



**HAL**  
open science

# Développement d'un modèle hybride RANS-LES pour l'étude des efforts instationnaires en paroi

Vladimir Duffal

► **To cite this version:**

Vladimir Duffal. Développement d'un modèle hybride RANS-LES pour l'étude des efforts instationnaires en paroi. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2020. Français. NNT : 2020PAUU3015 . tel-03038837

**HAL Id: tel-03038837**

**<https://theses.hal.science/tel-03038837>**

Submitted on 3 Dec 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

pour l'obtention du Grade de

DOCTEUR

de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour

École doctorale SEA

Sciences Exactes et leurs Applications

SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE DES FLUIDES

Présentée par  
VLADIMIR DUFFAL

---

## Développement d'un modèle hybride RANS-LES pour l'étude des efforts instationnaires en paroi

---

Directeur de thèse :  
RÉMI MANCEAU

Encadrant industriel :  
BENOÎT DE LAAGE DE MEUX

Soutenue publiquement le 16 novembre 2020  
devant le jury

Pr. Dick	Université de Gand	Rapporteur
Pr. Mortazavi	CNAM, Paris	Rapporteur
Dr. Deck	ONERA, Meudon	Examineur
Dr. Friess	Université Aix-Marseille	Examineur
Dr. Manceau	Université de Pau, CNRS	Examineur
Dr. de Laage de Meux	EDF R&D, Chatou	Examineur



# Résumé

Cette thèse est consacrée à la modélisation de la turbulence avec des approches hybrides RANS-LES. Ces approches permettent d'assurer le meilleur compromis entre, d'une part, la capacité de la LES à capturer les structures instationnaires dans les régions d'intérêt de l'écoulement, et, d'autre part, un coût de calcul abordable en activant le mode RANS lorsque la résolution LES n'est pas nécessaire ou trop coûteuse, notamment en paroi. L'objectif industriel pour EDF est d'utiliser ces méthodes pour estimer les efforts instationnaires qui s'exercent sur certains gros composants (GMPP) des réacteurs à eau pressurisée.

En premier lieu, une nouvelle formulation du modèle hybride HTLES (*Hybrid Temporal Large-Eddy Simulation*) est développée, dans le but d'améliorer ses fondations théoriques, en utilisant le critère de *H-Equivalence*. L'intérêt de ce modèle réside dans l'utilisation du filtrage temporel pour contrôler la répartition d'énergie entre les échelles résolues et modélisées, permettant de garantir la consistance entre les opérateurs RANS et LES. L'approche hybride est appliquée à différents modèles de fermeture RANS, et la calibration est effectuée sur la décroissance d'une turbulence homogène isotrope. De plus, des développements analytiques similaires permettent de proposer, pour la première fois, un modèle hybride fondé sur une modification d'échelle dans une formulation RANS qui tend explicitement vers un modèle LES préexistant.

Le contrôle de la transition RANS-LES dans les régions de proche paroi est une problématique majeure de cette thèse. Afin d'améliorer le comportement du modèle HTLES, une fonction de protection double (dépendante à la fois de paramètres physiques et de critères liés aux maillages) et une contrainte de consistance interne sont proposées pour imposer le mode RANS en paroi lorsque la résolution LES n'est pas appropriée. Le modèle amélioré est validé sur les écoulements en canal plan et sur les collines périodiques, avec des résultats très satisfaisants et robustes vis-à-vis du raffinement du maillage. Il est de plus montré pour le cas test des collines périodiques que des fluctuations turbulentes résolues dans la zone LES pénètrent dans la région RANS de proche paroi sans être trop altérées. Cela permet de capturer correctement les basses fréquences des spectres d'énergie turbulente et de pression en paroi, ce qui s'avère décisif dans le but d'estimer les efforts instationnaires sur des composants. Finalement, la HTLES offre une méthode de résolution alternative au coût numérique réduit par rapport à un modèle LES résolu en paroi.

Enfin, la thèse s'intéresse à une version zonale de la HTLES (imposant le mode RANS dans les régions où la résolution LES n'est pas nécessaire), en appliquant le ALF (*Anisotropic Linear Forcing*) au niveau des interfaces RANS-HTLES afin de promouvoir l'apparition de fluctuations turbulentes résolues. Cette première étude de faisabilité offre des résultats prometteurs.

**Mots clés :** Turbulence, modélisation hybride RANS-LES, HTLES, filtrage temporel, fonctions de protection, canal plan et collines périodiques, efforts instationnaires en paroi, version zonale de la HTLES avec le ALF.





# Abstract

This work is devoted to turbulence modelling using hybrid RANS-LES approaches. These approaches offer the best potential to reach the compromise between the capability of LES to capture the large-scale structures in regions of interest, and the low-computational cost of RANS calculations in regions where LES resolution is not required or too CPU-demanding, notably in near-wall regions. The industrial objective for EDF is to use these methods to predict unsteady loads on large components (reactor coolant pumps) of pressurized water reactors.

In this regard, a new formulation of HTLES (Hybrid Temporal Large-Eddy Simulation) is developed, in order to improve the theoretical foundation of the model, applying the Hybrid-Equivalence criterion. The interest of this model lies in the use of temporal filtering, to control the energy partition between resolved and modeled scales, ensuring a consistent bridging between RANS and LES models. The HTLES approach is applied to several RANS models, and the model is calibrated in decaying isotropic turbulence. In addition, a similar analysis shows for the first time that it is possible, from theoretical considerations, to derive a hybrid RANS-LES model based on scale modifications in a RANS model, which explicitly tends towards a standard LES model in LES regions.

The control of the RANS-to-LES transition in near-wall regions is a major concern in this work. In order to improve the behavior of the HTLES model, a two-fold shielding function (depending on physical parameters and mesh criteria) and an internal consistency constraint are introduced, aiming at enforcing the RANS mode when the activation of the LES mode is not suitable. The validation process of the upgraded version of the model is carried out on channel and periodic-hill flows, reaching the expected outcomes : accuracy of the predictions and robustness of HTLES to grid coarsening. Moreover, it is shown that resolved vortices coming from the LES zone penetrates into the near-wall RANS region down to the wall, enabling the hybrid model to fairly reproduce the low frequencies. The capacity of HTLES to provide information on energy and pressure spectra at the wall is assessed, which is decisive to predict unsteady loads. Hence, HTLES offers a cost-saving alternative to a wall-resolved LES.

Finally, the work focuses on a zonal control of HTLES (enforcing the RANS mode in large portions of the domain where the LES mode is not required), applying the ALF (Anisotropic Linear Forcing) at the RANS-to-HTLES interfaces to promote turbulent fluctuations. This feasibility study offers promising results.

**Keywords :** Turbulence, hybrid RANS-LES modelling, HTLES, temporal filtering, shielding functions, channel and periodic-hill flows, unsteady loads at the wall, zonal control of HTLES using the ALF.



# Remerciements

À l'issue de ces trois années de thèse, je souhaiterais tout d'abord remercier Benoît de Laage de Meux, mon encadrant EDF, qui m'a accompagné tout au long du parcours. Toujours à l'écoute, d'une implication sans failles (même entre deux LP, un budget de projet à faire rentrer, et une réunion au sommet), et surtout la vocation d'expliquer et de ne jamais imposer une idée, bref... un encadrement complet. Tant sur le fond que sur la forme, les travaux de cette thèse ont largement bénéficié de ses conseils avisés et de sa rigueur, et cela sans compter les sympathiques déplacements à Pau ou à San Francisco. Merci Benoît !

Mes sincères et chaleureux remerciements vont à Rémi Manceau pour la confiance qu'il m'a accordée en dirigeant cette thèse, en partageant son expertise et son expérience. Quels que soient les échanges, il a su apporter des réponses à mes questions et une vision originale, tout en conservant une ligne directrice claire pour la thèse. Merci également pour les nombreuses relectures, avec des critiques toujours constructives et pédagogiques (et pour toutes les corrections de mon anglais approximatif).

Encore merci à vous deux, qui, dans ce duo d'encadrement, m'ont permis d'évoluer, de trouver ma place, et de me plaire dans mes activités, tout au long de ces trois années. Je souhaite à de futurs doctorants de bénéficier de votre encadrement.

Je voudrais témoigner de ma gratitude envers le jury de thèse qui m'a offert l'opportunité de présenter et de défendre les travaux réalisés. Mes remerciements les plus sincères vont aux Professeurs Erik Dick et Iraj Mortazavi pour avoir rapporté le manuscrit de thèse, ainsi que pour leur disponibilité lors des derniers moments de la rédaction. Je remercie également Sébastien Deck, dont le cours sur la modélisation de la turbulence et les méthodes hybrides dans le cadre du master DFE (Orsay) m'a guidé dans le choix de la thèse, et Christophe Friess, dont les travaux sont le fondement du travail réalisé lors de cette thèse, pour avoir accepté d'être examinateurs.

Cette thèse a également bénéficié des conseils de l'équipe de développement de Code\_Saturne, et en particulier de Jean-François, Erwan et Martin, que je remercie pour leur disponibilité et leur écoute. Je suis également reconnaissant à Mathieu, Chaï, Jérôme et Yvan pour leurs conseils. J'ai eu enfin l'opportunité de discuter avec de nombreux experts lors de réunions ou devant un poster, et je remercie Sofiane, Jean-Marc, Richard et Éric pour les échanges.

Je souhaite maintenant dire un petit mot des équipes au sein desquels j'ai eu la chance d'évoluer et qui m'ont offert un cadre de travail agréable lors de ces années. En premier lieu, je remercie tous les membres du groupe I8E, ainsi que ceux du groupe I8A, et enfin l'équipe I8C que je vais rejoindre. De manière plus informelle, merci aux personnes du couloir O aval rez-de-chaussée pour leur accueil et leur esprit de groupe dans lequel j'ai eu le privilège d'être intégré. Je remercie chaleureusement Antoine, Dominique, Franchine, Marc, Mathieu, Mugurel et Vincent.

Je tiens à saluer les stagiaires qui se sont succédé au sein de l'équipe, dont la personnalité et les réalisations ont été une source d'enrichissement personnel. Merci à mes co-bureaux Félix et Sophie, ainsi qu'à Aline et Sergio, pour m'avoir sorti la tête de la thèse avec les nombreuses discussions et découvertes (cuisine, danse, écologie, Italie, Japon, ...). Je remercie également Léa et Joseph, qui, malgré le confinement de dernière année, ont apporté une touche finale à cette période. J'en profite pour saluer mes anciens co-stagiaires EDF, Étienne, Matthieu, Salma et Adrien, sans qui mon parcours aurait sans doute été différent. Clin d'oeil enfin à Alexandre, Romuald, Anas et Thomas. Bon courage à tous pour vos projets !

Mes remerciements s'adressent également à tous mes collègues thésards du MFEE pour leurs conseils ou les discussions autour d'un café : que ce soit les illustres prédécesseurs Charles, Christophe et Amélie, les doctorants que j'ai eu la chance de côtoyer un peu plus longtemps Cécile, Sarah et William, et la relève composée de Germain et Léa, ainsi qu'Ali, Hector, Jacques, Luc, Manon et Martin. En particulier, je remercie vivement mes co-doctorants Lucie (ma jumelle de parcours ces dernières années), Gaëtan (et ce partage du directeur de thèse, de l'école doctorale et des réunions MONACO), Riccardo (référent au top), Clément, Li, Thibaut et Hamza. Une dédicace à Rémi et ses chansons inspirantes, (trop) longtemps écoutées lors de projets éoliens, et maintenant doctorant au LNHE, ainsi qu'à Saad, Puneeth et Alexandre du projet MONACO.

Je souhaite également remercier Nicolas et Thomas, docteurs fraîchement arrivés à ISA, qui m'ont fait profiter de leur expérience de fin de thèse et donné de nombreux conseils sur la suite du parcours. J'ai aussi eu la chance de rencontrer Érik, Kresna, Nasser, Aurélien (remerciements partagés avec Charles pour le club musique), Joris, Olivier, Christophe, Sébastien, Grace, et tant d'autres personnes au MFEE.

Finalement, pour leur confiance et leur suivi attentif tout au long de ces trois années, je remercie mes chefs successifs Vincent et Anthony. Pour leur assistance et leur disponibilité, je remercie Agnès, Anne, Chantal et Dominique. Pour m'avoir plus d'une fois sorti d'une mauvaise passe informatique, je remercie Laurent, Romain et Sylvain (et merci le 222).

Puisqu'un parcours se fait bien entouré, je tiens à exprimer ma gratitude à tous les instituteurs, enseignants, professeurs (neuf années au collège-lycée-prépa Michelet tout de même) qui m'ont instruit ces vingt dernières années, et qui tous, à leur manière, m'ont aidé et guidé dans mes choix. Je salue Sabine Ortiz Clerc de l'ENSTA Paris qui, à travers les premiers cours de mécanique des fluides, a suscité en moi l'intérêt pour ce domaine, et m'a ensuite offert l'opportunité de revenir enseigner à l'ENSTA au cours de la thèse (une de mes expériences préférées).

Pour finir, je souhaiterais remercier les personnes qui m'accompagnent depuis de très nombreuses années, à commencer par mes plus proches amis, les p'tits potes, Antoine, Florentin, Matthieu et Paul. Plus de vingt ans d'amitié pour certains, et de savoir sur qui compter, que ce soit pour une soirée ou une LAN improvisée, c'est inestimable. Je remercie également toutes les personnes que j'ai rencontrées au Parc, Michelet, l'ENSTA, l'ACER, UCLA, le LOCEAN, ADWEN, ... et dont la liste mériterait un second manuscrit.

Plus que tout, je remercie ma fiancée Blandine, que j'ai le bonheur de connaître depuis plus de dix ans, mais surtout, en ce qui concerne cette thèse, pour son soutien quotidien lors de ces trois années (et notamment la relecture finale, grammaticalement essentielle, du manuscrit). Tout cela sans compter le premier appartement, les deux thèses, le *road-trip* américain, le confinement à deux, ...

Je souhaite finalement saluer et remercier toute ma famille. Pour toutes les valeurs qu'ils m'ont transmises, je remercie mes quatre grands-parents Sophie et Cyrille, Janine et Roger. Pour son soutien inconditionnel, je remercie Hélène. Pour être les « frères guerriers », je remercie Boris et Grégoire. Enfin, pour m'avoir éduqué, guidé, encouragé et permis d'en être là aujourd'hui, je remercie de tout coeur mes parents Nathalie et Jean-Marc.

# Sommaire

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Préambule . . . . .	1
1.2	Contexte industriel . . . . .	3
1.2.1	Contexte industriel pour EDF . . . . .	3
1.2.2	Contexte de recherche dans le cadre du projet MONACO_2025 . . . . .	5
1.3	Contexte scientifique et technique . . . . .	5
1.4	Stratégie et objectifs de la thèse . . . . .	7
1.4.1	Stratégie de modélisation pour répondre à la problématique industrielle . . . . .	7
1.4.2	État des lieux en début de thèse . . . . .	8
1.4.3	Travail réalisé . . . . .	9
1.5	Organisation du manuscrit . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Introduction aux modèles de turbulence</b>	<b>13</b>
2.1	La turbulence : principes, simulation et modélisation . . . . .	14
2.1.1	Hypothèses fondamentales . . . . .	14
2.1.2	Description fondamentale de la turbulence . . . . .	14
2.1.2.1	Équations de Navier-Stokes . . . . .	14
2.1.2.2	Description de la turbulence . . . . .	15
2.1.3	Simulation et modélisation de la turbulence . . . . .	16
2.1.3.1	Simulation directe des équations de Navier-Stokes . . . . .	16
2.1.3.2	Modélisation statistique de la turbulence . . . . .	17
2.1.3.3	Simulation des grandes échelles turbulentes . . . . .	18
2.1.3.4	Modèles hybrides RANS-LES . . . . .	19
2.2	Approche statistique RANS . . . . .	21
2.2.1	Principes et équations de l'approche statistique . . . . .	21
2.2.1.1	Opérateur de moyenne statistique . . . . .	21
2.2.1.2	Dynamique du mouvement moyen . . . . .	22
2.2.1.3	Équation de transport du tenseur de Reynolds . . . . .	22
2.2.1.4	Équation de transport de l'énergie cinétique turbulente . . . . .	23
2.2.2	Modèles au premier ordre à viscosité turbulente . . . . .	24
2.2.2.1	Modèle $k-\varepsilon$ . . . . .	25
2.2.2.2	Modèle $k-\omega$ SST . . . . .	26
2.2.2.3	Modèle $BL-\overline{v^2}/k$ . . . . .	28
2.2.3	Modèles au second ordre . . . . .	32
2.2.3.1	Modèles LRR et SSG . . . . .	33
2.2.3.2	Modèle EB-RSM . . . . .	33
2.2.4	Utilisation des modèles RANS dans le cadre de la thèse . . . . .	34
2.3	Résolution locale des échelles par approche filtrée . . . . .	34
2.3.1	Principes et équations de l'approche filtrée . . . . .	34
2.3.1.1	Spectres d'énergie turbulente spatial et temporel . . . . .	34
2.3.1.2	Opérateurs de filtrage spatial ou temporel . . . . .	37

2.3.1.3	Décomposition de l'énergie cinétique turbulente	38
2.3.1.4	Équations filtrées pour la vitesse	39
2.3.1.5	Approche filtrée généralisée	39
2.3.2	Modèles LES	40
2.3.2.1	Modèle à viscosité de sous-filtre	40
2.3.2.2	Modèle de Smagorinsky	41
2.3.2.3	Modèle de Deardorff	42
2.3.2.4	Modèles LES alternatifs avec filtrage spatial	43
2.3.2.5	Modèles LES avec filtrage temporel	43
2.3.3	Modèles hybrides RANS-LES	44
2.3.3.1	Principes des approches hybrides globales	44
2.3.3.2	Modèle DES	45
2.3.3.3	Modèle PITM	47
2.3.3.4	Autres modèles hybrides de la littérature	50
2.3.4	Modèles hybrides RANS-LES avec filtrage temporel	50
2.3.4.1	Intérêt du filtrage temporel pour les méthodes hybrides	50
2.3.4.2	Invariance galiléenne et filtre temporel uniforme	51
2.3.4.3	Développement d'un modèle hybride temporel : le TPITM	51
2.4	Conclusion	52
<b>3</b>	<b>Développement de la nouvelle formulation HTLES</b>	<b>55</b>
3.1	Développement original de la HTLES	56
3.1.1	Problématique	56
3.1.2	Transfert de la fonction d'hybridation	57
3.1.3	Critère d'équivalence entre les approches hybrides	57
3.1.4	Analyse des perturbations	58
3.1.5	Développement d'un premier modèle H-Equivalent à la TPITM	59
3.1.6	Développement original de la HTLES	60
3.1.6.1	Formulation originale de la HTLES	60
3.1.6.2	Analyse du comportement dans les branches RANS et LES	60
3.1.6.3	Principales différences entre les approches HTLES et DES	61
3.2	Nouvelle formulation HTLES	61
3.2.1	Problématique	61
3.2.2	Proposition d'un nouveau système d'équation	62
3.2.2.1	Identification du terme de dissipation	62
3.2.2.2	Évaluation de la viscosité turbulente modélisée	62
3.2.3	H-Equivalence et analyse des perturbations	64
3.2.4	Évaluation du ratio d'énergie lié à la fréquence de coupure	66
3.2.5	Modèle $k-\varepsilon$ HTLES	67
3.2.5.1	Nouvelle formulation de la HTLES	67
3.2.5.2	Analyse du comportement dans les branches RANS et LES	68
3.2.6	Application de la HTLES au modèle $k-\omega$ SST	68
3.2.6.1	Intérêt d'appliquer la HTLES au $k-\omega$ SST	68
3.2.6.2	Première méthode de dérivation du modèle $k-\omega$ SST HTLES	69
3.2.6.3	Seconde méthode de dérivation du modèle $k-\omega$ SST HTLES	70
3.2.7	Application de la HTLES au modèle $BL-\overline{v^2}/k$	73
3.2.7.1	Intérêt d'appliquer la HTLES au modèle $BL-\overline{v^2}/k$	73
3.2.7.2	Dérivation du modèle $BL-\overline{v^2}/k$ HTLES	73
3.3	Consistance entre les approches hybrides et LES	76
3.3.1	Problématique et démarche	76
3.3.2	Formulation du modèle hybride	77
3.3.3	Consistance avec des modèles RANS et LES standards	79

## SOMMAIRE

3.3.4	Conclusion	79
3.4	Décroissance de turbulence isotrope	80
3.4.1	Introduction	80
3.4.1.1	Description et équations d'évolution	80
3.4.1.2	Analyse des taux de décroissance des différentes variables	81
3.4.2	Description du cas test	82
3.4.3	Initialisation et paramètres numériques	83
3.4.3.1	Problématique de l'initialisation du calcul	83
3.4.3.2	Paramètres numériques	85
3.4.4	Calibration et validation des modèles	86
3.4.4.1	Modèle HTLES	86
3.4.4.2	Modèle LES de Deardorff	88
3.4.4.3	Nouvelle formulation hybride spatiale	90
3.4.4.4	Approche hybride DES	90
3.5	Conclusion	91
<b>4</b>	<b>Amélioration de la HTLES en proche paroi</b>	<b>93</b>
4.1	Couche limite turbulente	94
4.1.1	Description de l'écoulement dans un canal plan infini	94
4.1.2	Principales régions dans la couche limite turbulente	95
4.1.3	Principaux effets dans la couche limite turbulente	96
4.2	Paramètres numériques	97
4.3	Comportement des principales approches	99
4.3.1	RANS	99
4.3.2	LES	100
4.3.3	Hybride DES	101
4.4	Amélioration de la HTLES	103
4.4.1	Comportement de la HTLES	103
4.4.2	Consistance avec le modèle de fermeture RANS	103
4.4.3	Contrôle de la transition RANS-LES dans la région de proche paroi	105
4.4.3.1	Comportement du ratio d'énergie en proche paroi	105
4.4.3.2	Fonction de protection pour imposer le mode RANS jusqu'au début de la zone logarithmique	106
4.4.3.3	Protection indépendante du maillage pour la zone visqueuse	106
4.4.3.4	Fonction de protection dépendante de l'anisotropie du maillage pour contrer le <i>Log-Layer Mismatch</i>	112
4.5	Validation de la formulation HTLES améliorée	117
4.5.1	Sensibilité de la HTLES au nombre de Reynolds	117
4.5.2	Sensibilité de la HTLES au maillage	120
4.5.3	Sensibilité de la HTLES au modèle de fermeture	124
4.6	Conclusion	128
<b>5</b>	<b>Efforts instationnaires sur les collines périodiques</b>	<b>131</b>
5.1	Écoulement sur les collines périodiques	132
5.1.1	Présentation du cas test	132
5.1.2	Configuration de référence pour la validation des modèles de turbulence	133
5.2	Paramètres numériques	134
5.3	Comportement des modèles RANS et LES	135
5.3.1	LES	135
5.3.2	RANS	137
5.4	Validation de la HTLES	138
5.4.1	Comportement de la HTLES et influence des améliorations	138



5.4.2	Étude de sensibilité au maillage . . . . .	140
5.4.3	Étude de sensibilité au modèle de fermeture . . . . .	146
5.4.4	Étude de sensibilité au nombre de Reynolds . . . . .	149
5.5	Estimation des efforts instationnaires en paroi . . . . .	151
5.5.1	Estimations statistiques de la pression . . . . .	151
5.5.2	Calcul LES de référence . . . . .	153
5.5.3	Influence des paramètres de la HTLES . . . . .	155
5.5.4	Estimation des spectres d'énergie en HTLES . . . . .	158
5.5.4.1	Estimation du taux de filtrage loin des parois . . . . .	158
5.5.4.2	Estimation de la plage de validité basse fréquence des spectres calculés en proche paroi . . . . .	160
5.5.5	Estimation des spectres de pression en HTLES . . . . .	165
5.6	Conclusion . . . . .	167
<b>6</b>	<b>Version zonale de la HTLES avec le ALF</b> . . . . .	<b>169</b>
6.1	Intérêt et principe du forçage aux interfaces RANS-LES . . . . .	170
6.2	Forçage Linéaire Anisotrope . . . . .	171
6.2.1	Effet statistique du forçage volumique . . . . .	171
6.2.2	Formulation du ALF . . . . .	171
6.2.3	Intérêt d'une utilisation zonale de la HTLES avec le ALF . . . . .	173
6.3	Configuration étudiée . . . . .	173
6.3.1	Présentation de la configuration . . . . .	173
6.3.2	Développement spatial de la HTLES . . . . .	175
6.4	Développement spatial de la HTLES avec le ALF . . . . .	178
6.4.1	Application du ALF . . . . .	178
6.4.2	Étude de sensibilité au coefficient de l'approche de forçage . . . . .	178
6.4.3	Étude de sensibilité à l'extension de la zone de forçage . . . . .	181
6.4.4	Étude de sensibilité à la position de la zone de forçage . . . . .	183
6.4.5	Étude de sensibilité à l'application du ALF dans la zone RANS de proche paroi . . . . .	184
6.4.6	Comparaison des résultats HTLES avec et sans le ALF . . . . .	186
6.5	Conclusion . . . . .	189
<b>7</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>191</b>
<b>A</b>	<b>Formulation améliorée de la HTLES</b> . . . . .	<b>195</b>
A.1	Modèle $k-\omega$ SST HTLES . . . . .	195
A.2	Modèle $BL-\overline{v^2}/k$ HTLES . . . . .	197
<b>B</b>	<b>Analyse des perturbations pour la formulation <math>k-\varepsilon</math> HTLES</b> . . . . .	<b>199</b>
B.1	Turbulence homogène . . . . .	200
B.2	Turbulence inhomogène . . . . .	201
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>i</b>

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Préambule

La turbulence des écoulements fluides est un phénomène physique à la fois bien identifié, caractérisé par des tourbillons et des structures en filament induisant un mélange important au sein des fluides, mais aussi difficile à prédire du fait de ses mouvements complexes et désordonnés. La turbulence est pourtant un mécanisme rencontré dans de nombreuses situations de la vie courante : les mouvements irréguliers de la vapeur qui s'élève au-dessus d'un liquide bouillant, le mélange forcé de deux fluides comme le café et le lait, ou la complexité des mouvements de l'eau d'un torrent, ... C'est d'ailleurs de l'observation des mouvements à la surface de l'eau que nous vient l'introduction du terme *turbolenza* par Léonard de Vinci au début du XVI<sup>e</sup> siècle, mettant en évidence dans ses textes et illustrations les structures tourbillonnaires et leur caractère apparemment aléatoire. Il faut attendre les travaux d'Osborne Reynolds [97] en 1883 pour qu'une description qualitative de la turbulence voie le jour, à travers l'étude de la transition depuis un régime ordonné laminaire vers un régime désordonné turbulent dans une expérience qui porte aujourd'hui son nom. Il est également à l'origine de l'approche moyennée [98] pour décrire les mouvements du fluide, approche qui est l'un des piliers sur lesquels repose une grande part de l'édifice de la modélisation aujourd'hui. Au cours du XX<sup>e</sup> siècle, ce furent le concept de cascade d'énergie introduit par Lewis Fry Richardson [99] en 1922, puis les travaux d'Andreï Kolmogorov [64] en 1941, qui permirent d'expliquer le caractère multi-échelle des structures turbulentes, des grands tourbillons porteurs d'énergie aux petites structures dissipatives, ainsi que les transferts d'énergie entre ces échelles. Cette théorie baptisée K41 est à la base de la compréhension actuelle de la turbulence.

