



HAL
open science

Décomposition en blocs de la catégorie des représentations l-modulaires lisses et de longueur finie de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{D})$

Bastien Drevon

► **To cite this version:**

Bastien Drevon. Décomposition en blocs de la catégorie des représentations l-modulaires lisses et de longueur finie de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{D})$. Théorie des groupes [math.GR]. Université Paris-Saclay, 2020. Français. NNT : 2020UPASM002 . tel-03034421

HAL Id: tel-03034421

<https://theses.hal.science/tel-03034421>

Submitted on 1 Dec 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Décomposition en blocs de la catégorie des représentations l -modulaires lisses et de longueur finie de $GL_m(D)$

Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay

Ecole Doctorale n° 574, Mathématique Hadamard (EDMH)

Spécialité de doctorat : Mathématiques fondamentales

Unité de recherche : Unité de recherche : Université Paris-Saclay, UVSQ,
CNRS, Laboratoire de mathématiques de Versailles, 78000, Versailles, France

Référent : Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines

Thèse présentée et soutenue à Versailles, le 30/09/2020 par

Bastien DREVON

Composition du jury :

Benjamin SCHRAEN Professeur, université Paris-Sud	Président
Anne-Marie AUBERT Directrice de recherche, Sorbonne Université	Rapporteuse
Maarten SOLLEVELD Professeur, Radboud University	Rapporteur
Paul BROUSSOUS Maître de conférences, université de Poitiers	Examineur
Vincent SÉCHERRE Professeur, université de Versailles-Saint-Quentin-en-Yvelines	Directeur

Remerciements

C'est tout naturellement que je commence par remercier mon directeur de thèse, Vincent Sécherre, pour la confiance qu'il m'a témoigné en acceptant de diriger cette thèse. Ses conseils toujours pertinents, ses relectures patientes, ainsi que ses avis éclairés m'ont été très précieux, et sa disponibilité, son professionnalisme et sa compétence générale forcent l'admiration. C'est un euphémisme de dire que j'ai beaucoup appris de son encadrement.

Je remercie ensuite chaleureusement tous les membres de mon jury qui ont accepté d'évaluer ce travail : Anne-Marie Aubert, Paul Broussous, Benjamin Schraen, Vincent Sécherre et Maarten Solleveld. Ils ont tous essayé de venir assister à ma soutenance en présentiel malgré la situation sanitaire et je leur témoigne ici ma profonde gratitude. Merci tout particulièrement à Anne-Marie Aubert et Maarten Solleveld qui me font l'honneur de rapporter cette thèse.

Cette thèse s'est déroulée au Laboratoire de Mathématiques de Versailles, et je veux remercier ses membres. Merci notamment à tous ceux qui m'ont guidé dans les méandres des processus administratifs : les directeurs, Catherine puis Christophe, les gestionnaires, Catherine et Laure, Liliane au secrétariat, et Nadège, la bibliothécaire du laboratoire.

Merci à toute l'équipe d'algèbre et de géométrie à laquelle j'appartiens, et un merci particulier aux doctorants ou ex-doctorants : Antoine, Arsen, Camilla, Edouard, Elise, Jiandi, Mamadou, Maxime, Salim, Sybille et tous ceux que j'oublie. Mention spéciale à mes co-bureaux : Arsen, Jiandi et Sybille, pour toutes les conversations parfois stimulantes, parfois distrayantes, toujours intéressantes.

Je voudrais également manifester ma reconnaissance à Gianmarco Chinello, mon grand frère de recherche, dont les travaux dans [Chi18] ont inspiré la stratégie du chapitre 4 de ce texte, et qui a pris le temps de répondre à mes questions concernant les dits travaux. Merci aussi à Vanessa Miemietz, dont l'une des idées est à la source d'un des théorèmes de cette thèse (théorème 1.4.6).

J'ai toujours eu le goût des mathématiques, et nombre d'enseignants ont su entretenir et renforcer ce goût. Je prends le temps d'en remercier certains ici : Mme Dromacque

en 4ème, qui était de ces professeurs qui donnent un bon souvenir des mathématiques à tout le monde, Mr Dardier en 1ère, qui le premier m'a montré la beauté des belles mathématiques. Puis en université Mr Bismut qui m'a inspiré à long terme par sa capacité à rendre toutes les démonstrations très simples et compréhensibles pour son auditoire, et Mr Benoist par sa pédagogie hors du commun. D'autres mériteraient certainement d'être cités.

Je voudrais prendre le temps de remercier mes amis hors de la sphère mathématique. Sans forcément comprendre ou appréhender ce sur quoi je travaillais, ils ont toujours été un soutien et n'ont jamais tari d'encouragements. Méritent mention les quelques courageux qui se sont portés volontaires pour assister à ma soutenance sans être pour autant mathématicien : Antoine, Céline, Lucie, Quentin et Samuel.

Je remercie Josh, qui à travers ses qualités et ses défauts m'a tant appris sur le plan humain, et Justine, pour ce que l'on a partagé durant nos expériences de thèse respectives.

Je remercie également tous les membres de ma famille qui me soutiennent dans cette aventure, et notamment merci à mes parents Jean-Claude et Kheira, et à ma soeur Haingotiana, pour leur amour et soutien inconditionnels.

Table des matières

Introduction	6
1 Généralités et premiers théorèmes de décomposition	16
1.1 Préliminaires	16
1.1.1 Groupes localement profinis	16
1.1.2 Représentations de groupes	17
1.1.3 Induction	19
1.1.4 Induction parabolique	21
1.1.5 La catégorie $\mathcal{R}_R^f(G)$	24
1.1.6 Réduction modulo l	25
1.2 Modules et homologie	29
1.3 Théorie des types	34
1.3.1 Strates simples	34
1.3.2 Caractères simples	35
1.3.3 Représentations de Heisenberg	36
1.3.4 β -Extensions	36
1.3.5 Types simples	37
1.3.6 Classification des représentations irréductibles cuspidales en terme de types	37
1.4 Premiers théorèmes de décomposition d'une catégorie	38
1.4.1 Selon le caractère central	38
1.4.2 En utilisant les espaces d'extension	41
2 Cas de $GL_1(D)$ et du niveau 0	46

2.1	Caractères χ vérifiant $\text{Ext}_{D^\times}^1(\chi, 1) \neq \{0\}$	46
2.1.1	Préliminaires	46
2.1.2	Restriction à \mathfrak{o}_D^\times	47
2.1.3	Prolongements de morphismes additifs de \mathfrak{o}_D^\times	48
2.1.4	Existence d'un prolongement qui soit un cocycle sans être un cobord	50
2.2	Le bloc du caractère trivial	55
2.3	Caractères χ vérifiant $\text{Ext}_{D^\times}^1(\pi, \pi\chi) \neq \{0\}$	57
2.3.1	Restriction à \mathfrak{o}_D^\times	58
2.3.2	Prolongements de morphisme additif de \mathfrak{o}_D^\times	58
2.3.3	Existence d'un prolongement qui soit un cocycle sans être un cobord	59
2.4	Décomposition en blocs	65
3	Cas des supercuspidales de niveau zéro	68
3.1	Préliminaires	68
3.2	L'enveloppe projective P_ξ	70
3.3	Sous-quotients irréductibles de P_ξ	73
3.4	Espaces d'extension pour les supercuspidales de niveau zéro	78
4	Cas général	82
4.1	Réduction au niveau 0	82
4.1.1	Préliminaires	82
4.1.2	Propriétés du foncteur \mathbf{F}	86
4.2	Décomposition en blocs	97
	Bibliographie	105

Introduction

Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p et soit D une algèbre à division centrale de dimension finie sur F dont on note le degré réduit d . Pour tout entier $m \geq 1$, on pose $G = \mathrm{GL}_m(D)$ qui est une forme intérieure du groupe $\mathrm{GL}_n(F)$ avec $n = md$. On pose R un corps algébriquement clos de caractéristique l avec $l \neq p$ et on s'intéresse aux R -représentations lisses et de longueur finie de $\mathrm{GL}_m(D)$.

Dans le cas où $R = \mathbb{C}$, on parle de représentations complexes. Dans le cas où l est un nombre premier, les représentations de G sont appelées représentations modulaires ou l -modulaires, et c'est le cas qui nous intéresse. La théorie des représentations modulaires des groupes p -adiques a été développée par Vignéras dans [Vig96] en 1996, notamment dans le cas déployé où $G = \mathrm{GL}_n(F)$. Le cas non déployé a été développé dans [MS14a] par Minguez et Sécherre. La théorie dans le cas modulaire s'appuie sur la théorie des représentations complexes, mais il y a cependant des propriétés du cas complexe qui ne fonctionnent plus dans le cas modulaire. Donnons un exemple : on dit qu'une R -représentation irréductible de G est cuspidale si elle n'est pas une sous-représentation d'une induite parabolique propre, et on dit qu'elle est supercuspidale si elle n'est pas un sous-quotient d'une induite parabolique propre d'une représentation irréductible. Dans le cas complexe, une représentation irréductible cuspidale est automatiquement supercuspidale, et ce n'est pas le cas pour les représentations modulaires. Une autre différence avec le cas complexe est que les représentations l -modulaires d'un groupe compact ne sont pas forcément semi-simples.

Quant on passe au cas non déployé, de nouvelles difficultés apparaissent. Notamment, la réduction modulo l d'une représentation irréductible cuspidale entière de G sur $\overline{\mathbb{Q}_l}$ n'est pas forcément irréductible. Il y a aussi des représentations irréductibles cuspidales ρ sur $\overline{\mathbb{F}_l}$ telles qu'il n'existe pas de représentation irréductible cuspidale entière sur $\overline{\mathbb{Q}_l}$ dont la réduction modulo l est exactement ρ .

L'objet de cette thèse est l'étude des R -représentations lisses et de longueur finie de $\mathrm{GL}_m(D)$, dans le cas où $R = \overline{\mathbb{F}_l}$. Un objectif naturel est de considérer la catégorie $\mathcal{R}_R^{lf}(G)$ de ces représentations et de tenter de la décomposer en blocs, au sens suivant :

une catégorie abélienne \mathcal{R} est somme directe de deux sous-catégories pleines \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 si pour tout objet $V \in \mathcal{R}$, il existe une unique décomposition $V = V_1 \oplus V_2$, avec $V_1 \in \mathcal{R}_1$, $V_2 \in \mathcal{R}_2$ et $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(V_1, V_2) = \text{Hom}_{\mathcal{R}}(V_2, V_1) = 0$. Un facteur direct de la catégorie \mathcal{R} que l'on ne peut plus décomposer ainsi est appelé un bloc de la catégorie \mathcal{R} . L'intérêt de cette notion est qu'alors chaque représentation et chaque morphisme de la catégorie se décomposent en fonction des blocs, ce qui ramène la compréhension de la catégorie à la compréhension de ses blocs.

Dans le cas où G est un groupe fini, et R un corps algébriquement clos de caractéristique ne divisant pas l'ordre de G , les représentations sont toutes semi-simples donc il y a une décomposition en blocs : chaque bloc est constitué de représentations isomorphes à une somme directe de copies d'une représentation irréductible fixée.

Introduisons les notions de support cuspidal et support supercuspidal. Soit π une représentation irréductible lisse de G . Le support cuspidal de π est la classe de G -conjugaison du couple (M, ρ) , où M est un sous-groupe de Levi de G et ρ une représentation irréductible cuspidale de M telle que π est une sous-représentation de l'induite parabolique $i_P^G(\rho)$, avec P un sous-groupe parabolique de G ayant M comme sous-groupe de Levi. Quand G est un groupe réductif p -adique, le support cuspidal est unique. Le support supercuspidal est un couple (M, ρ) avec M un sous-groupe de Levi de G et ρ une représentation irréductible supercuspidale de M telle que π apparaît comme sous-quotient irréductible de $i_P^G(\rho)$. Quand $G = \text{GL}_m(D)$, le support supercuspidal est unique également.

Soit (M, ρ) un élément du support cuspidal de π . On définit la classe inertielle de support cuspidal comme l'ensemble des paires cuspidales (M', ρ') qui sont G -conjuguées à $(M, \rho\chi)$ avec χ un caractère non ramifié de M . Similairement, pour (M, ρ) le support supercuspidal de π , on définit la classe inertielle de support supercuspidal de π comme l'ensemble des paires supercuspidales (M', ρ') qui sont G -conjuguées à $(M, \rho\chi)$ avec χ un caractère non ramifié de M .

Dans le cas complexe ($R = \mathbb{C}$ et G un groupe p -adique), la catégorie des R -représentations de G admet une décomposition en blocs, en classifiant les représentations suivant leur support cuspidal. Ce résultat est établi par Bernstein dans son article [Ber84]. La décomposition est la suivante : chaque bloc est associé à une paire cuspidale de sorte que les représentations du bloc associé à (M, ρ) sont les représentations dont tous les sous-quotients irréductibles ont un support cuspidal dans la classe inertielle de (M, ρ) . On peut également s'intéresser aux représentations de longueur finie, toujours dans le cas complexe. La catégorie des R -représentations de longueur finie de G admet alors (théorème 7.3.2 de [Cas95]) encore une décomposition en blocs, où chaque bloc est associé à une paire cuspidale de sorte que les représentations du bloc associé à une paire cuspidale (M, ρ) sont les représentations dont tous les sous-quotients irréductibles ont

pour support cuspidal la classe de G -conjugaison de (M, ρ) .

Pour établir son résultat, Bernstein utilise l'induction parabolique et en particulier le fait qu'une représentation cuspidale est automatiquement supercuspidale. Dans le cas modulaire où l est strictement positif et différent de p , cette propriété n'est plus vérifiée. Néanmoins, on obtient quand même une décomposition en blocs de la catégorie qui est donnée par les classes inertielles de supports supercuspidaux. Plus précisément, chaque bloc est associé à une paire supercuspidale (M, ρ) de sorte que les représentations du bloc associé à la paire (M, ρ) sont les représentations dont tous les sous-quotients irréductibles sont isomorphes à un sous-quotient irréductible de $i_{M'}^G(\rho')$ avec (M', ρ') dans la classe inertielle de (M, ρ) . Ce résultat est prouvé par Vignéras [Vig98] dans le cas déployé et par Sécherre et Stevens [SS16] dans le cas non déployé.

Dans le cas non déployé, un des outils que les auteurs de [SS16] utilisent est la théorie des types introduite par Bushnell et Kutzko dans [BK93]. Un type est un couple (\mathbf{J}, λ) possédant de bonnes propriétés, où \mathbf{J} est un sous-groupe ouvert compact de G et λ une représentation lisse et irréductible de \mathbf{J} . Dans le cas complexe, on a alors une autre description des blocs via la théorie des types : à chaque bloc correspond un type (\mathbf{J}, λ) de sorte que les représentations irréductibles du bloc sont les représentations lisses et irréductibles de G contenant le type (\mathbf{J}, λ) , c'est-à-dire dont la restriction à \mathbf{J} contient la représentation λ .

La théorie des types a ensuite été généralisée au cas non déployé et modulaire par Minguez, Sécherre et Stevens. Dans [MS14a], Minguez et Sécherre établissent une classification des représentations irréductibles cuspidales en fonction des représentations irréductibles supercuspidales. Dans [MS14b], Sécherre et Stevens donnent une classification des représentations supercuspidales utilisant la théorie des types. Enfin dans [SS16] Sécherre et Stevens donnent une description de la décomposition en blocs de la catégorie des R -représentations de G de longueur quelconque via la théorie des types semi-simples.

Un autre résultat de décomposition de catégories est obtenu par Dat et Lanard [Lan19]. Ils décomposent la catégorie abélienne des représentations de G de niveau 0 à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}_l}$ ou $\overline{\mathbb{Z}_l}$, où G est un groupe p -adique qui se déploie sur une extension non ramifiée de F . Cette décomposition est construite en utilisant la théorie de Deligne-Lusztig et les immeubles de Bruhat-Tits, et l'intérêt de se placer en niveau 0 est de se ramener au cas d'un groupe fini, un procédé que l'on utilisera dans le chapitre 3 de cette thèse.

Pour introduire l'objectif de ce texte, on définit des invariants : étant donné π une représentation irréductible cuspidale, on lui associe $n(\pi)$ le nombre de torsion de π , c'est-à-dire le nombre de caractères non ramifiés χ de G vérifiant $\pi\chi \simeq \pi$, et l'invariant $\epsilon(\pi) = \min \{k \geq 1 \mid \pi\nu^k \simeq \pi\}$, où ν est le caractère valeur absolue de la norme réduite. Enfin, on associe à π l'invariant $s(\pi)$ dont la définition est technique et utilise la théorie

des types (voir définition 1.3.5).

Introduisons une notation : soit π' et π deux représentations irréductibles lisses de G . On note $\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_r$ le support supercuspidal de π , où chaque τ_k (pour $k \in \{1, \dots, r\}$) est une représentation de $\mathrm{GL}_{m_k}(D)$ avec $m_1 + \cdots + m_r = m$.

On dit que $\pi' \stackrel{s}{\simeq} \pi$ si le support supercuspidal de π' est $\tau_1 \nu^{j_1} \otimes \cdots \otimes \tau_r \nu^{j_r}$, avec j_k un entier positif qui est nul si $\epsilon(\tau_k) = 1$ ou si $\epsilon(\tau_k) \nmid s(\tau_k)$, pour tout $1 \leq k \leq r$. Les invariants ϵ et s de cette condition technique apparaissent naturellement dans cette notation via l'utilisation d'une propriété de [MS17] (voir la proposition 1 ci-dessous) qui donne une condition faisant apparaître ces invariants pour qu'une représentation irréductible cuspidale de G sur $\overline{\mathbb{F}}_l$ admette un relèvement, c'est-à-dire ici une représentation irréductible cuspidale entière $\tilde{\rho}$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ dont la réduction modulo l contient ρ .

Pour π une représentation irréductible de G , on définit $B(\pi)$ l'ensemble des représentations irréductibles π' de G qui vérifient $\pi' \stackrel{s}{\simeq} \pi$. On appelle \mathcal{B} l'ensemble des $B(\pi)$ quand π parcourt les représentations irréductibles de G .

L'objectif de ce texte est de prouver

Théorème 1. *La catégorie $\mathcal{R}_R^{lf}(G)$ des R -représentations de G de longueur finie admet une décomposition en blocs :*

$$\mathcal{R}_R^{lf}(G) = \bigoplus_{B \in \mathcal{B}} \mathcal{R}_B(G)$$

où $\mathcal{R}_B(G)$ est la sous-catégorie de $\mathcal{R}_R^{lf}(G)$ des représentations V dont tous les sous-quotients irréductibles appartiennent à B .

Donnons un résumé des chapitres de la thèse.

Le premier chapitre a une utilité double : il sert à introduire les notions dont on aura besoin dans les chapitres suivants et à établir certains résultats que l'on utilisera fréquemment. On y aborde la théorie des représentations d'un groupe localement profini, la notion d'induction, celle de réduction modulo l , et le cadre dans lequel on va travailler. C'est également dans ce chapitre qu'on introduit les invariants ϵ et s , et qu'on présente le résultat de [MS17] ci-dessous donnant une condition pour qu'une $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible cuspidale de G admette un relèvement.

Proposition 1. *Soit ρ une $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible cuspidale de G et soit $a > 1$. On note v la valuation l -adique normalisée sur \mathbb{Z} (par $v(l) = 1$). Alors, il existe une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation $\tilde{\rho}$ irréductible cuspidale entière dont la réduction modulo l contienne ρ et soit de longueur a si et seulement si :*

1. *il existe un entier $u \in \{0, \dots, v(s(\rho))\}$ tel que $a = \epsilon(\rho)l^u$*
2. *l'entier a divise l'entier $s(\rho)$ et $\mathrm{pgcd}(\frac{s(\rho)}{a}, k(\rho)) = 1$.*

De plus, pour toute $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation ρ irréductible supercuspidale, il existe une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation $\tilde{\rho}$ irréductible cuspidale entière telle que la réduction modulo l de $\tilde{\rho}$ soit égale à ρ . Comme on l'a indiqué plus haut, cette propriété n'est pas vraie si on suppose seulement que ρ est irréductible et cuspidale.

On introduit aussi la notion de représentations dépendantes, que l'on utilisera régulièrement dans ce texte. Deux R -représentations π_1 et π_2 de G sont dites dépendantes s'il existe une représentation indécomposable de longueur finie contenant π_1 et π_2 comme sous-quotients.

L'intérêt de cette notion est qu'une fois établie une décomposition de la catégorie en blocs, deux représentations dépendantes appartiennent nécessairement au même bloc. On prouve le lemme suivant, qui sera important pour nous car on s'en servira pour montrer qu'une sous-catégorie que l'on soupçonne être un bloc est effectivement indécomposable.

Lemme 2. *Si deux $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations de G apparaissent dans la réduction modulo l d'une même représentation irréductible, alors ces deux représentations sont dépendantes.*

On présente aussi des résultats d'homologie et en particulier la définition du foncteur Ext et on montre un autre résultat de dépendance :

Lemme 3. *Si deux R -représentations M et N de G vérifient*

$$\text{Ext}_G^1(M, N) \neq \{0\},$$

alors ces deux représentations sont dépendantes.

On introduit ensuite la théorie des types de Bushnell et Kutzko dans le cas modulaire, on définit en particulier les types simples maximaux, les types simples de niveau 0 et les types simples maximaux étendus. On cite aussi le fait que toute représentation irréductible cuspidale contient un type simple maximal unique à G -conjugaison près, un résultat de [MS14b] 3.4 et 3.7 dont on aura besoin dans le chapitre 3.

Dans la dernière section du chapitre 1, on donne les deux résultats de décompositions qui suivent et qui serviront régulièrement dans les chapitres ultérieurs.

Théorème 2. *Soit (π, V) une représentation de G de longueur finie n . On note Ω l'ensemble des caractères centraux de sous-quotients irréductibles de V et pour $w \in \Omega$, on note V_w la plus grande sous-représentation dont tous les sous-quotients irréductibles admettent w pour caractère central. Alors la représentation V admet la décomposition*

$$V = \bigoplus_{w \in \Omega} V_w.$$

Ce résultat nous servira par la suite : il prouve que deux représentations d'un même bloc de $\mathcal{R}_R^{lf}(G)$ ont nécessairement le même caractère central.

Théorème 3. *Soit \mathcal{R} une sous-catégorie pleine de la catégorie des R -représentations lisses et de longueur finie de G . On suppose qu'il existe un sous-ensemble S de représentations irréductibles de G tel que pour toute représentation $A \in S$ et toute représentation $B \notin S$ (le complémentaire étant pris dans l'ensemble des R -représentations irréductibles de G),*

$$\text{Ext}^1(A, B) = \{0\}.$$

Alors \mathcal{R} se décompose : $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2$ où \mathcal{R}_1 est la sous-catégorie des représentations dont tous les sous-quotients irréductibles appartiennent à S , et \mathcal{R}_2 est la sous-catégorie des représentations dont aucun sous-quotient irréductible n'appartient à S .

On établit ce théorème par des méthodes homologiques, et ce sera notre outil principal pour décomposer des catégories.

Avant de résumer le chapitre 2, il convient d'expliquer la stratégie et la motivation derrière les étapes de mon travail. La méthode que j'utilise, et qui gouverne le découpage en chapitres de ce texte, est de se restreindre à un cas particulier, en supposant un certain nombre d'hypothèses bien choisies. L'idée étant d'étudier un cas particulier plus simple pour développer des méthodologies qui seront utiles dans un cas plus général, ou pour obtenir un résultat que l'on peut utiliser pour montrer un cas plus général. Cette stratégie, qui est classique en mathématiques de manière générale, a vraiment été omniprésente dans mes recherches.

C'est de cette manière que l'on commence par traiter dans le chapitre 2 le cas du bloc du caractère trivial, dans le cas où $m = 1$ et où les représentations sont de niveau 0, à la suite de quoi on s'affranchit d'une hypothèse, on ne se restreint plus au caractère trivial et on décrit les blocs pour toutes les représentations de niveau 0 de D^\times .

Pour faire cela, on considère deux représentations π et π' de G et on étudie l'espace d'extension $\text{Ext}^1(\pi, \pi')$. Plus spécifiquement, on cherche à quelle condition sur π' (en fonction de π) cet espace d'extension ne s'annule pas. Une des motivations pour cette question est que dans ce cas, on sait que les représentations π et π' sont dépendantes. On obtient rapidement que π' est de la forme $\pi\chi$, où χ est un caractère non ramifié, et la première étape devient alors de chercher les caractères non ramifiés χ qui n'annulent pas cet espace d'extension. Cette partie du raisonnement repose sur des calculs de relations de cocycles et de cobords, et ces calculs de cocycles et de cobords constituent d'ailleurs une spécificité de ce chapitre, puisque l'hypothèse de la dimension 1 rend ces calculs plus simples, et on s'orientera vers des méthodes différentes pour les chapitres suivants où l'on ne suppose plus la dimension égale à 1.

On introduit l'invariant de Hasse d'une algèbre à division : on fixe t une uniformisante

choisie de telle façon que $t^n \in F^*$. Alors t agit par conjugaison sur \mathfrak{o}_D donc sur $\mathfrak{k}_D/\mathfrak{k}_F$, et cette action est celle d'une certaine puissance du Frobenius de $\mathfrak{k}_D/\mathfrak{k}_F$. Cette puissance (modulo n) ne dépend pas de l'uniformisante choisie et est première à n . On la note i et on l'appelle invariant de Hasse de l'algèbre à division.

On note e l'ordre de q modulo l (avec q le cardinal du corps résiduel de F). Le résultat de cette première étape fait intervenir un caractère χ_0 (défini par $\chi_0(t) = q^{-i}$). On obtient le résultat suivant, où b désigne un invariant qui est lié à l'invariant s (voir définition 1.3.5) :

Proposition 4. *Les caractères χ non ramifiés d'ordre divisant n vérifiant*

$$\mathrm{Ext}_{D^\times}^1(\pi\chi, \pi) \neq \{0\}$$

sont les caractères vérifiant $\chi^b = 1$ ou $\chi^b = (\chi_0)^b$ si $e|n$, et les caractères χ vérifiant $\chi^b = 1$ si $e \nmid n$.

En particulier, si $e|n$, les représentations χ_0 et 1 sont dépendantes sans avoir le même support supercuspidal.

La proposition 4 qui constitue un résultat intermédiaire intéressant est aussi une spécificité du chapitre 2, puisqu'on n'obtient pas de description aussi exhaustive dans les autres chapitres. Pour conclure, on utilise ce résultat pour décomposer la catégorie en utilisant le théorème 3 et on prouve que les facteurs obtenus sont indécomposables, ce qui nous donne le théorème 1 dans le cas où $m = 1$ et où les représentations sont de niveau 0.

Dans le chapitre 3, on traite le cas des représentations supercuspidales de niveau 0. Dans un premier temps, on commence avec la même stratégie que dans le chapitre précédent : on fixe π une représentation irréductible supercuspidale de niveau 0 et on s'intéresse aux représentations irréductibles supercuspidales π' (on montre rapidement que π' est de la forme $\pi\chi$ avec χ un caractère non ramifié) de niveau 0 ayant un espace d'extention non nul avec π . On introduit (N, ξ) un type simple maximal étendu tel que $\pi = \mathrm{ind}_N^G \xi$. Comme la technique consistant à faire des calculs de cocycles et de cobords que l'on a employée dans le chapitre précédent est ici plus calculatoire, on change de méthode : on veut s'intéresser à l'enveloppe projective P_ξ de ξ dans la catégorie des représentations de longueur finie de N .

D'abord, on montre qu'elle existe, et on le montre en fait plus généralement pour toute représentation $\tilde{\xi}$ de N triviale sur N^1 (l'unique pro- p sous groupe distingué maximal de N^0). Pour obtenir ce résultat, qui est la proposition ci-dessous, on se ramène à un groupe fini en tordant les représentations en présence par des caractères bien choisis.

Proposition 5. *Toute représentation irréductible $\tilde{\xi}$ de N triviale sur N^1 admet une*

enveloppe projective P_ξ dans la catégorie des représentations de longueur finie de N . De plus, il existe une représentation projective indécomposable sur $\overline{\mathbb{Z}_l}$ de réduction modulo l égale à P_ξ , notée Q_ξ .

Ensuite, on cherche à en apprendre davantage sur les sous-quotients irréductibles de P_ξ . On fixe ξ' un tel sous-quotient. Notre but est de montrer

Proposition 6. *Il existe $j \in \mathbb{N}$ vérifiant $j = 0$ si $\epsilon(\pi) = 1$ ou $\epsilon(\pi) \nmid s(\pi)$ tel que les représentations ξ' et $\xi\nu^j$ sont conjuguées dans le normalisateur (dans G) de N .*

Pour montrer cela, on construit alors une $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -représentation $\tilde{\tau}$ de N dans laquelle ξ et ξ' apparaissent. On pose $\tilde{\pi} = \text{ind}_N^G(\tilde{\tau})$ et $\pi' = \text{ind}_N^G(\xi')$. On montre que les représentations $\tilde{\pi}$ et π' sont irréductibles et cuspidales en les écrivant comme des induites d'un type simple, on prouve ensuite que $r_l(\tilde{\pi})$ contient π et π' , et en utilisant la forme de la réduction modulo l d'une représentation cuspidale irréductible on prouve que π contient $\xi'\nu^{-j}$ et ξ (pour un $j \in \mathbb{N}$), ce qui nous permet de conclure en utilisant l'unicité à G -conjugaison près des types simples maximaux apparaissant dans une représentation irréductible et cuspidale. On en déduit alors la proposition suivante.

Proposition 7. *Soit π une représentation irréductible et supercuspidale de G de niveau 0 vérifiant*

$$\text{Ext}_G^1(\pi, \pi\chi) \neq \{0\}$$

avec χ un caractère non ramifié. Alors il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que

$$\pi\chi \simeq \pi\nu^j$$

avec $j = 0$ si $\epsilon(\pi) \nmid s(\pi)$ ou si $\epsilon(\pi) = 1$.

Cette proposition est bien cohérente avec le cas étudié dans le chapitre 2, puisque dans ce cas $\epsilon(\pi)$ valait e et $s(\pi)$ valait n .

On utilise alors cette proposition pour en déduire celle qui suit, et qui est l'objectif du chapitre 3. On s'intéresse ici aux espaces d'extensions Ext^i , où cette fois-ci i peut être plus grand que 1.

Proposition 8. *Soit π, π' deux représentations supercuspidales de G de niveau 0. S'il existe $i \geq 0$ tel que $\text{Ext}_G^i(\pi', \pi) \neq \{0\}$, alors*

1. Si $\epsilon(\pi) = 1$ ou si $\epsilon(\pi) \nmid s(\pi)$, alors $\pi' \simeq \pi$.
2. Si $\epsilon(\pi) \mid s(\pi)$, alors il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $\pi' \simeq \pi\nu^j$.

Le chapitre 4 où l'on se place en niveau quelconque se divise en deux parties. Dans la première, on se ramène au cas du niveau 0 pour les représentations supercuspidales, et

dans la seconde, on conclut en décomposant la catégorie et en prouvant le théorème 1. Pour se ramener au cas des supercuspidales de niveau 0, on utilise un travail de Chinello [Chi18] qui établit une équivalence de catégorie \mathbf{F} entre un bloc quelconque de $\mathcal{R}_R(G)$ et un bloc de niveau 0 de $\mathcal{R}_R(B^\times)$, où B est défini ci-dessous.

Plus précisément, on fixe $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ un type que l'on associe à un bloc noté $\mathcal{R}(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ de $\mathcal{R}_R(G)$ de la manière suivante : les représentations qui ont leur support supercuspidal dans la paire supercuspidale $[M, \rho]_G$ associée au bloc $\mathcal{R}(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ sont celles qui apparaissent dans l'induite $\text{ind}_{\mathbf{J}}^G(\boldsymbol{\lambda})$.

On considère la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ de $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$. On pose $E = F[\beta]$ et on note B le centralisateur de E dans $M_m(D)$. On peut alors identifier B à $M_{m'}(D')$ avec m' un entier et D' une E -algèbre à division de degré réduit d' . On dispose d'une décomposition $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\kappa} \otimes \boldsymbol{\sigma}$ avec $\boldsymbol{\kappa}$ une représentation irréductible de \mathbf{J} et $\boldsymbol{\sigma}$ une représentation irréductible de \mathbf{J} triviale sur \mathbf{J}^1 (un pro- p sous-groupe ouvert compact distingué de \mathbf{J}). On note alors $\boldsymbol{\eta}$ la restriction de $\boldsymbol{\kappa}$ à \mathbf{J}^1 , et on définit la sous-catégorie pleine $\mathcal{R}(G, \boldsymbol{\eta})$ de $\mathcal{R}_R(G)$ des représentations engendrées par leur composante $\boldsymbol{\eta}$ -isotopique. On définit également K un sous-groupe ouvert compact de B^\times et K^1 son pro- p radical, ce qui nous permet de poser $\mathcal{R}(B^\times, K^1)$ la sous-catégorie de $\mathcal{R}_R(B^\times)$ des représentations engendrées par leur composante 1_{K^1} -isotopique. On construit alors le foncteur \mathbf{F} mentionné ci-dessus, qui est une équivalence de catégorie entre $\mathcal{R}(G, \boldsymbol{\eta})$ et $\mathcal{R}(B^\times, K^1)$ qui envoie un bloc $\mathcal{R}(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ sur un bloc $\mathcal{R}(K^1, \boldsymbol{\sigma})$ de niveau 0.

On prouve ensuite certaines propriétés du foncteur \mathbf{F} dont on aura besoin pour se ramener au cas des supercuspidales de niveau 0 étudiées dans le chapitre 3, par exemple sa compatibilité à la supercuspidalité et aux invariants ϵ et s au sens suivant :

Proposition 9. *Soit $\pi \in \mathcal{R}(G, \boldsymbol{\eta})$. Alors π est supercuspidale si et seulement si $\mathbf{F}(\pi)$ est supercuspidale. De plus, pour toute représentation supercuspidale irréductible π de G , alors $s(\mathbf{F}(\pi)) = s(\pi)$ et $\epsilon(\mathbf{F}(\pi)) = \epsilon(\pi)$.*

Notons $\tilde{\nu}$ le caractère valeur absolue de la norme réduite de B^\times . On aura également besoin de la proposition suivante, qui montre que le foncteur \mathbf{F} se comporte bien avec la torsion par le caractère valeur absolue de la norme réduite.

Proposition 10. *Soit $\pi \in \mathcal{R}_R(G, \boldsymbol{\eta})$ une représentation supercuspidale irréductible. On a l'isomorphisme de représentations*

$$\mathbf{F}(\pi\nu) \simeq \mathbf{F}(\pi)\tilde{\nu}.$$

On utilise ces propriétés du foncteur F pour prouver une généralisation de la proposition 8 aux représentations supercuspidales de G . Ensuite, on généralise cette proposition au cas des représentations qui ne sont pas nécessairement supercuspidales. Pour cela,

on traite plusieurs cas suivant que π et π' sont cuspidales ou pas, et supercuspidales ou pas, en procédant par récurrence sur i et en s'aidant des cas déjà traités. Ceci nous permet d'établir la proposition 11, une nouvelle généralisation de la proposition 8 aux représentations irréductibles de G .

Proposition 11. *On suppose que π et π' sont deux représentations irréductibles de G appartenant au même bloc (dans la catégorie des représentations de longueur quelconque). S'il existe $i \geq 0$ tel que $\text{Ext}_G^i(\pi', \pi) \neq \{0\}$, alors $\pi \stackrel{s}{\simeq} \pi'$.*

On utilise alors ce résultat et le théorème 3 pour décomposer la catégorie. Pour la suite, on utilise la théorie des segments développée dans [BZ77] et [BZ80] qui donne des conditions sur l'irréductibilité d'une induite parabolique. Plus précisément, pour a et b des entiers, le segment $[a, b]_\rho$ associé à ρ une représentation irréductible cuspidale de G est une suite finie de la forme

$$(\rho\nu_\rho^a, \rho\nu_\rho^{a+1}, \dots, \rho\nu_\rho^b)$$

avec ν_ρ le caractère $\nu^{s(\rho)}$. On peut alors définir la notion de segments liés, et prouver que l'induite parabolique $\pi_1 \times \dots \times \pi_r$ est irréductible si et seulement si pour tout $i, j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ les segments i et j (associés respectivement à π_i et π_j) ne sont pas liés. Ce résultat nous permet alors de montrer que la décomposition de la catégorie obtenue grâce à la proposition 11 est une décomposition en blocs, et on en déduit alors le théorème 1.

Chapitre 1

Généralités et premiers théorèmes de décomposition

1.1 Préliminaires

1.1.1 Groupes localement profinis

On commence par introduire la notion de groupe localement profini. Les groupes que nous étudierons dans la suite seront tous localement profinis.

Définition 1.1.1. Un groupe topologique G est dit profini s'il vérifie les deux propriétés équivalentes suivantes (l'équivalence est démontrée à la proposition 0 de [Ser65]) :

1. le groupe G est compact et totalement discontinu ;
2. le groupe G est une limite projective de groupes finis.

