



Modélisation de la fissuration en milieu viscoélastique par approche Thick Level Set pour application au cas des enrobés bitumineux

Benjamin Shiferaw

► To cite this version:

Benjamin Shiferaw. Modélisation de la fissuration en milieu viscoélastique par approche Thick Level Set pour application au cas des enrobés bitumineux. Génie civil. École centrale de Nantes, 2019. Français. NNT : 2019ECDN0049 . tel-03027068

HAL Id: tel-03027068

<https://theses.hal.science/tel-03027068>

Submitted on 27 Nov 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE

L'ÉCOLE CENTRALE DE NANTES

COMUE UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

ECOLE DOCTORALE N° 602
Sciences pour l'Ingénieur
Spécialité : « Génie Civil »

Par

« Benjamin SHIFERAW »

« Modélisation de la fissuration en milieu viscoélastique par approche
Thick Level Set pour application au cas des enrobés bitumineux »

Thèse présentée et soutenue à « IFSTTAR Nantes », le « 25 Novembre 2019 »

Unité de recherche : Département des matériaux et des structures, Institut français des sciences et technologies des transports, de l'aménagement et des réseaux (IFSTTAR - MAST)

Rapporteurs avant soutenance :

Cyrille Chazallon
Véronique Lazarus

Professeur, INSA Strasbourg
Professeur, ENSTA Paris

Composition du Jury :

Présidente : Frédéric Ragueneau

Professeur, ENS Paris-Saclay

Rapporteurs : Cyrille Chazallon
Véronique Lazarus

Professeur, INSA Strasbourg
Professeur, ENSTA Paris

Directeur de thèse : Nicolas Moës

Professeur, École Centrale de NANTES

Co-encadrants de thèse : Olivier Chupin
Jean-Michel Piau

Chargé de recherche, IFSTTAR
IGPEF, IFSTTAR

Invité

Benoît Lé

Docteur Ingénieur, École Centrale de NANTES

Résumé

La fissuration des couches d'enrobé bitumineux (EB) est un mode de dégradation majeur des chaussées, dont la compréhension des divers mécanismes et facteurs responsables nécessite entre autres le développement de modélisations théoriques et d'outils numériques. Dans ce cadre cette thèse s'intéresse à la fissuration des matériaux à rhéologie thermo-viscoélastique. Un modèle d'endommagement local est ainsi développé en se basant sur le principe de contraintes effectives et la loi rhéologique de Poynting-Thomson. Le critère d'endommagement adopté repose sur le taux de restitution d'énergie élastique. Ce modèle est ensuite régularisé par l'approche Thick Level Set (TLS). L'étude semi-analytique d'une barre 1D en traction monotone directe permet d'investiguer l'aptitude de ce modèle à reproduire les principales observations expérimentales faites sur EB. Un algorithme de calcul par méthode aux éléments finis permettant alors d'étendre la résolution au cas de problèmes 2D est proposé et implémenté dans le code de calcul eXlibris de l'ECN. Nous montrons la capacité de cet outil à simuler l'initiation et la propagation de fissure avec endommagement d'une poutre viscoélastique chargée en flexion trois points. Les simulations rendent compte du caractère plus ou moins fragile/ductile des résultats d'essais observés sur EB en fonction de la température du matériau et de la vitesse de chargement. Ces travaux offrent ainsi une base théorique et numérique pour de futures applications en Mécanique des Chaussées.

Mots clés : Thermo-viscoélasticité, Endommagement, Fissuration, Thick Level Set, Méthode des éléments Finis, Enrobé bitumineux.

Abstract

Fracture of asphalt concrete (AC) layers is a major mode of deterioration in pavements, whose understanding of the various mechanisms requires the development of theoretical models and numerical tools. In this context, the research focuses on damage and fracture in thermo-viscoelastic materials. Hence, a local damage model is developed based on the principle of effective stresses and the Poynting-Thomson rheological law. The damage criterion considered relies on the elastic energy release rate. This model is then regularized according to the Thick Level Set (TLS) approach. The semi-analytical study of the 1D rod subjected to monotonous direct tension is performed to investigate the ability of the model to mimic the main experimental observations made for AC materials. An algorithm dedicated to the finite element solution of 2D problems is proposed and implemented subsequently in the eXlibris numerical code developed at ECN. The potential of this model to simulate damage and crack growth from initiation to collapse is demonstrated through the example of a viscoelastic beam under three-point bending test loading conditions. The simulations reflect the more or less brittle/ductile nature of the test results observed on AC materials depending on temperature and the loading rate. This work offers a theoretical and numerical basis for future applications in pavement mechanics.

Keywords : Thermo-viscoelasticity, Damage, fracture, Thick Level Set (TLS), Finite elements method, Bituminous mixtures.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Frédéric Ragueneau d'avoir présidé le jury de soutenance de thèse, Cyrille Chazallon et Véronique Lazarus pour tout l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en acceptant de rapporter mon mémoire, ainsi que Benoît Lé pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je souhaite aussi remercier mon directeur Nicolas MOES et mes encadrants Olivier CHUPIN et Jean-Michel PIAU qui ont suivi mon travail au cours de ces trois ans. Je les remercie de me conseiller, et de m'avoir fait confiance.

Mes remerciements vont à la région Pays de la Loire pour le co-financement de la thèse.

Je tiens à remercier chaleureusement Benoit Lé pour m'accueillir dans son bureau pendant la troisième année de la thèse, pour m'aider à comprendre le code de calcul eXlibris de l'Ecole Centrale de Nantes, et pour m'aider pendant la phase de programmation.

Je tiens à remercier également le laboratoire MS (Modélisation et Simulation) de l'école centrale de Nantes pour m'accueillir pendant la troisième année de la thèse.

Je tiens à remercier aussi :

- Tous les chercheurs de l'équipe LAMES et MIT pour la bonne ambiance.
- L'équipe des doctorants du MIT et LAMES, Son, Vinciane, Maïssa, Hanane, Marion, Octavio, Justine, Ramah, Domenico, Ibishola, Ilel, Marie Antoinette, Joanna, Rodrigo et Khoder.
- Tous les doctorants de l'association ADIN de l'IFSTTAR Nantes pour les rencontres tous les mercredis et les sorties qu'on a faites.
- Mes amis libanais de l'IFSTTAR Ismat, Antoinne, Mariane et Pierre.
- Mes collègues de bureau, Diana et Natasha pour la magnifique ambiance durant ces trois années de thèse et pour les beaux moments qu'on a partagés ensemble.

Enfin, un grand merci à tous mes proches et ma mère pour leur support inconditionnel.

Remerciements

Table des matières

Résumé	ii
Abstract	iii
Table des matières	vi
Nomenclature	viii
Introduction générale.....	1
Chapitre I : Synthèse bibliographique	5
I.1 Contenu et démarche.....	6
I.2 Généralités sur les chaussées et les matériaux bitumineux	7
I.3 Comportement viscoélastique linéaire des enrobés bitumineux	11
I.4 Modèles Rhéologiques	21
I.5 Essais de caractérisation du comportement à la fissuration des Matériaux Bitumineux	36
I.6 Mécanique de l'endommagement et de la rupture	45
I.7 Bilan.....	62
Chapitre II : Développement d'un modèle d'endommagement local 1D basé sur le modèle de Poynting-Thomson	63
II.1 Contenu et démarche.....	64
II.2 Viscoélasticité, endommagement, et principes de la thermodynamique	65
II.3 Modèle de Poynting-Thomson endommageable et inégalité de Clausius Duhem.....	68
II.4 Etude de deux critères d'endommagement	71
II.5 Loi d'évolution d'endommagement associée au critère $Y - Y_c \leq 0$	75
II.6 Loi d'évolution d'endommagement avec adoucissement $Y - H(D)Y_c \leq 0$	79
II.7 Autres formes possibles de la surface seuil d'endommagement.....	84
II.8 Bilan.....	85
Chapitre III : Étude structurelle 1D de la réponse d'une barre à comportement viscoélastique chargée en traction dans le cadre de l'approche TLS.....	87
III.1 Contenu et démarche.....	88
III.2 Formulation 1D non locale du critère d'endommagement du modèle PTE suivant l'approche TLS	89
III.3 Problème de barre à comportement PTE en traction	91
III.4 Extension du comportement matériel de la barre à un modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt généralisé endommageable.....	102
III.5 Application numérique : Modélisation de l'essai de traction directe.....	104
III.6 Bilan.....	112
Chapitre IV : Généralisation 3D du modèle PTE+TLS et implémentation dans le code de calcul eXlibris	113

IV.1	Contenu et démarche.....	114
IV.2	Généralisation de la loi de comportement endommageable PTE en 3D.....	115
IV.3	Équation d'équilibre d'un solide PTE en régime quasi-statique.....	117
IV.4	Équation d'évolution non locale de l'endommagement.....	119
IV.5	Équation d'évolution de la variable interne $\varepsilon(ve)$	120
IV.6	Discretisation spatiale	120
IV.7	Discretisation temporelle	123
IV.8	Algorithmes de résolution du problème discrétisé.....	126
IV.9	Validation numérique des algorithmes proposés à partir de l'essai de traction directe 1D 130	
IV.10	Bilan	137
Chapitre V : Application du module eXlibris TLS viscoélastique à la simulation d'essais de fissuration monotone sur matériaux bitumineux		139
V.1	Contenu et démarche.....	140
V.2	Essai de traction directe	141
V.3	Essai de flexion 3 points sur poutre rectangulaire	144
V.4	Bilan.....	158
Conclusion générale et perspectives.....		159
Annexe A : Décomposition spectrale et calcul des paramètres du modèle de Kelvin-Voigt généralisé 163		
Annexe B : Approche incrémentale pour calcul viscoélastique		165
Annexe C : Loi de comportement du modèle de Poynting-Thomson endommageable en 1D		168
Annexe D : Algorithme de calcul implicite en temps (1D).....		170
Annexe E : Stratégie de stockage des variables internes.....		172
Références		i

Nomenclature

EB	Enrobé bitumineux
MB	Matériaux bitumineux
PETT	Principe d'Equivalence Temps-Température
LC	Loi Constitutive
$\otimes$	Convolution du temps t
$E^*, Re(E^*), Im(E^*)$	Module complexe et les parties réelle et imaginaire
$E_\infty, \nu, k, \delta, h, i, \omega$	Coefficients du modèle Huet
t	Temps physique (s)
$\theta(T)$	Température au temps t (°C)
$R(t), F(t)$	Fonction de relaxation et de fluage d'un modèle viscoélastique
PTE	Modèle de Poynting-Thomson endommageable
PT	Modèle rhéologique de Poynting-Thomson
E_0, E_1, η, τ	Coefficients du modèle de Poynting-Thomson
$\varepsilon_0, \varepsilon_1$	La déformation dans le ressort isolé et la branche de Kelvin-Voigt respectivement
D	Variable d'endommagement scalaire
$H(D)$	Fonction d'adoucissement
Y_c	Taux critique de restitution d'énergie critique
f	surface de chargement
$LC(\mathbf{M}, \mathbf{q})$	Problème de complémentarité linéaire en $\mathbf{M}$ et $\mathbf{q}$
SCB	Poutre entaillée en forme semi-circulaire
SENB	Poutre rectangulaire entaillée
$a, \underline{\mathbf{a}}(\underline{\mathbf{a}}), \underline{\underline{\mathbf{A}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}), \underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}(\underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}})$	Scalaire, vecteur (tenseur d'ordre 1), Matrice (tenseur d'ordre 2), et tenseur d'ordre 4 respectivement
EF	Méthode des Eléments Finis
u, u^*	Champ de déplacement et celui virtuel
$\sigma, \boldsymbol{\sigma}$	Contrainte et tenseur de contrainte (Mpa)
$\varepsilon, \boldsymbol{\varepsilon}$	Déformation et tenseur de déformation d'ordre 2
$\mathbf{I}, \mathbb{I}$	Tenseur d'identité d'ordre 2 e 4 respectivement

Introduction générale

Le réseau routier français compte plus d'un million de kilomètres gérés par l'Etat, les communes, les départements et les concessionnaires routiers. Il est l'un des plus denses d'Europe. Ce réseau estimé à 2000 milliards d'euros, représente le premier patrimoine de l'Etat.

Les chaussées dégradées nécessitent des travaux de rénovation et d'entretien afin de prolonger leur durée de vie et garantir la sécurité des usagers. Le rapport présenté en 2018 à la Direction des infrastructures de transport montre qu'environ 7 % du réseau national nécessite des travaux de rénovation et 17 % des routes présentent un état de dégradation plus ou moins important. L'objectif principal de l'Etat et des gestionnaires routiers est d'optimiser les ressources financières à mettre en place pour maintenir l'état de ces structures. A titre d'exemple, pendant ces dix dernières années, en moyenne 666 millions d'euros par an ont été consacrés par l'Etat aux dépenses d'entretien et de gestion du réseau routier national non concédé.

Une étude d'entretien de chaussée (au sein d'une étude plus générale à l'échelle d'un réseau routier) repose sur trois étapes qui consistent à :

- Réaliser le diagnostic de l'état actuel de la chaussée
- Estimer sa durée de vie résiduelle hors travaux d'entretien
- Proposer et comparer entre elles des solutions de maintenance, à la fois en termes de gain de durabilité et de coût financier.

Le déploiement de ce type de méthodologie passe par l'amélioration des techniques actuelles d'auscultation des chaussées mais aussi par des outils de modélisation numérique permettant de rendre compte du comportement des structures de chaussées endommagées (aide au diagnostic) et d'évolution de leur état, en fonction des différents scénarios d'entretien.

Cette thèse porte sur ce second volet, mais se situe encore relativement en amont des applications envisagées dans le futur. Elle a pour principal objectif le développement d'éléments théoriques et codes de calculs permettant l'étude de l'initiation et de la propagation de fissures dans des structures composées de matériaux à rhéologie thermo-viscoélastique, caractéristique du comportement des enrobés bitumineux (EB). Son champ d'action se limite ici au cas de chargements monotones et n'aborde pas les aspects de fatigue sous sollicitations mécaniques ou climatiques répétées. Les outils développés dans cette thèse peuvent s'appliquer dans un premier temps à l'interprétation des essais de fissuration sur matériaux bitumineux pratiqués en laboratoire pour différentes conditions de géométrie, de température et de vitesse de chargement.

Il a été pris le parti pour ce faire de s'appuyer sur l'approche TLS (Thick Level Set), récemment développée à l'ECN (Möes et al., 2010). Cette approche permet d'unifier les deux grandes familles de modélisation numérique de fissuration des structures, à savoir la mécanique de l'endommagement et la mécanique de la rupture. Elle repose sur une modélisation non locale de

l'endommagement et une technique de transition entre états endommagé et fissuré. Dans cette approche, l'évolution du dommage est représentée par la propagation d'un ensemble de courbes de niveau (level set) dont dépend la variable d'endommagement. L'évolution du front d'endommagement, séparant les zones saines et dégradées dans la structure, est imposée par une quantité non locale intégrant en tout point du front des informations prises sur l'épaisseur de la bande endommagée. Au-delà d'une certaine longueur critique à partir du front, le matériau est supposé complètement dégradé et une transition naturelle vers la fissuration est assurée par utilisation de l'approche XFEM.

Cette thèse contribue ainsi à étendre l'approche TLS au domaine des milieux viscoélastiques non encore traité dans la littérature, ni dans les codes numériques.

Le mémoire est divisé en cinq chapitres :

Le **premier chapitre** dresse un état de l'art des connaissances sur les propriétés physiques des matériaux viscoélastiques de type bitumineux et les phénomènes liés à ces matériaux lors des essais de rupture sous chargement monotone. Un même matériau est notamment susceptible de subir une rupture du type ductile ou fragile, selon les vitesses ou températures d'essai. On présente dans ce même chapitre les modèles rhéologiques qui permettent de modéliser les comportements dans le domaine viscoélastique linéaire. L'approche TLS appliquée à l'élasticité et l'algorithmique de résolution associée sont détaillées en fin de ce chapitre.

Le **chapitre II** est consacré au développement d'une loi locale d'évolution d'endommagement dans un milieu viscoélastique. Le modèle rhéologique de Poynting-Thomson (PT) est utilisé comme modèle viscoélastique de référence. L'endommagement au sein de ce modèle est introduit à travers le concept classique de contrainte effective. Sur la base des résultats expérimentaux tirés de la bibliographie du chapitre I, un critère d'endommagement et une loi d'évolution associée sont proposés. Le modèle obtenu est noté PTE (Poynting-Thomson Endommageable). Il peut être facilement étendu à un spectre de Kelvin-Voigt généralisé à nombre d'éléments finis, plus à même de représenter le comportement des matériaux bitumineux.

Le **chapitre III** décrit le développement, dans le cadre de l'approche TLS, de calcul semi-analytique d'une barre 1D viscoélastique endommageable (PTE), chargée en traction. Le problème est d'abord formulé analytiquement en termes de vitesse afin de discuter certaines conditions d'existence de solution. Les équations en vitesse sont ensuite intégrées numériquement par rapport au temps et à la variable d'espace pour une étude complète des solutions. Une comparaison qualitative de la réponse du modèle par rapport à certains résultats d'essais de laboratoire sur bitume, trouvés dans la littérature, est finalement réalisée.

Le **chapitre IV** consiste à intégrer l'approche TLS viscoélastique dans la méthode aux éléments finis en déplacement permettant d'effectuer des calculs 1D et 2D. Après tensorialisation du modèle PTE, un algorithme de calcul explicite de prédiction-correction ainsi qu'un algorithme de résolution couplée de l'ensemble des équations sont présentés. Ces deux algorithmes ont été intégralement programmés en C++ dans un code EF 1D. L'algorithme de prédiction-correction est ensuite implémenté dans le code eXlibris de l'Ecole Centrale afin de mener des simulations bidimensionnelles. L'ensemble de ces algorithmes 1D et leurs implémentations est validé sur la base de la solution semi-analytique du chapitre III.

Le **dernier chapitre** de la thèse traite de simulations 2D menées avec le module viscoélastique endommageable d'eXlibris. On valide dans un premier temps l'implémentation de l'algorithme de prédiction-correction sur l'exemple de la barre en traction maillée en 2D. On modélise ensuite un essai de flexion trois points sur mortier bitumineux tiré de la bibliographie. Les résultats numériques

obtenus sont comparés aux résultats expérimentaux. Des simulations avec entaille initiale de la poutre complètent les résultats de ce chapitre.

Ce travail ouvre vers de nombreuses perspectives présentées en conclusion générale de ce mémoire.

Cette thèse a été lancée dans le cadre de l'opération de recherche DEDIR de l'IFSTTAR (Dimensionnement à l'Entretien Durable des Infrastructures Routières) et est aujourd'hui en lien avec le projet national DVDC (Durée de Vie des chaussées).



Chapitre I : Synthèse bibliographique

I.1 Contenu et démarche

Ce chapitre dresse un rappel général sur la structure d'une chaussée et sur les problèmes que subissent les couches bitumineuses d'une structure routière. Il servira comme un point de départ pour comprendre le comportement mécanique des enrobés bitumineux (EB) et pour introduire les essais de laboratoire qui permettent de caractériser le comportement fissuré de ces matériaux. La fissuration représente un type parmi différents modes de dégradation des chaussées et sur lequel nous ciblons notre recherche.

Tout d'abord, on présente les différentes couches qui constituent une chaussée, les modes de fonctionnement et les pathologies que subissent ces structures. On parle également des enrobés bitumineux et du comportement visqueux inhérent de bitume qui se trouve dans les mélanges bitumineux et qui confèrent au mélange une sensibilité à la température et la vitesse de chargement.

Le comportement viscoélastique réversible (sans endommagement) des matériaux bitumineux est présenté dans le domaine fréquentiel ou temporel. Dans ces deux domaines, on présentera également les modèles rhéologiques à spectre de relaxation continu et discret.

Concernant le comportement non réversible, on recense les essais de fissurations de la littérature en donnant leurs avantages et inconvénients des principaux essais de fissuration qu'on a pu trouver dans la littérature. L'essai de fissuration sous chargement monotone est retenu pour la suite de l'étude.

Les principes de la mécanique de l'endommagement et de la mécanique de la rupture sont présentés et on introduit l'approche TLS initialement développée pour les matériaux élastiques quasi-fragile. L'algorithme de calcul quasi-fragile et les techniques numériques développées pour cette approche sont détaillés. Cette approche servira de socle pour le développement de cette thèse.

I.2 Généralités sur les chaussées et les matériaux bitumineux

Une chaussée est une superposition des couches de différentes épaisseurs qui réagissent ensemble afin de supporter les chargements extérieurs appliqués. Parmi les sollicitations appliquées on peut distinguer celles dues au trafic (chargement vertical et horizontal) et celles dues aux conditions climatiques comme le gel, et la pluie.

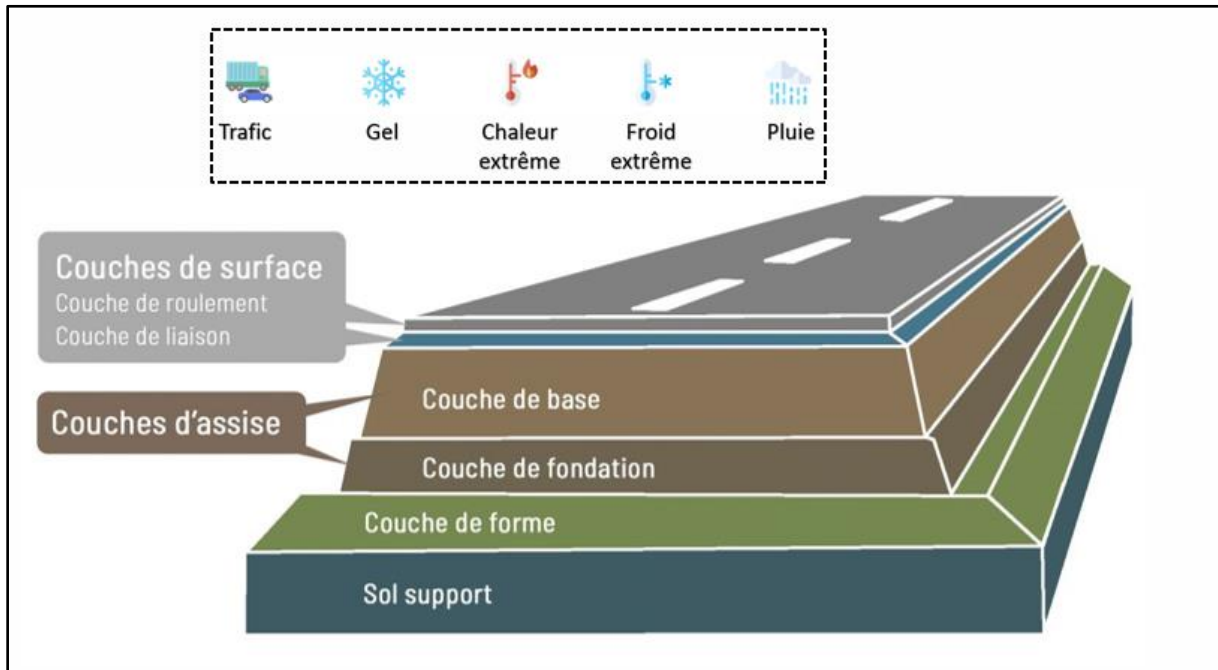


Figure I-1: Différentes couches d'une chaussée (<https://www.techniroute.fr/vos-routes>).

Cette structure est composée de trois parties principales (Figure I-1), les couches de surface, les couches d'assise et le sol support. Chaque partie est constituée d'une ou de plusieurs couches de matériaux de différents types.

Les couches de surface sont les couches responsables de la transmission des chargements extérieurs (du trafic et du climat) dans la structure de la chaussée. Les couches d'assise transfèrent ces chargements par la suite vers le sol support. Ces couches possèdent différentes fonctions, elles sont conçues de manière à résister aux chargements tout en assurant les qualités suivantes :

- Mécaniques : performance liée aux propriétés mécaniques;
- Budgétaires : durée de vie et le coût de construction et de réparation;
- Sécurité et confort des usagers.

I.2.1 Les différents types des structures routières et les modes de dégradations

Suivant le mode de fonctionnement de ces structures multicouches, la composition et la nature des matériaux utilisés dans les différentes couches, on peut regrouper les chaussées dans six catégories (Figure I-2) :

- Chaussée souple
- Chaussée bitumineuse épaisse

- Chaussée mixte
- Chaussée semi-rigide
- Chaussée à structure inverse
- Chaussée béton

Parmi ces types, les chaussées souples, les chaussées avec assise en couches bitumeuses et les chaussées mixtes constituent la majorité du réseau des routes sur le territoire français.

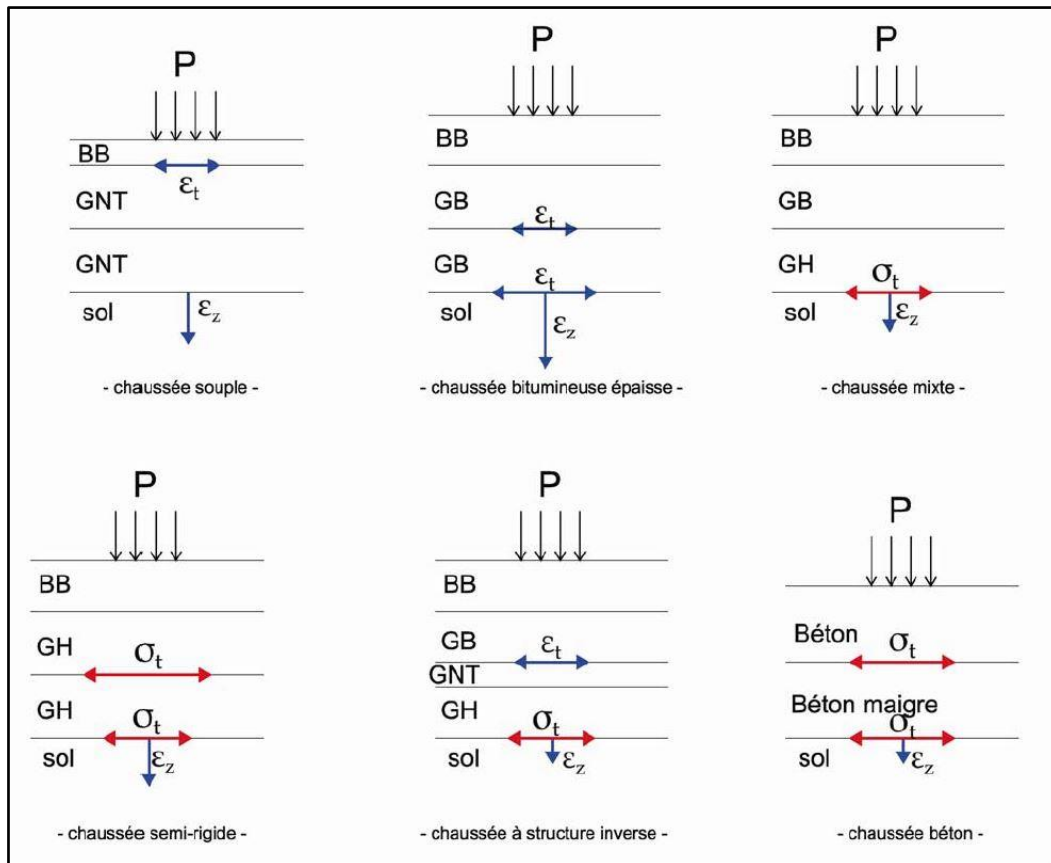


Figure I-2: Types et modes de fonctionnement de chaussées selon (Brabet 2012).

La Figure I-2 montre également la répartition des contraintes et des déformations dans les couches des différents types de chaussées.

Les matériaux figurant dans la Figure I-2 sont listés dans le tableau suivant :

BB	Béton Bitumineux
GNT	Graves Non Traitées
MTLH	Matériaux Traités au Liant Hydraulique
GB	Grave-Bitume
GH	Graves Hydrauliques

Tableau I-1: Les différents matériaux qui composent les couches d'une chaussée.

L'étude de la structure d'une chaussée tout entière et le dimensionnement de ses différentes couches ne font pas l'objectif de cette thèse. On s'intéresse principalement aux couches constituées par des matériaux bitumineux. Plus précisément, on s'intéresse à leurs comportements endommagés et

fissurés observés pendant les essais de laboratoires sous chargement monotone. Sur la Figure I-3 on présente quelques modes de fissuration qui se développent dans les structures routières sous l'influence du trafic (fatigue) et du climat (effet thermique).

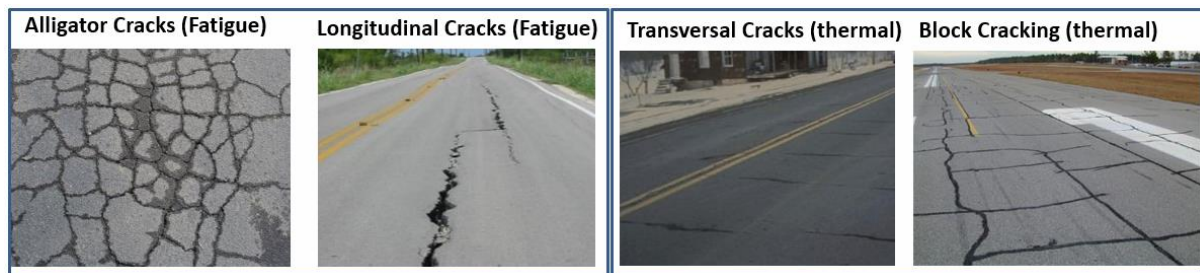


Figure I-3: Les différents modes de fissuration d'une chaussée (<https://theconstructor.org/transportation>).

En général, les fissures longitudinales et de faïençage (des fissures plus ou moins rapprochées en forme du maillage) sont dues au phénomène de fatigue. Ce phénomène est causé par l'application d'un chargement cyclique répété et dont le nombre cumulé des cycles dépasse une certaine valeur-limite admissible. Parmi les premiers travaux qui penchent sur l'étude de la dégradation des chaussées par fatigue figurent les travaux de August Wöhler (1860 et 1870). Il a introduit la notion du nombre de cycles et la notion de la résistance à la fatigue.

L'autre phénomène de fissuration est dû principalement à la variation de la température. Ce type de fissuration thermique joue un rôle très important pour les climats extrêmes. Sur la Figure I-3 on voit deux types de fissuration thermique, la fissuration transversale et la fissuration en blocs.

D'autres types de dégradations peuvent également apparaître dans une chaussée, comme par exemple le phénomène d'orniérage et la formation de nids de poule. Le premier est dû principalement à l'application d'un chargement mécanique sur une chaussée à température élevée, tandis que le deuxième phénomène – détecté pour la première fois en France pendant la période d'hiver de l'année 2001/2002 – est dû principalement à des cycles répétés de gel et de dégel (Van 2017).

En plus des sollicitations mécaniques et thermiques, on peut également citer les sollicitations hydriques et chimiques. Les sollicitations hydriques sont liées principalement à la pénétration et le mouvement de l'eau dans les couches d'une route (Pinzón and Such 2004) (Raab, Partl, and Abd El Halim 2012). Les sollicitations chimiques sont dues par exemple à l'utilisation du chlorure de sodium comme un fondant routier pendant les périodes hivernales dans certains pays (SETRA 2011). Ces deux types de sollicitations, et surtout la sollicitation hydrique, peuvent affecter l'état d'une chaussée et contribuer à sa dégradation.

1.2.2 Les enrobés bitumineux et leurs composants

Les couches bitumineuses d'une structure routière sont constituées d'un mélange de minéraux (granulats et fines) représentant environ 95% de la masse, et de liant hydrocarboné (le bitume), ce mélange s'appelle l'enrobé bitumineux.

Les granulats sont constitués par de gravillons et de pierres concassées. Ce dernier type de granulats est largement utilisé en France puisqu'il améliore la stabilité mécanique du mélange dû à la formation des arêtes vives qui permettent de bloquer le squelette (De La Roche 1996). En revanche, les fines sont les fractions minérales de diamètre inférieure à 80 μm .

Le liant hydrocarboné (le bitume) est obtenu principalement par distillation en raffinerie des pétroles bruts lourds. Ces bitumes sont regroupés en deux grandes familles selon leurs compositions chimiques, à savoir les asphaltènes (mélange hydrogène et carbone) et les maltènes (résines et huiles saturées). Le mélange bitume et fines s'appelle le mastic bitumineux. Lorsque par la suite on voudra parler indifféremment de mastic ou d'enrobés, on utilisera le terme « mélange bitumineux ».

Le comportement mécanique du bitume est très sensible à la température et à la durée d'application du chargement, on parle donc d'une susceptibilité thermique et cinétique. La Figure I-4 résume les différentes classes de comportement qui subissent le bitume sous l'effet de la température et le niveau de déformation (Olard et al. 2003).

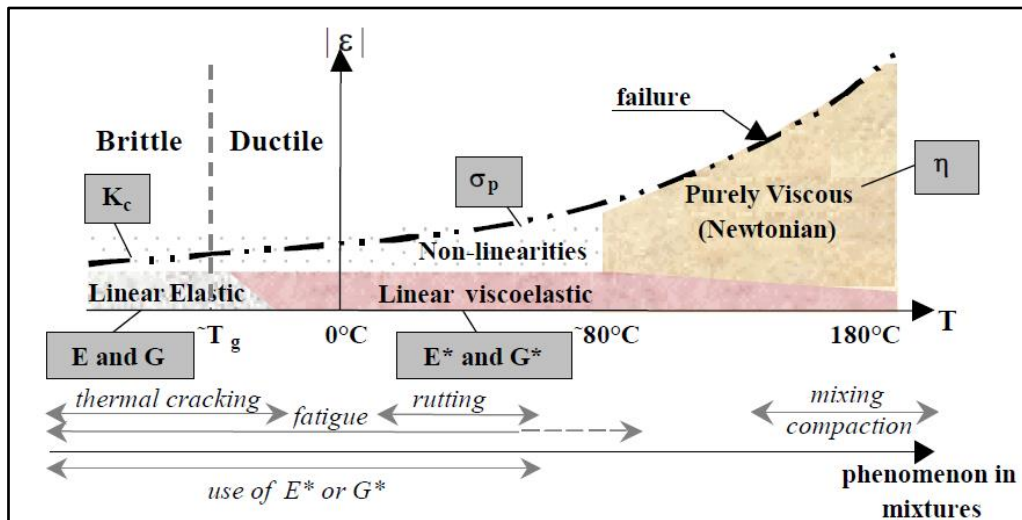


Figure I-4: Classes de comportement des bitumes en fonction de la température T et la déformation ϵ (Olard et al. 2003).

Ce mélange des granulats et de bitume confère un comportement viscoélastique et une dépendance à la température. La teneur en bitume est donc un paramètre très important lors de la fabrication du mélange bitumineux. Il affecte directement le comportement de celui-ci.

Le comportement des EB peut être classifié selon le nombre de cycles de chargement et l'amplitude de déformation $|\epsilon|$. L'effet de ces deux paramètres est classifié par Di Benedetto selon 4 grands classes de comportement (Di Benedetto 1990) (Olard et al. 2003):

- Le comportement viscoélastique linéaire est observé pour un nombre faible de cycles de chargement (< 300) et un niveau de déformation qualifié comme faible ($< 10^{-4}$) (voire la section I.3).
- Le comportement non linéaire caractérisé par une déformation de quelques pour cent. Il est observé pour un nombre de cycles très faible.
- Le phénomène de fatigue est observé pour une faible déformation mais pour un nombre de cycles de chargement de l'ordre de 10^4 .
- La quatrième classe de comportement est définie par l'apparition des déformations permanentes qui se cumulent jusqu'à l'apparition du phénomène de l'orniérage (Larsen and Ullidtz 1997)(Heck 2001)(Piau and Hornyh 2002)(Habiballah 2005).

Dans la section suivante, on abordera le comportement viscoélastique linéaire des enrobés bitumineux (1^{er} classe de comportement). Les principaux essais de laboratoire qui permettent de caractériser ce comportement sont également présentés.

I.3 Comportement viscoélastique linéaire des enrobés bitumineux

Le comportement des matériaux viscoélastiques est supposé linéaire si le principe de superposition de Boltzmann (Boltzmann 1878) est vérifié. Dans ce cas la fonction de fluage ou de relaxation (cf. I.3.3.1) est suffisante pour décrire le comportement de ce matériau (Salençon 1983). Ce principe de superposition stipule que la réponse finale d'un matériau soumis à des échelons de sollicitations élémentaires est égale à la somme des réponses à chaque échelon de chargement (Figure I-5).

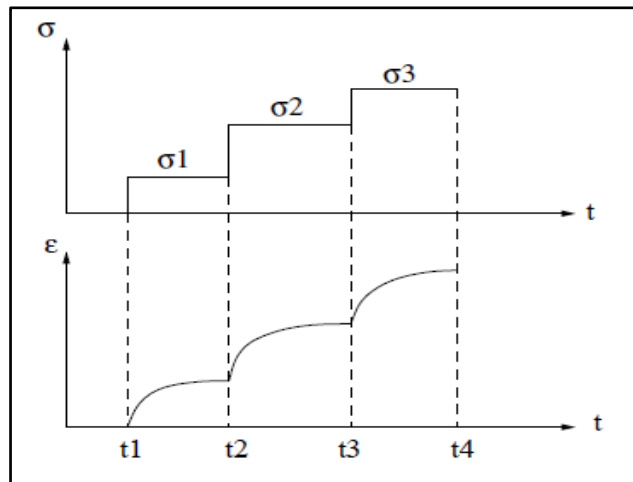


Figure I-5: Principe de superposition de Boltzmann.

Par définition un matériau viscoélastique est dit non vieillissant si l'effacement du chargement appliqué conduit à un effacement total de la contrainte dans le matériau ($\sigma_\infty \rightarrow 0$). On peut également qualifier un matériau comme non vieillissant si l'absence des sollicitations mécaniques ne conduit pas à une évolution de ses propriétés mécaniques dans le temps. Ce comportement implique l'invariance du comportement du matériau par translation sur l'axe de temps (Figure I-6).

Dans la section suivante, on présente les différents essais de laboratoires qui permettent de caractériser le comportement viscoélastique linéaire non vieillissant des matériaux bitumineux.

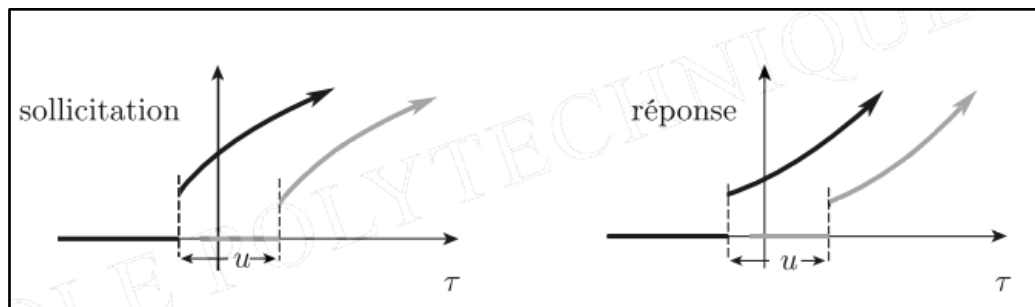


Figure I-6: Comportement des matériaux viscoélastiques non vieillissants (Salençon 2009).

I.3.1 Les essais de caractérisation du comportement réversible des enrobés bitumineux

Le comportement des matériaux viscoélastiques peut être caractérisé dans deux domaines, à savoir le domaine temporel et le domaine fréquentiel. Ce dernier est largement utilisé dans les laboratoires afin d'étudier le comportement des matériaux viscoélastiques comme le bitume et les EB.

Parmi les essais de caractérisation du comportement de bitume dans le domaine temporel on peut citer :

- Essai de fluage en flexion à basse température BBR (*Bending Beam Rheometer*)
- Essai de traction SHRP (*Strategic Highway Research Program*)

Ces deux essais sont conçus et développés aux États-Unis dans le cadre du programme de recherche SHRP afin de déterminer les propriétés rhéologiques des liants hydrocarbonés (Anderson and Dongre 1995).

Dans le domaine fréquentiel, les essais de caractérisation des propriétés rhéologiques sont basés sur l'application d'un chargement cyclique et sinusoïdal centré à zéro à des fréquences et températures variées. Dans ce domaine le niveau de déformation atteint dans le matériau doit être maintenu faible de façon que le comportement du matériau reste linéaire. En général les hypothèses d'isotropie et d'homogénéité sont adoptées dans la procédure de caractérisation des propriétés des EB.

Les essais de module complexe réalisés sur le bitume sont nombreux, parmi ces essais :

- L'essai de module complexe rhéomètre plan-plan DSR (*Dynamic Shear Rheometer*)
- L'essai de traction-compression sur cylindre de bitume

Le premier essai est réalisé pour des températures faibles ($< TBA^{(1)} - 30^{\circ}C$), tandis que le deuxième est réalisé dans le domaine des températures intermédiaires. Sur la Figure I-7, les deux types d'essais de module complexe réalisés sur le bitume sont présentés.

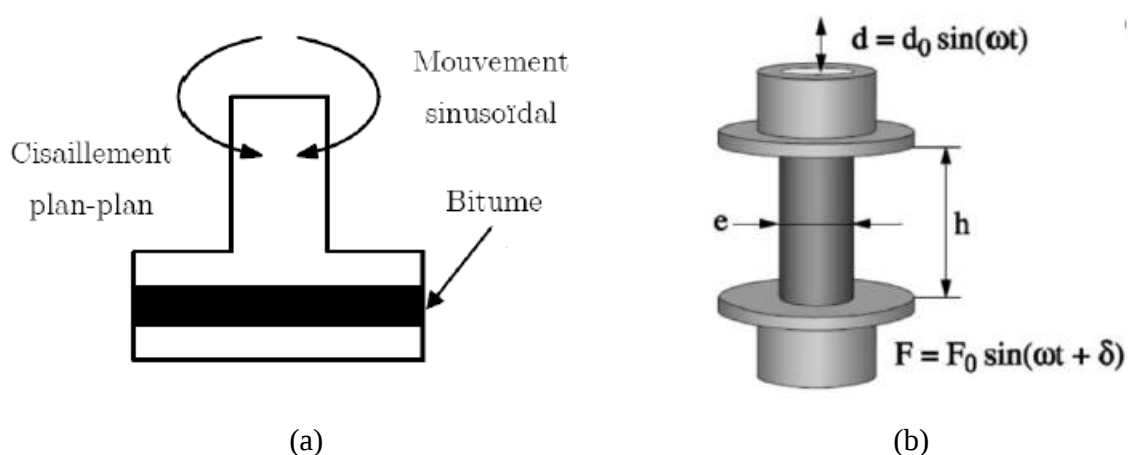


Figure I-7: Essais de module complexe réalisés sur le bitume : (a) l'essai au rhéomètre plan-plan (DSR) et (b) l'essai de traction compression sur cylindre de bitume.

⁽¹⁾ TBA : la température de ramollissement bille et anneau.

Pour les EB, plusieurs types d'essais normalisés de module complexe (c'est-à-dire dans le domaine fréquentiel) sont montrés sur le Tableau I-2 suivant :

Géométrie	Méthode d'essai	Norme	Homogénéité des sollicitations
Éprouvette cylindrique	Traction indirecte (Brésilien)	ASTM D 4123-82	Non homogène
	Traction-compression directe	EN 12697-26	Homogène
	Traction directe		
	Compression directe	ASTM D 3497-79	
	Compression directe	AASHTO TP 62-07	
Éprouvette trapézoïdale	Flexion 2 points	EN 12697-26	Non homogène
Éprouvette rectangulaire	Flexion 3 points		
	Flexion 4 points		

Tableau I-2: Essais normalisés du module complexe sur EB, issus de (Doucet and Auger 2010).

Une autre classification des essais de laboratoire est basée sur l'état de déformation et de contrainte dans les éprouvettes à tester. On distingue alors les essais homogènes et les essais non homogènes (Tableau I-2). Pour ces derniers, des hypothèses de calcul supplémentaires sont nécessaires afin d'obtenir le comportement du matériau puisque l'état de contrainte et de déformation dans l'éprouvette varie d'un point à un autre.

Parmi les essais de module complexe réalisés sur les EB, on montre sur la Figure I-8 l'essai de flexion deux points sur poutre trapézoïdale et l'essai de traction-compression sur éprouvette cylindrique.

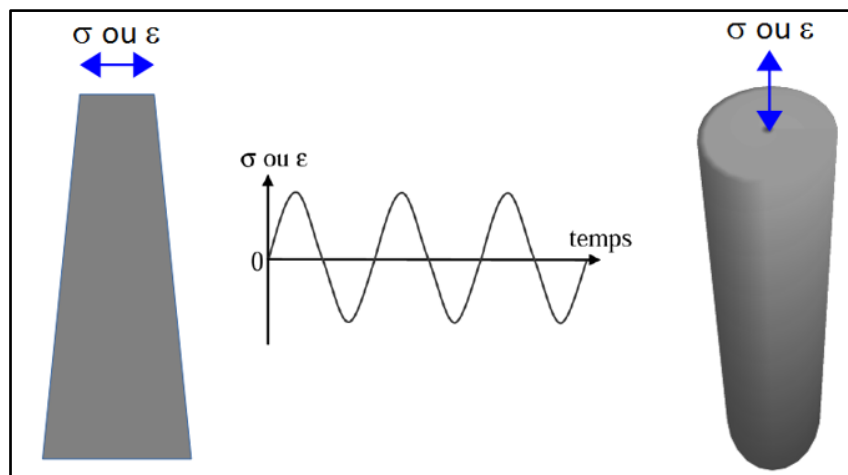


Figure I-8: Essai non homogène de flexion deux points sur poutre trapézoïdale (gauche), et essai homogène de traction-compression sur éprouvette cylindrique (droite).

Dans les deux sections suivantes (I.3.2 et I.3.3), on va présenter les méthodes d'exploitation des résultats d'essais dans le domaine fréquentiel et temporel.

I.3.2 Caractérisation des enrobés bitumineux dans le domaine fréquentiel

Dans ce domaine, on applique sur l'éprouvette une contrainte sinusoïdale de la forme :

$$\sigma(t) = \text{Re}(\sigma_0 e^{i(\omega t)}) = \text{Re}(\sigma^*) = \sigma_0 \cos(\omega t) \quad (\text{I-1})$$

où σ_0 est l'amplitude du cycle de contrainte appliquée et ω la pulsation ($\omega = 2\pi f$) en rad/sec.

La réponse viscoélastique en déformation à cette sollicitation est exprimée sous la forme suivante :

$$\varepsilon(t) = \text{Re}(\varepsilon_0 e^{i(\omega t + \delta)}) = \text{Re}(\varepsilon^*) = \varepsilon_0 \cos(\omega t + \delta) \quad (\text{I-2})$$

où δ représente l'angle de phase caractérisant le déphasage entre les signaux d'entrée et de sortie (Figure I-9). Ce paramètre est lié aux propriétés des matériaux viscoélastiques, il traduit la dissipation d'une partie de l'énergie par déformation.

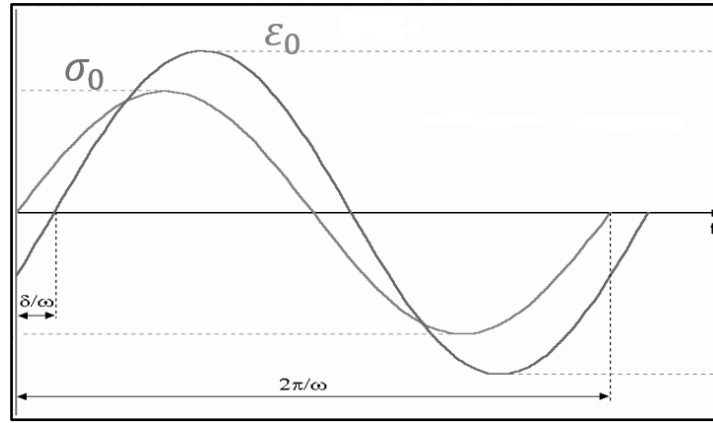


Figure I-9: Déphasage entre la contrainte imposée et la réponse en déformation pour un matériau viscoélastique.

Le module complexe E^* est défini par :

$$E^* = \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} = \frac{\sigma_0 e^{i(\omega t + \delta)}}{\varepsilon_0 e^{i\omega t}} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} e^{i\delta} = |E^*| e^{i\delta} = E' + iE'' \quad (\text{I-3})$$

où $|E^*|$ est la norme du module complexe (module de rigidité), E' est la partie réelle (module élastique dynamique de stockage) et E'' est la partie imaginaire (module visqueux ou module de dissipation). Ainsi, on peut définir le module complexe soit par le module de stockage et de dissipation, soit par sa norme $|E^*|$ et l'angle de phase δ . Dans ce domaine on peut également définir un module de cisaillement dynamique $G^* = \frac{E^*}{2(1+\nu^*)}$, un module de compressibilité dynamique $K^* = \frac{E^*}{3(1-2\nu^*)}$, et un coefficient de Poisson dynamique $\nu^* = \nu' + i\nu''$. La partie imaginaire de ν^* est parfois très petite. Elle est donc négligée pour certains types d'essais (Charif 1991)(Doubbaneh 1995).

I.3.2.1 Caractérisation expérimentale des enrobés bitumineux

Les résultats d'essais de module complexe sur les matériaux bitumineux peuvent être représentés sur différentes courbes.

La courbe dans le plan de Cole-Cole – également appelé le plan complexe – est construite en traçant la partie imaginaire E'' en fonction du module élastique dynamique E' du module complexe (Figure I-11-b). En revanche, la courbe dans l'espace de Black est construite en traçant l'angle de phase δ en fonction de la norme du module dynamique (le module de rigidité $|E^*|$) en échelle semi-

logarithmique (Figure I-11-a). Sur cette courbe on peut voir que pour les hautes températures, le module de rigidité est très faible.

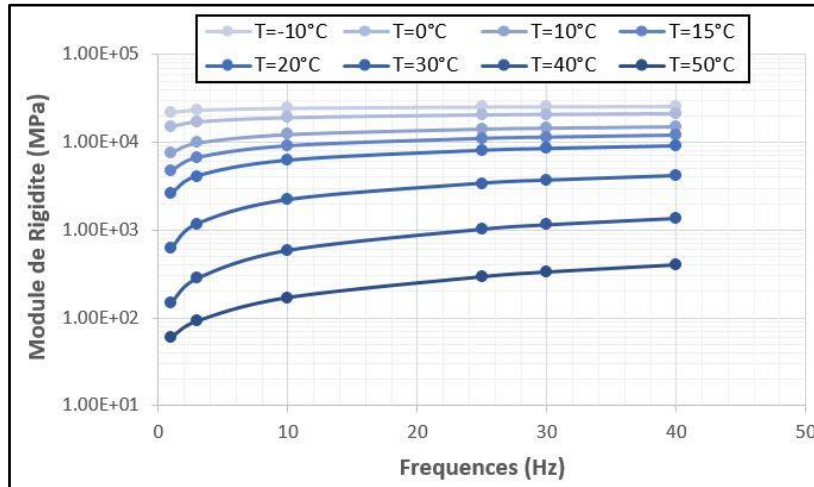


Figure I-10: Isothermes du module de rigidité.

Les deux courbes présentées sur la Figure I-11 sont très importantes dans la procédure de calage des paramètres du modèle viscoélastique (I.4.2). On a construit ces courbes sur la base des résultats d'essai de module complexe (flexion deux points sur poutre trapézoïdale) réalisé à l'IFSTTAR sur des EB.

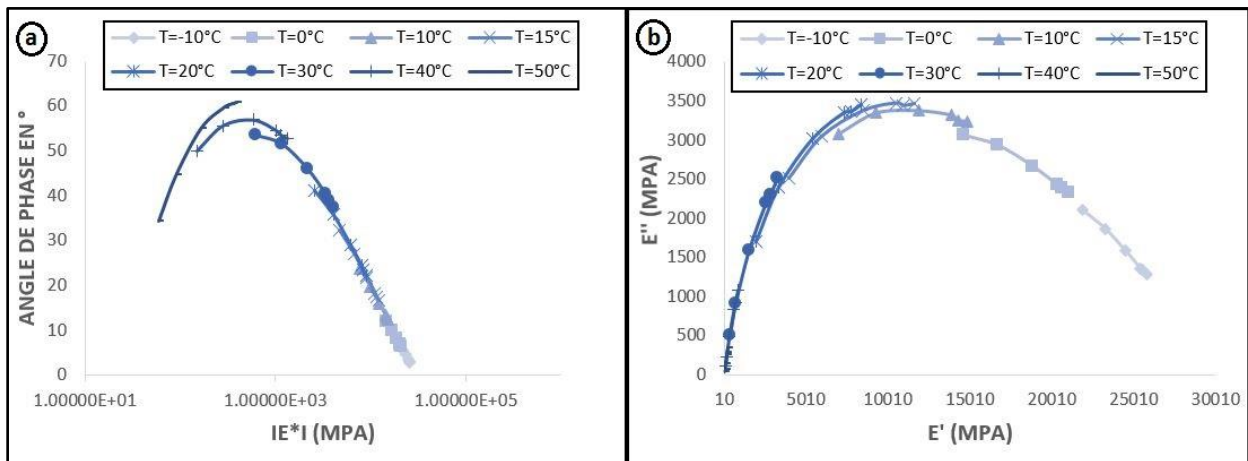


Figure I-11: Module complexe dans l'espace de Black (a) et dans le plan de Cole-Cole (b).

I.3.2.2 Principe d'équivalence temps – température PETT (fréquence – température) et la construction des courbes maîtresses

Les chercheurs ont observé que les courbes du module complexe dans le plan de Cole-Cole et dans l'espace de Black se suivent mutuellement. On appelle les matériaux qui possèdent cette propriété – comme les enrobés bitumineux – des matériaux thermorhéologiquement simples.

En 1941, Leaderman a supposé l'existence d'un paramètre de calage a_T qui permet de superposer les modules complexes (Leaderman 1943)(Schwarzl and Staverman 1952). Cette hypothèse est basée sur les observations expérimentales réalisées à différentes température et vitesse de chargement (pulsation ω). Il a constaté expérimentalement que le module complexe obtenu à températures élevées est identique à celui obtenu à basses températures mais pour des temps de

chargement plus grands (Dupuy 2009). La superposition entre les modules complexes est alors obtenue en multipliant la fréquence (ou ω) par le coefficient de translation a_T (*shift factor*). Ce dernier ne dépend que de la température de référence T_{ref} et de la température des isothermes (du module complexe ou de l'angle de phase) à translater :

$$E^*(\omega, T) = E^*(\omega a_T(T), T_{ref}) \quad ; \quad a_T(T_{ref}) = 1 \quad (I-4)$$

$$f(T) = a_T(T)f(T_{ref}) \quad (I-5)$$

Ainsi, il suffit d'identifier une seule variable afin de décrire complètement la variation du module complexe avec la fréquence (ou le temps) et la température.

Pour une température de référence de 0°C et les isothermes présentées sur la Figure I-10, on a tracé sur la Figure I-12 la courbe des isothermes en fonction des fréquences translatées. La courbe ainsi obtenue s'appelle la courbe maîtresse. C'est la courbe « de référence » du module complexe pour une température de référence donnée.

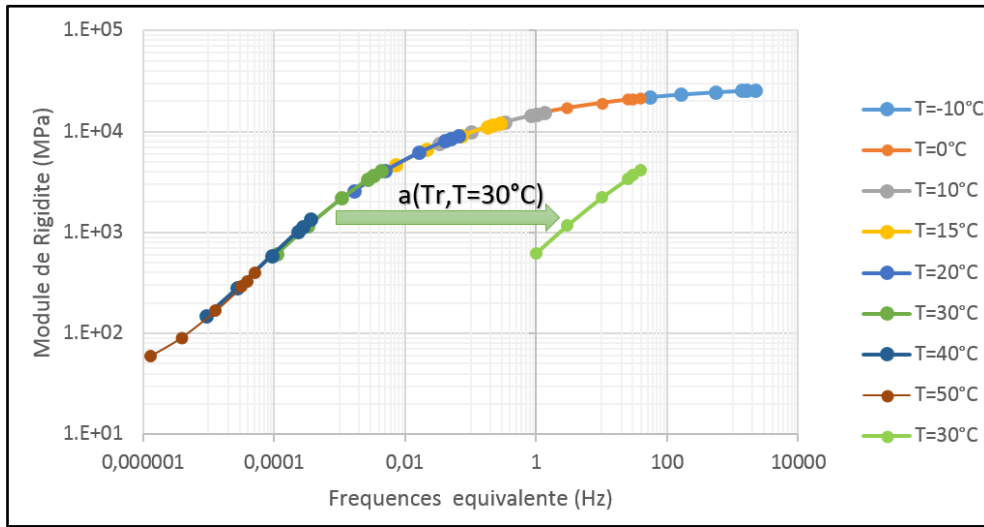


Figure I-12: Courbe maîtresse de la norme du module complexe pour une température de référence de 0°C .

L'importance du principe PETT est qu'il permet d'élargir la marge de vitesses des sollicitations imposées (fréquences) pour une température donnée vers des nouvelles vitesses (fréquences translatées) qui ne sont pas atteignables expérimentalement. Dans la section suivante nous présentons les principaux travaux développés pour le calcul de ce paramètre de translation a_T .

I.3.2.3 Construction de la courbe maîtresse et calcul du coefficient de translation

La construction de la courbe maîtresse est basée sur l'approximation de Booji et Thoone (Booij and Thoone 1982)(Chailleux et al. 2006) où le coefficient de translation entre la température de référence T_{ref} et la température T_i est donné par :

$$\log(a_T(T_i, T_{ref})) \approx \sum_{j=i}^{j=ref} \frac{\log|E^*(T_j, \omega)| - \log|E^*(T_{j+1}, \omega)|}{\delta_{moy}^{(T_j, T_{j+1})}(\omega)} \frac{\pi}{2} \quad (I-6)$$

où $\delta_{moy}^{(T_j, T_{j+1})}(\omega)$ est la valeur moyenne de l'angle de phase calculée entre les deux températures T_j et T_{j+1} pour une pulsation ω .

Cette formule est basée sur les hypothèses suivantes (Chailleux, De La Roche, and Piau 2011) :

- l'unicité de la courbe du module complexe dans le plan Cole-Cole et dans l'espace de Black
- la dépendance du a_T de la seule fréquence

Le calcul du coefficient de translation a_T pour une température non mesurée T_i peut-être approché par la formule de Williams, Landel et Ferry, également dite la loi WLF (Williams, Landel, and Ferry 1955)(Ferry 1980) :

$$\log(a_T(T_i, T_{ref})) = \frac{-C_1^{ref} (T_i - T_{ref})}{C_2^{ref} + T_i - T_{ref}} \quad (I-7)$$

où les paramètres C_1^{ref} et C_2^{ref} sont les constantes de la loi WLF pour une température de référence donnée.

Sur la Figure I-13 nous illustrons la loi WLF utilisée pendant la construction de la courbe maîtresse montrée sur la Figure I-12. Afin de calculer les paramètres de la loi, on a utilisé la méthode de moindres carrés et le solveur non linéaire du logiciel Excel (Tableau I-3).

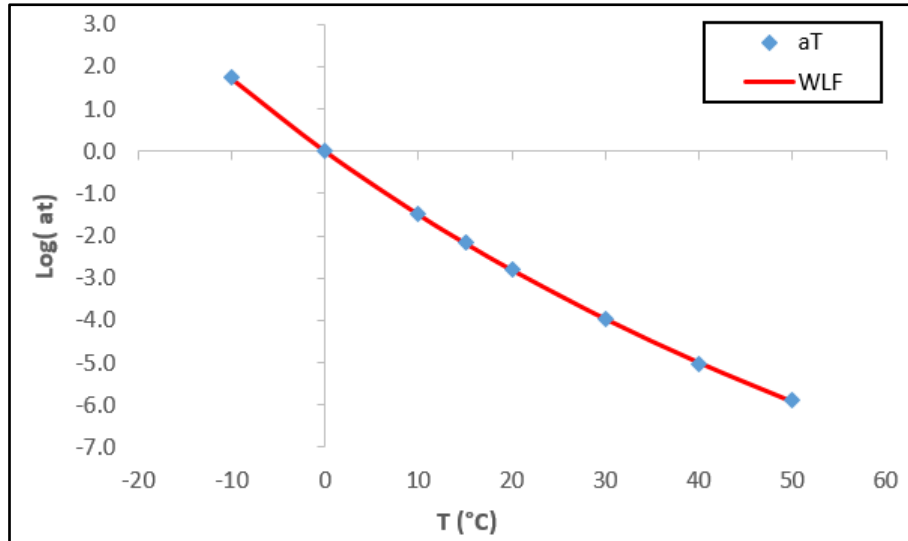


Figure I-13: Identification des paramètres C_1^{ref} C_2^{ref} de la loi WLF pour $T_{ref} = 0^\circ\text{C}$.

C_1^{ref}	C_2^{ref}
22.8	142.6

Tableau I-3: Paramètres de la loi WLF obtenus pour une température de référence $T_{ref} = 0^\circ\text{C}$.

Cette loi nous permet de calculer les paramètres de translation a_T d'une façon continue (voir la Figure I-13). On peut également calculer les deux paramètres ($C_1^{ref'}$ et $C_2^{ref'}$) de cette loi pour une autre température de référence $T_{ref'}$, tels que :

$$C_2^{ref'} = C_2^{ref} + T_{ref'} - T_{ref} \quad (I-8)$$

$$C_1^{ref'} = (C_1^{ref} C_2^{ref}) / C_2^{ref'} \quad (I-9)$$

Ces deux formules sont basées sur la propriété d'invariance de la loi WLF à la température de référence choisie. Pour une température de référence $T_{ref'} = 10^\circ\text{C}$, les coefficients $C_2^{ref'}$ et $C_1^{ref'}$ calculés valent 21.29 et 152.57, respectivement. On peut donc construire les courbes maîtresses pour cette nouvelle température de référence.

Une autre loi qui permet de calculer le coefficient de translation est la loi d'Arrhénius :

$$\log(a_T(T_i, T_{ref})) = \frac{\delta H}{R} \left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_{ref}} \right) \quad (I-10)$$

où $R = 8.314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ est la constante des gaz parfaits et δH est l'énergie d'activation apparente du matériau.

1.3.3 Caractérisation des enrobés bitumineux dans le domaine temporel

Les matériaux dont leurs comportements dépendent de l'histoire de chargement peuvent être décrits en se basant sur deux approches. La première approche est basée sur le concept des variables internes (Coleman and Gurtin 1967). La deuxième approche est basée sur un produit de convolution – des intégrales héréditaires – où seules les histoires des variables observables sont prises en compte (Lubliner 1990). Dans les sections suivantes on présente succinctement ces deux familles de description du comportement viscoélastique.

1.3.3.1 Description par fonction de fluage ou de relaxation

Dans le domaine temporel, le comportement des matériaux viscoélastiques linéaires peut être totalement décrit par la fonction de fluage ou de relaxation.

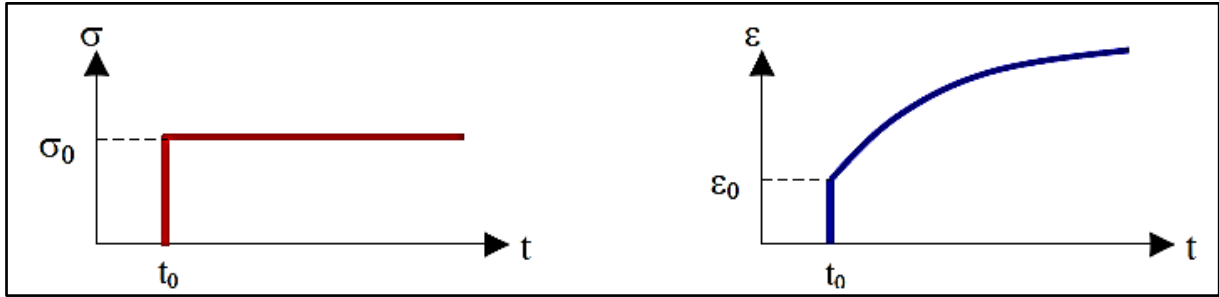


Figure I-14: Essai de fluage (à contrainte et température constante) et la réponse en déformation.

La réponse d'un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant à un échelon de contrainte est donnée par :

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 F(t_0, t) \quad (I-11)$$

où F est la fonction de fluage. En revanche, la fonction qui relie la contrainte avec un échelon de déformation imposée s'appelle la fonction de relaxation R . Les essais qui permettent d'obtenir ces deux fonctions sont appelés les essais de fluage et de relaxation.

Pour une succession d'essais de relaxation et de fluage, la réponse est obtenue en s'appuyant sur le principe de superposition de Boltzmann telle que :

$$\varepsilon(t) = \int_{t_0}^t F(\tau, t) d\sigma(\tau) = \sigma(t_0)F(t_0, t) + \int_{t_0}^t F(\tau, t) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (I-12)$$

Ici l'hypothèse de non-vieillessement implique l'invariance des propriétés mécaniques du matériau en absence de sollicitations. Donc, le comportement du matériau dépend uniquement de la durée d'application du chargement. Cette hypothèse permet d'écrire :

$$\varepsilon(t) = \sigma(t_0)F(t - t_0) + \int_{t_0}^t F(t - \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau = F \otimes \dot{\sigma} \quad (I-13)$$

où l'opérateur $\otimes$ représente le produit de convolution entre deux fonctions.

De la même façon, la réponse d'un matériau viscoélastique linéaire soumis à une déformation quelconque $\varepsilon(t)$ est obtenue par le produit de convolution :

$$\sigma(t) = \varepsilon(t_0)R(t - t_0) + \int_{t_0}^t R(t - \tau)\dot{\varepsilon}(\tau)d\tau = R \otimes \dot{\varepsilon} \quad (\text{I-14})$$

Dans les expressions de l'équation (I-13) et (I-14), le principe d'équivalence temps-température est introduit en réduisant la variable temporelle par le coefficient de translation a_T :

$$\begin{aligned} F(t, T) &= F_{T_{ref}}\left(\frac{t}{a_T}\right) \\ R(t, T) &= R_{T_{ref}}\left(\frac{t}{a_T}\right) \end{aligned} \quad (\text{I-15})$$

L'extension des lois de convolution 1D présentées ci-avant au cas tridimensionnel est possible (pour un matériau isotrope) en écrivant les relations entre les composantes déviatoriques et volumiques des tenseurs de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ et de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$. Dans le cas particulier où le coefficient de Poisson ν est supposé constant, ces deux relations se combinent dans une seule équation :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \int_0^t \mathcal{F}(t - \tau, T) \frac{d}{d\tau} ((1 + \nu)\boldsymbol{\sigma}(\tau) - \nu \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}) d\tau \quad (\text{I-16})$$

En général, le coefficient de Poisson obtenu à partir d'essais de module complexe dépend de la fréquence et de la température d'essai, le coefficient ν augmente avec l'augmentation de la température et la diminution de la fréquence. Sa valeur varie entre 0.2 et 0.5 (Chailleux et al. 2011)(Nguyen et al. 2009)(Benedetto, Delaporte, and Sauzéat 2007).

1.3.3.2 Description par des variables internes

Les variables internes sont des variables qu'on ne peut pas contrôler directement au contraire des variables externes comme la température et le tenseur de déformations (Mandel 1980).

Ces variables cachées constituent la base de la méthode de l'état local (*internal state variable theory*) introduite par Coleman and Gurtin (1967). Cette théorie postule que pour pouvoir décrire complètement l'état thermodynamique d'un matériau, on a besoin des variables externes ainsi que des variables internes. Ces dernières sont, dans la plupart de cas, liées à des phénomènes dissipatifs. Prenons par exemple le cas des matériaux qui subissent les phénomènes de plasticité et de viscoplasticité. Dans ce cas la déformation totale est écrite comme une partition en déformation plastique et déformation élastique (Lemaitre and Chaboche 2004). L'une de ces deux déformations peut être prise comme une variable interne telle que :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (\text{I-17})$$

Dans le cas des matériaux viscoélastiques décrits par des modèles rhéologiques (I.4), les variables internes sont également obtenues par partition de la déformation totale (Sidoroff 1976). Prenons par exemple le modèle rhéologique de Poynting-Thomson (Figure I-19), on peut décrire le comportement de ce modèle à partir de la variable observable $\boldsymbol{\varepsilon}$ et la variable interne $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0$.

Un résumé de l'ensemble des approches qui sont basées sur la méthode de l'état local est illustré sur la Figure I-15.

L'importance de la formulation du problème viscoélastique en terme des variables internes réside dans la capacité de l'approche de prendre en compte des informations liées à la microstructure. Par

ailleurs, elle permet d'introduire des modèles physiques directement dans la formulation des équations du problème. Cette approche possède également des avantages liés à la procédure d'implémentation numérique dans les codes de calcul (Severino P.C. Marques and Creus 2012).

Dans cette thèse on a utilisé cette théorie afin de décrire le comportement viscoélastique des matériaux bitumineux.

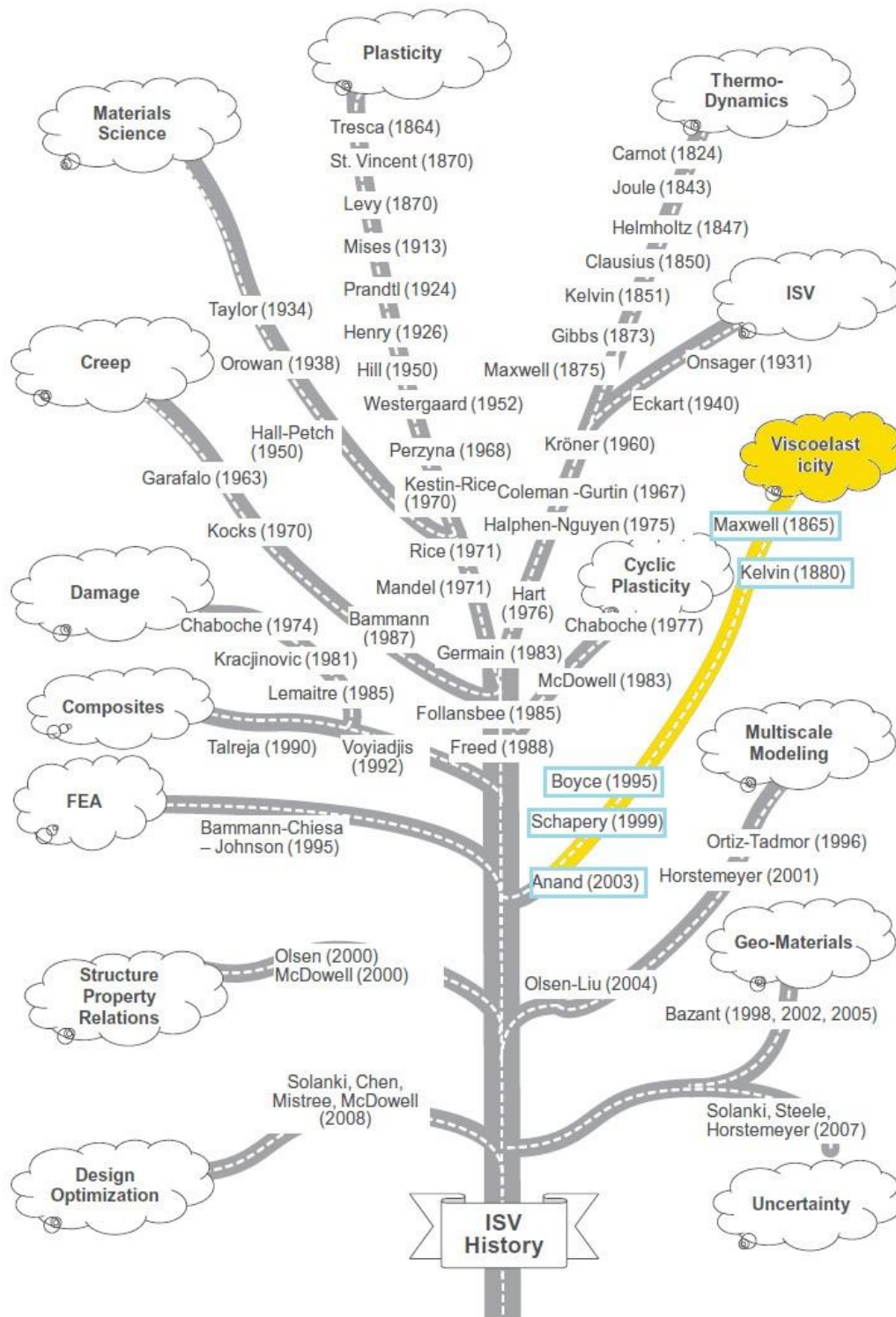


Figure I-15: Histoire de la théorie de l'état local et ses applications dans les différents domaines (Horstemeyer and Bammann 2010).

I.4 Modèles Rhéologiques

Les modèles rhéologiques sont des modèles qui permettent de rendre compte du comportement des matériaux viscoélastiques non vieillissants. Ces modèles sont constitués par un assemblage des modèles simples, comme le modèle de Hooke et le modèle de Newton. Le premier est caractérisé par une déformation réversible et un rétablissement instantané après libération des sollicitations appliquées, il est représenté par un ressort (Figure I-16-a). Le deuxième est caractérisé par une déformation irréversible et une proportionnalité entre le chargement appliqué et le taux de déformations, il est représenté par un amortisseur linéaire (Figure I-16-b).



Figure I-16: Éléments de base pour les modèles rhéologiques, a- Ressort, b- Amortisseur linéaire.

Le ressort représente un comportement élastique tandis que l'amortisseur linéaire représente un comportement visqueux. Les lois de comportement qui représentent la réponse de ces deux éléments sont données par :

$$\sigma = E\varepsilon \quad (\text{I-18})$$

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon} \quad (\text{I-19})$$

avec σ la contrainte appliquée sur l'élément et ε la déformation subie par ce dernier.

Le comportement réel des matériaux viscoélastiques peut être décrit par un assemblage en parallèle et en série de ces deux éléments de base (également appelés "unités"). La réponse de ces modèles assemblés devient plus représentative du matériau viscoélastique lorsque le nombre des unités constituant ce modèle est suffisant.

Dans la section suivante nous présentons les principaux modèles rhéologiques qui permettent de simuler la réponse des matériaux bitumineux. Ces modèles sont classés en deux grandes familles, les modèles à spectre de relaxation discret et les modèles à spectre de relaxation continu.

I.4.1 Modèles à spectre de relaxation discret

Les modèles rhéologiques à spectre de relaxation discret sont des modèles qui possèdent un nombre discret d'éléments ayant chacun une valeur de module E_i correspondant à un temps de relaxation τ_i . Cette section est consacrée à une présentation des principaux modèles rhéologiques qui permettent de modéliser la réponse des matériaux bitumineux dans le domaine viscoélastique linéaire.

NB: Deux outils numériques largement utilisés dans ce domaine sont la transformation de Laplace et celle de Laplace-Carson. La transformée d'une fonction $f(t)$ – définie dans le domaine temporel – dans l'espace de Laplace Carson (LC) est donnée par :

$$LC\{f(t)\} = \tilde{f}(s) = s\bar{f}(s) = s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (\text{I-20})$$

où $\bar{f}(s) = L\{f(t)\}$ est la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$.

I.4.1.1 Modèle de Maxwell généralisé

Le modèle de maxwell généralisé (Figure I-17) est formé d'un assemblage en parallèle d'un nombre fini des modèles de maxwell (un ressort en série avec un amortisseur linéaire). L'importance de ce modèle est qu'il permet de simuler le comportement des matériaux bitumineux en utilisant un nombre (N) suffisant des branches de Maxwell. Selon DI BENEDETTO , le nombre minimal des branches de Maxwell pour être représentatif d'un comportement réel des EB est égal à 8 (EUROBITUME 1996) (Lee 1996) (Di Benedetto et al. 2001a).

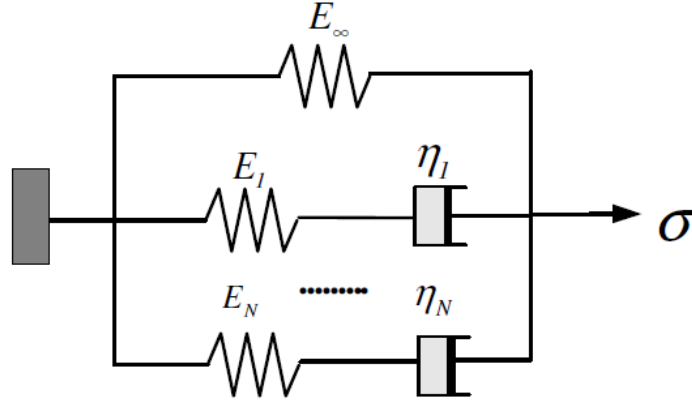


Figure I-17: Modèle rhéologique de Maxwell généralisé.