La dynamique des fluides newtoniens (eau, air, ...), y compris dans un régime turbulent, est décrite par les équations de Navier-Stokes, développées par Claude-Louis Navier en 1822 et perfectionnées par George Gabriel Stokes vingt ans plus tard en se fondant sur l'équation d'Euler pour les fluides parfaits. Elles traduisent la deuxième loi de Newton, ou principe fondamental de la dynamique, en identifiant les forces qui s'exercent sur un fluide au cours de son mouvement. Ces équations différentielles non linéaires sont particulièrement difficiles à résoudre (voire impossibles dans la plupart des cas avec les méthodes actuelles), à tel point que l'existence d'une solution régulière pour un écoulement en trois dimensions n'a pas encore été démontrée et fait partie des sept problèmes du millénaire récompensés par l'institut de mathématique Clay<sup>1</sup>. À travers la résolution des équations de Navier-Stokes, c'est la compréhension de l'état désordonné de la turbulence, de ses structures tridimensionnelles et instationnaires caractéristiques, qui est recherchée.

La résolution analytique des équations de Navier-Stokes étant impossible pour la plupart des écoulements, les chercheurs et ingénieurs se sont tournés vers des approches expérimentales

---

1. <https://www.claymath.org/millennium-problems>

pour tenter de caractériser et maîtriser les écoulements turbulents. La naissance de l'aviation moderne, avec le premier vol des frères Wright en 1903, illustre le tâtonnement expérimental dans un cas où les écoulements d'air sont particulièrement complexes à décrire. Après le décollage du secteur aéronautique, cette approche expérimentale ne suffisait plus pour concevoir des appareils de plus grandes tailles. Des maquettes à échelle réduite ont donc été testées dans des souffleries en utilisant des propriétés d'invariance par changement d'échelle. Ces études fournissent des résultats fiables, mais restent néanmoins longues et coûteuses.

La montée en puissance d'outils de calcul spécifiques, puis des ordinateurs modernes, lors de la seconde moitié du XX<sup>e</sup> siècle ouvre une nouvelle voie pour étudier la turbulence : la mécanique des fluides numériques, couramment dénotée CFD pour *Computational Fluid Dynamics*. Ces méthodes reposent sur la simulation directe ou la modélisation des phénomènes physiques. Elles résolvent les équations approchées à l'aide de schémas numériques implémentés dans des logiciels utilisant la puissance de calcul des ordinateurs, à la croisée des chemins entre la mécanique, les mathématiques appliquées et l'informatique. Pour réaliser des études paramétriques, afin d'évaluer l'aérodynamique de plusieurs géométries d'ailes d'avion par exemple, il est bien plus efficace en terme de temps et de coût d'utiliser les outils de la CFD que d'effectuer des tests expérimentaux sur des dizaines, voire des centaines, de maquettes différentes. L'intérêt de la CFD réside aussi dans le fait que toutes les « expériences numériques » sont reproductibles et donnent accès à une information instantanée dans tout le domaine d'étude. Les tests expérimentaux restent néanmoins nécessaires dans la plupart des cas pour garantir la fiabilité des résultats, ou pour étudier des phénomènes difficiles à appréhender numériquement en raison d'un déficit de modélisation. À ce titre, la CFD et les expériences sont souvent utilisées de manière complémentaire.

La CFD a de nombreuses applications, que ce soit dans un contexte de recherche pour affiner la compréhension physique de phénomènes particuliers, ou dans un contexte industriel pour effectuer des études de performance, de dimensionnement et de sûreté sur des configurations données. Dans un cas comme dans l'autre, un paramètre déterminant pour la réalisation des études est la puissance de calcul disponible, car la CFD repose sur des méthodes de calcul très coûteuses en temps CPU (*Central Processing Unit*). Cependant, l'amélioration des moyens informatiques lors des dernières décennies et l'accès à des super-calculateurs de plus en plus puissants permet aujourd'hui d'effectuer des calculs détaillés sur des configurations complexes.

La simulation et la modélisation, notamment de la turbulence, sont l'objet de la section 1.3 sur le contexte scientifique de la thèse, avant d'être présentées plus précisément dans le Chapitre 2. Il est néanmoins possible de signaler dès maintenant que l'un des principaux objectifs de la modélisation est de décrire les principales caractéristiques de l'écoulement tout en conservant un coût de calcul réduit par rapport à la simulation directe. Différents compromis existent entre la précision et le coût numérique, qui sont au coeur des enjeux de cette thèse.

Dans l'industrie, la maîtrise de la turbulence des écoulements est essentielle, que ce soit pour la limiter afin d'éviter des problèmes de pertes de charges ou de chargements instationnaires, ou au contraire l'exploiter afin de favoriser le mélange ou retarder le décollement d'une couche limite. L'étude de la turbulence est souvent associée au secteur de l'aéronautique et de l'automobile, pour réaliser des études aérodynamiques ou concevoir de nouveaux moteurs, par exemple. Le secteur de l'énergie s'appuie également sur les connaissances et les outils de la mécanique des fluides, que ce soit pour les éoliennes dont les performances sont directement liées à leur capacité à extraire l'énergie cinétique du vent, ou pour les centrales thermiques et nucléaires dans lesquelles les échanges d'énergie s'appuient souvent sur un écoulement de fluides caloporteurs. Parmi d'autres sujets, on peut citer les études climatiques ou météorologiques, pour lesquelles il est primordial de s'intéresser aux phénomènes turbulents ayant lieu dans l'atmosphère ou les océans.

## 1.2 Contexte industriel

### 1.2.1 Contexte industriel pour EDF

La thèse présentée dans ce manuscrit fait l'objet d'un co-encadrement CIFRE entre d'une part le Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications (LMAP, Université de Pau et des Pays de l'Adour, E2S UPPA, CNRS, INRIA, équipe CAGIRE), et, d'autre part, la recherche et développement d'EDF, dans le département de Mécanique des Fluides, Énergie et Environnement (MFEE). EDF est un groupe ensemblier, énergéticien leader dans la production d'énergie bas-carbone, à travers la construction, l'exploitation, la distribution et le commerce d'énergie et de services. En France métropolitaine, la production électrique en 2019 repose à plus de 70% sur les 58 réacteurs à eau pressurisée (REP) répartis dans les 19 centrales nucléaires exploitées par EDF.

Le principe de fonctionnement des REP repose sur le chaînage suivant : l'énergie nucléaire est transformée en énergie thermique transportée par un fluide caloporteur dans deux circuits fermés, avant d'être convertie en énergie mécanique, puis en électricité, comme schématisé sur la Figure 1.1. Dans le circuit primaire, le groupe moto-pompe primaire (GMPP) met en mouvement le fluide caloporteur qui s'échauffe dans le coeur du réacteur en extrayant l'énergie thermique libérée lors de la réaction de fission nucléaire. Les deux circuits fermés sont reliés entre eux par le générateur de vapeur, un échangeur de chaleur qui transfère l'énergie thermique du circuit primaire vers le circuit secondaire et vaporise le fluide à une pression inférieure dans ce dernier. La circulation de cette vapeur fait tourner une turbine (conversion en énergie mécanique) reliée à un alternateur (conversion en électricité). Un condenseur permet un retour du fluide à l'état liquide dans le circuit secondaire, en présentant une interface avec un troisième circuit ouvert de refroidissement, qui rejette la chaleur résiduelle dans l'environnement extérieur, grâce à une tour aéroréfrigérante ou une autre source extérieure de refroidissement.

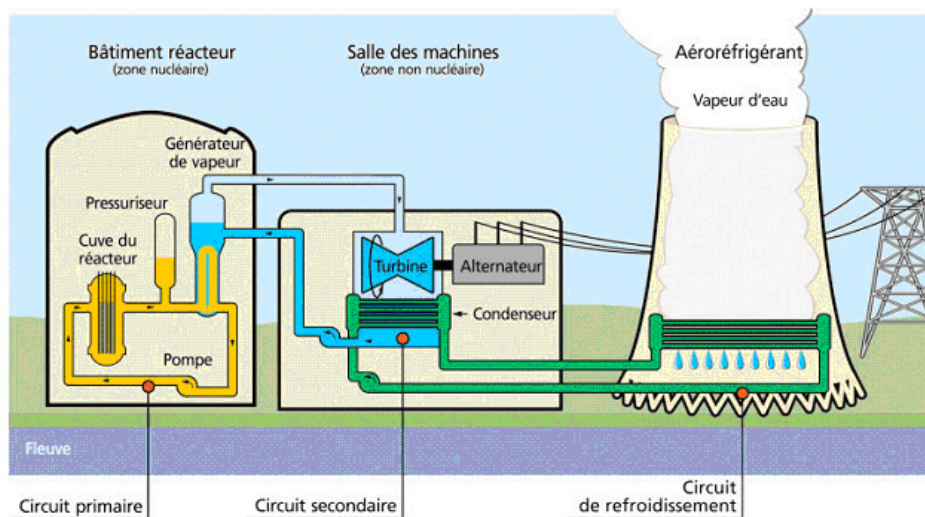


FIGURE 1.1 – Schéma d'un réacteur nucléaire à eau pressurisé - Source EDF.

Les écoulements du fluide dans les circuits primaires et secondaires des réacteurs nucléaires sont décrits par les principes de la thermohydraulique, s'intéressant au mouvement des fluides en prenant en compte les effets de la température. La description de ces écoulements fait donc appel à de nombreux modules physiques : la thermique pour décrire les mouvements de convection et les échanges de chaleur avec les parois solides, les écoulements diphasiques avec les changements d'état liquide-vapeur du fluide, et bien sûr la turbulence. Les écoulements dans les circuits complets ou dans les gros composants sont étudiés avec des maquettes expérimentales et en réalisant des études numériques sur plusieurs codes de calcul, permettant d'obtenir différents degrés de précision. Les études permettent en particulier d'améliorer la performance des installations,

d'évaluer des solutions constructeurs, d'effectuer de la maintenance prédictive ou de réaliser des études de sûreté dans des situations accidentelles. Dans ce cadre, EDF R&D développe sa propre plate-forme de calcul scientifique SALOME<sup>2</sup>, qui intègre le logiciel CFD code\_saturne<sup>3</sup> [3], ainsi que neptune\_cfd permettant de résoudre les écoulements multiphasiques.

### Problématique industrielle de la thèse

Dans cette thèse, la problématique industrielle s'intéresse aux principales pompes des centrales REP : le GMPP (groupe moto-pompe primaire), au sein du circuit primaire, et la turbo-pompe alimentaire, au sein du circuit secondaire (se référer au livre de Dick [32] pour des fondamentaux sur les turbomachines).

Dans la pompe primaire, organe essentiel dont le rôle est d'assurer une circulation d'eau continue et régulière dans le circuit primaire afin de refroidir le cœur du réacteur (fonction de sûreté) et de transporter la chaleur jusqu'au générateur de vapeur, l'usure prématurée de plusieurs vis de fixation à l'aspiration de la pompe a été récemment observée, comme montré sur la Figure 1.2, occasionnant de nombreux arrêts de tranches. Les investigations ont montré qu'au-delà des efforts hydrauliques statiques, un phénomène vibratoire pouvait être responsable d'une partie de ces dégradations.

Concernant les turbo-pompes alimentaires et dans un contexte d'une manoeuvrabilité accrue des centrales nucléaires au sein du mix énergétique, ces pompes sont amenées à fonctionner plus régulièrement à débit partiel – loin de leur point de design nominal – lors de phases d'exploitation à basse puissance des tranches. Cela occasionne des recirculations importantes dans la pompe, ce qui peut endommager le guidage mécanique du rotor.

Au-delà des pompes, d'autres gros composants des REP sont soumis à des efforts hydrauliques instationnaires liés à la turbulence de l'écoulement, pouvant générer des vibrations et de la fatigue mécanique. La maîtrise de ces phénomènes grâce à des modèles de simulation bien validés est un élément essentiel dans la définition des stratégies de maintenance et les études de sûreté d'EDF auprès de l'ASN (Autorité de Sûreté Nucléaire).

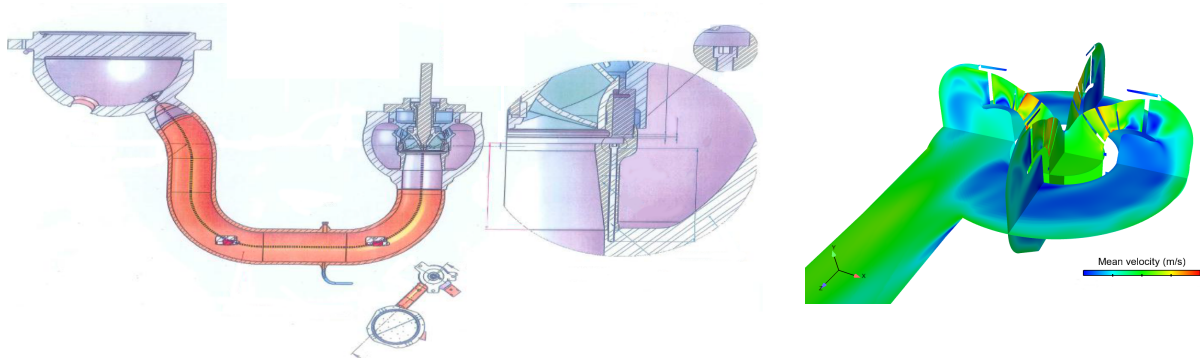


FIGURE 1.2 – Schéma du GMPP et détail sur les vis de fixation à l'aspiration (gauche), illustration d'un calcul CFD pour étudier une pompe centrifuge (droite) - Source EDF.

Les efforts sur les composants étant liés à l'aspect instationnaire de la turbulence, il est nécessaire d'utiliser des modèles CFD permettant de résoudre une part significative et bien caractérisée des structures cohérentes instantanées de l'écoulement, tout en conservant un coût de calcul en phase avec les attentes de l'ingénierie.

**L'objectif de la thèse est donc de proposer une modélisation permettant d'obtenir un compromis entre la capacité à fournir une information instationnaire et un coût de calcul réduit, de l'intégrer dans le logiciel CFD code\_saturne, et de la valider.** L'état de l'art en modélisation de la turbulence est présentée dans la section 1.3, afin

2. <https://www.salome-platform.org/>

3. <https://www.code-saturne.org/cms/>



de déterminer les approches les plus adaptées à cette fin et identifier les verrous scientifiques. Par la suite, la section 1.4 propose une démarche d'amélioration des méthodes existantes.

Le modèle proposé pourra servir à évaluer les nouvelles conceptions des composants à l'aspiration des GMPP et déterminer les efforts fluctuants à basse fréquence sur les turbo-pompes alimentaires à débit partiel. Mais il pourra également être appliqué à des problématiques reposant sur des besoins CFD similaires, comme les vibrations des assemblages combustibles ou des guides de grappes. Une extension à la thermique, qui sort du cadre de cette thèse, pourrait être utile dans le cadre de l'étude du choc froid sur cuve ou du transitoire jour-nuit en atmosphérique.

Cette thèse s'est inscrite dans les projets OPTI-GMPP (sûreté et optimisation de l'exploitation des GMPP) et POPS (Pompes de Production et de Sauvegarde), au sein de la finalité « Durée de fonctionnement » des Programmes d'EDF R&D.

### 1.2.2 Contexte de recherche dans le cadre du projet MONACO\_2025

La thèse est intégrée au projet MONACO\_2025<sup>4</sup> (*Modelling Natural Convection*) financé par l'Agence Nationale de Recherche (ANR-17-CE06-0005-01\_ACT). Le projet d'une durée de 4 ans est piloté par Rémi Manceau du LMAP, en partenariat avec l'institut Pprime (CNRS, Université de Poitiers, ISAE-ENSMA), ainsi qu'avec les R&D des groupes PSA et EDF. Le projet MONACO\_2025 a pour objectif de développer des stratégies de modélisation innovantes afin de traiter les écoulements transitoires ou turbulents pour lesquels la force de flottabilité joue un rôle majeur, par exemple les écoulements en convection naturelle ou mixte. Ces écoulements sont rencontrés dans de nombreuses configurations industrielles, notamment dans le domaine de l'énergie (EDF) avec la convection dans les circuits de refroidissement des centrales nucléaires comme nous l'avons vu, ou de l'automobile (PSA) avec l'apparition d'un écoulement de convection sous le capot d'un véhicule à l'arrêt avec un moteur chaud.

Une installation expérimentale originale est en cours d'étude à l'institut Pprime : un écoulement transitoire dominé par les effets de flottabilité au sein d'une cavité fermée comprenant un bloc intérieur chauffant. Cette expérience est un premier jalon pour déterminer les phénomènes physiques pertinents à modéliser et obtenir des données de référence pour la validation des modèles. Des études expérimentales sont également réalisées par la R&D du groupe PSA sur des configurations réelles, en instrumentant des moteurs sous les capots de véhicules tests.

L'objectif du projet est de mieux prédire ces phénomènes physiques complexes en incorporant les effets de la flottabilité dans des modèles de turbulence. En particulier, la prise en compte des phénomènes instationnaires nécessite la prédiction d'une partie des structures turbulentes, mais les modèles utilisés actuellement sont généralement très coûteux numériquement et sont donc inapplicables dans les études d'ingénierie (voir la section 1.3).

Une des tâches du projet MONACO\_2025 est donc dévolue au développement et à la validation de modèles de turbulence, permettant de résoudre les principales structures turbulentes instationnaires tout en conservant un coût du calcul réduit pour répondre aux besoins de l'ingénieur. La thèse présentée ici est un premier jalon du projet, dont l'objectif est de développer ces méthodologies et les valider dans `code_saturne`, dans un cadre isotherme. Une thèse en cours poursuit les développements de la méthode existante, en cherchant à étendre sa validité à des écoulements pour lesquels les effets thermiques et la flottabilité sont dominants.

## 1.3 Contexte scientifique et technique

L'objectif de la CFD est de simuler ou modéliser des phénomènes physiques divers : des écoulements turbulents, diphasiques, avec des effets thermiques, comme vu jusqu'à présent, mais aussi en prenant en compte des effets de compressibilité ou des couplages avec les solides par exemple. Dans les cas où il n'est pas possible de réaliser une simulation, des modèles mathématiques sont développés, se traduisant souvent par une mise en équation qui permet de

4. <http://monaco2025.gforge.inria.fr/>

représenter les phénomènes physiques les plus pertinents. Ces équations sont intégrées dans des codes de calculs permettant une résolution discrète du problème au moyen de schémas mathématiques développés dans le cadre de l'analyse numérique (voir par exemple le livre de Ferziger and Perić [37]).

Pour réaliser des calculs en dynamique des fluides, la méthode d'analyse numérique la plus couramment utilisée pour les applications industrielles est l'approche conservative des volumes finis. Dans un premier temps, le domaine fluide étudié est subdivisé en de multiples cellules pour réaliser un maillage. Les grandeurs caractéristiques et physiques du fluide sont ensuite approximées par leurs intégrales volumiques dans chacun de ces petits volumes de contrôle grâce à un bilan global des flux, permettant de résoudre une formulation forte de l'équation de Navier-Stokes dans tout le domaine.

La première étape d'une étude CFD consiste à réaliser une CAO (Conception Assistée par Ordinateur) de la configuration considérée, puis à concevoir le maillage associé. Le maillage a une influence importante sur les résultats numériques en raison de la discrétisation des grandeurs entre chaque cellule : si le maillage est trop grossier par rapport aux échelles caractéristiques des phénomènes physiques étudiés ou par rapport aux besoins des modèles utilisés, la résolution ne pourra pas être exacte. L'étape de conception du maillage est donc particulièrement critique et demande un savoir-faire particulier de l'utilisateur.

Le calcul est ensuite réalisé en sélectionnant les modèles appropriés pour la problématique physique et les schémas numériques adaptés pour ces méthodes. C'est à cette étape que la puissance de calcul à disposition prend toute son importance, en étant un facteur déterminant pour choisir et sélectionner les méthodologies utilisables. Les principales méthodes de simulation et modélisation de la turbulence sont décrites succinctement ci-après afin de mettre en évidence leurs caractéristiques les plus pertinentes pour répondre (ou non) à la problématique industrielle. Une description plus détaillée des méthodes est réalisée dans la section 2.1.3.

#### **DNS** (*Direct Numerical Simulation*)

La DNS consiste à simuler directement toutes les structures tourbillonnaires de l'écoulement, en résolvant entièrement le spectre de l'énergie turbulente sans aucune modélisation. Cependant, le maillage nécessaire pour résoudre la large gamme d'échelles turbulentes est tellement fin que le coût de calcul devient prohibitif.

#### **RANS** (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes*)

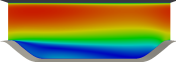
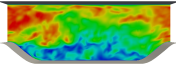
Le formalisme RANS modélise toutes les échelles turbulentes en utilisant une approche statistique, ce qui permet de réduire drastiquement le raffinement du maillage par rapport à la DNS en contrepartie d'importants efforts de modélisation. Le coût de calcul relativement faible, associé à la facilité d'utilisation et la robustesse des méthodes, font des modèles RANS des standards industriels. La principale limitation vient du formalisme RANS en lui-même qui ne donne accès qu'à des résultats statistiquement moyennés sans fournir d'autres informations sur les structures instantanées de l'écoulement.

#### **LES** (*Large-Eddy Simulation*)

La LES repose sur une approche filtrée pour simuler directement les grandes échelles productives de la turbulence et modéliser les petites échelles dissipatives supposées avoir un comportement universel et isotrope. Les modèles LES sont donc capables de fournir une information instantanée sur les structures large échelle instantanées de l'écoulement afin de capturer les structures turbulentes en proche paroi. Cependant, cette résolution implique de fortement raffiner le maillage pour les écoulements pariétaux, ce qui augmente considérablement le coût des calculs.

## Hybride RANS-LES

Les modèles hybrides correspondent à une modélisation intermédiaire de la turbulence qui cherche à tirer profit des avantages des deux principaux formalismes, de la manière suivante :

 <p><b>RANS :</b> ✓ Écoulement statistique, ✓ Coût de calcul accessible, ✗ Écoulement instationnaire,</p>	}	<p><b>Méthodes Hybrides :</b> ✓ Écoulement instationnaire dans, certaines régions, stationnaire dans d'autres. ✓ Coût de calcul abordable, ✓ Grande part du spectre est résolue dans certaines régions.</p>
 <p><b>LES :</b> ✓ Écoulement instationnaire, ✓ Grande part du spectre est résolue, ✗ Coût de calcul prohibitif,</p>		

L'idée principale sur laquelle s'appuient les méthodes hybrides consiste à capturer les structures instationnaires en mode LES dans les régions d'intérêt de l'écoulement, et d'activer le mode RANS dans les régions où une résolution LES n'est pas nécessaire ou trop coûteuse. En particulier, étant donné le coût numérique important de la LES pour les écoulements pariétaux, les couches limites sont modélisées en mode RANS, ce qui permet de drastiquement réduire le coût de calcul.

Différentes méthodes d'hybridation peuvent être distinguées [100], et notamment les **méthodes hybrides zonales**, pour lesquelles les sous-domaines en mode RANS et LES sont définis à l'avance et traités séparément ce qui demande une intervention forte de l'utilisateur, et les **méthodes hybrides globales**, pour lesquelles un unique modèle est utilisé dans tout le domaine avec une transition continue (et « automatique ») d'un mode à l'autre en fonction de l'état local de la turbulence, ce qui rend difficile de bien distinguer les régions traitées en mode RANS et en mode LES.

Ces méthodes permettent d'envisager une utilisation courante des approches hybride RANS-LES du point de vue de l'ingénieur. Néanmoins, en raison d'un développement relativement récent par rapport aux autres formalismes, les modèles hybrides ne sont pas encore tout à fait matures dans un cadre industriel : soit que l'utilisation de ces méthodes s'avère trop complexe pour des études d'ingénierie, soit que les formalismes sur lesquels elles reposent ne soient pas assez clairs, soit que la caractérisation du contenu instationnaire résolu et le traitement des interfaces RANS-LES s'avèrent complexes, soit, enfin, que le modèle ne soit pas suffisamment fiable pour une large gamme d'écoulement.

**Pour conclure cette présentation du contexte scientifique**, il est important de noter que dans la plupart des cas, les études CFD ne reposent pas sur des méthodes « clés en main » mais nécessitent au contraire une connaissance approfondie et une pratique appropriée : que ce soit pour la réalisation des maillages, le choix des modèles et des schémas numériques associés, le post-traitement et l'analyse des résultats.

## 1.4 Stratégie et objectifs de la thèse

### 1.4.1 Stratégie de modélisation pour répondre à la problématique industrielle

Nous avons vu dans la section 1.2 portant sur la problématique industrielle que le besoin principal de cette étude est la disponibilité d'une modélisation instationnaire de la turbulence, permettant de décrire les structures cohérentes instantanées dans l'écoulement, que ce soit pour estimer les efforts instationnaires sur des composants industriels ou pour prendre en compte les effets de flottabilité. Comme il l'a été mentionné, un des critères principaux aujourd'hui pour sélectionner une méthodologie de résolution est son coût numérique. Les méthodes employées doivent donc être adaptées à la puissance de calcul disponible, en répondant aux attentes des études d'ingénierie.



Stratégie	Empirisme	Instationnaire	Maillage	Pas de temps	Disponibilité
<b>RANS</b>	Fort	Non	$10^7$	$10^3$	1990
<b>Hybride</b>	Fort	Oui	$10^8$	$10^4$	2000
<b>LES</b>	Faible	Oui	$10^{11.5}$	$10^{6.7}$	2045
<b>DNS</b>	Aucun	Oui	$10^{16}$	$10^{7.7}$	2080

TABLEAU 1.1 – Stratégies de simulation et modélisation de la turbulence (Spalart [109]) : caractéristiques, coût de calcul et disponibilité pour une application d’aérodynamique externe.

Dans la section 1.3, les principales méthodes pour simuler et modéliser la turbulence ont été brièvement présentées. Il est intéressant de citer ici l’étude de Spalart [109] datant de 2000, qui dresse un bilan des stratégies existantes, et propose une prévision de leurs disponibilités dans un cadre industriel pour des applications d’aérodynamique externe, résumée dans le tableau 1.1. Ces prévisions ont été réalisées en supposant une augmentation d’un facteur 5 de la puissance de calcul disponible tous les 5 ans, ce qui correspond à l’évolution générale. Cette étude permet de mettre en évidence la méthodologie la plus adaptée aujourd’hui pour répondre à la problématique industrielle.

- La DNS, malgré son intérêt lié à son absence d’empirisme, est inaccessible dans l’industrie.
- La modélisation RANS, malgré son faible coût numérique, ne permet pas de résoudre les structures cohérentes instantanées de l’écoulement, qui jouent un rôle significatif pour les problématiques de chargements hydrauliques instationnaires.
- La LES fournit des informations instationnaires avec un niveau de description adapté, mais le coût de calcul devient prohibitif à une échelle industrielle. Les études LES sont donc marginales dans l’industrie aujourd’hui.
- **Ainsi, seule l’utilisation d’approches hybrides RANS-LES est adaptée dans le cadre de l’étude des efforts instationnaires en paroi, en offrant le meilleur compromis entre la capacité à extraire des informations instationnaires en mode LES et un coût de calcul qui reste abordable.**

#### 1.4.2 État des lieux en début de thèse

La R&D d’EDF dispose de compétences de pointe dans la modélisation RANS, notamment au travers des nombreux modèles développés et implémentés dans `code_saturne`, logiciel libre qui est partagé et utilisé couramment par l’ingénierie d’EDF, ainsi que d’autres entreprises et universités (laboratoires UMIST, CERE, ...). Concernant la LES, une expertise interne a également été développée pour utiliser ce formalisme quand les limites des modèles RANS sont atteintes. Par exemple, un calcul WMLES (*Wall-Modeled LES*) a été réalisé [42] sur une configuration d’assemblage combustible pour résoudre les structures large échelle instantanées et ainsi estimer les phénomènes vibratoires. Le maillage comprend près de 42 millions de cellules, représentant un peu près 1 million d’heures en temps CPU. Pour la même étude, un calcul LES avec un maillage de 1.1 milliards de cellules a été réalisé dans le cadre d’un « Grand Challenge » en utilisant un super-calculateur d’EDF, ce qui ne fait pas partie des pratiques courantes.

