



HAL
open science

Les textures magnétiques pour la supraconductivité topologique

Maxime Garnier

► **To cite this version:**

Maxime Garnier. Les textures magnétiques pour la supraconductivité topologique. Supraconductivité [cond-mat.supr-con]. Université Paris-Saclay, 2020. Français. NNT : 2020UPASP027 . tel-03028260

HAL Id: tel-03028260

<https://theses.hal.science/tel-03028260v1>

Submitted on 27 Nov 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Les textures magnétiques pour la supraconductivité topologique

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay

École doctorale n° 564, Physique en Ile-de-France (EDPIF)
Spécialité de doctorat : Physique
Unité de recherche : Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire de
Physique des Solides, 91405, Orsay, France.
Réfèrent : Faculté des sciences d'Orsay

Thèse présentée et soutenue à Orsay, le 2 octobre 2020, par

Maxime GARNIER

Composition du jury:

André THIAVILLE

Directeur de recherche CNRS,
Laboratoire de Physique des Solides

Jérôme CAYSSOL

Professeur, Université de Bordeaux

Julia MEYER

Professeure, Université Grenoble-Alpes

Bernd BRAUNECKER

Lecturer, Université de Saint-Andrews

Karyn LE HUR

Directrice de recherche CNRS,
Centre de Physique Théorique, École Polytechnique

Pascal SIMON

Professeur, Université Paris-Sud

Andrej MESAROS

Chargé de recherche CNRS,
Laboratoire de Physique des Solides

Président du jury

Rapporteur & examinateur

Rapporteuse & examinatrice

Examineur

Examinatrice

Directeur de thèse

Invité

« Avec de la méthode et de la logique on peut arriver à tout aussi bien qu'à rien. »
Pierre Dac (1893-1975)

« Avec un escalier prévu pour la montée on réussit souvent à monter plus bas qu'on ne serait
descendu avec un escalier prévu pour la descente. »
Devise Shadok

TABLE DES MATIÈRES

	Page
Avant-propos et remerciements	1
1 Introduction : supraconductivité, magnétisme et topologie	5
1.1 Introduction à la supraconductivité	5
1.2 Supraconductivité et magnétisme	7
1.3 Brève introduction à la topologie en physique de la matière condensée	10
1.4 Plan de la thèse	13
2 Supraconductivité topologique et fermion de Majorana	15
2.1 Introduction, formalisme et symétries	15
2.2 Le modèle de Kitaev	23
2.3 Vers un supraconducteur en onde p réaliste : le modèle Rashba	31
2.4 Propriétés recherchées et stratégies expérimentales	38
2.5 Pourquoi les textures magnétiques?	46
3 Les skyrmions magnétiques	51
3.1 Introduction	51
3.2 Définition et origines	51
3.3 Topologie et conséquences	55
3.4 Réalisations expérimentales du skyrmion et de ses généralisations	58
4 Les skyrmions magnétiques pour la supraconductivité topologique	61
4.1 Introduction	61
4.2 Position du problème	61
4.3 Phase topologique induite par le skyrmion	63
4.4 Analyse de la phase topologique : du disque au cylindre	68
4.5 Robustesse des états de bord	76
4.6 Perspectives expérimentales	83
5 Autour des effets orbitaux	85
5.1 Introduction et motivation – couplage magnéto-électrique	85

TABLE DES MATIÈRES

5.2	Magnétostatique d'un skyrmion de Néel	87
5.3	Influence des effets orbitaux sur la phase topologique	95
6	Le rôle des excitations magnétiques	99
6.1	Introduction et motivation	99
6.2	Modélisation du système et ondes de spin	101
6.3	Projection sur le secteur de basse énergie	103
6.4	Théorie de perturbations au second ordre	107
6.5	Conclusion et perspectives	115
7	Conclusion générale	117
A	Diagonalisation du modèle Rashba	119
B	État lié de Majorana au cœur du skyrmion	121
B.1	Généralités	121
B.2	Fonction d'onde de l'état lié de Majorana au cœur du skyrmion	122
C	Expression exacte de l'induction magnétique créée par le skyrmion	127
	Bibliographie	131

AVANT-PROPOS ET REMERCIEMENTS

De la nécessité de la réflexivité

Chose difficile s'il en est que de condenser trois années de travail, de réflexions et de rencontres en un seul document écrit. D'autant plus que l'écriture de ce document, le « manuscrit » de thèse, est un exercice codifié et contraint dans sa forme. De mon point de vue, il ne s'agit pas seulement de rapporter des résultats de calculs mais aussi de les réinscrire dans leur contexte de production, entre autres scientifique, pour pouvoir retracer le parcours intellectuel qui y a mené. Par ailleurs, un tel travail fait nécessairement œuvre de relecture *a posteriori* de la période et du cheminement si bien que la linéarité apparente de la présentation est, en partie, un artefact. Ces observations peuvent sonner comme une évidence mais il me semble néanmoins important de le rappeler ici, surtout dans une discipline où beaucoup des productions sont écrites du « point de vue de nulle part », illusion dont les processus socio-historiques de formation sont d'ailleurs bien documentés par les historiens des sciences, des savoirs et des techniques¹.

Pour continuer à expliciter ma conception de l'écriture d'un tel document, il me semble que la question du public visé mérite d'être éclaircie. En effet, si les premiers destinataires sont les membres du jury de thèse, et en particuliers les rapporteurs, les lecteurs les plus attentifs sont de fait les quelques étudiants commençant leurs recherches sur un sujet proche. De là ma conception de l'écriture : allier prise de recul, pédagogie, résultats et perspectives de recherche, le tout en essayant, dans les limites de l'exercice imposé, de montrer les conditions de production de ce discours, ce qui se résume souvent à la mise en lumière de subtilités souvent omises.

1. Le lecteur peut se référer par exemple à Christian Licoppe, *La formation de la pratique scientifique. Le discours de l'expérience en France et en Angleterre (1630-1820)*, Paris, La Découverte, 1996 et Daston, Lorraine J. & Peter L. Galison, *Objectivity*, New York, Zone Books, 2007.

Remerciements

Mes premiers remerciements vont bien évidemment à mon directeur Pascal Simon ainsi qu'à Andrej Mesaros pour ces trois années de collaboration. Puis, je tiens à remercier tous les membres du jury pour avoir accepté d'y participer et encore plus particulièrement Jérôme Cayssol et Julia Meyer pour avoir accepté la tâche supplémentaire de rapporteurs de ce travail. Cette expérience de recherche n'aurait pas été la même sans l'expérience, l'accessibilité et la bonne humeur de tous les membres du groupe Théorie du LPS, et en particulier Marc Gabay qui m'a beaucoup appris. De raclettes ratées en discussions scientifiques en passant par des moments « Shadokiens », la vie sociale du groupe, bien que fluctuante, a toujours joué un rôle important. A ce titre, il est bien dommage que les anciens doctorants du groupe Sergueï, Vardan et Manali le quittent juste quand je le rejoignais... mais l'arrivée de nouveaux doctorants dans d'autres équipes a pu soulager la peine de les voir partir.

En dehors du groupe théorie et du laboratoire, j'ai beaucoup apprécié pouvoir discuter avec les expérimentateurs Tristan Cren, Christophe Brun, Alexandra Palacio-Morales, Sophie Guéron, Hélène Bouchiat, Marco Aprili, Stanislas Rohart et André Thiaville. Durant ces trois années, j'ai aussi eu l'opportunité de participer à plusieurs écoles et celle de Capri en 2019 sur le transport dans les nanostructures me laissera un souvenir tout particulier pour la qualité de ses intervenants et les bons moments passés avec tous les participants et Anastasiia, Max, Linsey et Yaroslav plus spécialement.

Cette thèse aurait été totalement différente si je n'avais pas eu la chance d'enseigner l'histoire des sciences sous la tutelle de Virginie Fonteneau et Delphine Berdah du Groupe d'Histoire et de Diffusion des Sciences d'Orsay (GHDSO). Merci pour cette opportunité et pour tous ces bons moments qui, je l'espère, ne s'arrêteront pas ici. Merci aussi à Marie I. et aux autres collègues d'enseignement Florian, Thomas et Albertine. Il est bon de voir que l'histoire des sciences est enseignée par des gens comme vous!

Sur une note encore un peu plus personnelle, j'aimerais mentionner aussi toutes celles et ceux qui ont participé à mon épanouissement en dehors de la thèse. En premier lieu, tous les membres du dōjō 美空館 (bikukan) avec qui c'est un plaisir de suivre la voie du budō karate. Plusieurs autres personnes ont aussi participé à ma prise de recul et notamment à penser « l'après thèse » dans un contexte particulier dû à l'épidémie de coronavirus. Merci à elles et qu'elles sachent l'estime que je leur porte. Cette liste contient des amis de plus ou moins longue date, des chercheurs et chercheuses en sciences sociales mais pas seulement et quelques personnes que je considère comme des mentors. Merci donc à Mathilde Auclain, Aurore Duvoisin, Margot Lyautey, Antoine Vidon, José Moran, Marie Humbert, Jill Chevalier, Emanuel Bertrand, Charlotte Bigg, Jean-Louis Fabiani, Volny Fages, Arnaud Saint-Martin et Tamara Ben Ari.

Pour finir, des remerciements tous particuliers vont à Pascale Foury et Virginie Fonteneau pour leur disponibilité, leur soutien et leurs conseils avisés. Merci à toute ma famille pour avoir

créé et contribué aux bonnes conditions de réalisation de ce travail et plus particulièrement à Chloé qui me porte et me supporte depuis quelques années déjà et qui, je l'espère, ne font que préfigurer celles qui viennent.

INTRODUCTION : SUPRACONDUCTIVITÉ, MAGNÉTISME ET TOPOLOGIE

Ce chapitre est une introduction essentiellement qualitative à la supraconductivité et aux propriétés magnétiques des supraconducteurs afin de remettre en contexte les systèmes étudiés dans les chapitres suivants. On introduit aussi quelques concepts génériques de topologie de manière à fixer les idées et en remettant les détails techniques à plus tard.

1.1 Introduction à la supraconductivité

La supraconductivité est un état électronique de la matière défini par deux propriétés : une résistivité électrique nulle et l'expulsion des lignes de champ magnétique. La première de ces caractéristiques a été découverte en 1911 par H. Kammerlingh-Onnes et son équipe à Leyde et qui lui vaudra le prix Nobel de physique en 1913. La seconde porte aujourd'hui le nom d'effet Meissner-Ochsenfeld d'après ses découvreurs en 1933 ([Meissner et Ochsenfeld, 1933](#)). Ces deux phénomènes ne se produisent qu'en dessous d'une certaine température, appelé température critique, qui est de l'ordre du degré Kelvin pour les métaux élémentaires étudiés alors (plomb, mercure, ...).

Si l'électrodynamique était assez bien comprise d'un point de vue phénoménologique avec les travaux des frères London en 1935 ([London et London, 1935](#)), la première théorie microscopique, dite BCS, est due à J. Bardeen, L. N. Cooper et J. R. Schrieffer en 1957 (et qui leur vaudra le prix Nobel en 1972) qui explique l'état supraconducteur par la formation d'un condensat de paires d'électrons au niveau de Fermi, les paires de Cooper, qui est séparé de ses états excités par un $gap^1 \Delta_0$. Ce gap, qui est en fait une quantité complexe, est par ailleurs le

1. L'utilisation du mot *gap* est l'un des seuls anglicismes qu'on s'autorisera dans cette thèse. Son utilisation est

paramètre d'ordre de la transition au sens de la théorie de Landau des transitions de phase.

Cependant, il n'est pas *a priori* évident que des électrons puissent former des paires à cause de l'interaction répulsive de Coulomb. La théorie BCS montre qu'un potentiel d'interaction attractif peut se faire jour en considérant à la fois la répulsion coulombienne et l'interaction des électrons avec les excitations du réseau ionique : les phonons (Bardeen et al., 1957). Depuis, de nouveaux mécanismes d'appariement ont été considérés. Entre autres, Kohn et Luttinger ont prouvé qu'une interaction électronique purement répulsive pouvait aussi créer des paires de Cooper (Kohn et Luttinger, 1965) et Takada a montré l'émergence de supraconductivité en présence de plasmons (Takada, 1992). Par ailleurs, les fluctuations de spin peuvent aussi jouer le rôle de "colle" à électrons (Sigrist, 2005) de même que, et plus récemment, les fluctuations de valence (Adhikary et Das, 2019). En outre, si l'électrostatique impose de trouver un mécanisme d'appariement pour les électrons, leur nature fermionique impose que la fonction d'onde totale de la paire de Cooper soit antisymétrique sous l'échange des deux particules. La partie spatiale de la fonction d'onde peut-être composée en une partie radiale et une partie angulaire qui, dans le cas de l'espace libre, correspond aux harmoniques sphériques (qui correspondent aux représentations irréductibles du groupe des rotations classées par leur moment cinétique orbital $L = 0, 1, 2, \dots$ aussi dénotée par les lettres s, p, d, etc). Le comportement de ces fonctions sous l'inversion (l'échange des coordonnées des deux électrons) est dicté par la parité de L . Ainsi, il suffit de combiner cette partie radiale de la fonction d'onde avec l'un des quatre états de base d'un système de deux spin- $1/2$: l'unique singulet (antisymétrique) et les trois états triplets (symétriques) de telle sorte que la fonction d'onde totale soit antisymétrique. Il est donc possible de former des paires de Cooper de moment cinétique orbital pair (resp. impair) dans un état de spin singulet (resp. triplet). Ces différentes possibilités sont illustrées Fig. 1.1.

Par ailleurs, dans un solide, la présence du réseau cristallin réduit les symétries d'espace si bien qu'il ne faut plus considérer les harmoniques sphériques comme fonctions de base mais d'autres fonctions qui se transforment selon les représentations irréductibles du groupe de symétrie du cristal. Ces fonctions sont déterminées et classifiées grâce à la théorie des groupes (Mineev et Samokhin, 1999; Sigrist, 2005; Smidman et al., 2017) et ne changent pas fondamentalement les règles d'appariement évoquées plus haut. Dès lors, on appelle *supraconductivité non-conventionnelle*, tout état dont la partie orbitale des paires de Cooper ne se transforme pas selon la représentation irréductible triviale (qui correspond à l'onde s dans le cas de l'espace libre) (Mineev et Samokhin, 1999; Sigrist, 2005; Smidman et al., 2017). Pour terminer, il est possible d'obtenir des états supraconducteurs où états singulet et triplets sont mélangés en brisant la symétrie d'inversion (Edelstein, 1989; Mineev et Samokhin, 1999; Gor'kov et Rashba, 2001). En effet dans le cas où la symétrie d'inversion est brisée, la fonction d'onde totale de la paire de Cooper n'est pas tenue d'être un état propre de l'opération d'inversion, elle peut donc combiner plusieurs possibilités (s + singulet et p + triplet par exemple). La plupart des

bien plus commode que le terme français de « bande interdite » si bien qu'on omettra de l'écrire en italique dans la suite. On utilisera par ailleurs des expressions « anglaises » du type « le spectre est gappé ».



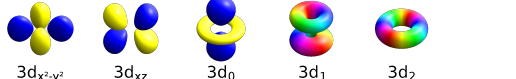

Espace	Spin
 $1s_0$	$ S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\rangle)$
 $2p_x$ $2p_0$ $2p_1$	$ T\rangle = \downarrow\downarrow\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow\rangle + \downarrow\uparrow\rangle), \uparrow\uparrow\rangle$
 $3d_{x^2-y^2}$ $3d_{xz}$ $3d_0$ $3d_1$ $3d_2$	$ S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\rangle)$
 $4f_{x(x^2-3y^2)}$ $4f_{(x^2-y^2)z}$ $4f_{xz^2}$ $4f_0$ $4f_1$ $4f_2$ $4f_3$	$ T\rangle = \downarrow\downarrow\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow\rangle + \downarrow\uparrow\rangle), \uparrow\uparrow\rangle$

FIGURE 1.1 – Illustration des possibilités d'appariement électronique. Sont représentées à gauche les orbitales hydrogénoïdes (pour simplifier) et à droite les états de spin autorisés où $|S\rangle$ désigne l'état singulet et $|T\rangle$ les états triplets. Source de l'illustration des orbitales : [hyperlien](#).

métaux légers qui deviennent supraconducteurs à basse température sont composés de paires de Cooper en onde s (comme ${}_{13}\text{Al}$) mais il existe aussi des classes de matériaux avec un ordre supraconducteur en onde d (par exemple) comme les cuprates ($\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$, YBaCu_3O_7 , $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$, ...) qui ont des températures critiques. La figure Fig. 1.2 présente différents matériaux supraconducteurs en fonction de leur date de découverte et de leur température critique.

1.2 Supraconductivité et magnétisme

1.2.1 Propriétés magnétiques

L'existence de l'effet Meissner laisse supposer des relations subtiles entre supraconductivité et magnétisme. Pour aller plus loin, il est nécessaire d'introduire deux longueurs caractéristiques de l'état supraconducteur :

- la longueur de pénétration de London λ_L qui caractérise la décroissance du champ magnétique \mathbf{B} dans l'échantillon selon l'équation de London

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B} = 0 \quad (1.1)$$

- la longueur de cohérence ξ qui décrit la taille typique des paires de Cooper

Selon le rapport de ces deux grandeurs, appelé paramètre de Ginzburg-Landau $\kappa = \lambda_L/\xi$, on distingue les supraconducteurs de type I ($\kappa < 1/\sqrt{2}$) des supraconducteurs de type II ($\kappa > 1/\sqrt{2}$). Ces deux types de supraconducteurs présentent des diagrammes de phase en

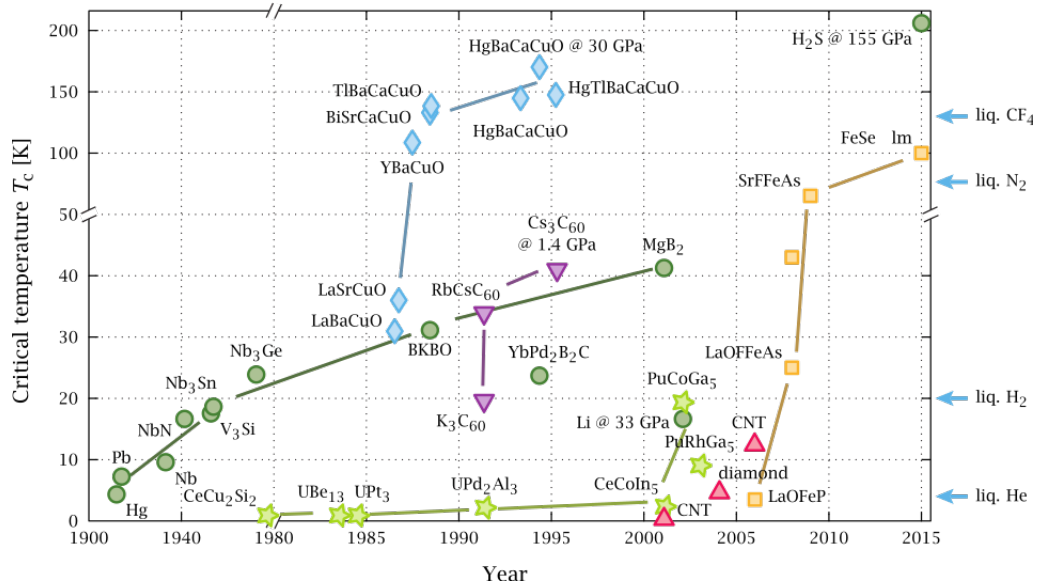


FIGURE 1.2 – Principaux matériaux supraconducteurs représentés en fonction de leur date de découverte et de leur température critique. Les supraconducteurs conventionnels sont représentés par des points verts, les cuprates par des losanges bleus et les supraconducteurs à base de fer par les carrés oranges. Figure extraite de [Jensen Ray \(2015\)](#).

champ magnétique extérieur différent comme illustré Fig. 1.3. En effet, un supraconducteur de type I (*cf.* Fig. 1.3(a)) présentera un effet Meissner jusqu'à un champ critique H_c au dessus duquel l'état normal (c'est-à-dire non supraconducteur) devient énergétiquement favorable. Pour un supraconducteur de type II (*cf.* Fig. 1.3(b)), il existe une phase mixte entre les phases Meissner et normale délimitée par deux champ critiques $H_{c1} = \phi_0 / (2\pi\lambda_L^2)$ et $H_{c2} = \phi_0 / (2\pi\xi^2)$ ([Tinkham, 1996](#)). Dans cette phase mixte, le flux magnétique pénètre l'échantillon sous la forme de régions normales de taille caractéristique ξ^2 appelées vortex. Ces derniers sont illustrés Fig. 1.3(c).

Les diagrammes de phases présentés Fig. 1.3 ne prennent en compte que les effets orbitaux. Ainsi, le champ critique H_{c2} décrit la brisure des paires de Cooper sous l'effet de la force de Lorentz causée par le champ magnétique ([Huxley, 2007](#); [Baumard, 2019](#)). Même si les paires de Cooper conventionnelles (en onde s) ne sont pas magnétiquement actives ($S^{\text{tot}} = S_z^{\text{tot}} = 0$), un champ magnétique extérieur va avoir tendance à polariser en spin les électrons dont elles sont constituées et donc à les détruire. Ce cas de figure, appelé limite de Clogston-Chandrasekhar (ou limite de Pauli, [Clogston \(1962\)](#); [Chandrasekhar \(1962\)](#)) permet de déterminer un autre champ critique H_P dû aux effets de spin à partir duquel la supraconductivité est défavorisée par rapport au métal polarisé en spin :

$$H_P = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Delta_0}{\mu_B} \quad (1.2)$$

où Δ_0 est le gap supraconducteur mentionné précédemment et μ_B est le magnéton de Bohr.

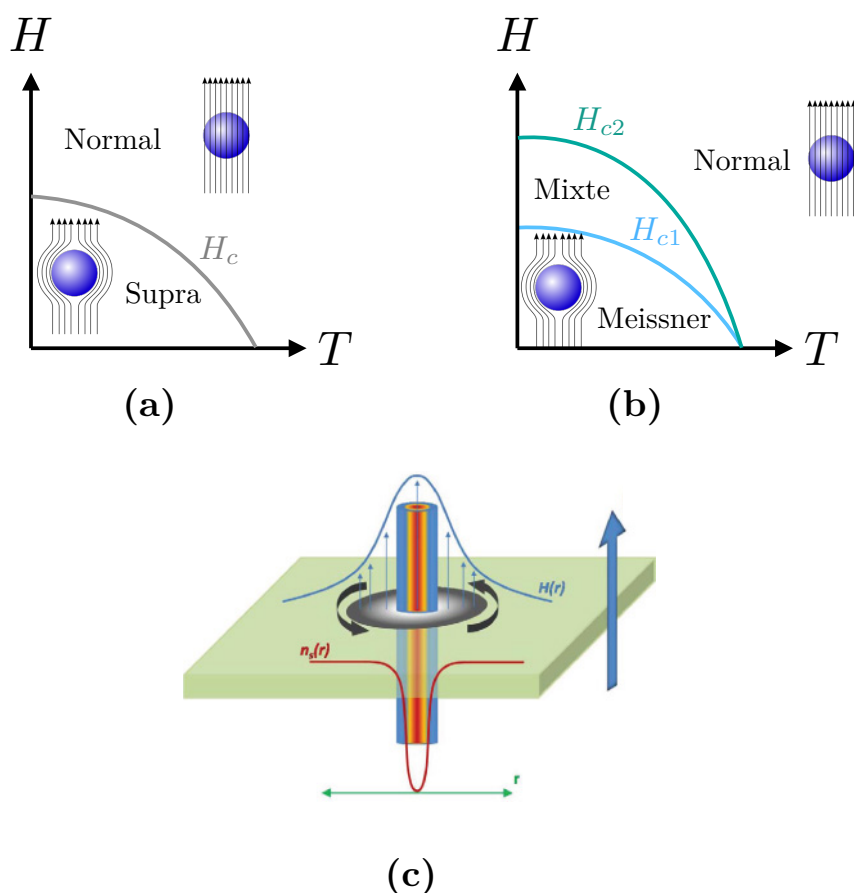


FIGURE 1.3 – Diagramme de phase qualitatif dans le plan (T, H) d'un supraconducteur de type I (a) et de type II (b). Les encarts représentant l'état Meissner et l'état normal sont adaptés de [hyperlien](#). (c) Représentation schématique d'un vortex supraconducteur. Le flux magnétique du champ H pénètre le supraconducteur dans une zone où la densité d'électrons supraconducteurs notée n_s s'annule. Ceci impose que des courants circulent autour du cœur du vortex. Figure adaptée de [Suderow et al. \(2014\)](#).

1.2.2 Compétition et coopération entre magnétisme et supraconductivité

Malgré l'apparente opposition entre magnétisme et supraconductivité comme l'illustre l'existence des deux champs critiques H_{c2} et H_P , il existe de nombreux cas où la compétition entre les deux ordres est plus subtile et où ils peuvent coopérer pour donner lieu à de nouvelles phases (voir par exemple [Abrikosov, 1988](#), chap. 21). Parmi ces phases on trouve les supraconducteurs ferromagnétiques ([Buzdin et al., 1984](#); [Kakani et Upadhyaya, 1988](#)) où magnétisme et supraconductivité sont en compétition et s'influencent mutuellement. D'un point de vue microscopique, le magnétisme est un des ingrédients menant à des états supraconducteurs inhomogènes de type Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov (FFLO) ([Fulde et Ferrell, 1964](#); [Larkin et Ovchinnikov, 1964](#); [Mora, 2004](#); [Baumard, 2019](#)). Les phases FFLO sont caractérisées par un

condensat de paires de Cooper dont le centre de masse développe une quantité de mouvement \mathbf{q} non-nulle du fait de la levée de dégénérescence des états de spin opposés. L'existence de $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ implique un paramètre d'ordre supraconducteur $\Delta(\mathbf{r})$ qui varie spatialement et dont la forme la plus simple est $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ (Fulde et Ferrell, 1964) où seule la *phase* dépend de la position \mathbf{r} (en présence de couplage spin-orbite de type Rashba, cette phase est appelée phase hélicale (Edelstein, 1989; Agterberg et Kaur, 2007)). Par ailleurs, Larkin et Ovchinnikov (1964) ont montré que l'*amplitude* pouvait elle aussi varier spatialement avec un paramètre d'ordre de la forme $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0 \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})$. Dans cette thèse, on ne s'intéresse néanmoins pas au problème d'un point de vue microscopique. On considère la limite où le supraconducteur et le matériau magnétique existent indépendamment l'un de l'autre et sont mis en contact. On supposera toujours que le supraconducteur est suffisamment robuste pour ne pas être affecté par le reste du système et qu'il agit comme un réservoir de paires de Cooper. Ainsi, on ne s'intéresse qu'à une mince région entre les deux matériaux où les propriétés des deux matériaux coexistent² : c'est l'effet de proximité.

L'étude de l'effet de proximité entre un supraconducteur et un ferromagnétique est aujourd'hui un champ de recherche actif du fait de la combinaison possible des effets spintroniques (courants de spin, magnétorésistance, ...) avec les supercourants qui par définition, ne dissipent pas d'énergie (Buzdin, 2005; Eschrig, 2015; Linder et Robinson, 2015). Si l'approche de ce travail partage le constat que la combinaison du magnétisme et de la supraconductivité conventionnelle induit des corrélations de type triplet (voir Chapitre 2 et particulièrement Section 2.3), on insistera davantage sur les éventuelles propriétés topologiques de la phase ainsi générée que sur ses propriétés de transport de spin. L'objet du paragraphe suivant est justement de préciser ce que l'on entend par « propriétés topologiques » .

1.3 Brève introduction à la topologie en physique de la matière condensée

La topologie est avant tout un domaine des mathématiques qui étudie les caractéristiques d'objets géométriques qui sont préservées par des transformations continues. Ainsi, l'exemple canonique est celui du tore qui peut être déformé continument en une tasse³. Dans ce cas, la propriété préservée est le "nombre de trous" : l'anse de la tasse et le trou central du tore comme illustré Fig. 1.4. Ainsi, ce principe simple permet de classifier les objets en fonction d'un nombre entier, leur nombre de "trous" : un tore et une tasse sont topologiquement équivalents mais pas un tore et une sphère. Avec cet exemple simple, on anticipe que la topologie s'incarnera dans l'existence de nombres entiers caractérisants le système étudié.

En physique, les idées issues de la topologie trouvent leur application depuis plus de

2. On notera que la localisation précise de cette région dépend fortement du système étudié.

3. Pour illustrer, voir l'animation [hyperlien](#).



FIGURE 1.4 – Illustration de l’équivalence topologique de la tasse et du tore. Source : [hyperlien](#).

quarante ans dans l’étude des défauts et textures topologiques dans certaines phases ordonnées comme les systèmes de spins, les réseaux cristallins et les cristaux liquides (Mermin, 1979). On distingue les défauts des textures topologiques dans le sens où les défauts impliquent une annulation du paramètre d’ordre alors que les textures non. La figure Fig. 1.5 illustre quelques défauts et textures topologiques pour différents paramètres d’ordre.

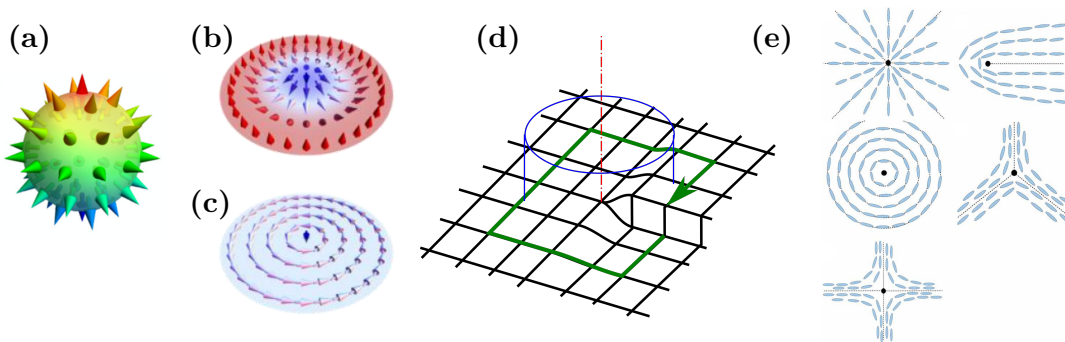


FIGURE 1.5 – Quelques défauts et textures topologiques. Cas d’un paramètre d’ordre magnétique : (a) hérisson (l’aimantation s’annule au centre), (b) skyrmion et (c) vortex. (a) est extrait de (Everschor-Sitte et al., 2018) tandis que (b) et (c) sont tirées de (Zhang et al., 2020). (d) Dislocation vis dans un réseau cristallin. Source : [hyperlien](#). (e) Cas des cristaux liquides. Image issue de Foffano et al. (2014).

Qualitativement, ces exemples sont en effet topologiques car on observe un équivalent du “nombre de trous” précédent qu’on pourrait appeler un “nombre de tours”⁴. Par ailleurs, on voit bien que changer *localement* et *continument* la configuration du paramètre d’ordre ne modifiera pas la valeur du nombre topologique. De même, les vortex supraconducteurs introduits plus haut sont un autre exemple de défaut topologique. De manière plus rigoureuse, les nombres topologiques sont des caractéristiques des transformations d’un espace initial

4. Les invariants topologiques utilisés seront définis rigoureusement plus tard.

(réel ou réciproque, le plus souvent) vers l'espace du paramètre d'ordre, que celui-ci soit un vecteur, un directeur, une phase, ... et font souvent appel au concept d'homotopie (Mermin, 1979). Il est important de noter que même s'il existe ici un paramètre d'ordre local, la topologie du défaut ou de la texture se mesure par une quantité non-locale puisque impliquant souvent une intégrale autour du défaut (par exemple).

De manière quelque peu spectaculaire, la topologie a aussi trouvé des applications dans le contexte de la théorie des bandes électroniques dans les années 1980. En effet, en 1980 von Klitzing *et al.* découvrent expérimentalement l'effet Hall quantique qui se définit par la quantification de la conductance transverse (conductance de Hall) d'un gaz bidimensionnel d'électrons soumis à un fort champ magnétique à très basse température (von Klitzing *et al.*, 1980), ce qui lui vaudra le prix Nobel de Physique en 1985. Un exemple de mesure de Hall est présentée Fig. 1.6.

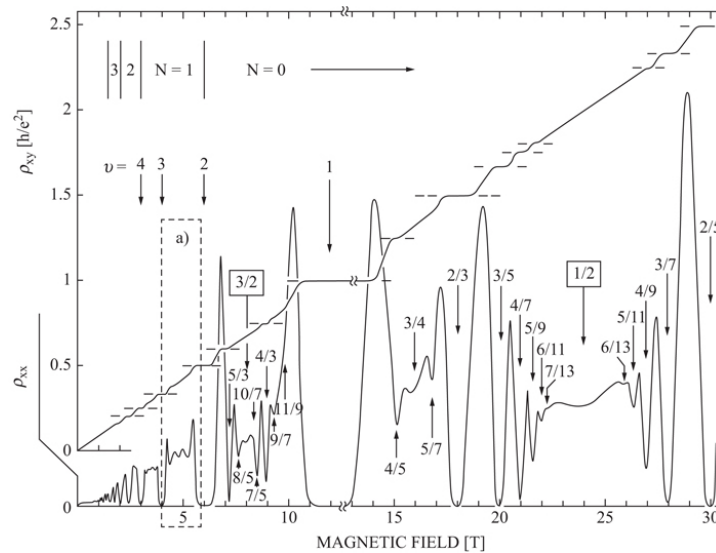


FIGURE 1.6 – Résistivité longitudinale ρ_{xx} et transverse ρ_{xy} d'un puits quantique de GaAs/AlGaAs sous champ magnétique. La quantification de la conductance transverse (de Hall) est bien visible pour certaines plages du champ. Figure extraite de Ferry *et al.* (2009).

La quantification à des valeurs entières du quantum de conductance e^2/h fut rapidement reliée à un invariant topologique, le nombre de Chern, dès 1982 (Thouless *et al.*, 1982; Niu *et al.*, 1985). Ces idées ont ensuite trouvée de nombreuses applications et généralisations dans les systèmes sans interactions (isolants de Chern, isolants topologiques, supraconducteurs topologiques, isolants topologiques cristallins, ...) et avec interactions (effet Hall quantique fractionnaire⁵, phase de Haldane dans les chaînes de spins, code torique, ...). Dans ces études, la notion de « transition de phase topologique » entre une phase topologiquement « triviale » et une autre qui ne l'est pas, bien que les deux possèdent un gap, a été introduite. Ces transitions

5. Qui vaudra le prix Nobel à Laughlin, Störmer et Tsui en 1998 (Tsui *et al.*, 1982).

impliquent nécessairement une fermeture du gap et sont caractérisées par un changement de valeur d'un invariant topologique. Cependant, elles ne peuvent pas être classifiées par la théorie de Landau des transitions de phase puisque *localement*, les deux phases sont indistinguables. L'introduction et l'étude de ce concept, parmi d'autres, a d'ailleurs été récompensé par le prix Nobel de Physique 2016 remis à Thouless, Haldane et Kosterlitz.

1.4 Plan de la thèse

Pour analyser la problématique centrale qui concerne la génération d'une phase topologique en plaçant un skyrmion magnétique en proximité d'un supraconducteur conventionnel, tous les aspects cités plus haut seront détaillés.

Dans le Chapitre 2, on s'attache à une présentation pédagogique et détaillée de la supraconductivité, de la supraconductivité topologique et du fermion de Majorana en analysant quelques-uns des modèles les plus simples. On donne aussi un rapide tour d'horizon des différentes plateformes expérimentales réalisées et envisagées pour la détection du fermion de Majorana tout en soulignant quelques-uns des problèmes actuellement rencontrés. À la lumière de ces schémas, on explicite en fin de chapitre en quoi les textures magnétiques peuvent être utiles et on présente une des premières expériences basée sur cette idée. Le court Chapitre 3 présente succinctement ce que sont les skyrmions magnétiques du point de vue théorique tout en insistant sur leurs réalisations expérimentales. L'objectif de ce chapitre est avant tout de donner les concepts de base nécessaires pour comprendre la suite de la thèse tout en donnant à voir que même si ce n'est pas notre objet principal, la physique des skyrmions et autres textures est un champ de recherche à part entière, intéressant et dynamique. On présente le travail principal, qui a donné lieu à la publication [Garnier et al. \(2019\)](#) au Chapitre 4. Celui-ci porte donc sur l'analyse d'un skyrmion magnétique placé en proximité d'un supraconducteur conventionnel. À l'aide de plusieurs approches complémentaires, on affine la compréhension et les conditions d'existence de la phase supraconductrice topologique tout en explorant sa robustesse à certaines déformations géométriques. La question des effets orbitaux est problématisée au Chapitre 5. On présente ici quelques résultats indiquant que la phase topologique résiste au couplage au potentiel vecteur généré par le skyrmion même si la question de la nucléation des vortex qui était notre objectif initial reste sans réponse. Enfin, le Chapitre 6 présente les résultats préliminaires obtenus concernant l'effet des excitations magnétiques sur les propriétés topologiques où, par souci de simplicité, on est revenu au cas unidimensionnel.

SUPRACONDUCTIVITÉ TOPOLOGIQUE ET FERMION DE MAJORANA

Dans ce chapitre, on se donne pour objectif de présenter quelques généralités et détails techniques concernant le traitement de la supraconductivité. Ceci afin de pouvoir étudier les conditions de réalisation ainsi que les propriétés de quelques phases topologiques simples qui serviront ensuite. En fin de chapitre, on se focalise sur les propriétés exotiques du fermion de Majorana ainsi que les stratégies expérimentales mises en œuvre pour le détecter. Enfin, on présente le cadre général de l'analyse plus poussée faite au Chapitre 4 qui est celui de la génération de couplage spin-orbite par une texture magnétique.

2.1 Introduction, formalisme et symétries

2.1.1 De la théorie Bardeen-Cooper-Schrieffer au Hamiltonien de Bogoliubov-de Gennes

Dans un système électronique invariant par translation sans autre degré de liberté que le spin, l'interaction la plus générale qu'il est possible d'écrire est représentée sous forme de diagramme Fig. 2.1 et a pour expression $V_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') c_{\mathbf{k}\sigma_1}^\dagger c_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}\sigma_2}^\dagger c_{-\mathbf{k}'+\mathbf{q}\sigma_3} c_{\mathbf{k}'\sigma_4}$. Les opérateurs $c_{\mathbf{k}\sigma}$ sont des opérateurs fermioniques satisfaisant les relations d'anticommutation canoniques : $\{c_{\mathbf{k}\sigma}, c_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\sigma\sigma'}$ et $\{c_{\mathbf{k}\sigma}, c_{\mathbf{k}'\sigma'}\} = \{c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger, c_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger\} = 0$. Supposant une interaction effective attractive dans un voisinage autour de la surface de Fermi (quelques mécanismes possibles ont été cités au Chapitre 1 et l'étendue du voisinage ne question dépendra de celui-ci. Pour une attraction due aux phonons, il s'agit de la fréquence de Debye ω_D), le point de départ de la théorie BCS (généralisée) est de supposer que l'instabilité supraconductrice dominante correspond au cas $\mathbf{q} = \mathbf{0}$, qui correspond à la formation de paires de Cooper de quantité de mouvement dans le centre de masse nulle. Ainsi, on étudie désormais le Hamiltonien (Mineev

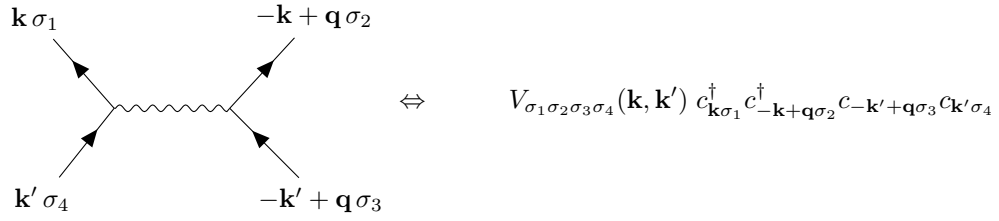


FIGURE 2.1 – Représentation diagrammatique de l’interaction la plus générale possible et expression correspondante. Tous les diagrammes ont été réalisés avec le paquet $\text{\LaTeX TikZ-Feynman}$ (Ellis, 2017).

et Samokhin, 1999; Mora, 2004; Sigrist, 2005) :

$$H = \sum_{\mathbf{k}, \sigma, \sigma'} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger h_0^{\sigma\sigma'}(\mathbf{k}) c_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4} V_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') c_{\mathbf{k}\sigma_1}^\dagger c_{-\mathbf{k}\sigma_2}^\dagger c_{-\mathbf{k}'\sigma_3} c_{\mathbf{k}'\sigma_4} \quad (2.1)$$

où $h_0(\mathbf{k})$ est le Hamiltonien à une particule. On a $h_0^{\sigma\sigma}(\mathbf{k}) = \xi_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu$ avec $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ la relation de dispersion supposées indépendante du spin et μ le potentiel chimique. On utilise la notation $h_0(\mathbf{k})$ pour autoriser l’inclusion d’un couplage spin-orbite ou un champ magnétique (par exemple) mais il est important de noter que cela peut changer la nature de l’instabilité dominante ce qui peut stabiliser des phases inhomogènes avec $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ (voir la discussion des phases FFLO au Chapitre 1 et Mora (2004); Baumard (2019) pour plus de détails). Afin de se ramener à un modèle quadratique, on introduit les opérateurs $b_{\mathbf{k}, \sigma\sigma'} = c_{-\mathbf{k}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma'}$ et on effectue une approximation de champ moyen sur le terme d’interaction en ne considérant que le canal d’appariement. Plus précisément, on écrit (Arovas et Wu, 2019) :

$$b_{\mathbf{k}, \sigma\sigma'} \approx \langle b_{\mathbf{k}, \sigma\sigma'} \rangle + \underbrace{(b_{\mathbf{k}, \sigma\sigma'} - \langle b_{\mathbf{k}, \sigma\sigma'} \rangle)}_{\delta b_{\mathbf{k}, \sigma\sigma'}} \quad (2.2)$$

En négligeant les termes d’ordre 2 en fluctuations δ , le Hamiltonien dans l’approximation de champ moyen devient :

$$H = \sum_{\mathbf{k}, \sigma, \sigma'} \xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \sigma_1, \sigma_2} \left[\Delta_{\mathbf{k}, \sigma_1 \sigma_2} c_{\mathbf{k}\sigma_1}^\dagger c_{-\mathbf{k}\sigma_2}^\dagger + \Delta_{\mathbf{k}, \sigma_1 \sigma_2}^* c_{-\mathbf{k}\sigma_2} c_{\mathbf{k}\sigma_1} \right] + K_0 \quad (2.3)$$

où la constante K_0 qu’on négligera ici vaut :

$$K_0 = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4} V_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \langle c_{\mathbf{k}\sigma_1}^\dagger c_{-\mathbf{k}\sigma_2}^\dagger \rangle \langle c_{-\mathbf{k}'\sigma_3} c_{\mathbf{k}'\sigma_4} \rangle \quad (2.4)$$

Par ailleurs, les éléments de la *matrice* $\tilde{\Delta}_{\mathbf{k}}$ satisfont les équations d’autocoherence suivantes :

$$\Delta_{\mathbf{k}, \sigma_1 \sigma_2} = \sum_{\mathbf{k}', \sigma_3, \sigma_4} V_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \langle c_{-\mathbf{k}\sigma_3} c_{\mathbf{k}\sigma_4} \rangle \quad (2.5)$$

où la valeur moyenne $\langle \dots \rangle$ est prise par rapport au Hamiltonien Eq. (2.3) que ce soit à température nulle $T = 0$ ou $T \neq 0$. On introduit maintenant la base spinorielle « de Nambu » $\Psi_{\mathbf{k}}^{\dagger} = (c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger}, c_{\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger}, c_{-\mathbf{k}\downarrow}, -c_{-\mathbf{k}\uparrow})$ et $\Psi_{\mathbf{k}} = (c_{\mathbf{k}\uparrow}, c_{\mathbf{k}\downarrow}, c_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger}, -c_{-\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger})^T$, ce qui permet d'écrire H sous la forme de Bogoliubov-de Gennes (BdG) :

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \Psi_{\mathbf{k}}^{\dagger} \mathcal{H}(\mathbf{k}) \Psi_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \text{tr} h_0(\mathbf{k}), \quad \mathcal{H}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} h_0(\mathbf{k}) & \hat{\Delta}_{\mathbf{k}} \\ \hat{\Delta}_{\mathbf{k}}^{\dagger} & -\sigma_y h_0^*(-\mathbf{k}) \sigma_y \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

où $\text{tr}(\dots)$ représente la trace dans l'espace des spins (contribution constant qu'on négligera toutefois) et on a introduit la matrice d'appariement $\hat{\Delta}_{\mathbf{k}}$ qui diffère de $\tilde{\Delta}_{\mathbf{k}}$ par le choix de base de Nambu effectué. Elles sont reliées par $\tilde{\Delta}_{\mathbf{k}} = \hat{\Delta}_{\mathbf{k}} i \sigma_y$ où σ_y est une matrice de Pauli¹. Ce choix de base particulier se révèle être particulièrement pratique puisque les deux dernières composantes (bloc « trous ») sont reliées aux deux premières (bloc « électrons ») par l'opération de renversement du temps sur laquelle on reviendra Section 2.1.2. Pour une discussion détaillée de l'importance de la symétrie de renversement du temps voir [Smidman et al. \(2017, p. 26\)](#). Tous les types d'appariement sont inclus dans la matrice $\hat{\Delta}_{\mathbf{k}}$. En effet, dans le cas où la symétrie d'inversion est respectée :

$$\hat{\Delta}_{\mathbf{k}} = \begin{cases} \Delta_S(\mathbf{k}) \mathbb{1} & \text{si singulet} \\ \Delta_T \mathbf{d}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma} & \text{si triplet} \end{cases} \quad (2.8)$$

où Δ_S et Δ_T sont les amplitudes des états singulet et triplet, respectivement. La fonction d'onde totale de la paire de Cooper devant être antisymétrique, $\Delta_S(\mathbf{k})$ est une fonction paire et le vecteur de Balian-Werthamer $\mathbf{d}(\mathbf{k})$ est impair ([Balian et Werthamer, 1963](#)). $\Delta_S(\mathbf{k})$ et $\mathbf{d}(\mathbf{k})$ peuvent encore être décomposés sur les fonctions de base des représentations irréductibles du groupe de symétrie du cristal considéré qui peuvent toutes avoir différentes amplitudes ([Mineev et Samokhin, 1999](#); [Sigrist, 2005](#)). Cependant, si la symétrie d'inversion est brisée (par l'existence de coupage spin-orbite dans h_0 par exemple), alors les paires singulet et triplet peuvent coexister et le développement sur les représentations irréductibles doit se faire sur le paramètre d'ordre supraconducteur dans la base qui diagonalise h_0 entre un état et son partenaire par renversement du temps ([Mineev et Samokhin, 1999](#); [Sergienko et Curnoe, 2004](#); [Smidman et al., 2017](#); [Scaffidi, 2017](#)).

En diagonalisant le Hamiltonien BdG $\mathcal{H}(\mathbf{k})$ défini Eq. (2.6), on obtient un gaz de fermions libres, appelés quasiparticules de Bogoliubov, qui représentent les *excitations* au dessus de l'état fondamental supraconducteur. En appelant $\gamma_{\mathbf{k}\alpha}$ avec $\alpha = \pm$ opérateurs d'annihilation

1. Dans tout la thèse les matrices de Pauli $\sigma_{x,y,z}$ sont :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

d'une quasiparticule d'énergie *positive* $E_{\mathbf{k}\alpha}$, on a alors :

$$H = \sum_{\mathbf{k}\alpha} E_{\mathbf{k}\alpha} \gamma_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger \gamma_{\mathbf{k}\alpha} + \text{const.} \quad (2.9)$$

où const. représente l'énergie de l'état fondamental qui ne nous intéresse pas ici. La diagonalisation se fait par une transformation unitaire dite de Bogoliubov qui fait que les $\gamma_{\mathbf{k}\alpha}$ sont des combinaisons linéaires des opérateurs $c_{\mathbf{k}\sigma}$ (particules) et $c_{-\mathbf{k}\sigma}^\dagger$ (trous). On ne détaille pas cette transformation dans le cas général mais on donnera des exemples pratiques sous peu. Tous ces éléments font que le Hamiltonien BdG peut être interprété comme un Hamiltonien à une particule avec quelques précautions ([Datta et Bagwell, 1999](#)).

2.1.2 Symétries du Hamiltonien de Bogoliubov-de-Gennes et classification topologique

En écrivant le Hamiltonien de Bogoliubov-de Gennes Eq. (2.6), on a artificiellement doublé le nombre de degrés de liberté du système, ce qui se voit directement sur le spineur de Nambu. En effet, on a choisi $\Psi_{\mathbf{k}} = (c_{\mathbf{k}\uparrow}, c_{\mathbf{k}\downarrow}, c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger, -c_{-\mathbf{k}\uparrow}^\dagger)^T$. Premièrement, cet espace de Nambu peut s'écrire comme le produit tensoriel d'un espace particule-trou et d'un espace de spin, ce qu'on écrira symboliquement, particule – trou \otimes spin. Dans notre cas, comme les deux espaces sont bidimensionnels, tous les opérateurs peuvent se décomposer sur les matrices de Pauli qu'on note τ pour le pseudospin particule-trou et σ pour le spin. Ainsi, on simplifie les notations en ne se préoccupant pas de la position relative des matrices τ_α et σ_β comme $\sigma_\beta \tau_\alpha = \tau_\alpha \sigma_\beta$. Deuxièmement, on remarque que ([Chiu et al., 2016](#)) :

$$(\sigma_y \tau_y \Psi_{\mathbf{k}})^T = \Psi_{-\mathbf{k}}^\dagger, \quad \left(\Psi_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_y \tau_y \right)^T = \Psi_{-\mathbf{k}} \quad (2.10)$$

où

$$\sigma_y \tau_y \equiv \tau_y \otimes \sigma_y = \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

ce qui montre la redondance du formalisme. Cette redondance s'appelle symétrie particule-trou² et a des conséquences que l'on va maintenant analyser.

En injectant les relations données Eq. (2.10) dans la définition du Hamiltonien BdG Eq. (2.6) et

2. Pour une discussion claire et synthétique voir [Dalibard \(2018, pp. 14-15\)](#)

en manipulant un peu les expressions, on obtient :

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{\mathbf{k}} (\sigma_y \tau_y \Psi_{-\mathbf{k}})^T \mathcal{H}_{\mathbf{k}} \left(\Psi_{-\mathbf{k}}^\dagger \sigma_y \tau_y \right)^T \\
 &= \sum_{\mathbf{k}} \Psi_{-\mathbf{k}}^T \sigma_y \tau_y \mathcal{H}(\mathbf{k}) \sigma_y \tau_y \Psi_{-\mathbf{k}}^\dagger \\
 &= - \sum_{\mathbf{k}} \Psi_{-\mathbf{k}}^\dagger \sigma_y \tau_y \mathcal{H}^*(\mathbf{k}) \sigma_y \tau_y \Psi_{-\mathbf{k}}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

où on a utilisé les relations d'anticommutation canoniques, le fait que $(\sigma_y \tau_y)^T = \sigma_y \tau_y$ et la propriété $\mathcal{H}^\dagger(\mathbf{k}) = \mathcal{H}(\mathbf{k})$. On en conclut donc que le Hamiltonien $\mathcal{H}(\mathbf{k})$ satisfait la relation :

$$\mathcal{C}^{-1} H(\mathbf{k}) \mathcal{C} = -\mathcal{H}(-\mathbf{k}) \tag{2.13}$$

où $\mathcal{C} = \sigma_y \tau_y \mathcal{K}$ et \mathcal{K} est la conjugaison complexe. Ainsi, au niveau BdG, la symétrie particule-trou est représentée par un opérateur antiunitaire (proportionnel à \mathcal{K}) qui anticommute avec $\mathcal{H}(\mathbf{k})$ (on notera qu'au niveau du Hamiltonien à N corps, cette opération est une symétrie unitaire voir [Chiu et al. \(2016\)](#)). Il faut ajouter que même si l'on s'est basé sur une représentation précise de la symétrie particule-trou due au formalisme BdG, le résultat Eq. (2.13) est général, quelle que soit la partie unitaire $U_{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C} = U_{\mathcal{C}} \mathcal{K}$. Si l'Eq. (2.13) est satisfaite et qu'on note $|u(\mathbf{k})\rangle$ un état propre de $\mathcal{H}(\mathbf{k})$ d'énergie $E_{\mathbf{k}}$ alors $|\mathcal{C}u(\mathbf{k})\rangle$ est un état propre de $\mathcal{H}(-\mathbf{k})$ mais d'énergie $-E_{\mathbf{k}}$. La symétrie particule-trou est ici un artefact du formalisme mais il peut tout à fait exister un opérateur satisfaisant Eq. (2.13) sans que cela ne soit imposé par la description du problème.

On peut maintenant s'intéresser à une autre transformation : l'opération de renversement du temps. Si on définit T comme une représentation de cette opération dans l'espace de Hilbert à N corps et que l'on considère un système invariant par cette opération $[H, T] = 0$, on impose deux propriétés :

- Pour toute observable O invariante par renversement du temps :

$$T O(t) T^{-1} = T e^{iHt} O e^{-iHt} T^{-1} = O(-t),$$
- Pour un opérateur champ : $T \psi_{\sigma}(\mathbf{r}) T^{-1} = \sum_{\sigma'} U_{\sigma\sigma'} \psi_{\sigma'}(\mathbf{r})$ où U est une matrice unitaire afin de préserver les relations de commutation.

La première de ces conditions impose donc que T soit antiunitaire, ce qu'on peut écrire $T i T^{-1} = -i$. En combinant avec la seconde, on peut écrire que la représentation \mathcal{T} dans l'espace de Hilbert à une particule (l'espace de Nambu dans notre cas) s'écrit $\mathcal{T} = U_{\mathcal{T}} \mathcal{K}$ avec $U_{\mathcal{T}}$ unitaire. En imposant $T H T^{-1} = H$, on obtient la condition sur le Hamiltonien BdG

$$\mathcal{T}^{-1} \mathcal{H}(\mathbf{k}) \mathcal{T} = \mathcal{H}(-\mathbf{k}) \tag{2.14}$$

Par ailleurs, la symétrie de renversement du temps est liée à la nature fermionique ou bosonique des particules impliquées. En effet, le spin d'une particule se transforme en son opposé sous l'effet du renversement du temps, ce qui revient à effectuer une rotation de 180° autour

d'un axe bien choisi. Ainsi, appliquer deux fois le renversement du temps doit redonner les propriétés bien connues des représentations de spin entier (bosons) et demi-entier (fermions). Il y a donc deux classes possibles de systèmes invariants par renversement du temps qui satisfont $U_{\mathcal{T}}U_{\mathcal{T}}^* = \pm 1$ où le signe + se réfère aux bosons et – aux fermions³. La condition Eq. (2.14) implique que $|\mathcal{T}u(\mathbf{k})\rangle$ est un état propre de $\mathcal{H}(-\mathbf{k})$ avec la même énergie $E_{\mathbf{k}}$: le spectre est donc symétrique sous la transformation $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$.

La dernière symétrie non triviale est la symétrie de chiralité S qui est simplement le produit des deux précédentes. On dit qu'un Hamiltonien BdG possède la symétrie de chiralité si :

$$S^{-1}\mathcal{H}(\mathbf{k})S = -\mathcal{H}(\mathbf{k}) \quad (2.15)$$

où $S = U_S = U_{\mathcal{T}}U_C$. De la même manière que pour les symétries particule-trou et de renversement du temps, Eq. (2.15) implique que $|Su(\mathbf{k})\rangle$ est aussi un état propre de $\mathcal{H}(\mathbf{k})$ mais d'énergie $-E_{\mathbf{k}}$. Ainsi, quel que soit \mathbf{k} , le spectre est symétrique par rapport à $E = 0$.

Il se trouve que ces trois symétries⁴ épuisent le nombre de symétries « intéressantes » au niveau à une particule car elles sont soit antiunitaire soit anticommulent avec $\mathcal{H}(\mathbf{k})$ (ou les deux) et sont à la base de la classification des phases topologiques sans interaction (*ten-fold way* en anglais). On précise que ce raisonnement est valable pour les Hamiltoniens d'électrons libres (sans supraconductivité) car les Hamiltoniens de Bogoliubov-de Gennes ne sont qu'un cas particulier où la symétrie particule-trou est imposée par le formalisme.

Pour plus de détails sur les symétries et la classification qu'on va aborder maintenant, le lecteur peut se référer à l'excellente revue [Chiu et al. \(2016\)](#) qu'on a beaucoup exploitée.

A partir de ces trois opérations, il est possible de classifier toutes les propriétés topologiques des Hamiltoniens gappés à une particule (fermions libres ou Bogoliubov-de Gennes), ces phases sont alors appelées « phases topologiques protégées par une symétrie » (*symmetry-protected topological phase* ou *SPT*). La présence d'un gap est essentielle pour définir les invariants topologiques et garantir la protection de la phase en question et on ne s'intéressera pas ici à la topologie des systèmes non-gappés (semi-métaux de Weyl et de Dirac, ...). Il existe ainsi 10 classes de symétrie différentes d'où le nom de cette classification : le *ten-fold way*. Ce résultat majeur, présenté Tableau 2.1, est que pour une classe de symétrie donnée, c'est-à-dire le comportement du Hamiltonien sous l'action des trois opérations T, C, S , donne (i) s'il est possible que le système soit dans une phase topologique (le cas où ce n'est pas possible est noté 0 dans le Tableau 2.1) et (ii) à quel groupe appartient l'invariant topologique ($\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}$ ou \mathbb{Z}_2 dans le tableau) qui permet de distinguer une phase triviale d'une phase topologique si une telle phase est possible. L'identification des symétries ainsi que la classification topologique

3. Ces deux classes existent aussi pour la symétrie particule-trou mais par construction du formalisme BdG, on ne s'intéresse qu'au cas $U_C U_C^* = 1$.

4. Par abus de langage, on utilise souvent le mot « symétrie » en parlant de l'« opération » (par exemple de renversement du temps). On essaie ici de faire attention à cette distinction mais il est parfois plus simple de se conformer à l'usage...