Un groupe topologique G est dit localement profini s'il vérifie les deux propriétés équivalentes suivantes :

1. le groupe G est localement compact et totalement discontinu ;
2. le groupe G est séparé et l'ensemble de ses sous-groupes ouverts compacts est un système fondamental de voisinages de l'unité (ce qui signifie que tout voisinage de l'identité contient un sous-groupe ouvert compact).

Notation 1.1.2. Pour G un groupe localement profini, on note $\Omega(G)$ l'ensemble de ses sous-groupes ouverts compacts.

Notons qu'un groupe profini est localement profini, et qu'un groupe localement profini qui est aussi compact est profini, ce qui justifie la terminologie.

Exemple. Les groupes discrets sont localement profinis (par exemple \mathbb{Z}). Les groupes finis sont profinis (par exemple $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$, avec $n \in \mathbb{N}$ et p premier).

Soit F un corps localement compact non archimédien. Le corps F est alors localement profini. On note \mathfrak{o}_F son anneau des entiers et \mathfrak{p}_F l'idéal maximal de \mathfrak{o}_F . On note également $\mathfrak{k}_F = \mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F$ le corps résiduel de F dont on note la caractéristique p et le cardinal q . De même, si D est une algèbre à division centrale de dimension finie sur F , on note \mathfrak{o}_D son anneau des entiers, \mathfrak{p}_D l'idéal maximal de \mathfrak{o}_D et $\mathfrak{k}_D = \mathfrak{o}_D/\mathfrak{p}_D$ le corps résiduel.

Alors, le groupe F est localement profini et est l'union de ses sous-groupes ouverts compacts. Le groupe F^\times est également localement profini, et les groupes $U_F^n = 1 + \mathfrak{p}_F^n$ ($n \geq 1$) forment un système fondamental de voisinages ouverts de l'unité (voir par exemple [BH06] §1.1).

Soit $n \geq 1$ un entier, le groupe F^n est un groupe localement profini relativement à la topologie produit. Par conséquent $M_n(F)$ est un groupe localement profini, et $\mathrm{GL}_n(F)$ muni de la topologie induite est un groupe topologique dont les sous-groupes

$$K = \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_F), K_j = 1 + \mathfrak{p}_F^j M_n(\mathfrak{o}_F) \quad (j \geq 1)$$

forment un système fondamental de voisinages ouverts de l'unité, et comme les K_j sont compacts le groupe $\mathrm{GL}_n(F)$ est également un groupe localement profini.

On note enfin quelques propriétés des groupes localement profinis (cf [Vig96] 1.3 et [Blo11] 1.1) : Soit G un groupe localement profini. Alors,

1. les sous-groupes fermés de G sont localement profinis ;
2. les groupes quotients de G par un sous-groupe distingué fermé sont localement profinis ;
3. les sous-groupes compacts de G sont contenus dans un sous-groupe ouvert compact ;
4. le centralisateur d'un élément quelconque de G est fermé.

Pour en apprendre davantage sur les groupes localement profinis, on pourra consulter par exemple le premier paragraphe de [Ser65], [BH06], [Vig96] ou [Blo11].

1.1.2 Représentations de groupes

On introduit ici la notion de représentation de groupe, qui est au coeur de cette thèse. Les représentations de groupe constituent un outil riche qui établit un lien entre une structure de groupe et une structure de module, ce qui peut permettre d'étudier l'une des deux structures en utilisant les outils de l'autre.

Définition 1.1.3. Étant donné un groupe localement profini G et R un anneau commutatif unitaire, une R -représentation de G est la donnée d'un couple (π, V) où

$$\pi : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V) = \mathrm{Aut}_R(V)$$

est un morphisme de groupe et V est un R -module.

Notons que dans notre cas R sera souvent un corps.

Notation 1.1.4. On utilisera parfois la notation π ou V pour désigner la représentation (π, V) . De plus, on parlera de représentation sans préciser le groupe ni le corps associé quand il n'y a pas d'ambiguïté.

Dans cette thèse, on travaille toujours avec des représentations lisses. Une représentation lisse est une représentation (π, V) telle que pour tout élément $x \in V$, le stabilisateur de x dans G est ouvert. On introduit quelques définitions sur les représentations de groupes :

Définition 1.1.5. Soit G un groupe localement profini et R un anneau commutatif unitaire.

1. Une R -représentation (π, V) de G est admissible si, étant donné un sous-groupe ouvert H du groupe G , l'espace V^H des vecteurs invariants par H est de type fini sur R .
2. Un R -caractère de G est un morphisme de G dans R^\times dont le noyau est ouvert.
3. Soit (π, V) une R -représentation de G et χ un R -caractère de G , on définit la représentation tordue par

$$g \mapsto \pi(g)\chi(g).$$

et on la note $\pi\chi$ ou $\chi\pi$.

4. Une R -représentation V de G est semi-simple si toute sous-représentation de V est un facteur direct.
5. On suppose G dénombrable à l'infini, c'est-à-dire qu'il existe K un sous-groupe ouvert compact de G tel que G/K soit dénombrable. Soit (π, V) une R -représentation irréductible de G , le centre Z de G agit sur V via un caractère $w : Z \rightarrow R^\times$ que l'on appelle caractère central avec

$$\pi(z)(v) = w(z)v$$

pour $z \in Z$ et $v \in V$ (cela découle du lemme de Schur, voir [BH06] 2.6).

6. Soit (π_1, V_1) et (π_2, V_2) deux R -représentations, on note $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$ (ou parfois $\text{Hom}(V_1, V_2)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'espace des applications linéaires $f : V_1 \rightarrow V_2$ commutant à l'action de G :

$$f \circ \pi_1(g) = \pi_2(g) \circ f, \quad \forall g \in G.$$

On appelle une telle application un morphisme de représentations.

7. Étant donné (π, V) une R -représentation lisse de G , on pose $\tilde{V} = \text{Hom}_R(V, R)$ le dual de V et on définit $\tilde{\pi}$ une représentation de G par

$$\begin{aligned}\tilde{\pi} : G &\longrightarrow \text{GL}(\tilde{V}) \\ g &\longmapsto f \longmapsto (x \mapsto f(\pi(g^{-1})(x)))\end{aligned}$$

On l'appelle la représentation duale de (π, V) . On pose $V^* = \bigcup_K (\tilde{V})^K$ où l'union porte sur les sous-groupes ouverts compacts et on pose

$$\begin{aligned}\pi^* : G &\longrightarrow \text{GL}(V^*) \\ g &\longmapsto \tilde{\pi}(g)\end{aligned}$$

La représentation (π^*, V^*) ainsi définie s'appelle la contragrédiente de (π, V) .

8. On note $\mathcal{R}_R(G)$ la catégorie abélienne des représentations lisses de G sur R , dont les objets sont les représentations lisses de G sur R (autrement dit les RG -modules lisses) et dont les morphismes sont les morphismes de représentations. On note $\text{Irr}_R(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations de $\mathcal{R}_R(G)$.

1.1.3 Induction

Dans cette sous-partie, on aborde un outil très utile qui permet de construire une représentation d'un groupe localement profini G à partir d'une représentation d'un sous-groupe H de G . On obtient ainsi un foncteur de $\mathcal{R}_R(H)$ dans $\mathcal{R}_R(G)$ dont on verra qu'il est adjoint au foncteur de restriction de G à H .

Dans cette sous-section également, on ne considère que des représentations lisses.

Définition 1.1.6. Soit H un sous-groupe fermé de G , et (θ, W) une représentation (lisse) de H . On construit une représentation (π, V) de G en définissant V comme l'ensemble des fonctions $f : G \rightarrow W$ uniformément localement constantes telles que

$$\forall g \in G, \forall h \in H, f(hg) = \theta(h)(f(g))\}$$

et

$$\begin{aligned}\pi : G &\longrightarrow \text{GL}(V) \\ g &\longmapsto f \longmapsto (x \mapsto f(xg))\end{aligned}$$

On obtient ainsi deux foncteurs de la catégorie $\mathcal{R}_R(H)$ dans la catégorie $\mathcal{R}_R(G)$, le foncteur d'induction que l'on note Ind_H^G et le foncteur d'induction à support compact (obtenu en se restreignant pour V aux fonctions à support compact) que l'on note ind_H^G . La représentation (π, V) est appelée représentation induite.

On peut aussi définir l'induction des morphismes.

Définition 1.1.7. Soit deux représentations (θ_1, W_1) et (θ_2, W_2) et soit $\phi \in \text{Hom}_H(\theta_1, \theta_2)$. On pose V_1 et V_2 comme plus haut, c'est-à-dire :

$$V_1 = \{f : G \longrightarrow W_1 \mid \forall g \in G, \forall h \in H, f(hg) = \theta_1(h)(f(g))\}$$

et

$$V_2 = \{f : G \longrightarrow W_2 \mid \forall g \in G, \forall h \in H, f(hg) = \theta_2(h)(f(g))\}.$$

Alors on définit l'induite de ϕ comme étant

$$\begin{aligned} \text{Ind}(\phi) : V_1 &\longrightarrow V_2 \\ f &\longmapsto \phi \circ f \end{aligned} .$$

Proposition 1.1.8. Si $\phi \in \text{Hom}_H(\theta_1, \theta_2)$, alors $\text{Ind}(\phi) \in \text{Hom}_G(\text{Ind}(\theta_1), \text{Ind}(\theta_2))$.

Donnons quelques propriétés de l'induction dont on aura besoin plus tard (pour les preuves et davantage de propriétés des inductions on pourra consulter [Vig96] I.5).

Proposition 1.1.9. 1. Soit π une représentation de G et θ une représentation d'un sous-groupe H de G . Alors

$$\pi \otimes_R \text{Ind}_H^G(\theta) \simeq \text{Ind}_H^G(\pi|_H \otimes_R \theta)$$

et

$$\pi \otimes_R \text{ind}_H^G(\theta) \simeq \text{ind}_H^G(\pi|_H \otimes_R \theta).$$

2. Les deux inductions sont transitives : si H_1 est un sous-groupe fermé de G et H_2 un sous-groupe fermé de H_1 , alors

$$\text{Ind}_{H_2}^G = \text{Ind}_{H_1}^G \text{Ind}_{H_2}^{H_1}$$

et

$$\text{ind}_{H_2}^G = \text{ind}_{H_1}^G \text{ind}_{H_2}^{H_1}.$$

3. Soit H un sous-groupe fermé de G . Le foncteur de restriction Res_H^G est exact et les deux foncteurs d'inductions Ind_H^G et ind_H^G sont exacts à gauche.

On introduit également la fonction de support i_v .

Définition 1.1.10. Soit H un sous-groupe fermé et ouvert de G , et (π, V) une représentation (lisse) de H . On pose $i_v(h) = \pi(h)(v)$ pour tout $v \in V$ et pour tout $h \in H$.

Remarque 1.1.11. La fonction de support i_v appartient à $\text{ind}_H^G(\pi)$ avec support dans

H . Pour tout $f \in \text{ind}_H^G(\pi)$, on a une décomposition

$$f = \sum_{x \in G/H} x^{-1} \cdot i_{f(x)}$$

puisque $x^{-1} \cdot i_{f(x)}$ a son support dans Hx et vaut $f(x)$ en x (on peut consulter I.5.2 (b) de [Vig96] pour plus de détails).

Définition 1.1.12. Soit π une représentation de G et $g, h \in G$. On note π^g la représentation définie par $\pi^g(h) = \pi(g^{-1}hg)$ et on appelle normalisateur de π (noté $N_G(\pi)$) l'ensemble des $g \in G$ tel que $\pi^g \simeq \pi$.

Les deux propositions qui suivent sont des propriétés classiques que l'on utilisera souvent (voir par exemple [Vig96] I.5.5 et I.5.7).

Proposition 1.1.13 (Réciprocité de Frobenius). *Soit π une représentation de G et $\tilde{\pi}$ une représentation de H , la formule de réciprocité de Frobenius s'exprime alors en isomorphisme de R -modules*

$$\begin{aligned} \text{Hom}_G(\pi, \text{Ind}_H^G \tilde{\pi}) &\simeq \text{Hom}_H(\pi|_H, \tilde{\pi}) \\ m &\longmapsto (v \mapsto m(v)(1)) \end{aligned}$$

En d'autres termes, le foncteur d'induction est l'adjoint à droite du foncteur de restriction pour les catégories $\mathcal{R}_R(G)$ et $\mathcal{R}_R(H)$.

Si de plus le sous-groupe H est ouvert, le foncteur de restriction est également l'adjoint à droite du foncteur d'induction à support compact, et on a

$$\begin{aligned} \text{Hom}_G(\text{ind}_H^G \pi, \tilde{\pi}) &\simeq \text{Hom}_H(\pi, \tilde{\pi}|_H) \\ m &\longmapsto (v \mapsto m(i_v)) \end{aligned}$$

où $i_v(h) = \pi(h)(v)$.

Proposition 1.1.14 (Formule de Mackey). *Soit H et K deux sous-groupes fermés de G tels que la double classe HgK soit ouverte et fermée pour tout $g \in G$ (condition qui est vérifiée si H ou K est ouvert). Pour θ une représentation de H , on a*

$$(\text{Ind}_H^G \theta)|_K = \bigoplus_{g \in H \backslash G / K} \text{Ind}_{K \cap H^g}^K \theta^g.$$

1.1.4 Induction parabolique

L'induction parabolique est un cas particulier d'induction (c'est-à-dire qu'elle permet de construire une représentation d'un groupe à partir d'une représentation d'un sous-groupe) qui est très utile quand on travaille avec des groupes réductifs p -adiques.

Soit G un groupe réductif p -adique, et soit (P, M, N) un triplet parabolique de G , c'est-à-dire que P est un sous-groupe parabolique de G , le sous-groupe M est un sous-groupe de Levi de P et N est le radical unipotent associé, de sorte que $P = MN$ et $M \cap N = \{1\}$. Pour en apprendre plus sur les triplets paraboliques, on pourra consulter [Vig96] II.1.1 ou [Cas95] §1.

Définition 1.1.15. L'induction parabolique de M à G est la composée de l'inflation de M à P et de l'induction Ind_P^G . On la note i_P^G .

Remarque 1.1.16. L'induction et l'induction à support compact se comportent de la même façon ici puisque G/P est compact.

On définit rapidement les notions d'invariant et de co-invariant avant de définir le foncteur de restriction parabolique.

Définition 1.1.17. Soit (π, V) une représentation de G . On note $V(G)$ le sous-espace vectoriel de V engendré par les éléments $\pi(g)(v) - v$, avec $g \in G$ et $v \in V$. On pose $V_G = V/V(G)$.

Alors le foncteur des G -coinvariants est le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_R(G) & \longrightarrow & \mathcal{R}_R \\ V & \mapsto & V_G \end{array}$$

(avec \mathcal{R}_R la catégorie des R -modules) qui est exact à droite et est l'adjoint à gauche du foncteur trivial $\mathcal{R}_R \longrightarrow \mathcal{R}_R(G)$ (qui à un espace-vectoriel V associe la représentation triviale $(1, V)$).

Ceci permet de définir le foncteur de restriction parabolique r_P^G qui est la composée de la restriction de G à P et du foncteur des N -coinvariants de sorte que r_P^G est l'adjoint à gauche de i_P^G .

Remarque 1.1.18. On observe alors les propriétés suivantes par composition :

1. Le foncteur r_P^G est exact à droite.
2. Le foncteur i_P^G est exact à gauche.

On a aussi la propriété de transitivité suivante (cf [Ren10] VI.1.4).

Proposition 1.1.19. Si $P = MN$ et $Q = LU$ sont deux sous-groupes paraboliques de G munis d'une décomposition de Levi, avec $P \subset Q$, on a

$$i_P^G = i_Q^G \cdot i_{P \cap L}^L.$$

On introduit maintenant la notion de cuspidalité, dont on aura besoin fréquemment et qui interviendra dans la description des blocs.

Définition 1.1.20. Une représentation (π, V) de G est dite cuspidale si elle vérifie une des deux propriétés équivalentes suivantes :

1. pour tout triplet parabolique (P, M, N) de G vérifiant $M \neq G$, on a $r_P^G(V) = 0$;
2. pour tout triplet parabolique (P, M, N) de G vérifiant $M \neq G$ et pour toute représentation ρ de M , on a $\text{Hom}_G(\pi, i_P^G(\rho)) = 0$.

Une représentation irréductible (π, V) de G est donc cuspidale si et seulement si elle n'apparaît pas comme une sous-représentation d'une induite parabolique propre (c'est-à-dire que le sous-groupe de Levi est différent de G).

Remarque 1.1.21. Comme on a vu à la remarque 1.1.18, le foncteur de restriction parabolique est exact à droite et par conséquent, tout quotient d'une représentation cuspidale est également cuspidal.

Définition 1.1.22. Une représentation irréductible de G est dite supercuspidale si elle n'apparaît pas comme un sous-quotient d'une induite parabolique propre d'une représentation irréductible.

Pour un exemple d'une représentation cuspidale non supercuspidale, on peut consulter [Vig96] II.2.5.

Définition 1.1.23. Une paire cuspidale de G est un couple (M, θ) , avec M un sous-groupe de Levi de G et θ une représentation de M irréductible et cuspidale. La classe de G -conjugaison de (M, θ) est l'ensemble des (M^g, θ^g) pour $g \in G$.

Définition 1.1.24. Soit (π, V) une représentation de G , le support cuspidal de π est la classe de G -conjugaison d'une paire cuspidale (M, θ) de G telle qu'il existe un sous-groupe parabolique P ayant M comme sous-groupe de Levi vérifiant que la représentation π soit isomorphe à une sous-représentation de $i_P^G(\theta)$.

Le support cuspidal est unique, voir par exemple [MS14a] théorème 2.1 ou [Vig96] II.2.20.

Définition 1.1.25. Une paire supercuspidale de G est un couple (M, θ) , avec M un sous-groupe de Levi de G et θ une représentation de M irréductible et supercuspidale. Soit (π, V) une représentation irréductible de G , le support supercuspidal de π est une paire supercuspidale (M, θ) de G telle qu'il existe un sous-groupe parabolique P ayant M comme sous-groupe de Levi vérifiant que la représentation π soit un sous-quotient de $i_P^G(\theta)$.

Définition 1.1.26. Deux paires cuspidales (M, θ) et $(\tilde{M}, \tilde{\theta})$ sont dites inertiuellement équivalentes s'il existe un caractère non ramifié χ de M tel que (M, θ) et $(\tilde{M}, \tilde{\theta}\chi)$ soient G -conjuguées. On note $[M, \theta]_G$ la classe d'équivalence inertielle de (M, θ) .

Pour montrer qu'une proposition est vraie pour des représentations, il est courant de commencer par montrer qu'elle est vraie pour les représentations cuspidales ou supercuspidales, puis de généraliser en utilisant l'induction parabolique. Par exemple, on peut trouver ce procédé dans la preuve qu'une représentation irréductible de G est admissible et admet un caractère central (cf [Vig96] II.2.8) ou aussi plus bas dans ce texte (par exemple pour la proposition 4.2.2).

1.1.5 La catégorie $\mathcal{R}_R^{lf}(G)$

On présente ici le cadre dans lequel on va désormais travailler.

Notation 1.1.27. On note \mathbb{Z}_l l'anneau des entiers du corps des nombres l -adiques \mathbb{Q}_l et \mathbb{F}_l le corps résiduel de \mathbb{Z}_l . On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}_l}$ de \mathbb{Q}_l , on note $\overline{\mathbb{Z}_l}$ son anneau des entiers et $\overline{\mathbb{F}_l}$ le corps résiduel de $\overline{\mathbb{Z}_l}$.

Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p et soit D une algèbre à division centrale de dimension finie sur F de degré réduit d . On fixe ϖ_F une uniformisante de F , et ϖ_D une uniformisante de D telle que $\varpi_D^d = \varpi_F$. On fixe également $m \geq 1$ et on s'intéresse aux représentations lisses de $G = \mathrm{GL}_m(D)$ à coefficients dans un corps R algébriquement clos et de caractéristique l différente de p . Plus tard on prendra $R = \overline{\mathbb{F}_l}$.

Notons que pour ce groupe $G = \mathrm{GL}_m(D)$, il y a unicité du support supercuspidal des représentations irréductibles de G , d'après [MS14a] Théorème 8.16.

On définit maintenant certaines sous-catégories de $\mathcal{R}_R(G)$.

Définition 1.1.28. Pour w un caractère central d'une représentation de $\mathcal{R}_R(G)$, on note $\mathcal{R}_R(G, w)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{R}_R(G)$ des représentations ayant w pour caractère central. On note aussi $\mathcal{R}_R^{lf}(G)$ et $\mathcal{R}_R^{lf}(G, w)$ les sous-catégories pleines de $\mathcal{R}_R(G)$ et $\mathcal{R}_R(G, w)$ respectivement où les objets sont les représentations de longueur finie.

On a aussi la proposition suivante, qui est le résultat II.2.8 de [Vig96].

Proposition 1.1.29. *Toutes les représentations irréductibles de G sont admissibles et admettent un caractère central.*

On introduit à présent la notion de bloc d'une catégorie.

Définition 1.1.30. Une catégorie abélienne \mathcal{R} est une somme directe de deux sous-catégories pleines \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 si pour tout objet $V \in \mathcal{R}$, il existe une décomposition unique $V = V_1 \oplus V_2$ avec $V_1 \in \mathcal{R}_1$, $V_2 \in \mathcal{R}_2$, et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(V_1, V_2) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(V_2, V_1) = 0$.

Un facteur direct de la catégorie \mathcal{R} est appelé indécomposable quand on ne peut pas le

décomposer de cette manière (avec \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 non triviales), et dans ce cas on dit que c'est un bloc de la catégorie \mathcal{R} .

L'intérêt de cette notion est qu'alors les représentations et les morphismes se décomposent suivant les blocs, et par conséquent la compréhension de la catégorie est équivalente à la compréhension des blocs. La condition demandant que les facteurs soient indécomposables permet d'assurer que la décomposition soit la plus fine possible.

1.1.6 Réduction modulo l

On se place dans le même cadre suivant : $G = \mathrm{GL}_m(D)$ avec D une algèbre à division sur un corps F de caractéristique résiduelle p .

Définition 1.1.31. On dit qu'une $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -représentation (π, V) de G admet une structure entière si elle a un sous- $\overline{\mathbb{Z}_l}$ -module stable par G et engendré par une base de V sur $\overline{\mathbb{Q}_l}$. Si c'est le cas et que la représentation est également admissible, on dit qu'elle est entière.

On a les propriétés suivantes d'après [Vig96] II.5.11 et [Vig04] Théorème 1.

Proposition 1.1.32. *On considère une $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -représentation irréductible entière π de G . Alors,*

1. *les structures entières de π sont toutes de type fini comme $\overline{\mathbb{Z}_l}G$ -modules ;*
2. *si \mathfrak{v} est une structure entière de π , alors la représentation de G sur $\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbb{F}_l}$ est de longueur finie ;*
3. *la semi-simplifiée de $\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbb{F}_l}$ ne dépend que du choix de la classe d'isomorphisme de π (et pas du choix de \mathfrak{v}).*

On désigne par $\mathcal{G}(G, R)$ le groupe de Grothendieck des R -représentations de longueur finie de G .

Notation 1.1.33. *On note $r_l(\pi)$ la semi-simplifiée de $\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbb{F}_l}$, et on obtient par linéarité le morphisme de réduction modulo l*

$$r_l : \mathcal{G}(G, \overline{\mathbb{Q}_l})^{\mathrm{ent}} \longrightarrow \mathcal{G}(G, \overline{\mathbb{F}_l})$$

où $\mathcal{G}(G, \overline{\mathbb{Q}_l})^{\mathrm{ent}}$ désigne le sous-groupe de $\mathcal{G}(G, \overline{\mathbb{Q}_l})$ engendré par les classes de $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -représentations irréductibles entières de G .

On a également les propositions suivantes ([Vig04] II.3 et [Vig96] II.4.14) sur la compatibilité entre l'induction et la réduction modulo l .

Proposition 1.1.34. Soit H un sous-groupe ouvert de G et θ une $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -représentation entière de H . Pour \mathfrak{v} une structure entière de θ , le module $\mathbf{i}(\mathfrak{v})$ des fonctions à valeur dans \mathfrak{v} est une structure entière de $\text{ind}_H^G(\theta)$ et de plus le morphisme naturel de $\mathbf{i}(\mathfrak{v}) \otimes \overline{\mathbb{F}_l}$ dans $\text{ind}_H^G(\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbb{F}_l})$ est un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}_l}$ -représentations. Si en outre $\text{ind}_H^G(\theta)$ est de longueur finie, alors $r_l(\text{ind}_H^G(\theta))$ est égal à $\text{ind}_H^G(r_l(\theta))$ dans le groupe de Grothendieck des représentations de G .

Proposition 1.1.35. Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G muni d'une décomposition de Levi et soit θ une $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -représentation entière de M . Pour \mathfrak{v} une structure entière de θ , le sous-espace $\mathbf{i}(\mathfrak{v})$ des fonctions à valeur dans \mathfrak{v} est une structure entière de $i_P^G(\theta)$ et de plus le morphisme naturel de $\mathbf{i}(\mathfrak{v}) \otimes \overline{\mathbb{F}_l}$ dans $i_P^G(\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbb{F}_l})$ est un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}_l}$ -représentations. Si en outre $i_P^G(\theta)$ est de longueur finie, alors $r_l(i_P^G(\theta))$ est égal à $i_P^G(r_l(\theta))$ dans le groupe de Grothendieck des représentations de G .

On introduit aussi un caractère particulier, très présent dans la suite du texte, ainsi que plusieurs invariants.

Notation 1.1.36 (caractère valeur absolue de la norme réduite). La valeur absolue normalisée de F (qui à une uniformisante de F associe q^{-1}) définit un R -caractère de F^\times . En composant la norme réduite de $M_m(D)$ avec ce caractère, on obtient un R -caractère de G que l'on note ν .

Définition 1.1.37. Soit ρ une R -représentation irréductible cuspidale de G , on définit les invariants suivants :

1. on appelle nombre de torsion et on note $n(\rho)$ le nombre de caractères non ramifiés χ de G vérifiant $\rho\chi \simeq \rho$, ce nombre est fini par une conséquence de la théorie des types (voir sous la définition 3.12 de [MS14b]) ;
2. on définit également l'invariant $\epsilon(\rho)$ comme l'ordre de $q^{n(\rho)}$ dans $(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^\times$, qui est aussi $\min \{k \geq 1 \mid \rho\nu^k \simeq \rho\}$ (voir le lemme 3.6 de [MS17]) ;
3. D'après le théorème 6.14 de [MS14a], il existe un entier $k(\rho) \geq 1$ et un entier r avec $rk(\rho) = m$ tels que ρ apparaisse comme sous-quotient de l'induite parabolique d'une représentation supercuspidale irréductible du sous-groupe de Levi $\text{GL}_r(D) \times \cdots \times \text{GL}_r(D)$. Ceci définit l'invariant $k(\rho)$ comme le nombre de terme du support supercuspidal de ρ ;
4. enfin on utilisera l'invariant $s(\rho)$, que l'on définit de manière indépendante à la définition 1.3.5.

On définit maintenant la notion de représentations dépendantes, l'intérêt étant qu'une fois l'existence des blocs établie, deux représentations dépendantes appartiennent forcément au même bloc.

Notation 1.1.38. *On dit que deux R -représentations π_1 et π_2 de G sont dépendantes s'il existe une représentation indécomposable de longueur finie contenant π_1 et π_2 comme sous-quotients.*

On introduit à présent un lemme dont on se servira pour montrer que des sous-catégories pleines de $\mathcal{R}_R^{lf}(G)$ que l'on suspecte être des blocs sont effectivement des blocs. Ce lemme se base sur le lemme 2.2.6 de [EH14], qui utilise des représentations sur des anneaux de valuation complets, ce qui n'est pas le cas pour nos représentations. Pour se ramener au cas complet, on utilise la proposition II.4.7 de [Vig96] pour réaliser une représentation sur $\overline{\mathbb{Q}_l}$ comme une représentation sur une extension finie de \mathbb{Q}_l (qui est donc complète).

Lemme 1.1.39. *Si deux $\overline{\mathbb{F}_l}$ -représentations irréductibles de G apparaissent dans la réduction modulo l d'une même représentation entière irréductible, alors ces deux représentations sont dépendantes.*

Preuve. On utilise le lemme 2.2.6 de [EH14]. Commençons par montrer que l'on peut s'en servir sur $\overline{\mathbb{Q}_l}$. Soit V une représentation de G irréductible et entière à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}_l}$. D'après la proposition II.4.7 de [Vig96], il existe une extension finie E de \mathbb{Q}_l telle que la représentation V soit isomorphe à $V_E \otimes_E \overline{\mathbb{Q}_l}$ avec V_E une représentation de E qui engendre V sur $\overline{\mathbb{Q}_l}$. On note \mathfrak{o}_E l'anneau des entiers de E et \mathfrak{k}_E son corps résiduel. On note également L une structure entière de V (c'est-à-dire un sous- $\overline{\mathbb{Z}_l}$ -module G -stable et qui engendre V), ce qui définit L_E une structure entière de V_E (c'est-à-dire un sous- \mathfrak{o}_E -module G -stable et qui engendre V_E) qui est telle que $L = L_E \otimes_{\mathfrak{o}_E} \overline{\mathbb{Z}_l}$.

On pose $\overline{L}_E = L_E \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{k}_E$ et on désigne par S_E l'ensemble des sous-quotients irréductibles de \overline{L}_E . On définit alors $\overline{L} = L \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_l}} \overline{\mathbb{F}_l}$ (de sorte que $\overline{L} = \overline{L}_E \otimes_{\mathfrak{k}_E} \overline{\mathbb{F}_l}$) et on désigne par S l'ensemble des sous-quotients irréductibles de \overline{L} (de sorte que pour tout $s \in S$ il existe $s_E \in S_E$ tel que $s = s_E \otimes_{\mathfrak{k}_E} \overline{\mathbb{F}_l}$). Soit T un sous-ensemble strict de S , il est associé à T_E un sous-ensemble strict de S_E (tel que $T = \overline{T}_E \otimes_{\mathfrak{k}_E} \overline{\mathbb{F}_l}$). Alors le lemme 2.2.6 de [EH14] (utilisable car \mathfrak{o}_E est complet) énonce qu'il existe L'_E une structure entière de V_E telle que $\overline{L}'_E = L'_E \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{k}_E$ n'ait parmi ses sous-représentations irréductibles aucun élément de T_E , par conséquent cela définit L' une structure entière de V (on a $L' = L'_E \otimes_{\mathfrak{o}_E} \overline{\mathbb{Z}_l}$) telle que $\overline{L}' = L' \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_l}} \overline{\mathbb{F}_l}$ (on a $\overline{L}' = \overline{L}'_E \otimes_{\mathfrak{k}_E} \overline{\mathbb{F}_l}$) n'ait parmi ses sous-représentations irréductibles aucun élément de T (puisque la propriété analogue est vraie pour \overline{L}'_E et T_E).

On a donc généralisé le lemme 2.2.6 de [EH14] au cas des $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -représentations de G . Comme la réduction modulo l de π ne dépend pas de la structure entière choisie (voir proposition 1.1.32), ce lemme permet de contrôler le socle de $r_l(\pi)$.

Par définition de la semi-simplification, une écriture de la réduction modulo l de π

est $\bigoplus_{i=0}^{n-1} V_{i+1}/V_i$ avec

$$1 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = \overline{L}$$

et V_{i+1}/V_i irréductible pour $0 \leq i \leq n-1$. Fixons ρ un sous-quotient irréductible de \overline{L} qui apparaît dans la réduction modulo l de π . On choisit pour T le sous-ensemble de S des sous-quotients irréductibles ρ' de \overline{L} tels que ρ et ρ' soient dépendantes. On veut montrer que $T = S$. Si ce n'est pas le cas (par l'absurde), alors d'après le lemme susmentionné, il existe L' une structure entière de V tel que si on écrit

$$1 = V'_0 \subset V'_1 \subset \cdots \subset V'_n = \overline{L}'$$

avec V'_{i+1}/V'_i irréductible pour $0 \leq i \leq n-1$, alors aucune sous-représentation irréductible de \overline{L}' n'est dans T , c'est-à-dire aucune sous-représentation irréductible de \overline{L}' n'est un sous-quotient irréductible de \overline{L} apparaissant dans la même représentation indécomposable et de longueur finie que ρ .

Or, V'_1 est une sous-représentation de \overline{L}' donc on a

$$\overline{L}' = L_1 \oplus L_2$$

avec L_1 qui contient ρ et L_2 qui contient V'_1 .

Considérons alors un sous-module indécomposable L'_1 de L_1 contenant ρ . N'importe quelle sous-représentation irréductible de L'_1 est une sous-représentation de \overline{L}' qui appartient à T , ce qui est absurde puisqu'aucune sous-représentation de \overline{L}' n'appartient à T .

Rappelons certains résultats sur les réductions modulo l qui sont extraits de la première section de [MS17] §1.4 et 1.6. La proposition qui suit décrit la forme de la réduction modulo l d'une représentation cuspidale l -adique irréductible.

Proposition 1.1.40. *Soit $\tilde{\rho}$ une représentation irréductible cuspidale l -adique entière de G . Alors il existe une représentation irréductible cuspidale l -modulaire ρ de G et un unique entier $a \geq 1$ tel que*

$$r_l(\tilde{\rho}) = \rho + \rho\nu + \cdots + \rho\nu^{a-1}.$$

Définition 1.1.41. Soit $\tilde{\rho}$ une représentation irréductible cuspidale l -adique entière de G et soit ρ une représentation irréductible cuspidale l -modulaire de G . On dit $\tilde{\rho}$ relève ρ (ou est un relèvement de ρ) si ρ apparaît dans la réduction modulo l de $\tilde{\rho}$.

Remarque 1.1.42. Il est fréquent de rencontrer une définition alternative de relèvement où $\tilde{\rho}$ relève ρ si ρ est exactement la réduction modulo l de $\tilde{\rho}$.

La proposition qui suit apporte une réponse à la question de savoir quand une $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible cuspidale de G admet un relèvement de longueur $a > 1$.

Proposition 1.1.43. *Soit ρ une $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible cuspidale de G et soit $a > 1$. On note v la valuation l -adique normalisée sur \mathbb{Z} (par $v(l) = 1$). Alors, il existe une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale entière $\tilde{\rho}$ dont la réduction modulo l contienne ρ et soit de longueur a si et seulement si :*

1. *il existe un entier $u \in \{0, \dots, v(s(\rho))\}$ tel que $a = \epsilon(\rho)l^u$*
2. *l'entier a divise l'entier $s(\rho)$ et $\text{pgcd}(\frac{s(\rho)}{a}, k(\rho)) = 1$.*

Et la proposition qui suit (théorème 3.27 de [MS14b]) traite le cas où $a = 1$.

Proposition 1.1.44. *Pour toute $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation ρ irréductible supercuspidale, il existe une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation $\tilde{\rho}$ irréductible cuspidale entière telle que $r_l(\tilde{\rho})$ soit égale à ρ .*

Cette dernière proposition n'est pas vraie si l'on suppose seulement que ρ est irréductible et cuspidale, voir par exemple [MS14b] 3.31.

Remarque 1.1.45. Si ρ est supercuspidale, alors d'une part elle se relève forcément en une représentation cuspidale sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ (on peut même choisir un relèvement $\tilde{\rho}$ tel que la réduction modulo l de $\tilde{\rho}$ soit ρ , cf théorème 3.27 de [MS14b]) et d'autre part on a $k(\rho) = 1$. De plus, si $\epsilon(\rho) = 1$, on a $\rho\nu \simeq \rho$ par définition de l'invariant ϵ . Ainsi, d'après la proposition 1.1.43 il y a trois cas possibles (non disjoints) :

1. si $\epsilon(\rho) = 1$, la réduction modulo l de n'importe quel relèvement de ρ ne contient que des copies de ρ ;
2. si $\epsilon(\rho) \nmid s(\rho)$, les réductions modulo l des relèvements de ρ sont forcément de longueur 1 ;
3. si $\epsilon(\rho) \mid s(\rho)$, alors (en prenant $u = 0$ dans la proposition 1.1.43) la représentation ρ admet un relèvement dont la réduction modulo l est de longueur strictement supérieure à 1.

Conséquence. Si $\epsilon(\rho) \mid s(\rho)$, alors ρ et $\rho\nu$ sont dans la réduction modulo l d'une même représentation cuspidale irréductible sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ donc d'après le lemme 1.1.39 sont dépendantes.

1.2 Modules et homologie

Tous les modules sont considérés sur A une algèbre sur un anneau commutatif R .

Définition 1.2.1. Un A -module M est dit projectif si le foncteur $N \longmapsto \text{Hom}_A(M, N)$ qui à un A -module N associe le R -module des morphismes de A -modules de M dans N est exact.