La modélisation hybride RANS-LES a déjà été étudiée au sein de la R&D d’EDF, avec la méthode SEM (*Synthetic-Eddy Method*) de Jarrin *et al.* [55], puis avec le ALF (*Anisotropic Linear Forcing*) développé par de Laage de Meux *et al.* [25], mais uniquement dans le cadre d’un couplage zonal entre des domaines de calcul séparés. Au début de la thèse, fin 2017, les méthodes hybrides globales n’ont pas encore été étudiées par EDF. Le modèle DDES a simplement été intégré dans la branche de développement principale de `code_saturne`.

Dans le cadre académique, le LMAP travaille depuis une dizaine d’années sur les modèles hybrides, en utilisant des approches à filtrage temporel, développés successivement avec Fadai-Ghotbi [35, 36], Friess [39] et Tran [121]. Ces travaux ont abouti au développement du modèle HTLES (*Hybrid Temporal LES*) [75], un modèle global fondé sur un formalisme théorique solide.

### 1.4.3 Travail réalisé

L'objectif de la thèse est de proposer une modélisation hybride RANS-LES reposant sur un formalisme solide, d'en maîtriser le comportement, de l'améliorer dans les régions de proche paroi, et en particulier de valider la résolution correcte des efforts instationnaires en paroi, tout en conservant un coût de calcul acceptable.

Les méthodes hybrides zonales ne semblent pas appropriées dans le cadre de cette thèse, car elles demandent une intervention forte de l'utilisateur, alors que l'objectif est de proposer une méthode plus autoportante pour l'ingénieur.

Considérant les travaux prometteurs du LMAP sur la HTLES, il est choisi de poursuivre le développement et la validation de ce modèle.

#### Développement du modèle HTLES

Suite aux travaux de Fadai-Ghotbi [36] et Manceau [75], il semble intéressant de poursuivre le développement et la validation du modèle HTLES. Cette méthode s'appuie sur un formalisme théorique bien défini : filtrage temporel afin de garantir la consistance entre les opérateurs RANS et LES pour des écoulements inhomogènes, principe d'équivalence entre modèles hybrides (*H-Equivalence* [39]), contrôle de la répartition de l'énergie. Une évolution de la formulation de la HTLES est proposée lorsque des modèles de fermeture à viscosité turbulente sont utilisés, afin d'obtenir une formulation plus simple et cohérente.

La nouvelle version de la HTLES est intégrée dans code `_saturne` avec les schémas numériques adaptés, et la méthode hybride est appliquée à différents modèles de fermeture RANS, afin de caractériser leur influence. En particulier, les modèles de références  $k-\varepsilon$  [58] et  $k-\omega$  SST [82] sont utilisés, ainsi que des approches reposant sur un effort de modélisation important en proche paroi, comme la pondération elliptique [76] appliquée au  $BL-\overline{v^2}/k$  [9].

De plus, en effectuant une analyse similaire dans le cadre du filtrage spatial, un résultat déterminant pour caractériser le comportement des modèles hybrides en mode LES est obtenu : il est possible de dériver un modèle hybride fondé sur une modification d'échelle qui tend explicitement vers un modèle LES préexistant, ici le modèle de Deardorff [28], quand le nombre d'onde de coupure est dans la zone inertielle du spectre d'énergie.

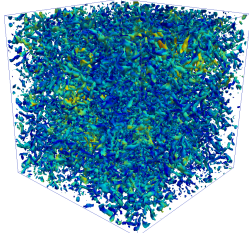
#### Amélioration de la HTLES en proche paroi

Le comportement des modèles hybrides dans les régions de proche paroi est particulièrement important car la transition RANS-LES, dans laquelle résident les principales difficultés, a le plus souvent lieu dans cette zone. Ainsi, une attention particulière est portée à la caractérisation et l'amélioration du comportement de la HTLES dans la couche limite turbulente. Les améliorations visent notamment à imposer le mode RANS dans les régions où l'utilisation du mode LES n'est pas appropriée en développant des fonctions de protection adaptées, à la manière du modèle DDES [110].

En premier lieu, une fonction de protection fondée sur des critères physiques, indépendante du maillage, est proposée. De manière complémentaire, une seconde fonction de protection est introduite, dépendante cette fois-ci du maillage, pour assurer que la résolution spatiale dans la zone de transition permette bien de capturer les structures cohérentes instantanées en mode LES (permettant notamment de diminuer le *log-layer mismatch* [87], problème récurrent des modèles hybrides). De plus, une contrainte de consistance interne est introduite dans le modèle afin d'assurer que le comportement exact du modèle de fermeture RANS soit retrouvé dans les régions traitées en mode RANS.

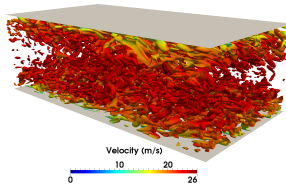
## Validation de la formulation améliorée du modèle HTLES

La calibration et validation du modèle HTLES sont effectuées sur différents cas tests.



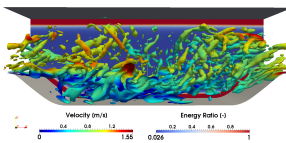
Iso-surface de critère  $Q$  ( $200 \text{ s}^{-2}$ ).

- **La décroissance d'une turbulence homogène et isotrope** [60], est un cas test fondamental pour évaluer la branche LES des modèles hybrides. Elle permet de vérifier que le spectre de la cascade d'énergie turbulente est bien prédit et garantit que le niveau de dissipation du modèle soit adapté, en prenant en compte l'influence de la fermeture et des schémas numériques. Ce cas test permet de paramétrer plus précisément le modèle, en calibrant certains coefficients clés pour évaluer la dissipation d'énergie.



Iso-surface de critère  $Q$  ( $200 \text{ s}^{-2}$ ).

- **L'écoulement en canal plan infini** [70, 84] est un cas test standard pour évaluer le comportement des modèles en proche paroi. Comme il l'a été mentionné, cela est d'autant plus important pour les approches hybrides étant donné que la transition RANS-LES a lieu dans cette région. Ce cas test permet donc d'étudier le comportement de la HTLES dans la couche limite turbulente, de caractériser la zone de transition la plus appropriée, d'introduire et de paramétrer des améliorations complémentaires pour le modèle.



Iso-surface de critère  $Q$  ( $1.5 \text{ s}^{-2}$ ) et ratio d'énergie.

- **L'écoulement sur les collines périodiques** [118] (canal infini dont l'une des parois est composée d'une succession de collines périodiques) exhibe de nombreuses caractéristiques intéressantes, avec notamment un détachement de la couche limite sur une surface courbée et un réattachement, caractérisés par des mouvements irréguliers. Pour cet écoulement complexe, les modèles RANS n'ont pas donné des résultats satisfaisants [53], tandis que les modèles LES, bien qu'ayant décrit l'écoulement avec précision [10, 40], ont nécessité des maillages avec un raffinement relativement important. C'est donc un cas test de référence pour les approches hybrides, et la plupart des modèles existants y ont déjà été confrontés avec succès [18, 53, 101]. Le comportement de la HTLES est analysé en utilisant différents maillages pour évaluer la sensibilité du modèle au raffinement.

## Prédictions des efforts instationnaires en paroi

Dans le cadre de cette thèse, l'objectif final est de vérifier que les modèles hybrides sont capables d'estimer les efforts instationnaires en paroi. Cela peut paraître antithétique par rapport au fonctionnement des approches hybrides, étant donné que le mode LES qui permet de capturer les structures cohérentes instantanées n'est justement pas appliqué dans les régions de proche paroi. Cependant, l'objectif est de montrer que des structures turbulentes venant de la région extérieure traitée en mode LES pénètrent dans la couche limite turbulente et impactent la paroi, avec des caractéristiques instationnaires qui ne sont pas (trop) filtrées par le comportement RANS du modèle dans cette région. Cette validation est réalisée en utilisant les données LES de Fröhlich *et al.* [40] qui ont extrait des spectres de vitesse dans les couches limites de l'écoulement sur les collines périodiques, notamment au niveau du point d'impact du réattachement, complété par des calculs LES pour estimer les spectres de pression.

## Conditions aux limites et traitement des interfaces RANS et LES

Enfin, la thèse s'intéresse à une version zonale de la HTLES, en imposant le mode RANS dans les régions qui ne nécessitent pas une résolution LES, permettant de réduire le coût de calcul, à la manière de la ZDES (*Zonal DES*) développée par Deck *et al.* [29]. Dans ce cadre, la principale difficulté vient du forçage des fluctuations aux interfaces des régions RANS et LES, qui sont générées ici en appliquant le ALF développé par de Laage de Meux *et al.* [25].

## 1.5 Organisation du manuscrit

Le chapitre 1 de ce manuscrit correspond à l'introduction générale, qui a permis de présenter les contextes industriel et scientifique ainsi que la problématique de la thèse, de justifier le choix des méthodes sélectionnées pour y répondre, et enfin de définir l'objectif et la démarche engagée.

Le chapitre 2 dresse une revue des méthodes pour modéliser la turbulence, avant de décrire successivement les principaux modèles RANS utilisés ( $k-\varepsilon$ ,  $k-\omega$  SST et  $BL-\overline{v^2}/k$ ) et les approches filtrées, en s'intéressant aux modèles LES (Smagorinsky et Deardorff) et aux approches hybrides classiques à variation d'échelle (DES, PITM). Enfin, l'état de l'art en modélisation hybride temporelle est présenté en s'appuyant sur le développement du TPITM [36].

Le chapitre 3 est dédié au développement du modèle HTLES. Les principes et l'application de la *H-Equivalence* [39] sont rappelés, avant de conduire une analyse théorique pour développer une nouvelle formulation de la HTLES, qui est associée à différents modèles de fermeture RANS. La dérivation d'un modèle hybride spatial, qui tend explicitement vers le modèle de Deardorff en mode LES, est effectuée. Enfin, le comportement de la HTLES est caractérisé dans le contexte d'une décroissance de turbulence isotrope, ce qui permet de calibrer un coefficient clé du modèle.

Le chapitre 4 s'intéresse au comportement du modèle HTLES dans les régions de proche paroi, et introduit différentes améliorations : la contrainte de consistance interne ainsi que les deux fonctions de protection complémentaires. Les développements et la validation sont réalisés avec l'écoulement en canal infini, en utilisant un large panel de nombre de Reynolds et de configuration de maillages.

Le chapitre 5 est consacré à la validation du modèle HTLES avec l'écoulement sur les collines périodiques. Les résultats statistiques sont évalués dans un premier temps, avant de s'intéresser à la capacité du modèle à prédire les efforts instationnaires en paroi. Une attention particulière est portée à la sensibilité des résultats au raffinement du maillage, afin de valider que l'utilisation de la HTLES soit bien robuste.

Le chapitre 6 présente une version zonale de la HTLES. L'étude de faisabilité est réalisée sur le cas test des collines périodiques. Le ALF [25] est appliqué à l'interface RANS-LES afin de promouvoir l'apparition de fluctuations turbulentes résolues.

La conclusion dans le chapitre 7 permet de revenir sur les principaux résultats de la thèse et de présenter une vue d'ensemble, avant de proposer des perspectives à ces travaux, à la fois dans le cadre d'une application industrielle, mais aussi pour poursuivre les développements théoriques et la validation du modèle.

Enfin, dans les annexes A et B, les formulations complètes des modèles  $k-\omega$  SST HTLES et  $BL-\overline{v^2}/k$  HTLES, avec les améliorations de proche paroi intégrées, sont rappelées. De plus, les principaux développements analytiques de l'analyse des perturbations réalisée dans le Chapitre 3 sont explicités.



## Chapitre 2

# Introduction aux modèles de turbulence

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>La turbulence : principes, simulation et modélisation</b>	<b>14</b>
2.1.1	Hypothèses fondamentales	14
2.1.2	Description fondamentale de la turbulence	14
2.1.3	Simulation et modélisation de la turbulence	16
<b>2.2</b>	<b>Approche statistique RANS</b>	<b>21</b>
2.2.1	Principes et équations de l'approche statistique	21
2.2.2	Modèles au premier ordre à viscosité turbulente	24
2.2.3	Modèles au second ordre	32
2.2.4	Utilisation des modèles RANS dans le cadre de la thèse	34
<b>2.3</b>	<b>Résolution locale des échelles par approche filtrée</b>	<b>34</b>
2.3.1	Principes et équations de l'approche filtrée	34
2.3.2	Modèles LES	40
2.3.3	Modèles hybrides RANS-LES	44
2.3.4	Modèles hybrides RANS-LES avec filtrage temporel	50
<b>2.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>52</b>

---

Ce chapitre comprend les principaux rappels bibliographiques de la thèse. Une première partie est dédiée à la turbulence et au cadre général de simulation et de modélisation. Les modèles RANS sont ensuite décrits plus spécifiquement, en explicitant tout d'abord les équations exactes de l'approche statistique, puis les formulations des principaux modèles de fermeture utilisés dans cette thèse. Enfin, les principes des approches filtrées sont rappelés, dans des cadres spatial et temporel, en s'intéressant plus particulièrement aux modèles LES de Smagorinsky et de Deardorff, et aux approches hybrides à variation d'échelle DES et PITM. Enfin, l'intérêt du filtrage temporel pour les approches hybrides est souligné, et illustré par le développement du modèle TPITM.

## 2.1 La turbulence : principes, simulation et modélisation

### 2.1.1 Hypothèses fondamentales

Dans l'analyse qui suit, différentes hypothèses sont effectuées afin de restreindre la problématique et de réaliser des développements théoriques. En particulier, les fluides considérés sont étudiés dans le cadre de **la mécanique des milieux continus** (modélisation macroscopique, milieux déformables, continuum de matière, respect des voisinages) avec une **description eulérienne**, et les hypothèses suivantes sont considérées par la suite :

- (i) **Fluide newtonien** : fluide dont la loi reliant la contrainte à la déformation est linéaire (par l'intermédiaire d'un coefficient de viscosité).
- (ii) **Écoulement monophasique** : un unique fluide est considéré, sans changement de phase.
- (iii) **Écoulement incompressible** : la masse volumique se conserve sur les trajectoires.
- (iv) **Écoulement isotherme** : la température du fluide est supposée constante ; il n'y a donc pas de dilatation et de variation de la masse volumique.
- (v) **Écoulement turbulent** : les écoulements considérés sont pleinement turbulents, sans considérer les phases de transition et les écoulements laminaires.
- (vi) Pas de discontinuités, fluide non pesant, ...

*Remarque* : par la suite, un repère cartésien est utilisé pour réaliser les développements numériques afin de simplifier les écritures. De plus, les notations d'Einstein sont utilisées, sommation implicite sur les indices répétés (avec  $i, j, k \in \{1, 2, 3\}^3$ ).

### 2.1.2 Description fondamentale de la turbulence

#### 2.1.2.1 Équations de Navier-Stokes

Dans le cadre de la description eulérienne, le mouvement du fluide est décrit à chaque instant par son état cinématique, défini par des grandeurs caractéristiques : en particulier la vitesse instantanée  $\underline{U}^*(\underline{x}, t)$ , dépendante de la position spatiale  $\underline{x}$  et du temps  $t$ . La dérivée particulaire est introduite dans ce contexte pour décrire la variation par rapport au temps d'une grandeur  $A(\underline{x}, t)$  attachée à une particule élémentaire que l'on suit dans son mouvement :

$$\frac{DA}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial A}{\partial t}}_{\text{Instationnarité}} + \underbrace{U_i^* \frac{\partial A}{\partial x_i}}_{\text{Convection}} . \quad (2.1)$$

Pour décrire la dynamique d'un système fluide dans le cadre d'une modélisation macroscopique, des bilans globaux sont effectués pour la masse volumique et la quantité de mouvement. Sous des hypothèses de continuité, ce système peut être réécrit sous la forme de bilans locaux, qui se simplifient en utilisant les hypothèses définies ci-dessus (section 2.1.1), permettant de définir des équations de Navier-Stokes.

L'équation de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible de fluide newtonien permet de décrire l'évolution de la vitesse instantanée  $U_i^*$  et de la pression  $P^*$  (qui n'intervient que par son gradient), en fonction de la masse volumique  $\rho$  et de la viscosité cinématique  $\nu$  du fluide, supposées constantes ici, avec l'équation de continuité et l'équation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial U_i^*}{\partial x_i} = 0, \quad (2.2)$$

$$\underbrace{\frac{\partial U_i^*}{\partial t}}_{\text{Instationnarité}} + \underbrace{U_j^* \frac{\partial U_i^*}{\partial x_j}}_{\text{Convection}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial x_i}}_{\text{Pression}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 U_i^*}{\partial x_j \partial x_j}}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{F_i^*}_{\text{Force externe}} . \quad (2.3)$$



Le système est fermé avec des conditions initiales et des conditions limites au bord du domaine. La principale difficulté pour résoudre l'équation de Navier-Stokes réside dans la non-linéarité qui apparaît dans le terme de convection de l'équation de la quantité de mouvement.

L'équation de continuité (Eq. 2.2) traduit la conservation du volume pour un fluide incompressible, tandis que l'équation de la quantité de mouvement (Eq. 2.3) traduit le principe fondamental de la dynamique en identifiant les forces qui s'exercent sur le fluide. Les deux types de transport principaux mis en évidence sont (pour un écoulement de vitesse  $U$ , associé à une échelle de longueur  $L$ , d'un fluide de viscosité cinématique  $\nu$ ) :

- **le transport diffusif**, lié à l'agitation (thermique) des molécules à l'échelle moléculaire, qui résulte en un transport cohérent à l'échelle macroscopique modélisé par la viscosité cinématique, et dont l'échelle de temps caractéristique est  $T_\nu = L^2/\nu$ ,
- **le transport convectif**, qui désigne les mouvements internes des propriétés du fluide en fonction de la vitesse des particules fluides auxquelles elles sont rattachées, et apparaît dans le terme de convection non linéaire caractérisé par l'échelle de temps  $T_c = L/U$ .

En comparant ces deux échelles de temps pour déterminer si l'un de ces mécanismes de transport est dominant, un paramètre adimensionnel  $Re = T_\nu/T_c = UL/\nu$  apparaît. Cela a été mis en évidence par l'expérience de Reynolds (1883) [97], illustrée sur la Figure 2.1. Le nombre de Reynolds compare les effets convectif et diffusif, ou, en terme d'efforts, les forces inertielles et visqueuses, ce qui permet de caractériser le régime de l'écoulement (laminaire ou turbulent).

### 2.1.2.2 Description de la turbulence

Les écoulements turbulents peuvent en premier lieu être présentés par opposition aux écoulements laminaires, illustrés sur la Figure 2.1. Ces derniers sont des écoulements très réguliers et ordonnés, caractérisés par une échelle de longueur précise, et des trajectoires bien définies. Dans les écoulements laminaires, les effets diffusifs sont prépondérants par rapport aux effets convectifs (nombre de Reynolds relativement faible). Le terme de convection non linéaire peut donc être négligé, permettant de simplifier l'équation de Navier-Stokes. La phase de transition d'un écoulement laminaire à un écoulement turbulent, un sujet de recherche très actif, sort du cadre de cette thèse qui ne considère que des écoulements turbulents pleinement développés (nombre de Reynolds relativement élevé).

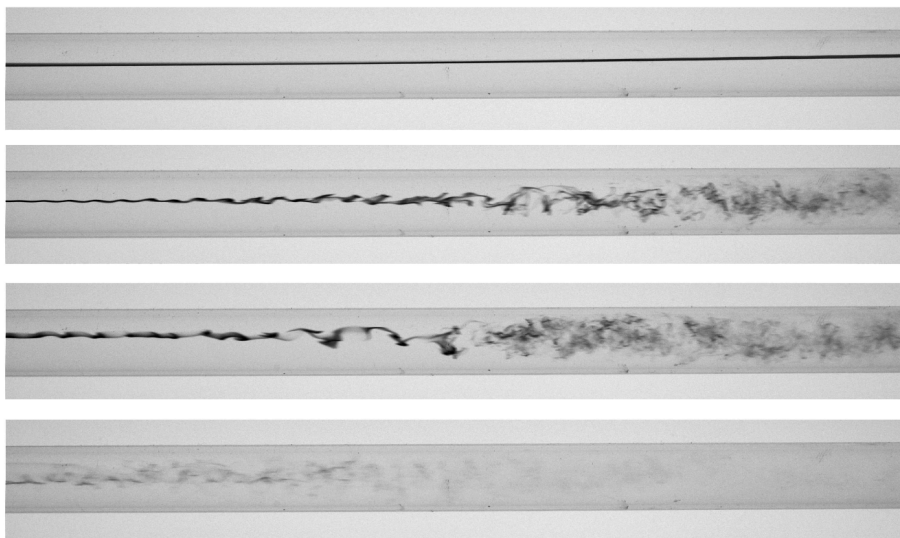


FIGURE 2.1 – Expérience de Reynolds : colorant injecté au centre d'un tube, à différents seuils de nombres de Reynolds, écoulements laminaire, de transition, et turbulent - Source ENSTA <sup>2</sup>.



Les écoulements turbulents présentent un comportement désordonné, caractérisé par une vitesse des particules fluides qui varie de façon apparemment aléatoire, au sens où des mesures réalisées au même endroit et au même instant sur une succession d'expériences répétées vont donner un ensemble de valeurs et non pas un unique résultat. L'agitation turbulente observée est fondamentalement tridimensionnelle et instationnaire, même dans un écoulement pour lequel le champ moyen est statistiquement bidimensionnel et stationnaire (l'écoulement en canal plan ou à l'aval d'un cylindre infini, par exemple).

Une forte vorticité règne au sein des écoulements turbulents, caractérisés par une cinématique rotationnelle [19] et un mélange important. Une répartition continue de tourbillons de tailles différentes est observée sur une large gamme d'échelles macroscopiques. Des structures tourbillonnaires cohérentes ayant souvent un caractère pseudo-périodique sont également identifiées.

En régime développé, les propriétés principales et universelles de la turbulence sont décrites par la cascade d'énergie de Richardson (1922) [99] et la théorie de Kolmogorov (1941) [64], qui portent sur la répartition continue du spectre d'énergie turbulente sur une large gamme d'échelle, représentée dans la Figure 2.2. La turbulence est produite aux grandes échelles du mouvement qui contiennent le plus d'énergie. La cascade d'énergie traduit le transfert d'énergie des grandes vers les petites échelles, transfert notamment lié à un mécanisme d'étirement tourbillonnaire, processus itératif qui crée des tourbillons à une plus petite échelle. Les plus petites structures de la cascade correspondent aux échelles dissipatives pour lesquelles l'énergie transférée depuis les grandes échelles est dissipée sous forme de chaleur par la diffusion visqueuse qui n'est plus négligeable à ces petites échelles.

Aux grandes échelles, les écoulements turbulents sont dominés par le transport convectif, c'est-à-dire que le terme de convection non linéaire est prépondérant par rapport au terme de diffusion qui peut être négligé (  quation d'Euler), sauf en certains endroits dans lesquels les effets visqueux sont confinés ; dans les couches limites de paroi, par exemple.

Même si les écoulements turbulents sont régis par les équations de Navier-Stokes manifestement déterministes, quoique l'unicité de la solution dans un cadre général n'a pas encore été démontrée, le traitement des variables turbulentes comme des variables aléatoires est justifié par le caractère chaotique du système. Il se traduit en particulier par la sensibilité aux conditions initiales et limites, c'est-à-dire que n'importe quelle modification infinitésimale de ces conditions conduit à une évolution complètement différente de l'écoulement après un temps fini, rendant le système imprévisible car le degré de précision requis pour paramétrer les conditions initiales et limites est inatteignable. Ce caractère chaotique est lié au terme de convection non linéaire des équations de Navier-Stokes, et qui, même soumis un forçage stationnaire sur une échelle de longueur fixe, va engendrer une réponse instationnaire et multi-échelle.

### 2.1.3 Simulation et modélisation de la turbulence

#### 2.1.3.1 Simulation directe des équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes étant connues, il semble que la manière la plus simple de résoudre des problèmes de dynamique des écoulements turbulents soit de simuler directement ces équations dans un code de calcul. On parle alors de DNS (*Direct Numerical Simulation*). Cette absence de modélisation supplémentaire, et donc d'empirisme, garantit la précision et la fiabilité des résultats (sous réserve de schémas numériques appropriés et de la bonne conduite des calculs).

Comme mentionné dans la section 2.1.2.2, la turbulence des fluides est caractérisée par des structures tourbillonnaires sur une large gamme d'échelle, qui peuvent être séparées par plusieurs ordres de grandeur. La DNS nécessite donc de décrire explicitement toutes les échelles turbulentes, y compris les plus petites échelles dissipatives, afin de résoudre entièrement le spectre

---

2. <https://hal-ensta-paris.archives-ouvertes.fr/ce1-01228137/file/coursdeturbulence.pdf>

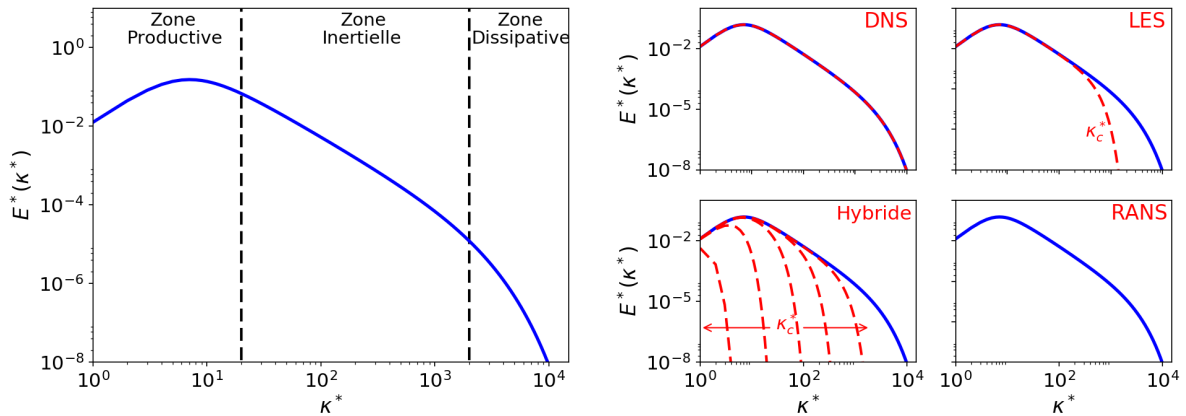


FIGURE 2.2 – Schéma du spectre spatial d'énergie turbulente (gauche), et spectres résolus dans le cadre des différentes méthodes de simulation et modélisation de la turbulence (droite).

turbulent, comme montré sur la Figure 2.2. Dans ce cadre, le maillage utilisé doit présenter un raffinement extrêmement fin pour capturer toutes les structures turbulentes, ce qui implique que le nombre de cellules est prohibitif.