Classe	Opération			Dimension		
	T	C	S	1	2	3
A	0	0	0	0	\mathbb{Z}	0
AIII	0	0	+1	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}
AI	+1	0	0	0	0	0
BDI	+1	+1	+1	\mathbb{Z}	0	0
D	0	+1	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0
DIII	-1	+1	+1	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}
AII	-1	0	0	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2
CII	-1	-1	+1	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2
C	0	-1	0	0	$2\mathbb{Z}$	0
CI	+1	-1	+1	0	0	$2\mathbb{Z}$

TABLE 2.1 – Classification des phases topologiques protégées par une symétrie. La première colonne donne le nom d’une des 10 classes de symétrie, les trois suivantes indiquent si le système respecte (± 1) ou non (0) les opérations T, C et S, le signe indiquant le signe du carré de l’opérateur en question. Les trois dernières colonnes indiquent si une phase topologique peut exister en dimension 1, 2 ou 3. Si une phase topologique est possible, le tableau donne le groupe auquel appartient l’invariant topologique qui caractérise les propriétés topologiques du Hamiltonien de Bloch, vu comme une transformation de la zone de Brillouin vers l’espace des matrices hermitiennes respectant les symétries en question. 0 indique l’absence de phase topologique. Résultats adaptés de [Chiu et al. \(2016\)](#).

ne donne cependant pas directement l’expression de l’invariant que l’on souhaite calculer en pratique mais ce travail a aussi été réalisé et est précisément l’objet de la seconde partie de la revue [Chiu et al. \(2016\)](#). Dans la suite, on sera amené à considérer quelques-uns de ces invariants pour les classes qui nous intéressent : les classes D et BDI.

Depuis, la classification donnée Tableau 2.1 a été enrichie avec d’autres symétries. C’est le cas des phases topologiques dites « faibles » protégée par une symétrie de translation ou des phases cristallines où ce sont les symétries du cristal (rotations discrètes, miroir, ...) qui sont essentielles ([Ando et Fu, 2015](#); [Neupert et Schindler, 2018](#)). Récemment, ces phases cristallines ont encore été généralisée avec les phases « d’ordre supérieur » (*higher-order topological insulators/superconductors* ou HOTI/HOTSC) par [Langbehn et al. \(2017\)](#); [Benalcazar et al. \(2017\)](#); [Song et al. \(2017\)](#); [Schindler et al. \(2018\)](#).

Néanmoins, la classification repose sur les symétries du Hamiltonien à une particule et donc, les propriétés de volume du système. Si le système considéré est de taille finie, les propriétés topologiques de volume en dimension D se traduisent par l’existence de modes

de bord sans gap en dimension $D - 1$. C'est ce qu'on appelle la correspondance (empirique) volume-bord. Ainsi, le nom de « phase topologique d'ordre supérieur » se justifie par le fait que ses modes de bord ne vivent pas en dimension $D - 1$ mais $D - n$ (par exemple, des modes localisés aux coins d'une phase 2D ou aux arêtes d'une phase 3D sont caractéristiques d'une phase d'ordre 2). Bien entendu, la nature physique de ces modes diffère selon qu'on considère un isolant ou un supraconducteur. Ceux-ci seront des fermions de Dirac pour les isolants et des fermions de Majorana pour les supraconducteurs. Ces derniers sont l'objet du paragraphe suivant.

2.1.3 Le fermion de Majorana

Le fermion de Majorana a originalement été introduit comme une solution particulière de l'équation de Dirac qui décrit des fermions relativistes de spin $-1/2$ (Majorana, 1937). En notations relativistes, cette dernière s'écrit :

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0 \quad (2.16)$$

où Ψ est un bi-spineur de Dirac, les « matrices de Dirac » γ^μ satisfont l'algèbre de Clifford $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}$, avec $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ la métrique d'un espace-temps plat à 3+1D et où on a utilisé la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ et 0 correspond au temps) (Maggiore, 2005; Fuchs, 2017). La particularité des fermions de Majorana est qu'ils sont l'image d'eux-mêmes sous la transformation de conjugaison de charge. En d'autres termes, un fermion de Majorana est sa propre antiparticule et ne porte donc pas de charge électrique. Si on dénote par γ l'opérateur d'annihilation d'un fermion de Majorana⁵, on obtient donc $\gamma^\dagger = \gamma$ en seconde quantification.

La condition $\gamma^\dagger = \gamma$ fait des supraconducteurs un endroit idéal pour chercher des fermions de Majorana. En effet, étant décrits par un Hamiltonien de Bogoliubov-de Gennes Eq. (2.6), ils sont diagonalisés par une transformation de Bogoliubov mélangeant particules et trous et donc permet d'envisager une quasi-particule étant sa propre antiparticule, ce qui se traduit au niveau de la fonction d'onde de Majorana φ_M par $\mathcal{C}\varphi_M(\mathbf{r}) = \varphi_M(\mathbf{r})$. La nature même du fermion de Majorana fait qu'il a des propriétés pour le moins exotiques, comme on le verra Section 2.4, qui font de la recherche expérimentale du fermion de Majorana un sacré Graal.

Dans les paragraphes qui suivent, on s'intéresse aux modèles canoniques de la supraconductivité topologique afin d'identifier les ingrédients essentiels et la physique qui en résulte.

5. La notation γ est utilisée ici par souci de cohérence avec ce qui suit et n'a pas de lien avec le fait que les matrices de Dirac soient notées γ^μ .

2.2 Le modèle de Kitaev

Kitaev a laissé son empreinte (et la laissera certainement encore) sur bien des développements récents en physique de la matière condensée⁶ mais on n'étudiera ici que le modèle désormais appelé de la chaîne de Kitaev (Kitaev, 2001). Celle-ci décrit des fermions « sans spin » soumis à un potentiel d'appariement (nécessairement en onde p car les fermions sont sans spin) et est le modèle le plus simple pour voir apparaître des fermions de Majorana. Cette discussion est très largement basée sur la référence originale Kitaev (2001), l'excellente revue de Jason Alicea qu'on utilisera encore beaucoup Alicea (2012) et Røising (2016); Dalibard (2018) pour certains détails.

2.2.1 Introduction du modèle

On considère une chaîne 1D comportant N sites séparés par une distance a qu'on choisit comme l'unité de longueur si bien qu'on prend $a \equiv 1$. Les fermions sans spin sont représentés par les opérateurs d'annihilation c_x où $x = 1, \dots, N$ repère la position le long de la chaîne. Ces opérateurs satisfont les relations d'anticommutation canoniques $\{c_x, c_{x'}^\dagger\} = \delta_{xx'}$ et $\{c_x, c_{x'}\} = \{c_x^\dagger, c_{x'}^\dagger\} = 0$. Le Hamiltonien s'écrit :

$$H_K = \sum_x -t c_{x+1}^\dagger c_x - \mu c_x^\dagger c_x + \Delta_0 c_x c_{x+1} + \text{h. c.} \quad (2.17)$$

où $t > 0$ est l'amplitude de saut entre deux sites voisins, μ le potentiel chimique ($\mu = 0$ correspond au demi-remplissage de la bande) et Δ_0 le potentiel d'appariement en onde p . Par ailleurs, on supposera $\Delta_0 \in \mathbb{R}$ sans perte de généralité.

2.2.2 Conditions périodiques, symétries et topologie

Pour analyser la physique de ce modèle, on suppose désormais que la chaîne est soumise à des conditions périodiques de telle sorte que $c_1 \equiv c_{N+1}$ (ou, ce qui revient presque au même, que la chaîne est infinie). L'invariance par translation du Hamiltonien Eq. (2.17) permet alors de réaliser une transformation de Fourier définie comme :

$$c_x = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \in \text{Z. B.}} e^{ikx} c_k \quad (2.18)$$

où la première zone de Brillouin (Z. B.) est définie par $\text{Z. B.} = \frac{2\pi}{N} \{0, 1, \dots, N-1\}$. Le Hamiltonien prend désormais la forme :

$$H_K = \sum_{k \in \text{Z. B.}} (-2t \cos(k) - \mu) c_k^\dagger c_k + i\Delta_0 \sin(k) c_{-k} c_k + \text{h. c.} \quad (2.19)$$

6. on peut lister, de manière non exhaustive : le code torique (Kitaev, 2003), le modèle du liquide de spin sur réseau hexagonal (Kitaev, 2006), la méthode de Kitaev-Preskill pour calculer la contribution topologique à l'entropie d'intrication (Kitaev et Preskill, 2006) et le modèle de Sachdev-Ye-Kitaev (Kitaev, 2015).

qu'on réécrit sous la forme Bogoliubov-de Gennes Eq. (2.6) dans la base de Nambu $\Psi_k^\dagger = (c_k^\dagger, c_{-k})$ avec

$$\mathcal{H}_K(k) = \begin{pmatrix} \xi_k & \Delta_k^* \\ \Delta_k & -\xi_k \end{pmatrix} = \mathbf{h}(k) \cdot \boldsymbol{\tau} = \xi_k \tau_z + 2\Delta_0 \sin(k) \tau_y \quad (2.20)$$

avec $\xi_k = -2t \cos(k) - \mu$, $\Delta_k = 2i\Delta_0 \sin(k)$, $\mathbf{h}(k) = (0, \Delta_k, \xi_k)^T$ et $\boldsymbol{\tau}$ est le vecteur des matrices de Pauli τ_α avec $\alpha \in \{x, y, z\}$. Les trois opérations particule-trou, de renversement du temps et de chiralité introduits Section 2.1.2 sont ici représentées par :

$$\mathcal{C} = \tau_x \mathcal{K}, \quad \mathcal{T} = \mathbb{1} \mathcal{K}, \quad \mathcal{S} = \tau_x \quad (2.21)$$

On vérifie alors que :

$$\tau_x \mathcal{H}_K^*(k) \tau_x = -\mathcal{H}_K(-k), \quad \mathcal{H}_K^*(k) = \mathcal{H}_K(-k), \quad \tau_x \mathcal{H}_K(k) \tau_x = -\mathcal{H}_K(k) \quad (2.22)$$

ce qui fait que le modèle de Kitaev appartient à la classe BDI de la classification topologique donne dans le Tableau 2.1. Les propriétés topologiques sont caractérisée par un invariant de type \mathbb{Z} .

La diagonalisation de $\mathcal{H}(k)$ est aisée. Si on note $|u_\pm(k)\rangle$ les états propres respectivement associés aux valeurs propres $\pm E_k = \pm \sqrt{\xi_k^2 + |\Delta_k|^2}$. On paramétrise $|u_+(k)\rangle$ comme $|u_+(k)\rangle = (u_k, v_k)^T$, on obtient :

$$\begin{cases} u_k = \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \sqrt{E_k + \xi_k} \\ v_k = \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \frac{\Delta_k}{|\Delta_k|} \sqrt{E_k - \xi_k} \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\begin{cases} u_k = \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \sqrt{E_k + \xi_k} \\ v_k = \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \frac{\Delta_k}{|\Delta_k|} \sqrt{E_k - \xi_k} \end{cases} \quad (2.24)$$

$|u_-(k)\rangle$ s'obtient en utilisant la symétrie particule-trou du Hamiltonien⁷. En effet $|u_-(k)\rangle = |\mathcal{C}u_+(-k)\rangle = (v_{-k}^*, u_{-k}^*)^T = (-v_k^*, u_k^*)^T$, où on a utilisé que $u_{-k} = u_k$ et $v_{-k} = -v_k$.

Un premier élément à remarquer concernant le spectre est que E_k est toujours supérieure à 0, c'est-à-dire que les excitations possèdent toujours un gap, sauf à $k = 0$ pour $\mu = -2t$ et à $k = \pi$ pour $\mu = 2t$ comme illustré Fig. 2.2 pour la transition à $\mu = -2t$. Cette fermeture et réouverture du gap suggère la possibilité d'une transition de phase topologique, ce qui peut être diagnostiqué par un invariant topologique. La transformation qu'on étudie va de la zone de Brillouin vers le cercle défini par le vecteur unitaire $\mathbf{n} = \mathbf{h}/|\mathbf{h}|$. La zone de Brillouin a la topologie d'un tore, mais en une dimension⁸ $\mathbb{T}^1 = \mathbb{S}^1$, si bien qu'on étudie alors la transformation :

$$\mathbf{n} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \quad (2.25)$$

$$k \mapsto \mathbf{n}(k) \quad (2.26)$$

7. On aurait tout aussi bien pu utiliser la symétrie de chiralité masi celle-ci est moins générale pour les Hamiltoniens BdG.

8. En D dimensions $\mathbb{T}^D = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ ce qui nécessite d'abord de compactifier le tore \mathbb{T}^D en une sphère \mathbb{S}^D , ce qui ne change pas les propriétés topologiques de la transformation considérée (Chiu et al., 2016).

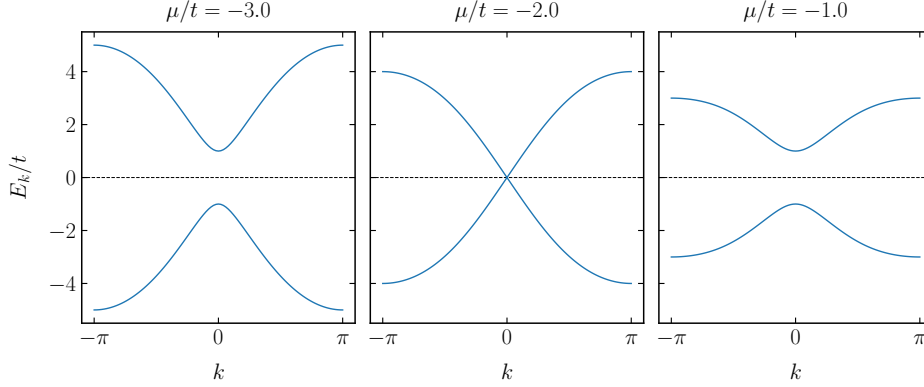


FIGURE 2.2 – Spectre des excitations $\pm E_k = \pm \sqrt{\xi_k^2 + |\Delta_k|^2}$ pour les paramètres $t = 1$ et $\Delta_0/t = 1.1$ pour $\mu/t \in \{-3, -2, -1\}$. On observe clairement la fermeture de gap à $k = 0$ dans le cas $\mu/t = -2$ (milieu) alors que dans les cas $\mu/t = -3$ (gauche) et $\mu/t = -1$ (droite), les excitations ont un gap.

dont les propriétés topologiques se classifient selon le groupe $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$. L'invariant topologique en question est appelé nombre d'enroulement ν et est défini comme (Tewari et Sau, 2012; Sticlet et al., 2013; Chiu et al., 2016) :

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} d\theta_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{Z.B.}} \partial_k \theta_k dk \quad (2.27)$$

où $\theta_k = \arg(n_z(k) + in_y(k))$ et \mathcal{C} est la courbe parcourue par la pointe de \mathbf{n} lorsque toute la zone de Brillouin est parcourue⁹. En d'autres termes, le nombre d'enroulement compte le nombre de tours effectué par \mathbf{h} (ou \mathbf{n}) autour de l'origine du plan qui est donc un entier. On illustre ce nombre d'enroulement sur la Fig. 2.3 près de la transition $\mu/t = -2$. On observe donc que la fermeture du gap correspond à un changement du nombre d'enroulement de $\nu = 0$ pour $\mu < -2t$ et $\nu = -1$ pour $|\mu| < 2t$ caractérisé par une discontinuité de θ_k , d'où le nom de transition topologique. On peut aller encore plus loin et construire tout le diagramme de phase du modèle. En effet, une transition topologique ne peut se produire qu'en cas de fermeture de gap. L'autre fermeture se situant à $\mu = 2t$ on en conclut que tant que $|\mu| < 2t$, le système est dans une phase topologique. Le diagramme de phase de ce modèle est présenté Fig. 2.4.

Avec le résultat de la diagonalisation donnée Eq. (2.23) et Eq. (2.24), on peut écrire les opérateurs associés aux quasiparticules de Bogoliubov qui diagonalisent le Hamiltonien (ceci est la transformation de Bogoliubov mentionnée plus haut) :

$$\alpha_k = u_k^* c_k + v_k^* c_{-k}^\dagger \quad (2.28)$$

9. On notera cependant qu'à $|\mu| = 2t$, l'angle θ_k n'est pas défini puisque $|\mathbf{h}(k)| = E_k = 0$.

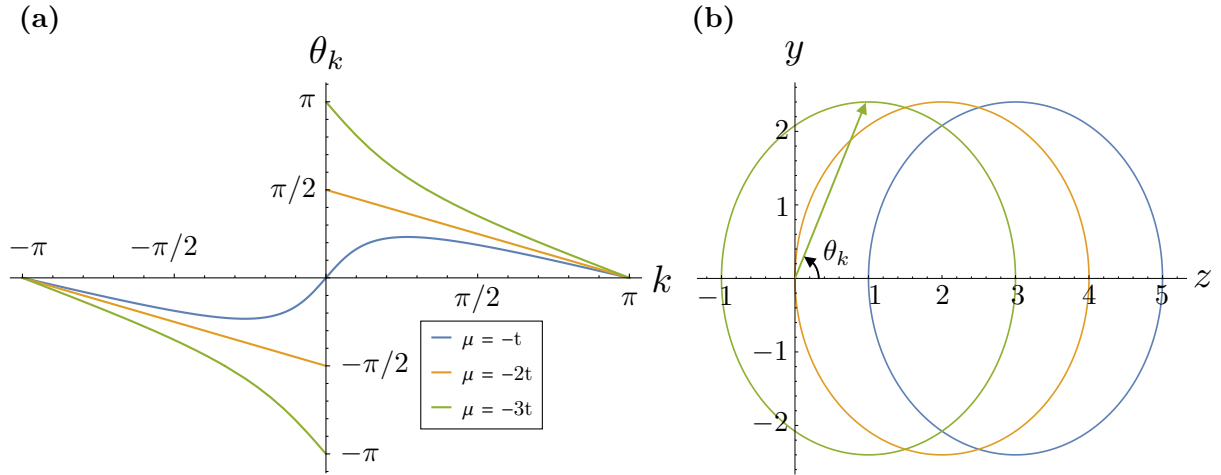


FIGURE 2.3 – Topologie dans l’espace k et nombre d’enroulement pour $\mu/t \in \{-3, -2, -1\}$. (a) Angle θ_k parcouru par la pointe du vecteur \mathbf{h} lorsque on parcourt la zone de Brillouin. (b) représente cette trajectoire dans le plan zy . Une visualisation alternative consiste à tracer la trajectoire de la pointe de \mathbf{n} , ce qui revient à représenter ce vecteur sur la sphère de Bloch (ici l’intersection de cette sphère avec le plan yz , ce qui ne change pas θ_k).

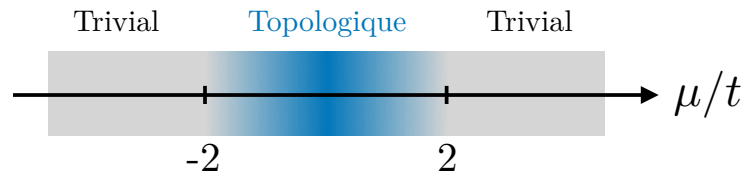


FIGURE 2.4 – Diagramme de phase du modèle de Kitaev pour $\Delta_0 \neq 0$. Les fermetures de gap se situent à $\mu = \pm 2t$ et le supraconducteur est dans une phase topologique pour $|\mu| < 2t$ et dans une phase triviale sinon.

L’état fondamental $|\Omega\rangle$ est défini comme étant annihilé par tout les quasiparticules α_k $|\text{GS}\rangle = 0 \forall k \in \text{Z. B.}$. Pour les modes $k \neq 0, \pi$, on peut grouper les modes $\pm k$ si bien qu’on peut écrire à une constante de normalisation près :

$$|\Omega\rangle \propto \left(\prod_{\substack{k \in \text{Z. B.}/2 \\ k \neq 0, \pi}} \alpha_k \alpha_{-k} \right) \alpha_0 \alpha_\pi |0\rangle \quad (2.29)$$

où $|0\rangle$ est le vide de l’espace de Fock généré par les opérateurs c . En notant que $\alpha_k \alpha_{-k} = -v_k^* (u_k^* + v_k^* c_{-k}^\dagger c_k^\dagger)$, on obtient (Read et Green, 2000) :

$$|\Omega\rangle \propto \prod_k (u_k^* + v_k^* c_{-k}^\dagger c_k^\dagger) \left(\begin{cases} 1 & \text{si } \mu < -2t \\ c_0^\dagger & \text{si } |\mu| < 2t \\ c_0^\dagger c_\pi^\dagger & \text{si } \mu > 2t \end{cases} \right) |0\rangle \quad (2.30)$$

où la notation \prod' rappelle les contraintes de l'Eq. (2.29) sur k dans le produit. On a ici supposé que le nombre N de sites de la chaîne était pair de telle sorte que le mode $k = \pi$ appartienne à la zone de Brillouin et on inclut la phase de v_0 et v_π dans la constante de normalisation. Ainsi, dans ce cas, l'état fondamental Eq. (2.30) dans la phase triviale et la phase topologique ont une parité du nombre de fermions différente. En effet, si on définit l'opérateur parité \hat{P} en terme des opérateurs nombre $\hat{n}_k = c_k^\dagger c_k$ comme :

$$\hat{P} = (-1)^{\sum_k \hat{n}_k} = e^{i\pi \sum_k \hat{n}_k} = \prod_k (1 - 2\hat{n}_k) \quad (2.31)$$

on obtient que :

$$\langle \Omega | \hat{P} | \Omega \rangle = \begin{cases} -1 & \text{si } |\mu| < 2t \\ +1 & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.32)$$

Ce lien entre la parité du fondamental et la présence d'une phase topologique n'est cependant pas général car la parité de N ainsi que les conditions au bord modifient cette relation (Read et Green, 2000; Røising, 2016).

2.2.3 Système de taille finie et correspondance volume-bord

Pour expliciter la correspondance volume-bord mentionnée précédemment, on considère désormais une chaîne de Kitaev décrite par le Hamiltonien Eq. (2.17) ouverte.

Formellement, on peut toujours exprimer les fermions complexes c_x en termes de deux fermions de Majorana γ_x^α où $\alpha \in \{A, B\}$:

$$\begin{cases} c_x^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_x^A + i\gamma_x^B) \\ c_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_x^A - i\gamma_x^B) \end{cases} \quad (2.33)$$

Les opérateurs γ_x^α sont bien des opérateurs de Majorana puisque $(\gamma_x^\alpha)^\dagger = \gamma_x^\alpha$. Ces opérateurs correspondent à des *fermions* de Majorana car ils satisfont les relations d'anticommutation habituelles :

$$\{\gamma_x^\alpha, \gamma_{x'}^\beta\} = \delta^{\alpha\beta} \delta_{x,x'} \quad (2.34)$$

Cependant, ces deux propriétés impliquent $(\gamma_x^\alpha)^2 = \frac{1}{2}$ ce qui les rend très différents des fermions usuels. En terme de ces opérateurs, le Hamiltonien de Kitaev Eq. (2.17) s'écrit :

$$H_K = \sum_x -\mu \left(\frac{1}{2} + i\gamma_x^B \gamma_x^A \right) + i[(\Delta_0 + t)\gamma_{x+1}^A \gamma_x^B + (\Delta_0 - t)\gamma_{x+1}^B \gamma_x^A] \quad (2.35)$$

Comme on l'a vu, étudier un point particulier dans chaque phase est suffisant pour illustrer les propriétés topologiques du modèle car celles-ci ne peuvent pas changer tant que le gap ne se ferme pas. On va donc comparer les points $\mu < 0, t = \Delta = 0$ de la phase triviale et $\mu = 0, \Delta_0 = t \neq 0$ de la phase topologique.

Quand $\mu < 0$, $t = \Delta = 0$, le Hamiltonien H_K est trivial et correspond à une collection de sites fermioniques vides déconnectés les uns des autres ce qui correspond à la limite atomique¹⁰. Toutes les excitations, qui correspondent à peupler un des sites, sont gappées avec une énergie égale à $|\mu|$. En termes de fermions de Majorana, $H_K = \sum_{x=1}^N -\mu(\frac{1}{2} + i\gamma_x^B \gamma_x^A)$ qui ne couple donc que les Majorana d'un même site. Cette situation est représenté schématiquement Fig. 2.5(a).

Le point au cœur de la phase topologique est plus intéressant. En effet, pour $\mu = 0$, $\Delta_0 = t \neq 0$, le Hamiltonien Eq. (2.35) a pour expression :

$$H_K = \sum_x 2it \gamma_{x+1}^A \gamma_x^B \quad (2.36)$$

On remarque ici que la Hamiltonien ne couple que les Majoranas sur des sites adjacents comme Fig. 2.5(b). Ceci se traduit par le fait que les deux Majoranas γ_1^A et γ_N^B situés aux extrémités n'interviennent pas dans le Hamiltonien et correspondent donc à des modes d'énergie nulle. En

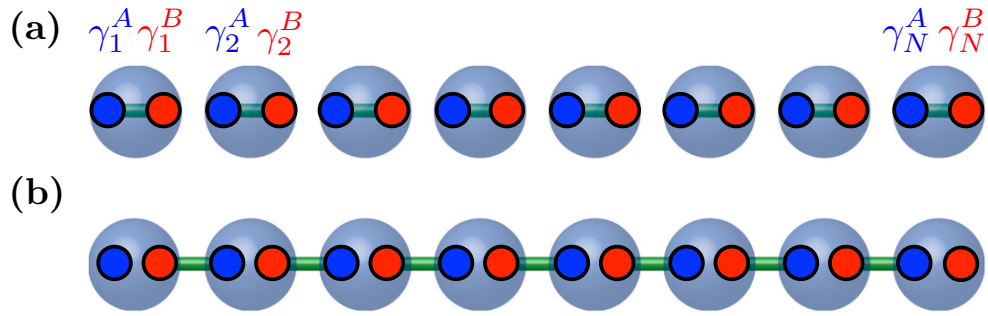


FIGURE 2.5 – Représentation schématique de la chaîne de Kitaev. Les sphères transparentes bleues représentent les sites fermioniques décomposés en deux opérateurs de Majorana γ_x^A (bleu) et γ_x^B (rouge). (a) Dans la phase triviale, le Hamiltonien ne couple que les Majoranas situés au même site x (liens verts). (b) Dans la phase topologique, seuls les Majoranas sur des sites adjacents sont couplés, laissant donc deux Majoranas isolés aux extrémités de la chaîne. Image adaptée de (Franz, 2013).

introduisant les nouveaux opérateurs $d_x = (\gamma_x^B - i\gamma_{x+1}^A)/\sqrt{2}$ pour $x = 1, N-1$, on diagonalise le Hamiltonien :

$$H_K = \sum_{x=1}^{N-1} 2t \left(d_x^\dagger d_x - \frac{1}{2} \right) \quad (2.37)$$

où il est clair que l'espace fondamental est séparé de ses excitations par un gap $2t$. Cependant, il faut aussi prendre en compte les deux Majoranas isolés aux extrémités de la chaîne qui n'interviennent pas dans le Hamiltonien. On introduit donc un fermion *non-local* $d_0 = (\gamma_N^B - i\gamma_1^A)/\sqrt{2}$.

10. La notion de limite atomique pour les supraconducteurs est problématique même pour le modèle de Kitaev, voir Queiroz et Stern (2020).

Ce degré de liberté fermionique d'énergie nulle implique donc que l'état fondamental est doublement dégénéré. Il est possible de trouver l'expression des états fondamentaux $|\Omega_i\rangle_{i=0,1}$ dans l'espace de Fock généré par les fermions c en utilisant les expressions¹¹ :

$$d_x = -\frac{i}{2} \left(c_x^\dagger - c_x + c_{x+1} + c_{x+1}^\dagger \right), \quad \forall x \in \{1, \dots, N-1\} \quad (2.38)$$

$$d_0 = -\frac{i}{2} \left(c_N^\dagger - c_N + c_1 + c_1^\dagger \right) \quad (2.39)$$

et la définition de l'état fondamental $|\Omega_0\rangle$:

$$d_x |\Omega_0\rangle = 0, \quad \forall x = 0, \dots, N-1 \quad (2.40)$$

Par exemple, pour une chaîne à quatre sites (Dalibard, 2018) :

$$|\Omega_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} (|0000\rangle + |1100\rangle + |0110\rangle + |0011\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle + |0101\rangle + |1111\rangle) \quad (2.41)$$

Cet état est proche d'un état BCS puisque qu'il est composé d'une superposition cohérente de paires d'électrons. Le fondamental $|\Omega_1\rangle$ s'obtient en occupant le fermion non-local

$|\Omega_1\rangle = d_0^\dagger |\Omega_0\rangle$:

$$|\Omega_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} (|1000\rangle + |0100\rangle + |0010\rangle + |0001\rangle + |0111\rangle + |1011\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle) \quad (2.42)$$

Ces deux états fondamentaux se différencient par leur parité $\langle \Omega_i | \hat{P} | \Omega_i \rangle$ où, comme précédemment, $\hat{P} = (-1)^{\sum_x \hat{n}_x}$ avec $\hat{n}_x = c_x^\dagger c_x$:

$$\langle \Omega_0 | \hat{P} | \Omega_0 \rangle = +1 \quad (2.43)$$

$$\langle \Omega_1 | \hat{P} | \Omega_1 \rangle = -1 \quad (2.44)$$

Ces résultats analytiques se généralisent par ailleurs au cas où N , pair ou impair, est arbitraire, voir Røising (2016, pp. 53-57). Si on s'écarte du point particulier $\mu = 0$, $\Delta_0 = t \neq 0$ où les états de Majorana γ_1^A et γ_N^B sont des états propres exacts, la problème ne peut être résolu que numériquement. La Fig. 2.6 présente de tels résultats pour une chaîne de $N = 100$ sites pour $\Delta_0/t = 1.1$.

11. On notera toutefois la différence de signe d'avec Dalibard (2018) due à une différence dans la définition des opérateurs de Majorana. Ceci ne modifie que la phase globale des états fondamentaux déterminés avec les conventions de J. Dalibard.

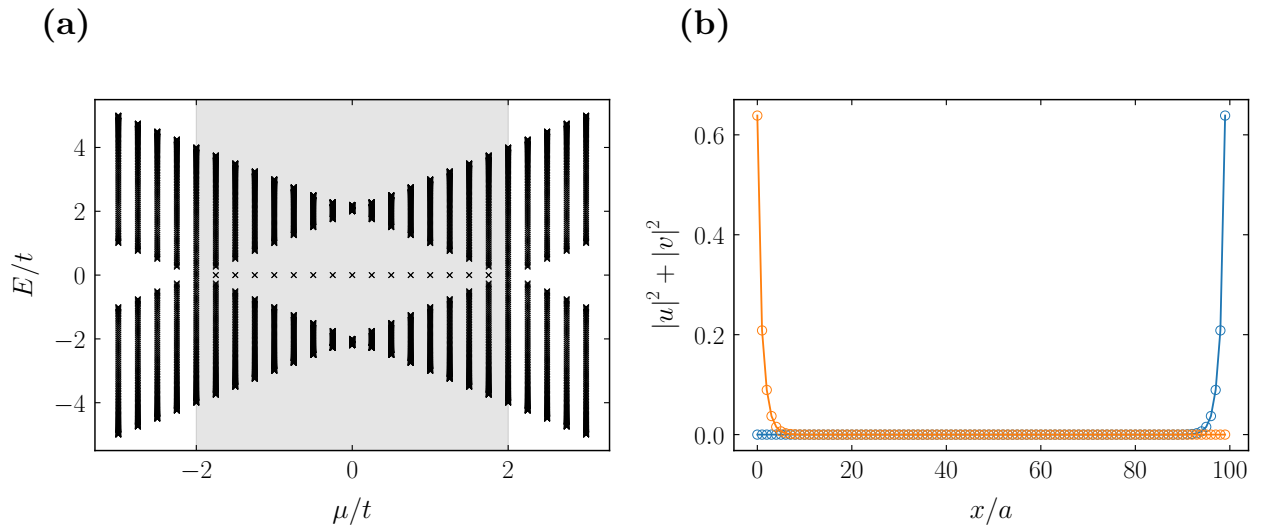


FIGURE 2.6 – Résultats de la diagonalisation numérique pour une chaîne de Kitaev de $N = 100$ sites. (a) Spectre pour différentes valeurs de μ/t avec $\Delta_0/t = 1.1$. La zone grisée représente la phase topologique $|\mu| < 2t$. (b) Amplitude $|u|^2 + |v|^2$ en fonction de la position x des deux états d'énergie nulle pour $\mu/t = -1.2$.

Ainsi, dans un système de taille finie, le fait que le système soit dans une phase topologique se caractérise par la présence de modes de bord de Majorana qui induisent une double dégénérescence de l'état fondamental. Cette dégénérescence est due à un degré de liberté fermionique *non-local* qui est à la base de nombreux espoirs concernant la robustesse du bit quantique (ou *qubit*) de Majorana. En effet, seule une perturbation *cohérente* aux deux extrémités de la chaîne pourrait détruire cet état quantique.

La chaîne de Kitaev montre qu'un paramètre d'ordre supraconducteur en onde p est nécessaire pour réaliser des excitations de type fermion de Majorana et ceci reste vrai en 2D comme on va le voir maintenant. Cependant, le modèle de Kitaev est basé sur des fermions sans spin, il ne peut alors que représenter un modèle effectif de basse énergie. De plus, il existe peu de supraconducteurs en onde p intrinsèques si bien qu'il faut trouver un moyen de générer de générer cette composante du paramètre d'ordre. Il se trouve que ces ingrédients sont connus et sont relativement communs : il faut combiner supraconductivité en onde s , couplage spin-orbite et champ magnétique (Edelstein, 1989; Gor'kov et Rashba, 2001). C'est pourquoi, en deux dimensions, il a été proposé par Fu et Kane (2008) d'utiliser les états de surface d'un isolant topologique 3D et que Lutchyn et al. (2010), Oreg et al. (2010) et Alicea (2010) ont suggéré d'utiliser des hétérostructures basées sur des semi-conducteurs pour les cas 1D et 2D. On va maintenant illustrer ce mécanisme en 2D et passer en revue les propriétés topologiques de la phase ainsi générée qui se caractérise par l'existence de modes chiraux de Majorana à ses bords.

2.3 Vers un supraconducteur en onde p réaliste : le modèle Rashba

2.3.1 Illustration du mécanisme

On considère désormais un gaz d'électrons bidimensionnel avec spin résidant dans le plan (x, y) . Pour la simplicité de l'illustration, on considère ici un modèle dans la limite continue. Cependant, pour tous les calculs pratiques, on considèrera le modèle dans l'approximation des liaisons fortes ce qui réintroduit une largeur de bande finie et engendre quelques complications. En l'absence de tout autre effet, la relation de dispersion du gaz $\varepsilon(\mathbf{k})$ est quadratique et indépendante du spin $\varepsilon(\mathbf{k}) = \hbar^2 k^2 / 2m$ où m est la masse effective des électrons et $k = |\mathbf{k}|$. Si on introduit maintenant un couplage spin-orbite de type Rashba et un champ magnétique (ou un champ d'échange) uniforme perpendiculaire au plan, le Hamiltonien de Bloch $h_0(\mathbf{k})$ s'écrit dans la base¹² $(\psi_\uparrow(\mathbf{k}), \psi_\downarrow(\mathbf{k}))$:

$$h_0(\mathbf{k}) = \xi_{\mathbf{k}} \mathbb{1} + \alpha(\sigma_x k_y - \sigma_y k_x) + V_z \sigma_z \quad (2.45)$$

où V_z est l'énergie associée au champ magnétique ou au champ d'échange selon la plateforme envisagée¹³ et α l'amplitude du couplage Rashba. Les valeurs propres $\varepsilon_{\mathbf{k}\pm}$ de $h_0(\mathbf{k})$ sont :

$$\varepsilon_{\mathbf{k}\pm} = \xi_{\mathbf{k}} \pm \sqrt{V_z^2 + \alpha^2 k^2} \quad (2.46)$$

Par ailleurs, on note $\phi_\pm(\mathbf{k})$ les états propres associés à $\varepsilon_{\mathbf{k}\pm}$ dont on donne l'expression en Annexe A. La structure de bande, représentée Fig. 2.7(a), est typique d'un cône de Dirac à $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ (gappé pour $V_z \neq 0$). Quand les deux bandes sont partiellement remplies, les surfaces de Fermi associées montrent une texture de spin qui s'enroule comme illustré Fig. 2.7(b) où on a omis d'illustrer la composante de spin selon z induite par V_z .

On place désormais ce gaz d'électrons à proximité d'un supraconducteur en onde s qui induit un terme d'appariement $\Delta_0 \psi_\uparrow^\dagger(\mathbf{k}) \psi_\downarrow^\dagger(-\mathbf{k}) + \text{h. c.}$ où Δ_0 est le gap induit. Dans la base qui diagonalise le Hamiltonien décrivant l'état normal, ce terme se réécrit :

$$\int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left[\Delta_{+-}(k) \psi_\uparrow^\dagger(\mathbf{k}) \psi_\downarrow^\dagger(-\mathbf{k}) + \Delta_{++}(\mathbf{k}) \psi_\uparrow^\dagger(\mathbf{k}) \psi_\uparrow^\dagger(-\mathbf{k}) + \Delta_{--}(\mathbf{k}) \psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{k}) \psi_\downarrow^\dagger(-\mathbf{k}) + \text{h. c.} \right] \quad (2.47)$$

où on a utilisé le changement de base :

$$\begin{pmatrix} \psi_\uparrow(\mathbf{k}) \\ \psi_\downarrow(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \phi_-(\mathbf{k}) \psi_-(\mathbf{k}) + \phi_+(\mathbf{k}) \psi_+(\mathbf{k}) \quad (2.48)$$

Ainsi dans la base \pm , le couplage singulet en onde s se décompose comme :

12. On utilise la notation ψ au lieu de c pour indiquer la nature continue du modèle.

13. Pour illustrer le mécanisme, on néglige ici les effets orbitaux dus au champ magnétique. En pratique, il est possible de les limiter (Alicea, 2010) ou de les exploiter (Vaitiekėnas et al., 2020). On reviendra sur les effets orbitaux au Chapitre 4.

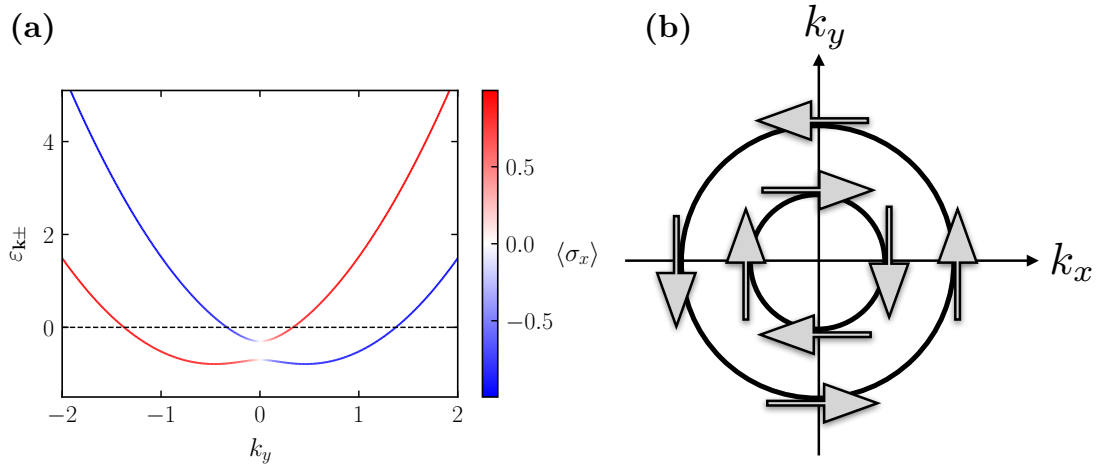


FIGURE 2.7 – Propriétés du gaz d’électrons bidimensionnel avec couplage spin-orbite Rashba et champ magnétique/d’échange perpendiculaire au plan. (a) Illustration de la structure de bande le long de la ligne $k_x = 0$ avec un potentiel chimique tel que les deux bandes sont partiellement occupées. Celles-ci sont colorées selon leur composante de spin selon x . On travaille ici dans des unités où $\hbar^2/(2m) = 1$. (b) Surfaces de Fermi correspondant à (a) et leurs textures de spin où on a omis d’illustrer la composante de spin selon z induite par V_z .

- un couplage *interbande* en onde s avec $\Delta_{+-}(k) = \Delta_0 f_s(k)$,
- un couplage *intra bande* en onde $p_x \pm ip_y$ avec $\Delta_{++}(\mathbf{k}) = \Delta_0 f_p(k) \left(\frac{k_y + ik_x}{k} \right)$ et $\Delta_{--}(\mathbf{k}) = \Delta_0 f_p(k) \left(\frac{k_y - ik_x}{k} \right)$

où les fonctions $f_{s,p}(k)$ ne dépendent que de $k = |\mathbf{k}|$ et sont données en Annexe A. Donc, à basse énergie où on peut formellement faire l’approximation $\psi_+ \rightarrow 0$, le modèle se réduit à des fermions sans spin appariés en onde p (en 1D, il s’agit du modèle de Kitaev étudié Section 2.2 et du supraconducteur $p_x \pm ip_y$ en 2D).

Ainsi, tous les ingrédients incorporés sont bien nécessaires au mécanisme : le couplage spin-orbite introduit une texture de spin le long de la surface de Fermi, le champ Zeeman permet d’ouvrir un gap à $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ (la nature de ce gap dans la phase supraconductrice sera importante) et le potentiel chimique permet de réduire le nombre de bandes dans le problème et ainsi atteindre le régime « sans spin ». Enfin, le supraconducteur ouvre le gap au niveau de Fermi en appariant les électrons à $\pm \mathbf{k}_F$.

2.3.2 Hamiltonien Bogoliubov-de Gennes

En utilisant les résultats précédents¹⁴ et la forme générique Eq. (2.6), le Hamiltonien BdG $\mathcal{H}(\mathbf{k})$ du problème s'écrit :

$$\mathcal{H}_{\text{cont.}}^{2\text{D}}(\mathbf{k}) = \xi_{\mathbf{k}}\tau_z + \alpha(\sigma_x k_y - \sigma_y k_x)\tau_z + V_z\sigma_z + \Delta_0\tau_x \quad (2.49)$$

Le terme magnétique $\propto V_z$ brise la symétrie par renversement du temps de telle sorte que ce Hamiltonien appartient à la classe de symétrie D de la classification donnée Tableau 2.1. Grâce aux propriétés des matrices de Pauli, ce Hamiltonien se diagonalise en le mettant au carré deux fois et on obtient les énergies propres $E_{\pm}(\mathbf{k})$:

$$E_{\mathbf{k}\pm}^2 = \xi_{\mathbf{k}}^2 + V_z^2 + \alpha^2 k^2 + \Delta_0^2 \pm 2\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2(\alpha^2 k^2 + V_z^2) + V_z^2 \Delta_0^2} \quad (2.50)$$

A $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, on obtient $E_{0\pm}^2 = \left(V_z \pm \sqrt{\Delta_0^2 + \mu^2}\right)^2$, si bien que le gap se ferme pour $V_z = \pm V_z^c = \pm\sqrt{\Delta_0^2 + \mu^2}$. Dans la suite, on considèrera seulement le cas $V_z > 0$. On illustre le spectre autour de la fermeture de gap Fig. 2.8. Par ailleurs, on observe que le spectre possède plus de

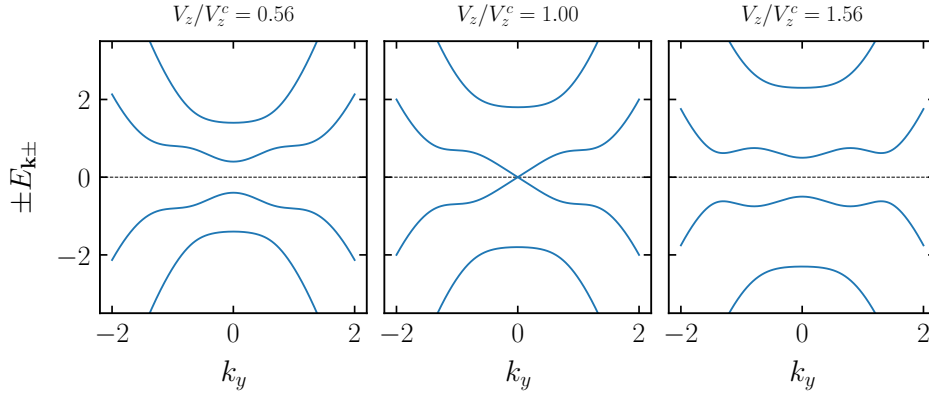


FIGURE 2.8 – Spectre du Hamiltonien $\mathcal{H}_{\text{cont.}}^{2\text{D}}(\mathbf{k})$ donné Eq. (2.49) sur la ligne $k_x = 0$ autour de la transition $V_z^c = \sqrt{\Delta_0^2 + \mu^2}$. On voit clairement le gap de la bande la plus proche de zéro se fermer à $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ puis se rouvrir.

symétries que la seule symétrie particule-trou. En effet, le Hamiltonien possède deux symétries de réflexion par rapports aux plans (xz) et (yz) .

La transition marque un changement de nature du gap à $\mathbf{k} = \mathbf{0}$. En effet, pour $V_z < V_z^c$, le gap est dominé par l'appariement supraconducteur alors que pour $V_z > V_z^c$ il est dominé par le gap magnétique (Oreg et al., 2010). Ce changement de nature marque l'entrée dans le régime de supraconductivité en onde p . Dès lors, il semble que la phase pour $V_z > V_z^c$ soit topologique. Afin de confirmer cette intuition, il est nécessaire de calculer un invariant topologique. Pour ce

14. On ne change bien sûr pas la base de Nambu.

faire, on va d'abord réintroduire le réseau cristallin afin de compactifier la zone de Brillouin. Dans l'approche de liaisons fortes, le Hamiltonien BdG $\mathcal{H}_{\text{cont.}}^{2\text{D}}(\mathbf{k})$ Eq. (2.49) se récrit :

$$\mathcal{H}_{\text{TB}}^{2\text{D}}(\mathbf{k}) = \xi_{\mathbf{k}}\tau_z + \alpha[\sigma_x \sin(k_y) - \sigma_y \sin(k_x)]\tau_z + V_z\sigma_z + \Delta_0\tau_x \quad (2.51)$$

où désormais $\xi_{\mathbf{k}} = -2t[\cos(k_x) + \cos(k_y)] - (\mu - 4t)$. Le spectre s'obtient de manière analogue au cas continu et a pour expression :

$$E_{\mathbf{k}\pm}^2 = \xi_{\mathbf{k}}^2 + V_z^2 + \alpha_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_0^2 \pm 2\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2(\alpha_{\mathbf{k}}^2 + V_z^2) + V_z^2\Delta_0^2} \quad (2.52)$$

avec $\alpha_{\mathbf{k}}^2 = \alpha^2[\sin^2(k_x) + \sin^2(k_y)]$. Le fait d'avoir réintroduit une largeur de bande finie a ici une conséquence importante. En effet, de la même manière que dans le cas continu, le gap des excitations se ferme à $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ pour $V_z = V_z^c = \pm\sqrt{\Delta_0^2 + \mu^2}$, mais il se ferme aussi aux points $\mathbf{k} = (\pi, 0)$ et $(0, \pi)$ pour $V_z = \sqrt{\Delta_0^2 + (\mu - 4t)^2}$ et à $\mathbf{k} = (\pi, \pi)$ pour $V_z = \sqrt{\Delta_0^2 + (\mu - 8t)^2}$. Par souci de simplicité, on se focalisera dans la suite sur la transition à $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ puisqu'elle a aussi lieu dans le modèle continu et on n'étudiera pas l'ensemble du diagramme de phase (topologique) dans le plan (V_z, μ) . Pour plus de détails, l'analyse complète est effectuée par [Li et al. \(2016\)](#).

D'après le Tableau 2.1, les Hamiltoniens de la classe D sont caractérisés par un invariant de type \mathbb{Z} en deux dimensions. Cet invariant topologique qu'on présente dans le paragraphe suivant est certainement un des plus célèbres : il s'agit du nombre de Chern.

2.3.3 Nombre de Chern et propriétés topologiques du modèle

On considère ici, en toute généralité, un Hamiltonien de Bloch (fermions libres ou BdG) de dimension N en deux dimensions d'espace. On note $|u_n(\mathbf{k})\rangle$ l'état propre de ce Hamiltonien correspondant à la bande n où $n = 1, \dots, N$ et on suppose par ailleurs qu'il n'existe aucun point de dégénérescence de ces états dans toute la première zone de Brillouin. Dans ce cas, on introduit la connexion de Berry $\mathcal{A}_\mu^{(n)}(\mathbf{k})$ associé à la bande n :

$$\mathcal{A}_\mu^{(n)}(\mathbf{k}) = -\text{Im} \langle u_n(\mathbf{k}) | \partial_\mu u_n(\mathbf{k}) \rangle \quad (2.53)$$

où $\partial_\mu \equiv \partial/\partial k_\mu$ et $\mu = x, y$. A partir de cette connexion, on introduit la courbure de Berry $\Omega_{\mu\nu}^{(n)}(\mathbf{k})$ par analogie avec l'électromagnétisme :

$$\Omega_{\mu\nu}^{(n)}(\mathbf{k}) = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^{(n)}(\mathbf{k}) - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^{(n)}(\mathbf{k}) \quad (2.54)$$

Comme à l'habitude, la connexion $\mathcal{A}_\mu^{(n)}(\mathbf{k})$ dépend de la jauge choisie alors que la courbure $\Omega_{\mu\nu}^{(n)}(\mathbf{k})$ est invariante de jauge. Le nombre de Chern $\mathcal{C}_n \in \mathbb{Z}$ pour la bande n est alors défini comme le flux de $\Omega_{xy}^{(n)}(\mathbf{k})$:

$$\mathcal{C}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{Z. B.}} \Omega_{xy}^{(n)}(\mathbf{k}) d^2\mathbf{k} \quad (2.55)$$

où $Z. B. = \mathbb{T}^2$ est la première zone de Brillouin. Ce nombre entier¹⁵ peut s'interpréter comme la mesure de l'obstruction à la définition d'une jauge régulière sur toute la zone de Brillouin. Ainsi, un nombre de Chern non-nul indique une forme « d'enroulement » de la phase des fonctions d'onde lorsqu'on parcourt la zone de Brillouin d'une manière analogue au nombre d'enroulement pour la chaîne de Kitaev. Historiquement, le nombre de Chern a une très grande importance puisque il a été identifié comme donnant lieu à la quantification de la conductance de Hall de l'effet Hall quantique entier, voir Chapitre 1.

Avant de revenir au cas particulier du Hamiltonien BdG $\mathcal{H}_{\text{TB}}^{2\text{D}}(\mathbf{k})$ donné Eq. (2.51), il faut préciser comment calculer le nombre de Chern numériquement. En effet, lors d'une diagonalisation numérique, tous les vecteurs propres sont donnés avec une phase arbitraire si bien qu'il faille trouver une formule à la fois utilisable en pratique et invariante de jauge. Cette formule s'obtient en discrétisant la zone de Brillouin de telle sorte que dans le cas du réseau carré :

$$C_n \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{\mathbf{k}} -\text{Im} \ln [\langle u_n(\mathbf{k}) | u_n(\mathbf{k} + \delta\hat{x}) \rangle \times \langle u_n(\mathbf{k} + \delta\hat{x}) | u_n(\mathbf{k} + \delta\hat{x} + \delta\hat{y}) \rangle \times \langle u_n(\mathbf{k} + \delta\hat{x} + \delta\hat{y}) | u_n(\mathbf{k} + \delta\hat{y}) \rangle \times \langle u_n(\mathbf{k} + \delta\hat{y}) | u_n(\mathbf{k}) \rangle] \quad (2.56)$$

où δ décrit la discrétisation choisie qu'on suppose identique dans les deux directions (Fukui et al., 2005; Resta, 2020; Blanco de Paz et al., 2020).

Le fait que le nombre de Chern caractérise aussi bien les isolants que les supraconducteurs réside en partie dans la description Bogoliubov-de Gennes qui permet de se restreindre à un problème à une particule. Néanmoins, l'approche BdG ne décrit que les *excitations* du système. Le deuxième élément qui justifie l'usage du nombre de Chern réside dans la nature de l'état fondamental. Pour un isolant, l'état fondamental consiste simplement à remplir toutes les bandes d'énergie inférieur au niveau de Fermi¹⁶ alors que pour un supraconducteur il s'agit d'un condensat de paires de Cooper. Ce qui permet de définir le nombre de Chern d'un supraconducteur topologique réside dans le fait que l'état fondamental peut s'écrire comme une mer de Fermi des quasiparticules de Bogoliubov d'énergie *négative* au dessus d'un « vide » particulier qui n'est pas le vide de Fock (voir Datta et Bagwell, 1999, Annexe C).

On peut désormais revenir à l'étude de $\mathcal{H}_{\text{TB}}^{2\text{D}}(\mathbf{k})$ donné Eq. (2.51) en rappelant qu'on ne se focalise que sur la transition à $\mathbf{k} = \mathbf{0}$. La figure Fig. 2.9 montre l'évolution du nombre de Chern total¹⁷ avec le paramètre V_z/V_z^c . Le nombre de Chern vaut $\mathcal{C} = 0$ pour $V_z < V_z^c$ (le système est dans la phase triviale) et $\mathcal{C} = 1$ pour $V_z > V_z^c$ (le système est alors dans la phase topologique). Pour analyser la correspondance volume-bord dans ce cas, on place le système sur un cylindre, c'est-à-dire qu'on n'impose les conditions périodiques que dans une direction (ici, la direction

15. Le nombre de Chern est nécessairement entier puisqu'il s'agit d'un flux à travers une surface compacte.

16. Le nombre de Chern total sera alors simplement la somme du nombre de Chern individuel de chacune des bandes s'il n'existe aucune dégénérescence.

17. Le nombre de Chern de la bande la plus basse est toujours nul si bien que le nombre de Chern total est égal à celui de la bande d'énergie négative la plus proche de 0.

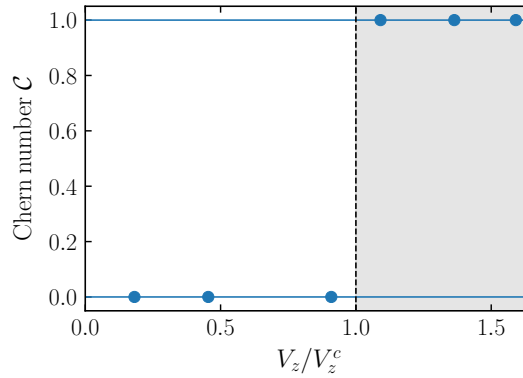


FIGURE 2.9 – Nombre de Chern \mathcal{C} en fonction de V_z/V_z^c . La fermeture du gap de la bande la plus proche de zéro pour $V_z = V_z^c$ (ligne verticale pointillée) s'accompagne du changement de la valeur du nombre de Chern $\mathcal{C} = 0$ avant la transition à $\mathcal{C} = 1$ après la transition (zone grisée). Il s'agit donc bien d'une transition topologique. Les paramètres du calcul sont $\mu/t = 0$, $\Delta_0/t = 1.1$, $\alpha/(at) = 0.5$ pour un système de taille $100a \times 100a$.

y). Afin de ne pas alourdir le texte, on se permet de ne pas reproduire le Hamiltonien associé. Les résultats de la diagonalisation de ce Hamiltonien dans la phase topologique $V_z > V_z^c$ sont présentés Fig. 2.10. Ces résultats montrent qu'il existe deux branches de vitesse opposée qui

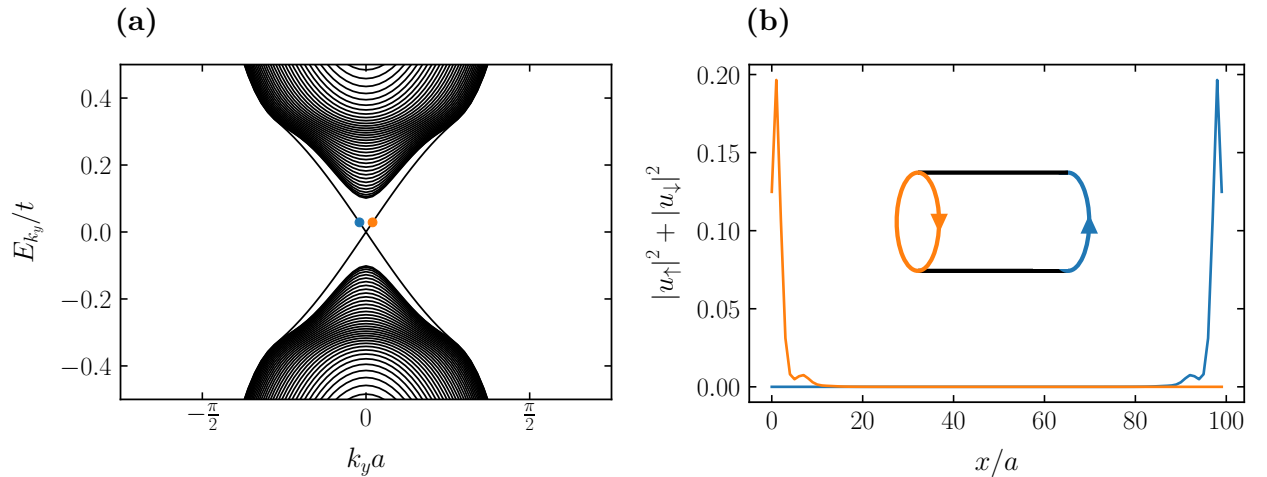


FIGURE 2.10 – Propriétés du système sur le cylindre. (a) Spectre autour de $k_y = 0$. Deux branches de vitesse opposée traversent le gap. (b) Densité de probabilité électronique locale associée aux états marqués par les points sur (a). Pour un état propre de la forme $(u_{k_y\uparrow}(x), u_{k_y\downarrow}(x), v_{k_y\downarrow}(x), v_{k_y\uparrow}(x))^T$, cette densité est définie comme $|u_{k_y\uparrow}(x)|^2 + |u_{k_y\downarrow}(x)|^2$. Ces états sont localisés aux bords du cylindre. L'encart résume les deux informations à savoir qu'il existe des états de vitesse opposée aux deux bords du cylindre. Les paramètres utilisés sont $\mu/t = 0$, $\Delta_0/t = 1.1$, $\alpha/(at) = 0.5$ et $V_z/V_z^c \approx 1.091$ pour un système de taille $100a \times 100a$.

traversent le gap autour de $k_y = 0$ qui sont localisés aux deux extrémités du cylindre. Ces

états sont dès lors appelés états de bords chiraux puisqu'ils ne se propagent que dans une direction fixée. Analytiquement, il est parfois possible de déterminer l'existence de ces modes à la Jackiw-Rebbi (Jackiw et Rebbi, 1976; Alicea, 2012; Bernevig et Neupert, 2015). Qui plus est, ces états correspondent à des fermions de Majorana. En effet, comme ces états sont localisés dans l'espace, on peut définir l'opérateur d'annihilation associé (Alicea, 2012) :

$$\Gamma_{L/R}(y) = \sum_{k_y} e^{ik_y y} \gamma_{L/R}(k_y) \quad (2.57)$$

où les $\gamma_{L/R}(k_y)$ sont les opérateurs construits à partir des modes de la branche L ou R respectivement localisés sur le bord gauche ou droit du cylindre. La somme dans la définition de $\Gamma_{L/R}(y)$ comprend tous les états de la branche (énergies positives et négatives). Ainsi, en vertu de la symétrie particule-trou on obtient bien que $\Gamma_{L/R}(y) = \Gamma_{L/R}^\dagger(y)$. A ce stade, une clarification s'impose. En effet, il semblerait que la nature « Majorana » de ces excitations de bord ne soit qu'un effet du formalisme puisque l'élément crucial est la symétrie particule-trou. Premièrement, le traitement de la supraconductivité en champ moyen (en seconde quantification) admet naturellement une description en termes de fermions de Majorana comme le montre l'Eq. (2.35). *A fortiori*, un Hamiltonien BdG peut être interprété comme à un Hamiltonien à une particule pour des fermions de Majorana (Chiu et al., 2016). Ce n'est donc pas la nature « Majoranesque » de ces excitations qui est surprenante mais bien leur localisation puisque c'est elle qui permet d'isoler les modes utilisés Eq. (2.57). Ainsi, on constate qu'en 2D aussi un supraconducteur peut-être vu comme un séparateur de fermions de Majorana dans l'espace réel. Enfin, la correspondance volume-bord, c'est-à-dire l'apparition de modes de bords quand le système est dans une phase topologique caractérisée par un invariant topologique de volume non nul, constatée ici implique que le nombre de Chern des bandes d'énergie négative du Hamiltonien BdG compte le nombre de fermions de Majorana chiraux qui se propagent aux bords du système, de la même manière qu'il compte le nombre de fermions de Dirac circulant aux bords d'un isolant de Chern (Qi et al., 2010).

