



HAL
open science

Dynamique des structures assemblées - Amortissement non linéaire

Anthony Meurdefroid

► **To cite this version:**

Anthony Meurdefroid. Dynamique des structures assemblées - Amortissement non linéaire. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Université Paris-Saclay, 2020. Français. NNT : 2020UPAST029 . tel-03028262

HAL Id: tel-03028262

<https://theses.hal.science/tel-03028262v1>

Submitted on 27 Nov 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Dynamique des structures assemblées – Amortissement non-linéaire

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay

École doctorale n° 579, Sciences Mécaniques et
Énergétiques, Matériaux et Géosciences (SMEMaG)
Spécialité de doctorat : Mécanique des solides
Unité de recherche : Groupe ISAE, SUPMECA, Laboratoire QUARTZ,
93400, Saint-Ouen, France
Réfèrent : CentraleSupélec

**Thèse présentée et soutenue à St-Ouen, le 02 octobre 2020,
par**

Anthony MEURDEFROID

Composition du jury:

Charles PEZERAT Professeur, Université du Maine (LAUM)	Président
Étienne BALMES Professeur, École Nationale Supérieure des Arts et Métiers (PIMM)	Rapporteur & Examineur
Fabrice THOUVEREZ Professeur École Centrale de Lyon (LTDS)	Rapporteur & Examineur
François LOUF Maître de Conférences HDR, École Normale Supérieure de Paris-Saclay (LMT)	Examineur
Gaël CHEVALLIER Professeur des universités, Université de Franche-Comté (FEMTO-ST)	Directeur
Nicolas PEYRET Maître de conférences, Supméca (QUARTZ)	Coencadrant

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma reconnaissance à Charles Pézerat qui a accepté de présider ce jury de thèse, ainsi qu'à Étienne Balmes, François Louf et Fabrice Thouverez pour leur lecture attentive du manuscrit.

Il est difficile de savoir par où commencer : le chemin jusqu'à ces pages ne fut pas de tout repos. Des années d'efforts, de doutes, de récompenses et de camaraderies m'ont apporté le soulagement de voir ce manuscrit et sa soutenance associée prendre définitivement forme.

Je souhaite remercier tous ceux que j'ai côtoyés au « quotidien » :

- les collègues du laboratoire QUARTZ qui m'ont accueilli dans leurs locaux ;
- ceux du laboratoire FEMTO-ST qui en ont fait de même ;
- mes collègues enseignants qui ont beaucoup entendu parlé de cette thèse.

J'ai bien évidemment envie de remercier chaleureusement les deux personnes qui aussi bien en tant que professionnels qu'amis ont permis à cette thèse d'exister : Gaël Chevallier et Nicolas Peyret. Merci à vous deux pour votre confiance, travail, présence, soutien et amitié.

Enfin, je veux avoir une pensée à ma famille qui m'a soutenu et encouragé durant ces années de travail supplémentaire. Merci à toi ma conjointe d'avoir été aussi conciliante.

À ma maman.

Table des matières

Remerciements	i
Résumé	ix
Introduction	xi
1 Bibliographie	xii
Liste des abréviations, des sigles et des symboles	xiii
I Modélisation multi-échelles des structures assemblées	1
1 Positionnement de la problématique	2
1.1 Intérêt industriel	2
1.2 Amortissement dans les structures	3
1.3 Historique	3
2 Échelles de modélisation des structures assemblées	6
2.1 Échelle super-microscopique	7
2.1.1 Modélisation de l'interface	7
2.1.2 Modélisation des corps en présence	9
2.2 Échelle microscopique	10
2.2.1 Modélisation de l'interface	10
2.2.2 Modélisation des corps en présence	12
2.3 Échelle mésoscopique	12
2.3.1 Modélisation de l'interface	13
2.3.2 Modélisation des corps en présence	15
2.4 Échelle macroscopique	17
3 Changements d'échelles : la réduction de modèle	18
3.1 Passage de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique	18
3.2 Passage de l'échelle mésoscopique à l'échelle macroscopique	19
3.2.1 Généralités sur les méthodes de réduction linéaire	20
3.2.2 Modèles réduits	21
3.2.3 Méta-Modèles	22
4 Conclusion	23
5 Bibliographie du chapitre I	25
II Méthodes de résolution numérique des systèmes dynamiques non-linéaires	31
1 Introduction	33
1.1 Intérêt de la simulation numérique	33
1.2 Stratégie de résolution générale	33
2 Simulations numériques en dynamique des structures	34
2.1 Méthodes associées au régime transitoire	35
2.1.1 Méthodes du premier ordre	35
2.1.2 Newmark	36

2.2	Détermination de la réponse harmonique en régime permanent	38
2.3	Caractérisation harmonique du modèle de Dahl	41
2.3.1	Influence de ϕ et Q_{int} sur $ f $ et φ	41
2.3.2	Influence de ω et Q_{int} sur $ f $ et φ	42
2.3.3	Bilan	43
3	Résolution en régime permanent harmonique par la méthode de la balance harmonique	43
3.1	Méthodes de continuation	43
3.1.1	Continuation par pseudo-longueur d'arc	44
3.1.2	Continuation par la Méthode Asymptotique Numérique (MAN)	45
3.2	Réduction de modèles	47
3.2.1	Illustration	48
3.2.2	Recherche d'une direction de convergence	50
3.3	Résoudre $f(x)=0$	53
4	Conclusion	56
5	Bibliographie du chapitre II	58
III Approches modales pour les structures assemblées		61
1	Introduction	63
1.1	Problématique	63
1.2	Méthodes et problème traité	66
2	Les différentes résolutions temporelles et fréquentielles	66
2.1	Résolutions dans le domaine temporel – solveur ODE	66
2.1.1	Time-Domain Without Regularization (TDWoR)	67
2.1.2	Time-Domain With Regularization (TDWR)	68
2.2	Résolution dans le domaine fréquentiel – HBM	70
2.2.1	Frequency-Domain without regularization (FDWoR)	71
2.2.2	Frequency-Domain with regularization (FDWR)	72
3	Résultats et discussion	74
3.1	Fonction de réponse de fréquence – FRF	74
3.2	Pulsation de résonance ω_r	74
3.3	Facteur de qualité Q_r	76
3.4	Restoring force	76
3.5	Forces internes de Jenkins	78
3.6	Limites et convergence	79
4	Conclusion	80
5	Bibliographie du chapitre III	82
IV Méthodes de réduction de modèle		85
1	Introduction	86
2	Extension de la méthode PJSB : la base PJSBDE	86
3	Présentation des études de cas	89
3.1	Étude de cas 1 : système discret à 20 ddls	90
3.2	Étude de cas 2 : liaison élémentaire – modèle EF de la poutre ORION	90
3.3	Outils et synthèse	90
4	Évaluation des méthodes de réduction sur le banc 1	92
4.1	Troncature de la base modale	92
4.2	Géométrie du domaine « liaison »	93
4.2.1	Description de la simulation	93
4.2.2	Analyse du résultat	94
4.2.3	Bilan	96
4.3	Troncature de la PJSBDE	96

4.3.1	Les équations et l'algorithme	97
4.3.2	Résultats	98
4.3.3	Limites, bilan et améliorations	102
4.4	Conclusion	103
5	Évaluation des méthodes de réduction sur le banc 2	104
5.1	Étude du domaine « Liaison »	104
5.1.1	Variation du domaine « liaison »	105
5.1.2	Nombre d'éléments dans le domaine « liaison »	106
5.2	Troncature modale	108
6	Méta-modélisation	108
6.1	Construction de la PJSBDE	109
6.2	Construction de l'abaque lié au mode 1 de la PJSBDE	111
7	Conclusion	113
8	Bibliographie du chapitre IV	115
V	Algorithme de résolution : méthode du point fixe	117
1	Introduction	118
1.1	Décomposition du problème	118
1.2	Formulation AFT	118
1.3	Réduction de la partie linéaire : Craig-Bampton	119
2	Formulation générale de l'algorithme du point fixe	121
2.1	Formulation 1 naturelle	122
2.2	Formulation 2 contraire	124
2.3	Stabilité du schéma numérique	124
3	Relaxation dynamique	126
3.1	Paramètre de relaxation fixe	126
3.2	Relaxation dynamique : relaxation d'Aitken	126
4	Application à un système à 4 degrés de liberté	127
4.1	Évaluation de la stabilité	127
4.2	Implémentation de la relaxation dynamique	129
5	Conclusion et perspectives	131
6	Bibliographie du chapitre V	135
	Conclusion	137
	A Identification du modèle d'Iwan	141

Résumé

Cette thèse s'inscrit dans des travaux liés aux problématiques des structures assemblées. Après une analyse et une synthèse des différentes échelles de modélisation mises en jeu afin de déterminer l'amortissement dans les liaisons, le manuscrit met en évidence les changements d'échelles, soient les réductions de modèle. La résolution des problèmes de vibration non-linéaire mettent en jeu de nombreuses méthodes numériques. Le cadre de la thèse étant le régime permanent, l'équilibrage harmonique est la méthode clé, couplée à une résolution originale de type point fixe. En fonction du cas d'étude, trois pistes de résolution sont proposées. Si on connaît tout du comportement, l'étude de la structure complète se résume à la résolution d'un système différentiel. La question est « comment le résoudre de manière efficace ? » Une comparaison de quatre formulations différentes du même problème dans les domaines temporel et fréquentiel, avec ou sans régularisation des forces hystérétiques, permet d'apporter des réponses à cette question. Si cela n'est pas possible ou déraisonnable, il faut alors essayer de décomposer le problème. Une des solutions afin d'accélérer le processus est de réduire le modèle. Pour cela une nouvelle base de réduction de la partie non-linéaire est introduite. Sa construction prend appui sur un indicateur énergétique et son utilisation sur un abaque. Enfin, si la construction de cet abaque est impossible, il est alors nécessaire d'avoir un calcul complet avec générations séquentielles d'abaques dynamiques de la sous-structure. Cette méthodologie adaptative alterne les résolutions temporelle et fréquentielle respectivement sur les domaines non-linéaire et linéaire sans recours à une méthode incrémentale type AFT.

Mots clés — Vibrations non-linéaires, structures assemblées, amortissement, méthode d'équilibrage harmonique, réduction de modèles.

This thesis is part of work related to the problems of assembled structures. After an analysis and a synthesis of the different modeling scales involved in order to determine the damping in the joints, the manuscript highlights the scales changes, i.e. model reductions. Many numerical methods are used to solve nonlinear vibration problems. The framework of the thesis being steady-state vibrations, the *Harmonic Balance Method* is commonplace. Here it is coupled with an original fixed point algorithm. Depending on the case study, three resolution paths are proposed. If we know everything about the behavior, the study of the complete structure can be summarized to the resolution of a differential system. The question is "how to solve it efficiently?" A comparison of four different formulations of the same problem in the time and frequency domains, with or without the regularization of hysterical forces, provides answers to this question. If this is not possible or unreasonable, then one must try to decompose the problem. One way to speed up the process is to reduce the model. For this purpose a new basis for reducing the non-linear part is introduced. Its construction is based on an energy indicator and its use is based on a chart. Finally, if the construction of this chart is impossible, it is then necessary to have a complete computation with sequential generations of dynamic charts of the sub-structure. This adaptive methodology alternates the time and frequency resolutions respectively on non-linear and linear domains in a non incremental way.

Keywords — Non linear vibrations, jointed structures, vibration damping, Harmonic Balance Method, model order reduction.

Introduction

Ce mémoire de thèse traite de la dynamique des structures assemblées et tout particulièrement de l'amortissement non-linéaire généré par celles-ci. Un travail de réflexion sur une méthodologie de résolution des problèmes de dynamique des structures sous sollicitations harmoniques a donc été mis en place ; ces travaux se situent dans le prolongement de ceux effectués par Peyret [1] et Festjens [2] au laboratoire Quartz, mais également au laboratoire Femto-st dans le cadre de deux projets de recherche MAIAS (Maîtrise de l'Amortissement Induits dans les ASsemblages) et CLIMA (Conception de LIaisons Mécaniques Amortissantes).

La problématique des structures assemblées, qu'elles soient boulonnées ou rivetées, est en apparence simple. Ces structures sont les plus répandues et les plus étudiées. La fonction première d'un boulon ou d'un rivet est de réaliser le maintien en position d'une liaison encastrement. Par conséquent, il semble logique dans un premier temps de dimensionner ces assemblages par une approche statique. Néanmoins ce type de structure reste un sujet d'étude principalement de par l'amortissement important que génère ce type de liaison complète. Ce dernier est dû au micro-glissement des surfaces en contact dans l'interface. Le bon dimensionnement de ces liaisons est donc de nature à améliorer le comportement vibratoire des structures. Actuellement, les méthodes de calculs numériques permettent de déterminer assez précisément les modes et fréquence propres d'une structure, mais l'effet de l'amortissement, qui quantifie le niveau vibratoire et donc le risque de détérioration, est toujours déterminé par des essais expérimentaux coûteux.

La difficulté première dans la détermination de l'amortissement réside dans le caractère multi-échelles de l'analyse d'une liaison. Le chapitre I propose une classification des échelles ainsi que les modélisations mathématique de l'interface de contact et physique des corps en présence. Le passage d'une échelle à une autre, soit la réduction de modèle, est également introduit.

Dans le but de prédire le niveau vibratoire, des méthodes de résolution numérique sont utilisées. Le chapitre II présente l'intérêt de la simulation numérique afin de résoudre des problèmes multi-échelles possédant des non-linéarités de contact et de frottement. On différenciera dans ce chapitre, les méthodes associées à la détermination du comportement en régime transitoire, de celles associées à la détermination du niveau vibratoire en régime permanent harmonique. Un focus important sera fait sur l'Harmonic Balance Method qui sera à la base des méthodes numériques mises en place dans ce mémoire. Enfin une méthodologie de résolution afin de déterminer le niveau vibratoire d'une structure assemblée sous chargement harmonique sera proposée.

Le chapitre III définit un cadre d'étude autour d'un mode propre. Il sera supposé une faible non-linéarité et un découplage modal, cadre des thèses citées précédemment. Dans ces conditions, quatre méthodes de résolution, deux dans le domaine temporel (avec ou sans régularisation des non-linéarités) et deux dans le domaine fréquentiel (avec ou sans régularisation) seront mises en place et confrontées sur des indicateurs pertinents.

Si l'étude souhaitée ne peut se limiter à l'étude autour d'un mode propre, le cadre du chapitre III n'est plus valide. Par conséquent, le problème devenant d'une grande complexité, il est important de réduire la taille de celui-ci. Le chapitre IV présente la construction d'une base principale des sollicitations à caractère énergétique. Le processus de création de cette base privilégiée sera

soumis à deux études de cas. Les choix importants lors de la génération de cette base seront discutés. Enfin, un des apports de cette base est de permettre la mise en place d'une méta-modélisation par abaque sur une liaison proposée par Festjens [2].

Enfin une méthodologie de résolution d'un problème de structure assemblée est décrit dans le chapitre V. Cet algorithme prend notamment appui sur un algorithme de type point fixe couplé à une méthode de relaxation dynamique. Un exemple d'application sur un système à quelques degrés de liberté sera proposé avant d'ouvrir le débat à des structures à grand nombre de degrés de liberté générés par la méthode des éléments finis.

1 Bibliographie

- [1] Nicolas PEYRET : *Dissipation de l'énergie mécanique dans les assemblages : effet du frottement en sollicitation dynamique*. Thèse de doctorat, Université Paris-Est, 2012.
- [2] Hugo FESTJENS : *Contribution à la caractérisation et à la modélisation du comportement dynamique des structures assemblées*. Thèse de doctorat, Centrale, 2014.

Liste des abréviations, des sigles et des symboles

————— Abréviations —————			
AFT	A lternating F requency/ T ime method	\ddot{Q}	Champ des accélérations modales
CI	C onditions I nitiales	\underline{U}	Champ des déplacements réels
DAE	D ifferential A lgebraic E quation	\underline{Q}	Champ des déplacements modaux
ddl	D egré de liberté	\underline{F}	Force
DNS	D irect N umerical S imulation	\underline{f}	Force modale
DOF	D egrees O f F reedom	\underline{l}	Vecteur distributeur de forces non-linéaires
dof	D egree o f freedom	Φ	Champ des déplacements d'un mode
EF	É léments F inis	\underline{q}	Champ des déplacements modaux tronqué
FDWoR	F requency- D omain W ithout R egularization	$\underline{R}, \underline{r}$	Résidu
FDWR	F requency- D omain W ith R egularization	\underline{R}	Force de réaction (chapitre V)
FFT	F ast F ourier T ransform	\underline{U}	Champ des vitesses réelles
FRF	F requency R eponse F unction	\underline{V}	Vecteur d'état
HBM	H armonic B alance M ethod	$\underline{\dot{Q}}$	Champ des vitesses modales
IFFT	I nverse F ast F ourier T ransform	————— Exposants —————	
MAC	M odal A ssurance C riterion	,	Dérivée par rapport à une variable donnée
MAN	M éthode A symptotique N umérique	I	Restriction de l'opérateur à l'interface
MDOF	M odal D egrees O f F reedom	(j)	Itération j
MEF	M éthode des É léments F inis	J	Restriction de l'opérateur à la liaison
MMC	M écanique des M ilieux C ontinus	n	Opération de normalisation
ODE	O rdinary D ifferential E quation	opt	Optimal
PJSBDE	P rincipal J oint S train B asis D issipated E nergy	p ⁻	Perturbation négative
PJSB	P rincipal J oint S train B asis	p ⁺	Perturbation positive
ROM	R educed O rders M odel	*	Prédiction
RPH	R égime P ermanent H armonique	S	Restriction de l'opérateur à la structure
SOR	S uccessive O ver- R elaxation	T	Transposée
SVD	S ingular V alue D ecomposition	t	Troncature
TDWoR	T ime- D omain W ithout R egularization	F	Conditions aux limites en efforts
TDWR	T ime- D omain W ith R egularization	U	Conditions aux limites en déplacements
————— Matrices de dimension 1 —————		————— Mathématiques —————	
$\underline{\ddot{U}}$	Champ des accélérations réelles	\tilde{X}	Matrice condensée
		\bar{x}	Conjugué de x
		Δ	Variation, de type pas
		δ	Variation faible

\mathcal{F}	FFT	LI	Appartenant à l'interface et interne à un domaine
\mathcal{F}^{-1}	IFFT	LL	Interne à un domaine
$f(\cdot), g(\cdot)$	Fonctions génériques	m	Modal ou maître (associé à s esclave)
$\dot{f}(\cdot), \dot{g}(\cdot)$	Fonctions dérivées d'ordre 1 par rapport à t	n	Normal à une surface
$\ddot{f}(\cdot), \ddot{g}(\cdot)$	Fonctions dérivées d'ordre 2 par rapport à t	nl	Non-linéaire
$\underline{f}(\cdot)$	Fonction générique	p	Association à une approximation
\hat{x}	Transformée de Fourier de la fonction $x(t)$	r	Résonance
i	Unité imaginaire tel que $i^2 = -1$	rf	Restoring force
Π	Plan	S	Solide
$P(\cdot)$	Probabilité	s	Seuil ou esclave (associé à m maître)
$\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	Repère orthonormé	s	Seuil
Γ	Surface quelconque finie	sol	Solution
S	Solide	sup	Supérieur
t	Variable temps	t	Tangentiel, appartenant à une surface
Ω	Volume	t_1	Lié à la direction du vecteur \vec{t}_1
x, \underline{x}	Variables génériques	t_2	Lié à la direction du vecteur \vec{t}_2
V	Espace des fonctions continues et de carré sommable	u	Association à un déplacement
		v	Volumique
		0	Terme constant

————— **Matrices de dimension 2** —————

————— **Indices** —————

1, 2, ...	Nombre
a	Aspérité
b	Bâti, référence cinématique
c	Contact
CB	Craig-Bampton
ce	Critère énergétique
cj	Coulomb à une cellule j
ck, sk	Coefficients au rang k en cos et sin d'une série de Fourier
D	Dahl
d	Dissipation
e	Extérieur
eq	Équation
F	Frotteurs
f	Frontière, séparation numérique
fin	Conditions finales
G	Guyan
H	Harmonique de rang le plus élevé
H	Harmonique
h	Harmonique compris entre 1 et n_H
i	Interface, zone de contact
II	Appartenant à l'interface
IL	Interne à un domaine et appartenant à l'interface
inf	Inférieur
init	Conditions initiales
int	Interne
J	Domaine de la « liaison »
j, k	Indices quelconques

$\mathbf{A}, \dots, \mathbf{D}$	Matrices génériques
\mathbf{C}	Matrice d'amortissement
\mathbf{c}	Matrice d'amortissement modale
\mathbf{E}	Matrice des énergies
\mathbf{I}	Matrice identité
\mathbf{J}	Matrice jacobienne
\mathbf{K}	Matrice de raideur
\mathbf{k}	Matrice de raideur modale
\mathbf{K}	Matrice de raideur en configuration des-serrée
$\mathbf{\Lambda}$	Opérateur linéaire issu de la transformée de Fourier
\mathbf{M}	Matrice de masse
\mathbf{m}	Matrice de masse modale
\mathbf{N}	Base d'interpolation
$\mathbf{\Phi}$	Matrice de passage, base
\mathbf{S}_i	Matrice de stabilité associé à la formulation i de l'algorithme du point fixe
\mathbf{U}, \mathbf{S} et \mathbf{V}	Matrices génériques liées à une SVD

————— **Scalars** —————

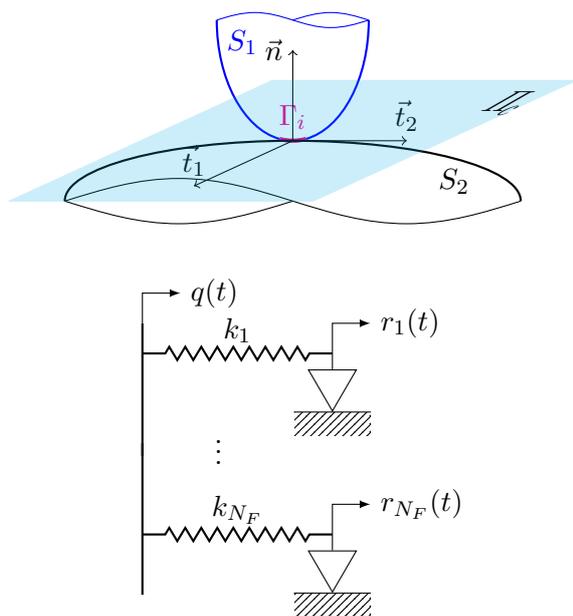
A	Paramètre de régularisation
α, β, γ	Coefficients d'ajustement
d	Distance
u	Déplacement réel
E	Module d'Young
ϵ	Nombre proche de zéro
η	Facteur d'amortissement ou de perte
F	Force
f	Force modale
k	Raideur

Chapitre I

Modélisation multi-échelles des structures assemblées

Sommaire

1	Positionnement de la problématique	2
1.1	Intérêt industriel	2
1.2	Amortissement dans les structures	3
1.3	Historique	3
2	Échelles de modélisation des structures assemblées	6
2.1	Échelle super-microscopique	7
2.2	Échelle microscopique	10
2.3	Échelle mésoscopique	12
2.4	Échelle macroscopique	17
3	Changements d'échelles : la réduction de modèle	18
3.1	Passage de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique	18
3.2	Passage de l'échelle mésoscopique à l'échelle macroscopique	19
4	Conclusion	23
5	Bibliographie du chapitre I	25



Résumé

Ce chapitre permet de mettre en évidence la problématique liée aux structures assemblées, mais propose également une analyse et une synthèse des différentes échelles de modélisation mises en jeu afin de déterminer l'amortissement dans les liaisons. De plus, il met en évidence les changements d'échelles entre celles-ci, soient les réductions de modèle.

1 Positionnement de la problématique

1.1 Intérêt industriel

L'étude de grandes structures passe par la connaissance et la modélisation des phénomènes physiques mis en jeu dans des « petites » liaisons réparties de manière sporadique. On est alors en droit de se questionner sur le temps d'étude accordé à ces liaisons dans d'aussi grandes structures. La réponse est simple : ces liaisons ont beau être réduites en volume, elles n'en restent pas moins primordiales dans le comportement dynamique de la structure complète. En effet, ces assemblages, au sein d'une structure, génèrent deux types de phénomènes :

- d'une part une perte de rigidité, par rapport à une structure monobloc de même géométrie nominale, générant un décalage des fréquences de résonance ;
- de l'autre un amortissement supérieur à l'amortissement structural intrinsèque des matériaux ; le facteur d'amortissement associé à ce dernier est d'un ordre de grandeur de $\simeq 0,001\%$ alors que celui généré par les phénomènes intérieurs aux liaisons se quantifie entre $0,1\%$ et 5% .

Par conséquent, la modélisation et l'identification de l'amortissement sont des problématiques fondamentales à prendre en compte dès la phase de dimensionnement des structures. La raison principale est que celui-ci influe fortement sur le niveau de réponse vibratoire de la structure. Quelques grands secteurs industriels se retrouvent confrontés à cette problématique. Citons de manière non exhaustive l'automobile, l'aéronautique ou encore le génie civil à travers des problématiques de vibro-acoustiques des caisses en blanc (liaisons mécano-soudées - fig. I.1a - Balmes et Germes [1]), de structures porteuses de type CubeSat (liaisons boulonnées - fig. I.1b, voir Peyret *et al.* [2] ou encore [3]) ou des ouvrages d'art haubanés (liaisons boulonnées et rivetées - fig. I.1c voir González *et al.* [4]).



(a) Caisses en blanc - Forum Audi



(b) Deux unités de type CubeSat - IsiSpace



(c) Pont haubané - Wikipedia - Panoramio

FIGURE I.1 – Exemples d'applications où la connaissance de l'amortissement est contraignante à la conception

En ingénierie, les études numériques sur les liaisons assemblées se résument à des :

- études *linéaires* globales de la structure (structure + liaisons) ;
- études autour de l'amortissement introduit pour dissiper de l'énergie sous forme de frottement où l'exemple, le plus traité de la littérature, est la roue aubagée où le contact aube/rotor est modélisé par des frotteurs.

Dans le cas des études linéaires, les ingénieurs rajoutent, à cette modélisation élémentaire, un amortissement modal qui peut provenir d'essais de caractérisation dynamique. Les temps de calcul sont rapides, mais les résultats sont éloignés du comportement réel de la structure complète. La quantification de l'amortissement induit par les liaisons est un sujet de préoccupation très important puisque sa méconnaissance conduit à des erreurs de dimensionnement. Malheureusement les simulations sont très lourdes, complexes et coûteuses. En effet, la difficulté première de ce type d'étude réside dans le problème d'échelle puisqu'il faut tout autant décrire les phéno-

mènes modaux à l'échelle de la structure qu'estimer les dissipations énergétiques à une échelle microscopique dans les liaisons. Par conséquent, l'approche détaillée dans cette thèse utilise la sous-structuration des structures assemblées en utilisant des méthodes de réduction et des méthodes numériques permettant d'estimer le comportement dynamique d'une structure assemblée, en régime permanent, avec différents niveaux de simplification.

Dans les bureaux d'études, le dimensionnement des structures utilise de plus en plus la simulation numérique. Toutefois, les ingénieurs se limitent souvent à des modèles et des méthodes simples et éprouvées comme les modèles linéaires des structures et la méthode des éléments finis. Le dimensionnement reste donc un dimensionnement préliminaire qui permet de « tracer » les grandes lignes de la structure ; le dimensionnement fin étant réalisé par des campagnes d'essais et de corrections empiriques. Cette approche peut apparaître archaïque, mais elle converge finalement grâce à l'expérience des ingénieurs. L'objectif de ce travail est de faire gagner quelques itérations dans cette démarche grâce à l'utilisation de modèles plus réalistes et à l'utilisation de méthodes efficaces tout en étant *portables* dans un environnement industriel.

1.2 Amortissement dans les structures

Par observation, l'amplitude des oscillations de la structure en régime libre s'amenuise avec le temps. Cette perte d'énergie existe puisque des forces s'opposent au maintien du mouvement : ce sont des forces d'amortissement. Ce phénomène physique naît concrètement de différentes sources. Zoghaib et Mattei [5] mettent en évidence les sources de dissipation ainsi que leur contribution relative sur une plaque en aluminium libre. Ils identifient l'amortissement dû à la viscosité de l'air, à la pression de radiation acoustique et aux phénomènes thermo-élastiques et celui dû aux phénomènes visco-élastiques. On peut alors catégoriser l'amortissement en deux grandes familles : les amortissements interne et externe. La figure I.2 illustre les différentes origines de l'amortissement.

Concernant l'amortissement externe à la structure, on peut différencier trois grands types d'amortissement. Le premier est l'amortissement dû à un *couplage fluide/structure*. C'est l'interaction fluide/structure qui modifie la réponse vibratoire. Il y a action du fluide sur la structure et inversement. On parle alors de couplage [6, 7]. Ce couplage fait alors intervenir un écoulement fluide, tout le temps présent, mais parfois négligeable.

Le deuxième type est dû à *un élément extérieur à la structure*. On peut citer les exemples d'utilisation de matériaux visco-élastiques [8, 9] ou encore des amortisseurs couplant ressort et action fluidique ou bien des frotteurs à contact sec [10, 11]. Le dernier type d'amortissement extérieur est celui dû *au couplage passif, actif ou semi-actif de matériaux piézo-électriques*. Ce type de matériaux possède la capacité, sous charge mécanique, de générer des charges électriques. La situation inverse est également possible, puisque lorsqu'on soumet le matériau à une différence de potentiel, celui-ci se déforme. Par conséquent il est possible de transformer un signal électrique en déformation et inversement. On peut alors les utiliser soit en actionneur, soit en capteur. Il est ainsi possible de contrôler l'état vibratoire de la structure [12, 13].

Enfin l'étude de l'origine de l'amortissement interne nous conduit à définir deux types d'amortissement. Le premier, *intrinsèque à la structure*, provient du comportement des matériaux obéissant à des lois élasto-visco-plastiques dépendantes de la température, de l'amplitude ou encore de la fréquence des déformations. Il faut rappeler que cet amortissement est très faible, de l'ordre de cent fois plus faible par rapport à l'amortissement induit par les liaisons [14]. Cette deuxième source d'amortissement est due à l'énergie dissipée par les micro-glissements dans les interfaces de contact entre les différents constituants [15].

1.3 Historique

D'un point de vue historique, on dégage trois grandes approches :

- des études académiques de liaisons élémentaires [17, 18] ;

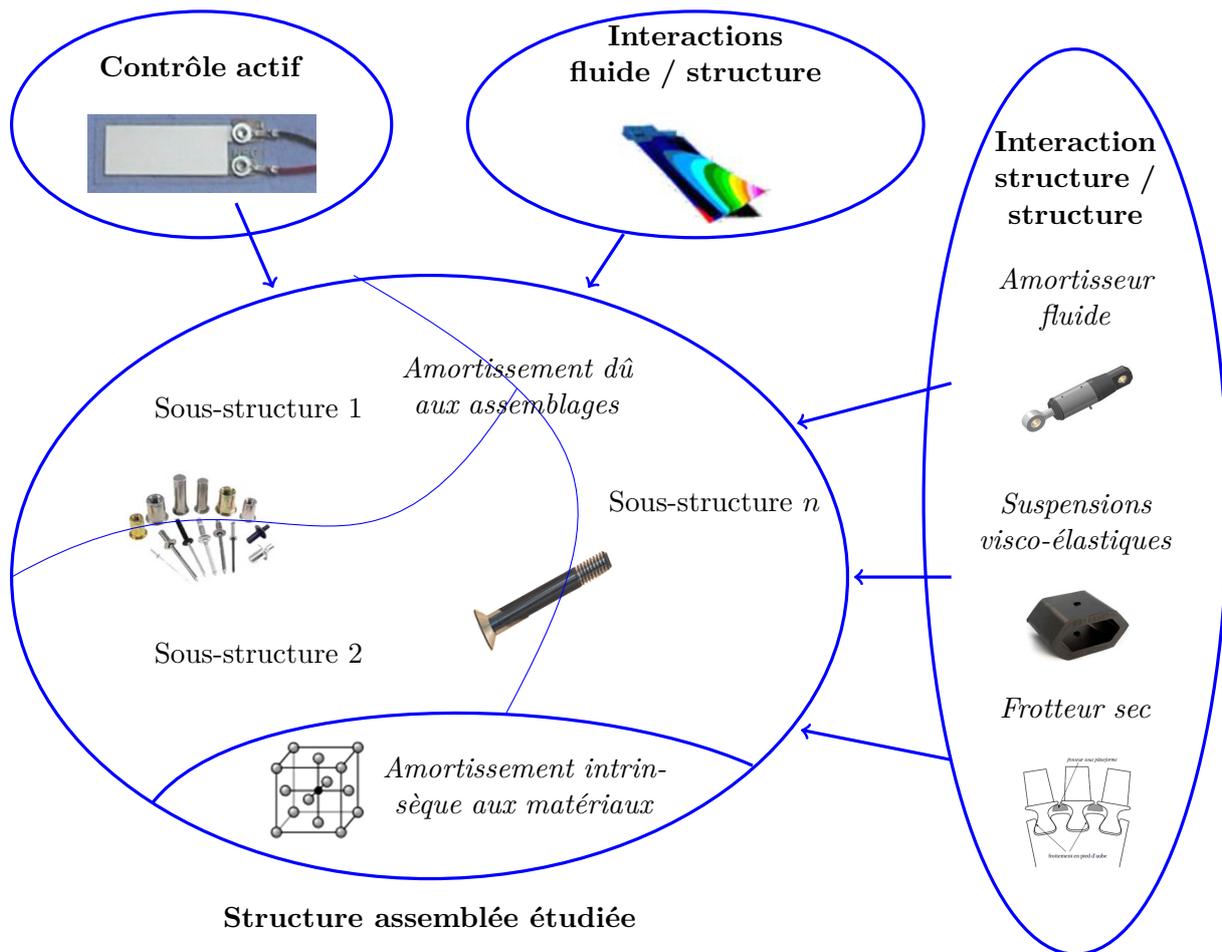
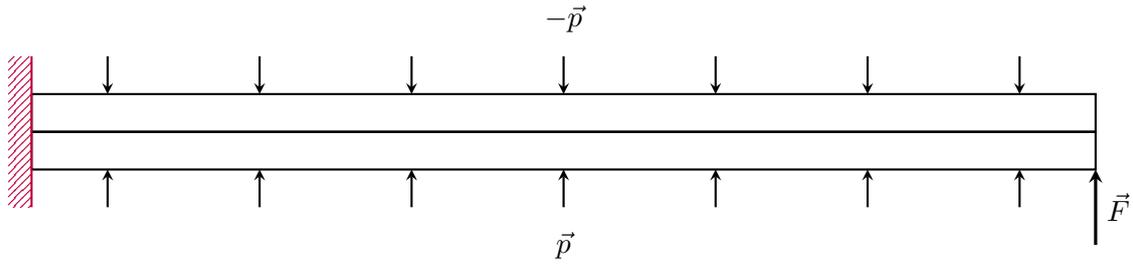


FIGURE I.2 – Sources d’amortissement pour une structure assemblée [16]

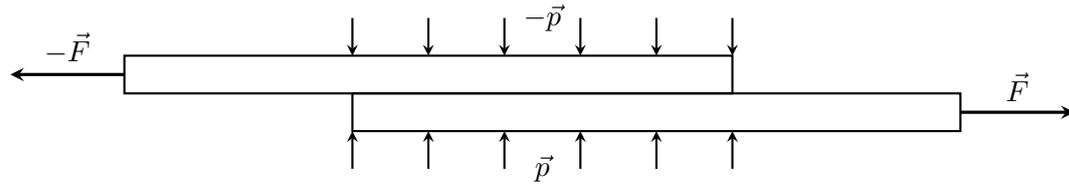
- des études localisées au niveau de l’interface aux échelles super-microscopique et microscopique (section 2) ayant pour objectif de déterminer l’influence de la lubrification ou bien de déterminer l’usure locale des composants (fretting, tribologie) [19] ;
- des études modélisant la dissipation d’énergie par un amortissement modal sur la structure complète ; l’amortissement étant compris dans l’étude globale [20, 21, 22].

De nombreuses études ont été menées afin de comprendre et de modéliser l’origine des pertes énergétiques dans les assemblages. Ces études peuvent être divisées en deux grandes catégories selon le mécanisme de dissipation qu’elles utilisent : macro-glisement ou micro-glisement.

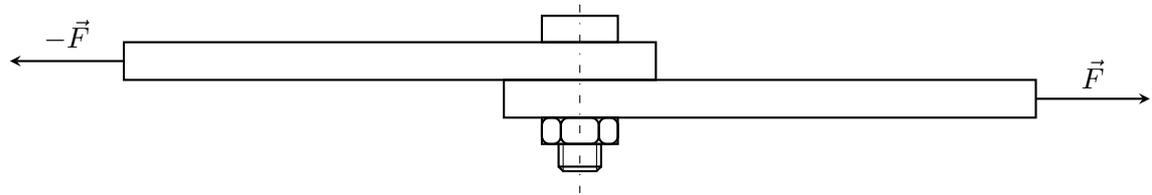
La base de modélisation de ce phénomène est le micro-glisement, signifiant qu’il n’y a pas de déplacement relatif entre les pièces en contact. Ce micro-glisement prend source dans les liaisons de la structure elle-même. Les travaux les plus célèbres portent sur le comportement de deux poutres encastées-libres possédant une interface longitudinale, travaux réalisés par Goodman et Klumpp [15] en 1956 (fig I.3a). Ces deux poutres sont serrées l’une contre l’autre par un chargement uniforme \vec{p} et soumises à un effort tranchant \vec{F} appliqué de manière quasi-statique. Citons également, l’exemple de deux poutres à recouvrement longitudinal pré-chargées uniformément et soumises à une force latérale par Metherell et Diller [23] en 1968 (fig. I.3b) ; mais encore un assemblage par recouvrement longitudinal riveté, Earles [24], ou bien encore des poutres à recouvrement longitudinal boulonnées, Esteban et Rogers [25] (fig I.3c), ou enfin un assemblage de barres avec glissement en rotation dans les liaisons par Beards et Williams [26]. Ces travaux anciens restent toujours les références pour améliorer la compréhension des phénomènes et les outils de simulation. Néanmoins des travaux plus récents ont permis de se rapprocher



(a) Poutres encastées-libres à recouvrement longitudinal soumise à une pression de serrage \vec{p} et un effort tranchant \vec{F}



(b) Un assemblage de poutres à recouvrement longitudinal soumis à une pression de serrage \vec{p} et un effort axial \vec{F}



(c) Une poutre libre-libre possédant un assemblage par recouvrement boulonné soumise à un effort axial \vec{F}

FIGURE I.3 – Différentes configurations d'étude de liaisons élémentaires

de conditions plus réalistes d'un point de vue technologique :

- la *Brake-Reuss beam* [27], une structure prismatique composée de deux poutres avec une interface d'assemblage boulonnée ; cet assemblage est utilisé dans le cadre de *round-robin tests* qui sont des essais de mêmes échantillons par des laboratoires différents de façon à valider les méthodes d'essais ou évaluer la qualité des laboratoires ;
- une poutre bi-encastée, où dans une interface donnée, la charge normale reste constante et uniforme au cours du cycle alors que le cisaillement suit le chargement (sinusoïdale en l'occurrence) dans le temps ; la modélisation des cas de chargement de cette structure est développée dans [28] alors que l'approche expérimentale est décrite dans [29] ;
- la *Orion beam* est une éprouvette constituée de 2 poutres minces, sur lesquelles sont usinées 3 surépaisseurs de contact afin de mieux maîtriser les pressions de contact, voir [30].

Pour modéliser la dissipation d'énergie dans les applications dynamiques structurelles, les approches classiques sont d'utiliser l'amortissement visqueux [31], ou l'amortissement structural [25, 32] qui a d'autres noms tels que l'amortissement hystérétique linéaire, l'amortissement du matériau, la rigidité complexe ou encore l'amortissement interne. La principale différence entre les deux approches est que l'amortissement visqueux induit une dépendance fréquentielle artificielle. Par conséquent, dans cette étude, l'amortissement sera modélisé comme étant structural. De plus, Berthillier *et al.* [33] et Nanda et Behera [34] ont identifié une dissipation d'énergie fortement dépendante de l'amplitude de la charge. Cette dépendance induit des effets non linéaires. Pour modéliser le comportement hystérétique, les pertes énergétiques sont calculées en

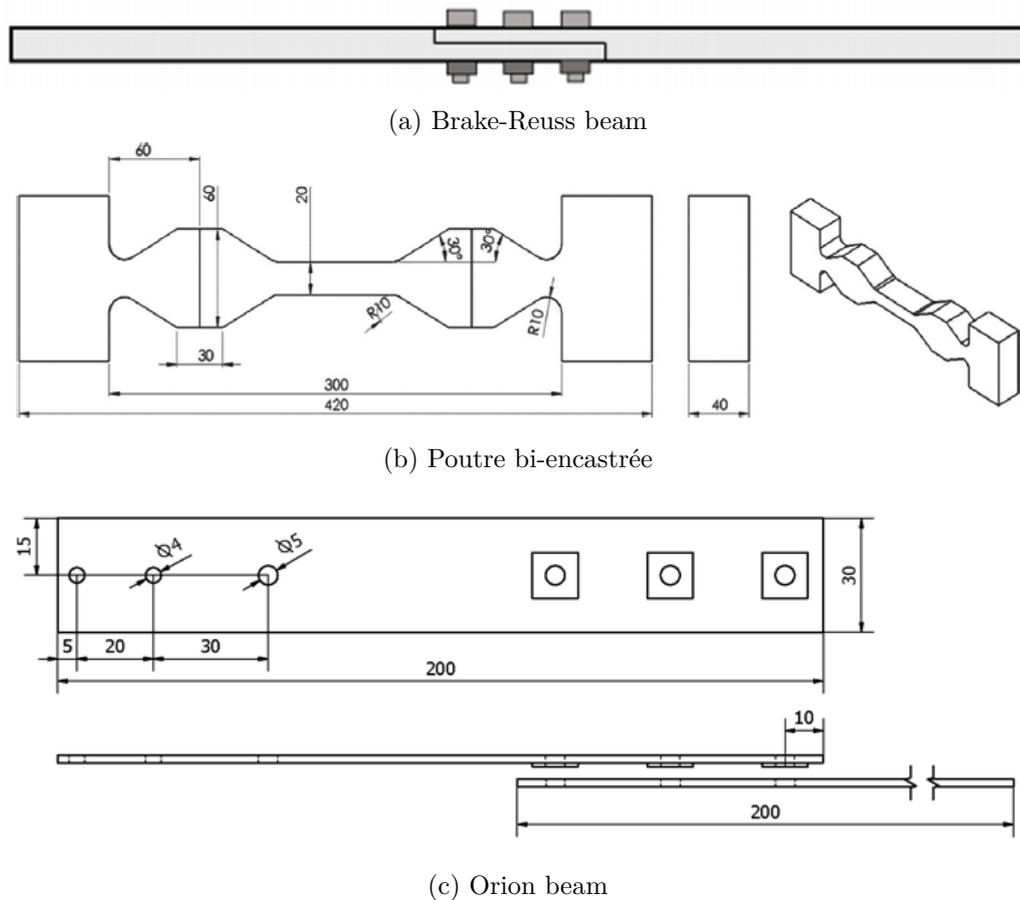


FIGURE I.4 – Cas d'étude récents

utilisant la loi de Coulomb (sous-section 2.1.1) dans les modèles éléments finis [35]. Pour les modèles localisés, les modèles de Dahl ou d'Iwan (sous-section 2.3.1) sont fréquemment utilisés, voir Oldfield *et al.* [36]. Segalman [37] a essayé d'unifier ces propositions en proposant un modèle local de type *boîte noire* s'appuyant sur quatre paramètres.

2 Échelles de modélisation des structures assemblées

La modélisation des assemblages fait intervenir des échelles très différentes depuis les phénomènes tribologiques dans l'interface jusqu'aux modes de vibrations basses fréquences. Cette section a pour objectif de proposer une classification des échelles rencontrées dans les problèmes de dynamique des structures assemblées. Ce choix est orienté et peut donc être critiqué. Néanmoins, il permet de comprendre quelles sont les approches, modélisations physiques et références associées à chacune de ces échelles. Ces échelles, de la plus locale à la plus globale, sont :

- l'échelle *super-microscopique* : la plus locale représentant les contact élémentaires ;
- l'échelle *microscopique* : celle représentant les contacts multiples, les défauts de rugosité liés aux aspérités ;
- l'échelle *mésoscopique* : échelle des sous-structures décrites par leur géométrie nominale acceptant les défauts de forme les plus macroscopiques et considérant les matériaux et les interfaces homogénéisés ;
- l'échelle *macroscopique* : l'échelle des vibrations.

2.1 Échelle super-microscopique

À cette échelle, le niveau d'observation est l'aspérité nominale et plus précisément le contact entre deux aspérités. La description de l'interface amènera à préciser les comportements normal (problème de Signorini) et tangentiel (Coulomb) et à rappeler la relation contrainte/déformation (Hertz et Mindlin). Dans un deuxième temps, la modélisation physique des corps en présence sera proposée.

2.1.1 Modélisation de l'interface

Contact – comportement normal (problème de Signorini). Ce problème est la brique élémentaire à l'ensemble des modèles de structures assemblées. C'est aussi celui qui décrit le problème le plus « simple », celui de deux corps en contact.

Dans un premier temps, attardons nous sur la description du contact de Signorini (fig.I.5). On considère deux solides S_1 et S_2 pouvant entrer en contact. La zone de contact peut prendre trois géométries : ponctuelle, linéique ou surfacique. On désigne par \vec{n} le vecteur directeur du plan tangent de contact Π_c et par \vec{u} le vecteur déplacement relatif entre ceux-ci. Alors la grandeur scalaire $u_n = \vec{u} \cdot \vec{n}$, grandeur représentative du déplacement projeté sur la normale, représente le jeu entre ces deux corps. De plus, on définit la pression de contact p entre S_1 et S_2 par $p = \vec{n} \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n})$ avec $\underline{\underline{\sigma}}$ le tenseur des contraintes.

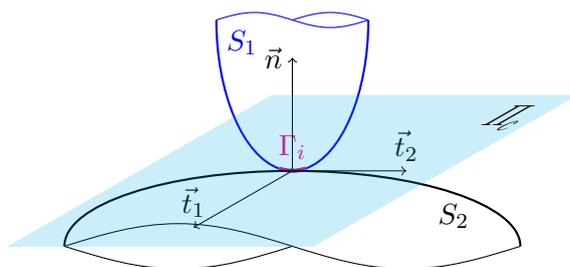


FIGURE I.5 – Définition du contact de Signorini

Les conditions de contact (conditions aux limites) sur le domaine de contact Γ_i sont :

- une condition cinématique d'impénétrabilité de la matière régie par l'équation I.1 (fig. I.6a) ;

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_n > 0, & \text{absence de contact} \\ u_n = 0, & \text{contact} \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

- une condition mécanique de transmission d'effort (ou intensité) régie par l'équation I.2 (fig. I.6b) ;

$$p \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p > 0, & \text{contact} \\ p = 0, & \text{absence de contact} \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

- une condition énergétique (ou complémentarité linéaire) régie par l'équation I.3 (fig. I.6c).

$$pu_n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0, & \text{décollement} \\ u_n = 0, & \text{contact} \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

On peut regrouper, décrire graphiquement ces trois conditions et les combiner, afin d'obtenir le graphe de la condition de contact unilatéral (fig. I.6d).

Le problème du contact ainsi posé introduit une relation *non-univoque*, *semi-définie positive* et *non-différentiable* en $u_n = p = 0$. Par conséquent, ce problème est difficile à traiter mathématiquement parlant. Le regroupement de ces trois conditions, appelé loi de contact de Signorini,

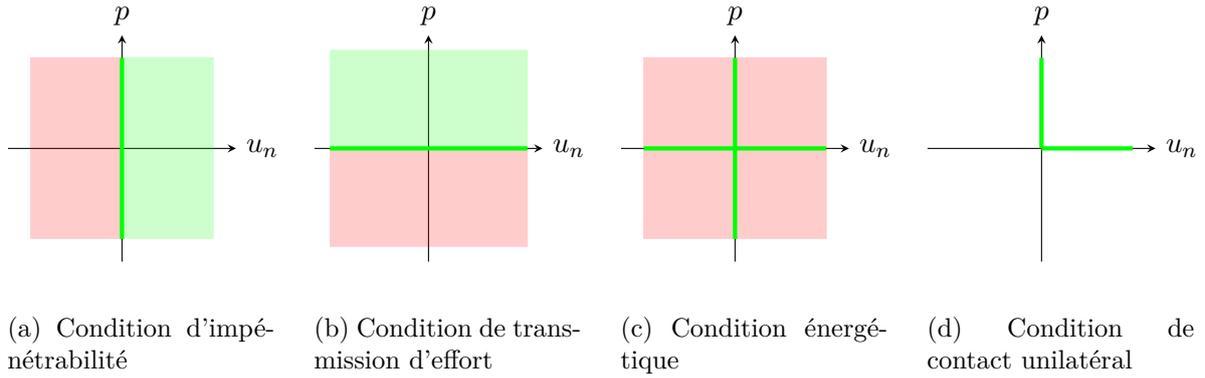


FIGURE I.6 – Représentations graphiques des conditions de contact

s'écrit :

$$\begin{cases} u_n \geq 0 \\ p \geq 0 \\ u_n p = 0 \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

Contact – comportement tangentiel (Coulomb). De manière générale, les critères de frottement sont choisis de la forme $f(\vec{\sigma}_t) \leq 0$ où $f(\vec{\sigma}_t)$ est une fonction convexe et $\vec{\sigma}_t$ est le vecteur des contraintes tangentielles. Dans ces conditions, le domaine de non glissement est défini par l'intérieur du domaine convexe. Deux critères de frottement sont principalement utilisés : les critères de Tresca et de Coulomb.

Le critère de Coulomb est défini par la fonction f suivante :

$$f(\vec{\sigma}_t, \mu, p) = \|\vec{\sigma}_t\| - \alpha(\mu, p) \leq 0 \text{ et } \alpha = \mu |p| \quad (\text{I.5})$$

la valeur algébrique du paramètre α dépend du coefficient de frottement de Coulomb μ et de la pression de contact p . En définissant ainsi ce critère, on identifie la forme géométrique de la fonction f : un cône. La condition de non glissement est alors définie par l'appartenance de $\vec{\sigma}_t$ à l'intérieur du cône. Pour $\vec{\sigma}_t$ appartenant à la frontière du cône, on est alors en présence de glissement. La direction de glissement $\vec{\tau}$ de $\dot{u}_t \vec{\tau}$ est donnée par la normale au critère en $\vec{\sigma}_t$. La vitesse de glissement s'exprime alors sous la forme :

$$\dot{u}_t \vec{\tau} = \beta \vec{\sigma}_t \quad (\text{I.6})$$

avec $\beta \geq 0$, c'est-à-dire que la vitesse de glissement et la contrainte tangentielle sont colinéaires. En reprenant l'ensemble des équations I.4, I.5 et I.6, on peut résumer alors le comportement tangentiel par une formulation classique :

$$\begin{cases} \text{si } \|\vec{\sigma}_t\| < \mu |p| \text{ alors } \beta = 0 \text{ et } \dot{u}_t = 0 \\ \text{si } \|\vec{\sigma}_t\| = \mu |p| \text{ alors } \beta > 0 \text{ et } \dot{u}_t \vec{\tau} = \beta \vec{\sigma}_t \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

On peut représenter ce système d'équations I.7 sous la forme de deux figures : la première représentant graphiquement le critère sous sa forme conique (fig.I.7a) ; la seconde la fonction contrainte tangentielle fonction de la vitesse de glissement (fig.I.7b). Encore une fois, on se trouve en présence d'une relation *non-univoque* et *non-différentiable* induite par la notion de seuil.

Contact : relation contrainte/déformation (contact de Hertz et Mindlin). En tribologie le contact de Hertz est une description de la contrainte entre deux objets en contact

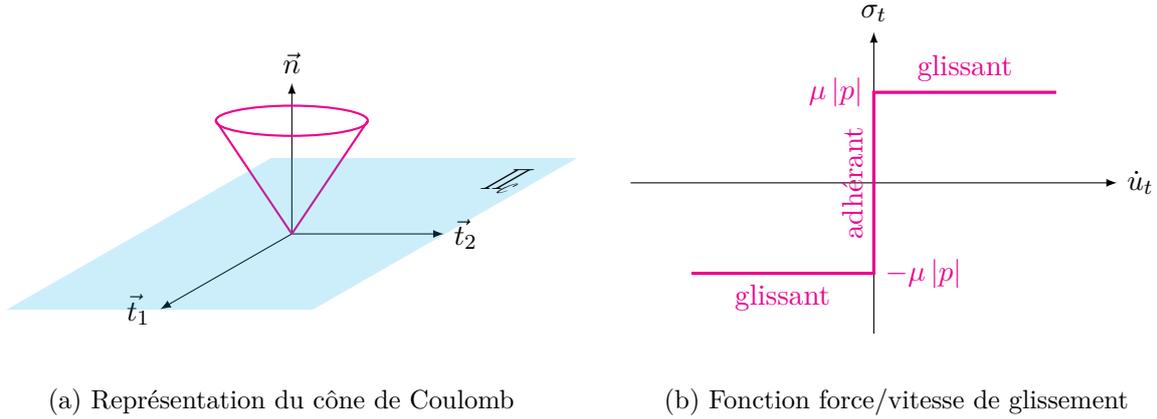


FIGURE I.7 – Représentations graphiques de la loi de Coulomb

sous chargement normal. La description proposée par Hertz s’applique au contact entre deux ellipsoïdes de rayons de courbure différents [38].

Les travaux de Mindlin élargissent cette théorie [39]. En s’appuyant sur deux sphères parfaitement lisses chargées normalement et tangentiellement, il détermine la distribution des contraintes tangentielles. Il parvient aux conclusions suivantes :

- la traction tangentielle au plan de contact et la force appliquée sont parallèles entre elles ;
- les courbes représentatives de l’iso-traction sont des ellipses homothétiques ;
- la zone de contact se divise en une zone circulaire d’adhérence et un anneau périphérique de micro-glissement.

2.1.2 Modélisation des corps en présence

Pour Hertz, les corps en contact sont des solides de forme ellipsoïdale (eq. I.8 et fig. I.8, équation réduite dans un repère orthonormé convenable), semi-infinis (surface de contact petite devant les autres dimensions des solides), de dimension et géométrie parfaites. De plus, les hypothèses sur le matériau sont l’élasticité, l’homogénéité et l’isotropie. À partir de ces hypothèses, Hertz démontre deux types de résultats en fonction de la zone de contact initiale. Si celle-ci est un point alors la surface de contact est une ellipse dont les dimensions dépendent de l’effort, des courbures locales, des matériaux et de la position relative des deux plans contenant les courbures maximales de chaque solide.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (\text{I.8})$$

FIGURE I.8 – Représentation graphique d’une ellipsoïde

Un résultat important des travaux réside dans le fait que, malgré la linéarité de la loi de comportement des matériaux (loi de Hooke), la relation force appliquée F /pénétration d ne l’est pas : $F \propto d^{3/2}$.

Signorini pose son problème en supposant un corps élastique S_1 qui occupe une région Ω_{S_1} de l’espace dans son état non déformé. Ce corps est en contact avec un autre corps S_2 , rigide, par une portion Γ_i de sa frontière. On soumet le corps élastique S_1 à des contraintes $\vec{\sigma}_e$ sur

$\Gamma_e = \Gamma_{S_1} - \Gamma_i$. Le problème étant élasto-statique, la solution devra vérifier :

- l'équation de la mécanique des milieux continus (eq. I.9) ;

$$\overrightarrow{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} = \vec{0} \quad (\text{I.9})$$

- la loi de comportement du matériau, soit la loi de Hooke (eq. I.10) où (λ, μ) est un couple de deux coefficients réels appelés coefficients de Lamé du matériau.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr} \left(\underline{\underline{\epsilon}} \right) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\epsilon}} \quad (\text{I.10})$$

En injectant l'équation I.10 dans l'équation I.9, on obtient l'équation I.11, dite équation de Navier-Cauchy (formulation en déplacement). Une fois le champ de déplacement \vec{u} déterminé, on peut retrouver les déformations puis les contraintes.

$$\mu \Delta \vec{u} + (\mu + \lambda) \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{u}) = \vec{0} \quad (\text{I.11})$$

La solution de ce problème recherche le champ de déplacement \vec{u} tel que \vec{u} vérifie :

- l'équation I.11 ;
- les conditions aux limites :
 - $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{\sigma}_e$ sur Γ_e ;
 - $\vec{\sigma}_t = \vec{0}$ sur Γ_i ;
- la loi de contact de Signorini décrites par l'équation I.4.

La résolution utilise une approche énergétique [40]. Néanmoins, les niveaux de contraintes très élevés dans l'interface amène à reconsidérer la structure même de l'interface. C'est dans cet objectif qu'en tribologie, la notion de 3^{ème} corps a été introduite. Ce troisième corps représente l'ensemble des particules détachées le long de l'interface par les phénomènes dissipatifs de frottement. Par conséquent, la physique devient différente.

Le principe est le suivant : au lieu de faire évoluer les coefficients de frottement au cours de l'essai, on prend délibérément le parti d'effectuer une simulation explicite des débris. Une première possibilité consisterait à les considérer comme un milieu granulaire, mais cette solution a été écartée, afin de privilégier les aspects contact/adhésion et de mieux comprendre les conditions d'éjection. On s'intéresse alors à l'évolution du troisième corps selon le mécanisme considéré : usure, usure plus fissuration, cisaillement plastique, glissement partiel et fissuration. Iordanoff *et al.* examinent le comportement du troisième corps en contact sec. Une description du mécanisme de fonctionnement des contacts est donnée et l'influence des paramètres externes est décrite [41].

2.2 Échelle microscopique

Puisque l'on veut décrire les phénomènes participant à la dissipation dans l'interface, cela nécessite une modélisation fine des phénomènes physiques au niveau de celle-ci. Il n'y a, à priori, qu'un seul moyen : décrire la physique au niveau de l'ensemble des aspérités et donc d'utiliser les lois définissant le contact de la géométrie élémentaire à l'échelle super-microscopique. En effet, la provenance de la dissipation est majoritairement liée au micro-glissement.

À cette échelle, les comportements observés sont sensibles aux fluctuations autour de la moyenne. Il est donc nécessaire de prendre en compte des modèles locaux adaptés aux comportements mésoscopiques mais représentant les variations locales. On peut d'ores et déjà se poser la question du problème d'un tel choix : meilleur résultat mais à quel coût ? En effet, pour chaque pièce fabriquée il faudrait recommencer l'analyse.

2.2.1 Modélisation de l'interface

À cette échelle, les surfaces de contact sont modélisées par des surfaces rugueuses décrites comme une série de paraboloides (fig. I.9). Le contact quant à lui est basé sur les hypothèses de Hertz ou de Mindlin. La géométrie est décrite selon deux écoles : de manière statistique ou déterministe.

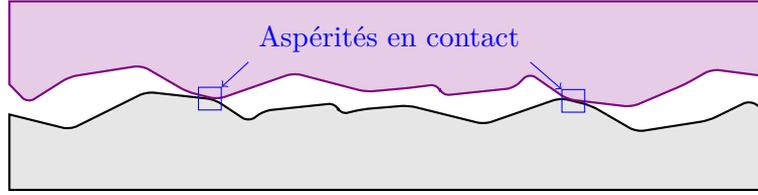


FIGURE I.9 – Représentation de l'échelle microscopique

Approche statistique. La rugosité des surfaces a été reconnue comme jouant un rôle majeur dans la naissance du frottement et la transition d'un régime de lubrification à un autre. Greenwood et Williamson [42] ont été les créateurs du premier modèle de contact brut en 1966. En prenant appui sur cette première analyse, une branche de modèles à contact sec a vu le jour. Avec le temps, un nombre important de modèles fut construit pour surmonter certaines hypothèses utilisées dans la théorie initialement développée. Cependant, en raison de sa nature analytique, le modèle de Greenwood est encore utilisé pour estimer le coefficient de frottement et prédire l'usure [43].

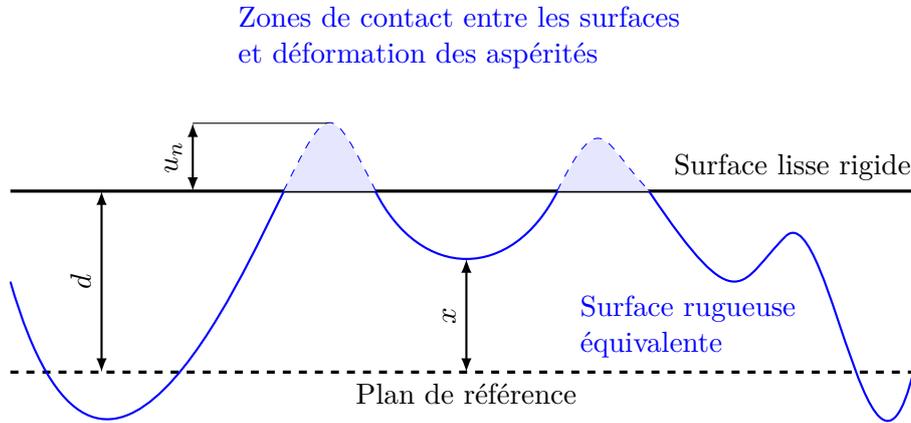


FIGURE I.10 – Principe de la répartition des aspérités selon Greenwood et Williamson

Le contact, entre un plan rigide lisse et une surface élastique rugueuse, est représenté sur la figure I.10. La surface rugueuse est décrite comme un ensemble d'aspérités indépendantes avec des pointes sphériques de rayon de courbure constant R_c . Ainsi, pour chaque aspérité, la théorie de Hertz (sous-section 2.1) est applicable [44]. Greenwood et Williamson ont supposé que les hauteurs des aspérités variaient de manière aléatoire avec une certaine distribution de probabilité, par exemple gaussienne. Dans ce cas, la distribution est représentée par :

$$g(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{I.12})$$

où σ est l'écart type des pics d'aspérité. Si la distance entre deux surfaces est d , alors la probabilité du contact pour une aspérité à une hauteur x est donnée par :

$$P(x > d) = \int_d^{+\infty} g(x) dx \quad (\text{I.13})$$

et le nombre d'aspérités N_a est supposé être assez grand pour calculer le nombre attendu de contacts N_c selon :

$$N_c = N_a \times P(x > d) = N_a \int_d^{+\infty} g(x) dx \quad (\text{I.14})$$

Selon la théorie de Hertz, la surface de contact pour l'aspérité à la hauteur z est égale à $\pi R_c u_n = \pi R_c (x - d)$ et par conséquent l'aire de la surface totale attendue est :

$$S = \pi R_c N_a \int_d^{+\infty} (x - d) g(x) dx \quad (\text{I.15})$$

De la même manière, en utilisant la théorie de Hertz, on peut obtenir la charge totale attendue :

$$F_i = \frac{2}{3} R_c^{1/2} N_a E' \int_d^{+\infty} (x - d)^{3/2} g(x) dx \quad (\text{I.16})$$

où $1/E' = (1 - \nu_1^2)/E_1 + (1 - \nu_2^2)/E_2$, E_1 , E_2 et ν_1 , ν_2 sont respectivement les modules de Young et coefficients de Poisson des corps en contact 1 et 2.

Approche déterministe. Au delà de l'acceptation et de l'utilisation de ce modèle par les chercheurs, un grand nombre d'algorithmes ont été développés pour raccourcir la liste des hypothèses. Un de ces modèles a été développé par Faraon [45]. Dans sa méthode, au lieu d'utiliser une représentation statistique des aspérités de surface, une approche déterministe a été utilisée. Cela signifie que chaque aspérité a son propre rayon de courbure $R_{c,j}$ et sa hauteur x_j . Par conséquent, pour chaque aspérité, l'aire de la zone de contact A_j et la charge transportée F_j peuvent être obtenues en utilisant la théorie de Hertz :

$$S_j = \pi R_{c,j} (x_j - d), F_j = \frac{2}{3} R_{c,j}^{1/2} E' (x_j - d)^{3/2} \quad (\text{I.17})$$

La charge totale et la surface totale de contact sont alors simplement la somme des composantes N_a locales :

$$S = \sum_{j=1}^{N_a} S_j, F_i = \sum_{j=1}^N F_j \quad (\text{I.18})$$

Récemment, Peyret *et al.* a mis en œuvre dans ses travaux [46] la théorie de Mindlin afin d'estimer la dissipation d'énergie dans une interface contenant un nombre fini d'aspérités. Ce dernier distingue notamment deux types d'aspérités : celles dont les défauts sont bas se comportant alors comme une zone définissant l'adhérence ; ceux d'ordre plus élevé, responsables de la dissipation. D'autres auteurs ont proposés des modèles plus complexes, au sens plus proche de la nature du contact réel, afin de caractériser la dissipation d'énergie [47, 48]. Enfin certains auteurs expliquent que le frottement est estimé en partie à partir de l'énergie nécessaire à « gravir » les aspérités, soit un mécanisme cinématique d'inclinaison des forces de contact de Signorini responsable d'une composante tangentielle dans le contact mésoscopique. Pour illustrer ce propos, dans son manuscrit, N. Ponthus [49], montre que le coefficient de frottement est très sensible à la rugosité.

2.2.2 Modélisation des corps en présence

La modélisation physique des corps en présence ne présente pas de différence avec l'échelle précédente (sous-section 2.1.2). Cependant, dans la théorie de Greenwood, chaque aspérité est considérée comme une sphère.

2.3 Échelle mésoscopique

À cette échelle, c'est la structure avec ses défauts qui sera modélisée et non une description de l'interface. Ces défauts sont caractérisés par la norme GPS (Geometrical Product Specification, soit Spécification Géométrique des Produits en français), qui permet de définir l'ensemble des géométries réelles acceptables du point de vue fonctionnel de façon univoque et vérifiable. Les défauts mis en évidence à cette échelle sont les défauts de forme (la planéité essentiellement dans nos études), de l'ordre de la dizaine à la centaine de micromètres. Le changement d'échelle permet donc le passage des défauts liés à la rugosité (défauts locaux) aux défauts de forme.