La fonction de relaxation de ce modèle est :

$$R(t) = E_{\infty} + \sum_{i=1}^N E_i e^{-t/\tau_i} \quad (\text{I-21})$$

où $\tau_i = \eta_i/E_i$ est le temps de relaxation de la branche i .

Dans l'espace de Laplace-Carson (LC), la fonction de relaxation de ce modèle s'écrit :

$$\tilde{R}(s) = E_{\infty} + \sum_{i=1}^N E_i \frac{s}{s + 1/\tau_i} \quad (\text{I-22})$$

Le module complexe est obtenu après remplacement de la variable (s) par ($i\omega$), où i est le nombre complexe et $\omega = 2\pi f$ la pulsation harmonique. Ainsi le module complexe du modèle prend la forme :

$$E^*(i\omega) = E_{\infty} + \sum_{i=1}^N \frac{i\omega E_i}{\frac{1}{\tau_i} + i\omega} = E_{\infty} + \sum_{i=1}^N E_i \frac{i\omega \tau_i}{1 + i\omega \tau_i} \quad (\text{I-23})$$

Autrement dit, le module complexe est égal à la transformation de LC au point $i\omega$ de la fonction de relaxation du modèle choisi. Ce passage entre le domaine temporel et fréquentiel est possible dans le cadre de la théorie de la viscoélasticité linéaire (Mandel 1955) (Linder et al. 1986) (Piau and Heck 1996). La loi de comportement de ce modèle est donnée par le produit de convolution $\sigma = R \otimes \varepsilon$ défini par l'équation (I-14) .

I.4.1.2 Modèle de Kelvin-Voigt généralisé

Le modèle de Kelvin-Voigt généralisé est constitué d'un ressort monté en série avec un nombre fini (N) des modèles de Kelvin-Voigt (Figure I-18).

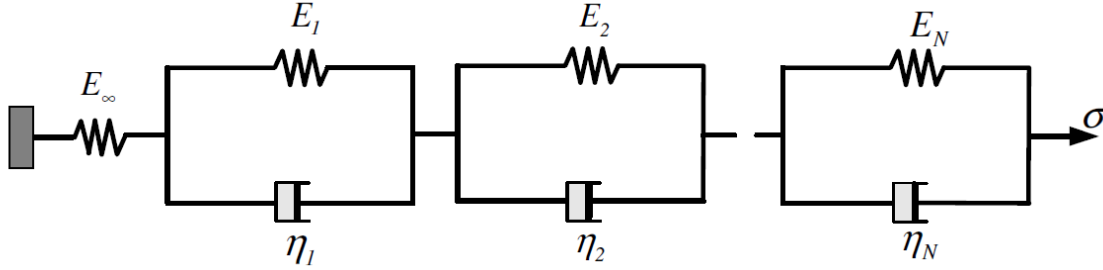


Figure I-18: Modèle de Kelvin-Voigt généralisé.

La fonction de fluage de ce modèle est :

$$F(t) = \frac{1}{E_\infty} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{E_i} (1 - e^{-t/\tau_i}) \quad (\text{I-24})$$

et le module complexe s'écrit :

$$E^*(i\omega) = \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{E_\infty} + \frac{1}{E_i + i\omega\eta_i} \right) \quad (\text{I-25})$$

Ce modèle permet de décrire correctement le comportement des matériaux viscoélastiques comme le bitume et les EB pour un nombre suffisant de branche de Kelvin-Voigt.

La loi de comportement de ce modèle est donnée par le produit de convolution $F \otimes \dot{\sigma}$ (voir l'équation (I-13) en 1D). Une autre forme de la loi de comportement est donnée par l'équation suivante :

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{1}{E_\infty} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{E_i + \eta_i \frac{\partial}{\partial t}} \right) \sigma(t) \quad (\text{I-26})$$

Dans cette dernière équation l'opérateur différentiel $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ est traité comme une entité algébrique (Severino P. C. Marques and Creus 2012).

I.4.1.3 Modèles de type Solide Linéaire Standard (SLS)

Les deux modèles de base du type SLS à trois éléments sont les modèles SLS-3V et SLS-3M. Le premier est obtenu en montant un ressort en série avec une unité de Kelvin-Voigt (Figure I-20). Dans ce cas les fonctions de fluage de l'unité de Kelvin-Voigt et du ressort isolé s'additionnent (loi en série), alors que pour le modèle SLS-3M, ce dernier est obtenu en plaçant un ressort en parallèle avec un modèle de Maxwell (Figure I-23). Dans ce cas les fonctions de relaxation s'ajoutent (loi en parallèle). Ces modèles permettent de représenter le comportement des solides avec un nombre minimum d'éléments (ressort, amortisseur).

I.4.1.3.1 Modèle de Poynting-Thomson (PT)

Le modèle de PT – également dit Solide Linéaire Standard de Voigt à trois éléments (SLS3V)– est obtenu en montant un ressort de rigidité E_0 en série avec un modèle de Kelvin-Voigt (Figure I-19).

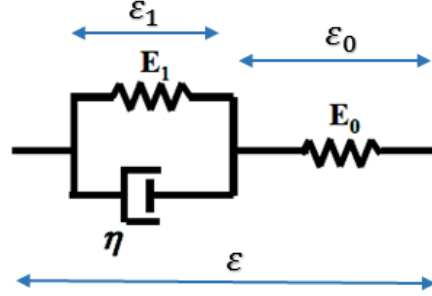


Figure I-19: Modèle rhéologique de Poynting-Thomson (SLS3V).

La fonction de fluage du modèle dans le domaine temporel est donnée par :

$$F(t) = \frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) + \frac{1}{E_0} \quad (\text{I-27})$$

et la fonction de relaxation s'écrit :

$$R(t) = \frac{E_0}{E_0 + E_1} \left(E_1 + E_0 e^{-t \left(\frac{E_0 + E_1}{E_1 \tau} \right)} \right) \quad (\text{I-28})$$

Le comportement « aux limites » du modèle de PT est déduit de cette fonction de relaxation tel que :

- Pour les très grandes vitesses de chargement : on cherche la réponse instantanée de ce modèle ($t \rightarrow 0$), alors on obtient : $R(t \rightarrow 0) = E_0$. Le modèle dans ce cas est équivalent à un ressort de rigidité E_0 .
- Pour les très faibles vitesses de chargement : on cherche dans ce cas la réponse du modèle à l'infini ($t \rightarrow \infty$). On obtient dans ce cas un module qui est équivalent à deux ressorts montés en série tel que : $R(t \rightarrow \infty) = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1}$.

En appliquant une **contrainte constante** $\sigma = \sigma_0 H(t)$, on obtient :

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left(\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right) \quad (\text{I-29})$$

La réponse du modèle de PT à ce type de chargement est illustrée sur la figure suivante :

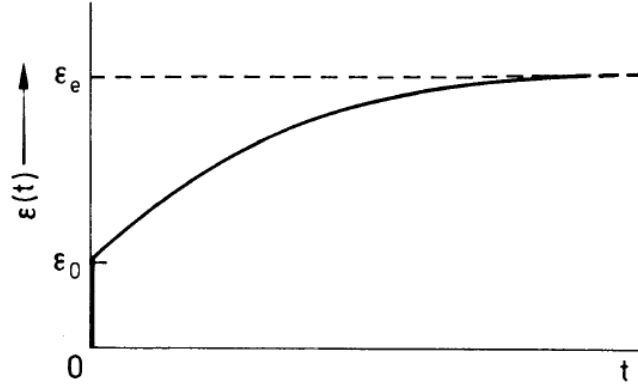


Figure I-20: Réponse du modèle SLS à une contrainte constante.

avec $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E_0}$, $\varepsilon_e = \frac{\sigma_0}{E_R}$. E_R est le module relaxé, il est égal à $\frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1}$.

En appliquant une **déformation constante** $\varepsilon = \varepsilon_0 H(t)$, l'évolution de la contrainte est donnée par :

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \left(\frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1} + \left(\frac{E_0}{E_1} \right) \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1} e^{-\frac{t}{\tau'}} \right) = \sigma_e + \sigma e^{-\frac{t}{\tau'}} \quad (\text{I-30})$$

tel que $\tau' = \tau \frac{E_1}{E_0 + E_1}$. Cette évolution est présentée sur la Figure I-21 :

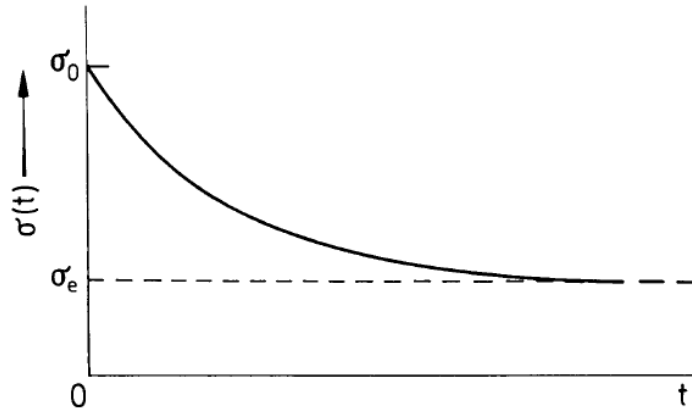


Figure I-21: Réponse du modèle SLS à une déformation constante.

avec $\sigma(t = 0) = \sigma_0 = \sigma_e + \sigma = E_0 \varepsilon_0$ et $\sigma(t = \infty) = \sigma_e = \varepsilon_0 \left(\frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1} \right)$.

La loi de comportement du modèle est :

$$(E_0 + E_1)\sigma + \eta \dot{\sigma} = E_0(E_1 \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}) \quad (\text{I-31})$$

et le module complexe s'écrit :

$$E^*(i\omega) = E \frac{1 + \tau_1 \tau \omega^2}{1 + (\tau \omega)^2} + iE \frac{(\tau_1 - \tau) \omega}{1 + (\tau \omega)^2} \quad (\text{I-32})$$

où τ et $\tau_1 = \eta/E_1$ sont le temps à l'équilibre et le temps caractéristique de relaxation, respectivement et i est l'unité imaginaire. Le ressort de rigidité E_0 représente le module élastique instantané du modèle.

Notons que les modèles de Kelvin-Voigt et de Maxwell sont des cas particuliers du modèle de PT. Le premier est obtenu quand E_0 tend vers zéro, et le deuxième est obtenu quand le module E_1 tend vers zéro.

La Figure I-22 montre la réponse du modèle de Kelvin-Voigt, de Maxwell et de Zener (ou de PT) à un essai de fluage et de relaxation :

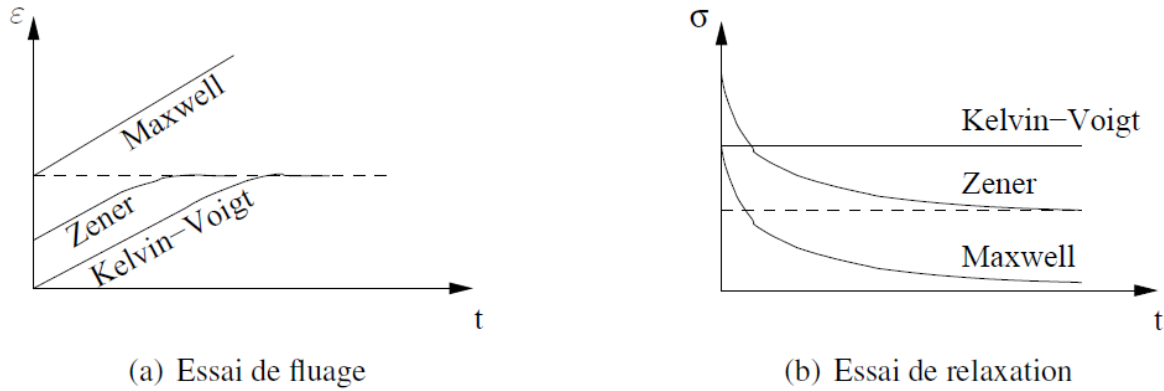


Figure I-22: Fluage et relaxation du modèle de Maxwell, Kelvin-Voigt et Zener (ou Poynting-Thomson).

On voit que le modèle de PT est capable de prendre en compte le phénomène de relaxation des contraintes. En revanche un seul temps de relaxation n'est pas suffisant pour être représentatif du comportement réel des matériaux bitumineux.

I.4.1.3.2 Modèle de Zener (SLS-3M)

Le modèle de Maxwell standard à trois éléments, nommé Zener (SLS3M), est obtenu en montant un ressort de rigidité E_0 en parallèle avec un modèle de Maxwell (Figure I-23).

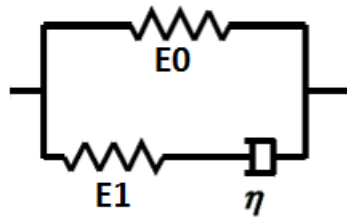


Figure I-23: Modèle de Zener (SLS3M).

La loi de comportement du modèle est :

$$\sigma + \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma} = E_0 \varepsilon + \frac{\eta}{E_1} (E_0 + E_1) \dot{\varepsilon} \quad (\text{I-33})$$

La réponse de ce modèle à une contrainte constante est identique à la réponse présentée sur la Figure I-20. Sous une déformation constante, la réponse du modèle est identique à celle de la Figure I-21. Les deux modèles SLS de Maxwell et de Voigt sont des modèles conjugués. Dans la section suivante on présente la procédure de construction d'un modèle conjugué et la méthode de calcul des paramètres de celui-ci.

I.4.1.4 Construction d'un modèle conjugué

Un modèle conjugué est un modèle qui permet, après un choix convenable des paramètres de ce modèle, de trouver la même réponse que celle du modèle de base. La construction d'un tel modèle conjugué est réalisée en appliquant les règles d'ALFREY suivantes (Tschoegl 1989) :

- Une combinaison en série de deux éléments de types différents est remplacée par une combinaison en parallèle de ces deux éléments dans le modèle conjugué et inversement.
- Le nombre de chaque type d'élément (ressort et amortisseur) reste le même dans le modèle conjugué.
- La présence (resp. absence) d'un élément isolé dans le modèle de base nécessite l'absence (resp. présence) d'un élément conjugué (Ressort $\leftrightarrow$ Amortisseur) et isolé dans le modèle conjugué.

Calcul des paramètres du modèle conjugué

Prenons par exemple le modèle de Poynting-Thomson (SLS-3V). Le modèle conjugué à ce dernier est le modèle de Zener (SLS-3M) présenté sur la Figure I-23.

Dans la suite, les exposants M et V représentant les modules E_1 et E_0 sont adoptés pour distinguer les modules de ces deux modèles.

La réponse de ces deux modèles pour un échelon de contrainte (ou de déformation) est identique. Ainsi, on peut calculer les paramètres du modèle conjugué en comparant l'expression de la déformation trouvée dans le plan de Laplace pour les deux modèles. La même stratégie est valable dans le domaine temporel :

$$\bar{\varepsilon}_V(s) = \frac{\sigma_0}{s} \left(\frac{1}{E_0^V} + \frac{1}{E_1^V + \eta^V s} \right) \quad (I-34)$$

$$\bar{\varepsilon}_M(s) = \frac{\sigma_0}{s} \left(\frac{1 + \tau s}{E_0^M + (E_0^M + E_1^M)\tau s} \right) = \sigma_0 \left(\frac{1}{(E_0^M + E_1^M)s} + \frac{E_1^M}{(E_0^M + E_1^M)E_0^M} \frac{1}{s(1 + \tau' s)} \right) \quad (I-35)$$

L'égalité entre les termes de ces deux équations conduit aux relations suivantes :

$$E_1^M = \frac{(E_0^V)^2}{E_1^V \left(1 + \frac{E_0^V}{E_1^V} \right)}, \quad E_0^M = E_0^V - E_1^M; \quad \eta^M = \eta^V \frac{(E_1^M)^2}{(E_0^M + E_1^M)^2} \quad (I-36)$$

Application numérique

Considérons un modèle de PT dont les paramètres sont donnés dans le Tableau I-4.

$(E_0^V (KN/mm^2))$	22.58
$E_1^V (KN/mm^2)$	11
$\eta (KN.j/mm^2)$	500

Tableau I-4: Paramètres du modèle de PT (SLS-3V).

En appliquant les équations (I-36), on obtient les paramètres du modèle rhéologique conjugué de Zener (SLS3M). Ces paramètres sont listés dans le Tableau I-5.

$E_0(KN/mm^2)$	7.4
$E_1(KN/mm^2)$	15.2
$\eta (KN.j/mm^2)$	226

Tableau I-5: Paramètres du modèle conjugué de Zener (SLS3M).

Pour quatre vitesses de déformations imposées ($\dot{\epsilon} = a$), les réponses du modèle de PT et de Zener conjugué sont présentées sur la figure suivante :

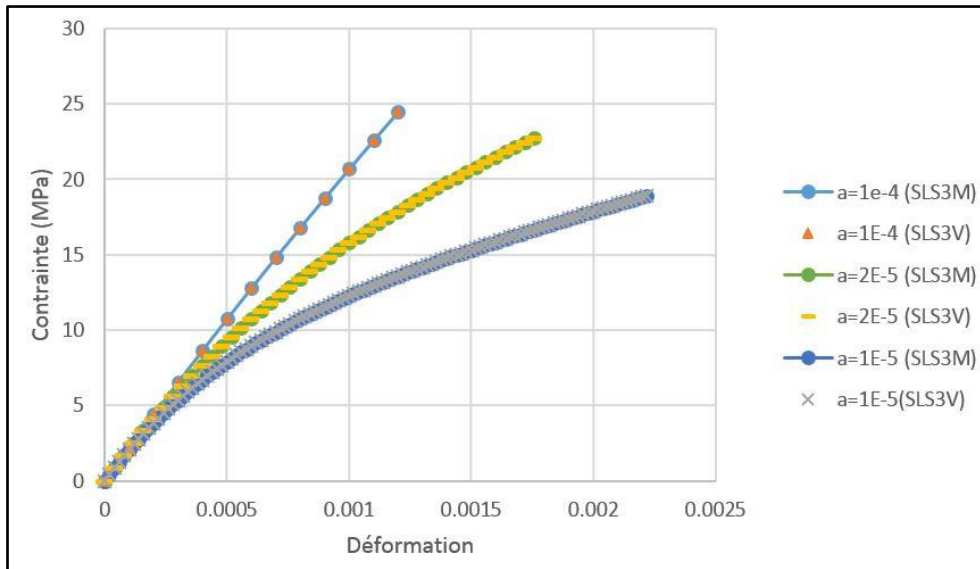


Figure I-24: Réponse des modèles standards conjugués (PT et Zener) sous différentes vitesses de déformations imposées.

I.4.2 Modèles à spectre de relaxation continu et amortisseur parabolique

Les modèles à spectre de relaxation continu comportent un nouvel élément qui s'appelle l'amortisseur parabolique (Figure I-25).

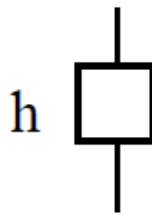


Figure I-25: Amortisseur parabolique.

La fonction de fluage associée à cet élément ayant la forme :

$$F(t) = a \left(\frac{t}{\tau} \right)^h \quad (I-37)$$

où a est une constante adimensionnelle, τ est le temps caractéristique qui dépend seulement de la température et l'exposant h est un scalaire compris entre 0 et 1.

Le module complexe associé à cet élément s'écrit :

$$E^*(i\omega t) = \frac{(i\omega t)^h}{a\Gamma(h+1)} \quad (\text{I-38})$$

avec $\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt$ la fonction d'Euler de deuxième espèce (avec n strictement positif).

C'est un élément rhéologique (Figure I-26) qui peut être considéré comme un élément intermédiaire entre un ressort (pour $h = 0$ avec un module $E = \eta/\tau$) et un amortisseur linéaire (pour $h = 1$, dans ce cas le module est égal à $E = \eta \omega$), et dont la représentation par un modèle de Kelvin-Voigt généralisé ou de Maxwell généralisé nécessite un nombre infini d'éléments (Olard 2003). Il est donc équivalent à un spectre continu avec une infinité de rigidités spectrales associées à une infinité de temps de relaxation.

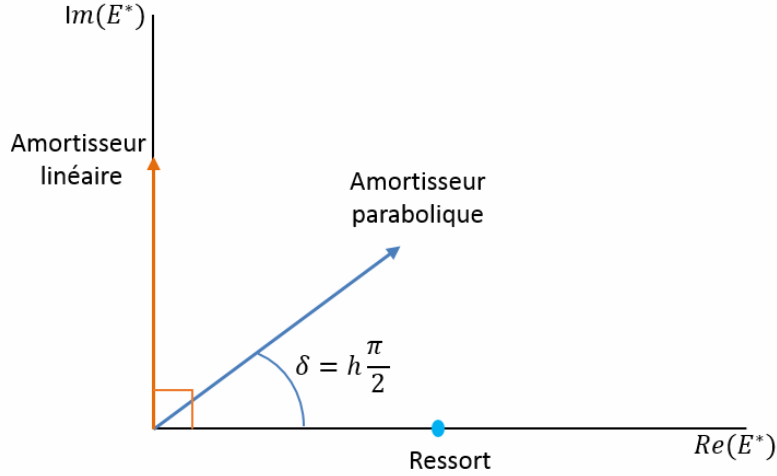


Figure I-26: Réponse d'un ressort, d'un amortisseur linéaire et d'un amortisseur parabolique sous chargement sinusoïdal dans le plan Cole-Cole.

I.4.2.1 Modèle de Huet

Le modèle de Huet (1963) est constitué d'un ressort de rigidité E_∞ monté en série avec deux amortisseurs paraboliques ayant une fonction de fluage $F_1(t) = at^h$ et $F_2(t) = bt^k$ respectivement (Figure I-27).

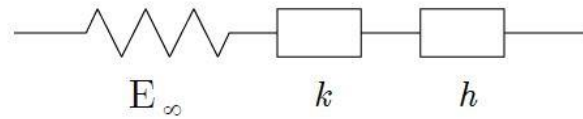


Figure I-27: Modèle rhéologique de Huet.

Dans le domaine temporel, ce modèle ne possède pas d'expression pour la fonction de relaxation. En revanche la fonction de fluage est donnée par l'équation (I-39) :

$$F(t) = \frac{1}{E_\infty} \left(1 + \frac{\left(\frac{t}{\tau}\right)^h}{\Gamma(h+1)} + \delta \frac{\left(\frac{t}{\tau}\right)^k}{\Gamma(k+1)} \right) \quad (\text{I-39})$$

Le module complexe du modèle de Huet s'écrit :

$$E^*(i\omega) = \frac{E_\infty}{1 + (i\omega\tau)^{-h} + \delta(i\omega\tau)^{-k}} \quad (\text{I-40})$$

avec ω : la pulsation ($\omega = 2\pi \cdot \text{fréquence}$)

E_∞ : le module instantané (obtenu lorsque $\omega\tau \rightarrow \infty$),

h, k : Les exposants des éléments paraboliques tels que $0 < k < h < 1$,

δ : constante sans dimension

La caractéristique importante de ce modèle est qu'il facilite la prise en compte du changement de température moyennant le principe d'équivalence temps-température. Afin d'étudier le comportement du matériau viscoélastique à une température donnée, il suffit de modifier τ (Pronk 2003) tel que :

$$\tau(T) = \tau_0 a_T(T) \quad (\text{I-41})$$

où a_T est un facteur de calibrage (de translation) et τ_0 est le temps de retard du modèle à une température de référence donnée.

Notons que ce modèle ne permet pas de modéliser le comportement des enrobés bitumineux à hautes températures et faibles fréquences où le matériau possède une certaine rigidité.

I.4.2.2 Modèle de Huet et Sayegh

La première amélioration du modèle de Huet a été introduite par Sayegh (Sayegh 1967). Sayegh a ajouté un ressort de rigidité E_0 en parallèle avec le modèle de Huet (Figure I-28) tel que E_0 est beaucoup plus faible que la rigidité du ressort dans le modèle de Huet ($E_0 \ll E_\infty$). L'objectif principal était de surmonter le problème du modèle de Huet lié à la rigidité nulle obtenue sous hautes températures et basses fréquences.

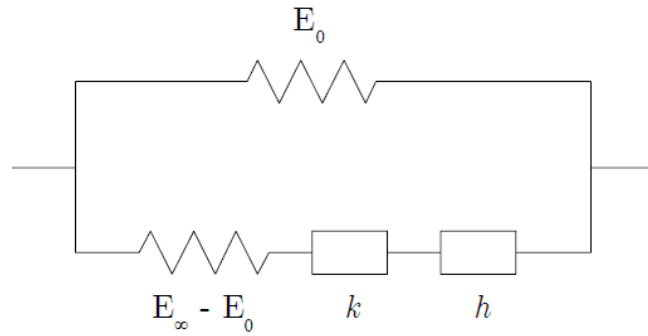


Figure I-28: Modèle rhéologique de Huet et Sayegh (Sayegh 1967).

Le module complexe de ce modèle s'écrit :

$$E^*(i\omega) = E_0 + \frac{E_\infty - E_0}{1 + (i\omega\tau)^{-h} + \delta(i\omega\tau)^{-k}} \quad (\text{I-42})$$

où E_∞ est le module vitreux (obtenu pour $\omega\tau \rightarrow \infty$), et E_0 le module statique obtenu pour $\omega\tau \rightarrow 0$. Notons que ce modèle n'admet pas d'expression pour la fonction de fluage dans le domaine temporel.

I.4.2.3 Modèle 2S2P1D

La deuxième amélioration du modèle de Huet a été effectuée par Olard et Di Benedetto (Olard 2003). Ils ont introduit un amortisseur linéaire en série avec les éléments paraboliques du modèle de Huet et Sayegh (Figure I-29). Ainsi le nouveau modèle rhéologique est constitué par deux ressorts (2S : *Springs*), deux amortisseurs paraboliques (2P : *Parabolic dashpot*) et un amortisseur linéaire (1D : *Dashpot*).

L'amortisseur linéaire introduit dans ce modèle sert à améliorer le comportement viscoélastique des matériaux bitumineux à basses fréquences et hautes températures dont le comportement du bitume est purement visqueux.

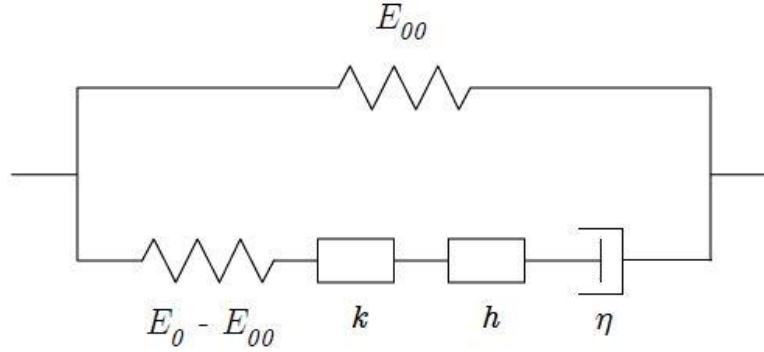


Figure I-29: Modèle 2S2P1D.

Le module complexe de ce modèle est donné par :

$$E^*(i\omega) = E_{00} + \frac{E_0 - E_{00}}{1 + \delta(i\omega\tau)^{-k} + (i\omega\tau)^{-h} + (i\omega\beta\tau)^{-1}} \quad (\text{I-43})$$

où β est un paramètre qui vérifie l'équation :

$$\eta = (E_0 - E_{00})\beta\tau \quad (\text{I-44})$$

Afin de modéliser le comportement des enrobés dans le cas unidimensionnel, il suffit de trouver les sept paramètres du modèle $E_0, E_{00}, k, h, \delta, \tau$ et β . Deux autres paramètres ν_0 et ν_{00} sont nécessaires pour le cas tridimensionnel.

$$\nu^*(\omega) = \nu_{00} + (\nu_0 - \nu_{00}) \frac{E^*(\omega) - E_{00}}{E_0 - E_{00}} \quad (\text{I-45})$$

où ν_{00} et ν_0 sont les coefficients de poisson statique et vitreux, respectivement.

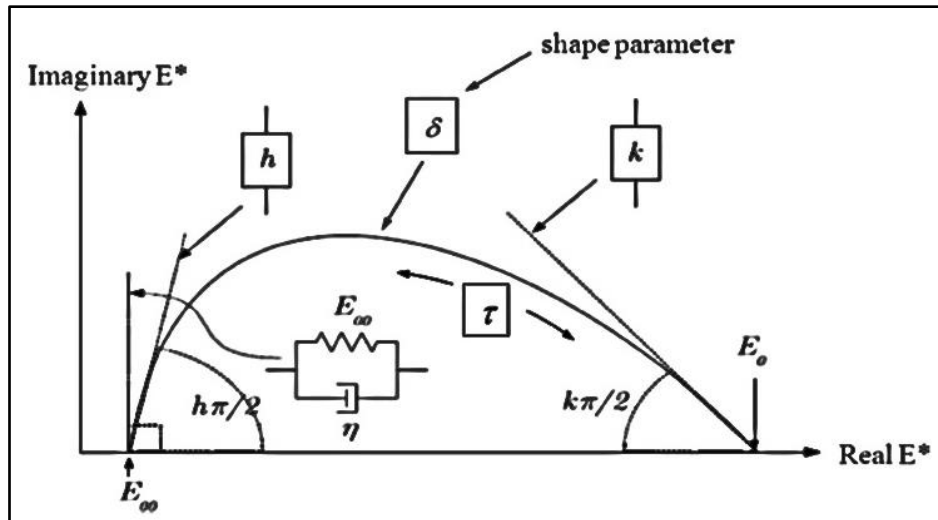


Figure I-30: Influence des paramètres du modèle de 2S2P1D dans le plan de Cole-Cole (Olard 2003).

L'influence des paramètres de ce modèle dans le plan Cole-Cole est illustrée sur la Figure I-30. Sur ce plan les paramètres d'un modèle rhéologique peuvent être calés de façon à ce que la réponse du modèle soit en accord avec les résultats expérimentaux. Des travaux de recherche menés par (Olard and Di Benedetto 2003), (Sohm 2013) et (Larcher 2014) ont montré la pertinence de ce modèle. En effet, il permet de bien décrire la réponse des matériaux bitumineux pour une large gamme de températures et de vitesses de chargement.

Ces deux derniers modèles (Huet&Sayegh et 2S2P1D) prennent en compte le comportement des matériaux bitumineux sous hautes températures (ou basses fréquences) et ne sont pas adaptés dans cette thèse puisque ce domaine est plutôt lié à des phénomènes d'orniérage des chaussées. L'étude des déformations permanentes ne fait pas l'objectif de cette thèse. Ainsi le modèle rhéologique de Huet est notre modèle de base pour modéliser le comportement des matériaux bitumineux.

À noter également qu'il existe un modèle généralisé développé à l'ENTPE nommé DBN 'Di Benedetto-Neifar' (Di Benedetto and Neifar 2002)(Di Benedetto et al. 2001b). Ce modèle permet de prendre en compte le comportement des matériaux bitumineux sous différentes conditions de chargements dans le domaine des petites déformations (comportement linéaire) et grandes déformations (non-linéarité et écoulement plastique).

I.4.3 Décomposition spectrale

Afin de passer d'un modèle à spectre continu à un modèle à spectre discret, on a étudié la décomposition spectrale du modèle de Huet. Cette décomposition pourra s'avérer utile dans le cadre d'une implémentation future dans un code aux éléments finis car elle permet de s'affranchir du calcul, à chaque pas de temps, des intégrales de convolution sur l'histoire du chargement.

Il existe deux approches pour faire la décomposition spectrale, soit en modèle de Maxwell généralisé (également appelé série de Prony), soit en modèle de Kelvin-Voigt généralisé.

I.4.3.1 Décomposition en série de Prony – calcul des paramètres du modèle de Maxwell généralisé

La série de Prony (modèle de Maxwell généralisé) est définie mathématiquement dans le domaine fréquentiel par les équations (I-46) et (I-47). Dans ces expressions les modules de stockage

E' et de dissipation E'' sont calculés en connaissant les paramètres E_i et τ_i du modèle de Maxwell généralisé (Figure I-17) et la pulsation ω .

$$E'_{Prony} = E_0 + \sum_{i=1}^n E_i \frac{(\omega\tau_i)^2}{1 + (\omega\tau_i)^2} \quad (I-46)$$

$$E''_{Prony} = \sum_{i=1}^n E_i \frac{(\omega\tau_i)}{1 + (\omega\tau_i)^2} \quad (I-47)$$

L'identification des paramètres E_i et τ_i de ce modèle est basée sur le calage des réponses expérimentales et numériques sur les courbes maîtresses du module de stockage et de dissipation. La procédure de calage est expliquée dans l'article (Chailleux et al. 2011) et (Hammoum et al. 2009). Le problème à résoudre est :

$$\min_{E_i, \tau_i} |E^*_{Prony} - E^*_{experimentale}| \quad (I-48)$$

Sous forme matricielle, cette équation s'écrit :

$$[B]_{2m,n+1} * [E]_{n+1_{Prony}} = \begin{bmatrix} [I]_m & [B]'_{m,n} \\ [I]_m & [B]''_{m,n} \end{bmatrix} * [E]_{n+1_{Prony}} = \begin{bmatrix} [E'(\omega)]_m \\ [E''(\omega)]_m \end{bmatrix}_{exp} \quad (I-49)$$

où $[I]_m = \{1, 1, \dots, 1\}^t$, $[B]'_{m,n}$ et $[B]''_{m,n}$ ayant comme composant $\frac{(\omega\tau_i)^2}{1 + (\omega\tau_i)^2}$ et $\frac{(\omega\tau_i)}{1 + (\omega\tau_i)^2}$ respectivement.

Notons que m est le nombre des fréquences choisies de la courbe maîtresse pour le calage expérimental-numérique sur les deux courbes maîtresse de E' et E'' , et n représente le nombre des branches de Maxwell dans le modèle de Maxwell généralisé. Le vecteur $[I]_m$ est ajouté pour prendre en compte la rigidité E_0 du ressort monté en parallèle avec les branches de Maxwell.

La résolution du système algébrique (I-49) est possible suivant deux approches, une approche linéaire et une autre non linéaire. Dans la première approche, les temps caractéristiques τ_i ($1 \leq i \leq n$) du modèle de Maxwell généralisé sont obtenus à partir de l'ensemble des pulsations ω_i (Hammoum et al. 2009) :

$$\tau_i = \left[\log\left(\frac{1}{\omega_{max}}\right), \dots, \log\left(\frac{1}{\omega_{min}}\right) \right] \quad (I-50)$$

Le problème à résoudre devient un problème linéaire de la forme $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{b}}$ où les composants du vecteur $\underline{\underline{x}}$ sont les modules E_i , les seuls inconnus du problème.

En revanche, dans la deuxième approche (non linéaire), le module E_i de chaque branche de Maxwell et le temps de relaxation τ_i associé sont pris comme des inconnus. Ainsi le système des équations à résoudre (I-49) devient non linéaire. La méthode de calage des paramètres de la série de Prony et la procédure d'identification des paramètres du modèle de Huet sont implémentées dans le logiciel Viscoanalyse développé à l'IFSTTAR (Chailleux 2005).

1.4.3.2 Décomposition spectrale du modèle de Huet en série de Kelvin-Voigt Généralisé

La décomposition spectrale du modèle de Huet en série de Kelvin-Voigt généralisé est basée sur la définition d'un spectre continu et sur le remplacement des amortisseurs paraboliques présents dans le modèle de Huet par une série infinie de Kelvin-Voigt généralisé. Ainsi la fonction de fluage

du modèle de Kelvin-Voigt généralisé étendue à un nombre infini de branches ($N = \infty$) permet d'écrire :

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{E(\tau)} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) d\tau \quad (\text{I-51})$$

où $F(t)$ est la fonction de fluage du modèle à décomposer, $E(\tau)$ et les τ sont les paramètres du spectre continu. Le but est donc de trouver une expression pour le module $E(\tau)$ qui vérifie cette équation.

Après une série de transformations de Laplace, $E(\tau)$ s'écrit :

$$E(\tau) = \frac{\tau}{TL^{-1}\{\dot{F}(t)\}} \quad (\text{I-52})$$

Prenons par exemple une fonction de fluage à spectre continu de la forme $(t) = t^\alpha$, dans ce cas $E(\tau)$ s'écrit :

$$E(\tau) = \frac{\tau}{TL^{-1}\{\dot{F}(t)\}} = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha \tau^{\alpha-1}} \quad (\text{I-53})$$

En appliquant cette décomposition spectrale sur l'amortisseur parabolique du modèle de Huet de coefficient h , on obtient :

$$F(t) = \frac{t^h}{E_\infty \tau_{Huet}^h \Gamma(h+1)} = \int_0^{+\infty} \frac{h}{E_\infty \tau_{Huet}^h \Gamma(h+1) \Gamma(1-h)} \tau_i^{h-1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right) d\tau_i \quad (\text{I-54})$$

Le problème à résoudre possède la forme suivante :

$$\frac{\Gamma(1-h)}{h} t^h = C_h t^h = \int_0^{+\infty} \tau_i^{h-1} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}) d\tau_i \quad (\text{I-55})$$

où les inconnues de cette équation sont les temps caractéristiques τ_i . Ainsi il faut une infinité des τ_i afin de vérifier cette équation.

Passage à un spectre discontinu

La décomposition du modèle de Huet en modèle de Kelvin-Voigt généralisé à nombre fini des branches est basée sur (1) le passage à un spectre discret et (2) la minimisation de la différence entre les fonctions de fluage de l'amortisseur parabolique et de la série finie de Kelvin-Voigt généralisé sur un intervalle de temps donné :

$$F(t) = t^h = \frac{1}{C_h} \int_0^{+\infty} \tau^{h-1} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) d\tau \approx \frac{1}{C_h} \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} x^{h-1} \left(1 - e^{-\frac{t}{x}}\right) dx \quad (\text{I-56})$$

Une fois les temps caractéristiques τ_i sont calculés (par la méthode des moindres carrés par exemple), les modules $E_i(\tau_i)$ du spectre discrétisé associé à l'amortisseur parabolique de coefficient h s'écrivent :

$$E_i(\tau_i) = \frac{h}{E_\infty \tau_{Huet}^h \Gamma(h+1) \Gamma(1-h)} \tau_i^{h-1} \quad (\text{I-57})$$

Dans le cadre de cette thèse, on a développé une procédure d'identification des paramètres de la série de Kelvin-Voigt généralisé (Annexe A), cette procédure est implémentée dans un script écrit en C++.

Application numérique

Afin de vérifier la procédure de décomposition spectrale du modèle de Huet développée (en modèle de Kelvin-Voigt généralisé), on a comparé la réponse des modèles rhéologiques à différents types de chargement. On a également calculé la réponse du modèle KGV à partir de deux approches incrémentales :

- Approche incrémentale basée sur le produit de convolution (Annexe B) (Ghazlan, Caperaa, and Petit 1995)(Chazal and Mouto Pitti 2010; Chazal and Moutu Pitti 2009)
- Approche incrémentale basée sur les variables internes

Le modèle de Huet utilisé pendant cette étude possède les paramètres listés dans le Tableau I-6 :

$E_{\infty}(Mpa)$	k	h	δ	$\tau (T_{ref} = 0^{\circ}C)$
30871.8	0.18643	0.58519	1.48724	2.39142

Tableau I-6: Paramètres du modèle de Huet.

Suite à la décomposition spectrale du modèle de Huet en série de Kelvin-Voigt généralisé ($N = 14$), les paramètres du modèle de Kelvin-Voigt généralisé sont présentés dans le tableau suivant :

Amortisseur parabolique de coefficient h		Amortisseur parabolique de coefficient k	
τ_i	E_i	τ_i	E_i
0.00017424	0.0001507	0.00905003	0.00010954
0.0480445	$1.4647E - 05$	0.0531921	$2.5929E - 05$
0.441124	$5.8389E - 06$	0.165723	$1.0286E - 05$
4.45509	$2.2374E - 06$	4.02024	$7.6838E - 07$
37.909	$9.2047E - 07$	34.0304	$1.3518E - 07$
359.951	$3.6185E - 07$	330.007	$2.129E - 08$
3599.98	$1.3922E - 07$	3300	$3.2706E - 09$

Tableau I-7: Paramètres du modèle de Kelvin-Voigt généralisé obtenus par décomposition spectrale.

On montre sur la Figure I-31 la réponse du modèle de Huet et de Kelvin-Voigt généralisé au chargement donné sur la Figure I-31-a.

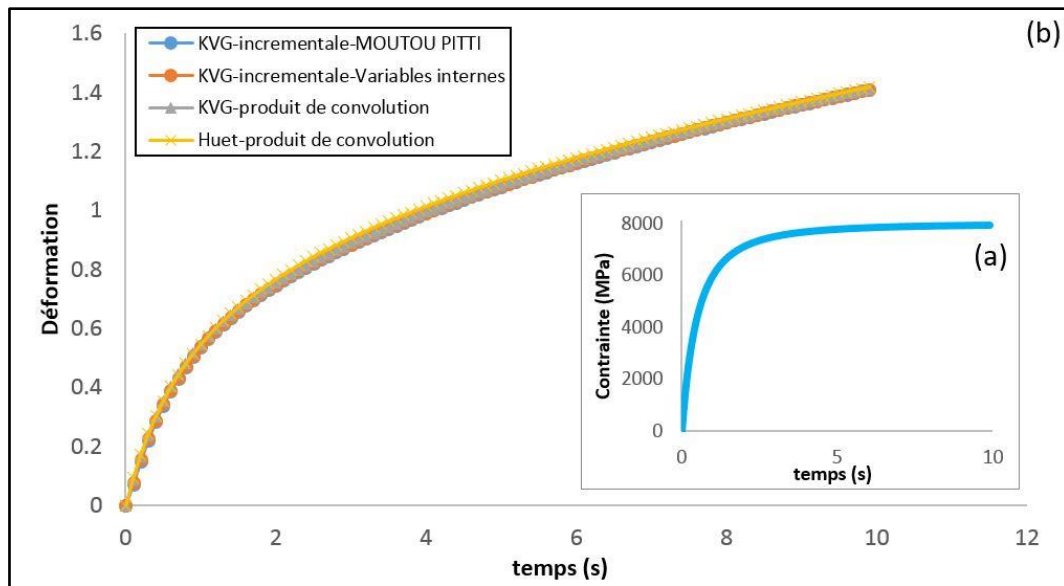


Figure I-31: Réponse du modèle de Huet et de Kelvin-Voigt généralisé obtenu par décomposition spectrale.

Le bon accord entre les quatre réponses de la Figure I-31 montre que la décomposition spectrale permet de remplacer le modèle rhéologique à spectre continu par un modèle à spectre discret. On a vérifié également la pertinence des approches incrémentales dans le calcul de la réponse des matériaux viscoélastiques, une étape importante qui permet de remplacer le produit de convolution très coûteux en terme de temps de calcul.

I.5 Essais de caractérisation du comportement à la fissuration des Matériaux Bitumineux

L'étude de la dégradation des structures composées de matériaux bitumineux est possible sur deux échelles, à savoir l'échelle réelle et l'échelle du laboratoire. Pour les essais à l'échelle réelle, la chaussée est soumise à un chargement similaire au chargement du trafic (passages successifs des essieux des véhicules), comme par exemple pour l'essai au manège de fatigue de l'IFSTTAR, l'essai FABAC et l'essai AASHO. Ce type d'essais sert à étudier le comportement d'une couche de chaussée en fatigue dû au chargement répété. En revanche, à l'échelle des essais de laboratoire on peut distinguer entre deux types de chargement, un chargement sous sollicitation répétée (en force ou en déplacement) qui sert à étudier le comportement en fatigue des éprouvettes de laboratoire, et un chargement de type monotone (en force ou en déplacement).

Dans la section suivante, une attention particulière est portée aux essais de fissuration sous chargement monotone. On montre les avantages et les inconvénients de chaque type d'essai, ainsi que l'effet de la vitesse de chargement et de la température sur la réponse des éprouvettes de matériaux bitumineux. Plus précisément, on s'intéresse à l'effet de ces conditions d'essai sur la résistance à la fissuration caractérisée par l'énergie de fissuration. Ce type d'essais est ce qu'on cherche à modéliser dans le Chapitre V de cette thèse.

I.5.1 Fissuration sous chargement monotone

Dans cette thèse on s'intéresse par la fissuration des EB sous chargement monotone. Un recensement bibliographique des essais de laboratoire, qui permettent d'étudier le problème de propagation de fissure dans les MB, conduit à trois essais principaux :

- Essai de flexion trois points sur poutre entaillée : *Single-Edge Notched Beam* (SENB)
- Essai de traction directe sur disque entaillé : *Disc-shaped Compact Tension* (DC(T))
- Essai de flexion trois points sur poutre semi-circulaire : *Semi Circular Bending* (SCB)

Parmi ces essais, certains sont obtenus et développés par modification des essais de fissuration utilisés sur autres matériaux comme le béton (l'essai de flexion SENB et SCB), d'autres sont de nouveaux essais conçus principalement pour ce type de matériau (l'essai DCT). Ces essais permettent de prendre en compte les différents phénomènes que subissent les matériaux bitumineux comme la dépendance à la température, la dépendance à la vitesse de chargement, la non-linéarité, etc. Ils sont également exploités pour estimer la résistance à la fissuration à partir du calcul de l'énergie de fissuration G_c .

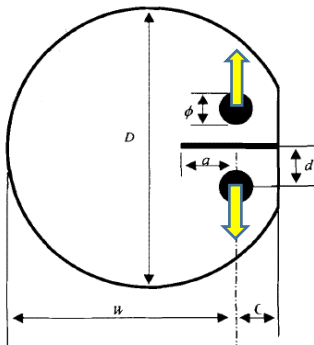
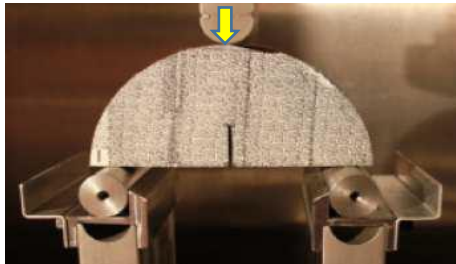
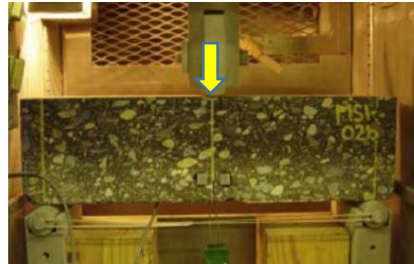
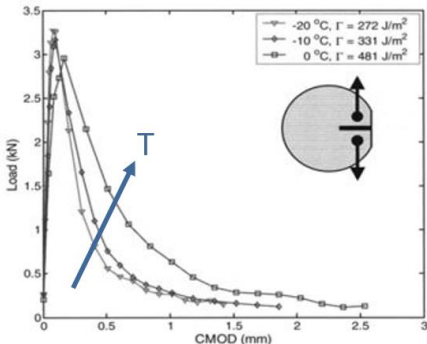
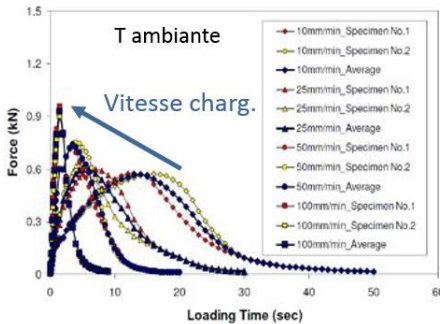
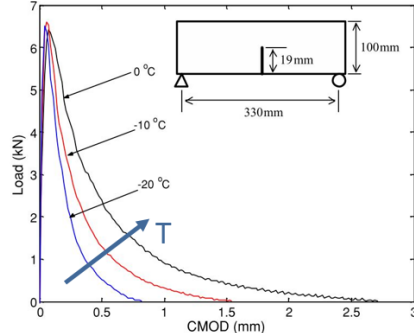
Traction directe sur disque entaillé DCT				Flexion trois points sur poutre semi circulaire entaillée SCB			Flexion trois points sur poutre entaillée SENB	
(Wagoner, Buttlar, and Paulino 2005b)				(Krans, Tolman, and van de Ven 1996)(Li et al. 2006)			(Wagoner, Buttlar, and Paulino 2005a)	
								
D	150mm	a	27.5mm	épaisseur	25 mm		longueur	330 mm
W	110mm	d	25mm	diamètre	150 mm		largeur	100 mm
Φ	25mm	C	35mm	entaille	2.5 mm	(largeur)	épaisseur	75 mm
					25 mm	(profondeur)		
								

Tableau I-8: Principaux essais de fissuration sous chargement monotone sur enrobés bitumineux, dimensions recommandées des éprouvettes et exemples de résultats d'essais.

L'essai **SEB** est l'essai le moins utilisé par les chercheurs pendant l'étude du phénomène de fissuration des matériaux bitumineux, principalement à cause de la difficulté d'obtenir des éprouvettes issues de matériau prélevé in-situ (par carottage). Malgré cela, cet essai possède certains avantages :

- Le contrôle de l'essai
- La zone de propagation de fissure est importante
- La répétabilité
- L'étude de la rupture en mode mixte (par compensation de l'entaille de la ligne médiane de la poutre).

Un autre essai de fissuration, où les éprouvettes sont obtenues facilement par carottage in-situ ou par fabrication en laboratoire, est l'**essai de traction compacte sur éprouvette circulaire DC(T)**. Cet essai fait partie de la norme ASTM D7313-07a. La première application de cet essai dans le domaine des chaussées est présentée dans les travaux de Lee (Lee et al. 1999). En 2005 Wagoner et ses collaborateurs (Wagoner et al. 2005b) ont proposé de nouvelles dimensions de l'éprouvette afin de remédier au problème de rupture qui se localise près de la zone d'application du chargement (Figure I-32). Ils ont également étudié l'effet du liant et des granulats sur l'énergie de fissuration du mélange (Wagoner et al. 2007). Cet essai est largement utilisé dans le domaine des chaussées.

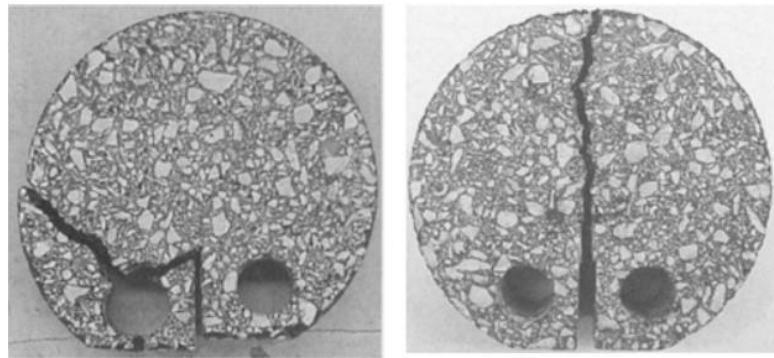


Figure I-32: Problème de rupture localisé près de la zone d'application de chargement (Wagoner et al. 2005b).

L'**essai de flexion sur poutre semi-circulaire (SCB)** a été initialement développé par Chong et Kuruppu en 1984 pour calculer la ténacité et le facteur d'intensité des contraintes pour des matériaux comme les roches, le béton et la céramique (Chong and Kuruppu 1984). Ensuite, il a été adopté par Li pour calculer la résistance à la fissuration des mélanges bitumineux à basses températures (Li and Marasteanu 2004). Cet essai peut être conduit également à des températures « moyennes » comme dans les travaux menés par Al-Qadi et ses collègues au département du transport à Illinois (IDOT) (Al-qadi et al. 2015). Ils ont introduit un nouvel indice FI (FI pour *flexibility index*) qui quantifie la fragilité de la réponse des éprouvettes testées. Ils ont en plus étudié l'effet de plusieurs mélanges bitumineux et l'effet de la géométrie de l'éprouvette sur la résistance à la fissuration des EB (Ozer, Al-Qadi, Lambros, et al. 2016; Ozer, Al-Qadi, Singhvi, et al. 2016).

À noter que l'essai SCB possède certains avantages vis-à-vis d'autres essais de fissuration, parmi lesquels :

- Simplicité dans la configuration de l'essai
- Éprouvette de petite taille : cela permet d'économiser le coût de fabrication
- Répétabilité
- Éprouvette obtenue facilement sur le site par carottage

- Assure la corrélation avec la performance in situ
- Étude de la fissuration en mode I et en mode mixte (I et II) possible (Lim, Johnston, and Choi 1993)

En revanche, cet essai possède certaines limitations, comme par exemple celle liée à la taille et la forme de l'éprouvette. Pour cet essai le phénomène de fissuration est réduit sur une petite zone (petit ligament de fissuration). Par ailleurs, un effet de cambrage (*arching effect*) peut affecter les résultats de l'essai (Wagoner et al. 2005b). Malgré ces inconvénients cet essai est largement utilisé dans le domaine de la chaussée.

Une comparaison entre l'essai SCB et l'essai SENB en mode I et mode mixte de fissuration est réalisée par (Artamendi and Khalid 2006). Ils ont trouvé que l'énergie de fissuration obtenue à partir de l'essai SCB est plus grande que celle obtenue à partir de l'essai SENB. Ils ont étudié également le mode mixte de rupture avec les deux géométries d'essais. Les énergies de fissuration ainsi obtenues sont plus grandes que celles obtenues en mode I.

I.5.1.1 Calcul de l'énergie de fissuration

L'énergie de fissuration est une mesure pertinente pour évaluer la résistance à la rupture des matériaux. Par définition, il s'agit de l'énergie nécessaire pour créer une unité de surface d'une fissure. On présente dans la suite les méthodes de calcul de cette quantité à partir des résultats d'essais de fissuration réalisés sur les matériaux bitumineux.

À basse température, le calcul de l'énergie de fissuration est possible en s'appuyant sur la méthode WFM (WFM pour *work of fracture method*) initialement développée pour le béton (Hillerborg 1985). Cette méthode postule que l'énergie de fissuration correspond à l'aire sous la courbe force-déflexion divisée par la surface de ligament projetée. L'hypothèse prise dans ce cas est que le travail des forces appliquées – fourni par la machine d'essai – est totalement dissipé pour créer et propager une fissure dans l'éprouvette.

Le calcul de l'énergie de fissuration par la méthode WFM, à partir d'un essai de flexion trois points sur poutre entaillée, fait partie de la recommandation RILEM telle que :

$$G_f(a) = \frac{W_1 + mg\delta_0}{(D - a)b} \quad (\text{I-58})$$

où (a) est la longueur de l'entaille, W_1 est le travail des forces extérieures ($\int Fd\delta$: l'aire sous la courbe F - δ), m la masse de l'éprouvette, δ_0 la déflexion à la fin de l'essai (c'est-à-dire pour $F = 0$), D et b sont la hauteur et l'épaisseur de la poutre, respectivement. À noter que cette approche de calcul est également applicable sur l'essai de fendage par coin WST (*wedge splitting test*).

Les détails de calcul de l'énergie de fissuration à partir de l'éprouvette semi-circulaire entaillée SCB sont présentés dans le rapport de RILEM (RILEM Technical Committee 50-FMC 1985).

À température intermédiaire

Selon les auteurs de l'AAPT (*Association of Asphalt Paving Technologists*), l'énergie de fissuration calculée à partir de la courbe force-déflexion (F - δ) est surestimée. Celle-ci n'est qu'une forme apparente de l'énergie de fissuration. En connaissant l'énergie totale fournie par la machine d'essai pour casser l'éprouvette (l'aire sous la courbe F - δ) et en faisant le bilan énergétique on obtient :

$$\dot{U}_e = \dot{U}_i + \dot{U}_a + \dot{U}_d + \dot{U}_k \quad (\text{I-59})$$

En fait, pour pouvoir calculer l'énergie de création de fissuration $\dot{U}_a$ directement à partir de l'énergie fournie par la machine $\dot{U}_e$, il faut que (Petersson 1980) :

- L'énergie élastique emmagasinée $\dot{U}_i$ soit négligeable
- L'énergie dissipée dans le volume de la structure $\dot{U}_d$ (comme pour l'énergie dissipée due au fluage) soit négligeable
- L'indépendance de calcul de l'énergie de la taille de l'échantillon
- La fissuration soit stable (sinon une partie d'énergie est dissipée par l'effet dynamique)

Pour des essais qui sont menés à des températures intermédiaires, une partie de l'énergie est dissipée due à la viscosité du mélange bitumineux. Cette contribution peut alors affecter la valeur de l'énergie de fissuration si celle-ci est calculée par la méthode WFM.

Afin de remédier à ce problème, les auteurs (Aragão, Kim, and Javaherian 2012) ont introduit une nouvelle méthode pour calculer l'énergie de fissuration à partir de l'essai SCB. Cette méthode est basée sur la confrontation des résultats expérimentaux et numériques. Cette méthode consiste à :

- Réaliser des essais de fissuration (SCB) sous différentes vitesses de chargement.
- Modéliser ces essais de fissuration en utilisant une loi de comportement viscoélastique en volume et une loi cohésive intrinsèque avec effet de vitesse – comme celle proposée par Espinosa et Zavattieri (Espinosa and Zavattieri 2001)(Espinosa and Zavattieri 2003) – dans la zone de fissuration (I-60)(I-61).
- Caler les réponses numériquement sur les courbes expérimentales pour différentes vitesses de chargement en modifiant les paramètres de la loi cohésive (l'énergie de fissuration cohésive G_c et la contrainte cohésive T_{max}).
- L'énergie de fissuration est ensuite obtenue en intégrant la force cohésive par rapport à la distance de séparation.

1.5.1.2 Effet de la température et de la vitesse de chargement sur la résistance à la fissuration des EB

Afin de comprendre l'effet de la vitesse de chargement et de la température sur la résistance à la fissuration des matériaux bitumineux, Im et ses collègues (Im, Kim, and Ban 2013) ont effectué une série d'essais de fissuration SCB à des températures (-10, 0,21 et 30°C) et des vitesses de chargement différentes ($\dot{U} = 1, 5, 10$ et 50 mm/min). Les éprouvettes d'essai ont été instrumentées par des jauges et par la technique de corrélation d'image digitale pour décrire les phénomènes qui se produisent dans la FPZ (FPZ pour *Fracture Process Zone*, qu'on appelle aussi plus simplement "Process Zone") pendant le déroulement de l'essai. En parallèle des simulations numériques de l'essai avec la méthode de la zone cohésive CZM ont été faites. Les hypothèses prises pour faire les modélisations sont les suivantes :

- Le comportement viscoélastique en volume est décrit par le modèle de Maxwell généralisé
- L'effet de la température est pris en compte en se basant sur le principe d'équivalence temps-température PETT
- Coefficient de poisson constant ($\nu = 0.35$)
- Calcul 2D en contrainte plane

- La zone de fissuration est décrite par un modèle cohésif bilinéaire intrinsèque avec une démarche de calibrage de la partie ascendante de la courbe force-déplacement (pour réduire l'effet de complaisance artificielle *artificial compliance*)

Après calage des paramètres du modèle cohésif sur les résultats expérimentaux et l'analyse des résultats d'essai ils ont trouvé :

- Le calcul de l'énergie de fissuration à partir de la courbe force-NMOD & la courbe force-NTOD (NMOD pour *Notch Mouth Opening Displacement* et NTOD pour *Notch tip opening displacement*) surestime la valeur de l'énergie de fissuration.
- Pour les basses températures (-10°C), l'énergie de fissuration est indépendante de la vitesse de chargement ($G_c = cte$).
- Pour des températures positives (21°C à 30°C) l'énergie de fissuration augmente avec la vitesse de chargement (à 0°C c'est l'inverse).
- Pour la même vitesse de chargement et pour des températures positives, G_c diminue avec l'augmentation de la température.

Ces résultats sont en accord avec d'autres études de la littérature (Fakhri et al. 2018) (Aragão et al. 2012). Araújo et ses collègues ont utilisé une loi cohésive intrinsèque avec effet de vitesse. L'effet de vitesse est pris en compte dans la loi cohésive en utilisant l'approche proposée par (Espinosa and Zavattieri 2001)(Espinosa and Zavattieri 2003). Les paramètres de la loi cohésive s'écrivent :

$$T_{max} = T_{max,ref} \left[1 + \beta_T \ln \left(\frac{\dot{\delta}_e}{\dot{\delta}_{e,ref}} \right) \right] \quad (I-60)$$

$$G_c = G_{c,ref} \left[1 + \beta_G \ln \left(\frac{\dot{\delta}_e}{\dot{\delta}_{e,ref}} \right) \right] \quad (I-61)$$

où β_T et β_G sont des coefficients qui permettent de caler les résultats expérimentaux et des modélisations sous différentes vitesses de chargement. $T_{max,ref}$ et $G_{c,ref}$ sont les paramètres de la loi cohésive pour une vitesse de saut de déplacement de référence ($\dot{\delta}_{e,ref}$).

Après l'étude de l'essai de fissuration SCB à une température de 21°C, ils ont trouvé que :

- Le calage des paramètres β_T et β_G conduit à des valeurs non nulles et donc l'effet de vitesse de chargement sur le phénomène de fissuration n'est pas négligeable.
- La contrainte critique cohésive T_{max} augmente avec l'augmentation de la vitesse de chargement.
- L'énergie de fissuration critique cohésive G_c augmente avec l'augmentation de la vitesse de chargement.
- L'incorporation d'un effet de vitesse dans le volume seulement (à partir d'une loi de comportement viscoélastique) n'est pas suffisante pour bien reproduire la réponse expérimentale de la poutre semi-circulaire à différentes vitesses de chargement.

On doit noter que la géométrie de la poutre et la longueur d'entaille peuvent également affecter la valeur de l'énergie de fissuration. L'étude expérimentale menée par Nsengiyumva (2015), à partir de l'essai de fissuration SCB avec cinq différentes longueurs d'entailles, a permis d'investiguer l'effet de l'entaille sur l'énergie de fissuration (I-33). Pendant cette étude, la température d'essai est maintenue 21°C et une vitesse de chargement de 1 mm/min a été imposée.

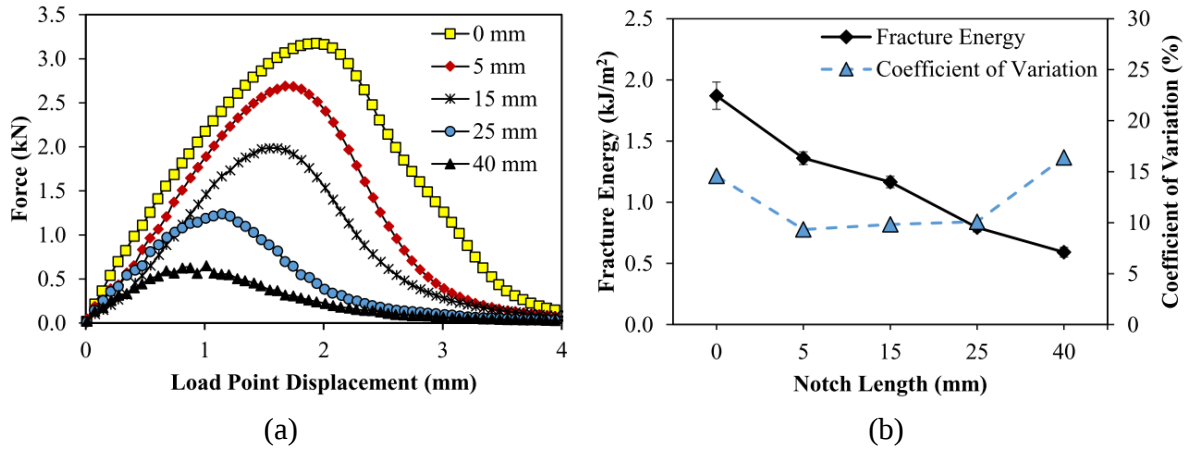


Figure I-33: Effet de la longueur d'entaille : (a) les résultats d'essais sur la courbe force-déflexion et (b) l'énergie de fissuration calculée, issue de (Nsengiyumva 2015).

1.5.2 Essai de traction directe

L'essai de traction directe sur des éprouvettes cylindriques sert à déterminer la résistance en traction σ_t et à étudier la ductilité des mélanges bitumineux. Cette contrainte σ_t est un paramètre important dans certaines procédures d'analyse comme la procédure CMSE en fatigue.

Sur les enrobés bitumineux, l'essai de traction directe consiste à appliquer un chargement, à vitesse de déformation (élongation) et température constantes, sur une éprouvette cylindrique de 150 mm de hauteur et 100 mm de diamètre. Les résultats de cet essai sont présentés sur la courbe force-déformation (Figure I-34-b).

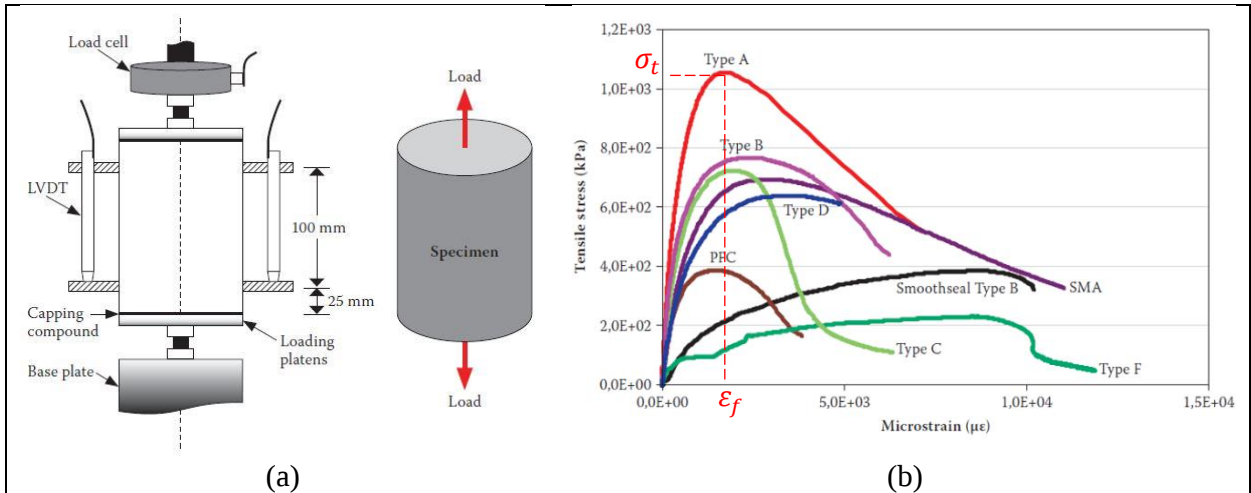


Figure I-34: Essai de traction directe, dimensions de l'éprouvette et exemples de réponses fragiles et ductiles, issue de (Walubita, Simate, and Oh 2010).

La résistance à la traction des matériaux bitumineux, également appelée contrainte à la rupture, est calculée à partir de la force maximale P_{max} obtenue avant rupture telle que :

$$\sigma_t = \frac{P_{max}}{\pi R^2} \quad (I-62)$$

où R est le rayon de l'éprouvette cylindrique. La résistance à la déformation ϵ_f est la déformation qui correspond à la contrainte σ_t , elle est donnée par :

$$\varepsilon_f = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (\text{I-63})$$

où ΔL est l'élongation à P_{max} , et L_0 est la distance initiale entre les deux capteurs LVDT (Figure I-34-a).

Pour cet essai, le critère de ductilité du matériau est basé sur la déformation ε_f telle que pour une valeur de ε_f supérieure à $3000 \mu\varepsilon$ le matériau est supposé comme ductile. Ce critère a montré une bonne corrélation avec la résistance à la fatigue (Walubita et al. 2010). Un exemple de réponse fragile est la courbe A de la (Figure I-34-b), pour cette dernière la déformation ε_f est inférieure à $3000 \mu\varepsilon$. En générale, plus la déformation ε_f est grande plus le matériau est ductile, et plus la résistance à la rupture σ_t est grande, plus le matériau est fragile. En se basant sur cette définition de la ductilité, les résultats d'essais de traction directe sous différentes vitesses de chargement nous permettent de détecter ce phénomène de transition entre réponse fragile et ductile. Sur la Figure I-35, on remarque qu'en diminuant la vitesse de chargement, le comportement du matériau devient plus ductile.

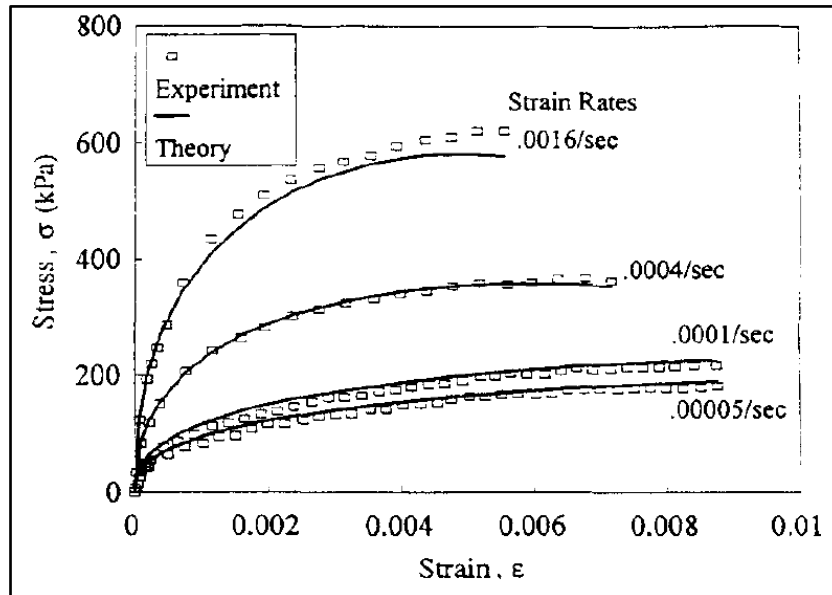


Figure I-35: Effet de la vitesse de chargement sur la réponse des enrobés bitumineux en traction uniaxiale (Park, Kim, and Schapery 1996).

Ce phénomène de transition entre réponse fragile et ductile est également observé pendant des essais de traction conduits à différentes températures (pour une vitesse de chargement fixe (Figure I-36)).

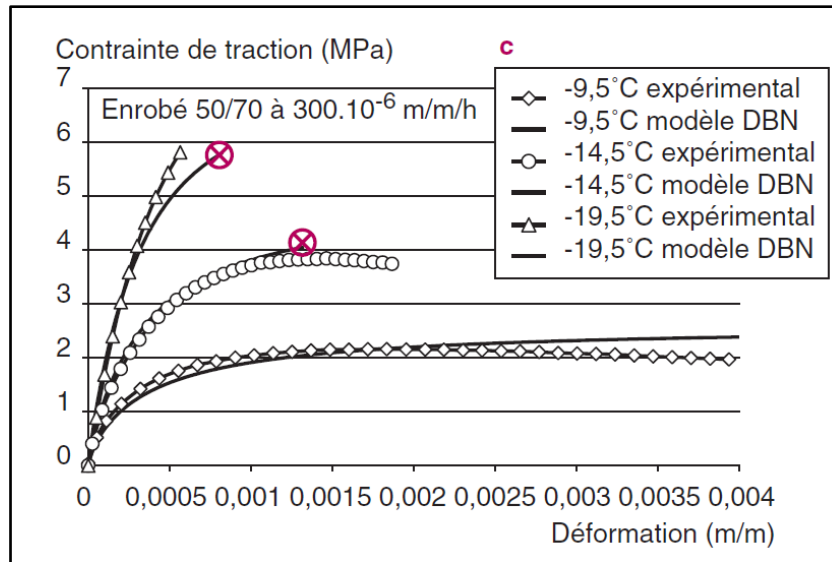


Figure I-36: Effet de la température sur la réponse des enrobés bitumineux en traction uniaxiale (Olard and Di Benedetto 2005).

Sur le bitume, on peut également voir cette transition entre réponse fragile et ductile en fonction de la température et la vitesse de chargement à partir de l'essai de traction directe SHRP. Lors de cet essai, on applique une charge de traction uniaxiale sur des éprouvettes en forme de I dans une enceinte à environnement contrôlé.

Cet essai a pour but de déterminer les propriétés à la rupture du bitume. Il permet de vérifier que l'allongement à la rupture est supérieur à 1%. Ce niveau d'allongement définit le critère de ductilité minimale. La rupture pour cet essai est définie par le point de la courbe contrainte-déformation à contrainte maximale. Sur cette courbe, le classement du comportement entre fragile et ductile est basé sur la définition de Kinloch (1987) tel que :

- Une rupture fragile apparaît pour des faibles déformations et sans augmentation de la contrainte après la croissance du défaut.
- Une rupture ductile apparaît lorsque la fissure se développe à un niveau de déformation important

Un exemple d'une réponse fragile et ductile est présenté sur la Figure I-37.

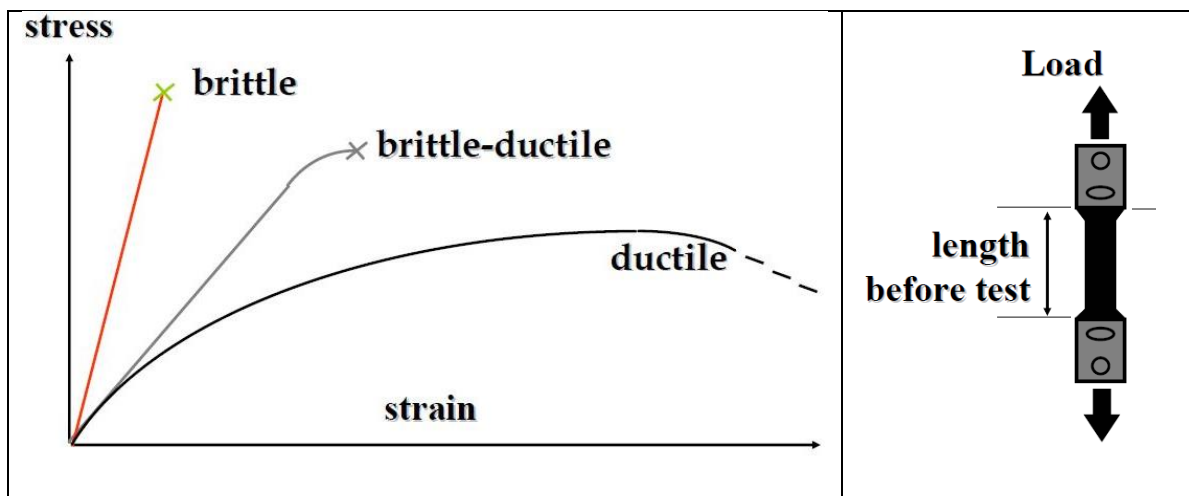


Figure I-37: Essai de traction directe sur bitume, transition entre réponse fragile et ductile.

Dans la thèse de Merbouh (2010), on trouve une description de la zone de transition entre le régime fragile et ductile suivant la température et la vitesse de chargement (Figure I-38).

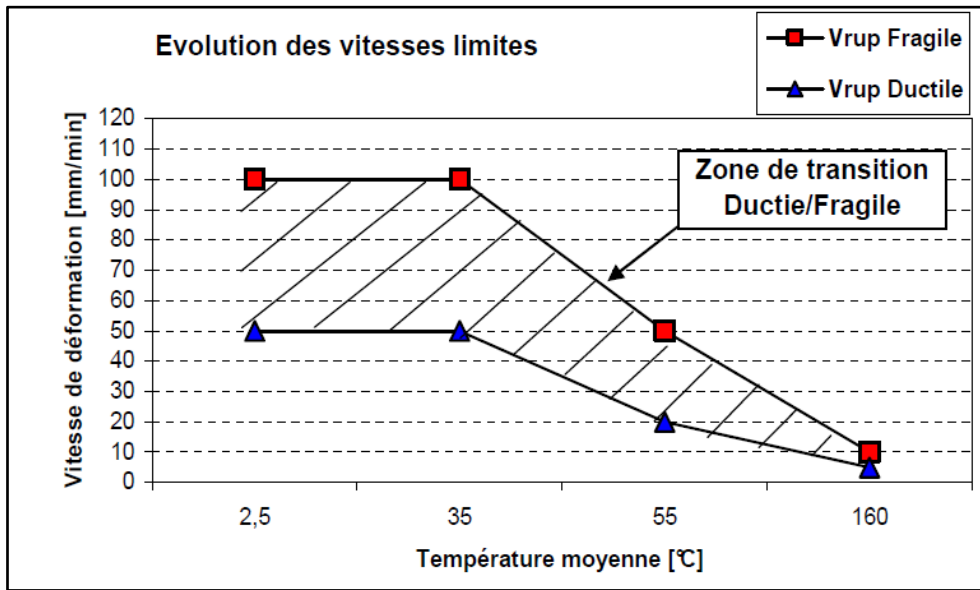


Figure I-38: Transition du comportement de bitume entre la rupture fragile et ductile, thèse de Merbouh (2010).