En plus de la correspondance volume-bord, on peut montrer que s'il existe un vortex dans un supraconducteur « sans spin » en onde p (ou un vortex fractionnaire dans un supraconducteur avec spin) alors il existe un état lié de Majorana en son centre (Ivanov, 2001; Alicea, 2012; Bernevig et Neupert, 2015). Cet état de fait n'est qu'un cas particulier de la correspondance volume-défait topologique qui stipule que certains types de défauts topologiques (vortex supraconducteur, dislocation ou « disclination » cristallines, ...) dans certaines phases topologiques SPT peuvent présenter des états liés (Chiu et al., 2016).

Quelques précisions s'imposent désormais. En effet, on a mentionné qu'on pouvait très bien remplacer le gaz Rashba 2D par une surface d'isolant topologique qui possède un cône de Dirac 2D en suivant la proposition original de Fu et Kane (2008). Si tous les ingrédients sont similaires, leur rôle précis est modifié, ainsi que le critère topologique, car la relation de dispersion du système Rashba est quadratique quand on s'éloigne de $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ (Alicea, 2012).

On s'est par ailleurs seulement intéressé au cas 2D qui présente des états de bord de Majorana chiraux. Or, comme on le verra, ce sont les états liés de Majorana comme ceux réalisés aux extrémités de la chaîne de Kitaev qui sont au centre de tous les intérêts. Le mécanisme présenté ici est valide en une dimension à une différence près. Même si la symétrie par renversement est brisée par le terme $\propto V_z$ (champ Zeeman ou champ d'échange), le cas 1D dans la limite continue est particulier¹⁸ car il existe une symétrie par renversement du temps *émergente* qui modifie la classe du système de D à BDI dans le Tableau 2.1 si bien que l'invariant topologique n'est pas de type \mathbb{Z}_2 (Pfaffien) mais \mathbb{Z} (nombre d'enroulement) (Tewari et Sau, 2012).

Par ailleurs, dans les deux modèles analysés précédemment, le gap supraconducteur a été considéré comme un *paramètre* constant alors qu'on a montré que dans la théorie BCS, celui-ci devait être traité de manière autocohérente, comme toute théorie de champ moyen digne de ce nom. Il s'avère que dans le cas d'un supraconducteur en onde s , l'autocohérence n'affecte que peu le gap supraconducteur induit par effet de proximité si bien que l'approximation est raisonnable (Potter et Lee, 2011; Black-Schaffer, 2011; Alicea, 2012; Björnson et al., 2015; Christensen et al., 2016).

L'objectif du paragraphe suivant est de montrer (i) pourquoi les fermions de Majorana, et plus particulièrement les états liés de Majorana, sont tant recherchés et (ii) de faire un rapide tour d'horizon des différents dispositifs expérimentaux mis en œuvre pour les détecter.

2.4 Propriétés recherchées et stratégies expérimentales

2.4.1 Émergence, statistique non-abélienne et calcul quantique topologique

L'une des raisons qui motive la détection des fermions de Majorana (états liés ou chiraux) est, comme dans beaucoup de domaines d'étude en physique de la matière condensée, la notion d'émergence. Comme P. W. Anderson¹⁹ l'a notoirement écrit, en combinant un grand nombre d'éléments assez communs comme des ions et des électrons, d'obtenir toute une zoologie de phénomènes impossible à envisager au niveau de la particule unique (Anderson, 1972). C'est d'autant plus le cas du fermion de Majorana qui a originellement été introduit dans le contexte de la physique des hautes énergies (voir Section 2.1.3). En effet, aucune particule étant sa propre anti-particule n'a été détectée à ce jour, même si le neutrino est un candidat possible. Ainsi, on peut comprendre que la possibilité d'obtenir cette particule exotique dans des systèmes somme toute assez conventionnels ouvre de larges champs de recherche. La propriété phare des fermions de Majorana est la possibilité de voir apparaître une statistique d'échange non-abélienne. Sans toutefois rentrer dans les détails, la proposition d'Ivanov (2001) repose sur les états liés de Majorana localisés au cœur de certains vortex dans un

18. Comme souvent ...

19. Il me semble ici particulièrement approprié et important de mentionner que ce célèbre physicien de la matière condensée, lauréat du prix Nobel de physique en 1977 avec Sir N. F. Mott et J. van Vleck, deux autres physiciens célèbres, est décédé le 29 mars 2020.

supraconducteur en onde p . Ivanov montre qu'en partant d'un des 4 états fondamentaux d'un système de 4 états liés de Majoranas, l'opération de tressage (c'est-à-dire l'échange de deux Majoranas) permet d'obtenir *un autre* état fondamental et pas seulement l'état initial à une phase près. La procédure d'échange est illustrée Fig. 2.11. Cette dernière propriété distingue

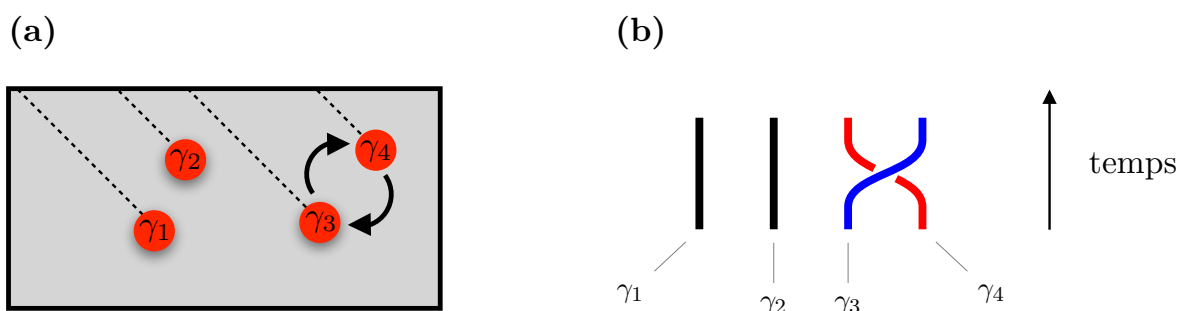


FIGURE 2.11 – Statistique d'échange des états liés de Majorana. (a) Quatre fermions de Majorana liés au cœur de vortex supraconducteurs sont représentés en rouge. Les lignes pointillées représentent les coupures nécessaires pour représenter l'enroulement de la phase supraconductrice. On représente l'échange de deux de ces Majorana auquel on associe le diagramme de tresse (b). Diagramme de tresse réalisé avec le paquet \LaTeX braids.

les anyons abéliens (dont les fermions et les bosons sont des exemples simples) des anyons non-abéliens et vient de la complexité du groupe de tresses en deux dimensions d'espace (Nayak et al., 2008). Par ailleurs, cette statistique d'échange non-abélienne n'est pas inhérente aux Majoranas au cœur des vortex mais vaut aussi pour les états en bout de chaîne (Alicea et al., 2011). Ainsi, la combinaison de la statistique d'échange non-abélienne avec la nature non-locale et « topologiquement protégée » des bits quantiques de Majorana offre de nombreuses perspectives pour le calcul quantique (Nayak et al., 2008; Bernevig et Neupert, 2015). Pour une revue pédagogique de ces thèmes voir Beenakker (2019).

2.4.2 Signatures expérimentales : prédictions théoriques et tour d'horizon des dispositifs

Les états liés de Majorana étant des états d'énergie nulle, une mesure de la densité d'état fournit une première indication. En pratique, on mesure la conductance différentielle $G(V)$ d'un dispositif car à très basse température²⁰ (Hoffman, 2003, pp. 15-21), (Wiesendanger, 2009), (Ménard, 2016, pp. 10-14) :

$$G(V) = \frac{dI(V)}{dV} \propto \rho(eV) \quad (2.58)$$

20. Cette discussion est qualitative. Les mesures sont en réalité plus subtiles surtout si, en spectroscopie à effet tunnel, on utilise une pointe supraconductrice, ce qui est souvent le cas pour augmenter la résolution en énergie (voir Ménard, 2016, pp. 10-14).

où I est l'intensité du courant traversant le système, V la tension à ses bornes et ρ est la densité d'état de l'échantillon analysé. On présente Fig. 2.12 un exemple de mesure de la conductance différentielle par spectroscopie à effet tunnel dans le système Pb/Co/Si(111) sur lequel on reviendra dans la suite (Ménard et al., 2017). Cependant, un pic à $E = 0$ au milieu du gap

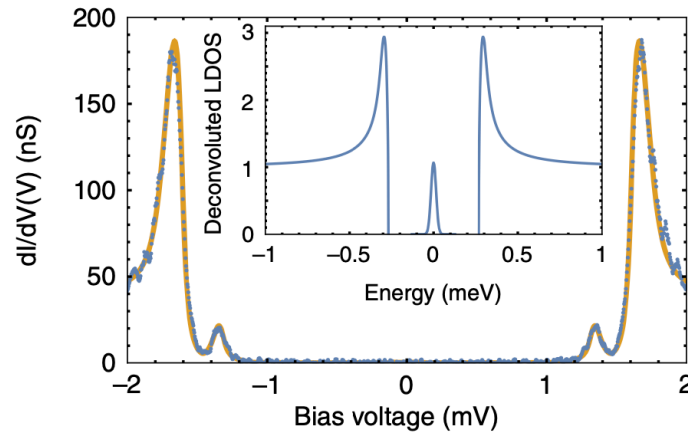


FIGURE 2.12 – Conductance différentielle par spectroscopie à effet tunnel du système Pb/Co/Si(111). La figure principale montre la conductance différentielle mesurée avec une pointe supraconductrice alors que l'encart représente la densité locale d'état déconvoluée. Celle-ci montre un pic bien défini à $E = 0$ dans le gap supraconducteur susceptible d'être interprété comme un état de Majorana. Figure extraite de (Ménard et al., 2017).

supraconducteur est loin d'être suffisant pour affirmer l'existence d'un état de Majorana. Si un de ces états est présent, il a été prédit que le pic à énergie nulle de la conductance différentielle G devait être quantifié à $G = 2e^2/h$ (Law et al., 2009; Flensberg, 2010; Wimmer et al., 2011).

Une autre prédiction permettant de détecter la présence de supraconductivité topologique et des fermions de Majorana associés repose sur l'effet Josephson. Une jonction Josephson est composée de deux supraconducteurs reliés par une fine zone non supraconductrice (isolant, métal, isolant topologique, matériau ferromagnétique, ...). Si l'on considère le cas où le matériau intermédiaire est un isolant et qu'on impose une différence de phase ϕ entre les deux paramètres d'ordre supraconducteurs²¹ mais pas de différence de potentiel, on montre alors qu'il existe un supercourant, dit courant Josephson, 2π -périodique $I(\phi)$ circulant dans la jonction (Tinkham, 1996, p. 196). Dans le cas où des fermions de Majorana sont présents, le courant est modifié et, en particulier, devient 4π -périodique (Kitaev, 2001; Fu et Kane, 2009; Lutchyn et al., 2010; Jiang et al., 2011). Une jonction Josephson topologique est représentée Fig. 2.13.

Ces prédictions ne sont pas si simple à réaliser expérimentalement. Plus particulièrement, si de nombreuses mesures sur de nombreux dispositifs à l'architecture différente amènent à penser que les fermions de Majorana ont bien été détectés, l'enjeu actuel est d'arriver à les

21. En pratique, ceci est réalisé en insérant un flux à travers une boucle reliant les deux supraconducteurs.

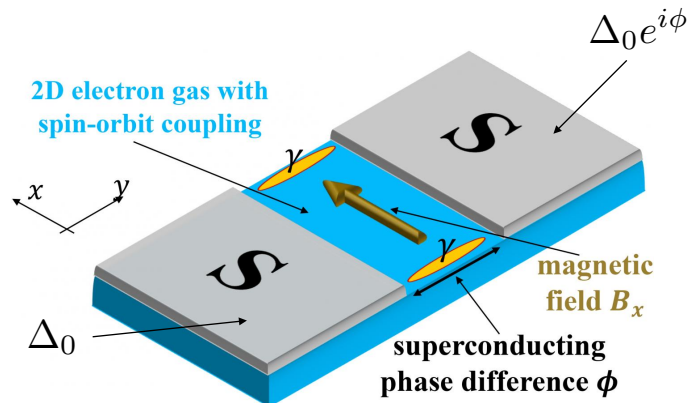


FIGURE 2.13 – Jonction Josephson formée entre deux supraconducteurs déposés sur un gaz d'électrons bidimensionnels avec couplage spin-orbite. Il existe une différence de phase ϕ entre les deux supraconducteurs. Un champ magnétique parallèle à la jonction est appliqué afin de générer la phase topologique marquée par la présence de deux états liés de Majorana (en jaune). Adapté de la figure d'Ewelina Hankiewicz de l'université de Würzburg ([hyperlien](#)).

différentier efficacement d'autres états dans le gap sans propriétés topologiques particulières comment on va le voir.

Même si la plupart des approches se fondent sur des hétérostructures qui combinent tous les ingrédients nécessaires à l'émergence de la phase topologique comme on l'a détaillé dans ce chapitre, il est intéressant de mentionner l'état de l'art concernant la supraconductivité topologique *intrinsèque*.

Le ruthénate de strontium Sr_2RuO_4 , dont la structure cristalline est présentée Fig. 2.14(a), a longtemps été le candidat principal pour un supraconducteur chiral en onde p malgré une absence de consensus quant à la symétrie du paramètre d'ordre (Jang et al., 2011; Alicea, 2012; Mackenzie et al., 2017). Récemment, les résultats de Résonance Magnétique Nucléaire de Pustogow et al. (2019) ont remis en cause la possibilité d'un appariement triplet. Ces résultats ont ensuite été suivis d'autres études théoriques (Gingras et al., 2019; Rømer et al., 2019; Røising et al., 2019) et expérimentales (Sharma et al., 2020) qui semblent confirmer l'absence de corrélations en onde p et ouvrent un nouveau chapitre dans le débat sur la symétrie du paramètre d'ordre. Deux résultats récents indiquent que ce paramètre d'ordre possède deux composantes différentes (Ghosh et al., 2020; Benhabib et al., 2020).

Toujours dans cette perspective, la famille de supraconducteurs à base de fer $\text{FeTe}_x\text{Se}_{1-x}$, dont la structure est présentée Fig. 2.14(b), (Yin et al., 2015; Chen et al., 2018; Wang et al., 2018; Machida et al., 2019; Chiu et al., 2020) (Lee, 2018) ainsi que le composé $(\text{Li}_{0.84}\text{Fe}_{0.16})\text{OHFeSe}$ (Liu et al., 2018; Chen et al., 2019) semblent posséder des états liés de Majorana au cœur de vortex. Un Majorana chiral a même été possiblement observé le long d'un mur de domaine cristallin dans $\text{FeSe}_{0.45}\text{Te}_{0.55}$ (Wang et al., 2020). Ces observations font de ces composés des candidats prometteurs à d'autres études.

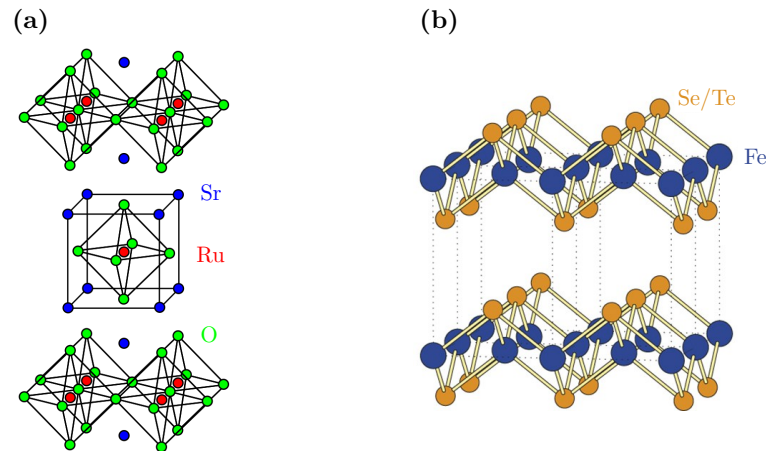


FIGURE 2.14 – (a) Structure cristalline du ruthénate de strontium Sr_2RuO_4 (source : [Wikipedia](#)) et (b) de $\text{Fe}(\text{Te}, \text{Se})$ (source : [Baek et al. \(2015\)](#)).

Du côté des hétérostructures, de nombreux dispositifs se composent de fils semi-conducteurs possédant un fort couplage spin-orbite comme InAs ou InSb, partiellement ou totalement recouvert par une couche du supraconducteur conventionnel Al et exposé à un champ magnétique comme illustré Fig. 2.15(a) et (b). Les premiers travaux mesurant un pic dans la conductance différentielle datent de 2012 et des progrès ont été réalisés depuis ([Das et al., 2012](#); [Mourik et al., 2012](#); [Deng et al., 2012, 2016](#)) même si une preuve irréfutable de la quantification du pic de conductance différentielle à $E = 0$ se fait toujours attendre²². A la même période, [Rokhinson et al. \(2012\)](#) ont observé la disparition d'un des plateaux de Shapiro d'une jonction Josephson de Nb sur InSb soumise à des radiofréquences, ce qui est une des signatures de l'effet Josephson fractionnaire. Pour une revue partielle des enjeux de ces expériences, voir [Lutchyn et al. \(2018\)](#) et [Prada et al. \(2019\)](#). Par ailleurs, cette plateforme a récemment été étendue à des fils totalement recouverts d'aluminium comme illustré Fig. 2.15(c) où, ici, ce sont les effets orbitaux dus au champ magnétique qui donnent lieu à la phase topologique comme on le détaillera à la Section 5.1 du Chapitre 4. La contrainte du champ magnétique est aussi en bonne voie d'être levée avec une nouvelle génération de fils partiellement recouverts d'Al supraconducteur d'EuS ferromagnétique ([Liu et al., 2020](#); [Vaitiekėnas et al., 2020](#)) Du côté des jonctions Josephson du type illustré Fig. 2.13, les derniers résultats de [Ren et al. \(2019\)](#) (Al sur HgTe) et [Fornieri et al. \(2019\)](#) (Al sur InAs) montrent que ces plateformes sont prometteuses, en grande partie grâce au moyen de contrôle supplémentaire fourni par la différence de phase entre les deux supraconducteurs.

La dernière plateforme qu'on souhaite mentionner ici repose sur la déposition d'atomes²³ magnétiques (Fe, Co, Mn, ...) sur (ou sous) des surfaces supraconductrices avec fort couplage

22. En effet, [Zhang et al. \(2018\)](#) prétendent avoir observé la quantification de la conductance mais leur traitement des données a récemment été mis en cause, voir [ici](#).

23. On utilise souvent le terme d'« adatome » venant de l'anglais *adatom* pour *adsorbed atom*.

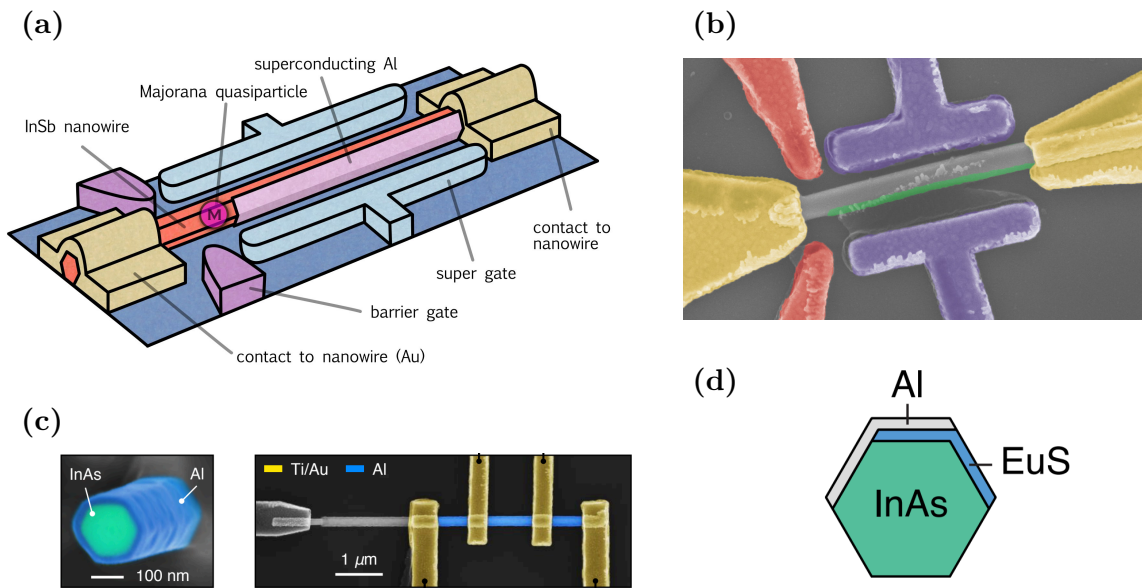


FIGURE 2.15 – (a) Schéma de principe d’une expérience basée sur un nanofils semi-conducteur partiellement couvert d’aluminium supraconducteur et (b) réalisation expérimentale. La longueur du fil (en gris, au centre) est approximativement $1\ \mu\text{m}$. Figures issues de [Zhang et al. \(2018\)](#). (c) Nanofil d’InAs entièrement recouvert d’aluminium et dispositif de mesure. Figures issues de [Vaitiekėnas et al. \(2020\)](#). (d) Schéma de la section hexagonale d’un fil d’InAs partiellement recouvert d’aluminium et de l’isolant ferromagnétique EuS. Figure extraite de [Vaitiekėnas et al. \(2020\)](#).

spin-orbite (Pb, Re, ...). Cette approche se prête naturellement à l’analyse par microscopie et spectroscopie par effet tunnel comme on va le voir.

Lorsque une impureté magnétique est placée dans un supraconducteur en onde s , le couplage entre les deux mène à la création d’états liés localisés appelés états de Yu-Shiba-Rusinov (YSR) ([Yu, 1965](#); [Shiba, 1968](#); [Rusinov, 1969](#)). Ces états ont récemment reconnu un regain d’intérêt pour le rôle qu’ils peuvent jouer dans la génération de supraconductivité topologique. Parmi de nombreux exemples, on peut citer les mesures effectuées sur des impuretés de Fe sur le supraconducteur NbSe_2 par [Ménard et al. \(2015\)](#) ou de Mn sur Pb par [Ruby et al. \(2016\)](#) où le caractère orbital des états de YSR est bien visible. La figure Fig. 2.16 illustre quelques-uns de ces résultats.

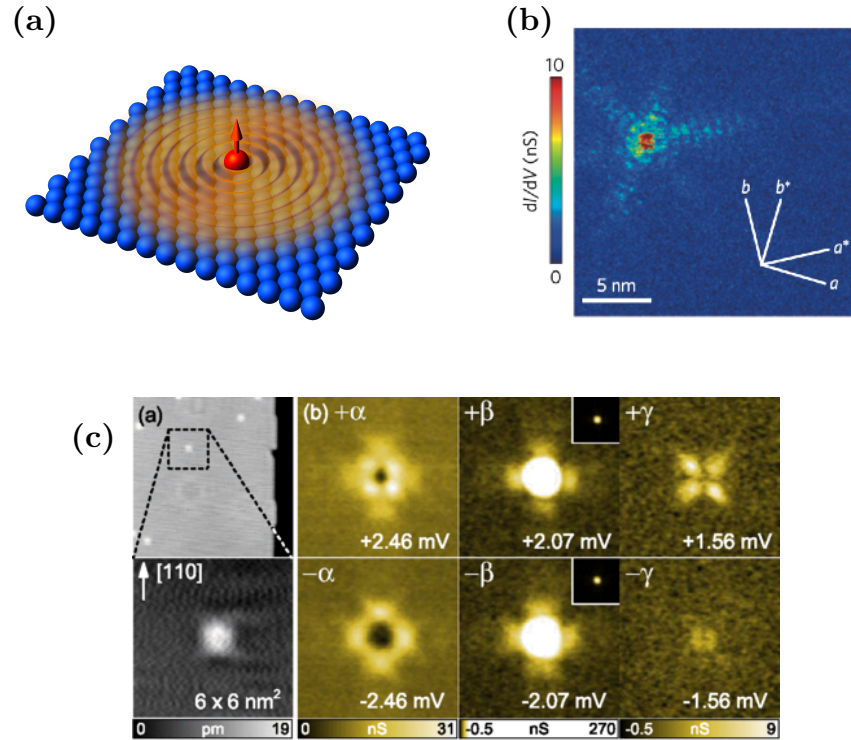


FIGURE 2.16 – (a) Représentation schématique d’un état lié (orange) autour d’une impureté magnétique (rouge) placée dans un supraconducteur (bleu). Crédit : Tristan Cren et [Ménard et al. \(2015\)](#). (b) Carte de conductance différentielle autour d’un atome de Fe sur NbSe₂ à l’énergie d’un état de YSR (0.13 meV en dessous du niveau de Fermi pour un gap supraconducteur d’environ 1.2 meV). Figure extraite de [Ménard et al. \(2015\)](#). (c) Topographie (gauche) et carte de conductance différentielle à l’énergie de plusieurs états de YSR de caractère orbital différent autour d’impuretés de Mn sur Pb. Figure extraite de [Ruby et al. \(2016\)](#).

Les états de YSR sont aussi analysés quand ils sont induits par des molécules magnétiques comme les phthalocyanines (de cobalt ou manganèse) ou les porphyrines (fer) sur NbSe₂ ou Pb) ([Franke et al., 2011](#); [Kezilebieke et al., 2018](#); [Farinacci et al., 2018](#)). Pour une revue plus complète de l’état de l’art expérimental sur les états de YSR (voir [Heinrich et al., 2018](#)).

Dans le cas où les impuretés magnétiques forment une chaîne ou un îlot assez dense, les états de YSR de chaque impureté se recouvrent partiellement et s’hybrident pour former une bande de Shiba. Du point de vue théorique cette bande pourra à son tour être gappée et amenée dans une phase topologique ([Pientka et al., 2013](#); [Li et al., 2016](#); [Pawlak et al., 2019](#)). Il a même été récemment montré que cette construction pouvait aussi s’appliquer à une distribution aléatoire d’impuretés (appelée « verre de Shiba ») par [Pöyhönen et al. \(2018\)](#). Dans cette optique des bandes de Shiba topologiques, la manipulation des impuretés et l’analyse précise des états induits par des regroupements de plus en plus grands (dimères, trimères, chaînes, ...) sont très importants pour la quête des fermions de Majorana ([Kezilebieke et al., 2018](#); [Ruby et al., 2018](#);

Kim et al., 2018a).

Suivant cette approche en 1D, des signatures correspondant à des fermions de Majorana, c'est-à-dire un pic de conductance localisé à l'extrémité d'une chaîne, ont été détectées dans le système Fe/Pb dès 2014 par Nadj-Perge et al. (2014). Depuis, d'autres expériences ont détecté de tels signaux (Ruby et al., 2015; Pawlak et al., 2016; Feldman et al., 2017; Kim et al., 2018a). De la même manière, de récentes mesures sur des îlots magnétiques bidimensionnels semblent confirmer ce schéma de création de supraconductivité et de ses fermions de Majorana renforcent encore les arguments pour la détection du fermion de Majorana (Ménard et al., 2017, 2019; Palacio-Morales et al., 2019; Kezilebieke et al., 2020).

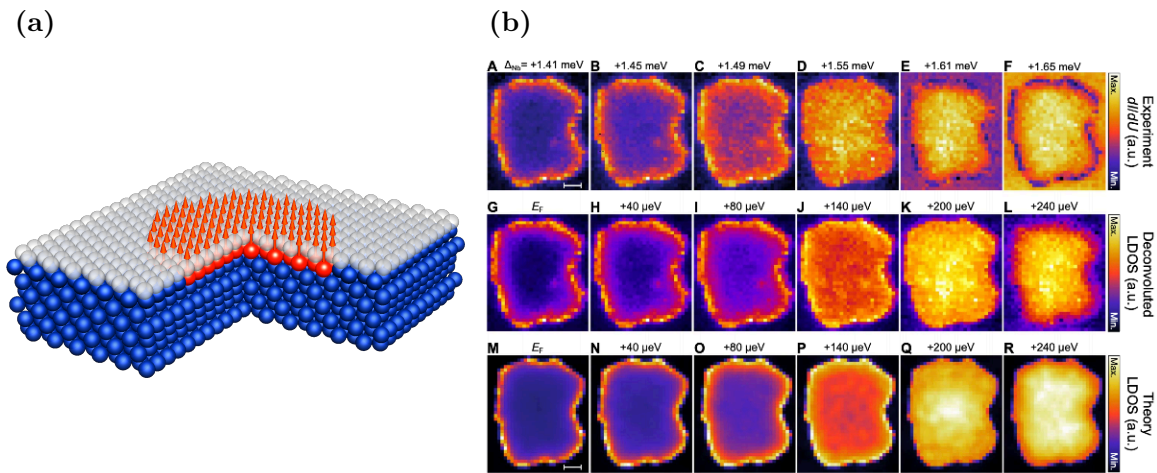


FIGURE 2.17 – (a) Schéma de principe d'un îlot d'atomes de Co (rouge) sur une surface de Si (blanc) enfoui sous une couche de Pb supraconducteur. Crédit : Tristan Cren et Ménard et al. (2017). (b) Cartes de conductance différentielle (brute, déconvoluée et théorique, de haut en bas) pour des énergies croissantes à partir du niveau de Fermi montrant clairement des états fortement localisés au bord de l'île de Fe déposée sur une surface de Re. Figure issue de Palacio-Morales et al. (2019).

Malgré toutes ces signatures, il est encore difficile d'affirmer avec certitude l'existence du fermion de Majorana, à tout le moins sous sa forme état lié aux extrémités d'une structure 1D (Ruby et al., 2017). C'est pourquoi un des enjeux actuels du domaine est de différencier ces états topologiques d'autres états de Shiba ou d'Andreev triviaux se trouvant accidentellement proche de $E = 0$. En effet, il a été montré dès 2012 que sous des conditions réalistes prenant en compte plusieurs bandes ou la présence de désordre dans les nanofils semi-conducteurs, un pic de conductance différentielle à $E = 0$ était quelque chose d'assez commun et cela même dans la phase triviale du système (Liu et al., 2012). De même, les effets de taille finie, les inhomogénéités dans les paramètres et l'environnement électrostatique peuvent compliquer, si ce n'est empêcher, l'observation des états de Majorana (Vuik et al., 2016; Reeg et al., 2017, 2018a,b; Kiendl et al., 2019; Jünger et al., 2020). C'est pourquoi de nouvelles méthodes de

diagnostic sont à envisager pour distinguer les états de Majorana des états triviaux (Liu et al., 2017; Li et al., 2018; Anselmetti et al., 2019; Avila et al., 2019).

2.5 Pourquoi les textures magnétiques ?

L'objectif de ce paragraphe est d'expliquer pourquoi les textures magnétiques sont, en principe, de bonnes candidates pour réaliser un supraconducteur topologique.

2.5.1 Une transformation unitaire...

Le point de départ est de considérer un système bidimensionnel d'électrons de masse effective m couplés à la texture magnétique $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ par une interaction d'échange d'amplitude J . Cependant, un couplage Zeeman avec un champ magnétique inhomogène produit exactement le même terme, si bien qu'on utilisera le terme de « texture magnétique » pour recouvrir ces deux cas. Le Hamiltonien en première quantification s'écrit :

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + J \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m}(\mathbf{r}) \quad (2.59)$$

où $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ est l'opérateur quantité de mouvement dans le plan (xy) et on paramétrise la texture par deux angles $\phi(\mathbf{r})$ et $\chi(\mathbf{r})$ de telle sorte que $\mathbf{m}(\mathbf{r}) = (\sin(\chi) \cos(\phi), \sin(\chi) \sin(\phi), \cos(\chi))$ et $|\mathbf{m}(\mathbf{r})| = 1$. On effectue alors une transformation unitaire $U(\mathbf{r})$ pour aligner localement le champ $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ sur l'axe z :

$$U^{-1}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m}(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) \equiv \sigma_z \quad (2.60)$$

En omettant la dépendance spatiale de $U(\mathbf{r})$ pour alléger les notations, le Hamiltonien $\mathcal{H}'(\mathbf{r}) = U^{-1} \mathcal{H}(\mathbf{r}) U$ s'écrit alors :

$$\mathcal{H}'(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m} [\hat{\mathbf{p}} + e \mathbf{a}(\mathbf{r})]^2 + J \sigma_z \quad (2.61)$$

où $e > 0$ est le quantum de charge et :

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = -\frac{i\hbar}{e} U^{-1}(\nabla U) \quad (2.62)$$

Les équations Eq. (2.61) et (2.62) montrent que le couplage à une texture magnétique est équivalent au couplage à un champ de jauge $SU(2)$ (donc non-abélien) $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ qui a la forme habituelle d'une connexion. Dans le cas où la texture est aussi dépendante du temps, ce qui ne sera cependant pas le cas dans la suite, la transformation Eq. (2.60) génère la composante temporelle du champ de jauge :

$$a_0(\mathbf{r}) = \frac{i\hbar}{e} U^{-1}(\partial_t U) \quad (2.63)$$

où on a omis la dépendance en temps (Zhang et Zhang, 2009). Ici, le degré de liberté « de jauge » provient des différents choix possibles pour réaligner la texture $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ avec l'axe z . Par exemple, on peut choisir $U = \exp(-i\chi\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2)$ avec $\mathbf{n} = (\mathbf{u}_z \times \mathbf{m})/|\mathbf{u}_z \times \mathbf{m}|$ (Zhang et Zhang, 2009) ou $U = \exp(-i\phi\sigma_z/2)\exp(-i\chi\sigma_y/2)$. En développant le champ de jauge $\mathbf{a}_\mu : (a_0, \mathbf{a})$ sur les matrices de Pauli de telle sorte que $\mathbf{a}_\mu = a_\mu^a \boldsymbol{\sigma}_a/2$, on observe que l'inhomogénéité de la texture génère un couplage spin-orbite linéaire en la quantité de mouvement. Par ailleurs, l'approche présentée succinctement ici, couplée à une approximation adiabatique qui revient à projeter $\mathcal{H}'(\mathbf{r})$ sur les deux bandes de spin \uparrow et \downarrow locales, permet de comprendre l'origine des champs électromagnétiques émergents générés par les textures magnétiques dont on reparlera Section 3.3 (Volovik, 1987; Zhang et Zhang, 2009; Zang et al., 2011; Nagaosa et Tokura, 2012, 2013).

Ainsi, au moins en principe, il est possible de remplacer le couplage spin-orbite intrinsèque par une texture magnétique pour obtenir de la supraconductivité topologique. Dans le cas particulier d'une dimension d'espace, plusieurs études théoriques ont montré le système champ homogène + couplage spin-orbite était équivalent à une spirale magnétique et que cette voie les ordres de grandeur mis en jeu étaient tout à fait réalistes (Braunecker et al., 2010; Choy et al., 2011; Nadj-Perge et al., 2013; Braunecker et Simon, 2013; Klinovaja et al., 2013; Vazifeh et Franz, 2013; Pientka et al., 2013). On représente cette équivalence Fig. 2.18 :

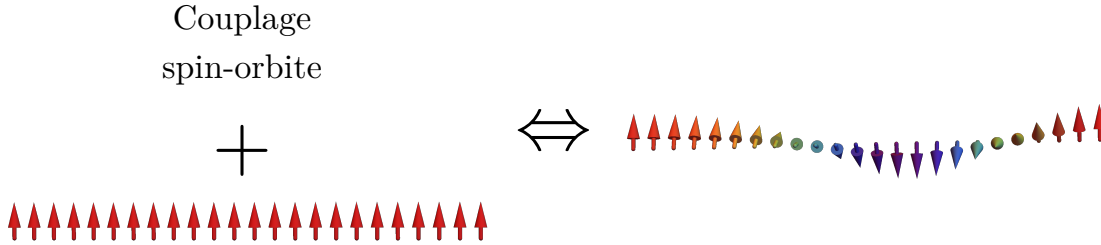


FIGURE 2.18 – Représentation schématique de l'équivalence « spin-orbite + champ homogène = spirale magnétique » en 1D.

Étant donnée la plus grande diversité des textures magnétiques possibles en deux dimensions, cette approche a eu un certain succès pour induire des phases topologiques (Klinovaja et Loss, 2013; Nakosai et al., 2013; Chen et Schnyder, 2015; Yang et al., 2016; Fatin et al., 2016; Matos-Abiague et al., 2017; Mascot et al., 2019; Güngördü et al., 2018; Zhou et al., 2019; Mohanta et al., 2019; Rex et al., 2019) même si certaines de ces approches combinent spin-orbite intrinsèque et spin-orbite induit. Un des intérêts de certaines de ces approches est d'augmenter le contrôle sur la phase topologique afin de pouvoir manipuler les éventuels fermions de Majorana et ainsi analyser leurs propriétés de tressage.

2.5.2 ...et ses réalisations expérimentales

Dans les exemples d'adatoms magnétiques déposés sur des surfaces supraconductrices cités précédemment, les expériences actuelles ne permettent de sonder les propriétés topologiques et la structure magnétique en même temps. Plus particulièrement, dans le système Fe/Re analysé par [Palacio-Morales et al. \(2019\)](#), il a été montré par microscope à effet tunnel résolue en spin que des textures non-collinéaires existaient ([Palacio-Morales et al., 2016](#)). De même, dans le système Pt/Co/Si, il est possible qu'une structure magnétique non triviale soit à l'origine de la phase topologique ([Ménard et al., 2017, 2019](#)). Par ailleurs, les progrès dans la compréhension, la manipulation et la caractérisation de ces systèmes permet d'envisager la *construction* de structures et de leurs textures magnétiques plutôt que reposer sur des propriétés issues de l'auto-assemblage ([Steinbrecher et al., 2018](#); [Kim et al., 2018a](#); [Choi et al., 2019](#); [Schlenhoff et al., 2020](#); [Schneider et al., 2020](#)).

Cependant, dans ces systèmes, la surface supraconductrice possède un fort couplage spin-orbite, ce qui peut masquer le rôle de la texture magnétique. Il y a peu, [Desjardins et al. \(2019\)](#) ont montré expérimentalement qu'une texture magnétique pouvait induire un couplage spin-orbite synthétique dans un nanotube de carbone. Le dispositif est composé d'un nanotube de carbone connecté à deux électrodes supraconductrices en Pd/Nb et suspendu au dessus d'une grille magnétique composée de multicouches de Co/Pt. Cette grille produit un champ magnétique oscillant de période 200 nm et d'amplitude 0.4 T. Le montage expérimental est représenté schématiquement Fig. 2.19(a) et sa réalisation expérimentale Fig. 2.19(b). Dans ce dispositif au facteur de Landé g mesuré de ≈ 3.5 , les auteurs rapportent un couplage spin-orbite induit caractérisé par une énergie $E_{SO} \approx 1$ meV. Cette valeur est à mettre en regard avec certaines expériences précédentes qui rapportent une valeur de 0.37 meV ([Kuemmeth et al., 2008](#)) et de 3.5 meV ([Steele et al., 2013](#)) en l'absence de texture magnétique.

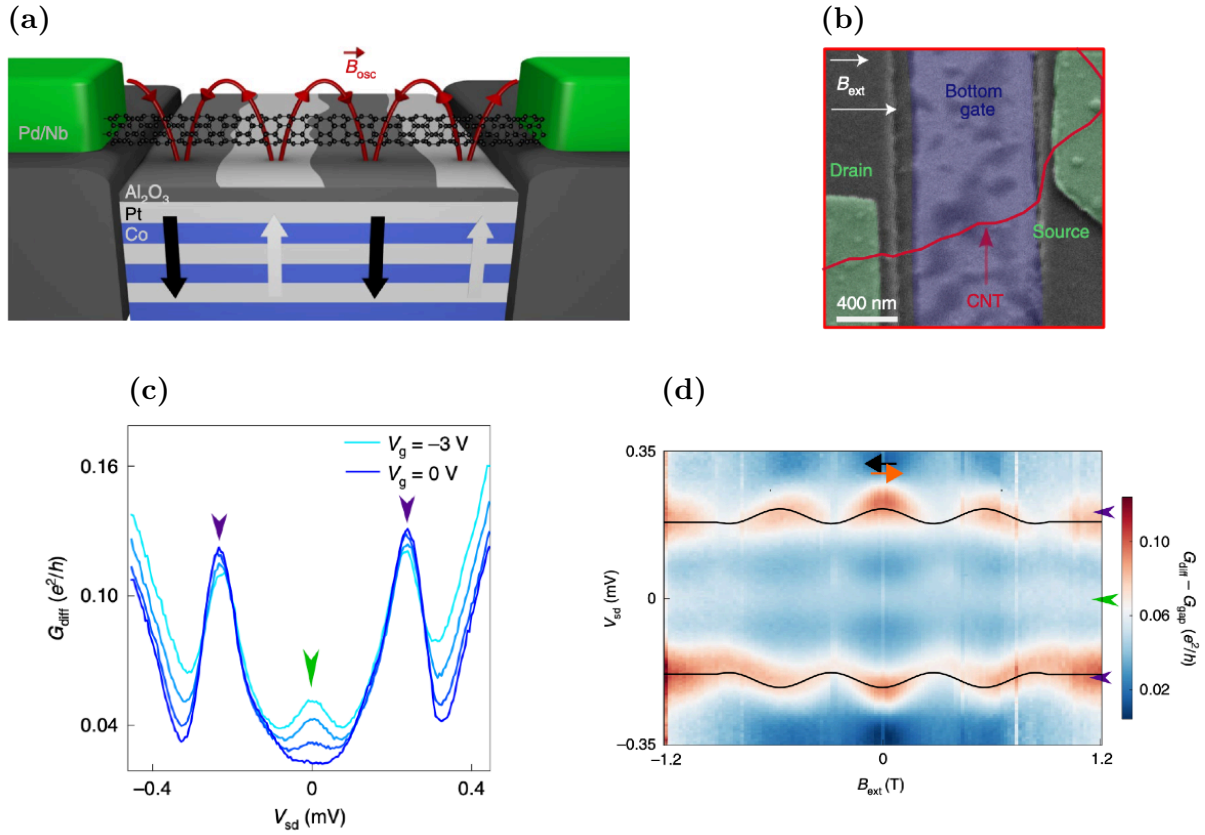


FIGURE 2.19 – (a) Représentation schématique du dispositif expérimental. Un nanotube de carbone connecté à deux électrodes supraconductrices (Pd/Nb) et suspendu au dessus d’une grille magnétique (multicouches de Co/Pt). (b) Réalisation expérimentale de ce dispositif. Le nanotube de carbone est en rouge, les électrodes en vert et la grille magnétique en bleu. (c) Conductance différentielle en fonction du potentiel de grille V_g montrant l’apparition d’un pic à $E = 0$ (flèche verte). (d) évolution du pic à $E = 0$ en fonction du champ magnétique appliqué. Les flèches violettes indiquent d’autres états dans le gap (états d’Andreev) et les courbes noires représentent les résultats de l’analyse théorique de ces états. Toutes les figures sont extraites de [Desjardins et al. \(2019\)](#).

Combiné avec un gap supraconducteur induit Δ_{eff} de l’ordre de 0.55 meV , tous les ingrédients pour une phase supraconductrice topologique sont ainsi réunis. En effet, en plaçant le potentiel de grille V_g à -3 V et en sondant les états de basse énergie avec le potentiel V_{sd} , un pic à $E = 0$ de largeur $\approx 150 \mu\text{eV}$ et de hauteur $\approx 0.05 e^2/h$ dans la conductance différentielle a été mesuré Fig. 2.19(c) et (d). Ces résultats sont ainsi plus qu’encourageants pour la suite.

LES SKYRMIONS MAGNÉTIQUES

3.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de présenter succinctement ce que sont les skyrmions magnétiques. Pour cela, on présente les ingrédients physiques nécessaires pour les voir émerger et on résume quelques-unes de leur propriétés tout en essayant de rester assez général quand aux différentes réalisations expérimentales possibles. On se restreint ici à la description des skyrmions classiques, pour la version quantique voir par exemple [Braun et Loss \(1996\)](#); [Psaroudaki et al. \(2017\)](#); [Lohani et al. \(2019\)](#); [Ochoa et Tserkovnyak \(2019\)](#); [Sotnikov et al. \(2020\)](#)

3.2 Définition et origines

Les skyrmions magnétiques, prédits pour la première fois par [Bogdanov et Yablonskiï \(1989\)](#), sont des textures topologiques nanométriques localisées qui apparaissent dans certains matériaux magnétiques où l'interaction relativiste de Dzyaloshinskii-Moriya (IDM, voir Encadré 1) joue un rôle important. Même si on se focalise sur le cas de l'IDM qui est au cœur des développements récents en spintronique, elle n'est pas la seule origine possible des skyrmions qui peuvent aussi être stabilisés par la compétition entre interactions dipolaires et anisotropie magnétique, la frustration des interactions magnétiques et les interactions à quatre spins ([Nagaosa et Tokura, 2013](#); [Bernand-Mantel et al., 2018](#); [Büttner et al., 2018](#)).

Les matériaux magnétiques sont généralement décrits dans la limite continue par une fonctionnelle micromagnétique¹ F de l'aimantation \mathbf{M} . En introduisant le vecteur unitaire \mathbf{m} tel que $\mathbf{M} = M_S \mathbf{m}$ où M_S est l'aimantation de saturation et en se restreignant à deux

1. Pour une introduction générale et détaillée, voir [Brown \(1963\)](#). Dans cette présentation, on laisse de côté les cas de la frustration et des interactions à quatre spins.

dimensions, cette fonctionnelle s'écrit (Blundell, 2001; Komineas, 2012)

$$F[\mathbf{m}] = \int_M \left(A|\nabla\mathbf{m}|^2 + Km_z^2 + \mathcal{F}_{\text{DM}} - \frac{1}{2}\mu_0 M_S \mathbf{m} \cdot \mathbf{H}_M - \mu_0 M_S \mathbf{m} \cdot \mathbf{H}_{\text{ext}} \right) d^2\mathbf{r} \quad (3.1)$$

où A est l'amplitude de l'interaction d'échange, K caractérise l'anisotropie ($K < 0$ favorise l'axe z – c'est le cas axe-facile – et $K > 0$ le défavorise – c'est le cas plan-facile –), \mathcal{F}_{DM} est la densité d'énergie de Dzyaloshinskii-Moriya (voir Encadré 1). Le troisième terme correspond à l'énergie magnétostatique due au champ \mathbf{H}_M créé par la distribution d'aimantation et le dernier terme correspond à l'effet Zeeman causé par un champ \mathbf{H}_{ext} extérieur. Dans ce cadre, on imagine que le matériau magnétique est uniformément polarisé. À partir de cet état, il est possible de créer une excitation en retournant un seul spin. Cependant, de manière à minimiser l'énergie magnétique Eq. (3.1), les spins voisins se réorganisent de manière à interpoler continûment entre le spin retourné et l'état ferromagnétique uniforme. Bogdanov et Yablonskiĭ (1989) ont montré qu'un profil d'aimantation à symétrie cylindrique (coordonnées $\mathbf{r} = (r, \theta, z)$) de la forme $\mathbf{m} = (\sin f(r) \cos(\theta), \sin f(r) \sin(\theta), \cos f(r))$ avec les conditions aux limites $f(0) = 0$ et $f(\infty) = \pi$ existait² même s'il n'y a pas de forme analytique pour $f(r)$.

2. Cet exemple décrit donc un spin central orienté selon $+z$ dans un ferromagnétique polarisé selon $-z$.

Encadré 1: Interaction de Dzyaloshinskii-Moriya

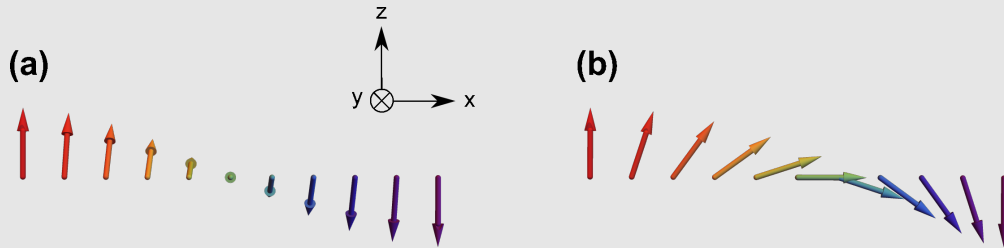
L'interaction de Dzyaloshinskii-Moriya (IDM) est une interaction à deux spins d'origine relativiste qui apparaît en cas de brisure de symétrie d'inversion. Elle s'écrit

$$\mathcal{H}_{\text{DM}} = \mathbf{D} \cdot (\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2) \quad (3.2)$$

où l'orientation du vecteur de Dzyaloshinskii-Moriya \mathbf{D} dépend des symétries du problème mais requière la brisure de la symétrie d'inversion (Dzialoshinskii, 1957; Moriya, 1960)^a. Les deux types principaux d'IDM dépendent du mécanisme de brisure de symétrie d'inversion. En effet, lorsque c'est le cristal qui n'a pas de centre de symétrie, on parle d'IDM de volume et lorsque la brisure d'inversion est due à une interface on parle d'IDM interfaciale (Fert et al., 2013; Kim et al., 2018b).

Dans la limite micromagnétique, la contribution de l'IDM à la fonctionnelle Eq. (3.1) peut s'écrire comme une combinaison d'« invariants de Lifshitz » $\mathcal{L}_{ij}^{(k)} = m_i \partial_k m_j - m_j \partial_k m_i$ qui dépend elle aussi des symétries du problème (Lifshitz, 1942). Par exemple, dans le cas d'une IDM de volume $\mathcal{F}_{\text{DM}}^{\text{vol}} = D (\mathcal{L}_{zy}^{(x)} + \mathcal{L}_{xz}^{(y)} + \mathcal{L}_{yx}^{(z)})$ alors que dans le cas d'une IDM interfaciale $\mathcal{F}_{\text{DM}}^{\text{int}} = D (\mathcal{L}_{xz}^{(x)} + \mathcal{L}_{yz}^{(y)})$ (Rohart et Thiaville, 2013; Ado et al., 2020; Kuchkin et Kiselev, 2020)^b.

La différence entre les deux types de brisure de symétrie s'illustre au niveau des parois entre domaines magnétiques car l'IDM fixe l'orientation du plan de rotation de l'aimantation. Comme illustré ci-dessous, dans le cas volumique l'IDM favorise la paroi dite de « de Bloch » (a) alors que dans le cas interfacial c'est la structure « de Néel » (b) qui est préférée^c.



Interaction de Dzyaloshinskii-Moriya et parois de domaine. (a) Paroi de domaine de Bloch favorisée par l'IDM de volume (l'aimantation tourne dans le plan (yz)) et (b) paroi de domaine de Néel favorisée par l'IDM interfaciale (plan de rotation de l'aimantation (xy)).

- a. Pour une dérivation explicite et un résumé pédagogique voir par exemple Cépas (2000, pp. 4 & 11–16).
b. Cependant, des développements récents montrent la nécessité de prendre en compte toute la nature tensorielle de l'IDM $\mathcal{F}_{\text{DM}} = D_{ijk} m_i \partial_j m_k$ pour rendre compte des effets de bord (Rohart et Thiaville, 2013; Hals et Everschor-Sitte, 2017) et d'effets de volume plus subtils (Ado et al., 2020).
c. Dans le cas volumique, il est possible de trouver des parois de Néel selon le réseau cristallin.

Dans tout ce qui suit, les skyrmions seront généralisés et paramétrés par la texture :

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \sin f(r) \cos (q\theta + \gamma) \\ \sin f(r) \sin (q\theta + \gamma) \\ \cos f(r) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

où $f(0) = 0^3$, $f(\infty) = p\pi$, q est la vorticité et γ l'hélicité. $p \in \mathbb{N}$ est appelé nombre d'enroulement radial et compte le nombre de retournement du spin en allant du cœur du skyrmion jusqu'à son bord. De même, la vorticité $q \in \mathbb{Z}$ compte le nombre de tours effectués par le spin dans le plan xy quand un tour autour du cœur du skyrmion est effectué dans l'espace réel. De plus, $q > 0$ correspond aux skyrmions et $q < 0$ aux *antiskyrmions*. L'hélicité est un angle de rotation global de la texture et vaut $\gamma = 0, \pi$ pour les skyrmions de Néel et $\gamma = \pm\pi/2$ pour les skyrmions de Bloch (voir Encadré 1. La distinction Néel/Bloch ne vaut pas pour les antiskyrmions (voir [Nayak et al., 2017](#)). Plus généralement, l'hélicité γ n'a pas de sens dès que $q \neq 1$). Les textures standards obtenues pour $p = |q| = 1$ et $\gamma \in \{0, \pm\pi/2, \pi\}$ sont présentées Fig. 3.1 alors qu'on illustre les textures avec $p, q > 1$ Fig. 3.2

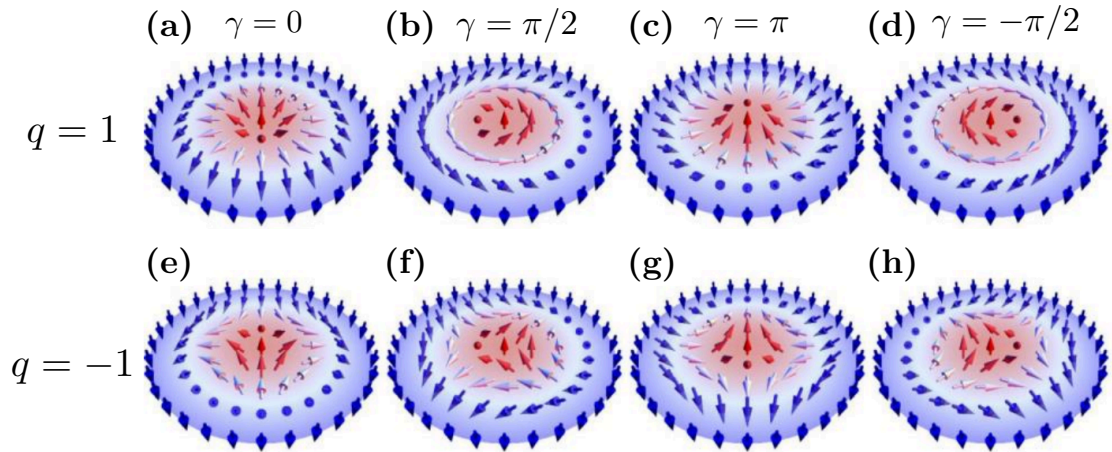


FIGURE 3.1 – Textures skyrmioniques élémentaires avec nombre d'enroulement radial $p = 1$. La ligne supérieure (a) – (d) présente les skyrmions avec vorticité $q = 1$. (a), (c) illustrent les skyrmions de Néel ($\gamma = 0, \pi$) et (b), (d) ceux de Bloch ($\gamma = \pm\pi/2$). La ligne inférieure (e) – (h) présente les antiskyrmions, définis par $q = -1$, d'hélicité différente. La distinction « de Bloch » ou « de Néel » ne peut pas se faire ici. Figure reprise et adaptée de [Zhang et al. \(2020\)](#).

3. Ce sera toujours le cas dans cette thèse.

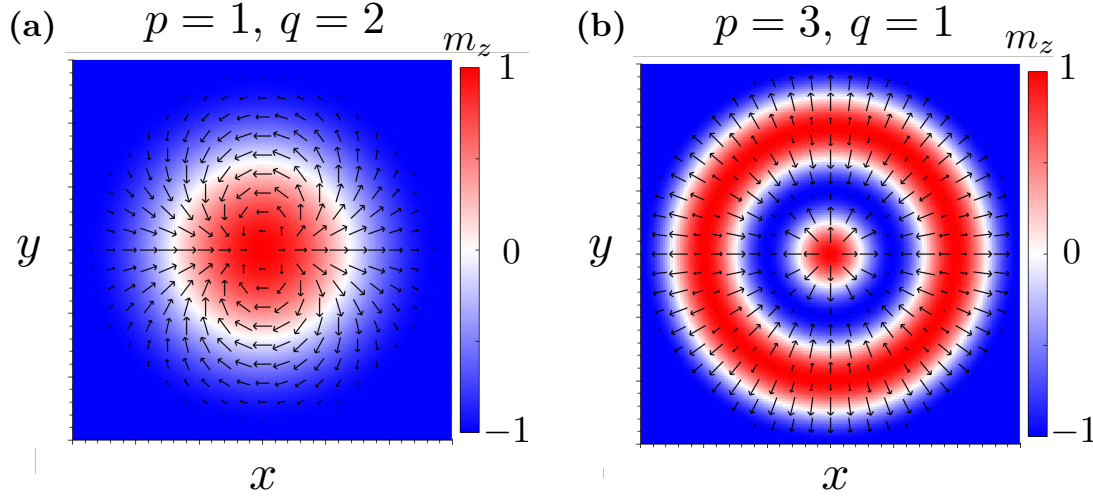


FIGURE 3.2 – Exemples de textures skyrmioniques généralisée. (a) $p = 1$ et $q = 2$. (b) $p = 3$ et $q = 1$. Les flèches représentent les composantes m_x, m_y alors que la couleur code m_z .

