



**HAL**  
open science

# Dynamique et stabilité d'une chaîne d'aimants. Application à la récupération d'énergie.

Joosung Lee

► **To cite this version:**

Joosung Lee. Dynamique et stabilité d'une chaîne d'aimants. Application à la récupération d'énergie.. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université de Paris Saclay, 2016. Français. NNT: . tel-03023587

**HAL Id: tel-03023587**

**<https://theses.hal.science/tel-03023587v1>**

Submitted on 25 Nov 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2016SACLAY015

THÈSE DE DOCTORAT DE  
L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY PRÉPARÉE À  
L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES TECHNIQUES  
AVANCÉES

ÉCOLE DOCTORALE N° 579  
*Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences*

SPÉCIALITÉ DE DOCTORAT : MÉCANIQUE

Joosung Lee

**Dynamique et stabilité d'une chaîne d'aimants.  
Application à la récupération d'énergie**

Thèse soutenue à Palaiseau le 30 novembre 2016.

Composition du Jury :

Président	Olivier HUBERT	École Normale Supérieure de Cachan
Rapporteurs	Michael PEIGNEY	École Nationale des Ponts et Chaussées
	Benoît ROMAN	École Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles
Examineur	Nicolas VANDEWALLE	Université de Liège
Directeur de thèse	Olivier DOARÉ	École Nationale Supérieure des Techniques Avancées
Co-encadrants	Jean BOISSON	École Nationale Supérieure des Techniques Avancées
	Corinne ROUBY	École Nationale Supérieure des Techniques Avancées



---

This work is supported by a public grant overseen by the French National research Agency (ANR) as part of the "Investissement dAvenir" program, through the "IDI 2013" project funded by the IDEX Paris-Saclay, ANR-11- IDEX-0003-02

---

# Remerciements

Tout d'abord, je remercie la direction de l'IDEX Paris-Saclay pour la confiance et le financement. Je souhaite remercier toutes les personnes qui y ont contribué pour que cette thèse soit réalisée.

Je tiens à remercier mes trois directeurs, le trio de choc : Jean Boisson, Olivier Doaré et Corinne Rouby. Je vous suis très reconnaissant pour votre confiance, votre disponibilité et d'avoir partagé vos idées avec moi. Vous avez chacun un profil différent et il était très enrichissant d'avoir trois différents points de vue. Je me souviendrais des réunions avec vous où on échangeait des idées et les discussions pouvaient partir dans tous les sens.

Je tiens aussi à remercier toutes les personnes que j'ai pu croiser au laboratoire. Merci à Thierry pour l'accueil, Nico pour toutes ces discussions dans le couloir et Caroline pour ses aides apportées aux problèmes administratifs. Je remercie également Romain, Marica, Cyril, Benjamin et Olivier que j'ai pu côtoyer et apprécier.

Je souhaite ensuite remercier les thésards et les post-doc de l'UME IMSIA pour leur bonne humeur. Merci à Arnaud, Marie et Antoine, Stefania, Àngels, Jin Jack, Guillaume et Aurélien pour toutes ces soirées alcoolisées et les dîners exotiques.

Je souhaite aussi remercier mes proches. Stan alias Stan Wars pour ces soirées pleine de *gg ez*, Jérémy pour ses blagues très *high-level*, Arnaud pour tout le temps passé ensemble et ses soutiens, Kévin pour ses histoires personnelles toujours très intéressantes, Louise pour ses rires *hahaha* et Laetitia pour ses rires *hahaha*. Je remercie également le tandem Basil et Andréa pour leurs blagues qui vont très loin mais pas toujours stylées et le duo Trannoy, Virgile et Prisca pour leur bonne humeur permanente et leurs pas de danses.

Enfin, je remercie ma famille et Bomee pour tout leur soutien envoyé de la Corée.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1 Les aimants et leurs applications . . . . .	1
2 Instabilité de flottement en interaction fluide structure . . . . .	3
3 L'induction électromagnétique . . . . .	4
4 Objectifs de la thèse et organisation du manuscrit . . . . .	5
<b>1 Énergie d'interaction entre deux aimants</b>	<b>7</b>
1 Introduction . . . . .	7
2 Notions de magnétostatique . . . . .	8
2.1 Équations de Maxwell dans le cadre de la magnétostatique . . . . .	8
2.2 Approximation dipolaire . . . . .	11
2.3 Expression de l'énergie d'interaction entre deux aimants permanents . . . . .	13
3 Cas des aimants cylindriques . . . . .	16
4 Approximation quadratique de l'énergie d'interaction . . . . .	23
4.1 Coefficients du développement de Taylor . . . . .	23
4.2 Méthode de calcul des coefficients $D_1$ et $H_{11}$ . . . . .	24
4.3 Interprétation des coefficients du développement . . . . .	25
5 Résultats . . . . .	26
5.1 Variation des coefficients pour des aimants cylindriques en fonction de $\ell$ et $\lambda$ . . . . .	27
5.2 Mesure de la force d'attraction entre aimants cylindriques . . . . .	30
6 Conclusion . . . . .	31
<b>2 Dynamique d'une chaîne d'aimants</b>	<b>32</b>
1 Introduction . . . . .	32
2 Modélisation de la dynamique d'une chaîne d'aimants . . . . .	33
2.1 Description du système . . . . .	33
2.2 Conditions de non-glissement . . . . .	34
2.3 Équations de Lagrange du système . . . . .	35
2.4 Adimensionnement . . . . .	35
2.5 Expression des énergies . . . . .	36
2.6 Équations linéarisées du mouvement . . . . .	38
3 Poutre continue équivalente . . . . .	39
4 Expériences . . . . .	42
4.1 Oscillations libres sans gravité ni champ magnétique extérieur . . . . .	42
4.2 Oscillations libres avec/sans gravité et avec champ magnétique extérieur . . . . .	43
4.3 Oscillations forcées sans gravité ni champ magnétique extérieur . . . . .	45

5	Résultats et discussion . . . . .	46
5.1	Dynamique de la chaîne en l'absence de gravité et de champ magnétique extérieur. . . . .	46
5.2	Dynamique et stabilité de la chaîne soumise à la gravité et à un champ extérieur . . . . .	52
5.3	Discussion sur la condition de non-glissement . . . . .	57
6	Conclusion . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Flottement d'un drapeau articulé magnétique</b>	<b>62</b>
1	Introduction . . . . .	62
2	Drapeau magnétique discret . . . . .	62
3	Induction électromagnétique dans une bobine par des aimants rectangulaires . . . . .	65
3.1	Potentiel vecteur d'un aimant rectangulaire . . . . .	66
3.2	Force électromotrice induite . . . . .	68
3.3	Mesure du champ magnétique d'un aimant rectangulaire . . . . .	70
4	Force électromotrice induite dans une bobine par un drapeau magnétique en flottement . . . . .	73
4.1	Modélisation des bobines . . . . .	73
4.2	Bobine circulaire . . . . .	74
4.3	Bobine rectangulaire . . . . .	75
4.4	Influence de la position de la spire . . . . .	76
4.5	Influence de la taille de la spire . . . . .	79
5	Optimisation . . . . .	83
5.1	Optimisation de la spire circulaire . . . . .	83
5.2	Optimisation de la spire rectangulaire . . . . .	85
6	Conclusion . . . . .	86
	<b>Conclusion</b>	<b>88</b>
	<b>A Polynôme de Legendre</b>	<b>I</b>
	<b>B Méthode de Simpson</b>	<b>II</b>
	<b>C Matrices des équations du mouvement de la chaîne</b>	<b>III</b>
	<b>D Différence finie de <math>v</math> du modèle continu de la chaîne</b>	<b>V</b>
	<b>E Champ magnétique d'un aimant rectangulaire</b>	<b>VII</b>

# Introduction

## 1 Les aimants et leurs applications

Les premiers aimants ont été découverts dans l'Antiquité en *Magnésie*, région de la Grèce, dont le nom est l'origine du mot *magnétisme*. La première application des aimants a été la navigation avec la boussole magnétique dont le premier modèle, nommé, *flèche du sud* (figure 1) a été développée en Chine vers 200 av. J.-C (Shu-hua, 1954). Elle est constituée d'une cuillère magnétisée dont la pointe indique le sud. Cependant, elle n'a été utilisée pour la navigation qu'à partir du XI<sup>e</sup> siècle par manque de connaissances sur le champ magnétique terrestre (Merrill, 1983). Plus tard, vers le XIX<sup>e</sup> siècle, Maxwell réussit à faire une synthèse des différentes lois de l'électromagnétisme, permettant une meilleure compréhension du phénomène. Cela a diversifié les domaines d'application des matériaux magnétiques aux XIX<sup>e</sup> et XX<sup>e</sup> siècles.

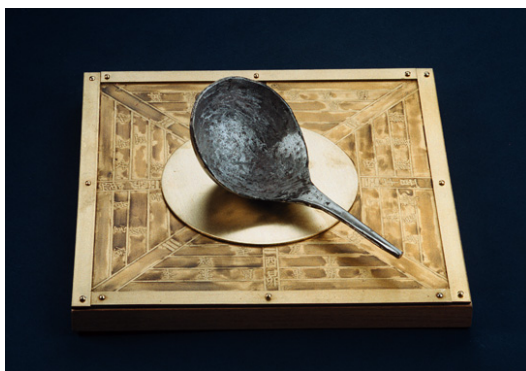


FIGURE 1 – Boussole flèche du sud (réf : Smith College Museum of Art)

Tentons de donner ici une description et une définition d'un aimant. Il s'agit d'un volume matériel ferromagnétique aimanté. La magnétisation d'un aimant est caractérisée par l'aimantation qui est la densité volumique du moment magnétique. Ce dernier est appelé *moment* car il quantifie le moment que l'aimant subit dans un champ magnétique. Le moment magnétique détermine également l'intensité du champ magnétique créé par un aimant. Un matériau magnétique est spontanément divisé en plusieurs régions, qu'on appelle *domaine de Weiss* (Michel et al., 2000). Dans chaque domaine de Weiss, les moments magnétiques spontanés des cristallites ferromagnétiques sont alignés et dirigés dans le même sens. La fabrication d'un aimant revient donc à aligner les aimantations de ces domaines de Weiss en utilisant un champ magnétique intense de sorte que le volume entier soit aimanté dans le même sens. Dans le cas des aimants permanents que nous considérons dans cette thèse, des matériaux ferromagnétiques durs sont utilisés car leurs aimantations sont stables dans le temps et vis-à-vis des champs extérieurs, contrairement au cas des matériaux ferromagnétiques doux (Michel et al., 2000).



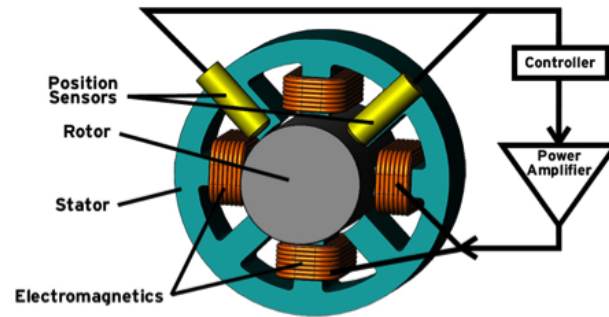


FIGURE 2 – Contrôle du rotor sans contact avec des électroaimants (réf : <http://www.synchrony.com/knowledge/how-magnetic-bearings-work.php>).

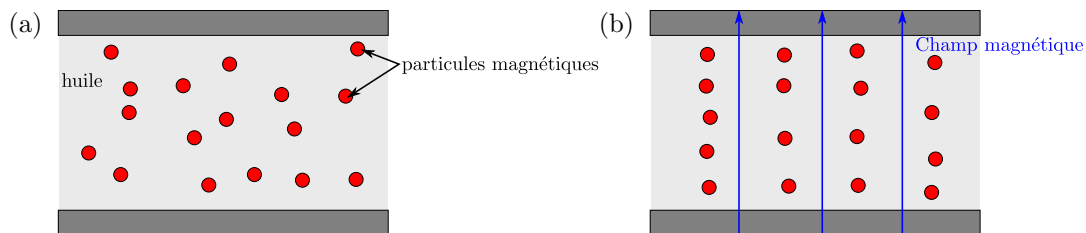


FIGURE 3 – Fluide magnétorhéologique : (a) avant l'application d'un champ magnétique et (b) après l'application.

De nos jours, les aimants sont présents dans divers domaines scientifiques et industriels. En médecine, on retrouve les aimants dans les appareils d'imagerie par résonance magnétique (IRM) (Schenck, 1996; Black et al., 1997). À l'échelle microscopique, des nanoparticules magnétiques sont utilisées pour le transport de médicaments à un endroit précis dans le corps (Ito et al., 2005; Alexiou et al., 2000) ou pour la séparation des cellules biologiques comme les érythrocytes dans le sang (Haik et al., 1999; Zborowski and Chalmers, 2011).

Les forces attractives et répulsives exercées par les aimants ont la particularité d'être des forces sans contact physique. Cet aspect est exploité dans certains types de moteurs pour suspendre le rotor. La figure 2 représente un moteur composé de quatre électroaimants fixés au stator permettant de suspendre le rotor. Cette technique de contrôle, qu'on appelle *active magnetic bearing*, permet de négliger le frottement lié au contact entre le stator et le rotor (Bleuler et al., 2009). Des systèmes PMB, *Passive Magnetic Bearing*, existent également où des aimants permanents sont fixés à la fois sur le stator et sur le rotor de sorte que les deux pièces se repoussent et soient toujours à la même distance l'un de l'autre (Hamler et al., 2004). L'avantage de ce système est de ne pas consommer d'électricité pour fonctionner mais il est limité par le poids et la dimension du rotor.

Les propriétés des fluides intelligents peuvent être contrôlées par l'application de contraintes mécaniques ou thermiques, ou par des champs électriques ou magnétiques. Parmi les fluides dont les caractéristiques peuvent être contrôlés par un champ magnétique, les fluides magnétorhéologiques utilisant des particules ferromagnétiques ont été inventés dans les années 1940 (Jacob, 1951). Ces derniers sont composés d'un fluide porteur, par exemple de l'huile, dans lequel des microparticules ferromagnétiques sont plongées. Le principe de fonctionnement d'un fluide magnétorhéologique est représenté sur la figure 3. Lorsqu'il est soumis à un champ magnétique, les particules s'alignent suivant la direction du champ, ce qui limite leur mouvement donc le mouvement du

fluide. Ce phénomène se traduit notamment par l'augmentation de la viscosité du fluide. La capacité de l'opérateur de contrôler leurs viscosités grâce à un champ magnétique, jusqu'à obtenir un solide viscoélastique, les fluides magnétorhéologiques sont très utilisés dans les amortisseurs, actionneurs et freins (Du et al., 2005; Seong et al., 2011; Dyke et al., 1996).

Pour comprendre la physique des fluides magnétorhéologiques ou la dynamique des nanoparticules utilisées en biologie ou en médecine, nous avons besoin de comprendre le comportement collectif de particules. Jolly et al. (1996) ont développé un modèle quasi-statique décrivant le comportement des particules magnétiques en prenant en compte leurs interactions et l'effet d'un champ magnétique extérieur. D'autres travaux s'intéressent également aux assemblages de particules magnétiques à différentes échelles. À l'échelle microscopique, les études sont réalisées majoritairement sur les particules sphériques. Le regroupement de sphères microscopiques, induit par leurs interactions magnétiques, a été étudié par Wilson et al. (2009). L'influence de contraintes thermiques sur le regroupement de ces particules est traitée par Pastor-Satorras and Rubi (2000). Toujours à l'échelle microscopique, la dynamique des assemblages de particules a été étudiée en présence d'un champ magnétique tournant à diverses fréquences de rotation (Babataheri et al., 2011; Melle et al., 2002; Cēbers, 2005).

À l'échelle macroscopique, l'aménagement d'aimants sphériques de différents niveaux d'aimantation a été mis en évidence par Stambaugh et al. (2004). Les auteurs ont montré que les aimants de faible aimantation se placent autour des groupements d'aimants de forte aimantation. La statique de différentes formes d'assemblages de particules sphériques a été également étudiée par Vella et al. (2013) et Vandewalle and Dorbolo (2014). En fonction du nombre d'éléments, la structure est plus stable sous la forme d'une chaîne ou d'un anneau. Pour d'autres géométries d'aimants, plus difficiles à modéliser, la statique d'un groupe de particules est caractérisée en calculant analytiquement les énergies d'interaction entre aimants (Beleggia and De Graef, 2005; Vokoun and Beleggia, 2014). Dans la littérature, la dynamique de structures discrètes composées d'aimants de géométries différentes de la géométrie sphérique est très peu étudiée à cause de la complexité de l'énergie d'interaction entre des particules non-sphériques. C'est à ce système que nous nous intéressons dans cette thèse.

## 2 Instabilité de flottement en interaction fluide structure

Une des applications visées par cette thèse est la récupération d'énergie à partir du flottement d'une structure composée d'aimants. Le phénomène de flottement est une instabilité dynamique, créée par les réactions aérodynamiques exercées sur la structure. Cette instabilité engendre un mouvement auto-entretenu du système qui oscille périodiquement à une très grande amplitude, ce qui peut engendrer de la fatigue voire la destruction des structures. Pour cette raison, le seuil de flottement est un critère important lors de la conception des ailes d'avion (Guo, 2007), des missiles dans les applications militaires (Laurenson and Trn, 1980) ou des ponts (Wilde and Fujino, 1998). L'un des exemples les plus spectaculaires de la destruction d'une structure en flottement est le pont de Tacoma qui s'est effondré quelques mois après sa construction en 1940.

Il est aujourd'hui envisagé d'exploiter les oscillations auto-entretenuées de très grandes amplitudes créées par ce phénomène dans les systèmes de récupération d'énergie. Ceux

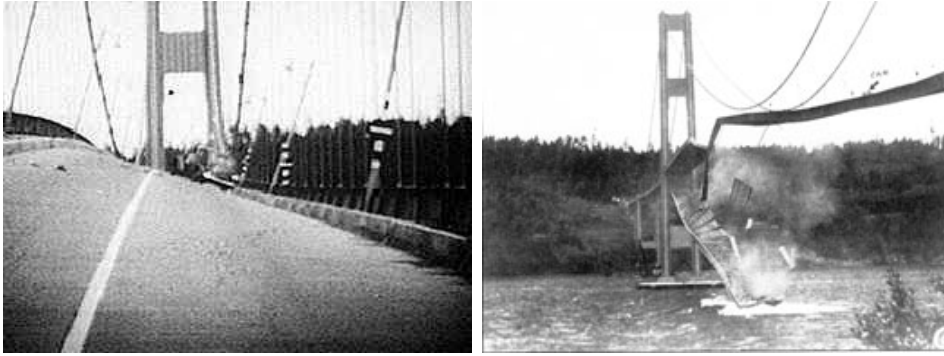


FIGURE 4 – Effondrement du pont de Tacoma (De Langre, 2001).

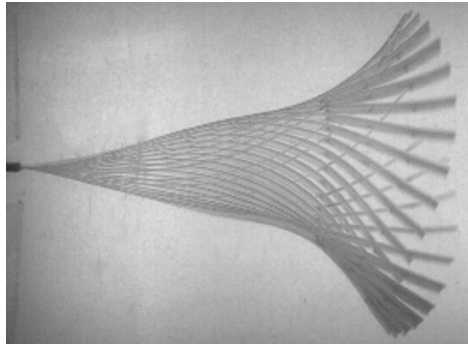


FIGURE 5 – Flottement d'un drapeau piézoélectrique (Piñeirua et al., 2015).

utilisant des lames piézoélectriques qui engendrent une tension électrique sous l'action d'une contrainte mécanique ont été développés en nombre ces dernières années. Les oscillations d'un drapeau piézoélectrique en flottement sont représentées sur la figure 5. Plusieurs études ont été réalisées visant à maximiser la puissance produite par le flottement d'un drapeau composé de pièces piézoélectriques : en fonction de la vitesse de l'écoulement (Erturk et al., 2010), en fonction de la géométrie (Piñeirua et al., 2015). Li et al. (2011) ont soumis une plaque piézoélectrique à un écoulement dans la direction perpendiculaire au drapeau et la puissance générée a été estimée. D'autres matériaux ont été également utilisés, comme des pièces en IPMC (Ionic Polymer-Metal Composite) qui est un matériau synthétique produisant une tension électrique lorsqu'il vibre (Giacomello and Porfiri, 2011).

### 3 L'induction électromagnétique

L'induction électromagnétique est un phénomène physique engendrant une différence de potentiel électrique dans un conducteur lorsque ce dernier est soumis à un champ magnétique variable dans le temps. Cette différence de potentiel électrique est appelée *force électromotrice* (f.e.m) car elle est à l'origine du déplacement des charges électriques induit par la variation temporelle du flux magnétique. L'induction électromagnétique est exploitée dans de nombreuses applications de production d'électricité à petite et moyenne échelle. Par exemple, l'induction magnétique issue d'aimants en mouvement relatif par rapport à des bobines est utilisée dans les générateurs de courant alternatif (Binns and Kurdali, 1979), pour la production d'électricité à partir de vibrations à faible fréquence (Kulah and Najafi, 2008), dans des systèmes de récupération d'énergie éolienne (Chalmers and Spooner, 1999) et pour la récupération d'énergie de

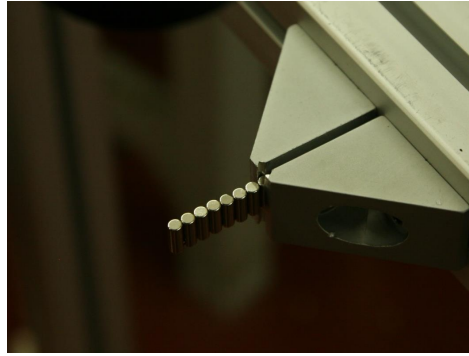


FIGURE 6 – Chaîne d’aimants cylindriques aimantés selon le diamètre.

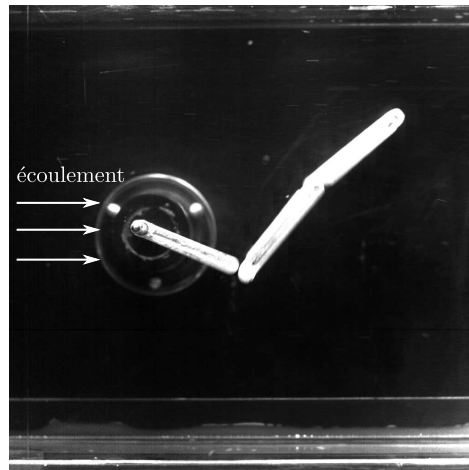


FIGURE 7 – Drapeau articulé composé des aimants rectangulaires aimanté selon l’épaisseur.

drapeaux en flottage composés d’un matériau conducteur (Tang et al., 2009). Un drapeau composé d’aimants qui est l’un des objets d’étude de cette thèse, peut être vu comme un alternateur dont le mouvement relatif des aimants et bobines est différent.

## 4 Objectifs de la thèse et organisation du manuscrit

Dans cette thèse, nous considérons deux systèmes discrets composés d’aimants permanents au néodyme ( $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ ). Le premier système est une chaîne d’aimants cylindriques aimantés selon le diamètre, représentée sur la figure 6. Cette structure discrète est soumise à la gravité et à un champ magnétique dans la direction longitudinale. Le deuxième système est un drapeau articulé, composé d’aimants rectangulaires fins aimantés selon l’épaisseur dans un écoulement hydrodynamique, représenté sur la figure 7.

Avant d’aborder la modélisation et l’analyse de ces deux systèmes, nous avons besoin de bases théoriques en électromagnétisme. C’est l’objet du chapitre 1. Ainsi, dans ce chapitre, les équations de Maxwell dans le cas particulier de la magnétostatique seront développées. À partir de ce formalisme, nous calculerons les énergies d’interactions entre aimants permanents. La géométrie spécifique d’aimants cylindriques diamétralement aimantés sera tout particulièrement étudiée. Un développement quadratique en sera extrait, ce qui servira de base au chapitre 2.

Dans le deuxième chapitre, un modèle linéaire de la dynamique d’une chaîne d’aimants soumise à la gravité et à un champ magnétique extérieur sera développé en uti-

lisant l'expression quadratique de l'énergie d'interaction entre aimants présentée dans le premier chapitre. Parallèlement à ce modèle, un modèle de poutre continue équivalente sera également développé. Dans la suite, des expériences d'oscillations libres et forcées de la chaîne sous différentes conditions de gravité et de champ magnétique extérieur seront présentées. Nous comparerons les résultats numériques et expérimentaux et discuterons de l'influence de la gravité et du champ magnétique sur la dynamique de la chaîne d'aimants. À partir des modèles discret et continu, la stabilité d'une chaîne d'aimants cylindriques sera discutée et l'influence du nombre d'aimants sur son comportement sera également étudiée.

Dans le troisième chapitre, un système de production d'électricité à partir du flottement d'un drapeau articulé composé d'aimants rectangulaires sera présenté. Nous montrerons comment le mouvement du drapeau peut être converti en une tension électrique aux bornes d'une bobine en détaillant la loi de l'induction électromagnétique. À partir de cette loi, la force électromotrice engendrée par le drapeau dans une bobine sera modélisée. Nous comparerons ensuite les résultats du modèle aux mesures expérimentales. Une fois le modèle validé, l'optimisation numérique de la position et de la taille de la bobine sera réalisée pour des géométries circulaires et rectangulaires. Nous discuterons de la configuration optimale des bobines et de son évolution en fonction de la distance par rapport au drapeau.

À la fin du manuscrit, les conclusions et perspectives de la thèse seront présentées.

# Chapitre 1

## Énergie d'interaction magnétique entre deux aimants permanents

### 1 Introduction

Dans la littérature, l'énergie d'interaction entre aimants cylindriques d'aimantation selon le diamètre n'est pas traitée et celle des cylindres aimantés selon la hauteur n'est étudiée que depuis quelques années (Vokoun et al., 2012; Vokoun and Beleggia, 2014). Contrairement aux aimants cylindriques, les interactions entre aimants sphériques sont beaucoup plus étudiées car les aimants sphériques ont les caractéristiques magnétiques identiques aux dipôles magnétiques (Jackson, 1999; Griffiths, 1999) permettant d'avoir une expression facile à introduire dans un modèle. C'est la raison pour laquelle de nombreuses études sont réalisées sur des structures discrètes composées d'aimants sphériques. Par exemple, dans les travaux de O'Donoghue and Cantillon-Murphy (2013), Vella et al. (2013) et Vandewalle and Dorbolo (2014), la statique d'une chaîne d'aimants sphériques est étudiée à partir du calcul d'énergie d'interaction entre aimants.

L'approximation dipolaire peut être faite pour les aimants d'autres géométries mais elle n'est valable qu'à une très longue distance. Pour avoir une expression de l'énergie d'interaction entre deux aimants sans aucune limitation, des travaux ont été réalisés sur la formulation exacte de l'énergie d'interaction entre aimants non-sphériques sans approximation dipolaire. Une expression généralisée de l'énergie d'interaction entre aimants en utilisant la transformée de Fourier en espace a notamment été développée (Beleggia and De Graef, 2003; Vokoun and Beleggia, 2014). Ravaut a également proposé une expression analytique du champ d'un aimant annulaire (2009) qui peut ensuite servir pour la formulation de l'énergie d'interaction entre deux anneaux aimantés.

Dans ces études, les cylindres aimantés diamétralement ne sont pas traités. Sachant qu'il est compliqué d'obtenir une expression analytique exacte de l'énergie d'interaction entre deux cylindres, nous avons cherché une expression simplifiée de cette énergie sans approximation dipolaire. Dans le chapitre 2, nous allons nous intéresser à la dynamique d'une chaîne droite d'aimants cylindriques d'aimantation selon le diamètre. Cette dernière est en équilibre lorsqu'elle est dans sa position droite où les aimantations des cylindres sont alignées dans la même direction et dans le même sens. Afin d'établir un modèle linéaire décrivant la dynamique de la chaîne autour de son équilibre, un développement de l'énergie d'interaction entre deux cylindres en séries de Taylor autour de cette configuration est présenté dans ce chapitre. En limitant le développement à l'ordre 2, les équations de Lagrange deviennent linéaires.

Nous présenterons d'abord les notions générales de la magnétostatique nécessaires à notre application. L'expression générale de l'énergie d'interaction entre deux aimants quelconques sera établie. Après cette formulation générale, l'énergie d'interaction magnétique entre deux aimants cylindriques aimantés diamétralement ainsi qu'une courte discussion sur le caractère dipolaire des cylindres seront présentées. Ensuite, le développement de Taylor des énergies d'interaction entre deux aimants sera réalisé pour les cylindres autour de la configuration où les deux aimants ont leurs aimantations alignées. Enfin, l'un des termes du développement de l'énergie sera comparé avec l'expérience pour valider le modèle.

## 2 Notions de magnétostatique

### 2.1 Équations de Maxwell dans le cadre de la magnétostatique

La magnétostatique des aimants est basée sur la loi de Biot et Savart qui donne le champ magnétique induit par un courant électrique. Nous montrerons comment le champ magnétique d'un aimant se déduit de cette loi dans la suite. La formulation mathématique de la loi de Biot et Savart est la suivante. Soient  $d\mathbf{l}$  le vecteur élémentaire d'un fil parcouru par un courant d'intensité  $I$  et  $\mathbf{x}'$  sa position. Le champ magnétique élémentaire  $d\mathbf{B}$  induit par l'élément de courant  $I d\mathbf{l}$  à une position d'intérêt  $\mathbf{x}$  (figure 1.1) est donné par Griffiths (1999) et Jackson (1999) :

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{l} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}, \quad (1.1)$$

où  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T.m.A}^{-1}$  est la perméabilité du vide. L'unité T est le Tesla ( $\text{kg.A}^{-1}.\text{s}^{-2}$ ) qui est une unité de mesure de l'intensité d'un champ magnétique.

Pour une densité de courant volumique  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  parcourant un volume  $V$  (figure 1.2), l'équation fondamentale (1.1) devient (Grant and Phillips, 2013) :

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV', \quad (1.2)$$

où  $\mathbf{B}$  est le champ magnétique induit par la distribution  $\mathbf{J}$ . Cette dernière est caractérisée par l'équation de continuité (Griffiths, 1999) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (1.3)$$

où  $\rho$  est la densité de charge électrique et  $t$  est le temps. En magnétostatique, on ne considère que les phénomènes magnétiques stationnaires où la densité de charge électrique ne varie pas dans le temps. La distribution de courant  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  est donc donnée par :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (1.4)$$

La relation

$$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = -\nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right)$$

permet d'écrire (1.2) sous la forme :

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'. \quad (1.5)$$

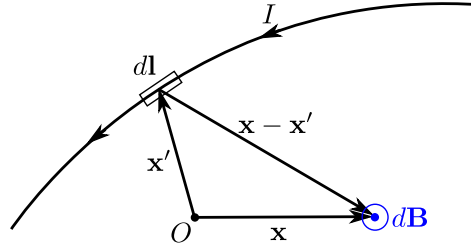


FIGURE 1.1 – Champ magnétique élémentaire  $d\mathbf{B}$  induit par un élément de courant  $I d\mathbf{l}$ .

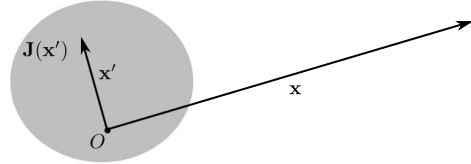


FIGURE 1.2 – Densité de courant  $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$  sur un volume  $V$  induisant un champ magnétique en  $\mathbf{x}$ .

Sachant que la divergence du rotationnel est nulle, la divergence de  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  est nulle, ce qui donne l'équation locale de Maxwell-Thompson :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.6)$$

Cette équation est l'une des équations fondamentales de la magnétostatique. Elle engendre une condition sur les lignes du champs de  $\mathbf{B}$ . Par définition, le flux magnétique  $F$  à travers un volume  $V$  délimité par la surface fermée  $S$  s'écrit :

$$F = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (1.7)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal à la surface  $S$ . En appliquant le théorème de Green-Ostrogradski, l'équation précédente devient :

$$F = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0. \quad (1.8)$$

Cette équation montre que le flux entrant est égal au flux sortant de la surface  $S$ , ce qui veut dire qu'il existe autant de lignes de champ de  $\mathbf{B}$  *entrantes* et *sortantes* en chaque point de l'espace. On peut donc conclure de la première équation de la magnétostatique que les lignes de champ magnétique sont bouclées dans tout l'espace. Un point où les lignes de champ partent ou convergent est appelé un pôle magnétique, son signe détermine le départ ou l'arrivée des lignes de courant. La première équation fondamentale (1.6) montre donc qu'une source d'un champ magnétique est composé au minimum de deux pôles magnétiques de signes opposés dont l'ensemble est appelé *dipôle*. Plus généralement, un ensemble de plusieurs pôles magnétiques est appelé *multipôle*.

La première équation, qui caractérise les lignes de champ, est complétée par la deuxième équation fondamentale de la magnétostatique qui décrit le phénomène de l'induction électromagnétique. La deuxième équation fondamentale de la magnétostatique est obtenue en calculant le rotationnel de  $\mathbf{B}$  :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'. \quad (1.9)$$



En utilisant l'identité  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{f} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla^2 \mathbf{f}$  et les relations

$$\begin{aligned}\nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) &= -\nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right), \\ \nabla^2 \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) &= -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),\end{aligned}$$

où  $\nabla'$  est le gradient défini suivant  $\mathbf{x}'$ , le rotationnel du champ est exprimé en fonction de la densité de courant :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (1.10)$$

D'après l'équation (1.4), la divergence de  $\mathbf{J}$  est nulle. En supprimant le deuxième terme de (1.10), on obtient la deuxième équation de la magnétostatique :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (1.11)$$

Cette équation correspond à l'équation de Maxwell - Ampère sans le courant de déplacement de Maxwell. Ce dernier doit être pris en compte lorsque la source électrique est mobile.

L'équation (1.11) donne le champ magnétique induit par une densité de courant. Pour passer au champ magnétique d'un aimant, on exprime  $\mathbf{B}$  en fonction de deux grandeurs physiques : l'aimantation  $\mathbf{M}$  et le champ auxiliaire  $\mathbf{H}$ . L'aimantation  $\mathbf{M}$  est une grandeur vectorielle représentant le comportement magnétique élémentaire d'un aimant, exprimée en  $\text{A.m}^{-1}$ . Soit  $\boldsymbol{\mu}$  le moment magnétique d'un aimant d'aimantation  $\mathbf{M}$  et de volume  $V$ .  $\mathbf{M}$  et  $\boldsymbol{\mu}$  sont liés par (Jackson, 1999) :

$$\boldsymbol{\mu} = \int_V \mathbf{M}(\mathbf{x}') dV'. \quad (1.12)$$

Le champ auxiliaire  $\mathbf{H}$  est le champ créé par un courant électrique, exprimé en  $\text{A.m}^{-1}$ , il est également appelé *excitation magnétique*. En présence d'un aimant et d'une densité de courant  $\mathbf{J}$ , le champ  $\mathbf{B}$  s'exprime en fonction de  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{H}$  :

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (1.13)$$

En absence d'aimants dans le milieu, on a  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  et la deuxième équation de la magnétostatique peut s'écrire en fonction de  $\mathbf{H}$  :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (1.14)$$

L'équation (1.14) est la forme la plus utilisée de la deuxième équation de la magnétostatique. Le système d'équations de la magnétostatique (1.6) et (1.14) est un système dont la solution générale  $\mathbf{B}$  (1.2) est déjà connue. Cette solution n'est définie que pour un champ magnétique induit par une densité de courant. Dans les problèmes où le champ magnétique est uniquement créé par un aimant, il suffit de réécrire les équations (1.6) et (1.14) sans densité de courant et résoudre les équations pour obtenir  $\mathbf{B}$ . La formulation et la résolution des équations fondamentales de la magnétostatique dans le cas où le champ magnétique est uniquement engendré par un aimant seront détaillées dans la suite.

## 2.2 Approximation dipolaire

L'expression analytique du champ solution  $\mathbf{B}$  peut être obtenue à partir de (1.5). Dans la littérature, au lieu de calculer directement l'intégrale volumique de (1.5), la méthode la plus répandue est de développer le champ magnétique en plusieurs multipôles et de ne garder que le premier terme dipolaire. Pour le développement multipolaire du champ, nous nous plaçons dans le cas où le point d'observation est suffisamment loin pour que la source puisse être considérée comme ponctuelle ( $|\mathbf{x}'| \ll |\mathbf{x}|$ ). Nous considérons également que la densité de courant volumique est localisée dans le volume de la source magnétique  $V$  délimité par la surface  $S$ . Sur cette surface, on a la condition limite  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$  où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal à  $S$ . Sous ces conditions, le dénominateur de (1.5) peut être développé en une série de polynômes de Legendre en utilisant la relation :

$$\forall s \in [-1, +1] \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{1 - 2st + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(s)t^n. \quad (1.15)$$

Les polynômes de Legendre  $P_n$  sont détaillés dans l'annexe A. La relation (1.15) est utilisée pour exprimer le dénominateur de (1.5) en puissances de  $|\mathbf{x}|$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \frac{1}{|\mathbf{x}|} \frac{1}{\sqrt{1 - |\mathbf{x}'| \cos \eta + (|\mathbf{x}'|/|\mathbf{x}|)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \eta) \left( \frac{|\mathbf{x}'|}{|\mathbf{x}|} \right)^n \\ &= \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{3(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x})^2 - |\mathbf{x}|^2 |\mathbf{x}'|^2}{2|\mathbf{x}|^5} + \frac{5(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x})^3 - 3|\mathbf{x}|^2 |\mathbf{x}'|^2 (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x})}{2|\mathbf{x}|^7} + O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^4}\right), \end{aligned} \quad (1.16)$$

où  $\eta$  est l'angle orienté  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ . En injectant (1.16) dans (1.2),  $\mathbf{B}$  a pour expression développée :

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left[ \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV' + \frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \int_V (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV' + O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right) \right], \quad (1.17)$$

Cette équation montre que  $\mathbf{B}$  est nécessairement le rotationnel d'un champ vectoriel. Ce champ vectoriel est le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  vérifiant donc  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . On note  $A_i$ , la  $i^{\text{ème}}$  composante du potentiel vecteur. En se basant sur (1.17), le développement multipolaire de  $A_i$  donne :

$$A_i(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int_V J_i(\mathbf{x}') dV' + \frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \int_V (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') J_i(\mathbf{x}') dV' + O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right) \right], \quad (1.18)$$

où  $J_i$  est une composante de  $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$ . Le premier terme du développement correspond au monopôle. Commençons par établir une égalité nécessaire pour le calcul de ce terme. Soient  $f(\mathbf{x}')$  et  $g(\mathbf{x}')$  des fonctions scalaires, le théorème de flux-divergence donne (Strauss, 1992) :

$$\int_V g \mathbf{J} \cdot \nabla' f dV' + \int_V f \nabla' \cdot g \mathbf{J} dV' = \int_S f g \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS'. \quad (1.19)$$

En développant la divergence de  $g \mathbf{J}$ , on obtient :

$$\int_V g \mathbf{J} \cdot \nabla' f dV' + \int_V (f g \nabla' \cdot \mathbf{J} + f \mathbf{J} \cdot \nabla' g) dV' = \int_S f g \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS'. \quad (1.20)$$

Sachant que  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$ , l'intégrale surfacique est nulle. On a également  $\nabla' \cdot \mathbf{J} = 0$ . Ces simplifications mènent à l'équation suivante :

$$\int_V (g \mathbf{J} \cdot \nabla' f + f \mathbf{J} \cdot \nabla' g) dV' = 0. \quad (1.21)$$

En posant  $f = 1$  et  $g = x'_i$ , l'intégrale correspondant au monopôle devient :

$$\int_V J_i(\mathbf{x}') dV' = 0.$$

Le terme monopolaire du champ magnétique est donc absent, ce qui est en accord avec l'interprétation de l'équation (1.6). Physiquement, un monopôle magnétique n'existe pas d'après ces calculs et l'équation (1.6).<sup>1</sup>

Le deuxième terme du développement (1.18) concerne le dipôle. En choisissant  $f = x'_i$  et  $g = x'_j$  où  $x'_i$  et  $x'_j$  sont des composantes de  $\mathbf{x}'$ , l'égalité (1.21) s'écrit :

$$\int_V (x'_j J_i + x'_i J_j) dV' = 0. \quad (1.22)$$

En utilisant cette égalité, le calcul analytique de l'intégrale présente dans le terme dipolaire donne :

$$\begin{aligned} \int_V (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') J_i(\mathbf{x}') dV' &= \sum_j \int_V x_j x'_j J_i(\mathbf{x}') dV', \\ &= -\frac{1}{2} \sum_j \int_V x_j (x'_i J_j(\mathbf{x}') - x'_j J_i(\mathbf{x}')) dV', \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j \int_V (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}'))_k dV', \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \mathbf{x} \times \int_V (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')) dV' \right]_i, \end{aligned} \quad (1.23)$$

où  $\epsilon_{ijk}$  est le symbole de Levi-Civita. Dans cette équation, on reconnaît le moment magnétique  $\boldsymbol{\mu}_J$  d'une densité de courant (Jackson, 1999) :

$$\boldsymbol{\mu}_J = \int_V \frac{1}{2} [\mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')] dV'. \quad (1.24)$$

En comparant cette expression avec l'équation (1.12), l'aimantation équivalente d'une distribution de courant  $\mathbf{M}_J$  peut être identifiée :

$$\mathbf{M}_J = \frac{1}{2} \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}'). \quad (1.25)$$

En injectant (1.24) et (1.23) dans (1.18), on obtient le potentiel vecteur dipolaire d'une distribution de courant  $\mathbf{J}$  :

$$\mathbf{A}_d(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 \boldsymbol{\mu}_J \times \mathbf{x}}{4\pi |\mathbf{x}|}. \quad (1.26)$$

Le calcul de  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  donne le champ magnétique dipolaire :

$$\mathbf{B}_d(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 [3(\boldsymbol{\mu}_J \cdot \hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_J]}{4\pi |\mathbf{x}|^3}, \quad (1.27)$$

où  $\hat{\mathbf{x}}$  est le vecteur directeur unitaire de  $\mathbf{x}$ . Dans le cas où le champ magnétique est uniquement créé par un aimant permanent, le moment magnétique est purement originaire d'une aimantation  $\mathbf{M}$ . En remplaçant donc l'aimantation équivalente  $\mathbf{M}_J$  par  $\mathbf{M}$ , nous

1. Cependant Dirac a démontré qu'il est possible d'obtenir des monopôles en piégeant des dipôles magnétiques (Dirac, 1931). Ces monopôles sont obtenus expérimentalement à travers un arrangement spécifique des dipôles magnétiques qui les force à induire un champ divergent comme s'ils étaient des monopôles (Castelnovo et al., 2008). Ce type d'arrangement des particules est appelé 'spin ice'.

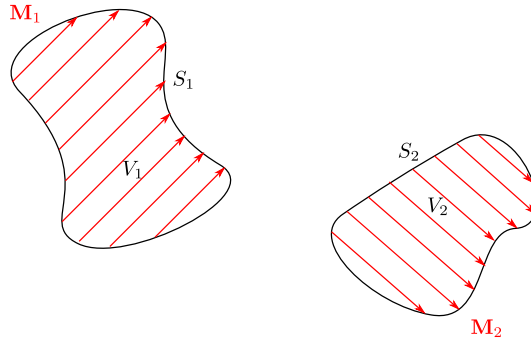


FIGURE 1.3 – Interaction entre deux aimants permanents de géométries quelconques.

obtenons l'expression du champ  $\mathbf{B}_d$  (1.27) créé par un aimant qui s'écrit en fonction du moment magnétique  $\boldsymbol{\mu}$  de l'équation (1.12). Ici, nous pouvons voir que le moment magnétique apparaît dans le terme dipolaire. Pour cette raison, les moments magnétiques sont également appelés *moments dipolaires*. Il a été démontré que ce champ dipolaire est identique au champ magnétique d'une sphère uniformément aimantée (Jackson, 1999). Dans ce cas, l'équation (1.27) est valable dans tout l'espace extérieur à l'aimant.

Concernant les termes d'ordres supérieurs au dipôle dans le développement multipolaire de  $\mathbf{B}$ , les troisième et quatrième termes de (1.16) correspondent aux quadrupôle et octopôle. Nous pouvons voir que lorsque l'ordre du développement augmente de 1, la puissance de  $|\mathbf{x}|$  diminue de 2 :  $|\mathbf{x}|^{-(2p+1)}$  avec l'ordre du développement  $p \in \mathbb{N}^+$ .