Proposition 1.2.2. *Soit P, M, N trois A -modules. Un module P est projectif si et seulement si pour tout morphisme surjectif $f : M \longrightarrow N$ et tout morphisme $u : P \longrightarrow N$, il existe un morphisme $v : P \longrightarrow M$ tel que $u = f \circ v$.*

Le diagramme suivant illustre la proposition :

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \swarrow v & \downarrow u \\ M & \xrightarrow{f} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

Preuve. Comme le foncteur $\text{Hom}_A(P, \cdot)$ est exact à gauche (cf [Ass97] théorème IV.1.2 par exemple), le module P est projectif si et seulement si le foncteur $\text{Hom}_A(P, \cdot)$ est aussi exact à droite, c'est-à-dire si et seulement si étant donné une suite exacte de A -modules

$$M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

la suite

$$\text{Hom}(P, M) \longrightarrow \text{Hom}(P, N) \longrightarrow 0$$

est également exacte, ce qui donne le résultat.

La notion duale est la notion de module injectif.

Définition 1.2.3. Un A -module M est dit injectif si le foncteur $M \mapsto \text{Hom}_A(M, N)$ qui à un A -module M associe le R -module des morphismes de A -modules de M dans N est exact.

On a une proposition similaire pour les modules injectifs.

Proposition 1.2.4. *Soit P, M, N trois A -modules. Un module I est injectif si et seulement si pour tout morphisme injectif $f : M \longrightarrow N$ et tout morphisme $u : M \longrightarrow I$, il existe un morphisme $v : N \longrightarrow I$ tel que $u = v \circ f$.*

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & M \xrightarrow{f} N \\ & & \downarrow u \quad \swarrow v \\ & & I \end{array}$$

Définition 1.2.5. Une enveloppe projective d'un A -module M est la donnée d'un couple (P, p) où P est un A -module projectif et $p : P \longrightarrow M$ est un morphisme surjectif tel que pour tout couple (P', p') avec P' un autre A -module projectif et $p' : P' \longrightarrow M$ un autre morphisme surjectif, alors il existe un morphisme surjectif $f : P' \longrightarrow P$ tel que

$$p \circ f = p'$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P' & & \\
 & & \downarrow p' & & \\
 P & \xrightarrow{p} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & \nwarrow f & \downarrow & & \\
 & & 0 & &
 \end{array}$$

On sait que pour un module M quelconque, le foncteur $\text{Hom}_A(M, \cdot)$ n'est pas exact en général. Pour corriger cela, on peut approcher M par des modules projectifs en utilisant la notion de résolution projective. On obtient via ce procédé des nouveaux foncteurs, dits foncteurs d'extension, que l'on va étudier maintenant.

Définition/Proposition 1.2.6. Pour tout A -module M , il existe une suite exacte

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

où les modules P_i sont projectifs. Une telle suite s'appelle une résolution projective de M .

L'existence d'une telle suite se montre par récurrence sur n , puisque tout module est quotient d'un module projectif ([Ass97] III.3.6).

Il y a une notion duale de résolution injective :

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_0} I_0 \xrightarrow{f_1} I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{n-1} \xrightarrow{f_n} I_n \longrightarrow \cdots$$

Définition 1.2.7. Un complexe de A -modules est une suite de A -modules $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et d'application linéaire $d_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$ (comme illustré ci-dessous) vérifiant $\text{Im}(d_{n+1}) \subset \text{Ker}(d_n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

De manière duale, un complexe ascendant est une suite de A -modules $(C^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et d'application linéaire $d^n : C^n \longrightarrow C^{n+1}$ (comme illustré ci-dessous) vérifiant $\text{Im}(d_{n-1}) \subset \text{Ker}(d_n)$.

$$\cdots \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C^n \xrightarrow{d_n} C^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

Définition 1.2.8. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Le n -ième module d'homologie d'un complexe $(C_k, d_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est

$$H_n(C_k, d_k) = \text{Ker}(d_n) / \text{Im}(d_{n+1}).$$

Les éléments de $\text{Ker}(d_n)$ sont appelés cycles et les éléments de $\text{Im}(d_{n+1})$ sont appelés bords.

Là encore, on a une notion duale, le n -ième module de cohomologie d'un complexe ascendant $(C^k, d^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est

$$H^n(C^k, d^k) = \text{Ker}(d^n) / \text{Im}(d^{n-1}).$$

Les éléments de $\text{Ker}(d^n)$ sont appelés cocycles et les éléments de $\text{Im}(d_{n-1})$ sont appelés cobords.

L'intérêt de cette notion est de mesurer le défaut d'exactitude d'un complexe.

Définition 1.2.9. Soit (C_n, d_n) et (C'_n, d'_n) deux complexes. On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ (avec $f_n : (C_n, d_n) \longrightarrow (C'_n, d'_n)$ un morphisme de A -modules) est un morphisme de complexes si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a l'égalité

$$f_{n-1} \circ d_n = d'_n \circ f_n$$

ce qui équivaut à dire que le diagramme qui suit est commutatif.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{d'_n} & C'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Définition 1.2.10 (Espace d'extension). Soient M et N deux A -modules et soit $n \in \mathbb{N}$ non nul. On considère une résolution projective de M :

$$\cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0.$$

On considère le complexe obtenu en supprimant M et on applique le foncteur contravariant $\text{Hom}_A(\cdot, N)$:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(P_0, N) \xrightarrow{\text{Hom}(d_1, N)} \text{Hom}(P_1, N) \xrightarrow{\text{Hom}(d_2, N)} \text{Hom}(P_2, N) \longrightarrow \cdots$$

On définit alors le n -ième espace d'extension de N par M comme le n -ième espace de cohomologie du complexe obtenu :

$$\text{Ext}_A^n(M, N) = \text{Ker}(\text{Hom}(d_{n+1}, N)) / \text{Im}(\text{Hom}(d_n, N)).$$

Quand il n'y aura pas d'ambiguïté, on notera simplement $\text{Ext}^n(M, N)$. On note dans la proposition ci-dessous les propriétés des espaces d'extension dont on aura besoin. On peut trouver les preuves dans [Ass97] chapitre IX ou dans [Rot02] section 9.6.

Proposition 1.2.11. 1. *L'espace d'extension ne dépend pas du choix de la résolution projective, et il existe également une autre construction avec une résolution injective qui donne le même espace.*

2. *Si on a une suite exacte courte de A -modules*

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0,$$

alors il existe une suite exacte longue de cohomologie

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}(M_3, N) \longrightarrow \text{Hom}(M_2, N) \longrightarrow \text{Hom}(M_1, N) \longrightarrow \text{Ext}^1(M_3, N) \longrightarrow \\ \longrightarrow \text{Ext}^1(M_2, N) \longrightarrow \text{Ext}^1(M_1, N) \longrightarrow \text{Ext}^2(M_3, N) \longrightarrow \text{Ext}^2(M_2, N) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

et il existe aussi une suite exacte longue de cohomologie duale pour le foncteur $\text{Hom}(N, \cdot)$:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}(N, M_1) \longrightarrow \text{Hom}(N, M_2) \longrightarrow \text{Hom}(N, M_3) \longrightarrow \text{Ext}^1(N, M_1) \longrightarrow \\ \longrightarrow \text{Ext}^1(N, M_2) \longrightarrow \text{Ext}^1(N, M_3) \longrightarrow \text{Ext}^2(N, M_1) \longrightarrow \text{Ext}^2(N, M_2) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

3. *Un module M est projectif si et seulement si $\text{Ext}^1(M, \cdot)$ est nul.*

4. *Soit $n \in \mathbb{N}$, N un A -module, et $(M_i)_{i \in I}$ une famille de A -modules. On a*

$$\text{Ext}^n\left(\bigoplus_{i \in I} M_i, N\right) \simeq \prod_{i \in I} \text{Ext}^n(M_i, N)$$

et

$$\text{Ext}^n\left(N, \prod_{i \in I} M_i\right) \simeq \prod_{i \in I} \text{Ext}^n(N, M_i).$$

Définition 1.2.12. Soit M et N deux A -modules. On définit une relation d'équivalence sur les suites exactes courtes : on dit que les suites

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow L' \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

sont équivalentes s'il existe un morphisme $f : L \longrightarrow L'$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 1_N & & \downarrow f & & \downarrow 1_M \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

Alors l'ensemble des suites exactes courtes de cette forme s'identifie à $\text{Ext}_A^1(M, N)$ au sens du théorème IX.5.4 de [Ass97], et la classe d'équivalence de la suite scindée s'identifie au zéro de $\text{Ext}_A^1(M, N)$.

Soit G un groupe et R un corps. Pour définir les espaces d'extension sur des groupes, on définit l'algèbre $R[G]$ aussi notée RG qui est un R -module et on définit $\text{Ext}_G^1(M, N)$ comme $\text{Ext}_{RG}^1(M, N)$, où M et N sont des RG -modules lisses.

Lemme 1.2.13. *Soit M et N deux R -représentations irréductibles de G vérifiant*

$$\text{Ext}_G^1(M, N) \neq \{0\}.$$

Alors M et N sont dépendantes.

Preuve. Soit $L \in \text{Ext}_G^1(M, N)$, on a

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

la suite exacte courte correspondante. Si par l'absurde M et N ne sont pas dépendantes, alors on a une décomposition

$$L = L_1 \oplus L_2$$

avec L_1 contenant M et pas N et L_2 contenant N et pas M , donc $L = M \oplus N$ et toute extension de N par M est scindée, ce qui prouve $\text{Ext}_G^1(M, N) = \{0\}$.

1.3 Théorie des types

Dans cette section, on introduit des notions de la théorie des types de Bushnell et Kutzko, un outil qui aide à comprendre les catégories de représentations lisses de groupes p -adiques.

On rappelle les notations : F est un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p et D une algèbre à division centrale de dimension finie sur F de degré réduit d . On a fixé $m \geq 1$ un entier et on s'intéresse aux représentations de $G = \text{GL}_m(D)$ à coefficients dans un corps R algébriquement clos de caractéristique l non nulle et différente de p .

1.3.1 Strates simples

Soit $[\Lambda, n, 0, \beta]$ une strate simple de $M_m(D)$ au sens de la définition 1.15 de [Séc08]. Dans cette notation, Λ est une \mathfrak{o}_D -suite de réseaux de D^m , la notation n désigne un

entier strictement positif et la notation β désigne un élément de $M_m(D)$ vérifiant une condition. La suite de réseaux Λ définit un \mathfrak{o}_F -ordre héréditaire $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\Lambda)$ de $M_m(D)$ dont le radical est noté \mathfrak{P} (voir [Séc04] §1.2). On obtient également un sous-groupe ouvert compact $U(\Lambda) = U_0(\Lambda) = \mathfrak{A}(\Lambda)^\times$ de G et une filtration $U_k(\Lambda) = 1 + \mathfrak{P}^k$ (avec $k \geq 1$) de $U(\Lambda)$ (voir [Séc08] §1.2).

Alors, la sous- F -algèbre $F[\beta]$ de $M_m(D)$ engendrée par β est un corps que l'on note E . Le centralisateur B de E dans $M_m(D)$ est une E -algèbre centrale simple et $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap B$ est un \mathfrak{o}_E -ordre héréditaire de B dont le radical est $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P} \cap B$.

On peut associer à la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ deux sous-groupes ouverts compacts (voir [Séc08] §2.4)

$$J = J(\beta, \Lambda) \text{ et } H = H(\beta, \Lambda)$$

de $U(\Lambda)$. Pour k un entier strictement positif, on note alors

$$J^k = J^k(\beta, \Lambda) = J(\beta, \Lambda) \cap U_k(\Lambda)$$

et

$$H^k = H^k(\beta, \Lambda) = H(\beta, \Lambda) \cap U_k(\Lambda)$$

qui sont deux pro- p sous-groupes ouverts compacts. De plus, les groupes J^1 et H^1 sont des pro- p sous-groupes distingués de J et le groupe quotient J^1/H^1 est un p -groupe abélien fini.

Remarque 1.3.1. On a l'égalité

$$J = (U(\Lambda) \cap B^\times)J^1$$

(voir [MS14b] §2.3) qui induit un isomorphisme canonique de groupe

$$J/J^1 \simeq (U(\Lambda) \cap B^\times)/(U_1(\Lambda) \cap B^\times)$$

ce qui permet d'associer de façon canonique une représentation de J triviale sur J^1 à une unique représentation de $U(\Lambda) \cap B^\times$ triviale sur $U_1(\Lambda) \cap B^\times$.

1.3.2 Caractères simples

On choisit un morphisme injectif ι du groupe des racines complexes de l'unité ayant pour ordre une puissance de p vers le groupe multiplicatif R^\times . On choisit également un caractère complexe additif $\psi_{F,\mathbb{C}} : F \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ qui est trivial sur \mathfrak{p}_F mais n'est pas trivial sur \mathfrak{o}_F .

On peut alors associer à la strate simple $[\Lambda, n, 0, \beta]$ et à un entier m' positif vérifiant $m' \leq -k_0(\beta, \Lambda) - 1$ (où $k_0(\beta, \Lambda)$ est l'exposant critique de $[\Lambda, n, 0, \beta]$, voir le

paragraphe 1.6 de[Séc08]) un ensemble fini $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\Lambda, m', \beta)$ de caractères complexes de $H^{m'+1}(\beta, \Lambda)$. On appelle caractères simples de niveau m' les éléments de $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\Lambda, m', \beta)$. Pour $\theta \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\Lambda, m', \beta)$, et pour $0 \leq m' \leq -k_0(\beta, \Lambda) - 1$, l'application

$$\theta \longmapsto \iota \circ \theta$$

est bien définie. On note $\mathcal{C}_R(\Lambda, m', \beta)$ son image qui est un ensemble fini de R -caractères de $H^{m'+1}(\beta, \Lambda)$ que l'on appelle R -caractères de niveau m' .

On dispose alors d'une propriété de transfert : si on considère $\tilde{m} \in \mathbb{N}$ un entier non nul et $[\tilde{\Lambda}, \tilde{n}, 0, \tilde{\beta}]$ une strate simple de $M_{\tilde{m}}(D)$ telle qu'il existe un isomorphisme de F -algèbres $\phi : F[\beta] \longrightarrow F[\tilde{\beta}]$ avec $\phi(\beta) = \tilde{\beta}$, alors il existe une bijection $\mathcal{C}_R(\Lambda, 0, \beta) \longrightarrow \mathcal{C}_R(\tilde{\Lambda}, 0, \tilde{\beta})$ appelée application de transfert et qui est canoniquement associée à ϕ . On peut consulter [Séc08] §2.2 à 2.4 pour en apprendre davantage sur les R -caractères simples et leurs propriétés.

1.3.3 Représentations de Heisenberg

Considérons $\theta \in \mathcal{C}_R(\Lambda, 0, \beta)$ un R -caractère simple. Alors d'après [MS14b] §2.3, il existe une représentation irréductible et de dimension finie η du groupe J^1 dont la restriction à H^1 contient θ . De plus, la représentation η est unique à isomorphisme près, on l'appelle la représentation de Heisenberg associée à θ . Son ensemble d'entrelacement est $J^1 B^\times J^1 = J B^\times J$ et pour tout élément $y \in B^\times$, l'espace vectoriel

$$I_y(\eta) = \text{Hom}_{J^1 \cap (J^1)^y}(\eta, \eta^y)$$

est de dimension 1. De plus, l'induite de η à $U_1(\Lambda)$ est irréductible.

1.3.4 β -Extensions

On appelle β -extension de η (ou de θ) une représentation irréductible de J qui prolonge η et dont l'ensemble d'entrelacement contient B^\times . D'après la proposition 2.4 de [MS14b], tout R -caractère simple $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ admet une β -extension. De plus, si κ est une β -extension de θ , alors on peut décrire l'ensemble des β -extensions de θ , il s'agit de

$$\{\kappa \otimes (\chi \circ N_{B/E}) \mid \chi \text{ caractère de } \mathfrak{o}_E^\times \text{ trivial sur } 1 + \mathfrak{p}_E\}$$

où $N_{B/E}$ désigne la norme réduite de B sur E , et où $\chi \circ N_{B/E}$ est vu comme un caractère de J trivial sur J^1 via la remarque 1.3.1.

Une conséquence importante des β -extensions est le corollaire 2.8 de [MS14b] :

Proposition 1.3.2. *Soit π une représentation irréductible d'un sous-groupe ouvert de*

G contenant J . On suppose que π contient θ . Alors il y a une représentation κ de J prolongeant η et une représentation irréductible ξ de J triviale sur J^1 telle que $\kappa \otimes \xi$ soit une sous-représentation irréductible de la restriction de π à J .

1.3.5 Types simples

Pour cette sous-section, on pourra se référer à [Séc05] §4.1. On considère une strate simple $[\Lambda, n, 0, \beta]$ de $M_m(D)$ telle que $\mathfrak{A}(\Lambda) \cap B$ soit un \mathfrak{o}_E -ordre principal de B de période r . On fixe un isomorphisme de E -algèbres

$$\phi : B \longrightarrow M_{m'}(D')$$

avec m' un entier et D' une autre E -algèbre à division de degré réduit d' , de façon à pouvoir identifier $\mathfrak{A}(\Lambda) \cap B$ à un ordre principal standard. On a

$$m'd' = \frac{md}{[E : F]}$$

et on en déduit

$$J/J^1 \simeq (U(\Lambda) \cap B^\times)/(U_1(\Lambda) \cap B^\times) \simeq GL_s(\mathfrak{k}_{D'})^r$$

avec $m' = rs$.

Soit alors $\theta \in \mathcal{C}_R(\Lambda, 0, \beta)$ un caractère simple et soit κ une β -extension de θ . On considère une représentation irréductible cuspidale σ_0 du groupe $GL_s(\mathfrak{k}_{D'})$, la représentation $\sigma_0^{\otimes r}$ définit par inflation une représentation irréductible cuspidale σ de J triviale sur J^1 . On pose alors

$$\lambda = \kappa \otimes \sigma$$

et on appelle type simple de G un couple de la forme (J, λ) comme ci-dessus. Si de plus σ est supercuspidale, on parle de supertype simple.

Si $U(\Lambda) \cap B^\times$ est un sous-groupe ouvert compact maximal de B^\times , le type simple est dit maximal. Si la strate simple $[\Lambda, n, 0, \beta]$ est nulle, c'est-à-dire que $\beta = 0$ et $n = 0$, le type simple est dit de niveau 0 et on a $E = F$, avec de plus $J = U(\Lambda)$ et on choisit toujours pour κ le caractère trivial de $U(\Lambda)$.

1.3.6 Classification des représentations irréductibles cuspidales en terme de types

On considère (J, λ) un type simple maximal de G et $N = N_G(J, \lambda)$ le normalisateur dans G de la classe d'isomorphisme de λ dans G . On a la proposition suivante (cf [MS14b])

proposition 3.1)

Proposition 1.3.3. *Pour toute représentation Σ prolongeant λ à N , l'induite $\text{ind}_N^G(\Sigma)$ est une représentation irréductible cuspidale de G . De plus l'application*

$$\Sigma \longmapsto \text{ind}_N^G(\Sigma)$$

induit une bijection entre prolongements de λ à N et classes d'isomorphismes de représentations irréductibles cuspidales de G contenant λ .

Un tel couple (N, Σ) construit à partir d'une type simple maximal est appelé type simple maximal étendu de G . On a de plus le résultat suivant ([MS14b] 3.4 et 3.7), qui complète la classification des représentations irréductibles cuspidales en terme de types simples maximaux étendus.

Proposition 1.3.4. *Toute représentation irréductible cuspidale de niveau 0 (respectivement, non nul) de G contient un type simple maximal de niveau 0 (respectivement, non nul) unique à G -conjugaison près.*

On définit aussi deux invariants :

Définition 1.3.5. Soit ρ une représentation irréductible et cuspidale de G . On fixe un type simple maximal (J, λ) de G contenu dans ρ associé à une strate simple $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$. On pose $E = F(\beta)$ et on écrit la décomposition $\lambda = \kappa \otimes \sigma$. On note Γ le groupe de Galois $\text{Gal}(\mathfrak{k}_{D'}/\mathfrak{k}_E)$.

On définit alors l'invariant $s(\rho)$ comme l'ordre du stabilisateur de σ dans Γ et l'invariant $b = b(\rho)$ comme le cardinal de l'orbite de la classe d'isomorphisme de σ sous l'action de Γ .

Ces invariants sont indépendants du choix du type et ne dépendent que de ρ (proposition 3.13 de [MS14b]). Enfin on a la propriété suivante qui décrit l'ensemble d'entrelacement d'un type de niveau 0.

Proposition 1.3.6. *Soit (J, λ) un type simple maximal de niveau 0. L'ensemble d'entrelacement de λ dans G est égal au normalisateur $N_G(\lambda)$, qui est engendré par J et $\varpi_D^{b(\lambda)}$.*

1.4 Premiers théorèmes de décomposition d'une catégorie

1.4.1 Selon le caractère central

Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p et soit D une algèbre à division centrale de dimension finie sur F de degré

réduit d . Dans la suite, on fixe $m \geq 1$ et on s'intéresse aux représentations lisses de $G = \mathrm{GL}_m(D)$ à coefficients dans un corps R algébriquement clos de caractéristique l différente de p .

Théorème 1.4.1. *Soit (π, V) une représentation de G de longueur finie n . On note Ω l'ensemble des caractères centraux de sous-quotients irréductibles de V et pour $\omega \in \Omega$ on note V_ω la plus grande sous-représentation de V dont tous les sous-quotients irréductibles admettent ω pour caractère central. Alors la représentation V admet la décomposition*

$$V = \bigoplus_{\omega \in \Omega} V_\omega.$$

Preuve. On note r le cardinal de Ω . La preuve se fait par récurrence sur n et dépend largement du cas $r = n = 2$ qui est démontré ci-dessous. La preuve de l'hérédité est exactement la preuve de la proposition 1.7 de [SS16].

On traite donc le cas $r = n = 2$. Comme $r = 2$, il y a deux caractères centraux distincts de sous-quotients irréductibles de V . Comme de plus $n = 2$, la représentation V admet une sous-représentation W irréductible telle que V/W soit irréductible. On appelle ω le caractère central de W et ω' le caractère central de V/W . On note enfin Z le centre de G . Il s'agit de fabriquer un supplémentaire de W qui soit stable par G .

Soit W' un supplémentaire quelconque de W . Soit $v' \in W'$ et $z \in Z$, alors on peut écrire

$$\pi(z)(v') = a + b$$

avec $a \in W$ et $b \in W'$. Dans ce cas $b = \omega'(z)v'$. En effet, ceci découle du fait que ces deux éléments appartiennent à W' , et de la commutativité du diagramme suivant, où l'on utilise l'hypothèse selon laquelle V/W a pour caractère central ω' (dans le diagramme, l'application P désigne la projection canonique de V sur V/W , et pour $v \in V$, on désigne la classe de v dans V/W par \dot{v}) :

$$\begin{array}{ccc} v' \in W' & \xrightarrow{\pi(z)} & \begin{matrix} a & + & b \\ (\in W) & & (\in W') \end{matrix} \\ P \downarrow & & \downarrow P \\ \dot{v}' & \xrightarrow{\pi(z)} & \omega'(z)(\dot{v}') = \dot{b} \end{array}$$

On définit alors $\alpha : Z \rightarrow \mathrm{Hom}_R(W', W)$ via

$$\alpha(z)(v') = a.$$

L'application α est bien définie (c'est-à-dire qu'elle est bien à valeur dans $\mathrm{Hom}_R(W', W)$) puisque cela découle immédiatement de la R -linéarité de $\pi(z)$ pour tout $z \in Z$. Établis-

sons une relation sur α . Soit $z_1, z_2 \in Z$. On a

$$\pi(z_1 z_2)(v') = \pi(z_1)(\pi(z_2)(v')) = \pi(z_1)(a + b)$$

avec $a \in W$ et $b \in W'$ (plus précisément on a vu $b = \omega'(z_2)(v')$), d'où

$$\pi(z_1 z_2)(v') = \omega(z_1)a + \pi(z_1)(b) = \omega(z_1)a + a' + b'$$

avec $a' \in W$ et $b' \in W'$. On en déduit

$$\alpha(z_1 z_2)(v') = \omega(z_1)a + a' = \omega(z_1)\alpha(z_2)(v') + \alpha(z_1)(b)$$

or $b = \omega'(z_2)(v')$ d'où finalement

$$\alpha(z_1 z_2) = \omega(z_1)\alpha(z_2) + \omega'(z_2)\alpha(z_1).$$

Cette relation est appelée une relation de cocycle, et nous étudierons les relations de cocycle plus en détails dans le chapitre 2.

Les éléments z_1 et z_2 appartiennent au centre de G , par conséquent ils commutent et on en déduit

$$\alpha(z_2)(\omega(z_1) - \omega'(z_1)) = \alpha(z_1)(\omega(z_2) - \omega'(z_2)).$$

Or par hypothèse, les caractères ω et ω' sont distincts d'où l'existence d'un élément $z \in Z$ vérifiant $\omega(z) \neq \omega'(z)$. En choisissant $z_2 = z$ dans la dernière égalité, on en déduit

$$\alpha(z_1) = (\omega(z_1) - \omega'(z_1))x$$

avec

$$x = \frac{\alpha(z)}{\omega(z) - \omega'(z)}$$

une application linéaire de W' dans W qui ne dépend pas de z_1 . À partir de cette application x , on peut définir un endomorphisme de passage (explicitement, il fixe chaque élément de W et envoie un élément $v' \in W'$ sur $v' + x(v')$) qui donnera à partir de W' un supplémentaire Z -stable, sur lequel le centre agit via ω' . En effet, si on adopte un point de vue matriciel en se plaçant dans la base (W, W') , on a

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega(z) & \alpha(z) \\ 0 & \omega'(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega(z) & \alpha(z) - x(\omega(z) - \omega'(z)) \\ 0 & \omega'(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega(z) & 0 \\ 0 & \omega'(z) \end{pmatrix}.$$

On a maintenant un supplémentaire de W qui est Z -stable, que l'on appelle \tilde{W} (qui est l'image de W' par l'endomorphisme de passage), tel que le centre agisse sur W via ω et sur \tilde{W} via ω' . Montrons que ce supplémentaire est aussi G -stable. On se donne $v' \in \tilde{W}$,

ainsi que $g \in G$ et on veut montrer que $\pi(g)(v') \in \tilde{W}$. Écrivons

$$\pi(g)(v') = a + b$$

avec $a \in W$ et $b \in \tilde{W}$, de sorte qu'il s'agit à présent de montrer que a est nul. On rappelle que z est un élément de Z vérifiant $\omega(z) \neq \omega'(z)$ (il existe car par hypothèse ω et ω' sont distincts). Alors,

$$\pi(zg)(v') = \pi(z)(\pi(g)(v')) = \pi(z)(a + b) = \omega(z)a + \omega'(z)b$$

et

$$\pi(gz)(v') = \pi(g)(\pi(z)(v')) = \pi(g)(\omega'(z)v') = \omega'(z)\pi(g)(v') = \omega'(z)(a + b).$$

Or l'élément z est dans le centre donc $zg = gz$ et les deux termes ci-dessus sont égaux d'où $\omega(z)a = \omega'(z)a$, or par construction $\omega(z) \neq \omega'(z)$, ce qui entraîne $a = 0$, ce qu'on voulait.

Remarque 1.4.2. Ce théorème prouve que si deux représentations de G sont dans un même bloc de la catégorie $\mathcal{R}_R^{lf}(G)$, elles ont a fortiori le même caractère central.

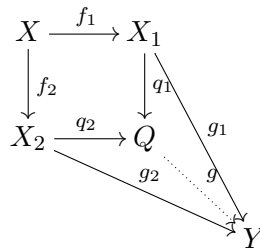
1.4.2 En utilisant les espaces d'extension

On commence par présenter la notion de somme amalgamée.

Définition 1.4.3. Soit A une R -algèbre. On considère $f_1 : X \rightarrow X_1$ et $f_2 : X \rightarrow X_2$ deux morphismes d'une catégorie \mathcal{C} de A -modules. Une somme amalgamée de f_1 et f_2 est la donnée d'un triplet (Q, q_1, q_2) où $Q \in \mathcal{C}$ est un objet de la catégorie et $q_1 : X_1 \rightarrow Q$ et $q_2 : X_2 \rightarrow Q$ sont deux morphismes vérifiant :

1. l'égalité $q_1 \circ f_1 = q_2 \circ f_2$;
2. de plus pour tout $Y \in \mathcal{C}$, s'il existe un couple de morphisme $g_1 : X_1 \rightarrow Y$ et $g_2 : X_2 \rightarrow Y$ vérifiant $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$, alors il existe un unique morphisme $g : Q \rightarrow Y$ tel que $g \circ q_1 = g_1$ et $g \circ q_2 = g_2$.

La situation peut être représentée par le schéma suivant.



On aura besoin sur cette notion du théorème suivant, qui est le théorème III.5.9 de [Ass97].

Théorème 1.4.4. *Considérons le diagramme suivant où la ligne du haut est exacte.*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{f_1} & M & \xrightarrow{f_0} & N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_2 & & & & \\ & & X & & & & \end{array}$$

Alors il existe une somme amalgamée (\tilde{M}, q_1, q_2) de f_1 et f_2 et un morphisme q_0 tel qu'on ait le diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{f_1} & M & \xrightarrow{f_0} & N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_2 & & \downarrow q_1 & & \uparrow Id_N \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{q_2} & \tilde{M} & \xrightarrow{q_0} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

On se propose de démontrer maintenant un théorème de décomposition de catégorie reposant sur l'utilisation des espaces Ext^1 .

Lemme 1.4.5. *On suppose qu'il existe un sous-ensemble S de R -représentations irréductibles de G tel que pour toute représentation $A \in S$ et toute représentation $B \notin S$ (le complémentaire étant pris dans l'ensemble des R -représentations irréductibles de G),*

$$\text{Ext}_G^1(A, B) = \{0\}.$$

On suppose qu'il existe une représentation V de longueur finie ayant tous ses composants irréductibles dans S , et une représentation W de longueur finie n'ayant aucun composant irréductible dans S . Alors

$$\text{Ext}_G^1(V, W) = \{0\}.$$

Preuve. On suit un raisonnement par dévissage. On note \bar{S} le complémentaire de S (dans l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de G) et on choisit dans W un quotient irréductible B (B existe car les représentations sont de longueur finie), avec $B \in \bar{S}$. On choisit également dans V une sous-représentation irréductible A , avec $A \in S$. La représentation V' est définie par la suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow V \longrightarrow V' \longrightarrow 0.$$

On en déduit la suite exacte

$$\text{Hom}(A, B) \longrightarrow \text{Ext}^1(V', B) \longrightarrow \text{Ext}^1(V, B) \longrightarrow \text{Ext}^1(A, B)$$

or $\text{Hom}(A, B) = \{0\}$ car A et B sont irréductibles et non isomorphes et $\text{Ext}^1(A, B) =$

$\{0\}$ par hypothèse. Par conséquent, $\text{Ext}^1(V, B) = \text{Ext}^1(V', B)$. On procède donc par récurrence sur la longueur de V : si V est irréductible, le résultat est donné par hypothèse, et s'il ne l'est pas le résultat se déduit de $\text{Ext}^1(V, B) = \text{Ext}^1(V', B)$ et de l'hypothèse de récurrence puisque V' a une longueur strictement inférieure à celle de V . Notons que cette méthode est possible car les représentations sont de longueur finie. On obtient donc $\text{Ext}^1(V, B) = \{0\}$. Définissons maintenant W' par la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow W' \longrightarrow W \longrightarrow B \longrightarrow 0.$$

On en déduit la suite exacte

$$\text{Hom}(V, B) \longrightarrow \text{Ext}^1(V, W') \longrightarrow \text{Ext}^1(V, W) \longrightarrow \text{Ext}^1(V, B)$$

or on a vu que $\text{Ext}^1(V, B) = \{0\}$ et de plus $\text{Hom}(V, B) = \{0\}$ car B est irréductible et appartient à \bar{S} . En procédant de la même façon que pour $\text{Ext}^1(V, B) = \{0\}$, on obtient $\text{Ext}^1(V, W) = \{0\}$.

Théorème 1.4.6. *Soit \mathcal{R} une sous-catégorie pleine de la catégorie des R -représentations lisses de longueur finie de G . On suppose qu'il existe un sous-ensemble S de représentations irréductibles de G tel que pour toute représentation $A \in S$ et toute représentation $B \notin S$ (le complémentaire étant pris dans l'ensemble des R -représentations irréductibles de G),*

$$\text{Ext}^1(A, B) = \{0\}.$$

Alors \mathcal{R} se décompose : $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2$ où \mathcal{R}_1 est la sous-catégorie pleine de \mathcal{R} des représentations dont tous les sous-quotients irréductibles appartiennent à S , et \mathcal{R}_2 est la sous-catégorie pleine de \mathcal{R} des représentations dont aucun sous-quotient irréductible n'appartient à S .

Preuve. Soit M une R -représentation de longueur finie de G . On considère X , la plus grande sous-représentation de M dont tous les composants irréductibles appartiennent à S , et Y , la plus grande sous-représentation de M dont aucun composant irréductible n'appartient à S . Montrons que $M \subset X \oplus Y$. Fixons $N = M/(X \oplus Y)$ et supposons par l'absurde N non nul. Le diagramme qui suit, où f_0 est la surjection naturelle de M dans N , où f_1 est l'injection naturelle de $X \oplus Y$ dans M , et où f_2 est la surjection naturelle de $X \oplus Y$ dans X , illustre la situation.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X \oplus Y & \xrightarrow{f_1} & M & \xrightarrow{f_0} & N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_2 & & & & \\ & & X & & & & \end{array}$$

D'après le théorème 1.4.4, il existe une somme amalgamée (M_X, q_1, q_2) de f_1 et f_2 et q_0

un morphisme tel qu'on ait le diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & X \oplus Y & \xrightarrow{f_1} & M & \xrightarrow{f_0} & N \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow f_2 & & \downarrow q_1 & & \uparrow Id_N \\
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{q_2} & M_X & \xrightarrow{q_0} & N \longrightarrow 0
\end{array}$$

D'après le lemme III.5.8 de [Ass97], q_1 est surjectif car f_2 l'est. On note i_1 l'injection canonique de X dans $X \oplus Y$ et q_3 la surjection canonique de M dans M/Y et on utilise alors la propriété universelle de la somme amalgamée (ce qui est possible car $q_3 f_1 = q_3 f_1 i_1 f_2$)

$$\begin{array}{ccc}
X \oplus Y & \xrightarrow{f_1} & M \\
\downarrow f_2 & & \downarrow q_1 \\
X & \xrightarrow{q_2} & M_X \\
& \searrow q_3 f_1 i_1 & \nearrow g \\
& & M/Y
\end{array}$$

qui nous donne l'existence d'un morphisme $g : M_X \rightarrow M/Y$ vérifiant $g q_1 = q_3$ et $g q_2 = q_3 f_1 i_1$. Montrons que g est injectif. Soit $x \in M_X$ tel que $g(x) = 0$. Alors il existe $\tilde{x} \in M$ tel que $x = q_1(\tilde{x})$ d'où

$$g(q_1(\tilde{x})) = 0$$

donc

$$q_3(\tilde{x}) = 0.$$

On en déduit que $\tilde{x} \in Y$ d'où

$$x = q_1(f_1(\tilde{x})) = q_2(f_2(\tilde{x})) = q_2(0) = 0$$

car Y est précisément le noyau de f_2 . Ainsi g est injective et elle est également surjective puisque $g q_1 = q_3$ qui est surjective. Ceci prouve que

$$M_X \simeq M/Y$$

donc d'une part tous les composants irréductibles de M_X appartiennent à S (en effet, si un composant irréductible M_S de $M_X \simeq M/Y$ n'appartient pas à S , alors la pré-image de M_S par l'opération de quotient par Y se décompose en $Y \oplus M_{\bar{S}}$, avec $M_{\bar{S}}$ une sous-représentation de M isomorphe à M_S , donc n'appartenant pas à S , ce qui contredit la maximalité de Y), et d'autre part $M \in \text{Ext}^1(M_X, Y)$ (d'après l'identification des espaces d'extension avec des suites exactes courtes donnée à la proposition 1.2.11). Or, cet espace d'extension est nul d'après le lemme précédent puisque M_X a tous ses

composants irréductibles dans S , et Y n'a aucun composant irréductible dans S . Donc

$$M = M_X \oplus Y$$

et M_X (qui contient X) est un sous-module de M qui contredit la maximalité de X sauf si $M_X = X$. Finalement on a $M = X \oplus Y$ avec $\text{Hom}(X, Y) = \text{Hom}(Y, X) = 0$, ce qui décompose la catégorie des R -représentations de longueur finie de G .