3.3 Topologie et conséquences

Jusqu'à présent, la nature topologique des skyrmions, et encore moins ses conséquences, n'ont été mises en évidence en dehors de la notion naïve d'« enroulement ». Comme mentionné en introduction, les textures et défauts topologiques peuvent être caractérisés par un invariant topologique dont l'expression exacte dépend du système étudié. Dans le cas présent, cet invariant est appelé nombre skyrmionique N_{sk} et est défini comme :

$$N_{\text{sk}} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \mathbf{m} \cdot (\partial_x \mathbf{m} \times \partial_y \mathbf{m}) \quad (3.4)$$

Ce nombre entier peut-être interprété comme l'angle solide défini par le vecteur \mathbf{m} (en unités de 4π) lorsqu'on tout l'espace réel est parcouru. Pour plus de détails, voir Encadré 2. Avec la texture générale donnée Eq. (3.3), on trouve pour N_{sk} :

$$N_{\text{sk}} = \frac{q}{2}(1 - (-1)^p) \quad (3.5)$$

Ainsi, on voit que les skyrmions ne « sont » topologiques que si p , le nombre d'enroulement radial, est impair.

Comme dans toutes les études impliquant la topologie, la question essentielle réside dans l'étude des conséquences physiques de l'existence d'un invariant non nul. De la même manière que l'invariant topologique de l'effet Hall quantique donne lieu à une quantification de la conductance de Hall (von Klitzing et al., 1980; Thouless et al., 1982; Niu et al., 1985), le nombre skyrmionique intervient dans la dynamique des skyrmions. En effet, les textures de N_{sk} non nul sont soumises à une dynamique gyrotropique, aussi connue sous le nom d'« effet Hall skyrmionique », décrite par l'équation de Thiele (Thiele, 1973; Nagaosa et Tokura, 2013;

Kim, 2019). De plus, sur les bases de la Section 2.5, l'existence d'une densité topologique $\mathbf{m} \cdot (\partial_x \mathbf{m} \times \partial_y \mathbf{m})$ peut s'interpréter comme un champ magnétique émergent qui influence les propriétés de transport électronique notamment *via* l'« effet Hall topologique » (Volovik, 1987; Zhang et Zhang, 2009; Zang et al., 2011; Nagaosa et Tokura, 2012, 2013). Ces effets reposant sur la *densité* topologique, ils existent dès qu'il y a des inhomogénéités dans le champ $\mathbf{m}(\mathbf{r})$. Néanmoins, le fait que les skyrmions soient topologiques (c'est-à-dire que l'intégrale de la densité est un entier) garantissent l'existence d'un quantum de ce champ magnétique émergent localisé dans l'espace. Ceci permet une analogie avec les vortex supraconducteurs qui sont aussi des quanta de flux magnétique localisés soumis à une dynamique gyrotropique (Blatter et al., 1994; Hals et al., 2016).

Encadré 2: Le nombre skyrmionique

Cet encadré a pour objectif de montrer la signification du nombre skyrmionique et suit [Rajaraman \(1987, p. 54\)](#). Il s'agit ici de montrer que N_{sk} n'est rien d'autre que l'angle solide (divisé par 4π) parcouru par le vecteur \mathbf{m} lorsque tout l'espace \mathbb{R}^2 est parcouru. Pour ce faire, il suffira de réaliser un changement de variable vers des coordonnées sphériques internes au degré de liberté \mathbf{m} qui vivent sur la sphère $\mathbb{S}_2^{\text{int}}$ car $|\mathbf{m}| = 1$. On utilisera ici la convention d'Einstein selon laquelle on somme sur tout indice répété et on notera la position dans l'espace à deux dimensions $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. On utilisera les indices $\mu, \nu = 1, 2$ pour les composantes de la position dans \mathbb{R}^2 , $a, b, c = 1, \dots, 3$ pour les composantes cartésiennes du vecteur tridimensionnel \mathbf{m} et $r, s = 1, 2$ pour les coordonnées sphériques internes qu'on nommera (ξ_1, ξ_2) .

N_{sk} défini Eq. (3.4) peut se réécrire à l'aide du tenseur de Levi-Civita en utilisant $(\mathbf{m} \times \mathbf{n})_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho} m_\nu n_\rho$. De telle sorte que :

$$\begin{aligned} N_{\text{sk}} &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{abc} m_a \frac{\partial m_b}{\partial x_\mu} \frac{\partial m_c}{\partial x_\nu} d^2\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{abc} m_a \frac{\partial m_b}{\partial \xi_r} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_\mu} \frac{\partial m_c}{\partial \xi_s} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_\nu} d^2\mathbf{x} \end{aligned}$$

On effectue désormais le changement de variable des coordonnées cartésiennes \mathbf{x} aux coordonnées sphériques internes $\boldsymbol{\xi}$. Le jacobien de cette transformation s'écrit :

$$d^2\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2} \varepsilon_{rs} \varepsilon_{\mu\nu} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_\mu} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_\nu} d^2\mathbf{x} \quad \implies \quad \varepsilon_{rs} d^2\boldsymbol{\xi} = \varepsilon_{\mu\nu} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_\mu} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_\nu} d^2\mathbf{x}$$

Où on a utilisé la relation $\varepsilon_{rs} \varepsilon_{ab} = \delta_{ra} \delta_{sb} - \delta_{rb} \delta_{sa}$ où δ_{ab} est le symbole de Kronecker. On a alors

$$N_{\text{sk}} = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{S}_2^{\text{int}}} \varepsilon_{rs} \varepsilon_{abc} m_a \frac{\partial m_b}{\partial \xi_r} \frac{\partial m_c}{\partial \xi_s} d^2\boldsymbol{\xi}$$

Cependant les composantes cartésiennes de l'élément de surface $d\mathbf{S}^{\text{int}}$ s'écrivent par définition $dS_a^{\text{int}} = \frac{1}{2} \varepsilon_{rs} \varepsilon_{abc} \frac{\partial m_b}{\partial \xi_r} \frac{\partial m_c}{\partial \xi_s} d^2\boldsymbol{\xi}$. Il reste donc

$$N_{\text{sk}} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}_2^{\text{int}}} m_a dS_a^{\text{int}} \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}_2^{\text{int}}} dS^{\text{int}}$$

puisque \mathbf{m} est le vecteur unitaire normal à la surface $d\mathbf{S}^{\text{int}}$. Ce résultat prouve que N_{sk} compte le nombre de fois que le vecteur \mathbf{m} parcourt la sphère $\mathbb{S}_2^{\text{int}}$ lorsque on intègre sur le plan \mathbb{R}^2 .

3.4 Réalisations expérimentales du skyrmion et de ses généralisations

A des fins pédagogiques, on s'est focalisés jusqu'à présent sur les skyrmions « standards » c'est-à-dire ceux induits par l'interaction de Dzyaloshinskii-Moriya. La figure suivante Fig. 3.3, extraite de l'article de revue de [Everschor-Sitte et al. \(2018\)](#), récapitule les matériaux ou hétérostructures dans lesquels des skyrmions ont été observés, la nature isolante ou conductrice du matériau, la plage de température ΔT sur laquelle existent les skyrmions, la longueur d'onde des états magnétiques périodiques sous-jacents et enfin le type de skyrmion (Bloch ou Néel). Plusieurs éléments sont frappants : (i) les skyrmions existent de quelques degrés K

Material	Sample	Conduction	ΔT_{sky} (K)	λ_H (nm)	Type	References
MnSi	Bulk	Metal	28-29.5	18	Bloch	28 and 293-295
MnSi (press.)	Bulk	Metal	5-29	18	Bloch	166 and 296-298
MnSi	Film (~50 nm)	Metal	<5-23	18	Bloch	299 and 300
Fe _{1-x} Co _x Si	Bulk	Semi-metal	25-30	37	Bloch	301 and 302
Fe _{0.5} Co _{0.5} Si	Film (~20 nm)	Semi-metal	5-40	90	Bloch	30
FeGe	Bulk	Metal	273-278	70	Bloch	303
FeGe	Film (~75 nm)	Metal	250-270	70	Bloch	31, 303, and 304
FeGe	Film (~15 nm)	Metal	60-280	70	Bloch	31
Cu ₂ OSeO ₃	Bulk	Insulator	56-58	60	Bloch	64, 65, and 305-308
Cu ₂ OSeO ₃	Film (~100 nm)	Insulator	<5-57	50	Bloch	64 and 309
Co ₂ Zn ₈ Mn ₄	Bulk	Metal	284-300	125	Bloch	284
Co ₂ Zn ₉ Mn ₃	Bulk	Metal	311-320	>125	Bloch	310
Co ₂ Zn ₉ Mn ₃	Film (~150 nm)	Metal	300-320	>125	Bloch	310
GaV ₄ S ₈	Bulk	Semi-metal	9-13	17.7	Néel	311
Co/Ru(0001)	Monolayer	...	~4.2	20	Néel	108
Fe/Ir(111)	Monolayer	...	<28	...	Néel	29, 34, 312, and 313
PdFe/Ir(111)	Bilayer	...	<8	6-7	Néel	34, 124, 312, and 314-316
Fe/Ir(111)	Trilayer	Metal	8	4	Néel	158
(Ir/Co/Pt) ₁₀	Multilayer	Metal	≤300	30-90	Néel	46
(Pt/Co/MgO)	Single layer	Metal	≤300	~500	Néel	47
Pt/CoFeB/MgO	Multilayer	Metal	≤300	480	Néel	48
Pt/Co/Ta	Multilayer	Metal	≤300	480	Néel	48
Pt/Co ₆₀ Fe ₂₀ B ₂₀ /MgO	Multilayer	Metal	≤300	344	Néel	48 and 183
W/Co ₂₀ Fe ₆₀ B ₂₀ /MgO	Multilayer	Metal	≤300	460	Néel	86
Pd/Co ₆₀ Fe ₂₀ B ₂₀ /MgO	Multilayer	Metal	≤300	300	Néel	84
Ta/Co ₂₀ Fe ₆₀ B ₂₀ /MgO	Single layer	Metal	> 300	4200	Néel	225
Ta/Co ₂₀ Fe ₆₀ B ₂₀ /MgO	Multilayer	Metal	≤300	<900	Néel	84
Ir/Fe/Co/Pt	Multilayer	Metal	5~300	~150	Néel	78 and 79
Pt/Gd ₂₅ Fe _{65.6} Co _{9.4} /MgO	Multilayer	Metal	≤300	440	Néel	189

FIGURE 3.3 – Résumé des skyrmions observés expérimentalement. Le tableau indique les matériaux utilisés, leur forme, leurs propriétés de conduction ainsi que la plage de température sur laquelle des skyrmions ont été mesurés. Les propriétés telles que la longueur d'onde des états magnétiques périodiques sous-jacents et le type de skyrmion (Bloch ou Néel) sont détaillées dans les colonnes 5 et 6. Reproduit de ([Everschor-Sitte et al., 2018](#)).

jusqu'à température ambiante (~ 300 K) et (ii) la plupart émergent dans des matériaux métalliques. Par ailleurs, en extrapolant que la longueur d'onde donne un bon ordre de grandeur pour la taille du skyrmion, on observe que celle-ci varie de quelques nanomètres à quelques centaines de nanomètres. En outre, même si les premiers skyrmions ont été observés sous un champ magnétique extérieur de quelques mT (par exemple, c'est le cas pour MnSi et

Cu_2OSeO_3 , voir [Nagaosa et Tokura, 2013](#); [Fert et al., 2013](#)), il en existe désormais sans champ magnétique extérieur (voir par exemple [Meyer et al., 2019](#)). Les antiskyrmions ont aussi été observés même s'ils semblent moins abondants [Nayak et al. \(2017\)](#).

On a déjà mentionné la multiplicité des mécanismes pouvant mener à la stabilisation de skyrmions (ou autres textures topologiques). Dans le cas de la compétition entre énergie d'anisotropie et interactions dipolaires, ce qu'on appelle aujourd'hui des skyrmions était connu depuis les années 1960 sous le nom de « bulles magnétiques » ([Malozemoff et Slonczewski, 1979](#); [Hubert et Schäfer, 2009](#)). La différence entre les skyrmions et les « skyrmions bulle » est représentée schématiquement Fig. 3.4.

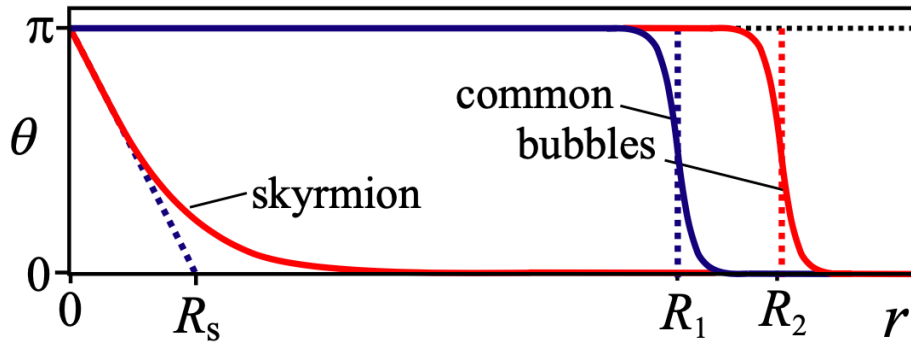


FIGURE 3.4 – Comparaison des profils ($f(r)$ dans les notations de cette thèse et $\theta(r)$ sur la figure) entre le skyrmion et la bulle magnétique. Figure extraite de [Kiselev et al. \(2011\)](#).

Ces bulles magnétiques, contrairement aux skyrmions stabilisés par l'interaction de Dzyaloshinskii-Moriya, peuvent avoir des nombres d'enroulement $p, q > 1$, ce qui motive la généralisation faite Eq. (3.3). Récemment, ces résultats ont été généralisés à d'autres plateformes. Par exemple, plusieurs études théoriques montrent que des skyrmions magnétiques avec $q = 2$ sont attendus dans des systèmes magnétiques frustrés ([Leonov et Mostovoy, 2015](#); [Mostovoy, 2020](#)) ou itinérants ([Ozawa et al., 2017](#)). De même, des skyrmions de $p > 1$ sont réalistes ([Rohart et Thiaville, 2013](#); [Hagemeister et al., 2018](#)) et ont déjà été réalisés dans des nano-disques de FeGe ([Zheng et al., 2017](#)) ou de permalloy $\text{Ni}_{81}\text{Fe}_{19}$ ([Finizio et al., 2018](#)) ainsi que dans des îles magnétiques de Pd/Fe/Ir(111) ([Cortés-Ortuño et al., 2019](#)). Tous ces éléments justifient l'étude de la texture générale donnée Eq. (3.3).

Dans le chapitre qui suit, on étudie un système composé d'un skyrmion de nombres p et q arbitraires placé à proximité d'un supraconducteur conventionnel. Bien entendu, la nature exacte du couplage entre les deux sous-systèmes dépendra de la plateforme expérimentale choisie mais on se focalise ici sur le cas d'une interaction d'échange locale avec un matériau magnétique isolant.

LES SKYRMIONS MAGNÉTIQUES POUR LA SUPRACONDUCTIVITÉ TOPOLOGIQUE

4.1 Introduction

Le travail central de cette thèse a consisté dans l'analyse précise du système composé d'un skyrmion magnétique placé en proximité d'un supraconducteur en onde s (Garnier et al., 2019). Bien sûr la supraconductivité topologique et les skyrmions magnétiques étant deux sujets en vogue, des systèmes proches ont déjà été analysés et particulièrement par Nakosai et al. (2013), Chen et Schnyder (2015) et Yang et al. (2016). Par ailleurs, pendant que ce travail été réalisé d'autres travaux ont complétés celui-ci (Güngördü et al., 2018; Mascot et al., 2019; Rex et al., 2019). Mais on se focalise ici sur un système sans couplage spin-orbite intrinsèque.

4.2 Position du problème

On considère le système présenté sur la Fig. 4.1 qui est composé d'un supraconducteur en onde s en contact avec un matériau magnétique comportant un skyrmion. On note d l'épaisseur du film supraconducteur et h celle du matériau magnétique bien que celle-ci n'entre pas encore dans l'analyse à ce stade. Du point de vue du système magnétique, on considère que la texture est statique et que son seul effet est de créer un champ d'échange pour les électrons qui, en retour, n'affectent pas la texture. On reviendra sur ces hypothèses ainsi que sur les contraintes expérimentales à la lumière du Chapitre 3 en Section 4.6.

Dans le formalisme de Bogoliubov-de Gennes, le Hamiltonien en seconde quantification

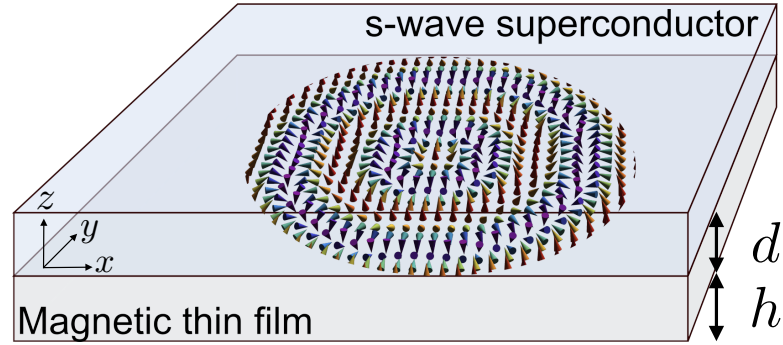


FIGURE 4.1 – Un skyrmion de nombres d’enroulement $p = 4$ et $q = 2$ placé en contact avec un supraconducteur en onde s . On note d (resp. h) l’épaisseur du film supraconducteur (resp. magnétique). L’origine de la coordonnée z se situe au milieu du film magnétique.

dans la limite continue s’écrit :

$$H = \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r} \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \mathcal{H}(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) \quad (4.1)$$

avec le Hamiltonien Bogoliubov-de Gennes $\mathcal{H}(\mathbf{r})$:

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\nabla^2}{2m} - \mu \right) \tau_z + J \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m}(\mathbf{r}) + \Delta_0 \tau_x \quad (4.2)$$

où on travaille dans des unités telles que $\hbar \equiv 1$, on a choisit la même base de Nambu que précédemment : $\Psi(\mathbf{r}) = \left(\psi_\uparrow(\mathbf{r}), \psi_\downarrow(\mathbf{r}), \psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}), -\psi_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}) \right)^T$ et on rappelle qu’on a paramétré le skyrmion en coordonnées polaires $\mathbf{r} = (r, \theta)$ dans la base cartésienne (x, y, z) comme (pour plus de détails, voir Eq. (3.3)) :

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \sin f(r) \cos (q\theta + \gamma) \\ \sin f(r) \sin (q\theta + \gamma) \\ \cos f(r) \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

où $f(0) = 0$ et $f(\infty) = p\pi$, q est la vorticité et γ l’hélicité qu’on choisit comme étant nulle (skyrmion de Néel). Une hélicité non-nulle peut être réintroduite par une transformation unitaire globale. Même si le début de ce qui suit ne dépend pas de la forme particulière choisie pour $f(r)$, on précise quand même le profil dont on se servira plus tard. Par simplicité, on choisit un profil linéaire :

$$f(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < r_0 \\ \pi \frac{r-r_0}{\lambda} & \text{si } r_0 \leq r \leq r_0 + p\lambda \\ p\pi & \text{si } r > r_0 + p\lambda \end{cases} \quad (4.4)$$

On a ici introduit le paramètre r_0 qui est le rayon du cœur du skyrmion où tous les spins sont alignés selon $+z$ et λ et la longueur nécessaire pour un retournement de spin le long

d'une ligne radiale. En pratique, on prendra toujours $r_0 = 0$ mais il est néanmoins nécessaire de l'introduire pour régulariser le problème analytique (voir Annexe B). On note qu'avec la définition donnée Eq. (4.7), le skyrmion est inclus dans un ferromagnétique polarisé selon $\pm z$ en fonction de la parité de p . Ce profil est représenté schématiquement Fig. 4.2. On rappelle

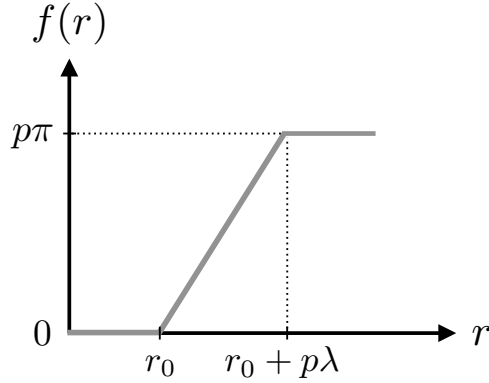


FIGURE 4.2 – Représentation schématique du profil $f(r)$ linéaire donné Eq. (4.7). r_0 dénote le rayon du cœur du skyrmion nécessaire pour le traitement analytique.

par ailleurs que m dénote la masse effective des électrons, μ le potentiel chimique, $J > 0$ l'amplitude de l'interaction d'échange et Δ_0 le gap supraconducteur en onde s induit. De la même manière qu'au chapitre 2 Section 2.3, ce Hamiltonien appartient à la classe D de la classification Tableau 2.1. Le Hamiltonien Eq. (4.2) n'est *a priori* pas évident à analyser du fait de l'inhomogénéité de la texture de spin. Dans ce qui suit, et afin d'analyser rigoureusement la physique du système on combinera plusieurs approches complémentaires. En effet, il est possible d'utiliser une symétrie de rotation pour diagonaliser le Hamiltonien Eq. (4.2) par bloc et simplifier les analyses analytique et numérique. Enfin, on effectuera aussi des calculs dans l'approximation des liaisons fortes directement en deux dimensions.

4.3 Phase topologique induite par le skyrmion

4.3.1 Générateur des rotations et symétrie

Il se trouve que du fait de la définition du skyrmion, il existe une symétrie de rotation. Le générateur de cette transformation est un opérateur moment angulaire total J_z qui s'écrit dans la base de Nambu $J_z = L_z + \frac{q}{2}\sigma_z$ où $L_z = -i\partial_\theta$ est le moment angulaire orbital et la symétrie se caractérise par $[J_z, \mathcal{H}(\mathbf{r})] = 0$. Si l'on appelle m_J les valeurs propres de J_z , on peut développer les opérateurs champs électroniques de la manière suivante :

$$\psi_\sigma(\mathbf{r}) = \sum_{m_J=-\infty}^{+\infty} e^{i[m_J - \frac{q}{2}(\sigma_z)_{\sigma\sigma}]\theta} \tilde{\psi}_{m_J, \sigma}(r) \quad (4.5)$$

où $\sigma = \uparrow, \downarrow$. Si bien que le spineur de Nambu se récrit :

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{m_J=-\infty}^{+\infty} e^{i[m_J - \frac{q}{2}\sigma_z]\theta} \tilde{\Psi}_{m_J}(r) \quad (4.6)$$

où $\tilde{\Psi}_{m_J}(r) = \left(\tilde{\psi}_{m_J, \uparrow}(r), \tilde{\psi}_{m_J, \downarrow}(r), \tilde{\psi}_{-m_J, \downarrow}^\dagger(r), -\tilde{\psi}_{-m_J, \uparrow}^\dagger(r) \right)^T$. Dans la suite, on omettra les tilde sur les opérateurs définis dans la base hybride (r, m_J) afin de ne pas alourdir les notations. Par ailleurs, les valeurs autorisées pour m_J dépendent de la parité de q . En effet, on impose aux opérateurs d'être univalués quant on effectue l'opération $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ (pour $r \neq 0$) ce qui conduit aux contraintes :

$$m_J \in \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q \text{ pair} \\ \mathbb{Z} + \frac{1}{2} & \text{si } q \text{ impair} \end{cases} \quad (4.7)$$

4.3.2 Transformations unitaires

En utilisant la symétrie de rotation, le Hamiltonien BdG peut être diagonalisé par bloc dans la base des m_J où un bloc s'écrit :

$$\mathcal{H}_{m_J}(r) = \left(-\frac{[\nabla^2]_r}{2m} - \mu \right) \tau_z + J \sigma_z \cos f + J \sigma_x \sin f + \Delta_0 \tau_x \quad (4.8)$$

où on a introduit la notation $[\nabla^2]_r$ pour l'opérateur différentiel $\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1}{r^2}(m_J - \frac{q}{2}\sigma_z)^2$. Dans l'esprit de la Section 2.5, ce Hamiltonien peut encore être transformé de manière à aligner la texture magnétique avec l'axe z . Ce dernier opérateur $\mathcal{H}'_{m_J}(r) = U^{-1}\mathcal{H}_{m_J}(r)U$ avec $U = \exp(-if(r)\sigma_y/2)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'_{m_J}(r) = & \left[-\frac{1}{2m} \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r \right) - \mu + \frac{f'^2(r)}{8m} \right] \tau_z + \frac{1}{2mr^2} \left(m_J^2 + \frac{q^2}{4} \right) \tau_z \\ & - \frac{1}{2m} \frac{qm_J}{r^2} (\cos f \sigma_z - \sin f \sigma_x) \tau_z \\ & + \frac{1}{2m} \left[\frac{f''(r)}{2} + f'(r) \left(\partial_r + \frac{1}{2r} \right) \right] i\sigma_y \tau_z + J \sigma_z + \Delta_0 \tau_x \end{aligned} \quad (4.9)$$

La transformation unitaire a donc généré plusieurs termes. Comme attendu, la texture est alignée avec l'axe z et le terme supraconducteur n'est pas affecté : se sont les deux derniers termes de la troisième ligne. Les deux termes de la première ligne $\propto \tau_z$ indiquent une renormalisation de la partie cinétique du Hamiltonien initial alors que la seconde ligne ne semble pas évidente à interpréter. Enfin, le premier terme de la troisième ligne ressemble au couplage spin-orbite induit.

En effet, un couplage spin-orbite Rashba $\mathcal{H}_R = -i\alpha(\sigma_x\partial_y - \sigma_y\partial_x)\tau_z$ est symétrique par rapport

aux rotations générées par $J'_z = L_z + \frac{1}{2}\sigma_z$. En notant $m_{J'}$ les valeurs propres de J'_z , \mathcal{H}_R s'écrit en coordonnées polaires (Guissart, 2016) :

$$\mathcal{H}_R = \alpha \left[\left(\partial_r + \frac{1}{2r} \right) i\sigma_y + \frac{m_{J'}}{r} \sigma_x \right] \tau_z \quad (4.10)$$

Cependant, cette identification n'est que partielle quand $q = 1$ et ne tient pas quand $q \neq 1$, ce qui implique nécessairement que le couplage spin-orbite induit par le skyrmion n'est pas de type Rashba.

L'analyse effectuée jusqu'à présent était indépendante du choix fait pour le profil $f(r)$ du skyrmion. Si maintenant on spécifie au profil linéaire donné Eq. (4.7), on peut négliger le terme en $f''(r)$ sur la seconde ligne de l'Eq. (4.9) car celui-ci ne consiste que de distributions de Dirac localisées à $r = r_0$ et $r = r_0 + p\lambda$. On peut estimer l'amplitude du couplage spin-orbite induit α_{eff} puisque $f' = \text{cst}$. On obtient :

$$\alpha_{\text{eff}} \approx \frac{f'(r)}{2m} = \frac{\pi}{2m\lambda} \quad (4.11)$$

Ainsi, le couplage-spin orbite induit est *indépendant* de l'amplitude de l'interaction d'échange J . Il est intéressant de discuter certaines limites de l'équation Eq. (4.11). La limite $\lambda \rightarrow \infty$ correspond au cas du texture uniforme si bien que $\alpha_{\text{eff}} = 0$. Cependant, la limite inverse $\lambda \rightarrow 0$ (plus précisément $\lambda \rightarrow a$) correspond au cas antiferromagnétique qui ne correspond pas à $\alpha_{\text{eff}} \rightarrow \infty$.

4.3.3 Vers un traitement numérique

Tous les ingrédients semblent donc réunis pour obtenir une phase topologique. Pour confirmer cette hypothèse, on va désormais s'attacher à mettre le problème sous une forme adéquate pour une diagonalisation numérique. Pour ce faire, on revient au Hamiltonien $\mathcal{H}_{m_J}(r)$ donné Eq. (4.8). Étant donné qu'on étudie le problème en coordonnées polaires la mesure d'intégration intervenant dans l'Eq. (4.1) est $d^2\mathbf{r} = r dr d\theta$. Afin de la simplifier, on transforme les spineurs comme : $\Psi^{(\dagger)} \rightarrow \Psi^{(\dagger)}/\sqrt{r}$. Avec cette nouvelle transformation, qui en pratique, permet d'annuler le terme en $\frac{1}{r}\partial_r$, le Hamiltonien $\hat{\mathcal{H}}_{m_J}(r)$ dans un secteur de m_J donné est :

$$\hat{\mathcal{H}}_{m_J}(r) = -\frac{1}{2m} \left[\partial_r^2 + \frac{1}{4r^2} (1 - q^2 - 4m_J^2 + 4qm_J\sigma_z) - \mu \right] \tau_z + J \sigma_z \cos f + J \sigma_x \sin f + \Delta_0 \tau_x \quad (4.12)$$

On peut désormais discrétiser la variable radiale r telle que $r \rightarrow r_j = ja$ où a est l'écart entre deux points qu'on choisit comme unité de distance si bien que $a \equiv 1$ et $j \geq 1$ est un entier afin d'éviter la singularité en $r = 0$. On note la version discrétisée de la base de Nambu $\mathcal{C}_{m_J, j}^\dagger = \left(c_{m_J \uparrow}^\dagger(ja), c_{m_J \downarrow}^\dagger(ja), c_{-m_J \downarrow}(ja), -c_{-m_J \uparrow}(ja) \right)$ et on paramètre le Hamiltonien de liaisons fortes comme :

$$\widehat{H}_{m_J}^{\text{TB}} = \sum_{j=1}^L \mathcal{C}_{j+1}^\dagger M \mathcal{C}_j + \text{h. c.} + \mathcal{C}_j^\dagger C \mathcal{C}_j \quad (4.13)$$

où on omet la dépendance en m_J des $\mathcal{C}_{m_J, j}^\dagger$ et des matrices M et C pour simplifier. En effectuant un développement de Taylor au second ordre du Hamiltonien Eq. (4.13) avec comme paramètre la constante de maille et en intégrant par parties on identifie les matrices M et C en comparant avec l'Eq. (4.12). Ceci donne la versions liaisons fortes « radiales » $\widehat{H}_{m_J}^{\text{TB}}$ du Hamiltonien :

$$\begin{aligned} \widehat{H}_{m_J}^{\text{TB}} \approx \sum_{j=1}^L & -t \mathcal{C}_{j+1}^\dagger \tau_z \mathcal{C}_j + \text{h. c.} + \mathcal{C}_j^\dagger \left[2t - \mu - \frac{t}{4j^2} (1 - q^2 - 4m_J^2 + 4qm_J \sigma_z) \right] \tau_z \mathcal{C}_j \\ & + \mathcal{C}_j^\dagger [J\sigma_z \cos f + J\sigma_x \sin f + \Delta_0 \tau_x] \mathcal{C}_j. \end{aligned} \quad (4.14)$$

où le paramètre de saut vaut $t = 1/(2ma^2)$ et est choisi comme unité d'énergie dans toute la suite. Le Hamiltonien Eq. (4.14) peut désormais être diagonalisé numériquement.

4.3.4 Premiers résultats numériques – phénoménologie

Dans cette section, tous les calculs sont effectués avec des conditions au limites de type « boîte », c'est-à-dire que le dernier site calculé correspond au bord du skyrmion. Le spectre des excitations du Hamiltonien discrétisé Eq. (4.14) est donné Fig. 4.3. On observe deux cas qualitativement différents. En effet, dans le cas (a), le gap effectif Δ_{eff} est réduit à $\Delta_{\text{eff}} \approx \Delta_0/2$ et il n'y a aucun état en dessous de cette énergie alors que dans le cas (b) $\Delta_{\text{eff}} \approx 7\% \Delta_0$ avec de nombreux états dans le gap certains étant proches de l'énergie $E = 0$ et d'autres d'énergie non-nulle dispersant dans le gap.

Pour analyser la localisation spatiale des fonctions d'onde, dans un secteur de moment angulaire donné, on écrit chaque état propre d'énergie E_{i, m_J} :

$\varphi_{i, m_J}(r) = \left(u_{m_J \uparrow}^{(i)}(r), u_{m_J \downarrow}^{(i)}(r), v_{m_J \downarrow}^{(i)}(r), v_{m_J \uparrow}^{(i)}(r) \right)^T$. On calcule aussi la densité d'états électronique locale $\rho(E, r)$ définie comme :

$$\rho(E, r) = \sum_{i, m_J} \varphi_{i, m_J}^\dagger(r) \left(\frac{\mathbb{1} + \tau_z}{2} \right) \varphi_{i, m_J}(r) \delta(E - E_{i, m_J}) \quad (4.15)$$

où la somme porte sur toutes les énergies et $(\mathbb{1} + \tau_z)/2 = \text{diag}(1, 1, 0, 0)$ est le projecteur sur le secteur électronique¹. La Fig. 4.4(a) et (b) présente la fonction d'onde de l'état de plus basse

1. Bien entendu, numériquement le δ de Dirac est discrétisé si bien qu'on somme les états dans une fenêtre d'énergie de largeur $\Delta_0/250$.

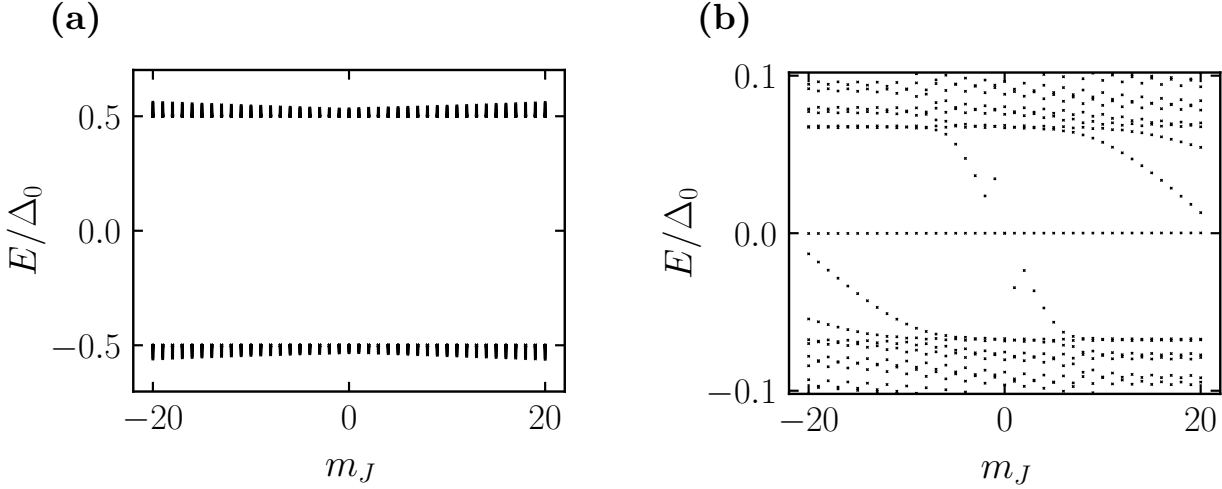


FIGURE 4.3 – Spectre des excitations du Hamiltonien discrétisé Eq. (4.14) pour un skyrmion de nombres d’enroulement $p = 10, q = 2$ de taille $R_{\text{sk}}/a = 1000$ avec les paramètres $\Delta_0/t = 0.1$ et $\mu/t = 0$. (a) $J/t = 0.05$ et (b) $J/t = 0.2$. Dans le cas (a), seuls les 100 premiers états ont été gardés.

énergie $E/\Delta_0 \approx 1.4 \times 10^{-5}$ dans le secteur $m_J = 0$ pour $J/t = 0.2$. Celle-ci est fortement localisée au centre et au bord du skyrmion. La Fig. 4.4(c) montre $\rho(E, r)$ sur laquelle on observe que tous les états à énergie nulle sont localisés au bord du skyrmion alors que les états dispersant dans le gap sont *proches* du cœur. Sur cette figure, le pic au cœur du skyrmion dû à l’état à $m_J = 0$ n’est pas visible car son amplitude est trop faible comparée aux états de la bande quasi-plate. Ces résultats sont par ailleurs confirmés par un calcul direct de liaisons fortes à deux dimensions comme illustrés Fig. 4.5. On précisera la méthode de calcul ainsi que l’adéquation des résultats en deux dimensions avec ceux du modèle radial voir Section 4.5.

Ainsi toute la phénoménologie des transitions et des phases topologiques semble présente. Il existe deux phases aux propriétés différentes, dont l’une est caractérisée par des états de bord et un état au cœur du skyrmion pour $m_J = 0$ qui ne peut être autre chose qu’un état lié de Majorana. En effet, ceux-ci étant nécessairement leur propre conjugué par la transformation particule-trou \mathcal{C} , ils ne peuvent se situer que dans le secteur $m_J = 0$ et pour des skyrmions de q pair. Il est possible de calculer semi-analytiquement cette fonction d’onde, ce qui est fait en Annexe B. Cependant, il reste encore à expliquer l’origine précise de cette phase topologique ainsi que cette bande apparemment plate d’excitations au bord du skyrmion.

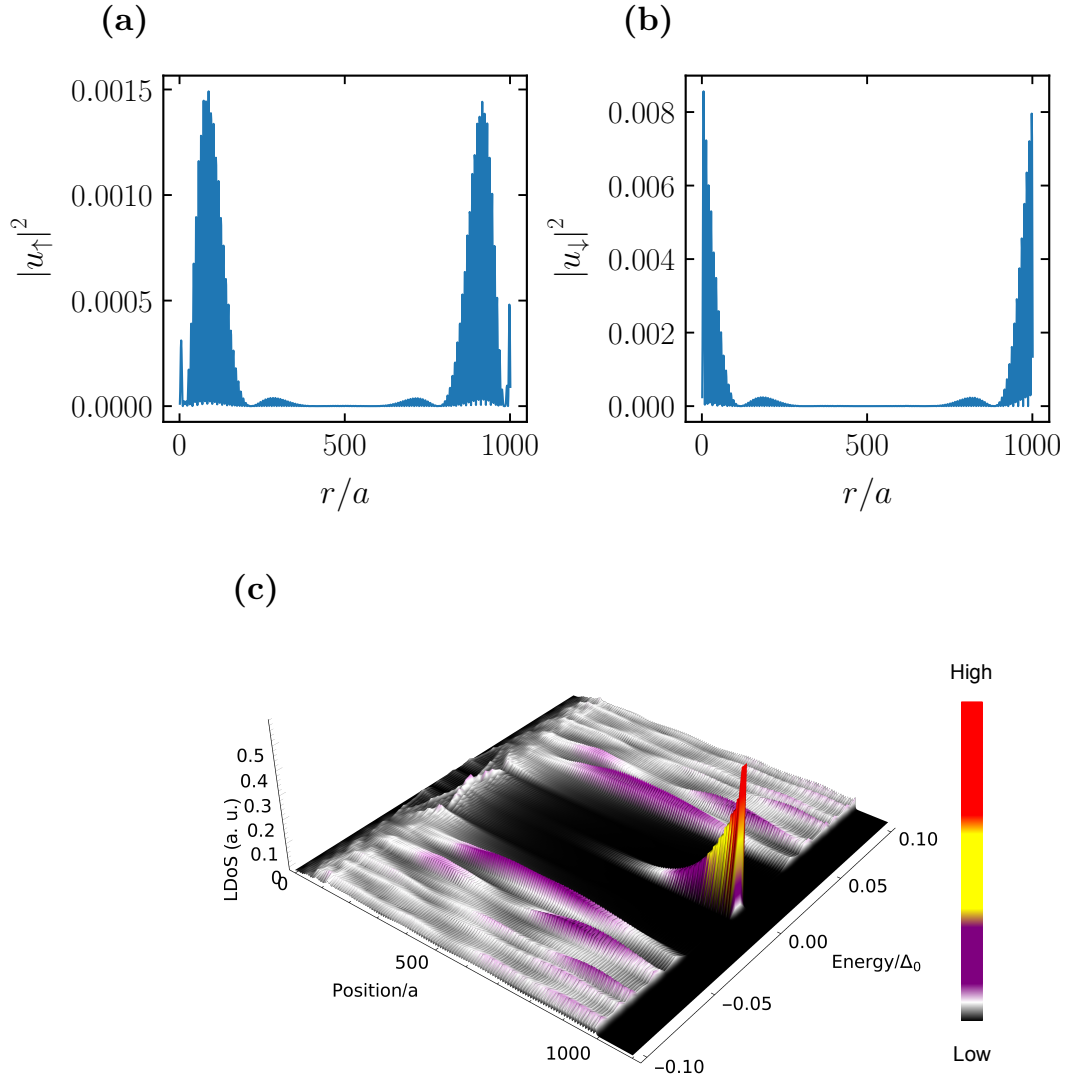


FIGURE 4.4 – Localisation spatiale des états propre du Hamiltonien discrétisé Eq. (4.14) pour un skyrmion de nombres d’enroulement $p = 10$ (sauf pour (c) où $p = 6$), $q = 2$ de taille $R_{\text{sk}}/a = 1000$ avec les paramètres $\Delta_0/t = 0.1$ et $\mu/t = 0$ $J/t = 0.2$. (a) et (b) module carré de la première et deuxième composante u_\uparrow et u_\downarrow de l’état propre d’énergie $E/\Delta_0 \approx 1.4 \times 10^{-5}$ dans le secteur $m_J = 0$. Densité d’états locale $\rho(E, r)$. On a ajouté 100 sites de supraconducteur avec $J/t = 0$ pour le contraste et diagonalisé le Hamiltonien jusque $|m_J| = 50$.

4.4 Analyse de la phase topologique : du disque au cylindre

4.4.1 Du disque au cylindre

Afin de mieux comprendre l’origine de la phase topologique illustrée précédemment, on utilise une transformation introduite par [Wu et Martin \(2017\)](#) qui permet de changer la géométrie sur laquelle est définie le problème. En effet, en partant du problème défini sur un

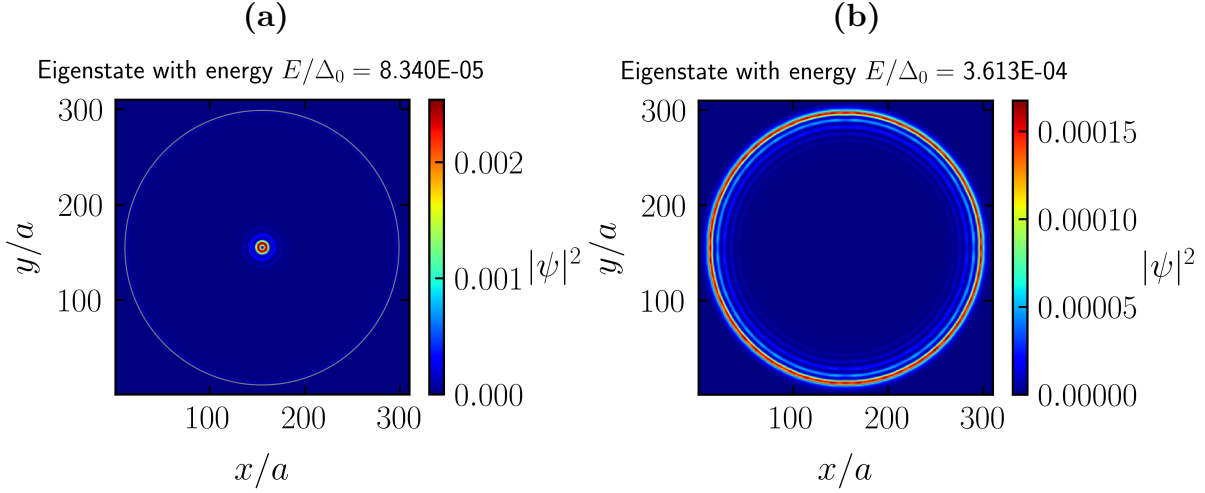


FIGURE 4.5 – Résultats d’un calcul direct en deux dimensions pour un skyrmion avec $q = 2$, $p = 9$, $\lambda/a = 16$, $\mu/t = 0$, $\Delta_0/t = 0.1$ et $J/t = 0.2$. (a) Densité totale $|u_\uparrow|^2 + |u_\downarrow|^2 + |v_\downarrow|^2 + |v_\uparrow|^2$ de l’état d’énergie la plus basse correspondant à l’état lié de Majorana et (b) premier état d’énergie supérieure à (a) correspondant à un état de bord. Le cercle gris sur (a) marque le bord du skyrmion après lequel on impose $J/t = 0$ voir Section 4.5.

disque, on se ramène à l’étude d’un cylindre en passant par le cône ci qui simplifie grandement l’analy. Cette procédure est illustrée sur la figure Fig. 4.6. En notant φ l’angle du cône, R_{cyl} son

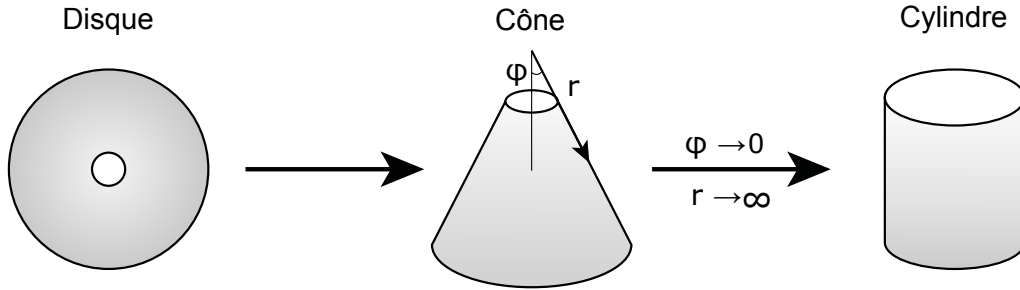


FIGURE 4.6 – Illustration de la transformation du disque au cylindre en passant par le cône introduite par [Wu et Martin \(2017\)](#).

rayon et r la distance mesurée à partir du sommet de celui-ci, cette transformation revient à remplacer les opérateurs différentiels sur le disque par ceux sur le cône :

$$\nabla = \partial_r \mathbf{u}_r + \frac{1}{r \sin \varphi} \partial_\theta \mathbf{u}_\theta \quad \nabla^2 = \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \partial_\theta^2. \quad (4.16)$$

La limite du disque est réalisée pour $\varphi = \pi/2$ alors que celle du cylindre est obtenue dans la limite $r \rightarrow \infty$, $\varphi \rightarrow 0$ avec $r \sin \varphi = \text{const} = R_{\text{cyl}}^2$. Après cette transformation, le Hamiltonien

2. On note ici que la transformation impose d’avoir $R_{\text{cyl}} = R_{\text{sk}}$ mais on découplera parfois les deux grandeurs pour simplifier certains calculs numériques.

Eq. (4.9) devient $\mathcal{H}_{m_J}^{\text{cyl}}(r) = \mathcal{H}_{m_J}^{\text{fil}}(r) + \mathcal{H}_{m_J}^{\text{pente}}(r) + \mathcal{H}_{m_J}^{\text{corr.}}(r)$ avec :

$$\mathcal{H}_{m_J}^{\text{fil}}(r) = \left[-\frac{1}{2m} \partial_r^2 - \mu \right] \tau_z + \frac{1}{2mR_{\text{sk}}^2} \left(m_J^2 + \frac{q^2}{4} \right) \tau_z + \frac{f'}{2m} \partial_r i \sigma_y \tau_z + J \sigma_z + \Delta_0 \tau_x \quad (4.17)$$

$$\mathcal{H}_{m_J}^{\text{pente}}(r) = -\frac{q m_J}{2mR_{\text{sk}}^2} (-1)^p \sigma_z \tau_z \quad (4.18)$$

$$\mathcal{H}_{m_J}^{\text{corr.}}(r) = \frac{f'^2}{8m} \tau_z + \frac{f''}{4m} i \sigma_y \tau_z \quad (4.19)$$

Dans ce qui suit, on néglige $\mathcal{H}_{m_J}^{\text{corr.}}$ car il ne consiste qu'en une (petite) correction au potentiel chimique du système et en termes « de bord » où le profil f change de pente.

4.4.2 Connexion au modèle du fil Rashba – cas $q = 0$

Ainsi, dans un secteur de moment angulaire donné, le Hamiltonien est composé du Hamiltonien $\mathcal{H}_{m_J}^{\text{fil}}(r)$ et du terme $\mathcal{H}_{m_J}^{\text{pente}}(r)$. $\mathcal{H}_{m_J}^{\text{fil}}(r)$ n'est rien d'autre que le Hamiltonien décrivant l'analogie 1D (le « fil Rashba ») du cas 2D présenté Section 2.3. En particulier, le critère d'entrée dans la phase topologique est identique. En introduisant un potentiel chimique dépendant de m_J comme $\mu(m_J) = \mu - \left(m_J^2 + \frac{q^2}{4} \right) / (2mR_{\text{sk}}^2)$, on obtient que ce secteur est topologique si $J > \sqrt{\Delta_0^2 + \mu(m_J)^2}$ et trivial si topologique si $J < \sqrt{\Delta_0^2 + \mu(m_J)^2}$. Ce critère topologique peut se récrire : $\mu(m_J)^2 - (\mu^*)^2 < 0$ où on a introduit $\mu^* = \sqrt{J^2 - \Delta_0^2}$. Tous ces éléments permettent de déterminer les moments angulaires $\pm m_J^*$ où le gap s'annule. Si $|\mu| < \mu^*$, on obtient :

$$|m_J^*| = R_{\text{sk}} \sqrt{\mu + \sqrt{J^2 - \Delta_0^2}}, \quad (4.20)$$

Alors que si $\mu > \mu^*$, il y a quatre solutions $\pm m_{J,\pm}^*$ avec :

$$|m_{J,\pm}^*| \approx R_{\text{sk}} \sqrt{\left(\mu \pm \sqrt{J^2 - \Delta_0^2} \right)} + \mathcal{O}(1). \quad (4.21)$$

Ces différents cas sont illustrés Fig. 4.7 où les secteurs topologiques correspondent aux zones grisées. On ajoute que quand $\mu < -\mu^*$, le système est complètement trivial. pour $\mu > \mu^*$, le secteur $m_J = 0$ n'est pas topologique, ce qui implique l'absence d'état lié de Majorana au cœur du skyrmion comme illustré Fig. 4.8. Par ailleurs, on confirme numériquement que les modèles sur le disque et le cylindre ont le même diagramme de phase comme présenté Fig. 4.9 où on mesure le gap effectif Δ_{eff} dans le secteur $m_J = 0$. Qui plus, est, le gap effectif dans la phase topologique est en accord quantitatif entre les deux modèles, à la petite renormalisation Eq. (4.19) du potentiel chimique qu'on a négligé près. Par ailleurs, on peut estimer ce gap effectif dans limite où R_{sk} est grand devant a comme (Alicea, 2010) :

$$\Delta_{\text{eff}} = \frac{\pi \Delta_0}{\lambda J} \sqrt{J + \mu} \quad (4.22)$$

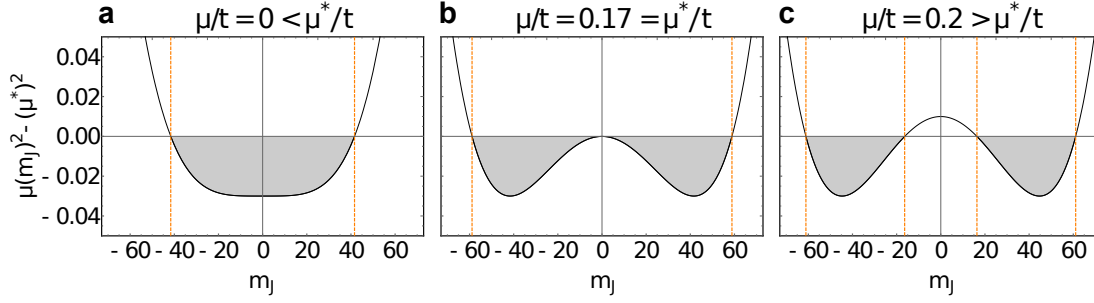


FIGURE 4.7 – Critère topologique $\mu(m_J)^2 - (\mu^*)^2$ du Hamiltonien $\mathcal{H}_{m_J}^{\text{fil}}(r)$ Eq. (4.17) pour différentes valeurs du potentiel chimique μ pour un skyrmion de rayon $R_{\text{sk}}/a = 100$ et de nombre d’enroulement $q = 2$ avec $\Delta_0/t = 0.1$, $J/t = 0.2$. Pour ces paramètres $\mu^*/t = \sqrt{J^2 - \Delta_0^2} = 0.17(32)$. (a) $\mu/t = 0 < \mu^*/t$, (b) $\mu/t = \mu^*/t$ et (c) $\mu/t = 0.2 > \mu^*/t$. Les zones grisées représentent les secteurs topologiques et les lignes verticales oranges les moments angulaires où le gap se ferme.

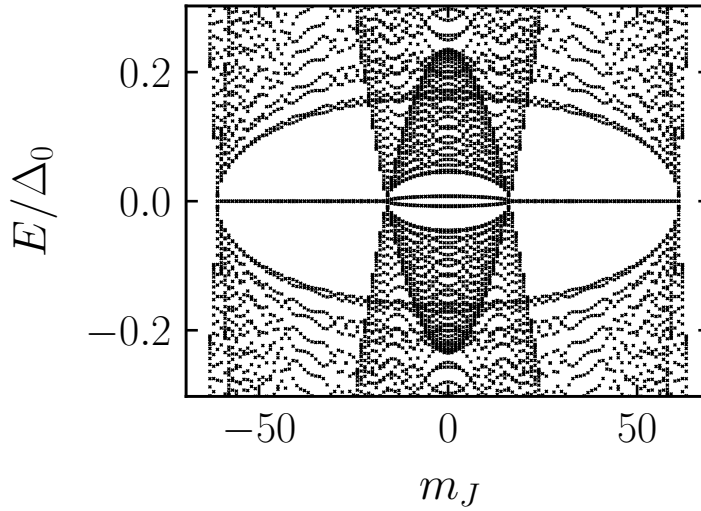


FIGURE 4.8 – Spectre des excitations d’un système avec $q = 0$ sur un cylindre de hauteur $R_{\text{sk}}/a = 400$ et de rayon $R_{\text{cyl}}/a = 100$. Les autres paramètres sont $\Delta_0/t = 0.1$ $\mu/t = 0.2 > \mu^*/t = 0.17(32)$ avec un couplage spin-orbite correspondant à $\lambda/a = 100$. Formellement, le système sur le cylindre devrait avoir $R_{\text{cyl}} = R_{\text{sk}}$ mais on profite du découplage de ces deux quantité pour simuler des systèmes plus petit.

où toutes les énergies sont en unité de l’intégrale de saut t et $\lambda = R_{\text{sk}}/p$ est en unités de la discrétisation a .

On note par ailleurs que négliger $\mathcal{H}_{m_J}^{\text{pente}}(r)$ revient à faire $q = 0$ (la texture appartient au plan (x, z) ne peut plus vraiment être appelée skyrmion).

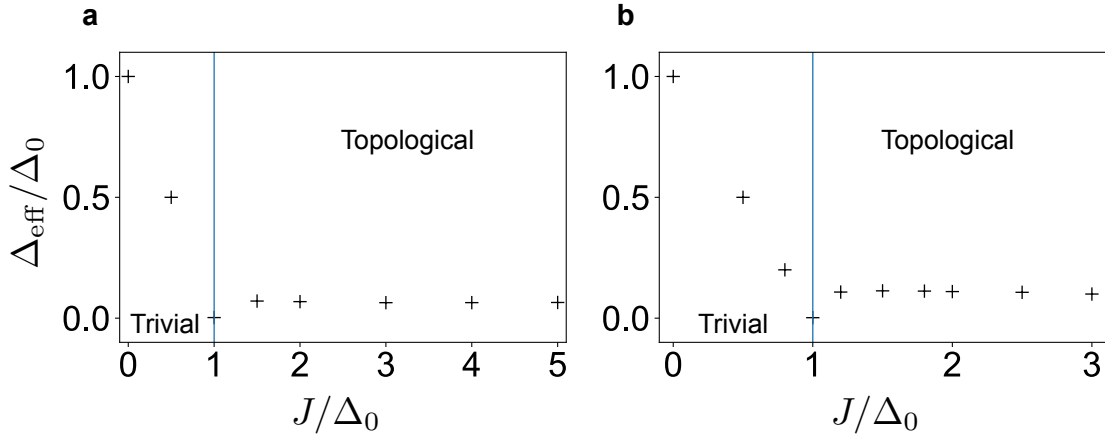


FIGURE 4.9 – Gap effectif Δ_{eff} mesuré dans le secteur $m_J = 0$ pour $\mu/t = 0$ et $\Delta_0/t = 0.1$ en fonction de l'interaction d'échange J . (a) Modèle sur le disque avec $p = 10$ and $R_{\text{sk}}/a = 1000$. (b) Modèle sur le cylindre avec rapport d'aspect 1 and $R_{\text{sk}}/a = 500$. Dans les deux cas, les lignes verticales bleues indiquent les valeurs de fermeture de gap prédites analytiquement : $J = \sqrt{\Delta_0^2 + \mu^2}$.

