{\phi}$ de la phase d'origine ϕ à partir des mesures m . Il faut donc expliciter une matrice R de reconstruction de la phase, telle que

$$\hat{\phi} \triangleq Rm = R(D\phi + n) \quad (2.3)$$

On veut évidemment $\hat{\phi}$ suffisamment proche de ϕ , au sens d'une norme (la norme 2 par exemple). La reconstruction R doit laisser passer les modes de la phase, mais filtrer au mieux le bruit de mesure. Pour plus de détails concernant le choix d'une matrice R le lecteur pourra se référer à [Rousset \[1999\]](#). Une fois la matrice R déterminée, le système d'OA peut alors donner une estimation de la phase turbulente à partir des mesures du front d'onde résiduel et des commandes envoyées au miroir (le système fonctionnant en boucle fermée).

1. Le chapitre 6 donne une introduction aux problèmes inverses. Toutefois il ne s'agit ici que d'une introduction à l'OA, il n'est pas nécessaire d'entrer dans les subtilités.

2.1.3 La « zoologie » de l’OA

Au fur et à mesure du développement de l’optique adaptative, plusieurs modes de fonctionnement ont vu le jour. Pour s’y retrouver, chaque mode est associé à un acronyme. Voici une liste des différents modes de fonctionnement de l’optique adaptative

- SCAO. *Single Conjugated Adaptive Optics*. Le système d’OA ne mesure que la phase intégrée sur la ligne de visée, et la corrige par le biais d’un seul miroir déformable. A cause de l’anisoplanétisme du volume turbulent, ce mode d’OA ne peut pas corriger des grands champs.
- MCAO. *Multi Conjugated Adaptive Optics*. A l’inverse du SCAO, le mode MCAO corrige plusieurs couches de turbulence grâce à plusieurs miroirs déformables, chacun conjugué à une altitude de couche turbulente. La correction est alors plus homogène dans le champ que le SCAO.
- LTAO. *Laser Tomography Adaptive Optics*. La phase turbulente est mesurée dans son volume grâce à plusieurs lasers. La reconstruction du volume turbulent permet de corriger la phase hors de l’axe des étoiles lasers. Toutefois les lasers sont insensibles au tip-tilt, car cette erreur se compense entre la montée et la descente du faisceau laser. Il faut donc au moins une étoile naturelle pour mesurer cette aberration.
- GLAO. *Ground Layer Adaptive Optics*. Le système d’OA possède un miroir déformable conjugué avec la couche turbulente au sol (~ 1 km d’altitude). C’est la couche turbulente la plus énergétique, et donc celle qu’il est préférable de compenser en premier.
- MOAO. *Multi Object Adaptive Optics*. Le champ de vue est divisé en champs plus étroits, chacun possédant son miroir déformable de correction. Il est ainsi possible de corriger indépendamment et simultanément plusieurs objets du champ de vue.
- XAO. *eXtreme Adaptive Optics*. Un système d’optique adaptative offrant une très bonne correction, c’est à dire avec une très faible phase résiduelle. Ce type de système est utile pour des besoins de forte résolution angulaire et fort contraste (imagerie d’exoplanètes par exemple).

2.1.4 Télémétrie

La télémétrie est un terme désignant une sauvegarde des données issues du système d’OA (mesure des pentes résiduelles) ou de systèmes annexes (mesures de r_0 par SCIDAR, MASS, DIMM...). La *télémétrie complète* du système d’OA comprend l’ensemble de toutes les mesures du WFS et des commandes au miroir déformables à chaque instant t de calcul. Il s’agit donc de données très lourdes et complexes à exploiter. Pour un système d’OA effectuant N mesures spatiales de la phase, cadencé

à la fréquence f_e , pour une durée d'observation T , on obtient environ $3 \times N \times f_e \times T$ données² d'enregistrement. Pour $N \simeq 600$, $f_e \simeq 1$ kHz et $T \simeq 10$ min, cela représente environ 10^9 données de télémétrie. Pour comparaison la taille typique d'une image est 10^6 pixels. Il y a donc plusieurs ordres de grandeur entre l'image acquise et la télémétrie associée à cette image. S'il faut sauvegarder la télémétrie pour chaque image, le volume de données après une nuit, voire une semaine ou un mois, d'observation est immense.

On peut alors préférer la *télémétrie intégrée* qui ne calcule que quelques paramètres essentiels, tels le r_0 ou le rapport de Strehl de l'observation. Bien évidemment cette compression se traduit par une perte d'information, mais chaque paramètre intégré possède à lui seul une grande valeur informative. En d'autres mots, le rapport information / volume est très grand pour ces paramètres intégrés, s'ils sont judicieusement choisis. Le paramètre de Fried r_0 peut être retrouvé à partir de la covariance des modes [Conan, 1994, Noll, 1976] corrigés par l'OA [Fusco et al., 2004]. Une estimation du r_0 , du L_0 et de l'énergie cohérente (\sim Strehl) peuvent alors être fournies par le RTC.

2.2 Imagerie en optique adaptative

2.2.1 Budget d'erreur

La correction OA est imparfaite, différents processus physiques contribuent à dégrader le niveau de correction. La qualité de la correction est jugée par la variance résiduelle σ^2 de la phase en aval du miroir déformable. Cette variance de phase est directement liée au rapport de Strehl de l'observation via l'équation 1.33. Le budget d'erreur du système d'OA consiste à expliciter les contributions des différentes sources d'erreurs, et donc de dégradation de la qualité d'imagerie. Dans le cas où les erreurs sont supposées non corrélées entre elles, le budget d'erreur du système d'OA s'écrit [Fusco et al., 2006, Rigaut et al., 1998]

$$\sigma^2 = \sigma_{\text{fit}}^2 + \sigma_{\tau}^2 + \sigma_{\text{alias}}^2 + \sigma_n^2 + \sigma_{\text{aniso}}^2 + \sigma_{\text{autres}}^2 \quad (2.4)$$

avec les sources d'erreur suivantes

2. Le facteur 3 prend en compte les pentes en x , les pentes en y et les commandes envoyées au miroir. Il s'agit toutefois d'un calcul en ordre de grandeur, et non pas d'une quantité exacte. Le calcul vaut pour un enregistrement des pentes et des commandes seulement. Cependant, si la totalité des pixels des images du WFS est sauvegardée, la quantité de données de télémétrie est encore plus importante

- σ_{fit}^2 : Erreur de *fitting*. Les modes trop hautes-fréquences ($f > f_{OA}$) de la phase ne sont pas vus et pas corrigés par le système d'OA.
- σ_{τ}^2 : Erreur temporelle. Un délai est nécessaire à l'acquisition des données du front d'onde et à la reconstruction par le ordinateur. Le miroir déformable corrige donc la phase avec un certain retard. Plus la phase évolue rapidement, plus le retard est critique.
- σ_{alias}^2 : Erreur de repliement (*aliasing*). L'analyseur de surface d'onde échantillonne la phase. Un risque de repliement spectral est possible, ce qui entraîne une mauvaise estimation des basses-fréquences, et donc une mauvaise correction de celles-ci.
- σ_n^2 : Erreur de bruit propagé dans la boucle. Le bruit de photon et de lecture du WFS perturbe la mesure et l'estimation du front d'onde. La propagation du bruit de mesure dans la boucle se traduit par une variance supplémentaire sur la phase de l'onde électromagnétique.
- σ_{aniso}^2 : Erreur d'anisoplanétisme. Dans le cas où l'objet d'intérêt et la source du système d'OA sont angulairement écartés, les deux fronts d'ondes ne traversent pas la même zone de turbulence. Le système d'OA corrige donc la turbulence de l'objet guide mais pas celle de l'objet d'intérêt.
- σ_{autres}^2 : En plus des cinq erreurs précédemment évoquées, d'autres facteurs réduisent la qualité de correction, comme les erreurs de calibration du système ou les aberration non communes entre le bras du WFS et le bras scientifique (*non common path aberrations*, NCPA).

2.2.2 Modification de la statistique de la phase

Un système d'OA ne corrige pas parfaitement la phase turbulente, une partie des variations aléatoires du front d'onde passe au travers du système et se retrouve dans l'image. De plus le bruit de mesure du WFS est injecté dans la boucle d'OA, modifiant la forme du miroir, et donc la phase de l'onde électromagnétique. La phase corrigée par OA est toujours un processus statistique, cependant sa DSP a été modifiée. Le résidu de phase corrigée par OA ne suit plus le modèle de Kolmogorov, du moins aux basses-fréquences. La description de ces basses-fréquences est plus ardue car elle dépend à la fois des phénomènes atmosphériques (force de la turbulence, vitesse du vent), de l'objet guide (magnitude, taille angulaire, séparation avec l'objet d'intérêt) et du système d'OA (nombre d'actionneurs, rapidité de la boucle) [Fusco et al., 2006, Martin et al., 2017, Neichel et al., 2009, Rigaut et al., 1998]. Tout comme la DSP W_{ϕ} , la fonction de structure D_{ϕ} et l'autocorrélation B_{ϕ} sont affectées par le système d'OA (Fig. 2.4). En particulier la phase n'est pas stationnaire *a priori* sur la pupille, sa statistique dépendrait alors de son emplacement sur la pupille (par exemple quand la mesure de front d'onde est inhomogène sur la pupille à cause d'un éclairage non uniforme). Toutefois Conan [1994] a montré que l'approximation de

phase stationnaire est toujours valide en OA.

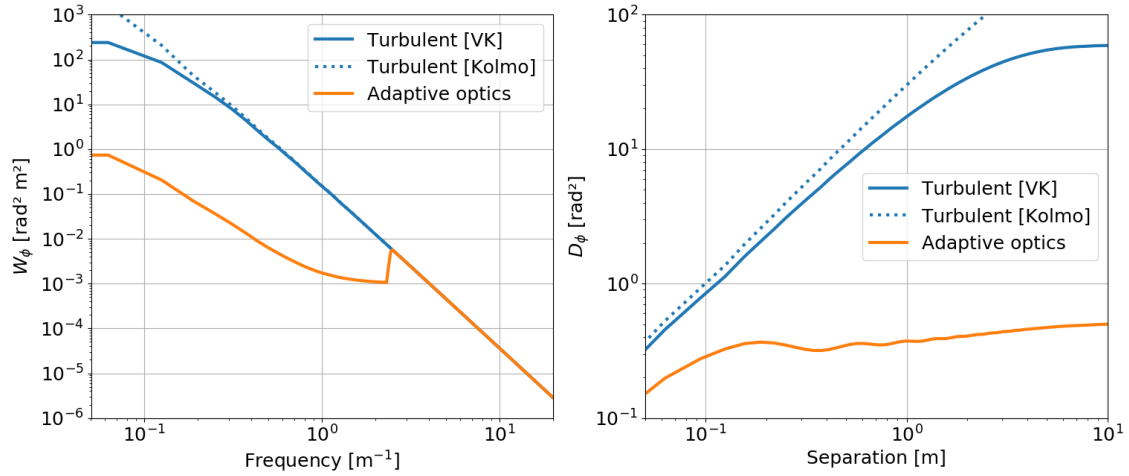


FIGURE 2.4 – Modification de la statistique de la phase turbulente par un système d’OA. Ici la fréquence de coupure est choisie à $f_{\text{OA}} = 2.44 \text{ m}^{-1}$, $r_0 = 30 \text{ cm}$ et $L_0 = 10 \text{ m}$ (sauf pour Kolmogorov qui ne possède pas de grande échelle). A gauche : la DSP W_ϕ de la phase électromagnétique. A droite : la fonction de structure D_ϕ .

2.2.3 La PSF et la FTO corrigées par OA

L’approximation de la phase stationnaire de Conan [1994] permet de continuer à utiliser la factorisation de la FTO comme le produit de la FTO du télescope et de la FTO de la phase résiduelle (Eq. 1.28). La figure 2.5 présente une FTO caractéristique d’un système d’OA, en comparaison avec la FTO purement turbulente ou la FTO à la limite de diffraction. Trois zones sont visibles sur la FTO corrigée par OA

- Basses fréquences angulaires ($f < 0.1$ sur la figure). Il s’agit de la partie non corrigée de la turbulence, c’est-à-dire les hautes fréquences spatiales de la phase, qui donnent lieu au halo résiduel sur la PSF.
- Moyennes fréquences angulaires ($0.1 < f < 0.8$ sur la figure). C’est le domaine d’action de l’OA. Ces fréquences de la phase sont corrigées par l’OA, du moins partiellement. Une bonne correction d’OA (faible erreur temporelle, faible erreur de bruit...) rehausse d’autant plus ces fréquences. Les oscillations sont dues à une coupure nette³ de la DSP à la fréquence spatiale f_{OA} .

3. Les oscillations sont d’autant plus visibles que la correction OA est bonne. Dans le cas limite d’une correction parfaite dans la zone des fréquences spatiales $f < f_{\text{OA}}$, la DSP est un spectre de Kolmogorov tronqué, *id est* multiplié par une fonction porte. La transformée de Fourier de la DSP, l’autocorrélation (et donc la FTO), présentent les oscillations caractéristiques de la transformée de

- Hautes fréquences angulaires ($f > 0.8$ sur la figure). Le système est dominé par la coupure du télescope. Quelle que soit la qualité de l'OA, il sera impossible de faire mieux que la coupure du télescope.

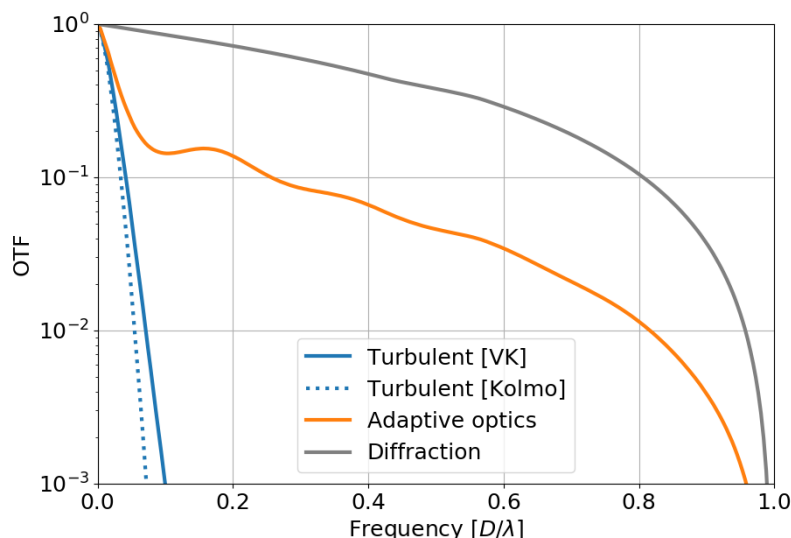


FIGURE 2.5 – FTO turbulente (bleu) selon les modèles de Kolmogorov (pointillés) et Von-Karman (continu). FTO caractéristique d'un système d'OA (orange). FTO à la diffraction (gris). Pour la simulation on a choisi $D/r_0 \simeq 27$, et 10 actionneurs dans le diamètre D de la pupille.

En rehaussant les moyennes fréquences de la FTO, le système d'OA fournit une grande résolution angulaire. Toutefois les moyennes et hautes fréquences ne sont pas égales à l'unité, ni même à la hauteur de la FTO de la diffraction. Ces fréquences sont filtrées, ce qui produit un flou résiduel sur les images. La figure 2.6 montre les éléments caractéristiques de la PSF corrigée par OA. La PSF corrigée par OA est séparée en deux zones. Au centre se trouve le pic cohérent, dû à la correction OA des basses fréquences de la DSP. La taille de cette zone dépend du nombre d'actionneurs du miroir déformable. L'extérieur correspond au halo non corrigé. De plus la figure 2.6 exhibe des structures dues à la diffraction du support du miroir secondaire (*spiders*) et dues à l'empreinte des actionneurs sur le miroir déformable (*print-through*). Ces effets de diffraction sont secondaires car ils ne modifient que légèrement la répartition d'énergie. L'essentiel de l'énergie est décrite par le coeur cohérent et le halo turbulent. La proportion entre les deux dépend de la qualité de correction du système d'OA.

Fourier de la fonction porte. Dans le cas d'une DSP plus lisse, les oscillations disparaissent.

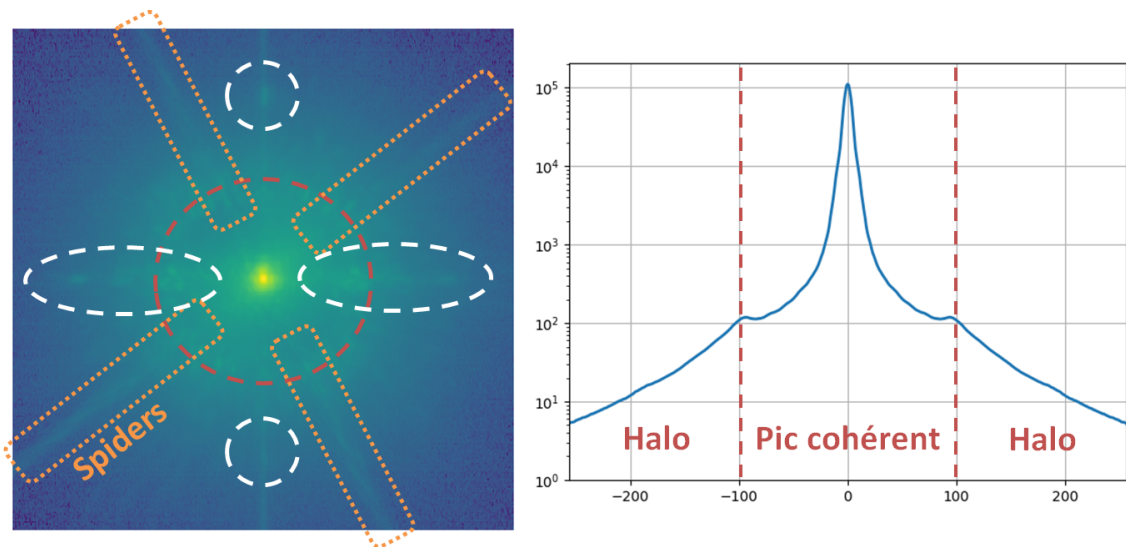


FIGURE 2.6 – Effet de la correction OA sur une PSF. Ici une PSF de l'instrument SPHERE/Zimpol est considérée. A gauche : PSF en échelle logarithmique. A droite : vue en coupe de la même PSF. Les pointillés rouges délimitent la zone de correction de l'OA (le coeur cohérent et le halo). Les rectangles oranges repèrent la diffraction due aux *spiders*. Les ellipses et cercles blancs repèrent la diffraction due au miroir déformable.

2.3 Instruments actuels équipés d’OA

Parmi l’ensemble des instruments équipés d’optique adaptative, cette section décrit plus en détail trois d’entre eux : SPHERE, MUSE et ODISSEE. Ces instruments-ci ont fourni des données qui seront utilisées dans la suite de la thèse, notamment aux chapitres 5, 7 et 8.

2.3.1 VLT/SPHERE/Zimpol

Les trois instruments IRDIS, IFS et ZIMPOL

Le *Very Large Telescope* (VLT) est un ensemble de quatre télescopes de 8 mètres de diamètre, ainsi que de plusieurs télescopes auxiliaires, installés sur le site *Cerro Paranal* au Chili. L’instrument SPHERE, *Spectro-Polarimetric High contrast Exoplanet Research* [Beuzit et al., 2008, Beuzit et al., 2019], est monté au foyer Nasmyth du télescope UT3 du VLT. Son objectif principal est l’imagerie directe d’exoplanètes géantes et de disques protoplanétaires. SPHERE est donc conçu pour fournir des images à fort contraste et grande résolution angulaire. Des coronographes de Lyot peuvent être positionnés dans le chemin optique afin d’augmenter le contraste autour de l’étoile centrale. La lumière de SPHERE peut être analysée par trois instruments différents :

- IRDIS. *Infra-Red Dual-beam Imager and Spectrograph* [Dohlen et al., 2008]. L’instrument fournit des images en infra-rouge (0.95 μm à 2.32 μm) sur un champ de vue de $11'' \times 11''$. Les images peuvent être acquises simultanément sur deux bandes spectrales pour être soustraites ensuite et ainsi pour améliorer la détection et caractérisation d’exoplanètes [Vigan et al., 2010].
- IFS. *Integral Field Spectrograph* [Claudi et al., 2008]. Avec un champ de vue de $1.73'' \times 1.73''$ l’instrument fournit un cube de 38 images entre 0.95 μm et 1.65 μm , ou entre 0.95 μm et 1.35 μm selon la résolution spectrale souhaitée.
- ZIMPOL. *Zurich Imaging Polarimeter* [Schmid et al., 2018]. L’instrument possède un champ de vue de $3.5'' \times 3.5''$. Il fournit des images entre 500 nm et 900 nm, soit en large bande soit en bande étroite grâce à différents filtres. La particularité de ZIMPOL est de pouvoir effectuer des mesures polarimétriques grâce à un modulateur polarimétrique synchronisé avec un transfert rapide de charges en lignes sur la caméra : les lignes paires mesurent un axe de polarisation, les lignes impaires mesurent l’axe orthogonal au premier (voir Fig. 2.8). ZIMPOL peut également être utilisé en tant que simple imageur en arrêtant le transfert de charges. Les photons issus des deux axes polarimétriques se retrouvent accumulés sur la même ligne, une ligne sur deux demeure donc vide sur l’image finale. L’information polarimétrique est perdue, mais le rapport signal sur bruit est augmenté.

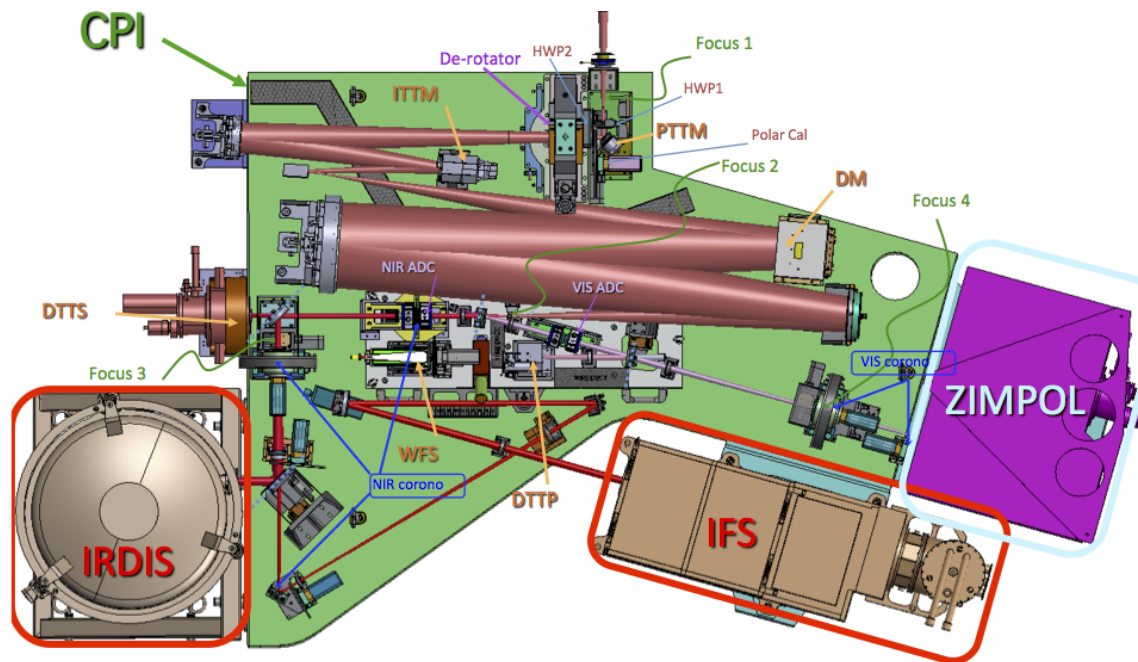


FIGURE 2.7 – Schéma optique de l'instrument SPHERE. La lumière du télescope provient du haut sur le schéma. Elle passe par le chemin commun (CPI, table verte sur le schéma), contenant notamment le système d'optique adaptative extrême SAXO. La lumière est finalement dirigée vers les trois instruments scientifiques IRDIS, IFS et ZIMPOL aux extrémités. Crédit : JL. Beuzit

Le système d'OA extrême SAXO

La lumière en provenance du télescope est desservie (simultanément ou séparément, selon les modes de fonctionnement) aux différents instruments grâce à une table optique commune, appelée *Common Path Infrastructure* (CPI, Fig. 2.7). Cette partie commune comprend notamment le système d'optique adaptative extrême SAXO [Fusco et al., 2016, Sauvage et al., 2016, Sauvage et al., 2010]. Ce système d'OA comprend un détecteur de front d'onde (WFS) de Shack-Hartmann (équipé d'un filtre spatial permettant de réduire le phénomène de repliement lors de la mesure) composé de 40×40 sous-ouvertures, et fonctionnant dans le visible. Les courtes longueurs d'onde peuvent être filtrées si le flux le permet. Une détection supplémentaire est effectuée en infrarouge par le *Differential Tip-Tilt Sensor* (DTTS), notamment pour assurer un positionnement précis de l'étoile sur le coronographe.

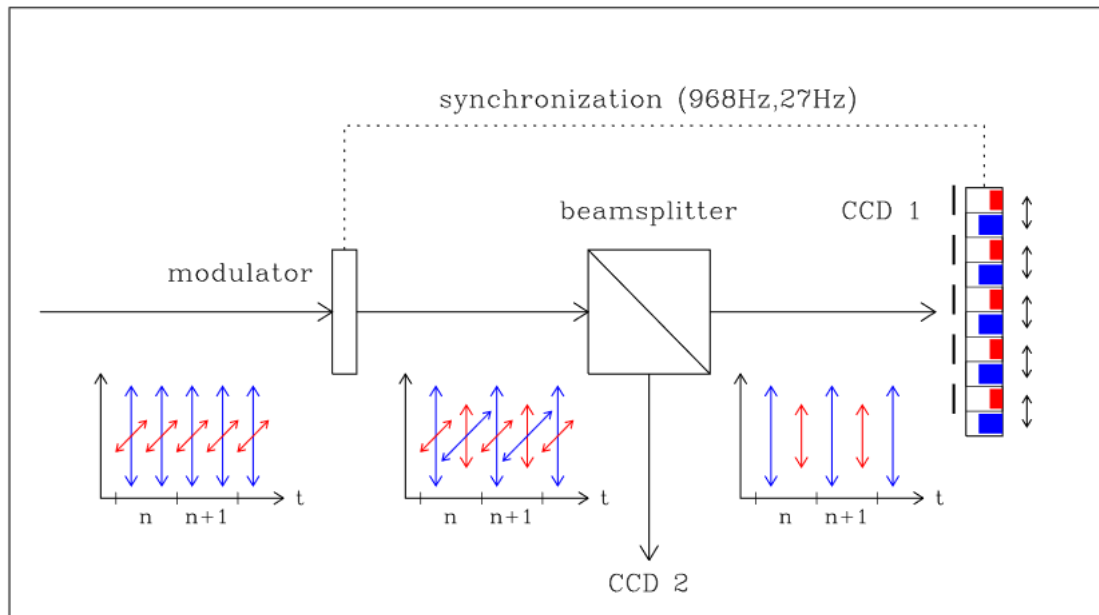


FIGURE 2.8 – Principe de fonctionnement de ZIMPOL. Le modulateur intervertit alternativement, *id est* temporellement, les deux axes de polarisation (en bleu et en rouge). La séparatrice polarimétrique (*beamsplitter*) sépare le champ polarisé verticalement du champ polarisé horizontalement. Deux caméras similaires (CCD1 et CCD2) sont utilisées afin de récupérer la totalité du flux, bien que l'information de différence polarimétrique soit encodée indépendamment sur chaque caméra. Sur chacune d'entre elles, un masque cache une ligne sur deux de pixels. Un transfert rapide de charges synchronisé avec la modulation permet de séparer l'information polarimétrique. Sur la figure, la caméra du deuxième bras (CCD2) et les filtres spectraux ne sont pas représentés. Figure extraite de l'article Schmid et al. [2018].

La correction du front d'onde est effectuée par trois miroirs : un miroir de *tip-tilt* de stabilisation de la pupille (PTTM), un miroir de *tip-tilt* de stabilisation de l'image (ITTM), et un miroir déformable hauts-ordres (HODM, noté DM sur la figure) de 41×41 actionneurs.

SPARTA

La boucle d'OA est contrôlée par l'ordinateur en temps réel (RTC) sous l'architecture unifiée de l'ESO nommée SPARTA [Fedrigo et al., 2010], acronyme de *Standard Platform for Adaptive optics Real Time Applications*. Le RTC est tout d'abord en charge du contrôle à haute fréquence de la boucle d'OA. Mais il possède également une sur-couche effectuant des tâches à plus basse fréquence, dites de supervision (étalonnage, paramètres de boucle...). Il enregistre notamment des informations de télémétrie basée sur la mesure des pentes résiduelles du détecteur de front d'onde. La totalité des pentes du WFS sur la durée de l'observation peut être sauvegardée, ce qui donne toutefois des fichiers très lourds, cette opération n'est donc pas systématique. Par contre SPARTA est également capable de donner des informations de télémétrie intégrée à partir de la statistique mesurée de la phase. Il peut ainsi fournir une estimation du rapport de Strehl ou du paramètre de Fried à partir des données du WFS.

Le système d'OA extrême SAXO assure un rapport de Strehl supérieur à 90% en bande *H*, pour des magnitudes d'étoiles en *R* jusqu'à 8 – 9 (Fig. 2.9) [Fusco et al., 2016]. Il fonctionne jusqu'à magnitude 15 environ, avec un rapport de Strehl de 10% – 20% en bande *H*.

2.3.2 VLT/MUSE

Le spectrographe à intégrale de champ

L'instrument MUSE, *Multi-Unit Spectroscopic Explorer* [Bacon et al., 2010], est un spectrographe à intégrale de champ (IFS) monté au foyer Nasmyth du télescope UT4 du VLT. Son objectif est l'étude de la formation et l'évolution des galaxies ou des populations d'étoiles. L'instrument est composé de 24 modules *Integral Field Unit* (IFU) identiques, chacun d'entre eux découpe à nouveau l'image en 48 fentes (*slits*). Enfin un réseau (*Volume Phase Holographic Grating*) disperse spectralement chacune des fentes, perpendiculairement à celles-ci. MUSE balaye un spectre de 480 nm à 930 nm, avec une résolution spectrale moyenne $R \triangleq \lambda/\delta\lambda \simeq 3000$.

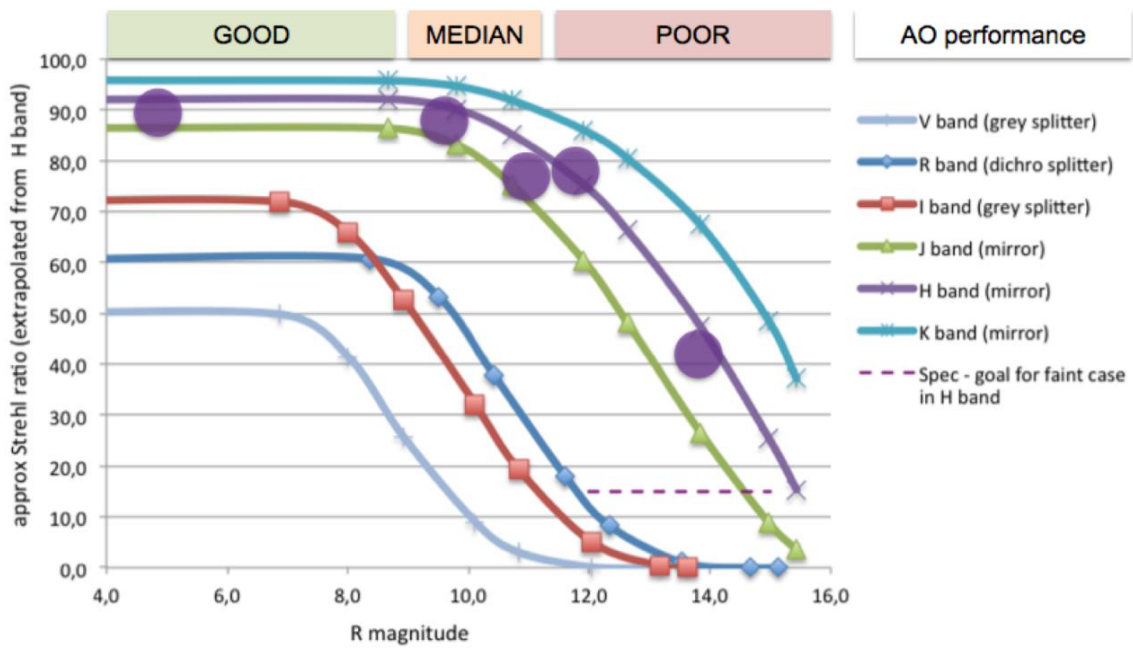


FIGURE 2.9 – Performances du système SAXO mesurées en laboratoire (courbes) et sur ciel (points). Figure extraite de Fusco et al. [2016].

Adaptive Optics Facility (AOF)

L'instrument MUSE peut fonctionner selon deux modes distincts. Le *Wide Field Mode* (WFM) possède un champ de vue de 1×1 arcmin² et une résolution de 200 mas par pixel. Le *Narrow Field Mode* (NFM) possède un champ de vue réduit à 7.5×7.5 arcsec² environ, et une résolution de 25 mas par pixel (Fig. 2.10). Ces modes de fonctionnement sont dépendants du système d'optique adaptative de MUSE, appelé GALACSI (*Ground Atmospheric Layer Adaptive Corrector for Spectroscopic Imaging*) [Ströbele et al., 2012]. Le mode WFM de MUSE est compatible avec l'absence d'AO ou un fonctionnement en *Ground Layer Adaptive Optics* (GLAO). Le mode NFM est seulement compatible avec un fonctionnement en *Laser Tomography Adaptive Optics* (LTAO). Pour ce faire le VLT UT4 est équipé de quatre lasers, formant quatre *laser guide stars* par excitation de la couche de sodium naturellement présente à ~ 90 km d'altitude. Les quatre lasers sont tirés à l'extérieur du champ de vue de MUSE afin de réduire les contaminations parasites. Un miroir annulaire dans GALACSI effectue la séparation entre la lumière destinée à MUSE et la lumière devant être analysée par le système d'OA. En WFM, la lumière à destination de MUSE passe ainsi sans aucunes pertes vers l'instrumentation scientifique (Fig. 2.11). Toutefois en NFM les *laser guide stars* (LGS) sont dirigées vers le centre et leur lumière tombe dans le trou du miroir annulaire. Une dichroïque à la longueur d'onde du sodium est alors placée à ce niveau là afin de séparer la lumière des LGS de celle à destination de MUSE. Il en résulte une perte d'information scientifique à cette longueur d'onde. Quelque soit le mode, NFM ou WFM, la lumière des quatre LGS est analysée par quatre détecteurs de front d'onde de type Shack-Hartmann. Il faut de plus une étoile naturelle dans le champ de vue de l'OA afin de mesurer le *tip-tilt*, cette aberration s'annulant pour les LGS entre la montée et la descente du laser.

Le RTC est basé sur l'architecture SPARTA (discutée à la section précédente sur SPHERE). Les commandes sont ensuite envoyées au miroir déformable, qui est le miroir secondaire du télescope, composé de 1170 actionneurs. L'ensemble du module GALACSI, du miroir secondaire déformable et les LGS forment⁴ ce qui s'appelle l'*adaptive optics facility* (AOF) [Arsenault et al., 2008, Kolb et al., 2016, Oberti et al., 2018, Ströbele et al., 2006] du télescope UT4. Ströbele et al. [2012] estiment un rapport de Strehl en NFM d'environ 5% à 650 nm. En WFM le rapport de Strehl est plus faible, mais l'OA corrige un champ de vue plus large.

4. L'AOF comprend en plus le module GRAAL desservant l'autre plateforme Nasmyth de l'UT4. Ce module est non discuté ici car non relié à MUSE ou aux données exploitées dans cette thèse.

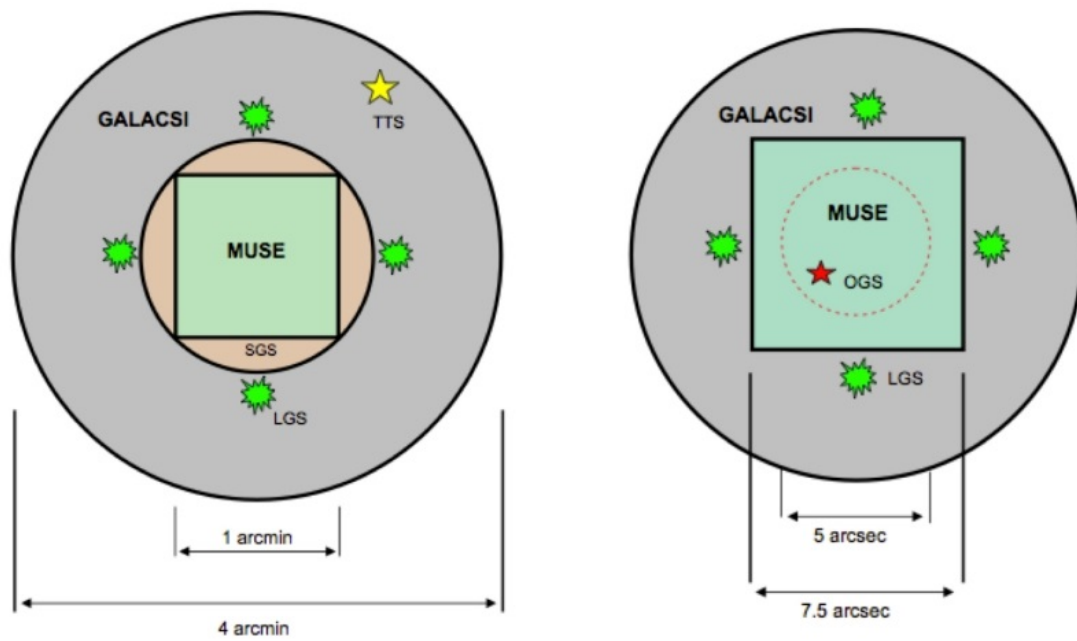


FIGURE 2.10 – Les deux modes de fonctionnement de MUSE. A gauche : *Wide Field Mode* (NFM). Le champ de vue est de 1×1 arcmin². Le système d'OA utilise quatre *laser guide stars* (LGS) et une étoile pour la correction de *tip-tilt* (TTS). A droite : *Narrow Field Mode* (NFM). Le champ de vue est de 7.5×7.5 arcsec² environ. Les quatre LGS sont complétées par une *On-axis Guide Source* (OGS). Crédit : ESO

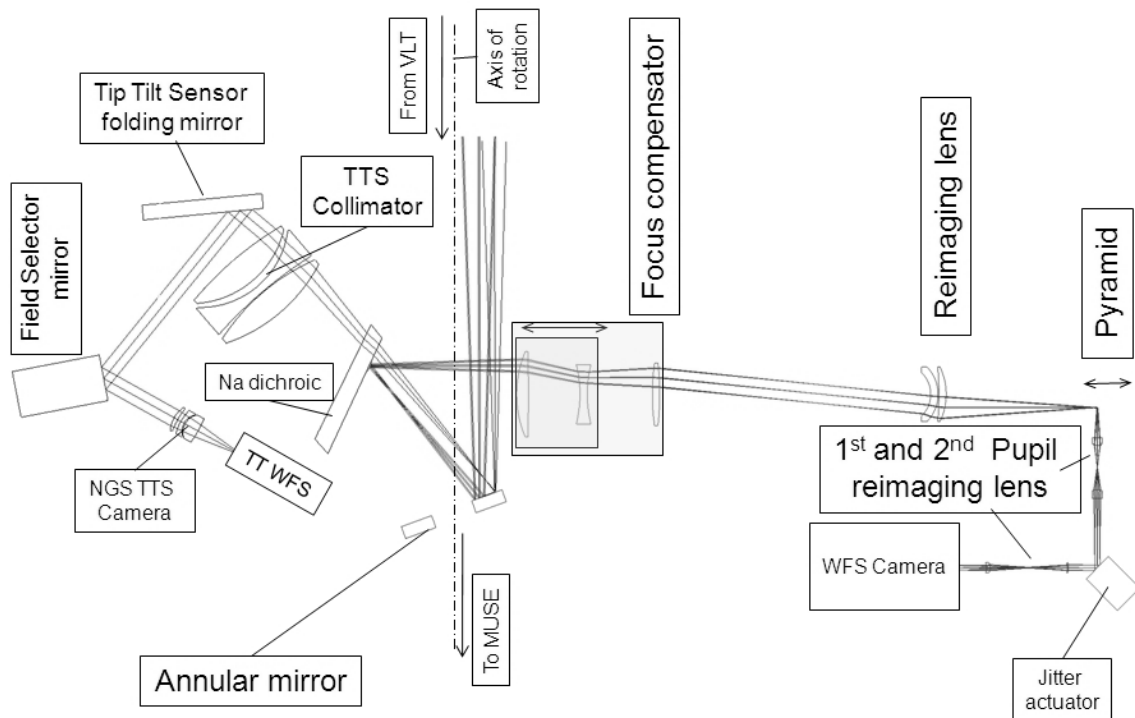


FIGURE 2.11 – Système d’optique adaptative GALACSI, en configuration WFM. La lumière provient du VLT (en haut sur la figure), possédant un miroir déformable. Un miroir annulaire sépare (spatialement) la lumière en direction de MUSE ou en direction de la branche de détection de l’OA. La lame dichroïque Na sépare (spectralement) le flux des étoiles laser LGS et de l’étoile naturelle de *tip-tilt*. Une seule branche de détection de lasers est représentée, sur les quatre au total. Figure extraite de [Ströbele et al. \[2012\]](#).

2.3.3 OCA/ODISSEE

L’Observatoire de la Côte d’Azur (OCA) possède plusieurs télescopes basés sur le plateau de Calern (France). Parmi ceux-ci se trouve le télescope MéO (métrologie optique) de 1.5 m de diamètre. Ce télescope est suffisamment rapide ($5^\circ/s$) pour l’observation de satellites en orbite basse (*Low Earth Orbit*, LEO) pour des applications de Défense. L’ONERA a entièrement réalisé et intégré le système d’optique adaptative ODISSEE [Petit et al., 2019] de ce télescope. Le front d’onde est détecté par un Shack-Hartmann possédant 8×8 sous-ouvertures. Les commandes sont envoyées à un miroir de correction de tip-tilt (*fast tip-tilt*) et à un miroir déformable de 88 actionneurs, bien que la pupille ne soit inscrite que sur 9×9 actionneurs seulement. Le système d’OA est dominé par l’erreur temporelle, la fréquence de la boucle étant faible comparée au vent relatif important dû au suivi du satellite à grande vitesse angulaire.

Conclusion du chapitre

Ce chapitre a présenté les systèmes d’optique adaptative, qui corrigent (partiellement) la phase turbulente et améliorent grandement la résolution angulaire des télescopes au sol. Après une explication théorique de l’OA, nous avons passé en revue différents modes de fonctionnement et différents systèmes existants. Les deux systèmes SAXO sur SPHERE et AOF/GALACSI sur MUSE ont fournis des données à haute résolution qui seront étudiées dans l’ensemble de cette thèse. Le système ODISSEE de l’OCA sera utilisé plus spécifiquement à la section 8.3.2. Nous pouvons alors entamer le chapitre suivant, qui porte spécifiquement sur l’état de l’art en modélisation de PSF corrigée par OA.

Deuxième partie

Modélisation physique de la PSF corrigée par OA

Chapitre 3

Etat de l'art en modélisation de PSF

Résumé

La fonction d'étalement du point (PSF) est une information importante caractérisant le système d'observation et de la turbulence. Elle est nécessaire en post-traitement d'images. Il est alors crucial de modéliser et d'estimer correctement cette PSF. Ce chapitre présente l'état de l'art en modélisation de PSF et les méthodes d'estimation employées.

Sommaire

| | | |
|------------|--|-----------|
| 3.1 | Importance de la PSF en post-traitement | 45 |
| 3.2 | Modélisation de la PSF | 45 |
| 3.2.1 | Combinaison linéaire de vecteurs libres | 46 |
| 3.2.2 | Modèle parcimonieux non linéaire | 47 |
| 3.3 | Estimation de la PSF à partir des données | 49 |
| 3.3.1 | PSF estimée par image d'une étoile | 49 |
| 3.3.2 | Reconstruction des données de télémétrie | 50 |
| 3.3.3 | Estimation parcimonieuse en plan focal | 50 |
| 3.4 | Analyse de modèles existants de PSF | 51 |
| 3.4.1 | Modèles de la PSF turbulente | 51 |
| 3.4.2 | Modèles de la PSF corrigée par OA | 55 |

3.1 Importance de la PSF en post-traitement

La PSF, ou similairement la FTO, est une caractéristique essentielle de la description de la qualité d'imagerie d'un système optique [Davies and Kasper, 2012]. Elle est utilisée pour des applications très variées, aussi bien pour caractériser les performances d'un système qu'en traitement d'image : astrométrie ou photométrie sur étoiles [Mighell, 2005, Veran and Rigaut, 1998], soustraction de PSF [Els et al., 2001], modélisation de la brillance de surface des galaxies [Cappellari, 2002, Emsellem et al., 1994, Trujillo et al., 2001] ou déconvolution d'objets résolus [Demoment, 1989].

La PSF optique en présence de turbulence et d'un système d'OA n'est pas connue par avance. Pour la déterminer il faut premièrement la modéliser, puis l'estimer à partir de données d'observation. Le niveau de précision demandé sur la PSF dépend de son application. Une description, plus ou moins fine, sera nécessaire pour répondre à ces applications. La forme générale (*e.g.* pic central et halo) de la PSF est suffisante dans la plupart des cas, tels l'extraction de données astrométriques et photométriques (cf. chapitre 5), ou encore la déconvolution (cf. chapitres 7 et 8). Par contre pour de l'observation d'exoplanètes chaque *speckle* compte car ils pourraient être considérés à tort comme des exoplanètes et générer des faux positifs. Le niveau de modélisation et la technique d'estimation sont alors tributaires de l'application scientifique.

3.2 Modélisation de la PSF

La PSF est une fonction du plan focal, lequel possède un repère de coordonnées (x, y) . Elle doit être à valeurs positives (ou nulles) correspondant à son intensité en chaque point du plan focal, et d'intégrale unitaire sur le plan focal. Celui-ci ne se limite pas aux dimensions d'un éventuel détecteur qui y serait positionné, l'intégrale de la PSF doit donc être unitaire sur l'ensemble du plan focal, et non pas sur la surface réduite d'un détecteur. Ce plan est théoriquement infini, et en pratique sera considéré grand devant l'extension spatiale de la PSF.

La PSF est modélisée par une fonction paramétrique. Un jeu Ω de paramètres quelconques modifie sa forme sur le plan. La valeur de ces paramètres est donc différente pour chaque observation, notamment à cause de la turbulence atmosphérique, selon la position dans le ciel, l'époque d'observation, la longueur d'onde λ , ou encore la largeur spectrale $\Delta\lambda$. Les paramètres Ω sont donc eux-mêmes dépendants de ces grandeurs physiques de l'observation. De manière générale, toute description de la

PSF peut s'écrire

$$h_{\Omega} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \mapsto h_{\Omega}(x, y) \end{cases} \quad (3.1)$$

avec la condition énergétique

$$\iint_{\mathbb{R}^2} h_{\Omega}(x, y) dx dy = 1 \quad (3.2)$$

Deux approches existent. La première consiste à modéliser la PSF en tant que combinaison linéaire de PSF élémentaires (section suivante 3.2.1). La deuxième utilise des modèles parcimonieux non linéaires (section 3.2.2).

3.2.1 Combinaison linéaire de vecteurs libres

Le moyen le plus simple de décrire une PSF est de la décomposer en tant que combinaison linéaire de PSF élémentaires (par exemple Lafrenière et al. 2007), notées u_k . Ces PSF élémentaires u_k sont une base de l'espace qu'elles engendrent¹. Cependant elles ne sont pas une base de l'ensemble des fonctions continues du plan à énergie unitaire (ensemble indénombrable), et ne pourront donc pas décrire toutes les PSFs. Pour des applications pratiques, dont numériques, le nombre de PSF élémentaires u_k doit être fini. On note N leur nombre. De plus on les choisit toutes d'énergie unitaire sur le plan. Les PSF engendrées par les u_k sont alors de la forme

$$h_{\Omega}(x, y) = \frac{1}{\sum_{k=1}^N c_k} \sum_{k=1}^N c_k u_k(x, y) \quad (3.3)$$

avec le jeu de paramètres $\Omega = \{c_k\}$, qui sont les coefficients de la décomposition sur la base des u_k . La qualité de cette décomposition à pouvoir décrire une PSF quelconque dépend du nombre N d'éléments de la base et de la forme même de chaque u_k . Des formes de u_k adaptées à l'observation sont préférables et aident à minimiser le nombre de vecteurs à considérer. C'est l'approche considérée par exemple pour l'analyse en composantes principales de la PSF [Choquet et al., 2016, Soummer et al., 2012].

Les détecteurs numériques étant discrétisés en pixels, l'équation 1.44 montre que l'image discrète peut être considérée comme la convolution (discrète) d'un objet et d'une PSF discrets. En absence de bruit

$$i_{k,l} = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N h_{k-m,l-n} o_{m,n} \quad (3.4)$$

1. Les combinaisons linéaires des u_k génèrent un espace vectoriel. La condition de normalisation Eq. 3.2 réduit cet espace aux fonctions d'énergie unitaire

Où l'on a défini la PSF discrétisée

$$h_{\Omega}(x, y) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N h_{k,l} u_{k,l}(x, y) \quad (3.5)$$

Avec les paramètres $\Omega = \{h_{k,l}\}$ qui sont les coefficients de la décomposition sur la base $u_{k,l}$. Les éléments de cette base peuvent être des fonctions définies sur la base des pixels (Sec. 1.5.2). Si le détecteur possède N^2 pixels, il faut alors N^2 coefficients pour décrire la PSF. L'avantage de cette description pixel à pixel est sa très grande flexibilité : elle possède N^2 degrés de libertés pour une mesure de N^2 pixels de l'image sur le détecteur. Elle est donc suffisante pour décrire toutes les PSF du système discrétisées par le détecteur. En contrepartie elle possède deux défauts majeurs. Son très grand nombre de degrés de libertés la rend trop flexible et alors difficile à estimer de manière robuste. Dernier problème, et non pas des moindres, la PSF pixelisée est définie uniquement sur le champ du détecteur. Or le champ de vue du détecteur peut être plus petit que l'extension spatiale de la PSF². Dans ce cas il est difficile d'estimer le halo. Augmenter le champ de vue de la PSF estimée revient alors à augmenter d'autant plus son nombre de degrés de libertés. La description de la PSF est alors sous-contrainte : sa complexité augmente tandis que le nombre de mesures pour l'estimer restent identiques. L'estimation, puis l'éventuelle utilisation par des algorithmes est alors difficile, voire impossible. Pour une PSF du système qui théoriquement d'extension infinie, il faudrait un nombre infini de degrés de libertés.

3.2.2 Modèle parcimonieux non linéaire

La modélisation précédente en combinaison linéaire peut se révéler très précise, mais au prix d'un nombre prohibitif de paramètres (coefficients dans la base). Si l'on veut modéliser précisément la PSF avec peu de degrés de libertés, il faut se tourner vers des modèles non linéaires. Les paramètres Ω d'un tel modèle sont amenés à évoluer pour prendre en compte la diversité des PSF, notamment en cas de correction par OA. Quelque soit le modèle h_{Ω} choisi, il doit respecter les critères suivants

- *Précision* : Le modèle doit être *suffisamment* précis pour décrire correctement la PSF vraie du système. Toute la subtilité réside dans le niveau de précision recherché, lequel dépend évidemment des applications. Un modèle peut donc convenir dans certaines applications mais pas pour d'autres.
- *Robustesse* : Le modèle doit s'adapter aux variations importantes de la PSF corrigée par OA sans perdre en précision. Si le modèle s'adapte aussi à plusieurs systèmes d'OA, ce n'en n'est que mieux.

2. Le halo est nécessaire, par exemple, pour effectuer de la photométrie précise sur un objet en bord de détecteur ou un objet large.

- *Parcimonie* : Un faible nombre de paramètres est préférable pour gagner en simplicité et contraste statistique, ce qui aide les algorithmes numériques et les techniques d'estimation de la PSF. Il existe souvent un compromis entre simplicité et précision.
- *Paramètres physiques* : Si certains paramètres Ω ont une signification physique, tel le r_0 ou le rapport de Strehl, alors ils peuvent être déterminés par des mesures *in situ* (données de télémétrie), ce qui contraint fortement le modèle.

Il n'existe pas de modèle qui soit optimal sur tous les critères énoncés ci-dessus, il faut effectuer des compromis, notamment entre précision et simplicité. Un modèle à peu de paramètres est rigide et a plus de mal à s'adapter à la variabilité de la PSF corrigée par OA. A l'opposé un modèle à beaucoup de degrés de liberté est difficile à identifier et peut poser des difficultés pour des algorithmes de minimisation numérique. Une bonne paramétrisation de PSF, pour une application donnée, est Pareto optimale : elle ne peut pas être améliorée sur un des critères listés ci-dessus sans en dégrader un autre. L'efficacité de la paramétrisation dépend évidemment du choix du modèle h_Ω , en découplant les paramètres hautement variables des paramètres observationnels (longueur d'onde) ou des paramètres variant peu. L'utilisation de paramètres physiques indépendants les uns des autres est alors souhaitable. Ceux-ci peuvent être estimés par télémétrie (Sec. 2.1.4) et être contraints par des informations *a priori* sur leurs valeurs.

Le modèle continu peut ensuite être échantillonné à pas réguliers. On note en gras \mathbf{h}_Ω la version discrétisée

$$\mathbf{h}_\Omega : \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (i, j) & \mapsto & h_\Omega(i \cdot \Delta, j \cdot \Delta) \end{cases} \quad (3.6)$$

avec Δ le pas d'échantillonnage. Il s'agit simplement de l'évaluation d'une fonction continue sur une grille. En pratique, cette méthode est souvent utilisée par des modèles parcimonieux de PSF. La fonction continue est paramétrée par un faible nombre de paramètres (typiquement une dizaine), avant d'être discrétisée. Elle peut (relativement) facilement être utilisée dans des algorithmes de minimisation et est simple d'emploi. Sa précision dépend du nombre de paramètres utilisés et la fonction effectivement choisie. Contrairement à la description de la PSF pixel à pixel, un modèle paramétrique parcimonieux peut augmenter de champ de vue sans augmenter le nombre de paramètres Ω .

Le modèle h_Ω peut être éventuellement non dérivable selon les variables de position (x, y) . Cependant il est préférable d'avoir une fonction dérivable et de dérivée continue par rapport à ses paramètres Ω . De cette manière la fonction h_Ω peut être

utilisée dans des algorithmes d’optimisation pour estimer ses paramètres.

3.3 Estimation de la PSF à partir des données

L’estimation de PSF est ardue à cause de sa grande variabilité. Les flexions et dilatations thermiques³ des structures [Kinast et al., 2014] modifient la PSF instrumentale. La turbulence atmosphérique, au travers de ces paramètres statistiques tels que le r_0 , la répartition en altitude de la turbulence $C_n^2(h)$ et de la vitesse relative de déplacement de chaque couche $v(h)$, évolue au cours de la nuit. Enfin le système d’OA, lorsque présent, possède une réponse complexe dépendant fortement des conditions d’observation. La PSF corrigée par OA est alors hautement variable. Il faut l’estimer pour chaque observation (voire plusieurs fois par observation si les conditions évolues), plusieurs fois par nuit et à chaque changement d’objet guide du système d’OA. Pour les observations de satellites en orbite basse (LEO pour *Low Earth Orbit*), l’objet guide est le satellite lui-même, son éclairage varie fortement en quelques secondes, entre des flashes lumineux de réflexion solaire sur les panneaux et faible illumination. Les performances de l’OA, et donc la PSF, sont très sensibles à cette grande dynamique de magnitude.

3.3.1 PSF estimée par image d’une étoile

La technique d’estimation la plus simple consiste à utiliser une étoile brillante dans le champ de vue comme PSF [Fusco et al., 2016], cf. Fig. 3.1. Mais il faut remarquer que cette méthode est toujours altérée par le bruit de Poisson et du détecteur, et qu’elle n’est disponible que pour quelques cas particuliers. En effet il faut une étoile très brillante et isolée dans le champ de vue, ce qui n’est pas le cas lors de l’observation d’objets résolus en champ étroit ou l’observation de champs denses d’étoiles. En cas d’observations avec OA, l’étoile de PSF doit être dans le domaine isoplanétique (typiquement de quelques secondes d’arcs), donc suffisamment proche de l’objet d’intérêt, ce qui limite la couverture spatiale du ciel. Si aucune étoile brillante n’est présente dans le champ de vue isoplanétique, les astronomes peuvent alors décider d’acquérir une PSF sur étoile avant ou après l’observation de l’objet [Marsset et al., 2017, Vernazza et al., 2018a]. Cette méthode n’est pas sûre et donne des résultats aberrants lorsque la PSF évolue entre l’observation de l’étoile et de l’objet [Fétick et al., 2019b, Viikinkoski et al., 2018] : évolution spatiale et temporelle de la turbulence, évolution complexe de la réponse du système d’OA en

3. Ces causes de variations de la PSF instrumentale sont données à titre informatif, mais ne sont pas traitées dans cette thèse.

fonction de la magnitude et taille angulaire de l'objet guide sont sources d'erreurs. Pour des applications de défense à l'observation de satellites, il y a de plus une vitesse de défilement des étoiles par rapport au satellite, impossible donc d'utiliser l'image d'une étoile naturelle comme PSF.

3.3.2 Reconstruction des données de télémétrie

Différentes méthodes ont été proposées pour estimer la PSF par des données contextuelles acquises lors de l'observation. C'est le cas par exemple de la reconstruction de PSF [Gendron et al., 2006, Jolissaint et al., 2004, Véran et al., 1997], cf. Fig. 3.1. A partir des données fournies par l'analyseur de surface d'onde (ASO) du système d'OA, la DSP de la phase résiduelle est reconstruite, ce qui permet d'en déduire une estimation de la PSF pixel à pixel. Cependant cette méthode est complexe et nécessite d'avoir accès aux données en temps réel produites par la boucle d'OA durant l'observation (mesures de front d'onde et forme du miroir déformable) et d'un modèle précis du système complet (OA, télescope, instrument). L'enregistrement ou le calcul temps réel de statistique de plusieurs centaines voire milliers de données instantanées à une fréquence de l'ordre du kilohertz sur plusieurs minutes se traduit par une complexité importante en terme d'enregistrement, le transfert et ensuite le traitement de plusieurs giga-octets de données par nuit d'observation. La reconstruction de PSF est théoriquement une méthode très précise, mais difficile d'emploi en pratique pour traiter un grand nombre de données ciel ; pensée dès les années 90, elle est toujours en cours de recherches et de développements. Elle repose souvent sur des hypothèses de stabilité temporelle et de linéarité de la réponse du système d'OA qui peuvent être mises en défaut en pratique. Des approches de reconstruction hybride proposent d'utiliser à la fois des données de télémétrie et des données d'image [Beltramo-Martin et al., 2019] pour faciliter la méthode de reconstruction. Il est également possible d'utiliser un modèle parcimonieux afin de n'estimer qu'un nombre limité de paramètres à partir des données du RTC [Fusco et al., 2020] et ainsi stabiliser la reconstruction.

3.3.3 Estimation parcimonieuse en plan focal

Les dernières méthodes d'estimation de la PSF utilisent des données en plan focal et un modèle parcimonieux de PSF. C'est le cas de l'ajustement et de la marginalisation (Fig. 3.1). L'ajustement d'un modèle parcimonieux sur l'image d'une étoile est une estimation des paramètres Ω qui permettent d'approcher (au sens d'une norme) la forme de l'image par la forme du modèle. L'ajustement d'un modèle parcimonieux est possible en champ stellaire dense avec des algorithmes dédiés comme Starfinder

[Diolaiti et al., 2000] ou Pampelmuse [Kamann et al., 2013]. Dans ce cas de champ dense, l'extraction de l'image d'une seule étoile brillante pour estimer la PSF peut se révéler impossible. Le fait d'avoir un modèle parcimonieux continu et dérivable selon ses paramètres Ω le rend facile d'utilisation pour de tels algorithmes d'estimation de PSF. Enfin toute l'information du modèle de PSF est condensée dans un nombre limité de paramètres Ω qui peuvent être comparés, corrélés ou étudiés de manière statistique. Des variations importantes de paramètres signalent par exemple des comportements inhabituels et permettent d'effectuer du diagnostic de PSF pour une observation donnée.

Quant à la méthode de marginalisation, elle permet d'estimer la PSF non pas à partir de l'image d'une étoile, mais à partir de l'image d'un objet résolu. Cette méthode sera discutée en détail au chapitre 8.

Dans cette thèse, nous nous intéressons particulièrement à ces méthodes d'estimation d'un modèle parcimonieux de PSF à partir de données en plan focal. Ces deux méthodes d'ajustement ou de marginalisation peuvent également utiliser des données issues de la télémétrie (RTC ou externe). Ces mesures correspondent à une information a priori pouvant aider l'estimation de certains des paramètres Ω , et donc aider à l'estimation de la forme de la PSF.

3.4 Analyse de modèles existants de PSF

3.4.1 Modèles de la PSF turbulente

Plusieurs modèles de PSF adaptés à l'astronomie existent dans la littérature. Pour une PSF entièrement turbulente, sans correction d'OA, la FTO est quasiment une fonction Gaussienne (Eq. 1.31). La transformée de Fourier d'une Gaussienne étant une Gaussienne, il est possible d'utiliser un modèle Gaussien de PSF [McNeil and Moody, 2005] défini par

$$h_\alpha(x, y) = \frac{1}{2\pi\alpha^2} e^{-(x^2+y^2)/(2\alpha^2)} \quad (3.7)$$

où l'élargissement α dépend de la force de la turbulence r_0 . L'avantage de ce modèle est de ne nécessiter que le seul paramètre α . Toutefois les ailes d'une Gaussienne (en exponentielle décroissante) sont beaucoup moins prononcées que les ailes de la PSF turbulente (en loi de puissance $-11/3$ comme le spectre de Kolmogorov⁴). Une

4. Cette décroissance similaire de la PSF et de la DSP de la phase turbulente sera développée à la section 4.1. Bien qu'à ma connaissance il n'existe pas de démonstration exacte de la décroissance de la PSF en loi de puissance $-11/3$, des approximations existent dans la littérature en fort rapport de Strehl, ou en annexe du papier Fétick et al. [2018].

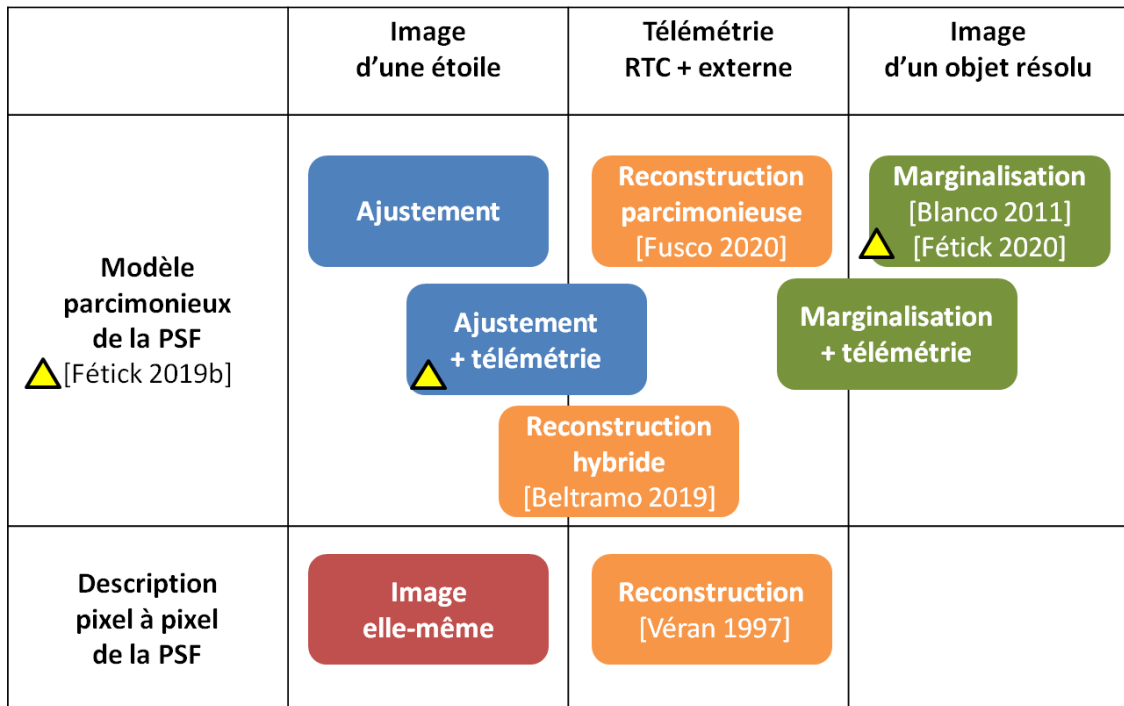


FIGURE 3.1 – Schéma des principales méthodes d'estimation de la PSF. Colonnes : données utilisées pour l'estimation de PSF. Lignes : description de la PSF. Chaque rectangle de couleur est une méthode d'estimation différente : ajustement (bleu), reconstruction (orange), marginalisation (vert), ou l'image elle-même (rouge). Les triangles jaunes indiquent les éléments développés dans cette thèse.

Gaussienne ne décrit donc pas parfaitement la turbulence (Fig.3.2, en vert).

Afin de donner plus de souplesse au modèle et de pouvoir décrire plus précisément la décroissance du halo, le modèle multi-gaussien a été utilisé dans la littérature [Bendinelli et al., 1987, Cappellari, 2002, Emsellem et al., 1994]. Il s'agit d'une combinaison linéaire d'un nombre fini de Gaussiennes

$$h_{c_i, \alpha_i}(x, y) \triangleq \left(\frac{1}{\sum_i c_i} \right) \sum_i \frac{c_i}{2\pi\alpha_i^2} e^{-(x^2+y^2)/(2\alpha_i^2)} \quad (3.8)$$

avec $\forall i, c_i \geq 0$. La normalisation par la somme des c_i assure une énergie unitaire de la PSF sur le plan. En augmentant le nombre de Gaussiennes utilisées, le halo est de mieux en mieux approché, au détriment de la simplicité et de l'interprétabilité des résultats. Néanmoins, quelque soit le nombre de Gaussiennes, le halo du modèle de PSF se comportera en exponentielle décroissante et ne se comportera jamais comme le halo turbulent de Kolmogorov en puissance $-11/3$. Lorsque la taille du détecteur augmente, il faut alors ajouter de plus en plus de Gaussiennes pour essayer de décrire le plus précisément possible le halo (Fig.3.2, en rouge).

Cette souplesse sur la décroissance du halo est fournie par le modèle de Moffat [1969]. Il a été développé originellement pour décrire la large tâche de la PSF résultant d'émulsions photographiques. Avec le passage aux détecteurs numériques a continué à être utilisé, non plus pour décrire la réponse de l'émulsion photosensible, mais pour approcher la forme du large halo de la turbulence [Bendinelli et al., 1988, Trujillo et al., 2001]. Ce modèle s'écrit

$$h_{\alpha, \beta}(x, y) \triangleq \frac{\beta - 1}{\pi\alpha^2} (1 + (x^2 + y^2)/\alpha^2)^{-\beta} \quad (3.9)$$

Il est défini pour $\beta > 1$ afin d'assurer une énergie finie sur le plan focal. Dans le cas où $0 \leq \beta \leq 1$, l'intégrale du terme entre parenthèses diverge et le facteur de normalisation énergétique est caduque. Pour $\beta > 1$ l'intégrale est convergente, et particulier pour $\beta \rightarrow +\infty$ le modèle de Moffat tend vers une Gaussienne [Trujillo et al., 2001]. L'avantage de la fonction de Moffat est de contrôler la pente de la décroissance avec β , ce qui lui donne plus de souplesse que les modèles précédents. Avec seulement deux paramètres (α, β) , ce modèle s'ajuste assez bien sur la PSF turbulente (Fig.3.2, en orange).

Enfin, il est également possible de paramétrer la PSF turbulente à partir de sa FTO. En effet nous avons vus au chapitre 1 que la FTO longue pose pouvait être déterminée à partir de l'autocorrélation de la phase électromagnétique (Eq. 1.31). L'expression analytique de cette autocorrélation, et donc de la FTO, suppose que la

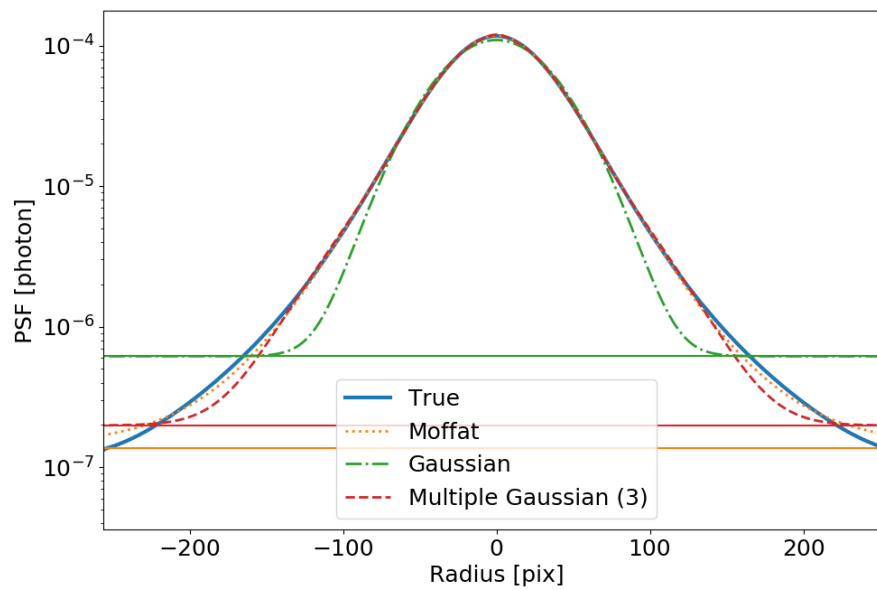


FIGURE 3.2 – Moyenne circulaire d’une PSF turbulente simulée (bleu). Ajustement par un modèle de Moffat (orange), Gaussien (vert) et Gaussien Multiple (3 gaussiennes, rouge). Les traits horizontaux de couleur indiquent les estimations correspondantes du fond du ciel (*background*).

turbulence suit le modèle de Kolmogorov. L'unique paramètre est le paramètre de Fried r_0 . La PSF est ensuite calculée par transformation de Fourier de cette FTO paramétrique.

3.4.2 Modèles de la PSF corrigée par OA

Le comportement d'une PSF corrigée par OA est plus complexe que celui d'une PSF purement turbulente, car la PSF d'OA est constituée à la fois d'un coeur cohérent très piqué et d'un large halo non corrigé. De plus la PSF corrigée par OA peut présenter une ou plusieurs asymétries dues à l'impact du vent ou de l'anisoplanétisme sur la correction de l'OA. Les structures de la PSF causées par le vent sont parfois complexes [Cantalloube et al., 2018, Sauvage et al., 2016], mais nous simplifions la modélisation en considérant simplement une asymétrie de type elliptique. On note (x_R, y_R) un système de coordonnées de référence, par exemple le repère azimutal Nord-Est, ou les axes du détecteur. Par rapport à ce repère de référence, la PSF est considérée allongée selon des axes (x, y) tournés de θ via la matrice de rotation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_R \\ y_R \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Pour alléger grandement les écritures, nous utilisons directement le repère tourné (x, y) dans la suite, mais en n'oubliant pas que θ est un paramètre nécessaire pour déterminer l'orientation par rapport au repère de référence (x_R, y_R) .

Plusieurs fonctions mathématiques ont été utilisées dans la littérature pour tenter de décrire la PSF corrigée par OA. Le modèle de Lorentz suivant décrit bien le coeur piqué de l'OA [Drummond, 1998]

$$h_{\alpha_x, \alpha_y, \theta}(x, y) \sim \frac{1}{1 + x^2/\alpha_x^2 + y^2/\alpha_y^2} \quad (3.11)$$

Cependant il possède le défaut rédhibitoire de ne pas être intégrable sur \mathbb{R}^2 , son énergie diverge vers l'infini, ce qui a été signalé par Drummond lui-même. Certains pourraient argumenter que le détecteur est de dimension finie, cependant c'est loin d'être satisfaisant. En effet plus le détecteur est grand, plus on obtient d'information sur la PSF, et pourtant plus le modèle se trompe. L'énergie n'est pas une information à négliger pour décrire correctement la PSF sur l'ensemble du plan. Ce modèle de Lorentz n'est donc pas satisfaisant.

Les modèles Gaussien et multi-Gaussien évoqués pour modéliser la PSF turbulente peuvent également être envisagés dans le cas d'une PSF corrigée par OA. Nous retrouvons malgré tout la difficulté d'estimation du halo, avec de surcroît la difficulté

d'estimation du pic étroit corrigé par l'OA. La figure 3.3 montre une PSF corrigée par OA de l'instrument SPHERE/Zimpol (en bleu), ajustée par le modèle Gaussien (en vert) et multi-Gaussien (en rouge). Le pic et le halo sont effectivement tous deux difficilement ajustés.

Le modèle de Moffat utilisé pour décrire la PSF turbulente est également fréquemment utilisé pour décrire la PSF corrigée par OA [Andersen et al., 2006, Davies and Kasper, 2012, Müller Sánchez et al., 2006, Orban de Xivry et al., 2015, Rusu et al., 2016]. Par rapport au cas turbulent, il peut de plus être enrichi de l'asymétrie elliptique

$$h_{\alpha_x, \alpha_y, \theta, \beta}(x, y) \triangleq \frac{\beta - 1}{\pi \alpha_x \alpha_y} \left(1 + x^2/\alpha_x^2 + y^2/\alpha_y^2\right)^{-\beta} \quad (3.12)$$

ce qui en fait un modèle simple à quatre paramètres. Cependant, comme le montre la figure 3.3 (courbe orange) le modèle de Moffat ne décrit pas correctement les deux zones corrigée et non corrigée par l'OA. L'algorithme de minimisation ajuste le paramètre β pour décrire au mieux la décroissance du coeur corrigé (très énergétique), et non pas le halo diffus. Le problème étant que le modèle de Moffat est monolithique, tandis qu'une PSF corrigée par OA nécessite bien la description de deux zones fondamentalement distinctes, avec des origines physiques différentes. Cette erreur dans le halo est importante car elle se répercute par une mauvaise estimation du fond du ciel ($\hat{\zeta}$ dans l'Eq. 5.7) et une mauvaise estimation de l'énergie diffusée loin du coeur de la PSF. Dans cet exemple de la Fig. 3.3, la différence en valeur absolue entre la PSF de SPHERE (trait bleu) et le modèle ajusté de Moffat (trait orange pointillés) représente 37% de l'énergie. Cette part importante d'énergie inexplicée par le modèle de PSF se traduira par des erreurs significatives lors de l'utilisation de la PSF en post-traitement d'images (estimation photométrique, déconvolution).

| | Moffat | Lorentzien | Gaussien | Gaussien multiple |
|----------------------|--------|------------|----------|-------------------|
| Energie finie | ✓ | × | ✓ | ✓ |
| Forme du pic | ✓ | ~ | × | ~ |
| Forme du halo | × | × | × | ~ |
| Estimation du fond | × | × | × | × |
| Peu de paramètres | ✓ | ✓ | ✓ | × |
| Paramètres physiques | × | × | × | × |

TABLE 3.1 – Comparaison qualitative de plusieurs modèles de PSF issus de la littérature selon différents critères. L'énergie non finie du modèle Lorentzien 2D est rédhibitoire.

La table 3.1 résume de manière qualitative les avantages et inconvénients de

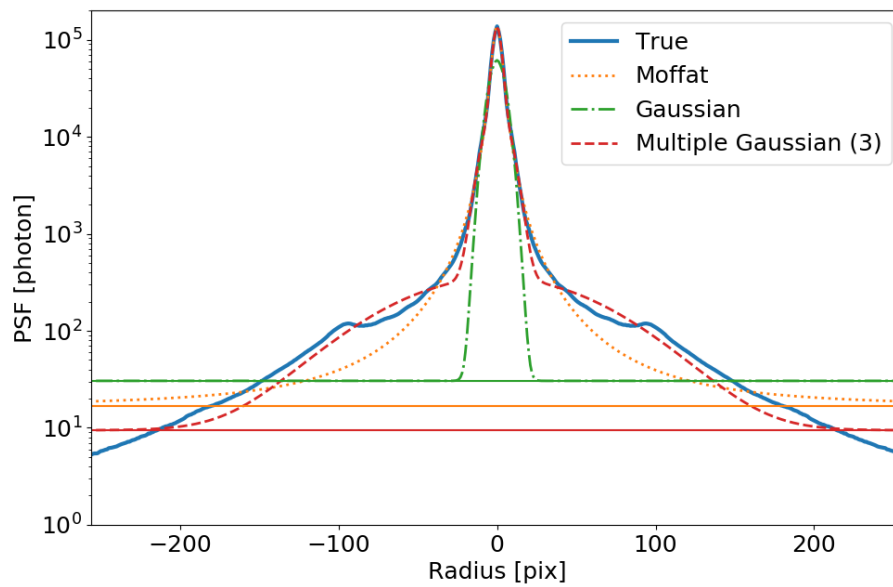


FIGURE 3.3 – Moyenne circulaire d’une PSF de SPHERE/Zimpol sur étoile (bleu). Ajustement par un modèle de Moffat (orange), Gaussien (vert) et Gaussien Multiple (3 gaussiennes, rouge). Les traits horizontaux de couleur indiquent les estimations correspondantes du fond du ciel (*background*).

chaque modèle présenté ci-dessus. A noter qu'aucun modèle n'utilise de paramètres physiques de l'observation. Seule la largeur à mi-hauteur (Full Width Half Maximum, FWHM) peut être retrouvée à partir de l'expression mathématique des différents modèles. Quant au halo et au fond du ciel, ils sont toujours mal estimés. En effet lorsque le champ de vue de la PSF augmente ou diminue, les modèles mentionnés ci-dessus ajustent leur forme de halo en conséquence (cf. Fig. 3.4, rouge pointillés). L'estimation du fond du ciel $\hat{\zeta}$ s'en trouve modifiée, cette estimation n'est donc pas robuste vis-à-vis de la taille du champ de vue.

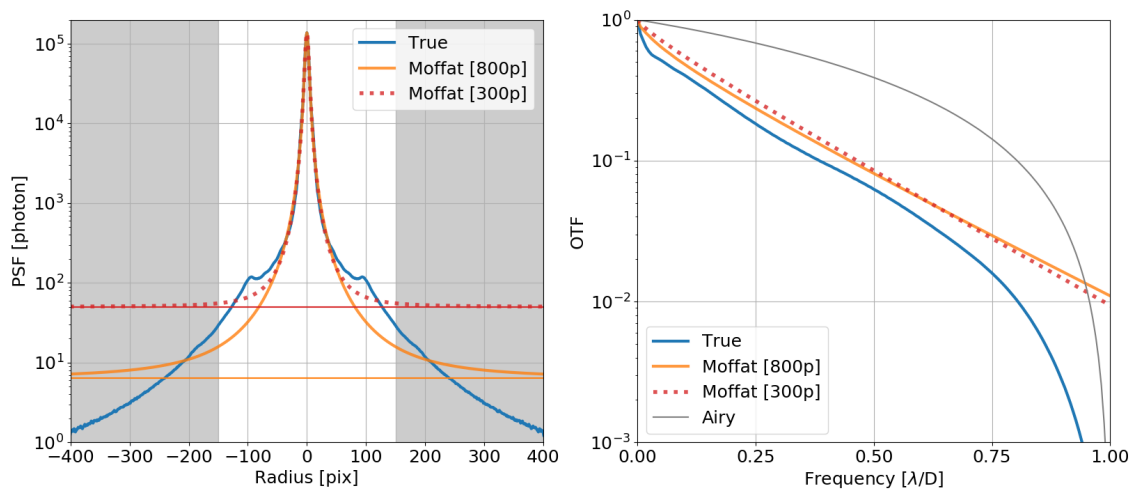


FIGURE 3.4 – Moyenne circulaire d'une PSF de SPHERE/Zimpol sur étoile (bleu). Ajustement par un modèle de Moffat sur le champ de vue complet 800×800 pixels (orange), et sur un champ de vue réduit à 300×300 pixels (rouge pointillés). La zone grisée montre la différence de champ de vue. Les traits horizontaux de couleur indiquent les estimations correspondantes du fond du ciel (*background*). Gauche : PSF. Droite : FTO correspondantes. Les fonds estimés avec les fonctions de Moffat ont été retirés pour calculer les FTO.

Des modèles plus fins, comme celui proposé par [Zieleniewski and Thatte \[2013\]](#), proposent une PSF en tant que combinaison linéaire de différents modèles ci-dessus : tâche d'Airy, plus une Moffat, plus une Lorentzienne. Comme pour la Gaussienne multiple, on gagne en précision en ajoutant des termes, mais on perd en simplicité et lisibilité des résultats. De plus la diffraction n'est considérée que dans la tâche d'Airy et est négligée dans les autres éléments de la combinaison linéaire. La fréquence de coupure du télescope n'est pas correctement prise en compte. Nous remarquons en effet que dans la liste des modèles cités ci-dessus, chaque modèle essaye de s'adapt-

| Paramètre | Unité | Taille | |
|-------------------------------------|--------|-----------|-----------|
| | | 800 × 800 | 300 × 300 |
| α | pix | 2.8 | 3.2 |
| β | | 1.25 | 1.36 |
| $\hat{\gamma} / \sum_{k,l} i_{k,l}$ | photon | 0.85 | 0.72 |
| $\hat{\zeta}$ | | 6 | 50 |

TABLE 3.2 – Paramètres estimés par ajustement d’une fonction de Moffat sur une image d’étoile par SPHERE/Zimpol pour deux tailles d’image. Le flux estimé $\hat{\gamma}$ est normalisé par la somme des pixels de l’image 800 × 800 pixels. Les paramètres de flux $\hat{\gamma}$ et du fond $\hat{\zeta}$ dépendent fortement du champ de vue.

ter à la forme de la PSF, mais sans considérations de la fréquence de coupure du télescope ou de tout ce qui pourrait se passer dans le domaine des FTO. Et pour cause la relation fondamentale de l’imagerie turbulente $h = h_A \star h_T$ [Roddiier, 1981] (Eq. 1.28) n’est pas prise en compte, où h_A est la composante atmosphérique et h_T la composante statique du télescope. Un modèle plus précis de PSF devrait *a minima* tenir compte de ces deux composantes.

Conclusion du chapitre

Nous avons passé en revue différents modèles de PSF corrigée par OA. Cependant aucun ne donne une entière satisfaction car ils ne décrivent pas suffisamment les deux zones distinctes corrigée et non corrigée de l’OA. De plus ces modèles sont basés sur une description mathématique, avec une faible signification physique. En particulier la décomposition de la PSF en une composante atmosphérique et une composante du télescope n’est pas respectée. Le chapitre suivant présente une partie conséquente de mon travail, qui a consisté à élaborer un modèle plus précis de la PSF corrigée par OA.

Chapitre 4

Développement d'un modèle précis de PSF

Résumé

Les modèles de PSF de la littérature s'adaptent difficilement à la forme complexe de la PSF corrigée par OA. Il faut alors développer un modèle plus adapté. La première section de ce chapitre effectue un développement mathématique de la PSF en ordres convolutifs de la DSP de phase électromagnétique. Cette écriture permet de développer un lien direct entre PSF et cette DSP de phase. Il apparaît alors judicieux de modéliser la PSF non pas en plan focal, mais à partir de cette DSP de phase. Il est alors possible d'inclure des informations physiques donnant un modèle robuste et précis de la PSF corrigée par OA.

Sommaire

| | | |
|------------|--|-----------|
| 4.1 | Description de la PSF en ordres convolutifs | 61 |
| 4.2 | PSFAO₁₉ : un modèle de PSF adapté à la correction OA | 63 |
| 4.2.1 | Écriture du modèle | 63 |
| 4.2.2 | Les deux paramètres principaux : r_0 et σ_{OA}^2 | 69 |
| 4.2.3 | Extension en large bande spectrale | 69 |

4.1 Description de la PSF en ordres convolutifs

Les modèles sus-mentionnés ne sont pas satisfaisants pour une description précise de la PSF corrigée par OA. Il faut développer une compréhension plus fine et physique de la formation de la PSF au travers du système d'observation composé de la turbulence, du télescope, du système d'OA et du détecteur. Pour cela on utilise l'expression de la FTO atmosphérique comme l'exponentielle de l'autocorrélation de la phase électromagnétique, puis on développe l'exponentielle comme une série entière

$$\begin{aligned}\tilde{h}_A(\vec{\rho}/\lambda) &= e^{-B_\phi(0)} e^{B_\phi(\vec{\rho})} \\ &= e^{-B_\phi(0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_\phi(\vec{\rho})^n}{n!}\end{aligned}\quad (4.1)$$

On utilise ensuite une transformation de Fourier sur cette expression. On définit la variable angulaire \vec{u} qui est Fourier conjuguée de $\vec{\rho}/\lambda$. Alors, par propriété d'involution (plus une inversion des coordonnées), la transformée de Fourier du membre de gauche est

$$\mathcal{F} \left\{ \tilde{h}_A(\vec{\rho}/\lambda) \right\} = \mathcal{F} \left\{ \mathcal{F} \left\{ h_A(\vec{u}) \right\} \right\} = h_A(-\vec{u}) \quad (4.2)$$

Ainsi la transformée de Fourier des deux membre de l'expression donne

$$h_A(-\vec{u}) = e^{-B_\phi(0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{F} \left\{ B_\phi(\vec{\rho})^n \right\}(\vec{u})}{n!} \quad (4.3)$$

Cette écriture suppose qu'on a le droit d'intervertir la série entière et l'opérateur de Fourier (qui est une intégrale), par théorème d'inversion série-intégrale. On peut maintenant utiliser une propriété de la transformation de Fourier, qui transforme des multiplications en convolutions. On définit la convolution d'ordre n pour une fonction quelconque X par

$$\{\star^n X\}(\vec{u}) \triangleq \begin{cases} \delta(\vec{u}) & \text{si } n = 0 \\ X(\vec{u}) & \text{si } n = 1 \\ (X \star X \star \dots \star X)(\vec{u}) & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \quad (4.4)$$

avec $\delta(\vec{u})$ la distribution de Dirac. On vérifie notamment que cette écriture est compatible avec la transformation de Fourier pour $n = 0$ et $n = 1$ afin de transformer convolution en multiplication. Avec cette définition on peut alors écrire pour tout n entier naturel $\mathcal{F} \{X^n\} = \star^n \mathcal{F} \{X\}$, soit dans notre cas

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \{B_\phi(\vec{\rho})^n\}(\vec{u}) &= \star^n \mathcal{F} \{B_\phi(\vec{\rho})\}(\vec{u}) \\ &= \star^n \mathcal{F} \{B_\phi(\lambda \vec{\rho}/\lambda)\}(\vec{u}) \\ &= \star^n \frac{1}{\lambda^2} \mathcal{F} \{B_\phi(\vec{\rho}/\lambda)\}(\vec{u}/\lambda)\end{aligned}\quad (4.5)$$

où nous avons utilisé la propriété de dilatation des coordonnées par transformation de Fourier (bidimensionnelle dans ce cas) pour obtenir les variables Fourier conjuguées \vec{u} et $\vec{\rho}/\lambda$.

Par ailleurs, le théorème de Wiener-Khintchine stipule que la transformée de Fourier de l'autocorrélation d'une variable aléatoire est sa DSP. En utilisant ce théorème pour la phase ϕ , on peut alors écrire la PSF comme une série entière de convolutions [Fétick et al., 2018]

$$h_A(-\vec{u}) = e^{-B_\phi(\vec{0})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{\star^n W_\phi/\lambda^2\}(\vec{u}/\lambda)}{n!} \quad (4.6)$$

Cette écriture montre que la PSF atmosphérique peut être décomposée comme une série d'ordres convolutifs de la DSP de la phase électromagnétique. Grâce à cette formule, on a pu enlever les transformées de Fourier successives qui permettaient de passer de la DSP à l'autocorrélation, puis de la FTO à la PSF. Le lien DSP vers PSF est direct, via les ordres convolutifs. Dans la littérature, Bloemhof et al. [2001], Jolissaint and Veran [2002], Racine et al. [1999] ont effectué un développement limité de l'exponentielle à l'ordre 1 et non pas un développement en série entière¹. Ils précisent que ce développement à l'ordre 1 n'est valide que pour de très faibles phases résiduelles, c'est à dire pour de l'optique adaptative extrême à grande longueur d'onde, et non pas en correction partielle avec un système d'OA modeste ou une imagerie dans le visible. Dans ce cas d'OA extrême la série entière tronquée à son ordre 1 permet de retrouver directement le développement limité de ces auteurs. A l'ordre $n = 0$, il faut faire attention à la dilatation des coordonnées de la distribution de Dirac (bidimensionnelle dans notre cas)

$$\frac{1}{\lambda^2} \delta(\vec{u}/\lambda) = \delta(\vec{u}) \quad (4.7)$$

On peut alors simplifier l'écriture de la série tronquée à l'ordre 1 pour obtenir

$$h_A(-\vec{u}) \simeq e^{-B_\phi(\vec{0})} \left(\delta(\vec{u}) + \frac{W_\phi(\vec{u}/\lambda^2)}{\lambda^2} \right) \quad (4.8)$$

En convoluant cette PSF atmosphérique avec la PSF statique h_T on trouve donc une PSF totale composée de la tâche de diffraction au centre, multipliée par le facteur

1. Le lecteur pourra également se référer à Perrin et al. [2003] qui effectue un développement en série entière, mais directement sur la phase instantanée et non pas sur la DSP comme ici. Si les deux méthodes utilisent la même propriété mathématique de l'exponentielle, il ne s'agit toutefois pas des mêmes quantités ni des mêmes considérations physiques. L'exponentielle de Perrin et al. est celle du phaseur instantané $e^{i\phi}$ de l'onde électromagnétique, l'exponentielle ici est celle de la FTO atmosphérique longue pose e^{B_ϕ} de Roddier.