En se basant sur les observations présentées ci-avant, on a posé un cahier des charges qui nous servira par la suite de la thèse :

C1 - La contrainte maximale atteinte dans le matériau – également dite contrainte à la rupture – augmente avec l'augmentation de la vitesse de chargement et la diminution de la température.

C2 - La déformation à la rupture diminue avec l'augmentation de la vitesse de chargement et la diminution de la température.

I.6 Mécanique de l'endommagement et de la rupture

On présente dans cette partie les deux familles de modèles qui permettent de décrire la fissuration dans une structure, à savoir la mécanique de l'endommagement et la mécanique de la rupture. La première s'intéresse à la dégradation d'une structure d'un point de vue micromécanique alors que la deuxième traite le problème au niveau macro-mécanique. Pour ces deux approches, on montre leurs applications dans le domaine de la chaussée. En fin, on introduit le modèle TLS récemment développé (Moës et al. 2011) et qui permet de coupler ces deux approches. Les avantages du modèle TLS sont également présentés.

I.6.1 Mécanique de la rupture

La théorie de la mécanique de la rupture date de l'année 1921 quand **Griffith** (Griffith 1921) montre la possibilité de caractériser la rupture d'un milieu fragile à partir d'une seule variable globale, le taux de restitution d'énergie critique G_c (Bui 1978)(Pommier et al. 2009).

Cette théorie porte sur l'étude de l'effet d'une fissure macroscopique « existant » sur l'état de contrainte et de déformation au voisinage de la pointe de fissure. Elle s'applique aux matériaux qui

se cassent d'une manière fragile sans aucune déformation plastique. Pour ces matériaux fragiles, Griffith a proposé un critère de propagation de fissure. Ce critère est appelé plus tard le critère de Griffith pour la rupture fragile. Ce critère postule que l'extension de la fissure peut avoir lieu si l'énergie libérée pour ouvrir une fissure d'une unité de surface A est égale ou plus grande que le taux de restitution d'énergie critique :

$$G \geq G_c \rightarrow \text{propagation} \quad (\text{I-64})$$

où G dérive de l'énergie potentielle totale P . Dans le cas des matériaux élastiques elle se réduit aux deux termes suivants (Cailletaud et al. 2012) :

$$G = -\frac{\partial P}{\partial A} = \frac{1}{2} \int_{S_F} F^d \cdot \frac{\partial u}{\partial A} dS - \frac{1}{2} \int_{S_u} \frac{\partial F}{\partial A} \cdot u^d dS \quad (\text{I-65})$$

avec S_F est la partie de la frontière S où la force F^d est imposée, et S_u est la partie de la frontière où le déplacement u^d est imposé.

Une amélioration importante de cette théorie date de l'année 1956 quand **Irwin** (1957) introduisirent la notion du facteur d'intensité des contraintes K en s'appuyant sur les travaux de Westergaard (Westergaard 1939) et après une étude exhaustive sur le problème de singularité du champ de contrainte au niveau de la pointe de la fissure. Ils ont étendu également l'approche de Griffith vers le domaine des matériaux ductiles en ajoutant l'énergie due à la plastification dans le bilan énergétique. Suivant le mode de fissuration produit dans le matériau, c'est-à-dire suivant la direction de propagation de la fissure par rapport à la direction du chargement, Irwin a introduit un facteur d'intensité de contraintes qui permet d'approximer les champs de contraintes et de déformations tout autour de la pointe de fissure. Les modes de fissuration et les champs singuliers au voisinage de la pointe de fissure sont résumés dans le tableau suivant :

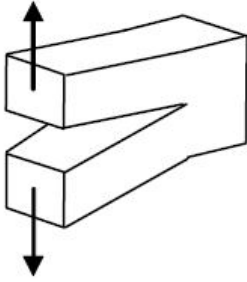
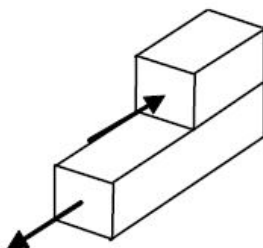
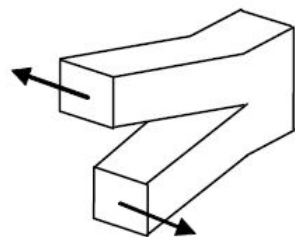
Mode I (ouverture)	Mode II (glissement dans le plan)	Mode III (glissement anti-plan)
		
$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)$ $\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)$ $\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$ $u_1 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2})$ $u_2 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2})$	$\sigma_{11} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right)$ $\sigma_{22} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$ $\sigma_{12} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)$ $u_1 = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2})$ $u_2 = -\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2})$	$\sigma_{13} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}$ $\sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}$ $u_3 = -\frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2}$

Tableau I-9: Modes de fissuration et les champs singuliers associés.

À partir de la loi de comportement élastique linéaire et des champs de contraintes près de la pointe de la fissure, il est possible de relier les facteurs d'intensités de contraintes et le taux de restitution d'énergie G tel que :

$$G = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{2\mu} \quad (\text{I-66})$$

où $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, E' est égal à E et $\frac{E}{(1-\nu^2)}$ pour un état de contraintes planes et de déformations planes, respectivement.

Pour les matériaux bitumineux, des études montrent que le taux de dissipation d'énergie critique G_c n'est pas constant (Bažant and Planas 1998), il dépend de l'histoire et de la vitesse de chargement (Knauss 1970)(Yoon and Allen 1999). Par ailleurs, pendant les essais de fissuration sur les matériaux bitumineux, la pointe de la fissure et la singularité des contraintes ne sont pas souvent observées. Ainsi, la théorie de la mécanique de la rupture traditionnelle n'est donc pas suffisante pour comprendre le phénomène de fissuration dans ces matériaux. Ramsamooj est parmi les premiers auteurs à avoir parlé des limitations de cette théorie dans le domaine des matériaux viscoélastiques comme les EB (Ramsamooj 1994).

Afin de remédier à ce problème, les chercheurs ont choisi le modèle de zone cohésive (CZM)(Kim 2011)(Aragão et al. 2012), une approche capable de résoudre le problème de singularité des contraintes et simple à implémenter dans les codes de calcul par éléments finis ou par éléments discrets.

1.6.1.1 L'approche de zone cohésive CZM

Dans le domaine des matériaux bitumineux, l'approche CZM (*Cohesive Zone Model*) a été adoptée par les chercheurs à cause du succès de cette approche dans le domaine de la mécanique de la rupture. Ce modèle a été initialement appliqué dans le domaine des chaussées pour étudier la résistance à la fissuration et la propagation de fissure dans les couches d'une route (Jeng and Perng 1991)(Jeng, Liaw, and Liu 1993).

C'est une approche phénoménologique qui s'appuie à la fois sur le concept de la mécanique des milieux continus et sur la mécanique de la rupture. Elle a été développée initialement en 1960 par Dugdale (Dugdale 1960) – pour étudier la taille de la zone plastique et la répartition des contraintes en front de fissure – et par Barenblatt (Barenblatt 1962) qui a proposé une correction de la zone plastique. Ce dernier a vérifié que pour le béton, il est possible d'avoir une contrainte finie sur les lèvres de la fissure.

On trouve dans la littérature deux types de modèles cohésifs, les modèles intrinsèques (Needleman 1987, 1990) et les modèles extrinsèques (Hillerborg, Modéer, and Petersson 1976)(Petersson 1981). La différence entre ces deux modèles est liée à la réponse du modèle pendant la phase non fissurée.

L'intérêt de l'approche CZM est qu'elle donne des informations sur le phénomène de fissuration dans la process zone FPZ. La FPZ est une zone de fissuration fictive où le phénomène de fissuration est traduit dans l'approche CZM par une diminution progressive de la contrainte et une augmentation de la séparation des surfaces suivant une tendance prédéfinie (Figure I-39). Cette tendance est donnée par la courbe traction-séparation « TS » du modèle cohésif.

Dans la littérature, on trouve parfois des lois cohésives qui sont décrites par des courbes de TS (Petersson 1981), d'autres sont données par des potentiels à partir desquels se déduit la relation

entre la contrainte et le saut de déplacement tout le long des lèvres de fissuration fictives (Xu and Needleman 1994). Pour les matériaux quasi-fragiles comme les matériaux bitumineux, la process zone est une zone d'adoucissement de taille comparable à la taille de la structure (Kim 2011). Cette zone est entourée par une petite zone plastique qui est souvent négligeable dans l'analyse (Figure I-40).

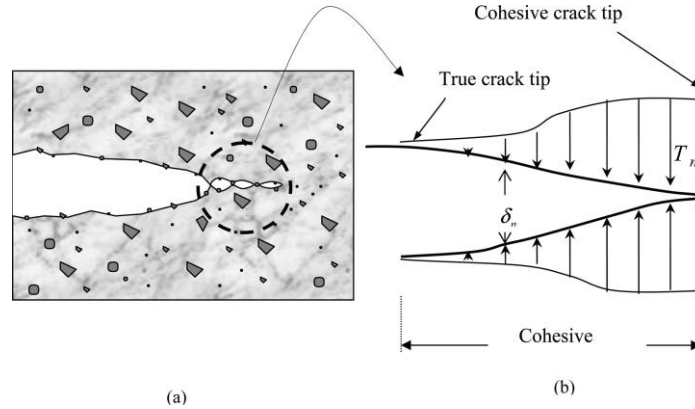


Figure I-39: Distribution des efforts et du saut du déplacement dans la zone cohésive (Dave et al. 2007).

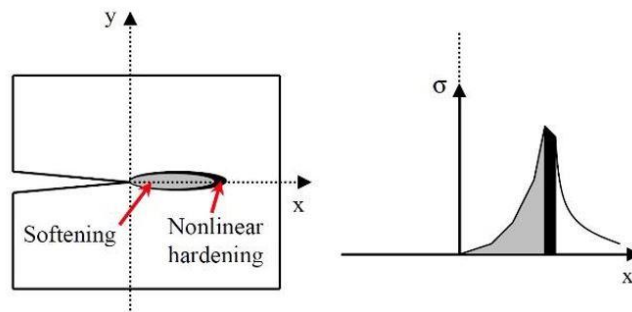


Figure I-40: Zone de processus pour les matériaux quasi-fragiles (Kim 2011).

Parmi les lois les plus utilisées dans la littérature, la loi bilinéaire intrinsèque possède des avantages vis-à-vis d'autres lois. L'avantage de cette loi est qu'elle permet de remédier au problème de rigidité parasite lié aux lois intrinsèques. Des études numériques de convergences sur la structure permettent de bien choisir la pente de la phase ascendante de la loi cohésive de façon à minimiser l'effet des éléments cohésifs (*Artificial Compliance*).

Les essais de fissuration présentés ci-avant permettent de calculer les paramètres de fissuration du matériau (l'énergie de fissuration G_c et la résistance du matériau σ_c). Ces paramètres nous permettent de comprendre le comportement endommageable des matériaux pour un chargement et une température donnée.

I.6.2 Mécanique de l'endommagement

La théorie de la mécanique de l'endommagement continu est initialement développée par Kachanov en (1958). Elle repose sur la description continue de la dégradation par endommagement d'une manière progressive due à la création et au développement de micro-fissures et de microcavités qui sont distribués dans le matériau (Kachanov 1986). Cette théorie est ensuite adoptée par de nombreux auteurs comme par exemple Chaboche et Lemaitre (Lemaitre and Chaboche

1985), Krajcinovic et Mastilovic (Krajcinovic and Mastilovic 1995). Ces derniers ont étudié le choix de la nature de la variable d'endommagement (scalaire, tenseur d'ordre 2 ou 4 ou 6).

Contrairement à la théorie de la mécanique de la rupture qui nécessite l'existence d'une fissure dans le milieu à étudier, cette théorie a pour objectif de chercher l'apparition et la création d'une fissuration à partir d'un matériau sain. La quantification de la dégradation est prise en compte à partir d'une variable d'endommagement D , variant continûment dans l'intervalle $[0,1]$ telle que $D = 0$ correspond à l'état sain du matériau et $D = 1$ correspond à un matériau complètement dégradé. Cette variable représente une densité surfacique de discontinuités. Selon Lemaitre (Lemaitre, 1996), une mesure simple de l'endommagement est obtenue en calculant la surface d'intersection de l'ensemble des micro-dégradations dans un plan donné, c'est la base de la théorie de l'endommagement uniaxial. Elle peut être vue également comme la mesure de l'ensemble des micro-défauts vus par un volume élémentaire représentatif (VER) :

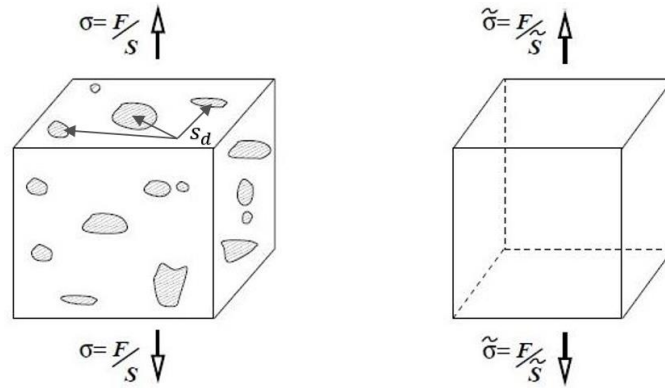


Figure I-41: Distribution des défauts dans un VER, à gauche la configuration endommagée et à droite la configuration effective.

Le calcul de D est basé sur la réduction de la section effective tel que :

$$D = \frac{S_d}{S} = 1 - \frac{\tilde{S}}{S} \quad (\text{I-67})$$

À noter que l'endommagement peut être considéré comme un champ scalaire si l'hypothèse d'isotropie est respectée, c'est-à-dire que la distribution spatiale des micro-fissures reste la même dans toutes les directions. $\tilde{S}$ dans l'équation (I-67) représente l'aire de la section qui supporte effectivement les contraintes. Ce principe conduit à la notion de la contrainte effective qui s'écrit :

$$\tilde{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \frac{F}{\tilde{S}} \quad (\text{I-68})$$

où $\tilde{\sigma}$ représente le tenseur des contraintes effectives et $\mathbf{n}$ un vecteur quelconque normal à la surface S . Le tenseur de contrainte de Cauchy σ est relié au tenseur des contraintes effectives $\tilde{\sigma}$ – sous l'hypothèse d'appliquer la même force sur le VER – par :

$$\sigma = (1 - D)\tilde{\sigma} \quad (\text{I-69})$$

En combinant ce principe avec la théorie de l'élasticité linéaire, on peut arriver à la relation contrainte - déformation du modèle élastique endommagé :

$$\sigma = (1 - D)E : \varepsilon \quad (\text{I-70})$$

où l'évolution de l'endommagement est en générale liée à la définition d'une fonction seuil f qui gère l'évolution de cette variable. La phase d'endommagement et la phase de décharge élastique sont contrôlées par les conditions de Kuhn-Tucker :

$$f \leq 0, \quad \dot{D} \geq 0, \quad f\dot{D} = 0 \quad (\text{I-71})$$

La définition d'un modèle d'endommagement de cette façon est également possible dans le cadre de la théorie des processus irréversibles. Dans ce cas la variable d'endommagement est prise comme une variable interne et le modèle d'endommagement doit respecter les lois de la thermodynamique. Ce formalisme de construction des modèles d'endommagement s'appelle le formalisme des matériaux généralisés (Halphen and Nguyen 1975).

1.6.2.1 Problème de localisation et techniques de régularisation

En général l'incorporation d'un modèle d'endommagement local dans un code de calcul EF fait apparaître le problème de localisation des déformations et de l'endommagement dans une bande d'épaisseur égale à la taille d'une maille et d'orientation dépendant de la maille choisie. Ce problème conduit à une forte dépendance au maillage utilisé. D'un point de vue physique, ce phénomène peut conduire à des zones de localisation où la dissipation est nulle (Bazant, Belytschko, and Chang 1984). Et d'un point de vue mathématique ce problème de localisation conduit à une perte de l'ellipticité de l'opérateur tangent et donc une infinité des solutions pour le problème mécanique (Benallal, Billardon, and Geymonat 1993)(Bodin et al. 2004).

Pour remédier à ce problème, des techniques de régularisations sont nécessaires, également appelées des limiteurs des localisations. Parmi ces techniques on peut citer :

- Approche de Needleman (Needleman 1988) : elle sert à introduire un effet visqueux dans le modèle de comportement adoucissant. Elle ne s'applique que pour les problèmes aux analyses dynamiques.
- Modèle d'endommagement à taux d'endommagement limité (Ladevèze 1992) : cette approche n'est pas adaptée au calcul quasi-statique.
- Limiteurs de localisation basés sur une régularisation spatiale :
 - Formulation non locale intégrale (Pijaudier-Cabot and Bazant 1987)
 - Formulation à gradient implicite (Peerlings et al. 1996)(Peerlings 1999)
 - Formulation à gradient explicite (Comi 1999)

Les différentes techniques de régularisation spatiale cherchent à régulariser une variable locale – comme le champ de déplacement (Rodríguez-Ferran, Morata, and Huerta 2005), le tenseur des déformations (Godard 2004) ou le taux de restitution d'énergie élastique (Pijaudier-Cabot and Bazant 1987) – en appliquant un opérateur de régularisation sur cette variable et en utilisant une longueur caractéristique sur laquelle la régularisation est effectuée. Ainsi, la variable à régulariser en un point est affectée par les valeurs de cette variable au voisinage de ce point.

Autres que ces techniques de régularisation, on peut citer également l'approche par champs de phase (*phase field*) (Karma, Kessler, and Levine 2001)(Miehe, Welschinger, and Hofacker 2010) et le modèle ENL (*Eikonal Non-Local*) (Rastiello et al. 2018). Dans la section 1.6.3 on présente l'approche TLS (Moës et al. 2011), un modèle de régularisation efficace et qui possède les avantages des approches de la mécanique de l'endommagement et de la rupture.

1.6.2.2 Application dans le domaine des chaussées

La dégradation des matériaux viscoélastiques est introduite dans la loi de comportement en se basant sur le principe des contraintes effectives. Elle est appelée également approche de Kachanov (Kachanov 1986). Cette approche a été utilisée pour la première fois sur le béton par Mazars (Mazars and Pijaudier-Cabot 1989), puis a été étendue par Alimami pour modéliser l'endommagement dans le domaine des chaussées (Alimami 1988). Elle a ensuite été adoptée par par plusieurs auteurs pour modéliser la dégradation par endommagement dans le domaine viscoélastique (Bodin 2002; Bodin et al. 2004)(Daniel et al. 2002; Darabi et al. 2011; Kim 1990; Park et al. 1996).

Afin de coupler l'endommagement et la viscoélasticité, il suffit de réduire la contrainte totale $\sigma(t)$ au pas de temps t par un facteur égal à $(1 - D(t))$, où $D(t)$ représente l'endommagement du matériau à l'instant t . La loi de comportement viscoélastique endommageable reliant la contrainte et la déformation s'écrit sous la forme :

$$\frac{\sigma(t)}{1 - D(t)} = \int_{-\infty}^t R(t - \tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (I-72)$$

L'évolution de l'endommagement est obtenue à partir d'un certain critère qui fait évoluer la fonction seuil. Pour un critère énergétique (Griffith 1921) initialement développé pour les matériaux fragiles, la fonction seuil est donnée par :

$$f(t) = Y(t) - K(D(t)) \quad (I-73)$$

et la loi de normalité :

$$f(t) \leq 0 \quad ; \quad \dot{D}(t) > 0 \quad ; \quad f(t)\dot{D}(t) = 0 \quad (I-74)$$

où $Y(t)$ est le taux de restitution de l'énergie élastique à l'instant t , $K(D(t))$ est une fonction qui dépend de l'endommagement.

Viscoelastic Continuum Damage Mechanics (VECD)

La mécanique continue de l'endommagement des milieux viscoélastiques VECD est basée sur les travaux de Schapery (Schapery 1981, 1987, 1997). Elle porte sur l'étude de la performance des EB en fatigue sous différentes conditions de chargement (Lee and Kim 2014; Safari et al. 2014; Underwood 2016; Underwood, Kim, and Guddati 2010; Wen and Bahia 2009).

Cette approche est basée sur le principe de pseudo-déformation ε^R (I-75), sur le principe de correspondance élastique-viscoélastique (E-VE) (I-76) (afin de transformer le problème viscoélastique en un problème élastique équivalent) et sur la définition d'un module sécant C qui dépend de l'endommagement S .

$$\varepsilon^R = \frac{1}{E_R} \int_0^t E(\xi - \tau) \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau \quad (I-75)$$

$$\sigma = \frac{dW^R}{d\varepsilon^R} = C(S)\varepsilon^R \quad (I-76)$$

où $C(S)$ est le pseudo-module sécant, S la variable d'endommagement, $E(t)$ le module de relaxation et ξ le temps réduit. En général la relation $C(S)$ est choisie de façon à recalculer des résultats obtenus expérimentalement. Parmi les formes trouvées dans la littérature (Kutay and Lanotte 2018) :

$$\begin{aligned} C &= \exp(aS^b) \\ C &= C_{10} - C_{11}S^{C_{12}} \end{aligned} \quad (I-77)$$

où $a, b, C_{10}, C_{11}, C_{12}$ sont les constantes de calibrages.

Cette approche a été initialement développée pour des problèmes soumis à des sollicitations cycliques. Ensuite, elle a été étendue par (Chehab et al. 2002) pour l'appliquer dans des scénarios de sollicitation monotone. L'histoire du développement de cette théorie est résumée sur la Figure I-42.

1964	Schapery develops a single integral thermodynamic constitutive theory for describing nonlinear viscoelastic phenomenon.
1975	Schapery derives theory to describe crack initiation and growth in viscoelastic media.
1981	Schapery derives theory to describe mechanical properties of viscoelastic materials with distributed flaws by generalizing fracture theories.
1987	Schapery advances viscoelastic damage theory by linking driving mechanisms to energy potentials.
1990	Kim and Little apply Schapery's generalized fracture theory to describe the response of asphalt concrete beams to repeated loading.
1997	Kim et al. apply Schapery's work potential theory to describe asphalt concrete fatigue under uniaxial fatigue loading.
2002	Daniel demonstrates monotonic and cyclic loading equivalency using the formulation of Kim et al. Chehab et al. demonstrate the application of time-temperature superposition principle under a state of growing tensile damage
2006	Underwood and Kim verify the formulation of Chehab and its applicability to FHWA ALF mixtures under constant rate loading.
2010	Underwood et al. derive a simplified version of the damage model (S-VECD) and reconcile the various approximations made in previous formulations.
2014	Sabouri et al. develop a generalized pseudostrain energy release rate failure criterion to unify fatigue failure across modes of loading.
2015	Norouzi and Kim predict the fatigue cracking performance of in-service pavements using the Layered ViscoElastic pavement analysis for Critical Distresses (LVECD) program that employs the S-VECD model.
2016	Wang and Kim develop a transfer function for fatigue cracking prediction by the LVECD program.

Figure I-42: Historie du développement de l'approche VECD, issue de (Association of Asphalt Paving Technologists 2016).

I.6.3 Approche TLS, modèle d'endommagement continu et non local

L'approche TLS (*Thick Level Set*), récemment développée à l'École Centrale de Nantes (Moës et al. 2011)(Stolz and Moës 2012), permet d'unifier les deux grandes familles de modélisation numérique de fissuration des structures, à savoir la mécanique de l'endommagement (pour gérer l'initiation de la fissure) et la mécanique de la rupture (pour gérer la propagation des fissures). Elle repose sur une modélisation non locale de l'endommagement et une technique de transition entre états endommagés et fissurés.

Dans cette approche, le problème d'évolution de l'endommagement est étudié comme un problème de propagation d'un front d'endommagement Γ_0 qui est représenté par l'iso-valeur d'une courbe de

niveau φ (NB : c'est une fonction distance signée telle que $\varphi > 0$ à l'intérieur de la zone d'endommagement). La valeur de l'endommagement dans la zone endommagée dépendra de la distance à ce front d'endommagement à partir d'une fonction $D(\varphi)$ appelée profil d'endommagement. L'évolution du front d'endommagement – séparant les zones saines et dégradées dans la structure – est calculée à partir d'une quantité non locale obtenue par intégration en tout point du front des quantités prises sur l'épaisseur de la bande endommagée. La zone totalement dégradée ($D = 1$) est la zone où la valeur de la Level Set (LS) est supérieure à une certaine longueur critique l_c . Le front de fissuration séparant la zone totalement et partiellement dégradée est ensuite détecté et une transition naturelle vers la fissuration est assurée en s'appuyant sur la méthode XFEM (Moës, Dolbow, and Belytschko 1999).

Le modèle TLS a été initialement développé (Moës et al. 2011) comme un modèle d'endommagement non-local qui permet de gérer les différents scénarios de fissuration comme l'initiation, la propagation, le branchement et la coalescence des fissures. Ensuite :

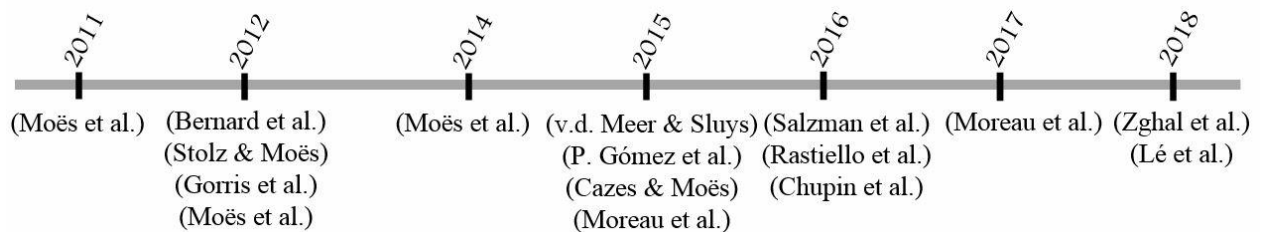


Figure I-43: Histoire du développement de l'approche TLS.

- (P.E. Bernard, Moës, and Chevaugéon 2012) ont proposé une première amélioration du modèle TLS au niveau de l'algorithme de calcul et l'approche de discrétisation spatiale.
- (Gorris 2012) a appliqué le modèle TLS afin d'étudier le processus de fissuration transverse et le délaminage des matériaux composites stratifiés. Ensuite (van der Meer and Sluys 2015) ont étudié la délamination en mode II.
- (Moës, Stolz, and Chevaugéon 2014) ont couplé l'endommagement local et non local (diffus) dans le modèle TLS.
- (Moreau et al. 2015) ont étudié pour la première fois avec le modèle TLS le problème de fissuration d'éprouvettes soumises à des chargements dynamiques.
- (Parrilla Gómez, Moës, and Stolz 2015) ont comparé le modèle TLS et le modèle de zone cohésive CZM. Ils ont montré la capacité du modèle TLS à imiter le modèle CZM en choisissant d'une manière convenable les paramètres du modèle TLS.
- Une comparaison avec l'approche par champs de phase (*Phase Field*) est réalisée dans les travaux de (Cazes and Moës 2015).
- (Salzman, Moës, and Chevaugéon 2016) ont étendu le modèle TLS pour le calcul des problèmes de propagation de fissure quasi-statique en 3D.
- (Rastiello, Moës, and Comi 2016) ont proposé une première extension du modèle TLS vers un modèle d'endommagement bi-dissipatif en se basant sur les travaux de Comi (Comi 2001; Comi and Perego 2001).
- (Chupin et al. 2016) ont utilisé cette approche pour la première fois dans le domaine des chaussées afin d'étudier la formation de bosses dans une chaussée semi-rigide.
- (Moreau et al. 2017) ont développé certains aspects numériques liés au modèle TLS. Ils ont introduit la méthode Fast Marching Modes qui permet de calculer les champs non-locaux d'une manière efficace (cf. I.6.3.2 mettre Fast Marching avant).

- (Zghal et al. 2018) ont étudié l'effet de la forme de l'entaille et du rayon des cavités sur la rupture des éprouvettes dans le domaine quasi-statique à partir du modèle TLS.
- Les auteurs (Lé, Moës, and Legrain 2018) ont proposé la deuxième version du modèle TLS appelée TLSV2. Dans cette version, la variable d'endommagement n'atteint jamais la valeur 1, la dissipation nécessaire pour casser complètement le matériau est prise en compte via l'introduction d'une zone cohésive. Cette approche permet d'éviter le besoin d'intégrer des valeurs de déformations infinies lorsque la variable d'endommagement tend vers 1. Elle permet également de conserver la quantité nécessaire à dissiper. Dans cette version ils ont amélioré la vitesse de convergence des solutions et ont également résolu certains problèmes liés à la version initiale du modèle TLS.

Dans les sections suivantes, on s'attachera à expliquer le principe du modèle non-local, on présente les équations du modèle local et l'approche de régularisation du modèle TLS. On explique également les aspects numériques utilisés pour l'extension du modèle TLS au domaine viscoélastique (cf. chapitre IV).

I.6.3.1 Principe de l'approche

On sait que la mécanique de la rupture ne permet pas de représenter les différents phénomènes de dégradation d'un matériau (endommagement puis fissuration, branchement, etc.) et que les modèles locaux d'endommagement souffrent de dépendance au maillage. L'approche TLS permet de remédier ces deux problèmes en couplant la mécanique de l'endommagement et de la rupture. Elle est similaire à un modèle d'endommagement du type non local intégral avec une longueur d'intégration qui évolue.

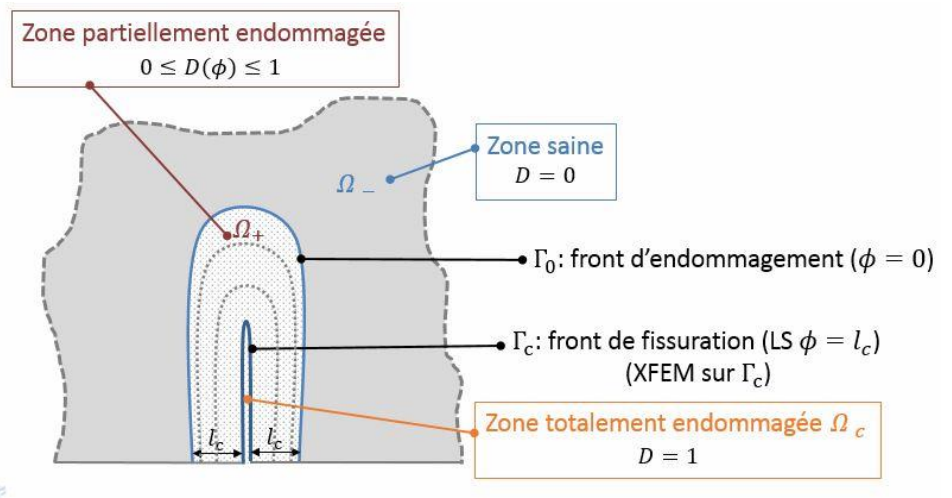


Figure I-44: Différents domaines de définition vus par le modèle TLS.

Pour ce modèle, la zone d'endommagement est donnée explicitement en fonction d'une courbe de niveau ($\Gamma_0 = \Gamma_{\phi=0}$). Dans cette zone la variable d'endommagement est fonction de la distance au front d'endommagement Γ_0 via une fonction appelée profil d'endommagement $D(\phi)$, paramètre du modèle TLS (Figure I-45).

Cette fonction $D(\phi)$ dépend d'une longueur caractéristique l_c (Deux exemples de profil d'endommagement, linéaire et quadratique, sont donnés sur la figure I-39), telle que la zone totalement endommagée ($D = 1$) est la zone où la valeur de ϕ est supérieure ou égale à l_c (Figure I-44). Une fois la zone de fissuration est identifiée, une discontinuité du champ de déplacement

représentant la fissure est introduite par la méthode X-FEM. Ainsi, le problème d'évolution de l'endommagement est représenté par la propagation d'une courbe de niveau (*Level Set*).

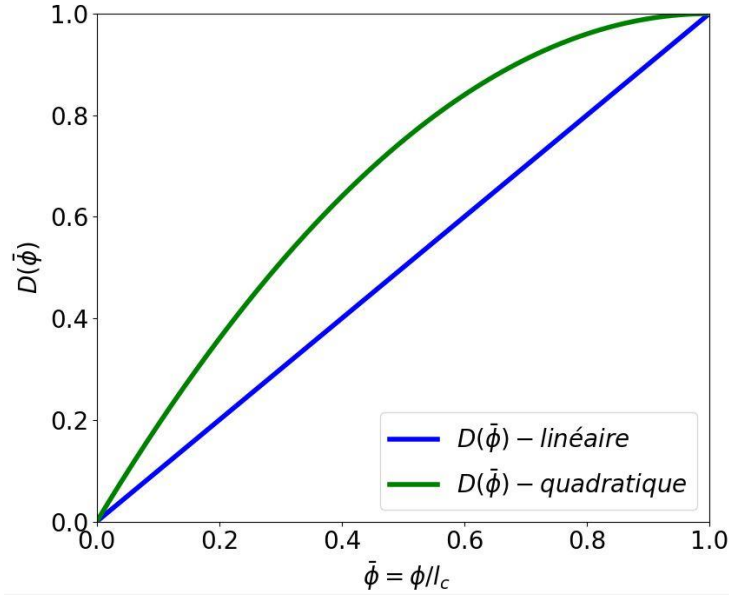


Figure I-45: Exemples de profil d'endommagement.

Afin de résoudre le phénomène de localisation parasite inhérent au modèle d'endommagement local, le modèle TLS consiste à limiter le gradient spatial de l'endommagement tel que :

$$\|\nabla D\| = f(D) \quad (\text{I-78})$$

En choisissant une fonction bornée $f(D) = D'(\varphi(D))$, cette dernière équation devient :

$$\|\nabla \varphi\| = 1 \quad (\text{I-79})$$

, dans ce cas φ est une fonction de distance signée (positive dans Ω_+). Ici on présente la version simplifiée où le gradient ne peut pas évoluer, voir (Moës et al. 2014) pour le cas d'endommagement diffus. Cette dernière équation s'appelle l'équation eikonale, elle admet la solution suivante :

$$\varphi(x) = \pm \min_{y \in \Gamma_0} (\|x - y\|) \quad (\text{I-80})$$

L'équation (I-80) signifie que la valeur de la fonction φ au point x est égale à la distance minimale séparant le point x du front d'endommagement Γ_0 . La dérivée de $\|\nabla \varphi\| = 1$ par rapport au temps t conduit à :

$$\nabla \dot{\varphi} \cdot \nabla \varphi = 0 \quad (\text{I-81})$$

Afin de respecter cette dernière équation, il faut que la vitesse $\dot{\varphi}$ soit uniforme le long du gradient de φ . L'évolution de l'endommagement est alors réduite à l'évolution du front d'endommagement Γ_0 , puisque l'endommagement et son évolution en tout point de la zone endommagée peuvent être déduits de la distance au front Γ_0 et la vitesse du front $\dot{\varphi}$.

La vitesse du front $\dot{\varphi}$ appartient à l'espace des champs qui sont constants suivant le gradient de φ . Cet espace $\bar{\mathcal{Y}}$ est défini par :

$$\bar{\mathcal{Y}} = \{\bar{y} \in L^2(\Omega_+), \quad \nabla \bar{y} \cdot \nabla \varphi = 0\} \quad (\text{I-82})$$

On peut citer comme exemple de champs non locaux $\bar{Y}$ et $\overline{H(D(\varphi))}$.

Afin de calculer la quantité non locale $\bar{X} \in \bar{\mathcal{Y}}$ associée un champ local X , il faut résoudre le problème variationnel suivant :

$$\int_{\Omega_+} \bar{X} \bar{X}^* D'(\varphi) d\Omega = \int_{\Omega_+} X \bar{X}^* D'(\varphi) d\Omega \quad \forall \bar{X}^* \in \bar{\mathcal{Y}} \quad (\text{I-83})$$

On peut montrer que la variable non-locales $\bar{X}$ peut-être écrit comme une valeur moyenne de la variable locale X :

$$\bar{X}(s) = \frac{\int_0^{l(s)} X(\varphi, s) D'(\varphi) \left(1 - \frac{\varphi}{\rho(s)}\right) d\varphi}{\int_0^{l(s)} D'(\varphi) \left(1 - \frac{\varphi}{\rho(s)}\right) d\varphi} \quad (\text{I-84})$$

C'est une quantité qui dépend de la position sur le front Γ_0 , elle est constante le long du gradient de φ . Notons que dans le code eXlibris, on n'utilise pas cette équation pour calculer les champs non locaux, par contre on s'appuie sur la méthode Lagrangienne et la méthode Fast Marching Modes présentées dans la section I.6.3.2.2.

Et puisque est la force thermodynamique responsable de l'évolution du front d'endommagement ($\bar{Y}$) est calculée par intégration sur une longueur l qui varie entre 0 et l_c , on peut dire :

- Il s'agit d'une quantité non locale (obtenue par intégration). Ainsi la régularisation est naturellement introduite dans ce modèle. On peut comparer cette régularisation à celle de la formulation non locale intégrale mais pour une longueur d'intégration qui varie entre 0 et l_c .
- Pour une longueur d'intégration d'épaisseur nulle ($l(s) = 0$), la force thermodynamique tend vers la quantité locale ($\bar{Y} \approx Y$). Donc le passage entre le calcul local et non local est automatique, ainsi la délocalisation est limitée dans des petites zones et n'est pas introduite partout dans le domaine.

Ce modèle possède plusieurs avantages vis-à-vis les autres approches présentées ci-avant, parmi lesquels on peut citer :

- 1- La prise en compte de la transition entre la localisation (endommagement) et la fissuration.
- 2- La délocalisation n'est pas introduite sur tout le domaine, cela conduit une réduction drastique du temps de calcul : La non localisation est restreinte à Ω_+ contrairement à une approche non locale intégrale par exemple, où c'est tout le domaine qui est non local et où on doit calculer des intégrales sur tout le domaine. De plus, le problème de propagation est de dimension (n-1) (par exemple en 2D, on cherche à calculer la propagation du front, qui est une ligne) ce qui réduit d'autant plus les temps de calcul.
- 3- L'indépendance au maillage en terme de l'énergie dissipée, c'est un modèle d'endommagement non local.
- 4- Il permet de prendre en compte l'effet d'échelle (*material size effect*) (Parrilla Gómez et al. 2017).
- 5- Il permet de simuler des situations de branchement et de coalescence de fissures.

I.6.3.2 Calcul des champs non locaux

On présente dans cette partie quelques aspects numériques liés à la discrétisation spatiale et à la construction des champs non locaux.

I.6.3.2.1 Fast marching

La méthode *fast marching* est une méthode numérique utilisée pour avancer un front de façon monotone (Sethian 1996) (Adalsteinsson and Sethian 1999). Elle permet de résoudre efficacement l'équation Eikonale. Cette méthode dérive de la méthode des surfaces de niveau LS (LS pour *Level Set*) (Osher and Sethian 1988)(Osher and Fedkiw 2001). Ces méthodes numériques sont utilisées dans nombreux problèmes impliquant des interfaces qui se propagent et qui cherchent à calculer la position de ces fronts (*Tracking interfaces*). Dans ces méthodes, le front Γ à suivre est défini d'une manière implicite, c'est-à-dire comme étant l'iso-zéro d'une fonction φ (cf. équation (I-85)). Cette dernière s'appelle la fonction Level Set. Ainsi, on peut gérer le problème du branchement et du chevauchement des interfaces d'une manière efficace et naturelle (Figure I-46). Cette technique est largement utilisée dans le domaine du traitement de l'image, dans les problèmes de front de flamme en combustion, dynamique des fluides, etc.

$$\Gamma(t) = \{ (x, t) \mid \varphi(x, t) = 0 \} \quad (I-85)$$

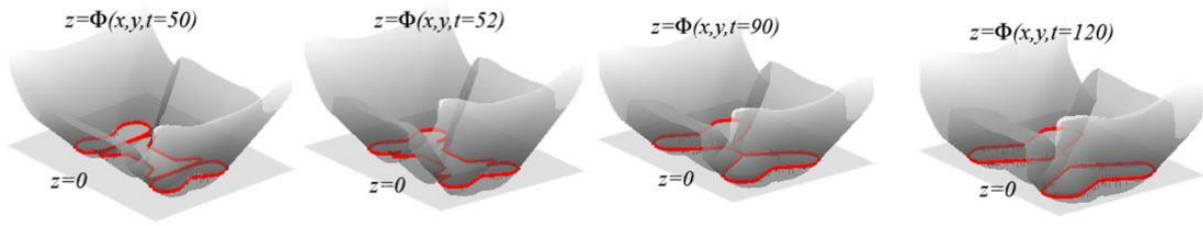


Figure I-46: Évolution du contour $z=0$ de la fonction Level Set Φ (<https://profs.etsmtl.ca/hlombaert/levelset/>).

L'équation d'évolution de la LS est donnée par :

$$\varphi_t + F|\nabla\varphi| = 0 \quad (I-86)$$

où φ_t est la dérivée de la fonction φ par rapport au temps t et F est la vitesse de propagation du front (*speed fonction*). Cette équation est une équation hyperbolique non linéaire également appelée l'équation de Hamilton-Jacobi.

Cette technique est utilisée dans le code eXlibris de l'ECN afin de propager le front d'endommagement une fois l'avancée du front d'endommagement $\Delta\varphi$ obtenue.

I.6.3.2.2 Fast Marching Modes Method

On a présenté ci-avant le modèle TLS et l'importance de calculer des champs non locaux afin de régulariser le critère d'endommagement local. Deux algorithmes de résolution sont développés et implémentés dans le code de calcul eXlibris, la méthode Lagrangienne et la méthode Fast Marching Modes. Dans la suite on présente les méthodes de calcul des champs non locaux à partir de ces deux techniques.

La méthode Lagrangienne résout l'équation (I-83) de façon faible au moyen d'un multiplicateur de Lagrange $\lambda \in \mathcal{Y}_0$ qui permet d'imposer la condition $\bar{X} \in \bar{\mathcal{Y}}$:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_+} (\bar{X}\bar{X}^* D'(\varphi) + \beta \frac{h_e^2}{l_c} \nabla \bar{X} \cdot \nabla \bar{X}^*) d\Omega + \int_{\Omega_+} l_c (\nabla \lambda \cdot \nabla \varphi) (\nabla \bar{X}^* \cdot \nabla \varphi) d\Omega \\
 = \int_{\Omega_+} X\bar{X}^* D'(\varphi) d\Omega \quad \forall \bar{X}^* \in \bar{\mathcal{Y}} \\
 \int_{\Omega_+} l_c (\nabla \lambda^* \cdot \nabla \varphi) (\nabla \bar{X} \cdot \nabla \varphi) d\Omega = 0 \quad \forall \lambda^* \in \mathcal{Y}_0 \\
 \mathcal{Y}_0 = \{y \in L^2(\Omega_+), \quad y = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}
 \end{aligned} \tag{I-87}$$

où h_e est la taille caractéristique du maillage. C'est la méthode adoptée dans les premiers travaux sur le modèle TLS (Moës et al. 2011).

L'autre méthode, nommée **Fast Marching Modes**, est développée dans (Moreau et al. 2017). Elle est basée sur la discrétisation de l'espace $\bar{\mathcal{Y}}$ sur une base des fonctions appelées modes.

La construction des modes $(M_i)_{i \in S_M}$, où S_M désigne l'ensemble des modes, est liée directement aux points d'intersection entre le front d'endommagement Γ_0 et les bords des éléments du maillage, ces nœuds constituent l'ensemble des modes S_M (Figure I-47). Les nœuds qui se trouvent dans la zone d'endommagement Ω_+ appartiennent à l'ensemble N_+ , alors que les nœuds de la zone saine Ω_- appartiennent à l'ensemble N_- . L'ensemble des nœuds du maillage N est égal à $N_+ \cup N_-$.

Les modes (M_i) sont construits à partir de l'équation :

$$\nabla M_i \cdot \nabla \varphi^h = 0 \quad \forall i \in S_M \tag{I-88}$$

où φ^h est la discrétisation spatiale de φ obtenue par interpolation linéaire – avec les fonctions d'interpolation linéaires L_i – des valeurs aux nœuds φ_i telle que $\varphi^h(x) = \sum_{i \in N} \varphi_i L_i(x)$. Les modes M_i sont discrétisés de la même manière :

$$M_i(x) = \sum_{j \in N_+} M_{ij} L_j(x) \quad \forall i \in S_M \tag{I-89}$$

Une fois l'équation (I-88) résolue (à l'aide de la méthode Fast Marching (Voir (Moreau et al. 2017)) pour étendre les modes dans la zone d'endommagement suivant le gradient au front Γ_0), on obtient les modes (M_i) . La quantité non locale $\bar{X}$ est discrétisée sur la base des modes M_i :

$$\bar{X}^h(x) = \sum_{i \in S_M} \bar{X}_i M_i(x) \tag{I-90}$$

En injectant (I-90) dans l'équation (I-83), on obtient les coefficients $\bar{X}_i$ via le produit matriciel suivant :

$$\{\bar{X}\} = ([M]\{A\}) ./ ([M]\{B\}) \tag{I-91}$$

avec $\{\bar{X}\} = (\bar{X}_i)_{i \in S_M}$, $[M] = (M_{ij})_{i \in S_M, j \in N_+}$ et l'opération $(./)$ indique la division terme à terme. Les composants du vecteur $\{A\}$ et $\{B\}$ sont :

$$A_i = \int_{\Omega \setminus \Omega_c} X L_i D(\varphi^h) d\Omega \quad \forall i \in N_+ \tag{I-92}$$

$$B_i = \int_{\Omega \setminus \Omega_c} L_i D(\varphi^h) d\Omega \quad \forall i \in N_+ \quad (\text{I-93})$$

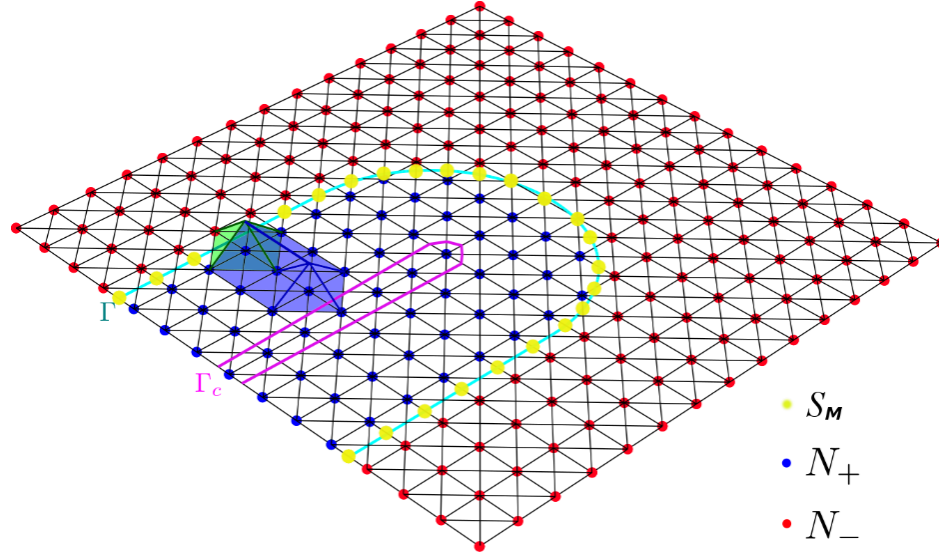


Figure I-47: Illustration des modes dans la zone d'endommagement, issue de (Lé 2018).

Dans cette thèse on a adopté cette méthode pour calculer des champs non locaux. Une comparaison entre la méthode Fast Marching Modes et la méthode Lagrangienne est détaillée dans (Lé 2018).

I.6.3.3 Algorithme de calcul explicite en quasi-fragile

On présente dans cette partie l'algorithme explicite de prédiction-correction pour des matériaux pour des matériaux élastiques endommageables dont le comportement est indépendant du temps (Moreau et al. 2017)(Lé 2018).

Dans les travaux menés jusqu'à présent sur la méthode TLS, la densité d'énergie libre, fonction d'une variable d'endommagement scalaire D , est choisie de la façon suivante :

$$\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, D) = \frac{1}{2} (1 - D) \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{I-94})$$

où $\mathbb{C}$ est le tenseur de Hooke d'ordre 4. Le tenseur des contraintes de Cauchy et le taux de restitution d'énergie élastique dérivent de cette énergie :

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, D) = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (1 - D) \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{I-95})$$

$$Y = \frac{\partial \Phi}{\partial D} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{I-96})$$

L'équation locale d'évolution de l'endommagement est donnée par un critère fonction du taux de restitution d'énergie et d'une fonction d'adoucissement croissante $H(D)$:

$$f(Y, D) = Y - Y_c H(D) \leq 0, \quad \dot{D} \geq 0, \quad f(Y, D) \dot{D} = 0 \quad (\text{I-97})$$

telle que $H(D = 0) = 1$, cette condition conduit au critère d'initiation local de la forme $Y - Y_c = 0$. Cette fonction d'adoucissement n'a été introduite dans le modèle TLS qu'après le travail de (Moës et al. 2014) afin d'étudier les matériaux quasi-fragiles (Le cas $H(D) = 1$ correspond à un matériau purement fragile).

La version non locale de cette équation d'évolution est donnée par :

$$f_{TLS} = \bar{Y} - Y_c \overline{H(D)} \leq 0, \quad \bar{D} \geq 0, \quad f_{TLS} \bar{D} = 0 \quad (I-98)$$

Cette équation s'écrit également sous la forme :

$$f_{TLS} = \bar{Y} - Y_c \overline{H(D(\varphi))} \leq 0, \quad \dot{\varphi} \geq 0, \quad f_{TLS} \dot{\varphi} = 0 \quad (I-99)$$

Le problème mécanique à résoudre consiste à trouver $u \in \mathcal{C}$ qui vérifie l'équation d'équilibre :

$$\int_{\Omega} \sigma(D, u) : \varepsilon(\delta u) d\Omega = \int_{\Gamma_T} T_d \cdot \delta u d\Gamma \quad \forall \delta u \in \mathcal{C}_0 \quad (I-100)$$

avec :

$$\mathcal{C} = \{v \in H^1(\Omega), v = u_d \text{ sur } \Gamma_u\} \quad (I-101)$$

Les différentes conditions aux limites s'écrivent :

$$u = \lambda u_{ref} \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (I-102)$$

$$\sigma(u, \varphi) \cdot n = \lambda T_{ref} \quad \text{sur } \Gamma_T \quad (I-103)$$

$$\sigma(u, \varphi) \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (I-104)$$

tel que u_{ref} et T_{ref} sont le champ de déplacement constant de référence défini sur Γ_u et le champ de contrainte de référence défini sur Γ_T .

Le chargement appliqué au sein de l'algorithme explicite est donné sous la forme $F = \lambda F_{ref}$ où F_{ref} peut représenter les deux types de chargement appliqués sur Γ_u et Γ_T , ce chargement de référence est défini par l'utilisateur. Le facteur de chargement λ est une inconnu du problème.

Les équations régissant le problème sont :

$$\int_{\Omega} \sigma(D(\varphi^{t+\Delta t}), u_{ref}^{t+\Delta t}) : \varepsilon(\delta u) d\Omega = \int_{\Gamma_T} T_{ref} \cdot \delta u d\Gamma \quad \forall \delta u \in \mathcal{C}_0 \quad (I-105)$$

$$f_i(u^{t+\Delta t}, \varphi^{t+\Delta t}) \leq 0, \quad \Delta\varphi_i = (\varphi^{t+\Delta t} - \varphi^t) \geq 0, \quad f_i(u^{t+\Delta t}, \varphi^{t+\Delta t}) \Delta\varphi_i = 0 \quad \forall i \in S_M \quad (I-106)$$

$$\max_{i \in S_M} \Delta\varphi_i = \Delta\varphi_{max} \quad (I-107)$$

où $\Delta\varphi_{max}$ est un paramètre numérique fixé par l'utilisateur, en général il est égal une certaine fraction de la taille des éléments du maillage. L'équation (I-107) est une condition aux limites supplémentaire imposée dans l'algorithme explicite, elle consiste à limiter l'avancement maximal du front d'endommagement.

Connaissant les champs $(u^t, \varphi^t, \lambda^t)$ à l'instant t , l'algorithme explicite cherche ces champs à l'instant $t + \Delta t$ ($u^{t+\Delta t}, \varphi^{t+\Delta t}, \lambda^{t+\Delta t}$). Les étapes de résolution de ce problème sont :

Étape 1

Une solution de référence $u_{ref}^{t+\Delta t}$ est calculée à partir de l'équation (I-108) pour un chargement imposé F_{ref} et un état d'endommagement fixé, égal à φ^t :

$$\int_{\Omega} \sigma(D(\varphi^t), u_{ref}^{t+\Delta t}) : \varepsilon(\delta u) d\Omega = \int_{\Gamma_T} T_{ref} \cdot \delta u d\Gamma \quad \forall \delta u \in \mathcal{C}_0 \quad (I-108)$$

Étape 2

Les champs non locaux $\bar{Y}$ et $\bar{H}$ de l'équation (I-99) sont calculés à partir de φ^t et $u_{ref}^{t+\Delta t}$ (cf. I.6.3.2.2).

Étape 3

Le facteur de chargement $\lambda^{t+\Delta t}$ est calculé afin de respecter l'équation d'évolution du front d'endommagement tel que :

$$\lambda^t = \sqrt{\min_{i \in S_M} \frac{b_i^t}{a_i^t}} \quad (I-109)$$

avec :

$$\begin{aligned} a_i^t &= \langle Y(u_{ref}^{t+\Delta t}), D'(\varphi^t) \rangle \\ b_i^t &= \langle Y_c H(D(\varphi^t)), D'(\varphi^t) \rangle \end{aligned} \quad (I-110)$$

où $\langle X, D'(\varphi) \rangle$ représente la quantité non locale qui vérifie l'équation :

$$\int_{\Omega_+} \bar{X} D'(\varphi) M_i d\Omega = \int_{\Omega_+} X D'(\varphi) M_i d\Omega \quad \forall i \in S_M \quad (I-111)$$

Le champ de déplacement u^t s'obtient simplement par :

$$u^t = \lambda^t u_{ref}^{t+\Delta t} \quad (I-112)$$

Étape 4

L'incrément du facteur de chargement $\Delta\lambda^{pred}$ est ensuite calculé après linéarisation du critère d'évolution de l'endommagement et la résolution du problème de complémentarité linéaire (LCP) :

$$\begin{aligned} f_i^{pred} &= f_i^t + \alpha_i^t \Delta\lambda^{pred} - \beta_i^t \Delta\varphi_i \quad \forall i \in S_M \\ f_i^{pred} &\leq 0, \quad \Delta\varphi_i \geq 0, \quad f_i^{pred} \Delta\varphi_i = 0 \quad \forall i \in S_M \end{aligned} \quad (I-113)$$

tel que :

$$\begin{aligned} \alpha_i^t &= 2\lambda^t \bar{Y}_{ref,i}^t \quad \forall i \in S_M \\ \beta_i^t &= \langle -Y_c H'(D(\varphi^t)) D'(\varphi^t), D'(\varphi^t) \rangle \end{aligned} \quad (I-114)$$

La condition (I-107) conduit à :

$$\Delta\lambda^{pred} = \min_{i \in S_M} \frac{\beta_i^t \Delta\varphi_{max} - f_i^t}{\alpha_i^t} \quad (I-115)$$

Étape 5

Pour chaque mode i , on calcule l'avancement du front d'endommagement $\Delta\varphi_i$ tel que :

$$\Delta\varphi_i = \max\left(0, \frac{f_i^t + \Delta\lambda^{pred} \alpha_i^t}{\beta_i^t}\right) \quad \forall i \in S_M \quad (I-116)$$

Étape 6

Le front d'endommagement est avancé :

$$\varphi^{t+\Delta t} = \varphi^t + \Delta\varphi \quad (I-117)$$

Les champs $u^{t+\Delta t}$ et $\lambda^{t+\Delta t}$ sont calculés à partir de l'étape 1,2 et 3 du pas de calcul suivant.

I.7 Bilan

Ce chapitre présente les principaux éléments nécessaires pour atteindre les objectifs de la thèse qui porte sur la modélisation de la fissuration dans les mélanges bitumineux viscoélastiques.

Dans un premier temps on a présenté la structure d'une route et les différentes pathologies qui affectent la durée de vie et le comportement de ces structures. Ensuite, on a présenté les méthodes de caractérisation du comportement réversible des mélanges bitumineux dans les deux domaines fréquentiel et temporel. On a présenté également les modèles rhéologiques qui permettent de simuler leurs comportements. Pour ces modèles rhéologiques on a montré l'importance de passer d'un modèle à spectre de relaxation continu vers un autre à spectre discret et les approches qui permettent d'obtenir la réponse des matériaux viscoélastiques d'une manière incrémentale.

Les différents essais de laboratoire étudiant la fissuration des EB ont été présentés. Un intérêt est porté aux essais sous chargement monotone, Ce type d'essai est ce qu'on cherche à étudier dans les prochains chapitres. Pour ces essais, on a présenté l'effet des conditions de chargement comme la température et la vitesse de chargement sur la résistance à la rupture des EB. Un même matériau est notamment susceptible de subir une rupture du type ductile ou fragile, selon les vitesses ou températures d'essai. Dans la dernière partie de ce chapitre on a présenté les approches de la mécanique de l'endommagement et la mécanique la rupture, leurs limitations et leurs applications dans le domaine des chaussées. Enfin, on a présenté le modèle TLS qui bénéficie des avantages de ces deux approches. Le principe de régularisation de ce modèle, certains aspects numériques et l'algorithme de résolution du modèle TLS sont détaillés. Ce modèle nous servira de socle pour le travail de cette thèse.

Chapitre II : Développement d'un modèle d'endommagement local 1D basé sur le modèle de Poynting-Thomson

II.1 Contenu et démarche

Ce chapitre aborde le développement d'un modèle d'endommagement local basé sur le modèle viscoélastique de Poynting-Thomson (PT). Ce modèle doit pouvoir rendre compte, au moins qualitativement, de certains comportements caractéristiques des EB observés lors des essais de rupture sous chargement monotone (chapitre I).

L'intérêt du modèle viscoélastique de solide linéaire standard de PT est qu'il permet de modéliser les phénomènes de relaxation et de fluage avec un faible nombre d'éléments rhéologiques. Il offre ainsi la possibilité de mener aisément des études analytiques ou semi-analytiques au niveau local. Ce modèle pourra être étendu par la suite à un modèle de Kelvin-Voigt généralisé à spectre plus étendu, pour aller vers une modélisation plus réaliste des EB.

Le développement d'une loi de comportement viscoélastique endommageable passe par l'introduction de variable(s) d'endommagement, par le choix d'un critère d'endommagement et la proposition d'une loi d'évolution de la variable d'endommagement.

Dans le chapitre III, ce modèle local sera plongé dans le cadre du formalisme « régularisant » TLS pour être capable de modéliser le comportement endommageable des structures à comportement viscoélastique de PT.

Le chapitre II se compose de quatre parties :

Dans la première partie, on rappelle les principes de la thermodynamique et l'expression de l'inégalité de Clausius-Duhem qui nous permettront d'assurer la cohérence physique de la loi de comportement développée ici.

Dans la deuxième partie, nous faisons choix du modèle de comportement de PT au sein duquel l'endommagement est introduit au travers du concept de contraintes effectives. L'application de l'inégalité de Clausius-Duhem à ce modèle permet de mettre en évidence les termes de dissipation liés à la viscosité d'une part et à l'endommagement d'autre part. Ces expressions conduisent aux conditions à respecter pour une évolution thermodynamiquement admissible de l'état du matériau.

Dans la troisième partie, on étudie deux types de critère d'endommagement : l'un basé sur la dissipation viscoélastique et l'autre basé sur le taux de restitution d'énergie élastique. Les conséquences de ces choix sont confrontées aux observations expérimentales faites sur des essais de traction directe sur bitume et EB.

La quatrième partie porte sur le choix de la loi d'évolution d'endommagement. Celle-ci doit être capable de rendre compte au niveau local d'une réponse (σ, ε) « adoucissante », et « non brutale » (terminologie précisée plus loin) à l'initiation de l'endommagement, ceci à vitesse de déformation imposée. Cette condition s'avère en effet nécessaire ultérieurement, d'une part pour des considérations numériques liées à l'implémentation des lois locales dans la TLS, d'autre part pour pouvoir rendre compte du phénomène de réponse fragile ou ductile des essais sur éprouvettes de bitume ou d'enrobés, en fonction des conditions d'essais (température, vitesse de sollicitation). Les réponses aux différents modèles sont étudiées à la fois sur le plan analytique et sur le plan numérique à partir d'un premier logiciel développé dans le cadre de cette thèse.

II.2 Viscoélasticité, endommagement, et principes de la thermodynamique

II.2.1 Introduction

On présentera dans cette partie un rappel sur les deux premiers principes de la thermodynamique, la dissipation, l'entropie et l'expression de l'inégalité de Clausius-Duhem.

II.2.2 Premier et second principes de la thermodynamique

II.2.2.1 Le principe de conservation d'énergie (premier principe)

Ce principe est connu sous le nom de la loi de conservation de l'énergie. Il a été formulé pendant le 19^e siècle par le physicien allemand Julius Robert Mayer (Mayer 1842) (Mayer 1862).

Ce principe stipule que la variation de l'énergie totale d'un système de volume de matière V lors d'une transformation est égale à la somme du travail des efforts extérieurs (dW_e) exercés sur le système et de la quantité de chaleur (dQ_e) apportée au système :

$$d\mathcal{E} = dW_e + dQ_e \quad (\text{II-1})$$

Ce principe stipule également l'existence d'une fonction d'état extensive $\mathcal{U}$ telle que la variation de l'énergie totale du système est égale à la variation d'énergie interne et de la variation de l'énergie cinématique $\mathcal{K}$:

$$d\mathcal{E} = d\mathcal{U} + d\mathcal{K} \quad (\text{II-2})$$

D'où l'énoncé du premier principe :

$$d\mathcal{U} + d\mathcal{K} = dW_e + dQ_e \quad (\text{II-3})$$

En introduisant l'énergie interne spécifique e telle que $\mathcal{U} = \int_V \rho e dV$ et en utilisant le principe des puissances virtuelles, le premier principe pour les milieux continus conduit à l'équation d'équilibre de l'énergie interne :

$$d\mathcal{U} = \frac{d}{dt} \int_V \rho e dV = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV + \int_V r dV - \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{II-4})$$

où ρ , r et $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ sont respectivement la masse volumique (ou la densité spatiale), la densité volumique de production interne de chaleur extérieure et le vecteur courant de chaleur par unité de surface.

La forme locale spatiale de ce principe – dans le domaine des petites déformations (Lemaitre and Chaboche 1990) – s'écrit :

$$\rho \frac{de}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + (r - \nabla \cdot \mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{x} \in V, \quad \forall t \quad (\text{II-5})$$

II.2.2.2 Le deuxième principe de la thermodynamique

La deuxième loi de la thermodynamique stipule l'accroissement du désordre dans un système isolé de volume V d'une manière irréversible. Pour ce principe, on définit une fonction

thermodynamique extensive qui quantifie le désordre du système. Cette quantité s'appelle l'entropie S et est associée à la température absolue T .

Le second principe stipule que le taux de production d'entropie est toujours supérieur au taux de chaleur reçue, divisé par la température (Lemaitre & Chaboche, 1990). La forme générale de la seconde loi est :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho s dV \geq \int_V \frac{r}{T} dV - \int_{\partial V} \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{II-6})$$

où s est l'entropie spécifique du matériau (entropie par unité de masse).

Le signe $\geq$ traduit deux types de processus d'évolution possible ; l'égalité correspond à un processus réversible tandis que l'inégalité stricte correspond à un processus irréversible.

Par définition un processus thermodynamique entre deux états A et B ($A \rightarrow B$) est dit réversible si on peut retrouver l'état initial A à partir de l'état final B en suivant le même chemin (Figure II-1).

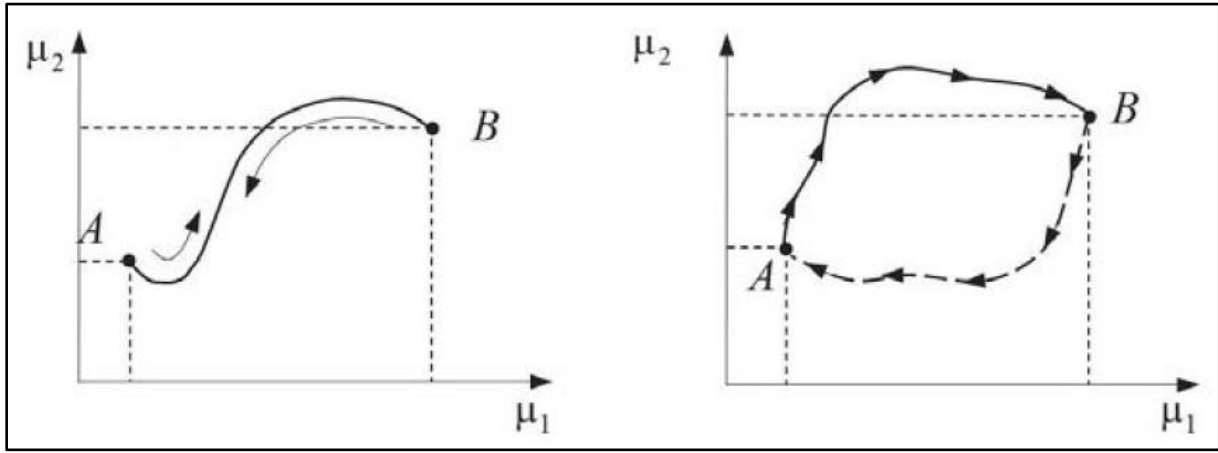


Figure II-1: Processus réversible (à gauche) et irréversible (à droite) dans l'espace thermodynamique, μ_1 et μ_2 sont les variables thermodynamiques (Oliver and de Saracibar 2016).

Au niveau local, le second principe se réécrit sous la forme :

$$\rho \frac{ds}{dt} - \left(\frac{r}{T} - \nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} \right) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V, \quad \forall t \quad (\text{II-7})$$

II.2.2.3 Inégalité de Clausius-Duhem

L'inégalité de Clausius-Duhem s'exprime à partir de l'énergie libre spécifique ψ définie par :

$$\psi = e - Ts \quad (\text{II-8})$$

Partant du premier principe de la thermodynamique, l'équation (II-5) s'écrit :

$$\rho \dot{e} - \sigma : \dot{\epsilon} = (r - \nabla \cdot \mathbf{q}) \quad (\text{II-9})$$

À partir du deuxième principe donné par l'équation (II-7) on obtient :

$$\rho \dot{s} \geq \frac{1}{T} (\rho \dot{e} - \sigma : \dot{\epsilon}) + \frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T \quad (\text{II-10})$$

Puisque

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} = \text{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) = \frac{1}{T} \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T \quad (\text{II-11})$$

Le regroupement des termes conduit à la relation suivante :

$$\rho(\dot{\epsilon} - T\dot{s}) - \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \leq -\frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \nabla T \quad (\text{II-12})$$

En dérivant l'équation (II-8) par rapport au temps t , on peut remplacer $\dot{\epsilon} - T\dot{s}$ par $\dot{\psi} + s\dot{T}$. On trouve finalement l'inégalité de Clausius Duhem :

$$\Phi = \Phi_{int} + \Phi_{therm} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \rho(\dot{\psi} + s\dot{T}) - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \nabla T \geq 0 \quad (\text{II-13})$$

où la dissipation totale Φ est égale à la somme de la dissipation intrinsèque Φ_{int} et la dissipation thermique $\Phi_{therm} = -\frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \nabla T$.

Dans la suite on dit qu'un processus est thermodynamiquement admissible, si à chaque instant de l'évolution du système l'inégalité de Clausius-Duhem est respectée.

Dans le cas des processus de transformation isotherme ($\dot{T} = 0$) et uniforme ($\nabla T = 0$) la dissipation s'écrit :

$$\Phi = \Phi_{int} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \rho\dot{\psi} \geq 0 \quad (\text{II-14})$$

II.2.2.3.1 Application à un modèle viscoélastique avec partition des déformations

En vue de la suite, appliquons (II-14) au cas d'un modèle viscoélastique à variable d'endommagement unique D avec partition des déformations sous la forme : $\epsilon = \epsilon^{VE} + \epsilon^E$. Prenons comme variables d'état les quantités ϵ , ϵ^{VE} et D et considérons la fonction $\psi(\epsilon, \epsilon^{VE}, D)$. (II-14) devient :

$$\left(\sigma - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \right) \dot{\epsilon} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon^{VE}} \dot{\epsilon}^{VE} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} \dot{D} \geq 0 \quad (\text{II-15})$$

La considération d'évolutions réversibles non dissipatives (variations de déformations purement élastiques) conduit à l'égalité :

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \quad (\text{II-16})$$

et donc par suite à l'inégalité :

$$-\rho \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon^{VE}} \dot{\epsilon}^{VE} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} \dot{D} \geq 0 \quad (\text{II-17})$$

Notons $-\sigma^{VE}$ et $-Y$ les quantités associées à ϵ^{VE} et D telles que :

$$-\sigma^{VE} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon^{VE}} \quad \text{et} \quad -Y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} \quad (\text{II-18})$$

Une façon d'assurer la positivité de (II-17) est de postuler l'existence d'un potentiel de dissipation dual convexe $\varphi^*(\sigma^{VE}, Y; \epsilon, \epsilon_1, D)$ tel que :

$$\dot{\epsilon}^{VE} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \sigma^{VE}} \quad \text{et} \quad \dot{D} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial Y} \quad (\text{II-19})$$

Par la suite, on considèrera l'hypothèse de découplage thermodynamique qui suppose chacun des termes de (II-17) est positif.

Dans le cas de l'utilisation de potentiel de dissipation, une condition suffisante pour satisfaire cette hypothèse est d'écrire ϕ^* sous la forme de la somme des deux fonctions convexes $\varphi^{*VE}(\sigma^{VE}; \varepsilon, \varepsilon_1, D)$ et $\varphi^{*Y}(Y; \varepsilon, \varepsilon_1, D)$ conduisant aux relations :

$$\dot{\varepsilon}^{VE} = \frac{d\varphi^{*VE}}{d\sigma^{VE}} \quad \text{et} \quad \dot{D} = \frac{d\varphi^{*Y}}{dY} \quad (\text{II-20})$$

Nota : il peut être intéressant de sortir de cette hypothèse pour construire des modèles avec autoréparation.

II.3 Modèle de Poynting-Thomson endommageable et inégalité de Clausius Duhem

L'objectif visé de cette partie est de construire une loi de comportement avec endommagement du modèle viscoélastique de Poynting-Thomson (PT) en tenant compte de l'inégalité de Clausius-Duhem pour avoir des évolutions thermodynamiquement admissibles.

II.3.1 Modèle de Poynting-Thomson

Comme rappelé au chapitre I, le modèle rhéologique de Poynting-Thomson (Figure II-2) est constitué d'un modèle de Kelvin-Voigt (un ressort et un amortisseur linéaire montés en parallèle) monté en série avec un ressort de rigidité E_0 .

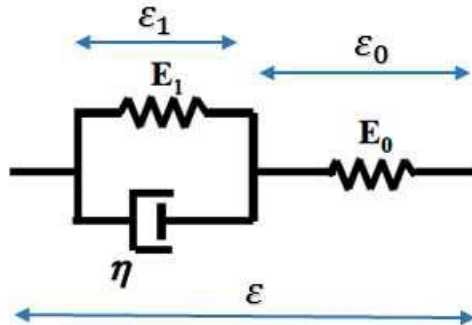


Figure II-2: Illustration d'un modèle viscoélastique de Poynting-Thomson.

Les lois d'états pour ce modèle sont :

$$\sigma = E_0 \varepsilon_0, \quad \sigma = E_1 \varepsilon_1 + \eta \dot{\varepsilon}_1 = E_1 (\varepsilon_1 + \tau_1 \dot{\varepsilon}_1) \quad (\text{II-21})$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_0 \quad (\text{II-22})$$

où σ est la contrainte commune au ressort de module E_0 et à l'élément de Kelvin-Voigt, $\tau_1 = \eta/E_1$ le temps caractéristique du modèle.

La loi de comportement du modèle peut être ramenée à une seule équation :

$$(E_0 + E_1)\sigma(t) + \eta\dot{\sigma}(t) = E_0(E_1\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}(t)) \quad (\text{II-23})$$

qui relie en un instant donné t la contrainte totale et sa vitesse $\dot{\sigma}$ à la déformation totale du modèle et sa vitesse $\dot{\varepsilon}$.

En imposant une vitesse de déformation constante ($\dot{\varepsilon} = a$), on peut calculer la réponse du modèle de manière incrémentale après une étape de discrétisation temporelle :

$$\sigma(t + \Delta t) = \sigma(t) + \frac{\Delta t}{\eta} (E_0 E_1 \varepsilon(t) + E_0 \eta a - (E_0 + E_1) \sigma(t)) \quad (\text{II-24})$$

où Δt est le pas de temps utilisé dans l'approximation de la vitesse $\dot{\sigma}(t)$ telle que :

$$\dot{\sigma}(t) \approx \frac{\sigma(t + \Delta t) - \sigma(t)}{\Delta t} \quad (\text{II-25})$$

Pour cette stratégie de calcul incrémental, il faut stocker les champs de contrainte et de déformation à la fin de chaque pas de calcul afin de les utiliser à l'instant de calcul suivant.

On peut également calculer la réponse du modèle de PT à partir de sa fonction de relaxation donnée par :

$$R(t) = \frac{E_0}{E_0 + E_1} \left(E_1 + E_0 e^{-t \left(\frac{E_0 + E_1}{E_1 \tau_1} \right)} \right) \quad (\text{II-26})$$

La réponse de ce modèle à une vitesse de déformation constante $\dot{\varepsilon} = a$ est calculée par le produit de convolution :

$$\sigma(t) = R \otimes \dot{\varepsilon} = a \int_0^t R(v) dv = a \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1} \left(t + \frac{E_0 \tau_1}{E_0 + E_1} \left(1 - e^{-t \left(\frac{E_0 + E_1}{E_1 \tau_1} \right)} \right) \right) \quad (\text{II-27})$$

II.3.2 Modèle viscoélastique endommageable basé sur le principe de contraintes effectives

Afin d'introduire l'endommagement dans le modèle viscoélastique de PT, on a adopté dans la suite de cette étude le principe de contraintes effectives présenté dans la section I.6.2. La contrainte effective $\tilde{\sigma}$ s'écrit en 1D :

$$\tilde{\sigma} = \sigma / (1 - D) \quad (\text{II-28})$$

où D est une variable d'endommagement scalaire qui vaut 0 dans le cas du matériau sain et 1 pour un matériau totalement endommagé. $\tilde{\sigma}$ représente la contrainte rapportée à la section qui résiste effectivement aux efforts appliqués. Le principe de contrainte effective consiste alors à remplacer σ dans la loi de comportement du matériau sain par $\tilde{\sigma}$. Le modèle ainsi obtenu revient à un modèle de PT où tous les éléments (ressorts et amortisseur) sont affectés par l'endommagement (Figure II-3). Ce modèle est désigné par la suite par l'acronyme PTE.

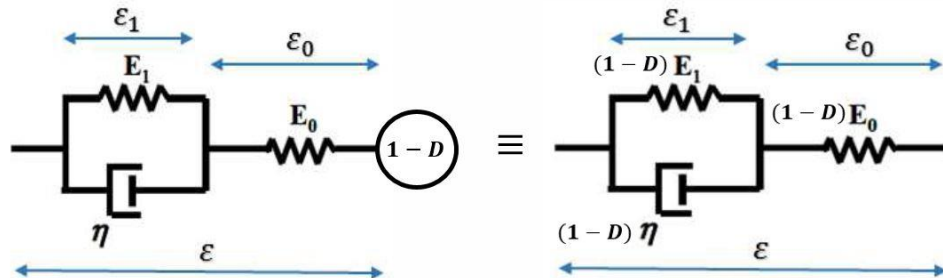


Figure II-3: Modèle viscoélastique endommagé de Poynting-Thomson PTE.