Chapitre 2

Cas de $\mathrm{GL}_1(D)$ et du niveau 0

Dans ce chapitre F est un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p et D est une algèbre à division centrale de dimension finie sur F de degré réduit d . On fixe $m \geq 1$ et on s'intéresse aux représentations lisses et de longueur finie de $G_m = \mathrm{GL}_m(D)$ à coefficients dans un corps $R = \overline{\mathbb{F}_l}$ algébriquement clos de caractéristique l non nulle et différente de p . On pose $n = md$. On s'intéresse ici au cas où $G_m = G = D^\times$ (on a $m = 1$). Le but de ce chapitre et de l'étude du cas particulier de la dimension 1 est de montrer comment le problème peut être résolu par des calculs de cocycles et cobords, calculs qui deviennent plus complexes quand on passe au cas général ce qui motive alors le recours à d'autres méthodes de résolution.

On note q le cardinal du corps résiduel $\mathfrak{k}_D = \mathfrak{o}_D/\mathfrak{p}_D$, et on note U^1 le groupe $1 + \mathfrak{p}_D$. On note enfin t une uniformisante de D choisie telle que $t^n \in F^\times$. Quand le groupe n'est pas précisé, les espaces d'extension sont considérés sur le groupe G .

2.1 Caractères χ vérifiant $\mathrm{Ext}_{D^\times}^1(\chi, 1) \neq \{0\}$

On commence par déterminer les R -caractères χ de G tel que $\mathrm{Ext}^1(\chi, 1) \neq \{0\}$, où 1 est le caractère trivial de G . En effet, de tels caractères seront automatiquement dépendants avec le caractère trivial de G (voir le lemme 1.2.13).

2.1.1 Préliminaires

Proposition 2.1.1. *Soit un caractère χ vérifiant $\mathrm{Ext}^1(\chi, 1) \neq \{0\}$. Alors χ est forcément non ramifié.*

Preuve. En effet, comme $\mathrm{Ext}^1(\chi, 1) \neq \{0\}$, les représentations χ et 1 sont dans le même bloc et ont donc même support supercuspidal à inertie près. Ceci découle de la décomposition de la catégorie des représentations de G de longueur quelconque, voir le

paragraphe 10.2 de [SS16]. Or ce sont des caractères de D^\times donc χ est en fait la tordue de 1 par un caractère non ramifié, et χ est par conséquent lui-même un caractère non ramifié.

Proposition 2.1.2. *Le nombre de caractères vérifiant $\text{Ext}^1(\chi, 1) \neq \{0\}$ est plus petit que le plus grand facteur de n premier à l , et ces caractères sont d'ordre divisant n .*

Preuve. D'une part, on sait qu'un tel caractère χ est dans le bloc du caractère trivial donc χ a un caractère central trivial (voir la décomposition en fonction du caractère central au théorème 1.4.1) et d'autre part le caractère χ est entièrement caractérisé par le choix de $\chi(t)$ (car il est non ramifié), où on rappelle que t est une uniformisante de D choisie de telle façon que $t^n \in F^\times$. On a alors $\chi(t^n) = 1$ d'où $\chi^n = 1$. De plus, on observe que si l'on écrit $n = M'l^{s'}$ avec $\text{pgcd}(M', l) = 1$, le nombre de solutions à l'équation $z^n = 1$ dans R qui est de caractéristique l est M' car

$$z^n - 1 = (z^{M'} - 1)^{l^{s'}}$$

par itération du morphisme de Frobenius sur R .

2.1.2 Restriction à \mathfrak{o}_D^\times

À présent, on se propose de raisonner en utilisant la théorie de l'homologie. On utilisera régulièrement la proposition suivante, qui découle de [Lan02] VI.10, et qui établit un lien entre espace d'extension et la notion de cobord/cocycle.

Proposition 2.1.3. *Soit χ un caractère de D^\times . Alors χ vérifie*

$$\text{Ext}_{\mathbb{G}}^1(\chi, 1) \neq \{0\}$$

si et seulement si il existe une application $\alpha : D^\times \rightarrow R$ vérifiant

$$\forall g, h \in \mathbb{G}, \alpha(gh) = \chi(g)\alpha(h) + \alpha(g)$$

et ne vérifiant pas

$$\exists \mu \in R \forall g \in \mathfrak{g}, \alpha(g) = \mu(\chi(g) - 1).$$

Les applications de cette forme vérifiant la première relation sont appelées des cocycles, et celles vérifiant la seconde relation sont appelées des cobords. Le problème consistant à savoir si un espace d'extension est non nul se ramène donc à l'existence d'un cocycle qui n'est pas un cobord.

Soit $(\pi, V) \in \text{Ext}^1(\chi, 1)$. Il existe une application α de D^\times à valeurs dans R qui vérifie

une relation de cocycle : soit $g, h \in G$,

$$\alpha(gh) = \chi(g)\alpha(h) + \alpha(g).$$

Ceci motive l'étude de $\tilde{\alpha} = \alpha|_{\mathfrak{o}_D^\times} : \mathfrak{o}_D^\times \rightarrow R$. En effet, si g et h appartiennent à \mathfrak{o}_D^\times , on a

$$\alpha(gh) = \alpha(g) + \alpha(h)$$

donc $\tilde{\alpha}$ est un morphisme additif.

Or R est de caractéristique l premier à p et $U_1 = 1 + \mathfrak{p}^1$ est un pro- p groupe, donc $\tilde{\alpha}|_{U_1} = 0$ d'où $\tilde{\alpha}$ induit un morphisme $\alpha' : \mathfrak{o}_D^\times/U^1 \rightarrow R$.

Remarque 2.1.4. Dans le cas où l ne divise pas $q^n - 1$, tous les éléments de $\mathfrak{o}_D^\times/U^1$ sont d'ordre premier à l , donc appartiennent au noyau de α' .

La proposition qui suit traite le cas où l divise $q^n - 1$.

Proposition 2.1.5. *Écrivons $q^n - 1 = Ml^s$ avec $\text{pgcd}(M, l) = 1$ et on suppose $s \geq 1$. Alors il y a au plus $Ml^{s-1}(l-1)$ éléments de $\mathfrak{o}_D^\times/U^1$ qui ne sont pas dans le noyau de α' .*

Preuve. On a $\mathfrak{o}_D^\times/U^1 \simeq \mathfrak{k}_D^* \simeq \mathbb{F}_{q^n}^*$ qui est cyclique de cardinal $q^n - 1 = Ml^s$ et on appelle a un générateur. Tous les éléments de $F_{q^n}^*$ s'écrivent donc a^k avec $k \in \mathbb{N}$, or

$$\alpha'(a^k) = k\alpha'(a)$$

qui est nul si l divise k . Pour que ceci ne se produise pas pour un élément $x \in \mathbb{F}_{q^n}^*$, il faut que l^s divise l'ordre de x , ce qui est équivalent à ce que l'ordre de x ne divise pas $l^{s-1}M$, ce qui est équivalent à ce que x n'appartienne pas au groupe de $l^{s-1}M$ -torsion qui a pour cardinal $l^{s-1}M$. Il y a donc au plus $Ml^s - Ml^{s-1} = Ml^{s-1}(l-1)$ tels éléments.

Remarque 2.1.6. Dans le cas où l divise $q^n - 1$, on a $(\mathfrak{o}_D^\times/U^1)/(\text{H}) \simeq \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ où H est le groupe de $l^{s-1}M$ -torsion de $\mathfrak{o}_D^\times/U^1$. Par conséquent il y a un isomorphisme entre le groupe des caractères additifs de \mathfrak{o}_D^\times et le groupe additif du corps R . En effet, un tel caractère dépend uniquement du choix de l'image d'un générateur de $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ qui a pour unique contrainte d'être d'ordre divisant l (dans le groupe $(R, +)$), ce qui est toujours le cas puisque l est la caractéristique de R .

2.1.3 Prolongements de morphismes additifs de \mathfrak{o}_D^\times

Soit maintenant χ un caractère non ramifié de G tel que $\chi^n = 1$. On cherche à exhiber (π, V) non scindée appartenant à $\text{Ext}^1(\chi, 1)$. D'après la proposition 2.1.3, cela revient à

trouver une application $\alpha : D^\times \rightarrow R$ qui soit un cocycle (c'est-à-dire que α doit vérifier $\alpha(gh) = \chi(g)\alpha(h) + \alpha(g)$ pour tout $g, h \in G$) et qui ne soit pas un cobord (c'est-à-dire qu'il ne doit pas exister $\mu \in R$ tel que $\alpha(g) = \mu(\chi(g) - 1)$ pour tout $g \in G$).

Remarque 2.1.7. Une application $\alpha : D^\times \rightarrow R$ non nulle sur \mathfrak{o}_D^\times ne peut être un cobord. En effet, soit $g \in \mathfrak{o}_D^\times$. Si α est un cobord, il existe $\mu \in R$ tel que

$$\alpha(g) = \mu(\chi(g) - 1) = 0$$

car χ est non ramifié.

On a vu à la sous-section précédente que les applications $\alpha : D^\times \mapsto R$ qui vérifient une relation de cocycle admettent une restriction $\tilde{\alpha} : \mathfrak{o}_D^\times \mapsto R$ qui est un morphisme additif. Soit donc un morphisme additif $\beta : \mathfrak{o}_D^\times \mapsto R$, et on suppose que $\alpha : D^\times \mapsto R$ est un prolongement de β qui soit un cocycle.

Lemme 2.1.8. *Pour tout k entier vérifiant $k \geq 1$, on a*

$$\alpha(t^k) = \alpha(t) \left(\sum_{i=0}^{k-1} \chi^i(t) \right)$$

et

$$\alpha(t^{-k}) = -\frac{\alpha(t^k)}{\chi(t^k)} = -\alpha(t) \sum_{i=-k}^{-1} \chi^i(t).$$

Preuve. Soit k un entier avec $k \geq 1$. On a

$$\alpha(t^k) = \alpha(t) \left(\sum_{i=0}^{k-1} \chi^i(t) \right)$$

car α vérifie une relation de cocycle. De plus, on observe que d'une part

$$\alpha(t^k t^{-k}) = \alpha(1) = \tilde{\alpha}(1) = 0$$

alors que d'autre part

$$\alpha(t^k t^{-k}) = \chi(t^k) \alpha(t^{-k}) + \alpha(t^k)$$

car α est un cocycle d'où finalement

$$\alpha(t^{-k}) = -\frac{\alpha(t^k)}{\chi(t^k)} = -\alpha(t) \sum_{i=-k}^{-1} \chi^i(t).$$

Proposition 2.1.9. *L'application α est uniquement déterminée par le morphisme β et*

la valeur $\alpha(t)$. De plus, si $g \in D^\times$ vérifie $g = ut^k$ avec $u \in \mathfrak{o}_D^\times$ et $k \in \mathbb{Z}$, alors

$$\alpha(g) = \alpha(ut^k) = \beta(u) + \alpha(t) \left(\sum_{i=0}^{k-1} \chi^i(t) \right)$$

pour $k \geq 1$ et

$$\alpha(g) = \alpha(ut^k) = \beta(u) - \alpha(t) \left(\sum_{i=k}^{-1} \chi^i(t) \right)$$

pour $k \leq -1$. Enfin, si $k = 0$ alors $\alpha(g) = \beta(u)$.

Preuve. Soit $g \in G$. Il existe $u \in \mathfrak{o}_D^\times$ une unité et $k \in \mathbb{Z}$ uniques tels que $g = ut^k$. Alors

$$\alpha(g) = \alpha(ut^k) = \alpha(u) + \alpha(t^k) = \beta(u) + \alpha(t^k)$$

car α est un cocycle prolongeant β et χ est non ramifié par hypothèse. Or, d'après le lemme 2.1.8, l'application $k \mapsto \alpha(t^k)$ ne dépend que de $\alpha(t)$ donc le prolongement α est uniquement déterminé par β et $\alpha(t)$. Les autres résultats découlent immédiatement du lemme 2.1.8.

2.1.4 Existence d'un prolongement qui soit un cocycle sans être un cobord

Dans cette sous section χ est encore un caractère non ramifié de G tel que $\chi^n = 1$ et on considère toujours un morphisme additif $\beta : \mathfrak{o}_D^\times \mapsto R$.

Définition 2.1.10. Pour tout $\lambda \in R$, on définit $\alpha_\lambda : D^\times \mapsto R$ de la façon suivante : si $g \in D^\times$ vérifie $g = ut^k$ avec $u \in \mathfrak{o}_D^\times$ et $k \in \mathbb{Z}$, alors

$$\alpha_\lambda(g) = \alpha_\lambda(ut^k) = \beta(u) + \lambda \left(\sum_{i=0}^{k-1} \chi^i(t) \right)$$

pour $k \geq 1$ et

$$\alpha_\lambda(g) = \alpha_\lambda(ut^k) = \beta(u) - \lambda \left(\sum_{i=k}^{-1} \chi^i(t) \right)$$

pour $k \leq -1$. Enfin, si $k = 0$ alors $\alpha_\lambda(g) = \beta(u)$.

On sait grâce à la sous-section précédente que n'importe quelle application $\alpha : D^\times \mapsto R$ cocycle non cobord prolongeant β est forcément de la forme α_λ pour un $\lambda \in R$.

Notation 2.1.11. Dans toute cette sous-section, on considère $\lambda \in R$ fixé et on notera α pour α_λ . De même, on utilisera $\alpha(t)$ pour désigner λ puisqu'ils sont égaux et $\tilde{\alpha}$ pour désigner β puisqu'ils sont égaux.

Remarque 2.1.12. Si χ est trivial, $\alpha(t^k) = k\alpha(t)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Lemme 2.1.13. Si χ n'est pas trivial, $\alpha(t^k)$ ne dépend que de la congruence de k modulo n .

Preuve. D'une part

$$\alpha(t^n) = \alpha(t) \sum_{i=0}^{n-1} \chi^i(t) = 0$$

car somme des puissances d'une racine n -ième de l'unité non triviale par hypothèse et

$$\alpha(t^{-n}) = -\frac{\alpha(t^n)}{\chi(t^n)} = 0$$

d'où le résultat pour $k \geq 1$ et pour $k \leq -1$. Il reste à observer que pour $0 \leq k \leq n$,

$$\alpha(t^{n-k}) = \alpha(t) \sum_{i=0}^{n-k-1} \chi^i(t) = \alpha(t) \left(\sum_{i=0}^{n-1} \chi^i(t) - \sum_{i=n-k}^{n-1} \chi^i(t) \right) = -\alpha(t) \sum_{i=n-k}^{n-1} \chi^i(t)$$

or

$$\sum_{i=n-k}^{n-1} \chi^i(t) = \sum_{i=-k}^{-1} \chi^i(t)$$

car χ est d'ordre divisant n donc

$$\alpha(t^{n-k}) = -\alpha(t) \sum_{i=-k}^{-1} \chi^i(t) = \alpha(t^{-k})$$

ce qui permet de conclure.

Remarque 2.1.14. Si χ est non trivial, on déduit du lemme précédent et du fait que $\chi^n = 1$ une autre expression pour $\alpha(t^k)$, valable pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\alpha(t^k) = \alpha(t) \frac{\chi(t^k) - 1}{\chi(t) - 1}.$$

Lemme 2.1.15. Pour $k, s \in \mathbb{Z}$,

$$\alpha(t^{k+s}) = \alpha(t^k) + \chi(t^k)\alpha(t^s).$$

Preuve. Si χ est trivial, le résultat découle du fait que $\alpha(t^k) = k\alpha(t)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Si χ n'est pas trivial, alors on peut utiliser le lemme 2.1.13, et il suffit alors de traiter le cas où k et s sont des entiers positifs. Dans ce cas,

$$\alpha(t^k) + \chi(t^k)\alpha(t^s) = \alpha(t) \sum_{i=0}^{k-1} \chi^i(t) + \chi(t^k)\alpha(t) \sum_{i=0}^{s-1} \chi^i(t) = \alpha(t) \left(\sum_{i=0}^{k-1} \chi^i(t) + \sum_{i=k}^{k+s-1} \chi^i(t) \right)$$

d'où

$$\alpha(t^k) + \chi(t^k)\alpha(t^s) = \alpha(t) \sum_{i=0}^{k+s-1} \chi^i(t) = \alpha(t^{k+s}).$$

Notons qu'on pouvait aussi procéder sans le lemme 2.1.13, en traitant séparément les cas suivant les signes de k et s . Par exemple,

$$\alpha(t^k) + \chi(t^k)\alpha(t^{-s}) = \alpha(t) \sum_{i=0}^{k-1} \chi^i(t) - \chi(t^k)\alpha(t) \sum_{i=-s}^{-1} \chi^i(t) = \alpha(t) \left(\sum_{i=0}^{k-1} \chi^i(t) - \sum_{i=k-s}^{k-1} \chi^i(t) \right).$$

Supposons $k \geq s$, alors on a

$$\alpha(t^k) + \chi(t^k)\alpha(t^{-s}) = \alpha(t) \sum_{i=0}^{k-s-1} \chi^i(t) = \alpha(t^{k-s}).$$

Supposons maintenant $k \leq s$, alors

$$\alpha(t^k) + \chi(t^k)\alpha(t^{-s}) = \alpha(t) \sum_{i=k-s}^{-1} \chi^i(t) = \alpha(t^{k-s}).$$

Proposition 2.1.16. *L'application α ainsi définie vérifie une relation de cocycle si et seulement si pour tout $v \in \mathfrak{o}_D^\times$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\tilde{\alpha}(t^k vt^{-k}) = \chi(t^k) \tilde{\alpha}(v).$$

Preuve. Soit $g, h \in G$ que l'on écrit $g = ut^k$ et $h = vt^s$ avec $u, v \in \mathfrak{o}_D^\times$ et $k, s \in \mathbb{Z}$. On a

$$\alpha(gh) = \alpha(ut^k vt^s) = \alpha(ut^k vt^{-k} t^k t^s) = \tilde{\alpha}(u) + \tilde{\alpha}(t^k vt^{-k}) + \alpha(t^{k+s})$$

et

$$\begin{aligned} \chi(g)\alpha(h) + \alpha(g) &= \chi(ut^k)\alpha(vt^s) + \alpha(ut^k) \\ &= \tilde{\alpha}(u) + \alpha(t^k) + \chi(t^k)\alpha(t^s) + \chi(t^k)\tilde{\alpha}(v) \end{aligned}$$

car χ est un caractère non ramifié. Or d'après le lemme 2.1.15,

$$\alpha(t^{k+s}) = \alpha(t^k) + \chi(t^k)\alpha(t^s)$$

donc α est un cocycle si et seulement si pour tout $v \in \mathfrak{o}_D^\times$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\tilde{\alpha}(t^k vt^{-k}) = \chi(t^k) \tilde{\alpha}(v).$$

Remarque 2.1.17. Il est remarquable que cela ne dépende pas du choix de λ .

On introduit maintenant l'invariant de Hasse d'une algèbre à division, on pourra consulter [BG16] pour plus de détails.

Définition 2.1.18. Soit t une uniformisante choisie de telle façon que $t^n \in F^*$. Alors t agit par conjugaison sur \mathfrak{o}_D donc par réduction sur \mathfrak{k}_D (l'anneau des entiers quotienté par son unique idéal maximal) et cette action est triviale sur \mathfrak{o}_F donc sur \mathfrak{k}_F . Ainsi t agit sur $\mathfrak{k}_D/\mathfrak{k}_F$, et cette action est celle d'une certaine puissance du Frobenius de $\mathfrak{k}_D/\mathfrak{k}_F$. Cette puissance (modulo n) ne dépend pas de l'uniformisante choisie et est première à n . On la note i et on l'appelle invariant de Hasse de l'algèbre à division.

Notation 2.1.19. On note, dans toute la suite, e l'ordre de q dans $(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^\times$ et si $e|n$ on note χ_0 le caractère non ramifié défini par $\chi_0(t) = q^{-i}$.

Proposition 2.1.20. Si $e|n$, l'application α est un cocycle si et seulement si $\tilde{\alpha} = 0$ ou $\chi = \chi_0^{-1}$. Si $e \nmid n$, alors α est un cocycle.

Preuve. D'après la proposition 2.1.16, l'application α vérifie une relation de cocycle si et seulement si pour tout $v \in O_D^\times$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\tilde{\alpha}(t^k vt^{-k}) = \chi(t^k) \tilde{\alpha}(v).$$

Si $e \nmid n$, on sait qu'il n'existe pas de morphisme additif non nul de \mathfrak{o}_D^\times à valeur dans R . Par conséquent $\tilde{\alpha}$ est nul et α est un cocycle. Supposons à présent que $e|n$ et que $\tilde{\alpha}$ n'est pas nul. Quitte à quotienter par U^1 (on a vu qu'on pouvait le faire sans perdre l'équivalence puisque α' détermine $\tilde{\alpha}$), l'application α est un cocycle si et seulement si pour tout $v \in \mathfrak{k}_D^\times$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\alpha'(\tau^k(v)) = \chi^k(t) \alpha'(v)$$

en notant τ l'action de conjugaison par t dans $\mathfrak{o}_D^\times/U_1 \simeq \mathfrak{k}_D^\times$. Or, en notant ϕ l'application de Frobenius sur \mathfrak{k}_D relativement à k_F , on a

$$\alpha'(\tau^k(v)) = \alpha'(\phi^{ik}(v)) = \alpha'(v^{q^{ik}}) = q^{ik} \alpha'(v)$$

comme α' est un morphisme. Donc α est un cocycle si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\chi^k(t) = q^{ik}$$

qui est équivalent à $\chi(t) = q^i$.

Proposition 2.1.21. L'application α vérifie une relation de cobord si et seulement si $\tilde{\alpha} = 0$ et s'il existe $\mu \in R$ tel que

$$\alpha(t) = \mu(\chi(t) - 1).$$

Preuve. Soit $g \in G$ que l'on écrit $g = ut^k$ avec $u \in \mathfrak{o}_D^\times$ et $k \in \mathbb{Z}$, et soit $\mu \in R$. On a

$$\alpha(g) = \alpha(ut^k) = \tilde{\alpha}(u) + \alpha(t^k)$$

et

$$\mu(\chi(g) - 1) = \mu(\chi(t^k) - 1)$$

car χ est un caractère non ramifié. Comme on a déjà vu que si α est un cobord, alors $\tilde{\alpha}$ est nul, on déduit de tout cela que l'application α vérifie une relation de cobord si et seulement si $\tilde{\alpha} = 0$ et s'il existe $\mu \in R$ tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\alpha(t^k) = \mu(\chi(t^k) - 1)$$

ce qui prouve que la condition de l'énoncé est nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, on considère $\mu \in R$ tel que

$$\alpha(t) = \mu(\chi(t) - 1).$$

D'après le lemme 2.1.13, on peut se restreindre au cas $k \geq 1$ (dans le cas où χ est trivial, il est clair que la condition est suffisante). Alors,

$$\begin{aligned} \alpha(t^k) &= \alpha(t) \sum_{i=0}^{k-1} \chi^i(t) \\ &= \mu(\chi(t) - 1) \sum_{i=0}^{k-1} \chi^i(t) \\ &= \mu \left(\sum_{i=1}^k \chi^i(t) - \sum_{i=0}^{k-1} \chi^i(t) \right) \\ &= \mu(\chi^k(t) - 1) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Conséquence. Si χ est trivial, l'application α vérifie une relation de cobord si et seulement si elle est nulle. Si χ est non trivial, l'application α vérifie une relation de cobord si et seulement si $\tilde{\alpha} = 0$.

Proposition 2.1.22. Supposons α non nul. Si $e|n$, alors α est un cocycle sans être un cobord si et seulement si $(\tilde{\alpha} = 0$ et $\chi = 1)$ ou $(\tilde{\alpha} \neq 0$ et $\chi = \chi_0^{-1})$. Si $e \nmid n$, alors α est un cocycle sans être un cobord si et seulement si χ est trivial.

Preuve. On procède en distinguant 4 cas, et l'on obtient en utilisant les deux propositions précédentes ce qui suit :

- si $e|n$ et si $\chi = 1$, alors α est un cocycle sans être un cobord si et seulement si α est non nul et $(\tilde{\alpha} = 0$ ou $\chi = \chi_0^{-1})$
- si $e|n$ et si $\chi \neq 1$, alors α est un cocycle sans être un cobord si et seulement si $\tilde{\alpha} \neq 0$ et $\chi = \chi_0^{-1}$

— si $e \nmid n$ et si $\chi = 1$, alors α est un cocycle sans être un cobord si et seulement si α est non nul

— si $e \nmid n$ et si $\chi \neq 1$, alors α n'est jamais un cocycle sans être un cobord.

Ainsi si $e|n$, alors α est un cocycle sans être un cobord si et seulement si ($\tilde{\alpha} = 0$ et $\chi = 1$) ou ($\tilde{\alpha} \neq 0$ et $\chi = \chi_0^{-1}$ et $\chi = 1$) ou ($\tilde{\alpha} \neq 0$ et $\chi = \chi_0^{-1}$ et $\chi \neq 1$) c'est-à-dire si et seulement si ($\tilde{\alpha} = 0$ et $\chi = 1$) ou ($\tilde{\alpha} \neq 0$ et $\chi = \chi_0^{-1}$).

Remarque 2.1.23. L'hypothèse α non nul se justifie car si α n'est pas un cobord il est nécessairement non nul.

Proposition 2.1.24. *Le caractère trivial est un caractère χ non ramifié d'ordre divisant n vérifiant $\text{Ext}^1(\chi, 1) \neq \{0\}$. Si $e|n$, il y en a un unique autre (ils peuvent être égaux), le caractère χ_0^{-1} . Si $e \nmid n$, il n'y en a pas d'autre.*

Preuve. D'après la proposition qui précède, si $\chi = 1$, il existe toujours un prolongement qui soit un cocycle sans être un cobord de n'importe quel morphisme additif de O_D^\times à valeur dans R . Si $\chi = \chi_0^{-1}$, et si $e|n$, il en existe toujours un qui soit un cocycle sans être un cobord de n'importe quel morphisme additif non nul de O_D^\times à valeur dans R (et on a vu qu'il en existe si $e|n$). La proposition précédente prouve également qu'il n'existe aucun autre cas où un morphisme additif de O_D^\times à valeur dans R admette un prolongement qui soit un cocycle sans être un cobord. Le résultat se déduit alors du fait que tous les cocycles non cobords de D^\times dans R sont des prolongements d'un morphisme additif de O_D^\times à valeur dans R .

2.2 Le bloc du caractère trivial

Il reste à trouver les caractères χ appartenant au bloc du caractère trivial, au sens de la catégorie des représentations de longueur finie.

Proposition 2.2.1. *Si χ est un caractère vérifiant $\text{Ext}^1(\chi, 1) \neq \{0\}$, alors toutes ses puissances sont dépendantes avec le caractère trivial.*

Preuve. Il existe α vérifiant une relation de cocycle :

$$\alpha(gh) = \chi(g)\alpha(h) + \alpha(g)$$

pour tout $g, h \in D^\times$ et ne vérifiant pas de relation de cobord : il n'existe pas $\mu \in R$ tel que pour tout $g \in D^\times$

$$\alpha(g) = \mu(\chi(g) - 1).$$

Alors

$$\alpha(gh)\chi(gh) = \chi^2(g)\alpha(h)\chi(h) + \chi(h)\alpha(g)\chi(g)$$

ce qui est une relation de cocycle pour $\alpha\chi$ d'où $\text{Ext}^1(\chi^2, \chi) \neq \{0\}$ et de plus on n'a pas de relation de cobord pour $\alpha\chi$ car si

$$\alpha(g)\chi(g) = \mu(\chi^2(g) - \chi(g))$$

cela contredirait le fait que α ne vérifie pas de relation de cobord. Par conséquent $\text{Ext}^1(\chi^2, \chi) \neq \{0\}$ donc χ^2 et χ sont dépendantes, et on répète le processus pour obtenir le résultat (puisque de proche en proche χ et ses puissances sont toutes dépendantes).

Remarque 2.2.2. De manière plus générale, la preuve qui précède permet de prouver que si A et B sont des représentations de D^\times , et χ un caractère de D^\times , alors

$$\text{Ext}^1(A, B) \neq \{0\} \Rightarrow \text{Ext}^1(A\chi, B\chi) \neq \{0\}.$$

En effet, on montre de la même façon que ci-dessus que si α vérifie une relation de cocycle (et pas de relation de cobord) pour $\text{Ext}^1(A, B)$, alors $\alpha\chi$ vérifie une relation de cocycle (et pas de relation de cobord) pour $\text{Ext}^1(A\chi, B\chi)$.

Proposition 2.2.3. *Si $e|n$, alors ν est dépendante avec le caractère trivial.*

Preuve. Les hypothèses de la proposition 1.1.43 sont vérifiées pour $\rho = 1$: on choisit $u = 0$; comme $k(1) = 1$ et $s(\rho) = \frac{n}{\dim(\rho)} = n$, il suffit alors que $\epsilon(1)|n$, ce qui est vrai car $\epsilon(1) = e$. Ainsi ν et 1 sont dans la réduction modulo l de la même représentation, ils sont donc dépendants d'après le lemme 1.1.39.

Théorème 2.2.4. *On appelle B le bloc du caractère trivial. Si $e|n$, alors $B = \langle \nu \rangle$. Sinon $B = \{1\}$.*

Preuve. Pour les inclusions directes, on utilise le théorème 1.4.6 avec $S = \langle \nu \rangle$ et $S = \{1\}$ respectivement. Par exemple pour le cas où $S = \langle \nu \rangle$ (l'autre cas étant similaire), si $A \in S = \langle \nu \rangle$ et si $B \notin S$, on suppose que

$$\text{Ext}^1(A, B) \neq \{0\}$$

par conséquent

$$\text{Ext}^1(AB^{-1}, 1) \neq \{0\}$$

d'où $AB^{-1} \in S$ (ceci découle du théorème 2.1.24), or $A \in S$, ceci contredit $B \notin S$, donc on vérifie bien les hypothèses du théorème 1.4.6, ce qui donne l'inclusion directe.

Les inclusions indirectes découlent des propositions 2.2.1 et 2.2.3, qui établissent que ν et toutes ses puissances appartiennent à B .

2.3 Caractères χ vérifiant $\text{Ext}_{D^\times}^1(\pi, \pi\chi) \neq \{0\}$

Soit π une représentation irréductible de D^\times de niveau 0, il existe ξ un caractère de \mathfrak{o}_D^\times trivial sur U^1 ayant b conjugués (où b est défini à la définition 1.3.5), que l'on étend à son normalisateur N qui est distingué dans D^\times et tel que $\pi = \text{ind}_N^{D^\times}(\xi)$ d'après la section 1.3.6. On rappelle que le normalisateur de ξ est l'ensemble des $g \in G$ tel que $\xi^g \simeq \xi$ (voir définition 1.1.12).

Le but est de trouver les caractères χ de G tels que $\text{Ext}_{D^\times}^1(\pi, \pi\chi) \neq \{0\}$. On a

$$\text{Ext}_{D^\times}^1(\pi, \pi\chi) \simeq \text{Ext}_N^1(\xi, \text{Res}_N^{D^\times}(\pi\chi))$$

avec

$$\text{Res}_N^{D^\times}(\pi \otimes \chi) \simeq \text{Res}_N^{D^\times}((\text{Ind}_N^{D^\times} \xi) \otimes \chi) \simeq \text{Res}_N^{D^\times}(\text{Ind}_N^{D^\times}(\xi \otimes \chi|_N))$$

d'où par la formule de Mackey (proposition 1.1.14)

$$\text{Res}_N^{D^\times}(\pi \otimes \chi) \simeq \bigoplus_{\tilde{g} \in N \backslash D^\times / N} \text{Ind}_{N \cap N^{\tilde{g}}}^N(\xi \otimes \chi|_N)^{\tilde{g}} \simeq \bigoplus_{\tilde{g} \in N \backslash D^\times / N} (\xi \otimes \chi|_N)^{\tilde{g}}$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{D^\times}^1(\pi, \pi\chi) &\simeq \text{Ext}_N^1(\xi, \bigoplus_{\tilde{g} \in N \backslash D^\times / N} (\xi \otimes \chi|_N)^{\tilde{g}}) \\ &\subset \text{Ext}_N^1(\xi, \prod_{\tilde{g} \in N \backslash D^\times / N} (\xi \otimes \chi|_N)^{\tilde{g}}) \\ &\simeq \prod_{\tilde{g} \in N \backslash D^\times / N} \text{Ext}_N^1(\xi, (\xi \otimes \chi|_N)^{\tilde{g}}) \end{aligned}$$

en utilisant la proposition 1.2.11. La question que l'on se pose devient alors "quels sont les χ tels qu'il existe $\tilde{g} \in N \backslash D^\times / N$ tel que $\text{Ext}_N^1(\xi, (\xi \otimes \chi|_N)^{\tilde{g}}) \neq \{0\}$?".

D'après la preuve de la proposition 2.2.1,

$$\text{Ext}_N^1(\xi, (\xi \otimes \chi|_N)^{\tilde{g}}) \simeq \text{Ext}_N^1(1, \xi^{-1}(\xi)^{\tilde{g}} \chi|_N).$$

On appelle θ le caractère $\xi^{-1}(\xi)^{\tilde{g}}$ et on note encore χ pour $\chi|_N$ de sorte que l'on s'interroge sur la nullité de $\text{Ext}_N^1(1, \theta\chi)$.

Remarque 2.3.1. Pour les mêmes raisons que précédemment, χ est forcément non ramifié d'ordre divisant n . De par la structure de N (voir la proposition 1.3.6), on sait que \tilde{g} a un représentant qui est de la forme t^r , avec $0 \leq r < b$.

2.3.1 Restriction à \mathfrak{o}_D^\times

On suppose que $\text{Ext}_{\mathbb{N}}^1(1, \theta\chi)$ est non nul. On sait qu'il existe alors α est une application de N à valeurs dans R vérifiant une relation de cocycle : soit $g, h \in N$,

$$\alpha(gh) = \alpha(h) + \alpha(g)\theta(h)\chi(h).$$

Ceci motive l'étude de $\tilde{\alpha} = \alpha|_{\mathfrak{o}_D^\times} : \mathfrak{o}_D^\times \rightarrow R$ puisque si g et h appartiennent à \mathfrak{o}_D^\times alors

$$\alpha(gh) = \alpha(h) + \alpha(g)\theta(h).$$

Notons que cette fois, $\tilde{\alpha}$ n'est pas un morphisme additif. Néanmoins $\tilde{\alpha}$ est un morphisme additif sur U_1 , or R est de caractéristique l premier à p et $U_1 = 1 + \mathfrak{p}^1$ est un pro- p groupe, donc $\tilde{\alpha}|_{U_1} = 0$ d'où $\tilde{\alpha}$ induit une application $\alpha' : \mathfrak{o}_D^\times/U^1 \rightarrow R$.

2.3.2 Prolongements de morphisme additif de \mathfrak{o}_D^\times

Remarque 2.3.2. Si θ est non ramifié, une application $\alpha : N \mapsto R$ non nulle sur \mathfrak{o}_D^\times ne peut être un cobord. En effet, soit $g \in \mathfrak{o}_D^\times$. Si α est un cobord, il existe $\mu \in R$ tel que

$$\alpha(g) = \mu(1 - \theta(g)\chi(g)) = 0$$

car χ et θ sont non ramifiés.

On a vu à la sous-section précédente que les applications $\alpha : N \mapsto R$ qui vérifient une relation de cocycle admettent une restriction $\tilde{\alpha} : \mathfrak{o}_D^\times \mapsto R$. Soit donc $\beta : \mathfrak{o}_D^\times \mapsto R$, et on suppose que $\alpha : N \mapsto R$ est un prolongement de β qui soit un cocycle sans être un cobord. Pour les propositions qui suivent dont les preuves s'adaptent directement des preuves du cas du caractère trivial, nous ne donnerons pas de preuve.

Lemme 2.3.3. *Pour tout k entier vérifiant $k \geq 1$, on a*

$$\alpha((t^b)^k) = \alpha(t^b) \left(\sum_{i=0}^{k-1} \theta^i(t^b) \chi^i(t^b) \right)$$

et

$$\alpha((t^b)^{-k}) = -\alpha((t^b)^k) \theta((t^b)^{-k}) \chi((t^b)^{-k}) = -\alpha(t^b) \sum_{i=-k}^{-1} \theta^i(t^b) \chi^i(t^b).$$

Proposition 2.3.4. *L'application α est uniquement déterminée par le morphisme β et la valeur $\alpha(t^b)$. De plus, si $g \in N$ vérifie $g = u(t^b)^k$ avec $u \in \mathfrak{o}_D^\times$ et $k \in \mathbb{Z}$, alors*

$$\alpha(g) = \alpha(u(t^b)^k) = \alpha(t^b) \left(\sum_{i=0}^{k-1} \theta^i(t^b) \chi^i(t^b) \right) + \beta(u) \theta((t^b)^k) \chi((t^b)^k)$$

pour $k \geq 1$ et

$$\alpha(g) = \alpha(u(t^b)^k) = -\alpha(t^b) \sum_{i=-k}^{-1} \theta^i(t^b) \chi^i(t^b) + \beta(u) \theta((t^b)^k) \chi((t^b)^k)$$

pour $k \leq -1$. Enfin, si $k = 0$ alors $\alpha(g) = \beta(u)$.