$e^{-B_\phi(0)}$ qui correspond au Strehl, et de la DSP de phase résiduelle (convoluée par la diffraction). Pour un grand télescope limité par la turbulence plus que par son diamètre ($D/r_0 \gg 1$), la forme de la PSF et de la DSP de phase résiduelle sont quasi-identiques, sauf au centre à cause du Dirac. Le développement en série entière Eq. 4.6 permet de voir que les termes convolutifs d'ordre supérieur ont été négligés. Ces termes convolutifs prennent plus d'importance lorsque l'énergie dans la DSP augmente. Si on appelle E l'intégrale de W_ϕ , alors $\star^n W_\phi \sim E^n$. En particulier si la dépendance en $r_0^{-5/3}$ est factorisable, on définit Y_ϕ tel que $W_\phi \triangleq r_0^{-5/3} Y_\phi$. Cette dépendance apparaît lors d'une turbulence de Von-Karman sans correction par OA, ou avec une correction OA en présence d'erreur de *fitting* seulement (modes non corrigés). L'expression de la PSF atmosphérique en série entière devient

$$h_A(-\vec{u}) = e^{-B_\phi(\vec{0})} \sum_{n=0}^{\infty} r_0^{-5n/3} \frac{\{\star^n Y_\phi / \lambda^2\}(\vec{u}/\lambda)}{n!} \quad (4.9)$$

Les ordres convolutifs montrent que négliger les ordres supérieurs n'est possible qu'en cas de faible phase résiduelle. Les ordres supérieurs prennent plus d'importance en forte turbulence (Fig. 4.1) ou avec un faible nombre d'actionneurs d'OA. Puisque l'on cherche à modéliser la PSF et qu'il existe un lien étroit entre PSF et DSP de phase résiduelle, on peut utiliser cette information pour trouver un modèle adéquat. Bien que l'écriture en ordres convolutifs permette de comprendre le lien PSF – DSP de phase, et permette de cerner les limitations du développement à l'ordre 1 issu de la littérature, il est toutefois difficilement utilisable en pratique. En effet les convolutions sont effectuées numériquement par des transformées de Fourier, chacune de complexité $N \log N$, ce qui reste abordable. Mais une dizaine d'ordre convolutifs requiert une dizaine de convolutions, ce qui multiplie d'autant le coût d'obtention d'une PSF.

4.2 PSFAO₁₉ : un modèle de PSF adapté à la correction OA

4.2.1 Écriture du modèle

Les différents modèles de PSF de la littérature (Sec. 3.4) ont un point commun : ils tentent de décrire la PSF en la paramétrant directement depuis le plan focal. Cette méthode est la plus simple et naturelle, cependant on a vu qu'elle représente difficilement la forme complexe de la PSF corrigée par OA, et qu'elle n'inclut aucune information sur la physique de l'observation. Étant donné le lien direct entre DSP de phase résiduelle et PSF, on peut alors paramétrer la DSP de phase pour obtenir une PSF. Comme précédemment on utilise l'équation de la FTO turbulente et le

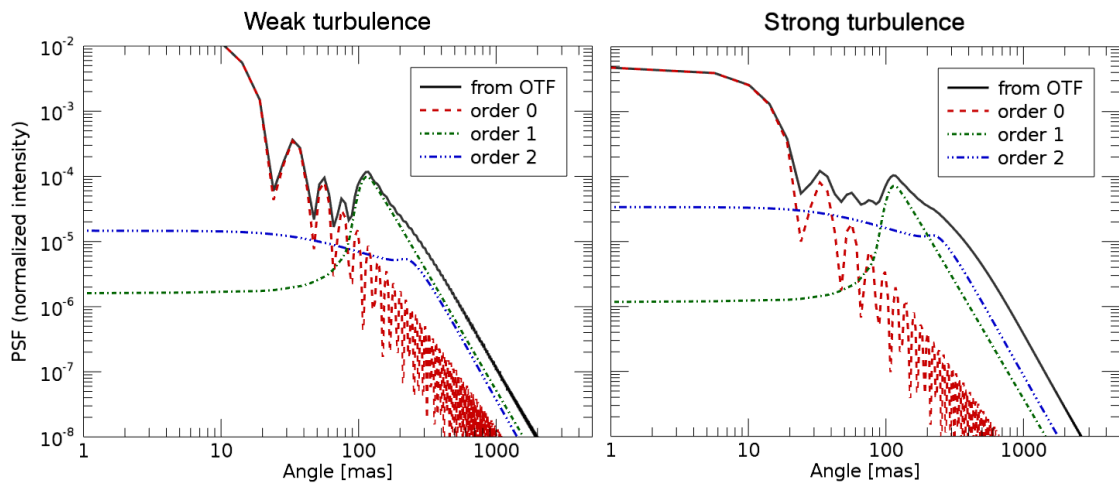


FIGURE 4.1 – Décomposition d’une PSF en ordres convolutifs en cas de faible turbulence (gauche) et forte turbulence (droite). La courbe continue noire est la PSF calculée par transformée de Fourier inverse de l’OTF en $e^{B_\phi(\vec{\rho})}$, ce qui correspond à la somme infinie de tous les ordres convolutifs. Seuls les 3 premiers ordres sont montrés, soit δ , W_ϕ et $W_\phi \star W_\phi$. La PSF et les ordres convolutifs sont tous convolués par la diffraction (tâche d’Airy). Figure extraite de l’article [Fétick et al. \[2018\]](#).

théorème de Wiener-Khintchine pour écrire la PSF en fonction de la DSP

$$h(\vec{u}) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \tilde{h}_T(\vec{\rho}/\lambda) e^{-B_\phi(0)} e^{\mathcal{F}^{-1}\{W_\phi(\vec{f})\}} \right\} \quad (4.10)$$

où \vec{f} et $\vec{\rho}$ sont des variables conjuguées pour la transformée de Fourier, de même pour \vec{u} et $\vec{\rho}/\lambda$. Comme $B_\phi(0)$ est l'intégrale de W_ϕ , cette écriture ne dépend que de la DSP de phase turbulente et de la FTO statique \tilde{h}_T , laquelle prend en compte la diffraction et d'éventuelles aberrations optiques du télescope. Si on paramètre la DSP, on peut alors obtenir la PSF au prix de deux transformées de Fourier. Pour comparaison les modèles de la Sec. 3.4 ne nécessitent aucune transformée de Fourier, mais ne prennent pas en compte la diffraction, et donc la fréquence de coupure du télescope. Si ces modèles veulent être enrichis de la diffraction, ils doivent être convolués par h_T , ce qui requiert au moins deux transformées de Fourier. Le temps de calcul est alors similaire.

Le plus important est maintenant de trouver un modèle adapté de DSP pour paramétrer l'équation 4.10. La DSP de phase corrigée par OA est séparée en deux zones : les basses fréquences partiellement corrigées par le système d'OA, et les hautes fréquences non corrigées. On utilise donc un modèle de DSP naturellement séparé en deux selon la coupure de l'OA. Les hautes fréquences suivent le modèle théorique de turbulence de Kolmogorov. Le point crucial est alors de paramétrer simplement les basses fréquences. Comme on l'a noté aux Eqs. 4.6 et 4.8 la forme de la PSF, au moins en régime de faible phase résiduelle, est similaire à la forme de la DSP de phase. Le modèle de Moffat décrivant bien le coeur corrigé par OA, il est alors pertinent pour le paramétrage du coeur de la DSP de phase électromagnétique. De plus le modèle de Moffat permet de décrire deux régimes de la DSP de la phase : les très basses fréquences spatiales (tip-tilt et bas ordres) et les moyennes fréquences (erreur de propagation du bruit, erreur temporelle) jusqu'à la coupure de l'OA. Le paramètre α de la Moffat est représentatif de ce changement de régime. Le modèle de Moffat peut également prendre en compte des asymétries de type elliptique de la DSP (vent dominant), entraînant des asymétries de la PSF. Le modèle de DSP de phase [Fétick et al., 2019a] s'écrit donc

$$W_\phi(\vec{f}) \triangleq \begin{cases} A \mathcal{N}_{\alpha,\beta} \left(1 + f_x^2/\alpha_x^2 + f_y^2/\alpha_y^2\right)^{-\beta} + C & \text{si } \vec{f} \in Z_{OA} \\ 0.023 r_0^{-5/3} f^{-11/3} & \text{si } \vec{f} \in \overline{Z_{OA}} \end{cases} \quad (4.11)$$

avec Z_{OA} la zone de correction de l'OA. Pour une zone de correction circulaire, ce qui sera supposé par la suite, $(\vec{f} \in Z_{OA}) \iff (f < f_{OA})$, en notant f_{OA} la fréquence de coupure du système d'OA. La zone $\overline{Z_{OA}}$ est le complémentaire de la zone corrigée, c'est à dire la zone turbulente. La Fig. 4.2 montre ce modèle de DSP et la limitation des deux zones. La continuité de la DSP n'est pas imposée au niveau

de la fréquence de coupure. Pour rappel, comme dans la Sec.3.4, les fréquences f_x et f_y sont données dans un repère tourné de θ par rapport au référentiel absolu (Nord-Est, ou axes du détecteur par exemple). Le facteur de normalisation $\mathcal{N}_{\alpha,\beta}$ permet de normaliser l'intégrale de la Moffat sur la zone de correction (la démonstration est en annexe de [Fétick et al. 2019a](#))

$$\mathcal{N}_{\alpha,\beta} \triangleq \frac{\beta - 1}{\pi \alpha_x \alpha_y} \left[1 - \left(1 + \frac{f_{OA}^2}{\alpha_x \alpha_y} \right)^{1-\beta} \right]^{-1} \quad (4.12)$$

Il faut assurer que $\beta > 1$ pour écrire cette normalisation, ce qui est vérifié en pratique. Grâce à la normalisation, l'intégrale de la DSP (*id est* la variance de phase) sur la zone corrigée par l'OA vaut

$$\sigma_{OA}^2 \simeq A + C \mathcal{A}(Z_{OA}) \quad (4.13)$$

avec $\mathcal{A}(Z_{OA})$ l'aire de la zone corrigée dans le domaine fréquentiel. Dans le cas d'une zone corrigée non circulaire le modèle de PSF et la normalisation peuvent toujours être utilisés, cependant l'intégrale de la DSP sur la zone corrigée ne sera pas exactement donnée par Eq. 4.13. De plus, les isophotes de la Moffat sont presque circulaires et coïncident avec le cercle de correction de l'OA seulement si $\alpha_x \simeq \alpha_y$ (cf. Fig. 4.3). En pratique l'élongation est faible et l'approximation de σ_{OA}^2 valide. Concernant la variance de phase non corrigée par l'OA, pour une zone de correction circulaire, on obtient

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{fit}}^2 &= 0.023 r_0^{-5/3} 2\pi \int_{f_{OA}}^{+\infty} f^{-11/3} f \, df \\ &= 0.023 \frac{6\pi}{5} (r_0 f_{OA})^{-5/3} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Il s'agit de l'erreur de *fitting* des modes non corrigés. La variance de phase totale est alors la somme de l'erreur de correction et de l'erreur de *fitting*

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma_{OA}^2 + \sigma_{\text{fit}}^2 \\ &\simeq A + C\pi f_{OA}^2 + 0.023 \frac{6\pi}{5} (r_0 f_{OA})^{-5/3} \end{aligned} \quad (4.15)$$

avec une égalité stricte pour une zone de correction circulaire et des isocontours circulaires de la Moffat, soit $\alpha_x = \alpha_y$. La variance de phase totale est entièrement déterminée par les paramètres A , C et r_0 du modèle de DSP, et par la donnée de la fréquence de coupure de l'OA (notée f_{OA}). La normalisation $\mathcal{N}_{\alpha,\beta}$ élimine les paramètres α et β dans le calcul de cette variance totale. Ils n'ont donc aucune influence sur le rapport de Strehl. Leur impact sur la forme de la PSF est ainsi réduit, l'information importante se retrouve concentrée dans A , r_0 et éventuellement C .

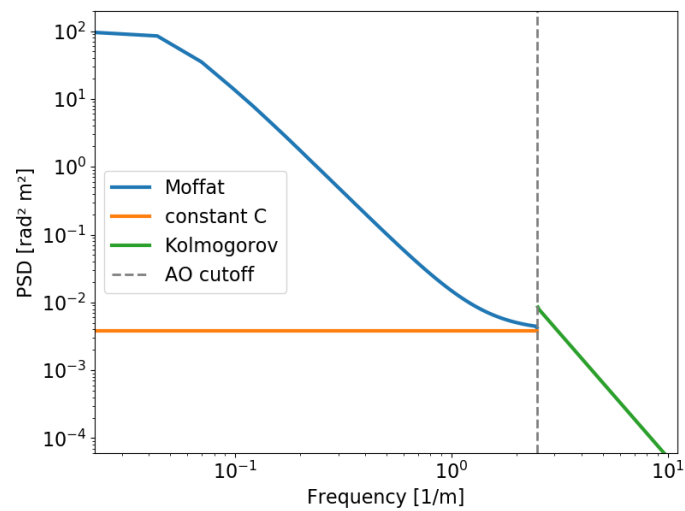


FIGURE 4.2 – Modèle de la DSP de phase résiduelle (Eq. 4.11). La ligne de pointillés verticaux indique la fréquence de coupure du système d’OA.

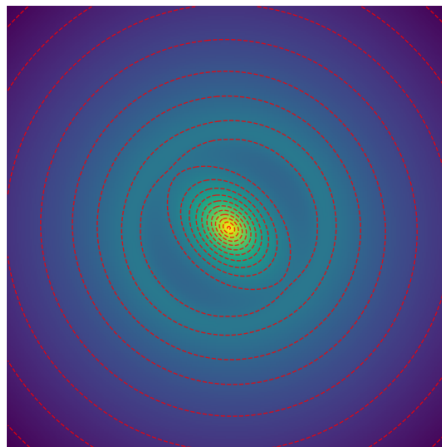


FIGURE 4.3 – Simulation d’une PSF avec le modèle de PSF corrigée par OA. La Moffat est excessivement allongée à $\alpha_x/\alpha_y = 1.4$ pour mettre en évidence la possibilité d’isophotes elliptiques de la Moffat par rapport à la turbulence à symétrie circulaire (isotropie de la turbulence). Échelle logarithmique d’intensité.

Pour résumer, le jeu total des sept paramètres de ce modèle est

$$\Omega = \{\alpha_x, \alpha_y, \theta, \beta, A, C, r_0\} \quad (4.16)$$

Dans le cas d'une PSF à symétrie de révolution, $\alpha_x = \alpha_y$ et $\theta = 0$, ce qui réduit à cinq le nombre de paramètres. En pratique, le paramètre d'élargissement moyen $(\alpha_x + \alpha_y)/2$, la loi du puissance β et la constante C évoluent peu sur un système donné. L'élongation α_x/α_y dépend *a priori* du vent, mais reste proche de l'unité pour les observations que nous considérerons à la Sec.5, c'est à dire que la PSD de la phase, et donc la PSF sont quasi-circulaires.

Les bornes de chaque paramètre assurent une DSP finie et positive, soit

$$\begin{aligned} 0 &< \alpha_x < +\infty \\ 0 &< \alpha_y < +\infty \\ -\pi &< \theta < +\pi \\ 1 &< \beta < +\infty \\ 0 &\leq A < +\infty \\ 0 &\leq C < +\infty \\ 0 &< r_0 < +\infty \end{aligned} \quad (4.17)$$

Il est important de remarquer que le paramètre r_0 du modèle est celui de la DSP de la phase dans Eq. 4.11, c'est à dire qu'il est donné par défaut à la longueur d'onde d'observation, et dans la ligne de visée. Pour en déduire le r_0 caractéristique de la turbulence, il faut l'exprimer à la longueur d'onde standard (typiquement 500 nm pour le r_0 et le *seeing*) et l'exprimer au zénith en corrigeant de l'*airmass*.

Dans l'ensemble de cette thèse, ce modèle de PSF est appelé PSFAO₁₉, pour PSF corrigée par Optique Adaptative 2019 (date du papier correspondant). Il est en fin de compte basé sur un modèle de DSP de la phase et sur l'équation 4.10 de passage de la DSP à la PSF. Une implémentation en Python de PSFAO₁₉ est disponible en libre accès sur le site du LAM

<https://gitlab.lam.fr/lam-grd-public/maopyy>

Une implémentation en Matlab a également été réalisée par Olivier Beltramo-Martin (LAM) et est disponible sur requête.

Les gradients du modèle PSFAO₁₉ par rapport à ses paramètres peuvent se calculer analytiquement, et sont donnés en annexe B. L'expression analytique de ces gradients réduit le temps de calcul des processus de minimisation basés sur des algorithmes de descente de gradient.

4.2.2 Les deux paramètres principaux : r_0 et σ_{OA}^2

Les paramètres dominants sont A qui régit la variance de phase corrigée et r_0 qui régit la turbulence atmosphérique. L'effet de ces paramètres sur la forme de la PSF est montré Fig.4.4. Pour C proche de zéro $A \simeq \sigma_{OA}^2$, c'est à dire que la variance de phase de la zone corrigée est dominée par la Moffat. Ce terme est donc de grande importance dans la description de la qualité de correction du système d'OA. L'utilisation de ces deux seuls paramètres r_0 et A (resp. σ_{OA}^2) permet de simuler une grande gamme de niveau de turbulence et de correction d'OA. L'effet sur la FTO est également visible sur la Fig. 4.5. Une diminution du paramètre r_0 (donc une augmentation de la force de la turbulence) abaisse de manière générale la FTO par rapport à la fréquence nulle, laquelle est toujours normalisée à 1. Quant à une augmentation du paramètre A (identiquement σ_{OA}^2 pour un faible C), elle entraîne une pente plus prononcée aux moyennes fréquences $0.1 < f < 0.9$. Ce paramètre ne modifie pas les basses fréquences, mais entraîne une perte plus ou moins brusque des fréquences moyennes corrigées par le système d'OA. La FTO est donc découpée approximativement en trois zones : une zone dominée par la turbulence résiduelle ($f < 0.1$ environ, pour l'exemple de Fig. 4.5), une zone dominée par l'OA ($0.1 < f < 0.9$ dans ce même exemple) mais souffrant de l'abaissement dû à la turbulence, et la troisième zone ($0.9 < f$ dans ce même exemple) fortement impactée par la coupure du télescope.

4.2.3 Extension en large bande spectrale

Le modèle de PSF utilisé jusqu'à présent est monochromatique. On peut définir un modèle polychromatique entre deux longueurs d'onde λ_0 et λ_1 comme la somme discrète (riemanienne) de modèles monochromatiques

$$\begin{aligned} h(\vec{u})_{\text{polychrom}} &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} h(\vec{u}, \lambda) d\lambda \\ &\simeq \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0} \sum_{k=1}^{N_\lambda} h(\vec{u}, \lambda_k) d\lambda_k \end{aligned} \quad (4.18)$$

où N_λ est le nombre de discrétisations spectrales et $d\lambda_k$ la largeur de chaque bande spectrale. Il suffit ensuite d'utiliser l'équation 4.10 pour écrire chaque PSF monochromatique en fonction de la DSP de phase W_ϕ . On peut alors obtenir la PSF polychromatique au prix de $N_\lambda + 1$ transformations de Fourier : N_λ transformations de Fourier pour obtenir la FTO en fonction des DSP, plus une pour passer de la FTO à la PSF. La figure 4.6 illustre la différence entre une PSF monochromatique et une PSF polychromatique sur l'instrument SPHERE/Zimpol. Un cas de bonne correction est montré, ainsi les anneaux de diffraction et la coupure de l'OA sont

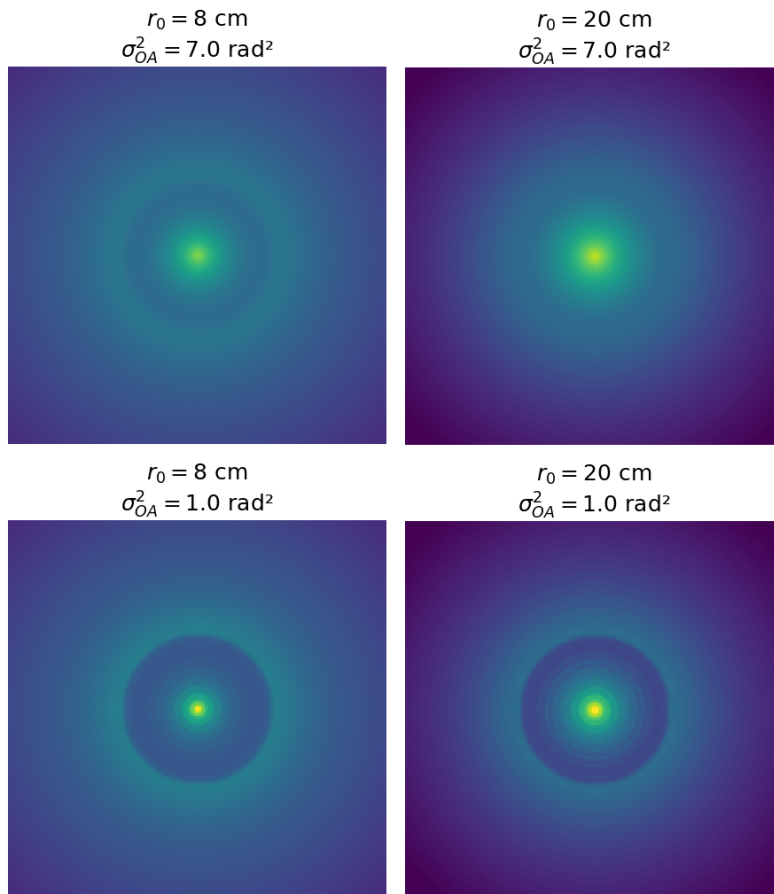


FIGURE 4.4 – Simulations de PSF avec le modèle PSFAO₁₉. Les paramètres du télescope (diamètre, sampling) et la fréquence de coupure de l’OA sont constants. Seuls les paramètres de la phase r_0 et σ_{OA}^2 changent. Les anneaux d’Airy sont visibles sur l’image en bas à droite. Échelle logarithmique d’intensité.

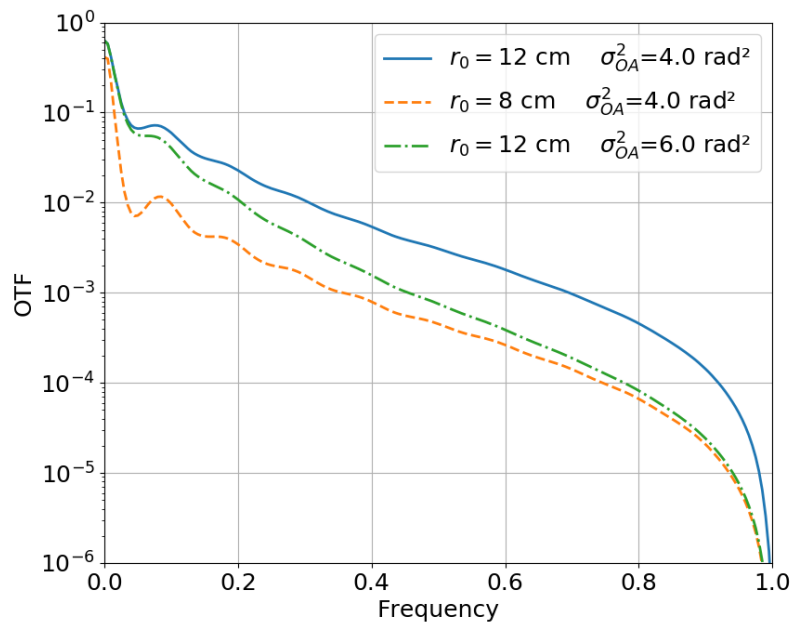


FIGURE 4.5 – Simulations de trois FTO avec le modèle FTOAO $_{19}$. La figure montre l'effet d'une augmentation du paramètre σ_{OA}^2 (tirets-pointillés) ou une diminution du paramètre r_0 (tirets) par rapport à une FTO nominale (trait continu). Les variations de paramètres sont choisies de manière à montrer les différences entre effet du r_0 (abaissement global) et du σ_{OA}^2 (changement de pente) sur la FTO du modèle.

clairement visibles sur la PSF monochromatique à 600 nm, mais lissés sur la PSF polychromatique de 500 nm à 700 nm.

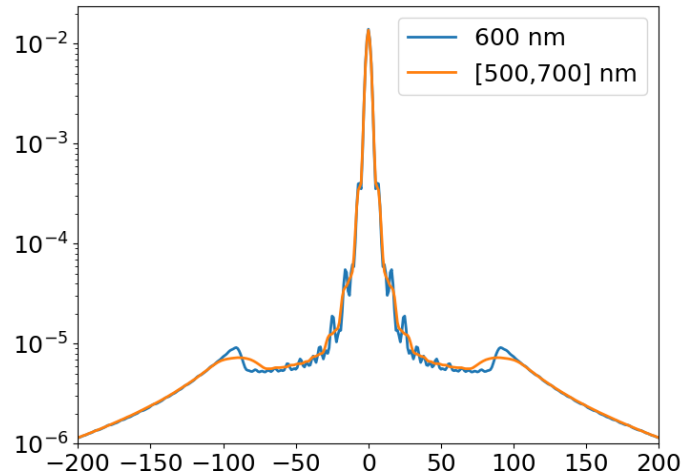


FIGURE 4.6 – Simulation d’une PSF monochromatique à la longueur d’onde moyenne 600 nm (bleu) et polychromatique sur la bande [500, 700] nm (orange) utilisant le modèle PSFAO₁₉. La PSF polychromatique est définie comme la moyenne de $N_\lambda = 20$ PSF monochromatiques régulièrement espacées en longueur d’onde.

Conclusion du chapitre

Le modèle PSFAO₁₉ a été élaboré afin de pallier les défauts des modèles antérieurs. Ce nouveau modèle décrit correctement la zone corrigée par OA et le halo turbulent de la PSF. Un de ses atouts majeurs est sa paramétrisation par des considérations physiques. Le halo est décrit par la turbulence de Kolmogorov, et est paramétrée par le paramètre de Fried r_0 . La zone corrigée est plus complexe, et est paramétrée par 6 paramètres (ou 4 en mode symétrique). Le paramètre σ_{OA}^2 est un paramètre d’importance car il décrit la variance de phase corrigée par le système d’OA, et donc la qualité de correction du système. Après les développements théoriques de ce chapitre, le modèle PSFAO₁₉ est testé en détail dans le chapitre suivant.

Chapitre 5

Validations du modèle PSFAO₁₉

Résumé

Afin de tester sa robustesse et sa polyvalence le modèle PSFAO₁₉ doit être validé sur des données de simulation et des données expérimentales issues de plusieurs instruments équipés de systèmes d’OA. Il est ajusté notamment sur des PSF de l’imageur à haute résolution SPHERE/Zimpol et sur des cubes de PSF du spectro-imageur MUSE. Le modèle est jugé sur sa capacité à s’adapter à la forme de la PSF corrigée par OA. De plus il est possible d’extraire les paramètres physiques σ_{OA}^2 et r_0 de l’ajustement. Ces paramètres donnent accès à des informations sur la turbulence et la qualité de fonctionnement de l’OA directement à partir d’images d’étoiles en plan focal. Ces paramètres physiques peuvent être comparés à d’autres estimations provenant du *Real Time Computer* (RTC) de l’OA ou de télémétrie externe.

Sommaire

| | | |
|------------|---|-----------|
| 5.1 | Méthode d’ajustement | 74 |
| 5.2 | Validation en simulations | 77 |
| 5.2.1 | OOMAO | 77 |
| 5.2.2 | Simulation de GEMS/GSAOI sur R136 | 84 |
| 5.3 | Validation sur données expérimentales | 86 |
| 5.3.1 | Images en visible de SPHERE/ZIMPOL | 86 |
| 5.3.2 | Ajustements sur différents instruments d’OA | 88 |
| 5.3.3 | Cubes de l’IFS MUSE | 95 |
| 5.4 | Applications du modèle | 98 |
| 5.4.1 | Détermination du paramètre de Fried en plan focal | 98 |
| 5.4.2 | Photométrie en champ réduit | 103 |
| 5.4.3 | Etudes d’amas stellaires avec PAMPELMUSE | 105 |

5.1 Méthode d'ajustement

Avant d'utiliser un modèle de PSF pour un quelconque traitement d'image, l'ajustement sur des PSF acquises sur étoiles permet dans un premier temps de valider la forme du modèle.

On parle d'ajustement (ou *fitting* en anglais) d'un modèle de PSF lorsqu'on trouve la valeur de ses paramètres qui permettent de s'approcher au mieux (au sens d'une norme) d'une observation sur étoile. L'image d'une étoile, notée \mathbf{i} , est un ensemble de pixels satisfaisant l'équation 1.44. On approxime la PSF par un modèle paramétrique

$$\mathbf{i} = \gamma \mathbf{h}_\Omega + \zeta + \mathbf{n} \quad (5.1)$$

avec γ le flux de l'étoile, ζ le fond, \mathbf{h}_Ω le modèle discrétisé de PSF, et \mathbf{n} un bruit additif de moyenne nulle. Cette équation suppose que l'image ne contient pas d'autres objets très lumineux hormis l'étoile de PSF. Pour l'astronomie le bruit est essentiellement composé du bruit de lecture (*read out noise*) de l'électronique et du bruit d'arrivée aléatoire des photons. Le bruit de lecture est Gaussien, mais le bruit de photon suit une statistique de Poisson. Pour un flux moyen supérieur à environ 10 photons par pixel, la statistique de Poisson ressemble fortement à une Gaussienne. Mugnier et al. [2004] ont donc montré qu'il est légitime de considérer le bruit total comme la somme de deux bruits Gaussiens

$$\sigma_{\mathbf{n}}^2 = \sigma_{\text{RON}}^2 + \sigma_{\text{photon}}^2 \quad (5.2)$$

avec σ_{RON}^2 la variance du bruit de lecture constante sur tous les pixels et σ_{photon}^2 la variance du bruit de photon dépendant de l'illumination du pixel. Le bruit de lecture est supposé connu, quant au bruit de photon sur chaque pixel il est approximé par

$$\sigma_{\text{photon}}^2 \simeq \max\{\mathbf{i}, 0\} \quad (5.3)$$

c'est à dire que la variance du bruit de photon est approximativement la valeur de l'image à chaque pixel, soit environ le flux moyen dans chaque pixel. La variance est seuillée à 0 pour éviter d'éventuelles valeurs négatives dues justement au bruit de l'image. Cette méthode, bien qu'approximative, permet de donner le bon ordre de grandeur de la variance du bruit par pixel pour des images ayant une grande dynamique d'intensité, donc une grande dynamique de bruit de Poisson. La méthode d'ajustement consiste à maximiser la probabilité des paramètres (Ω, γ, ζ) sachant l'image \mathbf{i} . On note $P(\Omega, \gamma, \zeta | \mathbf{i})$ cette probabilité a posteriori. Grâce à la règle de Bayes on l'écrit comme le produit de la vraisemblance et des probabilités a priori

$$P(\Omega, \gamma, \zeta | \mathbf{i}) \propto P(\mathbf{i} | \Omega, \gamma, \zeta) P(\Omega) P(\gamma) P(\zeta) \quad (5.4)$$

Maximiser la probabilité a posteriori est équivalent à minimiser l'anti-logarithme. Le critère à minimiser, pour un bruit Gaussien non forcément stationnaire, est

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\Omega}, \gamma, \zeta) = \frac{1}{2} \left\| \frac{\mathbf{i} - \gamma \mathbf{h}_{\boldsymbol{\Omega}} - \zeta}{\boldsymbol{\sigma}_n} \right\|^2 - \ln P(\boldsymbol{\Omega}) - \ln P(\gamma) - \ln P(\zeta) \quad (5.5)$$

En pratique les probabilités a priori sur le flux γ et le fond ζ sont uniformes, avec une simple contrainte de positivité $\gamma > 0$ et $\zeta \geq 0$. De plus le problème est bien posé et relativement facile à résoudre car le nombre d'inconnues $(\boldsymbol{\Omega}, \gamma, \zeta)$ est largement inférieur au nombre de données de l'image \mathbf{i} . Il n'est pas nécessaire de considérer une loi a priori sur $\boldsymbol{\Omega}$, éventuellement des bornes peuvent être ajoutées pour éviter des valeurs interdites des paramètres $\boldsymbol{\Omega}$. Enfin, on peut remarquer qu'il existe une solution analytique du minimum de \mathcal{L} selon les paramètres (γ, ζ) , lorsque les paramètres de PSF $\boldsymbol{\Omega}$ sont déterminés (voir annexe de [Fétick et al. \[2019a\]](#)). On note $\hat{\gamma}_{\boldsymbol{\Omega}}$ et $\hat{\zeta}_{\boldsymbol{\Omega}}$ la solution analytique du flux et du fond respectivement, pour un jeu de paramètres PSF $\boldsymbol{\Omega}$ donné. Le critère à minimiser se simplifie donc

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{2} \left\| \frac{\mathbf{i} - \hat{\gamma}_{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{h}_{\boldsymbol{\Omega}} - \hat{\zeta}_{\boldsymbol{\Omega}}}{\boldsymbol{\sigma}_n} \right\|^2 \quad (5.6)$$

Effectuer de l'ajustement de PSF sur étoile revient à chercher un moindre carré pondéré par le bruit. C'est la procédure qui sera utilisée ensuite sur des données ciel. Au lieu d'utiliser le tableau du bruit $\boldsymbol{\sigma}_n$ on préfère le substituer par un tableau de poids $\mathbf{w} = 1/\boldsymbol{\sigma}_n$, soit

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{2} \left\| \mathbf{w} \left(\mathbf{i} - \hat{\gamma}_{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{h}_{\boldsymbol{\Omega}} - \hat{\zeta}_{\boldsymbol{\Omega}} \right) \right\|^2 \quad (5.7)$$

Cette écriture permet notamment d'exclure d'éventuels pixels aberrants en les forçant à $w = 0$, ce qui équivaut à une variance infinie, soit une loi de vraisemblance uniforme. De plus un zéro de \mathbf{w} est plus simple à traiter numériquement qu'un infini de $\boldsymbol{\sigma}_n$. En pratique, le critère \mathcal{L} au sens des moindres carrés est minimisé par un algorithme numérique type descente de gradient. Nous utilisons la méthode itérative *Trust Region Reflective* (TRF) de Python/Scipy [[Jones et al., 2001](#)]. Cette méthode approxime la fonction à minimiser par une fonction simple (par ex. quadratique) dans une région de confiance de taille variable. Les méthodes TRF sont plus complexes à mettre en oeuvre que les algorithmes de descente linéaire mais sont plus robustes en pratique [[Yuan, 2000](#)]. Le temps de calcul dépend principalement du temps d'obtention d'une PSF $\mathbf{h}_{\boldsymbol{\Omega}}$ (complexité du modèle) et du nombre d'appels du minimiseur au modèle (minimiseur gourmand ou non).

On définit une métrique qui traduit la qualité d'un modèle de PSF et sa possibilité à s'ajuster à la forme de la PSF vraie. Il s'agit de l'erreur quadratique relative de l'ajustement

$$\varepsilon_h \triangleq \frac{\left\| \mathbf{i} - \hat{\gamma}_\Omega \mathbf{h}_\Omega - \hat{\zeta}_\Omega \right\|}{\sum_k i_k} \quad (5.8)$$

avec k indice sur les pixels de l'image. Cette erreur est donc la norme 2 de la différence entre le modèle et l'image, normalisée par le flux de l'image. Ce terme ε_h est également affecté par le bruit de l'image, autrement dit, même avec un modèle de PSF qui s'ajusterait parfaitement à la PSF vraie du système, le terme ε_h serait non nul à cause du bruit présent dans l'image. Le terme ε_h serait alors une mesure de la variance du bruit dans l'image. Par contre, en cas de bon SNR, on peut considérer que l'erreur est majoritairement causée par le modèle de PSF et non pas par le bruit. Il s'agit alors d'un biais de modèle pour l'observation considérée (Fig. 5.1).

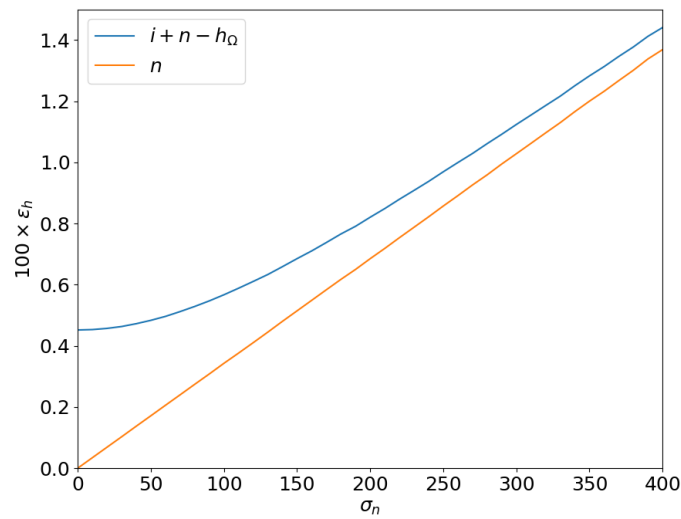


FIGURE 5.1 – Exemple d'évolution de l'erreur ε_h en fonction de l'écart-type du bruit σ_n . En bleu : erreur due au modèle et bruit. En orange : bruit seul, pour comparaison. Deux régimes sont présents sur la courbe bleue : pour $\sigma_n < 70$ (environ) l'erreur est dominée par le biais du modèle, pour $\sigma_n > 70$ (environ) l'erreur est dominée par la variance du bruit.

5.2 Validation en simulations

5.2.1 OOMAO

La librairie OOMAO (*Object-Oriented Matlab Adaptive Optics*) développée par [Conan and Correia \[2014\]](#), est un outil robuste et précis de simulations *end-to-end* de PSF corrigées par OA. La librairie génère plusieurs écrans de phases correspondants à différentes couches turbulentes à différentes altitudes. Chaque écran de phase suit la statistique de Von-Karman et se déplace à chaque itération temporelle en *frozen flow* avec une vitesse et une direction qui lui est propre. L'onde électromagnétique perturbée passe au travers d'un télescope simulé en optique de Fourier. Une partie du flux est envoyée sur un détecteur de front d'onde simulé, ici un Shack-Hartmann, lequel délivre une mesure bruitée, qui est multipliée par la matrice de commande. Les commandes résultantes sont envoyées à un miroir déformable, simulé par des fonctions d'influences d'actionneurs. La deuxième partie du flux incident passe au travers de cette boucle d'OA avant d'arriver sur un détecteur en plan focal, ce qui génère une PSF. La PSF longue pose est donc la somme de PSF courtes poses corrigées par OA.

L'approche OOMAO est alors fondamentalement différente de l'approche envisagée à la [Sec.4.2](#) pour former le modèle PSFAO₁₉ ([Fig.5.2](#)). Les deux points communs sont l'utilisation de l'optique de Fourier et le modèle de Kolmogorov en hautes fréquences. Toutefois le modèle PSFAO₁₉ se base sur des transformées de Fourier de la DSP de Kolmogorov, tandis que OOMAO effectue des réalisations de cartes de phase instantanées suivant cette statistique en collant au mieux à la réalité physique pour modéliser l'ensemble des processus physique et fournir des PSF instantanées qu'il faut ensuite moyenner temporellement.

On utilise OOMAO pour générer des PSF à douze longueurs d'onde d'observation différentes entre 0.5 μm et 2.18 μm , ce qui correspond à une large gamme de fréquences du visible à l'infrarouge. Sept valeurs de r_0 sont considérés, de 7.5 cm à 25 cm (valeurs données à 500 nm). La grande échelle du modèle de Von-Karman est fixée à 30 m. Une seule couche turbulente proche du sol se déplace à $v = 10$ m/s. Le diamètre de la pupille du télescope est $D = 8$ m, et il y a 32 actionneurs dans le diamètre de la pupille. Ces valeurs sont typiques des télescopes et systèmes d'OA actuels. L'échantillonnage est à Shannon-Nyquist pour chaque fréquence, ce qui permet de limiter la taille des tableaux gérés par OOMAO, et donc le temps de calcul.

Le temps de pose des PSF est réglé à 0.1 s, 1 s, 10 s et 100 s. Nous avons remarqué que OOMAO n'a pas eu le temps de converger vers un état stable, c'est à dire

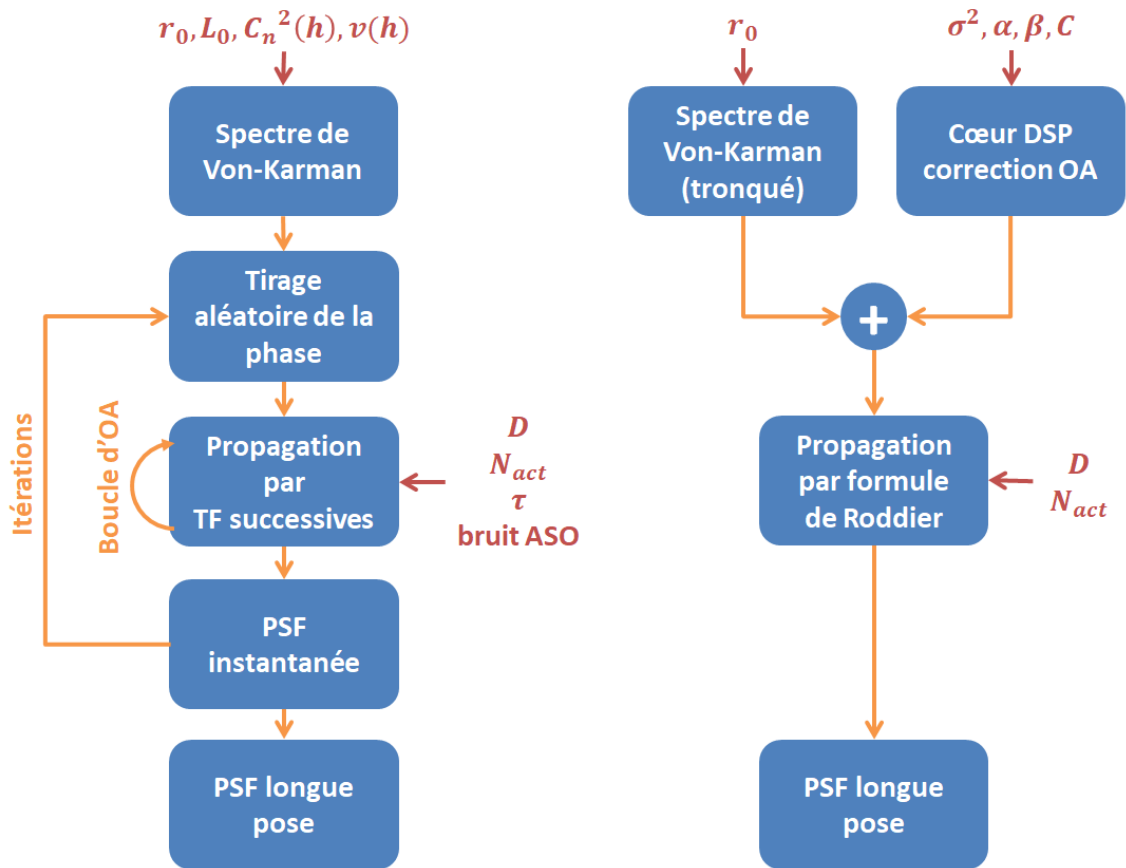


FIGURE 5.2 – Génération d'une PSF par OMAO (à gauche) et par PSFAO₁₉ (à droite) en fonction des paramètres d'entrée.

une PSF représentative de la longue pose, pour des temps de pose de 0.1 s et 1 s. En effet un seul écran de phase en *frozen flow* à $v = 10$ m/s est considéré, en une seconde il a donc parcouru à peine plus de la distance d'un diamètre de pupille, ce qui n'est pas statistiquement pertinent. Il faut alors augmenter le nombre de couches turbulentes ou le temps d'exposition. Pour un temps de pose de 10 s et 100 s, les PSF sont proches de la longue pose pour les r_0 donnés. On utilise uniquement les PSF de 10 s, qui nécessitent un temps plus raisonnable de calcul.

Ces PSF OOMAO sont ajustées par le modèle PSFAO₁₉ en minimisant le critère des moindres carrés de l'équation 5.7. La figure 5.3 montre les résultats d'ajustement pour trois longueurs d'onde et trois niveaux de r_0 . Le modèle PSFAO₁₉ est capable d'ajuster sa forme sur une grande plage de longueurs d'onde et de turbulence, depuis une correction très partielle ($\lambda = 500$ nm et $r_0 = 7.5$ cm) jusqu'à une très bonne correction ($\lambda = 1220$ nm et $r_0 = 17.5$ cm). Il décrit correctement le coeur corrigé par OA ainsi que le halo turbulent. Les anneaux de diffraction sont bien décrits et nettement visible en cas de bonne correction. Les résidus sont faibles, plus d'un ordre de magnitude en dessous de la PSF vraie. Il en est de même du côté des FTO, la forme générale est correctement estimée. La chute marquée aux basses fréquences est due au halo résiduel. Le long plateau descendant est le résultat de la correction OA, puis la fréquence de coupure du télescope intervient en annihilant les hautes fréquences. Ces trois zones de la FTO sont bien décrites par le modèle. Il possède là un avantage majeur par rapport aux modèles de l'état de l'art présentés Sec. 3.4. En effet ces modèles-là se soucient d'un ajustement dans le domaine PSF, mais ne considèrent pas le domaine des FTO. La chute des basses fréquences est considérée à tort comme un fond (*background*) résiduel ou estimé par des halo Gaussiens larges. La coupure du télescope n'est pas présente non plus. L'avantage du modèle PSFAO₁₉ est donc cette double description à la fois dans le domaine PSF et FTO, grâce à l'équation physique 4.10 de formation d'image. Sur l'ensemble des PSF OOMAO, on trouve une erreur relative (Eq. 5.8) sur la forme $\varepsilon_h = 6.4^{\pm 2} \times 10^{-3}$. Pour comparaison, l'ajustement par le modèle classique de Moffat donne $\varepsilon_h = 34^{\pm 16} \times 10^{-3}$, soit une erreur environ 5 fois supérieure. De plus les écart-types montrent que l'erreur est beaucoup plus constante pour le modèle PSFAO₁₉ ($\pm 2 \times 10^{-3}$) que pour la fonction de Moffat ($\pm 16 \times 10^{-3}$), avec un facteur 8 entre les deux écart-types. La distribution de ces erreurs est montrée sur l'histogramme 5.4.

Après l'ajustement du modèle PSFAO₁₉ sur les simulations OOMAO, on peut extraire la valeur des différents paramètres du modèle, notamment le paramètre de Fried r_0 . En effet ce paramètre est un paramètre d'entrée (défini par l'utilisateur) d'OOMAO, il est donc connu et représentatif de la simulation du moment que le tirage aléatoire de phase soit statistiquement représentatif, ce qui est le cas des poses

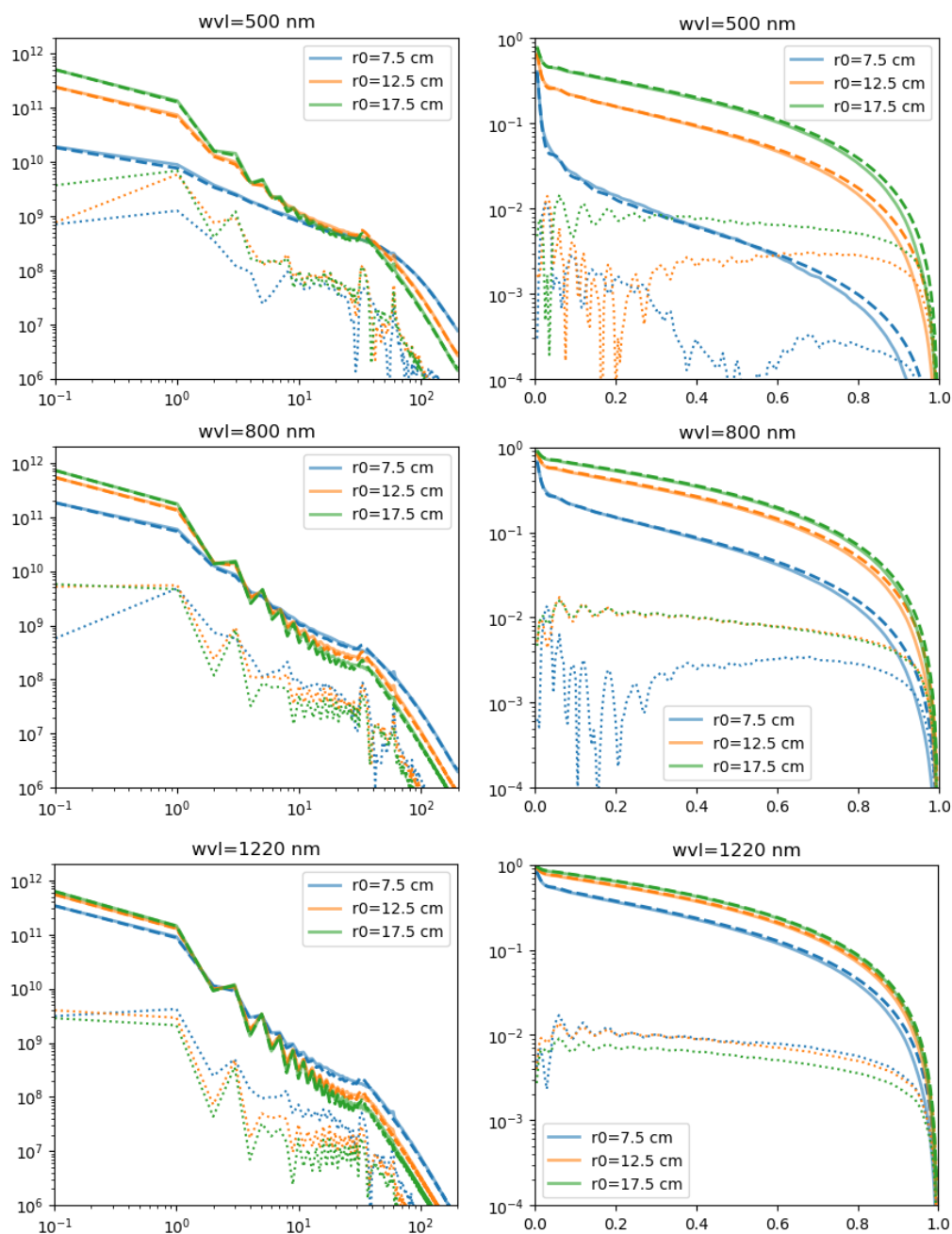


FIGURE 5.3 – PSF OOMAO (trait plein) ajustées par le modèle PSFAO₁₉ (tirets), et les résidus (pointillés). Gauche : moyenne circulaire des PSF. Droite : moyenne circulaire des FTO. De haut en bas, la longueur d'onde est de 500 nm, 800 nm et 1220 nm. Chaque couleur correspond à un r_0 (à 500 nm).

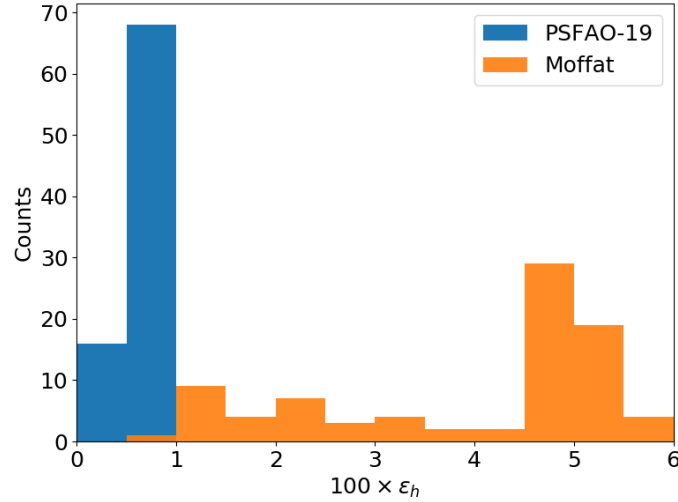


FIGURE 5.4 – Histogramme de la distribution de l’erreur ε_h entre les PSF OOMAO et les ajustements par le modèle de Moffat ou le modèle PSFAO₁₉ .

de 10 secondes ou plus pour cette simulation à une seule couche turbulente. La figure 5.5 montre le r_0 estimé par le modèle en fonction du r_0 donné en entrée des simulations OOMAO. Ce paramètre est très bien estimé, avec de faibles résidus, inférieurs à 1 cm pour $r_0 = 25$ cm, et inférieurs à un demi-centimètre pour $r_0 = 10$ cm. Cette faible erreur valide conjointement le r_0 fourni par OOMAO et par le modèle PSFAO₁₉ .

La figure 5.6 montre l’évolution du paramètre estimé σ_{OA}^2 en fonction de la longueur d’onde d’observation. En théorie la variance de phase évolue en λ^{-2} . On constate deux points aberrants pour les faibles longueurs d’onde au plus faible r_0 (cas très faible correction). En effet pour ces deux points-là, le paramètre β ajusté est proche de l’unité, la normalisation $\mathcal{N}_{\alpha\beta}$ tend vers 0, tandis que l’énergie dans la Moffat augmente, l’estimation de l’intégrale (donc le σ_{OA}^2) devient très sensible aux paramètres. Hormis ces deux points, le paramètre σ_{OA}^2 suit correctement la loi de puissance en λ^{-2} . Connaissant la valeur de ce paramètre pour une longueur d’onde, il est possible de l’extrapoler pour d’autres longueurs d’onde.

Enfin on peut se demander comment évolue le paramètre C du modèle, lequel définit une DSP de phase constante sur la zone corrigée. Etant donné que la fonction de Moffat domine le coeur de la DSP, le paramètre C prend plus d’importance (relativement à la Moffat) à proximité de la fréquence de coupure de l’OA. Cette zone à proximité de la coupure de l’OA est dominée en pratique par l’aliasing et des

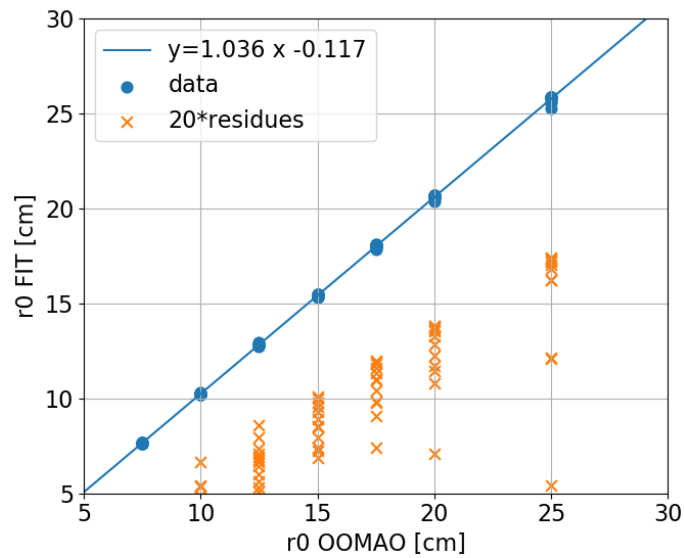


FIGURE 5.5 – Paramètre de Fried r_0 (exprimé à 500 nm) donné en entrée par l'utilisateur (abscisse) et estimé par ajustement du modèle PSFAO₁₉ (ordonnée). Douze longueurs d'onde sont considérées pour chacun des sept r_0 , soit 84 points en tout. Les points pour chaque longueur d'onde sont quasiment superposés sur le graphe. Les croix représentent vingt fois les résidus.

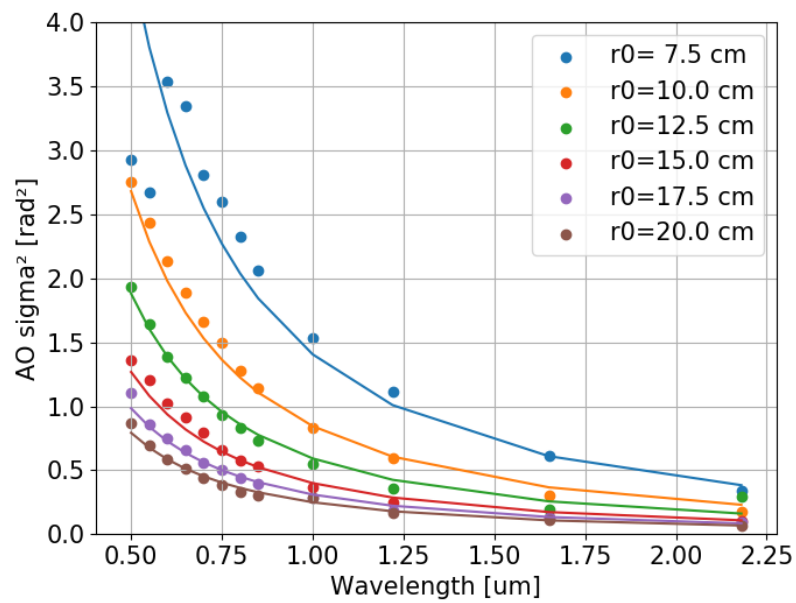


FIGURE 5.6 – Variance de phase corrigée σ_{OA}^2 estimée par le modèle PSFAO₁₉, pour différentes valeurs de r_0 . Les résultats sont ajustés par des courbes théoriques d'équation $a\lambda^{-2}$.

résidus de turbulence non corrigée. On cherche donc à expliciter une dépendance en r_0 du paramètre C . La figure 5.7 montre l'évolution du C ajusté sur les simulations OOMAO en fonction du r_0 . Il y a une très forte dépendance avec le r_0 . Comme la turbulence évolue en $r_0^{-5/3}$ on ajuste les résultats par une courbe en $r_0^{-5/3}$. Il en résulte une très bonne approximation du paramètre C par cette loi de puissance. Il s'agit alors d'une calibration du paramètre C en fonction de r_0 pour un instrument donné. Il est alors envisageable d'utiliser ensuite cette dépendance afin d'assujettir le paramètre C à r_0 , et donc d'éliminer une variable.

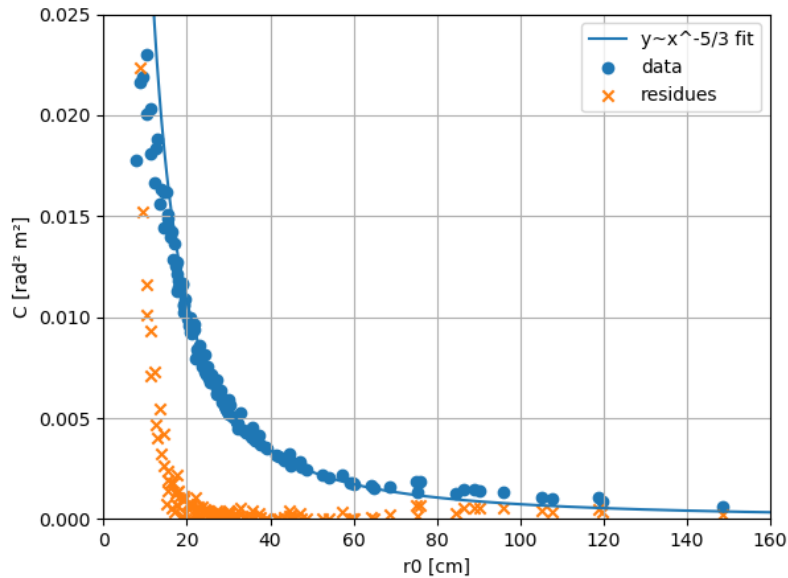


FIGURE 5.7 – Evolution du paramètre C du modèle PSFAO₁₉ en fonction du r_0 . La même courbe peut être visualisée en échelle log-log dans Fétick et al. [2019a].

5.2.2 Simulation de GEMS/GSAOI sur R136

Le télescope Gemini South (Chili) est équipé du système d'OA multi conjugué GEMS (GEmini Multi-conjugate adaptive optics System) [Neichel et al., 2012, Rigaut et al., 2012]. L'instrument GSAOI (Gemini South Adaptive Optics Imager) [Carrasco et al., 2012] est un imageur en proche infra-rouge (0.9 à 2.4 μm) de 85'' de champ de vue et 0.02'' de résolution par pixel, fonctionnant avec GEMS. Une simulation de plusieurs PSFs dans le champ de vue de GSAOI a été effectuée par Olivier Beltramo Martin (ONERA & Laboratoire d'Astrophysique de Marseille). Ces simulations prennent en compte la tomographie de la turbulence : 10 couches turbulentes basées sur la médiane des statistiques de Paranal (dont 59% de turbulence dans la

couche sol), corrigées par deux miroirs déformables conjugués à 0 km et 9 km d'altitude. Cinq Laser Guide Stars sont simulées pour la détection et correction du front d'onde. Le *seeing* simulé est de $0.8''$. Le résultat de la simulation est une grille de 31×31 PSFs dans le champ de vue.

Ces PSFs sont utilisées pour simuler une observation de l'amas R136, dont la position et la magnitude des étoiles sont référencées par [Fiorentino et al. \[2020\]](#). Le bruit de photon et du détecteur est pris en compte pour obtenir l'image (Fig. 5.8).

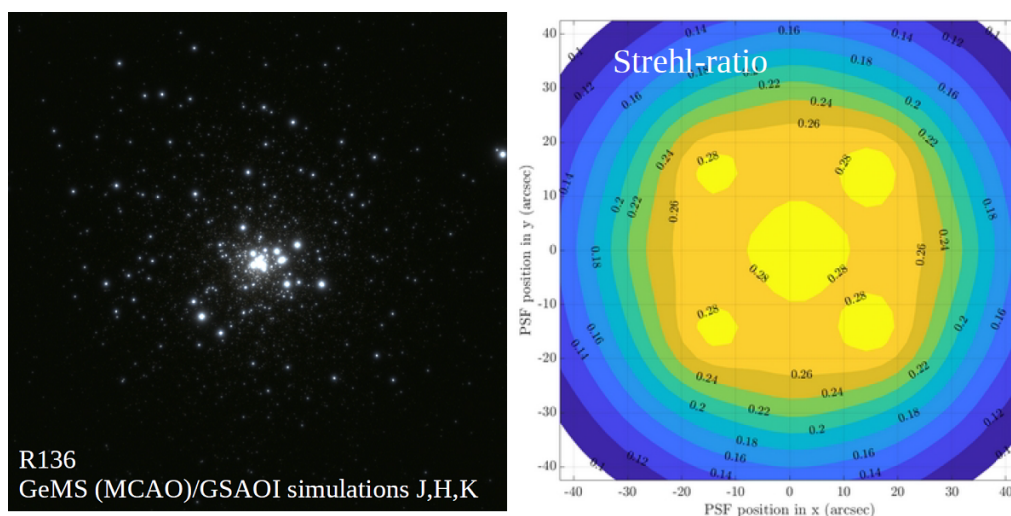


FIGURE 5.8 – Simulation d'observation de l'amas R136 par GEMS/GSAOI. Crédit (données et images) : Olivier Beltramo Martin (ONERA/LAM).

Le programme Starfinder [[Diolaiti et al., 2000](#)] est utilisé pour trouver les étoiles présentes dans le champ, estimer leur position et leur magnitude en bande H et K. Pour fonctionner, Starfinder a besoin de connaître la PSF. Par défaut Starfinder estime une PSF moyenne sur le champ de vue. Olivier Beltramo Martin a également ajusté les 31×31 PSFs simulées par le modèle PSFAO₁₉. Cette grille de PSFs ajustées est donnée à Starfinder, ce qui représente la précision ultime de Starfinder avec le modèle PSFAO₁₉. L'erreur astrométrique (Fig. 5.9, à gauche) est plus importante avec la PSF calculée par Starfinder qu'avec le modèle PSFAO₁₉ ajusté sur les PSFs vraies. Avec cette connaissance ultime sur la PSF, 95% des étoiles trouvées avec PSFAO₁₉ ont une erreur inférieure à 0.025 pixels. Avec Starfinder seul, l'erreur à 95% augmente à 0.185 pixels, soit un facteur 7 environ. Les erreurs photométriques (Fig. 5.9, à droite) sont également plus faibles avec le modèle PSFAO₁₉ ajusté. Le diagramme couleur H-K présente une queue plus étroite, ce qui permet de mieux

contraindre la population d'étoiles de l'amas pour les astronomes.

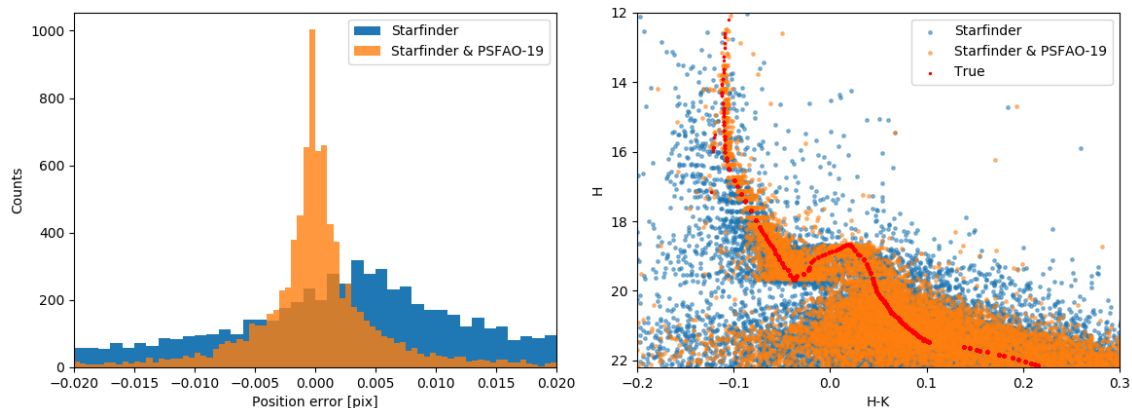


FIGURE 5.9 – Résultats Starfinder avec la PSF estimée en interne (bleu) et avec le modèle PSFAO₁₉ (orange) ajusté sur la PSF vraie. Gauche : erreur astrométrique de positionnement. Droite : variance photométrique du diagramme couleur. Figure réalisée à partir des données d'Olivier Beltramo Martin (ONERA/LAM).

Pour le moment l'ensemble de ces tests préliminaires montrent la possibilité ultime du modèle PSFAO₁₉ lorsqu'il est ajusté directement sur la PSF vraie. En pratique, nous n'avons pas accès à la PSF vraie et il faut l'estimer à partir de l'image (par exemple, chapitre 8 sur la marginalisation).

5.3 Validation sur données expérimentales

5.3.1 Images en visible de SPHERE/ZIMPOL

Plusieurs étoiles brillantes et isolées ont été observées en tant que PSF par l'instrument VLT/SPHERE/Zimpol lors du ESO Large Program sur les astéroïdes [Vernazza et al., 2018b]. Ces observations ont été effectuées avec le filtre N_R de Zimpol, de longueur d'onde moyenne 645.9 nm et de largeur spectrale 56.7 nm. Ces PSF ont été acquises au cours de plusieurs nuits, sur des étoiles différentes, et en présence de conditions d'observation différentes. Au total, 28 PSF ont été sauvegardées avec la télémétrie SPARTA (cf. Sec. 2.3.1) associée, ce qui nous donne accès au paramètre de Fried r_0 estimé par le RTC.

Ces PSF sur étoile sont ajustées par le modèle PSFAO₁₉, initialisé avec les caractéristiques instrumentales de SPHERE/Zimpol : $D = 8$ m, une occultation

centrale de 14% du diamètre, et 40 actionneurs dans le diamètre. Les aberrations optiques de l'instrument VLT/SPHERE ont été mesurées [Vigan et al., 2019] par ZELDA [N'Diaye et al., 2013, 2016], *Zernike sensor for Extremely Low-level Differential Aberration*, une adaptation de la technique du masque de Zernike. Ces mesures prennent en compte les aberrations de SPHERE en amont du coronographe (voie commune Zimpol, IFS et IRDIS), mais ne décrivent pas les aberrations spécifiques de l'instrument Zimpol en aval. Les auteurs ont généreusement accepté de nous fournir ce masque afin d'affiner notre modèle de PSF pour l'instrument SPHERE/Zimpol. Bien que ce masque ne soit pas primordial pour l'estimation des paramètres de la PSF, il permet toutefois de réduire les résidus d'ajustement en incluant les structures causées par le miroir déformable. Il démontre aussi la possibilité d'utilisation en pratique d'un tel masque dans le modèle PSFAO₁₉. Ce masque ZELDA est inclus dans le terme statique \tilde{h}_T du modèle. Ce terme pourrait également prendre en compte l'obstruction en forme de croix due aux araignées (*spiders*) de support du miroir secondaire. Cependant nous n'avons pas utilisé l'angle de rotation de ces araignées, elles ont donc été omises pour cette étude¹.

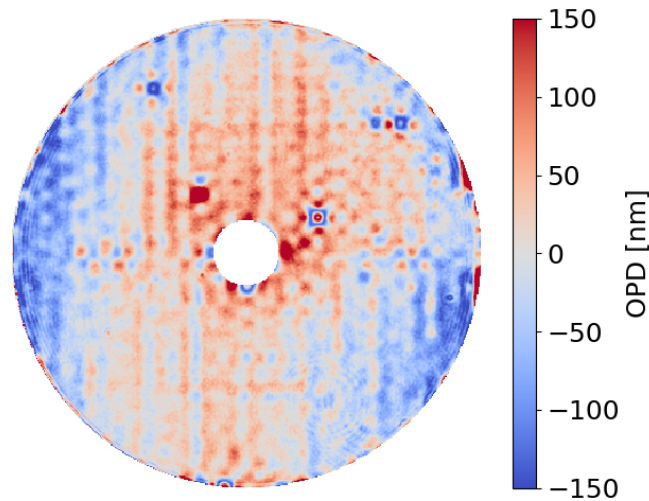


FIGURE 5.10 – Masque de différences de chemin optique de l'instrument VLT/SPHERE obtenu par mesures ZELDA [N'Diaye et al., 2013, Vigan et al., 2019].

Les 28 PSF sont ajustées par le modèle PSFAO₁₉. La figure 5.11 montre le résultat de cet ajustement sur trois PSF, pour le paramètre de Fried estimé mi-

1. De plus, les données ZIMPOL traitées dans cette thèse sont en champ stabilisé. La pupille tourne donc au cours de la pose, ce qui représente une complexité supplémentaire à l'estimation de la diffraction.

nimal $r_0 = 13$ cm, médian $r_0 = 21$ cm, et maximal $r_0 = 28$ cm de la série. Ces valeurs sont données à la longueur d’onde d’observation et dans la ligne de visée. Les rapports de Strehl estimés respectifs sont $S_R = 4\%$, $S_R = 8\%$ et $S_R = 27\%$. Le modèle arrive à s’adapter pour des conditions d’observation extrêmes. Le coeur, la fréquence de coupure de l’OA et le halo sont correctement estimés. Les structures causées par le miroir déformable sont bien estimées grâce au masque ZELDA. Les résidus proviennent des araignées dont la position n’est pas connue, de la difficulté d’estimation de la DSP de phase au niveau de la coupure de l’OA (hautes fréquences radiales), et d’asymétries radiales près du coeur. En effet la Moffat de la DSP de phase peut décrire une asymétrie elliptique, mais ne peut pas décrire des asymétries plus complexes.

L’ajustement des PSF par le modèle PSFAO₁₉ permet d’extraire notamment une valeur estimée du r_0 et du paramètre C du modèle. La figure 5.12 montre l’évolution de C en fonction du r_0 , et l’ajustement par une loi de puissance en $-5/3$. Comme pour les simulations OOMAO, nous trouvons une dépendance approximative en $r_0^{-5/3}$, les résultats sont toutefois plus dispersés sur données ciel de l’instrument SPHERE/Zimpol. La réalité fait bien sûr intervenir des phénomènes complexes non modélisés en simulations. Malgré cette difficulté, la tendance $C \propto r_0^{-5/3}$ est visible, ce qui confirme cette évolution sur données réelles. Les résidus sont à environ 25%–33% de la valeur de C sur l’ensemble de la courbe.

Les valeurs du r_0 trouvées par le modèle PSFAO₁₉ peuvent également être comparées aux données de télémétrie SPARTA ou MASS/DIMM. Ces résultats seront discutés plus en détails dans la section 5.4.1 pour prendre également en compte les résultats sur l’instrument VLT/MUSE.

5.3.2 Ajustements sur différents instruments d’OA

Afin de démontrer sa capacité d’adaptation, le modèle PSFAO₁₉ a été ajusté sur des PSFs de plusieurs instruments, avec différents modes de correction OA pour 6 systèmes d’OA différents représentant l’ensemble concepts envisagés aujourd’hui (SCAO, GLAO, MOAO, MCAO et LTAO) :

- CANARY/CAMICAZ au WHT : Données de 26 nuits de *commissioning* [Martin et al., 2017] en bande H acquises en 2013 par l’imageur CAMICAZ avec un système d’OA en mode Ground Layer (GLAO) ou Multiple Object (MOAO). La résolution est de 30 mas/pixel.
- NIRC2 au KECK : Données acquises en 2013 et en 2017 [Ragland et al., 2018, 2016] par l’imageur NIRC2 en bande H pour le mode SCAO, et en bande K pour le mode SLAO. L’étoile guide d’OA est soit naturelle, soit créée par un

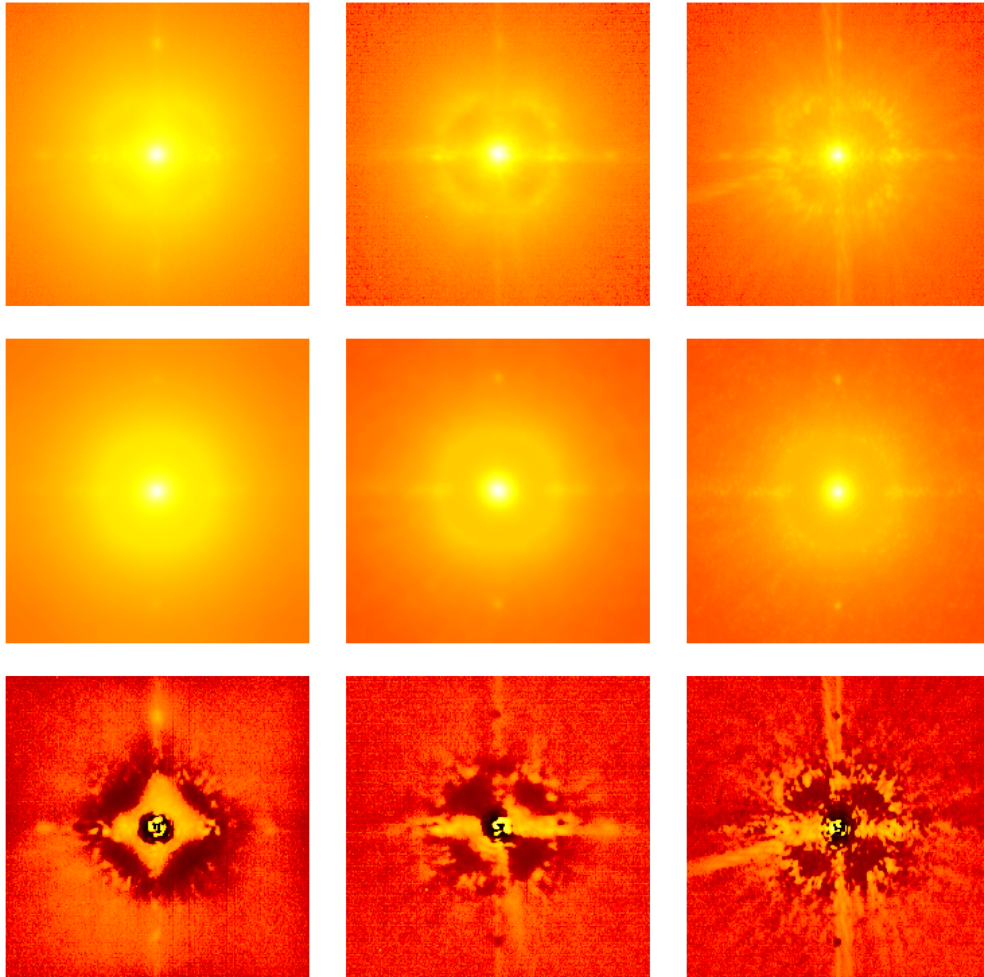


FIGURE 5.11 – Trois PSF Zimpol (haut) acquises au cours de trois nuits différentes, ajustées par le modèle PSFAO₁₉ (milieu), et les résidus (bas). La turbulence estimée par le modèle est $r_0 = 13$ cm (gauche), $r_0 = 21$ cm (milieu) et $r_0 = 28$ cm (droite). Les r_0 sont donnés à la longueur d'onde d'observation $\lambda = 645.9$ nm, dans la ligne de visée. Échelle arcsinus hyperbolique d'intensité pour observer les détails aussi bien positifs que négatifs.

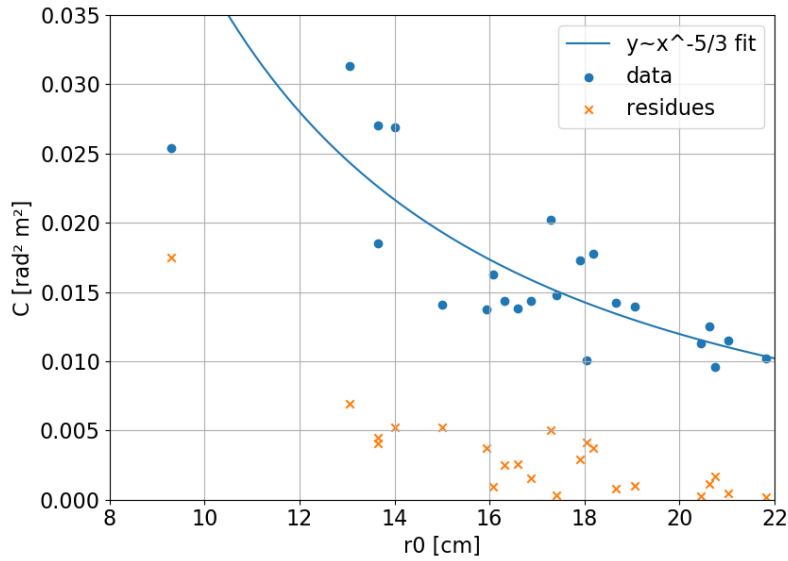


FIGURE 5.12 – Evolution du paramètre C du modèle PSFAO₁₉ en fonction du r_0 sur données SPHERE/Zimpol.

laser sur l'axe de visée. La résolution est de 9.94 mas/pixel.

- SOUL/LUCI au LBT : Données en bande H acquises en 2019 par la caméra NIR LUCI et le système d'OA SOUL [Pinna et al., 2016] utilisant un détecteur de front d'onde pyramide. La résolution est de 15 mas/pixel.
- GEMS/GSAOI à GEMINI : La caméra Gemini South Adaptive Optics Imager (GSAOI) bénéficie de la correction du Gemini Multi-conjugate adaptive optics System (GEMS, Neichel et al. 2014). Données issues des archives Gemini [Hirst and Cardenes, 2017]. Elles ont été acquises en bandes J,H et K en 2019 sur l'amas ouvert Trumpler-14 (P.I. M. Andersen, programme GS-2019A-DD107).
- SPHERE au VLT. Données des instruments ZIMPOL (filtres V et N_R centrés à 554 nm et 645.9 nm respectivement) et IRDIS.
- MUSE au VLT. Cubes de données de *commissioning* entre 465 nm et 930 nm en mode NFM.

La figure 5.13 montre l'ajustement par PSFAO₁₉ d'une PSF de chaque instrument et chaque mode d'OA. La diffraction par la pupille est prise en compte dans le modèle, ce qui fait apparaître clairement la pupille hexagonale sur les données du Keck. Cependant la position des araignées et les aberrations optiques des instruments ne sont pas prises en compte.

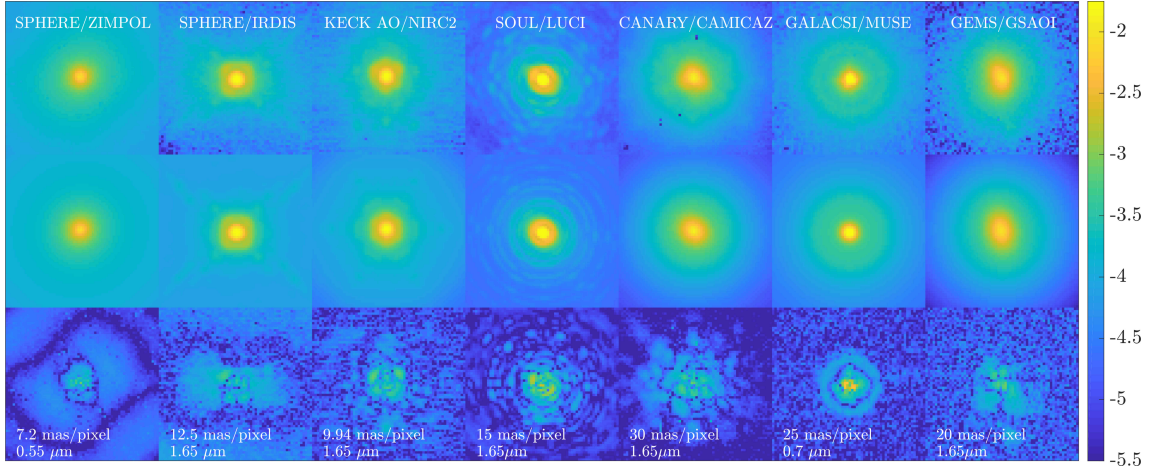


FIGURE 5.13 – PSFs issues de différents instruments et différents modes de correction OA (haut), ajustement avec le modèle PSFAO₁₉ (milieu), résidus (bas). Figure extraite de l'article [Beltramo-Martin et al. \[2020\]](#).

Un total de 1695 PSFs sont ajustées sur l'ensemble de ces instruments. Les statistiques par instrument sont données Fig. 5.14. Une étude statistique sur le rapport de Strehl, calculé par maximum sur l'image, montre que 95% des ajustements présentent une erreur relative inférieure à 9% sur le Strehl. Quant à la Mean-Square-Error (MSE), notée ε_h à l'Eq. 5.8, elle demeure faible avec une médiane à 0.65% et une moyenne à 0.69% pour l'ensemble des instruments. Le modèle PSFAO₁₉ démontre alors sa flexibilité pour un large panel d'instruments, pour différentes valeurs d'OA, et pour des bandes spectrales s'étalant du visible (SPHERE/Zimpol) aux bandes H et K.

L'ajustement par le modèle PSFAO₁₉ permet d'estimer le paramètre de Fried r_0 pour chacun de ces 1695 ajustements. Le r_0 du modèle est donné à la longueur d'onde d'observation et dans la ligne de visée. Il est ensuite transféré à 500 nm et corrigé de l'*airmass* pour être exprimé au zénith. Le r_0 médian estimé est de 11.6 cm à CANARY et 16.5 cm au KECK. On peut déduire du r_0 les statistiques du *seeing* des deux instruments CANARY et KECK (Fig.5.15) et les ajuster avec une distribution Log-Normale [[Conan et al., 2002](#), [Sánchez et al., 2003](#)]

$$\text{Log}\mathcal{N}_{\sigma,\mu}(s) = \frac{1}{s\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(\ln s - \ln \mu)^2/2\sigma^2} \quad (5.9)$$

Pour CANARY, $\mu = 0.9''$ et $\sigma = 0.23''$. Pour le KECK, $\mu = 0.64''$ et $\sigma = 0.22''$. Le modèle PSFAO₁₉ peut donc aussi bien servir à estimer le r_0 pour une observation donnée, ou à établir des statistiques atmosphériques sur un ensemble d'images

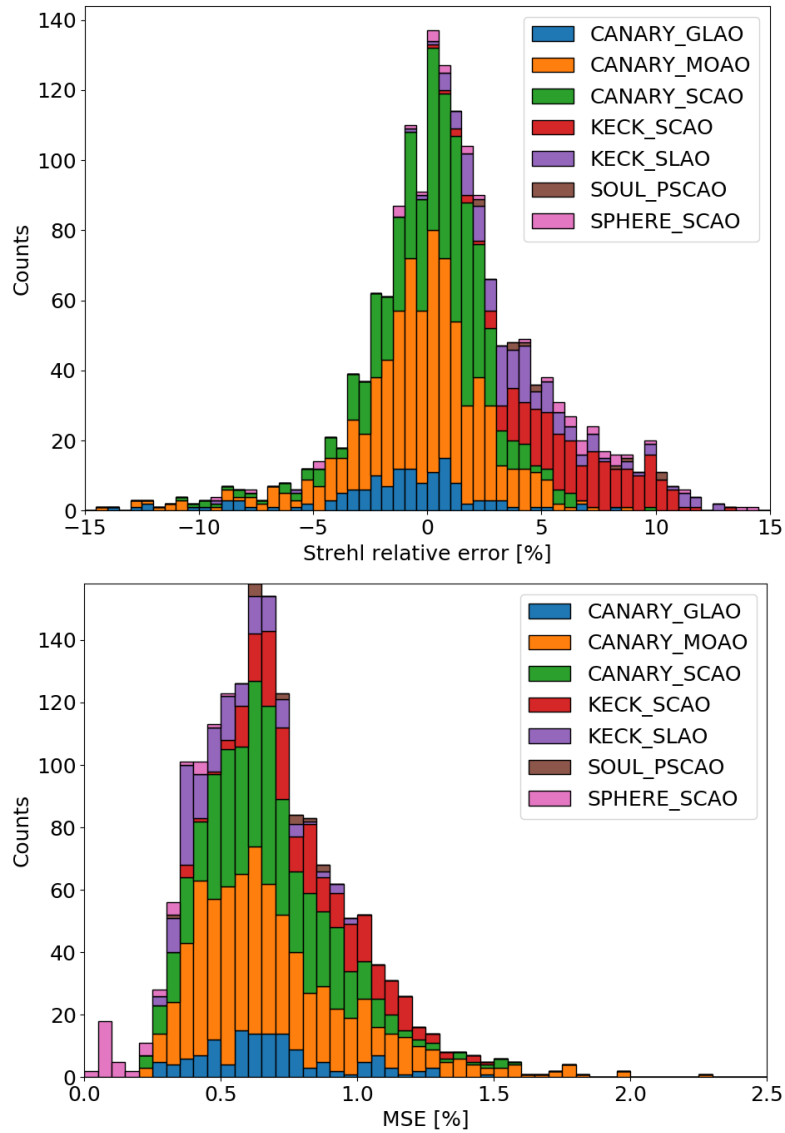


FIGURE 5.14 – Histogrammes, sur 1695 PSFs, des erreurs relatives sur le rapport de Strehl (haut), et Mean-Square-Error des résidus (bas). Chaque couleur correspond à un instrument. Crédit : Olivier Beltramo Martin (ONERA-LAM).

d'étoiles.

De plus l'article [Beltramo-Martin et al. \[2020\]](#) montre qu'il est possible d'estimer à la fois les paramètres atmosphériques du modèle de PSF et des aberrations de l'instrument. Par exemple le Keck présente des erreurs de cophasage sur ses 36 segments hexagonaux. L'ajustement de PSF sur l'image d'une étoile peut inclure ces 36 inconnues de piston. Grâce à cette technique, et la prise en compte des *non common path aberrations* (NCPA), l'erreur résiduelle entre modèle de PSF et image est divisée par un facteur 3 environ. L'erreur retrouvée sur les pistons fait apparaître un mode en marche d'escaliers, ce qui avait déjà été mis en évidence par [Ragland et al. \[2018\]](#). Ce mode est supposé provenir de la flexion de la structure du miroir primaire en fonction de l'élévation. L'ajout de ces degrés de libertés supplémentaires sur les pistons des segments montrent deux choses

- Le modèle PSFAO₁₉ est capable de prendre en compte les aberrations instrumentales, pour produire une PSF très proche de la PSF vraie.
- Il est alors possible d'effectuer du diagnostic de l'instrument directement en plan focal, à partir de l'image d'une étoile. Nous bénéficions d'une méthode très simple de diagnostic qui ne nécessite aucun appareil de mesure, si ce n'est la caméra scientifique elle-même. Un télescope imageant fréquemment des étoiles, nous avons accès à une mesure fréquente de l'évolution des erreurs du télescope.

Dans la même idée, l'ajustement d'étoiles par le modèle PSFAO₁₉ peut prendre en compte des erreurs de piston-tip-tilt entre des parties séparées du miroir primaire. C'est le cas pour SPHERE, la pupille observée du miroir primaire étant séparée en quatre segments selon les quatre araignées de soutien (*spiders*) du miroir secondaire. La détection de pentes du front d'onde n'est pas sensible au déphasage entre ces parties séparées du miroir. Les erreurs de phase ne sont alors pas corrigées par la boucle d'OA, et se retrouvent sur les images scientifiques. Cet effet apparaît surtout en présence d'un vent faible, c'est le *Low Wind Effect* [[Sauvage et al., 2016](#)]. La PSF présente alors des lobes secondaires marqués, par exemple en forme d'oreilles de *Mickey Mouse*, ce qui lui vaut son surnom. Le modèle PSFAO₁₉ tout seul n'est pas capable de décrire cet effet, mais si on lui ajoute 12 degrés de libertés supplémentaires de la pupille (4 segments, en piston-tip-tilt), alors le modèle peut représenter précisément ce *Low Wind Effect* [[Beltramo-Martin et al., 2020](#)]. Le modèle de PSF présente les mêmes lobes secondaires que la PSF vraie. Que ce soit pour le Keck ou SPHERE, le modèle PSFAO₁₉ peut facilement être enrichi d'aberrations résiduelles permettant d'obtenir une PSF très représentative des particularités de la PSF vraie du système. Il s'agit en plus d'un outil de diagnostic facile à mettre en oeuvre.

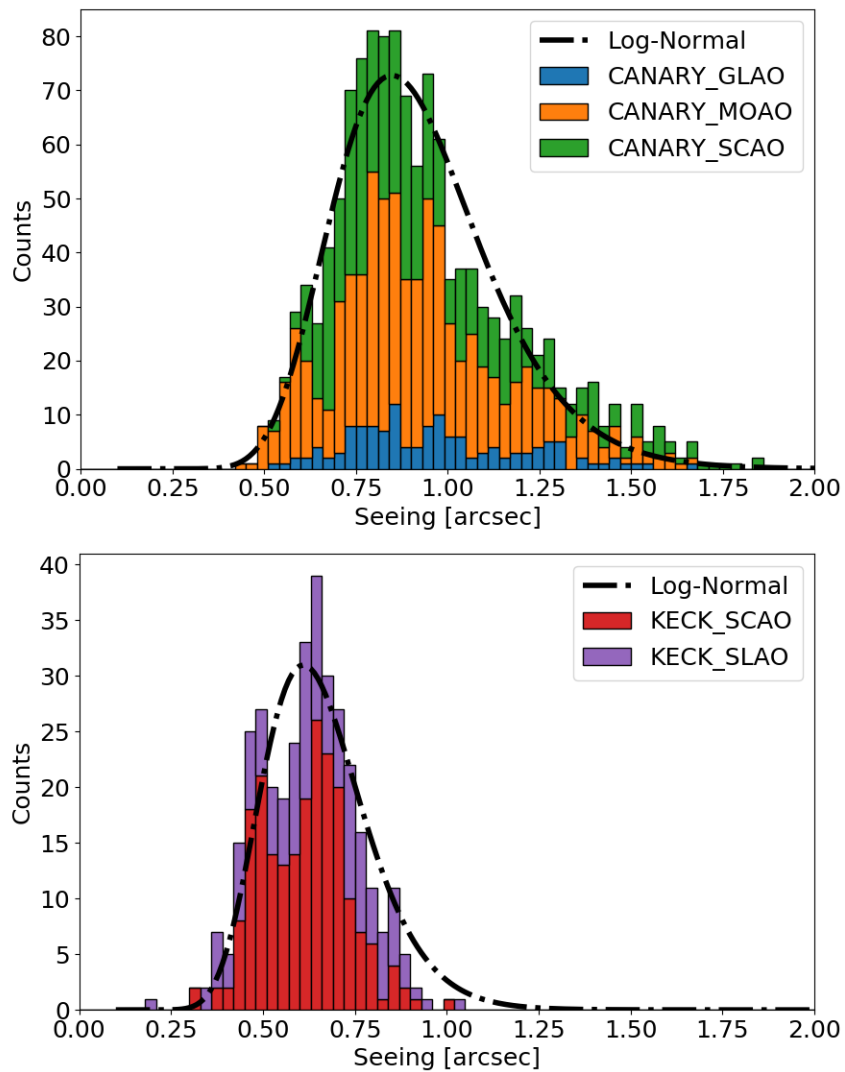


FIGURE 5.15 – Valeur du seeing (à 500 nm, au zénith) déduit de l’ajustement du modèle PSFAO_{19} sur 1285 PSFs CANARY (en haut) et 353 PSFs KECK (en bas). Crédit (ajustement de PSFAO_{19}) : Olivier Beltramo Martin (ONERA-LAM). Figure et loi Log-Normale : R. Fétick. [Beltramo-Martin et al. \[2020\]](#)

5.3.3 Cubes de l'IFS MUSE

Durant la phase de mise en service (*commissioning*) de Mars à Juin 2018, l'instrument VLT/MUSE a observé plusieurs étoiles en NFM (*Narrow-Field Mode*). Nous avons accès à 40 PSF observées au cours de plusieurs nuits, dans des conditions atmosphériques variées. Chaque image est un cube de données comportant deux dimensions spatiales et une dimension spectrale. L'information spectrale, de 465 nm à 930 nm, a été sous échantillonnée en 92 paquets de 5 nm de largeur chacun, ce qui permet à la fois d'augmenter le SNR par bande spectrale et de réduire le nombre d'ajustements de modèle à effectuer.