II.3.2.1 Modèle PTE et inégalité de Clausius-Duhem

Les équations constitutives du modèle PTE s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma = (1 - D)E_0(\varepsilon - \varepsilon_1) = (1 - D)E_0\varepsilon_0 \\ \sigma = (1 - D)E_1\varepsilon_1 + \sigma^{VE} = (1 - D)E_1\varepsilon_1 + (1 - D)\eta\dot{\varepsilon}_1 \end{cases} \quad (\text{II-29})$$

ou encore :

$$\begin{cases} E_0\varepsilon_0 = E_1\varepsilon_1 + \eta\dot{\varepsilon}_1 \\ \sigma = (1 - D)E_0\varepsilon_0 \end{cases} \quad (\text{II-30})$$

Ici, ε_1 joue le rôle de la variable ε^{VE} de la section II.1.2.3. Reconstituons à partir de ces équations les potentiels thermodynamiques du modèle PTE. L'intégration de la première équation par rapport à ε conduit à :

$$\rho\psi(\varepsilon, \varepsilon_1, D) = \frac{1}{2}(1 - D)E_0(\varepsilon - \varepsilon_1)^2 + f(\varepsilon_1, D) \quad (\text{II-31})$$

On en déduit :

$$\sigma^{VE} = (1 - D)E_0(\varepsilon - \varepsilon_1) - \frac{\partial f(\varepsilon_1, D)}{\partial \varepsilon_1} = \sigma - \frac{\partial f(\varepsilon_1, D)}{\partial \varepsilon_1} \quad (\text{II-32})$$

Or la seconde équation de comportement donne :

$$\sigma^{VE} = \sigma - (1 - D)E_1\varepsilon_1 \quad (\text{II-33})$$

d'où :

$$\frac{\partial f(\varepsilon_1, D)}{\partial \varepsilon_1} = (1 - D)E_1\varepsilon_1 \quad (\text{II-34})$$

et par intégration :

$$\rho\psi(\varepsilon, \varepsilon_1, D) = \frac{1}{2}(1 - D)E_0(\varepsilon - \varepsilon_1)^2 + \frac{1}{2}(1 - D)E_1\varepsilon_1^2 + g(D) \quad (\text{II-35})$$

Comme attendu les deux premiers termes de ψ représentent l'énergie élastique emmagasinée dans les deux ressorts du modèle rhéologique. Pour rester dans un cadre classique, on posera $g(D) = 0$ d'où :

$$\rho\psi(\varepsilon, \varepsilon_1, D) = \frac{1}{2}(1 - D)[E_0(\varepsilon - \varepsilon_1)^2 + E_1\varepsilon_1^2] \quad (\text{II-36})$$

donnant par dérivation par rapport à D , l'expression suivante de Y :

$$Y = \frac{1}{2}E_0(\varepsilon - \varepsilon_1)^2 + \frac{1}{2}E_1\varepsilon_1^2 = \frac{1}{2}E_0\varepsilon_0^2 + \frac{1}{2}E_1\varepsilon_1^2 \quad (\text{II-37})$$

dite taux de restitution d'énergie élastique. La positivité de Y entraîne la condition classique d'un endommagement irréversible $\dot{D} \geq 0$.

Par ailleurs, l'intégration de la relation :

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\partial \varphi^{*VE}}{\partial \sigma^{VE}} = \frac{\sigma^{VE}}{(1 - D)\eta} \quad (\text{II-38})$$

donne l'expression du potentiel de dissipation dual :

$$\varphi^{*VE}(\sigma^{VE}; D) = \frac{1}{2} \frac{(\sigma^{VE})^2}{(1 - D)\eta} \quad (\text{II-39})$$

tel que $\varphi^*(0; D) = 0$. On reconnaît le potentiel quadratique convexe associé à un amortisseur de constante $(1 - D)\eta$ avec $0 \leq D \leq 1$ qui permet donc d'assurer la positivité de la dissipation visqueuse.

Au final, la dissipation intrinsèque s'écrit :

$$\Phi_{int} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_1} \dot{\varepsilon}_1 - \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} \dot{D} = \sigma^{VE} \dot{\varepsilon}_1 + Y \dot{D} = \frac{(\sigma^{VE})^2}{(1-D)\eta} + \left[\frac{1}{2} E_0 \varepsilon_0^2 + \frac{1}{2} E_1 \varepsilon_1^2 \right] \dot{D} \quad (\text{II-40})$$

Elle est bien positive pour $\dot{D} \geq 0$, $\eta \geq 0$ et $0 \leq D \leq 1$.

Deux critères d'endommagement sont discutés ci-après assurant $\dot{D} \geq 0$, l'un dérivant d'un potentiel φ^{*Y} (ou plutôt de sa transformée de Legendre Fenchel φ^D), l'autre non.

II.4 Etude de deux critères d'endommagement

Afin de choisir un critère d'endommagement pour le modèle PTE, on a étudié deux cas : l'un basé sur l'énergie dissipée, l'autre sur le taux de restitution d'énergie élastique. On cherche des critères conduisant à des résultats en accord avec les observations expérimentales de la section I.5.2. Pour rappel, on souhaite pour la simulation d'essais de traction directe, à température et vitesse de déformation constantes, retrouver les propriétés suivantes (Figure II-4) :

- La contrainte maximale atteinte dans le matériau – également dite contrainte critique – augmente avec l'augmentation de la vitesse de chargement.
- La déformation à la rupture diminue avec l'augmentation de la vitesse de chargement.

Ici, on va déjà voir si les deux propriétés ci-dessus sont satisfaites, d'un point de vue théorique, sur les états de contrainte et de déformation à l'initialisation de l'endommagement. On sélectionnera alors le critère pour la suite sur la base de ces considérations, tout en sachant (et comme nous le verrons plus loin) que la contrainte à l'initialisation ne correspond pas nécessairement à la valeur critique à rupture.

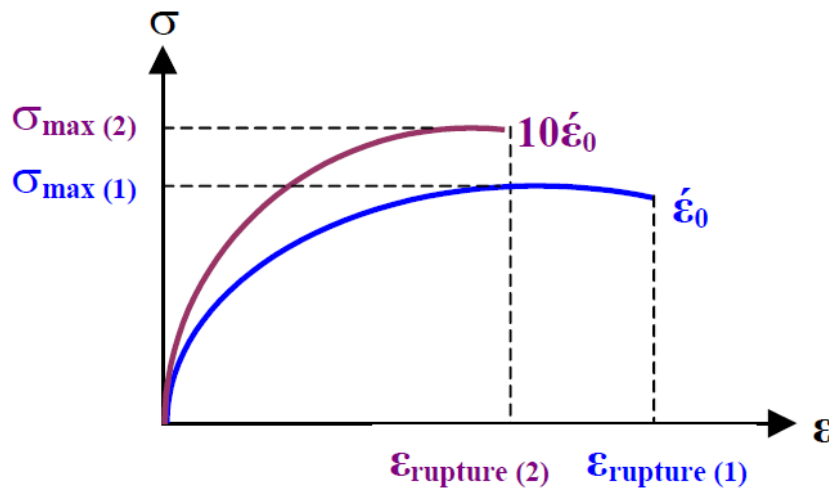


Figure II-4: Essai de traction directe sur EB et réponse classique pour deux vitesses de déformation constantes (issue de Olard 2000).

II.4.1 Critère basé sur la dissipation intrinsèque

On peut commencer par se poser la question de savoir si la dissipation intrinsèque peut admettre une majoration en présence d'endommagement et si sa valeur peut servir de critère.

Considérons alors le critère :

$$f = \Phi_{int} - \Phi_c \leq 0 \quad (\text{II-41})$$

tel que

$$\begin{aligned} \dot{D} &= 0 \quad \text{si } f < 0 \\ \dot{D} &\geq 0 \quad \text{si } f = 0 \end{aligned} \quad (\text{II-42})$$

où Φ_c est supposée être une caractéristique matériau égale à une constante strictement positive. Et :

$$\Phi_{int} = (1 - D)\eta\dot{\varepsilon}_1^2 + \frac{1}{2}E_0(\varepsilon - \varepsilon_1)^2\dot{D} + \frac{1}{2}E_1\varepsilon_1^2\dot{D} \geq 0 \quad (\text{II-43})$$

Pendant la phase réversible, l'état du matériau est sain et la vitesse d'évolution de la variable d'endommagement est nulle ($D = 0$, $\dot{D} = 0$). La dissipation dans le matériau est purement visqueuse : $\Phi_{int} = \eta\dot{\varepsilon}_1^2$.

Il y aura donc initiation de l'endommagement pour la condition :

$$\Phi_{int} = \Phi_c = \eta\dot{\varepsilon}_1^2 \quad (\text{II-44})$$

Afin de mieux appréhender la réponse du modèle PTE associée à ce critère d'endommagement, envisageons les deux cas limites de vitesse de chargement suivant : $\dot{\varepsilon}(t) \rightarrow \infty$ et $\dot{\varepsilon}(t) \rightarrow 0$.

Pour les grandes vitesses de chargement $\dot{\varepsilon}(t)$, la réponse du modèle se ramène à celle du ressort E_0 seul :

$$\varepsilon_0(t) \approx \varepsilon(t), \varepsilon_1(t) \approx 0, \sigma(t) \approx E_0\varepsilon(t), \sigma^{VE} \approx \sigma(t) \quad (\text{II-45})$$

Dans ce cas la dissipation visqueuse s'écrit :

$$\Phi_{int} = \frac{(\sigma^{VE})^2}{\eta} \approx \frac{E_0^2}{\eta} \varepsilon^2(t)$$

Ainsi la contrainte atteinte au moment de l'initiation de l'endommagement et la déformation associée valent :

$$\sigma_D^{ini,\infty} = \sqrt{\eta\Phi_c}; \varepsilon_D^{ini,\infty} = \frac{1}{E_0}\sqrt{\eta\Phi_c} \quad (\text{II-46})$$

En revanche, pour les faibles vitesses de chargement, le modèle s'apparente aux deux ressorts E_0 et E_1 en série :

$$\varepsilon_0(t) \approx \frac{E_1}{E_0 + E_1} \varepsilon(t); \quad \varepsilon_1(t) \approx \frac{E_0}{E_0 + E_1} \varepsilon(t); \quad \dot{\varepsilon}_1(t) \approx \frac{E_0}{E_0 + E_1} \dot{\varepsilon}(t) \quad (\text{II-47})$$

Par conséquent pour $\eta \left[\frac{E_0}{E_0 + E_1} \dot{\varepsilon}(t) \right]^2 < \Phi_c$ soit :

$$\dot{\varepsilon}(t) < \frac{E_0 + E_1}{E_0} \sqrt{\frac{\Phi_c}{\eta}} \quad (\text{II-48})$$

le matériau ne subit pas d'endommagement. Par conséquent pour $\dot{\varepsilon}(t) \rightarrow 0$:

$$\sigma_D^{ini,0} = +\infty; \varepsilon_D^{ini,0} = +\infty \quad (\text{II-49})$$

En comparant les contraintes de ces deux situations limites, on trouve que σ_D^{ini} obtenue sous faibles vitesses de déformation est plus élevée que celle sous grandes vitesses de chargement, en contradiction avec nos exigences de départ.

On observe la même contradiction pour le cas intermédiaire de la Figure II-5, montrant σ_D^{ini} pour deux vitesses de chargement différentes calculé pour un même jeu de données.

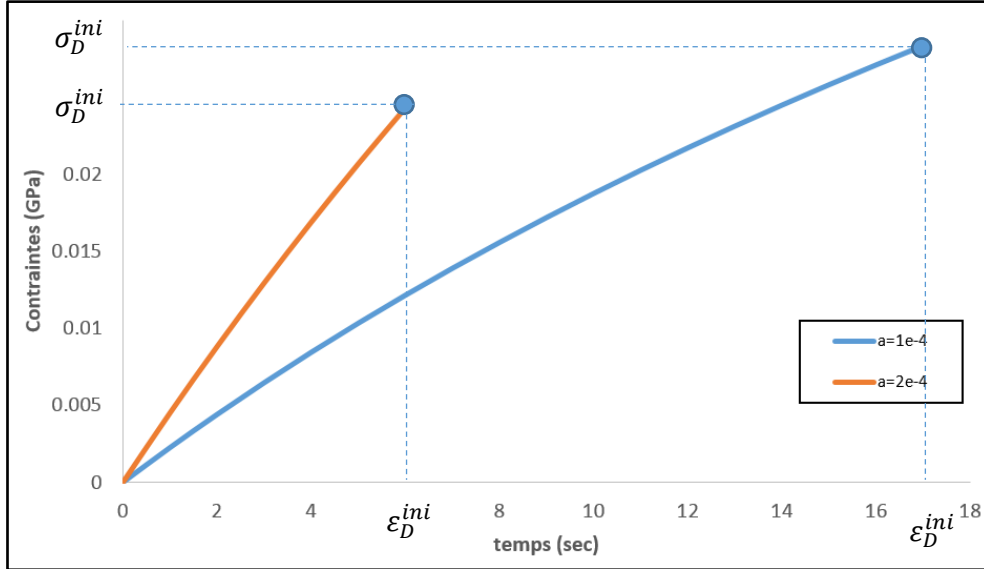


Figure II-5: Réponses du modèle viscoélastique de PT avec critère d'endommagement basé sur l'énergie intrinsèque. Evolution de la contrainte en fonction de la déformation pour deux vitesses de déformations imposées a , jusqu'à atteindre le critère.

Par conséquent, on a éliminé ce type de critère par la suite.

Les résultats présentés sur la Figure II-5 sont obtenus à partir de l'équation (II-24) et les jeux de données du Tableau II-1.

$E_0(GPa)$	22.53
$E_1(GPa)$	11
$\tau(s)$	45.5
$\Phi_c(GPa.s^{-1})$	10^{-6}
$\Delta t(s)$	1

Tableau II-1: Paramètres de calcul.

II.4.2 Critère basé sur le taux de restitution d'énergie élastique

On revient ici sur le cas plus classique d'un critère basé sur le taux de restitution d'énergie, comme fréquemment utilisé en comportement élastique. On considère ainsi le critère suivant :

$$f = Y - Y_c \leq 0 \quad (II-50)$$

tel que

$$\begin{aligned} \dot{D} &= 0 & \text{si } f < 0 \\ \dot{D} &\geq 0 & \text{si } f = 0 \end{aligned} \quad (II-51)$$

avec Y_c une constante positive caractéristique du matériau.

On étudie à nouveau les deux situations limites : $\dot{\varepsilon}(t) \rightarrow \infty$ et $\dot{\varepsilon}(t) \rightarrow 0$.

Pour les vitesses de chargement élevées, comme déjà vu :

$$\varepsilon_0(t) \approx \varepsilon(t), \varepsilon_1(t) \approx 0, \sigma(t) \approx E_0 \varepsilon(t) \quad (\text{II-52})$$

Le taux de restitution d'énergie Y s'écrit :

$$Y \approx \frac{E_0}{2} \varepsilon(t)^2 = \frac{\sigma(t)^2}{2E_0} \quad (\text{II-53})$$

A l'initiation de l'endommagement :

$$\sigma_D^{ini,\infty} = \sqrt{2E_0 Y_c} \quad (\text{II-54})$$

$$\varepsilon_D^{ini,\infty} = \sqrt{\frac{2Y_c}{E_0}} \quad (\text{II-55})$$

Pour les vitesses de chargement faibles :

$$\varepsilon_0(t) \approx \frac{E_1}{E_0+E_1} \varepsilon(t), \varepsilon_1(t) \approx \frac{E_0}{E_0+E_1} \varepsilon(t), \sigma(t) \approx \frac{E_0 E_1}{E_0+E_1} \varepsilon(t) \quad (\text{II-56})$$

soit :

$$Y = \frac{1}{2} E_0 \varepsilon_0^2(t) + \frac{1}{2} E_1 \varepsilon_1^2(t) \approx \frac{1}{2} \frac{E_0 E_1}{E_0+E_1} \varepsilon(t)^2 = \frac{1}{2} \frac{E_0 + E_1}{E_0 E_1} \sigma(t)^2 \quad (\text{II-57})$$

A l'initiation de l'endommagement :

$$\sigma_D^{ini,0} = \sqrt{2 \frac{E_0 E_1}{E_0+E_1} Y_c} \quad (\text{II-58})$$

$$\varepsilon_D^{ini,0} = \sqrt{2 \frac{E_0 + E_1}{E_0 E_1} Y_c} \quad (\text{II-59})$$

Compte tenu des propriétés :

$$\begin{aligned} \frac{E_0 E_1}{E_0+E_1} &< E_0 \\ \frac{1}{E_0} &< \frac{E_0+E_1}{E_0 E_1} \end{aligned} \quad (\text{II-60})$$

On obtient les inégalités :

$$\sigma_D^{ini,0} < \sigma_D^{ini,\infty} \quad \text{et} \quad \varepsilon_D^{ini,0} < \varepsilon_D^{ini,\infty} \quad (\text{II-61})$$

qui vérifient cette fois-ci les conditions qu'on s'est fixées au départ. On va donc conserver par la suite ce critère basé sur le taux de restitution d'énergie élastique.

Le comportement du modèle de PT dans le domaine réversible pour les deux scénarios de chargement limites (sous vitesse de déformation constante) est présenté sur la Figure II-6. La courbe en bleu représente un cas de chargement intermédiaire.

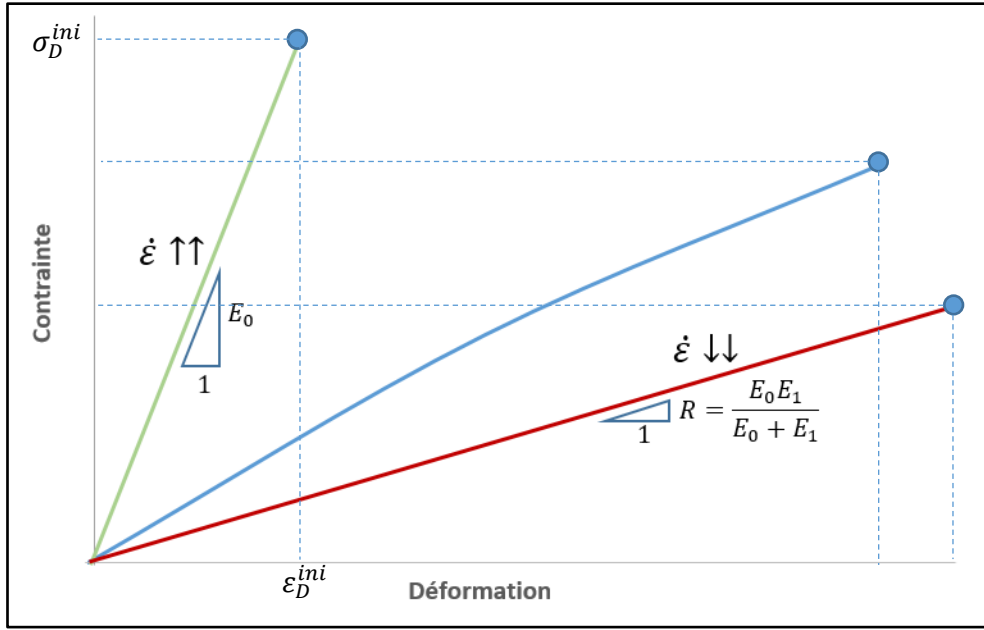


Figure II-6: Réponses viscoélastiques du modèle PT avec critère d'endommagement sur Y pour les deux cas limites et une vitesse de chargement intermédiaire.

II.4.2.1 Extensions possibles du modèle

Notons que ce modèle basé sur le principe de contraintes effectives et critère d'endommagement en Y peut être étendu naturellement au cas de spectres de fluage décrits par un nombre quelconque d'éléments de Kelvin-Voigt en série (modèle de Kelvin-Voigt généralisé à n éléments).

Plus généralement, il peut être étendu au cas de modèles viscoélastiques représentés par leurs fonctions de fluage $F(t)$ et de relaxation $R(t)$ en utilisant les lois de convolution suivantes :

$$\frac{\sigma(t)}{1 - D(t)} = R \otimes \dot{\varepsilon}(t) \quad (\text{II-62})$$

$$\varepsilon(t) = F \otimes \frac{d}{dt} \left(\frac{\sigma(t)}{1 - D(t)} \right) \quad (\text{II-63})$$

$$Y(t) = \frac{1}{1 - D(t)} \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t R(2t - u - v) \dot{\varepsilon}(u) \dot{\varepsilon}(v) du dv \quad (\text{II-64})$$

Nota : l'intégrale double dans cette dernière équation représente l'énergie élastique emmagasinée dans le spectre de fluage du matériau (Huet 1992).

II.5 Loi d'évolution d'endommagement associée au critère $Y - Y_c \leq 0$

L'étude de la réponse du matériau pendant la phase endommageable nécessite la donnée d'une loi d'évolution de la variable interne d'endommagement D .

Commençons par regarder ici le cas « le plus simple » d'une loi d'évolution associée au critère $Y - Y_c \leq 0$ donnée sous la forme de la loi de normalité suivante, également dite condition de Karush-Kuhn-Tucker (Kuhn and Tucker 1951) :

$$Y - Y_c \leq 0; \quad \dot{D} \geq 0; \quad (Y - Y_c)\dot{D} = 0 \quad (\text{II-65})$$

Ces trois conditions peuvent s'exprimer à partir du potentiel convexe $\varphi^*(Y)$ tel que :

$$\begin{aligned} \varphi_1^{*Y}(Y) &= 0 \quad \text{si } 0 \leq Y \leq Y_c \\ \varphi_1^{*Y}(Y) &= +\infty \quad \text{si } Y > Y_c \end{aligned} \quad (\text{II-66})$$

La loi de normalité dit alors que $\dot{D}$ appartient au sous-différentiel de φ^* : $\dot{D} \in \partial \varphi_1^{*Y}$.

Pour tenir compte de conditions d'endommagement unilatérales, ne pouvant se produire que dans un état de traction, le potentiel précédent peut être affecté du produit $\langle \varepsilon - \varepsilon_1 \rangle_+$, soit :

$$\varphi_2^{*Y}(Y; \varepsilon, \varepsilon_1) = \varphi_1^{*Y}(Y) \langle \varepsilon - \varepsilon_1 \rangle_+ \quad (\text{II-67})$$

avec $\langle \varepsilon - \varepsilon_1 \rangle_+$ la partie positive de la contrainte σ à un facteur positif près.

Examinons alors le comportement en traction du matériau en cours d'endommagement. On va montrer que son évolution est fortement « contrainte » (comme en élasticité) et mal adaptée à la modélisation de déformations se poursuivant au-delà du point d'initiation de l'endommagement et à une implémentation dans le cadre de la TLS (chapitres III et IV).

II.5.1 Réponse du modèle en cours d'endommagement

D'après le critère d'endommagement présenté dans l'équation (II-65), la phase d'endommagement s'initie et se poursuit pour $Y = Y_c$.

Pour une évolution sur le critère, on a pour le modèle PTE :

$$2Y_c - (E_0 \varepsilon_0^2 + E_1 \varepsilon_1^2) = 0 \quad (\text{II-68})$$

Dans le plan $(\varepsilon_1, \varepsilon_0)$ une telle évolution s'inscrit sur le quart d'ellipse $\varepsilon_0 > 0$ et $\varepsilon_1 > 0$, à l'intersection avec la droite d'équation : $\varepsilon_1 + \varepsilon_0 = \varepsilon(t)$.

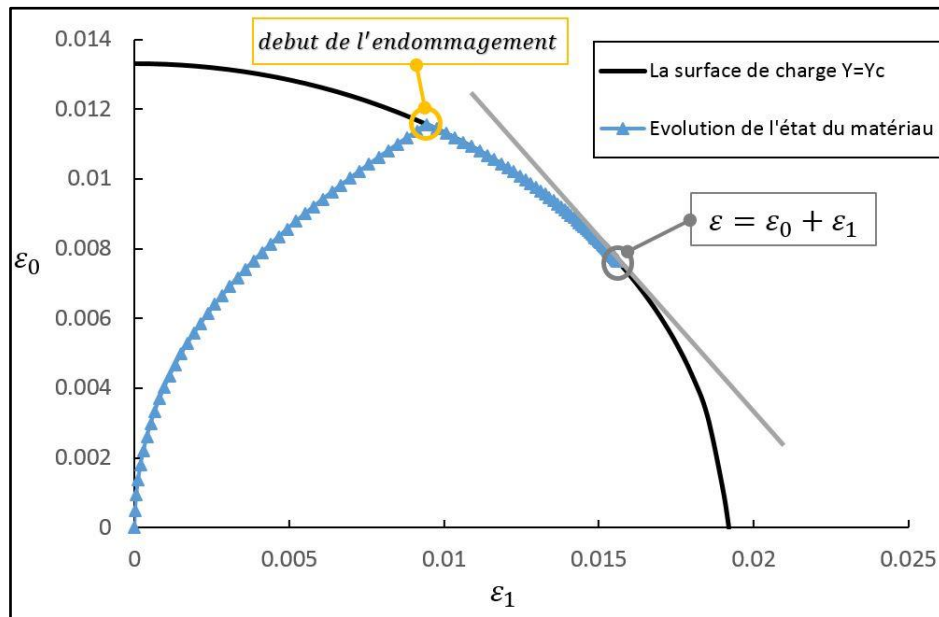


Figure II-7: Représentation de la surface de charge $Y=Y_c$ dans le plan $(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$, et l'intersection avec la droite d'équation $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1$.

On peut déjà observer que le point de tangence de ces deux fonctions détermine un majorant de la déformation de rupture défini par :

$$\varepsilon_{rupture}^{max} = \sqrt{\frac{2Y_c(E_0 + E_1)}{E_0 E_1}} \quad (\text{II-69})$$

Par ailleurs pour atteindre cette valeur, $\varepsilon(t)$ doit suivre une évolution bien particulière. En effet, pendant toute la phase d'endommagement, on a la relation :

$$(E_0 + E_1)\varepsilon_0^2 - 2E_1\varepsilon\varepsilon_0 + E_1\varepsilon^2 - 2Y_c = 0 \quad (\text{II-70})$$

conduisant aux deux expressions suivantes possibles de ε_1 et ε_0 en fonction de ε :

1^{er} cas :

$$\varepsilon_0 = \frac{E_1\varepsilon + \sqrt{2(E_0 + E_1)Y_c - E_0 E_1 \varepsilon^2}}{E_0 + E_1}, \quad \varepsilon_1 = \frac{E_0\varepsilon - \sqrt{2(E_0 + E_1)Y_c - E_0 E_1 \varepsilon^2}}{E_0 + E_1} \quad (\text{II-71})$$

2^{ème} cas :

$$\varepsilon_0 = \frac{E_1\varepsilon - \sqrt{2(E_0 + E_1)Y_c - E_0 E_1 \varepsilon^2}}{E_0 + E_1}, \quad \varepsilon_1 = \frac{E_0\varepsilon + \sqrt{2(E_0 + E_1)Y_c - E_0 E_1 \varepsilon^2}}{E_0 + E_1} \quad (\text{II-72})$$

A titre d'exemple, supposons que le point de coordonnées $(\varepsilon_1^{VE,fin}, \varepsilon_0^{VE,fin})$ atteint en fin de phase purement viscoélastique vérifie l'inégalité $E_0\varepsilon_0^{VE,fin} > E_1\varepsilon_1^{VE,fin}$, correspondant au premier cas ci-dessus. Par continuité l'ensemble de l'évolution sur l'ellipse se fera suivant les équations (II-71) pour lesquelles $E_0\varepsilon_0 > E_1\varepsilon_1$.

On peut alors en déduire deux équations régissant l'évolution de $\dot{\varepsilon}_1$ en fonction de $\dot{\varepsilon}$. Par dérivation directe de l'équation (II-71), on a d'une part :

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{E_0\dot{\varepsilon}}{E_0 + E_1} \left(1 + \frac{E_1\varepsilon}{\sqrt{2(E_0 + E_1)Y_c - E_0 E_1 \varepsilon^2}} \right) \quad (\text{II-73})$$

D'autre part, à partir de (II-71) et de la loi de comportement $E_0\varepsilon_0 = E_1\varepsilon_1 + \eta\dot{\varepsilon}_1$:

$$\eta\dot{\varepsilon}_1 = E_0\varepsilon_0 - E_1\varepsilon_1 = \sqrt{2(E_0 + E_1)Y_c - E_0 E_1 \varepsilon^2} \quad (\text{II-74})$$

D'où :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{E_0 + E_1}{\eta E_0} \frac{2(E_0 + E_1)Y_c - E_0 E_1 \varepsilon^2}{E_1\varepsilon + \sqrt{2(E_0 + E_1)Y_c - E_0 E_1 \varepsilon^2}} \quad (\text{II-75})$$

Par intégration de cette équation à partir de la fin de la phase purement viscoélastique repérée par t_{fin}^{VE} :

$$\frac{\eta E_0}{E_0 + E_1} \int_{\varepsilon_{fin}^{VE}}^{\varepsilon(t)} \frac{\sqrt{2(E_0 + E_1)Y_c - E_0 E_1 \varepsilon^2} + E_1\varepsilon}{2(E_0 + E_1)Y_c - E_0 E_1 \varepsilon^2} d\varepsilon = \int_{t_{fin}^{VE}}^t dt \quad (\text{II-76})$$

ou encore :

$$\int_{\varepsilon_{fin}^{ve}}^{\varepsilon(t)} \frac{1}{\sqrt{p - q\varepsilon^2}} d\varepsilon + \int_{\varepsilon_{fin}^{ve}}^{\varepsilon(t)} \frac{E_1 \varepsilon}{p - q\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{E_0 + E_1}{E_0 E_1 \tau_1} (t - t_{fin}^{ve}) \quad (II-77)$$

avec :

$$\begin{aligned} p &= 2(E_0 + E_1)Y_c \\ q &= E_0 E_1 \end{aligned} \quad (II-78)$$

On en déduit l'équation implicite d'évolution de la déformation totale en fonction du temps :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{q}} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{q}\varepsilon(t)}{\sqrt{p - q\varepsilon(t)^2}} \right) - \frac{E_1}{2q} \log(p - q\varepsilon(t)^2) \\ = \frac{1}{\sqrt{q}} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{q}\varepsilon_{fin}^{ve}}{\sqrt{p - q\varepsilon_{fin}^{ve2}}} \right) \\ - \frac{E_1}{2q} \log(p - q\varepsilon_{fin}^{ve2}) + \frac{E_0 + E_1}{E_0 E_1 \tau_1} (t - t_{fin}^{ve}) \end{aligned} \quad (II-79)$$

Cette équation montre que l'évolution locale des déformations en phase d'endommagement est imposée en fonction du temps et donc fortement « contrainte » (Figure II-8). Par contre seul le ratio $\sigma/(1 - D)$ est déterminé au niveau de la loi de comportement.

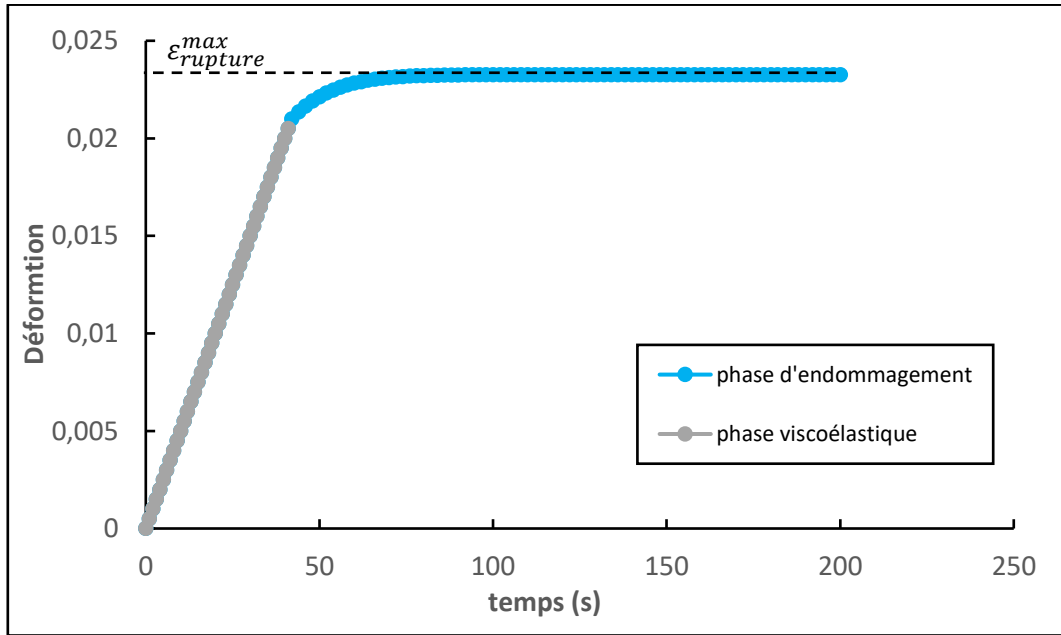


Figure II-8: Exemple d'évolution de la déformation totale $\varepsilon(t)$ en fonction du temps. La valeur asymptotique de déformation $\varepsilon_{rupture}^{max} = \sqrt{p/q}$ est obtenue pour $t \rightarrow \infty$.

II.6 Loi d'évolution d'endommagement avec adoucissement $Y - H(D)Y_c \leq 0$

On examine ici une loi d'évolution d'endommagement comprenant une fonction d'adoucissement $H(D)$ supprimant la limite de déformation à la rupture $\varepsilon_{rupture}^{max}$ de la section précédente.

La fonction $H(D)$ est supposée croissante et égale à 1 pour $D = 0$. En reprenant l'interprétation graphique du paragraphe II.5.1, ceci revient à pouvoir faire croître dans le plan $(\varepsilon_1, \varepsilon_0)$ la surface de déformation seuil, donnée par :

$$f = Y - H(D)Y_c \quad (\text{II-80})$$

La loi locale d'évolution de l'endommagement avec loi de normalité s'écrit donc :

$$f = Y - H(D)Y_c \leq 0; \dot{D} \geq 0; f\dot{D} = 0 \quad (\text{II-81})$$

En termes de potentiel de dissipation, celle-ci revient à considérer les fonctions φ_3^{*Y} et φ_4^{*Y} suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi_3^{*Y}(Y) &= 0 \quad \text{si } 0 \leq Y \leq Y_c H(D) \\ \varphi_3^{*Y}(Y) &= +\infty \quad \text{si } Y > Y_c H(D) \\ \varphi_4^{*Y}(Y; \varepsilon, \varepsilon_1, D) &= \varphi_3^{*Y}(Y; D) < \varepsilon - \varepsilon_1 >_+ \end{aligned} \quad (\text{II-82})$$

La dérivée temporelle du critère (II-80) conduit à :

$$\dot{f} = \dot{Y} - Y_c H'(D) \dot{D} \quad (\text{II-83})$$

La condition de consistance ($\dot{f} = 0$) donne :

$$E_0 \varepsilon_0 \dot{\varepsilon}_0 + E_1 \varepsilon_1 \dot{\varepsilon}_1 = Y_c H'(D) \dot{D} \quad (\text{II-84})$$

En dérivant l'équation (II-22) par rapport au temps, on peut remplacer $\dot{\varepsilon}_0$ par $(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_1)$. Ainsi l'équation (II-84) conduit à :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\eta(\dot{\varepsilon}_1)^2 + Y_c H'(D) \dot{D}}{E_0 \varepsilon_0} \quad (\text{II-85})$$

À partir de l'équation (II-30)₁ on obtient $\eta(\dot{\varepsilon}_1)^2 = \frac{(E_0 \varepsilon_0 - E_1 \varepsilon_1)^2}{\eta}$, ainsi l'équation (II-85) s'écrit :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\frac{1}{\eta}(E_0 \varepsilon_0 - E_1 \varepsilon_1)^2 + Y_c H'(D) \dot{D}}{E_0 \varepsilon_0} \quad (\text{II-86})$$

On trouve alors que l'évolution de la déformation pendant la phase d'endommagement est liée à la vitesse d'endommagement. Par conséquent, à vitesse de déformation imposée, une évolution de l'état du modèle PTE sera possible pendant la phase d'endommagement.

Pour une fonction $H(D)$ constante ($H'(D) = 0$), comme dans le critère (II-50), l'équation d'évolution de la déformation (II-86) s'écrit :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{(E_0 \varepsilon_0 - E_1 \varepsilon_1)^2}{\eta E_0 \varepsilon_0} \quad (\text{II-87})$$

Cette équation est équivalente à celle présentée dans (II-75). Ici, on remarque que la vitesse de déformation ne peut prendre que certaines valeurs dépendantes de l'histoire de chargement ($\varepsilon_1, \varepsilon_0 = \varepsilon - \varepsilon_1$). Cela est en accord avec les résultats la section II.5.

Le problème d'évolution de l'endommagement peut être également étudié comme un problème de complémentarité linéaire (LCP). Afin de construire ce problème, on a besoin de linéariser le critère d'endommagement sur un intervalle de temps $[t; t + \Delta t]$ tel que :

$$f(t + \Delta t) \approx f(t) + \Delta t \dot{f} \quad (\text{II-88})$$

Ainsi, la loi d'évolution de l'endommagement associée à ce critère s'écrit :

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta t(\dot{Y} - Y_c \cdot H'(D)\dot{D}) \leq 0, \quad \dot{D} \geq 0, \quad f(t + \Delta t)\dot{D} = 0 \quad (\text{II-89})$$

Après remplacement de $\dot{Y}$ par son expression en fonction des déformations ε_1 et ε_0 et $f(t + \Delta t)$ par $-z(t + \Delta t)$ on obtient :

$$z(t + \Delta t) = \Delta t Y_c H'(D)\dot{D} - f(t) - \Delta t(E_0 \varepsilon_0 \dot{\varepsilon}_0 + E_1 \varepsilon_1 \dot{\varepsilon}_1) \geq 0, \quad \dot{D} \geq 0, \quad z(t + \Delta t)\dot{D} = 0 \quad (\text{II-90})$$

Ce problème d'évolution (II-90) peut être considéré comme un problème de complémentarité linéaire. La forme générale d'un LCP (den Hertog, Roos, and Terlaky 1993) s'écrit :

$$LC(\mathbf{M}, \mathbf{q}): \quad 0 \leq \mathbf{x} \perp (\mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{q}) \geq 0 \quad (\text{II-91})$$

Un LCP consiste à trouver un vecteur $\mathbf{x}$ qui est à la fois faisable (c'est-à-dire vérifie les deux inégalités) et complémentaire (c'est-à-dire vérifie la loi de normalité $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{q}) = 0$).

Ce problème possède une solution unique, pour un vecteur $\mathbf{q}$ quelconque, si et seulement si la matrice $\mathbf{M}$ est une P-matrice, c'est-à-dire que les déterminants de ses sous-matrices sont strictement positifs (Cottle, Pang, and Stone 2009).

En écrivant la loi (II-90) sous la forme d'un LCP on obtient :

$$LC(M, Q): \quad 0 \leq \dot{D} \perp (M\dot{D} + Q) \geq 0 \quad (\text{II-92})$$

tel que $M = \Delta t Y_c H'(D)$ et $Q = -f(t) - \Delta t(E_0 \varepsilon_0 \dot{\varepsilon}_0 + E_1 \varepsilon_1 \dot{\varepsilon}_1)$ sont des scalaires.

L'équation d'évolution de l'endommagement est alors respectée pour Q quelconque (c'est-à-dire pour une vitesse de déformation quelconque) et M strictement positif. Par conséquent on trouve une condition sur la fonction d'adoucissement : $H'(D) > 0$.

II.6.1 Effet de la fonction d'adoucissement sur la réponse endommageable du matériau

Afin d'investiguer l'effet de la fonction $H(D)$ sur les mécanismes qui peuvent apparaître pendant l'évolution sur la surface seuil (II-80), on a étudié la réponse instantanée du modèle de PTE. Cela est équivalent un modèle de PTE sans aucune déformation visqueuse $\varepsilon_1 = \dot{\varepsilon}_1 = 0$. Ce choix nous permet de discuter l'effet de $H(D)$ sur la réponse du modèle endommagée indépendamment de l'histoire de chargement. Les équations du problème deviennent :

$$\begin{aligned} \sigma &= (1 - D)E_0 \varepsilon \\ Y &= \frac{1}{2}E_0 \varepsilon^2 \end{aligned} \quad (\text{II-93})$$

La loi de comportement écrite en vitesse et la condition de consistance ($\dot{f} = 0$) s'écrivent :

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= (1 - D)E_0\dot{\varepsilon} - \dot{D}E_0\varepsilon \\ E_0\varepsilon\dot{\varepsilon} &= Y_c \cdot H'(D)\dot{D}\end{aligned}\quad (\text{II-94})$$

La formulation du problème en termes de vitesse permet d'obtenir à une relation entre la vitesse de contrainte et la vitesse de déformation :

$$\dot{\sigma} = \left((1 - D) - \frac{2H(D)}{H'(D)} \right) E_0\dot{\varepsilon} = K\dot{\varepsilon} \quad (\text{II-95})$$

où K est le module tangent tel que :

$$K = \left((1 - D) - \frac{2H(D)}{H'(D)} \right) E_0 \quad (\text{II-96})$$

Le signe de ce module déterminera le mécanisme subit par le matériau pendant l'évolution de l'endommagement :

$$\begin{cases} \text{si } K > 0 : \text{comportement durcissant} \\ \text{si } K < 0 : \text{comportement adoucissant} \end{cases} \quad (\text{II-97})$$

où le mécanisme d'adoucissement indique une diminution de la contrainte lors de l'augmentation de la déformation.

Dans cette thèse on a proposé une fonction d'adoucissement de la forme :

$$H(D) = (1 - \beta D)^{-\alpha}, \quad 0 < \beta < 1, \alpha > 0 \quad (\text{II-98})$$

Cette fonction vérifie les conditions : $H'(D) > 0$ et $H(D = 0) = 1$. Dans ce cas le module tangent donné par (II-96) s'écrit :

$$K = \left((1 - D) - \frac{2(1 - \beta D)}{\alpha\beta} \right) E \quad (\text{II-99})$$

Le signe du module tangent est lié au signe de la différence entre deux fonctions $N(\alpha)$ et $M(\beta, D)$ données par :

$$\begin{cases} N(\alpha) = \alpha \\ M(\beta, D) = \frac{2(1 - \beta D)}{\beta(1 - D)} \\ \text{sign}(K) = \text{sign}(N - M) \end{cases} \quad (\text{II-100})$$

où $N(\alpha)$ est une fonction indépendante de l'endommagement D et $M(\beta, D)$ est une fonction croissante en D (pour $\beta < 1$). L'évolution de ces deux fonctions (pour $\alpha = 2.5$ et $\beta = 0.8, 0.9, 0.95, 1$) en fonction de l'endommagement est présentée sur la figure suivante :

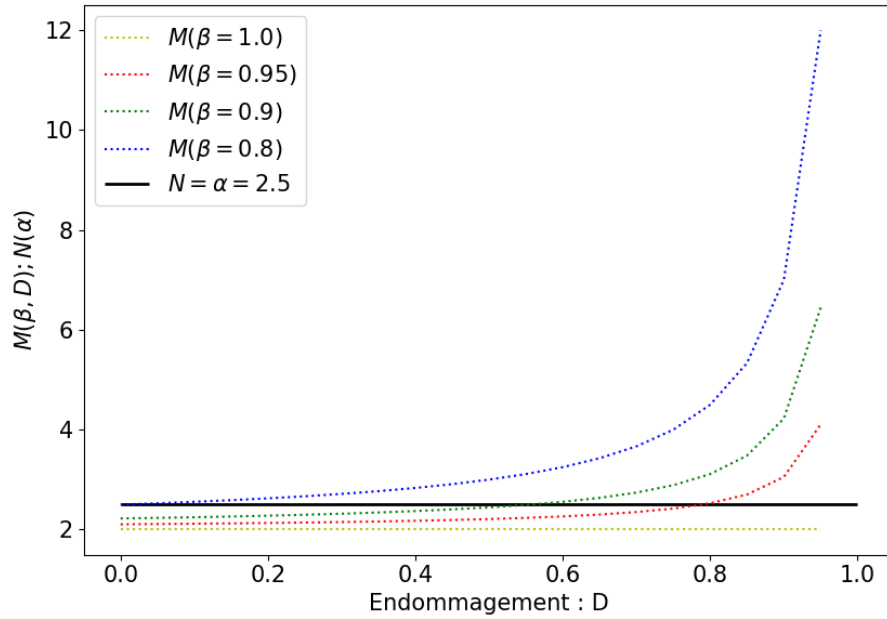


Figure II-9: Évolution des fonctions $N(\alpha)$ et $M(\beta, D)$ de la fonction $H(D)$.

On voit sur la Figure II-9 un exemple des fonctions $N(\alpha)$ et $M(\beta, D)$ avec des paramètres α et β qui permettent de passer entre le mécanisme d'adoucissement et de durcissement. En comparant la position de la courbe N par rapport à la courbe M on peut dire:

- Pour $\alpha < 2$, on trouve un mécanisme d'adoucissement quelle que soit la valeur de β puisque $M(\beta, D)$ est une fonction croissante en D et sa valeur minimale égale à 2 (pour $D = 0$ et $\beta = 1$). Dans ce cas $N(\alpha)$ est toujours au-dessous de $M(\beta, D)$.
- Pour $\alpha > 2$ et $\beta = 1$, le seul mécanisme possible est le durcissement.
- Pour $\alpha > 2$ et $\beta < 1$, le comportement du matériau évolue entre le durcissement et l'adoucissement avec l'évolution de l'endommagement. Pour une valeur fixe de α , l'augmentation de β conduit à une phase de durcissement plus large.

La fonction $H(D)$ proposée permet donc de prendre en compte les mécanismes de durcissement et d'adoucissement. Par conséquent, pour un matériau élastique endommageable, on peut savoir le mécanisme subi par le matériau, pour un niveau d'endommagement donné, à partir du choix des paramètres α et β de la fonction $H(D)$ (II-98). En revanche, pour le modèle PTE, la viscosité du modèle va affecter la réponse de celui-ci ainsi que le moment de l'apparition des mécanismes d'adoucissement et de durcissement pendant l'évolution de l'endommagement. Cependant, l'étude présentée ici nous donne un aperçu sur le comportement du modèle pendant la phase d'endommagement en fonction des paramètres de la fonction $H(D)$.

II.6.2 Application numérique

L'objectif de cette partie est d'examiner l'influence de la loi d'évolution d'endommagement locale (II-81) sur la réponse du modèle de PTE à des vitesses de déformation imposées.

Les paramètres choisis pour le modèle viscoélastique sont listés dans le Tableau II-2. Le taux de restitution d'énergie critique Y_c est pris égal à 0.0005 MPa et les paramètres α et β de la fonction $H(D) = (1 - \beta D)^{-\alpha}$ valent à 1.2 et 0.9 respectivement.

Pour étudier la réponse du modèle PTE et sa dépendance à la vitesse de chargement. On a imposé trois différentes vitesses de déformations ($2e^{-4}$; $5e^{-4}$; $1e^{-3} s^{-1}$). L'influence de ces vitesses sur la réponse du modèle est illustrée sur la Figure II-10.

$E_0(MPa)$	12500
$E_1(MPa)$	5000
$\eta(MPa.s)$	5000

Tableau II-2: Paramètres du modèle viscoélastique de PTE.

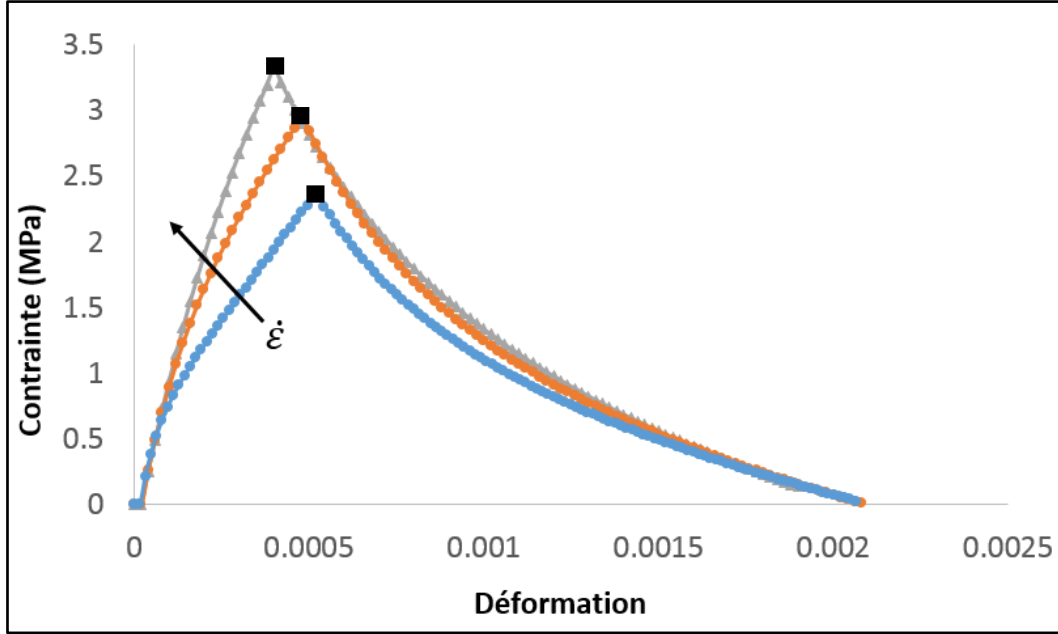


Figure II-10: Évolution de la contrainte en fonction de la déformation totale pour différentes valeurs de vitesse de déformation imposée.

La Figure II-10 montre que la nouvelle loi d'évolution d'endommagement (II-81) rend compte du comportement adoucissant pendant la phase d'endommagement (qui se commence au niveau des rectangles noirs) contrairement à la loi associée à la surface seuil $f = Y - Y_c$. Cette dernière conduit à une rupture brutale au moment de l'initiation de l'endommagement pour un chargement à vitesse de déformation imposée. La rupture brutale a été également obtenue pour deux autres modèles viscoélastiques endommageables de PT (Figure II-11). L'étude analytique et les résultats numériques obtenus à partir de ces deux modèles ne sont pas présentés ici.

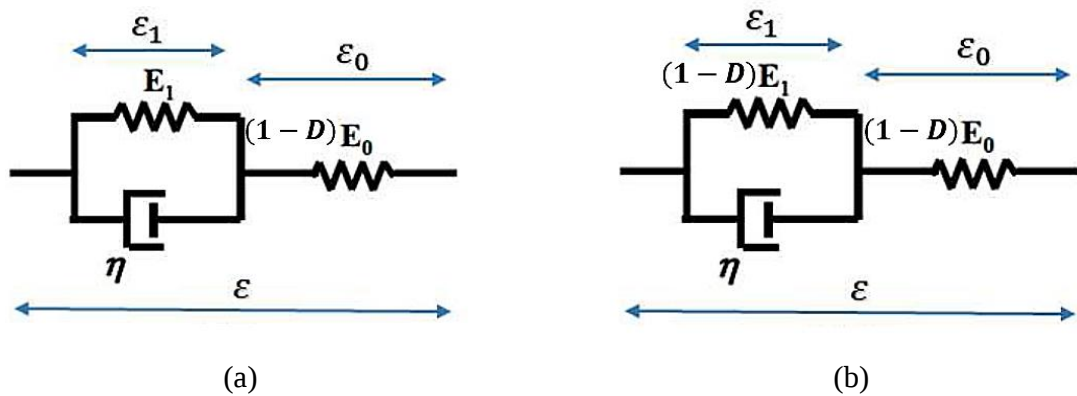


Figure II-11: Deux modèles viscoélastiques endommageables de PT qui ne sont pas basés sur le principe de contraintes effectives.

II.7 Autres formes possibles de la surface seuil d'endommagement

On a montré, à partir de l'étude présentée dans la section II.6, que la dépendance de la fonction seuil d'endommagement à la variable d'endommagement D permet de remédier au problème de rupture brutale au moment de l'initiation de l'endommagement lorsque la vitesse de déformation est imposée. On peut également imaginer une autre forme de la loi d'évolution de la variable d'endommagement telle que :

$$\dot{D} = \begin{cases} \frac{1}{\tau_{vd}} \left(\frac{Y}{Y_c} \right)^q & \text{si } Y \geq Y_c \\ 0 & \text{si } Y < Y_c \end{cases} \quad (\text{II-101})$$

où τ_{vd} représente un paramètre de fluidité visco-endommageable. Cette loi d'évolution s'écrit sous la forme de la loi de normalité (II-81) mais avec une fonction d'adoucissement dépendante de la vitesse d'endommagement :

$$H(\dot{D}) = (\tau_{vd} \dot{D})^{1/q} \quad (\text{II-102})$$

On peut également imaginer une fonction d'adoucissement dépendante de la variable d'endommagement et de sa vitesse $\dot{D}$ telle que :

$$H(D, \dot{D}) = H(D) + H(\dot{D}) = (1 - \beta D)^{-\alpha} + (\tau_{vd} \dot{D})^{1/q} \quad (\text{II-103})$$

Une comparaison entre les réponses du modèle de PTE – à vitesse de déformation constante égale à $1e^{-3} s^{-1}$ – obtenues avec les trois formes de la fonction d'adoucissement H est illustrée sur Figure II-12 et Figure II-13. Pour cette étude on a pris les paramètres viscoélastiques du modèle de PTE comme ceux du Tableau II-2. Les paramètres de la fonction $H(D)$ sont pris comme ceux du problème présenté dans la section II.6.2 ($\alpha = 1.2$ et $\beta = 0.9$), τ_{vd} et q valent 1.5 et 2, respectivement.

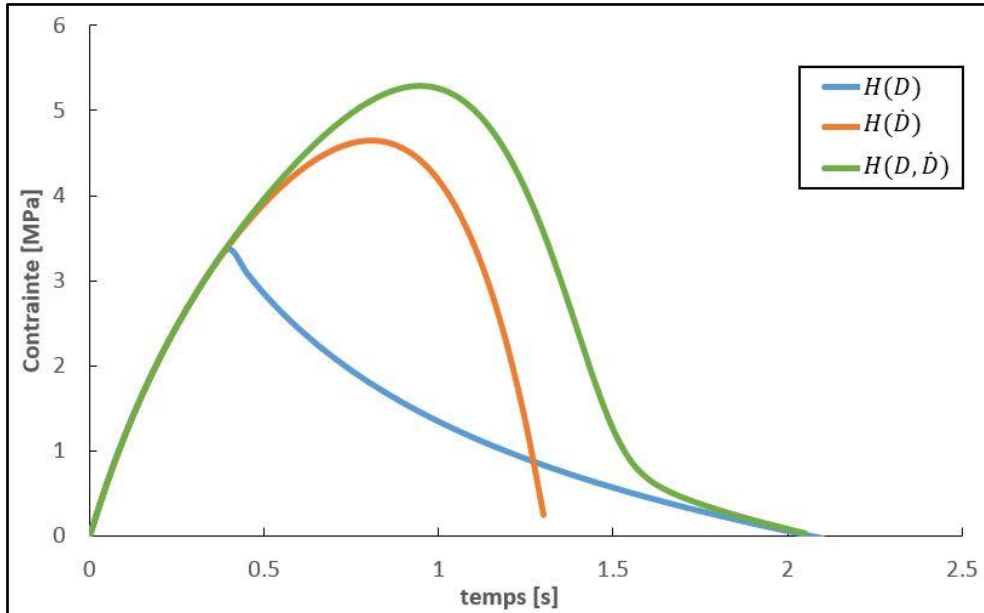


Figure II-12: Évolution de la contrainte pour trois différentes formes de la fonction d'adoucissement.

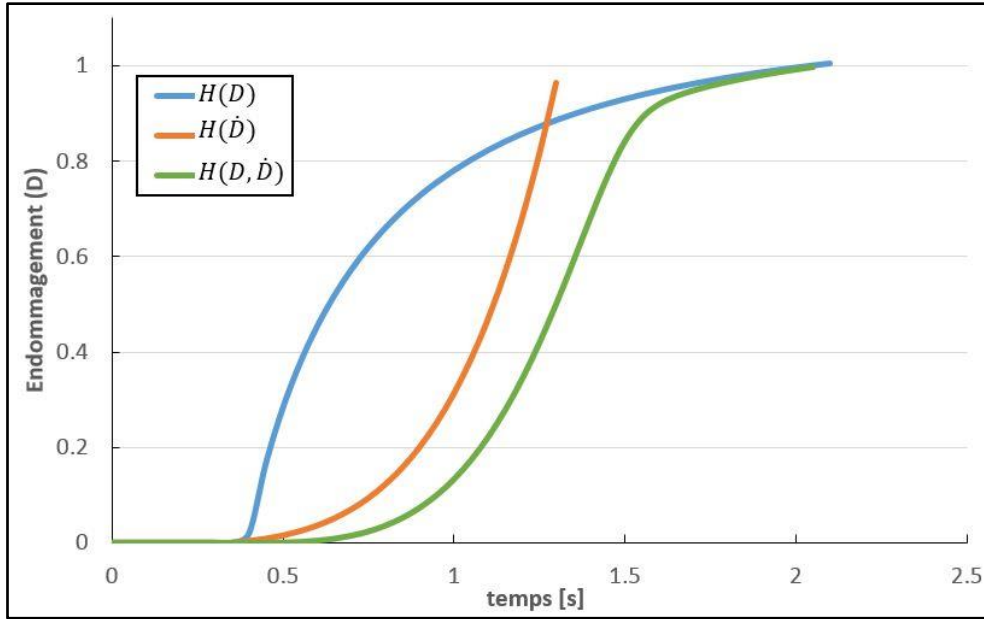


Figure II-13: Évolution de l'endommagement pour trois différentes formes de la fonction d'adoucissement.

On remarque que les trois formes de la fonction d'adoucissement permettent de rendre compte d'une réponse sans rupture brutale au moment de l'initiation de l'endommagement.

II.8 Bilan

Ce chapitre présente le développement unidimensionnel d'un modèle de comportement viscoélastique endommageable (noté PTE) au niveau local. Il s'agit d'une première étape de ce travail de thèse qui dans les chapitres suivants s'intéressera, en particulier, à l'écriture tensorielle de ce modèle, à sa régularisation par approche non-locale TLS et à son implémentation dans un code de calcul par éléments finis.

La loi de comportement développée repose sur le modèle viscoélastique de Poynting-Thomson (PT) dans lequel l'endommagement est introduit suivant le principe des contraintes effectives. L'application des principes de la thermodynamique à ce modèle permet d'établir des conditions sur l'évolution des variables internes conduisant à un processus thermodynamiquement admissible.

Le choix d'un critère d'initiation de l'endommagement est ensuite abordé. On retient un critère basé sur le taux de restitution d'énergie élastique qui doit permettre de rendre compte des observations expérimentales faites sur matériaux bitumineux. La loi d'évolution de l'endommagement associée à ce critère fait intervenir une fonction d'adoucissement $H(D)$ qui permet d'obtenir, si on le souhaite vis-à-vis du problème étudié, une rupture non brutale au moment de l'initiation de l'endommagement, à vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$ imposée. L'influence du choix de la fonction

d'adoucissement (3 fonctions étudiées) sur la réponse du modèle PTE à ε donnée est finalement discutée en fin de chapitre.



Chapitre III : Étude structurelle 1D de la réponse d'une barre à comportement viscoélastique chargée en traction dans le cadre de l'approche TLS

III.1 Contenu et démarche

L'incorporation d'un modèle d'endommagement local dans un calcul structurel nécessite de passer par des méthodes de régularisation. Ces méthodes, qui sont indispensables dans le cas des matériaux adoucissants, servent à contraindre les solutions et à limiter leur forte dépendance au maillage lors de calculs éléments finis EF (problème de localisation des déformations). Parmi les méthodes de régularisation, on trouve les modèles d'endommagement non-local pour lesquels les critères et lois d'évolution dépendent en un point donné des grandeurs locales et de leurs valeurs dans un certain voisinage caractérisé par une longueur interne. L'approche TLS qu'on retient par la suite rentre dans cette catégorie de modèles.

On va ainsi introduire ici le modèle PTE du chapitre précédent dans le formalisme de l'approche TLS en unidimensionnel. L'extension au cas 2D est traitée dans le chapitre IV. On considère ainsi le cas d'un barreau viscoélastique endommageable soumis à un chargement de traction. On établit dans un premier temps la réponse du problème en vitesse qui permet de discuter de l'existence de solutions à allongement croissant du barreau. L'étude plus spécifique de la solution au moment de l'initiation de l'endommagement fait ressortir des propriétés à donner à la fonction d'adoucissement de façon à satisfaire les conditions que nous nous sommes définies au chapitres I.

La réponse de la barre en phase d'endommagement est obtenue de manière incrémentale par intégration de la solution du problème en vitesse. On vérifie que la solution respecte les deux conditions C1 et C2 définies en fin de chapitre I pour toutes vitesses de chargement (ou températures).

Les calculs développés pour le modèle PTE sont ensuite étendus au cas d'un modèle à spectre de fluage plus riche (modèle de Kelvin-Voigt généralisé).

Les solutions développées dans ce chapitre servent par la suite de référence pour la validation de la résolution plus générale par éléments finis des problèmes viscoélastiques endommageables par TLS (chapitre IV).

III.2 Formulation 1D non locale du critère d'endommagement du modèle PTE suivant l'approche TLS

L'objectif de cette section est de transformer le critère d'endommagement local de la loi de comportement PTE en critère non local dans le cadre du formalisme TLS. Ce passage est réalisé en 1D dans ce chapitre, ce qui permet en même temps d'avoir une vision simplifiée de l'approche TLS.

Rappelons la loi d'endommagement locale avec fonction d'adoucissement :

$$f = Y - H(D)Y_c \leq 0; \quad \dot{D} \geq 0; \quad f\dot{D} = 0 \quad (\text{III-1})$$

L'approche TLS repose sur la régularisation du critère d'endommagement sur une bande d'endommagement d'épaisseur l comprise entre 0 et la valeur maximale l_c , qui est une longueur caractéristique d'entrée du problème. Cette régularisation est basée sur :

- La limitation du gradient spatial de l'endommagement en reliant la variable d'endommagement à une fonction de distance signée φ . Celle-ci représente la distance minimale séparant un point (qui se trouve à l'intérieur de la bande endommagée) du front d'endommagement Γ_0 (frontière entre zones saine et endommagée) défini par $\varphi = 0$. Par construction $|\nabla\varphi| = 1$. En supposant Γ_0 positionné en $x = l$ et la zone endommagée en $x \leq l$, alors $\varphi = l - x$. La valeur maximale l de φ est alors atteinte en $x = 0$. Lors d'une évolution le taux d'endommagement sur le segment $[0, l]$ est donné par $D_{,\varphi}(\varphi)\dot{\varphi}$ soit encore $-D'(x)\dot{l}$. La relation entre φ et D est donnée par un profil d'endommagement croissant $D(\varphi)$, un paramètre du modèle TLS (Figure I-44).

Une relation entre la vitesse du front Γ_0 et la variable non locale $\bar{Y}$. Celle-ci est prise égale à la moyenne pondérée par la fonction poids $D_{,\varphi}(\varphi)$ (ou ce qui revient au même ici $D'(x) = D_{,x}(\varphi(x)) = -D_{,\varphi}(\varphi(x))$) de la variable locale Y sur l'épaisseur de la bande endommagée (Bernard et al., 2012) :

$$\bar{Y} = \frac{\int_0^l Y(x)D'(x)dx}{\int_0^l D'(x)dx} \quad (\text{III-2})$$

De la même manière on peut définir les quantités non locales suivantes :

$$\bar{D} = \frac{\int_0^l \dot{D}dx}{\int_0^l dx}; \quad \overline{H(D)} = \frac{\int_0^l H(D)D'dx}{\int_0^l D'dx} \quad (\text{III-3})$$

L'ensemble des équations (III-2) et (III-3) conduisent à l'égalité suivante entre dissipations d'énergie locale et non locale dues à l'endommagement (Lé et al. 2018) :

$$\int_0^l Y\dot{D}dx = l\bar{Y}\bar{D} \quad (\text{III-4})$$

De plus, compte tenu de la relation $\dot{D} = D'(\varphi)\dot{\varphi}$ et $\dot{\varphi} = \dot{l}$ quantité indépendante de x :

$$\int_0^l H(D)\dot{D}dx = \overline{H(D)}\dot{\varphi} \int_0^l D'dx = \overline{H(D)}\dot{l} \int_0^l D'dx = l\overline{H(D)}\bar{D} \quad (\text{III-5})$$

Les deux conditions $Y - H(D)Y_c \leq 0$ et $\dot{D} \geq 0$ impliquent alors :

$$\frac{\int_0^l (Y - H(D)Y_c) D' dx}{\int_0^l D'(x) dx} = \bar{Y} - Y_c \overline{H(D)} \leq 0 \quad (\text{III-6})$$

et

$$\frac{1}{l} \int_0^l \dot{D} dx = \bar{\dot{D}} \geq 0 \quad (\text{III-7})$$

Par ailleurs :

$$\int_0^l f \dot{D} dx = \int_0^l (Y - Y_c H(D)) \dot{D} dx = l [\bar{Y} - Y_c \overline{H(D)}] \bar{\dot{D}} \quad (\text{III-8})$$

D'où puisque $f \dot{D} = 0$:

$$[\bar{Y} - Y_c \overline{H(D)}] \bar{\dot{D}} = 0 \quad (\text{III-9})$$

Au final, on obtient donc la forme non locale de la loi d'évolution d'endommagement (II-81) qui sera retenue par la suite :

$$\bar{f} = \bar{Y} - Y_c \overline{H(D)} \leq 0; \quad \bar{\dot{D}} \geq 0; \quad \bar{f} \bar{\dot{D}} = 0 \quad (\text{III-10})$$

En considérant la fonction $\varphi(x, t) = l(t) - x$ et en notant $\dot{\varphi}(t) = \varphi_{,t}(x, t) = \dot{l}(t)$ la relation ci-dessus peut se réécrire en fonction de $\dot{\varphi}$ sous la forme que l'on retrouvera plus loin en 2D le long des normales au front :

$$\bar{f} = \bar{Y} - Y_c \overline{H(D)} \leq 0; \quad \dot{\varphi} \geq 0; \quad \bar{f} \dot{\varphi} = 0 \quad (\text{III-11})$$

Celle-ci découle de la relation :

$$\bar{\dot{D}} = \frac{1}{l} \int_0^l \dot{D} dx = \frac{1}{l} \int_0^l D_{,\varphi} \dot{\varphi}(t) dx = \frac{\dot{\varphi}(t)}{l} \int_0^l D_{,\varphi} dx = -\frac{\dot{\varphi}(t)}{l} \int_0^l D_{,x} dx = \frac{D(0)}{l} \dot{\varphi}(t) \quad (\text{III-12})$$

avec $D(0) > 0$.

Il est à noter que dans le cas de la fonction linéaire $D(\varphi) = \varphi/l_c$, l'expression de $\bar{f}$ se simplifie en :

$$\bar{f} = \frac{1}{l} \int_0^l Y(x) dx - \frac{Y_c}{l} \int_0^l H(D) dx = \frac{1}{l} \int_0^l Y(\varphi) d\varphi - \frac{Y_c}{l} \int_0^l H(D) d\varphi \quad (\text{III-13})$$

Sans changer de notation, on peut ainsi considérer la fonction de charge suivante :

$$\bar{f} = \int_0^l Y(\varphi) d\varphi - Y_c \int_0^l H(D) d\varphi \quad (\text{III-14})$$

III.3 Problème de barre à comportement PTE en traction

Afin d'aborder l'étude de la réponse d'un milieu viscoélastique endommageable en approche TLS, on considère le problème de traction directe 1D sur une barre à comportement PTE. Commençons par étudier la formulation du problème en vitesse qui nous permettra de discuter du choix des paramètres du modèle TLS et de leurs effets sur la réponse de la barre.

La barre de longueur L est supposée encastree en $x = 0$ et soumise à l'instant t à une vitesse de déplacement imposée $\dot{U}$ en $x = L$.

On suppose que l'endommagement s'initie à l'encastrement et que dans le cadre TLS la zone endommagée à l'instant t est comprise entre $x = 0$ et $x = l(t)$ avec $l(t) \leq l_c$. Le segment $[l(t), L]$ est quant à lui supposé sain ($D = 0$).

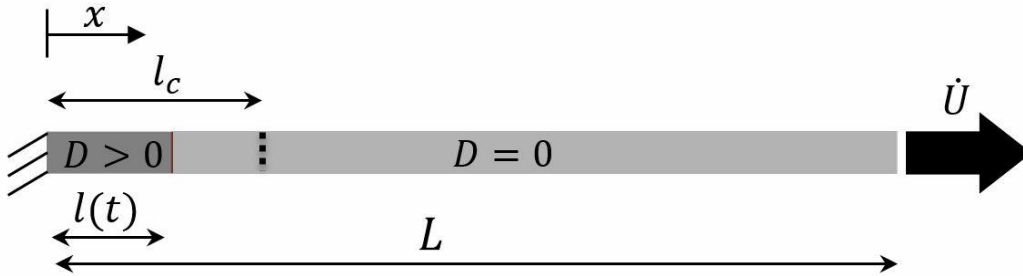


Figure III-1: Barre en traction 1D, développement d'une bande d'endommagement d'épaisseur $l(t)$ à l'instant t .

À l'instant t , la fonction de distance signée $\varphi(x, t)$, calculée au point d'abscisse x est égale à la distance séparant ce point du front d'endommagement d'abscisse $l(t)$, soit : $\varphi(x, t) = l(t) - x$. La position du front d'endommagement est définie par le zéro de la fonction φ à l'instant t .

Pour le problème en vitesse, les valeurs des champs de déplacement, déformation, contrainte, endommagement sont considérées connues à l'instant t pour $x \in [0, L]$. La résolution de ce problème consiste à calculer les champs de vitesse de ces mêmes quantités à l'instant t (Figure III-2) et au final à calculer par intégration l'évolution d'ensemble de l'état de la barre. Le problème en vitesse peut être éventuellement résolu de façon semi-analytique par discrétisation spatiale. Tandis que l'intégration temporelle peut être faite par discrétisation par rapport au temps (Figure III-3).

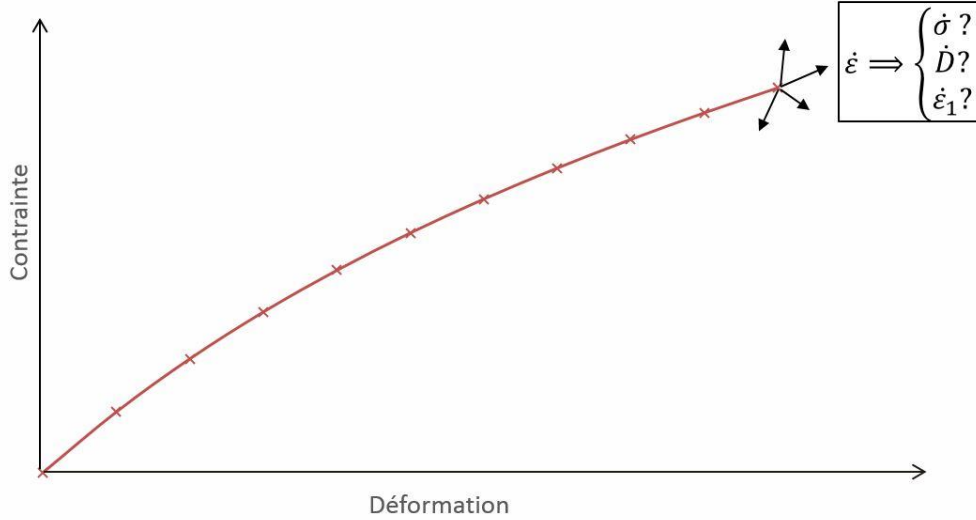


Figure III-2: Problème en vitesse : détermination de l'évolution de l'état de la barre à l'instant t .

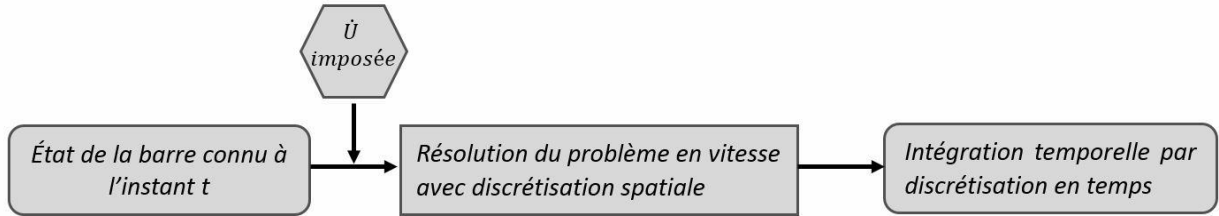


Figure III-3: Stratégie pour résoudre le problème mécanique.

Il est à noter que le problème en vitesse permet de détecter les instabilités (ex. snap-back) de la réponse de la barre en cours d'endommagement, notamment lors de pilotage à force ou déplacement imposé.

III.3.1 Equations du problème en vitesse

On suppose d'emblée l'existence d'une zone saine et d'une zone endommagée. L'évolution avant initiation de l'endommagement s'en déduira en faisant $l(t) = 0$.

On omet dans les notations ci-dessous la dépendance en temps des différentes grandeurs (ex. $l(t) = l$). On cherche à exprimer l'ensemble des relations régissant les évolutions des champs : $\dot{u}(x, t)$, $\dot{\epsilon}(x, t)$, $\dot{\epsilon}_0(x, t)$, $\dot{\epsilon}_1(x, t)$, $\dot{\sigma}(x, t)$, $\dot{D}(x, t)$ et de la position $\dot{l}(t)$ du front.

Nota : on considère D comme une fonction de x à travers la relation : $D(x) = D(\varphi(x))$.

Sur l'ensemble de la barre (zones saine et endommagée), on a les équations suivantes :

Conditions limites cinématiques :

$$\dot{u}(0) = 0 \quad (\text{III-15})$$

$$\dot{u}(L) = \dot{U} \quad (\text{III-16})$$

Compatibilité cinématique :

$$\dot{\epsilon} = \dot{u}_{,x} \quad (\text{III-17})$$

$$\int_0^L \dot{\varepsilon} dx = \dot{U} \quad (\text{III-18})$$

En supposant l'absence de forces de volume, l'équation d'équilibre conduit à un champ de contrainte homogène dans la barre à tout instant, soit :

$$\sigma(x) = \sigma \quad (\text{III-19})$$

$$\dot{\sigma}(x) = \dot{\sigma} \quad (\text{III-20})$$

Loi de comportement (décomposition des déformations) :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_0 + \dot{\varepsilon}_1 \quad (\text{III-21})$$

$$Y = \frac{1}{2} E_0 \varepsilon_0^2 + \frac{1}{2} E_1 \varepsilon_1^2 \quad (\text{III-22})$$

$$\dot{Y} = E_0 \varepsilon_0 \dot{\varepsilon}_0 + E_1 \varepsilon_1 \dot{\varepsilon}_1 \quad (\text{III-23})$$

Dans la zone saine (pour $l \leq x \leq L$) on a de plus :

$D = \dot{D} = 0$ et la relation de comportement :

$$\dot{\varepsilon}_0 = \frac{\dot{\sigma}}{E_0} \quad (\text{III-24})$$

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\sigma}{E_1 \tau} - \frac{\varepsilon_1}{\tau} \quad (\text{III-25})$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_0 + \dot{\varepsilon}_1 = \frac{\dot{\sigma}}{E_0} + \frac{\sigma}{E_1 \tau} - \frac{\varepsilon_1}{\tau} \quad (\text{III-26})$$

D'où en particulier la relation entre $\dot{\sigma}$ et $\dot{\varepsilon}$:

$$\dot{\sigma} = E_0 \dot{\varepsilon} + \dot{\sigma}_h^{nd} \quad (\text{III-27})$$

avec $\dot{\sigma}_h^{nd} = \frac{E_0}{\tau} \left(\varepsilon_1 - \frac{\sigma}{E_1} \right)$

Dans la zone endommagée (pour $0 \leq x \leq l$) :

La dérivée de l'équation (II-29)₁ par rapport à t s'écrit :

$$\dot{\sigma} = -\dot{D}(x) E_0 \varepsilon_0(x) + (1 - D(x)) E_0 \dot{\varepsilon}_0(x) \Rightarrow \dot{\varepsilon}_0(x) = \frac{\dot{\sigma} + \dot{D}(x) E_0 \varepsilon_0(x)}{(1 - D(x)) E_0} \quad (\text{III-28})$$

Ce qui donne l'expression de la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}_0(x)$ en chaque point de la bande endommagée connaissant $\dot{\sigma}$ et $\dot{D}$.