2.3.3 Existence d'un prolongement qui soit un cocycle sans être un cobord

Dans cette sous-section χ est encore un caractère non ramifié de G tel que $\chi^n = 1$ et on considère toujours un morphisme additif $\beta : \mathfrak{o}_D^\times \mapsto R$.

Définition 2.3.5. Pour tout $\lambda \in R$, on définit $\alpha_\lambda : D^\times \mapsto R$ de la façon suivante : si $g \in N$ vérifie $g = u(t^b)^k$ avec $u \in \mathfrak{o}_D^\times$ et $k \in \mathbb{Z}$, alors

$$\alpha_\lambda(g) = \alpha_\lambda(u(t^b)^k) = \lambda \left(\sum_{i=0}^{k-1} \theta^i(t^b) \chi^i(t^b) \right) + \beta(u) \theta((t^b)^k) \chi((t^b)^k)$$

pour $k \geq 1$ et

$$\alpha_\lambda(g) = \alpha_\lambda(u(t^b)^k) = -\lambda \sum_{i=-k}^{-1} \theta^i(t^b) \chi^i(t^b) + \beta(u) \theta((t^b)^k) \chi((t^b)^k)$$

pour $k \leq -1$. Enfin, si $k = 0$ alors $\alpha_\lambda(g) = \beta(u)$.

On sait grâce à la sous-section précédente que n'importe quelle application $\alpha : N \mapsto R$ cocycle non cobord prolongeant β est forcément de la forme α_λ pour un $\lambda \in R$.

Notation 2.3.6. Dans toute cette sous-section, on considère $\lambda \in R$ fixé et on notera α pour α_λ . De même, on utilisera $\alpha(t^b)$ pour désigner λ puisqu'ils sont égaux et $\tilde{\alpha}$ pour désigner β puisqu'ils sont égaux.

Remarque 2.3.7. Si $\theta(t^b) \chi(t^b) = 1$, alors $\alpha((t^b)^k) = k\alpha(t^b)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Lemme 2.3.8. Pour $k, s \in \mathbb{Z}$,

$$\alpha((t^b)^{k+s}) = \alpha((t^b)^s) + \alpha((t^b)^k) \theta((t^b)^s) \chi(t^s).$$

Proposition 2.3.9. L'application α ainsi définie vérifie une relation de cocycle si et seulement si pour tout $v \in \mathfrak{o}_D^\times$ et tout $k, s \in \mathbb{Z}$, on a

$$\tilde{\alpha}((t^b)^k v (t^b)^{-k}) \theta((t^b)^k) \chi((t^b)^{k+s}) + \alpha((t^b)^k) \chi((t^b)^s) = \tilde{\alpha}(v) \chi((t^b)^s) + \alpha((t^b)^k) \theta(v) \chi((t^b)^s).$$

Preuve. Soit $g, h \in G$ que l'on écrit $g = u(t^b)^k$ et $h = v(t^b)^s$ avec $u, v \in \mathfrak{o}_D^\times$ et $k, s \in \mathbb{Z}$.

On a

$$\begin{aligned}\alpha(gh) &= \alpha(u(t^b)^k v(t^b)^{-k} (t^b)^k (t^b)^s) \\ &= \alpha((t^b)^{k+s}) + \tilde{\alpha}(u(t^b)^k v(t^b)^{-k}) \theta((t^b)^{k+s}) \chi((t^b)^{k+s})\end{aligned}$$

donc

$$\alpha(gh) = \alpha(t^{bs}) + \alpha(t^{bk}) \theta(t^{bs}) \chi(t^{bs}) + \tilde{\alpha}(t^{bk} v t^{-bk}) \theta(t^{b(k+s)}) \chi(t^{b(k+s)}) + \tilde{\alpha}(u) \theta(t^{bk} v t^{bs}) \chi(t^{bk} v t^{bs})$$

et

$$\alpha(h) + \alpha(g) \theta(h) \chi(h) = \alpha(v(t^b)^s) + \alpha(u(t^b)^k) \theta(v(t^b)^s) \chi(v(t^b)^s)$$

donc

$$\alpha(h) + \alpha(g) \theta(h) \chi(h) = \alpha(t^{bs}) + \tilde{\alpha}(v) \theta(t^{bs}) \chi(t^{bs}) + \alpha(t^{bk}) \theta(v t^{bs}) \chi(v t^{bs}) + \tilde{\alpha}(u) \theta(t^{bk} v t^{bs}) \chi(t^{bk} v t^{bs})$$

donc α est un cocycle si et seulement si pour tout $v \in \mathfrak{o}_D^\times$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\tilde{\alpha}((t^b)^k v (t^b)^{-k}) \theta((t^b)^k) \chi((t^b)^{k+s}) + \alpha((t^b)^k) \chi((t^b)^s) = \tilde{\alpha}(v) \chi((t^b)^s) + \alpha((t^b)^k) \theta(v) \chi((t^b)^s)$$

Remarque 2.3.10. Il est remarquable que cela ne dépende pas du choix de λ .

Notation 2.3.11. On notera, dans toute la suite, χ_0 le caractère non ramifié défini par $\chi_0(t) = q^{-i}$ et e l'ordre de q dans $(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^\times$. On note également a un générateur de $\mathfrak{o}_D^\times/U^1$ et on définit M et s des entiers positifs tels que $q^n - 1 = Ml^s$ et $\text{pgcd}(M, l) = 1$.

Proposition 2.3.12. Si $\theta(a) = 1$ (donc θ non ramifié) alors θ est trivial.

Preuve. On a

$$0 = \alpha'(a^{q^n-1}) = \alpha'(a) \sum_{j=0}^{q^n-2} \theta^j(a) = (q^n - 1) \alpha'(a)$$

d'où $\alpha'(a) = 0$ auquel cas $\tilde{\alpha}$ est nul, ou $l|q^n - 1$, c'est-à-dire $e|n$. De plus, $\theta(a) = 1$ entraîne θ trivial sur \mathfrak{o}_D^\times , donc quitte à quotienter par U^1 on a pour tout $x \in \mathfrak{k}_D^\times$

$$\theta(x) = \xi^{-1}(x) \xi(t^r x t^{-r}) = \xi^{-1}(x) \xi(x^{q^{ir}})$$

d'où $\xi^{q^{ir}} = \xi$ sur \mathfrak{o}_D^\times , or ξ a b conjugués, donc $b|ir$. Comme de plus $b|n$ et $\text{pgcd}(i, n) = 1$, alors $b|r$, ce qui entraîne $r = 0$, donc $g = 1$ et $\theta = 1$.

On étudie à présent le cas où θ est non ramifié.

Proposition 2.3.13. Supposons θ non ramifié. Si $e|n$, l'application α est un cocycle si et seulement si $\tilde{\alpha} = 0$ ou $\chi^b = (\chi_0)^b$. Si $e \nmid n$, alors α est un cocycle.

Preuve. D'après la proposition 2.3.9 et comme θ est non ramifié, l'application α vérifie une relation de cocycle si et seulement si pour tout $v \in \mathfrak{o}_D^\times$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\tilde{\alpha}((t^b)^k v (t^b)^{-k}) \chi((t^b)^k) = \tilde{\alpha}(v).$$

Si $e \nmid n$, on sait qu'il n'existe pas de morphisme additif non nul de \mathfrak{o}_D^\times à valeur dans R (toujours car θ est non ramifié). Par conséquent $\tilde{\alpha}$ est nul et α est un cocycle. Supposons à présent que $e \mid n$ et que $\tilde{\alpha}$ n'est pas nul. Quitte à quotienter par U^1 (on a vu qu'on pouvait le faire sans perdre l'équivalence puisque α' détermine $\tilde{\alpha}$), l'application α est un cocycle si et seulement si pour tout $v \in \mathfrak{k}_D^\times$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\alpha'(\tau^{bk}(v)) \chi^{bk}(t) = \alpha'(v)$$

en notant τ l'action de conjugaison par t dans $\mathfrak{o}_D^\times/U_1 \simeq \mathfrak{k}_D^\times$. Or, en notant ϕ l'application de Frobenius sur \mathfrak{k}_D relativement à \mathfrak{k}_F , on a

$$\alpha'(\tau^{bk}(v)) = \alpha'(\phi^{ibk}(v)) = \alpha'(v^{q^{ibk}}) = q^{ibk} \alpha'(v)$$

comme α' est un morphisme. Donc α est un cocycle si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\chi^{bk}(t) = q^{-ibk}$ qui est équivalent à $\chi^b(t) = q^{-ib}$.

Proposition 2.3.14. *Supposons θ non ramifié. L'application α vérifie une relation de cobord si et seulement si $\tilde{\alpha} = 0$ et s'il existe $\mu \in R$ tel que*

$$\alpha(t^b) = \mu(1 - \chi(t^b)).$$

Preuve. Soit $g \in G$ que l'on écrit $g = u(t^b)^k$ avec $u \in O_D^\times$ et $k \in \mathbb{Z}$, et soit $\mu \in R$. On a

$$\alpha(g) = \alpha(u(t^b)^k) = \alpha((t^b)^k) + \tilde{\alpha}(u) \chi((t^b)^k)$$

et

$$\mu(1 - \chi(g)) = \mu(1 - \chi((t^b)^k))$$

car χ est un caractère non ramifié. Comme on a déjà vu que si α est un cobord, alors $\tilde{\alpha}$ est nul, on déduit de tout cela que l'application α vérifie une relation de cobord si et seulement si $\tilde{\alpha} = 0$ et s'il existe $\mu \in R$ tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\alpha((t^b)^k) = \mu(1 - \chi((t^b)^k))$$

ce qui prouve que la condition de l'énoncé est nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, on considère $\mu \in R$ tel que

$$\alpha(t^b) = \mu(1 - \chi(t^b)).$$

D'après le lemme 2.1.13, on peut se restreindre au cas $k \geq 1$ (dans le cas où χ est trivial, il est clair que la condition est suffisante). Alors,

$$\begin{aligned}
\alpha((t^b)^k) &= \alpha(t^b) \sum_{i=0}^{k-1} \chi^i(t^b) \\
&= \mu(1 - \chi(t^b)) \sum_{i=0}^{k-1} \chi^i(t^b) \\
&= \mu\left(\sum_{i=0}^{k-1} \chi^i(t^b) - \sum_{i=1}^k \chi^i(t^b)\right) \\
&= \mu(1 - \chi^k(t^b))
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Conséquence. *Supposons θ non ramifié. L'application α vérifie une relation de cobord si et seulement si ($\chi^b = 1$ et $\alpha(t^b) = 0$ et $\tilde{\alpha} = 0$) ou ($\chi^b \neq 1$ et $\tilde{\alpha} = 0$).*

Proposition 2.3.15. *Supposons α non nul et θ non ramifié. Si $e|n$, alors α est un cocycle sans être un cobord si et seulement si ($\tilde{\alpha} = 0$ et $\chi^b = 1$ et $\alpha(t^b) \neq 0$) ou ($\tilde{\alpha} \neq 0$ et $\chi^b = (\chi_0)^b$). Si $e \nmid n$, alors α est un cocycle sans être un cobord si et seulement si $\chi^b = 1$ et $\alpha(t^b) \neq 0$.*

Preuve. On procède en distinguant 4 cas, et l'on obtient en utilisant les deux propositions précédentes ce qui suit :

- si $e|n$ et si $\chi^b = 1$, alors α est un cocycle sans être un cobord si et seulement si ($\alpha(t^b) \neq 0$ ou $\tilde{\alpha} \neq 0$) et ($\tilde{\alpha} = 0$ ou $\chi^b = (\chi_0)^b$), c'est-à-dire si et seulement si ($\tilde{\alpha} = 0$ et $\alpha(t^b) \neq 0$) ou ($\tilde{\alpha} \neq 0$ et $\chi^b = (\chi_0)^b$).
- si $e|n$ et si $\chi^b \neq 1$, alors α est un cocycle sans être un cobord si et seulement si $\tilde{\alpha} \neq 0$ et $\chi^b = (\chi_0)^b$
- si $e \nmid n$ et si $\chi^b = 1$, alors α est un cocycle sans être un cobord si et seulement si $\alpha(t^b) \neq 0$.
- si $e \nmid n$ et si $\chi^b \neq 1$, alors α n'est jamais un cocycle sans être un cobord.

Le résultat s'en déduit. En effet, le cas de figure où e ne divise pas n se déduit immédiatement des deux derniers cas. Pour le cas de figure où e divise n , on sépare les cas suivant la nullité de $\tilde{\alpha}$: l'application α est un cocycle sans être un cobord si et seulement si ($\tilde{\alpha} = 0$ et $\chi^b = 1$ et $\alpha(t^b) \neq 0$) ou ($\tilde{\alpha} \neq 0$ et $\chi^b = 1$ et $\chi^b = (\chi_0)^b$) ou ($\tilde{\alpha} \neq 0$ et $\chi^b = (\chi_0)^b$ et $\chi^b \neq 1$) ce qui se factorise en : α est un cocycle sans être un cobord si et seulement si ($\tilde{\alpha} = 0$ et $\chi^b = 1$ et $\alpha(t^b) \neq 0$) ou ($\tilde{\alpha} \neq 0$ et $\chi^b = (\chi_0)^b$).

Conséquence. *Si θ est non ramifié, $\chi^b = 1$ ou $\chi^b = (\chi_0)^b$.*

Proposition 2.3.16. *Supposons que θ est ramifié et supposons également $\chi^b \neq 1$. Si α est un cocycle sur N dont la restriction $\tilde{\alpha}$ à \mathfrak{o}_D^\times est un cobord, alors α est un cobord sur N .*

Preuve. Comme $\tilde{\alpha}$ est un cobord, il existe $\mu \in R$ tel que pour tout $u \in \mathfrak{o}_D^\times$, on ait $\alpha(u) = \mu(1 - \theta(u))$. Soit $g = u(t^b)^k \in N$, avec $u \in \mathfrak{o}_D^\times$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\alpha(g) = \alpha(u(t^b)^k) = \alpha(t^{bk}) + \alpha(u)\theta_\chi(t^{bk}) = \alpha(t^{bk}) + \mu(1 - \theta(u))\theta_\chi(t^{bk})$$

en utilisant la relation de cobord sur \mathfrak{o}_D^\times . On a donc

$$\alpha(g) = \alpha(t^{bk}) + \mu(\theta_\chi(t^{bk}) - \theta_\chi(ut^{bk})).$$

Or

$$\mu(1 - \theta_\chi(g)) = \mu(1 - \theta_\chi(ut^{bk}))$$

donc on a terminé si $\alpha(t^{bk}) + \mu\theta_\chi(t^{bk}) = \mu$, ce que l'on réécrit

$$\alpha(t^{bk}) = \mu(1 - \theta_\chi(t^{bk})).$$

Remarquons que l'on sait que $\theta_\chi(t^b) \neq 1$ puisque $\chi^b \neq 1$ et $\theta = (\xi)^{tr} \xi^{-1}$. On a alors

$$\alpha(t^{bk}) = \alpha(t^b) \frac{1 - \theta_\chi(t^{bk})}{1 - \theta_\chi(t^b)}$$

donc il suffit de montrer que

$$\mu = \frac{\alpha(t^b)}{1 - \theta_\chi(t^b)}.$$

Considérons $\tilde{u} \in \mathfrak{o}_D^\times$ tel que $\theta(\tilde{u}) \neq 1$. C'est possible car on a supposé θ ramifié. On sait que $\mu = \frac{\alpha(\tilde{u})}{1 - \theta_\chi(\tilde{u})}$. Il s'agit donc de montrer que

$$\alpha(\tilde{u}) + \alpha(t^b)\theta_\chi(\tilde{u}) = \alpha(t^b) + \alpha(\tilde{u})\theta_\chi(t^b)$$

c'est-à-dire $\alpha(t^b\tilde{u}) = \alpha(\tilde{u}t^b)$. Or

$$\alpha(t^b\tilde{u}) = \alpha(t^b\tilde{u}t^{-b}t^b) = \alpha(t^b) + \alpha(t^b\tilde{u}t^{-b})\theta_\chi(t^b)$$

tandis que l'on a déjà vu que

$$\alpha(\tilde{u}t^b) = \alpha(t^b) + \alpha(\tilde{u})\theta_\chi(t^b).$$

Au final, il suffit de montrer $\alpha(t^b\tilde{u}t^{-b}) = \alpha(\tilde{u})$, ce qu'on obtient en utilisant la relation de cobord :

$$\begin{aligned} \alpha(t^b\tilde{u}t^{-b}) &= \mu(1 - \theta_\chi(t^b\tilde{u}t^{-b})) \\ &= \mu(1 - \theta_\chi(\tilde{u})) \\ &= \alpha(\tilde{u}). \end{aligned}$$

Proposition 2.3.17. *Supposons que θ est ramifié. Si α est un cocycle sur N dont la*

restriction α' à $\mathfrak{o}_D^\times/U^1$ est un cobord, alors la restriction $\tilde{\alpha}$ est un cobord sur \mathfrak{o}_D^\times .

Preuve. Comme α' est un cobord, il existe $\mu \in R$ tel que pour tout $u \in \mathfrak{o}_D^\times/U^1$, on ait $\alpha'(u) = \mu(1 - \theta(u))$. Soit $g \in \mathfrak{o}_D^\times$, il existe $\tilde{u} \in \mathfrak{o}_D^\times/U^1$ et $v \in U^1$ tels que si l'on note u un représentant de \tilde{u} dans \mathfrak{o}_D^\times , on ait $g = ud$. Alors

$$\alpha(g) = \alpha(uv) = \alpha(v) + \alpha(u)\theta\chi(v) = \alpha(v) + \mu(1 - \theta(u))\theta\chi(v) = \mu(1 - \theta(u))$$

car $\theta(v) = 1$ et car $\alpha(v) = 0$ (on a vu que α était nul sur U^1 en tant que morphisme additif sur un pro- p groupe). On a donc

$$\alpha(g) = \mu(1 - \theta(u)) = \mu(1 - \theta(uv)) = \mu(1 - \theta(g))$$

ce qui prouve que $\tilde{\alpha}$ est un cobord sur \mathfrak{o}_D^\times .

Corollaire 2.3.18. *Supposons que θ est ramifié et que $\chi^b \neq 1$. Alors α n'est pas un cocycle non cobord.*

Preuve. D'après le théorème de décomposition des représentations de longueur finie suivant leur caractère central (théorème 1.4.1) et d'après le lemme 1.2.13, les caractères 1 et θ qui sont distincts ne peuvent avoir d'extension non triviale. Ceci entraîne que $\text{Ext}_{\mathfrak{o}_D^\times/U^1}^1(1, \theta) = \{0\}$. En utilisant les deux propositions qui précèdent (dont les hypothèses sont vérifiées puisqu'on suppose θ ramifié), on en déduit que α ne peut être un cocycle non cobord sur N .

On obtient en combinant les résultats précédents le théorème suivant.

Théorème 2.3.19. *Si $e|n$, les caractères χ non ramifiés d'ordre divisant n vérifiant $\text{Ext}_{D^\times}^1(\pi, \pi\chi) \neq \{0\}$ sont les caractères vérifiant $\chi^b = 1$ ou $\chi^b = (\chi_0)^b$. Si $e \nmid n$, les caractères χ non ramifiés d'ordre divisant n vérifiant $\text{Ext}^1(\pi, \pi\chi) \neq \{0\}$ sont uniquement les caractères vérifiant $\chi^b = 1$.*

Remarque 2.3.20. D'après le théorème, si $\text{Ext}_{D^\times}^1(\pi, \pi\chi) \neq \{0\}$, alors χ est de la forme $\psi\chi_0$ ou de la forme ψ , avec ψ un caractère non ramifié de D^\times vérifiant $\psi^b = 1$. Dans ce cas

$$\pi\psi \simeq \pi.$$

En effet,

$$\pi\psi \simeq (\text{Ind}_N^{D^\times} \xi)\psi \simeq \text{Ind}_N^{D^\times} (\xi\psi)$$

et on conclut en observant que ψ est trivial sur N car trivial sur \mathfrak{o}_D^\times et sur t^b (car $\psi^b = 1$).

2.4 Décomposition en blocs

On donne ici la décomposition en blocs pour les R -représentations lisses de longueur finie de G .

Définition 2.4.1. Soit π une représentation irréductible de G , on lui associe l'ensemble $B(\pi)$ des représentations qui sont

1. isomorphes à $\pi\nu^j$ (pour un $j \in \mathbb{N}$) si $e|n$;
2. isomorphes à π sinon.

On note \mathcal{B} l'ensemble des $B(\pi)$ quand π .

Lemme 2.4.2. Soit χ un caractère non ramifié de G . Si deux représentations π et π' irréductibles et de longueur finie de G sont dépendantes, alors $\pi\chi$ et $\pi'\chi$ sont également dépendantes.

Preuve. On considère χ un caractère non ramifié de G , et π et π' deux représentations irréductibles de G qui sont dépendantes. On suppose que $\pi\chi$ et $\pi'\chi$ ne sont pas dépendantes. Alors une représentation V de G qui contient $\pi\chi$ et $\pi'\chi$ se scinde

$$V = V_1 \oplus V_2$$

avec V_1 et V_2 deux sous-représentations de V tel que V_1 contient $\pi\chi$ et pas $\pi'\chi$, et V_2 contient $\pi'\chi$ et pas $\pi\chi$. De plus $\text{Hom}_G(V_1, V_2) = 0$. Par conséquent,

$$V\chi^{-1} = (V_1 \oplus V_2)\chi^{-1} = (V_1\chi^{-1} \oplus V_2\chi^{-1})$$

d'après [Ass97] 5.1.5, avec $V_1\chi^{-1}$ qui contient π et pas π' et $V_2\chi^{-1}$ qui contient π' et pas π . Comme on a également $\text{Hom}_G(V_1\chi^{-1}, V_2\chi^{-1}) = 0$ puisque $\text{Hom}_G(V_1, V_2) = 0$ (par définition de Hom), ceci contredit le fait que π et π' sont dépendantes.

Proposition 2.4.3. Si $e|n$, alors $\pi\nu^j$ et π sont dépendantes pour tout entier $j \in \mathbb{N}$.

Preuve. On utilise la proposition 1.1.43 avec $\rho = \pi$, $u = 0$; comme $k(1) = 1$, la condition (2) se réécrit $e|n$. Ainsi $\pi\nu$ et π sont dans la réduction modulo l de la même représentation irréductible cuspidale et sont dépendantes (voir lemme 1.1.39) et de proche en proche (via le lemme 2.4.2), toutes les représentations de la forme $\pi\nu^j$, avec $j \in \mathbb{N}$ le sont aussi.

Théorème 2.4.4. La catégorie $\mathcal{R}(G)$ des représentations de G de longueur finie et de niveau 0 se décompose :

$$\mathcal{R}(G) = \bigoplus_{B \in \mathcal{B}} \mathcal{R}_B(G)$$

où $\mathcal{R}_B(G)$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{R}(G)$ dont les objets sont les représentations dont tous les sous-quotients irréductibles sont dans B .

De plus cette décomposition de la catégorie est la plus fine possible (i.e. les facteurs \mathcal{R}_B sont indécomposables).

Preuve. On veut utiliser le théorème 1.4.6 pour décomposer la catégorie. Soit V une représentation de G de longueur finie et de niveau 0. On va décomposer V en procédant par récurrence sur la longueur de V . On considère π une sous-représentation irréductible de V . On se place dans le cas où $e|n$ (l'autre cas étant similaire). On pose $S = B(\pi)$. On considère $\pi\nu^j \in S$ (avec $j \in \mathbb{N}$) et $\pi' \notin S$ tels que

$$\text{Ext}_G^1(\pi\nu^j, \pi') \neq \{0\}.$$

On sait qu'alors π' et π diffèrent par un caractère non ramifié, donc on peut écrire $\pi' = \pi\xi \notin S$, avec ξ un caractère non ramifié, avec

$$\text{Ext}_G^1(\pi\nu^j, \pi\xi) \neq \{0\}.$$

D'après la remarque 2.2.2, on en déduit

$$\text{Ext}_G^1(\pi, \pi\xi\nu^{-j}) \neq \{0\}$$

et d'après le théorème 2.3.19 et la remarque qui le suit,

$$\pi\xi\nu^{-j} = \pi\chi_0$$

ou

$$\pi\xi\nu^{-j} = \pi$$

ce que l'on peut écrire respectivement

$$\pi\xi = \pi\chi_0\nu^j$$

et

$$\pi\xi = \pi\nu^j$$

et dans les deux cas de figure cela contredit l'hypothèse $\pi\xi \notin S$. Alors, le théorème 1.4.6 dont on vient de vérifier l'hypothèse permet de décomposer la catégorie comme annoncé, et on obtient

$$V = V_1 \oplus V_2$$

où les sous-quotients irréductibles de V_1 sont les éléments de $B(\pi)$ (en particulier V_1 est non nulle).

Il reste à montrer que la décomposition est la plus fine possible. Dans le cas où $e \nmid n$, l'ensemble $B(\pi)$ ne contient que π donc V_1 ne peut se décomposer davantage. Enfin,

dans le cas où $e|n$ cela découle de la proposition 2.4.3. Comme la longueur de V_2 est strictement inférieure à celle de V (puisque V_1 est non nulle), ceci conclut la récurrence.

Chapitre 3

Cas des supercuspidales de niveau zéro

On considère toujours une algèbre à division centrale D de dimension finie sur F de degré réduit d avec F un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p . À présent on fixe $m \geq 1$ et on s'intéresse aux représentations (lisses) et de longueur finie de $G = \mathrm{GL}_m(D)$ à coefficients dans le corps $R = \overline{\mathbb{F}_l}$ algébriquement clos de caractéristique l différente de p .

Dans ce chapitre, on étudie les représentations supercuspidales de niveau 0, la motivation étant de se ramener à ce cas-là pour le cas général, ce que l'on fera dans le chapitre 4.

3.1 Préliminaires

Soit π une représentation irréductible et supercuspidale de G de niveau 0. En utilisant la théorie des types (plus précisément en utilisant la proposition 1.3.3, en notant ξ la représentation Σ de la proposition 1.3.3), on construit un type simple maximal étendu ξ sur N (le normalisateur du type simple maximal associé) tel que $\pi = \mathrm{ind}_N^G(\xi)$, où N contient un unique sous-groupe compact maximal N^0 conjugué à $\mathrm{GL}_m(\mathfrak{o}_D)$, avec N qui est engendré par N^0 et ϖ_D^b , où b est l'invariant défini dans la définition 1.3.5. On appelle N^1 l'unique pro- p sous-groupe distingué maximal de N^0 , et on a les propriétés suivantes :

1. On a un isomorphisme de groupes

$$N^0/N^1 \simeq \mathrm{GL}_m(\mathfrak{k}_D);$$

2. la représentation $\xi|_{N^0}$ est irréductible et triviale sur N^1 . Ceci permet de définir $\bar{\xi}$ la représentation de N^0/N^1 induite par ξ^0 ;

3. la représentation $\bar{\xi}$ est supercuspidale (d'après la proposition 6.10 de [MS14a]).

On commence par utiliser la même stratégie qu'au chapitre précédent : on réfléchit aux conditions sous lesquelles une représentation a un espace d'extension non nul avec π . En utilisant le cas des représentations de longueur quelconque (cf théorème 10.4 de [SS16]), on sait qu'une telle représentation sera dans le même bloc que π dans la décomposition de $\mathcal{R}_R(G)$, donc comme π est supercuspidale une telle représentation doit être de la forme $\pi\chi$, où χ est un caractère non ramifié. Le but est de trouver tous les caractères non ramifiés χ de G tels que $\text{Ext}_G^1(\pi, \pi\chi) \neq \{0\}$. D'après la propriété d'adjonction [Vig96] proposition I.5.9 (e), on a un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\text{Ext}_G^1(\pi, \pi\chi) \simeq \text{Ext}_N^1(\xi, \text{Res}_N^G(\pi\chi)).$$

Or les représentations qui suivent sont isomorphes

$$\text{Res}_N^G(\pi \otimes \chi) \simeq \text{Res}_N^G((\text{Ind}_N^G \xi) \otimes \chi) \simeq \text{Res}_N^G(\text{Ind}_N^G(\xi \otimes \chi|_N))$$

d'où par la formule de Mackey (proposition 1.1.14)

$$\text{Res}_N^G(\pi \otimes \chi) \simeq \bigoplus_{g \in N \backslash G/N} \text{Ind}_{N \cap N^g}^N(\xi \otimes \chi|_N)^g$$

d'où d'après la proposition 1.2.11

$$\begin{aligned} \text{Ext}_G^1(\pi, \pi\chi) &\simeq \text{Ext}_N^1(\xi, \bigoplus_{g \in N \backslash G/N} \text{Ind}_{N \cap N^g}^N(\xi \otimes \chi|_N)^g) \\ &\subset \text{Ext}_N^1(\xi, \prod_{g \in N \backslash G/N} \text{Ind}_{N \cap N^g}^N(\xi \otimes \chi|_N)^g) \\ &\simeq \prod_{g \in N \backslash G/N} \text{Ext}_N^1(\xi, \text{Ind}_{N \cap N^g}^N(\xi \otimes \chi|_N)^g) \\ &\simeq \prod_{g \in N \backslash G/N} \text{Ext}_{N \cap N^g}^1(\xi, (\xi \otimes \chi|_N)^g) \end{aligned}$$

où le dernier isomorphisme s'obtient par adjonction (cf [Vig96] Prop I.5.10).

Nous montrerons plus loin (dans la proposition 3.4.1) que le produit contient un nombre fini de termes, donc que c'est en fait une somme directe et que

$$\text{Ext}_G^1(\pi, \pi\chi) \simeq \bigoplus_{g \in N \backslash G/N} \text{Ext}_{N \cap N^g}^1(\xi, (\xi \otimes \chi|_N)^g).$$

Notation 3.1.1. On notera ξ^0 la restriction de ξ à N^0 .

3.2 L'enveloppe projective P_ξ

Dans cette section ξ est une représentation irréductible de N triviale sur N^1 , et on veut montrer qu'elle admet une enveloppe projective dans la catégorie des représentations de longueur finie de N .

On sait que ϖ_F est une puissance de ϖ_D^b et on sait que N est engendré par N^0 et ϖ_D^b (par la proposition 1.3.6). On note ω_ξ le caractère central de ξ et on introduit ω un caractère de N non ramifié tel que $\omega(\varpi_F) = \omega_\xi(\varpi_F)$. On associe alors à ξ la représentation

$$\xi_1 = \omega^{-1}\xi$$

qui est une représentation du groupe N triviale sur N^1 (car ξ l'est et ω est non ramifié) et trivial sur ϖ_F (par construction), de sorte que ξ_1 est une représentation de $\frac{N}{\langle N^1, \varpi_F \rangle}$. Or ce groupe est un groupe fini puisque N est engendré par N^0 et ϖ_D^b , et ϖ_F est une puissance de ϖ_D^b .

Par conséquent ξ_1 est une représentation lisse d'un groupe fini, donc l'enveloppe projective P_{ξ_1} existe dans la catégorie $\mathcal{R}_R^{lf}(N / \langle N^1, \varpi_F \rangle)$ (car toute représentation irréductible d'un groupe fini admet une enveloppe projective de longueur finie par [Vig96] A.6.B).

On fait maintenant deux remarques :

Remarque 3.2.1. Soit X, Y des représentations de longueur finie de N admettant chacune un caractère central (noté respectivement ω_X et ω_Y) avec $\text{Hom}(X, Y) \neq \{0\}$. Alors X et Y ont le même caractère central. En effet, on a pour $f \in \text{Hom}(X, Y)$ et pour tout $g \in N$

$$f \circ X(g) = Y(g) \circ f$$

donc pour tout g dans le centre

$$\omega_X(g)f = \omega_Y(g)f$$

et par conséquent $\omega_X = \omega_Y$.

La remarque qui suit vient de §A.4 [Vig96].

Remarque 3.2.2. Soit \mathcal{C}' une sous-catégorie pleine d'une catégorie abélienne \mathcal{C} , et $X \in \mathcal{C}'$ admettant une enveloppe projective P dans \mathcal{C}' . Si P est projectif dans \mathcal{C} , alors P est une enveloppe projective de X dans \mathcal{C} .

Cette remarque nous servira à montrer que P_{ξ_1} est une enveloppe projective dans une catégorie plus générale. Montrons à présent un lemme qui affirme que la projectivité résiste à la torsion par un caractère.

Lemme 3.2.3. *Soit P une représentation projective du groupe N , et soit χ un caractère. Alors χP est encore projective comme représentation de N .*

Preuve. Soient deux représentations de longueur finie X et Y du groupe N munies d'un morphisme u de χP dans Y et d'un morphisme surjectif f de X dans Y :

$$\begin{array}{ccc} & \chi P & \\ & \downarrow u & \\ X & \xrightarrow{f} Y & \longrightarrow 0 \end{array}$$

On multiplie toutes les représentations par χ^{-1} et en utilisant la projectivité de P dans la catégorie des représentations de N , on obtient un morphisme v de P dans X faisant commuter le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \swarrow v & \downarrow u \\ \chi^{-1} X & \xrightarrow{f} \chi^{-1} Y & \longrightarrow 0 \end{array}$$

On remultiplie alors toutes les représentations par χ et on obtient la projectivité de χP dans la catégorie des représentations de N :

$$\begin{array}{ccc} & \chi P & \\ & \swarrow v & \downarrow u \\ X & \xrightarrow{f} Y & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Proposition 3.2.4. *La représentation ξ admet une enveloppe projective P_ξ dans la catégorie des représentations de longueur finie de N . De plus, il existe une représentation projective indécomposable sur $\overline{\mathbb{Z}}_l$ de réduction modulo l égale à P_ξ , notée Q_ξ .*

Preuve. La représentation P_{ξ_1} peut être vue comme une représentation de N en la prolongeant par inflation. Elle reste projective dans la catégorie $\mathcal{R}_R^{lf}(N)$ des représentations de longueur finie de N . En effet, soient deux représentations de longueur finie X et Y du groupe N munies d'un morphisme u de P_{ξ_1} dans Y et d'un morphisme surjectif f de X dans Y :

$$\begin{array}{ccc} & P_{\xi_1} & \\ & \downarrow u & \\ X & \xrightarrow{f} Y & \longrightarrow 0 \end{array}$$

On a $X = X_1 \oplus X_2$ et $Y = Y_1 \oplus Y_2$ avec X_2, Y_2 triviales sur $\langle N^1, \varpi_F \rangle$ et X_1, Y_1 toujours non triviales sur $\langle N^1, \varpi_F \rangle$. Or, P_{ξ_1} est triviale sur $\langle N^1, \varpi_F \rangle$ donc $\text{Im}(u) \subset$

Y_2 . On a :

$$\begin{array}{ccc} & P_{\xi_1} & \\ & \downarrow 0 \oplus u & \\ X_1 \oplus X_2 & \xrightarrow{f_1 \oplus f_2} & Y_1 \oplus Y_2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

En utilisant la projectivité de P_{ξ_1} dans la catégorie des représentations de $N / \langle N^1, \varpi_F \rangle$, on obtient un morphisme v de P_{ξ_1} dans X_2 faisant commuter le diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} & P_{\xi_1} & \\ & \swarrow v & \downarrow u \\ X_2 & \xrightarrow{f_2} & Y_2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

ce qui nous donne la projectivité de P_{ξ_1} dans la catégorie des représentations de N via la commutativité du diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} & P_{\xi_1} & \\ & \swarrow 0 \oplus v & \downarrow 0 \oplus u \\ X_1 \oplus X_2 & \xrightarrow{f_1 \oplus f_2} & Y_1 \oplus Y_2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Par conséquent, d'après la remarque 3.2.2, la représentation P_{ξ_1} est une enveloppe projective de ξ_1 vue comme représentation de longueur finie de N .

On définit maintenant

$$P_{\xi} = \omega P_{\xi_1}.$$

La représentation P_{ξ} est alors une enveloppe projective de ξ dans la catégorie des représentations de longueur finie de N . En effet, soit une représentation projective P' dans cette catégorie. On suppose qu'on a un morphisme surjectif u' de P' dans ξ , et on note f un morphisme surjectif de P_{ξ} dans ξ .

$$\begin{array}{ccc} & P' & \\ & \downarrow u & \\ P_{\xi} & \xrightarrow{f} & \xi \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \\ & & 0 \end{array}$$

En multipliant toutes les représentations par ω^{-1} , on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \omega^{-1}P' & \\
 & & & \downarrow u & \\
 & & v \swarrow & \downarrow & \\
 & & P_{\xi_1} & \xrightarrow{f} & \xi_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \swarrow \kappa & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Or d'après le lemme 3.2.3 la représentation $\omega^{-1}P'$ est projective dans la catégorie des représentations de N . Par conséquent, on peut utiliser la propriété d'enveloppe projective de P_{ξ_1} ce qui nous donne le morphisme surjectif v rendant le diagramme ci-dessus commutatif, et en remultipliant toutes les représentations par le caractère ω on obtient ce qu'on cherchait :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & P' & \\
 & & & \downarrow u & \\
 & & v \swarrow & \downarrow & \\
 & & P_{\xi} & \xrightarrow{f} & \xi & \longrightarrow & 0 \\
 & & \swarrow \kappa & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

ce qui prouve que P_{ξ} est une enveloppe projective de ξ dans la catégorie des représentations de longueur finie de N .