2.3.1 Modélisation de l'interface

À cette échelle, il s'agit d'intégrer des comportements tribologiques dans la simulation d'une structure. Pour la structure, c'est la mécanique des milieux continus qui est le cadre le plus propice à cette échelle. L'approximation de la solution est classiquement effectuée grâce à un modèle EF. Pour les interfaces, c'est un débat plus ouvert. La plupart des codes de calculs industriels proposent des fonctions pour la prise en compte des contact de Signorini et de Coulomb. Toutefois, à cette échelle, les forces de contact et de frottement doivent prendre en compte la rigidité normale et tangentielle et intégrer la dissipation d'énergie. Pour capturer ces phénomènes correctement, il faut soit décrire très finement la géométrie et donc mailler très finement les interfaces ; soit il faut intégrer des modèles de contact plus riches physiquement et mathématiquement sur un maillage plus grossier. Plusieurs méthodes ont été proposées à cette fin. Dans la plupart d'entre elles, on modélise le comportement de la liaison par des patches reliant les interfaces à la structures et les interfaces entre elles. Ces éléments sont liés entre eux par une loi modélisant les forces de rigidité et de dissipation d'énergie. Ces patches peuvent être surfaciques et modélisés par des surfaces sans épaisseur [50]. Dans ce cas les modèles qui les régissent font intervenir le champ de déplacement du modèle MMC. Dans d'autres cas, ils sont ponctuels et font intervenir le champ de déplacement discrétisé [51]. Du point de vue du comportement, ces modèles doivent être capables de capturer le glissement partiel et le glissement total. Les paragraphes ci-dessous présentent quelques une des règles de construction de ces modèles.

Règle de Masing [52]. Cette loi, originellement créée pour décrire le comportement plastique des matériaux, permet la prédiction d'un cycle d'hystérésis à partir d'un chargement initial (appelé *backbone*). Le graphe hystérétique est obtenu lors d'un chargement cyclique par une homothétie de facteur 2 de la *backbone*, en décalant l'origine au niveau du point d'inversion. Il est usuel de représenter cette règle dans le plan (amplitude, force) comme représentée sur la figure I.11.

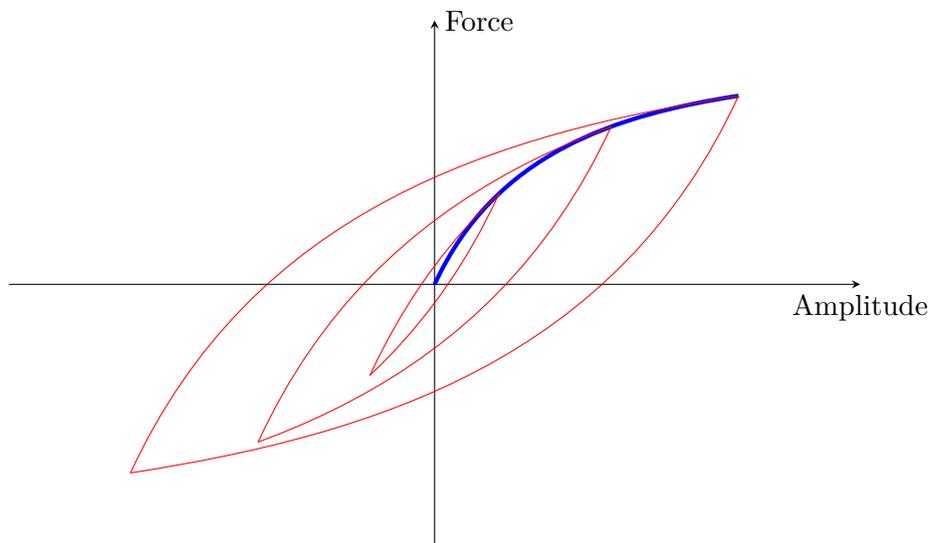


FIGURE I.11 – Principe de la loi de Masing : — *backbone* ; — extrapolations à partir de la *backbone*

Cellule de Jenkins. Cet élément, revisité par Segalman, est composé de l'association série d'un ressort de raideur k et d'un frotteur de type Coulomb [53]. De même que les modèles présentés précédemment, ce modèle utilise une variable interne r qui représente la position du frotteur (fig. I.12a). Ce modèle permet de décrire des comportements élasto-plastiques. Il possède

deux types de comportements : quand la force est inférieure à la force seuil de glissement, il se comporte comme un ressort ; dès que cette force excède la valeur tangentielle limite, un régime de glissement apparaît. Cette cellule élémentaire vérifie la loi de Masing puisqu'au niveau du point d'inversion, l'élément repasse par l'état d'adhérence retrouvant la rigidité initiale (fig. I.12b).

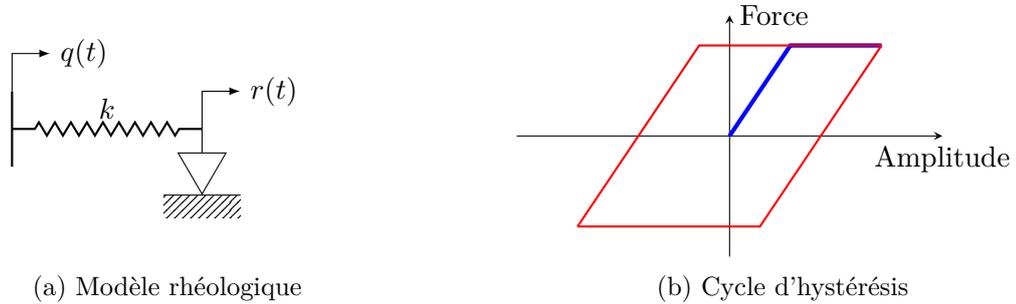


FIGURE I.12 – Description d'une cellule de Jenkins

Modèle de Iwan. Le modèle de Iwan consiste en l'association en parallèle de cellules de Jenkins (fig. I.13a). Ce modèle possède plusieurs noms : modèle de Masing ou encore modèle de Maxwell généralisé frottant dans le domaine de l'automatique [54]. Puisqu'il possède la cellule de Jenkins élémentaire, ce modèle respecte la loi de Masing. On le retrouve sous forme discrète [55] ou continu [53]. Son comportement est simple : à l'adhérence totale, tous les frotteurs adhèrent, la raideur alors est la somme des raideurs élémentaires. Le glissement partiel est représenté lorsqu'un nombre, inférieur au nombre total, de frotteurs glissent. La raideur totale a alors diminué. Enfin, le glissement total est modélisé lorsque l'ensemble des frotteurs glissent (fig. I.13b).

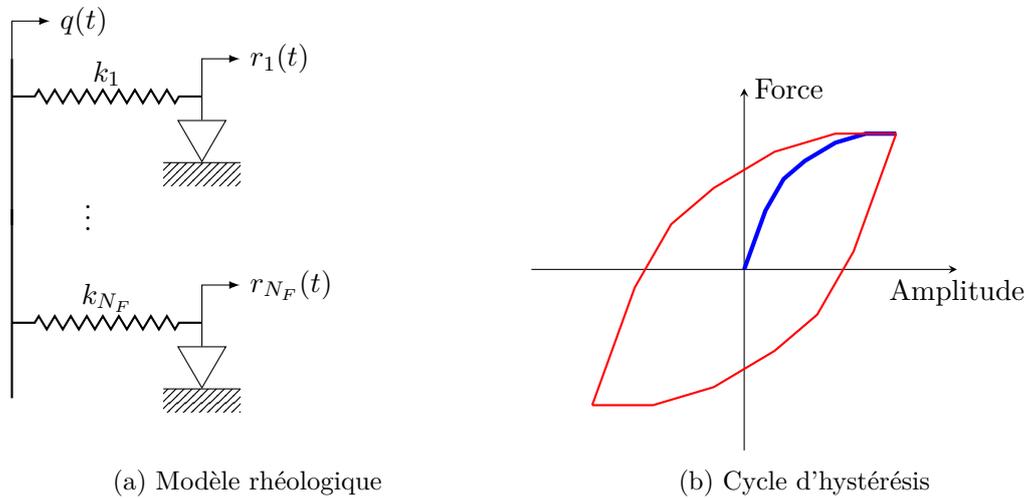


FIGURE I.13 – Description du modèle d'Iwan

Modèle de Dahl. Dahl propose, en 1968, un modèle afin de rendre compte du frottement sec lors de l'observation global des roulements à billes [56]. Ce modèle s'appuie sur trois propriétés de comportement : pente positive et indépendante de l'origine, force d'amplitude bornée et raideur quasiment constante à faible force proposée. Le modèle finalement adopté est le suivant :

$$\frac{dF_D(u)}{du} = k_D \left| 1 - \frac{F_D}{F_s} \text{signe } \dot{u} \right|^\alpha \text{signe} \left(1 - \frac{F_D}{F_s} \text{signe } \dot{u} \right) \quad (\text{I.19})$$

où :

- $k_D > 0$ représente la raideur à l'origine ;
- F_s est la force tangentielle en glissement total ;
- $\alpha \in]0, 1]$ est un paramètre de modulation afin d'ajuster le phénomène d'hystérésis (fig. I.14).

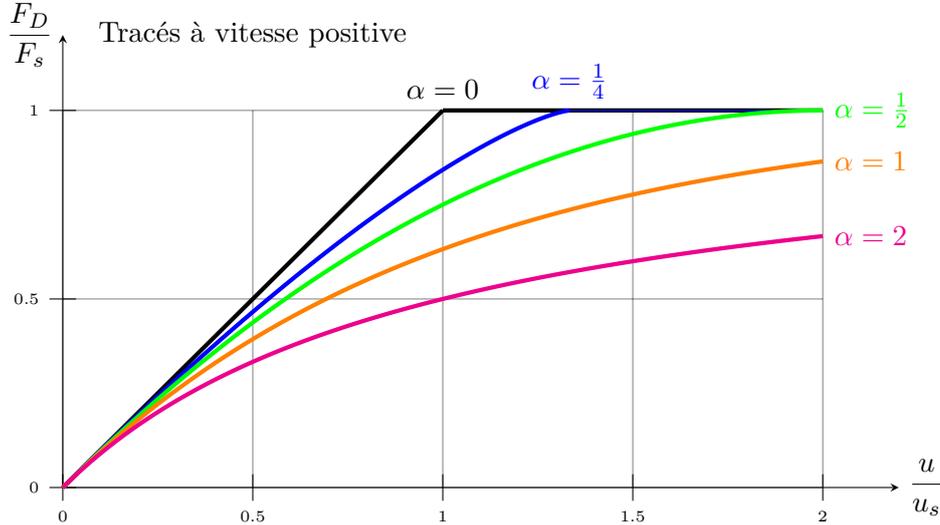


FIGURE I.14 – Rapport $\frac{F_D}{F_s}$ fonction de $\frac{u}{u_s}$ avec α variable

On est donc en présence d'un modèle à 2 paramètres, plus un d'ajustement de la courbure de l'hystérésis. Il existe des extensions du modèle de Dahl, [57] :

- le modèle de Lure est une amélioration du modèle de Dahl s'appuyant sur l'élasticité du contact [58]. En effet, il inclut la dépendance du coefficient de frottement à la vitesse. Ce modèle est adapté aux contacts lubrifiés. Dans certaines sources, il est également appelé « modèle dynamique intégré ». Le nom vient de l'abréviation de Lund Institute of Technology et INPG Grenoble, les deux universités accueillant les scientifiques coopérants.
- le modèle de Frozen a été publié par Dion *et al.* [59] pour étendre les capacités du modèle de Lure dans le but de capturer le frottement statique.

Tous ces modèles peuvent être appliqués nœuds à nœuds dans un modèle discrétisé ou être écrit de façon à lier les variables d'un modèle continu.

2.3.2 Modélisation des corps en présence

La modélisation physique dans les échelles précédentes prenait en compte la continuité de la matière. Cette approche continue trouve ses limites à cette échelle puisque les géométries rencontrées ne seront plus des géométries élémentaires (sphères, ellipsoïdes). Par conséquent, il est nécessaire d'introduire une nouvelle formulation qui permettra le passage d'une résolution continue à une résolution approchée par éléments finis.

Mécanique des milieux continus. La mécanique des milieux continus pose comme hypothèse fondatrice que les caractéristiques (densité, élasticité, etc) des milieux sont continues. Cette hypothèse permet l'utilisation d'outils mathématiques s'appuyant sur les fonctions continues et/ou dérivables. Les équations fondatrices sont le principe fondamentale de la dynamique (eq. I.20), une loi de comportement du matériau (eq. I.21, loi élastique linéaire) et la relation entre déformations et déplacements (eq. I.22).

$$\forall M \in \Omega_S \begin{cases} \rho \frac{d\vec{u}}{dt^2} = \overrightarrow{\text{div}} \underline{\underline{\underline{\sigma}}} + \vec{f}_v & \text{(I.20)} \\ \underline{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\underline{\mathbf{C}}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\epsilon}}} & \text{(I.21)} \\ \underline{\underline{\underline{\epsilon}}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\underline{\text{grad}}}} \vec{u} + {}^\top \underline{\underline{\underline{\text{grad}}}} \vec{u} \right) & \text{(I.22)} \end{cases}$$

Aux équations précédentes, il faut ajouter les conditions aux limites que l'on peut classer en trois catégories de manière générale (valeurs, gradients et relation valeurs/gradients). Dans l'analyse des vibrations des structures, elles se résument aux conditions aux limites en :

— déplacement :

$$\vec{u} = \vec{u}_u, \forall M \in \Gamma_u \quad \text{(I.23)}$$

— force :

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \vec{n} = \vec{\sigma}_e, \forall M \in \Gamma_e \quad \text{(I.24)}$$

Approximation éléments finis. Néanmoins une résolution continue est souvent impossible à cause de la géométrie des pièces en présence, la non-linéarité des comportements physiques, etc. Par conséquent, il est courant de mettre en place une résolution approchée des problèmes rencontrés. La solution majoritairement retenue est la *méthode des éléments finis*. Elle permet la résolution approchée des équations aux dérivées partielles. Elle repose sur trois fondements :

- la recherche d'une solution approchée appartenant à un espace de fonctions admissibles par minimisation d'une fonctionnelle représentant l'énergie potentielle sur tout le domaine ;
- le choix d'un espace fonctionnel à la fois physiquement admissible et mathématiquement simple pour réduire le temps d'exécution des calculs ;
- le « découpage » en volumes élémentaires permettant de calculer la fonctionnelle et ses dérivées plus facilement.

L'approximation prend appui sur la transformation de la forme continue en une fonctionnelle, dite forme variationnelle. À partir de l'équation I.20 pondérée par une fonction test \vec{v} appartenant à l'espace V des fonctions continues et de carré sommable, respectant les conditions aux limites de Dirichlet et en intégrant sur tout le domaine Ω , on obtient la formulation suivante :

$$\forall \vec{v} \in V, \int_{\Omega} \vec{v} \left(\rho \frac{d\vec{u}}{dt^2} - \overrightarrow{\text{div}} \underline{\underline{\underline{\sigma}}} - \vec{f}_v \right) dV = 0 \quad \text{(I.25)}$$

En intégrant par partie cette relation I.25, on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$\forall \vec{v} \in V, \int_{\Omega} \rho \frac{d\vec{u}}{dt^2} \vec{v} dV - \int_{\Omega} \vec{f}_v \vec{v} dV + \int_{\Omega} \left({}^\top \underline{\underline{\underline{\text{grad}}}}_S \vec{u} \right) \cdot \underline{\underline{\underline{\mathbf{C}}}} \cdot \left(\underline{\underline{\underline{\text{grad}}}}_S \vec{v} \right) dV - \int_{\Gamma_e} \left(\underline{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \vec{n} \right) \vec{v} dS = 0 \quad \text{(I.26)}$$

D'après le théorème de Lax-Millgram, ce problème possède une solution unique ; ce qui n'est pas forcément le cas du problème avec contact et frottement. Une approximation est ensuite construite en cherchant une solution $\vec{u}_p \in V_h$ un sous-espace de V . \vec{u}_p est obtenue en minimisant la norme précédemment construite et en choisissant une fonction test dans le même sous espace fonctionnel V_p . La solution approchée est recherchée sous la forme d'une combinaison linéaire de N_p fonctions, dites *fonctions d'interpolation*, formant une base souvent polynomiale. La méthode consiste donc à affaiblir la formulation intégrale en ne la vérifiant que pour N_p fonctions tests. La solution proposée sera d'autant meilleure que la base de fonctions utilisées permettra de bien représenter la solution recherchée.

$$\begin{aligned}\vec{u}_p &= \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{N}_i(x) \cdot \vec{u}_i \\ \vec{v}_p &= \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{N}_i(x) \cdot \vec{v}_i\end{aligned}\quad (\text{I.27})$$

avec $\vec{v}_i = \vec{v}_p(\vec{x}_i)$ et $\vec{u}_i = \vec{u}_p(\vec{x}_i)$. Le domaine est ensuite discrétisé en sous-domaines élémentaires Ω_j de sorte que la formulation devient :

$$\sum_{j=1}^N \left[\int_{\Omega_j} \rho \frac{d\vec{u}_p}{dt^2} \vec{v}_p \, dV - \int_{\Omega_j} \vec{f}_v \vec{v}_p \, dV + \int_{\Omega_j} \left(\overset{\top}{\text{grad}}_S \vec{u}_p \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \left(\underline{\underline{\text{grad}}}_S \vec{v}_p \right) \, dV - \int_{\Gamma_{e,j}} \left(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \vec{n} \right) \vec{v}_p \, dS \right] = 0 \quad (\text{I.28})$$

Les opérateurs de masse, rigidité et force sont définis en intégrant analytiquement ou numériquement chaque terme de l'équation sur son domaine de définition.

$$\int_{\Omega_j} \rho \frac{d\vec{u}_p}{dt^2} \vec{v}_p \, dV = \vec{v}^{(j)} \cdot \mathbf{M} \cdot \frac{d^2 \vec{u}^{(j)}}{dt^2} \quad (\text{I.29})$$

$$\int_{\Omega_j} \left(\overset{\top}{\text{grad}}_S \vec{u}_p \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \left(\underline{\underline{\text{grad}}}_S \vec{v}_p \right) \, dV = \vec{v}^{(j)} \cdot \mathbf{K} \cdot \vec{u}^{(j)} \quad (\text{I.30})$$

$$\int_{\Omega_j} \vec{f}_v \vec{v}_p \, dV + \int_{\Gamma_{e,j}} \left(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \vec{n} \right) \vec{v}_p \, dS = \vec{v}^{(j)} \underline{\underline{F}}^{(j)} \quad (\text{I.31})$$

En assemblant le modèle à partir de l'équation I.28, on reconstruit l'équation matricielle très simple suivante :

$$\overset{\top}{\mathbf{V}} \left(\mathbf{M} \cdot \ddot{\underline{\underline{U}}} + \mathbf{K} \cdot \underline{\underline{U}} \right) = \overset{\top}{\mathbf{V}} \underline{\underline{F}} \quad (\text{I.32})$$

Dans ces modèles, les variables sont les déplacements aux nœuds des modèles éléments finis. Ils sont capables de capturer des phénomènes locaux comme des concentrations de contraintes, ou des variations de rigidité locales.

2.4 Échelle macroscopique

L'échelle macroscopique est l'échelle dont la longueur caractéristique est la longueur d'onde des vibrations dont on évalue l'amortissement. Cette échelle est naturelle pour étudier les vibrations. En revanche, elle ne l'est pas pour étudier le comportement des liaisons. La littérature propose différents modèles afin de modéliser d'un point de vue macroscopique les phénomènes de frottement. L'objectif ici est de capturer le glissement partiel avec des variables modales. Lacayo *et al.* [60] montre que la méthode est efficace même si celle-ci reste fortement dépendante de la prédominance du mode étudié. On se place donc dans l'espace des modes, soit $\underline{\underline{U}} = \sum_{j=1}^N \underline{\underline{\Phi}}_j q_j$ où les $\underline{\underline{\Phi}}_j$ forment une base de fonction décrivant les formes modales ou les formes d'ondes et q_j sont des variables généralisées décrivant l'amplitude des vibrations. Dans cette espace chaque variable généralisée est gouvernée par une équation du type :

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = \overset{\top}{\mathbf{\Phi}} \cdot \underline{\underline{f}}(q_1, q_2 \dots q_N) + \overset{\top}{\mathbf{\Phi}} \cdot \underline{\underline{g}}(t) \quad (\text{I.33})$$

La première partie de l'équation résulte de la projection des équations de l'élasto-dynamique linéaire. La fonction $\underline{\underline{f}}$ résulte de la projection des forces non-linéaires de contact et de frottement dans l'espace des modes. Dans leur travail, Deaner *et al.* [21] identifient un modèle de Iwan à 4 paramètres dans l'espace des modes. L'intérêt de cette démarche est d'une part qu'elle est facile

à appliquer expérimentalement mais aussi qu'elle se rapproche très fortement de la démarche adoptée en calcul de structure linéaire lorsque l'hypothèse de Basile est utilisée ; ce qui conduit à :

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{q}_j + \omega_j^2q_j = {}^\top\Phi_j \underline{f}(q_j) + {}^\top\Phi_j \underline{g}(t) \quad (\text{I.34})$$

Ces hypothèses ont été discutées dans Lacayo *et al.* [60] dans un contexte de modélisation. Il s'avère que l'hypothèse de découplage n'induit pas des erreurs significatives en basse fréquence et qu'elle peut-être corrigée Krifa *et al.* [61]. Cette échelle de modélisation est la plus raisonnable lorsqu'il s'agit de déterminer la réponse d'une structure dans un temps réduit. Tout l'enjeu est d'être capable d'y introduire les éléments de la physique des petites échelles.

3 Changements d'échelles : la réduction de modèle

Dans le domaine de la dynamique des structures, nous utilisons souvent des modèles à échelle mésoscopique approximés par éléments finis qui ont été construits afin d'évaluer les déformations et les concentrations de contraintes dans les structures. Ces modèles sont souvent trop raffinés et ont plusieurs centaines de milliers (voire des millions) de degrés de liberté. Trouver une solution statique ou les valeurs propres pour ces modèles ne pose aucun problème, car il existe des outils numériques efficaces pour résoudre ce type de problème. La résolution de problèmes dynamiques, les réponses harmoniques et/ou transitoires, nécessite de résoudre beaucoup de problèmes quasi-statiques et entraîne des temps de calcul beaucoup plus longs. Souvent, le comportement dynamique d'une structure peut être correctement décrit en utilisant un maillage grossier. Néanmoins, le traitement des non-linéarités imposent un remaillage local important. Il est donc nécessaire de réduire le modèle tout simplement parce qu'il est trop « gros ».

À travers ce constat, on peut catégoriser les problèmes de grandes tailles :

- grande dimension en *espace* : structures de très grandes tailles (avion, usine) et/ou maillés finement ;
- grande dimension en *temps* : régime transitoire très long et/ou forte non-linéarité du problème imposant des résolutions incrémentales ;
- grande dimension en *paramètres* : multitude des paramètres physiques et numériques et/ou des complexités de leur variabilité.

Il est possible de construire des modèles réduits (de taille bien plus faible par rapport au problème initial) qui permettent de caractériser la dynamique globale de la structure. Cela permet de minimiser le temps de calcul et cela facilite donc les phases de re-conception, de propagation d'incertitudes ou encore d'optimisation.

Les méthodes de réduction de modèle se décomposent en deux catégories :

- les modèles réduits (réduction de composants au comportement exclusivement linéaire, sous-sous-section 3.2.2) : Ritz, Galerkin, Petrov Galerkin, condensation, CMS, super-élément ; pour toutes ces méthodes, l'écriture du système matriciel équivalent est de taille plus faible ;
- les méta-modèles (réduction de composants au comportement non-linéaire, sous-sous-section 3.2.3) : surfaces de réponses (abaque au sens large), réseaux de neurones ; ces méta-modèles sont des fonctions d'un ou plusieurs paramètres.

Le passage de l'échelle super-microscopique à l'échelle microscopique est relativement simple. Il s'agit de l'augmentation du nombre d'aspérités de une à un nombre fini d'aspérités. Cette évolution se traite soit de manière déterministe, soit de manière statistique (sous-sous-section 2.2.1).

3.1 Passage de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique

Ce passage rentre dans la catégorie de la modélisation locale. On ne regarde plus physiquement le contact mais plutôt quelles sont les conséquences physiques de ce contact. Le passage se fait d'un

grand nombre fini d'aspérités à un modèle de type patch véhiculant les phénomènes physiques observés. Même si on peut parler de modélisation globale, chaque zone et/ou élément seront modélisés.

Plusieurs solutions ont été mises en place afin de définir de manière locale et globale le contact dans les interfaces des structures assemblées. Néanmoins, dans le traitement des problèmes tridimensionnels, trois grandes familles se distinguent : *node to node contact*, *thin layer element* et *zero thickness element*. Bograd *et al.* [62] proposent une revue de la littérature portant sur les caractéristiques des liaisons, les types de modèles associés et examine brièvement les modèles utilisés dans la simulation des structures assemblées en structurant suivant ces trois catégories.

Le point de vue *node to node contact* est à privilégier dans le cas de petits mouvements tangentiels au niveau de la zone de contact. Il implémente des lois de comportement avec frottement dans la direction tangentielle et une loi non linéaire dans la direction normale ; le reste de la structure possédant des lois de comportement linéaires. Toutes les méthodes numériques de résolution, méthode de la balance harmonique (chapitre II – sous-section 2.2) dans le domaine fréquentiel [62] et méthodes d'intégration temporelles (chapitre II – sous-section 2.1) dans le domaine temporel [63, 64] sont compatibles.

La modélisation de la dynamique des liaisons avec des *thin layer element* réside dans le placement d'un élément de très faible épaisseur dans l'interface entre les pièces. La méthode utilise des paramètres d'amortissement indépendants de la fréquence et une rigidité linéaire de la liaison afin de prédire la réponse vibratoire des structures. Les simulations sont basées sur les paramètres de liaison déterminés expérimentalement et acquis à partir d'une liaison isolée. Cela permet de prédire rapidement les fréquences propres et les facteurs d'amortissement modaux des structures avant qu'il n'existe un prototype physique. Ce point de vue se limite au micro-glissement ce qui n'est pas limitant dans le cadre des structures assemblées. Cette méthode a fait ses preuves dans le cadre de la géomécanique afin de modéliser l'interaction sol/structure avec une interface de type roche [65, 50] au début des années 80. Depuis, elle a été notamment mise en pratique dans des études vibratoires, où Ahmadian et Jalali ont montré que le concept de couche mince, possédant une loi élastique linéaire, est très bien adapté à l'estimation des fréquences naturelles des structures complexes possédant de grandes interfaces assemblées [66]. Récemment, Bouaziz a également utilisé ce concept de couche mince pour modéliser l'interface de contact dans les structures assemblée au niveau des boulons [67].

Afin de mettre en œuvre le modèle de contact dans l'analyse par éléments finis, un élément de contact iso-paramétrique spécial, appelé élément d'épaisseur zéro, est programmé. Le concept d'éléments d'épaisseur nulle remonte à Goodman *et al.* [68]. Ce point de vue utilise des lois de contact normales et tangentielles non linéaires qui permettent de calculer la réponse de la structure à différentes amplitudes d'excitation en fonction de la pré-charge de la liaison [69]. Bograd *et al.* proposent une implémentation complète à l'aide d'un modèle s'appuyant sur les modèles de contact de type Greenwood (sous-section 2.2).

3.2 Passage de l'échelle mésoscopique à l'échelle macroscopique

À l'échelle mésoscopique, les déplacements réels des nœuds sont notés \underline{U} dans le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Le passage mésoscopique/macroscopique s'effectue en changeant de base d'expression ; on utilise la base modale Φ_m tel que $\underline{U} = \Phi_m \cdot \underline{Q}$ avec \underline{Q} les déplacements modaux. Sur la frontière de contact Γ_i (fig. I.15), le tenseur des contraintes s'exprime de la manière suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_n & \sigma_{t_1} & \sigma_{t_2} \\ \sigma_{t_1} & 0 & 0 \\ \sigma_{t_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.35})$$

Les efforts induits par ces contraintes sont directement calculables par intégration sur le domaine frontière Γ_i :

$$\underline{F}_n = \int_{\Gamma_i} \sigma_n \vec{n} dS \quad (\text{I.36})$$

$$\underline{F}_t = \int_{\Gamma_i} (\sigma_{t_1} \vec{t}_1 + \sigma_{t_2} \vec{t}_2) dS \quad (\text{I.37})$$

Les forces modales de liaisons s'expriment après multiplication à gauche par ${}^T \Phi_m$:

$${}^T \Phi_m \cdot \begin{bmatrix} \underline{F}_n \\ \underline{F}_t \end{bmatrix} = \underline{f}_n + \underline{f}_t(Q, \dot{Q}) = \underline{f}_{nl}(Q, \dot{Q}) \quad (\text{I.38})$$

avec \underline{f}_n la force modale de contact et $\underline{f}_t(Q, \dot{Q})$ la force modale de frottement.

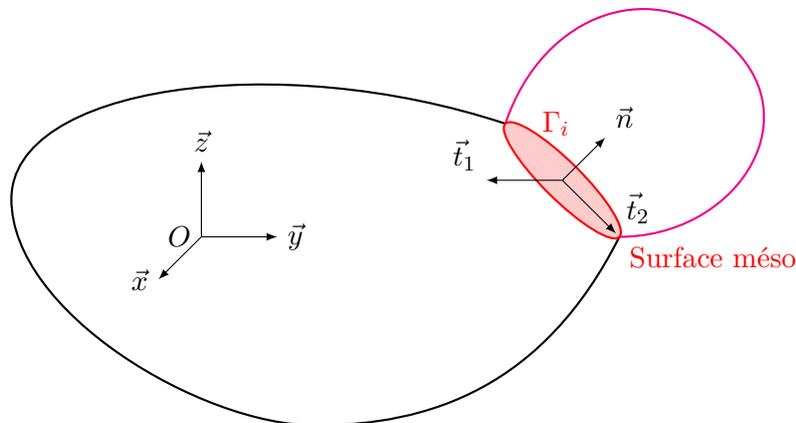


FIGURE I.15 – Figure du changement d'échelle mésoscopique vers macroscopique

3.2.1 Généralités sur les méthodes de réduction linéaire

Les méthodes de réduction linéaire à une structure reviennent à réaliser un changement de variable dans l'équation de la dynamique (méthode de Ritz). Soit l'équation de la dynamique I.39 :

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\underline{U}} + \mathbf{K} \cdot \underline{U} = \underline{F} \quad (\text{I.39})$$

en réalisant le changement de variable :

$$\underline{U} = \mathbf{A} \cdot \underline{Q} \quad (\text{I.40})$$

où \underline{Q} représente le vecteur inconnu réduit de dimension inférieure au nombre de ddls. On obtient, après multiplication à gauche par ${}^T \mathbf{A}$:

$${}^T \mathbf{A} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{A} \cdot \ddot{\underline{Q}} + {}^T \mathbf{A} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{A} \cdot \underline{Q} = {}^T \mathbf{A} \cdot \underline{F} \quad (\text{I.41})$$

D'où l'équation réduite de la dynamique :

$$\mathbf{M}_p \cdot \ddot{\underline{Q}} + \mathbf{K}_p \cdot \underline{Q} = \underline{F}_p \quad (\text{I.42})$$

Après résolution du problème réduit, on revient aux coordonnées physiques par l'équation I.40. La question récurrente lors d'une réduction du modèle est : quelle base choisir afin de réduire au maximum le problème sans affecter la précision des résultats ? Pour répondre à cette interrogation, on peut classer les bases possibles :

1. modes normaux de la structure complète ;
2. bases définies par sous-structures :
 - (a) modes normaux à interface libre ;
 - (b) modes normaux à interface fixe ;
 - (c) « modes » (réponses) statiques :
 - i. contraint (déplacement imposé) ;
 - ii. mode d'attache (effort imposé) ;
 - iii. mode de corps rigide.
3. enrichissement par résidus statiques et ré-orthogonalisation de Gram-Schmidt ;
4. utilisation d'une base de connaissance par analyse snapshot POD ou SVD, analogue de la compression d'images ou de données.

3.2.2 Modèles réduits – méthodes de réduction linéaire

Condensation statique de Guyan. Une des solutions les plus anciennes est la condensation de Guyan [70]. Cette méthode est appropriée dans le cas où les forces d'inertie principales sont associées aux domaines maîtres. Afin de réduire la taille du modèle, on partitionne l'ensemble des degrés de libertés en deux (fig. I.16b) : les ddls, dont les forces d'inertie associées sont importantes sont les ddls maîtres m et les autres, les ddls esclaves s . Cette distinction permet la réécriture de l'équation I.39 sous la forme :

$$\left[\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & \mathbf{M}_{ms} \\ \mathbf{M}_{sm} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_m \\ \underline{U}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_e \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad (\text{I.43})$$

Le choix s'oriente de manière à affecter le moins possible le spectre basse fréquence de la réponse harmonique. En pratique, les ddls maîtres contiennent les nœuds portant les actions mécaniques, ceux de jonction et quelques ddls internes. Les ddls esclaves regroupent ceux possédant une inertie faible.

La seconde ligne de l'équation I.43 permet l'expression du vecteur \underline{U}_s en fonction de \underline{U}_m :

$$\underline{U}_s = - \left[\mathbf{K}_{ss} - \omega^2 \mathbf{M}_{ss} \right]^{-1} \cdot \left[\mathbf{K}_{sm} - \omega^2 \mathbf{M}_{sm} \right] \cdot \underline{U}_m \quad (\text{I.44})$$

On néglige alors les termes inertiels ($-\omega^2 \mathbf{M}_{ss}$ et $-\omega^2 \mathbf{M}_{sm}$) associés aux ddls esclaves. D'où l'expression de la base de réduction Φ_G :

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_m \\ \underline{U}_s \end{bmatrix} = \Phi_G \cdot \underline{U}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{mm} \\ -\mathbf{K}_{ss}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{sm} \end{bmatrix} \cdot \underline{U}_m \quad (\text{I.45})$$

On note que cette condensation donne le résultat exacte en statique. Son efficacité est donc limitée lors de la résolution d'un problème de dynamique. C'est pour cela qu'à partir de cette condensation statique de Guyan, se sont construits des méthodes de sous-structuration dynamique. Il suffit pour cela d'ajouter à la base de Guyan des vecteurs supplémentaires. Ces méthodes se décomposent en deux groupes : *interfaces fixes* et *interfaces libres*. Cette désignation provient de la sous-structuration faisant intervenir l'interface comme étant à la jonction entre les sous-structures. Sur cette interface, les équations de compatibilité, ajoutées aux conditions limites imposées aux nœuds de l'interface, permettent la recombinaison du comportement de la structure globale.

Méthodes à interface fixes – méthode de Craig-Bampton. Bampton utilise, comme base de projection des sous-structures, des modes contraints et des modes normaux à interfaces fixes [71]. C’est la technique de réduction la plus utilisée aujourd’hui puisque son application est simple, stable et efficace.

Les modes contraints (fig. I.16b) sont issus de la réduction de Guyan puisqu’ils s’appuient sur la non prise en compte des termes d’inertie. Un mode contraint est défini comme la déformation statique d’une structure lorsqu’un déplacement unitaire est appliqué à une coordonnée de l’ensemble des ddls maîtres, tandis que les coordonnées restantes de cet ensemble sont contraintes nulles, et les degrés de liberté restants de la structure sont libres.

Dans le cas des méthodes à interfaces fixes, une partie des modes de réduction sont les modes propres Φ_{ss} de la sous-structure en considérant l’interface encastree (ddls maîtres) (fig. I.16c), d’où le terme « fixe ». Cette base est obtenue en résolvant le problème aux valeurs propres suivant :

$$\left(\mathbf{K}_{ss} - \omega_j^2 \mathbf{M}_{ss} \right) \cdot \Phi_{ss} = 0 \quad (\text{I.46})$$

Dans ces conditions, la base de projection de Craig-Bampton devient :

$$\Phi_{CB} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{mm} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}_{ss}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{sm} & \Phi_{ss} \end{bmatrix} \quad (\text{I.47})$$

On peut construire à partir de cet opérateur les matrices nouvellement réduites, ce qui permettra éventuellement la création d’un super-élément.

Enfin, il est aisé de construire un indicateur d’erreur r de la réduction comme étant le résidu de l’équation I.42. Ce résidu en force permet de construire un résidu en déplacement en multipliant par \mathbf{K}^{-1} afin d’en déduire l’énergie de déformation associée. Cet indicateur permettra de conclure quant à la qualité de la réduction du modèle. Enfin, le résidu en déplacement propose de façon naturelle un vecteur d’enrichissement de la base de Craig-Bampton. Il sera néanmoins nécessaire de l’orthonormaliser (chapitre II – sous-section 3.2) par rapport au reste de la base et de définir sa norme (classiquement par rapport à \mathbf{M}).

3.2.3 Méta-modèles – méthodes de réduction non-linéaire

Les méta-modèles sont une catégorie de réduction de modèle appliqués généralement aux problèmes non-linéaire. Ceux-ci sont créés à partir d’une base de données de type entrée/sortie. Ce sont des modèles boîte noire qui ont pour conséquence la perte de la physique (même si ces modèles sont d’origine physique) ; ce qui engendre également la perte de l’irréversibilité. De plus, il présente l’impossibilité d’estimer l’erreur commise sans le calcul entier. Néanmoins il présente un avantage essentiel : un temps de calcul fortement réduit.

On trouve deux grands types de méta-modèles :

- les surfaces de réponse ou abaque, s’appuyant sur une interpolation polynômiale limitée à un espace paramétrique restreint ;
- les réseaux de neurones où les trois phases d’apprentissage, de test et d’utilisation doivent être mise en place.

Actuellement, plusieurs philosophies de méta-modèles sont utilisées. Citons l’ajout d’éléments entre nœuds des modèles éléments finis ; ces éléments adoptent des comportements non-linéaires [72]. Les méthodes associées de résolution sont de type AFT avec une réduction de la partie linéaire utilisant la méthode de Craig-Bampton. Quant à lui, le laboratoire de mécanique et technologie (LMT) utilise une résolution continue par la LATIN, qui sert d’accélérateur de résolution. Le LMT s’appuie sur des abaques réalisés en quasi-statique [73].

Enfin la dernière philosophie actuelle propose que les surfaces restent reliées continuellement [74]. On résout temporellement en quasi-statique. Un accélérateur possible reste de passer par une analyse modale. Les non-linéarités sont présentes dans la raideur de la liaison. La principale réduction a été proposé par Festjens *et al.* en introduisant une base locale de sollicitation à

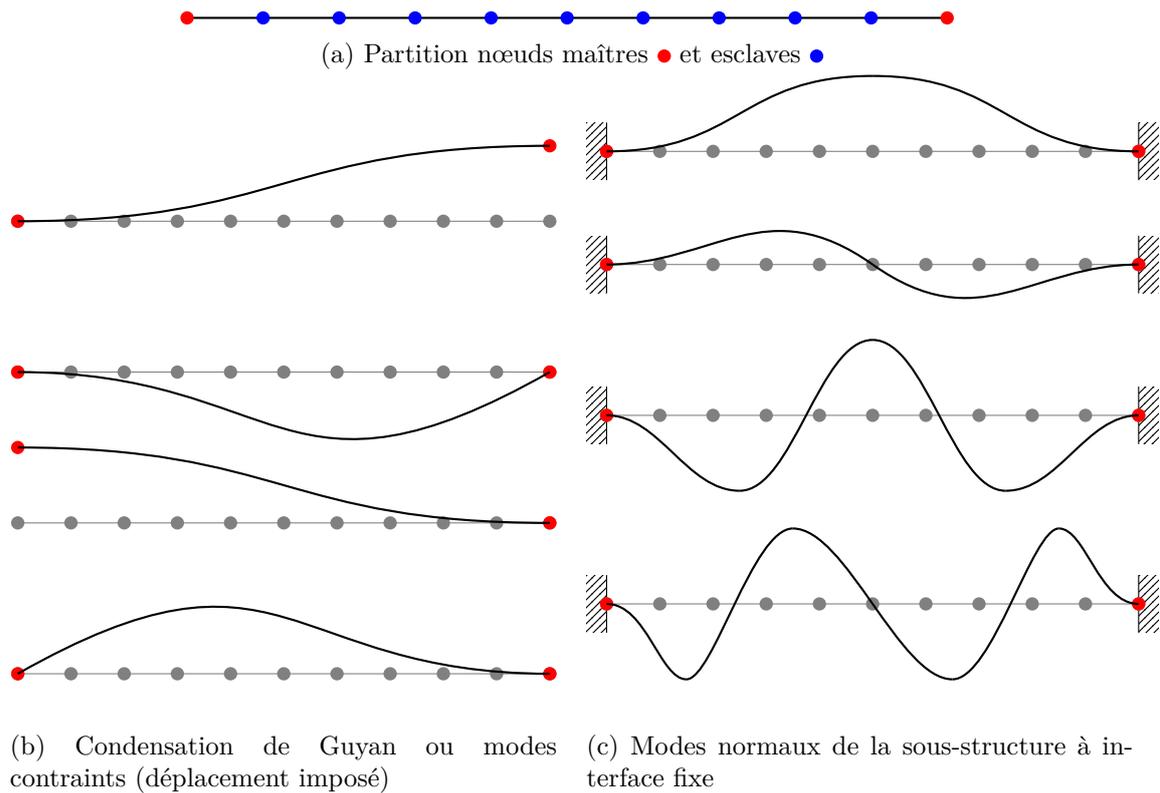


FIGURE I.16 – Illustration de la méthode de réduction de Craig-Bampton

la liaison : la PJSB [55]. Cette réduction part de la constatation que comme une liaison ne représente qu'une très petite partie d'une structure, plusieurs modes de la structure peuvent être colinéaire à l'échelle de la liaison. Plusieurs modes de la structure sont donc susceptibles de solliciter une liaison de manière identique. Il existe donc une base réduite à celle de la base des modes propres permettant de décrire l'ensemble des mouvements d'une liaison.

4 Conclusion

La problématique des structures assemblées est vaste. Elle ne se limite pas à l'analyse des problématiques à une échelle donnée, mais bel et bien à toutes les échelles en considérant les passages entre celles-ci : la réduction de modèle. C'est ce dernier point qui sera développé principalement dans ce mémoire de thèse. Un travail de synthèse est proposé dans le tableau I.1. Il propose une classification des différentes échelles, ainsi que les passages entre elles, mais aussi les types de modélisation et enfin les références principales de chaque échelle.

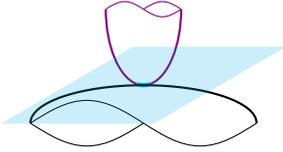
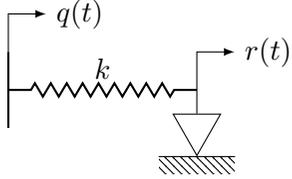
	Échelle			
	<i>super-micro</i>	<i>micro</i>	<i>méso</i>	<i>Macroscopique</i>
Approche				
<i>Point de vue</i>	Local	Local	Global	Modes
<i>Unité caractéristique</i>	μm	$\mu\text{m}-\text{mm}$	mm	cm
<i>Géométrie</i>	Nominal	Rugosité	Défauts de forme	Modes de structures
<i>Visuel</i>				
Modélisation				
<i>Interfaces</i>	Signorini, Coulomb	Signorini, Coulomb + grand nombre d'aspérités	Signorini, Coulomb + Raideur et contact	Iwan, Dahl
<i>Volumes</i>	Hertz, Mindlin, MMC	Hertz, Mindlin, MMC	MMC + MEF	Systèmes discrets réduits
Réduction	Augmentation des aspérités Approche déterministe ou statistique		Patch satisfaisant la physique Node to node, thin layer, zero thickness	
	Changement de base Ritz, Craig-Bampton			

TABLE I.1 – Synthèse sur les échelles et réductions de modèle

5 Bibliographie du chapitre I

-
- [1] Etienne BALMES et Sylvain GERMES : Design strategies for viscoelastic damping treatment applied to automotive components. *In International Modal Analysis Conference*, page s26p02. Citeseer, 2004.
 - [2] N. PEYRET, J.-L. DION, G. CHEVALLIER et P. ARGOUL : Energy Dissipation by Micro-Slip in an Assembly, Analytic and Experimental Approach. pages 729–735. American Society of Mechanical Engineers, janvier 2011.
 - [3] J MUYLAERT, R REINHARD, C ASMA, Jean-Marie BUCHLIN, P RAMBAUD et Maria Rosaria VETRANO : QB50 : An international network of 50 cubesats for multi-point, in-situ measurements in the lower thermosphere and for re-entry research. pages 7–11, janvier 2009.
 - [4] A. GONZÁLEZ, E. J. O'BRIEN et P. J. MCGETRICK : Identification of damping in a bridge using a moving instrumented vehicle. *Journal of Sound and Vibration*, 331(18):4115–4131, août 2012.
 - [5] Lionel ZOGHAIB et Pierre-Olivier MATTEI : Damping analysis of a free aluminum plate. *Journal of Vibration and Control*, 21(11):2083–2098, 2015.
 - [6] François AXISA : *Modélisation des systèmes mécaniques. Tome 4, Vibrations sous écoulements*.
 - [7] Henri J.-P. MORAND et Roger OHAYON : *Interactions fluides-structures*. Masson, 1992. Google-Books-ID : 9hZnPQAACAAJ.
 - [8] Franck RENAUD, Jean-Luc DION, Gaël CHEVALLIER, Imad TAWFIQ et Rémi LEMAIRE : A new identification method of viscoelastic behavior : Application to the generalized Maxwell model. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(3):991–1010, 2011.
 - [9] Jean-Luc DION et Serge VIALARD : Identification of rubber shock absorber mounts. *Mécanique industrielle et matériaux*, 50(5):232–237, 1997.
 - [10] Flavio D'AMBROSIO : *Comportement dynamique des structures en présence de frottement sec : application aux ensembles aubés*. PhD Thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2004.
 - [11] Denis LAXALDE : *Etude d'amortisseurs non-linéaires appliqués aux roues aubagées et aux systèmes multi-étages*. PhD Thesis, École Centrale de Lyon, 2007.
 - [12] Hamza BOUAZIZ, Nicolas PEYRET, Mohamed Slim ABBES, Gael CHEVALLIER et Mohamed HADDAR : Vibration reduction of an assembly by control of the tightening load. *International Journal of Applied Mechanics*, 8(06):1650081, 2016.
 - [13] André PREUMONT : *Vibration control of active structures : an introduction*, volume 179. Springer Science & Business Media, 2011.
 - [14] Hiroshi HOSAKA, Kiyoshi ITAO et Susumu KURODA : Damping characteristics of beam-shaped micro-oscillators. *Sensors and Actuators A : Physical*, 49(1):87–95, 1995.
 - [15] L. E. GOODMAN et J. E. KLUMPP : Analysis of slip damping with reference to turbine-blade vibration. *Journal of Applied Mechanics*, 23:421–429, 1956.
 - [16] Nicolas PEYRET : *Dissipation de l'énergie mécanique dans les assemblages : effet du frottement en sollicitation dynamique*. Thèse de doctorat, Université Paris-Est, 2012.
-

- [17] Matthew R. W. BRAKE et Pascal REUSS : The Brake-Reuß Beams : A System Designed for the Measurements and Modeling of Variability and Repeatability of Jointed Structures with Frictional Interfaces. *In The Mechanics of Jointed Structures : Recent Research and Open Challenges for Developing Predictive Models for Structural Dynamics*, pages 99–107. juillet 2018. ISBN 978-3-319-56816-4.
- [18] Noussa BOUCHAALA, Jean Luc DION, Nicolas PEYRET et Mohamed HADDAR : Micro-slip induced damping in the contact of nominally flat surfaces. *International Journal of Applied Mechanics*, 05(01):1350005, mars 2013.
- [19] F ROBBE-VALLOIRE, R PROGRI et Tony DA SILVA BOTELHO : Theoretical Analysis of the Influence of Asperity’s Dimensions Affected by a Scale Factor on the Mixed Lubrication between Parallel Surfaces. *Advances in Tribology*, 2018:1–11, juin 2018.
- [20] D. J. EWINS et P. T. GLEESON : A method for modal identification of lightly damped structures. *Journal of Sound and Vibration*, 84(1):57–79, septembre 1982.
- [21] Brandon J DEANER, Matthew S ALLEN, Michael J STARR, Daniel J SEGALMAN et Har-tono SUMALI : Application of viscous and iwan modal damping models to experimental measurements from bolted structures. *Journal of Vibration and Acoustics*, 137(2):021012, 2015.
- [22] M KRIFA, N BOUHADDI et S COGAN : Estimation of modal damping for structures with localized dissipation. *In Special Topics in Structural Dynamics, Volume 6*, pages 179–191. Springer, 2015.
- [23] Alexander F METHERELL et SV DILLER : Instantaneous energy dissipation rate in a lap joint ?uniform clamping pressure. *Journal of Applied Mechanics*, 35(1):123–128, 1968.
- [24] S. W. E. EARLES : Theoretical estimation of the frictional energy dissipation in a simple lap joint. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 8:207–214, 1966.
- [25] J. ESTEBAN et C. A. ROGERS : On the damping effect due to bolted junctions in space structures subjected to pyro-shock. *Computers and Structures*, 75:347–359, 2000.
- [26] C.F. BEARDS et J.L. WILLIAMS : The damping of structural vibration by rotational slip in joints. *Journal of Sound and Vibration*, 53(3):333–340, 1977.
- [27] Robert Michael LACAYO, Luca PESARESI, Daniel FOCHLER, Christoph SCHWINGSHACKL, Matthew Robert BRAKE, Johann GROSS et Jason ARMAND : A numerical round robin to predict the dynamics of an experimentally-measured brake-reuss beam. Rapport technique, Sandia National Lab.(SNL-NM), Albuquerque, NM (United States), 2016.
- [28] Jean-Luc DION, Gaël CHEVALLIER et Nicolas PEYRET : Improvement of measurement techniques for damping induced by micro-sliding. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 34(1-2):106–115, janvier 2013.
- [29] N. PEYRET, J.-L. DION, G. CHEVALLIER et P. ARGOUL : Micro-slip induced damping in planar contact under constant and uniform normal stress. *International Journal of Applied Mechanics*, 02(02):281–304, juin 2010.
- [30] Pauline BUTAUD et Gaël CHEVALLIER : Design of an assembly for nonlinear vibration reduction. 01 2017.
- [31] H. AHMADIAN et H. JALALI : Identification of bolted lap joints parameters in assembled structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21:1041–1050, 2007.

-
- [32] Y. REN et C BEARDS : Identification of joint properties of a structure using frf data. *Journal of Sound and Vibration*, 186(4):567–587, 1995.
- [33] M. BERTHILLIER, C. DUPONT, R. MONDAL et J.J. BARRAU : Blades forced response analysis with friction dampers. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 120:468–474, 1998.
- [34] B.K. NANDA et A.K. BEHERA : Study on damping in layered and jointed structures with uniform pressure distribution at the interfaces. *Journal of Sound and Vibration*, 1999.
- [35] M. De BENEDETTI, G. GAROFALO, M. ZUMPARO et R. BARBONI : On the damping effect due to bolted junctions in space structures subjected to pyro-shock. *Acta Astronautica*, 60:947–956, 2007.
- [36] M. OLDFIELD, H. OUYANG et J.E. MOTTERSHEAD : Simplified models of bolted joints under harmonic loading. *Computers and Structures*, 84:25–33, 2005.
- [37] Daniel J. SEGALMAN : A four-parameter iwan model for lap-type joints. *Journal of Applied Mechanics*, 72(5):752, 2005.
- [38] Heinrich Rudolf HERTZ : Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Härte.
- [39] R.D. MINDLIN : Compliance of elastic bodies in contact.
- [40] Antonio SIGNORINI : Sopra alcune questioni di statica dei sistemi continui. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, 2(2):231–251, 1933.
- [41] Ivan IORDANOFF, Yves BERTHIER, Sylvie DESCARTES et H HESHMAT : A review of recent approaches for modeling solid third bodies. *Journal of Tribology*, 124(4):725–735, 2002.
- [42] J. A. GREENWOOD et J. B. P. WILLIAMSON : Contact of Nominally Flat Surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 295:300–319, décembre 1966.
- [43] I C. FARAON et D J. SCHIPPER : Stribeck Curve for Starved Line Contacts. *Journal of Tribology-Transactions of The Asme - J TRIBOL-TRANS ASME*, 129:181–187, janvier 2007.
- [44] K. L. JOHNSON : Contact Mechanics. *Cambridge Core*, mai 1985.
- [45] I. C. FARAON : Mixed Lubricated Line Contacts. novembre 2005.
- [46] Nicolas PEYRET, Gael CHEVALLIER et Jean-Luc DION : Dynamic Damping in Joints : Multiscale Model Taking into Account Defects in a Nominally Plane Surface. *International Journal of Applied Mechanics*, 8, décembre 2016.
- [47] Ulf OLOFSSON et Lars HAGMAN : A model for micro-slip between flat surfaces based on deformation of ellipsoidal elastic bodies. *Tribology International*, 30(8):599–603, juillet 1997.
- [48] Layton HALE : Principles And Techniques For Designing Precision Machines. janvier 1999.
- [49] Nicolas PONTIUS, Julien SCHEIBERT, Kjetil THØGERSEN, Anders MALTHER-SØRENSEN et Joël PERRET-LIAUDET : Statistics of the separation between sliding rigid rough surfaces : Simulations and extreme value theory approach. *Physical Review E*, 99(2):023004, 2019.
- [50] CS DESAI, MM ZAMAN, JG LIGHTNER et HJ SIRIWARDANE : Thin-layer element for interfaces and joints. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 8(1):19–43, 1984.
-

- [51] Marco ROSATELLO : *Contribution to the study of damping in bolted structures*. Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay, 2019.
- [52] G. MASING : Eigenspannungen und Verfestigung beim Messing. *Proceedings of 2nd International Congress of Applied Mechanics (1926), Zurich*, pages 332–335, 1926.
- [53] Daniel J. SEGALMAN : An initial overview of Iwan modeling for mechanical joints. *Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM, Technical Report No. SAND2001-0811*, 2001.
- [54] F. AL-BENDER, V. LAMPAERT et J. SWEVERS : The generalized Maxwell-slip model : a novel model for friction Simulation and compensation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(11):1883–1887, novembre 2005.
- [55] H. FESTJENS, G. CHEVALLIER et J.L. DION : Nonlinear model order reduction of jointed structures for dynamic analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 333(7):2100–2113, mars 2014.
- [56] Phil R. DAHL : A solid friction model. Rapport technique, Aerospace Corp El Segundo Ca, 1968.
- [57] Louis GAGNON, Marco MORANDINI et Gian Luca GHIRINGHELLI : A review of friction damping modeling and testing. *Archive of Applied Mechanics*, pages 1–20, 2019.
- [58] C. Canudas de WIT, H. OLSSON, K. J. ASTROM et P. LISCHINSKY : A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(3):419–425, mars 1995.
- [59] Jean-Luc DION, Gael CHEVALLIER, Olivia PENAS et Franck RENAUD : A new multicontact tribometer for deterministic dynamic friction identification. *Wear*, 300(1-2):126–135, 2013.
- [60] Robert M LACAYO, Brandon J DEANER et Matthew S ALLEN : A numerical study on the limitations of modal iwan models for impulsive excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 390:118–140, 2017.
- [61] Mohamed KRIFA, Noureddine BOUHADDI, Gael CHEVALLIER, Scott COGAN et Najib KACEM : Estimation and correction of the modal damping error involving linear and nonlinear localized dissipation. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 66:296–308, 2017.
- [62] S BOGRAD, P REUSS, A SCHMIDT, L GAUL et M MAYER : Modeling the dynamics of mechanical joints. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(8):2801–2826, 2011.
- [63] RI LEINE, DH VAN CAMPEN, A DE KRAKER et L VAN DEN STEEN : Stick-slip vibrations induced by alternate friction models. *Nonlinear dynamics*, 16(1):41–54, 1998.
- [64] Nguyen B DO, Aldo A FERRI et Olivier A BAUCHAU : Efficient simulation of a dynamic system with lgre friction. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2(4):281–289, 2007.
- [65] GN PANDE et KG SHARMA : On joint/interface elements and associated problems of numerical ill-conditioning. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 3(3):293–300, 1979.
- [66] Hamid AHMADIAN et Hassan JALALI : Identification of bolted lap joints parameters in assembled structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21:1041–1050, février 2007.
- [67] Hamza BOUAZIZ : *Contrôle vibratoire des structures assemblées*. Thèse de doctorat, 2017.

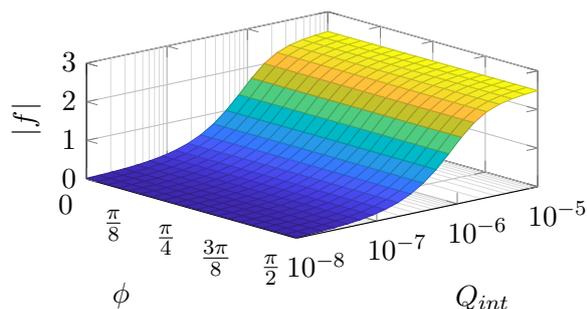
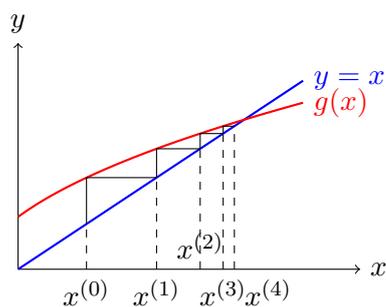
- [68] Richard E. GOODMAN, Robert L. TAYLOR et Tor L. BREKKE : A Model for the Mechanics of Jointed Rock. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 94(3):637–660, 1968.
- [69] Lothar GAUL et M.H. MAYER : Modeling of contact interfaces in built-up structures by zero-thickness elements. *Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series*, 01 2008.
- [70] R. J. GUYAN : Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA Journal*, 3(2):380–380, 1965.
- [71] JR. BAMPION, M.C.C. et R.R. Craig : Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA Journal*, 6(7):1313–1319, 1968.
- [72] Malte KRACK, Loic SALLES et Fabrice THOUVEREZ : Vibration prediction of bladed disks coupled by friction joints. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 24(3):589–636, 2017.
- [73] Alain CAIGNOT : *Prédiction par essais virtuels de l'amortissement dans les structures spatiales*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan-ENS Cachan, 2009.
- [74] Chaima HAMMAMI, Etienne BALMES et Mikhail GUSKOV : Numerical design and test on an assembled structure of a bolted joint with viscoelastic damping. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 70:714–724, 2016.

Chapitre II

Méthodes de résolution numériques des systèmes dynamiques non-linéaires

Sommaire

1	Introduction	33
1.1	Intérêt de la simulation numérique	33
1.2	Stratégie de résolution générale	33
2	Simulations numériques en dynamique des structures	34
2.1	Méthodes associées au régime transitoire	35
2.2	Détermination de la réponse harmonique en régime permanent	38
2.3	Caractérisation harmonique du modèle de Dahl	41
3	Résolution en régime permanent harmonique par la méthode de la balance harmonique	43
3.1	Méthodes de continuation	43
3.2	Réduction de modèles	47
3.3	Résoudre $f(x)=0$	53
4	Conclusion	56
5	Bibliographie du chapitre II	58



Résumé

Ce chapitre permet de présenter les méthodes numériques rencontrées lors de résolution de problèmes associés à la dynamique de structures assemblées. On dissociera le type de simulation numérique, des outils nécessaires à la résolution en régime permanent harmonique.

1 Introduction

1.1 Intérêt de la simulation numérique

Les outils de simulations numériques sont désormais indispensables afin de limiter les temps de conception et d'optimisation des structures. Ce sont des outils très puissants d'autant que les clusters, regroupement d'ordinateurs, permettent de dépasser les limitations d'une machine en terme de puissance de calcul. Cependant, certains problèmes, par essence multi-échelles, résistent encore à ces progrès. Malheureusement, comme présenté dans le chapitre I, les problèmes de dynamique des structures assemblées sont multi-échelles. Les coûts de calcul importants induits par le caractère multi-échelles sont majorés par les non-linéarités de contact et frottement qui interviennent dans les liaisons.

1.2 Stratégie de résolution générale

Dans ce travail, les modèles sont construits à l'échelle mésoscopique. À cette échelle, comme exposé précédemment, il est courant d'utiliser une approximation du problème par éléments finis (chapitre I – sous-section 2.3). Dans ce contexte, l'équation générique à résoudre se résume à :

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\underline{U}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\underline{U}} + \mathbf{K} \cdot \underline{U} = \underline{F}_e(t) + \underline{F}_{nl}(\underline{U}, \dot{\underline{U}}) \quad (\text{II.1})$$

où :

- \mathbf{M} est la matrice de masse ;
- \mathbf{C} est la matrice d'amortissement ;
- \mathbf{K} est la matrice de raideur ;
- $\underline{F}_e(t)$ les forces d'excitation, extérieures à la structure ;
- $\underline{F}_{nl}(\underline{U}, \dot{\underline{U}})$ l'ensemble des forces non-linéaires.

Trois grandes familles d'essais de caractérisation et de qualification doivent être reproduites par simulation :

- les problèmes de dynamique transitoire : chocs, impacts, crash ;
- les problèmes de dynamique stationnaire : réponses à balourd ou à sollicitation harmonique ;
- les problèmes de dynamique stationnaire sous excitation aléatoire pour le dimensionnement en fatigue.

Vibrations transitoires. Afin de résoudre l'équation II.1 en régime transitoire, il est nécessaire d'utiliser une *discrétisation temporelle*. Celle-ci permet d'obtenir une série de solutions instantanées, voir équation II.3. Une liste des méthodes de résolution associées au régime transitoire est présentée dans la sous-section 2.1. Néanmoins, le traitement de ce type de problème par des solveurs de type ODE est possible jusqu'à un certain nombre de degrés de liberté (une limite semble se dégager pour un nombre d'environ $1 \times 10^3 - 1 \times 10^4$ degrés de liberté). À cela, il faut ajouter que ces résolutions sont coûteuses. Il est donc fréquent que l'on ait recours à une *accélération* du calcul. Cela passe par une réduction du modèle. On retrouve les méthodes vues au chapitre I – sous-section 3.2. À cela, ajoutons des méthodes de ré-orthogonalisation explicites dans la sous-section 3.2.

Vibrations périodiques stationnaires. Dans certaines applications, machines tournantes par exemple, l'excitation extérieure à la structure est harmonique. Dans ce cas, seul le comportement en Régime Permanent Harmonique (RPH) est souhaité, le régime transitoire ne représentant qu'une portion réduite du temps d'étude. Dans cette situation, on calcule des solutions périodiques que l'on peut approximer par un développement en série de Fourier. Il s'agit de la

méthode d'équilibrage harmonique (HBM). Cette méthode est bien documentée dans l'ouvrage récent de M. Krack et dans bien d'autres publications [1]. L'algorithme générique de résolution en RPH soulève les trois questions suivantes :

1. Comment définir la décomposition spectrale de F_{nl} ?
 - Dans le cas de fonctions polynomiales, cette définition peut être analytique ; ce qui permet également de traiter le cas des fonctions non polynomiales développées en série de Taylor ;
 - Lorsque les fonctions sont non polynomiales, singulières (chocs) ou hystérétiques (frottement), il existe des approches basées sur le calcul numérique des termes de la série de Fourier.
2. Comment balaie-t-on *rapidement* l'intervalle des pulsations ω ?
 - Les méthodes de continuation permettent de prédire la valeur de la solution à la fréquence $\omega^{(j+1)}$ sachant la solution à la valeur $\omega^{(j)}$. Pour cela, il existe un panel de méthodes plus ou moins sophistiquées capables de capturer l'évolution de la solution en fonction d'un paramètre. La continuation par pseudo-longueur d'arc est une méthode très efficace pour atteindre cet objectif ;
 - La **Méthode Asymptotique Numérique** (MAN) permet d'intégrer un développement asymptotique dans la définition de la solution vis à vis du paramètre. Ce faisant, elle permet de déterminer encore plus efficacement des branches entières de solutions.
3. Comment résout-on efficacement l'équation II.1 ?
 - Sachant la valeur prédite par l'algorithme de continuation, le solveur doit améliorer la prédiction itérativement. Les algorithmes de résolution recherchent la solution des systèmes d'équations algébriques de la forme : $\underline{f}(\underline{x}) = \underline{0}$. Ces outils sont détaillés dans la sous-section 3.3 ;
 - Pour gagner en efficacité, il est courant d'avoir recours à la réduction de modèles permettant de réaliser un changement d'échelle d'un modèle mésoscopique (EF) vers une modèle macrosopique (variables modales) (chapitre I – section 3) en tentant de tendre vers une réduction optimale, précise et rapide. Pour cela, une base préférentielle (la PJSBDE) sera introduite au chapitre III.

Vibrations aléatoires stationnaires. Enfin, par nature, l'environnement vibratoire réel est souvent aléatoire (forces liées à un écoulement fluide, forces électro-magnétiques, forces de roulement ou de frottement, etc). D'autre part, les essais de caractérisation ou de qualification d'équipements sont souvent basés sur une excitation aléatoire parce qu'elle permettent de réaliser des essais plus rapides tout en étant représentatif des sollicitations réelles rencontrées lors des différents cycles de vie des structures testées. On retrouve des essais en régime forcé aléatoire sur les lanceurs spatiaux, les véhicules routiers, les navires ou encore les avions. Ce cas de figure est traité de manière probabiliste. Les ingrédients de base sont d'ailleurs les mêmes que pour l'étude des vibrations transitoires et stationnaires harmoniques, les vibrations aléatoires peuvent être simulées dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel. Cet aspect ne sera pas développé dans ce chapitre puisqu'il n'a finalement pas été creusé dans ces travaux de thèse.

2 Simulations numériques en dynamique des structures

Dans cette section, une synthèse des méthodes de résolution de l'équation II.1 est réalisée. La section est organisée en fonction des régimes vibratoires décrits dans la partie précédente : transitoire et permanent harmonique.