Tous ces résultats pris ensemble impliquent que tous les secteurs topologiques contribuent une paire d'états liés de Majorana d'énergie nulle de telle manière que le spectre d'excitation sur le cylindre est constitué de deux bandes plates localisée aux deux bords du cylindre. Comme le montre la figure Fig. 4.10 ceci est aussi vrai dans le modèle original. Dans le cas

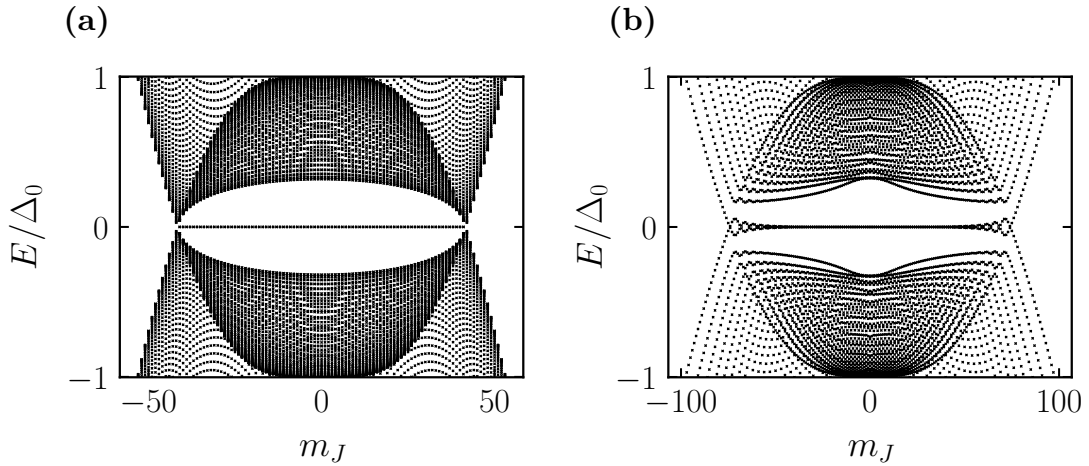


FIGURE 4.10 – Spectres d'excitations pour $q = 0$, $p = 10$, $\Delta_0/t = 0.1$, $J/t = 0.2$, $\mu/t = 0$. (a) sur le cylindre avec $R_{\text{sk}}/a = 400$ et $R_{\text{cyl}}/a = 100$ et (b) dans le modèle original sur le disque pour $R_{\text{sk}}/a = 200$. Le couplage spin-orbite sur le cylindre a été ajusté pour correspondre à celui du modèle original.

du modèle sur le disque, les deux bandes plates sont aussi présentes même si l'on note que la dégénérescence se lève autour des points de fermeture du gap. Si, pour chaque m_J , un

des deux de la bande plate est localisé au bord de la texture, la fonctions d'onde de l'autre état est représentée sur la Fig. 4.11. De manière surprenante, plus m_J augmente plus cet état

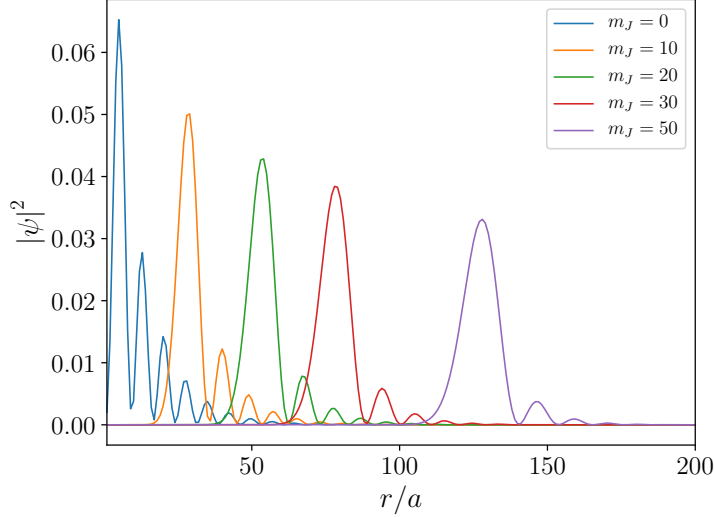


FIGURE 4.11 – Densité des états de la bande plate d'une texture à $q = 0$ dans le modèle original. Les paramètres sont $R_{\text{sk}}/a = 200$, $J/t = 0.2$, $\Delta_0/t = 0.1$, $\mu/t = 0$ and $p = 10$. Plus précisément, la quantité calculée est $|u_\uparrow|^2 + |u_\downarrow|^2$ de la combinaison symétrique des deux modes d'énergie nulle dans chaque secteur, la combinaison antisymétrique étant localisée autour de $r = R_{\text{sk}}$.

est localisé dans le volume du skyrmion. Cette dernière propriété explique les oscillations observées Fig. 4.10(b) autour de $m_J = 60$: les deux états s'hybrident car ils ont désormais un recouvrement non-nul.

4.4.3 Retour au cas $q \neq 0$

Les résultats précédents peuvent être analysé du point de vue des symétries. En effet, dans le cas $q = 0$, il existe un opérateur de chiralité qui garanti la symétrie par rapport $E = 0$ dans chaque secteur de moment angulaire :

$$\mathcal{S} = \sigma_y \tau_y \quad (4.23)$$

Ainsi, si l'on restore $q \neq 0$, cette symétrie est brisée et les bandes *ne peuvent pas* être plates : les modes de bord du système forment un Majorana chiral. On est désormais en mesure de comprendre en détail les résultats de la Fig. 4.3(b) en traitant $\mathcal{H}_{m_J}^{\text{pente}}(r)$ donné Eq. (4.18) comme une perturbation. De manière à obtenir une estimation de la pente des modes de bord, c'est-à-dire la vitesse du Majorana, on peut estimer l'énergie maximale atteinte par un état de la bande plate ε^* . Autrement dit, on calcule le décalage en énergie causé par la perturbation

aux états situés dans le secteur $m_J = m_J^*$. On obtient alors :

$$\varepsilon^* = c \frac{q m_J^*}{2m R_{\text{sk}}^2} \quad (4.24)$$

où c est une constante d'ordre 1 et on se concentre sur le cas $|\mu| < \mu^*$. On a par ailleurs supposé $\langle \tau_z \sigma_z r^{-2} \rangle = c R_{\text{sk}}^{-2}$ pour les états de la bande plate localisés au bord du skyrmion $r = R_{\text{sk}}$. En utilisant l'Eq. (4.22) on obtient le rapport $\varepsilon^*/\Delta_{\text{eff}}$:

$$\frac{\varepsilon^*}{\Delta_{\text{eff}}} = c \frac{q}{p} \frac{J}{\pi \Delta_0} \sqrt{\frac{\mu + \sqrt{J^2 - \Delta_0^2}}{J + \mu}}, \quad (4.25)$$

ou toutes les énergies sont en unités de t . On peut comparer cette prédiction avec les résultats numériques. En effet, on peut à la fois calculer $\langle \sigma_z \tau_z \rangle$ (on trouve $c \approx 0.44$) et mesurer directement $\varepsilon^*/\Delta_{\text{eff}}$. La comparaison est présentée Fig. 4.4.3. Avec les paramètres choisis ici, on

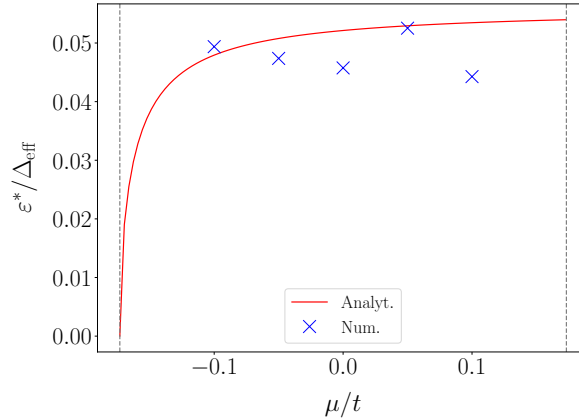


FIGURE 4.12 – Comparaison analytique/numérique du rapport $\varepsilon^*/\Delta_{\text{eff}}$ en fonction du potentiel chimique μ . La courbe rouge représente le résultat de l'Eq. (4.25) avec $c = 0.44$ et les croix bleues les résultats numériques. Les paramètres utilisés sont $R_{\text{sk}}/a = 1001$, $p = 10$, $q = 2$, $\Delta_0/t = 0.1$, $J/t = 0.2$. Les deux lignes verticales marquent les points où $|\mu| = \mu^*$.

obtient $\varepsilon^*/\Delta_{\text{eff}} \approx 5\%$ mais une analyse plus poussée montre qu'on ne peut guère dépasser les 10%, si bien que la bande d'excitations de bord apparaîtra plate dans la plage de paramètres physiquement acceptable.

Tous ces résultats sont résumés sur la Fig. 4.13.

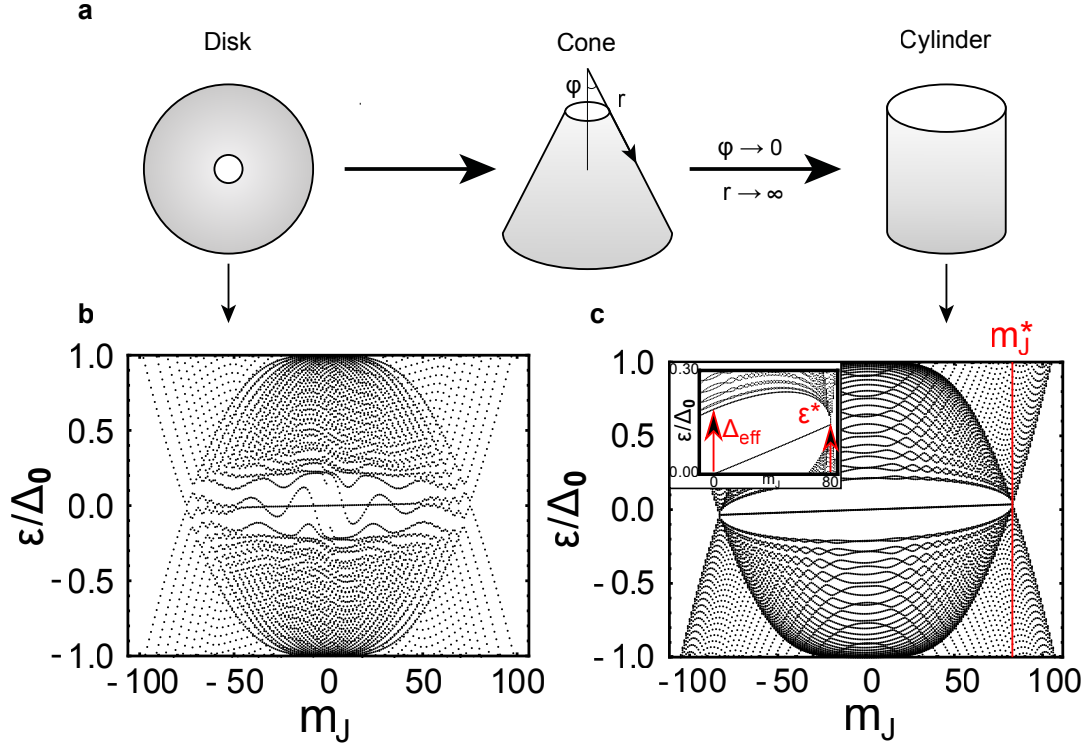


FIGURE 4.13 – (a) Résumé de la transformation du disque au cylindre en passant par le cône. (b) Spectre des excitations dans le modèle original sur le disque et (c) spectre sur le cylindre. Les lignes rouges verticales marquent les moments angulaires $\pm m_J^*$ de fermeture du gap et l’encart représente les grandeurs ε^* et Δ_{eff} . Les paramètres utilisés pour le calcul sur le disque sur le disque sont $R_{\text{sk}}/a = 200$, $\mu/t = 0$, $\Delta_0/t = 0.1$, $J/t = 0.2$, $p = 6$ et $q = 2$ et ceux pour le cylindre sont $R_{\text{sk}} = R_{\text{cyl}} = 200 a$ avec $\mu/t = 0$, $\Delta_0/t = 0.1$, $J/\Delta_0 = 2$, $p = 6$ and $q = 2$.

L’approche développée ici permet aussi de comprendre la nature des états dispersant dans le gap du modèle original, bien visibles sur la Fig. 4.13(b). En effet, ceux-ci ne sont rien d’autre que les états résultants de l’application de la perturbation $\mathcal{H}_{m_J}^{\text{pente}}(r)$ donnée Eq. (4.18) aux états de la seconde bande plate présentée Fig. 4.11. Comme ces états n’ont pas tous la même fonction d’onde et ne sont pas tous localisés au même endroit, l’application de la perturbation donne donc le comportement oscillatoire observé. Au contraire, dans le cas du cylindre, les deux bandes plates deviennent légèrement chirales avec la même vitesse. Dans la littérature, de tels états sont appelés « Majorana unidirectionnels » (Wong et al., 2013).

4.5 Robustesse des états de bord

4.5.1 Localisation

Dans toute la partie précédente, on a supposé que le champ d'échange s'annulait brusquement au bord du skyrmion, or ceci peut paraître irréaliste car les skyrmions tels que présentés au Chapitre 3 sont des excitations de films ferromagnétiques. Si celui-ci est pris en compte, il donne lieu à un champ d'échange uniforme avec la même amplitude d'interaction que pour le skyrmion. Cependant, le critère minimal pour obtenir une phase topologique étant $J > \sqrt{\Delta_0^2 + \mu^2}$, cela signifie que la phase supraconductrice en dehors du skyrmion ne possède pas de gap. Ainsi, les modes de bords sont libres de se délocaliser. Ceci a été prédit analytiquement par [Yang et al. \(2016\)](#) et est bien reproduit par les calculs numériques comme illustré Fig. 4.14 où on trace la quantité :

$$S_{\text{peak}} \approx \frac{1}{W_{\text{peak}}} \sum_{j \in \text{peak}} |u_{\uparrow}(j)|^2 \quad (4.26)$$

qui quantifie le poids spectral d'un état en fonction de la taille ajoutée de ferromagnétique L_{BG} . On a défini W_{peak} comme étant la largeur du pic correspondant à l'état localisé en l'absence de champ uniforme au-delà du skyrmion.

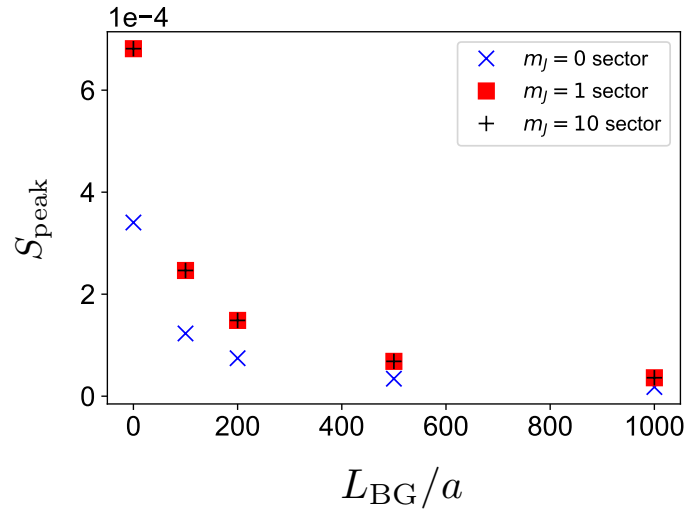


FIGURE 4.14 – Évolution de S_{peak} avec L_{BG} pour $L_{BG}/a \in \{0, 100, 500, 1000\}$ et $W_{\text{peak}}/a \approx 200$ (from 800 to 1000) dans les secteurs de moment angulaire $m_J = 0$, $m_J = 1$ et $m_J = 10$. Les paramètres du calcul sont $p = 10$, $R_{\text{sk}}/a = 1000$, $\Delta_0/t = 0.1$, $\mu/t = 0$ and $J/t = 0.2$.

Le fait que les états de bord se délocalisent n'est pas une fatalité. En effet, on peut envisager l'existence d'un skyrmion isolé sur une « île » magnétique ou même, plus simplement, envisager de déposer un supraconducteur de taille finie sur le matériau magnétique.

Un des aspects importants de l'étude des phases topologiques, que l'on parle d'isolants de supraconducteurs ou de matériaux magnétiques, est d'analyser leur robustesse. Dans

le paragraphe suivant, on se propose d'analyser l'effet de perturbations géométriques du skyrmion sur les modes composant le fermion de Majorana chiral après avoir montré que la symétrie de rotation n'était pas essentielle à son existence.

4.5.2 Calculs de liaisons fortes à deux dimensions

Sur un réseau carré en 2D, on dénote par $\mathbf{r} = (xa, ya)$, la position d'un site où x et y sont des entiers et a est la distance entre deux sites voisins qu'on choisit encore comme unité de distance. On note \mathbf{u}_x et \mathbf{u}_y les vecteurs correspondant à une translation de a dans les directions x et y , respectivement. Ainsi, dans l'espace réel, le Hamiltonien en seconde quantification s'écrit :

$$\begin{aligned}
 H = \sum_{\mathbf{r}=x,y} \left[\sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} -t c_{\mathbf{r}+\mathbf{u}_x\sigma}^\dagger c_{\mathbf{r}\sigma} - t c_{\mathbf{r}+\mathbf{u}_y\sigma}^\dagger c_{\mathbf{r}\sigma} + (4t - \mu) c_{\mathbf{r}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{r}\sigma} \right. \\
 \left. + J \sum_{\sigma,\sigma'} c_{\mathbf{r}\sigma}^\dagger (\mathbf{m}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\sigma})_{\sigma\sigma'} c_{\mathbf{r}\sigma'} + \Delta_0 c_{\mathbf{r}\uparrow}^\dagger c_{\mathbf{r}\downarrow}^\dagger + \text{h. c.} \right]
 \end{aligned}
 \tag{4.27}$$

Ce Hamiltonien peut s'implémenter et être diagonalisé numériquement sans subtilité particulière. Dans tout ce qui suit, on impose un champ d'échange nul en dehors du skyrmion. Il y a deux avantages à effectuer un calcul directement en 2D, même s'il est plus coûteux en ressources numérique. En effet, il permet en effet de confirmer les résultats obtenus précédemment en utilisant la symétrie de rotation continue tout en réduisant celle-ci aux symétries discrètes du réseau carré. On par ailleurs déjà montré Fig. 4.5 que ce type de calcul permettait de reproduire l'état lié de Majorana au cœur du skyrmion ainsi que les modes de bord. En complément, on présente Fig. 4.15 la densité d'état d'un système similaire avec $q = 1$ afin d'éliminer l'état lié de Majorana au centre. Sur cette figure, on retrouve bien un amas d'états d'énergie proche de $E = 0$, au milieu d'un gap effectif $\Delta_{\text{eff}} \approx 0.2 \Delta_0$, énergie à partir de laquelle on commence à distinguer les pics de cohérence du supraconducteur. Parmi ces états proche de $E = 0$, on distingue les états de bord des autres états de la manière suivante : pour chaque état, on effectue une moyenne angulaire de la fonction d'onde puis on cherche le maximum R_{max} de cette quantité. Si le maximum se situe dans une couronne de largeur $2l$ autour du bord du skyrmion, c'est-à-dire vérifie $|R_{\text{sk}} - R_{\text{max}}| \leq l$ où l est appelé « critère de localisation », on classe cet état comme un état de bord. C'est ainsi qu'est obtenu l'histogramme rouge de la figure Fig. 4.15 avec $l/a = 3$ soit $l/\lambda \approx 0.19$. Afin de calculer le nombre d'états de bord sur des structures déformées, on généralisera cette procédure de comptage.

4.5.3 Effet de perturbations géométriques

Pour étudier la robustesse des états de bord, on analyse ici des structures déformées par rapport au skyrmion circulaire qu'on appellera « géométrie 1 ». Pour ce faire, à partir d'un très

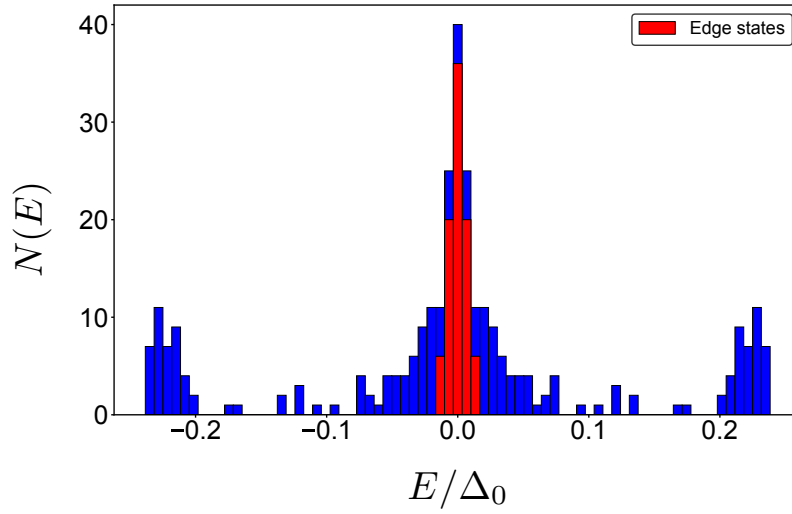


FIGURE 4.15 – Densité d'états à basse énergie pour un skyrmion avec $p = 9$, $q = 1$ et $\lambda/a = 16$. Les autres paramètres sont $\mu/t = 0$, $\Delta_0/t = 0.1$, $J/t = 0.2$. L'histogramme bleu montre les 300 états de plus basse énergie alors que l'histogramme rouge montre les états de bords (voir le texte pour la méthode de calcul) avec un critère de localisation $l = 3a$.

grand skyrmion, on « découpe » une région plus petite composée du skyrmion original et d'un second disque de rayon variable. On définit alors les géométries 2 et 3 comme les cas où ce rayon vaut R_{sk} et $R_{\text{sk}}/2$ respectivement. La définition de ces géométries est récapitulée Fig. 4.16. L'analyse consiste ensuite à compter le nombre d'états de bord sur chaque géométrie à mesure

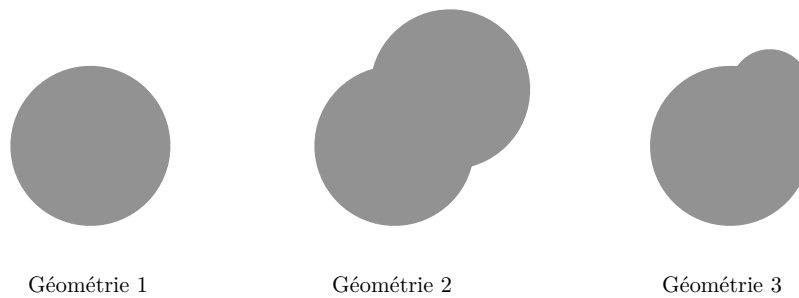


FIGURE 4.16 – Définition des géométries 1, 2 et 3.

que l'on agrandit la texture en gardant la discrétisation λ fixée. Pour calculer ce nombre sur les géométries 2 et 3, on modifie légèrement le critère précédent : un état est dit un état de bord si $R_{\text{max}} \geq R_{\text{sk}} - l$ et son énergie est inférieure à $\Delta_{\text{eff}}/4$. Les nombres d'états de bord en fonction du périmètre de la texture considérée pour les trois géométries sont présentés Fig. 4.17. Pour

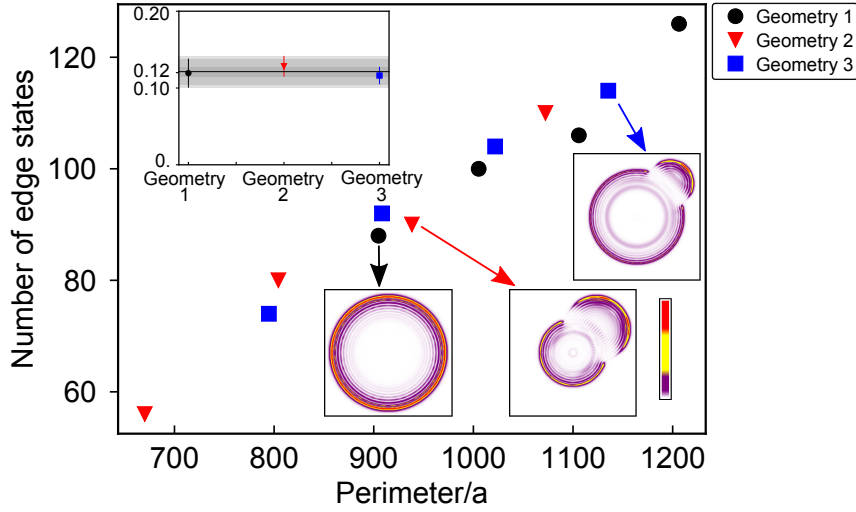


FIGURE 4.17 – Nombre d'états de bord pour les trois géométries considérées. Dans tous les cas $q = 1$, $\lambda/a = 16$, $\Delta_0/t = 0.1$, $\mu/t = 0$ et $J/t = 0.2$. De plus, $p = 9$ pour les géométries 1 et 3 alors $p = 6$ pour la géométrie 2. Les encarts en bas à droite présentent les densités d'état locales de quelques états de bords (un état pour la géométrie 1 et une somme sur les 30 états de plus basse énergie pour les géométrie 2 et 3). L'encart en haut à gauche montre les résultats d'un ajustement linéaire pour les trois géométries.

calculer le périmètre $P(r, R)$ des géométries 2 et 3 on a utilisé la formule :

$$\frac{P(r, R)}{2\pi R} = 1 + \frac{r}{R} - \frac{1}{\pi} \arccos\left(1 - \frac{r^2}{2R^2}\right) - \frac{1}{\pi} \frac{r}{R} \arcsin\left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{4R^2}}\right). \quad (4.28)$$

où R est le rayon du disque central et r celui du disque ajouté.

Comme le montre la Fig. 4.17, pour les trois géométries, le nombre d'états de bord en fonction du périmètre suit une loi linéaire dont la pente est estimée à $0.12(1) a^{-1}$ (voir encart).

Cependant, avant de tirer des conclusions de ces calculs, il est instructif de s'intéresser au cas d'une déformation elliptique du skyrmion. Ici, le comptage se fait de la même manière que dans le cas circulaire car le bord est rigoureusement défini par l'équation cartésienne de l'ellipse. De même, le périmètre $P(a, b)$ d'une ellipse de demi-petit axe a et demi-grand axe b s'écrit :

$$P(a, b) = 4aE\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right), \quad (4.29)$$

où $E(k)$ est l'intégrale elliptique complète de deuxième espèce définie comme (voir [DLMF](#), Eq. 19.2.5 et 19.2.8) :

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (4.30)$$

Dans ce cas, on effectue un calcul légèrement différent. En effet, on augmente le périmètre de l'ellipse en modifiant son rapport d'aspect a/b sans toutefois modifier son aire. Le point de

départ est un skyrmion circulaire de paramètres $p = 16$, $q = 2$ et $\lambda/a = 12$. On trace Fig. 4.18, le résultat du comptage du nombre d'états de bord en fonction du périmètre Fig. 4.18 pour trois critères de localisation $l/a = 3, 4, 5$ ($l/\lambda = 0.25, 0.33, 0.42$). Les résultats des ajustements

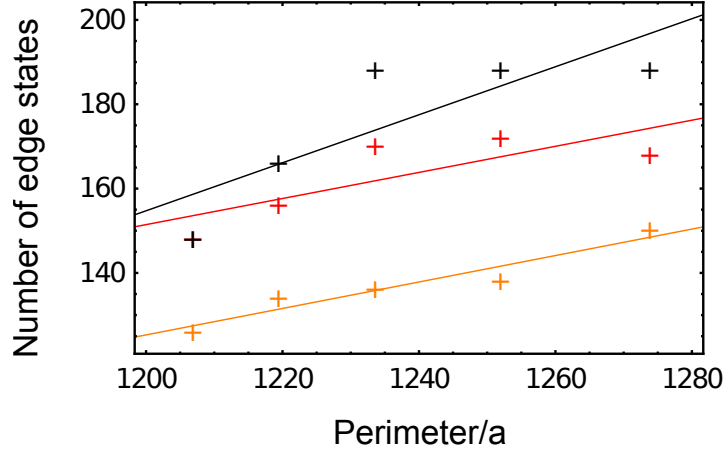


FIGURE 4.18 – Nombre d'états de bord de la géométrie elliptique pour trois critères de localisation $l/\lambda = 0.25$ (orange), 0.33 (rouge) et 0.42 (noir). Les lignes continues représentent les meilleurs ajustements linéaires dont les pentes sont $0.313 a^{-1}$, $0.310 a^{-1}$ et $0.569 a^{-1}$, respectivement.

linéaires sont :

- $l/\lambda = 0.25 : 0.31(36) \pm 0.05(35) a^{-1}$
- $l/\lambda = 0.33 : 0.30(95) \pm 0.13(74) a^{-1}$
- $l/\lambda = 0.42 : 0.56(93) \pm 0.21(87) a^{-1}$.

Les données sont clairement beaucoup plus variables/bruitées que dans le cas précédent. Par ailleurs, les pentes estimées ne correspondent pas à la première estimation, même si la plage de périmètre analysée ici est plus petite que sur la Fig. 4.17 et que la discrétisation est légèrement différente.

Ainsi, il semble justifié de dire que dans le cas de la géométrie elliptique, la variation de la courbure du bord cause une hybridation entre les fonctions d'onde qu'on ne retrouve pas dans le cas des géométries 1, 2 et 3 car la courbure est constante sauf à quelques points isolés. De l'inverse de la pente extraite de l'étude de ces géométries, on estime une longueur caractéristique $\xi_{\perp} \approx 8.3a = 0.5\lambda$ qui permet de quantifier la distance (le long du bord) sur laquelle les états de bords sont insensibles aux perturbations géométriques.

Dans la suite, on mentionne quelques résultats concernant la robustesse de la phase topologique au désordre.

4.5.4 Effet du désordre

Dans un premier temps, on se concentre sur le cas du désordre scalaire qu'on implémente comme une variation de l'énergie sur site $\mu \rightarrow \mu + \delta\mu$ où $\delta\mu$ est une variable aléatoire distribuée selon une loi normale de moyenne 0 et d'écart-type σ_μ . Les résultats présentés Fig. 4.19 pour $\sigma_\mu/\Delta_0 = 0.2, 0.5, 0.7$ sont à comparer avec ceux de la Fig. 4.15. Pour le système sans

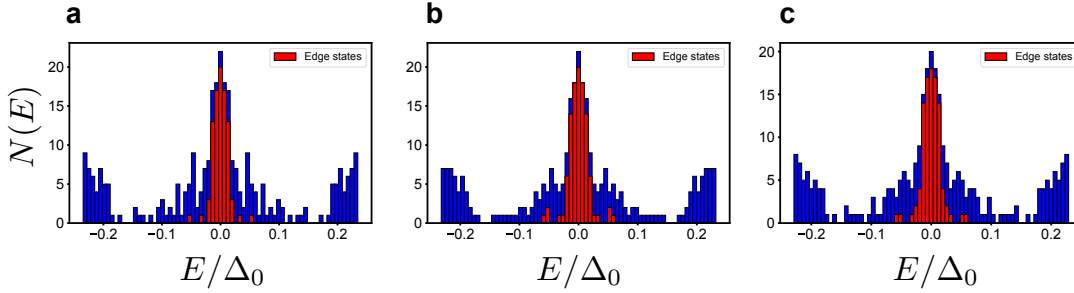


FIGURE 4.19 – Influence du désordre scalaire sur la densité d'états pour un système avec paramètres $p = 9, q = 2, \lambda/a = 16, \mu/t = 0, \Delta_0/t = 0.1, J/t = 0.2$. L'intensité du désordre est $\sigma_\mu/\Delta_0 = 0.2, 0.5, 0.7$ pour **a**, **b** et **c**, respectivement.

désordre qui correspond exactement au cas considéré ici, on compte 90 états de bord dans la fenêtre d'énergie $\pm 0.05 \Delta_0$. Dans le cas désordonné, on compte 90, 106, et 98 états dans cette même fenêtre pour $\sigma_\mu/\Delta_0 = 0.2, 0.5, 0.7$, respectivement. Ainsi, même si une analyse du cas désordonné requiert une moyenne sur différentes réalisations de désordre, ces calculs indiquent qu'un désordre relativement élevé ne parvient pas à déstabiliser le Majorana de bord. On a aussi effectué ce genre de calcul pour le cas d'un désordre magnétique où les résultats sont similaires.

4.5.5 Influence du profil $f(r)$

Dans tout ce qui précède, on a utilisé un profil linéaire pour $f(r)$ (cf. Eq. (4.7)). Cependant, ce profil n'est pas réaliste dans le sens où il n'est pas solution des équations micromagnétiques présentées Chapitre 3. Même s'il n'existe en général pas de solution analytique pour ce profil, on peut utiliser une approximation un peu plus réaliste des skyrmions de type « bulle magnétique » qui correspond à une série de domaines polarisés verticalement séparés par des parois. Explicitement, on prend :

$$f(r) = \pi \sum_i g(r - r_0 - r_i, w) \quad (4.31)$$

où $g(x, w) = (1 + \exp(-x/w))^{-1}$ est une fonction de Fermi inversée ($g(x, w) = n_F(-x, w)$), $r_0 = 4w$ est un décalage global, $r_i = i(R_{\text{sk}} - pw/2)/p$ est la position de la i -ème paroi et w sa largeur. On compare ce profil au profil linéaire Fig. 4.20. Les résultats de l'analyse liaisons fortes utilisant la symétrie de rotation sont présentés Fig. 4.21. Ces résultats montrent qu'il

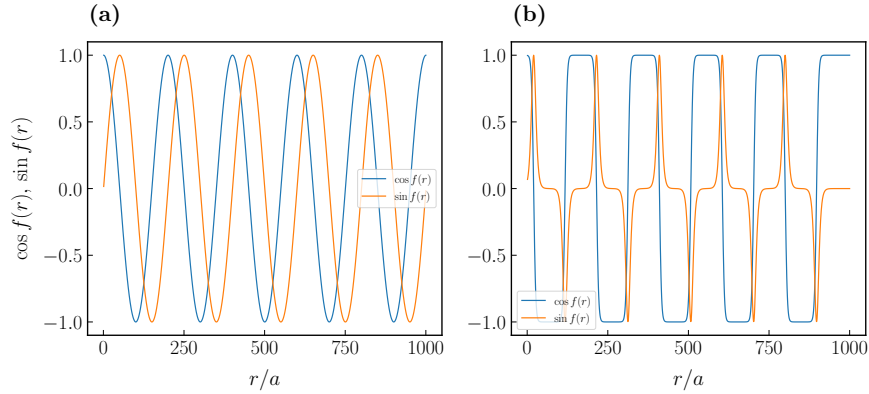


FIGURE 4.20 – Comparaison des fonctions $\cos f(r)$ et $\sin f(r)$ pour un skyrmion avec $R_{\text{sk}}/a = 1000$ et $p = 10$. (a) Pour le profil linéaire donné Eq. (4.7) et (b) pour le profil « bulle » avec $w/a = 5$.

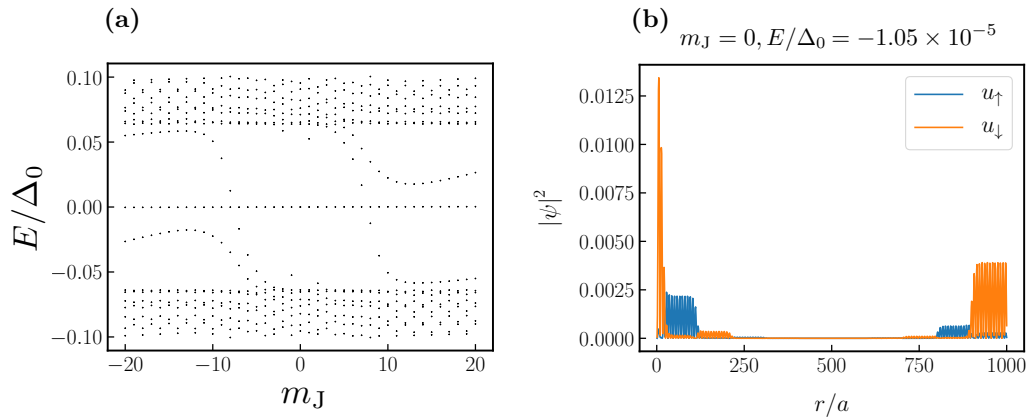


FIGURE 4.21 – Résultats de la diagonalisation numérique avec utilisation de la symétrie de rotation pour un skyrmion « bulle » de paramètres $p = 10$, $R_{\text{sk}}/a = 1000$, $q = 2$, $J/t = 0.2$, $\Delta_0/t = 0.1$, $\mu/t = 0$ et de largeur de paroi $w/a = 5$. (a) Spectre des excitations en fonction du moment angulaire m_J . (b) Densité de probabilité d'un des deux états liés de Majorana.

existe toujours deux états liés de Majorana dont un est localisé au cœur du skyrmion et un Majorana légèrement chiral se propageant au bord du skyrmion (on rappelle que les conditions aux limites utilisées sont un arrêt abrupt de la texture magnétique). Le gap effectif Δ_{eff} est inchangé et seuls les états triviaux dans le gap ainsi que la forme des fonctions d'onde sont modifiés.

4.6 Perspectives expérimentales

Comme on a essayé de le souligner et ceci malgré quelques idéalizations inhérentes à toute étude théorique, la physique présentée ici n'est pas déconnectée de la réalité expérimentale. En effet, on a vu au Chapitre 3 que les skyrmions avec $p > 1$ existaient et même si un skyrmion de $q = 2$ minimum est requis pour observer un état lié de Majorana au cœur du skyrmion, la phase topologique est déjà présente pour $q = 1$. Par exemple, une réalisation possible serait de déposer des îlots supraconducteurs d'aluminium, dont le couplage spin-orbite est faible (Meservey et Tedrow, 1994), sur un des deux isolants magnétiques connus présentant des skyrmions, à savoir Cu_2OSeO_3 et $\text{BaFe}_{12-x-0.05}\text{Sc}_x\text{Mg}_{0.05}\text{O}_{19}$ ($x = 1.6$) (Seki et al., 2012; Yu et al., 2012; White et al., 2012). Un des critères fondamentaux à prendre en compte est que la longueur de cohérence du supraconducteur doit être de l'ordre de la longueur de variation de la texture magnétique. Par exemple, la longueur de cohérence dans un film mince d'Al peut atteindre les 50 nm avec une température critique de 3 K (Meservey et Tedrow, 1971; Steinberg et al., 2008). De même, des skyrmions dans les films minces de Cu_2OSeO_3 ont été observés jusqu'à des températures de l'ordre de quelques K pour des longueurs de variation de l'ordre de 50 nm là aussi (Everschor-Sitte et al., 2018). Bien sûr, un des points cruciaux pour la réalisation expérimentale est de trouver des matériaux dont les structures cristallines sont compatibles afin de garantir un champ d'échange suffisamment fort. Pour terminer, même si cela restreint le nombre de matériaux, on s'est focalisé sur des matériaux magnétiques isolants afin de fournir un gap supplémentaire pour protéger les états topologique de basse énergie. En effet, dans le cas d'un métal magnétique d'autres processus d'interaction comme l'interaction de Ruderman–Kittel–Kasuya–Yosida sont à prendre en compte ce qui peut rendre le modèle employé ici inutilisable (Hayami et Motome, 2018; Nogueira et al., 2018). Ce type de système a d'ailleurs récemment été réalisé expérimentalement (Kubetzka et al., 2020). Comme mentionné au Chapitre 2, on peut aussi envisager de réaliser la phase topologique par un couplage Zeeman, mais cela modifie en partie la physique impliquée.

AUTOUR DES EFFETS ORBITAUX

Ce chapitre traite d'un travail en court dont toutes les ramifications n'ont pas encore été explorées.

5.1 Introduction et motivation – couplage magnéto-électrique

Qu'on considère un couplage direct à une texture d'aimantation par des effets d'échange ou à un champ magnétique inhomogène par effet Zeeman, se pose la question des effets orbitaux. En effet, toute distribution d'aimantation crée un champ magnétique (sauf la distribution ferromagnétique infinie) et il convient, dans ce cas, d'analyser son influence (effet Zeeman et effets orbitaux) ou de justifier qu'on peut le négliger. Par ailleurs, ces effets ne sont *a priori* pas anodins puisque l'on traite de supraconducteurs. Cet effet n'a que peu été étudié dans la littérature si bien qu'on s'attache à effectuer un rapide tour d'horizon afin de clarifier ce qui est entendu par « effets orbitaux ». De manière générale, il est connu qu'en présence de couplage spin-orbite, des supercourants peuvent suffire à induire une phase topologique en l'absence d'effet d'échange (ou Zeeman) [Romito et al. \(2012\)](#); [Kotetes \(2015\)](#); [Melo et al. \(2019\)](#); [Vaitiekėnas et al. \(2020\)](#). Naïvement, la présence de supercourants « force » le mouvement des électrons mais étant donné que le degré de liberté orbital est couplé au spin, cela favorise certains spins par rapport à d'autres résultant en une levée de dégénérescence de type Zeeman. Bien entendu, dans ce contexte le spin n'est plus un bon nombre quantique donc l'image présentée ci-dessus n'est que qualitative.

Dans le cas des supraconducteurs avec couplage spin-orbite, la réponse orbitale est drastiquement modifiée. En l'absence de ce couplage, la transition vers la phase supraconductrice conventionnelle ainsi que certaines de ses propriétés sont décrites par l'énergie libre de

Ginzburg-Landau :

$$F[\psi, \mathbf{A}] = F_N(T) + \int d^3\mathbf{r} \left[a(T)|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*}|\boldsymbol{\Pi}\psi|^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right] \quad (5.1)$$

où $F_N(T)$ est l'énergie libre de l'état normal, ψ le paramètre d'ordre supraconducteur, $a(T) = a_0(T - T_c)$, $a_0 > 0$, T_c est la température critique et $b(T) > 0$. De plus, $q = -2e$ ($e > 0$) et m^* sont la charge et la masse effective des paires de Cooper. $\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{p} - q\mathbf{A}$ est la quantité de mouvement invariante de jauge issue de la procédure de couplage minimal habituelle et \mathbf{A} est le potentiel vecteur magnétique dans le supraconducteur donnant lieu au champ magnétique $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. En présence de couplage spin-orbite brisant la symétrie d'inversion selon l'axe z , [Edelstein \(1996\)](#) a montré qu'une densité d'énergie libre supplémentaire f_{ME} devait être pris en compte. Ce terme s'écrit dans ce cas :

$$f_{\text{ME}} \propto (\mathbf{u}_z \times \mathbf{B}) \cdot (\psi^* \boldsymbol{\Pi} \psi + \psi \boldsymbol{\Pi}^* \psi^*) \quad (5.2)$$

où la constante de proportionnalité dépend de la structure électronique du système et dépend, en particulier, linéairement de l'amplitude du couplage spin-orbite ([Edelstein, 1996](#)). De plus, l'apparition de ce terme est intrinsèquement liée à l'émergence de supraconductivité inhomogène ([Mineev et Samokhin, 1994](#); [Agterberg, 2012](#); [Smidman et al., 2017](#)). En outre, d'autres formes de ce terme sont autorisées en fonction du groupe de symétrie considéré ([Smidman et al., 2017](#); [He et Law, 2020](#)). En présence d'une texture d'aimantation $\mathbf{m}(\mathbf{r})$, on ajoute un terme similaire à Eq. (5.2) ([Pershoguba et al., 2015](#)) :

$$f_{\text{ME}} \propto (\mathbf{u}_z \times \mathbf{m}) \cdot (\psi^* \boldsymbol{\Pi} \psi + \psi \boldsymbol{\Pi}^* \psi^*) \quad (5.3)$$

La réponse orbitale (supercourants, vortex) due à différentes textures a été analysée, et l'apparition de vortex semble être la règle plutôt que l'exception ([Pershoguba et al., 2015](#); [Hals et al., 2016](#); [Hals, 2017](#); [Baumard et al., 2019](#); [Olde Olthof et al., 2019](#)). Ces vortex sont différents des vortex habituels puisqu'ils montrent des changements de signe du champ magnétique quand on s'éloigne du centre le long d'une ligne ([Baumard et al., 2019](#); [Garaud et al., 2020](#); [Samoilenka et Babaev, 2020](#)). Dans le cas des skyrmions, ce mécanisme permet d'envisager la création de paires skyrmion-vortex stables avec des perspectives pour la manipulation d'états de Majorana ([Hals et al., 2016](#); [Rex et al., 2019](#); [Menezes et al., 2019](#)).

Ainsi, ce qui manque actuellement est le traitement des effets magnétique dus à une texture quelconque en l'absence de couplage spin-orbite. Pour le moment, seul l'effet du couplage magnétostatique entre un réseau de skyrmions et un réseau de vortex, tous deux *préformés*, a été considéré ([Dahir et al., 2019](#)) et le problème de l'écrantage Meissner du champ crée par une texture magnétique ont été traités ([Dahir et al., 2020](#)) dans un système où la couche magnétique est comprise entre deux supraconducteurs infinis, ce qui n'est pas la géométrie qu'on étudie ici. La question qu'il convient de se poser désormais concerne les conditions de nucléation

d'un vortex supraconducteur par un skyrmion magnétique en l'absence de couplage spin-orbite, d'autant plus que la présence du vortex change drastiquement la magnétostatique du problème.

5.2 Magnétostatique d'un skyrmion de Néel

5.2.1 Généralités sur le magnétisme dans la matière

Dans un matériau magnétique, il faut différencier le *champ* magnétique \mathbf{H} de l'*induction* magnétique \mathbf{B} qui sont reliés par l'aimantation \mathbf{M} du système par la relation :

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (5.4)$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide. Par ailleurs, on a toujours $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ où \mathbf{A} est le potentiel vecteur. Comme on cherche à étudier les effets orbitaux induits dans le supraconducteur, il est nécessaire d'utiliser les courants ampériens équivalents de densité volumique $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ plutôt que les charges magnétiques souvent utilisées pour leur analogie avec l'électrostatique. Dans la jauge de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, le potentiel vecteur est solution de l'équation de Poisson vectorielle :

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{M} \quad (5.5)$$

dont la solution s'écrit comme une intégrale sur la distribution d'aimantation Ω comme :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{J}_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (5.6)$$

Le champ \mathbf{B} s'écrit alors :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{J}_m(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' \quad (5.7)$$

S'il existe des discontinuités dans la distribution d'aimantation, on montre qu'il existe une densité surfacique de courants ampériens $\mathbf{J}_m^S = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$ où \mathbf{n} est la normale à la surface $\partial\Omega$ délimitant le volume Ω orientée vers l'extérieur. Dans ce cas, le potentiel vecteur et le champ magnétique s'écrivent :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{J}_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{J}_m^S(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^2\mathbf{r}' \quad (5.8)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{J}_m(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \mathbf{J}_m^S(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^2\mathbf{r}' \quad (5.9)$$

Pour plus de détails voir [Jackson \(1999\)](#).

5.2.2 Modèle des $3p$ boucles de courant

Dans la paramétrisation choisie et illustrée Fig. 4.1, on a noté h l'épaisseur du film magnétique dès lors situé entre $z = -\frac{h}{2}$ et $z = \frac{h}{2}$. On suppose, pour le moment, le film infini dans les directions x et y . Comme l'épaisseur du film a une importance du point de vue magnétostatique, on généralise la texture skyrmionique $\mathbf{M} = M_S \mathbf{m}$ par :

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \sin f(r) \cos(\theta + \gamma) \\ \sin f(r) \sin(\theta + \gamma) \\ \cos f(r) \end{pmatrix} H_h(z) \quad (5.10)$$

où M_S est l'aimantation de saturation du matériau. \mathbf{m} est exprimée dans la base cartésienne (x, y, z) de la Fig. 4.1 en coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Cependant, il est important de noter que l'approche qu'on développe ici n'est valable que pour un skyrmion de nombre d'enroulement $q = 1$, qui, on l'a vu, est suffisant pour faire émerger une phase topologique sans état lié de Majorana. La fonction $H_h(z)$ définit la position du film selon z comme $H_h(z) = H(z + \frac{h}{2}) + H(\frac{h}{2} - z) - 1$ où H est la distribution de Heaviside ($H(x \geq 0) = 1$ et 0 ailleurs).

La densité de courant ampériens $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ se calcule sans difficultés et s'écrit :

$$\mathbf{J}_m = M_S \begin{pmatrix} -\sin \theta \frac{df}{dr} \sin f(r) H_h(z) - \sin f(r) \sin(\theta + \gamma) [\delta(z + \frac{d}{2}) - \delta(\frac{d}{2} - z)] \\ \cos \theta \frac{df}{dr} \sin f(r) H_h(z) + \sin f(r) \cos(\theta + \gamma) [\delta(z + \frac{d}{2}) - \delta(\frac{d}{2} - z)] \\ \left(\cos f(r) \frac{df}{dr} + \frac{\sin f(r)}{r} \right) \sin \gamma H_h(z) \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Comme les discontinuités de la distribution en $z = \pm \frac{h}{2}$ sont incluses dans $H_h(z)$, les termes proportionnels à H_h sont des termes de volume et ceux proportionnels à la distribution de Dirac δ sont des termes de surface. On écrit alors $\mathbf{J}_m = \mathbf{J}_m^V H_h(z) + \mathbf{J}_m^S [\delta(z + \frac{d}{2}) - \delta(\frac{d}{2} - z)]$. On note que ces contributions de surface peuvent directement être retrouvées par $\mathbf{J}_m^S = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$ avec $\mathbf{n} = \pm \mathbf{u}_z$ où le signe $+$ correspond à la surface supérieure et le signe $-$ à la surface inférieure de telle sorte que tout est cohérent.

L'Eq. (5.11) montre que les skyrmions de Néel ($\gamma = 0, \pi$) ne présentent pas de courants verticaux, simplifiant grandement l'analyse. De ce fait, on se focalise, comme cela a toujours été le cas jusqu'à présent, sur le cas des skyrmions de Néel avec $\gamma = 0$.

De plus, on constate que la contribution de volume est proportionnelle à la dérivée du profil $f(r)$. Ainsi, si l'on modélise le skyrmion par un profil de type « bulle magnétique » composé de domaines cylindriques aimantés perpendiculairement et séparés par des parois de faible épaisseur comparée à la taille du skyrmion, on s'attend à pouvoir modéliser chaque paroi par une boucle de courant. Plus précisément, si l'on suit [Rohart et Thiaville \(2013\)](#), en prenant le profil $f_{DW}(r)$ pour une paroi de domaine de largeur w positionnée en $r = a$:

$$f_{DW}(r) = -2 \arctan\left(e^{-\frac{r-a}{w}}\right) + \pi \quad (5.12)$$

Ce dernier vérifie $\frac{df}{dr} = \pm \sin(f(r))/w$, condition issue de la minimisation de l'énergie micro-magnétique, ce qui fait que l'approximation de boucles est aussi valable pour les contributions des surfaces supérieure et inférieure. Ainsi, du point de vue magnétostatique, le skyrmion peut être remplacé par un système de $3p$ boucles de courant comme représenté Fig. 5.1 .

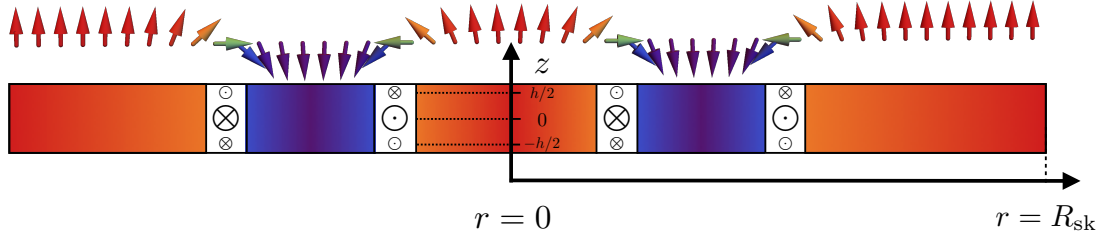


FIGURE 5.1 – Représentation schématique du modèle à $3p$ boucles de courants pour un skyrmion avec $p = 2$.

En traitant les directions séparément, les amplitudes des courants parcourant les boucles sont données par :

$$I_{\text{eff}}^V = M_S \left| \int_{\text{DW}} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{df(r')}{dr'} \sin f(r') dr' dz' \right| = 2M_S h \quad (5.13)$$

pour les boucles de volume situées dans le plan $z = 0$. Et :

$$I_{\text{eff}}^{S,\text{top/bot}} = M_S \left| \int_{\text{DW}} \sin f(r') dr' \right| \quad (5.14)$$

pour les boucles de surface situées en $z = \pm h/2$. La notation \int_{DW} représente une intégrale sur l'épaisseur de la paroi de domaine dans la direction radiale.

Il reste cependant un dernier détail à considérer. En effet, selon la situation physique considérée, il faut ajouter, ou non, une contribution latérale aux courants ampériens. Si l'on suppose que le skyrmion est isolé, c'est-à-dire qu'il se termine abruptement et qu'il n'y a aucun aimantation à l'extérieur alors il faut prendre en compte une dernière boucle de courant située dans le plan $z = 0$. Sinon, par exemple si le skyrmion est inséré dans un matériau ferromagnétique infini uniformément polarisé, alors il n'y a pas de contribution additionnelle à prendre en compte¹. Dans le cas d'une terminaison abrupte, l'amplitude du courant s'écrit :

$$I_{\text{eff}}^{S,\text{lat}} = M_S h |\cos f(R_{\text{sk}})| = M_S h \quad (5.15)$$

où on a supposé que l'aimantation au bord du skyrmion était parfaitement alignée avec z , ce qui n'est pas nécessairement le cas (Rohart et Thiaville, 2013). Comme attendu, cette

1. En principe, il faudrait inclure les contributions dues à la taille finie du matériau mais on suppose celui-ci tellement grand par rapport au skyrmion qu'elles n'influencent pas le champ magnétique du skyrmion dans la région qui nous intéresse.

contribution est proportionnelle à l'épaisseur h du film magnétique et est donc du même ordre de grandeur que la contribution de volume.

Dès lors, il ne reste plus qu'à calculer le potentiel vecteur \mathbf{A} et l'induction magnétique \mathbf{B} créés par une boucle de courant.

5.2.3 Potentiel vecteur et induction créés par une boucle de courant

On considère désormais une boucle de rayon a , située dans le plan $z = 0$ et centrée sur l'origine. On note I l'amplitude du courant qui la parcourt. Par symétrie, le potentiel vecteur s'écrit $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(r, z) \mathbf{u}_\theta$ et l'application directe de l'Eq. (5.8) donne :

$$A(r, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left[\frac{z^2 + r^2 + a^2}{\sqrt{z^2 + (r+a)^2}} K \left(\sqrt{\frac{4ar}{z^2 + (r+a)^2}} \right) - \sqrt{z^2 + (r+a)^2} E \left(\sqrt{\frac{4ar}{z^2 + (r+a)^2}} \right) \right] \quad (5.16)$$

où K et E sont les intégrales elliptiques complètes de première et deuxième espèce, respectivement, déjà rencontrées précédemment. On rappelle leur définition :

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\alpha)}} \quad (5.17)$$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\alpha)} d\alpha$$

L'induction magnétique se déduit en prenant le rotationnel de l'Eq. (5.16) et s'écrit $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_r(r, z) \mathbf{u}_r + B_z(r, z) \mathbf{u}_z$ avec :

$$B_r(r, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left[\frac{z(z^2 + r^2 + a^2)}{(z^2 + (r-a)^2) \sqrt{z^2 + (r+a)^2}} E \left(\sqrt{\frac{4ar}{z^2 + (r+a)^2}} \right) - \frac{z}{\sqrt{z^2 + (r+a)^2}} K \left(\sqrt{\frac{4ar}{z^2 + (r+a)^2}} \right) \right] \quad (5.18)$$

et

$$B_z(r, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{a^2 - r^2 - z^2}{(z^2 + (r-a)^2) \sqrt{z^2 + (r+a)^2}} E \left(\sqrt{\frac{4ar}{z^2 + (r+a)^2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{z^2 + (r+a)^2}} K \left(\sqrt{\frac{4ar}{z^2 + (r+a)^2}} \right) \right] \quad (5.19)$$

Le calcul est laborieux mais n'est pas compliqué. Il faut néanmoins être prudent car la plupart des ouvrages comme le **DLMF** ou **Gradshteyn et Ryzhik (1983)** définissent les intégrales elliptiques $\mathcal{E} = K, E$ comme $\mathcal{E}(k)$ et donnent ainsi les propriétés de ces fonctions alors que Mathematica ou SciPy implémentent $\mathcal{E}(m)$ où $m = k^2$.

5.2.4 Retour au skyrmion

Avec les résultats de la section précédente, le potentiel vecteur et l'induction magnétique s'obtiennent par superposition de toutes les boucles de rayon a_l et de position z_l comme :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \{z_l, a_l\}) = \sum_l \mathbf{B}_l(\mathbf{r}, z_l, a_l) \quad (5.20)$$

où $\mathbf{B}_l(\mathbf{r})$ est l'induction d'une seule boucle donnée par les Eq. (5.18) et Eq. (5.19). La dépendance en z_l s'obtient par simple translation de ces équations en faisant $z \rightarrow z - z_l$ et les rayons a_l correspondent aux positions des parois de domaine.

Afin de vérifier le régime de validité de cette approche, on compare l'Eq. (5.20) avec les expressions intégrales exactes données par Eq. (5.9) qu'on intègre numériquement. Afin de ne pas alourdir la lecture, celles-ci sont détaillées en Annexe C. La figure Fig. 5.2 présente les résultats de cette comparaison pour un skyrmion de nombre d'enroulement $p = 1$ dans le cas où la largeur de la paroi de domaine w est petite devant la taille du skyrmion $w/R_{\text{sk}} = 0.01$. Les deux quantités coïncident bien. Cependant, quand la paroi de domaine est plus large, par exemple $w/R_{\text{sk}} = 0.1$, on constate des variations significatives illustrées Fig. 5.3 qui signalent le fin du régime de validité de l'approximation des boucles de courant.