L'instrument MUSE est spatialement échantillonné en dessous du critère de Shannon-Nyquist pour toutes ses longueurs d'onde. Si pour une longueur d'onde λ l'échantillonnage est $s < 2$, on définit un entier K tel que $sK \geq 2$. Tous les calculs numériques de PSFAO₁₉ se font alors pour des tableaux sur-échantillonnés à $s' = sK$. En fin de calcul, les pixels de la PSF trouvée sont ensuite regroupés par carrés de $K \times K$ pour retrouver l'échantillonnage s de MUSE.

La figure 5.16 montre l'ajustement d'une PSF de MUSE pour trois longueurs d'onde différentes, à 476 nm, 626 nm et 776 nm. La carte de phase de l'instrument et la position des araignées ne sont connues, et ne sont donc pas prise en compte par le modèle PSFAO₁₉. Le modèle décrit bien l'évolution spectrale du rayon de coupure de l'OA et la forme globale de la PSF. Les résidus font apparaître le bruit de l'image sur une grande zone du halo, ce qui montre la qualité d'estimation. Les araignées sont une source majeure d'erreur, ce qui pourrait être enlevé si leur orientation était enregistrée au cours de l'observation. Les étoiles d'arrière champ apparaissent également sur les résidus. Elles ne gênent pas la procédure d'ajustement car la forme du halo en $-11/3$ est une forte contrainte qui stabilise l'estimation du halo, même en présence d'objets d'arrière-plan.

En ajustant séparément chaque bande spectrale, il est possible d'extraire le paramètre r_0 du modèle PSFAO₁₉. Sa dépendance en fonction de la longueur d'onde est donnée Fig. 5.17. Le r_0 trouvé par le modèle suit correctement l'évolution théorique en $\lambda^{6/5}$. Les ajustements indépendants du r_0 suivant la théorie, il est alors envisageable d'effectuer un unique ajustement multi-spectral d'un seul r_0 pour l'ensemble des longueurs d'onde. Le nombre de paramètres du modèle à estimer est alors réduit par rapport au nombre de données. Dans cet exemple nous avons 92 bandes spectrales, ce qui multiplie d'autant le nombre de données pour l'extraction d'un unique r_0 . L'estimation du paramètre est alors plus robuste, par exemple en cas de faible SNR, en champ de vue étroit ou pollué par des objets d'arrière-plan.

Nous définissons l'erreur relative entre le r_0 estimé par PSFAO₁₉ pour chaque

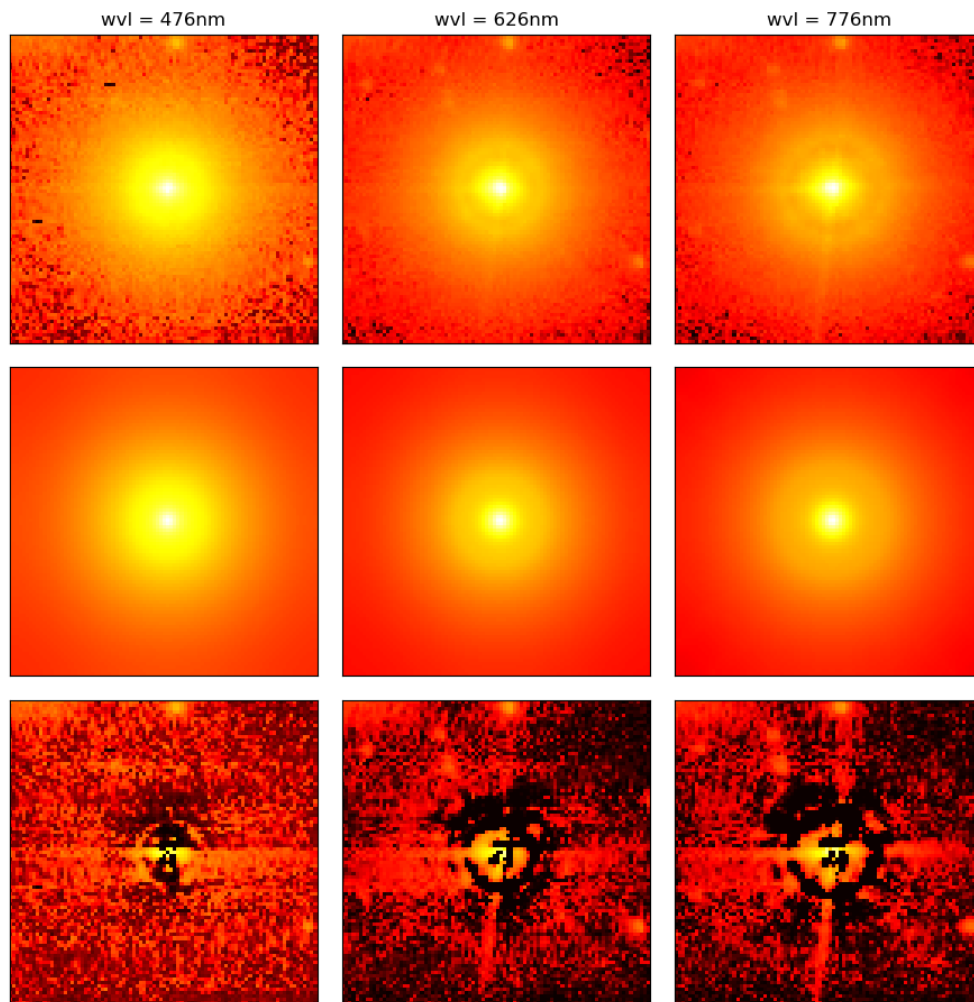


FIGURE 5.16 – PSF sur étoile de l'instrument VLT/MUSE-NFM (20 Avril 2018) à trois longueurs d'onde différentes (haut), ajustées par le modèle PSFAO₁₉ (milieu) et les résidus (bas). Echelle arcsinus d'intensité pour observer les détails aussi bien positifs que négatifs.

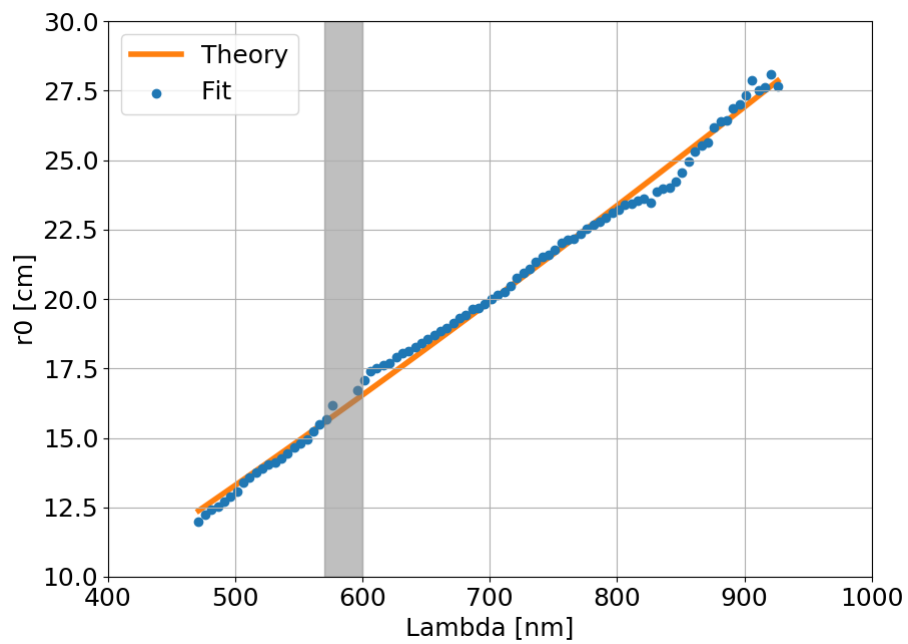


FIGURE 5.17 – Paramètre de Fried r_0 estimé par ajustement de PSFAO₁₉ sur une image MUSE en fonction de la longueur d'onde. La théorie (courbe orange) prévoit une évolution en $\lambda^{6/5}$. La bande grisée est la partie spectre coupée par la lame dichroïque (lasers de l'OA).

tranche spectrale et la loi d'évolution théorique en $\lambda^{6/5}$ selon

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{r_{0,\text{fit}}(\lambda) - r_{0,\text{theorique}}(\lambda)}{r_{0,\text{theorique}}(\lambda)} \quad (5.10)$$

Cette erreur peut être calculée pour les 48 données MUSE à disposition (Fig. 5.18). La moyenne de l'erreur relative ε pour les 48 données est proche de zéro sur l'ensemble du spectre. L'erreur moyenne possède une très faible pente $\varepsilon \sim 0.0044\lambda_{\text{nm}}$, ce qui veut dire que le r_0 estimé par le modèle est en moyenne légèrement en dessous de la théorie pour les faibles longueurs d'onde, et légèrement au dessus pour les grandes longueurs d'onde. Quant à l'écart-type, il reste en dessous des 5% sur l'ensemble du spectre. L'estimation spectrale du r_0 suit donc correctement la théorie sur les 48 données testées.

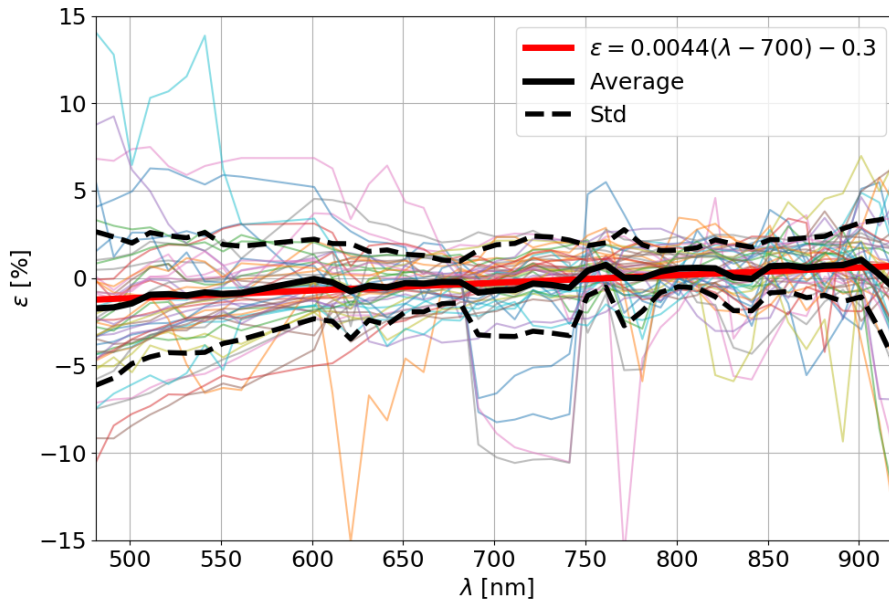


FIGURE 5.18 – Différence entre l'estimation du paramètre de Fried par PSFAO₁₉ et l'évolution théorique en $\lambda^{6/5}$ sur 48 données MUSE.

5.4 Applications du modèle

5.4.1 Détermination du paramètre de Fried en plan focal

L'ajustement de PSFAO₁₉ sur étoile est une des méthodes d'estimation du paramètre r_0 . Mais il existe d'autres méthodes d'estimation à partir des données du

RTC ou de télémétrie externe. Pour 27 PSF de SPHERE/Zimpol et 40 PSF MUSE nous avons à la fois accès aux données SPARTA et du MASS/DIMM. La comparaison entre données PSFAO₁₉ et SPARTA est montrée Fig. 5.19. Il apparaît deux tendances distinctes, une pour SPHERE/Zimpol et une pour MUSE. Pour le cas ZIMPOL la régression linéaire est

$$r_{0,\text{SPARTA ZIMPOL}} = 3.41 r_{0,\text{FIT ZIMPOL}} - 16.82 \quad (5.11)$$

avec l'ordonnée à l'origine exprimée en centimètres. Malgré un coefficient directeur non unitaire et une forte ordonnée à l'origine, on trouve un coefficient de corrélation de Pearson² $\mathcal{C} = 0.97$. La droite de régression linéaire permet donc d'effectuer un lien fiable entre r_0 estimé par le modèle PSFAO₁₉ et celui estimé par SPARTA. Elle constitue la calibration entre ces deux estimations. Toutefois pour les données MUSE la régression linéaire est

$$r_{0,\text{SPARTA MUSE}} = 1.96 r_{0,\text{FIT MUSE}} - 5.31 \quad (5.12)$$

Encore une fois le coefficient directeur n'est pas unitaire et l'ordonnée à l'origine est conséquente. Le coefficient de corrélation est $\mathcal{C} = 0.96$. Il est également possible de déduire le r_0 SPARTA à partir du r_0 ajusté (ou vice versa) grâce à cette droite de calibration.

SPARTA estime systématiquement des r_0 plus grands que par ajustement de PSF pour les deux instruments SPHERE/Zimpol et MUSE. De plus comme nous obtenons deux droites de régression linéaire différentes, l'estimation du r_0 dépend de l'instrument. Cette dépendance vis-à-vis de l'instrument peut provenir soit de l'ajustement par le modèle, soit de SPARTA. La figure 5.19 donne alors les estimations du r_0 de SPARTA et PSFAO₁₉ en fonction du MASS/DIMM. Les données SPARTA montrent à nouveau deux tendances différentes selon les instruments, avec toujours une sur-estimation systématique du r_0 . Cette sur-estimation de SPARTA par rapport au MASS/DIMM a déjà été observée sur SPHERE par [Milli et al. \[2017\]](#). Ils trouvent une dépendance du seeing $s_{\text{SPARTA ZIMPOL}} \propto 0.61 s_{\text{DIMM}}$, ce qui en terme de r_0 se traduit par un coefficient directeur de 1.6 environ, similaire à ce que nous trouvons ici avec les mesures combinées du MASS/DIMM (Fig. 5.19 ligne orange pointillées). Les auteurs [Milli et al.](#) donnent deux possibles raisons à cette différence. Premièrement, le RTC voit la turbulence au niveau du télescope incluant les effets du dôme de 30 mètres de haut, tandis que le DIMM est un instrument isolé sur une tour de 7 mètres de haut. Ils ne voient donc pas la même turbulence. Deuxièmement, les techniques de mesures sont fondamentalement différentes. Le DIMM

2. Le coefficient de corrélation de Pearson de deux variables aléatoires réelles X et Y est défini comme le rapport de la covariance sur les écarts-types $\mathcal{C} = \text{Cov}(X, Y) / (\sigma_X \sigma_Y)$

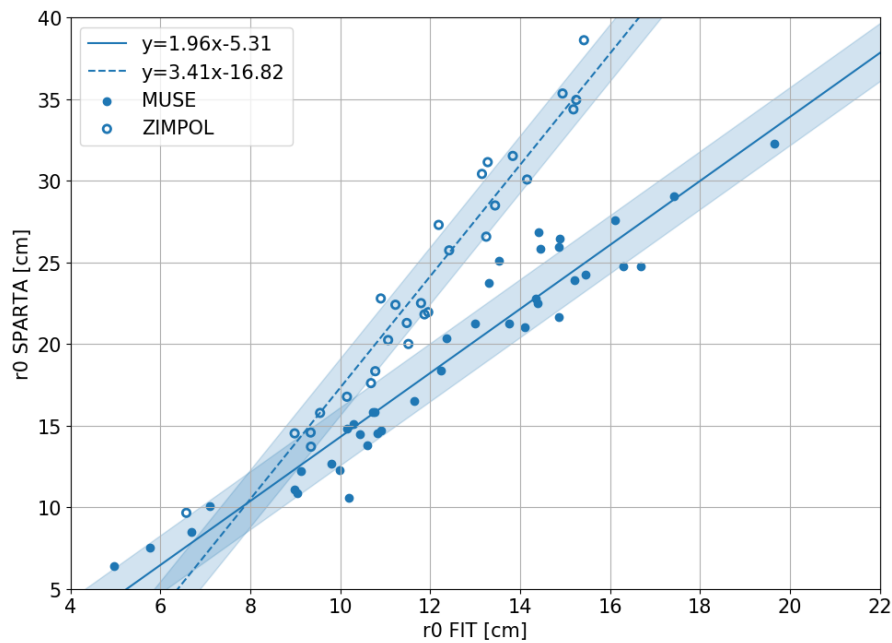


FIGURE 5.19 – Paramètre de Fried r_0 estimé sur 27 PSF SPHERE/Zimpol et 40 PSF MUSE. Estimation par ajustement de PSFAO₁₉ en abscisses, estimations SPARTA en ordonnées. Les r_0 sont donnés à 500 nm au zénith. L'aire bleue correspond à l'écart-type des données par rapport à la droite de régression.

estime la turbulence à partir du déplacement relatif d'une étoile à travers deux ouvertures séparées. Le RTC effectue une estimation de la DSP de la phase à partir des mesures du front d'onde. L'estimation du RTC est sensible à l'échelle externe de Von-Karman L_0 . Pour SPARTA sur Zimpol cette valeur est fixée à $L_0 = 25$ m. Si le L_0 moyen sur différentes nuits à Paranal n'est pas de 25 m, alors l'estimation de SPARTA peut se retrouver biaisée.

Cependant l'implémentation SPARTA sur MUSE est différente, la grande échelle de turbulence L_0 est conjointement estimée avec le r_0 au lieu d'être fixée. Bien que nous n'ayons aucune confirmation, cette différence d'algorithme peut être à l'origine de la différence de régression linéaire entre les r_0 estimés par MUSE et SPHERE/Zimpol. Si tel est le cas, les données SPARTA MUSE étant plus proches du MASS/DIMM que les données SPARTA Zimpol, l'estimation conjointe du r_0 et L_0 est plus précise. Le *seeing* médian donné par SPARTA (Zimpol et MUSE) est de $0.46''$, ce qui est inférieur au *seeing* médian de $0.69''$ estimé par le MASS/DIMM.

A la différence de SPARTA, l'ajustement de PSFAO₁₉ donne une seule tendance en fonction du MASS/DIMM pour les deux instruments MUSE et SPHERE/Zimpol (haut de la Fig. 5.20, en bleu). Les estimations du r_0 par ajustement de PSFAO₁₉ sont donc indépendantes de l'instrument considéré. La régression linéaire est

$$r_{0,\text{FIT}} = 0.55 r_{0,\text{MASS DIMM}} + 4.25 \quad (5.13)$$

où l'ordonnée à l'origine est exprimée en centimètres. Le modèle PSFAO₁₉ a tendance à sous estimer le r_0 par rapport au MASS/DIMM. Comme pour SPARTA, nous ne connaissons pas l'origine exacte de ces différences. La méthode par ajustement de PSF utilise les hautes fréquences de la DSP de phase, ce qui est différent des autres méthodes d'estimation et peut être à l'origine des écarts constatés. Le *seeing* médian résultant est de $0.83''$ pour ajustement. Il apparaît alors que sur les trois manières d'estimer le r_0 SPARTA, PSFAO₁₉ et MASS/DIMM toutes sont corrélées mais aucune ne s'accorde sur une valeur en absolu du r_0 . Les régressions linéaires effectuées servent alors de calibration des estimations. Par la suite, si nous n'avons accès à l'estimation du r_0 par une seule méthode, les autres estimations peuvent se déduire de la régression linéaire, avec toutefois une certaine marge d'erreur. En particulier si nous avons accès au r_0 donné par SPARTA ou le MASS/DIMM, nous en déduisons le r_0 du modèle PSFAO₁₉. La télémétrie donne alors une information *a priori* pour le modèle de PSF. Ainsi sans même avoir accès à une PSF sur étoile, nous obtenons des contraintes fortes sur la forme du modèle de PSF grâce à la télémétrie.

De toutes les méthodes d'estimation présentées, l'ajustement du modèle PSFAO₁₉ en plan focal semble toutefois la plus directe. Elle ne se base que sur l'unique hypo-

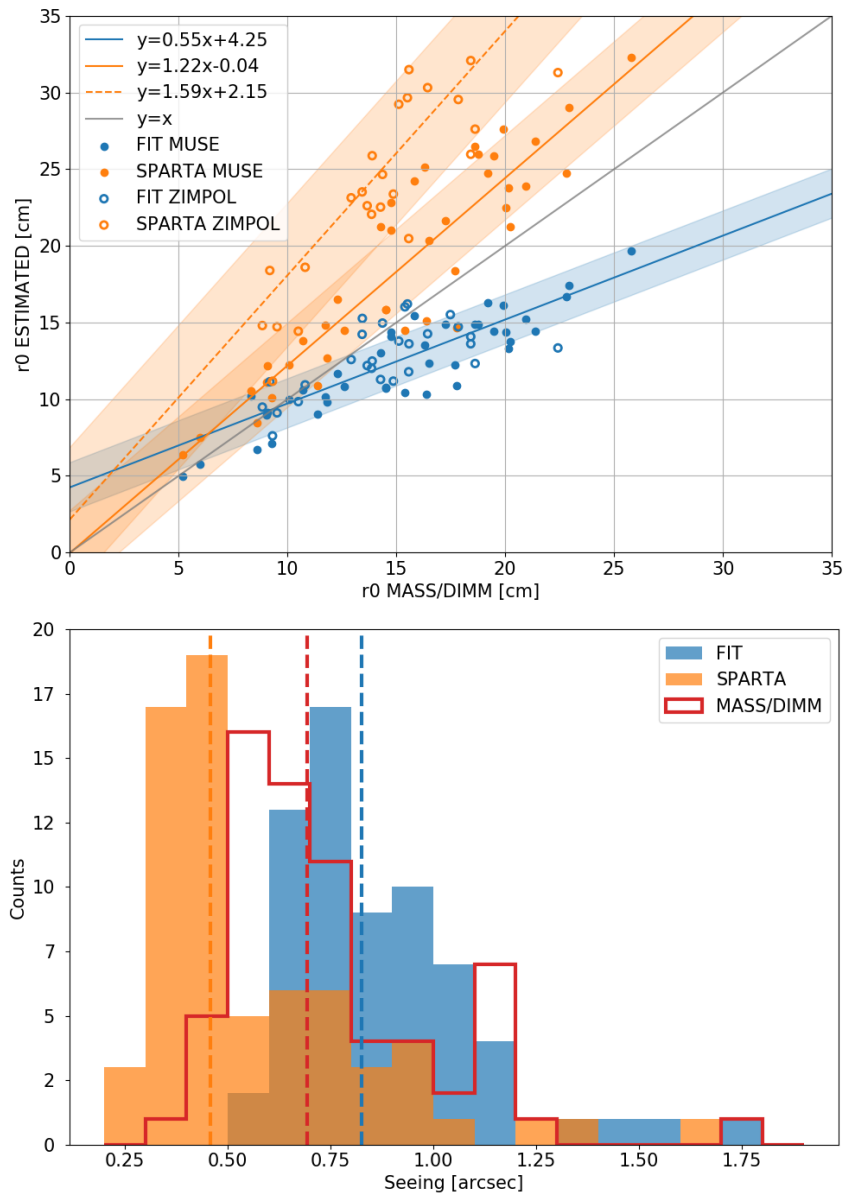


FIGURE 5.20 – Paramètre de Fried r_0 et *seeing* estimés sur 27 PSF SPHERE/Zimpol et 40 PSF MUSE. Données SPARTA en orange, données PSFAO₁₉ en bleu. En haut : r_0 estimés par PSFAO₁₉ et SPARTA en fonction du MASS/DIMM, à 500 nm au zénith. Les zones foncées correspondent à l'écart-type des données par rapport à la droite de régression. En bas : histogramme correspondant du *seeing*. Les médianes sont indiquées par les lignes verticales en tirets.

thèse d'une statistique de phase selon le modèle de Kolmogorov à haute fréquence. Les autres méthodes dépendent du spectre à basses fréquences (avec l'inconnue supplémentaire de la saturation de Von-Karman) et de modélisations des instruments d'acquisition des données (estimation du RTC par exemple). Les instruments de mesure externes, tels le MASS et DIMM, ne voient pas la même turbulence que le télescope à cause des angles de visée différents et de l'effet de dôme (*dome seeing*) sur la turbulence. Pour nos applications de traitement d'image, le r_0 qui nous intéresse est effectivement celui mesuré au plus proche de l'instrument scientifique.

5.4.2 Photométrie en champ réduit

Un des avantages du modèle PSFAO₁₉ est la forme précise de son halo décrit par la turbulence de Kolmogorov. On peut alors effectuer un ajustement sur une image de taille limitée. La Fig.5.21 montre la moyenne circulaire d'une PSF sur étoile de l'instrument SPHERE/Zimpol. Cette PSF est ajustée sur un champ de vue nominal de 800×800 pixels, ainsi que sur un champ de vue réduit de 300×300 pixels. Les formes des PSFs et FTOs estimées sont identiques quelque soit le champ de vue. Le modèle PSFAO₁₉ peut fonctionner même avec une information incomplète sur le halo, il a simplement besoin de quelques pixels sur le halo (ici les pixels entre la fréquence de coupure de l'OA ~ 100 pix et la demi-taille du tableau 150 pix) pour estimer correctement l'ensemble du halo. Le modèle est ainsi capable d'extrapoler correctement le comportement du halo, grâce à sa paramétrisation forte utilisant la turbulence de Kolmogorov.

Les paramètres estimés par ajustement sont donnés dans le tableau 5.1. Les paramètres varient très peu malgré la réduction conséquente du champ de vue. En particulier les estimations du r_0 et photométrique $\hat{\gamma}$ sont stables. Cette stabilité est importante pour assurer la robustesse du modèle en cas de PSF tronquées (bord de champ ou champ étroit). Le fond du ciel $\hat{\zeta}$ est estimé nul. Ces résultats sont à comparer avec la Fig.3.4 de l'ajustement de la même PSF SPHERE/Zimpol par une fonction de Moffat. Pour l'image à 800×800 pixels, la fonction de Moffat trouve un fond de 6 photons par pixel. Pour l'image à 300×300 pixels, le fond estimé monte à 50 photons par pixel. Avec une fonction de Moffat les erreurs sont donc plus importantes et variables selon le champ de vue. Le paramètre $\hat{\gamma}$, normalisé par le flux de l'image, vaut respectivement 0.85 (grand champ) et 0.72 (champ réduit). Une fraction importante du flux, soit 15% et 28%, est placée à tort dans le fond du ciel. Ces erreurs peuvent être problématiques lors de l'utilisation d'une PSF paramétrique en post-traitement d'image.

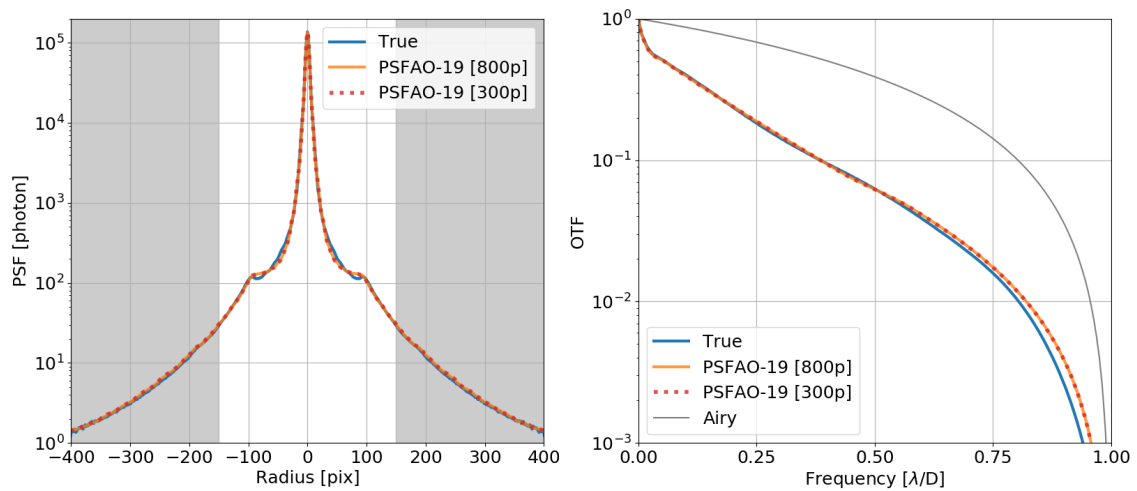


FIGURE 5.21 – Moyenne circulaire d’une PSF de SPHERE/Zimpol sur étoile (bleu). Ajustement par le modèle PSFAO₁₉ sur le champ de vue complet 800 × 800 pixels (orange), et sur un champ de vue réduit à 300 × 300 pixels (rouge pointillés). La zone grisée montre la différence de champ de vue. Gauche : PSF. Droite : FTO correspondantes. Le modèle PSFAO₁₉ est stable, même en cas d’une PSF tronquée. A comparer avec la Fig.3.4 pour la fonction de Moffat, fortement dépendante du champ de vue.

| Paramètre | Unité | Taille | |
|-------------------------------------|---------------------------------|------------------|------------------|
| | | 800 × 800 | 300 × 300 |
| r_0 | cm | 24.4 | 24.2 |
| C | rad ² m ² | 10 ⁻² | 10 ⁻² |
| A | rad ² | 2.070 | 2.071 |
| α | m ⁻¹ | 0.051 | 0.051 |
| β | | 1.642 | 1.642 |
| $\hat{\gamma} / \sum_{k,l} i_{k,l}$ | | 0.977 | 0.979 |
| $\hat{\zeta}$ | photon | 0 | 0 |

TABLE 5.1 – Paramètres estimés par ajustement de PSFAO₁₉ sur une image d'étoile par SPHERE/Zimpol pour deux tailles d'image. Le flux estimé $\hat{\gamma}$ est normalisé par la somme des pixels de l'image 800 × 800 pixels. Les paramètres sont stables entre les deux estimations, indépendamment du champ du vue.

5.4.3 Etudes d'amas stellaires avec PAMPELMUSE

Les amas d'étoiles sont des objets encore mal connus mais d'intérêt pour les astronomes. Des observations avec un spectro-imageur (IFS) sont cruciales afin de déterminer le spectre de chaque étoile et de le comparer à l'ensemble du groupe. Ces études permettent aux astronomes d'en déduire des *redshifts* et donc des dynamiques stellaires ou des abondances métalliques [Kamann et al., 2020, 2018]. Ces observations permettent aux astronomes de répondre aux questions suivantes :

- Est-ce-que les amas d'étoiles sont en rotation ?
- Est-ce-que les amas d'étoiles hébergent des trous noirs ?
- Quel vaut le rapport masse lumineuse sur masse gravitationnelle ?
- Quelle sont les abondances métalliques des étoiles de l'amas ?

Cependant ces études sont difficiles car il faut résoudre un grand nombre d'étoiles de l'amas tout en dérivant précisément le spectre de chacune d'entre elles. L'instrument MUSE est adapté à ce type d'observations. Il faut toutefois ensuite un code efficace permettant d'extraire les étoiles et leurs spectres avec précision. Sebastian Kamann, astrophysicien du Liverpool John Moores University, a développé le code PAMPELMUSE [Kamann et al., 2013] dédié à l'extraction de spectres stellaires en champ dense. Une connaissance fine de la PSF est nécessaire afin d'obtenir une photométrie précise pour chaque bande spectrale. En champ dense les halos des étoiles se chevauchent et rendent difficile la séparation du flux de chaque source. Le modèle de PSF envisagé jusqu'à présent était une fonction Moffat-Gaussienne (Fig. 5.22, en haut) : la Moffat décrit le pic étroit de la correction OA, la Gaussienne décrit le large halo. En utilisant le modèle PSFAO₁₉ (Fig. 5.22, en bas), les résidus sont réduits. La PSF est donc mieux ajustée. Ces résultats sont la première étape de travaux

en cours par Fabian Göttgens (Georg-August-Universität Göttingen) et Sebastian Kamann (LJMU) qui permettront de déterminer la précision gagnée sur les spectres stellaires en champ dense.

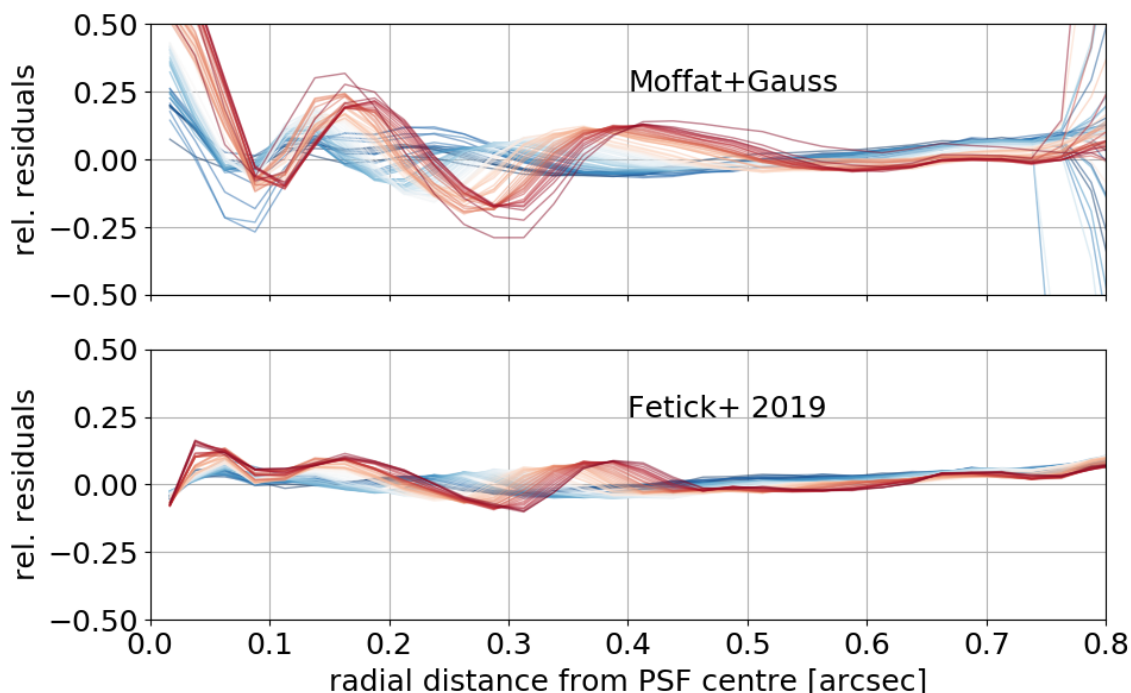


FIGURE 5.22 – Résidus d’ajustement d’une PSF MUSE/NFM par un modèle Moffat-Gaussien (haut) et par le modèle PSFAO₁₉ (bas). Chaque courbe de couleur représente une longueur d’onde du bleu au rouge. Crédit (données et image) : Fabian Göttgens (Georg-August-Universität Göttingen) et Sebastian Kamann (LJMU).

Conclusion du chapitre

Le modèle PSFAO₁₉ a été validé en simulation et surtout validé sur des PSF vraies des instruments SPHERE/ZIMPOL et VLT/MUSE. Des tests complémentaires ont été réalisés sur des données KECK AO, SOUL (au LBT), CANARY (au WHT) et GEMS (au GEMINI). L’ensemble de ces tests prouvent l’adaptabilité du modèle à différents instruments, différents systèmes d’OA et différents régimes de correction. Le modèle PSFAO₁₉ s’adapte correctement à la forme de ces différentes PSF, *id est* les résidus d’ajustement de forme sont faibles. Le paramètre r_0 estimé par le modèle est fortement corrélé au paramètre r_0 estimé par le RTC SPARTA ou

par des mesures externes du MASS/DIMM. Il est alors parfaitement envisageable d'utiliser des estimations externes du r_0 pour contraindre le modèle de PSF, ou *a contrario* d'utiliser un ajustement de PSF en plan focal pour estimer des données de turbulence et de performance OA.

Le chapitre suivant pose quelques notions fondamentales de déconvolution. Ces notions seront nécessaires pour développer des méthodes de déconvolution utilisant des PSF paramétriques. Le lien sera donc effectué entre méthodes de déconvolution et le modèle PSFAO₁₉ précédemment développé.



Turbulent and adaptive optics corrected point-spread functions as convolutive orders of the phase power spectral density

Romain J. L. Fétick,^{1,2★} Benoit Neichel,¹ Laurent M. Mugnier,²
Aurélié Montmerle-Bonnefois² and Thierry Fusco^{1,2}

¹Aix Marseille Univ, CNRS, CNES, LAM, Marseille, France

²ONERA, The French Aerospace Lab BP72, 29 avenue de la Division Leclerc, 92322 Châtillon Cedex, France

Accepted 2018 September 13. Received 2018 September 13; in original form 2018 July 20

ABSTRACT

Ground-based astronomy is severely limited by atmospheric turbulence, resulting in a large point-spread function (PSF) and poor imaging resolution. Even imaging with adaptive optics (AO) cannot correct the aberrated wavefront completely and residual turbulence still corrupts the observation. Thus the consequences of turbulence on the PSF are of primary interest when building any ground-based telescope. The power spectral density (PSD) of a spatially stationary turbulent phase carries all the information needed for describing the long-exposure PSF. We then develop an analytical description of the long-exposure PSF as a series expansion of the aberrated phase PSD. Our description of the PSF given the PSD of the phase is a simple theoretical way to describe the impact of turbulence on the PSF. We also show agreement with previous articles when restricting our model to its first expansion order. Finally, we derive applications of our formula to some particular cases, such as Kolmogorov or von Kármán models or the AO correction impact on the PSF.

Key words: instrumentation: adaptive optics – instrumentation: high angular resolution – methods: analytical.

1 INTRODUCTION

The point-spread function (PSF) is critical information for any optical system, since it is directly related to the imaging resolution. Diffraction-limited optics with a circular aperture results in the famous Airy pattern. However, in practice, the wavefront of the observed scene suffers from phase aberrations during its propagation through an inhomogeneous medium, reducing imaging performance. In the case of ground-based telescopes, the atmospheric turbulence distorts the wavefront and severely limits the resolution of the telescopes (Roddier 1981). Adaptive optics (AO) is a technique using deformable mirrors to reduce phase aberrations by flattening the wavefront back (Roddier 1999). Nevertheless, the AO correction is not perfect and some phase aberrations remain, especially the high spatial frequencies, which are not seen by the wavefront sensor and thus not corrected.

On the one hand, Roddier (1981) developed a relation to find the long-exposure PSF from the phase power spectral density (PSD). The formula is exact, but the PSD/PSF link is not direct, since it requires a double Fourier transform. On the other hand, Racine et al. (1999), Bloemhof et al. (2001) and Jolissaint & Veran (2002)

derived a first-order approximation of the Roddier method. The advantage is that it explains the direct link between the PSD and PSF, by cancelling the double Fourier transformation; however, the drawback is an inaccuracy due to the first-order approximation.

The two methods above illustrate the very close relation between the phase PSD and the PSF, each one with its advantages and drawbacks. In this article, we use the Roddier method to derive an exact expression for the PSF, with a direct analytical PSD/PSF link without requiring multiple Fourier transforms. Indeed, our method relies on a convolutional formalism, where the PSF is described as an infinite sum of convolutive orders of the phase PSD. Finally, when restricting our expression to its first order, we find the approximations of Racine et al., Bloemhof et al. and Jolissaint & Veran.

Straightforward applications involve practical cases where the fully turbulent, or AO partially corrected, phase is not known for each time step, but its PSD follows well-known statistics (e.g. Kolmogorov, von Kármán law, AO residual PSD). As a consequence, our model can easily be fed with available information on the turbulence. Our direct expression linking the PSD and PSF also allows for simple estimation of atmospheric parameters directly from the PSF.

Section 2 develops our analytical method, which involves writing the PSF in terms of orders of the residual aberrated phase PSD. This method is general and can be used for any spatially stationary

★ E-mail: romain.fetick@lam.fr

phase. Section 3 shows some applications related to Kolmogorov or von Kármán statistics. We give an explicit dependence of the PSF shape on the Fried parameter r_0 (Fried 1966). We also derive a simple description for the halo for the long-exposure PSF using AO correction. Section 4 concludes our work. We discuss future applications of our model.

2 METHOD

2.1 Factorization of the optical transfer function

Let us use P to denote the entrance pupil transmission function (which may include static aberrations), h the long-exposure PSF and ψ the complex phasor (Goodman 1968), i.e. the complex scalar field when observing a point source. Scintillation is neglected, so the complex phasor has unit amplitude. The long-exposure optical transfer function (OTF) is given by the autocorrelation of the phasor on the pupil (Goodman):

$$\tilde{h}(\boldsymbol{\rho}/\lambda) = \frac{1}{S} \iint P(\mathbf{r})P(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho})\langle\psi(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t)\rangle_t d\mathbf{r}, \quad (1)$$

where S ensures normalization on the surface of the pupil, $\langle \cdot \rangle_t$ denotes the time average and \tilde{h} stands for the Fourier transform of the PSF h . We then write the phasor ψ as the complex exponential of the aberrated phase ϕ :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{i\phi(\mathbf{r}, t)}. \quad (2)$$

Roddier (1981) has shown that, assuming Gaussian statistics of the phase, the long-exposure OTF can be written as

$$\tilde{h}(\boldsymbol{\rho}/\lambda) = \frac{1}{S} \iint P(\mathbf{r})P(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho})e^{-\frac{1}{2}D_\phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})} d\mathbf{r}, \quad (3)$$

where $D_\phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$ is the structure function of the residual phase, defined as

$$D_\phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = \langle|\phi(\mathbf{r}, t) - \phi(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t)|^2\rangle_t. \quad (4)$$

Assuming a spatially stationary residual phase, the dependence on the position \mathbf{r} vanishes and only the separation $\boldsymbol{\rho}$ remains. This stationarity hypothesis is verified for a purely turbulent phase and is a reasonable approximation in the case of partial AO correction (Conan 1994). The approximation is better for larger aperture telescopes, since the non-stationarity of the residual phase essentially affects the edges of the pupil. The structure function then simplifies to

$$D_\phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = D_\phi(\boldsymbol{\rho}) = \langle|\phi(\mathbf{r}, t) - \phi(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t)|^2\rangle_t. \quad (5)$$

The OTF can then be separated into two OTFs, the telescope one and the atmospheric one:

$$\tilde{h}(\boldsymbol{\rho}/\lambda) = \tilde{h}_T(\boldsymbol{\rho}/\lambda) \cdot \tilde{h}_A(\boldsymbol{\rho}/\lambda), \quad (6)$$

with the telescope OTF

$$\tilde{h}_T(\boldsymbol{\rho}/\lambda) = \frac{1}{S} \iint P(\mathbf{r})P(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}) d\mathbf{r} \quad (7)$$

and the atmospheric OTF

$$\tilde{h}_A(\boldsymbol{\rho}/\lambda) = e^{-\frac{1}{2}D_\phi(\boldsymbol{\rho})}. \quad (8)$$

Even though this expression may give the PSF by a numerical Fourier transform, it does not exhibit an explicit dependence on the PSD of the phase. It is then necessary to modify the equation to find the direct link we are looking for.

PSFs as convolutive orders of the phase PSD 5211

2.2 Expression for the PSF

Assuming the phase variance is finite, let us define the autocorrelation of the phase as

$$B_\phi(\boldsymbol{\rho}) = \langle\langle\phi(\mathbf{r}, t)\phi(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t)\rangle_t\rangle_r. \quad (9)$$

The equality

$$D_\phi(\boldsymbol{\rho}) = 2[B_\phi(\mathbf{0}) - B_\phi(\boldsymbol{\rho})] \quad (10)$$

follows directly. Using this identity and the series expansion of the exponential, one obtains the atmospheric OTF:

$$\tilde{h}_A(\boldsymbol{\rho}/\lambda) = e^{-B_\phi(\mathbf{0})} e^{B_\phi(\boldsymbol{\rho})} = e^{-B_\phi(\mathbf{0})} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_\phi(\boldsymbol{\rho})^n}{n!}. \quad (11)$$

We use $\mathcal{F}\{f\}(\mathbf{u})$ to denote the Fourier transform operator applied to the function f , evaluated in \mathbf{u} . Using the linearity of the Fourier operator on the infinite sum, the PSF can be written as

$$h_A(-\mathbf{u}) = e^{-B_\phi(\mathbf{0})} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{F}\{B_\phi(\boldsymbol{\rho})^n\}(\mathbf{u})}{n!}, \quad (12)$$

where $\boldsymbol{\rho}/\lambda$ and \mathbf{u} are variables conjugated by the Fourier transform. Since the Fourier transform links multiplication and convolution, we define the convolutive orders of a function W as

$$\{\star^n W\}(\mathbf{u}) = \begin{cases} \delta(\mathbf{u}) & \text{if } n = 0, \\ W(\mathbf{u}) & \text{if } n = 1, \\ (W \star W \star \dots \star W)(\mathbf{u}) & \text{if } n \geq 2, \end{cases} \quad (13)$$

where $\delta(\mathbf{u})$ denotes the Dirac distribution. Then the PSF can be written as

$$h_A(-\mathbf{u}) = e^{-B_\phi(\mathbf{0})} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\star^n \mathcal{F}\{B_\phi(\boldsymbol{\rho})\}(\mathbf{u})}{n!}. \quad (14)$$

By the Wiener-Khinchine theorem, the Fourier transform of the autocorrelation is equal to the PSD of the phase. We write the PSD of the phase as W_ϕ and, taking care of coordinate dilation for the Fourier transform,

$$h_A(-\mathbf{u}) = e^{-B_\phi(\mathbf{0})} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\{\star^n W_\phi/\lambda^2\}(\mathbf{u}/\lambda)}{n!}. \quad (15)$$

This equation states that the atmospheric long-exposure PSF can be written as an infinite sum of convolutive orders of the phase PSD, under the assumption of spatially stationary phase. In other words, the long-exposure PSF can be retrieved when the turbulent phase for each time step is unknown but its PSD is well-known. This is the case for a long-exposure observation through a turbulent atmosphere, without or with AO. Then, using equation (6) to retrieve the total PSF, atmospheric and diffraction, we can write directly

$$h(\mathbf{u}) = h_T(\mathbf{u}) \star h_A(\mathbf{u}). \quad (16)$$

The convolutive formalism of equation (15) can be found in the literature, but for a short-exposure PSF only: see Sivaramakrishnan et al. (2002) and Perrin et al. (2003). These authors described the short-exposure PSF as a double infinite sum on the instantaneous phase. As we show in this article, based on Roddier's method, the long-exposure PSF allows simplification to a unique infinite sum in the phase PSD.

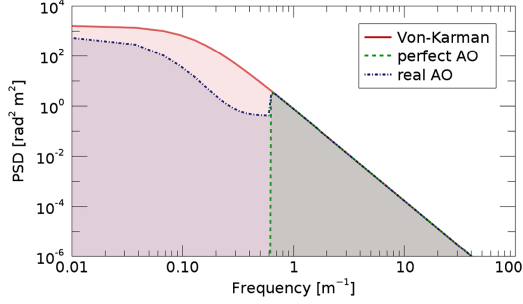
5212 *R. J.-L. Fétick et al.*


Figure 1. Three models of phase PSD considered in the following applications: von Kármán (plain), perfect AO as truncated Kolmogorov (dashed) and more realistic AO correction (dot-dashed).

3 APPLICATIONS

3.1 Factorization of the r_0 dependence

For a usual turbulence spectrum, such as Kolmogorov or von Kármán, there is a direct dependence of the PSF on the Fried parameter r_0 . Let us consider the von Kármán spectrum:

$$W_\phi(f) = 0.023r_0^{-5/3} \left(\frac{1}{L_0^2} + f^2 \right)^{-11/6}, \quad (17)$$

where L_0 is the external scale of the turbulence. The von Kármán spectrum for $L_0 = 8$ m is plotted in Fig. 1. Letting $L_0 \rightarrow \infty$, one would find the Kolmogorov spectrum.

Let us now extract the r_0 dependence from the PSD. We define Y_ϕ as the PSD of the phase with unit r_0 , and scaled by the $1/\lambda^2$ factor. Then, by the definition of Y_ϕ ,

$$\frac{W_\phi(f)}{\lambda^2} = r_0^{-5/3} Y_\phi(f). \quad (18)$$

The convolutive orders of Y_ϕ can be computed numerically only once for a given L_0 . The PSF for different values of r_0 is then a weighted sum of these components. Plugging Y_ϕ into equation (15) gives the PSF

$$h_\Lambda(-\mathbf{u}) = e^{-B_\phi(0)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r_0^{-5n/3}}{n!} \{ \star^n Y_\phi \} (\mathbf{u}/\lambda). \quad (19)$$

The impact of the strength of the turbulence on the PSF is then more explicit: for high r_0 (weak turbulence), the high-order convolutive terms have little importance. Consequently, the shape of the PSF is dominated by low convolutive orders. For low r_0 (strong turbulence), the higher convolutive orders gain more importance in describing the PSF shape.

For a practical application, the infinite sum is truncated up to a number N_{\max} of orders. One would like to get an idea of this number of terms to consider in order to have an accurate PSF model. The number N_{\max} depends on r_0 , but also on the evolution of the Y_ϕ convolutive orders with n . Let us call E the integral of Y_ϕ , or, equivalently, the phase variance for unit r_0 . We find a semi-empirical approximation (see explanations in Appendix) for values of \mathbf{u} in the halo:

$$\{ \star^n Y_\phi \} (\mathbf{u}/\lambda) \approx E^{n-1} Y_\phi(\mathbf{u}/\lambda). \quad (20)$$

Dropping the term $n = 0$ (particular behaviour of the Dirac at $\mathbf{u} = \mathbf{0}$), we obtain a rough estimate of the PSF behaviour as regards

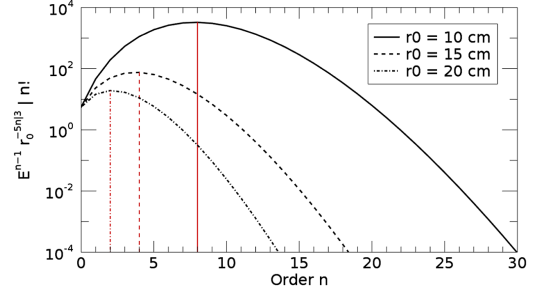


Figure 2. $E^{n-1} r_0^{-5n/3} / n!$ versus n , given for $E = 0.18$. The different curves are plotted for different values of the Fried parameter r_0 . All curves pass a maximum before decreasing. The vertical lines help in visualizing the N_{crit} criterion for which the maximum of the curves is reached.

orders:

$$\forall \mathbf{u} \in \{\text{halo}\}, \quad h_\Lambda(-\mathbf{u}) \approx Y_\phi(\mathbf{u}/\lambda) e^{-B_\phi(0)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{E^{n-1} r_0^{-5n/3}}{n!}. \quad (21)$$

The terms of the series are decreasing in magnitude when the following constraint on n is satisfied:

$$\frac{E^n r_0^{-5(n+1)/3}}{(n+1)!} < \frac{E^{n-1} r_0^{-5n/3}}{n!} \iff n > E r_0^{-5/3} - 1. \quad (22)$$

Let us define N_{crit} as the smallest integer satisfying the inequality. One cannot truncate the sum before N_{crit} or one would miss terms of higher magnitude. This basic constraint gives a lower bound on the number of terms to be considered in the series for an accurate description of the PSF: mathematically, we should ensure $N_{\max} > N_{\text{crit}}$. The criterion can be visualized in Fig. 2 for different values of r_0 and a chosen $E = 0.18$ (corresponding to the perfect AO correction up to the cut-off frequency $f_{\text{AO}} = 0.625$ m $^{-1}$; see Section 3.3). Once again, we see that more terms are needed for high phase variance $\sigma^2 = B_\phi(0) = E r_0^{-5/3}$. In the case of AO correction, for a given r_0 , E depends mainly on the AO cut-off frequency.

3.2 Validation for von Kármán turbulence

In order to test the validity of the formula, we consider a von Kármán spectrum for the turbulent phase, given equation (17). On one hand, the PSF is generated using the atmospheric OTF as an exponential of the phase structure function equation (8). On the other hand, we use our expression giving the PSF directly with the PSD of the phase equation (15). Fig. 3 shows the PSF for $N_{\max} = 5$ and $N_{\max} = 30$ convolutive orders. For a wavelength of $\lambda = 1600$ nm, convergence requires approximately seven orders. This is in accordance with our minimal criterion equation (22), which gives $N_{\text{crit}} = 4$ at this wavelength. For a shorter wavelength ($\lambda = 800$ nm), the PSD is higher and the convergence is much slower and requires approximately 30 orders. This criterion gives $N_{\text{crit}} = 22$; it confirms the fact that the criterion is only a lower bound, while in practice many more orders can be required to reach convergence.

This test shows the validity of our formula with respect to the Roddier method for the OTF. This example illustrates the difficulty in approximating the PSF, especially for shorter wavelengths, by the first order of the PSD for a full von Kármán spectrum. The method is more suited for the low-energy PSD obtained with AO correction, as developed in the following subsection.

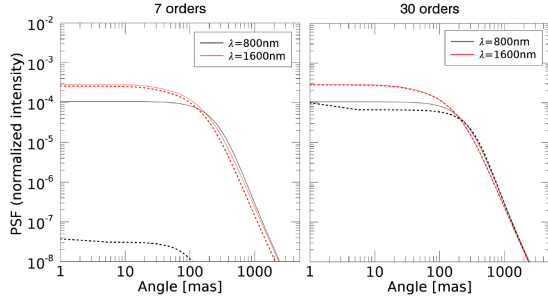


Figure 3. PSF computed from a von Kármán spectrum, $L_0 = 8$ m and $r_0 = 12$ cm at $\lambda = 400$ nm. Coloured lines show the PSF for two wavelengths: $\lambda = 800$ nm and $\lambda = 1600$ nm. Plain: PSF computed by the Roddier OTF method. Dashed: PSF computed by the convolutive orders method. Left panel: seven orders. Right panel: 30 orders.

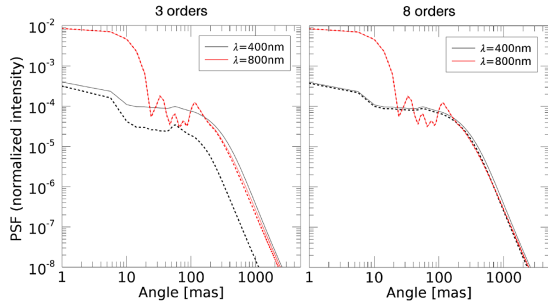


Figure 4. PSF computed for the given AO spectrum. Plain curve: PSF computed by the OTF method. Dashed: PSF computed by the convolutive orders method. Left panel: three orders. Right panel: 8 orders.

3.3 Truncated Kolmogorov and adaptive optics

Let us consider a simplified adaptive optics system with a linear number of actuators N_{AO} in the pupil plane of aperture diameter D . All spatial frequencies of the turbulent phase below the AO cut-off frequency $f_{AO} = N_{AO}/(2D)$ are assumed to be perfectly corrected by the AO system. All frequencies above f_{AO} are not seen by the AO system and follow Kolmogorov statistics. The PSD of the residual phase can be written as

$$W_\phi(f) = \begin{cases} 0 & \text{if } f < f_{AO}, \\ 0.023r_0^{-5/3} f^{-11/3} & \text{if } f \geq f_{AO}. \end{cases} \quad (23)$$

This shape of the AO-corrected PSD is plotted in green in Fig. 1, for a chosen AO cut-off frequency $f_{AO} = 0.625 \text{ m}^{-1}$, corresponding to $N_{AO} = 10$ actuators for a $D = 8$ m aperture. In practice, the centre of the PSF is dominated by highly energetic low-frequency modes, such as residual tip-tilt. Our simple model of a perfect AO high-pass filter does not take these residues into account, inducing poor fidelity in the centre of the computed PSF. However we can expect a correct description of the halo. Indeed, Fig. 4 shows good agreement between the two PSF computation methods – using a numerical Fourier transform equation (8) or using the convolutive orders equation (15). Let us note that the r_0 factorization in Section 3.1 is still applicable for numerical computation efficiency with our method for convolutive orders of the PSD. The atmospheric PSF is then convolved by h_T to take into account the telescope contribution, equation (16). At first order, we retrieve the shape developed in

PSFs as convolutive orders of the phase PSD 5213

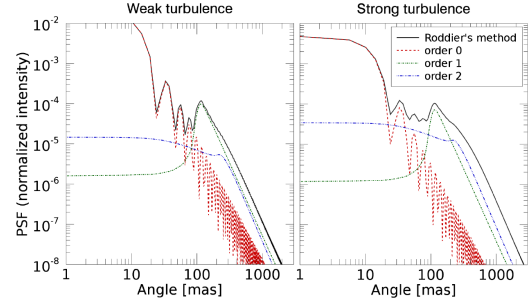


Figure 5. Impact of W_ϕ convolutive orders on the PSF. Each order is also convolved with the pupil PSF, called h_T in the text. Left: $r_0 = 20$ cm. Right: $r_0 = 10$ cm. The three orders $n \in \{0, 1, 2\}$ are respectively plotted as coloured dashed lines. The PSF based on the Roddier method, from the OTF in $e^{-D\phi/2}$, is plotted in plain black.

Racine et al. (1999), with a coherent core made of the Airy pattern and a turbulent halo depending on the residual PSD. The difference is that our method includes all convolutive orders of the PSD in the description of the PSF. Higher orders can be of high magnitude when the PSD is of high energy E or for strong turbulence (Fig. 5). In particular, the convolution folds back energy from the PSF halo into the corrected area, reducing contrast in this zone. Magnitudes of higher orders can be reduced (and the contrast in the corrected area then increased) by decreasing the integral E of Y_ϕ , which is strongly dependent on the cut-off frequency f_{AO} and the wavelength λ (Fig. 4). A few orders, $N_{\max} \simeq 3-8$ in our example, are required to describe the AO-corrected PSF, since there is little energy in the PSD, to be compared with the $N_{\max} > 30$ orders required to describe the pure von Kármán turbulent phase. Our criterion gives respectively $N_{\text{crit}} = 6$ for $\lambda = 400$ nm and $N_{\text{crit}} = 1$ for $\lambda = 800$ nm. This is in agreement with the PSFs plotted in Fig. 4, since convergence is reached at $N_{\max} = 8$ for $\lambda = 400$ nm and $N_{\max} = 3$ for $\lambda = 800$ nm.

3.4 Modelling errors in the AO system

We previously considered a perfect AO system up to the cut-off frequency, with a phase PSD identically null for $f < f_{AO}$. However, in practice a residue of phase PSD remains at low frequencies, due to errors of the AO system such as wavefront sensor (WFS) noise, corrective-loop delay or deformable mirror fitting error. These error terms can be measured or modelled (Fusco et al. 2006) for a finer description of the AO partial correction. Plugging these errors into our PSD, we can obtain a better approximation of the PSF, especially at the central peak. Methods based directly on Roddier's OTF formula have already been implemented (Rigaut, Véran & Lai 1998; Jolissaint 2010; Correia et al. 2017). Our convolutive formalism then offers a direct understanding of the link between the phase PSD and the PSF in the results provided by Roddier's OTF-based algorithms. For extreme AO correction, we find that the PSF behaves as the phase PSD (first-order approximation), whereas the following PSD convolutive orders are required for lower AO correction quality.

We choose here to model the residual phase PSD due to AO errors by a Moffat function (Moffat 1969). The shape of the residual PSD can be written as

$$W_\phi(f) = \begin{cases} A(1 + f^2/\alpha^2)^{-\beta} + B & \text{if } f < f_{AO}, \\ 0.023r_0^{-5/3} f^{-11/3} & \text{if } f > f_{AO}, \end{cases} \quad (24)$$

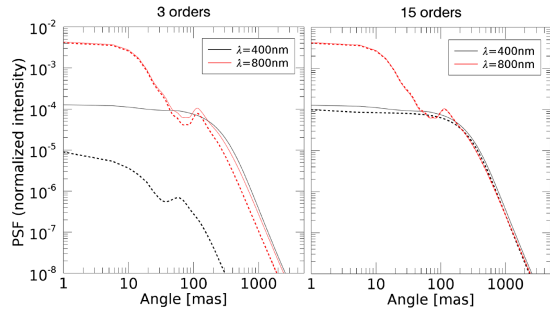
5214 *R. J.-L. Fétick et al.*

Figure 6. PSF computed for the given AO spectrum. Plain curve: PSF computed by the OTF method. Dashed: PSF computed by the convolutive orders method. Left panel: three orders. Right panel: 15 orders.

where A , B , α and β are the Moffat parameters associated with the error budget for the corrected phase. The shape of the PSD for arbitrary values of Moffat parameters is plotted in blue in Fig. 1. The resulting PSD is in between of the von Kármán uncorrected turbulence and perfect AO correction.

Fig. 6 shows the convolutive orders associated with the discussed PSD, for $N_{\max} = 3$ and $N_{\max} = 15$. The number of terms required is higher than in the case of a perfect AO system, due to higher energy under the PSD, but lower than in the case of uncorrected turbulence.

4 CONCLUSIONS

For long-exposure observations, highly time-variable phase aberrations average out and only the statistical behaviour of the turbulence remains. We consequently derived a general method to compute the long-exposure PSF, given only the PSD of the turbulent phase. When restricting our model to its first-order approximation, we find agreement with previous works on the subject (Racine et al. 1999; Bloemhof et al. 2001). We have shown that the higher convolutive orders have more impact on the PSF for stronger turbulence and must be taken into account for low-Strehl systems.

A hypothesis of the spatial stationarity of phase over the pupil is required, which is in agreement with Kolmogorov and von Kármán statistics. Our method is also applicable to the partially corrected phase with adaptive optics. Finally, we extracted the r_0 dependence for a better understanding of the PSF shape variation with turbulence strength. It is then possible to obtain a direct estimation of r_0 given the PSF halo or, reciprocally, an estimation of the PSF halo given r_0 . We plan to use this model for an accurate description of the halo for an AO-corrected PSF. The link we make between the PSD and the PSF can be used as a direct measurement of the Fried parameter r_0 from a PSF observed for a star. Finally, the strong correlation between the AO-corrected PSD and the shape of the PSF can provide a tool for AO system diagnostics (Jollissaint & Veran 2002).

ACKNOWLEDGEMENTS

This work was supported by the French Direction Générale de l'Armement (DGA) and Aix-Marseille Université (AMU).

This project has received funding from the European Union's Horizon 2020 research and innovation program under grant agreement No. 730890. This material reflects only the authors' views and the Commission is not liable for any use that may be made of the information contained therein.

This study has been partly funded by the French Aerospace Lab (ONERA) in the frame of the VASCO Research Project.

REFERENCES

- Bloemhof E., Dekany R., Troy M., Oppenheimer B., 2001, *ApJ*, 558, L71
 Conan J.-M., 1994, PhD thesis, Université Paris XI Orsay
 Correia C. M., Bond C. Z., Sauvage J.-F., Fusco T., Conan R., Wizinowich P. L., 2017, *Journal of the Optical Society of America A*, 34, 1877
 Fried D. L., 1966, *JOSA*, 56, 1372
 Fusco T. et al., 2006, *Optics Express*, 14, 7515
 Goodman J. W., 1968, Introduction to Fourier optics. McGraw-Hill Book Co, New York
 Jollissaint L., 2010, *Journal of the European Optical Society – Rapid Publications*, 5, 10055
 Jollissaint L., Veran J.-P., 2002, ESO Conference and Workshop Proceedings. Vol. 58, European Southern Observatory, Germany
 Moffat A., 1969, *A&A*, 3, 455
 Perrin M. D., Sivaramakrishnan A., Makidon R. B., Oppenheimer B. R., Graham J. R., 2003, *ApJ*, 596, 702
 Racine R., Walker G. A., Nadeau D., Doyon R., Marois C., 1999, *PASP*, 111, 587
 Rigaut F. J., Véran J.-P., Lai O., 1998, *Proc. SPIE*, 3353, 1038
 Roddier F., 1981, *Progress in Optics*, 19, 281
 Roddier F., 1999, Adaptive Optics in Astronomy. Cambridge Univ. Press, Cambridge
 Sivaramakrishnan A., Lloyd J. P., Hodge P. E., Macintosh B. A., 2002, *ApJ*, 581, L59

APPENDIX A: ON THE CONVOLUTIVE APPROXIMATION

Let us consider a PSD shape verifying the two following hypotheses:

- (i) the majority of the PSD energy is in the centre ($|\mathbf{u}| \ll 1$) rather than in the halo ($|\mathbf{u}| \gg 1$);
- (ii) the halo is slowly varying.

These hypotheses are verified for the $-11/3$ power law of the Kolmogorov spectrum, in particular.

Let us now consider \mathbf{u} , a coordinate in the halo. The PSD autoconvolution can then be written as

$$Y_\phi \star Y_\phi(\mathbf{u}) = \iint_{\mathbb{R}^2} Y_\phi(\mathbf{t}) Y_\phi(\mathbf{u} - \mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (\text{A1})$$

The \mathbb{R}^2 domain is then separated into three subdomains:

- (i) $|\mathbf{t}| \ll 1$, where $Y_\phi(\mathbf{t})$ is large due to the first hypothesis and $Y_\phi(\mathbf{u} - \mathbf{t})$ is slowly varying due to the second one (when choosing $\mathbf{u} \gg 1$);
- (ii) $|\mathbf{u} - \mathbf{t}| \ll 1$, where the opposite behaviour occurs;
- (iii) the remaining domain of \mathbb{R}^2 , called \mathcal{A} , where both $Y_\phi(\mathbf{t})$ and $Y_\phi(\mathbf{u} - \mathbf{t})$ are small due to the first hypothesis.

Fig. A1 shows an example of these domains for a given \mathbf{u} and a PSD shape as described in Section 3.4. The convolutive integral of Y_ϕ is separated into the three domains described above. The integral over the first domain is

$$\iint_{|\mathbf{t}| \ll 1} Y_\phi(\mathbf{t}) Y_\phi(\mathbf{u} - \mathbf{t}) d\mathbf{t} \simeq Y_\phi(\mathbf{u}) \iint_{|\mathbf{t}| \ll 1} Y_\phi(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (\text{A2})$$

The approximation we just made relies on the fact that $|\mathbf{u}| \gg 1$ is in the halo and $|\mathbf{t}| \ll 1$, so $\mathbf{u} - \mathbf{t}$ is still in the halo. Slow variations in the halo (second hypothesis) allow us to approximate $Y_\phi(\mathbf{u} - \mathbf{t}) \simeq Y_\phi(\mathbf{u})$. We make the same reasoning in the second domain, with a

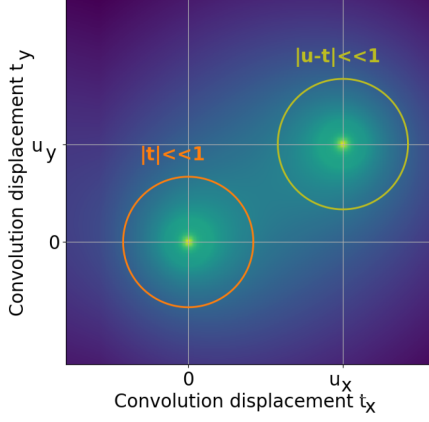


Figure A1. Visualization of the three different domains for a given convolutive shift \mathbf{u} . The colour map shows the product $Y_\phi(\mathbf{t})Y_\phi(\mathbf{u}-\mathbf{t})$. The intensity plot is on a logarithmic scale.

coordinate change $\mathbf{x} = \mathbf{u} - \mathbf{t}$, so we find

$$\iint_{|\mathbf{u}-\mathbf{t}| \ll 1} Y_\phi(\mathbf{t})Y_\phi(\mathbf{u}-\mathbf{t}) d\mathbf{t} \simeq Y_\phi(\mathbf{u}) \iint_{|\mathbf{x}| \ll 1} Y_\phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (\text{A3})$$

The first integrals in the two cases are then identical. Regarding the third domain, it corresponds to the convolution of two small terms (first hypothesis) and consequently is assumed to be much less energetic than the other domains. We simply write it as

$$\iint_{\mathcal{A}} Y_\phi(\mathbf{t})Y_\phi(\mathbf{u}-\mathbf{t}) d\mathbf{t} = \eta(\mathbf{u})E, \quad (\text{A4})$$

PSFs as convolutive orders of the phase PSD 5215

where $\eta(\mathbf{u})$ is a small-valued function and E denotes the integral of Y_ϕ on \mathbb{R}^2 . Summing the partial convolutions over the three domains, one obtains the full convolution

$$Y_\phi \star Y_\phi(\mathbf{u}) \simeq 2Y_\phi(\mathbf{u}) \left[\iint_{|\mathbf{t}| \ll 1} Y_\phi(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right] + \eta(\mathbf{u})E. \quad (\text{A5})$$

Finally, using the first hypothesis, the integral above contains the majority of the energy. We can then write

$$\iint_{|\mathbf{t}| \ll 1} Y_\phi(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = \kappa E, \quad (\text{A6})$$

where $\kappa \in]0, 1]$ represents the ratio of energy in the area $|\mathbf{t}| \ll 1$. It depends on the shape of Y_ϕ ; in practice, we find $\kappa \simeq 0.85$ for our AO truncated Kolmogorov. Using κ , the convolution can be rewritten as

$$Y_\phi \star Y_\phi(\mathbf{u}) \simeq 2\kappa Y_\phi(\mathbf{u})E + \eta(\mathbf{u})E. \quad (\text{A7})$$

If we neglect the $\eta(\mathbf{u})E$ term, one can easily iterate by recurrence over the convolutive orders to find

$$\{\star^n Y_\phi\}(\mathbf{u}) \simeq (2\kappa E)^{n-1} Y_\phi(\mathbf{u}). \quad (\text{A8})$$

Errors in this equation come from the different approximations we made and the modification of shape for $\{\star^n Y_\phi\}$, especially in the centre ($\mathbf{u} \ll 1$). One should recall that this expression is only true in order of magnitude, since the approximations propagate through the convolutive orders.

This paper has been typeset from a \TeX/L\AA\TeX file prepared by the author.

A&A 628, A99 (2019)
<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201935830>
 © R. J. L. Fétick et al. 2019

**Astronomy
&
Astrophysics**

Physics-based model of the adaptive-optics-corrected point spread function

Applications to the SPHERE/ZIMPOL and MUSE instruments[★]

R. J. L. Fétick^{1,2}, T. Fusco^{1,2}, B. Neichel¹, L. M. Mugnier², O. Beltramo-Martin¹, A. Bonnefois², C. Petit², J. Milli³, J. Vernet⁴, S. Oberti⁴, and R. Bacon⁵

¹ Aix Marseille Univ., CNRS, LAM, Laboratoire d'Astrophysique de Marseille, Marseille, France
 e-mail: romain.fetick@lam.fr

² ONERA, The French Aerospace Lab BP72, 29 Avenue de la Division Leclerc, 92322 Chatillon Cedex, France

³ European Southern Observatory (ESO), Alonso de Córdova 3107, Vitacura, Casilla 19001, Santiago, Chile

⁴ ESO, European Southern Observatory, Karl-Schwarzschild Str. 2, 85748 Garching bei Muenchen, Germany

⁵ CRAL, Observatoire de Lyon, CNRS, Université Lyon 1, 9 Avenue Ch. André, 69561 Saint Genis Laval Cedex, France

Received 3 May 2019 / Accepted 28 May 2019

ABSTRACT

Context. Adaptive optics (AO) systems greatly increase the resolution of large telescopes, but produce complex point spread function (PSF) shapes, varying in time and across the field of view. The PSF must be accurately known since it provides crucial information about optical systems for design, characterization, diagnostics, and image post-processing.

Aims. We develop here a model of the AO long-exposure PSF, adapted to various seeing conditions and any AO system. This model is made to match accurately both the core of the PSF and its turbulent halo.

Methods. The PSF model we develop is based on a parsimonious parameterization of the phase power spectral density, with only five parameters to describe circularly symmetric PSFs and seven parameters for asymmetrical ones. Moreover, one of the parameters is the Fried parameter r_0 of the turbulence's strength. This physical parameter is an asset in the PSF model since it can be correlated with external measurements of the r_0 , such as phase slopes from the AO real time computer (RTC) or site seeing monitoring.

Results. We fit our model against end-to-end simulated PSFs using the OOMAO tool, and against on-sky PSFs from the SPHERE/ZIMPOL imager and the MUSE integral field spectrometer working in AO narrow-field mode. Our model matches the shape of the AO PSF both in the core and the halo, with a relative error smaller than 1% for simulated and experimental data. We also show that we retrieve the r_0 parameter with sub-centimeter precision on simulated data. For ZIMPOL data, we show a correlation of 97% between our r_0 estimation and the RTC estimation. Finally, MUSE allows us to test the spectral dependency of the fitted r_0 parameter. It follows the theoretical $\lambda^{6/5}$ evolution with a standard deviation of 0.3 cm. Evolution of other PSF parameters, such as residual phase variance or aliasing, is also discussed.

Key words. instrumentation: adaptive optics – atmospheric effects – methods: analytical – methods: observational – telescopes

1. Introduction

Optical systems suffer from aberrations and diffraction effects that limit their imaging performance. For ground-based observations, the point spread function (PSF) is dramatically altered by the atmospheric turbulence that distorts the incoming wavefront (Roddier 1981). The resolution under typical conditions of a seeing-limited telescope does not exceed the diffraction limit of an ~ 12 cm aperture. Modern and future large telescopes thus include adaptive optics (AO) systems (Roddier 1999) that compensate for the atmospheric turbulence thanks to wavefront sensors and deformable mirrors. The aberrated wavefront is partially corrected and telescopes may operate near their diffraction limited regime. Nevertheless the AO correction is limited by technical issues such as sensor noise, limited number of actuators, or loop delay (Martin et al. 2017; Rigaut et al. 1998). This results in a peculiar shape of the PSF made of a sharp peak due to

the partial AO correction, and a wide halo caused by the residual turbulence above the AO cutoff frequency.

The PSF thus provides critical information about an optical system regarding its preliminary design, calibrations, testings, or diagnostic (Ascenso et al. 2015; Ragland et al. 2018). Image post-processing, such as deconvolution (Mugnier et al. 2004), also requires knowledge of the PSF. Deconvolution of long-exposure images using parametric PSFs has already been demonstrated in Drummond (1998) and Fétick et al. (2019). A fine model of the PSF is necessary. The substantial advantage of parametric PSFs is to compress all the important information of the physical PSF into a small number of parameters. The numerical values of these parameters might then be used for comparisons, correlations, or any statistical analysis. Moreover if the PSF parameters are correlated to physical values (e.g. turbulence strength, wind speed, AO residual phase variance), it is possible to better constrain these parameters or better understand the AO response to given observing conditions. We state that an efficient AO PSF model should fulfil the following requirements:

[★] Our Python codes are available on <https://gitlab.lam.fr/lam-grd-public>

– *Accuracy*. The model must represent accurately the shape of the AO-corrected PSF, especially the two areas corresponding to its central peak and to its wide turbulent halo. The requested accuracy depends on the application of the PSF (e.g. fitting, deconvolution, turbulence monitoring).

– *Versatility and robustness*. The model must be used on different AO system, with different AO correction levels, for different turbulent strengths.

– *Simplicity*. The model must have as few parameters as possible without damaging its versatility or accuracy.

– *Physical parameters*. Such parameters have a physical meaning related to the observing conditions. These parameters have physical units.

The literature already provides some models of AO-corrected PSF (Drummond 1998; Zieleniewski & Thatte 2013) often based on Gaussian, Lorentzian, and/or Moffat (1969) models. A trade-off is always drawn between a simple model with few parameters but imprecise, or a more precise but also more complex model. The difficulty often comes from the description of the turbulent halo with only a few parameters. Moreover, to the best of our knowledge, these PSF models rely only on mathematical parameters without direct physical meaning or units.

We propose a long-exposure PSF model for AO-corrected telescopes that describes accurately the shape of the PSF; this model is made of a small number of parameters with physical meaning whenever possible. Our method does not parameterize the PSF directly in the focal plane, but rather from the phase power spectral density (PSD). Indeed Goodman (1968) and Roddier (1981) have shown that the phase PSD contains all the necessary information to describe the long-exposure atmospheric PSF. Working in the PSD domain allows us to include physical parameters. Then Fourier transforms give the resulting PSF in the focal plane. Our PSF model also includes pupil diffraction effects or any of the system static aberrations, provided they have been previously characterized.

In Sect. 2 we first recall the expression of the Moffat function and show its limits for AO PSF description. Then we develop our PSF model, partially based on this Moffat function. Section 3 validates the model by fitting PSFs from numerical simulations and from observations made on two Very Large Telescope (VLT) instruments. Finally Sect. 4 concludes our work and discusses direct and future applications for our PSF model.

2. Description of the PSF model

In the whole paper, we define (x_R, y_R) the reference coordinates that are respectively the detector horizontal and vertical coordinates. We also define (x, y) the proper PSF coordinates (e.g. along the major and minor PSF elongation axis), rotated by an angle θ_R with respect to the reference frame. The reference frame to PSF frame transformation can be written as

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_R & \sin \theta_R \\ -\sin \theta_R & \cos \theta_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_R \\ y_R \end{pmatrix}. \quad (1)$$

For the sake of simplicity we will use mainly the rotated coordinates, but it is important to keep in mind that θ_R is a crucial PSF parameter. We also simplify the notations $x = x(x_R, y_R, \theta_R)$ and $y = y(x_R, y_R, \theta_R)$.

In this section we first recall the usual Moffat PSF model, since it encompasses and generalizes Lorentzian and Gaussian models. We demonstrate the advantages of the Moffat model, but also its limitations. This motivates our search for a better PSF model. However, the mathematical expression of the

Moffat function will still be used inside our more complete PSF model.

2.1. Review of the usual Moffat PSF model

The AO-corrected PSF exhibits a sharp corrected peak, with wide wings extension. The Moffat (1969) model is often used due to its good approximation of the AO PSF sharp peak (Andersen et al. 2006; Müller Sánchez et al. 2006; Davies & Kasper 2012; Orban de Xivry et al. 2015; Rusu et al. 2016). The Moffat function, of amplitude A , is written as

$$M_A(x, y) = \frac{A}{(1 + x^2/\alpha_x^2 + y^2/\alpha_y^2)^\beta}, \quad (2)$$

with α_x , α_y , and β strictly positive real numbers. Moreover the condition $\beta > 1$ is imposed to ensure a finite integral of the function on the plane. This model encompasses the two-dimensional Lorentzian function for $\beta = 1$ and the two-dimensional Gaussian function for $\beta \rightarrow +\infty$. The variable β parameter thus makes the Moffat function a generalization of Lorentzian and Gaussian ones. Since the PSF has a unit energy, demonstration in Appendix A shows that the Moffat multiplicative constant is

$$A = \frac{\beta - 1}{\pi \alpha_x \alpha_y}, \quad (3)$$

so the PSF, called h , is made of only four free parameters α_x , α_y , β , and θ_R . The Moffat PSF model thus is re-written as

$$h(x, y) = \frac{\beta - 1}{\pi \alpha_x \alpha_y} M_1(x, y), \quad (4)$$

where the notation M_1 must be understood as the Moffat M_A with a multiplicative factor $A = 1$.

The full fitting method will be presented in Sect. 3, but we show here a preliminary result using the Moffat function to motivate our search for better functions. Indeed, as shown in Fig. 1, the Moffat function accurately fits the central peak of an actual PSF, but poorly describes the turbulent halo. Since this halo may contain an important proportion of the PSF energy, depending on the quality of the AO correction, it is necessary to model it accurately. Adding a constant background to the model artificially improves the fitting (lower residuals). However, this method is not suitable since it poorly describes the halo and mistaking the halo for a background will yield the non-physical result of a PSF with an infinite integral on an unlimited field of view. The modulation transfer functions (MTF, bottom plot in Fig. 1), which is the modulus of the PSF Fourier transform, also shows that the Moffat does not match well the very low frequencies (halo) and does not model the telescope cutoff frequency. Similarly, none of the static aberrations of the telescope are taken into account. A more physical PSF model than a Moffat is thus required.

2.2. Image formation theory

Our PSF model is based on equations of image formation from the phase PSD to the focal plane. Indeed Roddier (1981) has shown that the Fourier transform of the PSF, the optical transfer function (OTF), can be written as the product of the telescope aberrations OTF and the atmospheric turbulent OTF,

$$\tilde{h}(\rho/\lambda) = \tilde{h}_T(\rho/\lambda) \cdot \tilde{h}_A(\rho/\lambda), \quad (5)$$

where λ is the observation wavelength, \tilde{h} the total OTF, \tilde{h}_T the telescope OTF, and \tilde{h}_A the atmospheric OTF. This OTF splitting equation is valid under the hypothesis of a spatially stationary phase. This is the case for a purely turbulent phase, and a

R. J. L. Fétick et al.: Physics based model of the AO-corrected PSF

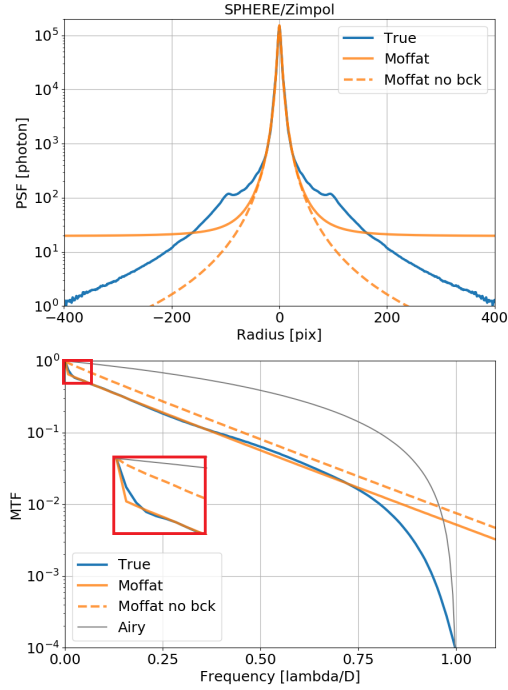


Fig. 1. Fitting of a SPHERE/ZIMPOL PSF (blue) using a Moffat model with background (green) and without background (dashed green). *Top:* PSF, *bottom:* MTF. The inset plot is a zoom on the low spatial frequencies.

good approximation for an AO-corrected phase (Conan 1994). To establish this result, Roddier also used the fact that the phase distribution follows a Gaussian process, as the sum of a large number of independent turbulent layers. The telescope OTF is simply given by the autocorrelation of the pupil transmission function, whereas the atmospheric OTF is written as

$$\tilde{h}_A(\boldsymbol{\rho}/\lambda) = e^{-B_\phi(\mathbf{0})} e^{B_\phi(\boldsymbol{\rho})}, \quad (6)$$

with B_ϕ the phase autocorrelation function defined as

$$B_\phi(\boldsymbol{\rho}) = \langle\langle \phi(\mathbf{r}, t)\phi(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t) \rangle\rangle_t. \quad (7)$$

The Wiener–Khinchine theorem states that the PSD is the Fourier transform of the autocorrelation as

$$W_\phi(\mathbf{f}) = \mathcal{F}\{B_\phi(\boldsymbol{\rho})\}, \quad (8)$$

where W_ϕ denotes the phase PSD and \mathcal{F} the Fourier operator; \mathbf{f} and $\boldsymbol{\rho}$ are the Fourier conjugated variables. If we call \mathbf{u} the angular variable conjugated to $\boldsymbol{\rho}/\lambda$, the PSF is written as

$$h(\mathbf{u}) = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{h}_T(\boldsymbol{\rho}/\lambda) e^{-B_\phi(\mathbf{0})} e^{\mathcal{F}^{-1}\{W_\phi(\mathbf{f})\}}\}. \quad (9)$$

We note that $B_\phi(\mathbf{0})$ is the residual phase variance and is equal to the integral of W_ϕ on the whole frequency plane. This equation shows that only knowledge of the pupil and the static aberrations of the term \tilde{h}_T , and the phase PSD W_ϕ are necessary for the description of the long-exposure PSF. Diffraction effects – such as finite aperture, central obstruction, and spiders – only depend on the pupil geometry and are known. Static aberrations are second-order effects that can be either neglected (as we show

in Sects. 3.3 and 3.4), or measured (N’Diaye et al. 2013) and then included in the \tilde{h}_T term for more accuracy. The term \tilde{h}_T being fully determined, now we only have to parameterize the residual phase PSD to model the PSF.

2.3. Parameterization of the phase PSD

Actuators controlling the deformable mirror are separated by a pitch that sets the maximal spatial frequency of the phase that can be corrected by the AO system. This is called the AO spatial cutoff frequency, defined by $f_{AO} \approx N_{act}/2D$, where N_{act} is the linear number of actuators and D the pupil diameter. This technical limitation induces the peculiar shape of the AO residual phase PSD (and in fine a peculiar shape of the PSF). The residual phase PSD is thus separated into two distinct areas:

- AO-corrected frequencies $f \leq f_{AO}$,
- AO-uncorrected frequencies $f > f_{AO}$.

The uncorrected area is not affected by the AO system, and the phase PSD consequently follows the Kolmogorov law,

$$W_{\phi, \text{Kolmo}}(\mathbf{f}) = 0.023r_0^{-5/3}f^{-11/3}, \text{ for } f > f_{AO}, \quad (10)$$

where r_0 is the Fried parameter scaling the strength of the turbulence. The halo is thus set by the knowledge of only this r_0 parameter.

Regarding the AO-corrected area, it is difficult to parameterize the phase residual PSD since it depends on the turbulence, the magnitude of the object, the AO loop delay, and the wavefront reconstruction algorithm. Our objective is not to build a full reconstruction of the phase PSD, but to only get a model that can match it. Racine et al. (1999) and Jolissaint & Veran (2002) have shown that in extreme AO correction (small residual phase) the shape of the PSF is exactly the shape of the PSD. For partial AO correction, the shapes of the PSF and PSD are not exactly identical, but are still similar (Fétick et al. 2018). Moreover Rigaut et al. (1998) have shown that the AO residual PSD is the sum of decreasing power laws of the spatial frequency. A Moffat function used in the PSD domain would already describe two regimes due to its shape, one regime for $f \leq \alpha$ and one regime for $\alpha < f < f_{AO}$. Adding a constant under the Moffat allows us to describe a third regime near the AO cutoff frequency at $f \lesssim f_{AO}$ that is roughly similar to the shape of the aliasing PSD discussed by Rigaut et al. (1998). All the above pieces of information suggest the possibility of using the Moffat function for a parsimonious parameterization of the AO-corrected PSD, rather than using it to directly parameterize the PSF in the focal plane. The full PSD model is written as

$$W_\phi(\mathbf{f}) = \left[\frac{\beta - 1}{\pi\alpha_x\alpha_y} \frac{M_A(f_x, f_y)}{1 - \left(1 + \frac{f_{AO}^2}{\alpha_x\alpha_y}\right)^{1-\beta}} + C \right]_{f \leq f_{AO}} + [W_{\phi, \text{Kolmo}}(\mathbf{f})]_{f > f_{AO}}, \quad (11)$$

where the Moffat normalization factor ensures a unit integral of the Moffat on the area $f \leq f_{AO}$ (see Appendix A). Constant C is an AO-corrected phase PSD background. It is useful to model the residual AO PSD near the AO cutoff, where the Moffat function is close to zero. Thus the AO residual phase variance on the circular domain below the AO cutoff frequency is directly

$$\sigma_{AO}^2 = A + C\pi f_{AO}^2. \quad (12)$$

Parameter A , added to the C background contribution, has the physical meaning of being the residual variance. An example of

A&A 628, A99 (2019)

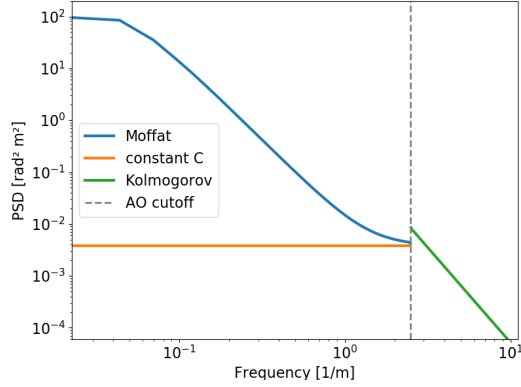


Fig. 2. Three components of the PSD model: the Moffat (blue) and the constant contribution (orange) below the AO cutoff frequency, and the Kolmogorov spectrum (green) above the AO cutoff frequency. Discontinuity has been exaggerated by reducing C to show this degree of freedom in our model. Plotting is in logarithmic–logarithmic scale.

our PSD model is given Fig. 2. We do not impose continuity at the AO cutoff frequency, so the PSD might be locally discontinuous. Indeed the transition area $f \approx f_{\text{AO}}$ between corrected and uncorrected frequencies can lead to strong PSD gradients, which are modelled by an eventual PSD discontinuity.

Our PSF model based on the PSD is made of the following set of seven parameters: $\mathcal{S} = \{\alpha_x, \alpha_y, \beta, \theta_R, C, r_0, A\}$ in the asymmetric case. This reduces to five parameters in the symmetric case (setting $\alpha_y = \alpha_x$ and $\theta_R = 0$). Even though symmetric PSFs are sufficient in the majority of cases, asymmetries make it possible to consider PSFs elongated due to strong wind effects or anisoplanatism. Once the parameters \mathcal{S} are set, the PSF is then computed from the AO PSD and static aberrations using Eq. (9).

For the reader interested in deriving the Strehl ratio from our model, we have to compute the integral of the Kolmogorov spectrum above the AO cutoff frequency,

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{halo}}^2 &= 0.023 r_0^{-5/3} 2\pi \int_{f_{\text{AO}}}^{+\infty} f^{-11/3} f \, df \\ &= 0.023 \frac{6\pi}{5} (r_0 \cdot f_{\text{AO}})^{-5/3}. \end{aligned} \quad (13)$$

The Strehl ratio consequently is written as

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_R &= \exp[-(\sigma_{\text{AO}}^2 + \sigma_{\text{halo}}^2)] \\ &= \exp\left[-A - C\pi f_{\text{AO}}^2 - 0.023 \frac{6\pi}{5} (r_0 \cdot f_{\text{AO}})^{-5/3}\right]. \end{aligned} \quad (14)$$

3. Validation

3.1. PSF fitting method

In this section we deal with images of PSFs (the data) that may come from numerical simulations or observations of stars on VLT instruments. The fitting method consists in finding the PSF parameters so that the model PSF minimizes the square distance to the data PSF:

$$\mathcal{L}(\mathcal{S}, \gamma, \zeta, \delta_x, \delta_y) = \sum_{i,j} w_{i,j} \left[\gamma \cdot h_{i,j}(\mathcal{S}, \delta_x, \delta_y) + \zeta - d_{i,j} \right]^2, \quad (15)$$

where $h_{i,j}$ is the discretized model of PSF on the pixels (i, j) , \mathcal{S} its set of parameters, and $d_{i,j}$ is the data PSF. Since the PSF

model (given by Eqs. (9) and (11)) has a unit flux, it is scaled by γ to match the flux of the data PSF, and ζ accounts for a possible background. The shifts δ_x and δ_y centre the PSF with subpixel precision on the data (by multiplication of the OTF with the correct phasor). The weighting factor $w_{i,j}$ is the inverse of the noise variance, which takes into account the photon noise and the detector read-out noise. As noted by Mugnier et al. (2004), for high fluxes (typically greater than ten photons per pixel), the Poisson photon noise becomes nearly Gaussian and the weighting factor is written as

$$w_{i,j} = \frac{1}{\max\{d_{i,j}, 0\} + \sigma_{\text{RON}}^2}. \quad (16)$$

In this case, our approach can be seen from a statistical point of view as maximizing the likelihood of the data $d_{i,j}$ corrupted by photon and read-out noise. We thus minimize \mathcal{L} , which is the neg-logarithm of the likelihood for a Gaussian process.