2.1 Méthodes associées au régime transitoire

Afin de simuler les régimes transitoires, les méthodes d'intégration temporelle sont les outils de simulation les plus adaptés. Elles sont basées sur le développement des dérivées de la solution en série dont les termes sont les valeurs de la solution à différents instants. Les principaux enjeux de développement de ces méthodes sont la recherche de précision, de stabilité et de temps de calcul. Par conséquent le choix d'une méthode de résolution est fonction de :

- la taille du modèle, i.e. le nombre de variables, qui impose directement le temps de calcul par l'évaluation de la fonction à chaque pas de temps ;
- du contenu fréquentiel de la solution et de l'excitation qui régit directement le pas de temps du calcul ;
- la stabilité du schéma d'intégration et le conditionnement du problème, qui traduisent le comportement de l'algorithme vis-à-vis des erreurs numériques et du pas de temps ; en contrepartie, l'amortissement numérique induit par la méthode, doit être suffisant pour assurer la convergence des problèmes à haute fréquence, sans pour autant dénaturer le comportement du modèle.

La classification classique des méthodes résulte de leur ordre d'intégration :

1. méthodes du premier ordre pour lesquelles il faut écrire le problème dans l'espace d'état :
 - méthode d'Euler explicite, implicite, trapèze ;
 - méthodes de Runge-Kutta à pas multiples.
2. méthodes du second ordre pour lesquelles le problème est exprimé dans l'espace naturel à la physique : famille des méthodes de Newmark implicite et explicite, méthode $HHT - \alpha$, etc.

Ces méthodes sont à comparer et utiliser en fonction de leur consistance : convergence et stabilité.

2.1.1 Méthodes du premier ordre

Les méthodes d'intégration temporelle directe du premier ordre s'appuient sur la séparation des variables d'espace et de temps. Il en résulte deux approximations : *spatiale* et *temporelle* ; la première étant réalisée par la méthode des éléments finis. Le champ discrétisé en espace est noté $\underline{U}(t)$. Le système d'équations différentielles du second ordre (eq. II.1) est ensuite réécrit dans l'espace d'état :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\underline{U}} \\ \ddot{\underline{U}} \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{V}}(t)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{K} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{U} \\ \dot{\underline{U}} \end{bmatrix}}_{\underline{V}(t)} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \underline{F}_e(t) + \underline{F}_{nl}(\underline{U}, \dot{\underline{U}}) \end{bmatrix} \quad (\text{II.2})$$

La deuxième est obtenue par une méthode de discrétisation en temps dont une formulation générale est proposée par l'équation II.3 :

$$\underline{V}^{(n+1)} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \underline{V}^{(n+1-j)} - h \sum_{j=0}^N \beta_j \dot{\underline{V}}^{(n+1-j)} \quad (\text{II.3})$$

avec :

- $h = t^{(n+1)} - t^{(n)}$ le pas de temps ;
- $\underline{V}^{(n+1)} = \top [\underline{U}^{(n+1)}, \dot{\underline{U}}^{(n+1)}]$, le vecteur d'état évalué à l'instant $t^{(n+1)}$ à partir des valeurs de \underline{U} aux N instants précédents ainsi que de sa propre valeur $\underline{U}^{(n+1)}$;

En fonction des valeurs des coefficients α_j et β_j , différentes catégories de méthodes sont définies :

- si $\beta_0 \neq 0$ le schéma devient à formulation *implicite*. Lors de la résolution d'un système non-linéaire, il faudra ajouter une approche itérative de résolution, par l'algorithme de Newton par exemple (sous-section 3.3) ;
- si $\beta_0 = 0$ le schéma devient *explicite* ;

- si $\alpha_j = \beta_j = 0, \forall j > 1$, les méthodes sont à un pas de temps.

La plupart des solveurs de cette famille sont proposées dans les bibliothèques de Matlab®. Leurs spécificités respectives dépendent de leurs capacités à :

- résoudre au moyen d'un algorithme implicite ou d'un algorithme explicite ;
- résoudre des problèmes « raides » ;
- garantir la stabilité, ou respectivement à ne pas induire d'amortissement numérique ;
- résoudre des systèmes d'Equations Différentielles Ordinaires (Ordinary Differential Equation) ou des système d'Equations Différentielles Algébriques (Differential Algebraic Equation).

Globalement, il existe deux familles de solveurs. Les solveurs implicites proposent un schéma d'intégration dans lequel la solution à l'instant $n + 1$ ne peut être déterminée qu'en résolvant un système d'équations linéaires ou non-linéaires. Dans le cas explicite, la solution à l'instant $n + 1$ peut être déterminée directement à partir des solutions aux instants précédents. En apparence, les schémas d'intégration explicites sont donc plus intéressants, toutefois cette simplicité apparente cache des problèmes de stabilité et de convergence auxquels les schémas implicites sont moins sensibles. La stabilité des schémas d'intégration explicite est généralement liée au pas de temps : plus il est fin, plus la stabilité est garantie. En contrepartie, un excès de stabilité se traduit par un « amortissement numérique ». Dans l'étude d'un problème de vibrations, cet amortissement peut conduire à sous-estimer les amplitudes vibratoires.

La « raideur » d'un problème n'a pas de définition mathématique rigoureuse. Elle peut provenir de la modélisation mathématique du problème mais également des conditions aux limites. La raideur provient d'une différence d'échelle entre plusieurs phénomènes dits « lents » et « rapides » (chocs, frottement). Par conséquent, la méthode retenue doit posséder un pas faible afin de décrire ces comportements « rapides ».

En mathématiques, les équations différentielles-algébriques (DAE) sont une forme d'équations différentielles distinctes des équations différentielles ordinaires (ODE) en ce qu'une DAE peut contenir des équations purement algébriques. La distinction entre un système ODE implicite et un système DAE implicite provient du fait que le système DAE implicite est singulier.

Les tables II.1 et II.2 proposent une classification des solveurs proposés par le logiciel commercial Matlab®. La table II.1 propose une description des outils d'intégration temporelle en fonction de critères liés à la description du problème : état (continu ou discret), pas (fixe ou variable) et type de formulation (implicite ou explicite). Quant à la table II.2, elle recense, pour les mêmes solveurs, leurs performances vis-à-vis des critères : traitement de problèmes raides, pas (simple ou multi), ordre (fixe ou variable), précision (de faible à bonne), amortissement numérique engendré (oui ou non), traitement de DAE (oui/non).

2.1.2 Newmark

La méthode de Newmark [2] permet la résolution numérique d'un système d'équations différentielles d'ordre deux. Elle est bien adaptée aux problèmes fortement non-linéaires et est basée sur une stratégie de prédiction/correction. Elle s'appuie sur un développement limité de la vitesse et de la position à l'instant t à partir des mêmes grandeurs à $t - h$. Ce développement contient un terme d'erreur d'ordre trois (dérivée troisième du paramètre d'étude). Cette erreur peut être remplacée par un terme fonction de l'accélération au temps précédent en introduisant deux paramètres γ et β .

Après avoir initialisé le processus sur la dérivée seconde et en bouclant sur le paramètre de temps, l'algorithme de Newmark s'exprime ainsi :

1. prédiction de la dérivée de la solution :

$$\dot{\underline{U}}^{(n+1)*} = \dot{\underline{U}}^{(n)} + (1 - \gamma) h \ddot{\underline{U}}^{(n)} \quad (\text{II.4})$$

Solveurs		Description du problème		
Nom	Description	États	Pas	Formulation
<i>ode45</i>	Runge-Kutta d'ordre 4 à erreur d'ordre 5 (RK4)	Continu	Variable	Explicite
<i>ode23</i>	Runge-Kutta d'ordre 2-3	Continu	Variable	Explicite
<i>ode113</i>	Adams-BashForth-Moulton PECE d'ordre 1 à 13	Continu	Variable	Explicite
<i>ode15s</i>	Approximation de la dérivée	Continu	Variable	Implicite
<i>ode23s</i>	Formule de Rosenbrock d'ordre 2	Continu	Variable	Implicite
<i>ode23t</i>	Méthode des trapèzes à interpolation libre	Continu	Variable	Implicite
<i>ode23tb</i>	Idem <i>ode23t</i> pour l'ordre 1; dérivée à gauche à l'ordre 2	Continu	Variable	Implicite
<i>ode15i</i>	Dérivée à gauche - ordre 1 à 5	Continu	Variable	Implicite
<i>ode1</i>	Méthode d'Euler	Continu	Fixe	Explicite
<i>ode2</i>	Méthode de Heun	Continu	Fixe	Explicite
<i>ode3</i>	Formule de Bogacki-Shampine	Continu	Fixe	Explicite
<i>ode4</i>	RK4	Continu	Fixe	Explicite
<i>ode5</i>	RK5	Continu	Fixe	Explicite
<i>ode8</i>	RK8	Continu	Fixe	Explicite
<i>ode14x</i>	Algorithme de Newton puis extrapolation	Continu	Fixe	Implicite
<i>discrete</i>	Euler à droite, à gauche ou méthode du trapèze	Discret	Fixe ou variable	Explicite ou Implicite

TABLE II.1 – Classification des solveurs en fonction de la description du problème

Solveurs	Performances associées					
	Raide	Pas	Ordre	Précision	Amortissement	DAE
<i>ode45</i>	Non	Simple	n.c.	Moyenne	n.c.	Non
<i>ode23</i>	Peu	Simple	n.c.	Faible	n.c.	Non
<i>ode113</i>	Non	Multi	n.c.	Faible à moyenne	n.c.	Non
<i>ode15s</i>	Oui	Multi	Oui	Faible à moyenne	Oui mais stable	Oui
<i>ode23s</i>	Oui	Simple	n.c.	Faible	n.c.	n.c.
<i>ode23t</i>	Oui	Simple	n.c.	Faible	Non (stabilité moindre)	Oui
<i>ode23tb</i>	Oui	Simple	n.c.	Faible	n.c.	n.c.
<i>ode15i</i>	n.c.	n.c.	Oui	Faible	n.c.	Oui
<i>ode1</i>	Non	Simple	Non	Faible	n.c.	Non
<i>ode2</i>	Non	Simple	Non	Faible	n.c.	Non
<i>ode3</i>	Non	Simple	Non	Faible à moyenne	n.c.	Non
<i>ode4</i>	Non	Simple	Non	Moyenne	n.c.	Non
<i>ode5</i>	Non	Simple	Non	Moyenne	n.c.	Non
<i>ode6</i>	Non	Simple	Non	Moyenne à bonne	n.c.	Non
<i>ode8</i>	Non	Simple	Non	Bonne	n.c.	Non
<i>ode14x</i>	n.c.	n.c.	n.c.	Bonne	n.c.	Non
<i>discrete</i>	Non	n.c.	n.c.	n.c.	n.c.	Non

TABLE II.2 – Classification des solveurs en fonction de leurs performances. (n.c. non communiqué ou non renseigné)

2. prédiction de la solution elle-même :

$$\underline{U}^{(n+1)*} = \underline{U}^{(n)} + h\underline{\dot{U}}^{(n)} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) h^2 \underline{\ddot{U}}^{(n)} \quad (\text{II.5})$$

3. calcul de la dérivée seconde de la solution $\underline{\ddot{U}}^{(n+1)}$ à partir des deux prédictions ;

4. correction de la dérivée première :

$$\underline{\dot{U}}^{(n+1)} = \underline{\dot{U}}^{(n+1)*} + \gamma h \underline{\ddot{U}}^{(n+1)} \quad (\text{II.6})$$

5. correction de la solution :

$$\underline{U}^{(n+1)} = \underline{U}^{(n+1)*} + \beta h^2 \underline{\ddot{U}}^{(n+1)} \quad (\text{II.7})$$

Le schéma correctif de Newmark, de manière concise, s'exprime de la manière suivante :

$$\underline{V}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{\dot{U}} \end{bmatrix}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{\dot{U}} \end{bmatrix}^{(n)} + \begin{bmatrix} \beta h^2 & h^2 \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \\ 1 - \gamma & \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\ddot{U}}^{(n)} \\ \underline{\ddot{U}}^{(n+1)} \end{bmatrix} \quad (\text{II.8})$$

En fonction des valeurs de β et γ on peut jouer sur la stabilité de l'algorithme ainsi que de son caractère explicite ou implicite. À titre d'exemple, si $\beta = 1/16$ et $\gamma = 1/2$, on accède à une interpolation linéaire de l'accélération entre deux pas de temps ; si $\beta = 1/4$ et $\gamma = 1/2$, on propose la valeur moyenne de l'accélération entre deux pas de temps. Enfin tous les schémas de la famille de Newmark apportent un amortissement numérique sur la solution ce qui est problématique à basses fréquences mais peut être avantageux à hautes fréquences dans un cadre d'analyse par éléments finis.

2.2 Détermination de la réponse harmonique en régime permanent

Dans toutes les utilisations, la détermination de l'évolution des paramètres d'étude en régime permanent nécessite l'utilisation de la transformée de Fourier définie par l'équation II.9 qui permet de travailler directement dans le domaine fréquentiel.

$$\hat{U}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{II.9})$$

Un outil important pour l'analyse fréquentielle des structures est la Frequency Reponse Function (FRF). Celui-ci permet de représenter la réponse de la structure. Cette FRF est définie par :

$$\hat{H}_{jk}(\omega) = \frac{\hat{U}_j}{\hat{F}_k} \quad (\text{II.10})$$

où le $\hat{\cdot}$ désigne la transformée de Fourier des différentes fonctions. Si la structure a un comportement non-linéaire, la transformée de Fourier n'est pas calculable analytiquement. Il faut alors faire l'étude dans le domaine temporel et utiliser des méthodes pour accélérer la sortie du régime transitoire comme les méthodes de tir (shooting). Il est aussi possible de postuler que la solution peut-être représentée par une série de Fourier. Ensuite, on évalue les termes de la série par une méthode d'équilibrage harmonique, HBM (Harmonic Balance Method), voir M. Krack 2019 pour une synthèse [1].

Cas linéaire – transformée de Fourier. L'équation générique de la dynamique des structures II.1 devient sans terme non-linéaire, l'équation suivante :

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\underline{U}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\underline{U}} + \mathbf{K} \cdot \underline{U} = \underline{F}_e(t) \quad (\text{II.11})$$

Puis, en utilisant la transformée de Fourier (eq. II.9), cette équation II.11 devient :

$$\hat{\underline{U}} = \left(-\omega^2 \cdot \mathbf{M} + i\omega \cdot \mathbf{C} + \mathbf{K} \right)^{-1} \cdot \hat{\underline{F}}_e \quad (\text{II.12})$$

Deux méthodes principales se dégagent dans le cadre du calcul de la réponse harmonique :

- sans réduction de modèle par le calcul direct ;
- avec réduction de modèle par la projection, par exemple, sur la base modale.

Dans le premier cas, à chaque pas de pulsation, on inverse le système matriciel. Cela a pour conséquence d'être coûteux, mais valable quelle que soit la matrice \mathbf{C} . De plus, cette inversion à chaque itération autorise les dépendances fréquentielles des matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} et \mathbf{K} .

Afin d'accélérer le calcul, il faut réduire le modèle. Une des possibilités est la projection sur la base modale ; ici cela revient à projeter le terme $(-\omega^2 \cdot \mathbf{M} + i\omega \cdot \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1}$ sur la base modale, ce qui transfère le coût de calcul à l'extraction de celle-ci. Si l'hypothèse de Basile est vérifiée (diagonalisation de \mathbf{C} par la base modale) alors le terme décrit précédemment s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \left(-\omega^2 \cdot \mathbf{M} + i\omega \cdot \mathbf{C} + \mathbf{K} \right)^{-1} &= \Phi \cdot \left[\begin{array}{c} \frac{1}{m_j \left(-\omega^2 + 2i\xi_j \omega \omega_j + \omega_j^2 \right)} \\ \vdots \\ \frac{1}{m_j \left(-\omega^2 + 2i\xi_j \omega \omega_j + \omega_j^2 \right)} \end{array} \right] \cdot {}^\top \Phi \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{\Phi_j \cdot {}^\top \Phi_j}{m_j \left(-\omega^2 + 2i\xi_j \omega \omega_j + \omega_j^2 \right)} \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

En pratique, on ne détermine que les $n < N$ premiers modes de la structure :

$$\left(-\omega^2 \cdot \mathbf{M} + i\omega \cdot \mathbf{C} + \mathbf{K} \right)^{-1} = \sum_{j=1}^n \frac{\Phi_j \cdot {}^\top \Phi_j}{m_j \left(-\omega^2 + 2i\xi_j \omega \omega_j + \omega_j^2 \right)} + \sum_{j=n+1}^N \frac{\Phi_j \cdot {}^\top \Phi_j}{m_j \left(-\omega^2 + 2i\xi_j \omega \omega_j + \omega_j^2 \right)} \quad (\text{II.14})$$

En supposant que les modes d'ordre supérieur à n ne répondent qu'en statique, on peut estimer la contribution des modes de rang $> n$, soit :

$$\left(-\omega^2 \cdot \mathbf{M} + i\omega \cdot \mathbf{C} + \mathbf{K} \right)^{-1} \simeq \sum_{j=1}^n \frac{\Phi_j \cdot {}^\top \Phi_j}{m_j \left(-\omega^2 + 2i\xi_j \omega \omega_j + \omega_j^2 \right)} + \mathbf{K}^{-1} - \sum_{j=1}^n \frac{\Phi_j \cdot {}^\top \Phi_j}{m_j \omega_j^2} \quad (\text{II.15})$$

Cette troncature engendre des erreurs à des pulsations plus élevées. En pratique, il est fréquent de tronquer à une fréquence 1,5 à 3 fois la fréquence maximale d'étude. De plus il est possible, à un coût faible, de prendre en compte le résidu statique et de corriger ainsi l'erreur commise par la troncature.

Cas non linéaire – Harmonic Balance Method. L'Harmonic Balance Method (HBM), méthode de l'équilibrage dynamique en français, est une méthode de Galerkin s'appuyant sur l'approximation d'une solution en une série de Fourier tronquée, voir Gottlieb et Orszag [3], Urabe [4] et Peng *et al.* [5].

Cette méthode est utilisée en mécanique, et principalement pour les systèmes soumis à des entrées harmoniques [6, 7] ou encore en acoustique [8]. Elle est également utilisée dans le domaine

de l'électricité [9]. Elle a comme avantage aux ordres faibles de nécessiter beaucoup moins d'inconnues qu'une méthode de résolution temporelle. Par conséquent, la résolution d'un système à grands nombres de degrés de liberté se porte naturellement vers cette méthode. À contrario, si un des signaux d'étude est riche en harmoniques, il sera alors nécessaire de limiter le nombre de degrés de libertés d'étude. Par conséquent, la principale limitation reste le produit entre le nombre d'harmoniques nécessaires à la description des signaux étudiés et le nombre de degrés de liberté nécessaires à la discrétisation spatiale, afin de rendre le coût de calcul raisonnable. Dans cette méthode, on cherche une solution $q(t)$ sous la forme d'une série de Fourier tronquée à l'ordre H :

$$q(t) = q_0 + \sum_{j=1}^{N_H} q_{cj} \cos(j\omega t) + \sum_{j=1}^{N_H} q_{sj} \sin(j\omega t) \quad (\text{II.16})$$

En utilisant cette définition dans la relation II.1, combinée éventuellement une réduction du sous-espace dans lequel on recherche des solutions, on obtient un système algébrique du type $\underline{f}(q_{sj}, q_{cj}) = \underline{0}$, on « équilibre » chaque harmonique jusqu'à l'harmonique H . On obtient alors un système de $(2N_H + 1) \times N_{eq}$ équations algébriques. Parfois, le système sous cette forme est indéterminé. Il est alors nécessaire de rajouter une équation de phase, ce qui revient à ajouter une condition initiale.

Couplage des représentations temporelles et fréquentielles – AFT. Lorsque l'écriture de la décomposition en série de Fourier de la force non-linéaire n'est pas évidente, il est nécessaire d'utiliser son expression dans le domaine temporel et d'utiliser la transformée de Fourier numérique. C'est le principe de la méthode Alternating Frequency Time (AFT). Cette méthode a tout d'abord été présentée par Cameron et Griffin [10]. Le principe est rappelé ci-dessous en quelques étapes pour une variable généralisée et une harmonique dans le développement en série de Fourier :

Partant de l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{q} + 2\xi\omega_0\dot{q} + \omega_0^2 q = f_e \cos(\omega t) + f_{nl}(q, \dot{q}) \quad (\text{II.17})$$

on peut la ré-écrire sous la forme :

$$l(q) = f(t) + f_{nl}(q, \dot{q}) \quad (\text{II.18})$$

avec l un opérateur différentiel linéaire. Ce qui donne en appliquant la transformée de Fourier :

$$\Lambda(\omega) \hat{Q}(\omega) = \hat{F}(\omega) + \hat{N}(\omega, \hat{Q}(\omega)) \quad (\text{II.19})$$

où Λ vaut :

$$\Lambda = -\omega^2 + 2\xi\omega_0 j\omega + \omega_0^2 \quad (\text{II.20})$$

Ce problème peut être résolu grâce une méthode itérative qui vise à annuler le résidu de l'équation précédente :

$$\hat{R} = \Lambda \hat{Q} - \hat{F} - \hat{N} \quad (\text{II.21})$$

À chaque itération, le point difficile est de calculer $N(\omega, Q(\omega))$. La méthode AFT consiste à l'évaluer de la façon suivante :

$$\left| \begin{array}{c} \hat{Q}^{(k)} \\ j\omega \hat{Q}^{(k)} \end{array} \right| \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \left| \begin{array}{c} q^{(k)} \\ \dot{q}^{(k)} \end{array} \right| \xrightarrow{f_{nl}(q, \dot{q})} f_{nl}^{(k)} \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{N}^{(k)} \quad (\text{II.22})$$

Le résidu, direction de descente, est ensuite calculé grâce à l'équation II.21, soit :

$$\hat{R}^{(k)} = \Lambda \hat{Q}^{(k)} - \hat{F} - \hat{N}^{(k)} \quad (\text{II.23})$$

Enfin, il faut déterminer le jacobien qui donne le pas. Sa détermination peut nécessiter de calculer plusieurs points autour de la solution \hat{Q}^k ou alors de réaliser une approximation par la sécante.

$$J^{(k)} = \Lambda - \frac{d\hat{N}^{(k)}}{d\hat{Q}} \quad (\text{II.24})$$

Pour initialiser l'algorithme, on dispose d'une prédiction du résultat, voir méthodes de continuation, ou du résultat linéaire :

$$\hat{Q}^{(0)}(\omega) = [\Lambda(\omega)]^{-1} \hat{F}(\omega) \quad (\text{II.25})$$

L'AFT a été utilisée récemment dans des travaux pour des systèmes dynamiques [11] mais encore dans la propagation d'onde dans une barre à matériau non-linéaire [12].

2.3 Caractérisation harmonique du modèle de Dahl

L'hypothèse fondamentale de cette partie est qu'une liaison se comporte globalement comme le modèle de Dahl. Cette hypothèse n'est pas limitante dans le reste des développements puisque le modèle de Dahl capture le glissement partiel et s'il n'est pas suffisant, il peut être utilisé comme un élément constitutif d'un modèle de Iwan. Si le modèle respecte l'hypothèse de Masing, la simulation peut porter sur $1/4$ de période, sinon elle doit porter sur $5/4$ de période ou davantage. Pour stabiliser le modèle différentiel de Dahl, nos simulations portent sur 4 périodes. L'analyse des différentes études paramétriques montre que le régime permanent est atteint au bout d'une période. Par conséquent, seules les 3 dernières seront utilisées pour déterminer la transformée de Fourier.

L'objectif de cette partie est la caractérisation harmonique du modèle de Dahl. L'idée est la suivante : est-ce que l'on est capable de construire un abaque, construit a priori, ayant pour entrée l'amplitude Q_{int} , la pulsation ω et la phase ϕ d'excitation et pour sortie les modules et phases de la force de Dahl? Pour répondre à cette question, on testera l'influence du couplage module/phase d'une excitation en déplacement de l'entrée. On se donnera une excitation harmonique de la forme :

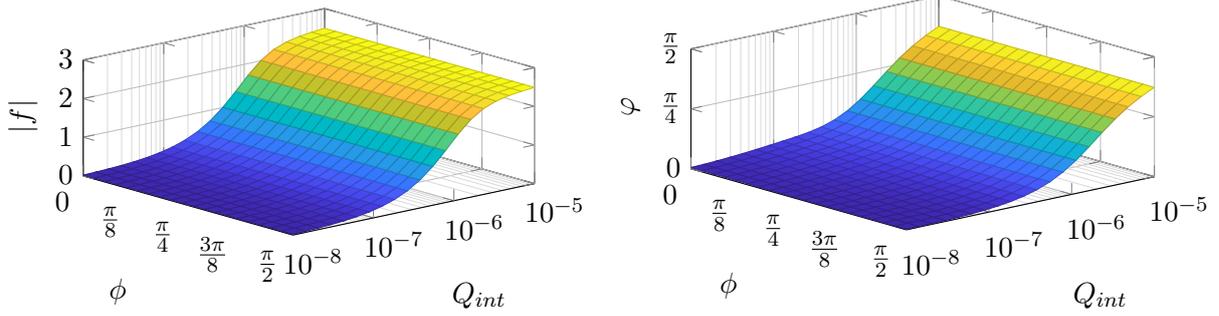
$$q_{int}(t) = Q_{int} \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{II.26})$$

Pour tester la faisabilité, on se donne :

1. la génération du signal numérisé $q_{int}(t_k)$;
2. un algorithme de résolution temporelle, pas à pas, des équations différentielles déterminant la force de Dahl $f(t)$ (eq. I.19) ;
3. les paramètres numériques suivants pour le modèle de Dahl :
 - $f_{\max} = 2$;
 - $\sigma = 2 \times 10^6$;
 - $\alpha = 1$.
4. la FFT des signaux $q_{int}(t)$ et $f(t)$;
5. la détermination de l'amplitude à la fréquence fondamentale de la force de Dahl Q_{int} , ainsi que du déphasage force/déplacement φ .

2.3.1 Influence de ϕ et Q_{int} sur $|f|$ et φ

La première étude porte sur l'influence de la phase et du module de q_{int} sur le fondamental du module et de la phase de F . Les différentes plages de variation des paramètres sont : $Q_{int} \in [1 \times 10^{-8}; 1 \times 10^{-5}]$ et $\phi \in [0; \frac{\pi}{2}]$.


 (a) Module de f en fonction du module et de la phase de q_{int}

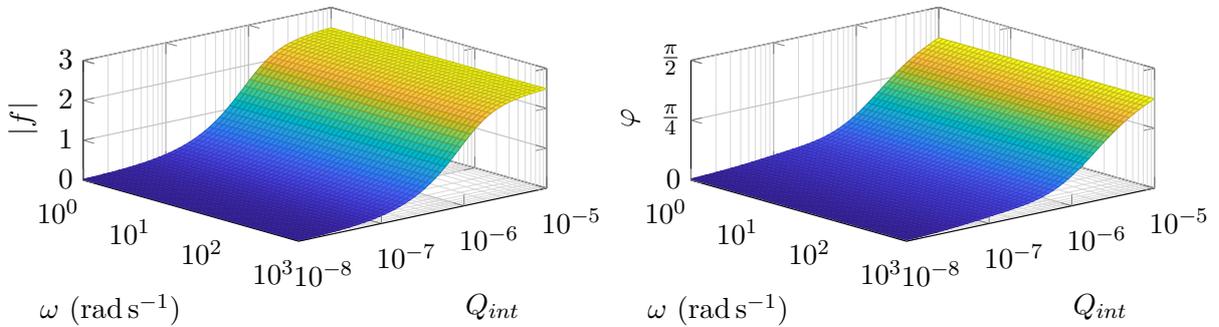
 (b) Phase de f en fonction du module et de la phase de q_{int}

 FIGURE II.1 – Influence de ϕ et Q_{int} sur $|f|$ et φ

Cette première étude nous montre que ni le module de l'harmonique 1 du modèle de Dahl, ni le déphasage φ ne sont sensibles au déphasage ϕ de l'entrée (figs. II.1a et II.1b). Autrement dit, la phase entre la force de dissipation et les déplacements de la structure ne dépend que de l'amplitude des vibrations et il n'est pas nécessaire de prendre en compte ce déphasage pour déterminer le module et la phase de la réponse en force ; ce qui simplifie la construction des abaques.

2.3.2 Influence de ω et Q_{int} sur $|f|$ et φ

Dans cette deuxième étude, nous ferons varier la pulsation d'excitation ω et le module du signal $q_{int}(t)$ et nous observons les résultats sur le module de f et le déphasage entre $q_{int}(t)$ et $f(t)$. Les amplitudes proposées sont $Q_{int} \in [1 \times 10^{-8}; 1 \times 10^{-5}]$ et $\omega \in [1; 1 \times 10^4]$.


 (a) Module de f en fonction du module de q_{int} et de la pulsation ω

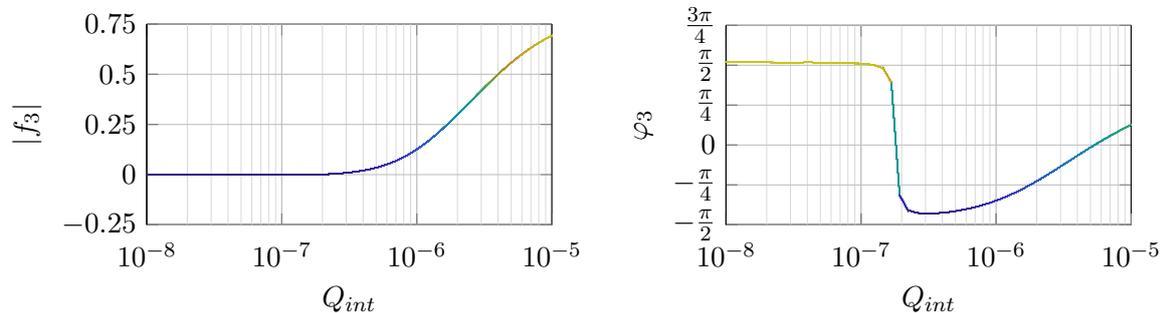
 (b) Phase de f en fonction du module de q_{int} et de la pulsation ω

 FIGURE II.2 – Influence de ω et Q_{int} sur $|f|$ et φ sur le fondamental

Les figures II.2a et II.2b montrent que l'amplitude et le déphasage du fondamental de la force de Dahl ne dépendent pas de la pulsation d'excitation ω . Autrement dit, la force de dissipation est proche d'un amortissement structural, dépendant de l'amplitude. On peut donc en conclure que le module et la phase (relative) de la fréquence fondamentale de la force de Dahl ne dépendent que de l'amplitude de l'excitation. Par conséquent, la cartographie des amplitudes harmoniques (a_i, b_i) ne dépendront que de l'amplitude Q_{int} de l'excitation q_{int} .

Précisions maintenant l'étude en observant l'harmonique de rang 3, c'est-à-dire à une pulsation $\omega_{H_3} = 3\omega$. Le déphasage sera défini en utilisant la définition précédente, c'est-à-dire que celui-ci aura comme référence l'angle défini à la fréquence fondamentale de l'excitation. La figure II.3a

donne le module de l'harmonique 3 en fonction de l'amplitude de l'excitation et la figure II.3b le déphasage. On remarque alors que l'harmonique 3 possède la même dépendance en Q_{int} et la même invariance en phase et pulsation que le fondamental.



(a) Module de l'harmonique 3 de f en fonction du module de q_{int} (b) Déphasage de l'harmonique 3 de f en fonction du module de q_{int}

FIGURE II.3 – Influence de Q_{int} sur $|f|$ et φ sur l'harmonique de rang 3

Pour une écriture dans la base des fonctions cos et sin, les coefficients (f_c, f_s) s'écrivent :

$$\begin{aligned} f_c &= f + \bar{f} = \frac{|f|}{2} \cos \varphi \\ f_s &= -jf + j\bar{f} = \frac{|f|}{2} \sin \varphi \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

2.3.3 Bilan

En supposant que le modèle de Dahl est représentatif du comportement des liaisons, nous pourrions alors limiter nos études du comportement dissipatif des liaisons à la dépendance à l'amplitude du champ de déplacement. Cette propriété remarquable sera mise en application plus loin afin de construire l'abaque de réponse d'une liaison.

3 Résolution en régime permanent harmonique par la méthode de la balance harmonique

Les bases de cette méthode ont été présentées dans la section précédente. Cette section se consacre à des aspects pratiques, notamment de continuation, indispensables à rendre efficace la méthode.

3.1 Méthodes de continuation

Un état de l'art complet sur ces méthodes de continuation pourra être trouvé dans [13].

Problème. On s'intéresse aux systèmes d'équations **algébriques** non linéaires à coefficients constants de la forme :

$$\underline{R}(\underline{Q}, \omega) = \underline{0} \quad (\text{II.28})$$

L'idée est de prolonger la branche solution en partant d'un point solution connu $(\underline{Q}^{(0)}, \omega^{(0)})$ et en perturbant la solution avec un prédicteur puis de revenir sur la branche solution en utilisant un algorithme de correction de type Newton-Raphson. Le tout est de définir le sens de la perturbation, soit en utilisant un paramétrage naturel en ω , soit en utilisant une définition locale liée à l'abscisse curviligne.

3.1.1 Continuation par pseudo-longueur d'arc

Principe de la continuation par pseudo-longueur d'arc. L'idée générale de cette continuation suit le processus suivant :

- initialisation : on prédit le premier point par une prédiction tangente ;
- récurrence : les points suivants seront générés par une correction par pseudo-longueur d'arc.

Prédiction tangente. On se donne h qui représente le pas. La *prédiction tangente* est caractérisée par :

$$\begin{cases} \left. \begin{aligned} \frac{\partial \underline{R}}{\partial \underline{Q}} \Big|_{\underline{Q}_p, \omega_p} \cdot \underline{dQ}_p + \frac{\partial \underline{R}}{\partial \omega} \Big|_{\underline{Q}_p, \omega_p} d\omega_p = \underline{J}_{\underline{Q}_p} \cdot \underline{dQ}_p + \underline{J}_{\omega_p} d\omega_p = \underline{0} \end{aligned} \right\} & \text{(II.29)} \\ \left. \begin{aligned} \|\underline{dQ}_p\|^2 + d\omega_p^2 = h^2 \end{aligned} \right\} & \text{(II.30)} \end{cases}$$

On détermine alors l'incrément dans l'espace tangent grâce aux relations suivantes :

$$\begin{cases} d\omega_p = \pm h \left(\|\underline{J}_{\underline{Q}_p}^{-1} \cdot \underline{J}_{\omega_p}\|^2 + 1 \right)^{-\frac{1}{2}} & \text{(II.31)} \\ d\underline{Q}_p = -\underline{J}_{\underline{Q}_p}^{-1} \cdot \underline{J}_{\omega_p} d\omega_p & \text{(II.32)} \end{cases}$$

Le signe de $d\omega_p$ est alors donné par le sens de parcours de la fonction de réponse. Nous vérifions donc le signe du produit scalaire entre les vecteurs tangents ${}^\top [\underline{dQ}_{p-1} \quad d\omega_{p-1}]$ et ${}^\top [\underline{dQ}_p \quad d\omega_p]$ aux points $(\underline{Q}_{p-1}, \omega_{p-1})$ et $(\underline{Q}_p, \omega_p)$. Soit :

$$\langle \underline{dQ}_{p-1}, \underline{dQ}_p \rangle + d\omega_{p-1} d\omega_p > 0 \quad \text{(II.33)}$$

Finalement le point $p + 1$ est prédit grâce aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \omega_{p+1}^{(0)} = \omega_p + d\omega_p & \text{(II.34)} \\ \underline{Q}_{p+1}^{(0)} = \underline{Q}_p + \underline{dQ}_p & \text{(II.35)} \end{cases}$$

Correction par la méthode de Newton. On suppose que $\underline{Q}_{p+1}^{(0)}$ est proche de la courbe recherchée et on fixe $\omega_{p+1}^{(0)}$. Afin de déterminer une série de points $\underline{Q}_{p+1}^{(j)}$ approximant l'équation II.28, on utilise un développement en série de Taylor au premier ordre :

$$\underline{R}(\underline{Q}_{p+1}^{(j+1)}, \omega_{p+1}^{(0)}) \approx \underline{R}(\underline{Q}_{p+1}^{(j)}, \omega_{p+1}^{(0)}) + \frac{\partial \underline{R}}{\partial \underline{Q}}(\underline{Q}_{p+1}^{(j)}, \omega_{p+1}^{(0)}) \cdot \underline{dQ} \quad \text{(II.36)}$$

On utilise ensuite l'algorithme de Newton pour déterminer la série d'approximations jusqu'à obtenir celle qui conduit à un écart acceptable.

$$\underline{Q}_{p+1}^{(j+1)} = \underline{Q}_{p+1}^{(j)} - \left[\underline{J}_Q(\underline{Q}_{p+1}^{(j)}, \omega_{p+1}^{(0)}) \right]^{-1} \cdot \underline{R}(\underline{Q}_{p+1}^{(j)}, \omega_{p+1}^{(0)}) \quad \text{(II.37)}$$

Cette méthode est efficace dans de nombreuses situations pour lesquelles le prédicteur a fourni un résultat satisfaisant. Lorsque la méthode de Newton ne converge pas, la continuation par pseudo longueur d'arc fournit une alternative un peu plus performante.

Correction par pseudo-longueur d'arc. Ce correcteur (illustration sur la figure II.4) consiste en la correction simultanée de $\underline{Q}_{p+1}^{(0)}$ et de $\omega_{p+1}^{(0)}$ en imposant que le point corrigé se situe sur l'hyperplan normal à ${}^\top \begin{bmatrix} \underline{Q}_{p+1}^{(0)} - \underline{Q}_p^{(N)} & \omega_{p+1}^{(0)} - \omega_p^{(N)} \end{bmatrix}$ soit :

$$\begin{bmatrix} \underline{Q}_{p+1}^{(j+1)} \\ \omega_{p+1}^{(j+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Q}_{p+1}^{(j)} \\ \omega_{p+1}^{(j)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d\underline{Q} \\ d\omega \end{bmatrix} \quad (\text{II.38})$$

avec :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{R}}{\partial \underline{Q}}(\underline{Q}_{p+1}^{(j)}, \omega_{p+1}^{(j)}) & \frac{\partial \underline{R}}{\partial \omega}(\underline{Q}_{p+1}^{(j)}, \omega_{p+1}^{(j)}) \\ \underline{Q}_{p+1}^{(0)} - \underline{Q}_p^{(N)} & \omega_{p+1}^{(0)} - \omega_p^{(N)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\underline{Q} \\ d\omega \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \underline{R}(\underline{Q}_{p+1}^{(j)}, \omega_{p+1}^{(j)}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.39})$$

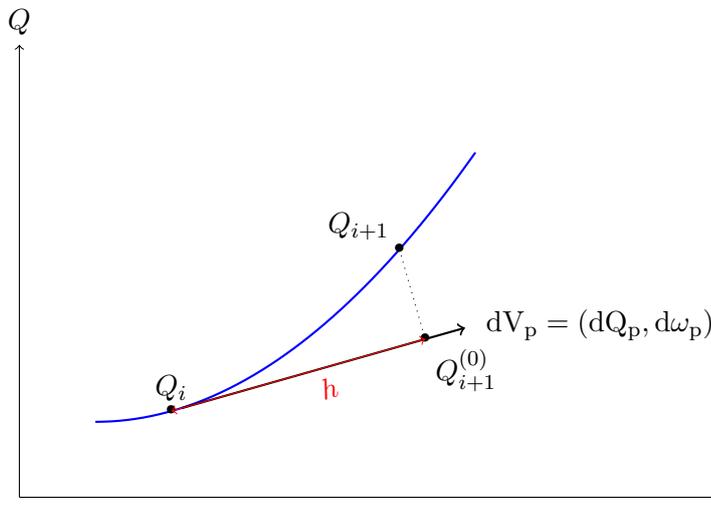


FIGURE II.4 – Principe de la correction par pseudo-longueur d'arc

Gestion du pas. La gestion du pas est une des clés du succès de ce type d'algorithme. Un pas trop petit produit un temps de calcul trop long et non nécessaire, alors qu'un pas trop grand produira de la perte d'informations. Une solution, facile à mettre en œuvre, et qui a fait ces preuves, est une solution qui dépend de la convergence de l'itération précédente.

Supposons le calcul d'un nouveau point utilisant le pas h_i . Si le calcul a convergé, appelons n_N le nombre d'itérations de l'algorithme de Newton nécessaires. Alors le nouveau pas h_{i+1} sera choisi de la manière suivante :

$$h_{i+1} = \begin{cases} \frac{h_i}{\eta} & \text{si non convergence} \\ h_i \cdot \eta & \text{si convergence et } n_N < n_{B,th} \\ h_i & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

où η est supérieur à 1 et déterminé par expérimentations numériques.

3.1.2 Continuation par la Méthode Asymptotique Numérique (MAN)

La Méthode Asymptotique Numérique vise à construire des solutions à un système d'équations non-linéaires dépendant d'un paramètre réel. Elle peut être utilisée pour traiter une grande variété de problèmes statiques ou dynamiques, voir [14]. Partant du problème générique (eq. II.28), dans les méthodes précédentes, l'idée était de déterminer les solutions \underline{Q} autour de différentes

valeurs du paramètre de contrôle. Pour cela, le problème non linéaire devait être résolu autour des différentes valeurs de ω . La continuation permettait de proposer une prédiction suffisamment fine pour minimiser le temps de résolution et d'accélérer la convergence. Avec la méthode asymptotique numérique, l'idée est de rechercher des solutions sous forme de branches de séries entières. Nous introduisons donc la forme suivante :

$$\underline{Q}(a) = \sum_{i=0}^N \underline{Q}_i a^i = \underline{Q}_0 + \underline{Q}_1 a^1 + \underline{Q}_2 a^2 + \dots + \underline{Q}_N a^N \quad (\text{II.41})$$

où a est le paramètre de chemin et \underline{Q}_i sont les coefficients du polynôme. Il faut ensuite introduire le développement du paramètre de chemin, ici ω :

$$\omega(a) = \sum_{i=0}^N \omega_i a^i = \omega_0 + \omega_1 a^1 + \omega_2 a^2 + \dots + \omega_N a^N \quad (\text{II.42})$$

Le problème initial peut alors s'écrire :

$$\underline{R}(\underline{Q}_0 + \underline{Q}_1 a^1 + \underline{Q}_2 a^2 + \dots + \underline{Q}_N a^N, \omega_0 + \omega_1 a^1 + \omega_2 a^2 + \dots + \omega_N a^N) = \underline{0} \quad (\text{II.43})$$

Soit après développement en série de Taylor autour du point $O(\underline{Q}_0, \omega_0)$,

$$\begin{aligned} & \underline{R}(\underline{Q}_0 + \underline{Q}_1 a^1 + \underline{Q}_2 a^2 + \dots + \underline{Q}_N a^N, \omega_0 + \omega_1 a^1 + \omega_2 a^2 + \dots + \omega_N a^N) = \\ & \underline{R}(\underline{Q}_0, \omega_0) + \\ & \left. \frac{\partial \underline{R}}{\partial \underline{Q}} \right|_O (\underline{Q}_1 a^1 + \underline{Q}_2 a^2 + \dots + \underline{Q}_N a^N) + \\ & \left. \frac{\partial \underline{R}}{\partial \omega} \right|_O (\omega_1 a^1 + \omega_2 a^2 + \dots + \omega_N a^N) + \\ & \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \underline{R}}{\partial \underline{Q}^2} \right|_O (\underline{Q}_1 a^1 + \underline{Q}_2 a^2 + \dots + \underline{Q}_N a^N) (\underline{Q}_1 a^1 + \underline{Q}_2 a^2 + \dots + \underline{Q}_N a^N) + \\ & \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \underline{R}}{\partial \omega^2} \right|_O (\omega_1 a^1 + \omega_2 a^2 + \dots + \omega_N a^N) (\omega_1 a^1 + \omega_2 a^2 + \dots + \omega_N a^N) + \\ & \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \underline{R}}{\partial \underline{Q} \partial \omega} \right|_O (\underline{Q}_1 a^1 + \underline{Q}_2 a^2 + \dots + \underline{Q}_N a^N) (\omega_1 a^1 + \omega_2 a^2 + \dots + \omega_N a^N) \\ & + \dots \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

En identifiant selon les puissances croissantes de a , on obtient une série de problèmes de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} a^0 \quad \underline{R}(\underline{Q}_0, \omega_0) = \underline{0} \\ a^1 \quad \left. \frac{\partial \underline{R}}{\partial \underline{Q}} \right|_O \underline{Q}_1 + \left. \frac{\partial \underline{R}}{\partial \omega} \right|_O \omega_1 = \underline{0} \\ a^2 \quad \left. \frac{\partial \underline{R}}{\partial \underline{Q}} \right|_O \underline{Q}_2 + \left. \frac{\partial \underline{R}}{\partial \omega} \right|_O \omega_2 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \underline{R}}{\partial \underline{Q}^2} \right|_O \underline{Q}_1 \underline{Q}_1 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \underline{R}}{\partial \omega^2} \right|_O \omega_1 \omega_1 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \underline{R}}{\partial \underline{Q} \partial \omega} \right|_O \underline{Q}_1 \omega_1 = \underline{0} \\ a^3 \quad \left. \frac{\partial \underline{R}}{\partial \underline{Q}} \right|_O \underline{Q}_3 + \left. \frac{\partial \underline{R}}{\partial \omega} \right|_O \omega_3 + \underline{F}_3^{nl}(\underline{Q}_1, \underline{Q}_2; \omega_1, \omega_2) = \underline{0} \\ \vdots \\ a^N \quad \left. \frac{\partial \underline{R}}{\partial \underline{Q}} \right|_O \underline{Q}_N + \left. \frac{\partial \underline{R}}{\partial \omega} \right|_O \omega_N + \underline{F}_N^{nl}(\underline{Q}_1 \dots \underline{Q}_{N-1}; \omega_1 \dots \omega_{N-1}) = \underline{0} \end{array} \right. \quad (\text{II.45})$$

A l'ordre 0, le problème à résoudre est non-linéaire. Il peut être résolu avec une méthode de Newton. Ensuite, il faut résoudre une série de problèmes linéaires qui font intervenir la linéarisation du problème autour du point $(\underline{Q}_0, \omega_0)$ sous la forme des opérateurs $\left. \frac{\partial R}{\partial \omega} \right|_O$ et $\left. \frac{\partial R}{\partial \underline{Q}} \right|_O$. Notons que par rapport aux méthodes présentées précédemment, la MAN ne nécessite qu'un seul calcul et qu'une seule inversion de ces opérateurs tangents. D'autre part, il faut déterminer le terme résiduel $F_N^{nl}(\underline{Q}_1 \dots \underline{Q}_{N-1}; \omega_1 \dots \omega_{N-1})$ qui dépend des résultats obtenus aux ordres précédents. La définition de ce terme est cruciale dans la convergence de la méthode et peut s'avérer coûteux en calculs analytiques pour déterminer les termes d'ordres supérieurs! Pour résoudre cette difficulté, les créateurs de la méthode ont imaginé une solution efficace qui consiste à exprimer le problème sous une forme quadratique quelle que soit la forme du problème de départ. Pour cela il existe différentes techniques basées sur l'introduction de nouvelles variables liées à la première par des relations différentielles ou algébriques :

$$\underline{R}(\underline{U}, \omega) = \underline{L}(\underline{U}) + \underline{Q}(\underline{U}, \underline{U}) - \lambda \underline{F} \quad (\text{II.46})$$

où \underline{U} est une nouvelle variable vectorielle obtenue par changement de variables sur \underline{Q} . Par ailleurs, les problèmes obtenus à l'étape précédente sont mal posés. Ils ont n équations et $n + 1$ inconnues. Il faut donc contraindre la définition du paramètre. Il est possible d'utiliser la pseudo-longueur d'arc :

$$a = (\underline{Q} - \underline{Q}_0) \underline{Q}_1 + (\omega - \omega_0) \omega_1 \quad (\text{II.47})$$

Ce qui donne à chaque ordre, la condition suivante :

$$\begin{cases} \|\underline{Q}_1\|^2 + \omega_1^2 = 1 \\ \vdots \\ \underline{Q}_1 \cdot \underline{Q}_N + \omega_1 \omega_N = 0 \end{cases} \quad (\text{II.48})$$

Ces développements ont été introduits dans le logiciel MANLAB qui calcule des branches de solutions en utilisant la MAN. La HBM y a été introduite pour traiter les problèmes avec des solutions périodiques. La description de l'ensemble de la méthode implantée dans MANLAB est décrite dans [15].

3.2 Réduction de modèles

Cette section détaille quelques aspects pratiques de la réduction des modèles adaptée aux problèmes non-linéaires. Pour les problèmes linéaires, il est usuel de déterminer un sous-espace, et la base qui l'engendre, pour définir des variables généralisées caractérisant le problème. Ces méthodes sont particulièrement efficaces pour les problèmes d'élastodynamique linéaires et dans le domaine des basses fréquences. Elles peuvent être étendues aux problèmes non linéaires sous forme de variétés, c'est-à-dire de « sous-espaces courbes » ou de modes non linéaires. De façon plus pragmatique pour le cas des non-linéarités localisées, les méthodes de sous-structuration sont très efficace et il convient de partitionner l'espace des degrés de liberté en fonction du caractère linéaire ou non linéaire des différents sous domaines, voir chapitre I – section 3 pour la sous-structuration et Zucca [16] pour une application au contact.

La réduction de modèle par projection sur un sous espace peut également se faire de façon adaptative dans le cas non-linéaire. Pour cela, il faut estimer à chaque itération la qualité du sous-espace et éventuellement le mettre à jour. Le principe de base reste de décomposer l'espace des degrés de liberté physiques sur une base plus réduite, soit $\underline{U} = \mathbf{A} \cdot \underline{Q}$. La principale différence réside dans le fait que cette base n'est pas invariante. Il faut donc la mettre à jour au fur et à mesure du processus de résolution. Dans cette section le principe est exposé sur un exemple

stationnaire, qui peut s'appliquer à un problème de statique ou à un problème de vibration stationnaire par la méthode d'équilibrage harmonique.

3.2.1 Illustration

Étude de cas. L'objectif de cette sous-section est de mettre en évidence l'utilisation d'une réduction de modèle sur les étapes de résolution par rapport à un calcul de référence. Le problème étudié est un système à deux ddls très caractéristique d'un problème de structure assemblée. Ce modèle représenté sur la figure II.5a comporte donc un ensemble d'éléments à comportement linéaire (ressorts) et un élément à comportement non-linéaire (rigidité cubique Z). En effet l'amplitude des sollicitations fait évoluer la déformée, c'est-à-dire le ratio entre les amplitudes des deux ddls. Cet effet est illustré par la figure II.5b dans laquelle sont affichées les modes de déformation linéaire et non-linéaire, le dernier étant construit point par point, pour différentes valeurs de l'excitation F_e .

L'intérêt de la réduction de modèle réside dans la transformation du problème initial en un problème plus simple. Ici, après réduction, la résolution devient celle d'un problème non-linéaire *scalaire* alors que le problème initial était non-linéaire mais pour *un champ de déplacement*, à 2 ddls. La cartographie utilisé, afin d'illustrer les résolutions sans et avec réduction, représente la norme du logarithme en base 10 du résidu en force $R_n = \|\underline{R}(u_1, u_2)\|$ du système d'équations qui peut s'écrire de cette manière :

$$\underline{R}(u_1, u_2) = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z(u_1 - u_2)^3 \\ Z(u_2 - u_1)^3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -F_e \end{bmatrix} \quad (\text{II.49})$$

où le vecteur $\underline{U} = [u_1, u_2]$ représente les déplacements physiques. Cette représentation, figure II.6, a été choisie afin de comprendre le cheminement de résolution. La solution du problème étant le point S où le résidu est nul, point de coordonnées (2, 3).

Évidemment, toute la démarche peut être généralisée à N ddls mais le résultat est beaucoup plus difficile à représenter dans un plan. Il faut alors résoudre le problème suivant dans un cas de vibrations stationnaires :

$$\underline{R}(\underline{U}) = \underline{\Lambda}(\omega) \cdot \underline{U} - \underline{F}_{nl}(\underline{U}, \omega) - \underline{F}_e(\omega) \quad (\text{II.50})$$

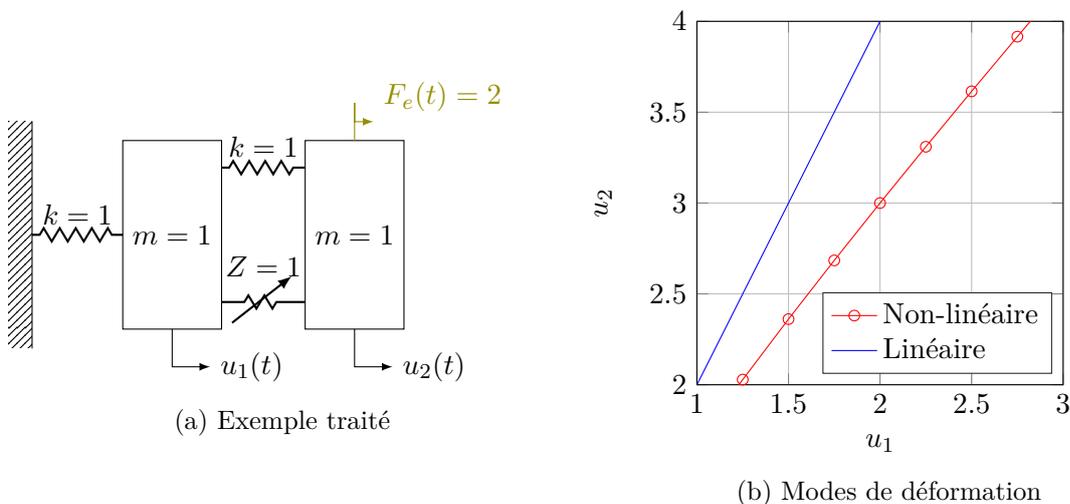


FIGURE II.5 – Problème et modes de déformation

Algorithme 1 : Algorithme de résolution avec réduction de modèle

```

Initialisation du vecteur solution  $U^{(0)}$  ;
Initialisation du mode de projection  $\Phi^{(0)}$  ; ;
while conditions d'arrêt globales sont fausses do
    Mise à jour de  $r$  et  $j$  ;
    while conditions d'arrêt selon un mode sont fausses do
        Évaluation de  $q$ ;
        Évaluation de  $X$ ;
        Mise à jour (ou non) de la matrice jacobienne ;
        Mise à jour du résidu  $R_n$  et  $r$ ;
    end
    Détermination du mode orthogonal au précédent;
end
    
```

Résolution. L'ensemble du processus de résolution est décrit par l'algorithme 1. Détaillons les différentes étapes.

La phase d'initialisation est constituée de deux étapes : le vecteur solution initial est obtenu à partir de la résolution du problème linéaire ou par continuation à partir de la solution précédente,

$$\underline{U}^{(0)}(\omega) = [\mathbf{\Lambda}(\omega)]^{-1} \underline{F}_e(\omega) \quad (\text{II.51})$$

puis le premier mode de projection est obtenu en normant le vecteur solution initial,

$$\underline{\Phi}^{(0)} = \frac{\underline{U}^{(0)}}{\|\underline{U}^{(0)}\|} \quad (\text{II.52})$$

Nous définissons ensuite le problème projeté à partir de la projection du champ $\underline{U}^{(k,h)} = \underline{\Phi}^{(k)} Q^{(h)}$. Le résidu s'exprime alors par :

$$r = {}^\top [\underline{\Phi}^{(k)}] \underline{R} = {}^\top [\underline{\Phi}^{(k)}] \left(\mathbf{\Lambda} [\underline{\Phi}^{(k)} Q] - \underline{F}_{nl}(\underline{\Phi}^{(k)} Q, \omega) - \underline{F}_e(\omega) \right) \quad (\text{II.53})$$

Un algorithme de Newton est ensuite utilisé pour minimiser le résidu ainsi défini. On rentre alors dans une boucle d'optimisation selon le mode de projection en cours, c'est-à-dire que l'on va chercher à atteindre le plus petit résidu sur ce mode (représentation graphique par une droite de vecteur directeur le mode en cours). On évalue le déplacement modal q correspondant par un algorithme de Newton. On évalue le vecteur déplacement \underline{U} , puis le résidu en force associé R_n , puis sa projection r .

Dès que les conditions de fin de boucle sont satisfaites, la détermination d'un nouveau mode de projection est obtenu par une orthogonalisation de type Gram-Schmidt (sous-section 3.2) par l'expression :

$$\underline{\Phi} = \underline{R} - {}^\top \underline{\Phi} \cdot \underline{R} \cdot \underline{\Phi} \quad (\text{II.54})$$

Puis de nouveau, on rentre dans la boucle d'optimisation de la recherche du plus petit résidu atteignable dans cette direction (représentation graphique par une droite de pente différente). Les conditions d'arrêts sont en norme et en nombre d'itérations. Chaque optimisation résout une équation du type $f(x) = 0$. Deux possibilités de résolution peuvent être utilisées :

- une version utilisant un algorithme de Newton classique au sens où la matrice jacobienne sera remise à jour à chaque itération ;
- une version dite quasi-Newton où la matrice jacobienne ne sera évaluée uniquement qu'à la première itération.

Notons dès à présent que la version quasi-Newton proposera forcément plus d'itérations mais que les opérations d'évaluation seront uniquement sur des scalaires. Le temps d'évaluation de la matrice jacobienne peut quant à lui être coûteux puisqu'elle est définie à partir du problème dans l'espace physique :

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \quad (\text{II.55})$$

Ce qui permet d'obtenir la définition d'un nouveau résidu et d'une nouvelle jacobienne réduite sur le mode $\underline{\Phi}$ en cours :

$$j = {}^T \underline{\Phi} \cdot \mathbf{J} \cdot \underline{\Phi} \quad (\text{II.56})$$

$$r = {}^T \underline{\Phi} \cdot \underline{\mathbf{R}} \quad (\text{II.57})$$

qui sont bien deux grandeurs scalaires.

Résultats. Dans les conditions énoncées ci-dessus, la résolution, sans réduction de modèle, par un algorithme de Newton donne le tracé gris de la figure II.6 (droite verticale du point I vers le point S). La résolution par réduction de modèle, avec mise à jour de la matrice jacobienne, donne le tracé en noir. De la lettre I à la lettre A , on optimise, au sens du résidu en force, par l'algorithme de Newton, le couple (u_1, u_2) dans la direction imposée par le mode 1 (droite représentative de la direction du mode). Une fois les conditions de convergences locales atteintes, on change de mode en allant de la lettre A à la lettre B , avec à nouveau la recherche du minimum dans cette direction. Puis on renouvelle la démarche dans les directions déjà connues puisque l'exemple ne comporte que deux modes jusqu'à convergence globale de l'algorithme. À la lecture graphique, il est clair que le nombre d'itérations nécessaires pour converger est bien plus grand avec le modèle réduit mais le coût de calcul d'une itération est extrêmement faible puisque le problème est scalaire. Evidemment la démarche prend tout son sens lorsque le problème de départ est de grande taille.

3.2.2 Recherche d'une direction de convergence

Le point clé dans toute démarche d'approximation d'un problème de physique est la recherche d'un sous espace contenant la meilleure approximation possible. La base de la résolution est la construction d'un estimateur d'erreur. C'est à partir de cet estimateur d'erreur, d'un choix a priori de sous-espace et surtout d'une stratégie de recherche d'une direction d'enrichissement que l'on peut essayer d'approximer pas à pas la solution. Cette section expose les stratégies possibles.

Orthonormalisation de Gram-Schmidt. L'algorithme de Gram-Schmidt est un algorithme pour construire, à partir d'une famille libre finie \mathbf{v} , une base orthonormée \mathbf{e} du sous-espace qu'elle engendre. La projection orthogonale sur une droite vectorielle dirigée par le vecteur :

$$\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v} \quad (\text{II.58})$$

L'algorithme se met en place suivant l'équation II.63 dont une interprétation graphique, limitée

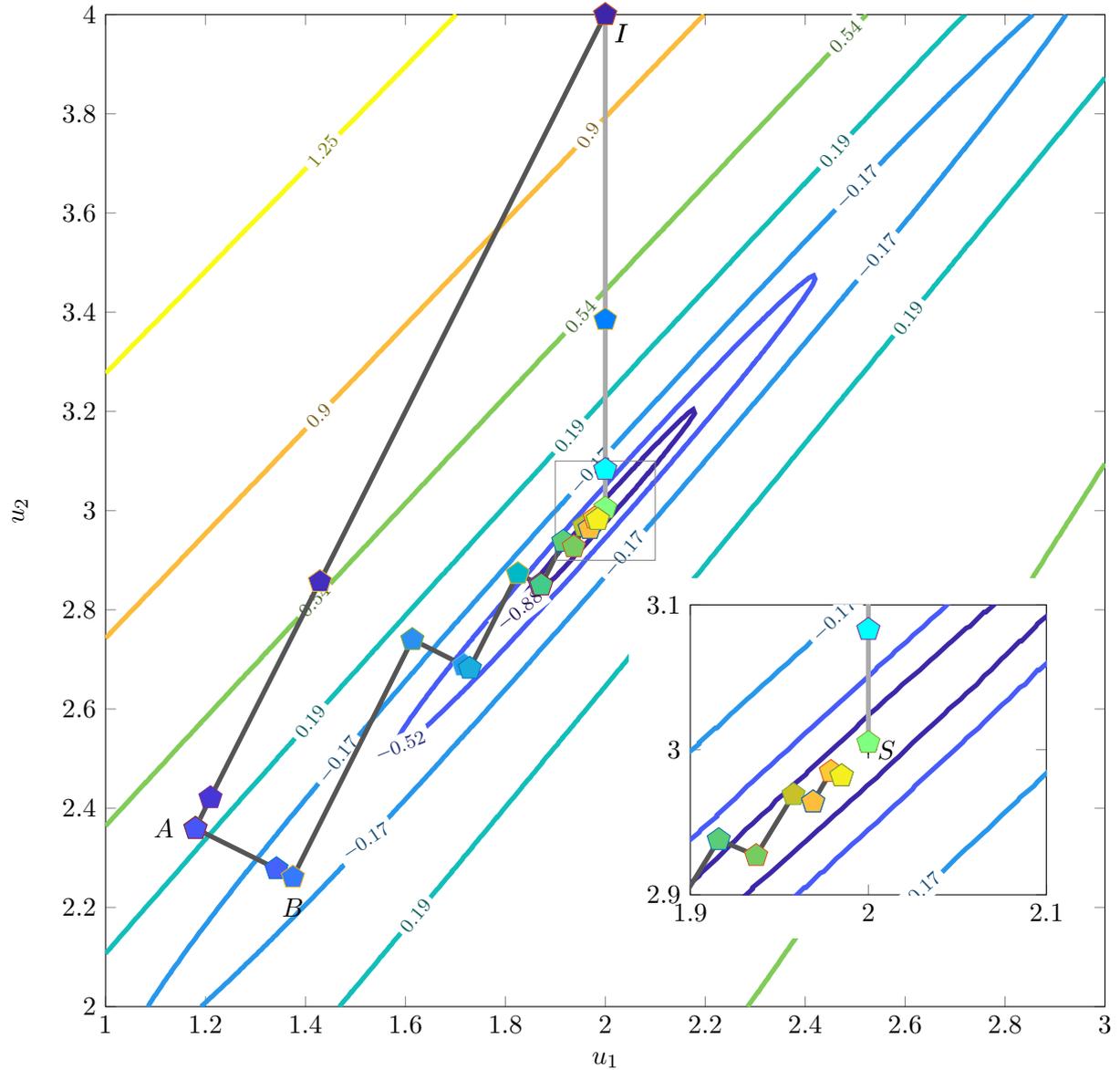


FIGURE II.6 – Tracé des différentes trajectoires de résolution. En gris, le problème complet. En noir, le problème réduit.

à deux vecteurs, à deux dimensions (eq. II.59 et II.60), est représentée sur la figure II.7.

$$\begin{cases} \underline{u}_1 = \underline{v}_1 & \underline{e}_1 = \frac{\underline{u}_1}{\|\underline{u}_1\|} & \text{(II.59)} \\ \underline{u}_2 = \underline{v}_2 - \text{proj}_{\underline{e}_1} \underline{v}_2 & \underline{e}_2 = \frac{\underline{u}_2}{\|\underline{u}_2\|} & \text{(II.60)} \\ \underline{u}_3 = \underline{v}_3 - \text{proj}_{\underline{e}_1} \underline{v}_3 - \text{proj}_{\underline{e}_2} \underline{v}_3 & \underline{e}_3 = \frac{\underline{u}_3}{\|\underline{u}_3\|} & \text{(II.61)} \\ \vdots & \vdots & \text{(II.62)} \\ \underline{u}_k = \underline{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \text{proj}_{\underline{e}_j} \underline{v}_k & \underline{e}_k = \frac{\underline{u}_k}{\|\underline{u}_k\|} & \text{(II.63)} \end{cases}$$

L'algorithme de Gram-Schmidt présente une anomalie lors de la présence de termes petits dans

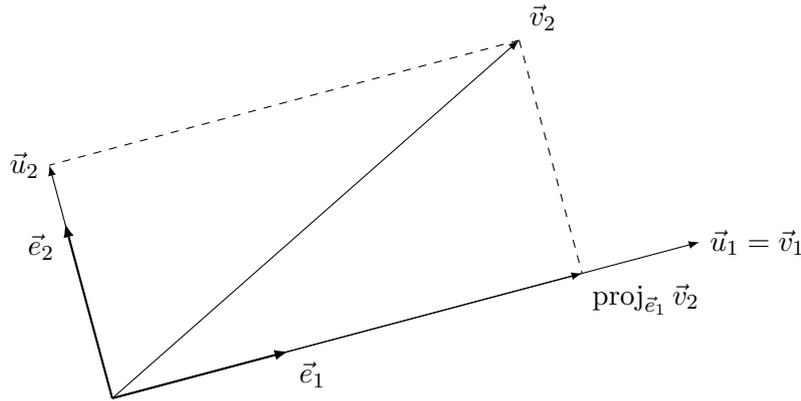


FIGURE II.7 – Mise en place des deux premières étapes de l'algorithme de Gram-Schmidt

la famille libre à utiliser. Du fait des erreurs d'arrondis, la famille renvoyée n'est pas orthogonale. Par conséquent, on préfère utiliser en arithmétique numérique cette version :

$$\underline{u}_j = \underline{u}_j^{(n-2)} - \text{proj}_{\underline{u}_{n-1}} \underline{u}_j^{(n-2)} \quad (\text{II.64})$$

Singular Value Decomposition. La décomposition en valeurs singulières (SVD) est une généralisation du principe des valeurs et vecteurs propres appliquée à une matrice rectangulaire. Soit une matrice rectangulaire \mathbf{A} , où \mathbf{A} est une matrice de dimensions $N \times n$. Le théorème associé donne que :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot {}^T \mathbf{V} \quad (\text{II.65})$$

où :

- \mathbf{V} est une matrice carré de dimension n . Elle contient un ensemble de vecteurs de base orthonormés dit d'entrée ;
- \mathbf{U} est une matrice carré de dimension N . Elle contient un ensemble de vecteurs de base orthonormés dit de sortie ;
- la matrice \mathbf{S} , de dimensions $N \times n$, diagonale contient les valeurs singulières de la matrice initiale \mathbf{A} .