À partir de l'équation (II-29)₂, on déduit l'expression de la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}_1$ pour l'unité de Kelvin-Voigt :

$$\dot{\varepsilon}_1(x) = \frac{\sigma}{E_1 \tau (1 - D(x))} - \frac{\varepsilon_1(x)}{\tau} \quad (\text{III-29})$$

On en déduit la relation :

$$\dot{\varepsilon}(x) = \dot{\varepsilon}_0(x) + \dot{\varepsilon}_1(x) = \frac{\dot{\sigma} + \dot{D}(x) E_0 \varepsilon_0(x)}{(1 - D(x)) E_0} + \frac{\sigma}{E_1 \tau (1 - D(x))} - \frac{\varepsilon_1(x)}{\tau} \quad (\text{III-30})$$

Considérons dans la suite des calculs le profil d'endommagement linéaire $D(\varphi) = \varphi/l_c$, soit :

$$\begin{cases} D(x, t) = \frac{l(t) - x}{l_c} & \text{pour } x \leq l(t) \\ D(x, t) = 0 & \text{pour } x > l(t) \end{cases} \quad (\text{III-31})$$

La condition de charge dans la zone endommagée s'écrit donc :

$$\bar{f} = \int_0^l Y(x) dx - \int_0^l Y_c H(D) dx = 0, \quad \dot{D} > 0 \quad (\text{III-32})$$

La dérivée par rapport au temps t de $\bar{f}$ conduit à la condition de consistance suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^l Y(x) dx \right) = \frac{\partial}{\partial l} \left(\int_0^l Y_c H(D) dx \right) \dot{l} \quad (\text{III-33})$$

soit :

$$Y(x=l)\dot{l} + \int_0^l \dot{Y}(x) dx = Y_c H(D(x=l))\dot{l} + \frac{\dot{l}}{l_c} \int_0^l Y_c H_{,D} dx \quad (\text{III-34})$$

Or pour $x = l$, le critère local $f = Y - Y_c H(D)$ est nul. D'où :

$$\int_0^l \dot{Y}(x) dx = \frac{\dot{l}}{l_c} \int_0^l Y_c H_{,D} dx \quad (\text{III-35})$$

ou encore comme $\dot{D} = \dot{l}/l_c$:

$$\dot{D} \int_0^l Y_c H_{,D} dx = \int_0^l (E_0 \varepsilon_0 \dot{\varepsilon}_0 + E_1 \varepsilon_1 \dot{\varepsilon}_1) dx \quad (\text{III-36})$$

Après le remplacement des expressions de $\dot{\varepsilon}_0$ (III-28) et $\dot{\varepsilon}_1$ (III-29) dans l'équation (III-36), on obtient :

$$\dot{D} = \dot{\sigma} \frac{\int_0^l \left(\frac{\varepsilon_0}{(1-D)} \right) dx}{\int_0^l \left(Y_c H_{,D} - \frac{E_0 \varepsilon_0^2}{1-D} \right) dx} + \frac{\frac{\sigma}{\tau} \int_0^l \left(\frac{\varepsilon_1}{(1-D)} \right) dx - \frac{1}{\tau} \int_0^l E_1 \varepsilon_1^2 dx}{\int_0^l \left(Y_c H_{,D} - \frac{E_0 \varepsilon_0^2}{1-D} \right) dx} \quad (\text{III-37})$$

L'équation (III-37) fournit une relation entre la vitesse d'endommagement $\dot{D}$ (ou vitesse de front) et le taux de contrainte $\dot{\sigma}$.

En notant :

$$A = \int_0^l \frac{\varepsilon_0}{1-D} dx \quad (\text{III-38})$$

$$B = \int_0^l \frac{\varepsilon_1}{1-D} dx \quad (\text{III-39})$$

$$C = \int_0^l E_1 \varepsilon_1^2 dx \quad (\text{III-40})$$

$$G = \int_0^l \left(Y_c H_{,D} \left(\frac{l-x}{l_c} \right) - \frac{E_0 \varepsilon_0^2}{1-D} \right) dx \quad (\text{III-41})$$

l'équation (III-37) prend la forme suivante :

$$\dot{D} = \dot{\sigma} \frac{A}{G} + \frac{\sigma B - C}{\tau G} \quad (\text{III-42})$$

où les scalaires A, B, C, G sont connus à l'instant t .

L'expression (III-42) permet d'éliminer $\dot{D}$ dans l'équation (III-30) et de trouver une relation entre $\dot{\sigma} - \dot{\varepsilon}$ indépendante de la vitesse d'endommagement en chaque point de la zone endommagée :

$$\dot{\sigma} = \left(\frac{(1 - D(x))E_0}{1 + \frac{E_0 \varepsilon_0(x) A}{G}} \right) \dot{\varepsilon}(x) + \frac{E_0}{\tau} \frac{\left((1 - D(x))\varepsilon_1(x) - \frac{\sigma}{E_1} - \varepsilon_0(x) \frac{[\sigma B - C]}{G} \right)}{\left(1 + \frac{E_0 \varepsilon_0(x) A}{G} \right)} \quad (\text{III-43})$$

Cette relation a la forme d'une loi élastique avec contraintes initiales (exprimée en termes de vitesse) :

$$\dot{\sigma} = E(x)\dot{\varepsilon} + \dot{\sigma}_h(x) \quad (\text{III-44})$$

où E et $\dot{\sigma}_i$ sont des quantités connues à l'instant t données par :

$$E(x) = \frac{(1 - D(x))E_0}{1 + \frac{E_0 \varepsilon_0(x) A}{G}} \quad (\text{III-45})$$

et

$$\dot{\sigma}_h(x) = \frac{E_0}{\tau} \frac{\left((1 - D(x))\varepsilon_1(x) - \frac{\sigma}{E_1} - \varepsilon_0(x) \frac{[\sigma B - C]}{G} \right)}{1 + \frac{E_0 \varepsilon_0(x) A}{G}} \quad (\text{III-46})$$

Cette relation avec celle de la zone non endommagée va permettre de résoudre pour la barre le problème en vitesse sous forme d'un calcul structurel élastique avec contraintes initiales.

Dans la zone endommagée, on a donc :

$$\dot{\varepsilon}(x) = \frac{\dot{\sigma} - \dot{\sigma}_h(x)}{E(x)} \quad (\text{III-47})$$

Dans la zone non-endommagée homogène :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma} - \dot{\sigma}_h^{nd}}{E_0} \quad (\text{III-48})$$

Une comparaison avec la relation $\dot{\sigma} - \dot{\varepsilon}$ obtenue dans la zone endommagée et non-endommagée est présentée dans le Tableau III-1.

zone endommagée	zone saine
$\dot{\sigma} = E(x)\dot{\varepsilon}(x) + \dot{\sigma}_h(x)$	$\dot{\sigma} = E_0\dot{\varepsilon} + \dot{\sigma}_h^{nd}$

Tableau III-1: Loi de comportement dans la zone saine et endommagée.

Par intégration spatiale de $\dot{\varepsilon}$ sur le domaine $[0 ; L]$ on obtient :

$$\dot{\sigma} \int_0^l \frac{dx}{E(x)} - \int_0^l \frac{\dot{\sigma}_h(x) dx}{E(x)} + (L - l) \frac{\dot{\sigma} - \dot{\sigma}_h^{nd}}{E_0} = \dot{U} \quad (\text{III-49})$$

Finalement, on arrive à l'expression (III-50). Elle nous permet de déterminer l'évolution de la contrainte dans la barre soumise à la vitesse de déplacement $\dot{U}$ en $x = l$:

$$\dot{\sigma} = \frac{\dot{U} + \int_0^l \frac{\dot{\sigma}_h(x) dx}{E(x)} + (L-l) \frac{\dot{\sigma}_h^{nd}}{E_0}}{\int_0^l \frac{dx}{E(x)} + \frac{L-l}{E_0}} \quad (\text{III-50})$$

où les intégrales figurant dans l'équation (III-50) sont connues à l'instant t . Pour simplifier les écritures, posons :

$$M = \int_0^l \frac{\dot{\sigma}_h(x) dx}{E(x)} \quad (\text{III-51})$$

$$N = \int_0^l \frac{dx}{E(x)} \quad (\text{III-52})$$

L'équation (III-50) prend alors la forme suivante :

$$\dot{\sigma} = \frac{\dot{U} + M + (L-l) \frac{\dot{\sigma}_h^{nd}}{E_0}}{N + \frac{L-l}{E_0}} \quad (\text{III-53})$$

Résolution suivant les modes de pilotage

À vitesse de déplacement imposée $\dot{U}$ en $x = L$, on vient de voir le calcul de la vitesse de contrainte dans la barre $\dot{\sigma}$ à partir de l'équation (III-53). Ensuite, la vitesse d'endommagement $\dot{D}$ (ou la vitesse du front d'endommagement $\dot{l}$) s'obtient à partir de l'équation (III-42). Une fois $\dot{\sigma}$ et $\dot{D}$ calculés, on trouve les vitesses $\dot{\epsilon}_0$ et $\dot{\epsilon}_1$ sur toute la barre à partir des équations (III-24)→ (III-30). En conséquence, on déduit le champ de vitesse de déformation $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 + \dot{\epsilon}_1$. On obtient ainsi toutes les dérivées temporelles des champs à l'instant t .

À vitesse de force $\dot{F}$ imposée, on peut calculer la vitesse $\dot{\sigma}$ par la relation $\dot{\sigma} = \frac{\dot{F}}{S}$ où S est la section de la barre. Dans ce cas on obtient directement la vitesse d'endommagement $\dot{D}$ (ou du front $\dot{l}$) à partir de l'équation (III-42). Les autres étapes de calcul des champs ($\dot{\epsilon}_0$, $\dot{\epsilon}_1$, $\dot{\epsilon}$) sont comme celles du problème à vitesse de déplacement imposée.

Théoriquement, pendant la phase d'endommagement on peut également envisager un chargement à vitesse de front d'endommagement imposée $\dot{l}$. L'intérêt de ce type de chargement réside dans l'obtention par intégration en temps d'une solution continue permettant de passer les points à tangente horizontale (instabilité du pilotage en force) ou verticale (instabilité du pilotage en déplacement, snap-back) de la courbe $F(U)$.

Pour résoudre le problème en vitesse pour ce type de chargement, on calcule tout d'abord la vitesse d'endommagement ($\dot{D} = \dot{l}/l_c$). Ensuite, l'évolution de la vitesse de contrainte $\dot{\sigma}$ est obtenue à partir de l'équation (III-42). À la fin les vitesses ($\dot{\epsilon}_0$, $\dot{\epsilon}_1$, $\dot{\epsilon}$) sont calculées comme présenté ci-avant.

Les algorithmes de calcul sont détaillés dans la section III.3.4.

III.3.2 État de la barre au moment de l'initiation de l'endommagement et discussion

Au moment de l'initiation de l'endommagement noté t_D^0 , on se trouve sur la surface de charge avec les conditions suivantes :

$$l = 0; D = 0; \dot{D} \neq 0; Y = Y_c \quad (\text{III-54})$$

Dans ce cas, en utilisant la règle de l'Hôpital pour $l \rightarrow 0$ la vitesse d'endommagement est déduite de l'équation (III-37) :

$$\dot{D} = \frac{\dot{l}}{l_c} = \frac{1}{\tau} \left(\frac{\tau \varepsilon_0 \dot{\sigma} + \sigma \varepsilon_1 - E_1 \varepsilon_1^2}{Y_c H_{,D}^0 - E_0 \varepsilon_0^2} \right) \quad (\text{III-55})$$

avec $H_{,D}^0 = H_{,D}(D = 0)$.

De la même façon, pour $D = l = 0$ l'équation (III-43) conduit à :

$$\dot{\sigma} = E(x) \dot{\varepsilon}(0) + \dot{\sigma}_h \quad (\text{III-56})$$

avec :

$$\begin{cases} E(x) = cst = E_0 \frac{Y_c H_{,D}^0 - E_0 \varepsilon_0^2}{Y_c H_{,D}^0} \\ \dot{\sigma}_h = \frac{E_0 (E_1 \varepsilon_1 - \sigma) (Y_c H_{,D}^0 - E_0 \varepsilon_0^2 + E_1 \varepsilon_1 \varepsilon_0)}{\tau E_1 Y_c H_{,D}^0} \end{cases} \quad (\text{III-57})$$

où $\dot{\sigma}_h$ est un terme qui dépend de l'état de la barre au moment de l'initiation de l'endommagement.

Au moment de l'initiation de l'endommagement, regardons la condition $\dot{D} \geq 0$ pour les modes de pilotage à $\dot{U}$ imposé ou $\dot{l}$ imposé. Examinons en même temps le signe de $\dot{\sigma}$.

Pilotage à $\dot{U}$ imposé croissant

Pour t_D^{0+} , on conserve la relation $\dot{\varepsilon} = \dot{U}/L$ qui prévalait avant endommagement sur la barre encore intacte et homogène. Le taux de contrainte $\dot{\sigma}$ reste donc égal à sa valeur en t_D^{0-} donnée par : $\dot{\sigma} = E_0 \dot{U}/L + \dot{\sigma}_i^{nd}$. Autrement dit la courbe $F(U)$ est continue et dérivable en t_D^0 . En cet instant, $\dot{\sigma}$ et $\dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}_0, \dot{\varepsilon}_1$ sont positifs comme aisément vérifiables pour un élément de PT soumis à un chargement monotone croissant. Le numérateur :

$$Num = \tau \varepsilon_0 \dot{\sigma} + \sigma \varepsilon_1 - E_1 \varepsilon_1^2 = \tau \varepsilon_0 \dot{\sigma} + E_1 \tau \varepsilon_1 \dot{\varepsilon}_1 \quad (\text{III-58})$$

de $\dot{D}$ est dans ce cas positif et le signe de $\dot{D}$ dépend donc de celui du dénominateur :

$$Denom = Y_c H_{,D}^0 - E_0 \varepsilon_0^2 = \frac{1}{2} (E_0 \varepsilon_0^2 + E_1 \varepsilon_1^2) H_{,D}^0 - E_0 \varepsilon_0^2 \quad (\text{III-59})$$

D'après cette expression, une condition suffisante (mais exigeante) pour assurer $\dot{D} \geq 0$ pour toute vitesse de chargement $\dot{U} \geq 0$ est d'avoir $H_{,D}^0 > 2$. En effet pour des vitesses tendant vers l'infini, $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ et donc $Denom \approx E_0 \varepsilon_0^2 \left(\frac{1}{2} H_{,D}^0 - 1 \right) > 0$ pour $H_{,D}^0 > 2$.

En envisageant à l'opposé une vitesse de chargement tendant vers 0, $Denom$ prend la valeur :

$$Denom = Y_c H_{,D}^0 - E_0 \varepsilon_0^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2}{E_0} + \frac{\sigma^2}{E_1} \right) H_{,D}^0 - \frac{\sigma^2}{E_0} \quad (\text{III-60})$$

qui conduit à la condition nécessaire, moins exigeante que la précédente, $H_{,D}^0 > 2/(1 + \frac{E_0}{E_1})$ pour assurer $\dot{D} \geq 0$ à t_D^{0+} .

On rappelle toutefois que ces considérations qui assurent la condition $Denom > 0$ ne sont valables qu'à l'initiation de l'endommagement. Elles ne permettent pas nécessairement de borner ultérieurement $\dot{D}$ pendant la phase d'évolution de l'endommagement et de garantir à tout instant l'existence d'une solution à pilotage $\dot{U}$ imposé (les instants auxquels l'existence de solution disparaît peuvent être interprétés comme donnant lieu à une rupture brutale pour ce mode de pilotage).

Pilotage à $\dot{l}$ imposé croissant

Dans ce cas, la condition $\dot{D} \geq 0$ est vérifiée par nature puisque $\dot{D} = \dot{l}/l_c$. L'équation (III-37) fournit le taux de contrainte $\dot{\sigma}$ à l'instant t_D^{0+} :

$$\dot{\sigma} = \frac{Y_c H_{,D}^0 - E_0 \varepsilon_0^2}{\varepsilon_0} \frac{\dot{l}}{l_c} - \frac{1}{\tau \varepsilon_0} (\sigma \varepsilon_1 - E_1 \varepsilon_1^2) \quad (\text{III-61})$$

qui n'est donc plus en général égal à la valeur $\dot{\sigma} = E_0 \dot{U}/L + \dot{\sigma}_i^{nd}$ en t_D^{0-} . Il n'y a donc plus de condition spécifique à imposer sur $H_{,D}^0$ autre que $H_{,D}^0 \geq 0$.

Par ailleurs, on peut montrer que $F(U)$ n'est plus nécessairement $\mathcal{C}_1$ (dérivable) en t_D^0 . En effet en notant $[[\dot{\sigma}]]$ le saut du taux de contrainte à t_D^0 , soit :

$$\dot{\sigma}^+ = \dot{\sigma}^- + [[\dot{\sigma}]] \quad (\text{III-62})$$

le saut de vitesse en extrémité de barre est donné par :

$$\dot{U}^+ = \dot{U}^- + \frac{L [[\dot{\sigma}]]}{E_0} \quad (\text{III-63})$$

en remarquant que seule la déformation ε_0 réagit instantanément au saut de $\dot{\sigma}$ pour la barre encore intacte ($\dot{\varepsilon}_1 = (\frac{\sigma}{E_1} - \varepsilon_1)/\tau$ est indépendant de $\dot{\sigma}$). D'où la différence de pente :

$$\frac{1}{S} \left(\frac{dF}{dU} \right)^+ - \frac{1}{S} \left(\frac{dF}{dU} \right)^- = \frac{\dot{\sigma}^+}{\dot{U}^+} - \frac{\dot{\sigma}^-}{\dot{U}^-} = \frac{[[\dot{\sigma}]] \left(\dot{U}^- - \frac{L \dot{\sigma}^-}{E_0} \right)}{\dot{U}^- \left(\dot{U}^- + \frac{L [[\dot{\sigma}]]}{E_0} \right)} \quad (\text{III-64})$$

qui est non nulle en général en viscoélasticité.

III.3.3 Réponse de la barre par résolution numérique du problème en vitesse

On a développé un premier programme pour calculer numériquement la réponse de la barre en nous appuyant sur la solution analytique du problème en vitesse. Ce dernier est résolu par discrétisation spatiale du segment $[0, L]$; l'état de la barre à chaque instant est obtenu par intégration numérique en temps des taux d'évolution des différents champs issus du problème en vitesse.

III.3.3.1 Discrétisation spatiale

Faisons le choix suivant des variables d'état de la loi PTE locale (Tableau III-2):

Variables observables	Variables internes
ε	ε_1 D

Tableau III-2: Variables d'état du modèle de PTE.

La déformation ε_0 du ressort isolé est déduite de la déformation ε et de la déformation ε_1 : $\varepsilon_0 = \varepsilon - \varepsilon_1$. L'ensemble de ces champs ainsi que la valeur de σ à l'instant t doivent être conservés pour le calcul incrémental de la réponse de la barre au temps suivant $t + \Delta t$.

La discrétisation spatiale du domaine $[0, L]$ va permettre de :

- 1- Calculer les intégrales (III-37) $\rightarrow$ (III-53) par la méthode des rectangles
- 2- Calculer les taux des différents champs et leur cumul dans le temps ($1 \leq e \leq n$)
- 3- Gérer l'avancement du front d'endommagement que l'on fait coïncider avec les nœuds du maillage par un choix adéquat des pas de temps successifs

Le segment $[0, L]$ est découpé en n éléments S_e de même longueur Δx (intervalles $[x_e, x_{e+1}] = [(e-1)\Delta x, e\Delta x]$). On note n_d le nombre d'éléments variable en fonction des incréments de temps de la zone endommagée ($1 \leq e \leq n_d, 0 \leq x \leq l = n_d \Delta x$). Dans les applications la valeur limite l_c de l est choisie comme un multiple de Δx : $l_c = n_c \Delta x$.

Les champs de déformations et d'endommagement sont supposés constants par élément.

A titre d'exemple, l'intégrale figurant dans l'équation (III-38) approximée par la méthode des rectangles donne :

$$A = \int_0^l \frac{\varepsilon_0}{1-D} dx \approx \sum_{e=1}^{n_d} \left. \frac{\varepsilon_0}{1-D} \right|_{S_e} \Delta x = \sum_{e=1}^{n_d} \frac{\varepsilon_{0,e}}{1-D_e} \Delta x \quad (\text{III-65})$$

où $\varepsilon_{0,e}$ et D_e sont les champs de déformation et d'endommagement de l'élément S_e .

L'endommagement dans un élément (S_e) est déterminé en se basant sur :

- Le choix du profil d'endommagement $D(\varphi) \rightarrow D_e = D(\varphi(x_e))$, éq. (III-31)
- Le calcul de la fonction de distance signée φ , approximée par sa valeur $\varphi(x_e)$ (distance séparant le nœud gauche d'un élément S_e et le front d'endommagement (Figure III-4)). Pour un front d'endommagement situé en $l = n_d \Delta x$ à l'instant t , la valeur de φ pour le segment S_e est donné par :
 - si $x_e \leq l \Rightarrow \varphi(x) \approx \varphi(x_e) = l - x_e$
 - si $x_e > l \Rightarrow \varphi(x) = 0$

Ce choix permet d'assurer la condition $\varphi = l$ sur S_1 et notamment pour $x = 0$. En particulier, $D(x = 0) = 1$ pour $l = l_c$.

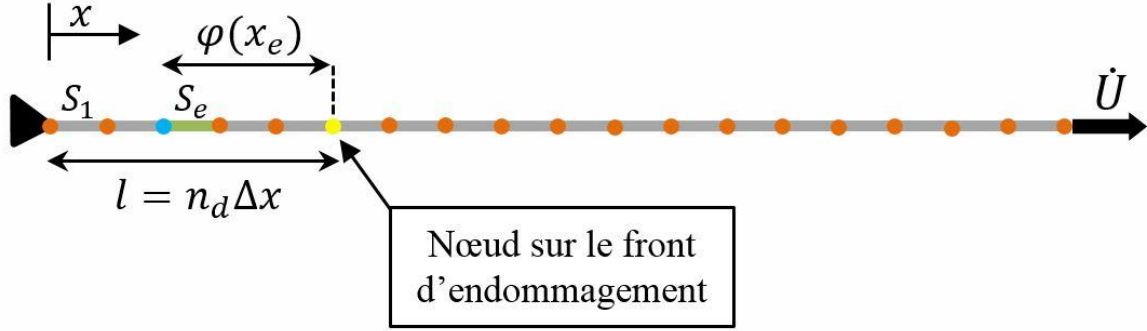


Figure III-4: Discrétisation spatiale de la barre.

III.3.3.2 Discrétisation temporelle

L'intégration en temps d'une fonction temporelle $X(t)$ est basée sur le schéma d'Euler explicite :

$$\dot{X}(t) \approx \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} \quad (\text{III-66})$$

où Δt est l'incrément de temps entre les deux instants de chargement t_i et $t_{i+1} = t_i + \Delta t$. Celui-ci fournit la valeur $X(t + \Delta t) = X(t) + \dot{X}(t)\Delta t$ connaissant Δt , $X(t)$ et $\dot{X}(t)$ issu de la résolution du problème en vitesse. Cette relation est utilisée pour tous les champs et en tout nœud. De façon à faire avancer le front d'endommagement d'un élément à chaque pas de temps, Δt est calculé en fonction de la quantité $\dot{l}$ du problème en vitesse : $\Delta t = \Delta x / \dot{l}$. Pour s'assurer d'une bonne précision de calcul, on cherche à avoir $\Delta t < \tau$ (temps caractéristique τ de l'amortisseur) ce qui impose un choix de Δx tel que : $\Delta x < \dot{l}\tau$.

III.3.4 Algorithmes de calcul à $\dot{U}$ ou $\dot{l}$ imposé

L'algorithme du logiciel développé en 1D repose en premier sur un pilotage à déplacement d'extrémité de barre $U(t)$ imposé. Ce mode de pilotage est maintenu tant qu'il permet de vérifier la condition $\dot{D} \geq 0$. L'absence de solution au-delà peut être interprétée comme donnant lieu à une rupture brutale de la barre à cet instant t_r pour $\dot{U}$ imposé. Néanmoins de façon à étendre la réponse théorique $F(U)$ de la barre (snap-back) pour $t > t_r$, l'algorithme est programmé ensuite à vitesse de front d'endommagement $\dot{l}$ imposée. En viscoélasticité, ce mode de pilotage conduit à autant de réponses différentes que de vitesses $\dot{l}$ imposées. Par choix, on considère ici que des vitesses $\dot{l}$ élevées ne mettant en jeu que le ressort E_0 de la loi PTE et ne conduisant qu'à des calculs élastiques endommageables. Dans ces conditions, le calcul peut être mené à accroissement Δl fixé ($\Delta l = \Delta x$ par incrément de calcul) permettant de s'affranchir du choix de la vitesse physique $\dot{l}$ d'avancée du front.

1^{er} mode de pilotage : à vitesse de déplacement imposée $\dot{U}$

Pour simuler des conditions courantes d'essai, le déplacement $U(t)$ est supposé linéaire en fonction du temps : $U(t) = \dot{U}t$ avec $\dot{U}$ constant.

La Figure III-5 détaille l'algorithme utilisé pour calculer l'ensemble des champs inconnus à l'instant $t + \Delta t$ pendant la phase d'endommagement.

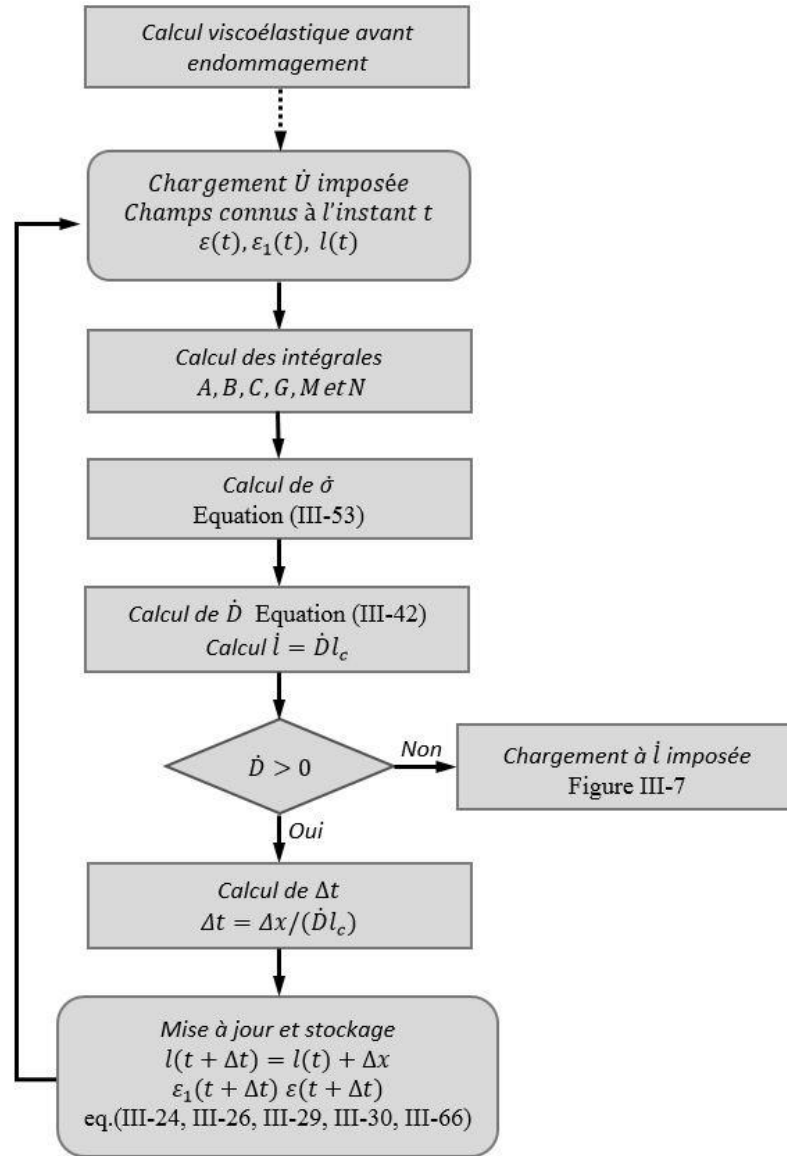


Figure III-5: Algorithme de calcul pour un chargement du type vitesse de déplacement imposée.

2^{em} mode de pilotage : à avancement de front Δl imposé

Ce mode de pilotage est utilisé pendant la phase d'instabilité du pilotage en $\dot{U}$. Comme déjà mentionné, on suppose ici que les phénomènes sont rapides et que le comportement local du matériau est élastique endommageable associé au module E_0 . Ceci revient dans les équations à faire tendre τ vers l'infini. Les équations du problème en vitesse deviennent alors :

$$\dot{D} = \frac{\Delta x}{l_c} \text{ (en prenant } \Delta t = 1) \quad (\text{III-67})$$

$$\dot{\sigma} = \frac{G \dot{D}}{A} \quad (\text{III-68})$$

$$\dot{\varepsilon}(x) = \frac{\dot{\sigma}}{E(x)} \text{ dans la zone endommagée} \quad (\text{III-69})$$

$$\dot{\varepsilon}(x) = \frac{\dot{\sigma}}{E_0} \text{ dans la zone non endommagée} \quad (\text{III-70})$$

$$\dot{\varepsilon}_1(x) = 0 \text{ partout} \quad (\text{III-71})$$

$$\dot{U} = \left(N + \frac{L-l}{E_0} \right) \dot{\sigma} \quad (\text{III-72})$$

L'algorithme de résolution est présenté sur la Figure III-6. L'utilisation de cet algorithme sera présentée dans le paragraphe III.5.

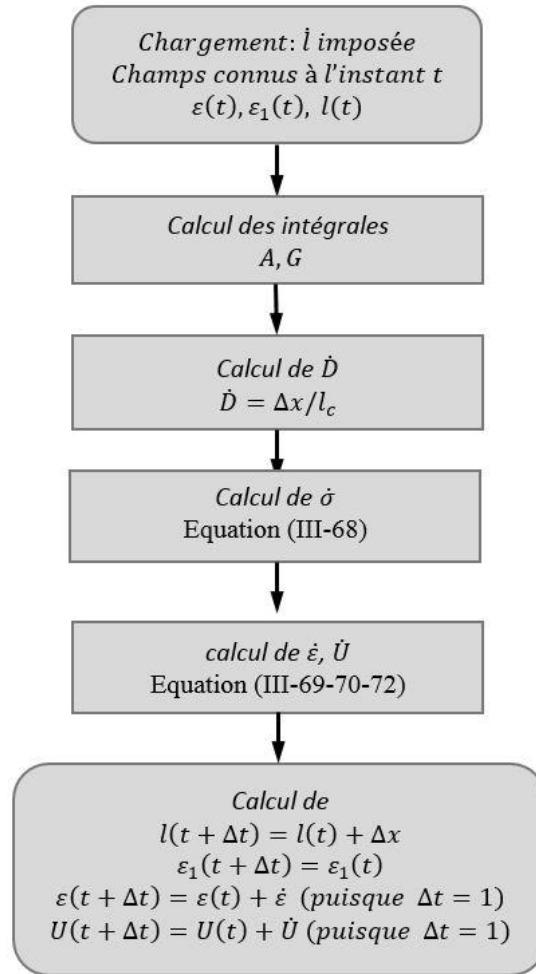


Figure III-6: Algorithme de calcul pendant la phase d'endommagement à avancée de front imposée.

III.4 Extension du comportement matériel de la barre à un modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt généralisé endommageable

Des résultats de la littérature montrent que le modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt généralisé à une dizaine d'éléments (de 10 à 15 éléments) est capable de modéliser le comportement des matériaux bitumineux pour une large gamme de températures et de vitesses de chargement (Olard and Di Benedetto 2005)(Olard 2003)(Di Benedetto et al. 2001a)(Lee 1996). En fait, ce type de modèle peut être vu comme une décomposition spectrale finie et approchée de la fonction de

fluage du modèle de Huet qui permet de bien simuler la réponse des EB (De La Roche 1996)(Neifar and Di Benedetto 2001)(Olard and Di Benedetto 2003)(Nilsson, Isacsson, and Hopman 2002).

On obtient ainsi une généralisation du modèle de PT pour les enrobés bitumineux (Figure III-7). Les éléments sont caractérisés par les couples (E_i, η_i) définissant les temps caractéristiques $\tau_i = \eta_i / E_i$. La détermination de ces paramètres à partir d'une fonction de fluage donnée a été vue en bibliographie (cf. I.4.3). Le principe d'équivalence temps-température important pour ces matériaux peut être simplement obtenu en faisant dépendre les amortisseurs η_i (ou les temps caractéristiques τ_i) d'une même fonction multiplicative de la température $a(\theta)$. Le couplage thermomécanique est achevé en se basant sur le principe d'équivalence temps-température PETT présenté dans le chapitre I (cf. I.3.2.2).

Le temps caractéristique τ_i de l'unité de Kelvin-Voigt à une température θ est donné par :

$$\tau_i(\theta) = a(\theta)\tau_{i,ref} \quad (\text{III-73})$$

où $\tau_{i,ref}$ est le temps caractéristique de l'élément de Kelvin-Voigt pour une température de référence θ_{ref} et $a(\theta)$ est le coefficient de calage temps-température (appelé aussi facteur de translation).

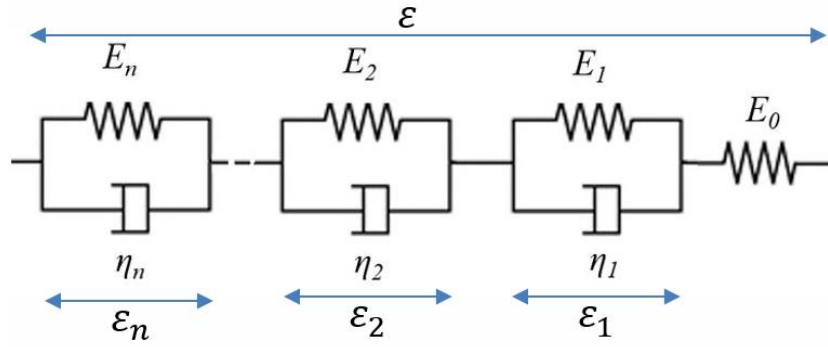


Figure III-7: Modèle de Kelvin-Voigt généralisé à n unités de Kelvin-Voigt.

L'avantage de la stratégie adoptée pendant le développement analytique – approche incrémentale basée sur variables internes – réside alors dans sa simplicité d'extension à de tels modèles de comportement généralisés. Il suffit de considérer comme variables internes ϵ_i toutes les déformations des éléments de Kelvin-Voigt (Figure III-7).

Les lois d'état pour le modèle de Kelvin-Voigt généralisé sont :

$$\sigma = (1 - D)E_0\epsilon_0 \quad (\text{III-74})$$

$$\sigma = (1 - D)E_i(\epsilon_i + \tau_i\dot{\epsilon}_i) \quad n \text{ équations } (i = 1:n) \quad (\text{III-75})$$

$$\epsilon = \epsilon_0 + \sum_{i=1}^n \epsilon_i \quad (\text{III-76})$$

$$Y = \frac{1}{2} \left(E_0\epsilon_0^2 + \sum_{i=1}^n E_i\epsilon_i^2 \right) \quad (\text{III-77})$$

Pour introduire l'endommagement on s'appuie à nouveau sur le principe de contraintes effectives. Ce principe conduit à l'expression de l'énergie libre de l'équation (III-78).

$$E = (1 - D) \frac{1}{2} \left(E_0 \varepsilon_0^2 + \sum_{i=1}^n E_i \varepsilon_i^2 \right) \quad (\text{III-78})$$

En suivant la même méthodologie que celle du paragraphe III.3.1, une extension des paramètres $B, C \dots$ convenable dans les équations (III-38)→ (III-41), (III-51) et (III-52) nous permet de résoudre le problème de propagation du front d'endommagement dans la barre à partir de l'algorithme détaillé sur la Figure III-5. Les termes à modifier sont les suivants :

$$B = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\tau_i} \int_0^l \left(\frac{\varepsilon_i}{(1 - D)} \right) dx \quad (\text{III-79})$$

$$C = \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{\tau_i} \int_0^l \varepsilon_i^2 dx \quad (\text{III-80})$$

$$\frac{\dot{\sigma}_h^{nd}}{E_0} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\tau_i E_i} (E_i \varepsilon_i - \sigma) \quad (\text{III-81})$$

$$M = \int_0^l \frac{\dot{\sigma}_h(x) dx}{E(x)} \quad (\text{III-82})$$

$$\frac{\dot{\sigma}_h(x)}{E(x)} = \frac{1}{(1 - D)} \left((1 - D) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\varepsilon_i}{\tau_i} \right) - \sigma \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\tau_i E_i} \right) - \varepsilon_0 \frac{[\sigma B - C]}{G} \right) \quad (\text{III-83})$$

L'autre changement qu'on doit apporter à l'algorithme présenté dans ce chapitre est lié au stockage des variables internes associées aux unités de Kelvin-Voigt ($\varepsilon_i, i = 1:n$).

L'algorithme de traitement de ces équations n'est pas présentée dans ce manuscrit. Son implémentation dans le code C++ 1D de la barre a été validée par comparaison avec le cas PTE en ne conservant qu'un élément de Kelvin-Voigt dans le modèle de comportement généralisé.

La partie suivante est dédiée aux applications numériques dont le but principal est d'étudier l'effet de la vitesse de chargement et de la température sur la réponse de la barre. L'étude de l'effet des paramètres du modèle TLS ($H(D), l_c, D(\varphi)$) est reportée au chapitre suivant qui aborde le problème en 1D et 2D par éléments finis.

III.5 Application numérique : Modélisation de l'essai de traction directe

On étudie dans cette partie la réponse de la barre sous différentes conditions de chargement. On examine d'abord le cas PTE avant de traiter le cas de Kelvin-Voigt généralisé endommageable.

Les résultats sont comparés sous l'angle qualitatif aux observations faites en laboratoire sur l'essai de traction direct pour EB effectué à différentes vitesses de déplacement imposées. En particulier, nous nous intéressons au caractère fragile/ductile de la réponse de la barre en fonction de la vitesse de chargement.

III.5.1 Loi PTE et réponse à $\dot{U}$ imposée

Soit une barre de 800 mm de longueur tirée en traction à vitesse de déplacement constante $\dot{U}$. Cette barre est supposée constituée d'un matériau viscoélastique endommageable à

comportement PTE. Les paramètres du modèle viscoélastique sont choisis selon le Tableau III-4 sur la base du comportement d'un EB (voir plus loin).

Pour le modèle d'endommagement TLS, on a choisi une longueur caractéristique $l_c = 80 \text{ mm}$ et le profil d'endommagement linéaire : $D(\varphi) = \varphi/l_c$. L'autre choix porte sur la fonction d'adoucissement $H(D)$. Pour cette étude, on a adopté la forme suivante :

$$H(D) = \frac{1}{(1 - \beta D)^\alpha} \quad (\text{III-84})$$

avec $\alpha > 0$ et $0 \leq \beta < 1$. $H(D)$ vérifie la condition $H(0) = 1$ et est croissante. En effet, sa dérivée donnée par :

$$H_{,D}(D) = \frac{\alpha\beta}{(1 - \beta D)^{\alpha+1}} \quad (\text{III-85})$$

est positive. En particulier pour $D = 0$, $H_{,D}(0) = \alpha\beta$.

Les valeurs α et β prises dans cette section figurent dans le Tableau III-3. La valeur de $\beta < 1$ permet de borner la fonction $H(D)$ et sa dérivée en $D = 1$. Les valeurs retenues pour α et β vérifient de plus la condition $\alpha\beta > 2$ qui rend le modèle viable sans rupture brutale, à l'initiation de l'endommagement pour toute vitesse de chargement.

Contrairement aux propriétés rhéologiques du Tableau III-4, le choix des paramètres du modèle TLS ne résulte pas à ce stade d'essais de laboratoire.

$l_c \text{ (mm)}$	80
$Y_c \text{ (MPa)}$	$3.00E - 05$
α	3
β	0.9

Tableau III-3 : Paramètres du modèle TLS.

Concernant les paramètres du modèle viscoélastique de PT, ils sont choisis afin d'avoir les propriétés suivantes (caractéristiques des ordres de grandeur d'un enrobé bitumineux à température ambiante) :

- Un module de rigidité équivalent $|E^*| = 10^4 \text{ MPa}$ pour une fréquence de 10Hz
- Un angle de phase $\eta = 30^\circ$

Connaissant la fréquence $f = \omega/2\pi$ et le module de rigidité $E = |E^*|$ et en se donnant le ratio $b = \frac{E_1}{E_0} = 0.4$, le problème se résume à la résolution de l'équation (III-86) pour le calcul de τ et aux calculs de E_0 et E_1 donnés par (III-87) et (III-88).

$$\tau^2(b\omega)^2 - \tau \left(\frac{b\omega}{tg(\eta)} \right) + b(1 + b) = 0 \quad (\text{III-86})$$

$$E_0 = \frac{-tg(\eta)b(1 + b) + tg(\eta)(b + 1)^2 + \tau b\omega}{\tau b\omega} E \cos(\eta) \quad (\text{III-87})$$

$$E_1 = bE_0 \quad (\text{III-88})$$

On obtient en l'occurrence les valeurs suivantes :

i	$\tau(s)$	$E_i(MPa)$
0	-	14000
1	$2.59E - 02$	5600

Tableau III-4: Valeurs des paramètres du modèle viscoélastique de Poynting-Thomson considérés par la suite.

III.5.1.1 Stabilité de l'algorithme vis-à-vis des discrétisations temporelle et spatiale

On a commencé par tester l'effet sur les résultats numériques de l'incrément de temps Δt et du pas de discrétisation spatiale Δx . La vitesse de déformation moyenne imposée est égale à $\dot{U}/L = 2.10^{-3}s^{-1}$.

La Figure III-8 montre la superposition quasi-parfaite des courbes $\sigma(\frac{U}{L})$ pour trois différents pas de temps. Une bonne précision de calcul est obtenue pour un ratio $\frac{\Delta t}{\tau}$ inférieur à 1/10.

La Figure III-9 montre la superposition quasi-parfaite des courbes $\sigma(\frac{U}{L})$ pour différentes valeurs de Δx . Une convergence dans la réponse de la barre est obtenue pour un ratio $l_c/\Delta x$ supérieur à 10.

Les carrés noirs et les croix noires présentés sur ces deux figures indiquent le moment d'initiation de l'endommagement et le moment de la rupture, respectivement.

Ces résultats montrent l'aspect non-local régularisant du modèle d'endommagement TLS qui conduit à une réponse indépendante du maillage en deçà d'un certain pas Δx .

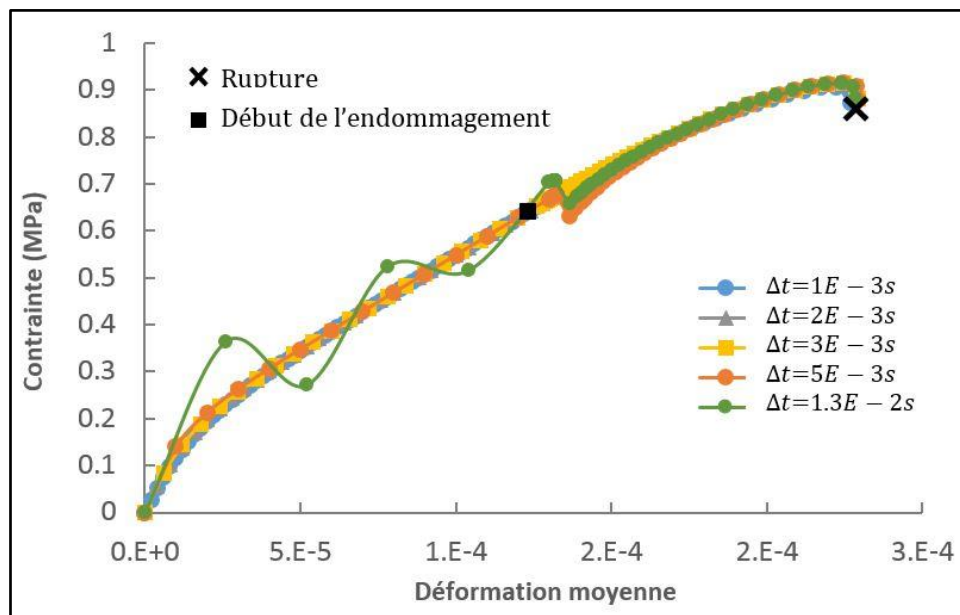


Figure III-8: Effet de la discrétisation temporelle sur la réponse de la barre.

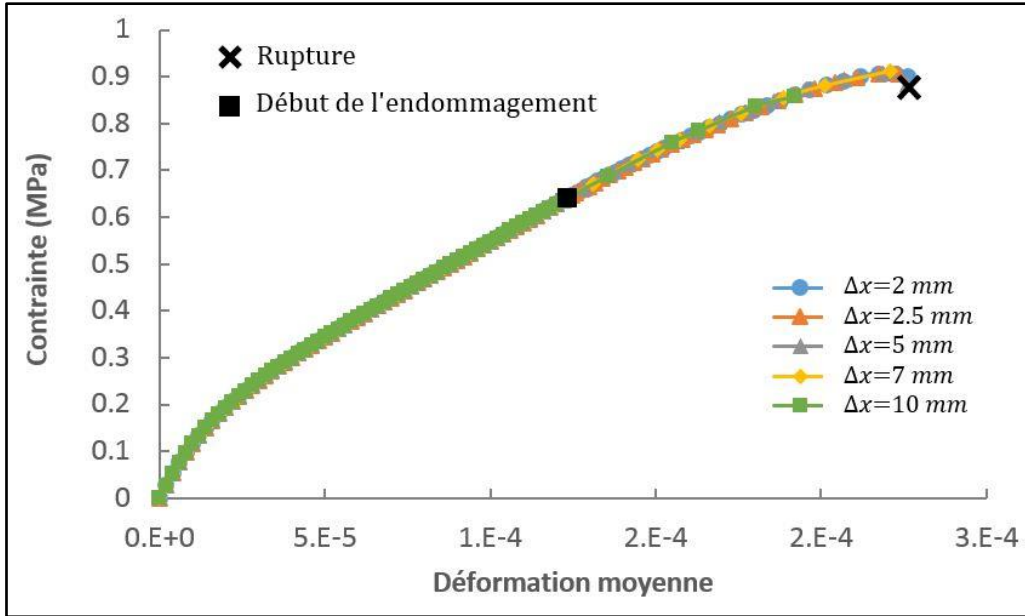


Figure III-9: Effet de la discrétisation spatiale sur la réponse de la barre.

III.5.1.2 Effet de la vitesse de chargement

Le code développé nous permet de regarder à présent l'effet de la vitesse de chargement $\dot{U}$ sur la réponse de la barre.

La Figure III-10 montre ainsi l'évolution de la contrainte dans la barre en fonction de la déformation moyenne U/L pour trois vitesses de déformation moyenne $a = \dot{U}/L$.

Les courbes montrent une première partie purement viscoélastique qui se termine au niveau des rectangles noirs (points notés VE-VD pour transition « viscoélastique »-« viscoélastique endommageable »). Les courbes $\sigma\left(\frac{U}{L}\right)$ se prolongent ensuite par une phase croissante bien que viscoélastique endommageable et pour deux d'entre elles présentent une courte phase finale avec diminution de contrainte.

On remarque à partir de la comparaison entre les courbes que la contrainte à la transition VE-VD croît avec l'augmentation de la vitesse de chargement. On voit surtout que la contrainte maximale augmente avec l'augmentation de la vitesse de chargement et que l'élongation à la rupture diminue. Notre modèle est donc cohérent avec la réponse classique des EB obtenue pour l'essai de traction directe en laboratoire (Figure I-35 et Figure II-4).

En plus, on remarque sur la Figure III-10 qu'avec l'augmentation de la vitesse de chargement, l'augmentation de la contrainte après l'apparition de l'endommagement (VE-VD) devient plus faible. Ainsi la réponse de la barre devient plus fragile (voir la définition de Kinloch donnée dans la section I.5.2). On peut alors dire que le modèle qu'on a développé permet de prendre en compte « qualitativement » le phénomène de transition entre rupture fragile et ductile.

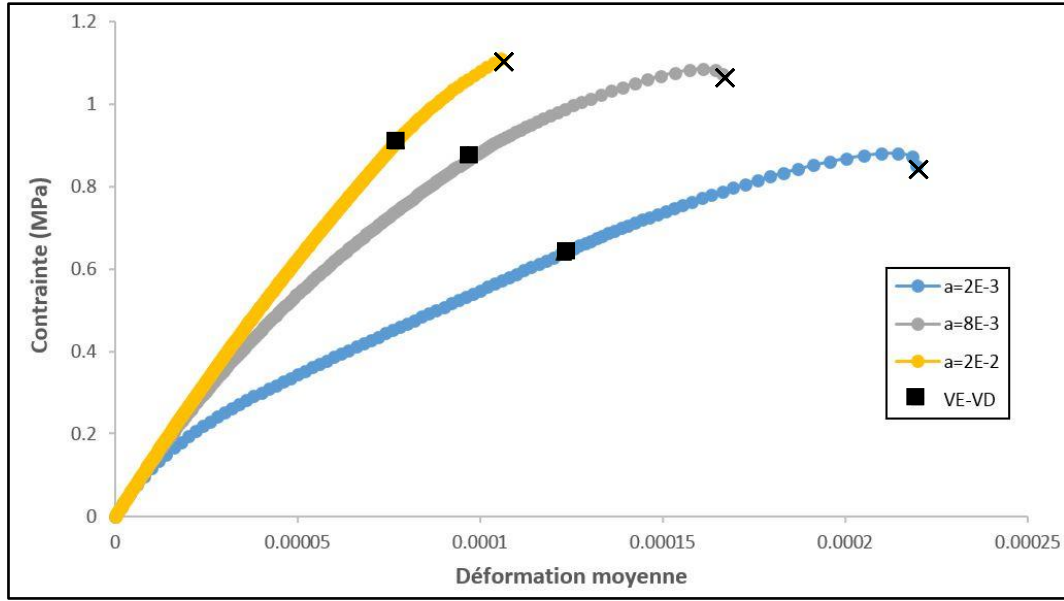


Figure III-10: Évolution de la contrainte en fonction de la déformation moyenne U/L pour différentes vitesses $a=U/L$.

Cette transition entre réponse fragile et ductile est observée pendant les essais de traction direct réalisés sur les EB (Walubita et al., 2010) et sur le bitume (Largeaud et al. 2004) (Maillard 2005). Pour le bitume, les chercheurs ont trouvé que son comportement évolue rapidement en fonction de la vitesse de chargement et la température. Ce comportement dépend fortement des conditions d'essai. Largeaud (2004) a montré que « dans les conditions standard d'essais de traction directe, le liant peut passer de l'état fragile à l'état ductile pour une variation de température d'environ ($\sim 1^\circ\text{C}$) ». Une autre étude remarquable sur le bitume est effectuée par Merbouh (2010). Il a réussi à décrire la zone de transition entre le régime fragile et ductile suivant la température et la vitesse de chargement (Figure I-38).

III.5.1.3 Effet de la température

On présente ici l'influence de la température sur la réponse de la barre pour une vitesse de chargement donnée en faisant varier le paramètre τ suivant la loi $\tau(\theta) = a(\theta)\tau_{ref}$ précisée en section III.4. La vitesse de déplacement imposée est ici de 1.6 mm/s soit $a = 2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. Les résultats de modélisation sont montrés sur la Figure III-11 pour les températures $\theta_1 = 15.9^\circ\text{C}$ et $\theta_2 = 10^\circ\text{C}$ conduisant à des viscosités classées en sens inverse $\eta_1 < \eta_2$.

Pour calculer le facteur de translation $a(\theta)$, on a adopté l'approche de Witczak (Rowe and Sharrock 2011) (Chehab et al. 2002) :

$$\log(a(\theta)) = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 \quad (\text{III-89})$$

Pour une température de référence $\theta_{ref} = \theta_1$, les coefficients a_0, a_1 et a_2 valent 5.95, -0.4 et 0.0017 respectivement.

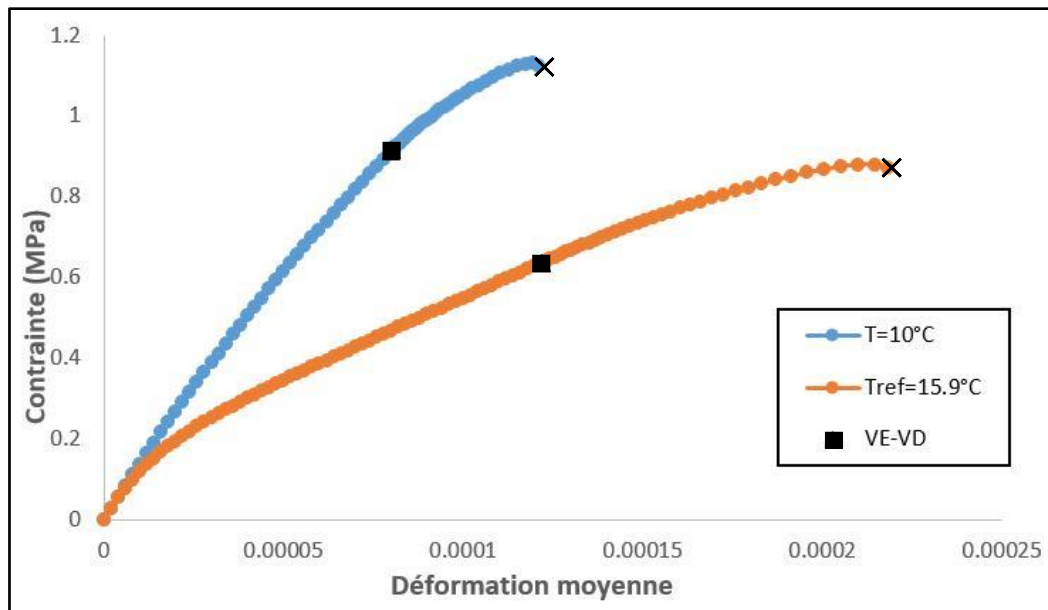


Figure III-11: Effet de la température sur la réponse d'une barre chargée par une vitesse de déplacement égale à 1.6 mm/s.

On constate qu'en augmentant la température de 10 à 15.9°C, la contrainte maximale devient plus petite et l'élongation à la rupture plus grande. Le comportement de la barre devient plus ductile. L'effet est le même que celui d'une vitesse de chargement plus lente à température constante et est en accord avec les observations expérimentales pour l'essai de traction direct (cf. section I.5.2).

III.5.2 Prolongement de la réponse à $\dot{U}$ imposée en situation de snap-back

Comme vu précédemment, il est possible de prolonger la courbe $\sigma(U/L)$ en situation de snap-back en passant à un pilotage en $\dot{l}$ et à un comportement à ε_1 figé.

Les Figure III-12 et III-17 montrent un tel exemple de calcul qui reprend les données de la Figure III-11 pour $\theta = 15.9^\circ\text{C}$. La courbe à $\dot{U}$ imposée qui conduirait à une rupture brutale admet comme prolongement possible la courbe notée « $\dot{U} - \dot{l}$ imposée ».

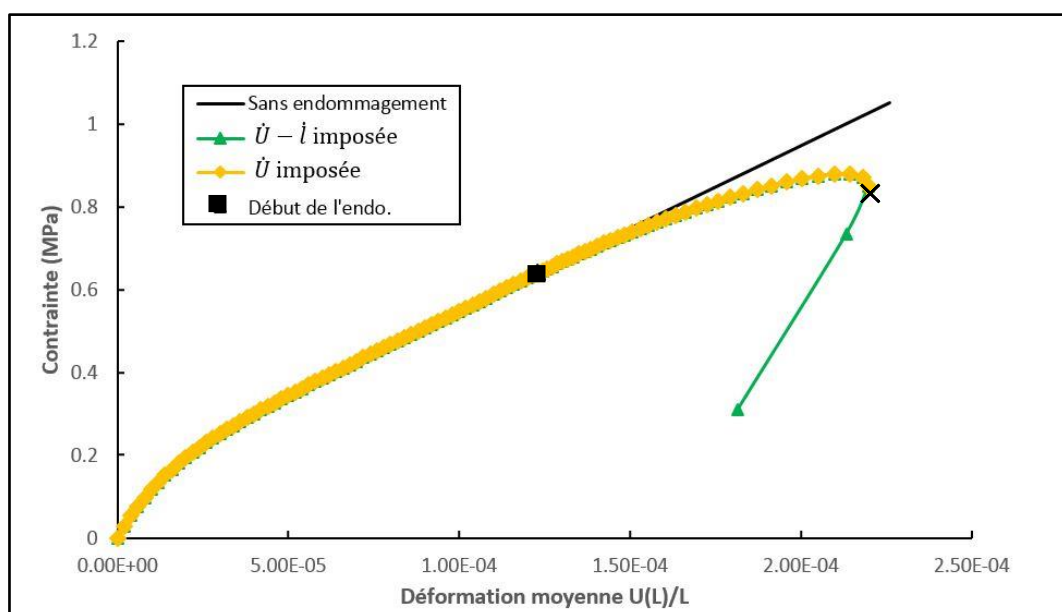


Figure III-12: Réponse de la barre pendant la phase stable et instable ($\dot{U} = 1.6 \text{ mm/s}$, $\theta = 15.9^\circ\text{C}$).

Les courbes III-14 et III-15 montrent l'évolution de l'endommagement à l'encastrement et la déformation moyenne au cours du temps pour les phases stable et instable. Par choix, le pas de temps Δt non défini algorithmiquement en phase instable a été fixé ici à $0.001\text{ s} < \tau$.

On observe sur cet exemple que le dommage atteint une valeur déjà élevée, proche de 0.9, en fin de phase stable tout en conservant un niveau élevé de contrainte proche du pic. Mais ce niveau de contrainte et de contrainte effective associée reste toutefois compatible avec le niveau de déformation moyenne imposé à cet instant en raison de la courte longueur de la zone endommagée vis-à-vis de la longueur totale de la barre (rappel $l_c/L = 1/10$). Le passage à $\dot{l}$ imposé permet d'atteindre quasiment la valeur $D = 1$.

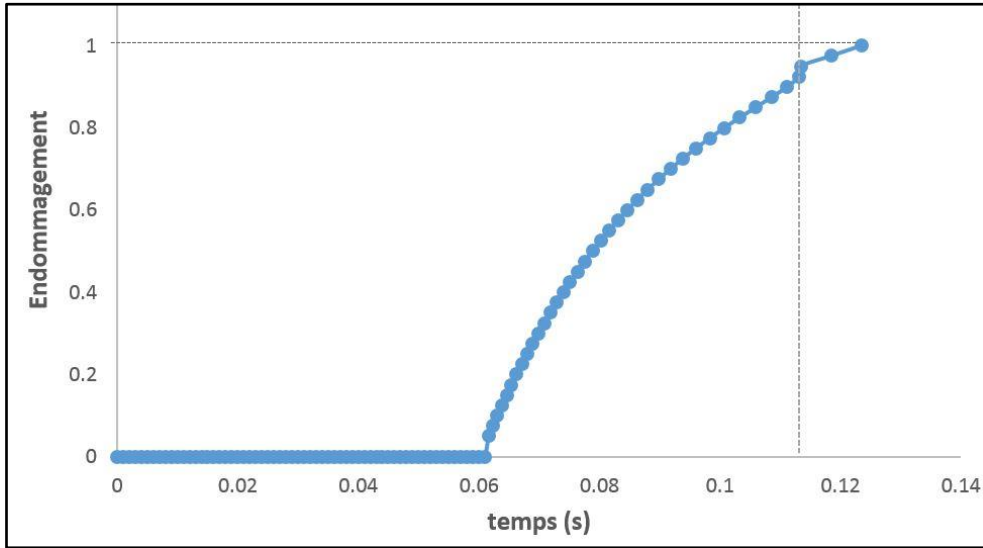


Figure III-13: Évolution de l'endommagement à l'encastrement ($\dot{U} = 1.6\text{ mm/s}$, $\theta = 15.9^\circ\text{C}$).

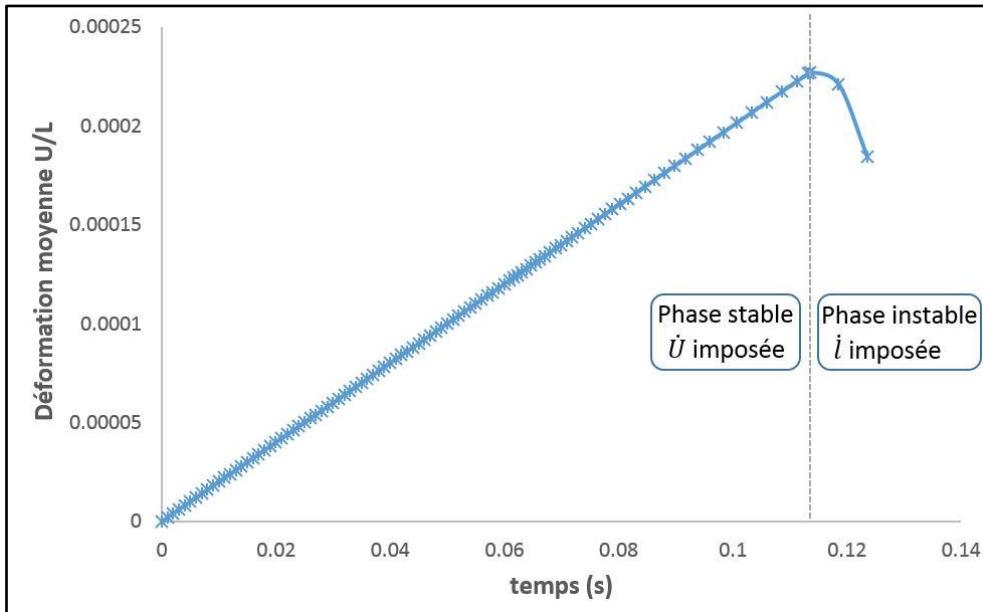


Figure III-14: Évolution de la déformation moyenne de la barre ($\dot{U} = 1.6\text{ mm/s}$, $\theta = 15.9^\circ\text{C}$).

L'évolution de l'endommagement dans la barre (à différents instants de calcul) est présentée sur la Figure III-15. La valeur de l'endommagement dans la zone endommagée décroît linéairement le long de la barre jusqu'à atteindre une valeur nulle sur le front d'endommagement. Cette évolution est directement liée au choix du profil d'endommagement linéaire $D(\varphi)$.

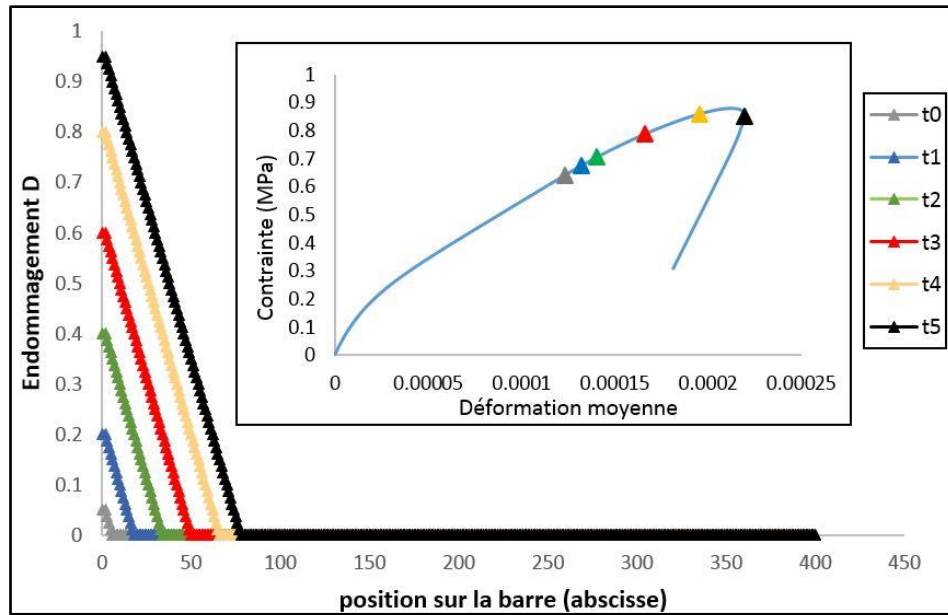


Figure III-15: Évolution de l'endommagement dans la barre au cours de l'essai de traction, obtenue à partir de la solution semi-analytique.

La sensibilité de la réponse de la barre aux paramètres α, β et à la fonction $D(\varphi)$ a également été étudiée. Les résultats de cette étude sont reportés au chapitre suivant qui traite le problème par la méthode des éléments finis.

III.5.3 Loi de Comportement de Kelvin-Voigt généralisé : chargement à $\dot{U}$ imposée

L'étude du problème est étendue ici au cas d'une barre endommageable à comportement viscoélastique de Kelvin-Voigt généralisé à $n = 9$ éléments. Les paramètres du modèle (Tableau III-5) sont issus des travaux de Darabi (2013). Ils sont obtenus à partir de l'essai de module complexe sur EB à la température de 10°C.

τ_i (s)	E_i (Mpa)
0	33333
0.0001	100000
0.01	33333
0.1	50000
1	10000
10	6666
100	1111
1000	1000
10000	200
100000	166

Tableau III-5: Paramètres du modèle de Kelvin-Voigt généralisé à 9 unités de Voigt en série avec un ressort, issus de (Darabi et al. 2013).

Pour cette étude, on a appliqué trois niveaux de vitesses de chargement. La réponse de la barre pour ces différentes vitesses de chargement est présentée sur la Figure III-16. Les courbes de fluage avant endommagement permettent de vérifier le bon fonctionnement du code de calcul développé (non montré ici).

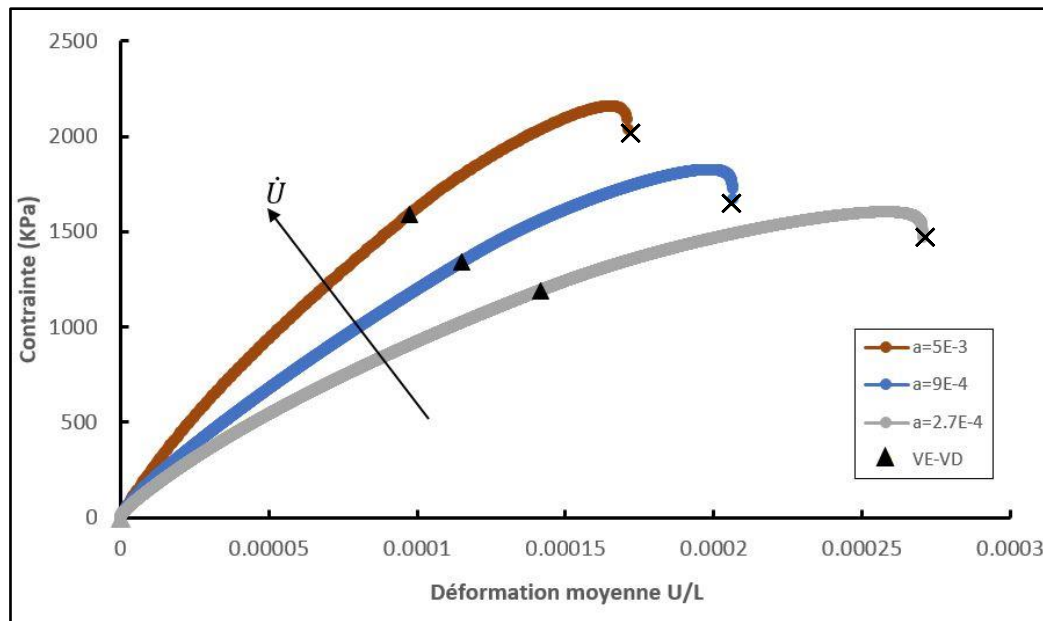


Figure III-16: Réponse de la barre sous trois différentes vitesses de chargement $a = \dot{U}/L$.

À partir des contraintes obtenues à la rupture et les déformations moyennes associées, on trouve que l'augmentation de la vitesse de chargement conduit à une réponse plus fragile. Ce qui correspond aux résultats d'essais de laboratoire et en cohérence avec la réponse de la barre à comportement de PTE (Figure III-10). Par conséquent, on peut dire que l'ensemble des conclusions tirées en se basant sur la loi PTE sont valables.

III.6 Bilan

Ce chapitre a permis d'intégrer en 1D les lois d'évolution d'endommagement local développées dans le chapitre II (PTE et Kelvin-Voigt généralisé endommageable) au sein de l'approche non locale TLS. Il constitue une étape vers le traitement du problème 2D par éléments finis du chapitre suivant.

Le chapitre repose sur l'étude semi-analytique de la réponse d'une barre chargée en traction. La résolution du problème est basée sur une formulation en vitesses et conduit au développement de programmes C++ permettant divers modes de pilotage du chargement pour les lois PTE et Kelvin-Voigt généralisé endommageable.

Les exemples numériques traités permettent de retrouver un certain nombre d'observations expérimentales faites sur des essais sur EB en traction directe, à savoir :

- Augmentation de la contrainte maximale et diminution de la déformation moyenne à rupture avec l'augmentation de la vitesse de chargement ou la diminution de la température du matériau (réponse plus fragile).
- Relation théorique entre vitesse de chargement et contrainte critique, semblable à la loi proposée dans la littérature pour introduire l'effet de vitesse dans la réponse en fissuration des MB.

Le problème étudié ici constitue une solution de référence. Elle permettra de valider le code de calcul aux éléments finis faisant l'objet du chapitre suivant.

Chapitre IV : Généralisation 3D du modèle PTE+TLS et implémentation dans le code de calcul eXlibris

IV.1 Contenu et démarche

Ce chapitre se penche sur l'extension 2D/3D du chapitre précédent avec pour objectif l'étude de structures viscoélastiques endommageables débouchant sur l'initiation et la propagation de fissures. Cela passe par la prolongation 2D/3D des développements théoriques précédents et le développement d'un module de calcul au sein du code par EF eXlibris de l'Ecole Centrale de Nantes.

Pour rappel, on s'appuie dans nos développements sur la technique TLS (*Thick Level Set*) pour régulariser la loi d'évolution d'endommagement locale et sur la technique des courbes de niveau pour gérer l'évolution du front d'endommagement. La résolution numérique du problème d'évolution dans le cadre de cette approche demande :

1. à suivre l'évolution du front d'endommagement Γ_0 qui limite les zones saine et endommagée
2. à créer une nouvelle zone endommagée quand le critère d'endommagement est atteint
3. à introduire une fissuration – enrichissement cinématique par la méthode XFEM – une fois que la valeur maximale de la courbe de niveau dépasse la longueur caractéristique l_c qui joue également, aux côtés des fonctions d'adoucissement $H(D)$ et de forme d'endommagement $D(\varphi)$, un rôle important dans l'approche TLS.

Ce chapitre est ainsi composé des actions principales suivantes :

- Etablissement de la loi de comportement viscoélastique tridimensionnelle du modèle de Poynting-Thomson endommageable (PTE) écrite en vitesse.
- Ecriture de la formulation variationnelle de l'équation d'équilibre écrite en vitesse.
- Détermination des équations d'évolution de l'endommagement en formalisme TLS et de la variable interne liée à l'unité de Kelvin-Voigt.
- Discrétisation spatiale et temporelle des équations du problème.
- Développement d'un nouvel algorithme de prédiction-correction.

On s'attache au travers de cette dernière action à détailler les étapes de résolution de l'ensemble des équations mécaniques.

Deux autres algorithmes de résolution par EF du problème viscoélastique endommageable 1D sont par ailleurs présentés. Développés en C++ indépendamment du code eXlibris et appliqués à l'exemple de la barre en traction, ils ont servi à compléter l'étude semi-analytique du chapitre III et à prototyper l'algorithme de prédiction-correction introduit dans eXlibris.

Au final, l'ensemble de ces algorithmes est validé à partir de la solution semi-analytique de la barre viscoélastique endommageable en traction, développée au chapitre III. Par ailleurs, pour les cas en dehors du cadre de la solution analytique, une auto-validation est effectuée entre les codes 1D et le module eXlibris.

IV.2 Généralisation de la loi de comportement endommageable PTE en 3D

Commençons par étendre en 3D le modèle viscoélastique de PT. On se limite ici à la loi suivante, inspirée de la loi de Hooke, caractérisée par un unique coefficient de Poisson ν en posant :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)} \quad (\text{IV-1})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda_0 \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}) \mathbf{I} + 2\mu_0 \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \quad (\text{IV-2})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(el)} + \boldsymbol{\sigma}^{(v)} = \lambda_1 \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)}) \mathbf{1} + 2\mu_1 \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)} + \tau (\lambda_1 \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(ve)}) \mathbf{1} + 2\mu_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(ve)}) \quad (\text{IV-3})$$

avec :

- $\mathbf{I}$ le tenseur d'identité d'ordre 2
- $\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)}$ sont les tenseurs de déformations dans l'élément élastique associé à E_0 et dans l'élément Kelvin-Voigt (quantités équivalentes à ε_0 et ε_1 du cas unidimensionnel, Figure II-2).
- $\boldsymbol{\sigma}^{(el)}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{(v)}$ sont les tenseurs (d'ordre 2) des contraintes élastiques et des contraintes visqueuses de l'élément Kelvin-Voigt.
- λ_0 et μ_0 sont les coefficients de Lamé associés à E_0 et un coefficient de Poisson ν donné (constant) par :

$$\lambda_0 = \frac{\nu E_0}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \tilde{\lambda} E_0 \quad \mu_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu)} = \tilde{\mu} E_0 \quad (\text{IV-4})$$

- λ_1 et μ_1 sont les coefficients de Lamé associés à E_1 et au même coefficient de Poisson que précédemment :

$$\lambda_1 = \frac{\nu E_1}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \tilde{\lambda} E_1 \quad \mu_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu)} = \tilde{\mu} E_1 \quad (\text{IV-5})$$

- $\tau = \eta/E_1$ le temps caractéristique du modèle 1D
- $\tilde{\lambda} = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\tilde{\mu} = \frac{1}{2(1+\nu)}$ = coefficients adimensionnels.

Cette loi suppose aussi que les temps caractéristiques associés aux tenseurs volumique et déviatorique sont les mêmes.

D'autres choix de modèles seraient possibles mais nécessiteraient l'introduction d'un nombre plus important de paramètres. Ce point nous a semblé secondaire dans le cadre de ce travail.

Il est commode de réécrire les équations précédentes sous formes indicielles en adoptant la convention de sommation sur les indices répétés. Les composantes du tenseur des contraintes dans le ressort isolé s'écrivent alors :

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{kl} \varepsilon_{kl}^{(e)} = E_0 \tilde{C}_{ij}^{kl} \varepsilon_{kl}^{(e)} \quad (\text{IV-6})$$

avec le tenseur d'élasticité donné par :

$$C_{ij}^{kl} = \lambda_0 \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_0 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) = E_0 \tilde{C}_{ij}^{kl} \quad (\text{IV-7})$$

et $\tilde{\mathbf{C}} = (\tilde{C}_{ij}^{kl})$ = tenseur adimensionnel = $\tilde{\lambda} \delta_{ij} \delta_{kl} + \tilde{\mu} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$.