Nous nous intéressons désormais à l'énergie d'interaction entre deux aimants dans le cadre de l'approximation dipolaire. L'énergie d'interaction entre une particule ponctuelle de moment magnétique  $\boldsymbol{\mu}$  et un champ magnétique  $\mathbf{B}$  est donnée par (Griffiths, 1999; Jackson, 1999) :

$$E = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}. \quad (1.28)$$

En remplaçant le champ magnétique par celui d'une particule magnétique considérée comme un dipôle (1.27), l'énergie d'interaction magnétique entre deux dipôles de moments magnétiques  $\boldsymbol{\mu}_1$  et  $\boldsymbol{\mu}_2$  s'écrit :

$$E_d = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\boldsymbol{\mu}_2 \cdot \mathbf{e}_{12})(\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{e}_{12}) - \boldsymbol{\mu}_2 \cdot \boldsymbol{\mu}_1), \quad (1.29)$$

où  $r$  est la distance entre les aimants et  $\mathbf{e}_{12}$  est le vecteur unitaire dans la direction de l'aimant 1 vers l'aimant 2. Pour un aimant sphérique, tous les termes du développement multipolaire sont nuls, à l'exception du terme dipolaire. Ainsi (1.29) représente l'énergie exacte pour la sphère. Pour toutes les autres géométries,  $E_d$  n'est qu'une approximation pour  $r \gg 1$ . Dans le paragraphe suivant, nous présentons l'expression de l'énergie d'interaction entre deux aimants de géométries quelconques, valable quelque soit la distance entre les aimants.

## 2.3 Expression de l'énergie d'interaction entre deux aimants permanents

Dans cette section, nous nous plaçons dans le cas où deux aimants permanents de géométries quelconques sont en interaction mutuelle (figure 1.3). Nous considérons que les aimants ont les aimantations uniformes  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{M}_2$  respectivement.

L'expression du champ magnétique créé par l'un de ces aimants est d'abord obtenue à partir des équations de la magnétostatique présentées dans le paragraphe précédent puis une expression générale de l'énergie d'interaction entre ces aimants est déterminée.

### 2.3.1 Champ magnétique créé par un aimant

Les équations fondamentales de la magnétostatique se composent des équations (1.6) et (1.14) :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.30)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (1.31)$$

où  $\mathbf{B}$  est le champ magnétique et  $\mathbf{H}$  est l'excitation magnétique créée par une densité de courant électrique  $\mathbf{J}$ . Dans notre cas, aucune densité de courant n'existe et  $\mathbf{B}$  est uniquement créé par un aimant. On propose deux méthodes pour prendre en compte cette absence de courant : soit en introduisant directement  $\mathbf{J} = 0$ , soit en exprimant la densité de courant équivalente de  $\mathbf{J}$  créée par un aimant dans (1.31). La première méthode utilise le potentiel scalaire magnétique et la deuxième méthode passe par le potentiel vecteur pour le calcul du champ magnétique d'un aimant. Ces deux méthodes de calcul sont présentées dans la suite.

#### Potentiel scalaire magnétique

Pour rappel, en un point de l'espace, le champ magnétique  $\mathbf{B}$ , l'excitation magnétique  $\mathbf{H}$  et l'aimantation  $\mathbf{M}$  sont liées par l'équation (1.13). En posant  $\mathbf{J} = 0$ , l'équation (1.30) devient :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0. \quad (1.32)$$

Dans les aimants permanents, il n'existe pas de densité de courant électrique  $\mathbf{J} = 0$ . Dans ce cas, l'équation (1.31) devient :

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0. \quad (1.33)$$

L'équation (1.33) montre qu'en l'absence de courant électrique, l'excitation magnétique  $\mathbf{H}$  dérive d'un potentiel :

$$\mathbf{H} = -\nabla \Phi, \quad (1.34)$$

où  $\Phi$  est appelé potentiel scalaire magnétique. En injectant (1.34) dans (1.32), une équation de Poisson est obtenue :

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \mathbf{M}. \quad (1.35)$$

Dans le cas d'un aimant de volume  $V$  délimité par la surface  $S$ ,  $\mathbf{M}$  étant alors non nul uniquement dans le volume  $V$ , le système d'équations (1.34) et (1.35) a pour solution analytique :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) dV', \quad (1.36)$$

où  $\nabla'$  est le gradient défini pour  $\mathbf{x}'$ . En appliquant le théorème de divergence à l'équation (1.36), l'expression générale de  $\Phi$  est obtenue :

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS', \quad (1.37)$$

où le vecteur  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal unitaire sortant à la surface  $S$ . À partir du potentiel scalaire magnétique, il est ensuite possible de déduire le champ induit par l'aimant à une position quelconque. En effet, en dehors de l'aimant, nous avons  $\mathbf{M} = 0$  donc l'injection de (1.34) dans (1.32) donne :

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \Phi. \quad (1.38)$$

### Potentiel vecteur

Dans la section 2.2, nous avons montré que le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est le rotationnel du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.39)$$

En exprimant  $\mathbf{H}$  en fonction de  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{M}$  d'après la relation (1.13), l'équation (1.31) s'écrit :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = 0. \quad (1.40)$$

En introduisant l'expression (1.39) de  $\mathbf{B}$ , on a :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \nabla \times \mathbf{M}. \quad (1.41)$$

En utilisant l'identité vectorielle  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ , l'équation précédente s'écrit :

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 (\nabla \times \mathbf{M}). \quad (1.42)$$

Le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  est défini à un gradient près. Nous choisissons ici de le définir tel que  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Ce choix correspond à la jauge de Coulomb (Jackson, 1999). On obtient alors :

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 (\nabla \times \mathbf{M}). \quad (1.43)$$

En faisant l'analogie avec le champ créé par une densité de courant (1.31), l'équation (1.43) peut s'écrire :

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}_M, \quad (1.44)$$

où  $\mathbf{J}_M$  est la densité de courant magnétique effective :

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}. \quad (1.45)$$

Cette grandeur physique représente la densité de courant équivalente d'une aimantation.

Dans le cas d'un aimant de volume  $V$  délimité par la surface  $S$  et d'aimantation  $\mathbf{M}$ , l'équation (1.43) admet pour solution le potentiel vecteur (Jackson, 1999) :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS. \quad (1.46)$$

Finalement, le champ magnétique se déduit du rotationnel de  $\mathbf{A}$  (1.39).

Les deux méthodes de calcul proposées dans ce paragraphe peuvent toutes les deux être utilisées pour déterminer l'expression du champ magnétique d'un aimant permanent. Cependant, l'approche utilisant le potentiel scalaire  $\Phi$  est la plus répandue car elle permet généralement de simplifier les calculs. En effet, le calcul du champ magnétique à partir du potentiel vecteur nécessite le calcul des 3 composantes vectorielles puis de son rotationnel alors qu'avec la première méthode, il suffit de calculer le potentiel scalaire  $\Phi$  et son gradient pour avoir le champ magnétique. Mais le calcul du champ magnétique à partir de  $\mathbf{A}$  est préféré dans certains cas. Par exemple, pour formuler l'énergie d'interaction entre aimants en utilisant la transformée de Fourier en espace (Beleggia and De Graef, 2003), le potentiel vecteur a été utilisé pour le calcul du champ magnétique afin de simplifier le passage en séries de Fourier. Dans le cadre de cette thèse, la méthode de calcul basée sur le potentiel scalaire est utilisée pour le calcul de l'énergie d'interaction entre deux aimants car cette dernière peut être exprimée directement en fonction

de  $\Phi$  à l'aide du théorème de la divergence. L'approche avec le potentiel vecteur sera exploitée au troisième chapitre, pour le calcul de la force électromotrice induite dans une spire par le mouvement d'aimants. Dans le paragraphe suivant, nous présentons la formulation de l'expression générale de l'énergie d'interaction entre deux aimants en fonction du potentiel scalaire magnétique d'un aimant.

### 2.3.2 Énergie d'interaction

L'énergie d'interaction magnétique (1.28) est exprimée pour une particule ponctuelle. Dans le cas d'un aimant de volume  $V$  et d'aimantation  $\mathbf{M}$ , l'énergie d'interaction avec un champ magnétique  $\mathbf{B}$  s'écrit (Jackson, 1999) :

$$E = - \int_V \mathbf{M}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) dV. \quad (1.47)$$

Cette énergie représente le travail nécessaire pour tourner l'aimant de sorte que  $\mathbf{M}$  soit dans le même sens que  $\mathbf{B}$ . En remplaçant  $\mathbf{B}$  par le champ créé par un aimant, nous arrivons à l'énergie d'interaction entre deux aimants.

Nous notons  $S_1$  et  $S_2$  les surfaces délimitant respectivement les volumes  $V_1$  et  $V_2$  des aimants 1 et 2 (figure 1.3). Soient  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$  et  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  respectivement les champs magnétiques et les potentiels scalaires magnétiques des aimants 1 et 2. L'énergie d'interaction entre les deux aimants se déduit de (1.47) :

$$E = - \int_{V_2} \mathbf{M}_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}_1(\mathbf{x}) dV = - \int_{V_1} \mathbf{M}_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}_2(\mathbf{x}) dV. \quad (1.48)$$

Cette expression de l'énergie représente le travail nécessaire pour déplacer un aimant vers l'autre.

D'après (1.38), nous avons  $\mathbf{B}_1(\mathbf{x}) = -\mu_0 \nabla \Phi_1$ . L'équation (1.48) s'écrit donc :

$$E = \mu_0 \int_{V_2} \mathbf{M}_2(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Phi_1(\mathbf{x}) dV. \quad (1.49)$$

L'application du théorème de la divergence à (1.49) donne :

$$E = \mu_0 \left( \int_{S_2} \Phi_1(\mathbf{x}) \mathbf{M}_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{V_2} \Phi_1(\mathbf{x}) (\nabla \cdot \mathbf{M}_2(\mathbf{x})) dV \right). \quad (1.50)$$

Si l'aimantation  $\mathbf{M}_2$  est uniforme, l'intégrale volumique de l'équation précédente s'annule :

$$E = \mu_0 \int_{S_2} \Phi_1(\mathbf{x}) \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.51)$$

L'équation (1.51) est l'expression générale de l'énergie d'interaction entre deux aimants. Il est à noter que si l'aimantation  $\mathbf{M}_1$  est elle aussi uniforme, l'expression de  $\Phi_1$  de (1.38) peut être simplifiée. Dans la section suivante, nous traitons le cas particulier de deux cylindres aimantés diamétralement.

## 3 Cas des aimants cylindriques

Dans cette section, nous établissons l'expression de l'énergie d'interaction magnétique entre deux aimants cylindriques identiques. Le problème est représenté dans la figure 1.4. Les deux cylindres notés  $c_1$  et  $c_2$  ont un diamètre  $d$  et une hauteur  $h$ . La

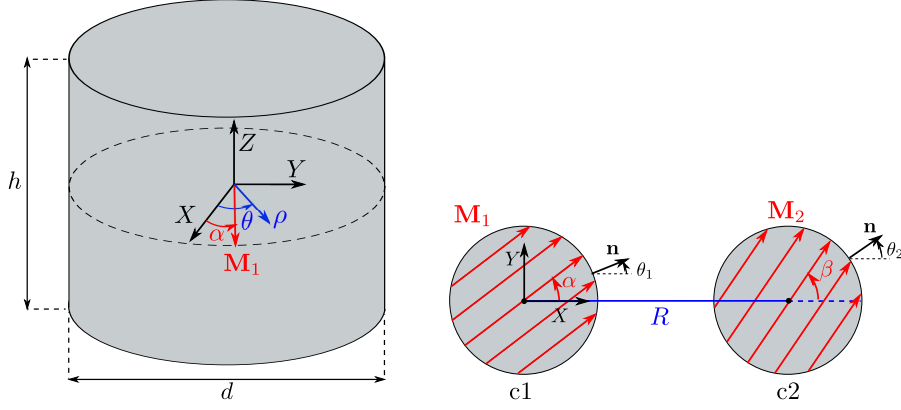


FIGURE 1.4 – Représentation de l'aimant cylindrique étudié dans le repère cylindrique et schéma de deux cylindres en interaction.

surface et le volume de  $c_1$  et  $c_2$  sont notées respectivement  $S_1$ ,  $V_1$  et  $S_2$ ,  $V_2$ . Ces cylindres sont aimantés uniformément selon diamètre :  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{M}_2$  respectivement. Nous notons les coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, Z)$ . Les aimants sont placés de sorte que le centre de  $c_1$  soit à l'origine du repère et que celui de  $c_2$  soit à la position  $(R, 0, 0)$ . Ici, les cylindres sont à la même hauteur  $Z = 0$ .

L'énergie d'interaction magnétique entre  $c_1$  et  $c_2$  est exprimée en fonction du potentiel scalaire magnétique donné par l'équation (1.37). Dans ce problème, les aimantations sont dans le plan  $(Oxy)$  et l'aimantation de  $c_1$  est  $\mathbf{M}_1 = M(\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y)$  où  $\alpha$  est la direction de l'aimantation relative au segment reliant les centres de  $c_1$  et  $c_2$ . L'équation (1.37) s'écrit dans ce cas particulier :

$$\Phi_1^\alpha(X, Y, Z) = \frac{Md}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\cos(\alpha - \theta')}{\sqrt{\left(X - \frac{d}{2} \cos \theta'\right)^2 + \left(Y - \frac{d}{2} \sin \theta'\right)^2 + (Z - Z')^2}} dZ' d\theta'. \quad (1.52)$$

Dans l'équation (1.52),  $\Phi_1$  est noté  $\Phi_1^\alpha$  afin de montrer la dépendance de l'énergie à l'égard de  $\alpha$  dans la suite. D'après (1.51), l'énergie d'interaction magnétique entre les aimants  $c_1$  et  $c_2$  s'écrit en fonction de  $\Phi_1^\alpha$  :

$$E(R, \alpha, \beta) = \mu_0 \int_{S_2} \Phi_1^\alpha \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{n} dS, \quad (1.53)$$

où  $\mathbf{M}_2(\beta) = M(\cos \beta \mathbf{e}_x + \sin \beta \mathbf{e}_y)$  est l'aimantation de  $c_2$ .

Toutes les coordonnées du repère, y compris les variables d'intégration et la distance entre les aimants sont adimensionnées par le diamètre des cylindres sauf  $Z$  qui est adimensionné par  $h$  :

$$X = dx, \quad Y = dy, \quad R = dr, \quad Z = hz. \quad (1.54)$$

Le potentiel  $\Phi_1^\alpha$  et l'énergie  $E$  sont adimensionnés comme suit :

$$\Phi_1^\alpha = \frac{Md}{\pi} \phi_1^\alpha, \quad E = \frac{\mu_0 M^2 d^2 h}{\pi} \mathcal{E}. \quad (1.55)$$

L'adimensionnement fait apparaître le rapport d'aspect des cylindres  $\lambda = \frac{d}{h}$  dans l'expression du potentiel adimensionné  $\phi_1^\alpha$  :

$$\phi_1^\alpha(x, y, z) = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\cos(\alpha - \theta')}{\sqrt{\lambda^2 \left(x - \frac{\cos \theta'}{2}\right)^2 + \lambda^2 \left(y - \frac{\sin \theta'}{2}\right)^2 + (z - z')^2}} dz' d\theta'. \quad (1.56)$$



L'énergie adimensionnée  $\mathcal{E}$  s'écrit :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\alpha - \theta') \cos(\beta - \theta) \times \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2\lambda^2(2r^2 + 1 + 2r \cos \theta - 2r \cos \theta' - \cos(\theta - \theta')) + 4(z' - z)^2}} dz' dz d\theta' d\theta . \quad (1.57)$$

En calculant analytiquement les intégrales selon  $z$  et  $z'$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{4} \cos \alpha \cos \beta \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \cos \theta \cos \theta' \\ &\times \left[ \ln \left( 1 + \sqrt{1 + \lambda^2 \left( r^2 + \frac{1}{2} + r \cos \theta - r \cos \theta' - \frac{1}{2} \cos(\theta - \theta') \right)} \right) \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \ln \left( 2r^2 + 1 + 2r \cos \theta - 2r \cos \theta' - \frac{1}{2} \cos(\theta - \theta') \right) \\ &\quad - \sqrt{1 + \lambda^2 \left( r^2 + \frac{1}{2} + r \cos \theta - r \cos \theta' - \frac{1}{2} \cos(\theta - \theta') \right)} \\ &\quad \left. + \lambda \sqrt{\left( r^2 + \frac{1}{2} + r \cos \theta - r \cos \theta' - \frac{1}{2} \cos(\theta - \theta') \right)} \right] d\theta' d\theta \\ &+ \frac{1}{4} \sin \alpha \sin \beta \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta \sin \theta' \\ &\times \left[ \ln \left( 1 + \sqrt{1 + \lambda^2 \left( r^2 + \frac{1}{2} + r \cos \theta - r \cos \theta' - \frac{1}{2} \cos(\theta - \theta') \right)} \right) \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \ln \left( 2r^2 + 1 + 2r \cos \theta - 2r \cos \theta' - \cos(\theta - \theta') \right) \\ &\quad - \sqrt{1 + \lambda^2 \left( r^2 + \frac{1}{2} + r \cos \theta - r \cos \theta' - \frac{1}{2} \cos(\theta - \theta') \right)} \\ &\quad \left. + \lambda \sqrt{\left( r^2 + \frac{1}{2} + r \cos \theta - r \cos \theta' - \frac{1}{2} \cos(\theta - \theta') \right)} \right] d\theta' d\theta. \end{aligned} \quad (1.58)$$

L'expression précédente a une singularité pour  $r = 1$ ,  $\theta = \pi$  [ $\pi$ ] et  $\theta' = 0$  [ $2\pi$ ]. Cette singularité est liée à l'intégrale double d'une fonction logarithmique dont le terme à l'intérieur n'est pas strictement positif. Cela concerne les deux intégrales doubles suivantes qui sont calculées analytiquement afin d'enlever la condition de validité de (1.58) :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \cos \theta \cos \theta' \ln \left( 2r^2 + 1 + 2r \cos \theta - 2r \cos \theta' - \cos(\theta - \theta') \right) d\theta' d\theta &= \frac{\pi^2 \lambda^2}{4r^2}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta \sin \theta' \ln \left( 2r^2 + 1 + 2r \cos \theta - 2r \cos \theta' - \cos(\theta - \theta') \right) d\theta' d\theta &= -\frac{\pi^2 \lambda^2}{4r^2}. \end{aligned} \quad (1.59)$$

En remplaçant les intégrales correspondantes par les équations précédentes, l'expression

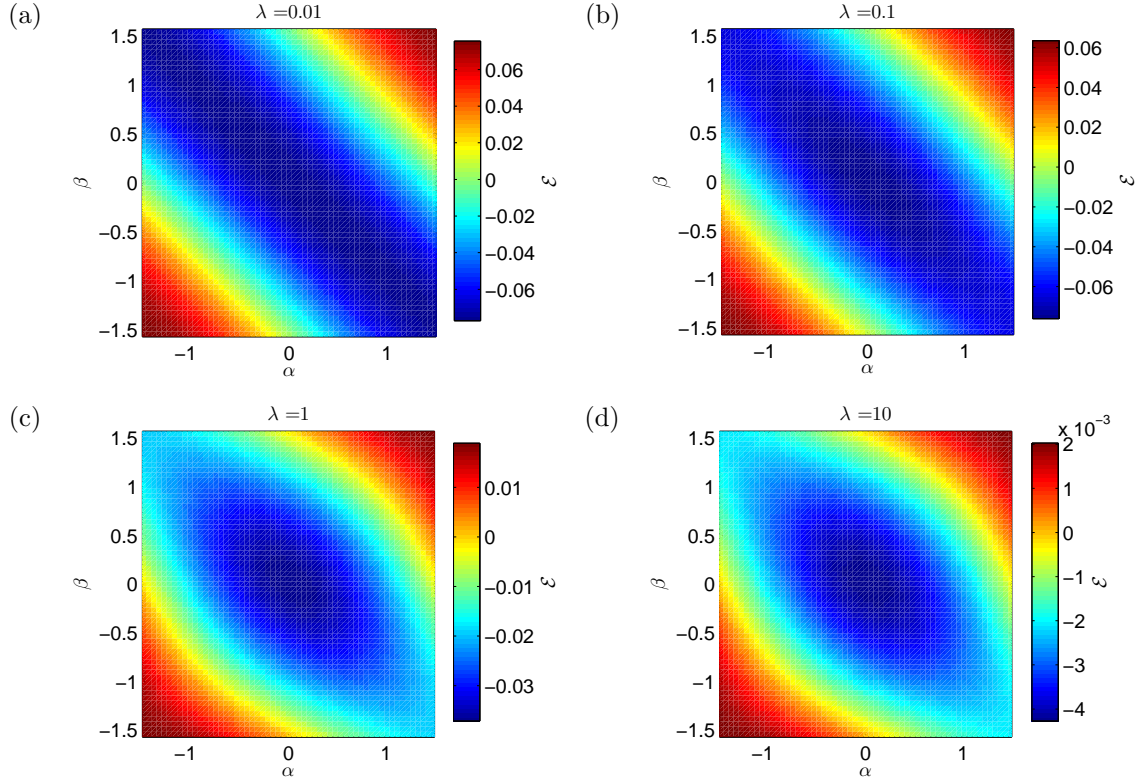


FIGURE 1.5 – Variation de l'énergie entre deux aimants cylindriques en contact en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  pour (a)  $\lambda = 0.01$ , (b)  $\lambda = 0.1$ , (c)  $\lambda = 1$  et (d)  $\lambda = 10$ .

de l'énergie d'interaction entre deux aimants cylindriques en contact valable pour  $r \geq 1$  est finalement obtenue :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} = & \frac{1}{4} \cos \alpha \cos \beta \left[ -\frac{\pi^2}{8r^2} \right. \\
 & + \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \cos \theta \cos \theta' \ln \left( 1 + \sqrt{1 + \lambda^2 \left( r^2 + \frac{1}{2} + r \cos \theta - r \cos \theta' - \frac{1}{2} \cos(\theta - \theta') \right)} \right) d\theta' d\theta \\
 & - \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \cos \theta \cos \theta' \sqrt{1 + \lambda^2 \left( r^2 + \frac{1}{2} + r \cos \theta - r \cos \theta' - \frac{1}{2} \cos(\theta - \theta') \right)} d\theta' d\theta \\
 & \left. + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \cos \theta \cos \theta' \sqrt{r^2 + \frac{1}{2} + r \cos \theta - r \cos \theta' - \frac{1}{2} \cos(\theta - \theta')} d\theta' d\theta \right] \\
 & + \frac{1}{4} \sin \alpha \sin \beta \left[ \frac{\pi^2}{8r^2} \right. \\
 & + \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta \sin \theta' \ln \left( 1 + \sqrt{1 + \lambda^2 \left( r^2 + \frac{1}{2} + r \cos \theta - r \cos \theta' - \frac{1}{2} \cos(\theta - \theta') \right)} \right) d\theta' d\theta \\
 & - \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta \sin \theta' \sqrt{1 + \lambda^2 \left( r^2 + \frac{1}{2} + r \cos \theta - r \cos \theta' - \frac{1}{2} \cos(\theta - \theta') \right)} d\theta' d\theta \\
 & \left. + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta \sin \theta' \sqrt{r^2 + \frac{1}{2} + r \cos \theta - r \cos \theta' - \frac{1}{2} \cos(\theta - \theta')} d\theta' d\theta \right]
 \end{aligned}
 \tag{1.60}$$

Dans l'expression (1.60), le rapport d'aspect  $\lambda$  est le seul paramètre. Dans le paragraphe suivant, la variation de l'énergie à une valeur de  $r$  fixe en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  est étudiée.

La figure 1.5 représente l'énergie dans le plan  $(\alpha, \beta)$  pour  $r = 1$  et différentes

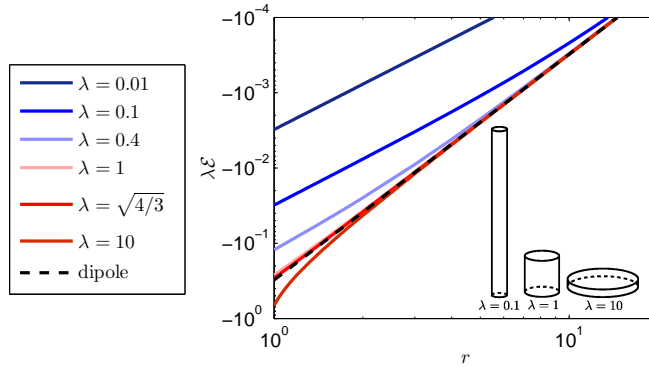


FIGURE 1.6 – Énergie d'interaction magnétique entre deux aimants cylindriques et dipolaire pour  $\alpha = \beta = 0$  en fonction de la distance entre les aimants adimensionnée  $r$  pour différents  $\lambda$ .

valeurs de  $\lambda$ . Lorsque  $\lambda$  décroît, le puits de potentiel s'aplatit. Sur ces quatre figures, le minimum de  $\mathcal{E}$  est localisée en  $\alpha = \beta = 0$ , ce qui signifie que deux aimants sont à l'équilibre statique lorsque leurs aimantations sont parallèles à la ligne joignant les centres des aimants et orientés dans le même sens. Ce minimum de potentiel est valable pour  $r \geq 1$  et cela se vérifie à partir de la dérivée première de l'expression (1.60) par rapport à  $\alpha$  et  $\beta$  qui s'annule pour  $\alpha = \beta = 0$  quelque soit  $r$ . Le même type de résultat avec une amplitude moins importante de  $\mathcal{E}$  est obtenu pour d'autres valeurs de  $r > 1$ . Ces données sont utilisées dans la suite lors de l'approximation quadratique de l'énergie d'interaction entre deux aimants cylindriques.

L'énergie (1.60) est obtenue sans passer par le développement multipolaire. Dans la section 2.2, nous avons montré que l'approximation dipolaire est valable à grande distance entre aimants. Ce qui veut dire que lorsque  $r$  augmente, l'énergie doit tendre vers l'énergie d'interaction dipôle-dipôle (1.29). Dans le paragraphe suivant, nous discutons de la variation de l'énergie en fonction de  $r$  et  $\lambda$  et la comparons à celle de l'énergie d'interaction calculée avec l'approximation dipolaire.

### Comparaison avec l'énergie d'interaction dipôle-dipôle

L'énergie d'interaction adimensionnée de (1.60) est calculée avec  $\alpha = \beta = 0$  pour différentes valeurs de  $\lambda$  et différentes distances adimensionnées entre les deux aimants  $r$ . L'énergie d'interaction dipolaire est également calculée. L'adimensionnement de cette énergie dipolaire est réalisé selon (1.55) et l'énergie dipolaire adimensionnée  $\mathcal{E}_d$  s'écrit :

$$\mathcal{E}_d = -\frac{\pi^2}{64\lambda r^3} (2 \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta). \quad (1.61)$$

Sur la figure 1.6,  $\lambda\mathcal{E}$  et  $\lambda\mathcal{E}_d$  sont tracés en fonction de  $r$  pour différentes valeurs du rapport d'aspect  $\lambda$ . Les énergies ont été multipliées par  $\lambda$ , car ainsi les tracés correspondant à l'énergie dipolaire se retrouvent sur une unique courbe.

Les résultats de la figure 1.6 montrent que l'énergie d'interaction magnétique tend vers l'approximation dipolaire lorsque  $r$  augmente. Cette convergence est d'autant plus rapide que  $\lambda$  est proche de  $\sqrt{4/3}$ . Nous discutons de cette valeur particulière dans la section suivante.

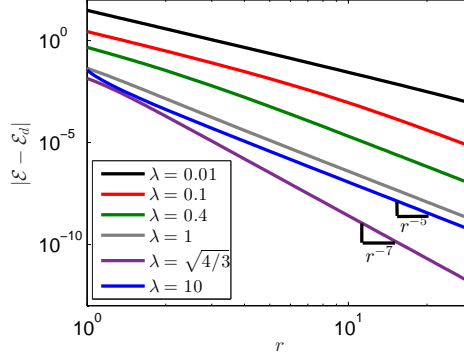


FIGURE 1.7 – Différence absolue entre l'énergie d'interaction magnétique et dipolaire en fonction de  $r$  pour différents rapport d'aspects de cylindres.

### Vitesse de convergence et influence du rapport d'aspect

Pour étudier plus précisément l'influence de  $\lambda$  sur la convergence de l'énergie vers l'énergie dipolaire, la différence absolue  $|\mathcal{E} - \mathcal{E}_d|$  est calculée pour les mêmes valeurs de  $\lambda$  que sur la figure 1.6. Les résultats sont tracés en fonction de  $r$  sur la figure 1.7. On voit que la différence absolue entre les énergies multipolaire et dipolaire décroît suivant  $r^{-5}$  pour toutes les valeurs de  $\lambda$  sauf pour  $\lambda = \sqrt{4/3}$ . Une décroissance de  $r^{-7}$  est observée pour cette valeur du rapport d'aspect. Ces vitesses de convergence correspondent aux termes multipolaires d'ordre supérieur. À la section 2.2, nous avons en effet vu que chaque pôle du développement multipolaire est défini en fonction de la puissance de la distance  $r^{-(2p+1)}$  avec  $p \in \mathbb{N}^+$ . En se basant sur la définition des multipôles, les termes multipolaires qui ont pour facteur  $r^{-5}$  et  $r^{-7}$  sont respectivement les quadropôle et octopôle (cf. eq. 1.16). Comme l'ont démontré [Petruska and Abbott \(2013\)](#), pour  $\lambda = \sqrt{4/3}$  le terme quadropolaire s'annule et cette absence engendre une convergence plus rapide que pour les autres valeurs de  $\lambda$ . La décroissance est donnée par le terme octopolaire, soit  $r^{-7}$ . Nous notons  $\lambda_{dip}$  le rapport d'aspect pour lequel le quadropôle s'annule et sa variation en fonction de  $r$  est à présent étudiée.

### Variation de $\lambda_{dip}$ en fonction de la distance entre les aimants

Pour avoir une idée sur la variation de  $\lambda_{dip}$  en fonction de  $r$ , la différence relative est calculée. La différence relative représente la différence relative de l'énergie totale par rapport à l'énergie dipolaire. En la calculant pour différents rapports d'aspect de cylindres, nous pouvons localiser  $\lambda_{dip}$  pour une valeur de  $r$  en cherchant le minimum de la différence relative. Cette dernière est définie par :

$$\Delta = \frac{|\mathcal{E} - \mathcal{E}_d|}{|\mathcal{E}_d|}. \quad (1.62)$$

Sur la figure 1.8,  $\Delta$  est représenté en fonction de  $\lambda$  pour  $r = 2, 3, 15$ . D'après cette figure, pour chaque valeur de  $r$ , la différence relative admet un minimum différent correspondant à  $\lambda_{dip}$ . Nous pouvons également remarquer que lorsque  $r$  augmente, le minimum de  $\Delta$  se déplace vers  $\lambda = \sqrt{4/3}$ . Afin de vérifier la convergence de  $\lambda_{dip}(r)$  vers  $\sqrt{4/3}$ , les minimums de  $\Delta$  sont localisés numériquement en utilisant la méthode de Nelder-Mead qui est une méthode par itération basée sur l'algorithme du simplexe

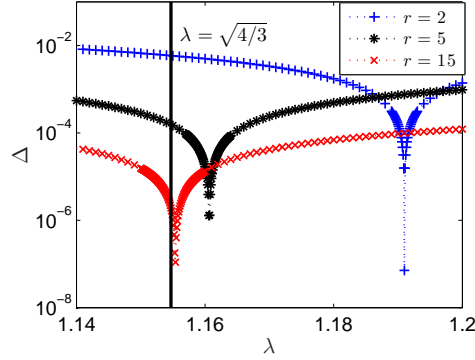


FIGURE 1.8 – Différences relatives entre les énergies d'interaction magnétique totale et dipolaire pour  $r = 2, 5, 15$  en fonction de  $\lambda$ .

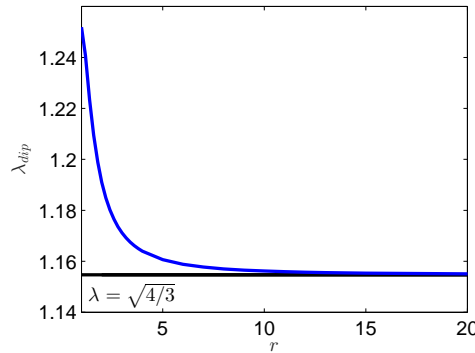


FIGURE 1.9 – Rapport d'aspect qui minimise l'écart entre l'énergie et l'énergie dipolaire en fonction de la distance entre les aimants

(Nelder and Mead, 1965). La tolérance de  $10^{-6}$  sur  $\Delta$  est imposée pour la recherche des minimums.

La figure 1.9 représente  $\lambda_{dip}(r)$  selon la distance adimensionnée entre les aimants. Pour ces valeurs de  $\lambda_{dip}$ , la différence relative est de l'ordre de  $10^{-7}$ . Sur cette figure,  $\lambda_{dip}$  change selon la distance et il tend vers la valeur limite de  $\sqrt{4/3}$ . Dans la mesure où  $\Delta$  est très faible en  $\lambda_{dip}$ , nous pouvons confirmer que les cylindres de  $\lambda = \sqrt{4/3}$  peuvent être considérés comme des dipôles en champ lointain. En champ proche, d'après les résultats de la figure 1.9, la valeur de  $\lambda$  pour laquelle le cylindre est magnétiquement similaire à un dipôle peut être déterminée pour une distance quelconque. Cela peut être utile dans la conception d'un système composé d'aimants cylindriques. En effet, en prenant les cylindres de  $\lambda_{dip}$ , l'approximation dipolaire peut être faite afin d'utiliser l'expression de l'énergie d'interaction dipolaire entre aimants. Cela faciliterait la modélisation et l'étude de l'interaction présente dans le système.

Dans le paragraphe précédent, nous avons formulé l'expression de l'énergie d'interaction magnétique entre deux aimants cylindriques (1.60). Dans la section suivante, nous présentons le développement de Taylor à l'ordre 2 de l'expression (1.60) donnant une expression de l'énergie que nous utilisons lors de la modélisation de la dynamique d'une chaîne d'aimants.

## 4 Approximation quadratique de l'énergie d'interaction

Dans la section précédente, l'énergie d'interaction magnétique entre deux cylindres aimantés diamétralement a été exprimée en fonction de la distance les séparant et des directions de leurs aimantations (eq. 1.60).

Nous avons montré dans la section 3 que l'énergie d'interaction entre deux aimants cylindriques est minimale lorsque leurs aimantations sont parallèles et ont le même sens. Cette configuration est donc la plus stable à une distance entre aimants donnée. Autour de cette configuration, nous pouvons effectuer un développement de Taylor de l'énergie entre deux aimants cylindriques  $\mathcal{E}$ . Celui-ci s'écrit à l'ordre 2 en  $(r, \alpha, \beta) = (\ell, 0, 0)$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(r, \alpha, \beta) = \tilde{\mathcal{E}}(r, \alpha, \beta) + o(\mathbf{a}^2) &= \mathcal{E}(\ell, 0, 0) + \mathbf{a} \nabla \mathcal{E}(\ell, 0, 0) \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{a} \mathbf{H} [\mathcal{E}(\ell, 0, 0)] \mathbf{a}^T + o(\mathbf{a}^2), \end{aligned} \quad (1.63)$$

où  $\mathbf{a} = (r - \ell, \alpha, \beta)$ ,  $\nabla$  est le gradient selon  $(r, \alpha, \beta)^T$  et  $\mathbf{H}$  est la matrice hessienne de l'énergie. Les éléments du vecteur colonne  $\nabla \mathcal{E}(\ell, 0, 0)$  et de la matrice  $\mathbf{H} [\mathcal{E}(\ell, 0, 0)]$  sont respectivement notés  $D_i$  et  $H_{ij}$  :

$$D_i(\ell) = \left. \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_i} \right|_{(\ell, 0, 0)}, \quad H_{ij}(\ell) = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{(\ell, 0, 0)}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \forall i, j \in [1, 3] \\ (q_1, q_2, q_3) = (r, \alpha, \beta) \end{cases} \quad (1.64)$$

où  $i$  et  $j$  sont les indices de ligne et colonne et  $H_{ij} = H_{ji}$ . Dans la suite, les expressions des coefficients du développement de Taylor sont présentées et l'équation (1.63) est simplifiée.

### 4.1 Coefficients du développement de Taylor

D'après l'expression (1.60) de l'énergie d'interaction entre deux aimants, nous avons :

$$D_2 = D_3 = 0, \quad H_{12} = H_{13} = 0, \quad H_{11} = H_{22} = -\mathcal{E}(\ell, 0, 0). \quad (1.65)$$

Le coefficient  $H_{23}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} H_{23} &= \frac{1}{4} \left[ \frac{\pi^2}{8\ell^2} + \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta \sin \theta' \ln \left( 2 + \sqrt{4 + c(\ell, \theta, \theta')} \right) d\theta' d\theta \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta \sin \theta' \sqrt{4 + c(\ell, \theta, \theta')} d\theta' d\theta + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta \sin \theta' \frac{1}{2} \sqrt{c(\ell, \theta, \theta')} d\theta' d\theta \right]. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Finalement, l'expression développée (1.63) peut être exprimée uniquement en fonction des 3 coefficients  $D_1$ ,  $H_{11}$  et  $H_{23}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}(r, \alpha, \beta) &= \mathcal{E}(\ell, 0, 0) + (r - \ell) D_1(\ell) + \frac{1}{2} (r - \ell)^2 H_{11}(\ell) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2) \mathcal{E}(\ell, 0, 0) + \alpha \beta H_{23}(\ell). \end{aligned} \quad (1.67)$$

Ce développement de l'énergie n'est valable que pour des aimants cylindriques. Dans (1.67), les coefficients  $D_1$  et  $H_{11}$  sont inconnus. Dans le paragraphe suivant, ces coefficients sont déterminés numériquement par la méthode des moindres carrés et le calcul numérique du coefficient  $H_{23}$  est présenté.

## 4.2 Méthode de calcul des coefficients $D_1$ et $H_{11}$

Les coefficients  $D_1(\ell)$ ,  $H_{11}(\ell)$ ,  $H_{23}(\ell)$  et l'énergie  $\mathcal{E}(\ell, 0, 0)$  de l'expression (1.67) sont calculés numériquement. D'après (1.60) et (1.66),  $\mathcal{E}(\ell, 0, 0)$  et  $H_{23}(\ell)$  sont constitués d'intégrales doubles. Ces intégrales sont estimées par la méthode de Simpson qui est une méthode de calcul numérique d'intégrale d'ordre 4 consistant à discrétiser l'intervalle d'intégration puis à approximer la fonction à intégrer par une interpolation polynomiale quadratique sur chacun des sous-intervalles. L'intégration s'effectue ensuite sur tous les sous-intervalles et l'intégrale complète est obtenue en sommant toutes les sous-intégrales (cf. Annexe B).

Les coefficients de Taylor  $D_1(\ell)$  et  $H_{11}(\ell)$  sont eux déterminés par la méthode des moindres carrés. Cette dernière consiste à résoudre le problème de minimisation du carré de l'erreur d'approximation  $\mathcal{E} - \tilde{\mathcal{E}}$  en fonction de  $D_1(\ell)$  et  $H_{11}(\ell)$  pour une série de  $N$  différentes valeurs de  $r$  et  $\alpha = \beta = 0$  :

$$\min_{D_1(\ell), H_{11}(\ell)} \sum_{k=1}^N \left( \mathcal{E}(r_k, 0, 0) - \tilde{\mathcal{E}}(r_k, 0, 0) \right)^2, \quad (1.68)$$

où  $k$  est l'indice correspondant à la  $k^{\text{ième}}$  valeur de  $r$  de la série de  $N$  valeurs, que nous notons  $r_k$ . Ce problème de minimisation revient à résoudre les équations :

$$\frac{\partial \sum_{k=1}^N (\mathcal{E}_k - \tilde{\mathcal{E}}_k)^2}{\partial D_1(\ell)} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \sum_{k=1}^N (\mathcal{E}_k - \tilde{\mathcal{E}}_k)^2}{\partial H_{11}(\ell)} = 0. \quad (1.69)$$

En remplaçant  $\tilde{\mathcal{E}}$  par (1.63), le problème se présente sous forme d'un système à deux équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} -2\mathcal{E}(\ell, 0, 0) \sum_{k=1}^N (r_k - \ell) + 2 \left( 1 - \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2) \right) \mathcal{E}(\ell, 0, 0) \sum_{k=1}^N (r_k - \ell) \\ + 2D_1(\ell) \sum_{k=1}^N (r_k - \ell)^2 + H_{11}(\ell) \sum_{k=1}^N (r_k - \ell)^3 + 2\alpha\beta H_{23}(\ell) \sum_{k=1}^N (r_k - \ell) = 0 \\ -\mathcal{E}(\ell, 0, 0) \sum_{k=1}^N (r_k - \ell)^2 + \mathcal{E}(\ell, 0, 0) \left( 1 - \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2) \right) \sum_{k=1}^N (r_k - \ell)^2 \\ + D_1(\ell) \sum_{k=1}^N (r_k - \ell)^3 + H_{11}(\ell) \sum_{k=1}^N (r_k - \ell)^4 + \alpha\beta H_{23}(\ell) \sum_{k=1}^N (r_k - \ell)^2 = 0. \end{array} \right. \quad (1.70)$$

À partir de ce système, les coefficients  $D_1(\ell)$  et  $H_{11}(\ell)$  sont donnés par les équations

suivantes :

$$\begin{aligned}
 H_{11} &= \frac{1}{\sum_{k=1}^N (r_k - \ell)^4} \left( \frac{\sum_{k=1}^N (r_k - \ell)^2}{\sum_{k=1}^N (r_k - \ell)^2 - \left[ \sum_{k=1}^N (r_k - \ell)^3 \right]^2} \right) \\
 &\times \left[ 2 \sum_{k=1}^N \left( (r_k - \ell)^2 (\mathcal{E}(r_k, 0, 0) - \mathcal{E}(\ell, 0, 0)) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sum_{k=1}^N (r_k - \ell)^3}{\sum_{k=1}^N 2(r_k - \ell)^2} \left[ \sum_{k=1}^N ((r_k - \ell) (\mathcal{E}(r_k, 0, 0) - \mathcal{E}(\ell, 0, 0))) \right] \right] \quad (1.71) \\
 D_1 &= \frac{\sum_{k=1}^N \mathcal{E}_k(r_k - \ell) - \mathcal{E}(\ell, 0, 0) \sum_{k=1}^N (r_k - \ell) - \frac{1}{2} H_{11}(\ell) \sum_{k=1}^N (r_k - \ell)^3}{\sum_{k=1}^N (r_k - \ell)^2}.
 \end{aligned}$$

Pour une valeur donnée du rapport d'aspect des cylindres  $\lambda$  et de la distance entre aimants  $\ell$ ,  $D_1(\ell)$  et  $H_{11}(\ell)$  sont calculés de la manière suivante. Pour la méthode des moindres carrés, nous avons fait le choix de poser 5 valeurs de  $r_k$  suffisantes pour retrouver la forme de  $\mathcal{E}$  suivant  $r$  en  $(\ell, 0, 0)$  :

$$r \in \{\ell, \ell \pm \epsilon, \ell \pm 2\epsilon\}, \quad (1.72)$$

où  $\epsilon \ll 1$  est le pas que nous fixons. Pour les calculs numériques, chaque intégrale est discrétisée en 1000 pas de discrétisation constants. Ce paramétrage est choisi car la valeur numérique de l'intégrale converge vers la valeur issue du calcul analytique lorsque le nombre de points de discrétisation augmente et la différence absolue entre le calcul de l'énergie avec  $N$  et  $N + 1$  points de discrétisation est de l'ordre de  $10^{-15}$  pour  $n \sim 1000$ , ce qui montre que le calcul est suffisamment convergé. Dans le cas où les aimants sont en contact, c'est à dire pour  $\ell = 1$ , nous avons fixé la plage de  $r$  suivante :

$$r \in \{\ell, \ell + \epsilon, \ell + 2\epsilon, \ell + 3\epsilon, \ell + 4\epsilon\}. \quad (1.73)$$

La figure 1.10 représente l'approximation quadratique et les résultats de calculs directs de l'énergie pour les 5 valeurs de  $r$ . Pour le calcul à  $\ell = 1$ ,  $\epsilon$  est fixé à 0.001 et pour  $\ell = 3$ , le pas est fixé à 0.025. Dans les deux cas, nous avons trouvé une erreur relative moyenne de l'ordre de  $10^{-6}$  sur les 5 points. Nous pouvons donc confirmer que l'approximation quadratique de l'énergie donne une prédiction correcte avec ce paramétrage, qui est conservé pour les calculs des coefficients d'autres valeurs de  $\ell$ .