Une interprétation utile en mécanique est une interprétation statistique des valeurs singulières. En effet, ces valeurs décroissent rapidement (tri par ordre décroissant). En sélectionnant que les valeurs singulières les plus grandes et les principales colonnes de \mathbf{U} associés, on est alors en mesure de construire un modèle simplifié décrivant les données car celles-ci représentent les tendances de l'étude. La valeur singulière associée représente alors la pondération de la tendance. Un exemple d'application important de la SVD est la compression d'image. Dans le domaine des vibrations, cet outil peut être utilisé comme outil de caractérisation cinématique du comportement d'une structure. Dans ce cas, la signification physique des différentes matrices serait :

- \mathbf{A} : photographie (snapshot en anglais) des mouvements obtenus lors d'une analyse stationnaire, transitoire, paramétrique ;
- \mathbf{U} : modes principaux des sollicitations cinématiques de la sous-structure ;
- \mathbf{S} : poids triés par ordre d'importance décroissante des modes principaux identifiés dans \mathbf{U} ;
- \mathbf{V} : matrice de reconstruction de la photographie entre les modes principaux de sollicitations et la base des modes normaux de la structure réduite à l'étude d'une sous-structure.

Cette méthode est à la base de certaines méthodes développées dans la suite de ce manuscript mais aussi de travaux précédents : Festjens *et al.* [17], Meyrand *et al.* [18].

3.3 Résoudre $\underline{f}(\underline{x}) = \underline{0}$

Le dernier ingrédient de la construction d'une approximation par la méthode d'équilibrage harmonique est la résolution. Dans les sections précédentes, nous avons évoqué sans les détailler ces schémas de résolution. Résoudre un système d'équations ramené sous la forme $\underline{f}(\underline{x}) = \underline{0}$ pose quelques difficultés dès lors que la fonction \underline{f} est non-linéaire et/ou que l'ordre du système devient élevé. Le principe général afin de résoudre ces systèmes est l'utilisation de méthodes numériques basées sur une formulation itérative. Elles reposent sur une suite récurrente initialisée à un point de départ $\underline{x}^{(0)}$ (à priori différent du zéro recherché), et qui convergera (si possible) de proche en proche vers la solution.

Ces méthodes reposent sur trois choix principaux :

- la valeur initiale ;
- la relation de récurrence ;
- la condition d'arrêt.

En ce qui concerne la valeur initiale, plus elle est proche de la solution, plus les méthodes dans leur globalité sont efficaces. Dans certaines situations, un mauvais choix peut rendre une méthode non convergente. Quelques exemples de relations de récurrence seront présentés dans les situations où le système d'équations est linéaire ou non. Enfin, il faut proposer une condition d'arrêt lorsque notre solution approchée est suffisamment proche de la solution. Citons trois critères possibles :

- un nombre maximal d'itérations ;
- une précision sur deux itérations successives telle que $\|\underline{x}^{(n+1)} - \underline{x}^{(n)}\| < \epsilon_1$. Lorsque deux itérations donnent des résultats très proches, on peut supposer que l'algorithme a convergé. Il faut néanmoins prendre garde aux gradients élevés autour du zéro, qui peuvent polluer la validité de $\underline{f}(\underline{x}^{(n+1)}) \simeq \underline{0}$; d'où le dernier critère ;
- $\underline{f}(\underline{x}^{(n+1)}) < \epsilon_2$ qui propose la fin des itérations dès lors que la solution permet de vérifier de manière suffisamment précise l'équation initiale. Cependant, ce critère sera mis en défaut si la fonction présente un « plat » proche du zéro.

Par conséquent, il est très classique de superposer l'effet de ces trois critères lors de la résolution de systèmes d'équations. Dans cette sous-section, on se limitera aux résolutions de systèmes (et non à une seule équation). C'est pour cela que n'apparaîtront pas les méthodes à encadrement de type dichotomie (bissection), de la fausse position ou encore toutes combinaisons utilisées par les solveurs commerciaux de type algorithme de Brentd (dichotomie, sécante et interpolation quadratique inverse). La base de la résolution d'un système non-linéaire est la résolution d'un système linéaire puisqu'il faut la réaliser à chaque itération ! Si le système est linéaire, il est donc régi par l'équation II.66.

$$\mathbf{A} \cdot \underline{x} = \mathbf{B} \tag{II.66}$$

Sous cette condition, on rencontre deux grandes familles de méthodes : directes et itératives. Dans les méthodes directes citons, dans le cas où l'ordre du système n'est pas très élevé, le pivot de Gauss (se limitant à un très faible nombre d'équations), les décompositions LU et QR ou encore de Cholesky. Comme il est très simple de résoudre un système d'équations à matrice \mathbf{A} triangulaire, on opte souvent pour des combinaisons linéaires appropriées afin de rendre \mathbf{A} triangulaire. La décomposition LU décompose alors \mathbf{A} comme étant le produit d'une matrice triangulaire inférieure \mathbf{L} et d'une matrice triangulaire supérieure \mathbf{U} . On retrouve également la décomposition QR où \mathbf{Q} est une matrice orthogonale (${}^T\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I}$) et \mathbf{R} une matrice triangulaire supérieure. Enfin, on retrouve la factorisation de Cholesky qui remplace une matrice \mathbf{A} symétrique et définie positive par le produit $\mathbf{G} \cdot {}^T\mathbf{G}$ où \mathbf{G} est une matrice triangulaire inférieure. Les méthodes itératives seront décrites dans la section suivante puisque ce sont celles que l'on rencontre obligatoirement lors de la résolution de système non-linéaire.

Méthodes itératives : Gauss-Seidel et Jacobi. Les méthodes itératives génèrent une suite d'approximations $\underline{x}^{(n)}$ de la solution et par conséquent, fournissent une réponse approximative en un nombre infini d'opérations. Néanmoins dans la pratique, l'approximation faite est souvent suffisante au bout d'un nombre relativement faible d'itérations. Soit le système d'équations réécrit sous la forme suivante (normalisation) :

$$x_j = f_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_N, z) \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{II.67})$$

L'itération de Jacobi se distingue par le fait que ne sont pas utilisés les résultats les plus récents dans le calcul à l'itération suivante (eq. II.68). On procède alors à N résolutions unidimensionnelles indépendantes. Ainsi lorsqu'on calcule par exemple $x_2^{(n+1)}$, on utilise $x_1^{(n)}$ et non $x_1^{(n+1)}$ qui est pourtant déjà connu.

$$x_j^{(n+1)} = f_j(x_1^{(n)}, \dots, x_{j-1}^{(n)}, x_{j+1}^{(n)}, \dots, x_N^{(n)}, z) \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{II.68})$$

Si l'on modifie, l'itération de Jacobi afin de tenir compte des résultats les plus récents, on obtient alors la méthode de Gauss-Seidel (eq. II.69). L'itération générique de Gauss-Seidel utilise donc les $j - 1$ èmes composantes mises à jour de $x_j^{(n+1)}$ aussitôt qu'elles sont disponibles :

$$x_j^{(n+1)} = f_j(x_1^{(n+1)}, \dots, x_{j-1}^{(n+1)}, x_{j+1}^{(n)}, \dots, x_N^{(n)}, z) \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{II.69})$$

Dans le cas non-linéaire, deux méthodes sont très utilisées dans la littérature :

- la méthode du point fixe ;
- la méthode de Newton.

Méthode du point fixe. Le point fixe est une des formulations possibles des méthodes itératives où le système d'équations est formalisé comme suit :

$$\underline{x} = \underline{g}(\underline{x}) \quad (\text{II.70})$$

où $\underline{g}(\underline{x})$ est appelée la fonction d'itération et l'itération du point fixe s'écrit :

$$\underline{x}^{(n+1)} = \underline{g}(\underline{x}^{(n)}) \quad \text{avec } n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II.71})$$

étant un vecteur initial $\underline{x}^{(0)}$. L'algorithme du point fixe peut alors se réduire à l'algorithme 2.

Algorithme 2 : Algorithme du point fixe

```

Initialisation :  $\underline{x}^{(0)}$  ;
while conditions d'arrêt sont fausses do
    |  $\underline{x}^{(n+1)} = \underline{g}(\underline{x}^{(n)})$ ;
end
    
```

La condition de convergence d'une telle formulation est :

$$\left\| \mathbf{J}_g|_{\underline{x}=\underline{x}_{\text{sol}}} \right\| < 1 \quad (\text{II.72})$$

où $\left\| \mathbf{J}_g|_{\underline{x}=\underline{x}_{\text{sol}}} \right\|$ est la matrice jacobienne évaluée en $\underline{x} = \underline{x}_{\text{sol}}$. Par conséquent le choix de la fonction \underline{g} est déterminant pour la convergence de la méthode.

Sur la figure II.8, limitée à une fonction f scalaire, on observe les deux situations de convergence. La figure II.8a met en évidence la convergence de cet algorithme lorsque la condition sur la dérivée est respectée ; la figure II.8b met quant à elle en lumière les problèmes de divergence rencontrés.

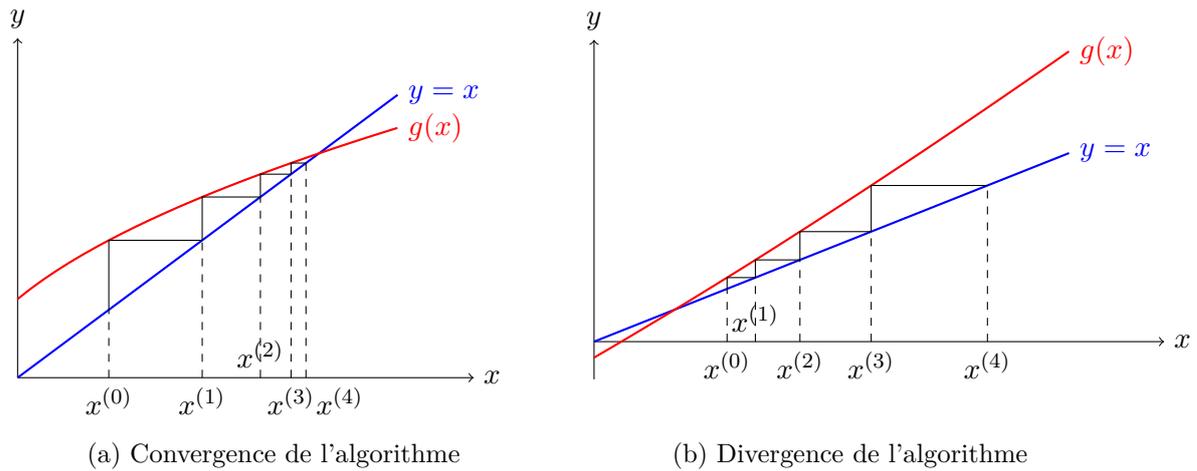


FIGURE II.8 – Illustrations de la condition de convergence de l'algorithme du point fixe

Méthode de Newton. La méthode de Newton pour la résolution d'un système d'équations est une généralisation de l'algorithme de Newton unidimensionnel. La particularité de cet algorithme est d'être efficacement généralisable au cas multidimensionnel. On approche de la solution $\underline{x}_{\text{sol}}$ par la suite $\underline{x}^{(n)}$. On se donne un vecteur initial $\underline{x}^{(0)}$ et une évaluation de la matrice jacobienne à un vecteur $\underline{x} = \underline{x}^{(n)}$ donné. On construit alors de proche en proche une approximation de la solution. Pour cela, on utilise une fonction affine :

$$\underline{f}(\underline{x}) \simeq \underline{f}(\underline{x}^{(n)}) + \mathbf{J}_f|_{\underline{x}^{(n)}} \cdot (\underline{x} - \underline{x}^{(n)}) \quad (\text{II.73})$$

À partir de cette approximation, on peut alors construire un nouveau modèle local autour de la valeur obtenue. On a alors la relation de récurrence suivante :

$$\underline{x}^{(n+1)} = \underline{x}^{(n)} - (\mathbf{J}_f|_{\underline{x}^{(n)}})^{-1} \cdot \underline{f}(\underline{x}^{(n)}) \quad (\text{II.74})$$

Par conséquent, $\underline{x}^{(n+1)}$ est solution du système linéaire :

$$\mathbf{J}_f|_{\underline{x}^{(n)}} \cdot (\underline{x}^{(n+1)} - \underline{x}^{(n)}) = -\underline{f}(\underline{x}^{(n)}) \quad (\text{II.75})$$

de la forme :

$$\mathbf{A} \cdot \Delta \underline{x} = \underline{B} \quad (\text{II.76})$$

Cet ensemble de formulations nous permet de proposer l'algorithme 3.

Algorithme 3 : Algorithme de Newton

Initialisation : $\underline{x}^{(0)}$;

while conditions d'arrêt sont fausses **do**

 Évaluer $\underline{B} = -\underline{f}(\underline{x}^{(n)})$ et $\mathbf{A} = \mathbf{J}_f|_{\underline{x}^{(n)}}$;

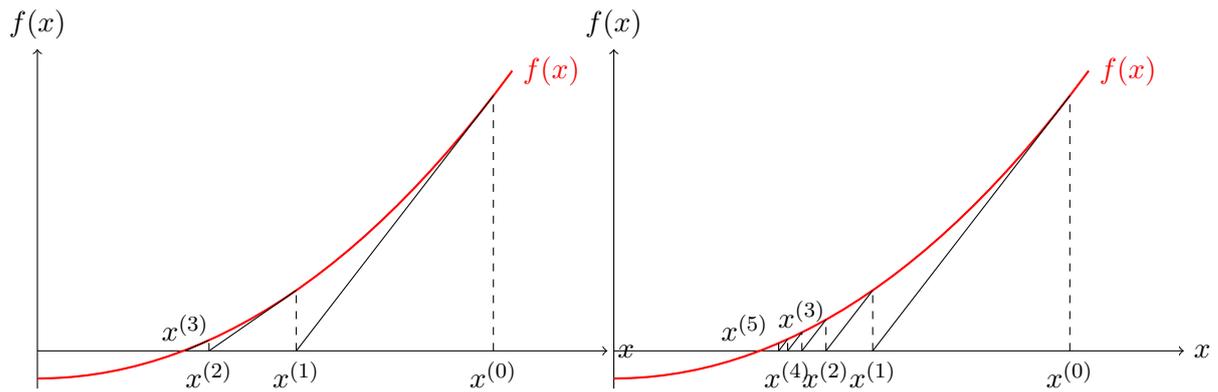
 Vérifier la condition sur \mathbf{A} ;

 Résoudre $\mathbf{A} \cdot \Delta \underline{x} = \underline{B}$;

$\underline{x}^{(n+1)} = \underline{x}^{(n)} + \Delta \underline{x}$;

end

Sur la figure II.9a, limitée à une fonction f scalaire, on observe la convergence de cet algorithme lorsque les conditions de convergence sont respectées.



(a) Algorithme de Newton

(b) Algorithme de quasi-Newton

FIGURE II.9 – Illustrations de l’algorithme de Newton et d’un algorithme dérivé

Autres méthodes. Dans la grande majorité des situations, le calcul de la matrice jacobienne n’est pas possible puisque l’on ne connaît pas les expressions analytiques des différentes expressions. On peut alors utiliser soit une formulation par différences finies pour un pas h donné et « petit » (eq. II.77), soit la méthode de la sécante approximant une dérivée partielle par le taux d’accroissement entre deux points successifs de la suite (eq. II.78). Ces deux équations sont proposées pour une équation scalaire pour la simplicité de lecture, mais il est clair que ces résultats se généralisent très bien pour un système d’équations.

$$f'(x^{(n)}) \simeq \frac{f(x^{(n)} + h) - f(x^{(n)})}{h} \quad (\text{II.77})$$

$$f'(x^{(n)}) \simeq \frac{f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)})}{x^{(n)} - x^{(n-1)}} \quad (\text{II.78})$$

Lorsque cette fois-ci, le calcul de la matrice jacobienne devient trop important, on peut également opter pour une méthode dite quasi-Newton (fig. II.9b) où cette matrice sera évaluée uniquement à la première itération, ou encore à la mise à jour de cette matrice de façon récursive grâce aux valeurs déterminées aux itérations précédente par un algorithme de Broyden par exemple. Afin d’optimiser les performances des différentes formulations, on peut jouer sur :

- la stabilité ;
- l’accélération.

Afin de rendre stable le schéma numérique, une *relaxation* (ou amortissement) peut être proposée en modifiant un pas de Gauss-Seidel (schéma de prédiction/correction) :

$$\underline{x}^{(n+1)} = \alpha \cdot \underline{x}^{(n+1)*} + (1 - \alpha) \cdot \underline{x}^{(k)} \quad (\text{II.79})$$

avec $\underline{x}^{(n+1)*}$ la valeur calculée (prédite) avec un pas de Gauss-Seidel et α le paramètre de relaxation. On a ainsi défini une méthode de *sur-relaxation successive* (SOR). Le choix du paramètre α n’est pas simple a priori. Il est par contre intéressant de noter que peuvent être couplées les méthodes SOR à des méthodes d’accélération de type Aitken [19].

4 Conclusion

Le sujet de ce chapitre porte sur la résolution des problèmes de dynamique non-linéaire. Le sujet est extrêmement vaste et a fait l’objet de nombreux travaux. Ce chapitre montre les différentes stratégies possibles selon le régime vibratoire à étudier ainsi que « l’empilement » des méthodes

de base nécessaires pour atteindre cet objectif. Dans la suite, ce sont principalement les vibrations stationnaires étudiées avec la méthode d'équilibrage harmonique qui seront abordées. Le principe général de résolution est une méthode du point fixe. En fonction du point de vue non-linéaire de la force, trois pistes de résolution sont proposées. Si on connaît tout du comportement, l'étude de la structure complète se résume à la résolution d'une seule équation différentielle. La question est : comment résoudre cette équation de manière efficace? Le chapitre III répondra à cette interrogation.

Si cela n'est pas possible ou déraisonnable parce que les modèles sont trop « lourds », il faut alors essayer de décomposer le problème. S'il est possible de déterminer un mode dominant de liaison, on est alors en mesure de construire à priori un abaque « statique » du comportement de la liaison. On parlera d'abaque « statique » puisqu'une fois réalisé, il ne sera pas possible de le modifier lors de l'étude dynamique de la structure complète. Cette approche sera couplée à une résolution de type point fixe. Cette construction sera l'objet de l'étude du chapitre IV orienté donc sur la réduction de modèle. Enfin, si la construction de cet abaque est impossible (trop coûteux ou alors que la base identifiée lors du chapitre précédent est dépendante de l'amplitude et/ou des modes) il est alors nécessaire d'avoir un calcul complet avec générations séquentielles d'abaques dynamiques de la sous-structure « liaison ». Cette méthodologie adaptative est l'objet du chapitre V.

5 Bibliographie du chapitre II

- [1] Malte KRACK et Johann GROSS : *Harmonic balance for nonlinear vibration problems*. Springer, 2019.
- [2] Nathan M. NEWMARK : A Method of Computation for Structural Dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 85(3):67–94, 1959.
- [3] D. GOTTLIEB et S. ORSZAG : *Numerical Analysis of Spectral Methods*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, janvier 1977.
- [4] Minoru URABE : Periodic solutions of differential systems, Galerkin’s procedure and the method of averaging. *Journal of Differential Equations*, 2(3):265–280, juillet 1966.
- [5] Z. K. PENG, Z. Q. LANG, S. A. BILLINGS et G. R. TOMLINSON : Comparisons between harmonic balance and nonlinear output frequency response function in nonlinear system analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 311(1):56–73, mars 2008.
- [6] N. KACEM, S. BAGUET, S. HENTZ et R. DUFOUR : Computational and quasi-analytical models for non-linear vibrations of resonant MEMS and NEMS sensors. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46(3):532–542, avril 2011.
- [7] Arnaud LAZARUS et Olivier THOMAS : A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(9):510–517, septembre 2010.
- [8] Marie-Christine PAUZIN, Serge MENSAH, Bruno COCHELIN et Jean-Pierre LEFEBVRE : High order harmonic balance formulation of free and encapsulated microbubbles. *Journal of Sound and Vibration*, 330(5):987–1004, février 2011.
- [9] M. NAKHLA et J. VLACH : A piecewise harmonic balance technique for determination of periodic response of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 23(2):85–91, février 1976.
- [10] T. M. CAMERON et J. H. GRIFFIN : An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems. *Journal of Applied Mechanics*, 56(1):149–154, mars 1989.
- [11] Zhi-yong ZHANG et Yu-shu CHEN : Harmonic balance method with alternating frequency/time domain technique for nonlinear dynamical system with fractional exponential. *Applied Mathematics and Mechanics*, 35(4):423–436, avril 2014.
- [12] Yu LIU et Andrew J. DICK : Alternating Frequency–Time Finite Element Method : High-Fidelity Modeling of Nonlinear Wave Propagation in One-Dimensional Waveguides. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 11(1):011003–011003–9, janvier 2016.
- [13] Sami KARKAR : *Méthodes numériques pour les systèmes dynamiques non linéaires : application aux instruments de musique auto-oscillants*. Aix-Marseille, janvier 2012.
- [14] Bruno COCHELIN, Nouredine DAMIL et Michel POTIER-FERRY : *Méthode asymptotique numérique*. 2007.
- [15] Bruno COCHELIN et Christophe VERGEZ : A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions. arXiv e-print 0808.3839, août 2008. *Journal of Sound and Vibration* 324 (2009) 243-262.

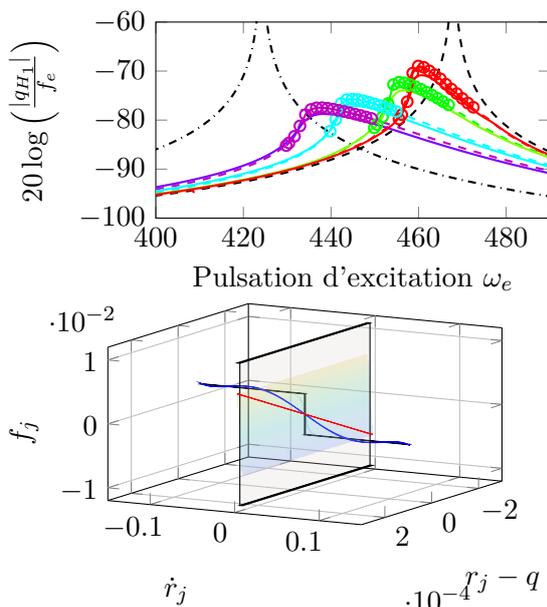
- [16] Stefano ZUCCA : On the dual craig–bampton method for the forced response of structures with contact interfaces. *Nonlinear Dynamics*, 87(4):2445–2455, 2017.
- [17] H. FESTJENS, G. CHEVALLIER et J.L. DION : Nonlinear model order reduction of jointed structures for dynamic analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 333(7):2100–2113, mars 2014.
- [18] Louis MEYRAND, Emmanuelle SARROUY, Bruno COCHELIN et Guillaume RICCIARDI : Non-linear normal mode continuation through a proper generalized decomposition approach with modal enrichment. *Journal of Sound and Vibration*, 443:444–459, 2019.
- [19] A. C. AITKEN : XXV.—On Bernoulli’s Numerical Solution of Algebraic Equations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 46:289–305, 1927.

Chapitre III

Approches modales pour les structures assemblées

Sommaire

1	Introduction	63
1.1	Problématique	63
1.2	Méthodes et problème traité	66
2	Les différentes résolutions temporelles et fréquentielles	66
2.1	Résolutions dans le domaine temporel – solveur ODE	66
2.2	Résolution dans le domaine fréquentiel – HBM	70
3	Résultats et discussion	74
3.1	Fonction de réponse de fréquence – FRF	74
3.2	Pulsation de résonance ω_r	74
3.3	Facteur de qualité Q_r	76
3.4	Restoring force	76
3.5	Forces internes de Jenkins	78
3.6	Limites et convergence	79
4	Conclusion	80
5	Bibliographie du chapitre III	82



Résumé

Ce chapitre propose de comparer 4 formulations mathématiques, dans les domaines temporel et fréquentiel, avec ou sans régularisation, du même problème comprenant un ddl, une force hystérétique et une excitation harmonique issu d'une structure réelle. Ces 4 formulations sont comparées par des indicateurs allant d'un point de vue global (FRF) à une expertise locale (force interne d'une cellule de Jenkins).

1 Introduction

1.1 Problématique

Les structures assemblées se comportent de manière non linéaire en raison du contact unilatéral et du frottement dans les liaisons. Les liaisons mécaniques sont en grande partie responsables de l'amortissement des vibrations et de la perte de rigidité des structures mécaniques, voir Peyret *et al.* [1] et Festjens *et al.* [2] à titre d'exemple.

En raison des différentes longueurs caractéristiques, significatives des physiques intervenantes dans une structure assemblée, longueurs d'ondes des vibrations et aire réelle des contacts, ces problèmes ne peuvent pas être facilement résolus grâce à la simulation numérique directe. Ainsi, il est très difficile de proposer une modélisation haute fidélité intégrant mécanique des contacts et élasto-dynamique linéaire intégrée par éléments finis.

Du point de vue de la géométrie, les vibrations sont caractérisées par la longueur d'onde des modes et les liaisons par les dimensions de la rugosité. La prise en compte de cette dernière nécessite un maillage très fin de la zone de contact, ce qui conduit à un nombre élevé de degrés de liberté absolument inutile pour modéliser les vibrations. Du point de vue du temps, l'échelle doit être suffisamment petite pour décrire l'excitation et les vibrations naturelles de la structure, et encore plus petite pour capturer les fréquences plus élevées impliquées par les non-linéarités, telles que les impacts et le glissement dans les liaisons.

Ainsi, les simulations entièrement couplées doivent utiliser un maillage spatial très fin sur un grand espace et de très petits pas de temps pendant un long temps de simulation. Les difficultés des simulations totalement couplées se manifestent donc par des problèmes de conditionnement insolubles. Pour accommoder la nature non-linéaire des mécanismes assemblés, l'utilisation de modèles constitutifs de liaisons, employant des degrés de liberté naturels à l'échelle des vibrations, se révèle relativement pratique. Pour atteindre cet objectif, des modèles pilotés par les degrés de libertés modaux (Modal Degrees Of Freedom (MDOF)) d'un modèle d'ordre réduit (Reduced Order Model (ROM)) sont nécessaires, voir Segalman [3] et Festjens *et al.* [4].

Ces modèles peuvent être identifiés grâce à des modèles analytiques détaillés tels que « Extended Greenwood Model » avec micro-contacts et distributions statistiques [5], des modèles numériques détaillés [6, 7, 8, 2, 9] ou des données expérimentales.

Les codes de calcul EF gèrent le contact entre les différentes pièces, voir Ren et Beards [10], Jewell *et al.* [9], et permettent de prendre en compte des formes géométriques plus complexes. En raison du long temps de simulation, les travaux cités réalisent principalement des études quasi statiques restreintes à l'échelle locale de la liaison. Néanmoins, le lien entre l'échelle locale et l'échelle de la structure est encore difficile à réaliser.

Les jeux localisés et le glissement partiel entre les parties induisent des phénomènes physiques qui s'assimilent à un comportement élasto-plastique. Plusieurs modèles mathématiques ont montré qu'ils pouvaient très bien modéliser de tels phénomènes. Dahl[11, 12] a proposé un modèle qui utilise une variable d'état interne pour modéliser la plasticité. Ce modèle est très facile à utiliser dans les équations différentielles ordinaires (ODE), mais il a des défauts notamment car il ne respecte pas la règle de Masing, voir Ying [13] et ne possède pas vraiment de comportement entièrement élastique avant le seuil de glissement total. Plus récemment, Peyret *et al.* [14] ont montré que derrière ce modèle élastoplastique, la physique d'un contact de Mindlin était reproduite.

Dans le même temps, Iwan [15] a publié un travail qui proposait un modèle distribué d'éléments de type Jenkins, et contrairement au modèle de Dahl, ce modèle respecte la règle de Masing. De plus, Festjens *et al.* [2] ont montré que tout problème de Metherel [16] peut se ramener à un modèle d'Iwan. L'ajout d'une rigidité linéaire au modèle d'Iwan conduit au modèle de Prandtl généralisé qui a été utilisé par Bastien *et al.* [17] par exemple. La première lacune des modèles d'Iwan et de Prandtl provient du nombre de paramètres à identifier pour s'adapter aux expériences (annexe A). Plus récemment, Segalman [3] a proposé un modèle d'Iwan collant bien

aux expériences sur les structures assemblées avec seulement quatre paramètres à identifier. La deuxième lacune des modèles d'Iwan et de Prandtl provient de la difficulté à résoudre les ODE qui incluent ces modèles à cause de la fonction signe qu'ils utilisent. Ce chapitre se concentre sur ce point afin de simuler des vibrations en régime permanent, tant dans le domaine temporel, que dans le domaine fréquentiel. Les essais expérimentaux dynamiques sont effectués sous des excitations transitoires, harmoniques ou aléatoires. Pour résoudre ces problèmes, il existe différents types de formulations mathématiques. L'intégration temporelle permet de résoudre les problèmes sous excitation transitoire ou les problèmes de vibrations libres. La méthode d'équilibrage harmonique (Harmonic Balance Method - HBM) ou les méthodes de tir (Shooting Method) sont utilisées afin de résoudre les problèmes sous excitation harmonique en accédant directement au régime stationnaire sans calcul du régime transitoire. Dans ce cas, il est intéressant d'étudier la solution en fonction de l'amplitude et de la fréquence d'excitation. Pour le cas d'une excitation stationnaire aléatoire, les méthodes de linéarisation stochastique ou de perturbation sont souvent utilisées, voir Kougioumtzoglou et Spanos [18] et Wen [19]. Ainsi, chaque type d'excitation nécessite une adaptation de la formulation mathématique du problème.

Ce chapitre traite des formulations mathématiques qui peuvent être utilisées pour obtenir les régimes permanents de systèmes possédant des non linéarités hystérétiques et sous sollicitations harmoniques. Le but de ce chapitre est principalement d'introduire une formulation pour résoudre ce type de problème avec les méthodes d'équilibrage harmonique. Deuxièmement, ce chapitre vise à évaluer cette méthode par rapport à d'autres, selon plusieurs indicateurs de performance. Pour évaluer ces méthodes, elles ont été testées sur une structure boulonnée (fig. III.1a), dont la réponse a été évaluée expérimentalement dans une thèse précédente, voir Festjens [20]. À partir de ce travail, l'amortissement modal et la fréquence modale, c'est-à-dire la *restoring force* modale, ont été identifiés en fonction du déplacement modal, voir figures III.1c et III.1d. Généralement, on suppose que les équations intégrées par éléments finis sont données par :

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\underline{U}} + \underline{F}_{rf}(\underline{U}, \dot{\underline{U}}) = \underline{F}_e \cos(\omega t) \quad (\text{III.1})$$

où \underline{U} est le champ de déplacement discret et \underline{F}_{rf} est la *restoring force* non linéaire qui comprend à la fois des forces élastiques et dissipatives. On suppose qu'un sous-espace modal invariant engendré par la base Φ_m contient le champ de déplacement, ce qui donne l'équation III.2 suivante :

$$\underline{U}(t) = \Phi_m \cdot \underline{Q}(t) \quad (\text{III.2})$$

où \underline{Q} est le champ généralisé de déplacements modaux. Évidemment, la validité de cette hypothèse peut être discutée. Il a été démontré qu'elle peut être corrigée si la non-linéarité induit des sous-espaces dépendants de l'amplitude, voir Festjens *et al.* [2] et voir chapitre 2. La projection conduit à :

$${}^T \Phi_m \cdot \mathbf{M} \cdot \Phi_m \cdot \ddot{\underline{Q}} + {}^T \Phi_m \cdot \underline{F}_{rf}(\Phi_m \cdot \underline{Q}, \Phi_m \cdot \dot{\underline{Q}}) = {}^T \Phi_m \cdot \underline{F}_e \cos(\omega t) \quad (\text{III.3})$$

Cela donne la forme générale suivante pour chaque équation modale :

$$\ddot{q} + f_{rf}(q, \dot{q}) = f_e \cos(\omega t) \quad (\text{III.4})$$

La forme simple de la dernière équation III.4 est obtenue à condition que les modes soient découplés. Cette hypothèse est discutée dans [21, 22]. En théorie linéaire, c'est l'hypothèse d'amortissement proportionnel qui est sous-jacente. Dans le cas du domaine non-linéaire, ça se complique puisque le principe de superposition ne s'applique pas. Les corrections doivent donc s'appliquer sur le champ de déplacement.

Les modèles de liaison classiques que sont Iwan et Dahl peuvent assimiler deux types de variables d'état en fonction de l'échelle à laquelle on veut les utiliser :

- les variables physiques de déplacements ;

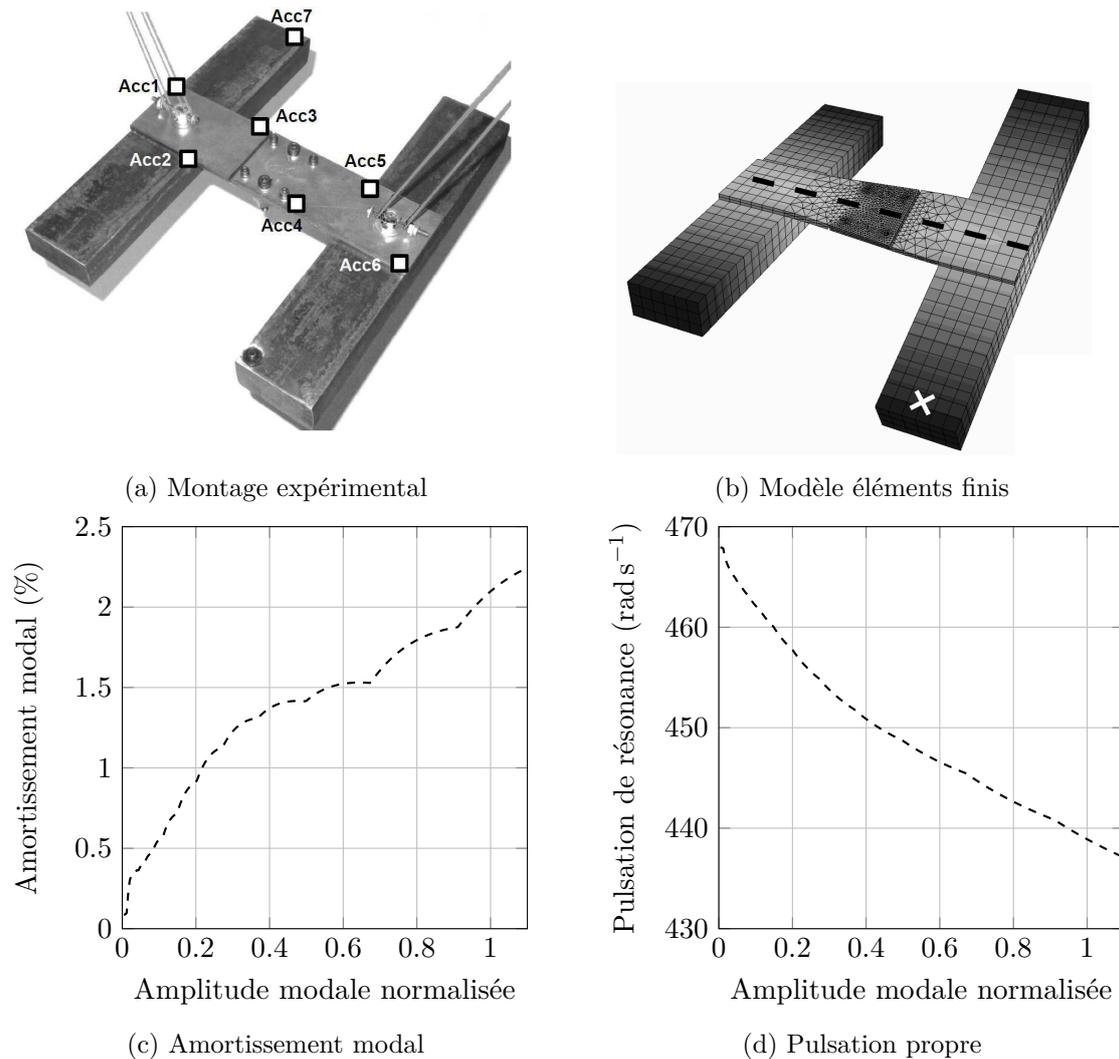


FIGURE III.1 – Amortissement modal et pulsation propre fonction du déplacement modal normalisé, obtenus à partir de données expérimentales et par filtrage de Kalman orienté identification

— les variables modales de déplacements généralisés.

L'approche modale est très intéressante puisqu'elle est l'approche naturelle dans l'étude des vibrations d'une structure, équation III.4. Malgré les hypothèses sous-jacentes, « amortissement proportionnel », superposition des forces modales non linéaires, certains travaux [23] ont montré l'efficacité de la méthode sur une structure avec une liaison très localisée et des sollicitations de faible amplitude. Dans le cas des liaisons distribuées, l'approche reste applicable si les sollicitations sont modérées mais les couplages sont de moins en moins négligeables, Deaner *et al.* [24]. Lacayo *et al.* [25] estime la validité de cette hypothèse sur un système à trois ddls soumis à des excitations appropriées ou à des excitations à large spectre et démontre que les couplages prennent le dessus sur les comportements modaux. Krifa *et al.* [22] a proposé une méthode de correction asymptotique de cette hypothèse utilisant l'approche modale comme un « calcul initial ». Festjens *et al.* [4] propose de travailler avec un modèle modal enrichi pour surmonter les limitations des modèles modaux.

1.2 Méthodes et problème traité

Les méthodes sont testées sur un système à un degré de liberté associé à une force hystérétique. Ce modèle provient de la modélisation et de la réduction du système complexe (fig.III.2a). Théoriquement, le couplage entre un système linéaire et la force hystérétique donne un problème appartenant aux classes d'inclusions différentielles et soulève des questions d'unicité de la solution. Néanmoins, une solution unique peut être trouvée pour la réponse stationnaire sous une charge harmonique. Quatre formulations mathématiques sont comparées, les deux premières sont consacrées à des simulations temporelles et peuvent être intégrées dans un algorithme de type shooting. Les deux suivantes sont formulées dans le domaine fréquentiel et sont utilisées avec l'Harmonic Balance Method (HBM). Dans les deux cas, le fait que la force hystérique ne soit pas de classe C^∞ est une difficulté. Nous aborderons ce problème en approximant la fonction singulière avec une fonction régularisée ou en adaptant les algorithmes. Cela conduit au développement des quatre méthodes.

La première est basée sur l'intégration temporelle sans régularisation de la force hystérétique. Afin de calculer la solution, l'algorithme doit être arrêté chaque fois qu'un changement d'état glissant/adhérent ou adhérent/glissant est détecté. Ensuite, le problème mathématique à résoudre est reformulé et l'intégration temporelle recommence. Dans ce qui suit, on nomme cette méthode : Time-Domain Without Regularization (TDWoR). La deuxième est également basée sur l'intégration temporelle, mais la fonction hystérétique est régularisée grâce à l'utilisation du modèle de Dahl. Ceci introduit une ODE supplémentaire mais permet de résoudre le problème dans une seule boucle d'intégration, contrairement à la première méthode. Dans ce qui suit, elle se nomme : Time-Domain With Regularization (TDWR). La troisième est basée sur la HBM. Pour utiliser la définition non régularisée de nos modèles, on utilise l'Alternating Frequency/Time Method (AFT). Dans ce qui suit, elle se nomme : Frequency-Domain Without Regularization (FDWoR). Enfin la quatrième est également basée sur la HBM. Mais afin d'éviter les transformées de Fourier et de son inverse, requises par l'AFT pour résoudre des problèmes de singularité, une régularisation des forces de frottement est proposée. Dans ce qui suit, elle se nomme : Frequency-Domain With Regularization (FDWR).

Cinq indicateurs sont proposés pour comparer les performances de ces quatre méthodes :

- la forme de la fonction de réponse en fréquence (FRF) ;
- la valeur de la fréquence de résonance ω_r ;
- la valeur du facteur de qualité Q_r ;
- la forme de la *restoring force* au sens de la force d'Iwan $\sum_j f_j$;
- et la force interne de Jenkins f_j .

Par conséquent, la comparaison sera effectuée à partir de l'indicateur le plus global (FRF) jusqu'à l'indicateur le plus local (f_j).

Ce chapitre III est organisé de la manière suivante. Dans la sous-section 2.1, les modèles et les méthodes utilisés dans le domaine temporel sont présentés et fournissent les résultats de référence. Ensuite, les modèles et les méthodes utilisés dans le domaine fréquentiel, sont présentés dans la sous-section 2.2. Dans la section 3, les résultats, issus de la section 2 sont comparés. Le principal problème est dû à l'utilisation de la régularisation des forces de Jenkins à la fois dans les domaines temporel et fréquentiel. Dans l'ensemble, ce chapitre vise à fournir des conclusions sur l'intérêt de la régularisation pour résoudre ce genre de problèmes.

2 Les différentes résolutions temporelles et fréquentielles

2.1 Résolutions dans le domaine temporel – solveur ODE

À partir des données de l'étude expérimentale, voir Festjens [20], un modèle réduit à un degré de liberté (fig. III.2a) est proposé. Il est constitué d'une masse normalisée, d'un ressort normalisé,

d'un amortisseur normalisé et d'une force hystérétique décrite par une somme de cellules de Jenkins en parallèle (fig. III.2b), chacune étant composée d'une raideur et d'un *slider*.

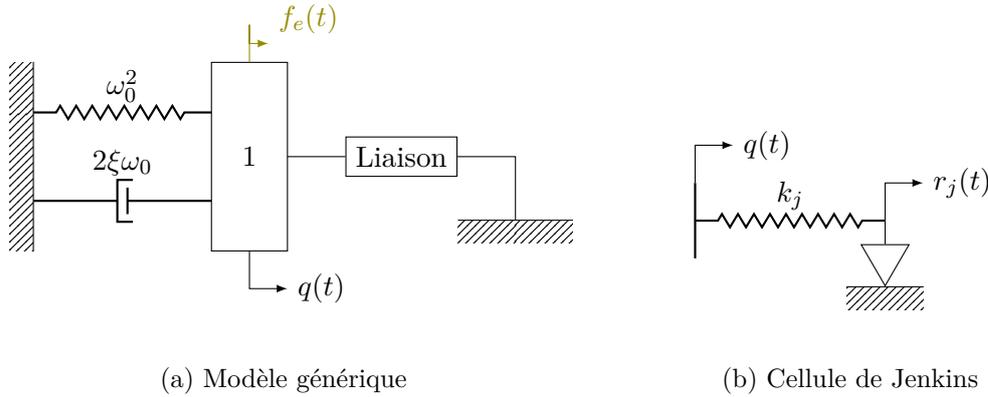


FIGURE III.2 – Modèle à 1 degré de liberté d'une structure assemblée construit à partir de ses données expérimentales

Cela conduit aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{q}(t) + 2\xi\omega_0\dot{q}(t) + \omega_0^2q(t) = f_e \cos(\omega t) - \sum_{j=1}^N k_j (q(t) - r_j(t)) \\ k_j (q(t) - r_j(t)) + f_j(t) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

où $q(t)$ désigne le déplacement modal, ω_0 la pulsation naturelle sous un simple mouvement de glissement, ξ l'amortissement modal linéaire, $f_e(t)$ la force d'excitation harmonique modale, f_j la force élémentaire de chaque cellule de Jenkins. Chaque force de Jenkins, liée à une cellule, est régie par l'équation (III.6).

$$\begin{aligned} \text{Adhérence :} & \quad \dot{r}_j = 0 & \text{si } |f_j| < f_{cj} \\ \text{Glissement } \oplus : & \quad f_j = -f_{cj} & \text{si } \dot{r}_j > 0 \\ \text{Glissement } \ominus : & \quad f_j = f_{cj} & \text{si } \dot{r}_j < 0 \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

où f_{cj} est la force de frottement lors du glissement (modèle de type coulomb) associée à la cellule j et r_j est un état interne qui régit la position du *slider* à l'intérieur de la cellule de Jenkins. Dans le domaine temporel, l'équation (III.5) est résolue à l'aide d'un algorithme d'intégration numérique directe. La discussion se concentre sur la façon dont l'équation (III.6) peut être prise en compte. Deux approches peuvent être utilisées :

- un algorithme qui gère les différents états et événements, nommé **Time-Domain Without Regularisation (TDWoR)** ;
- une régularisation des fonctions singulières, nommée **Time-Domain With Regularization (TDWR)**.

2.1.1 Time-Domain Without Regularization (TDWoR)

Dans cette sous-sous-section 2.1.1, les équations des cellules de Jenkins ne sont pas régularisées. La transition entre l'adhérence et le glissement dans la cellule de Jenkins est détectée à l'aide du « gestionnaire d'événements » implémenté dans les algorithmes Matlab ODE, puis le système d'équations est résolu à l'aide du solveur *ode23t*. Ce schéma d'intégration a été choisi puisqu'il évite l'amortissement numérique (chapitre II – sous-sous-section 2.1.1). Une telle méthode permet de calculer les régimes transitoire et stationnaire. L'ensemble de la méthode est repris dans un diagramme d'état (fig. III.3). Seul l'état stationnaire est souhaité dans ce travail ; il est néanmoins nécessaire de calculer la solution jusqu'à l'extinction du régime transitoire. Cela nécessite

beaucoup de temps : les méthodes de tirs peuvent être utilisées pour accélérer l'extinction de l'état transitoire. Comme expliqué précédemment, chaque cellule de Jenkins peut être gouvernée par trois états différents, adhérent, glissant positivement ou glissant négativement, voir équation III.6. Deux événements peuvent forcer la reformulation du problème : le premier se produit lorsque le seuil de la force tangentielle est franchi et le second se produit lorsque le signe de la vitesse relative change.

$$\begin{aligned} \text{Événement 1 : } & f_{cj}(t) - k_j |r_j(t) - q(t)| = 0 \\ \text{Événement 2 : } & \dot{r}_j(t) = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

À chaque fin d'état, nous devons initialiser la nouvelle position du *slider* afin de définir les conditions initiales de la prochaine phase d'intégration (fig. III.3). Concernant la vitesse, un test sur la force est réalisé pour donner la valeur initiale de la nouvelle vitesse \dot{r}_0 du *slider* et un seuil de vitesse numérique ϵ est utilisé pour déterminer une gamme de valeurs admissibles pour la transition glissement/adhérence.

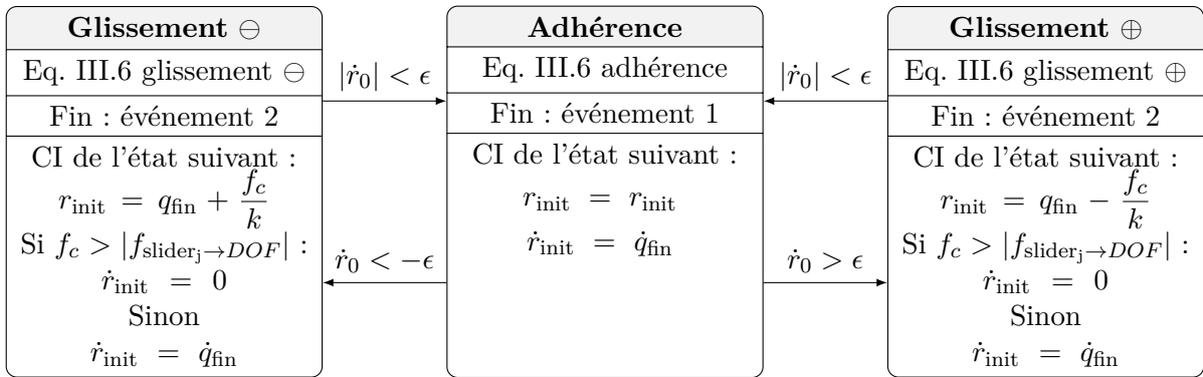


FIGURE III.3 – Diagramme état-transition de la méthode basée sur des événements

Une seule cellule de Jenkins n'est pas suffisante afin de décrire la réalité complexe du phénomène physique du micro-glissement dans les interfaces. C'est pourquoi il est nécessaire de compléter et de généraliser notre algorithme dans le but d'inclure N cellules de Jenkins. Pour cela, il a été décidé de fixer le nombre de cellules afin de modéliser correctement les phénomènes physiques (V. annexe A). Au fur et à mesure que le déplacement q augmente, les différentes cellules (lettre J), les unes après les autres, passent de l'état (lettre S) d'adhérence à un état de glissement ; par conséquent les cellules ont été numérotées selon le rapport $\frac{f_{cj}}{k_j}$ (fig. III.4).

En parallèle de ce diagramme de principe de la méthode, est représenté sur la figure III.5 l'évolution de l'opposé de la force non linéaire (eq. III.8) en fonction du déplacement modal q . Le lien avec l'état en cours est indiqué par les variables S_j .

$$f_{nl} = \sum_{j=1}^N k_j (q(t) - r_j(t)) \quad (\text{III.8})$$

2.1.2 Time-Domain With Regularization (TDWR)

Afin de s'affranchir de la complexité des algorithmes gérés par les événements, dans cette section on modélisera chaque cellule de Jenkins par une formulation générique (eq. III.9). Pour cela, le modèle de Dahl généralisé est utilisé [11].

$$\frac{df_j}{dt} = k_j \left(1 - \frac{f_j}{f_{cj}} \text{signe}(r_j) \right)^\alpha \dot{r}_j g \left(1 - \frac{f_j}{f_{cj}} \text{signe}(\dot{r}_j) \right) \quad (\text{III.9})$$

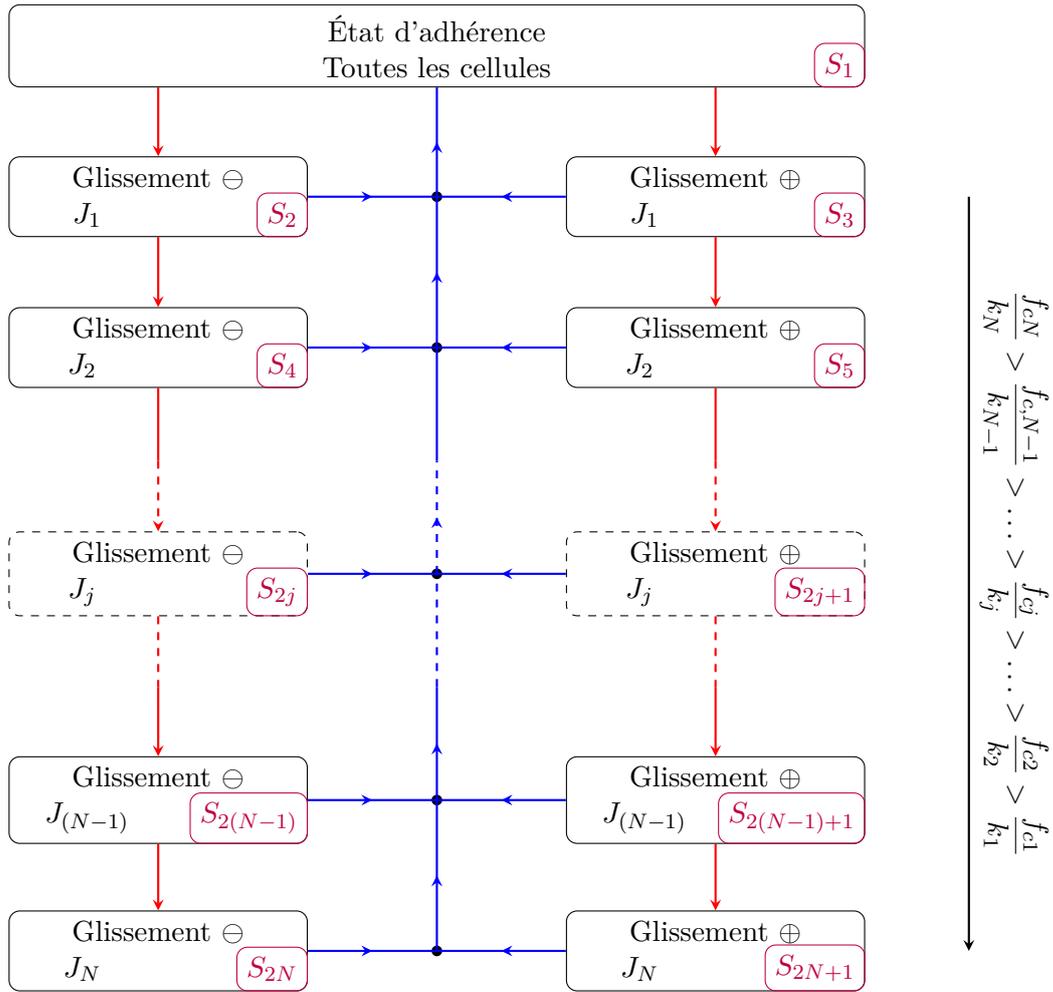


FIGURE III.4 – Diagramme de principe du fonctionnement de la méthode TDWoR. \rightarrow représente le franchissement du seuil f_{cj} ; \rightarrow représente le changement de signe de \dot{q} .

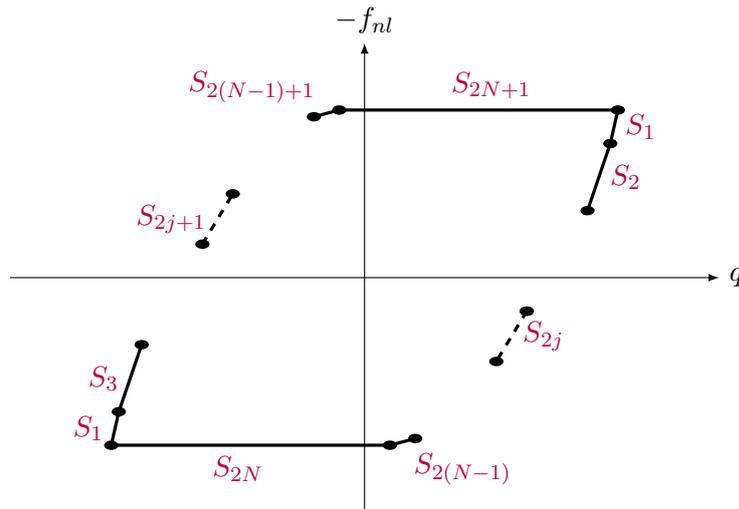


FIGURE III.5 – Le diagramme $(q, -f_{nl})$ lié au diagramme de principe III.4

Dans cette équation III.9, le paramètre α régit la transition adhérence/glisement. Pour être le plus près possible du modèle de Coulomb, α tend vers 0. La fonction $g(\cdot)$ force la dérivée à être nulle lorsque la force dépasse légèrement f_{cj} , sinon elle est égale à 1. Le nombre d'équations

$$\mathbf{\Lambda}(\omega) \cdot \underline{Q} = \underline{F}_e + \sum_{j=1}^N \underline{F}_j \quad (\text{III.14})$$

En raison de son expression mathématique, la force de Jenkins est difficile à exprimer dans le domaine fréquentiel. Pour surmonter cette difficulté, deux méthodes différentes ont été testées :

- l'Alternating Frequency/Time method (AFT) qui permet de garder les expressions non régularisées des forces de Jenkins, nommée **F**requency-**D**omain **W**ithout **R**egularization (FDWoR).
- une formulation quadratique, dans le domaine fréquentiel, afin d'exprimer la non-linéarité sous une forme quadratique régularisée ; notons que cette dernière a été choisie pour sa compatibilité avec l'emploi du logiciel ManLab et cette méthode sera nommée dans la suite **F**requency-**D**omain **W**ith **R**egularization (FDWR).

2.2.1 Frequency-Domain without regularization (FDWoR)

La méthode AFT a d'abord été introduite par Cameron et Griffin dans [26]. L'algorithme, illustré sur la figure V.2 du chapitre V, nécessite une phase d'initialisation (eq. III.15) obtenue en négligeant les termes non linéaires :

$$\underline{Q}^{(0)}(\omega) = \mathbf{\Lambda}(\omega)^{-1} \cdot \underline{F}_e \quad (\text{III.15})$$

ou en utilisant une méthode de continuation, dépendante des états précédents, telle que :

$$\underline{Q}^{(0)}(\omega + \Delta\omega) = f\left(\underline{Q}^{(\text{fin})}(\omega), \underline{Q}^{(\text{fin})}(\omega - \Delta\omega), \dots\right) \quad (\text{III.16})$$

Les forces non-linéaires de Jenkins, $f_i^{(0)}(q, \dot{q})$ sont déterminées dans le domaine temporel en utilisant au préalable la transformée rapide de Fourier inverse (Inverse Fast Fourier Transform IFFT : \mathcal{F}^{-1}) sur Q et $i\omega Q$. Puis, $F_j(\omega)$ est calculé dans le domaine fréquentiel à l'aide de la transformée rapide de Fourier (Fast Fourier Transform - FFT : \mathcal{F}). Comme le problème à résoudre est non linéaire, un algorithme de Newton-Raphson (eq. III.17) est utilisé pour la détermination de la solution.

$$\underline{Q}^{(j)}(\omega) = \underline{Q}^{(j-1)}(\omega) - \mathbf{J}^{-1}(\omega) \cdot \underline{R}^{(j-1)} \quad (\text{III.17})$$

où \underline{R} est le résidu (équivalent force) et \mathbf{J} la matrice jacobienne. Ce résidu est donné par :

$$\underline{R}(\underline{Q}) = \mathbf{\Lambda} \cdot \underline{Q} - \underline{F}_e - \sum_{j=1}^N \underline{F}_j \quad (\text{III.18})$$

La matrice jacobienne \mathbf{J} est obtenue par dérivation de la fonction résidu \underline{R} par rapport au paramètre \underline{Q} . Son expression est précisée par l'équation III.19.

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \underline{R}}{\partial \underline{Q}} = \mathbf{\Lambda} - \sum_{j=1}^N \frac{\partial \underline{F}_j}{\partial \underline{Q}} \quad (\text{III.19})$$

Comme les cellules de Jenkins ont une modélisation singulière, il est simple et pratique d'estimer numériquement la matrice jacobienne en utilisant les différences finies :

$$\mathbf{J} \simeq \mathbf{\Lambda} - \sum_{j=1}^N \frac{F_j(Q + \delta Q) - F_j(Q - \delta Q)}{2\delta Q} \quad (\text{III.20})$$

Pour une meilleure compréhension, détaillons la forme du second terme de l'équation III.20 :

$$\mathbf{J} \simeq \mathbf{\Lambda} - \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N \frac{F_{0j}(q_0+\delta q) - F_{0j}(q_0-\delta q)}{2\delta q} & & \sum_{j=1}^N \frac{F_{0j}(q_{sH}+\delta q) - F_{0j}(q_{sH}-\delta q)}{2\delta q} \\ & \dots & \\ \sum_{j=1}^N \frac{F_{sHj}(q_0+\delta q) - F_{sHj}(q_0-\delta q)}{2\delta q} & & \sum_{j=1}^N \frac{F_{sHj}(q_{sH}+\delta q) - F_{sHj}(q_{sH}-\delta q)}{2\delta q} \end{bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

Le choix de la valeur du taux d'accroissement δq est crucial afin d'assurer la qualité de la convergence de l'algorithme. Une quantité fixe, absolue, ne peut être satisfaisante puisqu'en étant minime pour le fondamentale, elle risque de devenir très importante pour les harmoniques. Par conséquent, il est intéressant de choisir une valeur qui sera un pourcentage de la valeur q en cours. Dans un premier temps, cette perturbation δq sera choisie comme étant égale à 1×10^{-6} de la valeur actuelle de q . C'est une valeur qui a permis d'assurer la convergence pour l'ensemble des algorithmes proposés. Il serait néanmoins intéressant de voir si pour tous les harmoniques cette valeur doit être fixe ou variable. Ensuite, la matrice jacobienne est calculée colonne par colonne. En outre, il n'est pas nécessaire de calculer chaque F_j séparément. Ainsi, le calcul d'une colonne est généré par les étapes suivantes (eq.III.22) et nécessite $2n_H + 1$ itérations pour obtenir toutes les colonnes de \mathbf{J} .

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{Q}(\omega) + \begin{bmatrix} \delta q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \begin{cases} q^{p^+}(t) \\ \dot{q}^{p^+}(t) \end{cases} \xrightarrow{F_{nl}} \sum_{j=1}^N f_j^{p^+}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{j=1}^N \underline{F}_j^{p^+}(\omega) \\ \\ \underline{Q}(\omega) - \begin{bmatrix} \delta q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \begin{cases} q^{p^-}(t) \\ \dot{q}^{p^-}(t) \end{cases} \xrightarrow{F_{nl}} \sum_{j=1}^N f_j^{p^-}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{j=1}^N \underline{F}_j^{p^-}(\omega) \end{array} \right. \quad (\text{III.22})$$

Néanmoins, ce calcul nécessite beaucoup de temps. Pour réduire celui-ci, il est possible d'obtenir une expression analytique de la matrice jacobienne, Petrov et Ewins [27] ont proposé une formulation analytique par événement (événements : adhérence, glissement, contact et séparation). Ce choix est difficile à générer pour N degrés de libertés car la formulation est complexe, même en structure symétrique et cyclique, voir Borrajo *et al.* [28]. Plus récemment, Salles *et al.* [29] ont montré que le gradient de la loi de contact peut être dérivé de manière analytique dans un algorithme, de type schéma d'Euler explicite, non linéaire, basé sur les procédures HBM et AFT.

2.2.2 Frequency-Domain with regularization (FDWR)

Dans cette sous-sous-section 2.2.2, la loi de Coulomb est régularisée pour résoudre le problème. À cette fin, il existe plusieurs solutions : utiliser des méthodes numériques [30] et [31], gérer des problèmes de plasticité [32], gérer des problèmes de friction [33] en utilisant des branches de solutions polynomiales [34] ou régulariser la fonction de contact [35]. Pour cette étude, la dépendance de la force de friction à la vitesse choisie afin de régulariser la loi de Coulomb est celle donnée par l'équation III.23. Cette forme de régularisation semble être la plus adaptée à la résolution fréquentielle par HBM [32]. De plus, elle est compatible avec la formulation du logiciel ManLab dont une rapide présentation est proposée ci-dessous.

$$f_j(\dot{r}_j) = -f_{cj} \frac{\dot{r}_j}{\sqrt{\dot{r}_j^2 + A_j^2}} \quad (\text{III.23})$$

où :

- f_j représente la force de friction ;
- \dot{r}_j est la vitesse de glissement de la cellule j ;
- f_{cj} est le seuil de glissement (en force) de la loi de Coulomb ;
- A est le paramètre de régularisation homogène à une vitesse, potentiellement différent pour chaque cellule de Jenkins.

Afin de résoudre ce problème, le logiciel ManLab, un programme Matlab orienté objet, est l'outil numérique utilisé pour résoudre ce problème sous excitation périodique. C'est un outil qui génère des branches de solutions en utilisant la Méthode Numérique Asymptotique (MAN - chapitre II, sous-sous-section 3.1.2). La méthode d'équilibrage harmonique (HBM - chapitre II, sous-section 2.2) a été ajoutée pour effectuer une décomposition de Fourier afin de traiter les problèmes sous excitation périodique. La description de l'ensemble de la méthode implantée dans ManLab est décrite dans [36]. Cette méthode accélère la convergence de la HBM et permet donc de diminuer nettement le temps de calcul.

Cette régularisation est donc régie par un seul paramètre de régularisation A_j pour chaque cellule de Jenkins. Les autres sont des paramètres physiques. La signification physique de A_j n'est pas évidente mais elle peut être considérée comme un seuil de vitesse. Kikuuwe *et al.* [30] notaient que ce paramètre A influence fortement le comportement du système, notamment en ce qui concerne le phénomène de stick/slip, adhérence-glissement, voir [37]. Néanmoins, son comportement à $\dot{r}_j = 0$ est assez différent de celui du modèle de Coulomb car il existe toujours une vitesse relative entre le *slider* et le bâti.