Le tenseur des contraintes associé au ressort de la branche élastique de Kelvin-Voigt s'écrit :

$$\sigma_{ij}^{(el)} = C_{ij}^{kl(el)} \varepsilon_{kl}^{(ve)} = E_1 \tilde{C}_{ij}^{kl} \varepsilon_{kl}^{(ve)} \quad (IV-8)$$

Concernant les composants du tenseur des contraintes associé à l'amortisseur linéaire, ils sont donnés par la formule :

$$\sigma_{ij}^{(v)} = C_{ij}^{kl(v)} \dot{\varepsilon}_{kl}^{(ve)} = \tau \left(\tilde{\lambda} \delta_{ij} \delta_{kl} + \tilde{\mu} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right) \dot{\varepsilon}_{kl}^{(ve)} = E_1 \tau \tilde{C}_{ij}^{kl} \dot{\varepsilon}_{kl}^{(ve)} = \eta \tilde{C}_{ij}^{kl} \dot{\varepsilon}_{kl}^{(ve)} \quad (IV-9)$$

La loi de comportement 3D de ce modèle ramenée à la déformation totale s'obtient par la même stratégie que celle utilisée en 1D (Annexe C). Elle s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{E_1 E_0}{E_0 + E_1} \right) \tilde{C}_{ij}^{kl} \varepsilon_{kl} + \left(\frac{E_0 \eta}{E_0 + E_1} \right) \tilde{C}_{ij}^{kl} \dot{\varepsilon}_{kl} - \left(\frac{\eta}{E_1 + E_0} \right) \dot{\sigma}_{ij} \quad (IV-10)$$

Dans le cas 1D on retrouve l'équation suivante du chapitre II :

$$\sigma = \left(\frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1} \right) \varepsilon + \frac{E_0 \eta}{E_0 + E_1} \dot{\varepsilon} - \frac{\eta}{E_0 + E_1} \dot{\sigma} \quad (IV-11)$$

À partir de l'équation (IV-10) on peut obtenir la loi de comportement viscoélastique endommageable en s'appuyant sur le principe de contraintes effectives (II.2.2.1) :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \left(\frac{E_1 E_0}{E_0 + E_1} \right) \tilde{C}_{ij}^{kl} \varepsilon_{kl} + \left(\frac{E_0 \eta}{E_0 + E_1} \right) \tilde{C}_{ij}^{kl} \dot{\varepsilon}_{kl} - \left(\frac{\tau E_1}{E_0 + E_1} \right) \dot{\tilde{\sigma}}_{ij} \quad (IV-12)$$

avec :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1 - D} \quad (IV-13)$$

et donc :

$$\dot{\tilde{\sigma}}_{ij} = \frac{\dot{\sigma}_{ij}(1 - D) + \dot{D} \sigma_{ij}}{(1 - D)^2} \quad (IV-14)$$

On obtient ainsi la loi de comportement suivante du modèle PTE :

$$\dot{\sigma}_{ij} = (1 - D) E_0 \tilde{C}_{ij}^{kl} \dot{\varepsilon}_{kl} - \left(\frac{E_0 + E_1}{\eta} + \frac{\dot{D}}{1 - D} \right) \sigma_{ij} + (1 - D) \left(\frac{E_0 E_1}{\eta} \right) \tilde{C}_{ij}^{kl} \varepsilon_{kl} \quad (IV-15)$$

On vérifie que cette équation redonne la forme trouvée en 1D (Annexe C) :

$$\dot{\sigma} = (1 - D) E_0 \dot{\varepsilon} - \left(\frac{E_0 + E_1}{\eta} + \frac{\dot{D}}{1 - D} \right) \sigma + (1 - D) \frac{E_0 E_1}{\eta} \varepsilon \quad (IV-16)$$

L'énergie libre associée au modèle 3D est donnée par :

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)}, D) = \frac{(1 - D) E_0}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)}) : \tilde{\mathbb{C}} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)}) + \frac{(1 - D) E_1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)} : \tilde{\mathbb{C}} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)} \quad (IV-17)$$

conduisant au taux de restitution d'énergie élastique :

$$Y = -\frac{\partial \psi}{\partial D} = \frac{E_0}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)}) : \tilde{\mathbb{C}} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)}) + \frac{E_1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)} : \tilde{\mathbb{C}} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)} \quad (IV-18)$$

L'équation (IV-17) traduit un comportement symétrique en extension-contraction. Pour une réponse plus proche des observations expérimentales il conviendrait de rendre la loi de

comportement dissymétrique en extension-contraction. A titre d'exemple en élasticité, (P. E. Bernard, Moës, and Chevaugnon 2012) ont utilisé la fonction potentielle suivante :

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, D) = \mu(1 - \alpha_i D)\varepsilon_i^2 + \frac{\lambda}{2}(1 - \alpha D)\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})^2 \quad (\text{IV-19})$$

où μ et λ sont les coefficients élastiques de Lamé, ε_i les valeurs propres du tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$. α_i et α sont des scalaires compris entre 0 et 1 permettant de passer d'un comportement élastique linéaire ($\alpha_i = \alpha = 1$) à un comportement asymétrique en extension-contraction pour $0 < \alpha_i, \alpha < 1$. Cette démarche serait à étendre en viscoélasticité dans de futurs travaux.

IV.3 Équation d'équilibre d'un solide PTE en régime quasi-statique

Considérons un solide déformable $\Omega \subset R^d$ (en pratique, $d = 2$ ou 3) à comportement PTE, et notons Γ la frontière de Ω . Deux types de conditions aux limites peuvent être prescrites sur Γ :

- déplacement imposé sur une partie Γ_D de la frontière (condition de Dirichlet)
- force imposée sur une partie Γ_N de la frontière (condition de Neumann)

Les parties Γ_D et Γ_N constituent une partition de la frontière Γ , c'est-à-dire :

- En tout point du bord, une condition aux limites est prescrite : $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$
- Une seule condition aux limites est prescrite en tout point du bord : $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$

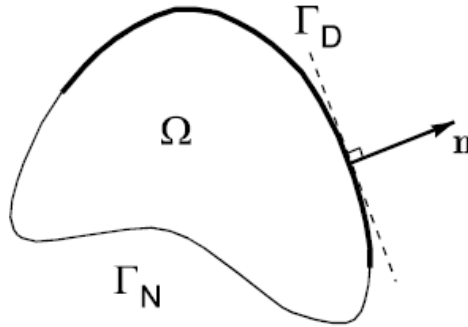


Figure IV-1: Domaine d'étude et frontières de Ω à déplacements et efforts imposés.

Notons que la possibilité que l'un de ces deux fronts soit vide est possible, dans ce cas on parle d'un problème de Dirichlet ou de Neumann.

L'équation d'équilibre du solide en quasi-statique s'écrit :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{IV-20})$$

où f_i est la force volumique appliquée sur le domaine Ω dans la direction i . La version en vitesse de l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{f}_i = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{IV-21})$$

Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissible à zéro, défini par :

$$\mathcal{U} = \{u^* = \{u_i^*\} | u_i^* \in H_1(\Omega), \quad u_i^* = 0 \text{ sur } \Gamma_D\} \quad (\text{IV-22})$$

L'application du principe des puissances virtuelles pour un champ de déplacement test $u^* \in \mathfrak{U}$, conduit à la formulation faible de l'équilibre en vitesse :

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^* \dot{\sigma}_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma_N} u_i^* \dot{F}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \dot{f}_i u_i^* d\Omega \quad \forall u_i^* \in \mathfrak{U} \quad (\text{IV-23})$$

où :

- $\dot{F}_i$ sont les composantes du vecteur force imposé sur Γ_N .
- ε_{ij}^* sont les composantes du tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\varepsilon}(u^*)$ associé au champ de déplacement u_i^* , tel que : $\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2}(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*)$.

En reportant la loi de comportement (IV-15) dans l'équation (IV-23) on obtient le problème en vitesse suivant à résoudre :

Trouver $\dot{u}$ cinématiquement admissible tel que :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (1-D) E_0 \tilde{C}_{ij}^{kl} \dot{\varepsilon}_{kl} \varepsilon_{ij}^* d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\dot{D}}{(1-D)} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Gamma_N} \dot{F}_i u_i^* d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} \dot{f}_i u_i^* d\Omega - \int_{\Omega} \left(\frac{(1-D) E_0 E_1}{\eta} \right) \tilde{C}_{ij}^{kl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}^* d\Omega + \int_{\Omega} \frac{(E_0 + E_1)}{\eta} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega \quad \forall u_i^* \in \mathfrak{U} \end{aligned} \quad (\text{IV-24})$$

Équation d'équilibre en 1D du problème en vitesse

En utilisant la formulation faible (variationnelle) de l'équation d'équilibre quasi-statique et la loi de comportement unidimensionnel du modèle PTE (IV-16), on obtient en 1D pour le problème de la barre encastree en l'une de ses extrémités soumise au pilotage $\dot{U}$ donné à l'autre extrémité ($\Gamma_N = \emptyset$) et sans force de volume ($f = 0 ; \dot{f} = 0$) :

Pour t donné, trouver $\dot{u}$ cinématiquement admissible ($\dot{u}(x=0, t) = 0, \dot{u}(x=L, t) = \dot{U}(t)$) tel que :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(E_0 (1-D) \dot{\varepsilon} - \frac{\sigma}{(1-D)} \dot{D} \right) \varepsilon(u^*) d\Omega = \\ & - \int_{\Omega} \left(\frac{E_0 E_1 (1-D)}{\eta} \varepsilon \right) \varepsilon(u^*) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{(E_0 + E_1)}{\eta} \sigma \varepsilon(u^*) d\Omega \quad \forall u^* \in \mathfrak{U} \end{aligned} \quad (\text{IV-25})$$

Cette équation est utilisée dans le développement de nos programmes C++ 1D après discrétisation spatiale et temporelle qui serviront pour la validation des développements EF 2D/3D implémentés dans le code eXlibris.

IV.4 Équation d'évolution non locale de l'endommagement

On présente dans cette partie la formulation de la loi d'évolution non locale de l'endommagement en 2D par approche TLS qui généralise les calculs vus en 1D. Le principe consiste à la base à intégrer les quantités locales – comme le taux de restitution d'énergie élastique Y et le taux critique $Y_c H(D)$ – le long des rayons perpendiculaires au front d'endommagement Γ_0 . Les longueurs d'intégration le long du front d'endommagement varient pendant l'évolution de la zone d'endommagement Ω_+ (Figure IV-2) entre la valeur 0 au moment de l'initiation de l'endommagement jusqu'à atteindre la longueur critique l_c .

Pour un point du front d'endommagement Γ_0 (level set $\varphi = 0$) d'abscisse curviligne s , cette loi d'évolution non locale s'écrit :

$$f(s) = \bar{Y}(s) - \bar{Y}_c \bar{H}(s) \leq 0, \quad \dot{\varphi}(s) \geq 0, \quad f(s) \dot{\varphi}(s) = 0 \quad (\text{IV-26})$$

avec

$$\bar{X}(s) = \frac{\int_0^{l(s)} X(\varphi, s) D'(\varphi, s) \left(1 - \frac{\varphi}{\rho(s)}\right) d\varphi}{\int_0^{l(s)} D'(\varphi, s) \left(1 - \frac{\varphi}{\rho(s)}\right) d\varphi} \quad (\text{IV-27})$$

où $\rho(s)$ est le rayon de courbure du front Γ_0 en s (P.E. Bernard et al. 2012). Afin de calculer les quantités non locales de type $\bar{X}$ par éléments finis, une méthode équivalente consiste à chercher $\bar{X} \in \bar{\mathcal{Y}}$ solution du problème variationnel suivant sur le domaine endommagé Ω_+ :

$$\int_{\Omega_+} \bar{X} \bar{X}^* D'(\varphi) d\Omega = \int_{\Omega_+} X \bar{X}^* D'(\varphi) d\Omega \quad \forall \bar{X}^* \in \bar{\mathcal{Y}}$$

avec :

$$\bar{\mathcal{Y}} = \{\bar{y} \in L^2(\Omega_+) : \nabla \bar{y} \cdot \nabla \varphi = 0 ; i.e. \bar{y}(\varphi, s) = \bar{y}(s)\} \quad (\text{IV-28})$$

$\bar{\mathcal{Y}}$ représente l'espace des champs constants suivant le gradient de φ , ou autrement dit sur chacun des rayons normaux au front Γ_0 .

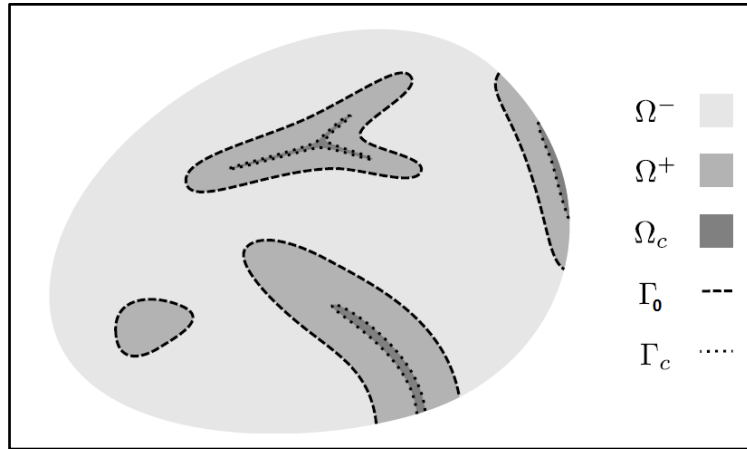


Figure IV-2: Interfaces et domaines géométriques caractéristiques de la méthode TLS (Moreau et al. 2017).

Deux méthodes pour résoudre ce problème sont possibles (Lé 2018), à savoir la méthode Lagrangienne et la méthode de Fast Marching Modes (voir section I.6.3.2). Dans la suite, on utilisera la deuxième méthode (cf. IV.6.2).

IV.5 Équation d'évolution de la variable interne $\boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)}$

Pour fermer le système d'équations du problème en vitesse, précisons la vitesse $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(ve)}$ en fonction de $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)}$. Celle-ci est donnée par élimination de $\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ entre les équations IV-1, IV-2, IV-3 et s'écrit :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl}^{(ve)} = \frac{E_0}{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} - \frac{E_0 + E_1}{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^{(ve)} \quad (\text{IV-29})$$

IV.6 Discrétisation spatiale

On a présenté dans les sections précédentes la forme continue de l'ensemble des équations mécaniques régissant l'évolution d'une structure viscoélastique endommagée. Ces équations sont résumées par :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (1-D) E_0 \tilde{C}_{ij}^{kl} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^* d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\dot{D}}{(1-D)} \sigma_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^* d\Omega = \int_{\Gamma_N} \dot{F}_i u_i^* d\Gamma \\ & - \int_{\Omega} \left(\frac{E_1}{\eta} \right) (1-D) E_0 \tilde{C}_{ij}^{kl} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^* d\Omega + \int_{\Omega} \frac{(E_0 + E_1)}{\eta} \sigma_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^* d\Omega \quad \forall u_i^* \in \mathfrak{U} \quad (\text{IV-30}) \\ & f = \bar{Y} - \overline{Y_c H} \leq 0, \quad \dot{\varphi} \geq 0, \quad f \dot{\varphi} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (\text{IV-31}) \\ & \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(ve)} + \frac{E_0 + E_1}{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)} = \frac{E_0}{\eta} \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{sur } \Omega \quad (\text{IV-32}) \end{aligned}$$

Dans la suite, on présente tout d'abord la discrétisation spatiale de l'équation d'équilibre en 1D. Ensuite, la méthode Fast Marching Modes est appliquée au problème d'évolution du front d'endommagement afin de discrétiser et calculer les champs non locaux définis dans la zone d'endommagement Ω_+ (cf. section IV-4). L'équation d'évolution de la variable interne $\boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)}$ (IV-32) est évaluée au niveau local.

IV.6.1 Discrétisation spatiale de l'équation d'équilibre

On présente dans cette partie la discrétisation spatiale de l'équation d'équilibre (en 1D) dans le domaine quasi-statique pour un corps à comportement viscoélastique endommageable PTE. Celle-ci sert au développement du logiciel EF 1D qu'on a développé pour la résolution du problème de barre. En 2D, ces opérations sont prises en charge par le code eXlibris de l'ECN.

Considérons le domaine Ω discrétisé en sous-intervalles Ω_e de taille Δ_x tel que $\Omega = \cup_e \Omega_e$. L'équation d'équilibre (IV-25) se réécrit :

$$\begin{aligned} \sum_e \int_{\Omega_e} E_0(1 - D_e) \dot{\varepsilon} \varepsilon(u^*) d\Omega_e - \sum_e \int_{\Omega_e} \frac{\sigma}{(1 - D_e)} \dot{D}_e \varepsilon(u^*) d\Omega_e &= \int_{\Gamma_N} \dot{F} u^* d\Gamma \\ + \sum_e \frac{(E_0 + E_1)}{\eta} \int_{\Omega_e} \sigma \varepsilon(u^*) d\Omega_e - \sum_e \frac{E_1}{\eta} \int_{\Omega_e} (1 - D_e) E_0 \varepsilon \varepsilon(u^*) d\Omega_e & \\ \forall u^* \in \mathcal{U} & \end{aligned} \quad (IV-33)$$

Pour chaque élément, approximations les différents champs à partir de fonctions d'interpolation EF de type affine et les valeurs nodales des champs de vitesse et déplacement aux nœuds i de ces éléments :

$$\begin{aligned} u &= [N]\{U_i\} \\ \varepsilon &= \nabla u = \nabla[N]\{U_i\} \\ \dot{\varepsilon} &= \nabla[N]\{\dot{U}_i\} \\ u^* &= [N]\{U_i^*\} \\ \varepsilon^* &= \nabla[N]\{\dot{U}_i^*\} \end{aligned} \quad (IV-34)$$

Le champ d'endommagement est supposé constant par élément. La vérification de l'équation IV-33 pour tout ensemble U_i^* conduit à :

$$\begin{aligned} \sum_e \int_{\Omega_e} E_0(1 - D_e) \nabla[N]^T \{\dot{U}_i\} \nabla[N] d\Omega_e - \sum_e \int_{\Omega_e} \frac{\sigma \dot{D}_e}{(1 - D_e)} \nabla[N]^T d\Omega_e &= \dot{F} \int_{\Gamma_N} [N]^T d\Gamma \\ + \sum_e \frac{(E_0 + E_1)}{\eta} \int_{\Omega_e} \sigma \nabla[N]^T d\Omega_e & \\ - \sum_e \frac{E_0 E_1}{\eta} \int_{\Omega_e} (1 - D_e) \nabla[N]^T \nabla[N] \{U_i\} d\Omega_e & \end{aligned} \quad (IV-35)$$

soit sous forme algébrique :

$$[K(D)]\{\dot{U}\} - \{M(\dot{D})\} = \{\dot{F}\} + \{H\} \quad (IV-36)$$

La matrice $[K(D)]$ est la matrice de rigidité du système. Cette dernière est formée par l'assemblage des matrices élémentaires $K_e(D_e)$:

$$[K_e(D_e)] = E_0(1 - D_e) \int_{\Omega_e} \nabla[N]^T \nabla[N] d\Omega_e \quad (IV-37)$$

Estimons les quantités élémentaires $[K_e(D_e)]$, $\{M_e(\dot{D}_e)\}$ et $\{H_e\}$.

On a :

$$[N] = [N_1 \quad N_2] = \left[1 - \frac{x}{l_e} \quad \frac{x}{l_e} \right] \quad (IV-38)$$

où $l_e = \Delta_x$ est la longueur de l'élément Ω_e . On obtient :

$$[K_e(D_e)] = \frac{E_0 S}{l_e} (1 - D_e) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (IV-39)$$

avec S est la section du corps (exemple : la section d'une barre en 1D).

Le vecteur $M(\dot{D})$ est l'assemblage des vecteurs élémentaires $M_e(\dot{D}_e)$:

$$\{M_e(\dot{D}_e)\} = \int_{\Omega_e} \frac{\sigma \dot{D}_e}{(1 - D_e)} \nabla[N]^T d\Omega_e = \frac{\sigma \dot{D}_e S}{(1 - D_e)} \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} \quad (IV-40)$$

Le vecteur H figurant dans l'équation (IV-36) est obtenu par assemblage des vecteurs élémentaires H_e :

$$\begin{aligned} \{H_e\} &= \frac{(E_0 + E_1)}{\eta} \int_{\Omega_e} \sigma \nabla[N]^T d\Omega_e - \frac{E_0 E_1}{\eta} \int_{\Omega_e} (1 - D_e) \nabla[N]^T \nabla[N] \{U_i\} d\Omega_e \\ &= \frac{(E_0 + E_1) \sigma S}{\eta} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{(1 - D_e) E_0 E_1 S}{\eta l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \\ &= \{O_e\} - [T_e] \{U_i\} \end{aligned} \quad (IV-41)$$

En 2D, l'étape de discrétisation géométrique du problème est gérée par le logiciel **gmsh** (Geuzaine and Remacle 2009). Il permet de créer le maillage après définition de la géométrie de la structure (ensemble de points et de contours) et de la densité du maillage sur les nœuds sommets. Dans les applications numériques présentées au chapitre V, on adopte toujours un maillage triangulaire raffiné légèrement dans les zones d'intérêt (ex. lieu du chemin de propagation possible d'une fissure).

Les opérations de calcul des matrices et vecteurs élémentaires ainsi que leur assemblage seront effectués en utilisant les fonctions préprogrammées du code eXlibris.

IV.6.2 Discrétisation spatiale 2D de l'équation d'évolution de l'endommagement

L'équation d'évolution de l'endommagement (ou du front d'endommagement), pour un point du front Γ_0 d'abscisse curviligne s , est donnée par :

$$f(s) = \bar{Y}(s) - \bar{Y}_c \bar{H}(s) \leq 0, \quad \dot{\phi}(s) \geq 0, \quad f(s) \dot{\phi}(s) = 0 \quad (IV-42)$$

La discrétisation spatiale du front d'endommagement Γ_0 est obtenue par intersection entre le front d'endommagement et les bords des éléments du maillage. Ces nœuds contribuent à définir l'ensemble des modes S_M associés au front d'endommagement. L'équation (IV-42) s'écrit alors :

$$f_i \leq 0, \quad \phi_i \geq 0, \quad f_i \phi_i = 0 \quad \forall i \in S_M \quad (IV-43)$$

Le critère f_i est évalué pour un mode i donné – défini sur le front – en s'appuyant sur la méthode Fast Marching Modes tel que :

$$f_i = \frac{\int_{\Omega} Y D'(\varphi) M_i d\Omega}{\int_{\Omega} D'(\varphi) M_i d\Omega} - \frac{\int_{\Omega} Y_c H(D(\varphi)) D'(\varphi) M_i d\Omega}{\int_{\Omega} D'(\varphi) M_i d\Omega} = \bar{Y}_i - \bar{Y}_c \bar{H}_i(D) \quad (IV-44)$$

où la construction des modes $(M_i)_{i \in S_M}$ et le calcul des intégrales en 2D sont détaillés dans la section (I.6.3.2.2). En 1D ces intégrales sont calculées dans la bande d'endommagement par la méthode des rectangles en adoptant les mêmes hypothèses que celles de la solution semi-analytique présentées dans le chapitre II (les champs sont supposés constants par élément).

Dans la section IV.7.3 on présentera l'approche développée pendant la thèse pour résoudre les équations d'évolution du front d'endommagement dans un milieu viscoélastique.

IV.7 Discrétisation temporelle

Dans cette section, on passe d'une formulation en vitesse du problème à une formulation incrémentale par approximation par différences finies des termes de dérivée temporelle.

IV.7.1 Formulation incrémentale de l'équation d'équilibre

Nous retenons le schéma d'intégration temporelle d'Euler explicite :

$$\dot{X}(t) \approx \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta X}{\Delta t} \quad (\text{IV-45})$$

avec Δt l'intervalle de temps entre 2 instants de discrétisation successifs. Ainsi les vitesses d'endommagement, de contrainte et de déformation s'écrivent à l'instant t :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t) &\approx \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} = \frac{\sigma(t + \Delta t) - \sigma(t)}{\Delta t} \\ \dot{\varepsilon}(t) &\approx \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta t} = \frac{\varepsilon(t + \Delta t) - \varepsilon(t)}{\Delta t} \\ \dot{D}(t) &\approx \frac{\Delta D}{\Delta t} = \frac{D(t + \Delta t) - D(t)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (\text{IV-46})$$

On écrit par la suite les indices de dépendance temporelle en exposant. La discrétisation en temps de la loi de comportement (équation (IV-15)) conduit alors à l'équation :

$$\Delta \sigma = E_0(1 - D^t) \tilde{\mathcal{C}} : \Delta \varepsilon - \frac{\Delta D}{(1 - D^t)} \sigma^t + \Delta t \frac{E_0 E_1 (1 - D^t)}{\eta} \tilde{\mathcal{C}} : \varepsilon^t - \Delta t \frac{(E_0 + E_1)}{\eta} \sigma^t \quad (\text{IV-47})$$

En 1D, l'équation d'équilibre (IV-36) associée à cette forme incrémentale de la loi de comportement s'écrit :

$$[K(D^t)]\{\Delta U\} - \{M(\Delta D)\} = \{\Delta F\} + \Delta t \{H^t\} \quad (\text{IV-48})$$

avec $\Delta U = U^{t+\Delta t} - U^t$. Cette équation montre qu'en connaissant l'état du solide à l'instant t et en imposant un incrément de chargement ΔF , on peut calculer le champ de déplacement à l'instant $t + \Delta t$ à partir de l'équation (IV-48) une fois que l'avancement du champ d'endommagement ΔD est déterminé (le calcul de ΔD est détaillé dans la partie suivante).

En modifiant légèrement le schéma d'intégration temporelle, on peut trouver une autre forme incrémentale de la loi de comportement du modèle de PTE (cf. Annexe C) telle que :

$$\begin{aligned} \Delta \sigma &= E_0(1 - D^{t+\Delta t}) \tilde{\mathcal{C}} : \Delta \varepsilon - \frac{\Delta D}{(1 - D^t)} \sigma^t + \Delta t \frac{E_0 E_1 (1 - D^{t+\Delta t})}{\eta} \tilde{\mathcal{C}} : \varepsilon^t \\ &\quad - \Delta t \frac{(E_0 + E_1)(1 - D^{t+\Delta t})}{\eta(1 - D^t)} \sigma^t \end{aligned} \quad (\text{IV-49})$$

Cette écriture a l'avantage d'annuler la contrainte lorsque la variable d'endommagement $D^{t+\Delta t}$ atteint 1 (voir Annexe C).

En quasi-statique, la discrétisation temporelle du champ des contraintes et des efforts extérieurs imposés tel que $\sigma^{t+\Delta t} = \sigma^t + \Delta \sigma$ et $F^{t+\Delta t} = F^t + \Delta F$ permet d'écrire la forme faible de l'équation d'équilibre à l'instant $t + \Delta t$ (sans forces de volume) sous la forme :

$$\int_{\Omega} \Delta \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(u^*) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^t : \boldsymbol{\varepsilon}(u^*) d\Omega = \int_{\Gamma_N} \Delta F \cdot u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_N} F^t \cdot u^* d\Gamma \quad \forall u^* \in \mathfrak{U} \quad (\text{IV-50})$$

Cette équation fait apparaître le résidu sur l'équilibre au pas de temps t défini par $R^t = \int_{\Gamma_N} F^t \cdot u^* d\Gamma - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^t : \boldsymbol{\varepsilon}(u^*) d\Omega$. Ce terme, théoriquement nul, est toutefois conservé dans l'algorithme de résolution numérique de type prédiction-correction utilisé plus loin pour assurer l'équilibre à l'instant $t + \Delta t$ après l'étape de correction (voir fin de la partie IV.8.1). On peut faire apparaître également un résidu dans l'équation (IV-48). Dans ce cas cette équation s'écrit comme présenté dans (IV-53)₁.

En injectant l'expression de $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ (IV-49) dans l'équation (IV-50), on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (1 - D^{t+\Delta t}) E_0 \Delta \boldsymbol{\varepsilon} : \tilde{\mathbb{C}} : \boldsymbol{\varepsilon}(u^*) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta D}{(1 - D^t)} \boldsymbol{\sigma}^t : \boldsymbol{\varepsilon}^* d\Omega = \int_{\Gamma_N} \Delta F \cdot u^* d\Gamma \\ & - \int_{\Omega} \left(\frac{E_1}{\eta} \right) (1 - D^{t+\Delta t}) E_0 \boldsymbol{\varepsilon}^t : \tilde{\mathbb{C}} : \boldsymbol{\varepsilon}(u^*) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{(E_0 + E_1)}{\eta} \frac{(1 - D^{t+\Delta t})}{(1 - D^t)} \boldsymbol{\sigma}^t : \boldsymbol{\varepsilon}(u^*) d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_N} F^t \cdot u^* d\Gamma - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^t : \boldsymbol{\varepsilon}(u^*) d\Omega \quad \forall u^* \in \mathfrak{U} \end{aligned} \quad (\text{IV-51})$$

La discrétisation spatiale de cette équation conduit à :

$$[K(D^{t+\Delta t})]\{\Delta U\} - \{M(\Delta D)\} = \{\Delta F\} + \Delta t \{H(D^t, D^{t+\Delta t})\} + \{R^t\} \quad (\text{IV-52})$$

Les équations d'équilibre discrétisées sont alors :

<u>équation d'équilibre 1</u> $[K(D^t)]\{\Delta U\} - \{M(\Delta D)\} = \{\Delta F\} + \Delta t \{H^t\} + \{R^t\}$ (IV-53) <u>équation d'équilibre 2</u> $[K(D^{t+\Delta t})]\{\Delta U\} - \{M(\Delta D)\} = \{\Delta F\} + \Delta t \{H(D^t, D^{t+\Delta t})\} + \{R^t\}$

On remarque que la matrice de rigidité figurant dans l'équation (IV-53)₂ dépend de la valeur de l'endommagement à l'instant $t + \Delta t$. L'équation d'équilibre (IV-53)₂ est celle adoptée dans le code de calcul eXlibris (en 2D). En revanche, on a utilisé l'équation (IV-53)₁ pendant le développement d'un algorithme de calcul en 1D (dit algorithme couplé (IV.8.2)).

IV.7.2 Formulation incrémentale de l'équation d'évolution de la variable interne $\boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)}$

La vitesse d'évolution du tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)}$ (ou de la déformation ε_1 en 1D) est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(ve),t} = \frac{E_0}{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}^t - \frac{E_0 + E_1}{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve),t} \quad (\text{IV-54})$$

Après le choix d'un schéma d'intégration explicite de Euler, l'évolution de cette variable interne est gouvernée par l'équation :

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve),t+\Delta t} - \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve),t} = \Delta t \frac{E_0}{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}^t - \Delta t \frac{E_0 + E_1}{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve),t} \quad (\text{IV-55})$$

La connaissance de l'état de la structure à l'instant t et du pas de temps Δt est alors suffisante pour calculer l'incrément de la variable interne $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)}$ en tout point. Les valeurs de $\boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)}$ sont calculées aux points d'intégration et stockées d'un pas de temps à l'autre. Dans le code eXlibris, on a développé une stratégie de stockage et de mise à jour de ces variables internes. Cette stratégie est détaillée dans l'Annexe E.

IV.7.3 Intégration temporelle de l'équation d'évolution de l'endommagement et problème de complémentarité linéaire LCP

On cherche dans cette partie à calculer l'avancement du front d'endommagement à l'instant $t + \Delta t$ pour une structure composée d'un matériau viscoélastique.

La discrétisation temporelle de l'équation d'évolution du front d'endommagement (IV-43) permet de calculer l'avancement du front $\Delta \varphi_i$ associé à un mode $i \in S_M$ – défini sur le front – tel que :

$$f_i^{t+\Delta t} \leq 0, \quad \Delta \varphi_i \geq 0, \quad f_i^{t+\Delta t} \Delta \varphi_i = 0 \quad \forall i \in S_M \quad (\text{IV-56})$$

où $\Delta \varphi_i = \varphi_i^{t+\Delta t} - \varphi_i^t$.

Le critère d'endommagement à l'instant $t + \Delta t$ est donné par :

$$f_i^{t+\Delta t} = \frac{\int_{\Omega_+} Y^{t+\Delta t} D'(\varphi^{t+\Delta t}) M_i d\Omega}{\int_{\Omega_+} D'(\varphi^{t+\Delta t}) M_i d\Omega} - \frac{\int_{\Omega_+} Y_c H(D(\varphi^{t+\Delta t})) D'(\varphi^{t+\Delta t}) M_i d\Omega}{\int_{\Omega_+} D'(\varphi^{t+\Delta t}) M_i d\Omega} \quad (\text{IV-57})$$

$$= \bar{Y}_i - \overline{Y_c H_i(D^{t+\Delta t})}$$

où la variable d'endommagement $D^{t+\Delta t}$ est liée à la valeur de $\varphi^{t+\Delta t}$ par le profil d'endommagement $D(\varphi)$, qui est une donnée du problème.

Une prédiction $z_i^{t+\Delta t}$ de ce critère d'évolution à l'instant $t + \Delta t$ peut être obtenue par linéarisation par rapport à $\Delta \varphi$, ΔU et $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)}$:

$$z_i^{t+\Delta t} = f_i^{t+\Delta t, pred} = f_i^t - \beta_i^t \Delta \varphi_i + \gamma_i^t (\Delta U) + \lambda_i^t (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)}) \quad \forall i \in S_M \quad (\text{IV-58})$$

avec :

$$\beta_i^t = -\frac{\partial f_i^t}{\partial \varphi} = \frac{\int_{\Omega_+} Y_c H'(D(\varphi^t)) D'^2(\varphi^t) M_i d\Omega}{\int_{\Omega_+} D'(\varphi^t) M_i d\Omega} \quad \forall i \in S_M$$

$$\gamma_i^t (\Delta U) = \frac{\partial f_i^t}{\partial U} \Delta U = \frac{\int_{\Omega_+} \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta U) : E_0 \tilde{\mathbb{C}} : (\boldsymbol{\varepsilon}^t - \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve),t}) D'(\varphi^t) M_i d\Omega}{\int_{\Omega_+} D'(\varphi^t) M_i d\Omega} \quad \forall i \in S_M \quad (\text{IV-59})$$

$$\lambda_i^t (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)}) = \frac{\partial f_i^t}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)} = \frac{\int_{\Omega_+} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)} : E_0 \tilde{\mathbb{C}} : (\rho \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve),t} - \boldsymbol{\varepsilon}^t) D'(\varphi^t) M_i d\Omega}{\int_{\Omega_+} D'(\varphi^t) M_i d\Omega} \quad \forall i \in S_M$$

où ρ est le rapport entre les deux rigidités E_0 et E_1 tel que $\rho = \frac{E_1}{E_0}$.

NB : pendant le calcul de β_i^t , la variation par rapport au domaine d'intégration est négligée (difficile à calculer numériquement). Cela est équivalent à figer le domaine d'intégration Ω_+ entre le pas de temps t et $t + \Delta t$.

Une approximation de l'équation d'évolution de l'endommagement à l'instant $t + \Delta t$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} -z_i^{t+\Delta t} &= \beta_i^t \Delta \varphi_i - \gamma_i^t (\Delta U) - \lambda_i^t (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)}) - f_i^t \geq 0, \\ \Delta \varphi_i &\geq 0, \quad z_i^{t+\Delta t} \cdot \Delta \varphi_i = 0 \quad \forall i \in S_M \end{aligned} \quad (IV-60)$$

En appliquant le principe du problème de complémentarité linéaire LCP (cf. section II.6), l'unicité de ce problème en $(z_i^{t+\Delta t}, \Delta \varphi_i)$ est assurée pour des valeurs de β_i^t positives. Ceci conduit aux conditions :

$$\beta_i^t = \frac{\int_{\Omega} Y_c H'(D(\varphi^t)) D'^2(\varphi^t) M_i d\Omega}{\int_{\Omega} D'(\varphi^t) M_i d\Omega} > 0 \quad \forall i \in S_M \quad (IV-61)$$

La solution du problème donnée par :

$$\Delta \varphi_i = \max \left(0, \frac{f_i^t + \gamma_i^t (\Delta U_{préd}) + \lambda_i^t (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)})}{\beta_i^t} \right) \quad \forall i \in S_M \quad (IV-62)$$

fournit les valeurs d'avancement de front recherchées $\Delta \varphi_i$.

Un choix convenable de la fonction d'adoucissement $H(D)$ et du profil d'endommagement $D(\varphi)$ conduit à respecter les conditions (IV-61).

IV.8 Algorithmes de résolution du problème discrétisé

On suppose connu l'état de la structure à l'instant t . Le passage à l'instant $t + \Delta t$ demande au final à résoudre les équations suivantes :

$$\begin{aligned} [K(D^{t+\Delta t})] \{\Delta U\} - \{M(\Delta D)\} &= \{\Delta F\} + \Delta t \{H(D^t, D^{t+\Delta t})\} + \{R^t\} \\ \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)} &= \Delta t \frac{E_0}{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}^t - \Delta t \frac{E_0 + E_1}{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve),t} \\ z_i^{t+\Delta t} &= f_i^t - \beta_i^t \Delta \varphi_i + \gamma_i^t (\Delta U) + \lambda_i^t (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(ve)}) \leq 0, \quad \Delta \varphi_i \geq 0, \quad z_i^{t+\Delta t} \cdot \Delta \varphi_i = 0 \quad \forall i \in S_M \end{aligned} \quad (IV-63)$$

Dans les parties suivantes, on commence par présenter un algorithme de prédiction-correction. Il est basé sur le découplage entre l'équation d'équilibre et l'équation d'évolution de l'endommagement (*staggered algorithm*). Cet algorithme est implémenté dans le code eXlibris pour mener des simulations bidimensionnelles. Il a conduit au développement d'un nouveau module de calcul dans eXlibris, reprenant en partie des fonctions déjà existantes du code de calcul. On l'a également implémenté dans un code de calcul EF en 1D. Une comparaison entre les résultats de ces deux implémentations sur un cas simple (essai de traction directe) est présentée dans le chapitre V. Elle permet de valider l'implémentation numérique de l'algorithme de prédiction-correction dans le code eXlibris.

Ensuite, un autre algorithme de calcul unidimensionnel est proposé dans ce chapitre. Cet algorithme (dit algorithme couplé) est basé sur le calcul des équations mécaniques d'une manière couplée. Au

même titre que la solution analytique du chapitre III, il sert à vérifier la pertinence de l'algorithme de prédiction-correction à partir de la modélisation de l'essai de traction uniaxiale en 1D.

IV.8.1 Algorithme de prédiction-correction

On présente dans cette partie un algorithme de calcul – dit de prédiction-correction – qui permet de résoudre le problème mécanique de viscoélasticité endommageable au niveau d'un pas de temps. Les équations mécaniques à résoudre sont résumées dans (IV-63).

Pour un pas du temps Δt donné et une vitesse de chargement imposée ($\dot{F} = \frac{\Delta F}{\Delta t}$ ou $\dot{U}_d = \frac{\Delta U_d}{\Delta t}$), on suppose que les champs de déplacement U^t , d'endommagement $D(\varphi^t)$ et de la variable interne $\epsilon^{(ve),t}$ sont connus à l'instant t . Le problème consiste à calculer ces champs à l'instant $t + \Delta t$.

Les étapes de résolution de ce problème sont les suivantes :

Étape 1

On commence par une étape de prédiction. Cette étape consiste à trouver une solution de prédiction ΔU_{pred} en prenant l'hypothèse suivante : le champ d'endommagement n'évolue pas entre l'instant t et l'instant $t + \Delta t$. Pour cette étape, l'équation d'équilibre à résoudre possède la forme suivante :

$$[K(D^t)]\{\Delta U_{pred}\} = \Delta t\{H(D^t)\} + \{\Delta F\} + \{R^t\} \quad (IV-64)$$

Étape 2

La solution du problème de prédiction est introduite dans la loi d'évolution du front d'endommagement (IV-63)₃. L'avancement du front $\Delta\varphi_i$ est calculé pour tous les modes $i \in S_M$ par l'équation (IV-62) :

$$\Delta\varphi_i = \max\left(0, \frac{f_i^t + \gamma_i(\Delta U_{pred}) + \lambda_i(\Delta\epsilon^{(ve)})}{\beta_i^t}\right)$$

où l'incrément $\Delta\epsilon^{(ve)}$ est obtenu à partir de l'équation (IV-63)₂.

Pendant cette étape, on vérifie que l'avancement maximal du front d'endommagement ne dépasse une certaine valeur critique $\Delta\varphi_{max}$ que l'on se donne en fonction de la taille des éléments; sinon, on repart de l'étape 1 en divisant le pas de temps par 2 :

$$\begin{cases} \text{Si } \max(\Delta\varphi_i)_{i \in S_M} < \Delta\varphi_{max} \rightarrow \text{étape suivante} \\ \text{Si } \max(\Delta\varphi_i)_{i \in S_M} > \Delta\varphi_{max} \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t}{2} \rightarrow \text{étape 1} \end{cases} \quad (IV-65)$$

Étape 3

L'étape 3, dite de correction, consiste à résoudre le problème mécanique d'équilibre pour l'avancement du front $\Delta\varphi$ déterminé en étape 2 et l'incrément Δt correspondant. L'objectif ici est de calculer l'incrément du champ des déplacements corrigés ΔU_{corr} qui vérifie l'équation d'équilibre suivante :

$$[K(D^{t+\Delta t})]\{\Delta U_{corr}\} = \{\Delta F\} + \{M(\Delta D)\} + \Delta t\{H(D^t, D^{t+\Delta t})\} + \{R^t\} \quad (IV-66)$$

Pour ceci, le front d'endommagement est avancé ($\varphi^{t+\Delta t} = \varphi^t + \Delta\varphi$) afin de calculer la matrice de rigidité et le vecteur H qui dépendent de l'endommagement $D^{t+\Delta t}$. Rappelons que celui-ci est calculé à partir du profil d'endommagement par :

$$D^{t+\Delta t} = D(\varphi^{t+\Delta t}) \quad (IV-67)$$

Étape 4

Cette dernière étape d'actualisation des champs porte sur les déplacements et la variable interne $\epsilon^{(ve)}$ en faisant :

$$U^{t+\Delta t} = U^t + \Delta U_{corr} \quad (IV-68)$$

$$\epsilon^{(ve),t+\Delta t} = \epsilon^{(ve),t} + \Delta \epsilon^{(ve)} \quad (IV-69)$$

L'ensemble des champs et la fonction level set $\varphi^{t+\Delta t}$ sont ensuite stockés afin de les utiliser au pas de temps suivant (approche incrémentale).

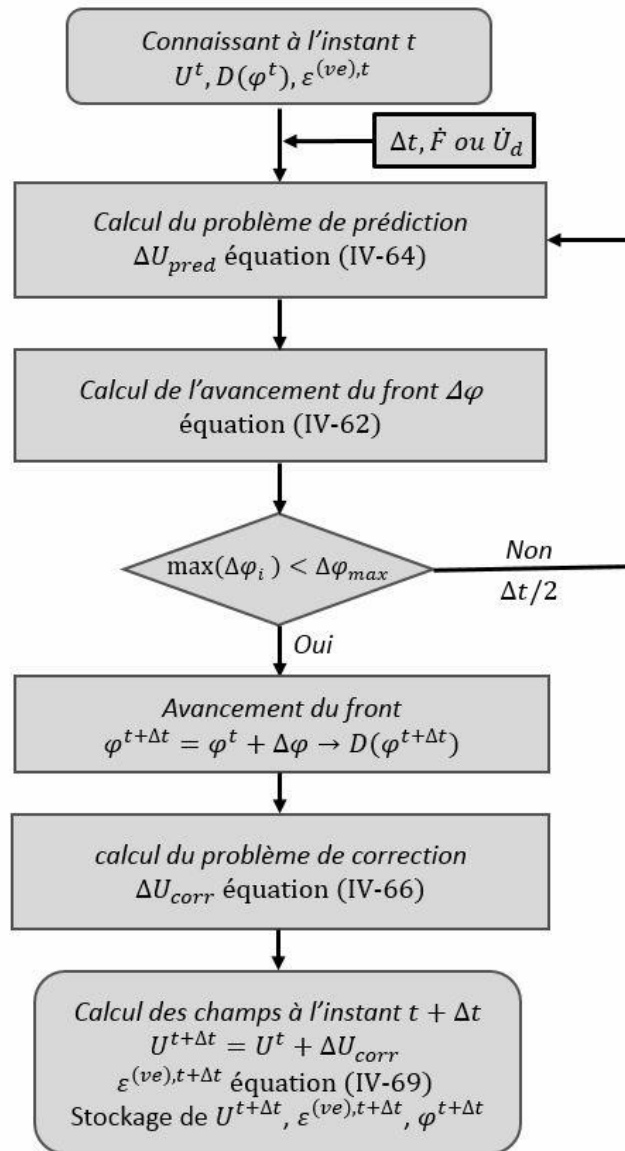


Figure IV-3: Algorithme de prédiction-correction pour calcul incrémental dans le domaine viscoélastique avec l'approche TLS.

Aspects numériques et calcul du résidu

On remarque dans cet algorithme l'absence d'itérations multiples à convergence sur le champ de déplacement, nécessités a priori par la formulation (IV-63). Les seules itérations dans cet algorithme portent sur le pas de temps Δt afin de limiter l'avancement maximal du front d'endommagement. En revanche, pour assurer un calcul fiable et afin de respecter l'équation d'équilibre quasi-statique aux différents pas de temps, on conserve le résidu sur l'équilibre à l'instant de calcul courant comme présenté dans l'équation (IV-50). Cette opération permet d'éviter l'accumulation d'erreurs d'un pas de calcul à l'autre.

IV.8.2 Algorithme couplé 1D

Contrairement au précédent algorithme, celui présenté ici est basé sur la résolution simultanée des équations du problème, à savoir l'équation d'équilibre et l'équation d'évolution de l'endommagement. L'équation d'évolution de la variable interne ε_1 (en 1D) est utilisée pendant le calcul du scalaire $\lambda_i(\Delta\varepsilon_1)$ figurant dans l'équation (IV-59). A ce titre, elle est incorporée dans l'équation d'évolution du front d'endommagement.

En revanche, sous sa forme actuelle l'algorithme ne permet de traiter que le cas du profil d'endommagement $D(\varphi)$ linéaire. De plus, on suppose les champs $\sigma, \varepsilon_1, \varepsilon, D$ constants par élément de maillage Ω_e .

L'équation d'équilibre utilisée dans cet algorithme est celle donnée par l'équation (IV-53)₁. L'équation d'évolution du front d'endommagement (on a un seul front en 1D) et celle d'évolution de la variable interne ε_1 sont combinées sous la forme algébrique suivante :

$${}^tW\Delta U + A\Delta\varphi = -B\frac{1}{\Delta t} \quad (IV-70)$$

tel que :

$$\begin{aligned} A &= Y(l) - \frac{\partial}{\partial l} \left(\int_0^l H(D)Y_c dx \right) \approx Y(x=l) - Y_c H(D(x=0)) \\ B &= \int_0^l \frac{1}{\eta} (E_1\varepsilon_1 - E_0(\varepsilon - \varepsilon_1)) \left(\frac{\sigma}{1-D} - E_1\varepsilon_1 \right) dx \\ &\approx \frac{1}{\eta} \sum_{e \in \Omega_e} (E_1\varepsilon_1^e - E_0(\varepsilon^e - \varepsilon_1^e)) \left(\frac{\sigma_e}{1-D_e} - E_1\varepsilon_1^e \right) l_e \end{aligned} \quad (IV-71)$$

L'équation (IV-70) est la forme algébrique discrétisée en temps et en espace de l'équation d'évolution du front (III-34) (obtenue après l'élimination de $\dot{\varepsilon}_1$).

Le vecteur W figurant dans l'équation (IV-70) est l'assemblage des vecteurs élémentaires W_e qui sont nuls dans la zone saine. Le vecteur élémentaire associé à un élément de maillage $e \in \Omega_e$ de la zone endommagée s'écrit :

$${}^tW_e = E_0(\varepsilon^e - \varepsilon_1^e)[-1 \quad 1] \quad (IV-72)$$

Le système d'équations mécaniques à résoudre s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{bmatrix} K_{(N,N)} & -M_{(N,1)} \\ {}^tW_{(1,N)} & A_{(1,1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_{(N,1)} \\ \Delta\varphi_{(1,1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} H_{(N,1)} + \Delta F + R^t \\ -\frac{1}{\Delta t} B_{(1,1)} \end{bmatrix} \quad (IV-73)$$

En connaissant le pas de temps Δt et en imposant un incrément de chargement ΔF tel que le taux de chargement vaut $\dot{F} = \Delta F / \Delta t$, on peut par la suite résoudre le système d'équations (IV-73). Pour un chargement à vitesse de déplacement imposée, on utilise la méthode classique d'élimination (on change les lignes de la matrice et les seconds membres correspondant aux conditions de Dirichlet). Notons que dans cet algorithme EF-1D, on impose en réalité l'avancement maximal du front d'endommagement tel que $\Delta \varphi = \Delta \varphi_{max}$ soit égal à la taille d'un élément du maillage Δx (comme pour la solution semi-analytique présentée dans le chapitre III). Dans ce cas, on cherche à calculer le pas de temps Δt . Ainsi, le système d'équations à résoudre est réécrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} K_{(N,N)} & -H_{(N,1)} \\ {}^tW_{(1,N)} & B_{(1,1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_{(N,1)} \\ \frac{1}{\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{(N,1)} \Delta \varphi_{max} + \Delta F + R^t \\ -A_{(1,1)} \Delta \varphi_{max} \end{bmatrix} \quad (IV-74)$$

Après résolution de ce système d'équations, on obtient l'incrément du champ de déplacement ΔU et du pas de temps Δt . L'état de la barre à l'instant $t + \Delta t$ est ensuite calculé par :

$$\begin{aligned} U^{t+\Delta t} &= U^t + \Delta U \\ \varphi^{t+\Delta t} &= \varphi^t + \Delta \varphi_{max} \\ \Delta \varepsilon_1 &= \frac{\Delta t}{\eta} (E_0 \varepsilon^t - (E_0 + E_1) \varepsilon_1^t) \rightarrow \varepsilon_1^{t+\Delta t} = \varepsilon_1^t + \Delta \varepsilon_1 \end{aligned} \quad (IV-75)$$

IV.9 Validation numérique des algorithmes proposés à partir de l'essai de traction directe 1D

Cette partie présente les résultats obtenus à partir des 2 codes que nous avons développés en 1D (algorithme couplé et de prédiction-correction). Ceux-ci peuvent être comparés entre eux et avec la solution analytique du chapitre III. Ils seront également comparés au chapitre V avec les résultats de eXlibris pour un maillage 2D simulant la barre.

Tout d'abord, on commence par comparer la réponse purement viscoélastique d'une barre non endommageable pour deux différents types d'essai, à savoir l'essai de fluage à contrainte constante et l'essai à vitesse de contrainte $\dot{\sigma}$ imposée constante.

Ensuite, on s'intéresse au comportement endommageable de la barre en traction uniaxiale sous vitesse de déplacement constante.

IV.9.1 Réponse de la barre pendant la phase réversible

Le comportement viscoélastique de la barre est donné par le modèle rhéologique de PT dont les valeurs de paramètres sont données dans le Tableau IV-1. La longueur et la section de la barre sont égales à 800 mm et 100 mm².

Paramètres du modèle de PT	
E_0 (kN/mm ²)	23
E_1 (kN/mm ²)	11
η (kN.j/mm ²)	500

Tableau IV-1: Paramètres du modèle de PT (Mesquita and Coda 2001).

IV.9.1.1 Essai de fluage

Pour un essai de fluage, la force appliquée sur la barre est maintenue constante. La contrainte imposée σ pendant cet essai est donnée dans le Tableau IV-2. La vitesse de chargement $\dot{F}$ utilisée en entrée des codes EF 1D est introduite en faisant :

- À l'instant $t = t_0 = 0$, $\dot{F} = \sigma S / \Delta t$
- Pour $t > t_0$, $\dot{F} = 0$

$\Delta t(\text{jours})$	1
Durée de l'essai(jours)	450
Contrainte imposée σ (KN/mm ²)	0.005
Pas de discrétisation spatiale Δx	2mm

Tableau IV-2: Paramètres pour l'essai de fluage.

Afin de rester dans la phase réversible du comportement de la barre, on impose une valeur très élevée du taux de restitution d'énergie critique Y_c .

La Figure IV-4 compare les évolutions du déplacement $U(t)$ au bout de la barre (point A) la réponse pour la solution analytique et celles issues des codes EF. On constate la superposition des trois courbes.

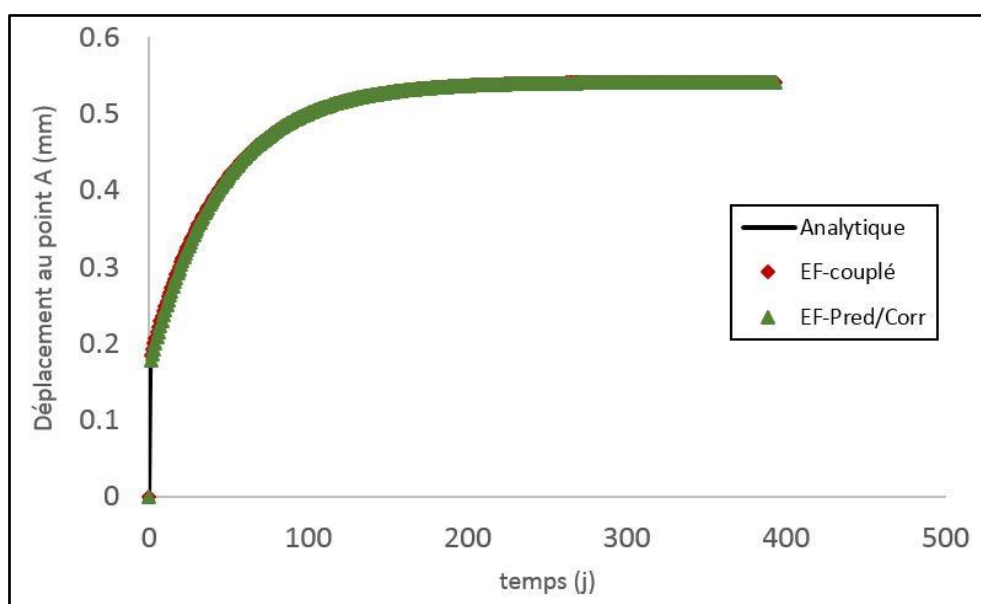


Figure IV-4: Évolution du déplacement au point d'application du chargement, comparaison entre la solution analytique et EF.

IV.9.1.2 Essai de traction à vitesse de contrainte constante

Pendant cet essai, une vitesse de contrainte $\dot{\sigma}$ de 0.0005 KN/(mm².s) est appliquée sur la barre. L'évolution du déplacement au point A pour les trois méthodes de résolution est présentée sur la Figure IV-5. On remarque un bon accord entre les trois réponses.

Pour cette étude, le pas de temps et le pas de discrétisation spatiale sont pris égaux à 1 jour et 2mm, respectivement.

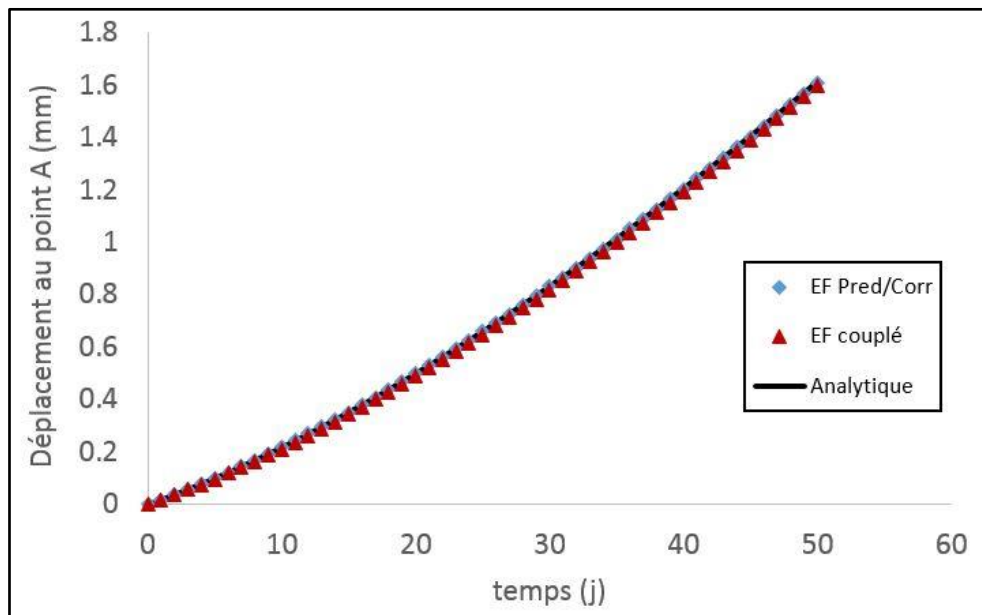


Figure IV-5: Évolution du déplacement au point d'application du chargement pour un essai à vitesse de contrainte imposée.

IV.9.2 Phase endommageable

On s'intéresse ici à la réponse viscoélastique endommageable de la barre sous vitesse de déplacement imposée. Les objectifs sont :

- Comparer la solution semi-analytique développée dans le chapitre III avec la réponse des algorithmes EF 1D.
- Vérifier la justesse de l'algorithme de prédiction-correction et son implémentation.
- Étudier l'effet du choix du profil d'endommagement et les paramètres de la fonction $H(D)$ sur la réponse de la barre.

Les paramètres du modèle PTE sont donnés dans le Tableau IV-3.

$E0 (N/mm^2)$	14000
$E1 (N/mm^2)$	5600
$\eta (N.s/mm^2)$	145
$Y_c (MPa)$	$3.00E - 05$
α	3
β	0.9
$l_c (mm)$	80

Tableau IV-3: Paramètres du modèle PTE.

Les coefficients α et β présentés dans le Tableau IV-3 sont ceux de la fonction $H(D) = (1 - \beta D)^{-\alpha}$ adoptée dans cet étude.

IV.9.2.1 Essai de traction à vitesse de déplacement imposée

Pendant l'essai de traction uniaxiale, une vitesse de déplacement $\dot{U}(A)$ est imposée au bout de la barre (point A). Ce type de chargement représente le type de sollicitation appliquée pendant les essais de laboratoire. Dans un premier temps, un profil d'endommagement du type linéaire ($D(\varphi) = \frac{\varphi}{l_c}$) est adoptée.

Pour une vitesse $\dot{U}(A) = 1.6 \text{ mm/s}$, l'évolution de la contrainte dans la barre calculée à partir des différents outils développés est présentée sur la Figure IV-6. Le pas de temps pour cette simulation est pris égal à 0.01 s, et Δx égal à 2 mm.

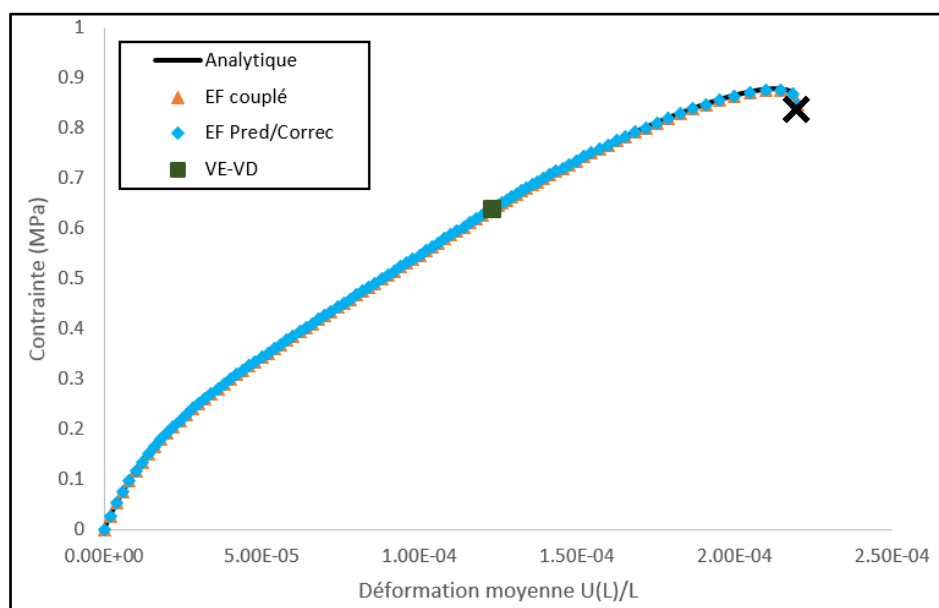


Figure IV-6: Évolution de la contrainte dans la barre à vitesse de déplacement imposée.

Le carré en vert (VE-VD) de la Figure IV-6 indique le début de la phase d'endommagement. Pour cette simulation, l'évolution de l'endommagement maximal est présentée sur la Figure IV-7.

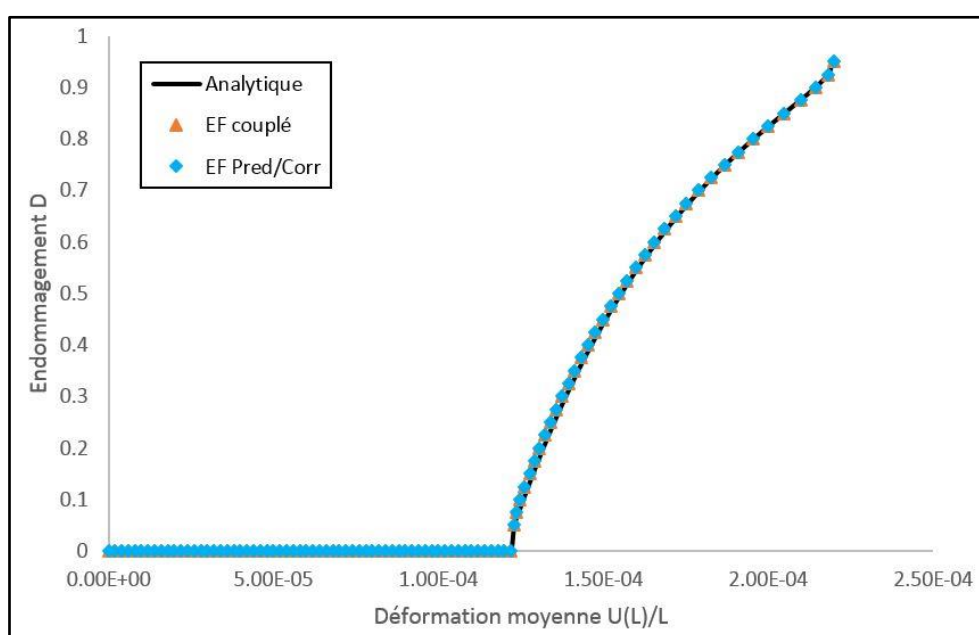


Figure IV-7: Évolution de l'endommagement maximal dans la barre.

Ces deux figures montrent le bon accord entre les réponses semi-analytique et EF. En particulier, on peut dire que la stratégie de prédiction-correction proposée permet de résoudre les équations mécaniques d'une manière efficace tout en respectant l'équation d'équilibre et l'équation d'évolution de l'endommagement.

La section suivante porte sur l'incidence de la forme de la fonction $D(\varphi)$ sur la réponse de la barre calculée à partir de l'algorithme de prédiction-correction.

IV.9.2.2 Effet du profil d'endommagement $D(\varphi)$ sur la réponse endommageable de la barre

Trois fonctions de forme d'endommagement différentes ont été utilisées pendant l'étude de la réponse d'une barre chargée à vitesse de déplacement constante. L'algorithme de calcul adopté pour cette étude est celui de prédiction-correction (en 1D).

Les fonctions de forme choisies dans cette étude sont données par le Tableau IV-4 et tracées sur la Figure IV-8.

Type	$D(\varphi)$
Linéaire (Lin)	$\frac{\varphi}{l_c}$
Quadratique (Poly2)	$2\frac{\varphi}{l_c} - \left(\frac{\varphi}{l_c}\right)^2$
Cubique (Poly3)	$\left(\frac{\varphi}{l_c}\right)^2 \left(3 - 2\frac{\varphi}{l_c}\right)$

Tableau IV-4: Profils d'endommagement envisagés.

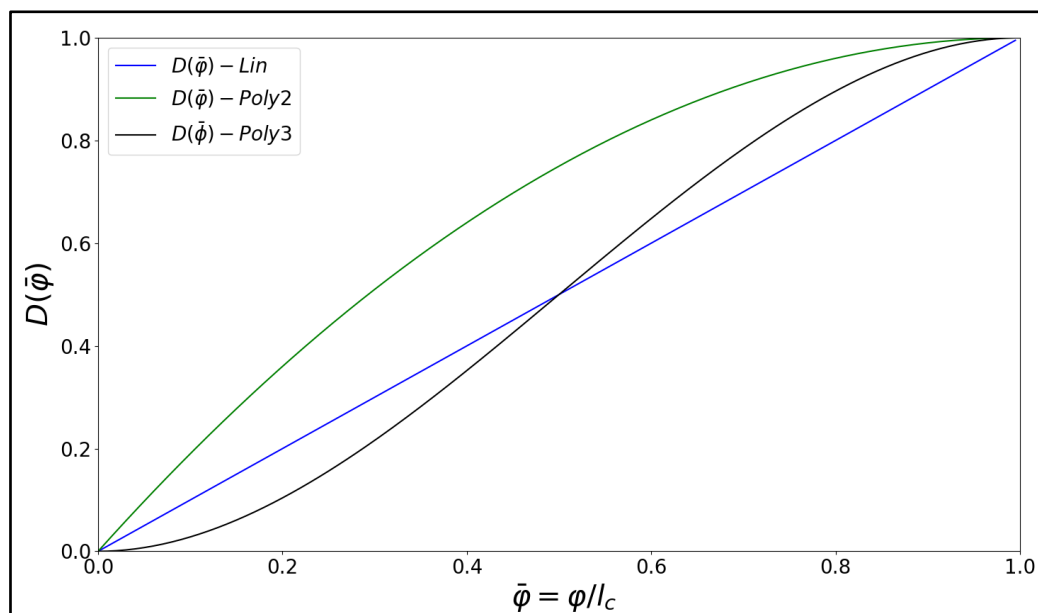


Figure IV-8: Tracés des profils d'endommagement.

L'effet des fonctions de forme d'endommagement sur la réponse de la barre est présenté sur la Figure IV-9. Pour cette étude la vitesse de déplacement imposée est égale à 1.6 mm/s et les paramètres α et β valent 1.5 et 1.

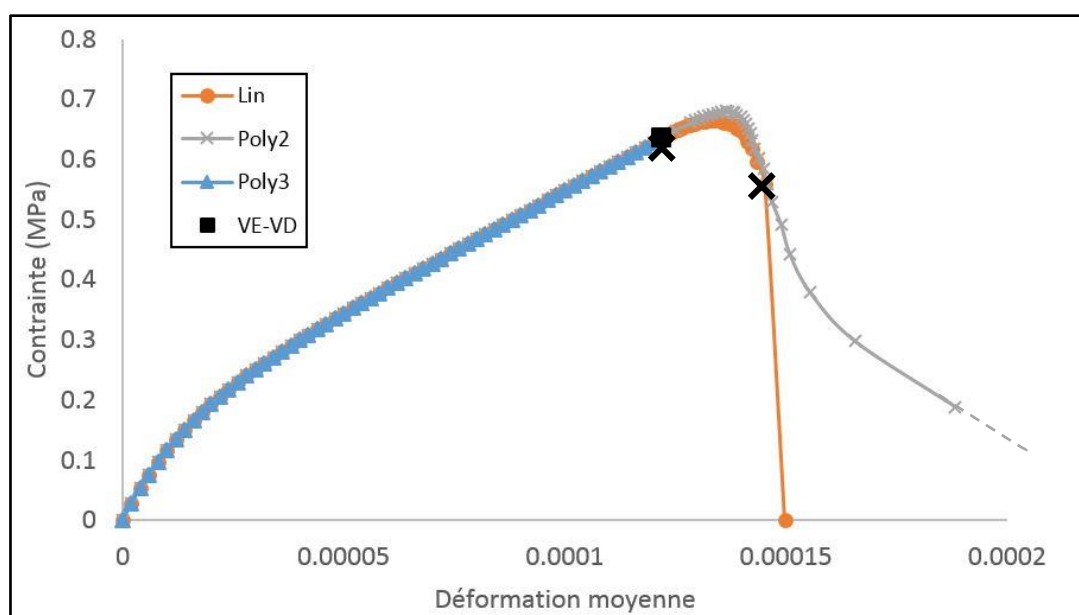


Figure IV-9: Effet du profil d'endommagement sur la réponse de la barre.

On remarque que la forme cubique conduit à une rupture brutale au moment de l'initiation de l'endommagement (VE-VD). En revanche, la forme quadratique conduit à une réponse avec adoucissement. Pour ce dernier profil d'endommagement, la déformation moyenne atteinte dans la barre à la fin de l'essai est la plus élevée. Par conséquent, le profil quadratique conduit à une réponse moins fragile que celles obtenues à partir des profils d'endommagement linéaire et cubique (NB : la croix noire indique le moment de la rupture).

Il faut noter qu'un algorithme de calcul 1D basé sur une discrétisation implicite en temps a été également développé (Annexe D). Pour différentes formes de profil d'endommagement, on a trouvé un bon accord entre les réponses obtenues par cet algorithme et celles obtenues par l'algorithme de prédiction-correction.

IV.9.2.3 Effet des paramètres de la fonction d'adoucissement (α et β) sur la réponse endommageable de la barre

L'effet de α sur la réponse endommageable de la barre (pour $\beta = 1$) est illustré dans cette section. Pour cette étude, le profil d'endommagement quadratique et une vitesse de déplacement imposée de 1.6 mm/s sont choisis. La réponse de la barre pendant l'essai de traction est présentée sur la Figure IV-10.

On voit sur cette figure que des valeurs de α supérieures à 1.45 permettent d'avoir une réponse à déplacement imposé avec adoucissement jusqu'à rupture complète de la barre pour $D = 1$.

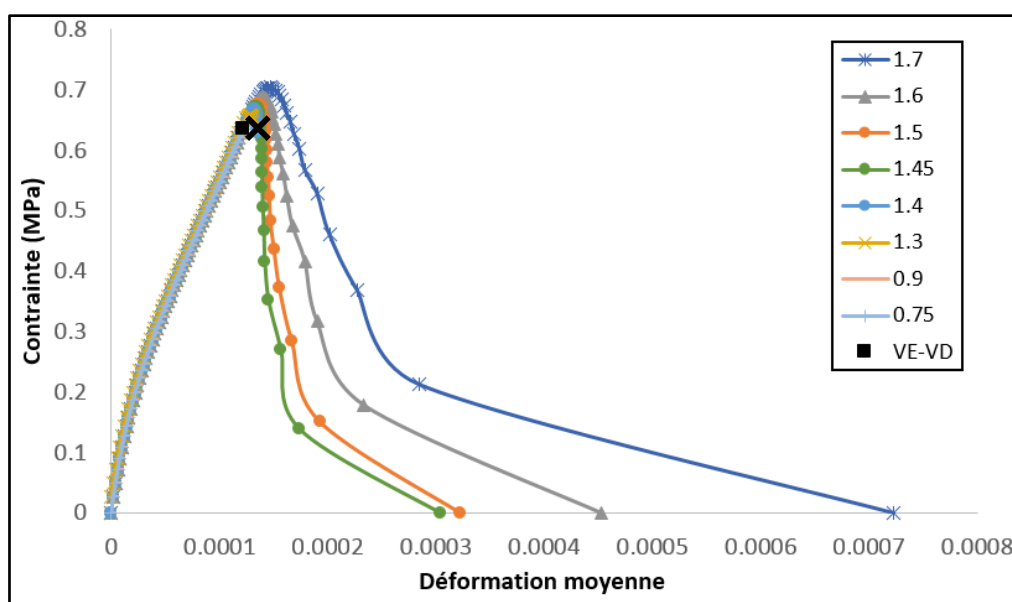


Figure IV-10: Effet du paramètre α sur la réponse endommageable de la barre pour un profil d'endommagement quadratique.

La même étude est menée pour la fonction d'endommagement $D(\varphi)$ du type linéaire. La réponse de la barre est présentée sur les courbes de la Figure IV-11.

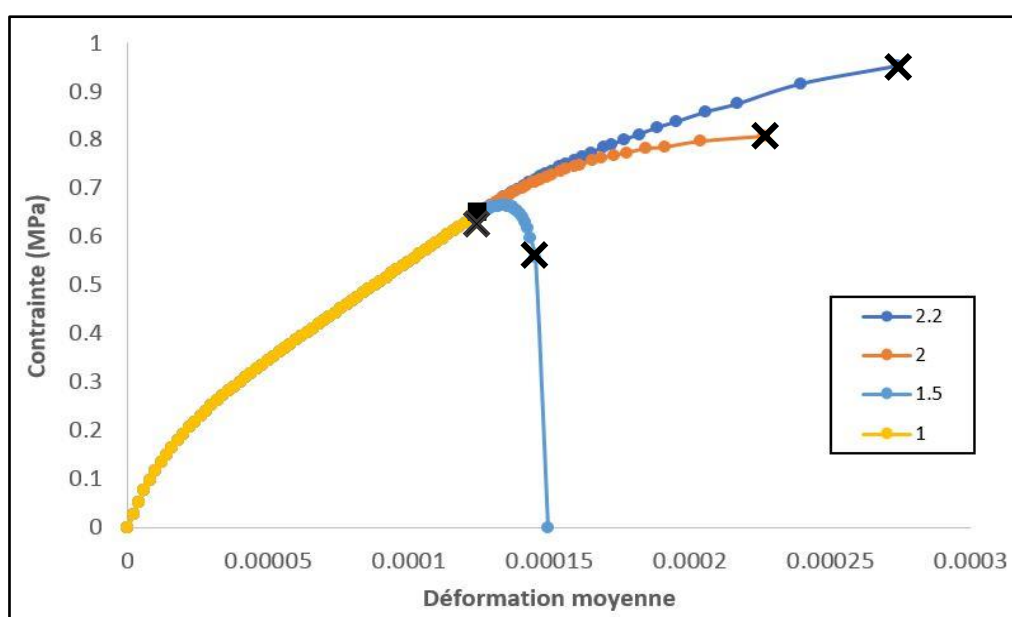


Figure IV-11: Effet de α sur la réponse de la barre pour un profil d'endommagement $D(\varphi)$ du type linéaire ($\beta = 1$).

En comparant la réponse de la barre obtenue en utilisant ces deux fonctions de forme d'endommagement (pour $\beta = 1$ et $\alpha = 1.5$), on remarque que le profil d'endommagement linéaire conduit à une réponse plus fragile.

IV.10 Bilan

Ce chapitre a décrit le développement de deux algorithmes de calcul par la méthode des éléments finis. Le premier, dit de prédiction-correction, est celui qui a été implémenté dans le code eXlibris (code écrit en C++ Orienté Objet). L'autre algorithme – dit algorithme couplé – est restreint ici au cas unidimensionnel. Ces algorithmes ont été validés par comparaison entre eux et par rapport à la solution semi-analytique du chapitre III.

Différents aspects liés aux paramètres du modèle TLS ont été investigués à partir des applications numériques. La figure suivante résume les aspects étudiés et la stratégie de validation des codes numériques :

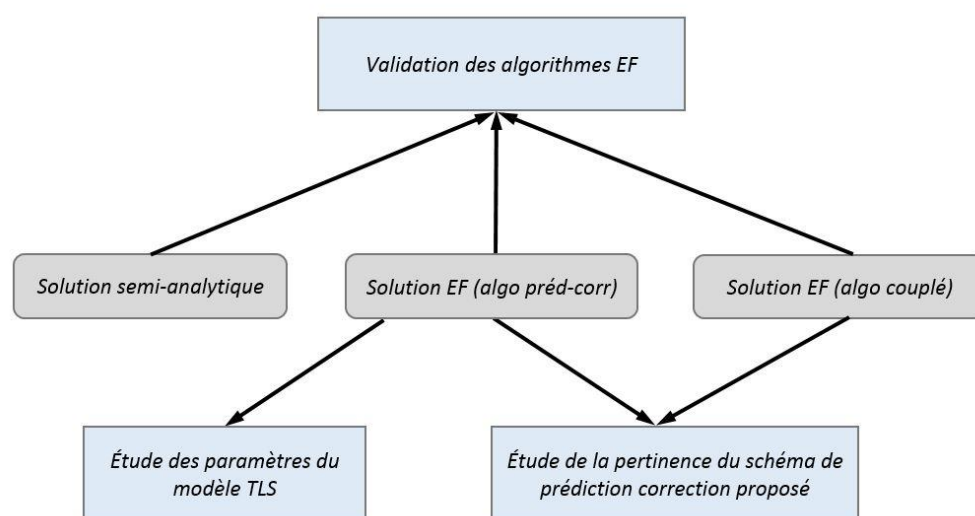


Figure IV-12: Stratégie de validation des différents algorithmes développés dans ce chapitre.