### 4.3 Interprétation des coefficients du développement

Dans l'expression (1.67), il n'existe finalement que quatre coefficients non nuls :  $D_1$ ,  $H_{11}$ ,  $H_{22}$  et  $H_{23}$ . Chacun de ces coefficients a une signification physique différente. Le coefficient linéaire  $D_1$  est la dérivée de l'énergie adimensionnée  $\mathcal{E}$  par rapport à  $r$  en  $(\ell, 0, 0)$ . Ce coefficient est donc égal à la norme de la force d'attraction adimensionnée, exercée entre les cylindres. La norme de la force est ainsi donnée par :

$$F_r = \frac{\mu_0 M^2 dh}{\pi} D_1. \quad (1.74)$$



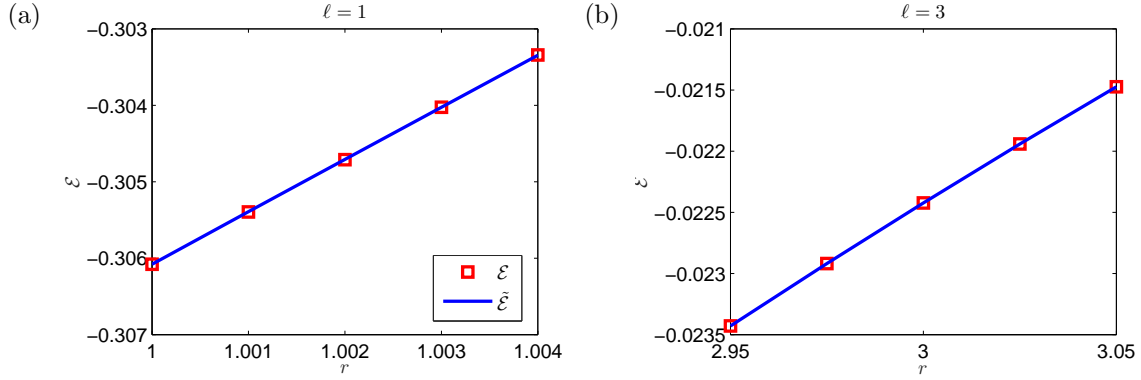


FIGURE 1.10 – Comparaison entre le calcul direct de l'énergie  $\mathcal{E}$  et l'approximation quadratique de l'énergie  $\tilde{\mathcal{E}}$  pour (a)  $\lambda = 0.4$ ,  $\ell = 1$  et (b)  $\lambda = 0.4$ ,  $\ell = 3$ .

Le coefficient quadratique  $H_{11}$  est la dérivée seconde de  $\mathcal{E}$  par rapport à  $r$  en  $(\ell, 0, 0)$ . Ce coefficient quadratique correspond donc à la variation de la force suivant la distance entre  $c_1$  et  $c_2$ .

Le moment mécanique engendré par  $\mathbf{B}_2$  sur  $c_1$  est donné par [JACKSON \(1999\)](#) :

$$\boldsymbol{\tau}_{21} = \int_{V_1} \mathbf{M}_1 \times \mathbf{B}_2 dV_1 . \quad (1.75)$$

L'énergie d'interaction entre  $c_1$  et  $c_2$  étant donnée par (1.48), on remarque qu'avec  $\mathbf{M}_1 = \cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \beta \mathbf{e}_y$  :

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = -\boldsymbol{\tau}_{21} \cdot \mathbf{e}_z . \quad (1.76)$$

On a alors :

$$\boldsymbol{\tau}_{21} = \frac{\mu_0 M^2 d^2 h}{\pi} D_2 . \quad (1.77)$$

Le coefficient  $D_2$  représente donc le moment mécanique adimensionné.

Les coefficients  $H_{22}$  et  $H_{23}$  s'écrivent en fonction de  $D_2$  :

$$H_{22}(\ell) = \frac{\partial D_2(\ell)}{\partial \alpha} , \quad H_{23}(\ell) = \frac{\partial D_2(\ell)}{\partial \beta} . \quad (1.78)$$

Le coefficient  $H_{22}$  représente donc la variation du moment sans dimension exercé par  $c_2$  sur  $c_1$  par rapport à  $\alpha$  et  $H_{23}$  est la variation de ce moment par rapport à  $\beta$ . Dans la section suivante, la variation de ces coefficients en fonction de  $\ell$  est étudiée.

## 5 Résultats

Les coefficients de l'approximation quadratique (1.67) pour des aimants cylindriques sont maintenant calculés suivant la méthode détaillée dans la section 4.2. Ces calculs sont réalisés pour différentes valeurs de la distance entre aimants  $\ell$  et du rapport d'aspect  $\lambda$ . Les résultats obtenus pour différentes valeurs de  $\ell$  et de  $\lambda$  sont présentés. Le coefficient  $D_1$  obtenu pour  $\lambda = 0.4$  est ensuite comparé à la mesure expérimentale de la force d'attraction entre deux aimants cylindriques.

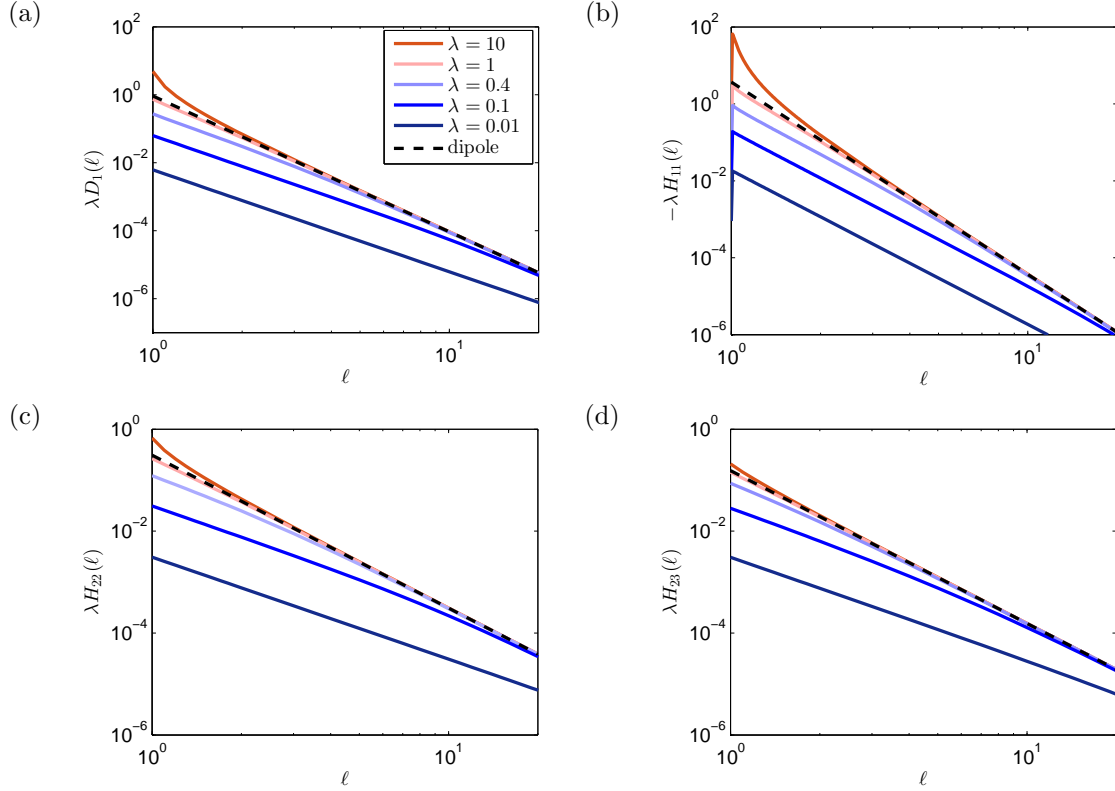


FIGURE 1.11 – Représentation des coefficients de l’approximation quadratique et des coefficients équivalents de l’énergie dipolaire multipliés par  $\lambda$  en fonction de  $\ell$  : (a)  $\lambda D_1(\ell)$ , (b)  $\lambda H_{11}(\ell)$ , (c)  $\lambda H_{22}(\ell)$ , (d)  $\lambda H_{23}(\ell)$ .

## 5.1 Variation des coefficients pour des aimants cylindriques en fonction de $\ell$ et $\lambda$

Les coefficients  $D_1$ ,  $H_{11}$ ,  $H_{22}$ ,  $H_{23}$  sont calculés pour différentes valeurs de  $\ell$  et leurs valeurs sont multipliées par  $\lambda$  pour obtenir les résultats équivalents à la figure 1.6. Les résultats sont représentés sur la figure 1.11. Sur cette figure, nous avons également ajouté les coefficients équivalents de l’énergie dipolaire calculés suivant (1.64). On voit que les coefficients du développement de Taylor de l’énergie tendent vers ceux de l’énergie dipolaire en champ lointain comme sur la figure 1.6. En se référant aux sens physiques des coefficients précisés dans la section 4.3, les interprétations suivantes peuvent être faites :

- Sur la figure 1.11a,  $D_1$  représente la force d’attraction entre aimants. Sa décroissance démontre l’affaiblissement de la force d’attraction avec  $\ell$  indépendamment du rapport d’aspect  $\lambda$ .
- Le coefficient  $H_{11}$  est la dérivée de la force d’attraction par rapport à  $\ell$ . Sur la figure 1.11b, la valeur de  $H_{11}$  chute en  $\ell = 1$  alors qu’un bon accord a été trouvé entre l’approximation quadratique et le calcul direct de l’énergie en cette valeur (cf. figure 1.10). Cette chute est liée à la discontinuité du milieu en  $\ell = 1$ . En  $r > 1$ ,  $-H_{11}$  est décroissante en fonction de  $\ell$ . Cela signifie que la décroissance de la force mise en évidence par la variation de  $D_1$  est de moins en moins importante lorsque  $\ell$  augmente. Sa valeur tend vers 0 à une grande valeur de  $\ell$  car l’interaction entre  $c_1$  et  $c_2$  devient de plus en plus faible lorsque les deux cylindres s’éloignent.
- $H_{22}$  est la dérivée seconde de l’énergie par rapport à  $\alpha$  en  $(\ell, 0, 0)$ . Ce coefficient

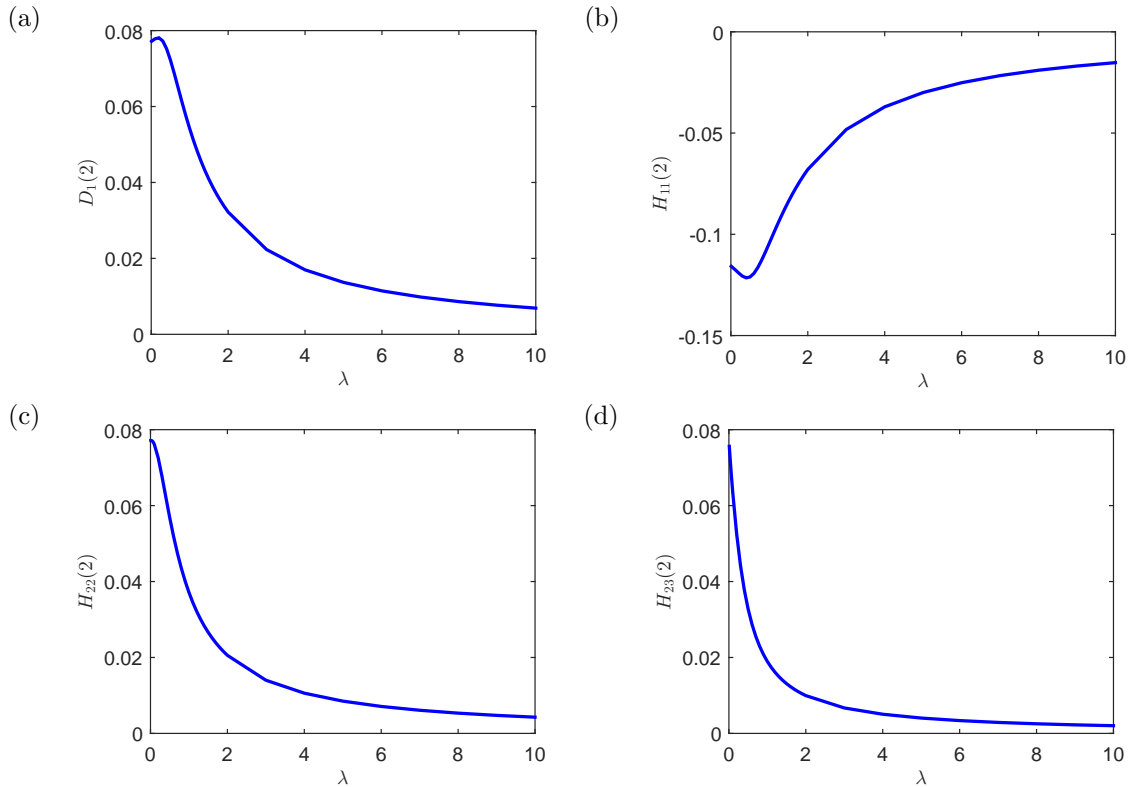


FIGURE 1.12 – Représentation des coefficients de l’approximation quadratique pour  $\ell = 2$  en fonction de  $\lambda$  : (a)  $D_1(2)$  en fonction de  $\lambda$ , (b)  $H_{11}(2)$  en fonction de  $\lambda$ , (c)  $H_{22}(2)$  en fonction de  $\lambda$  et (d)  $H_{23}(2)$  en fonction de  $\lambda$ .

donne la convexité de l’énergie en  $(\ell, 0, 0)$  où l’énergie admet un minimum local par rapport à  $\alpha$ . Il représente également la variation du moment mécanique exercé par  $c_2$  sur  $c_1$  en fonction de  $\alpha$ . Sur la figure 1.11c, elle devient de plus en plus faible lorsque  $\ell$  augmente comme pour  $H_{11}$ .

- Sur la figure 1.11d,  $H_{23}$  est la dérivée croisée de l’énergie par rapport à  $\alpha$  et  $\beta$ . Ce coefficient représente la variation du moment mécanique exercé par  $c_2$  sur  $c_1$  en fonction de  $\beta$  qui décroît lorsque les deux aimants s’éloignent.

Pour observer la variation de ces coefficients en fonction de  $\lambda$ , nous avons calculé les coefficients  $D_1$ ,  $H_{11}$ ,  $H_{22}$ ,  $H_{23}$  pour une valeur fixe de la distance entre aimants  $\ell$  et différentes valeurs du rapport d’aspect. Les résultats pour  $\ell = 2$  sont représentés sur la figure 1.12. Sur la figure 1.12a, la valeur de  $D_1(2)$  croît jusqu’au rapport d’aspect  $\lambda = 0.2$  puis à partir de cette valeur de  $\lambda$ , elle commence à diminuer. Le coefficient  $D_1(2)$  en fonction de  $\lambda$  admet un maximum en  $\lambda = 0.2$ . La force d’attraction entre deux aimants cylindriques est donc maximale pour des cylindres de rapport d’aspect  $\lambda = 0.2$  dans le cas où les aimants sont distancés de  $\ell = 2$ . Le coefficient  $H_{11}(2)$  de la figure 1.12b correspond à la variation de cette force d’interaction en fonction de la distance entre deux aimants en  $\ell = 2$ . Nous pouvons observer que la valeur de  $H_{11}(2)$  est minimale en  $\lambda = 0.2$ . Cela signifie qu’en  $\lambda = 0.2$  où la force d’attraction entre deux aimants cylindriques est maximale, la variation de la force est plus importante que pour d’autres valeurs de  $\lambda$ . Pour les valeurs supérieures à  $\lambda = 0.2$ , la valeur de  $D_1(2)$  diminue et la valeur de  $H_{11}(2)$  s’approche de 0. Nous pouvons donc conclure que plus le rapport d’aspect  $\lambda$  est grand, plus la force d’attraction sans dimension est faible. À volume constant en grandeur réelle, nous trouvons la même variation de la force en

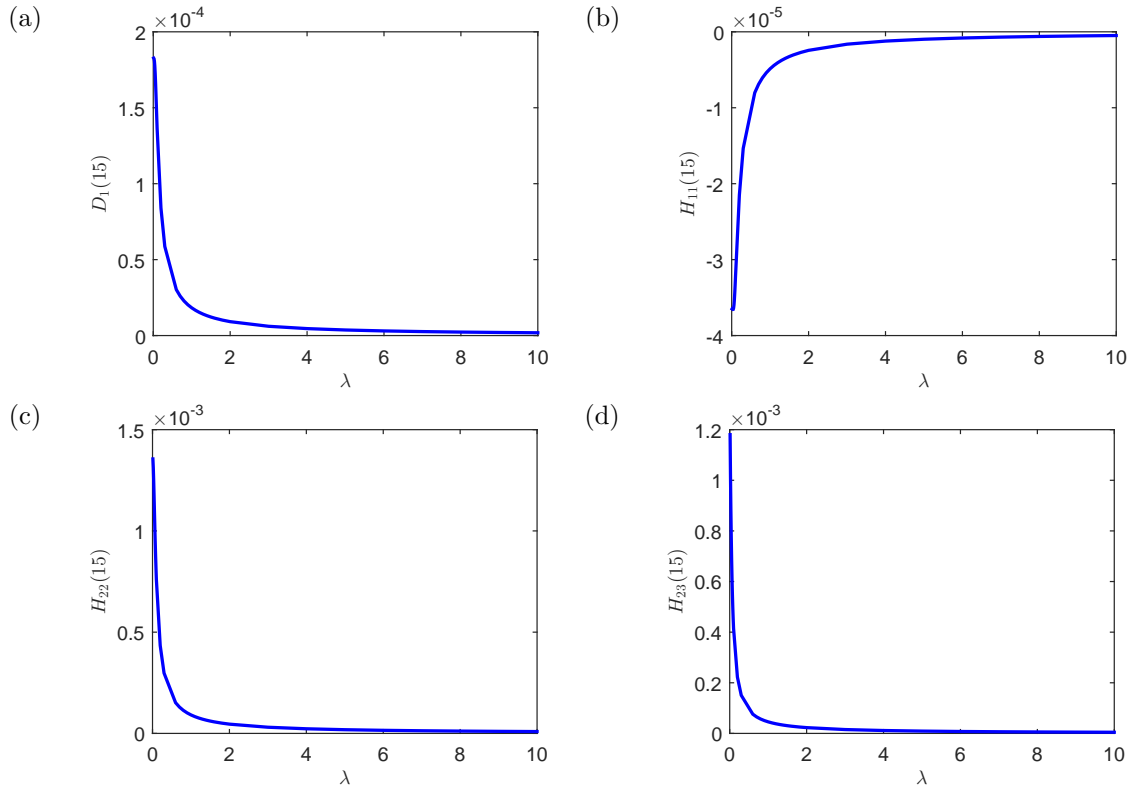


FIGURE 1.13 – Représentation des coefficients de l’approximation quadratique pour  $\ell = 15$  en fonction de  $\lambda$  : (a)  $D_1(15)$  en fonction de  $\lambda$ , (b)  $H_{11}(15)$  en fonction de  $\lambda$ , (c)  $H_{22}(15)$  en fonction de  $\lambda$  et (d)  $H_{23}(15)$  en fonction de  $\lambda$ .

fonction de  $\lambda$ . Ce qui veut dire que la force d’attraction est plus forte pour des cylindres élancés que des cylindres aplatis. Le maximum de  $D_1(2)$  en  $\lambda = 0.2$  est spécifique pour  $\ell = 2$ . Pour d’autres distances entre aimants  $\ell$ , cette valeur de  $\lambda$  est différente. Lorsque  $\ell$  diminue le maximum de  $D_1(\ell)$  tend vers  $\lambda = 0$ . La même tendance est présente pour le minimum de  $H_{11}(\ell)$  en fonction de  $\lambda$  qui tend vers  $\lambda = 0$ . La décroissance de  $D_1(\ell)$  et la croissance de  $H_{11}(\ell)$  sont observables quelque soit la valeur de  $\ell$ . Mais  $D_1(\ell)$  croît et  $H_{11}(\ell)$  décroît plus rapidement lorsque  $\ell$  augmente. Les coefficients pour  $\ell = 15$  sont représentés en fonction du rapport d’aspect  $\lambda$  sur la figure 1.13 où nous pouvons voir les points expliqués précédemment.

La variation des coefficients  $H_{22}(2)$  et  $H_{23}(2)$  en fonction de  $\lambda$  est représentée sur les figures 1.12c et 1.12d. D’après ces résultats, les valeurs de  $H_{22}(2)$  et  $H_{23}(2)$  diminuent lorsque  $\lambda$  augmente. Cela signifie que la dérivée du moment exercé par  $c_2$  sur  $c_1$  par rapport à  $\alpha$  et à  $\beta$  est plus importante lorsque la valeur de  $\lambda$  est petite. Donc le moment exercé par  $c_2$  sur  $c_1$  fluctue plus en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  pour des cylindres élancés que pour des cylindres aplatis. La même tendance est observable pour d’autres valeurs de  $\ell$  (cf. figure 1.13) mais la décroissance de  $H_{22}(2)$  et  $H_{23}(2)$  est de plus en plus rapide lorsque  $\ell$  augmente à cause de l’interaction magnétique entre aimants devenant de plus en plus faible.

Parmi les coefficients de l’approximation quadratique de l’énergie d’interaction entre deux aimants cylindriques (1.67), nous avons comparé le coefficient  $D_1$  à la force d’attraction entre deux aimants cylindriques mesurée expérimentalement.

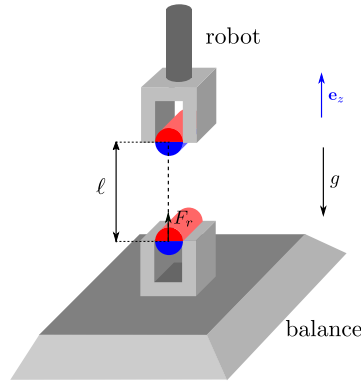


FIGURE 1.14 – Dispositif expérimental de la mesure de la force d’attraction radiale entre les aimants cylindriques. Les phases bleue et rouge des aimants correspondent respectivement au pôle sud et au pôle nord.

## 5.2 Mesure de la force d’attraction entre aimants cylindriques

Afin de mesurer la force d’attraction entre les aimants cylindriques identiques d’aimantation diamétrale, le dispositif de la figure 1.14 a été mis en place. Les deux aimants sont fixés par les encastrement dont l’un est attaché à un robot permettant de déplacer l’aimant à  $10^{-2}$  mm près et l’autre est collé sur une balance. Les aimants sont encastres de sorte que leurs aimantations soient orientées dans la même direction et dans le même sens pour que la force d’attraction mutuelle soit dans une seule direction. Soient  $m$  la masse d’un aimant,  $m_b$  la masse mesurée par la balance et  $F_r$  la force d’attraction exercée par l’aimant attaché au robot à celui sur la balance. Le bilan des forces sur l’aimant fixé sur la balance donne :

$$-mge_z + F_r e_z = -m_b g e_z, \quad (1.79)$$

avec  $g$  la constante de la pesanteur. Dans cette expérience, la quantité mesurée est  $m_b$  à partir de laquelle la force d’attraction est calculée avec l’équation (1.79). Pour que la force d’attraction mesurée puisse être comparée à  $D_1(r)$ ,  $F_r$  est adimensionnée en utilisant (1.55) :

$$F_r = \frac{\mu_0 M^2 d h}{\pi} D_1. \quad (1.80)$$

Ce dispositif expérimental est utilisé afin de mesurer la force d’attraction radiale entre les aimants cylindriques en néodyme ( $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ ) de rapport d’aspect  $\lambda = 0.4$  avec  $d = 0.4$  cm,  $h = 1$  cm,  $m = 0.930$  g et du module de l’aimantation  $M$  compris entre  $1.05 \cdot 10^6$  et  $1.09 \cdot 10^6$  A/m. Avec ces cylindres, nous avons réalisé 10 séries de mesures pour différentes distances entre les aimants puis la moyenne et l’écart-type des mesures ont été calculées. Les moyennes et les écart-types obtenues sont présentés sous forme adimensionnée avec les valeurs de  $D_1$  sur la figure 1.15.

Sur la figure 1.15, un bon accord est trouvé entre  $D_1$  et la force expérimentale adimensionnée. La force s’affaiblit lorsque  $\ell$  augmente et la pente de cette décroissance varie avec  $\ell$ . En effet, pour  $\ell$  proche de 1, la force varie selon la loi  $\ell^{-3.4}$  alors que vers  $\ell = 10$ , la variation est selon  $\ell^{-3.9}$ . Ce changement de pente est lié à la composante dipolaire de la force qui devient dominante à longue distance entre aimants. Celle-ci s’écrit en effet pour deux dipôles de moments magnétiques  $\mu_1$  et  $\mu_2$  (Blundell and

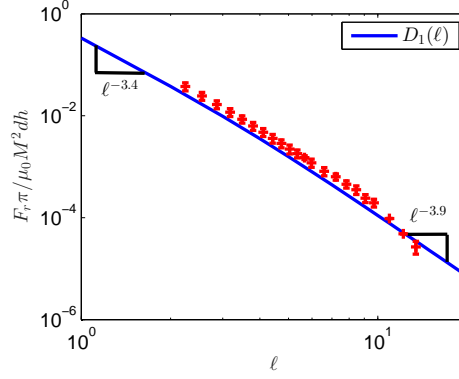


FIGURE 1.15 – Force d’attraction radiale adimensionnée entre les deux aimants cylindriques mesuré expérimentalement et le coefficient linéaire  $D_1$  en fonction de la distance entre les aimants adimensionnée  $\ell$  en échelle log-log.

(Thouless, 2001) :

$$\mathbf{F}_{dip} = \frac{3\mu_0}{4\pi r^4} \left( (\mathbf{e}_{12} \times \boldsymbol{\mu}_1) \times \boldsymbol{\mu}_2 + (\mathbf{e}_{12} \times \boldsymbol{\mu}_2) \times \boldsymbol{\mu}_1 - 2\mathbf{e}_{12}(\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \boldsymbol{\mu}_2) + 5\mathbf{e}_{12}((\mathbf{e}_{12} \times \boldsymbol{\mu}_1) \cdot (\mathbf{e}_{12} \times \boldsymbol{\mu}_2)) \right) . \quad (1.81)$$

## 6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons d’abord formulé l’expression générale de l’énergie d’interaction magnétique entre les aimants de géométrie quelconque. Cette expression a été ensuite appliquée au cas des deux aimants cylindriques aimantés diamétralement. À travers la variation de l’énergie d’interaction entre deux aimants cylindriques en fonction de la distance entre les aimants, la convergence de l’énergie vers l’approximation dipolaire et la variation de la vitesse de convergence en fonction du rapport d’aspect ont été observées. Durant cette étude, le rapport d’aspect de cylindre pour lequel un aimant cylindrique se rapproche le plus d’un dipôle magnétique a été caractérisé pour différentes distances entre aimants.

Pour la suite de la thèse où la dynamique d’une chaîne d’aimants est modélisée, une expression de l’énergie facile à introduire dans les problèmes dynamiques a été développée. En effet, l’énergie est développée en série de Taylor d’ordre 2 autour de la configuration où l’énergie est minimale, c’est à dire lorsque les aimantations des cylindres sont dans le même sens. Cette approximation quadratique de l’énergie a fait apparaître des coefficients du développement de Taylor. Nous avons montré que ces derniers pouvaient être exprimés en fonction de la force d’attraction et du moment mécanique exercé par un aimant sur l’autre. Des mesures de la force d’attraction entre deux aimants cylindriques ont été réalisées puis comparées aux valeurs des coefficients numériquement estimés par la méthode des moindres carrés. Un bon accord a été trouvé.

Dans le chapitre suivant, l’expression quadratique de l’énergie d’interaction entre deux aimants cylindriques est exploitée pour le développement d’un modèle linéaire décrivant la dynamique d’une chaîne d’aimants cylindriques diamétralement magnétisés.

# Chapitre 2

## Dynamique d'une chaîne d'aimants cylindriques soumise à la gravité et à un champ magnétique

### 1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la dynamique et la stabilité d'une chaîne d'aimants cylindriques soumise à la gravité et à un champ magnétique extérieur. Dans la littérature, de nombreux travaux ont été réalisés sur la statique des structures composées d'aimants permanents. Parmi eux, [O'Donoghue and Cantillon-Murphy \(2013\)](#) ont étudié la statique d'une chaîne d'aimants sphériques encastree-libre et ont montré que l'influence de l'anisotropie magnéto-crystalline du matériau d'aimants était très faible au point de pouvoir la négliger. La statique d'une chaîne d'aimants sphériques a été également traitée par [Vella et al. \(2013\)](#) qui ont montré qu'à partir d'un grand nombre d'éléments, une chaîne d'aimants se comportait comme une poutre continue dont la rigidité est due aux interactions magnétiques entre aimants. La statique d'une structure continue a également été étudiée par [Yang et al. \(1999\)](#) qui a caractérisé la stabilité d'une plaque ferromagnétique encastree-libre soumise à un champ magnétique appliqué dans diverses directions.

Dans ce contexte, nous nous sommes intéressés à la dynamique d'une chaîne d'aimants encastree-libre. Afin que le mouvement de la chaîne soit circonscrit dans un plan, les éléments choisis pour la constituer sont des cylindres aimantés selon le diamètre. Sur ce système, nous appliquons un champ magnétique extérieur uniforme et prenons en compte la pesanteur qui est négligée dans les études précédemment citées. En utilisant le formalisme lagrangien, un modèle linéaire décrivant la dynamique de la chaîne est développé. Pour un grand nombre d'aimants, un modèle continu est proposé, la chaîne étant alors considérée comme une poutre continue dont la rigidité de flexion est déterminée numériquement. Afin de valider ces modèles, des expériences sont réalisées. À partir des résultats obtenus, la stabilité de la chaîne en fonction de la gravité et du champ magnétique extérieur est discutée. Le comportement mécanique de la poutre équivalente est comparé à celui de la chaîne en fonction de la gravité et du champ magnétique. L'influence de ces deux derniers sur la dynamique de la chaîne est étudiée.

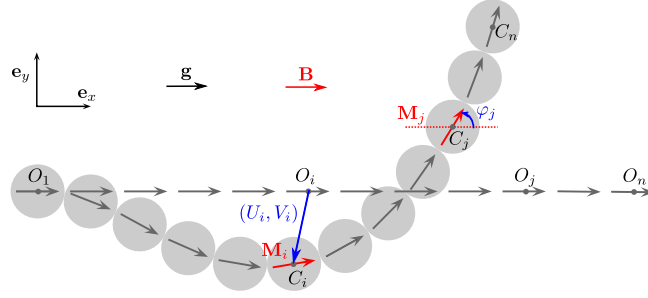


FIGURE 2.1 – Schéma représentant la chaîne d'aimants cylindriques encastrée-libre dans sa configuration d'équilibre et dans une configuration déformée.

## 2 Modélisation de la dynamique d'une chaîne d'aimants

### 2.1 Description du système

Nous considérons une chaîne de  $n$  aimants cylindriques aimantés uniformément selon le diamètre et dont le premier élément est encastré de sorte que son aimantation soit dirigée suivant  $\mathbf{e}_x$ . Ce système est représenté sur la figure 2.1. Comme dans le chapitre 1, le diamètre et la hauteur des cylindres sont notés  $d, h$  et leurs masses sont notées  $m$ . La chaîne est soumise à la gravité et à un champ magnétique uniforme  $\mathbf{B}$ . Nous restreignons l'étude aux cas où la gravité  $\mathbf{g}$  et le champ magnétique sont colinéaires à  $\mathbf{e}_x$  :  $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_x$  où  $g$  et  $B$  peuvent être positifs ou négatifs selon leurs sens respectifs.

Ainsi, la chaîne est dans une position d'équilibre statique lorsqu'elle est droite suivant la direction  $\mathbf{e}_x$ . La stabilité de cette position d'équilibre sera discutée dans la suite. Dans cette configuration, la position du centre de gravité de l'aimant  $i$  est notée  $O_i$ . Dans la configuration déformée, elle est notée  $C_i$ . Le déplacement de l'élément  $i$  est décrit par :

$$\overrightarrow{O_i C_i} = U_i \mathbf{e}_x + V_i \mathbf{e}_y, \quad (2.1)$$

où  $U_i$  et  $V_i$  sont les déplacements longitudinaux et transversaux. L'aimantation du cylindre  $i$  est donnée par  $\mathbf{M}_i$  :

$$\mathbf{M}_i = M(\cos \varphi_i \mathbf{e}_x + \sin \varphi_i \mathbf{e}_y). \quad (2.2)$$

Le mouvement de l'aimant  $i$  est décrit par 3 coordonnées généralisées : les déplacements  $U_i, V_i$  et la rotation  $\varphi_i$ . La position du point  $C_i$  dans le repère principal est notée  $\mathbf{R}_{1i}$  et a pour expression :

$$\mathbf{R}_{1i} = \overrightarrow{O_1 C_i} = [(i-1)d + U_i] \mathbf{e}_x + V_i \mathbf{e}_y \quad (2.3)$$

Dans l'état déformé, la position relative de l'aimant  $j$  par rapport à l'aimant  $i$  est notée  $\mathbf{R}_{ij}$  et a pour expression :

$$\mathbf{R}_{ij} = \overrightarrow{C_i C_j} = [(j-i)d + U_j - U_i] \mathbf{e}_x + (V_j - V_i) \mathbf{e}_y. \quad (2.4)$$

Chacun des aimants est en contact avec ses deux voisins. Il est donc nécessaire de poser une condition caractérisant les contacts entre cylindres. C'est l'objet de la section suivante.



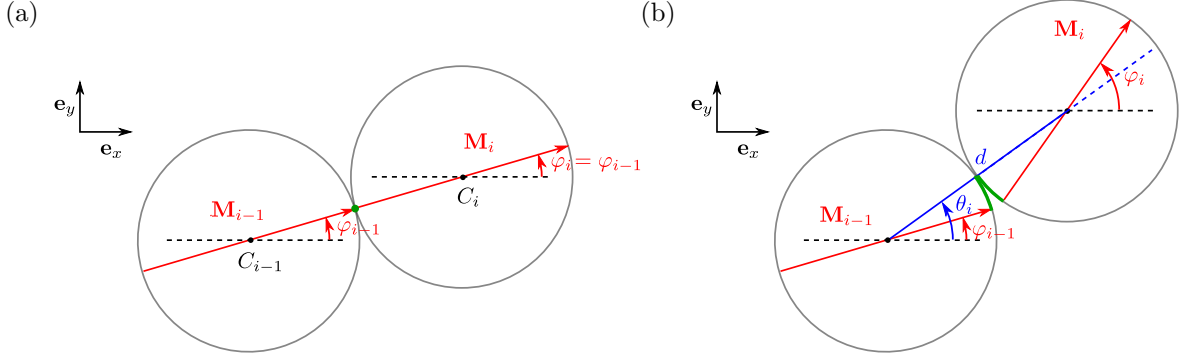


FIGURE 2.2 – Roulement des cylindres : (a) configuration initiale, (b) roulement du cylindre  $i$  sur le cylindre  $i - 1$ . Le point vert représente la ligne de contact et les arcs de cercle verts représentent le chemin parcouru par la ligne de contact sur chacun des cylindres.

## 2.2 Conditions de non-glissement

En pratique, soit les cylindres glissent sans frottements aux lignes de contacts, soit ils glissent avec frottements, soit ils sont en situation d'adhérence où ils roulent sans glisser. Parmi ces conditions, la condition de non-glissement est choisie dans le cadre de cette thèse.

Pour établir les conditions de non-glissement aux lignes de contacts, nous nous plaçons dans le cas où l'aimant  $i$  roule sur l'aimant  $i - 1$ . Cette situation est représentée sur la figure 2.2. À partir d'une configuration de départ où les deux aimantations sont colinéaires, orientées dans le même sens (2.2a), le cylindre  $i$  roule sur le cylindre  $i - 1$  (2.2b). Lors de ce mouvement, les arcs de cercles balayés par la ligne de contact sur les deux cylindres sont égaux. Cette égalité se traduit par la relation :

$$\theta_i - \varphi_{i-1} = \varphi_i - \theta_i . \quad (2.5)$$

En tenant compte de cette condition, la position relative du cylindre  $i$  par rapport au cylindre  $i - 1$  s'écrit :

$$\mathbf{R}_{(i-1)i} = d \left( \cos \left( \frac{\varphi_{i-1} + \varphi_i}{2} \right) \mathbf{e}_x + \sin \left( \frac{\varphi_{i-1} + \varphi_i}{2} \right) \mathbf{e}_y \right) . \quad (2.6)$$

En remplaçant  $\mathbf{R}_{(i-1)i}$  par son expression (2.4), la condition de non-glissement est établie au point de contact entre les cylindres  $i - 1$  et  $i$  :

$$(d + U_i - U_{i-1}) \mathbf{e}_x + (V_i - V_{i-1}) \mathbf{e}_y = d \left( \cos \left( \frac{\varphi_{i-1} + \varphi_i}{2} \right) \mathbf{e}_x + \sin \left( \frac{\varphi_{i-1} + \varphi_i}{2} \right) \mathbf{e}_y \right) . \quad (2.7)$$

Pour introduire cette condition dans les équations de Lagrange du système, elle est écrite sous forme de  $2(n - 1)$  contraintes holonomes :

$$\forall i \in [2, n] , \quad \begin{cases} I_i &= U_i - U_{i-1} + d - d \cos \left( \frac{\varphi_{i-1} + \varphi_i}{2} \right) = 0 , \\ J_i &= V_i - V_{i-1} - d \sin \left( \frac{\varphi_{i-1} + \varphi_i}{2} \right) = 0 . \end{cases} \quad (2.8)$$

Les coordonnées généralisées du système  $U_i, V_i$  et  $\varphi_i$  sont liées par ces conditions de non-glissement aux contacts. À partir des résultats numériques du modèle, nous discuterons le choix de conditions de contacts dans la suite.

### 2.3 Équations de Lagrange du système

Nous établissons les équations du mouvement de la chaîne à partir du formalisme de Lagrange. Le lagrangien du système  $L$  est défini par la différence entre les énergies cinétique et potentielle :

$$L = K - Q - H - P , \quad (2.9)$$

où  $K$  est l'énergie cinétique,  $Q$  est l'énergie d'interaction magnétique entre les aimants,  $H$  est l'énergie d'interaction entre les aimants et le champ magnétique extérieur et  $P$  est l'énergie potentielle de pesanteur.

L'encastrement du premier cylindre impose les conditions aux limites suivantes :

$$U_1 = 0 \quad , \quad V_1 = 0 \quad , \quad \varphi_1 = 0 . \quad (2.10)$$

Les coordonnées des autres cylindres sont liées par les équations de Lagrange. Soit  $s = U_k, V_k, \varphi_k$  pour  $k = 2 \dots n$ , les équations de Lagrange du système s'écrivent ([Landau and Lifshitz, 1969](#)) :

$$\frac{d}{dT} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial L}{\partial s} = \sum_{i=2}^n \alpha_i \frac{\partial I_i}{\partial s} + \sum_{i=2}^n \beta_i \frac{\partial J_i}{\partial s} , \quad (2.11)$$

où  $T$  est le temps,  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  pour  $i = 2 \dots n$  sont les multiplicateurs de Lagrange représentant les composantes longitudinales et transversales des forces de réaction qui s'appliquent à la ligne de contact entre les cylindres  $i - 1$  et  $i$ .

En combinant (2.11) et (2.8), nous obtenons le système de  $5(n - 1)$  équations décrivant la dynamique de la chaîne :

$$\begin{aligned} \forall k \in [2, n] \quad & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{U}_k} \right) + \frac{\partial Q}{\partial U_k} + \frac{\partial H}{\partial U_k} + \frac{\partial P}{\partial U_k} = \sum_{i=2}^n \alpha_i \frac{\partial I_i}{\partial U_k} , \\ \forall k \in [2, n] \quad & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{V}_k} \right) + \frac{\partial Q}{\partial V_k} + \frac{\partial H}{\partial V_k} + \frac{\partial P}{\partial V_k} = \sum_{i=2}^n \beta_i \frac{\partial J_i}{\partial V_k} , \\ \forall k \in [2, n] \quad & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}_k} \right) + \frac{\partial Q}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial H}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial P}{\partial \varphi_k} = \sum_{i=2}^n \alpha_i \frac{\partial I_i}{\partial \varphi_k} + \sum_{i=2}^n \beta_i \frac{\partial J_i}{\partial \varphi_k} , \\ \forall k \in [2, n] \quad & I_k = 0 , \\ \forall k \in [2, n] \quad & J_k = 0 . \end{aligned} \quad (2.12)$$

Les inconnues sont les  $3(n - 1)$  coordonnées généralisées et les  $2(n - 1)$  multiplicateurs de Lagrange.

### 2.4 Adimensionnement

Les déplacements des cylindres par rapport à la configuration droite de la chaîne et la distance entre les aimants sont adimensionnés par le diamètre des cylindres :

$$U_i = du_i \quad , \quad V_i = dv_i . \quad (2.13)$$

L'énergie d'interaction entre les aimants  $Q$  est adimensionnée suivant l'équation :

$$Q = \frac{\mu_0 M^2 d^2 h}{\pi} \mathcal{Q} . \quad (2.14)$$

Les contraintes de non-glissement  $I_i$  et  $J_i$  sont adimensionnées par  $d$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_i &= u_i - u_{i-1} + 1 - \cos\left(\frac{\varphi_{i-1} + \varphi_i}{2}\right) = 0, \\ \mathcal{J}_i &= v_i - v_{i-1} - \sin\left(\frac{\varphi_{i-1} + \varphi_i}{2}\right) = 0,\end{aligned}\quad (2.15)$$

où les contraintes adimensionnées sont notées  $\mathcal{I}_i$  et  $\mathcal{J}_i$ . Les équations suivantes donnent le temps et les multiplicateurs de Lagrange adimensionnés :

$$T = \sqrt{\frac{\pi m}{\mu_0 M^2 h}} t, \quad \alpha_i = \frac{\mu_0 M^2 dh}{\pi} a_i, \quad \beta_i = \frac{\mu_0 M^2 dh}{\pi} b_i. \quad (2.16)$$

Les énergies cinétique, potentielle et magnétique,  $K$ ,  $P$  et  $H$  sont adimensionnées selon les équations :

$$K = \frac{\mu_0 M^2 d^2 h}{\pi} \mathcal{K}, \quad P = mgd\mathcal{P}, \quad H = \pi M d^2 h B \mathcal{H}, \quad (2.17)$$

où  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{H}$  sont les énergies adimensionnées. Les équations du mouvement (2.12) s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}\forall k \in [2, n] \quad & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{u}_k} \right) + \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial u_k} + \frac{\pi^2 B}{\mu_0 M} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_k} + \frac{mg\pi}{\mu_0 M^2 dh} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial u_k} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{\partial \mathcal{I}_i}{\partial u_k}, \\ \forall k \in [2, n] \quad & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{v}_k} \right) + \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial v_k} + \frac{\pi^2 B}{\mu_0 M} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v_k} + \frac{mg\pi}{\mu_0 M^2 dh} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial v_k} = \sum_{i=1}^{n-1} b_i \frac{\partial \mathcal{J}_i}{\partial v_k}, \\ \forall k \in [2, n] \quad & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\varphi}_k} \right) + \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \varphi_k} + \frac{\pi^2 B}{\mu_0 M} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_k} + \frac{mg\pi}{\mu_0 M^2 dh} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \varphi_k} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{\partial \mathcal{I}_i}{\partial \varphi_k} + \sum_{i=1}^{n-1} b_i \frac{\partial \mathcal{J}_i}{\partial \varphi_k}, \\ \forall k \in [2, n] \quad & \mathcal{I}_k = 0, \\ \forall k \in [2, n] \quad & \mathcal{J}_k = 0.\end{aligned}\quad (2.18)$$

Ce système d'équations fait apparaître deux paramètres sans dimension  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{G}$  :

$$\mathcal{G} = \frac{mg\pi}{\mu_0 M^2 dh}, \quad \mathcal{B} = \frac{\pi^2 B}{\mu_0 M}. \quad (2.19)$$

Le paramètre  $\mathcal{G}$  représente l'influence de la gravité  $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_x$  sur un aimant par rapport aux interactions magnétiques entre les aimants et  $\mathcal{B}$  exprime les influences respectives du champ magnétique  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_x$  et du champ rémanent des aimants (Jackson, 1999).