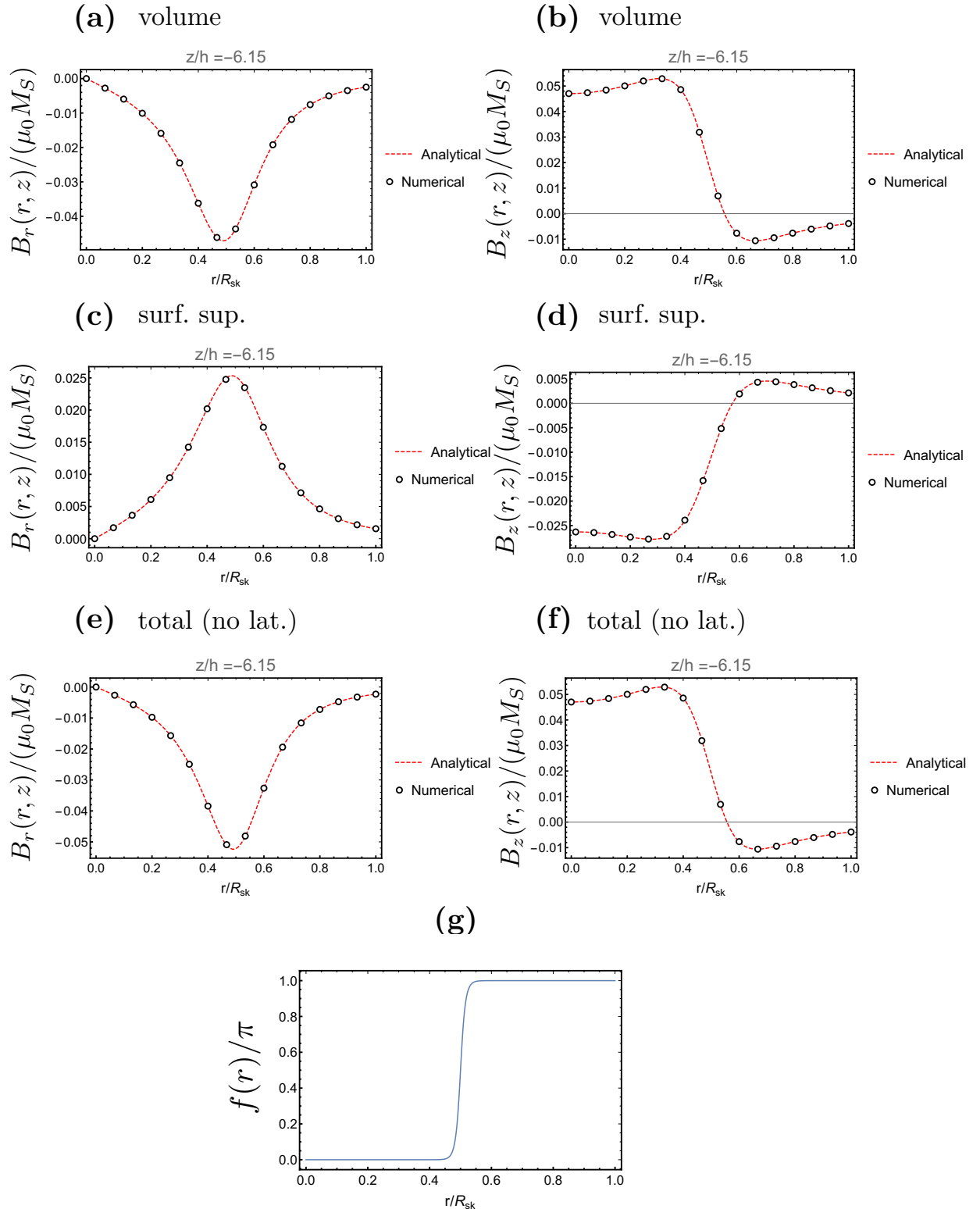
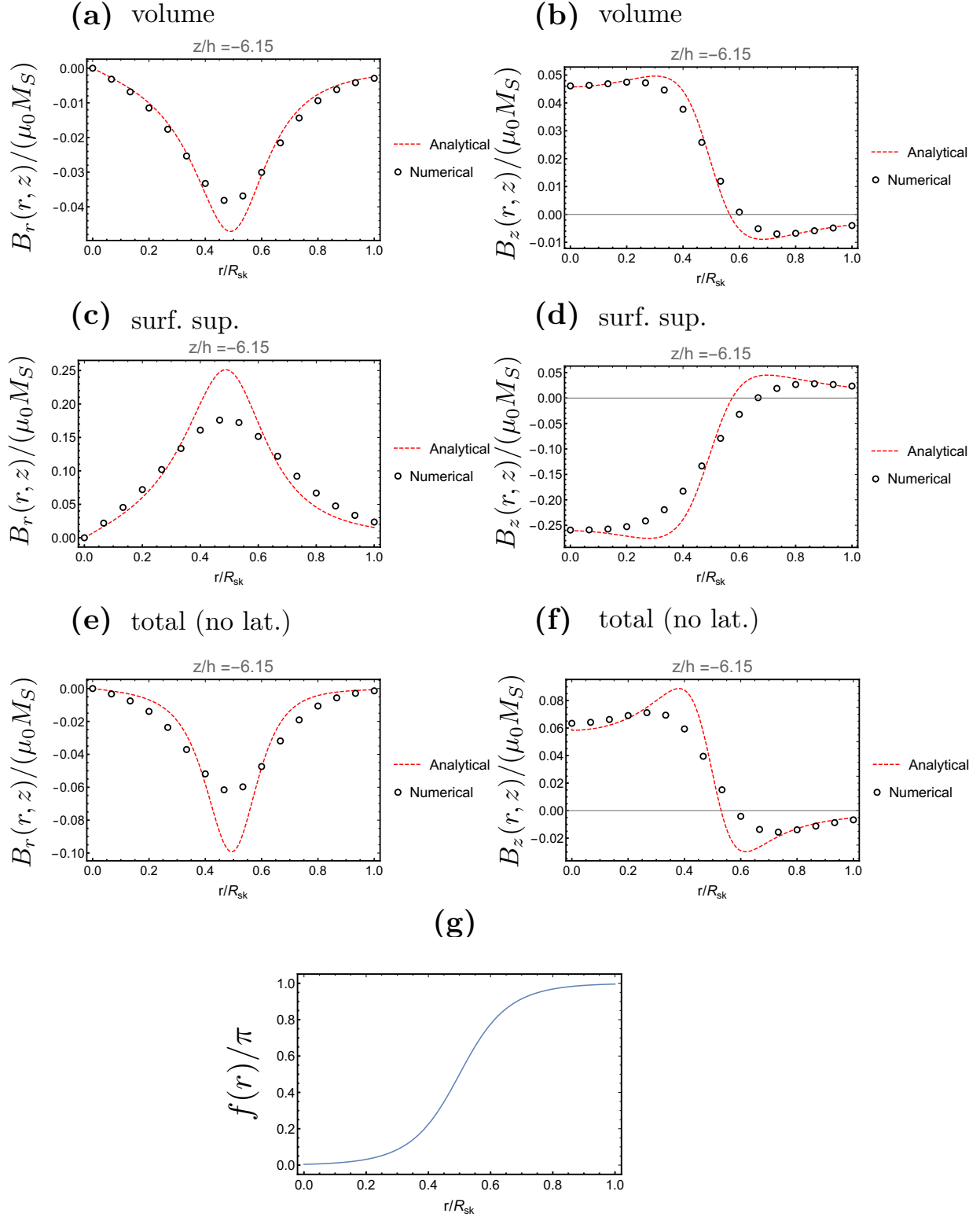


FIGURE 5.2 – Comparaison du modèle des $3p$ boucles de courant (« *analytical* », lignes pointillées rouges) avec les intégrales exactes (« *numerical* », points noirs) pour une épaisseur de paroi $w/R_{sk} = 0.01$. Pour ce calcul, on a pris $h/R_{sk} \approx 0.03$ et on calcule l'induction dans le plan $z/h = -6.15$. (a) et (b) représentent la composante B_r (gauche) et B_z (droite) de la contribution de volume. De même pour (c) et (d) qui représentent la contribution de la surface supérieure. (e) et (f) représentent les composantes de l'induction totale sans contribution latérale. (g) représente le profil $f(r)$.


 FIGURE 5.3 – Même quantités que Fig. 5.2 pour une paroi de domaine plus large $w/R_{sk} = 0.1$.

On peut désormais déterminer l'induction magnétique de n'importe quel skyrmion de $p > 1$. Par exemple, la figure Fig. 5.4 détaille les différentes composantes et l'induction totale générée par un skyrmion isolé de $p = 2$ et d'épaisseur de paroi $w/R_{\text{sk}} = 0.01$.

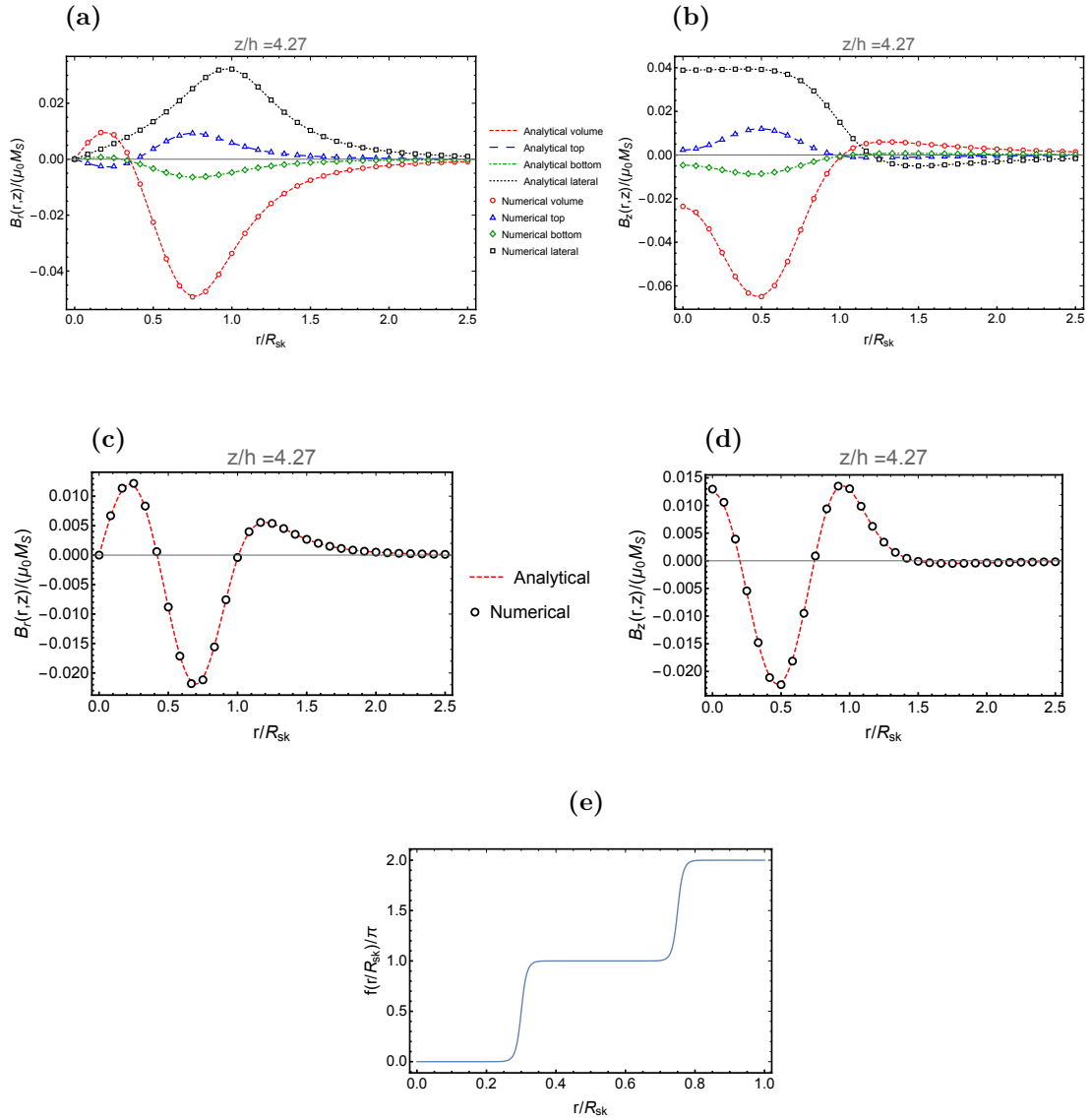


FIGURE 5.4 – Induction magnétique générée par un skyrmion de Néel avec $p = 2$. (a) et (b) représentent les composantes B_r et B_z (respectivement) de chaque contribution (volume, surface supérieure, inférieure et latérale) en fonction de r/R_{sk} dans le plan $z/h = 4.27$. (c) et (d) représentent les composantes B_r et B_z (respectivement) de l'induction totale. Pour ce calcul, on a pris $h/R_{\text{sk}} = 0.1$.

Ainsi, ce modèle peut permettre d'aller au-delà des approximations dipolaire (Qin et Wang, 2020) ou quadrupolaire (Yagil et al., 2018) employées pour des skyrmions d'enroulement $p = 1$. Il est par ailleurs très peu probable que ces approximations donne des résultats satisfaisant

dans le cas $p > 1$.

5.3 Influence des effets orbitaux sur la phase topologique

N'ayant pas pu apporter de réponse solide quant à l'éventuelle présence de vortex dans le système considéré, on analyse maintenant l'influence des effets orbitaux sur la phase topologique dans le formalisme Bogoliubov-de Gennes.

5.3.1 Mise en place et hypothèses

Dans ce cadre, les effets orbitaux dus à une induction magnétique extérieure sont inclus dans le Hamiltonien par la procédure habituelle de couplage minimal en terme du potentiel vecteur \mathbf{A} :

$$\hat{\mathbf{p}} \longrightarrow \hat{\mathbf{\Pi}} \equiv \hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A} \quad (5.21)$$

où $q = -e$, $e > 0$ est la charge des électrons et où la base de Nambu choisie est inchangée. Si bien que la contribution cinétique \mathcal{H}_{cin} au Hamiltonien BdG devient :

$$\mathcal{H}_{\text{cin}} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} \tau_z \longrightarrow \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}\tau_z)^2 \tau_z \quad (5.22)$$

Dans le cas qui nous intéresse ici $\mathbf{A} = A(r)\mathbf{u}_\theta$, ce qui simplifie l'expression du nouvel Hamiltonien cinétique :

$$\mathcal{H}_{\text{kin}} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(-\nabla^2 - 2i\frac{e}{\hbar} \frac{A(r)}{r} \partial_\theta \tau_z + \frac{e^2}{\hbar^2} A^2(r) \right) \tau_z \quad (5.23)$$

Le Hamiltonien Bogoliubov-de-Gennes total \mathcal{H} s'écrit donc :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{kin}} - \mu \tau_z + J \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m}(\mathbf{r}) + \Delta_0 \tau_x \quad (5.24)$$

Par ailleurs, on suppose qu'il est légitime de négliger l'effet Zeeman devant l'interaction d'échange afin de simplifier le problème.

Cependant, il reste encore à déterminer le potentiel vecteur *dans* le supraconducteur qui n'est *a priori* pas identique au potentiel vecteur créé par le skyrmion à cause de l'effet Meissner. Ce problème d'écrantage a récemment été étudié par [Dahir et al. \(2020\)](#) mais leurs résultats concernent une hétérostructure différente de la nôtre. En particulier, ceux-ci ne sont pas valables dans le cas du film mince supraconducteur qui nous occupe ici. Dans ce cas, on montre que les propriétés magnétiques du film sont gouvernées par une longueur d'écrantage effective, ou longueur de Pearl $\lambda_P = \lambda_L^2/d$ ([Pearl, 1964](#); [de Gennes, 1966](#)), si bien que dans la limite $\lambda_L \gg d$, on peut négliger la contribution des courants Meissner ce qui revient à supposer que le potentiel vecteur (ainsi que l'induction magnétique) dans le supraconducteur est égal au potentiel créé par le skyrmion. Dans cette limite d'un film infiniment fin, il suffit d'estimer le potentiel vecteur dans le plan $z_{\text{SC}} = (h + d)/2$.

L'introduction du potentiel vecteur dans le Hamiltonien BdG ajoute un nouveau paramètre au problème, à savoir le champ magnétique caractéristique $\mu_0 M_S$. Une combinaison possible de cette grandeur avec les constantes e et \hbar est d'introduire le rapport d'un flux caractéristique ϕ_S de la composante normale de l'induction magnétique à travers le skyrmion et du quantum de flux $\phi_0 = \hbar/e$. On écrit alors le flux ϕ_S sous la forme $\phi_S = 2\pi\mu_0 M_S R_{\text{sk}}^2$, ce qui permet d'introduire le paramètre $\nu \equiv \phi_S/\phi_0$. L'inclusion du potentiel vecteur magnétique ne changeant pas les propriétés de symétrie de rotation du Hamiltonien total, il suffit d'ajouter au Hamiltonien liaisons fortes précédent les deux termes :

$$t \left[\frac{2\nu}{j(R_{\text{sk}}/a)^2} \left(m_J \mathbb{1} - \frac{q}{2} \sigma_z \right) \mathcal{A} + \frac{\nu^2}{(R_{\text{sk}}/a)^4} \mathcal{A}^2 \tau_z \right] \quad (5.25)$$

où on a discrétisé la variable r telle que $r = ja$ avec j un entier, \mathcal{A} est le potentiel vecteur adimensionné tel que $\mathcal{A} = A/(\mu_0 M_S a)$ et l'amplitude de saut vaut toujours $t = \hbar^2/(2ma^2)$.

Pour obtenir une estimation du paramètre ν , on peut utiliser une valeur typique de l'aimantation de saturation $M_S \approx 1 \text{ MA m}^{-1}$ (Rohart et Thiaville, 2013; Bernard-Mantel et al., 2018) ce qui donne un champ caractéristique de $\mu_0 M_S$ de l'ordre de 1 T. En utilisant les données de la Fig. 3.3 donnée au Chapitre 3, un ordre de grandeur du rayon du skyrmion est donné par l'intervalle 50 – 500 nm. Ainsi, on estime alors $\nu \approx 10 - 1000$.

5.3.2 Résultats numériques

L'implémentation des deux termes de l'Eq. (5.25) dans le programme déjà écrit ne présente pas de difficultés majeures. On présente Fig. 5.5 les résultats obtenus dans la phase topologique pour un paramètre $\nu = \phi_S/\phi_0$. On précise que ce calcul est effectué dans le cas où on ne prend pas en compte la contribution latérale de la distribution de courant ampériens. L'observation conjointe du spectre Fig. 5.5(a) et de la densité d'états électronique locale Fig. 5.5(b) montre que (i) le gap effectif subsiste et sa valeur est inchangée, (ii) il existe toujours une branche d'excitations dispersant linéairement dans le gap et (iii) les autres états dispersant dans le gap et localisés près du cœur du skyrmion sont fortement affectés mais toujours présents. De plus, les deux états liés de Majorana, bien qu'ils ne soient pas visibles sur la densité locale d'état du fait de leur faible poids spectral, subsistent eux aussi bien que leur fonction d'onde soit fortement affectée comme illustré sur la Fig. 5.6. Ces résultats peuvent être compris du point de vue des symétries, de la même manière qu'au chapitre précédent. En effet, on remarque que le second terme de l'Eq. (5.25) (terme diamagnétique) est proportionnel à la matrice τ_z , ce qui permet de l'interpréter comme une renormalisation, dépendante de l'espace, du potentiel chimique. On ne s'attendait donc pas à des changements dramatiques venant de ce terme autour de $m_J = 0$ pour les valeurs des paramètres choisies. Le premier terme (terme paramagnétique), cependant, fait intervenir la matrice identité et la matrice σ_z . Or, l'identité $\mathbb{1}$ brise la symétrie chirale $S = \sigma_y \tau_y$ identifiée au Chapitre 4. Ceci explique donc la pente, désormais apparente, des excitations de bord du système. Dans le cas où la contribution

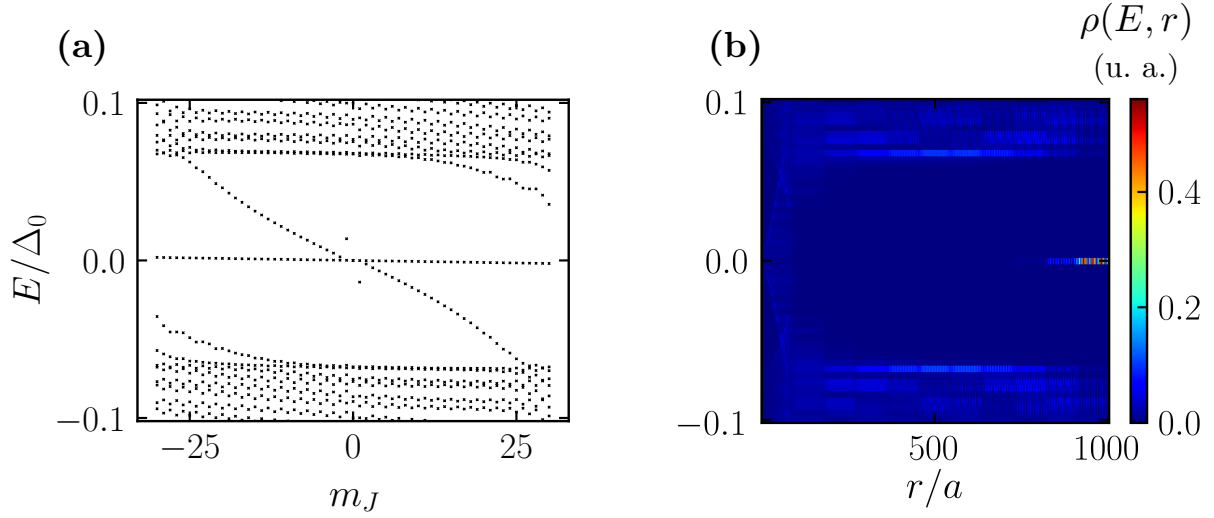


FIGURE 5.5 – Résultats numériques en présence d’effets orbitaux. (a) Spectre des excitations de basse énergie et (b) densité d’états locales. Les paramètres du calcul sont $p = 10$, $q = 2$, $R_{\text{sk}}/a = 1000$, $\Delta_0/t = 0.1$, $\mu/t = 0$ et $\nu = 100$. Dans ce calcul, on ne prend pas en compte la contribution latérale à l’induction magnétique.

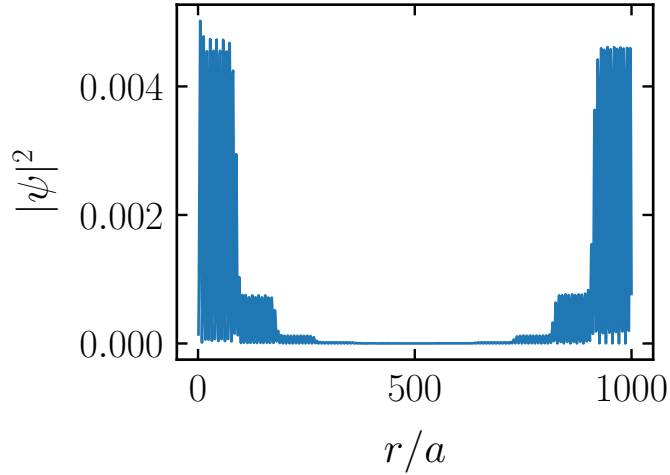


FIGURE 5.6 – Densité d’états électronique locale pour le mode de Majorana d’énergie $E/\Delta_0 \approx 1.01 \times 10^{-6}$ pour les mêmes paramètres que la Fig. 5.5.

latérale à l’induction magnétique du skyrmion est générée, cette pente est beaucoup plus petite mais les résultats sont sensiblement identiques.

5.3.3 Conclusion

Le point de départ de cette étude concernait la question des effets orbitaux dans leur généralité : quels sont les supercourants induits par le skyrmion et quels sont les critères de

formation de vortex supraconducteurs. Même s'il ne nous a pas encore été possible de clarifier ce problème du fait d'une littérature foisonnante et assez peu cohérente, on a étudié les effets induits au niveau Bogoliubov-de Gennes par le potentiel vecteur créé par le skyrmion dans le cas d'un film supraconducteur assez fin pour négliger l'écrantage. Ceci montre que la phase topologique identifiée au chapitre précédent est robuste à ces effets orbitaux, ce qui vient compléter l'étude de [Rex et al. \(2019\)](#) où les auteurs considèrent un vortex supraconducteur *en présence de couplage spin-orbite* et montrent que la phase topologique persiste. Ainsi, tous ces résultats pris ensemble permettent de conclure que malgré la difficulté à répondre à certaines questions, les skyrmions magnétiques constituent bien une plateforme intéressante et viable pour la supraconductivité topologique, avec ou sans vortex supraconducteurs.

LE RÔLE DES EXCITATIONS MAGNÉTIQUES

Ce chapitre présente les motivations et résultats préliminaires d'un travail encore en cours. Ainsi, si la motivation physique qui sert de point de départ est claire, il reste encore de nombreuses pistes et questions à explorer.

6.1 Introduction et motivation

Comme on l'a mentionné, la question de la stabilité des phases topologiques (aussi bien les skyrmions magnétiques que les supraconducteurs) est d'importance fondamentale et pratique, d'autant plus que les phases topologiques protégées par une symétrie anti-unitaire semblent intrinsèquement « fragiles » (McGinley et Cooper, 2020; Zaletel, 2020). Parmi les travaux les plus récents, l'analyse de l'influence de modes de basse énergie (fluctuations du potentiel de grille, phonons, ...) a permis de calculer le temps de vie des excitations de Majorana ainsi que de quantifier la levée partielle de dégénérescence (Aseev et al., 2018, 2019). D'un autre point de vue, le couplage à des modes auxiliaires se révèle être un outil puissant. En effet, quand un supraconducteur topologique est couplé aux modes photoniques d'une cavité micro-onde, celle-ci permet de détecter (Dmytruk et al., 2015; Dmytruk, 2016; Dartailh et al., 2017), manipuler (Trif et Simon, 2019) et créer de nouveaux états hybrides lumière-matière comme le polariton de Majorana (Trif et Tserkovnyak, 2012). Du côté des degrés de liberté magnétiques, il a été récemment montré par Marra et Nitta (2019) que le contrôle de la phase globale de l'hélice magnétique menait à de nouveaux états topologiques, en sus des états liés de Majorana. Cependant, l'existence et l'influence des magnons n'a pas encore été prise en compte. Ceci est en partie dû au fait que dans une chaîne d'atomes magnétiques de quelques dizaines d'atomes seulement, on s'attend à ce que ces excitations magnétiques ne

jouent pas un rôle fondamental. En revanche, dans le cadre considéré dans cette thèse où la structure supraconductrice serait déposée sur un matériau magnétique, les magnons doivent être pris en compte. Ces derniers sont synonymes d'une réduction locale du champ d'échange et de la génération de composantes perpendiculaires à ce dernier, ce qui peut compromettre la phase topologique dans le sens où il existerait une composante magnétique parallèle au champ spin-orbite. Néanmoins, pour commencer à analyser cette physique, le skyrmion magnétique est un objet bien trop compliqué. En effet, comme illustré Fig. 6.1, les excitations d'un skyrmion sont nombreuses et complexes (Rózsa et al., 2018; Garst, 2020).

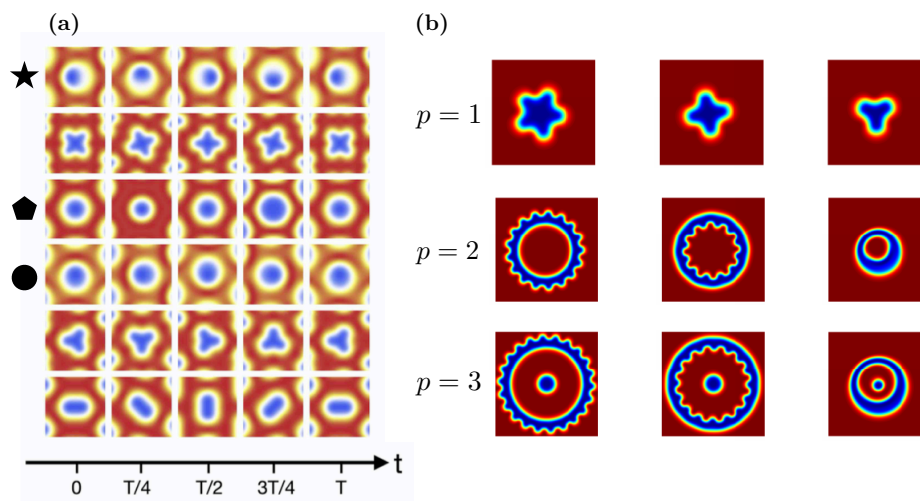


FIGURE 6.1 – Quelques excitations des skyrmions. (a) Évolution sur une période de quelques excitations de skyrmions avec $p = 1$ dont la fréquence est de l'ordre du GHz. L'étoile indique un mode de rotation dans le sens horaire, le pentagone un mode de « respiration » et le disque un mode de rotation anti-horaire. Figure reprise et adaptée de Garst (2020). (b) Même chose que (a) mais pour des skyrmions de $p = 1, 2, 3$ de fréquence comprise entre 1 et 150 GHz. Figure reprise et adaptée de Rózsa et al. (2018). Toutes les figures illustrent la composante m_z de l'aimantation.

Même si l'on a montré que le fermion de Majorana chiral au bord du skyrmion était robuste à certaines déformations géométriques, il existe de nombreuses excitations magnétiques dans une plage de fréquence de l'ordre de 1-100 GHz, ce qui correspond à des énergies maximales de l'ordre du dixième de meV (Rózsa et al., 2018; Garst, 2020). Ainsi, ces excitations ne sont pas négligeables. Afin de saisir la physique essentielle, il semble raisonnable de retourner au modèle du fil 1D.

6.2 Modélisation du système et ondes de spin

On considère un fil semi-conducteur avec couplage spin-orbite de taille finie et à proximité d'un supraconducteur déposé à la surface d'un matériau ferromagnétique comme représenté Fig. 6.2.

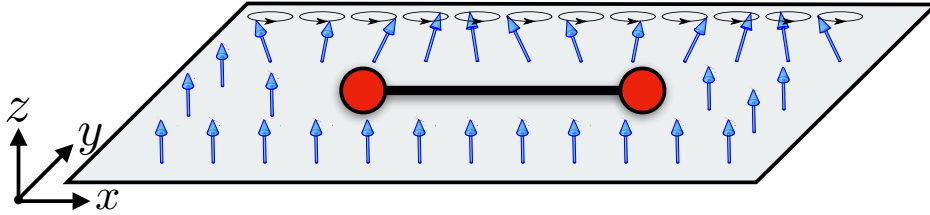


FIGURE 6.2 – Représentation schématique du système étudié. Un fil Rashba (noir) propice à la supraconductivité topologique comme illustré par la présence de deux états liés de Majorana (disques rouges) est déposé à la surface d'un matériau ferromagnétique dont les excitations sont des ondes de spin (magnons). Adapté de Jens Böning : [hyperlien](#).

On écrit le Hamiltonien total H comme la somme de trois termes : $H = H_{\text{el}} + H_{\text{mag}} + H_{\text{int}}$ où H_{el} est le Hamiltonien du fil contenant un terme de saut, un potentiel chimique, un couplage spin-orbite Rashba et un terme de supraconductivité en onde s induite. H_{mag} est le Hamiltonien du système magnétique qu'on suppose isotrope et H_{int} le Hamiltonien décrit le couplage entre les deux sous-systèmes. Par souci de simplicité, on suppose que le matériau magnétique forme un réseau carré de N_{mag} sites qui coïncident avec ceux du fil¹. On dénote par $\mathbf{r} = (xa, ya)$ où x et y sont des entiers la position sur le réseau carré et on choisit a comme unité de longueur. De plus, on place le fil à $y = 0$ et on note la longueur du fil L . Ici, l'orientation du fil par rapport au substrat n'a pas d'importance car la supraconductivité induite est en onde s et qu'on suppose que les interactions magnétiques du substrat sont isotropes dans le plan (x, y) . En ne considérant que des interactions d'échange locales entre électrons du fil et substrat, on a alors :

$$H = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_x \Psi_x^\dagger \mathcal{H}_{\text{el}}(x) \Psi_x}_{H_{\text{el}}} + \underbrace{H_{\text{mag}}(\{\mathbf{S}_{\mathbf{r}}\}) + J' \sum_x \mathbf{s}_x \cdot \mathbf{S}_{(x,0)}}_{H_{\text{int}}} \quad (6.1)$$

où, comme précédemment, la base de Nambu est définie par $\Psi_x^\dagger = (c_{x\uparrow}^\dagger, c_{x\downarrow}^\dagger, c_{x\downarrow}, -c_{x\uparrow})$, $\mathcal{H}_{\text{el}}(x)$ est le Hamiltonien Bogoliubov-de Gennes et on omet le décalage en énergie dû au formalisme BdG. Le Hamiltonien (quantique) du sous-système magnétique $H_{\text{mag}}(\{\mathbf{S}_{\mathbf{r}}\})$ qu'on détaillera sous peu dépend d'opérateurs de spin $\mathbf{S}_{\mathbf{r}}$ à chaque site du réseau carré. Par souci de simplicité, on note \mathbf{S}_x les spins du matériau ferromagnétique le long du fil. Enfin, on suppose que la

1. Bien entendu, dans une expérience avec des adatoms, les sites d'adsorption ainsi que les interactions dépendent des espèces impliquées et des réseaux formés par celles-ci.

seule interaction entre le nanofil et le système magnétique est une interaction d'échange locale caractérisée par l'amplitude $J' > 0$. Pour écrire l'interaction d'échange dans l'Eq. (6.1), on utilise l'expression de l'aimantation dans le fil :

$$\mathbf{s}_x = \frac{1}{2} \sum_{s,s'} c_{xs}^\dagger \boldsymbol{\sigma}_{ss'} c_{xs'} \quad (6.2)$$

Concernant le système magnétique on prend un Hamiltonien isotrope de type Heisenberg :

$$H_{\text{mag}} = J \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} \mathbf{S}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{r}'} - h_z \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^z \quad (6.3)$$

où $J = -|J| < 0$ est un couplage ferromagnétique, $h_z > 0$ est un faible champ magnétique extérieur qu'on justifiera plus tard et $\sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle}$ dénote une somme sur les plus proches voisins. Pour aller plus loin, on développe le Hamiltonien H_{mag} autour de l'état fondamental classique où tous les spins de norme S pointent selon $+z$ en utilisant la transformation de Holstein-Primakoff (Holstein et Primakoff, 1940). En introduisant les opérateurs $S_{\mathbf{r}}^\pm = S_{\mathbf{r}}^x \pm iS_{\mathbf{r}}^y$, cette transformation s'écrit (Auerbach, 1994) :

$$\begin{cases} S_{\mathbf{r}}^z &= S - b_{\mathbf{r}}^\dagger b_{\mathbf{r}} \\ S_{\mathbf{r}}^+ &= \sqrt{2S} \sqrt{1 - \frac{b_{\mathbf{r}}^\dagger b_{\mathbf{r}}}{2S}} b_{\mathbf{r}} \\ S_{\mathbf{r}}^- &= \sqrt{2S} b_{\mathbf{r}}^\dagger \sqrt{1 - \frac{b_{\mathbf{r}}^\dagger b_{\mathbf{r}}}{2S}} \end{cases} \quad (6.4)$$

où on a introduit les opérateurs bosoniques $b_{\mathbf{r}}^{(\dagger)}$ qui décrivent les excitations au-dessus du fondamental. Dans le cadre de la théorie linéaire des ondes de spin, on étudie la limite semi-classique où $\langle b_{\mathbf{r}}^\dagger b_{\mathbf{r}} \rangle \ll 2S$, si bien qu'on obtient à l'ordre $\mathcal{O}(S^0)$ après avoir utilisé la relation $\mathbf{S}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{r}'} = S_{\mathbf{r}}^z S_{\mathbf{r}'}^z + \frac{1}{2} (S_{\mathbf{r}}^+ S_{\mathbf{r}'}^- + S_{\mathbf{r}}^- S_{\mathbf{r}'}^+)$ et pris la transformée de Fourier $b_{\mathbf{r}} = N_{\text{mag}}^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} b_{\mathbf{k}}$ (Auerbach, 1994; Chalker, 2013) :

$$H_{\text{mag}} \approx E_{\text{class.}} + \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + H_{\text{mag}}^{(2)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{S}\right) \quad (6.5)$$

où $E_{\text{class.}} = -2|J|NS^2 - h_z S$ est l'énergie classique du fondamental qu'on omet dans la suite, $H_{\text{mag}}^{(2)}$ est un terme d'interaction à quatre opérateurs $b^{(\dagger)}$ qu'on néglige et où $\omega_{\mathbf{k}}$ est la dispersion des ondes de spin. Cette dernière s'écrit :

$$\omega_{\mathbf{k}} = 2|J|S [2 - \cos(k_x a) - \cos(k_y a)] + h_z \quad (6.6)$$

Ainsi, on comprend pourquoi on a ajouté un faible champ magnétique : il s'agit ici de gapper les magnons pour continuer à traiter le système magnétique comme quasi-2D. En effet, en 2D, le théorème de Mermin-Wagner impose l'absence d'ordre à longue portée à cause de la prolifération des modes de Goldstone (ici, les magnons) associés à la brisure spontanée de

symétrie (Auerbach, 1994). A noter qu'on aurait très bien pu arriver au même résultat avec un terme d'anisotropie magnéto-cristalline de type axe-facile $-K \sum_{\mathbf{r}} (S_{\mathbf{r}}^z)^2$ avec $K > 0$ mais ce terme n'étant pas linéaire en bosons de Holstein-Primakoff, on a préféré utiliser un champ magnétique. Par ailleurs un champ magnétique est plus facile à maîtriser expérimentalement qu'une anisotropie.

Dans ce cadre, le Hamiltonien d'interaction H_{int} se récrit :

$$H_{\text{int}} = J' \sum_x \left[\left(S - b_x^\dagger b_x \right) s_x^z + \sqrt{\frac{S}{2}} \left(c_{x\uparrow}^\dagger c_{x\downarrow} b_x^\dagger + c_{x\downarrow}^\dagger c_{x\uparrow} b_x \right) \right] \quad (6.7)$$

où on a encore utilisé la notation $b_{(x,0)}^{(\dagger)} \equiv b_x^{(\dagger)}$. Le premier terme $J'S \sum_x s_x^z$ fournit au Hamiltonien H_{el} le champ d'échange nécessaire à l'obtention d'une phase topologique (cf. Chapitre 2) à la seule différence près que l'interaction d'échange qu'on avait noté J précédemment devient $J_{\text{eff}} = J'S/2$. On appelle ce nouveau Hamiltonien H'_0 . On introduit désormais les deux Hamiltoniens :

$$H_{\parallel} = -J' \sum_x b_x^\dagger b_x s_x^z, \quad H_{\perp} = J' \sqrt{\frac{S}{2}} \sum_x \left(c_{x\uparrow}^\dagger c_{x\downarrow} b_x^\dagger + c_{x\downarrow}^\dagger c_{x\uparrow} b_x \right) \quad (6.8)$$

Le Hamiltonien H_{\parallel} décrit la diminution locale du champ d'échange vu par un électron du fil due à la présence de magnons, la polarisation électronique jouant le rôle de potentiel chimique pour les magnons. De plus, H_{\perp} décrit la diffusion d'un électron sur un magnon, ce qui a pour effet de changer son spin. A ce stade, on remarque deux différences d'avec les cas déjà traités de couplage aux phonons ou aux photons d'une cavité (Mahan, 2000; Bruus et Flensberg, 2004; Dmytruk, 2016; Aseev et al., 2019). En effet, dans ces cas, l'interaction se produit dans le secteur de charge et s'écrit schématiquement $H_{\text{int}} = g c^\dagger c (b^\dagger + b)$ où g est la constante de couplage, les opérateurs c représentent des fermions et b des bosons (photon ou phonon). Il n'y a donc pas d'équivalent de H_{\parallel} et les degrés de libertés fermioniques internes ne sont pas affectés. En effet, étant donné que les magnons ferromagnétiques portent un spin ($|\Delta S_z| = 1$, Dyson (1956); Zhitomirsky et Chernyshev (2013); Timm (2015)), un fermion de spin donné ne peut pas à la fois émettre et absorber un magnon. En anticipant un peu sur la suite, le terme H_{\perp} donne lieu à une interaction effective entre électrons au second d'ordre en théorie de perturbation tandis que H_{\parallel} décrit une interaction directe entre électrons et magnons qui contribuera, elle aussi, au second ordre. Mais avant cela, on s'intéresse à la physique dans le sous-espace des excitations de Majorana.

6.3 Projection sur le secteur de basse énergie

A partir des Eqs. (6.1) et (6.8), on peut récrire le Hamiltonien total du système sous la forme :

$$H = H'_{\text{el}} + \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + H_{\parallel} + H_{\perp} \quad (6.9)$$

où H'_{el} est donné par :

$$H'_{\text{el}} = \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \left[-t c_{x+1\sigma}^\dagger c_{x\sigma} + (2t - \mu) c_{x\sigma}^\dagger c_{x\sigma} \right] + J_{\text{eff}} \left(c_{x\uparrow}^\dagger c_{x\uparrow} - c_{x\downarrow}^\dagger c_{x\downarrow} \right) + \alpha \left(c_{x+1\uparrow}^\dagger c_{x\downarrow} - c_{x+1\downarrow}^\dagger c_{x\uparrow} \right) + \Delta_0 c_{x\uparrow}^\dagger c_{x\downarrow}^\dagger + \text{h. c.} \quad (6.10)$$

où $J_{\text{eff}} = J'S/2$. De telle sorte qu'après diagonalisation, et à une constante globale près :

$$H'_{\text{el}} = \sum_{\substack{m \\ E_m \geq 0}} E_m \gamma_m^\dagger \gamma_m \quad (6.11)$$

où les γ_m sont les quasi-particules fermioniques de Bogoliubov et on classe les énergie par ordre croissant $E_{m+1} > E_m$. Dans le cas où ce Hamiltonien est topologique, il existe une quasi-particule non-locale d'énergie $E_0 \approx 0$ séparée des autres par un gap $\Delta_{\text{eff}} = E_1 - E_0 \approx E_1$. En paramétrant les états propres d'énergie positive comme $\varphi_m(x) = (u_{m\uparrow}(x), u_{m\downarrow}(x), v_{m\downarrow}(x), v_{m\uparrow}(x))^T$, la transformation de Bogoliubov qui diagonalise H'_{el} s'écrit :

$$c_{x\sigma} = \sum_{\substack{m \\ E_m \geq 0}} u_{m\sigma}(x) \gamma_m - \sigma v_{m\sigma}^*(x) \gamma_m^\dagger \quad (6.12)$$

où on utilise la notation $\sigma = +$ pour un spin up (\uparrow) et $\sigma = -$ pour un spin down (\downarrow). En introduisant le projecteur sur le secteur d'énergie de basse énergie \mathcal{P}_0 , la projection s'écrit simplement :

$$\mathcal{P}_0 c_{x\sigma} \mathcal{P}_0 = u_{0\sigma}(x) \gamma_0 - \sigma v_{0\sigma}^*(x) \gamma_0^\dagger \quad (6.13)$$

où $\gamma_0^\dagger = (\gamma_L + i\gamma_R)/\sqrt{2}$ est l'opérateur de création associé au fermion non-local composé des deux états liés de Majorana décrits par les opérateurs $\gamma_{L/R} = \gamma_{L/R}^\dagger$. La définition de γ_0^\dagger en terme de $\gamma_{L/R}$ implique que la fonction d'onde se décompose comme $u/v_{0\sigma} = (u/v_{L\sigma} + iu/v_{R\sigma})/\sqrt{2}$. La projection de H_{\parallel} donne :

$$\mathcal{P}_0 H_{\parallel} \mathcal{P}_0 = -\frac{J'}{2} \sum_x A(x) \left(\gamma_0^\dagger \gamma_0 - \frac{1}{2} \right) b_x^\dagger b_x \quad (6.14)$$

où $A(x) = i \langle L | \sigma_z \mathcal{P}_x | R \rangle = i(-u_{R\uparrow}(x)v_{L\uparrow}(x) + u_{L\downarrow}(x)v_{R\downarrow}(x) + u_{L\uparrow}(x)v_{R\uparrow}(x) - u_{R\downarrow}(x)v_{L\downarrow}(x))$ et $\mathcal{P}_x = |x\rangle\langle x|$ le projecteur sur le site x . Pour obtenir ce résultat, on a symétrisé les opérateurs électroniques initiaux en utilisant l'astuce Bogoliubov-de Gennes et on a utilisé la condition de Majorana $\mathcal{C}\varphi_{L/R}(x) = \varphi_{L/R}(x)$ avec $\mathcal{C} = \sigma_y \tau_y \mathcal{K}$ comme vu au Chapitre 2, paragraphe 2.1.2. De même on obtient pour H_{\perp} :

$$\mathcal{P}_0 H_{\perp} \mathcal{P}_0 = J' \sqrt{\frac{S}{2}} \sum_x \left(B(x) b_x + B^*(x) b_x^\dagger \right) \left(\gamma_0^\dagger \gamma_0 - \frac{1}{2} \right) \quad (6.15)$$

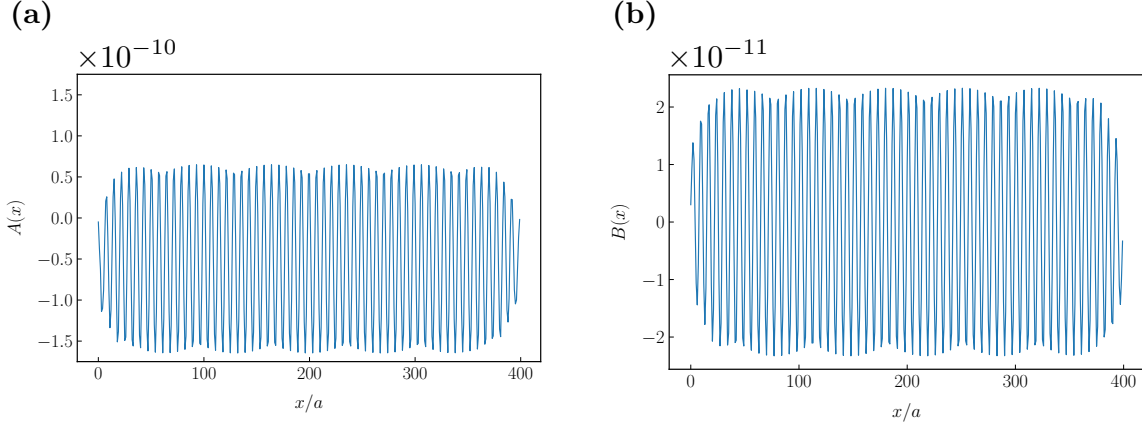


FIGURE 6.3 – (a) la fonction $A(x)$ et (b) la fonction $B(x)$ pour un fil Rashba de paramètres $L/a = 400$, $\mu/t = 0.0$, $\Delta_0/t = 0.1$, $J'S/(2t) = 0.2$ et de couplage spin-orbite $\alpha/t = 0.09$.

où $B(x) = i \langle L | \sigma_- \mathcal{P}_x | R \rangle / 2 = i(u_{R\uparrow}(x)v_{L\downarrow}(x) - u_{L\uparrow}(x)v_{R\downarrow}(x))$. On s'attend à ce que les fonctions $A(x)$ et $B(x)$ soient exponentiellement faibles car exprimées en terme du produit des deux états liés de Majorana (Jiang et al., 2011), ce qu'on vérifie Fig. 6.3.

Comme on s'y attend, les deux quantités sont très proches de zéro mais on remarque qu'à la différence de $B(x)$, $A(x)$ a une valeur moyenne non-nulle.

Dans l'esprit d'une théorie de perturbation au premier ordre, on cherche à calculer la valeur moyenne $\langle \bullet \rangle_0$ par rapport au Hamiltonien $H_0 = H'_{\text{el}} + \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}$ des opérateurs H_{\parallel} et H_{\perp} projetés. Comme les degrés de libertés électroniques et magnoniques sont découplés dans ce Hamiltonien, la valeur moyenne se factorise de telle sorte que :

$$\langle A_{\text{el}} B_{\text{mag}} \rangle_0 = \langle A_{\text{el}} \rangle_{0,\text{el}} \langle B_{\text{mag}} \rangle_{0,\text{mag}} \quad (6.16)$$

où A_{el} (resp. B_{mag}) est un opérateur agissant dans le secteur électronique (resp. magnonique). Ainsi, la valeur moyenne des Hamiltoniens H_{\parallel} et H_{\perp} projetés s'écrit :

$$\langle \mathcal{P}_0 H_{\parallel} \mathcal{P}_0 \rangle = -\frac{J'}{2} \left(n_M - \frac{1}{2} \right) \left(\sum_x A(x) \right) \left(\frac{1}{N_{\text{mag}}} \sum_{\mathbf{k}} n_B(\beta, \omega_{\mathbf{k}}) \right), \quad \langle \mathcal{P}_0 H_{\perp} \mathcal{P}_0 \rangle = 0 \quad (6.17)$$

En effet, on suppose ici que les magnons ne sont pas dans un état condensé si bien que $\langle b_{\mathbf{k}}^{(\dagger)} \rangle = 0$ (Giamarchi et al., 2008; Zapf et al., 2014; Duine et al., 2017). Dans l'Eq. (6.17), on a noté $n_M = \langle \gamma_0^\dagger \gamma_0 \rangle_{0,\text{el}}$ et $\langle b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \rangle_{0,\text{mag}} = n_B(\beta, \omega_{\mathbf{k}}) = (\exp(\beta \omega_{\mathbf{k}}) - 1)^{-1}$ où $n_B(\beta, \omega_{\mathbf{k}})$ est la distribution de Bose-Einstein à la température inverse $\beta = (k_B T)^{-1}$ avec T la température et k_B la constante de Boltzmann. Ainsi, comme $\langle \mathcal{P}_0 H_{\parallel} \mathcal{P}_0 \rangle \neq 0$, il existe une faible levée de dégénérescence des états de Majorana proportionnelle à la valeur moyenne de $A(x)$ (dont on

s'attend à ce qu'elle diminue avec la taille du système, ce qu'on vérifie numériquement) et au nombre de magnons dans le système. Ce résultat est valable dans le régime de températures $k_B T \ll \Delta_{\text{eff}}$. Par ailleurs, il est possible d'estimer analytiquement $\sum_{\mathbf{k}} n_B(\beta, \omega_{\mathbf{k}})$ pour certains cas limites comme on le montre dans maintenant.

Même si on a modélisé le problème de telle sorte que le fil Rashba et le substrat ferromagnétique aient la même structure cristalline et la même constante de maille, on peut analyser ce qu'il se passe dans une approximation de basse énergie pour les magnons. En effet, on se place désormais en dimension d et on note $N^{(d)} = \sum_{\mathbf{k} \in \text{Z. B.}} n_B(\beta, \omega_{\mathbf{k}})$ le nombre de bosons et on prend la dispersion de particules libres gappées par le champ h_z qui s'écrit $\omega(\mathbf{k}) = \hbar^2 \mathbf{k}^2 / (2m) + h_z$, ce qui donne la densité d'état $\rho(\omega) = A_d (\omega - h_z)^{d/2-1} H(\omega - h_z)$ pour les modes magnoniques où $H(x)$ est la distribution de Heaviside et A_d une constante. On a alors :

$$N^{(d)} \approx \int_0^{+\infty} d\omega \rho(\omega) n_B(\beta, \omega) = A_d \int_0^{+\infty} d\omega \frac{(\omega - h_z)^{d/2-1}}{e^{\beta\omega} - 1} H(\omega - h_z) \quad (6.18)$$

Avec des méthodes de calcul standard on obtient le résultat général :

$$N^{(d)} = A_d (k_B T)^{\frac{d}{2}} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \text{Li}_{\frac{d}{2}}\left(e^{-\beta h_z}\right) \quad (6.19)$$

où $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ ($\text{Re}(x) > 0$) est la fonction Gamma (voir [DLMF, Eq. 5.2.1](#)) et $\text{Li}_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n / n^s$ est un polylogarithme « bosonique » souvent noté $g_s(z)$ (voir [DLMF, Eq. 25.12.10](#)). Ce résultat est présenté Fig. 6.4(a). On peut aussi se demander ce qu'il se produit si on prend

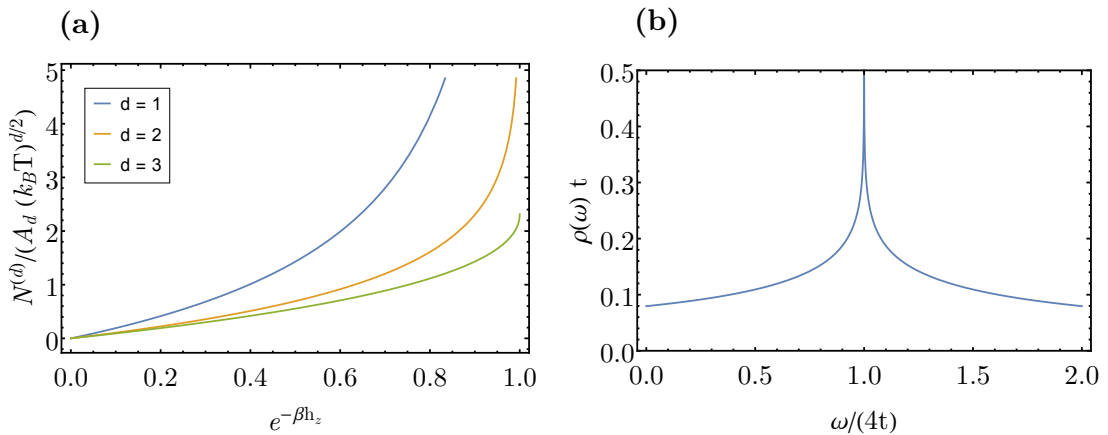


FIGURE 6.4 – (a) Nombre de bosons en dimensions 1, 2 et 3 en fonction du champ magnétique $h_z \geq 0$ à température fixée. (b) Densité d'état pour un modèle liaisons fortes sur le réseau carré où on a noté t l'intégrale de saut.

la limite continue du système magnétique en gardant toute la largeur de bande. Dans ce cas, la

densité d'état est (Montroll, 1947; Montambaux, 2016) :

$$\rho(\omega) = \frac{1}{2\pi^2 t} K \left(\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{4t}\right)^2} \right) \quad (6.20)$$

où $t = 2|J|S$ dans notre cas et $K(k)$ est l'intégrale elliptique complète de première espèce (voir DLMF, Eq. 19.2.4 et 19.2.8) :

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\alpha)}} \quad (6.21)$$

Cette quantité est tracée Fig. 6.4(b) et qui montre la seule différence essentielle d'avec l'approximation de basse énergie : la présence de la singularité de van Hove due au point selle en milieu de bande. Ainsi, dans la plage de températures analysée ici, la singularité de van Hove ne joue aucun rôle.

Quoi qu'il en soit, cette première approche illustre, comme on s'y attendait, que le couplage direct entre les deux états liés de Majorana par des magnons thermiques est faible mais quantifiable.

6.4 Théorie de perturbations au second ordre

Interaction dans la base des quasi-particules Pour aller plus loin, il est possible que les Majorana se couplent après que les magnons aient excité une quasi-particule de Bogoliubov au-dessus du gap. Ce type de processus est décrit par une théorie de perturbation au second ordre. Comme précédemment, on réécrit les interactions en termes des quasi-particules avec la transformation de Bogoliubov Eq. (6.12). On obtient :

$$H_{\parallel} = -\frac{J'}{2} \sum_{\substack{x,m,m' \\ E_m, E_{m'} \geq 0}} \left\{ A_{mm'}(x) \gamma_m^\dagger \gamma_{m'} + B_{mm'}(x) \gamma_m^\dagger \gamma_{m'}^\dagger + B_{m'm}^*(x) \gamma_m \gamma_{m'} \right. \\ \left. + K_{mm'}(x) \delta_{mm'} \right\} b_x^\dagger b_x \quad (6.22)$$

où on a défini les coefficients $A_{mm'}(x)$, $B_{mm'}(x)$ et $K_{mm'}(x)$ comme :

$$\begin{cases} A_{mm'}(x) &= u_{m\uparrow}^* u_{m'\uparrow} - v_{m\uparrow}^* v_{m'\uparrow} - u_{m\downarrow}^* u_{m'\downarrow} + v_{m\downarrow}^* v_{m'\downarrow} \\ B_{mm'}(x) &= \frac{1}{2} \left(-u_{m\uparrow}^* v_{m'\uparrow} + v_{m\uparrow}^* u_{m'\uparrow} - u_{m\downarrow}^* v_{m'\downarrow} + v_{m\downarrow}^* u_{m'\downarrow} \right) \\ K_{mm'}(x) &= \frac{1}{2} \left(v_{m\uparrow} v_{m'\uparrow}^* - u_{m\uparrow} u_{m'\uparrow}^* - v_{m\downarrow} v_{m'\downarrow}^* + u_{m\downarrow} u_{m'\downarrow}^* \right) \end{cases} \quad (6.23)$$

où on a omis la dépendance en x du membre de droite. De même pour H_{\perp} , on obtient :

$$\begin{aligned}
 H_{\perp} = J' \sqrt{\frac{S}{2}} \sum_{\substack{x, m, m' \\ E_m, E_{m'} \geq 0}} \left\{ \left[C_{mm'}(x) \gamma_m^{\dagger} \gamma_{m'} + D_{mm'}(x) \gamma_m^{\dagger} \gamma_{m'}^{\dagger} + E_{mm'}(x) \gamma_m \gamma_{m'} \right] b_x^{\dagger} \right. \\
 \left. + \left[C_{m'm}^*(x) \gamma_m^{\dagger} \gamma_{m'} + E_{m'm}^*(x) \gamma_m^{\dagger} \gamma_{m'}^{\dagger} + D_{m'm}^*(x) \gamma_m \gamma_{m'} \right] b_x \right. \\
 \left. + F_{mm'}(x) \delta_{mm'} b_x^{\dagger} + F_{m'm}^*(x) \delta_{mm'} b_x \right\}
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

avec les coefficients $C_{mm'}(x)$, $D_{mm'}(x)$, $E_{mm'}(x)$, et $F_{mm'}(x)$:

$$\begin{cases}
 C_{mm'}(x) &= u_{m\uparrow}^* u_{m'\downarrow} + v_{m\downarrow}^* v_{m'\uparrow} \\
 D_{mm'}(x) &= \frac{1}{2} \left(u_{m\uparrow}^* v_{m'\downarrow}^* - v_{m\downarrow}^* u_{m'\uparrow}^* \right) \\
 E_{mm'}(x) &= \frac{1}{2} \left(-v_{m\uparrow} u_{m'\downarrow} + u_{m\downarrow} v_{m'\uparrow} \right) \\
 F_{mm'}(x) &= \frac{1}{2} \left(-v_{m\uparrow} v_{m'\downarrow}^* - u_{m\downarrow} u_{m'\uparrow}^* \right)
 \end{cases} \tag{6.25}$$

Mise en place de la théorie de perturbations Dans le cadre de la théorie de perturbation à température finie, l'objet central est la fonction de Green de Matsubara $G_{\alpha\beta}(\tau - \tau') = -\langle T_{\tau} c_{\alpha}(\tau) c_{\beta}^{\dagger}(\tau') \rangle$ où τ est le temps imaginaire, T_{τ} l'opérateur qui ordonne les temps imaginaires, les opérateurs sont écrits dans la représentation de Heisenberg $c_{\alpha}(\tau) = e^{\tau H} c_{\alpha} e^{-\tau H}$ et α, β sont des indices non spécifiés pour le moment. En écrivant le Hamiltonien total H comme $H = H_0 + V$ avec, comme précédemment, $H_0 = H_{\text{el}} + \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^{\dagger} b_{\mathbf{k}}$ et $V = H_{\parallel} + H_{\perp}$, on obtient le développement perturbatif (Mahan, 2000; Bruus et Flensberg, 2004) :

$$G_{\alpha\beta}(\tau - \tau') = \frac{-\langle T_{\tau} \hat{c}_{\alpha}(\tau) \hat{c}_{\beta}^{\dagger}(\tau') e^{-\int_0^{\beta} du \hat{V}(u)} \rangle_0}{\langle T_{\tau} e^{-\int_0^{\beta} du \hat{V}(u)} \rangle_0} = -\langle T_{\tau} \hat{c}_{\alpha}(\tau) \hat{c}_{\beta}^{\dagger}(\tau') e^{-\int_0^{\beta} du \hat{V}(u)} \rangle_{0, \text{conn.}} \tag{6.26}$$

où les opérateurs sont désormais en représentation d'interaction $\hat{c}_{\alpha}(\tau) = e^{\tau H_0} c_{\alpha} e^{-\tau H_0}$ et la valeur moyenne $\langle \bullet \rangle_0$ est prise sur le Hamiltonien non perturbé H_0 , ce qui permet de découpler les traces sur les degrés de libertés fermioniques et magnoniques. Le « conn. » signifie que l'on ne garde que les diagrammes connectés dans le développement. Par ailleurs, on resomme partiellement le développement perturbatif en utilisant l'équation de Dyson matricielle en termes des fréquences de Matsubara fermioniques $\omega_n = (2n + 1)\pi/\beta$, $n \in \mathbb{Z}$, qui s'écrit :

$$G(i\omega_n) = \left(\left(G^{(0)}(i\omega_n) \right)^{-1} - \Sigma(i\omega_n) \right)^{-1} \tag{6.27}$$

en limitant le développement de la « self-énergie » Σ au second ordre et on a noté la fonction de Green non perturbée $G^{(0)}$. On a défini :

$$G(i\omega_n) = \int_0^\beta d\tau G(\tau) e^{i\omega_n \tau} \quad (6.28)$$

Dans le cas qui nous intéresse ici, la fonction de Green qu'on souhaite calculer du fermion non-local $G(\tau - \tau') = -\langle T_\tau \gamma_0(\tau) \gamma_0^\dagger(\tau') \rangle$. Plus particulièrement, on cherche à calculer la partie réelle de Σ qui correspond à un décalage en énergie et sa partie imaginaire qui correspond à l'inverse d'un temps de vie. On introduit les constantes de couplage $J_\parallel = -J'/2$ et $J_\perp = J' \sqrt{S/2}$. Au premier ordre, seul H_\parallel contribue un terme $\mathcal{O}(J_\parallel)$, sur des bases analogues à celles développées dans le paragraphe précédent. Au second ordre, H_\parallel et H_\perp contribuent des termes $\mathcal{O}(J_\parallel^2)$ et $\mathcal{O}(J_\perp^2)$, respectivement. De plus, les termes $\mathcal{O}(J_\parallel J_\perp)$ ne contribuent pas puisque faisant intervenir un nombre impair d'opérateurs de magnons. Dans un premier temps, on se focalise sur la contribution H_\perp avant d'analyser celle de H_\parallel .