Let us now note that the minimum of \mathcal{L} has an analytic solution for γ and ζ (see Appendix B for a full demonstration). We actually do not need to numerically minimize over these two parameters, the least-square criterion only relies on the PSF intrinsic parameters \mathcal{S} and the position parameters (δ_x, δ_y) as

$$\mathcal{L}'(\mathcal{S}, \delta_x, \delta_y) = \mathcal{L}(\mathcal{S}, \hat{\gamma}, \hat{\zeta}, \delta_x, \delta_y), \quad (17)$$

where $\hat{\gamma}$ and $\hat{\zeta}$ are the analytic solutions for the flux and the background, respectively. At each iteration of the minimization process, the minimizer evaluates our \mathcal{L}' criterion with a new set of parameters $(\mathcal{S}, \delta_x, \delta_y)$. The current PSF estimate $h(\mathcal{S}, \delta_x, \delta_y)$ is computed, then the analytic solutions $\hat{\gamma}$ and $\hat{\zeta}$ are computed. The quantity $\hat{\gamma} \cdot h(\mathcal{S}, \delta_x, \delta_y) + \hat{\zeta}$ is used to compute the residuals with the data d . Residuals are then provided to the minimizer to estimate a new set of parameters $(\mathcal{S}, \delta_x, \delta_y)$.

3.2. OOMAO end-to-end simulations

The Object-Oriented Matlab Adaptive Optics (OOMAO) toolbox, presented by Conan & Correia (2014), provides end-to-end simulations. For each time step, OOMAO generates a turbulent wavefront with a Von-Kármán spectrum defined as

$$W_{\phi, \text{VK}}(f) = 0.023 r_0^{-5/3} \left[\left(\frac{1}{L_0} \right)^2 + f^2 \right]^{-11/6}, \quad (18)$$

where we have chosen the outer scale $L_0 = 30$ m. Since $1/L_0 \ll f_{\text{AO}}$, the Von-Kármán spectrum is consistent with our PSF model using the Kolmogorov spectrum above the AO cutoff frequency. OOMAO then propagates the wavefront through the telescope, simulates the wavefront sensor measurement, performs the wavefront reconstruction, and simulates the mirror wavefront deformation. For each time step, we get a short exposure PSF. Integration over time allows us to retrieve the long-exposure PSF. It is important to notice that the method to compute the PSF is then very different from our model, which directly uses the residual phase PSD in Eq. (9). We used OOMAO to generate a set of PSFs, corresponding to different wavelengths from 0.5 μm to 2.18 μm , and seven different values of r_0 from 7.5 cm to 25.0 cm. All r_0 are given at 500 nm. We translate them from the observation wavelength to the reference wavelength of 500 nm using the theoretical spectral dependency $r_{0,\lambda_1}/r_{0,\lambda_2} = (\lambda_1/\lambda_2)^{6/5}$. For all the PSFs, the telescope parameters are kept unchanged $D = 8$ m, $N_{\text{act}} = 32$, sampling at Shannon–Nyquist for all wavelengths. The phase screen consists in one

Table 1. OOMAO parameters summary for our PSF simulations.

| Parameter | Values | Unit |
|----------------------|---|-------------------|
| Diameter D | 8 | m |
| N_{act} | 32 | – |
| Wavelength λ | 2.18, 1.65, 1.22, 1.0 0.85, 0.8, 0.75, 0.7 0.65, 0.6, 0.55, 0.5 | um |
| Fried r_0 | 7.5, 10.0, 12.5, 15.0 17.5, 20.0, 25.0 | cm |
| Windspeed | 10 | m s^{-1} |
| Outer scale L_0 | 30 | m |
| Exposure | 0.1, 1, 10, 100 | s |

Table 2. Typical range of PSF parameters for OOMAO simulations and SPHERE/ZIMPOL instrument, lower bounds and values used as initial guess for the minimizer.

| Param. | Typical range | Lower bound | Guess | Unit |
|------------|-----------------------|-------------|--------------------|---------------------------|
| r_0 | 5–30 | eps | 18 | cm |
| α_x | 10^{-2} – 10^{-1} | eps | 5×10^{-2} | m^{-1} |
| α_y | 10^{-2} – 10^{-1} | eps | 5×10^{-2} | m^{-1} |
| β | 1.1–3 | 1 + eps | 1.6 | – |
| θ | $0-\pi$ | – | 0 | rad |
| C | 10^{-3} – 10^{-2} | 0 | 10^{-2} | $\text{rad}^2 \text{m}^2$ |
| A | 10^{-1} –10 | 0 | 2 | rad^2 |

Notes. Typical ranges are indicative and may vary according to the considered instrument. The value “eps” denotes the machine precision. Parameters do not have any upper bound.

frozen flow (Taylor’s hypothesis) turbulent layer translating at $v = 10 \text{ m s}^{-1}$. Using these parameters, we generated PSFs corresponding to exposure times of 0.1, 1, 10, and 100 s. For 0.1 and 1 s, the random OOMAO phase screen did not converge towards a stable state, leading to a strong bias in the r_0 estimation. For a 10 s exposure PSF, the random fluctuations of the phase are correctly averaged. This is confirmed by the 100 s exposure PSF, which gives the same r_0 estimation as the 10 s case. Since a 100 s exposure is computationally demanding and does not significantly improve the results, we performed all our tests on the 10 s exposure time (Table 1).

Each PSF is then fitted using the $\mathcal{L}'(\mathcal{S}, \delta_x, \delta_y)$ criterion given to an optimizer (e.g. Levenberg–Marquardt, trust region, or Markov chain Monte Carlo). We used the Trust Region Reflective algorithm, called “trf”, from the Python/SciPy (Jones et al. 2001) library. This algorithm is gradient based, said to be robust, and allows bounds on the parameters. The robustness of this algorithm was verified for our applications of it to PSF fitting, even though the convexity of the problem is not demonstrated. So far, we have not encountered any local minimum and residuals are always small. For all PSFs, the same initial conditions are provided to the fitting algorithm (see Table 2), in particular we used the same value of $r_0 = 18 \text{ cm}$. Using the same initial parameters $\{\mathcal{S}, \delta_x, \delta_y\}_{\text{init}}$ for all fits ensures that our model is suited for minimization procedures and that convergence is ensured even if starting far from the true values. Fitting results are presented on Fig. 3. Our model fits well the OOMAO-generated PSF on both the corrected and the uncorrected area, residuals being on average one to two decades below the PSF. Let us define the rel-

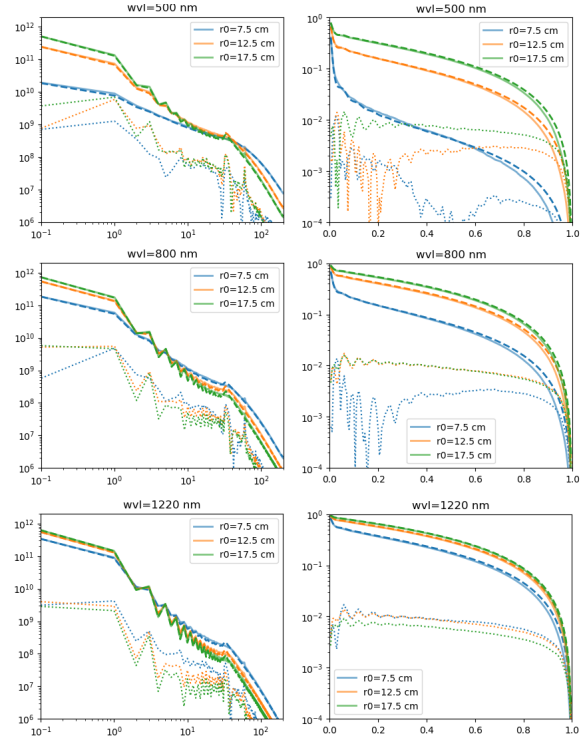


Fig. 3. OOMAO PSF fitting with our model. *Left:* circular average for PSFs (given in photons). The vertical grey line corresponds to the AO cutoff radius. *Right:* corresponding circular average for OTFs (normalized to unity at the null frequency). *From top to bottom,* three wavelengths are scanned from 500 nm to 1220 nm. Colours correspond to three values of the OOMAO required r_0 . Solid curves: OOMAO. Dashed: fitting. Dotted: residuals. All PSFs, for all wavelengths, are sampled at Shannon–Nyquist.

ative error between fitted PSF and data PSF as

$$\epsilon_h = \frac{\sqrt{\sum_{i,j} [\gamma \cdot h_{i,j}(\mathcal{S}, \delta_x, \delta_y) + \zeta - d_{i,j}]^2}}{\sum_{i,j} d_{i,j}}. \quad (19)$$

This error is the L2 norm of the differences between fitting and data, relative to the flux. Considering all the OOMAO fitting, we find an average relative error $\epsilon_h = 6.4 \times 10^{-3}$ with a standard deviation of 2.2×10^{-3} . For comparison, fitting with a Moffat model gives an average relative error of $\epsilon_h = 3.4 \times 10^{-2}$ with a standard deviation of 1.6×10^{-2} . Using our model thus increases the fitting accuracy by a factor of approximately 5 with respect to the former Moffat model of Sect. 2.1. Regarding the OTFs, the fit is also accurate on the whole frequency range, from low frequencies (mainly the halo) to high frequencies (PSF peak and telescope cutoff). Our model slightly over-estimates frequencies just below the telescope cutoff frequency but this has never been an issue in our applications, such as deconvolution, and is still much better than the Moffat OTF (which has no telescope cutoff frequency and give a poor estimation of the low frequencies).

Regarding the flux, we consider the relative error between the flux $\hat{\gamma}$ analytically estimated by our model fitting method, and the OOMAO flux that is directly the sum of the data on all

A&A 628, A99 (2019)

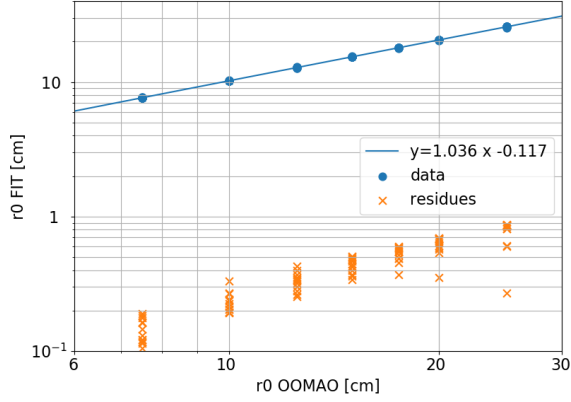


Fig. 4. Fried parameter r_0 estimated by fitting versus the r_0 used in OOMAO to generate the PSF. All r_0 are given at 500 nm. Here are shown results on 84 different PSFs, corresponding to seven values of r_0 and 12 different wavelengths. The line is the linear fit between our r_0 estimation and OOMAO r_0 . Crosses show residuals $|r_{0,\text{FIT}} - r_{0,\text{OOMAO}}|$. A log–log scale is used to show on the same graph both data and residuals.

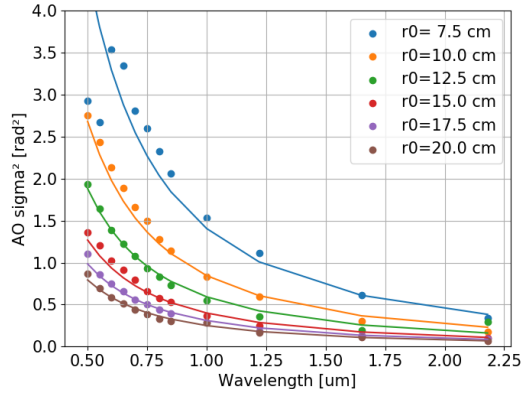


Fig. 5. Estimation of the σ_{AO}^2 from PSF fitting versus the wavelength (dots). Colours correspond to the seven different values of OOMAO r_0 . Curves of parametric equations $\sigma^2 = a\lambda^{-2}$ are fitted on the data.

the pixels:

$$\epsilon_y = \frac{\hat{y} - \sum_{i,j} d_{i,j}}{\sum_{i,j} d_{i,j}}. \quad (20)$$

On all our OOMAO simulations, we find an average relative error of -1.96% , indicating a small underestimation of the flux with our fitting method. The standard deviation of this relative error is 1.11% , and the range of variation is $[-3.43\%, 2.77\%]$.

3.2.1. Fried parameter r_0 estimation

As shown in Fig. 4, our r_0 estimation is consistent with the OOMAO value of r_0 . We find the best linear fit to be

$$r_{0,\text{FIT}} = 1.038 r_{0,\text{OOMAO}} - 0.132, \quad (21)$$

where values are given in centimetres. The Pearson

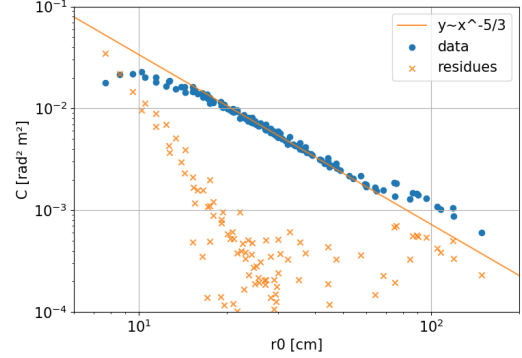


Fig. 6. Estimation of the PSF constant C versus the r_0 given at the observed wavelength (dots). A $r_0^{-5/3}$ fitting equation (solid line) is applied on the data. Residuals between each data point and the $r_0^{-5/3}$ power law are also shown (crosses).

correlation coefficient is $C_{\text{Pearson}} = \text{Cov}(r_{0,\text{FIT}}, r_{0,\text{OOMAO}}) / \sqrt{\text{Var}(r_{0,\text{FIT}}) \cdot \text{Var}(r_{0,\text{OOMAO}})} = 0.99992$. This result fully confirms our r_0 estimation with respect to OOMAO simulations with sub-centimetre precision.

3.2.2. AO residual variance σ_{AO}^2 estimation

Theoretically our model should also be able to retrieve the residual variance σ_{AO}^2 on the corrected area and follow a λ^{-2} power law. Figure 5 shows the fitting estimation of this variance versus the wavelength. This data is then fitted with curves of equation $a\lambda^{-2}$. Except the two outliers for minimal $r_0 = 7.5$ cm at low wavelength ($\lambda \approx 500$ nm), the λ^{-2} power law is a good estimation of the σ_{AO}^2 evolution. This result gives confidence in the estimated parameter. Data from the real time computer (RTC) could be used in the future to provide the σ_{AO}^2 parameter for PSF estimation. The λ^{-2} spectral dependence is also an asset to shift the PSF from one wavelength to another.

3.2.3. Constant C estimation

The C term in Eq. 11 accounts for multiple sources of residual PSD, including wavefront aliasing and other AO residual errors. Since this constant is dominated by the Moffat PSD in the core, it becomes more important near the AO cutoff, where the aliasing dominates. Since the aliasing scales in $r_0^{-5/3}$ (Rigaut et al. 1998), we look for similar r_0 dependencies for the PSF constant C . Figure 6 shows a clear decrease of C with r_0 . Fitting the estimated C with a $r_0^{-5/3}$ power law shows a good match, with small residuals for nearly all r_0 values. The power law is not exactly $-5/3 \approx -1.67$ but is closer to -1.46 for this OOMAO case. However, one can still think about normalizing the constant in Eq. 11 by

$$C = C' r_0^{-5/3} \quad (22)$$

and perform fitting over C' instead of C . This would reduce the variation range of this parameter. Reducing bounds or standard deviation of a parameter is an asset for constraining the model and improving minimization processes.

3.3. High performance imager ZIMPOL

The Spectro Polarimetric High-contrast Exoplanet REsearch (SPHERE) instrument (Beuzit et al. 2008, 2019) of the VLT includes the powerful SPHERE Adaptive optics for exoplanets Observation (SAXO) system described in Fusco et al. (2014) and Sauvage et al. (2010). The AO real time computer is built on the ESO system called SPARTA (Fedrigo et al. 2006), which stands for Standard Platform for Adaptive optics Real Time Applications. In particular, for each observation, SPARTA is able to give an estimate of r_0 from the mirror voltages and wavefront sensor slopes.

The Zurich IMaging POLarimeter (ZIMPOL) instrument (Schmid et al. 2018) is mounted at the focal plane of SPHERE. ZIMPOL is also used as a very efficient imager at visible wavelengths. One of its applications in non-coronagraphic mode is the observation of asteroids (Vernazza et al. 2018; Viikinkoski et al. 2018; Fétick et al. 2019) as part of an ESO Large Program (ID 199.C-0074, PI P. Vernazza). PSFs from stars were observed with the ZIMPOL N_R filter (central wavelength 645.9 nm, width 56.7 nm) during the Large Program. When PSFs are saved together with the SPARTA telemetry, we are able to correlate r_0 given by our fitting and r_0 given by SPARTA. In our sample, 28 PSFs were saved along with the SPARTA telemetry. These PSFs were obtained during different nights, on stars of different magnitudes, with various seeing conditions. We fitted these 28 PSFs with our PSF model. Figure 7 shows three of the 28 fittings, for the smallest r_0 of the sample, the median r_0 , and the largest r_0 , respectively. Our fitted PSFs match the shape of the core and halo. The average of relative error defined in Eq. (19) is $\epsilon_h = 2.5 \times 10^{-3}$, with a standard deviation of 1.2×10^{-3} . We only consider diffraction due to the telescope 8 m aperture and its central obstruction in the static OTF \tilde{h}_T (see Eq. (9)). Consequently non-circularly-symmetric effects, such as the spiders or static aberrations visible on Fig. 7, are not modelled. Even if the spiders could have been included in our model, we have deliberately chosen to ignore them in the \tilde{h}_T term since they are negligible in comparison to the other dominant effects (AO residual core, turbulent halo, 8 m aperture diffraction). When performing PSF fitting, the contribution of these effects not taken into account in \tilde{h}_T might bias the atmospheric term \tilde{h}_A during fitting procedure and slightly offset the estimation of the \mathcal{S} parameters. Moreover these ZIMPOL images are field stabilized, meaning rotating spiders, which are harder to model. Pupil stabilized images would make the description of the spider diffraction effect easier.

The top graph on Fig. 8 shows that the values estimated by SPARTA (median = 22 cm) are greater than the values given by fitting (median = 13 cm). The best linear fit between r_0 estimated by fitting and SPARTA is

$$r_{0,SPARTA} = 3.41 r_{0,FIT} - 16.82. \quad (23)$$

The Pearson correlation coefficient between the two series $r_{0,FIT}$ and $r_{0,SPARTA}$ is $C_{\text{Pearson}} = \text{Cov}(r_{0,FIT}, r_{0,SPARTA}) / \sqrt{\text{Var}(r_{0,FIT}) \cdot \text{Var}(r_{0,SPARTA})} = 0.97$. From this data it appears that the estimates of $r_{0,FIT}$ and $r_{0,SPARTA}$ are not identical, however they show a strong correlation. We further investigated the difference between the SPARTA and the fitting estimates thanks to the ESO atmospheric monitoring using the Multi-Aperture Scintillation Sensor (MASS) combined with the Differential Image Motion Monitor (DIMM). Since the MASS/DIMM instrument is located apart from the telescopes, it does not see exactly the same turbulent volume as the telescopes and does not suffer the same dome effect. There might be some uncertainties

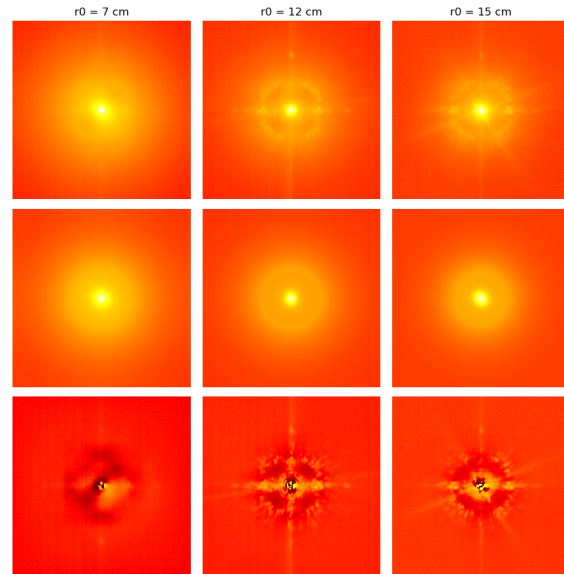


Fig. 7. Three ZIMPOL PSFs (top), model fittings (middle), residuals (bottom). Left: minimal r_0 of the sample. Middle: median r_0 . Right: maximal r_0 . The main differences are due to some static aberrations not taken into account in our model (only the pupil and its central obstruction are taken into account). The hyperbolic arcsine of the intensity is shown to enhance details. The same intensity scale is used per column (data, model, residuals), but differs between columns.

between MASS/DIMM r_0 estimations and telescope r_0 estimations (PSF fitting or RTC) due to the spatial evolution of the turbulence. Nevertheless this instrument is a valuable indicator of the Paranal atmospheric statistics. For each PSF observation we retrieved the associated MASS/DIMM seeing estimation within a delay of ± 3 min (see Fig. 8, middle and bottom graphics). The median seeing estimated by the MASS/DIMM is $0.69''$, to be compared with a median seeing of $0.46''$ for SPARTA and $0.83''$ for PSF fitting. The over-estimation of the SPARTA r_0 with respect to the MASS/DIMM r_0 has been already discussed by Milli et al. (2017). The exact origin of the difference between these three estimations has not been found. Nevertheless we note that estimations with SPARTA are based on RTC measurements of the low spatial frequencies of the phase (sensitive to the Von-Kármán outer scale L_0), whereas our fitting method is based on the PSF halo corresponding to the high spatial frequencies. Our PSF fitting method might be sensitive to telescope internal wavefront errors if they have not been previously calibrated and taken into account in the PSF model.

Even if there is still an uncertainty on the true value of r_0 , the strong correlation between SPARTA and fitting estimations is sufficient for many applications. Indeed it is still possible to get $r_{0,SPARTA}$ from telemetry, use Eq. (23) to translate it into $r_{0,FIT}$, and get an estimate of the PSF halo. This method constrains the model for future PSF estimations without having access to the actual image of the PSF.

3.4. MUSE integral field spectrograph

The Multi-Unit Spectroscopic Explorer MUSE (Bacon et al. 2006, 2010) is an integral field spectrograph (IFS) working mainly in the visible, from ~ 465 nm to ~ 930 nm. MUSE is

A&A 628, A99 (2019)

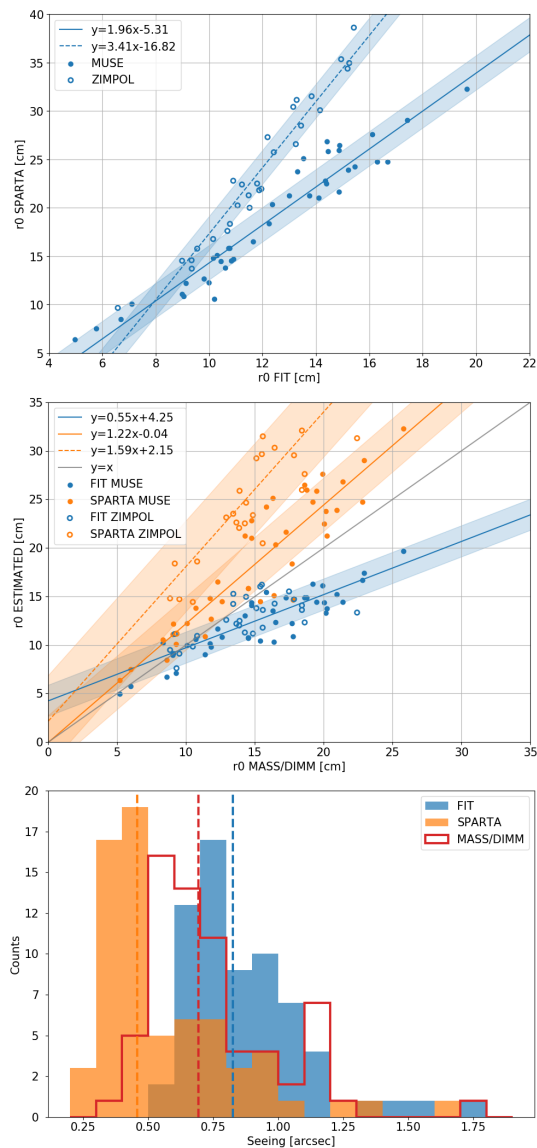


Fig. 8. Zenital r_0 at 500 nm estimated on MUSE (filled circles, 40 data points) and SPHERE/ZIMPOL (empty circles, 27 data points) using three methods: PSF fitting, SPARTA, and MASS/DIMM. *Top:* $r_{0,SPARTA}$ versus $r_{0,FIT}$. A different linear tendency is found for MUSE (plain line) and SPHERE/ZIMPOL (dashed line). Shaded areas show the standard deviation between data points and the best linear fit. *Middle:* $r_{0,SPARTA}$ and $r_{0,FIT}$ versus $r_{0,MASS/DIMM}$. Two linear tendencies are identified for SPARTA, and only one for PSF fitting. *Bottom:* histograms of seeing estimated with the three methods on both instruments. Dashed vertical lines show median values of 0.46'' (SPARTA), 0.69'' (MASS/DIMM), and 0.83'' (PSF fitting).

equipped with the Ground Atmospheric Layer Adaptive Optics for Spectroscopic Imaging (GALACSI) adaptive optics system (Ströbele et al. 2012) to improve its spatial resolution in two different modes, the so-called narrow-field mode (NFM) and wide-field mode (WFM), to correct different sizes of field of view. The AO facility uses four laser guide stars (LGS; Calia et al. 2014)

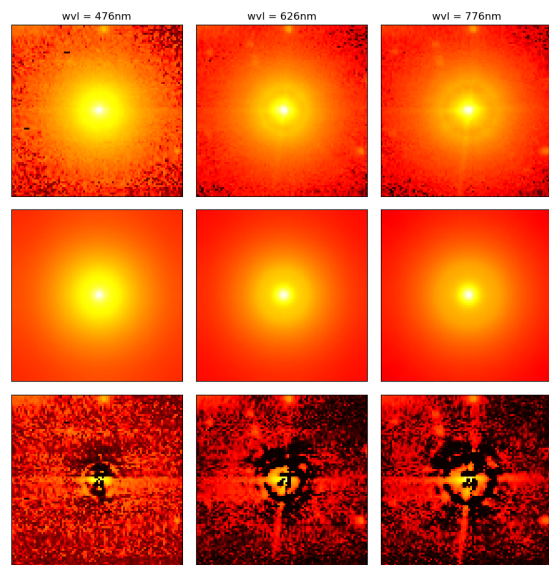


Fig. 9. MUSE PSFs (*top*), fittings (*middle*), and residuals (*bottom*) of the same star at three different wavelengths over the 92 spectral bins actually fitted. The hyperbolic arcsine of the intensity is shown to enhance details.

to perform a tomographic reconstruction of the turbulent phase. A 589 nm dichroic is present in the optical path to avoid light contamination from the sodium AO lasers, so no scientific information is available around this wavelength. Let us also note that MUSE is undersampled (sampling is 25 mas in NFM) on the whole available spectrum. Our PSF model manages the under-sampling issue by oversampling the PSD and the OTF to safely perform numerical computations. The given PSF is then spatially binned to retrieve the correct sampling. The shape of the PSF can be retrieved, but this method has lower precision on the parameters' estimation inherent to undersampled data. These differences between the MUSE instrument and SPHERE/ZIMPOL allow us to test the versatility of our PSF model. Additionally the spectral resolution is an asset to validate our model at different wavelengths and to study the spectral evolution of our PSF parameters.

During the May–June 2018 commissioning phase, MUSE observed multiple targets in narrow-field mode. Among these targets, we have access to 40 PSFs observed on different stars, during different nights and at different seeing conditions. These selected PSFs have been spectrally binned into 92 bins of 5 nm each to increase the signal to noise ratio and reduce the number of fittings. Then fitting is performed independently, spectral bin by spectral bin, without any spectral information on the targets or the atmosphere. Figure 9 shows one MUSE datacube PSF fitting at three different wavelengths. The evolution of the AO correction radius is clearly visible in both the data and the model. As for ZIMPOL, we did not take into account static PSF (except the occulted pupil diffraction), which is the main visible difference between data and model. Fainter stars visible in the field did not affect the fitting and appear clearly in the residuals. For the 40 datacubes PSF, the relative error is $\epsilon_{th} = 3.3 \times 10^{-3}$. This result is similar to the previous ones on OOMAO and SPHERE/ZIMPOL. Secondary stars in the field also count in the residual error computation.

R. J. L. Fétick et al.: Physics based model of the AO-corrected PSF

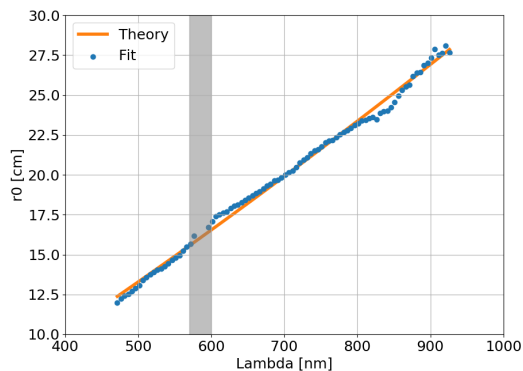


Fig. 10. Estimation of the r_0 by fitting of the PSF MUSE at 92 different wavelengths (blue dots), and comparison with a theoretical law in $\lambda^{6/5}$ (orange line). The best match between data and theory is achieved for $r_0 = 13.3$ cm. The grey area corresponds to missing wavelengths due to the sodium notch filter.

The evolution of r_0 with the wavelength is shown on Fig. 10 for one datacube PSF. A least square fitting between our data points and the theoretical $\lambda^{6/5}$ evolution of the r_0 gives a spectral averaged estimation of $\bar{r}_0 = 13.3$ cm at 500 nm. Our fitted r_0 matches well the theory, with a standard deviation of 0.3 cm.

So far each spectral bin is fitted independently, however the spectral deterministic trend we recover is an asset for PSF determination. It makes possible the fitting of the whole datacube with only one r_0 parameter. The statistical contrast – ratio of the number of measurements over the number of unknowns – would be increased. It would improve fitting robustness, especially for faint stars where the halo is strongly affected by noise.

The results of fitting on the 40 datacubes give statistical information on the r_0 estimation. As for the SPHERE/ZIMPOL case, we have access to SPARTA and MASS/DIMM data to correlate with our fitting estimations (see Fig. 8). The Pearson correlation coefficient between PSF fitting and SPARTA is $C_{\text{Pearson}} = 0.96$, which is similar to the SPHERE/ZIMPOL case. However, we get the linear relationship

$$r_{0,\text{SPARTA}} = 1.96 r_{0,\text{FIT}} - 5.31, \quad (24)$$

which is different from the SPHERE/ZIMPOL (Eq. (23)). The exact origin of this different trend is unknown, nevertheless let us note that the actual implementation of the phase PSD estimation is slightly different for the SPHERE and for the MUSE instruments. For SPHERE the Von-Kármán outer scale L_0 is set to 25 m, whereas for MUSE the L_0 is estimated jointly with r_0 . This SPARTA double trend is corroborated by MASS/DIMM information (Fig. 8, middle graph). On the other hand, r_0 estimation using our PSF model gives similar results on both SPHERE/ZIMPOL and MUSE instruments. This confirms the robustness of our PSF fitting method.

4. Conclusions

In this article we developed a parametric model of long-exposure AO-corrected PSF. The particularity of this model is to parameterize the phase PSD using a Moffat core and a turbulent Kolmogorov halo. This model also incorporates prior knowledge of the telescope, such as the optical cutoff frequency, the obstruction and spider shapes, and even the static aberrations if they are calibrated, for example by phase diversity (Mugnier et al. 2008).

This model only requires five parameters for circularly symmetrical PSFs, and seven for asymmetrical ones. The sparsity of this PSF model makes it suitable for numerical computation, such as minimization algorithms or least-square fits. Tests on both simulated and real data validated the appropriateness of our model.

One substantial advantage of our model over focal plane models is to use physical parameters such as the Fried parameter r_0 and the residual AO variance σ_{AO}^2 . Since these parameters are physical, their values in our PSF model can be correlated to external measurements. Tests on both OOMAO simulations and on-sky data (from the SPHERE/ZIMPOL and MUSE instruments) confirmed the physical meaning of the r_0 parameter used in our PSF. The ultimate goal would be to only use physical parameters in the PSF description.

Our model has already shown usability for different seeing and different instruments, with different AO-correction quality. This shows the robustness and versatility of the model. We also plan to use it to parameterize the PSF for the future instruments on bigger telescopes such as the Extremely Large Telescope (ELT).

Finally, the small number of parameters makes this model suited for image post-processing techniques such as deconvolution of long-exposure images. Deconvolution using parametric PSFs has already been demonstrated by Drummond (1998) and Fétick et al. (2019). We plan to develop a myopic deconvolution algorithm estimating both the observed object and the PSF parameters in a marginal approach similar to Blanco & Mugnier (2011).

Acknowledgements. This work was supported by the French Direction Générale de l'Armement (DGA) and Aix-Marseille Université (AMU). This work was supported by the Action Spécifique Haute Résolution Angulaire (ASHRA) of CNRS/INSU co-funded by CNES. This project has received funding from the European Union's Horizon 2020 research and innovation program under grant agreement No. 730890. This material reflects only the authors views and the Commission is not liable for any use that may be made of the information contained therein. This study has been partly funded by the French Aerospace Lab (ONERA) in the frame of the VASCO Research Project. The authors are thankful to Pierre Vernazza for providing data related to his ESO Large Program ID 199.C-0074.

References

- Andersen, D. R., Stoesz, J., Morris, S., et al. 2006, *PASP*, **118**, 1574
 Ascenzo, J., Neichel, B., Silva, M., Fusco, T., & Garcia, P. 2015, *Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes IV (AO4ELT4)*, E1
 Bacon, R., Bauer, S., Böhm, P., et al. 2006, in *Ground-based and Airborne Instrumentation for Astronomy*, Int. Soc. Opt. Photonics, 6269, 62690J
 Bacon, R., Accardo, M., Adjali, L., et al. 2010, in *Ground-based and Airborne Instrumentation for Astronomy III*, Int. Soc. Opt. Photonics, 7735, 773508
 Beuzit, J. L., Feldt, M., Dohlen, K., et al. 2008, in *Ground-based and Airborne Instrumentation for Astronomy II*, Int. Soc. Opt. Photonics, 7014, 701418
 Beuzit, J. L., Vigan, A., Mouillet, D., et al. 2019, *A&A*, submitted [arXiv:1902.04080]
 Blanco, L., & Mugnier, L. M. 2011, *Opt. Express*, **19**, 23227
 Calia, D. B., Hackenberg, W., Holzlöhner, R., Lewis, S., & Pfrommer, T. 2014, *Adv. Opt. Technol.*, **3**, 345
 Conan, J. M. 1994, PhD Thesis, Université Paris XI Orsay, France
 Conan, R., & Correia, C. 2014, in *Adaptive Optics Systems IV*, Proc. SPIE, 9148, 91486C
 Davies, R., & Kasper, M. 2012, *ARA&A*, **50**, 305
 Drummond, J. D. 1998, in *Adaptive Optical System Technologies*, eds. D. Bonaccini, & R. K. Tyson, *Proc. SPIE*, **3353**, 1030
 Fedrigo, E., Donaldson, R., Soenke, C., et al. 2006, *SPIE Conf. Ser.*, **6272**, 627210
 Fétick, R. J., Jorda, L., Vernazza, P., et al. 2019, *A&A*, **623**, A6
 Fétick, R. J. L., Neichel, B., Mugnier, L. M., Montmerle-Bonnefois, A., & Fusco, T. 2018, *MNRAS*, **481**, 5210
 Fusco, T., Sauvage, J. F., Petit, C., et al. 2014, in *Adaptive Optics Systems IV*, Int. Soc. Opt. Photonics, 9148, 91481U

A&A 628, A99 (2019)

- Goodman, J. W. 1968, [Fourier optics](#), 3
- Jolissaint, L., & Veran, J. P. 2002, in [European Southern Observatory Conference and Workshop Proceedings](#), eds. E. Vernet, R. Ragazzoni, S. Esposito, & N. Hubin, 58, 201
- Jones, E., Oliphant, T., & Peterson, P. 2001, [SciPy: Open Source Scientific Tools for Python](#), <http://www.scipy.org/>
- Martin, O. A., Gendron, É., Rousset, G., et al. 2017, [A&A](#), 598, A37
- Milli, J., Mouillet, D., Fusco, T., et al. 2017, ArXiv e-prints [arXiv:1710.05417]
- Moffat, A. 1969, [A&A](#), 3, 455
- Mugnier, L. M., Fusco, T., & Conan, J.-M. 2004, [J. Opt. Soc. Am. A](#), 21, 1841
- Mugnier, L. M., Sauvage, J. F., Fusco, T., Cornia, A., & Dandy, S. 2008, [Opt. Express](#), 16, 18406
- Müller Sánchez, F., Davies, R. I., Eisenhauer, F., et al. 2006, [A&A](#), 454, 481
- N'Diaye, M., Dohlen, K., Fusco, T., & Paul, B. 2013, [A&A](#), 555, A94
- Orban de Xivry, G., Rabien, S., Busoni, L., et al. 2015, [Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes IV \(AO4ELT4\)](#), E72
- Racine, R., Walker, G. A., Nadeau, D., Doyon, R., & Marois, C. 1999, [PASP](#), 111, 587
- Ragland, S., Dupuy, T. J., Jolissaint, L., et al. 2018, in [Adaptive Optics Systems VI](#), SPIE Conf. Ser., 10703, 107031J.
- Rigaut, F. J., Veran, J. P., & Lai, O. 1998, in [Adaptive Optical System Technologies](#), eds. D. Bonaccini, & R. K. Tyson, SPIE Conf. Ser., 3353, 1038
- Roddier, F. 1981, [Progr. Opt.](#), 19, 281
- Roddier, F. 1999, [Adaptive Optics in Astronomy](#) (Cambridge, UK: Cambridge University Press)
- Rusu, C. E., Oguri, M., Minowa, Y., et al. 2016, [MNRAS](#), 458, 2
- Sauvage, J. F., Fusco, T., Petit, C., et al. 2010, in [Adaptive Optics Systems II](#), Int. Soc. Opt. Photonics, 7736, 77360F
- Schmid, H. M., Bazzon, A., Roelfsema, R., et al. 2018, [A&A](#), 619, A9
- Ströbele, S., La Penna, P., Arsenault, R., et al. 2012, in [Adaptive Optics Systems III](#), Proc. SPIE, 8447, 844737
- Vernazza, P., Brož, M., Drouard, A., et al. 2018, [A&A](#), 618, A154
- Viiikinkoski, M., Vernazza, P., Hanuš, J., et al. 2018, [A&A](#), 619, L3
- Zieleniewski, S., & Thatte, N. 2013, [Proceedings of the Third AO4ELT Conference](#)

Appendix A: Integral of a truncated Moffat

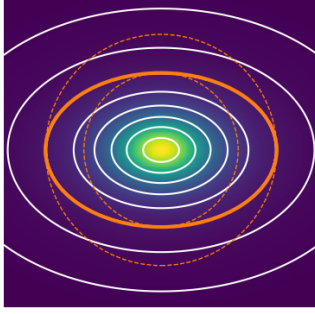


Fig. A.1. Visualization of an elongated Moffat (colour map), its elliptical level curves (white), and the ellipse $\mathbb{E}(R_x, R_y)$ inside which the integral is computed. Dashed circles of radius R_x and R_y help to visualize the error done when computing the integral over the ellipse instead of a circle. A very elongated Moffat is shown here ($\alpha_x = 1.5\alpha_y$).

A Moffat function as given in Eq. (2) shows elliptical contours (see Fig. A.1). In this appendix we compute the integral of the Moffat function inside one of these elliptical contours, called $\mathbb{E}(R_x, R_y)$, of semi-major axis R_x and semi-minor axis $R_y = (\alpha_y/\alpha_x)R_x$. The integral to calculate is

$$I(R_x, R_y) = \iint_{\mathbb{E}(R_x, R_y)} M_A(x, y) dx dy. \quad (\text{A.1})$$

Let us perform the change of variables

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times [-\pi, \pi[& \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus (0, 0) \\ (r, \theta) & \rightarrow (\alpha_x r \cos \theta, \alpha_y r \sin \theta) \end{cases}. \quad (\text{A.2})$$

The determinant of the Jacobian is

$$\det J_\phi = \begin{vmatrix} \alpha_x \cos \theta & -r \alpha_x \sin \theta \\ \alpha_y \sin \theta & r \alpha_y \cos \theta \end{vmatrix} = \alpha_x \alpha_y r. \quad (\text{A.3})$$

The integral of the Moffat in the ellipse is rewritten as

$$\begin{aligned} I(R_x, R_y) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{R_x/\alpha_x} |\det J_\phi| M_A(\phi(r, \theta)) dr d\theta \\ &= 2\pi A \alpha_x \alpha_y \int_0^{R_x/\alpha_x} [1 + r^2]^{-\beta} \\ &= A \frac{\pi \alpha_x \alpha_y}{\beta - 1} \left\{ 1 - [1 + (R_x/\alpha_x)^2]^{1-\beta} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

where we assumed $\beta \neq 1$.

In the nearly circular regime $\alpha_x \simeq \alpha_y$ and $R_x \simeq R_y$ so the integral over the ellipse $\mathbb{E}(R_x, R_y)$ is nearly equal to the energy in a disk of radius R_x . This assumption is made for our model of PSD to compute the residual variance below the AO cutoff frequency in Eq. (11).

Moreover it is possible to calculate the integral of the Moffat function over the whole plane. The assumption $\beta > 1$ is mandatory to get a bounded integral (finite energy). Under this assumption, letting $R_x \rightarrow +\infty$ and $R_y \rightarrow +\infty$, one finds

$$I(+\infty, +\infty) = A \frac{\pi \alpha_x \alpha_y}{\beta - 1}. \quad (\text{A.5})$$

Consequently, in order to get a Moffat of unit integral over the whole plane, one must choose the Moffat amplitude factor as

$$A = \frac{\beta - 1}{\pi \alpha_x \alpha_y}. \quad (\text{A.6})$$

Appendix B: Analytic solution for the flux and background

The minimum of \mathcal{L} (given in Eq. (15)) has an analytic solution for γ and ζ since nulling the partial derivative of \mathcal{L} towards these parameters gives

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} = 0 &\iff \sum_{i,j} w_{i,j} h_{i,j} [\gamma \cdot h_{i,j} + \zeta - d_{i,j}] = 0 \\ &\iff \gamma \sum_{i,j} w_{i,j} h_{i,j}^2 + \zeta \sum_{i,j} w_{i,j} h_{i,j} = \sum_{i,j} w_{i,j} h_{i,j} d_{i,j} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

and

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \zeta} = 0 \iff \sum_{i,j} w_{i,j} [\gamma \cdot h_{i,j} + \zeta - d_{i,j}] = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$\iff \gamma \sum_{i,j} w_{i,j} h_{i,j} + \zeta \sum_{i,j} w_{i,j} = \sum_{i,j} w_{i,j} d_{i,j}. \quad (\text{B.3})$$

These two equations are linear in γ and ζ . They can be written within the matrix formalism

$$\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} \zeta \\ \gamma \end{pmatrix} = \sum_{i,j} w_{i,j} d_{i,j} \begin{pmatrix} 1 \\ h_{i,j} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

where \mathcal{A} is the 2×2 matrix of the system defined as

$$\mathcal{A} = \sum_{i,j} w_{i,j} \begin{pmatrix} 1 & h_{i,j} \\ h_{i,j} & h_{i,j}^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

In order to invert \mathcal{A} , we need to make sure that $\det(\mathcal{A}) \neq 0$. The determinant of \mathcal{A} is

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{A}) &= \left(\sum_{i,j} w_{i,j} \right) \left(\sum_{i,j} w_{i,j} h_{i,j}^2 \right) - \left(\sum_{i,j} w_{i,j} h_{i,j} \right)^2 \\ &= \left(\sum_{i,j} \sqrt{w_{i,j}^2} \right) \left(\sum_{i,j} (\sqrt{w_{i,j} h_{i,j}})^2 \right) - \left(\sum_{i,j} (\sqrt{w_{i,j}}) (\sqrt{w_{i,j} h_{i,j}}) \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

We can now define the two vectors $\sqrt{W} = \{\sqrt{w_{i,j}}\}$ and $\sqrt{WH} = \{\sqrt{w_{i,j} h_{i,j}}\}$. Using these notations the determinant is rewritten as

$$\det(\mathcal{A}) = \|\sqrt{W}\|^2 \|\sqrt{WH}\|^2 - |\langle \sqrt{W}, \sqrt{WH} \rangle|^2. \quad (\text{B.7})$$

We recognize the Cauchy-Schwarz inequality. It follows that $\det(\mathcal{A}) \geq 0$, with equality only if \sqrt{W} and \sqrt{WH} are colinear vectors. The colinearity is written as

$$\begin{aligned} \sqrt{W} // \sqrt{WH} &\iff \exists k \in \mathbb{R} \mid \forall (i, j), k \sqrt{w_{i,j}} = \sqrt{w_{i,j} h_{i,j}} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{R} \mid \forall (i, j) \text{ where } w_{i,j} \neq 0, k = h_{i,j}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

This states that the determinant of \mathcal{A} is null only if the PSF model h is constant on each point where $w_{i,j} \neq 0$. Since our PSF is not constant on the domain $w_{i,j} \neq 0$, we ensure that $\det(\mathcal{A}) \neq 0$ and the analytic solution for γ and ζ is written as

$$\begin{pmatrix} \zeta \\ \gamma \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{-1} \sum_{i,j} w_{i,j} d_{i,j} \begin{pmatrix} 1 \\ h_{i,j} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

Troisième partie

Estimation de la PSF et
déconvolution

Chapitre 6

État de l'art en déconvolution

Résumé

La déconvolution est une technique de traitement d'image qui permet de retrouver de l'information sur l'objet observé. La déconvolution réduit l'effet de « floutage » dû à la PSF instrumentale et atmosphérique. La déconvolution fait partie de la classe plus générale des problèmes inverses, particulièrement sensibles au bruit de mesure. Ce chapitre dresse un état de l'art et les outils nécessaires à la déconvolution classique (PSF connue) et en déconvolution myope (PSF imparfaitement connue) dans le domaine de l'astronomie.

Sommaire

| | | |
|------------|--|------------|
| 6.1 | Les problèmes inverses | 127 |
| 6.1.1 | La modélisation | 127 |
| 6.1.2 | Des problèmes mal posés | 129 |
| 6.1.3 | L'estimation statistique | 130 |
| 6.2 | La déconvolution classique | 130 |
| 6.2.1 | Le problème direct de convolution | 130 |
| 6.2.2 | La solution moindres carrés et filtre inverse | 131 |
| 6.2.3 | La vision bayésienne : maximum <i>a posteriori</i> | 132 |
| 6.2.4 | La vision bayésienne : moyenne <i>a posteriori</i> | 137 |
| 6.3 | La déconvolution « myope » et « aveugle » | 139 |
| 6.3.1 | Problème d'estimation de PSF en déconvolution | 139 |
| 6.3.2 | La déconvolution jointe avec Mistral | 140 |

6.1 Les problèmes inverses

6.1.1 La modélisation

La mesure, aussi appelée observation, est un moyen d'obtenir une information sur le monde qui nous entoure. Pour observer un objet d'intérêt x_0 , nous utilisons un système d'observation, décrit par une fonction f_0 . Ce système fournit la mesure y_0 , qui dépend de l'objet observé x_0 , du bruit n_0 et de paramètres de nuisance θ_0 . Ces nuisances sont des paramètres inconnus du système (environnement+instrument) modifiant le résultat de l'observation. Il s'agit, par exemple, de la forme de la réponse impulsionnelle d'un système, paramétrée par θ_0 . Nous écrivons l'équation d'observation comme

$$y_0 = f_0(x_0, \theta_0) \diamond n_0 \quad (6.1)$$

avec \diamond l'opérateur de bruitage de la mesure. Dans les cas que nous considérons le bruit est additif, mais peut éventuellement dépendre de l'objet observé (bruit de Poisson). Cette équation d'observation est une équation physique (naturelle) et causale : les causes (x_0, θ_0, n_0) donnent la conséquence y_0 de la mesure. Les espaces de définitions de ces variables sont notés

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ n_0 \in N \\ \theta_0 \in \Theta \\ y_0 \in Y \triangleq f_0(X, \Theta) \diamond N \end{cases} \quad (6.2)$$

Résoudre un problème inverse c'est tenter d'inverser l'équation directe¹ de l'observation : à partir de la mesure (conséquence) pouvoir trouver la cause (objet observé), indépendamment des paramètres de nuisance. En pratique, la fonction d'observation f_0 n'est pas parfaitement connue de l'observateur, elle est modélisée par une fonction f qui en est une approximation (Fig. 6.1). Le problème à résoudre revient alors à chercher une solution $(x, \theta) \in (X, \Theta)$ de l'équation suivante

$$f_0(x_0, \theta_0) \diamond n_0 = y_0 = f(x, \theta) \diamond n \quad (6.3)$$

L'opérateur \diamond est supposé connu pour simplification, mais en pratique il peut également être imparfaitement connu. La modélisation imparfaite du problème est source d'erreur dans un problème inverse. Sans une connaissance parfaite de f_0 , il n'est pas possible d'avoir accès à l'objet vrai observé x_0 . Une erreur de modélisation peut conduire à un biais d'estimation. A l'inverse, une connaissance parfaite de f_0 n'est pas non plus une garantie de pouvoir trouver x_0 , à cause de modes non vus par l'observation et du bruit de mesure. Cet inconvénient est typique des problèmes mal posés, ce que nous explicitons dans la section suivante.

1. L'équation directe est une équation *causale*, au sens où elle correspond à la logique naturelle des causes qui entraînent les conséquences.

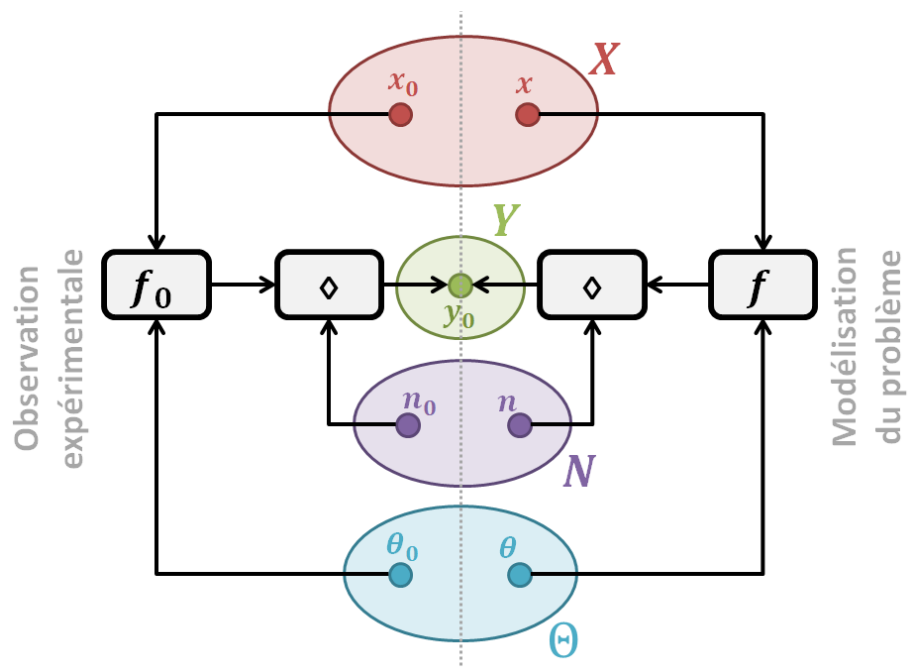


FIGURE 6.1 – Définition des espaces de l'expérience (indiqué 0) et de la modélisation (sans indice). Les deux doivent s'accorder sur la mesure expérimentale y_0 . Cette figure traduit l'équation 6.3 du texte.

6.1.2 Des problèmes mal posés

En plus de l'erreur de modélisation, des difficultés apparaissent lors de l'inversion du problème modélisé de l'Eq. 6.3. Celui-ci est dit bien posé au sens de Hadamard s'il vérifie les conditions suivantes d'existence, unicité et continuité.

Existence et unicité selon x : Pour définir l'existence et unicité au sens de Hadamard, il faut considérer des paramètres θ fixés. Pour ce θ fixé et n quelconque

$$\exists! x \in X \mid y_0 = f(x, \theta)$$

Le bruit est alors considéré comme une petite variation sur l'image. Bien que y_0 appartienne à $f_0(X, \theta_0) \diamond N$, la condition de Hadamard cherche un x qui donne $y_0 \in f(X, \theta)$, soit un espace image modélisé non bruité, donc plus petit que l'espace image expérimental (bruité). La solution peut alors ne pas exister à cause du bruit, même en ayant choisi le bon $\theta = \theta_0$. Si malgré tout nous avons obtenu l'existence et l'unicité, il est alors possible de construire une fonction g inverse de f de Y dans X (Fig. 6.1) pour ce θ fixé

$$g : \begin{cases} Y & \rightarrow & X \\ y_0 & \mapsto & g(y_0) \triangleq x \end{cases} \quad (6.4)$$

Continuité de g selon y : Si cette fonction d'inversion g existe, il faut s'assurer qu'elle ait de bonnes propriétés. Plus elle est régulière (lipschitzienne, dérivable, dérivée continue...) et plus elle autorise l'utilisation de propriétés mathématiques fortes pour la résolution du problème en pratique. La propriété la plus basique selon Hadamard est sa continuité

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mu > 0 \mid \forall (y_1, y_2) \in Y^2, \|y_1 - y_2\| < \mu \implies \|g(y_1) - g(y_2)\| < \varepsilon$$

Les problèmes inverses sont souvent des problèmes mal posés, c'est-à-dire qu'ils violent au moins l'une des conditions de Hadamard. L'existence peut être perdue si la fonction f ne modélise pas correctement les phénomènes physiques de f_0 mis en jeu lors de l'observation, ou à cause de la présence même du bruit qui donne $y_0 \notin f(X, \theta_0)$. La mesure y_0 est bien dans l'espace image de la fonction d'observation expérimentale f_0 , mais pas forcément dans l'espace image de la fonction modélisée² f . L'unicité peut être perdue par exemple à cause du bruit, les structures fines (spatiales, temporelles, spectrales...) de l'observation peuvent constituer du signal ou du bruit. Il est alors difficile de démêler l'un de l'autre. La taille des espaces est alors importante. En réduisant la taille de X par exemple avec des contraintes théoriques

2. C'est le cas par exemple en imagerie d'un champ étendu d'étoiles avec un fort anisoplanétisme. Si la modélisation du problème considère une PSF constante dans le champ de vue, alors le problème est effectivement mal modélisé. Il n'existe pas de champ d'étoiles avec une PSF constante qui permettrait de retrouver l'observation.

sur l'objet observé, ou en réduisant la taille de N (donc de Y) par exemple en diminuant le bruit expérimental, des solutions multiples pourraient être éliminées. Enfin, la condition de continuité n'est généralement pas respectée, les problèmes inverses « bruts »³ tendent à faire exploser le bruit et donner des résultats inexploitable.

6.1.3 L'estimation statistique

Les problèmes inverses mal posés ne permettent pas d'inverser f et de retrouver directement x . On cherche alors une solution estimée \hat{x} qui en soit suffisamment proche (au sens d'une norme à définir). Les problèmes inverses sont souvent sensibles au bruit de mesure, qui est un des paramètres de nuisance n . La solution \hat{x} est alors une variable statistique dépendante de la statistique du bruit de mesure. La fonction g n'est pas l'inverse exacte de f , elle prend alors la signification d'un *estimateur*, qui à une mesure y_0 lui associe l'estimation \hat{x}

$$g(y_0) \triangleq \hat{x} \quad (6.5)$$

Un bon estimateur g est un estimateur qui donne une faible erreur $\|x - \hat{x}\|$, pour une norme à définir. Un estimateur est jugé sur les critères suivants

- **Biais** : $b = \mathbb{E}\{\hat{x} - x\}$ qui est une erreur systématique souvent difficile à évaluer,
- **Variance** : $\text{Var}(\hat{x} - x)$ qui représente la dispersion des estimées due au bruit, donc la sensibilité de l'estimateur au bruit,
- **Robustesse (par rapport au bruit)** : faible amplification du bruit dans l'estimation,
- **Consistance** : l'erreur $\|\hat{x} - x\|$ tend vers 0 lorsque le bruit tend vers 0 ou que le nombre de données tend vers l'infini.

6.2 La déconvolution classique

6.2.1 Le problème direct de convolution

Dans le cas où le problème direct est une opération de convolution par un noyau, et éventuellement soumis à un bruit, alors le problème inverse associé est appelé déconvolution. En imagerie, la convolution est causée par la fonction d'étalement de point (PSF). Déconvoluer, c'est donc atténuer les effets délétères de la PSF sur la

3. Un problème inverse « brut » s'entend ici comme « non régularisé ». La régularisation est une technique qui sera introduite à la section suivante et qui permet de stabiliser les problèmes inverses notamment en évitant l'explosion du bruit.

résolution de l'image. Dans cette section 6.2 la PSF est connue, ce qui correspond à un problème de déconvolution dit « classique ». Le cas d'une déconvolution à PSF inconnue est plus complexe et sera étudié à la section 6.3.

Nous nous plaçons dans le cadre du domaine isoplanétique, la PSF est alors considérée comme constante dans le champ de vue. Le bruit est additif, de moyenne nulle, mais non forcément stationnaire. Le problème direct est l'équation 1.44 d'imagerie discrète en dimension finie, qui permet de passer d'un objet continu et d'une convolution continue à un objet, une PSF et une convolution discrétisés

$$i_{x,y} = \sum_{k,l} h_{x-k,y-l} o_{k,l} + n_{x,y} \quad (6.6)$$

Ce qui peut s'écrire matriciellement

$$\mathbf{i} = H\mathbf{o} + \mathbf{n} \quad (6.7)$$

avec H l'opérateur de convolution avec la PSF, de dimension $N^2 \times N^2$ si le détecteur possède N^2 pixels, ce qui peut se révéler très lourd numériquement. Une image 512×512 donne donc une matrice H contenant 68 milliards d'éléments, chacun codé sur plusieurs octets (selon la précision décimale). Des propriétés de matrices circulantes ou creuses doivent être exploitées pour réduire la taille mémoire et la complexité de calcul.

6.2.2 La solution moindres carrés et filtre inverse

La solution de moindres carrés [Mugnier, 2008, Nashed, 1981] associé à l'écriture matricielle précédente est

$$\hat{\mathbf{o}} = \arg \min_o \|\mathbf{i} - H\mathbf{o}\|^2 \quad (6.8)$$

Si $\text{Ker } H \neq \{0\}$, alors H est non injective et une infinité de solutions existent. La solution de norme minimale est donnée par l'inverse généralisée de Moore-Penrose

$$\hat{\mathbf{o}} \triangleq H^\dagger \mathbf{i} \quad (6.9)$$

La solution des moindres carrés permet donc d'obtenir existence et unicité, avec la fonction d'inversion $g \equiv H^\dagger$. Cependant elle ne résout pas la question de la stabilité. La solution moindres carrés correspond à un filtrage en Fourier pour un opérateur H de convolution. Sous hypothèse d'une matrice H circulante, celle-ci devient diagonale par transformée de Fourier discrète. L'inverser revient alors à inverser ses éléments diagonaux non nuls. Cette propriété est directement visible en

prenant la transformée de Fourier de l'équation 1.44. Dans le domaine de Fourier, la convolution est transformée en multiplication, ce qui permet d'écrire

$$\tilde{i}(\vec{f}) = \tilde{o}(\vec{f}) \times \tilde{h}(\vec{f}) + \tilde{n}(\vec{f}) \quad (6.10)$$

avec \tilde{i} la transformée de Fourier de l'image, \tilde{o} celle de l'objet, \tilde{h} celle de la PSF (i.e. la FTO) et \tilde{n} celle du bruit. La FTO étant inférieures ou égales à l'unité, le processus d'observation se traduit par une diminution (au mieux par une conservation) des fréquences de l'objet dans l'image. Si la FTO est trop basse, alors l'information fréquentielle de l'objet est noyée dans le bruit. De plus, pour toutes les fréquences annulant la FTO, l'information de l'objet à ces fréquences est irrémédiablement perdue. La déconvolution correspond à un processus de restauration de l'information fréquentielle de l'objet à partir de l'image. Toutefois les problèmes liés au bruit ou à l'annulation de la FTO empêchent une restauration complète et parfaite de l'objet. La déconvolution est donc typiquement un problème inverse mal posé. La méthode de déconvolution brute consiste à estimer l'objet par une inversion directe de l'équation d'imagerie

$$\hat{o}(\vec{r}) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\tilde{i}(\vec{f})}{\tilde{h}(\vec{f})} \right\} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\tilde{h}^*(\vec{f}) \tilde{i}(\vec{f})}{|\tilde{h}(\vec{f})|^2} \right\} \quad (6.11)$$

En multipliant au dénominateur et au numérateur par le conjugué de \tilde{h} , la deuxième écriture fait apparaître l'équivalence entre filtre inverse et solution des moindres carrés en H^\dagger [Mugnier, 2008] en mettant à zéro les valeurs propres nulles (modes non observés). Cette estimation est non biaisée, mais amplifie dramatiquement le bruit pour les valeurs propres faibles (FTO faible), ce qui rend le résultat inutilisable. Le problème doit alors être régularisé afin de filtrer efficacement le bruit, tout en restaurant au mieux les fréquences de l'objet.

6.2.3 La vision bayésienne : maximum *a posteriori*

Une approche plus rigoureuse et efficace est donnée par une vision probabiliste du problème de déconvolution [Demoment, 1989]. On peut alors chercher à maximiser la probabilité *a posteriori* de l'objet en ayant connaissance de l'image, c'est-à-dire de trouver l'objet le plus probable ayant engendré l'image. La règle de Bayes permet d'explicitier la probabilité *a posteriori* en fonction des deux termes suivants

- La vraisemblance $P(i|o)$, qui traduit l'observation effectuée et dépend de la réponse instrumentale et de la loi du bruit,
- La probabilité *a priori* $P(o)$ qui traduit les connaissances additionnelles que nous avons sur l'objet indépendamment de son observation ⁴.

4. Par abus de langage l'information *a priori* est dite connue « avant » l'observation. Mais des auteurs comme Jaynes [2003] (Sec. 4.1) soulignent qu'il n'y a pas forcément d'antériorité de l'information *a priori* et qu'elle peut être fournie temporellement après l'observation.

La règle de Bayes s'écrit

$$P(o|i) = \frac{P(i|o) P(o)}{P(i)} \quad (6.12)$$

Le terme du dénominateur $P(i)$ apparaît comme un coefficient de normalisation, qui ne donne aucune information sur l'objet. Etant donné que la valeur en absolu de la probabilité n'est pas utile, mais seulement sa forme en fonction de l'objet, ce terme $P(i)$ est omis pour simplification d'écriture.

La solution de ce problème est appelée solution Maximum A Posteriori (MAP) et par définition s'écrit

$$\hat{o} \triangleq \arg \max_o P(o|i) \quad (6.13)$$

En prenant l'anti-logarithme de la règle de Bayes, le produit des probabilités devient une addition, et l'argument à chercher n'est plus un maximum mais un minimum. Minimiser une fonction est effectivement la convention utilisée pour les algorithmes d'optimisation. Ainsi le problème s'écrit

$$\hat{o} = \arg \min_o \{J_v(o) + J_o(o)\} \quad (6.14)$$

avec $J_v(o) \triangleq -\ln P(i|o)$ le terme d'attache aux données provenant de la vraisemblance et $J_o(o) \triangleq -\ln P(o)$ le terme de régularisation provenant de la probabilité *a priori*. La régularisation apparaît donc naturellement comme une connaissance *a priori* de l'objet qui consiste à rajouter de l'information pour éviter les écueils de l'explosion du bruit des méthodes non régularisées. Le formalisme bayésien donne ainsi une explication probabiliste aux termes de régularisation introduits par exemple par [Tikhonov and Arsenin \[1977\]](#).

La probabilité *a priori* doit être suffisamment informative pour éviter ces problèmes d'explosion de bruit en contraignant l'évolution de l'objet recherché dans son espace (noté X sur la Fig. 6.1), la variance des solutions diminue donc. Cependant une régularisation trop forte est « sur-informative » (à tort) et risque d'omettre des solutions plausibles. Le problème inverse est très peu sensible au bruit, avec une faible variance des solutions estimées, mais potentiellement un fort biais. Un compromis entre variance et biais doit être trouvé (Fig. 6.2).

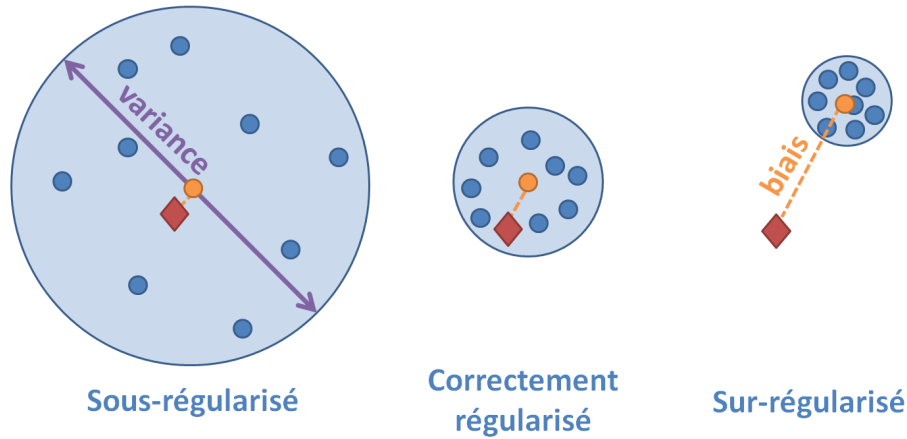


FIGURE 6.2 – Effet de la régularisation sur la variance et le biais des estimations. Losange rouge : objet vrai. Points bleus : estimations pour différentes réalisations de bruit de mesure. Point orange : moyenne des estimations.

Le terme d'attache aux données

Le terme d'attache aux données est directement issu de la probabilité du bruit ⁵. Pour une image, un objet et une PSF discrétisés on obtient

$$P(\mathbf{i}|\mathbf{o}) = P_n(\mathbf{i} - \mathbf{o} \otimes \mathbf{h}) \quad (6.15)$$

Pour les images astronomiques les deux bruits principaux sont le bruit de détecteur et le bruit de photon. Le bruit de détecteur provient du bruit thermique et du bruit de lecture électronique (*read out noise*, abrégé RON). Les instruments et les détecteurs en astronomie étant refroidis, le bruit dominant est le bruit de lecture électronique. Nous considérons une statistique Gaussienne de moyenne nulle et de variance $\sigma_{\text{RON}}^2(k, l)$ pour le pixel (k, l) . Bien qu'il soit possible de considérer théoriquement un bruit inhomogène, dépendant du pixel (k, l) , en pratique il est considéré de variance constante σ_{RON}^2 sur le détecteur. Cette variance est connue, donnée par le constructeur ou mesurée expérimentalement.

Quant au bruit de photons il suit une statistique de Poisson, ce qui conduit au critère d'attache aux données pour un objet discret

$$J_{v,\text{Poisson}}(\mathbf{o}) = \sum_{k,l} (\mathbf{h} \otimes \mathbf{o})_{k,l} - \mathbf{i}_{k,l} \ln [(\mathbf{h} \otimes \mathbf{o})_{k,l}] \quad (6.16)$$

5. La statistique du bruit ne doit pas dépendre de l'objet recherché pour cette écriture. Il est possible toutefois d'inclure le bruit de Poisson en le considérant comme un bruit gaussien inhomogène sur l'image, dont la variance est donnée par l'image. Cette variance est donc fixée par l'observation et ne dépend pas de l'objet recherché. Ce sont les équations 6.17 et 6.18.

avec $(\mathbf{h} \otimes \mathbf{o})_{k,l}$ le nombre de photons attendus au pixel (k, l) et $\mathbf{i}_{k,l}$ le nombre de photons effectivement comptés. Cependant ce critère est non quadratique, ce qui peut entraîner des difficultés de minimisation et augmenter le temps de calcul, comme noté par Mugnier et al. [2004]. Une approche simplificatrice consiste donc à approximer la distribution de Poisson par une Gaussienne, c'est-à-dire une distribution définie uniquement par ses moments d'ordre 1 et 2. Les moments supérieurs diminuent lorsque le nombre de photons attendus augmente. En particulier, le moment suivant d'ordre 3, l'asymétrie, évolue en l'inverse de la racine carrée du flux. Cette approximation est donc consistante, plus le SNR de l'image augmente et meilleure est l'approximation de la distribution de Poisson par une Gaussienne. En pratique un flux d'environ 10 photons par pixel est suffisant pour justifier l'approximation par une Gaussienne. Cette approximation est également validée expérimentalement par l'algorithme MISTRAL de Mugnier et al. [2004]. Le bruit de photon et de lecture étant indépendants et tous deux considérés comme Gaussien, la variance totale du bruit au pixel (k, l) est

$$(\sigma_n^2)_{k,l} = \sigma_{\text{RON}}^2 + (\sigma_{\text{photon}}^2)_{k,l} \quad (6.17)$$

La variance du bruit de photon est estimée sur l'image comme étant

$$(\sigma_{\text{photon}}^2)_{k,l} \simeq \max\{\mathbf{i}_{k,l}, 0\} \quad (6.18)$$

Un bruit de photons non constant permet de prendre en compte les grandes dynamiques de flux particulièrement importantes concernant les images astronomiques : un objet observé lumineux sur un fond sombre. Le terme d'attache aux données est alors l'anti-logarithme d'une Gaussienne, soit

$$J_v(\mathbf{o}) = \sum_{k,l} \frac{[\mathbf{i}_{k,l} - (\mathbf{h} \otimes \mathbf{o})_{k,l}]^2}{(\sigma_n^2)_{k,l}} \quad (6.19)$$

Le terme d'attache aux données représente donc un moindre carré pondéré par le bruit. Comme nous l'avons vu à la section 6.2.2, la minimisation de ce terme seul conduit à une amplification du bruit. Il faut alors forcément prendre en compte l'information *a priori* sur l'objet via le terme de régularisation pour aboutir à une solution satisfaisante.

La régularisation

La régularisation est une information *a priori* qui permet de filtrer le bruit tout en laissant passer au maximum le signal de l'objet. Le bruit entraîne des variations d'intensité indépendantes sur chaque pixel. Il est particulièrement visible aux hautes fréquences spatiales, c'est-à-dire aux variations entre un pixel et ses voisins. Il est

alors intéressant de régulariser en limitant ces variations intempestives sur l'objet reconstruit. Mugnier et al. [2004] définissent un gradient isotrope

$$\nabla \mathbf{o}_{k,l} = \sqrt{(\mathbf{o}_{k+1,l} - \mathbf{o}_{k,l})^2 + (\mathbf{o}_{k,l+1} - \mathbf{o}_{k,l})^2} \quad (6.20)$$

Ce gradient est isotrope car à symétrie circulaire et n'induit pas des axes privilégiés de calcul de gradient le long des axes du détecteur. Il est le moins informatif possible car les structures de l'objet observé ne sont pas forcément alignées avec le détecteur.

La régularisation consiste alors à limiter la norme de ce gradient. Plusieurs choix de normes sont possibles, parmi lesquels la norme L_1 , L_2 ou $L_1 - L_2$ (Fig. 6.3). La régularisation quadratique L_2 est de type Wiener. A cause de sa stricte convexité les forts gradients de l'objet sont fortement pénalisés, ce qui favorise des solutions lisses. Cette régularisation est intéressante pour des objets diffus de type galaxie, par contre elle représente mal la classe d'objets à bords francs comme les satellites, planètes ou astéroïdes. Utilisée sur de tels objets, la régularisation L_2 se traduira par un biais d'estimation. A l'opposé, la régularisation linéaire L_1 [Chambolle, 2004, Rudin et al., 1992] est en limite de convexité. Elle pénalise identiquement les forts ou faibles gradients de l'objet. Elle restitue alors des bords francs, mais avec un effet « cartoon » : les structures sont restituées par des zones constantes par morceaux. De plus elle présente des difficultés numériques de convergence à cause de la non dérivabilité en zéro. Entre les deux se trouve la régularisation $L_1 - L_2$ [Brette and Idier, 1996, Mugnier et al., 2001, Rey, 1983] qui pénalise quadratiquement les faibles gradients et linéairement les forts gradients. Elle permet donc de restituer les bords francs de l'objet tout en lissant le bruit. De plus elle est dérivable en zéro, ce qui aide aux calculs numériques. Son écriture par Mugnier et al. [2004] est

$$J_o(\mathbf{o}) = \mu \delta^2 \sum_{k,l} \left[\frac{\nabla \mathbf{o}_{k,l}}{\delta} - \ln \left(1 + \frac{\nabla \mathbf{o}_{k,l}}{\delta} \right) \right] \quad (6.21)$$

avec μ et δ deux hyper-paramètres strictement positifs pouvant être estimés empiriquement à partir de l'image. Le paramètre δ détermine la transition entre le caractère L_1 et L_2 de la norme. Pour $\delta \rightarrow +\infty$ la norme se rapproche de la norme L_2 , pour $\delta \rightarrow 0$ elle se rapproche de la norme L_1 . Le paramètre μ pondère la régularisation J_o par rapport au terme d'attache aux données J_v .

L'algorithme de déconvolution MISTRAL

L'algorithme de déconvolution MISTRAL (*Myopic Iterative STep-preserving Restoration ALgorithm*) [Mugnier et al., 2004] peut effectuer une déconvolution « classique », à PSF constante, en minimisant la somme du terme d'attache aux données Eq. 6.19

et du terme de régularisation $L_1 - L_2$ de l'Eq. 6.21. Le critère à minimiser selon l'objet est alors

$$J(\mathbf{o}; \mu, \delta) = \sum_{k,l} \frac{[\mathbf{i}_{k,l} - (\mathbf{h} \otimes \mathbf{o})_{k,l}]^2}{(\sigma_n^2)_{k,l}} + \mu \delta^2 \sum_{k,l} \left[\frac{\nabla \mathbf{o}_{k,l}}{\delta} - \ln \left(1 + \frac{\nabla \mathbf{o}_{k,l}}{\delta} \right) \right] \quad (6.22)$$

avec supervision des deux hyper-paramètres μ et δ . Les valeurs par défaut des hyper-paramètres sont estimées empiriquement sur l'image

$$\begin{cases} \mu = 1 \\ \delta = 0.5 \times \left[\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k,l} (\mathbf{i}_{k,l} - \mathbf{i}_{k-1,l})^2} + \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k,l} (\mathbf{i}_{k,l} - \mathbf{i}_{k,l-1})^2} \right] \end{cases} \quad (6.23)$$

avec N le nombre de pixels dans l'image. L'hyper-paramètre δ est donc de l'ordre de grandeur de la norme L_2 du gradient de l'image. L'estimation du paramètre δ dépend donc du SNR de l'image. En cas de fort SNR le gradient de l'image est dominé par le terme $\mathbf{h} \otimes \mathbf{o}$ dépendant de l'objet.

De plus, une contrainte de positivité est imposée sur l'objet. Il n'existe pas de solution analytique et il faut faire appel à un minimiseur numérique. L'implémentation actuelle de MISTRAL en IDL utilise un algorithme de descente itératif de type quasi-Newton développé par Thiébaud [2002] et spécialisé pour les minimisations en grande dimension. La contrainte de positivité est implémentée par projection de l'objet sur l'espace des réels positifs à chaque itération. Le minimiseur est initialisé avec l'image elle-même en tant qu'objet de départ. La méthode est robuste et converge toujours vers une solution acceptable en pratique, lorsque la PSF est connue. Des exemples de déconvolution avec MISTRAL sont montrés sur la figure 6.3. Les cas L_1 et L_2 sont obtenus en divisant et multipliant δ par 500 respectivement. Un cas à faible SNR est considéré afin de mieux montrer l'impact de la régularisation.

6.2.4 La vision bayésienne : moyenne *a posteriori*

La recherche du maximum *a posteriori* n'est pas l'unique méthode envisageable dans le cadre bayésien. Une deuxième méthode présente dans la littérature consiste à trouver l'objet moyen *a posteriori* au lieu du maximum. Cette approche n'est pas utilisée dans cette thèse, mais est évoquée brièvement afin de donner un panel des différentes possibilités qu'offre la vision bayésienne.

Pour trouver la solution de la moyenne *a posteriori*, des échantillons de l'objet sont tirés selon la loi *a posteriori* grâce à un algorithme de Monte-Carlo à Chaîne de Markov (MCMC), puis les échantillons sont moyennés [Orioux et al., 2010, 2012, Villeneuve and Carfantan, 2012]. Cette méthode minimise l'écart quadratique moyen

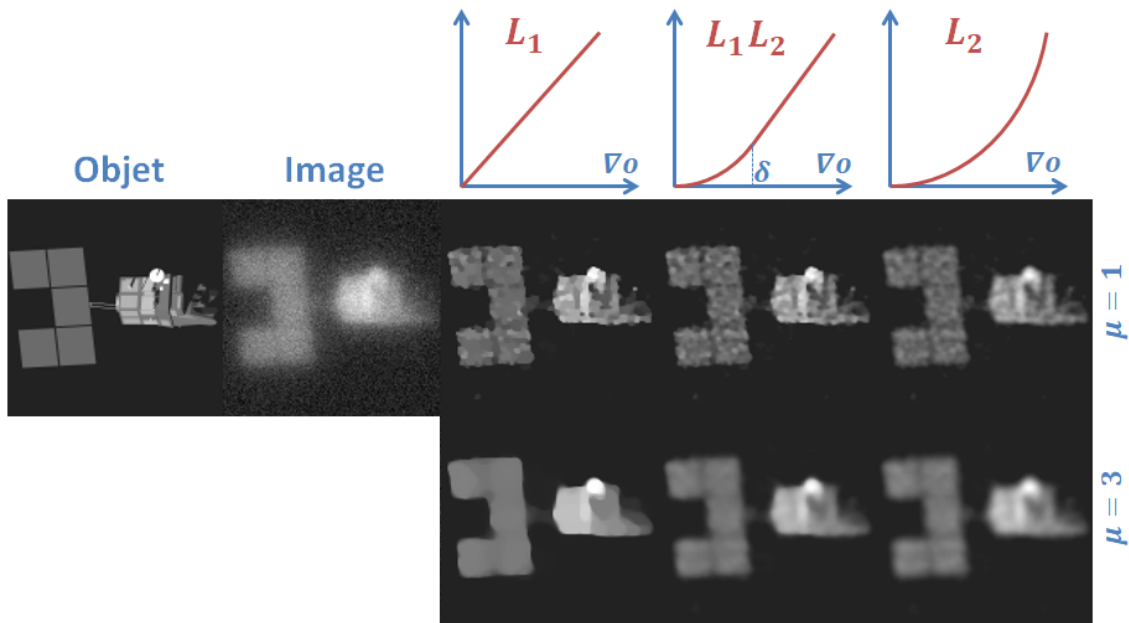


FIGURE 6.3 – Effet de la régularisation sur la déconvolution d’une image de synthèse d’un satellite SPOT. De gauche à droite : objet observé, image obtenue par simulation, déconvolution avec une régularisation L_1 (bords francs et effet « cartoon »), une régularisation $L_1 - L_2$ (bords francs) et une régularisation L_2 (bords lisses). La contrainte de positivité est imposée pour les trois déconvolutions. Ligne du bas : mêmes cas, pour une régularisation plus importante $\mu = 3$.

à l'objet vrai, en moyenne sur les tirages aléatoires. Mais son inconvénient majeur est de devoir tirer un nombre de plus en plus important d'échantillons lorsque le nombre d'inconnues augmente, ce qui augmente considérablement le coût de calcul pour les images de grande taille.

Les deux méthodes, du maximum et de la moyenne, coïncident pour une loi de probabilité *a posteriori* symétrique. Cependant elles donnent des résultats légèrement différents dans le cas général où le maximum n'est pas centré sur la moyenne.

6.3 La déconvolution « myope » et « aveugle »

6.3.1 Problème d'estimation de PSF en déconvolution

La réponse impulsionnelle (PSF) est hautement variable en imagerie pour l'astronomie, notamment à cause de la turbulence et de la correction OA, ce qui se traduit par des variations importantes du rapport de Strehl, de la largeur à mi-hauteur du pic cohérent, ou de la hauteur du halo. Les difficultés ou impossibilités d'estimation de la PSF évoquées à la section 3.3 entraînent des erreurs de déconvolution « classique » (à PSF fixée) voire une impossibilité de déconvoluer les images d'observation. Dans le critère de l'équation 6.22, une erreur d'estimation de la PSF \mathbf{h} biaise le terme d'attache aux données, et donc la solution estimée. La conséquence de cette erreur de PSF est plus intuitive dans le domaine de Fourier. En effet pour un bruit homogène, le terme d'attache aux données s'écrit

$$J_v(\mathbf{o}) = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_f |\tilde{\mathbf{i}}(f) - \tilde{\mathbf{o}}(f)\tilde{\mathbf{h}}(f)|^2 \quad (6.24)$$

Ainsi minimiser ce terme de vraisemblance revient à chercher les fréquences de l'objet qui multipliées par les fréquences de la PSF donnent les fréquences de l'image observée. Si une certaine fréquence ou plusieurs fréquences de la PSF sont mal estimées d'un facteur multiplicatif, alors les fréquences de l'objet estimé par ce terme seront divisées de ce facteur. Qualitativement, augmenter les fréquences de la PSF entraîne une diminution des fréquences de l'objet estimé, soit une sous-déconvolution. Le cas extrême est une PSF estimée de la forme d'un Dirac, l'algorithme n'effectue plus de déconvolution, seulement du débruitage avec le terme de régularisation. Dans le cas contraire, des fréquences de PSF sous-estimées se traduisent par une sur-déconvolution. Cette sur-déconvolution est dramatique car elle fait apparaître des artefacts via l'augmentation de certaines fréquences de l'objet estimé.

Il faut donc un algorithme de déconvolution capable de s'adapter à ces méconnaissances de la PSF, ce sont les algorithmes dits « myope » ou « aveugle ». Dans

les deux cas la PSF n'est pas fixée (donnée par l'utilisateur) dans l'algorithme mais est estimée par cet algorithme. Il s'agit là de déconvolutions avec paramètres de nuisance : la PSF n'est pas un élément recherché par l'utilisateur mais doit toutefois être estimée pour réaliser la déconvolution. La différence entre une déconvolution myope et aveugle est le niveau de connaissance sur la PSF : une déconvolution aveugle suppose une PSF totalement inconnue, tandis qu'une déconvolution myope requiert quelques informations sur cette PSF.

6.3.2 La déconvolution jointe avec Mistral

Le formalisme bayésien est une fois de plus utile afin de définir ces déconvolutions myope et aveugle. La PSF est paramétrée par un jeu de paramètres Ω qui sont considérées comme des variables aléatoires à estimer dans ce formalisme

$$P(\mathbf{o}, \Omega | \mathbf{i}) = \frac{P(\mathbf{i} | \mathbf{o}, \Omega) P(\mathbf{o}) P(\Omega)}{P(\mathbf{i})} \quad (6.25)$$

En suivant la même démarche que précédemment pour la déconvolution classique, on considère l'anti-logarithme de cette expression, ce qui donne les mêmes termes d'attache aux données et de régularisation sur l'objet. Il s'ajoute un terme J_h de régularisation sur les paramètres de la PSF. Ainsi le critère à minimiser est

$$J(\mathbf{o}, \Omega) = J_v(\mathbf{o}, \Omega) + J_o(\mathbf{o}) + J_h(\Omega) \quad (6.26)$$

La minimisation de J porte à la fois sur l'objet et les paramètres PSF, il s'agit donc d'une estimation jointe. L'algorithme MISTRAL en mode myope effectue cette estimation jointe. Pour MISTRAL les paramètres Ω sont directement les coefficients $\mathbf{h}_{k,l}$ de la PSF. Ainsi pour une image de N pixels, l'algorithme doit estimer N valeurs de l'objet plus N valeurs de la PSF, ce qui correspond à un contraste statistique, ratio du nombre de données sur nombre d'inconnues, qui vaut $1/2$. La régularisation sur la PSF nécessite une PSF moyenne et une DSP de la PSF. Si on suppose une statistique *a priori* gaussienne de $h - h_m$ et une matrice de covariance circulante (pour être diagonalisable en Fourier) alors la régularisation sur la PSF s'écrit

$$J_h(\mathbf{h}) = \sum_{k,l} \frac{|\tilde{\mathbf{h}}_{k,l} - \tilde{\mathbf{h}}_{m,k,l}|^2}{\mathcal{H}_{k,l}} \quad (6.27)$$

avec \mathbf{h}_m la PSF moyenne et \mathcal{H} la DSP de la PSF. Cette PSF moyenne et la DSP sont des hyper-paramètres qui doivent être fournis à l'algorithme en plus des hyper-paramètres μ et δ de régularisation sur l'objet. Une caractéristique importante de cette régularisation de la PSF est une indépendance fréquence à fréquence du

critère J_h : la valeur de la FTO estimée $\tilde{h}_{k,l}$ n'influence pas celle de $\tilde{h}_{k',l'}$, pour $(k,l) \neq (k',l')$. Le minimiseur de Thiébaud [2002] avec contrainte de positivité par projection est utilisé.

En pratique la PSF moyenne est estimée sur étoile peu avant ou après l'observation de l'objet d'intérêt. Cette estimation de PSF sur étoile peut se trouver incompatible avec la PSF vraie lors de l'observation de l'objet d'intérêt, à cause de la variabilité de la turbulence et de la correction OA (Sec. 3.3.1). Elle n'est donc pas utilisable directement pour la déconvolution classique à PSF fixée. Cet effet est illustré sur la Fig. 6.4 à la 4ème image. Les panneaux du satellite sont plus sombres sur les bords, ce qui est un artefact de déconvolution. Les structures internes sont également moins bien estimées. Quant à la déconvolution myope (5ème image) elle ne présente pas ces défauts. La PSF moyenne de l'algorithme myope h_m est la PSF erronée observée sur étoile. La DSP \mathcal{H} est le carré de la moyenne circulaire de la valeur absolue de la FTO

$$\mathcal{H}(f) = \text{circmoy}\{|\tilde{h}_m|^2\}(f) \quad (6.28)$$

La moyenne circulaire lisse les éventuelles asymétries radiales de la FTO estimée, ce qui est donc une régularisation peu informative. La DSP peut également être estimée à partir de différentes PSF de l'instrument. Ce jeu de PSF ne peut pas être estimé sur la même étoile avec peu de temps d'écart, sinon le jeu ne serait pas statistiquement représentatif des PSF possibles, sa variance serait très faible. Il est alors estimé sur différentes étoiles, ou au cours de nuits différentes. Mais alors il est difficile de savoir si ces PSF sont effectivement représentatives de la turbulence et de la qualité de correction de l'OA lors de l'observation de l'objet. L'obtention d'une PSF moyenne h_m et d'une DSP \mathcal{H} représentatives de l'observation est alors une tâche ardue qui n'est pas exempte d'éventuels biais pour la régularisation de l'algorithme myope.

Conclusion du chapitre

Nous avons présenté ici l'état de l'art en déconvolution dite « classique » (à PSF fixée) ou myope/aveugle (à PSF variable). Les méthodes de déconvolution que nous utilisons sont basées sur le maximum *a posteriori* (MAP) du formalisme bayésien. L'estimation de la PSF est ardue, et est le facteur limitant pour des applications astronomiques où la PSF corrigée par OA évolue fortement en fonction des conditions d'observation. Le chapitre suivant présente l'application de méthodes de déconvolution MAP sur des données d'astéroïdes. ces données ont été acquises par les astronomes du Laboratoire d'Astrophysique de Marseille et requièrent une déconvolution pour l'extraction de paramètres d'intérêts pour les astronomes.

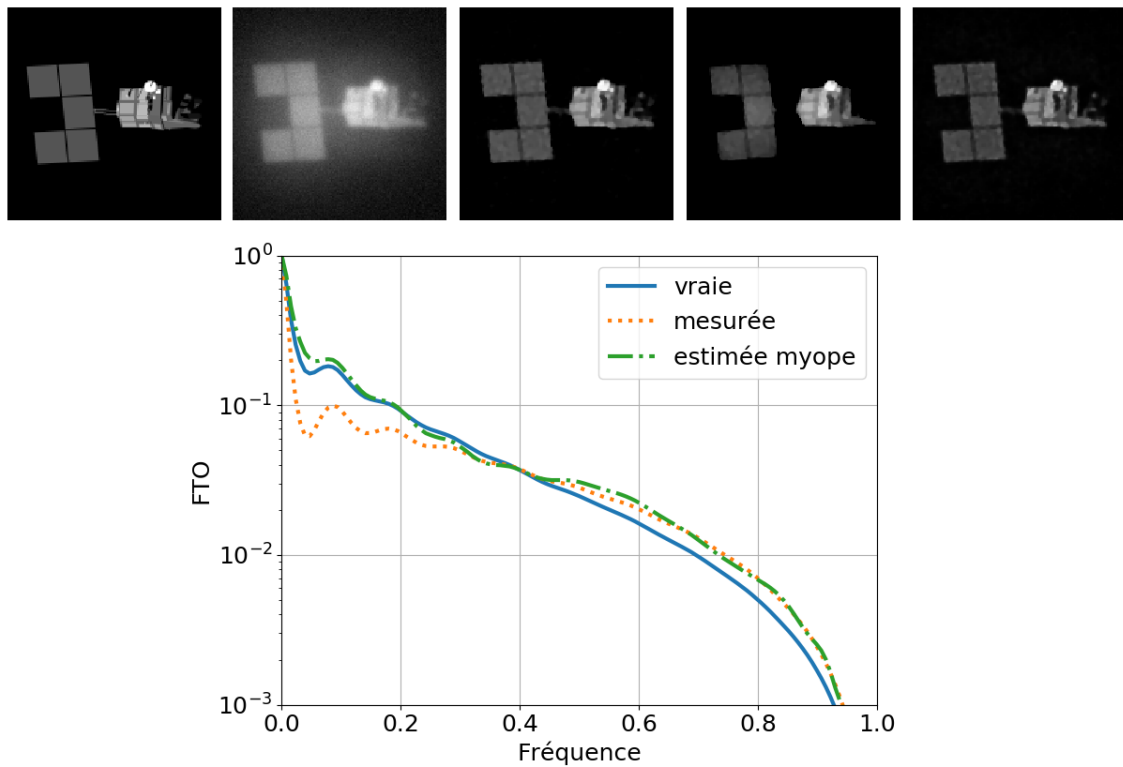


FIGURE 6.4 – Déconvolution myope avec MISTRAL, sur PSF et image de simulation. De gauche à droite : objet, image, déconvolution avec la vraie PSF, déconvolution avec une PSF erronée, déconvolution myope avec la PSF erronée en tant que PSF moyenne. Au dessous : FTO vraie, estimée sur étoile (erronée), estimée par MISTRAL. La déconvolution myope estime plutôt bien la FTO pour $f < 0.5$ dans ce cas. Cependant la régularisation de la PSF de MISTRAL est indépendante fréquence à fréquence, ce qui n'assure pas de retrouver correctement les hautes fréquences.