Ainsi, dans la plupart des cas, la DNS est inaccessible car le coût numérique lié à la discrétisation du domaine est trop important par rapport à la puissance de calcul disponible. Par exemple, l'étude par Lee et Moser [70] d'un écoulement dans un canal plan (une configuration théorique « simple ») à un nombre de Reynolds  $Re_\tau = 5200$  a nécessité un maillage comprenant près de 125 milliards de cellules. Cela montre bien que, pour les applications industrielles caractérisées par des configurations beaucoup plus complexes et de grands domaines d'étude, la DNS d'écoulements turbulents n'est aujourd'hui pas exploitable. L'utilisation de la DNS se limite donc à des configurations simplifiées, permettant d'analyser des phénomènes physiques particuliers, pour ensuite proposer des descriptions, élaborer des modèles et fournir des données de validation.

Pour conclure, les écoulements turbulents ne pouvant pas être simulés directement dans la plupart des configurations, il est nécessaire de proposer une modélisation d'une partie ou de toutes les échelles turbulentes.

### 2.1.3.2 Modélisation statistique de la turbulence

Les modèles RANS (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes*) modélisent statistiquement toutes les échelles turbulentes, des grandes échelles productives aux plus petites échelles dissipatives, en se fondant sur une vision stochastique de la turbulence, au sens où la même expérience serait répétée un grand nombre de fois. Cette modélisation se traduit à travers l'utilisation d'un opérateur de moyenne statistique  $\overline{\cdot}$ , défini tel que pour une variable instantanée  $\Phi^*$ , la moyenne statistique peut être calculée comme la moyenne d'ensemble de  $N$  réalisations  $\Phi_n^*$  :

$$\overline{\Phi^*} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \Phi_n^* \right] \quad (2.4)$$

Dans le cadre de l'approche statistique, l'écoulement moyen est décrit, mais aucune structure turbulente instantanée n'est capturée et le spectre de turbulence n'est pas résolu (Figure 2.2). Cela permet de considérablement réduire les coûts de calcul par rapport à la DNS, en utilisant des maillages beaucoup moins raffinés. Dans le cadre de l'étude d'un canal plan infini, un maillage approprié pour la modélisation RANS ne nécessite plus que quelques dizaines ou centaines de cellules pour décrire le gradient du profil de vitesse moyennée.

En raison du faible coût de calcul, et de la relative facilité d'utilisation de ces méthodes, les

modèles RANS sont couramment utilisés dans les études d'ingénierie (études de performance, pertes de charge, ...). Les nombreuses années d'expérience dans l'utilisation de ces modèles permettent de prévoir leur comportement global et d'avoir une analyse critique des résultats sous le prisme des qualités et des défauts connus, ce qui en fait de véritables standards industriels aujourd'hui.

Les modèles RANS résolvent les équations de Navier-Stokes statistiquement moyennées, complétées d'une relation de fermeture qui introduit des grandeurs caractéristiques de la turbulence (comme l'énergie cinétique turbulente et le taux de dissipation), elles-mêmes résolues par des modèles algébriques ou un système d'équations de transport.

- Les modèles au premier ordre à viscosité turbulente sont fondés sur une relation de fermeture qui fait intervenir des moments d'ordre un et des échelles caractéristiques de l'écoulement turbulent qui, elles, sont des quantités d'ordre supérieur. Afin de fermer le système, des équations de transport sont résolues pour ces différentes échelles (voir la section 2.2.2).
- Les modèles au second ordre sont fondés sur l'équation de transport exacte du tenseur de Reynolds, et font intervenir des modélisations pour les termes de l'équation qui ne peuvent pas être calculés directement (voir la section 2.2.3).

Un important effort de modélisation est donc nécessaire pour définir ces relations de fermeture et développer des modèles pour les termes non résolus, effort d'autant plus ambitieux qu'il est nécessaire de prendre en compte l'ensemble des échelles turbulentes de l'écoulement et leurs interactions. Ces développements sont souvent réalisés sur des bases empiriques, en utilisant des configurations particulières, et ne sont donc pas appropriés pour tous les types d'écoulements rencontrés.

La principale limite de la modélisation RANS vient de son formalisme en lui-même, étant donné qu'il ne donne accès qu'à une information statistiquement moyennée, ce qui équivaut à une perte d'information. Les modèles RANS ne sont pas capables de reproduire les structures turbulentes cohérentes instantanées, dont la prise en compte est pourtant primordiale dans le cadre d'études instationnaires (efforts instationnaires, problème de fatigue mécanique, de bruit).

### 2.1.3.3 Simulation des grandes échelles turbulentes

La Simulation des Grandes Échelles (SGE), ou en anglais *Large Eddy Simulation* (LES), est la seconde famille principale de modélisation de la turbulence. Le principe consiste à résoudre uniquement les grandes échelles énergétiques et à modéliser les petites échelles dissipatives. Cela permet de prendre en compte l'organisation instantanée de l'écoulement turbulent.

Pour opérer la séparation d'échelle illustrée sur la Figure 2.2, le formalisme utilisé est celui d'un filtrage passe-bas  $\langle \cdot \rangle$  des variables de l'écoulement (on suppose ici que la variable  $\Phi^*$  est monodimensionnelle) :

$$\langle \Phi^* \rangle(x) = \mathcal{G} \star \Phi^* = \int \mathcal{G}(x - x') \Phi^*(x') dx', \quad (2.5)$$

avec  $\mathcal{G}$  le noyau du filtre, et  $\star$  désigne le produit de convolution. Comme pour l'opérateur de Reynolds, l'application du filtrage aux équations de Navier-Stokes fait apparaître des contraintes de turbulence qu'il est nécessaire de modéliser. En théorie, le modèle de sous-filtre dépend du filtre utilisé. En pratique, celui-ci n'est pas toujours défini et n'entre pas dans le modèle de sous-filtre. Un paramètre essentiel entrant dans la modélisation des contraintes de sous-filtre est néanmoins la taille du filtre. Celle-ci est exprimée en fonction de la taille des pas de temps ou d'espace de la discrétisation.

Le principe de séparation des échelles repose sur les deux constatations suivantes.

- Les grandes échelles de turbulence sont dépendantes de l'écoulement et de la géométrie. Elles sont donc inhomogènes et anisotropes, et doivent être simulées pour être correctement

résolues. La discrétisation du maillage doit donc être capable de capturer ces structures. Ainsi, la description des écoulements est complètement dépendante des maillages utilisés.

- Les petites échelles de turbulence sont peu dépendantes de l'écoulement ou de la géométrie étudiées, et ont un comportement plus universel. Cela permet de proposer une modélisation de ces petites structures.

L'apport principal de la LES par rapport à la modélisation RANS réside dans la résolution des grandes échelles, tridimensionnelles et instantanées, ce qui permet d'accéder à une information instationnaire, primordiale pour des études de chargements dynamiques, des problèmes de fatigue mécanique, ... De plus, contrairement aux méthodes RANS, pour lesquelles les modèles doivent décrire l'ensemble des échelles de turbulence, l'apport des modèles en LES ne se concentre que sur les petites échelles, permettant de considérablement diminuer les efforts de modélisation.

Le modèle de sous-filtre étant relativement simple, il est important de s'assurer qu'une part conséquente de l'énergie reste résolue. Avec un maillage trop grossier par rapport aux échelles turbulentes à résoudre, le modèle ne convient plus pour représenter les échelles de sous-filtre. À l'inverse, il faut s'assurer qu'une partie significative de la dissipation soit modélisée. Ainsi, la dissipation induite par les méthodes numériques, plus particulièrement lorsque les maillages sont irréguliers, doit être réduite au maximum, ce qui pose de nouvelles contraintes de maillage.

Pour les écoulements décollés, la conception d'un maillage adapté ne représente pas de difficultés majeures, les échelles productives résolues et les échelles dissipatives modélisées étant bien séparées, ce qui permet de réaliser des calculs à un coût numérique abordable. Au contraire, dans les couches limites turbulentes, fines couches en proche paroi dans lesquels sont confinés les effets visqueux, la séparation d'échelle n'est plus valable. La coupure du filtre correspond alors quasiment aux plus petites structures dissipatives afin de résoudre la majorité du spectre d'énergie turbulente, ce qui nécessite de raffiner le maillage à un tel niveau que le calcul devient assimilable à une quasi-DNS (Q-DNS), comme montré par Choi et Moin [20]. Pour les écoulements pariétaux, le coût de calcul de la LES devient donc excessif (inaccessible aujourd'hui pour beaucoup de configurations industrielles).

#### 2.1.3.4 Modèles hybrides RANS-LES

Entre ces deux approches de modélisation, présentant chacune des avantages et des inconvénients, la volonté de proposer une modélisation intermédiaire s'est affirmée très tôt, et plus encore lors des deux dernières décennies.

L'idée générale de ces modèles, dits hybrides RANS-LES, est de capturer les structures à grande échelle instationnaires en mode LES dans les régions d'intérêt de l'écoulement, et activer le mode RANS dans les régions où une résolution LES n'est pas nécessaire ou trop coûteuse. En particulier, c'est dans les régions de proche paroi que le coût numérique de la LES devient excessif. Au sein des couches limites, une zone conséquente est donc modélisée en mode RANS, ce qui permet de drastiquement réduire le coût de calcul.

#### Les méthodes hybrides principales

Deux principaux axes de développement des méthodes hybrides RANS-LES peuvent être distingués en utilisant les définitions de Sagaut *et al.* [100].

- **Les méthodes hybrides zonales :** ces méthodes correspondent à un problème multi-domaine pour lequel les régions en modes RANS ou LES sont prédéfinies et traitées séparément, avec une transition discontinue des variables à l'interface. Cela permet de bien distinguer les sous-domaines et de sélectionner des modèles RANS et LES adéquats dans chacun d'eux. L'utilisation de ces méthodes est particulièrement adaptée lorsque la zone d'intérêt à étudier en mode

LES est identifiée et délimitée à l'avance, afin d'embarquer cette zone LES dans un domaine RANS global et ainsi réduire le coût numérique.

La principale difficulté de ces méthodes est liée au couplage des différents modèles au niveau de leurs interfaces et zones de recouvrement, étant donné que la description fournie par leurs opérateurs de moyenne et de filtrage respectifs est très différente. Ces couplages sont réalisés par l'intermédiaire de conditions aux limites ou de termes sources, et il est souvent nécessaire d'introduire des opérateurs de moyenne (LES→RANS) ou d'enrichissement (RANS→LES) aux interfaces. Les méthodes zonales demandent aussi une forte intervention de l'utilisateur et une connaissance approfondie des configurations étudiées, afin de définir les zones traitées en mode RANS ou LES avant le lancement du calcul, ce qui ne correspond pas toujours aux attentes des études en ingénierie.

- **Les méthodes hybrides globales** : ces méthodes visent à appliquer un modèle unique dans tout le domaine d'étude, qui transitionne continûment d'une description statistique RANS à une description LES. Malgré les bases empiriques, il est possible d'interpréter, à la suite de Schiestel et Chaouat [102], les modèles hybrides comme des approches filtrées, mais contrairement à la LES, la position de la coupure du filtre dans le spectre d'énergie turbulente peut largement varier. Le mode RANS correspond alors à une taille de filtre qui tend vers l'infini, comme cela est montré sur la Figure 2.2. Les échelles résolues ne contiennent pas nécessairement la majorité de l'énergie. La modélisation des échelles non résolues est donc plus exigeante qu'en LES étant donné que le comportement de ces échelles modélisées ne peut plus être considéré comme universel. Pour cette raison, les modèles de fermeture utilisés sont souvent dérivés de modèles RANS existants qui reposent déjà sur un important effort de modélisation.

Ces méthodes hybrides sont plus « autoportantes » pour l'utilisateur que les méthodes zonales car un unique modèle est utilisé dans tout le domaine, mais il est par contre plus difficile de bien distinguer les zones traitées en mode RANS ou en mode LES. La transition entre ces zones est souvent déterminée par la comparaison d'une échelle turbulente (description RANS) et de la taille de maille (description LES) de la turbulence, avec un traitement continu des variables à l'interface. Cependant, ces transitions font apparaître des « zones grises » dans lesquelles il est difficile de bien caractériser la répartition des échelles résolues et modélisées.

### Développement des approches hybrides

Aujourd'hui, les principales attentes concernant les approches hybrides sont d'obtenir des méthodes applicables dans un cadre industriel et « matures » pour l'ingénieur. L'enjeu majeur est la capacité de réaliser des études avec une précision comparable à la LES dans certaines zones d'intérêt de l'écoulement, c'est-à-dire en caractérisant bien le contenu instationnaire résolu, tout en conservant un coût de calcul global réduit.

Les difficultés majeures rencontrées résident au niveau des interfaces RANS-LES, que ce soit pour contrôler leurs positions dans l'écoulement considéré, mais aussi pour maîtriser la transition des variables à travers ces interfaces, en utilisant des méthodes de forçage ou de filtrage des fluctuations turbulentes, par exemple. La manière dont s'exerce le contrôle de la répartition d'énergie entre les échelles modélisées et résolues est également une question fondamentale.

Pour répondre à ces problématiques, certains des axes de recherche principaux peuvent être cités : le développement de modèles hybrides fondés sur des formalismes théoriques solides [36, 39, 102], la définition de nouveaux critères d'hybridation [80, 108], l'amélioration des schémas numériques associés [122], le développement de méthodes d'enrichissement ou de restriction aux interfaces [25, 55, 61], l'amélioration des modèles pour traiter les écoulements dans les régions de proche paroi où la transition RANS-LES a souvent lieu [105, 110], et l'influence des modèles de fermeture [4].

## 2.2 Approche statistique RANS

### 2.2.1 Principes et équations de l'approche statistique

#### 2.2.1.1 Opérateur de moyenne statistique

Le comportement apparemment aléatoire des variables turbulentes permet de justifier une vision stochastique de la turbulence et ainsi d'adopter une approche statistique pour décrire les mouvements moyens de l'écoulement. Les équations de la statistique en un point sont donc étudiées, en considérant que les grandeurs caractéristiques instantanées de l'écoulement (vitesse et pression) sont des fonctions aléatoires de l'espace et du temps.

L'opérateur de moyenne statistique  $\overline{\cdot}$  (Eq. 2.4) est introduit pour décomposer la valeur instantanée de la vitesse  $U_i^*$  (considérée comme une variable aléatoire) entre sa composante moyenne  $U_i = \overline{U_i^*}$  et les fluctuations  $u_i$  :

$$U_i^* = U_i + u_i. \quad (2.6)$$

Cet opérateur vérifie les propriétés de linéarité, préservation des constantes et commutativité avec les opérateurs de dérivation spatiale et temporelle. De plus, c'est un opérateur idempotent et centré par rapport à la moyenne, tel que :

$$\overline{\overline{U_i^*}} = \overline{U_i^*} = U_i \quad \text{et} \quad \overline{u_i} = 0. \quad (2.7)$$

La moyenne d'ensemble n'est pas simple à estimer dans un cadre général, étant donné qu'il faut répéter la même expérience ( $U_i^{*n}$ ) un grand nombre de fois (nombre de réalisations  $N$  suffisamment grand) en conservant exactement les mêmes paramètres de contrôle :

$$\overline{U_i^*}(x, y, z, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N U_i^{*n}(x, y, z, t) \right], \quad (2.8)$$

mais, sous certaines hypothèses, l'opérateur statistique peut être estimé d'une autre manière.

- Pour un écoulement statistiquement stationnaire ( $\overline{U_i^*}(x, y, z, t) = \overline{U_i^*}(x, y, z)$ ), l'hypothèse d'ergodicité implique que la moyenne d'ensemble équivaut à une moyenne temporelle :

$$\overline{U_i^*}(x, y, z) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} \int_0^T U_i^*(x, y, z, t) dt \right). \quad (2.9)$$

- Pour un écoulement statistiquement homogène dans une direction ( $x$  ici sans perdre de généralité,  $\overline{U_i^*}(x, y, z, t) = \overline{U_i^*}(y, z, t)$ ), l'hypothèse d'ergodicité implique que la moyenne d'ensemble équivaut à une moyenne spatiale dans cette direction :

$$\overline{U_i^*}(y, z, t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{L} \int_0^L U_i^*(x, y, z, t) dx \right). \quad (2.10)$$

De la même manière, la pression instantanée  $P^*$  et les forces extérieures  $F_i^*$  peuvent être décomposées entre leur valeur moyenne  $P$  et  $F_i$ , et leur fluctuation (totale)  $p$  et  $f_i$  :

$$P^* = P + p \quad \text{et} \quad F_i^* = F_i + f_i. \quad (2.11)$$



### 2.2.1.2 Dynamique du mouvement moyen

Pour décrire la dynamique du mouvement moyen, l'opérateur de moyenne statistique est appliqué aux équations de Navier-Stokes (Eq. 2.2 et 2.3). La décomposition de Reynolds permet de déterminer l'équation de continuité du mouvement moyen :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.12)$$

ainsi que l'équation de Reynolds qui régit la quantité de mouvement moyenne :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} + F_i, \quad (2.13)$$

C'est un système d'équation ouvert comprenant 4 équations scalaires pour 10 inconnues :  $U_i$ ,  $P$ ,  $\overline{u_i u_j}$ . Le détail des calculs est donné par Chassaing [19] ou Pope [89].

L'équation de continuité du mouvement moyen (2.12) montre que la vitesse moyenne vérifie la contrainte d'incompressibilité. En comparant l'équation de Reynolds (2.13) pour la vitesse moyenne  $U_i$  à l'équation de Navier-Stokes (2.3) pour la vitesse instantanée  $U_i^*$ , on remarque que l'expression générale est similaire (on identifie les termes de convection du champ moyen, la diffusion moléculaire, les efforts moyens de pression et extérieurs), excepté le terme de l'équation de Reynolds qui introduit les moments centrés d'ordre deux  $\overline{u_i u_j}$  de la vitesse. Ce dernier terme est appelé le tenseur de Reynolds. Il apparaît en raison de la non-linéarité du terme de convection.

Cette moyenne statistique correspond à une perte d'information, puisque le passage des variables instantanées  $U_i^*$  aux variables statistiquement moyennées  $U_i$  induit l'apparition des fluctuations  $u_i$  qui ne sont pas résolues avec le système (2.12, 2.13). En soustrayant l'équation du mouvement instantané et du mouvement moyen, on obtient l'équation du mouvement fluctuant :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} + f_i. \quad (2.14)$$

Le système d'équations (2.12, 2.13) est fermé en utilisant un modèle de turbulence pour définir le tenseur  $\overline{u_i u_j}$  des corrélations entre les  $i^{\text{ème}}$  et  $j^{\text{ème}}$  composantes des fluctuations de vitesse.

### 2.2.1.3 Équation de transport du tenseur de Reynolds

Le tenseur de Reynolds  $\overline{u_i u_j}$  est défini comme :

$$R_{ij} = \overline{u_i u_j}. \quad (2.15)$$

L'équation de transport du tenseur de Reynolds est obtenue en multipliant l'équation du mouvement fluctuant pour  $u_i$  (Eq. 2.14) par les fluctuations de vitesse  $u_j$ , et en appliquant l'opérateur de moyenne statistique, de telle sorte que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} &= \underbrace{-\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}}_{P_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{\rho} p \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\Phi_{ij}} - \underbrace{2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}}_{\varepsilon_{ij}} \\ &+ \underbrace{\nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k}}_{D_{ij}^\nu} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i p} \delta_{jk} + \overline{u_j p} \delta_{ik})}_{D_{ij}^P} - \underbrace{\frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k}}_{D_{ij}^T}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Le terme à gauche de l'équation représente la dérivée particulière du tenseur de Reynolds, tandis qu'à droite, l'équation est décomposée entre les termes de :

- $P_{ij}$  : Production, qui traduit le couplage avec le mouvement moyen,
- $\Phi_{ij}$  : Redistribution, avec la corrélation des fluctuations de pression et des déformations,
- $\varepsilon_{ij}$  : Dissipation, liée aux frottements visqueux du mouvement fluctuant,
- $D_{ij}^\nu$  : Diffusion visqueuse par agitation moléculaire,
- $D_{ij}^P$  : Diffusion par la pression, avec la corrélation entre la pression et la vitesse,
- $D_{ij}^T$  : Diffusion par agitation turbulente, avec la corrélation triple des fluctuations de vitesse.

Cette équation de transport à l'ordre deux est un système ouvert, car elle fait apparaître plusieurs corrélations inconnues, dont la corrélation triple  $\overline{u_i u_j u_k}$  du fait de la non-linéarité advective [19]. Cette corrélation triple devrait elle-même être résolue via une équation de transport à l'ordre trois. Cette problématique de fermeture constitue le problème de cascade des équations lié au terme de convection non linéaire de l'équation de Navier-Stokes qui, dans une équation à l'ordre  $n$ , génère des corrélations à l'ordre  $n + 1$ . Il faut donc choisir quand arrêter de résoudre des équations de transport pour les termes à l'ordre supérieur et proposer des modèles pour ces différents termes.

Dans cette optique, il est important de rappeler ici la signification physique des principaux termes qui apparaissent dans l'équation (2.16).

- (i) Le terme de production  $P_{ij}$  représente le transfert d'énergie du mouvement moyen au mouvement d'agitation. Ce terme a tendance à renforcer l'anisotropie des fluctuations turbulentes car il est lié à la présence d'un gradient de vitesse moyenne, lui-même anisotrope. En général, ce terme traduit un apport d'énergie turbulente et est donc positif ; il représente donc un terme source dans l'équation.
- (ii) Le terme  $\varepsilon_{ij}$  représente le taux de dissipation. Ce terme traduit la perte d'énergie liée aux frottements visqueux du champ fluctuant qui dissipe les petites structures sous forme de chaleur. Ce terme est donc indépendant du mouvement moyen. Le terme  $-\varepsilon_{ij}$  est toujours négatif et est un terme puits dans l'équation.
- (iii) Le terme de redistribution  $\Phi_{ij}$ , aussi appelé terme de corrélation pression-déformation, a tendance à renforcer un retour à l'isotropie par « redistribution » d'énergie entre les différentes composantes des fluctuations turbulentes, sans création ou destruction.
- (iv) Les termes  $D_{ij}^P$  et  $D_{ij}^T$  sont des termes de transport des fluctuations turbulentes, appelés respectivement diffusion par la pression et diffusion par l'agitation turbulente par analogie avec le mécanisme de diffusion moléculaire  $D_{ij}^\nu$  lié aux propriétés du fluide.  $D_{ij}^P$  et  $D_{ij}^T$  caractérisent respectivement la puissance des forces de pression du mouvement d'agitation fluctuant et la convection d'énergie par les échelles fluctuantes.

#### 2.2.1.4 Équation de transport de l'énergie cinétique turbulente

L'énergie cinétique turbulente  $k$  correspond à la demi-trace du tenseur de Reynolds :

$$k = \frac{1}{2} R_{ii} = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}, \quad (2.17)$$

et représente l'énergie cinétique du mouvement d'agitation fluctuant. Son équation de transport peut être dérivée de l'équation du tenseur de Reynolds (2.16) par contraction des indices  $i$  et  $j$  :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \underbrace{-\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_P - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{p u_j})}_{D^P} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \overline{u_i u_i u_j} \right)}_{D^T} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j}}_{D^\nu} - \underbrace{\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_\varepsilon. \quad (2.18)$$



Ainsi, la variation de l'énergie cinétique du mouvement d'agitation est équilibrée par :

- $P = \frac{1}{2}P_{ii}$  : Production d'énergie cinétique turbulente.
- $\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_{ii}$  : Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente,
- $D^\nu = \frac{1}{2}D_{ii}^\nu$  : Diffusion visqueuse par agitation moléculaire,
- $D^P = \frac{1}{2}D_{ii}^P$  : Diffusion par les fluctuations de pression,
- $D^T = \frac{1}{2}D_{ii}^T$  : Diffusion par agitation turbulente.

En étudiant l'équation de transport de l'énergie cinétique du mouvement moyen  $E = \frac{1}{2}U_iU_i$ , on remarque que l'opposé du terme de production,  $-P$ , apparaît (voir Chassaing [19] pour les détails), ce qui traduit le fait que ce terme correspond bien à un transfert d'énergie cinétique du mouvement moyen (puits d'énergie) vers le mouvement d'agitation (source d'énergie).

Par rapport à l'équation de transport du tenseur de Reynolds (2.16), les termes à droite sont tous conservés sous une forme scalaire (demi-trace), excepté le terme de redistribution qui disparaît (sous des hypothèses d'incompressibilité) car il ne traduit que la redistribution des fluctuations, sans modifier la quantité d'énergie totale. Ainsi, ce mécanisme physique n'apparaît pas dans l'équation de transport de l'énergie turbulente.

### 2.2.2 Modèles au premier ordre à viscosité turbulente

Dans le cadre de la modélisation au premier ordre, le tenseur de Reynolds  $R_{ij}$  (Eq. 2.15) est exprimé au moyen d'une loi de comportement qui relie les moments d'ordre deux aux moments d'ordre un. En se fondant sur une analogie avec la loi de comportement des fluides newtoniens qui relie la contrainte visqueuse et la déformation via la viscosité moléculaire, l'hypothèse de Boussinesq relie le tenseur de Reynolds à la déformation moyenne en introduisant la viscosité turbulente  $\nu_t$ , ce qui s'écrit :

$$R_{ij} = -2\nu_t S_{ij} + \frac{2}{3}k\delta_{ij}, \quad (2.19)$$

avec le second terme de l'expression qui permet d'assurer le respect des propriétés de la trace du tenseur de Reynolds  $R_{ii} = \overline{u_i u_i} = 2k$ , et le tenseur des déformations moyennes :

$$\overline{S_{ij}^*} = S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.20)$$

Cette loi de comportement permet de réduire le nombre d'inconnues en substituant aux six composantes du tenseur de Reynolds  $\overline{u_i u_j}$  des grandeurs scalaires ( $k, \nu_t$ ). Pour décrire l'évolution de l'énergie cinétique turbulente, l'équation de transport exacte (Eq. 2.18) peut être utilisée, mais le traitement de certains termes ouverts nécessite une modélisation supplémentaire. Pour exprimer la viscosité turbulente, nous allons essentiellement nous intéresser à des modèles à deux équations de transport, faisant donc intervenir deux échelles caractéristiques de la turbulence, notamment l'énergie cinétique turbulente  $k$ .

#### Limitations de cette méthode

L'hypothèse de Boussinesq repose sur des hypothèses fortes d'instantanéité (pas d'effet mémoire temporel ou spatial) et de localité (seule l'influence d'un très proche voisinage est ressentie). Elle suppose également une loi linéaire entre  $R_{ij}$  et  $S_{ij}$  alors que les axes principaux de ces tenseurs ne sont pas toujours alignés : ils sont alignés dans le cadre d'une déformation plane mais pas dans le cadre d'un cisaillement d'une turbulence homogène [19]. De plus, l'équation de transport de la seconde échelle est souvent modélisée assez empiriquement. Les modèles au premier ordre sont donc peu adaptés aux écoulements les plus complexes, comme ceux présentant une zone de recirculation avec un détachement-réattachement irrégulier, ce qui est par exemple le cas pour l'écoulement sur les collines périodiques [53]. Enfin, ces modèles ne représentent pas correctement les tensions diagonales.