Les résultats du chapitre montrent les points suivants :

- L'algorithme de prédiction-correction basé sur un schéma d'intégration temporelle explicite et introduit dans eXlibris est validé dans le cas 1D.
- Les paramètres de la fonction d'adoucissement $H(D)$ affectent directement le mécanisme d'endommagement dans la barre. On peut obtenir un comportement plus ou moins fragile suivant le choix des paramètres de cette fonction.
- Le profil d'endommagement de type quadratique permet de rendre compte, dans certaines conditions, d'une réponse adoucissante de la barre à déplacement imposé jusqu'à $D = 1$. La fonction $D(\varphi)$ linéaire ne le permet pas.

L'interprétation d'essais de laboratoire (en 2D) à partir du code eXlibris est présentée dans le chapitre suivant.



Chapitre V : Application du module eXlibris TLS viscoélastique à la simulation d'essais de fissuration monotone sur matériaux bitumineux

V.1 Contenu et démarche

Dans le chapitre I, on a présenté les principaux essais de fissuration réalisés sur EB. Le chapitre V s'intéresse à la modélisation des essais de traction 1D et de flexion 3 points à partir du module TLS développé dans le cadre de cette thèse. L'objectif est d'évaluer la pertinence du code EF en comparant la réponse des simulations numériques et les observations expérimentales.

La simulation de l'essai de traction directe permet de s'assurer du bon fonctionnement du module eXlibris développé en 2D.

On présente ensuite la modélisation de l'essai de flexion trois points à chargement monotone sur poutre rectangulaire composée de mortier bitumineux. Notons qu'aucune étude de fissuration de ce type sur enrobé bitumineux « à température ambiante » n'est recensée dans la littérature.

Les paramètres du modèle viscoélastique de PT sont calés sur la première phase des courbes force-déplacement expérimentales en considérant celle-ci sans endommagement. La stratégie de calage est basée sur le développement d'une solution analytique qui donne la force sous le point de chargement en fonction de la déflexion imposée sur la poutre.

Ces paramètres sont utilisés pour modéliser l'essai de fissuration à différentes vitesses de déplacement imposées. Les courbes force-déflexion obtenues sont comparées sur la totalité des courbes expérimentales. Une étude de l'effet d'entaille sur la réponse de la poutre est également présentée.

À la fin du chapitre, une étude paramétrique est menée afin d'investiguer l'effet des paramètres Y_c et l_c du modèle TLS sur la réponse de la poutre.

V.2 Essai de traction directe

La modélisation 2D de l'essai de traction directe constitue une première étape pour valider, par comparaison avec les résultats des chapitres III et IV, l'implémentation de l'algorithme de prédiction-correction dans le code de calcul eXlibris 2D.

V.2.1 Description du cas test

On considère sur la Figure V-1 une barre de longueur $L=800$ mm et de hauteur $h=100$ mm chargée en traction à vitesse de déplacement imposée ($\dot{U} = 1.6$ mm/s).

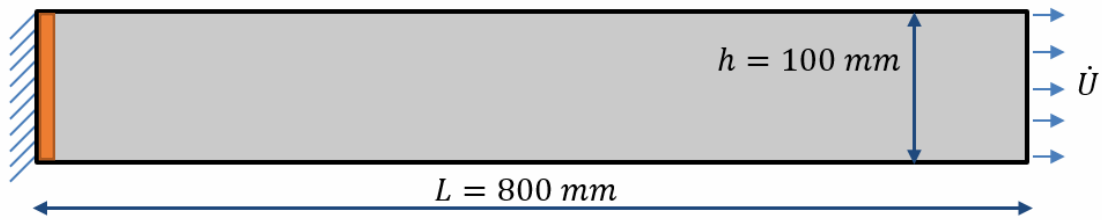


Figure V-1: Géométrie de la barre et conditions aux limites.

Un maillage triangulaire structuré a été adopté pour cette simulation. Il est constitué de 320 éléments suivant la longueur de la barre et 2 éléments suivant la largeur. Les hypothèses de calcul prises pour la modélisation 2D sont :

- État de déformations planes
- Coefficient de Poisson nul afin de simuler la réponse unidimensionnelle de la barre
- Avancement maximal du front $\Delta\varphi_{max}$ pris égal à la taille moyenne des éléments du maillage.

Pour initialiser le positionnement de la zone endommagée, on considère près de l'encastrement une petite bande d'épaisseur égale à la taille d'un élément du maillage (la zone rouge de la Figure V-1) à faible valeur d'endommagement uniforme ϵ . Cette zone permet d'imposer la zone d'initiation et la direction de propagation du dommage. Ce choix a été fait car le comportement de la barre pendant la phase réversible est homogène et par conséquent l'absence de cette zone endommagée conduit à un endommagement diffus dans toute la barre.

Les propriétés du modèle viscoélastique de PT sont données dans le Tableau V-1.

$E0$ (N/mm ²)	14000
$E1$ (N/mm ²)	5600
η (N.s/mm ²)	145

Tableau V-1: Paramètres du modèle viscoélastique de PT.

Concernant les paramètres du modèle d'endommagement, on choisit un taux de restitution d'énergie critique Y_c égal à 3.10^{-5} MPa et une longueur caractéristique l_c égale à 80 mm. La fonction d'adoucissement est celle proposée dans les chapitres III et IV ($H(D) = (1 - \beta D)^{-\alpha}$).

V.2.2 Choix d'un profil d'endommagement linéaire

Les Figure V-2, Figure V-3 et Figure V-4 montrent pour $D(\varphi) = \frac{\varphi}{l_c}$ et différentes valeurs des paramètres α et β de la fonction d'adoucissement $H(D)$ que nous retrouvons les résultats 1D.

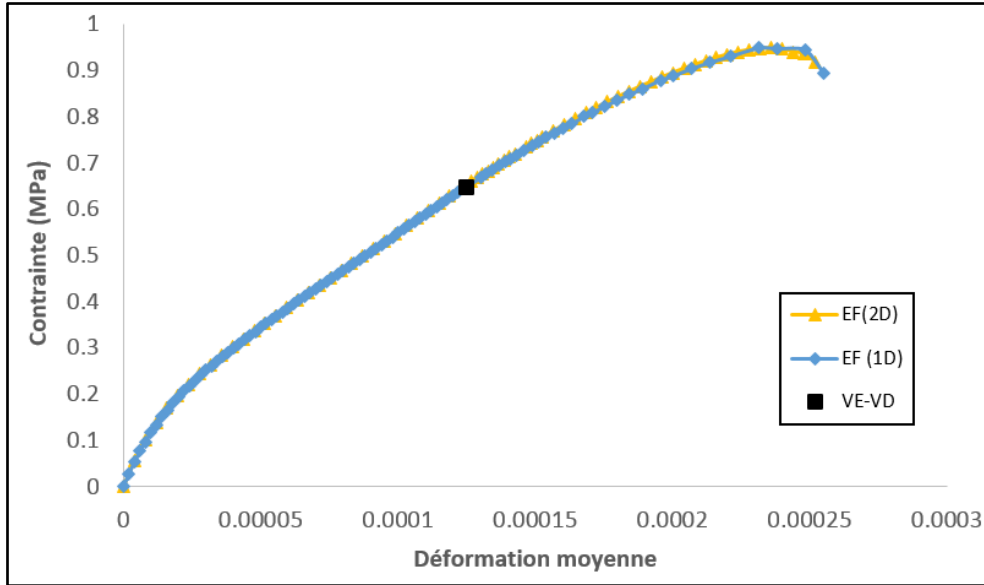


Figure V-2: Essai de traction directe, comparaison entre la réponse EF en 1D et 2D pour $\alpha = 3$ et $\beta = 0.9$.

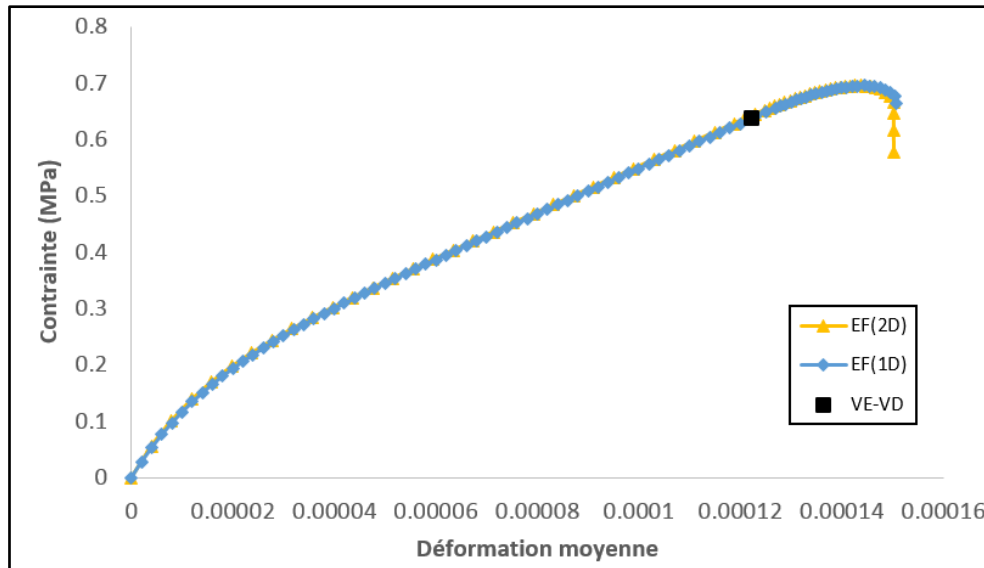


Figure V-3: Essai de traction directe, comparaison entre la réponse EF en 1D et 2D pour $\alpha = 2$ et $\beta = 0.9$.

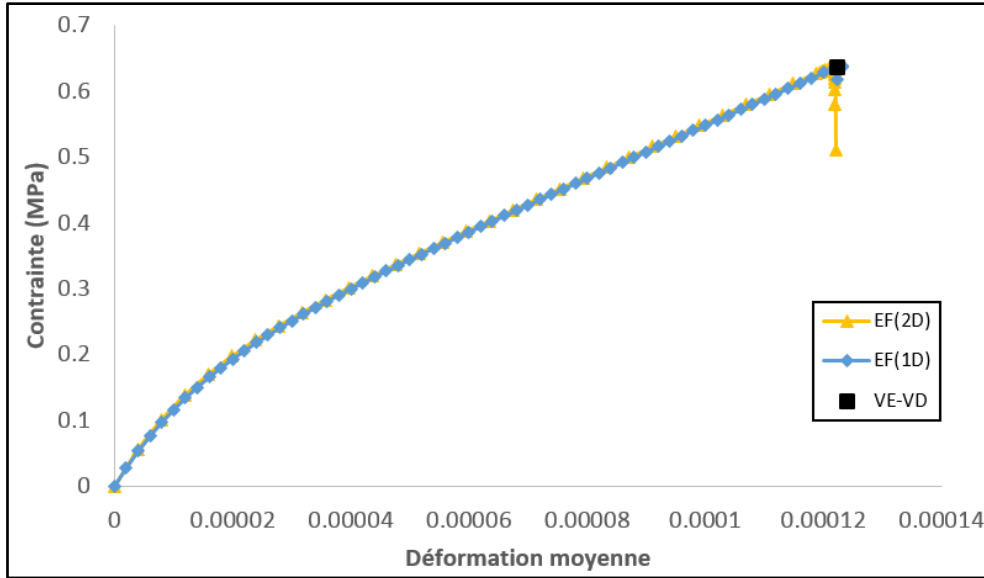


Figure V-4: Essai de traction directe, comparaison entre la réponse EF en 1D et 2D pour $\alpha = 1.2$ et $\beta = 0.9$.

On retrouve – comme montré dans le chapitre IV – que pour une valeur de β fixe, la phase d'endommagement, la contrainte au pic et la déformation moyenne à la rupture augmentent avec l'augmentation du coefficient α .

V.2.3 Choix d'un profil d'endommagement quadratique

La Figure V-5 montre la comparaison des réponses 1D et 2D pour le d'un profil d'endommagement quadratique $D(\varphi) = 2 \frac{\varphi}{l_c} - \left(\frac{\varphi}{l_c}\right)^2$ et pour $\alpha = 2$, $\beta = 0.9$. La courbe 2D coïncide avec la courbe 1D jusqu'à atteindre la rupture brutale pour celle-ci.

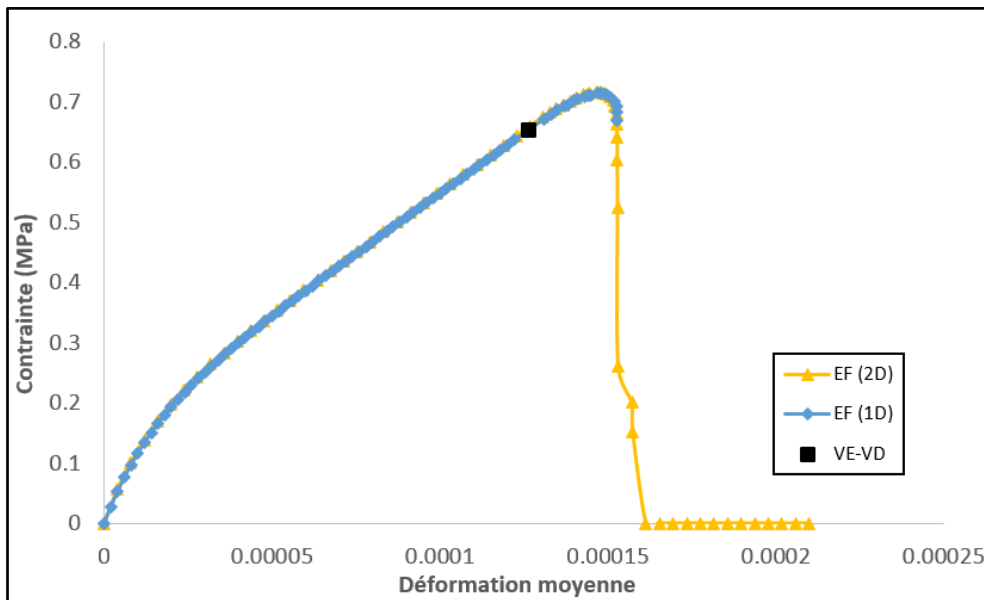


Figure V-5: Essai de traction directe, comparaison entre la simulation en 1D et 2D pour un profil d'endommagement du type quadratique, $\alpha = 2$, $\beta = 0.9$.

Plusieurs simulations ont été lancées pour d'autres couples de α et β donnant des réponses « moins fragiles » que ci-dessus.

La Figure V-6 présente l'exemple de la réponse obtenue pour $\alpha = 1.5$ et $\beta = 1$.

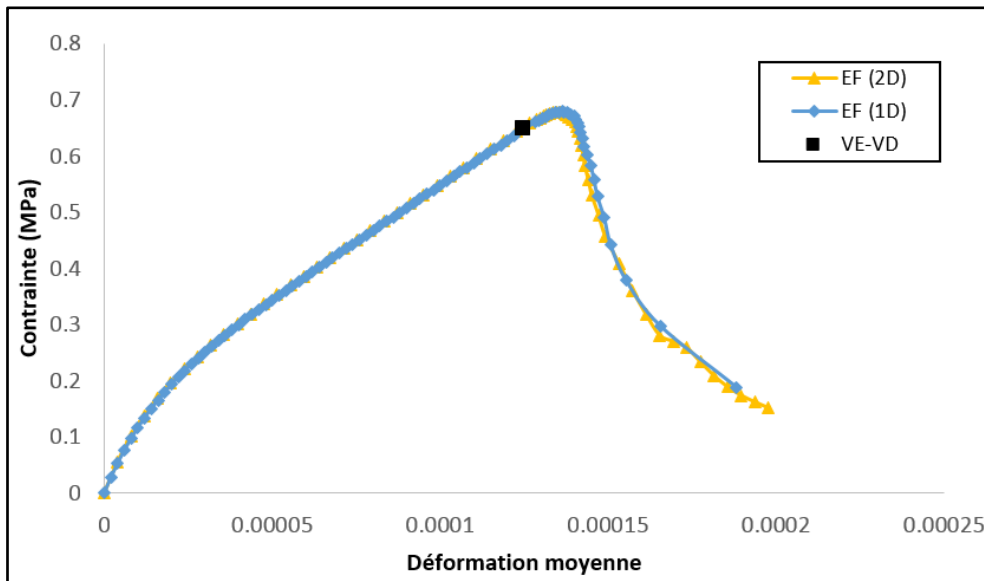


Figure V-6: Essai de traction directe, comparaison entre la simulation en 1D et 2D pour un profil d'endommagement du type quadratique, $\alpha = 1.5$, $\beta = 1$.

Ces résultats valident l'implémentation numérique de l'algorithme de prédiction-correction dans eXlibris.

V.3 Essai de flexion 3 points sur poutre rectangulaire

Parmi les essais de laboratoire les plus utilisés pour caractériser le comportement fissuré des matériaux bitumineux (mortier, bitume seul) sous chargement monotone, figure l'essai de flexion 3 points. Le but de cette partie est de modéliser cet essai à partir du code EF-2D eXlibris. On cherche spécialement à retrouver, à partir des simulations numériques, la réponse expérimentale issue des travaux de Tabakovic (2010).

V.3.1 Données d'essai et hypothèses de calcul

L'essai est pratiqué sur une poutre de mortier bitumineux BCM (BCM pour *Binder Course Mortar*) composé d'un mélange de bitume, de sable et de fines de roches concassées. La poutre possède une longueur de 260 mm, une hauteur de 40 mm et une épaisseur de 20 mm. La zone d'application du chargement et les conditions aux limites sont présentées sur la Figure V-7. L'essai est mené en flexion 3 points à vitesse de chargement constante jusqu'à rupture.

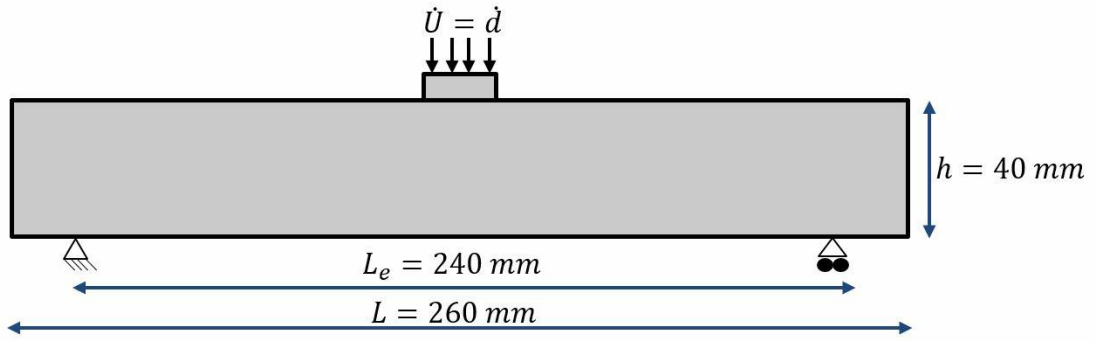


Figure V-7: Géométrie de la poutre en flexion trois points et conditions aux limites.

Afin de mener des modélisations numériques 2D, on adopte les hypothèses suivantes :

- État de déformations planes
- Coefficient de Poisson $\nu = 0.2$
- Comportement symétrique en traction-compression
- Variable d'endommagement scalaire et endommagement isotrope
- Le principe d'équivalence temps-température est supposé valable (I.3.2.2)
- Matériau viscoélastique linéaire PTE

On commence par identifier les paramètres viscoélastiques du modèle de PT dans le domaine réversible. On présente ensuite les résultats des simulations numériques obtenus pendant la phase d'endommagement et de fissuration de la poutre.

V.3.2 Comportement réversible à vitesse de déplacement constante et calage des paramètres du modèle viscoélastique

Rappelons l'expression de la fonction de relaxation pour le modèle de PT :

$$R(t) = \frac{E_0}{E_0 + E_1} \left(E_1 + E_0 e^{-t \left(\frac{E_0 + E_1}{E_1 \tau} \right)} \right) \quad (V-1)$$

Considérons un essai de flexion trois points sous vitesse de déplacement imposée. La force sous le point de chargement peut être calculée par :

$$F(t) = g R \otimes \dot{u} \quad (V-2)$$

où g est le coefficient de forme, égal à la force qui résulterait de la poutre élastique de module d'Young unitaire soumise à un déplacement unitaire. g a la dimension d'une longueur ; son expression est donnée par :

$$g = \frac{4bh^3}{L^3} \quad (V-3)$$

L'opérateur $\otimes$ représente le produit de convolution entre la fonction de relaxation $R(t)$ et la vitesse de déplacement $\dot{u}$, soit :

$$R \otimes \dot{u} = \int_0^t R(t-v) \dot{u}(v) dv \quad (V-4)$$

Dans le cas d'un chargement à vitesse de déplacement constante $\dot{u} = a = cte$, ce produit de convolution se simplifie au calcul intégral suivant :

$$R \otimes \dot{u} = a \int_0^t R(v) dv \quad (V-5)$$

Pour le modèle rhéologique de PT, on obtient :

$$F(t) = ga \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1} \left(t + \frac{E_0 \tau}{E_0 + E_1} \left(1 - e^{-t \left(\frac{E_0 + E_1}{E_1 \tau} \right)} \right) \right) \quad (V-6)$$

Notons que la déflexion d sous le point d'application du chargement est égale à at . Ainsi, on peut exprimer la force F en fonction de la déflexion telle que :

$$F(d) = g \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1} \left(d + \frac{E_0 \tau a}{E_0 + E_1} \left(1 - e^{-\frac{d}{a \tau} \left(\frac{E_0 + E_1}{E_1} \right)} \right) \right) \quad (V-7)$$

Cette équation permet de calculer analytiquement la force en fonction de la déflexion pendant la phase réversible sous vitesse de déplacement constante. On s'appuie sur cette équation afin de caler les paramètres du modèle viscoélastique de PT (c.-à-d. E_0, E_1 et τ) en se basant sur les résultats d'essais de laboratoire de Tabaković et al. (2010) (Figure V-8).

A cette fin, on utilise les valeurs expérimentales de force obtenues pour la déflexion égale à 1mm supposée être en phase réversible et pour les trois vitesses de chargement du Tableau V-2.

Vitesse de déplacement imposée a (mm/s)	0.01	0.1	1
$F(d_{ref} = 1mm)$ Expérimentale	1.95	6.54	32

Tableau V-2 Valeurs la force F en fonction de la vitesse de déplacement imposée obtenues pour la déflexion de « référence » égale à 1mm (Tabaković et al. 2010).

En résolvant le système de trois équations à trois inconnues issu de ces données, on obtient les trois valeurs suivantes des paramètres du modèle PT :

E_0 (Mpa)	2674
E_1 (Mpa)	97
τ (s)	29

Tableau V-3: Paramètres du modèle de PT obtenus après calage.

On montre sur la Figure V-8 une comparaison entre les courbes analytiques (V-7) obtenues pour les paramètres calés et les résultats d'essais de flexions 3 points pour les trois vitesses de chargements. On vérifie la coïncidence des points analytiques et expérimentaux pour $d_{ref} = 1mm$ et plus généralement un assez bon accord entre les débuts des courbes analytiques et expérimentales.

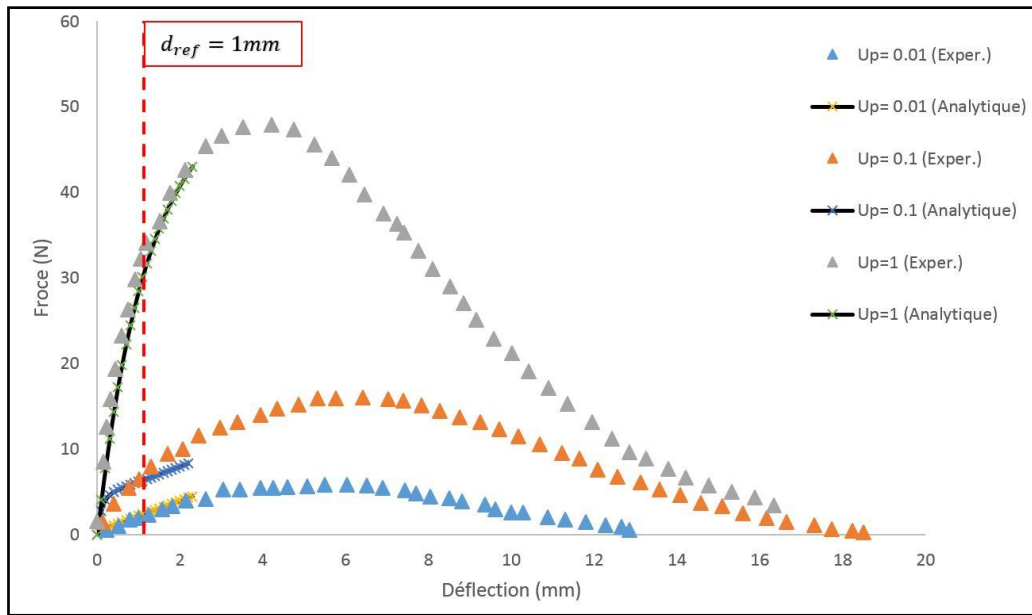


Figure V-8: Comparaison entre la réponse expérimentale et analytique de l'essai de flexion 3 points pour trois vitesses de déplacement imposées.

Un calage légèrement meilleur est obtenu pour le calcul EF avec le jeu de paramètres suivants qui est retenu par la suite. La réponse expérimentale et celle obtenue par le calcul EF sont présentées sur la Figure V-9.

E_0 (Mpa)	2300
E_1 (Mpa)	100
τ (s)	26

Tableau V-4: Paramètres du modèle PT retenus pour la suite.

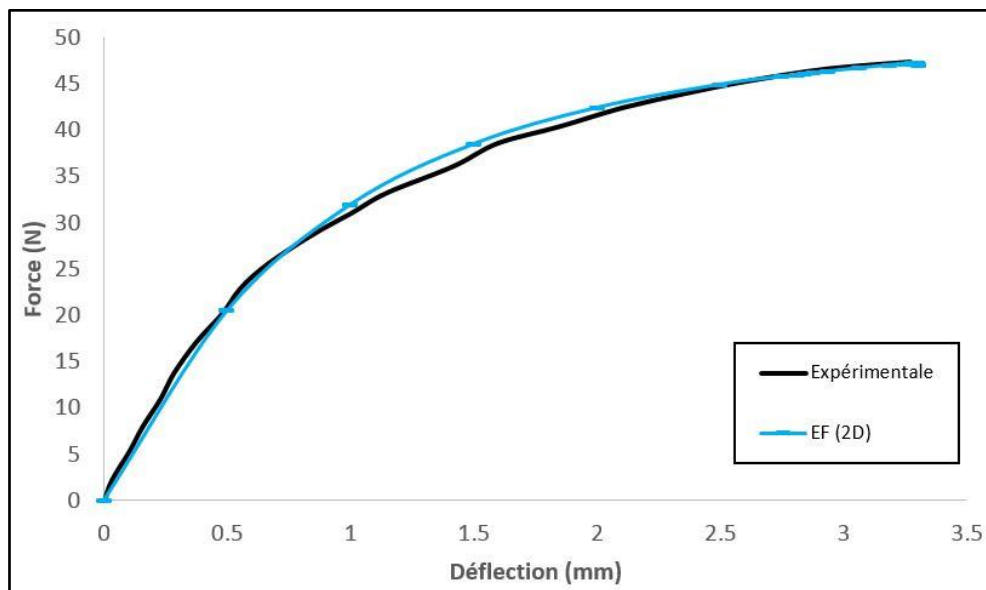


Figure V-9: Comparaison entre la réponse expérimentale et EF-2D.

V.3.3 Étude du comportement fissuré à vitesse de déplacement imposée

On poursuit ici la comparaison entre résultats expérimentaux et résultats des simulations EF obtenus au-delà du domaine réversible. La comparaison est effectuée pour la vitesse de déplacement imposée de 1mm/s.

Pour étudier la réponse de la poutre pendant la phase d'endommagement, on a supposé que l'endommagement s'initie à partir d'un niveau de déflexion égal à 2 mm (pour la vitesse de chargement la plus élevée 1 mm/s). Cette hypothèse conduit à un taux de restitution d'énergie critique Y_c de 0.014 MPa.

Concernant les paramètres du modèle TLS, on a choisi le profil d'endommagement de type quadratique et la fonction d'adoucissement $H(D) = (1 - \beta D)^{-\alpha}$ avec les paramètres présentés dans le Tableau V-5.

$D(\varphi)$	$2\frac{\varphi}{l_c} - \left(\frac{\varphi}{l_c}\right)^2$
$H(D)$	$(1 - \beta D)^{-\alpha}$
α	1.5
β	1
l_c (mm)	4
Y_c (MPa)	0.014
$\Delta\varphi_{max}$	$0.9l_m$

Tableau V-5: Paramètres du modèle TLS utilisés dans la simulation de l'essai de flexion 3 points.

Les coefficients α et β de la fonction d'adoucissement $H(D)$ ont été choisis en se basant sur l'étude du barreau en traction (V.2).

L'avancée maximale du front d'endommagement $\Delta\varphi_{max}$ est choisie de manière à rester inférieure à la taille moyenne l_m des éléments du maillage dans la zone d'endommagement et de fissuration. Sur le chemin de la fissure, la taille des éléments est choisie inférieure à $l_c/8$. Ce choix vise à améliorer le calcul des champs non locaux dans la zone d'endommagement (voir IV.8.1).

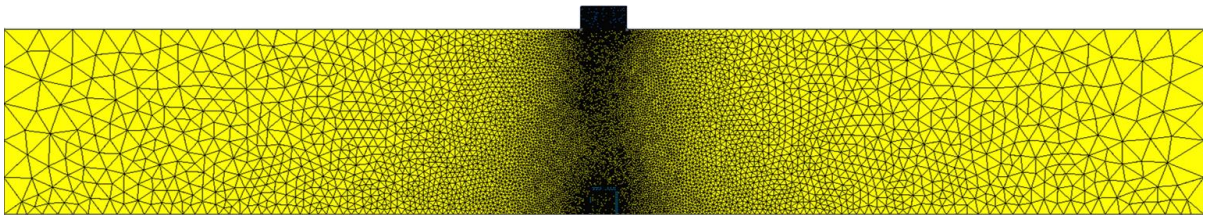


Figure V-10: Maillage 1 - éléments triangulaires non structurés.

La Figure V-11 montre la comparaison entre les réponses expérimentale et numérique qui sont stables toutes les deux à vitesse de déplacement imposée. Le triangle noir figurant sur cette courbe indique le moment d'initiation de l'endommagement ($Y = Y_c$).

Le triangle rouge de la Figure V-11 indique le moment de « création » d'une fissure dans la simulation de l'essai. A ce moment, une bande d'endommagement de largeur égale à $2l_c$ s'est développée et une fissure est introduite après une étape d'enrichissement cinématique – au milieu

de cette bande – par la méthode XFEM. Les chutes de force « en cascade » au-delà du triangle rouge sont liées à la propagation de la fissure.

Les cercles rouges (numérotés de 1 à 4) sont liés aux cartes d'endommagement qui se trouvent à droite de la Figure V-11. On voit sur ces cartes le développement de la hauteur de la bande d'endommagement par rapport à la hauteur h de la poutre pour les instants 1,2,3 et 4.

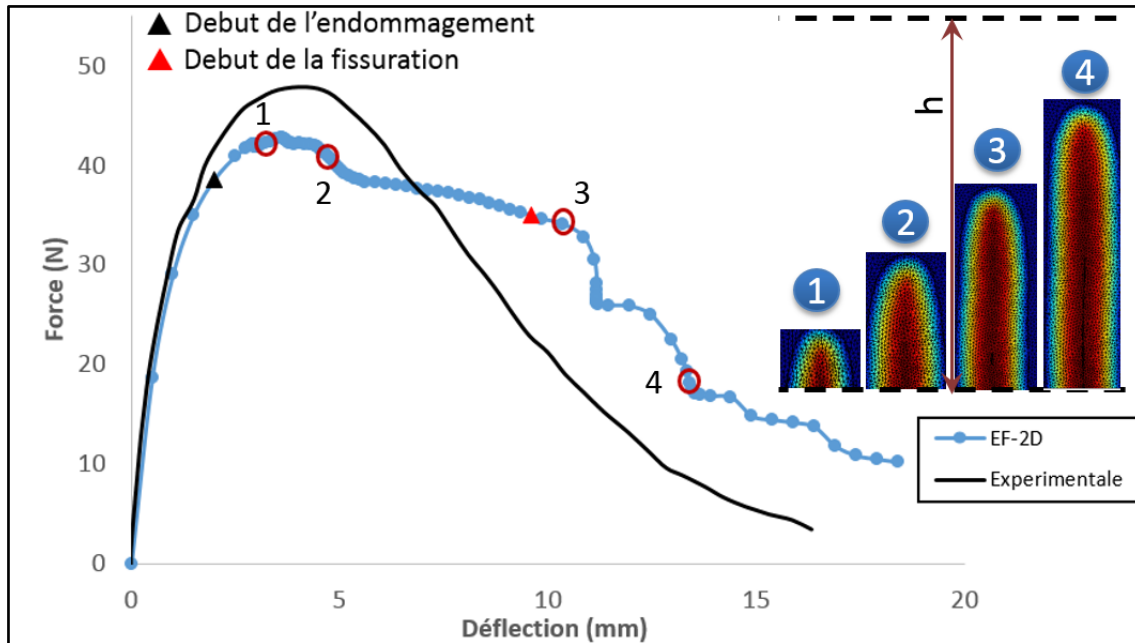


Figure V-11: Comparaison entre la réponse expérimentale et EF(2D) pour une vitesse de déplacement de 1 mm/s.

On a tracé sur la Figure V-12 la carte d'endommagement sur la poutre déformée à la fin de la simulation. La couleur bleue correspond à la zone saine où l'endommagement est nul. La zone de couleur rouge foncé indique une valeur d'endommagement qui vaut 1. Au milieu de cette zone, on remarque la propagation d'une fissure. On voit également la propagation du front d'endommagement (level set Γ_0) sur la carte en gris et noir. On observe que celle-ci s'opère sans élargissement.

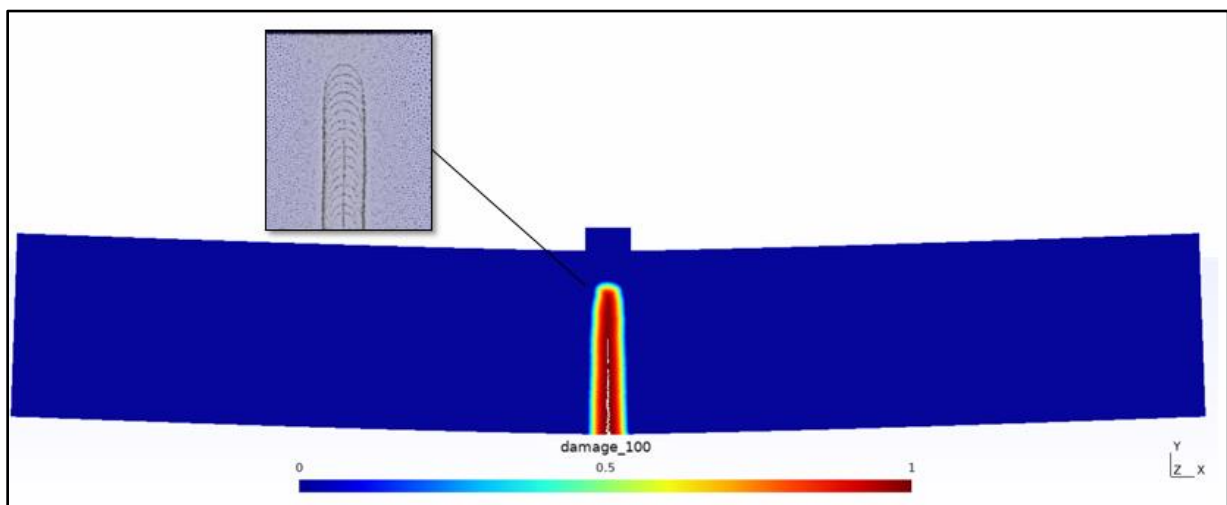


Figure V-12: Propagation du front d'endommagement et développement d'une fissure au milieu de la poutre.

Pour cette simulation un seul cœur du processeur de calcul (*single core CPU*) a été utilisé. La durée de la simulation est de 16 minutes (Tableau V-6).

Nb éléments de maillage	Nb pas de temps	Nb CORES	Mémoire (GB)	Temps CPU (s)
21650	100	1	2	928

Tableau V-6: Détails liés à la simulation numérique et le temps de calcul nécessaire.

Le temps CPU figurant dans le Tableau V-6 représente le temps nécessaire pour faire le calcul EF exclu de tout post-traitement.

V.3.4 Discrétisation spatiale et effet du maillage

Les courbes suivantes visent à comparer la réponse de la poutre pour quatre maillages de finesse différente (Tableau V-7). Les maillages 1 et 4 sont dans un ratio de 2.

Maillage	Nb nœuds	Nb éléments
Mesh 1 (base)	10843	21660
Mesh 2	7647	15284
Mesh 3	7365	14704
Mesh 4	5312	10614

Tableau V-7: Maillages utilisés pour étude de sensibilité des résultats.

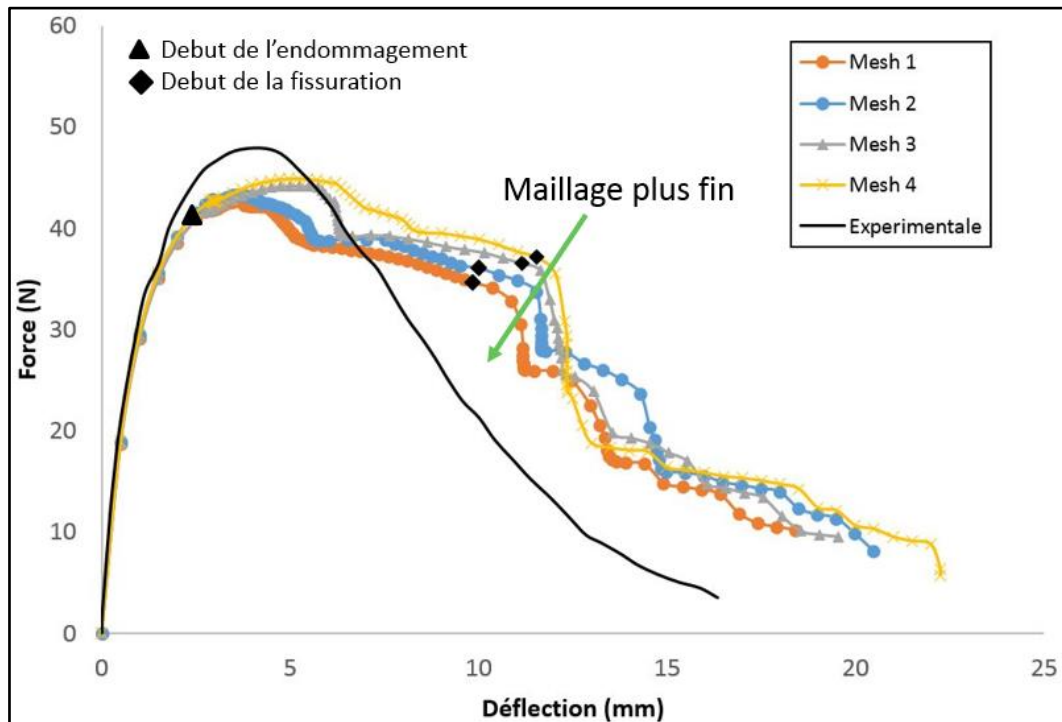


Figure V-13: Discrétisation spatiale et effet du maillage sur la réponse de la poutre.

Globalement, on observe des résultats assez proches pour les quatre maillages.

Concernant la dispersion observée sur les courbes force-déflexion, on peut l'expliquer par :

- La taille du maillage qui affecte directement le calcul des champs non locaux dans la zone d'endommagement.
- La taille moyenne du maillage dans la zone d'endommagement qui contrôle l'avancement maximal du front d'endommagement $\Delta\varphi_{max}$.

V.3.5 Réponse sous différentes vitesses de déplacement

On étudie dans cette section l'effet du taux de chargement sur la réponse de la poutre. Six vitesses de déplacement sont appliquées. La réponse de la poutre est présentée sur la Figure V-14 dans le plan force-déflexion.

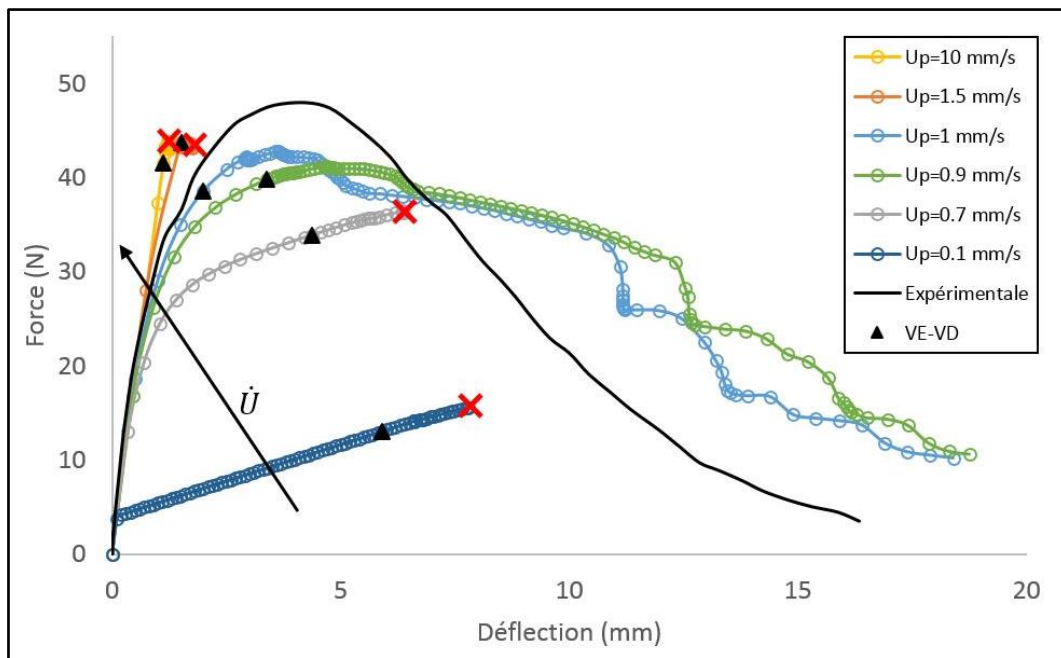


Figure V-14: Effet de la vitesse de déplacement $\dot{U}$ sur la réponse de la poutre.

On remarque sur les courbes de la Figure V-14 que la force maximale augmente avec la vitesse de chargement, ce qui est en accord avec les résultats expérimentaux. En revanche, on remarque que seules deux vitesses de déplacement imposées (1 et 0.9 mm/s) conduisent numériquement à une phase stable à force décroissante. Celles-ci correspondent aux cas où sont apparues des fissures qui se sont propagées de façon stable. Les courbes simulées pour $\dot{U} < 0.9$ mm/s conduisent à des ruptures brutales (au niveau des croix rouges) contrairement aux observations expérimentales (Figure V-16).

À notre avis, cet écart entre modèle et essai est lié à l'utilisation du modèle viscoélastique de PT dont la décomposition spectrale de la fonction de fluage est très réduite par rapport à celle des matériaux bitumineux. On sait en effet que ceux-ci sont bien mieux représentés par exemple par le modèle de Huet à spectre continu infini (cf. I.4.2.1) ou éventuellement par un modèle Kelvin-Voigt généralisé à grand nombre d'éléments (Figure V-15).

Ces modèles peuvent alors donner lieu en fonction des vitesses de chargement imposées à des valeurs d'énergie élastique emmagasinées dans leur spectre de fluage différentes de celles de Poynting-Thomson, conduisant donc à des valeurs et évolutions différentes des taux de restitution d'énergie élastique Y .

En fait, le domaine de vitesse $\dot{U}$ pour lequel la composante viscoélastique de la réponse du modèle est significative au moment où l'on atteint Y_c est limité. Les vitesses faibles ou élevées confèrent au matériau un comportement élastique de module $E_0 E_1 / (E_0 + E_1)$ ou E_0 comme le montrent les courbes quasi-linéaires de la Figure V-14 pour $\dot{U} = 0.1 \text{ mm/s}$ ou $\dot{U} \geq 1.5 \text{ mm/s}$. Dans ces cas, le comportement de la poutre est comparable à celui d'une poutre élastique dont on sait que la réponse TLS en flexion 3 points est instable à déplacement imposé et se comporte en *snap-back* dès l'initialisation de l'endommagement. Ceci explique les résultats de la Figure V-14.

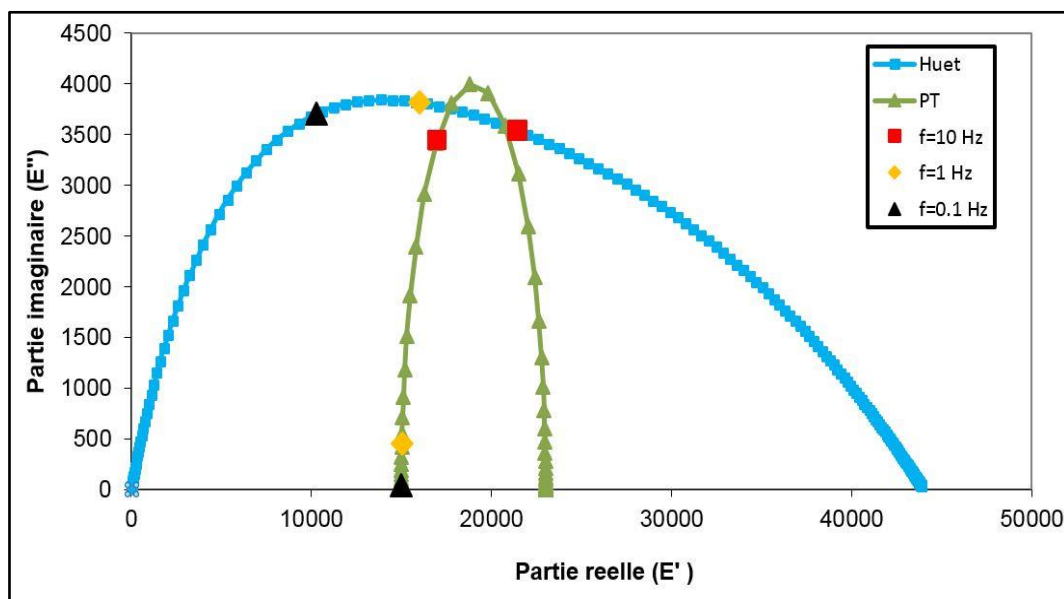


Figure V-15: Réponse du modèle de Huet et de PT dans le plan Cole-Cole (partie imaginaire E'' du module complexe versus partie réelle E').

Cette Figure illustre la différence de comportement entre des modèles à spectre de fluage large et réduit. La courbe bleue se rapporte ici à un enrobé bitumineux bien décrit par le modèle de Huet ; la courbe verte résulte d'un calage du module complexe autour des conditions 15°C et 10Hz. On voit sur cette figure la petite marge de fréquences où le modèle de PT représente convenablement l'EB. On remarque de plus qu'une réduction de la fréquence de 10Hz à 1Hz réduit énormément le module de dissipation (E'') du modèle PT qui devient alors presque élastique.

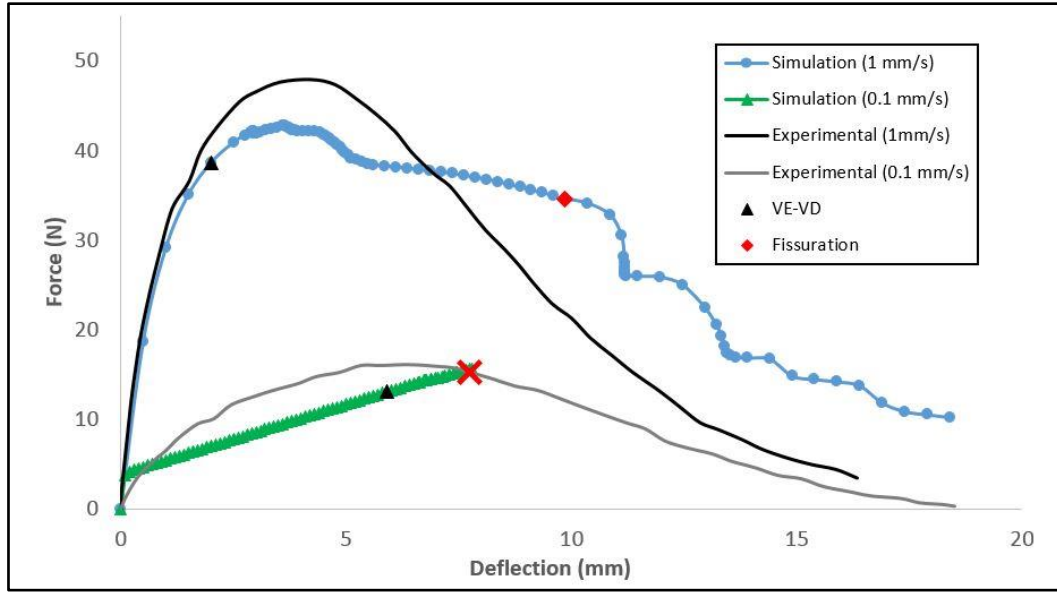


Figure V-16: Effet de la vitesse de chargement sur la réponse de la poutre, comparaison entre les résultats numériques (EF-2D) et expérimentaux.

On peut montrer sur cet exemple que la courbe $F(d)$ toutes choses étant égales par ailleurs ne dépend pour le modèle PTE que du facteur adimensionnel $\dot{U}\tau$ (ou $\dot{U}\eta$) comme attendu à partir du théorème de Vaschy-Buckingham de l'analyse dimensionnelle. Ceci vient du fait que le seul temps caractéristique à intervenir dans le modèle (composantes réversible et endommageable) est le temps τ .

La Figure V-17 illustre cette propriété pour deux courbes obtenues avec $(\dot{U}_1, \eta_1)$ et $(\dot{U}_2 = \dot{U}_1/2, \eta_2 = 2\eta_1)$. Le faible écart entre ces courbes provient des discrétisations spatiale et temporelle.

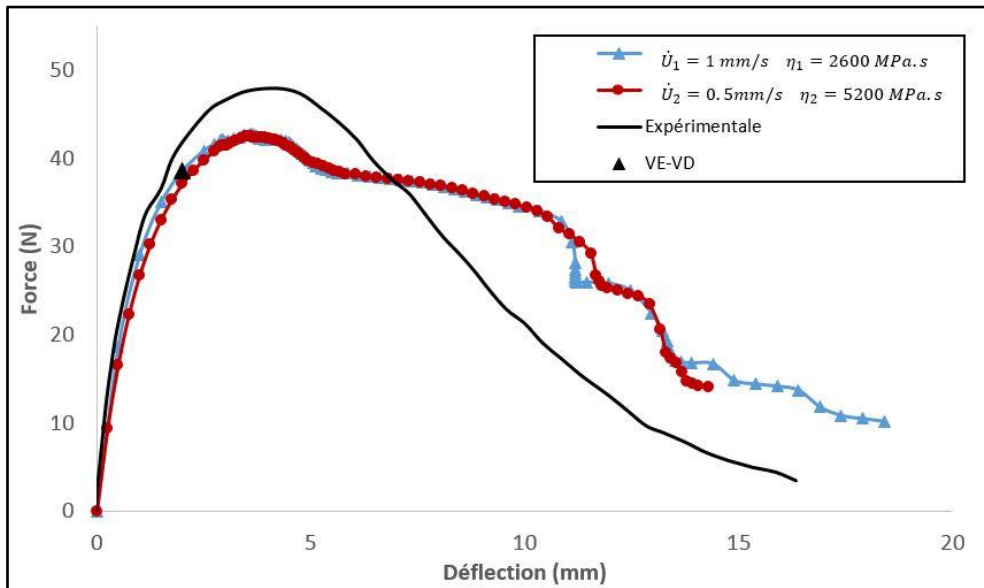


Figure V-17: Réponse de la poutre pour deux vitesses et viscosités différentes.

Le même raisonnement appliqué au modèle de Huet ou à un modèle Kelvin-Voigt généralisé dont la viscosité de l'ensemble des amortisseurs du spectre de fluage est affectée par une même fonction

$a(\theta)$ multiplicative montre que la réponse $F(d)$ dépend globalement du facteur $\dot{U}a(\theta)$ et vérifie le principe d'équivalence temps-température. Qualitativement ceci revient à dire que diminuer (resp. augmenter) la température d'essai revient à augmenter (resp. diminuer) la vitesse de chargement à température constante. Ce principe est observé sur les résultats d'essais par plusieurs auteurs (Chehab et al. 2002)(Nguyen et al. 2013).

V.3.1 Influence des paramètres l_c et Y_c

Commençons par regarder la réponse de la poutre pour deux longueurs caractéristiques l_c différentes : la longueur de 4 mm utilisée dans les simulations précédentes et la longueur de 6 mm. Le choix de ces longueurs résulte des considérations ci-dessous sans être basé sur des essais de laboratoire.

Dans ses travaux Z Bazant fait intervenir une longueur caractéristique définie comme la largeur de la bande de localisation des déformations. Pour les bétons cimentaires ou bitumineux celle-ci est souvent prise égale à trois fois la taille maximale des agrégats (Bažant and Pijaudier-Cabot 1989) (Bodin, De La Roche, and Pijaudier-Cabot 2006).

Dans l'approche TLS, la bande de localisation est de largeur $2l_c$ (cf. I.6.3) ce qui conduit au choix :

$$l_c = \frac{3}{2}d_a \quad (V-8)$$

où d_a est la taille maximale des agrégats dans le mélange bitumineux. En prenant pour un mortier bitumineux $d_a = 4$ mm on a alors $l_c = 6$ mm.

La Figure V-18 montre les résultats obtenus pour les deux longueurs caractéristiques. On observe que la courbe pour la plus grande valeur de l_c est au-dessus de l'autre et présente une allure plus régulière.

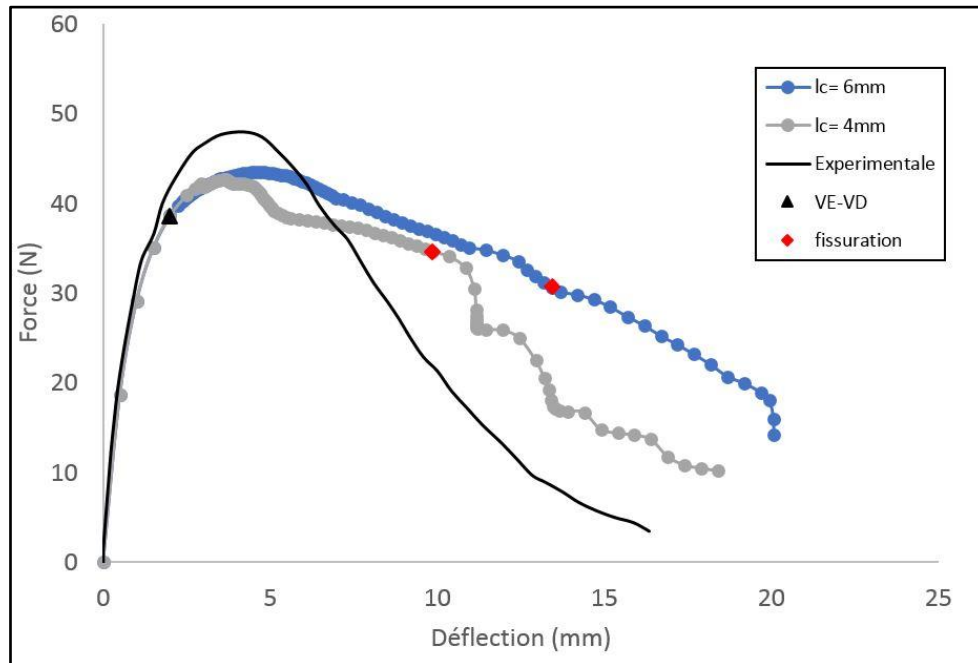


Figure V-18: Effet de la longueur caractéristique l_c sur la réponse de la poutre.

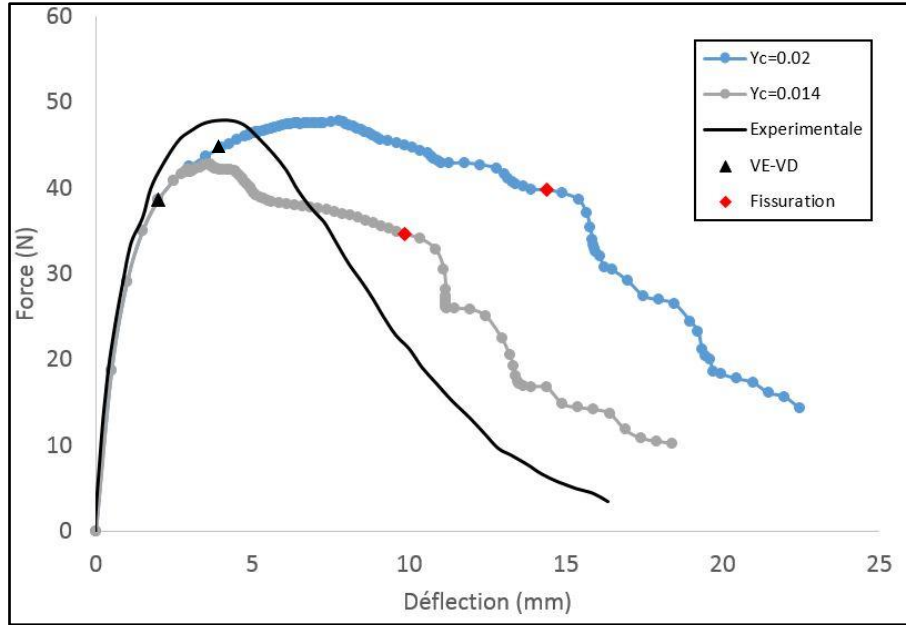


Figure V-19: Effet du taux de restitution d'énergie critique sur la réponse de la poutre.

La Figure V-20 se réfère à deux calculs effectués pour les valeurs $Y_c = 0.014 \text{ MPa}$ et $Y_c = 0.020 \text{ MPa}$. Comme attendu, la courbe avec la valeur de Y_c la plus grande conduit à une initialisation plus tardive de l'endommagement et à une valeur pic plus élevée. On observe qu'elle reste ensuite au-dessus de l'autre courbe.

Dans le cadre élastique, Zghal et al. 2018 ont établi l'expression de l'énergie de fissuration G_c du modèle TLS pour un front de fissure se translatant de façon auto-similaire. Pour une valeur l_d de la longueur de la bande endommagée :

$$G_c(l_d) = l_d 2l_c Y_c \int_0^1 \frac{\tilde{H}(D)}{g(D)} dD \quad (\text{V-9})$$

avec dans le cas $D(\varphi)$ quadratique,

$$g(D) = D'(\varphi(D))l_c = \sqrt{1-D} \quad (\text{V-10})$$

$$\tilde{H} = \int_0^D H(D) dD \quad (\text{V-11})$$

L'équation (V-9) traduit la moyenne pondérée de la dissipation locale du matériau multipliée par la longueur et l'épaisseur ($2l_c$) de la zone d'endommagement.

D'après cette expression, l'énergie de fissuration croît avec le produit $l_c Y_c$ et peut expliquer en élasticité les différences d'aires comprises sous les courbes force-déflexion des Figure V-19 et V-24. Cette explication ne peut être entièrement reprise ici dans la mesure où ces courbes intègrent deux sources de dissipation : la dissipation visqueuse et la dissipation due à l'endommagement/fissuration. Par conséquent, l'aire sous la courbe force-déflexion ne traduit pas seulement le travail dissipé dû à la propagation de la fissure. Un bilan énergétique plus affiné et notamment sur la base de modèles rhéologique plus fidèles (Huet ou Kelvin-Voigt généralisé) pourrait être riche d'enseignement pour une meilleure compréhension de la fissuration des matériaux bitumineux.

Le calcul de différentes formes de dissipation pendant les essais fissuration mériterait d'être étudié une fois la loi comportement de Poynting-Thomson est étendue à une loi de Kelvin-Voigt généralisé à N branches. L'avantage du modèle TLS est qu'il permet de séparer les différentes sources de dissipation. Cet avantage n'a pas été utilisé à ce stade mais mériterait de l'être pour l'identification du modèle par des essais de laboratoires.

V.3.2 Effet d'entaille sur l'essai de flexion 3 points

Les exemples suivants sont purement numériques et destinés à montrer qu'il est possible de simuler des essais sur corps d'épreuve entaillés comme souvent pratiqué dans les essais (essai SCB (Nsengiyumva 2015) ou SENB (Wagoner et al. 2005a)). Considérons ainsi la poutre à comportement PTE (Tableau V-4 et V-5) de la Figure V-7 entaillée verticalement à sa base sur son axe de symétrie sur une hauteur e de 8 mm correspondant à un ratio $h/e = 40/8 = 5$. Les calculs sont effectués pour deux épaisseurs d'entaille de 2 mm et 0.5 mm. On impose sur ces deux poutres une vitesse de chargement égale à 1 mm/s.

On retient la même densité de maillage que pour le maillage 1 du Tableau V-7 et le pas de temps initial $\Delta t = 0.5$ s.

Les résultats des simulations pour les deux poutres entaillées sont présentés sur la Figure V-21. On montre sur cette figure également la réponse de la poutre non entaillée étudiée dans la section (V.3.3). Les losanges noirs sur cette figure montrent le début de la phase d'endommagement et de fissuration.

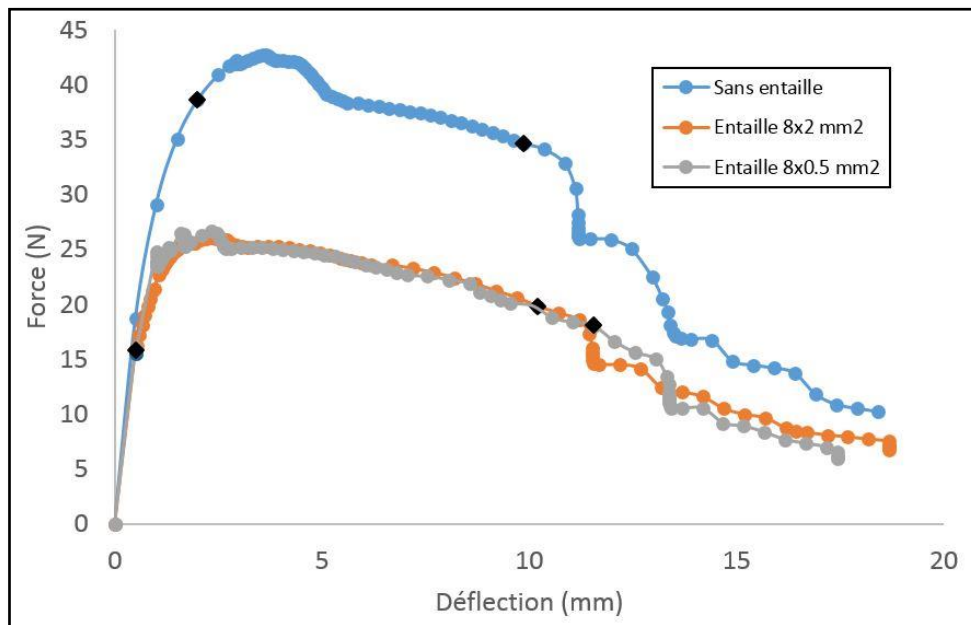


Figure V-21: Effet de l'entaille sur la réponse de la poutre PTE en flexion 3 points.

On remarque, Figure V-21, que les réponses des deux poutres entaillées sont à peu près identiques. La largeur d'entaille n'a pas d'effet.

En revanche, l'existence d'une entaille réduit la capacité de la poutre à résister au chargement appliqué. La contrainte maximale atteinte pour la poutre entaillée (26 N) est environ 1.6 fois plus faible que celle atteinte dans la poutre non entaillée (43 N). Des ratios de cet ordre de grandeur sont

observés par Nsengiyumva (2015) pour l'essai SCB sur EB et un rapport rayon/ e de 5 (Figure I-33).

La Figure V-23 (zoom sur la zone d'entaille au-dessous du poinçon) montre l'évolution du champ d'endommagement en cours de calcul. On peut constater que la zone d'endommagement s'initie en pointe d'entaille et remonte verticalement au droit de celle-ci à épaisseur bornée par $2l_c$. Sur la carte la plus à droite on aperçoit l'isovaleur $\varphi = l_c$ qui délimite une zone très étroite à la verticale de l'entaille jusqu'à une cote $z > h/2$, révélatrice dans le calcul de la présence d'une fissure. Celle-ci est plus visible sur la configuration déformée de la Figure V-22.

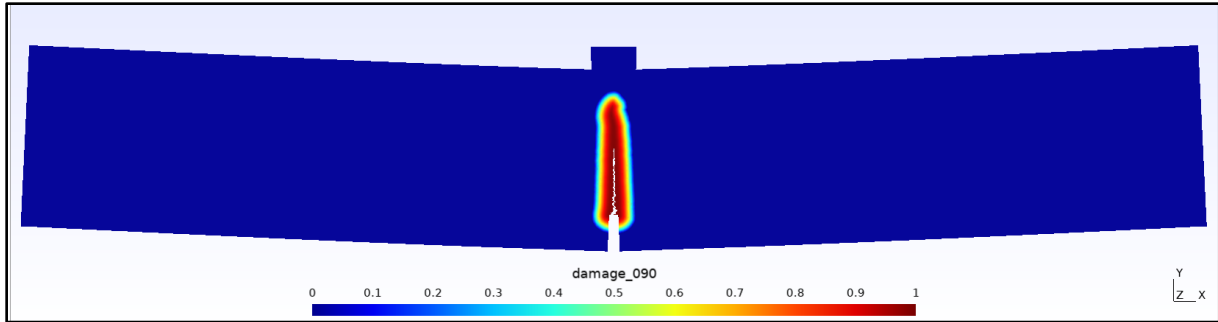


Figure V-22: Carte d'endommagement à la fin du calcul et position de la fissure.

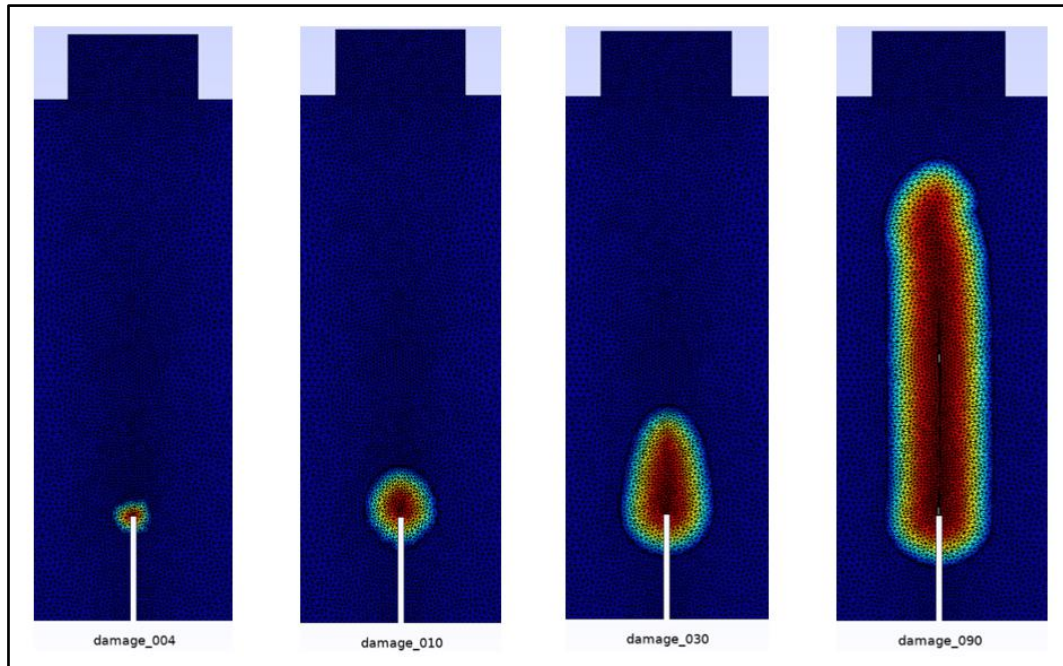


Figure V-23: Avancement du front d'endommagement à différentes étapes de calcul.

V.4 Bilan

Une étude numérique à partir du code eXlibris 2D a été conduite dans ce chapitre sur deux essais de laboratoires : l'essai de traction directe et l'essai de flexion trois points.

On a validé l'algorithme et l'implémentation du code eXlibris 2D sur l'essai de traction directe par comparaison aux résultats du chapitre IV. De manière générale, les temps de calcul des exemples 2D traités dans ce chapitre sont de l'ordre de 15 minutes au maximum.

L'étude de la poutre en flexion montre une réponse stable de la courbe $F(d)$ à déplacement imposé sous certaines conditions de vitesse de chargement. Dans ce cas, les courbes numériques sont assez proches des courbes expérimentales obtenues sur mortier bitumineux. En dehors de ces conditions de chargement, le modèle rend toujours compte de l'augmentation de la force maximale avec la vitesse de chargement. En revanche, il conduit à des ruptures instables aussi bien du côté des vitesses élevées que faibles, contrairement aux observations expérimentales. Un enrichissement du modèle rhéologique viscoélastique vers un modèle de Huet ou Kelvin-Voigt généralisé devrait permettre de remédier à ces écarts.

Le code eXlibris permet également de modéliser des essais sur éprouvette entaillée et permet de retrouver au moins qualitativement l'effet retrouvé en laboratoire d'une force maximale décroissante avec la longueur d'entaille.

Conclusion générale et perspectives

Les travaux effectués dans cette thèse ont conduit au développement d'un modèle rhéologique viscoélastique endommageable et à son intégration au sein d'outils de calcul permettant l'étude de l'initiation et de la propagation de fissures dans des structures composées de matériaux bitumineux.

On résume ci-dessous les points importants obtenus pendant ces travaux de thèse.

- La bibliographie montre que les essais de fissuration sur matériaux bitumineux sont susceptibles de présenter un comportement fragile ou ductile suivant la température et la vitesse de chargement. Dans les essais à déplacement monotone imposé (traction directe ou flexion), ceci se traduit en particulier par une force maximale qui augmente avec la vitesse de chargement ou la diminution de température. A l'inverse, le déplacement à rupture augmente avec la diminution de la vitesse de chargement ou l'augmentation de température.
- Un modèle d'endommagement local PTE, basé sur le modèle viscoélastique de Poynting-Thomson et le principe de contraintes effectives, a été construit. Le respect des observations expérimentales rappelées ci-dessus conduit au choix d'un critère d'endommagement basé sur le taux de restitution d'énergie élastique et l'introduction d'une fonction d'adoucissement pouvant ne dépendre que de D .
- Le modèle local PTE est introduit dans le formalisme de l'approche TLS en 1D afin d'étudier semi-analytiquement la réponse d'une barre chargée en traction directe. Ce problème formulé en terme de vitesse nous a permis de discuter de l'existence de solutions à allongement croissant du barreau.
- Le calcul semi-analytique d'une barre (PTE) en traction directe traité dans le cadre TLS a conduit à une solution de référence permettant de valider les algorithmes EF 1D et 2D développés dans cette thèse. Ce calcul est étendu en 1D au cas d'un modèle de Kelvin-Voigt généralisé plus représentatif d'un matériau bitumineux.
- Les modèles 1D PTE et Kelvin-Voigt généralisé permettent de retrouver les caractéristiques fragile et ductile de l'essai de traction en fonction de la vitesse de chargement appliquée, mentionnées en bibliographie. L'application du principe d'équivalence temps-température au niveau de la rhéologie des modèles viscoélastiques permet de retrouver automatiquement les mêmes conclusions au niveau du comportement à la fissuration de la barre en fonction de la température. Ceci est en fait valable pour tout essai réalisé sur un corps de preuve homogène.

- L'algorithme de prédiction-correction en EF 2D implémenté dans un nouveau module viscoélastique endommageable d'eXlibris permet d'étendre les comparaisons essais-simulations à d'autres géométries et conditions aux limites.
- Pour certaines conditions de vitesses de chargement et de températures, les simulations effectuées sur poutre en flexion trois points conduisent à des résultats satisfaisants par rapport aux observations expérimentales effectuées sur mortier bitumineux. En dehors de ces conditions les calculs conduisent à des ruptures brutales sans doute liées à un spectre de fluage trop pauvre du modèle rhéologique de Poynting-Thomson.
- Le cas de corps d'épreuves entaillés peut être géré de manière automatique sans effort ou hypothèse de calcul supplémentaires.
- En moyenne, la durée de simulation EF 2D du problème de flexion trois points est de 15 minutes sur un seul cœur de processeur de calcul ce qui montre pour ce type d'application l'efficacité et la rapidité du code de calcul développé.

La thèse a permis de mettre en place un code de calcul EF pour modéliser l'initiation et la propagation de fissures dans des structures à comportement viscoélastique. Ce point constitue un aspect important et novateur du travail de thèse. Cependant, il existe certaines limitations qui ouvrent la voie à de nombreuses perspectives d'extension de modèles et d'applications.

- On a montré l'importance d'étendre la loi de comportement du modèle de PT vers un modèle à spectre de relaxation plus large. Il serait utile de pouvoir étendre le module 2D de eXlibris à la prise en compte d'un modèle de Kelvin-Voigt généralisé plus représentatif des matériaux bitumineux et de reprendre la comparaison essai-modèle sur cette base. En particulier une meilleure représentation de la distribution d'énergie élastique dans le spectre de fluage des matériaux devrait permettre d'améliorer le caractère prédictif du comportement des EB à la fissuration.
- L'utilisation d'un potentiel d'énergie libre asymétrique en extension-contraction serait nécessaire afin de prendre en compte les effets unilatéraux sur l'endommagement et la fissuration. Une forme possible du potentiel pourrait s'inspirer de la formulation utilisée par Bernard (2012) pour un matériau élastique standard.
- L'étape précédente permettrait en particulier de modéliser des essais de fissuration en mode II et/ou en mode mixte (I et II) qui au sein de l'approche TLS ne demandent pas a priori d'hypothèses complémentaires.
- Un point qui nous apparaît important également dans le domaine des chaussées est la comparaison croisée des différents essais de fissuration (monotones) pratiqués en France et à l'international (ex : essai SENB², SCB³, DCT⁴ (cf. I.5.1)). L'outil développé ici permet d'envisager la mise au point d'une loi de comportement viscoélastique endommageable générique pour enrobés bitumineux qui permettrait à travers le modèle TLS et pour un même matériau et les mêmes valeurs numériques des paramètres de la loi de comportement, de tester

² SENB : Single-Edge Notched Beam

³ SCB : Semi-Circular Bending

⁴ DCT : Disc-shaped Compact Tension

le passage d'un essai à l'autre. Il serait alors intéressant d'évaluer à partir de tels calculs la possibilité de parvenir à une loi de comportement intrinsèque des EB vis-à-vis de la rupture, indépendamment des types d'essais effectués.

- Du côté du comportement des chaussées le modèle pourrait être appliqué dans un premier temps à l'étude de la fissuration sous sollicitations lentes thermiques, après prise en compte dans le code de calcul de températures variables et de déformations thermiques. Mais l'approche TLS devrait pouvoir se prêter également à la modélisation de la fatigue des matériaux viscoélastiques qui domine les mécanismes d'endommagement et de fissuration sous charges de trafic.

Annexe A : Décomposition spectrale et calcul des paramètres du modèle de Kelvin-Voigt généralisé

La décomposition spectrale d'une fonction de fluage, $F(t)$, d'un amortisseur parabolique en série de Kelvin-Voigt généralisé s'écrit :

$$F(t) = t^h = \frac{1}{C_h} \int_0^{+\infty} \tau^{h-1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) d\tau \quad 0 < h < 1 \quad (\text{A-1})$$

où τ indique le temps caractéristique de la cellule de Kelvin-Voigt. Le scalaire C_h figurant dans cette équation est égal à $\frac{\Gamma(1-h)}{h}$.