Interactions effectives générées par H_\perp Le Hamiltonien H_\perp étant linéaire en magnons, il induit une interaction effective retardée au second ordre. Au vu de l'Eq. (6.24), il existe trois vertex d'interaction résumés Fig. 6.5 qui font intervenir le propagateur magnonique $\mathcal{B}^{(0)}(\tau - \tau', \mathbf{r} - \mathbf{r}')$:

$$\mathcal{B}^{(0)}(\tau - \tau', \mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\langle T_\tau b_{\mathbf{r}}(\tau) b_{\mathbf{r}'}^\dagger(\tau') \rangle_0 \quad (6.29)$$

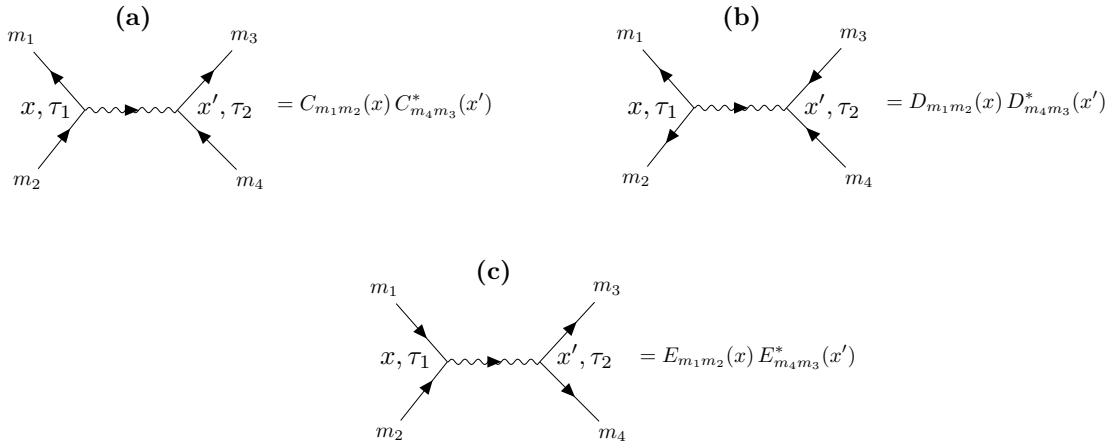


FIGURE 6.5 – Interactions effectives générés par H_\perp à l'ordre 2. Les lignes continues représentent les fermions et les lignes ondulées les magnons. Tous les diagrammes doivent être multipliés par le propagateur magnonique $\mathcal{B}^{(0)}(\tau_2 - \tau_1, x' - x)$. Les diagrammes représentés en (a), (b) et (c) seront appelés diagrammes de type C , D et E , respectivement, d'après les coefficients qu'ils font intervenir.

À cet ordre, les diagrammes qui peuvent contribuer à la self-énergie sont des termes de Fock ou de Hartree dont la topologie est présentée Fig. 6.6. On observe ainsi qu'en principe, les trois

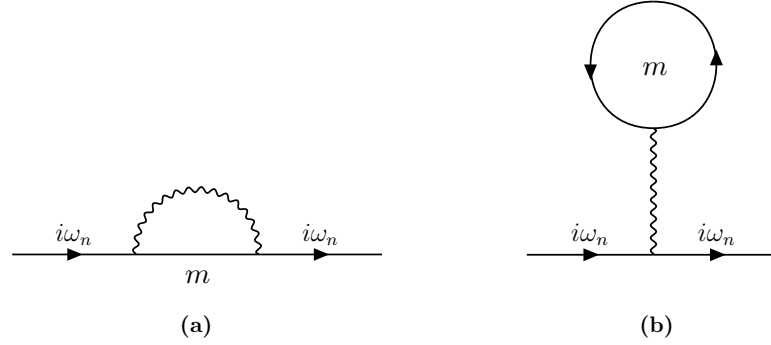


FIGURE 6.6 – Topologie des diagrammes de Fock (a) et de Hartree (b) qui contribuent à la fonction de Green $G(i\omega_n)$ au second ordre. On omet la structure interne par souci de simplicité.

vertex C , D et E définis Fig. 6.5 contribuent aux termes de Fock alors que seul le vertex de type C contribue un terme de Hartree. Cette étude étant toujours en cours, seuls les résultats du vertex de type C sont présentés étant entendu que les vertex D et E contribuent au résultat final.

Dans l'espace des fréquences et des vecteurs d'onde, le propagateur magnonique non perturbé $\mathcal{B}^{(0)}(i\nu, \mathbf{q}) = (i\nu - \omega_{\mathbf{q}})^{-1}$ et celui des quasi-particules de Bogoliubov d'énergie E_m a pour expression $G_m^{(0)}(i\omega_n) = (i\omega_n - E_m)^{-1}$ où ν et ω_n sont des fréquences de Matsubara bosonique et fermionique, respectivement. Avec ces ingrédients, le vertex de type C contribue deux contractions au terme de Fock qui s'écrivent après des calculs standards dans le formalisme de Matsubara :

$$\begin{aligned} \Sigma_F^{(2)}(i\omega_n) = \frac{J_{\perp}^2}{N_{\text{mag}}} \sum_{\substack{m \\ 0 \leq E_m \leq E_c}} \sum_{x, x'} \sum_{\mathbf{q}} e^{iq_x(x'-x)} \left[C_{0m}(x) C_{0m}^*(x') \frac{n_B(\omega_{\mathbf{q}}) + n_F(E_m)}{i\omega_n + \omega_{\mathbf{q}} - E_m} \right. \\ \left. + C_{m0}(x) C_{m0}^*(x') \frac{n_B(\omega_{\mathbf{q}}) + 1 - n_F(E_m)}{i\omega_n - \omega_{\mathbf{q}} - E_m} \right] \end{aligned} \quad (6.30)$$

où on a introduit une coupure en énergie E_c qui reste à motiver physiquement, n_F est la distribution de Fermi-Dirac et n_B celle de Bose-Einstein et on omet la dépendance en β de ces dernières. De même, le vertex de type C contribue deux contractions au terme de Hartree qui s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \Sigma_H^{(2)} = -\frac{J_{\perp}^2}{N_{\text{mag}}} \sum_{\substack{m \\ 0 \leq E_m \leq E_c}} \sum_{x, x'} \sum_{\mathbf{q}} e^{iq_x(x'-x)} \frac{n_F(E_m)}{\omega_{\mathbf{q}}} [C_{00}(x) C_{mm}^*(x') \\ + C_{mm}(x) C_{00}^*(x')] \end{aligned} \quad (6.31)$$

On remarque que ce terme est indépendant de la fréquence $i\omega_n$ et constitue ainsi une renormalisation globale. L'objectif premier de cette étude préliminaire étant d'analyser le comportement

de la partie imaginaire de la self-énergie en fonction de la température, on négligera le terme de Hartree en première analyse. Pour terminer, les termes F de l'Eq. (6.25) linéaires en magnons et ne faisant pas intervenir de quasi-particules de Bogoliubov produisent des diagrammes déconnectés qui ne contribuent donc pas à la self-énergie.

Diagrammes générés par H_{\parallel} Quant à lui, le Hamiltonien H_{\parallel} décrit une interaction électron-magnons instantanée, qui, dans la base des quasi-particules de Bogoliubov donne lieu aux deux vertex donnés Eq. (6.22) et représentés Fig. 6.7 (a) et (b). Au premier ordre en J_{\parallel} , la seule

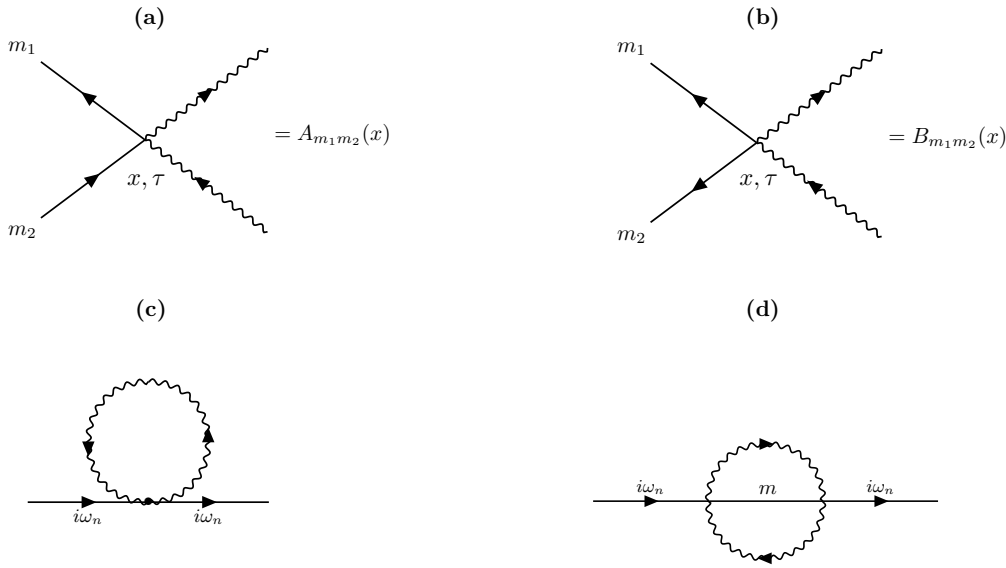


FIGURE 6.7 – (a) et (b) représentent les vertex d'interaction induit par H_{\parallel} . (c) et (d) illustrent la topologie des diagrammes contribuant à la fonction de Green au premier et second ordre respectivement.

contribution est présentée Fig. 6.7 (c) et correspond à la quantité calculée Eq. (6.17). Au second ordre, les diagrammes qui contribuent ont la topologie présentées Fig. 6.7 (d). De la même manière que pour H_{\perp} , on se focalise sur la contribution de type A même si celle de type B est à prendre en compte. Cette contribution s'écrit :

$$\Sigma_A^{(2)}(i\omega_n) = \frac{J_{\parallel}^2}{N_{\text{mag}}^2} \sum_{0 \leq E_m \leq E_c}^m \sum_{x, x'} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} e^{iq_x(x'-x)} e^{iq'_x(x-x')} A_{m0}(x) A_{m0}^*(x') \left[n_B(\omega_{\mathbf{q}}) + 1 - n_F(E_m) \right] \left(\frac{n_B(\omega_{\mathbf{q}'}) + n_F(E_m + \omega_{\mathbf{q}})}{i\omega_n - E_m + \omega_{\mathbf{q}'} - \omega_{\mathbf{q}}} \right) \quad (6.32)$$

De même, les termes proportionnels à K produisent des diagrammes déconnectés car ne faisant pas intervenir d'opérateur de quasi-particule.

Dans l'approche détaillée ici, on a $|J_{\perp}/J_{\parallel}| \sim \sqrt{S}$ ce qui suggère de négliger dans un premier temps la contribution de J_{\parallel} . Les résultats présentés dans le paragraphe suivant suivent cette approche.

Résultats numériques On présente ici les résultats du calcul numérique de l'Eq. (6.30) après la continuation analytique $i\omega_n \rightarrow \omega + i\eta$. Dans tout ce paragraphe, les paramètres du fil Rashba dans la phase topologique sont $L/a = 100$, $J_{\text{eff}}/t = 0.2$, $\Delta_0/t = 0.1$, $\mu = 0$ et $\alpha/(t) = 0.3$. Avec les valeurs choisies, le gap effectif Δ_{eff} est de l'ordre de $0.9\Delta_0$. Concernant les magnons, on ne considère que les modes longitudinaux afin de diminuer le temps de calcul, ce qui revient, en somme, à considérer un simple fil magnétique. Par ailleurs, on prend une valeur du nombre de sites magnétiques de 100 auquel on impose des questions périodiques afin d'éviter un temps de calcul trop élevé. Ce nombre de sites magnétiques contrôle ainsi la discrétisation des modes magnoniques. De plus, on prend $h_z/t = 10^{-3}$ pour gapper légèrement les magnons et on suppose que leur paramètre de saut $t_m = 2|J|S$ est identique à celui des électrons t . Enfin, la faible taille du fil électronique permet de prendre en compte tous les états excités si bien qu'il n'est pas nécessaire de choisir une énergie de coupure E_c et donc, de s'interroger sur son origine. Ces choix consistent en de petites idéalizations mais l'utilisation de paramètres plus réalistes n'est qu'un souci de temps de calcul et n'introduit pas de nouvelle difficulté.

Les résultats pour la self-énergie $\tilde{\Sigma} = \Sigma \Delta_0/J_{\perp}^2$ à la température $k_B T = \Delta_0/100$ sont présentés Fig. 6.8. Ces résultats sont intrigant dans le sens où on constate un écart de 6 ordres

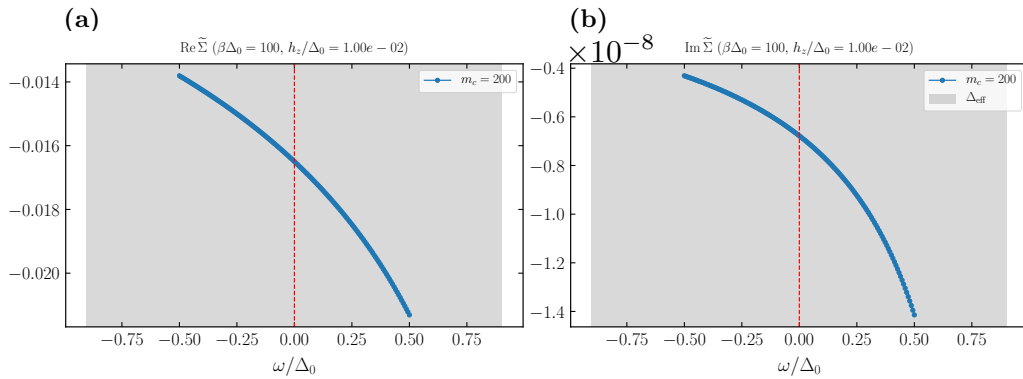


FIGURE 6.8 – Self-énergie de Fock donnée par l'Eq. (6.30) pour une température de $k_B T = \Delta_0/100$. (a) Partie réelle et (b) partie imaginaire. Les lignes pointillées rouges indiquent l'énergie non perturbée du fermion non local. Pour la continuation analytique, on a pris $\eta/\Delta_0 = 10^{-6}$.

de grandeur entre la partie réelle et la partie imaginaire qui n'était pas présent dans le cas étudié par [Aseev et al. \(2019\)](#). De plus, cela signifie qu'au second ordre du développement perturbatif, l'excitation de Majorana ne résiste pas au couplage avec les magnons, contrairement aux résultats obtenus au premier ordre.

Avec ces résultats, on peut désormais s'intéresser à l'évolution de la partie imaginaire, qui n'est rien d'autre que l'inverse d'un temps de vie, avec la température afin de tester la théorie de McGinley et Cooper (McGinley et Cooper, 2020). Pour les phases topologiques protégées par une symétrie antiunitaire (renversement du temps, particule-trou), les auteurs prédisent un comportement algébrique en température du temps de vie des excitations « topologiques » et non exponentiel comme identifié par (Aseev et al., 2019) par exemple. À ce titre, le cas du fil 1D qu'on étudie ici est particulier et rentre complètement dans le cadre de McGinley et Cooper car, malgré la présence d'un ordre magnétique, il existe une symétrie par renversement du temps émergente, comme on l'a mentionné au Chapitre 2 (Tewari et Sau, 2012). Il est néanmoins nécessaire de mentionner que McGinley et Cooper ne prennent pas en compte la non-localité du qubit de Majorana et que Aseev et al. (2019) ont obtenu des comportements exponentiels en $\exp(-\beta\Delta_0)$ dans le régime où la longueur du fil Rashba est très supérieure à la longueur de cohérence du supraconducteur. Ainsi, il est légitime de se questionner sur la hiérarchie des différentes échelles de longueur et de son influence sur le comportement du temps de vie de l'excitation « topologique ».

En pratique, on trace l'évolution de la partie imaginaire de la self-énergie à $\omega = 0$ pour des températures comprises entre $\Delta_0/100$ et $\Delta_0/20$. En effet, la Fig. 6.8 montre que la partie imaginaire mesurée à l'énergie renormalisée de l'excitation (qui, elle, est donnée par la partie réelle de Σ) ne diffère que peu de celle qu'on rapporte ici. La figure Fig. 6.9 présente ces résultats.

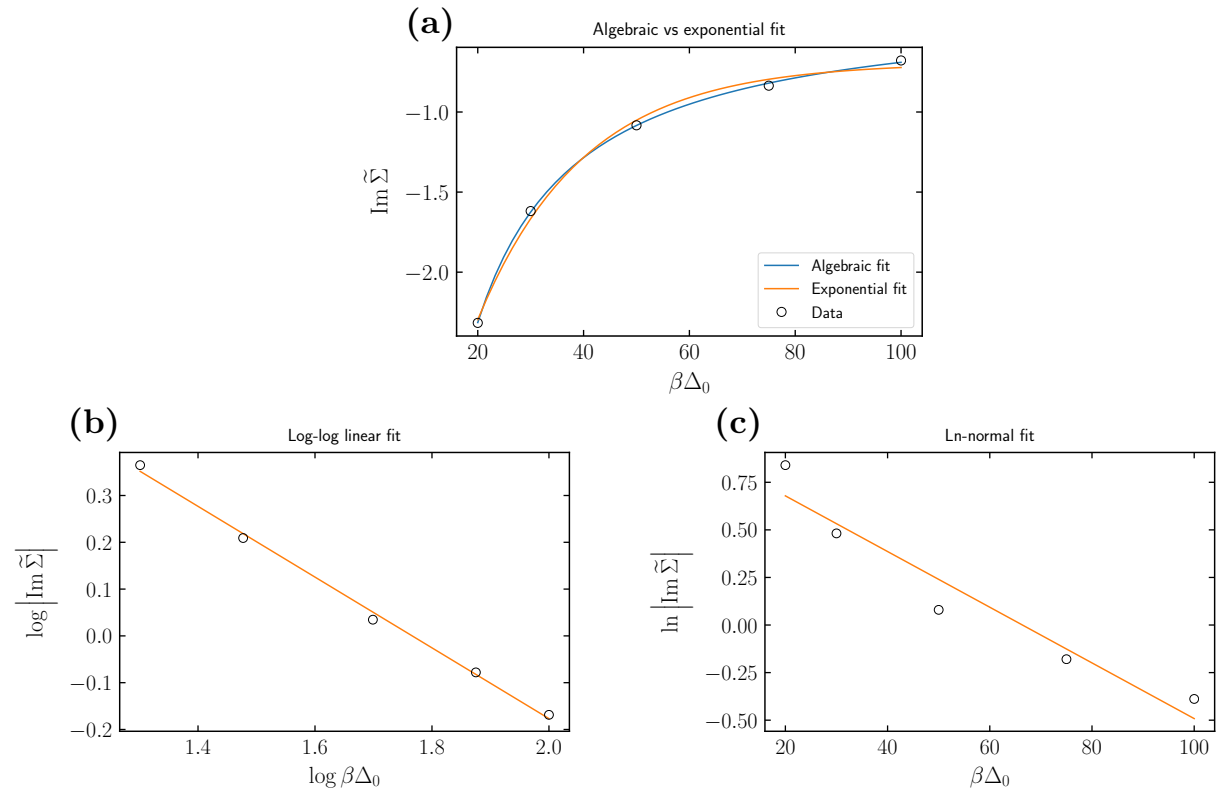


FIGURE 6.9 – Évolution de la partie imaginaire de la self-énergie $\tilde{\Sigma}$ de Fock (multipliée par 10^8) en fonction de la température et différentes tentatives d’ajustement. (a) Données numériques (cercles) et comparaison des ajustements exponentiel et algébrique. (b) Tracé log-log de la valeur absolue de la partie imaginaire et (c) tracé du \ln de cette même quantité en fonction de $\beta\Delta_0$. Les formes exactes des fonctions d’ajustement ainsi que les valeurs numériques des paramètres sont données dans le texte principal.

La figure Fig. 6.9(a) montre les données numériques brutes et deux tentatives d’ajustement, un algébrique avec une fonction $f(x) = ax^b + c$ (courbe bleue) et l’autre exponentiel avec la fonction $g(x) = ae^{-bx} + c$ (courbe orange). Même si l’ajustement algébrique semble plus convaincant, il est difficile d’écarter la possibilité d’un comportement exponentiel. La puissance b de $f(x)$ issue de l’ajustement algébrique a la valeur $b = -1.0478 \pm 0.0556$. Afin de discriminer entre ces deux formes fonctionnelles, on trace la valeur absolue de $\text{Im } \tilde{\Sigma}$ en log-log et ln-normal respectivement en figure Fig. 6.9(b) et (c). Clairement, l’ajustement par la fonction $ax + b$ est plus convaincant dans le cas algébrique (Fig. 6.9(b)) avec une pente $a = -0.7560 \pm 0.0250$ que dans le cas exponentiel (Fig. 6.9(c)). Cette valeur bien que du même ordre de grandeur que celle trouvée par ajustement direct, n’est pas compatible avec la valeur précédente de -1.0478 ± 0.0556 . Ces résultats indiquent donc qu’un comportement algébrique est plus probable qu’un comportement exponentiel même si des analyses plus poussées sont nécessaires.

6.5 Conclusion et perspectives

Dans cette partie, on a présenté les motivations, la mise en place et les premiers résultats de l'analyse de l'influence des magnons sur les états de Majorana d'un fil topologique dans le cadre de la théorie linéaire des ondes de spin. Même s'il reste encore beaucoup à faire et que de nombreuses questions émergent de ce traitement, on a pu donner quelques éléments pointant vers un comportement algébrique du temps de vie des excitations topologiques, ce qui semble être en accord avec la théorie de [McGinley et Cooper \(2020\)](#), sans toutefois pouvoir donner une valeur précise à l'exposant. Néanmoins, il reste à incorporer les diagrammes de FOck de type D et E , la contribution de la perturbation H_{\parallel} ainsi que le terme de Hartree, souvent négligé, généré par H_{\perp} pour consolider ce résultat et analyser pourquoi la partie réelle de la self-énergie est si grande comparée à la partie imaginaire. Si l'existence d'un décalage en fréquence si grand est confirmée, alors il est clair que l'excitation de Majorana ne survit pas au couplage aux magnons ce qui constitue un inconvénient majeur pour les systèmes reposant sur un couplage spin-orbite induit par une texture magnétique.

En guise de perspective, il est toujours intéressant de calculer les propriétés renormalisées des bosons médiant les interactions, ici les magnons, car il se peut que les propriétés topologiques du système électronique se reflètent dans ceux-ci.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans cette thèse, on s'est donc intéressé à différents aspects de systèmes composés d'une texture magnétique d'une part et d'un supraconducteur conventionnel d'autre part. Un des moteurs de cette recherche réside en la possibilité d'obtenir une phase supraconductrice topologique, aujourd'hui activement recherchée car synonyme de l'existence d'excitations de Majorana. L'approche présentée ici repose sur l'équivalence, du point de vue des électrons du supraconducteur, entre un problème avec une texture magnétique inhomogène sans couplage spin-orbite avec un problème où l'ordre magnétique est uniforme mais en présence de couplage spin-orbite. Si cette approche est bien connue en une dimension, le cas bidimensionnel considéré ici apporte de nouvelles possibilités. En particulier, on s'est attaché à analyser une des textures les plus prometteuses en spintronique : le skyrmion magnétique. En suivant d'autres travaux sur cette hétérostructure, on a pu confirmer la possibilité de générer une phase topologique tout en affinant la compréhension de ses caractéristiques. De plus, on a pu quantifier la robustesse de celle-ci quant à certaines déformations géométriques et donner quelques pistes réalistes pour des réalisations expérimentales même si le chemin à parcourir est encore long.

On a tenté d'aborder la question des effets orbitaux générés par le skyrmion dans un supraconducteur conventionnel sans couplage spin-orbite. En effet, toute texture magnétique génère un champ magnétique qui peut se coupler, par effet Zeeman et par couplage minimal au potentiel vecteur, aux électrons du supraconducteur. Ces effets s'ajoutent à l'interaction d'échange directe entre les moments magnétiques des deux matériaux considérés et leur effet n'est pour le moment pas clair. Même si on a confirmé la stabilité de la phase topologique à la présence du potentiel vecteur généré par le skyrmion, calculé en approximant ce dernier par des boucles de courant, dans un film supraconducteur infiniment fin, la question initiale des conditions de nucléation d'un vortex supraconducteur est restée sans réponse.

Enfin, on a considéré l'effet des excitations magnétiques, ici des magnons, sur la phase topologique dans le cas unidimensionnel. En effet, à la lumière de travaux récents sur le couplage de tels systèmes à des photons micro-onde ou à des phonons, on s'attend à plusieurs effets dont la levée de dégénérescence du fondamental et la possibilité de détecter, voire contrôler, la phase topologique en observant et manipulant les magnons. Même s'il reste de nombreuses problématiques à analyser, en se focalisant sur le temps de vie des « excitations topologiques », on a pu suggérer un comportement algébrique de cette quantité ce qui ouvre des perspectives intéressantes en regard d'une nouvelle théorie relativement générale sur les phases topologiques protégées par une symétrie antiunitaire.



DIAGONALISATION DU MODÈLE RASHBA

Cette annexe a pour but de donner quelques résultats sur la diagonalisation du modèle Rashba présenté en Section 2.3. Comme précédemment, on s'intéresse à un gaz d'électron bidimensionnel sous champ magnétique et on néglige les effets orbitaux. On s'inspire ici fortement de [Alicea \(2010\)](#).

Dans l'espace réel, le Hamiltonien s'écrit :

$$H_0 = \int d\mathbf{r} \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu - i\alpha(\sigma_x \partial_y - \sigma_y \partial_x) + V_z \sigma_z \right] \Psi(\mathbf{r}) \quad (\text{A.1})$$

where $\Psi(\mathbf{r}) = (\psi_\uparrow(\mathbf{r}), \psi_\downarrow(\mathbf{r}))^T$.

Après une transformée de Fourier $\psi_\sigma(\mathbf{r}) = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \psi_\sigma(\mathbf{k})$ avec $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$, H_0 s'exprime alors en fonction de $\Psi_{\mathbf{k}} = (\psi_\uparrow(\mathbf{k}), \psi_\downarrow(\mathbf{k}))^T$ comme :

$$H_0 = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \Psi_{\mathbf{k}}^\dagger \mathcal{H}_0(\mathbf{k}) \Psi_{\mathbf{k}} \quad (\text{A.2})$$

où le Hamiltonien de Bloch $\mathcal{H}_0(\mathbf{k})$ est :

$$\mathcal{H}_0(\mathbf{k}) = \xi_k \mathbb{1} + \alpha(\sigma_x k_y - \sigma_y k_x) + V_z \sigma_z \quad (\text{A.3})$$

où $\xi_k = \frac{k^2}{2m} - \mu$ et $k = |\mathbf{k}|$. Le spectre de $\mathcal{H}_0(\mathbf{k})$ est :

$$\varepsilon_\pm(k) = \xi_k \pm \sqrt{V_z^2 + \alpha^2 k^2} \quad (\text{A.4})$$

avec les états propres associés $\phi_\pm(\mathbf{k})$ paramétrés comme :

$$\phi_-(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} B_\uparrow(k) \frac{ik_x + k_y}{k} \\ B_\downarrow(k) \end{pmatrix} \quad \phi_+(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} A_\uparrow(k) \\ A_\downarrow(k) \frac{ik_x - k_y}{k} \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

On obtient :

$$\begin{aligned} A_{\uparrow}(k) = B_{\downarrow}(k) &= \frac{V_z + \sqrt{V_z^2 + \alpha^2 k^2}}{\sqrt{2(V_z^2 + \alpha^2 k^2 + V_z \sqrt{V_z^2 + \alpha^2 k^2})}} \\ A_{\downarrow}(k) = B_{\uparrow}(k) &= \frac{-\alpha k}{\sqrt{2(V_z^2 + \alpha^2 k^2 + V_z \sqrt{V_z^2 + \alpha^2 k^2})}} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

On introduit les fonctions f_s et f_p :

$$\begin{aligned} f_s(k) = A_{\uparrow}B_{\downarrow} - A_{\downarrow}B_{\uparrow} &= \frac{V_z}{\sqrt{V_z^2 + \alpha^2 k^2}} \\ f_p(k) = A_{\uparrow}A_{\downarrow} = B_{\uparrow}B_{\downarrow} &= \frac{-\alpha k}{\sqrt{V_z^2 + \alpha^2 k^2}} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

qui ne dépendent que de la norme du vecteur d'onde $|\mathbf{k}| = k$.

ÉTAT LIÉ DE MAJORANA AU CŒUR DU SKYRMION

B.1 Généralités

Comme on l'a vu à la Section 2.1.3 du Chapitre 2, un fermion de Majorana satisfait, par définition, la condition dite « de Majorana » :

$$\mathcal{C}\Psi = \Psi \tag{B.1}$$

où $\mathcal{C} = U_c\mathcal{K}$ est toujours la représentation de la transformation particule-trou dans l'espace de Nambu et Ψ est la fonction d'onde de l'excitation étudiée. Comme \mathcal{C} est un opérateur anti-unitaire, la condition de Majorana Eq. (B.1) impose deux conséquences (i) l'énergie de l'excitation est nulle et (ii) elle se situe dans le secteur où le (ou les) nombre quantique est (sont) invariants par la transformation. De plus, l'Eq. (B.1) permet de déterminer *tous* les modes de d'énergie nulle puisque prendre $\mathcal{C}\Psi = -\Psi$ revient à faire $\Psi \rightarrow i\Psi$ (Gurarie et Radzihovsky, 2007). Par exemple, si on paramétrise la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{r})$ comme :

$$\Psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} u_{\uparrow}(\mathbf{r}) \\ u_{\downarrow}(\mathbf{r}) \\ v_{\downarrow}(\mathbf{r}) \\ -v_{\uparrow}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \tag{B.2}$$

où on travaille toujours dans la même base de Nambu que dans le texte principal. L'opérateur de transformation particule-trou s'écrit toujours $U_c = \sigma_y\tau_y$ et impose donc la condition $v_{\sigma}(\mathbf{r}) = u_{\sigma}^*(\mathbf{r})$ ce qui permet de réduire le problème initial de dimension 4×4 à un problème 2×2 plus simple à traiter. L'opérateur de création associé à cette création s'écrit alors :

$$\gamma^{\dagger} = \int d^d\mathbf{r} \left(u_{\uparrow}(\mathbf{r}) c_{\mathbf{r}\uparrow}^{\dagger} + u_{\downarrow}(\mathbf{r}) c_{\mathbf{r}\downarrow}^{\dagger} + v_{\downarrow}(\mathbf{r}) c_{\mathbf{r}\downarrow} + v_{\uparrow}(\mathbf{r}) c_{\mathbf{r}\uparrow} \right) \tag{B.3}$$

Ou, en utilisant la condition de Majorana :

$$\gamma^\dagger = \int d^d \mathbf{r} \left(u_\uparrow(\mathbf{r}) c_{\mathbf{r}\uparrow}^\dagger + u_\downarrow(\mathbf{r}) c_{\mathbf{r}\downarrow}^\dagger + u_\downarrow^*(\mathbf{r}) c_{\mathbf{r}\downarrow} + u_\uparrow^*(\mathbf{r}) c_{\mathbf{r}\uparrow} \right) \quad (\text{B.4})$$

Et en prenant le hermitien conjugué de l'Eq. (B.4), on obtient :

$$\gamma = \int d^d \mathbf{r} \left(u_\uparrow^*(\mathbf{r}) c_{\mathbf{r}\uparrow} + u_\downarrow^*(\mathbf{r}) c_{\mathbf{r}\downarrow} + u_\downarrow(\mathbf{r}) c_{\mathbf{r}\downarrow}^\dagger + u_\uparrow(\mathbf{r}) c_{\mathbf{r}\uparrow}^\dagger \right) \quad (\text{B.5})$$

ce qui implique bien $\gamma = \gamma^\dagger$.

B.2 Fonction d'onde de l'état lié de Majorana au cœur du skyrmion

Cette section ne présente rien de nouveau puisque la fonction d'onde a déjà été calculée par [Yang et al. \(2016\)](#). Cependant, le calcul est intéressant et permet de confirmer les résultats numériques.

Comme on l'a vu, dans le problème qui nous intéresse, les états propres du Hamiltonien Eq. (4.2) peuvent être décomposés dans la base des moments angulaires m_J associés au générateur des rotations $J_z = L_z + \frac{q}{2}\sigma_z$. On peut alors écrire la fonction d'onde dans un secteur m_J comme :

$$\Psi_{m_J}(\mathbf{r}) = e^{i(m_J - \frac{q}{2}\sigma_z)\theta} \psi_{m_J}(r) \quad (\text{B.6})$$

Pour que cette fonction d'onde représente un fermion de Majorana, il faut que $m_J = 0$ et $\mathcal{C}\psi_0^*(r) = \psi_0(r)$ puisque $[\mathcal{C}, e^{-i\frac{q}{2}\sigma_z\theta}] = 0$. Cette condition reste inchangée après la seconde rotation $e^{-if(r)\sigma_y/2}$ si bien qu'on étudie désormais le Hamiltonien Eq. (4.9).

B.2.1 Cœur du skyrmion : $r < r_0$

Cette région est introduite artificiellement pour régulariser le problème à $r = 0$. On note que dans cette région, la seconde rotation n'a pas lieu d'être puisque le champ d'échange est uniforme selon l'axe $+z$. Dans le secteur de moment angulaire $m_J = 0$ (on omet désormais l'indice correspondant), on définit $u(r) = (u_\uparrow(r), u_\downarrow(r)) = u_+(r) + iu_-(r)$ et on utilise la condition de Majorana pour obtenir l'équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2m}(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1}{r^2}) - \mu + J & \lambda\Delta_0 \\ -\lambda\Delta_0 & -\frac{1}{2m}(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1}{r^2}) - \mu - J \end{pmatrix} u_\lambda(r) = 0 \quad (\text{B.7})$$

On voit ici apparaître une équation de Bessel d'ordre 1 (voir [DLMF, Eq. 10.2.1](#)) :

$$\left[\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) \right] g(r) = 0 \quad (\text{B.8})$$

Si bien qu'on cherche une solution sous la forme $u_\lambda(r) = J_1(\kappa r)(a_{\lambda\uparrow}, a_{\lambda\downarrow})^T$ où a_λ est un spineur constant. On obtient ainsi l'équation :

$$\begin{pmatrix} \frac{\kappa^2}{2m} - \mu + J & \lambda\Delta_0 \\ -\lambda\Delta_0 & \frac{\kappa^2}{2m} - \mu - J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\uparrow \\ a_\downarrow \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{B.9})$$

Le déterminant de cette équation devant s'annuler pour obtenir des solutions non triviales, on cherche à résoudre :

$$\left(\frac{\kappa^2}{2m} - \mu\right)^2 - J^2 + \Delta_0^2 = 0 \quad (\text{B.10})$$

En posant $X = \kappa^2$, le discriminant de l'équation quadratique résultante est $\Delta_X = (J^2 - \Delta_0^2)/m^2$. L'analyse de cette équation dans le cas $J > \Delta_0$ qu'on sait physiquement intéressant donne trois cas :

- $\mu > \sqrt{J^2 - \Delta_0^2}$: les quatre solutions sont réelles,
- $|\mu| < \sqrt{J^2 - \Delta_0^2}$: il y a deux solutions réelles et de solutions imaginaires,
- $\mu < -\sqrt{J^2 - \Delta_0^2}$ and $\mu < 0$: $\pm i\kappa_1, \pm i\kappa_2$ les quatre solutions sont imaginaires.

Grâce aux résultats du Chapitre 4, on sait que le régime topologique se trouve dans le cas où $|\mu| < \sqrt{J^2 - \Delta_0^2}$, on se focalise donc sur ce dernier. On appelle alors les solutions de l'équation Eq. (B.10) $\pm\kappa_+$ et $\pm\kappa_-$ avec $\kappa_+^2 > 0$ et $\kappa_-^2 < 0$. On écrit alors $\kappa_+ = \kappa_1$ et $\kappa_- = i\kappa_2$ avec $\kappa_1 = \sqrt{2m}\sqrt{\mu + \sqrt{J^2 - \Delta_0^2}}$ et $\kappa_2 = \sqrt{2m}\sqrt{\sqrt{J^2 - \Delta_0^2} - \mu}$. Dans le cas de κ_1 , une base est donnée par les fonctions de Bessel $J_1(\kappa r)$ et $Y_1(\kappa r)$ alors que pour κ_- , l'équation différentielle adéquate est l'équation de Bessel modifiée puisque κ_- est imaginaire pur. Les fonctions de base sont donc les fonctions de Bessel modifiées I_1 et K_1 . De plus, on impose la condition $u(r=0) = 0$ si bien que les fonctions Y_1 et ${}_1K$ n'entrent pas en ligne de compte car elles divergent à l'origine. Si les solutions κ ne dépendent pas de $\lambda = \pm$ (+ pour la partie réelle et - pour la partie imaginaire), ce n'est pas le cas pour les spineurs. On obtient alors la forme des solutions dans le cœur :

$$\begin{aligned} u_\lambda(r) = & A \frac{J_1(\kappa_1 r)}{\sqrt{\Delta_0^2 + (J + \sqrt{J^2 - \Delta_0^2})^2}} \begin{pmatrix} -\lambda\Delta_0 \\ J + \sqrt{J^2 - \Delta_0^2} \end{pmatrix} \\ & + B \frac{I_1(\kappa_2 r)}{\sqrt{\Delta_0^2 + (J - \sqrt{J^2 - \Delta_0^2})^2}} \begin{pmatrix} -\lambda\Delta_0 \\ J - \sqrt{J^2 - \Delta_0^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

qu'on réécrit : $u_\lambda(r) = AJ_1(\kappa_1 r)|a_1\rangle + BI_1(\kappa_2 r)|a_2\rangle$. Il est intéressant de noter que les deux spineurs (à λ fixé) ne sont pas orthogonaux car la matrice donnée Eq. (B.9) n'est pas hermitienne, ce qui est dû à l'utilisation de la condition de Majorana.

B.2.2 « Dans » le skyrmion : $r_0 < r$

Dans ce cas, on travaille toujours dans la base locale et on utilise l'*ansatz* suivant :

$$u(r) = \frac{e^{-kr}}{\sqrt{r}} \begin{pmatrix} b_{\uparrow} \\ b_{\downarrow} \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

En notant α l'amplitude du couplage spin-orbite, on doit alors résoudre le système :

$$\begin{pmatrix} -\frac{k^2}{2m} - \tilde{\mu} + J & \lambda\Delta_0 - \alpha\kappa \\ -\lambda\Delta_0 + \alpha k & -\frac{k^2}{2m} - \tilde{\mu} - J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{\uparrow} \\ b_{\downarrow} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{B.13})$$

Ce qui implique :

$$\left(\frac{k^2}{2m} + \tilde{\mu} \right)^2 - J^2 + (\alpha k - \lambda\Delta_0)^2 = 0 \quad (\text{B.14})$$

ou encore :

$$\frac{k^4}{4m^2} + \left(\frac{\tilde{\mu}}{m} + \alpha^2 \right) k^2 - 2\lambda\alpha\Delta_0 k + \tilde{\mu}^2 + \Delta_0^2 - J^2 = 0 \quad (\text{B.15})$$

Il se trouve que cette équation a des solutions analytiques mais leur expression est bien trop complexe pour être utilisée analytiquement. Désormais, on suppose donc les solutions $k_{\lambda i} \in \mathbb{C}$ connues. De manière générale, le spineur $|b_{\lambda i}\rangle$ associé à une telle solution s'écrit :

$$|b_{\lambda i}\rangle = \frac{1}{\sqrt{|\lambda\Delta_0 - \alpha k_{\lambda i}|^2 + \left| -\frac{k_{\lambda i}^2}{2m} - \mu + J \right|^2}} \begin{pmatrix} -(\lambda\Delta_0 - \alpha k_{\lambda i}) \\ -\frac{k_{\lambda i}^2}{2m} - \mu + J \end{pmatrix} \quad (\text{B.16})$$

On obtient alors la forme générale des solutions dans cette région :

$$u_{\lambda}(r) = \sum_i C_{\lambda i} \frac{e^{-k_{\lambda i} r}}{\sqrt{r}} |b_{\lambda i}\rangle \quad (\text{B.17})$$

Cependant, on cherche des solutions qui satisfont $\lim_{r \rightarrow \infty} u_{\lambda}(r) = 0$ si bien qu'on ne s'intéresse qu'aux $k_{\lambda i}$ de partie réelle positive.

B.2.3 Conditions de continuité en $r = r_0$

Il faut désormais imposer la continuité de la fonction d'onde et de sa première dérivée en $r = r_0$ pour trouver la fonction d'onde de l'état lié de Majorana.

Ces deux conditions de continuité imposent 4 conditions, qui, associées à la contrainte de normalisabilité font un total de 5 contraintes. Comme on l'a vu, il n'y a que deux paramètres libres dans le cœur du skyrmion. Il faut donc, au minimum 3 solutions en dehors du cœur. La résolution quasi-analytique de l'Eq. (B.14) donne une solution décroissante pour la partie réelle de la fonction d'onde $\lambda = +$ et exactement 3 pour la partie imaginaire ($\lambda = -$). Les trois

solutions k_i ont les propriétés suivantes : k_1 est purement réelle alors que $k_{2,3}$ sont complexes et conjuguées l'une de l'autre, ce qui entraîne que les spineurs propres le sont aussi. Comme la partie imaginaire de la solution doit être réelle, les coefficients qui leurs sont associés sont aussi conjugués l'un de l'autre. La condition de continuité de la fonction d'onde en $r = r_0$ s'écrit alors :

$$AJ_1(\kappa_1 r_0) |a_1\rangle + BI_1(\kappa_1 r_0) |a_2\rangle = C \frac{e^{-k_1 r_0}}{\sqrt{r_0}} |b_1\rangle + D \frac{e^{-k_2 r_0}}{\sqrt{r_0}} |b_2\rangle + D^* \frac{e^{-k_3 r_0}}{\sqrt{r_0}} |b_3\rangle \quad (\text{B.18})$$

où A , B et C sont des coefficients réels. De même, la continuité de la dérivée impose :

$$\begin{aligned} A\kappa_1 J_1'(\kappa_1 r_0) |a_1\rangle + B\kappa_2 I_1'(\kappa_1 r_0) |a_2\rangle = & -\frac{1}{\sqrt{r_0}} \left[C e^{-k_1 r_0} \left(k_1 + \frac{1}{2r_0} \right) |b_1\rangle \right. \\ & + D e^{-k_2 r_0} \left(k_2 + \frac{1}{2r_0} \right) |b_2\rangle \\ & \left. + D^* e^{-k_3 r_0} \left(k_3 + \frac{1}{2r_0} \right) |b_3\rangle \right] \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Les dérivées des fonctions de Bessel s'écrivent $J_1'(r) = (J_0(r) - J_2(r))/2$ et $I_1'(r) = (I_0(r) + I_2(r))/2$. La dernière condition à imposer est la normalisation de la fonction d'onde qui s'écrit :

$$\int_0^\infty r dr |u(r)|^2 = \int_0^\infty r dr \left(|u_\uparrow(r)|^2 + |u_\downarrow(r)|^2 \right) = \frac{1}{2} \quad (\text{B.20})$$

La stratégie pour résoudre ce système d'équation est la suivante : à l'aide des quatre contraintes on exprime récursivement les coefficients les uns en fonction des autres. Par exemple, on peut exprimer A et B en fonction de C , D et D^* . Puis on se sert de ces relations pour exprimer D et D^* en fonction de C uniquement. Ceci permet au passage de vérifier que D et D^* sont bien complexes conjugués. Enfin, une fois tous les coefficients exprimés, la seule inconnue qu'il reste à déterminer est C . Il suffit alors de calculer la norme de la fonction d'onde qui donne directement la valeur de C puis de réinjecter ce nombre dans l'expression des autres coefficients. Le résultat de ce calcul est comparé au résultat numérique Fig. B.1, où on a dû effectuer le changement de base inverse $e^{if(r)\sigma_y/2}$.

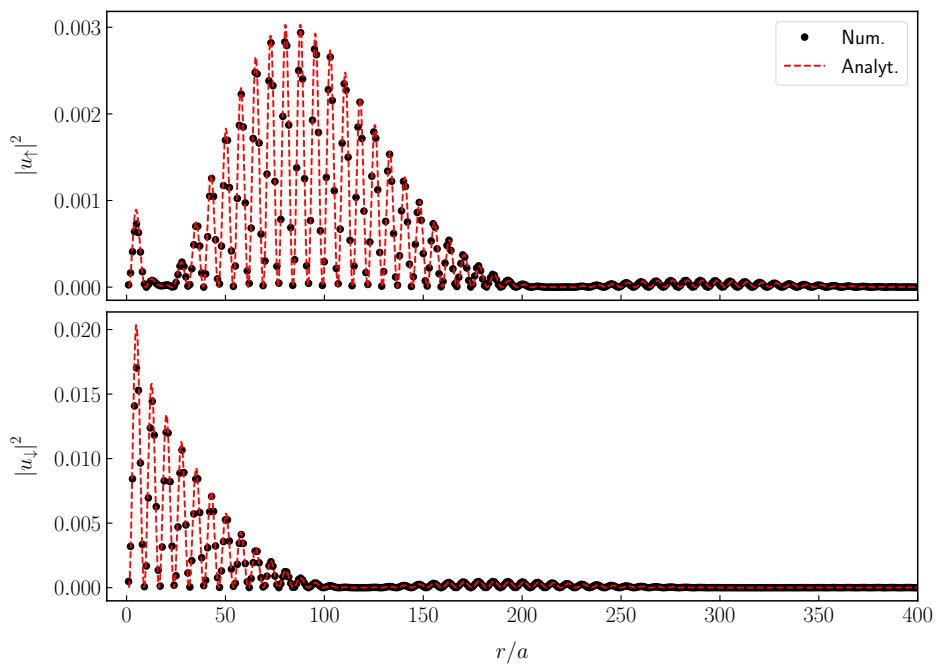


FIGURE B.1 – Comparaison de la fonction d’onde de l’état lié de Majorana au cœur du skyrmion. Les lignes brisées rouges représentent le calcul semi-analytique et les points noirs les résultats numériques. Les paramètres du système sont tels que $p = 10$, $q = 2$, $R_{\text{sk}}/a = 1000$, $t = 1$ avec $\hbar \equiv 1$, $J/t = 0.2$, $\Delta_0/t = 0.1$ et $\mu/t = 0$.

EXPRESSION EXACTE DE L'INDUCTION MAGNÉTIQUE CRÉÉE PAR LE SKYRMION

Dans cette annexe, on donne les expressions exactes de l'induction magnétique créée par le skyrmion dans le cadre des hypothèses de la Section 5.2. On paramètre le problème comme illustré Fig. C.1 où \mathbf{r}' dénote la position au sein de la distribution d'aimantation qu'on exprime

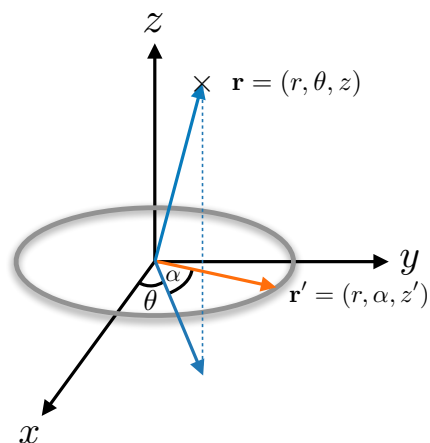


FIGURE C.1 – Représentation schématique de la paramétrisation utilisée pour le calcul de l'induction magnétique.

dans les coordonnées cylindriques $\mathbf{r}' = (r', \alpha, z')$ où l'angle α désigne l'angle entre les vecteur

$\mathbf{u}_{r'}$ et \mathbf{u}_r . La contribution volumique s'écrit alors :

$$B_r^V(r, z) = \frac{\mu_0 M_S}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{df(r')}{dr'} \sin f(r') \frac{(z - z') \cos(\alpha)}{\left[(r - r' \cos(\alpha))^2 + (r' \sin(\alpha))^2 + (z - z')^2 \right]^{3/2}} r' dr' d\alpha dz' \quad (\text{C.1})$$

$$B_z^V(r, z) = \frac{\mu_0 M_S}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{df(r')}{dr'} \sin f(r') \frac{r' - r \cos(\alpha)}{\left[(r - r' \cos(\alpha))^2 + (r' \sin(\alpha))^2 + (z - z')^2 \right]^{3/2}} r' dr' d\alpha dz' \quad (\text{C.2})$$

La contribution de la surface $z = h/2$ qu'on note $\partial\Omega_{\text{top}}$ a pour expression :

$$B_r^{\text{top}}(r, z) = \frac{\mu_0 M_S}{4\pi} \int_{\partial\Omega_{\text{top}}} \sin f(r') \frac{-(z - \frac{h}{2}) \cos(\alpha)}{\left[(r - r' \cos(\alpha))^2 + (r' \sin(\alpha))^2 + (z - \frac{h}{2})^2 \right]^{3/2}} r' dr' d\alpha \quad (\text{C.3})$$

$$B_z^{\text{top}}(r, z) = \frac{\mu_0 M_S}{4\pi} \int_{\partial\Omega_{\text{top}}} \sin f(r') \frac{-(r' - r \cos(\alpha))}{\left[(r - r' \cos(\alpha))^2 + (r' \sin(\alpha))^2 + (z - \frac{h}{2})^2 \right]^{3/2}} r' dr' d\alpha \quad (\text{C.4})$$

De même pour la contribution de la surface $z = -h/2$:

$$B_r^{\text{bot}}(r, z) = \frac{\mu_0 M_S}{4\pi} \int_{\partial\Omega_{\text{bot}}} \sin f(r') \frac{(z + \frac{h}{2}) \cos(\alpha)}{\left[(r - r' \cos(\alpha))^2 + (r' \sin(\alpha))^2 + (z + \frac{h}{2})^2 \right]^{3/2}} r' dr' d\alpha \quad (\text{C.5})$$

$$B_z^{\text{bot}}(r, z) = \frac{\mu_0 M_S}{4\pi} \int_{\partial\Omega_{\text{bot}}} \sin f(r') \frac{(r' - r \cos(\alpha))}{\left[(r - r' \cos(\alpha))^2 + (r' \sin(\alpha))^2 + (z + \frac{h}{2})^2 \right]^{3/2}} r' dr' d\alpha \quad (\text{C.6})$$

Et la contribution latérale à prendre en compte si nécessaire :

$$B_r^{\text{lat}}(r, z) = \frac{\mu_0 M_S}{4\pi} \cos f(R_{\text{sk}}) \int_{\partial\Omega_{\text{lat}}} \frac{(z - z') \cos(\alpha)}{\left[(r - R_{\text{sk}} \cos(\alpha))^2 + (R_{\text{sk}} \sin(\alpha))^2 + (z - z')^2 \right]^{3/2}} R_{\text{sk}} d\alpha dz' \quad (\text{C.7})$$

$$B_z^{\text{lat}}(r, z) = \frac{\mu_0 M_S}{4\pi} \cos f(R_{\text{sk}}) \int_{\partial\Omega_{\text{lat}}} \frac{(R_{\text{sk}} - r \cos(\alpha))}{\left[(r - R_{\text{sk}} \cos(\alpha))^2 + (R_{\text{sk}} \sin(\alpha))^2 + (z - z')^2 \right]^{3/2}} R_{\text{sk}} d\alpha dz' \quad (\text{C.8})$$



BIBLIOGRAPHIE

- A. A. Abrikosov. *Fundamentals of the theory of metals*. North-Holland, 3ème édition, 1988.
- P. Adhikary et T. Das. Novel attractive pairing interaction in strongly correlated superconductors. *SciPost Phys.*, 7 :78, 2019.
- I. A. Ado, A. Qaiumzadeh, A. Brataas, et M. Titov. Chiral ferromagnetism beyond Lifshitz invariants. *Phys. Rev. B*, 101 :161403, 2020.
- D. F. Agterberg. Magnetoelectric effects, helical phases, and FFLO phases. In E. Bauer et M. Sigrist, editors, *Non-Centrosymmetric Superconductors : Introduction and Overview*, pages 155–170. Springer, 2012. URL https://doi.org/10.1007/978-3-642-24624-1_5.
- D. F. Agterberg et R. P. Kaur. Magnetic-field-induced helical and stripe phases in Rashba superconductors. *Phys. Rev. B*, 75 :064511, 2007.
- J. Alicea. Majorana fermions in a tunable semiconductor device. *Phys. Rev. B*, 81 :125318, 2010.
- J. Alicea. New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems. *Reports on Progress in Physics*, 75(7) :076501, 2012.
- J. Alicea, Y. Oreg, G. Refael, F. von Oppen, et M. P. A. Fisher. Non-abelian statistics and topological quantum information processing in 1d wire networks. *Nature Physics*, 7(5) : 412–417, 2011.
- P. W. Anderson. More is different. *Science*, 177(4047) :393–396, 1972.
- Y. Ando et L. Fu. Topological crystalline insulators and topological superconductors : From concepts to materials. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 6(1) :361–381, 2015.
- G. L. R. Anselmetti, E. A. Martinez, G. C. Ménard, D. Puglia, F. K. Malinowski, J. S. Lee, S. Choi, M. Pendharkar, C. J. Palmstrøm, C. M. Marcus, L. Casparis, et A. P. Higginbotham. End-to-end correlated subgap states in hybrid nanowires. *Phys. Rev. B*, 100 :205412, 2019.
- D. Arovas et C. Wu. Lecture notes on superconductivity (a work in progress). Notes de cours. Département de Physique, Université de Californie à San Diego. [Hyperlien](#), 2019.

- P. P. Aseev, J. Klinovaja, et D. Loss. Lifetime of majorana qubits in rashba nanowires with nonuniform chemical potential. *Phys. Rev. B*, 98 :155414, 2018.
- P. P. Aseev, P. Marra, P. Stano, J. Klinovaja, et D. Loss. Degeneracy lifting of Majorana bound states due to electron-phonon interactions. *Phys. Rev. B*, 99 :205435, 2019.
- A. Auerbach. *Interacting Electrons and Quantum Magnetism*. Springer-Verlag, 1994.
- J. Avila, F. Peñaranda, E. Prada, P. San-Jose, et R. Aguado. Non-hermitian topology as a unifying framework for the andreev versus majorana states controversy. *Communications Physics*, 2(1) :133, 2019.
- S.-H. Baek, D. V. Efremov, J. M. Ok, J. S. Kim, J. van den Brink, et B. Büchner. Orbital-driven nematicity in fese. *Nature Materials*, 14(2) :210–214, 2015.
- R. Balian et N. R. Werthamer. Superconductivity with pairs in a relative p wave. *Phys. Rev.*, 131 :1553–1564, 1963.
- J. Bardeen, L. N. Cooper, et J. R. Schrieffer. Theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, 108 : 1175–1204, 1957.
- J. Baumard. *Propriétés spectrales et de transport de supraconducteurs à basse dimension en présence de champs dépendant du spin*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux et Universidad del País Vasco, 2019.
- J. Baumard, J. Cayssol, F. S. Bergeret, et A. Buzdin. Generation of a superconducting vortex via Néel skyrmions. *Phys. Rev. B*, 99 :014511, 2019.
- C. W. J. Beenakker. Search for non-abelian Majorana braiding statistics in superconductors. Notes de cours. Les Houches Summer School 2019 . [arXiv:1907.06497](https://arxiv.org/abs/1907.06497), 2019.
- W. A. Benalcazar, B. A. Bernevig, et T. L. Hughes. Electric multipole moments, topological multipole moment pumping, and chiral hinge states in crystalline insulators. *Phys. Rev. B*, 96 :245115, 2017.
- S. Benhabib, C. Lupien, I. Paul, L. Berges, M. Dion, M. Nardone, A. Zitouni, Z. Q. Mao, Y. Maeno, A. Georges, L. Taillefer, et C. Proust. Ultrasound evidence for a two-component superconducting order parameter in sr₂ruo₄. *Nature Physics*, 2020.
- A. Bernard-Mantel, L. Camosi, A. Wartelle, N. Rougemaille, M. Darques, et L. Ranno. The skyrmion-bubble transition in a ferromagnetic thin film. *SciPost Phys.*, 4 :27, 2018.
- B. A. Bernevig et T. Neupert. Topological superconductors and category theory. Notes de cours. Les Houches Summer School 2014, Vietri Training Course in the Physics of Strongly Correlated Systems 2014, Bogota School on Mathematical Physics 2015. [arXiv:1506.05805](https://arxiv.org/abs/1506.05805), 2015.