Chapitre 7

Exploitation de PSF paramétriques en déconvolution

Résumé

De 2017 à 2019, le *Large Program* d'observation d'astéroïdes sur SPHERE/Zimpol a fourni des images à haute résolution d'une qualité incomparable. Cependant la déconvolution de ces images entraînait fréquemment de forts artefacts de déconvolution, empêchant l'extraction de paramètres physiques d'intérêt pour les astronomes. Ce chapitre montre la méthodologie de résolution de ces problèmes de déconvolution. Nous identifions d'abord que les erreurs proviennent de l'estimation de la PSF sur étoile, puis nous montrons que des PSF paramétriques sont adaptées à la déconvolution d'image longue pose corrigée par OA. Nous employons une méthode de déconvolution classique (non myope) où les paramètres PSF sont déterminés de manière supervisée. L'impact de ces paramètres de PSF sur la qualité de déconvolution est étudié.

Sommaire

| | | |
|------------|---|------------|
| 7.1 | Le ESO <i>Large Program</i> d'observation d'astéroïdes | 144 |
| 7.1.1 | Présentation du programme | 144 |
| 7.1.2 | L'astéroïde Vesta | 146 |
| 7.2 | Difficultés de déconvolution avec PSF sur étoile | 148 |
| 7.3 | Déconvolution avec des PSFs paramétriques | 150 |
| 7.3.1 | Utilisation d'un modèle simple de PSF | 150 |
| 7.3.2 | Déconvolution de Vesta avec une Moffat | 152 |
| 7.3.3 | Déconvolution de Vesta avec PSFAO ₁₉ | 158 |
| 7.3.4 | Changement de stratégie du <i>Large Program</i> | 159 |

7.1 Le ESO *Large Program* d'observation d'astéroïdes

7.1.1 Présentation du programme

Le ESO *Large Program* d'observation d'astéroïdes (ID 199.C-0074) s'est vu attribuer 152 heures d'observation sur l'instrument VLT/SPHERE/Zimpol entre avril 2017 et mars 2019. Les observations sont dans le visible : filtre N_R de SPHERE/Zimpol, centré à 645.9 nm, de 56.7 nm de large. Bien que Zimpol soit un polarimètre, cette spécificité n'est pas utilisée par le programme d'observation, lequel utilise seulement la haute résolution angulaire (3.5 mas/pixel) fournie par l'instrument et son système d'OA extrême SAXO. Ce programme est mené par Pierre Vernazza (Laboratoire d'Astrophysique de Marseille), qui en est le *Principal Investigator* (PI). Ce projet réunit des laboratoires et centres de recherche français (LAM, Observatoire de la Côte d'Azur, ONERA...), européens (Institut d'Astrophysique et de Géophysique de Liège, Charles University, ESTEC...) et américains (MIT, JPL...).

L'objectif du *Large Program* est de caractériser ces astéroïdes afin d'étudier leur formation et leur évolution dans le système solaire. Ils sont des traceurs de la composition primordiale du système solaire, de la formation de petits corps et d'un éventuel bombardement tardif par migration de planètes. Le *Large Program* se base sur l'observation à haute résolution d'environ 35 astéroïdes de la ceinture principale dans le spectre visible. Les astéroïdes ont été sélectionnés par leur taille et leur composition. Un diamètre supérieur à 100 km est requis pour obtenir une résolution suffisante, typiquement de quelques dizaines à une centaine de pixels dans le diamètre, la taille pixel de Zimpol étant de 3.5 mas. Les astéroïdes observés sont de composition carbonée (types Ch, Cgh, B, C), silicatée (type S), métallique (type P) ou autre (type D) selon le classement taxonomique de DeMeo et al. [2009]. L'ensemble de ces types représente plus de 90% de la masse de la ceinture principale. Ce *Large Program* est à ce jour le programme d'observation d'astéroïdes en haute résolution dans le visible statistiquement le plus complet. Il est complémentaire d'autres programmes d'observation d'astéroïdes par imagerie radar [Ostro et al., 2002], par occultation d'étoiles [Durech et al., 2011], courbes de luminosité [Piironen et al., 2001] ou spectrométrie [Bus and Binzel, 2002, DeMeo et al., 2009].

Le *Large Program* a pour but de fournir des images détaillées de la surface de ces 35 (approximativement) astéroïdes, observés à plusieurs époques de leur rotation. Les paramètres principaux qui intéressent les astronomes sont :

- Le contour de l'astéroïde, ce qui permet d'en déduire son volume [Fétick et al., 2019b]. Cette information peut être comparée avec les éventuelles oc-

cultations d'étoiles [Carry et al., 2019, Hanuš et al., 2020]. Cependant les occultations d'étoiles sont des événements sporadiques et fournissant une information uniquement le long de la ligne d'occultation. L'imagerie à haute résolution permet une extraction directe de l'ensemble du contour, puis une estimation du volume. Si la masse de l'astéroïde est également connue, il est possible d'en déduire la densité de l'astéroïde, donc d'obtenir une information sur sa constitution interne et son éventuelle porosité.

- Forme générale de l'astéroïde. Les astéroïdes présentent des formes très variées. Sphérique comme Hygiea [Vernazza et al., 2020]. Des cratères géants de Vesta [Thomas et al., 1997], Iris [Hanus et al., 2019] et Julia [Vernazza et al., 2018a]. Bilobé comme Cléopatra [Descamps et al., 2011, Ostro et al., 2000]. Des formes plus complexes comme Daphne [Carry et al., 2019]. La forme renseigne sur les processus de formation par accréation de matière ou contact de deux astéroïdes par exemple.
- La topologie et état de cratérisation de surface [Marsset et al., 2020]. La surface des astéroïdes est plus stable que celle des planètes (géologie, tectonique de plaques, érosion), elle conserve les impacts, ce qui permet de les compter en fonction de leur taille. Les astronomes peuvent en déduire des caractéristiques cinétiques des impacteurs ou les propriétés du régolithe¹ de l'astéroïde impacté.
- Les variations d'albédo [Russell et al., 2012, Schröder et al., 2013]. Certains astéroïdes peuvent présenter des variations d'albédo très localisées (Aricia Tholus sur Vesta par exemple) qui peuvent renseigner sur la composition de l'astéroïde sous le régolithe, mis à jour par un cratère d'impact.
- La rotation. En observant l'astéroïde à plusieurs dates, les astronomes en déduisent la vitesse de rotation. Celle-ci qui peut être comparée à la rotation estimée d'après les courbes de luminosité. [Hanus et al., 2020].

Grâce à des observations de plus en plus résolues des astéroïdes, et des observations à différentes phases de rotation, les astronomes peuvent reconstituer un modèle tridimensionnel de l'astéroïde. Deux méthodes différentes existent au sein de ce *Large Program*. Premièrement l'algorithme ADAM [Viikinkoski et al., 2015], *All Data Asteroid Modelling*, utilise les contours de l'astéroïde qui proviennent de mesures hétérogènes telles l'occultation d'étoiles ou des images à haute résolution, et utilise également des mesures de photométrie intégrée sur la surface de l'astéroïde. Le deuxième algorithme est OASIS [Jorda et al., 2010], *Optimized Astrophysical Simulator for Imaging Systems*, lequel simule la surface de l'astéroïde comme un ensemble de facettes. L'algorithme optimise l'orientation de chaque facette afin de retrouver

1. Couche superficielle poussiéreuse présente sur les corps sans atmosphère du système solaire, engendrée notamment par les impacts d'astéroïdes.

l'illumination correcte sur l'image mesurée. OASIS, contrairement à ADAM, a donc besoin de connaître la position du Soleil en plus de celle de l'astéroïde et de l'observateur. OASIS utilise une optique géométrique (rayons lumineux), des paramètres de réflectance de Hapke de l'astéroïde et simule les ombres projetées. Il a été utilisé avec succès sur des observations de l'astéroïde Steins [Jorda et al., 2012] et Lutetia [Hasselmann et al., 2016, Lamy et al., 2010] dans le cadre de la mission spatiale Rosetta de l'ESA. L'utilisation d'OASIS à partir d'observations au sol est plus difficile car l'algorithme est perturbé par le flou de la turbulence atmosphérique présent sur les images, même en présence d'OA. La déconvolution préalable des images est alors nécessaire pour le bon fonctionnement d'OASIS. Des contours francs sont nécessaires afin de déterminer les zones où positionner les facettes de l'astéroïde. Enfin les détails fins de l'astéroïde révélés par déconvolution peuvent alors être résolus par les facettes et augmenter les détails topographiques de l'objet OASIS, en particulier les cratères.

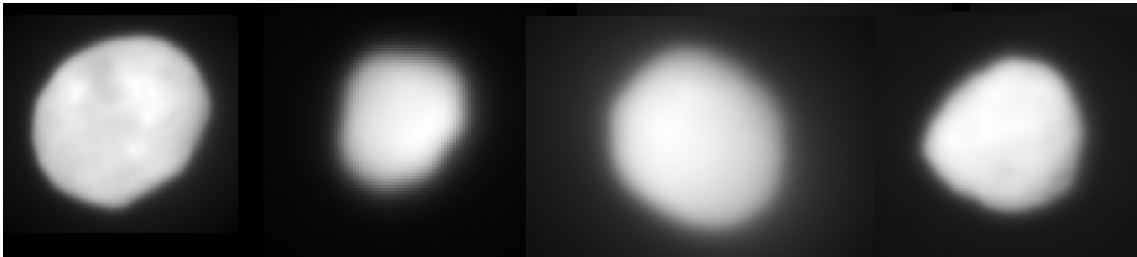


FIGURE 7.1 – Images réduites de SPHERE/Zimpol utilisant le système d'OA extrême SAXO. De gauche à droite : Vesta, Psyche, Pallas et Iris. Les tailles relatives des astéroïdes ne sont pas respectées sur cette image composite. Quelques détails d'albédo sont visibles sur Vesta, et quelques cratères sur Iris.

La figure 7.1 présente quatre astéroïdes tels que observés par SPHERE/Zimpol. La forme générale de l'astéroïde est visible, mais les détails internes sont difficilement discernables. Les détails d'albédo de Vesta (à gauche sur la figure) sont à peine visibles sur l'image, bien qu'il soit un astéroïde possédant de très fortes variations d'albédo [Schröder et al., 2013]. La déconvolution des images se révèle alors nécessaire pour gagner en résolution et retrouver l'information d'intérêt pour les astronomes : contours nets (donc volume précis), état de cratérisation de surface, détails d'albédo, rotation de l'astéroïde sur lui-même (orientation et vitesse).

7.1.2 L'astéroïde Vesta

L'astéroïde Vesta est un candidat idéal pour valider les techniques de traitement d'image en astronomie, dont la déconvolution. Cet astéroïde, le deuxième plus

| # | Nom | a [UA] | D [km] | Type | Référence | Intérêt |
|-----|------------|--------|--------|------|---|------------|
| 1 | Ceres | 2.77 | 939 | C | | validation |
| 2 | Pallas | 2.77 | 545 | B | Marsset et al. [2020] | science |
| 4 | Vesta | 2.36 | 525 | V | Fétick et al. [2019b] | validation |
| 7 | Iris | 2.39 | 200 | B | Hanuš et al. [2019] | science |
| 10 | Hygiea | 3.14 | 407 | B | Vernazza et al. [2020] | science |
| 16 | Psyche | 2.92 | 226 | B | Viikinkoski et al. [2018] | science |
| 29 | Amphitrite | 2.55 | 190 | S | | science |
| 31 | Euphrosyne | 3.16 | 267 | Cb | Yang [subm] | science |
| 41 | Daphne | 2.76 | 205 | Ch | Carry et al. [2019] | science |
| 89 | Julia | 2.55 | 145 | B | Vernazza et al. [2018a] | science |
| 216 | Kleopatra | 2.79 | 122 | Xe | | science |
| 704 | Interamnia | 3.06 | 306 | B | Hanuš et al. [2020] | science |

TABLE 7.1 – Liste de douze des ~ 35 astéroïdes observés par le *Large Program* ID 199.C-0074 et les références associées. Le diamètre donné est un diamètre effectif (équivalent volumique). Vesta et Ceres ont été observés pour valider la résolution accessible sur images déconvoluées par comparaison avec les images de la sonde spatiale NASA/Dawn, les autres astéroïdes sont des cas scientifiques novateurs pour la communauté des astronomes.

gros de la ceinture principale après Ceres, peut être angulairement résolu par les télescopes au sol munis d’OA. Il possède de multiples détails de cratérisation, de topographie et d’albédo à différentes échelles, depuis son cratère géant Rheasilvia (500km de diamètre environ) en son hémisphère Sud, jusqu’aux cratères les plus petits inférieurs au kilomètre. Vesta a été observé par le *Hubble Space Telescope*, qui a révélé son cratère géant et son monticule central [Thomas et al., 1997]. Puis la mission de la sonde spatiale NASA/Dawn [Russell and Raymond, 2011, Russell et al., 2012] a fourni des images d’une qualité inégalée (Fig.7.2).

Grâce à ces images ultra haute résolution de la sonde NASA/Dawn, l’algorithme OASIS de Jorda et al. [2010] est capable de reconstruire l’astéroïde et de le projeter sous n’importe quel angle d’observation et angle d’illumination. OASIS a donc été utilisé pour reconstruire, à partir des données NASA/Dawn, l’astéroïde Vesta tel qu’observé par SPHERE/Zimpol à 6 époques différentes de mai à juillet 2018. Nous avons accès à la fois aux observations expérimentales et à la résolution « absolue » qu’il serait possible d’obtenir par SPHERE en l’absence de diffraction (télescope de diamètre infini) et en l’absence de turbulence atmosphérique. En déconvoluant les images SPHERE et en les comparant, pixel à pixel, aux reconstructions OASIS il est alors possible d’en déduire une erreur de déconvolution. Il s’agit d’une occasion unique de valider la déconvolution sur données expérimentales. Les images OASIS

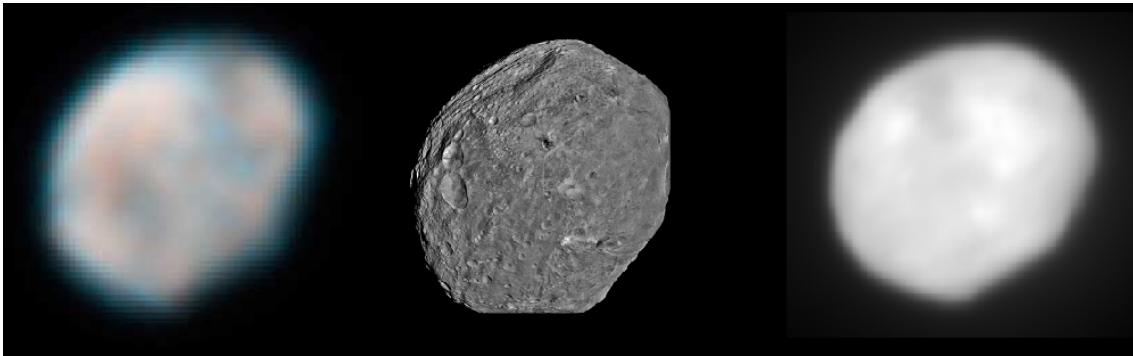


FIGURE 7.2 – Images de Vesta depuis le *Hubble Space Telescope* en 2007 (gauche), depuis la sonde spatiale NASA/Dawn en 2012 (milieu), et depuis le télescope au sol SPHERE/Zimpol en 2018 (droite). L’astéroïde est observé sous des angles différents. Crédits respectifs NASA/NASA/ESO.

ne contiennent pas l’information d’albédo, celle-ci doit être rajoutée. Nous utilisons la carte d’albédo qui nous a été généreusement fournie par [Schröder et al. \[2013\]](#), elle aussi issue des données NASA/Dawn. L’albédo visuel géométrique de [Schröder et al.](#) utilise les images de la *Framing Camera* de Dawn avec le *clear filter* de 400 nm à 1000 nm, dont le pic de réponse est à 700 nm. Cette carte d’albédo n’est disponible qu’en dessous du 30° Nord. L’astéroïde Vesta a été observé par SPHERE majoritairement par le Sud, l’information d’albédo manquante n’affecte que quelques pixels à l’extrême Nord. Les comparaisons entre images SPHERE et OASIS sont montrées à la figure 7.3. Les images SPHERE révèlent la forme générale de l’astéroïde, mais les détails d’albédo et de cratérisation sont perdus à cause de la turbulence. La déconvolution est nécessaire pour retrouver plus de détails dans les images SPHERE.

7.2 Difficultés de déconvolution avec PSF sur étoile

La déconvolution était prévue par les astronomes avant même le début du *Large Program*. Il y a donc un besoin systématique d’estimation de la PSF. Aucune étoile brillante n’étant présente dans le champ de vue étroit des observations, la stratégie au début du *Large Program* était alors d’observer une étoile de magnitude comparable à celle de l’astéroïde juste avant ou après l’observation de celui-ci [[Marsset et al., 2017](#), [Vernazza et al., 2018b](#)]. Environ 20% – 30% du temps d’observation alloué était dédié à l’acquisition de PSF sur étoile. Cette fraction de temps d’observation est importante et est révélatrice du besoin important de déconvolution pour les applications scientifiques des astronomes.

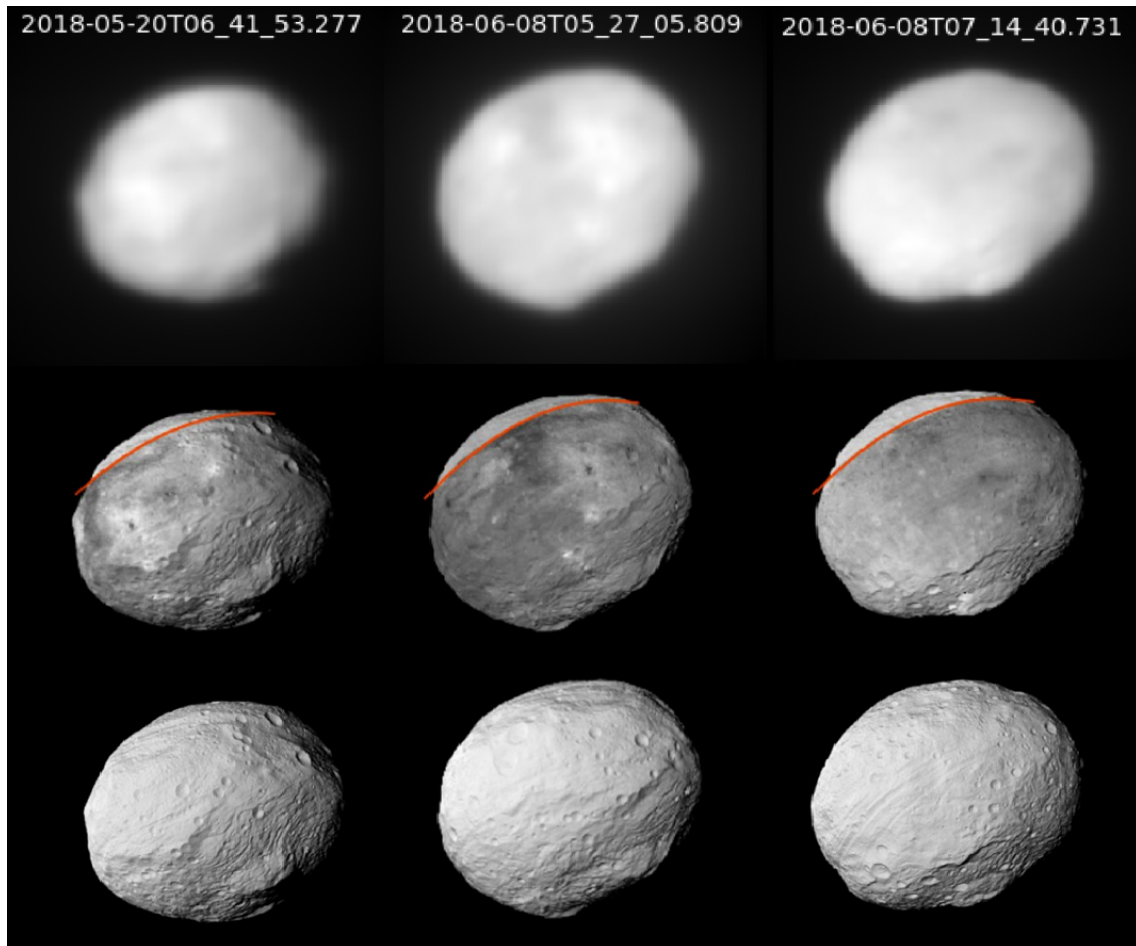


FIGURE 7.3 – Haut : images de Vesta par SPHERE/Zimpol à trois époques différentes. Milieu : images correspondantes OASIS avec albédo de Schröder et al. [2013] jusqu'à la latitude 30° Nord (ligne orange). Bas : images OASIS sans albédo. Le carré de l'intensité est montré afin d'augmenter les contrastes (détails d'albédo et cratères). Figure réalisée à partir de Fétick et al. [2019b].

Cependant des problèmes de déconvolution apparaissent dans environ la moitié des cas. Le même artefact est identifié : une couronne brillante apparaît sur l’objet déconvolué. La figure 7.4 illustre ce problème pour l’astéroïde Hygiea observé le 23 juin 2017 par SPHERE/Zimpol. Une PSF a été estimée 10 minutes auparavant sur l’étoile HD173750 (courbe orange sur la figure). Lors de la déconvolution avec Mistral en mode classique (non myope) utilisant la PSF estimée sur étoile, l’artefact de déconvolution apparaît (en haut au milieu sur la figure). Le résultat est inexploitable.

La technique envisagée alors est d’utiliser Mistral en mode myope. Un total de 23 PSF ont été acquises sur étoiles au cours de différentes nuits du *Large Program*. Il est alors possible d’en déduire une FTO moyenne (bleu continu) et un écart-type de cette FTO (bleu pointillés). L’algorithme Mistral est alors utilisé en mode myope avec une régularisation sur la PSF qui prend en compte la PSF correspondante à Hygiea (orange continu) comme PSF moyenne et l’écart-type calculé sur l’ensemble des PSF du *Large Program*. L’objet estimé en mode myope (en haut à droite) est de meilleure qualité, il commence à révéler une tâche brillante effectivement présente sur Hygiea [Vernazza et al., 2020]. Cependant l’artefact de déconvolution est toujours fort et ne permet pas de donner de certitudes sur les résultats. La FTO associée estimée par Mistral (en rouge) est surélevée par rapport à la FTO sur étoile (orange). Le problème semble donc provenir d’une FTO mesurée trop basse par rapport à la FTO réelle. Afin de préciser l’exacte origine de ce problème, nous utilisons des PSF paramétriques pour la déconvolution.

7.3 Déconvolution avec des PSFs paramétriques

7.3.1 Utilisation d’un modèle simple de PSF

Les problèmes de déconvolution des images SPHERE semblent bien provenir d’une mauvaise estimation de la PSF sur étoile. Cette origine n’était pas évidente au départ, la régularisation $L_1 - L_2$ ou le choix des hyper-paramètres μ et δ de MISTRAL étaient également suspectés d’entraîner des artefacts. Afin d’isoler le problème, les premiers tests ont consisté à utiliser des PSF paramétriques parcimonieuses de forme variable pour tester la déconvolution. En effet les PSF acquises sur étoiles sont fixes en déconvolution classique ou sont vues comme des PSF avec N pixels (typiquement un quart de million) degrés de libertés par MISTRAL, ce qui ne permet pas de comprendre l’origine du problème. Au contraire un modèle de PSF à peu de paramètres permet de comprendre l’évolution de la qualité de la déconvolution en fonction de ces paramètres. Ce problème de déconvolution étant apparu en 2017, au tout début de cette thèse, le modèle PSFAO₁₉ n’était pas encore disponible et nous avons utilisé le modèle de Moffat, simple et couramment utilisé

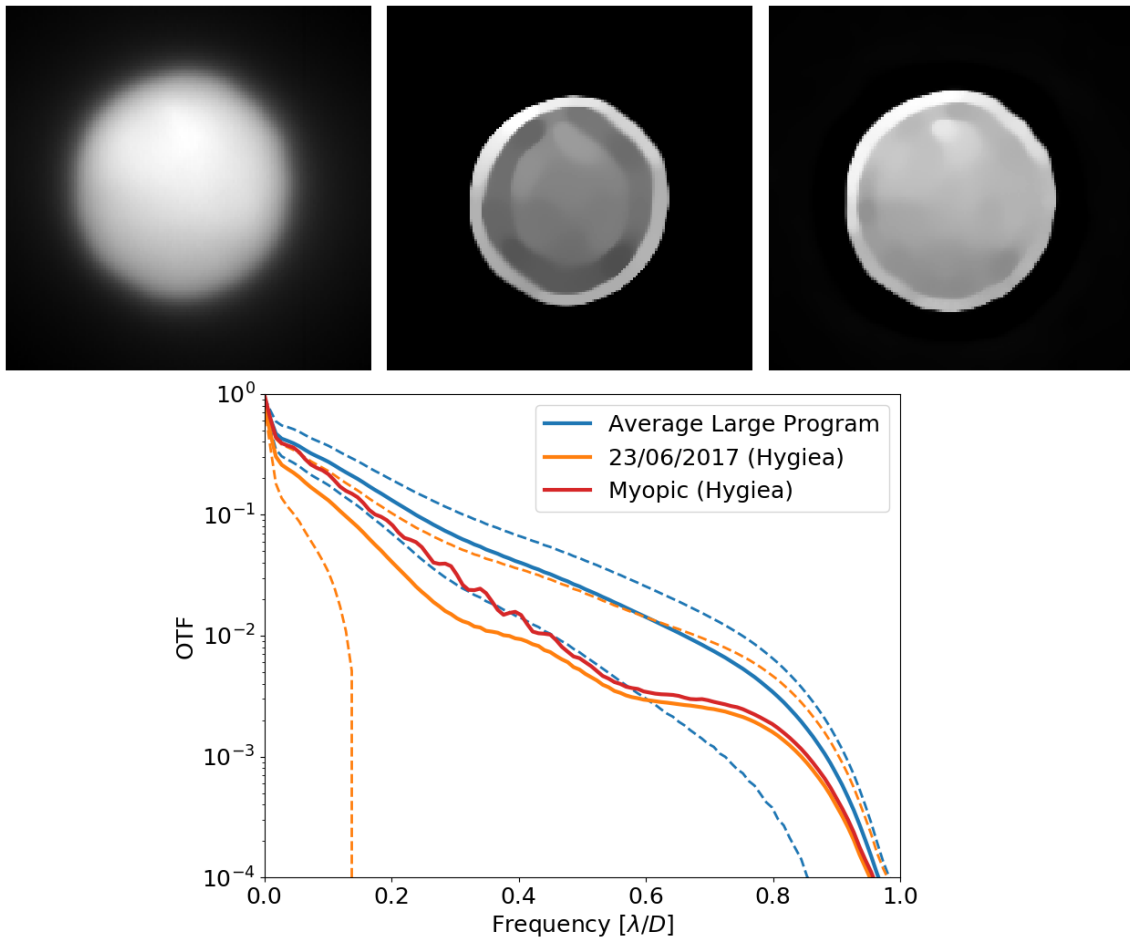


FIGURE 7.4 – Déconvolution de l’astéroïde Hygiea observé par SPHERE/Zimpol dans la nuit du 23/06/2017. En haut : image SPHERE, astéroïde déconvolué par Mistral en mode classique avec une PSF estimée sur étoile (FTO orange), astéroïde déconvolué par Mistral en mode myope (FTO rouge). De forts artefacts sont présents. En bas : FTO moyenne à partir de 23 PSF estimées sur étoiles (bleu continu), écart-type de ces FTO (bleu pointillés), FTO estimée sur étoile la nuit d’observation d’Hygiea (orange continu), écart-type des FTO (orange pointillés), et FTO estimée par Mistral en mode myope (rouge).

en astronomie. Pour rappel, dans une description de PSF à symétrie circulaire, ce modèle s'écrit

$$M_{\alpha,\beta}(r) = \frac{\beta - 1}{\pi\alpha^2} [1 + r^2/\alpha^2]^{-\beta} \quad (7.1)$$

avec les conditions $\alpha > 0$ et $\beta > 1$.

7.3.2 Déconvolution de Vesta avec une Moffat

Concernant l'astéroïde Vesta, aucune PSF sur étoile n'a été observée. Nous avons alors généré 25 fonctions de Moffat à symétrie circulaire pour $\alpha \in \{2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5\}$ (pixels) et $\beta \in \{1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7\}$. Ces profils de Moffat balayent un panel étendu de PSF, pour des largeurs à mi-hauteur (*Full Width at Half Maximum*, FWHM) de 3.5 à 7.6 pixels, et des rapport de Strehl de 13% à 96% sur l'instrument SPHERE/Zimpol (Fig. 7.5). Les déconvolutions associées à ces profils sont données à la figure 7.6. Elle montre clairement une évolution de la qualité de déconvolution en fonction des paramètres α et β . Cette évolution est diagonale, d'en haut à gauche ($\alpha = 4.5$ pixels, $\beta = 1.3$) à en bas à droite ($\alpha = 2.5$ pixels, $\beta = 1.7$), tout comme l'évolution du rapport de Strehl. Un rapport de Strehl élevé de la PSF de déconvolution entraîne un objet estimé lisse. Un rapport de Strehl faible entraîne un objet estimé plus structuré. Dans le cas extrême $\alpha = 4.5$ pixels et $\beta = 1.3$, il y a apparition d'un artefact de déconvolution prononcé : une couronne brillante sur le pourtour de l'objet estimé. Cet artefact apparaissait également sur certaines déconvolutions avec des PSF acquises sur étoiles (cf. Sec. 7.2). Ces artefacts proviennent d'une sur-déconvolution : la PSF estimée a un rapport de Strehl trop bas, sa FTO est également basse, les fréquences de l'objet déconvolué sont alors sur-estimées. Un modèle de PSF paramétrique permet de retrouver et de comprendre le comportement de la déconvolution avec des PSF acquises sur étoiles, certaines images sont sous-déconvoluées, d'autres sont sur-déconvoluées en fonction de la PSF.

Grâce à la reconstruction OASIS de Jorda et al. [2010] et à la carte d'albédo de Schröder et al. [2013], nous avons accès à la résolution pixellaire maximale de SPHERE/Zimpol : sans turbulence et sans diffraction. Pour chaque déconvolution, il est alors possible de comparer pixel à pixel l'objet estimé avec l'objet OASIS et d'en déduire une erreur en norme L_2 des objets normalisés par le flux moyen sur les pixels (Fig. 7.7, en haut à droite) et définie par

$$\varepsilon(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_{k,l} w_{k,l} (\bar{d}_{k,l}(\alpha, \beta) - a_{k,l} \bar{r}_{k,l})^2} \quad (7.2)$$

où la carte d'albédo de Schröder et al. est notée a . Le coefficient de poids w vaut 1 si l'information d'albédo est disponible et vaut 0 si elle n'est pas disponible (au

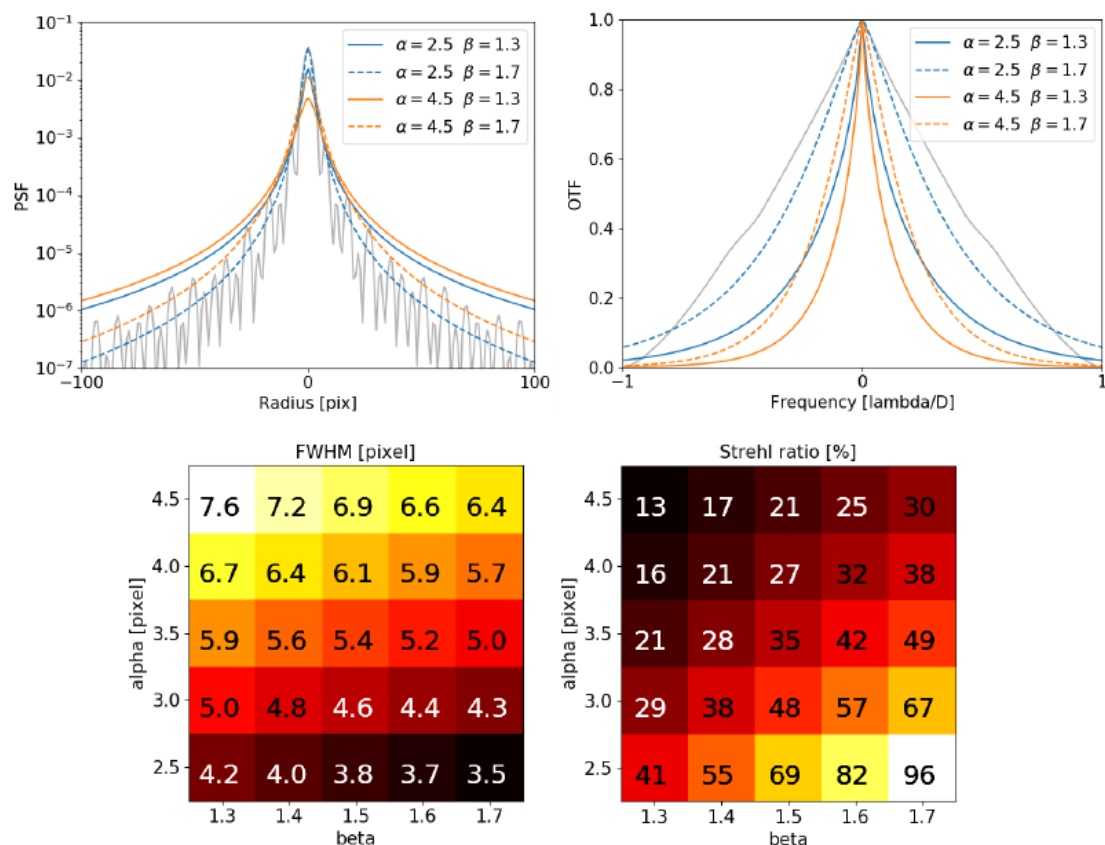


FIGURE 7.5 – Haut : Profil des PSF et FTO de quatre Moffat sur les 25 générées. Ces Moffat correspondent aux valeurs extrêmes des paramètres α et β considérés. La PSF à α minimal et β maximal est la plus piquée (Strehl=96%). La PSF et FTO de limite de diffraction de SPHERE/Zimpol est affichée en gris pour comparaison. Bas : Largeur à mi-hauteur (FWHM) et rapport de Strehl pour les 25 Moffat en fonction des valeurs de α et β . Les PSF considérées balayent une grande plage de rapport de Strehl, de 13% à 96%.

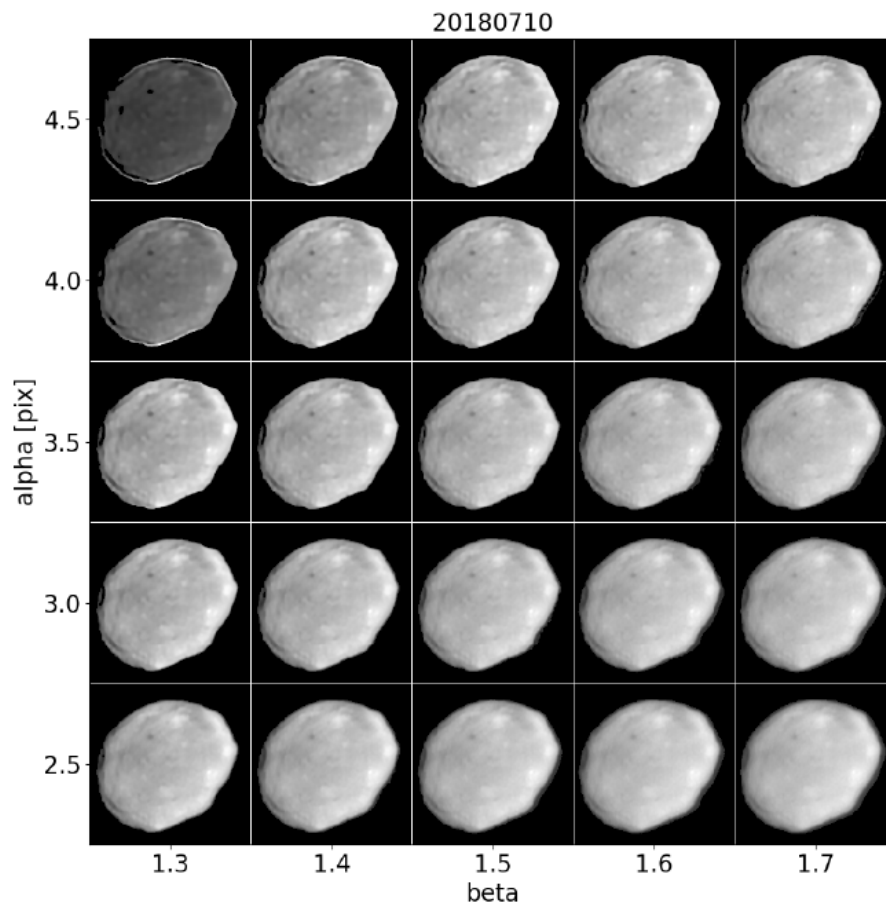


FIGURE 7.6 – Déconvolutions d’une image de l’astéroïde Vesta, observé le 10/07/2018 par SPHERE, avec 25 profils de PSF de Moffat différents.

dessus du 30° N). On note $\bar{d}(\alpha, \beta)$ l'objet déconvolué, qui dépend des paramètres (α, β) de la PSF, et normalisé par son flux moyen sur les pixels. De même on note \bar{r} l'objet de référence OASIS aussi normalisé par son flux moyen sur les pixels. Ils valent donc

$$\begin{cases} \bar{d}_{k,l} &= \frac{d_{k,l}}{1/N \sum_{i,j} d_{i,j}} \\ \bar{r}_{k,l} &= \frac{r_{k,l}}{1/N \sum_{i,j} r_{i,j}} \end{cases} \quad (7.3)$$

La normalisation par le flux des images évite de compter une erreur systématique du flux (en absolu) et met en évidence les erreurs de formes (différence relative du flux).

L'erreur évolue lentement avec les paramètres PSF, sauf lors de l'apparition brusque de l'artefact de la couronne brillante. Le minimum d'erreur est atteint juste avant cette brusque augmentation due à l'artefact de sur-déconvolution. La déconvolution envisagée, $L_1 - L_2$ avec contrainte de positivité, est fortement asymétrique par rapport aux paramètres de PSF. Une légère sous-estimation du Strehl (sur-déconvolution, apparition d'artefacts) est plus dramatique qu'une sur-estimation du Strehl (sous déconvolution, effet de flou résiduel). Cette tendance est systématique sur toutes les images Vesta à disposition du *Large Program* [Fétick et al., 2019b]. Les astronomes utilisent cette estimation empirique des paramètres de Moffat pour effectuer toutes leurs déconvolutions jusqu'à présent. Ils effectuent une grille de déconvolutions, puis ils sélectionnent la déconvolution la plus structurée juste avant l'apparition d'artefacts.

Cette méthode de déconvolution a permis l'extraction du contour de l'astéroïde. La technique d'extraction de contour a été réalisée par Laurent Jorda (LAM). Elle consiste à sélectionner les pixels de l'astéroïde qui sont à un niveau donné d'intensité (iso-contour). Si on appelle m le niveau minimum et M le maximum², le contour est défini pour

$$C = m + \zeta(M - m) \quad (7.4)$$

avec $\zeta \in [0, 1]$ le sélecteur de l'iso-contour entre le minimum et le maximum. Nous avons choisi $\zeta = 0.3$, soit un contour plus proche du minimum que du maximum. Le contour est extrait à la fois sur les images SPHERE déconvoluées et sur les objets de synthèse OASIS (vérité terrain). Nous pouvons alors définir une métrique de distance entre ces deux contours. Si on note D_i les points du contour de l'objet déconvolué SPHERE et M_i les points du contour du modèle OASIS, on définit la distance

$$\chi = \sqrt{\frac{\sum_i \lambda_i d(D_i, \{M_j\})}{\sum_i \lambda_i}} \quad (7.5)$$

2. Les valeurs exactes du minimum et maximum sont calculées à partir d'histogrammes de l'image. Voir l'article Fétick et al. [2019b] pour la description exacte de la méthode.

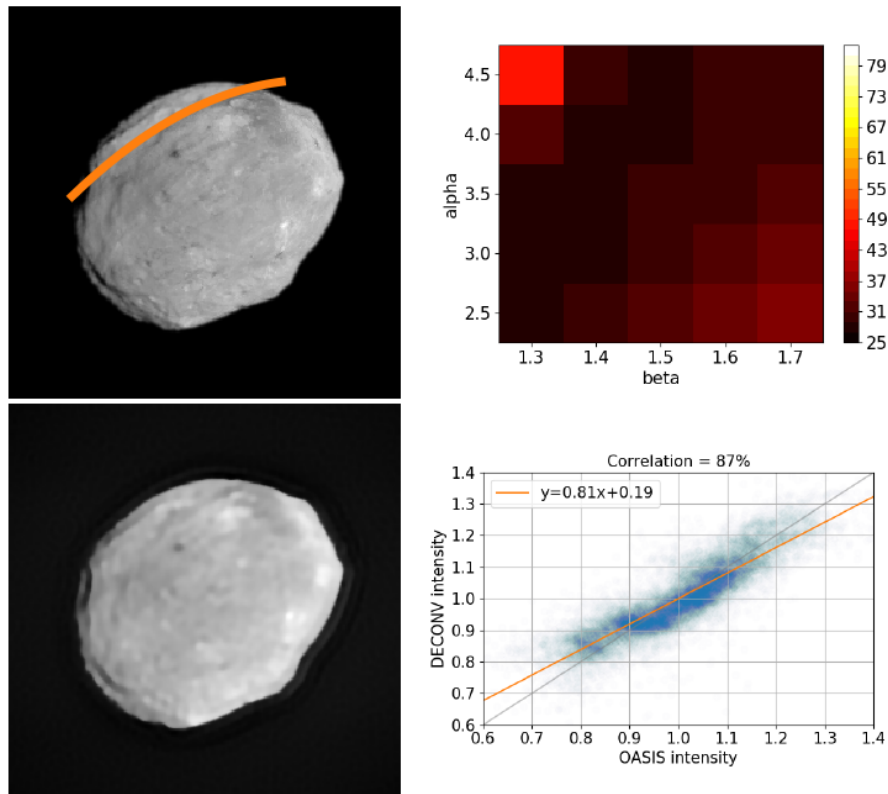


FIGURE 7.7 – En haut à gauche : Objet OASIS avec albédo jusqu’à la latitude 30° N. En haut à droite : Erreurs en norme L_2 entre les déconvolutions (Fig. 7.6) et l’objet OASIS sur les pixels valides en dessous de 30° N. En bas à droite : Comparaison pixel à pixel des intensités entre objet OASIS et objet déconvolué pour $\alpha = 4.0$ et $\beta = 1.5$. En bas à gauche : Objet déconvolué pour ces mêmes valeurs de α et β . Figure extraite de [Fétick et al., 2019b].

avec $d(D_i, \{M_j\})$ la distance euclidienne entre le point d_i et sa projection orthogonale sur le contour OASIS (Fig. 7.8). Les facteurs λ_i sont positifs et pondèrent chaque point du contour. Nous choisissons λ_i comme étant la distance moyenne entre le point D_i et ses voisins

$$\lambda_i = \frac{1}{2}[d(D_i, D_{i-1}) + d(D_i, D_{i+1})] \quad (7.6)$$

ainsi un éventuel regroupement de points D_i ne sur-pondère pas localement la norme χ . En pratique les points du contour sont répartis de manière assez homogène, et il n'y a que peu de différence entre la pondération par la distance ou la pondération triviale $\lambda_i = 1$.

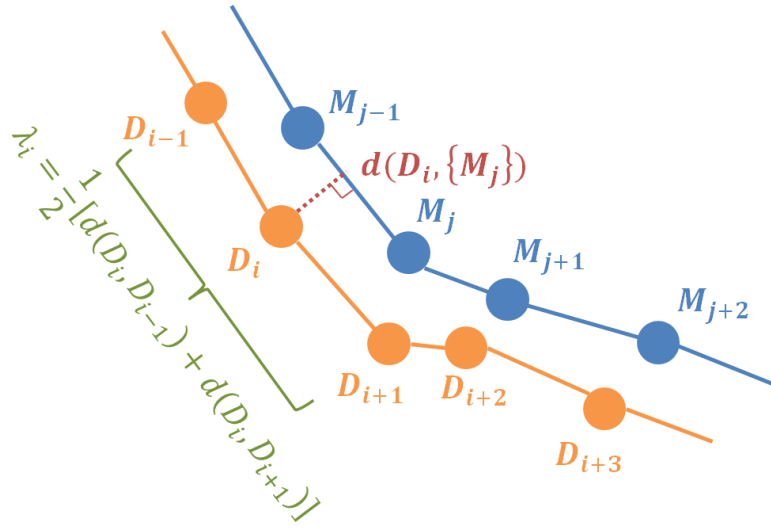


FIGURE 7.8 – Contours de l’objet déconvolué (orange) et OASIS (bleu). La distance du point D_i avec le contour $\{M_j\}$ est indiquée en rouge. La pondération λ_i est la distance moyenne entre le point D_i et ses voisins.

La précision atteinte sur l’extraction de contour est sub-pixellaire (erreur moyenne $\chi = 0.93$ pixels, [Fétick et al. 2019b](#)). Il y a toutefois une différence marquée entre le limbe (erreur moyenne $\chi_{\text{limb}} = 0.44$ pixels) et le terminateur (erreur moyenne $\chi_{\text{term}} = 1.02$ pixels). A cause du faible gradient d’intensité du terminateur, une petite différence de cette intensité se traduit par une plus grande erreur de position du contour.

Le contour permet ensuite de déterminer l’aire inscrite dans ce contour grâce au

théorème de Green

$$\mathcal{A} = \iint_{\text{asteroid}} dx dy = \oint_{\text{contour}} x dy \quad (7.7)$$

Cette formule est utilisée sur les contours de l'image déconvoluée et d'OASIS. L'erreur entre les deux est en moyenne de +1.15%, avec une légère tendance pour la déconvolution d'élargir les bords. Cette précision sur l'aire se traduit par une précision au pourcent sur le volume de l'astéroïde Vesta. Le passage entre aire et volume s'effectue via le disque d'aire équivalente $\mathcal{A} = \pi R^2$ et le volume équivalent de la sphère $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$. Ainsi

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi^{-1/2}\mathcal{A}^{3/2} \quad (7.8)$$

Nous avons montré que l'utilisation de PSF paramétrique permet de compenser l'absence ou la mauvaise estimation de PSF pour la déconvolution. Ces PSF paramétriques permettent de comprendre l'évolution de la qualité de déconvolution avec la forme de la PSF et de retrouver des résultats obtenus avec des PSF acquises sur étoiles. Ces PSF paramétriques sont donc adaptées à la déconvolution. Les paramètres de la PSF ont dû toutefois être donnés de manière supervisée par l'utilisateur. Les paramètres choisis sont ceux qui donnent l'objet déconvolué le plus structuré, sans toutefois atteindre l'artefact de couronne brillante. Le cas de l'astéroïde Vesta démontre la validité de cette méthode et quantifie la précision atteignable pour les astronomes et terme de résolution des cratères (jusqu'à 20 – 30 km de diamètre pour Vesta, observé à une distance d'environ 1.2 UA), d'estimation de volume (erreur de 1% – 2% du volume de Vesta) et d'albédo (détails d'albédo de 20 km environ).

7.3.3 Déconvolution de Vesta avec PSFAO₁₉

La méthode de déconvolution des astéroïdes en utilisant une fonction de Moffat a été proposée au début du *Large Program*, alors que le modèle PSFAO₁₉ n'était pas encore disponible. *A posteriori* il est également possible d'effectuer les mêmes tests avec le modèle PSFAO₁₉ en fonction des paramètres r_0 et σ_{OA}^2 . Les résultats sont montrés sur la figure 7.9. Le minimum d'erreur L_2 (en bas à gauche sur la figure) est atteint en $\sigma_{OA}^2 = 2.0 \text{ rad}^2$ et $r_0 = 15 \text{ cm}$. Cette valeur de r_0 est typique de celles estimées par le modèle PSFAO₁₉ à Paranal (Fig. 5.20). L'erreur en norme L_2 associée vaut 24.5 (Eq. 7.2, sans unité car les images sont normalisées par le flux moyen), tandis qu'elle était de 27.3 pour la fonction de Moffat, soit un gain d'environ 10% sur cette erreur. La forme de la carte d'erreur, comme pour la Moffat, suit celle de la carte du rapport Strehl ; ce qui dénote l'importance de ce paramètre dans la déconvolution. Les paramètres σ_{OA}^2 et r_0 pilotant la variance de phase totale du modèle PSFAO₁₉, ils pilotent son rapport de Strehl. Ils sont d'une importance capitale en déconvolution.

A l'instar de la fonction de Moffat, le modèle PSFAO₁₉ est adapté à la déconvolution. Il possède de plus l'avantage d'être décrit par des paramètres physiques, de mieux décrire halo de la PSF corrigée par OA, de prendre en compte la fréquence de coupure du télescope et de diminuer l'erreur de déconvolution.

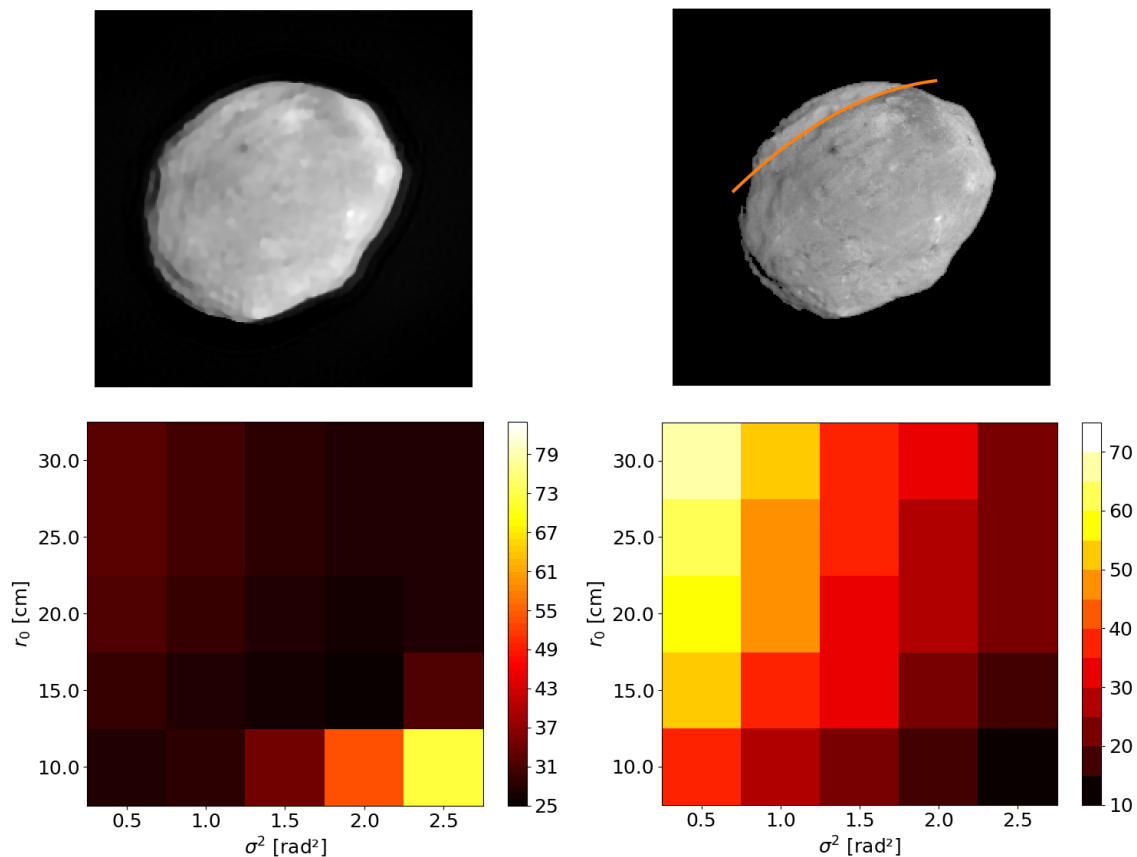


FIGURE 7.9 – En haut à gauche : Vesta déconvolué avec PSFAO₁₉ pour l'erreur minimale à $\sigma_{OA}^2 = 2.0 \text{ rad}^2$ et $r_0 = 15 \text{ cm}$, le Strehl associé est de 23%. En haut à droite : objet OASIS avec albédo jusqu'au 30° N pour comparaison. En bas à gauche : erreurs en norme L_2 entre objets déconvolués et OASIS. En bas à droite : rapports de Strehl des PSF.

7.3.4 Changement de stratégie du *Large Program*

Grâce aux démonstrations d'utilisation de PSF paramétriques en déconvolution, la stratégie d'observation du *Large Program* a été modifiée en cours de route. Les PSF acquises sur étoiles donnent des résultats de déconvolution aléatoires selon l'écart

entre la PSF estimée sur étoile et la PSF vraie du système (téléscope et turbulence) lors de l’observation d’astéroïdes. De plus les observations d’étoiles représentent une perte de 20% – 30% du temps d’observation alloué, les astronomes ont donc décidé d’annuler complètement leurs observations d’étoiles pour se concentrer sur les observations d’astéroïdes et d’augmenter ainsi le retour scientifique. Les déconvolutions s’effectuent toutes avec des PSF paramétriques. Les astronomes ont utilisé jusqu’alors le modèle de Moffat qui donne des résultats de déconvolution convenables malgré une mauvaise estimation du halo. L’objectif sera au chapitre 8 d’utiliser le modèle PSFAO₁₉ pour obtenir une meilleure estimation du halo.

La figure 7.10 présente quelques résultats de déconvolutions d’images SPHERE/-Zimpol. Pour tous les astéroïdes les contours sont nets, ce qui permet la visualisation de cratères en bordure et l’utilisation de l’algorithme ADAM. Certains astéroïdes comme Iris et Pallas présentent un grand nombre de cratères. L’astéroïde géant Hygiea ne présente quasiment aucun cratère de grande taille, ce qui est une information importante pour les astronomes qui pourrait laisser supposer une collision violente suivie d’une ré-accrétion [Vernazza et al., 2020]. Le résultat sur Hygiea est à comparer avec les résultats obtenus Fig. 7.4 qui montrent des artefacts de couronne avec la PSF estimée sur étoile, en mode classique (PSF fixée) et mode myope.

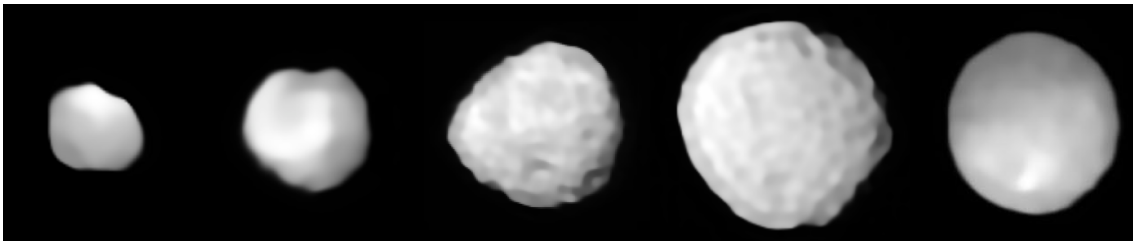


FIGURE 7.10 – Déconvolution de plusieurs astéroïdes du *Large Program* avec une PSF paramétrique de Moffat. De gauche à droite : Psyche [Viikinkoski et al., 2018], Julia [Vernazza et al., 2018a], Iris [Hanus et al., 2019], Pallas [Marsset et al., 2020] et Hygiea [Vernazza et al., 2020]. Les tailles relatives des astéroïdes ne sont pas respectées. Les surfaces d’Iris et Pallas présentent un grand nombre de cratères révélés par la déconvolution. L’aspect lisse de l’astéroïde géant Hygiea semble être une propriété intrinsèque de l’astéroïde et non pas un problème de sur-régularisation de la déconvolution.

Conclusion du chapitre

Des problèmes de déconvolutions récurrents apparaissent en cas d'une mauvaise estimation de la PSF. Il s'agit là d'un facteur limitant de la déconvolution. La stratégie d'estimation de PSF sur une étoile avant ou après l'observation de l'astéroïde ne donne pas de résultats satisfaisants. La paramétrisation de la PSF donne de bons résultats. Les paramètres peuvent être modifiés afin de fournir des estimations correctes de l'objet. Ces PSF paramétriques ont également mis en évidence que l'artefact de couronne brillante provenait d'une sous-estimation de la FTO, donc d'une sur-déconvolution. Ces PSF paramétriques sont parfaitement adaptées à la déconvolution. Les paramètres de la PSF peuvent être déterminés de manière non supervisée dans des processus de déconvolution aveugle. C'est le sujet du chapitre suivant.

Chapitre 8

Estimation de la PSF par l'approche marginalisée

Résumé

Les travaux du chapitre ont ouvert la voie à des méthodes de déconvolution utilisant des modèles paramétriques de PSF. Le faible nombre de paramètres à estimer (que j'appellerai « parcimonie ») est un atout majeur dans la résolution des problèmes inverses. Ce chapitre montre que la déconvolution aveugle jointe, estimant à la fois l'objet et la PSF, est une méthode dégénérée en pratique. Elle converge toujours vers la PSF la plus piquée possible, même en ayant recourt à des modèles parcimonieux de PSF. Cependant la parcimonie nous permet d'utiliser une approche différente, dite de marginalisation. L'objet est intégré hors du problème, ce qui permet de n'avoir à estimer que les paramètres de la PSF. Dans un deuxième temps cette PSF est utilisée dans un algorithme de déconvolution classique (à PSF fixe).

Sommaire

| | | |
|------------|---|------------|
| 8.1 | Dégénérescence de la méthode jointe | 163 |
| 8.2 | L'approche marginale | 169 |
| 8.3 | AMIRAL : estimation d'une combinaison linéaire de PSF | 174 |
| 8.3.1 | Description de la méthode | 174 |
| 8.3.2 | Application sur données OBSSAT | 174 |
| 8.4 | P-AMIRAL : paramétrisation non-linéaire de la PSF . . | 177 |
| 8.4.1 | Description de la méthode | 177 |
| 8.4.2 | Validation sur données simulées | 178 |
| 8.4.3 | Application sur données SPHERE | 186 |
| 8.5 | Conclusion et perspectives de la marginalisation | 189 |

8.1 Dégénérescence de la méthode jointe

Le chapitre précédent a montré la possibilité d'utiliser des PSF paramétriques en déconvolution d'image longue pose en astronomie. L'objectif est alors d'arriver à intégrer ces modèles parcimonieux, notamment le modèle PSFAO₁₉, dans des algorithmes de déconvolution myope afin d'obtenir une identification automatique et satisfaisante des paramètres de la PSF. Il serait par exemple envisageable d'intégrer PSFAO₁₉ dans un algorithme de déconvolution jointe tel MISTRAL. Cependant la littérature sur la déconvolution myope tend à montrer que l'estimation jointe est dégénérée : elle tend irrémédiablement vers la PSF la plus piquée possible et l'objet le plus mou. La solution de l'estimation jointe favorise alors la déconvolution la moins prononcée possible. Une démonstration analytique de la dégénérescence est donnée par [Blanco and Mugnier \[2011\]](#) dans le cas d'un filtrage de Wiener, c'est-à-dire pour une régularisation quadratique de l'objet et absence de contrainte de positivité. Les auteurs montrent que l'estimation jointe du MAP favorise la FTO la plus haute possible à toutes les fréquences, c'est à dire la PSF la plus piquée. L'article pédagogique de [Levin et al. \[2009\]](#) donne une démonstration qualitative de la dégénérescence de l'estimation jointe pour toute régularisation sur le gradient de l'objet ($L_2, L_1, L_1 - L_2, \dots$). L'explication intuitive est la suivante. Le terme d'attache aux données en $\|\mathbf{i} - \mathbf{o} \otimes \mathbf{h}\|^2$ ne permet pas de discriminer l'objet de la PSF. Ce terme peut se ré-écrire en Fourier $\|\tilde{\mathbf{i}} - \tilde{\mathbf{o}} \cdot \tilde{\mathbf{h}}\|^2$ grâce au théorème de Parseval. Tout couple de fréquences dont le produit vaut les fréquences de l'image convient. Il y a donc une infinité de solutions identiques. Cependant le terme de régularisation sur le gradient de l'objet favorise les objets mous. Les fréquences de l'objet estimées par déconvolution jointe MAP sont faibles (objet mou), les fréquences de la PSF sont alors élevées (PSF piquée).

L'avantage d'une estimation jointe de permettre l'inclusion d'une contrainte de positivité sur l'objet. De plus l'utilisation du modèle PSFAO₁₉ dédié aux images OA avec seulement deux paramètres principaux r_0 et σ_{OA}^2 permet de grandement simplifier le problème de l'identification de la PSF. Nous testons l'estimation jointe sur une observation simulée afin de savoir si ces contraintes sont suffisantes pour lever la dégénérescence. Pour cela nous définissons tout d'abord un instrument donné par son diamètre, sa fréquence de coupure d'OA et son échantillonnage (Tab. 8.1). La DSP de la phase électromagnétique est à symétrie circulaire ($\alpha_x = \alpha_y \triangleq \alpha$ dans l'Eq. 4.11 de PSFAO₁₉), donc la PSF également. Les paramètres α , β et C du modèle PSFAO₁₉ sont également donnés dans le tableau 8.1 et sont considérés constants pour l'étude. Les seuls paramètres d'intérêt sont les paramètres hautement variables

r_0 et σ_{OA}^2 . Pour la simulation ces paramètres valent

$$\begin{cases} \overline{r_0} = 15 & \text{cm} \\ \overline{\sigma_{OA}^2} = 1.3 & \text{rad}^2 \end{cases} \quad (8.1)$$

où la barre supérieure les identifie comme les paramètres vrais de la PSF. Cette valeur de $\overline{\sigma_{OA}^2}$ est typique d'une correction partielle dans le visible et la valeur de $\overline{r_0}$ est typique de la turbulence atmosphérique à Paranal à la longueur d'onde d'observation $\lambda = 550 \text{ nm}$ (Fig. 5.20¹). Pour la simulation le nombre linéaire d'actionneurs dans la pupille est $N_{\text{act}} = 20$. Ce nombre d'actionneur correspond à un système moins bien corrigé que SPHERE ($N_{\text{act}} = 40$), ce qui donne un impact plus important du paramètre r_0 sur la PSF. Un système à 20 actionneurs est un cas intermédiaire entre un système d'OA extrême comme SPHERE ou des systèmes d'OA plus modestes (OBSSAT : 9×9 actionneurs, Sec. 8.3.2). Le rapport de Strehl de cette PSF à $(\overline{r_0}, \overline{\sigma_{OA}^2})$ est $\overline{S_R} = 11.5\%$, ce qui est effectivement un rapport de Strehl adéquat pour un tel système d'OA.

L'objet observé pour la simulation est l'astéroïde Vesta car nous avons accès à l'objet OASIS pour la forme et l'illumination et à l'albédo de [Schröder et al.](#) pour l'information d'intensité réfléchie. L'information d'albédo n'étant disponible que jusqu'au 30° N , elle est symétrisée (repliée) à cette latitude afin d'obtenir une albédo simulée sur les pixels à l'extrême Nord de l'astéroïde simulé. L'information d'albédo ne représente donc pas exactement celle de Vesta, mais est continue et représentative de l'astéroïde.

L'équation d'imagerie discrète Eq. 1.44 est utilisée. L'objet et la PSF sont discrétisés en conséquence. Le flux reçu est de 10^9 photons. Le bruit de Poisson et un bruit de lecture gaussien de 20 électrons par pixel sont considérés. Le rapport signal à bruit correspondant est d'environ $\text{SNR} = 105$. Ce fort rapport signal à bruit permet d'observer le comportement des méthodes de déconvolution et d'estimation de PSF dans un régime stable où la variance du bruit n'introduit que peu de dispersion sur le résultat. Ce flux et ce bruit de lecture sont également ceux d'une observation de l'astéroïde Vesta par SPHERE/Zimpol lors du *Large Program* [[Fétick et al., 2019b](#)], le SNR est donc caractéristique d'une observation à fort flux sur cet instrument. L'objet simulé, la PSF d'observation et l'image correspondante sont montrés sur la figure 8.1.

La déconvolution jointe est réalisée ici par un ensemble de déconvolutions classiques (à PSF fixée) sur une grille de paramètres (r_0, σ_{OA}^2) de la PSF. Puis on

1. La figure 5.20 est donnée à 500 nm, elle est transposable à 550 nm en multipliant les valeurs du r_0 par le facteur $(550/500)^{6/5} \simeq 1,12$. Il y a donc peu de différence entre des valeurs « typiques » de r_0 donné à 500 nm ou 550 nm.

| Paramètre | Symbole | Valeur | Min | Unité |
|--------------------------------------|------------------|--------|----------|-------------|
| Diamètre du primaire | D | 8 | > 0 | m |
| Diamètre de l'occultation | D' | 1.12 | ≥ 0 | m |
| Echantillonnage | s | 3 | ≥ 2 | |
| Fréquence de coupure de l'OA | f_{AO} | 1.25 | > 0 | m^{-1} |
| Largeur de la Moffat de DSP | α | 0.05 | > 0 | m^{-1} |
| Loi de puissance de la Moffat de DSP | β | 1.5 | > 1 | |
| Constante de la DSP | C | 0 | ≥ 0 | $rad^2 m^2$ |
| Paramètre de Fried | $\overline{r_0}$ | 15 | > 0 | cm |
| Variance de phase | σ_{OA}^2 | 1.3 | ≥ 0 | rad^2 |

TABLE 8.1 – Paramètres de la simulation de PSF avec le modèle PSFAO₁₉ en mode symétrie circulaire ($\alpha_x = \alpha_y = \alpha$). Le tableau est découpé en trois parties : les paramètres instrumentaux fixes (haut), les paramètres de DSP de phase peu variables et considérés comme fixes dans la simulation (milieu), les paramètres de DSP de phase hautement variables (bas). La barre sur les deux derniers paramètres les identifie comme les paramètres vrais à estimer. Les paramètres variables de la PSF et l'échantillonnage sont donnés à la longueur d'onde d'observation $\lambda = 550$ nm. La longueur d'onde n'est pas un paramètre direct de l'implémentation numérique du modèle PSFAO₁₉, mais elle apparaît implicitement dans l'échantillonnage, le r_0 ou σ_{OA}^2 . La colonne « Min » donne la borne minimum de chaque paramètre.

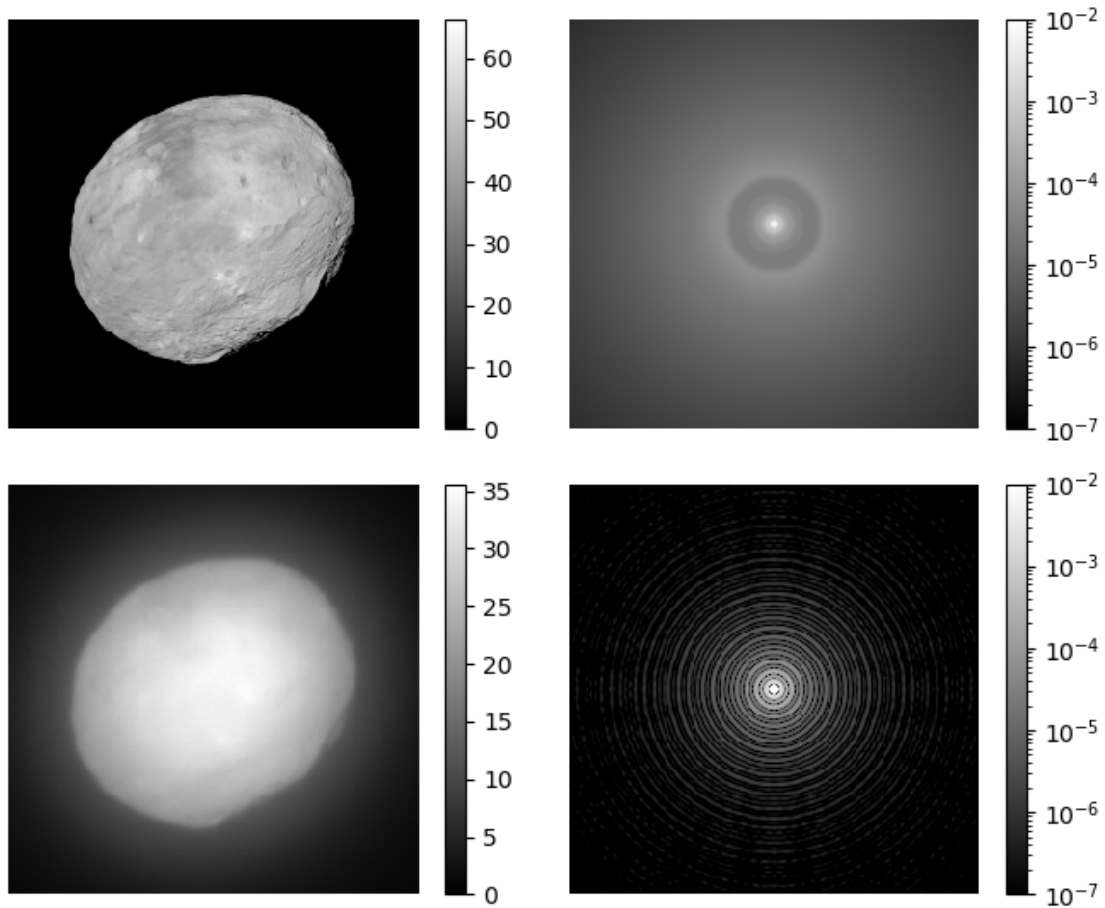


FIGURE 8.1 – En haut à gauche : astéroïde Vesta OASIS avec albédo (replié au dessus du 30° N). En haut à droite : PSF simulée pour les paramètres « vrais » $\overline{\sigma_{OA}^2}$ et $\overline{r_0}$. En bas à gauche : image correspondante. En bas à droite : PSF à la limite de diffraction, pour comparaison avec la PSF corrigée par OA. Les PSF sont affichées en échelle logarithmique d'intensité. Les simulations sont effectuées sur 512×512 pixels, mais toutes les images ont été rognées à 256×256 pour l'affichage. Les unités de l'objet et de l'image sont en 10^3 photons. La PSF corrigée par OA et la PSF à la diffraction sont normalisées à énergie unitaire.

sélectionne le couple objet-PSF donnant la valeur minimale du critère. Pour cette simulation une grille de 361 PSF est générée, correspondant à 19 valeurs de r_0 entre 5 cm et 25 cm, et 19 valeurs de σ_{OA}^2 entre 0 rad² et 2.6 rad². Pour chacune de ces PSF l'algorithme de déconvolution classique (non myope) est utilisé avec une régularisation $L_1 - L_2$ et une contrainte de positivité sur l'objet. Pour chaque PSF, l'algorithme de déconvolution trouve l'objet qui minimise son critère

$$J_{\text{MAP}}(\mathbf{o}; \delta, \kappa, \boldsymbol{\Omega}) = \left\| \frac{\mathbf{i} - \mathbf{o} \star \mathbf{h}_{\boldsymbol{\Omega}}}{\sigma_n} \right\|^2 + \delta^2 \sum_{k,l} \left[\left| \frac{\nabla \mathbf{o}_{k,l}}{\delta \kappa} \right| - \ln \left(1 + \left| \frac{\nabla \mathbf{o}_{k,l}}{\delta \kappa} \right| \right) \right] \quad (8.2)$$

où $\boldsymbol{\Omega} = (r_0, \sigma_{OA}^2)$ sont les paramètres PSF. L'écart-type du bruit σ_n est estimé à partir de l'image en supposant une statistique gaussienne (Eq. 6.17 et Eq. 6.18). Les hyper-paramètres κ et δ sont supervisés et déterminés à partir de l'image

$$\begin{cases} \kappa &= 5 \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k,l} (\mathbf{i}_{k,l} - \mathbf{i}_{k,l-1})^2 + (\mathbf{i}_{k,l} - \mathbf{i}_{k-1,l})^2} \\ \delta &= 0.4 \end{cases} \quad (8.3)$$

Il s'agit d'une hyper-paramétrisation alternative mais équivalente à celle de MISTRAL [Mugnier et al., 2004]. Ces valeurs d'hyper-paramètres donnent une déconvolution de bonne qualité pour la PSF vraie à $\overline{\sigma_{OA}^2}$ et $\overline{r_0}$. Ils sont gardés constants pour toute l'étude.

Si les 361 PSF pavent suffisamment le plan (r_0, σ_{OA}^2) , alors le minimum du critère sur cet ensemble de PSF est le minimum vis-à-vis à la fois de l'objet et de la PSF. Cette méthode est équivalente à une déconvolution jointe non régularisée sur la PSF². La figure 8.2 montre la valeur du critère obtenu pour chacune des 361 PSF. L'évolution du critère est régulière sur le plan (r_0, σ_{OA}^2) . L'évolution est très prononcée en fonction du r_0 et plus faible en fonction du σ_{OA}^2 . Le minimum global est atteint en $r_0 = 25$ cm et $\sigma_{OA}^2 = 0$ rad², ce qui correspond à la PSF la plus piquée possible dans le domaine considéré. La figure 8.16 montre la PSF vraie et la PSF estimée par méthode jointe, cette dernière laisse clairement apparaître les anneaux de diffraction au niveau du coeur corrigé et un halo très faible par rapport à la PSF vraie. La méthode jointe est donc dégénérée. Nous retrouvons un résultat identique à Levin et al. [2009] et Blanco and Mugnier [2011]. La contrainte de positivité sur l'objet et le modèle parcimonieux de PSF adapté à l'OA ne sont pas suffisants pour lever la dégénérescence.

2. Bien que le minimum soit correctement estimé, cette méthode de pavage du plan des PSF est évidemment plus chronophage qu'un algorithme de descente de gradients car elle nécessite un nombre d'évaluations du critère bien plus important. L'avantage est de pouvoir utiliser le modèle PSFAO₁₉ dans un algorithme de déconvolution déjà existant et de ne pas avoir à coder un algorithme dédié de déconvolution myope par descente de gradient. La méthode de pavage est adaptée à des tests préliminaires mais pas à une utilisation courante.

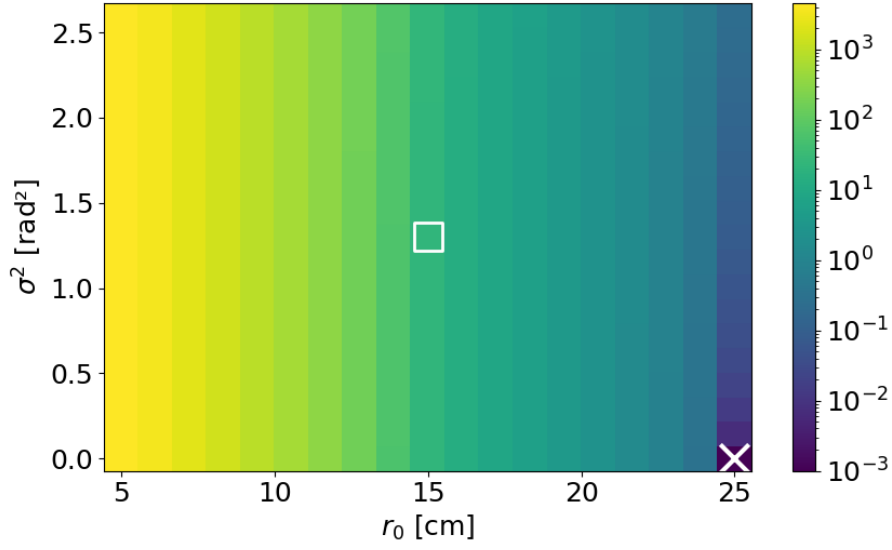


FIGURE 8.2 – Valeur du critère de déconvolution J_{MAP} en fonction des 361 PSF. Le carré blanc représente les paramètres vrais de la PSF. La croix est située au minimum du critère. Ce minimum correspond au r_0 le plus élevé et le σ_{OA}^2 le plus faible, soit la PSF la plus piquée possible sur le domaine considéré.

La figure 8.3 montre le résultat de déconvolution associé. L’astéroïde est largement sous-déconvolué : un fort halo est présent, les contours et les structures internes ne sont pas correctement restitués. Afin de quantifier la qualité de déconvolution on définit l’erreur

$$\varepsilon_{\text{obj}} = \frac{\sum_{kl} |\hat{\mathbf{o}}_{kl} - \mathbf{o}_{kl}|}{\sum_{kl} \mathbf{o}_{kl}} \quad (8.4)$$

Il s’agit de la différence en valeur absolue entre l’objet vrai \mathbf{o} et l’objet estimé par déconvolution $\hat{\mathbf{o}}$, normalisée par le flux. Pour la déconvolution avec la PSF vraie $(\bar{r}_0, \bar{\sigma}_{OA}^2)$ on obtient

$$\varepsilon_{\text{obj, PSF vraie}} = 3.4 \times 10^{-4} \quad (8.5)$$

tandis que pour la déconvolution jointe on obtient

$$\varepsilon_{\text{obj, JMAP}} = 52 \times 10^{-4} \quad (8.6)$$

soit une multiplication par un facteur ~ 15 de l’erreur. Pour comparaison, l’erreur entre l’image et l’objet vrai est de 78×10^{-4} . L’erreur de l’image est donc du même ordre de grandeur que l’erreur de la déconvolution jointe. Le résultat de la déconvolution jointe n’est pas satisfaisant, une autre méthode de déconvolution doit être envisagée.

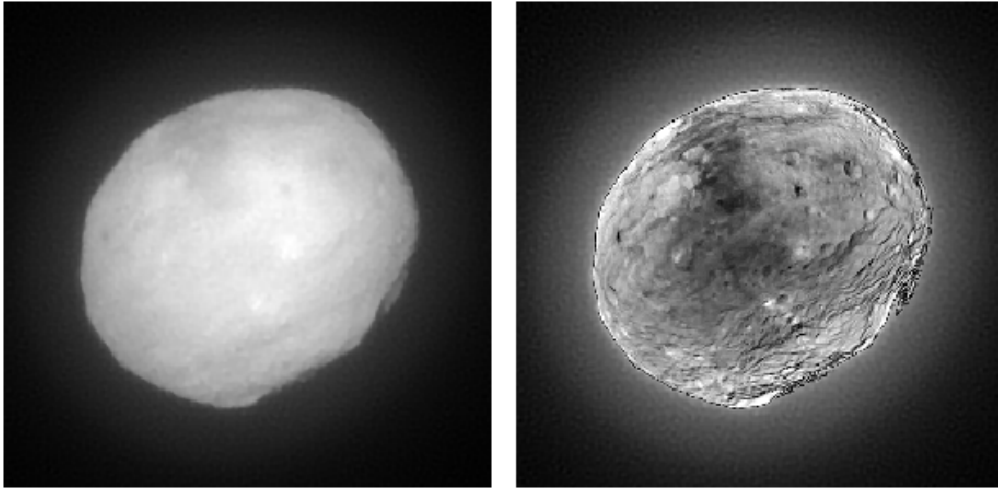


FIGURE 8.3 – Gauche : Déconvolution de l’image simulée de Vesta par méthode jointe. Droite : Deux fois la différence en valeur absolue avec l’objet vrai. L’objet est trop lisse et les résidus de turbulence sont fortement présents.

8.2 L’approche marginale

La dégénérescence de la méthode jointe provient de la difficulté à démêler la PSF et l’objet qui sont entrelacés dans l’image via le produit de convolution. Une approche proposée dans la littérature est la méthode dite de marginalisation [Blanc et al., 2003b, Levin et al., 2009]. Cette méthode consiste à intégrer, marginaliser, la loi de probabilité *a posteriori* sur certains paramètres que l’on souhaite sortir du problème. Dans le cas de la déconvolution aveugle nous marginalisons sur l’objet afin d’identifier dans un premier temps les paramètres de la PSF

$$P(\mathbf{\Omega}|\mathbf{i}) \propto P(\mathbf{i}|\mathbf{\Omega}) P(\mathbf{\Omega}) = \int_{\Lambda} P(\mathbf{i}|\mathbf{o}, \mathbf{\Omega}) P(\mathbf{\Omega}) P(\mathbf{o}) d\mathbf{o} \quad (8.7)$$

avec $\mathbf{\Omega}$ les paramètres de la PSF à identifier et Λ l’espace des paramètres de l’objet. Il est intéressant d’intégrer sur l’objet car il possède un grand nombre de degrés de libertés. Au contraire le nombre de paramètres de PSF $\mathbf{\Omega}$ est limité pour une paramétrisation parcimonieuse, typiquement moins d’une dizaine. Le contraste statistique du nombre de données (pixels de l’image) sur le nombre d’inconnues augmente fortement grâce à la marginalisation. Pour la déconvolution jointe ce contraste statistique était

$$\mathcal{CS}_{\text{joint}} = \frac{N}{N + \text{Card}\{\mathbf{\Omega}\}} \leq 1 \quad (8.8)$$

avec N le nombre de pixels dans l'image. Ce contraste statistique joint est toujours inférieur ou égal à l'unité. Par exemple, pour MISTRAL en mode myope il vaut $1/2$ (car $\text{Card}\{\Omega\} = N$) et il est intéressant de remarquer qu'il ne dépend pas de la taille de l'image. Augmenter la taille de l'image n'améliore donc pas le contraste. Quant à la marginalisation ce contraste statistique vaut

$$\mathcal{CS}_{\text{marg}} = \frac{N}{\text{Card}\{\Omega\}} \stackrel{\text{parcimonie}}{\gg} 1 \quad (8.9)$$

Le contraste statistique, grâce à la marginalisation et la parcimonie de la PSF, est largement augmenté. De plus lorsque le nombre de données augmente, si le nombre de paramètres de PSF reste constant, le contraste statistique augmente. Bien qu'il soit un indicateur statistique, il faut noter qu'un bon contraste n'entraîne pas forcément une levée de la dégénérescence.

L'intégration de la marginalisation peut être effectuée en pratique par des tirages de Monte-Carlo, mais qui sont alors coûteuses, ou par intégration analytique. Afin d'avoir une intégrale soluble analytiquement il faut effectuer quelques hypothèses simplificatrices. L'objet est supposé suivre une statistique gaussienne, de moyenne \mathbf{o}_m et de matrice de covariance R_o . Le bruit est supposé être un bruit additif gaussien stationnaire, de variance notée σ_n^2 . En tant que combinaison linéaire d'un bruit et d'un objet de statistiques gaussiennes, la probabilité de l'image sachant les paramètres Ω est aussi gaussienne. On note \mathbf{i}_m sa moyenne et R_i sa matrice de covariance

$$P(\mathbf{i}|\Omega; \mathbf{i}_m, R_i) \propto (\det R_i)^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2}(\mathbf{i} - \mathbf{i}_m)^t R_i^{-1}(\mathbf{i} - \mathbf{i}_m) \right] \quad (8.10)$$

Pour un bruit de moyenne nulle, l'image moyenne est

$$\mathbf{i}_m = \mathbf{h}_\Omega \otimes \mathbf{o}_m = H_\Omega \mathbf{o}_m \quad (8.11)$$

en notant H_Ω l'opérateur de convolution discrète par la PSF \mathbf{h}_Ω . Pour un bruit gaussien stationnaire la covariance de l'image s'écrit

$$R_i = H_\Omega R_o H_\Omega^t + \sigma_n^2 I_d \quad (8.12)$$

avec I_d la matrice identité de taille $N \times N$ pour une image de N pixels. Grâce à une approximation circulante de l'opérateur de convolution il est diagonalisable en Fourier. De plus la quantité $\mathbf{o} - \mathbf{o}_m$ est supposée homogène, ainsi sa matrice de covariance R_o est Toeplitz par blocs à blocs Toeplitz, elle est alors diagonalisable en Fourier. En prenant l'anti-logarithme de l'équation 8.7 on obtient le critère marginal

en Fourier [Blanco and Mugnier, 2011]

$$\begin{aligned}
 J_{\text{marg}}(\boldsymbol{\Omega}; \mathbf{o}_m, R_o, \sigma_n^2) &= \sum_f \ln \left(\mathbf{S}_{\text{obj}}(f) |\tilde{\mathbf{h}}_{\boldsymbol{\Omega}}(f)|^2 + \sigma_n^2 \right) \\
 &+ \sum_f \frac{|\tilde{\mathbf{i}}(f) - \tilde{\mathbf{h}}_{\boldsymbol{\Omega}}(f) \tilde{\mathbf{o}}_m(f)|^2}{\mathbf{S}_{\text{obj}}(f) |\tilde{\mathbf{h}}_{\boldsymbol{\Omega}}(f)|^2 + \sigma_n^2} \\
 &- \ln P(\boldsymbol{\Omega})
 \end{aligned} \tag{8.13}$$

avec \mathbf{S}_{obj} la DSP³ de l'objet. Goussard et al. [1990] et Blanc et al. [2003b] ont remarqué que ce critère marginal est en fait égal à un critère joint (lequel est dégénéré) avec une régularisation L_2 sur la DSP de l'objet, plus un terme correctif de la méthode marginale qui améliore l'estimation. Le lecteur pourra se référer à ces travaux, ainsi qu'à Blanco and Mugnier [2011] et Blanco [2013], pour plus de détails concernant cette particularité.

Le terme en $P(\boldsymbol{\Omega})$ prend en compte l'information *a priori* sur les paramètres de la PSF. Quant à l'objet moyen \mathbf{o}_m que nous choisissons, il s'agit de l'objet moyen le moins informatif, c'est-à-dire le moins structuré possible. Cet objet est constant, et son intégrale sur l'ensemble des pixels est le flux de l'image. En Fourier il est donc représenté par un Dirac à la fréquence nulle, d'intensité le flux de l'image.

La difficulté de cette approche réside essentiellement dans l'estimation de la DSP de l'objet \mathbf{S}_{obj} . Afin de simplifier le problème un modèle de DSP à peu de paramètres est utilisé. Le modèle de Conan et al. [1998] s'écrit

$$S_{\text{obj}}(f) = \frac{k}{1 + (f/\rho_0)^p} \tag{8.14}$$

avec k , ρ_0 et p trois réels strictement positifs. Ce modèle est à symétrie circulaire, ce qui suppose donc une isotropie sur la décroissance de la DSP de l'objet, et donc que l'on ne connaît pas *a priori* l'orientation de l'objet. Le paramètre k est la valeur de la DSP en $f = 0$, soit environ le carré du flux de l'objet. Le paramètre ρ_0 est une fréquence de coupure, inversement proportionnelle à la taille caractéristique de l'objet. Le paramètre p est une loi de puissance sur les fréquences, qui module alors le niveau de structures de l'objet : p élevé entraîne une forte atténuation des hautes fréquences, donc un objet « mou » ; à l'inverse p faible donne un objet très structuré.

3. La quantité S_{obj} est en fait le module carré de la transformée de Fourier de l'objet. Cette quantité est appelée Densité Spectrale de Puissance (DSP) pour un processus aléatoire. Nous gardons cette appellation de « DSP de l'objet », couramment utilisée par la communauté, bien qu'il ne s'agisse pas en l'occurrence d'un processus aléatoire.

Cette décroissance de la DSP en loi de puissance correspond à une géométrie fractale [Huang and Mumford, 1999]. Cependant cette loi diverge en $f = 0$, le plateau du modèle Eq. 8.14 évite notamment cette divergence en saturant les fréquences inférieures à ρ_0 . Dans les cas qui nous intéressent, on obtient typiquement $p \simeq 3$ pour des astéroïdes, $p \simeq 2.5$ pour des satellites artificiels et $p \simeq 0$ pour un champ d'étoiles uniforme (sans *cluster*).

La figure 8.4 montre l'application empirique de ce modèle de DSP à l'astéroïde Vesta simulé pour un flux de 10^9 photons (cf. Fig. 8.1, en haut à gauche). Les valeurs du modèle de DSP sont choisies de manière supervisée. Elles assurent une bonne correspondance entre la moyenne circulaire de la DSP de l'objet et le modèle, ainsi qu'un bon comportement du critère marginal supervisé (comme nous le verrons à la section 8.4.2). Ces valeurs supervisées des paramètres sont

$$\begin{cases} \bar{k} = 10^{18} & \text{photon}^2 \\ \bar{\rho}_0 = 0.9 & \text{pix}^{-1} \\ \bar{p} = 2.91 \end{cases} \quad (8.15)$$

La barre supérieure identifie simplement ces valeurs comme étant supervisées sur la DSP de l'objet Vesta. La figure 8.5 la DSP 2D (sans moyenne circulaire) de l'objet et le modèle à symétrie circulaire. Les différences entre les différentes coupes sont faibles. Le modèle de DSP simple (trois paramètres) et à symétrie circulaire donne donc une bonne approximation de la DSP de l'objet et est adapté à des scènes astrophysiques.

Ces paramètres de DSP sont des hyper-paramètres du critère marginal pour l'équation 8.13, mais ils peuvent être estimés simultanément avec les paramètres Ω de la PSF. Cette estimation simultanée augmente le nombre de paramètres inconnus, et augmente donc la complexité du problème. De plus Blanco and Mugnier [2011] effectuent le changement de variable

$$\mu = \frac{\sigma_n^2}{k} \quad (8.16)$$

Il existe une solution analytique \hat{k} qui annule la dérivée partielle du critère selon k , les autres paramètres (Ω, μ, ρ_0, p) étant donnés (voir annexe C). Cette solution analytique une fois réinjectée dans le critère permet d'éliminer un paramètre à estimer. Grâce à ces considérations, les arguments du critère marginal deviennent

$$J_{\text{marg}}(\Omega; \mathbf{o}_m, R_o, \sigma_n^2) \longrightarrow J_{\text{marg}}(\Omega, \mu, \rho_0, p; \mathbf{o}_m) \quad (8.17)$$

où l'on passe alors d'une méthode supervisée à une méthode non supervisée. Il y

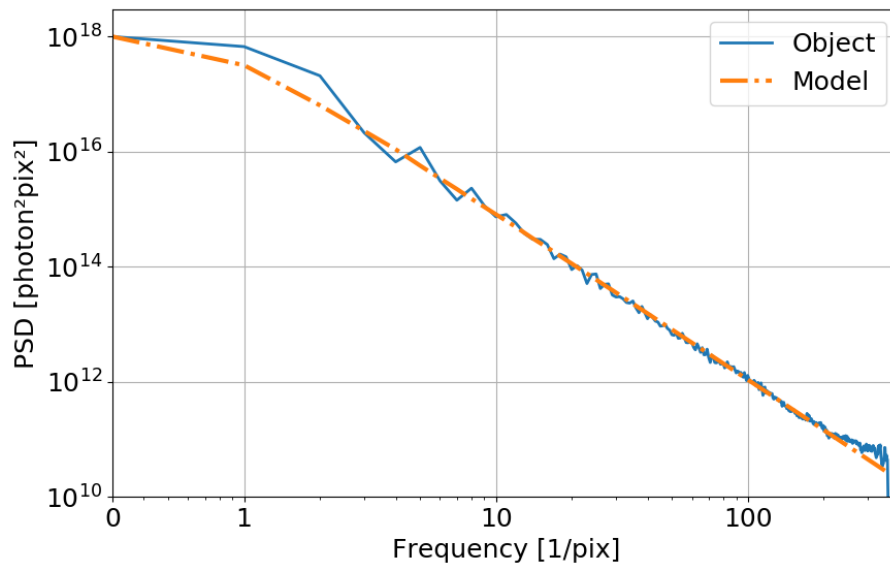


FIGURE 8.4 – Moyenne circulaire de la DSP de l’astéroïde Vesta simulé pour un flux de 10^9 photons (cf. Fig. 8.1) et modèle de DSP correspondant.