Cependant, malgré leurs lacunes, les modèles au premier ordre à viscosité turbulente offrent les avantages de la simplicité, de la robustesse numérique, en étant conçus pour bien représenter la tension de cisaillement qui pilote la couche limite. Les nombreuses études réalisées montrent des résultats d'intérêt dans de nombreuses situations.

### Remarques sur les autres méthodes de modélisation au premier ordre

L'utilisation de lois de comportement non linéaires, permettant la prise en compte de plus nombreux phénomènes physiques que les lois linéaires, n'a pas été envisagée dans cette thèse étant donné le manque de robustesse numérique de ces méthodes, et le fait qu'elles ne correspondent pas aux standards actuels des études CFD industrielles. De la même manière, les modèles algébriques ou à une équation n'ont pas été sélectionnés car ils présentent une généralité d'utilisation moindre, un fort empirisme, et ne relèvent pas de la pratique courante en thermohydraulique.

#### 2.2.2.1 Modèle $k-\varepsilon$

L'un des premiers modèles à deux équations de transport a été proposé par Jones et Lauder [58]. Il est fondé sur l'utilisation de deux échelles caractéristiques de la turbulence : l'énergie cinétique turbulente  $k$  et le taux de dissipation  $\varepsilon$ . Ce modèle servant de base à l'analyse dans les chapitres suivants, les différentes étapes de son développement sont rappelées ici, afin notamment de bien différencier les termes fermés résolus et les termes ouverts modélisés.

#### Évaluation de la viscosité turbulente $\nu_t$

La viscosité turbulente étant homogène à une longueur au carré sur un temps, il est possible d'identifier l'échelle de longueur de mélange et l'échelle de temps :

$$L_k = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad T_k = C_\mu^{1/2} \frac{k}{\varepsilon}, \quad (2.21)$$

de telle façon que la viscosité turbulente s'écrive sous la forme :

$$\nu_t = \frac{L_k^2}{T_k} = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (2.22)$$

avec le coefficient  $C_\mu = 0.09$  dont la calibration vient de l'analyse de la zone logarithmique dans la couche limite turbulente, avec  $\sqrt{C_\mu} = -\overline{uv}/k = 0.3$  (voir l'analyse effectuée par Pope [89]).

#### Évaluation de l'énergie cinétique turbulente $k$

L'équation de transport de  $k$  est résolue en se fondant sur l'équation exacte (2.18) et en modélisant les termes qui ne peuvent pas être calculés directement.

- (i) La production est évaluée en utilisant le modèle de viscosité turbulente (Eq. 2.19) pour un fluide incompressible, et en définissant  $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$  le taux de déformation moyenné :

$$P = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = 2\nu_t S_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \nu_t S^2. \quad (2.23)$$

- (ii) Le traitement des termes de diffusion nécessite l'introduction d'un modèle car les corrélations triples entre les fluctuations de vitesse, et la corrélation entre les fluctuations de vitesse et de pression, ne sont pas connues. Ainsi, la diffusivité scalaire est utilisée en introduisant le coefficient  $\sigma_k$ , pour relier le flux de diffusion au gradient de la grandeur transportée soumise à diffusion, de manière analogue à la loi de Fick :

$$-\frac{1}{\rho} \overline{p u_j} - \frac{1}{2} \overline{u_i u_i u_j} = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j}. \quad (2.24)$$

- (iii) Le taux de dissipation  $\varepsilon$  est évalué grâce à une seconde équation de transport.

### Évaluation du taux de dissipation $\varepsilon$

Bien que l'équation de transport exacte de  $\varepsilon$  soit connue [19, 89], la plupart des termes de l'équation ne peuvent pas être calculés directement. Des modèles pour les termes sources et puits sont donc construits par analogie avec les termes de production et de dissipation de l'équation de  $k$ , respectivement, en faisant intervenir le ratio  $k/\varepsilon$  pour satisfaire l'homogénéité dimensionnelle, et des constantes de fermetures  $C_{\varepsilon 1}$  et  $C_{\varepsilon 2}$ . La diffusivité scalaire est également utilisée pour modéliser les termes de diffusion, en introduisant le coefficient  $\sigma_\varepsilon$ .

### Calibration des constantes de fermeture

La méthode de calibration consiste à étudier des configurations d'écoulement particulières dans lesquelles les constantes de fermetures peuvent être isolées les unes des autres et calibrées en fonction de références expérimentales ou numériques (voir par exemple les analyses effectuées dans Chassaing [19] ou Pope [89]).

En s'appuyant sur les modélisations introduites, le modèle  $k$ - $\varepsilon$  s'écrit :

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (2.25)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \nu_t S^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \varepsilon, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \nu_t S^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}, \end{cases} \quad (2.26)$$

avec les constantes standard :

$C_\mu$	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

Le modèle  $k$ - $\varepsilon$  est largement répandu, grâce à son comportement prévisible, son utilisation aisée et sa stabilité numérique. Cependant, la relative simplicité et la linéarité du modèle font qu'il n'est pas adapté aux écoulements complexes. Ce modèle haut-Reynolds n'est pas intégrable dans les régions de proche paroi, en raison notamment de la définition de la viscosité turbulente qui n'est pas valable dans les régions bas-Reynolds où la viscosité moléculaire est non négligeable. L'introduction de lois de paroi est donc nécessaire pour traiter les couches limites turbulentes.

#### 2.2.2.2 Modèle $k$ - $\omega$ SST

Le modèle  $k$ - $\omega$  SST (*Shear Stress Model*) a été développé par Menter [82], et est aujourd'hui l'un des modèles les plus populaires. Il fait suite au développement du modèle  $k$ - $\omega$  par Wilcox *et al.* [124] fondé sur l'énergie modélisée  $k$  et la fréquence caractéristique des grands tourbillons :

$$\omega = \frac{\varepsilon}{C_\mu k}. \quad (2.27)$$

Ainsi, la viscosité turbulente peut être exprimée comme  $\nu_t = C_\mu k^2 / \varepsilon = k / \omega$ , et le système est fermé grâce à des équations de transport pour  $k$  et  $\omega$ . Le  $k$ - $\omega$  est un modèle bas-Reynolds, c'est-à-dire intégrable jusqu'à la paroi, mais la formulation souffre d'une grande sensibilité à la turbulence dans la zone externe.

Pour pallier ces problèmes, le modèle  $k$ - $\omega$  SST a été développé en couplant le  $k$ - $\varepsilon$ , appliqué dans les écoulements libres, et le  $k$ - $\omega$ , appliqué dans les écoulements en proche paroi, pour profiter des avantages des deux modèles tout en évitant leur utilisation dans les zones où leurs comportements respectifs ne sont pas satisfaisants. Le  $k$ - $\omega$  SST transitionne d'une branche à l'autre en utilisant des fonctions de pondération.

### Équation de transport pour $\omega$ , équivalente au système d'équations $k$ - $\varepsilon$

Il est souhaité que le modèle  $k$ - $\omega$  SST se comporte comme le  $k$ - $\varepsilon$  dans l'écoulement libre, tout en conservant la fréquence caractéristique des grands tourbillons (Eq. 2.27) comme seconde échelle transportée, afin que les mêmes variables turbulentes soient utilisées dans les deux branches du modèle. Dans ce cadre, l'équation de transport de  $\omega$  va être dérivée du système d'équation (2.26) du  $k$ - $\varepsilon$ , en effectuant le changement de variable  $\varepsilon = C_\mu k \omega$  (Eq. 2.27). On obtient finalement :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \underbrace{\gamma_\omega \frac{\omega}{k} \nu_t S^2}_{P_\omega} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] - \beta_\omega \omega^2 + \underbrace{2 \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \frac{1}{k} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_j}}_{C_\omega}. \quad (2.28)$$

Le terme  $C_\omega$  de corrélations croisées entre  $k$  et  $\omega$ , qui apparaît du fait de la dérivation du  $k$ - $\varepsilon$ , n'intervient pas dans la branche  $k$ - $\omega$  du modèle. Les constantes de fermeture sont définies par :

$$\gamma_\omega = C_{\varepsilon_1} - 1 \quad \text{et} \quad \beta_\omega = C_\mu (C_{\varepsilon_2} - 1). \quad (2.29)$$

### Introduction de termes correctifs

Pour améliorer le modèle, Menter [82] a introduit des termes correctifs dans la formulation.

- (i) Dans les modèles RANS au premier ordre, la contrainte de cisaillement  $\tau$  est simplement modélisée au moyen de l'hypothèse de Boussinesq (Eq. 2.19), ce qui conduit à certaines limitations, en particulier pour les écoulements soumis à un gradient de pression adverse en paroi. Pour pallier ce problème, Menter [82] a proposé d'utiliser l'hypothèse de Bradshaw qui relie la contrainte de cisaillement à l'énergie cinétique turbulente  $\tau = a_1 k$ , avec  $a_1$  une constante, dans les couches limites turbulentes. Cela permet d'écrire la viscosité turbulente en introduisant une fonction de pondération  $F_2$  qui active le terme lié à l'hypothèse de Bradshaw ( $F_2 = 1$ ) en proche paroi :

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max[a_1 \omega; SF_2]} = \begin{cases} \frac{k}{\omega} & \text{si } a_1 \omega \geq SF_2 \text{ (ou } F_2 = 0), \\ a_1 \frac{k}{S} & \text{si } a_1 \omega \leq SF_2. \end{cases} \quad (2.30)$$

- (ii) Un limiteur de production a été introduit dans l'équation de transport de l'énergie modélisée, afin de bloquer la création de turbulence dans les régions de points d'arrêt. Cette limite supérieure est fondée sur le taux de dissipation, en introduisant une constante  $a_2$  qui est calibrée pour éviter une surestimation de plusieurs ordres de grandeur, telle que :

$$P_k = \min \left[ \underbrace{\nu_t S^2}_P; \underbrace{a_2 C_\mu k \omega}_{a_2 \varepsilon} \right]. \quad (2.31)$$

- (iii) Il est souligné dans les annexes de [82] que, dans le terme source  $P_\omega$  de l'équation (2.28), la simplification entre le terme de dimensionnement  $\omega/k$  et la viscosité turbulente  $\nu_t$  n'est plus valable avec la nouvelle expression (2.30). Cependant, le terme de dimensionnement qui intervient dans le modèle est en fait défini comme l'inverse de la viscosité turbulente, ce qui permet de conserver la simplification. Le découplage entre les équations de  $k$  et de  $\omega$  est favorable en terme de robustesse numérique. On obtient :

$$P_\omega = \gamma_\omega S^2. \quad (2.32)$$

### Définition des fonctions de pondération

Le modèle  $k$ - $\omega$  SST fait intervenir deux fonctions de pondération qui transitionnent continûment de  $F_1 = F_2 = 1$  en proche paroi et  $F_1 = F_2 = 0$  dans l'écoulement libre. La fonction  $F_1$  pilote la transition du modèle  $k$ - $\omega$  au  $k$ - $\varepsilon$ , et la fonction  $F_2$  permet de prendre en compte l'hypothèse de Bradshaw dans la définition de  $\nu_t$  (Eq. 2.30). La fonction  $F_1$  permet également de combiner les constantes du modèle, qui sont calibrées séparément dans les deux branches. L'expression de ces fonctions de couplage s'appuie sur la tangente hyperbolique pour permettre une transition continue entre 0 et 1, en comparant des échelles de longueurs caractéristiques, notamment la distance à la paroi  $d_w$  et l'échelle turbulente  $L = k^{3/2}/\varepsilon = k^{1/2}/C_\mu\omega$ .

Le modèle  $k$ - $\omega$  SST de Menter [82] s'écrit en définitive :

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max[a_1 \omega; SF_2]}, \quad (2.33)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - C_\mu k \omega, \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + U_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \gamma_\omega S^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] - \beta_\omega \omega^2 + (1 - F_1) 2 \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \frac{1}{k} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_j}, \end{cases} \quad (2.34)$$

$$P_k = \max[\nu_t S^2; a_2 C_\mu k \omega]. \quad (2.35)$$

Les constantes sont définies par :  $C = F_1 C_1 + (1 - F_1) C_2$ , (2.36)

$$\begin{array}{cccccccccc} C_\mu & C_\kappa & a_1 & a_2 & \sigma_{k_1} & \sigma_{k_2} & \sigma_{\omega_1} & \sigma_{\omega_2} & \beta_{\omega_1} & \beta_{\omega_2} \\ 0.09 & 0.41 & 0.31 & 10 & 1/0.85 & 1 & 2 & 1/0.856 & 0.075 & 0.0828 \end{array}$$

$$\gamma_{\omega_1} = \frac{\beta_{\omega_1}}{C_\mu} - \frac{C_\kappa^2}{\sigma_{\omega_1} \sqrt{C_\mu}}, \quad \gamma_{\omega_2} = \frac{\beta_{\omega_2}}{C_\mu} - \frac{C_\kappa^2}{\sigma_{\omega_2} \sqrt{C_\mu}}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma_{\omega_1}}{0.55} \quad \frac{\gamma_{\omega_2}}{0.44}. \quad (2.37)$$

Les deux fonctions de pondération sont définies comme :

$$F_1 = \tanh[arg_1^4], \quad F_2 = \tanh[arg_2^2],$$

$$arg_1 = \min \left[ \max \left[ \frac{k^{1/2}}{C_\mu \omega d_w}; \frac{500\nu}{\omega d_w^2} \right]; \frac{4\rho k}{\sigma_{\omega_2} C D_{k\omega} d_w^2} \right], \quad arg_2 = \max \left[ \frac{2k^{1/2}}{C_\mu \omega d_w}; \frac{500\nu}{\omega d_w^2} \right],$$

$$C D_{k\omega} = \max \left[ 2\rho \frac{1}{\sigma_{\omega_2} \omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}; 10^{-20} \right].$$

Finalement, le modèle  $k$ - $\omega$  SST bénéficie des avantages des modèles  $k$ - $\varepsilon$  et  $k$ - $\omega$ . C'est un modèle bas-Reynolds, stable numériquement, avec des résultats sensiblement meilleurs que les modèles originaux pour les écoulements avec des gradients de pression adverses, une séparation, un réattachement [82, 83], tout en étant à peine plus coûteux numériquement. C'est aujourd'hui un modèle répandu pour les applications industrielles.

#### 2.2.2.3 Modèle $BL$ - $\overline{v^2}/k$

##### Introduction aux modèles de type $\overline{v^2}$ - $f$

Pour les modèles fondés sur des hypothèses de viscosité turbulente, l'évaluation du tenseur de Reynolds dans les régions de proche paroi est particulièrement complexe. Il est notamment difficile de reproduire l'effet de blocage, qui correspond à une surpression au niveau de la paroi, qui freine la composante normale de vitesse  $v$  (section 4.1.3), et met en défaut l'hypothèse de localité de la relation de Boussinesq. La prise en compte de cet effet repose sur le terme de

redistribution (corrélation de la vitesse avec les gradients de pression) qui apparaît dans l'équation de transport du tenseur de Reynolds (Eq. 2.16), mais pas dans celle de l'énergie turbulente (Eq. 2.18). Dans le contexte des modèles au premier ordre, Durbin [33] a proposé une approche à relaxation elliptique pour modéliser le terme de redistribution  $\phi_{ij}$  et ainsi sensibiliser  $\overline{v^2}$  à l'effet de blocage non-local :

$$\phi_{ij} - L^2 \nabla^2 \phi_{ij} = \phi_{ij}^h, \quad (2.38)$$

où  $\phi_{ij}^h$  représente la solution homogène loin des parois, et  $L$  est une échelle de longueur turbulente.

Le défaut de modélisation est également lié à l'expression usuelle de la viscosité turbulente  $\nu_t = C_\mu k^2 / \varepsilon$  (Eq. 2.22), car la forme globale du profil n'est pas valable dans les régions de proche paroi où les effets visqueux sont non négligeables [33]. Pour corriger ces profils, les fonctions d'amortissement peuvent donner satisfaction dans certaines configurations mais manquent d'universalité. En écrivant  $\nu_t = C_\mu k T$ , avec l'échelle de temps  $T \sim k / \varepsilon$ , Durbin [33] montre que l'énergie turbulente  $k$  n'est pas la bonne échelle pour  $\nu_t$ , et qu'il faut la remplacer par l'énergie contenue dans les fluctuations normales à la paroi  $\overline{v^2}$ . Le profil de la viscosité turbulente dans la couche limite est alors retrouvé en définissant (avec le coefficient  $C_\mu^\phi$  à calibrer) :

$$\nu_t = C_\mu^\phi \overline{v^2} \frac{k}{\varepsilon}. \quad (2.39)$$

Ainsi, une évaluation correcte de  $\overline{v^2}$  devrait permettre de corriger le comportement de la viscosité turbulente en proche paroi. Durbin [33] a donc développé le modèle  $\overline{v^2}$ - $f$ , en introduisant dans la formulation  $k$ - $\varepsilon$  classique (Eq. 2.26) deux équations de transport supplémentaires pour  $\overline{v^2}$  et son terme source  $f$  qui modélise la redistribution par les fluctuations de pression. Malgré des résultats prometteurs, l'utilisation du modèle original peut s'avérer complexe, en raison notamment d'un manque de robustesse numérique lié à l'apparition de singularités dans les conditions limites aux parois. Des approches alternatives ont été proposées par Lien et Durbin [72], Hanjalić *et al.* [49] et Laurence *et al.* [68]. Nous allons nous intéresser ici à une formulation récente qui présente une meilleure stabilité numérique et une sensibilité réduite aux non-uniformités du maillage, tout en préservant les performances du modèle original.

### Le modèle $\text{BL-}\overline{v^2}/k$ développé par Billard et Laurence [9]

La spécificité principale du  $\text{BL-}\overline{v^2}/k$  parmi tous les modèles de type  $\overline{v^2}$ - $f$  réside dans l'utilisation de l'approche à pondération elliptique, développée par Manceau et Hanjalić [76] dans le contexte du modèle au second ordre EB-RSM (*Elliptic-Blending Reynolds-Stress Model*) comme précisé dans la section 2.2.3.2. Les principales étapes du développement sont résumées ci-après.

- (i) La variable  $\phi = \overline{v^2}/k$  est introduite, pour laquelle une équation de transport supplémentaire est résolue (à la place de l'équation pour  $\overline{v^2}$ ), comme dans le modèle  $\phi$ - $f$  de Laurence *et al.* [68] :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = -\frac{\phi}{k} P + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\nu}{2} + \frac{\nu_t}{\sigma_\phi} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right] + \frac{2}{k} \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} + f, \quad (2.40)$$

avec le terme de production  $P = \nu_t S^2$ , le terme source  $f$ , et le coefficient  $\sigma_\phi$  qui apparaît dans le modèle du terme de diffusion.

- (ii) En se fondant sur les travaux de Durbin [33], la viscosité turbulente est définie comme :

$$\nu_t = C_\mu^\phi \phi k T. \quad (2.41)$$

Le coefficient  $C_\mu^\phi$  est calibré en notant que, dans la zone logarithmique de la couche limite turbulente, le coefficient  $C_\mu = 0.09$  et  $\phi_{\log} = 0.41$  [9], de telle sorte que pour garantir l'égalité de  $\nu_t$  en  $k$ - $\varepsilon$  et  $\text{BL-}\overline{v^2}/k$  dans cette zone, on pose :  $C_\mu^\phi = C_\mu / \phi_{\log} = 0.22$ .

- (iii) L'utilisation de la pondération elliptique [76] comporte de nombreux avantages par rapport à la relaxation elliptique, en ne considérant plus qu'une unique équation scalaire pour un coefficient adimensionné  $\alpha$  au lieu de six équations scalaires pour  $\phi_{ij}$  (Eq. 2.38), réduisant les instabilités numériques. L'équation elliptique s'écrit :

$$\alpha - L^2 \nabla^2 \alpha = 1. \quad (2.42)$$

Le coefficient  $\alpha$  transitionne continûment de  $\alpha = 0$  à la paroi à  $\alpha = 1$  loin des parois pour pondérer l'expression homogène  $f_h$  et l'expression de proche paroi  $f_w$  du terme source  $f$  :

$$f = (1 - \alpha^3) f_w + \alpha^3 f_h, \quad (2.43)$$

$$f_w = -\frac{\varepsilon \phi}{2k} \quad \text{et} \quad f_h = -\frac{1}{T} \left( C_{f1} - 1 + C_{f2} \frac{Pk}{\varepsilon} \right) \left( \phi - \frac{2}{3} \right), \quad (2.44)$$

avec les coefficients  $C_{f1}$  et  $C_{f2}$  à calibrer.

- (iv) Une attention particulière a été portée [33] sur les définitions des échelles de longueur  $L$  et de temps  $T$  caractéristiques des tourbillons de l'écoulement, qui sont classiquement estimées par  $L \sim k^{3/2}/\varepsilon$  et  $T \sim k/\varepsilon$ . En proche paroi, étant donné que  $k \rightarrow 0$  et  $\varepsilon > 0$ , ces expressions conduisent à des échelles caractéristiques inférieures aux échelles de Kolmogorov en espace  $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$  et en temps  $\tau_\eta = (\nu/\varepsilon)^{1/2}$ , ce qui n'est pas réaliste (et n'est pas favorable pour la stabilité numérique). Ainsi, des bornes inférieures proportionnelles aux échelles de Kolmogorov ont été introduites :

$$L = C_L \max \left[ \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \right] \quad \text{ou} \quad L = C_L \sqrt{\frac{k^3}{\varepsilon^2} + C_\eta^2 \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/2}}, \quad (2.45)$$

et

$$T = \max \left[ \frac{k}{\varepsilon}, C_T \left( \frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \right] \quad \text{ou} \quad T = \sqrt{\frac{k^2}{\varepsilon^2} + C_T^2 \frac{\nu}{\varepsilon}}, \quad (2.46)$$

avec les coefficients  $C_L$ ,  $C_\eta$  et  $C_T$  à calibrer. Les expressions avec la fonction maximum correspondent aux échelles de Durbin [33], tandis que les secondes expressions avec la fonction racine carré permettent d'assurer une transition plus continue entre les échelles. Billard et Laurence [9] ont évalué  $C_T = 4$  et  $C_L = 0.164 = C_\mu^{3/4}$ , pour retrouver notamment le comportement de l'échelle intégrale dans la zone logarithmique. La calibration  $C_\eta = 75$  permet de limiter  $L = C_L C_\eta \eta \simeq 12\eta$ , ce qui représente 12 échelles de longueur de Kolmogorov, à comparer avec l'espacement des *streaks* de l'ordre de 100 échelles de Kolmogorov [62]. Enfin, l'échelle de temps  $T$  est introduite dans l'équation de transport de  $\varepsilon$  pour remplacer l'échelle de dimensionnement  $k/\varepsilon$ , améliorant ainsi la stabilité numérique du modèle en proche paroi.

- (v) L'analyse du comportement du modèle dans la couche limite turbulente effectuée par Billard et Laurence [9] a également conduit à revoir la formulation du terme de dissipation dans l'équation de transport de  $k$ , en écrivant :

$$\varepsilon = \varepsilon_h + E + \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (2.47)$$

Le terme  $E$  représente une correction bas-Reynolds dans un contexte inhomogène, introduit initialement par Jones et Launder [58] dans l'équation de transport de  $\varepsilon$  pour éviter les modifications de  $C_{\varepsilon 1}$ . Ce terme n'est actif que dans la zone tampon, et prend en compte des effets visqueux. Pour améliorer la robustesse numérique, Billard et Laurence [9] ont transféré ce terme dans l'équation de transport de  $k$ , en définissant :



$$E = C_{\varepsilon_3} (1 - \alpha)^3 \frac{k}{\varepsilon} 2\nu\nu_t \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_j}, \quad (2.48)$$

avec le coefficient  $C_{\varepsilon_3}$  à calibrer, un terme d'adimensionnement  $k/\varepsilon$  pour transférer la correction bas-Reynolds de l'équation de  $\varepsilon$  à celle de  $k$ , et le facteur de pondération  $(1 - \alpha)^3$  pour garantir que ce terme ne soit actif que dans la zone tampon.

Le dernier terme de l'équation (2.47) a pour objectif de réduire le terme de destruction de l'équation de  $k$  quand  $k$  tend vers 0, d'après Jakirlić et Hanjalić [54]. La prise en compte de ce terme dans les équations de transport de  $k$ ,  $\varepsilon_h$  et  $\phi$  fait apparaître des coefficients  $1/2$  devant la viscosité moléculaire dans les différents termes de diffusion.

Finalement, étant donné que  $\varepsilon = \varepsilon_h$  excepté dans la zone tampon, et que leurs équations de transport sont similaires, on va par la suite conserver le taux de dissipation  $\varepsilon$  dans la seconde équation de transport pour simplifier l'écriture.

- (vi) Billard et Laurence [9] ont également proposé une modification du coefficient  $C_{\varepsilon_2}$  dans le terme de destruction de l'équation de  $\varepsilon$ . En considérant l'équation de transport de  $k$ , l'équilibre entre la production et la dissipation ( $P = \varepsilon$ ) qui prévaut dans la zone logarithmique est remplacé par un équilibre entre la diffusion par agitation turbulente et la dissipation ( $D^T = \varepsilon$ ) au centre du canal plan, qui permet de maintenir la turbulence dans cette zone. Une analyse similaire de l'équation de transport du taux de dissipation  $\varepsilon$  montre que la valeur du coefficient  $C_{\varepsilon_2}$  doit être divisée de moitié pour satisfaire l'équilibre dans la zone centrale par rapport à la calibration en zone logarithmique  $C_{\varepsilon_2} = 1.83$ . Dans ce contexte, le coefficient variable  $C_{\varepsilon_2}^T$  a été introduit :

$$C_{\varepsilon_2}^T = C_{\varepsilon_2} + \alpha^3 (C_{\varepsilon_4} - C_{\varepsilon_2}) \tanh \left[ \left| \frac{D^T}{\varepsilon} \right|^{3/2} \right]. \quad (2.49)$$

Cette formulation permet de transitionner continûment de la calibration usuelle  $C_{\varepsilon_2}$  dans la zone logarithmique à une valeur plus faible dépendante de  $C_{\varepsilon_4}$  dans la zone centrale, indépendamment du nombre de Reynolds [9]. Cela permet de corriger la sous-estimation du taux de dissipation au centre du canal, ce qui se traduit par une meilleure prédiction des profils de vitesse au centre par rapport à la plupart des modèles RANS.

*Remarque* : le comportement du modèle est illustré dans la section 4.3.1 avec l'écoulement en canal plan, en particulier pour analyser les termes de  $\alpha$ ,  $\phi$ ,  $E$  et  $C_{\varepsilon_2}^T$  sur la Figure 4.6.