Le passage à un spectre de fluage procède en deux étapes.

Le domaine des temps caractéristiques $(0, +\infty)$ est d'abord décomposé sur une échelle logarithmique avec des intervalles de longueur D_i . L'intégrale (I-56) s'écrit alors :

$$F(t) = t^h = \frac{1}{C_h} \sum_{i=0}^{+\infty} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \tau^{h-1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) d\tau = \frac{1}{C_h} \sum_{i=0}^{+\infty} G(\bar{\tau}_i) D_i \quad (\text{A-2})$$

où les temps caractéristiques discrets $\bar{\tau}_i$ sont calculés de manière à assurer la dernière égalité (Figure A-1).

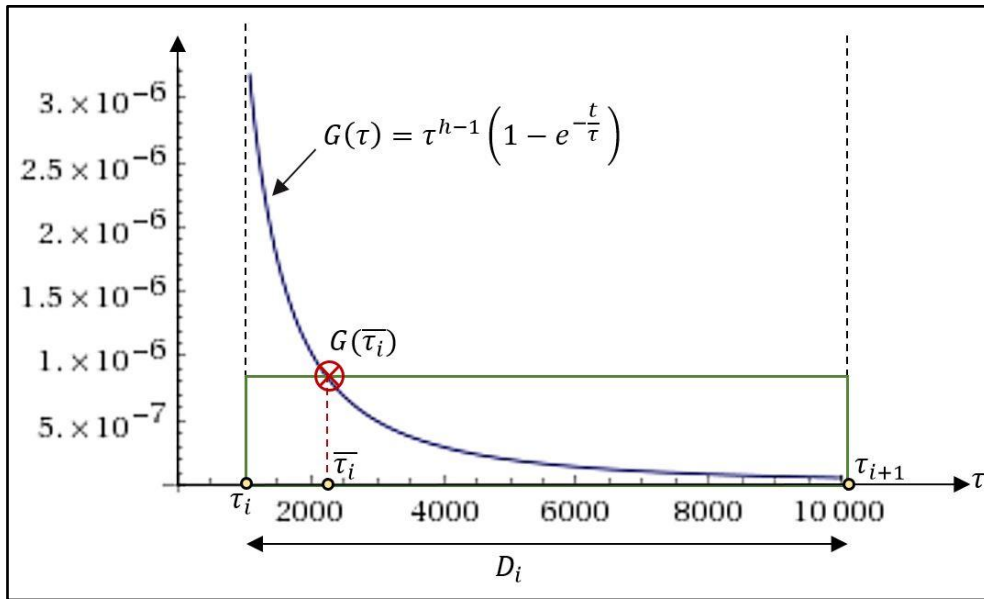


Figure A-1: Décomposition spectrale, approximation de la surface sous la fonction G par un rectangle

Le passage discret implique maintenant de ne garder qu'un nombre N de terme dans la série. Cette approximation conduit à un modèle de Kelvin-Voigt généralisé permettant de remplacer le modèle de Huet sur une gamme de fréquences (ou vitesses de chargement) contrainte.

Pour que les temps caractéristiques du spectre discrétisé soient optimisés sur un intervalle de temps $[0, t_f]$, un algorithme de minimisation a été proposé pour calculer les paramètres du modèle tel que :

$$\min_{\tau_i} R(t_f, \overline{\tau_i}) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left(C_h t^h - \sum_{i=0}^N G(\overline{\tau_i}) D_i \right)^2 dt \quad (A-3)$$

où R est le résidu qu'on doit minimiser. La méthode de Newton a été utilisée afin de résoudre cette équation et les valeurs initiales des paramètres $\overline{\tau_i^{ini}}$ sont prises égales aux valeurs au milieu de chaque intervalle D_i .

Ces étapes de calcul et la technique de minimisation sont implémentées dans un code écrit en C++. Cet outil numérique nous a servi pendant les travaux de la thèse afin de décomposer le modèle de Huet en modèle de Kelvin-Voigt généralisé à N branches.

La décomposition spectrale de la fonction de fluage $F(t) = t^h$, donnée dans le tableau I-6, conduit aux temps optimisés τ_i^{opt} présentés dans le tableau suivant :

D_i	$\tau_i^{ini}(s)$	$\tau_i^{opt}(s)$	$E_i^{opt}(MPa)$
0.01	0.0005	0.00017424	0.0001507
0.09	0.05	0.0480445	$1.4647E - 05$
0.9	0.1	0.441124	$5.8389E - 06$
9	4	4.45509	$2.2374E - 06$
90	34	37.909	$9.2047E - 07$
900	330	359.951	$3.6185E - 07$
9000	3300	3599.98	$1.3922E - 07$

Tableau A-1: Les temps caractéristiques initiaux et optimisés du modèle de Kelvin-Voigt généralisé.

Les modules E_i de chaque branche du modèle de Kelvin-Voigt généralisé sont calculés à partir de l'équation (I-56).

Pour un modèle à 7 branches, les évolutions de la fonction de fluage de l'amortisseur parabolique et des fonctions de fluage du modèle Kelvin-Voigt généralisé sont présentées sur la figure 2.

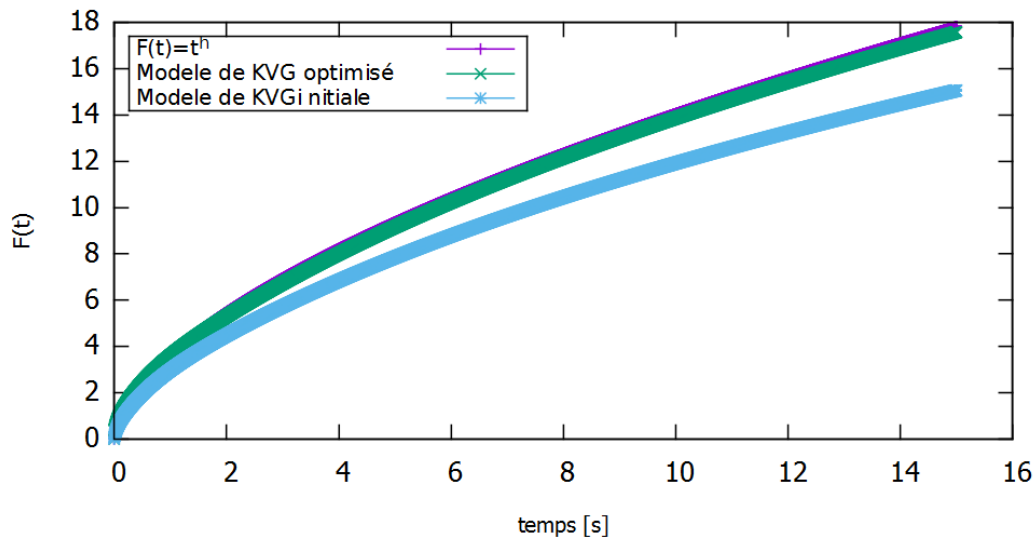


Figure A-2: Comparaison entre les fonctions de fluage du modèle de Huet et de Kelvin-Voigt généralisé (KVG).

Les temps caractéristiques initiaux et optimisés du modèle de Kelvin-Voigt généralisé.

Annexe B : Approche incrémentale pour calcul viscoélastique

L'approche incrémentale présentée ici est basée sur les travaux de (Ghazlan et al. 1995)(Chazal and Moutu Pitti 2010; Chazal and Moutu Pitti 2009). Elle permet d'obtenir la réponse en déformation des matériaux viscoélastiques linéaires non vieillissants d'une manière incrémentale. La loi de comportement de ces matériaux est donnée le produit de convolution :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \int_{-\infty}^t J_{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \tau} d\tau \quad (\text{B-1})$$

Pour un modèle de Kelvin-Voigt généralisé, la fonction de fluage de ce modèle est :

$$J(t) = J^0 + \sum_{m=1}^M (1 - e^{-\lambda_m t}) J^m \quad (\text{B-2})$$

avec $J^0 = 1/E^0$, où E^0 est le module élastique, $\lambda_m = 1/\tau_m$ et $J^m = 1/E^m$

Aux instants t_n et t_{n+1} l'équation (B-1) s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t_n) &= \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \int_{-\infty}^{t_n} J_{ijkl}(t_n - \tau) \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \tau} d\tau \\ \varepsilon_{ij}(t_{n+1}) &= \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \int_{-\infty}^{t_{n+1}} J_{ijkl}(t_{n+1} - \tau) \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \tau} d\tau \end{aligned} \quad (\text{B-3})$$

L'incrément de déformation $\Delta \varepsilon_{ij}(t_n)$ est alors :

$$\Delta \varepsilon_{ij}(t_n) = \varepsilon_{ij}(t_{n+1}) - \varepsilon_{ij}(t_n) \quad (\text{B-4})$$

Cet incrément de déformation s'écrit également sous la forme de la somme d'un terme lié au pas de chargement courant et d'un terme qui dépend de l'histoire de chargement $\tilde{\varepsilon}_{ij}(t_n)$ tel que :

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{ij}(t_n) &= \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \int_{t_n}^{t_{n+1}} J_{ijkl}(t_{n+1} - \tau) \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \tau} d\tau + \tilde{\varepsilon}_{ij}(t_n) \\ &= \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \Pi_{ijkl} \Delta \sigma_{kl}(t_n) + \tilde{\varepsilon}_{ij}(t_n) \end{aligned} \quad (\text{B-5})$$

avec $\tilde{\varepsilon}_{ij}(t_n)$ contenant toute l'histoire de chargement pour $t \leq t_n$ et donné par :

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}(t_n) = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \Psi_{ijkl}(t_n) = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^M (1 - e^{-\lambda_{ijkl}^m \Delta t_n}) \varphi_{ijkl}^m(t_n) \quad (\text{B-6})$$

et

$$\varphi_{ijkl}^m(t_n) = \int_{-\infty}^{t_n} J_{ijkl}^m e^{-\lambda_{ijkl}^m (t_n - \tau)} \frac{\partial \sigma_{kl}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (\text{B-7})$$

L'intervalle de temps $[0, t_{n+1}]$ est découpé en n segments de même longueur Δt . De plus, sur chaque intervalle du temps Δt la contrainte est supposée constante. Cela conduit à :

$$\Delta \varepsilon_{ij}(t_n) = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{\Delta \sigma_{kl}(t_n)}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} J_{ijkl}(t_{n+1} - \tau) d\tau + \tilde{\varepsilon}_{ij}(t_n) \quad (B-8)$$

et l'équation (B-7) s'écrit sous la forme incrémentale suivante :

$$\varphi_{ijkl}^m(t_n) = \varphi_{ijkl}^m(t_{n-1}) \cdot e^{-\lambda_{ijkl}^m \Delta t_n} + \frac{\Delta \sigma_{kl}(t_{n-1}) J_{ijkl}^m}{\Delta t_{n-1} \lambda_{ijkl}^m} \left[1 - e^{-\lambda_{ijkl}^m \Delta t_n} \right] \quad (B-9)$$

L'algorithme de calcul 1D, implémenté dans un code écrit en C++, est décrit dans la Figure B-1.

```

    For ('j' ...) boucle sur les pas du chargement // en contraintes imposées dans notre cas
    {
        For ('p' ...) boucle sur les branches de Kelvin-Voigt généralisé
        {
             $\varphi(p, j) = \varphi(p, j-1) e^{-\frac{\Delta t_j}{\tau_p}} + \frac{\tau_p \Delta \sigma(t_{j-1})}{E_p \Delta t_{j-1}} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t_j}{\tau_p}} \right)$  //  $E_p$  et  $\tau_p$  les paramètres du KVG
        }

        For ('k' ...) boucle sur les branches de Kelvin-Voigt généralisé
        {
             $\tilde{\varepsilon}(j) += \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t_j}{\tau_k}} \right) \cdot \varphi(k, j)$ 
        }

        For ('k' ...) boucle sur les branches de Kelvin-Voigt généralisé
        {
             $S += \frac{1}{E_p} \left( 1 - \frac{\tau_k}{\Delta t_j} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t_j}{\tau_k}} \right) \right)$ 
        }

         $PI(j) = \left( \frac{1}{E_{\infty}} + S \right) (\sigma_{j+1} - \sigma_j)$ 

         $\Delta \varepsilon_j = \tilde{\varepsilon}(j) + PI(j)$ 

         $\varepsilon_{j+1} = \varepsilon_j + \Delta \varepsilon_j$ 
    }
    
```

Figure B-1: Algorithme de calcul incrémental basé sur la fonction de fluage du modèle de Kelvin-Voigt généralisé.

Cet outil de calcul a été utilisé pendant l'étude de la stratégie de décomposition spectrale présentée dans l'Annexe A. Il permet de calculer la réponse du modèle de Kelvin-Voigt généralisé d'une manière incrémentale. Des exemples de calcul sont présentés sur les figures suivantes. Les réponses obtenues par cet outil sont montrées sur les courbes de 'KV-gen approche inc- MOUTOU PITTI'.

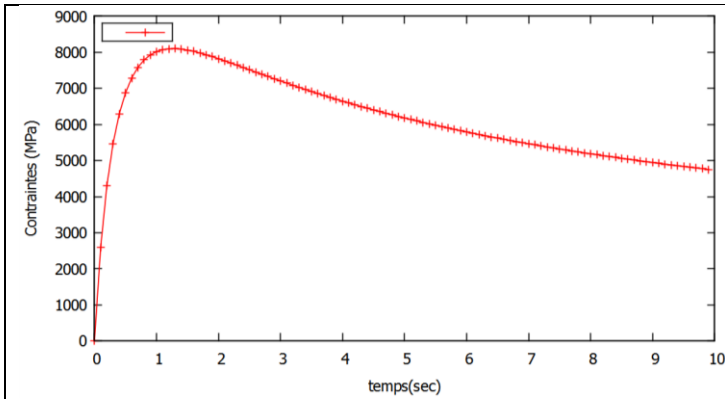


Figure B-2: Premier type de chargement : Contrainte imposée.

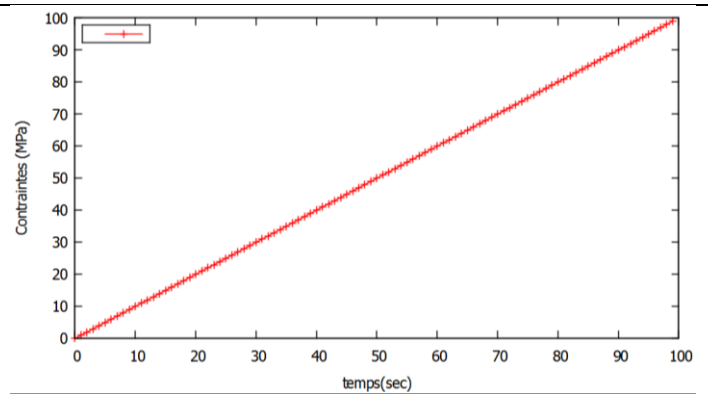


Figure B-3: Deuxième type de chargement : Contrainte imposée.

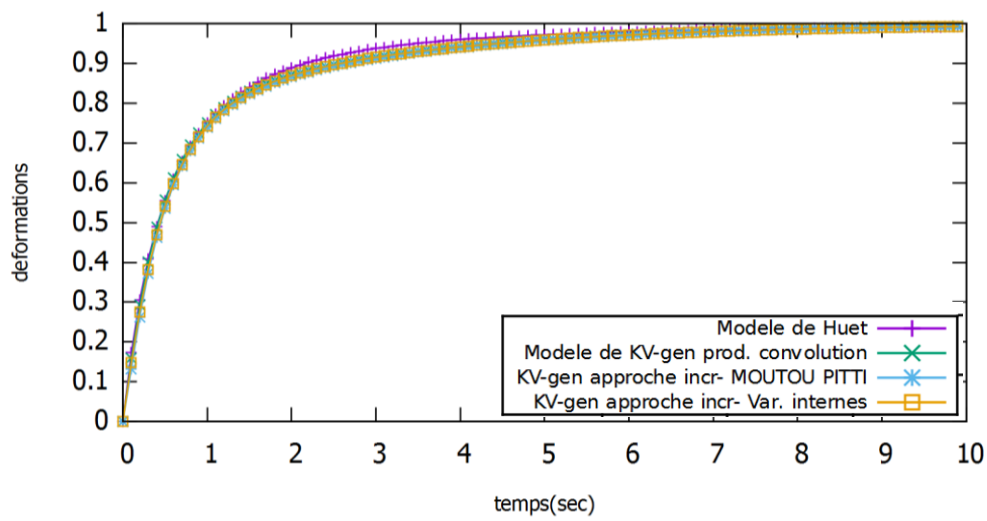


Figure B-4: Réponses de différents modèles rhéologiques au premier type de chargement (Figure B-2).

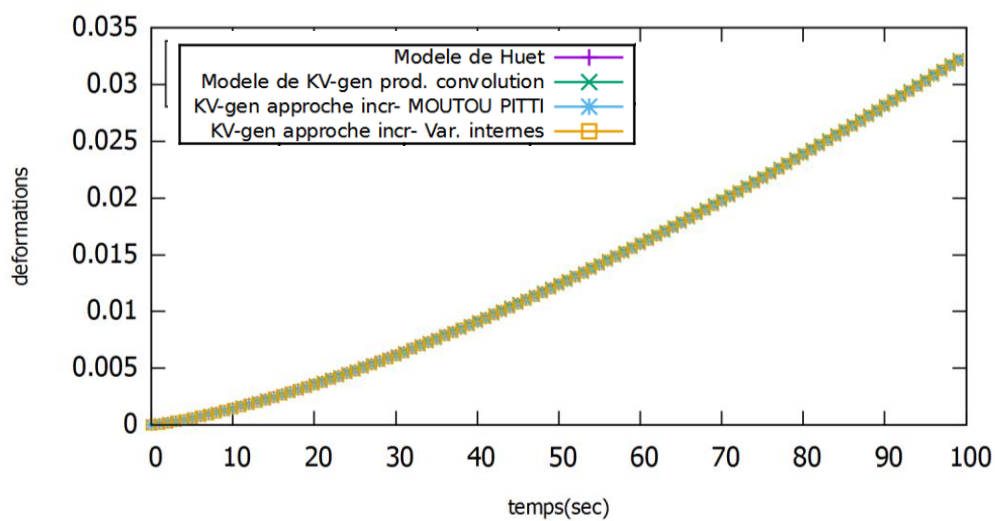


Figure B-5: Réponses de différents modèles rhéologiques au deuxième type de chargement (Figure B-3).

Annexe C : Loi de comportement du modèle de Poynting-Thomson endommageable en 1D

1^{er} loi incrémentale

Afin de coupler l'endommagement avec le modèle viscoélastique de Poynting-Thomson, on a adopté le principe des contraintes effectives, ce qui nous amène au modèle présenté sur la Figure C-1.

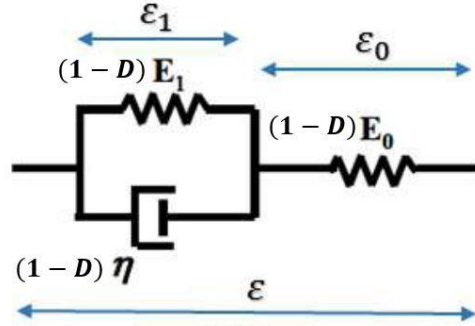


Figure C-1: Modèle viscoélastique endommagé de Poynting-Thomson

La contrainte dans le ressort isolé est donnée par :

$$\sigma = (1 - D)E_0\varepsilon_0 \quad (C-1)$$

Cette contrainte est égale aussi à celle dans la branche du Voigt :

$$\sigma = (1 - D)E_1\varepsilon_1 + (1 - D)\eta\dot{\varepsilon}_1 \quad (C-2)$$

La déformation totale de ce modèle est égale à la somme des déformations ε_0 et ε_1 :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_0 \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon - \varepsilon_0 \\ \dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_0 \end{cases} \quad (C-3)$$

À partir de cette dernière équation et l'équation (C-1), on peut calculer la déformation et la vitesse de déformation de la branche de Kelvin-Voigt telles que :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon - \frac{\sigma}{E_0(1 - D)}, \quad \dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E_0(1 - D)} - \sigma \frac{\dot{D}}{E_0(1 - D)^2} \quad (C-4)$$

Après le remplacement de ε_1 et $\dot{\varepsilon}_1$ dans l'équation (C-2), on trouve la loi de comportement du modèle à l'instant t telle que:

$$\dot{\sigma}^t = E_0(1 - D)\dot{\varepsilon}^t - \frac{\dot{D}^t}{(1 - D^t)}\sigma^t + \frac{E_1E_0(1 - D^t)}{\eta}\varepsilon^t - \frac{(E_0 + E_1)}{\eta}\sigma^t \quad (C-5)$$

En adoptant un schéma d'intégration temporelle d'Euler du type explicite, la dérivée d'un champ X par rapport au temps est approximée par :

$$\dot{X}^t \approx \frac{X^{t+\Delta t} - X^t}{\Delta t} = \frac{\Delta X}{\Delta t} \quad (C-6)$$

Ainsi, la loi de comportement s'écrit sous la forme incrémentale suivante :

$$\Delta\sigma = E_0(1 - D^t)\Delta\varepsilon - \frac{\Delta D}{(1 - D^t)}\sigma^t + \Delta t \frac{E_0E_1(1 - D^t)}{\eta}\varepsilon^t - \Delta t \frac{(E_0 + E_1)}{\eta}\sigma^t \quad (C-7)$$

2^{em} loi incrémentale

Après discrétisation temporelle de l'équation constitutive (C-2), on obtient :

$$\sigma^t = (1 - D^t)E_1\varepsilon_1^t + (1 - D^t)\eta \frac{\Delta\varepsilon_1}{\Delta t} \quad (C-8)$$

L'incrément de la contrainte $\Delta\sigma$ est donné par :

$$\Delta\sigma = \sigma^{t+\Delta t} - \sigma^t = (1 - D^{t+\Delta t})E_0\varepsilon_0^{t+\Delta t} - (1 - D^t)E_0\varepsilon_0^t \quad (C-9)$$

Cet incrément s'écrit alors :

$$\Delta\sigma = (1 - D^{t+\Delta t})E_0\Delta\varepsilon_0 - E_0\varepsilon_0^t\Delta D \quad (C-10)$$

À partir de l'équation constitutive (C-1), on trouve :

$$\varepsilon_0^t = \frac{\sigma^t}{(1 - D^t)E_0} \quad (C-11)$$

Ces deux dernières équations nous donnent :

$$\Delta\varepsilon_0 = \frac{\Delta\sigma}{(1 - D^{t+\Delta t})E_0} + \frac{\sigma^t\Delta D}{(1 - D^{t+\Delta t})(1 - D^t)E_0} \quad (C-12)$$

Après remplacement de ε_1^t par $\varepsilon^t - \varepsilon_0^t$ et $\Delta\varepsilon_1$ par $\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon_0$ dans l'équation (C-8), et l'utilisation de l'équation (C-11) et (C-12), on trouve la loi de comportement du modèle sous forme incrémentale :

$$\begin{aligned} \Delta\sigma = E_0(1 - D^{t+\Delta t})\Delta\varepsilon - \frac{\Delta D}{(1 - D^t)}\sigma^t + \Delta t \frac{E_0E_1(1 - D^{t+\Delta t})}{\eta}\varepsilon^t \\ - \Delta t \frac{(E_0 + E_1)(1 - D^{t+\Delta t})}{\eta(1 - D^t)}\sigma^t \end{aligned} \quad (C-13)$$

La différence avec la loi donnée par l'équation (IV-47) réside dans la discrétisation temporelle de la loi d'état (C-1). La loi incrémentale (C-13) possède une meilleure propriété que celle de l'équation (IV-47) lorsque la variable d'endommagement $D^{t+\Delta t}$ atteint 1. Dans ce cas on obtient :

$$\Delta\sigma = -\frac{\Delta D}{(1 - D^t)}\sigma^t \quad (C-14)$$

ce qui conduit à :

$$\sigma^{t+\Delta t} = \sigma^t - \frac{\Delta D}{(1 - D^t)}\sigma^t = (1 - D^t - \Delta D)\frac{\sigma^t}{(1 - D^t)} \quad (C-15)$$

Notons que $\Delta D = D^{t+\Delta t} - D^t$, la contrainte à l'instant $t + \Delta t$ devient :

$$\sigma^{t+\Delta t} = (1 - D^{t+\Delta t})\frac{\sigma^t}{(1 - D^t)} = 0 \quad (C-16)$$

Donc loi de comportement donnée par l'équation (C-13) permet de représenter le phénomène de dégradation totale ($\sigma(D = 1) = 0$) contrairement à celle de l'équation (IV-47).

Annexe D : Algorithme de calcul implicite en temps (1D)

La loi d'évolution de la variable interne ε_1 s'écrit à l'instant $t + \Delta t$:

$$\dot{\varepsilon}_1^{t+\Delta t} = \frac{E_0}{\eta} \varepsilon^{t+\Delta t} - \frac{E_0 + E_1}{\eta} \varepsilon_1^{t+\Delta t} \quad (\text{D-1})$$

L'algorithme de calcul implicite est basé sur un schéma d'Euler du type implicite, ainsi la dérivée $\dot{\varepsilon}_1^{t+\Delta t}$ figurant dans l'équation (D-1) s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}_1^{t+\Delta t} \approx \frac{\varepsilon_1^{t+\Delta t} - \varepsilon_1^t}{\Delta t} \quad (\text{D-2})$$

Les deux équations (C-16) et (D-1) conduisent à :

$$\varepsilon_1^{t+\Delta t} = \frac{E_0 \Delta t}{(E_0 + E_1) \Delta t + \eta} \varepsilon^{t+\Delta t} + \frac{\eta}{(E_0 + E_1) \Delta t + \eta} \varepsilon_1^t \quad (\text{D-3})$$

et la loi d'évolution de ε_1 s'écrit sous la forme incrémentale :

$$\Delta \varepsilon_1 = \frac{1}{(E_0 + E_1) \Delta t + \eta} (\varepsilon^{t+\Delta t} - \varepsilon_1^t) \quad (\text{D-4})$$

La loi d'état du ressort de rigidité E_0 s'écrit à l'instant $t + \Delta t$ sous la forme :

$$\sigma^{t+\Delta t} = (1 - D^{t+\Delta t}) E_0 \varepsilon_0^{t+\Delta t} \quad (\text{D-5})$$

où la déformation $\varepsilon_0^{t+\Delta t} = \varepsilon^{t+\Delta t} - \varepsilon_1^{t+\Delta t}$, cela conduit à :

$$\sigma^{t+\Delta t} = (1 - D^{t+\Delta t}) E_0 (\varepsilon^{t+\Delta t} - \varepsilon_1^{t+\Delta t}) \quad (\text{D-6})$$

Les deux équations (D-3) et (D-6) donnent :

$$\sigma^{t+\Delta t} = (1 - D^{t+\Delta t}) (1 - a) E_0 \varepsilon^{t+\Delta t} - (1 - D^{t+\Delta t}) b E_0 \varepsilon_1^t \quad (\text{D-7})$$

avec $a = \frac{E_0 \Delta t}{(E_0 + E_1) \Delta t + \eta}$ et $b = \frac{\eta}{(E_0 + E_1) \Delta t + \eta}$.

Rappelons la forme faible de l'équation d'équilibre (sans forces de volume) en quasi-statique :

$$\int_{\Omega} \sigma^{t+\Delta t} \varepsilon(u^*) d\Omega = \int_{\Gamma_N} F^{t+\Delta t} u^* d\Gamma \quad \forall u^* \in \mathfrak{U} \quad (\text{D-8})$$

où $\mathfrak{U}$ est l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissible à zéro.

Le remplacement de $\sigma^{t+\Delta t}$ de l'équation (D-7) dans cette dernière équation conduit à :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (1 - D^{t+\Delta t}) (1 - a) E_0 \varepsilon^{t+\Delta t} \varepsilon(u^*) d\Omega \\ &= \int_{\Gamma_N} F^{t+\Delta t} u^* d\Gamma + \int_{\Omega} (1 - D^{t+\Delta t}) b E_0 \varepsilon_1^t \varepsilon(u^*) d\Omega \quad \forall u^* \in \mathfrak{U} \end{aligned} \quad (\text{D-9})$$

Une étape de discrétisation spatiale permet d'écrire cette équation sous la forme algébrique suivante :

$$[K(D^{t+\Delta t})]\{u^{t+\Delta t}\} = c\{F^{t+\Delta t}\} + \{G(D^{t+\Delta t})\} \quad (D-10)$$

tel que $c = \frac{(E_0+E_1)\Delta t + \eta}{E_1\Delta t + \eta}$.

Pout cet algorithme, la loi d'évolution de l'endommagement est comme celle donnée dans l'équation IV-86-3 ainsi que pour les expressions du critère d'endommagement linéarisé $f^{t+\Delta t, pred}$ (IV-82). La seule différence est dans le calcul du terme $\lambda(\Delta \varepsilon_1)$. Pour cet algorithme implicite, l'incrément $\Delta \varepsilon_1$ donné par l'équation (D-4) est calculé explicitement par :

$$\Delta \varepsilon_1 = \frac{1}{(E_0 + E_1)\Delta t + \eta} (\varepsilon(u^{t+\Delta t, pred}) - \varepsilon_1^t) \quad (D-11)$$

où $u^{t+\Delta t, pred}$ est calculé à partir de la résolution du problème d'équilibre de prédiction :

$$[K(D^t)]\{u^{t+\Delta t, pred}\} = c\{F^{t+\Delta t}\} + \{G(D^t)\} \quad (D-12)$$

Ainsi, on peut suivre les mêmes étapes que celles de l'algorithme de prédiction-correction présenté dans la section IV.8.1. Les seules modifications sont portées sur l'équation d'équilibre (D-10) et sur l'équation d'évolution de la variable interne (D-4).

Annexe E : Stratégie de stockage des variables internes

Afin de mener des calculs incrémentaux et gérer l'évolution de la variable interne $\epsilon^{(ve)}$ dans le code de calcul bidimensionnel eXlibris, on a développé une stratégie qui permet de :

- Stocker les variables internes $\epsilon^{(ve)}$ au niveau des points de Gauss ;
- Faire la mise à jour des variables internes à la fin de chaque pas de calcul ;
- Évaluer ces variables aux points de Gauss.

La stratégie de stockage des variables internes $\epsilon^{(ve)}$ est conçue sur la base de la bibliothèque STL (Standard Template Library). Pour ce faire, on a utilisé les tableaux associatifs (*map*) qui sont des classes conteneurs de cette bibliothèque. Ces tableaux sont optimisés pour des opérations de recherche, de modification ou d'ajout très efficaces.

Les *maps* sont organisés en forme d'un tableau qui associe une variable (peut prendre différents types) à chaque clé de ce tableau. Afin de profiter de ce conteneur pour développer une stratégie de stockage et de mise à jour des variables internes $\epsilon^{(ve)}$, on a pris les entités du maillage comme clés du tableau. À chaque clé on a associé un tenseur des déformations $\epsilon^{(ve)}$.

Clé	Variable
Entité du maillage: élément	Tenseurs
e_1	$\epsilon_{e_1}^{(ve)}$
$\vdots$	$\vdots$
e_N	$\epsilon_{e_N}^{(ve)}$

Tableau E-1 : La stratégie développée pour stocker les variables internes dans le code eXlibris.

La mise à jour de ces variables internes est basée sur un évaluateur qu'on a créé. Cet évaluateur passe sur les clés du Tableau E-1 et réalise les étapes suivantes :

- Récupérer les composants du tenseur $\epsilon^{(ve),t}$ associés à une clé donnée.
- Stocker les composants du tenseur $\epsilon^{(ve)}$ dans une variable locale (matrice 3x3).
- Appliquer les équations (IV.86-2 et IV.92-2) afin de faire une mise à jour de $\epsilon^{(ve),t+\Delta t}$.
- Stocker la matrice associée à cette clé dans le tableau.

Notons que la stratégie de stockage présentée ci-avant représente un cas simple (pour un seul point de Gauss par élément du maillage). Dans le cas général où on a m points de Gauss par élément, il faut stocker une liste (ou un vecteur) de matrices pour chaque élément de maillage (Tableau E-2). Dans chaque matrice de cette liste, on stocke les tenseurs de déformations associés au point de Gauss l ($1 \leq l \leq m$).

Entité	Liste des matrices associées aux m points de Gauss				
E_j	$\epsilon_{pg-1}^{(ve)}$	...	$\epsilon_{pg-l}^{(ve)}$	...	$\epsilon_{pg-m}^{(ve)}$

Tableau E-2: Stratégie de stockage des variables internes pour m points de Gauss par élément E_j .

Références

- Adalsteinsson, D. and J. A. Sethian. 1999. "The Fast Construction of Extension Velocities in Level Set Methods." *Journal of Computational Physics* 148(1):2–22.
- Al-qadi, Imad L., Hasan Ozer, John Lambros, Ahmad El Khatib, Punit Singhvi, Tamim Khan, and Berangere Doll. 2015. "Testing Protocols to Ensure Performance of High Asphalt Binder Replacement Mixes Using RAP and RAS." *Report No. FHWA ICT- 15-07. Rantoul, IL: Illinois Center for Transportation.*
- Alimami, Moustapha. 1988. "Contribution à l'étude de l'endommagement Par Fatigue Des Enrobés Bitumineux." *Rapport de Recherche a LCPC.*
- Anderson, DA and R. Dongre. 1995. "The SHRP Direct Tension Specification Test-Its Development and Use." Pp. 51-51–16 in *Physical Properties of Asphalt Cement Binders*. 100 Barr Harbor Drive, PO Box C700, West Conshohocken, PA 19428-2959: ASTM International.
- Aragão, Francisco Thiago Sacramento, Yong-Rak Kim, and Mohammad Haft Javaherian. 2012. "Modeling Rate-Dependent Fracture Behavior of Asphalt Mixtures." *Paper Submitted to the Transportation Research Board* (July 2011):1–17.
- Artamendi, Ignacio and Hussain A. Khalid. 2006. "A Comparison between Beam and Semi-Circular Bending Fracture Tests for Asphalt." *Road Materials and Pavement Design* 7:163–80.
- Association of Asphalt Paving Technologists. 2016. "State of the Art and Practice in Fatigue Cracking Evaluation of Asphalt Concrete Pavements." 156.
- Barenblatt, G. I. 1962. "The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture." Pp. 55–129 in *Advances in applied mechanics*. Vol. 7.
- Bažant, Zdeněk P., Ted B. Belytschko, and Ta-peng Chang. 1984. "Continuum Theory for Strain-Softening." *Journal of Engineering Mechanics* 110(12):1666–92.
- Bažant, Zdeněk P. and Gilles Pijaudier-Cabot. 1989. "Measurement of Characteristic Length of Nonlocal Continuum." *Journal of Engineering Mechanics* 115(4):755–67.
- Bažant, Zdeněk P. and Jaime Planas. 1998. *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*. Boca Raton, FL: CRC Press.
- Benallal, A., R. Billardon, and G. Geymonat. 1993. "Bifurcation and Localization in Rate-Independent Materials. Some General Considerations." Pp. 1–44 in *Bifurcation and Stability of Dissipative Systems*. Vienna: Springer Vienna.
- Di Benedetto, H. and M. Neifar. 2002. "Experimental Characterisation and Modelling of Thermo-Visco-Plastic Behaviour of Bituminous Mixtures." *BCRA*.
- Di Benedetto, H., M. Neifar, B. Dongmo, and F. Olard. 2001a. "Loi Thermo-Viscoplastique Pour Les Mélanges Bitumineux : Simulation de La Perte de Linéarité et Du Retrait Empêché." *36ème Colloque Annuel Du Groupe Français de Rhéologie*.
- Di Benedetto, H., M. Neifar, B. Dongmo, and F. Olard. 2001b. "Loi Thermo-Viscoplastique Pour Les Mélanges Bitumineux : Simulation de La Perte de Linéarité et Du Retrait

- Empêché.” 36ème Colloque Annuel Du Groupe Français de Rhéologie, Marne-La-Vallée.
- Di Benedetto, Hervé. 1990. “Nouvelle Approche Du Comportement Des Enrobés Bitumineux : Résultats Expérimentaux et Formulation Rhéologique.” *Mechanical Tests for Bituminous Mixes, Characterization, Design and Quality Control, Proceedings of the Fourth Rilem Symposium, Budapest*.
- Benedetto, Hervé Di, Brice Delaporte, and Cédric Sauzéat. 2007. “Three-Dimensional Linear Behavior of Bituminous Materials: Experiments and Modeling.” *International Journal of Geomechanics* 7(2):149–57.
- Bernard, P.E., N. Moës, and N. Chevaugeon. 2012. “Damage Growth Modeling Using the Thick Level Set (TLS) Approach: Efficient Discretization for Quasi-Static Loadings.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 233–236:11–27.
- Bernard, P. E., N. Moës, and N. Chevaugeon. 2012. “Damage Growth Modeling Using the Thick Level Set (TLS) Approach: Efficient Discretization for Quasi-Static Loadings.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 233–236:11–27.
- Bodin, D. 2002. “Modèle d’endommagement Par Fatigue: Application Aux Enrobés Bitumineux.” *Thèse de Doctorat En Génie Civil. Ecole Centrale de Nantes*.
- Bodin, Didier, Chantal De La Roche, and Gilles Pijaudier-Cabot. 2006. “Size Effect Regarding Fatigue Evaluation of Asphalt Mixtures: Laboratory Cantilever Bending Tests.” *Road Materials and Pavement Design* 7:181–200.
- Bodin, Didier, Gilles Pijaudier-cabot, Chantal De La Roche, Jean-michel Piau, and Armelle Chabot. 2004. “Continuum Damage Approach to Asphalt Concrete Fatigue Modelling To Cite This Version: Continuum Damage Approach to Asphalt Concrete Fatigue Modeling.” *Journal of Engineering Mechanics* 0–9.
- Boltzmann, Ludwig. 1878. “Zur Theorie Der Elastischen Nachwirkung.” *Annalen Der Physik Und Chemie* 241(11):430–32.
- Booij, HC and GPJM Thoone. 1982. “Generalization of Kramers-Kronig Transforms and Some Approximations of Relations between Viscoelastic Quantities.” *Rheologica Acta, Vol. 21, No 1, p. 15 - 24*.
- Brabet, Isis. 2012. “LE TRAITEMENT DES SOLS POUR LA COUCHE DE FORME , Application à Des Projets de Terrassement Dans Le Département de l’Hérault.” *Mémoire Présenté En Vue d’obtenir Le Diplôme d’ingénieur CNAM* 127.
- Bui, H. D. 1978. “Mécanique de La Rupture Fragile.” *Masson*.
- Cailletaud, Georges, S. Cantournet, L. Corte, J. L. Dequiedt, S. Forest, A. Gaubert, S. Joannes, M. Maziere, H. Proudhon, D. Ryckelynck, and M. Tijani. 2012. “MÉCANIQUE DES MATÉRIAUX SOLIDES.” *Notes de Cours, MINES ParisTech* 333.
- Cazes, Fabien and Nicolas Moës. 2015. “Comparison of a Phase-Field Model and of a Thick Level Set Model for Brittle and Quasi-Brittle Fracture.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 103(2):114–43.
- Chailleux, E. 2005. “ViscoAnalyse : Un Logiciel de Traitement Des Données Viscoélastiques Des Matériaux Bitumineux et de Calibrage Du Modèle de Huet-Sayegh, Distribué Gratuitement Sur Demande.”
- Chailleux, E., C. De La Roche, and J. M. Piau. 2011. “Modeling of Complex Modulus of

-
- Bituminous Mixtures Measured in Tension/Compression to Estimate Secant Modulus in Indirect Tensile Test.” *Materials and Structures/Materiaux et Constructions* 44(3):641–57.
- Chailleux, Emmanuel, Guy Ramond, Christian Such, Chantal De, and La Roche. 2006. “A Mathematical-Based Master-Curve Construction Method Applied to Complex Modulus of Bituminous Materials A Mathematical-Based Master-Curve Construction Method Applied to Complex Modulus of Bituminous Materials.” *Road Mater Pavement Des* 7:75–92 75–92.
- Charif, K. 1991. “Contribution à l’étude Du Comportement Mécanique Du Béton Bitumineux En Petites et Grandes Déformations.” *Thèse de Doctorat, Ecole Centrale Paris*.
- Chazal, Claude and Rostand Moutu Pitti. 2010. “Viscoelastic Incremental Formulation Using Creep and Relaxation Differential Approaches.” *Mechanics of Time-Dependent Materials* 14(2):173–90.
- Chazal, Claude and Rostand Moutu Pitti. 2009. “A New Incremental Formulation for Linear Viscoelastic Analysis: Creep Differential Approach.” *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 47(2):397–409.
- Chehab, Ghassan, Yong-Rak Kim, Richard Schapery, M. W. Witzak, and Ramon. Bonaquist. 2002. “Time-Temperature Superposition Principle for Asphalt Concrete with Growing Damage in Tension State.” in *Asphalt Paving Technology: Association of Asphalt Paving Technologists-Proceedings of the Technical Sessions*.
- Chong, K. P. and M. D. Kuruppu. 1984. “New Specimen for Fracture Toughness Determination for Rock and Other Materials.” *International Journal of Fracture* 26(2):R59–62.
- Chupin, O., J. M. Piau, H. Odéon, A. Salzman, and N. Moës. 2016. “Bump Formation on a Semi-Rigid Pavement: Interpretation and Modeling Using the Thick Level Set (TLS) Approach for Damage Growth.” Pp. 199–205 in.
- Coleman, Bernard D. and Morton E. Gurtin. 1967. “Thermodynamics with Internal State Variables.” *The Journal of Chemical Physics* 47(2):597–613.
- Comi, Claudia. 1999. “Computational Modelling of Gradient-enhanced Damage in Quasi-brittle Materials.” *Mechanics of Cohesive-frictional Materials* 4(1):17–36.
- Comi, Claudia. 2001. “A Non-Local Model with Tension and Compression Damage Mechanisms.” *European Journal of Mechanics - A/Solids* 20(1):1–22.
- Comi, Claudia and Umberto Perego. 2001. “Fracture Energy Based Bi-Dissipative Damage Model for Concrete.” *International Journal of Solids and Structures* 38(36–37):6427–54.
- Cottle, R., J. Pang, and R. Stone. 2009. *The Linear Complementarity Problem*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Daniel, Jo Sias, Y. Richard Kim, Stephen Brown, Geoffrey Rowe, Ghassan Chehab, and Gerald Reinke. 2002. “Development of a Simplified Fatigue Test and Analysis Procedure Using a Viscoelastic, Continuum Damage Model.” *Asphalt Paving Technology: Association of Asphalt Paving Technologists-Proceedings of the Technical Sessions* 71(March 2019):619–50.
- Darabi, Masoud K., Rashid K. Abu Al-Rub, Eyad A. Masad, Chien Wei Huang, and Dallas N. Little. 2011. “A Thermo-Viscoelastic-Viscoplastic-Viscodamage Constitutive Model for
-

-
- Asphaltic Materials.” *International Journal of Solids and Structures* 48(1):191–207.
- Darabi, Masoud K., Rashid K. Abu Al-Rub, Eyad A. Masad, and Dallas N. Little. 2013. “Constitutive Modeling of Fatigue Damage Response of Asphalt Concrete Materials with Consideration of Micro-Damage Healing.” *International Journal of Solids and Structures* 50(19):2901–13.
- Dave, E. V., S. H. Song, W. G. Buttlar, and G. H. Paulino. 2007. “Reflective and Thermal Cracking Modeling of Asphalt Concrete Overlays.” *Advanced Characterisation of Pavement and Soil Engineering Materials - Proceedings of the International Conference on Advanced Characterisation of Pavement and Soil Engineering Materials* 2:1241–52.
- Doubbaneh, E. 1995. “Comportement Mécanique Des Enrobés Bitumineux Des Petites Aux Grandes Déformations.” *Thèse de Doctorat, Institut National Des Sciences Appliquées de Lyon*.
- Doucet, Félix and Bruno Auger. 2010. “Détermination Du Module Complexe Des Enrobés Au Ministère Des Transports Du Québec.” *MATÉRIAUX ET INFRASTRUCTURES, ÉTUDES ET RECHERCHES EN TRANSPORT*.
- Dugdale, D. S. 1960. “Yielding of Steel Sheets Containing Slits.” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 8(2):100–104.
- Dupuy, Jean-Sébastien. 2009. “Identification Des Propriétés Mécaniques de Matériaux Composites Par Analyse Vibratoire.” *Thèse de Doctorat*.
- Espinosa, Horacio D. and Pablo D. Zavattieri. 2001. “A Grain Level Model for the Study of Failure Initiation and Evolution in Polycrystalline Brittle Materials. Part I: Theory and Numerical Implementation.” *Mechanics of Materials* 35(3–6):365–94.
- Espinosa, Horacio D. and Pablo D. Zavattieri. 2003. “A Grain Level Model for the Study of Failure Initiation and Evolution in Polycrystalline Brittle Materials. Part II: Numerical Examples.” *Mechanics of Materials* 35(3–6):365–94.
- EUROBITUME. 1996. “Rheology of Bituminous Binders - Glossary of Rheological Terms.” *European Bitumen Association - Brussels*.
- Fakhri, M., E. Haghighat Kharrazi, M. R. M. Aliha, and F. Berto. 2018. “The Effect of Loading Rate on Fracture Energy of Asphalt Mixture at Intermediate Temperatures and under Different Loading Modes.” *Frattura Ed Integrità Strutturale* 12(43):113–32.
- Ferry, J. D. 1980. “Viscoelastic Properties of Polymers.” *Wiley, New York*.
- Geuzaine, Christophe and Jean-François Remacle. 2009. “Gmsh: A 3-D Finite Element Mesh Generator with Built-in Pre- and Post-Processing Facilities.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79(11):1309–31.
- Ghazlan, G., S. Caperaa, and C. Petit. 1995. “An Incremental Formulation for the Linear Analysis of Thin Viscoelastic Structures Using Generalized Variables.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 38(19):3315–33.
- Godard, V. 2004. “Modélisation de l’endommagement Anisotrope Du Béton Avec Prise En Compte de l’effet Unilatéral : Application à La Simulation Des Enceintes de Confinement Nucléaires.” *Ph.D. Thesis, Université Pierre et Marie Curie*.
- Gorris, T. 2012. “Application de La Méthode Thick Level Set à l’étude Des Composites Strati Fiés.” *Thèse de Doctorat*.
-

-
- Griffith, A. A. 1921. "The Phenomena of Rupture and Flow in Solids." *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 221(582–593):163–98.
- Habiballah, Taha El Mokhtar. 2005. "MODELISATION DES DEFORMATIONS PERMANENTES DES GRAVES NON TRAITEES-Application Au Calcul de l'orniérage Des Chaussées Souples." *Thèse de Doctorat, UNIVERSITE DE LIMOGES*.
- Halphen, B. and Quoc Son Nguyen. 1975. "Sur Les Matériaux Standard Généralisés." *Journal de Mécanique* 14, 39-63.
- Hammoum, Ferhat, Emmanuel Chailleux, Hoai-Nam Nguyen, Alain Erhlicher, Jean-Michel Piau, and Didier Bodin. 2009. "Experimental and Numerical Analysis of Crack Initiation and Growth in Thin Film of Bitumen." *Road Materials and Pavement Design* 10(1):39–61.
- Heck, Jean-Vivien. 2001. "Modélisation Des Deformations Réversibles et Permanents Des Enrobes Bitumineux – Application à l'orniérage Des Chaussées." *Ph.D. Dissertation, Université de Nantes*.
- den Hertog, D., C. Roos, and T. Terlaky. 1993. "The Linear Complimentarity Problem, Sufficient Matrices, and the Criss-Cross Method." *Linear Algebra and Its Applications* 187(C):1–14.
- Hillerborg, A. 1985. "The Theoretical Basis of a Method to Determine the Fracture Energy GF of Concrete." *Materials and Structures* 18(4):291–96.
- Hillerborg, A., M. Modéer, and P. E. Petersson. 1976. "Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements." *Cement and Concrete Research* 6(6):773–81.
- Horstemeyer, Mark F. and Douglas J. Bammann. 2010. "Historical Review of Internal State Variable Theory for Inelasticity." *International Journal of Plasticity* 26(9):1310–34.
- Huet, C. 1963. "Etude Par Une Méthode d'impédance Du Comportement Viscoélastique Des Matériaux Hydrocarbonés." *Thèse de Docteur Ingénieur, Faculté Des Sciences de l'Université de Paris*.
- Huet, Christian. 1992. "Minimum Theorems for Viscoelasticity." *European Journal of Mechanics - A/Solids* (11 (5) 653-684).
- Im, Soohyok, Yong-Rak Kim, and Hoki Ban. 2013. "Rate- and Temperature-Dependent Fracture Characteristics of Asphaltic Paving Mixtures." *Journal of Testing and Evaluation* 41(2):20120174.
- Irwin, GR. 1957. "Analysis of Stresses and Strains near the End of a Crack Traversing a Plate." *Journal of Applied Mechanics*, (24) :361:364.
- Jeng, Y. S., C. Liaw, and P. Liu. 1993. "Analysis of Crack Resistance of Asphalt Concrete Overlays – a Fracture Mechanics Approach." *Transportation Research Record*, 1388, 160–166.
- Jeng, Y. S. and J. D. Perng. 1991. "Analysis of Crack Propagation in Asphalt Concrete Using Cohesive Crack Model YEOU-SHANG }ENQ AND }IA-DER PERNG." *Transportation Research Record*, 1317, 90–99 (3).
- Kachanov, L. 1958. "Time of the Rupture Process under Creep Conditions." *Izvestiia Akademii*
-

-
- Nauk SSSR, Otdelenie Teckhnicheskikh Nauk* 8:26–31.
- Kachanov, L. M. 1986. “Introduction to Continuum Damage Mechanics. Mechanics of Elastic Stability.” *Springer*.
- Karma, Alain, David A. Kessler, and Herbert Levine. 2001. “Phase-Field Model of Mode III Dynamic Fracture.” *Physical Review Letters* 87(4):45501-1-45501-4.
- Kim, By Y. Richard. 1990. “One-Dimensional Constitutive m o d e l i n g o f Asphalt c o n c r e t E.” 116(4):751–72.
- Kim, Yong Rak. 2011. “Cohesive Zone Model to Predict Fracture in Bituminous Materials and Asphaltic Pavements: State-of-the-Art Review.” *International Journal of Pavement Engineering* 12(4):343–56.
- Kinloch, A. J. 1987. *Adhesion and Adhesives*. Dordrecht: Springer Netherlands.
- Knauss, W. G. 1970. “Delayed Failure? The Griffith Problem for Linearly Viscoelastic Materials.” *International Journal of Fracture Mechanics* 6(1).
- Krajcinovic, Dusan and Sreten Mastilovic. 1995. “Some Fundamental Issues of Damage Mechanics.” *Mechanics of Materials* 21(3):217–30.
- Krans, R. L., F. Tolman, and M. F. C. van de Ven. 1996. “Semicircular Bending Test: A Practical Crack Growth Test Using Asphalt Concrete Cores.” *RILEM Conference, Maastricht*.
- Kuhn, H. W. and A. W. Tucker. 1951. “Non-Linear Programming.” Pp. 481–92 in *The New Palgrave Dictionary of Economics*. Berkeley, Calif.: University of California Press.
- Kutay, M. Emin and Mike Lanotte. 2018. “Viscoelastic Continuum Damage (VECD) Models for Cracking Problems in Asphalt Mixtures.” *International Journal of Pavement Engineering* 19(3):231–42.
- De La Roche, Chantal. 1996. “Module de Rigidité et Comportement En Fatigue Des Enrobés Bitumineux.” *Thèse de Doctorat, École Centrale de Paris* 188p.
- Ladevèze, P. 1992. “A Damage Computational Method for Composite Structures.” *Computers & Structures* 44(1–2):79–87.
- Larcher, Nicolas. 2014. “Contribution à La Caractérisation Des Matériaux Au Comportement Viscoélastique Par Méthode Ultrasonore.” *Thèse de Doctorat, UNIVERSITE DE LIMOGES* 264.
- Largeaud, S., H. Raffegau, B. Simaillaud, B. Eckmann, E. Sauger, S. Ollier, G. Hervé, L. Wendling, J. Pascot, J. C. Vaniscote, and D. Chabert. 2004. “The Use of Direct Tension Tests for the Assessment of Low Temperature Properties of Bituminous Binders.” *Materials and Structures* 37(5):351–55.
- Larsen, H. J. E. and P. Ullidtz. 1997. “Pavement Subgrade Performance Study in the Danish Road Testing Machine.” *8th International Conference on Asphalt Pavement, Seattle, Washington, Proceedings Vol. I, August 10-14, Pp. 843-857*.
- Lé, Benoît. 2018. “DamageBand for Beginners.” *École Centrale de Nantes Institut de Recherche En Génie Civil et Mécanique Équipe Modélisation et Simulation*.
- Lé, Benoît, Nicolas Moës, and Grégory Legrain. 2018. “Coupling Damage and Cohesive Zone
-

-
- Models with the Thick Level Set Approach to Fracture.” *Engineering Fracture Mechanics* 193:214–47.
- Leaderman, Herbert. 1943. “Elastic and Creep Properties of Filamentous Materials and Other High Polymers.” *The Textile Founda- Tion, Washington*.
- Lee, Hyun-Jong. 1996. “Uniaxial Constitutive Modeling of Asphalt Concrete Using Viscoelasticity and Continuum Damage Theory.” *Phd Thesis, Department of Civil Engineering, Raleigh, North Carolina State University*.
- Lee, Jong Sub and Y. Richard Kim. 2014. “Performance-Based Moisture Susceptibility Evaluation of Warm-Mix Asphalt Concrete through Laboratory Tests.” *Transportation Research Record* 2446:17–28.
- Lee, K. W., N. Soupharath, A. Shukla, C. A. Franco, and F. J. Manning. 1999. “Rheological and Mechanical Properties of Blended Asphalts Containing Recycled Asphalt Pavement Binders.” *Proceedings of the Association of Asphalt Paving Technologists* 68(401):89–128.
- Lemaitre, Jean and Jean-Louis Chaboche. 1985. “Mechanics of Solid Materials.” *Cambridge University Press*.
- Lemaitre, Jean and Jean-Louis Chaboche. 1990. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lemaitre, Jean and Jean-Louis Chaboche. 2004. *Mécanique Des Matériaux Solides*. Dunod.
- Li, X. and M. Marasteanu. 2004. “Evaluation of the Low Temperature Fracture Resistance of Asphalt Mixtures Using the Semi Circular Bend Test.” In *Asphalt Paving Technology: Association of Asphalt Paving Technologists-Proceedings of the Technical Sessions (Vol. 73, Pp. 401-426)*.
- Li, Xinjun, Adam Zofka, Xue Li, and Mihai Marasteanu. 2006. “Investigation of the Low-Temperature Fracture Properties of Three MnROAD Asphalt Mixtures.” *Report Department of Civil Engineering University of Minnesota* 74.
- Lim, I. L., I. W. Johnston, and S. K. Choi. 1993. “Stress Intensity Factors for Semi-Circular Specimens under Three-Point Bending.” *Engineering Fracture Mechanics* 44(3):363–82.
- Linder, R., F. Moutier, M. Penet, and F. Peyret. 1986. “La Machine d’essais Rhéologiques Asservie (MAER-LCPC) et Son Utilisation Pour l’essai de Traction LPC Sur Enrobés.” *Bulletin de Liaison Des Laboratoires Des Ponts et Chaussées* (142):132–38.
- Lubliner, Jacob. 1990. “Plasticity Theory.” *Macmillan Publishing Company, New York*.
- Maillard, Samuel. 2005. “Fissuration et Autoréparation Des Liants Bitumineux, Apport de l’essai de Rupture Locale Répétée Sur Bitume.” *Thèse de DOCTORAT Diplôme Délivré Conjointement Par L’École Centrale de Nantes et l’Université de Nantes*.
- Mandel, J. 1955. “Sur Les Corps Viscoélastiques à Comportement Linéaire.” *Comptes Rendus de l’Académie Des Sciences, Paris* 1910–12.
- Mandel, J. 1980. “Variables Cachées, Puissance Dissipée, Dissipativité Normale.” *Colloque: Thermodynamique Des Comportements Rhéologiques*.
- Marques, Severino P.C. and Guillermo J. Creus. 2012. “Computational Viscoelasticity.” *SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology* (9783642253102):iv–v.
-

-
- Marques, Severino P. C. and Guillermo J. Creus. 2012. *Computational Viscoelasticity*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Mayer, J. R. 1842. “Bemerkungen Über Die Kräfte Der Unbelebten Natur.” *Annalen Der Chemie Und Pharmacie* 42(2):233–40.
- Mayer, J. R. 1862. “XLVIII. Remarks on the Forces of Inorganic Nature.” *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 24(162):371–77.
- Mazars, J. and G. Pijaudier-Cabot. 1989. “Continuum Damage Theory—Application to Concrete.” *J. of Engineering Mechanics ASCE* 115(2):345–65.
- van der Meer, F. P. and L. J. Sluys. 2015. “The Thick Level Set Method: Sliding Deformations and Damage Initiation.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 285:64–82.
- Merbouh, M’hammed. 2010. “Contribution à La Modélisation Du Comportement Rhéologique Des Enrobés Bitumineux, Influence Des Conditions Extrêmes de Température et de Trafic En Fatigue.” *Thèse de DOCTORAT, UNIVERSITE BORDEAUX-I* 1–264.
- Mesquita, A. D. and H. B. Coda. 2001. “An Alternative Time Integration Procedure for Boltzmann Viscoelasticity: A BEM Approach.” *Computers and Structures* 79(16):1487–96.
- Miehe, C., F. Welschinger, and M. Hofacker. 2010. “Thermodynamically Consistent Phase-Field Models of Fracture: Variational Principles and Multi-Field FE Implementations.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 83(10):1273–1311.
- Moës, N., J. Dolbow, and Ted Belytschko. 1999. “A Finite Element Method for Crack Growth without Remeshing.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46(1):131–50.
- Moës, N., C. Stolz, P. E. Bernard, and N. Chevaugeon. 2011. “A Level Set Based Model for Damage Growth: The Thick Level Set Approach.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 86(3):358–80.
- Moës, Nicolas, Claude Stolz, and Nicolas Chevaugeon. 2014. “Coupling Local and Non-Local Damage Evolutions with the Thick Level Set Model.” *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 1(1):1–21.
- Moreau, K., N. Moës, D. Picart, and L. Stainier. 2015. “Explicit Dynamics with a Non-Local Damage Model Using the Thick Level Set Approach.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 102(3–4):808–38.
- Moreau, Kévin, Nicolas Moës, Nicolas Chevaugeon, and Alexis Salzman. 2017. “Concurrent Development of Local and Non-Local Damage with the Thick Level Set Approach: Implementation Aspects and Application to Quasi-Brittle Failure.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 327(September):306–26.
- Needleman, A. 1987. “A Continuum Model for Void Nucleation by Inclusion Debonding.” *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME* 54(3):525–31.
- Needleman, A. 1988. “Material Rate Dependence and Mesh Sensitivity in Localization Problems.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 67(1):69–85.
- Needleman, A. 1990. “An Analysis of Decohesion along an Imperfect Interface.” *International Journal of Fracture* 42(1):21–40.
-

-
- Neifar, Mondher and Hervé Di Benedetto. 2001. "Thermo-Viscoplastic Law for Bituminous Mixes." *Road Materials and Pavement Design* 2(1):71–95.
- Nguyen, Hoang Minh, Simon Pouget, Hervé Di Benedetto, and Cédric Sauzéat. 2009. "Time-Temperature Superposition Principle for Bituminous Mixtures." *European Journal of Environmental and Civil Engineering* 13(9):1095–1107.
- Nguyen, Mai Lan, Cédric Sauzéat, Hervé Di Benedetto, and Nouffou Tapsoba. 2013. "Validation of the Time-Temperature Superposition Principle for Crack Propagation in Bituminous Mixtures." *Materials and Structures/Materiaux et Constructions* 46(7):1075–87.
- Nilsson, Roger N., Ulf Isacsson, and Piet C. Hopman. 2002. "Influence of Different Rheological Models on Predicted Pavement Responses in Flexible Pavements." *Road Materials and Pavement Design* 3(2):117–49.
- Nsengiyumva, Gabriel. 2015. "Development of Semi-Circular Bending (SCB) Fracture Test for Bituminous Mixtures." *Master Thesis, University of Nebraska*.
- Olard, François. 2000. "Étude et Modélisation de Comportement Thermo-Mécanique Des Enrobés Bitumineux." *Mémoire de Recherche Pour l'obtention Du Diplôme d'Etudes Approfondies de Génie Civil de l'Ecole Doctorale MEGA de Lyon*.
- Olard, François. 2003. "Comportement Thermomécanique Des Enrobés Bitumineux à Basses Températures. Relations Entre Les Propriétés Du Liant et de l'enrobé." *Thèse de Doctorat, l'Institut National Des Sciences Appliquées de Lyon*.
- Olard, François and Hervé Di Benedetto. 2003. "General '2S2P1D' Model and Relation Between the Linear Viscoelastic Behaviours of Bituminous Binders and Mixes." *Road Materials and Pavement Design* 4(2):185–224.
- Olard, François and Hervé Di Benedetto. 2005. *Loi Thermo-Visco-Elasto-Plastique Pour Les Enrobés Bitumineux : Simulations Des Essais de Traction Directe et de Retrait Thermique Empêché*.
- Olard, François, Hervé Di Benedetto, A. Dony, and J. C. Vaniscote. 2003. "Properties of Bituminous Mixtures at Low Temperatures and Relations with Binder Characteristics." *6th RILEM Symposium PTEBM'03, Zurich* 38(275):121–26.
- Oliver, Javier and Carlos de Saracibar. 2016. *Continuum Mechanics for Engineers. Theory and Problems (First Edition, September 2016)*.
- Osher, Stanley and Ronald P. Fedkiw. 2001. "Level Set Methods : Overview and Recent Results." 1–65.
- Osher, Stanley and James A. Sethian. 1988. "Fronts Propagating with Curvature-Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations." *Journal of Computational Physics* 79(1):12–49.
- Ozer, Hasan, Imad L. Al-Qadi, John Lambros, Ahmad El-Khatib, Punit Singhvi, and Berangere Doll. 2016. "Development of the Fracture-Based Flexibility Index for Asphalt Concrete Cracking Potential Using Modified Semi-Circle Bending Test Parameters." *Construction and Building Materials* 115:390–401.
- Ozer, Hasan, Imad L. Al-Qadi, Punit Singhvi, Tamim Khan, Jose Rivera-Perez, and Ahmad El-Khatib. 2016. "Fracture Characterization of Asphalt Mixtures with High Recycled Content
-

-
- Using Illinois Semicircular Bending Test Method and Flexibility Index.” *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board* 2575(1):130–37.
- Park, Sun Woo, Y. Richard Kim, and Richard A. Schapery. 1996. “A Viscoelastic Continuum Damage Model and Its Application to Uniaxial Behavior of Asphalt Concrete.” *Mechanics of Materials* 24(4):241–55.
- Parrilla Gómez, A., C. Stolz, N. Moës, D. Grégoire, and G. Pijaudier-Cabot. 2017. “On the Capability of the Thick Level Set (TLS) Damage Model to Fit Experimental Data of Size and Shape Effects.” *Engineering Fracture Mechanics* 184:75–87.
- Parrilla Gómez, Andrés, Nicolas Moës, and Claude Stolz. 2015. “Comparison between Thick Level Set (TLS) and Cohesive Zone Models.” *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 2(1).
- Peerlings, R. H. J., R. De Borst, W. A. M. Brekelmans, and J. H. P. De Vree. 1996. “Gradient Enhanced Damage for Quasi-Brittle Materials.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39(19):3391–3403.
- Peerlings, Ronnie Henricus Johannes. 1999. “Enhanced Damage Modelling for Fracture and Fatigue.” *Ph.D. Thesis, Technische Universiteit Eindhoven* 120.
- Petersson, P. E. 1980. “FRACTURE ENERGY OF CONCRETE: METHOD OF DETERMINATION.” *Pergamon Press, Ltd.* (c):2–6.
- Petersson, P. E. 1981. “Crack Growth and Development of Fracture Zones in Plain Concrete and Similar Materials.” *Report TVBM – 1006, Lund Institute of Technology*.
- Piau, J. M. and J. V. Heck. 1996. “Comportement Des Enrobés Bitumineux, Passage Du Domaine Fréquentiel Au Domaine Temporel.” *Compte-Rendu de Recherche, Laboratoire Central Des Ponts et Chaussées - Nantes*.
- Piau, J. M. and P. Hornych. 2002. “Towards Computation Tools for the Assessment of Rutting of Flexible Pavements.” *BCRA, Lisbonne, Pp.* 57 –74.
- Pijaudier-Cabot, G. and Z. P. Bazant. 1987. “Nonlocal Damage Theory.” *Journal of Engineering Mechanics* 113(10):1512–33.
- Pinzón, Eduardo Castañeda and Christian Such. 2004. “Evaluation of Moisture Sensitivity of Bituminous Mixtures by a Complex Modulus Approach.” *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board* 1891(1):62–67.
- Pommier, S., A. Gravouil, N. Moes, and A. Combescure. 2009. “La Simulation Numérique de La Propagation Des Fissures : Milieux Tridimensionnels, Fonctions de Niveau, Éléments Finis Étendus et Critères Énergétiques.” *Edition Hermes - Lavoisier*.
- Pronk, Ac. 2003. “Revival of the Huet-Sayegh Response Model-Notes on the Huet-Sayegh Rheological Model.”
- Raab, Christiane, Manfred N. Partl, and A. O. Abd El Halim. 2012. “Experimental Investigations of Moisture Damage in Asphalt.” *International Journal of Pavement Research and Technology* 5(3):133–41.
- Ramsamooj, D. V. 1994. “Fatigue Cracking and Rutting in Flexible Pavements.” *Presented at the Fracture Mechanics Applied to Geotechnical Engineering, ASCE, Pp.* 132–146.
- Rastiello, G., N. Moës, and C. Comi. 2016. “Bi-Dissipative Thick Level Set (TLS) Damage
-

-
- Model for Quasi-Brittle Materials.”
- Rastiello, Giuseppe, Cédric Giry, Fabrice Gatuingt, and Rodrigue Desmorat. 2018. “From Diffuse Damage to Strain Localization from an Eikonal Non-Local (ENL) Continuum Damage Model with Evolving Internal Length.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 331:650–74.
- RILEM Technical Committee 50-FMC. 1985. “Determination of the Fracture Energy of Mortar and Concrete by Means of Three-Point Bend Tests on Notched Beams.” *Materials and Structures* 18(4):287–90.
- Rodríguez-Ferran, Antonio, Irene Morata, and Antonio Huerta. 2005. “A New Damage Model Based on Non-Local Displacements.” *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 29(5):473–93.
- Rowe, Geoffrey M. and M. J. Sharrock. 2011. “Alternate Shift Factor Relationship for Describing Temperature Dependency of Viscoelastic Behavior of Asphalt Materials.” *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board* 2207(1):125–35.
- Safari, Farinaz, Jongsub Lee, Luis Alberto Hermann Do Nascimento, Cassie Hintz, and Y. Richard Kim. 2014. “Implications of Warm-Mix Asphalt on Long Term Oxidative Aging and Fatigue Performance of Asphalt Binders and Mixtures.” *Asphalt Paving Technology: Association of Asphalt Paving Technologists-Proceedings of the Technical Sessions* 83(January):143–69.
- Salençon, J. 1983. “Viscoélasticité.” *Cours de Calcul Des Structures Anélastiques. Paris : Presse de l'Ecole Nationale Des Ponts et Chaussées.*
- Salençon, J. 2009. *Viscoélasticité Pour Le Calcul Des Structures.*
- Salzman, Alexis, Nicolas Moës, and Nicolas Chevaugeon. 2016. “On Use of the Thick Level Set Method in 3D Quasi-Static Crack Simulation of Quasi-Brittle Material.” *International Journal of Fracture* 202(1):21–49.
- Sayegh, G. 1967. “Viscoelastic Properties of Bituminous Mixtures.” *2nd International Conference on the Structural Design of Asphalt Pavements. University of Michigan, Ann Arbor* 743–55.
- Schapery, R. A. 1981. “On Viscoelastic Deformation and Failure Behavior of Composite Materials with Distributed Flaws.” *American Society of Mechanical Engineers* (December):5–20.
- Schapery, R. A. 1987. “Deformation and Fracture Characterization of Inelastic Composite Materials Using Potentials.” *Polymer Engineering & Science* 27(1):63–76.
- Schapery, R. A. 1997. “Nonlinear Viscoelastic and Viscoplastic Constitutive Equations Based on Thermodynamics.”
- Schwarzl, F. and A. J. Staverman. 1952. “Time Temperature Dependence of Linear Viscoelastic Behavior.” *Journal of Applied Physics*, 23: 838.
- Sethian, J. A. 1996. “A Fast Marching Level Set Method for Monotonically Advancing Fronts.” *Proceedings of the National Academy of Sciences* 93(4):1591–95.
- SETRA. 2011. “L’impact Des Fondants Routiers Sur l’environnement, État Des Connaissances et Pistes d’actions.” *Economie Environnement Conception* (94):24.
-

-
- Sidoroff, F. 1976. “Variables Internes En Viscoélasticité et Viscoplasticité.” *Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie*.
- Sohm, Juliette. 2013. “Prédiction Des Déformations Permanentes Des Matériaux Bitumineux.” *Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Nantes*.
- Stolz, Claude and Nicolas Moës. 2012. “A New Model of Damage: A Moving Thick Layer Approach.” *International Journal of Fracture* 174(1):49–60.
- Tabaković, Amir, Aleksandar Karač, Alojz Ivanković, Amanda Gibney, Ciarán McNally, and Michael D. Gilchrist. 2010. “Modelling the Quasi-Static Behaviour of Bituminous Material Using a Cohesive Zone Model.” *Engineering Fracture Mechanics* 77(13):2403–18.
- Tschoegl, Nicholas W. 1989. *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior*. edited by Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Underwood, B. Shane. 2016. “A Continuum Damage Model for Asphalt Cement and Asphalt Mastic Fatigue.” *International Journal of Fatigue* 82:387–401.
- Underwood, B. Shane, Y. Richard Kim, and Murthy N. Guddati. 2010. “Improved Calculation Method of Damage Parameter in Viscoelastic Continuum Damage Model.” *International Journal of Pavement Engineering* 11(6):459–76.
- Van, Thang VU. 2017. “Etude Expérimentale et Numérique Du Comportement Au Gel et Au Dégel Des Enrobés Bitumineux Partiellement Saturés-Application à l’interprétation de Dégénérescences Subites de Chaussées Bitumineuses En Période Hivernale.” *Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Nantes*.
- Wagoner, M. P., W. G. Buttlar, and G. H. Paulino. 2005a. “Development of a Single-Edge Notched Beam Test for Asphalt Concrete Mixtures.” *Journal of Testing and Evaluation* 33(6):12579.
- Wagoner, M. P., W. G. Buttlar, and G. H. Paulino. 2005b. “Disk-Shaped Compact Tension Test for Asphalt Concrete Fracture.” *Experimental Mechanics* 45(3):270–77.
- Wagoner, Michael, William Buttlar, Glaucio Paulino, and Philip Blankenship. 2007. “Investigation of the Fracture Resistance of Hot-Mix Asphalt Concrete Using a Disk-Shaped Compact Tension Test.” *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board* 1929:183–92.
- Walubita, Lubinda F., Geoffrey S. Simate, and Jeongho Oh. 2010. “Characterising the Ductility and Fatigue Crack Resistance Potential of Asphalt Mixes Based on the Laboratory Direct Tensile Strength Test.” *Journal of the South African Institution of Civil Engineering* 52(2):31–40.
- Wen, Haifang and Hussain Bahia. 2009. “Characterizing Fatigue of Asphalt Binders with Viscoelastic Continuum Damage Mechanics.” *Transportation Research Record* (2126):55–62.
- Westergaard, H. M. 1939. “Bearing Pressures and Cracks. Journal of Applied Mechanics.” *Journal of Applied Mechanics*.
- Williams, Malcolm L., Robert F. Landel, and John D. Ferry. 1955. “The Temperature Dependence of Relaxation Mechanisms in Amorphous Polymers and Other Glass-Forming Liquids.” *Journal of the American Chemical Society* 77(14):3701–7.
-

- Wohler, A. 1860. “Versuche Über Die Festigkeit Der Eisebahnwagen- Achsen.” *Zeitschrift Für Bauwesen*.
- Wohler, A. 1870. “Über Die Festigkeitsversuche Mit Eisen Und Stahl.” *Zeitschrift Für Bauwesen*.
- Xu, X. P. and A. Needleman. 1994. “Numerical Simulations of Fast Crack Growth in Brittle Solids.” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 42(9):1397–1434.
- Yoon, Chongho and David H. Allen. 1999. “Damage Dependent Constitutive Behavior and Energy Release Rate for a Cohesive Zone in a Thermoviscoelastic Solid.” *International Journal of Fracture* 96(1):55–74.
- Zghal, J., K. Moreau, N. Moës, D. Leguillon, and C. Stolz. 2018. “Analysis of the Failure at Notches and Cavities in Quasi-Brittle Media Using the Thick Level Set Damage Model and Comparison with the Coupled Criterion.” *International Journal of Fracture* 211(1–2):253–80.

Titre : Modélisation de la fissuration en milieu viscoélastique par approche Thick Level Set pour application au cas des enrobés bitumineux.

Mots clés : Thermo-viscoélasticité, Endommagement, Fissuration, Thick Level Set, Méthode des éléments Finis, Enrobé bitumineux.

Résumé : La fissuration des couches d'enrobé bitumineux (EB) est un mode de dégradation majeur des chaussées, dont la compréhension des divers mécanismes et facteurs responsables nécessite entre autres le développement de modélisations théoriques et d'outils numériques. Dans ce cadre cette thèse s'intéresse à la fissuration des matériaux à rhéologie thermo-viscoélastique. Un modèle d'endommagement local est ainsi développé en se basant sur le principe de contraintes effectives et la loi rhéologique de Poynting-Thomson. Le critère d'endommagement adopté repose sur le taux de restitution d'énergie élastique. Ce modèle est ensuite régularisé par l'approche Thick Level Set (TLS). L'étude semi-analytique d'une barre 1D en traction monotone

directe permet d'investiguer l'aptitude de ce modèle à reproduire les principales observations expérimentales faites sur EB. Un algorithme de calcul par méthode aux éléments finis permettant alors d'étendre la résolution au cas de problèmes 2D est proposé et implémenté dans le code de calcul eXlibris de l'ECN. Nous montrons la capacité de cet outil à simuler l'initiation et la propagation de fissure avec endommagement d'une poutre viscoélastique chargée en flexion trois points. Les simulations rendent compte du caractère plus ou moins fragile/ductile des résultats d'essais observés sur EB en fonction de la température du matériau et de la vitesse de chargement. Ces travaux offrent ainsi une base théorique et numérique pour de futures applications en Mécanique des Chaussées.

Title : Modeling of fracture in viscoelastic medium using the Thick Level Set approach for application to bituminous materials.

Keywords : Thermo-viscoelasticity, Damage, fracture, Thick Level Set (TLS), Finite elements method, Bituminous mixtures.

Abstract : Fracture of asphalt concrete (AC) layers is a major mode of deterioration in pavements, whose understanding of the various mechanisms requires the development of theoretical models and numerical tools. In this context, the research focuses on damage and fracture in thermo-viscoelastic materials. Hence, a local damage model is developed based on the principle of effective stresses and the Poynting-Thomson rheological law. The damage criterion considered relies on the elastic energy release rate. This model is then regularized according to the Thick Level Set (TLS) approach. The semi-analytical study of the 1D rod subjected to monotonous direct tension is performed to investigate the ability of the model to

mimic the main experimental observations made for AC materials. An algorithm dedicated to the finite element solution of 2D problems is proposed and implemented subsequently in the eXlibris numerical code developed at ECN. The potential of this model to simulate damage and crack growth from initiation to collapse is demonstrated through the example of a viscoelastic beam under three-point bending test loading conditions. The simulations reflect the more or less brittle/ductile nature of the test results observed on AC materials depending on temperature and the loading rate. This work offers a theoretical and numerical basis for future applications in pavement mechanics.