## 2.5 Expression des énergies

### Énergie cinétique

L'énergie cinétique des aimants cylindriques de la chaîne est composée de l'énergie cinétique de translation et de celle de rotation autour de l'axe central du cylindre. Le moment d'inertie du cylindre valant  $md^2/8$ , l'énergie cinétique du système s'écrit :

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m (\dot{U}_i^2 + \dot{V}_i^2) + \frac{1}{16} md^2 \dot{\varphi}_i^2. \quad (2.20)$$

Après adimensionnement (2.17), cette expression devient :

$$\mathcal{K} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{2} (\dot{u}_i^2 + \dot{v}_i^2) + \frac{1}{16} \dot{\varphi}_i^2 \right]. \quad (2.21)$$

### Énergie potentielle de pesanteur

La chaîne est soumise à la gravité  $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_x$ . L'énergie potentielle de pesanteur de du système a pour expression :

$$P = - \sum_{i=1}^n m\mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_{1i} = - \sum_{i=1}^n mg [(i-1)d + U_i] . \quad (2.22)$$

Cette expression adimensionnée selon (2.17) s'écrit :

$$\mathcal{P} = - \sum_{i=1}^n [(i-1) + u_i] . \quad (2.23)$$

### Énergie potentielle des aimants de la chaîne dans un champ magnétique uniforme

L'énergie d'un aimant permanent  $i$  dans un champ magnétique uniforme  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_x$  a pour expression  $-V\mathbf{M}_i \cdot \mathbf{B}$  où  $V$  le volume du cylindre (Jackson, 1999). L'énergie totale  $H$  s'écrit alors :

$$H = - \sum_{i=1}^n V\mathbf{M}_i \cdot \mathbf{B} = - \frac{\pi M d^2 h B}{4} \sum_{i=1}^n \cos \varphi_i . \quad (2.24)$$

Après adimensionnement selon (2.17), l'équation (2.24) s'écrit :

$$\mathcal{H} = - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \cos \varphi_i . \quad (2.25)$$

### Énergie d'interaction magnétique entre les aimants

L'énergie d'interaction magnétique entre les aimants est la somme des énergies d'interaction magnétique entre chaque paire d'aimants :

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathcal{E}_{ij} . \quad (2.26)$$

Dans ce chapitre, afin d'obtenir les équations linéarisées de la dynamique du système, nous utilisons le développement quadratique de l'énergie  $\mathcal{E}_{ij}$  autour de la configuration droite de la chaîne dans laquelle les aimants  $i$  et  $j$  sont espacés de  $|i-j|$ . D'après (1.67), on a alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ij} = & \mathcal{E}(|i-j|, 0, 0) + (\sqrt{[j-i+u_j-u_i]^2 + (v_j-v_i)^2} - |i-j|) D_1(|i-j|) \\ & + \frac{1}{2} (\sqrt{[j-i+u_j-u_i]^2 + (v_j-v_i)^2} - |i-j|)^2 H_{11}(|i-j|) \\ & - \frac{1}{2} \left[ \left( \varphi_j - \arctan \left( \frac{v_j-v_i}{j-i+u_j-u_i} \right) \right)^2 \right. \\ & \left. + \left( \varphi_i - \arctan \left( \frac{v_j-v_i}{j-i+u_j-u_i} \right) \right)^2 \right] \mathcal{E}(|j-i|, 0, 0) \\ & + \left( \varphi_j - \arctan \left( \frac{v_j-v_i}{j-i+u_j-u_i} \right) \right) \left( \varphi_i - \arctan \left( \frac{v_j-v_i}{j-i+u_j-u_i} \right) \right) H_{23}(|i-j|) . \end{aligned} \quad (2.27)$$

## 2.6 Équations linéarisées du mouvement

Dans ce paragraphe, nous présentons les équations linéarisées du mouvement. Commençons par les conditions de non-glissement. En linéarisant les équations (2.15) pour des mouvements de petite amplitude, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \forall k \in [2, n] \quad u_k &= 0, \\ \forall k \in [2, n] \quad v_i - v_{i-1} + \left( \frac{\varphi_{i-1} + \varphi_i}{2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

À la lecture de ces équations, nous pouvons constater que les déplacements longitudinaux des aimants sont nuls. Dans la suite, les équations du mouvement seront donc exprimées uniquement en fonction de  $v_i$  et  $\varphi_i$  qui sont liés par (2.28).

Dans les trois premières équations de (2.18), les seconds membres s'écrivent à :

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n a_i \frac{\partial \mathcal{I}_i}{\partial u_k} &= a_k - a_{k+1}, \\ \sum_{i=2}^n a_i \frac{\partial \mathcal{I}_i}{\partial \varphi_k} &= \frac{1}{2} \left( a_k \sin \left( \frac{\varphi_{k-1} + \varphi_k}{2} \right) + a_{k+1} \sin \left( \frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2} \right) \right), \\ \sum_{i=2}^n b_i \frac{\partial \mathcal{J}_i}{\partial v_k} &= b_k - b_{k+1}, \\ \sum_{i=2}^n b_i \frac{\partial \mathcal{J}_i}{\partial \varphi_k} &= -\frac{1}{2} \left( b_k \cos \left( \frac{\varphi_{k-1} + \varphi_k}{2} \right) + b_{k+1} \cos \left( \frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2} \right) \right), \end{aligned} \quad (2.29)$$

où nous avons introduit  $a_{n+1} = b_{n+1} = 0$  et  $\varphi_{n+1} = 0$  afin d'avoir les mêmes expressions pour toutes les valeurs de  $k$ . Dans le cas des petits déplacements, les équations (2.29) deviennent :

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n a_i \frac{\partial \mathcal{I}_i}{\partial u_k} &= a_k - a_{k+1}, \\ \sum_{i=2}^n a_i \frac{\partial \mathcal{I}_i}{\partial \varphi_k} &= \frac{1}{2} \left( a_k \left( \frac{\varphi_{k-1} + \varphi_k}{2} \right) + a_{k+1} \left( \frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2} \right) \right), \\ \sum_{i=2}^n b_i \frac{\partial \mathcal{J}_i}{\partial v_k} &= b_k - b_{k+1} \\ \sum_{i=2}^n b_i \frac{\partial \mathcal{J}_i}{\partial \varphi_k} &= -\frac{1}{2} (b_k + b_{k+1}). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Les expressions linéarisées des dérivées de  $\mathcal{Q}$  s'obtiennent à partir de (2.26) et (2.27) en tenant compte du fait que  $u_k = 0, \forall k \in [1, n]$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial u_k} &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{k-i}{|k-i|} D_1(|k-i|), \\ \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial v_k} &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \left[ \left( \frac{D_1(|k-i|)}{|k-i|} - 2 \frac{\mathcal{E}(|k-i|, 0, 0)}{(k-i)^2} + 2 \frac{H_{23}(|k-i|)}{(k-i)^2} \right) (v_k - v_i) \right] \\ &\quad + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \left[ \frac{\mathcal{E}(|j-i|, 0, 0) - H_{23}(|k-i|)}{k-i} (\varphi_i + \varphi_k) \right], \\ \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \varphi_k} &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \left[ \frac{\mathcal{E}(|k-i|, 0, 0) - H_{23}(|k-i|)}{k-i} (v_k - v_i) \right] - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \mathcal{E}(|k-i|, 0, 0) \varphi_k, \\ &\quad + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n H_{23}(|k-i|) \varphi_i. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Les dérivées de  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{P}$  apparaissant dans les équations de Lagrange, se calculent à partir des expressions (2.21), (2.25) et (2.25) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{u}_k} &= \dot{u}_k & , & & \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{v}_k} &= \dot{v}_k & , & & \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\varphi}_k} &= \dot{\varphi}_k & , \\ \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial u_k} &= -1 & , & & \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial v_k} &= 0 & , & & \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \varphi_k} &= 0 & , \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_k} &= 0 & , & & \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v_k} &= 0 & , & & \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_k} &= \sin \varphi_k & . \end{aligned} \quad (2.32)$$

On obtient alors les équations linéarisées du mouvement de la chaîne issues des équations de Lagrange :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial u_k} - a_k + a_{k+1} - \mathcal{G} &= 0 & , \\ \ddot{v}_k + \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial v_k} - b_k + b_{k+1} &= 0 & , \\ \ddot{\varphi}_k + 8 \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \varphi_k} + 2\mathcal{B}\varphi_k - 2a_k(\varphi_{k-1} + \varphi_k) - 2a_{k+1}(\varphi_k + \varphi_{k+1}) + 4b_k + 4b_{k+1} &= 0 & , \end{aligned} \quad (2.33)$$

où  $k \in [2, n]$ .

Les équations (2.33) et (2.28) forment l'ensemble des équations du mouvement du système. En réorganisant ces équations sous forme matricielle, nous obtenons des équations classiques d'oscillateurs couplés ne portant que sur les déplacements transversaux :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = 0 & , \quad (2.34)$$

où  $\mathbf{v} = (v_2, v_3, \dots, v_n)^T$ .

Les calculs ainsi que les matrices de l'équation précédente sont détaillées dans l'annexe C. Ce modèle linéaire dépend de 3 paramètres :  $n$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{G}$ . La dynamique de la chaîne est finalement décrite par  $(n - 1)$  équations à  $(n - 1)$  inconnues.

### 3 Poutre continue équivalente

Pour  $n \rightarrow \infty$ , la taille d'un élément devient petit devant la longueur de la structure. Dans cette limite, le comportement de la chaîne peut être décrite par un système continu. Nous proposons donc ici un modèle décrivant la dynamique de la chaîne soumise à la gravité et à un champ magnétique extérieur par une poutre continue équivalente. Les interactions entre aimants ont alors un effet équivalent à une raideur de flexion. Pour modéliser la dynamique de cette poutre, nous utilisons le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli. Ce dernier suppose que les sections droites restent orthogonales à la fibre neutre. Il néglige de plus l'inertie de rotation. Pour que ce modèle soit en accord avec le modèle linéaire de la chaîne, un mouvement infinitésimal de la poutre est considéré. Les étapes de la modélisation sont présentées dans la suite.

Le système est représenté sur la figure 2.3. La poutre a une masse linéique  $\rho = m/d$  et une longueur  $l$ . Elle est dirigée selon l'axe de  $X$ . Son déplacement transversal est noté  $V(X)$ .

La gravité exerce une force linéique de compression ou de traction en fonction de son signe et le champ magnétique exerce un moment linéique de flexion. La force exercée par la gravité  $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_x$  est une force linéique qui a pour expression :

$$\mathbf{f} = \rho g \mathbf{e}_x & . \quad (2.35)$$

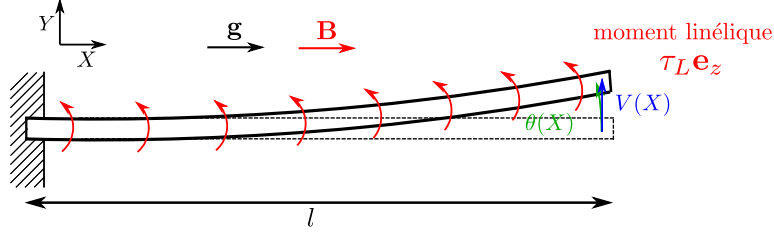


FIGURE 2.3 – Représentation de la déformée d'une poutre continue encastree-libre soumise à un moment de flexion linéique  $\tau_l$ .

D'après l'équation (1.75), sur chaque aimant  $i$ , le champ magnétique extérieur exerce un moment :

$$\boldsymbol{\tau}_i = -\frac{d^2 h \pi}{4} M B \sin \varphi_i \mathbf{e}_z \simeq -\frac{d^2 h \pi}{4} M B \varphi_i \mathbf{e}_z . \quad (2.36)$$

Celui-ci peut être exprimé sous forme d'un moment linéique exercé sur la poutre, dont la valeur est obtenue en divisant le moment  $\boldsymbol{\tau}_i$  par  $d$ . En remplaçant ensuite  $\varphi_i$  par  $V'$  qui est son équivalent dans le cas de la poutre continue, le moment linéique exercé par le champ magnétique uniforme  $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_x$  sur la poutre s'écrit :

$$\boldsymbol{\tau}_l(X) = -\chi V' \mathbf{e}_z , \quad (2.37)$$

où

$$\chi = \frac{d h M B \pi}{4} . \quad (2.38)$$

Soulignons que le champ magnétique n'exerce pas de force sur la chaîne. En effet, la force exercée par un champ magnétique sur un aimant s'écrit (Jackson, 1999) :

$$\mathbf{F} = \nabla \left( \int_V \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{B} dV \right) = \nabla (\pm V M B \cos \varphi_i) . \quad (2.39)$$

Ainsi, si  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{M}_i$  sont uniformes, la force exercée par le champ magnétique sur l'aimant est nulle.

Les équations de la dynamique de la poutre continue équivalente s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_x}{\partial X} + \rho g &= 0 , \\ \frac{\partial R_y}{\partial X} + R_x V' &= \rho \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} , \\ \frac{\partial M}{\partial X} + R_y + \tau_l &= 0 , \end{aligned} \quad (2.40)$$

où  $R_x$  et  $R_y$  sont les composantes suivant  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_y$  de l'effort intérieur et  $M$  est le moment fléchissant. En intégrant la première équation, nous obtenons :

$$R_x = \rho g (l - X) . \quad (2.41)$$

En injectant la dérivée de la troisième équation de (2.40) par rapport à  $X$  dans la deuxième équation et en tenant en compte la loi de comportement

$$M = K \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} , \quad (2.42)$$

où  $K$  est la rigidité de flexion de la poutre, l'équation vérifiée par le déplacement transversal de la poutre s'écrit :

$$\rho \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} - \frac{\partial}{\partial X} \left( \rho g (l - X) \frac{\partial V}{\partial X} \right) + K \frac{\partial^4 V}{\partial X^4} - \chi \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} = 0 . \quad (2.43)$$

En  $X = 0$ , l'encastrement bloque la déformation et la rotation de la poutre. Cela donne les conditions :

$$V(0) = \frac{\partial V}{\partial X}(0) = 0 , \quad (2.44)$$

À l'extrémité libre de la poutre ( $X = l$ ), le moment de flexion et l'effort intérieur sont nuls. L'expression de  $M$  (2.42) et l'équation de la dynamique en rotation (2.40) en  $X = l$  donne :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}(l) = 0 \quad , \quad K \frac{\partial^3 V}{\partial X^3}(l) - \chi \frac{\partial V}{\partial X}(l) = 0 . \quad (2.45)$$

Adimensionnons à présent l'équation de la dynamique de la poutre. Les variables sans dimension sont introduites comme suit :

$$T = \sqrt{\frac{\rho l^4}{EI}} t \quad , \quad V = dv \quad , \quad X = lx . \quad (2.46)$$

L'équation sans dimension gouvernant la dynamique de la poutre s'écrit alors :

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \gamma \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1 - x) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \beta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 , \quad (2.47)$$

où

$$\gamma = \frac{\rho g l^3}{K} \quad , \quad \beta = \frac{\chi l^2}{K} . \quad (2.48)$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$v(0) = \frac{\partial v}{\partial x}(0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(1) = 0 \quad , \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(1) - \beta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(1) = 0 . \quad (2.49)$$

Pour résoudre l'équation (2.47), les différences finies d'ordre 2 sont utilisées. La discrétisation de la poutre est détaillée dans la section D. Finalement, l'équation de la dynamique de la poutre s'écrit sous forme matricielle :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = 0 , \quad (2.50)$$

où  $\mathbf{v}$  est le vecteur contenant le déplacement transversal de la poutre aux points de discrétisation. Les matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  sont des matrices de masse et raideur. Ce système décrit la dynamique de la poutre continue équivalente. Ce modèle dépend de deux paramètres sans dimension  $\gamma$  et  $\beta$  qui sont fonction de la rigidité de flexion  $K$ . Cette dernière est inconnue et elle est déterminée numériquement dans la suite à partir du comportement de la chaîne pour  $n \rightarrow \infty$ . Le modèle de poutre continue présenté ici peut être appliqué à une poutre soumise à une force linéique et un moment linéique de flexion quelconques en modifiant  $\rho g$  et  $\chi$  dans les expressions de  $\gamma$  et  $\beta$  (2.48).

Dans les modèles discret et continu, les fréquences et modes propres sont obtenus par le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres de  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ . Ces calculs sont effectués en fonction de  $(n, \mathcal{G}, \mathcal{B})$  pour le modèle discret et  $(\gamma, \beta)$  pour le modèle continu. Les équations de la dynamique des deux modèles montrent que la raideur du système est créée par l'interaction entre aimants, la gravité et le champ magnétique extérieur. Nous discuterons l'influence de ces trois sources de raideur à travers les résultats numériques et les expériences présentées dans la section suivante.



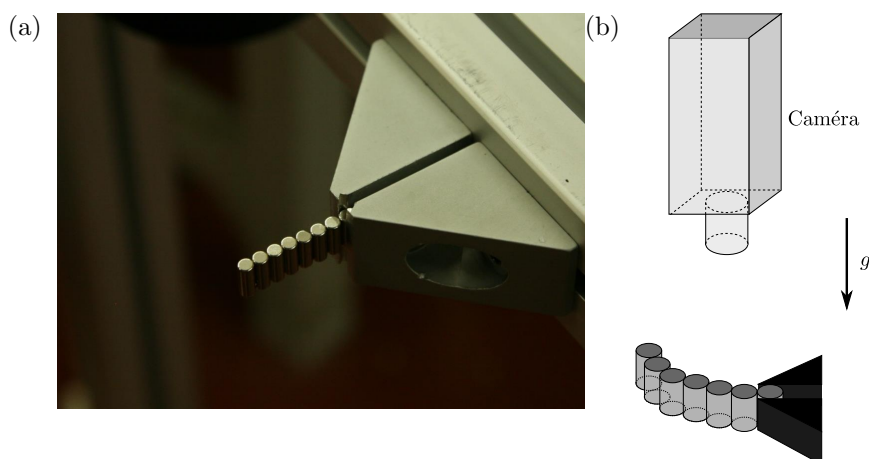


FIGURE 2.4 – Dispositif expérimental utilisé pour filmer les oscillations libres de la chaîne : (a) : photo de la chaîne encastrée-libre, (b) : schéma représentant l'emplacement de la caméra.

## 4 Expériences

Des expériences ont été réalisées en complément des modèles présentés dans la section précédente. Durant ces expériences, nous avons capturé les oscillations libres et forcées de la chaîne pour différents nombres d'aimants et différentes valeurs du champ magnétique extérieur. Les mesures sont réalisées pour trois orientations différentes de la chaîne dont chacune correspond à une valeur du champ de gravité : chaîne horizontale dont les oscillations sont dans le plan horizontal ( $g = 0$ ), chaîne verticale suspendue ou supportée ( $g = \pm 9.81 \text{ m/s}^2$ ). L'objectif de ces expériences est de mesurer les fréquences propres et d'observer les modes propres de la chaîne dans différentes configurations. Les aimants constitutifs de la chaîne sont des aimants cylindriques identiques à ceux utilisés pour la mesure de la force d'interaction radiale entre deux aimants (cf. section 5.2 du chapitre 1). Les montages expérimentaux sont présentés dans cette section.

### 4.1 Oscillations libres sans gravité ni champ magnétique extérieur

Le premier dispositif présenté dans cette section est un montage utilisé pour mesurer les fréquences propres et capturer les modes propres de la chaîne qui oscille librement en l'absence de gravité et de champ magnétique extérieur. Le dispositif expérimental est représenté par le schéma de la figure 2.4. La chaîne encastrée-libre est disposée horizontalement de sorte que son mouvement soit dans le plan perpendiculaire à la gravité. Cela permet de s'affranchir de l'influence de cette dernière sur la dynamique du système. En bloquant puis lâchant le côté libre de la chaîne loin de sa position d'équilibre, cette dernière se met à osciller librement. Cela permet de donner une condition initiale proche du premier mode.

Les oscillations libres de la chaîne sont filmées par une caméra placée au dessus. Nous avons mis un fond blanc en éclairant le dessous de la chaîne avec des LEDs, ce qui permet d'accroître le contraste et de différencier les aimants en noir du fond en blanc. La figure 2.5a est l'une des images brutes du film d'une chaîne de 6 aimants cylindriques. Pour récupérer les positions des aimants, les images sont traitées sous Matlab. Le centre de chaque disque est localisé et ses coordonnées sont récupérées numériquement de la manière suivante : les images sont d'abord binarisées pour accroître encore le contraste en ne représentant chacun des pixels qu'en noir ou en blanc selon son niveau

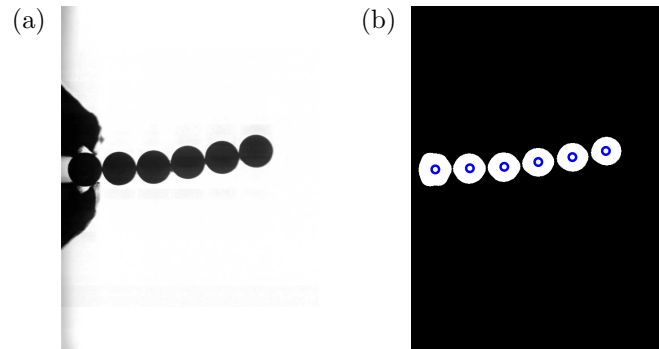


FIGURE 2.5 – Image du film des oscillations libres de la chaîne de 6 aimants cylindriques : (a) avant traitement, (b) après traitement.

de gris, ensuite une fonction Matlab permettant d'identifier les aires de même couleur sur une image est utilisée pour récupérer les centres des cylindres. Pour appliquer cette fonction à nos images, les disques représentant les aimants ne doivent pas être en contact car sinon la fonction ne trouve qu'une surface. Pour être sûr de la séparation des disques, des algorithmes de dilatation et d'érosion sont utilisées afin de supprimer les points qui relient les surfaces. Ces deux fonctions sont les opérateurs de la morphologie mathématique (Serra, 1986) qui permettent d'agrandir ou réduire les tâches suivant la géométrie souhaitée. La figure 2.5b correspond à la photo de la figure 2.5a après traitement.

Après séparation, les coordonnées du centre de chaque disque sont directement données par la même fonction utilisée pour l'identification des disques. En ne prenant que les ordonnées des centres, nous obtenons le déplacement de chaque cylindre dans la direction transversale de la chaîne. Sur le signal de déplacement transversal des cylindres, nous avons appliqué la transformation de Fourier rapide. En traçant le spectre fréquentiel, nous obtenons la première fréquence propre. Le premier mode propre est donné directement par les positions des cylindres récupérées à partir du film. Ces mesures de la fréquence du premier mode et de l'allure du mode sont effectuées pour différents nombres d'aimants.

## 4.2 Oscillations libres avec/sans gravité et avec champ magnétique extérieur

Pour ajouter un champ magnétique extérieur au système, nous utilisons un solénoïde de 200 mm de diamètre, de 600 mm de hauteur et dont le champ maximal induit est de 0.15 T. Pour imposer un champ le plus uniforme possible à la chaîne, cette dernière est disposée selon l'axe central du solénoïde de sorte que le milieu de la chaîne soit confondu avec le centre du solénoïde. Ainsi, la variation d'amplitude du champ imposé par le solénoïde ne dépasse pas 10 % sur 10 cm en partant du centre du solénoïde le long de l'axe central. En plus du champ magnétique extérieur, trois cas de gravité sont pris en compte : gravité négative, nulle et positive. Le cas de la gravité négative est réalisé en encastrant le cylindre du bas de la chaîne verticale comme dans la figure 2.6. La gravité positive est obtenue en encastrant le cylindre du haut de la chaîne verticale. Pour la gravité nulle, tout le système est placé horizontalement comme dans le paragraphe précédent, y compris le solénoïde.

Dans les trois configurations de gravité, une petite impulsion est exercée à l'extrémité libre de la chaîne pour la faire osciller librement. Durant cette expérience, il est

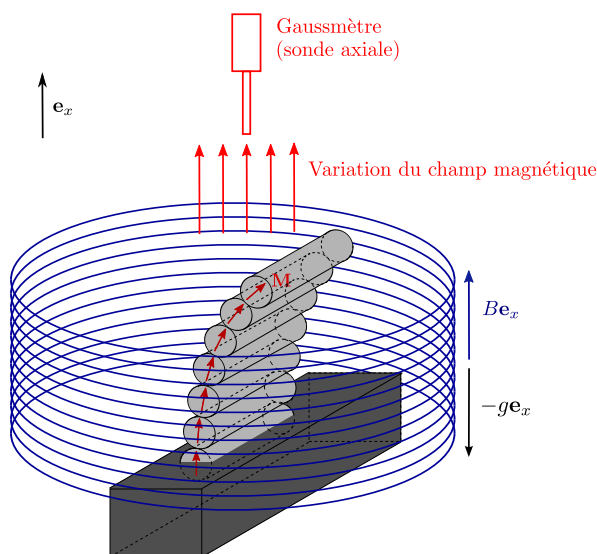


FIGURE 2.6 – Dispositif expérimental de capture des oscillations libres de la chaîne soumise à la gravité  $g\mathbf{e}_x$  ( $g < 0$ ) à un champ magnétique extérieur  $B\mathbf{e}_x$ .

impossible de filmer les oscillations à l'aide d'une caméra à cause de l'encombrement à l'intérieur du solénoïde. Le signal de ces oscillations libres est donc obtenu avec un gaussmètre équipé d'une sonde axiale. Cette dernière est placée du côté libre de la chaîne de sorte qu'elle capte la variation du champ dans la direction longitudinale, engendrée par le mouvement du système. Sur le signal récupéré, nous appliquons la transformation de Fourier rapide puis traçons le spectre fréquentiel. Sur le spectre du signal, la première fréquence propre du système est récupérée. Cette méthode permet ainsi de mesurer une voire plusieurs fréquences propres mais les modes propres ne peuvent pas être mesurés.

Sur la figure 2.7, le signal des oscillations libres d'une chaîne de 5 aimants soumise à aucune force est représenté. Les images de la chaîne à différents instants est aussi reporté. Nous pouvons voir qu'entre deux minimums successifs du signal du gaussmètre, la chaîne fait un demi-cycle d'oscillation. Le signal de la variation du champ magnétique a donc une fréquence double de celle des oscillations de la chaîne.

La figure 2.8 représente le spectre du signal de la figure 2.7a. Parmi les pics présents sur le spectre, le deuxième pic, vers 30 Hz, a la plus grande amplitude et il correspond à la fréquence dominante du signal du gaussmètre. La présence du premier pic d'une amplitude moins importante que le second, est causée par l'alignement imparfait de la sonde du gaussmètre par rapport à l'axe de la chaîne droite. Cela signifie que le système n'oscille pas de façon symétrique par rapport à la sonde. Cette dissymétrie se traduit par les deux séries de pics minimaux qui se succèdent sur le signal de la figure 2.7a. Les autres pics du spectre sont les harmoniques des deux premiers pics. Pour les mesures de la fréquence d'oscillation durant l'expérience de la section 4.2, nous retenons donc la moitié de la fréquence indiquée par le pic de la plus grande amplitude.

Dans chaque cas de gravité, les fréquences propres de la chaîne sont mesurées pour deux sens opposés du champ magnétique  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_x$  ( $B < 0$  ou  $B > 0$ ). D'après l'expression (1.47), nous avons la même énergie en changeant le sens du champ magnétique extérieur qu'en changeant le sens des aimantations des cylindres. Pour le changement du sens du champ magnétique, nous inversons donc la chaîne de sorte que les aimantations soient dans le sens opposé ou identique à  $\mathbf{B}$  selon le signe de  $B$  souhaité. Cela permet d'éviter de démonter et remonter le solénoïde pour modifier le sens du champ

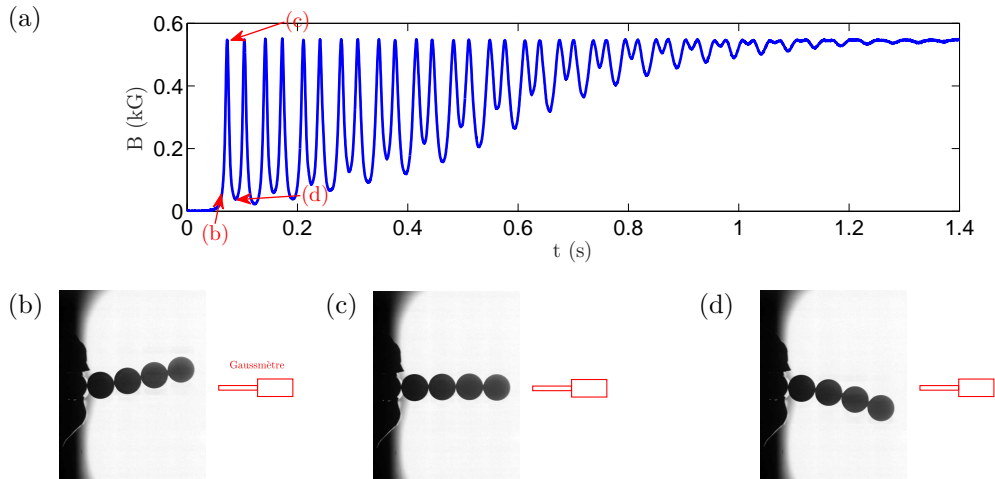


FIGURE 2.7 – Signal des oscillations libres d'une chaîne de 5 aimants en l'absence de gravité et de champ extérieur récupéré avec un gaussmètre (a). Les images (b), (c), (d) sont les allures de la chaîne aux positions indiquées sur la signal de la figure (a).

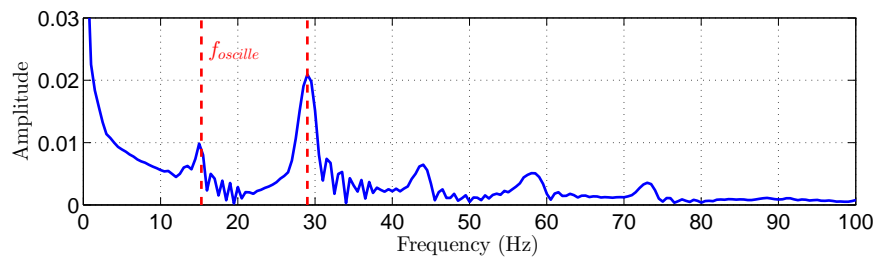


FIGURE 2.8 – Spectre du signal des oscillations libres la chaîne de 5 aimants en l'absence de la gravité et du champ extérieur récupéré avec un gaussmètre.  $f_{oscille}$  est la fréquence des oscillations libres de la chaîne donnée par le premier pic.

extérieur.

### 4.3 Oscillations forcées sans gravité ni champ magnétique extérieur

Le dispositif expérimental permettant de réaliser des oscillations forcées est représenté sur la figure 2.9. Ici, seul le cas de la gravité nulle sans champ magnétique extérieur est considéré. La chaîne est donc disposée horizontalement comme dans la section 4.1. Le côté encastré de la chaîne est fixé à une barre cylindrique en aluminium d'une longueur de 30 cm. Cette barre est reliée à un pot vibrant qui excite l'aimant encastré de sorte que son déplacement transversal soit  $V_1(t) = A \sin(\omega_f T)$ , où  $\omega_f$  est la pulsation imposée. Le pot vibrant est relié à un générateur de basse fréquence qui balaye linéairement les fréquences entre 1 et 40 Hz dans l'ordre croissant et décroissant. Durant ce balayage fréquentiel, les oscillations forcées de la chaîne sont capturées par un capteur de déplacement laser qui peut suivre les déplacements de deux objets simultanément. Les 2 parties du capteur sont disposées au-dessus et en-dessous de telle manière qu'il mesure, à la fois, le déplacement du cylindre à 3/4 de la longueur de chaîne partant de l'encastrement et celui du cylindre encastré. Pour que le capteur détecte le déplacement du cylindre encastré, nous avons mis un repère rigide sur la tige reliant l'encastrement

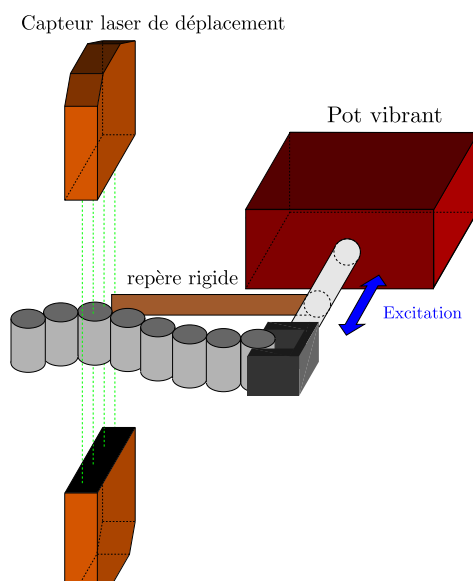


FIGURE 2.9 – Schéma représentant le dispositif expérimental des oscillations forcées de la chaîne d'aimants cylindriques.

au pot vibrant tel que décrit dans la figure 2.9.

À une fréquence d'excitation donnée, l'amplitude du signal des oscillations est enregistrée. Les signaux ainsi récupérés permettent de calculer la fonction de transfert entre l'amplitude du déplacement du cylindre encastré et celui du cylindre situé aux  $3/4$  de la longueur de la chaîne. Deux premières fréquences de la chaîne sont obtenues en localisant les deux premiers pics de la fonction de transfert.

Pour toutes ces expériences, les surfaces de cylindres sont lubrifiées avant chaque mesure afin de préserver au mieux les surfaces des aimants.

## 5 Résultats et discussion

Dans cette section, les fréquences et les modes propres expérimentaux de la chaîne obtenus à partir des expériences décrites en section 4 sont présentées puis comparées aux résultats numériques du modèle linéaire. Nous rappelons les caractéristiques des aimants cylindriques :  $d = 0.4\text{cm}$ ,  $h = 1\text{ cm}$ ,  $m = 0.93\text{ g}$  et  $M = 1.07 \cdot 10^6\text{ A/m}$ .

La dynamique de la chaîne en l'absence de gravité et d'un champ extérieur est d'abord étudiée. À partir de cette étude, la poutre continue équivalente à la chaîne est définie. Ensuite, les résultats obtenus en présence de gravité et d'un champ magnétique extérieur sont présentés et l'influence de ces deux facteurs extérieurs sur la dynamique et la stabilité de la chaîne est discutée. La stabilité de la chaîne est comparée à celle de la poutre continue équivalente (section 3) et l'influence des conditions aux limites sur le comportement mécanique de la chaîne est étudiée.

### 5.1 Dynamique de la chaîne en l'absence de gravité et de champ magnétique extérieur.

#### 5.1.1 Oscillations libres

La figure 2.10 représente les résultats de trois séries de mesures pour une chaîne de 6 aimants. Parmi ces trois séries, deux sont réalisées avec la même condition initiale

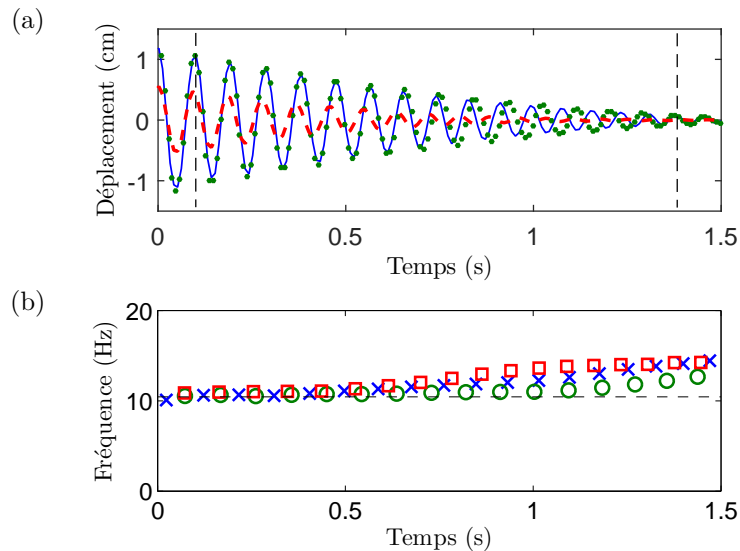


FIGURE 2.10 – (a) : Déplacement transversal du quatrième cylindre d'une chaîne de 6 aimants pour 3 essais. Les pointillés verticaux correspondent aux instants où les figures 2.11 sont prises. (b) : Variation de la fréquence d'oscillations mesurée par les passages par zéro des courbes de (a). Le pointillé horizontal est la fréquence prédite par le modèle linéaire de la chaîne. Les symboles ( $\times$ ,  $\square$ ,  $\circ$ ) correspondent aux courbes (—, - - -,  $\cdots$ ) respectivement. Le symbole  $\circ$  représente les mesures réalisées avec des cylindres neufs.

(en bleu et vert) et pour la troisième (en rouge), le déplacement initial est la moitié de celui des deux autres. Des cylindres neufs sont utilisés pour l'une des deux séries ayant le même déplacement initial (en vert) alors que les deux autres séries sont réalisées avec des aimants usés. La variation de la fréquence des oscillations est obtenue en localisant les passages par zéro des courbes de la figure 2.10a. Dans ces mesures, les fréquences d'oscillations sont de 10 Hz jusqu'à environ 0.75 s, ce qui correspond à la fréquence prédite par le modèle de la chaîne. Nous pouvons ensuite observer une augmentation progressive de la fréquence des oscillations dans le temps. Cette tendance n'est pas spécifique au cas de 6 cylindres, elle est également observée pour d'autres valeurs de  $n$ , allant parfois jusqu'à quadrupler la fréquence initiale.

L'augmentation de la fréquence d'oscillation au cours du temps pourrait être due à des phénomènes de non-linéarités géométriques. Cependant, nous pouvons voir dans la figure 2.10 qu'un changement d'amplitude initiale n'a pas d'effet sur la fréquence initiale. Dans tous les cas, la dérive en fréquence a lieu à la fin du mouvement, pour les petites amplitudes. Les non-linéarités de type géométrique devraient avoir une influence sur la fréquence d'oscillation aux grandes amplitudes. Or, c'est pour les petites amplitudes que l'on s'éloigne de la fréquence linéaire. L'hypothèse de non-linéarités géométriques n'est donc pas retenue.

Un autre phénomène non-linéaire peut expliquer le désaccord avec le modèle linéaire à faible amplitudes. Il s'agit de l'accumulation des impuretés sur les cylindres et des défauts de surface. Les impuretés sont principalement localisées aux points de contact où le champ magnétique est le plus intense. La taille de ces défauts est de l'ordre de 0.1 mm. Ils devraient donc avoir une influence lorsque l'amplitude du déplacement du point de contact entre deux cylindres est du même ordre de grandeur. Cette hypothèse est confirmée par l'observation d'une augmentation moins importante de la fréquence lorsque des cylindres neufs sont utilisés.

Sur la figure 2.11, la position des cylindres de la chaîne des 3 séries de mesures de la

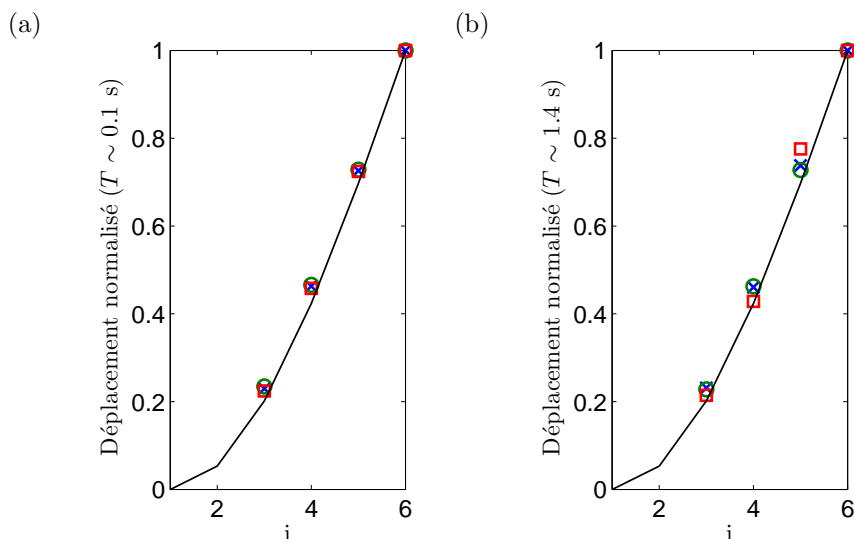


FIGURE 2.11 – Premier mode propre de la chaîne de  $n = 6$  expérimental et théorique : (a) à  $T = 0.1s$  et (b) à  $T = 1.4s$ . Les symboles ( $\times$ ,  $\square$ ,  $\circ$ ) correspondent aux séries de mesures représentées par les mêmes symboles sur la figure 2.10.

figure 2.10 est représentée à deux instants différents. Ces deux instants sont indiqués en pointillés sur la figure 2.10a. Les déplacements des cylindres sont comparés au premier mode donné par le modèle linéaire, en normalisant par la position du sixième cylindre. Comme pour les fréquences, nous pouvons voir la détérioration de l'accord entre les résultats théoriques et expérimentaux au cours du temps et un meilleur accord avec des cylindres neufs. Cela confirme l'hypothèse du phénomène non-linéaire engendré par des impuretés sur la surface des aimants.

### 5.1.2 Oscillations forcées

Les résultats des mesures de fréquences en oscillations forcées (cf. section 4.3) sont présentés dans cette partie. La figure 2.12 représente la fonction de transfert entre l'amplitude du déplacement du premier cylindre et celle du déplacement du cylindre situé aux 3/4 de la longueur pour  $n = 6$  et  $n = 10$ . Sur la même figure, les fréquences propres données par le modèle sont indiquées par les lignes verticales. Un bon accord est trouvé entre les pics de la fonction de transfert et les fréquences propres du modèle avec une erreur comprise entre 4 et 15 %. Pour les séries de données de la figure 2.12, l'amplitude de la réponse est de l'ordre de 1 cm, qui correspond à l'amplitude des premières oscillations de 2.10a. On note toutefois un léger hystérésis pour le second pic de la fonction de transfert, que l'on peut attribuer aux problèmes d'impuretés discutés précédemment.

Des excitations d'amplitudes plus faibles ont été testées et des fréquences plus élevées ont été obtenues. La figure 2.13 représente la fonction de transfert pour deux amplitudes différentes. Nous pouvons observer que la fréquence du premier pic de la fonction de transfert est plus grande pour une amplitude du signal d'excitation plus faible. Comme pour les oscillations libres, nous pouvons attribuer cet effet à des non-linéarités liées aux défauts de surface. À faible amplitude, un important hystérésis est observé, ce qui confirme cette hypothèse.

Les deux premières fréquences propres obtenues à partir des oscillations libres et forcées sont comparées aux fréquences prédites par le modèle en figure 2.14. Un bon accord existe entre les résultats théoriques et expérimentaux. Cependant cet accord se

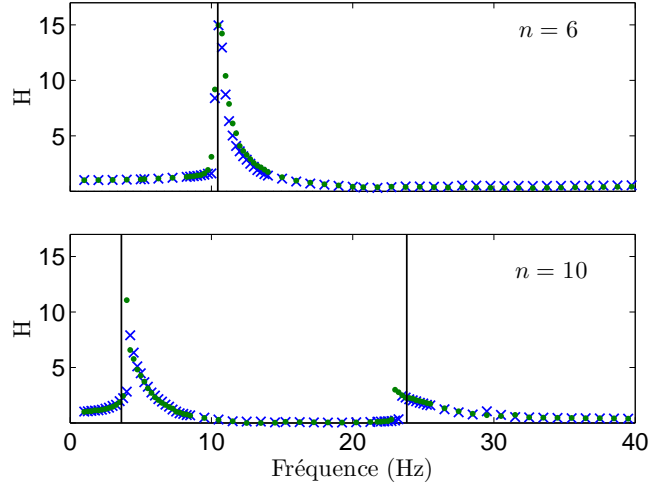


FIGURE 2.12 – Norme de la fonction de transfert entre les déplacements du cylindre encastré et du cylindre se trouvant aux  $3/4$  de la longueur de la chaîne pour  $n = 6$  et  $10$ . Chaque point correspond à une moyenne de  $H$  sur 20 secondes. Les symboles  $(\times, \cdot)$  représentent les mesures obtenues par des balayages en fréquences croissant et décroissant respectivement. Les lignes verticales sont les fréquences linéaires prédites par le modèle linéaire.