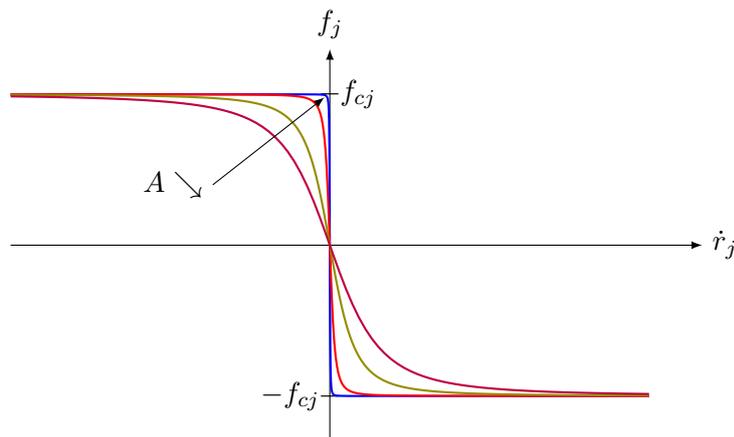


FIGURE III.6 – Régularisation de la loi de Coulomb - Influence du paramètre A de régularisation

Afin d'en faciliter l'insertion dans une série de Fourier, il est possible d'introduire deux nouvelles variables définies par l'équation III.24.

$$\begin{aligned} \dot{r}_j &= w_j \\ z_j &= \sqrt{w_j^2 + A_j^2} \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

Ainsi, pour une cellule de Jenkins, le système d'équations est le suivant :

$$\begin{cases} 0 = k_j(q - r_j) + f_j \\ \dot{r}_j = w_j \\ 0 = f_j z_j + f_{cj} w_j \\ 0 = A_j^2 + w_j^2 - z_j^2 \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

Le modèle étendu à N cellules de Jenkins (modèle d'Iwan) est obtenu en additionnant la force élémentaire d'une cellule dans l'équation de la dynamique (eq.III.5) et en reproduisant les équations III.25 N fois.

3 Résultats et discussion

Dans cette section, les formulations (TDWoR, TDWR, FDWoR et FDWR), présentées dans les sections précédentes, sont comparées. Le modèle utilisé est une association discrète en parallèle/série de 30 éléments de Jenkins. Chaque cellule de Jenkins J_j est composée d'une rigidité linéaire k_j et d'un *slider* de Coulomb à force de glissement f_{cj} .

Les paramètres numériques du modèle d'Iwan ainsi que la représentation de la force non-linéaire f_{nl} selon l'amplitude modale q sont donnés en annexe A. On rappelle que cinq indicateurs nous permettront de comparer les quatre méthodes : la fonction de réponse en fréquence, la pulsation de résonance, le facteur de qualité, la *restoring force* et les forces internes de Jenkins. L'ensemble de ces indicateurs sera post-traité à partir des simulations pour comparer la précision des méthodes d'un point de vue allant du plus global au plus local. Du point de vue global, on retrouve la FRF, la pulsation de résonance et le facteur de qualité ; ces éléments permettent d'obtenir les amplitudes de vibration. Du point de vue local, la *restoring force* et les forces internes aux Jenkins permettent, quant à elles, de mieux comprendre les phénomènes physiques tels que les transferts d'énergie des fréquences faibles aux fréquences plus élevées ou les problèmes de tribologie comme l'usure et le frettage.

3.1 Fonction de réponse de fréquence – FRF

Pour comparer les simulations du domaine fréquentiel avec celles du domaine temporel, nous devons transformer les résultats du domaine temporel en grandeurs exploitables dans le domaine fréquentiel. Pour atteindre cet objectif, l'algorithme FFT classique n'est pas utilisé car ses résultats sont très sensibles aux fuites spectrales. Pour une meilleure approximation du contenu de la fréquence, la méthode des moindres carrés non linéaires est utilisée sur le signal périodique assimilé à une série de Fourier à 8 harmoniques. Les FRF sont tracées en fonction du rapport entre la première amplitude harmonique du déplacement modal et l'amplitude de l'excitation.

Tout d'abord, pour comparer les méthodes dans le domaine temporel, le modèle à un degré de liberté est simulé à une fréquence d'excitation qui appartient à la plage $[470 - 520]$ rad s⁻¹. Le nombre de cellules de Jenkins est limité à ($N = 2$) et le paramètre de régularisation dans les équations de Dahl vaut $\alpha = 0,01$. Les FRF sont comparées sur la figure III.7. Quelle que soit la force de l'excitation, les FRF sont exactement les mêmes ; donc, en raison des difficultés de généralisation de la méthode TDWoR avec un grand nombre de cellules Jenkins, la méthode TDWR sera utilisée comme référence dans le domaine temporel.

Deuxièmement, le système d'équations a été résolu pour plusieurs fréquences d'excitation. Toutes les FRF sont représentées sur la figure III.8. Les FRF des deux systèmes linéaires, obtenues lorsque tous les *sliders* glissent avec $\omega_r^2 = \omega_0^2$ et lorsque tous les *sliders* adhèrent avec $\omega_r^2 = \omega_0^2 + \sum_{j=1}^n k_j$, sont également représentées. Elles sont indiquées afin d'encadrer la bande de fréquence intéressante. Comme mentionné précédemment, la résolution TDWR est défini comme le résultat de référence. Les deux méthodes d'équilibrage harmonique sont utilisées avec une série de 6 harmoniques. Les résolutions FDWoR et TDWR sont parfaitement superposées quelle que soit la fréquence d'excitation. La résolution FDWR sous-estime la réponse lorsque la résonance est atteinte, quelle que soit l'amplitude d'excitation. Elle est également très sensible aux valeurs du paramètre de régularisation A_j . Ainsi, ne sont tracées que les réponses obtenues avec la valeur minimale de A_j qui assure la convergence de la simulation ; voir sous-section 3.6 pour plus de détails.

3.2 Pulsation de résonance ω_r

Afin de calculer la pulsation de résonance ω_r , la réponse est simulée, puis on recherche la fréquence pour laquelle le maximum de la FRF est atteint. La figure III.9 montre la pulsation

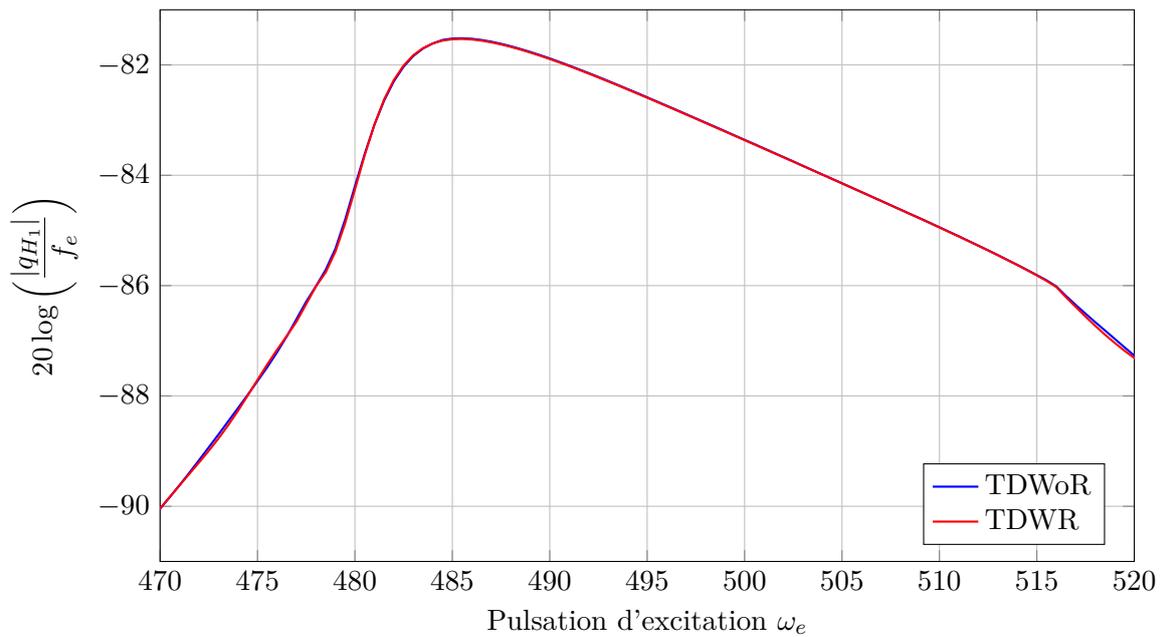
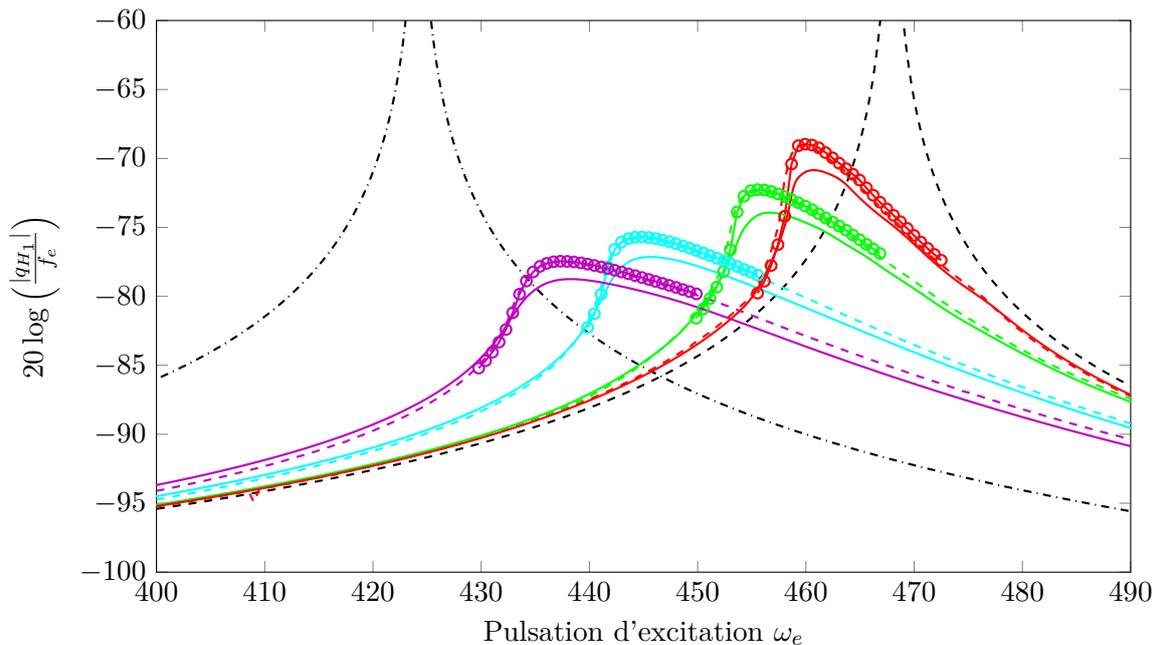


FIGURE III.7 – Comparaison entre le modèle TDWoR et le TDWR


 FIGURE III.8 – FRF : - - - TDWR; — FDWR; o-o-o FDWoR; $f_e = 4$ (violet); $f_e = 2$ (cyan); $f_e = 0.5$ (vert); $f_e = 0.2$ (rouge); - · - réponses linéaires

de résonance, post-traitée à partir des diagrammes FRF, par rapport au déplacement modal normalisé q/q_{slip} , où q_{slip} est la limite en déplacement avant glissement.

Les différentes pulsations de résonance obtenues par la méthode TDWR sont superposées aux données expérimentales. Les résultats de la méthode FDWoR sont très proches des données expérimentales. Bien que les résultats du FDWR semblent également très bons et correspondent bien aux données, un manque de précision peut être observé en ce qui concerne le déplacement normalisé. Ce manque de précision est encore plus gênant car il ne montre pas la transition du micro au macro glissement. Encore une fois, seuls les meilleurs résultats, pour un certain nombre d'harmoniques ($H = 6$) et pour une valeur A_j correspondant à une force d'excitation f_e , couple

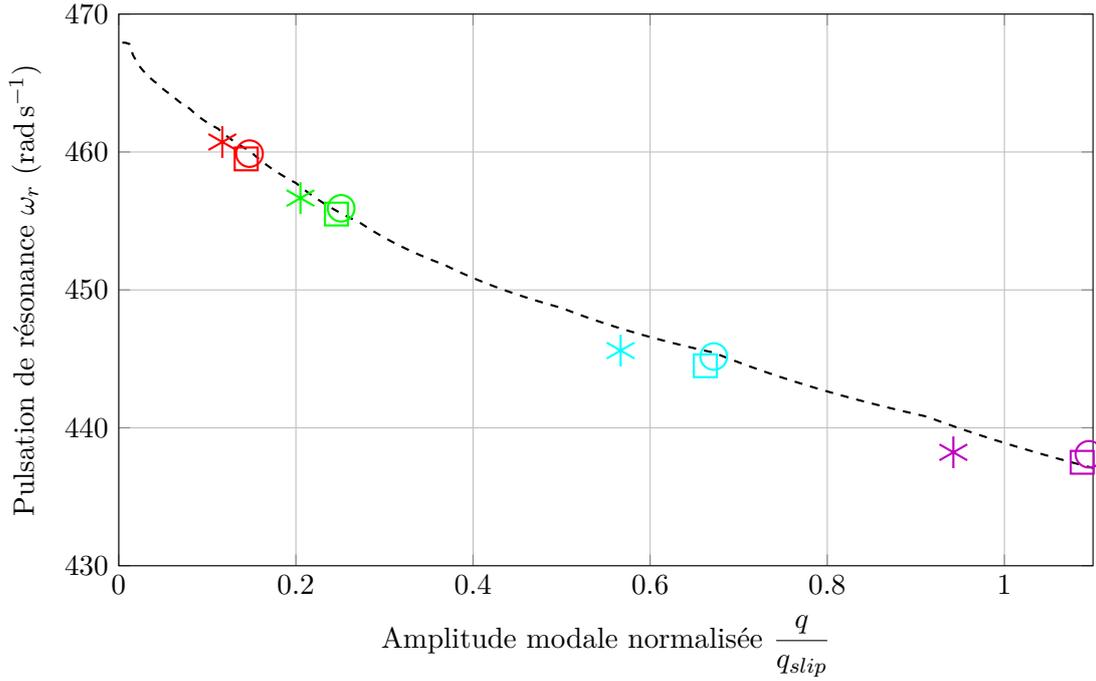


FIGURE III.9 – Pulsation de résonance : - - - Exp. ; □ TDWR ; * FDWR ; ○ FDWoR - $f_e = 4$ (violet) ; $f_e = 2$ (cyan) ; $f_e = 0.5$ (vert) ; $f_e = 0.2$ (rouge)

assurant la convergence, sont présentés (voir 3.6 pour plus de détails).

3.3 Facteur de qualité Q_r

Pour calculer le facteur de qualité équivalent Q_r , la bande passante à -3 dB ou les méthodes d'identification classiques (PolyMax) peuvent être utilisées, mais ces indicateurs, utiles pour les systèmes linéaires et utilisables pour une non linéarité faible, ne peuvent être utilisés dans notre cas sans erreur malgré la faible non-linéarité. Ainsi, un indicateur a été spécifiquement construit. Il est défini comme le rapport (eq. III.26, soit l'inverse du facteur de qualité Q_r) de :

- l'amplitude de la FRF obtenue lorsque f_e tend vers zéro et $\omega = \omega_0$;
- sur l'amplitude maximale de la FRF obtenue pour une valeur spécifique de l'excitation f_e .

$$Q_r(q_{H_1}) = \frac{\max \left(\log \left(\frac{q_{H_1}}{f_e} \right) \right)}{\log \left(\frac{q_{H_1}}{f_e} \right) \Big|_{f_e \rightarrow 0, \omega = \omega_0}} \quad (\text{III.26})$$

Sur la figure III.10, on remarque que les résultats de la formulation FDWoR sont très proches des données expérimentales et des résultats TDWR ; même si, pour une pulsation, le coefficient est surévalué. Les résultats de la formulation FDWR sont tous surévalués. Cependant, trois zones différentes apparaissent : la première lorsque certaines cellules de Jenkins glissent, la deuxième intermédiaire et la troisième lorsque toutes les cellules glissent. Comme expliqué précédemment, seuls les meilleurs résultats, pour un certain nombre d'harmoniques ($H = 6$) et pour une force d'excitation donnée f_e , couple assurant la convergence, sont proposés sur cette figure.

3.4 Restoring force

Pour expliquer le manque de précision de la formulation FDWR, il faut montrer comment la régularisation modifie la force d'Iwan (composante de la *restoring force*) (eq. III.8). À cette fin,

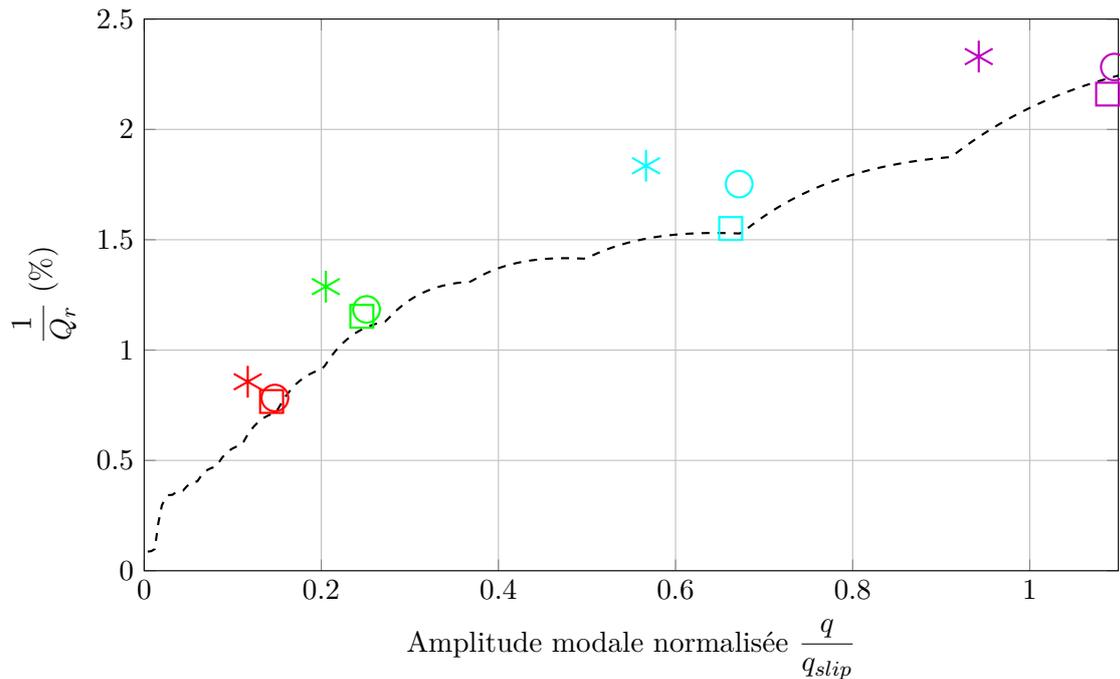


FIGURE III.10 – Inverse du facteur de qualité $1/Q_r$: - - - Exp.; \square TDWR; $*$ FDWR; \circ FDWoR - $f_e = 4$ (violet); $f_e = 2$ (cyan); $f_e = 0.5$ (vert); $f_e = 0.2$ (rouge)

les solutions obtenues par la formulation TDWR et celle par FDWR sont superposées à leur propre résonance de pulsation (fig. III.11).

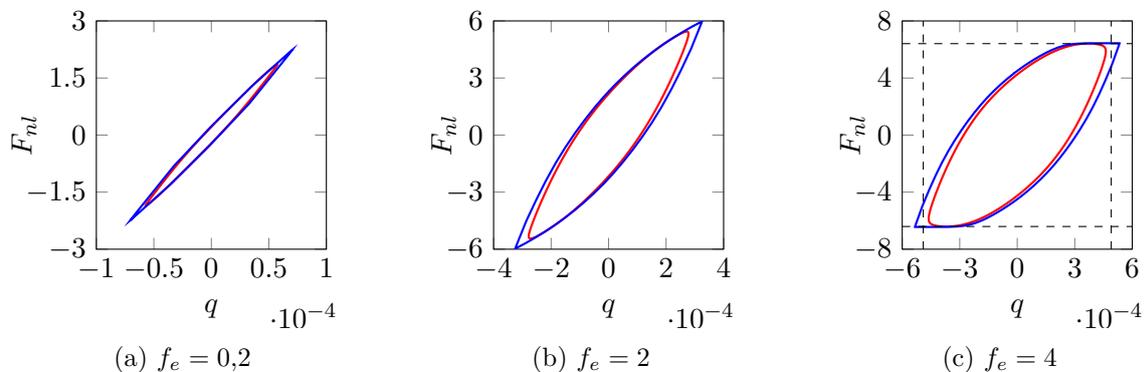


FIGURE III.11 – Comparaison entre TDWR (bleu) et FDWR (rouge) concernant la force non-linéaire F_{nl} en fonction de l'amplitude modale q pour trois niveaux d'excitation

Au premier coup d'œil, la régularisation est assez bonne, mais en regardant plus attentivement, on remarque que la régularisation modifie fortement la transition entre adhérence et glissement. Il apparaît alors que l'on peut manquer le seuil de glissement total (fig. III.11c). Le rapport entre les surfaces fermées, qui représente l'énergie dissipée par frottement, est également sous-estimé avec la régularisation. Il est présenté dans le tableau III.1.

Excitation f_e	0,2	2	4
Ratio des aires $\frac{\text{FDWR}}{\text{TDWR}}$ (%)	81,7	85,7	86,7

TABLE III.1 – Rapport des aires, image de la dissipation d'énergie

3.5 Forces internes de Jenkins

L'évolution des forces de Jenkins peut expliquer le manque de précision de la résolution FDWR. Afin d'illustrer ceci, deux cellules sont choisies :

- la cellule 1 qui est la première à glisser ;
- la cellule 30 qui, quant à elle, restera toujours en état d'adhérence, puisqu'il y aurait sinon rupture de la liaison par glissement total.

La force d'excitation est choisie à une valeur $f_e = 2$. Leurs évolutions sont représentées dans l'espace $(r_j - q, \dot{r}_j, f_j)$ soit le déplacement relatif du *slider*, la vitesse et la force. L'évolution des deux forces est illustrée sur la figure III.12. Avec seulement 6 harmoniques, les résultats sont globalement convaincants. L'augmentation du nombre d'harmoniques conduit à de meilleurs résultats dans la transition adhérence/glissement. On peut observer notamment que la réponse FDWR pour la cellule 1 (fig. III.12b) ne suit pas la surface régularisée, alors que la cellule 30 (fig. III.12c) suit correctement cette surface.

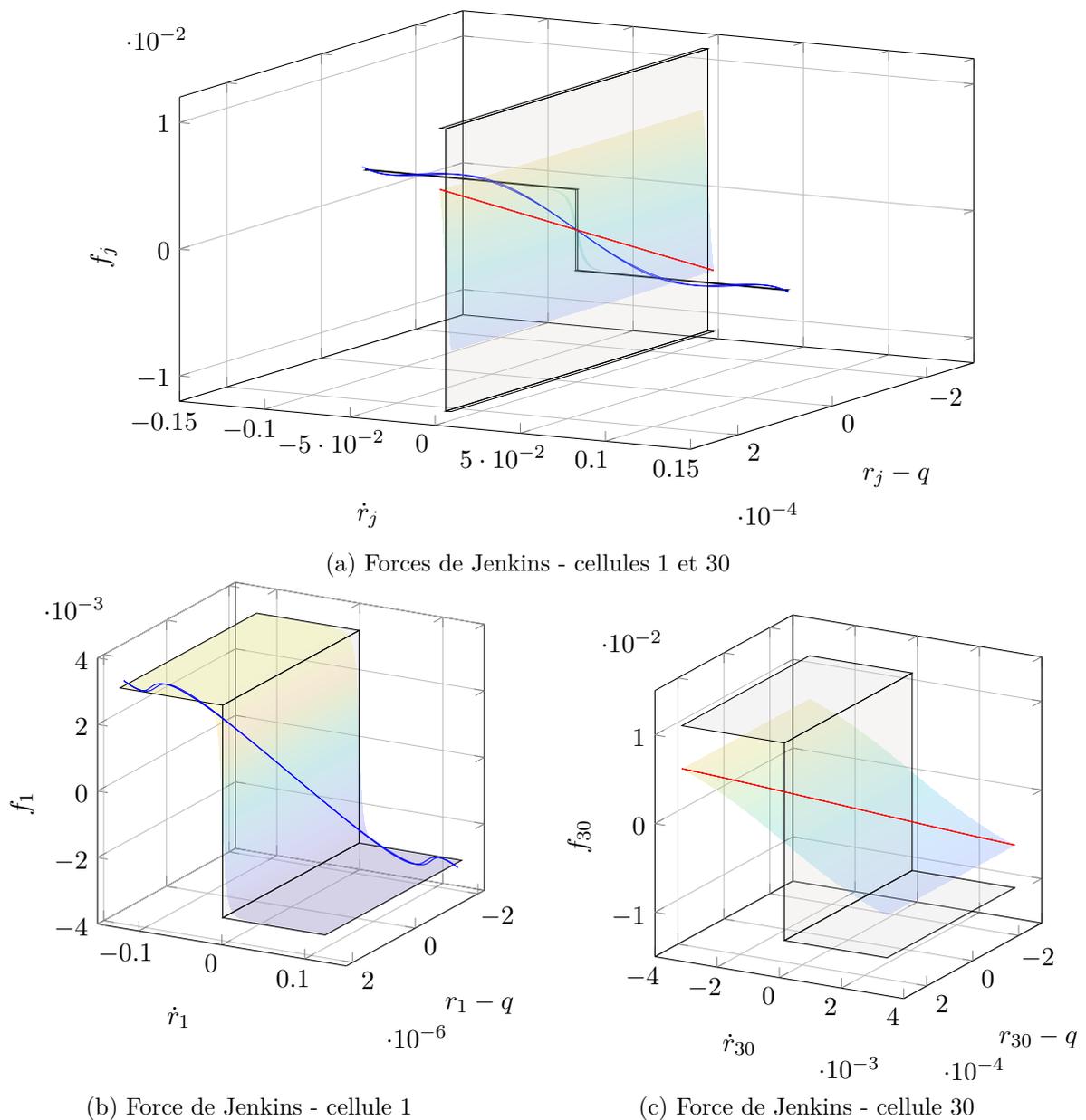


FIGURE III.12 – Les forces de Jenkins des cellules 1 et 30 dans les espaces $(r_j - q, \dot{r}_j, f_j)$

Dans le plan $(r_1 - q, f_1)$ – cellule 1 (fig. III.13a), la ligne droite représente la rigidité de la cellule.

Cependant, l'étude des autres plans (fig. III.13b et III.13c) montre que le nombre d'harmoniques est trop bas pour prédire un bon comportement de cette cellule de Jenkins qui est toujours en train de glisser. En conséquence, la force ne peut pas suivre la surface régularisée. Le paramètre de régularisation A est trop petit, par conséquent restrictif, pour ce *slider*. Le comportement, lorsque $\dot{r}_1 = 0$, n'est pas suffisant. L'énergie dissipée est donc inférieure à celle attendue.

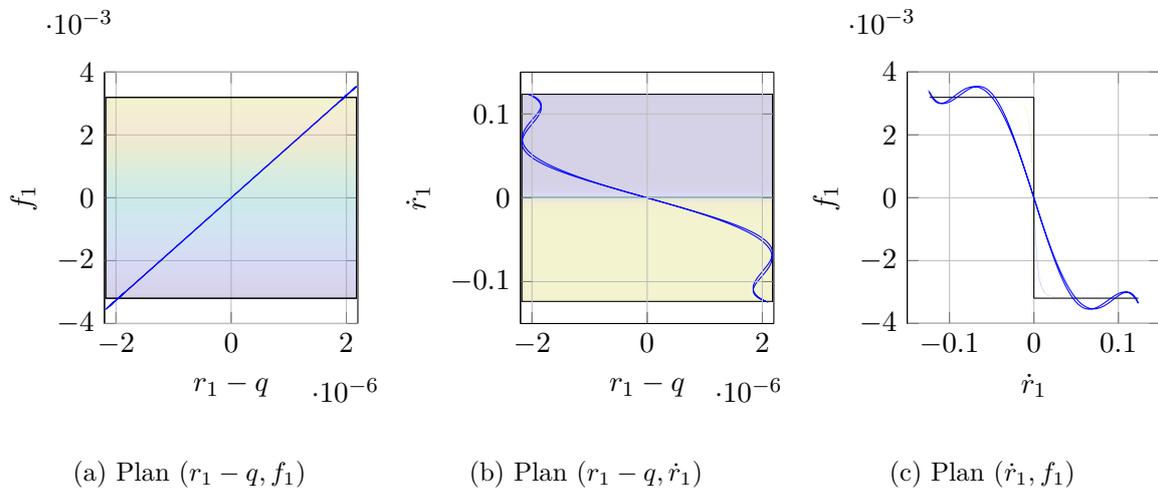


FIGURE III.13 – Force de Jenkins de la cellule 1

D'autre part, la réponse de la force de la cellule 30 reste parfaitement sur la surface normalisée (fig. III.14c). Le nombre d'harmoniques est alors suffisant (fig. III.13a et III.14b). On pourrait même réduire la valeur de A pour améliorer la précision de cette cellule. Cependant, la vitesse parasite (ordre de grandeur de 4×10^{-3} à comparer à la vitesse de la cellule 1 de l'ordre de 0,1) est tellement faible que l'énergie dissipée par cette cellule reste négligeable devant les cellules précédentes, bien qu'elle devrait être nulle. Pour conclure, une éventuelle évolution de la loi de régularisation serait de proposer un paramètre de régularisation adaptatif A_j selon l'état de la $j^{\text{ème}}$ cellule : adhérence ou glissement.

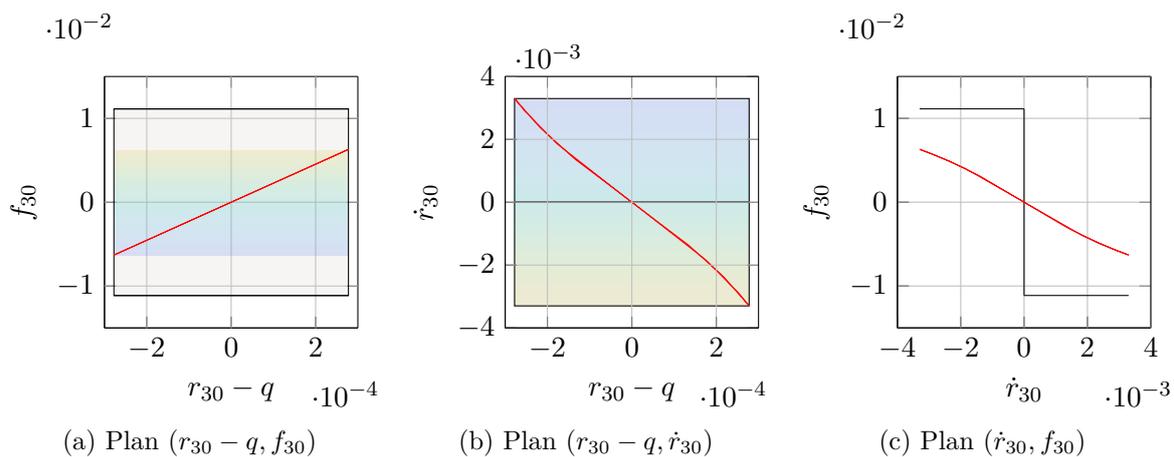


FIGURE III.14 – Force de Jenkins de la cellule 30

3.6 Limites et convergence

Physiquement, pour capturer les états d'adhérence, les paramètres de régularisation A_j doivent être aussi petits que possible. Mais, numériquement, le problème devient très rigide lorsque ces paramètres sont petits. Par conséquent, l'algorithme de Newton qui permet de résoudre le

problème ne converge pas toujours. Manlab [38], basé sur un développement limité asymptotique de la solution, a également été testé pour résoudre le problème, au lieu de l’algorithme de Newton. Grâce à la continuation sur la fréquence, la convergence est meilleure mais toujours délicate. En outre, le nombre d’harmoniques n_H peut également influencer la convergence des algorithmes. De plus, pour les plus hautes amplitudes vibratoires, les premières cellules glissent principalement pendant le cycle. Pour ces cellules et pour ces niveaux, les paramètres A_j devraient être plus élevés que ceux des cellules adhérentes. Cela permettrait d’obtenir une meilleure convergence des algorithmes. En résumé, les paramètres A_j doivent être évalués en fonction de l’amplitude des vibrations, de l’état des cellules de Jenkins, du nombre de cellules et de la précision du solveur. Notre objectif est donc d’adapter les valeurs de A_j en fonction de la fréquence et du niveau de l’excitation. Pour atteindre cet objectif, pour une valeur donnée de H , un premier ensemble de paramètres A_j est pris en compte. Un calcul est lancé. Si les calculs se terminent, les valeurs de A_j peuvent être diminuées. Toutefois, si les valeurs de A_j sont les plus petites possibles pour un nombre donné d’harmoniques, l’algorithme converge de nouveau lors d’une augmentation de H . Ainsi, il est possible de relancer la simulation. Ce que nous avons donc observé, c’est une saturation du paramètre A_j pour H fixé, mais qu’une augmentation de H , permet de diminuer les paramètres A_j . Néanmoins, il est nécessaire d’augmenter considérablement le nombre d’harmoniques pour converger vers la réponse des méthodes du domaine temporel. Ce processus est illustré sur la figure III.15, avec $f_e = 2$. Le fait principal est lorsque A est aussi petit que possible, les FRF (fig. III.15a), la pulsation de résonance (fig. III.15b), le facteur de qualité (fig. III.15c) et la *restoring force* (fig. III.15d) sont proches de la référence.

Par conséquent, pour correspondre à la référence, il est nécessaire de réduire la valeur du paramètre de régularisation A et d’augmenter le nombre d’harmoniques H . Cette décision conduit inévitablement à une augmentation du coût de calcul. Néanmoins, le nombre de cellules ne représente pas une barrière pour la convergence du calcul (seul un coût de calcul plus important). Ce modèle a été testé avec 2, 10 et 30 cellules. Il est remarquable que les valeurs de convergence de A soient indépendantes du nombre d’harmoniques, du moins, il n’a pas été possible de dégager une loi simple de cause à effet.

4 Conclusion

Dans ce chapitre, les vibrations d’une structure assemblée sont calculées autour d’une fréquence propre. Quatre formulations mathématiques sont utilisées pour simuler le problème comprenant un degré de liberté, une non linéarité hystérétique et une excitation harmonique, éléments simulant le comportement réel structure assemblée. Des méthodes de calculs formulées dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel, avec ou sans régularisation, sont utilisées pour calculer le comportement dynamique. Cinq indicateurs sont utilisés pour décrire ce comportement dynamique du point de vue global à un point de vue local. D’un point de vue global, la FRF, la pulsation de résonance et le facteur de qualité permettent d’obtenir les fréquences et les amplitudes du déplacement. Pour atteindre cet objectif, toutes les méthodes sont suffisantes ; le choix peut être fait sur la facilité de développement ou sur le temps de calcul. Mais si l’objectif est de comprendre les phénomènes physiques présents dans l’assemblage, ces informations ne suffisent pas, il faut alors calculer les indicateurs locaux (*restoring force* et forces internes de Jenkins). D’un point de vue local, les méthodes régularisées ne sont pas assez précises, en effet, la régularisation entraîne une perte d’informations sur les singularités due à son contenu à haute fréquence. En conclusion, pour être précis, il est nécessaire d’avoir des temps de calculs longs et par conséquent les méthodes utilisant l’AFT seront privilégiées.

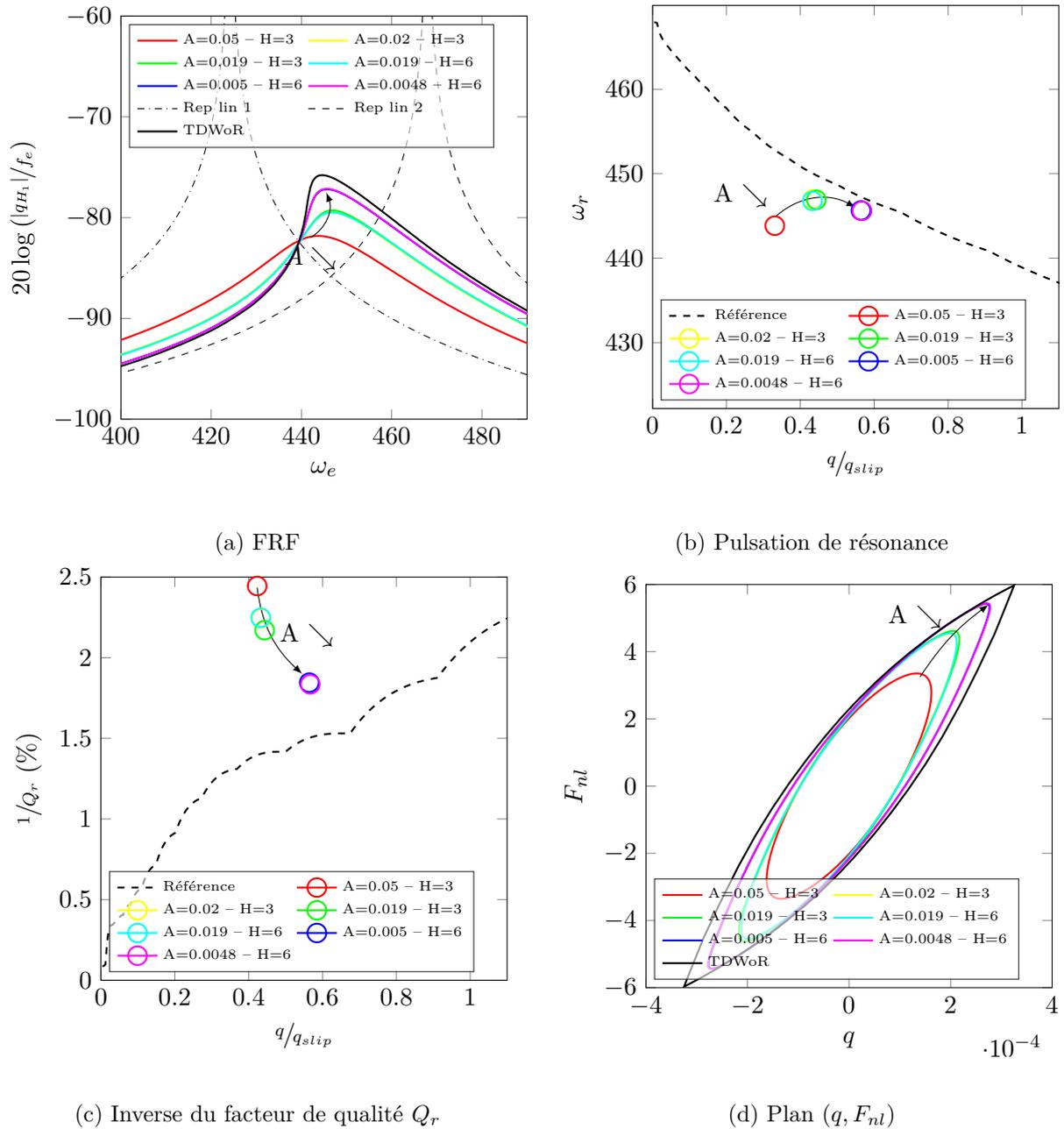


FIGURE III.15 – Évolution des différents critères en fonction de A et H lorsque $f_e = 2$

5 Bibliographie du chapitre III

- [1] N. PEYRET, J.-L. DION, G. CHEVALLIER et P. ARGOUL : Micro-slip induced damping in planar contact under constant and uniform normal stress. *International Journal of Applied Mechanics*, 02(02):281–304, juin 2010.
- [2] Hugo FESTJENS, Gaël CHEVALLIER et Jean-luc DION : A numerical tool for the design of assembled structures under dynamic loads. *International Journal of Mechanical Sciences*, 75:170–177, octobre 2013.
- [3] Daniel J. SEGALMAN : A four-parameter iwan model for lap-type joints. *Journal of Applied Mechanics*, 72(5):752, 2005.
- [4] H. FESTJENS, G. CHEVALLIER et J.L. DION : Nonlinear model order reduction of jointed structures for dynamic analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 333(7):2100–2113, mars 2014.
- [5] Noussa BOUCHAALA, Jean Luc DION, Nicolas PEYRET et Mohamed HADDAR : Micro-slip induced damping in the contact of nominally flat surfaces. *International Journal of Applied Mechanics*, 05(01):1350005, mars 2013.
- [6] W. CHEN et X. DENG : Structural damping caused by micro-slip along frictional interfaces. *International Journal of Mechanical Sciences*, 47(4):1191–1211, 2005.
- [7] P. CAIGNOT, A. and Ladeveze, D. NERON, V. L. GALLO et T. ROMEUF : Prediction by virtual testing of damping in the spatial structures. *in Proc. Colloque National en Calcul de Structures*, 2007.
- [8] L HELLER : Damping in assemblies structures. *Ph.D. thesis, Universite de Franche-Comte*, 2005.
- [9] Emily JEWELL, Matthew S ALLEN, Iman ZARE et Mitchell WALL : Application of quasi-static modal analysis to a finite element model and experimental correlation. *Journal of Sound and Vibration*, page 115376, 2020.
- [10] Y. REN et C BEARDS : Identification of joint properties of a structure using frf data. *Journal of Sound and Vibration*, 186(4):567–587, 1995.
- [11] Phil R. DAHL : A solid friction model. Rapport technique, Aerospace Corp El Segundo Ca, 1968.
- [12] Philip R. DAHL : Solid friction damping of mechanical vibrations. *AIAA Journal*, 14(12):1675_1682, 1976.
- [13] R. YING : The analysis and identification of friction joint parameters in the dynamic response of structures. 1992. Ph D Thesis, Imperial College, London, U.K. (1995).
- [14] Nicolas PEYRET, Marco ROSATELLO, Gaël CHEVALLIER et Jean-Luc DION : A mindlin derived dahl friction model. *Mechanism and Machine Theory*, 117:48–55, 2017.
- [15] W. D. IWAN : A distributed-element model for hysteresis and its steady-state dynamic response. *Journal of Applied Mechanics*, 33(4):893, 1966.
- [16] Alexander F METHERELL et SV DILLER : Instantaneous energy dissipation rate in a lap joint ?uniform clamping pressure. *Journal of Applied Mechanics*, 35(1):123–128, 1968.

- [17] Jérôme BASTIEN, Michelle SCHATZMAN et Claude-Henri LAMARQUE : Study of some rheological models with a finite number of degrees of freedom. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 19(2):277–307, 2000.
- [18] I. KOUGIOUMTZOGLOU et P. SPANOS : Nonstationary stochastic response, determination of nonlinear systems : A wiener path integral formalism. *Journal of Engineering Mechanics*, 140(9), 2014.
- [19] Y. K. WEN : Equivalent linearization for hysteretic systems under random excitation. *Journal of Applied Mechanics*, 47(1):150–154, 1980.
- [20] Hugo FESTJENS : *Contribution à la caractérisation et à la modélisation du comportement dynamique des structures assemblées*. Thèse de doctorat, Centrale, 2014.
- [21] M KRIFA, N BOUHADDI et S COGAN : Estimation of modal damping for structures with localized dissipation. *In Special Topics in Structural Dynamics, Volume 6*, pages 179–191. Springer, 2015.
- [22] Mohamed KRIFA, Noureddine BOUHADDI, Gael CHEVALLIER, Scott COGAN et Najib KACEM : Estimation and correction of the modal damping error involving linear and nonlinear localized dissipation. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 66:296–308, 2017.
- [23] Daniel R ROETTGEN et Matthew S ALLEN : Nonlinear characterization of a bolted, industrial structure using a modal framework. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 84:152–170, 2017.
- [24] Brandon J DEANER, Matthew S ALLEN, Michael J STARR, Daniel J SEGALMAN et Hartono SUMALI : Application of viscous and iwan modal damping models to experimental measurements from bolted structures. *Journal of Vibration and Acoustics*, 137(2):021012, 2015.
- [25] Robert M LACAYO, Brandon J DEANER et Matthew S ALLEN : A numerical study on the limitations of modal iwan models for impulsive excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 390:118–140, 2017.
- [26] T. M. CAMERON et J. H. GRIFFIN : An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems. *Journal of Applied Mechanics*, 56(1):149–154, mars 1989.
- [27] E. P. PETROV et D. J. EWINS : Analytical Formulation of Friction Interface Elements for Analysis of Nonlinear Multi-Harmonic Vibrations of Bladed Discs. pages 899–908, janvier 2002.
- [28] J.M. BORRAJO, S. ZUCCA et M.M. GOLA : Analytical formulation of the Jacobian matrix for non-linear calculation of the forced response of turbine blade assemblies with wedge friction dampers. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 41(10):1118–1127, décembre 2006.
- [29] Loïc SALLES, Alexander M. GOUSKOV, Laurent BLANC, Fabrice THOUVEREZ et Pierrick JEAN : Dynamic Analysis of Fretting-Wear in Joint Interface by a Multiscale Harmonic Balance Method Coupled With Explicit or Implicit Integration Schemes. pages 1003–1013, octobre 2010.
- [30] R. KIKUWE, N. TAKESUE, A. SANO, H. MOCHIYAMA et H. FUJIMOTO : Fixed-step friction simulation : from classical coulomb model to modern continuous models. *In 2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2005. (IROS 2005)*, pages 1009–1016, 2005.

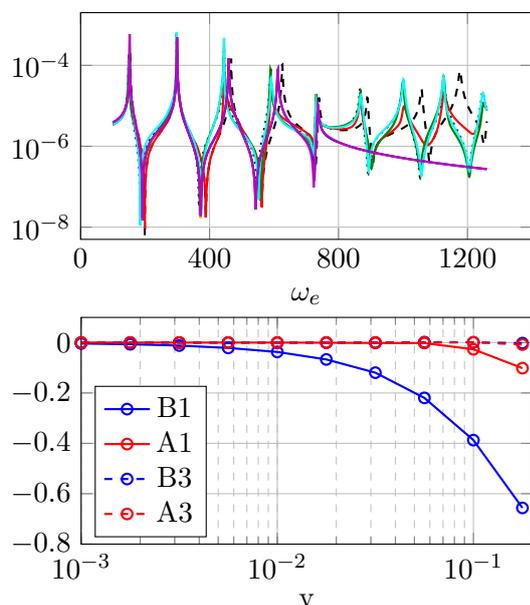
- [31] D. Dane QUINN : A new regularization of coulomb friction. *Journal of Vibration and Acoustics*, 126(3):391, 2004.
- [32] H. ZAHROUNI, B. BRAIKAT, N. DAMIL et M. POTIER-FERRY : Resolution des problemes de plasticite par la methode asymptotique numerique. 2005.
- [33] Sami KARKAR : *Méthodes numériques pour les systèmes dynamiques non linéaires : application aux instruments de musique auto-oscillants*. Aix-Marseille, janvier 2012.
- [34] El Hadi MOUSSI, Sergio BELLIZZI, Bruno COCHELIN et Ionel NISTOR : Nonlinear normal modes of a two degrees-of-freedom piecewise linear system. janvier 2013.
- [35] Michel POTIER-FERRY, Nouredine DAMIL, Bouazza BRAIKAT, Juliette DESCAMPS, Jean-Marc CADOU, Hua Lei CAO et Ahmad Elhage HUSSEIN : Traitement des fortes non-linearites par la methode asymptotique numerique. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences-Series IIB-Mechanics-Physics-Chemistry-Astronomy*, 324(3):171–177, 1997.
- [36] Bruno COCHELIN et Christophe VERGEZ : A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions. arXiv e-print 0808.3839, août 2008. *Journal of Sound and Vibration* 324 (2009) 243-262.
- [37] Christopher RICHARD : *On the identification and haptic display of friction*. Thèse de doctorat, Stanford University, 2000.
- [38] Bruno COCHELIN, Nouredine DAMIL et Michel POTIER-FERRY : *Méthode asymptotique numérique*. 2007.

Chapitre IV

Méthodes de réduction de modèle

Sommaire

1	Introduction	86
2	Extension de la méthode PJSB : la base PJSBDE	86
3	Présentation des études de cas	89
3.1	Étude de cas 1 : système discret à 20 ddls	90
3.2	Étude de cas 2 : liaison élémentaire – modèle EF de la poutre ORION	90
3.3	Outils et synthèse	90
4	Évaluation des méthodes de réduction sur le banc 1	92
4.1	Troncature de la base modale	92
4.2	Géométrie du domaine « liaison »	93
4.3	Troncature de la PJSBDE	96
4.4	Conclusion	103
5	Évaluation des méthodes de réduction sur le banc 2	104
5.1	Étude du domaine « Liaison »	104
5.2	Troncature modale	108
6	Méta-modélisation	108
6.1	Construction de la PJSBDE	109
6.2	Construction de l’abaque lié au mode 1 de la PJSBDE	111
7	Conclusion	113
8	Bibliographie du chapitre IV	115



Résumé

Ce chapitre propose une nouvelle base de réduction de la partie non-linéaire dans une structure assemblée. Elle prend appui sur l’estimation de l’énergie de dissipation par rapport aux modes de sollicitations de la liaison. Cette base sera passée au crible de deux bancs d’essai qui permettront de définir un scénario d’utilisation ainsi que ses limites. Enfin, cette base sera utilisée afin de créer un méta-modèle, sur une poutre boulonnée, de type abaque.

1 Introduction

La résolution des problèmes de vibrations nécessitent la mise en place d'algorithmes pour calculer les niveaux de vibration des structures assemblées sous charges harmoniques. La mise en place de ces algorithmes (chapitre V) impose une décomposition spatiale du problème entre sous-domaine linéaire et sous-domaine non-linéaire. Néanmoins, sur chaque sous-domaine, les problèmes impliquent un grand nombre de degrés de liberté. Afin de calculer efficacement la solution, il faut utiliser des techniques de réduction de modèle. Deux techniques de réduction sont proposées :

- la première afin de réduire le nombre de ddl, comme beaucoup d'œuvres antérieures [1], utilise la méthode de Craig-Bampton pour construire un super-élément de la partie linéaire du modèle (cette réduction sera développée dans le chapitre V) ;
- la deuxième est la Principal Joint Strain Basis Dissipated Energy (PJSBDE) basée sur l'énergie dissipée au sein de la liaison par micro-glissement.

Afin de décrire cette base et son utilisation, on donnera d'abord sa définition (section 2) ; puis on évaluera sa pertinence vis-à-vis de critères de choix (sections 3, 4 et 5) avant de tester sa pertinence sur un exemple par la construction d'un méta-modèle représenté par un abaque (section 6).

2 Extension de la méthode PJSB : la base PJSBDE

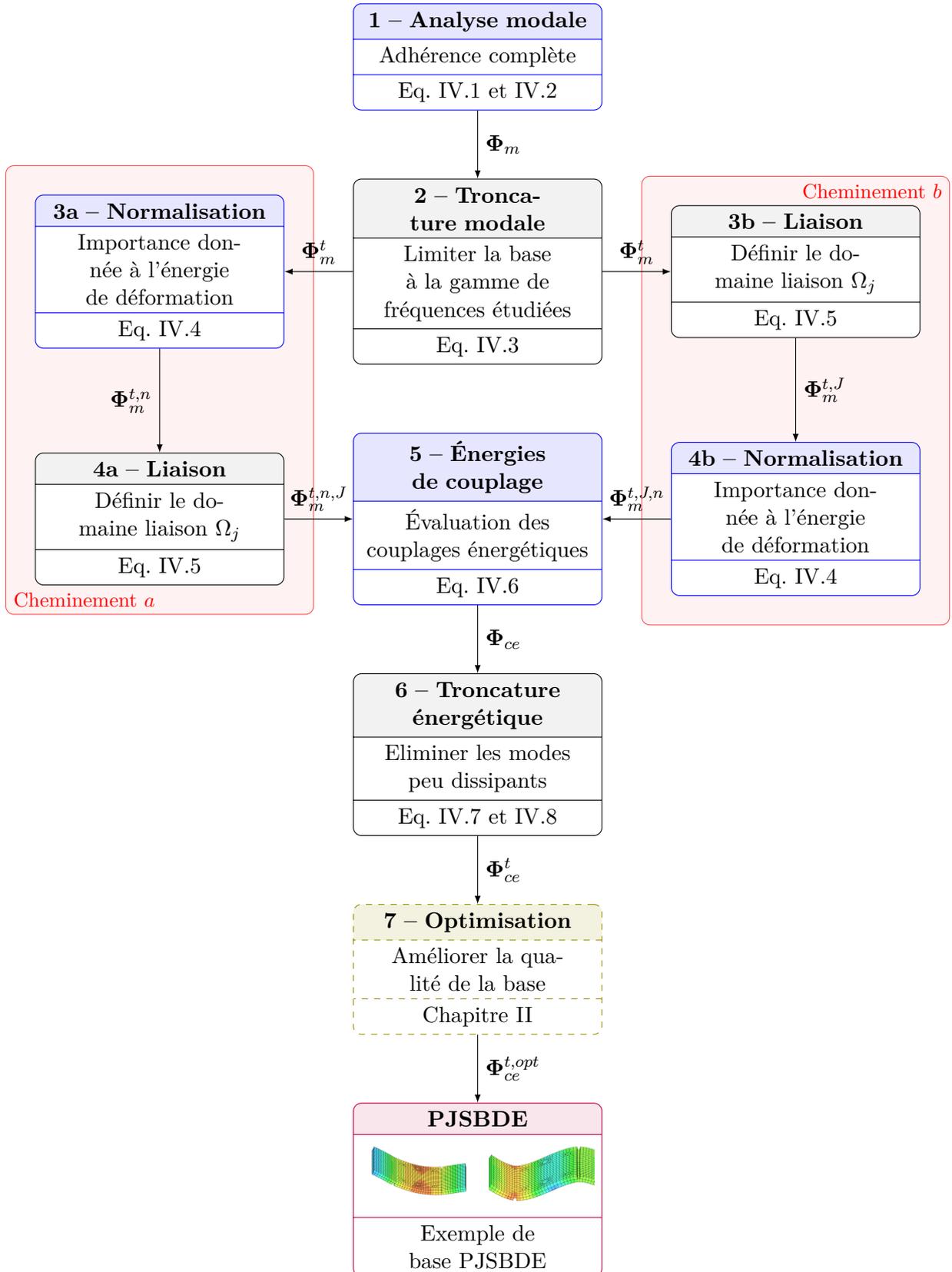
Dans un travail antérieur, Festjens *et al.* [2] ont proposé la Principal Joint Strain Basis (PJSB) comme méthode de réduction de modèle pour le domaine de la liaison. L'idée est de trouver un nombre très limité de charges ou de conditions aux limites qui couvrent la plupart des charges induites par les modes de vibration de la structure entière. Si cette PJSB existe, elle permet de construire des méta-modèles pour le comportement de la structure. Ces méta-modèles sont souvent représentés sous forme de diagrammes mécanique [3]. Le principal défaut de cette base est sa norme euclidienne en cinématique. En effet, elle est basée sur la recherche de la cinématique principale en déplacement sur la liaison et ainsi contient des modes de corps rigide qui eux ne dissipent pas.

Les travaux de cette thèse proposent de ne pas se limiter à l'aspect cinématique des sollicitations mais de les compléter en s'intéressant à l'aspect énergétique. Les différents points clés sont les suivants :

1. à partir de la structure complète, en adhérence totale, détermination de la base modale Φ_m ;
2. troncature de cette base à la gamme de fréquences étudiée ;
3. quantification de l'énergie de déformation sur un domaine pré-défini ;
4. évaluation des couplages énergétiques ;
5. troncature énergétique ;
6. optimisation éventuelle de la base ainsi déterminée.

Le processus de construction de cette base PJSBDE est synthétisé sur la figure IV.1. Dans un premier temps, apportons quelques précisions sur les cheminements présents. Il sera question de savoir si le processus, appelé cheminement *a*, consistant à normaliser l'énergie de déformation par rapport à toute la structure puis à restreindre l'étude à la liaison est préférable au processus inverse, appelé cheminement *b*, qui lui restreint d'abord l'étude à la liaison avant de normaliser l'énergie de déformation. Dans un second temps, détaillons maintenant chaque étape de la construction.

Pour construire les méta-modèles, une analyse linéaire est d'abord réalisée sur la structure globale (adhérence complète - interface liée) pour déterminer la réponse sans aucun couplage. Dans un


 FIGURE IV.1 – Construction de la Principal Joint Basis Dissipated Energy : ○ cheminement j ; □ choix; □ obligation; □ option

premier temps, il est nécessaire de déterminer la base modale complète Φ_m et ω^2 tels que :

$$\left(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}\right) \cdot \Phi_m = \mathbf{0} \quad (\text{IV.1})$$

Il est alors possible de décrire le changement d'espace comme suit :

$$\underline{U} = \Phi_m \cdot \underline{Q} \quad (\text{IV.2})$$

où \underline{Q} représente les déplacement modaux. Le *premier choix* porte sur la troncature à apporter à cette base « gigantesque » sur un modèle éléments finis standard. On appelle Φ_m^t cette base modale tronquée. Dans la pratique, cette troncature est déjà imposée par le calcul naturel de la base modale Φ_m , base déjà réduite, construite par itérations :

Dès lors :

$$\underline{U} \simeq \Phi_m^t \cdot \underline{Q}^t \quad (\text{IV.3})$$

La normalisation de la base modale tronquée peut être réalisée à 2 instants différents :

- *cheminement a* : à la suite de la troncature modale ;
- *cheminement b* : à la suite de la restriction de la base modale tronquée.

Dans la suite de l'étude, on mettra en évidence si l'une des deux solutions est meilleure. Il paraît cependant plus naturel de se pencher vers le cheminement *b* dans le sens où seul le comportement de la liaison nous intéresse.

Quel que soit le cheminement retenu, cette base sera normalisée par une équation du type :

$${}^{\top} \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I} \quad (\text{IV.4})$$

Pour la matrice à diagonaliser \mathbf{A} , deux options s'offrent à nous : la matrice d'inertie \mathbf{M} ou la matrice de raideur \mathbf{K} . Puisque les énergies de déformation sont à la base de la réflexion, il paraît tout à fait naturel de porter notre choix sur la matrice de raideur afin de donner *la même importance* à chacun des modes de sollicitation.

Par conséquent, la base Φ_m^t associée à la réponse est normalisée par rapport à la matrice de rigidité de la structure dans le but de donner à chacun des modes propres la même énergie de déformation. Afin de réduire le modèle de la liaison, on limite l'étude à celle-ci :

$$\underline{U}^J = \Phi_m^{t,J} \cdot \underline{Q}^t \quad (\text{IV.5})$$

avec \underline{U}^J , le champ de déplacement dans la liaison, et $\Phi_m^{t,J}$, la base modale tronquée restreinte à la liaison. Remarquons le *deuxième choix* à réaliser sur ce que représente « la liaison ».

Afin de construire un modèle détaillé de la liaison, nous souhaitons diminuer le nombre de modes de $\Phi_m^{t,J}$ en recherchant ceux qui dissipent le plus. L'idée de Festjens *et al.* [2] consistait à déterminer les modes de sollicitations principales, c'est-à-dire à simplifier la base $\Phi_m^{t,J}$, non libre, puisqu'il doit y avoir redondance des informations cinématiques. Ce travail conduit donc à la cinématique principale perçue par la liaison. L'idée montre ses limites car des modes importants, d'un point de vue cinématique, peuvent ne pas dissiper. Par conséquent, une étude des « énergies de couplage » sera proposée ci-dessous. Cette proposition consiste à l'introduction d'une base à connotation énergétique : la Principal Joint Strain Basis Dissipated Energy (PJSBDE) comme étant la base optimale de Ritz balayant les champs de déplacement dans la liaison. Afin de déterminer cette base, nous construisons un indicateur énergétique. Celui-ci est obtenu en observant deux configurations de la liaison, une où l'adhérence est totale dans la zone de contact, une autre glissante dans l'interface. On suppose ici que la différence d'énergie de déformation est représentative de la dissipation d'énergie. Cette idée s'appuie sur les travaux en visco-élasticité linéaire. Par exemple, Rouleau [4] rappelle que l'énergie de dissipation est proportionnel à l'énergie de déformation et l'utilise dans le cadre de dimensionnement du matériau amortissant par des matériaux visco-élastiques. On peut réaliser l'analogie au cas du frottement même si la proportionnalité n'a pas lieu, voir Hammami *et al.* [5]. En effet, lors de l'adhérence

il y a restitution de l'énergie sous forme d'énergie élastique, mais une partie également se transforme, dès lors qu'il y a glissement, en énergie de dissipation. En tout cas, s'il n'y a pas d'énergie de déformation, il n'y aura pas d'énergie de dissipation. Par conséquent, même s'il n'y a pas proportionnalité directe, voir Krifa et al [6], l'hypothèse est une bonne approximation et donc un bon indicateur pour notre objectif.

Il faut enfin choisir une base de projection pour cette différence de raideur. De manière générique, on peut utiliser la base modale tronquée et restreinte à la liaison $\Phi_m^{t,J}$. Restreindre à la liaison signifie, ne garder dans la base que les degrés de liberté situés à proximité immédiate de la liaison. Notons, que cette restriction réduit la dimension du sous-espace. Le symptôme visible est la perte d'orthogonalité entre les modes de la base restreinte. Il est donc possible de réduire encore la base obtenue. Dans ces conditions, la matrice des couplages énergétiques s'exprime de la manière suivante :

$$\mathbf{E}_{ce} = {}^T \Phi_m^{t,J} \cdot (\mathbf{K}^J - \hat{\mathbf{K}}^J) \cdot \Phi_m^{t,J} \quad (\text{IV.6})$$

où \mathbf{E}_{ce} est la matrice de couplage des énergies de déformation, \mathbf{K}^J est la matrice de raideur du domaine Ω^J lorsque l'interface est liée, $\hat{\mathbf{K}}^J$ est la matrice de rigidité du domaine Ω^J lorsque la charge normale est très faible (boulons desserrés).

Pour calculer la PJSBDE, l'idée est de simplifier la base $\Phi_m^{t,J}$ car il doit y avoir redondance entre les modes propres comme ils ont été considérés localement. Pour atteindre cet objectif, nous recherchons la base qui diagonalise \mathbf{E}_{ce} telle que :

$$(-\lambda_{ce} \cdot \mathbf{I} + \mathbf{E}_{ce}) \cdot \Phi_{ce} = \mathbf{0} \quad (\text{IV.7})$$

Nous extrayons les valeurs propres λ_{ce} puis elles sont triées. C'est le moment du *troisième choix*. En effet, s'il est préférable qu'un seul mode émerge de la diagonalisation de la matrice des énergies de couplage, la pratique pourrait en être tout autre. Par conséquent, il sera nécessaire de quantifier le rejet de tel ou tel mode par rapport au mode principal. Dans tous les cas, une deuxième troncature aura donc lieu selon un critère lié aux valeurs propres du type :

$$\frac{\lambda_{ce,j}}{\lambda_{ce,1}} < x\% \quad (\text{IV.8})$$

Dans l'idéal, un seul mode PJSBDE émerge et dans ce cas le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre est conservé comme conditions aux limites en déplacement sur l'interface. Ce mode représente le chargement à mettre en place dans un modèle éléments finis qui génère des forces non-linéaires non nulles, c'est-à-dire le mode dissipant. Le méta-modèle est construit alors en utilisant ces conditions aux limites et en faisant varier une variable généralisée v sur la plage de chargement que nous voulons étudier. Cette variable généralisée est reliée aux déplacements réels par la relation :

$$\underline{U}^J \simeq (\Phi_m^{t,J} \cdot \Phi_{ce}^t) \cdot v \quad (\text{IV.9})$$

où $\Phi_m^{t,J} \cdot \Phi_{ce}^t$ représente la base PJSBDE.

Le résultat est ensuite utilisé pour définir les charges que nous appliquons à un modèle non linéaire détaillé de la liaison. Les forces de réaction sur les frontières sont extraites et utilisées pour résoudre l'équation dynamique sur le domaine linéaire en utilisant la balance harmonique. La base peut-être améliorée en termes de conditionnement en la renormalisant par rapport à l'opérateur de masse ou de raideur réel ou encore en utilisant le résidu de l'approximation (chapitre II).

3 Présentation des études de cas

Afin d'évaluer les impacts des quatre choix possibles et du cheminement retenu, deux bancs d'essai numériques seront utilisés : le premier concerne un système discret constitué de 20 ddls, facile à reproduire pour le lecteur curieux, et le second est le modèle EF d'une liaison élémentaire, la poutre ORION.

3.1 Étude de cas 1 : système discret à 20 ddls

Ce système sera constitué de 20 masses reliées entre elles par une association parallèle d'un ressort et d'un amortisseur. Les bords sont encastrés. De plus, des éléments dissipatifs non-linéaires sont mis en place de manière arbitraire entre deux degrés de liberté (fig.IV.2).

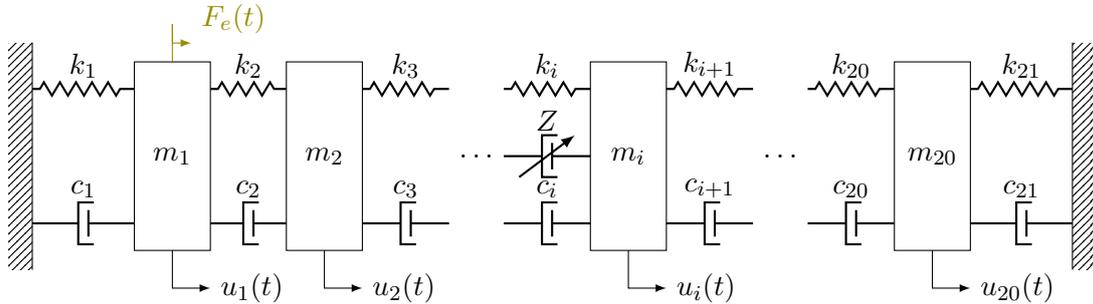


FIGURE IV.2 – Banc 1 : système discret à 20 degrés de libertés

Ce modèle permet de répondre aux interrogations sur les quatre critères. La raideur de la liaison sera trois fois plus grande en configuration serrée qu'en configuration déserrée.

3.2 Étude de cas 2 : liaison élémentaire – modèle EF de la poutre ORION

Sur le design d'une liaison boulonnée (fig. IV.3a) où des sur-épaisseurs permettent d'identifier clairement les zones de contact (fig. IV.3b), un processus de traitement va être mis en place afin de déterminer l'influence de la troncature de la base modale, ainsi que de la taille du domaine « liaison ».