Le modèle BL- $\overline{v^2}/k$  [9] s'écrit :

$$\nu_t = C_\mu \phi k T, \quad (2.50)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\nu}{2} + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \varepsilon - E, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_{\varepsilon_1} \frac{P}{T} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\nu}{2} + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] - C_{\varepsilon_2}^T \frac{\varepsilon}{T}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + U_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = -\frac{\phi}{k} P + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\nu}{2} + \frac{\nu_t}{\sigma_\phi} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right] + \frac{2}{k} \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} + f, \end{cases} \quad (2.51)$$

$$P = \nu_t S^2, \quad (2.52)$$

$$E = C_{\varepsilon_3} (1 - \alpha)^3 \frac{k}{\varepsilon} 2\nu\nu_t \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_j}, \quad (2.53)$$

$$C_{\varepsilon_2}^T = C_{\varepsilon_2} + \alpha^3 (C_{\varepsilon_4} - C_{\varepsilon_2}) \tanh \left( \left| \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \right|^{3/2} \right). \quad (2.54)$$



Le terme source pour modéliser la redistribution s'écrit :

$$f = (1 - \alpha^3) f_w + \alpha^3 f_h, \quad (2.55)$$

$$f_w = -\frac{\varepsilon \phi}{2k} \quad \text{et} \quad f_h = -\frac{1}{T} \left( C_{f1} - 1 + C_{f2} \frac{P_k}{\varepsilon} \right) \left( \phi - \frac{2}{3} \right). \quad (2.56)$$

L'équation elliptique de  $\alpha$  est :

$$\alpha - L^2 \nabla^2 \alpha = 1, \quad (2.57)$$

avec les échelles de longueur et de temps de Durbin :

$$L = C_L \sqrt{\frac{k^3}{\varepsilon^2} + C_\eta^2 \frac{\nu^{3/2}}{\varepsilon^{1/2}}} \quad \text{et} \quad T = \sqrt{\frac{k^2}{\varepsilon^2} + C_T^2 \frac{\nu}{\varepsilon}}, \quad (2.58)$$

et les constantes :

$C_\mu$	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	$C_{\varepsilon 3}$	$C_{\varepsilon 4}$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$	$\sigma_\phi$	$C_T$	$C_L$	$C_\eta$	$C_{f1}$	$C_{f2}$
0.22	1.44	1.83	2.3	0.4	1.0	1.5	1.0	4.0	0.164	0.75	1.7	0.9

### 2.2.3 Modèles au second ordre

Les modèles au second ordre reposent sur une résolution de l'équation de transport du tenseur de Reynolds (Eq. 2.16), en introduisant des modèles pour les termes qui ne peuvent pas être calculés directement. Les avantages principaux de cette modélisation par rapport aux modèles au premier ordre résident dans les points suivants.

- (i) L'anisotropie du tenseur de Reynolds  $R_{ij}$  est bien décrite via la résolution de son équation de transport exacte, sans recours à une relation algébrique. De plus, les termes importants de l'équation (production, redistribution, diffusion) sont décrits de manière anisotrope.
- (ii) Des phénomènes physiques plus nombreux sont pris en compte, comme le terme de redistribution. De plus, grâce à la résolution de l'équation de transport exacte de  $R_{ij}$ , l'effet mémoire de la turbulence est reproduit.
- (iii) La production est résolue directement, sans nécessité de modèles, ce qui est un avantage conséquent étant donné l'importance de ce terme (pour expliquer de nombreux phénomènes turbulents).

Ces avantages font que les modèles au second ordre donnent des résultats satisfaisants et plus réalistes que les modèles au premier ordre dans de nombreuses configurations, en particulier les écoulements en présence de rotation, de recirculation, courbure, vortice, ...

#### Limitations de cette méthode

En raison des nombreuses équations supplémentaires à résoudre (six équations scalaires pour  $R_{ij}$  au lieu d'une unique pour  $k$ ) et de leurs conditions aux limites à établir, les modèles au second ordre sont souvent moins stables numériquement que les modèles linéaires au premier ordre. De plus, même si les termes à modéliser s'avèrent souvent moins « décisifs » pour évaluer les phénomènes turbulents, ils nécessitent l'introduction de nombreux modèles et coefficients empiriques qui sont difficiles à calibrer étant donné le plus haut degré de corrélation utilisé. Les modèles au second ordre reposent également sur des hypothèses de localité ce qui nécessite l'introduction de correctifs dans les régions de proche paroi [77]. Ainsi, malgré leur moindre degré d'empirisme, les modèles au second ordre sont moins utilisés que les modèles au premier ordre. Les retours d'expérience moins nombreux et la complexité apparente de ces modèles font qu'il est plus difficile de connaître les bonnes pratiques d'utilisation et d'analyser les résultats.

### 2.2.3.1 Modèles LRR et SSG

Les deux modèles au second ordre les plus populaires sont le LRR développé par Launder, Reece et Rodi [67] et le SSG développé par Speziale, Sarkar et Gatski [112]. Au sein des termes ouverts dans l'équation de transport de  $R_{ij}$ , la différence entre ces deux modèles réside dans la modélisation du terme de redistribution, subdivisé en un terme rapide linéaire, qui prend en compte l'action du champ moyen à travers le gradient de vitesse, et un terme lent quadratique pour le SSG, qui représente les interactions propres de la turbulence et le retour à l'isotropie via les transferts d'énergie entre les composantes. Pour le modèle SSG, les termes lent  $\Pi_{ij}^1$  et rapide  $\Pi_{ij}^2$  s'écrivent :

$$\Pi_{ij}^1 = -g_1 \varepsilon b_{ij} + g_2 \varepsilon \left( b_{ik} b_{kj} - \frac{1}{3} b_{kl} b_{lk} \delta_{ij} \right), \quad (2.59)$$

$$\Pi_{ij}^2 = -g_1^* P b_{ij} + (g_3 - g_3^* \sqrt{II}) k S_{ij} + g_4 k \left( b_{ik} S_{kj} + S_{ik} b_{kj} - \frac{2}{3} b_{kl} S_{lk} \delta_{ij} \right) + g_5 k (b_{ik} \Omega_{kj} + \Omega_{ik} b_{kj}), \quad (2.60)$$

avec  $P = 1/2 P_{kk}$ ,  $S_{ij}$  et  $\Omega_{ij}$  les tenseurs de déformation et de rotation moyennes,  $II$  le second invariant principal du tenseur d'anisotropie  $b_{ij} = R_{ij}/(2k) - 1/3 \delta_{ij}$ , et les constantes  $g_1$ ,  $g_1^*$ ,  $g_2$ ,  $g_3$ ,  $g_3^*$ ,  $g_4$  et  $g_5$ . Ces expressions soulignent la complexité de la modélisation au second ordre et laissent entrevoir la difficulté de calibrer les nombreuses constantes.

Pour modéliser le terme de diffusion par l'agitation turbulente (corrélation triple de vitesse), le modèle anisotrope de Daly et Harlow [22], reposant sur une hypothèse de gradient généralisé en introduisant la constante  $C_{DH}$ , est le plus couramment utilisé :

$$D_{ij}^T = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( C_{DH} \frac{k}{\varepsilon} u_k u_l \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right). \quad (2.61)$$

Enfin, le taux de dissipation est modélisé sous une forme isotrope  $\varepsilon_{ij} = 2/3 \varepsilon \delta_{ij}$  (modèle de Kolmogorov) en résolvant l'équation de transport de  $\varepsilon$ , similaire à celle résolue dans les fermetures au premier ordre.

### 2.2.3.2 Modèle EB-RSM

Le LRR et le SSG ne sont pas intégrables dans la région de proche paroi, en raison notamment des hypothèses de quasi-homogénéité et de localité qui ne sont pas valables dans cette région. Pour pallier ce problème, Manceau et Hanjalić [76] ont développé l'approche à pondération elliptique, approche robuste dérivée de la relaxation elliptique de Durbin [33]. Ils l'ont appliquée à un modèle au second ordre en développant l'EB-RSM (*Elliptic-Blending Reynolds-Stress Model*). Un soin particulier est apporté au modèle afin de respecter le comportement asymptotique exact en proche paroi des grandeurs modélisées. Comme mentionné dans la section 2.2.2.3, une unique équation elliptique est définie pour un coefficient adimensionnel  $\alpha \in [0, 1]$  afin d'estimer le terme de redistribution  $\phi_{ij}$  :

$$\phi_{ij} = (1 - \alpha^3) \phi_{ij}^w + \alpha^3 \phi_{ij}^h, \quad \text{avec} \quad \alpha - L^2 \nabla^2 \alpha = 1. \quad (2.62)$$

Le modèle EB-RSM peut être intégré jusqu'à la paroi grâce à la pondération elliptique entre le terme de redistribution pariétal  $\phi_{ij}^w$ , défini par Manceau et Hanjalić [76], et le modèle homogène  $\phi_{ij}^h$ , en sélectionnant le SSG car il donne de bons résultats dans la zone logarithmique. Cela permet de prendre en compte les effets non locaux, et en particulier l'effet de blocage.

De la même manière, le taux de dissipation est pondéré par le coefficient  $\alpha$  afin de prendre en compte l'anisotropie de la dissipation en proche paroi tout en retrouvant le modèle isotrope dans l'écoulement libre :

$$\varepsilon_{ij} = (1 - \alpha^3) \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \varepsilon + \alpha^3 \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij}. \quad (2.63)$$

Le modèle EB-RSM permet finalement un traitement plus réaliste des écoulements de proche paroi par rapport au SSG et LLR qui requièrent des lois de paroi additionnelles, et bénéficie de l'approche à pondération elliptique pour améliorer la stabilité numérique et ainsi pouvoir appliquer le modèle dans des situations industrielles. Étant donné les nombreux avantages de l'approche à pondération elliptique, elle a été utilisée pour développer le  $BL-\overline{v^2}/k$  [9], dans le cadre des fermetures au premier ordre.

## 2.2.4 Utilisation des modèles RANS dans le cadre de la thèse

Cette section a permis d'introduire les principaux modèles RANS qui servent de base aux développements effectués dans cette thèse, en particulier pour développer les fermetures des approches hybrides. Les systèmes d'équations ont été explicités en rappelant les origines des différents modèles, ce qui permet dans les chapitres suivants de préciser quels termes sont modifiés ou non dans le cadre d'une modélisation hybride.

- Le  $k-\varepsilon$  [58] est le modèle de base dont la formulation sert de cadre principal pour la plupart des analyses théoriques, en raison de la relative simplicité du modèle et des grandeurs turbulentes caractéristiques ( $k$  et  $\varepsilon$ ) qui interviennent. Cependant, le modèle n'étant pas intégrable jusqu'à la paroi, son utilisation pratique pour les problématiques de chargements hydrauliques instationnaires n'est pas pertinente.
- Le  $k-\omega$  SST [82] est le modèle de fermeture principal dans cette thèse pour appliquer les méthodes hybrides, développer des améliorations et valider les approches. Il a été sélectionné car c'est un modèle bas-Reynolds, dont l'usage est courant dans de nombreuses applications industrielles, et est donc le plus à même d'être utilisé de manière standard dans le contexte des approches hybrides, comme cela est déjà le cas avec la DES [116, 122] et la HTLES [2, 121].
- Le  $BL-\overline{v^2}/k$  [9] est utilisé pour proposer une fermeture bas-Reynolds différente pour les approches hybrides et ainsi évaluer l'influence du modèle RANS. Lorsque la branche RANS est activée dans les zones de proche paroi, l'utilisation du  $BL-\overline{v^2}/k$  se révèle être particulièrement pertinente en raison des importants efforts de modélisation réalisés pour améliorer le comportement du modèle dans la couche limite turbulente.
- L'EB-RSM [76] a servi de modèle de fermeture dans plusieurs travaux portant sur les méthodes hybrides, confer Fadai-Ghotbi *et al.* [35, 36] et Friess *et al.* [39]. Dans cette thèse, la possibilité d'utiliser des fermetures au second ordre a été explorée, mais les modèles au premier ordre ont finalement été préférés en raison de leur formulation plus simple, de leur meilleure robustesse numérique, et de leur utilisation plus standard aujourd'hui.

## 2.3 Résolution locale des échelles par approche filtrée

### 2.3.1 Principes et équations de l'approche filtrée

#### 2.3.1.1 Spectres d'énergie turbulente spatial et temporel

Les modèles LES, et le formalisme hybride présenté dans cette thèse, reposent sur un filtre de convolution passe-bas, pour séparer les échelles turbulentes résolues et modélisées, en utilisant notamment des critères liés à la forme générale du spectre turbulent.

Le spectre d'énergie turbulente représente la répartition continue de l'énergie turbulente en fonction du nombre d'onde  $\kappa$  (spectre spatial) ou de la fréquence  $\omega$  (spectre temporel). Il est obtenu en utilisant une transformée de Fourier. Dans la suite, les parallèles (et les différences) entre les spectres spatiaux et temporels vont être dressés.

**En spatial,**

d'après Pope [89],

on définit :

- le tenseur de corrélation en deux points :

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \overline{u_i(\mathbf{x}, t)u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)},$$

- le tenseur du spectre de vitesse :

$$\psi_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\mathbf{r}) \exp(-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

- la densité spectrale d'énergie :

$$E(\kappa) = \oint \frac{1}{2} \psi_{ii}(\boldsymbol{\kappa}) dS(\kappa),$$

avec  $\kappa = \|\boldsymbol{\kappa}\|$ , et  $\oint \cdot dS(\kappa)$  l'intégrale sur une sphère centrée de rayon  $\kappa$ ,

- et l'énergie cinétique turbulente totale :

$$k = \int_0^{\infty} E(\kappa) d\kappa.$$

**En temporel,**

d'après Tennekes et Lumley [120],

on définit :

- le tenseur des corrélations en deux temps :

$$R_{ij}(\tau) = \overline{u_i(\mathbf{x}, t)u_j(\mathbf{x}, t + \tau)}, \quad (2.64)$$

- le tenseur du spectre de vitesse eulérien :

$$\psi_{ij}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau, \quad (2.65)$$

- la densité spectrale d'énergie :

$$E_T(\omega) = \psi_{ii}(\omega), \quad (2.66)$$

- et l'énergie cinétique turbulente totale :

$$k = \int_0^{\infty} E_T(\omega) d\omega. \quad (2.67)$$

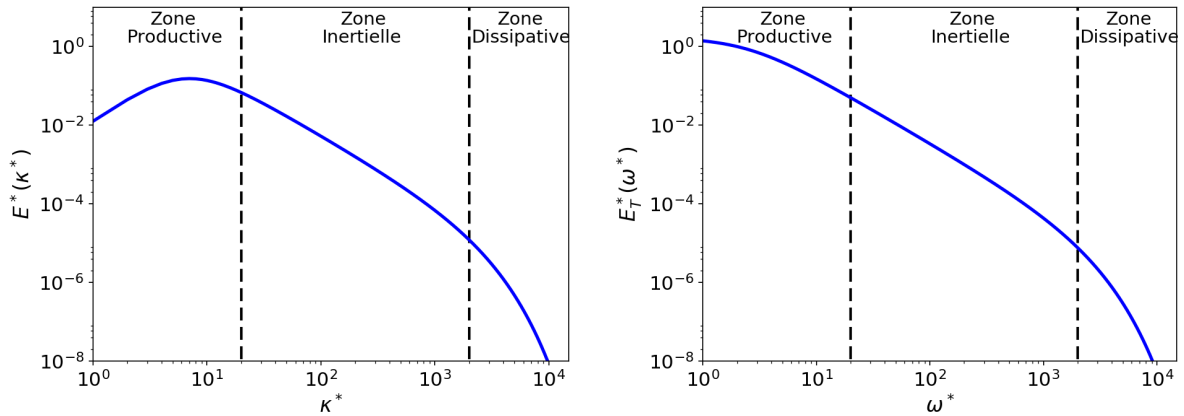


FIGURE 2.3 – Spectre d'énergie spatial (gauche), et spectre d'énergie temporel eulérien (droite).

La forme générale des spectres sur la Figure 2.3 correspond au spectre de Kraichnan (Pope [89]), en spatial, dont la formulation a été reprise dans le contexte temporel par Manceau (communication personnelle en utilisant Eq. 2.69), qui a montré que le spectre temporel tend vers une constante non nulle pour  $\omega \rightarrow 0$ , à l'inverse du spectre en module qui tend vers zéro.

Il est important de différencier les principales zones qui caractérisent les spectres d'énergie turbulente, que ce soit dans l'espace des ondes ou des fréquences.

- **La zone productive** contient les grandes structures turbulentes, les plus énergétiques de l'écoulement. Le pic d'énergie observé en spatial sur la Figure 2.3 a lieu à  $\kappa = 2\pi/L_{\text{int}}$ , où  $L_{\text{int}}$  est l'échelle intégrale de longueur. Dans cette zone, l'énergie turbulente provient du mouvement moyen par le mécanisme de production.
- **La zone dissipative** correspond aux plus petites échelles de turbulence, pour lesquelles l'effet de la viscosité moléculaire n'est plus négligeable et l'énergie est dissipée sous forme de chaleur. Ces petites échelles tendent vers l'homogénéité isotropique (l'aspect inhomogène et anisotrope de la formation de la turbulence a été « effacé »).

La théorie K41 élaborée par Kolmogorov [64] repose sur plusieurs hypothèses fondamentales.

- ✓ L'hypothèse d'équilibre universel indique que la statistique des mouvements turbulents pour les petites échelles est uniquement déterminée à partir de la viscosité cinématique  $\nu$  et du taux de dissipation  $\varepsilon$ .

Cet équilibre permet de déterminer une échelle de longueur de dissipation visqueuse  $\eta$ , appelée échelle de Kolmogorov. Elle représente la taille minimale atteinte par les structures turbulentes avant d'être dissipée par la viscosité moléculaire, ce qui correspond à  $Re_\eta = u_\eta \eta / \nu = 1$ , avec la vitesse des tourbillons  $u_\eta = (\varepsilon \eta)^{1/3}$ . Ces différentes hypothèses permettent de déterminer les échelles de longueur et de temps de Kolmogorov, respectivement :

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad \text{et} \quad \tau_\eta = \left( \frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2}. \quad (2.68)$$

- **La zone inertielle** correspond à la zone intermédiaire entre les échelles productives  $L$  et les échelles dissipatives  $\eta$ , dans laquelle l'énergie est transmise par le mécanisme de la cascade d'énergie. On peut montrer [19] que la relation entre ces échelles est donnée par  $\eta = L Re^{-3/4}$ , avec  $Re = UL/\nu$  le nombre de Reynolds de l'écoulement, avec  $U \sim \sqrt{k}$ . Ainsi, la séparation d'échelle entre les grands tourbillons porteurs d'énergie et les petites échelles dissipatives est d'autant plus importante que le nombre de Reynolds est grand.

- ✓ La seconde hypothèse de Kolmogorov indique que dans la zone inertielle ( $\eta \ll l \ll L$ ), les statistiques des mouvements turbulents sont universelles et uniquement déterminées par le taux de dissipation  $\varepsilon$ . Le flux d'énergie cinétique des grandes vers les petites échelles est donc conservé dans toute la zone inertielle et correspond à  $\varepsilon$ .

Sous ces hypothèses [64], la « loi en moins cinq tiers » est obtenue, portant sur la plage de décroissance du spectre dans la zone inertielle, dans l'espace des nombres d'onde ou des fréquences.

Initialement définies dans le domaine spatial, les lois pour le spectre d'énergie sont reformulées dans le domaine temporel en utilisant la relation :

$$dk = E(\kappa) d\kappa = E_T(\omega) d\omega. \quad (2.69)$$

En analysant un spectre d'énergie temporel eulérien, Tennekes [119] a proposé la relation de dispersion suivante, valable dans la zone inertielle et la zone dissipative :

$$\omega = U_s \kappa. \quad (2.70)$$

La vitesse  $U_s$  représente l'advection des plus petits tourbillons par les plus grands (*sweeping velocity*), et est définie comme :

$$U_s = U + \gamma \sqrt{k}, \quad (2.71)$$

avec  $U$  la magnitude de la vitesse moyenne, et le second terme dénote la vitesse caractéristique des tourbillons les plus énergétiques, avec  $\gamma$  une constante. Pour une turbulence homogène et isotrope, l'égalité se simplifie en  $U_s = \gamma \sqrt{k}$ , ce qui peut justifier la calibration  $\gamma = \sqrt{2/3}$  pour obtenir  $U_s^2 = \overline{uu} = \overline{vv} = \overline{ww}$ .

### Spectre d'énergie de Kolmogorov

Le spectre d'énergie de Kolmogorov a été défini [64] dans la zone inertielle de l'espace des nombres d'onde. Pour exprimer cette loi dans la zone inertielle de l'espace des fréquences, les deux relations (2.69) et (2.70) sont utilisées

**Spectre spatial :**

$$E(\kappa) = C_K \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}, \quad (2.72)$$

**Spectre temporel :**

$$E_T(\omega) = C_K \varepsilon^{2/3} U_s^{2/3} \omega^{-5/3}, \quad (2.73)$$

où  $C_K = 1.5$  est la constante de Kolmogorov, considérée universelle.

### 2.3.1.2 Opérateurs de filtrage spatial ou temporel

Dans le cadre des approches filtrées, un filtre de convolution passe-bas est utilisé pour décomposer la vitesse instantanée  $U_i^*$  entre une composante résolue  $\tilde{U}_i$  et une composante résiduelle  $u_i''$  :

$$U_i^* = \tilde{U}_i + u_i'', \quad (2.74)$$

et de même pour la pression  $P^* = \tilde{P} + p''$  et les forçages extérieurs  $F_i^* = \tilde{F}_i + f_i''$ . L'opérateur de filtrage  $\langle \cdot \rangle$  s'exprime par :

$$\tilde{U}_i(\mathbf{x}, t) = \langle U_i^*(\mathbf{x}, t) \rangle = \int_{\mathcal{D}} \int_{-\infty}^t \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') U_i^*(\mathbf{x}', t') d\mathbf{x}' dt', \quad (2.75)$$

avec le noyau du filtre  $\mathcal{G}$ , normalisé, défini dans un domaine spatial  $\mathcal{D}$ . Ce filtre vérifie les hypothèses de préservation des constantes et de linéarité, mais il ne commute pas nécessairement avec les opérateurs de dérivation et il n'est pas idempotent ( $\langle \tilde{U}_i \rangle = \tilde{U}_i$ ), sauf pour un filtre à coupure spectrale qui annihile tous les modes (resp. fréquences) supérieurs au nombre d'onde (resp. fréquence) de coupure. Les opérateurs de filtrage peuvent se simplifier de la façon suivante.

**Filtre spatial :**

$$\tilde{U}_i(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{G}_{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') U_i^*(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'. \quad (2.76)$$

**Filtre temporel eulérien :**

$$\tilde{U}_i(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^t \mathcal{G}_{\Delta_T}(t, t') U_i^*(\mathbf{x}, t') dt'. \quad (2.77)$$

### Opérateurs de filtrage spatiaux

Le filtre spatial doit respecter une condition de normalisation :

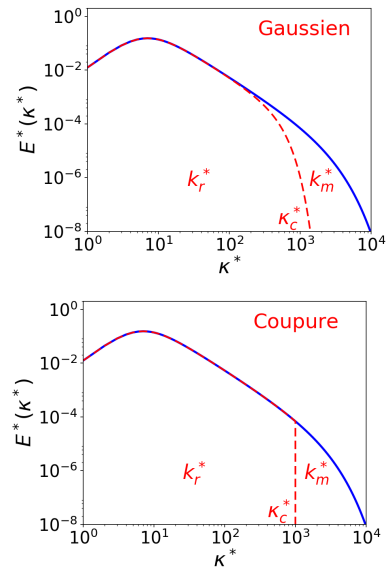
$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{G}_{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = 1. \quad (2.78)$$

Dans le cadre spatial, de nombreuses définitions de filtre existent, en posant  $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$ .

Filtre	Noyau de filtrage	Fonction de transfert
Général	$\mathcal{G}_{\Delta}(r)$	$\hat{\mathcal{G}}_{\Delta}(\kappa)$
Gaussien	$\left(\frac{6}{\pi\Delta^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{6r^2}{\Delta^2}\right)$	$\exp\left(-\frac{\kappa^2\Delta^2}{24}\right)$
Coupure	$\frac{\sin(\pi r/\Delta)}{\pi r}$	$\mathcal{H}(\pi/\Delta -  \kappa )$

Fonctions de filtrages homogènes et fonctions de transfert pour des filtres 1D dans le domaine spatial (voir Pope [89]), avec  $\Delta$  la taille de filtre et  $\mathcal{H}$  la fonction d'Heaviside. La fonction de transfert est définie par :

$$\hat{\mathcal{G}}_{\Delta}(\kappa) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_{\Delta}(r) \exp(-i\kappa r) dr.$$



### Opérateurs de filtrage temporels

Les approches LES temporelles (TLES pour *Temporal LES*) ont été développées en se fondant sur des opérateurs de filtrage temporel (Eq. 2.77). On peut notamment citer les travaux de Pruet *et al.* [93, 91]. La principale différence avec le filtrage spatial réside dans le fait que filtre soit causal (seules les informations passées sont connues). Un noyau admissible, doit donc satisfaire la propriété suivante, avec la largeur de filtre  $\Delta_T$  et  $\tau = t - t'$  :

$$\mathcal{G}_{\Delta_T}(\tau) = \frac{1}{\Delta_T} g\left(\frac{\tau}{\Delta_T}\right), \quad \text{avec } g(t) \geq 0, \quad g(0) = 1, \quad \int_{-\infty}^0 g(t) dt = 1. \quad (2.79)$$

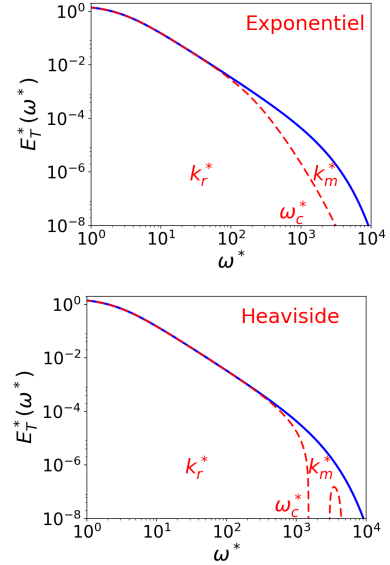
Filtre	Noyau de filtrage	Fonction de transfert
Général	$\mathcal{G}_{\Delta_T}(\tau)$	$\hat{\mathcal{G}}_{\Delta_T}(\omega)$
Exponentiel	$\frac{1}{\Delta_T} \exp\left(-\frac{\tau}{\Delta_T}\right)$	$\frac{1}{1 + i\omega\Delta_T}$
Heaviside	$\frac{1}{\Delta_T} \mathcal{H}(\tau + \Delta_T)$	$\frac{1 - \exp(-i\omega\Delta_T)}{i\omega\Delta_T}$

Fonctions de filtrages et fonctions de transfert pour des filtres dans le domaine temporel avec  $\Delta_T$  la taille de filtre et  $\mathcal{H}$  la fonction d'Heaviside. La fonction de transfert est définie par :

$$\hat{\mathcal{G}}_{\Delta_T}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_{\Delta_T}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau.$$

Enfin, pour économiser la mémoire de stockage, les filtres temporels sont souvent écrits sous forme différentielle, et on obtient pour un filtre exponentiel et pour un filtre Heaviside :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle f \rangle(t, \Delta_T) = \frac{f(t) - \langle f \rangle(t, \Delta_T)}{\Delta_T} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} \langle f \rangle(t, \Delta_T) = \frac{f(t) - f(t - \Delta_T)}{\Delta_T}. \quad (2.80)$$



#### 2.3.1.3 Décomposition de l'énergie cinétique turbulente

Quel que soit l'opérateur de filtrage, spatial ou temporel, l'énergie cinétique turbulente  $k$  (Eq. 2.67) est décomposée entre une composante résolue  $k_r$  et une composante modélisée  $k_m$  :

$$k = k_m + k_r. \quad (2.81)$$

##### Filtrage spatial :

- les énergies résolue et modélisée s'écrivent :

$$k_r = \int_0^\infty \hat{\mathcal{G}}_\Delta(\kappa)^2 E(\kappa) d\kappa,$$

$$k_m = \int_0^\infty (1 - \hat{\mathcal{G}}_\Delta(\kappa)^2) E(\kappa) d\kappa,$$

- et pour un filtre à coupure spectrale  $\kappa_c$  :

$$k = \int_0^\infty E(\kappa) d\kappa$$

$$k_r = \int_0^{\kappa_c} E(\kappa) d\kappa \quad k_m = \int_{\kappa_c}^\infty E(\kappa) d\kappa.$$

##### Filtrage temporel :

- les énergies résolue et modélisée s'écrivent :

$$k_r = \int_0^\infty \hat{\mathcal{G}}_{\Delta_T}(\omega)^2 E_T(\omega) d\omega, \quad (2.82)$$

$$k_m = \int_0^\infty (1 - \hat{\mathcal{G}}_{\Delta_T}(\omega)^2) E_T(\omega) d\omega, \quad (2.83)$$

- et pour un filtre à coupure spectrale  $\omega_c$  :

$$k = \int_0^\infty E_T(\omega) d\omega \quad (2.84)$$



### 2.3.1.4 Équations filtrées pour la vitesse

L'application de l'opérateur de filtrage sur les équations de Navier-Stokes (2.2, 2.3) conduit à :

$$\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.85)$$

$$\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial t} + \tilde{U}_j \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij\text{sfs}}}{\partial x_j} + \tilde{F}_i, \quad (2.86)$$

en définissant le tenseur des tensions de sous-filtre :

$$\tau_{ij\text{sfs}} = \langle U_i^* U_j^* \rangle - \langle U_i^* \rangle \langle U_j^* \rangle. \quad (2.87)$$

Le tenseur de sous-filtre s'exprime explicitement avec la décomposition de Léonard [71] :

$$\tau_{ij\text{sfs}} = \underbrace{\langle \tilde{U}_i \tilde{U}_j \rangle - \tilde{U}_i \tilde{U}_j}_{\mathcal{L}_{ij}} + \underbrace{\langle \tilde{U}_i u_j'' \rangle + \langle u_i'' \tilde{U}_j \rangle}_{\mathcal{C}_{ij}} + \underbrace{\langle u_i'' u_j'' \rangle}_{\mathcal{R}_{ij}}. \quad (2.88)$$

**Le tenseur de Léonard**  $\mathcal{L}_{ij}$  est un terme qui ne dépend que du champ résolu et représente les interactions entre les grandes échelles. **Le tenseur des termes croisés**  $\mathcal{C}_{ij}$  caractérise l'interaction entre les échelles résolues et résiduelles. **Le tenseur de Reynolds de sous-filtre**  $\mathcal{R}_{ij}$  représente l'interaction entre les petites échelles résiduelles. En général, le tenseur de Reynolds de sous-filtre est dominant (c'est le seul terme non nul pour un filtre idempotent), et le tenseur de sous-filtre est modélisé dans son ensemble sans considérer les termes  $\mathcal{L}_{ij}$ ,  $\mathcal{C}_{ij}$  et  $\mathcal{R}_{ij}$  individuellement.