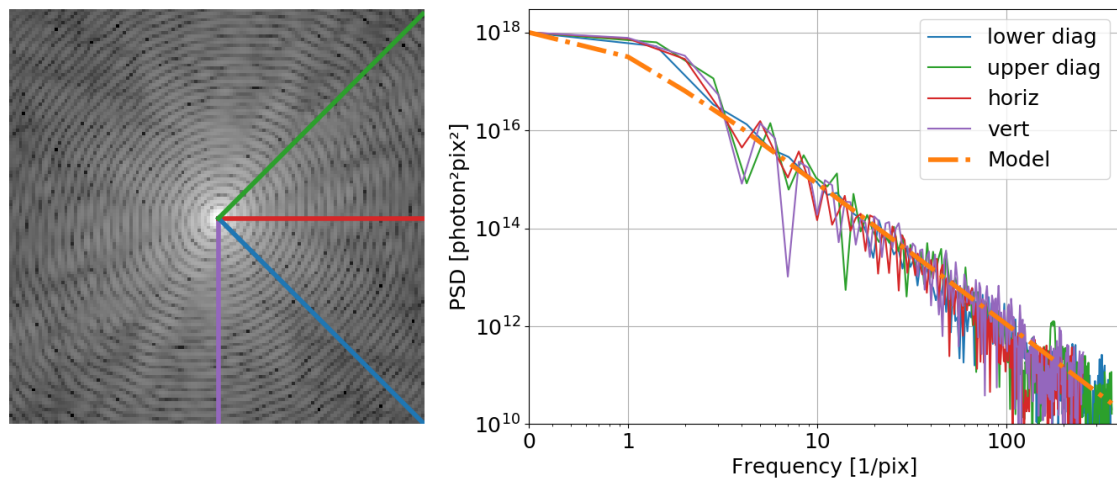


FIGURE 8.5 – A gauche : DSP de l’astéroïde Vesta et différentes coupes (en couleurs). A droite : DSP selon les différentes coupes, et comparaison avec le modèle de DSP à symétrie circulaire (orange).

a donc $\text{Card}\{\Omega\} + 3$ paramètres à estimer⁴ dans le cas non supervisé. L'objet \mathbf{o}_m considéré est toujours le même (un objet moyen de même flux que l'image). Pour simplification d'écriture il ne sera plus énuméré parmi les arguments du critère.

8.3 AMIRAL : estimation d'une combinaison linéaire de PSF

8.3.1 Description de la méthode

Blanco and Mugnier [2011] ont développé le code *Automatic Myopic Image Restoration ALgorithm* (AMIRAL) initialement utilisé dans le domaine biomédical pour estimer dans une image rétinienne la contribution de couches focalisées et défocalisées. La méthode a ensuite été étendue pour l'estimation de PSF en astronomie. La PSF à estimer est décomposée sur une base de PSF élémentaires

$$h_{\Omega} = \frac{\sum_{k=1}^K \alpha_k u_k}{\sum_{k=1}^K \alpha_k} \quad (8.18)$$

avec $\Omega = \{\alpha_k\}_k$ les coefficients à estimer par AMIRAL et u_k les PSF de la base à expliciter. Si on considère un modèle de PSF adapté à l'astronomie (Moffat ou PSFAO₁₉) alors les u_k peuvent être choisis comme le modèle évalué en des valeurs particulières de ses paramètres. On obtient ainsi une grille de PSF élémentaires (Fig. 8.6). L'algorithme AMIRAL cherche alors une pondération de ces PSF élémentaires. La grille de recherche doit être suffisamment large pour inclure la PSF que l'on souhaite estimer. La résolution de la grille doit être suffisante pour modéliser correctement l'ensemble des PSF. Cependant une résolution trop importante augmente considérablement le nombre de paramètres à estimer et peut entraîner des redondances : les éléments successifs u_k et u_{k+1} sont de plus en plus proches (vecteurs de base de plus en plus colinéaires) et plusieurs solutions peuvent apparaître.

La minimisation du critère est effectuée par l'algorithme de descente de gradient *Variable Metric with Limited Memory, Bounded* (VMLM-B) de Thiébaud [2002]. Il s'agit du même minimiseur que pour MISTRAL.

8.3.2 Application sur données OBSSAT

L'observation depuis le sol de satellites en orbite basse (*Low Earth Orbit*, LEO) est un enjeu à la fois dans le domaine civil (suivi de satellites civils et de débris)

4. Les paramètres (μ, ρ_0, p) sont alors des paramètres de nuisance (cf. Chapitre sur les problèmes inverses). Ils sont présents dans le critère et doivent être estimés, même s'ils ne sont pas des paramètres d'intérêt. Une fois estimés ils sont inutilisés, seuls les paramètres de PSF sont conservés.

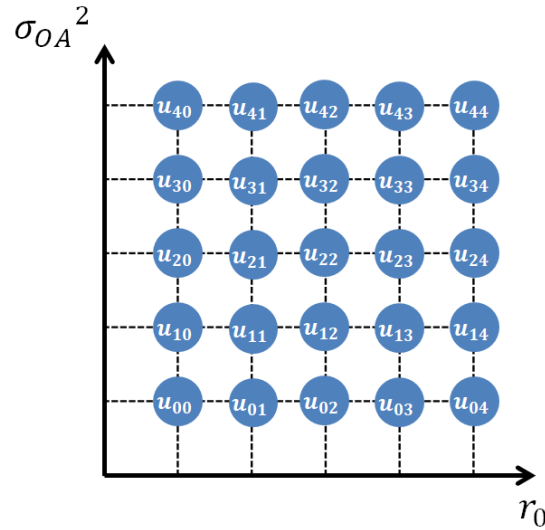


FIGURE 8.6 – Exemple d’une grille 2D de PSF pour AMIRAL. Dans cet exemple un total de 25 PSF élémentaires sont générées avec le modèle PSFAO₁₉, pour 5 valeurs de r_0 et 5 valeurs de σ_{OA}^2 .

et dans le domaine de la défense. Le Département Optique et Techniques Associées (DOTA) de l’ONERA est impliqué auprès de la DGA afin de développer la chaîne d’acquisition (système d’OA, Cyril Petit) et de traitement d’images (déconvolution, Laurent Mugnier) de satellites en LEO [Petit et al., 2019]. L’ONERA utilise le télescope Méo de l’Observatoire de la Côte d’Azur (OCA), et son système d’optique adaptative ODISSEE. Les caractéristiques du télescope et du système d’OA ont été énoncées à la 2.3.3.

L’une des cibles d’observation d’ODISSEE a été le satellite ENVISAT de l’ESA (Fig. 8.7) lancé en 2002 et qui a fini sa mission en 2012 à cause d’une perte de communication avec le satellite. Il représente maintenant le plus gros débris en orbite et représente un problème majeur vis-à-vis des lois de non-pollution de l’espace. Imager le satellite et sa rotation sur lui-même intéresse l’ESA pour évaluer la possibilité d’une désorbitation à long terme.

Afin de gagner en résolution les images doivent être déconvoluées. La PSF ne peut cependant pas être estimée lors de l’observation, en particulier l’image d’une étoile ne fournit pas une PSF ressemblante à la PSF du système lors de l’observation d’un satellite avec une grande vitesse de défilement. Il faut alors avoir recours à une technique de déconvolution aveugle. L’algorithme AMIRAL a donc été utilisé sur une base de PSF générées avec le modèle PSFAO₁₉ pour différentes valeurs de σ_{OA}^2

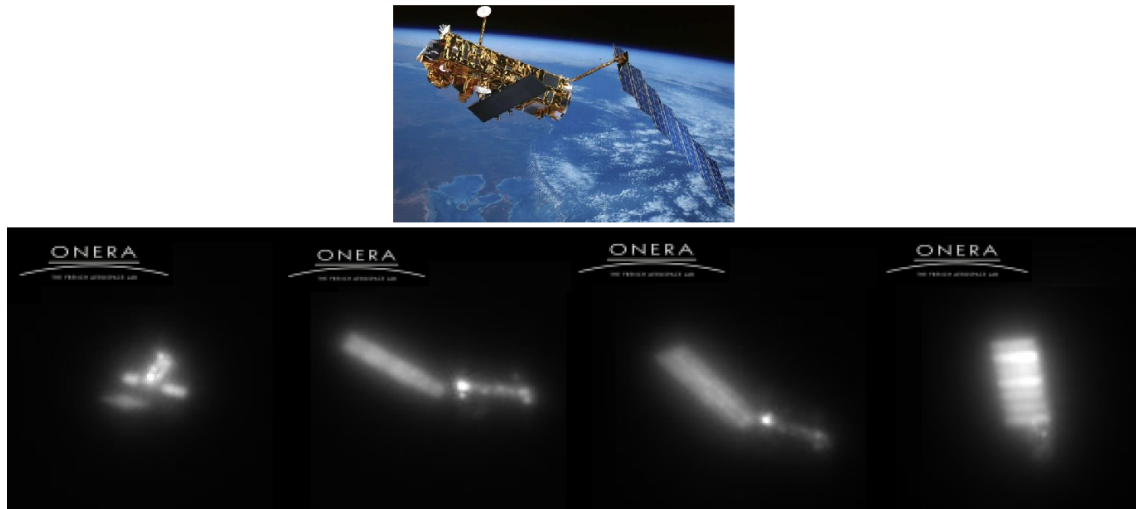


FIGURE 8.7 – Haut : photo du satellite ENVISSAT de l'ESA. Bas : série d'images obtenues par l'ONERA sur le banc ODISSEE [Petit et al., 2019].

et r_0 [Petit et al., 2019]. L'algorithme retourne les coefficients de décomposition de la PSF sur la base. La PSF ainsi estimée est ensuite utilisée dans un algorithme de déconvolution $L_1 - L_2$ avec contrainte de positivité. La figure 8.8 présente les images déconvoluées. Le satellite déconvolué possède des bords francs et quelques structures. Le modèle PSFAO₁₉ est donc adapté même à ces observations de satellite à défilement rapide et avec des temps de pose faible (typiquement inférieur à la seconde) bien que le modèle soit décrit par une réponse impulsionnelle longue pose. L'algorithme de marginalisation AMIRAL, utilisé avec une combinaison linéaire de PSF selon le modèle PSFAO₁₉, est donc non dégénérée et permet d'estimer en pratique des paramètres de PSF adéquats pour la déconvolution.

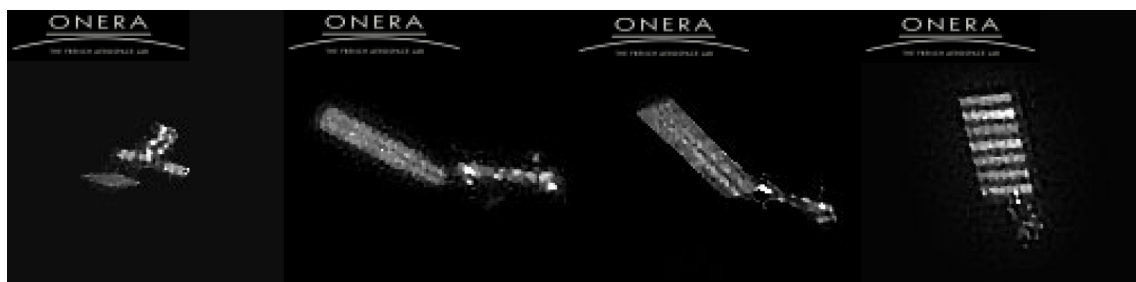


FIGURE 8.8 – Images déconvoluées du satellite ENVISSAT [Petit et al., 2019].

8.4 P-AMIRAL : paramétrisation non-linéaire de la PSF

8.4.1 Description de la méthode

L'algorithme AMIRAL a été développé originellement pour estimer une combinaison linéaire d'une base de PSF. L'un des travaux de cette thèse a été d'adapter AMIRAL au cas général non linéaire, ce qui donne l'algorithme *Parametric AMIRAL* (P-AMIRAL). L'avantage de P-AMIRAL est de pouvoir prendre en compte plus précisément la forme de la PSF. En effet la décomposition de la PSF sur une base est trop restrictif : *a priori* l'ensemble des PSF possibles d'un système télescope+atmosphère n'est pas un espace vectoriel. De plus, pour paver correctement le plan (r_0, σ_{OA}^2) du modèle PSFAO₁₉ il faut environ 25 PSF de base⁵, ce qui requiert l'estimation de 25 coefficients par AMIRAL. Cependant le modèle non linéaire ne requiert effectivement que les deux paramètres r_0 et σ_{OA}^2 , la minimisation en est grandement simplifiée.

Par ailleurs nous avons vu à la section 5.4.1 que la paramètre de Fried du modèle PSFAO₁₉ est fortement corrélé au paramètre de Fried estimé par SPARTA ou par les mesures MASS/DIMM. L'utilisation de ces données de télémétrie permet donc d'obtenir un *a priori* $P(\Omega)$ très fort sur ce paramètre dans l'Eq. 8.13. De même une mesure externe du rapport de Strehl donnerait des indications sur le paramètre σ_{OA}^2 . A l'opposé, si ces informations de télémétrie ne sont pas disponibles ou pas calibrées pour l'instrument considéré, l'*a priori* le moins informatif que l'on puisse donner ces paramètres est une loi uniforme sur leur domaine de validité $r_0 > 0$ et $\sigma_{OA}^2 \geq 0$. L'utilisation d'un modèle non linéaire par P-AMIRAL autorise donc l'ajout d'*a priori* adaptés selon la connaissance que l'on a de ces paramètres.

P-AMIRAL a été codé en IDL. Le modèle PSFAO₁₉ est appelé par P-AMIRAL lors de l'estimation des paramètres PSF. Les gradients analytiques de modèle ont été calculés (Annexe B) et sont fournis à l'algorithme de minimisation pour gagner en rapidité et éviter les erreurs numériques dues à la méthode de calcul par différences finies (le choix du pas est particulièrement crucial dans l'erreur commise). Le même minimiseur VMLM-B que celui d'AMIRAL est utilisé. Les paramètres de la PSF sont bornés dans leurs domaines de validité (Eq. 4.17), mais l'utilisateur peut définir des bornes plus étroites si nécessaire. Par défaut les sept paramètres du modèle PSFAO₁₉ sont libres, mais l'utilisateur a aussi la possibilité d'en fixer certains

5. De même pour un modèle de Moffat, on peut choisir environ 5 valeurs de α et 5 valeurs de β pour paver suffisamment le plan (α, β) . Le nombre exact de PSF de la base est déterminé par l'utilisateur et dépend de la variabilité de la PSF.

de son choix, ce qui rigidifie le modèle mais réduit la complexité numérique pour le minimiseur.

Le code actuel P-AMIRAL a été développé pour le modèle PSFAO₁₉, toutefois il est envisageable d'utiliser n'importe quel autre modèle de PSF s'il a été préalablement codé et si ses gradients sont calculés (par méthode analytique, ou numérique à défaut). La méthode AMIRAL estimant une combinaison linéaire de PSF est donc un cas particulier de la méthode P-AMIRAL.

8.4.2 Validation sur données simulées

Afin d'étudier les propriétés de l'estimateur marginal, nous utilisons la même simulation qu'à la section 8.1 de l'astéroïde observé avec une PSF de paramètres $\bar{r}_0 = 15$ cm et $\sigma_{OA}^2 = 1.3$ rad². Nous considérons trois cas de supervision des paramètres (μ, ρ_0, p) de la DSP de l'objet et du bruit :

- Entièrement supervisé $J_{\text{marg}}(\mathbf{\Omega}; \bar{\mu}, \bar{\rho}_0, \bar{p})$. Seuls les paramètres PSF sont estimés, les paramètres de la DSP sont fixés.
- Entièrement non supervisé $J_{\text{marg}}(\mathbf{\Omega}, \mu, \rho_0, p)$. Les paramètres de PSF et DSP sont tous estimés par l'algorithme.
- Essentiellement non supervisé $J_{\text{marg}}(\mathbf{\Omega}, \mu, \rho_0; \bar{p})$. Seul la loi de puissance p de la DSP est fixée.

L'estimation simultanée ou la supervision de ces paramètres modifie sensiblement le résultat de l'estimation des paramètres PSF. Ces trois cas sont donc étudiés séparément.

Cas entièrement supervisé

La déconvolution jointe, même dans le cas où la DSP de l'objet est connue (entièrement supervisé), montre un comportement dégénéré théoriquement et expérimentalement. Cependant l'estimateur marginal supervisé possède de meilleures propriétés théoriques : il est non biaisé et asymptotiquement consistant lorsque le SNR ou le nombre de données augmentent [Lehmann, 1983]. Afin de tester les propriétés expérimentales de l'estimateur marginal nous utilisons l'algorithme P-AMIRAL sur l'observation simulée de l'astéroïde Vesta. Pour rappel le SNR par pixel est d'environ 105, ce qui représente une observation à fort flux réalisable sur l'instrument SPHERE/Zimpol. L'algorithme P-AMIRAL converge vers la solution

$$\begin{cases} r_0 = 14.8 & \text{cm} \\ \sigma_{OA}^2 = 1.26 & \text{rad}^2 \end{cases} \quad (8.19)$$

La PSF correspondante à cette solution est montrée sur la figure 8.16, elle se superpose quasi parfaitement à la PSF vraie, il en est de même pour les FTO. L'erreur

sur le paramètre de Fried estimé r_0 par rapport au paramètre vrai de simulation $\overline{r_0}$ est de 0.2 cm, soit une erreur relative

$$\frac{r_0 - \overline{r_0}}{\overline{r_0}} = -1.3\% \quad (8.20)$$

Et l'erreur sur la variance de phase estimée σ_{OA}^2 par rapport au paramètre vrai de simulation $\overline{\sigma_{OA}^2}$ est de 0.04 rad², soit une erreur relative

$$\frac{\sigma_{OA}^2 - \overline{\sigma_{OA}^2}}{\overline{\sigma_{OA}^2}} = -3.1\% \quad (8.21)$$

Ces erreurs sont faibles et les paramètres correctement estimés. Le comportement de l'estimateur marginal est donc bien meilleur que celui de l'estimateur joint, ce dernier estimant toujours la PSF la plus piquée possible. Les (faibles) erreurs de l'estimateur marginal peuvent provenir des différentes hypothèses simplificatrices effectuées : l'objet et le bruit sont supposés avoir une statistique gaussienne, et la DSP de l'objet est approximée par un modèle simple de DSP. Les paramètres de cette DSP $(\overline{\mu}, \overline{\rho_0}, \overline{p})$ sont supervisés et donnent une bonne approximation de la DSP de Vesta en moyenne circulaire (cf. Fig. 8.4), mais ne sont pas forcément exactement optimaux pour le critère marginal. La figure 8.9 présente la forme du critère marginal supervisé autour de la solution vraie. Ce critère est en forme d'une cuvette avec un unique minimum, ce qui est effectivement une forme adéquate pour des processus de minimisation. Il est intéressant de remarquer que ce critère marginal possède une forme similaire au rapport de Strehl de la PSF (Fig. 8.10) en fonction de r_0 et σ_{OA}^2 . Le critère marginal privilégie donc des solutions de PSF pour lesquelles le rapport de Strehl est correctement estimé. L'estimation marginale conduit à un rapport de Strehl $S_R = 11.4\%$, tandis que le vrai rapport de Strehl est $\overline{S_R} = 11.5\%$. Ce paramètre est très bien estimé, l'erreur relative est

$$\frac{S_R - \overline{S_R}}{\overline{S_R}} = -0.9\% \quad (8.22)$$

La PSF estimée par marginalisation supervisée est ensuite utilisée dans un algorithme de déconvolution classique (à PSF fixée) $L_1 - L_2$ avec contrainte de positivité, correspondant au critère de l'Eq. 8.2. Le résultat de la déconvolution est montré Fig. 8.11. L'objet est très bien estimé, les bords et les structures de surface sont visibles. L'erreur sur l'objet restauré, définie à l'Eq. 8.4, vaut

$$\varepsilon_{\text{obj, marg sup}} = 3.7 \times 10^{-4} \quad (8.23)$$

Cette erreur est proche de l'erreur $\varepsilon_{\text{obj, PSF vraie}} = 3.4 \times 10^{-4}$ calculée pour la déconvolution à PSF vraie $(\overline{r_0}, \overline{\sigma_{OA}^2})$. La marginalisation supervisée fournit un résultat très proche de la qualité ultime que l'on peut obtenir.

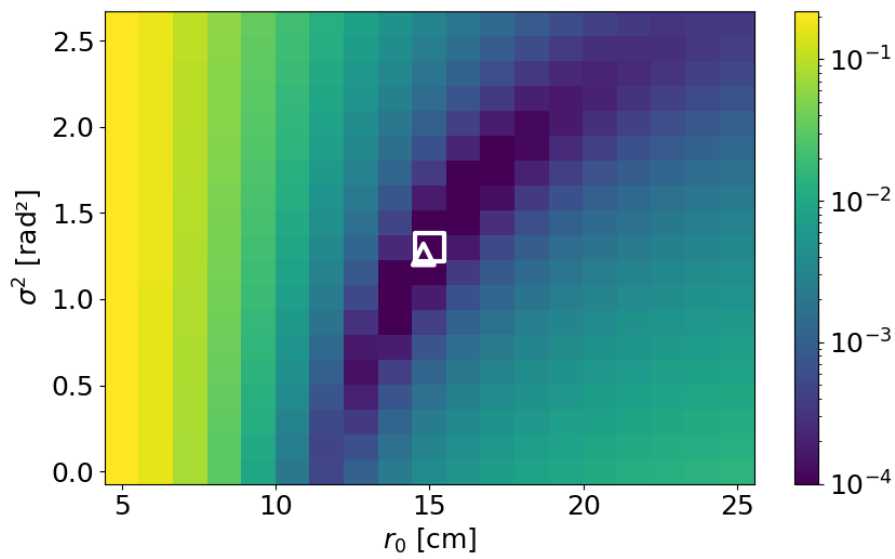


FIGURE 8.9 – Carte du critère marginal supervisé pour $(\overline{\mu}, \overline{\rho_0}, \overline{p})$. Le carré blanc central indique les valeurs vraies $(\overline{\sigma_{OA}^2}, \overline{r_0})$ des paramètres de la PSF. Le triangle indique les valeurs estimées. La carte de couleur montre la forme du critère marginal (échelle logarithmique d'intensité). La forme du critère marginal en cuvette est très différente de la forme en plan incliné du critère joint (Fig. 8.2).

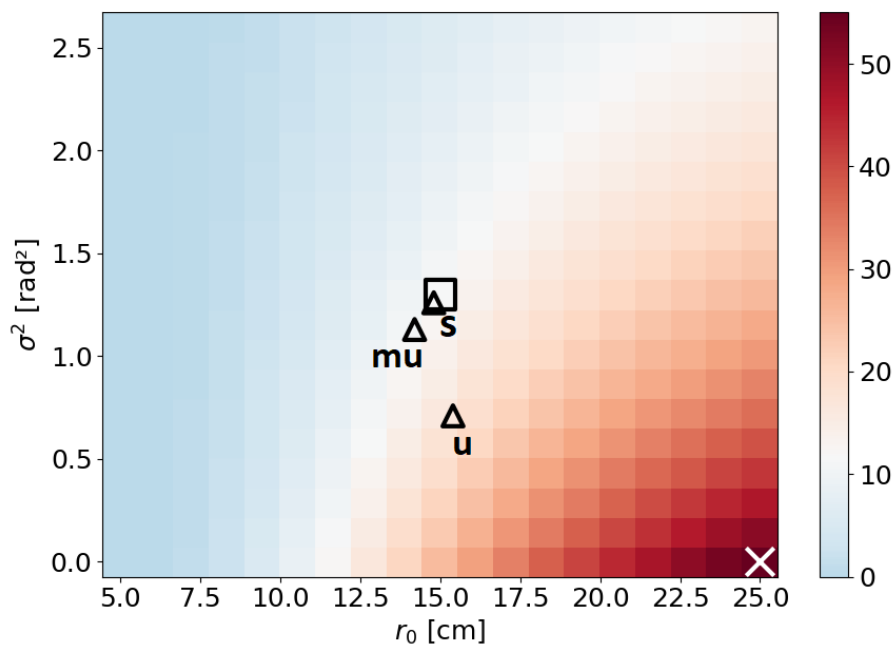


FIGURE 8.10 – Carte du rapport de Strehl en fonction des paramètres de la PSF. Le carré indique les vrais paramètres de PSF, et donc le Strehl vrai. La croix en bas à droite indique les paramètres estimés par le critère joint. Les trois triangles indiquent les paramètres estimés par marginalisation. *s* : *supervised* (supervisé). *u* : *unsupervised* (non supervisé). *mu* : *mostly unsupervised* (essentiellement non supervisé).

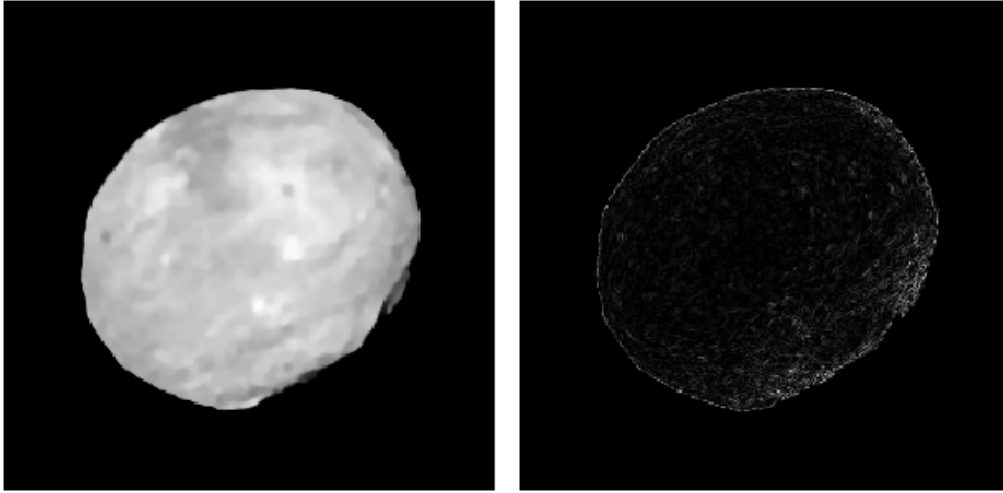


FIGURE 8.11 – Gauche : Déconvolution de l’astéroïde simulé Vesta avec la PSF estimée par marginalisation supervisée. Droite : Deux fois la différence en valeur absolue avec l’objet vrai.

Cas entièrement non supervisé

La marginalisation supervisée estime très bien la PSF, ce qui entraîne une déconvolution de très bonne qualité. Cependant les résultats dépendent de la supervision des hyper-paramètres $(\bar{\mu}, \bar{\rho}_0, \bar{p})$. En pratique on souhaite diminuer le niveau de supervision, ce qui correspond à relâcher les contraintes d’*a priori* et permet d’utiliser la méthode même avec une connaissance très limitée de l’objet observé. Le critère marginal non supervisé essaye d’estimer à la fois les paramètres de la PSF et les hyper-paramètres (μ, ρ_0, p) . L’algorithme P-AMIRAL en mode non supervisé donne le résultat

$$\left\{ \begin{array}{ll} r_0 & = 15.4 \quad \text{cm} \\ \sigma_{OA}^2 & = 0.71 \quad \text{rad}^2 \\ \mu & = 2.9 \times 10^{-9} \\ \rho_0 & = 1.49 \quad \text{pix}^{-1} \\ p & = 3.27 \end{array} \right. \quad (8.24)$$

Dans ce cas le r_0 est légèrement sur-estimé par rapport au paramètre vrai avec une erreur relative de 2.7%, tandis que le σ_{OA}^2 est fortement sous-estimé avec une erreur relative de -45%. Le rapport de Strehl de la PSF estimée est $S_R = 17.1\%$, la PSF estimée est alors plus piquée que la PSF vraie (Fig. 8.16). Le paramètre de la loi de puissance de la DSP de l’objet est $p = 3.27$, ce qui est plus grand que le paramètre supervisé $\bar{p} = 2.91$. Le critère marginal non supervisé estime donc un objet trop mou.

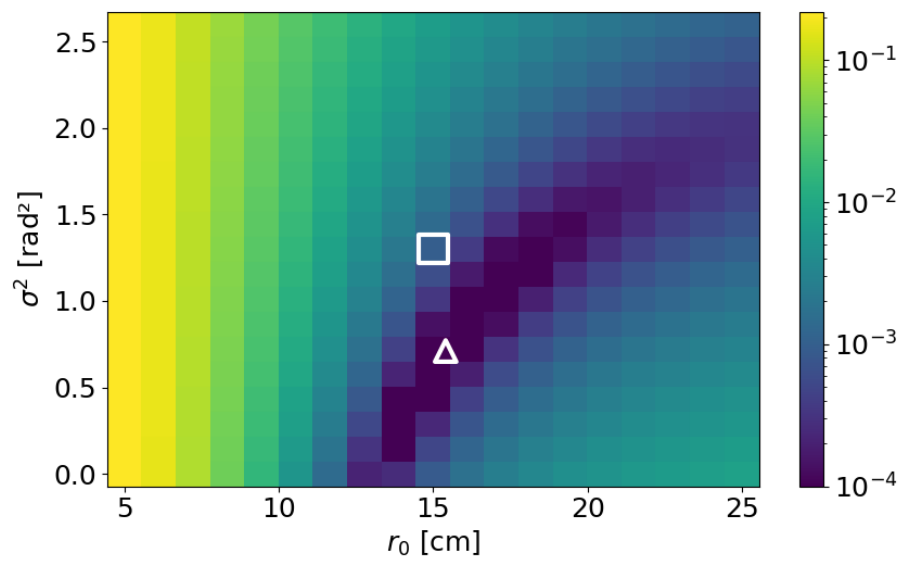


FIGURE 8.12 – Carte du critère marginal non supervisé. Le carré blanc central indique les valeurs vraies ($\overline{\sigma_{OA}^2}, \overline{r_0}$) des paramètres de la PSF. Le triangle indique les valeurs estimées. La carte de couleur montre la forme du critère marginal (échelle logarithmique d'intensité).

La PSF estimée par marginalisation est ensuite utilisée dans l'algorithme de déconvolution. Le résultat est de qualité correcte mais l'objet est légèrement lisse, ce qui diminue le contraste des structures internes (Fig. 8.13). Le résultat non supervisé (hyper-paramètres libres) est toutefois largement meilleur que l'estimation jointe (à hyper-paramètres fixés). L'erreur sur l'objet estimé vaut

$$\varepsilon_{\text{obj, marg non sup}} = 8.1 \times 10^{-4} \quad (8.25)$$

Cette erreur de la méthode marginale non supervisée est environ deux fois plus grande que l'erreur de la déconvolution avec la PSF vraie ou avec la PSF estimée par méthode marginale supervisée. Par contre l'erreur est six fois plus faible que pour l'estimation jointe.

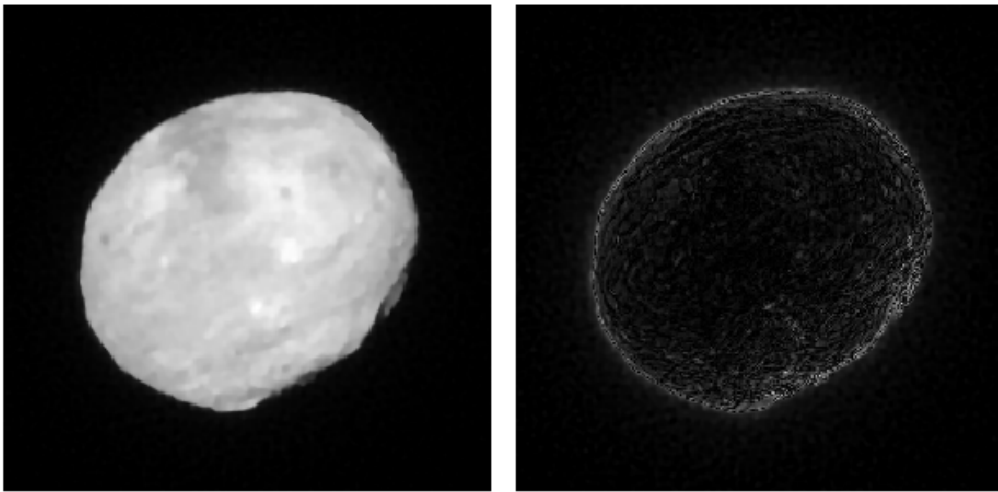


FIGURE 8.13 – Gauche : Déconvolution de l'astéroïde simulé Vesta avec la PSF estimée par marginalisation non supervisée. Droite : Deux fois la différence en valeur absolue avec l'objet vrai.

Cas essentiellement non supervisé

Le cas précédent de la marginalisation non supervisée conduit à une forte erreur d'estimation des paramètres de la PSF. Une approche mixte consiste à superviser certains paramètres et à laisser les autres libres. Le paramètre p , qui est la loi de puissance de la DSP de l'objet, peut être déterminé *a priori*. En effet la forme générale de l'objet observé est souvent connue : il peut s'agir d'un champ d'étoiles uniforme ($p \simeq 0$), d'un astéroïde ou une planète ($p \simeq 3$) ou d'un satellite artificiel ($p \simeq 2.5$). En connaissant alors la catégorie de l'objet observé, il est possible d'en déduire une

valeur raisonnable pour p . Ce paramètre est alors donné de manière supervisée à l'algorithme P-AMIRAL, les autres paramètres μ et ρ_0 sont laissés libres. C'est ce que nous appelons la méthode marginale « essentiellement non supervisée ». Dans notre cas, nous avons simulé une observation de l'astéroïde Vesta, nous choisissons alors de superviser $p = 3$, comme pour tout astéroïde. L'algorithme P-AMIRAL donne le résultat

$$\begin{cases} r_0 = 14.2 & \text{cm} \\ \sigma_{OA}^2 = 1.13 & \text{rad}^2 \\ \mu = 2.9 \times 10^{-9} \\ \rho_0 = 1.39 & \text{pix}^{-1} \end{cases} \quad (8.26)$$

L'erreur relative sur le r_0 est de -5.3% , et l'erreur relative sur σ_{OA}^2 est de -13% . Le rapport de Strehl de la PSF estimée est $S_R = 11\%$, soit une très légère sous-estimation. La forme du critère marginal essentiellement non supervisé est identique à la forme du rapport de Strehl (Fig. 8.10). Le minimum du critère en r_0 et σ_{OA}^2 se situe sur une iso-ligne du Strehl, très proche du Strehl vrai.

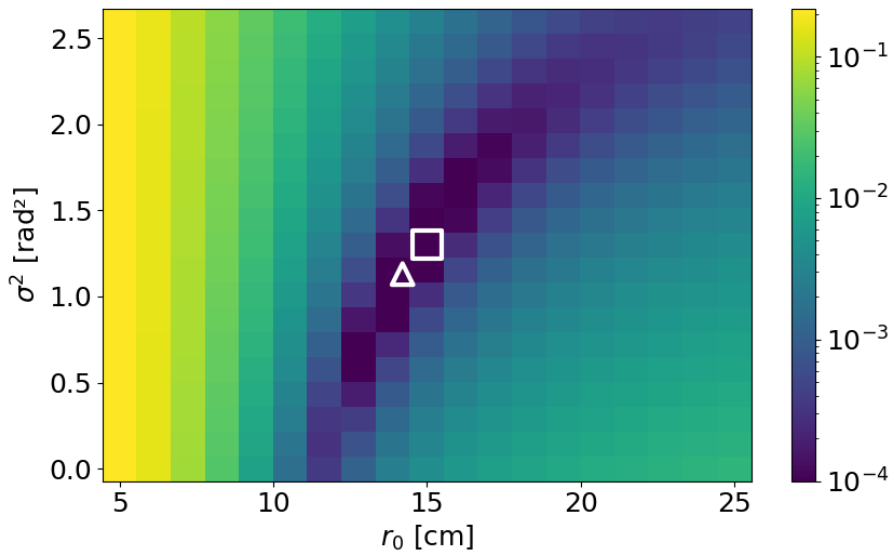


FIGURE 8.14 – Carte du critère marginal essentiellement non supervisé. Seul le paramètre $p = 3$ est fixé. Le carré blanc central indique les valeurs vraies ($\overline{\sigma_{OA}^2}, \overline{r_0}$) des paramètres de la PSF. Le triangle indique les valeurs estimées. La carte de couleur montre la forme du critère marginal (échelle logarithmique d'intensité).

La PSF estimée par marginalisation est utilisée dans l'algorithme de déconvolution. L'objet estimé est donné à la Fig. 8.15. Les bords et structures sont nettes, l'essentiel de l'erreur est située sur les contours de l'astéroïde. Le rapport de Strehl de

la PSF étant très légèrement sous-estimé, l'objet est très légèrement sur-déconvolué. La valeur de l'écart entre objet estimé et objet vrai est

$$\varepsilon_{\text{obj, marg ess non sup}} = 7.0 \times 10^{-4} \quad (8.27)$$

Cette erreur est légèrement inférieure au cas non supervisé, mais reste du même ordre de grandeur. La méthode marginale essentiellement non supervisée est une méthode opérationnelle en pratique car elle ne requiert que la connaissance de la catégorie d'objet observé. Elle permet d'estimer avec suffisamment de précision les paramètres PSF et le rapport de Strehl. Les formes de la PSF et de la FTO estimées sont en conséquence très proches des formes de la PSF et de la FTO vraie (Fig. 8.16). La sous-estimation du r_0 est visible par une FTO abaissée proche de la fréquence normalisée $f = 0.1$. De plus la PSF estimée permet d'effectuer ensuite une déconvolution de l'image avec de faibles erreurs résiduelles.

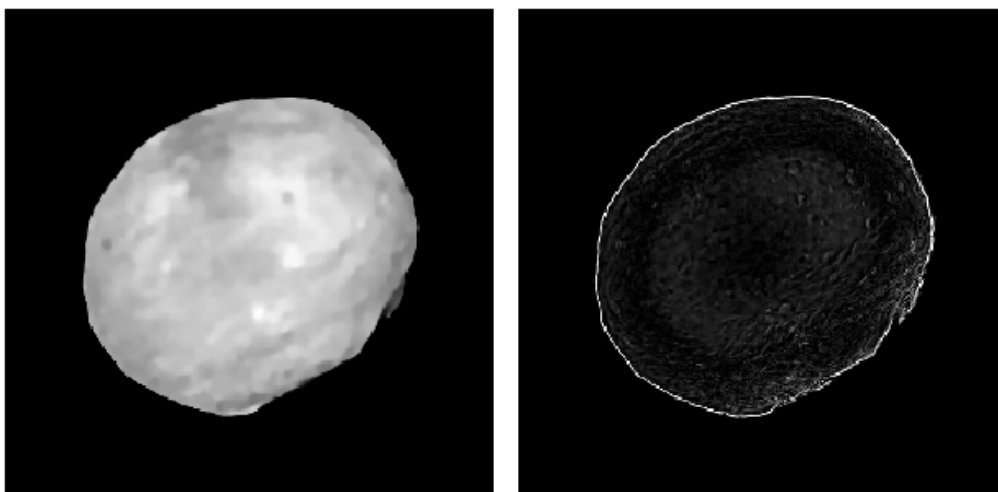


FIGURE 8.15 – Gauche : Déconvolution de l'astéroïde simulé Vesta avec la PSF estimée par marginalisation essentiellement non supervisée. Droite : Deux fois la différence en valeur absolue avec l'objet vrai.

8.4.3 Application sur données SPHERE

Les validations précédentes sur données simulées ont démontré la possibilité d'utiliser la méthode marginale essentiellement non supervisée (seule la loi de puissance p est fixée). Cette méthode a pour but d'être ensuite appliquée sur données réelles. Une application concrète est l'observation de l'astéroïde Vesta le 8 Juin 2018 par SPHERE/Zimpol lors du *Large Program*. L'astéroïde avait déjà été déconvolué

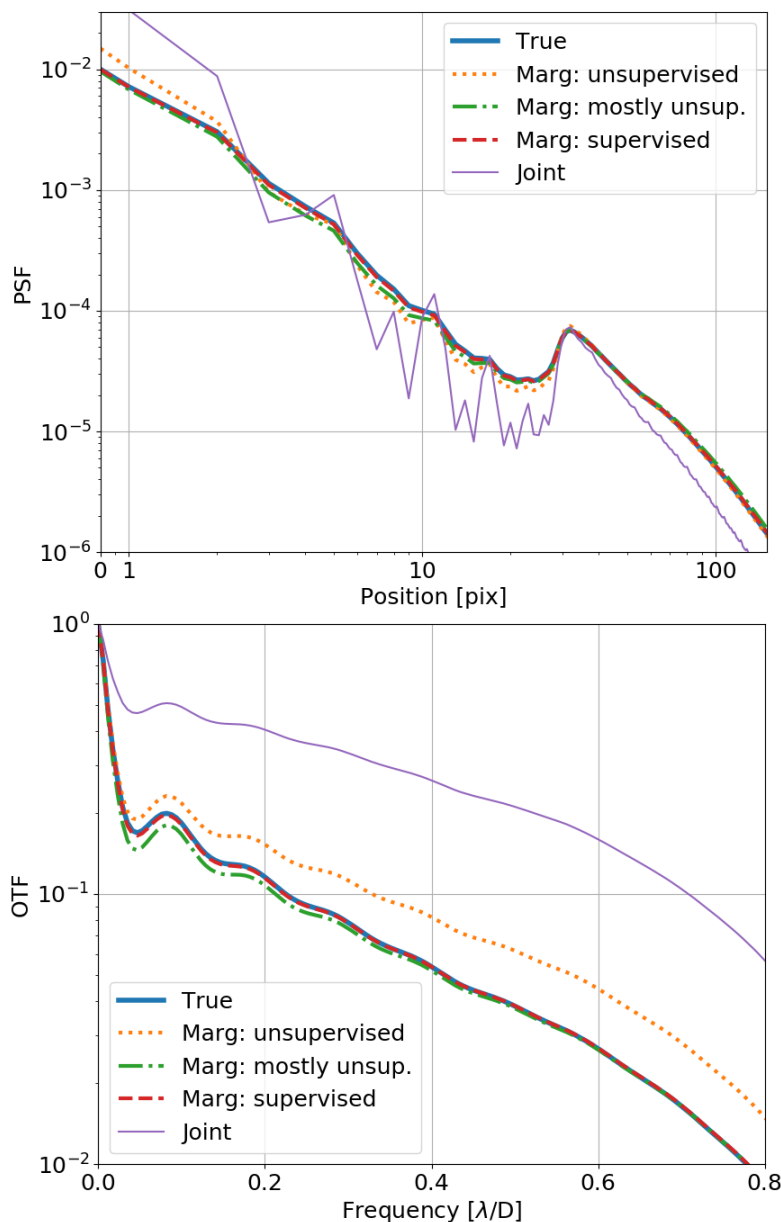


FIGURE 8.16 – Haut : moyenne circulaire de la PSF vraie (trait bleu épais), de la PSF estimée par méthode jointe (trait violet fin), et des 3 PSF estimées par marginalisation selon les 3 niveaux de supervision (traits discontinus orange, vert et rouge). La diffraction est clairement visible sur la PSF estimée par méthode jointe, preuve qu'elle est beaucoup trop piquée. Bas : FTO correspondantes aux différentes méthodes. Les PSF et FTO estimées par méthode marginale supervisée (rouge) se superposent quasi parfaitement aux PSF et FTO vraies (bleu). La méthode marginale essentiellement non supervisée (vert) sous estime légèrement la FTO, tandis que les méthodes marginale non supervisée (orange) et jointe (violet) sur-estiment la FTO. Dans le cas joint, les bornes du domaine (r_0, σ_{OA}^2) sont atteintes.

par une fonction de Moffat à la section 7.3.2. Les paramètres de Moffat $\alpha = 4$ pixels et $\beta = 1.5$ estimés empiriquement donnent une déconvolution correcte [Fétick et al., 2019b].

Nous utilisons à présent l’algorithme P-AMIRAL sur l’image de Vesta en mode essentiellement non supervisé, à $p = 3$ comme pour tous les astéroïdes. L’algorithme converge vers la solution

$$\begin{cases} r_0 = 32.1 & \text{cm} \\ \sigma_{OA}^2 = 2.78 & \text{rad}^2 \\ \mu = 1.75 \times 10^{-11} & \\ \rho_0 = 0.98 & \text{pix}^{-1} \end{cases} \quad (8.28)$$

L’estimation $r_0 \simeq 32$ cm est sans doute un peu trop élevée, car elle est plus grande que l’ensemble des r_0 estimés à Paranal avec le modèle PSFAO₁₉ (Fig. 5.20). Le rapport de Strehl correspondant à cette estimation de r_0 et σ_{OA}^2 est $S_R = 20\%$. La moyenne circulaire de la PSF estimée est montrée sur la Fig. 8.17. La PSF estimée par marginalisation ressemble fortement à la PSF de Moffat estimée précédemment. La FTO montre que le modèle PSFAO₁₉ et de Moffat ont la même pente de décroissance aux moyennes fréquences. Cette zone des moyennes fréquences est caractéristique de la correction de l’OA, ainsi les deux modèles et les deux méthodes s’accordent sur le niveau de correction de l’OA. Cependant le modèle PSFAO₁₉ inclut le halo non corrigé, visible aux rayons supérieurs à 100 pixels. Ce halo se traduit par un affaissement général de la FTO vers le bas par rapport à la fréquence nulle. La fonction de Moffat ne peut pas prendre en compte ce halo, ni la fréquence de coupure du télescope. Ce sont les deux différences majeures que nous observons sur la FTO.

La PSF estimée par marginalisation est ensuite utilisée dans l’algorithme de déconvolution. Le résultat est montré sur la figure 8.18. Par comparaison avec la déconvolution par une PSF de Moffat, la méthode de marginalisation sur le modèle PSFAO₁₉ donne un objet déconvolué plus contrasté, donc avec des détails plus visibles. Le halo est légèrement diminué, ce qui se traduit par plus d’énergie recentrée dans l’objet. Enfin la déconvolution par une Moffat est légèrement grumeleuse, tandis que la déconvolution avec PSFAO₁₉ est plus lisse. Cette différence peut être expliquée par la surestimation des hautes fréquences par la Moffat et notamment l’absence de fréquence de coupure du télescope (Fig. 8.17). En surestimant les hautes-fréquences, l’algorithme de déconvolution croit laisser passer du signal de l’objet, tandis qu’il ne s’agit que de bruit. Le résultat est l’apparition de grumeaux dus au bruit.

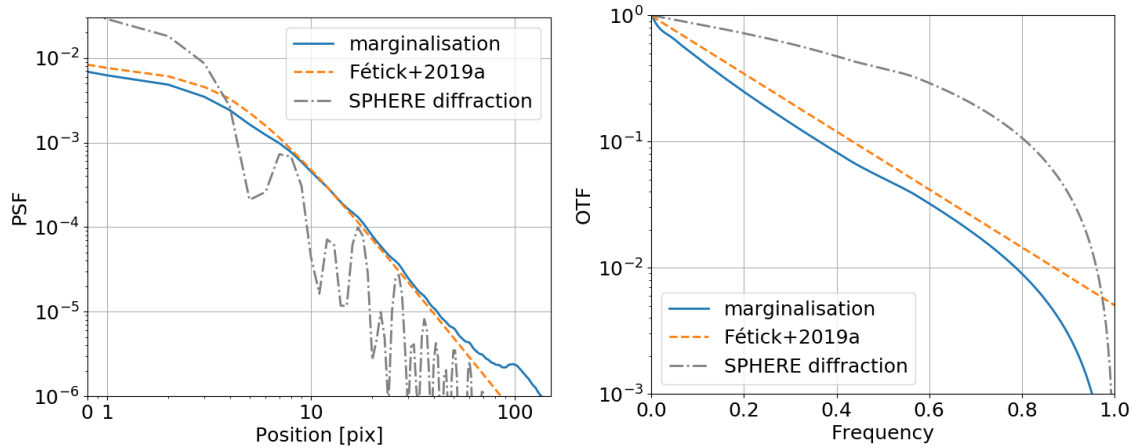


FIGURE 8.17 – Gauche : moyenne circulaire de la PSF du modèle de Moffat pour $\alpha = 4$ pixel et $\beta = 1.5$ (en pointillés orange) et de la PSF estimée par marginalisation avec le modèle PSFAO₁₉ (en bleu continu). La PSD de diffraction de l’instrument est indiquée (en gris) pour comparaison. Droite : FTO correspondantes.

8.5 Conclusion et perspectives de la marginalisation

Grâce à la marginalisation nous avons développé une méthode de déconvolution aveugle en deux étapes (Fig. 8.19) suivant les travaux de Blanc et al. [2003b] et Blanco and Mugnier [2011]. La première étape consiste à estimer les paramètres de la PSF par marginalisation de l’objet. La deuxième étape est la déconvolution classique (à PSF fixée) de l’image avec la PSF estimée par marginalisation. L’ensemble de la méthode est résumé dans Fétick et al. [2020].

La première étape, de marginalisation, dépend bien évidemment du modèle de PSF choisi. Pour l’astronomie avec OA, nous avons montré que le modèle PSFAO₁₉ est adapté à ce processus de marginalisation. Le point-clé de cette première étape est la supervision ou l’absence de supervision des hyper-paramètres de la DSP de l’objet et du bruit (μ, ρ_0, p) . La connaissance de la catégorie d’objet observé permet de fixer p et d’estimer correctement les paramètres de la PSF. L’hypothèse principale sous-jacente est une statistique gaussienne de l’objet, lequel est donc autorisé à prendre des valeurs négatives. Des travaux sont actuellement en cours à l’ONERA afin de modifier le critère marginal pour prendre en compte la positivité de l’objet. Cette information est un *a priori* fort et valide, le flux lumineux ne pouvant pas être négatif. Cette information aiderait éventuellement à mieux identifier les paramètres de la PSF ou à relâcher le niveau de supervision des hyper-paramètres (notamment de p).

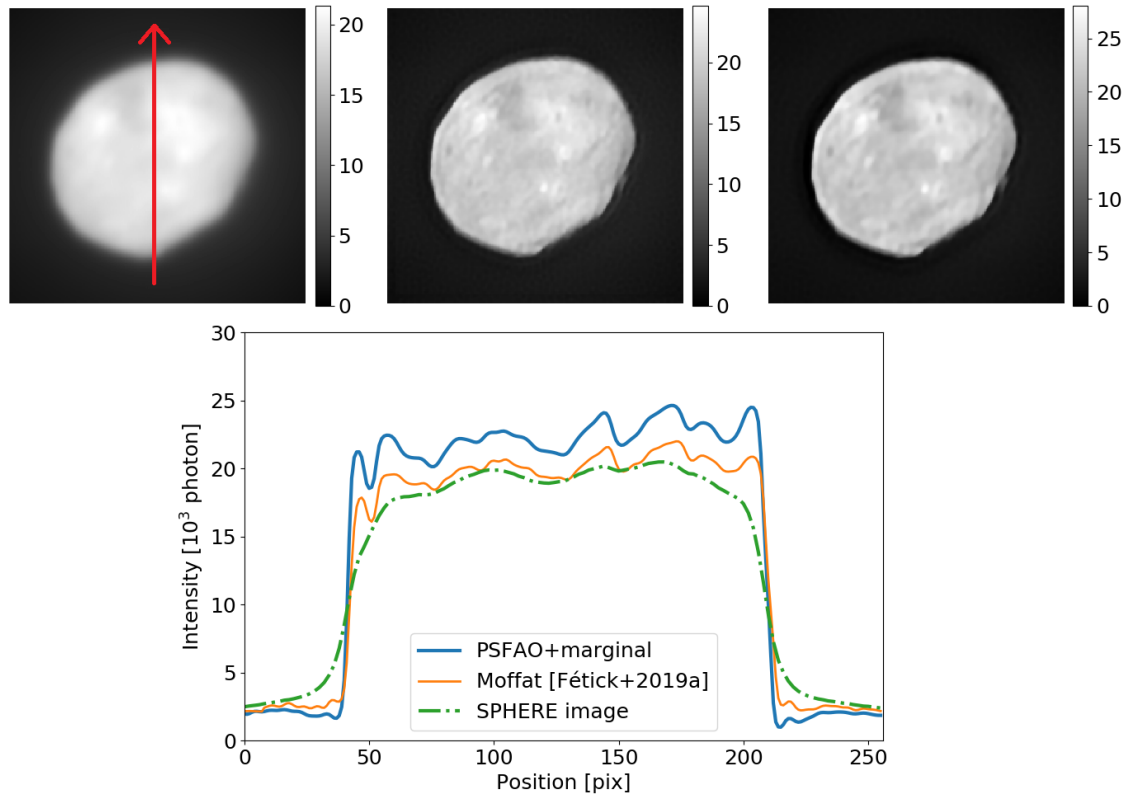


FIGURE 8.18 – Comparaison des deux déconvolutions de l'image Vesta. De gauche à droite : image SPHERE/Zimpol du 8 Juin 2018, déconvolution avec une PSF de Moffat ($\alpha = 4, \beta = 1.5$), déconvolution avec la modèle PSFAO₁₉ dont les paramètres (r_0, σ_{OA}^2) ont été estimés par marginalisation. Les unités sont en 10^3 photons. En dessous : vue en coupe de l'image SPHERE (tirets verts), de la déconvolution par la Moffat (continu fin orange), et de la déconvolution par PSFAO₁₉ (continu épais bleu). La flèche rouge sur l'image SPHERE indique l'axe de la vue en coupe.

De plus le modèle PSFAO₁₉ utilise des paramètres r_0 et σ_{OA}^2 qui ont une signification physique, et impactent directement le rapport de Strehl de la PSF. Nous avons montré au Chapitre 5 que les paramètres du modèles sont corrélés à des informations de télémétrie. L'enregistrement systématique de la télémétrie en parallèle de l'observation fournit donc des informations *a priori* sur les paramètres de la PSF qui peuvent être incluses dans le critère marginal sous la forme d'un terme en $-\ln P(\Omega)$.

L'un des soucis majeurs de la déconvolution aveugle (jointe ou en deux étapes comme ici) est la difficulté de démêler l'information de la PSF de l'information de l'objet, car nous n'avons accès qu'à l'image qui, dans le domaine de Fourier, est le produit de la transformée de Fourier de l'objet et de la PSF. Il y a donc une indétermination intrinsèque à l'observation. La diversité de phase [Blanc et al., 2003a,b, Mugnier et al., 2008] est un moyen d'obtenir par exemple une information supplémentaire discriminant la PSF (quasi-statique) de l'objet. Nous pouvons envisager des méthodes analogues en astronomie grâce à une diversité temporelle ou spectrale. En effet la PSF et l'objet n'ont pas la même évolution dans le temps ou en fonction de la longueur d'onde. Cette diversité serait alors un atout pour différencier les deux. Un processus de marginalisation 3D prenant en compte un cube d'images et de PSF, avec le temps ou la longueur d'onde en tant que troisième dimension, pourrait sans doute donner une estimation plus robuste des paramètres de la PSF.

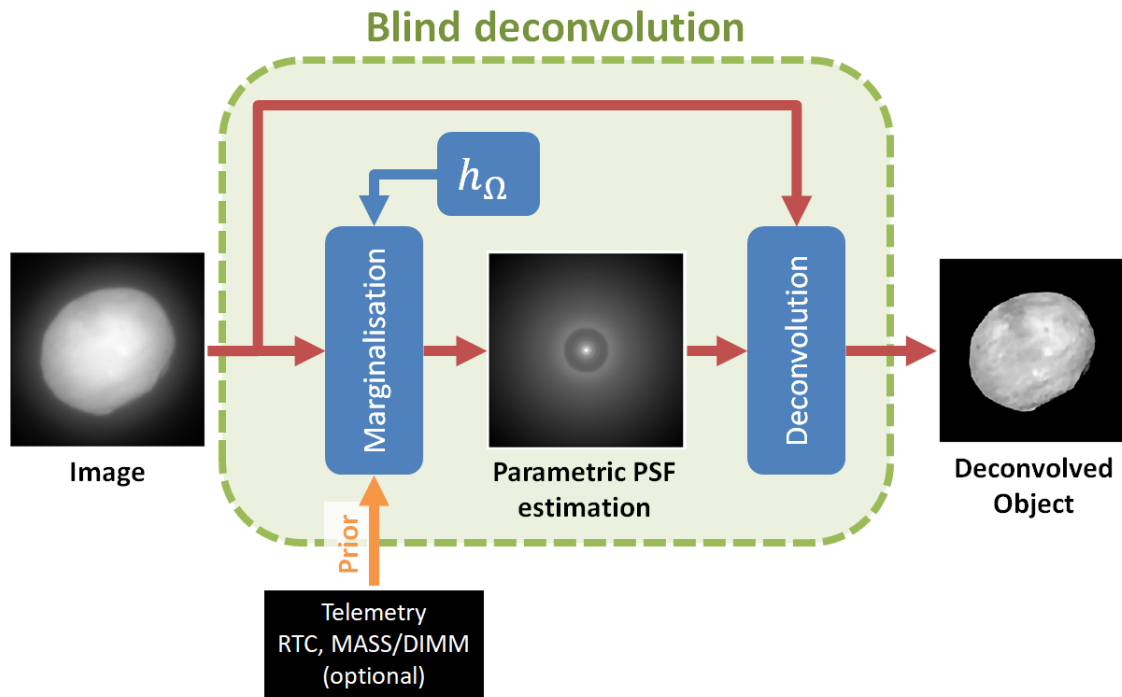


FIGURE 8.19 – Schéma de principe de la déconvolution aveugle en deux étapes. Premièrement la PSF est estimée par marginalisation, ce qui dépend du modèle de PSF h_{Ω} choisi. Une information *a priori* sur les paramètres de la PSF peut éventuellement être incluse. Deuxièmement la PSF estimée et l'image sont toutes deux utilisées dans un algorithme de déconvolution classique, à PSF fixe.

A&A 623, A6 (2019)
<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201834749>
 © R. J.L. Fétick et al. 2019

**Astronomy
&
Astrophysics**

Closing the gap between Earth-based and interplanetary mission observations: Vesta seen by VLT/SPHERE^{★,★★}

R. J.L. Fétick¹, L. Jorda¹, P. Vernazza¹, M. Marsset^{2,3}, A. Drouard¹, T. Fusco^{1,4}, B. Carry⁵, F. Marchis⁶, J. Hanuš⁷, M. Viikinkoski⁸, M. Birlan⁹, P. Bartczak¹⁰, J. Berthier⁹, J. Castillo-Rogez¹¹, F. Cipriani¹², F. Colas⁹, G. Dudziński¹⁰, C. Dumas¹³, M. Ferrais¹⁴, E. Jehin¹⁴, M. Kaasalainen⁸, A. Kryszczynska¹⁰, P. Lamy¹, H. Le Coroller¹, A. Marciniak¹⁰, T. Michalowski¹⁰, P. Michel⁵, L. M. Mugnier⁴, B. Neichel¹, M. Pajuelo^{9,15}, E. Podlewski-Gaca^{10,16}, T. Santana-Ros¹⁰, P. Tanga⁵, F. Vachier⁹, A. Vigan¹, O. Witasse¹², and B. Yang¹⁷

¹ Aix-Marseille Université, CNRS, CNES, Laboratoire d'Astrophysique de Marseille, Marseille, France
 e-mail: romain.fetick@lam.fr

² Department of Earth, Atmospheric and Planetary Sciences, MIT, 77 Massachusetts Avenue, Cambridge, MA 02139, USA

³ Astrophysics Research Centre, Queen's University Belfast, BT7 1NN, UK

⁴ ONERA, The French Aerospace Lab BP72, 29 avenue de la Division Leclerc, 92322 Châtillon Cedex, France

⁵ Université Côte d'Azur, Observatoire de la Côte d'Azur, CNRS, Laboratoire Lagrange, France

⁶ SETI Institute, Carl Sagan Center, 189 Bernardo Avenue, Mountain View CA 94043, USA

⁷ Institute of Astronomy, Charles University, Prague, V Holešovičkách 2, 18000, Prague 8, Czech Republic

⁸ Department of Mathematics, Tampere University of Technology, PO Box 553, 33101 Tampere, Finland

⁹ IMCCE, Observatoire de Paris, 77 avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris Cedex, France

¹⁰ Astronomical Observatory Institute, Faculty of Physics, Adam Mickiewicz University, Słoneczna 36, 60-286 Poznań, Poland

¹¹ Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, 4800 Oak Grove Drive, Pasadena, CA 91109, USA

¹² European Space Agency, ESTEC – Scientific Support Office, Keplerlaan 1, Noordwijk 2200 AG, The Netherlands

¹³ TMT Observatory, 100 W. Walnut Street, Suite 300, Pasadena, CA 91124, USA

¹⁴ Space sciences, Technologies and Astrophysics Research Institute, Université de Liège, Allée du 6 Août 17, 4000 Liège, Belgium

¹⁵ Sección Física, Departamento de Ciencias, Pontificia Universidad Católica del Perú, Apartado, Lima 1761, Perú

¹⁶ Institute of Physics, University of Szczecin, Wielkopolska 15, 70-453 Szczecin, Poland

¹⁷ European Southern Observatory (ESO), Alonso de Cordova 3107, 1900 Casilla Vitacura, Santiago, Chile

Received 30 November 2018 / Accepted 12 January 2019

ABSTRACT

Context. Over the past decades, several interplanetary missions have studied small bodies in situ, leading to major advances in our understanding of their geological and geophysical properties. These missions, however, have had a limited number of targets. Among them, the NASA Dawn mission has characterised in detail the topography and albedo variegation across the surface of asteroid (4) Vesta down to a spatial resolution of ~ 20 m pixel⁻¹ scale.

Aims. Here our aim was to determine how much topographic and albedo information can be retrieved from the ground with VLT/SPHERE in the case of Vesta, having a former space mission (Dawn) providing us with the ground truth that can be used as a benchmark.

Methods. We observed Vesta with VLT/SPHERE/ZIMPOL as part of our ESO large programme (ID 199.C-0074) at six different epochs, and deconvolved the collected images with a parametric point spread function (PSF). We then compared our images with synthetic views of Vesta generated from the 3D shape model of the Dawn mission, on which we projected Vesta's albedo information.

Results. We show that the deconvolution of the VLT/SPHERE images with a parametric PSF allows the retrieval of the main topographic and albedo features present across the surface of Vesta down to a spatial resolution of ~ 20 – 30 km. Contour extraction shows an accuracy of ~ 1 pixel (3.6 mas). The present study provides the very first quantitative estimate of the accuracy of ground-based adaptive-optics imaging observations of asteroid surfaces.

Conclusions. In the case of Vesta, the upcoming generation of 30–40 m telescopes (ELT, TMT, GMT) should in principle be able to resolve all of the main features present across its surface, including the troughs and the north–south crater dichotomy, provided that they operate at the diffraction limit.

Key words. techniques: high angular resolution – techniques: image processing – methods: observational – minor planets, asteroids: individual: Vesta

* Reduced images of Table A.1 are only available at the CDS via anonymous ftp to [cdsarc.u-strasbg.fr](ftp://cdsarc.u-strasbg.fr) (130.79.128.5) or via <http://cdsarc.u-strasbg.fr/viz-bin/qcat?J/A+A/623/A6>

** Based on observations made with ESO Telescopes at the Paranal Observatory under programme ID 199.C-0074 (PI: P. Vernazza).

1. Introduction

The surface topography of Vesta, the second largest main belt asteroid after the dwarf planet Ceres, has been characterised in detail by the framing camera (FC; [Sierks et al. 2011](#)) on board the NASA Dawn mission. The Dawn FC mapped ~80% of Vesta's surface with image scales of ~20 m pixel⁻¹. These images revealed the complex topography ([Russell et al. 2012](#); [Jaumann et al. 2012](#); [Marchi et al. 2012](#); [Schenk et al. 2012](#)) summarised below:

- The south polar region consists of two overlapping impact basins (Rheasilvia & Veneneia) and a central mound whose height rivals that of Olympic Mons on Mars. Part of the outer perimeter of the Rheasilvia basin is delimited by a steep scarp. We note that both the impact basin and the central peak were first detected by [Thomas et al. \(1997\)](#) using the *Hubble* Space Telescope.

- The surface is characterised by regions with elevated topography (~20 km), for example the Vestalia Terra whose southernmost part merges into the rim area of the Rheasilvia basin ([Jaumann et al. 2012](#)).

- Numerous troughs are present across Vesta's surface, especially in the equatorial and northern regions. Equatorial troughs have lengths that vary from 19 to 380 km and that can be as wide as 15 km, whereas the most prominent northern trough is 390 km long and 38 km wide ([Jaumann et al. 2012](#)).

- Vesta's cratering record shows a strong north–south dichotomy with Vesta's northern terrains being significantly more cratered than the southern ones ([Marchi et al. 2012](#)).

The images of the Dawn mission also allowed the production of a high-resolution map of the albedo across Vesta's surface, revealing the greatest variation of normal albedo of any asteroid yet observed; (the normal albedo varies between ~0.15 and ~0.6; [Reddy et al. 2012](#); [Schröder et al. 2014](#)).

Here we present a new set of ground-based images of Vesta acquired with VLT/SPHERE/ZIMPOL as part of our ESO large programme (ID 199.C-0074; [Vernazza et al. 2018](#)). These observations, through direct comparison with the Dawn in situ measurements, were performed with the aim of testing the ultimate resolution achieved for images acquired with this new-generation adaptive-optics (AO) system ([Beuzit et al. 2008](#); [Fusco et al. 2006, 2016](#)) and the robustness of our deconvolution algorithm, which uses a synthetic point spread function (PSF) as input. These observations were also used to determine which of the geologic features discovered by Dawn (see above) can already be identified from the ground, and to place a size limit above which these features can be retrieved. Finally, these observations were used to produce an albedo map that could be directly compared with that based on the images of the Dawn FC ([Schröder et al. 2014](#)). In summary, Vesta was used as the benchmark target for our large programme, allowing us to test and ultimately validate our different techniques of image analysis.

2. Observations and data reduction

We observed (4) Vesta with the VLT/SPHERE/ZIMPOL instrument ([Beuzit et al. 2008](#); [Thalmann et al. 2008](#); [Schmid et al. 2012](#)) at six different epochs between May 20, 2018, and July 10, 2018 (see Table A.1 for a complete list of the observations). The data reduction protocol is the same for all the targets in our large programme. We refer the reader to [Vernazza et al. \(2018\)](#) for a description of the procedure. A subset of the Vesta images

after pipeline reduction and before deconvolution are shown in Fig. B.1.

3. Deconvolution method

3.1. Recurrent deconvolution artefacts with the observed PSF

Our large programme was initially designed as follows. Each asteroid observation was followed by the acquisition of a stellar PSF, using a star of same apparent magnitude as the asteroid. The asteroid image (cropped to 500 × 500 pixels) and its associated PSF (same pixel size as the image) were then fed to the MISTRAL algorithm ([Mugnier et al. 2004](#)) for the deconvolution process. It appeared that for nearly 50% of the observations, the deconvolution resulted in strong artefacts at the asteroid edges, highlighted by the presence of a bright corona (see upper left panel of Fig. 2 for an example). We note that edge issues resulting from the deconvolution process have already been reported in the literature ([Marchis et al. 2006](#)).

The problem was slightly improved using myopic deconvolution ([Conan et al. 1998](#)) with the MISTRAL algorithm. In this mode, the gradient-descent algorithm estimates simultaneously the couple {object+PSF}. Specifically, the PSF observed during the night was used to compute an average optical transfer function (OTF), i.e. the Fourier transform of the PSF, and all the PSFs observed during the large programme were used to compute a variance of the OTF around the average. Using this approach, the artefact intensity was reduced but still visible. This seemed to indicate that the deconvolution issues came from the PSF itself. We further inferred that the deconvolution artefacts may arise from a mismatch between the observed stellar PSF and the true PSF during the asteroid observation. If the shape of the observed PSF is too far from that of the true PSF, the myopic deconvolution cannot completely correct this issue. Moreover, myopic (or blind) deconvolution estimates simultaneously the asteroid image and the PSF, leading to an optimisation process that depends on a large number of parameters. Consequently, the mathematical problem of myopic (or blind) deconvolution might be degenerated ([Blanco & Mugnier 2011](#)) and the minimisation algorithm might converge towards the incorrect solution. Reducing the number of parameters for the PSF is thus critical to avoid degeneracy and deconvolution issues.

3.2. Use of a parametric PSF for the deconvolution

To overcome the deconvolution issues we faced, we started using parametric PSFs instead of the stellar PSFs. The advantage of a parametric PSF lies in the flexibility of its parameters, which can be adjusted to better estimate the true PSF during our asteroid observation. We chose to model these synthetic PSFs using a Moffat profile ([Moffat 1969](#)) as such functions are widely used in astronomy to reproduce the sharp coherent peak and wide wings of PSFs in AO observations ([Andersen et al. 2006](#); [Sánchez et al. 2006](#)). Additionally, the Moffat function has the advantage that it depends on only two parameters. It is defined as

$$M(r) = \frac{\beta - 1}{\pi\alpha^2} \frac{1}{(1 + r^2/\alpha^2)^\beta}, \quad (1)$$

where r is the radius to the PSF centre, α is a scale factor, and β is the Moffat power law index. Setting $\beta > 1$ is necessary to have a finite energy. Under this condition, the multiplicative factor $(\beta - 1)/\pi\alpha^2$ in the expression ensures that the total PSF energy is equal to unity.

R. J.L. Fétick et al.: Vesta seen by VLT/SPHERE

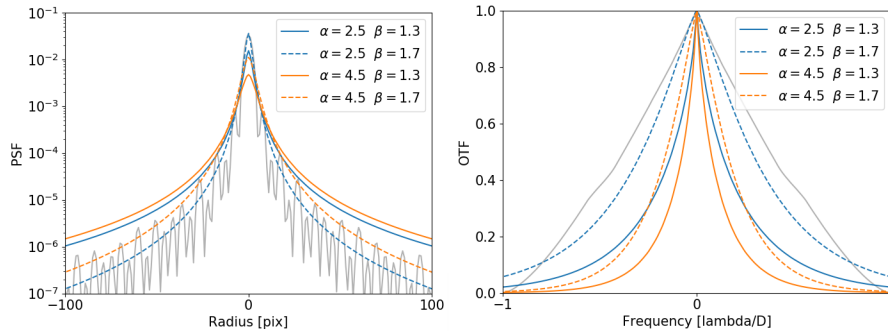


Fig. 1. Four of the 25 Moffat PSFs (*left panel*) used for deconvolution, and their associated OTF (*right panel*). Colours indicate different values of α , and line styles show different values of β . Grey curves in the left and right panels are, respectively, the PSF and OTF representing the diffraction limit of the SPHERE 8 m pupil at $\lambda = 646$ nm.

As a next step we allowed the two Moffat parameters α and β to vary within their realistic range of values: $(\alpha, \beta) \in]0, +\infty[\times]1, +\infty[$. We then determined a reasonable range of values from a visual inspection of the images: $(\alpha, \beta) \in [2.5, 4.5] \times [1.3, 1.7]$, where α is given in pixels. Figure 1 shows 4 of the 25 Moffat PSFs tested for the deconvolution of our Vesta images (for respectively the minimum and the maximum values of α and β), and highlights what we consider to be a wide range of PSF shapes for the deconvolution process.

After scanning the full range of α and β , two systematic trends were identified among the deconvolved Vesta images: a large α value in tandem with a small β value leads to the corona artefact that regularly occurred using observed PSFs (see Sect. 3.1), and a small α value in tandem with a large β value leads to under-deconvolution, meaning that the image blurring is only partially attenuated and the deconvolution is not complete (see Fig. 2).

These trends can be physically well understood when considering the fact that the full width at half maximum (FWHM) and Strehl ratio of the Moffat PSF are functions of α and β , where the FWHM can be written as

$$FWHM = 2\alpha \sqrt{2^{1/\beta} - 1}, \quad (2)$$

and the Strehl ratio as

$$\text{Strehl ratio} = \frac{M(0)}{A(0)} = \frac{\beta - 1}{\pi\alpha^2} \frac{1}{A(0)}, \quad (3)$$

with $A(0)$ being the diffraction pattern induced by the pupil (the Airy pattern for a circular non-obstructed aperture) at the centre of the PSF $r = 0$.

The diagonal behaviour observed for the deconvolution with respect to the α and β parameters (Fig. 2) makes sense when looking at the FWHM of the corresponding PSF and Strehl ratios in Fig. 2 (bottom figure). For large FWHMs (upper left corner) – or equivalently low Strehl ratios – deconvolution artefacts appear (corona artefact). This implies that the corona artefacts we encountered during the deconvolution process with observed PSFs most likely occurred either because the observed PSFs were over-estimating the FWHM of our asteroid observations or under-estimating their Strehl ratio. Inversely, for small FWHMs – or large Strehl ratios – the Vesta images appear under-deconvolved. The diagonal from bottom left to upper right shows rather stable values for both the FWHM and the Strehl ratio, in agreement with the deconvolution visual quality highlighted in

Table 1. Parameters α and β chosen for each epoch.

| Epoch | α (pixel) | β |
|---------------------|------------------|---------|
| 2018-05-20 06:41:53 | 4.0 | 1.5 |
| 2018-06-08 05:27:05 | 4.0 | 1.5 |
| 2018-07-10 01:59:52 | 4.0 | 1.5 |
| 2018-07-10 02:16:38 | 4.0 | 1.4 |
| 2018-06-08 07:14:40 | 3.0 | 1.5 |
| 2018-06-08 07:58:51 | 3.0 | 1.5 |

Fig. 2. Given the deconvolution trend as a function of the Strehl ratio (Fig. 2), we always choose α and β parameters such that the object's edges were as sharp as possible without reaching the point where the bright corona effect appears (Table 1, Fig. 2). This method has already been applied to the images acquired for (16) Psyche (Viikinkoski et al. 2018) and is now systematically applied to all targets within our large programme. In the present case, a quantitative justification (i.e. the accuracy of our deconvolved Vesta images with respect to those of the Dawn mission) for the choice of the parameters (α, β) is given in Appendix C.

In summary, the deconvolution with a Moffat PSF converges in practice toward satisfactory results. Within our large programme, we therefore started systematically using a parametric PSF with a Moffat shape to deconvolve our images. The deconvolved images of Vesta are shown in Fig. 3.

4. VLT/SPHERE compared to Dawn

In this section we determine how much topographic and albedo information can be retrieved from the ground with VLT/SPHERE in the case of Vesta, having a former space mission (Dawn) providing us with the ground truth that we can use as benchmark.

4.1. OASIS synthetic images

The NASA/Dawn in situ mission provided high-resolution images of Vesta used to generate a global shape model (Preusker et al. 2016). The images also provided the rotational parameters of the objects with a high accuracy (Konopliv et al. 2014). Knowing the ephemeris of Vesta and the position of

A&A 623, A6 (2019)

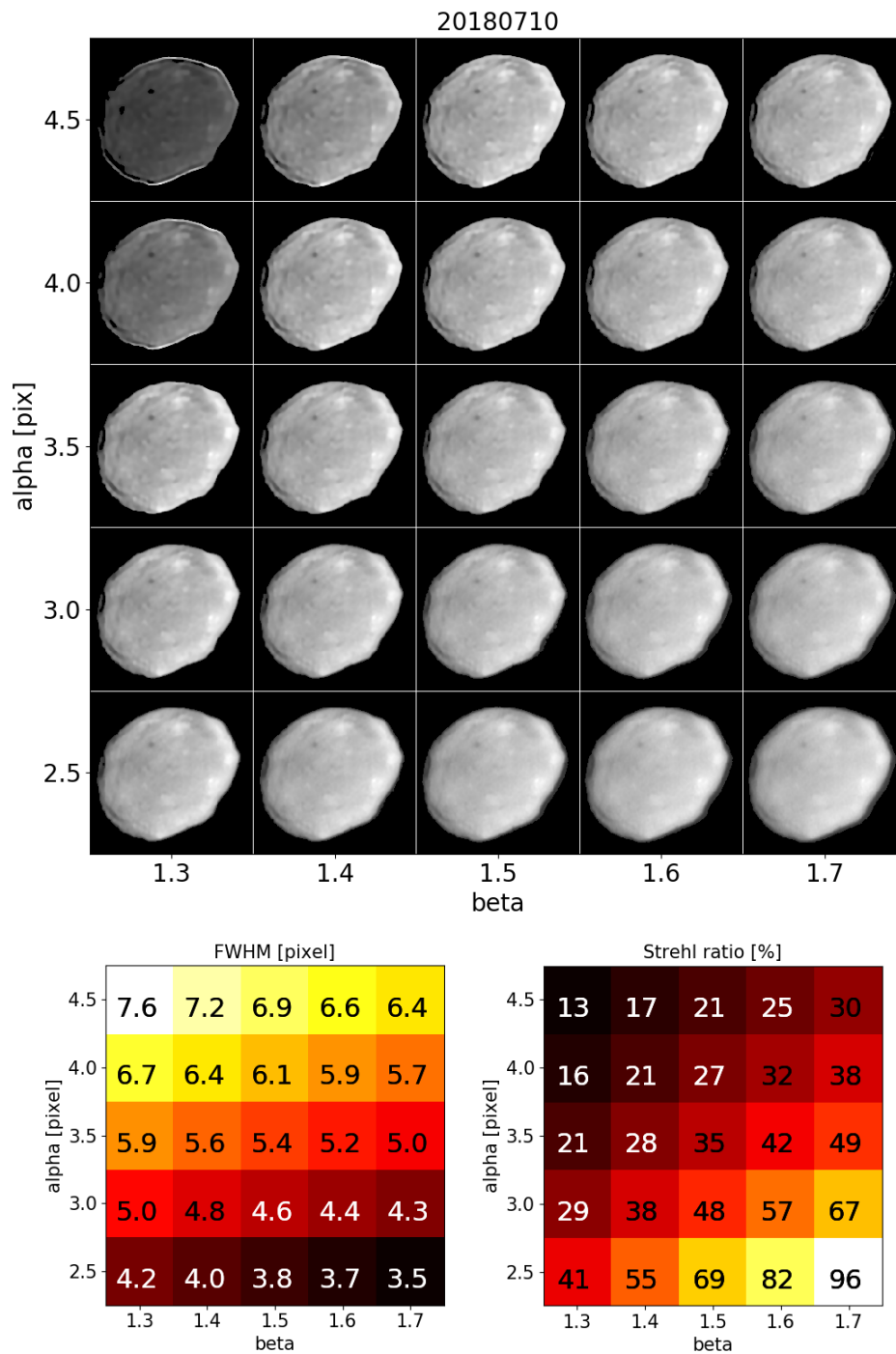


Fig. 2. *Top panels:* VLT/SPHERE/ZIMPOL observation on 2018 July 10th deconvolved using 25 different Moffat parametric PSFs. Each image of Vesta is cropped to 200×200 pixels for best enlargement, and scaled by its maximum intensity for optimum image dynamics. *Bottom panels:* corresponding FWHM and Strehl ratio for the 25 PSFs. Values indicate the FWHM and Strehl ratio, respectively, while the colour map (dark for low values, white for high values) helps to visualise the diagonal trend discussed in the text.

R. J.L. Fétick et al.: Vesta seen by VLT/SPHERE

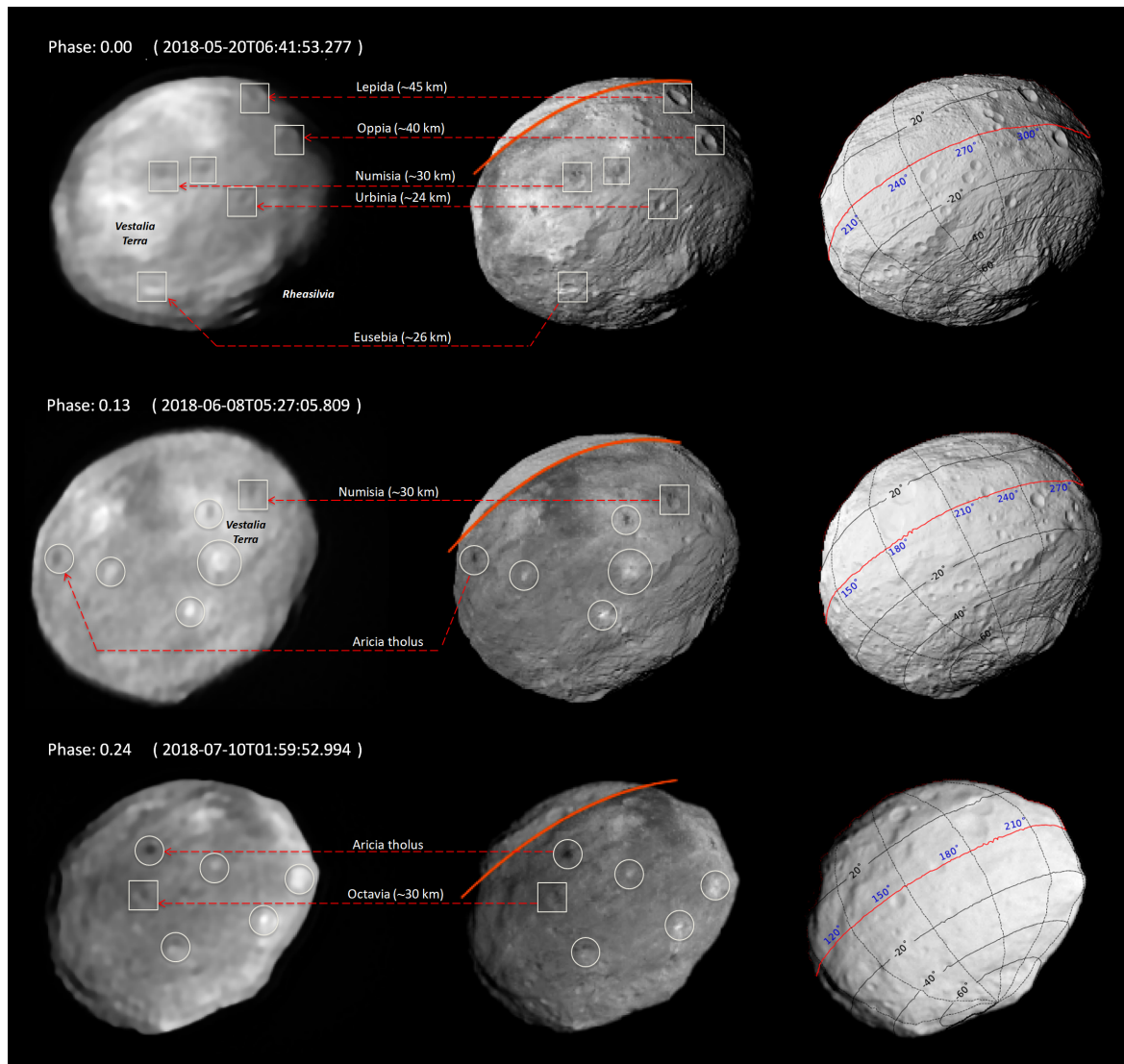


Fig. 3. Comparison of the VLT/SPHERE deconvolved images of Vesta (*left column*) with synthetic projections of the Dawn model produced with OASIS and with albedo information from [Schröder et al. \(2014\)](#); *middle column*), and the same projection without albedo information but with a latitude/longitude coordinate grid for reference (*right column*). All coordinates are given in the “Claudia” system ([Russell et al. 2012](#)). No albedo data is available from Dawn for latitudes above $30^{\circ}N$ (orange line). Finally, some of the main structures that can be identified in both the VLT/SPHERE images and the synthetic ones are highlighted: craters are embedded in squares and albedo features in circles. The square of the intensity is shown for the left and middle columns to highlight the surface features. Deconvolved images for the two last epochs (phase 0.43 and 0.60) show a clear-dark-clear border on the left. This deconvolution artefact seems to be the outset of the corona artefact discussed in the text.

the Earth in the J2000 Equatorial frame, it is thus possible to generate unconvolved synthetic images of Vesta at the time of the SPHERE observations. We used the OASIS tool ([Jorda et al. 2010](#)) developed and used in the frame of the Rosetta mission to create these images. The tool takes into account the pixel scale of the instrument, the viewing and illumination conditions of the object, its global shape, its rotational parameters, and the Hapke parameters describing its bi-directional reflectance properties. It rigorously accounts for cast shadows and considers

the geometric intersection between the triangular facets of the shape model and the pixels to calculate reflectance values for each pixel. We used the [Hapke \(1986\)](#) function built with a one-parameter Henyey-Greenstein phase function and the parameters of [Li et al. \(2013\)](#) to describe the reflectance of the surface. These synthetic images represent the resolution limit that could have been achieved with a turbulent-less atmosphere and perfect optics. Finally, OASIS images are multiplied by the albedo map from [Schröder et al. \(2014\)](#) derived from the Dawn mission

A&A 623, A6 (2019)

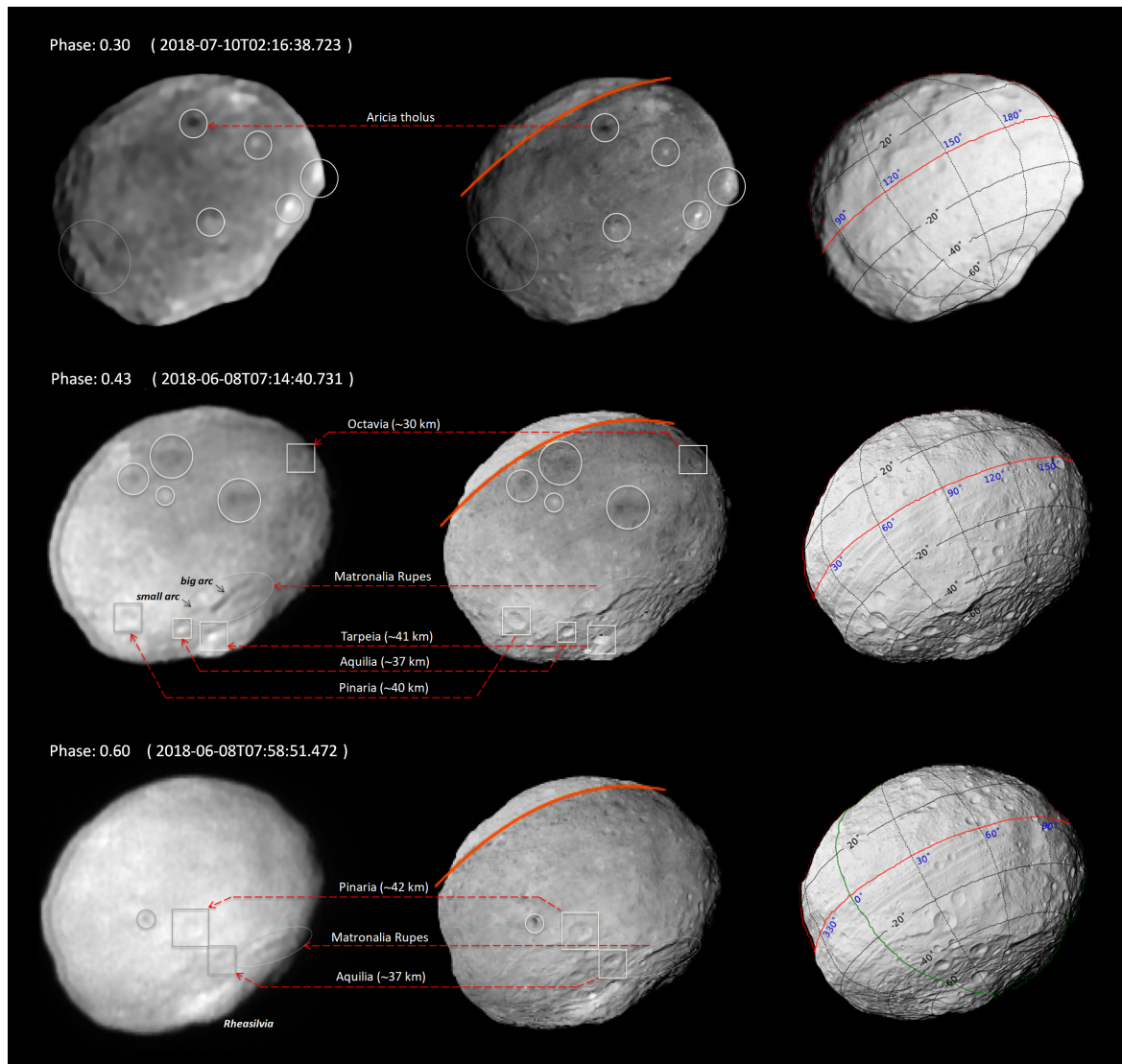


Fig. 3. continued.

and covering the southern part of Vesta up to 30°N (see Fig. 3, middle column).

4.2. Contour extraction and comparison

In order to perform a quantitative comparison between observed and synthetic OASIS images, we performed a comparison between contour plots. Contours are important for 3D shape reconstruction algorithms. The extraction of these contour plots was performed in several steps, described below. For the observed images, a low threshold T_1 was estimated by fitting the histogram of the pixels in a box of 21×21 pixels around the minimum pixel of the image. For the synthetic images, the low threshold was set to zero. A high threshold T_2 was then calculated as the maximum pixel value after

removing the 10% highest pixel values. The contour level to be used was defined as $T = T_1 + \zeta (T_2 - T_1)$, where ζ is a parameter in the interval $[0, 1]$ allowing the value of the contour level to be set with respect to the high and low thresholds. Here $\zeta = 0.3$ was chosen. The image was then converted into a triangular mesh. For this, the Cartesian coordinates of the vertices were defined by the coordinates $(X = i, Y = j)$ of the pixel (i, j) , complemented by its value $Z = P_{ij}$. Each block of 2×2 pixels allowed us to define two triangles. The resulting set of triangles represents the image as a triangular mesh. Finally, the intersection of the triangular mesh with the plane $Z = T$ defined the contour plot, represented here as a set of connected 2D points.