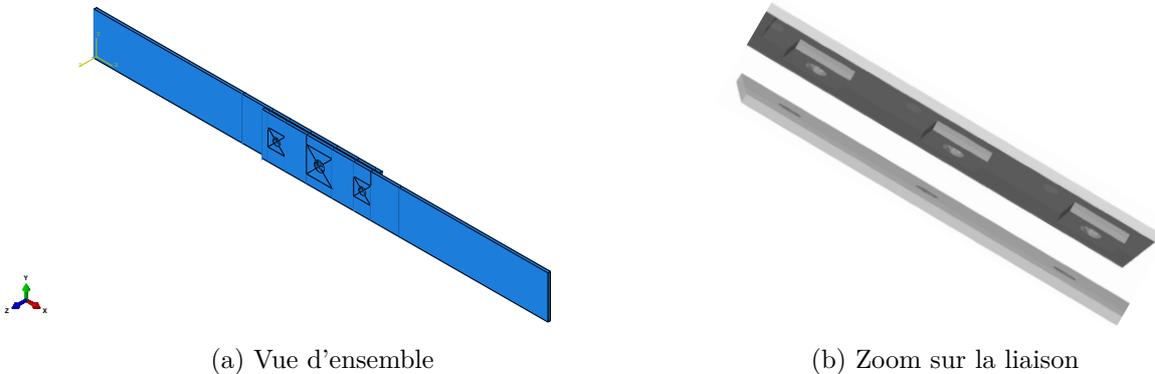


FIGURE IV.3 – Banc d'essai 2 : modèle EF de la poutre ORION

Le processus de traitement est le suivant : à partir d'un modèle éléments finis paramétrable, un ensemble de deux analyses linéaires en configurations serrée et desserrée permettront de déterminer Φ_m^t , \mathbf{K} et $\hat{\mathbf{K}}$ pour l'ensemble de la structure. Ensuite un interfaçage entre Abaqus et Matlab, par le langage de programmation Python, restreint les informations à la liaison. Puis un traitement de ces données (eqs. IV.6 à IV.9), nous permet de générer la base PJSBDE. Deux post-traitements seront effectués : un sur les valeurs propres λ_{ce} ; l'autre sur le nombre de MAC entre la base PJSBDE et la base modale tronquée, normalisée et restreinte à la liaison $\Phi_m^{t,J}$. La figure IV.4 synthétise l'ensemble de ces opérations.

3.3 Outils et synthèse

Deux outils sont utilisés pour mettre en évidence les conséquences des différents choix : la FRF et le nombre de MAC. Précisons ci-dessous la nature de ce dernier.

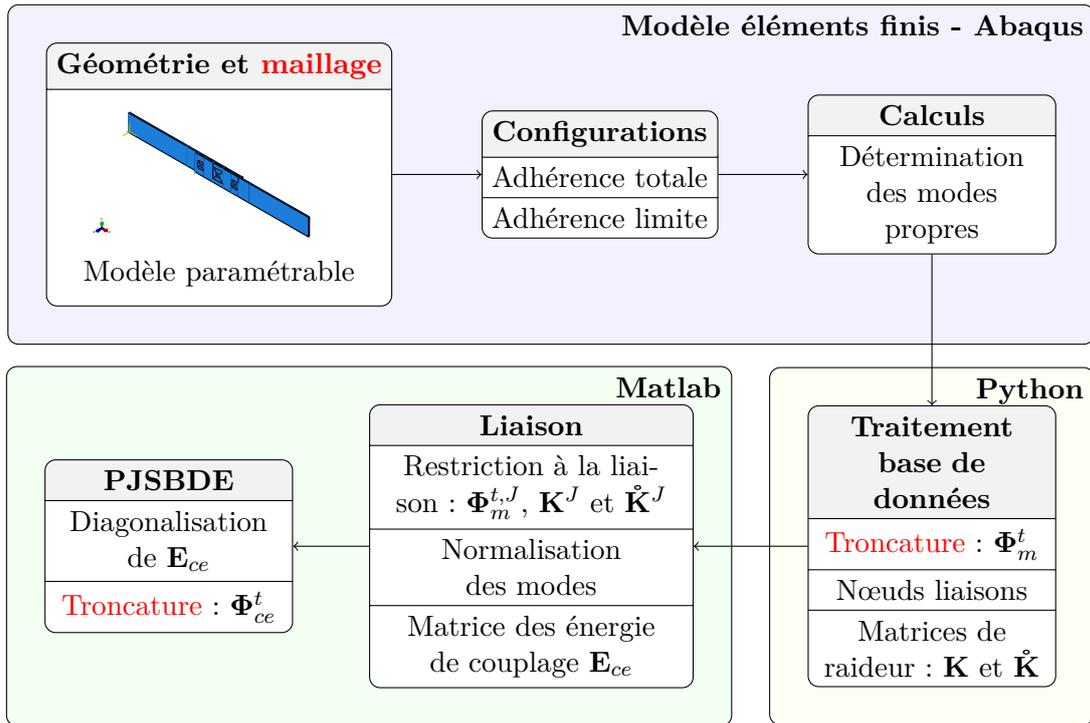


FIGURE IV.4 – Méthodologie de l'étude paramétrique pour définir l'ensemble « liaison »

Le nombre de MAC (Modal Assurance Criterion) est un indicateur qui est sensible aux grandes différences et relativement insensible aux petites pour les formes de mode [7]. Le MAC considère uniquement les formes modales, ce qui signifie qu'une comparaison de fréquence séparée doit être utilisée conjointement avec les valeurs MAC pour déterminer les paires de modes corrélés. Le MAC est souvent utilisé pour coupler des formes de modes dérivées de modèles analytiques avec celles obtenues expérimentalement. Il est facile à appliquer et ne nécessite pas d'estimation des matrices du système. Il est évalué entre 0 et 1 ; 1 indiquant des formes de mode entièrement cohérentes. Il peut seulement indiquer la cohérence et n'indique pas la validité ou l'orthogonalité. Une valeur proche de 0 indique que les modes ne sont pas cohérents. Allemang propose un développement sur cet indicateur ainsi que les bonnes et mauvaises pratiques associées [8].

Le nombre de MAC est calculé comme le produit scalaire normé entre deux bases Φ_A et Φ_B tel que :

$$MAC(A, B) = \frac{\left| \sum_{j=1}^n \Phi_{Aj} \cdot \Phi_{Bj} \right|^2}{\left(\sum_{j=1}^n \Phi_{Aj}^2 \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \Phi_{Bj}^2 \right)} \quad (\text{IV.10})$$

La méthodologie mise en place est à l'image d'un théorème de superposition, en supposant les effets cumulatifs. Nous allons tester séparément les effets des variations de chacun des choix. De plus, les écarts entre les cheminements a et b seront indiqués afin de déterminer quel cheminement est le plus performant.

Le tableau IV.1 synthétise quels choix, cheminements et combinaisons de choix seront testés et par quel banc. Il permet de préciser quels outils d'évaluations seront utilisés (forme de la PJSBDE, nombre de MAC ou FRF).

Notons que le critère de choix portant sur l'optimisation ne sera malheureusement pas abordé par souci de temps. Néanmoins les bancs d'essais étudiés permettraient de tester et valider les méthodes d'enrichissement de la base PJSBDE.

Critères	Bancs	
	Banc 1 : 20 ddls	Banc 2 : poutre ORION
Troncature modale	MAC, FRF	MAC
Géométrie de la liaison	MAC, PJSBDE	MAC, PJSBDE
Troncature PJSBDE	FRF	X
Optimisation	X	X
Cheminement a ou b	PJSBDE	X
Combinaison des troncatures	FRF	X

TABLE IV.1 – Tableau croisé, critères – bancs, et outils d'évaluations.

4 Évaluation des méthodes de réduction sur le banc 1

4.1 Troncature de la base modale

Les simulations numériques ont été réalisées en configuration 3 où un bon équilibre entre forces linéaires et forces non-linéaires dans la liaison est atteint (tab. IV.3). De plus, cette configuration permet de mettre en évidence que deux modes PJSBDE apparaissent dans des proportions différentes. Notons que le code couleur bleu indique la présence d'un élément dissipatif.

Troncature	[1; 2]	[1; 5]	[1; 10]	[1; 15]	[1; 20]
$(\Phi_m^{t,J} \cdot \Phi_{ce}^t)_1$	$\begin{bmatrix} 0,41 \\ 0,55 \\ 0,73 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,03 \\ -0,49 \\ -0,87 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,84 \\ 0,22 \\ -0,50 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,76 \\ 0,10 \\ -0,64 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,71 \\ 0,11 \\ -0,69 \end{bmatrix}$
$(\Phi_m^{t,J} \cdot \Phi_{ce}^t)_2$	$\begin{bmatrix} 0,57 \\ 0,58 \\ 0,58 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,57 \\ 0,61 \\ 0,56 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,52 \\ 0,65 \\ 0,56 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,48 \\ 0,68 \\ 0,55 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,31 \\ -0,94 \\ 0,15 \end{bmatrix}$

TABLE IV.2 – Vecteurs 1 et 2 de la base PJSBDE, réduite aux ddls associés aux éléments dissipatifs, en fonction de la troncature modale

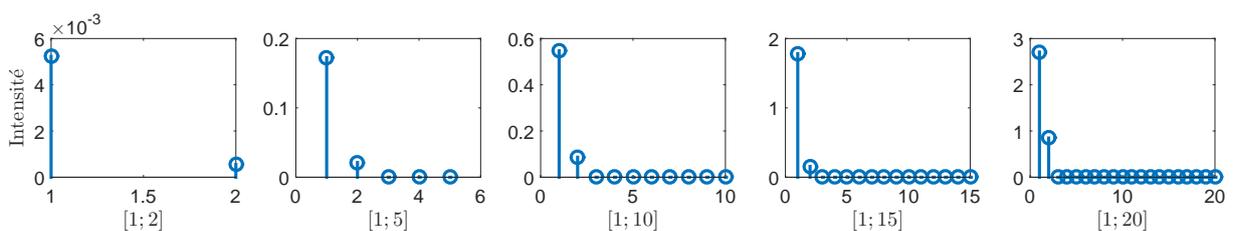


FIGURE IV.5 – Importances des modes en fonction de la troncature

La table IV.2 liste les vecteurs premier et second de la base PJSBDE générés pour des troncatures allant des deux premiers modes modaux uniquement pris en compte ([1; 2]) à la base modale complète ([1; 20]).

La troncature de la base modale modifie considérablement le mode 1 de la base PJSBDE. Par conséquent, il faut veiller à maintenir un certain nombre de modes afin de garantir que le mode dissipatif principal soit bien représentatif. Néanmoins, on semble observer une convergence sur la liaison à partir de la troncature [1; 10].

Le mode 2 est peu dissipatif comme le montre les valeurs propres lorsqu'une troncature est en place (fig. IV.5). La référence, sans troncature, montre que le mode n'est pas si négligeable et dissipe bien tout de même (dans un ratio de $\frac{1}{3}$ par rapport au mode 1).

La troncature modale élimine de toute façon une très grande partie des modes pouvant être évalués. Par conséquent, il semble finalement naturel de limiter la troncature à la gamme de fréquence usuelle d'utilisation de la liaison. Malgré tout, on constate une convergence lente du contenu de la base PJSBDE en fonction de la troncature modale. Dans un contexte éléments finis, il faudrait avoir recours à une correction statique pour accélérer cette convergence.

4.2 Géométrie du domaine « liaison »

4.2.1 Description de la simulation

Pour ce banc d'essai, la zone de la liaison est paramétrable (fig. IV.6). Afin de balayer différentes possibilités et mettre en évidence des comportements généralisables, nous allons définir cinq configurations différentes de la liaison. Dans toutes celles-ci, afin de rester dans le cadre des assemblages boulonnées, on vérifie qu'une grande partie, hors liaison, reste linéaire et que le domaine de la liaison contient des éléments linéaires et non linéaires. Le tableau IV.3 recense les différentes configurations et leurs attrait.

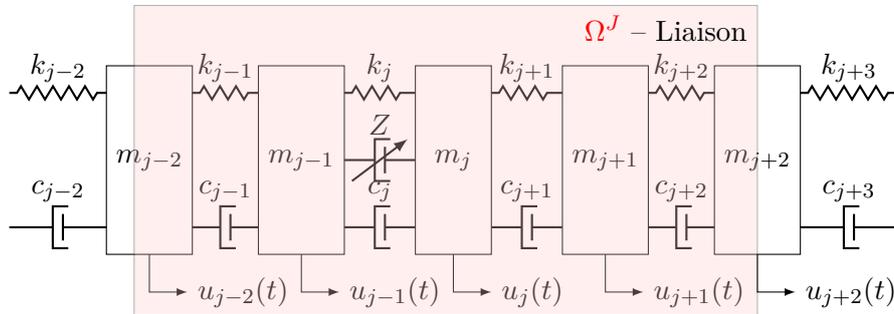


FIGURE IV.6 – Configuration générique de la liaison

Config.	Liaison (él. j à k)	Él. dissipatif-s (de j à k)	Commentaires Domaine « liaison » / NL / Ratio NL/L
1	5 – 6	5 – 6	Domaine « liaison » ajusté sur la non-linéarité Non-linéarité faible à l'échelle du système Ratio NL/L fort dans le domaine « liaison »
2	4 – 7	5 – 6	Domaine « liaison » modéré Non-linéarité faible à l'échelle du système Ratio NL/L faible dans le domaine « liaison »
3	4 – 8	5 – 6 – 7	Domaine « liaison » élargi Non-linéarité moyenne à l'échelle du système Ratio NL/L moyen dans le domaine « liaison »
4	3 – 8	5 – 6	Domaine « liaison » important Non-linéarité faible à l'échelle du système Ratio NL/L très faible dans le domaine « liaison »
5	3 – 9	5 – 6 – 7 – 8	Domaine « liaison » très important Non-linéarité forte à l'échelle du système Ratio NL/L moyen dans le domaine « liaison »

TABLE IV.3 – Définitions des différentes configurations testées. Les abréviations NL et L signifient respectivement non-linéaire et linéaire.

Les tableaux IV.4 et IV.5 recensent les différents résultats intéressants de cette étude. Pour chaque configuration et chaque cheminement, la valeur des quatre valeurs propres issues de la

diagonalisation de la matrice des énergies de couplage, le nombre de MAC entre la base modale et les quatre premiers modes de la base PJSBDE, ainsi que les vecteurs colonnes $(\Phi_m^{t,J} \cdot \Phi_{ce}^t)_1$ et $(\Phi_m^{t,J} \cdot \Phi_{ce}^t)_4$ vecteurs représentant le champ de déplacement à imposer à la liaison afin de dissiper de l'énergie, sont proposés. Ces deux dernières informations ont été tronquées volontairement à quatre puisque, dans tous les cas, les valeurs propres au delà du rang 5 sont toujours nulles, c'est-à-dire, que les modes PJSBDE associés ne dissipent pas d'énergie et par conséquent ils ne sont pas intéressants. C'est donc un souci de clarté visuelle qui a orienté ce choix. Précisons tout de même que cela semble être un résultat attendu au sens où un élément dissipatif favorise un mode, deux éléments dissipatifs doivent favoriser deux modes, etc. La généralisation à 1 modèle EF semble tout de même moins évidente à énoncer. Enfin, rappelons que le code couleur bleu associé à ces vecteurs permet de mettre en évidence la présence d'éléments dissipatifs.

C. Valeurs propres – MAC

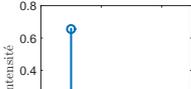
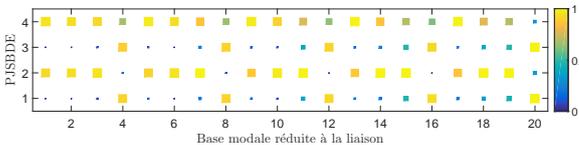
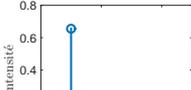
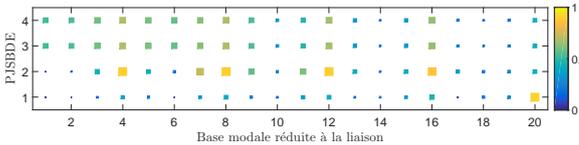
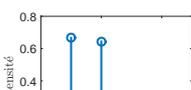
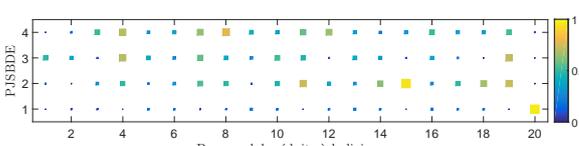
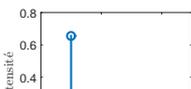
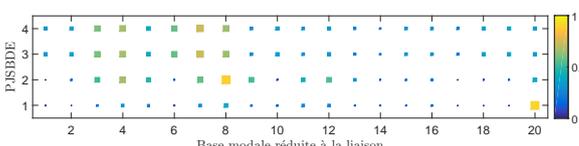
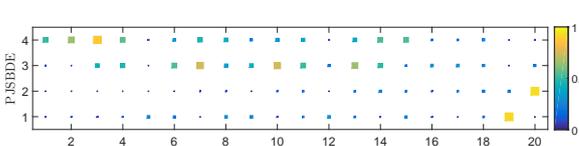
			$(\Phi_m^{t,J} \cdot \Phi_{ce}^t)_1$	$(\Phi_m^{t,J} \cdot \Phi_{ce}^t)_4$
1			$\begin{bmatrix} 1,00 \\ -1,04 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,00 \\ 1,73 \end{bmatrix}$
2			$\begin{bmatrix} 1,00 \\ 4,64 \\ -4,83 \\ -1,19 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,00 \\ 0,20 \\ 0,85 \\ -0,41 \end{bmatrix}$
3			$\begin{bmatrix} 1,00 \\ 7,51 \\ -19,65 \\ 7,51 \\ 1,01 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,00 \\ -0,22 \\ -0,06 \\ -0,03 \\ -0,36 \end{bmatrix}$
4			$\begin{bmatrix} 1,00 \\ 2,17 \\ 10,05 \\ -10,46 \\ -2,59 \\ -1,44 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,00 \\ 2,30 \\ 0,46 \\ 1,95 \\ -0,95 \\ -2,86 \end{bmatrix}$
5			$\begin{bmatrix} 1,00 \\ 2,64 \\ 16,31 \\ -22,91 \\ -23,51 \\ 16,46 \\ 2,69 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,00 \\ 0,71 \\ 0,05 \\ 0,19 \\ 0,24 \\ 0,41 \\ -0,30 \end{bmatrix}$

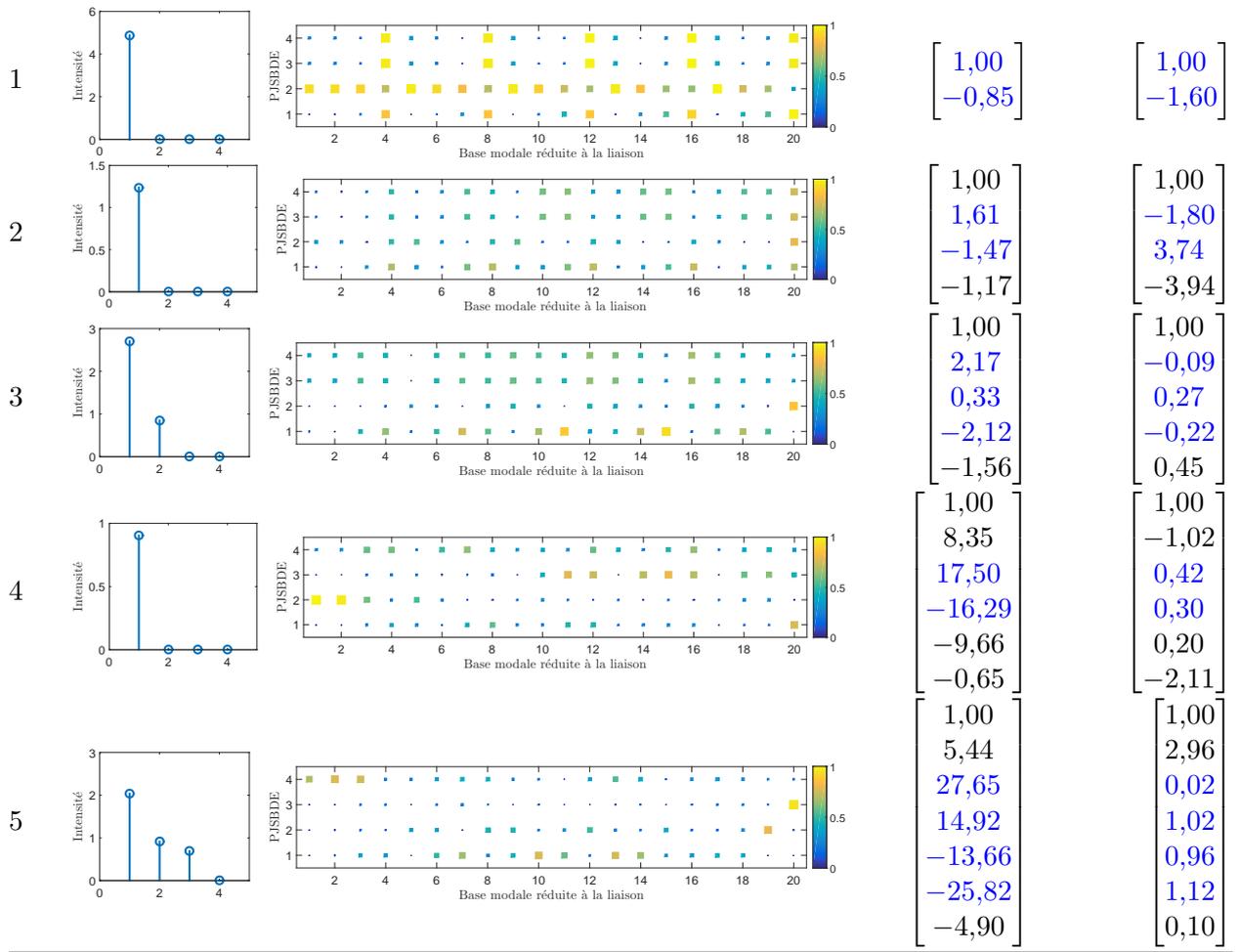
TABLE IV.4 – Tableau de comparaison des 5 configurations – utilisation du cheminement a

4.2.2 Analyse du résultat

Pour l'étude de la configuration 1, cheminement a , un seul mode PJSBDE émerge. La lecture du nombre de MAC entre la PJSBDE et la base modale permet de mettre en évidence que le mode ainsi créé $(\Phi_m^{t,J} \cdot \Phi_{ce}^t)_1$ est une combinaison des modes 4, 8, 12 et 16, puis dans une moindre mesure le mode 20. La figure IV.7 illustre que l'élément dissipatif est bien sollicité à l'activation de ces modes. Ces déformées sont représentées en adhérence totale dans la mesure où la liaison

C. Valeurs propres – MAC

$$\left(\Phi_m^{t,J} \cdot \Phi_{ce}^t \right)_1 \quad \left(\Phi_m^{t,J} \cdot \Phi_{ce}^t \right)_4$$


 TABLE IV.5 – Tableau de comparaison des 5 configurations – utilisation du cheminement b

tend vers cette configuration. Néanmoins le glissement doit modifier légèrement l'allure de ces modes.

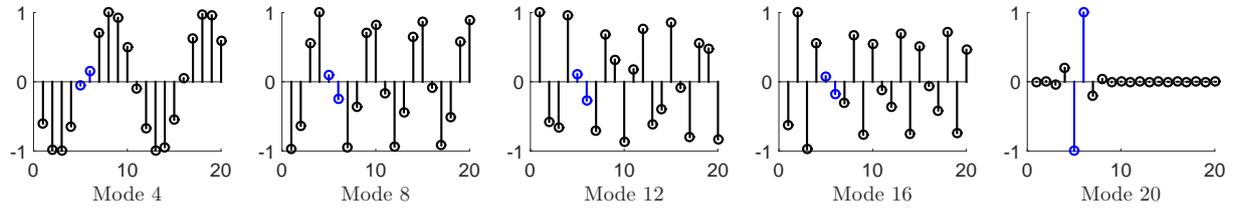


FIGURE IV.7 – Allures des déformées des modes sollicitant l'élément dissipatif lié à la configuration 1 en adhérence totale – normalisation du maximum à 1

Enfin analysons les vecteurs $\left(\Phi_m^{t,J} \cdot \Phi_{ce}^t \right)_1$ et $\left(\Phi_m^{t,J} \cdot \Phi_{ce}^t \right)_4$. On remarque que le vecteur 1 permet bien la dissipation puisque les amplitudes modales sont de signe opposé et d'amplitudes différentes (1 pour -1). Au passage remarquons que le vecteur 1 ne se limite pas qu'au mode 20 malgré l'allure de la déformée où l'élément dissipatif est fortement mis à contribution (fig. IV.7) ; la matrice de raideur de la configuration « adhérence totale » est bien corrigée par la soustraction de la matrice en configuration « adhérence limite ». Le vecteur 4 est quant à lui proposé pour vérifier que l'on ne manque pas une information de dissipation. Ici les deux amplitudes sont

proches ; par conséquent il y a peu de dissipation et le mode est bel et bien mis de côté par le processus de création de la PJSBDE.

4.2.3 Bilan

Pour le cheminement a , on remarque que si le nombre d'éléments dissipatifs est égal à un, alors un seul mode PJSBDE ressort. Ce qui est logique. L'indicateur est donc consistant. Mais dès l'augmentation de ce nombre d'éléments, alors d'autres modes PJSBDE ressortent de l'analyse, et dans des proportions semblables ;

Néanmoins il est intéressant de constater les écarts entre les configurations 1, 2 et 4. On rappelle ici qu'un seul élément dissipatif est présent et toujours dans la même position ; seul la quantité de comportement linéaire est variable (de peu de linéarité à beaucoup de linéarité). On constate alors que pour ces configurations le ratio entre les amplitudes modales des degrés de liberté associés à l'élément dissipatif est égal pour chaque configuration (ratio égal à -1). On remarque que la contribution des modes modaux est relativement identique. Cependant le nombre de MAC fait apparaître que le mode 20 ressort de manière très significative si la liaison contient des éléments linéaires.

Le cheminement b paraît plus proche de ce qu'on cherche à mettre en évidence. Puisqu'il faut se focaliser sur la liaison, pourquoi normaliser sur la structure entière ? Ce que l'on fait apparaître ici c'est que le reste de la structure, la très grande partie linéaire, pollue l'analyse des modes dissipatifs. Il faut alors espérer que le cheminement b conclura à un résultat satisfaisant tout comme la physique le sous-entend.

En ce qui concerne le cheminement b , ce qui est remarquable à la première lecture, est le changement dès lors que le nombre d'éléments dissipatifs augmentent. On constate l'émergence d'un seul mode pour les configurations 3 et 5. La constitution de ce mode PJSBDE prépondérant reste relativement identique. On peut néanmoins nuancer en précisant que le meilleur équilibre linéarité – non-linéarité de la configuration 3 permet de « filtrer » de manière plus pertinente les sollicitations énergétiques principales de la liaison. On remarque également que lorsque la géométrie « liaison » comporte trop d'éléments linéaires (configuration 4), les modes modaux 14, 16, 18 et 20 disparaissent du mode principal PJSBDE. Ce résultat tendrait à nous montrer que la « liaison » doit contenir assez d'éléments linéaires mais pas trop afin de ne pas « cacher » des phénomènes dissipatifs importants.

En conclusion, les règles à adopter afin de définir la géométrie de la liaison sont :

- adoption du cheminement b , restriction puis normalisation ;
- contenance dans le domaine « liaison » des éléments non-linéaires mais également de quelques éléments linéaires (sans excès) afin d'assurer le lien entre les deux domaines.

4.3 Troncature de la PJSBDE

Pour cette sous-section, appuyons nous sur les résultats précédents. Les études précédentes montrent qu'en utilisant le cheminement b , quelles que soient la configuration et la troncature modale, un mode dissipant majeur émerge. C'est clairement le résultat escompté dans la plupart des cas de figure des assemblages classiques. Néanmoins, il a été montré que des modes secondaires mais difficilement négligeables apparaissaient. Il en coûtera la prise en compte de ces modes afin sans doute de proposer un modèle dissipatif de liaison performant. Vérifions en régime permanent les écarts d'amplitude à pulsation donnée.

On se place dans la configuration 3 (tab. IV.3) afin de tester l'importance relative des modes PJSBDE entre eux et donc l'effet de la troncature énergétique sur la qualité de l'approximation. Le ratio entre les deux valeurs des valeurs propres est proche de $1/3$, ratio qui semble intéressant afin de savoir si l'on peut négliger raisonnablement le second mode ou non.

Le choix s'est orienté sur l'écriture du problème dans le domaine fréquentiel. Les termes linéaires ne posant pas de problème, reste à traiter le cas des forces non-linéaires. Pour celles-ci, l'utilisa-

tion astucieuse et avantageuse d'un abaque a été mise en place. L'abaque sera celui décrit pour le modèle de Dahl dans la sous-section 2.3 du chapitre II. Enfin, la troncature énergétique sera mise en place. En conclusion, ce problème sera traité par la méthode HBM, à laquelle seront superposées deux réductions de modèles, l'une modale et l'autre énergétique, tout en utilisant un abaque afin de quantifier la force non-linéaire. Les résultats seront proposés sous forme de FRF.

La résolution portera uniquement sur l'harmonique de premier rang, soit le fondamental, mais sans grande erreur commise grâce à l'utilisation de l'abaque, celui-ci étant généré pour un nombre d'harmoniques élevés ($n_H = 12$ dans ces travaux).

4.3.1 Les équations et l'algorithme

L'équation temporelle de description des vibrations d'une structure dans l'espace des modes peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{m} \cdot \ddot{\underline{Q}} + \mathbf{c} \cdot \dot{\underline{Q}} + \mathbf{k} \cdot \underline{Q} = {}^\top \Phi_m \cdot \underline{F}_e \cos(\omega_e t) + {}^\top \Phi_m \cdot \sum_{j=1}^N \underline{F}_{nl,j} \underline{l}_j \quad (\text{IV.11})$$

où :

- $\mathbf{m} = {}^\top \Phi_m \cdot \mathbf{M} \cdot \Phi_m$ la matrice de masse modale ;
- $\mathbf{c} = {}^\top \Phi_m \cdot \mathbf{C} \cdot \Phi_m$ la matrice d'amortissement modale ;
- $\mathbf{k} = {}^\top \Phi_m \cdot \mathbf{K} \cdot \Phi_m$ la matrice de raideur modale ;
- $\underline{U} = \Phi_m \cdot \underline{Q}$, la projection dans la base modale des déplacements réels \underline{U} ;
- $\underline{F}_{nl,j}$ les forces non-linéaires, N leur nombre ;
- et \underline{l}_j le vecteur distributeur de ces forces.

Ce dernier vecteur est le vecteur applicatif de la force non-linéaire contenant un -1 et un $+1$, le reste étant des 0. De plus, afin d'alléger les écritures, on notera $\underline{f}_e = {}^\top \Phi_m \cdot \underline{F}_e$ et $\underline{f}_j = {}^\top \Phi_m \cdot \underline{F}_{nl,j}$. La réponse obtenue peut s'écrire sous la forme d'une décomposition en série de Fourier :

$$\underline{Q} = \underline{Q}_a \cos(\omega_e t) + \underline{Q}_b \sin(\omega_e t) \quad (\text{IV.12})$$

en supposant nul le terme constant (résultat classiquement obtenu). Le système matriciel décrit par l'équation IV.11 s'écrit maintenant :

$$\begin{bmatrix} -\omega_e^2 \mathbf{m} + \mathbf{k} & \omega_e \mathbf{c} \\ -\omega_e \mathbf{c} & -\omega_e^2 \mathbf{m} + \mathbf{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{Q}_a \\ \underline{Q}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}_e \\ \underline{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N \underline{f}_{aj} \underline{l}_j \\ \sum_{j=1}^N \underline{f}_{bj} \underline{l}_j \end{bmatrix} \quad (\text{IV.13})$$

Les forces non-linéaires modales dépendent des déplacements réels tel que $f_j = f_j(U_k, U_l)$ avec k, l , 2 dds distincts. En notant r le déplacement relatif entre ces deux dds, on obtient les équations génériques suivantes :

$$\begin{cases} r_{aj} = U_{ak} - U_{al} = ({}^\top \Phi_{m,k}^J - {}^\top \Phi_{m,l}^J) \cdot \underline{U}_a & (\text{IV.14}) \\ r_{bj} = U_{bk} - U_{bl} = ({}^\top \Phi_{m,k}^J - {}^\top \Phi_{m,l}^J) \cdot \underline{U}_b & (\text{IV.15}) \\ r_j = \sqrt{r_{aj}^2 + r_{bj}^2} & (\text{IV.16}) \end{cases}$$

Néanmoins, la base PJSBDE permet d'obtenir une approximation du déplacement réel en fonction du déplacement physique (eq. IV.9) ; ce qui transforme le système d'équations précédent décrivant les forces non-linéaires modales :

$$\begin{cases} r_{aj} = U_{ak} - U_{al} \simeq \left({}^\top \Phi_{m,j}^J - {}^\top \Phi_{m,l}^J \right) \cdot \Phi_{ce} \cdot {}^\top \Phi_{ce} \cdot \underline{Q}_a & \text{(IV.17)} \\ r_{bj} = U_{bk} - U_{bl} \simeq \left({}^\top \Phi_{m,j}^J - {}^\top \Phi_{m,l}^J \right) \cdot \Phi_{ce} \cdot {}^\top \Phi_{ce} \cdot \underline{Q}_b & \text{(IV.18)} \\ r_j = \sqrt{r_{aj}^2 + r_{bj}^2} & \text{(IV.19)} \end{cases}$$

On peut enfin exprimer le résidu \underline{R} du système d'équations IV.13 :

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} -\omega_e^2 \mathbf{m} + \mathbf{k} & \omega_e \mathbf{c} \\ -\omega_e \mathbf{c} & -\omega_e^2 \mathbf{m} + \mathbf{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{Q}_a \\ \underline{Q}_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{f}_e \\ \underline{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N \underline{f}_{aj} \underline{l}_j \\ \sum_{j=1}^N \underline{f}_{bj} \underline{l}_j \end{bmatrix} \quad \text{(IV.20)}$$

Enfin, à partir de l'expression du résidu, exprimons la matrice jacobienne \mathbf{J} :

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \underline{R}}{\partial \underline{Q}} = \begin{bmatrix} -\omega_e^2 \mathbf{m} + \mathbf{k} & \omega_e \mathbf{c} \\ -\omega_e \mathbf{c} & -\omega_e^2 \mathbf{m} + \mathbf{k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N \frac{\partial \underline{f}_{aj}}{\partial \underline{Q}_a} \underline{l}_j & \sum_{j=1}^N \frac{\partial \underline{f}_{aj}}{\partial \underline{Q}_b} \underline{l}_j \\ \sum_{j=1}^N \frac{\partial \underline{f}_{bj}}{\partial \underline{Q}_a} \underline{l}_j & \sum_{j=1}^N \frac{\partial \underline{f}_{bj}}{\partial \underline{Q}_b} \underline{l}_j \end{bmatrix} \quad \text{(IV.21)}$$

où il est possible d'obtenir une expression quasi-analytique des termes dus aux phénomènes non-linéaires. À titre d'exemple :

$$\frac{\partial \underline{f}_{aj}}{\partial \underline{Q}_a} = \frac{\partial \underline{f}_{aj}}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial r_a} \times \frac{\partial r_a}{\partial \underline{U}_a} \times \frac{\partial \underline{U}_a}{\partial \underline{Q}_a} \quad \text{(IV.22)}$$

$$= \left(\frac{\partial \underline{f}_{aj}}{\partial r} \right) \times \left(\frac{r_a}{r} \right) \times \left(-\underline{l}_j \right) \times \left(\Phi_m \cdot \Phi_{ce} \cdot {}^\top \Phi_{ce} \right) \quad \text{(IV.23)}$$

Le premier terme s'obtiendra par l'utilisation de l'abaque à l'aide d'une approximation de type taux d'accroissement local :

$$\frac{\partial \underline{f}_{aj}}{\partial r} \simeq \frac{\underline{f}_{aj}(r + \delta r) - \underline{f}_{aj}(r - \delta r)}{2\delta r} \quad \text{(IV.24)}$$

où la variation δr s'obtient en faisant varier la grandeur \underline{Q}_a d'une quantité $\delta \underline{Q}_a$. Suit enfin l'algorithme utilisé. Il s'agit d'un algorithme de type Newton de recherche de zéro (chapitre II, sous-section 3.3). L'ensemble du processus est décrit par l'algorithme 4. Le paramètre ϵ représente une norme quelconque du résidu.

4.3.2 Résultats

La configuration retenue est la configuration 3 décrite dans la table IV.3, page 93. Le choix est maintenue sur celle-ci par son intérêt lors de la diagonalisation de la matrice des couplages énergétiques où deux valeurs propres ressortent. Les résultats seront vus sur un ddl appartenant à la liaison (le numéro 4), dans une gamme de pulsation englobant les huit premiers modes propres. Afin de valider les réductions possibles, une solution de référence sans aucune troncature sera générée. Pour cela, il suffit de fixer :

$$\begin{cases} \Phi_m = \mathbf{I} & \text{(IV.25)} \\ \Phi_{ce} \cdot {}^\top \Phi_{ce} = \mathbf{I} & \text{(IV.26)} \end{cases}$$

où \mathbf{I} représente la matrice identité. De plus, la liaison sera sollicitée à différents niveaux d'amplitude afin de déterminer les limites des réductions. Les amplitudes seront :

Algorithme 4 : Algorithme HBM, PJSBDE, Abaque

```

for  $\omega \in \Omega$  do
  // Initialisation :  $\underline{Q}_\omega^{(0)}$ 
  if  $\omega = \omega_1$  then
     $\underline{Q}_{\omega_1}^{(0)} = \begin{bmatrix} -\omega_e^2 \mathbf{m} + \mathbf{k} & \omega_e \mathbf{c} \\ -\omega_e \mathbf{c} & -\omega_e^2 \mathbf{m} + \mathbf{k} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \underline{f}_e$ 
  end
  else  $\underline{Q}_{\omega_j}^{(0)} = \underline{Q}_{\omega_{j-1}}^{(fin)}$ ;
  // Récurrence de Newton
  while  $\epsilon > \epsilon_{\max}$  et  $N_{\text{iter}} < N_{\text{iter,max}}$  do
    Calcul de  $\mathbf{J}$  ;
     $\underline{Q}_{\omega_j}^{(iter)} = \underline{Q}_{\omega_j}^{(iter-1)} - \mathbf{J}^{-1} \cdot \underline{R}(\underline{Q}_{\omega_j}^{(iter-1)})$ 
  end
end

```

- 0,1 afin que les deux éléments dissipatifs restent au maximum dans leur configuration d'adhérence ;
- 3 afin de proposer le passage anti-résonance \rightarrow résonance, de la configuration adhérence vers la configuration glissement ;
- 10 afin que la réponse soit majoritairement en glissement.

Ces 3 amplitudes sont testées pour mettre à mal la méthode, puisque dans le cadre d'une liaison réelle, à aucun moment, on ne souhaite atteindre le glissement total ; seul le glissement partiel a du sens physique vis-à-vis de la structure.

Il est intéressant de préciser que quelles que soient les approximations faites, le comportement attendu est globalement satisfaisant. De plus, l'étude des différentes courbes (figs. IV.8a, IV.9a et IV.10a) met en évidence trois phénomènes principaux :

- la troncature modale crée un décalage lors du passage aux anti-résonances ;
- la troncature PJSBDE crée un décalage aux résonances ;
- la réduction PSJBDE surestime l'effet de la dissipation d'énergie.

Avant d'étudier dans le détail ces phénomènes et de les décrire, précisons dès maintenant que ceux-ci n'ont pas forcément tous lieux à la même fréquence. Il y a un comportement global qui se dessine mais qui n'est pas complètement généralisable. Rappelons également dès à présent que la troncature modale induit un changement de la base PJSBDE ; par conséquent on ne peut dissocier complètement la troncature modale de la troncature énergétique.

La figure IV.9b montre l'effet de l'accumulation des modes PJSBDE. Lorsque $\Phi_m = \mathbf{I}$ et que la troncature énergétique vaut 1, la réponse est superposée à la référence ; alors que l'ajout du second mode PSJBDE surestime l'effet de la dissipation en collant la réponse ainsi obtenue à la réponse en configuration desserrée. Sur cette même figure, on remarque que la troncature modale seule, quelle que soit la troncature énergétique, perturbe la réponse par rapport à la référence.

Par conséquent, en quoi ce second mode PJSBDE, qui se dégage de l'étude énergétique, « améliore-t-il » la qualité de la réponse ? Pour répondre à cette question, il faut se pencher sur l'anti-résonance. Les figures IV.9c et IV.8c illustrent l'intérêt du second mode PJSBDE. La réponse à base modale $\Phi_m = \mathbf{I}$ et à troncature énergétique de 1 montre la surestimation de l'effet dissipatif. L'ajout du second mode permet de corriger cet effet en « recollant », de manière « significative » la réponse. Néanmoins, cela a pour conséquence la disparition de l'anti-résonance. Ces conséquences sont également vérifiées sur la figure IV.10c où la réponse de référence se situe entre adhérence totale et glissement total.

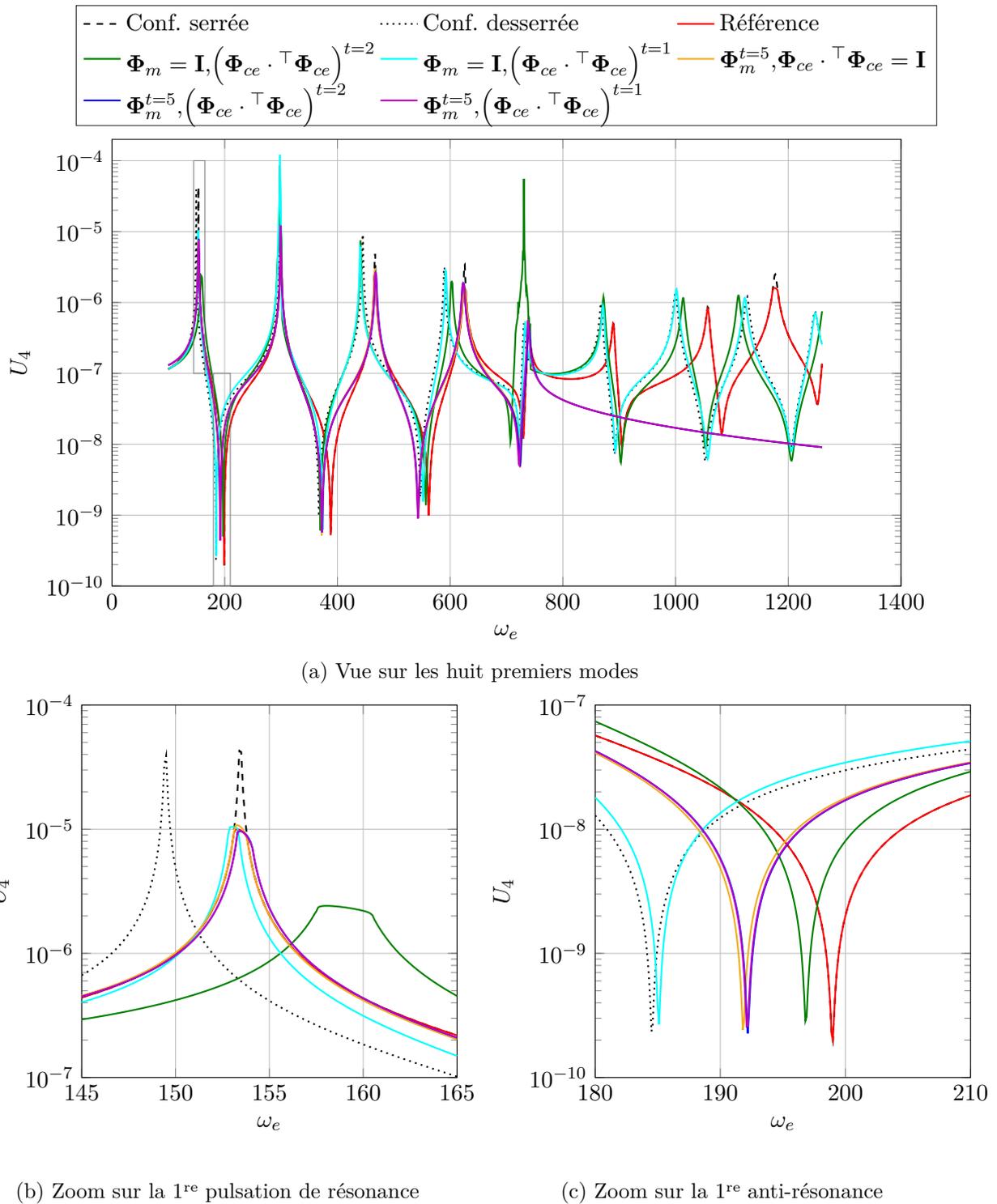


FIGURE IV.8 – Amplitude du déplacement du ddl 4 en fonction de la pulsation d'excitation ω_e pour une amplitude d'excitation 0,1

Sur l'ensemble des figures où le phénomène de glissement est important (figs. IV.9b et IV.10b), on remarque que l'effet de la troncature modale reste prépondérant devant la troncature énergétique. En effet les 3 courbes issues de la troncature se superposent pour chaque amplitude. Ce qui amène à conclure sur la qualité de l'indicateur énergétique mis en place dans ce chapitre IV, cet indicateur semble être pertinent. La figure IV.8b met, quant à elle, à mal l'hypothèse de surestimation lors de réduction énergétique. En effet l'ajout du mode 2 de la base PJSBDE, met

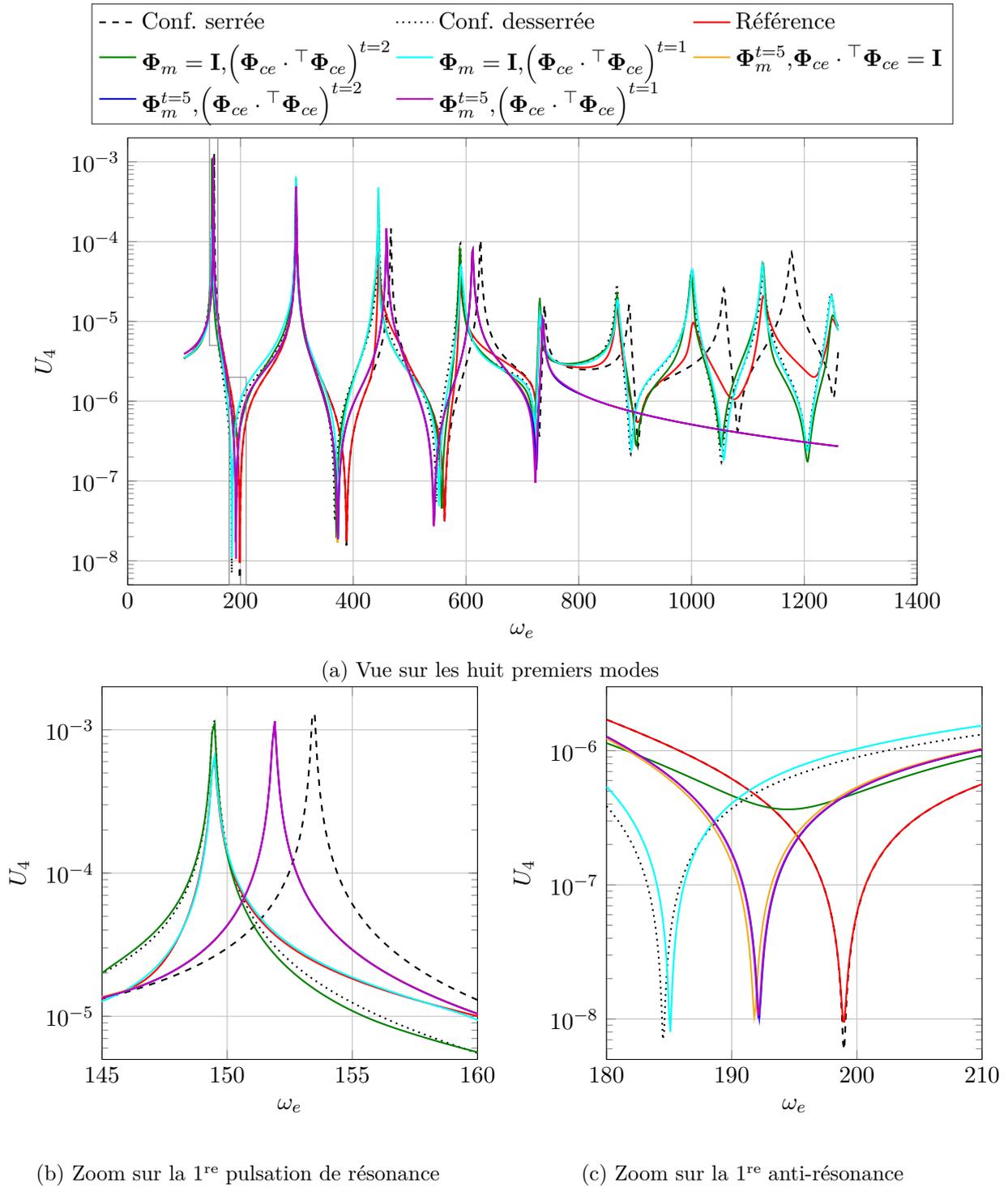
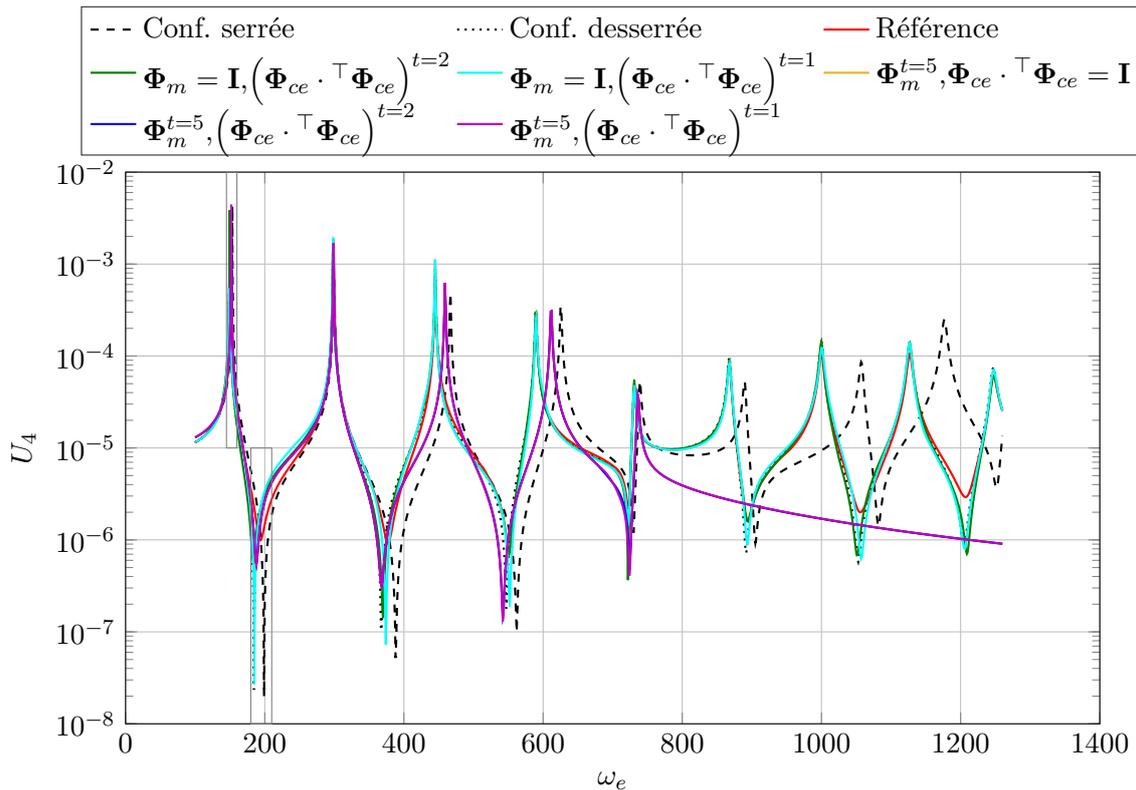


FIGURE IV.9 – Amplitude du déplacement du ddl 4 en fonction de la pulsation d'excitation ω_e pour une amplitude d'excitation 3

en évidence un comportement aberrant, en tout cas non prévisible.

Globalement les différentes réductions ont pour effet de surestimer l'effet dissipatif dans la liaison. Il sera donc intéressant de prendre en compte cette information afin d'améliorer la réduction du modèle.



(a) Vue sur les huit premiers modes

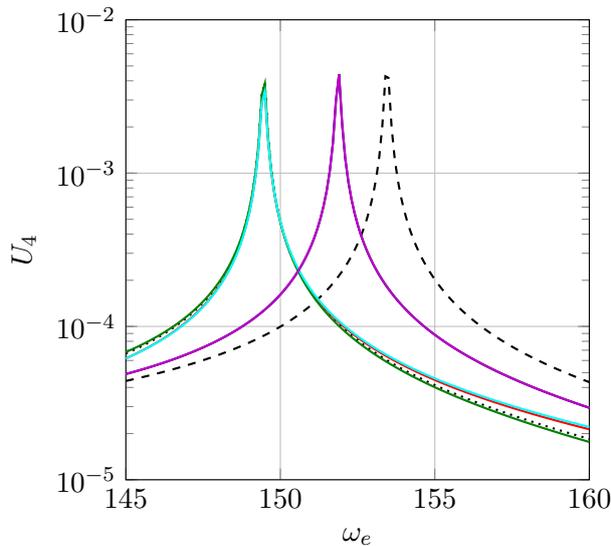
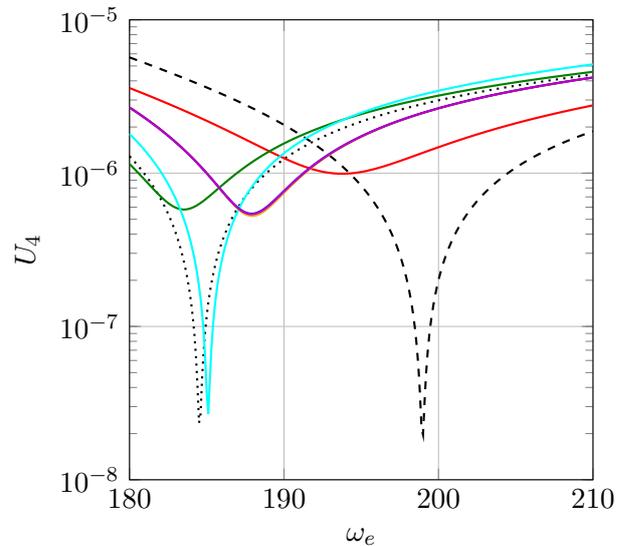
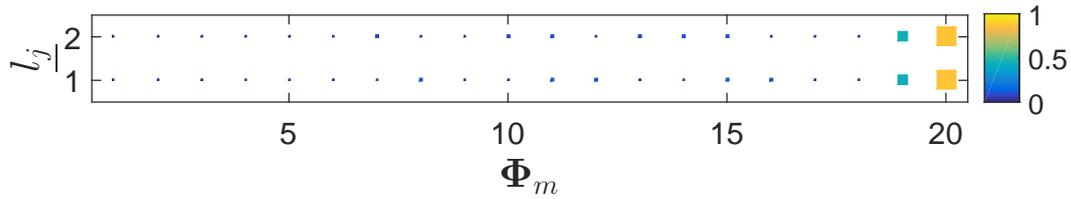

 (b) Zoom sur la 1^{re} pulsation de résonance

 (c) Zoom sur la 1^{re} anti-résonance

 FIGURE IV.10 – Amplitude du déplacement du ddl 4 en fonction de la pulsation d'excitation ω_e pour une amplitude d'excitation 10

4.3.3 Limites, bilan et améliorations

Afin d'expliquer le pourquoi de l'influence de la troncature modale, il est intéressant de proposer le nombre de MAC entre la base modale et les vecteurs l_j représentant les ddl auxquels les forces non-linéaires issues du modèle de Dahl sont appliquées dans cette étude.

L'analyse de ce nombre de MAC (fig. IV.11) montre que les modes 19 et 20 de la base modale ont

FIGURE IV.11 – Nombre de MAC entre la base modale Φ_m et les vecteurs l_j

une colinéarité importante (voire colinéaire pour le mode 20) avec les vecteurs l_j . Par conséquent la troncature de ces modes impacte forcément la qualité de la base PJSBDE. Alors l'effet de la troncature modale semble être expliqué au sens où celle-ci ne permet pas de mettre en avant les modes colinéaires aux vecteurs l_j . Ce qui est par contre rassurant c'est la « stabilité » de la réduction énergétique sans ces modes, puisque l'ensemble des courbes ayant subies une troncature modale sont superposées.

Il est possible de proposer une explication à la surestimation de la base PJSBDE. En effet, sa construction s'appuie sur la matrice des énergies de couplages définies par l'équation IV.6. Cette équation donne sans doute trop de poids à la configuration desserrée, donc à la phase de glissement, qui n'est pas une phase correcte de fonctionnement. Il serait peut être intéressant de proposer une matrice des énergies de couplage qui prenne en compte une configuration intermédiaire, entre serrée et desserrée, afin de diminuer le poids de la sur-estimation. Concrètement, une solution pourrait être qu'un nœud sur deux dans l'interface pourrait être en relation de TIE, une autre pourrait être une zone géométrique précise déduite de la technologie.

Il est important de préciser que l'utilisation de la PJSBDE n'est pas intéressante en soi pour la résolution du problème. Mais cette base est intéressante pour générer le métamodèle de la liaison, sous forme d'abaque ici, des coefficients du développement en série de Fourier de la force non-linéaire, avec un nombre de variables internes très limité.

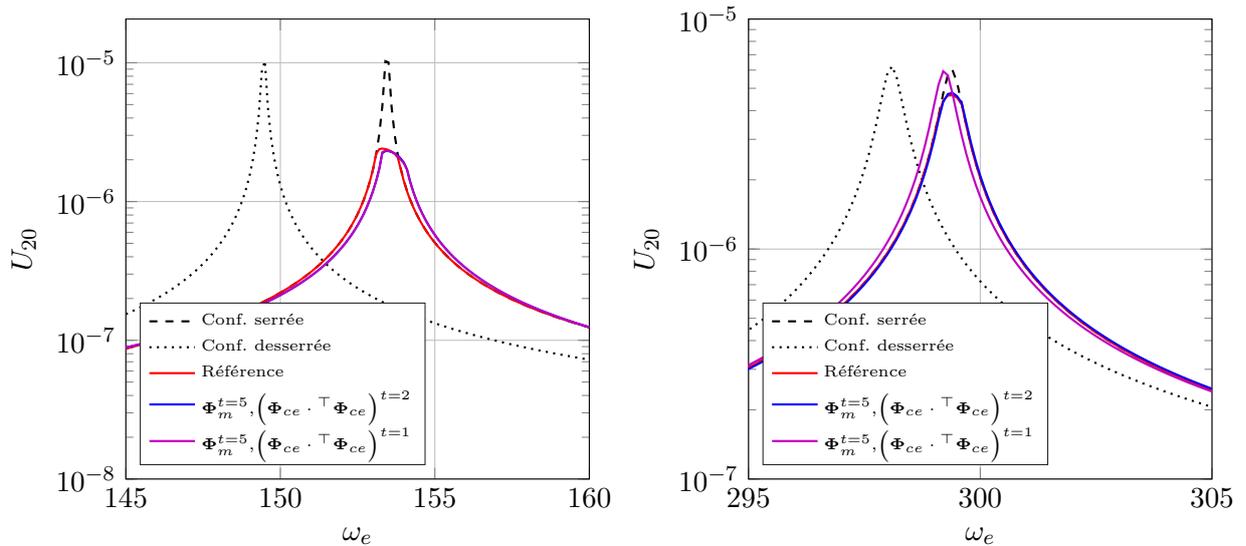
Il faut enfin rappeler que le problème traité est clairement un problème mettant à mal la méthode par rapport au caractère très discret du problème. Le modèle éléments finis d'une structure assemblée présentera sans doute un « lissage » des phénomènes dissipatifs. C'est pourquoi, on peut être relativement confiant quant à la réussite de la réduction du problème initiale par une méthode énergétique.

En dernier point, analysons les effets des troncatures sur le ddl situé le plus loin du domaine « liaison », c'est-à-dire le numéro 20. Il est en effet intéressant de savoir si la création de la base PJSBDE perturbe le comportement vibratoire du domaine linéaire et dans quelles proportions. La figure IV.12 propose les comparatifs de la solution de référence aux réponses tronquées, de manière modale (mode 5) et d'un point de vue énergétique (1 ou 2 modes énergétiques retenus). Sur la figure IV.12a, la distinction entre les réponses tronquées n'est pas possible. Ces deux réponses correspondent de manière très satisfaisante à la solution de référence. Quant à la figure IV.12b, elle montre que l'ajout du second mode PJSBDE permet de corriger la troncature énergétique à 1 mode. Ainsi, la réponse tend à coller à la solution de référence. Par conséquent on peut supposer que la base PJSBDE ne perturbera pas les éléments assez éloignés du domaine « liaison » dans une structure plus complète.

4.4 Conclusion

On a montré dans cette section que les règles de bonne conduite à suivre afin de générer une base PJSBDE pertinente était les suivantes :

- troncature de la base modale se limitant à la gamme des fréquences d'excitation de la structure assemblée étudiée ;


 (a) Zoom sur la 1^{re} pulsation de résonance

 (b) Zoom sur la 2^e résonance

 FIGURE IV.12 – Amplitude du déplacement du ddl 20 en fonction de la pulsation d'excitation ω_e pour une amplitude d'excitation 0,1

- la cheminement b est plus performant et plus logique physiquement parlant - c'est-à-dire la définition du domaine de la liaison puis la normalisation d'un point de vue énergétique de la base modale restreinte à la liaison ;
- la liaison se définit avec quelques éléments linéaires mais dans des proportions acceptables ;
- un mode PJSBDE permet déjà de décrire de manière satisfaisante le comportement vibratoire de la structure, même si une surestimation de la dissipation énergétique est observée.

Il a également été montré que la prise en compte d'un mode PJSBDE secondaire permettait parfois d'améliorer localement des comportements.

5 Évaluation des méthodes de réduction sur le banc 2

Dans cette section 5, nous allons tester sur un modèle EF l'effet de la troncature modale et essentiellement celui de la définition du domaine « liaison ».

5.1 Étude du domaine « Liaison »

Dans un premier temps, estimons l'influence du domaine « liaison » sur la PJSBDE. Une première troncature sur les 9 premiers modes a été réalisée puisqu'en effet on se limite aux fréquences inférieures à 2000 Hz. Il ne reste alors que 9 modes. La troncature modale a été appliquée dans la logique énoncée précédemment.

L'étude paramétrique suivante porte sur la définition de la zone « liaison ». Comme précédemment pour le modèle discret à 20 degrés de liberté, la définition de la taille de la zone de la liaison sera un des paramètres d'étude. Mais il faut ajouter maintenant la dimension « qualité de la définition », c'est-à-dire le maillage qui est obligatoirement un paramètre supplémentaire afin de définir correctement le domaine « liaison ».

5.1.1 Variation du domaine « liaison »

Le plan d'expérience est donc le suivant : un paramètre d (fig. IV.13) représentatif de la taille de la zone non-linéaire prendra les valeurs 1, 10, 20, 30, 40, 50 et 60 mm.

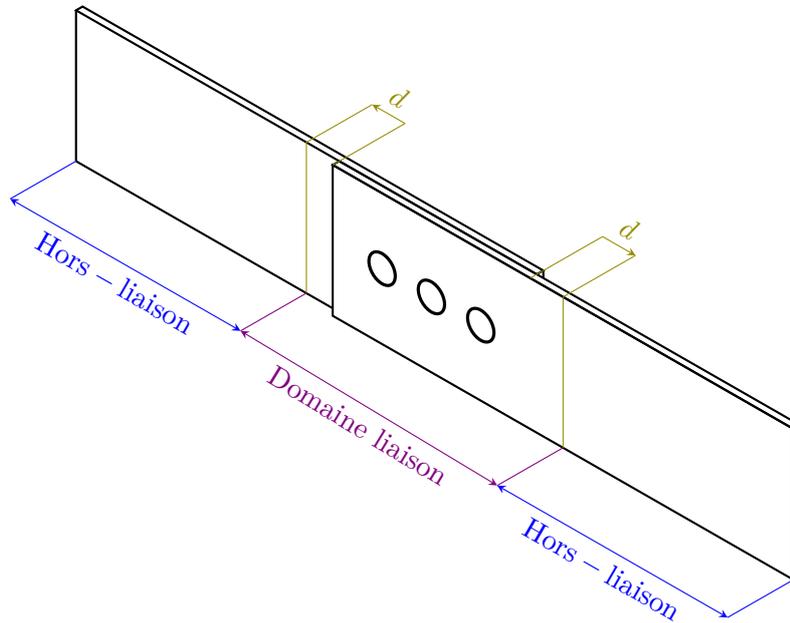


FIGURE IV.13 – Définition géométrique du paramètre d représentatif de la taille du domaine « liaison »

D'une manière générale, notre base PJSBDE, quel que soit d , regroupe les familles de modes. La figure IV.14 présente l'allure des neuf premiers modes de la poutre dissipante. Ils peuvent être regroupés par famille :

- les modes 1, 3 et 7 de flexion symétrique ;
- les modes 2, 5 et 9 de flexion antisymétrique ;
- les modes 4 et 6 de torsion ;
- le mode 8 de flexion dans le plan.

Dans les grandes lignes les résultats intéressants sont :

- la combinaison des modes de flexion symétrique assure une grande dissipation énergétique ;
- un mode PJSBDE principal émerge dans la plupart des situations ;
- la diminution de la proportion d'un ou des modes à se dégager pour des valeurs de d spécifiques.