Comme $\frac{N}{\langle N^1, \omega_F \rangle}$ est un groupe fini, la représentation P_{ξ_1} admet une unique représentation projective indécomposable Q_{ξ_1} sur $\overline{\mathbb{Z}_l}$ de réduction modulo l égale à P_{ξ_1} . Alors, pour $\tilde{\omega}$ un caractère de N sur $\overline{\mathbb{Z}_l}$ tel que $r_l(\tilde{\omega}) = \omega$, en posant

$$Q_{\xi} = \tilde{\omega}Q_{\xi_1}$$

on obtient une représentation projective (projective d'après le lemme 3.2.3) indécomposable sur $\overline{\mathbb{Z}_l}$ de réduction modulo l égale à P_{ξ} .

Remarque 3.2.5. Comme P_{ξ} est une enveloppe projective, elle est unique à isomorphisme près donc est indépendante du choix du caractère ω qui a servi à sa construction.

3.3 Sous-quotients irréductibles de P_{ξ}

Dans cette section, ξ est le type de la représentation π introduit en début de chapitre et on se propose maintenant d'obtenir des informations sur les sous-quotients irréductibles de P_{ξ} . Dans la suite, ξ' est un sous-quotient irréductible de P_{ξ} que l'on écrit X/Y avec X et Y des sous-représentations de P_{ξ} . On note $P_{\xi'}$ l'enveloppe projective de ξ' dans

la catégorie des représentations de longueur finie de N (obtenue par le même procédé qu'on a utilisé pour P_ξ). On a

$$\mathrm{Hom}_N(P_{\xi'}, P_\xi/Y) \neq \{0\}$$

car $\mathrm{Hom}_N(P_{\xi'}, X/Y) \neq \{0\}$ et X est inclus dans P_ξ .

$$\begin{array}{ccccc} & & P_{\xi'} & & \\ & \swarrow & \downarrow & & \\ P_\xi & \longrightarrow & P_\xi/Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

D'après la projectivité de $P_{\xi'}$ illustrée par le diagramme ci-dessus, on a

$$\mathrm{Hom}_N(P_{\xi'}, P_\xi) \neq \{0\}$$

donc

$$\mathrm{Hom}_{N/\langle N^1, \varpi_F \rangle}(P_{\xi'_1}, P_{\xi_1}) \neq \{0\}$$

d'où en inversant les scalaires d'après le théorème 2.38 de [CR81], comme le groupe $N/\langle N^1, \varpi_F \rangle$ est fini, on a

$$\mathrm{Hom}_{N/\langle N^1, \varpi_F \rangle}(Q_{\xi'_1} \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}, Q_{\xi_1} \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}) \neq \{0\}$$

donc

$$\mathrm{Hom}_N(Q_{\xi'_1} \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}, Q_{\xi_1} \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}) \neq \{0\}.$$

Par conséquent il existe un facteur commun irréductible $\tilde{\tau}$ à $Q_\xi \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}$ et $Q'_\xi \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}$.

On va donner certains résultats sur les groupes finis provenant de l'appendice A §8 de [Vig96].

Notation 3.3.1. Étant donné deux représentations τ_1 et τ_2 (de longueur finie) d'un groupe fini avec τ_1 irréductible, on note $\mathrm{mult}(\tau_1, \tau_2)$ le nombre de fois où τ_1 intervient dans la semi-simplifiée de τ_2 .

Proposition 3.3.2. *Dans cette proposition, on considère H un groupe fini. Soit ρ et σ deux représentations irréductibles de H sur $\overline{\mathbb{F}_l}$ et soit τ une représentation irréductible de H sur $\overline{\mathbb{Q}_l}$. On note $P_\rho \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}_l}}(H)$ l'enveloppe projective de ρ et $Q_\rho \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(H)$ la représentation projective indécomposable de réduction modulo l égale à P_ρ . Alors on a les deux égalités suivantes :*

1. d'une part

$$\mathrm{mult}(\tau, Q_\rho \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}) = \mathrm{mult}(\rho, r_l(\tau));$$

2. et d'autre part

$$\text{mult}(\sigma, P_\rho) = \sum_{\tau' \in \text{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}_l}}(H)} \text{mult}(\sigma, r_l(\tau')) \times \text{mult}(\rho, r_l(\tau')).$$

Pour deux représentations X et Y , avec X irréductible, on note $X \leq Y$ si X apparaît dans Y comme sous-quotient irréductible. Utilisons la proposition ci-dessus pour montrer la proposition qui suit, valable pour des représentations de N .

Proposition 3.3.3. *Soit ρ une $\overline{\mathbb{F}_l}$ -représentation irréductible de N triviale sur N^1 et soit τ une $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -représentation irréductible entière de N triviale sur N^1 . On note $P_\rho \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}_l}}(N)$ l'enveloppe projective de ρ (obtenue comme dans la section 3.2). Alors il existe $Q_\rho \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(N)$ une représentation projective indécomposable de réduction modulo l égale à P_ρ telle que $\tau \leq Q_\rho \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}$ si et seulement si $\rho \leq r_l(\tau)$.*

Preuve. On note ω un caractère de N sur $\overline{\mathbb{F}_l}$ non ramifié tel que $\omega(\varpi_F) = \omega_\rho(\varpi_F)$ comme dans la section précédente, et on introduit $\tilde{\omega}$ un caractère non ramifié de N sur $\overline{\mathbb{Z}_l}$ tel que $r_l(\tilde{\omega}) = \omega$. On suppose qu'on a

$$\rho \leq r_l(\tau)$$

ce qui est équivalent à

$$\omega^{-1}\rho \leq r_l(\tilde{\omega}^{-1}\tau).$$

Comme on sait que le caractère central ω_ρ de ρ apparaît dans la réduction modulo l du caractère central de τ , alors pour des raisons de dimension la réduction modulo l du caractère central de τ est ω_ρ . Ceci permet de choisir $\tilde{\omega}$ pour que $\tilde{\omega}(\varpi_F) = \omega_\tau(\varpi_F)$. En effet,

$$\begin{aligned} r_l(\omega_\tau)(\varpi_D^b) &= \omega_\rho(\varpi_D^b) \\ &= \omega(\varpi_D^b) \\ &= r_l(\tilde{\omega})(\varpi_D^b) \end{aligned}$$

donc $\tilde{\omega}(\varpi_D^b)$ et $\omega_\tau(\varpi_D^b)$ sont égaux modulo l , ce qui permet de choisir $\tilde{\omega}$ pour que $\tilde{\omega}(\varpi_F) = \omega_\tau(\varpi_F)$. Dans ce cas, les représentations $\omega^{-1}\rho$ et $\tilde{\omega}^{-1}\tau$ sont triviales sur N^1 et ϖ_F et on peut appliquer le résultat de la proposition 3.3.2 puisque l'on est en présence de représentations de groupe fini (le groupe $\frac{N}{\langle N^1, \varpi_F \rangle}$) et on obtient :

$$\tilde{\omega}^{-1}\tau \leq Q_{\omega^{-1}\rho} \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}$$

où $Q_{\omega^{-1}\rho}$ est l'unique (unique car on est sur un groupe fini) représentation indécomposable de réduction modulo l égale à $P_{\omega^{-1}\rho}$.

Posons alors

$$Q_\rho = \tilde{\omega}Q_{\omega^{-1}\rho}.$$

La représentation Q_ρ est projective (d'après le lemme 3.2.3), et on a $r_l(Q_\rho) = \omega P_{\omega^{-1}\rho}$ qui est l'enveloppe projective P_ρ de ρ , comme on l'a vu à la section précédente. L'expression que l'on avait obtenue se réécrit

$$\tilde{\omega}^{-1}\tau \leq \tilde{\omega}^{-1}Q_\rho \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}$$

qui est équivalent à

$$\tau \leq Q_\rho \otimes \overline{\mathbb{Q}_l},$$

ce qu'on voulait. Comme on a procédé par équivalence, la réciproque est vraie aussi, et cela conclut la preuve.

Ainsi d'après la proposition 3.3.3 appliquée deux fois, ξ^l et ξ apparaissent dans $r_l(\tilde{\tau})$. Notons $\tilde{\tau}^0$ la restriction de $\tilde{\tau}$ à N^0 , et notons $\tilde{\pi}$ l'induite $\text{ind}_N^G(\tilde{\tau})$, on aimerait montrer que $\tilde{\pi}$ est irréductible et cuspidale. Pour cela, une méthode serait de l'écrire comme l'induite d'un type simple (voir la proposition 1.3.3).

Proposition 3.3.4. *La représentation $\tilde{\pi}$ est cuspidale et irréductible.*

Preuve. D'après la théorie de Clifford (on pourra consulter [CR81] théorème 11.1 ou [CSTS09] théorème 2.2, pour obtenir le théorème de Clifford sur un groupe fini que l'on peut utiliser sur N quitte à tordre $\tilde{\tau}$ par un caractère de manière à le rendre trivial sur N^1 et ϖ_F , comme on l'a déjà fait dans la section 3.2), la représentation $\tilde{\tau}^0$ se décompose en facteurs de longueur finie conjugués sous l'action de N ; Soit $\tilde{\sigma}$ un de ces facteurs, il a un normalisateur K dans N avec $N^0 \subset K \subset N$. Ce facteur $\tilde{\sigma}$ peut se prolonger à K (car K/N^0 est cyclique car N/N^0 l'est) et il existe $\tilde{\mu}$ un tel prolongement vérifiant

$$\text{ind}_K^N(\tilde{\mu}) = \tilde{\sigma}.$$

On a alors

$$\tilde{\pi} = \text{ind}_N^G \text{ind}_K^N(\tilde{\mu}) = \text{ind}_K^G(\tilde{\mu})$$

par transitivité de l'induite.

Or, on a remarqué que $r_l(\tilde{\tau})$ contient ξ , donc $r_l(\tilde{\tau}^0)$ contient ξ^0 . On choisit alors $\tilde{\sigma}$ un facteur irréductible de $\tilde{\tau}^0$ tel que $r_l(\tilde{\sigma})$ contient ξ^0 . Or ce sont des représentations de N^0 triviales sur N^1 , donc on peut les considérer comme des représentations de N^0/N^1 qui est un groupe fini, par conséquent on en déduit par la proposition 3.3.2 que $Q_{\xi^0} \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}$ contient $\tilde{\sigma}$, où Q_{ξ^0} est la représentation projective indécomposable de N^0/N^1 de réduction modulo l égale à P_{ξ^0} l'enveloppe projective de ξ^0 dans la catégorie des $\overline{\mathbb{F}_l}$ -représentations de N^0/N^1 (et $\tilde{\sigma}$ également est considéré comme une représentation de N^0/N^1).

Or, ξ^0 est supercuspidale donc $Q_{\xi^0} \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}$ ne contient que des $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -représentations cuspidales dont la réduction modulo l est égale à ξ^0 . En effet, ceci découle du théorème III.2.9 de

[Vig96] et de la propriété III.1.1 du même ouvrage. Par conséquent, on a $r_l(\tilde{\sigma}) \simeq \xi^0$. Par inflation, ce résultat s'étend à N^0 ce qui prouve que $\tilde{\sigma}$ est supercuspidal. On en déduit également que $N_G(\tilde{\sigma}) = N_G(\xi^0) = N$ donc $\tilde{\pi} = \text{ind}_K^G(\tilde{\mu})$ est l'induite d'un type (une supercuspidale étendue à son normalisateur dans G) donc d'après la proposition 1.3.3, $\tilde{\pi}$ est irréductible et cuspidale.

Proposition 3.3.5. *La représentation ξ' est un type simple.*

Preuve. On sait que $r_l(\tilde{\tau})$ contient ξ et ξ' donc $r_l(\tilde{\tau}^0)$ contient ξ^0 et ξ'^0 . Donc il existe deux facteurs irréductibles σ' et $\tilde{\sigma}$ de $\tilde{\tau}^0$ tels que $r_l(\sigma') \geq \xi^0$ et $r_l(\tilde{\sigma}) \geq \xi'^0$. Or d'après la théorie de Clifford (voir la preuve précédente), ces deux facteurs sont conjugués dans N , donc il existe $\tilde{n} \in N$ tel que $\sigma' = \tilde{\sigma}^{\tilde{n}}$.

On a $r_l(\tilde{\sigma}^{\tilde{n}}) \geq \xi^0$, donc $r_l(\tilde{\sigma})$ contient $(\xi^0)^{\tilde{n}^{-1}}$, c'est-à-dire ξ^0 puisque $\tilde{n} \in N = N_G(\xi^0)$. Par conséquent, $r_l(\tilde{\sigma})$ contient à la fois ξ^0 et ξ'^0 . Or, on a vu dans la preuve précédente que $r_l(\tilde{\sigma}) \simeq \xi^0$ donc $\xi^0 \simeq \xi'^0$, en particulier ξ'^0 est supercuspidale et de plus, $N_G(\xi'^0) = N$, donc ξ' est un type simple.

Proposition 3.3.6. *Il existe $j \in \mathbb{N}$ vérifiant $j = 0$ si $\epsilon(\pi) = 1$ ou $\epsilon(\pi) \nmid s(\pi)$ tel que les représentations ξ' et $\xi\nu^j$ sont conjuguées dans le normalisateur (dans G) de N .*

Preuve. Notons π' l'induite $\text{ind}_N^G(\xi')$. On rappelle que π est la représentation dont est issu le type ξ . Comme $\tilde{\pi}$ est irréductible et cuspidale, alors d'après la proposition 1.1.43 (et parce que $r_l(\tilde{\pi})$ contient π comme on le justifie ci-dessous), on a

$$r_l(\tilde{\pi}) = \bigoplus_{j=0}^{a-1} \pi\nu^j$$

avec $a = 1$ si $\epsilon(\pi) = 1$ ou $\epsilon(\pi) \nmid s(\pi)$. De plus, comme $r_l(\tilde{\tau})$ contient ξ et ξ' , alors $r_l(\tilde{\pi})$ contient π et π' , donc par irréductibilité de π et π' on a l'existence de $j \in \mathbb{N}$ tel que

$$\pi\nu^j \simeq \text{ind}_N^G(\xi')$$

(avec j nul si $a = 1$, donc si $\epsilon(\pi) = 1$ ou $\epsilon(\pi) \nmid s(\pi)$) donc π contient $\xi'\nu^{-j}$ et ξ . Comme ce sont deux types simples, ils sont conjugués dans G (d'après la proposition 1.3.3), et comme ce sont des représentations de N ils sont donc conjugués dans le normalisateur (dans G) de N , c'est-à-dire par une puissance de ϖ_D puisque $N_G(N) = \langle N^0, \varpi_D \rangle$.

3.4 Espaces d'extension pour les supercuspidales de niveau zéro

On sait que (cf section 3.1)

$$\mathrm{Ext}_G^1(\pi, \pi\chi) \subset \prod_{g \in N \backslash G/N} \mathrm{Ext}_N^1(\xi, \mathrm{Ind}_{N \cap N^g}^N(\xi \otimes \chi|_N)^g).$$

On veut montrer la proposition suivante.

Proposition 3.4.1. *On a*

$$\mathrm{Ext}_G^1(\pi, \pi\chi) = \bigoplus_{g \in N \backslash G/N} \mathrm{Ext}_N^1(\xi, \xi^g \chi)$$

où les g qui contribuent à la somme appartiennent au normalisateur dans G de N .

Preuve. On note ξ' un sous-quotient irréductible de l'induite $\mathrm{Ind}_{N \cap N^g}^N(\xi\chi)^g$ tel que $\mathrm{Ext}_N^1(\xi, \xi') \neq \{0\}$. Soit M non nul dans l'espace d'extension $\mathrm{Ext}_N^1(\xi, \xi')$. Par projectivité de $P_{\xi'}$, où $P_{\xi'}$ est une enveloppe projective de ξ' construite via la proposition 3.2.4, $\mathrm{Hom}_N(P_{\xi'}, P_{\xi}) \neq \{0\}$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \xi' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & \xi & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \nearrow & & \uparrow & & \\ & & P_{\xi'} & \xrightarrow{\dots\dots\dots} & P_{\xi} & & & & \end{array}$$

donc ξ' est un sous-quotient irréductible de P_{ξ} (car ξ' est inclus dans M qui apparaît dans P_{ξ}). Notons cela $\xi' \simeq X/Y$ (avec X une sous-représentation de $\mathrm{Ind}_{N \cap N^g}^N(\xi\chi)^g$ et Y une sous-représentation de X), on est dans la situation suivante où on peut utiliser la projectivité de P_{ξ}

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow & \downarrow \\ P_{\xi} & \longrightarrow & X/Y \simeq \xi' \\ & & \downarrow \\ & & 0 \end{array}$$

et comme X se plonge dans $\mathrm{Ind}_{N \cap N^g}^N(\xi\chi)^g$, on en déduit

$$\mathrm{Hom}_N(P_{\xi}, \mathrm{Ind}_{N \cap N^g}^N(\xi\chi)^g) \neq \{0\}.$$

Or P_ξ a tous ses sous-quotients irréductibles conjugués à ξ tordu par une puissance de ν (pas forcément la même puissance pour chaque sous-quotient irréductible) d'après la proposition 3.3.6. Donc il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathrm{Hom}_N((\xi\nu^j)^{\tilde{g}}, \mathrm{Ind}_{N \cap N^g}^N(\xi\chi)^g) \neq \{0\}$$

avec $\tilde{g} \in N_G(N)$. Par réciprocity de Frobenius,

$$\mathrm{Hom}_{N \cap N^g}(\xi^{\tilde{g}}\nu^j, \xi^g\chi) \neq \{0\}$$

donc

$$\mathrm{Hom}_{N \cap N^{g\tilde{g}^{-1}}}(\xi\nu^j, \xi^{g\tilde{g}^{-1}}\chi) \neq \{0\}$$

car \tilde{g} normalise N , et donc

$$\mathrm{Hom}_{N^0 \cap (N^0)^{g\tilde{g}^{-1}}}(\xi, \xi^{g\tilde{g}^{-1}}) \neq \{0\}$$

or on connaît les ensembles d'entrelacement des types (cf proposition 1.3.6) donc $g\tilde{g}^{-1} \in N$ donc en particulier g normalise N . L'identité

$$\mathrm{Ext}_G^1(\pi, \pi\chi) \subset \prod_{g \in N \backslash G/N} \mathrm{Ext}_N^1(\xi, \mathrm{Ind}_{N \cap N^g}^N(\xi \otimes \chi|_N)^g)$$

rappelée au début de cette section permet de conclure, car comme le produit contient un nombre fini de termes c'était en fait une somme directe et l'inclusion était un isomorphisme (voir la section 3.1), donc

$$\mathrm{Ext}_G^1(\pi, \pi\chi) \simeq \bigoplus_{g \in N \backslash G/N} \mathrm{Ext}_N^1(\xi, \mathrm{Ind}_{N \cap N^g}^N(\xi \otimes \chi|_N)^g)$$

ce qui donne le résultat.

On a obtenu qu'il existe $g \in G$ tel que

$$\mathrm{Ext}_N^1(\xi, \xi^{\tilde{g}}\chi) \neq \{0\}$$

avec \tilde{g} normalisant N . Soit donc M non nul dans cet espace d'extension. Alors par projectivité de P_ξ (voir diagramme ci-dessous), la représentation $\xi^{\tilde{g}}\chi$ apparaît dans P_ξ .

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \xi^{\tilde{g}}\chi & \longrightarrow & M & \longrightarrow & \xi & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \uparrow & & \\ & & & & & & P_\xi & & \end{array}$$

Donc on peut procéder comme on l'a fait dans la section précédente : on construit $\tilde{\tau}$ tel que ξ et $\xi^{\tilde{g}}\chi$ apparaissent dans $r_l(\tilde{\tau})$, on pose $\tilde{\pi}$ l'induite de $\tilde{\tau}$ de sorte qu'en induisant π et $\pi\chi$ apparaissent dans $r_l(\tilde{\pi})$ et on sait que $\tilde{\pi}$ est irréductible et cuspidale donc π et $\pi\chi$ apparaissent dans la réduction modulo l d'une même représentation irréductible et cuspidale.

En utilisant alors la proposition 1.1.43, on obtient :

Proposition 3.4.2. *Soit π une représentation irréductible et supercuspidale de G de niveau 0 vérifiant*

$$\text{Ext}_G^1(\pi, \pi\chi) \neq \{0\}$$

avec χ un caractère non ramifié. Alors il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que

$$\pi\chi \simeq \pi\nu^j$$

avec $j = 0$ si $\epsilon(\pi) \nmid s(\pi)$ ou si $\epsilon(\pi) = 1$.

On va utiliser cette proposition pour en déduire la proposition suivante, où l'on s'intéresse aux espaces d'extension Ext^i , où cette fois-ci i peut être plus grand que 1.

Proposition 3.4.3. *Soit π, π' deux représentations supercuspidales de G de niveau 0. S'il existe $i \geq 0$ tel que $\text{Ext}_G^i(\pi', \pi) \neq \{0\}$, alors*

1. Si $\epsilon(\pi) = 1$ ou si $\epsilon(\pi) \nmid s(\pi)$, alors $\pi' \simeq \pi$.
2. Si $\epsilon(\pi) \mid s(\pi)$, alors il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $\pi' \simeq \pi\nu^j$.

On va utiliser la représentation P_π l'induite à G de l'enveloppe projective P_ξ du type ξ associé à π . On sait que P_π est projectif (car P_ξ l'est et l'induction compacte préserve la projectivité) et on sait aussi (c'est obtenu par induction depuis la proposition précédente) que :

1. Si $\epsilon(\pi) = 1$ ou si $\epsilon(\pi) \nmid s(\pi)$, alors tous les sous-quotients irréductibles de P_π sont isomorphes à π .
2. Si $\epsilon(\pi) \mid s(\pi)$, alors tous les sous-quotients irréductibles de P_π sont isomorphes à une représentation de la forme $\pi\nu^j$, avec $j \in \mathbb{N}$.

De plus, P_π est aussi de longueur finie car P_ξ l'est et l'induite d'un type simple maximal étendu est irréductible. On va utiliser toutes ces propriétés pour montrer la proposition 3.4.3.

Preuve (de 3.4.3). Traitons le cas $\epsilon(\pi) \mid s(\pi)$ (l'autre cas étant similaire et plus simple). On procède par récurrence sur i , l'hypothèse de récurrence $P(i)$ est la suivante : "pour tout π, π' représentations supercuspidales de niveau 0 de G , avec $\epsilon(\pi) \mid s(\pi)$, si $\text{Ext}_G^i(\pi', \pi\nu^k) \neq \{0\}$ pour un $k \in \mathbb{N}$, alors il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $\pi' \simeq \pi\nu^j$."

Le cas $i = 1$ découle de la proposition 3.4.2. Pour le cas général, procédons par contraposée : on suppose que π' n'est pas isomorphe à une représentation de la forme $\pi\nu^j$ avec $j \in \mathbb{N}$. Comme on est dans le cas $\epsilon(\pi)|s(\pi)$, on sait que les sous-quotients irréductibles de P_π sont isomorphes à $\pi\nu^j$ pour $j \in \mathbb{N}$. Fixons $\pi\nu^{j_0}$ un de ces sous-quotients. Par projectivité de P_π c'est aussi un quotient et on considère la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_\pi \longrightarrow \pi\nu^{j_0} \longrightarrow 0$$

qui définit P_1 . On applique le foncteur $\text{Hom}_G(\pi', \cdot)$ et on en déduit la suite exacte

$$\text{Ext}_G^{i-1}(\pi', \pi\nu^{j_0}) \longrightarrow \text{Ext}_G^i(\pi', P_1) \longrightarrow \text{Ext}_G^i(\pi', P_\pi)$$

On sait que $\text{Ext}_G^{i-1}(\pi', \pi\nu^{j_0}) = 0$ par hypothèse de récurrence (dont on utilise la contraposée comme π' n'est pas isomorphe à une représentation de la forme $\pi\nu^j$ avec $j \in \mathbb{N}$) et de plus $\text{Ext}_G^i(\pi', P_\pi) = 0$ car P_π est projective. Par conséquent $\text{Ext}_G^i(\pi', P_1) = 0$. On peut répéter le processus comme tous les sous-quotients irréductibles de P_1 sont isomorphes à une représentation de la forme $\pi\nu^j$, avec $j \in \mathbb{N}$. Ainsi on construit P_{k+1} via la suite exacte

$$0 \longrightarrow P_{k+1} \longrightarrow P_k \longrightarrow \pi\nu^{j_k} \longrightarrow 0.$$

On applique le foncteur $\text{Hom}_G(\pi', \cdot)$ et on en déduit la suite exacte

$$\text{Ext}_G^{i-1}(\pi', \pi\nu^{j_k}) \longrightarrow \text{Ext}_G^i(\pi', P_{k+1}) \longrightarrow \text{Ext}_G^i(\pi', P_k)$$

or on sait que $\text{Ext}_G^i(\pi', P_k) = 0$. On construit ainsi une suite de représentations

$$P_\pi = P_0 \supsetneq P_1 \supsetneq P_2 \supsetneq \cdots \supsetneq P_{r-1} \supsetneq P_r = 0$$

vérifiant pour tout $0 \leq k \leq r-1$ à la fois $P_k/P_{k+1} \simeq \pi\nu^j$ pour un $j = j(k) \in \mathbb{N}$ et également $\text{Ext}_G^i(\pi', P_k) = 0$ de proche en proche. La suite de modules strictement décroissante atteint 0 car P_π est de longueur finie. Alors pour $k = r-1$, on obtient $\text{Ext}_G^1(\pi', \pi\nu^j) = 0$, c'est-à-dire ce qu'on voulait.

Chapitre 4

Cas général

Dans ce chapitre on considère encore une algèbre à division centrale D de dimension finie sur F de degré réduit d avec F un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p . On fixe $m \geq 1$ et on pose $G = \mathrm{GL}_m(D)$, et le corps $R = \overline{\mathbb{F}_l}$ qui est algébriquement clos de caractéristique l différente de p . L'objectif est de décrire la décomposition en blocs de la catégorie $\mathcal{R}_R^{lf}(G)$ des représentations de G lisses et de longueur finie et à coefficients dans R . On va chercher à utiliser pour cela les résultats obtenus dans le chapitre précédent, en se ramenant au cas du niveau 0.

4.1 Réduction au niveau 0

4.1.1 Préliminaires

Dans [SS16], section 10, les auteurs montrent que l'on peut associer un type simple $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ à un bloc de $\mathcal{R}_R(G)$ (dans [SS16], les auteurs utilisent des types semi-simples mais dans notre cas nous allons utiliser uniquement des représentations cuspidales donc on peut se restreindre aux types simples) de la manière suivante : une classe inertielle de paire supercuspidale $[M, \rho]_G$ (qui détermine un bloc au sens où une représentation irréductible de G appartient au bloc associé à une paire supercuspidale $[M, \rho]_G$ si son support supercuspidal est dans $[M, \rho]_G$) correspond au type $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ si les sous-quotients irréductibles de $\mathrm{ind}_J^G(\boldsymbol{\lambda})$ sont les représentations de G qui ont leur support supercuspidal dans $[M, \rho]_G$.

Considérons un supertype simple maximal $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ (cf section 1.3.5) associé à un bloc $\mathcal{R}(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ de $\mathcal{R}_R(G)$. On adopte les notations de la section 1.3, c'est-à-dire que le type $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ est associé à une strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$, on pose $E = F[\beta]$, on note B le centralisateur de E dans $M_m(D)$ et on dispose de \mathbf{J}^1 un pro- p sous-groupe ouvert compact distingué

de \mathbf{J} . On fixe un isomorphisme de E -algèbres

$$\phi : B \longrightarrow M_{m'}(D')$$

avec m' un entier et D' une E -algèbre à division de degré réduit d' , de façon à pouvoir identifier $\mathfrak{A}(\Lambda) \cap B$ à un ordre principal standard. On a alors

$$m'd' = \frac{md}{[E : F]}.$$

On dispose aussi d'une décomposition $\lambda = \kappa \otimes \sigma$ avec κ une représentation irréductible de \mathbf{J} et σ une représentation supercuspidale de \mathcal{M} vue comme une représentation irréductible de \mathbf{J} triviale sur \mathbf{J}^1 .

On définit une représentation irréductible η comme la restriction de κ à \mathbf{J}^1 , et on pose $K = U(\Lambda) \cap B^\times$ qui est un sous-groupe ouvert compact maximal de B^\times et $K^1 = U_1(\Lambda) \cap B^\times$ son pro- p radical avec $K/K^1 \simeq \mathbf{J}/\mathbf{J}^1 \simeq \mathrm{GL}_{m'}(\mathfrak{k}_{D'})$. On note \mathcal{G} ce groupe : $\mathcal{G} = \mathrm{GL}_{m'}(\mathfrak{k}_{D'})$.

On peut alors être plus précis sur le bloc associé au type (\mathbf{J}, λ) . Étant donné une décomposition $\lambda = \kappa \otimes \sigma$, on peut construire le foncteur

$$\begin{aligned} K_\kappa : \mathcal{R}(\mathbf{G}) &\longrightarrow \mathcal{R}_R(\mathbf{J}/\mathbf{J}^1) \\ \pi &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}^1}(\kappa, \pi) \end{aligned}$$

où l'action de \mathbf{J} sur $K_\kappa(\pi)$ est donnée par $x \cdot \varphi = \pi(x) \circ \varphi \circ \kappa(x)^{-1}$ pour $\pi \in \mathcal{R}(\mathbf{G})$, $\varphi \in K_\kappa(\pi)$ et $x \in \mathbf{J}$.

Ceci permet d'associer au type (\mathbf{J}, λ) la sous-catégorie pleine $\mathcal{R}_R(\mathbf{J}, \lambda)$ dont les objets sont les représentations lisses V qui sont engendrées par le sous-espace maximal de $K_\kappa(V)$ dont tous les sous-quotients irréductibles ont leur support supercuspidal dans la classe d'équivalence de $(\mathcal{M} = \mathbf{J}/\mathbf{J}^1, \sigma)$ (c'est-à-dire l'ensemble des paires supercuspidales (\mathcal{M}', σ') de \mathcal{G} tel qu'il existe $\epsilon \in \mathrm{Gal}(\mathfrak{k}_{D'}/\mathfrak{k}_E)$ tel que (\mathcal{M}', σ') est \mathcal{G} -conjugué à $(\mathcal{M}, \sigma^\epsilon)$). C'est cette sous-catégorie pleine qui est le bloc de $\mathcal{R}_R(\mathbf{G})$ associé au type (\mathbf{J}, λ) .

On va maintenant utiliser certains résultats de [Chi18], où l'auteur établit une équivalence de catégories entre les blocs de $\mathcal{R}_R(\mathbf{G})$ et des blocs de niveau 0 de $\mathcal{R}_R(B^\times)$. Commençons par résumer son propos pour introduire les notions dont on se servira ensuite.

On note $\mathcal{R}(\mathbf{G}, \eta)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{R}_R(\mathbf{G})$ des représentations engendrées par leur composante η -isotopique. On définit une algèbre de Hecke $\mathcal{H}_R(\mathbf{G}, \eta) : c'est la R -algèbre des fonctions $\Phi : \mathbf{G} \longrightarrow \mathrm{End}_R(\eta)$ telles que $\Phi(hgh') = \eta(h) \circ \Phi(g) \circ \eta(h')$ pour$

$h, h' \in \mathbf{J}^1$ et $g \in G$, dont les supports sont une union finie de \mathbf{J}^1 -double classes et munie du produit de convolution

$$\Phi_1 * \Phi_2(g) = \sum_{x \in G/\mathbf{J}^1} \Phi_1(x) \Phi_2(x^{-1}g)$$

pour $g \in G$. On a un isomorphisme d'algèbre

$$\xi : \mathcal{H}_R(G, \boldsymbol{\eta}) \simeq \text{End}_G(\text{ind}_{\mathbf{J}^1}^G(\boldsymbol{\eta}))$$

donné par

$$\xi(\Phi)(f)(g) = (\Phi * f)(g) = \sum_{x \in G/\mathbf{J}^1} \Phi(x)(f(x^{-1}g))$$

où $\Phi \in \mathcal{H}_R(G, \boldsymbol{\eta})$, $f \in \text{ind}_{\mathbf{J}^1}^G(\boldsymbol{\eta})$ et $g \in G$.

On introduit aussi le foncteur

$$\begin{aligned} M_{\boldsymbol{\eta}} : \mathcal{R}(G, \boldsymbol{\eta}) &\longrightarrow \text{Mod} - \mathcal{H}_R(G, \boldsymbol{\eta}) \\ \pi &\longmapsto \text{Hom}_G(\text{ind}_{\mathbf{J}^1}^G \boldsymbol{\eta}, \pi) \end{aligned}$$

où l'action de $\Psi \in \mathcal{H}_R(G, \boldsymbol{\eta})$ sur $m \in M_{\boldsymbol{\eta}}(V)$ est donnée par $(m \cdot \Psi)(f) = m(\Psi * f)$ pour $f \in \text{ind}_{\mathbf{J}^1}^G(\boldsymbol{\eta})$, avec

$$\Psi * f(g) = \sum_{x \in G/\mathbf{J}^1} \Psi(x)(f(x^{-1}g))$$

pour $g \in G$.

Théorème 4.1.1 ([Chi18], théorème 5.10). *Le foncteur $M_{\boldsymbol{\eta}}$ est une équivalence de catégorie.*

On définit également une algèbre de Hecke $\mathcal{H}_R(B^\times, K^1)$ de façon similaire : il s'agit de la R -algèbre des fonctions $\Phi : B^\times \longrightarrow \text{End}_R(1_{K^1})$ telles que $\Phi(hgh') = \Phi(g)$ pour $h, h' \in K^1$ et $g \in B^\times$, dont les supports sont une union finie de K^1 -double classes. On munit cette algèbre du produit de convolution

$$\Phi_1 * \Phi_2(g) = \sum_{x \in B^\times/K^1} \Phi_1(x) \Phi_2(x^{-1}g)$$

pour $g \in B^\times$. On a comme plus haut un isomorphisme d'algèbre

$$\xi : \mathcal{H}_R(B^\times, K^1) \simeq \text{End}_{B^\times}(\text{ind}_{K^1}^{B^\times}(1_{K^1}))$$

donné par

$$\xi(\Phi)(f)(g) = (\Phi * f)(g) = \sum_{x \in B^\times/K^1} \Phi(x)(f(x^{-1}g))$$

où $\Phi \in \mathcal{H}_R(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1)$, $f \in \text{ind}_{\mathbb{K}^1}^{\mathbb{B}^\times}(1_{\mathbb{K}^1})$ et $g \in \mathbb{B}^\times$.

On note $\mathcal{R}(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{R}_R(\mathbb{B})$ des représentations engendrées par leur composante $1_{\mathbb{K}^1}$ -isotopique. On introduit le foncteur

$$\begin{aligned} M_1 : \mathcal{R}(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1) &\longrightarrow \text{Mod} - \mathcal{H}_R(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1) \\ \pi &\longmapsto \text{Hom}_{\mathbb{B}^\times}(\text{ind}_{\mathbb{K}^1}^{\mathbb{B}^\times} 1_{\mathbb{K}^1}, \pi) \end{aligned}$$

où l'action de $\Psi \in \mathcal{H}_R(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1)$ sur $m \in M_1(V)$ est donnée par $(m.\Psi)(f) = m(\Psi * f)$ pour $f \in \text{ind}_{\mathbb{K}^1}^{\mathbb{B}^\times}(1_{\mathbb{K}^1})$, avec

$$\Psi * f(g) = \sum_{x \in \mathbb{B}^\times / \mathbb{K}^1} \Phi(x)(f(x^{-1}g))$$

pour $g \in \mathbb{B}^\times$.

Ce foncteur est également une équivalence de catégories (cf [Chi17] théorème 3.2). Il admet un quasi-inverse

$$\begin{aligned} M_1^{-1} : \text{Mod} - \mathcal{H}_R(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1) &\longrightarrow \mathcal{R}(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1) \\ W &\longmapsto W \otimes_{\mathcal{H}_R(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1)} \text{ind}_{\mathbb{K}^1}^{\mathbb{B}^\times}(1) \end{aligned}$$

qui est une équivalence de catégories où l'action à gauche de $\Phi \in \mathcal{H}_R(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1)$ sur $f \in \text{ind}_{\mathbb{K}^1}^{\mathbb{B}^\times}(1)$ est donnée par $\Phi.f = \Phi * f$ et l'action à gauche de $x \in \mathbb{B}^\times$ sur $w \otimes f \in W \otimes_{\mathcal{H}_R(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1)} \text{ind}_{\mathbb{K}^1}^{\mathbb{B}^\times}(1)$ est donnée par $x.(w \otimes f) = w \otimes (x.f)$, où $x.f : y \mapsto f(yx)$.