*Remarque* : des hypothèses de commutation entre l'opérateur de filtrage et les opérateurs différentiels ont été faites, ce qui n'est valable que pour des filtres homogènes. En pratique, les erreurs de commutation qui apparaissent sont négligées.

### 2.3.1.5 Approche filtrée généralisée

Germano [43] a défini le principe d'invariance à la moyenne (*averaging invariance*) : tout opérateur de moyenne respectant les hypothèses de linéarité, de préservation des constantes et de commutativité avec les opérateurs différentiels, aboutit au même système d'équations.

Dans l'approche de filtrage générale de Germano [43], les moments centrés généralisés sont définis sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \tau(U_i^*, U_j^*) = \langle U_i^* U_j^* \rangle - \langle U_i^* \rangle \langle U_j^* \rangle = \tau_{ij\text{sfs}}, \\ \tau(U_i^*, U_j^*, U_k^*) = \langle U_i^* U_j^* U_k^* \rangle - \langle U_i^* \rangle \langle U_j^* \rangle \langle U_k^* \rangle \\ \quad - \langle U_i^* \rangle \tau(U_j^*, U_k^*) - \langle U_j^* \rangle \tau(U_k^*, U_i^*) - \langle U_k^* \rangle \tau(U_i^*, U_j^*), \end{cases} \quad (2.89)$$

de telle sorte que l'équation de transport des tensions de sous-filtre s'écrive :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{ij\text{sfs}}}{\partial t} + \tilde{U}_k \frac{\partial \tau_{ij\text{sfs}}}{\partial x_k} &= \overbrace{-\tau_{iks\text{sfs}} \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_k} - \tau_{jks\text{sfs}} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_k}}^{P_{ij\text{sfs}}} - \overbrace{\frac{\partial \tau(U_i^*, U_j^*, U_k^*)}{\partial x_k}}^{D_{ij\text{sfs}}^T} + \overbrace{\nu \frac{\partial^2 \tau_{ij\text{sfs}}}{\partial x_k \partial x_k}}^{D_{ij\text{sfs}}^\nu} \\ &\quad - \underbrace{\frac{1}{\rho} \tau \left( U_i^*, \frac{\partial P^*}{\partial x_j} \right) - \frac{1}{\rho} \tau \left( U_j^*, \frac{\partial P^*}{\partial x_i} \right)}_{\phi_{ij\text{sfs}}} - \underbrace{2\nu \tau \left( \frac{\partial U_i^*}{\partial x_k}, \frac{\partial U_j^*}{\partial x_k} \right)}_{\varepsilon_{ij\text{sfs}}}. \end{aligned} \quad (2.90)$$



On remarque que cette équation de transport de  $\tau_{ij\text{sfs}}$  dans un cadre filtré est formellement identique à l'équation de transport pour  $R_{ij}$  (Eq. 2.16) dans un cadre statistique. Les différents termes de l'équation sont définis de la même manière que dans l'approche statistique (voir section 2.2.1.3), et traduisent respectivement : la production partielle par le champ filtré  $P_{ij\text{sfs}}$  (qui représente ici le transfert d'énergie des échelles résolues vers les échelles modélisées), le transport par les échelles de sous-filtre  $D_{ij\text{sfs}}^T$ , la diffusion visqueuse  $D_{ij\text{sfs}}^\nu$ , le terme de pression partielle  $\phi_{ij\text{sfs}}$  (qui comprend les termes de redistribution et de « diffusion » par la pression), et la dissipation visqueuse partielle  $\varepsilon_{ij\text{sfs}}$ .

Dans ce contexte, il est possible de définir l'énergie de sous-filtre :

$$k_{\text{sfs}} = \frac{1}{2} \tau_{ii\text{sfs}}. \quad (2.91)$$

dont l'équation de transport s'obtient par contraction des indices  $i$  et  $j$  dans l'équation (2.90) :

$$\frac{\partial k_{\text{sfs}}}{\partial t} + \tilde{U}_k \frac{\partial k_{\text{sfs}}}{\partial x_k} = \underbrace{-\tau_{ik_{\text{sfs}}} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_k}}_{P_{\text{sfs}}} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial \tau(U_i^*, U_i^*, U_k^*)}{\partial x_k}}_{D_{\text{sfs}}^T} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 k_{\text{sfs}}}{\partial x_k \partial x_k}}_{D_{\text{sfs}}^\nu} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \tau \left( U_i^*, \frac{\partial P^*}{\partial x_i} \right)}_{D_{\text{sfs}}^P} - \underbrace{\nu \tau \left( \frac{\partial U_i^*}{\partial x_j}, \frac{\partial U_i^*}{\partial x_j} \right)}_{\varepsilon_{\text{sfs}}} \quad (2.92)$$

Pour une LES bien résolue, si l'on considère que la dissipation résolue est négligeable, le mécanisme de dissipation physique est entièrement contenu dans les échelles de sous-filtre  $\varepsilon_{\text{sfs}}$ . Il est donc nécessaire d'assurer le transfert d'énergie des grandes échelles résolues vers les petites échelles modélisées, ce qui implique un équilibre spectral entre le terme de production de sous-filtre  $P_{\text{sfs}}$  statistiquement moyenné et la dissipation physique  $\varepsilon$ , avec :

$$\overline{P_{\text{sfs}}} \stackrel{\text{déf.}}{=} P_m \simeq \varepsilon \stackrel{\text{déf.}}{=} \overline{\varepsilon_{\text{sfs}}}. \quad (2.93)$$

## 2.3.2 Modèles LES

### 2.3.2.1 Modèle à viscosité de sous-filtre

De la même manière que pour les approches statistiques, l'équation de la dynamique pour la vitesse filtrée (Eq. 2.86) en LES fait apparaître un terme supplémentaire, le tenseur de sous-filtre  $\tau_{ij\text{sfs}}$ , qui nécessite d'être modélisé. Comme mentionné dans la présentation générale des méthodes à simulation des grandes échelles (section 2.1.3.3), les modèles LES sont élaborés en supposant que la coupure de l'opérateur de filtrage est située dans la zone inertielle, suffisamment « proche » des échelles dissipatives pour que seules les plus petites échelles nécessitent une modélisation.

Ainsi, la prise en compte de ces échelles résiduelles ne demande pas un grand effort de modélisation. Elles sont parfois tout simplement négligées, ce qui peut néanmoins amener à un phénomène d'accumulation d'énergie aux petites échelles en raison du manque de dissipation de sous-filtre. Dans ce cas-là, la dissipation induite par certains schémas numériques peut jouer le rôle de la dissipation physique, comme dans le cadre de la ILES (*Implicit LES*). Dans la plupart des autres cas, pour modéliser les échelles de sous-filtre et assurer une dissipation appropriée, un modèle à viscosité turbulente est utilisé, comme pour les fermetures RANS au premier ordre (section 2.2.2). Ce modèle, qui repose sur une formulation linéaire, est approprié au regard des phénomènes turbulents relativement simples à représenter. On définit donc la viscosité de sous-filtre  $\nu_{\text{sfs}}$  en fonction de  $\tilde{S}_{ij} = \langle S_{ij}^* \rangle$  le tenseur de déformation filtré, telle que :

$$\tau_{ij\text{sfs}} = -2\nu_{\text{sfs}} \tilde{S}_{ij} + \frac{2}{3} k_{\text{sfs}} \delta_{ij}, \quad (2.94)$$

### 2.3.2.2 Modèle de Smagorinsky

Le modèle de Smagorinsky [106] est un modèle LES spatial qui vise à modéliser la viscosité de sous-filtre. Pour ce faire, la construction du modèle (résumée brièvement ci-dessous) se fonde sur une analogie avec les modèles à longueur de mélange :

$$\nu_{\text{sfs}} = l_c^2 \tilde{S}, \quad (2.95)$$

où  $l_c$  et  $\tilde{S} = \sqrt{2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij}}$  représentent respectivement l'échelle de longueur et l'inverse du temps caractéristique des plus grands tourbillons de sous-filtre. Sous l'hypothèse d'un filtre à coupure spectrale (l'utilisation d'un filtre Gaussien rajouterait une constante à calibrer dans le raisonnement), en considérant que le nombre d'onde de coupure  $\kappa_c = \pi/\Delta$  est dans la zone inertielle d'un spectre de Kolmogorov (Eq. 2.72), avec  $\Delta$  la taille de filtre, on obtient [89] :

$$\overline{\tilde{S}^2} = 2 \int_0^{\kappa_c} \kappa^2 E(\kappa) d\kappa = 2 \int_0^{\kappa_c} C_K \varepsilon^{2/3} \kappa^{1/3} d\kappa = \frac{3}{2} C_K \varepsilon^{2/3} \left(\frac{\pi}{\Delta}\right)^{4/3}. \quad (2.96)$$

Cette formule permet de relier la dissipation au champ résolu par :

$$\boxed{\varepsilon = C_S^2 \Delta^2 \overline{\tilde{S}^3}^{3/2}}, \quad \text{avec} \quad C_S = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{3C_K}\right)^{3/4} \simeq 0.173. \quad (2.97)$$

Pour un modèle à viscosité de sous-maille, étant donné que le terme de production de sous-filtre s'exprime par  $P_{\text{sfs}} = \nu_{\text{sfs}} \tilde{S}^2$  (même formule qu'en RANS, Eq. 2.23), et selon l'égalité  $\overline{P_{\text{sfs}}} = \varepsilon$  (Eq. 2.93), on trouve la relation suivante pour définir les modèles de sous-filtre :

$$\overline{P_{\text{sfs}}} = \overline{\nu_{\text{sfs}} \tilde{S}^2} = C_S^2 \Delta^2 \overline{\tilde{S}^3}^{3/2} = \varepsilon. \quad (2.98)$$

Finalement, en introduisant l'expression (Eq. 2.95) dans (Eq. 2.98), et en effectuant une analyse similaire à celle de Lilly [73], on obtient :

$$l_c^2 \overline{\tilde{S}^3} = C_S^2 \Delta^2 \overline{\tilde{S}^3}^{3/2} \quad \Rightarrow \quad l_c = C_S \Delta, \quad (2.99)$$

avec l'approximation  $\overline{\tilde{S}^3} = \overline{\tilde{S}^2}^{3/2}$ .

Enfin, la taille de filtre est le plus souvent estimée en fonction du pas d'espace, défini avec la racine cubique du volume des cellules, tel que  $\Delta = A(\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{1/3}$ , avec  $A \geq 1$ . Cette formule est robuste, aisément applicable pour des maillages structurés ou non. Ghosal [45] a montré qu'il est favorable d'augmenter la valeur de  $A$  afin de diminuer l'erreur de discrétisation (plus efficace que d'augmenter l'ordre des schémas numériques).

Dans le modèle de Smagorinsky [106], la viscosité de sous-filtre est estimée comme :

$$\nu_{\text{sfs}} = (C_S \Delta)^2 \tilde{S}, \quad (2.100)$$

avec  $\tilde{S} = \sqrt{2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij}}$ , la taille de filtre  $\Delta$ , et la constante  $C_S$ .

### 2.3.2.3 Modèle de Deardorff

Le modèle de Deardorff [28] est un modèle LES spatial avec une équation de transport pour l'énergie de sous-filtre  $k_{\text{sfs}}$ , dérivée de l'équation exacte (Eq. 2.92). Des modèles similaires ont été proposés par Horiuti et Yoshizawa [52, 125].

- En effectuant les mêmes hypothèses que pour le modèle de Smagorinsky (filtre à coupure spectrale  $\kappa_c = \pi/\Delta$  dans la zone inertielle d'un spectre de Kolmogorov), on obtient que l'énergie cinétique modélisée  $k_m = \overline{k_{\text{sfs}}}$  s'exprime comme :

$$k_m = \int_{\kappa_c}^{\infty} E(\kappa) d\kappa = \int_{\kappa_c}^{\infty} C_K \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} d\kappa = \frac{3C_K}{2} \varepsilon^{2/3} \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^{2/3}, \quad (2.101)$$

qui permet donc d'écrire le taux de dissipation :

$$\varepsilon = \frac{k_m^{3/2}}{C_d \Delta}, \quad \text{avec} \quad C_d = \frac{1}{\pi} \left(\frac{3C_K}{2}\right)^{3/2} \simeq 1.074. \quad (2.102)$$

- D'après Hinze [51], la moyenne statistique de la viscosité de sous-filtre  $\nu_m = \overline{\nu_{\text{sfs}}}$  peut être définie en utilisant l'expression dérivée de l'hypothèse d'Heisenberg, qui se simplifie par :

$$\nu_m = C_\nu \int_{\kappa_c}^{\infty} \kappa^{-3/2} E(\kappa)^{1/2} d\kappa = C_\nu \int_{\kappa_c}^{\infty} C_K^{1/2} \varepsilon^{1/3} \kappa^{-7/3} d\kappa = \frac{3}{4} C_\nu C_K^{1/2} \varepsilon^{1/3} \left(\frac{\pi}{\Delta}\right)^{-4/3}, \quad (2.103)$$

avec le coefficient  $C_\nu = 1/2$ . En introduisant la relation (Eq. 2.102), on obtient finalement :

$$\nu_m = C_\mu C_d k_m^{1/2} \Delta, \quad \text{avec} \quad C_\mu = \frac{1}{3} C_\nu C_K^{-3/2} \simeq 0.0907. \quad (2.104)$$

Le modèle de Deardorff [28] s'écrit :

$$\nu_{\text{sfs}} = C_\mu C_d k_{\text{sfs}}^{1/2} \Delta, \quad (2.105)$$

$$\frac{\partial k_{\text{sfs}}}{\partial t} + \tilde{U}_j \frac{\partial k_{\text{sfs}}}{\partial x_j} = \underbrace{\nu_{\text{sfs}} \tilde{S}^2}_{P_{\text{sfs}}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_{\text{sfs}}}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k_{\text{sfs}}}{\partial x_j} \right]}_{D_{\text{sfs}}} - \underbrace{\frac{k_{\text{sfs}}^{3/2}}{C_d \Delta}}_{\varepsilon_{\text{sfs}}}, \quad (2.106)$$

avec la taille de filtre  $\Delta$  et les constantes (théorique pour  $C_d$ ) :

$C_\mu$	$C_d$	$\sigma_k$
0.09	1.07	1.0

Dans la formulation du modèle de Deardorff, on reconnaît les expressions (Eq. 2.102) et (Eq. 2.104) dans le terme de dissipation  $\varepsilon_{\text{sfs}}$  et la viscosité de sous-filtre  $\nu_{\text{sfs}}$ . La diffusion  $D_{\text{sfs}}$  est traitée de façon similaire au modèle  $k-\varepsilon$  (section 2.2.2.1).

Il est intéressant de noter que les valeurs théoriques des coefficients  $C_S$  et  $C_d$ , des modèles de Smagorinsky et Deardorff, peuvent être reliées en utilisant les égalités entre leurs termes de viscosité et de dissipation statistiquement moyennés :

$$[\nu_m] \begin{cases} C_S^2 \Delta^2 \overline{S} = C_\mu C_d k_m^{1/2} \Delta \\ C_S^2 \Delta^2 \overline{S}^{3/2} = \frac{k_m^{3/2}}{C_d \Delta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_S^2 = C_\mu C_d^{4/3} C_S^{2/3} \\ k_m = C_S^{4/3} C_d^{2/3} \Delta^2 \overline{S}^2, \end{cases} \Rightarrow \boxed{C_d = \frac{C_S}{C_\mu^{3/4}}}, \quad (2.107)$$

en supposant que  $\overline{S} = \overline{S}^2^{1/2}$  par analogie avec l'analyse de Lilly [73].

La relation définie par (Eq. 2.107) est bien vérifiée avec les coefficients  $C_\mu = 0.09$ ,  $C_S = 0.173$  et  $C_d = 1.074$ . Cela permet de relier entre eux, *théoriquement* (en considérant des opérateurs de filtrage similaires), les principaux coefficients des modèles LES, afin d'assurer un formalisme global cohérent.

#### 2.3.2.4 Modèles LES alternatifs avec filtrage spatial

Il existe de nombreuses approches LES fondées sur un filtrage spatial, outre les modèles de Smagorinsky et de Deardorff. En particulier, le modèle WALE (*Wall-Adapting Local Eddy-viscosity*) de Nicoud et Ducros [86] est répandu aujourd'hui. C'est un modèle à viscosité de sous-filtre qui, en modifiant la définition de  $\nu_{\text{sfs}}$  (le terme  $\tilde{S}$  en particulier dans Eq. 2.100), cherche à reproduire le comportement asymptotique de la contrainte de cisaillement à la paroi, sans avoir recours à une procédure dynamique.

On peut citer également les méthodes de déconvolution de Stolz *et al.* [114, 115], le modèle à similarité d'échelle de Bardina *et al.* [6] ou le modèle dynamique de Gemano [44, 43]. Ce dernier s'inspire du modèle de Smagorinsky en utilisant une procédure dynamique pour rendre le coefficient  $C_S$  local, en supposant une similarité d'échelle à deux niveaux de filtrage. Cela permet de prendre en compte des effets physiques plus nombreux (cascade inverse par exemple) mais peut entraîner des instabilités numériques.

En ce qui concerne les modèles LES avec des équations de transport pour les variables turbulentes, il est possible de citer les modèles de Deardorff [26, 27] avec six équations de transport scalaires pour  $\tau_{ij\text{sfs}}$ . Le modèle est dérivé de l'équation de transport exacte (Eq. 2.90) en introduisant des modélisations pour les termes inconnus, similaires à celles utilisées pour les modèles RANS au second ordre (section 2.2.3).

La thèse ne portant pas sur la LES, les modèles de Smagorinsky et de Deardorff ont été choisis comme référence parmi tous les modèles LES, en raison de leur relative simplicité (et de sa grande popularité pour le modèle de Smagorinsky).

#### 2.3.2.5 Modèles LES avec filtrage temporel

En TLES, l'élaboration des modèles est plus complexe que pour les approches à filtrage spatial, en raison notamment de la difficulté à définir la largeur de filtre. Le choix du pas de temps n'est souvent pas pertinent car l'échelle de temps caractéristique varie spatialement au sein d'un écoulement alors que le pas de temps est en pratique constant. De plus, la discrétisation spatiale induit également un filtrage qu'il est nécessaire de prendre en compte. Parmi les modèles existants, on peut citer le TADM et le TSSM.

- **La méthode de déconvolution approximative temporelle** (TADM) a été proposée par Pruet *et al.* [92] dans un cadre temporel. Dans cette approche, le tenseur de sous-filtre est évalué en utilisant un champ de vitesse obtenu par une déconvolution approximative de la vitesse filtrée, en s'appuyant sur des développements de Taylor (l'inverse du filtre étant inconnue). La déconvolution du champ résolu vise à reconstituer le champ exact, mais un terme de régularisation doit être ajouté afin d'assurer un niveau correct de dissipation car la déconvolution ne permet pas de reconstruire les échelles plus petites que deux fois la taille des mailles (le maillage étant un filtre projectif).
- **Le modèle à similarité d'échelles temporelles** (TSSM) correspond au modèle de Bardina *et al.* [6], défini originellement dans un cadre spatial, mais appliqué ici avec un filtrage temporel.

### 2.3.3 Modèles hybrides RANS-LES

#### 2.3.3.1 Principes des approches hybrides globales

Les méthodes hybrides globales utilisent un modèle unique dans tout le domaine d'étude (section 2.1.3.4). Ces modèles sont généralement construits sur des bases empiriques, en modifiant des échelles caractéristiques pour passer continûment d'une formulation RANS à une formulation LES, ce qui se traduit essentiellement par une réduction de la viscosité turbulente. Dans cette thèse, à la suite de Schiestel et Dejoan [102] et de Manceau [75], ces approches sont exprimées via un formalisme de filtrage, en faisant tendre la taille de filtre vers l'infini en mode RANS, pour donner un sens aux variables et construire les équations des modèles.

#### La consistance de l'opérateur de filtrage avec les limites DNS et RANS

- (i) Si  $\kappa_c \rightarrow \infty$  ou  $\omega_c \rightarrow \infty$ , le modèle doit s'effacer ( $\nu_{\text{sfs}} \rightarrow 0$ ) pour retrouver une résolution DNS (c'est déjà le cas avec les modèles LES). Les grandeurs filtrées tendent vers leurs valeurs instantanées, de telle sorte que l'opérateur de filtrage doit respecter :

$$U_i^* = \lim_{\substack{\kappa_c \rightarrow \infty \\ \text{ou} \\ \omega_c \rightarrow \infty}} \langle U_i^* \rangle. \quad (2.108)$$

- (ii) Si  $\kappa_c \rightarrow 0$  ou  $\omega_c \rightarrow 0$ , le modèle doit tendre vers une fermeture RANS (ce n'est pas le cas avec les modèles LES classiques). Les grandeurs filtrées doivent tendre vers leurs moyennes statistiques, c'est-à-dire que l'opérateur de filtrage doit tendre vers l'opérateur de moyenne statistique :

$$\overline{U_i^*} = \lim_{\substack{\kappa_c \rightarrow 0 \\ \text{ou} \\ \omega_c \rightarrow 0}} \langle U_i^* \rangle. \quad (2.109)$$

Cette propriété n'est pas toujours vérifiée (voir la section 2.3.4.1) : en utilisant un filtre spatial dans une configuration de turbulence inhomogène, par exemple.

Le deuxième point (ii) souligne qu'un effort de modélisation important est nécessaire pour représenter les échelles turbulentes, en particulier quand le modèle hybride est en mode RANS. Dans un cadre général, les échelles supérieures à la coupure du filtre ne contiennent pas nécessairement la majorité de l'énergie comme en LES. Il n'est donc plus possible de se « contenter » des modèles de fermeture LES relativement simples, élaborés pour modéliser les plus petites échelles.

Ainsi, c'est souvent en se fondant sur des modèles de fermeture RANS que les formulations hybrides sont développées. Étant donné qu'un unique jeu d'équation est utilisé, il est important de justifier que ce modèle de fermeture est aussi valable dans la branche LES.

#### Similarité de forme des équations en modes RANS et LES

Dans le cadre de l'approche filtrée généralisée (section 2.3.1.5), Germano [43] a montré que les équations pour la vitesse filtrée  $\tilde{U}_i$  (2.85 et 2.86), le tenseur de sous-filtre  $\tau_{ij\text{sfs}}$  (2.90), et l'énergie de sous-filtre  $k_{\text{sfs}}$  (2.92), sont formellement identiques aux équations RANS pour la vitesse statistiquement moyennée  $U_i$  (2.12 et 2.13), le tenseur de Reynolds  $R_{ij}$  (2.16), et l'énergie cinétique  $k$  (2.18), respectivement. De plus, Fadai-Ghotbi *et al.* [36] ont démontré que cela est également vérifié avec un filtrage temporel.

La consistance du filtrage, associée à la similarité de forme, suggère que les modèles hybrides peuvent être développés en utilisant un même jeu d'équation dans les deux branches RANS et LES. Les formulations hybrides sont donc dérivées des formulations statistiques, en sensibilisant le modèle à la taille de filtre pour contrôler la transition entre les branches. La question qui se pose alors est la suivante : comment sensibiliser le modèle à la position de la coupure du filtre ? C'est à cette question que les modèles hybrides vont tenter de répondre.

**Relations entre les formalismes RANS et LES**

La vitesse instantanée  $U_i^*$  est subdivisée en :

$$\text{(RANS)} \quad U_i^* = U_i + u_i, \quad \text{(LES)} \quad U_i^* = \tilde{U}_i + u_i'', \quad (2.110)$$

où les fluctuations statistiques (totales)  $u_i$  et les fluctuations de sous-filtre (résiduelles)  $u_i''$  sont reliées par les fluctuations de grande échelle  $u_i' = \tilde{U}_i - U_i$ , de telle sorte que :

$$\begin{aligned} u_i &= u_i' + u_i'', \\ \overline{u_i u_j} &= \overline{u_i' u_j'} + \overline{u_i'' u_j''}, \\ R_{ij} &= \left( \overline{\tilde{U}_i \tilde{U}_j} - U_i U_j \right) + \overline{\tau_{ij\text{sfs}}}, \end{aligned} \quad (2.111)$$

en supposant que  $\overline{\langle U_i \rangle} = U_i$  et  $\overline{u_i'' u_j''} = \langle u_i'' u_j'' \rangle = \overline{\tau_{ij\text{sfs}}}$  (égalités vérifiées sous certaines hypothèses, filtre à coupure spectrale par exemple).