Le tableau IV.6 recense l'ensemble des résultats de cette étude paramétrique. D'une manière globale, la combinaison des modes de flexion symétrique représente le mode majoritairement dissipant, exception faite des essais à $d = 20$ et 50 mm. On peut voir que la position de la frontière, à ces distances d , se positionne sur un nœud des modes de flexion. Par conséquent, leur contribution semble soit être égale (cas $d = 20$ mm) ou se mélanger (cas $d = 50$ mm). Néanmoins dans le cas où d est le plus grand, les modes dissipatifs ont dû mal à se dégager. On peut l'interpréter par la présence d'une trop grande partie linéaire dans la zone « liaison ». Par conséquent, cette partie linéaire noie l'information utile de dissipation. On remarque également la diminution croissante des maxima des valeurs propres ainsi que celle de l'écart entre les modes dissipant et les suivants. On peut sans doute avancer la même hypothèse que précédemment. La conclusion reste donc identique : la définition de la zone de la liaison ne doit pas contenir une trop grande partie d'éléments linéaires. Mais à celle-ci s'ajoute une notion de longueur d'onde représentative des fréquences de résonance.

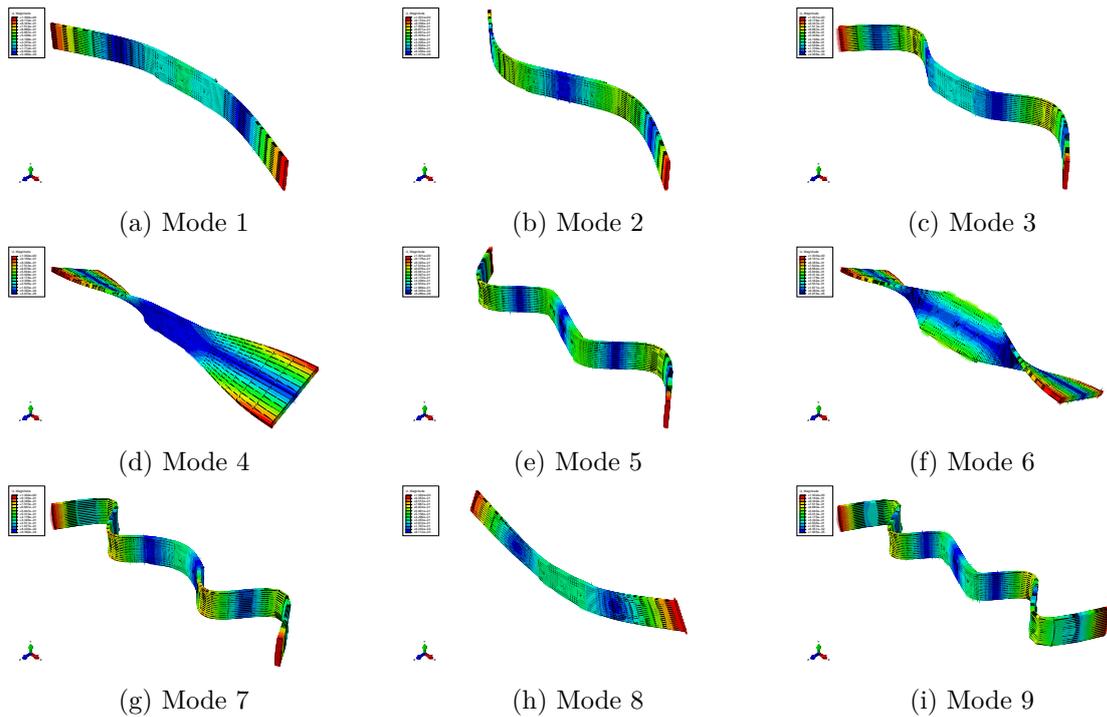


FIGURE IV.14 – Allures des 9 premiers modes de la structure dissipante

5.1.2 Nombre d'éléments dans le domaine « liaison »

L'étude suivante va exploiter la qualité du domaine « liaison ». L'idée est de faire varier le nombre d'éléments dans ce domaine. Néanmoins, la structure globale du maillage est conservée entre chaque simulation. En effet, le maillage a déjà été optimisé au sens où un pré-découpage de la zone de la liaison a été réalisé afin d'obtenir un maillage symétrique et représentatif des phénomènes physiques qui vont être décrits.

Les études ont été réalisées pour un paramètre de géométrie $d = 20$ mm afin de constater l'effet de cette qualité sur les modes sélectionnés et sur leur nombre.

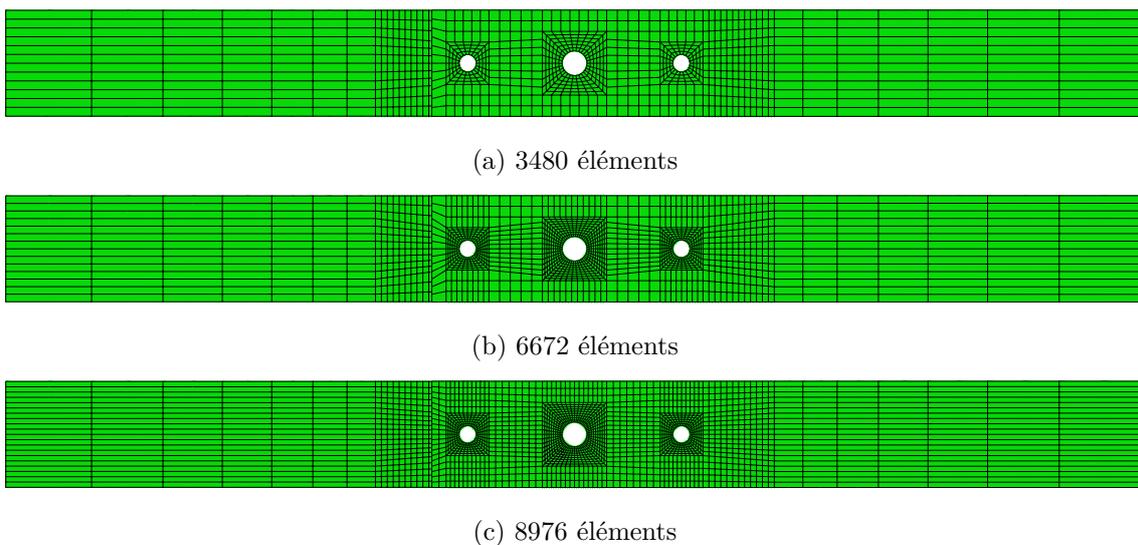
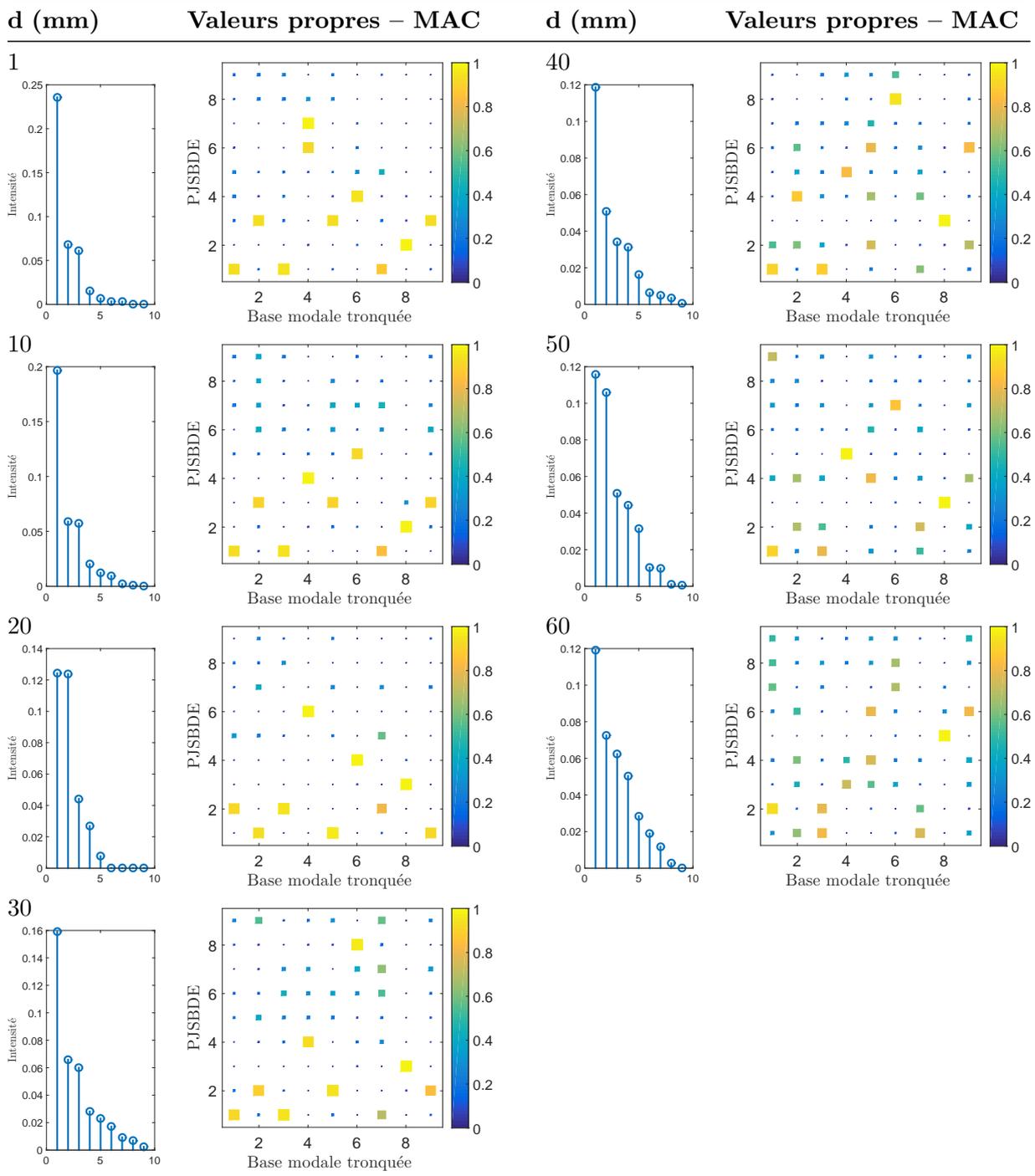


FIGURE IV.15 – Trois qualités de maillage différentes de la poutre dissipante ORION

On remarque que la qualité de la définition de la liaison importe sur le résultat des modes dissi-


 TABLE IV.6 – Valeurs propres et nombre de MAC en fonction du paramètre adaptatif d

pants (tab. IV.7). Si le nombre d'éléments n'est pas assez élevé, on remarque une permutation entre les modes de flexion symétrique et antisymétrique. Par conséquent, il est conseillé d'avoir un nombre d'éléments suffisamment important dans la liaison afin d'être certain de dégager des modes dissipatifs. On remarque également que le ratio entre les modes dissipatifs de la PJSBDE et ceux ne dissipant pas, n'a pas l'air d'être affecté par la qualité du maillage.

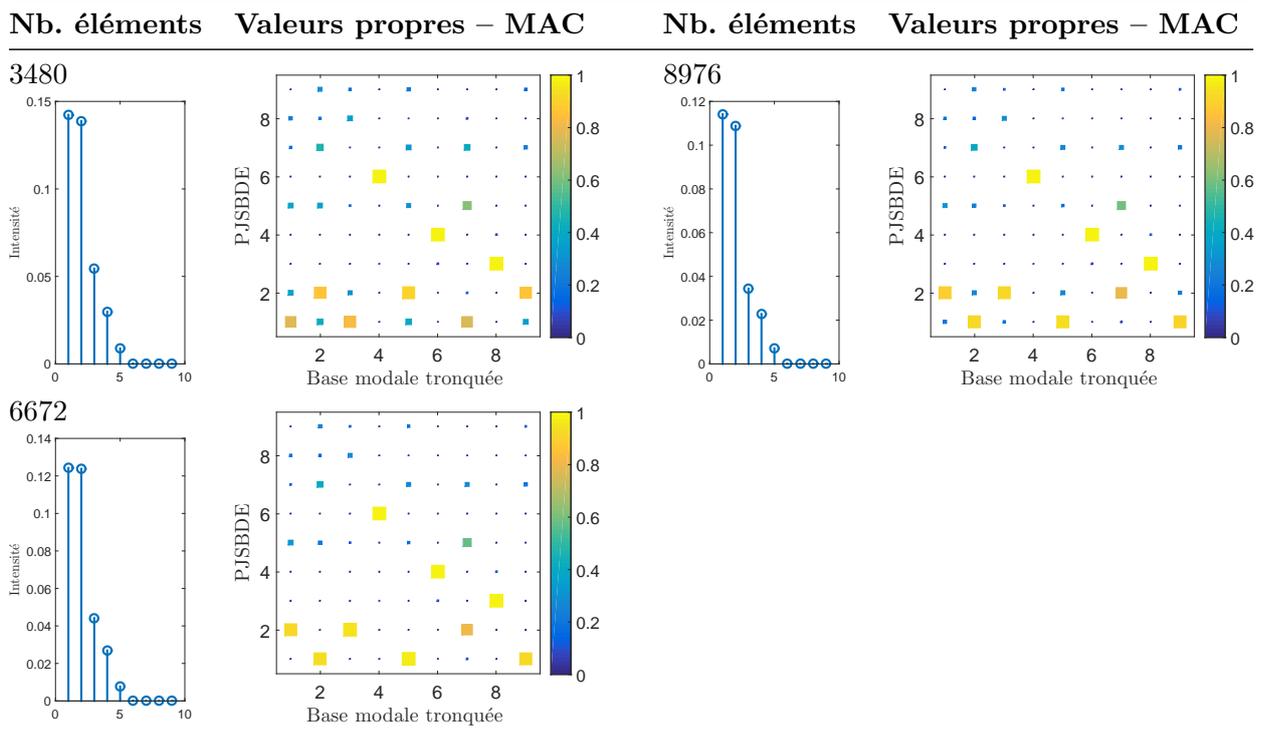


TABLE IV.7 – Valeurs propres et nombre de MAC en fonction du nombre d’éléments maillant la structure

5.2 Troncature modale

Dans un second temps, estimons l’influence de la troncature modale. On fixe $d = 20$ mm (fig. IV.13) et le nombre d’éléments fins à 6672. Ce choix est orienté par souci de travailler avec des valeurs intermédiaires. Les troncatures proposées seront au nombre de 4 valant 2, 5, 7 et 9. L’ensemble des valeurs propres et nombres de MAC est présenté dans le tableau IV.8. La première analyse concerne le tri effectué selon le type de mode. Ce tri reste d’actualité avec ces différentes troncatures modales (ce n’est pas une coïncidence liée au nombre de modes retenus pour respecter le critère en fréquence maximale). On observe que la sélection entre les modes de flexion symétrique et anti-symétrique dépend du nombre de modes retenus mais qu’il n’y a pas de règle fixe quant à la sélection à retenir. La base PJSBDE n’est pas affectée, dans cet exemple, de manière irrévocable par la non-prise en compte de tel ou tel mode ; ce qui est rassurant dans la limite que l’on peut se donner pour la fréquence maximale.

6 Méta-modélisation

Si jamais un seul mode PJSBDE se dégage, il est dans ce cas alors très intéressant d’utiliser un abaque afin de caractériser de manière univoque le comportement dissipatif de la liaison. De plus, on pourrait imaginer à terme un catalogue de liaisons référencées (les industriels utilisent régulièrement les mêmes formes de liaisons assemblées) avec leurs abaques en fonction de leurs positions relatives dans une structure complexe. À priori, les non-linéarités ne facilitent pas le travail. Les niveaux de réponse harmonique dépendent de la pulsation d’excitation, de l’amplitude et de la phase des signaux d’entrée. C’est dans le but de diminuer ce nombre de paramètres influents qu’a été proposée la sous-section 2.3 dans le chapitre II.

L’idée de cette partie est de créer un métamodèle de la poutre en H (voir présentation dans le chapitre III), sous forme d’abaque des coefficients de la série de Fourier des forces aux nœuds dans l’interface entre le domaine « liaison » et le domaine « linéaire ». Le principe réside dans

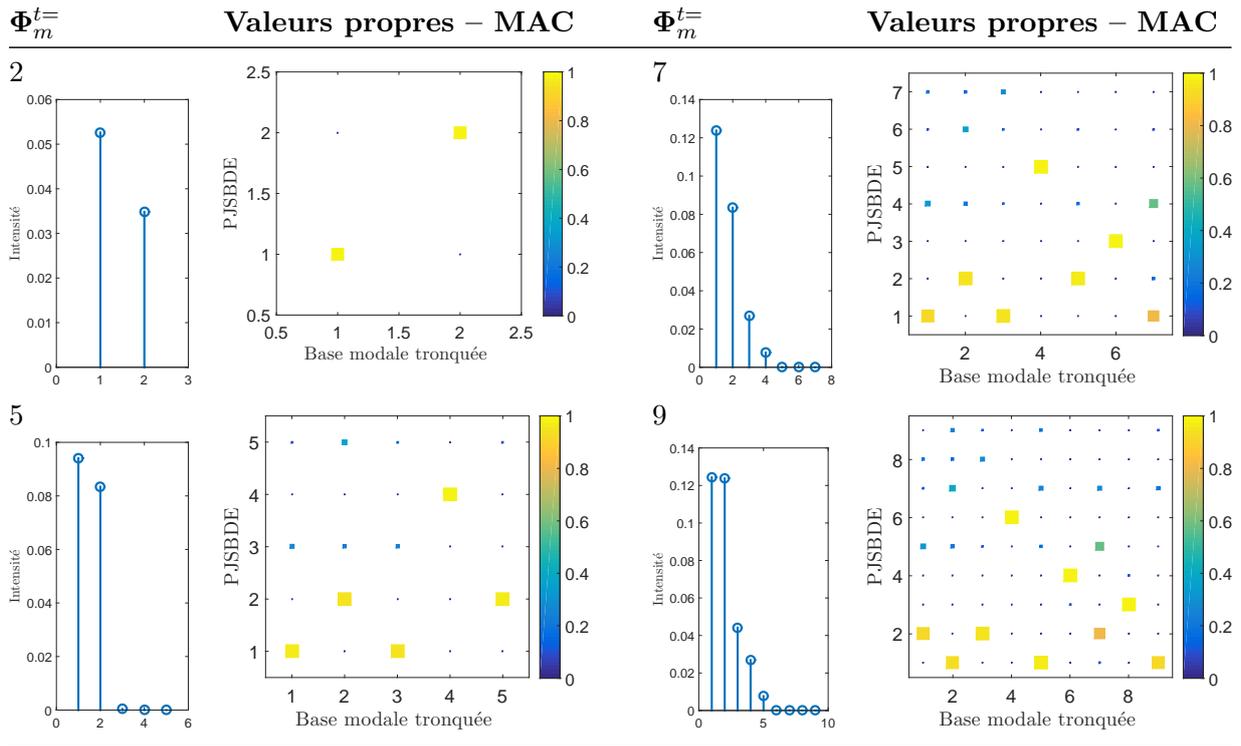


TABLE IV.8 – Valeurs propres et nombre de MAC en fonction de la troncature modale

le fait que la liaison n'est sollicitée par seulement un mode PJSBDE principal. Par conséquent il est possible de construire *a priori* un abaque représentant le comportement de la liaison qui pourra être utilisé dans n'importe laquelle des simulations faisant intervenir la liaison avec un temps de calcul réduit au minimum.

Afin de produire ce métamodèle, la démarche de détermination de la PJSBDE sera mise en place dans la sous-section 6.1; quant à l'abaque en lui-même, sa génération fera l'objet de la sous-section 6.2.

6.1 Construction de la PJSBDE

Domaine de la liaison. Fort des exemples précédents, quelques certitudes sur ce nouvel assemblage ont pu être mises en place : le domaine de la liaison doit contenir assez de partie linéaire mais pas trop; le maillage doit être assez dense. Cependant le type d'élément n'a pas encore été mis en avant. On confrontera dans cette partie deux éléments distincts :

- l'élément hexaèdre à formulation quadratique (C3D20R - fig. IV.16a), le R pour intégration Réduite; cet élément se comporte très bien et constitue un excellent élément d'usage général;
- l'élément tétraèdres à formulation linéaire (C3D10I - fig. IV.16b) doit le I au terme stress Improved; ce type d'élément devraient améliorer les résultats issus du contact.

Une étude comparative des énergies dissipées par friction sur $5/4$ de cycle avec comme conditions aux limites, sur les nœuds frontières, les deux premiers champs de déplacement de la base PJSBDE a été réalisée. Elle a pour objectif de caractériser d'éventuels écarts sur le choix des éléments. Le résultat de cette étude est représenté sur la figure IV.17.

Cette expérience montre que l'écart entre les énergies dissipées par friction dépend principalement du mode imposé à ces nœuds frontières. Il résulte une différence moindre entre ces énergies par le type d'éléments; néanmoins cette différence est bien plus faible. On montre alors que le plus important est bel et bien le champ de déplacements aux nœuds frontières et non le type d'éléments. La quantité d'éléments, ou du moins sa répartition, avait été choisie afin de satisfaire

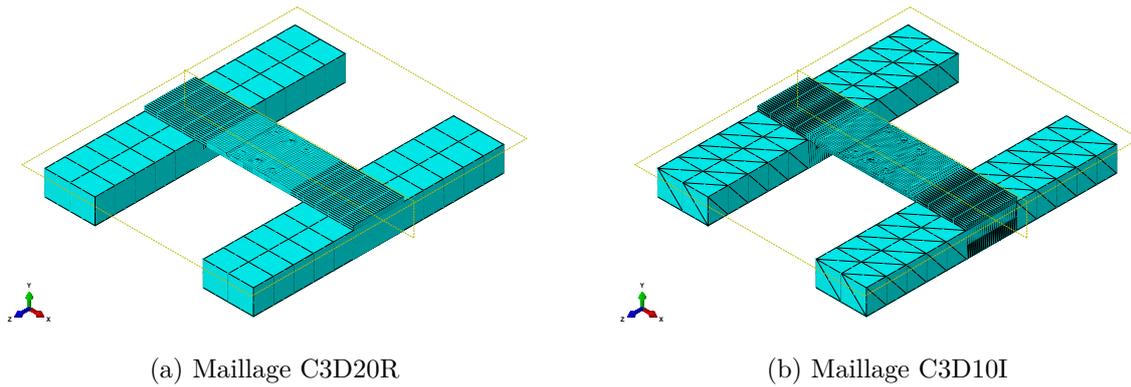
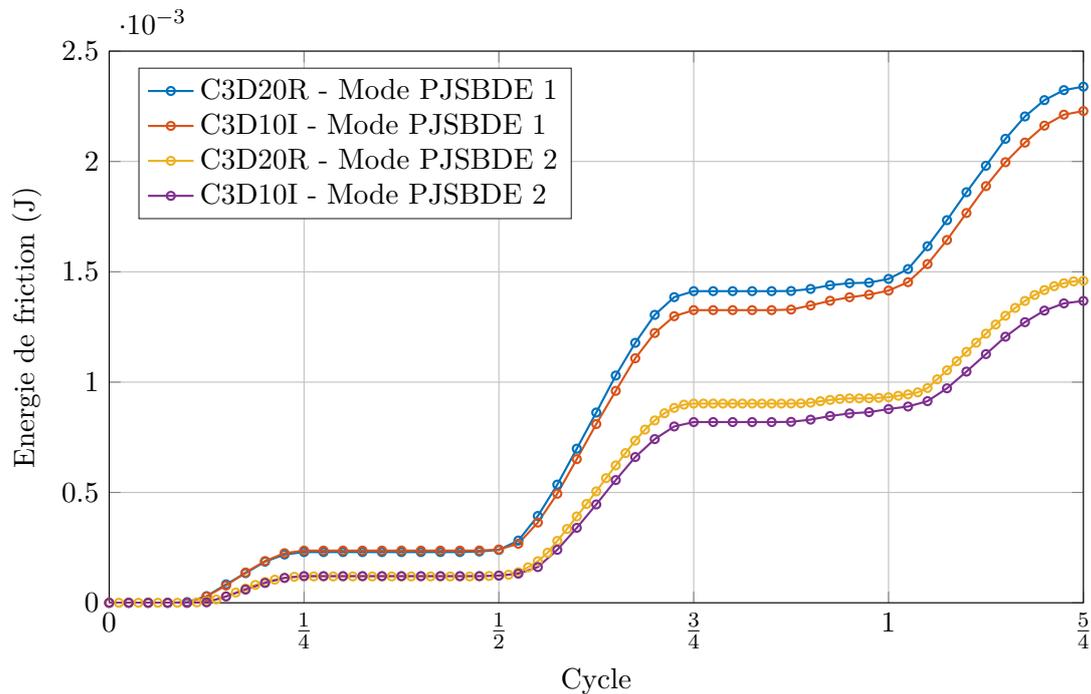


FIGURE IV.16 – Confrontation de deux types d'éléments

FIGURE IV.17 – Comparaison des énergies de dissipation sur $5/4$ de cycle pour les deux premiers modes de la PJSBDE pour deux éléments de maillage différents

une certaine homogénéité. Par conséquent, le type amélioré (Improved) n'apporte pas énormément vis-à-vis de notre objectif puisque son coût temporel est globalement 2 à 3 fois plus grand qu'avec le maillage à base d'éléments C3D20R. C'est donc ce dernier qui sera retenu par la suite.

Base PJSBDE. La démarche de recherche de la base PJSBDE reprend les étapes et les choix définis en section 2. Au regard des travaux précédents, les choix suivants ont donc été adoptés :

- le cheminement b a été retenu ;
- la troncature modale a été réalisée sur les 14 premiers modes (fréquence limitée à 5000 Hz) afin de garantir une amplitude de pulsation correcte vis-à-vis de l'exploitation industrielle de ce type de liaison ;
- le domaine « liaison » vérifie l'ensemble des règles de bonne conduite établies précédemment.

La critère énergétique ne permet malheureusement pas dans ce cas de mettre en évidence un mode principal. De trois à quatre modes émergent de l'analyse menée (fig. IV.18a) ; la repré-

sentation graphique de chacun de ces modes est présentée sur les figures IV.19a à IV.19d. Le nombre de MAC permet de montrer tout de même la classification par type de mode : flexion symétrique, antisymétrique et torsion. Cela reste néanmoins assez logique dans la mesure où cette poutre en H a été conçue pour favoriser le couplage flexion/torsion.

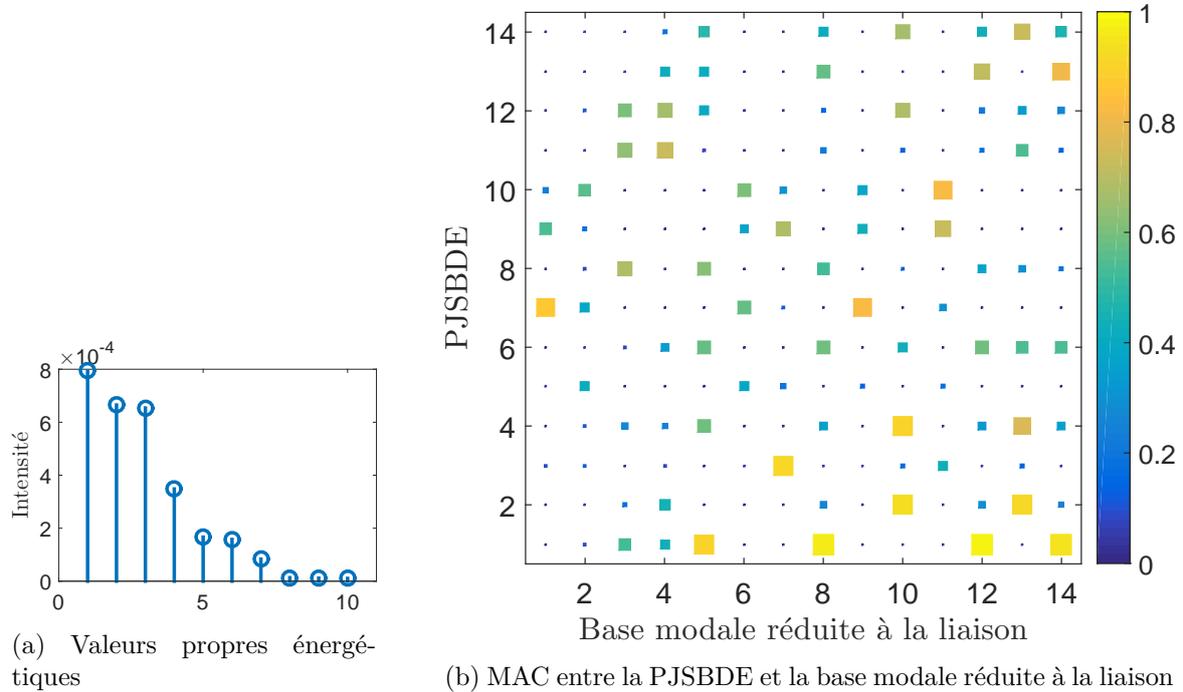


FIGURE IV.18 – Valeurs propres et nombre de MAC de la base PJSBDE

6.2 Construction de l’abaque lié au mode 1 de la PJSBDE

Modélisation des boulons. Afin de travailler sur un modèle numérique allégé, la présence *physique* des boulons a été omise. Caignot [9] montre que la modélisation du boulon est importante puisqu’il y a dissipation d’énergie dans les interfaces entre la tête de vis et écrou par rapport à la structure. Plus récemment, Rosatello [10] a montré que cette prise en compte n’apportait quantitativement peu de dissipation. Par conséquent, le choix fait se justifie par le fait que l’on estime l’énergie de dissipation lors des sollicitations principalement dans l’interface entre les deux plaques et que la dynamique de la structure est globalement inchangée par la présence des boulons.

Dans ce souci, les boulons ont été modélisés de la façon suivante (fig. IV.20) :

- une relation cinématique entre le centre du trou de passage sur le plan supérieur Π_{sup} , réciproquement inférieur Π_{inf} ; cette relation cinématique impose aux nœuds présents sur l’arête du trou de passage appartenant à Π_{sup} , ainsi qu’au centre C_{sup} , la même cinématique (égalité des déplacements dans les trois directions, relation de `COUPLING` dans le logiciel `Abaqus`) et réciproquement avec Π_{inf} et C_{inf} (fig. IV.20a) ;
- une relation en effort de type loi de comportement linéaire :

$$F = \frac{ES}{d}\delta + F_0 \quad (\text{IV.27})$$

reliant l’effort F exercé par la vis en fonction du jeu δ entre les plaques ; ce boulon est préchargé à une valeur d’effort F_0 et la raideur équivalente est prise comme étant le rapport du module d’Young E du matériau de la vis multiplié par la section équivalente de celle-ci S divisé par la longueur d égale à l’épaisseur des deux plaques assemblées (fig. IV.20b) (élément ressort de type `SPRINGA` dans le logiciel `Abaqus`).

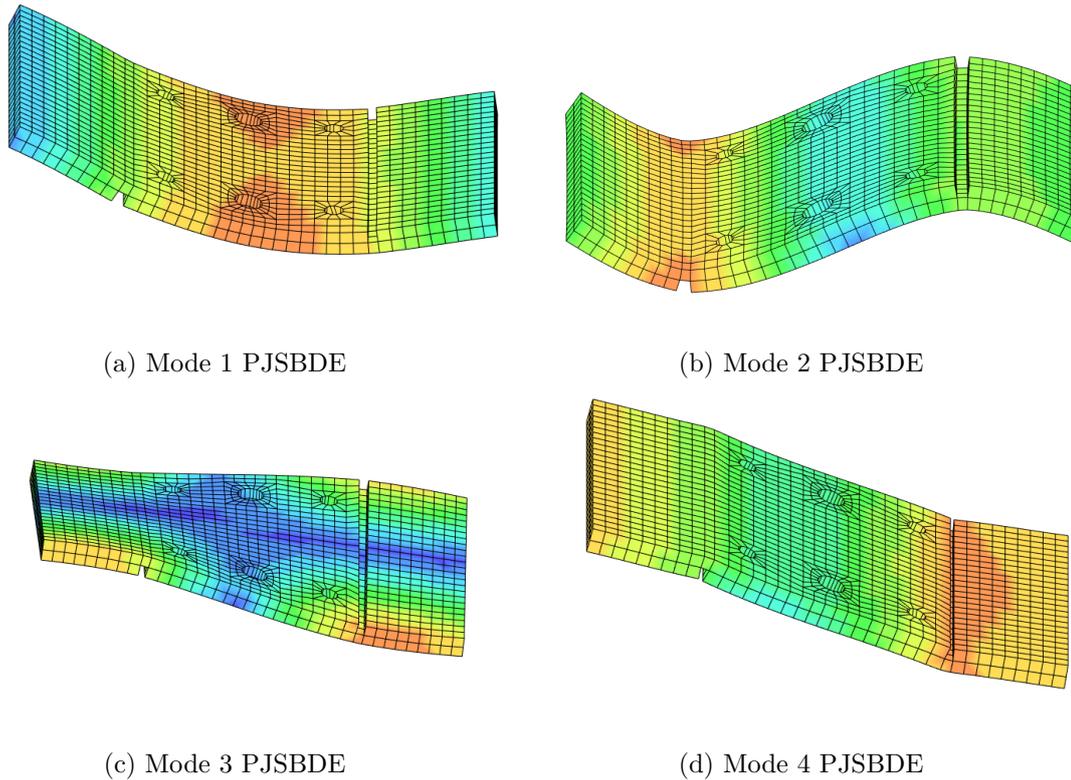


FIGURE IV.19 – Modes associés à la PJSBDE

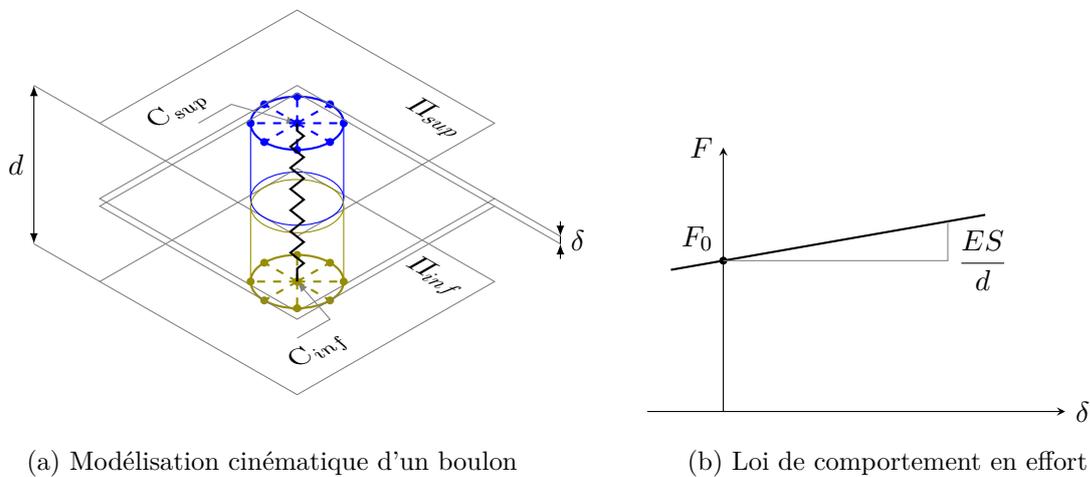


FIGURE IV.20 – Modélisation des boulons dans l'interface

L'étude précédente a permis de mettre en évidence 3 modes PJSBDE se dégageant de l'étude énergétique. On supposera que le premier est prépondérant et suffit à décrire le comportement dissipatif de la liaison soumis à des chargements cycliques à basses fréquences.

Il est alors possible dans ces conditions de dégager un abaque représentatif de celui-ci. La méthodologie sera la suivante :

1. les conditions aux limites en déplacement liées au mode PJSBDE déterminées précédemment seront appliquées aux nœuds frontières (interface) entre les parties linéaire et non-linéaire ;
2. ensuite une simulation dynamique est exécutée en laissant libre les nœuds internes à la liaison sur $5/4$ de cycle ;

3. on réitère cette opération en balayant un intervalle donné et physiquement acceptable de la variable généralisée associée au mode principal PJSBDE ;
4. enfin un post-traitement des réactions aux nœuds de l'interface aura lieu afin d'en dégager les coefficients des séries de Fourier représentatives de ces efforts sur un cycle.

La figure IV.21 présente les coefficients de la série de Fourier d'une force de réaction à un nœud quelconque appartenant à l'interface. On remarque l'apparition de l'ordre 3 dès lors que l'amplitude de la variable généralisée devient suffisante. Cela rappelle évidemment les résultats obtenus dans la sous-section 2.3 du chapitre II. L'intérêt de ces abaques réside dans leur utilisation directe dans un code de calculs. Il suffira d'utiliser une interpolation afin d'accéder aux grandeurs non évaluées. La limite réside quant à elle dans l'intervalle de la variable généralisée. En effet, il se peut que les coefficients n'aient pas été générés pour une variable généralisée assez petite ; même si dans ce cas on peut imaginer utiliser une extrapolation sans commettre trop d'erreurs. Par contre, si cette variable n'a pas été prise assez grand, il n'y aura pas d'autres choix, l'extrapolation étant sans doute non pertinente, que de relancer une série de mesures numériques afin de compléter l'abaque.

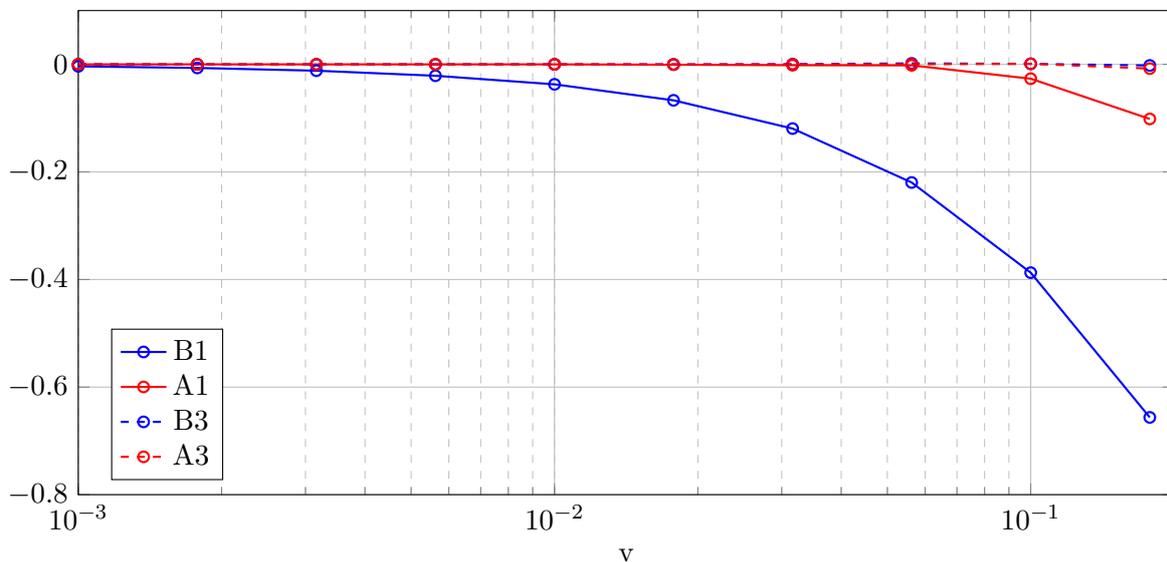


FIGURE IV.21 – Coefficients de la série de Fourier décrivant une force de réaction à un nœud de la frontière en fonction de la variable généralisée v

7 Conclusion

Dans ce chapitre, une méthode de réduction de modèle du domaine non-linéaire contenant la liaison a été proposée. Cette réduction s'appuie sur une analyse énergétique au sens où l'étude des couplages énergétiques de déformation est représentatif des phénomènes de dissipation. Par la suite cette méthode a été éprouvée sur deux cas d'étude, un modèle d'étude à quelques dds où une analyse fine des qualités et défauts de celle-ci ont pu être mise en évidence ; mais également sur un modèle EF qui, quant à lui, a apporté des réponses supplémentaires sur le domaine « liaison ». En effet la discrétisation spatiale liée aux éléments finis introduit des critères supplémentaires de choix quant au type d'éléments et de leur nombre. Ces deux études de cas permettent de mettre en évidence que la base PJSBDE, base réduite de la liaison, permet de trier et sélectionner des modes pertinents. Néanmoins, un lot de quatre critères de choix, deux troncatures modale et énergétique, cheminement et définition du domaine « liaison », joue de manière assez significative sur le résultat. Enfin, afin de proposer une réduction efficace, la

méthode a été appliquée à une structure de poutre en H afin de proposer un méta-modèle associé au premier mode de la base PJSBDE.

8 Bibliographie du chapitre IV

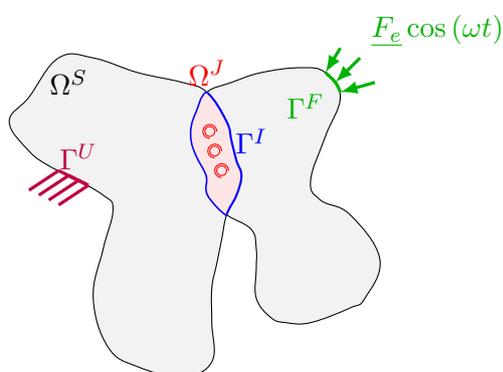
- [1] M. CLAEYS, J-J. SINOÛ, J-P. LAMBELIN et R. TODESCHINI : Modal interactions due to friction in the nonlinear vibration response of the “Harmony” test structure : Experiments and simulations. *Journal of Sound and Vibration*, 376:131–148, août 2016.
- [2] H. FESTJENS, G. CHEVALLIER et J.L. DION : Nonlinear model order reduction of jointed structures for dynamic analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 333(7):2100–2113, mars 2014.
- [3] A. CAIGNOT, P. LADEVÈZE, D. NÉRON et J.-F. DURAND : Virtual testing for the prediction of damping in joints. *Engineering Computations*, 27(5):621–644, 2010.
- [4] Lucie ROULEAU : *Modélisation vibro-acoustique de structures sandwich munies de matériaux visco-élastiques*. Thèse de doctorat, Paris, CNAM, 2013.
- [5] Chaima HAMMAMI, Etienne BALMES et Mikhail GUSKOV : Numerical design and test on an assembled structure of a bolted joint with viscoelastic damping. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 70:714–724, 2016.
- [6] Mohamed KRIFA : *Amortissement virtuel pour la conception vibroacoustique des lanceurs futurs*. Thèse de doctorat, Bourgogne Franche-Comté, 2017.
- [7] Miroslav PASTOR, Michal BINDA et Tomáš HARČARIK : Modal Assurance Criterion. *Procedia Engineering*, 48:543–548, janvier 2012.
- [8] All J. ALLEMANG : The Modal Assurance Criterion (MAC) : Twenty Years of Use and Abuse. *Sound Vib*, pages 14–21, 2003.
- [9] Alain CAIGNOT : *Prédiction par essais virtuels de l’amortissement dans les structures spatiales*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan-ENS Cachan, 2009.
- [10] Marco ROSATELLO : *Contribution to the study of damping in bolted structures*. Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay, 2019.

Chapitre V

Algorithme de résolution : méthode du point fixe

Sommaire

1	Introduction	118
1.1	Décomposition du problème	118
1.2	Formulation AFT	118
1.3	Réduction de la partie linéaire : Craig-Bampton	119
2	Formulation générale de l'algorithme du point fixe	121
2.1	Formulation 1 naturelle	122
2.2	Formulation 2 contraire	124
2.3	Stabilité du schéma numérique	124
3	Relaxation dynamique	126
3.1	Paramètre de relaxation fixe	126
3.2	Relaxation dynamique : relaxation d'Aitken	126
4	Application à un système à 4 degrés de liberté	127
4.1	Évaluation de la stabilité	127
4.2	Implémentation de la relaxation dynamique	129
5	Conclusion et perspectives	131
6	Bibliographie du chapitre V	135



Résumé

Ce chapitre propose un algorithme de résolution par décomposition spatiale du problème. Sur chaque sous-domaine, les résolutions sont réalisées dans un domaine différent : temporel pour le domaine non-linéaire et fréquentiel pour le domaine linéaire. On alterne ainsi les deux résolutions jusqu'à convergence. De plus, ce chapitre mettra en avant les difficultés de convergence et l'accélération de cet algorithme. Enfin, la réduction de modèle sera mise en évidence afin de minimiser les coûts de calcul.

1 Introduction

1.1 Décomposition du problème

Les liaisons assemblées influencent fortement l'amortissement et la raideur des structures. Malheureusement, ces effets restent difficiles à prédire, principalement puisque la physique utile apparaît à des échelles différentes, de l'échelle du contact réel dans les liaisons, à la longueur d'onde des modes de vibration dans le reste de la structure. Cela a pour conséquence de rendre la méthode des éléments finis difficile d'utilisation car dans les zones de contact le maillage doit être très fin, alors qu'il peut rester grossier par ailleurs afin de réaliser une étude vibratoire. Pour dépasser ces difficultés, le but de ce chapitre V est de proposer une décomposition spatiale du domaine d'étude en deux sous-domaines qui permettront de travailler à des échelles de discrétisation différentes (fig. V.1). Ces sous-domaines sont Ω^S contenant toutes les pièces et Ω^J contenant les liaisons. Le domaine Ω^S possède des frontières à déplacements imposés (Γ^U), à forces imposées (forces \underline{F}_e sur la frontière Γ^F). Les domaines Ω^S et Ω^J partagent la frontière Γ^I , appelée également interface, et les forces du domaine non-linéaire sur le domaine linéaire présentes sur cette frontière sont notées \underline{R} .

La première idée, détaillée dans la section 1.2, est de résoudre les problèmes écrits sur Ω^S et Ω^J jusqu'à convergence des résultats. Ceci est fortement inspiré de la méthode LATIN [1] mais adapté à des excitations périodiques utilisant alors l'Harmonic Balance Method (HBM) couplée à l'Alternating Frequency/Time (AFT) méthode [2] ou plus récemment [3]. La deuxième idée de ce travail est de réduire le modèle en utilisant une base de Ritz et des méta-modèles balayant le sous-espace contenant les solutions.

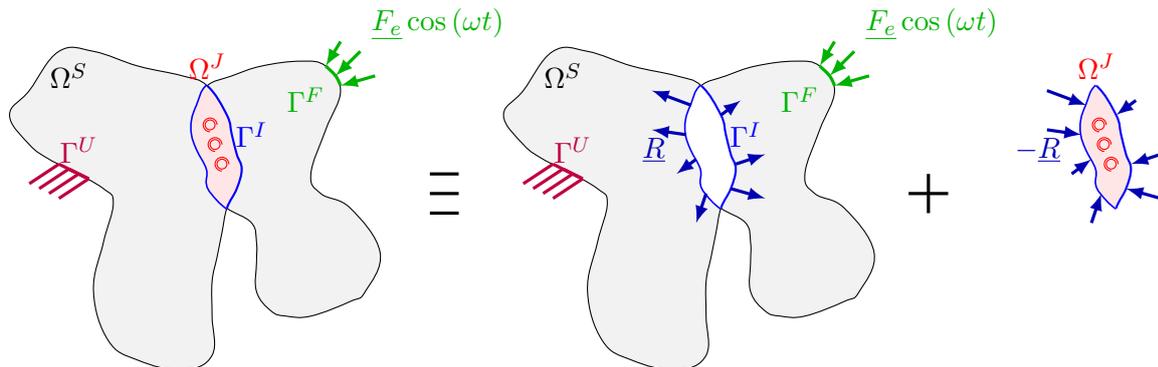


FIGURE V.1 – Figure illustrative de l'étude portant sur des structures assemblées – décomposition en sous-domaines du problème entier

1.2 Formulation AFT

Ce travail se concentre sur la dynamique des assemblages structuraux qui impliquent des composants qui se comportent linéairement et des assemblages boulonnés qui se comportent de manière non-linéaire. Dans l'ensemble, les vibrations de la structure peuvent être étudiées en résolvant le problème suivant :

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\underline{U}} + \mathbf{K} \cdot \underline{U} + \underline{F}_{nl}(\underline{U}, \dot{\underline{U}}) = \underline{F}_e \quad (\text{V.1})$$

où \underline{U} est le champ de déplacement, \underline{F}_e est la force d'excitation et \underline{F}_{nl} la force non-linéaire induite par le frottement dans les liaisons. \mathbf{M} et \mathbf{K} sont les matrices de masse et de rigidité. L'équation V.1 peut être détaillée en séparant les degrés de liberté qui appartiennent à chaque sous-domaine Ω^S et Ω^J et à l'interface Γ^I (eq. V.2).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{LL}^S & \mathbf{M}_{LI}^S & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{IL}^S & \mathbf{M}_{II}^S + \mathbf{M}_{II}^J & \mathbf{M}_{IL}^J \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{LI}^J & \mathbf{M}_{LL}^J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\ddot{U}}_L^S \\ \underline{\ddot{U}}_L^I \\ \underline{\ddot{U}}_L^J \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{LL}^S & \mathbf{K}_{LI}^S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{II}^S + \mathbf{K}_{II}^J & \mathbf{K}_{IL}^J \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{LI}^J & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_L^S \\ \underline{U}_L^I \\ \underline{U}_L^J \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{F}^J(\underline{U}_L^J, \underline{\dot{U}}_L^J) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_e^S \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad (\text{V.2})$$

Il est très important de noter que le terme \underline{F}^J contient non seulement le terme de frottement sec induit de la liaison \underline{F}_{nl} mais également les termes issus de la matrice de raideur interne à la liaison $\mathbf{K}_{LL}^J \cdot \underline{U}_L^J$.

Dans ce chapitre, nous nous limiterons à une excitation harmonique. Pour ce type de problème, la HBM est souvent utilisée car elle permet de calculer efficacement les déplacements périodiques en régime permanent. En supposant le régime permanent atteint et une réponse périodique, \underline{U} peut s'écrire :

$$\underline{U} = \underline{U}_0 + \sum_{h=1}^{n_H} \frac{U_h}{2} e^{ih\omega t} + \frac{\bar{U}_h}{2} e^{-ih\omega t} \quad (\text{V.3})$$

dans une base de fonctions exponentielles. En supposant la périodicité de la force non-linéaire, nous pouvons également la développer sur une base de Fourier :

$$\underline{F}^J(\underline{U}, \underline{\dot{U}}) = \underline{F}_0 + \sum_{h=1}^{n_H} \frac{F_h}{2} e^{ih\omega t} + \frac{\bar{F}_h}{2} e^{-ih\omega t} \quad (\text{V.4})$$

En équilibrant, selon leur ordre harmonique, chaque terme de l'équation obtenue, on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} (-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \cdot \underline{U}_1 + \underline{F}_1^J(\underline{U}_1, \dots, \underline{U}_{n_H}) = \underline{F}_e \\ \dots \\ (-n_H^2 \omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \cdot \underline{U}_{n_H} + \underline{F}_{n_H}^J(\underline{U}_1, \dots, \underline{U}_{n_H}) = \underline{0} \end{cases} \quad (\text{V.5})$$

On peut résumer ce système d'équations V.5 sous une forme plus compacte :

$$\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\underline{U}} + \hat{\underline{F}}^J = \hat{\underline{F}}_e \quad (\text{V.6})$$

où $\mathbf{\Lambda}$ est la matrice des impédances complexes, $\hat{\underline{U}}$ est le vecteur des inconnues qui concatène chaque harmonique, $\hat{\underline{F}}^J$ est le développement de la force non-linéaire sur chaque harmonique, $\hat{\underline{F}}_e$ est le développement de la force d'excitation. L'Harmonic Balance Method est facile à utiliser lorsque l'expression de \underline{F}^J est mathématiquement régulière. Le problème est non-linéaire mais algébrique et il peut donc être résolu par un algorithme de Newton-Raphson. Lorsque cette fonction est singulière, l'Alternating Frequency/Time (AFT) Method peut permettre de résoudre le problème. L'idée principale de l'AFT est d'évaluer la force non-linéaire dans le domaine temporel et de réaliser l'équilibrage harmonique dans le domaine fréquentiel (fig. V.2). Ceci permet de résoudre des problèmes de contact et de friction pour lesquels la force non-linéaire est non régulière donc difficile à exprimer dans le domaine fréquentiel.

1.3 Réduction de la partie linéaire : Craig-Bampton

Beaucoup de travaux, voir Claeys *et al.* [3], utilise la méthode de Craig-Bampton pour construire un super-élément de la partie linéaire de la structure globale. Sur le sous-domaine Ω^S , le champ de déplacement est décomposé en trois champs distincts :

- les degrés de libertés libres \underline{U}_L^S ;
- les degrés de libertés \underline{U}_F^S qui appartiennent à Γ^F ;
- et les nœuds de l'interface \underline{U}^I .

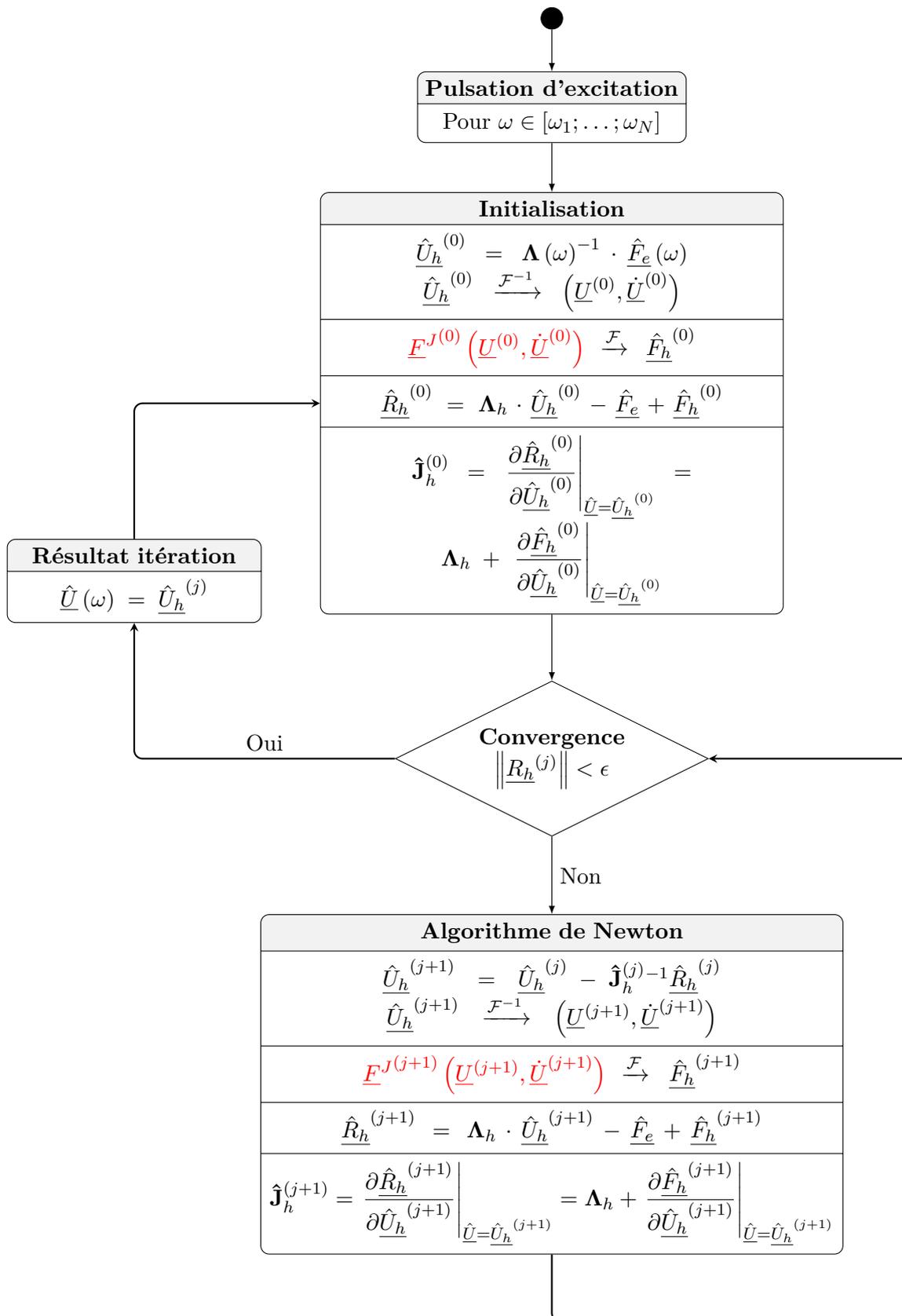


FIGURE V.2 – Principe général de l'Alternating Frequency/Time Method

Sur ce sous-domaine, le problème s'exprime de la manière suivante (eq. V.7) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{LL}^S & \mathbf{M}_{LF}^S & \mathbf{M}_{LI}^S \\ \mathbf{M}_{FL}^S & \mathbf{M}_{FF}^S & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{IL}^S & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{II}^S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\underline{U}}_L^S \\ \ddot{\underline{U}}_F^S \\ \ddot{\underline{U}}^I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{LL}^S & \mathbf{K}_{LF}^S & \mathbf{K}_{LI}^S \\ \mathbf{K}_{FL}^S & \mathbf{K}_{FF}^S & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{IL}^S & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{II}^S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_L^S \\ \underline{U}_F^S \\ \underline{U}^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{F}_e^S \cos(\omega t) \\ \underline{R} \end{bmatrix} \quad (\text{V.7})$$

En supposant que ce champ de déplacement peut se décomposer sur une base de Craig-Bampton (chapitre I – sous-sous-section 3.2.2), c'est-à-dire une condensation statique sur une base de Guyan et une base des modes propres de la structure où les degrés de liberté maîtres \underline{U}_F^S et \underline{U}^I sont fixés (eq. V.8), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_L^S \\ \underline{U}_F^S \\ \underline{U}^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_L & -\mathbf{K}_{LL}^{S^{-1}} \cdot \mathbf{K}_{LF}^S & -\mathbf{K}_{LL}^{S^{-1}} \cdot \mathbf{K}_{LI}^S \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{Q}_L \\ \underline{U}_F^S \\ \underline{R} \end{bmatrix} \quad (\text{V.8})$$

Le problème à résoudre sur Ω^S se réduit alors à l'équation V.9.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \tilde{\mathbf{M}}_{LF}^S & \tilde{\mathbf{M}}_{LI}^S \\ \tilde{\mathbf{M}}_{FL}^S & \tilde{\mathbf{M}}_{FF}^S & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{IL}^S & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}}_{II}^S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\underline{Q}}_L \\ \ddot{\underline{U}}_F^S \\ \ddot{\underline{U}}^I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Lambda_{LL} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}}_{FF}^S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}}_{II}^S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{Q}_L \\ \underline{Q}_F^S \\ \underline{Q}^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{F}_e^S \cos(\omega t) \\ \underline{R} \end{bmatrix} \quad (\text{V.9})$$

où \underline{Q}_L possède un petit nombre de degrés de liberté par rapport à $\ddot{\underline{U}}_L^S$.

La réduction de la partie linéaire par la méthode Craig-Bampton est très intéressante sur le papier puisqu'elle garde les ddls d'interface qui sont un point clé de l'algorithme du point fixe mis en place dans ce chapitre V. Mais deux points nuancent clairement ce propos :

- il y a potentiellement beaucoup de degrés de liberté dans l'interface, ce qui engendre un grand nombre de degrés de liberté maîtres ;
- le terme $\mathbf{K}_{LL}^{S^{-1}}$ est assez lourd à calculer puisque le nombre de degrés de liberté internes au domaine linéaire est très grand.

2 Formulation générale de l'algorithme du point fixe

Malheureusement, l'AFT devient trop coûteuse pour résoudre des problèmes à grande échelle du fait du calcul de la matrice jacobienne $\hat{\mathbf{J}}_h^{(j+1)}$ par différences finies et du calcul de la force non-linéaire $\hat{F}_h^{(j+1)}$. Pour remédier à ce problème, il existe d'autres méthodes de calcul de la jacobienne, voir par exemple Azfal et al. [4]. Il est également possible d'utiliser une méthode du point fixe qui ne nécessite pas de calcul de la jacobienne. Il faut tout d'abord décomposer le domaine en deux sous-domaines Ω^S et Ω^J , voir la figure V.1. Cela conduit à deux systèmes d'équations qui partagent une force d'interaction \underline{R} et le champ de déplacement \underline{U}^I sur Γ^I . \underline{R} et \underline{U}^I permettent de coupler les deux systèmes.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{LL}^S & \mathbf{M}_{LI}^S \\ \mathbf{M}_{IL}^S & \mathbf{M}_{II}^S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\underline{U}}_L^S \\ \ddot{\underline{U}}^I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{LL}^S & \mathbf{K}_{LI}^S \\ \mathbf{K}_{IL}^S & \mathbf{K}_{II}^S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_L^S \\ \underline{U}^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_e^S \\ \underline{R} \end{bmatrix} \quad (\text{V.10})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{II}^J & \mathbf{M}_{IL}^J \\ \mathbf{M}_{LI}^J & \mathbf{M}_{LL}^J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\underline{U}}^I \\ \ddot{\underline{U}}_L^J \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II}^J & \mathbf{K}_{IL}^J \\ \mathbf{K}_{LI}^J & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}^I \\ \underline{U}_L^J \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{F}^J (\underline{U}_L^J, \dot{\underline{U}}_L^J) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{R} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V.11})$$

L'algorithme est décrit par la figure V.3 [5]. La phase d'initialisation consiste, après linéarisation du comportement global du système, en l'obtention du champ de déplacement $\hat{\underline{U}}_h$ sur l'ensemble des domaines Ω^S et Ω^J . Puis l'algorithme du point de fixe rentre en jeu ; pour cela, il résout alternativement :

- un problème linéaire dans le domaine fréquentiel sur Ω^S afin d'obtenir le champ cinématique \underline{U}^S et \underline{U}^I (réciproquement \underline{R}) lorsque \underline{R} (récipr. \underline{U}^I) et \underline{F}_e sont appliqués ;
- et un problème quasi-statique non-linéaire dans le domaine temporel sur Ω^J afin d'obtenir le champ cinématique \underline{U}^J et la force de réaction \underline{R} (réciproquement \underline{U}^I) quand \underline{U}^I (récipr. \underline{R}) est appliqué. Pour rendre le problème plus facile à résoudre, on suppose que les termes d'inertie sont appliqués comme un champ connu qui provient de l'incrément précédent, voir [6] pour plus d'explications.

Enfin, l'algorithme se termine dès convergence du champ de déplacement $\hat{\underline{U}}$ selon un critère d'erreur absolue ou relative.

Dans la suite de cette sous-section, nous allons présenter les deux formulations possibles du problème (sous-section 2.1 et sous-section 2.2) ainsi que les problèmes de stabilité découlant de la formulation de chaque problème (sous-section 2.3).

2.1 Formulation 1 naturelle

On parle de formulation naturelle, puisque la formulation dans le domaine fréquentiel est proche de la manière dont un code de calcul par éléments finis aurait traité le problème.

D'après le système d'équation temporelles V.11, on peut écrire un système d'équations V.12 dont physiquement les champs de déplacement $\underline{U}^{I(j)}$ et accélérations $\ddot{\underline{U}}^{I(j)}$ et $\ddot{\underline{U}}_L^{J(j)}$ sont connus. Ceci donne dans le domaine temporel :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{K}_{IL}^J \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{R}^{(j+1/2)} \\ \underline{U}_L^{J(j+1/2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \underline{F}^J \left(\underline{U}_L^{J(j+1/2)}, \dot{\underline{U}}_L^{J(j+1/2)} \right) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II}^J \cdot \underline{U}^{I(j)} \\ \mathbf{K}_{LI}^J \cdot \underline{U}^{I(j)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{II}^J & \mathbf{M}_{IL}^J \\ \mathbf{M}_{LI}^J & \mathbf{M}_{LL}^J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\underline{U}}^{I(j)} \\ \ddot{\underline{U}}_L^{J(j)} \end{bmatrix} \quad (\text{V.12})$$

Dans ce cas, la zone de liaison, parties linéaire et non-linéaire, sont soumises à un champ de déplacement imposé \underline{U}^I ainsi qu'à un champ de forces d'inertie. La première équation permet de calculer la force de réaction \underline{R} tandis que la deuxième permet de déterminer le champ de déplacement interne à la liaison. Les deux équations sont en réalité découplées et donc résolues séparément. Puis, il est nécessaire de réaliser le passage temporel/fréquentiel avec une transformée discrète de Fourier :

$$\left(\underline{R}^{(j+1/2)}, \underline{U}_L^{J(j+1/2)} \right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \left(\hat{\underline{R}}_h^{(j+1/2)}, \hat{\underline{U}}_{hL}^{J(j+1/2)} \right) \quad (\text{V.13})$$

De plus, en s'appuyant sur le système d'équation temporelles V.10, on peut écrire un système d'équations V.14 dont physiquement les efforts $\hat{\underline{F}}_{e,h}$ et $\hat{\underline{R}}_h^{(j+1/2)}$ sont connus. Ceci donne dans le domaine fréquentiel :

$$\mathbf{\Lambda}_h \cdot \begin{bmatrix} \hat{\underline{U}}_{hL}^{S(j+1)} \\ \hat{\underline{U}}_h^{I(j+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{F}}_{e,h}^S \\ \hat{\underline{R}}_h^{(j+1/2)} \end{bmatrix} \quad (\text{V.14})$$

Le passage dans le domaine temporel des grandeurs intéressantes permet d'écrire :

$$\left(\hat{\underline{U}}_{hL}^{S(j+1)}, \hat{\underline{U}}_h^{I(j+1)} \right) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \left(\underline{U}_L^{S(j+1)}, \underline{U}^{I(j+1)} \right) \quad (\text{V.15})$$

Le test de convergence portera, quand à lui, sur une erreur relative de type :

$$\left\| \hat{\underline{U}}_h^{(j+1)} - \hat{\underline{U}}_h^{(j)} \right\| \leq \epsilon \quad (\text{V.16})$$

soit pour tout h , soit pour le fondamental et/ou les harmoniques associés.