Dans son article [Chi18], Chinello construit un morphisme d'algèbre $\theta : \mathcal{H}_R(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1) \longrightarrow \mathcal{H}_R(\mathbb{G}, \boldsymbol{\eta})$ qu'il prouve être un isomorphisme, ce qui permet d'obtenir une équivalence de catégories

$$\theta^* : \text{Mod} - \mathcal{H}_R(\mathbb{G}, \boldsymbol{\eta}) \longrightarrow \text{Mod} - \mathcal{H}_R(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1)$$

et il obtient par composition une équivalence de catégorie

$$\mathbf{F} = M_1^{-1} \circ \theta^* \circ M_\eta : \mathcal{R}(\mathbb{G}, \boldsymbol{\eta}) \longrightarrow \mathcal{R}(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1).$$

L'action à droite de $\Phi \in \mathcal{H}_R(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1)$ sur un élément N de $\text{Mod} - \mathcal{H}_R(\mathbb{G}, \boldsymbol{\eta})$ est donnée par $N.\Phi = N.\theta(\Phi)$. Le diagramme commutatif suivant illustre la situation.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(\mathbb{G}, \boldsymbol{\eta}) & \xrightarrow{\mathbf{F}} & \mathcal{R}(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1) \\ \downarrow M_\eta & & \downarrow M_1 \\ \text{Mod} - \mathcal{H}_R(\mathbb{G}, \boldsymbol{\eta}) & \xrightarrow{\theta^*} & \text{Mod} - \mathcal{H}_R(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1) \end{array}$$

Pour comprendre comment cette équivalence de catégories se comporte sur les blocs,

il introduit deux foncteurs, le foncteur

$$\begin{aligned} K_\kappa : \mathcal{R}(G, \eta) &\longrightarrow \mathcal{R}_R(\mathbf{J}/\mathbf{J}^1) \simeq \mathcal{R}_R(\mathcal{G}) \\ \pi &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}^1}(\eta, \pi) \end{aligned}$$

que l'on a défini plus haut, et le foncteur

$$\begin{aligned} K_1 : \mathcal{R}(B^\times, K^1) &\longrightarrow \mathcal{R}_R(K/K^1) \\ \pi &\longmapsto \mathrm{Hom}_{K^1}(1_{K^1}, \pi) \end{aligned}$$

où l'action de K sur $K_1(\pi, V)$ est donnée par $x.\phi = \pi(x) \circ \phi$ pour $(\pi, V) \in \mathcal{R}(B^\times, K^1)$, $\phi \in K_1(\pi)$ et $x \in K$.

Remarque 4.1.2. On verra plus tard (dans la preuve de la proposition 4.1.5) que les identifications $\mathbf{J}/\mathbf{J}^1 \simeq K/K^1$ sont compatibles au sens où elles font commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{R}_R(G, \eta) & \xrightarrow{M_\eta} & \mathrm{Mod} - \mathcal{H}_R(G, \eta) & \xrightarrow{\theta^*} & \mathrm{Mod} - \mathcal{H}_R(B^\times, K^1) & \xrightarrow{M_1^{-1}} & \mathcal{R}_R(B^\times, K^1) \\ & \searrow^{K_\kappa} & & & & & \swarrow^{K_1} \\ & & \mathcal{R}_R(\mathbf{J}/\mathbf{J}^1) & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{R}_R(K/K^1) & & \end{array}$$

Il utilise ensuite ces foncteurs pour prouver que ([Chi18] proposition 5.14 et 5.15) $\mathcal{R}(\mathbf{J}, \lambda)$ est équivalent au bloc de niveau 0 noté $\mathcal{R}(K, \sigma)$ de $\mathcal{R}_R(B^\times)$ avec $K_\kappa(\mathcal{R}(\mathbf{J}, \lambda)) = K_K(\mathcal{R}(K, \sigma))$ au sens suivant : une représentation $(\rho, Z) \in \mathcal{R}(B^\times, K^1)$ appartient au bloc $\mathcal{R}(K, \sigma)$ si elle est engendrée par le sous-espace maximal de Z^{K^1} dont tous les sous-quotients irréductibles ont leur support supercuspidal dans la classe de (\mathcal{M}, σ) .

4.1.2 Propriétés du foncteur \mathbf{F}

On sait que le foncteur \mathbf{F} induit une équivalence de catégorie entre le bloc $\mathcal{R}(G, \eta)$ et un bloc de niveau 0 de $\mathcal{R}_R(B^\times)$, et ce résultat (qui est le théorème 5.15 de [Chi18]) motive la stratégie suivante. On va montrer que \mathbf{F} se comporte bien vis-à-vis de la torsion par le caractère ν et vis-à-vis de la supercuspidalité (c'est-à-dire qu'il préserve le fait d'être supercuspidale) de façon à pouvoir utiliser les résultats du chapitre précédent pour en déduire le bloc des représentations supercuspidales de $\mathcal{R}_R^{lf}(G)$. C'est ce que l'on cherche à faire maintenant.

On rappelle qu'on a au début de la section fait l'identification

$$\mathbf{J}/\mathbf{J}^1 \simeq K/K^1 \simeq \mathrm{GL}_{m'}(\mathfrak{k}_{D'}) \simeq \mathcal{G}.$$

Posons

$$\begin{aligned} H_1 : \text{Mod} - \mathcal{H}_R(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1) &\longrightarrow \mathcal{R}_R(\mathbb{K}/\mathbb{K}^1) \\ W &\longmapsto (\tau, W) : \tau(k)(w) = w \cdot f_{k^{-1}} \end{aligned}$$

avec de plus $H_1(\phi) = \phi$ pour $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{H}_R(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1)}(W_1, W_2)$ avec W_1 et W_2 deux $\mathcal{H}_R(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1)$ -modules.

Dans [Chi15], l'auteur donne une description par générateurs et relations de l'algèbre $\mathcal{H}_R(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1)$. Pour cela, il définit pour $x \in \mathbb{B}^\times$ la fonction caractéristique f_x de la double classe $\mathbb{K}^1 x \mathbb{K}^1$ (dans la section 1.6), puis il trouve (dans la section 2.2) des générateurs de l'algèbre $\mathcal{H}_\mathbb{Z}(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1)$ de la forme f_x (avec $x \in \mathbb{B}^\times$). Plus précisément il introduit l'uniformisante $\varpi_{D'}$ de D' (choisie telle que $\varpi_{D'}^{d'} = \varpi_E$ avec ϖ_E une uniformisante de E) et il définit la matrice

$$\tau_i = \begin{pmatrix} Id_i & 0 \\ 0 & \varpi_{D'} Id_{m'-i} \end{pmatrix}$$

(où Id_i désigne la matrice identité à i lignes et i colonnes), et il montre que l'algèbre $\mathcal{H}_\mathbb{Z}(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1)$ est engendrée par les applications f_x , quand x appartient à K ou appartient à un ensemble contenant certaines matrices de la forme τ_i décrites en fonction du système de racine de GL'_m relativement au sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures (voir, toujours dans le même texte, section 2.1 et proposition 2.10).

On appelle ξ l'identification que l'on a fait entre \mathbf{J}/\mathbf{J}^1 et K/K^1 , et pour $k \in \mathbf{J}/\mathbf{J}^1$, on note \tilde{k} l'élément de K/K^1 vérifiant $\xi(k) = \tilde{k}$. Comme l'application f_x , pour $x \in K$, ne dépend que de la classe de x modulo K^1 , on peut la noter $f_{\tilde{k}}$ avec $\tilde{k} \in K/K^1$. Elle a pour support $\tilde{k}K^1$ et vaut 1 en \tilde{k} (utilisées par exemple dans [Chi15], section 4.2). De plus, on peut décrire $\theta(f_{\tilde{k}})$, il s'agit de l'élément noté $\tilde{f}_{\tilde{k}} \in \mathcal{H}_R(\mathbf{G}, \boldsymbol{\eta})$ ayant pour support $k\mathbf{J}^1$ et valant $\boldsymbol{\kappa}(k)$ en k (utilisées par exemple dans [Chi18], dans la preuve de la proposition 5.14).

Lemme 4.1.3. *Le foncteur K_1 est équivalent au foncteur $H_1 \circ M_1$.*

Le diagramme suivant illustre la situation.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_R(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1) & \xrightarrow{M_1} & \text{Mod} - \mathcal{H}_R(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1) \\ & \searrow K_1 & \swarrow H_1 \\ & \mathcal{R}_R(\mathbb{K}/\mathbb{K}^1) & \end{array}$$

Preuve. On introduit la fonction de support i_v (voir définition 1.1.10) avec support dans \mathbb{K}^1 avec $i_v(g) = 1_{\mathbb{K}^1}(g)(v) = v$ pour tout $g \in \mathbb{K}^1$, où $1_{\mathbb{K}^1}$ désigne la représentation triviale de \mathbb{K}^1 . On va utiliser l'isomorphisme de la réciprocity de Frobenius

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Hom}_{\mathbb{B}^\times}(ind_{\mathbb{K}^1}^{\mathbb{B}^\times}(1_{\mathbb{K}^1}), \pi) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}^1}(1, \pi) \\ m &\longmapsto (v \longmapsto m(i_v)) \end{aligned}$$

On considère $\Psi \in \mathcal{H}_R(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1)$, $m \in \text{Hom}_{\mathbb{B}^\times}(\text{ind}_{\mathbb{K}^1}^{\mathbb{B}^\times}(1), \pi)$, $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}^1}(1_{\mathbb{K}^1}, \pi)$ et v appartenant à l'espace de la représentation $1_{\mathbb{K}^1}$. On a

$$\Phi(\Phi^{-1}(\phi).\Psi)(v) = (\Phi^{-1}(\phi).\Psi)(i_v)$$

en utilisant la réciprocity de Frobenius. Et comme par définition

$$(\Phi^{-1}(\phi).\Psi)(i_v) = \Phi^{-1}(\phi)(\Psi * i_v),$$

on a

$$\Phi(\Phi^{-1}(\phi).\Psi)(v) = \Phi^{-1}(\phi)(\Psi * i_v).$$

Il s'agit alors de trouver $\Psi \in \mathcal{H}_R(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1)$ telle que $\Psi * i_v = k.i_v$. En effet, pour un tel Ψ , on a alors

$$\begin{aligned} \Phi(\Phi^{-1}(\phi).\Psi)(v) &= \Phi^{-1}(\phi)(k.i_v) \\ &= \Phi^{-1}(\phi)(\text{ind}_{\mathbb{K}^1}^{\mathbb{B}^\times}(1_{\mathbb{K}^1})(k)(i_v)) \\ &= \pi(k) \circ \Phi^{-1}(\phi)(i_v) \end{aligned}$$

car $\Phi^{-1}(\phi) \in \text{Hom}_{\mathbb{B}^\times}(\text{ind}_{\mathbb{K}^1}^{\mathbb{B}^\times}(1_{\mathbb{K}^1}), \pi)$. On a donc

$$\Phi(\Phi^{-1}(\phi).\Psi)(v) = \pi(k) \circ (\phi)(v).$$

Pour conclure, on montre que $\Psi = f_{k^{-1}}$ convient. En effet, $k.i_v$ a pour support $\mathbb{K}^1 k^{-1}$ et vaut v en k^{-1} , ce qui est aussi le cas de $f_{k^{-1}} * i_v$ puisque

$$f_{k^{-1}} * i_v(k^{-1}) = f_{k^{-1}}(k^{-1})(v) = 1_{\mathbb{K}^1}(k^{-1})(v) = v.$$

Ceci prouve

$$\Phi(\Phi^{-1}(\phi).f_{k^{-1}})(v) = \pi(k) \circ (\phi)(v)$$

ce qu'on voulait (en effet, $K_1(\pi)(k)(w_1) = \pi(k) \circ w_1$ pour $w_1 \in \text{Hom}_{\mathbb{K}^1}(1, \pi)$, et $H_1 \circ M_1(\pi)(k)(w_2) = w_2.f_{k^{-1}}$ avec $w_2 \in \text{Hom}_{\mathbb{B}^\times}(\text{ind}_{\mathbb{K}^1}^{\mathbb{B}^\times}(1_{\mathbb{K}^1}), \pi)$).

On va maintenant utiliser ces foncteurs pour prouver que le foncteur \mathbf{F} préserve le fait d'être supercuspidale.

Proposition 4.1.4. Une représentation irréductible de $\mathcal{R}_R(\mathbf{G}, \boldsymbol{\eta})$ est supercuspidale si et seulement si son image par K_κ l'est, et une représentation de $\mathcal{R}_R(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1)$ est supercuspidale si et seulement si son image par K_1 l'est.

Preuve. On traite le cas du foncteur K_κ , le cas du foncteur K_1 étant similaire.

D'une part, si une représentation irréductible π de $\mathcal{R}_R(\mathbf{G}, \boldsymbol{\eta})$ n'est pas supercuspidale, c'est un sous-quotient irréductible d'une induite parabolique propre. Montrons que le sous-groupe de Levi associé est β -admissible au sens de [SS16] §5.1.

D'après la proposition 10.2 de [SS16], si $\pi \in \mathcal{R}(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$, alors π a son support supercuspidal dans la classe $[M, \rho]_{\mathbf{G}}$, où (M, ρ) est associée à $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ via la proposition 8.1 du même ouvrage. En particulier π est un sous-quotient irréductible de $\text{ind}_{\mathbf{J}}^{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\lambda})$. En reprenant la preuve du lemme 8.2 de *ibid.*, on obtient que (M, ρ) est inertiellement équivalent à $(M, \tilde{\rho} \otimes \cdots \otimes \tilde{\rho})$ où $\tilde{\rho}$ est une représentation supercuspidale de $\text{GL}_{m/r}(D)$ avec r un entier divisant m' .

Par conséquent, M est constitué de r blocs de même taille, avec $r|m'$. Or on sait que

$$m'd' = \frac{md}{[E : F]}$$

donc $[E : F]$ divise md/r ce qui prouve que M est β -admissible.

Puisque le sous-groupe de Levi associé est β -admissible, le foncteur K_{κ} préserve l'induction parabolique (voir le théorème 5.6 de [SS16]) et est exact, donc l'image de π par ce foncteur est également un sous-quotient irréductible d'une induite parabolique propre, et n'est donc pas supercuspidale.

D'autre part, le fait que l'image d'une représentation irréductible supercuspidale par K_{κ} est encore supercuspidale découle de la proposition 6.10 de [MS14a] (qui nous dit qu'une représentation est supercuspidale si et seulement si son type est un supertype) et de la proposition 5.11 de la même référence (qui exprime l'image de K_{κ} en fonction du type).

Proposition 4.1.5. *Soit $\pi \in \mathcal{R}_R(\mathbf{G}, \boldsymbol{\eta})$. Alors π est supercuspidale si et seulement si $\mathbf{F}(\pi)$ est supercuspidale.*

Preuve. On va utiliser les foncteurs H_1 et K_1 et s'inspirer de la preuve précédente. On est dans la situation suivante

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{R}_R(\mathbf{G}, \boldsymbol{\eta}) & \xrightarrow{M_{\boldsymbol{\eta}}} & \text{Mod} - \mathcal{H}_R(\mathbf{G}, \boldsymbol{\eta}) & \xrightarrow{\theta^*} & \text{Mod} - \mathcal{H}_R(\mathbf{B}^{\times}, \mathbf{K}^1) \xleftarrow{M_1} \mathcal{R}_R(\mathbf{B}^{\times}, \mathbf{K}^1) \\ & \searrow K_{\kappa} & & & \downarrow H_1 \\ & & \mathcal{R}_R(\mathbf{J}/\mathbf{J}^1) & \xrightarrow{\xi} & \mathcal{R}_R(\mathbf{K}/\mathbf{K}^1) \\ & & & & \swarrow K_1 \end{array}$$

où on appelle ξ l'identification que l'on a fait entre $\mathcal{R}_R(\mathbf{J}/\mathbf{J}^1)$ et $\mathcal{R}_R(\mathbf{K}/\mathbf{K}^1)$, et pour $x \in \mathbf{J}/\mathbf{J}^1$, on note \tilde{x} l'élément de \mathbf{K}/\mathbf{K}^1 vérifiant $\xi(x) = \tilde{x}$. On va montrer que le diagramme est commutatif.

On rappelle que $\tilde{x} \in \mathbf{K}/\mathbf{K}^1$ agit sur $m \in M_{\boldsymbol{\eta}}(\pi, V)$ par

$$\tilde{x}.m = m.\theta(f_{\tilde{x}^{-1}}).$$

Cela découle en effet de la définition de θ^* et du lemme 4.1.3. On rappelle que $\tilde{f}_{\tilde{x}^{-1}} \in \mathcal{H}_R(\mathbf{G}, \boldsymbol{\eta})$ est l'élément ayant pour support $x^{-1}\mathbf{J}^1$ et valant $\kappa(x^{-1})$ en x^{-1} . On va utiliser

l'isomorphisme d'espaces vectoriels de la réciprocity de Frobenius

$$\begin{aligned} \Phi : \quad M_{\boldsymbol{\eta}}(\pi, V) &\longrightarrow K_{\boldsymbol{\kappa}}(\pi, V). \\ \text{Hom}_{\mathbf{G}}(\text{ind}_{\mathbf{J}^1}^{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\eta}), \pi) &\longmapsto \text{Hom}_{\mathbf{J}^1}(\boldsymbol{\kappa}, \pi) \end{aligned}$$

Le but est de prouver $\Phi(\tilde{x}.m) = x.\Phi(m)$ pour tout $x \in \mathbf{J}/\mathbf{J}^1$ et tout $m \in M_{\boldsymbol{\eta}}(\pi, V)$.

Soit $v \in V_{\boldsymbol{\eta}}$ l'espace de la représentation $\boldsymbol{\eta}$, on a

$$\begin{aligned} \Phi(\tilde{x}.m)(v) &= (\tilde{x}.m)(i_v) \\ &= (m.\tilde{f}_{\tilde{x}^{-1}})(i_v) \\ &= m(\tilde{f}_{\tilde{x}^{-1}} * i_v) \end{aligned}$$

en utilisant successivement la réciprocity de Frobenius et ce qu'on a rappelé au début de la preuve. Or, $\tilde{f}_{\tilde{x}^{-1}} * i_v$ a pour support $\mathbf{J}^1 x^{-1}$ et

$$(\tilde{f}_{\tilde{x}^{-1}} * i_v)(x^{-1}) = \tilde{f}_{\tilde{x}^{-1}}(x^{-1})(v) = \boldsymbol{\kappa}(x^{-1})(v)$$

par définition de $\tilde{f}_{\tilde{x}^{-1}}$. Par ailleurs, la fonction $x.i_{\boldsymbol{\kappa}(x^{-1})(v)}$ a elle aussi pour support $\mathbf{J}^1 x^{-1}$ et vaut également $\boldsymbol{\kappa}(x^{-1})(v)$ en x^{-1} , par conséquent ces deux fonctions sont égales dans $\mathcal{H}_R(\mathbf{G}, \boldsymbol{\eta})$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \Phi(\tilde{x}.m)(v) &= m(x.i_{\boldsymbol{\kappa}(x^{-1})(v)}) \\ &= m(\text{ind}_{\mathbf{J}^1}^{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\eta})(x)(i_{\boldsymbol{\kappa}(x^{-1})(v)})) \end{aligned}$$

par définition de l'induite et en utilisant le fait que $m \in \text{Hom}_{\mathbf{G}}(\text{ind}_{\mathbf{J}^1}^{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\eta}), \pi)$ on a

$$\Phi(\tilde{x}.m)(v) = \pi(x)(m(i_{\boldsymbol{\kappa}(x^{-1})(v)})).$$

Or en utilisant de nouveau la réciprocity de Frobenius on a

$$\begin{aligned} \pi(x)(m(i_{\boldsymbol{\kappa}(x^{-1})(v)})) &= \pi(x)(\Phi(m)(\boldsymbol{\kappa}(x^{-1})(v))) \\ &= \pi(x) \circ \Phi(m) \circ \boldsymbol{\kappa}(x^{-1})(v) \end{aligned}$$

qui est ce qu'on voulait par définition de $K_{\boldsymbol{\kappa}}$ donc finalement on a

$$\Phi(\tilde{x}.m)(v) = x.\Phi(m)(v).$$

Ceci prouve que le diagramme de début de preuve était commutatif. Par conséquent, pour toute représentation $\pi \in \mathcal{H}_R(\mathbf{G}, \boldsymbol{\eta})$, on a l'isomorphisme de représentation

$$K_1(\mathbf{F}(\pi)) \simeq \xi(K_{\boldsymbol{\kappa}}(\pi))$$

ce qui entraîne le résultat puisque les foncteurs K_1 et $K_{\boldsymbol{\kappa}}$ préservent la supercuspidalité

(proposition 4.1.4).

Lemme 4.1.6. *Le foncteur \mathbf{F} préserve l'invariant s au sens suivant : pour toute représentation supercuspidale irréductible π de G , alors $F(\pi)$ est irréductible et supercuspidale et $s(F(\pi)) = s(\pi)$.*

Preuve. L'image par \mathbf{F} d'une représentation irréductible supercuspidale sera nécessairement irréductible (car \mathbf{F} est une équivalence de catégorie) et supercuspidale (d'après la proposition 4.1.5). De plus, n'importe quelle représentation π supercuspidale irréductible du bloc $\mathcal{R}(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ aura le même invariant s , et on sait que \mathbf{F} envoie le bloc $\mathcal{R}(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ sur le bloc de niveau zéro $\mathcal{R}(\mathbf{K}, \boldsymbol{\sigma})$. Or, par définition de l'invariant s , on a

$$s(\pi) = s(\boldsymbol{\lambda}) = s(\boldsymbol{\sigma}) = s(F(\pi)).$$

On cherche à étudier à présent la représentation $F(\pi\nu)$. Rappelons que le foncteur \mathbf{F} est la composée de trois foncteurs, ce qui permet de procéder par étapes, en traitant les trois foncteurs séparément. Dans la suite, on fixe χ un caractère non ramifié de G .

On va utiliser la fonction de support i_v , définie à la définition 1.1.10, qui est ici

$$i_v(h) = \boldsymbol{\eta}(h)(v)$$

pour tout $v \in V_{\boldsymbol{\eta}}$ (où $V_{\boldsymbol{\eta}}$ désigne l'espace de la représentation $\boldsymbol{\eta}$) et pour tout $h \in \mathbf{J}^1$. Elle appartient à $\text{ind}_{\mathbf{J}^1}^G(\boldsymbol{\eta})$ avec support dans \mathbf{J}^1 .

Définition 4.1.7. Soit $(\pi, V) \in \mathcal{R}_R^f(G)$, on considère $M_{\boldsymbol{\eta}}(\pi\chi) = \text{Hom}_G(\text{ind}_{\mathbf{J}^1}^G \boldsymbol{\eta}, \pi\chi)$. Pour χ un caractère de G , on définit $M_{\boldsymbol{\eta}}(\pi)\chi = \text{Hom}_G(\text{ind}_{\mathbf{J}^1}^G \boldsymbol{\eta}, \pi)\chi$ en tant que $\mathcal{H}_R(G, \boldsymbol{\eta})$ -module comme l'espace $M_{\boldsymbol{\eta}}(\pi) = \text{Hom}_G(\text{ind}_{\mathbf{J}^1}^G \boldsymbol{\eta}, \pi)$ muni de l'action de $\Psi \in \mathcal{H}_R(G, \boldsymbol{\eta})$ sur $m \in M_{\boldsymbol{\eta}}(\pi)\chi$ via

$$(m \cdot_{\chi} \Psi)(f) = m(\chi^{-1}\Psi * f)$$

où $\chi^{-1}\Psi(x) = \chi(x)^{-1}\Psi(x)$ de sorte que

$$\chi^{-1}\Psi * f(g) = \sum_{x \in G/J^1} \chi(x)^{-1}\Psi(x)(f(x^{-1}g))$$

pour $f \in \text{ind}_{\mathbf{J}^1}^G(\boldsymbol{\eta})$ et $g \in G$.

On va utiliser la réciprocity de Frobenius (voir la proposition 1.1.13) qui donne un isomorphisme de R -modules

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Hom}_G(\text{ind}_{\mathbf{J}^1}^G \boldsymbol{\eta}, \pi) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{J}^1}(\boldsymbol{\eta}, \pi) \\ m &\longmapsto (v \longmapsto m(i_v)) \end{aligned}$$

pour montrer le lemme suivant, qui prouve que le foncteur M_η est compatible avec la torsion par un caractère.

Lemme 4.1.8. *Soit $\Psi \in \mathcal{H}_R(G, \eta)$, $\pi \in \mathcal{R}_R^f(G)$ et χ un caractère non ramifié de G . On a un isomorphisme de $\mathcal{H}_R(G, \eta)$ -module*

$$M_\eta(\pi\chi) \simeq M_\eta(\pi)\chi.$$

Preuve. On introduit l'isomorphisme de la réciprocity de Frobenius mentionné ci-dessus

$$\begin{aligned} \Phi_1 : \text{Hom}_G(\text{ind}_{\mathbf{J}^1}^G \eta, \pi\chi) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{J}^1}(\eta, \pi\chi). \\ m &\longmapsto (v \longmapsto m(i_v)) \end{aligned}$$

De même si on considère $M_\eta(\pi) = \text{Hom}_G(\text{ind}_{\mathbf{J}^1}^G \eta, \pi)$ on a un autre isomorphisme de R -modules

$$\begin{aligned} \Phi_2 : \text{Hom}_G(\text{ind}_{\mathbf{J}^1}^G \eta, \pi)\chi &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{J}^1}(\eta, \pi). \\ m &\longmapsto (v \longmapsto m(i_v)) \end{aligned}$$

Or notons que comme χ est trivial sur \mathbf{J}^1 qui est compact, on a l'égalité d'espaces vectoriels

$$\text{Hom}_{\mathbf{J}^1}(\eta, \pi\chi) = \text{Hom}_{\mathbf{J}^1}(\eta, \pi).$$

On obtient alors le résultat cherché par composition de Φ_1 par Φ_2^{-1} si pour $m_1 \in M_\eta(\pi\chi)$ et $m_2 \in M_\eta(\pi)\chi$ vérifiant $\Phi_1(m_1) = \Phi_2(m_2)$, alors $\Phi_1(m_1 \cdot \Psi) = \Phi_2(m_2 \cdot \chi \Psi)$. C'est ce que l'on montre maintenant.

Soit $v \in V_\eta$, on a

$$\begin{aligned} \Phi_1(m_1 \cdot \Psi)(v) &= (m_1 \cdot \Psi)(i_v) \\ &= m_1(\Psi * i_v) \end{aligned}$$

avec

$$\Psi * i_v(g) = \sum_{x \in G/\mathbf{J}^1} \Psi(x)(i_v(x^{-1}g))$$

pour $g \in G$.

De même, on a

$$\begin{aligned} \Phi_2(m_2 \cdot \chi \Psi)(v) &= (m_2 \cdot \chi \Psi)(i_v) \\ &= m_2(\chi^{-1} \Psi * i_v) \end{aligned}$$

avec

$$\chi^{-1} \Psi * i_v(g) = \sum_{x \in G/\mathbf{J}^1} \chi(x)^{-1} \Psi(x)(i_v(x^{-1}g))$$

pour $g \in G$. On remarque maintenant que pour tout $y \in G$ et pour tout $f \in \text{ind}_{\mathbf{J}^1}^G \eta$ on a par définition de l'induction

$$y \cdot f = \text{ind}_{\mathbf{J}^1}^G(\eta)(y)(f).$$

Par conséquent,

$$m_1(y.f) = \chi(y)\pi(y)(m_1(f))$$

car $m_1 \in M_\eta(\pi\chi)$.

Similairement, on prouve

$$m_2(y.f) = \pi(y)(m_2(f))$$

car $m_2 \in M_\eta(\pi)\chi$.

Comme de plus par hypothèse m_1 et m_2 ont été choisis vérifiant $\Phi_1(m_1) = \Phi_2(m_2)$, on a également pour tout $v \in V_\eta$,

$$m_1(i_v) = m_2(i_v).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} m_1(y.i_v) &= \chi(y)\pi(y)(m_1(i_v)) \\ &= \chi(y)\pi(y)(m_2(i_v)) \\ &= \chi(y)m_2(y.i_v) \end{aligned}$$

d'où pour tout $y \in G$ et pour tout $v \in V_\eta$

$$m_1(y.i_v) = \chi(y)m_2(y.i_v).$$

On veut montrer $m_1(\Psi * i_v) = m_2(\chi^{-1}\Psi * i_v)$ pour tout $\Psi \in \mathcal{H}_R(G, \eta)$. On a vu dans la remarque 1.1.11 la décomposition

$$f = \sum_{x \in G/\mathbf{J}^1} x^{-1}.i_{f(x)}$$

pour tout $f \in \text{ind}_{\mathbf{J}^1}^G(\eta)$, c'est ce que l'on va utiliser. On a

$$\begin{aligned} m_1(\Psi * i_v) &= m_1\left(\sum_{x \in G/\mathbf{J}^1} x^{-1}.i_{\Psi * i_v(x)}\right) \\ &= \sum_{x \in G/\mathbf{J}^1} m_1(x^{-1}.i_{\Psi * i_v(x)}) \\ &= \sum_{x \in G/\mathbf{J}^1} \chi(x^{-1})m_2(x^{-1}.i_{\Psi * i_v(x)}) \\ &\stackrel{*}{=} \sum_{x \in G/\mathbf{J}^1} m_2(x^{-1}.i_{\chi^{-1}\Psi * i_v(x)}) \\ &= m_2\left(\sum_{x \in G/\mathbf{J}^1} x^{-1}.i_{\chi^{-1}\Psi * i_v(x)}\right) \\ &= m_2(\chi^{-1}\Psi * i_v) \end{aligned}$$

où l'égalité surmontée d'une étoile découle du fait que d'une part, pour tout $g \in G$ tel

que $gx^{-1} \in \mathbf{J}^1$, on a

$$\begin{aligned}
x^{-1} \cdot \chi(x^{-1}) i_{\Psi * i_v(x)}(g) &= \chi(x)^{-1} \boldsymbol{\eta}(gx^{-1})(\Psi * i_v(x)) \\
&= \boldsymbol{\eta}(gx^{-1})(\chi(x)^{-1} \Psi * i_v(x)) \\
&= \boldsymbol{\eta}(gx^{-1}) \left(\sum_{\tilde{x} \in G/\mathbf{J}^1} \chi(x)^{-1} \Psi(\tilde{x})(i_v(\tilde{x}^{-1}x)) \right) \\
&\stackrel{*}{=} \boldsymbol{\eta}(gx^{-1}) \left(\sum_{\tilde{x} \in G/\mathbf{J}^1} \chi(\tilde{x})^{-1} \Psi(\tilde{x})(i_v(\tilde{x}^{-1}x)) \right) \\
&= \boldsymbol{\eta}(gx^{-1})(\chi^{-1} \Psi * i_v(x)) \\
&= x^{-1} \cdot i_{\chi^{-1} \Psi * i_v(x)}(g)
\end{aligned}$$

où la nouvelle égalité surmontée d'une étoile découle du fait que i_v a pour support \mathbf{J}^1 donc les termes \tilde{x} qui contribuent à la somme vérifient $x \in \tilde{x}\mathbf{J}^1$ donc comme χ est non ramifié $\chi(x) = \chi(\tilde{x})$. Si d'autre part $gx^{-1} \notin \mathbf{J}^1$, alors l'identité

$$x^{-1} \cdot \chi(x^{-1}) i_{\Psi * i_v(x)}(g) = x^{-1} \cdot i_{\chi^{-1} \Psi * i_v(x)}(g)$$

est vérifiée puisque les deux termes sont nuls, ce qui conclut la preuve.

Pour A une algèbre à division sur un corps k , on note $Nrd_{A/k}$ la norme réduite de A et on note $N_{\tilde{k}/k}$ la norme d'une extension de corps \tilde{k}/k . On introduit $\tilde{\nu}$ le caractère valeur absolue de la norme réduite de B^\times , c'est-à-dire la valeur absolue normalisée de E (qui à une uniformisante de E associe q_E^{-1} , avec q_E le cardinal du corps résiduel de E) composée avec la norme réduite de B sur E . De plus, on note e l'indice de ramification de f le degré résiduel de E/F .

On rappelle la définition du foncteur M_1 :

$$\begin{aligned}
M_1 : \mathcal{R}(B^\times, K^1) &\longrightarrow \text{Mod} - \mathcal{H}_R(B^\times, K^1) \\
\pi &\longmapsto \text{Hom}_{B^\times}(ind_{K^1}^{B^\times} 1_{K^1}, \pi)
\end{aligned}$$

où l'action de $\Psi \in \mathcal{H}_R(B^\times, K^1)$ sur $m \in M_1(V)$ est donnée par $(m \cdot \Psi)(f) = m(\Psi * f)$ pour $f \in ind_{K^1}^{B^\times}(1_{K^1})$, avec

$$\Psi * f(g) = \sum_{x \in B^\times/K^1} \Phi(x)(f(x^{-1}g))$$

pour $g \in B^\times$.

La proposition suivante montre que le foncteur \mathbf{F} se comporte bien vis-à-vis du caractère valeur absolue de la norme réduite.

Proposition 4.1.9. *Soit $\pi \in \mathcal{R}_R(G, \boldsymbol{\eta})$ une représentation supercuspidale irréductible.*

On a l'isomorphisme de représentations

$$\mathbf{F}(\pi\nu) \simeq \mathbf{F}(\pi)\tilde{\nu}.$$

Preuve. On va procéder en trois étapes. D'abord on va prouver que $F(\pi)\tilde{\nu}^{-1}$ est de la forme $F(\pi\chi^{-1})$ avec un χ un caractère non ramifié de G , ensuite on en déduira que $\chi\theta(\tilde{\Psi}) = \theta(\tilde{\nu}\tilde{\Psi})$ pour tout $\tilde{\Psi} \in \mathcal{H}_R(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1)$ et on conclura en montrant que χ est en fait le caractère ν .

On sait de par la description de l'action du foncteur \mathbf{F} sur les blocs dans la catégorie des représentations de longueur quelconque (c'est-à-dire le théorème 5.15 de [Chi18]) que \mathbf{F} induit une équivalence de catégorie entre le bloc de π et celui de $F(\pi)$. Or les représentations du bloc de π sont les représentations ayant même support supercuspidal que π à inertie près. Comme π est supercuspidale, $F(\pi)$ l'est aussi d'après la proposition 4.1.5, et comme similairement, le bloc de $F(\pi)$ sont les représentations ayant même support supercuspidal que $F(\pi)$ à inertie près, ceci prouve qu'il existe χ un caractère non ramifié de G tel que

$$F(\pi)\tilde{\nu}^{-1} = F(\pi\chi^{-1}).$$

Le foncteur \mathbf{F} est une composée de trois foncteurs. On a montré au lemme 4.1.8 que le foncteur M_η est compatible avec la torsion par un caractère. La même preuve montre qu'il en va de même avec le foncteur M_1 , donc avec son pseudo inverse, et il s'agit maintenant de s'intéresser au foncteur θ^* . On montre à présent que $\chi\theta(\tilde{\Psi}) = \theta(\tilde{\nu}\tilde{\Psi})$, pour $\tilde{\Psi} \in \mathcal{H}_R(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1)$.

Pour étudier la compatibilité de θ^* par rapport au caractère ν , on considère $\pi \in \mathcal{R}(G, \eta)$ et $\tilde{\pi} \in \mathcal{R}(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1)$. On note

$$\Phi : \theta^*(\mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_{\mathbf{J}_1}^G(\eta), \pi)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}^\times}(\mathrm{ind}_{\mathbb{K}^1}^{\mathbb{B}^\times}(1), F(\pi))$$

un isomorphisme de $\mathcal{H}_R(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1)$ -modules entre $\theta^*M_\eta(\pi)$ et $M_1(F(\pi))$, c'est-à-dire que $\Phi(a.\tilde{\Psi}) = \Phi(a).\tilde{\Psi}$ pour tout $a \in \theta^*(\mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_{\mathbf{J}_1}^G(\eta), \pi))$ et tout $\tilde{\Psi} \in \mathcal{H}_R(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1)$.