Let us call $\{D_i\}_{i \in [1, J]}$ and $\{M_j\}_{j \in [1, J]}$ respectively the set of points defining the deconvolved contour and the OASIS model

R. J.L. Fétick et al.: Vesta seen by VLT/SPHERE

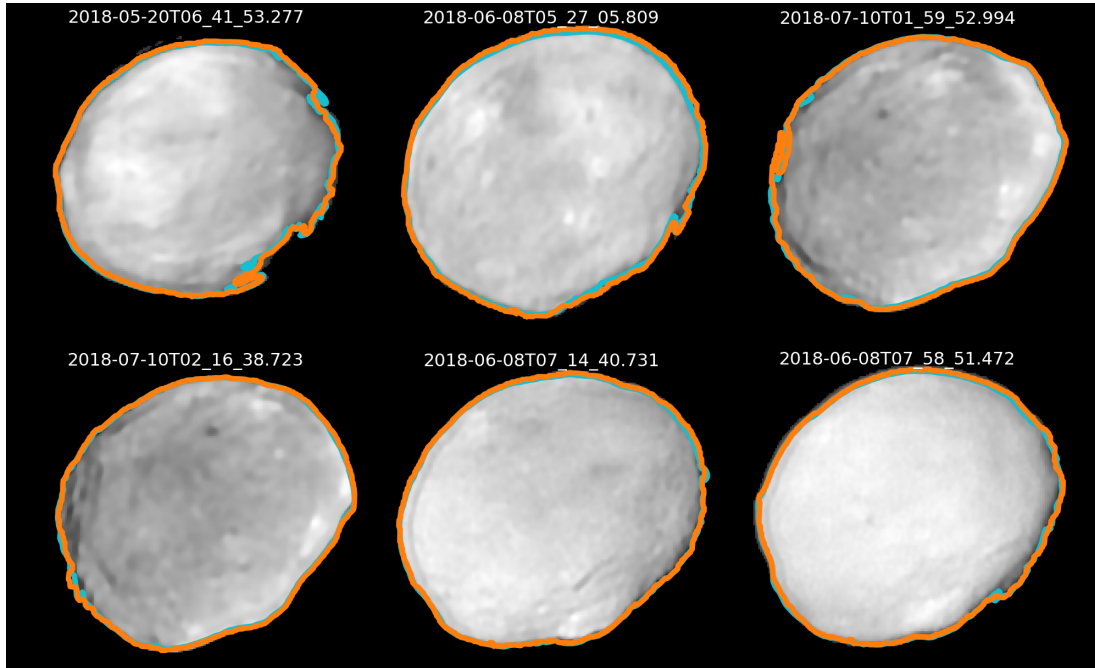


Fig. 4. Vesta contours computed for the synthetic images produced with OASIS (light blue line) and VLT/SPHERE after deconvolution (orange line). Contours are plotted over the VLT/SPHERE images for comparison.

contour. We defined the root mean square metric as

$$\chi = \sqrt{\frac{\sum_i \lambda_i \cdot d(D_i, \{M_j\}_j)^2}{\sum_i \lambda_i}}, \quad (4)$$

where the sum index i runs over all the contour points of the deconvolved image, $d(D_i, \{M_j\}_j)$ is the Euclidean distance between the point number i and its orthogonal projection onto the OASIS contour, λ_i is the pixel weighting factor. We chose λ_i to be the average distance between D_i and its neighbours D_{i-1} and D_{i+1} as

$$\lambda_i = \frac{1}{2} [d(D_i, D_{i-1}) + d(D_i, D_{i+1})], \quad (5)$$

such that an eventual cluster of close points in the contour set does not induce highly localised weighting in the χ norm. Since the points are nearly homogeneously separated, the correction has little impact on the χ norm with respect to a simple weighting $\lambda_i = 1$. Finally, forcing $\lambda_i = 0$ for some points allows us to select a specific area such as the limb or terminator for contour comparison.

Extraction of contours from the synthetic and deconvolved images shows good agreement (see Fig. 4 for contour visualisation). The match between the contours is better at the limb ($\chi_{\text{Limb}} = 0.44$ pixels) than at the terminator ($\chi_{\text{Term}} = 1.02$ pixels). Indeed the OASIS facets illumination is much more sensitive to angular errors in the orientation of the facets for nearly tangent solar rays than for normal rays. Moreover, intensity errors in the synthetic images at the terminator translate into larger errors in the contour position because the intensity gradient is smaller there compared to the large jump occurring at the limb.

The average contour error, when taking into account all contour points, is $\chi = 0.93$ pixels, showing that sub-pixel contour resolution is achievable on asteroid deconvolved images.

The area encircled by the deconvolved contour is larger than the OASIS contour with a relative area difference of +1.15%. This error might be due to residual blurring that was not fully removed by the deconvolution, and to difficulties in extracting the OASIS contour near the terminator. The resulting error on the volume would be $\sim +1.73\%$. All results concerning the contours are summarised in Table 2.

4.3. Reconnaissance of Vesta's main topographic features

It appears that most of the main topographic features present across Vesta's surface can already be recognised from the ground (Fig. 3). This includes the south pole impact basin and its prominent central mound, several $D \geq 25$ km sized craters and Matronalia Rupes including its steep scarp and its small and big arcs (Krohn et al. 2014). From these observations, we can determine a size limit of ~ 30 km for the features that can be resolved with VLT/SPHERE (i.e. features that are 8–10 pixels wide). This detection limit should be in principle sufficient to recognise the north–south crater dichotomy detected by Dawn (Marchi et al. 2012; Vincent et al. 2014), according to the fact that the northern hemisphere hosts 70% of the craters with $D \geq 30$ km (Liu et al. 2018). There are several plausible explanations as to why we were not able to resolve this dichotomy. First, we mostly imaged the southern hemisphere, due to Vesta's spin axis orientation. Second, the atmospheric blurring (not entirely removed by the AO) is another limiting factor. Third, the albedo variation across the surface is large, leading to a confusion between the shade of the craters and local albedo variation. This is clearly

Table 2. Results on the contour extraction for OASIS and deconvolved images.

| Epoch (UTC) | χ (pix) | χ_{Limb} (pix) | χ_{Term} (pix) | \mathcal{A}_O (pix ²) | \mathcal{A}_D (pix ²) |
|---------------------|-----------------|----------------------------|----------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 2018-05-20 06:41:53 | 0.83 | 0.41 | 0.99 | 19272 | 19414 (+0.73%) |
| 2018-06-08 05:27:05 | 1.50 | 0.65 | 1.27 | 22673 | 23382 (+3.12%) |
| 2018-06-08 07:14:40 | 0.55 | 0.40 | 0.54 | 22762 | 22920 (+0.70%) |
| 2018-06-08 07:58:51 | 0.60 | 0.42 | 0.71 | 22362 | 22379 (+0.52%) |
| 2018-07-10 01:59:52 | 1.37 | 0.39 | 1.73 | 21017 | 21224 (+0.98%) |
| 2018-07-10 02:16:38 | 0.72 | 0.34 | 0.87 | 21223 | 21402 (+0.84%) |
| Average \pm std | 0.93 \pm 0.37 | 0.44 \pm 0.10 | 1.02 \pm 0.39 | | (+1.15 \pm 0.89%) |

Notes. Deconvolved images considered here are the ones from Fig. 3 obtained for the (α, β) parameters in Table 1. The χ , χ_{Limb} and χ_{Term} errors are explained in the text. Columns \mathcal{A}_O and \mathcal{A}_D are respectively the area encircled by OASIS and the deconvolution contours. Percentages inside parentheses show the relative error on the estimated deconvolved area with respect to the OASIS area.

highlighted in the synthetic images generated by OASIS with and without albedo information (see middle and right column in Fig. 3). Fourth, we do not observe the equatorial troughs of Vesta, which are 15 km wide and thus below the detection limit of our images. It follows that future generation telescopes with mirror sizes in the 30–40 m range should in principle be able to resolve the main features present across Vesta’s surface, provided that they operate at the diffraction limit.

Finally, we attempt to constrain the detection rate for the largest craters with diameter greater than 40 km. Except the large Rheasilvia basin, Vesta hosts 21 such craters (Liu et al. 2018) and 9 of them were covered by our observations. Of these nine craters, we could identify seven of them (see Fig. 3) in our images, implying a detection rate of $\sim 80\%$. The two missing craters are Marcia and Calpurnia, which are part of the snowman crater chain that is located at $\sim 13^\circ$ north latitude and $\sim 195^\circ$ eastern longitude. The non-detection of the snowman crater chain is not surprising when looking at the two synthetic OASIS images (with and without albedo information) as the crater chain can barely be recognised in the synthetic images with albedo information (see Fig. 5).

4.4. Reconnaissance of Vesta’s main albedo features

To further test the reliability of the observation and deconvolution procedure, we built an albedo map of Vesta from the deconvolved SPHERE images, and compared this map to that of Schröder et al. (2014) from in situ Dawn measurements. We used a subsample of 19 high-quality images from the six epochs of VLT/SPHERE observations.

Owing to the limited number of geometrical views probed by SPHERE, it is not always possible to differentiate shadows from true albedo variations without prior knowledge about the local surface topography. This information is very well constrained in the case of Vesta, and can be retrieved from the OASIS model. However, this is not true for most targets in our observing programme, and for almost all asteroids in general. We therefore purposely did not use any prior information on Vesta’s topography when building the map in order to evaluate our ability to retrieve albedo information from the SPHERE observations alone.

First, we corrected the illumination gradient present in the SPHERE images, which depends on the local incidence, reflection, and phase angle. This was performed by fitting a second-order polynomial surface to the disc (image intensity) of Vesta. This method provides satisfactory results for Earth-based observations of asteroids (Carry et al. 2008, 2010). Across our

observing programme, we also found that it provides better results than using a scattering law (Lommel–Seeliger, Hapke; Li et al. 2015) when little is known about the local topography of the object. Using one of the above-mentioned scattering laws with a low-resolution shape model indeed results in artificially “paved” images owing to the resolution, i.e. the size of the facets, in the model. The use of a polynomial fit, which qualitatively mimics the Lommel–Seeliger laws, to the disc of the object results in smoother photometric correction without artificial discontinuities. However, it cannot properly fit the illumination of local terrain features, such as craters and mountains.

For each SPHERE image, we then defined a region of interest (ROI) containing the set of pixels to be projected on the map. As discussed in Sect. 3, an over-deconvolution usually enhances the brightness of the image regions with strong luminosity gradient, such as the asteroid border. To avoid including pixels affected by this effect, we only considered pixels contained in the central region of the asteroid, i.e. 20 pixels away from the asteroid contour (limb and terminator).

Next, the longitude and latitude of each pixel contained in the ROI was measured using a projection of the OASIS model (Sect. 4.1). For other targets in our programme, this would be performed using a lower resolution model derived with the ADAM software (Viikinkoski et al. 2015).

Each pixel value was then projected on the map, using an equidistant cylindrical projection. The individual maps from the different epochs of observation were then combined using the overlapping regions to balance their brightness level. Specifically, the combined map was calculated as a weighted average of the individual maps, where each pixel was attributed a Gaussian weight inversely proportional to the projected surface area it covers, and inversely proportional to its projected distance from the sub-Earth point. Finally, we normalised the combined map with the global average albedo of Vesta in the Johnson V band (centred on 540 nm) in order to allow a direct comparison with the albedo map of Schröder et al. (2014).

The resulting map is shown and compared to that of Schröder et al. (2014) in Fig. 5. The Dawn map displays only the region of Vesta seen by SPHERE in order to facilitate the comparison. Other pixels were set to zero.

The SPHERE map exhibits a wide range of albedo values (typically $A_{V,N} = 0.34\text{--}0.45$), close to that of Dawn (mostly $A_{V,N} = 0.30\text{--}0.46$), but slightly narrower owing to its lower spatial resolution and residual blurring due to imperfect deconvolution (Fig. 6). The peak of the two distributions is slightly offset, due to the different shape of the distributions: the SPHERE distribution appears even on both sides of the peak, whereas the

R. J.L. Fétick et al.: Vesta seen by VLT/SPHERE

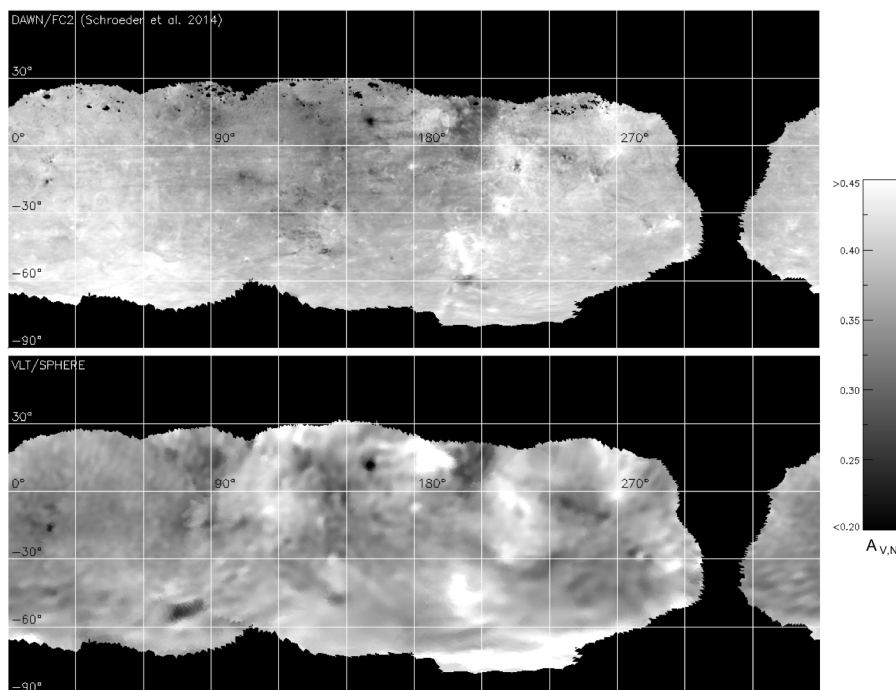


Fig. 5. Albedo map of Vesta constructed from VLT/SPHERE images (*bottom panel*) compared to the Dawn Framing Camera 2 (FC2) map derived in situ (*top panel*; Schröder et al. 2014). The two maps are in equidistant cylindrical projection. The Dawn map only shows the region of Vesta covered by SPHERE to facilitate the comparison. The north region of the Dawn map, with the latitude ϕ in the $[0^\circ, +30^\circ]$ range, contains several pixels with no available information. Those pixels are left black.

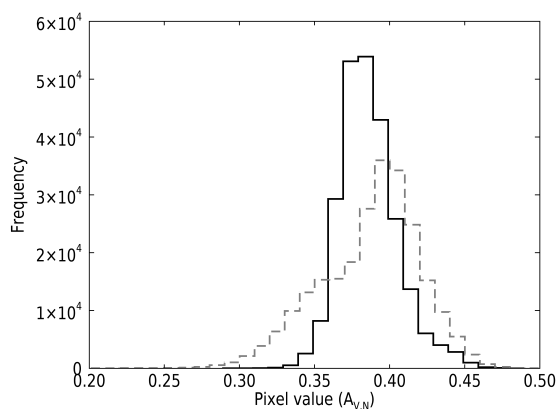


Fig. 6. Histogram of pixel values for the SPHERE (continuous black) and Dawn (dotted grey) albedo maps. The SPHERE map exhibits a slightly narrower range of albedo values with respect to Dawn, owing to its lower spatial resolution and residual blurring of the images due to imperfect deconvolution.

low-end tail of the Dawn distribution is wider than the high-end one, possibly because multiple species with different albedos are spatially resolved. Most of the main albedo features present in the Dawn map can also be identified in the SPHERE map. We find that surface features down to 20 km in size can be identified from the SPHERE map.

Only a few inconsistencies between the two maps are found. The most obvious example is the presence of a dark region located near $\lambda = 80^\circ$, $\phi = -50^\circ$ on the SPHERE map, whereas Dawn finds no such albedo variation at this location. This feature most likely results from the presence of shadows in the SPHERE images caused by irregular terrains rather than true albedo variations. The brightness of the southernmost region of Vesta on the map for $\lambda \in [180^\circ, 270^\circ]$ and $\phi < -60^\circ$ is enhanced with SPHERE compared to Dawn. This is due to the illumination of the Rheasilvia central peak, which could not be accurately corrected. The Dawn map contains very localised regions with very low albedo values ($A_{V,N} < 0.25$). While these regions are also seen with SPHERE, they display higher albedos ($A_{V,N} > 0.30$) due to the lower spatial resolution of the map that attenuates the high-frequency albedo variations. Additional differences between the two maps may arise from the different filters used during the observations: ZIMPOL N_R ($\lambda = 589.2\text{--}702.6$ nm) versus DAWN FC2 clear filter ($\lambda = 438\text{--}965$ nm).

5. Conclusion

In this article, we evaluated how much topographic and albedo information can be retrieved from the ground with VLT/SPHERE in the case of the asteroid (4) Vesta. This object can be used as a benchmark for ground-based observations since the Dawn space mission provided us with ground truth information. We observed (4) Vesta with VLT/SPHERE/ZIMPOL as part of our ESO large programme at six different epochs, and deconvolved the collected images with a parametric PSF.

We then compared our VLT/SPHERE images with synthetic images of Vesta produced with the OASIS software that uses the 3D shape model of the Dawn mission as input and on which we re-projected the albedo map of the Dawn mission (Schröder et al. 2014). We further produced our own albedo map of Vesta from the SPHERE images alone, and without using any prior information about the surface topography of Vesta. We compared this map to that of Schröder et al. (2014) to evaluate our ability to differentiate true albedo variegation from shadows and regions with enhanced illumination due to imperfect photometric correction of the SPHERE images.

We show that the deconvolution of the VLT/SPHERE images with a parametric PSF allows the retrieval of the main topographic and albedo features present across Vesta's surface down to a spatial resolution of $\sim 20\text{--}30$ km. Contour extraction shows a precision of ~ 1 pixel, with a strong difference between the estimation of the limb (precision of ~ 0.5 pixel) and the terminator (precision of ~ 1 pixel). The consequent relative error on the estimated area is $\leq 2\%$.

The present study demonstrates for the very first time the accuracy of ground-based AO imaging observations of asteroids with respect to in situ observations. Future generation telescopes (ELT, TMT, GMT) could use Vesta as a benchmark to catch all of the main features present across its surface (including the troughs and the north–south crater dichotomy), provided that these telescopes operate at the diffraction limit.

Data retrieval: as soon as papers for our large programme are accepted for publication, we will make the corresponding reduced and deconvolved AO images and 3D shape models publicly available¹.

Acknowledgements. This work was supported by the French Direction Générale de l'Armement (DGA) and Aix-Marseille Université (AMU). P.V., A.D., and B.C. were supported by CNRS/INSU/PNP. J.H. was supported by the grant 18-09470S of the Czech Science Foundation and by the Charles University Research Programme No. UNCE/SCI/023. This project has received funding from the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme under grant agreement No. 730890. This material reflects only the authors' views and the Commission is not liable for any use that may be made of the information contained herein. The authors thank S. Schröder for providing his reconstructed albedo map based on the Dawn images and for his very fruitful comments as a referee.

References

- Andersen, D. R., Stoesz, J., Morris, S., et al. 2006, *PASP*, **118**, 1574
 Beuzit, J.-L., Feldt, M., Dohlen, K., et al. 2008, in Ground-based and Airborne Instrumentation for Astronomy II, *SPIE*, **7014**, 701418
 Blanco, L., & Mugnier, L. M. 2011, *Opt. Express*, **19**, 23227
 Carry, B., Dumas, C., Fulchignoni, M., et al. 2008, *A&A*, **478**, 235
 Carry, B., Dumas, C., Kaasalainen, M., et al. 2010, *Icarus*, **205**, 460
 Conan, J.-M., Mugnier, L. M., Fusco, T., Michau, V., & Rousset, G. 1998, *Appl. Opt.*, **37**, 4614
 Fusco, T., Petit, C., Rousset, G., et al. 2006, *Proc. SPIE*, **6272**, 62720K
 Fusco, T., Sauvage, J.-F., Mouillet, D., et al. 2016, in Adaptive Optics Systems V, *Proc. SPIE*, **9909**, 99090U
 Hapke, B. 1986, *Icarus*, **67**, 264
 Jaumann, R., Williams, D. A., Buczkowski, D. L., et al. 2012, *Science*, **336**, 687
 Jorda, L., Spjuth, S., Keller, H. U., Lamy, P., & Llebaria, A. 2010, *Proc. SPIE*, **7533**, 753311
 Konopliv, A. S., Asmar, S. W., Park, R. S., et al. 2014, *Icarus*, **240**, 103
 Krohn, K., Jaumann, R., Otto, K., et al. 2014, *Icarus*, **244**, 120
 Li, J.-Y., Le Corre, L., Schröder, S. E., et al. 2013, *Icarus*, **226**, 1252
 Li, J. Y., Helfenstein, P., Buratti, B., Takir, D., & Clark, B. E. 2015, *Asteroid IV* (Tucson, AZ: University of Arizona Press), 129
 Liu, Z., Yue, Z., Michael, G., et al. 2018, *Icarus*, **311**, 242
 Marchi, S., McSween, H. Y., O'Brien, D. P., et al. 2012, *Science*, **336**, 690
 Marchis, F., Kaasalainen, M., Hom, E. F. Y., et al. 2006, *Icarus*, **185**, 39
 Moffat, A. 1969, *A&A*, **3**, 455
 Mugnier, L. M., Fusco, T., & Conan, J.-M. 2004, *JOSA A*, **21**, 1841
 Preusker, F., Scholten, F., Matz, K.-D., et al. 2016, *NASA Planetary Data System*, **268**, DAWN
 Reddy, V., Nathues, A., Le Corre, L., et al. 2012, *Science*, **336**, 700
 Russell, C. T., Raymond, C. A., Coradini, A., et al. 2012, *Science*, **336**, 684
 Sánchez, F. M., Davies, R., Eisenhauer, F., et al. 2006, *A&A*, **454**, 481
 Schenk, P., O'Brien, D. P., Marchi, S., et al. 2012, *Science*, **336**, 694
 Schmid, H.-M., Downing, M., Roelfsema, R., et al. 2012, in Ground-based and Airborne Instrumentation for Astronomy IV, *Proc. SPIE*, **8446**, 84468Y
 Schröder, S. E., Mottola, S., Keller, H. U., Raymond, C. A., & Russell, C. T. 2014, *Planet. Space Sci.*, **103**, 66
 Sierks, H., Keller, H. U., Jaumann, R., et al. 2011, *Space Sci. Rev.*, **163**, 263
 Thalmann, C., Schmid, H. M., Boccaletti, A., et al. 2008, in Ground-based and Airborne Instrumentation for Astronomy II, *Proc. SPIE*, **7014**, 70143F
 Thomas, P. C., Binzel, R. P., Gaffey, M. J., et al. 1997, *Science*, **277**, 1492
 Vernazza, P., Brož, M., Drouard, A., et al. 2018, *A&A*, **618**, A154
 Viikinkoski, M., Kaasalainen, M., & Durech, J. 2015, *A&A*, **576**, A8
 Viikinkoski, M., Vernazza, P., Hanuš, J., et al. 2018, *A&A*, **619**, L3
 Vincent, J.-B., Schenk, P., Nathues, A., et al. 2014, *Planet. Space Sci.*, **103**, 57

¹ <http://observations.lam.fr/astero/>

R. JL. Fétick et al.: Vesta seen by VLT/SPHERE

Appendix A: Observation table**Table A.1.** Vesta images.

| Date | UT | Airmass | Δ (AU) | r (AU) | α ($^{\circ}$) | D_a ($''$) |
|------------|---------|---------|------------------|-------------|----------------------------|-------------------|
| 2018-05-20 | 6:41:53 | 1.01 | 1.25 | 2.15 | 15.8 | 0.579 |
| 2018-05-20 | 6:43:24 | 1.01 | 1.25 | 2.15 | 15.8 | 0.579 |
| 2018-05-20 | 6:44:56 | 1.01 | 1.25 | 2.15 | 15.8 | 0.579 |
| 2018-05-20 | 6:46:25 | 1.01 | 1.25 | 2.15 | 15.8 | 0.579 |
| 2018-05-20 | 6:47:56 | 1.01 | 1.25 | 2.15 | 15.8 | 0.579 |
| 2018-06-08 | 5:27:05 | 1.01 | 1.16 | 2.15 | 6.8 | 0.624 |
| 2018-06-08 | 5:28:36 | 1.01 | 1.16 | 2.15 | 6.8 | 0.624 |
| 2018-06-08 | 5:30:08 | 1.01 | 1.16 | 2.15 | 6.8 | 0.624 |
| 2018-06-08 | 5:31:38 | 1.00 | 1.16 | 2.15 | 6.8 | 0.624 |
| 2018-06-08 | 5:33:07 | 1.00 | 1.16 | 2.15 | 6.8 | 0.624 |
| 2018-06-08 | 7:14:40 | 1.08 | 1.16 | 2.15 | 6.7 | 0.624 |
| 2018-06-08 | 7:16:10 | 1.09 | 1.16 | 2.15 | 6.7 | 0.624 |
| 2018-06-08 | 7:17:42 | 1.09 | 1.16 | 2.15 | 6.7 | 0.624 |
| 2018-06-08 | 7:19:12 | 1.09 | 1.16 | 2.15 | 6.7 | 0.624 |
| 2018-06-08 | 7:20:41 | 1.10 | 1.16 | 2.15 | 6.7 | 0.624 |
| 2018-06-08 | 7:58:51 | 1.19 | 1.16 | 2.15 | 6.7 | 0.624 |
| 2018-06-08 | 8:00:22 | 1.19 | 1.16 | 2.15 | 6.7 | 0.624 |
| 2018-06-08 | 8:01:51 | 1.20 | 1.16 | 2.15 | 6.7 | 0.624 |
| 2018-06-08 | 8:03:21 | 1.20 | 1.16 | 2.15 | 6.7 | 0.624 |
| 2018-06-08 | 8:04:52 | 1.21 | 1.16 | 2.15 | 6.7 | 0.624 |
| 2018-07-10 | 1:59:52 | 1.04 | 1.19 | 2.16 | 10.9 | 0.608 |
| 2018-07-10 | 2:01:24 | 1.03 | 1.19 | 2.16 | 10.9 | 0.608 |
| 2018-07-10 | 2:02:56 | 1.03 | 1.19 | 2.16 | 10.9 | 0.608 |
| 2018-07-10 | 2:04:25 | 1.03 | 1.19 | 2.16 | 10.9 | 0.608 |
| 2018-07-10 | 2:05:56 | 1.03 | 1.19 | 2.16 | 10.9 | 0.608 |
| 2018-07-10 | 2:16:38 | 1.02 | 1.19 | 2.16 | 10.9 | 0.608 |
| 2018-07-10 | 2:18:09 | 1.02 | 1.19 | 2.16 | 10.9 | 0.608 |
| 2018-07-10 | 2:19:39 | 1.02 | 1.19 | 2.16 | 10.9 | 0.608 |
| 2018-07-10 | 2:21:09 | 1.02 | 1.19 | 2.16 | 10.9 | 0.608 |
| 2018-07-10 | 2:22:39 | 1.02 | 1.19 | 2.16 | 10.9 | 0.608 |

Notes. For each observation, the table gives the epoch, the airmass, the distance to the Earth Δ and the Sun r , the phase angle α , and the angular diameter D_a . All observations were performed on the VLT/SPHERE instrument, with N_R filter, and 80 s of exposure time.

A&A 623, A6 (2019)

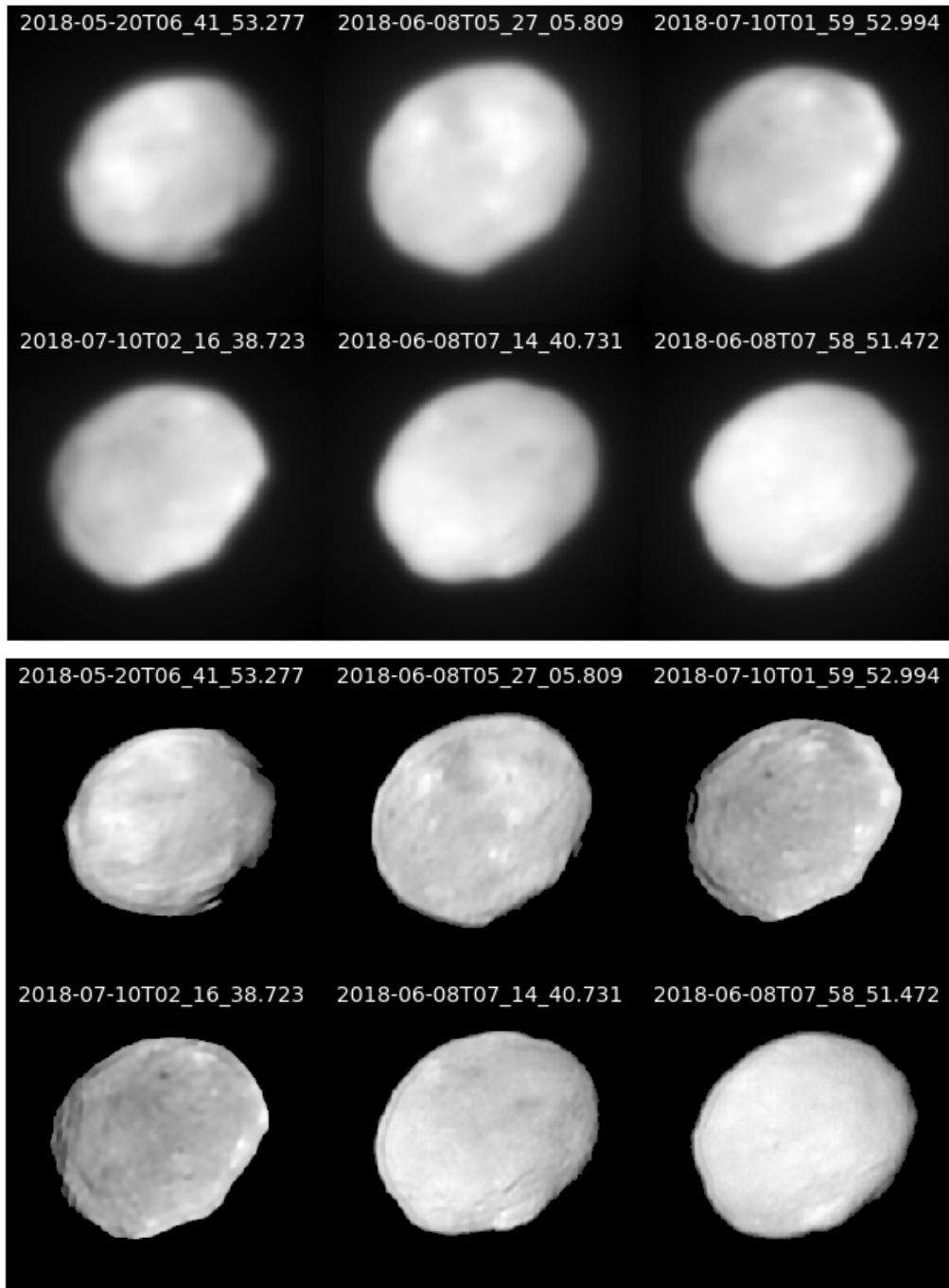
Appendix B: Additional figure

Fig. B.1. *Top panel:* reduced Vesta images after pipeline. *Bottom panel:* same images after deconvolution.

R. J.L. Fétick et al.: Vesta seen by VLT/SPHERE

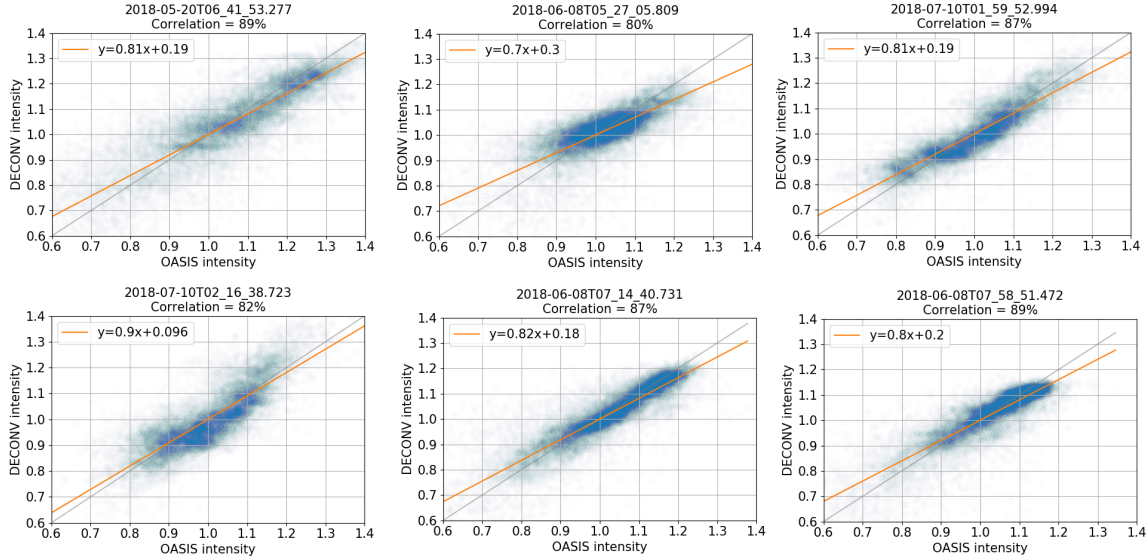
Appendix C: Optimisation of the PSF parameters

Fig. C.1. Correlation between OASIS (including albedo) and deconvolved image pixel intensities. Each intensity map has been divided by its average value for normalisation. Each of the six graphs corresponds to an epoch of observation. The linear fit of each cloud of points is also shown (orange line). The correlation percentage between OASIS and deconvolution intensities is written at the top of each graph.

Using OASIS synthetic images with albedo, we were also able to determine the optimal values of α and β for the deconvolution by calculating the root square error between the deconvolved SPHERE/ZIMPOL images and the synthetic images (OASIS+albedo model). The error writes as

$$\epsilon(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_p (\text{DEC}_p(\alpha, \beta) - a_p \times \text{OAS}_p)^2}, \quad (\text{C.1})$$

where the sum runs over the pixels, OAS is the OASIS model multiplied by the albedo a_p corresponding to each pixel, and DEC is our deconvolved image. When writing $\text{DEC}_p(\alpha, \beta)$ we recall that the deconvolution depends on the PSF parameters (α, β) . The minimisation of the error $\epsilon(\alpha, \beta)$ identifies the optimal values for the α and β parameters and thus the most accurate deconvolution in the sense of the norm given by Eq. (C.1). Figure C.2 shows the evolution of ϵ with respect to the PSF parameters α and β for the six epochs. The minimum is reached

in the narrow range $\alpha \approx 3.5\text{--}4$ and $\beta \approx 1.5\text{--}1.6$. Figure C.2 also shows that the error increases dramatically when the corona artefact appears, and that the minimum error is reached for sharp deconvolutions just before the corona effect.

Thus, the (α, β) parameters empirically estimated in Sect. 3.2 are close to the actual optimal values that minimise the ϵ criteria. Near such optimal values, only the corona effect may corrupt the deconvolution result at high α and low β . Otherwise the deconvolution zone is stable since the deconvolution quality evolves continuously with the parameters (see Figs. 2 and C.2).

Importantly, we believe that it is possible to further improve the deconvolution procedure using even more accurate PSF models, with a shape closer to that of the AO corrected PSF (paper in preparation on the AO PSF modelling). Finally, PSF parameters (whatever PSF model is used) may be estimated automatically by a myopic deconvolution algorithm, such as Mugnier et al. (2004) and Blanco & Mugnier (2011).

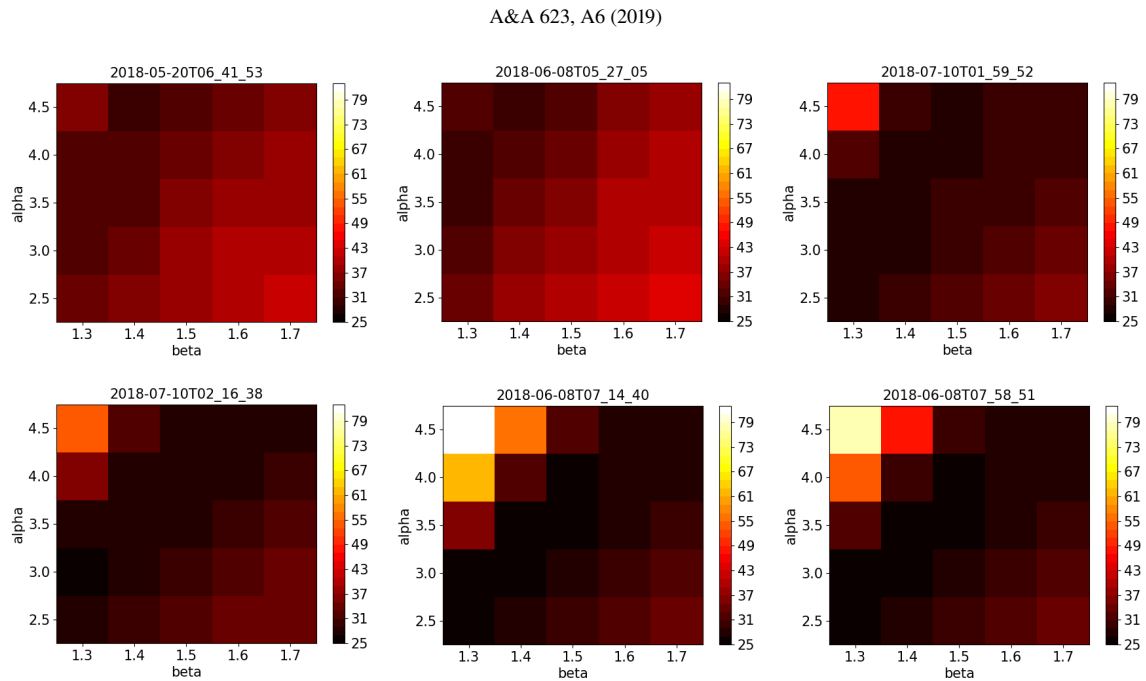


Fig. C.2. Root square error between deconvolved images and OASIS+albedo model. Each of the six subfigures corresponds to one of the observing epoch. Evolution of the error with respect to the α and β parameters is then visible. For each epoch, optimal values of α and β are the ones that minimise the error. Invalid pixels (missing albedo) were removed for error computation. However, all pixels (inside and outside the asteroid) are considered to take into account the residual blurring after eventual incomplete deconvolution. Errors have also been divided by the flux of each Vesta observation so they reach comparable values between the different epochs.



Blind deconvolution in astronomy with adaptive optics: the parametric marginal approach

R. J.-L. Fétick^{1,2}*, L. M. Mugnier²*, T. Fusco^{2,1} and B. Neichel¹

¹Aix-Marseille Université, CNRS, CNES, LAM, Marseille, France

²DOTA, ONERA, Université Paris Saclay, F-92322 Châtillon, France

Accepted 2020 June 10. Received 2020 June 10; in original form 2020 April 29

ABSTRACT

One of the major limitations of using adaptive optics (AO) to correct image post-processing is the lack of knowledge about the system's point spread function (PSF). The PSF is not always available as direct imaging on isolated point-like objects, such as stars. The use of AO telemetry to predict the PSF also suffers from serious limitations and requires complex and yet not fully operational algorithms. A very attractive solution is to estimate the PSF directly from the scientific images themselves, using blind or myopic post-processing approaches. We demonstrate that such approaches suffer from severe limitations when a joint restitution of object and PSF parameters is performed. As an alternative, here we propose a marginalized PSF identification that overcomes this limitation. In this case, the PSF is used for image post-processing. Here we focus on deconvolution, a post-processing technique to restore the object, given the image and the PSF. We show that the PSF estimated by marginalization provides good-quality deconvolution. The full process of marginalized PSF estimation and deconvolution constitutes a successful blind deconvolution technique. It is tested on simulated data to measure its performance. It is also tested on experimental AO images of the asteroid 4-Vesta taken by the Spectro-Polarimetric High-contrast Exoplanet Research (SPHERE)/Zurich Imaging Polarimeter (Zimpol) on the Very Large Telescope to demonstrate application to on-sky data.

Key words: instrumentation: adaptive optics – techniques: high angular resolution – techniques: image processing.

1 INTRODUCTION

Ground-based astronomy is challenging because of the difficulty in acquiring highly resolved images. The major issue comes from the atmospheric turbulence, responsible for inhomogeneities in the propagation medium and resulting in optical aberrations (Fried 1966; Roddier 1981). Long-exposure images are blurred by the turbulence effect and lose their details. The corresponding so-called point spread function (PSF) is much larger than the diffraction limit of the biggest current telescopes.

Adaptive optics (AO) systems have been developed to mitigate the turbulence by a fast compensation of the atmospheric random fluctuations (Rousset et al. 1990; Roddier 1999). This results in a sharper PSF and hence in a more resolved image. However, the AO correction is partial (Conan 1994; Conan, Madec & Rousset 1994), especially at short wavelengths, and the images still suffer from a residual blurring. Post-processing techniques, such as deconvolution (Titterton 1985; Demoment 1989; Idier 2008), can then be performed to restore the blurred information in the image close to its original level. Deconvolution algorithms require knowledge of the PSF to estimate the object correctly. This is particularly critical in astronomy as the PSF is highly variable as a result of both the random evolution of the turbulence and the complex dependency of the AO correction quality with respect to the observing conditions (Rigaut, Véran & Lai 1998; Fusco & Conan 2004). Many observational cases,

such as small field-of-view imaging, do not allow the extraction of the PSF from an isolated bright star in the image. Consequently, other methods must be used to identify the PSF from the image.

Blind and myopic deconvolution algorithms try to estimate both the observed object and the PSF. The commonly used approach, called joint estimation, consists of a simultaneous estimation of the object and the PSF from a given image. This inverse problem accepts many solutions and must be strongly regularized on both the PSF and the object in order to remove the ambiguity of disentangling them. Regularization on the object is often performed by a convex penalization of its gradient. Regarding the PSF, fundamental constraints are its unit sum and positivity, achieved by projection (Ayers & Dainty 1988) or reparametrization (Biraud 1969; Thiébaud & Conan 1995). In most cases, these constraints are not sufficient to properly retrieve the PSF. Conan et al. (1998) and Mugnier, Fusco & Conan (2004) developed MISTRAL (i.e. the myopic iterative step-preserving restoration algorithm), where the gradient of the object is regularized with a $l^2 - l^1$ norm (Rey 1983; Brette & Idier 1996; Mugnier et al. 2001), and the PSF is regularized by means of a Gaussian prior probability; that is, with an average-guess PSF and a power spectral density (PSD) to control its variations around the average. In practice, this works properly when the average-guess PSF is close to the true PSF and the PSD is small, but there is no guarantee of convergence (Levin et al. 2009; Blanco & Mugnier 2011).

To ensure consistent estimation, it is critical to reduce the number of degrees of freedom from the object and/or the PSF. The informative content of an observation is proportional to the number of degrees of freedom. A parsimonious parametrization of the object

* E-mail: romain.fetick@lam.fr (RJ-LF); laurent.mugnier@onera.fr (LMM)

4210 *R. J.-L. Fétick et al.*

is difficult to provide because we have little prior information on it. However, a parsimonious parametric model of the PSF is suited for deconvolution processes (Drummond 1998; Markham & Conchello 1999; Fétick et al. 2019a). It is thus more efficient to parametrize the PSF using the available information on the observing system. The PSF model developed in Fétick et al. (2019b) is adapted to AO-corrected images as it is able to describe both the coherent core and the turbulent halo of the AO-corrected PSF. Even with the strong prior of a parsimonious PSF parametrization, the joint maximum a posteriori estimator is not ensured to converge towards a satisfactory result. Indeed, the degeneracy of this estimator was demonstrated by Blanco & Mugnier (2011) with a linear combination of PSFs for application to biomedical imaging. In this paper, we show that the joint estimator is also degenerated with a non-linear PSF model, although adapted to astronomical imaging.

Because of the drawbacks of the joint estimator, we consider another method, which is the marginal estimator (Berger, Liseo & Wolpert 1999; Blanc, Mugnier & Idier 2003; Levin et al. 2009). This method consists of integrating – marginalizing – the object out of the problem to estimate only the PSF parameters. This estimator is asymptotically consistent and non-biased (Lehmann 1983) when the number of data or the signal-to-noise ratio (S/N) increase. We apply this method to our astronomical case in order to estimate the PSF parameters. The PSF is then used in a conventional (non-blind and non-myopic) deconvolution to estimate the object.

In Section 2, we explain the reasons for our choice of a parametric PSF model adapted to AO-corrected images. The first approach would be to use this parametric model to perform joint estimation. In Section 3, we show that the deconvolution based on a joint estimation of the PSF and the object does not converge towards the correct solution in spite of the parametric PSF model introduced. Thus, we consider the marginalized approach in Section 4. We study the effect of the S/N and the supervision level on the PSF estimation and image deconvolution. We show that this method can be adapted for blind deconvolution, with an example using astronomical images from the Spectro-Polarimetric High-contrast Exoplanet Research (SPHERE)/Zurich Imaging Polarimeter (Zimpol) on the Very Large Telescope (Beuzit et al. 2019). Finally, we conclude in Section 5.

2 PSF AND IMAGING MODELS

2.1 PSF model

Because of highly variable atmospheric conditions and the complexity of the AO correction, the PSF must be estimated for each observation. The simple method of estimating a PSF on a bright star is not possible for many observational cases, especially for observation of resolved objects in a small field of view. The PSF must be estimated with another method in order to be able to perform post-processing techniques on the image. This estimation might be based on telemetry or on the image itself. Because the complete shape of the PSF is not well known, a parametric model overcomes this issue. The parametrization of the long-exposure PSF models the PSF shape in a parsimonious fashion. The PSF model must satisfy the following qualitative requirements:

- (i) parsimony – a small number of parameters reduces efficiently the number of unknowns to estimate;
- (ii) versatility – ability to adapt to different observing systems and observing conditions;
- (iii) accuracy – to describe the PSF with enough precision for the considered application, here the deconvolution.

The first requirement is antagonistic with the others as a small number of parameters often leads to a rigid model, which might have difficulties in adapting with versatility and accuracy to all the possible PSFs. The use of the physics of the observation in the PSF model partially overcomes this limitation by allowing us to distinguish the constant part of the PSF from the free part. For astronomical observations, the equation of Roddier (1981) states that the PSF is the convolution of the atmospheric PSF and the static PSF, the latter being made of the telescope and the detector contributions:

$$h = h_A \otimes h_T \otimes h_D. \quad (1)$$

Here, \otimes is the continuous convolution operator, h is the total PSF, h_D is the detector contribution, h_T is the telescope and instrument contribution, and h_A is the atmospheric contribution. Conan (1994) has shown that this equation is still valid for AO-corrected turbulence. The telescope PSF is given by the diffraction theory (Goodman 2005). It can be derived theoretically from the telescope’s optical setup (e.g. diameter, focal length), or it can be measured experimentally to take into account possible aberrations (N’Diaye et al. 2013). It can also include non-common path aberrations (NCPAs) for AO systems, if they are known. This instrumental PSF is supposed to be quite well known and static with respect to the highly variable atmospheric PSF. This atmospheric PSF is better described by its Fourier transform, called the optical transfer function (OTF). Indeed, the turbulent OTF is directly related to the autocorrelation of the phase ϕ of the incident electromagnetic wave

$$\tilde{h}_A(\rho/\lambda) = e^{-B_\phi(0)} e^{B_\phi(\rho)}, \quad (2)$$

where \tilde{h}_A denotes the Fourier transform of h_A , ρ is the position variable, λ is the observation wavelength and B_ϕ is the autocorrelation of the electromagnetic phase. Moreover, the Wiener–Khinchine theorem links the autocorrelation to the PSD as

$$W_\phi(f) = \mathcal{F}\{B_\phi(\rho)\}, \quad (3)$$

where W_ϕ is the phase PSD, and \mathcal{F} denotes the Fourier operator. The variables f and ρ are Fourier conjugated. Using these equations, we finally write the relation between the phase PSD and the long-exposure PSF

$$h(u) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \tilde{h}_D(\rho/\lambda) \tilde{h}_T(\rho/\lambda) e^{-B_\phi(0)} e^{\mathcal{F}^{-1}\{W_\phi(f)\}} \right\}, \quad (4)$$

where the variables u and ρ/λ are Fourier conjugated. The term $B_\phi(0)$ is the integral of W_ϕ over the frequency plane. A parametrization of the phase PSD is thus equivalent to a parametrization of the PSF. This relation makes it possible to parametrize the PSF from the PSD of the electromagnetic phase, with the substantial advantage of including physical parameters in the PSF model. Indeed, the turbulent phase PSD is well described by the Kolmogorov (1941) power law in $f^{-11/3}$ and the Fried (1966) parameter, called r_0 , which defines the strength of the turbulence applied to optical observations. We use the AO residual phase PSD model defined in Fétick et al. (2019b). This phase PSD model is split into two terms. One term corresponds to the AO-corrected core at frequencies seen by the AO system, lower than the AO cut-off frequency f_{AO} . The second term corresponds to frequencies $f > f_{AO}$ not corrected by the AO system and behaving as the complete Kolmogorov turbulence. The first term is the most difficult to parametrize as it includes the complex effect of the AO partial correction. Its shape is based on the Moffat (1969) model defined with two parameters (α , β) in the axisymmetric form. The Moffat function is written as

$$M(f) = (1 + f^2/\alpha^2)^{-\beta}, \quad (5)$$

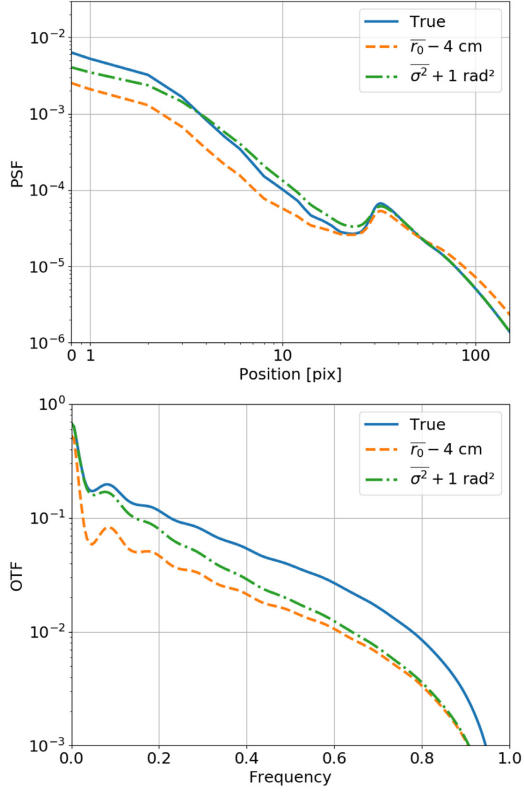


Figure 1. Top: PSF of parameters $(\bar{r}_0, \bar{\sigma}^2)$ for our simulations (solid line). Impact on the PSF shape of reducing the r_0 of an arbitrary value of 4 cm (dashed line). Impact on the PSF shape of increasing the σ^2 of an arbitrary value of 1 rad^2 (dash-dotted line). Bottom: corresponding OTFs.

where α is the elongation in the frequency domain, and β is the decrease power law. For a finite energy of the Moffat function on the plane, we must ensure $\beta > 1$. We consider the following phase PSD model

$$W_\phi(\vec{f}) = [\sigma^2 \mathcal{N} M(\vec{f}) + C]_{f \leq f_{\text{AO}}} + [0.023 r_0^{-5/3} f^{-11/3}]_{f > f_{\text{AO}}} \quad (6)$$

where r_0 is the Fried parameter, σ^2 is the phase variance of the Moffat model, C is a constant, and \mathcal{N} is a normalization factor that ensures a unitary integral of the Moffat function over the correction disc $f \leq f_{\text{AO}}$. It is defined as

$$\mathcal{N} = \frac{\beta - 1}{\pi \alpha^2} \left[1 - (1 + f_{\text{AO}}^2 / \alpha^2)^{1-\beta} \right]^{-1}. \quad (7)$$

2.2 Simulation of an AO-corrected PSF

In the following sections, we simulate the observation of a resolved object with an AO system. We use the AO-corrected phase PSD model of equation (6) to generate the PSF (equation 4) corresponding to this observation. The PSF parameters (α , β , C) are considered as constant throughout the paper as they do not evolve significantly with the observing conditions (Fétick et al. 2019b). Only the two main parameters, r_0 scaling the turbulence strength and σ^2 scaling the AO residual variance, are considered as variable. With this parametrized model, the PSF directly has unit energy on the plane

Blind deconvolution in astronomy with AO 4211

Table 1. Set-up parameters to define our PSF model. The top section of the table corresponds to the telescope's fixed parameters, the middle section corresponds to the turbulent PSF fixed parameters, and the bottom section corresponds to the highly variable parameters of the PSF. The 'Lower' column gives the lower bound on each parameter.

| Parameter | Symbol | Value | Lower | Unit |
|----------------------|------------------|-------|----------|---------------------------|
| Primary diameter | D | 8 | >0 | m |
| Secondary diameter | D' | 1.12 | ≥ 0 | m |
| Sampling | s | 3 | ≥ 2 | N/A |
| AO cut-off frequency | f_{AO} | 1.25 | >0 | m^{-1} |
| Moffat width | α | 0.05 | >0 | m^{-1} |
| Moffat power law | β | 1.5 | >1 | N/A |
| AO area constant | C | 0 | ≥ 0 | $\text{rad}^2 \text{m}^2$ |
| Fried parameter | \bar{r}_0 | 15 | >0 | cm |
| Phase variance | $\bar{\sigma}^2$ | 1.3 | ≥ 0 | rad^2 |

and is positive. These constraints do not have to be implemented for minimization algorithms on the PSF. We only need to ensure the physical constraints $r_0 > 0$ and $\sigma^2 \geq 0$ for W_ϕ to be positive and finite. We call $\boldsymbol{y} = \{r_0, \sigma^2\}$ the set of parameters to be estimated. The r_0 parameter affects the halo of the PSF and similarly the level of the OTF-corrected frequencies $f > 0.1$ (Fig. 1, dashed line). The σ^2 parameter affects the core of the PSF and the slope of the OTF (Fig. 1, dash-dotted line).

All the parameters and constants used to generate our PSF model are summarized in Table 1. We choose $\bar{r}_0 = 15$ cm and $\bar{\sigma}^2 = 1.3 \text{ rad}^2$, which correspond to typical atmospheric conditions at Paranal at $\lambda = 550$ nm and typical partial AO correction in the visible wavelength. The bar symbol identifies these values as the true PSF values of our simulation. The corresponding Strehl ratio is $\bar{S}_R = 11.5$ per cent.

2.3 The imaging equation

In the isoplanetic domain, the image i is the result of the convolution of the object o with the PSF h . The equation of observation on the detector is

$$i = \text{III}(h \otimes o) + \boldsymbol{n}, \quad (8)$$

where III is the discretization operator, i is the discrete image and \boldsymbol{n} is an additive noise that takes into account photon shot noise and detector readout noise on each pixel. The III function is assumed to take the value of $h \otimes o$ at the centre of each pixel and to multiply it by the pixel area (for flux conservation). We can directly consider the discretized object \boldsymbol{o} and the discretized PSF \boldsymbol{h} instead of their continuous versions. The discrete equation of observation becomes

$$i = (\boldsymbol{h} \star \boldsymbol{o}) + \boldsymbol{n}, \quad (9)$$

where \star denotes the discrete convolution operator.

2.4 The asteroid Vesta as a resolved object

We simulate an observation of the Main Belt asteroid, Vesta. The asteroid was visited by the NASA/Dawn mission and observed at high resolution (Russell et al. 2012) with its framing camera. The OASIS (Jorda et al. 2010) software was then used to build a synthetic view of the asteroid (Fétick et al. 2019a) from the high-resolution Dawn data. The albedo map of Vesta was generously provided by Schroder et al. (2013). Since the Vesta albedo map only extends up to the 30° North, it has been symmetrised around this latitude to provide a continuous albedo for the northern part of our simulation. The

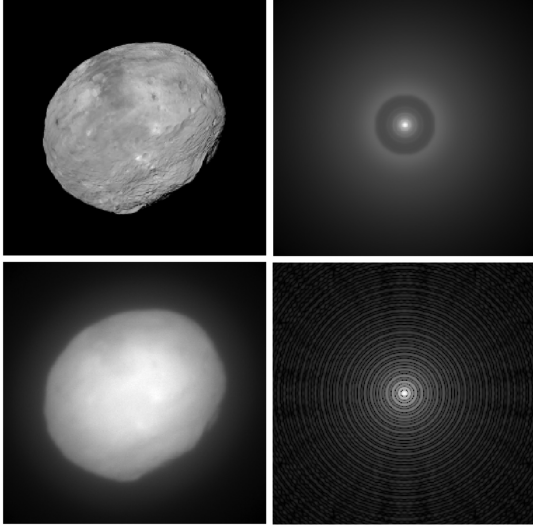
4212 *R. J.-L. Fétick et al.*

Figure 2. Top left: OASIS model of the asteroid Vesta. Top right: true PSF of the simulation (log intensity scale). Bottom left: observed image. Bottom right: diffraction PSF, called h_T in the text (log intensity scale). Simulation arrays are 512×512 pixel², but are cropped at 256×256 pixel² for this figure.

asteroid being seen mostly from the South, the albedo extrapolation only impacts few pixels of the simulation. The resulting synthetic object is shown in Fig. 2 (top left). Equation (9) is then used to derive the image corresponding to the observation of this object with the simulated PSF of parameters $(\bar{\sigma}_0, \bar{\sigma}^2)$. The Poisson photon noise and the detector readout noise are taken into account. We consider a total flux of 10^9 photons and a detector readout noise of 20 electron standard deviations. The corresponding S/N is approximately 105. The image is shown in Fig. 2 (bottom left). These values of flux and readout noise are typical from VLT/SPHERE/Zimpol asteroid observations (ESO Large Program ID 199.C-0074), as discussed in Section 4.7. The simulated images are 512×512 pixel².

The blurred and noisy image obtained from the simulation of an AO observation has lost the details and sharp edges (high spatial frequencies) of the object. Because the observer is assumed to have no access to the PSF, or to its $(\bar{\sigma}_0, \bar{\sigma}^2)$ parameters, a method of estimation of both the PSF parameters and the object must be used to retrieve the details on the object. In Section 3, we investigate the conventionally used joint estimation technique, which is an attempt to simultaneously retrieve the PSF and the object. It is different from the marginal method of Section 4, which estimates first the PSF parameters and then the object.

3 TESTING THE CONVENTIONAL JOINT ESTIMATION

When trying to perform blind deconvolution, the most simple and conventional method is the joint estimation: a simultaneous estimation of both the PSF and the object for a given image. From a probabilistic point of view, one wants to maximize the posterior probability $P(\mathbf{o}, \mathbf{h}|\mathbf{i})$ of the object and the PSF, given the image (Mugnier et al. 2004). Because the PSF is parametrized with the set $\boldsymbol{\gamma}$, the probability is written $P(\mathbf{o}, \boldsymbol{\gamma}|\mathbf{i})$. We use the Bayesian rule to

write this posterior probability

$$P(\mathbf{o}, \boldsymbol{\gamma}|\mathbf{i}) \propto P(\mathbf{i}|\mathbf{o}, \boldsymbol{\gamma}) P(\mathbf{o}) P(\boldsymbol{\gamma}) \quad (10)$$

where $P(\mathbf{i}|\mathbf{o}, \boldsymbol{\gamma})$ is the likelihood, and $P(\mathbf{o})$ and $P(\boldsymbol{\gamma})$ are the prior probabilities on the object and the PSF parameters, respectively. The conventional solution is the one that maximizes $P(\mathbf{o}, \boldsymbol{\gamma}|\mathbf{i})$, called joint maximum a posteriori (JMAP). We consider an additive noise, not necessarily stationary over the pixels as it takes into account both readout noise and Poisson shot noise. Mugnier et al. (2004) have shown that the total noise on the detector is well approximated by a non-stationary Gaussian noise with the contribution of both readout noise and Poisson noise. The variance of the total noise at pixel (k, l) is

$$(\sigma_n^2)_{k,l} = \sigma_{\text{RON}}^2 + (\sigma_{\text{Poisson}}^2)_{k,l}. \quad (11)$$

This noise expression is suited to astronomical cases, over a wide range of S/N ratios. Under this hypothesis, the JMAP problem is equivalent to the minimization of the expression

$$J_{\text{JMAP}}(\mathbf{o}, \boldsymbol{\gamma}) = \left\| \frac{\mathbf{i} - \mathbf{o} \star \mathbf{h}_{\boldsymbol{\gamma}}}{\boldsymbol{\sigma}_n} \right\|^2 - \ln P(\mathbf{o}) - \ln P(\boldsymbol{\gamma}), \quad (12)$$

where J_{JMAP} is the neg-logarithm of $P(\mathbf{o}, \boldsymbol{\gamma}|\mathbf{i})$, and $\mathbf{h}_{\boldsymbol{\gamma}}$ is the PSF model depending on the parameters $\boldsymbol{\gamma}$. The prior probability on the object is a regularization term that prevents the well-known dramatic increase of the noise during the deconvolution process, which would lead to unusable results. Different regularizations are possible, such as l^2 (Wiener-like) producing smoothed edges and l^1 (total variation) producing cartoon-like restored objects. The so-called $l^2 - l^1$ regularization (Rey 1983; Brette & Idier 1996; Mugnier et al. 2001) is adapted to restore objects comprising both smooth regions and sharp edges, and has been applied successfully in astronomy. The JMAP criterion for this $l^2 - l^1$ norm (Mugnier et al. 2004) is defined as

$$J_{\text{JMAP}}(\mathbf{o}, \boldsymbol{\gamma}; \delta, \kappa) = \left\| \frac{\mathbf{i} - \mathbf{o} \star \mathbf{h}_{\boldsymbol{\gamma}}}{\boldsymbol{\sigma}_n} \right\|^2 + \delta^2 \sum_{k,l} \left| \frac{\nabla \mathbf{o}_{k,l}}{\delta \kappa} \right| - \ln \left(1 + \left| \frac{\nabla \mathbf{o}_{k,l}}{\delta \kappa} \right| \right) - \ln P(\boldsymbol{\gamma}), \quad (13)$$

where κ and δ are the two regularization hyper-parameters, which must be set before the minimization, and ∇ is the isotropic gradient operator, defined as

$$\nabla \mathbf{o}_{k,l} = \sqrt{(\mathbf{o}_{k,l} - \mathbf{o}_{k,l-1})^2 + (\mathbf{o}_{k,l} - \mathbf{o}_{k-1,l})^2} \quad (14)$$

The κ parameter is a scaling factor of the object's gradient that acts as the inverse of a global hyper-parameter, and that has the same unit as the object (photo-electrons). The δ parameter is a unitless threshold between the quadratic behaviour that filters low-amplitude noise and the linear behaviour that allows high-amplitude sharp edges. For $\delta \rightarrow 0$, the regularization tends towards the total variation norm, and for $\delta \rightarrow \infty$, the regularization tends towards a l^2 norm. These two hyper-parameters must be provided in a supervised fashion by the user. We use the empirical values

$$\kappa = 5 \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k,l} (\mathbf{i}_{k,l} - \mathbf{i}_{k,l-1})^2 + (\mathbf{i}_{k,l} - \mathbf{i}_{k-1,l})^2}, \quad \delta = 0.4, \quad (15)$$

where N is the number of pixels in the image. These values are chosen to provide a correct deconvolution when the deconvolving PSF is the true PSF. The same values of (κ, δ) are used for all our simulations.

There is no analytical solution to find the minimum of the criterion, and a fast quasi-Newton iterative descent algorithm (Thiébaud 2002)

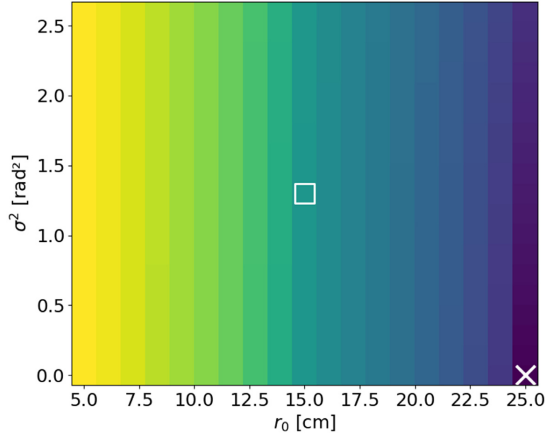


Figure 3. Joint criterion J_{MAP} (log intensity scale) as a function of the r_0 and σ^2 PSF parameters. The central square indicates the true PSF parameters, and the cross indicates the minimum of the criterion.

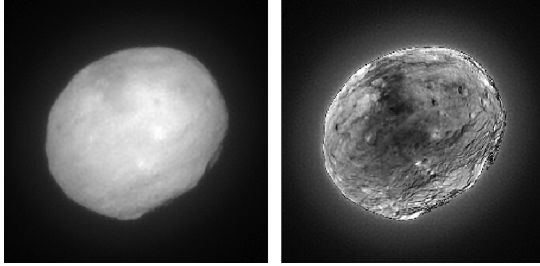


Figure 4. Left: deconvolution of the image using the PSF estimated by the joint estimation. The deconvolved object shows little detail. Right: two times the absolute difference with the true object.

is used in our case to solve this problem. In addition, constraint of positivity on the object is implemented by projection at each iteration of the algorithm. The prior probability on the PSF parameters is considered as uniform, which is the least informative of all the density probabilities. The uniform probability is simply implemented as upper and lower bounds in the minimizer. The range for the Fried parameter r_0 is 5–25 cm, and the range for the AO variance σ^2 is 0–2.6 rad^2 . The value of the criterion J_{MAP} at convergence is shown in Fig. 3 for different values of PSF parameters r_0 and σ^2 . It exhibits a strong evolution with r_0 and a soft evolution with σ^2 . The global minimum of the criterion is located at the maximal $r_0 = 25$ cm and the minimum $\sigma^2 = 0 \text{ rad}^2$, which is the sharpest PSF possible in the given range. The joint estimator is thus degenerated: it is very far from, and actually independent of, the true value of the PSF parameters. It confirms and follows the previous results of Blanco & Mugnier (2011), who found the joint estimator to be degenerated in the case of a l^2 Wiener-like regularization and no positivity on the object. Our attempt to use the positivity, the $l^2 - l^1$ norm adapted to sharp-edged objects and the PSF model adapted to AO, is not able to remove this degeneracy. An explanation of the joint estimation degeneracy was formulated in Levin et al. (2009): the data fidelity term as $\mathbf{o} \star \mathbf{h}_\gamma$, accepts indifferently multiple $(\mathbf{o}, \mathbf{h}_\gamma)$ solutions, while the regularization favours smooth objects. The result is an over-smoothed estimated object (Fig. 4) and a over-sharp estimated PSF.

Blind deconvolution in astronomy with AO 4213

The error on the deconvolved object is defined as the l^1 difference between the deconvolved object and the true object, normalized by the flux

$$\varepsilon_{\text{obj}} = \frac{\|\hat{\mathbf{o}} - \mathbf{o}\|_1}{\sum_{k,l} o_{k,l}} = \frac{\sum_{k,l} |\hat{o}_{k,l} - o_{k,l}|}{\sum_{k,l} o_{k,l}}, \quad (16)$$

where $\hat{\mathbf{o}}$ is the deconvolved object and \mathbf{o} is the true object. For the JMAP estimation, we find $\varepsilon_{\text{obj,JMAP}} = 52 \times 10^{-4}$. This is a high error, as the deconvolution of the image by the true PSF gives $\varepsilon_{\text{obj,truePSF}} = 3.4 \times 10^{-4}$. There is approximately a factor of ~ 15 in the loss of quality for the given ε norm. The JMAP deconvolution consequently appears to be of poor quality.

4 THE MARGINAL APPROACH

4.1 Expression of the marginal estimator

The failure of the joint estimation comes from the difficulty in disentangling the object from the PSF in the image. The high number of unknowns and the coupling of the PSF and the object in the image is responsible for the degeneracy. The number of unknowns should be drastically reduced, hopefully to be able to perform blind deconvolution correctly. The marginal approach (Blanc et al. 2003) consists of integrating some variables over their probability. For identification of the PSF parameters, we marginalize over the object

$$P(\mathbf{y}|\mathbf{i}) \propto P(\mathbf{i}|\mathbf{y}) P(\mathbf{y}) = \int_{\Lambda} P(\mathbf{i}|\mathbf{o}, \mathbf{y}) P(\mathbf{y}) P(\mathbf{o}) d\mathbf{o}, \quad (17)$$

where Λ is the space of all the possible realizations of the object. This drastically reduces the number of unknowns to estimate (typically a quarter of a million for 512×512 images) to a few PSF parameters. Moreover, as the number of pixels increases, the number of PSF parameters remains constant, thus increasing the statistical contrast: the ratio of the number of measurements over unknowns. This is not the case for the joint estimation, as the statistical contrast remains nearly constant and greater than 1 when the number of pixels increases. In order to analytically compute the marginalization integral, we make the assumption that the object has a Gaussian probability law of average \mathbf{o}_m and covariance matrix R_o . Because the noise (equation 11) and the object are assumed to be Gaussian, it leads to an image with Gaussian statistics too. Its probability is written as

$$P(\mathbf{i}|\mathbf{y}) \propto \frac{1}{\sqrt{\det R_i}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{i} - \mathbf{i}_m)^T R_i^{-1} (\mathbf{i} - \mathbf{i}_m)}, \quad (18)$$

where $\mathbf{i}_m = \mathbf{h}_\gamma \star \mathbf{o}_m$ for a zero mean noise, and R_i is the covariance matrix of the image, depending on the covariance of the object and the noise. Although typical images are combinations of photon, readout noise and potentially background noise, we make the simplification hypothesis of a stationary noise (Blanco & Mugnier 2011) in order to be able to write a simple criterion in the Fourier domain for a numerical minimization in a reasonable amount of time. With this hypothesis of a Gaussian stationary noise, the image covariance matrix is written as

$$R_i = H_\gamma R_o H_\gamma^T + \langle \sigma_n^2 \rangle I_d, \quad (19)$$

where $\langle \sigma_n^2 \rangle$ is the average noise variance over the pixels, I_d is the identity matrix and H_γ is the operator associated with the discrete convolution by the PSF \mathbf{h}_γ . Taking the neg-logarithm of $P(\mathbf{y}|\mathbf{i})$, we write the marginal criterion in the Fourier domain (Blanco &

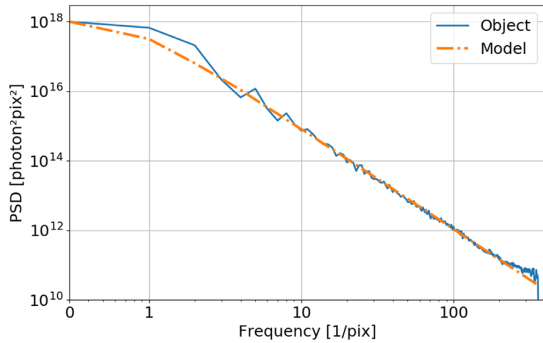
4214 *R. J.-L. Fétick et al.*

Figure 5. Circular average of the squared modulus of the Vesta Fourier transform (solid blue line) and the object PSD model (dot-dashed orange line) for the supervised values $(\bar{k}, \bar{\rho}_0, \bar{p})$.

Mugnier 2011)

$$J_{\text{marg}}(\boldsymbol{\gamma}; S_{\text{obj}}, \langle \sigma_n^2 \rangle) = \sum_f \ln [S_{\text{obj}}(f) |\tilde{h}_\gamma(f)|^2 + \langle \sigma_n^2 \rangle] + \sum_f \frac{|\tilde{i}(f) - \tilde{h}_\gamma(f) \tilde{\delta}_m(f)|^2}{S_{\text{obj}}(f) |\tilde{h}_\gamma(f)|^2 + \langle \sigma_n^2 \rangle} - \ln P(\boldsymbol{\gamma}), \quad (20)$$

where S_{obj} is the power spectral density of the object. Any prior information on the PSF parameters can be provided through the $P(\boldsymbol{\gamma})$ term. Similar to the assumption we made for the joint estimator, we consider a uniform prior probability over the ranges $5 \leq r_0 \leq 25$ cm and $0 \leq \sigma^2 \leq 2.6$ rad². This is again the least informative prior for the PSF on these given ranges. Regarding the average object \mathbf{o}_m , we define it as a constant object with the same flux as the image. It is thus the least informative object (the least structured) for the given flux.

The marginal estimator $J_{\text{marg}}(\boldsymbol{\gamma}; S_{\text{obj}}, \langle \sigma_n^2 \rangle)$ requires the knowledge of the object PSD and the noise statistics $\langle \sigma_n^2 \rangle$. We approximate the PSD of the object with a model (Conan et al. 1998) depending on three parameters k , ρ_0 and p in order to reduce the number of unknowns to estimate. This object PSD model is an axisymmetric function in the frequency domain

$$S_{\text{obj}}(f) = \frac{k}{1 + (f/\rho_0)^p}, \quad (21)$$

where k is the object PSD value at $f=0$ (in practice, close to the square of the flux), ρ_0 is inversely proportional to the characteristic size of the object, and p is the decrease power law. For example, asteroids have a power law $p \simeq 3$. Artificial satellites have much sharper edges, and a power law $p \simeq 2.5$. An homogeneous field of stars has a power law $p \simeq 0$. The power law is thus an indicator of the sharpness of an object, and it consequently defines its category. Fig. 5 shows the circular average of the squared modulus of the asteroid Fourier transform (called ‘empirical PSD’ hereafter; see the solid blue line in the figure). It also shows the PSD model (dot-dashed orange line) for $\bar{k} = 10^{18}$ square photons, $\bar{\rho}_0 = 0.9$ pix⁻¹ and $\bar{p} = 2.91$, where the bar symbol identifies them as the supervised values of the object’s PSD model. The supervised choice of these values fits well the object’s empirical PSD and is discussed in Section 4.4. The value of k is only related to the flux of the object and gives no information on its shape. Blanco & Mugnier (2011) define $\mu = \langle \sigma_n^2 \rangle / k$ and have found an analytical solution for k given the other parameters. In

practice, the criterion to minimize reduces to $J_{\text{marg}}(\boldsymbol{\gamma}; \mu, \rho_0, p)$. The PSF model and its gradient with respect to the $\boldsymbol{\gamma}$ parameters are provided to the algorithm. The gradients with respect to the hyper-parameters are also provided. The criterion is minimized with the variable metric method limited memory with bounds (VMLM-B) constraints (Thiébaud 2002) descent algorithm. Because of this fast algorithm, typical computation time is less than 1 min for images of 512×512 pixel² on a personal computer. The bounds ensure the strict positivity of the hyper-parameters, even though we never reached these bounds. Upper and lower bounds are also provided for the PSF parameters, and they are the actual implementation of the uniform prior for these parameters.

4.2 The supervised marginal estimation

In this subsection, we present first results of PSF estimation and image restoration using the marginal estimator. This estimation is supervised, in the sense that the hyper-parameters (μ, ρ_0, p) are fixed by the user, similarly to what is done with the joint estimator for parameters κ and δ in equation (13). The result of the estimator depends on the value of these hyper-parameters (μ, ρ_0, p) , on the S/N and on the number of data (pixels). The fundamental property of this supervised estimator is to be asymptotically consistent and unbiased (Lehmann 1983) for increasing S/N or number of data. Here the hyper-parameters are fixed to $(\bar{\mu}, \bar{\rho}_0, \bar{p})$. For our simulated image of the asteroid Vesta with a flux of 10^9 photons (Fig. 2, bottom left), the marginal algorithm converges towards the following PSF parameters

$$r_0 = 14.8 \text{ cm}, \quad \sigma^2 = 1.26 \text{ rad}^2. \quad (22)$$

The error on the Fried parameter is only $\Delta r_0 = 0.2$ cm, corresponding to a relative error $\Delta r_0 / \bar{r}_0 = 1.3$ per cent. The error on the AO variance is only $\Delta \sigma^2 = 0.04$ rad², corresponding to a relative error $\Delta \sigma^2 / \bar{\sigma}^2 = 3.1$ per cent. The errors on the parameters are small, and the residual error of a few per cent can originate from the following:

- (i) the presence of noise in the image;
- (ii) the hypothesis of an object with Gaussian statistics;
- (iii) the over-simplified object PSD model, made of three parameters only;
- (iv) the supervised PSD parameters that are not exactly optimal for the marginal estimator (discussed in Section 4.4);
- (v) the hypothesis of a stationary noise over the pixels, which is a simplifying assumption.

These are thought to be the main sources of residual error for our marginal estimation. Nevertheless, we obtain highly satisfactory results. The value of the marginal criterion for different r_0 and σ^2 is seen in Fig. 6. The minimum is correctly located near the true values of the PSF parameters. Moreover, the shape on the marginal criterion evolves roughly as the shape of the Strehl ratio (Fig. 13, triangle denoted s for supervised) with the PSF parameters, meaning that a small error on the marginal criterion leads to a PSF with a similar Strehl ratio as the true PSF. The Strehl ratio corresponding to the supervised marginal estimation is $S_R = 11.4$ per cent, whereas the Strehl ratio of the true PSF is $\bar{S}_R = 11.5$ per cent. The error on the Strehl ratio is small. Moreover, the shapes of both estimated PSF and OTF match well the true shapes (Fig. 15).

The deconvolution using a $l^2 - l^1$ regularization (Mugnier et al. 2004) on the object is then run in classical (non-myopic) mode with the PSF estimated by marginalization. It corresponds to equation (13) for fixed $\boldsymbol{\gamma}$ parameters, as they are provided by the marginal estimation (and not estimated jointly). The result of the deconvolution

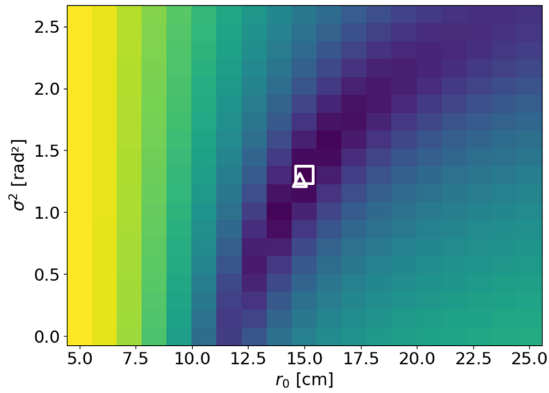


Figure 6. Supervised marginal criterion J_{marg} (log intensity scale) as a function of the r_0 and σ^2 PSF parameters. The parameters (μ, ρ_0, p) are all fixed to their supervised values $(\bar{\mu}, \bar{\rho}_0, \bar{p})$. The central square indicates the true PSF parameters, and the triangle indicates the minimum of the criterion.

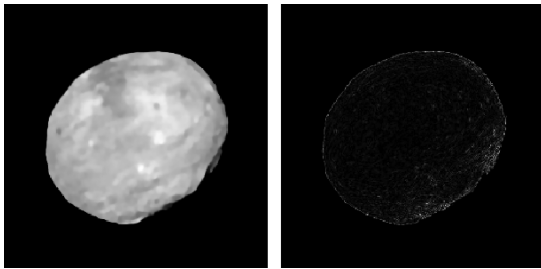


Figure 7. Left: deconvolution of the image using the PSF estimated by the supervised marginal estimation. Right: two times the absolute difference with the true object.

is shown in Fig. 7. The object is accurately restored, up to the regularization smoothing effect. The edges are sharp, and the details of albedo and craterization are visible. The errors are located mainly on the edges of the object, where the highest gradients are. There is no residual halo, and all the energy is restored inside the bounds of the object. It is important for precise contour extraction, and thus for a precise volume estimation by astronomers, that there is no halo and that there are no sharp edges. The error on the deconvolution (equation 16) with the supervised marginal PSF is $\epsilon_{\text{obj,marg}} = 3.7 \times 10^{-4}$. It is close to the error $\epsilon_{\text{obj,truePSF}} = 3.4 \times 10^{-4}$ of the deconvolution with the true PSF (computed in Section 3). The deconvolution with the supervised marginal PSF is nearly identical to the ultimate possible deconvolution.

Whereas the joint estimator has shown degeneracy, the supervised marginal estimator exhibits in practice the consistency that is expected from the theoretical properties of this estimator. The error on the estimated PSF is small, and the resulting deconvolution is of high quality.

4.3 Effect of the S/N on the marginal estimation

The S/N is of high importance for inverse problems, including PSF identification and deconvolution. We study the effect of the S/N in our simulation by an increase or a decrease of the simulated stationary Gaussian noise. We thus define 12 S/N levels, from $S/N \simeq$

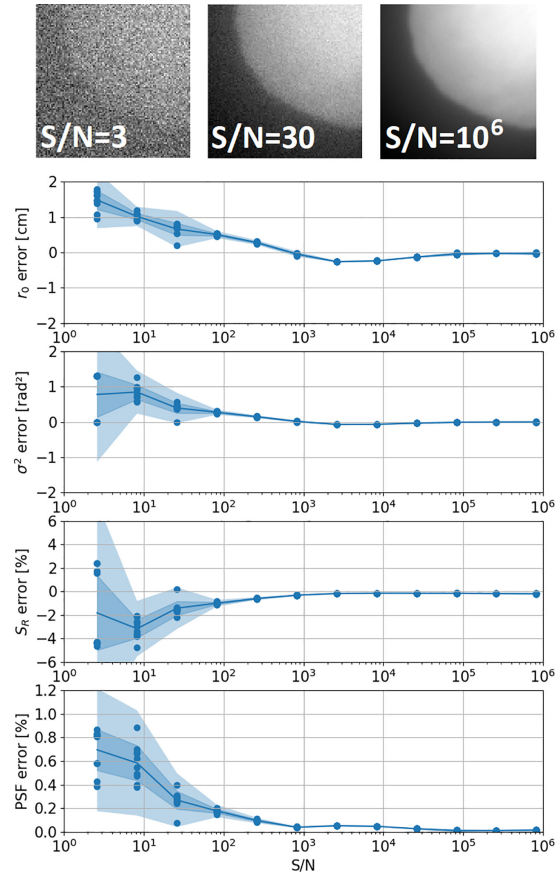


Figure 8. Error on the estimated PSF as a function of S/N. Top panel: error on the Fried parameter r_0 . Second panel: error on the AO variance σ^2 . Third panel: error on the Strehl ratio S_R . Bottom panel: ϵ_h error (equation 23) on the PSF shape. For each S/N level, the marginal algorithm has been run 10 times corresponding to 10 samples of noise (dots). The line is the average of the samples per S/N. Shaded areas correspond to the standard deviation (dark) and three times the standard deviation (light). All the hyper-parameters are fixed to their supervised values $(\bar{\mu}, \bar{\rho}_0, \bar{p})$. At the very top part of the figure, the same detail of the image is shown for three different S/N levels.

2.5 to $S/N \simeq 10^6$. For each S/N case, we generate 10 different noise samples. For each of these 12×10 simulated observations, we run the supervised marginal algorithm in order to retrieve the estimated r_0 and σ^2 parameters. The parameters are compared with respect to their true values $\Delta r_0 = r_0 - \bar{r}_0$ and $\Delta \sigma^2 = \sigma^2 - \bar{\sigma}^2$. The results are shown in Fig. 8. For S/N less than ~ 30 , there is a strong dispersion due to the noise. The algorithm falls in minima (local or global) generated by the noise. Moreover, there is a tendency at low S/N to overestimate both r_0 and σ^2 , and to underestimate of the Strehl ratio. For S/N higher than ~ 30 , the noise has little impact on the marginal estimator. For S/N greater than ~ 300 , the dispersion due to the noise is no longer visible. The marginal estimator converges towards a nearly null error on the r_0 and σ^2 at high S/N. It results in a nearly null error for the estimation of the Strehl ratio. We also define the l^2 error between the estimated PSF shape and the true PSF

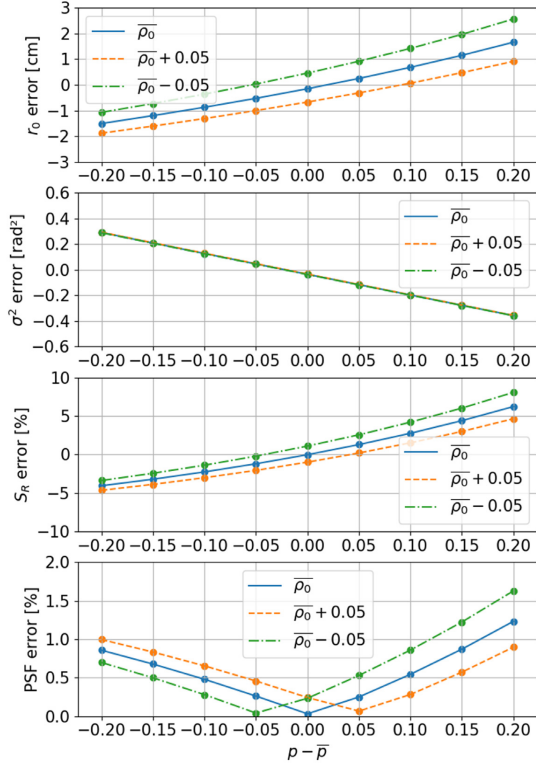
4216 *R. J.-L. Fétick et al.*

Figure 9. Error on the estimated PSF parameters r_0 (top panel), σ^2 (second panel), on the Strehl ratio (third panel) and the ε_h error (equation 23; bottom panel) as a function of $p - \bar{p}$. The hyper-parameter ρ_0 is set at its fitted value $\bar{\rho}_0$ (solid line), ρ_0 is overestimated (dashed) or underestimated (dash-dotted) of 0.05 with respect to $\bar{\rho}_0$. For all cases, the hyper-parameter μ is fixed to $\bar{\mu}$.

shape

$$\varepsilon_h = \left\| \mathbf{h}_y(r_0, \sigma^2) - \mathbf{h}_y(\bar{r}_0, \bar{\sigma}^2) \right\| = \sqrt{\sum_{k,l} [\mathbf{h}_y(r_0, \sigma^2)_{k,l} - \mathbf{h}_y(\bar{r}_0, \bar{\sigma}^2)_{k,l}]^2}, \quad (23)$$

where sum runs over the pixels (k, l) . This error on the PSF shape is also nearly null for high S/N. As the l^2 norm is conserved by Fourier transform, the error on the OTF shape identically becomes nearly null at high S/N.

4.4 Sensitivity to the hyper-parameters

The marginal criterion is dependent on the hyper-parameters chosen by the user as they affect the outcome of the algorithm. While optimally chosen hyper-parameters make the algorithm converge to the correct solution, poorly chosen hyper-parameters may bias the result. Fig. 9 shows the sensitivity – evolution of the error – of the estimated PSF parameters with respect to the variations of the object PSD power $p - \bar{p}$. The r_0 (resp. σ^2) estimation suffers from a drift of approximately 1 cm (resp. -0.2 rad^2) per 0.1 variation on the object PSD power p . A variation of 0.05 on the ρ_0 parameter induces approximately an error of 0.6 cm on r_0 , but has nearly no effect on σ^2 . Indeed, σ^2 governs mainly the slope of the OTF (see Section 2.2

and Fig. 1), whereas p governs the power (slope in log–log plot) of the decrease of the object’s spectrum. The parameter p is thus an indicator of the sharpness of the object. The r_0 and σ^2 parameters are adjusted by the marginal criterion to match the shape of the image’s spectrum: an increase (resp. decrease) in the object power results in a decrease (resp. increase) of the estimated OTF slope. Regarding the r_0 parameter, it is responsible for a general downward offset of the OTF with respect to the null frequency. The value of the object PSD at high frequency evolves as $S_{\text{obj}}(f) \simeq k(\rho_0/f)^p$. For a given k , both ρ_0 and p affect the values of high frequencies, and thus the estimation of the r_0 parameter.

At $p = \bar{p}$ and $\rho_0 = \bar{\rho}_0$, the error on the estimated PSF parameters is nearly null. The residuals are the ones discussed in Section 4.2, supposed to originate mainly from the non-Gaussian statistics of the object. The parameters we have chosen for the supervised marginal approach are close to the optimal ones. Nevertheless the residual error on r_0 and σ^2 at $p = \bar{p}$ and $\rho_0 = \bar{\rho}_0$ is negligible for our applications, and leads to a satisfactory estimation of the PSF shape and to a correct deconvolution.

A non-optimal choice of hyper-parameters leads to a biased estimation of the PSF parameters. For our applications, shifts of ± 0.05 on both p and ρ_0 lead to reasonable errors on the PSF parameters of $\pm 0.1 \text{ rad}^2$ on σ^2 and approximately 0.5 cm on r_0 . Instead of providing these hyper-parameters in a supervised fashion, it would be useful for practical applications to estimate them simultaneously with the PSF parameters. This constitutes the fully unsupervised method presented in the following subsection.

4.5 Fully unsupervised marginal estimation

We can consider estimating the hyper-parameters (μ, ρ_0, p) along with the PSF parameters in the marginal estimator. This will be called the fully unsupervised marginal estimator and is studied in this subsection. It means a complete ignorance of the observed object, and it is only supposed to be described roughly by the object PSD model of equation (21). This model encompasses objects as dissimilar as star fields, asteroids, planets and artificial satellites. For our simulation on the asteroid Vesta, we run the marginal criterion of equation (20) to find the PSF parameters and the object PSD parameters, which corresponds to a fully unsupervised marginal estimation. The algorithm converges towards

$$\begin{aligned} r_0 &= 15.4 \text{ cm}, & \sigma^2 &= 0.71 \text{ rad}^2, & \mu &= 2.9 \times 10^{-9}, \\ \rho_0 &= 1.49 \text{ pix}^{-1}, & p &= 3.27. \end{aligned} \quad (24)$$

The corresponding map of the criterion is given Fig. 10. The r_0 parameter is overestimated while the σ^2 parameter is underestimated, and the estimated PSF has higher Strehl ratio than the true one (Fig. 13) and a sharper peak (Fig. 15). It results in $p = 3.27$ instead of $\bar{p} = 2.91$ (i.e. an object’s PSD with less energy than the true one at high spatial frequencies).

The object deconvolved with the fully unsupervised marginal PSF is shown in Fig. 11 and is still similar to the object restored in the supervised marginal case: details of albedo and craterization are visible. Edges are sharp, and there only remains a small residual halo. Because r_0 is slightly overestimated, the PSF halo is slightly underestimated. The difference between the true halo and the estimated halo remains in the deconvolved object. The error on the deconvolution with the fully unsupervised marginal PSF is $\varepsilon_{\text{obj,margu}} = 8.1 \times 10^{-4}$.

Even though the fully unsupervised marginal estimator is more stable than the joint estimator, the resulting object is still over-smoothed,

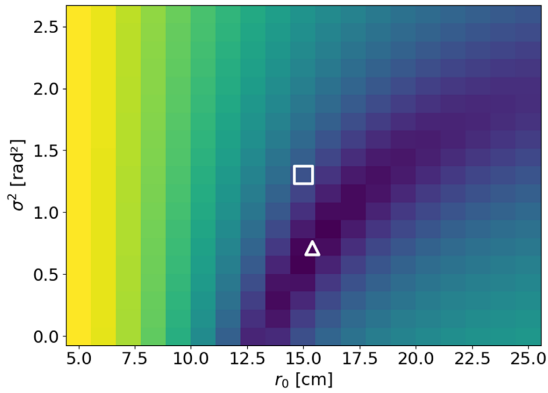


Figure 10. Fully unsupervised marginal criterion J_{marg} (log intensity scale) as a function of the r_0 and σ^2 PSF parameters. The parameters (μ, ρ_0, p) are the ones estimated from marginal minimization. The central square indicates the true PSF parameters, and the triangle indicates the minimum of the criterion.