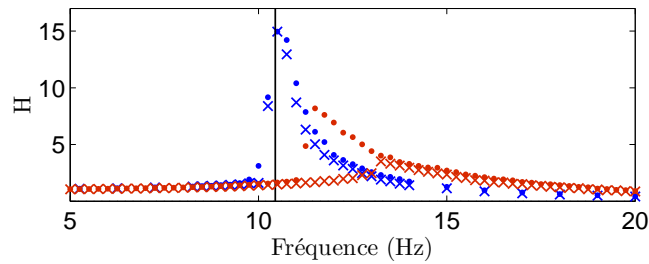


FIGURE 2.13 – Norme de la fonction de transfert entre les déplacements du cylindre encastré et du cylindre se trouvant aux  $3/4$  de la longueur d'une chaîne de 6 aimants pour deux amplitudes d'excitation différentes : l'amplitude de déplacement du premier cylindre de 0.5 cm (en bleu) et 0.1 cm (en rouge). Les symboles  $(\times, \cdot)$  représentent les mesures obtenues par des balayages en fréquences croissant et décroissant respectivement. La ligne verticale est la fréquence linéaire prédite par le modèle linéaire.

dégrade pour  $n > 20$ . Cela est lié au déversement de la chaîne. En effet, pendant les mesures, nous remarquons qu'à partir de  $n \simeq 20$ , la chaîne se tord légèrement et il y a déversement à  $n \simeq 26$ . Ce phénomène s'explique par le fait que le poids du système devient trop important pour que les forces d'interactions magnétiques la maintienne droite. Pour étudier ce phénomène de déversement, il faudrait modéliser le problème en 3D en prenant en compte de la gravité.

Sur la figure 2.14, nous pouvons observer qu'aux grandes valeurs de  $n$ , les fréquences propres s'alignent sur une tendance en  $n^{-2}$ , ce qui est indiqué en pointillés. La longueur caractéristique utilisée pour l'adimensionnement est le diamètre des cylindres. Au vu de cet adimensionnement, cela implique que les fréquences propres diminuent selon l'inverse du carré de la longueur de la chaîne. Or, cette variation est identique à celle des fréquences propres d'une poutre continue (Blevins, 1979). Ce constat confirme l'intérêt d'un modèle de poutre continue.



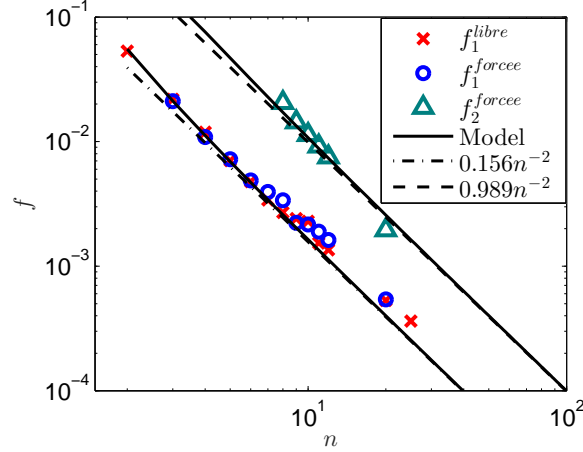


FIGURE 2.14 – Deux premières fréquences propres sans dimension de la chaîne pour différents nombres d’aimants en l’absence de gravité et de champ extérieur. Les symboles représentent les résultats expérimentaux et les lignes pleines correspondent aux résultats du modèle. Les pointillés représentent le comportement asymptotique pour  $n \rightarrow \infty$ .

### 5.1.3 Poutre continue équivalente

La rigidité du système est créée par les forces de rappel induites par les forces d’interaction magnétique entre aimants. Ici, nous cherchons à caractériser le comportement mécanique de la chaîne pour un très grand nombre d’aimants en déterminant une rigidité de flexion équivalente  $K$  pour différents rapports d’aspect des cylindres. Ce module de flexion équivalent est estimé en calculant la rigidité de flexion d’une poutre encastree-libre qui donne la même fréquence propre pour un mode choisi. La  $i^{\text{ième}}$  fréquence propre d’une poutre encastree-libre a pour pulsation (Blevins, 1979) :

$$\omega_i = \sqrt{\frac{\kappa_i^4 K}{l^4 \rho}}, \quad (2.51)$$

où  $l$  est sa longueur et  $\kappa_i$  est  $i^{\text{ième}}$  solution de l’équation  $\cos \kappa \cosh \kappa + 1 = 0$ . Les valeurs numériques de  $\kappa_i$  sont (Blevins, 1979) :

$$\begin{cases} \kappa_1 = 1.8751, \\ \kappa_2 = 4.6941, \\ \kappa_3 = 7.8547, \\ \kappa_4 = 10.996, \\ \kappa_5 = 14.137, \\ \kappa_k = \frac{\pi(2k-1)}{2}, \forall k > 5. \end{cases} \quad (2.52)$$

Nous considérons que la longueur de la poutre équivalente est donnée par la distance entre les centres des cylindres aux extrémités. La longueur et la masse linéique s’expriment en fonction des paramètres du système :  $\rho = m/d$  et  $l = d(n-1)$ . Dans ce cas, la rigidité de flexion équivalente a pour expression :

$$K_i = \frac{md^3(n-1)^4}{\kappa_i^4} \omega_i^2, \quad (2.53)$$

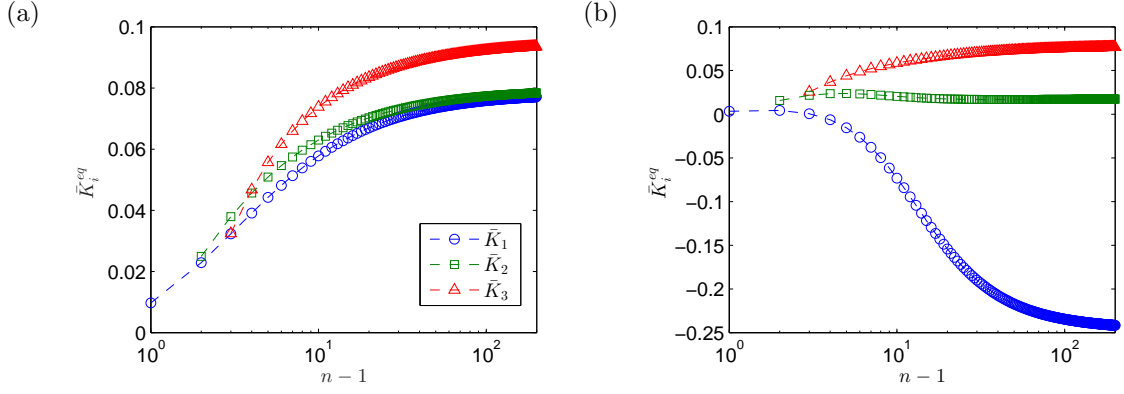


FIGURE 2.15 – Module de flexion équivalent normalisé par  $\mu_0 M^2 h d^3 / \pi$  des trois premiers modes propres de la chaîne en fonction de  $n - 1$  pour (a)  $\lambda = 0.4$  et (b)  $\lambda = 0.1$ .

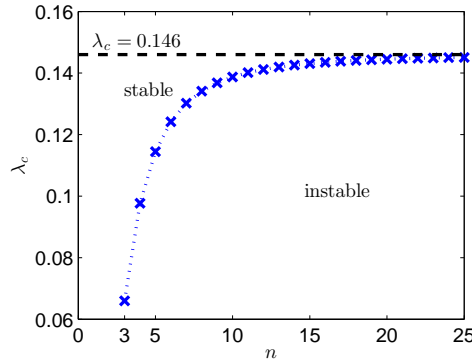


FIGURE 2.16 – Valeurs critique du rapport d'aspect des cylindres  $\lambda_c$  en fonction du nombre d'aimants.

où  $\omega_i$  est ici une pulsation de la chaîne discrète. En adimensionnant la pulsation, l'expression de la rigidité de flexion normalisée  $\bar{K}_i$  s'écrit :

$$\bar{K}_i = \frac{\pi}{\mu_0 M^2 h d^3} K_i = \left( \frac{n-1}{\kappa_i} \right)^4 \bar{\omega}_i^2, \quad (2.54)$$

où  $\bar{\omega}_i$  est la pulsation adimensionnée.

Les rigidités normalisées  $\bar{K}_i$  sont tracées en fonction du nombre de degrés de liberté du système  $n - 1$  sur la figure 2.15 pour  $\lambda = 0.4$  et  $0.1$ . Pour  $\lambda = 0.4$ , il existe une différence de valeurs entre les trois rigidités équivalentes mais la même tendance est observable sur les trois courbes. Pour  $\lambda = 0.1$ , nous observons que  $\bar{K}_1$  est négatif à partir de  $n = 5$ , ce qui signifie que la structure flambe à partir de 5 éléments. Afin de connaître la plage de  $\lambda$  pour laquelle la structure reste stable quelle que soit la valeur de  $n$ , la valeur critique de  $\lambda$  pour laquelle  $\bar{K}_i$  s'annule, notée  $\lambda_c$ , est tracée en fonction de  $n$  sur la figure 2.16. Nous pouvons observer que  $\lambda_c$  tend vers environ 0.146 lorsque  $n$  croît. Pour  $n = 2$ , le système reste stable quelle que soit la valeur de  $\lambda$ , c'est pourquoi  $\lambda_c$  n'est défini qu'à partir de 3 aimants. Ce phénomène s'explique par la position droite de la chaîne qui devient une configuration d'équilibre instable à partir d'une certaine valeur de  $n$  et de  $\lambda$ .

Revenons à la figure 2.15. La valeur de  $\bar{K}_i$  croît de façon monotone avant de converger vers une valeur limite qui est différente pour chaque mode. Nous notons cette valeur limite  $\bar{K}_i^\infty$ . Pour différents modes,  $\bar{K}_i^\infty$  est estimé par la régression des courbes de  $\bar{K}_i$

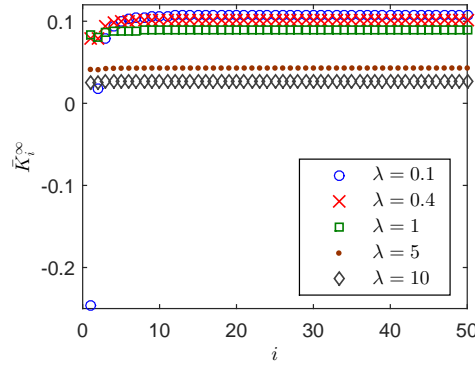


FIGURE 2.17 – Rigidité de flexion équivalent à  $n \rightarrow \infty$  en fonction de l'ordre des modes de la chaîne encastree-libre pour différents rapports d'aspect  $\lambda$ .

en fonction de  $n - 1$  suivant la loi  $\bar{K}_i = a/(n - 1) + \bar{K}_i^\infty$ . Cette régression est choisie car aux grandes valeurs de  $(n - 1)$ , l'évolution de  $\bar{K}_i$  est similaire à cette loi. La régression est réalisée sur 50 points aux grandes valeurs de  $(n - 1)$ . La figure 2.17 représente  $\bar{K}_i^\infty$  en fonction de  $i$  pour différentes valeurs de  $\lambda$ . Lorsque  $i$  augmente, la valeur de  $\bar{K}_i^\infty$  tend vers une valeur limite. Cette valeur limite représente la rigidité de flexion de la poutre équivalente. Nous pouvons observer que la rigidité équivalente augmente lorsque  $\lambda$  diminue. L'origine de cette augmentation de la rigidité avec  $\lambda$  reste à comprendre en faisant une étude sur l'énergie d'une chaîne de cylindres en fonction  $\lambda$ .

Dans le cas d'une poutre continue encastree-libre, la rigidité de flexion reste la même quel que soit le numéro de mode, alors que la rigidité de flexion équivalente d'une chaîne dépend de  $i$  pour une petite valeur de  $\lambda$ . Nous en concluons donc que ce modèle de poutre équivalente n'a de sens que pour de grandes valeurs de  $\lambda$ . Pour  $\lambda = 0.4$ ,  $\bar{K}_i^\infty$  converge vers 0.102 avec une erreur de 20 – 25% sur le premier et le deuxième mode. Cette valeur de rigidité équivalente est introduite dans le modèle de poutre continue de la section 3.

## 5.2 Dynamique et stabilité de la chaîne soumise à la gravité et à un champ extérieur

Dans cette section, nous discutons d'abord de l'influence de la gravité et du champ magnétique extérieur sur la dynamique et la stabilité de la chaîne. Ensuite, la stabilité de la poutre continue équivalente est étudiée. Les résultats expérimentaux présentés dans la suite sont ceux de l'expérience de la section 4.2.

### 5.2.1 Influence de la gravité

Nous nous concentrons dans un premier temps sur la gravité seule. Les trois configurations de gravité sont respectivement exprimées en fonction du paramètre sans dimension  $\mathcal{G}$  (2.19) :  $\mathcal{G} = \pm 0.5 \cdot 10^{-3}$  et  $\mathcal{G} = 0$ . Sur la figure 2.18, la fréquence du premier mode mesurée ainsi que celle prédite par le modèle discret sont tracées en fonction du nombre d'aimants  $n$ . Un bon accord est trouvé entre les expériences et le modèle pour les trois valeurs de  $\mathcal{G}$ .

Pour  $\mathcal{G} = -0.5 \cdot 10^{-3}$ , l'effet déstabilisant de la gravité fait chuter la fréquence jusqu'à  $n = 10$ . À partir de  $n = 11$ , l'analyse aux valeurs propres fait apparaître 2 fréquences imaginaires pures de signes opposés, ce qui prédit le flambement de la structure. Sur

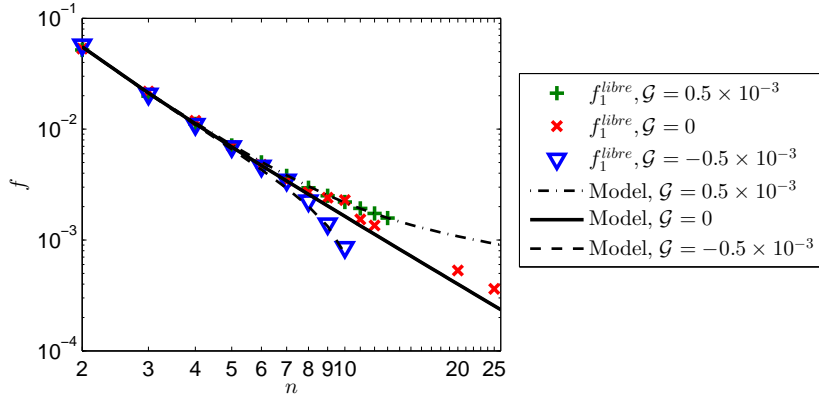


FIGURE 2.18 – La première fréquence propre de la chaîne en fonction de  $n$  dans trois configurations de gravité.

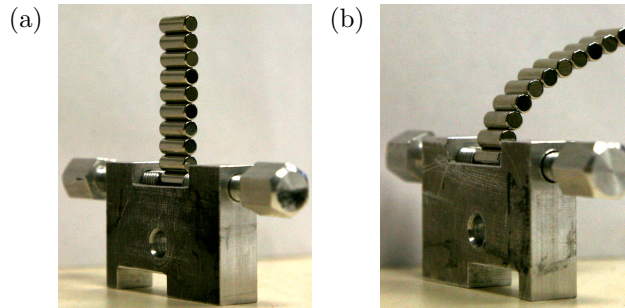


FIGURE 2.19 – Flambement de la chaîne : (a) chaîne de 10 aimants, (b) chaîne de 11 aimants.

la figure 2.19, des photographies de la chaîne à 10 et à 11 cylindres sont représentées. Nous pouvons observer que le système flambe à  $n = 11$  comme prédit par le modèle. Ce phénomène d'instabilité s'explique par l'influence déstabilisante de la gravité qui grandit lorsque  $n$  augmente. À partir d'un certain nombre d'aimants, la raideur magnétique ne supporte plus la gravité et la chaîne flambe.

Dans la configuration où  $\mathcal{G} = 0.5 \cdot 10^{-3}$ , la fréquence devient plus importante que pour  $\mathcal{G} = 0$  lorsque  $n$  augmente. Cette augmentation de la fréquence est liée à l'influence stabilisante de la gravité qui devient de plus en plus importante lorsque  $n$  augmente.

Dans la suite, en plus de la gravité, nous ajoutons un champ magnétique extérieur qui ajoute une raideur supplémentaire au système.

### 5.2.2 Influence d'un champ magnétique extérieur

Dans cette section, les résultats de l'expérience 4.2 sont présentés. La première fréquence propre est mesurée pour différents nombres d'aimants et différentes intensités du champ magnétique extérieur dans les trois cas de gravité.

Sur la figure 2.20, la première fréquence adimensionnée est représentée en fonction du champ adimensionné  $\mathcal{B}$  (2.19) pour  $n = 5, 15, 20$  aimants et pour les trois configurations de gravité.

Les résultats expérimentaux et numériques du modèle discret sont représentés. Nous trouvons un bon accord entre le modèle et les expériences, ce qui confirme la bonne prise en compte du champ magnétique extérieur dans le modèle discret. Nous observons le même type d'évolution de la fréquence en fonction de  $\mathcal{B}$  pour 5, 15 et 20 aimants. La fréquence du premier mode croît lorsque  $\mathcal{B}$  augmente. Cela s'explique par l'effet

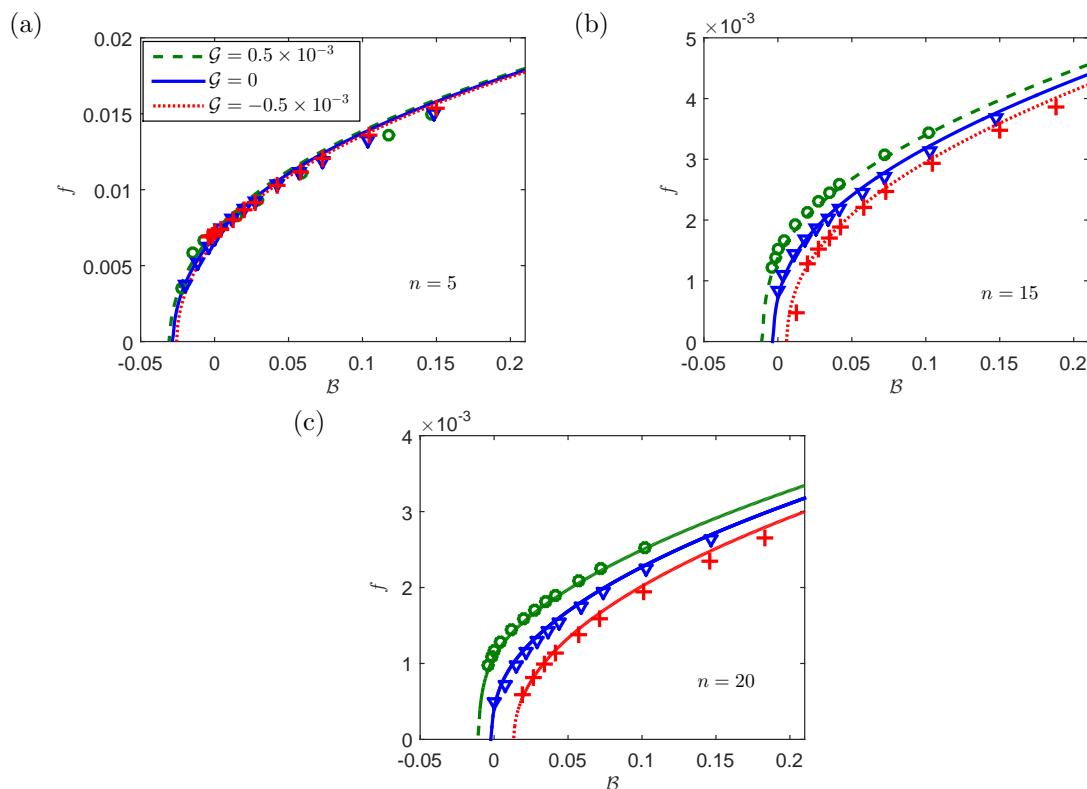


FIGURE 2.20 – Première fréquence propre expérimentale et numérique d'une chaîne de 5 aimants (a), 15 aimants (b) et 20 aimants (c) en fonction du champ magnétique extérieur adimensionné  $\mathcal{B}$  pour trois cas de gravité :  $\mathcal{G} = 0$  et  $\mathcal{G} = \pm 0.5 \cdot 10^{-3}$ . Les symboles correspondent aux mesures expérimentales et les lignes représentent les fréquences propres prédites par le modèle.

stabilisant du champ magnétique qui grandit avec son intensité. Dans le cas où le champ magnétique est dans le sens opposé, c'est-à-dire pour  $\mathcal{B}$  négatif, la fréquence chute jusqu'à ce qu'elle s'annule. Cette chute de fréquence est liée à l'influence déstabilisante du champ extérieur qui augmente lorsque  $\mathcal{B}$  décroît dans des valeurs négatives. La valeur de  $\mathcal{B}$  pour laquelle la fréquence propre est nulle, notée  $\mathcal{B}_c$ , correspond à la valeur critique de stabilité du système. Dans la suite, nous nous intéressons à l'évolution de la valeur critique de stabilité de la chaîne en fonction de  $n$ . Nous pouvons également observer que plus  $n$  est grand, plus les courbes représentatives des trois configurations de gravité s'écartent. Cette tendance est liée une nouvelle fois à l'influence de la gravité qui croît avec le nombre d'éléments.

Les valeurs critiques de stabilité  $\mathcal{B}_c$  sont représentées pour trois configurations de gravité en fonction de  $n$  sur la figure 2.21. Dans chaque configuration, la chaîne flambe pour les valeurs de  $\mathcal{B}$  en dessous de la courbe critique et elle reste stable pour les valeurs au dessus de la limite. En fonction de  $n$ , les trois courbes critiques de stabilité présentent la même variation pour  $n$  petit. À partir d'environ  $n = 11$ , les trois courbes s'écartent. Cela est lié aux influences de la gravité et du champ magnétique extérieur qui sont faibles par rapport à celle des interactions magnétiques sur le système pour un petit nombre d'aimants, alors qu'elles deviennent plus importantes pour  $n$  grand. Aux grandes valeurs de  $n$  pour lesquelles les influences de la gravité et du champ magnétiques sont grandes, les valeurs de  $\mathcal{B}_c$  sont positives dans le cas de  $\mathcal{G} = -0.5 \cdot 10^{-3}$ , nulles pour  $\mathcal{G} = 0$  et négatives pour  $\mathcal{G} = 0.5 \cdot 10^{-3}$ . Les signes opposés de  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{G}$  montrent une compétition entre la gravité et le champ extérieur. En effet, lorsque la gravité et le

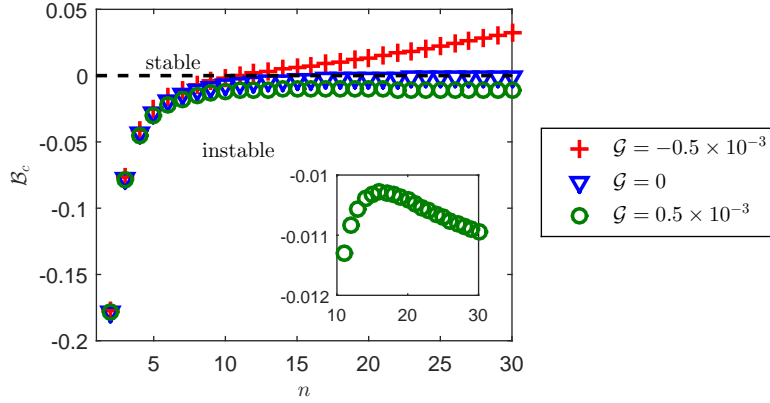


FIGURE 2.21 – Courbes marginales de stabilité de la chaîne dans trois valeurs de  $\mathcal{G}$ . Le petit graphe représente un zoom de la courbe pour  $\mathcal{G} = 0.5 \times 10^{-4}$ .

champ magnétique sont dans le même sens, le champ magnétique renforce l'influence stabilisante ou déstabilisante de la gravité alors que quand ils sont opposés, la gravité et le champ magnétique extérieur sont en compétition.

Pour  $\mathcal{G} = -0.5 \cdot 10^{-3}$ , la valeur critique de  $\mathcal{B}$  croît de façon monotone en fonction de  $n$  à cause de l'influence déstabilisante de la gravité qui augmente avec  $n$ . Dans la configuration où  $\mathcal{G} = 0.5 \cdot 10^{-3}$ , la courbe marginale est croissante pour  $n < 16$  puis elle décroît très légèrement ensuite. Cela est lié à l'influence stabilisante de la gravité qui est négligeable pour  $n$  petit et qui devient non négligeable à partir de  $n = 16$ , ce qui explique la faible décroissance de  $\mathcal{B}_c$  pour  $n \rightarrow \infty$ .

Hormis ces études sur les fréquences propres, nous nous sommes également intéressés à l'influence du champ magnétique sur les modes propres de la chaîne. Nous n'avons considéré que les résultats numériques du modèle discret dans la configuration de la gravité nulle. La figure 2.22 représente le premier mode d'une chaîne de 15 aimants cylindriques pour différentes valeurs de  $\mathcal{B}$  sans gravité.

Sans gravité et champ magnétique extérieur, le premier mode est une courbe convexe. Lorsque la valeur de  $\mathcal{B}$  augmente, le mode garde sa convexité proche de l'encastrement mais il devient de plus en plus concave vers son extrémité libre. Le moment mécanique exercé par le champ magnétique extérieur sur les cylindres de la chaîne est responsable de ce phénomène (cf. équation (1.75)). L'influence du moment exercé par le champ magnétique extérieur est plus grande vers l'extrémité libre à cause de l'influence de l'encastrement qui s'affaiblit. Quand  $\mathcal{B}$  change de signe, le moment exercé par le champ extérieur change de sens ce qui modifie la convexité du mode. Pour les autres modes, la même tendance a été observée. Nous n'avons pas trouvé de méthode de mesure de déplacements des cylindres dans le solénoïde. Ces résultats restent donc à compléter par des expériences.

### 5.2.3 Comparaison avec le modèle de poutre continue

Dans cette section, la limite de stabilité de la chaîne est exprimée en fonction des paramètres du modèle de poutre continue équivalente  $\beta$  et  $\gamma$  et elle est comparée à celle donnée par le modèle discret. Sur la figure 2.23, les courbes marginales de stabilité de la chaîne pour différentes valeurs de  $n$  et la courbe marginale de stabilité de la poutre équivalente sont tracées dans le plan  $(\beta, \gamma)$ . Nous observons que des valeurs positives de  $\beta$  et  $\gamma$  engendrent la stabilisation de la chaîne alors que pour des valeurs négatives de ces

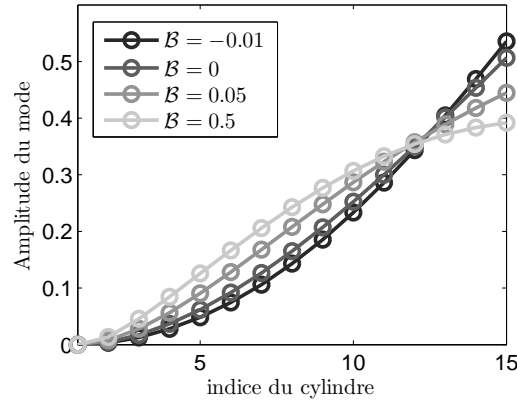


FIGURE 2.22 – Premier mode d'une chaîne de 15 aimants cylindriques en fonction du champ magnétique adimensionné  $\mathcal{B}$  pour  $\mathcal{G} = 0$ .

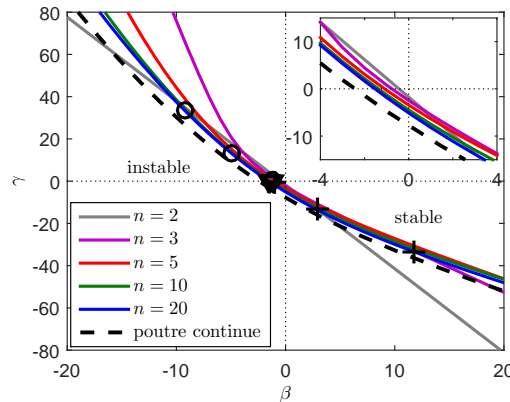


FIGURE 2.23 – Courbes critiques de stabilité de la chaîne et de la poutre continue équivalente en fonction de  $(\beta, \gamma)$  pour différents nombres d'aimants. Les symboles correspondent aux données expérimentales de la figure 2.20.

paramètres, le système devient instable. Cela est lié aux forces de traction/compression exercées sur la chaîne pour les valeurs positives/négatives de  $\gamma$  et au moment de flexion imposé par le champ magnétique qui force la chaîne à rester droite lorsque  $\beta$  est positif et fait fléchir le système lorsque  $\beta$  est négatif.

Lorsque les signes de  $\beta$  et  $\gamma$  sont opposés, il y a une compétition entre le champ magnétique extérieur et la gravité. C'est pourquoi les courbes critiques de stabilité sont principalement présentes dans les parties supérieure gauche et inférieure droite du graphe. Ces courbes de stabilité ne passent pas par l'origine à cause de la rigidité de flexion créée par les interactions entre aimants qui a un effet stabilisant.

Dans la section 5.1, nous avons montré que le comportement de la chaîne devient similaire à celui d'une poutre lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Sur la figure 2.23, lorsque  $n$  augmente, la courbe critique prédite par le modèle discret converge vers celle du modèle de la poutre continue équivalente, ce qui confirme l'interprétation faite précédemment. Pour un grand nombre d'aimants, la stabilité de la chaîne peut donc être décrite par une poutre continue soumise à la gravité et un moment linéique.

Hormis les influences de la gravité et du champ magnétique extérieur, la stabilité de la chaîne dépend également des conditions aux limites. Pour étudier l'influence des conditions aux limites sur la stabilité de la chaîne, le modèle continu de la chaîne est

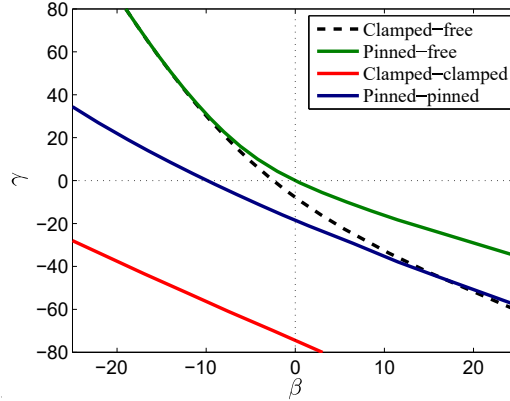


FIGURE 2.24 – Courbes critiques de stabilité dans le plan  $(\beta, \gamma)$  pour différentes conditions aux limites.

utilisé. Les courbes critiques de stabilité pour différentes conditions aux limites sont tracées sur la figure 2.24. Sur ces résultats, nous pouvons voir que plus le nombre de contraintes aux limites est grand, plus la poutre est stable et nécessite une charge et un moment linéique important pour la déstabiliser. Nous trouvons logiquement que la condition bi-encastree est la condition aux limites donnant la poutre la plus stable. Ensuite nous avons la poutre bi-appuyée et la poutre appuyée-libre. Cette dernière voit sa courbe marginale de stabilité passer par l'origine. Cela est lié à l'appui simple qui permet la rotation et le déplacement longitudinale. Concernant la poutre encastree-libre, sa courbe critique de stabilité présente une particularité : lorsque  $\beta$  est négatif, la courbe marginale s'approche de celle du cas appuyée-libre, et lorsque  $\beta$  devient positif, elle s'approche de la courbe représentant la poutre bi-appuyée. Cela montre que la poutre encastree-libre a la même condition critique de stabilité qu'une poutre appuyée-libre face à une force de traction et un moment de flexion. Face à une force de compression et à un moment de flexion contraignant le flambement forcé par la compression, la stabilité de la poutre encastree-libre est similaire à une poutre bi-appuyée.

### 5.3 Discussion sur la condition de non-glissement

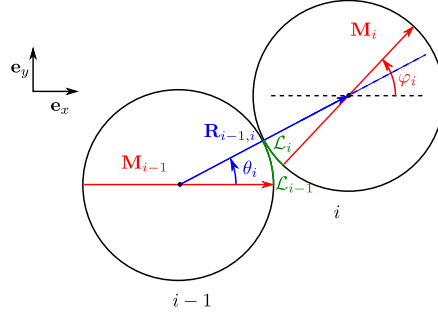
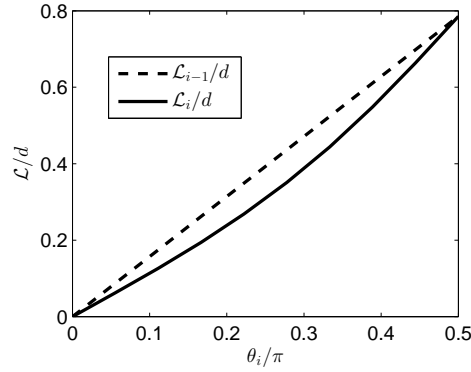
Lors du développement du modèle linéaire de la dynamique d'une chaîne d'aimants, nous avons imposé le mouvement de roulement des cylindres au contact. Dans cette section, nous discutons de la validité de cette condition de non-glissement en étudiant le minimum de l'énergie d'interaction magnétique entre deux aimants et en utilisant la loi de Coulomb (Johnson and Johnson, 1987).

Considérons d'abord que le mouvement des cylindres au contact soit quasi-statique, c'est-à-dire qu'à chaque instant du mouvement, le minimum de l'énergie d'interaction est atteint. Nous posons deux aimants  $i - 1$  et  $i$  en contact représentés sur la figure 2.25. L'aimantation de l'aimant  $i$  est fixée dans la direction  $\mathbf{e}_x$  avec  $\varphi_i = 0$ . La position relative de l'aimant  $i$  par rapport à l'aimant  $i - 1$  s'écrit :

$$\mathbf{R}_{(i-1)i}(\theta_i) = d(\cos \theta_i \mathbf{e}_x + \sin \theta_i \mathbf{e}_y) . \quad (2.55)$$

L'aimant  $i$  se déplace de  $\theta_i = 0$  à  $\pi/2$  autour de l'aimant  $i - 1$ . Pour chaque valeur de  $\theta_i$ , nous estimons numériquement la valeur de l'angle  $\varphi_i$  pour laquelle l'énergie d'interaction entre deux aimants (1.60) est minimale. Pour la recherche du minimum de l'énergie, la méthode de Nelder-Mead (Nelder and Mead, 1965) est utilisée avec une




 FIGURE 2.25 – Aimants  $i - 1$  et  $i$  en contact.

 FIGURE 2.26 – Longueurs des arcs de cercles des sections des cylindres  $i - 1$  et  $i$  balayés par la ligne de contact entre les deux lorsque  $\theta_i$  varie et  $\varphi_i$  correspond au minimum d'énergie.

tolérance de  $10^{-6}$ . Ces calculs donnent la variation de  $\varphi_i$  lorsque le cylindre  $i$  se déplace sur la surface latérale du cylindre  $i - 1$ .

Les chemins parcourus par la ligne de contact entre les deux aimants lors du déplacement de l'aimant  $i$  de  $\theta_i = 0$  à  $2\pi$  sont représentés en vert sur la figure 2.25. La longueur du chemin parcourue par la ligne du contact sur le cylindre  $i - 1$  et celle sur le cylindre  $i$  sont respectivement notées  $\mathcal{L}_{i-1}$  et  $\mathcal{L}_i$ . Ces deux longueurs peuvent être exprimées en fonction de  $\theta_{i-1}$  et  $\varphi_i$  :

$$\mathcal{L}_{i-1} = \frac{d}{2}|\theta_i| \quad , \quad \mathcal{L}_i = \frac{d}{2}|\varphi_i - \theta_i| \quad . \quad (2.56)$$

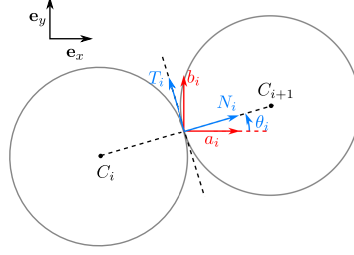
Si les cylindres roulent, on a  $\mathcal{L}_{i-1} = \mathcal{L}_i$  et  $\varphi_i \neq 0$ .

Les longueurs des arcs  $\mathcal{L}_{i-1}$  et  $\mathcal{L}_i$  sont calculées pour  $\theta_i \in [0, \pi/2]$ . Cette plage de valeurs de  $\theta_i$  est suffisante pour voir l'évolution des distances parcourues par la ligne de contact sur  $[0, 2\pi]$  grâce à la symétrie de la variation d'énergie par rapport aux directions des aimantations présentée dans le chapitre 1. Les valeurs de  $\mathcal{L}_{i-1}$  et  $\mathcal{L}_i$  sont tracées en fonction de  $\theta_i$  sur la figure 2.26. Ces résultats montrent que  $\mathcal{L}_{i-1}$  et  $\mathcal{L}_i$  sont différentes pour  $\theta_i \in ]0, \pi/2[$ . Il y a donc possibilité de glissement. Intéressons-nous aux forces de frottement afin d'estimer si celles-ci sont capables d'empêcher ce glissement.

Les multiplicateurs de Lagrange  $a_i$  et  $b_i$  de (2.18) représentent les forces de réaction de contacts adimensionnées et en vérifiant si ces forces de réaction sont dans le cône de frottement donnée par la loi de Coulomb, nous pouvons vérifier si les cylindres roulent aux contacts. La force de contact exercée par le  $(i - 1)^{\text{ième}}$  cylindre sur le  $i^{\text{ième}}$  s'écrit :

$$\mathbf{f}_i = a_i \mathbf{e}_x + b_i \mathbf{e}_y \quad . \quad (2.57)$$

Cette force est représentée dans la figure 2.27.


 FIGURE 2.27 – Forces de réaction au contact entre  $i^{\text{ième}}$  et  $(i + 1)^{\text{ième}}$  aimants.

À chaque ligne de contact entre deux cylindres, la force de réaction peut être décomposée en deux forces distinctes : la force normale adimensionnée  $N_i$  et le frottement adimensionné  $T_i$  sont respectivement parallèle et perpendiculaire à la ligne reliant les deux cylindres. Les expressions de ces deux forces sont obtenus en explicitant leurs composantes selon  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_y$  qui sont égales à  $a_i$  et  $b_i$ . Les forces  $N_i$  et  $T_i$  et les multiplicateurs de Lagrange  $a_i$  et  $b_i$  sont liées par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a_i &= N_i \cos \theta - T_i \sin \theta_i , \\ b_i &= N_i \sin \theta + T_i \cos \theta_i . \end{cases} \quad (2.58)$$

En résolvant ce système, nous obtenons les expression de  $N_i$  et  $T_i$  :

$$\begin{cases} N_i &= \frac{a_i}{\cos \theta_i} + b_i \sin \theta_i - a_i \tan \theta_i \sin \theta_i , \\ T_i &= b_i \cos \theta_i - a_i \sin \theta_i . \end{cases} \quad (2.59)$$

Le rapport entre ces deux forces s'écrit :

$$\frac{T_i}{N_i} = \frac{\frac{b_i}{a_i} \cos^2 \theta_i - \cos \theta_i \sin \theta_i}{1 + \frac{b_i}{a_i} \sin \theta_i \cos \theta_i - \sin^2 \theta_i} . \quad (2.60)$$

Nous considérons que les déplacements des cylindres sont de faibles amplitudes ( $\theta_i \ll 1$ ). Cette condition permet de simplifier l'expression (2.60). L'expression du rapport entre  $T_i$  et  $N_i$  devient :

$$\frac{T_i}{N_i} \simeq \frac{b_i}{a_i} - \left( 1 + \left( \frac{b_i}{a_i} \right)^2 \right) \theta_i . \quad (2.61)$$

Pour  $\theta_i \ll 1$ , nous avons également la relation :

$$\theta_i \simeq \tan \theta_i = \frac{v_{i+1} - v_i}{(i+1) - i} = v_{i+1} - v_i . \quad (2.62)$$

Le rapport  $T_i/N_i$  s'écrit finalement :

$$\frac{T_i}{N_i} \simeq \frac{b_i}{a_i} - \left( 1 + \left( \frac{b_i}{a_i} \right)^2 \right) (v_{i+1} - v_i) . \quad (2.63)$$

Ce rapport des forces donne la direction de la résultante des forces de contact par rapport à la ligne reliant les deux cylindres. D'après la loi de Coulomb, pour que le mouvement des solides en contact soit le roulement, la résultante des forces  $T_i$  et  $N_i$

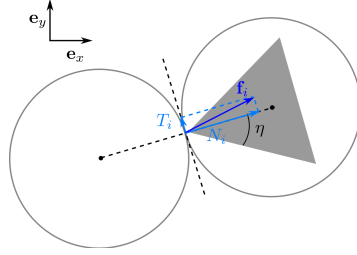


FIGURE 2.28 – Représentation de le cône de frottement d'adhérence pour deux cylindres en contact.

doit être dans le cône de frottement d'adhérence. Ce dernier a son sommet au point de contact entre deux solides et elle est symétrique par rapport à la normale à la ligne de contact. Ce cône est délimité par les droites écartées de l'angle  $\pm\eta$  par rapport à la normale. Dans le cas de la chaîne d'aimants, les déplacements des cylindres sont dans le plan  $(Oxy)$  (cf. figure 2.1). Le cône de frottement d'adhérence est donc un triangle dans le cas des deux cylindres en contact et il est représentée dans la figure 2.28. L'angle limite d'adhérence  $\eta$  est donné par le coefficient de frottement  $\mu_s$  spécifique aux matériaux en contact :

$$\mu_s = \tan \eta . \quad (2.64)$$

Pour un contact entre deux matériaux en nickel, ce coefficient vaut 0.3 environ. En utilisant (2.64), nous trouvons la valeur de l'angle limite de la cone de frottement de 0.29.

Le rapport des forces de l'équation (2.63) dépend uniquement des grandeurs sans dimension du problème. Pour le calcul de ce rapport, nous considérons le déplacement des cylindres suivant un mode propre pour une amplitude maximale de déplacement égale à un demi de la longueur de la chaîne pour  $\mathcal{B} = 0$  et  $\mathcal{G} = 0$ . Le déplacement transverse de l'élément  $i$  est donné par :

$$v_i = Aw_{i,k} \cos(\bar{\omega}_k t) , \quad (2.65)$$

où  $A$  est l'amplitude et  $w_{i,k}$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du  $k^{\text{ème}}$  mode du cylindre  $i$ .

Les multiplicateurs de Lagrange  $a_i$  et  $b_i$  de l'équation (2.63) sont calculés à partir du système d'équations (C.4) en utilisant (2.65). Sous ces conditions, pour les deux premiers modes et pour un nombre d'aimants quelconque, nous trouvons que le rapport  $T_i/N_i$  est toujours dans le cône de frottement  $[-\eta, +\eta]$  ce qui valide le mouvement de roulement des cylindres.

## 6 Conclusion

Dans ce chapitre, la dynamique linéaire d'une chaîne d'aimants soumise à la gravité et à un champ magnétique extérieur a été étudiée théoriquement et expérimentalement. La première approche théorique a consisté à utiliser le formalisme lagrangien pour développer un modèle linéaire discret de la chaîne. La deuxième approche a été de considérer cette dernière comme une poutre continue pour décrire la dynamique du système à un grand nombre d'aimants. Le modèle de la poutre continue équivalente a été développé pour de petites amplitudes de déplacements comme le modèle discret. Les fréquences propres du système ont été mesurées pour différents nombres d'aimants sous diverses conditions de gravité et de champ magnétique extérieur. Les résultats ont

montré un bon accord avec le modèle discret. Sur ces résultats, nous avons observé que la gravité et le champ magnétique rend le système plus rigide ou plus souple selon leur sens par rapport à l'axe de la chaîne.

En exploitant le modèle discret, la rigidité de flexion de la poutre équivalente créée par les interactions entre aimants a été estimée. Nous avons observé sur les modes élevés que plus les cylindres sont élancés, plus la structure devient rigide. Cette tendance reste à étudier pour comprendre l'origine de cette rigidification.

La stabilité de la chaîne a ensuite été étudiée lorsqu'elle est soumise à la gravité et un champ magnétique extérieur. Les conditions critiques de stabilité de la chaîne ont été numériquement déterminées. Les résultats ont été comparés à ceux du modèle de poutre continue en se basant sur la rigidité équivalente précédemment obtenue. Cela a montré une convergence du modèle discret vers le modèle continu pour un grand nombre d'aimants ce qui a confirmé la similarité entre la dynamique de la chaîne et celle d'une poutre continue pour un grand nombre d'éléments. En ne fixant pas la norme de la gravité et du champ extérieur, l'étude a mis en évidence la stabilité d'une chaîne à grand nombre d'aimants soumise à une compression ou une traction, et un moment de flexion.

Pour prendre en compte de grandes amplitudes de déformations de la structure, la dynamique non-linéaire doit être prise en compte dans les modèles. Or les conditions de non-glissements aux contacts qui ont été appliquées dans le modèle discret ne sont pas valables pour de grandes amplitudes de déplacements. Pour le développement du modèle discret non-linéaire, les conditions aux lignes de contact doivent donc être revues.