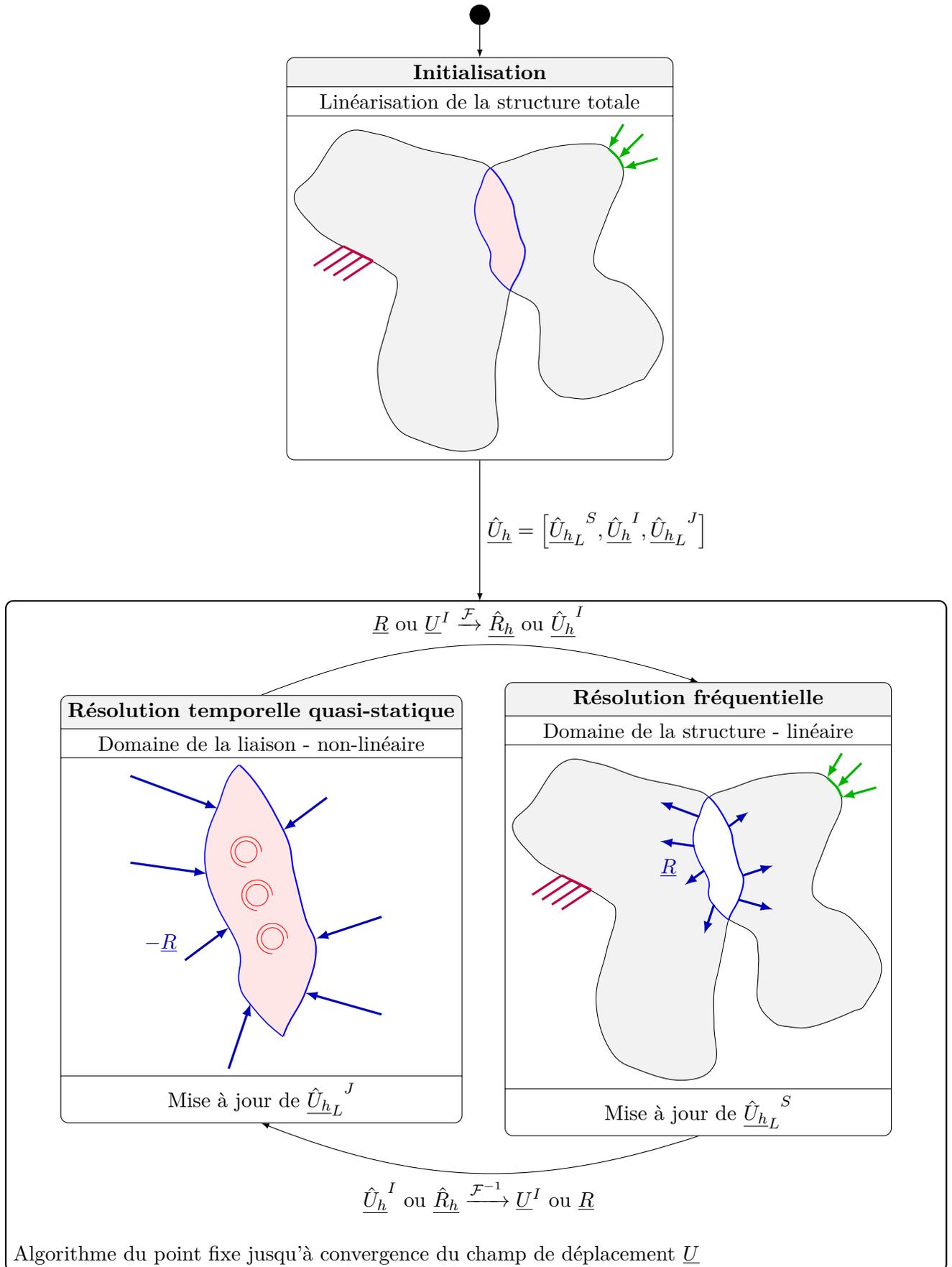


FIGURE V.3 – Principe général de la méthode proposée utilisant un algorithme de type point fixe

2.2 Formulation 2 contraire

Le sens naturel d'évolution, lié à la résolution d'un code éléments finis, a permis d'exprimer le problème dans la sous-section 2.1 par les équations V.12 et V.14. Maintenant, il est possible d'envisager la résolution dans le sens contraire d'où le nom de la formulation.

En s'appuyant sur l'équation V.10, et en prenant compte paramètres d'entrée \hat{U}_h^I et $\hat{F}_{e,h}$, on obtient dans le domaine fréquentiel le système d'équations suivant (eq. V.17) :

$$\begin{bmatrix} -(h\omega)^2 \mathbf{M}_{LL}^S + \mathbf{K}_{LL}^S & \mathbf{0} \\ -(h\omega)^2 \mathbf{M}_{IL}^S + \mathbf{K}_{IL}^S & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_{hL}^{S(j+1/2)} \\ \hat{R}_h^{(j+1/2)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -(h\omega)^2 \mathbf{M}_{LI}^S + \mathbf{K}_{LI}^S \cdot \hat{U}_h^{I(j)} \\ -(h\omega)^2 \mathbf{M}_{II}^S + \mathbf{K}_{II}^S \cdot \hat{U}_h^{I(j)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{F}_{e,h}^S \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{V.17})$$

Le passage dans le domaine temporel donne le couple des grandeurs suivantes :

$$\left(\hat{U}_{hL}^{S(j+1/2)}, \hat{R}_h^{(j+1/2)} \right) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \left(\underline{U}_L^{S(j+1/2)}, \underline{R}^{(j+1/2)} \right) \quad (\text{V.18})$$

Maintenant, le système d'équations V.11 avec comme paramètres d'entrée la force de réaction \underline{R} du domaine Γ^I et les champs d'accélération $\underline{\ddot{U}}^I$ et $\underline{\ddot{U}}_L^J$, peut s'écrire sous la forme définie par l'équation V.19 dans le domaine temporel.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II}^J & \mathbf{K}_{IL}^J \\ \mathbf{K}_{LI}^J & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}^{I(j+1)} \\ \underline{U}_L^{J(j+1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{F}^J \left(\underline{U}_L^{J(j+1)}, \underline{\dot{U}}_L^{J(j+1)} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{R}^{(j+1/2)} \\ \underline{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{II}^J & \mathbf{M}_{IL}^J \\ \mathbf{M}_{LI}^J & \mathbf{M}_{LL}^J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\ddot{U}}^{I(j)} \\ \underline{\ddot{U}}_L^{J(j)} \end{bmatrix} \quad (\text{V.19})$$

Le passage dans le domaine fréquentiel donne le couple des grandeurs suivantes :

$$\left(\underline{U}^{I(j+1)}, \underline{U}_L^{J(j+1)} \right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \left(\hat{U}_h^{I(j+1)}, \hat{U}_{hL}^{J(j+1)} \right) \quad (\text{V.20})$$

Le test de convergence sera identique au test proposé par l'équation V.16.

2.3 Stabilité du schéma numérique

Avant de traiter un premier exemple à quelques degrés de libertés (section 4), nous allons nous intéresser à la stabilité d'un tel schéma numérique. Quelques notions sont rappelées dans le chapitre II, sous-section 3.3.

Afin d'étudier la stabilité du schéma, nous allons concentrer nos efforts sur un schéma linéarisé. Pour cela, nous supprimons momentanément les termes dissipatifs de la liaison, ce qui implique que $\underline{F}^J = \mathbf{K}_{LL}^J \cdot \underline{U}^J$ (voir l'équation V.40 pour la définition de \mathbf{K}_{LL}^J). De plus, il devient alors possible d'avoir une approche uniquement fréquentielle et donc de résoudre les équations V.12 et V.19 dans le domaine fréquentiel. Sous ces conditions, l'étude de la stabilité du schéma numérique est réalisable. On rappelle également qu'il est possible « d'oublier » la force d'excitation afin de simplifier les expressions.

Pour mener à bien cette étude, nous allons exprimer à chaque demi-itération l'ensemble des paramètres d'étude, soit $\hat{X}_h = [\hat{U}_h^S; \hat{U}_h^I; \hat{U}_h^J; \hat{R}_h]$, en fonction de ces paramètres à la demi-étape précédente.

Formulation 1. Pour la première formulation, la réécriture du système d'équations V.12 en ajoutant les termes manquants donne :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{LL}^J & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{IL}^J & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_h^S \\ \hat{U}_h^I \\ \hat{U}_h^J \\ \hat{R}_h \end{bmatrix}^{(j+1/2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{LI}^J + (h\omega)^2 \mathbf{M}_{LI}^J & (h\omega)^2 \mathbf{M}_{LL}^J & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{II}^J + (h\omega)^2 \mathbf{M}_{II}^J & (h\omega)^2 \mathbf{M}_{IL}^J & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_h^S \\ \hat{U}_h^I \\ \hat{U}_h^J \\ \hat{R}_h \end{bmatrix}^{(j)} \quad (\text{V.21})$$

que l'on condensera sous la forme :

$$\mathbf{A}_1 \cdot \underline{\hat{X}}_h^{(j+1/2)} = \mathbf{B}_1(h, \omega) \cdot \underline{\hat{X}}_h^{(j)} \quad (\text{V.22})$$

De la même manière, il est possible de réécrire le système d'équations V.14 :

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{LL}^S & \Lambda_{LI}^S & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \Lambda_{IL}^S & \Lambda_{II}^S & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\hat{U}}_h^S \\ \underline{\hat{U}}_h^I \\ \underline{\hat{U}}_h^J \\ \underline{\hat{R}}_h \end{bmatrix}^{(j+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\hat{U}}_h^S \\ \underline{\hat{U}}_h^I \\ \underline{\hat{U}}_h^J \\ \underline{\hat{R}}_h \end{bmatrix}^{(j+1/2)} \quad (\text{V.23})$$

que l'on condensera sous la forme :

$$\mathbf{C}_1(h, \omega) \cdot \underline{\hat{X}}_h^{(j+1)} = \mathbf{D}_1 \cdot \underline{\hat{X}}_h^{(j+1/2)} \quad (\text{V.24})$$

À partir des équations V.22 et V.24, on obtient l'expression suivante décrivant la suite complexe $\underline{\hat{X}}_h^{(j)}$:

$$\underline{\hat{X}}_h^{(j+1)} = \mathbf{C}_1(h, \omega)^{-1} \cdot \mathbf{D}_1 \cdot \underline{\hat{X}}_h^{(j+1/2)} = \mathbf{C}_1(h, \omega)^{-1} \cdot \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{B}_1(h, \omega) \cdot \underline{\hat{X}}_h^{(j)} = \mathbf{S}_1(h, \omega) \cdot \underline{\hat{X}}_h^{(j)} \quad (\text{V.25})$$

Il y a donc convergence du schéma numérique si le module de toutes les valeurs propres de $\mathbf{S}_1(h, \omega)$ est inférieur à 1. Remarquons tout de suite cette dépendance en ω qui annonce dès à présent des comportements dépendant de la valeur de la pulsation d'excitation.

Formulation 2. De la même manière, reprenons cette étude en exploitant cette fois-ci la 2^e formulation. On obtient ainsi les équations V.27 et V.29.

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{LL}^S & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \Lambda_{IL}^S & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\hat{U}}_h^S \\ \underline{\hat{U}}_h^I \\ \underline{\hat{U}}_h^J \\ \underline{\hat{R}}_h \end{bmatrix}^{(j+1/2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \Lambda_{LI}^S & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_{II}^S & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\hat{U}}_h^S \\ \underline{\hat{U}}_h^I \\ \underline{\hat{U}}_h^J \\ \underline{\hat{R}}_h \end{bmatrix}^{(j)} \quad (\text{V.26})$$

$$\mathbf{A}_2(h, \omega) \cdot \underline{\hat{X}}_h^{(j+1/2)} = \mathbf{B}_2(h, \omega) \cdot \underline{\hat{X}}_h^{(j)} \quad (\text{V.27})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{II}^J & \mathbf{K}_{IL}^J & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{LI}^J & \mathbf{K}_{LL}^J & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\hat{U}}_h^S \\ \underline{\hat{U}}_h^I \\ \underline{\hat{U}}_h^J \\ \underline{\hat{R}}_h \end{bmatrix}^{(j+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -(h\omega)^2 \mathbf{M}_{II}^J & -(h\omega)^2 \mathbf{M}_{IL}^J & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & -(h\omega)^2 \mathbf{M}_{LI}^J & -(h\omega)^2 \mathbf{M}_{LL}^J & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\hat{U}}_h^S \\ \underline{\hat{U}}_h^I \\ \underline{\hat{U}}_h^J \\ \underline{\hat{R}}_h \end{bmatrix}^{(j+1/2)} \quad (\text{V.28})$$

$$\mathbf{C}_2 \cdot \underline{\hat{X}}_h^{(j+1)} = \mathbf{D}_2(h, \omega) \cdot \underline{\hat{X}}_h^{(j+1/2)} \quad (\text{V.29})$$

À partir des équations V.27 et V.29, on obtient l'expression suivante décrivant la suite complexe $\underline{\hat{X}}_h^{(j)}$:

$$\underline{\hat{X}}_h^{(j+1)} = \mathbf{C}_2^{-1} \cdot \mathbf{D}_2(h, \omega) \cdot \underline{\hat{X}}_h^{(j+1/2)} = \mathbf{C}_2^{-1} \cdot \mathbf{D}_2(h, \omega) \cdot \mathbf{A}_2(h, \omega)^{-1} \cdot \mathbf{B}_2(h, \omega) \cdot \underline{\hat{X}}_h^{(j)} = \mathbf{S}_2(h, \omega) \cdot \underline{\hat{X}}_h^{(j)} \quad (\text{V.30})$$

La même règle de convergence s'applique : le schéma numérique est convergent si le module de toutes les valeurs propres de $\mathbf{S}_2(h, \omega)$ est inférieur à 1.

3 Relaxation dynamique

Ce type de décomposition spatiale est très utilisé dans les problèmes de couplage fluide/structure. Les méthodes de résolution les plus utilisées dans ces problèmes sont les algorithmes du point fixe [7, 8] et les méthodes de Newton Krylov [9, 10]. D'autres types de solveurs sont utilisés comme un solveur de type Newton avec différences finies [11] et d'autres encore basés sur les méthodes d'extrapolation vectorielle, voir [12] à titre d'exemple.

Parmi cette variété de méthodes de résolution, l'approche la plus efficace est la méthode du point fixe avec une relaxation dynamique [13], également présente dans la méthode LATIN décrite par [1]. Après analyse des différentes solutions de résolution, le choix s'est porté sur une relaxation partielle du vecteur inconnues. Par conséquent, la relaxation n'aura lieu que sur le vecteur déplacement dans l'interface comme le font Küttler et Wall [14]. La relaxation des déplacements d'interface n'est rien qu'une itération supplémentaire d'un solveur non-linéaire [15, 16]. Par conséquent les techniques de résolution connues peuvent être appliquées ici.

Afin d'optimiser les performances des différentes formulations, on peut « améliorer » celles-ci en terme de :

- stabilité ;
- accélération.

Afin de rendre stable le schéma numérique, on peut alors proposer une *relaxation* (ou amortissement) en modifiant un pas de Gauss-Seidel (schéma de prédiction/correction) :

$$\underline{x}^{(j+1)} = \alpha \cdot \underline{x}^{(j+1)*} + (1 - \alpha) \cdot \underline{x}^{(j)} \quad (\text{V.31})$$

avec $\underline{x}^{(j+1)*}$ la valeur calculée (prédite) avec un pas de Gauss-Seidel et α le paramètre de relaxation. On a ainsi défini une méthode de *sur-relaxation successive* (SOR). Le choix du paramètre α n'est pas simple a priori. Il est par contre intéressant de noter que l'on peut coupler les méthodes SOR à des méthodes d'accélération de type Aitken [17].

3.1 Paramètre de relaxation fixe

La méthode la plus simple et la plus inefficace consiste à choisir une valeur fixe pour le paramètre α pour tous les pas de temps. Le paramètre de relaxation doit être assez petit pour empêcher l'itération de diverger, mais aussi grand que possible afin d'utiliser au maximum la nouvelle solution possible et pour éviter les itérations inutiles. La valeur optimale de α dépend du problème et n'est pas connue a priori. De plus, même la valeur fixe optimale conduira à plus d'itérations qu'un paramètre de relaxation dynamique approprié.

3.2 Relaxation dynamique : relaxation d'Aitken

Comme énoncé précédemment, l'idée de déterminer un paramètre de relaxation fixe n'est pas satisfaisante. Il est par conséquent utile de fixer α à chaque itération, ce qui transforme l'équation V.31 en :

$$\underline{x}^{(j+1)} = \alpha^{(j)} \cdot \underline{x}^{(j+1)*} + (1 - \alpha^{(j)}) \cdot \underline{x}^{(j)} \quad (\text{V.32})$$

Une des méthodes les plus connues et efficaces est la relaxation d'Aitken. L'idée centrale de la méthode Δ^2 d'Aitken [17] est d'utiliser les valeurs de deux itérations précédentes pour améliorer la solution actuelle. Dans le cas des structures assemblées, deux paires de déplacements d'interface $(\underline{U}^{I(j+1)*}, \underline{U}^{I(j)})$ et $(\underline{U}^{I(j+2)*}, \underline{U}^{I(j+1)})$ sont nécessaires. Dans un cas scalaire, la solution améliorée pourrait immédiatement être donnée par :

$$u^{I(j+2)} = \frac{u^{I(j)} u^{I(j+2)*} - u^{I(j+1)*} u^{I(j+1)}}{u^{I(j)} - u^{I(j+1)*} - u^{I(j+1)} + u^{I(j+2)*}} \quad (\text{V.33})$$

Cette équation ne représente rien d'autre qu'un pas de la méthode de la sécante, algorithme de recherche d'un zéro d'une fonction. Or comme :

$$u^{I(j+2)} = u^{I(j+1)} + \alpha^{(j+1)} \left(u^{I(j+2)*} - u^{I(j+1)} \right) \quad (\text{V.34})$$

le facteur de relaxation devient :

$$\alpha^{(j+1)} = \alpha^{(j)} \frac{u^{I(n)} - u^{I(j+1)*}}{u^{I(j)} - u^{I(j+1)*} - u^{I(j+1)} + u^{I(j+2)*}} \quad (\text{V.35})$$

Si on introduit la notion de résidu local en déplacement dans l'interface par :

$$r^{I(j+1)} = u^{I(j+1)*} - u^{I(j)} \quad (\text{V.36})$$

l'équation V.35 devient :

$$\alpha^{(j+1)} = -\alpha^{(j)} \frac{r^{I(j+1)}}{r^{I(j+2)} - r^{I(j+1)}} \quad (\text{V.37})$$

L'analyse se complexifie dès lors que nous rencontrons des grandeurs vectorielles. En effet, la division par $\underline{r}^{I(j+2)} - \underline{r}^{I(j+1)}$ devient impossible. Dans ce cas, Irons et Tuck [18] proposent la normalisation suivante :

$$\alpha^{(j+1)} = -\alpha^{(j)} \frac{\top \underline{r}^{I(j+1)} \left(\underline{r}^{I(j+2)} - \underline{r}^{I(j+1)} \right)}{\left| \underline{r}^{I(j+2)} - \underline{r}^{I(j+1)} \right|^2} \quad (\text{V.38})$$

Cette équation V.38 revient à projeter les vecteurs participants dans la direction $\underline{r}^{I(j+2)} - \underline{r}^{I(j+1)}$ et de réaliser l'extrapolation scalaire avec les valeurs projetées.

Cette implémentation de la relaxation d'Aitken, revenant à une accélération du processus, a déjà été mise en place dans des travaux ; notons l'exemple de Küttler et Wall dans leur article [14] pour un problème de type couplage fluide/structure.

4 Application à un système à 4 degrés de liberté

Le système étudié est un système discret à 4 degrés de liberté présenté sur la figure V.4. Citons en détail les compositions des différents ensembles :

- Ω^J est composé des degrés de liberté 1 et 2 ;
- Ω^S est composé des degrés de liberté 2, 3 et 4 ;
- l'interface Γ^I est quant à elle composée du nœud 2 ;
- l'interface Γ^F possède le nœud 4 ;
- enfin Γ^U détient les nœuds « fictifs » 0 et 5.

De plus, le terme non-linéaire de la liaison sera modélisé ici par une force de type Duffing $Zu_1^3(t)$. Dans cet exemple, le vecteur inconnu complexe $\hat{\underline{X}}$ est constitué des éléments $[\hat{u}_3; \hat{u}_4; \hat{u}_2; \hat{u}_1; \hat{r}]$.

Les valeurs numériques adoptées pour l'exemple sont :

- $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 1 \text{ kg}$;
- $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 1 \text{ N m}^{-1}$;
- $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0,01 \text{ N m}^{-1} \text{ s}$.

4.1 Évaluation de la stabilité

La figure V.5 représente l'évolution des modules des valeurs propres complexes non nuls (2 uniquement dans cet exemple) des matrices de stabilité $\mathbf{S}_1(h=1, \omega)$ et $\mathbf{S}_2(h=1, \omega)$ en fonction

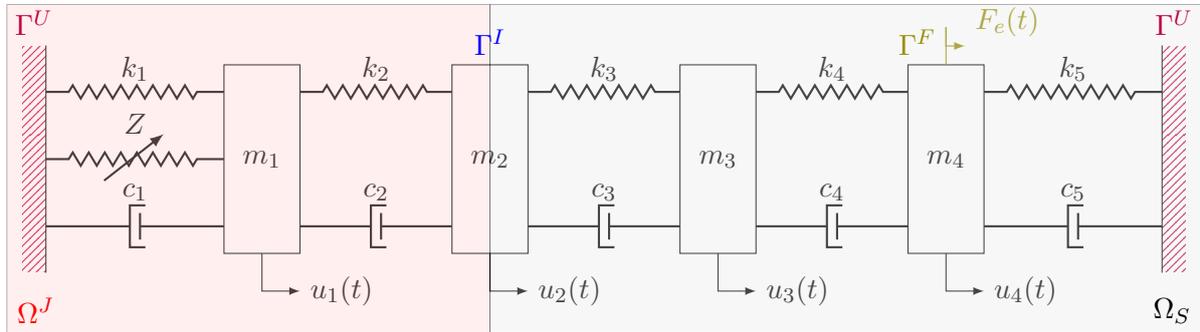


FIGURE V.4 – Système à 4 degrés de liberté décomposé selon la méthode du point fixe

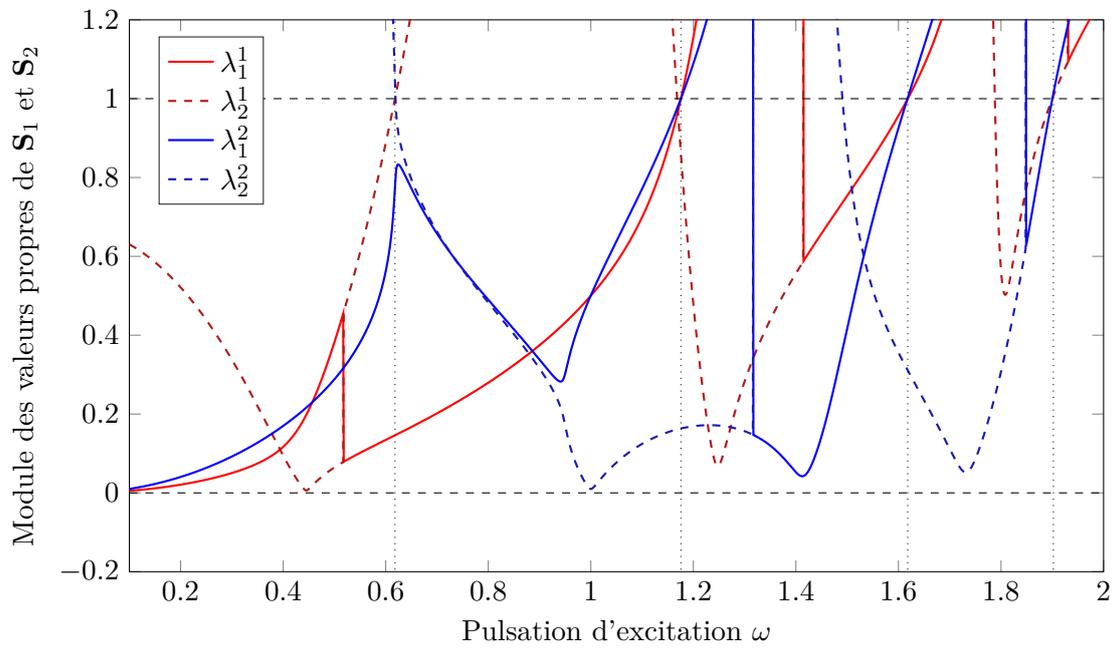


FIGURE V.5 – Modules des valeurs propres λ_j^k des matrices \mathbf{S}_1 et \mathbf{S}_2 en fonction de la pulsation d'excitation ω

de ω balayant les 4 pulsations de résonance du système défini sur la figure V.4. On note dans la suite λ_j^k la valeur propre j de la formulation k .

Le tableau V.1 résume, à première vue, la convergence ou non des différentes formulations sur les différents plages d'excitation. Globalement, il semble qu'il est possible en modifiant les formulations au cours du problème de balayer une partie des pulsations d'excitation. On pourrait alors utiliser ce point de vue uniquement à basses fréquences, même si cette façon de faire semble peu intéressante.

Plage d'excitation	$[0; \omega_{r,1}]$	$[\omega_{r,1}; \omega_{r,2}]$	$[\omega_{r,2}; \omega_{r,3}]$	$[\omega_{r,3}; \omega_{r,4}]$	$[\omega_{r,4}; \omega_\infty]$
Formulation 1	Oui	Non	Non/Oui	Non	Non
Formulation 2	Non	Oui	Non/Oui	Non	Non

TABLE V.1 – Bilan des convergences de la méthode du point fixe en fonction de la formulation du problème

On peut apporter un peu plus d'éléments de réflexion en se focalisant sur les passages aux pulsations de résonance. À titre d'exemple, travaillons sur la première pulsation de résonance (cette thèse s'inscrivant dans les travaux à basse fréquence). Sur la figure V.6, on remarque que le passage pour la formulation 1 dite « naturelle » est exactement à la pulsation de résonance. Cela est dû à la formulation qui met en place les matrices de masse et de raideur de la structure complète. Cependant la formulation 2 dite « contraire » ne possède pas d'analogie. Par conséquent il y a une bande inaccessible juste après la première pulsation de résonance.

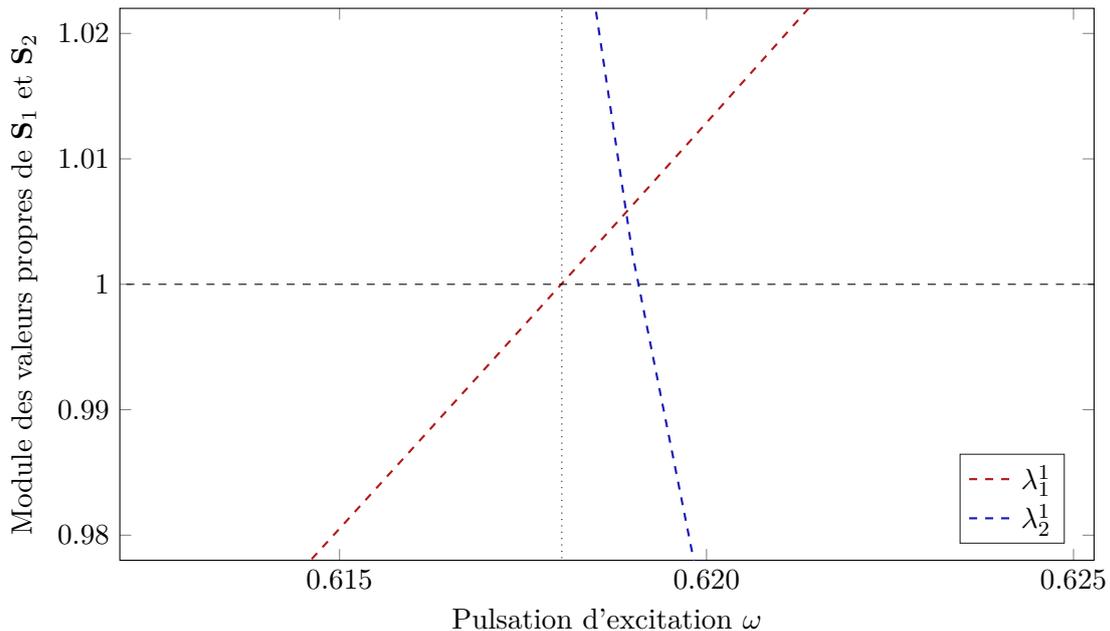


FIGURE V.6 – Zoom sur le passage de la première pulsation de résonance des modules des valeurs propres λ_j^k

4.2 Implémentation de la relaxation dynamique

L'algorithme décrit dans la section 2 a été mis en place sur le système discret à 4 ddl. Il comporte également la relaxation dynamique d'Aitken présentée dans la section 3. Précisons que dans le but de faciliter la mise en place de l'ensemble, les termes d'amortissement ont été annulés.

En balayant les pulsations des fréquences autour de la première résonance de manière croissante (fig. V.7a), puis de manière décroissante (fig. V.7b), on arrive à construire la courbe de réponse

présentée sur la figure V.7c.

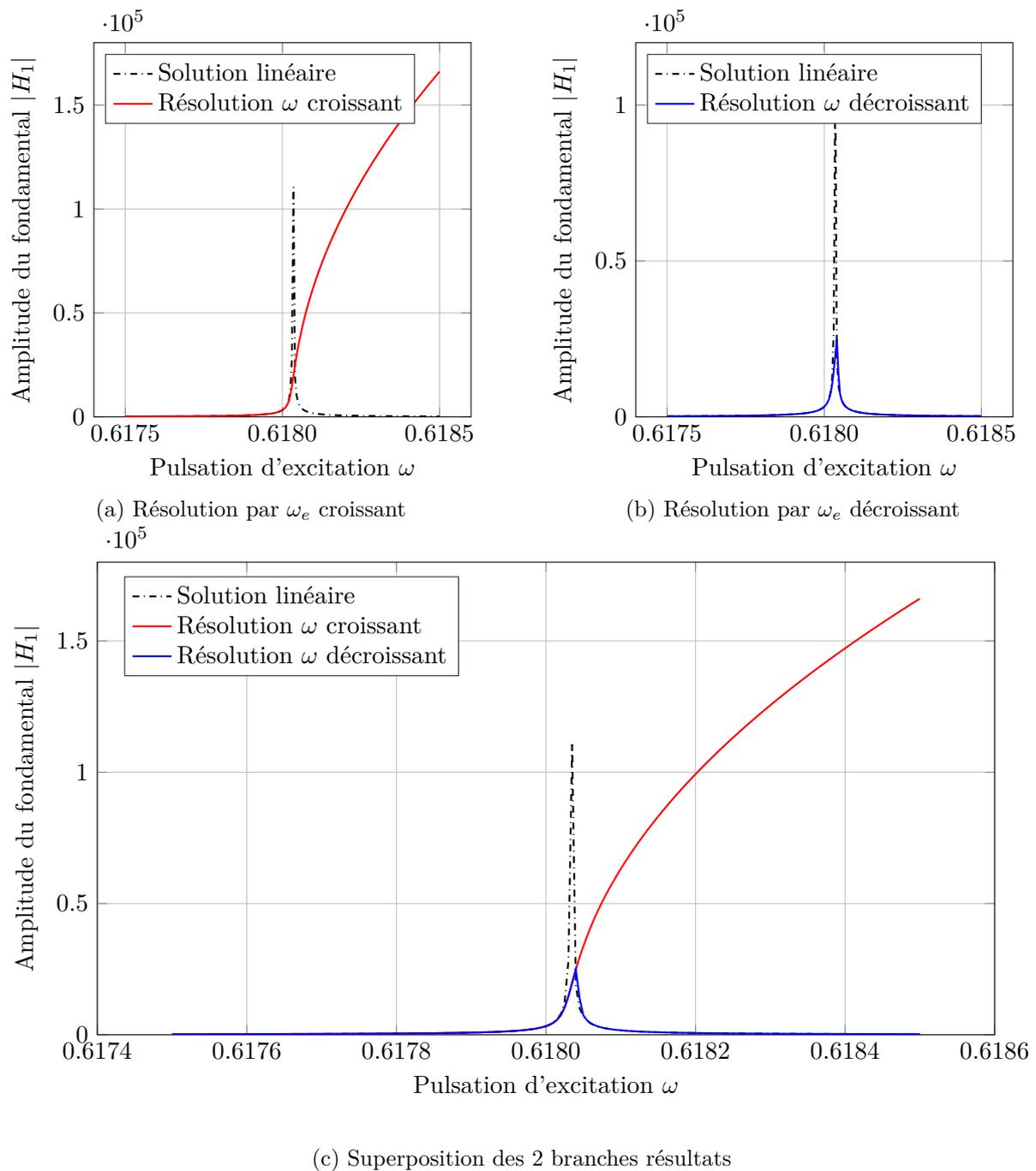


FIGURE V.7 – Construction pas-à-pas de la solution du système à 4 ddls autour de la première pulsation de résonance

Dans un premier temps, il est intéressant de constater que l'ensemble de la méthode (algorithme plus relaxation) assure la convergence et ce malgré les zones d'instabilités décrites précédemment. De plus, la solution proposée est identique quelle que soit la formulation utilisée; ce qui était loin d'être évident précédemment.

Notons que dans cet exemple, la relaxation a été introduite sur les termes en déplacements $u^I = u_2$ et $u^J = u_1$ et non uniquement sur le terme \underline{U}^I , au sens large, comme préconisé dans la section précédente. La singularité du problème traité (peu d'éléments dans chaque sous-domaine, un seul élément d'interface) doit justifier cette modification. Dans le cadre des structures assem-

blées, les nœuds présents dans l'interface sont nombreux, il doit alors être suffisant de relaxer les déplacements \underline{U}^I .

Notons également que cet algorithme semble robuste puisqu'il a été testé pour différentes valeurs de force d'excitation, de raideur, de masse, de coefficient de Duffing et qu'il a assuré une convergence vers la solution de référence obtenue par l'AFT à chaque fois.

Dans un second temps, intéressons nous au nombre d'itérations nécessaire (à une précision en norme donnée) afin d'assurer la convergence à chaque itération. On remarque que le coût est globalement constant pour chaque pulsation d'excitation avec tout de même un pic lors de l'apparition des non-linéarités dues au Duffing du domaine « liaison » pour la résolution en pulsation ω croissante (fig. V.8a). Lors de la phase à pulsations décroissantes, le nombre d'itérations assurant la convergence est globalement constant et identique à la phase précédente. On remarque un pic élevé d'itérations mais il correspond au changement de branche de la solution. Ces observations sont intéressantes puisque le coût de calcul de l'algorithme mis en place dépend fortement du nombre de passage par la case « résolution temporelle » de la figure V.3, lieu de résolution très coûteux.

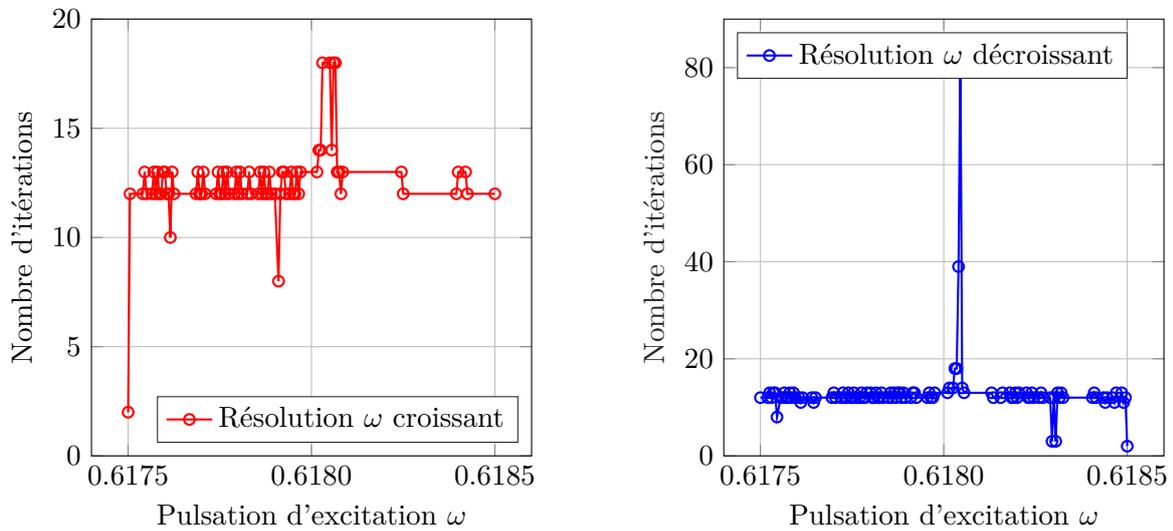
(a) Nombre d'itérations pour ω_e croissant(b) Nombre d'itérations pour ω_e décroissant

FIGURE V.8 – Nombre d'itérations de l'algorithme point fixe

À titre d'exemple, sur ce système discret à 4 ddl, la résolution temporelle a été réalisée par un algorithme de type recherche de 0 et plus précisément par une fonction de type *fsolve* pour un pas de temps donné. Cette approche est très pratique pour réaliser le passage temporel vers fréquentiel par la FFT. Il a été constaté que cette recherche de 0 constituait 95 % du temps de calcul nécessaire à la résolution numérique de ce problème.

Enfin, il est évident qu'il manque à cet exemple une méthode de continuation de type pseudo-longueur d'arc afin de proposer l'ensemble de la réponse. Sa mise en œuvre permettrait de compléter les résultats satisfaisants déjà obtenus.

5 Conclusion et perspectives

Le cadre théorique proposé dans ce chapitre V permet de simuler à moindre coût le comportement dynamique des structures assemblées. Il est basé sur l'utilisation de la méthode de Ritz. À cela, il faut ajouter une méthode de relaxation dynamique de type Aitken afin d'assurer la convergence de la formulation de l'algorithme du point fixe.

Afin d'accélérer le processus, il est intéressant d'utiliser une troncature modale dans un premier

temps en cherchant les modes propres de l'ensemble de la structure linéarisée par l'équation :

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 \mathbf{M}_{LL}^S + \mathbf{K}_{LL}^S & -\omega^2 \mathbf{M}_{LI}^S + \mathbf{K}_{LI}^S & \mathbf{0} \\ -\omega^2 \mathbf{M}_{IL}^S + \mathbf{K}_{IL}^S & -\omega^2 \mathbf{M}_{II}^S + \mathbf{K}_{II}^S - \omega^2 \mathbf{M}_{II}^J + \mathbf{K}_{II}^J & -\omega^2 \mathbf{M}_{IL}^J + \mathbf{K}_{IL}^J \\ \mathbf{0} & -\omega^2 \mathbf{M}_{LI}^J + \mathbf{K}_{LI}^J & -\omega^2 \mathbf{M}_{LL}^J + \mathbf{K}_{LL}^J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_m^S \\ \Phi_m^I \\ \Phi_m^J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V.39})$$

Le terme \mathbf{K}_{LL}^J est issu de la linéarisation de la raideur de la liaison autour du point de fonctionnement $\underline{U}^J = \underline{0}$, soit :

$$\mathbf{K}_{LL}^J = \left. \frac{\partial \underline{F}^J(\underline{U}^J, \dot{\underline{U}}^J)}{\partial \underline{U}^J} \right|_{\underline{U}^J = \underline{0}} \quad (\text{V.40})$$

où \underline{F}^J dépend des efforts de serrage ou des conditions aux limites en déplacement dans l'interface. Les projections modales des coefficients de Fourier des séries représentatives des déplacements donnent :

$$\hat{\underline{U}}_h^S = \Phi_m^S \cdot \hat{q}_h \quad (\text{V.41})$$

$$\hat{\underline{U}}_h^I = \Phi_m^I \cdot \hat{q}_h \quad (\text{V.42})$$

Par conséquent, la réduction modale du domaine linéaire exprimée initialement par l'équation V.10, devient :

$$\begin{aligned} \forall h = 1..H \\ \top \begin{bmatrix} \Phi_m^S \\ \Phi_m^I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -h^2 \omega^2 \mathbf{M}_{LL}^S + \mathbf{K}_{LL}^S & -h^2 \omega^2 \mathbf{M}_{LI}^S + \mathbf{K}_{LI}^S \\ -h^2 \omega^2 \mathbf{M}_{IL}^S + \mathbf{K}_{IL}^S & -h^2 \omega^2 \mathbf{M}_{II}^S + \mathbf{K}_{II}^S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_m^S \\ \Phi_m^I \end{bmatrix} \cdot \hat{q}_h^{(j+1)} \\ = \top \Phi_m^S \cdot \begin{bmatrix} \hat{F}_{e,h} \\ \underline{0} \end{bmatrix} + \top \Phi_m^I \cdot \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \hat{R}_h^{(j+1/2)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{V.43})$$

La réduction modale du domaine non-linéaire utilise la relation de projection modale :

$$\underline{U}^J = \Phi_m^J \cdot \underline{q} \quad (\text{V.44})$$

ce qui permet de réécrire l'équation V.12 sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \top \begin{bmatrix} \Phi_m^I \\ \Phi_m^J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{K}_{IL}^J \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{R}^{(j+1/2)} \\ \Phi_m^J \cdot \underline{q}^{(j)} \end{bmatrix} + \top \begin{bmatrix} \Phi_m^I \\ \Phi_m^J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{F}^J(\Phi_m^J \cdot \underline{q}^{(j)}, \Phi_m^J \cdot \dot{\underline{q}}^{(j)}) \end{bmatrix} \\ = - \top \begin{bmatrix} \Phi_m^I \\ \Phi_m^J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II}^J \cdot \Phi_m^I \\ \mathbf{K}_{LI}^J \cdot \Phi_m^I \end{bmatrix} \cdot \underline{q}^{(j)} - \top \begin{bmatrix} \Phi_m^I \\ \Phi_m^J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{II}^J & \mathbf{M}_{IL}^J \\ \mathbf{M}_{LI}^J & \mathbf{M}_{LL}^J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_m^I \\ \Phi_m^J \end{bmatrix} \cdot \dot{\underline{q}}^{(j)} \end{aligned} \quad (\text{V.45})$$

Le terme $\top \begin{bmatrix} \Phi_m^I \\ \Phi_m^J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{F}^J(\Phi_m^J \cdot \underline{q}^{(j)}, \Phi_m^J \cdot \dot{\underline{q}}^{(j)}) \end{bmatrix}$ est effectivement réduit mais reste très coûteux à calculer. L'exemple développé dans la section 4 met en évidence, malgré l'accélération, un nombre de passage par cette équation non négligeable. De plus, la généralisation de l'algorithme doit se porter sur des modèles éléments finis qui seront très coûteux à l'estimation de ce terme. Par conséquent, au-delà de l'accélération qui assure la convergence, il est nécessaire de réduire encore la résolution temporelle sur le domaine non-linéaire. C'est dans ce but qu'a été introduite la PJSBDE au chapitre IV. Elle permet de générer les méta-modèles associés à la liaison. L'utilisation de méta-modèles, sous forme d'abaque ici, est vraiment intéressante si :

- plusieurs modes chargent la liaison de la même manière ;
- plusieurs liaisons sont chargées de la même manière.

Dans ce cas, en amont de toutes études de dimensionnement, il est alors possible de générer les abaques associés aux chargements issus de la PJSBDE. Ce temps non négligeable de création d'abaque sera réellement compensé lors de l'utilisation de ceux-ci dans l'algorithme du point fixe. Le nouvel algorithme à bas coût utilisant des méta-modèles peut alors se représenter comme proposé sur la figure V.9.

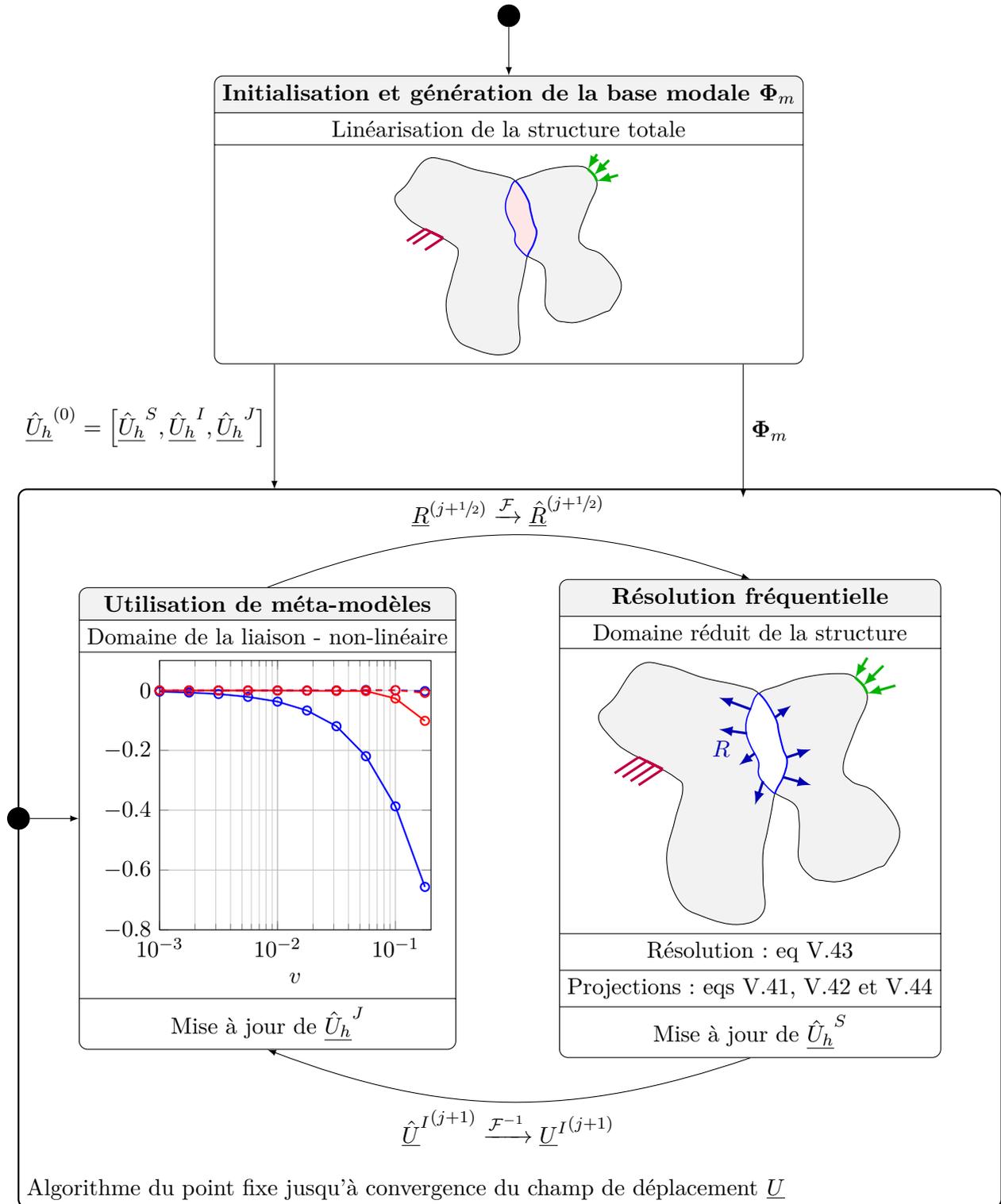


FIGURE V.9 – Principe général de la méthode proposée utilisant un algorithme de type point fixe avec réductions modale et énergétique

Suite aux remarques précédentes, le sens de la résolution du problème a été imposé sur la figure V.9. La formulation 1 dite « naturelle » serait donc utilisée par la force des choses, puisqu'un solveur de type EF serait utilisé afin de réaliser la résolution dans le domaine fréquentiel.

6 Bibliographie du chapitre V

- [1] P. LADEVÈZE, J. C. PASSIEUX et D. NÉRON : The LATIN multiscale computational method and the Proper Generalized Decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(21):1287–1296, avril 2010.
- [2] T. M. CAMERON et J. H. GRIFFIN : An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems. *Journal of Applied Mechanics*, 56(1):149–154, mars 1989.
- [3] M. CLAEYS, J-J. SINOÛ, J-P. LAMBELIN et R. TODESCHINI : Modal interactions due to friction in the nonlinear vibration response of the “Harmony” test structure : Experiments and simulations. *Journal of Sound and Vibration*, 376:131–148, août 2016.
- [4] Mohammad AFZAL, Ines Lopez ARTEAGA et Leif KARI : An analytical calculation of the jacobian matrix for 3d friction contact model applied to turbine blade shroud contact. *Computers & Structures*, 177:204–217, 2016.
- [5] Takéo TAKAHASHI : Ecole des mines de nancy, 2013. <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/mat249/polyAnaNum.pdf>.
- [6] Hugo FESTJENS, Gaël CHEVALLIER et Jean-luc DION : A numerical tool for the design of assembled structures under dynamic loads. *International Journal of Mechanical Sciences*, 75:170–177, octobre 2013.
- [7] Patrick LE TALLEC et Jean MOURO : Fluid structure interaction with large structural displacements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190(24-25):3039–3067, 2001.
- [8] Wolfgang A WALL, Daniel P MOK et Ekkehard RAMM : Partitioned analysis approach of the transient coupled response of viscous fluids and flexible structures. *In Solids, structures and coupled problems in engineering, proceedings of the European conference on computational mechanics ECCM*, volume 99, page 182, 1999.
- [9] Miguel Ángel FERNÁNDEZ et Marwan MOUBACHIR : A newton method using exact jacobians for solving fluid–structure coupling. *Computers & Structures*, 83(2-3):127–142, 2005.
- [10] Jean-Frédéric GERBEAU et Marina VIDRASCU : A quasi-newton algorithm based on a reduced model for fluid–structure interaction problems in blood flows. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 37(4):631–647, 2003.
- [11] Hermann G MATTHIES et Jan STEINDORF : Partitioned strong coupling algorithms for fluid–structure interaction. *Computers & structures*, 81(8-11):805–812, 2003.
- [12] C MICHLER, EH VAN BRUMMELEN et R DE BORST : An interface newton–krylov solver for fluid–structure interaction. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 47(10-11):1189–1195, 2005.
- [13] D P. MOK et Wolfgang WALL : Partitioned analysis schemes for the transient interaction of incompressible flows and nonlinear flexible structures. *Trends in Computational Structural Mechanics*, 01 2001.
- [14] Ulrich KÜTTLER et Wolfgang A. WALL : Fixed-point fluid–structure interaction solvers with dynamic relaxation. *Computational Mechanics*, 43(1):61–72, décembre 2008. ISSN 1432-0924.

- [15] GH GOLUB et CF VAN LOAN : Matrix computations. 3rd edn the johns hopkins univ. Press, Baltimore, 1996.
- [16] Carl T KELLEY : *Iterative methods for linear and nonlinear equations*, volume 16. Siam, 1995.
- [17] A. C. AITKEN : XXV.—On Bernoulli's Numerical Solution of Algebraic Equations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 46:289–305, 1927.
- [18] Bruce M. IRONS et Robert C. TUCK : A version of the Aitken accelerator for computer iteration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1(3):275–277, 1969. ISSN 1097-0207.

Conclusion

Les travaux de recherche menés dans le cadre de cette thèse ont porté sur une méthodologie de résolution dans le cadre de la dynamique des structures assemblées.

La problématique des structures assemblées est vaste et complexe. S'il est acquis que les assemblages dans les grandes structures sont principalement responsables de l'amortissement, la quantification de celui-ci nécessite une approche multi-échelles. En effet, toutes les modélisations des phénomènes physiques, à des échelles donc différentes, mettent en évidence de la dissipation énergétique. Une classification de ces échelles a donc été proposée dans le chapitre I. Cette dernière soumet la structure suivante : de l'échelle super-microscopique à l'échelle macroscopique en passant par les échelles microscopique et mésoscopique.

Le niveau d'observation, à la plus grande échelle (au sens au plus proche du détail), est l'aspérité nominale et plus précisément le contact entre deux aspérités. Les descriptions des comportements normal (Signorini) et tangentiel (Coulomb), ainsi que la loi contrainte/déformation (Hertz et Mindlin), amènent les utilisateurs de cette échelle à conclure sur les contraintes entre aspérités. L'échelle suivante, microscopique, nécessite la prise en compte de l'ensemble des aspérités, puisque le micro-glissement est responsable de la dissipation. Pour cela, deux approches, statistique (Greenwood et Williamson) et déterministe permettent de caractériser cette dissipation dans l'interface. L'échelle suivante, l'échelle mésoscopique, propose une vision globale de la liaison. Les méthodes de réduction tendent vers la création de patchs reliant les interfaces entre elles. Ces patchs doivent être représentatifs des glissements partiel et total mais pas forcément proche de la physique. La construction de ceux-ci doit vérifier la règle de Masing et utilisent les comportements élémentaires d'une cellule de Jenkins ou d'un modèle de Iwan ou encore de Dahl. À cette échelle, la formulation continue des échelles plus grandes doit être abandonnée à la vue des géométries non élémentaires rencontrées, au profit d'une formulation discrète. L'utilisation de l'approximation par éléments finis permet une résolution approchée des problèmes aux dérivées partielles. Enfin l'échelle la plus petite est l'échelle macroscopique. C'est l'échelle des ondes, échelle naturelle d'observation afin d'étudier les vibrations des structures. Cependant, elle ne l'est pas pour étudier les liaisons. Il faut donc introduire des changements d'échelles, soit une réduction de modèle, entre ces deux échelles. Une liste non exhaustive des méthodes réductions linéaires (Guyan et Craig-Bampton) et non-linéaires (méta-modèles) est proposée dans ce manuscrit.

Les méthodes numériques présentées dans le chapitre II ont pour objectif de lister celles rencontrées dans la résolution de problème de dynamique des structures assemblées. Elles se divisent en deux grandes catégories selon le but recherché : la détermination du régime transitoire ou l'obtention du régime permanent harmonique. La caractérisation harmonique du modèle de Dahl a été également proposée dans la mesure où ce modèle se comporte globalement comme une liaison. Il a pour but de permettre la mise en évidence de la notion de méta-modélisation. Enfin, le listing des méthodes gravitant autour de la résolution en régime permanent, méthodes de continuation, de réduction et de résolution de $f(x) = 0$, a permis de structurer l'algorithme proposé dans le chapitre V. La stratégie de résolution apportée montre les différents niveaux de résolution des problèmes. Dans une situation optimale, où la modélisation de la structure

peut se résoudre à une équation différentielle la question principale réside dans la résolution efficace de cette équation. Si cela n'est pas possible, ou si cela reste non fonctionnel, une approche plus globale est indispensable. Néanmoins il est indispensable de réduire la taille du problème, c'est pourquoi il est intéressant d'introduire une base privilégiée. Enfin, le découpage naturel entre zone à comportement linéaire et zone à comportement non-linéaires permet de proposer un algorithme de résolution de la structure globale dans lequel la base privilégiée sera utilisée.

La stratégie proposée permet de mettre en évidence une situation où l'on observe le comportement de la structure autour d'une pulsation donnée. Par conséquent, la modélisation de l'ensemble se réduit à une équation différentielle. Elle possède des non-linéarités de type hystérétique, et son excitation est de type harmonique. Quatre résolutions différentes ont été testées et comparées, deux dans le domaine temporel et deux dans le domaine fréquentiel. La première méthode s'appuie sur l'intégration temporelle sans régularisation de la force hystérétique, par formulation d'état. La deuxième prend toujours appui sur l'intégration temporelle mais en régularisant la fonction non-linéaire ce qui permet de résoudre dans une seule boucle d'intégration. Les méthodes fréquentielles prennent appui sur la HBM : la première sans régulariser la fonction et donc en utilisant une résolution alternée entre domaine fréquentiel et domaine temporel ; la seconde en régularisant la non-linéarité ce qui permet d'éviter les problèmes de singularité et le passage par les transformées de Fourier et leurs inverses. Ces méthodes sont comparées à l'aide de cinq indicateurs, du plus général au plus local : FRF, fréquence de résonance, facteur de qualité, *restoring force* et force interne de Jenkins. Les résultats obtenus montrent que les quatre méthodes sont suffisantes afin de déterminer fréquences de résonance et amplitudes. Le choix peut être porté sur la facilité de développement ou sur le temps de calcul à disposition. On montre que les résolutions régularisées ne permettent pas de déterminer avec précision pulsations et amplitudes par perte d'informations aux hautes fréquences. Si la précision est souhaitée, il est préférable d'utiliser les méthodes de type AFT même si les temps de calculs risquent d'être élevés.

Dans la situation où il n'est pas possible de se ramener au cas précédent, il est tout de même intéressant de réduire la taille du problème traité. La décomposition en domaines « linéaire » et « non-linéaire » induit naturellement une réduction de type Craig-Bampton sur le premier. En ce qui concerne le second, une proposition de réduction par la Principal Join Strain Basis Dissipated Energy (PJSBDE) est faite. L'idée générale de cette base est de dégager des modes dissipant sur le domaine non-linéaire « liaison » et ainsi de comparer deux configurations de l'assemblage : une où l'interface est en adhérence complète, l'autre où l'adhérence est limitée à la zone sous la tête de vis. L'évaluation des couplages énergétiques entre ces deux configurations permet d'obtenir une base de sollicitations principales dissipantes (et non uniquement cinématiques). Cela est vrai sous l'hypothèse que l'énergie de déformation est une image de l'énergie de dissipation dans la liaison. Un comparatif de différents cheminements de construction et leurs influences sur la base PJSBDE est proposé sur deux structures tests : une structure à quelques ddls, puis sur une structure à base éléments finis. Ce comparatif permet de mettre en évidence trois critères de choix : deux concernant les troncatures, l'une modale, l'autre énergétique, ainsi que la constitution du domaine « liaison » (quelles dimensions ? combien d'éléments finis ?). Les conclusions de ces comparatifs portent sur le choix d'un cheminement de création de la PJSBDE (restriction puis normalisation) mais aussi sur le fait que le domaine « liaison » doit contenir quelques éléments linéaires mais sans excès. Enfin les effets de la troncature énergétique de la base PJSBDE ont été mis en place sur un algorithme mettant en place la HBM, la base de projection dédiée PJSBDE ainsi que l'utilisation d'abaque force/déplacement, par analyse statique, de la liaison. Cette étude montre principalement que la réduction est très satisfaisante ; néanmoins elle fait intervenir quelques artefacts notamment la surestimation de la dissipation d'énergie, mais aussi le décalage aux résonances des FRF. La création d'un méta-modèle, se

traduisant par un abaque, est possible dès lors qu'un mode PJSBDE se dégage. Cet abaque est représentatif du comportement de la liaison et est utilisable dans n'importe lesquelles des simulations qui suivront. Mais avant tout, cet abaque ne dépend que d'une seule variable appelée amplitude généralisée.

Enfin, le dernier chapitre de ce manuscrit de thèse a proposé une méthodologie de résolution d'un problème de dynamique des structures assemblées. En prenant appui sur une décomposition spatiale en domaines « linéaire » et « non-linéaire », dont la localisation de la frontière est un paramètre de choix important, un algorithme est exécuté par alternance dans les domaines fréquentiel et temporel. Le domaine fréquentiel a pour objectif de résoudre le problème dans le domaine « linéaire », quant à la résolution fréquentielle, elle a pour objectif de déterminer le comportement de la liaison. Le passage d'une étude à une autre peut se faire par les grandeurs de déplacements ou d'efforts dans l'interface de la frontière. Deux formulations ont été proposées ainsi que la mise en évidence de l'instabilité du schéma numérique. C'est pourquoi cet algorithme intègre une relaxation dynamique de type Aitken afin de rendre stable le schéma numérique et de l'accélérer. La mise en place de cette résolution sur un exemple simple à 4 ddls à montrer la robustesse de l'algorithme.

Les perspectives de ces travaux se placent dans la suite logique de ce manuscrit. L'algorithme développé a pour vocation d'intégrer le méta-modèle généré dans le chapitre IV. Il aura l'intérêt de remplacer les itérations dans le domaine temporel très coûteuses en temps de calculs. Enfin, il faudra pour finaliser cette étude le traitement d'une structure plus large, présentant de nombreux degrés de liberté afin d'éprouver la méthode. Ainsi à terme, des abaques de liaisons « élémentaires », classiquement utilisées, pourront être construits en amont et utilisés au travers de l'algorithme développé pour la conception des structures.

Annexe A

Identification du modèle d'Iwan

Dans cette annexe, sont regroupés les résultats de l'identification expérimentale de la structure en H afin de modéliser l'essai par un modèle d'Iwan constitué de 30 cellules de Jenkins.

N° cell.	k_j	f_{c_j}
1	1629,1711	0,003 195 2
2	5365,297	0,100 87
3	2047,6087	0,072 977
4	2635,1233	0,138 29
5	2754,0358	0,190 91
6	2284,4979	0,196 83
7	1789,475	0,184 31
8	1458,0135	0,174 73
9	1393,6572	0,190 48
10	1373,8128	0,2109
11	1330,6261	0,226 68
12	1130,6593	0,211 65
13	1073,1016	0,218 95
14	925,0789	0,204 33
15	848,7808	0,201 77
16	853,6578	0,2173
17	722,6905	0,196 13
18	636,7448	0,183 53
19	682,7772	0,2083
20	712,9993	0,229 52
21	775,7567	0,262 79
22	1090,0082	0,3876
23	1448,9615	0,539 64
24	1549,9715	0,603 36
25	1267,5014	0,514 74
26	732,8367	0,309 95
27	296,966	0,1306
28	125,0748	0,057 113
29	64,8139	0,030 687
30	22,7066	0,011 133

TABLE A.1 – Valeurs numériques des k_j et f_{c_j} des différentes cellules

DOF	
ω_0^2	ξ
$1,79 \times 10^5$	$1,18 \times 10^{-4}$

TABLE A.2 – Valeurs numériques du SDOF

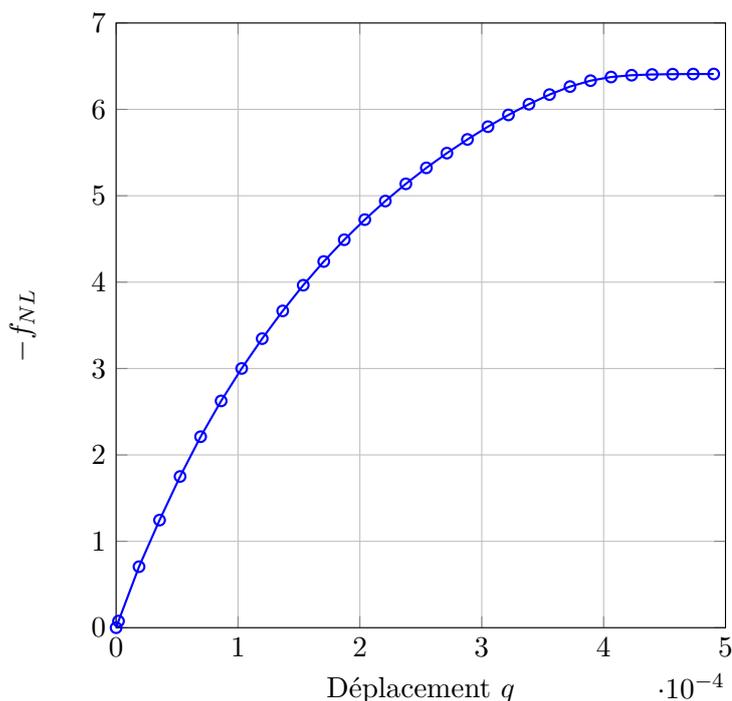


FIGURE A.1 – Courbe $(q, -f_{NL})$ du modèle d'Iwan retenu

Titre : Dynamique des structures assemblées – Amortissement non-linéaire

Mots clés : Vibrations non-linéaires, structures assemblées, amortissement, méthode d'équilibrage harmonique, réduction de modèles.

Résumé : Cette thèse s'inscrit dans des travaux liés aux problématiques des structures assemblées. Après une analyse et une synthèse des différentes échelles de modélisation mises en jeu afin de déterminer l'amortissement dans les liaisons, le manuscrit met en évidence les changements d'échelles, soient les réductions de modèle. La résolution des problèmes de vibration non-linéaire mettent en jeu de nombreuses méthodes numériques. Le cadre de la thèse étant le régime permanent, l'équilibrage harmonique est la méthode clé, couplée à une résolution originale de type point fixe. En fonction du cas d'étude, trois pistes de résolution sont proposées. Si on connaît tout du comportement, l'étude de la structure complète se résume à la résolution d'un système différentiel. La question est comment le résoudre de manière efficace? Une comparaison de quatre formulations différentes du

même problème dans les domaines temporel et fréquentiel, avec ou sans régularisation des forces hystérétiques, permet d'apporter des réponses à cette question. Si cela n'est pas possible ou déraisonnable, il faut alors essayer de décomposer le problème. Une des solutions afin d'accélérer le processus est de réduire le modèle. Pour cela une nouvelle base de réduction de la partie non-linéaire est introduite. Sa construction prend appui sur un indicateur énergétique et son utilisation sur un abaque. Enfin, si la construction de cet abaque est impossible, il est alors nécessaire d'avoir un calcul complet avec générations séquentielles d'abaques dynamiques de la sous-structure. Cette méthodologie adaptative alterne les résolutions temporelle et fréquentielle respectivement sur les domaines non-linéaire et linéaire sans recours à une méthode incrémentale type AFT.

Title : Dynamic of assembled structures – non linear damping

Keywords : Non linear vibrations, jointed structures, vibration damping, Harmonic Balance Method, model order reduction.

Abstract : This thesis is part of work related to the problems of assembled structures. After an analysis and a synthesis of the different modeling scales involved in order to determine the damping in the joints, the manuscript highlights the scales changes, i.e. model reductions. Many numerical methods are used to solve nonlinear vibration problems. The framework of the thesis being steady-state vibrations, the Harmonic Balance Method is commonplace. Here it is coupled with an original fixed point algorithm. Depending on the case study, three resolution paths are proposed. If we know everything about the behavior, the study of the complete structure can be summarized to the resolution of a differential system. The question is how to solve it efficiently? A compari-

son of four different formulations of the same problem in the time and frequency domains, with or without the regularization of hysterical forces, provides answers to this question. If this is not possible or unreasonable, then one must try to decompose the problem. One way to speed up the process is to reduce the model. For this purpose a new basis for reducing the non-linear part is introduced. Its construction is based on an energy indicator and its use is based on a chart. Finally, if the construction of this chart is impossible, it is then necessary to have a complete computation with sequential generations of dynamic charts of the sub-structure. This adaptive methodology alternates the time and frequency resolutions respectively on non-linear and linear domains in a non incremental way.