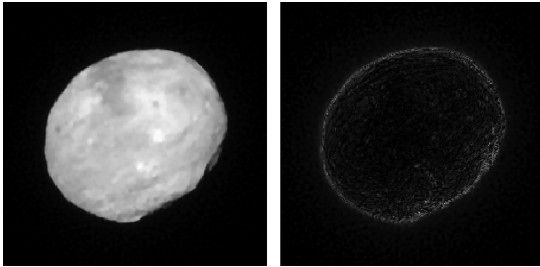


Figure 11. Left: deconvolution of the image using the PSF estimated by the fully unsupervised marginal estimation. Right: two times the absolute difference with the true object.

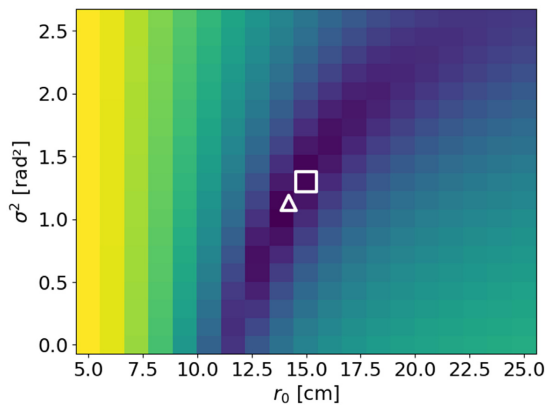


Figure 12. Mostly unsupervised marginal criterion J_{marg} (log intensity scale) as a function of the r_0 and σ^2 PSF parameters. The parameters (μ, ρ_0) are the ones estimated from marginal minimization, while object PSD power is fixed to the value $p = 3$. The central square indicates the true PSF parameters, and the triangle indicates the minimum of the criterion.

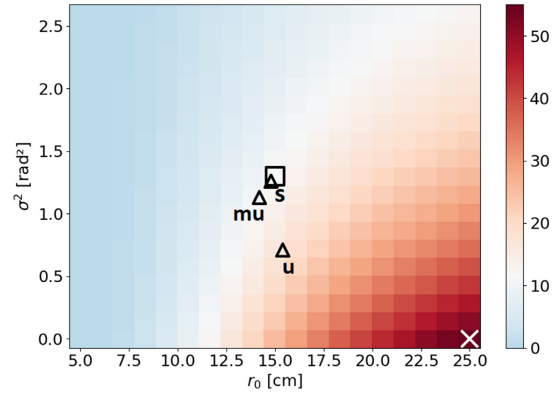


Figure 13. Strehl ratio corresponding to the different values of r_0 and σ^2 parameters. The true Strehl ratio (central square) is $S_R = 11.5$ per cent. Cross: minimum of J_{MAP} ($S_R = 54.3$ per cent). Triangles: minima of J_{marg} for the three different supervision levels (s, supervised $S_R = 11.4$ per cent; mu, mostly unsupervised $S_R = 11.0$ per cent; u, fully unsupervised $S_R = 17.1$ per cent).

due to the difficulty in disentangling the spatial frequencies coming from the object or the attenuation of the OTF.

4.6 Mostly unsupervised marginal estimation

We have found empirically that the fully unsupervised marginal estimation leads to an over-smoothing of the object by an overestimation of p . An operational method that should improve the result with respect to the fully unsupervised estimator is to supervise only the p parameter, and to estimate simultaneously μ and ρ_0 along with the PSF parameters. Setting p is to give to the algorithm the knowledge on the category of object that has been observed. We run a mostly unsupervised marginal estimation where p is fixed to the empirical guess value for asteroids $p = 3.0$ and (μ, ρ_0) are estimated along with the PSF parameters \mathcal{P} . The marginal algorithm solution is

$$\begin{aligned} r_0 &= 14.2 \text{ cm}, & \sigma^2 &= 1.13 \text{ rad}^2, \\ \mu &= 2.9 \times 10^{-9}, & \rho_0 &= 1.39 \text{ pix}^{-1}. \end{aligned} \quad (25)$$

The parameters r_0 and σ^2 are estimated with errors of 0.8 cm and 0.17 rad^2 , respectively (see Figure 12. for the corresponding criterion map). These errors lead to a small underestimation of the Strehl ratio (Fig. 13). The shape of the estimated PSF (Fig. 15) is of good quality, with a slightly higher halo than the true PSF, and consequently a slightly lower central peak. The OTF is also correctly estimated, with a small shift downwards at low frequencies.

The overall shape of the PSF is suitable for deconvolution. Indeed, Fig. 14 shows the deconvolution using the PSF estimated with mostly unsupervised marginal approach. Similarly to the previous marginal cases, sharp edges, albedo and craterization details are restored. The deconvolution error is mainly located at the edges. The energy is more concentrated inside the object with respect to the border. The deconvolution error is $\varepsilon_{\text{obj, marg mu}} = 7.0 \times 10^{-4}$. Both the PSF and the restored object are better estimated than in the unsupervised case.

4.7 Results on SPHERE/Zimpol data

The asteroid Vesta was observed as part of a European Southern Observatory (ESO) Large Programme (ID 199.C-0074, PI P. Vernazza)

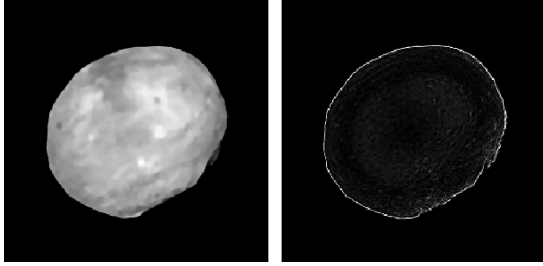
4218 *R. J.-L. Fétick et al.*

Figure 14. Left: deconvolution of the image using the PSF estimated by the mostly unsupervised marginal estimation. Right: two times the absolute difference with the true object.

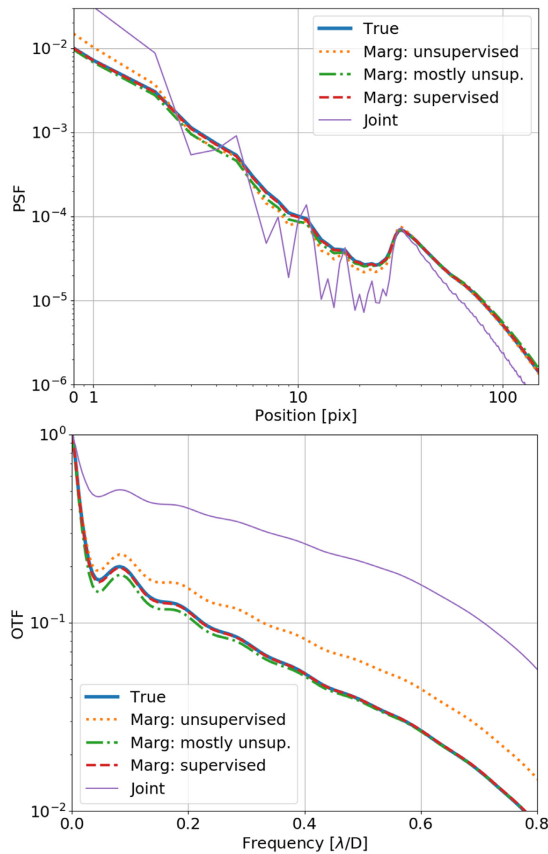


Figure 15. Top: true PSF (thick solid blue line), the marginal estimates for different supervision levels (dotted orange, dashed red and dash-dotted green lines) and the joint estimate (thin violet solid line). Bottom: corresponding OTFs. The frequency is normalised at 1 at the telescope cut-off.

targeting several Main Belt asteroids to study their albedo, shape, excavation volumes and surface craterization (Vernazza et al. 2020). This Large Programme provides unprecedented data to astronomers to study the evolution of Solar system objects. However, the asteroid Vesta was previously visited by the NASA/Dawn interplanetary mission and has been resolved at high resolution (Jaumann et al.

Table 2. Parameters of the SPHERE/Zimpol instrument and fixed parameters of the PSF model.

| Parameter | Symbol | Value | Unit |
|-----------------------|-----------|--------------------|-------------|
| Primary diameter | D | 8 | m |
| Secondary diameter | D' | 1.12 | m |
| N_R filter wavelength | λ | 645.9 | nm |
| Sampling | s | 4.76 | N/A |
| AO cut-off frequency | f_{AO} | 2.5 | m^{-1} |
| Moffat elongation | α | 0.05 | m^{-1} |
| Moffat power law | β | 1.6 | N/A |
| AO area constant | C | 4×10^{-3} | $rad^2 m^2$ |

2012; Russell et al. 2012) with the on-board framing camera (Sierks et al. 2011) down to ~ 20 m per pixel. Vesta is consequently the perfect benchmark to test high-resolution post-processing techniques using ground-based telescope images. The ESO Large Programme is based on observations with the Zimpol instrument (Schmid et al. 2018) and the N_R filter of central wavelength $\lambda = 645.9$ nm. This instrument is mounted on the SPHERE instrument (Beuzit et al. 2019) of the VLT observatory. It is equipped with the SAXO (Fusco et al. 2014) efficient AO system. In Fétick et al. (2019a), we previously deconvolved the SPHERE/Zimpol images of the asteroid Vesta using a simple Moffat (1969) PSF model in the focal plane

$$h(\mathbf{u}) = \frac{\beta - 1}{\pi\alpha^2} (1 + u^2/\alpha^2)^{-\beta}. \quad (26)$$

The PSF parameters (α , β) were determined manually (supervised) for deconvolution and allowed astronomers to identify the main albedo features and craters from the images. We focus on the SPHERE observation of the night of 2018 June 8 (Fig. 17, left). At this epoch, the asteroid orientation and illumination correspond to the OASIS simulated object of Fig. 2 (top left). In Fétick et al. (2019a), the SPHERE image has been deconvolved with a Moffat PSF model of parameters $\alpha = 4$ pixels and $\beta = 1.5$. It provided accurate details with a resolution of ~ 20 –30 km. The major issue comes from the difficulty for a Moffat model to describe the uncorrected halo of the AO PSF. The deconvolved object consequently suffers from a residual halo.

Since then, the two major advancements in the post-processing technique are the more accurate PSF model of Section 2 and the marginalization to replace the manual – supervised – estimation of the PSF parameters. The observational fixed parameters given to our PSF model are summarized in Table 2. To allow for high dynamics on the (r_0, σ^2) parameters, the marginal algorithm ranges are extended to $r_0 \in [5, 35]$ cm and $\sigma^2 \in [0, 4]$ rad^2 . The algorithm is run in mostly unsupervised mode, with object PSD power fixed to the value $p = 3.0$. The solution at minimum is

$$r_0 = 32.1 \text{ cm}, \quad \sigma^2 = 2.78 \text{ rad}^2, \\ \mu = 1.75 \times 10^{-11}, \quad \rho_0 = 0.98 \text{ pix}^{-1}. \quad (27)$$

The σ^2 value is consistent, but the r_0 estimation seems high. Indeed, the SPHERE AO system has a wide corrected area, and the contribution of the turbulent part is of lower importance than the extended AO-corrected core. The r_0 estimation could be improved using atmospheric telemetry as prior information for the marginal criterion. The corresponding PSF is shown in Fig. 16. The global shape is similar to that of the previous Moffat model. However, the AO adapted PSF model shows a stronger halo, which cannot be taken into account by the Moffat model. The Strehl ratio ($S_R = 20$ per cent) is thus lower than that of the Moffat model ($S_R = 29$ per cent). The

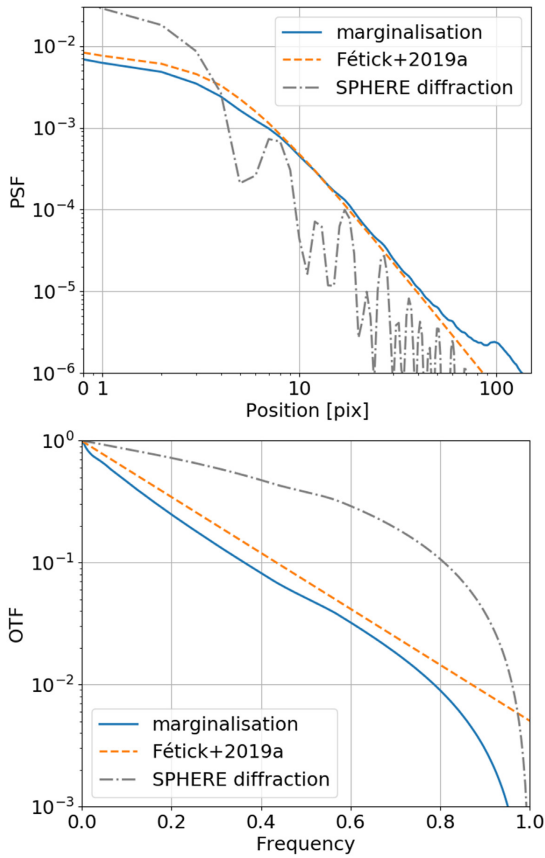


Figure 16. The top panel shows the PSF estimated for the SPHERE observation of Vesta on 2018 June 8: solid line, using the PSF model of Section 2 and mostly unsupervised marginalisation; dashed line, Moffat model from Fétick et al. (2019a); dash-dotted line, SPHERE diffraction limit. Bottom figure: corresponding OTFs.

slopes of the OTFs are similar, but the AO-corrected model is globally shifted downwards starting from the low frequencies, due to the halo, as the Moffat model is not able to describe it correctly. Moreover, the Moffat model does not take into account the telescope cut-off. The differences come from the limit of the Moffat model to describe an AO PSF with respect to the AO dedicated model. The marginal method adds consistency and robustness as it reduces the level of supervision in the PSF estimation. The deconvolution performed with the marginally estimated PSF is shown in Fig. 17 (right). Details are restored, making visible the main craters and albedo features. A slice of the asteroid is shown in Fig. 18. The deconvolution with a Moffat model is able to retrieve the main details of the object, but an important fraction of the energy is contained in the residual object halo. The marginal estimation with the AO dedicated PSF restores similar details as the Moffat PSF, but reduces the halo, and the energy is more condensed inside the object and slightly sharper edges appear. For deconvolution with the Moffat PSF, 45 per cent of the energy remained outside the bounds of the OASIS – true – object,

Blind deconvolution in astronomy with AO 4219

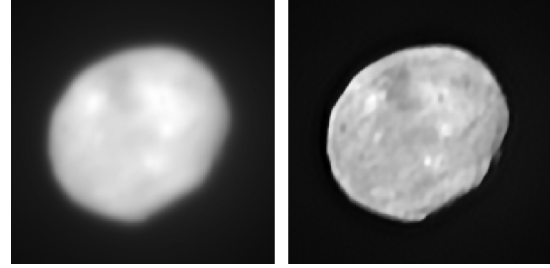


Figure 17. Left: VLT/SPHERE/Zimpol image of the asteroid Vesta on 2018 June 8. Right: classical (non-myopic) deconvolution using the PSF estimated by marginalization.

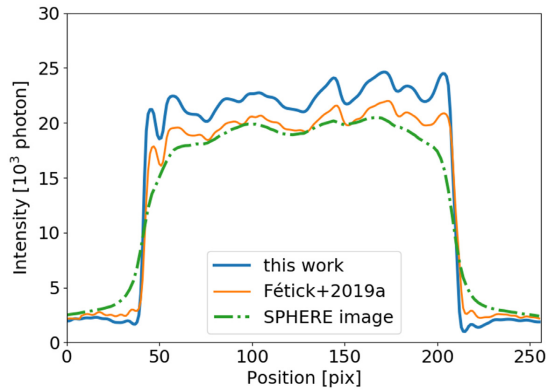


Figure 18. Slice of the asteroid Vesta for the SPHERE image (dash-dotted line), the deconvolution with a Moffat PSF from Fétick et al. (2019a) (thin solid line) and the deconvolution with the marginally estimated PSF (thick solid line).

and with the marginally estimated PSF the energy outside reduces to 38 per cent.

5 CONCLUSION AND PERSPECTIVES

Post-processing of astronomical images requires knowledge of the PSF. For observational cases with no bright star in the field of view as a PSF, a parametric model with few parameters is useful to perform post-processing such as deconvolution. However, we have shown that, even with the use of the recently developed dedicated AO PSF model, the joint estimator remains degenerated and always converges towards the sharpest PSF and an over-smoothed deconvolved object.

In this paper, we have combined our parametric PSF model for AO-corrected images with the marginal PSF identification approach of Blanc et al. (2003) and Blanco & Mugnier (2011). In supervised mode, it provides a very accurate estimation of the PSF and high-quality deconvolution, similar to the ultimate deconvolution quality performed with the true PSF. The fully unsupervised mode exhibits a mild degeneracy with a trend to under-deconvolve. However, this marginal unsupervised estimation is still far more effective than the joint estimation. For practical applications, the marginal supervised mode can be relaxed to a mostly unsupervised mode. The remaining supervision targets only the power p of the object's PSD. This means

4220 *R. J.-L. Fétick et al.*

that the user provides the marginal algorithm with the information of which category of object has been observed: star field, artificial satellite or asteroid, for example. We have also shown a good deconvolution quality for true VLT/SPHERE/Zimpol observations with AO.

The overall method we offer actually corresponds to a blind deconvolution, but separated in two consecutive steps: first the PSF estimation by the marginal method, and then the classical deconvolution with the marginally estimated PSF. It thus allows us to perform blind deconvolution for different operational cases. Regarding the ESO Large Programme on asteroids cited in this paper, approximately one-third of the time was dedicated to PSF observations and often leading to poor deconvolution results. As a result of the marginal method, we are now able to perform better deconvolutions and to save an important fraction of the observing time. Even though we focused in this paper on deconvolution, the PSF estimated by the marginal approach can also be used in other post-processing techniques.

The marginal criterion used in this work assumes a Gaussian prior probability for the object, which allows negative values of the object. A perspective of this work is to impose the object's positivity to further improve the PSF identification.

Additionally, even though we focused on long-exposure imaging using a dedicated long-exposure AO-corrected PSF model, this method could also be applied to short-exposure imaging. To this end, the PSF model should be changed, for instance by parametrizing the PSF through the pupil phase, itself being described by a limited number of Zernike coefficients. Blanco & Mugnier (2011) have already shown the possibility to estimate the defocus of an image with high precision, so we are confident that this extension to short-exposure imaging would be successful.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work was supported by the French Direction Générale de l'Armement (DGA) and Aix-Marseille Université (AMU). This work was supported by the Action Spécifique Haute Résolution Angulaire (ASHRA) of CNRS/INSU co-funded by CNES. This project has received funding from the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme under grant agreement No. 730890. This material reflects only the authors' views and the Commission is not liable for any use that may be made of the information contained herein. This study has been partly funded by the French Aerospace Lab (ONERA) in the frame of the VASCO Research Project. This work has been partially supported by the ANR-APPLY programme (ANR-19-CE31-0011). The authors are grateful to Pierre Vernazza for providing data related to his ESO Large Programme ID 199.C-0074.

DATA AVAILABILITY

The data underlying this article will be shared on reasonable request to the corresponding author.

The PSF model dedicated to AO observations is available at <https://gitlab.lam.fr/lam-grd-public/maoppy>

REFERENCES

- Ayers G., Dainty J. C., 1988, *Optics Lett.*, 13, 547
 Berger J. O., B R. L., 1999, *Statistical Science*, 14, 1
 Beuzit J.-L. et al., 2019, *A&A*, 631, A155
 Biraud Y., 1969, *A&A*, 1, 124
 Blanc A., Mugnier L. M., Idier J., 2003, *J. Opt. Soc. Amer. A*, 20, 1035
 Blanco L., Mugnier L. M., 2011, *Optics Express*, 19, 23227
 Brette S., Idier J., 1996, in Proc. 3rd IEEE International Conference on Image Processing. IEEE, Piscataway, NJ, p. 65
 Conan J., Madec P., Rousset G., 1994, in Merkle F., ed., *Active and Adaptive Optics*, European Southern Observatory Conference and Workshop Proceedings. ESO, Garching bei Munich, p. 181
 Conan J.-M., 1994, PhD thesis, Université Paris XI Orsay
 Conan J.-M., Mugnier L. M., Fusco T., Michau V., Rousset G., 1998, *Applied Optics*, 37, 4614
 Demoment G., 1989, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 37, 2024
 Drummond J. D., 1998, *Proc. SPIE*, 3353, 1030
 Fétick R. et al., 2019a, *A&A*, 623, A6
 Fétick R. et al., 2019b, *A&A*, 628, A99
 Fried D. L., 1966, *J. Opt. Soc. Amer.*, 56, 1372
 Fusco T. et al., 2014, *Proc. SPIE*, 9148, 91481U
 Fusco T., Conan J.-M., 2004, *J. Opt. Soc. Amer. A*, 21, 1277
 Goodman J. W., 2005, *Introduction to Fourier Optics*. Roberts and Company Publishers, Greenwood Village, CO
 Idier J., ed., 2008, *Bayesian Approach to Inverse Problems*, Digital Signal and Image Processing Series. Wiley, New York
 Jaumann R. et al., 2012, *Science*, 336, 687
 Jorda L., Spjuth S., Keller H., Lamy P., Llebarria A., 2010, *Proc. SPIE*, 7533, 753311
 Kolmogorov A. N., 1941, *Cr Acad. Sci. URSS*, 30, 301
 Lehmann E., 1983, *Theory of Point Estimation*. John Wiley and Sons, New York
 Levin A., Weiss Y., Durand F., Freeman W. T., 2009, in 2009 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. IEEE, Piscataway, NJ, p. 1964
 Markham J., Conchello J.-A., 1999, *J. Opt. Soc. Amer. A*, 16, 2377
 Moffat A., 1969, *A&A*, 3, 455
 Mugnier L. M., Robert C., Conan J.-M., Michau V., Salem S., 2001, *J. Opt. Soc. Amer. A*, 18, 862
 Mugnier L. M., Fusco T., Conan J.-M., 2004, *J. Opt. Soc. Amer. A*, 21, 1841
 N'Diaye M., Dohlen K., Fusco T., Paul B., 2013, *A&A*, 555, A94
 Rey W., 1983, *Introduction to Robust and Quasi-Robust Statistical Methods*. Springer, Berlin
 Rigaut F. J., Véran J.-P., Lai O., 1998, *Proc. SPIE*, 3353, 1038
 Roddier F., 1981, *Progress in Optics*, 19, 281
 Roddier F., 1999, *Adaptive Optics in Astronomy*. Cambridge Univ. Press, Cambridge
 Rousset G., Fontanella J., Kern P., Gigant P., Rigaut F., 1990, *A&A*, 230, L29
 Russell C. et al., 2012, *Science*, 336, 684
 Schmid H. M. et al., 2018, *A&A*, 619, A9
 Schroder S. E. et al., 2013, *Planetary and Space Science*, 85, 198
 Sierks H. et al., 2011, *Space Sci. Rev.*, 163, 263
 Thiébaud E., 2002, *Proc. SPIE*, 4847, 174
 Thiébaud E., Conan J.-M., 1995, *J. Opt. Soc. Amer. A*, 12, 485
 Titterton D. M., 1985, *A&A*, 144, 381
 Vernazza P. et al., 2020, *Nature Astron.*, 4, 136

This paper has been typeset from a $\text{\TeX}/\text{\LaTeX}$ file prepared by the author.

Conclusion & Perspectives

Résumé du travail effectué

Les travaux de cette thèse ont commencé sur des problèmes récurrents de la déconvolution dont les astronomes faisaient régulièrement l'expérience. Pourquoi des artefacts de déconvolution apparaissent fréquemment ? Quelle est l'origine de ces artefacts ? Quelle méthode permettrait de s'en affranchir ?

Nous avons identifié que l'estimation de la PSF corrigée par OA était le facteur limitant de la déconvolution à l'origine des artefacts observés. C'était là le verrou, le *bottleneck*, de la déconvolution. La première partie de cette thèse est donc consacrée aux notions de base de l'imagerie, à la compréhension de la formation de l'image et notamment de la PSF en optique adaptative. Cette optique adaptative fonctionne en corrigeant la phase de l'onde électromagnétique incidente. A cause de la turbulence cette phase est un processus aléatoire, impossible à pré-déterminer, toutefois sa statistique est riche en information. Ainsi, à la partie II de cette thèse, nous utilisons cette statistique pour élaborer une compréhension plus fine de la PSF corrigée par OA. Nous avons démontré le lien très étroit entre DSP de la phase électromagnétique et PSF : la PSF n'est rien d'autre qu'une série entière d'ordres convolutifs de cette phase. Ce lien en ordres convolutifs permet de s'affranchir des multiples transformations de Fourier usuellement présentes dans les équations de [Roddier \[1981\]](#), la relation entre DSP et PSF est ainsi directe. Cette écriture en ordre convolutifs généralise des travaux antérieurs d'autres auteurs qui avaient écrit un développement limité à l'ordre un (soit une troncature de la série entière).

Les processus de post-traitement d'image visent à extraire l'information scientifiquement pertinente de ces images. Une connaissance fine de la PSF est nécessaire : elle doit d'abord être finement modélisée, puis précisément estimée. Le modèle PSFAO₁₉ a été créé à partir de la compréhension de la formation de la PSF corrigée par OA. Contrairement aux autres modèles usuels, lesquels se basent sur une modélisation en plan focal, le modèle PSFAO₁₉ se base sur une modélisation de la DSP de la phase turbulente. Il est ainsi possible d'introduire des informations de la

statistique de la phase directement dans le modèle, dont le paramètre de Fried r_0 et la variance de phase dans la zone de correction σ_{OA}^2 . Le modèle PSFAO₁₉ est donc un modèle parcimonieux et paramétré par la physique. Les multiples tests effectués sur les instruments MUSE, SPHERE, MéO, Keck (etc.) ont démontré la robustesse et la précision du modèle. Il est notamment capable de décrire parfaitement le pic cohérent et le halo turbulent de la PSF corrigée par OA. Son paramètre r_0 est corrélé aux mesures de télémétrie de SPARTA et du MASS/DIMM. Ainsi l'ajustement de ce modèle sur l'image d'une étoile donne accès au r_0 , ce qui constitue un moyen de télémétrie en plan focal. Réciproquement si SPARTA ou MASS/DIMM donnent une mesure de r_0 , il est possible de contraindre ce paramètre du modèle, donnant une information sur la forme de la PSF.

Enfin la troisième partie répond aux questions des astronomes, bouclant la boucle. Nous avons tout d'abord montré que les PSF paramétriques étaient parfaitement adaptées à la déconvolution d'images astronomiques, images d'astéroïdes en l'occurrence. Les PSF paramétriques démontrent tout d'abord qu'elles sont capables de reproduire les artefacts de déconvolution observés lors de l'utilisation d'une PSF estimée sur étoile. Etre capable de reproduire une erreur ne semble pas pertinent à première vue... Et pourtant si, il s'agit de la première étape dans la compréhension du problème. Nous avons observé que ces PSF paramétriques produisaient le même artefact de déconvolution si leur FTO était trop basse, c'est-à-dire que les images sont sur-déconvoluées. En modifiant les paramètres du modèle il est possible de rehausser la FTO et de faire disparaître les artefacts. Les PSF paramétriques permettent non seulement de comprendre l'origine du problème mais de plus de le corriger. Cette utilisation de PSF paramétriques a eu une conséquence opérationnelle directe : les astronomes du *Large Program* d'observation d'astéroïde ont abandonné l'observation d'étoiles pour estimer la PSF. En effet ces PSF sur étoiles ne leur apportent pas satisfaction pour la déconvolution, ne sont pas représentative de la PSF du système lors de l'observation de l'astéroïde, et consomment 20% à 30% de leur précieux temps d'observation.

L'ultime étape a consisté à utiliser le modèle PSFAO₁₉ dans un algorithme de déconvolution myope. Nous avons tout d'abord démontré que l'estimation Maximum A Posteriori (MAP) jointe, qui porte à la fois sur l'objet et la PSF, est dégénérée car elle tend toujours vers la PSF la plus piquée possible. Ce résultat est en accord avec d'autres travaux dans la littérature. Dans notre cas la régularisation $L_1 - L_2$ à hyperparamètres fixés, la contrainte de positivité de l'objet et la parcimonie du modèle de PSF ne suffisent pas à lever la dégénérescence. Nous nous sommes alors orientés vers la méthode marginale, qui consiste à sortir (intégrer) l'objet hors du problème afin de n'estimer que les paramètres du modèle PSFAO₁₉. Nous avons étudiés plusieurs

niveaux de supervision de la méthode marginale portant sur la DSP de l'objet. Une supervision totale de la DSP permet de retrouver parfaitement les paramètres de la PSF, ce qui n'est pas le cas pour l'estimation jointe. De plus il est possible de relaxer le niveau de supervision en ne fixant que la loi de puissance p de la DSP, c'est-à-dire en fixant la classe d'objet observé. Cette méthode est une méthode opérationnelle, utilisable en pratique et validée sur des données SPHERE. La PSF ainsi estimée est ensuite utilisée dans un algorithme de déconvolution « classique » (à PSF fixe), ce qui donne de bons résultats et augmente considérablement le nombre de détails observables sur l'objet.

Ces travaux ont donc fournis aux astronomes des méthodes opérationnelles qui leur autorisent d'effectuer de la déconvolution même en absence de PSF observée sur étoile. Les contours francs et les détails de surface sont utiles à des estimations de volume, de cratérisation, de topologie et d'albédo.

Perspectives

Le modèle PSFAO₁₉ possède un large panel d'applications en astronomie. Les travaux récents de [Beltramo-Martin et al. \[2020\]](#) montrent qu'il est possible d'estimer à la fois le paramètres du modèle et des erreurs de cophasage des segments du Keck. Le modèle PSFAO₁₉ peut alors être utilisé comme un outil de diagnostic de l'instrument simple à mettre en oeuvre.

Un effort notable est l'actuelle intégration du modèle PSFAO₁₉ dans l'outil PAMPELMUSE [[Kamann et al., 2013](#)] afin de réaliser de l'extraction de sources en champ dense pour des spectro-imageurs. L'utilisation systématique de spectro-imageurs semble se confirmer : l'actuel MUSE, et les futurs Blue-MUSE ou HARMONI. La dimension spectrale apporte une information très forte sur l'observation. Il est alors envisageable d'effectuer une déconvolution multi-spectrale du cube en entier. Les variations spectrales de la PSF sont très différentes des variations spectrales de l'objet. Les corrélations de la PSF entre tranches successives faciliteront très certainement son identification. Les méthodes de déconvolution aveugle, y compris la méthode par marginalisation (puis déconvolution classique), gagneront en robustesse. En fait toute troisième dimension, que ce soit spectrale ou autre, est potentiellement un atout pour la déconvolution. Dans le même ordre d'idée, il est envisageable d'effectuer une déconvolution multi-temporelle au lieu d'une déconvolution multi-spectrale. Cette fois-ci ce sont les variations temporelles de la PSF et/ou de l'objet qui aident à l'identification. Tout l'enjeu est de trouver une information qui brise la symétrie d'imagerie entre PSF et objet $h \star o = o \star h$.

Enfin la sauvegarde systématique de certains paramètres de télémétrie comme le r_0 or σ_{OA}^2 serait un avantage indéniable pour le post-traitement de l'image. Cette télémétrie fournit une information *a priori* forte pour l'identification de la PSF, et *in fine* aide à l'extraction des paramètres scientifiques d'intérêt. L'utilisation de quelques paramètres de télémétrie intégrée évite d'avoir à enregistrer la totalité des données. Ces quelques paramètres intégrés seront reliés aux paramètres de PSF par des considérations physiques (force de la turbulence, rapport de Strehl) ou alors en utilisant des méthodes d'intelligence artificielle (corrélations). Le projet d'ANR (agence nationale de la recherche) nommé APPLY (Benoît Neichel, LAM) est justement dédié à l'estimation de PSF à partir de données de télémétrie. Il s'agit du problème ardu de reconstruction de PSF qui n'a pas trouvé de solution entièrement satisfaisante après plusieurs décennies de recherche. Une estimation simple, robuste et précise de la PSF délivrée par un système d'OA serait un outil précieux pour les observations sur les instruments de l'actuel VLT ou du futur ELT.

Annexe A

Gradients d'une fonction de Moffat

A.1 Définitions

Soit le vecteur R regroupant les scalaires de rotation

$$R \triangleq \begin{pmatrix} R_{xx} \\ R_{xy} \\ R_{yy} \end{pmatrix} \triangleq \frac{1}{\alpha_x^2} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta \\ -\sin 2\theta \\ \sin^2 \theta \end{pmatrix} + \frac{1}{\alpha_y^2} \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \\ \sin 2\theta \\ \cos^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

On définit alors la coordonnée quadratique réduite u qui permet de simplifier l'écriture de la Moffat dans un système de coordonnées tourné d'un angle θ selon

$$u(x, y) \triangleq R_{xx} x^2 + R_{xy} x y + R_{yy} y^2 \quad (\text{A.2})$$

On définit le facteur de normalisation de l'énergie sur le plan

$$\mathcal{P} \triangleq \frac{\beta - 1}{\pi \alpha_x \alpha_y} \quad (\text{A.3})$$

La fonction de Moffat est normalisée en énergie non pas sur le plan en entier, mais sur une ellipse de demi-grand axe noté f . Alors le facteur de normalisation de l'énergie sur cette ellipse est

$$\mathcal{E} \triangleq \left[1 - \left(1 + \frac{f^2}{\alpha_x \alpha_y} \right)^{1-\beta} \right]^{-1} \quad (\text{A.4})$$

La fonction de Moffat, à énergie unitaire jusqu'au demi-grand axe f , centrée en $(0, 0)$, s'écrit alors

$$m(x, y) \triangleq \frac{\mathcal{P} \cdot \mathcal{E}}{(1 + u(x, y))^\beta} \quad (\text{A.5})$$

On pose enfin

$$V(x, y) \triangleq \frac{1}{(1 + u(x, y))^\beta} \quad (\text{A.6})$$

Alors nous pouvons écrire simplement

$$m(x, y) = \mathcal{P} \cdot \mathcal{E} \cdot V(x, y) \quad (\text{A.7})$$

Ce qui donne la dérivée de la Moffat par rapport à un paramètre p quelconque

$$\frac{\partial m}{\partial p} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \mathcal{E} V + \mathcal{P} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p} V + \mathcal{P} \mathcal{E} \frac{\partial V}{\partial p} \quad (\text{A.8})$$

A.2 Dérivées intermédiaires

Dérivées de V selon u et β

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{-\beta}{(1+u)^{\beta+1}} = \frac{-\beta}{1+u} V \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial V}{\partial \beta} = \frac{-\log(1+u)}{(1+u)^\beta} = -V \cdot \log(1+u) \quad (\text{A.10})$$

Dérivées du facteur énergétique \mathcal{P}

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \alpha_x} = \frac{1-\beta}{\pi \alpha_x^2 \alpha_y} = \frac{-1}{\alpha_x} \mathcal{P} \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \alpha_y} = \frac{1-\beta}{\pi \alpha_x \alpha_y^2} = \frac{-1}{\alpha_y} \mathcal{P} \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \beta} = \frac{1}{\pi \alpha_x \alpha_y} = \frac{\mathcal{P}}{\beta-1} \quad (\text{A.13})$$

Dérivées du facteur de normalisation \mathcal{E}

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha_x} &= \mathcal{E}^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_x} \left(\left(1 + \frac{f^2}{\alpha_x \alpha_y} \right)^{1-\beta} \right) \\ &= \mathcal{E}^2 (\beta-1) \left(1 + \frac{f^2}{\alpha_x \alpha_y} \right)^{-\beta} \frac{f^2}{\alpha_x^2 \alpha_y} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \beta} &= \mathcal{E}^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left(e^{(1-\beta) \ln(1+f^2/(\alpha_x \alpha_y))} \right) \\ &= -\mathcal{E}^2 \cdot \left(1 + \frac{f^2}{\alpha_x \alpha_y} \right)^{1-\beta} \ln(1+f^2/(\alpha_x \alpha_y)) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Dérivées de rotation R

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_x} = \frac{-2}{\alpha_x^3} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta \\ -\sin 2\theta \\ \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_y} = \frac{-2}{\alpha_y^3} \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \\ \sin 2\theta \\ \cos^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = \frac{-1}{\alpha_x^2} \begin{pmatrix} \sin 2\theta \\ 2 \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix} + \frac{1}{\alpha_y^2} \begin{pmatrix} \sin 2\theta \\ 2 \cos 2\theta \\ -\sin 2\theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

A.3 Dérivées de la Moffat

Dérivées de la Moffat par rapport à α_x et α_y

$$\frac{\partial m}{\partial \alpha_x} = -\frac{m}{\alpha_x} + \mathcal{P} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha_x} V - \frac{\beta m}{1+u} \frac{\partial u}{\partial \alpha_x} \quad (\text{A.19})$$

où il suffit de remplacer les dérivées partielles de \mathcal{E} et u par leur expression analytique. La méthode est identique pour α_y .

Dérivée de la Moffat par rapport à β

$$\frac{\partial m}{\partial \beta} = \frac{m}{\beta-1} + \mathcal{P} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \beta} V - m \ln(1+u) \quad (\text{A.20})$$

où il faut remplacer la dérivée partielle de \mathcal{E} par son expression analytique.

Dérivée de la Moffat par rapport à θ

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial \theta} &= \mathcal{P} \mathcal{E} \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ &= \frac{-\beta m}{1+u} \left[\frac{\partial R_{xx}}{\partial \theta} x^2 + \frac{\partial R_{xy}}{\partial \theta} xy + \frac{\partial R_{yy}}{\partial \theta} y^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Annexe B

Gradients du modèle PSFAO₁₉

B.1 Dérivées de la DSP

Pour rappel, le modèle de DSP de la phase électromagnétique (Eq. 4.10) s'écrit

$$W_\phi(\vec{f}) \triangleq \begin{cases} A m(\vec{f}) + C & \text{si } \vec{f} \in Z_{OA} \\ 0.023 r_0^{-5/3} f^{-11/3} & \text{si } \vec{f} \in \overline{Z_{OA}} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

avec m une fonction de Moffat normalisée en énergie sur une ellipse. La dérivée du modèle de DSP par rapport à un des paramètre quelconque $p \in (\alpha_x, \alpha_y, \theta, \beta)$ de la Moffat est

$$\frac{\partial W_\phi(\vec{f})}{\partial p} = A \frac{\partial m(\vec{f})}{\partial p} \mathbb{1}_{Z_{OA}}(\vec{f}) \quad (\text{B.2})$$

avec $\mathbb{1}_{Z_{OA}}(\vec{f})$ la fonction qui vaut un si $\vec{f} \in Z_{OA}$ et vaut zéro sinon. La partie fastidieuse est le calcul des dérivées de la fonction de Moffat, qui est donné en annexe A. Il suffit alors au lecteur d'injecter ces dérivées de la fonction de Moffat dans le calcul de gradient de la DSP. Les dérivées de la DSP selon les autres paramètres sont plus simples

$$\frac{\partial W_\phi(\vec{f})}{\partial A} = m(\vec{f}) \mathbb{1}_{Z_{OA}}(\vec{f}) \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial W_\phi(\vec{f})}{\partial C} = \mathbb{1}_{Z_{OA}}(\vec{f}) \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial W_\phi(\vec{f})}{\partial r_0} = -0.038 r_0^{-8/3} f^{-11/3} \mathbb{1}_{\overline{Z_{OA}}}(\vec{f}) \quad (\text{B.5})$$

B.2 Dérivées de la PSF et FTO

Les gradients de la PSF et de la FTO se déduisent de l'équation 4.10 de transformation. Pour un paramètre p quelconque de la DSP, on obtient la dérivée de la FTO

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{h}(\vec{\rho}/\lambda)}{\partial p} &= \tilde{h}_T(\vec{\rho}/\lambda) \frac{\partial}{\partial p} e^{\mathcal{F}^{-1}\{W_\phi(\vec{f})\} - B_\phi(0)} \\ &= \tilde{h}(\vec{\rho}/\lambda) \frac{\partial}{\partial p} \left(\mathcal{F}^{-1} \left\{ W_\phi(\vec{f}) \right\} - B_\phi(0) \right)\end{aligned}\quad (\text{B.6})$$

où l'on retrouve en particulier la FTO \tilde{h} dans l'expression de la dérivée. Ainsi on gagne en temps de calcul des dérivées si on sauvegarde la FTO. Grâce au théorème de Wiener-Khintchine, on écrit que l'autocorrélation B_ϕ est la transformée de Fourier inverse de la DSP W_ϕ . Ainsi la dérivée devient

$$\frac{\partial \tilde{h}(\vec{\rho}/\lambda)}{\partial p} = \tilde{h}(\vec{\rho}/\lambda) \left(\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\partial W_\phi(\vec{f})}{\partial p} \right\} (\vec{\rho}/\lambda) - \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\partial W_\phi(\vec{f})}{\partial p} \right\} (0) \right) \quad (\text{B.7})$$

Une fois la FTO \tilde{h} calculée, le calcul de la dérivée de la FTO par rapport à un paramètre requiert une seule transformée de Fourier sur la dérivée de W_ϕ . La deuxième transformée de Fourier visible dans l'équation n'est que la valeur en zéro de la transformée de Fourier précédente, elle ne requiert pas de calcul supplémentaire. Une fois la FTO calculée, le calcul de l'ensemble des dérivées de la FTO demande alors $\text{Card}\{\Omega\}$ transformations de Fourier, où Ω est l'ensemble des paramètres du modèle (5 en symétrique, 7 en asymétrique). De plus on remarque que la dérivée de W_ϕ par rapport à C est constante et la dérivée par rapport à r_0 est factorisable par $r_0^{-8/3}$. Il est possible de calculer les dérivées par avance et ensuite de multiplier par les facteurs adéquats lors des appels suivants. On économise ainsi le calcul de deux dérivées, donc de deux transformations de Fourier lors d'appels récurrents (processus de minimisation par exemple).

Note : On remarque facilement dans cette équation B.7 que la dérivée est toujours nulle en $\vec{\rho}/\lambda = 0$, car la FTO vaut toujours 1 en ce point, quel que soit la valeur des paramètres.

Les dérivées de la PSF se déduisent directement des dérivées de la FTO par transformation de Fourier inverse.

Annexe C

Solution analytique du critère marginal par rapport à k

On définit S' la DSP normalisée de l'objet, telle que

$$S'(f) \triangleq \frac{S_{\text{obj}}(f)}{k} = \frac{1}{1 + (f/\rho_0)^p} \quad (\text{C.1})$$

Le critère marginal de l'Eq. 8.13 se ré-écrit

$$\begin{aligned} J_{\text{marg}}(\boldsymbol{\Omega}, \mu, \rho_0, p, k) = & N \ln k + \sum_f \ln S'(f) + \sum_f \ln \left(|\tilde{\mathbf{h}}_{\boldsymbol{\Omega}}(f)|^2 + \mu/S'(f) \right) \\ & + \frac{1}{k} \sum_f \frac{1}{S'(f)} \frac{|\tilde{\mathbf{i}}(f) - \tilde{\mathbf{h}}_{\boldsymbol{\Omega}}(f)\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_m(f)|^2}{|\tilde{\mathbf{h}}_{\boldsymbol{\Omega}}(f)|^2 + \mu/S'(f)} - \ln P(\boldsymbol{\Omega}) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

En annulant la dérivée par rapport à k on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{\text{marg}}}{\partial k} = 0 & \iff \frac{N}{k} - \frac{1}{k^2} \sum_f \frac{1}{S'(f)} \frac{|\tilde{\mathbf{i}}(f) - \tilde{\mathbf{h}}_{\boldsymbol{\Omega}}(f)\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_m(f)|^2}{|\tilde{\mathbf{h}}_{\boldsymbol{\Omega}}(f)|^2 + \mu/S'(f)} = 0 \\ & \iff k = \frac{1}{N} \sum_f \frac{1}{S'(f)} \frac{|\tilde{\mathbf{i}}(f) - \tilde{\mathbf{h}}_{\boldsymbol{\Omega}}(f)\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_m(f)|^2}{|\tilde{\mathbf{h}}_{\boldsymbol{\Omega}}(f)|^2 + \mu/S'(f)} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Cette solution analytique sur k peut être réinjectée dans le critère marginal. Celui-ci ne dépend alors plus explicitement de k , la solution analytique assurant de trouver le k optimal à chaque itération lorsque les autres paramètres $(\boldsymbol{\Omega}, \mu, \rho_0, p)$ sont donnés.

Liste des publications

En premier auteur

Fétick, Neichel, Mugnier, Montmerle-Bonnefois, Fusco (2018). Turbulent and adaptive optics corrected point-spread functions as convolutive orders of the phase power spectral density. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 481(4) :5210-5215

Fétick, Fusco, Neichel, Mugnier, Beltramo-Martin, Bonnefois, Petit, Milli, Vernet, Oberli (2019b). Physics-based model of the adaptive-optics-corrected point spread function-Applications to the SPHERE/ZIMPOL and MUSE instruments. *Astronomy & Astrophysics*, 628 :A99

Fétick, Jorda, Vernazza et al (2019a). Closing the gap between Earth-based and interplanetary mission observations : Vesta seen by VLT/SPHERE. *Astronomy & Astrophysics*, 623 :A6

Fétick, Mugnier, Fusco, Neichel (2020). Blind deconvolution in astronomy with adaptive optics : the parametric marginal approach. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 496(4) :4209 :4220

Dans la liste d'auteurs

Vernazza, Broz **et al** (2018). The impact crater at the origin of the Julia family detected with VLT/SPHERE? *Astronomy & Astrophysics*, 618 :A154

Viikinkoski, Vernazza **et al** (2018). (16) Psyche : A mesosiderite-like asteroid? *Astronomy & Astrophysics*, 619 :L3

Hanus, Marsset **et al** (2019). The shape of (7) Iris as evidence of an ancient large impact? *Astronomy & Astrophysics*, 624 :A121

Carry, Vachier **et al** (2019). Homogeneous internal structure of CM-like asteroid (41) Daphne. *Astronomy & Astrophysics*, 623 :A132

Vernazza, Jorda **et al** (2020). A basin-free spherical shape as an outcome of a giant impact on asteroid Hygiea. *Nature Astronomy*, 4(2) :136-141

Marsset, Broz **et al** (2020). The violent collisional history of aqueously evolved (2) Pallas. *Nature Astronomy*, 1-8

Ferrais, Vernazza **et al** (2020). Asteroid (16) Psyche's primordial shape : A possible Jacobi ellipsoid. *Astronomy & Astrophysics*, 638 :L15

Hanus, Vernazza **et al** (2020). (704) Interamnia : a transitional object between a dwarf planet and a typical irregular-shaped minor body. *Astronomy & Astrophysics*, 633 :A65

Beltramo-Martin, **Fétick**, Neichel, Fusco (2020). Joint estimation of atmospheric and instrumental defects using a parsimonious point spread function model. On-sky validation using state of the art worldwide adaptive-optics assisted instruments. *Astronomy & Astrophysics*

Conférences

Fétick, Fusco, Mugnier, Neichel (2018). Post-processing of high angular resolution images in the visible. *Société Française d'Astronomie et Astrophysique (SF2A)*, Bordeaux, France

Fétick, Fusco, Mugnier, Neichel (2018). Post-traitement d'images corrigées par OA. *Société Française d'Optique (SFO)*, Toulouse, France

Fétick, Fusco, Mugnier, Neichel (2019). Modelling the adaptive optics PSF. *AO4ASTRO*, Marseille, France

Fétick, Mugnier, Fusco, Neichel (2019). Problèmes inverses en imagerie astronomique : modélisation de la fonction d'étalement du point. *GRETSI*, Lille, France

Fétick, Jorda, Vernazza, Marsset (2019). Vesta seen by VLT/SPHERE. *EPSC-DPS*, Genève, Suisse

Fétick, Fusco, Mugnier, Neichel (accepté). PSF estimation and image deconvolution for adaptive optics. *SPIE*, San Diego, USA

Bibliographie

- Andersen, D. R., Stoesz, J., Morris, S., Lloyd-Hart, M., Crampton, D., Butterley, T., Ellerbroek, B., Jolissaint, L., Milton, N. M., Myers, R., Szeto, K., Tokovinin, A., Véran, J.-P., and Wilson, R. (2006). Performance Modeling of a Wide-Field Ground-Layer Adaptive Optics System. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 118 :1574–1590.
- Arsenault, R., Madec, P. Y., Hubin, N., Paufigue, J., Stroebele, S., Soenke, C., Donaldson, R., Fedrigo, E., Oberti, S., Tordo, S., Downing, M., Kiekebusch, M., Conzelmann, R., Duchateau, M., Jost, A., Hackenberg, W., Bonaccini Calia, D., Delabre, B., Stuik, R., Biasi, R., Gallieni, D., Lazzarini, P., Lelouarn, M., and Glindeman, A. (2008). ESO adaptive optics facility. In *SPIE proc*, volume 7015 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, page 701524.
- Arsenault, R., Salmon, D. A., Kerr, J. M., Rigaut, F. J., Crampton, D., and Grundmann, W. A. (1994). Pueo : the canada-france-hawaii telescope adaptive optics bonnette i : system description. In *Adaptive Optics in Astronomy*, volume 2201, pages 833–842. International Society for Optics and Photonics.
- Babcock, H. W. (1953). The Possibility of Compensating Astronomical Seeing. *PASP*, 65 :229.
- Bacon, R. et al. (2010). The MUSE second-generation VLT instrument. In *SPIE proc.*, volume 7735 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, page 773508.
- Beltramo-Martin, O., Correia, C., Ragland, S., Jolissaint, L., Neichel, B., Fusco, T., and Wizinowich, P. (2019). Prime : Psf reconstruction and identification for multiple-source characterization enhancement—application to keck nirc2 imager. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 487(4) :5450–5462.
- Beltramo-Martin, O., Fétick, R., Neichel, B., and Fusco, T. (2020). Joint estimation of atmospheric and instrumental defects using a parsimonious point spread

- function model. on-sky validation using state of the art worldwide adaptive-optics assisted instruments. *Astronomy & Astrophysics*.
- Bendinelli, O., Parmeggiani, G., Piccioni, A., and Zavatti, F. (1987). The newton-gauss regularized method-application to point-spread-function determination in ccd frames. *The Astronomical Journal*, 94 :1095–1100.
- Bendinelli, O., Parmeggiani, G., and Zavatti, F. (1988). Ccd star images : On the determination of moffat’s psf shape parameters. *Journal of Astrophysics and Astronomy*, 9(1) :17–24.
- Beuzit, J.-L., Demailly, L., Gendron, E., Gigan, P., Lacombe, F., Rouan, D., Hubin, N., Bonaccini, D., Prieto, E., Chazallet, F., et al. (1997). Adaptive optics on a 3.6-meter telescope. the adonis system. *Experimental Astronomy*, 7(4) :285–292.
- Beuzit, J.-L., Feldt, M., Dohlen, K., Mouillet, D., Puget, P., Wildi, F., Abe, L., Antichi, J., Baruffolo, A., Baudoz, P., et al. (2008). Sphere : a planet finder instrument for the vlt. In *Ground-based and airborne instrumentation for astronomy II*, volume 7014, page 701418. International Society for Optics and Photonics.
- Beuzit, J.-L., Vigan, A., Mouillet, D., Dohlen, K., Gratton, R., Boccaletti, A., Sauvage, J.-F., Schmid, H. M., Langlois, M., Petit, C., Baruffolo, A., Feldt, M., Milli, J., Wahhaj, Z., et al. (2019). SPHERE : the exoplanet imager for the Very Large Telescope. *arXiv e-prints*.
- Blanc, A., Fusco, T., Hartung, M., Mugnier, L., and Rousset, G. (2003a). Calibration of naos and conica static aberrations-application of the phase diversity technique. *Astronomy & Astrophysics*, 399(1) :373–383.
- Blanc, A., Mugnier, L. M., and Idier, J. (2003b). Marginal estimation of aberrations and image restoration by use of phase diversity. *JOSA A*, 20(6) :1035–1045.
- Blanco, L. (2013). *Imagerie rétinienne in vivo plein champ : vers une restauration tridimensionnelle*. PhD thesis, Paris 7.
- Blanco, L. and Mugnier, L. M. (2011). Marginal blind deconvolution of adaptive optics retinal images. *Optics Express*, 19 :23227.
- Bloemhof, E., Dekany, R., Troy, M., and Oppenheimer, B. (2001). Behavior of remnant speckles in an adaptively corrected imaging system. *The Astrophysical Journal Letters*, 558(1) :L71.
- Brette, S. and Idier, J. (1996). Optimized single site update algorithms for image deblurring. In *Proceedings of 3rd IEEE International Conference on Image Processing*, volume 3, pages 65–68. IEEE.

- Bus, S. J. and Binzel, R. P. (2002). Phase ii of the small main-belt asteroid spectroscopic survey : A feature-based taxonomy. *Icarus*, 158(1) :146–177.
- Cantalloube, F., Por, E., Dohlen, K., Sauvage, J.-F., Vigan, A., Kasper, M., Bharmal, N., Henning, T., Brandner, W., Milli, J., et al. (2018). Origin of the asymmetry of the wind driven halo observed in high-contrast images. *Astronomy & Astrophysics*, 620 :L10.
- Cappellari, M. (2002). Efficient multi-gaussian expansion of galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 333(2) :400–410.
- Carrasco, E. R., Edwards, M. L., McGregor, P. J., Winge, C., Young, P. J., Doolan, M. C., van Harmelen, J., Rigaut, F. J., Neichel, B., Trancho, G., et al. (2012). Results from the commissioning of the gemini south adaptive optics imager (gsaoi) at gemini south observatory. In *Adaptive Optics Systems III*, volume 8447, page 84470N. International Society for Optics and Photonics.
- Carry, B., Vachier, F., Berthier, J., Marsset, M., Vernazza, P., Grice, J., Merline, W., Lagadec, E., Fienga, A., Conrad, A., et al. (2019). Homogeneous internal structure of cm-like asteroid (41) daphne. *Astronomy & Astrophysics*, 623 :A132.
- Chambolle, A. (2004). An algorithm for total variation minimization and applications. *Journal of Mathematical imaging and vision*, 20(1-2) :89–97.
- Choquet, É., Perrin, M. D., Chen, C. H., Soummer, R., Pueyo, L., Hagan, J. B., Gofas-Salas, E., Rajan, A., Golimowski, D. A., Hines, D. C., Schneider, G., Mazoyer, J., Augereau, J.-C., Debes, J., Stark, C. C., Wolff, S., N’Diaye, M., and Hsiao, K. (2016). First Images of Debris Disks around TWA 7, TWA 25, HD 35650, and HD 377. *The Astrophysical Journal Letters*, 817(1) :L2.
- Claudi, R. U., Turatto, M., Gratton, R. G., Antichi, J., Bonavita, M., Bruno, P., Cascone, E., De Caprio, V., Desidera, S., Giro, E., Mesa, D., Scuderi, S., Dohlen, K., Beuzit, J. L., and Puget, P. (2008). SPHERE IFS : the spectro differential imager of the VLT for exoplanets search. In *SPIE proc.*, volume 7014 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, page 70143E.
- Conan, J.-M. (1994). *Etude de la correction partielle en optique adaptative*. PhD thesis, Paris 11.
- Conan, J.-M., Mugnier, L. M., Fusco, T., Michau, V., and Rousset, G. (1998). Myopic deconvolution of adaptive optics images by use of object and point-spread function power spectra. *Applied Optics*, 37(21) :4614–4622.

- Conan, R. (2000). *Modélisation des effets de l'échelle externe de cohérence spatiale du front d'onde pour l'observation à haute résolution angulaire en astronomie*. PhD thesis, PhD thesis, Université de Nice Sophia Antipolis Faculté des Sciences.
- Conan, R., Avila, R., Sánchez, L. J., Ziad, A., Martin, F., Borgnino, J., Harris, O., González, S., Michel, R., and Hiriart, D. (2002). Wavefront outer scale and seeing measurements at san pedro martir observatory. *Astronomy & Astrophysics*, 396(2) :723–730.
- Conan, R. and Correia, C. (2014). Object-oriented Matlab adaptive optics toolbox. In *Adaptive Optics Systems IV*, volume 9148 of *Proc. SPIE*, page 91486C.
- Davies, R. and Kasper, M. (2012). Adaptive Optics for Astronomy. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 50 :305–351.
- DeMeo, F. E., Binzel, R. P., Slivan, S. M., and Bus, S. J. (2009). An extension of the bus asteroid taxonomy into the near-infrared. *Icarus*, 202(1) :160–180.
- Demoment, G. (1989). Image reconstruction and restoration : Overview of common estimation structures and problems. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 37(12) :2024–2036.
- Descamps, P., Marchis, F., Berthier, J., Emery, J., Duchêne, G., De Pater, I., Wong, M., Lim, L., Hammel, H., Vachier, F., et al. (2011). Triplicity and physical characteristics of asteroid (216) kleopatra. *Icarus*, 211(2) :1022–1033.
- Diolaiti, E., Bendinelli, O., Bonaccini, D., Close, L., Currie, D., and Parmeggiani, G. (2000). Analysis of isoplanatic high resolution stellar fields by the starfinder code. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 147(2) :335–346.
- Diolaiti, E., Ciliegi, P., Abicca, R., Agapito, G., Arcidiacono, C., Baruffolo, A., Bellazzini, M., Biliotti, V., Bonaglia, M., Bregoli, G., et al. (2016). Maory : adaptive optics module for the e-elt. In *Adaptive Optics Systems V*, volume 9909, page 99092D. International Society for Optics and Photonics.
- Dohlen, K., Langlois, M., Saisse, M., Hill, L., Origne, A., Jacquet, M., Fabron, C., Blanc, J.-C., Llored, M., Carle, M., Moutou, C., Vigan, A., Boccaletti, A., Carbillet, M., Mouillet, D., and Beuzit, J.-L. (2008). The infra-red dual imaging and spectrograph for SPHERE : design and performance. In *SPIE proc.*, volume 7014 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, page 70143L.
- Drummond, J. D. (1998). Adaptive optics lorentzian point spread function. In *Adaptive Optical System Technologies*, volume 3353, pages 1030–1037. International Society for Optics and Photonics.

- Ďurech, J., Kaasalainen, M., Herald, D., Dunham, D., Timerson, B., Hanuš, J., Frappa, E., Talbot, J., Hayamizu, T., Warner, B. D., et al. (2011). Combining asteroid models derived by lightcurve inversion with asteroidal occultation silhouettes. *Icarus*, 214(2) :652–670.
- Els, S., Sterzik, M., Marchis, F., Pantin, E., Endl, M., and Kürster, M. (2001). A second substellar companion in the gliese 86 system—a brown dwarf in an extrasolar planetary system. *Astronomy & Astrophysics*, 370(1) :L1–L4.
- Emsellem, E., Monnet, G., and Bacon, R. (1994). The multi-gaussian expansion method : a tool for building realistic photometric and kinematical models of stellar systems i. the formalism. *Astronomy and Astrophysics*, 285 :723–738.
- Esposito, S. and Riccardi, A. (2001). Pyramid wavefront sensor behavior in partial correction adaptive optic systems. *Astronomy & Astrophysics*, 369(2) :L9–L12.
- Fauvarque, O. (2017). *Optimization of Fourier-based wavefront sensors*. Theses, Aix-Marseille Université ; Laboratoire d’Astrophysique de Marseille.
- Fauvarque, O. (2019). Flattened pyramid & oscillating sensitivity. *Video Memoria della Societa Astronomica Italiana*, 1(1) :21.
- Fedrigo, E., Bourtembourg, R., Donaldson, R., Soenke, C., Valles, M. S., and Zampieri, S. (2010). Sparta for the vlt : status and plans. In *Adaptive Optics Systems II*, volume 7736, page 77362I. International Society for Optics and Photonics.
- Fétick, R., Fusco, T., Neichel, B., Mugnier, L., Beltramo-Martin, O., Bonnefois, A., Petit, C., Milli, J., Vernet, J., Oberti, S., et al. (2019a). Physics-based model of the adaptive-optics-corrected point spread function-applications to the sphere/zimpol and muse instruments. *Astronomy & Astrophysics*, 628 :A99.
- Fétick, R. J., Jorda, L., Vernazza, P., Marsset, M., Drouard, A., Fusco, T., Carry, B., Marchis, F., Hanuš, J., Viikinkoski, M., et al. (2019b). Closing the gap between earth-based and interplanetary mission observations : Vesta seen by vlt/sphere. *Astronomy & Astrophysics*, 623 :A6.
- Fétick, R. J., Neichel, B., Mugnier, L. M., Montmerle-Bonnefois, A., and Fusco, T. (2018). Turbulent and adaptive optics corrected point-spread functions as convolutive orders of the phase power spectral density. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 481(4) :5210–5215.
- Fétick, R. J.-L., Mugnier, L. M., Fusco, T., and Neichel, B. (2020). Blind deconvolution in astronomy with adaptive optics : the parametric marginal approach. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 496(4) :4209–4220.

- Fiorentino, G., Bellazzini, M., Spera, M., Sabha, N. B., Mapelli, M., Schreiber, L., Dall’Ora, M., Inno, L., Patti, M., Braga, V. F., Lombini, M., Diolaiti, E., Cortecchia, F., Arcidiacono, C., Plantet, C., and Agapito, G. (2020). Deep into the core of dense star clusters : an astrometric and photometric test case for ELT. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 494(3) :4413–4425.
- Fried, D. L. (1966). Optical Resolution Through a Randomly Inhomogeneous Medium for Very Long and Very Short Exposures. *Journal of the Optical Society of America (1917-1983)*, 56 :1372.
- Fusco, T., Bacon, R., Kamann, S., Conseil, S., Neichel, B., Correia, C., Beltramo-Martin, O., Vernet, J., Kolb, J., and Madec, P.-Y. (2020). Reconstruction of the ground-layer adaptive-optics point spread function for muse wide field mode observations. *Astronomy & Astrophysics*, 635 :A208.
- Fusco, T., Petit, C., Rousset, G., Sauvage, J. F., Dohlen, K., Mouillet, D., Charton, J., Baudoz, P., Kasper, M., Fedrigo, E., Rabou, P., Feautrier, P., Downing, M., Gigan, P., Conan, J. M., Beuzit, J. L., Hubin, N., Wildi, F., and Puget, P. (2006). Design of the extreme AO system for SPHERE, the planet finder instrument of the VLT. In *SPIE proc.*, volume 6272 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, page 62720K.
- Fusco, T., Rousset, G., Rabaud, D., Gendron, E., Mouillet, D., Lacombe, F., Zins, G., Madec, P., Lagrange, A., Charton, J., et al. (2004). Naos on-line characterization of turbulence parameters and adaptive optics performance. *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics*, 6(6) :585.
- Fusco, T., Rousset, G., Sauvage, J.-F., Petit, C., Beuzit, J.-L., Dohlen, K., Mouillet, D., Charton, J., Nicolle, M., Kasper, M., et al. (2006). High-order adaptive optics requirements for direct detection of extrasolar planets : Application to the sphere instrument. *Optics Express*, 14(17) :7515–7534.
- Fusco, T., Sauvage, J.-F., Mouillet, D., Costille, A., Petit, C., Beuzit, J.-L., Dohlen, K., Milli, J., Girard, J., Kasper, M., et al. (2016). Saxo, the sphere extreme ao system : on-sky final performance and future improvements. In *Adaptive Optics Systems V*, volume 9909, page 99090U. International Society for Optics and Photonics.
- Fusco, T., Thatte, N., Meimon, S., Tecza, M., Clarke, F., and Swinbank, M. (2010). Adaptive optics systems for harmoni : a visible and near-infrared integral field spectrograph for the e-elt. In *Adaptive Optics Systems II*, volume 7736, page 773633. International Society for Optics and Photonics.

- Gendron, E., Clénet, Y., Fusco, T., and Rousset, G. (2006). New algorithms for adaptive optics point-spread function reconstruction. *Astronomy & Astrophysics*, 457(1) :359–363.
- Goodman, J. W. (1968). Fourier optics. *Appendix B Sec. B*, 3.
- Goussard, Y., Demoment, G., and Idier, J. (1990). A new algorithm for iterative deconvolution of sparse spike trains. In *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pages 1547–1550. IEEE.
- Hanuš, J., Marsset, M., Vernazza, P., Viikinkoski, M., Drouard, A., Brož, M., Carry, B., Fetick, R., Marchis, F., Jorda, L., et al. (2019). The shape of (7) iris as evidence of an ancient large impact? *Astronomy & Astrophysics*, 624 :A121.
- Hanuš, J., Vernazza, P., Viikinkoski, M., Ferrais, M., Rambaux, N., Podlowska-Gaca, E., Drouard, A., Jorda, L., Jehin, E., Carry, B., et al. (2020). (704) interamnia : a transitional object between a dwarf planet and a typical irregular-shaped minor body. *Astronomy & Astrophysics*, 633 :A65.
- Hasselmann, P., Barucci, M., Fornasier, S., Leyrat, C., Carvano, J., Lazzaro, D., and Sierks, H. (2016). Asteroid (21) lutetia : Disk-resolved photometric analysis of baetica region. *Icarus*, 267 :135–153.
- Hirst, P. and Cardenes, R. (2017). A new data archive for gemini-fast, cheap and in the cloud. In *Astronomical Data Analysis Software and Systems XXV*, volume 512, page 53.
- Huang, J. and Mumford, D. (1999). Statistics of natural images and models. In *Proceedings. 1999 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (Cat. No PR00149)*, volume 1, pages 541–547. IEEE.
- Jaynes, E. T. (2003). *Probability theory : The logic of science*. Cambridge university press.
- Jolissaint, L. and Veran, J.-P. (2002). Fast computation and morphologic interpretation of the adaptive optics point spread function. In *European Southern Observatory Conference and Workshop Proceedings*, volume 58, page 201.
- Jolissaint, L., Veran, J.-P., and Marino, J. (2004). Opera, an automatic psf reconstruction software for shack-hartmann ao systems : application to altair. In *Advancements in Adaptive Optics*, volume 5490, pages 151–163. International Society for Optics and Photonics.
- Jones, E., Oliphant, T., Peterson, P., and Others (2001). SciPy : Open source scientific tools for python.

- Jorda, L., Lamy, P., Gaskell, R., Kaasalainen, M., Groussin, O., Besse, S., and Faury, G. (2012). Asteroid (2867) steins : Shape, topography and global physical properties from osiris observations. *Icarus*, 221(2) :1089–1100.
- Jorda, L., Spjuth, S., Keller, H., Lamy, P., and Llebaria, A. (2010). Oasis : a simulator to prepare and interpret remote imaging of solar system bodies. In *Computational Imaging VIII*, volume 7533, page 753311. International Society for Optics and Photonics.
- Kamann, S., Dalessandro, E., Bastian, N., Brinchmann, J., den Brok, M., Dreizler, S., Giesers, B., Göttgens, F., Husser, T. O., Krajnović, D., van de Ven, G., Watkins, L. L., and Wisotzki, L. (2020). The peculiar kinematics of the multiple populations in the globular cluster Messier 80 (NGC 6093). *MNRAS*, 492(1) :966–977.
- Kamann, S., Husser, T. O., Dreizler, S., Emsellem, E., Weilbacher, P. M., Martens, S., Bacon, R., den Brok, M., Giesers, B., Krajnović, D., Roth, M. M., Wendt, M., and Wisotzki, L. (2018). A stellar census in globular clusters with MUSE : The contribution of rotation to cluster dynamics studied with 200 000 stars. *MNRAS*, 473(4) :5591–5616.
- Kamann, S., Wisotzki, L., and Roth, M. M. (2013). Resolving stellar populations with crowded field 3d spectroscopy. *Astronomy & Astrophysics*, 549 :A71.
- Kern, P., Lena, P., Gigan, P., Fontanella, J.-C., Rousset, G., Merkle, F., and Gaffard, J.-P. (1989). Come-on : an adaptive optics prototype dedicated to infrared astronomy. In *New Technologies for Astronomy*, volume 1130, pages 17–28. International Society for Optics and Photonics.
- Kinast, J., Hilpert, E., Lange, N., Gebhardt, A., Rohloff, R.-R., Risse, S., Eberhardt, R., and Tünnermann, A. (2014). Minimizing the bimetallic bending for cryogenic metal optics based on electroless nickel. In *Advances in Optical and Mechanical Technologies for Telescopes and Instrumentation*, volume 9151, page 915136. International Society for Optics and Photonics.
- Kolb, J., Madec, P.-Y., Arsenault, R., Oberti, S., Paufigue, J., La Penna, P., Ströbele, S., Donaldson, R., Soenke, C., Suárez Valles, M., Kiekebusch, M., Argomedo, J., Le Louarn, M., Vernet, E., Haguenaer, P., Duhoux, P., Aller-Carpentier, E., Valenzuela, J. J., and Guerra, J. C. (2016). Laboratory results of the AOF system testing. In *SPIE proc*, volume 9909 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, page 99092S.
- Kolmogorov, A. N. (1941). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. *Cr Acad. Sci. URSS*, 30 :301–305.

- Kornilov, V. G. and Tokovinin, A. A. (2001). Measurement of the turbulence in the free atmosphere above Mt. Maoverset. *Astronomy Reports*, 45 :395–408.
- Labeyrie, A. (1970). Attainment of Diffraction Limited Resolution in Large Telescopes by Fourier Analysing Speckle Patterns in Star Images. *Astronomy Astrophysics*, 6 :85.
- Lafrenière, D., Marois, C., Doyon, R., Nadeau, D., and Artigau, É. (2007). A New Algorithm for Point-Spread Function Subtraction in High-Contrast Imaging : A Demonstration with Angular Differential Imaging. *The Astrophysical Journal*, 660(1) :770–780.
- Lamy, P., Groussin, O., Fornasier, S., Jorda, L., Kaasalainen, M., and Barucci, M. (2010). Thermal properties of asteroid 21 lutetia from spitzer space telescope observations. *Astronomy & Astrophysics*, 516 :A74.
- Lehmann, E. (1983). Theory of point estimation, john wiley & sons. *Inc., New York*.
- Levin, A., Weiss, Y., Durand, F., and Freeman, W. T. (2009). Understanding and evaluating blind deconvolution algorithms. In *2009 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 1964–1971. IEEE.
- Madec, P.-Y. (1999). Control techniques. *Adaptive optics in astronomy*, pages 131–154.
- Maire, J. (2007). *Modélisation des effets optiques de la turbulence atmosphérique pour les grands télescopes et les observations à Haute Résolution Angulaire*. Theses, Université Nice Sophia Antipolis.
- Maréchal, A. (1948). *Étude des effets combinés de la diffraction et des aberrations géométriques sur l'image d'un point lumineux...* Éditions de la Revue d'optique théorique et instrumentale.
- Marsset, M., Brož, M., Vernazza, P., Drouard, A., Castillo-Rogez, J., Hanuš, J., Viikinkoski, M., Rambaux, N., Carry, B., Jorda, L., et al. (2020). The violent collisional history of aqueously evolved (2) pallas. *Nature Astronomy*, pages 1–8.
- Marsset, M., Carry, B., Pajuelo, M., Viikinkoski, M., Hanuš, J., Vernazza, P., Dumas, C., and Yang, B. (2017). Sphere sheds new light on the collisional history of main-belt asteroids. *The Messenger*, 169 :29–31.
- Martin, O., Gendron, É., Rousset, G., Gratadour, D., Vidal, F., Morris, T., Basden, A., Myers, R., Correia, C., and Henry, D. (2017). Wave-front error breakdown in

- laser guide star multi-object adaptive optics validated on-sky by canary. *Astronomy & Astrophysics*, 598 :A37.
- McNeil, S. R. and Moody, J. W. (2005). Photometric accuracy of deconvolved simulated astronomical images. *The Astrophysical Journal*, 627(2) :701.
- Mighell, K. J. (2005). Stellar photometry and astrometry with discrete point spread functions. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 361(3) :861–878.
- Milli, J., Mouillet, D., Fusco, T., Girard, J. H., Masciadri, E., Pena, E., Sauvage, J.-F., Reyes, C., Dohlen, K., Beuzit, J.-L., Kasper, M., Sarazin, M., and Cantaloube, F. (2017). Performance of the extreme-AO instrument VLT/SPHERE and dependence on the atmospheric conditions. *arXiv e-prints*.
- Moffat, A. (1969). A theoretical investigation of focal stellar images in the photographic emulsion and application to photographic photometry. *Astronomy and Astrophysics*, 3 :455.
- Mugnier, L. (2008). Des données à la connaissance de l’objet : le problème inverse, l’observation en astrophysique, éd. p. léna, d. rouan, f. lebrun, f. mignard & d. pelat. *EDP Sciences, chapitre*, 9 :591–613.
- Mugnier, L., Sauvage, J.-F., Fusco, T., Cornia, A., and Dandy, S. (2008). On-line long-exposure phase diversity : a powerful tool for sensing quasi-static aberrations of extreme adaptive optics imaging systems. *Optics Express*, 16(22) :18406–18416.
- Mugnier, L. M., Fusco, T., and Conan, J.-M. (2004). MISTRAL : a myopic edge-preserving image restoration method, with application to astronomical adaptive-optics-corrected long-exposure images. *Journal of the Optical Society of America A*, 21(10) :1841–1854.
- Mugnier, L. M., Robert, C., Conan, J.-M., Michau, V., and Salem, S. (2001). Myopic deconvolution from wave-front sensing. *JOSA A*, 18(4) :862–872.
- Müller Sánchez, F., Davies, R. I., Eisenhauer, F., Tacconi, L. J., Genzel, R., and Sternberg, A. (2006). SINFONI adaptive optics integral field spectroscopy of the Circinus Galaxy. *Astronomy and Astrophysics*, 454 :481–492.
- Nashed, M. (1981). Operator-theoretic and computational approaches to ill-posed problems with applications to antenna theory. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 29(2) :220–231.
- Neichel, B., Fusco, T., and Conan, J.-M. (2009). Tomographic reconstruction for wide-field adaptive optics systems : Fourier domain analysis and fundamental limitations. *JOSA A*, 26(1) :219–235.

- Neichel, B., Fusco, T., Sauvage, J.-F., Correia, C., Dohlen, K., El-Hadi, K., Blanco, L., Schwartz, N., Clarke, F., Thatte, N., et al. (2016). The adaptive optics modes for harmoni : from classical to laser assisted tomographic ao. In *Adaptive Optics Systems V*, volume 9909, page 990909. International Society for Optics and Photonics.
- Neichel, B., Rigaut, F., Serio, A., Arriagada, G., Boccas, M., D’Orgeville, C., Fesquet, V., Trujillo, C., Rambold, W. N., Galvez, R. L., Gausachs, G., Vucina, T. B., Montes, V., Urrutia, C., Moreno, C., Diggs, S. J., Araya, C., Lührs, J., Trancho, G., Bec, M., Marchant, C., Collao, F., Carrasco, E. R., Edwards, M. L., Pessev, P., Lopez, A., and Diaz, H. (2012). Science readiness of the Gemini MCAO System : GeMS. In *Adaptive Optics Systems III*, volume 8447 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, page 84474Q.
- Neichel, B., Rigaut, F., Vidal, F., van Dam, M. A., Garrel, V., Carrasco, E. R., Pessev, P., Winge, C., Boccas, M., d’Orgeville, C., et al. (2014). Gemini multi-conjugate adaptive optics system review–ii. commissioning, operation and overall performance. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 440(2) :1002–1019.
- Noll, R. J. (1976). Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *JOsA*, 66(3) :207–211.
- N’Diaye, M., Dohlen, K., Fusco, T., and Paul, B. (2013). Calibration of quasi-static aberrations in exoplanet direct-imaging instruments with a zernike phase-mask sensor. *Astronomy & Astrophysics*, 555 :A94.
- N’Diaye, M., Vigan, A., Dohlen, K., Sauvage, J.-F., Caillat, A., Costille, A., Girard, J., Beuzit, J.-L., Fusco, T., Blanchard, P., et al. (2016). Calibration of quasi-static aberrations in exoplanet direct-imaging instruments with a zernike phase-mask sensor-ii. concept validation with zelda on vlt/sphere. *Astronomy & Astrophysics*, 592 :A79.
- Oberti, S., Kolb, J., Madec, P.-Y., Haguenaer, P., Le Louarn, M., Pettazzi, L., Guesalaga, A., Donaldson, R., Soenke, C., Jeram, B., Suárez Valles, M., Kieckebusch, M., Argomedo, J., La Penna, P., Paufigue, J., Arsenaault, R., Hubin, N., and Vernet, J. (2018). The AO in AOF. In *SPIE Proc*, volume 10703 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, page 107031G.
- Obukhov, A. (1949). Temperature field structure in a turbulent flow. *Izv. Acad. Nauk SSSR Ser. Geog. Geofiz*, 13 :58–69.

- Orban de Xivry, G., Rabien, S., Busoni, L., Gaesler, W., Bonaglia, M., Borelli, J., Deysenroth, M., Esposito, S., Gemperlein, H., Kulas, M., Lefebvre, M., Mazzoni, T., Peter, D., Puglisi, A., Raab, W., Rahmer, G., Sivitilli, A., Storm, J., and Ziegleder, J. (2015). First Results of the Ground Layer Adaptive Optics System ARGOS. In *Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes IV (AO4ELT4)*, page E72.
- Orieux, F., Giovannelli, J.-F., and Rodet, T. (2010). Bayesian estimation of regularization and point spread function parameters for wiener–hunt deconvolution. *JOSA A*, 27(7) :1593–1607.
- Orieux, F., Giovannelli, J.-F., Rodet, T., Abergel, A., Ayasso, H., and Husson, M. (2012). Super-resolution in map-making based on a physical instrument model and regularized inversion-application to spire/herschel. *Astronomy & Astrophysics*, 539 :A38.
- Ostro, S. J., Hudson, R. S., Benner, L. A., Giorgini, J. D., Magri, C., Margot, J.-L., and Nolan, M. C. (2002). Asteroid radar astronomy. *Asteroids III*, pages 151–168.
- Ostro, S. J., Scott, R., Nolan, M. C., Margot, J.-L., Scheeres, D. J., Campbell, D. B., Magri, C., Giorgini, J. D., Yeomans, D. K., et al. (2000). Radar observations of asteroid 216 kleopatra. *Science*, 288(5467) :836–839.
- Perrin, M. D., Sivaramakrishnan, A., Makidon, R. B., Oppenheimer, B. R., and Graham, J. R. (2003). The structure of high strehl ratio point-spread functions. *The Astrophysical Journal*, 596(1) :702.
- Petit, C., Mugnier, L., Michau, V., Montri, J., and Fleury, B. (2019). LEO satellite imaging with adaptive optics. In *Proceedings of the COAT 2019 conference*. ONERA.
- Piironen, J., Lagerkvist, C.-I., Torppa, J., Kaasalainen, M., and Warner, B. (2001). Standard asteroid photometric catalogue. In *Bulletin of the American Astronomical Society*, volume 33, page 1562.
- Pinna, E., Esposito, S., Hinz, P., Agapito, G., Bonaglia, M., Puglisi, A., Komperro, M., Riccardi, A., Briguglio, R., Arcidiacono, C., et al. (2016). Soul : the single conjugated adaptive optics upgrade for lbt. In *Adaptive Optics Systems V*, volume 9909, page 99093V. International Society for Optics and Photonics.
- Platt, B. and Shack, R. V. (1971). Lenticular hartmann screen. *Newsletter*, 5 :15.
- Racine, R., Walker, G. A., Nadeau, D., Doyon, R., and Marois, C. (1999). Speckle noise and the detection of faint companions. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 111(759) :587.

- Ragazzoni, R. (1996). Pupil plane wavefront sensing with an oscillating prism. *Journal of Modern Optics*, 43 :289–293.
- Ragland, S., Dupuy, T., Jolissaint, L., Wizinowich, P., Lu, J., van Dam, M., Berrierman, G., Best, W., Gelino, C., Ghez, A., et al. (2018). Status of point spread function determination for keck adaptive optics. In *Adaptive Optics Systems VI*, volume 10703, page 107031J. International Society for Optics and Photonics.
- Ragland, S., Jolissaint, L., Wizinowich, P., van Dam, M., Mugnier, L., Bouxin, A., Chock, J., Kwok, S., Mader, J., Witzel, G., et al. (2016). Point spread function determination for keck adaptive optics. In *Adaptive Optics Systems V*, volume 9909, page 99091P. International Society for Optics and Photonics.
- Rey, W. (1983). *Introduction to Robust and Quasi-Robust Statistical Methods*. Springer, Berlin.
- Rigaut, F., Neichel, B., Boccas, M., d’Orgeville, C., Arriagada, G., Fesquet, V., Diggs, S. J., Marchant, C., Gausach, G., Rambold, W. N., et al. (2012). Gems first on-sky results. In *Adaptive Optics Systems III*, volume 8447, page 84470I. International Society for Optics and Photonics.
- Rigaut, F. J., Véran, J.-P., and Lai, O. (1998). Analytical model for shack-hartmann-based adaptive optics systems. In *Adaptive Optical System Technologies*, volume 3353, pages 1038–1048. International Society for Optics and Photonics.
- Roddier, F. (1981). The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy. *Progress in Optics*, 19 :281–376.
- Roddier, F. (1999). *Adaptive optics in astronomy*. Cambridge university press.
- Rousset, G. (1999). Wave-front sensors. *Adaptive optics in astronomy*, 1 :91.
- Rudin, L. I., Osher, S., and Fatemi, E. (1992). Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D : nonlinear phenomena*, 60(1-4) :259–268.
- Russell, C. and Raymond, C. (2011). The dawn mission to vesta and ceres. In *The Dawn Mission to Minor Planets 4 Vesta and 1 Ceres*, pages 3–23. Springer.
- Russell, C., Raymond, C., Coradini, A., McSween, H., Zuber, M. T., Nathues, A., De Sanctis, M. C., Jaumann, R., Konopliv, A., Preusker, F., et al. (2012). Dawn at vesta : Testing the protoplanetary paradigm. *Science*, 336(6082) :684–686.
- Rusu, C. E., Oguri, M., Minowa, Y., Iye, M., Inada, N., Oya, S., Kayo, I., Hayano, Y., Hattori, M., Saito, Y., Ito, M., Pyo, T.-S., Terada, H., Takami, H., and Watanabe, M. (2016). Subaru Telescope adaptive optics observations of gravitationally lensed quasars in the Sloan Digital Sky Survey. *MNRAS*, 458 :2–55.

- Sánchez, L., Cruz, D., Avila, R., Agabi, A., Azouit, M., Cuevas, S., Garfias, F., González, S., Harris, O., Masciadri, E., et al. (2003). Contribution of the surface layer to the seeing at san pedro martir : Simultaneous microthermal and dimm measurements. *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica*, 19 :23–30.
- Sarazin, M. and Roddier, F. (1990). The ESO differential image motion monitor. *A&A*, 227 :294–300.
- Sauvage, J.-F., Fusco, T., Lamb, M., Girard, J., Brinkmann, M., Guesalaga, A., Wizinowich, P., O’Neal, J., N’Diaye, M., Vigan, A., et al. (2016). Tackling down the low wind effect on sphere instrument. In *Adaptive Optics Systems V*, volume 9909, page 990916. International Society for Optics and Photonics.
- Sauvage, J.-F., Fusco, T., Petit, C., Costille, A., Mouillet, D., Beuzit, J.-L., Dohlen, K., Kasper, M., Suarez, M., Soenke, C., Baruffolo, A., Salasnich, B., Rochat, S., Fedrigo, E., Baudoz, P., Hugot, E., Sevin, A., Perret, D., Wildi, F., Downing, M., Feautrier, P., Puget, P., Vigan, A., O’Neal, J., Girard, J., Mawet, D., Schmid, H. M., and Roelfsema, R. (2016). SAXO : the extreme adaptive optics system of SPHERE (I) system overview and global laboratory performance. *Journal of Astronomical Telescopes, Instruments, and Systems*, 2 :025003.
- Sauvage, J.-F., Fusco, T., Petit, C., Meimon, S., Fedrigo, E., Valles, M. S., Kasper, M., Hubin, N., Beuzit, J.-L., Charton, J., et al. (2010). Saxo, the extreme adaptive optics system of sphere : overview and calibration procedure. In *Adaptive Optics Systems II*, volume 7736, page 77360F. International Society for Optics and Photonics.
- Schmid, H. M., Bazzon, A., Roelfsema, R., Mouillet, D., Milli, J., Menard, F., Gisler, D., Hunziker, S., Pragt, J., Dominik, C., Boccaletti, A., Ginski, C., et al. (2018). SPHERE/ZIMPOL high resolution polarimetric imager. I. System overview, PSF parameters, coronagraphy, and polarimetry. *Astronomy and Astrophysics*, 619 :A9.
- Schröder, S., Mottola, S., Keller, H., Raymond, C., and Russell, C. (2013). Resolved photometry of vesta reveals physical properties of crater regolith. *Planetary and Space Science*, 85 :198–213.
- Sommerfeld, A. (1954). *Optics Lectures on Theoretical Physics, Vol. IV*. Academic Press.
- Soummer, R., Pueyo, L., and Larkin, J. (2012). Detection and Characterization of Exoplanets and Disks Using Projections on Karhunen-Loève Eigenimages. *The Astrophysical Journal Letters*, 755(2) :L28.

- Sreenivasan, K. R. (1995). On the universality of the kolmogorov constant. *Physics of Fluids*, 7(11) :2778–2784.
- Ströbele, S., Arsenault, R., Bacon, R., Biasi, R., Bonaccini-Calia, D., Downing, M., Conzelmann, R. D., Delabre, B., Donaldson, R., Duchateau, M., Esposito, S., Fedrigo, E., Gallieni, D., Hackenberg, W. K. P., Hubin, N., Kasper, M., Kissler-Patig, M., Le Louarn, M., McDermid, R., Oberti, S., Paufique, J., Riccardi, A., Stuik, R., and Vernet, E. (2006). The ESO Adaptive Optics Facility. In *SPIE proc*, volume 6272 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, page 62720B.
- Ströbele, S., La Penna, P., Arsenault, R., Conzelmann, R. D., Delabre, B., Duchateau, M., Dorn, R., Fedrigo, E., Hubin, N., Quentin, J., Jolley, P., Kiekebusch, M., Kirchbauer, J. P., Klein, B., Kolb, J., Kuntschner, H., Le Louarn, M., Lizon, J. L., Madec, P.-Y., Pettazzi, L., Soenke, C., Tordo, S., Vernet, J., and Muradore, R. (2012). GALACSI system design and analysis. In *Adaptive Optics Systems III*, volume 8447 of *SPIE Proc.*, page 844737.
- Séchaud, M. (1999). Wave-front compensation devices. *aoa*, page 57.
- Tatarskii, V. I. (1961). *Wave Propagation in Turbulent Medium*. McGraw-Hill.
- Thiébaud, E. (2002). Optimization issues in blind deconvolution algorithms. In *Astronomical Data Analysis II*, volume 4847, pages 174–183. International Society for Optics and Photonics.
- Thomas, P. C., Binzel, R. P., Gaffey, M. J., Zellner, B. H., Storrs, A. D., and Wells, E. (1997). Vesta : Spin pole, size, and shape from hst images. *Icarus*, 128(1) :88–94.
- Tikhonov, A. N. and Arsenin, V. Y. (1977). Solutions of ill-posed problems. *New York*, pages 1–30.
- Trujillo, I., Aguerri, J., Cepa, J., and Gutiérrez, C. (2001). The effects of seeing on sérsic profiles–ii. the moffat psf. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 328(3) :977–985.
- Véran, J.-P., Rigaut, F., Maitre, H., and Rouan, D. (1997). Estimation of the adaptive optics long-exposure point-spread function using control loop data. *JOSA A*, 14(11) :3057–3069.
- Veran, J.-P. and Rigaut, F. J. (1998). Deconvolution method for accurate astrometry and photometry on adaptive optics images of stellar fields. In *Adaptive Optical System Technologies*, volume 3353, pages 426–437. International Society for Optics and Photonics.

- Vernazza, P., Brož, M., Drouard, A., Hanuš, J., Viikinkoski, M., Marsset, M., Jorda, L., Fetick, R., Carry, B., Marchis, F., et al. (2018a). The impact crater at the origin of the julia family detected with vlt/sphere? *Astronomy & Astrophysics*, 618 :A154.
- Vernazza, P., Carry, B., Marsset, M., Hanus, J., Viikinkoski, M., Marchis, F., and Team, H. (2018b). Eso/vlt/sphere survey of $d > 100$ km asteroids (2017-2019) : First results. In *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts# 50*, volume 50.
- Vernazza, P., Jorda, L., Ševeček, P., Brož, M., Viikinkoski, M., Hanuš, J., Carry, B., Drouard, A., Ferrais, M., Marsset, M., et al. (2020). A basin-free spherical shape as an outcome of a giant impact on asteroid hygiea. *Nature Astronomy*, 4(2) :136–141.
- Vernin, J. and Roddier, F. (1973). Experimental determination of two-dimensional spatiotemporal power spectra of stellar light scintillation. Evidence for a multilayer structure of the air turbulence in the upper troposphere. *Journal of the Optical Society of America (1917-1983)*, 63 :270–273.
- Vigan, A., Moutou, C., Langlois, M., Allard, F., Boccaletti, A., Carbillet, M., Mouillet, D., and Smith, I. (2010). Photometric characterization of exoplanets using angular and spectral differential imaging. *MNRAS*, 407(1) :71–82.
- Vigan, A., N'Diaye, M., Dohlen, K., Sauvage, J.-F., Milli, J., Zins, G., Petit, C., Wahhaj, Z., Cantalloube, F., Caillat, A., et al. (2019). Calibration of quasi-static aberrations in exoplanet direct-imaging instruments with a zernike phase-mask sensor-iii. on-sky validation in vlt/sphere. *Astronomy & Astrophysics*, 629 :A11.
- Viikinkoski, M., Kaasalainen, M., and Ďurech, J. (2015). Adam : a general method for using various data types in asteroid reconstruction. *Astronomy & Astrophysics*, 576 :A8.
- Viikinkoski, M., Vernazza, P., Hanuš, J., Le Coroller, H., Tazhenova, K., Carry, B., Marsset, M., Drouard, A., Marchis, F., Fetick, R., et al. (2018). (16) psyche : A mesosiderite-like asteroid? *Astronomy & Astrophysics*, 619 :L3.
- Villeneuve, E. and Carfantan, H. (2012). Hyperspectral data deconvolution for galaxy kinematics with mcmc. In *2012 Proceedings of the 20th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, pages 2477–2481. IEEE.
- von F. Zernike (1934). Beugungstheorie des schneidenver-fahrens und seiner verbesserten form, der phasenkontrastmethode. *Physica*, 1(7) :689 – 704.

- Von Karman, T. (1948). Progress in the statistical theory of turbulence. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 34(11) :530.
- Wilson, R. W. (2002). SLODAR : measuring optical turbulence altitude with a Shack-Hartmann wavefront sensor. *MNRAS*, 337 :103–108.
- Wizinowich, P. L., Le Mignant, D., Stomski Jr, P. J., Acton, D. S., Contos, A. R., and Neyman, C. R. (2003). Adaptive optics developments at keck observatory. In *Adaptive Optical System Technologies II*, volume 4839, pages 9–20. International Society for Optics and Photonics.
- Yang, B. (subm). Binary asteroid (31) euphrosyne : Ice-rich and nearly spherical. *Astronomy & Astrophysics*.
- Yuan, Y.-x. (2000). A review of trust region algorithms for optimization. In *Iciam*, volume 99, pages 271–282.
- Zieleniewski, S. and Thatte, N. (2013). Parameterising the e-elt point spread function for science simulations with harmoni. In *3rd AO4ELT Conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes*. INAF-Osservatorio Astrofisico di Arcetri Largo Enrico Fermi.