Le modèle discret peut être exploité pour la conception d'un nageur composé d'aimants en rajoutant un champ magnétique oscillant dans la direction transverse à la chaîne. Ce type de système est déjà étudié expérimentalement à l'échelle microscopique (Li et al., 2012). Pour modéliser le mouvement de la chaîne sous l'influence du champ magnétique oscillant, l'énergie créée par ce dernier devrait être ajoutée dans le lagrangien. Dans le cadre d'un projet de recherche en laboratoire de Pierre Rousseau, l'influence de ce champ oscillant a été modélisée. Pour de petites amplitudes de déplacement, nous avons remarqué que le champ oscillant agit comme un forçage sinusoïdal faisant exciter la structure à sa fréquence. Une étude devrait être réalisée sur la création du mode propulsif à partir de cette source d'excitation pour la conception du nageur.

L'une des applications possibles du modèle continu de la chaîne concerne les fluides magnéto-rhéologiques. Le modèle peut être utilisé comme un complément au modèle de particules microscopiques (Dyke et al., 1996) pour prédire les propriétés macroscopiques des fluides magnéto-rhéologiques, telles les propriétés élastiques de ce type de fluides soumis à une force compressive. Dans ce modèle continu, l'effet de cisaillement peut être rajouté lors de la modélisation de la dynamique de la poutre continue.

Les études présentées dans ce chapitre ont permis de comprendre la dynamique d'une structure composée d'aimants en présence de forces extérieures. Lorsqu'une structure telle une chaîne d'aimants se met en mouvement, une importante variation de champ est créée. En plaçant une bobine dans l'environnement, un courant électrique est induit à ses bornes. Dans le chapitre suivant, nous exploitons ce phénomène d'induction électromagnétique pour récupérer de l'énergie électrique à partir d'un drapeau composé d'aimants en flottage.

# Chapitre 3

## Flottement d'un drapeau articulé magnétique

### 1 Introduction

Ce chapitre ouvre la thématique de la récupération d'énergie. Dans le cadre de cette thèse, un drapeau magnétique articulé capable de flotter dans un écoulement est conçu. Ce drapeau est composé de pièces plastiques dans lesquelles des aimants rectangulaires fins sont insérés. Nous nous intéressons à la production d'électricité à partir du flottement de ce drapeau articulé dans un écoulement hydrodynamique. Pour la conversion des oscillations du système en une tension électrique, une bobine électromagnétique est placée dans l'environnement du drapeau. Le mouvement du drapeau en flottement et le système de génération d'une tension électrique sont présentés dans la première section.

Dans cette thèse, le couplage fluide-structure n'est pas modélisé. L'influence de la vitesse de l'écoulement sur la force électromotrice (f.e.m) aux bornes de la bobine ne sera pas discutée non plus. Pour une vitesse d'écoulement pour laquelle le drapeau flotte, la f.e.m est estimée à la fois numériquement et expérimentalement. La cinématique du système est d'abord déterminée expérimentalement à partir d'un film du drapeau en flottement. Durant l'enregistrement de celui-ci, la tension aux bornes de la bobine est simultanément mesurée. À partir des données sur la cinématique du système, la force électromotrice induite dans la bobine est ensuite estimée numériquement et elle est comparée aux mesures. Les expériences ont été réalisées avec Darith-Anthony Hun qui était en stage de M2 au laboratoire.

Les calculs de la f.e.m sont réalisés à partir de la loi de Lenz-Faraday. La formulation de la f.e.m dans une bobine est présentée. Ces études sont réalisées pour deux géométries de bobine : circulaire et rectangulaire. Les résultats sont présentés et nous discutons de l'influence de la position et de la géométrie de la bobine. Dans la dernière section du chapitre, la position et le dimensionnement d'une bobine circulaire et rectangulaire sont optimisés et les résultats sont discutés.

### 2 Drapeau magnétique discret

Dans cette section, nous présentons le montage expérimental, développé lors de cette thèse, qui utilise l'induction électromagnétique pour récupérer l'énergie du flottement d'un drapeau articulé. Le système d'induction électromagnétique est représenté sur la figure 3.1a. Le drapeau magnétique est composé de 3 aimants rectangulaires aimantés

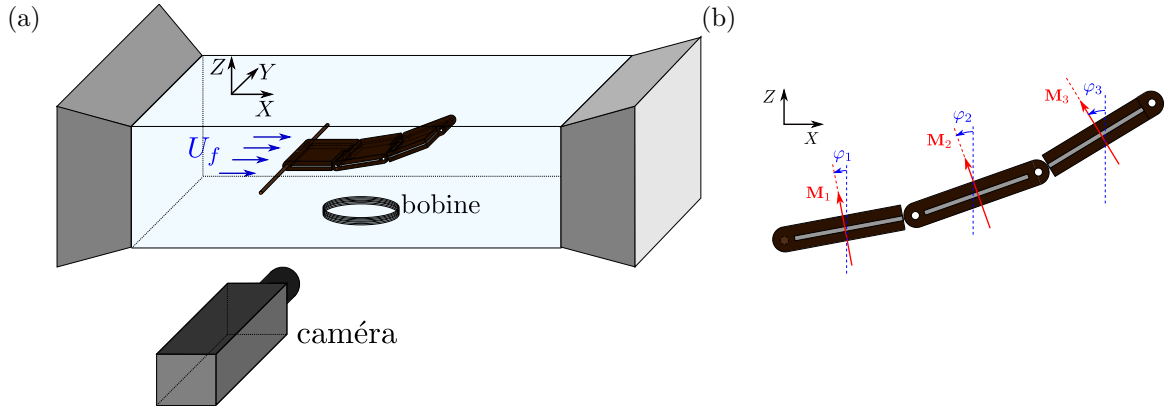


FIGURE 3.1 – (a) Dispositif expérimental de flottement du drapeau articulé composé d'aimants rectangulaire dans un écoulement. (b) Direction des aimantations des éléments du drapeau et définition des angles  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$ .

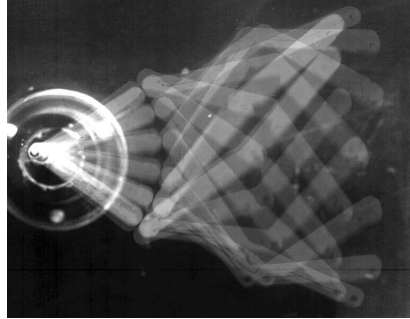


FIGURE 3.2 – Séquence d'images du flottement du drapeau articulé composé de 3 aimants rectangulaires aimantés selon la hauteur pour  $U_f = 6$  m/s.

uniformément selon l'épaisseur. Ces aimants sont de base carrée de côté 3 cm, ont une épaisseur  $h$  de 1 mm, une masse  $m$  de 6.8 g et une aimantation  $M$  de 1.07 A/m. Ils sont insérés dans des pièces en plastique réalisées par une imprimante 3D. Ces pièces sont reliées par des charnières espaçant deux aimants successifs de 5 mm dans la position droite du drapeau. Les aimants sont fixés de sorte que leurs aimantations sont dans la même direction et dans le même sens lorsque le drapeau est droit (figure 3.1b). Lorsqu'il oscille, les rotations des 3 aimants sont données par les angles  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ .

Cette structure articulée est placée dans un tunnel de section rectangulaire de dimension  $8 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$  où un écoulement à une vitesse  $U_f$  est imposé. L'extrémité du drapeau est relié par une liaison rotule à un mat horizontal fixé à une hauteur du tunnel. Le système se met en flottement lorsque la vitesse de l'écoulement est au dessus du seuil de stabilité. Le mouvement du drapeau est représenté par une superposition d'images sur la figure 3.2. Le système oscille à une grande amplitude suivant deux modes qui s'exécutent avec un déphasage (Hodges and Pierce, 2011). Cela engendre un mouvement dont l'allure est semblable à une vague. Le flottement du système engendre une grande fluctuation du champ magnétique dans le milieu. Pour convertir cette variation du champ magnétique en une tension électrique, une bobine de  $N$  spires est fixée en dessous du drapeau. L'évolution de la tension aux bornes de la bobine est capturée au cours du mouvement et simultanément, le mouvement de flottement du drapeau est filmé par une caméra pour récupérer les positions des aimants. Afin de faciliter l'identification des aimants sur les images, les pièces sont peintes en noir et deux points blancs sont placés sur leurs faces latérales aux extrémités de chacun des

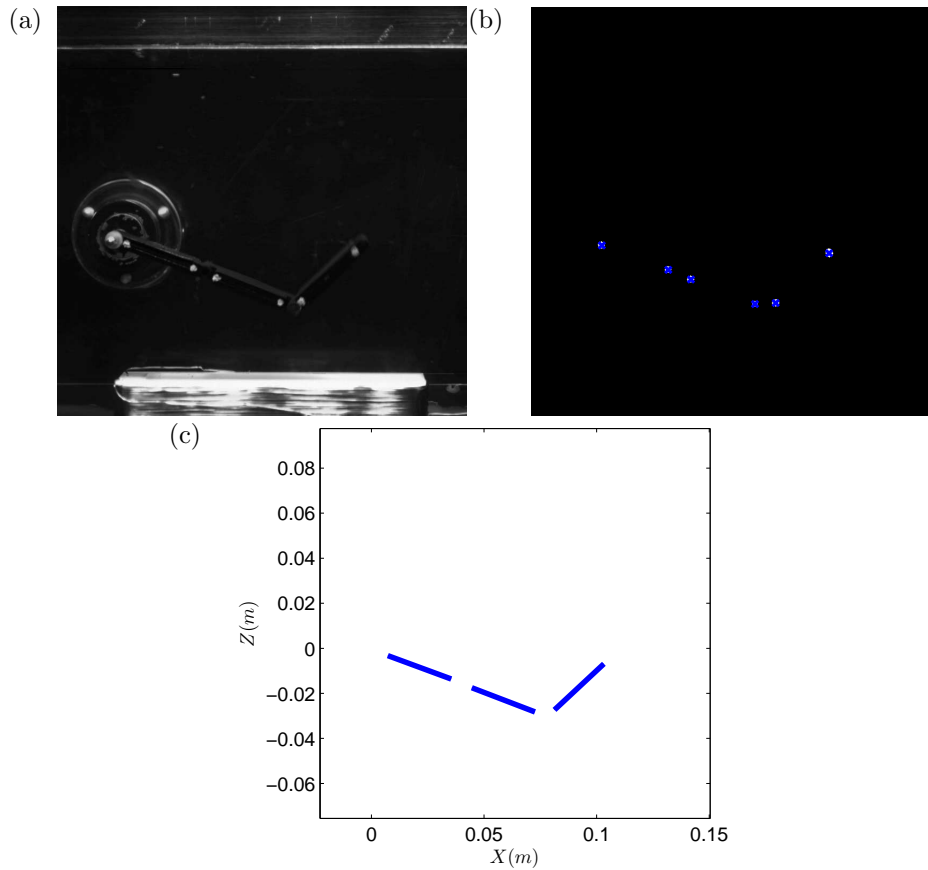


FIGURE 3.3 – Position du drapeau à partir d’une photo de l’expérience : (a) image brute, (b) positions des points blancs et (c) allure du drapeau.

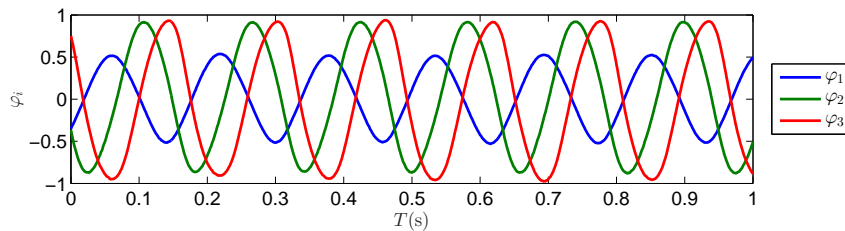


FIGURE 3.4 – Cinématique des aimants du drapeau en flottement.

aimants.

La figure 3.3 représente un exemple du traitement d’image réalisé sous Matlab. Chaque image du film est binarisée en adaptant le seuil pour séparer les points blancs du reste. Ensuite, la position du centre de chacun des points est récupérée. La cinématique est déduite en localisant ces positions durant les oscillations. La figure 3.4 représente l’évolution des angles  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$ , récupérée à partir du film du drapeau en flottement dans un écoulement à  $U_f = 2.8$  m/s. Nous pouvons observer un cycle limite d’oscillations du système à cette vitesse d’écoulement. On observe de plus que chaque élément oscille à la même fréquence mais avec une phase différente.

En utilisant la cinématique ainsi obtenue, la force électromotrice induite dans la bobine par le flottement du drapeau peut être estimée. Dans la section suivante, le calcul de la force électromotrice induite par le mouvement d’un aimant rectangulaire est détaillé et nous montrons que cela suffit pour l’estimation de la tension créée dans une bobine par le drapeau.

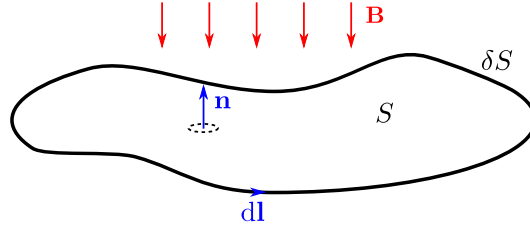


FIGURE 3.5 – Circuit conducteur soumis à un champ magnétique  $\mathbf{B}$  variable dans le temps.

### 3 Induction électromagnétique dans une bobine par des aimants rectangulaires

Dans cette section, nous présentons le calcul de la force électromotrice induite dans une bobine par un aimant rectangulaire. On se place dans le cas d'un circuit conducteur immobile, de géométrie quelconque, soumis à un champ magnétique variable dans le temps. Le circuit conducteur est représenté sur la figure 3.5. L'équation de Maxwell-Faraday donne la relation reliant un champ magnétique  $\mathbf{B}$  et le champ électrique  $\mathbf{E}$  induit dans un circuit immobile :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial T}, \quad (3.1)$$

où  $T$  est le temps. Cette relation est également valable dans le cas réciproque où un champ magnétique est induit par un champ électrique. Soient  $\partial S$  et  $S$  le contour et la surface du circuit. La force électromotrice  $e$  dans le conducteur est donnée par :

$$e = \int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (3.2)$$

où  $d\mathbf{l}$  est le vecteur élémentaire parcourant le contour. En utilisant le théorème de la divergence et l'équation (3.1), on obtient la loi de Lenz-Faraday (Jackson, 1999) :

$$e = -\int_S \frac{\partial (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})}{\partial T} dS = \frac{\partial F}{\partial T}, \quad (3.3)$$

où  $F$  est le flux magnétique donné par l'équation (1.7). Dans le chapitre 1, nous avons vu que le champ magnétique est le rotationnel du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ . En exprimant la force électromotrice en fonction de  $\mathbf{A}$ , on obtient :

$$e = -\frac{\partial}{\partial T} \left[ \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS \right]. \quad (3.4)$$

En appliquant le théorème de la divergence, la f.e.m s'exprime comme la dérivée par rapport au temps de l'intégrale du potentiel vecteur sur le contour du circuit :

$$e = -\frac{\partial}{\partial T} \left[ \int_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right]. \quad (3.5)$$

Pour le calcul de la force électromotrice induite par une variation du champ magnétique, l'expression analytique de  $\mathbf{A}$  est cherchée. Dans la suite, le potentiel vecteur d'un aimant rectangulaire est calculé analytiquement à partir de son expression générale (1.46).



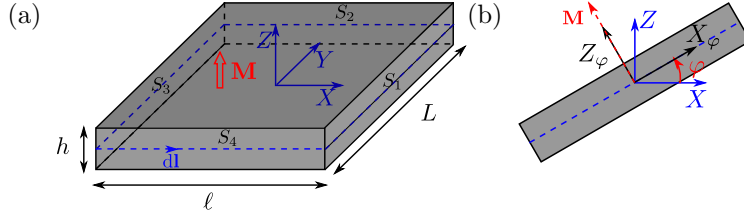


FIGURE 3.6 – (a) Aimant rectangulaire aimanté uniformément selon la hauteur et (b) angle d'inclinaison par rapport à l'axe de  $Y$ .

### 3.1 Potentiel vecteur d'un aimant rectangulaire

Dans ce paragraphe, le potentiel vecteur d'un aimant rectangulaire uniformément aimanté selon l'épaisseur est calculé. Le problème est représenté sur la figure 3.6. L'aimant a une largeur  $\ell$ , une longueur  $L$ , une hauteur  $h$ , une masse  $m$ . Les calculs sont réalisés dans le système de coordonnées  $(X, Y, Z)$  où le centre de l'aimant se trouve à l'origine. Nous considérons que l'aimant est en rotation autour de l'axe de  $Y$ . Soit  $\varphi$  l'angle de rotation. Pour un aimant d'aimantation uniforme  $\mathbf{M} = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_z$ , l'expression (1.46) s'écrit :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{M} \times \int_S \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}'|} dS' , \quad (3.6)$$

où  $S$  est la surface de l'aimant,  $\mathbf{x} = (X, Y, Z)$  la position d'intérêt,  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (X \cos \varphi + Z \sin \varphi, Y, -X \sin \varphi + Z \cos \varphi)$  la projection de  $\mathbf{x}$  selon  $X_\varphi$  et  $Z_\varphi$ ,  $\mathbf{x}' = (X', Y', Z')$  le vecteur des variables d'intégration. Ici,  $\mathbf{A}$  est calculé dans le repère  $(X_\varphi, Y_\varphi, Z_\varphi)$ . Dans notre cas d'étude, en prenant en compte la géométrie et l'aimantation, les trois composantes de  $\mathbf{A}$  selon  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  ont pour expressions :

$$\begin{aligned} A_X &= \frac{\mu_0 \cos \varphi}{4\pi} \left[ -\int_{S_2} \frac{M}{|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}'|} dS' + \int_{S_4} \frac{M}{|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}'|} dS' \right] , \\ A_Y &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \int_{S_1} \frac{M}{|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}'|} dS' - \int_{S_3} \frac{M}{|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}'|} dS' \right] , \\ A_Z &= \frac{\mu_0 \sin \varphi}{4\pi} \left[ -\int_{S_2} \frac{M}{|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}'|} dS' + \int_{S_4} \frac{M}{|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}'|} dS' \right] , \end{aligned} \quad (3.7)$$

où  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  et  $S_4$  sont les 4 surfaces latérales de l'aimant (cf. figure 3.6). Ces expressions sont déterminées en projetant  $\mathbf{A}$  obtenu dans le repère  $(X_\varphi, Y_\varphi, Z_\varphi)$  selon  $X$  et  $Z$ . Dans cette thèse, nous considérons que la bobine a ses spires parallèles au plan  $(OXY)$ . Dans ce cas, d'après (3.5), la projection sur  $d\mathbf{l}$  a pour conséquence que seules les composantes  $A_X$  et  $A_Y$  sont nécessaires pour le calcul de la f.e.m. Nous ne considérons donc que ces deux composantes du potentiel vecteur dans la suite.

Les composantes de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  sont adimensionnées par les paramètres du problème :

$$X = \ell x \quad , \quad Y = Ly \quad , \quad Z = hz. \quad (3.8)$$

Les composantes du potentiel vecteur selon  $X$  et  $Y$  sont adimensionnées comme suit :

$$A_X = \frac{\mu_0 M \ell}{4\pi} a_x \quad , \quad A_Y = \frac{\mu_0 M L}{4\pi} a_y. \quad (3.9)$$

Les composantes du potentiel vecteur adimensionnées  $a_x$  et  $a_y$  ont pour expression :

$$\begin{aligned}
 a_x(x, y, z) &= -\cos \varphi \\
 &\times \left[ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_x^2 (x' - (x \cos \varphi + \lambda_x z \sin \varphi))^2 + \lambda_y^2 \left(\frac{1}{2} - y\right)^2 + (z' - (-\lambda_x x \sin \varphi + z \cos \varphi))^2}} dx' dz' \right. \\
 &\left. - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_x^2 (x' - (x \cos \varphi + \lambda_x z \sin \varphi))^2 + \lambda_y^2 \left(-\frac{1}{2} - y\right)^2 + (z' - (-\lambda_x x \sin \varphi + z \cos \varphi))^2}} dx' dz' \right]
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
 a_y(x, y, z) &= \\
 &\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_x^2 \left(\frac{1}{2} - (x \cos \varphi + \lambda_x z \sin \varphi)\right)^2 + \lambda_y^2 (y' - y)^2 + (z' - (-\lambda_x x \sin \varphi + z \cos \varphi))^2}} dy' dz' \\
 &- \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_x^2 \left(-\frac{1}{2} - (x \cos \varphi + \lambda_x z \sin \varphi)\right)^2 + \lambda_y^2 (y' - y)^2 + (z' - (-\lambda_x x \sin \varphi + z \cos \varphi))^2}} dy' dz' ,
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

où

$$\lambda_x = \frac{\ell}{h} \quad , \quad \lambda_y = \frac{L}{h} . \tag{3.12}$$

Les intégrales doubles présentes dans  $a_x$  et  $a_y$  sont calculées analytiquement en s'inspirant du travail d'Allag et al. (2009) qui calcule analytiquement le champ magnétique d'un aimant rectangulaire. Les expressions analytiques de  $a_x$  et  $a_y$  s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 a_x(x, y, z) &= -\cos \varphi \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \frac{(-1)^{i+j}}{\lambda_x} f \left( \lambda_x \left( \alpha(x, z) - \frac{(-1)^i}{2} \right), \beta(x, z) - \frac{(-1)^j}{2}, \lambda_y \left( y - \frac{1}{2} \right) \right) \\
 &\quad + \cos \varphi \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \frac{(-1)^{i+j}}{\lambda_x} f \left( \lambda_x \left( \alpha(x, z) - \frac{(-1)^i}{2} \right), \beta(x, z) - \frac{(-1)^j}{2}, \lambda_y \left( y + \frac{1}{2} \right) \right) ,
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
 a_y(x, y, z) &= \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \frac{(-1)^{i+j}}{\lambda_y} f \left( \lambda_y \left( y - \frac{(-1)^i}{2} \right), \beta(x, z) - \frac{(-1)^j}{2}, \lambda_x \left( \alpha(x, z) - \frac{1}{2} \right) \right) \\
 &\quad - \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \frac{(-1)^{i+j}}{\lambda_y} f \left( \lambda_y \left( y - \frac{(-1)^i}{2} \right), \beta(x, z) - \frac{(-1)^j}{2}, \lambda_x \left( \alpha(x, z) + \frac{1}{2} \right) \right) ,
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

où

$$\alpha(x, z) = x \cos \varphi + \lambda_x z \sin \varphi \quad , \quad \beta(x, z) = -x \lambda_x \sin \varphi + z \cos \varphi , \tag{3.15}$$

et

$$f(u, v, w) = -u \ln(r - v) - v \ln(r - u) - w \arctan \left( \frac{uv}{rw} \right) \quad \text{avec} \quad r = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} . \tag{3.16}$$

Pour adapter ce calcul à un aimant rectangulaire aimanté selon la largeur ou la longueur, les composantes  $a_x$ ,  $a_y$  et  $a_z$  doivent être réécrites selon les nouveaux axes du problème. Quelle que soit l'aimantation, la composante du potentiel vecteur dans la direction parallèle à l'aimantation est nulle.

Les expressions adimensionnées du potentiel vecteur (3.13) et (3.14) sont utilisées dans le paragraphe suivant pour le calcul de la force électromotrice induite dans une bobine.

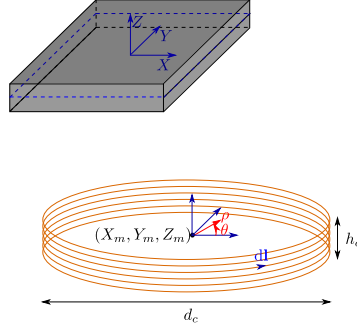


FIGURE 3.7 – Bobine circulaire positionnée dans l'environnement d'un aimant rectangulaire.

## 3.2 Force électromotrice induite

Nous avons montré que la force électromotrice induite dans un conducteur électrique par un champ magnétique variable peut être exprimée en fonction du potentiel vecteur (cf. équation (3.5)). En introduisant le potentiel vecteur calculé dans le paragraphe précédent, nous établissons l'expression générale de la force électromotrice induite dans une bobine par un aimant rectangulaire aimanté selon la hauteur. Nous considérons deux géométries de bobine : circulaire et rectangulaire. Pour ces deux géométries de bobine, l'expression de la f.e.m induite par un aimant rectangulaire est établie dans cette section.

### 3.2.1 Bobine circulaire

Nous considérons une bobine circulaire de diamètre  $d_c$  et de hauteur  $h_c$  composée de  $N_c$  spires. Dans le système de coordonnées  $(X, Y, Z)$  dont l'origine est au centre de l'aimant, le centre de la bobine a pour coordonnées  $(X_0, Y_0, Z_0)$ . Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que  $a_z$  est nul. Pour que la bobine convertisse la variation de  $a_x$  et  $a_y$  en une tension électrique, la bobine est positionnée de sorte que ses spires soient parallèles au plan  $(OXY)$ . Le système de coordonnées et le positionnement de la bobine sont représentés sur la figure 3.7. Dans un système des coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, Z)$  dont l'origine est au centre de la bobine, le contour élémentaire d'une spire circulaire  $d\mathbf{l}$  s'écrit :

$$d\mathbf{l} = \frac{d_c}{2} d\theta (-\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y) . \quad (3.17)$$

L'expression de la f.e.m induite par un aimant rectangulaire dans une spire d'une bobine circulaire située en  $Z = Z_i$  est obtenue en injectant l'expression de  $d\mathbf{l}$  (3.17) dans l'équation (3.5) :

$$e(Z_i) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial A_X}{\partial T}(\mathbf{x}) \frac{d_c}{2} \sin \theta d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{\partial A_Y}{\partial T}(\mathbf{x}) \frac{d_c}{2} \cos \theta d\theta . \quad (3.18)$$

Le même adimensionnement que dans la section précédente est appliqué aux coordonnées du problème. Le temps et la force électromotrice  $e$  sont adimensionnés comme suit :

$$T = \sqrt{\frac{\pi m}{\mu_0 M^2 h}} t , \quad e = \frac{\mu_0 M^2 h^2}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0 h}{\pi m}} \bar{e} . \quad (3.19)$$

La force électromotrice adimensionnée  $\bar{e}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{e}(z_i) = & \frac{\lambda_x \nu_h}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial a_x}{\partial t} \left( x_0 + \frac{\nu_\ell}{2} \cos \theta, y_0 + \frac{\nu_L}{2} \sin \theta, z_i \right) \sin \theta d\theta \\ & - \frac{\lambda_y \nu_h}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial a_y}{\partial t} \left( x_0 + \frac{\nu_\ell}{2} \cos \theta, y_0 + \frac{\nu_L}{2} \sin \theta, z_i \right) \cos \theta d\theta , \end{aligned} \quad (3.20)$$

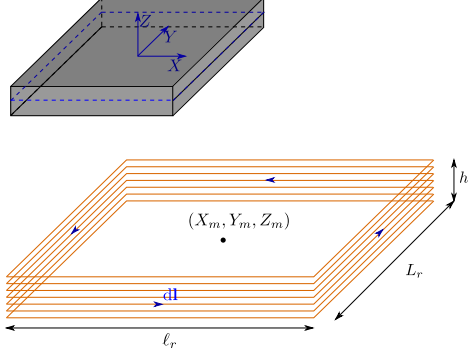


FIGURE 3.8 – Bobine rectangulaire positionnée dans l'environnement d'un aimant rectangulaire.

où

$$\nu_\ell = \frac{d_c}{\ell} \quad , \quad \nu_L = \frac{d_c}{L} \quad , \quad \nu_h = \frac{d_c}{h} \quad . \quad (3.21)$$

Ces paramètres représentent les rapports entre le diamètre de la bobine et la largeur, la longueur et la hauteur des aimants. Dans le cadre de cette thèse, les aimants sont de bases carrées. Nous posons donc  $\nu = \nu_L = \nu_\ell$  dans la suite. La f.e.m induite dans la bobine est donnée par la somme des  $\bar{e}(z_i)$  pour  $i = 1..N_c$  :

$$\bar{E} = \sum_{i=1}^{N_c} \bar{e}(z_i) \quad . \quad (3.22)$$

Nous faisons l'hypothèse d'une petite hauteur de la bobine. Dans ce cas, la f.e.m induite est égale à celle dans une spire à mi-hauteur de la bobine multipliée par le nombre de spires. Sous cette hypothèse, l'expression (3.22) s'écrit :

$$\bar{E} = N_c \bar{e}(z_0) \quad . \quad (3.23)$$

### 3.2.2 Bobine rectangulaire

Pour le calcul de la f.e.m dans une bobine rectangulaire, les étapes de calcul sont les mêmes que dans le cas de la bobine circulaire. La figure 3.8 représente le système considéré. Dans le même système de coordonnées que dans le paragraphe précédent, une bobine rectangulaire de longueur  $L_r$ , de largeur  $\ell_r$ , de hauteur  $h_r$  et de  $N_r$  spires est positionnée en  $(X_0, Y_0, Z_0)$ . Sachant que  $a_x$  et  $a_y$  sont les seules composantes non nulles du potentiel vecteur, les sections rectangulaires de la bobine sont disposées parallèlement au plan  $(Oxy)$  pour maximiser la conversion de la variation du potentiel vecteur en une tension électrique. À partir de (3.5), l'expression de la force électromotrice induite par l'aimant rectangulaire dans une spire située en  $Z = Z_i$  s'écrit

$$\begin{aligned} e(Z_i) &= \int_{X_0 - \frac{\ell_r}{2}}^{X_0 + \frac{\ell_r}{2}} \frac{\partial A_x}{\partial T} (X, Y_0 + L_r/2, Z_i) dX - \int_{X_0 - \frac{\ell_r}{2}}^{X_0 + \frac{\ell_r}{2}} \frac{\partial A_x}{\partial T} (X, Y_0 - L_r/2, Z_i) dX \\ &\quad - \int_{Y_0 - \frac{L_r}{2}}^{Y_0 + \frac{L_r}{2}} \frac{\partial A_y}{\partial T} (X_0 + \ell_r/2, Y, Z_i) dY + \int_{Y_0 - \frac{L_r}{2}}^{Y_0 + \frac{L_r}{2}} \frac{\partial A_y}{\partial T} (X_0 - \ell_r/2, Y, Z_i) dY \quad . \end{aligned} \quad (3.24)$$

Cette équation est obtenue en remplaçant dans (3.5) le contour élémentaire  $d\mathbf{l}$  par  $\pm dX \mathbf{e}_x$  et  $\pm dY \mathbf{e}_y$ , ce qui correspond au contour élémentaire de chacune des 4 arêtes de la spire.

Le même adimensionnement est fait pour les coordonnées du problème, le temps et la force électromotrice que pour la bobine circulaire (cf. éq. 3.19). Cela fait apparaître deux paramètres sans dimension :

$$\zeta_\ell = \frac{\ell_r}{\ell} \quad , \quad \zeta_L = \frac{L_r}{L} . \quad (3.25)$$

Ils représentent les rapports entre les largeur et longueur de la bobine et celles des aimants. Finalement, la f.e.m adimensionnée  $\bar{e}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{e}(z_i) = & - \int_{x_0 - \frac{\zeta_\ell}{2}}^{x_0 + \frac{\zeta_\ell}{2}} \lambda_x \frac{\partial a_x}{\partial t} \left( x, y_0 + \frac{\zeta_L}{2}, z_i \right) dx + \int_{x_0 - \frac{\zeta_\ell}{2}}^{x_0 + \frac{\zeta_\ell}{2}} \lambda_x \frac{\partial a_x}{\partial t} \left( x, y_0 - \frac{\zeta_\ell}{2}, z_i \right) dx \\ & - \int_{y_0 - \frac{\zeta_L}{2}}^{y_0 + \frac{\zeta_L}{2}} \lambda_y \frac{\partial a_y}{\partial t} \left( x_0 + \frac{\zeta_\ell}{2}, y, z_i \right) dy + \int_{y_0 - \frac{\zeta_L}{2}}^{y_0 + \frac{\zeta_L}{2}} \lambda_y \frac{\partial a_y}{\partial t} \left( x_0 - \frac{\zeta_\ell}{2}, y, z_i \right) dy . \end{aligned} \quad (3.26)$$

En injectant (3.26) dans (3.22), la force électromotrice  $\bar{E}$  induite dans une bobine rectangulaire est obtenue. L'hypothèse  $h_r \ll 1$  est faite comme dans le cas de la bobine circulaire. Sous cette hypothèse, la f.e.m induite dans une bobine est donnée par (3.23).

### 3.2.3 Force électromotrice induite par le drapeau en flottement

Le flux magnétique engendré par le drapeau dans la bobine est la somme des flux créés par les trois aimants (cf. eq. 3.3). La f.e.m induite dans la bobine par le drapeau, notée  $\bar{E}_{tot}$  est donc obtenue en sommant les f.e.m induites dans la bobine par les trois aimants :

$$\bar{E}_{tot} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 , \quad (3.27)$$

où  $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$  sont les f.e.m créées par chacun des trois aimants aux bornes de la bobine. Pour le calcul de la f.e.m induite par chaque aimant, la position relative de la bobine par rapport à l'aimant doit être réécrite. Il faut également faire attention à prendre respectivement  $\varphi_1, \varphi_2$  et  $\varphi_3$  (cf figure 3.1b) pour  $\bar{E}_1, \bar{E}_2$  et  $\bar{E}_3$ .

Avant d'exploiter ces expressions pour le calcul de la f.e.m induite par un drapeau magnétique discret, le calcul analytique du potentiel vecteur (3.13) et (3.14) est vérifié expérimentalement. Le potentiel vecteur d'un aimant ne peut pas être directement mesuré. Nous sommes donc passés par la mesure du champ magnétique d'un aimant rectangulaire pour vérifier l'expression du potentiel vecteur d'un aimant à partir de laquelle on peut calculer son champ magnétique. En utilisant ces mesures, l'aimantation des aimants donnée par le constructeur est également vérifiée. Le dispositif expérimental utilisé et les résultats sont présentés dans le paragraphe suivant.

## 3.3 Mesure du champ magnétique d'un aimant rectangulaire

### 3.3.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental de mesure du champ magnétique d'un aimant rectangulaire identique à ceux utilisés pour le drapeau est représenté sur la figure 3.9. Un gaussmètre est placé à proximité de l'aimant pour mesurer son champ magnétique suivant différentes directions. Une sonde reliée au gaussmètre est connectée à un banc de déplacement. Pour mesurer le champ magnétique de l'aimant dans diverses directions en gardant le même montage, deux types de sondes sont utilisées : une sonde transversale pour mesurer le champ dans les direction de  $X$  et  $Y$  et une sonde axiale pour le champ magnétique dans la direction  $Z$ . Nous notons ces trois composantes du champ

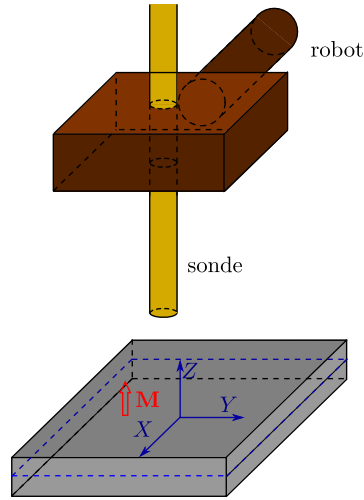


FIGURE 3.9 – Mesure du champ magnétique d'un aimant rectangulaire aimanté selon  $Z$ .

magnétique  $B_x$ ,  $B_y$  et  $B_z$ . Ce dispositif a pour objectif de vérifier la loi du champ magnétique à l'origine de  $\mathbf{A}$  et la valeur de  $M$  donnée par le constructeur.

Dans ce problème, nous avons un aimant à base carrée. Les composantes du champ magnétique sont analogues dans les directions  $X$  et  $Y$ . Selon  $Z$ , le champ magnétique est symétrique par rapport au centre de l'aimant. Pour les données expérimentales, nous ne mesurons que  $B_x$  et  $B_z$  à différentes positions autour de l'aimant.

Les résultats sont comparés aux valeurs du champ magnétique obtenue à partir du potentiel vecteur dont l'expression est développée dans la section 3.1.

### 3.3.2 Résultats

Les trois composantes  $B_x$ ,  $B_y$  et  $B_z$  du champ magnétique de l'aimant rectangulaire sont adimensionnées comme suit :

$$B_i = \frac{\mu_0 M}{4\pi} b_i \quad \text{avec } i = x, y \text{ ou } z . \quad (3.28)$$

Les composantes adimensionnées  $b_x$ ,  $b_y$  et  $b_z$  sont exprimées en fonction des composantes adimensionnées du potentiel vecteur à partir de  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  :

$$\begin{aligned} b_x &= -\frac{\partial a_y}{\partial z} , \\ b_y &= \frac{\partial a_x}{\partial z} , \\ b_z &= \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} . \end{aligned} \quad (3.29)$$

Les expressions de  $a_x$  et  $a_y$  sont données par les équations (3.13) et (3.14). Dans le dispositif expérimental, l'aimant est immobile et toujours dans le plan  $(OXY)$ . Nous avons donc  $\varphi = 0$  dans (3.13).

Les composantes du champ magnétique dans les trois directions sont calculées numériquement en utilisant des différences finies centrées d'ordre 2. Soit  $\epsilon$  le pas de dis-

crétisation qui est choisi identique pour  $x$ ,  $y$  et  $z$ . L'équation (3.29) s'écrit :

$$\begin{aligned} b_x(x, y, z) &= -\frac{a_y(x, y, z + \epsilon) - a_y(x, y, z - \epsilon)}{2\epsilon}, \\ b_y(x, y, z) &= \frac{a_x(x, y, z + \epsilon) - a_x(x, y, z - \epsilon)}{2\epsilon}, \\ b_z(x, y, z) &= \frac{a_y(x + \epsilon, y, z) - a_y(x - \epsilon, y, z)}{2\epsilon} - \frac{a_x(x, y + \epsilon, z) - a_x(x, y - \epsilon, z)}{2\epsilon}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Les valeurs de  $b_x$ ,  $b_y$  et  $b_z$  calculées à partir de (3.30) ont été comparées à celles obtenues à partir des expressions analytiques présentées par Furlani (2001). Les expressions analytiques de  $b_x$ ,  $b_y$  et  $b_z$  sont détaillées dans l'annexe E.

Le pas de discrétisation  $\epsilon$  est fixé à  $10^{-4}$ . Ce pas de discrétisation donne des résultats avec une erreur absolue par rapport aux calculs analytiques de l'ordre de  $10^{-10}$  en moyenne sur 100 points quelconques dans l'espace pour chacune des composantes du champ magnétique.

La valeur de  $b_x$  pour  $y = 0$  et  $z = 4$  est tracée en fonction de  $x$  sur la figure 3.10a et celle de  $b_z$  pour  $x = y = 0$  est tracée en fonction de  $z$  sur la figure 3.10b en gardant la valeur de  $M$  donnée par le constructeur qui est de  $1.07 \times 10^6$  A/m. Sur ces figures, les mesures expérimentales sont également représentées. Un bon accord est trouvé entre les résultats numériques et expérimentaux. Cela confirme donc l'aimantation fournie par le constructeur. Pour l'interprétation de ces résultats, les lignes du champ magnétique sont tracées sur la figure 3.11. Sur la figure 3.10a, la courbe représentant  $b_x$  est antisymétrique par rapport à l'origine du graphique. Cela s'explique par la présence du plan d'antisymétrie ( $Oyz$ ) assurant le bouclage des lignes de champ. Nous pouvons également remarquer que  $b_x$  admet un minimum et un maximum aux extrémités de l'aimant où les lignes du champ sont tangentes à l'axe de  $x$ . La figure 3.10b montre que suivant l'axe central de l'aimant, la valeur de  $b_z$  diminue fortement à courte distance. Ensuite, elle décroît plus lentement à partir de  $z = 25$  environ. Cela est lié aux multipôles dominants du champ magnétique qui changent en fonction de la distance par rapport à l'aimant comme cela a été expliquée dans le chapitre 1. L'accord entre les résultats numériques et expérimentaux est moins bon à courte distance à cause de l'incertitude de la position de la sonde et de la forte variation du champ qui force une localisation parfaite de la sonde pour une mesure correcte. Pour les valeurs de  $z$  négatives, la courbe représentant  $b_z$  en fonction de  $z$  peut être tracée en utilisant la symétrie du champ magnétique par rapport au plan ( $Oxy$ ) que nous pouvons observer sur les lignes du champ.

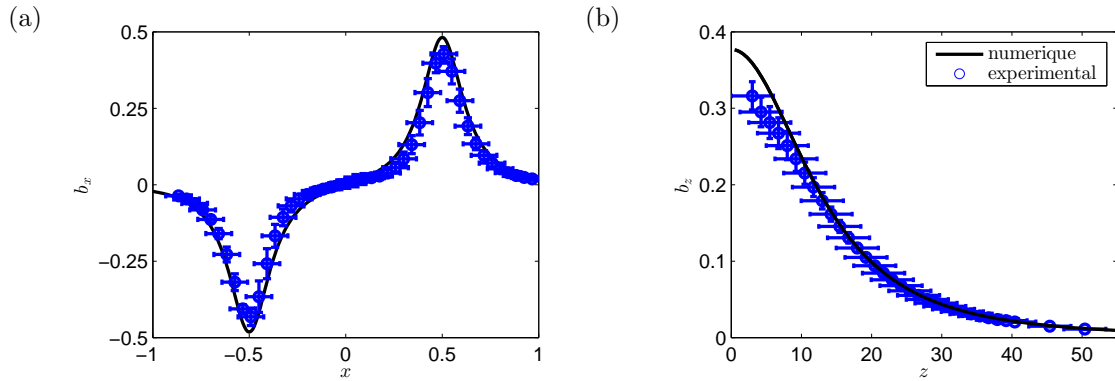


FIGURE 3.10 – (a) Composante  $b_x$  du champ magnétique en fonction de  $x$  pour  $y = 0$  et  $z = 4$ . (b) Composante  $b_z$  du champ magnétique en fonction de  $x$  pour  $x = y = 0$ .

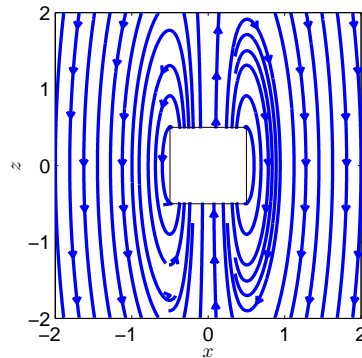


FIGURE 3.11 – Lignes du champ magnétique d'un aimant rectangulaire aimanté selon la hauteur.

## 4 Force électromotrice induite dans une bobine par un drapeau magnétique en flottage

Dans cette section, la force électromotrice induite dans une bobine par le flottage du drapeau magnétique est estimée à partir de la cinématique du drapeau récupérée expérimentalement et elle est comparée à la tension mesurée aux bornes de la bobine. Nous traitons d'abord la f.e.m induite dans une bobine circulaire et ensuite celle dans une bobine rectangulaire. Dans les deux cas, la position de la bobine est exprimée dans un système de coordonnées adimensionnées  $(x, y, z)$  dont l'origine est au centre du mât du drapeau. Nous notons les coordonnées sans dimension de la position du centre de la bobine  $(x_0, y_0, z_0)$ . Le système est représenté sur la figure 3.12. Après validation du calcul de la f.e.m, l'étude de l'influence de la taille et de la position de la bobine est présentée.

### 4.1 Modélisation des bobines

Les expériences sont réalisées avec une bobine circulaire du diamètre interne de 2 cm et un diamètre externe de 5 cm, une hauteur  $h_c = 2.5$  cm et une bobine rectangulaire de longueur interne et externe respectivement de 11.5 et 12.5 cm, de largeur interne et externe respectivement de 5 à 6 cm et  $h_r = 1.7$  cm. Le nombre de spires de ces bobines étant inconnu, ce dernier est estimé expérimentalement.



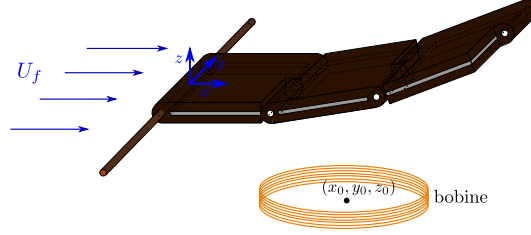


FIGURE 3.12 – Système de coordonnées et la localisation de la bobine.