- K. Björnson, S. S. Pershoguba, A. V. Balatsky, et A. M. Black-Schaffer. Spin-polarized edge currents and Majorana fermions in one- and two-dimensional topological superconductors. *Phys. Rev. B*, 92 :214501, 2015.
- A. M. Black-Schaffer. Self-consistent superconducting proximity effect at the quantum spin hall edge. *Phys. Rev. B*, 83 :060504, 2011.
- M. Blanco de Paz, C. Devescovi, G. Giedke, J. J. Saenz, M. G. Vergniory, B. Bradlyn, D. Bercioux, et A. García-Etxarri. Tutorial : Computing topological invariants in 2d photonic crystals. *Advanced Quantum Technologies*, 3(2) :1900117, 2020.
- G. Blatter, M. V. Feigel'man, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin, et V. M. Vinokur. Vortices in high-temperature superconductors. *Rev. Mod. Phys.*, 66 :1125–1388, 1994.
- S. Blundell. *Magnetism in condensed matter*. Oxford University Press, 2001.
- A. N. Bogdanov et D. A. Yablonskiĭ. Thermodynamically stable "vortices" in magnetically ordered crystals. the mixed state of magnets. *Sov. Phys. JETP*, 68 :101, 1989.
- H.-B. Braun et D. Loss. Berry's phase and quantum dynamics of ferromagnetic solitons. *Phys. Rev. B*, 53 :3237–3255, 1996.
- B. Braunecker et P. Simon. Interplay between classical magnetic moments and superconductivity in quantum one-dimensional conductors : Toward a self-sustained topological Majorana phase. *Phys. Rev. Lett.*, 111 :147202, 2013.
- B. Braunecker, G. I. Japaridze, J. Klinovaja, et D. Loss. Spin-selective peierls transition in interacting one-dimensional conductors with spin-orbit interaction. *Phys. Rev. B*, 82 :045127, 2010.
- W. F. Brown. *Micromagnetics*. John Wiley & sons, 1963.
- H. Bruus et K. Flensberg. *Many-body quantum theory in condensed matter physics - an introduction*. Oxford University Press, 2004.
- F. Büttner, I. Lemesh, et G. S. D. Beach. Theory of isolated magnetic skyrmions : From fundamentals to room temperature applications. *Scientific Reports*, 8(1) :4464, 2018.
- A. I. Buzdin. Proximity effects in superconductor-ferromagnet heterostructures. *Rev. Mod. Phys.*, 77 :935–976, 2005.
- A. I. Buzdin, L. N. Bulaevskiĭ, M. L. Kulich, et S. V. Panyukov. Magnetic superconductors. *Soviet Physics Uspekhi*, 27(12) :927–953, 1984.
- J. Chalker. Quantum theory of condensed matter. Notes de cours. Département de Physique, Université d'Oxford. [Hyperlien](#), 2013.

- B. S. Chandrasekhar. A note on the maximum critical field of high-field superconductors. *Applied Physics Letters*, 1(1) :7–8, 1962.
- C. Chen, Q. Liu, T. Z. Zhang, D. Li, P. P. Shen, X. L. Dong, Z.-X. Zhao, T. Zhang, et D. L. Feng. Quantized conductance of Majorana zero mode in the vortex of the topological superconductor $(\text{Li}_{0.84}\text{Fe}_{0.16})\text{OHFeSe}$. *Chinese Physics Letters*, 36(5) :057403, 2019.
- M. Chen, X. Chen, H. Yang, Z. Du, X. Zhu, E. Wang, et H.-H. Wen. Discrete energy levels of Caroli-de Gennes-Matricon states in quantum limit in $\text{FeTe}_{0.55}\text{Se}_{0.45}$. *Nature Communications*, 9(1) :970, 2018.
- W. Chen et A. P. Schnyder. Majorana edge states in superconductor-noncollinear magnet interfaces. *Phys. Rev. B*, 92 :214502, 2015.
- C.-K. Chiu, J. C. Y. Teo, A. P. Schnyder, et S. Ryu. Classification of topological quantum matter with symmetries. *Rev. Mod. Phys.*, 88 :035005, 2016.
- C.-K. Chiu, T. Machida, Y. Huang, T. Hanaguri, et F.-C. Zhang. Scalable Majorana vortex modes in iron-based superconductors. *Science Advances*, 6(9), 2020.
- D.-J. Choi, N. Lorente, J. Wiebe, K. von Bergmann, A. F. Otte, et A. J. Heinrich. Colloquium : Atomic spin chains on surfaces. *Rev. Mod. Phys.*, 91 :041001, 2019.
- T.-P. Choy, J. M. Edge, A. R. Akhmerov, et C. W. J. Beenakker. Majorana fermions emerging from magnetic nanoparticles on a superconductor without spin-orbit coupling. *Phys. Rev. B*, 84 :195442, 2011.
- M. H. Christensen, M. Schechter, K. Flensberg, B. M. Andersen, et J. Paaske. Spiral magnetic order and topological superconductivity in a chain of magnetic adatoms on a two-dimensional superconductor. *Phys. Rev. B*, 94 :144509, 2016.
- A. M. Clogston. Upper limit for the critical field in hard superconductors. *Phys. Rev. Lett.*, 9 : 266–267, 1962.
- D. Cortés-Ortuño, N. Romming, M. Beg, K. von Bergmann, A. Kubetzka, O. Hovorka, H. Fangohr, et R. Wiesendanger. Nanoscale magnetic skyrmions and target states in confined geometries. *Phys. Rev. B*, 99 :214408, 2019.
- O. Cépas. *Effets des anisotropies de spins dans les oxydes de basse dimension*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 2000.
- S. M. Dahir, A. F. Volkov, et I. M. Eremin. Interaction of skyrmions and Pearl vortices in superconductor-chiral ferromagnet heterostructures. *Phys. Rev. Lett.*, 122 :097001, 2019.

- S. M. Dahir, A. F. Volkov, et I. M. Eremin. Meissner currents induced by topological magnetic textures in hybrid superconductor/ferromagnet structures. *Phys. Rev. B*, 102 :014503, 2020.
- J. Dalibard. Topologie à une dimension : du modèle SSH aux modes de Majorana. Notes de cours du Collège de France 2017-2018. "La matière topologique et son exploration avec les gaz quantiques". Chapitre 2, 2018.
- M. C. Dartiailh, T. Kontos, B. Douçot, et A. Cottet. Direct cavity detection of Majorana pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 118 :126803, 2017.
- A. Das, Y. Ronen, Y. Most, Y. Oreg, M. Heiblum, et H. Shtrikman. Zero-bias peaks and splitting in an Al-InAs nanowire topological superconductor as a signature of Majorana fermions. *Nature Physics*, 8(12) :887–895, 2012.
- S. Datta et P. F. Bagwell. Can the Bogoliubov–de Gennes equation be interpreted as a ‘one-particle’ wave equation? *Superlattices and Microstructures*, 25(5/6), 1999.
- P.-G. de Gennes. *Superconductivity of metals and alloys*. W. A. Benjamin, Inc., 1966.
- M. T. Deng, C. L. Yu, G. Y. Huang, M. Larsson, P. Caroff, et H. Q. Xu. Anomalous zero-bias conductance peak in a nb–insb nanowire–nb hybrid device. *Nano Letters*, 12(12) :6414–6419, 2012. PMID : 23181691.
- M. T. Deng, S. Vaitiekenas, E. B. Hansen, J. Danon, M. Leijnse, K. Flensberg, J. Nygård, P. Krogstrup, et C. M. Marcus. Majorana bound state in a coupled quantum-dot hybrid-nanowire system. *Science*, 354(6319) :1557–1562, 2016.
- M. M. Desjardins, L. C. Contamin, M. R. Delbecq, M. C. Dartiailh, L. E. Bruhat, T. Cubaynes, J. J. Viennot, F. Mallet, S. Rohart, A. Thiaville, A. Cottet, et T. Kontos. Synthetic spin-orbit interaction for majorana devices. *Nature Materials*, 2019.
- DLMF. *NIST Digital Library of Mathematical Functions*. "<http://dlmf.nist.gov/>, Release 1.0.24 of 2019-09-15". "F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, B. V. Saunders, H. S. Cohl, and M. A. McClain, eds."
- O. Dmytruk. *Quantum transport in a correlated nanostructure coupled to a microwave cavity*. Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay - Université Paris-Sud, 2016.
- O. Dmytruk, M. Trif, et P. Simon. Cavity quantum electrodynamics with mesoscopic topological superconductors. *Phys. Rev. B*, 92 :245432, 2015.
- R. A. Duine, A. Brataas, S. A. Bender, et Y. Tserkovnyak. Spintronics and magnon bose-einstein condensation. In N. P. Proukakis, D. W. Snoke, et P. B. Littlewood, editors, *Universal Themes of Bose-Einstein condensation*, page 505–524. Cambridge University Press, 2017.

- F. J. Dyson. General theory of spin-wave interactions. *Phys. Rev.*, 102 :1217–1230, 1956.
- I. E. Dzialoshinskii. Thermodynamic theory of "weak" ferromagnetism in antiferromagnetic substances. *Sov. Phys. JETP*, 5 :1259, 1957.
- V. M. Edelstein. Characteristics of the Cooper pairing in two-dimensional noncentrosymmetric electron systems. *Sov. Phys. JETP*, 68 :1244, 1989.
- V. M. Edelstein. The Ginzburg - Landau equation for superconductors of polar symmetry. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 8(3) :339–349, 1996.
- J. P. Ellis. TikZ-Feynman : Feynman diagrams with TikZ. *Computer Physics Communications*, 210 :103 – 123, 2017.
- M. Eschrig. Spin-polarized supercurrents for spintronics : a review of current progress. *Reports on Progress in Physics*, 78(10) :104501, 2015.
- K. Everschor-Sitte, J. Masell, R. M. Reeve, et M. Kläui. Perspective : Magnetic skyrmions—overview of recent progress in an active research field. *Journal of Applied Physics*, 124 (24) :240901, 2018.
- L. Farinacci, G. Ahmadi, G. Reecht, M. Ruby, N. Bogdanoff, O. Peters, B. W. Heinrich, F. von Oppen, et K. J. Franke. Tuning the coupling of an individual magnetic impurity to a superconductor : Quantum phase transition and transport. *Phys. Rev. Lett.*, 121 :196803, 2018.
- G. L. Fatin, A. Matos-Abiague, B. Scharf, et I. Žutić. Wireless Majorana bound states : From magnetic tunability to braiding. *Phys. Rev. Lett.*, 117 :077002, 2016.
- B. E. Feldman, M. T. Randeria, J. Li, S. Jeon, Y. Xie, Z. Wang, I. K. Drozdov, B. Andrei Bernevig, et A. Yazdani. High-resolution studies of the majorana atomic chain platform. *Nature Physics*, 13(3) :286–291, 2017.
- D. K. Ferry, S. M. Goodnick, et J. Bird. The quantum Hall effects. In *Transport in Semiconductor Mesoscopic Devices*, page 193–247. Cambridge University Press, 2009.
- A. Fert, V. Cros, et J. Sampaio. Skyrmions on the track. *Nature Nanotechnology*, 8 :152, 2013.
- S. Finizio, S. Wintz, D. Bracher, E. Kirk, A. S. Semisalova, J. Förster, K. Zeissler, T. Weßels, M. Weigand, K. Lenz, A. Kleibert, et J. Raabe. Thick permalloy films for the imaging of spin texture dynamics in perpendicularly magnetized systems. *Phys. Rev. B*, 98 :104415, 2018.
- K. Flensberg. Tunneling characteristics of a chain of Majorana bound states. *Phys. Rev. B*, 82 : 180516, 2010.
- G. Foffano, J. Lintuvuori, A. Tiribocchi, et D. Marenduzzo. The dynamics of colloidal intrusions in liquid crystals : A simulation perspective. *Liquid Crystals Reviews*, 2, 2014.

- A. Fornieri, A. M. Whiticar, F. Setiawan, E. Portolés, A. C. C. Drachmann, A. Keselman, S. Gronin, C. Thomas, T. Wang, R. Kallaher, G. C. Gardner, E. Berg, M. J. Manfra, A. Stern, C. M. Marcus, et F. Nichele. Evidence of topological superconductivity in planar Josephson junctions. *Nature*, 569(7754) :89–92, 2019.
- K. J. Franke, G. Schulze, et J. I. Pascual. Competition of superconducting phenomena and kondo screening at the nanoscale. *Science*, 332(6032) :940–944, 2011.
- M. Franz. Majorana’s wires. *Nature Nanotechnology*, 8(3) :149–152, 2013.
- L. Fu et C. L. Kane. Superconducting proximity effect and Majorana fermions at the surface of a topological insulator. *Phys. Rev. Lett.*, 100 :096407, 2008.
- L. Fu et C. L. Kane. Josephson current and noise at a superconductor/quantum-spin-Hall-insulator/superconductor junction. *Phys. Rev. B*, 79 :161408, 2009.
- J.-N. Fuchs. An introduction to symmetries and quantum field theory. Notes de cours. Master 2 ICFP. [Hyperlien](#), 2017.
- T. Fukui, Y. Hatsugai, et H. Suzuki. Chern numbers in discretized Brillouin zone : Efficient method of computing (spin) Hall conductances. *Journal of the Physical Society of Japan*, 74(6) : 1674–1677, 2005.
- P. Fulde et R. A. Ferrell. Superconductivity in a strong spin-exchange field. *Phys. Rev.*, 135 : A550–A563, 1964.
- J. Garaud, M. N. Chernodub, et D. E. Kharzeev. Vortices with magnetic field inversion in non-centrosymmetric superconductors. *arXiv e-prints*, art. arXiv :2003.10917, 2020.
- M. Garnier, A. Mesaros, et P. Simon. Topological superconductivity with deformable magnetic skyrmions. *Communications Physics*, 2(1) :126, 2019.
- M. Garst. Collective excitations of magnetic skyrmions. In C. Back, V. Cros, H. Ebert, K. Everschor-Sitte, A. Fert, M. Garst, T. Ma, S. Mankovsky, T. L. Monchesky, M. Mostovoy, N. Nagaosa, S. S. P. Parkin, C. Pfleiderer, N. Reyren, A. Rosch, Y. Taguchi, Y. Tokura, K. von Bergmann, et J. Zang, editors, *The 2020 Skyrmionics Roadmap*, pages 13–15. Journal of Physics D : Applied Physics, 2020.
- S. Ghosh, A. Shekhter, F. Jerzembeck, N. Kikugawa, D. A. Sokolov, M. Brando, A. P. Mackenzie, C. W. Hicks, et B. J. Ramshaw. Thermodynamic evidence for a two-component superconducting order parameter in Sr_2RuO_4 . *Nature Physics*, 2020.
- T. Giamarchi, C. Rüegg, et O. Tchernyshyov. Bose-Einstein condensation in magnetic insulators. *Nature Physics*, 4(3) :198–204, 2008.

- O. Gingras, R. Nourafkan, A.-M. S. Tremblay, et M. Côté. Superconducting symmetries of Sr_2RuO_4 from first-principles electronic structure. *Phys. Rev. Lett.*, 123 :217005, 2019.
- L. P. Gor'kov et E. I. Rashba. Superconducting 2D system with lifted spin degeneracy : Mixed singlet-triplet state. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :037004, 2001.
- I. S. Gradshteyn et I. M. Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. Academic Press, 4ème édition, 1983. ISBN 978-0-12-373637-6; 0-12-373637-4. 1ère édition, 1965.
- S. Guissart. *De l'impureté Kondo aux états liés dans les supraconducteurs*. Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay - Université Paris-Sud, 2016.
- U. Güngördü, S. Sandhoefner, et A. A. Kovalev. Stabilization and control of Majorana bound states with elongated skyrmions. *Phys. Rev. B*, 97 :115136, 2018.
- V. Gurarie et L. Radzihovsky. Zero modes of two-dimensional chiral p-wave superconductors. *Physical Review B*, 75(21), 2007.
- J. Hagemeister, A. Siemens, L. Rózsa, E. Y. Vedmedenko, et R. Wiesendanger. Controlled creation and stability of $k\pi$ skyrmions on a discrete lattice. *Phys. Rev. B*, 97 :174436, 2018.
- K. M. D. Hals. Magnetoelectric coupling in superconductor-helimagnet heterostructures. *Phys. Rev. B*, 95 :134504, 2017.
- K. M. D. Hals et K. Everschor-Sitte. New boundary-driven twist states in systems with broken spatial inversion symmetry. *Phys. Rev. Lett.*, 119 :127203, 2017.
- K. M. D. Hals, M. Schechter, et M. S. Rudner. Composite topological excitations in ferromagnet-superconductor heterostructures. *Phys. Rev. Lett.*, 117 :017001, 2016.
- S. Hayami et Y. Motome. Néel- and Bloch-type magnetic vortices in Rashba metals. *Phys. Rev. Lett.*, 121 :137202, 2018.
- W.-Y. He et K. T. Law. Magnetoelectric effects in gyrotropic superconductors. *Phys. Rev. Research*, 2 :012073, 2020.
- B. W. Heinrich, J. I. Pascual, et K. J. Franke. Single magnetic adsorbates on s-wave superconductors. *Progress in Surface Science*, 93(1) :1 – 19, 2018.
- J. E. Hoffman. *A search for alternative electronic order in the high temperature superconductor $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$ by scanning tunneling microscopy*. Thèse de doctorat, University of California, Berkeley, 2003.
- T. Holstein et H. Primakoff. Field dependence of the intrinsic domain magnetization of a ferromagnet. *Phys. Rev.*, 58 :1098–1113, 1940.

- A. Hubert et R. Schäfer. *Magnetic domains. The analysis of magnetic microstructures*. Springer-Verlag, 3ème édition, 2009. 1ère éd. : 1998.
- A. Huxley. Superconductivity at high magnetic field. Diapositives. Magnetic fields for science school, Institut d'Études Scientifiques de Cargèse, France. [Hyperlien](#), 2007.
- D. A. Ivanov. Non-abelian statistics of half-quantum vortices in p -wave superconductors. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :268–271, 2001.
- R. Jackiw et C. Rebbi. Solitons with fermion number $\frac{1}{2}$. *Phys. Rev. D*, 13 :3398–3409, 1976.
- J. D. Jackson. *Classical electrodynamics*. John Wiley & sons, Inc., 3ème édition, 1999. 1ère édition 1975.
- J. Jang, D. G. Ferguson, V. Vakaryuk, R. Budakian, S. B. Chung, P. M. Goldbart, et Y. Maeno. Observation of half-height magnetization steps in Sr_2RuO_4 . *Science*, 331(6014) :186–188, 2011.
- P. Jensen Ray. Structural investigation of $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_{4+y}$. Following staging as a function of temperature. Thèse de Master, Institut Niels Bohr, Université de Copenhague, 2015.
- L. Jiang, D. Pekker, J. Alicea, G. Refael, Y. Oreg, et F. von Oppen. Unconventional Josephson signatures of Majorana bound states. *Phys. Rev. Lett.*, 107 :236401, 2011.
- C. Jünger, R. Delagrangé, D. Chevallier, S. Lehmann, K. A. Dick, C. Thelander, J. Klinovaja, D. Loss, A. Baumgartner, et C. Schönenberger. Magnetic-field-independent subgap states in hybrid rashba nanowires. *Phys. Rev. Lett.*, 125 :017701, 2020.
- S. L. Kakani et U. N. Upadhyaya. Magnetic superconductors : A review. *Journal of Low Temperature Physics*, 70(1) :5–82, 1988.
- S. Kezilebieke, M. Dvorak, T. Ojanen, et P. Liljeroth. Coupled Yu–Shiba–Rusinov states in molecular dimers on NbSe_2 . *Nano Letters*, 18(4) :2311–2315, 2018. PMID : 29533636.
- S. Kezilebieke, M. Nurul Huda, V. Vaňo, M. Aapro, S. C. Ganguli, O. J. Silveira, S. Głodzik, A. S. Foster, T. Ojanen, et P. Liljeroth. Topological superconductivity in a designer ferromagnet-superconductor van der Waals heterostructure. *arXiv e-prints*, art. arXiv :2002.02141, 2020.
- T. Kiendl, F. von Oppen, et P. W. Brouwer. Proximity-induced gap in nanowires with a thin superconducting shell. *Phys. Rev. B*, 100 :035426, 2019.
- B. S. Kim. Skyrmions and Hall transport. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 31(38) :383001, 2019.

- H. Kim, A. Palacio-Morales, T. Posske, L. Rózsa, K. Palotás, L. Szunyogh, M. Thorwart, et R. Wiesendanger. Toward tailoring Majorana bound states in artificially constructed magnetic atom chains on elemental superconductors. *Science Advances*, 4(5), 2018a.
- K.-W. Kim, K.-W. Moon, N. Kerber, J. Nothhelfer, et K. Everschor-Sitte. Asymmetric skyrmion hall effect in systems with a hybrid Dzyaloshinskii-Moriya interaction. *Phys. Rev. B*, 97 : 224427, 2018b.
- N. S. Kiselev, A. N. Bogdanov, R. Schäfer, et U. K. Rößler. Chiral skyrmions in thin magnetic films : new objects for magnetic storage technologies? *Journal of Physics D : Applied Physics*, 44(39) :392001, 2011.
- A. Y. Kitaev. Unpaired Majorana fermions in quantum wires. *Physics-Uspekhi*, 44(10S) :131–136, 2001.
- A. Y. Kitaev. Fault-tolerant quantum computation by anyons. *Annals of Physics*, 303(1) :2 – 30, 2003.
- A. Y. Kitaev. Anyons in an exactly solved model and beyond. *Annals of Physics*, 321(1) :2 – 111, 2006. January Special Issue.
- A. Y. Kitaev. A simple model of quantum holography. Conférence donnée le 7 Avril à l’institut Kavli de Physique Théorique, Université de Californie à Santa Barbara. [Hyperlien](#), 2015.
- A. Y. Kitaev et J. Preskill. Topological entanglement entropy. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :110404, 2006.
- J. Klinovaja et D. Loss. Giant spin-orbit interaction due to rotating magnetic fields in graphene nanoribbons. *Phys. Rev. X*, 3 :011008, 2013.
- J. Klinovaja, P. Stano, A. Yazdani, et D. Loss. Topological superconductivity and Majorana fermions in RKKY systems. *Phys. Rev. Lett.*, 111 :186805, 2013.
- W. Kohn et J. M. Luttinger. New mechanism for superconductivity. *Phys. Rev. Lett.*, 15 :524–526, 1965.
- S. Komineas. Magnetic materials : domain walls, vortices and bubbles. Notes de cours. Département de Mathématiques Appliquées, Université de Crète. [Hyperlien](#), 2012.
- P. Kotetes. Topological superconductivity in Rashba semiconductors without a Zeeman field. *Phys. Rev. B*, 92 :014514, 2015.
- A. Kubetzka, J. M. Bürger, R. Wiesendanger, et K. von Bergmann. Towards skyrmion-superconductor hybrid systems. *Phys. Rev. Materials*, 4 :081401, 2020.
- V. M. Kuchkin et N. S. Kiselev. Turning a chiral skyrmion inside out. *Phys. Rev. B*, 101 :064408, 2020.

- F. Kuemmeth, S. Ilani, D. C. Ralph, et P. L. McEuen. Coupling of spin and orbital motion of electrons in carbon nanotubes. *Nature*, 452(7186) :448–452, 2008.
- J. Langbehn, Y. Peng, L. Trifunovic, F. von Oppen, et P. W. Brouwer. Reflection-symmetric second-order topological insulators and superconductors. *Phys. Rev. Lett.*, 119 :246401, 2017.
- A. I. Larkin et Y. N. Ovchinnikov. Nonuniform state of superconductors. *Sov. Phys. JETP*, 20 : 762, 1964.
- K. T. Law, P. A. Lee, et T. K. Ng. Majorana fermion induced resonant Andreev reflection. *Phys. Rev. Lett.*, 103 :237001, 2009.
- P. A. Lee. Spontaneous vortex formation and Majorana zero mode in iron-based superconductors. *Journal Club for Condensed Matter Physics*, 2018.
- A. O. Leonov et M. Mostovoy. Multiply periodic states and isolated skyrmions in an anisotropic frustrated magnet. *Nature Communications*, 6(1) :8275, 2015.
- J. Li, T. Neupert, Z. Wang, A. H. MacDonald, A. Yazdani, et B. A. Bernevig. Two-dimensional chiral topological superconductivity in shiba lattices. *Nature Communications*, 7(1) :12297, 2016.
- J. Li, S. Jeon, Y. Xie, A. Yazdani, et B. A. Bernevig. Majorana spin in magnetic atomic chain systems. *Phys. Rev. B*, 97 :125119, 2018.
- E. M. Lifshitz. On the theory of phase transitions of the second order. *Journal of Physics*, 6(1-2), 1942.
- J. Linder et J. W. A. Robinson. Superconducting spintronics. *Nature Physics*, 11(4) :307–315, 2015.
- C.-X. Liu, J. D. Sau, T. D. Stanescu, et S. Das Sarma. Andreev bound states versus Majorana bound states in quantum dot-nanowire-superconductor hybrid structures : Trivial versus topological zero-bias conductance peaks. *Phys. Rev. B*, 96 :075161, 2017.
- J. Liu, A. C. Potter, K. T. Law, et P. A. Lee. Zero-bias peaks in the tunneling conductance of spin-orbit-coupled superconducting wires with and without majorana end-states. *Phys. Rev. Lett.*, 109 :267002, 2012.
- Q. Liu, C. Chen, T. Zhang, R. Peng, Y.-J. Yan, C.-H.-P. Wen, X. Lou, Y.-L. Huang, J.-P. Tian, X.-L. Dong, G.-W. Wang, W.-C. Bao, Q.-H. Wang, Z.-P. Yin, Z.-X. Zhao, et D.-L. Feng. Robust and clean Majorana zero mode in the vortex core of high-temperature superconductor (Li_{0.84}Fe_{0.16})OHFeSe. *Phys. Rev. X*, 8 :041056, 2018.

- Y. Liu, S. Vaitiekėnas, S. Martí-Sánchez, C. Koch, S. Hart, Z. Cui, T. Kanne, S. A. Khan, R. Tanta, S. Upadhyay, M. E. Cachaza, C. M. Marcus, J. Arbiol, K. A. Moler, et P. Krogstrup. Semiconductor–ferromagnetic insulator–superconductor nanowires : Stray field and exchange field. *Nano Letters*, 20(1) :456–462, 2020. PMID : 31769993.
- V. Lohani, C. Hickey, J. Masell, et A. Rosch. Quantum skyrmions in frustrated ferromagnets. *Phys. Rev. X*, 9 :041063, 2019.
- F. London et H. London. The electromagnetic equations of the supraconductor. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A - Mathematical and Physical Sciences*, 149(866) :71–88, 1935.
- R. M. Lutchyn, J. D. Sau, et S. Das Sarma. Majorana fermions and a topological phase transition in semiconductor-superconductor heterostructures. *Phys. Rev. Lett.*, 105(7) :077001, 2010.
- R. M. Lutchyn, E. P. A. M. Bakkers, L. P. Kouwenhoven, P. Krogstrup, C. M. Marcus, et Y. Oreg. Majorana zero modes in superconductor-semiconductor heterostructures. *Nature Reviews Materials*, 3(5) :52–68, 2018.
- T. Machida, Y. Sun, S. Pyon, S. Takeda, Y. Kohsaka, T. Hanaguri, T. Sasagawa, et T. Tamegai. Zero-energy vortex bound state in the superconducting topological surface state of Fe(Se, Te). *Nature Materials*, 18(8) :811–815, 2019.
- A. P. Mackenzie, T. Scaffidi, C. W. Hicks, et Y. Maeno. Even odder after twenty-three years : the superconducting order parameter puzzle of Sr_2RuO_4 . *npj Quantum Materials*, 2(1) :40, 2017.
- M. Maggiore. *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. Oxford University Press, 1ère édition, 2005.
- G. D. Mahan. *Many-Particle Physics*. Plenum Press, 3ème édition, 2000. 1ère édition, 1981.
- E. Majorana. Teoria simmetrica dell’elettrone e del positrone. *Il Nuovo Cimento (1924-1942)*, 14 (4) :171, 1937.
- A. P. Malozemoff et J. C. Slonczewski. *Magnetic domain walls in bubble materials*. Academic Press, 1979.
- P. Marra et M. Nitta. Topologically nontrivial Andreev bound states. *Phys. Rev. B*, 100 :220502, 2019.
- E. Mascot, S. Cocklin, S. Rachel, et D. K. Morr. Dimensional tuning of majorana fermions and real space counting of the chern number. *Phys. Rev. B*, 100 :184510, 2019.
- A. Matos-Abiague, J. Shabani, A. D. Kent, G. L. Fatin, B. Scharf, et I. Žutić. Tunable magnetic textures : From Majorana bound states to braiding. *Solid State Communications*, 262 :1 – 6, 2017.

- M. McGinley et N. R. Cooper. Fragility of time-reversal symmetry protected topological phases. *Nature Physics*, 2020.
- W. Meissner et R. Ochsenfeld. Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit. *Naturwissenschaften*, 21(44) :787–788, 1933.
- A. Melo, S. Rubbert, et A. R. Akhmerov. Supercurrent-induced Majorana bound states in a planar geometry. *SciPost Phys.*, 7 :39, 2019.
- G. C. Ménard, S. Guissart, C. Brun, S. Pons, V. S. Stolyarov, F. Debontridder, M. V. Leclerc, E. Janod, L. Cario, D. Roditchev, P. Simon, et T. Cren. Coherent long-range magnetic bound states in a superconductor. *Nature Physics*, 11(12) :1013–1016, 2015.
- G. C. Ménard, S. Guissart, C. Brun, R. T. Leriche, M. Trif, F. Debontridder, D. Demaille, D. Roditchev, P. Simon, et T. Cren. Two-dimensional topological superconductivity in pb/co/si(111). *Nature Communications*, 8(1) :2040, 2017.
- G. C. Ménard, A. Mesaros, C. Brun, F. Debontridder, D. Roditchev, P. Simon, et T. Cren. Isolated pairs of Majorana zero modes in a disordered superconducting lead monolayer. *Nature Communications*, 10(1) :2587, 2019.
- R. M. Menezes, J. F. S. Neto, C. C. d. S. Silva, et M. V. Milošević. Manipulation of magnetic skyrmions by superconducting vortices in ferromagnet-superconductor heterostructures. *Phys. Rev. B*, 100 :014431, 2019.
- N. D. Mermin. The topological theory of defects in ordered media. *Rev. Mod. Phys.*, 51 :591–648, 1979.
- R. Meservey et P. M. Tedrow. Properties of very thin aluminum films. *Journal of Applied Physics*, 42(1) :51–53, 1971.
- R. Meservey et P. M. Tedrow. Spin-polarized electron tunneling. *Physics Reports*, 238(4) :173 – 243, 1994.
- S. Meyer, M. Perini, S. von Malottki, A. Kubetzka, R. Wiesendanger, K. von Bergmann, et S. Heinze. Isolated zero field sub-10 nm skyrmions in ultrathin Co films. *Nature Communications*, 10(1) :3823, 2019.
- V. P. Mineev et K. V. Samokhin. Helical phases in superconductors. *Sov. Phys. JETP*, 78 :401, 1994.
- V. P. Mineev et K. V. Samokhin. *Introduction to unconventional superconductivity*. Gordon and Breach, 1999.

- N. Mohanta, T. Zhou, J.-W. Xu, J. E. Han, A. D. Kent, J. Shabani, I. Žutić, et A. Matos-Abiague. Electrical control of Majorana bound states using magnetic stripes. *Phys. Rev. Applied*, 12 : 034048, 2019.
- G. Montambaux. Physique mésoscopique et conduction quantique. notes de cours de l'École Polytechnique, 2016.
- E. W. Montroll. Dynamics of a square lattice i. frequency spectrum. *The Journal of Chemical Physics*, 15(8) :575–591, 1947.
- C. Mora. *Gaz de bosons et de fermions condensés : phases de Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov et quasicondensats*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 2004.
- T. Moriya. Anisotropic superexchange interaction and weak ferromagnetism. *Phys. Rev.*, 120 : 91–98, 1960.
- M. Mostovoy. Skyrmions in achiral magnets with competing interactions. In C. Back, V. Cros, H. Ebert, K. Everschor-Sitte, A. Fert, M. Garst, T. Ma, S. Mankovsky, T. L. Monchesky, M. Mostovoy, N. Nagaosa, S. S. P. Parkin, C. Pfleiderer, N. Reyren, A. Rosch, Y. Taguchi, Y. Tokura, K. von Bergmann, et J. Zang, editors, *The 2020 Skyrmionics Roadmap*, pages 6–7. Journal of Physics D : Applied Physics, 2020.
- V. Mourik, K. Zuo, S. M. Frolov, S. R. Plissard, E. P. A. M. Bakkers, et L. P. Kouwenhoven. Signatures of Majorana fermions in hybrid superconductor-semiconductor nanowire devices. *Science*, 336(6084) :1003–1007, 2012.
- G. Ménard. *2D superconductors perturbed by local magnetism : from Yu-Shiba-Rusinov bound states to Majorana quasiparticles*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2016.
- S. Nadj-Perge, I. K. Drozdov, B. A. Bernevig, et A. Yazdani. Proposal for realizing Majorana fermions in chains of magnetic atoms on a superconductor. *Phys. Rev. B*, 88 :020407(R), 2013.
- S. Nadj-Perge, I. K. Drozdov, J. Li, H. Chen, S. Jeon, J. Seo, A. H. MacDonald, B. A. Bernevig, et A. Yazdani. Observation of Majorana fermions in ferromagnetic atomic chains on a superconductor. *Science*, 346(6209) :602–607, 2014.
- N. Nagaosa et Y. Tokura. Emergent electromagnetism in solids. *Physica Scripta*, T146 :014020, 2012.
- N. Nagaosa et Y. Tokura. Topological properties and dynamics of magnetic skyrmions. *Nature Nanotechnology*, 8 :899, 2013.
- S. Nakosai, Y. Tanaka, et N. Nagaosa. Two-dimensional p -wave superconducting states with magnetic moments on a conventional s -wave superconductor. *Phys. Rev. B*, 88 :180503(R), 2013.

- A. K. Nayak, V. Kumar, T. Ma, P. Werner, E. Pippel, R. Sahoo, F. Damay, U. K. Rößler, C. Felser, et S. S. P. Parkin. Magnetic antiskyrmions above room temperature in tetragonal Heusler materials. *Nature*, 548(7669) :561–566, 2017.
- C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman, et S. Das Sarma. Non-abelian anyons and topological quantum computation. *Rev. Mod. Phys.*, 80 :1083–1159, 2008.
- T. Neupert et F. Schindler. Topological crystalline insulators. In D. Bercioux, J. Cayssol, M. G. Vergniory, et M. Reyes Calvo, editors, *Topological Matter : Lectures from the Topological Matter School 2017*, pages 31–61. Springer International Publishing, 2018.
- Q. Niu, D. J. Thouless, et Y.-S. Wu. Quantized hall conductance as a topological invariant. *Phys. Rev. B*, 31 :3372–3377, 1985.
- F. S. Nogueira, I. M. Eremin, F. Katmis, J. S. Moodera, J. van den Brink, et V. P. Kravchuk. Fluctuation-induced Néel and Bloch skyrmions at topological insulator surfaces. *Phys. Rev. B*, 98 :060401, 2018.
- H. Ochoa et Y. Tserkovnyak. Quantum skyrmionics. *International Journal of Modern Physics B*, 33(21) :1930005, 2019.
- L. A. B. Olde Olthof, X. Montiel, J. W. A. Robinson, et A. I. Buzdin. Superconducting vortices generated via spin-orbit coupling at superconductor/ferromagnet interfaces. *Phys. Rev. B*, 100 :220505, 2019.
- Y. Oreg, G. Refael, et F. von Oppen. Helical liquids and Majorana bound states in quantum wires. *Phys. Rev. Lett.*, 105(17) :177002, 2010.
- R. Ozawa, S. Hayami, et Y. Motome. Zero-field skyrmions with a high topological number in itinerant magnets. *Phys. Rev. Lett.*, 118 :147205, 2017.
- A. Palacio-Morales, A. Kubetzka, K. von Bergmann, et R. Wiesendanger. Coupling of coexisting noncollinear spin states in the fe monolayer on re(0001). *Nano Letters*, 16(10) :6252–6256, 2016. PMID : 27632358.
- A. Palacio-Morales, E. Mascot, S. Cocklin, H. Kim, S. Rachel, D. K. Morr, et R. Wiesendanger. Atomic-scale interface engineering of Majorana edge modes in a 2d magnet-superconductor hybrid system. *Science Advances*, 5(7), 2019.
- R. Pawlak, M. Kisiel, J. Klinovaja, T. Meier, S. Kawai, T. Glatzel, D. Loss, et E. Meyer. Probing atomic structure and Majorana wavefunctions in mono-atomic Fe chains on superconducting Pb surface. *npj Quantum Information*, 2(1) :16035, 2016.
- R. Pawlak, S. Hoffman, J. Klinovaja, D. Loss, et E. Meyer. Majorana fermions in magnetic chains. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 107 :1 – 19, 2019.

- J. Pearl. Current distribution in superconducting films carrying quantized fluxoids. *Applied Physics Letters*, 5(4) :65–66, 1964.
- S. S. Pershoguba, K. Björnson, A. M. Black-Schaffer, et A. V. Balatsky. Currents induced by magnetic impurities in superconductors with spin-orbit coupling. *Phys. Rev. Lett.*, 115 : 116602, 2015.
- F. Pientka, L. I. Glazman, et F. von Oppen. Topological superconducting phase in helical Shiba chains. *Phys. Rev. B*, 88 :155420, 2013.
- A. C. Potter et P. A. Lee. Engineering a $p + ip$ superconductor : Comparison of topological insulator and rashba spin-orbit-coupled materials. *Phys. Rev. B*, 83 :184520, 2011.
- K. Pöyhönen, I. Sahlberg, A. Westström, et T. Ojanen. Amorphous topological superconductivity in a shiba glass. *Nature Communications*, 9(1) :2103, 2018.
- E. Prada, P. San-Jose, M. W. A. de Moor, A. Geresdi, E. J. H. Lee, J. Klinovaja, D. Loss, J. Nygård, R. Aguado, et L. P. Kouwenhoven. From Andreev to Majorana bound states in hybrid superconductor-semiconductor nanowires, 2019.
- C. Psaroudaki, S. Hoffman, J. Klinovaja, et D. Loss. Quantum dynamics of skyrmions in chiral magnets. *Phys. Rev. X*, 7 :041045, 2017.
- A. Pustogow, Y. Luo, A. Chronister, Y.-S. Su, D. A. Sokolov, F. Jerzembeck, A. P. Mackenzie, C. W. Hicks, N. Kikugawa, S. Raghu, E. D. Bauer, et S. E. Brown. Constraints on the superconducting order parameter in Sr_2RuO_4 from oxygen-17 nuclear magnetic resonance. *Nature*, 574(7776) :72–75, 2019.
- X.-L. Qi, T. L. Hughes, et S.-C. Zhang. Chiral topological superconductor from the quantum Hall state. *Phys. Rev. B*, 82 :184516, 2010.
- R. Qin et Y. Wang. Skyrmion-based magnetic traps for ultracold atoms. *Phys. Rev. A*, 101 : 053428, 2020.
- R. Queiroz et A. Stern. Symmetry indicators for topological superconductors. *Journal Club for Condensed Matter Physics*, 2020.
- R. Rajaraman. *Solitons and instantons*. North-Holland, 1987. 1ère éd. : 1982.
- N. Read et D. Green. Paired states of fermions in two dimensions with breaking of parity and time-reversal symmetries and the fractional quantum hall effect. *Phys. Rev. B*, 61 : 10267–10297, 2000.
- C. Reeg, D. Loss, et J. Klinovaja. Finite-size effects in a nanowire strongly coupled to a thin superconducting shell. *Phys. Rev. B*, 96 :125426, 2017.

- C. Reeg, O. Dmytruk, D. Chevallier, D. Loss, et J. Klinovaja. Zero-energy andreev bound states from quantum dots in proximitized rashba nanowires. *Phys. Rev. B*, 98 :245407, 2018a.
- C. Reeg, D. Loss, et J. Klinovaja. Metallization of a rashba wire by a superconducting layer in the strong-proximity regime. *Phys. Rev. B*, 97 :165425, 2018b.
- H. Ren, F. Pientka, S. Hart, A. T. Pierce, M. Kosowsky, L. Lunczer, R. Schlereth, B. Scharf, E. M. Hankiewicz, L. W. Molenkamp, B. I. Halperin, et A. Yacoby. Topological superconductivity in a phase-controlled josephson junction. *Nature*, 569(7754) :93–98, 2019.
- R. Resta. Geometry and topology in electronic structure theory. Notes de cours. [Hyperlien](#), 2020.
- S. Rex, I. V. Gornyi, et A. D. Mirlin. Majorana bound states in magnetic skyrmions imposed onto a superconductor. *Phys. Rev. B*, 100 :064504, 2019.
- S. Rohart et A. Thiaville. Skyrmion confinement in ultrathin film nanostructures in the presence of Dzyaloshinskii-Moriya interaction. *Phys. Rev. B*, 88 :184422, 2013.
- H. S. Røising. Topological superconductivity and Majorana fermions. Thèse de Master, Université d’Oslo, 2016.
- H. S. Røising, T. Scaffidi, F. Flicker, G. F. Lange, et S. H. Simon. Superconducting order of Sr_2RuO_4 from a three-dimensional microscopic model. *Phys. Rev. Research*, 1 :033108, 2019.
- L. P. Rokhinson, X. Liu, et J. K. Furdyna. The fractional a.c. Josephson effect in a semiconductor–superconductor nanowire as a signature of Majorana particles. *Nature Physics*, 8(11) :795–799, 2012.
- A. T. Rømer, D. D. Scherer, I. M. Eremin, P. J. Hirschfeld, et B. M. Andersen. Knight shift and leading superconducting instability from spin fluctuations in Sr_2RuO_4 . *Phys. Rev. Lett.*, 123 : 247001, 2019.
- A. Romito, J. Alicea, G. Refael, et F. von Oppen. Manipulating Majorana fermions using supercurrents. *Phys. Rev. B*, 85 :020502(R), 2012.
- L. Rózsa, J. Hagemeister, E. Y. Vedmedenko, et R. Wiesendanger. Localized spin waves in isolated $k\pi$ skyrmions. *Phys. Rev. B*, 98 :224426, 2018.
- M. Ruby, F. Pientka, Y. Peng, F. von Oppen, B. W. Heinrich, et K. J. Franke. End states and subgap structure in proximity-coupled chains of magnetic adatoms. *Phys. Rev. Lett.*, 115 : 197204, 2015.
- M. Ruby, Y. Peng, F. von Oppen, B. W. Heinrich, et K. J. Franke. Orbital picture of Yu-Shiba-Rusinov multiplets. *Phys. Rev. Lett.*, 117 :186801, 2016.

- M. Ruby, B. W. Heinrich, Y. Peng, F. von Oppen, et K. J. Franke. Exploring a proximity-coupled Co chain on Pb(110) as a possible Majorana platform. *Nano Letters*, 17(7) :4473–4477, 2017. PMID : 28640633.
- M. Ruby, B. W. Heinrich, Y. Peng, F. von Oppen, et K. J. Franke. Wave-function hybridization in Yu-Shiba-Rusinov dimers. *Phys. Rev. Lett.*, 120 :156803, 2018.
- A. I. Rusinov. Superconductivity near a Paramagnetic Impurity. *Soviet JETP Letters*, 9 :85, 1969.
- A. Samoilenka et E. Babaev. Spiral magnetic field and vortex clustering in noncentrosymmetric superconductors. *arXiv e-prints*, art. arXiv :2003.10918, 2020.
- T. Scaffidi. *Weak-Coupling Theory of Topological Superconductivity. The Case of Strontium Ruthenate*. Springer Theses. Springer International Publishing, 2017.
- F. Schindler, A. M. Cook, M. G. Vergniory, Z. Wang, S. S. P. Parkin, B. A. Bernevig, et T. Neupert. Higher-order topological insulators. *Science Advances*, 4(6), 2018.
- A. Schlenhoff, S. Kovarik, S. Krause, et R. Wiesendanger. Real-space imaging of atomic-scale spin textures at nanometer distances. *Applied Physics Letters*, 116(12) :122406, 2020.
- L. Schneider, S. Brinker, M. Steinbrecher, J. Hermenau, T. Posske, M. dos Santos Dias, S. Lounis, R. Wiesendanger, et J. Wiebe. Controlling in-gap end states by linking nonmagnetic atoms and artificially-constructed spin chains on superconductors. *arXiv e-prints*, art. arXiv :2002.12294, 2020.
- S. Seki, X. Z. Yu, S. Ishiwata, et Y. Tokura. Observation of skyrmions in a multiferroic material. *Science*, 336(6078) :198–201, 2012.
- I. A. Sergienko et S. H. Curnoe. Order parameter in superconductors with nondegenerate bands. *Phys. Rev. B*, 70 :214510, 2004.
- R. Sharma, S. D. Edkins, Z. Wang, A. Kostin, C. Sow, Y. Maeno, A. P. Mackenzie, J. C. S. Davis, et V. Madhavan. Momentum-resolved superconducting energy gaps of Sr₂RuO₄ from quasiparticle interference imaging. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 117(10) :5222–5227, 2020.
- H. Shiba. Classical Spins in Superconductors. *Progress of Theoretical Physics*, 40(3) :435–451, 1968.
- M. Sigrist. Introduction to unconventional superconductivity. *AIP Conference Proceedings*, 789(1) :165–243, 2005.

- M. Smidman, M. B. Salamon, H. Q. Yuan, et D. F. Agterberg. Superconductivity and spin-orbit coupling in non-centrosymmetric materials : a review. *Reports on Progress in Physics*, 80(3) : 036501, 2017.
- Z. Song, Z. Fang, et C. Fang. $(d - 2)$ -dimensional edge states of rotation symmetry protected topological states. *Phys. Rev. Lett.*, 119 :246402, 2017.
- O. M. Sotnikov, V. V. Mazurenko, J. Colbois, F. Mila, M. I. Katsnelson, et E. A. Stepanov. Quantum skyrmions. *arXiv e-prints*, art. arXiv :2004.13526, 2020.
- G. A. Steele, F. Pei, E. A. Laird, J. M. Jol, H. B. Meerwaldt, et L. P. Kouwenhoven. Large spin-orbit coupling in carbon nanotubes. *Nature Communications*, 4(1) :1573, 2013.
- K. Steinberg, M. Scheffler, et M. Dressel. Quasiparticle response of superconducting aluminum to electromagnetic radiation. *Phys. Rev. B*, 77 :214517, 2008.
- M. Steinbrecher, R. Rausch, K. T. That, J. Hermenau, A. A. Khajetoorians, M. Potthoff, R. Wiesendanger, et J. Wiebe. Non-collinear spin states in bottom-up fabricated atomic chains. *Nature Communications*, 9(1) :2853, 2018.
- D. Sticlet, C. Bena, et P. Simon. Josephson effect in superconducting wires supporting multiple Majorana edge states. *Phys. Rev. B*, 87 :104509, 2013.
- H. Suderow, I. Guillamón, J. G. Rodrigo, et S. Vieira. Imaging superconducting vortex cores and lattices with a scanning tunneling microscope. *Superconductor Science and Technology*, 27 (6) :063001, 2014.
- Y. Takada. Plasmon mechanism of superconductivity in the multivalley electron gas. *Journal of the Physical Society of Japan*, 61(1) :238, 1992.
- S. Tewari et J. D. Sau. Topological invariants for spin-orbit coupled superconductor nanowires. *Phys. Rev. Lett.*, 109 :150408, 2012.
- A. A. Thiele. Steady-state motion of magnetic domains. *Phys. Rev. Lett.*, 30 :230–233, 1973.
- D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, et M. den Nijs. Quantized hall conductance in a two-dimensional periodic potential. *Phys. Rev. Lett.*, 49 :405–408, 1982.
- C. Timm. Theory of magnetism. Notes de cours. International Max Planck Research School for Dynamical Processes in Atoms, Molecules and Solids 2009-2010. [Hyperlien](#), 2015.
- M. Tinkham. *Introduction to superconductivity*. Dover Publications, Inc., 2ème édition, 1996. 1ère édition McGraw-Hill, 1975.
- M. Trif et P. Simon. Braiding of Majorana fermions in a cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 122 :236803, 2019.

- M. Trif et Y. Tserkovnyak. Resonantly tunable majorana polariton in a microwave cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 109 :257002, 2012.
- D. C. Tsui, H. L. Stormer, et A. C. Gossard. Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit. *Phys. Rev. Lett.*, 48 :1559–1562, 1982.
- S. Vaitiekėnas, Y. Liu, P. Krogstrup, et C. M. Marcus. Zero-field Topological Superconductivity in Ferromagnetic Hybrid Nanowires. *arXiv e-prints*, art. arXiv :2004.02226, 2020.
- S. Vaitiekėnas, G. W. Winkler, B. van Heck, T. Karzig, M.-T. Deng, K. Flensberg, L. I. Glazman, C. Nayak, P. Krogstrup, R. M. Lutchyn, et C. M. Marcus. Flux-induced topological superconductivity in full-shell nanowires. *Science*, 367(6485), 2020.
- M. M. Vazifeh et M. Franz. Self-organized topological state with Majorana fermions. *Phys. Rev. Lett.*, 111 :206802, 2013.
- G. E. Volovik. Linear momentum in ferromagnets. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, 20 (7) :L83–L87, 1987.
- K. von Klitzing, G. Dorda, et M. Pepper. New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized hall resistance. *Phys. Rev. Lett.*, 45 :494–497, 1980.
- A. Vuik, D. Eeltink, A. R. Akhmerov, et M. Wimmer. Effects of the electrostatic environment on the majorana nanowire devices. *New Journal of Physics*, 18(3) :033013, 2016.
- D. Wang, L. Kong, P. Fan, H. Chen, S. Zhu, W. Liu, L. Cao, Y. Sun, S. Du, J. Schneeloch, R. Zhong, G. Gu, L. Fu, H. Ding, et H.-J. Gao. Evidence for Majorana bound states in an iron-based superconductor. *Science*, 362(6412) :333–335, 2018.
- Z. Wang, J. O. Rodriguez, L. Jiao, S. Howard, M. Graham, G. D. Gu, T. L. Hughes, D. K. Morr, et V. Madhavan. Evidence for dispersing 1D Majorana channels in an iron-based superconductor. *Science*, 367(6473) :104–108, 2020.
- J. S. White, I. Levatić, A. A. Omrani, N. Egetenmeyer, K. Prša, I. Živković, J. L. Gavilano, J. Kohlbrecher, M. Bartkowiak, H. Berger, et H. M. Rønnow. Electric field control of the skyrmion lattice in Cu_2OSeO_3 . *Journal of Physics : Condensed Matter*, 24(43) :432201, 2012.
- R. Wiesendanger. Spin mapping at the nanoscale and atomic scale. *Rev. Mod. Phys.*, 81 : 1495–1550, 2009.
- M. Wimmer, A. R. Akhmerov, J. P. Dahlhaus, et C. W. J. Beenakker. Quantum point contact as a probe of a topological superconductor. *New Journal of Physics*, 13(5) :053016, 2011.
- C. L. M. Wong, J. Liu, K. T. Law, et P. A. Lee. Majorana flat bands and unidirectional Majorana edge states in gapless topological superconductors. *Phys. Rev. B*, 88 :060504, 2013.

- F. Wu et I. Martin. Majorana Kramers pair in a nematic vortex. *Phys. Rev. B*, 95 :224503, 2017.
- A. Yagil, A. Almoalem, A. Soumyanarayanan, A. K. C. Tan, M. Raju, C. Panagopoulos, et O. M. Auslaender. Stray field signatures of néel textured skyrmions in ir/fe/co/pt multilayer films. *Applied Physics Letters*, 112(19) :192403, 2018.
- G. Yang, P. Stano, J. Klinovaja, et D. Loss. Majorana bound states in magnetic skyrmions. *Phys. Rev. B*, 93 :224505, 2016.
- J.-X. Yin, Z. Wu, J.-H. Wang, Z.-Y. Ye, J. Gong, X.-Y. Hou, L. Shan, A. Li, X.-J. Liang, X.-X. Wu, J. Li, C.-S. Ting, Z.-Q. Wang, J.-P. Hu, P.-H. Hor, H. Ding, et S. H. Pan. Observation of a robust zero-energy bound state in iron-based superconductor Fe(Te, Se). *Nature Physics*, 11 (7) :543–546, 2015.
- L. Yu. Bound state in superconductors with paramagnetic impurities. *Acta Physica Sinica*, 114 (1) :75–91, 1965.
- X. Yu, M. Mostovoy, Y. Tokunaga, W. Zhang, K. Kimoto, Y. Matsui, Y. Kaneko, N. Nagaosa, et Y. Tokura. Magnetic stripes and skyrmions with helicity reversals. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 109(23) :8856–8860, 2012.
- M. Zaletel. Fragility in time-reversal protected topological phases. *Journal Club for Condensed Matter Physics*, 2020.
- J. Zang, M. Mostovoy, J. H. Han, et N. Nagaosa. Dynamics of skyrmion crystals in metallic thin films. *Phys. Rev. Lett.*, 107 :136804, 2011.
- V. Zapf, M. Jaime, et C. D. Batista. Bose-Einstein condensation in quantum magnets. *Review of Modern Physics*, 86(2) :563–614, 2014.
- H. Zhang, C.-X. Liu, S. Gazibegovic, D. Xu, J. A. Logan, G. Wang, N. van Loo, J. D. S. Bommer, M. W. A. de Moor, D. Car, R. L. M. Op het Veld, P. J. van Veldhoven, S. Koelling, M. A. Verheijen, M. Pendharkar, D. J. Pennachio, B. Shojaei, J. S. Lee, C. J. Palmstrøm, E. P. A. M. Bakkers, S. D. Sarma, et L. P. Kouwenhoven. Quantized Majorana conductance. *Nature*, 556 (7699) :74–79, 2018.
- S. Zhang et S. S.-L. Zhang. Generalization of the landau-lifshitz-gilbert equation for conducting ferromagnets. *Phys. Rev. Lett.*, 102 :086601, 2009.
- X. Zhang, Y. Zhou, K. M. Song, T.-E. Park, J. Xia, M. Ezawa, X. Liu, W. Zhao, G. Zhao, et S. Woo. Skyrmion-electronics : writing, deleting, reading and processing magnetic skyrmions toward spintronic applications. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 32(14) :143001, 2020.

BIBLIOGRAPHIE

- F. Zheng, H. Li, S. Wang, D. Song, C. Jin, W. Wei, A. Kovács, J. Zang, M. Tian, Y. Zhang, H. Du, et R. E. Dunin-Borkowski. Direct imaging of a zero-field target skyrmion and its polarity switch in a chiral magnetic nanodisk. *Phys. Rev. Lett.*, 119 :197205, 2017.
- M. E. Zhitomirsky et A. L. Chernyshev. Colloquium : Spontaneous magnon decays. *Rev. Mod. Phys.*, 85 :219–242, 2013.
- T. Zhou, N. Mohanta, J. E. Han, A. Matos-Abiague, et I. Žutić. Tunable magnetic textures in spin valves : From spintronics to Majorana bound states. *Phys. Rev. B*, 99 :134505, 2019.

Titre : Les textures magnétiques pour la supraconductivité topologique

Mots clés : supraconductivité, magnétisme, topologie, skyrmion magnétique, fermion de Majorana

Résumé : Dans le cadre des recherches sur la supraconductivité topologique et le fermion de Majorana, on s'intéresse à différents aspects de systèmes composés d'une texture magnétique d'une part et d'un supraconducteur conventionnel d'autre part. En particulier, en deux dimensions d'espace, on analyse la situation où les électrons du supraconducteur sont couplés à un skyrmion magnétique, une texture au cœur de nombreux développements récents en spintronique. Dans la lignée de travaux récents, on montre que cette texture permet de générer une phase topologique tout en affinant la compréhension de ses caractéristiques et en

analysant sa robustesse à certaines déformations géométriques. Ces résultats suggèrent de renforcer la compréhension de ces systèmes en analysant la question des effets orbitaux induits par le champ magnétique créé par le skyrmion. Même si la question initiale de la possible nucléation de vortex supraconducteur est restée sans réponse, on a confirmé la stabilité de la phase topologique aux effets orbitaux. Dans cette perspective, on s'intéresse finalement aux conséquences des excitations magnétiques sur les propriétés des excitations topologiques pour des systèmes magnétiques plus simples que les skyrmions.

Title: Magnetic textures for topological superconductivity

Keywords: superconductivity, magnetism, topology, magnetic skyrmion, Majorana fermion

Abstract: In the context of the search for topological superconductivity and the Majorana fermion, we analyze several aspects of magnetic textures coupled to conventional superconductors. In particular, we focus on the case where the texture is a magnetic skyrmion which is by itself much studied in the field of spintronics. In the spirit of recent work, we show that this texture can generate a topological superconducting phase. We further investigate its properties and more particularly its stability with respect to

geometrical deformations. These results call for a deeper understanding of the physics of these systems. To that end, we next focus on the orbital effects induced by the skyrmion-generated magnetic field. Despite the fact that the original question of vortex nucleation remains unanswered, we show that the topological phase is stable upon coupling to the skyrmion's magnetic vector potential. Motivated by these results, we finally investigate the effects of magnetic excitations of simpler magnetic systems on the topological excitations.