Soit maintenant $a \in \theta^*(\mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_{\mathbf{J}_1}^G(\eta), \pi)\chi)$. Comme on sait que $F(\pi\chi^{-1}) = F(\pi)\tilde{\nu}^{-1}$, on a

$$\Phi(a.\chi^{-1}\tilde{\Psi}) = \Phi(a).\tilde{\nu}^{-1}\tilde{\Psi}$$

puisque Φ est un isomorphisme de $\mathcal{H}_R(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1)$ -modules entre $\theta^*M_\eta(\pi\chi^{-1})$ et $M_1(F(\pi)\tilde{\nu}^{-1})$. Soit $\tilde{f} \in \mathrm{ind}_{\mathbb{K}^1}^{\mathbb{B}^\times}(1)$, on a donc

$$\begin{aligned} \Phi(a.\chi^{-1}\tilde{\Psi})(\tilde{f}) &= \Phi(a).\tilde{\nu}^{-1}\tilde{\Psi}(\tilde{f}) \\ &= \Phi(a).\tilde{\nu}\tilde{\Psi}(\tilde{f}) \\ &= \Phi(a.\tilde{\nu}\tilde{\Psi})(\tilde{f}) \quad \text{car } \Phi \text{ est un isomorphisme de } \mathcal{H}_R(\mathbb{B}^\times, \mathbb{K}^1)\text{-modules} \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} a \cdot \chi^{-1} \tilde{\Psi}(\tilde{f}) &= a \cdot \tilde{\nu} \tilde{\Psi}(\tilde{f}) \\ \Leftrightarrow a(\chi \theta(\tilde{\Psi}) * \tilde{f}) &= a(\theta(\tilde{\nu} \tilde{\Psi}) * \tilde{f}) \end{aligned}$$

ce qui est valable pour tout $a \in \theta^*(\text{Hom}_{\mathbf{G}}(\text{ind}_{\mathbf{J}_1}^{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\eta}), \pi)\chi)$ et tout $\tilde{f} \in \text{ind}_{\mathbf{K}_1}^{\mathbf{B}^\times}(1)$, donc

$$\chi \theta(\tilde{\Psi}) = \theta(\tilde{\nu} \tilde{\Psi}).$$

Il reste à prouver que χ est le caractère ν . Soit $\tau = \text{diag}(1, 1, 1, \dots, \varpi_{D'})$ (où l'uniformisante n'apparaît qu'une fois). En prenant $\tilde{\Psi} = f_\tau$ dans l'identité précédente, on obtient

$$\chi \theta(f_\tau) = \theta(\tilde{\nu} f_\tau).$$

Soit $x \in \mathbf{G}$, d'une part on a

$$\chi \theta(f_\tau)(x) = \chi(x) \theta(f_\tau)(x)$$

et d'autre part

$$\theta(\tilde{\nu} f_\tau)(x) = \theta(\tilde{\nu}(\tau) f_\tau)(x) = \tilde{\nu}(\tau) \theta(f_\tau)(x)$$

donc $\chi(x) = \tilde{\nu}(\tau)$ quand $\theta(f_\tau)(x)$ n'est pas nul.

Pour conclure que $\chi = \nu$, il suffit alors de montrer que $\tilde{\nu}(\tau) = \nu(x)$ pour un x tel que $\theta(f_\tau)(x) \neq 0$. D'après [Chi18] §3.7, τ appartient au support de $\theta(f_\tau)$ donc il suffit de montrer que $\tilde{\nu}(\tau) = \nu(\tau)$. C'est ce qu'on se propose de démontrer maintenant.

D'une part, on a

$$\tilde{\nu}(\tau) = |\text{Nrd}_{M_{m'}(D')/E}(\text{diag}(1, 1, \dots, \varpi_{D'}))|_E = |\text{Nrd}_{D'/E}(\varpi_{D'})|_E$$

et d'après [PR94] §1.4.1, on a

$$\text{Nrd}_{D'/E}(\varpi_{D'}) = N_{E[\varpi_{D'}]/E}(\varpi_{D'})$$

et comme $\varpi_{D'}^{d'} = \varpi_E$, cette dernière norme est le déterminant de la matrice compagnon

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \varpi_E \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $(-1)^{d'+1} \varpi_E$ donc

$$\tilde{\nu}(\tau) = |\varpi_E|_E = q_E^{-1}.$$

D'autre part,

$$\nu(\tau) = |Nrd_{M_m(D)/F}(\text{diag}(1, 1, \dots, \varpi_{D'}))|_F$$

or

$$Nrd_{M_m(D)/F}(\text{diag}(1, 1, \dots, \varpi_{D'})) = N_{E/F} \circ Nrd_{B/E}(\text{diag}(1, 1, \dots, \varpi_{D'})).$$

On a

$$Nrd_{B/E}(\text{diag}(1, 1, \dots, \varpi_{D'})) = Nrd_{D'/E}(\varpi_{D'}) = \pm \varpi_E.$$

Or, d'après le corollaire de la proposition I.5.3 de [CF67],

$$|N_{E/F}(\varpi_E)|_F = (q_F^{-1})^f = q_E^{-1}$$

d'où

$$\nu(\tau) = q_E^{-1}$$

et on a bien $\tilde{\nu}(\tau) = \nu(\tau)$ ce qui prouve que $\chi = \nu$.

On conclut cette section avec la propriété suivante, qui nous donne la dernière propriété du foncteur \mathbf{F} dont on a besoin : sa compatibilité avec l'invariant ϵ .

Proposition 4.1.10. *Le foncteur \mathbf{F} préserve l'invariant ϵ , au sens suivant : si π est une représentation irréductible supercuspidale de \mathbf{G} , $\epsilon(F(\pi)) = \epsilon(\pi)$.*

Preuve. On sait que $\epsilon(\pi)$ est le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $\pi\nu^k \simeq \pi$ (voir définition 1.1.37). Or,

$$\begin{aligned} \pi\nu^k \simeq \pi &\iff \mathbf{F}(\pi\nu^k) \simeq \mathbf{F}(\pi) \\ &\iff \mathbf{F}(\pi)\tilde{\nu}^k \simeq \mathbf{F}(\pi) \end{aligned}$$

d'après la proposition 4.1.9.

4.2 Décomposition en blocs

On décompose dans cette section la catégorie $\mathcal{R}_R^{lf}(\mathbf{G})$ en blocs en utilisant les résultats obtenus sur le foncteur \mathbf{F} dans la section précédente. On commence par utiliser notre travail dans la section précédente pour obtenir la proposition suivante qui généralise la proposition 3.4.3 depuis le cas des représentations de niveau 0.

Proposition 4.2.1. *Soit π, π' deux représentations irréductibles supercuspidales de \mathbf{G} . On suppose qu'elles sont dans le même bloc (dans la catégorie des représentations de longueur quelconque). S'il existe $i \geq 0$ tel que $\text{Ext}_{\mathbf{G}}^i(\pi', \pi) \neq \{0\}$, alors*

1. Si $\epsilon(\pi) = 1$ ou si $\epsilon(\pi) \nmid s(\pi)$, alors $\pi' \simeq \pi$.
2. Si $\epsilon(\pi) | s(\pi)$, alors il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $\pi' \simeq \pi\nu^j$.

Preuve. Supposons qu'il existe $i \geq 0$ tel que

$$\mathrm{Ext}_G^i(\pi', \pi) \neq \{0\}.$$

Comme les représentations π' et π sont dans le même bloc dans la catégorie des représentations de longueur quelconque, alors d'après la proposition 10.2 de [SS16], il existe η tel que $\pi, \pi' \in \mathcal{R}(G, \eta)$ avec les notations de la section précédente, et on peut introduire l'application \mathbf{F} qui est une équivalence de catégorie entre $\mathcal{R}(G, \eta)$ et $\mathcal{R}(B^\times, K^1)$ (toujours avec les notations de la section précédente). Comme \mathbf{F} est une équivalence de catégorie, on a

$$\mathrm{Ext}_G^i(\mathbf{F}(\pi'), \mathbf{F}(\pi)) \neq \{0\}.$$

D'après la propriété 3.4.3, ceci a pour conséquence que $\mathbf{F}(\pi')$ est isomorphe à

1. $\mathbf{F}(\pi)\tilde{\nu}^j$ (pour un $j \in \mathbb{N}$ si $\epsilon(\mathbf{F}(\pi))|s(\mathbf{F}(\pi))$);
2. $\mathbf{F}(\pi)$ si $\epsilon(\mathbf{F}(\pi)) = 1$ ou si $\epsilon(\mathbf{F}(\pi)) \nmid s(\mathbf{F}(\pi))$.

D'après la compatibilité de \mathbf{F} avec la torsion par ν (voir la proposition 4.1.9), c'est équivalent à ce que $\mathbf{F}(\pi')$ soit isomorphe à

1. $\mathbf{F}(\pi\nu^j)$ (pour un $j \in \mathbb{N}$ si $\epsilon(\mathbf{F}(\pi))|s(\mathbf{F}(\pi))$);
2. $\mathbf{F}(\pi)$ si $\epsilon(\mathbf{F}(\pi)) = 1$ ou si $\epsilon(\mathbf{F}(\pi)) \nmid s(\mathbf{F}(\pi))$.

Et puisque le foncteur \mathbf{F} préserve les invariants ϵ et s (d'après les propositions 4.1.6 et 4.1.10, c'est équivalent à ce que $F(\pi')$ soit isomorphe à

1. $F(\pi\nu^j)$ (pour un $j \in \mathbb{N}$ si $\epsilon(\pi)|s(\pi)$);
2. $F(\pi)$ si $\epsilon(\pi) = 1$ ou si $\epsilon(\pi) \nmid s(\pi)$.

donc comme \mathbf{F} est une équivalence de catégorie c'est équivalent à ce que π' soit isomorphe à

1. $\pi\nu^j$ (pour un $j \in \mathbb{N}$ si $\epsilon(\pi)|s(\pi)$);
2. π si $\epsilon(\pi) = 1$ ou si $\epsilon(\pi) \nmid s(\pi)$

ce qui conclut la preuve.

On considère à présent deux R -représentations π et π' irréductibles de G . On note $\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_r$ le support supercuspidal de π , et on pose $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$ est une décomposition de m correspondant à la forme du support supercuspidal de π (c'est-à-dire que τ_i est une représentation de $\mathrm{GL}_{m_i}(D)$).

On associe à cette décomposition le sous-groupe de Levi standard $M = M_\alpha$ des matrices diagonales par blocs de tailles m_1, \dots, m_r respectivement, que l'on identifie au produit $\mathrm{GL}_{m_1}(D) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{m_r}(D)$, et on considère le sous-groupe $P = P_\alpha$ des matrices triangulaires supérieures par blocs de tailles m_1, \dots, m_r respectivement, qui est un sous-groupe parabolique de G de facteur de Levi M_α , et on note $N = N_\alpha$ son radical unipotent. On

note $i_{\mathbb{P}}^{\mathbb{G}}$ le foncteur d'induction parabolique de M_{α} à \mathbb{G} suivant \mathbb{P}_{α} .

Le but est d'établir un lien entre le support supercuspidal de π et celui de π' s'ils ont un espace d'extension non nul pour un indice $i \geq 0$. Pour cela, on va s'inspirer de [SS16] §1.1 et généraliser la propriété 4.2.1.

Proposition 4.2.2. *On suppose que π et π' sont deux représentations irréductibles de \mathbb{G} appartenant au même bloc (dans la catégorie des représentations de longueur quelconque). S'il existe $i \geq 0$ tel que $\text{Ext}_{\mathbb{G}}^i(\pi', \pi) \neq \{0\}$, alors le support supercuspidal de π' est $\tau_1 \nu^{j_1} \otimes \cdots \otimes \tau_r \nu^{j_r}$, avec j_k un entier positif qui est nul si $\epsilon(\tau_k) = 1$ ou si $\epsilon(\tau_k) \nmid s(\tau_k)$.*

Preuve. On va procéder en plusieurs étapes :

1. Cas où π' est cuspidale et où π ne l'est pas.

On procède par récurrence sur i , en montrant la contraposée (on suppose donc que le support supercuspidal de π' n'est pas de la forme $\tau_1 \nu^{j_1} \otimes \cdots \otimes \tau_r \nu^{j_r}$, avec j_k un entier positif qui est nul si $\epsilon(\tau_k) = 1$ ou si $\epsilon(\tau_k) \nmid s(\tau_k)$). Comme π n'est pas cuspidale, on a une injection de π dans $i_{\mathbb{P}}^{\mathbb{G}}(\tau)$ avec τ une représentation cuspidale d'un sous-groupe de Levi M associé à un sous-groupe parabolique \mathbb{P} et un radical unipotent N . On a la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \pi \longrightarrow i_{\mathbb{P}}^{\mathbb{G}}(\tau) \longrightarrow \lambda \longrightarrow 0$$

qui définit λ et on en déduit en appliquant le foncteur $\text{Hom}_{\mathbb{G}}(\pi', \cdot)$ la suite exacte

$$\text{Ext}_{\mathbb{G}}^{i-1}(\pi', \lambda) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{G}}^i(\pi', \pi) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{G}}^i(\pi', i_{\mathbb{P}}^{\mathbb{G}}(\tau)).$$

Un sous-quotient irréductible A de λ a le même support supercuspidal que π car ils appartiennent à la même induite et par conséquent on peut utiliser l'hypothèse de récurrence qui nous dit que $\text{Ext}_{\mathbb{G}}^{i-1}(\pi', A) = 0$, ce qui est vrai pour tout sous-quotient irréductible A de λ donc $\text{Ext}_{\mathbb{G}}^{i-1}(\pi', \lambda) = 0$.

Pour montrer que $\text{Ext}_{\mathbb{G}}^i(\pi', i_{\mathbb{P}}^{\mathbb{G}}(\tau))$ est nul, on utilise la réciprocity de Frobenius, et en notant π'_N le module de Jacquet de π' relativement au triplet parabolique (\mathbb{P}, M, N) , on a

$$\text{Ext}_{\mathbb{G}}^i(\pi', i_{\mathbb{P}}^{\mathbb{G}}(\tau)) \simeq \text{Ext}_M^i(\pi'_N, \tau) = 0.$$

Ceci donne $\text{Ext}_{\mathbb{G}}^i(\pi', \pi) = 0$ et conclut la récurrence.

2. Cas où π est cuspidale et où π' ne l'est pas.

On résout ce cas-là en considérant les contragrédientes π^{\vee} et π'^{\vee} :

$$\text{Ext}_{\mathbb{G}}^i(\pi', \pi) \simeq \text{Ext}_{\mathbb{G}}^i(\pi^{\vee}, \pi'^{\vee})$$

qui est nul par le cas précédent.

3. Cas où π n'est pas supercuspidale, mais où π et π' sont cuspidales.

De même, on procède par récurrence sur i en montrant la contraposée. Comme π n'est pas supercuspidale, elle apparaît comme sous-quotient de $i_{\mathbb{P}}^{\mathbb{G}}(\tau)$ avec τ une représentation supercuspidale d'un sous-groupe de Levi M associé à un sous-groupe parabolique P et un radical unipotent N . On considère la plus petite sous-représentation V de $i_{\mathbb{P}}^{\mathbb{G}}(\tau)$ tel que π apparaisse dans V , de sorte que l'on puisse écrire $\pi \simeq V/W$ avec W une sous-représentation de V dans laquelle π n'apparaît pas. On note k (dépendant de π) le nombre de sous-quotients irréductibles cuspidaux de W et on fait une récurrence sur k .

Plus précisément l'hypothèse de récurrence est $P(k)$: "Pour tout π, π' représentations irréductibles de \mathbb{G} , on note $\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_r$ le support supercuspidal de π , et on suppose que le support supercuspidal de π' n'est pas de la forme $\tau_1 \nu^{j_1} \otimes \cdots \otimes \tau_r \nu^{j_r}$, avec j_r nul si $\epsilon(\tau_r) = 1$ ou si $\epsilon(\tau_r) \nmid s(\tau_r)$. On note $k(\pi)$ le nombre de sous-quotients irréductibles cuspidaux de la représentation W telle que π est un sous-quotient V/W d'une induite parabolique propre $i_{\mathbb{P}}^{\mathbb{G}}(\tau)$ (avec V la plus petite sous-représentation de $i_{\mathbb{P}}^{\mathbb{G}}(\tau)$ vérifiant cela). Si $k = k(\pi)$, alors $\text{Ext}^i(\pi', W) = 0$."

On a la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow i_{\mathbb{P}}^{\mathbb{G}}(\tau) \longrightarrow i_{\mathbb{P}}^{\mathbb{G}}(\tau)/V \longrightarrow 0$$

et on en déduit en appliquant le foncteur $\text{Hom}_{\mathbb{G}}(\pi', \cdot)$ la suite exacte

$$\text{Ext}_{\mathbb{G}}^{i-1}(\pi', i_{\mathbb{P}}^{\mathbb{G}}(\tau)/V) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{G}}^i(\pi', V) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{G}}^i(\pi', i_{\mathbb{P}}^{\mathbb{G}}(\tau)).$$

L'espace $\text{Ext}_{\mathbb{G}}^i(\pi', i_{\mathbb{P}}^{\mathbb{G}}(\tau))$ est nul par adjonction. De plus, tous les sous-quotients irréductibles λ de $i_{\mathbb{P}}^{\mathbb{G}}(\tau)$ vérifient $\text{Ext}_{\mathbb{G}}^{i-1}(\pi', \lambda) = 0$. En effet, si λ n'est pas cuspidale, cela découle d'un des cas précédents (puisque π' est cuspidale), et si λ est cuspidal, c'est une conséquence de l'hypothèse de récurrence sur i . Par conséquent $\text{Ext}_{\mathbb{G}}^{i-1}(\pi', i_{\mathbb{P}}^{\mathbb{G}}(\tau)/V) = 0$ et on en déduit $\text{Ext}_{\mathbb{G}}^i(\pi', V) = 0$. Or, on a également la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow V \longrightarrow \pi \longrightarrow 0$$

dont on déduit la suite exacte

$$\text{Ext}_{\mathbb{G}}^i(\pi', V) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{G}}^i(\pi', \pi) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{G}}^{i+1}(\pi', W)$$

et on vient de montrer que le membre de gauche est nul. Pour conclure, il reste à montrer que $\text{Ext}_{\mathbb{G}}^{i+1}(\pi', W) = 0$. Si $k(\pi) = 0$, tous les sous-quotients irréductibles de W sont non cuspidaux et le résultat découle du premier cas étudié (car alors

$\text{Ext}_G^{i+1}(\pi', \lambda) = 0$ pour tout sous-quotient irréductible λ de W). Si $k(\pi) \neq 0$, tous les sous-quotient irréductibles λ de W vérifient quand même $\text{Ext}_G^{i+1}(\pi', \lambda) = 0$. En effet, si λ n'est pas cuspidal, cela découle du premier cas traité, et si λ est cuspidal, alors $k(\lambda) < k(\pi)$ et cela découle de l'hypothèse de récurrence sur k . Dans les deux cas on a $\text{Ext}_G^{i+1}(\pi', W) = 0$.

4. Cas où π' n'est pas supercuspidale, mais où π et π' sont cuspidales.

De même, on résout ce cas en utilisant les contragrédientes.

5. Cas où π et π' sont supercuspidales.

Ce cas a fait l'objet de la proposition 4.2.1.

6. Cas où ni π ni π' ne sont cuspidales.

Encore une fois, on procède par récurrence sur i et par contraposée. Comme π n'est pas cuspidale, on peut l'écrire comme une sous-représentation de $i_P^G(\tau)$ où τ est une représentation cuspidale d'un sous-groupe de Levi M associé à un sous-groupe parabolique P et un radical unipotent N . On a la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \pi \longrightarrow i_P^G(\tau) \longrightarrow \lambda \longrightarrow 0$$

qui définit λ et on en déduit en appliquant le foncteur $\text{Hom}_G(\pi', \cdot)$ la suite exacte

$$\text{Ext}_G^{i-1}(\pi', \lambda) \longrightarrow \text{Ext}_G^i(\pi', \pi) \longrightarrow \text{Ext}_G^i(\pi', \text{ind}_P^G(\tau)) \simeq \text{Ext}_M^i(\pi'_N, \tau)$$

où π'_N est encore le module de Jacquet de π' relativement au triplet parabolique (P, M, N) . La démonstration que $\text{Ext}_G^{i-1}(\pi', \lambda) = 0$ est la même que dans le premier cas étudié.

Il reste à montrer que $\text{Ext}_M^i(\pi'_N, \tau) = 0$. D'après le cas où π et π' sont toutes deux cuspidales (cas qui a été traité via plusieurs des cas précédents), on a $\text{Ext}_M^i(\sigma, \tau) = 0$ pour toute représentation irréductible σ de M qui n'est pas isomorphe à $\tau\nu^j$, avec $j \in \mathbb{N}$ (on utilise ici l'unicité du support supercuspidal, voir [MS14a] théorème 8.16). Il suffit donc de montrer qu'il n'existe pas $j \in \mathbb{N}$ tel que $\tau\nu^j$ soit un sous-quotient de π'_N (en effet, si pour tout sous-quotient irréductible A de π'_N , on a $\text{Ext}_G^{i-1}(A, \tau) = 0$, alors $\text{Ext}_G^{i-1}(\pi'_N, \tau) = 0$).

Supposons par l'absurde qu'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $\tau\nu^j$ apparaisse dans π'_N . Comme π' n'est pas cuspidale, on peut l'écrire comme sous-quotient de $i_P^G(\tau')$ avec τ' une représentation supercuspidale d'un sous-groupe de Levi M' associé à un sous-groupe parabolique P' . D'après le lemme géométrique (cf [MS14a] (1.3)), il existe une matrice de permutation w telle que $\tau\nu^j$ apparaisse dans $i_{M' \cap P'^w}^M(\tau'^w)$. On peut supposer que $w = 1$ (quitte à remplacer τ' par τ'^w) de sorte que $\tau\nu^j$ apparaisse dans $i_{M' \cap P'}^M(\tau')$. En appliquant i_P^G , on en déduit que $\pi\nu^j$ apparaît dans $i_P^G(\tau')$, donc a le même support supercuspidal que π' , ce qui est absurde.

Notation 4.2.3. Comme la condition de la proposition sur le support supercuspidal reviendra souvent, on lui donne un nom : on dit que $\pi' \stackrel{s}{\simeq} \pi$ si, étant noté $\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_r$ le support supercuspidal de π , alors celui de π' est $\tau_1 \nu^{j_1} \otimes \cdots \otimes \tau_r \nu^{j_r}$, avec j_k un entier positif qui est nul si $\epsilon(\tau_k) = 1$ ou si $\epsilon(\tau_k) \nmid s(\tau_k)$, pour tout $1 \leq k \leq n$.

Définition 4.2.4. Soit π une représentation irréductible de G , on lui associe l'ensemble $B(\pi)$ des représentations π' irréductibles de G qui vérifient $\pi' \stackrel{s}{\simeq} \pi$ (voir la notation 4.2.3). On appelle \mathcal{B} l'ensemble des $B(\pi)$ quand π parcourt les représentations irréductibles de G .

Proposition 4.2.5. La catégorie $\mathcal{R}_R^{lf}(G)$ des représentations de G de longueur finie se décompose : $\mathcal{R}_R^{lf}(G) = \bigoplus_{B \in \mathcal{B}} \mathcal{R}_B(G)$ où $\mathcal{R}_B(G)$ est la sous-catégorie de $\mathcal{R}_R^{lf}(G)$ des représentations dont tous les sous-quotients irréductibles sont dans B .

Preuve. Soit V une représentation de G de longueur finie. On se propose de décomposer V en procédant par récurrence sur la longueur de V . On considère π une sous-représentation irréductible de V . On a vu (voir proposition 4.2.2) que si π' est une autre représentation irréductible de G telle que

$$\text{Ext}_G^1(\pi', \pi) \neq \{0\}$$

(notons que l'on peut utiliser la proposition 4.2.2 car $\text{Ext}_G^1(\pi', \pi) \neq \{0\}$ implique que les représentations π et π' sont dans le même bloc dans la catégorie des représentations de longueur quelconque), alors le support supercuspidal de π' est de la forme $\tau_1 \nu^{j_1} \otimes \cdots \otimes \tau_r \nu^{j_r}$, avec j_k nul si $\epsilon(\tau_k) = 1$ ou si $\epsilon(\tau_k) \nmid s(\tau_k)$ (et sinon, j_r est un entier positif).

On pose $S = B(\pi)$. Soit $\pi' \in S$ et $\pi'' \notin S$ (avec π'' une représentation irréductible de G). Si par l'absurde $\text{Ext}_G^1(\pi', \pi'') \neq \{0\}$ alors on sait que le support supercuspidal de π'' est de la forme $\tau_1 \nu^{\tilde{j}_1} \otimes \cdots \otimes \tau_r \nu^{\tilde{j}_r}$, avec \tilde{j}_k nul si $\epsilon(\tau_k) = 1$ ou si $\epsilon(\tau_k) \nmid s(\tau_k)$, ce qui prouve $\pi'' \in S$, absurde. Par conséquent $\text{Ext}_G^1(\pi', \pi'') = 0$ et le théorème 1.4.6 décompose la catégorie et donne

$$V = V_1 \oplus V_2$$

où les sous-quotients irréductibles de V_1 sont les éléments de $B(\pi)$. Comme la longueur de V_2 est strictement inférieure à celle de V , ceci conclut la récurrence.

Il reste à montrer que les facteurs directs obtenus sont indécomposables.

Proposition 4.2.6. Soit π, π' deux représentations irréductibles de G irréductibles. On suppose que $\pi' \stackrel{s}{\simeq} \pi$ (voir la notation 4.2.3). Alors π et π' apparaissent dans une même représentation indécomposable de longueur finie.

Preuve. On suppose que le support supercuspidal de π' est de la forme $\tau_1 \nu^{j_1} \otimes \cdots \otimes \tau_r \nu^{j_r}$, avec j_k un entier positif qui est nul si $\epsilon(\tau_k) = 1$ ou si $\epsilon(\tau_k) \nmid s(\tau_k)$, pour tout $1 \leq k \leq n$.

Ceci nous assure, d'après la proposition 1.1.43 (notons que si $\epsilon(\tau_k) = 1$, on utilise plutôt la proposition 1.1.44), que pour tout $1 \leq k \leq n$, la représentation τ_k admet un relèvement cuspidal $\tilde{\tau}_k$, dont la réduction modulo l contient alors à la fois τ_k et $\tau_k \nu^{\tilde{j}_k}$ (d'après la proposition 1.1.40).

On peut alors choisir les $\tilde{\tau}_k$ pour que l'induite

$$i_{\mathbb{P}}^{\mathbb{G}}(\tilde{\tau}_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{\tau}_r)$$

soit irréductible. En effet, on va utiliser la théorie des segments, introduite par Bernstein et Zelevinsky dans [BZ77] et [BZ80]. D'après le théorème 7.24 de [MS14a], qui généralise le théorème 4.2 de [BZ80] au cas modulaire, l'induite $i_{\mathbb{P}}^{\mathbb{G}}(\tilde{\tau}_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{\tau}_r)$ est irréductible si et seulement si pour tout $i, j \in [1, r]$, le i -ème et le j -ème segment ne sont pas liés, ce qui d'après le même théorème est le cas si et seulement si pour tout $i, j \in [1, r]$, l'induite $\tilde{\tau}_i \times \tilde{\tau}_j$ est irréductible. La proposition 4.40 de [MS14b] nous assure alors que cela est équivalent au fait que pour tout $i, j \in [1, r]$, alors m_i est différent de m_j , ou $m_i = m_j$ et $\tilde{\tau}_i \not\cong \tilde{\tau}_j \nu^{-s(\tilde{\tau}_j)}$ et $\tilde{\tau}_i \not\cong \tilde{\tau}_j \nu^{s(\tilde{\tau}_j)}$.

Or, on peut toujours choisir les $\tilde{\tau}_k$ pour remplir cette dernière condition. En effet, on les fixe un par un : pour i allant de 1 à r , on s'assure que pour tout j allant de 1 à $i - 1$ on ait

$$\tilde{\tau}_i \not\cong \tilde{\tau}_j \nu^{-s(\tilde{\tau}_j)}$$

et

$$\tilde{\tau}_i \not\cong \tilde{\tau}_j \nu^{s(\tilde{\tau}_j)}$$

(si $m_i = m_j$ sinon il n'y a rien à faire), ce qui est possible car il n'y a que deux représentations à éviter pour le choix de $\tilde{\tau}_i$ et on peut tordre $\tilde{\tau}_i$ autant de fois qu'on le veut par un caractère quelconque d'ordre une puissance de l , ce qui ne change pas la réduction modulo l de $\tilde{\tau}_i$. On a donc prouvé qu'on peut supposer l'induite $i_{\mathbb{P}}^{\mathbb{G}}(\tilde{\tau}_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{\tau}_r)$ irréductible.

Par définition, on sait que π apparaît dans l'induite parabolique $i_{\mathbb{P}}^{\mathbb{G}}(\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_r)$ et que π' apparaît dans $i(\tau_1 \nu^{\tilde{j}_1} \otimes \cdots \otimes \tau_r \nu^{\tilde{j}_r})$. D'après la proposition 1.1.35, les représentations $r_l(i_{\mathbb{P}}^{\mathbb{G}}(\tilde{\tau}_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{\tau}_r))$ et $i_{\mathbb{P}}^{\mathbb{G}}(r_l(\tilde{\tau}_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{\tau}_r))$ ont les mêmes sous-quotients irréductibles, par conséquent π et π' apparaissent toutes deux dans $r_l(i_{\mathbb{P}}^{\mathbb{G}}(\tilde{\tau}_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{\tau}_r))$, et apparaissent donc dans une même représentation indécomposable de longueur finie (d'après le lemme 1.1.39).

On obtient en combinant les deux propositions précédentes le théorème suivant, qui est l'objectif de ce texte.

Théorème 4.2.7. *La catégorie $\mathcal{R}_R^{\text{lf}}(\mathbb{G})$ des représentations de \mathbb{G} de longueur finie se décompose : $\mathcal{R}_R^{\text{lf}}(\mathbb{G}) = \bigoplus_{B \in \mathcal{B}} \mathcal{R}_B(\mathbb{G})$ où $\mathcal{R}_B(\mathbb{G})$ est la sous-catégorie de $\mathcal{R}_R^{\text{lf}}(\mathbb{G})$ des repré-*

sentations dont tous les sous-quotients irréductibles sont dans B .

De plus les sous-catégories $\mathcal{R}_B(\mathbb{G})$ sont indécomposables.

Ceci signifie que toute représentation de longueur finie V se décompose

$$V = \bigoplus_B V_B$$

où tous les sous-quotients irréductibles de V_B sont dans le même bloc B , et si de plus $B \neq B'$, alors $\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}}(V_B, V_{B'}) = 0$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}}(V_{B'}, V_B) = 0$.

Bibliographie

- [Ass97] Ibrahim Assem. *Algèbres et modules*. Masson, 1997.
- [Ber84] J. Bernstein. Le "centre" de Bernstein. *Representations of reductive groups over a local field*, 1984.
- [BG16] G. Böckle and D. Gvartz. Division algebras and maximal orders for given invariants. *Cambridge University Press*, (19) :178–195, 2016.
- [BH06] C. Bushnell and G. Henniart. *The Local Langlands Conjecture For $GL(2)$* . Springer, 2006.
- [BK93] C. Bushnell and Philip K. *The Admissible Dual of $GL(N)$ via Compact Open Subgroups*. Birkhäuser, 1993.
- [Blo11] C. Blondel. Basic representation theory of reductive p -adic groups. Notes de cours au Morningside Center of Mathematics, 2011.
- [BZ77] I.N. Bernstein and A.V. Zelevinsky. Induced representations of reductive p -adic groups. i. *Annales scientifiques de l'E.N.S.*, (10) :441–472, 1977.
- [BZ80] I.N. Bernstein and A.V. Zelevinsky. Induced representations of reductive p -adic groups. ii. *Annales scientifiques de l'E.N.S.*, (13) :165–210, 1980.
- [Cas95] W. Casselman. Introduction to the theory of admissible representations of p -adic reductive groups. 1995.
- [CF67] J.W.S. Cassels and A. Fröhlich. *Algebraic Number Theory*. Thompson Book Compagny Inc., 1967.
- [Chi15] G. Chinello. *Décomposition en blocs de la catégorie des représentations lisses de $GL(m, D)$, groupe métaplectique et groupe de Weil*. PhD thesis, Université de Versailles St-Quentin-en-Yvelines, 2015.
- [Chi17] G. Chinello. Hecke algebra with respect to the pro- p -radical of a maximal compact open subgroup for $GL(n, f)$ and its inner forms. *Journal of Algebra*, (478) :296–317, 2017.
- [Chi18] G. Chinello. Blocks of the category of smooth l -modular representations of $GL(n, f)$ and its inner forms : reduction to level-0. *Alg. Number Th.*, (12) :1675–1713, 2018.

- [CR81] C. Curtis and I. Reiner. *Methods of representation theory*. Wiley Interscience, 1981.
- [CSTS09] T. Ceccherini-Silberstein, F. Tolli, and F. Scarabotti. Clifford theory and applications. *Journal of Mathematical Sciences*, (156) :29–43, 2009.
- [EH14] M. Emerton and D. Helm. The local langlands correspondence for GL_n in families. *Annales scientifiques de l'ENS*, (47) :655–722, 2014.
- [Lan02] S. Lang. *Algebra*. Springer, 2002.
- [Lan19] T. Lanard. *Sur les l -blocs de niveau zéro des groupes p -adiques*. PhD thesis, Sorbonne Université, 2019.
- [MS14a] A. Mínguez and V. Sécherre. Représentations lisses modulo l de $GL_m(d)$. *Duke. Math.*, (163) :795–887, 2014.
- [MS14b] A. Mínguez and V. Sécherre. Types modulo l pour les formes intérieures de $GL(n)$ sur un corps local non archimédien. *Proc. London Math. Soc.*, (109) :823–891, 2014.
- [MS17] A. Mínguez and V. Sécherre. Correspondance de Jacquet-Langlands locale et congruences modulo l . *Invent. Math.*, (208) :553–631, 2017.
- [PR94] V. Platonov and A. Rapinchuk. *Algebraic Groups and Number Theory*. Academic Press, Inc, 1994.
- [Ren10] D. Renard. *Représentations des groupes réductifs p -adiques*. Société Mathématique de France, 2010.
- [Rot02] J. Rotman. *Advanced Modern Algebra*. American Mathematical Society, 2002.
- [Séc04] V. Sécherre. Représentations lisses de $GL_m(d)$, i : caractères simples. *Bull. Soc. Math. France*, (132) :327–396, 2004.
- [Séc05] V. Sécherre. Représentations lisses de $GL_m(d)$, iii : types simples. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, (38) :951–977, 2005.
- [Séc08] V. Sécherre. Représentations lisses de $GL_m(d)$, iv : représentations supercuspidales. *J. Inst. Math. Jussieu*, (7) :527–574, 2008.
- [Ser65] J.-P. Serre. *Cohomologie galoisienne*. Springer-Verlag, 1965.
- [SS16] V. Sécherre and S. Stevens. Block decomposition of the category of l -modular smooth representation of $GL_n(\mathbb{F})$ and its inner forms. *Annales scientifiques de l'ENS*, (49) :669–709, 2016.
- [Vig96] M.-F. Vignéras. *Représentations l -modulaires d'un groupe réductif p -adique avec $l \neq p$* . Birkhäuser, 1996.
- [Vig98] M.-F. Vignéras. Induced representations of reductive p -adic groups in characteristic $l \neq p$. *Selecta Mathematica*, (4) :549–623, 1998.

- [Vig04] M.-F. Vignéras. On highest whittaker models and integral structures. *Contributions to Automorphic Forms, Geometry and Number Theory : ShalikaFest 2002*, pages 773–801, 2004.

Titre : Décomposition en blocs de la catégorie des représentations l -modulaires lisses et de longueur finie de $\mathrm{GL}_m(D)$

Mots clés : Représentations modulaires, groupes p -adiques, décomposition en blocs

Résumé : Le cadre de la thèse est le suivant : soit F un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p et soit D une algèbre à division centrale de dimension finie sur F . On fixe m un entier strictement positif et on s'intéresse à la catégorie $\mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}^{lf}(G)$ des représentations lisses et de longueur finie de $\mathrm{GL}_m(D)$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_l$.

L'objectif de la thèse est de décomposer en blocs cette catégorie.

La stratégie employée consiste à trouver une condition portant sur le support supercuspidal pour que deux représentations de $\mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}^{lf}(G)$ aient un espace d'extension non trivial, et à utiliser cette condition pour décomposer la catégorie. Dans un premier temps, on se restreint aux représentations supercuspidales de niveau 0, puis on en déduit le cas général.

Title : Block decomposition of the category of l -modular finite length smooth representations of $\mathrm{GL}_m(D)$

Keywords : Modular representations, p -adic groups, block decomposition

Abstract : Let F be a nonarchimedean locally compact field of residue characteristic p and let D be a finite dimensional central division algebra over F . Let m be a strictly positive integer. We study the category $\mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}^{lf}(G)$ of smooth finite length $\overline{\mathbb{F}}_l$ -representations of $\mathrm{GL}_m(D)$ and the aim is to find

a block decomposition of this category.

For this, we find a condition involving supercuspidal support for two representations in $\mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}^{lf}(G)$ to have a non trivial extension space, and we use this to decompose the category. At first, we work only with supercuspidal level 0 representations, then we deduce the general case.