Dans l'équation (3.22), nous considérons que la f.e.m induite dans une bobine est celle dans une spire à mi-hauteur multipliée par le nombre de spires. En gardant cette condition, le nombre de tours des bobines précédentes est déterminé expérimentalement, c'est-à-dire le champ magnétique au centre d'une bobine correspond au champ magnétique créé par la spire à mi-hauteur multiplié par le nombre de spires. Au centre d'une spire circulaire et rectangulaire à mi-hauteur de la bobine, les champs magnétiques selon  $z$  créés par chacune des spires, notés respectivement  $\mathbf{B}_{z_c}$  et  $\mathbf{B}_{z_r}$ , ont pour expression (Griffiths, 1999) :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{z_c} &= \frac{\mu_0 I}{d_c}, \\ \mathbf{B}_{z_r} &= \frac{2\mu_0 I}{\pi L_r} \sin\left(\arctan\left(\frac{L_r}{\ell_r}\right)\right) + \frac{2\mu_0 I}{\pi \ell_r} \sin\left(\arctan\left(\frac{\ell_r}{L_r}\right)\right), \end{aligned} \quad (3.31)$$

où  $I$  est l'intensité du courant électrique qui parcourt la spire. Soient  $\mathbf{B}_{z_c}^{bob}(0)$  et  $\mathbf{B}_{z_r}^{bob}(0)$  le champ magnétique au centre d'une bobine circulaire et celui au centre d'une bobine rectangulaire respectivement. Le nombre de spires de la bobine est donné par :

$$\mathbf{B}_{z_c}^{bob}(0) = N_c \mathbf{B}_{z_c}, \quad \mathbf{B}_{z_r}^{bob}(0) = N_r \mathbf{B}_{z_r}. \quad (3.32)$$

Les champs au centre de la bobine circulaire et rectangulaire sont mesurés à l'aide d'un gaussmètre. À partir de ces données, les nombres de spires de la bobine circulaire et rectangulaire, respectivement notés  $N_c$  et  $N_r$ , sont déterminés. Pour simplification, nous fixons  $d_c = 3.75$  cm et  $L_r = 12$  cm,  $\ell_r = 5.5$  cm et nous avons obtenu  $N_c = 215$  et  $N_r = 200$ . Nous prenons ces valeurs des paramètres des bobines pour la validation du calcul de la f.e.m.

## 4.2 Bobine circulaire

La bobine circulaire présentée au paragraphe précédent est placée sous le drapeau à une position  $(x_0, y_0, z_0) = (3.8, 0, -63)$  dans un écoulement de la vitesse  $U_f = 4$  m/s. La figure 3.13 montre la position de la bobine par rapport au drapeau. La f.e.m est calculée à partir de l'expression (3.23) et de la cinématique du drapeau dans un écoulement de vitesse  $U_f = 4$  m/s. Pour chaque image de la vidéo, les deux intégrales simples présentes dans l'expression de la f.e.m induite dans une spire (3.20) sont calculées numériquement par la méthode de Simpson. Lorsqu'on augmente le nombre de sous-intervalles d'intégration en gardant le même pas de discrétisation, la différence absolue entre les f.e.m calculées avec  $N$  et  $N + 1$  sous-intervalles diminue. Pour  $N = 100$  nous obtenons une différence absolue de l'ordre de  $10^{-11}$  nous assurant une convergence du calcul de  $\bar{E}_{tot}$ . Nous avons donc choisi de discrétiser chaque intégrale en 100 sous-intervalles avec un pas de discrétisation constant. La figure 3.14 représente la f.e.m induite dans cette bobine par le drapeau en flottage pour  $U_f = 4$  m/s estimée à la

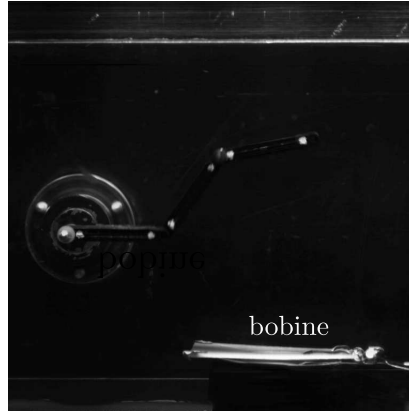


FIGURE 3.13 – Production de la force électromotrice dans une bobine circulaire par un drapeau magnétique discret en flottage pour une vitesse d'écoulement de 4 m/s.

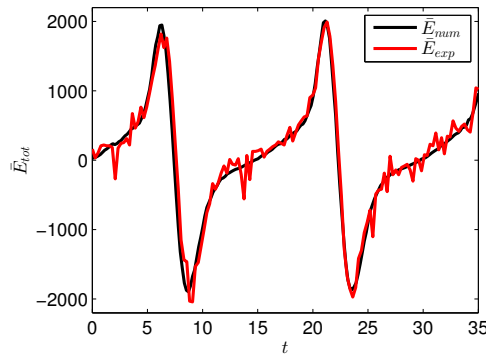


FIGURE 3.14 – Calcul numérique et mesure expérimentale de la force électromotrice induite dans une bobine circulaire par un drapeau de 3 aimants en flottage pour  $U_f = 4$  m/s.

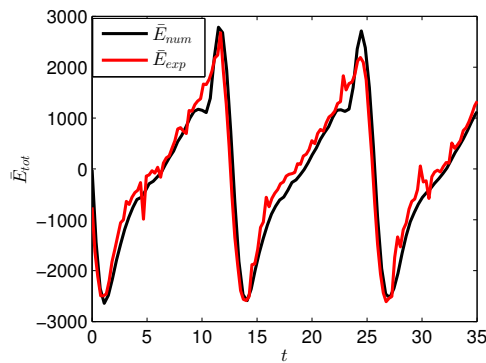


FIGURE 3.15 – Calcul numérique et mesure expérimentale de la force électromotrice induite dans une bobine rectangulaire par un drapeau de 3 aimants en flottage pour  $U_f = 4.5$  m/s.

fois numériquement et expérimentalement. Le résultat numérique est en accord avec le résultat expérimental, ce qui vérifie le calcul de la f.e.m dans une bobine circulaire.

### 4.3 Bobine rectangulaire

La bobine rectangulaire est placée en  $(x_0, y_0, z_0) = (3, 0, -73)$ . Elle est représentée sur la figure 3.3a. La f.e.m est calculée de la même façon que dans le cas de la bobine

circulaire. Cette fois, la vitesse de l'écoulement est de  $U_f = 4.5$  m/s. Comme pour la bobine circulaire, la méthode de Simpson est utilisée. Chaque intégrale est également décomposée en 100 sous-intervalles car la différence absolue entre deux calculs de  $\bar{E}_{tot}$  avec un pas de 100 et de 99 est de  $10^{-13}$  nous assurant la convergence du calcul. La figure 3.15 représente la f.e.m induite sans dimension dans la bobine rectangulaire par le drapeau en flottement, estimée à la fois numériquement et expérimentalement. Ici encore, un bon accord est obtenu.

Les calculs numériques de la f.e.m induite dans une bobine rectangulaire et circulaire sont donc vérifiés expérimentalement. Dans la section suivante, l'influence de la position et de la géométrie de la bobine est étudiée numériquement.

#### 4.4 Influence de la position de la spire

Le changement de la position ou de la géométrie de la bobine affecte l'écoulement et la dynamique du système. Cette influence de la bobine est ignorée dans cette thèse. L'étude de l'influence de position et de taille de la bobine est alors réalisée à partir de la cinématique du drapeau en l'absence de bobine pour  $U_f = 6$  m/s. Dans la mesure où la f.e.m induite dans une bobine est proportionnelle à celle dans une spire (cf. éq. 3.22), nous considérons la f.e.m induite dans une seule spire de la bobine. Dans le cadre de la récupération d'énergie, la moyenne quadratique sur une période d'une tension AC donne une bonne estimation du potentiel de récupération d'énergie du système. Pour ces études, nous avons donc étudié l'influence de la bobine par rapport à la moyenne quadratique (*RMS*) de la f.e.m induite pendant une période d'oscillations du drapeau dans une spire. Nous notons  $\bar{e}_{tot}$  la f.e.m induite dans une spire par les trois aimants du drapeau. La position du centre de la spire est notée  $(x_0, y_0, z_0)$ . Nous considérons deux géométries de spires pour ces études : circulaire et carrée.

##### Spire circulaire

Pour l'étude de la variation de la f.e.m en fonction de la position d'une spire circulaire, nous considérons une spire de diamètre égal à la longueur des aimants ( $\nu = 1$ , cf. eq. (3.21)). La figure 3.16 représente les valeurs de RMS de la f.e.m induite pour la spire circulaire à différentes positions  $(x_0, y_0)$  pour  $z_0 = -50, -70, -90$ . Des valeurs de  $z_0$  supérieures à -50 ne sont pas considérées car l'amplitude des oscillations est de 45. Les résultats montrent que la position maximisant la valeur RMS de la f.e.m est entre le deuxième et le troisième aimant du drapeau quelle que soit l'altitude à laquelle la spire se trouve. Cette maximisation de la valeur RMS à cette position est liée à l'amplitude de déplacement du troisième aimant qui est plus importante que celle des autres, engendrant ainsi une plus forte variation du champ magnétique. Lorsque  $z_0$  diminue, la région où la valeur RMS est plus importante s'élargit car la f.e.m diminue également, ce qui fait aplatir le pic de la valeur RMS de la f.e.m. Nous remarquons également un faible déplacement du pic de la valeur RMS vers le premier aimant du drapeau lorsqu'on s'en éloigne. Cette tendance sera discutée dans la suite.

##### Spire carrée

Pour l'étude avec une spire carrée, une spire dont la longueur et la largeur sont égales à celles des aimants, c'est-à-dire  $\zeta_\ell = \zeta_L = 1$  (cf. éq. 3.25), est considérée. La figure 3.17 représente les valeurs RMS de la f.e.m dans la spire carrée pour différentes positions  $(x_0, y_0)$  et  $z_0 = -50, -70, -90$ . Dans la même figure, la position de la spire

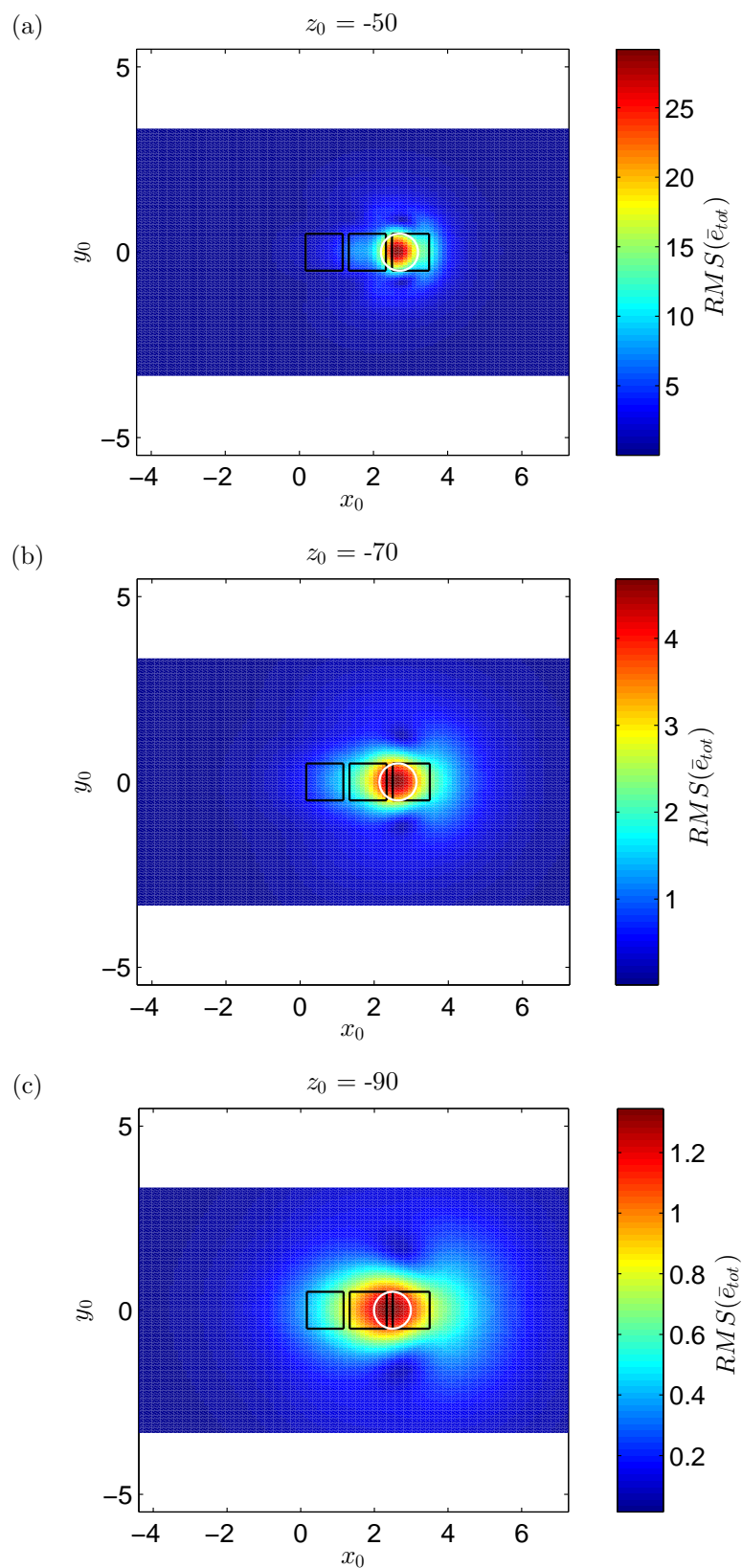


FIGURE 3.16 – Champs de RMS de la f.e.m induite dans une spire circulaire de  $\nu = 1$  d'une période des oscillations du drapeau à différentes altitudes : (a)  $z = -50$ , (b)  $z = -70$ , (c)  $z = -90$ . Les carrés noirs représentent la position des aimants du drapeau lorsqu'il est droit. Les cercles blancs représentent la spire à la position où la valeur RMS est maximale.

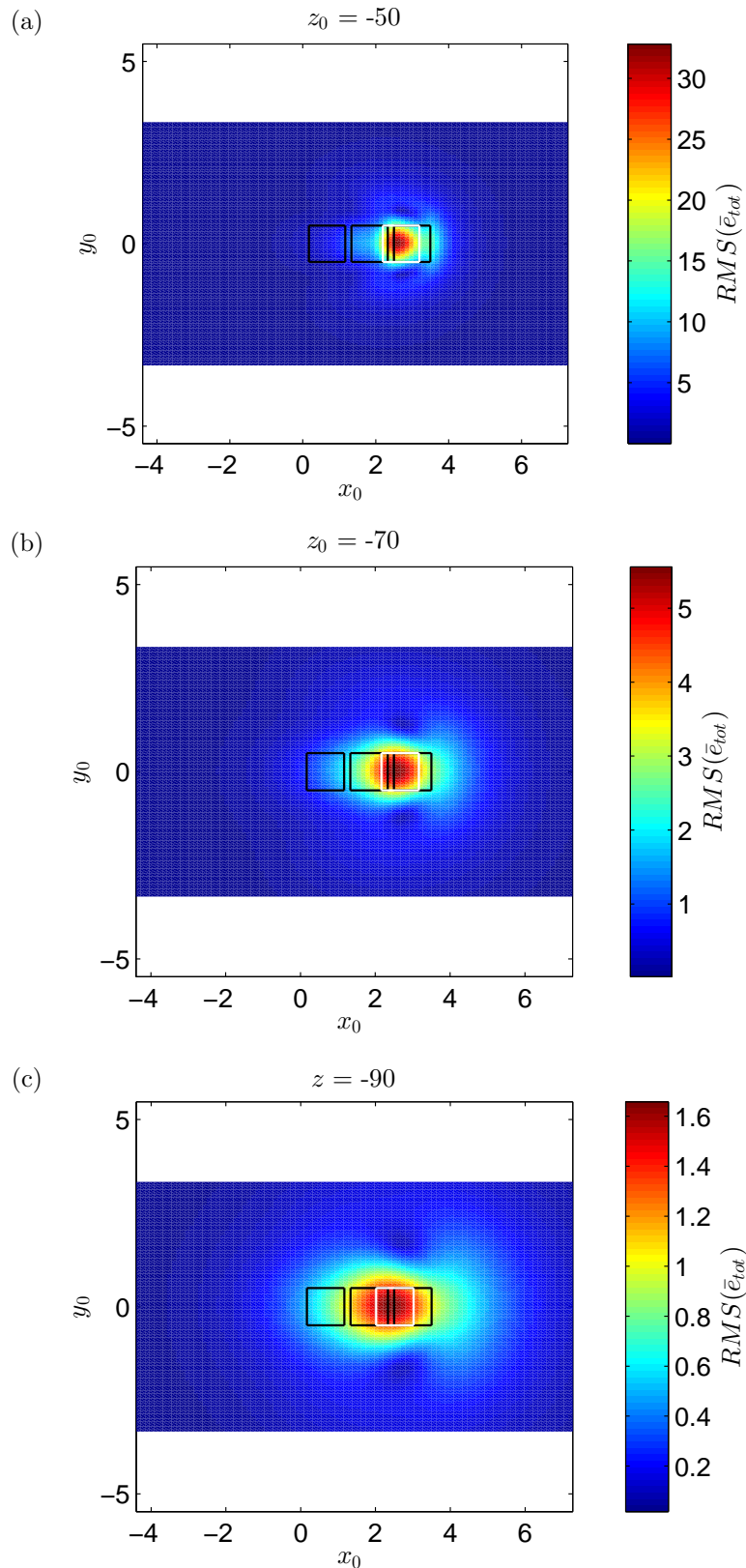


FIGURE 3.17 – Champs de RMS de la f.e.m induite dans une spire carré de  $\zeta_\ell = \zeta_L = 1$  d'une période des oscillations du drapeau à différentes altitudes : (a)  $z = -50$ , (b)  $z = -70$ , (c)  $z = -90$ . Les carrés noirs représentent la position des aimants du drapeau lorsqu'il est droit. Les carrés blancs représentent la spire à la position où la valeur RMS est maximale.

pour laquelle la valeur RMS est maximale est également représentée. Les résultats sont similaires à ceux de la spire circulaire de la figure 3.16. Les pics de RMS de la f.e.m induite dans une spire rectangulaire se trouvent aux mêmes positions par rapport au drapeau que pour une spire circulaire avec une amplitude moins importante. Nous observons également le même étalement du pic que pour la spire circulaire sur la figure 3.16 lorsque  $z_0$  diminue.

La même variation de la valeur RMS de la f.e.m en fonction de la position pour une spire carrée de  $\zeta_L = \zeta_\ell = 1$  et une spire circulaire de  $\nu = 1$  a été constatée. Dans la section suivante, on étudie la variation de la valeur RMS de la f.e.m induite dans une spire en fonction de sa taille.

## 4.5 Influence de la taille de la spire

Pour l'étude de l'influence de la taille de la spire, la distance est fixée à  $z_0 = -70$ . Les mêmes conditions que dans la section précédente sont prises pour les calculs numériques.

### Spire circulaire

La figure 3.18 représente le champ de RMS de la f.e.m induite dans une spire circulaire de différents diamètres pendant une période d'oscillations. Lorsque le diamètre de la spire augmente, une zone d'importantes amplitudes se déplace de la position du troisième aimant vers le premier. Simultanément, une autre région d'amplitude moins importante fait son apparition vers  $x_0 = 5$  pour  $\nu = 5$  et nous observons que l'amplitude de cette deuxième zone augmente avec l'aire de la spire. Nous pouvons également observer que quelle que soit l'aire, la valeur RMS est maximale lorsque la spire passe en dessous du troisième aimant. Cette tendance est encore une fois liée à la variation du champ magnétique qui est maximale au niveau du troisième aimant. Concernant l'ordre de grandeur de la valeur RMS maximale, il augmente avec la taille de la spire car lorsque cette dernière est positionnée efficacement, une spire d'une taille plus grande engendre une f.e.m plus importante en englobant plus de contour où il existe une variation du champ magnétique.

### Spire rectangulaire

Les résultats obtenus pour une spire rectangulaire sont présentés sur la figure 3.19. Les champs de RMS de la f.e.m induite dans une spire de différents diamètres présentent les mêmes tendances que dans le cas d'une spire circulaire. Nous observons que la zone de fortes valeurs RMS qui apparaît pour une petite taille de spire à  $x_0 = 3$  se déplace vers le premier aimant du drapeau lorsque  $\zeta_L$  augmente. Nous observons également une apparition d'une autre région vers l'autre extrémité du drapeau qui se déplace dans le sens opposé au sens de déplacement de la première zone d'importantes valeurs RMS. Dans le cas  $\zeta_L = 5$ , nous remarquons que nous obtenons deux maxima symétriques par rapport à l'axe de  $y$  pour  $\zeta_L$  alors que dans d'autres cas, y compris pour la spire circulaire, un seul extrémum existe. La présence de ces deux maxima signifie qu'à partir d'une certaine dimension de spire carrée, la moyenne quadratique de la f.e.m n'est plus maximale aux positions situées sous le drapeau. Nous proposerons une explication à la présence de ces deux maxima dans le paragraphe suivant.

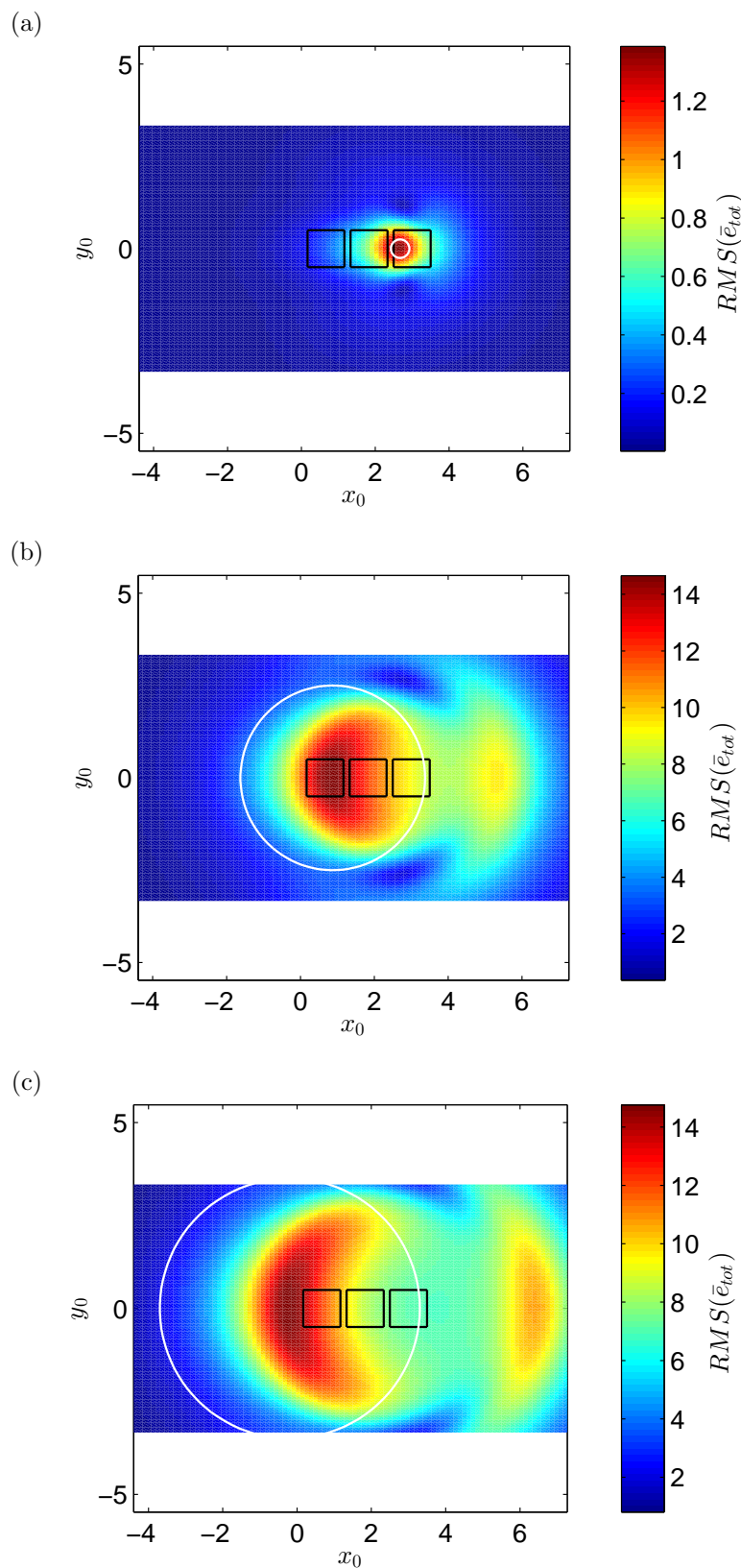


FIGURE 3.18 – Champs de RMS de la f.e.m induite dans une spire circulaire, placée à  $z = -70$ , d'une période des oscillations du drapeau pour différents diamètres de la spire : (a)  $\nu = 0.2$ , (b)  $\nu = 5$ , (c)  $\nu = 7$ . Les cercles blancs représentent la spire à la position où la valeur RMS est maximale.

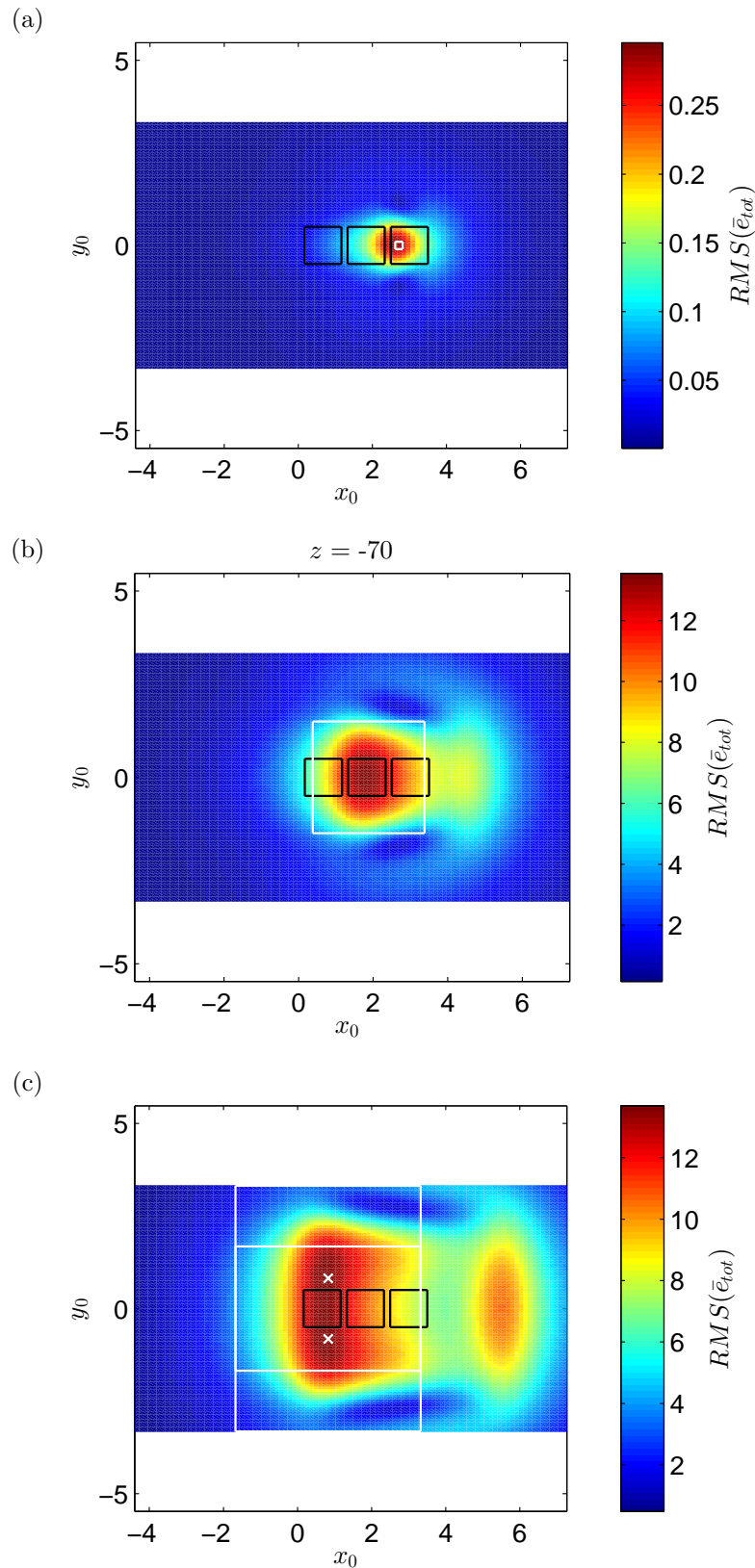


FIGURE 3.19 – Champs de RMS de la f.e.m induite dans une spire carrée, placée à  $z = -70$ , d’une période des oscillations du drapeau pour différentes longueurs de la spire : (a)  $\zeta_L = 0.2$ , (b)  $\zeta_L = 3$ , (c)  $\zeta_L = 5$ . Les carrés blancs représentent la spire à la position où la valeur RMS est maximale. Les croix sur la figure (c) sont les centres des spires.



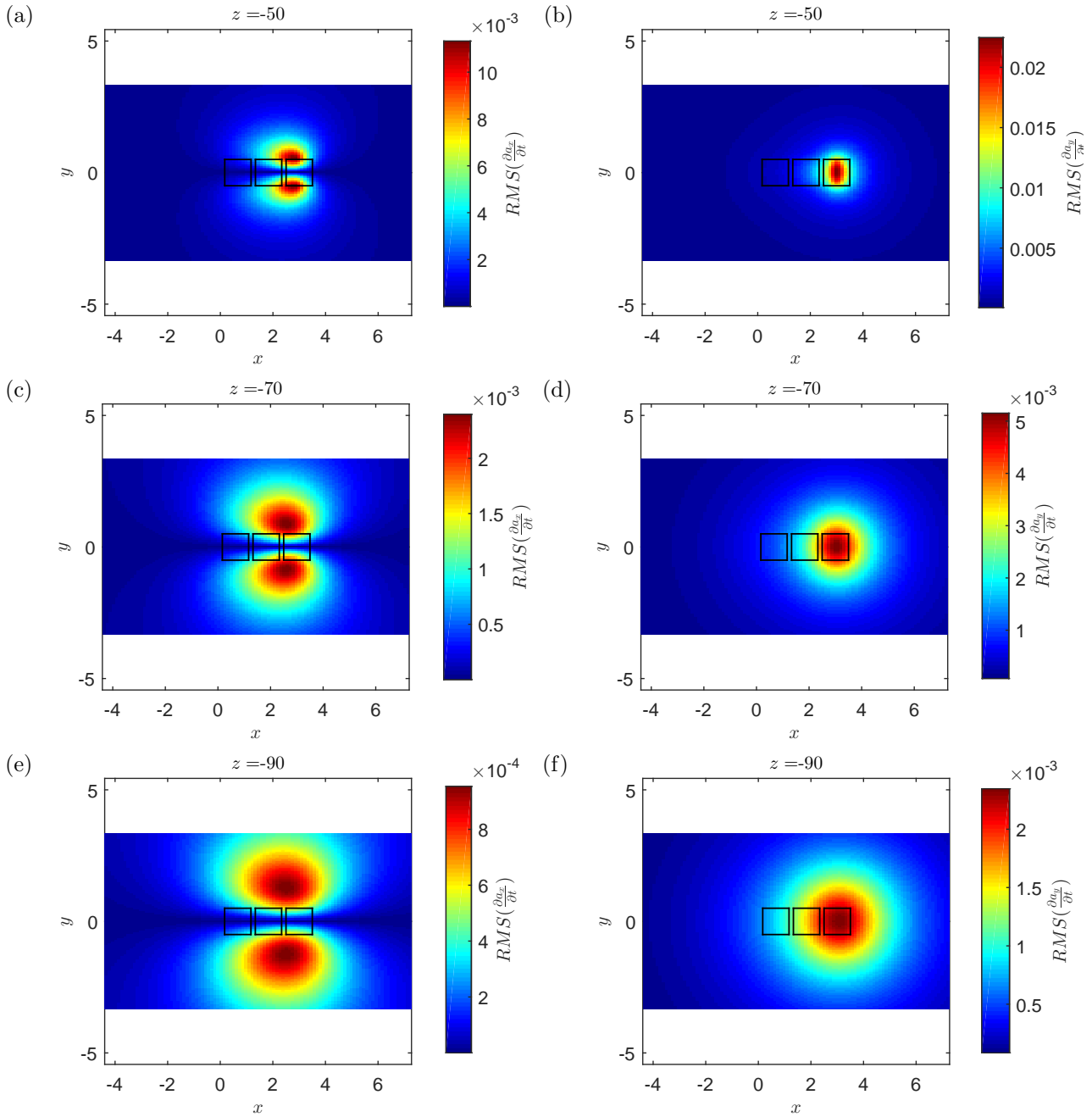


FIGURE 3.20 – Champs de RMS de la dérivée temporelle de  $a_x$  et  $a_y$  pendant une période des oscillations du drapeau pour  $z = -50$  ((a), (b)),  $z = -70$  ((c), (d)) et  $z = -90$  ((e), (f)). Les figures (a), (c) et (e) représentent le champ de RMS de la dérivée de  $a_x$  et les figures (b), (d) et (f) représentent le champ de RMS de la dérivée de  $a_y$ .

### RMS de la variation temporelle du potentiel vecteur

Lors des études de l'influence de la position et de la taille des spires sur la variation de la valeur RMS de la f.e.m, nous avons observé que la moyenne quadratique est maximale lorsque la spire passe sous le troisième aimant indépendamment de la géométrie de la spire. Dans le but de confirmer cette observation, les champs de RMS des dérivées temporelles de  $a_x$  et  $a_y$  d'une période d'oscillation sont représentés pour  $z = -50$ ,  $-70$ ,  $-90$  sur la figure 3.20. Nous pouvons voir que la variation des composantes  $a_x$  et  $a_y$  du potentiel vecteur est plus importante autour du troisième aimant. Lorsqu'on

s'éloigne du drapeau, les zones de fortes amplitudes de RMS de  $a_x$  et  $a_y$  s'élargissent et se déplacent vers le premier aimant, ce qui est en accord avec le déplacement des zones de fortes valeurs RMS de la f.e.m. Ces déplacements sont liées à la direction de l'aimantation du troisième aimant à son amplitude maximale de déplacement.

L'apparition de deux pics des valeurs RMS sur la figure 3.19c est également liée au déplacement des zones de fortes amplitudes de la moyenne quadratique de la dérivée temporelle de  $a_x$  et  $a_y$ . Sur la figure 3.19, nous pouvons voir que les deux zones de fortes valeurs de RMS de la dérivée temporelle de  $a_x$  sont symétriques par rapport à l'axe de  $y$  quel que soit  $z$ . Lorsque les deux arrêtes selon  $x$  de la spire rectangulaire passent par ces deux zones, la f.e.m est maximale d'après l'équation (3.26). Or pour une spire carrée de côtés plus petits que la distance entre deux pics de RMS de la f.e.m, il est impossible d'englober parfaitement ces deux pics à la fois. Dans ce cas, l'amplitude de RMS de la f.e.m est maximale lorsque une des arrêtes selon la longueur de la spire passe par l'une de ces deux régions et l'autre arrête parallèle à l'axe de  $x$  reste dans la deuxième région. Dans la mesure où les deux zones de fortes valeurs RMS sont symétriques, il est possible d'obtenir deux positions de la spire pour lesquelles l'amplitude est maximale. Ce constat reste valable quelle que soit la géométrie de la spire et cela dépend de la longueur de la spire et la distance entre deux régions de fortes amplitudes de RMS de  $\partial a_x / \partial t$ .

Dans cette section, nous avons étudié la variation de la valeur RMS de la f.e.m induite dans une spire circulaire et une spire carrée en fonction de leur taille et leur position. Afin de caractériser la configuration de la spire maximisant la moyenne quadratique de la f.e.m, l'optimisation de la position et de la dimension des spires est réalisée.

## 5 Optimisation

Dans cette section, nous cherchons la configuration optimale donnant une valeur maximale de la valeur RMS de la f.e.m induite pendant une période d'oscillation. L'optimisation de la spire est effectuée sur deux géométries différentes : spire circulaire et rectangulaire. La spire rectangulaire n'est plus limitée à la forme carrée pour obtenir son élanement dans la configuration optimale. Nous nous limitons ici au cas d'une spire toujours parallèle au plan  $(Oxy)$ , ce qui diminue le nombre de paramètres à optimiser. Pour les deux géométries considérées,  $x_0$  et  $y_0$  sont les paramètres communs à optimiser. Les paramètres liés à la dimension de la spire sont spécifiques à chacun des cas. Le maximum de la valeur RMS de la f.e.m est localisé en utilisant la méthode de Nelder-Mead (Nelder and Mead, 1965). Cette dernière est une méthode par itérations de recherche d'un extrémum local qui dépend de la condition initiale des paramètres et de la tolérance de l'optimisation que nous fixons. Le paramétrage de la méthode d'optimisation sera présenté dans chacun des cas d'étude.

### 5.1 Optimisation de la spire circulaire

Pour l'optimisation de la spire circulaire, les paramètres à considérer sont la position  $(x_0, y_0, z_0)$  et le paramètre de la géométrie de la spire circulaire  $\nu = \nu_L = \nu_\ell$ . Dans le processus d'optimisation, la valeur de  $z_0$  est fixée et les valeurs du jeu de paramètres  $(x_0, y_0, \nu_0)$  pour lesquelles la valeur RMS de la f.e.m induite est maximal sont déterminées numériquement. Nous notons ces paramètres optimaux  $(x_{opt}, y_{opt}, \nu_{opt})$ . Pour la localisation de la valeur RMS maximale, la méthode de Nelder-Mead est appliquée

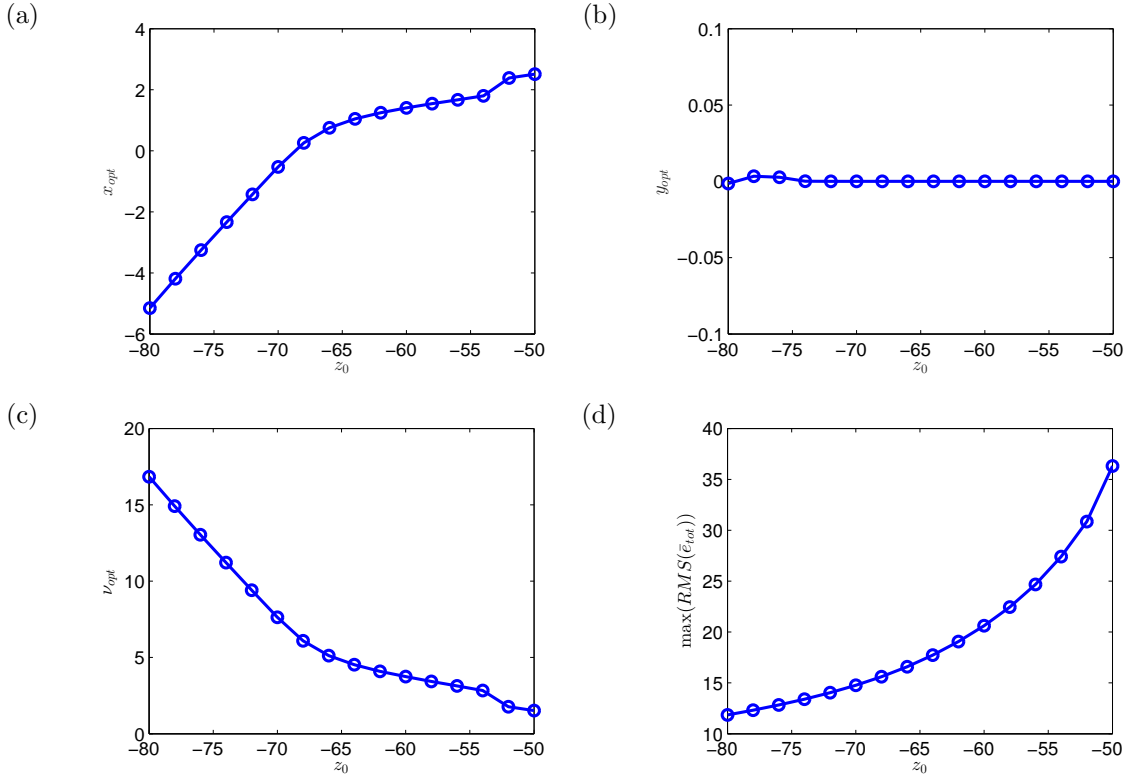


FIGURE 3.21 – Paramètres optimaux de la spire circulaire (a)  $x_{opt}$ , (b)  $y_{opt}$  en fonction du signe de  $y_{ini}$ , (c)  $\nu_{opt}$  en fonction de  $z_0$ . La figure (d) représente le maximum de la valeur RMS de la f.e.m induite dans la spire optimale en fonction de  $z_0$ .

pour 4 différents jeux de paramètres initiaux  $(x_{ini}, y_{ini})$  :  $(-1, 0.01)$ ,  $(1, 0.01)$ ,  $(-1, -0.01)$  et  $(1, -0.01)$ . La tolérance de la méthode est fixée à  $10^{-10}$  sur la valeur RMS de la f.e.m et sur  $x_0$  et  $y_0$  simultanément. Parmi les quatre résultats obtenus de ces jeux de paramètres initiaux, seules les valeurs donnant la plus grande amplitude de RMS sont enregistrées.

La figure 3.21 représente la variation de  $(x_{opt}, y_{opt}, \nu_{opt})$  et de la valeur maximale de la valeur RMS de la f.e.m induite pendant une période d'oscillations en fonction de  $z_0$ . Nous pouvons observer que plus on s'éloigne du drapeau, plus la spire optimale est grande et se déplace du niveau du troisième aimant vers  $x_0 = -8$ . La coordonnée optimale  $y_{opt}$  reste nulle quel que soit  $z_0$  sauf vers  $z_0 = -80$  où elle présente une petite fluctuation. Cette dernière s'explique par les valeurs du champ RMS devenant trop faibles qui nécessitent alors une plus faible tolérance ou une autre condition initiale plus proche de l'optimum pour que l'optimisation soit plus précise. Les observations sont en accord avec ce que nous avons constaté aux sections 4.4 et 4.5. Cette évolution des paramètres optimaux est une nouvelle fois liée aux zones de fortes variations du potentiel vecteur. En reprenant les valeurs optimales des paramètres, nous pouvons voir que l'amplitude de RMS de la f.e.m est maximale lorsque la spire passe par les régions de fortes valeurs RMS du potentiel vecteur de la figure (3.20) en fonction de  $z_0$ .

Concernant la valeur RMS maximale de la f.e.m, qui est tracée en fonction de  $z_0$  sur la figure 3.21d, nous observons qu'elle diminue lorsqu'on s'éloigne du drapeau. Cette observation était attendue dans la mesure où le champ magnétique des aimants s'affaiblit lorsqu'on s'en éloigne.

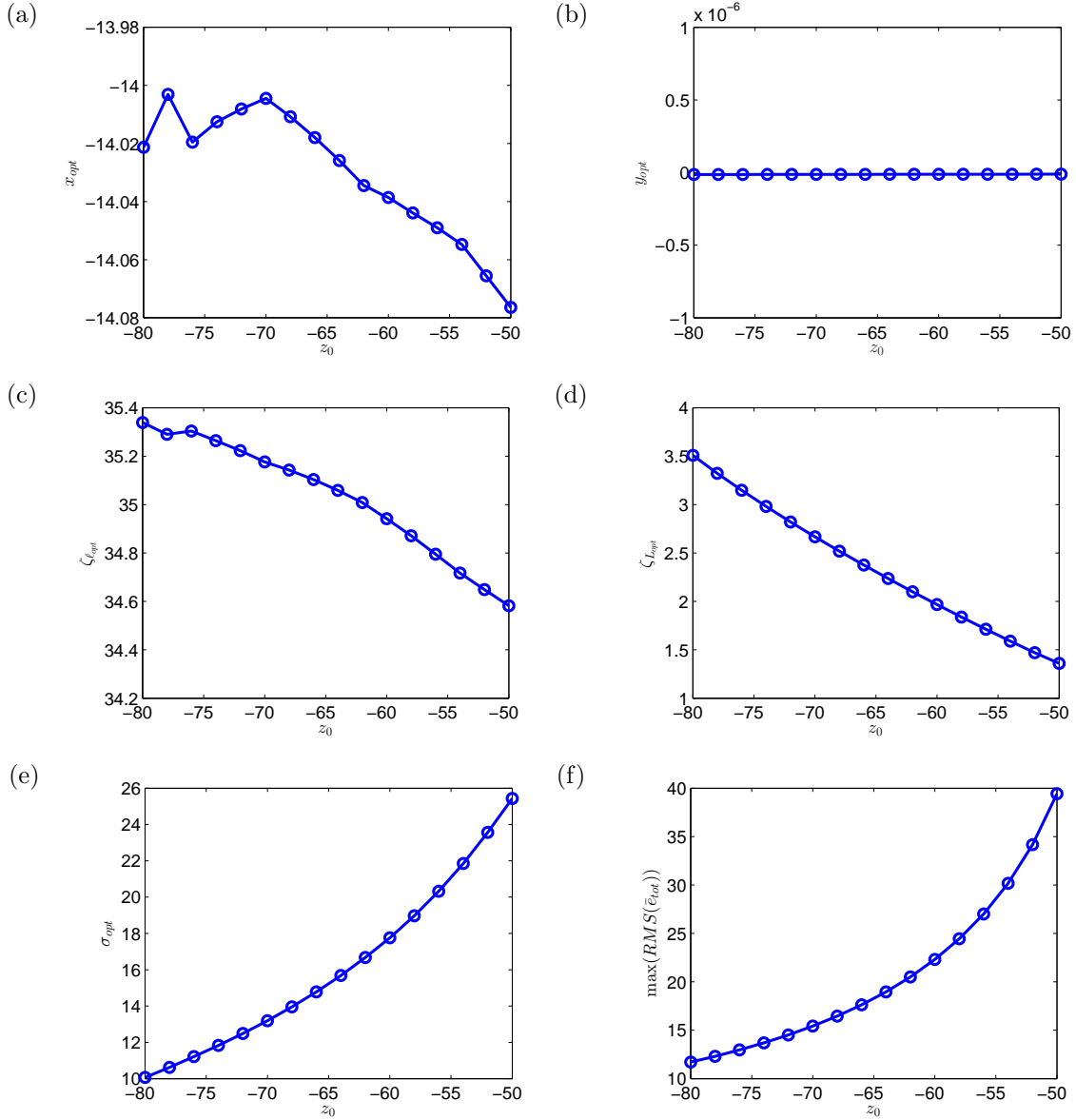


FIGURE 3.22 – Paramètres optimaux de la spire rectangulaire (a)  $x_{opt}$ , (b)  $y_{opt}$ , (c)  $\zeta_{l_{opt}}$ , (d)  $\zeta_{L_{opt}}$  et (e)  $\sigma_{opt}$  en fonction de  $z_0$ . La figure (f) représente le maximum de la valeur RMS de la f.e.m induite dans la spire optimale en fonction de  $z_0$ .

## 5.2 Optimisation de la spire rectangulaire

La f.e.m induite dans une spire rectangulaire dépend de sa position  $(x_0, y_0, z_0)$  et des paramètres de la géométrie de la spire  $\zeta_\ell$  et  $\zeta_L$ . Comme pour la spire circulaire, les paramètres optimaux  $(x_{opt}, y_{opt}, \zeta_{l_{opt}}, \zeta_{L_{opt}})$  sont déterminés en fonction de  $z_0$ . La méthode de Nelder-Mead est appliquée pour 4 différents jeux de paramètres initiaux  $(x_{ini}, y_{ini}, \zeta_{l_{ini}}, \zeta_{L_{ini}})$  :  $(-1, 0.01, 1, 1)$ ,  $(1, 0.01, 1, 1)$ ,  $(-1, -0.01, 1, 1)$  et  $(1, -0.01, 1, 1)$ . La tolérance de la méthode est fixée à  $10^{-8}$  sur la valeur RMS de la f.e.m et  $10^{-5}$  sur les paramètres optimaux. Seuls les résultats donnant la valeur RMS la plus importante sont prélevés parmi ceux obtenus pour les quatre différentes conditions initiales.

La figure 3.22 représente  $(x_{opt}, y_{opt}, \zeta_{l_{opt}}, \zeta_{L_{opt}})$  et le rapport d'aspect optimal de la spire  $\sigma_{opt} = \zeta_{l_{opt}}/\zeta_{L_{opt}}$  en fonction de  $z_0$ . Comme pour la spire circulaire, nous pouvons constater que, lorsque  $z_0$  diminue, la spire optimale reste toujours sur l'axe du drapeau ( $y = 0$ ) et selon  $x$ , elle s'approche légèrement de la position du drapeau.

Simultanément, la spire grossit et s'élanche suivant la direction de  $x$ . Cette évolution des paramètres optimaux s'explique par la moyenne quadratique de la f.e.m devenant maximale lorsque les arêtes de la spire rectangulaire optimale passent par les zones de fortes amplitudes de RMS de la variation temporelle du potentiel vecteur (cf 3.20). Dans la mesure où ces zones s'élargissent lorsque  $z$  diminue, l'aire de la spire optimale augmente. L'élanche de la spire est lié aux zones d'importantes valeurs RMS de  $\partial a_x / \partial t$  qui s'étalent selon  $x$ . Ici, il existe encore une fois des fluctuations des résultats vers  $z = -80$ . Ces fluctuations peuvent être contrôlées en diminuant la tolérance sur les paramètres optimaux et en posant des conditions initiales plus proches de l'optimum.

Concernant l'amplitude de RMS maximale, la courbe de la figure 3.22, présente la même allure que celle de la spire circulaire optimale.

Le processus d'optimisation des spires circulaire et rectangulaire confirme la variation de la tension induite par rapport à la taille et la position de la spire observée précédemment. Ces résultats restent néanmoins à vérifier expérimentalement pour s'assurer de leur fiabilité.

## 6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons analysé un premier système de production d'électricité composé d'un drapeau articulé et d'une bobine. Le drapeau est constitué de trois aimants rectangulaires reliés par des charnières. La bobine est positionnée sous le drapeau. Une tension électrique  $y$  est induite consécutivement à la variation du flux magnétique engendrée par le flottement du drapeau. Nous avons réalisé une méthode de calcul numérique permettant d'estimer la force électromotrice induite par ce phénomène. Cette méthode est ensuite utilisée pour calculer la tension aux bornes d'une spire ou d'une bobine engendrée par le mouvement du drapeau. La cinématique du système est récupérée expérimentalement à partir du film des oscillations et à partir de ces données, la f.e.m induite est estimée numériquement. Le résultat est comparé à la f.e.m mesurée durant l'enregistrement du film et un bon accord est trouvé pour une bobine de spires circulaires et rectangulaires. Le nombre de spires des bobines n'était pas connu et nous l'avons estimé expérimentalement. Nous devrions donc refaire la comparaison avec des bobines dont le nombre de spires est connu.

Après la validation du calcul de la f.e.m, nous avons cherché la configuration optimale des spires pour laquelle nous avons le maximum de la moyenne quadratique de la f.e.m. Les spires optimales de géométries circulaire et rectangulaire sont déterminées numériquement pour différentes altitudes. Nous avons trouvé que quelle que soit la géométrie, dans la configuration optimale, la spire passe nécessairement au niveau du troisième aimant du drapeau où il existe une forte variation temporelle du potentiel vecteur qui donne la f.e.m. Les résultats de l'optimisation de la spire restent néanmoins à raffiner et à améliorer avec un meilleur paramétrage de la méthode d'optimisation.

Pour la suite, la dynamique du drapeau en flottement doit être modélisée. Une fois que le modèle sera développé, nous pourrions étudier les conditions critiques de flottement et l'amplitude d'oscillations en fonction de la vitesse de l'écoulement et du nombre de pièces. Ces données pourraient ensuite être exploitées pour étudier l'influence de différents paramètres du système sur la f.e.m.

La modification de l'écoulement en présence d'une bobine reste également importante à étudier car elle affecte directement la dynamique du drapeau. Lorsque l'influence de la bobine sur l'écoulement sera prise en compte dans le modèle de la dynamique du drapeau, l'optimisation pourrait se faire sans passer par la mesure de la cinématique

du système et les résultats de l'optimisation présentés dans ce chapitre pourraient être confirmés.

# Conclusion

La dynamique d'une chaîne d'aimants et son application à la récupération d'énergie ont été les objets d'étude de cette thèse. Dans le premier chapitre, l'expression générale de l'énergie d'interaction magnétique entre deux aimants a été établie à partir des équations de la magnétostatique et elle a ensuite été appliquée aux aimants cylindriques aimantés selon le diamètre. Dans le deuxième chapitre, la dynamique d'une chaîne d'aimants cylindriques aimantés selon le diamètre soumise à la gravité et à un champ magnétique a été étudiée. Un modèle linéaire décrivant la dynamique de la chaîne a été développée en utilisant le formalisme lagrangien à partir de l'expression de l'énergie d'interaction entre cylindres formulée dans le chapitre 1. Outre ce modèle discret, un modèle de poutre continue a été également développé pour décrire le comportement de la chaîne pour un très grand nombre d'aimants. Les résultats ont montré un bon accord avec les expériences et la stabilité de cette structure a été caractérisée en fonction de la gravité et du champ magnétique extérieur. Dans le troisième chapitre, un système de récupération d'énergie à partir du flottement d'un drapeau articulé composé d'aimants rectangulaires aimantés selon l'épaisseur à l'aide d'une bobine a été présenté. La force électromotrice (f.e.m) induite dans la bobine par le drapeau a été formulée à partir de la loi de l'induction électromagnétique. L'expression de la f.e.m ainsi obtenue a été utilisée pour estimer la tension engendrée aux bornes de la bobine. Les résultats ont été comparés aux mesures et nous avons trouvé un bon accord. L'optimisation de la bobine a ensuite été réalisée pour prédire quelle configuration de la bobine permet de maximiser le potentiel de récupération d'énergie du système.

## Perspectives

Dans le cadre de la modélisation de la chaîne d'aimants, un modèle non-linéaire tenant compte de grandes amplitudes de déplacements serait un important développement. Dans ce cas, la condition de non-glissement doit être revue car nous avons montré que cette contrainte aux contacts n'est valable que pour des amplitudes de déplacement modérées. Pour un éventuel développement d'un modèle non-linéaire, nous devrions donc réfléchir à la prise en compte des mouvements de glissement des cylindres aux contacts.

Nous avons observé que la structure peut flamber à partir d'un certain rapport d'aspect des aimants cylindriques. Nous avons également constaté que ce rapport d'aspect critique de stabilité varie selon le nombre d'aimants. Afin de vérifier la stabilité de l'équilibre du système, l'énergie d'interaction entre  $n$  aimants de la chaîne doit être estimée pour plusieurs angles d'inclinaison de la structure en gardant la condition de roulement. En faisant ce calcul pour différentes valeurs de  $n$  et différents rapports d'aspect, nous devrions voir la stabilité de l'équilibre de la position droite de la chaîne en traçant le puits de potentiel en fonction de l'angle d'inclinaison. Concernant l'es-

timation de la rigidité équivalente de la structure discrète, une variation irrégulière aux modes bas de cette rigidité équivalente a été mise en évidence. Cette irrégularité démontre les limites de l'approche utilisée.

La modélisation de la dynamique d'une chaîne d'aimants réalisée dans cette thèse peut être appliquée à des cas d'assemblages complexes d'aimants, par exemple une chaîne d'aimants cylindriques de différents rapports d'aspect qui peut être exploitée pour la conception d'un micro-nageur. [Li et al. \(2013\)](#) ont proposé un micro-nageur constitué d'une chaîne d'aimants sphériques de différentes tailles soumise à un champ oscillant dans la direction transversal. Un grand aimant est à la tête du nageur et d'autres de plus petite taille sont placées derrière, ce qui donne un nageur dont la forme est semblable à celle d'une têtard. Pour la modélisation de ce type de structure, nous devrions reformuler l'énergie d'interaction entre aimants et la condition de contacts et ensuite appliquer le formalisme lagrangien.

Une autre possible application des méthodes de modélisation utilisées dans cette thèse est la modélisation des particules magnétiques dans un fluide magnétorhéologique. En suivant les étapes de développement des modèles discret et continu, nous pourrions modéliser la stabilité des assemblages des particules lorsque ces dernières sont soumises à un champ magnétique. Cela permettrait de compléter le modèle microscopique de [Bossis et al. \(1997\)](#) dans lequel les interactions entre les particules sont introduites sous l'approximation multipolaire.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés à la récupération de l'énergie d'un écoulement d'eau en utilisant un drapeau magnétique. Nous pouvons nous demander s'il est également possible de récupérer l'énergie d'un écoulement d'air à l'aide d'un drapeau magnétique. Un travail particulier doit être effectué sur les masses du système qui permettent le flottage dans l'air.

La direction de l'aimantation des aimants affecte la rigidité de la structure. Elle fait donc partie des paramètres sur lesquels il faut travailler pour la conception d'un drapeau. Afin d'étudier l'influence de l'aimantation sur la rigidité du drapeau, il faudrait essayer des aimants rectangulaires aimantés selon diverses directions. Nous pourrions ainsi étudier l'influence de l'aimantation sur le flottage du drapeau et sur la f.e.m induite. Cette étude permettrait de fabriquer des structures métastables qui pourraient ensuite exploitées pour créer des oscillations de plus grande amplitude, à des vitesses d'écoulement plus faibles.

Dans cette thèse, la dynamique du drapeau n'a pas été modélisée. Dans le cadre d'un stage de M2 de Darith-Antony Hun, un modèle linéaire décrivant le couplage fluide-structure du problème a été développé en considérant le mouvement du drapeau bidimensionnel. Lors du développement, nous avons utilisé une approche énergétique pour la modélisation de la structure et les équations de Navier-Stokes pour celle du fluide. Ce modèle est en cours de validation.

La présence de la bobine modifie l'écoulement, ce qui affecte la dynamique du drapeau. Cette influence de la bobine sur l'écoulement est un phénomène important à prendre en compte. Lorsqu'on aura un modèle combinant le couplage interaction fluide-structure et la modification de l'écoulement engendrée par la bobine, nous n'aurons pas besoin de données expérimentales de la cinématique du système pour le calcul de la f.e.m induite. La bobine peut également affecter la dynamique du drapeau par son auto-induction. En effet, elle crée un champ magnétique à partir du courant électrique généré par elle-même. Nous devrions vérifier si cette rétroaction est importante et si le champ créé modifie significativement la dynamique du système.

Pour pouvoir récupérer de l'énergie à partir du flottage du drapeau, il est né-



cessaire de monter un circuit électrique. Lorsque le circuit sera monté, nous pourrons estimer la puissance produite par le système et améliorer le drapeau ou le circuit en cherchant à augmenter la tension induite ou le rendement de conversion. L'étude sur la puissance récupérée par le système en fonction de la vitesse de l'écoulement et des paramètres du drapeau ou de la bobine sera à réaliser.

Enfin, nous pouvons imaginer d'autres systèmes récupérant de l'énergie à partir des structures vibrantes aimantées utilisant des aimants et l'induction électromagnétique : soit en fixant des bobines sur des structures vibrantes et un aimant immobile dans l'environnement, soit en fixant les aimants sur les structures vibrantes et une bobine immobile dans l'environnement. [Sari et al. \(2008\)](#) propose un système de production d'électricité en utilisant la première approche. Leur système est composé des bobines fixées sur des poutres vibrantes et d'un aimant rectangulaire posé dans l'environnement. Lorsque les poutres vibrent, la f.e.m est induite dans les bobines. Nous pouvons appliquer à ce type de système le calcul de l'estimation de la f.e.m induite par le mouvement des aimants rectangulaires, développé dans la thèse. En couplant le modèle décrivant la dynamique d'une poutre continue et celui de calcul de la f.e.m, nous pourrons modéliser la tension créée par le système. En utilisant l'une des approches présentées précédemment, nous pouvons récupérer de l'énergie des vibrations présentes dans l'environnement. Par exemple, dans ([Peigney and Siegert, 2013](#)), l'énergie électrique est récupérée des vibrations d'un pont en utilisant des lames piézoélectriques. Des bobines et des aimants pourraient remplacer les pièces piézoélectriques dans le système.

# Annexe A

## Polynôme de Legendre

Dans le chapitre 1, le développement multipolaire d'un champ magnétique est réalisé à l'aide des polynômes de Legendre. Ces derniers sont des solutions particulières de l'équation différentielle de Legendre :

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d}{dx} P_n(x) \right] + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad (\text{A.1})$$

où  $n$  est un entier et  $x \in [-1, 1]$ . Ces polynômes peuvent être définis sous la forme des sommes :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (x-1)^{(n-k)} (x+1)^k \quad (\text{A.2})$$

avec

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (\text{A.3})$$

Suivant (A.2), les premiers polynômes s'écrivent :

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8} (35x^3 - 30x^2 + 3) \\ P_5(x) &= \frac{1}{8} (63x^3 - 70x^2 + 15x) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

# Annexe B

## Méthode de Simpson

La méthode de Simpson est la méthode de calcul d'intégrale numérique que nous avons utilisée dans cette thèse. Soit une fonction  $f(x)$  intégrable sur un intervalle  $[a, b]$ , l'intégrale de  $f(x)$  sur  $[a, b]$  peut être approchée numériquement par la méthode de Simpson (Abramowitz and Stegun, 1964) :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n) \right], \quad (\text{B.1})$$

où  $n$  est le nombre de sous-intervalle et  $h = (b-a)/n$  avec  $x_j = a+jh$  pour  $j = 0, 1, \dots, n$ . La méthode de Simpson est donc une méthode d'intégration d'ordre 4 dont l'erreur est définie en fonction de la dérivée quatrième de  $f$  :

$$\text{error} = \frac{h^4}{180} (b-a) \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)|. \quad (\text{B.2})$$

Nous avons estimé numériquement l'erreur de la méthode pour  $f(x) = \sin(x)$  intégrée sur  $[0, \pi]$  pour différents nombres de sous-intervalles  $n$ .

Nous notons  $\tilde{I}$  l'intégrale de  $\sin(x)$  sur  $[0, \pi]$  estimée avec la méthode de Simpson. On sait que cette intégrale de sinus vaut 2 donc l'erreur numérique de la méthode est donnée par  $|2 - \tilde{I}|/2$ . Cette erreur est également calculée pour la méthode des trapèzes et l'ensemble de résultats est dans le tableau B.1.

D'après les résultats, l'erreur numérique est moins élevée et elle décroît plus rapidement pour la méthode de Simpson. Ce résultat est logique car la méthode des trapèzes est une méthode d'intégration numérique d'ordre 2 alors que la méthode de Simpson est d'ordre 4.

$n$	Erreur (Simpson)	Erreur (Trapèze)
3	$4,72 \cdot 10^{-2}$	0.215
5	$2,30 \cdot 10^{-3}$	$5,19 \cdot 10^{-2}$
10	$3,74 \cdot 10^{-4}$	$1,02 \cdot 10^{-2}$
100	$2,68 \cdot 10^{-8}$	$8,39 \cdot 10^{-5}$
1000	$2,58 \cdot 10^{-12}$	$8,39 \cdot 10^{-7}$
10000	$2,89 \cdot 10^{-15}$	$8,23 \cdot 10^{-9}$

TABLEAU B.1 – Erreur numérique de la méthode de Simpson et de la méthode des trapèzes pour  $\int_0^\pi \sin(x) dx$  en fonction du nombre de sous-intervalles.

# Annexe C

## Matrices des équations du mouvement de la chaîne

Ici, le calcul matriciel des équations (2.33) est détaillé. Les coordonnées généralisées  $u_i$ ,  $v_i$  et  $\varphi_i$  et les multiplicateurs de Lagrange  $a_i$  et  $b_i$  sont regroupés dans les vecteurs :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} ; \quad \boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} . \quad (\text{C.1})$$

L'équation (2.31) est exprimée sous la forme matricielle en fonction des vecteurs (C.1) :

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{e} , \quad \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{P}\mathbf{v} + \mathbf{N}\boldsymbol{\varphi} , \quad 8 \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{R}\mathbf{v} + \mathbf{S}\boldsymbol{\varphi} . \quad (\text{C.2})$$

où les alphabets minuscules et majuscules représentent respectivement les vecteurs verticaux et les matrices de taille  $(n-1) \times (n-1)$ . Le vecteur  $\mathbf{e}$  est rempli de  $(n-1)$  éléments  $e_l$  qui sont donnés par :

$$e_l = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n \frac{(l-i)}{|l-i|} D_1(|l-i|) , \quad \forall l = 1 \dots n-1 .$$

Les matrices  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{S}$  sont symétriques. Soient  $l$  et  $c$ , les indices de ligne et de colonne, les éléments de ces matrices  $P_{lc}$ ,  $Q_{lc}$ ,  $R_{lc}$  et  $S_{lc}$  sont :

$$\begin{aligned} P_{lc} &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq c}}^n \left( \frac{D_1(|c-i|)}{|c-i|} - 2 \frac{\mathcal{E}(|c-i|, 0, 0)}{(c-i)^2} + 2 \frac{H_{23}(|c-i|)}{(c-i)^2} \right) , \\ &\quad - \left( \frac{D_1(|c-l|)}{|c-l|} - 2 \frac{\mathcal{E}(|c-l|, 0, 0)}{(c-l)^2} + 2 \frac{H_{23}(|c-l|)}{(c-l)^2} \right) , \\ N_{lc} &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq c}}^n \left( \frac{\mathcal{E}(|c-i|, 0, 0) - H_{23}(|c-i|)}{c-i} \right) + \frac{\mathcal{E}(|c-l|, 0, 0) - H_{23}(|c-l|)}{c-l} , \\ R_{lc} &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n 8 \frac{\mathcal{E}(|c-i|, 0, 0) - H_{23}(|c-i|)}{c-i} - 8 \frac{\mathcal{E}(|c-l|, 0, 0) - H_{23}(|c-l|)}{c-l} , \\ S_{lc} &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n 8 [-\mathcal{E}(|c-i|, 0, 0) + H_{23}(|c-l|)] . \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Avec les vecteurs et les matrices précédemment définies, les équations du mouvement composées des équations (2.33) et (2.28) s'écrivent sous la forme matricielle :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e} - \mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{a} &= 0, \\
 \mathbf{P}\mathbf{v} + \mathbf{N}\dot{\boldsymbol{\varphi}} + \ddot{\mathbf{v}} - \mathbf{A}\mathbf{b} &= 0, \\
 \mathbf{R}\mathbf{v} + \mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{H}\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{T}\dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{D}\mathbf{b} &= 0, \\
 \mathbf{u} &= 0 \\
 \mathbf{B}\mathbf{v} &= \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\varphi}},
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

où  $\mathbf{f}$  est un vecteur de  $n - 1$  éléments  $\mathcal{G}$  et  $\mathbf{H}$  est une matrice diagonale de taille  $(n - 1) \times (n - 1)$  dont les éléments diagonaux sont  $2\mathcal{B}$ . Les matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{T}$  ont la même taille que  $\mathbf{H}$  et elles sont définies selon :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{C} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{D} &= 4 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{T} &= \begin{pmatrix} -2a_1 - 2a_2 & -2a_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -2a_2 & -2a_2 - 2a_3 & -2a_3 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & -2a_3 & -2a_3 - 2a_4 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & -2a_{n-2} & -2a_{n-2} - 2a_{n-1} & -2a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -2a_{n-1} & -2a_{n-1} \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

où  $\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{e} + \mathbf{f})$ . En exprimant les équations (C.4) uniquement en fonction de  $\mathbf{v}$ , nous obtenons la matrice de masse  $\mathbf{M}$  et de raideur  $\mathbf{K}$  de l'équation (2.34) :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}, \\
 \mathbf{K} &= \mathbf{R} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{P} + \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{S} + \mathbf{T} + \mathbf{H} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{N}).
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

## Annexe D

# Différence finie de $v$ du modèle continu de la chaîne

Dans la section 3 du chapitre, la poutre est discrétisée en  $N$  positions sur  $x \in [0, 1]$  avec un pas de discrétisation constant  $\Delta x$ . Les dérivées spatiales de différents ordres de déplacement  $v$  à une position discrète  $x_i$  sont développées en utilisant la différence finie centrée d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}\forall i \in [2, N-1] \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_i) &= \frac{v(x_{i+1}) - v(x_{i-1}))}{2\Delta x}, \\ \forall i \in [2, N-1] \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_i) &= \frac{v(x_{i+1}) - 2v(x_i) + v(x_{i-1}))}{\Delta x}, \\ \forall i \in [3, N-2] \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(x_i) &= \frac{v(x_{i+2}) - 2v(x_{i+1}) + 2v(x_{i-1}) - v(x_{i-2}))}{2\Delta x}, \\ \forall i \in [3, N-2] \quad \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(x_i) &= \frac{v(x_{i+2}) - 4v(x_{i+1}) + 6v(x_i) - 4v(x_{i-1}) + v(x_{i-2}))}{\Delta x}.\end{aligned}\tag{D.1}$$

Pour les positions aux extrémités, la différence finie décentrée d'ordre 2 est utilisée. Du côté de l'encastrement, les dérivées spatiales s'écrivent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x}(x_1) &= \frac{-v(x_3) + 4v(x_2) - 3v(x_1))}{2\Delta x}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_1) &= \frac{-v(x_4) + 4v(x_3) - 5v(x_2) + 2v(x_1))}{\Delta x}, \\ \forall i \in [1, 2] \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(x_i) &= \frac{-3v(x_{i+4}) + 14v(x_{i+3}) - 24v(x_{i+2}) + 18v(x_{i+1}) - 5v(x_i))}{2\Delta x}, \\ \forall i \in [1, 2] \quad \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(x_i) &= \frac{-2v(x_{i+5}) + 11v(x_{i+4}) - 24v(x_{i+3}) + 26v(x_{i+2}) - 14v(x_{i+1}) + 3v(x_i))}{\Delta x}.\end{aligned}\tag{D.2}$$

Puis à l'extrémité libre de la poutre, elles ont pour expression :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v}{\partial x}(x_N) &= \frac{v(x_{N-2}) - 4v(x_{N-1}) + 3v(x_N)}{2\Delta x}, \\
 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_N) &= \frac{-v(x_{N-3}) + 4v(x_{N-2}) - 5v(x_{N-1}) + 2v(x_N)}{\Delta x}, \\
 \forall i \in [N-1, N] \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(x_i) &= \frac{3v(x_{i-4}) - 14v(x_{i-3}) + 24v(x_{i-2}) - 18v(x_{i-1}) + 5v(x_i)}{2\Delta x}, \\
 \forall i \in [N-1, N] \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(x_i) &= \frac{-2v(x_{i-5}) + 11v(x_{i-4}) - 24v(x_{i-3}) + 26v(x_{i-2}) - 14v(x_{i-1}) + 3v(x_i)}{\Delta x}.
 \end{aligned} \tag{D.3}$$

# Annexe E

## Champ magnétique d'un aimant rectangulaire

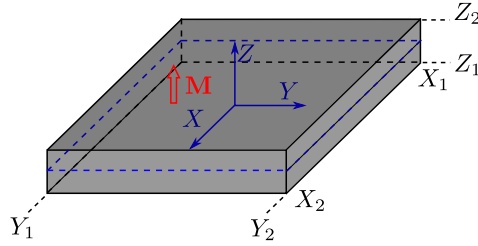


FIGURE E.1 – Aimant rectangulaire aimanté uniformément selon la hauteur.

Cette annexe présente les expressions analytiques d'un aimant rectangulaire aimanté uniformément selon la hauteur (Furlani, 2001). L'aimant considéré et les paramètres du système sont représentés sur la figure E.1. Dans le système de coordonnées  $(X, Y, Z)$ , l'aimant se trouve à l'origine et son est délimité par  $X_1$   $X_2$ , les extrémités de l'aimant selon  $X$ ,  $Y_1$  et  $Y_2$ , celles dans la direction de  $Y$  et  $Z_1$ ,  $Z_2$  selon  $Z$ . Son aimantation est notée  $M$ . Soient Les expressions des trois composantes du champ magnétique de l'aimant  $B_x$ ,  $B_y$  et  $B_z$  s'écrivent en fonction des paramètres précédents. La composante selon  $X$  du champ magnétique,  $B_x$  a pour expression :

$$B_x = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^2 (-1)^{k+m} \ln [F(X, Y, Z, X_m, Y_1, Y_2, Z_k)] , \quad (\text{E.1})$$

où

$$F(X, Y, Z, X_m, Y_1, Y_2, Z_k) = \frac{(Y - Y_1) + \sqrt{(X - X_m)^2 + (Y - Y_1)^2 + (Z - Z_k)^2}}{(Y - Y_2) + \sqrt{(X - X_m)^2 + (Y - Y_2)^2 + (Z - Z_k)^2}} . \quad (\text{E.2})$$

Ensuite, l'expression de  $B_y$  s'écrit :

$$B_y = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^2 (-1)^{k+m} \ln [G(X, Y, Z, X_1, X_2, Y_m, Z_k)] , \quad (\text{E.3})$$

où

$$G(X, Y, Z, X_1, X_2, Y_m, Z_k) = \frac{(X - X_1) + \sqrt{(X - X_1)^2 + (Y - Y_m)^2 + (Z - Z_k)^2}}{(X - X_2) + \sqrt{(X - X_2)^2 + (Y - Y_m)^2 + (Z - Z_k)^2}} . \quad (\text{E.4})$$



Enfin,  $B_z$  a pour équation :

$$B_z = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 (-1)^{k+n+m} \arctan \left[ \frac{(X - X_n)(Y - Y_m)}{(Z - Z_k)} H(X, Y, Z, X_n, Y_m, Z_k) \right], \quad (\text{E.5})$$

où

$$H(X, Y, Z, X_n, Y_m, Z_k) = \frac{1}{\sqrt{(X - X_n)^2 + (Y - Y_m)^2 + (Z - Z_k)^2}}. \quad (\text{E.6})$$

Ces expressions sont celles utilisées comme référence pour vérifier la convergence du schéma discret du potentiel vecteur dans la section 3.3.2.



# Bibliographie

- M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55. Courier Corporation, 1964.
- C. Alexiou, W. Arnold, R. J. Klein, F. G. Parak, P. Hulin, C. Bergemann, W. Erhardt, S. Wagenpfeil, and A. S. Luebbe. Locoregional cancer treatment with magnetic drug targeting. *Cancer research*, 60(23) :6641–6648, 2000.
- H. Allag, J.-P. Yonnet, and M. E. Latreche. 3d analytical calculation of forces between linear halbach-type permanent-magnet arrays. In *Advanced Electromechanical Motion Systems & Electric Drives Joint Symposium, 2009. ELECTROMOTION 2009. 8th International Symposium on*, pages 1–6. IEEE, 2009.
- A. Babataheri, M. Roper, M. Fermigier, and O. Du Roure. Tethered fleximags as artificial cilia. *Journal of Fluid Mechanics*, 678 :5–13, 2011.
- M. Beleggia and M. De Graef. On the computation of the demagnetization tensor field for an arbitrary particle shape using a fourier space approach. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 263(1–2) :L1 – L9, 2003. ISSN 0304-8853. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0304-8853\(03\)00238-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0304-8853(03)00238-5).
- M. Beleggia and M. De Graef. General magnetostatic shape–shape interactions. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 285(1) :L1–L10, 2005.
- K. J. Binns and A. Kurdali. Permanent-magnet a.c. generators. *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of*, 126(7) :690–696, July 1979. ISSN 0020-3270. doi : 10.1049/piee.1979.0154.
- P. M. Black, T. Moriarty, E. Alexander III, P. Stieg, E. J. Woodard, P. L. Gleason, C. H. Martin, R. Kikinis, R. B. Schwartz, and F. A. Jolesz. Development and implementation of intraoperative magnetic resonance imaging and its neurosurgical applications. *Neurosurgery*, 41(4) :831–845, 1997.
- H. Bleuler, M. Cole, P. Keogh, R. Larssonneur, E. Maslen, Y. Okada, G. Schweitzer, A. Traxler, G. Schweitzer, E. H. Maslen, et al. *Magnetic bearings : theory, design, and application to rotating machinery*. Springer Science & Business Media, 2009.
- R. D. Blevins. *Formulas for natural frequency and mode shape / Robert D. Blevins*. Van Nostrand Reinhold Co New York, 1979. ISBN 0442207107.
- S. Blundell and D. Thouless. *Magnetism in condensed matter*, volume 18. Oxford university press New York, 2001.

- G. Bossis, E. Lemaire, O. Volkova, and H. Clercx. Yield stress in magnetorheological and electrorheological fluids : A comparison between microscopic and macroscopic structural models. *Journal of Rheology (1978-present)*, 41(3) :687–704, 1997.
- C. Castelnovo, R. Moessner, and S. L. Sondhi. Magnetic monopoles in spin ice. *Nature*, 451(7174) :42–45, 2008.
- A. Cēbers. Flexible magnetic filaments. *Current Opinion in Colloid and Interface Science*, 10(3–4) :167 – 175, 2005. ISSN 1359-0294. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.cocis.2005.07.002>.
- B. J. Chalmers and E. Spooner. An axial-flux permanent-magnet generator for a gearless wind energy system. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 14(2) : 251–257, Jun 1999. ISSN 0885-8969. doi : 10.1109/60.766991.
- E. De Langre. *Fluides et solides*. Editions Ecole Polytechnique, 2001.
- P. A. Dirac. Quantised singularities in the electromagnetic field. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 133 (821) :60–72, 1931.
- H. Du, K. Y. Sze, and J. Lam. Semi-active control of vehicle suspension with magnetorheological dampers. *Journal of Sound and Vibration*, 283(3–5) :981 – 996, 2005. ISSN 0022-460X. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2004.05.030>.
- S. Dyke, B. Spencer Jr, M. Sain, and J. Carlson. Modeling and control of magnetorheological dampers for seismic response reduction. *Smart materials and structures*, 5(5) :565, 1996.
- A. Erturk, W. G. R. Vieira, C. De Marqui, and D. J. Inman. On the energy harvesting potential of piezoaeroelastic systems. *Applied Physics Letters*, 96(18) :184103, 2010. doi : <http://dx.doi.org/10.1063/1.3427405>.
- E. P. Furlani. *Permanent magnet and electromechanical devices : materials, analysis, and applications*. Academic press, 2001.
- A. Giacomello and M. Porfiri. Underwater energy harvesting from a heavy flag hosting ionic polymer metal composites. *Journal of Applied Physics*, 109(8) :084903, 2011.
- I. S. Grant and W. R. Phillips. *Electromagnetism*. John Wiley & Sons, 2013.
- D. J. Griffiths. *Introduction to electrodynamics*, volume 3. prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 1999.
- S. Guo. Aeroelastic optimization of an aerobatic aircraft wing structure. *Aerospace Science and Technology*, 11(5) :396–404, 2007.
- Y. Haik, V. Pai, and C.-J. Chen. Development of magnetic device for cell separation. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 194(1–3) :254 – 261, 1999. ISSN 0304-8853. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0304-8853\(98\)00559-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0304-8853(98)00559-9).
- A. Hamler, V. Gorican, B. Stumberger, M. Jesenik, and M. Trlep. Passive magnetic bearing. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 272–276, Part 3 :2379 – 2380, 2004. ISSN 0304-8853. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmmm.2003.12.972>. Proceedings of the International Conference on Magnetism (ICM 2003).

- D. H. Hodges and G. A. Pierce. *Introduction to structural dynamics and aeroelasticity*, volume 15. cambridge university press, 2011.
- A. Ito, M. Shinkai, H. Honda, and T. Kobayashi. Medical application of functionalized magnetic nanoparticles. *Journal of bioscience and bioengineering*, 100(1) :1–11, 2005.
- J. D. Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, 1999.
- R. Jacob. Magnetic fluid torque and force transmitting device, Nov. 20 1951. US Patent 2,575,360.
- K. L. Johnson and K. L. Johnson. *Contact mechanics*. Cambridge university press, 1987.
- M. R. Jolly, J. D. Carlson, and B. C. Munoz. A model of the behaviour of magneto-rheological materials. *Smart Materials and Structures*, 5(5) :607, 1996.
- H. Kulah and K. Najafi. Energy scavenging from low-frequency vibrations by using frequency up-conversion for wireless sensor applications. *IEEE Sensors Journal*, 8(3) :261–268, March 2008. ISSN 1530-437X. doi : 10.1109/JSEN.2008.917125.
- L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Course of theoretical physics*, volume 1. Pergamon Press, 1969.
- R. M. Laurenson and R. M. Trn. Flutter analysis of missile control surfaces containing structural nonlinearities. *AIAA journal*, 18(10) :1245–1251, 1980.
- S. Li, J. Yuan, and H. Lipson. Ambient wind energy harvesting using cross-flow fluttering. *Journal of Applied Physics*, 109(2) :026104, 2011.
- Y.-H. Li, S.-T. Sheu, J.-M. Pai, and C.-Y. Chen. Manipulations of vibrating micro magnetic particle chains. *Journal of Applied Physics*, 111(7), 2012. doi : <http://dx.doi.org/10.1063/1.3675269>.
- Y.-H. Li, H.-C. Lin, and C.-Y. Chen. Steering of magnetic micro-swimmers. *IEEE Transactions on Magnetics*, 49(7) :4120–4123, 2013.
- S. Melle, O. G. Calderon, M. A. Rubio, and G. G. Fuller. Chain rotational dynamics in mr suspensions. *International Journal of Modern Physics B*, 16(17n18) :2293–2299, 2002.
- R. T. Merrill. *The Earth's magnetic field : Its history, origin and planetary perspective*, volume 401. Cambridge Univ Press, 1983.
- C. Michel, D. Michel, D. Bernard, G. Olivier, G. Damine, L. Claudine, L. Jean, L. Philippe, M. Pierre, P. Jeanc-Claude, P. Jacques, P. Jean-Louis, R. Perre, R. M-F, S. Michel, S. Christoph, S. Yves, d. T. D. L. Etienne, and Y. Jean-Paul. Magnétisme : vol. 1, fondements de collection grenoble sciences. *EDP Sciences*, page 40, 2000.
- J. A. Nelder and R. Mead. A simplex method for function minimization. *The computer journal*, 7(4) :308–313, 1965.

- K. O'Donoghue and P. Cantillon-Murphy. Deflection modeling of permanent magnet spherical chains in the presence of external magnetic fields. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 343 :251 – 256, 2013. ISSN 0304-8853. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmmm.2013.05.006>.
- R. Pastor-Satorras and J. Rubi. Dipolar interactions induced order in assemblies of magnetic particles. *Journal of magnetism and magnetic materials*, 221(1) :124–131, 2000.
- M. Peigney and D. Siegert. Piezoelectric energy harvesting from traffic-induced bridge vibrations. *Smart Materials and Structures*, 22(9) :095019, 2013.
- A. J. Petruska and J. J. Abbott. Optimal permanent-magnet geometries for dipole field approximation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 49(2) :811–819, 2013. ISSN 0018-9464. doi : [10.1109/TMAG.2012.2205014](http://dx.doi.org/10.1109/TMAG.2012.2205014).
- M. Piñeirua, O. Doaré, and S. Michelin. Influence and optimization of the electrodes position in a piezoelectric energy harvesting flag. *Journal of Sound and Vibration*, 346 :200–215, 2015.
- R. Ravaud. *Etude analytique des systèmes magnétomécaniques sans fer : application au haut-parleur guidé par joints de ferrofluide*. PhD thesis, Université Du Maine, 2009.
- I. Sari, T. Balkan, and H. Kulah. An electromagnetic micro power generator for wide-band environmental vibrations. *Sensors and Actuators A : Physical*, 145 :405–413, 2008.
- J. F. Schenck. The role of magnetic susceptibility in magnetic resonance imaging : Mri magnetic compatibility of the first and second kinds. *Medical physics*, 23(6) : 815–850, 1996.
- M.-S. Seong, K.-G. Sung, and S.-B. Choi. *Control Strategies for Vehicle Suspension System Featuring Magnetorheological (MR) Damper*. INTECH Open Access Publisher, 2011.
- J. Serra. Introduction to mathematical morphology. *Computer vision, graphics, and image processing*, 35(3) :283–305, 1986.
- L. Shu-hua. Origine de la boussole ii. aimant et boussole. *Isis*, 45(2) :175–196, 1954. doi : [10.1086/348315](http://dx.doi.org/10.1086/348315).
- J. Stambaugh, Z. Smith, E. Ott, and W. Losert. Segregation in a monolayer of magnetic spheres. *Physical Review E*, 70(3) :031304, 2004.
- W. A. Strauss. *Partial differential equations*, volume 92. Wiley New York, 1992.
- L. Tang, M. P. Païdoussis, and J. Jiang. Cantilevered flexible plates in axial flow : Energy transfer and the concept of flutter-mill. *Journal of Sound and Vibration*, 326 (1–2) :263 – 276, 2009. ISSN 0022-460X. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2009.04.041>.
- N. Vandewalle and S. Dorbolo. Magnetic ghosts and monopoles. *New Journal of Physics*, 16(1) :013050, 2014.

- D. Vella, E. du Pontavice, C. L. Hall, and A. Goriely. The magneto-elastica : from self-buckling to self-assembly. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 470(2162), 2013. ISSN 1364-5021. doi : 10.1098/rspa.2013.0609.
- D. Vokoun and M. Beleggia. Forces between arrays of permanent magnets of basic geometric shapes. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 350 :174 – 178, 2014. ISSN 0304-8853. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmmm.2013.09.023>.
- D. Vokoun, M. Beleggia, and L. Heller. Magnetic guns with cylindrical permanent magnets. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 324(9) :1715 – 1719, 2012. ISSN 0304-8853. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmmm.2011.12.026>.
- K. Wilde and Y. Fujino. Aerodynamic control of bridge deck flutter by active surfaces. *Journal of Engineering Mechanics*, 124(7) :718–727, 1998.
- R. J. Wilson, W. Hu, C. W. P. Fu, A. L. Koh, R. S. Gaster, C. M. Earhart, A. Fu, S. C. Heilshorn, R. Sinclair, and S. X. Wang. Formation and properties of magnetic chains for 100nm nanoparticles used in separations of molecules and cells. *Journal of magnetism and magnetic materials*, 321(10) :1452–1458, 2009.
- W. Yang, H. Pan, D. Zheng, and Q. Cai. An energy method for analyzing magnetoelastic buckling and bending of ferromagnetic plates in static magnetic fields. *Journal of applied mechanics*, 66(4) :913–917, 1999.
- M. Zborowski and J. J. Chalmers. *Magnetic cell separation*, volume 32. Elsevier, 2011.





**Titre :** Dynamique et stabilité d'une chaîne d'aimants. Application à la récupération d'énergie

**Résumé :** L'étude de la dynamique d'une chaîne d'aimants et l'application de ce type de système à la récupération d'énergie sont les objets de la thèse. Une chaîne d'aimants cylindriques aimantés selon le diamètre et soumise à la gravité et à un champ magnétique extérieur a d'abord été étudiée. Deux modèles linéaires décrivant la dynamique de la chaîne ont été développés : un modèle discret basé sur l'approche lagrangienne et un modèle continu en la considérant comme une poutre continue. Les prédictions des modèles ont été comparées aux expériences. La stabilité du système en fonction de la gravité et du champ magnétique a été ensuite caractérisée numériquement. Après cette première étude, nous avons proposé une utilisation de ce type de système à la récupération d'énergie. Un drapeau articulé constitué d'aimants rectangulaires très fins et aimantés selon l'épaisseur a été conçu. Ce drapeau a été placé dans un écoulement d'eau et une bobine a été positionnée dans l'environnement pour convertir le mouvement du drapeau en flottement en une force électromotrice (f.e.m). Cette dernière a été à la fois estimée numériquement et mesurée expérimentalement. Nous avons ensuite exploité le calcul numérique de la f.e.m pour chercher les géométries et les positions de la bobine maximisant le potentiel de récupération d'énergie.

**Mots clés :** magnétostatique, dynamique des structures, mécanique lagrangienne, induction électromagnétique, récupération d'énergie

**Title :** Dynamics and stability of a chain of magnets. Application to energy harvesting

**Abstract :** The main topics of this thesis are the dynamics of a chain of magnets and the energy harvesting application of this type of system. A chain of cylindrical magnets diametrically magnetized submitted to gravity and an external magnetic field was first studied. Two linear models were developed to describe its dynamics : a discrete model using lagrangian approach and a continuous model considering the chain as a continuous beam. The results of these models were compared to experiments. The stability of the system was then determined numerically. After this first study, we proposed an application to use this type of discrete system to harvest energy. An articulated flag composed with very thin rectangular magnets magnetized through the thickness was designed. This flag was placed in a water flow and a coil was fixed nearby to convert the fluttering flag's movement into an electric potential. The electromotive force (emf) induced was estimated numerically and measured experimentally. We exploited then the numerical calculation of emf to seek the geometry and position of the coil maximizing the energy harvesting potential.

**Keywords :** magnetostatics, dynamics of structures, Lagrangian mechanics, electromagnetic induction, energy harvesting