Par contraction des indices, on obtient :

$$k = k_r + k_m, \quad (2.112)$$

$$k = \frac{1}{2} R_{ii} = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}, \quad k_r = \frac{1}{2} \left( \overline{\tilde{U}_i \tilde{U}_i} - U_i U_i \right) = \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'}, \quad k_m = \overline{k_{\text{sfs}}} = \frac{1}{2} \overline{\tau_{iisfs}} = \frac{1}{2} \overline{u_i'' u_i''}. \quad (2.113)$$

Les passages à la limite DNS et RANS s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{(DNS)} & \quad \left\{ \begin{array}{ll} \lim_{\substack{\kappa_c \rightarrow \infty \\ \text{ou} \\ \omega_c \rightarrow \infty}} k_r = k, & \lim_{\substack{\kappa_c \rightarrow \infty \\ \text{ou} \\ \omega_c \rightarrow \infty}} k_m = 0, \end{array} \right. \\ \text{(RANS)} & \quad \left\{ \begin{array}{ll} \lim_{\substack{\kappa_c \rightarrow 0 \\ \text{ou} \\ \omega_c \rightarrow 0}} k_r = 0, & \lim_{\substack{\kappa_c \rightarrow 0 \\ \text{ou} \\ \omega_c \rightarrow 0}} k_m = k. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2.114)$$

**2.3.3.2 Modèle DES**

La DES (*Detached Eddy Simulation*) est la méthode hybride la plus populaire aujourd'hui. Elle a été développée originellement par Spalart *et al.* [108] en 1997 pour traiter des écoulements haut-Reynolds, massivement séparés, dans les domaines de l'aéronautique ou du transport. L'idée principale est de résoudre les tourbillons « détachés » et de modéliser les tourbillons « attachés », c'est-à-dire d'appliquer une modélisation statistique dans la couche limite turbulente.

Cette méthode hybride est originellement dérivée du Spalart-Allmaras [107], un modèle RANS au premier ordre à une équation de transport pour la viscosité turbulente, très populaire dans l'aéronautique. Sa formulation a ensuite été généralisée par Strelets [116] et Travin *et al.* [122] en l'appliquant à des modèles de fermeture à deux équations.

Pour ces modèles à deux équations, la transition RANS-LES est pilotée via une comparaison de l'échelle de longueur turbulente et de la taille de maille  $\Delta$ , qui intervient explicitement dans le modèle. La fonction d'hybridation DES est donc introduite, avec le coefficient  $C_{\text{DES}}$  à calibrer :

$$F_{\text{DES}} = \max \left[ 1, \frac{k_{\text{sfs}}^{3/2} / \varepsilon_{\text{sfs}}}{C_{\text{DES}} \Delta} \right]. \quad (2.115)$$

L'objectif est de piloter le niveau d'énergie modélisée en modifiant le terme de dissipation :

$$\varepsilon_{\text{sfs}}^{\text{DES}} = F_{\text{DES}} \varepsilon_{\text{sfs}} = \begin{cases} \varepsilon_{\text{sfs}} & \text{si } \frac{k_{\text{sfs}}^{3/2}}{\varepsilon_{\text{sfs}}} \leq C_{\text{DES}} \Delta, \quad \text{(RANS)}, \\ \frac{k_{\text{sfs}}^{3/2}}{C_{\text{DES}} \Delta} & \text{si } \frac{k_{\text{sfs}}^{3/2}}{\varepsilon_{\text{sfs}}} > C_{\text{DES}} \Delta, \quad \text{(LES)}. \end{cases} \quad (2.116)$$

- Le modèle est en mode LES quand la taille des mailles est inférieure à l'échelle de longueur de turbulence (en supposant  $C_{\text{DES}} \sim 1$ ), c'est-à-dire quand la discrétisation est suffisamment fine pour résoudre localement les grandes échelles de la turbulence.
- En mode LES, le terme de dissipation de l'équation de transport de  $k_{\text{sfs}}$  est augmenté, ce qui signifie que le niveau d'énergie modélisée est diminué, de même que la viscosité turbulente. La diminution de la viscosité turbulente permet l'apparition de structures résolues et l'énergie associée augmente, compensant la baisse des échelles modélisées.
- La taille de maille est estimée en utilisant l'espacement le plus large de la maille  $\Delta_{\text{max}} = \max[\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z]$ . Cela permet d'éviter la transition au mode LES lorsque les mailles sont trop anisotropes, ce qui est souvent le cas dans les régions de proche paroi, alors que la relation usuelle en LES,  $\Delta = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{1/3}$ , risque de précipiter cette transition. Ces deux formulations sont équivalentes pour un maillage isotrope.

Finalemment, le modèle  $k$ - $\varepsilon$  DES s'écrit :

$$\nu_{\text{sfs}} = C_\mu \frac{k_{\text{sfs}}^2}{\varepsilon_{\text{sfs}}} \quad (2.117)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial k_{\text{sfs}}}{\partial t} + \tilde{U}_j \frac{\partial k_{\text{sfs}}}{\partial x_j} = \nu_{\text{sfs}} \tilde{S}^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_{\text{sfs}}}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k_{\text{sfs}}}{\partial x_j} \right] - \overbrace{F_{\text{DES}}^{\varepsilon_{\text{sfs}}} \varepsilon_{\text{sfs}}}, \\ \frac{\partial \varepsilon_{\text{sfs}}}{\partial t} + \tilde{U}_j \frac{\partial \varepsilon_{\text{sfs}}}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon_{\text{sfs}}}{k_{\text{sfs}}} \nu_{\text{sfs}} \tilde{S}^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_{\text{sfs}}}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_{\text{sfs}}}{\partial x_j} \right] - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_{\text{sfs}}^2}{k_{\text{sfs}}}, \end{cases} \quad (2.118)$$

avec la fonction d'hybridation et la taille de maille :

$$F_{\text{DES}} = \max \left[ 1, \frac{k_{\text{sfs}}^{3/2} / \varepsilon_{\text{sfs}}}{C_{\text{DES}} \Delta} \right], \quad \text{et} \quad \Delta = \Delta_{\text{max}} = \max[\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z], \quad (2.119)$$

et les constantes :

$C_\mu$	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$	$C_{\text{DES}}$
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3	$\sim 0.90$

On remarque tout d'abord que la formulation exacte du modèle  $k$ - $\varepsilon$  est immédiatement retrouvée dans la branche RANS du modèle. Dans la branche LES, la similarité des formulations du modèle DES (Eq. 2.118) et du modèle de Deardorff (Eq. 2.106) est notable. En particulier, les équations de transport de  $k_{\text{sfs}}$  sont exactement de la même forme. Cependant, la formulation DES n'est pas indépendante de la variable  $\varepsilon_{\text{sfs}}$  transportée par la seconde équation, qui apparaît toujours dans l'expression de la viscosité turbulente  $\nu_{\text{sfs}}$ . Pour retrouver la formulation de Deardorff, il faudrait appliquer le terme de destruction  $\varepsilon_{\text{sfs}}^{\text{DES}}$  dans la définition de  $\nu_{\text{sfs}}$ , de manière similaire au modèle XLES de Kok *et al.* [63] :

$$\nu_{\text{sfs}} = C_\mu \frac{k_{\text{sfs}}^2}{\varepsilon_{\text{sfs}}^{\text{DES}}} = C_\mu C_{\text{DES}} k_{\text{sfs}}^{1/2} \Delta. \quad (2.120)$$

La différence observée entre les calibrations des constantes  $C_d$  et  $C_{\text{DES}}$  des modèles de Deardorff [28, 52, 125] et DES [116, 122] est certainement en partie liée à la différence de ces formulations. De la même manière, la calibration de  $C_{\text{DES}}$  dépend de la fermeture utilisée en raison de l'influence de la seconde variable transportée,  $\varepsilon_{\text{sfs}}$  et  $\omega_{\text{sfs}}$  pour le  $k$ - $\varepsilon$  et le  $k$ - $\omega$  SST, respectivement. La constante  $C_{\text{DES}} \simeq 0.90$  correspond à la méthode DES associée à une fermeture  $k$ - $\varepsilon$ , calibrée dans la section 3.4.4.4.



Des améliorations successives ont été apportées à la formulation originale de la DES [108], notamment pour traiter les couches limites turbulentes. Ces formulations sont analysées plus en détail dans le chapitre 4 portant sur le traitement des couches limites, mais on peut citer :

- (i) la DDES (*Delayed DES*) de Spalart *et al.* [110] (2006) pour imposer le mode RANS dans la couche limite au moyen d'une fonction de protection quand le maillage est « ambigu »,
- (ii) la IDDES (*Improved DDES*) de Shur *et al.* [105] (2008), introduisant de nouvelles fonctions de protection et modifiant l'expression de  $\Delta$  afin d'améliorer le comportement du modèle dans la « zone grise » de transition RANS-LES, et permettre l'activation d'un mode WMLES (*Wall-Modeled LES*),
- (iii) la ZDES (*Zonal DES*) de Deck *et al.* [29] (2005) afin d'appliquer le modèle DES de manière « zonale », en forçant le mode RANS dans les régions de l'écoulement où la résolution LES n'est pas souhaitée par l'utilisateur, et en permettant d'utiliser dans le même domaine les différentes branches de la DES.

*Remarque :* La DES est construite empiriquement, sans référence à un formalisme particulier. À la suite de l'analyse de la section 2.3.3.1, considérant les approches hybrides via un formalisme de filtrage, il est possible de « voir » la DES comme une approche à filtrage spatial :  $k_{\text{sfs}}$  et  $\varepsilon_{\text{sfs}}$  sont identifiés respectivement à l'énergie et au taux de dissipation de sous-filtre, tandis que  $\Delta$  correspond à la taille du filtre spatial. Dans ce cas, et comme précisé par la suite, la consistance entre l'opérateur de filtrage et l'opérateur statistique est uniquement valable pour une turbulence homogène. Enfin, Friess *et al.* [39] ont montré qu'il est possible de dériver un modèle de type DES (*Equivalent-DES*) à partir d'un filtrage temporel.

### 2.3.3.3 Modèle PITM

Le modèle PITM (*Partially Integrated Transport Model*) est une méthode hybride globale à filtrage spatial, développé par Schiestel et Dejoan [102] et Chaouat et Schiestel [17] sur des fondements théoriques solides. La sensibilisation du modèle à la taille de filtre est effectuée dans l'équation de transport du taux de dissipation. Pour développer le modèle, le spectre d'énergie d'une turbulence homogène est partitionné entre différentes régions comme montré sur la Figure 2.4.

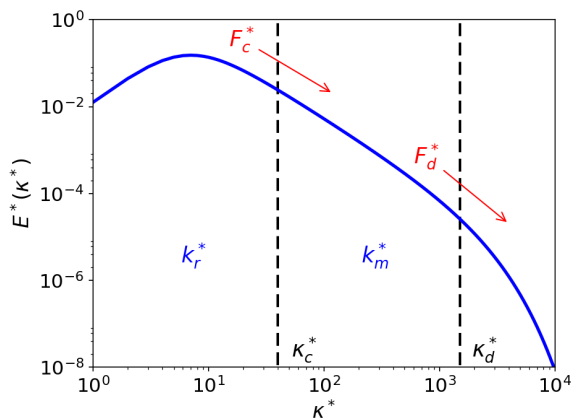


FIGURE 2.4 – Partitionnement du spectre d'énergie dans le cadre de la PITM.

#### Subdivision du spectre en trois régions :

- Résolue  $[0, \kappa_c]$  : les échelles turbulentes sont explicitement résolues ( $k_r$ ),
- Énergétique  $[\kappa_c, \kappa_d]$  : les échelles turbulentes sont modélisées ( $k_m$ ),
- Dissipative  $[\kappa_d, \infty]$  : échelles modélisées mais le niveau d'énergie est négligeable,

#### avec les transferts d'énergie :

- $F_c$  entre les régions résolue et modélisée, le flux d'énergie à la coupure, qui correspond à la production  $P_m$ ,
- $F_d$  entre les régions modélisée et dissipative, qui correspond au taux de dissipation  $\varepsilon$  (hypothèse d'équilibre spectral).



Le nombre d'onde  $\kappa_c$  correspond à la coupure du filtre, tandis que  $\kappa_d$  est un nombre d'onde suffisamment grand pour garantir les propriétés de la région dissipative (contribution à l'énergie totale négligeable). Il est défini, en introduisant un coefficient  $\zeta_m$  suffisamment grand, par  $\kappa_d = \kappa_c + \zeta_m \varepsilon / k_m^{3/2}$ .

Pour une turbulence homogène, l'équation de transport du spectre d'énergie  $E$  s'écrit :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\lambda_{ij} \mathcal{A}_{ij} + \mathcal{T} - 2\nu \kappa^2 E, \quad (2.121)$$

avec  $\lambda_{ij}$  le tenseur des gradients de vitesse moyenne,  $\mathcal{A}_{ij}$  le tenseur spectral des corrélations de vitesse et  $\mathcal{T}$  le transfert d'énergie. En intégrant l'équation sur  $[\kappa_c, \infty]$  et  $[\kappa_d, \infty]$ , il est montré [102] que l'équation se simplifie en un système similaire à celui du  $k$ - $\varepsilon$  pour une turbulence homogène :

$$\begin{cases} \frac{\partial k_m}{\partial t} + U_k \frac{\partial k_m}{\partial x_k} = P_m - \varepsilon_m, \\ \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial t} + U_k \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial x_k} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon_m}{k_m} P_m - \overbrace{(C_{\varepsilon 1} + r(C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1}))}^{C_{\varepsilon 2}^P} \frac{\varepsilon_m^2}{k_m}, \end{cases} \quad (2.122)$$

avec la production  $P_m$  de l'énergie modélisée  $k_m$ , et la dissipation modélisée  $\varepsilon_m$ . Le coefficient  $C_{\varepsilon 2}^P$  dépend de la coupure de filtre via le ratio  $r = k_m/k \times \varepsilon/\varepsilon_m$ .

Il est supposé que le nombre d'onde de coupure  $\kappa_c$  est dans la zone inertielle du spectre d'énergie turbulente, ce qui permet de négliger le taux de dissipation résolue  $\varepsilon_r$  devant le taux de dissipation modélisée  $\varepsilon_m$ . Ainsi, on peut estimer que  $\varepsilon = \varepsilon_m$ , et le ratio qui pilote l'hybridation se simplifie alors en  $r = k_m/k$ .

Pour estimer ce ratio d'énergie, une relation peut être trouvée avec le nombre d'onde de coupure  $\kappa_c = \pi/\Delta$ , en supposant que celui-ci est dans la zone inertielle d'un spectre de Kolmogorov (Eq. 2.72) et que le filtre impose une coupure spectrale, tel que :

$$r = \frac{k_m}{k} = \frac{1}{k} \int_{\kappa_c}^{\infty} E(\kappa) d\kappa = \frac{1}{k} \int_{\kappa_c}^{\infty} C_K \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} d\kappa = \frac{3C_K}{2} \left( \kappa_c \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \right)^{-2/3}. \quad (2.123)$$

Pour définir la viscosité de sous-filtre, l'expression donnée par l'hypothèse d'Heisenberg [51] est utilisée, ce qui, en utilisant les mêmes hypothèses que précédemment et les estimations (Eq. 2.101) et (Eq. 2.103) déjà définies dans le cadre du modèle de Deardorff, donne :

$$\begin{cases} k_m = \int_{\kappa_c}^{\infty} E(\kappa) d\kappa = \frac{3C_K}{2} \varepsilon^{2/3} \kappa_c^{2/3} \\ \nu_m = C_\nu \int_{\kappa_c}^{\infty} \kappa^{-3/2} E(\kappa)^{1/2} d\kappa = \frac{3}{4} C_\nu C_K^{1/2} \varepsilon^{1/3} \kappa_c^{-4/3} \end{cases} \Rightarrow \nu_m = C_\mu \frac{k_m^2}{\varepsilon}, \quad (2.124)$$

avec  $C_\mu = 1/3 C_\nu C_K^{-3/2}$ , et on rappelle que  $\varepsilon \stackrel{\text{hyp.}}{=} \varepsilon_m$  pour relier les équations (2.122) et (2.124).

Finalement, l'analyse précédente permet de définir les équations pour les grandeurs statistiquement moyennées, mais, dans le cadre de la formulation PITM, ce sont les équations pour les grandeurs de sous-filtre qui sont recherchées. On considère que les valeurs résolues fluctuent autour de leurs moyennes. De ce fait, en utilisant les mêmes modifications pour les équations filtrées que pour les équations moyennes, on suppose que les valeurs résolues sont modifiées de manière similaire. La validité de cette hypothèse a notamment été discutée par Fadai-Ghotbi *et al.* [35]. Dans ce contexte, les équations (2.122) pour l'énergie et le taux de dissipation modélisées ( $k_m = \overline{k_{\text{sfs}}}$ ,  $\varepsilon_m = \overline{\varepsilon_{\text{sfs}}}$ ) restent valables pour l'énergie et le taux de dissipation de sous-filtre ( $k_{\text{sfs}}$ ,  $\varepsilon_{\text{sfs}}$ ). Enfin, les termes de diffusion usuels, indispensables pour traiter les écoulements inhomogènes, sont introduits dans le modèle.

Le modèle  $k$ - $\varepsilon$  PITM s'écrit :

$$\nu_{\text{sfs}} = C_\mu \frac{k_{\text{sfs}}^2}{\varepsilon_{\text{sfs}}}, \quad (2.125)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial k_{\text{sfs}}}{\partial t} + \tilde{U}_j \frac{\partial k_{\text{sfs}}}{\partial x_j} = \nu_{\text{sfs}} \tilde{S}^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_{\text{sfs}}}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k_{\text{sfs}}}{\partial x_j} \right] - \varepsilon_{\text{sfs}}, \\ \frac{\partial \varepsilon_{\text{sfs}}}{\partial t} + \tilde{U}_j \frac{\partial \varepsilon_{\text{sfs}}}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon_{\text{sfs}}}{k_{\text{sfs}}} \nu_{\text{sfs}} \tilde{S}^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_{\text{sfs}}}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_{\text{sfs}}}{\partial x_j} \right] - C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}} \frac{\varepsilon_{\text{sfs}}^2}{k_{\text{sfs}}}, \end{cases} \quad (2.126)$$

avec la fonction d'hybridation et le ratio d'énergie :

$$C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}} = C_{\varepsilon 1} + r(C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1}) \quad \text{et} \quad r = \frac{k_m}{k} = \frac{3C_K}{2} \left( \frac{\pi k^{3/2}}{\Delta \varepsilon} \right)^{-2/3}. \quad (2.127)$$

Les coefficients sont définis comme pour le modèle  $k$ - $\varepsilon$  :

$C_\mu$	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

Il est intéressant de caractériser le comportement du PITM dans les différentes branches.

- En mode RANS, étant donné que  $r = 1$ , on obtient que  $C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}} = C_{\varepsilon 2}$  et la formulation exacte du modèle  $k$ - $\varepsilon$  est retrouvée, avec les coefficients  $C_\mu$ ,  $C_{\varepsilon 1}$  et  $C_{\varepsilon 2}$ .
- En mode LES,  $r < 1$  par définition, ce qui implique que  $C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}} < C_{\varepsilon 2}$  donc le terme de destruction de l'équation de  $\varepsilon_{\text{sfs}}$  est diminué et  $\varepsilon_{\text{sfs}}$  augmente. On retrouve ensuite le même mécanisme qu'en DES, avec une diminution de  $k_{\text{sfs}}$  et de  $\nu_{\text{sfs}}$ , qui active graduellement le mode LES. Fadai-Ghotbi *et al.* [35] ont notamment montré que la branche LES du PITM était compatible avec le modèle de Smagorinsky. En faisant une hypothèse d'équilibre des échelles modélisées ( $P_m = \varepsilon_m = \varepsilon$ ), et en introduisant un coefficient de corrélation  $C_c$ , on obtient :

**Avec le modèle de Smagorinsky,**  
(Eq. 2.97)

$$\varepsilon = C_S^2 \Delta^2 \tilde{S}^2{}^{3/2}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \left( \frac{2}{3C_K} \right)^{3/2} \left( \frac{\Delta}{\pi} \right)^2 \tilde{S}^2{}^{3/2},$$

**Avec le modèle PITM,**  
(Eq. 2.126)

$$\varepsilon = P_m = \overline{\nu_{\text{sfs}} \tilde{S}^2} = C_c C_\mu \frac{\overline{k_{\text{sfs}}^2}}{\overline{\varepsilon_{\text{sfs}}}} \tilde{S}^2 = C_c C_\mu \frac{k_m^2}{\varepsilon} \tilde{S}^2$$

$$\Rightarrow \varepsilon = C_c^{3/2} C_\mu^{3/2} \left( \frac{3C_K}{2} \right)^3 \left( \frac{\Delta}{\pi} \right)^2 \tilde{S}^2{}^{3/2}$$

qui sont équivalents si

$$C_\mu = \frac{1}{C_c} \left( \frac{2}{3C_K} \right)^3. \quad (2.128)$$

Si on suppose que  $C_c \simeq 1$ , étant donné que  $C_\mu = 0.09$  et  $(2/3C_K)^3 \simeq 0.088$ , la relation est bien approximée. La branche LES du PITM et le modèle de Smagorinsky sont donc équivalents. Cela permet d'identifier les principales relations entre les coefficients, comme avec l'équation (2.107), et de vérifier que, en mode LES, le modèle PITM se comporte comme un modèle LES préexistant (sans retrouver cependant la formulation exacte).

### 2.3.3.4 Autres modèles hybrides de la littérature

Outre les modèles DES et PITM, il existe de nombreux modèles hybrides dans la littérature, dont les plus connus sont présentés succinctement ci-dessous (voir les revues récentes de l'état de l'art des approches hybrides RANS-LES réalisées par Chaouat [16] et Heinz [50]).

- Le PANS (*Partially Averaged Navier-Stokes*), dont la formulation a été proposée par Girimaji *et al.* [47, 46], est semblable au PITM pour la forme générale, bien que le développement du modèle repose sur des bases différentes en utilisant un opérateur de moyenne partielle. La sensibilisation du modèle à la coupure du filtre apparaît dans le terme de destruction de l'équation de  $\varepsilon_{\text{sfs}}$ . Le contrôle de la transition est exercé via le ratio d'énergie  $f_k = k_m/k$ , comme en PITM, et le ratio de dissipation  $f_\varepsilon = \varepsilon_m/\varepsilon$  est également supposé égal à un.

À l'origine, l'application du modèle est différente du PITM car le ratio d'énergie  $f_k$  est imposé par l'utilisateur en PANS, et ne dépend pas d'une taille de filtre estimée au cours du calcul. Néanmoins, la récente revue des méthodes par Davidson et Friess [23], montre qu'il existe aujourd'hui un vaste panel d'approches pour estimer  $f_k$  au cours du calcul, dont certaines sont très semblables à l'équation (2.127) en PITM.

- Le SAS (*Scale Adaptive Simulation*) développé par Menter et Egorov [80] est une méthode auto-adaptative qui ne fait pas intervenir explicitement la taille de filtre. Pour modifier le terme de destruction de l'équation de transport de  $k_{\text{sfs}}$ , elle fait appel au rapport de l'échelle de longueur de turbulence  $L$  et la celle de Von Kármán :  $L/(C_\kappa S \|\nabla \mathbf{U}\|)$  avec  $C_\kappa$  le coefficient de Von Kármán, ce qui permet d'activer le mode LES dans les régions caractérisées par un fort cisaillement.

## 2.3.4 Modèles hybrides RANS-LES avec filtrage temporel

### 2.3.4.1 Intérêt du filtrage temporel pour les méthodes hybrides

L'intérêt d'utiliser des approches avec un filtrage temporel dans le cadre de la modélisation hybride RANS-LES a été démontré par Fadaï-Ghotbi *et al.* [36]. Comme expliqué dans la section 2.3.3.1, la propriété de consistance doit être respectée afin de valider le fait que l'opérateur de filtrage tend bien vers l'opérateur de moyenne statistique quand la taille de filtre tend vers l'infini. Cette propriété est en fait seulement vérifiée sous certaines hypothèses, qui peuvent influencer le choix de l'opérateur de filtrage.

**Dans le cadre d'un filtrage spatial**, la consistance est vérifiée pour :

- ✓ un écoulement homogène.

Dans cette situation, la moyenne statistique est équivalente à la moyenne spatiale dans un domaine infini. Cette hypothèse est très rarement vérifiée dans un contexte industriel.

**Dans le cadre d'un filtrage temporel**, la consistance est vérifiée pour :

- ✓ un écoulement inhomogène statistiquement stationnaire,

comme démontré par Fadaï-Ghotbi *et al.* [36]. Dans ce cas, l'opérateur de filtrage tend vers l'opérateur de moyenne temporelle sur un temps infini, qui est équivalent à la moyenne statistique en vertu de l'hypothèse d'ergodicité. Cette hypothèse est compatible avec de nombreuses configurations d'écoulements rencontrées dans l'industrie.

Ainsi, l'utilisation d'un opérateur de filtrage temporel semble bien plus appropriée pour traiter des écoulements en configurations industrielles, qui sont bien souvent inhomogènes mais statistiquement stationnaires. Dans les cas instationnaires, Manceau [75] a montré qu'on pouvait néanmoins hybrider la TLES avec l'URANS (*Unsteady RANS*), dans la mesure où les équations de l'URANS sont identiques aux équations de la TLES lorsque la taille du filtre correspond à l'échelle temporelle intégrale.

### 2.3.4.2 Invariance galiléenne et filtre temporel uniforme

L'utilisation d'un filtre temporel eulérien  $\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = \mathcal{G}_{\Delta_T}(t, t')\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  semble intéressante, comme dans l'équation (2.77) de la section 2.3.1.2, mais Speziale [111] a montré que cet opérateur de filtrage ne respecte pas l'invariance Galiléenne : si  $\mathbf{x}^\dagger = \mathbf{x} - \mathbf{V}_0 t$ , alors  $\widetilde{\mathbf{U}}^\dagger(\mathbf{x}^\dagger, t) = \widetilde{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{V}_0$ . Afin de préserver la propriété d'invariance galiléenne des équations de Navier-Stokes, l'opérateur de filtrage doit respecter cette même propriété.

Pour satisfaire cette invariance, Fadai-Ghotbi *et al.* [36] ont défini le filtre temporel uniforme, qui fait partie de la famille des filtres temporels généralisés introduits subséquentement par Manceau [75] :

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = \delta(\xi(\mathbf{x}, t, t') - \mathbf{x}')\mathcal{G}_{\Delta_T}(t, t') \quad \Rightarrow \quad \langle U_i^* \rangle(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^t \mathcal{G}_{\Delta_T}(t, t') U_i^*(\xi(\mathbf{x}, t, t'), t') dt'. \quad (2.129)$$

Si  $\xi$  est la trajectoire d'une particule fluide, alors l'opérateur est la moyenne lagrangienne. L'intégration temporelle est effectuée en considérant un point d'application  $\xi$  en mouvement. La vitesse  $\mathbf{V}_{\text{ref}}$  de ce point a été choisi comme étant uniforme pour obtenir la formulation la plus simple possible.

Le filtre temporel uniforme s'écrit :

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}' + (t' - t)\mathbf{V}_{\text{ref}})\mathcal{G}_{\Delta_T}(t, t') \quad \text{avec} \quad \xi(\mathbf{x}, t, t') = \mathbf{x} + (t' - t)\mathbf{V}_{\text{ref}}. \quad (2.130)$$

L'idée est alors de choisir  $\mathbf{V}_{\text{ref}} = \mathbf{0}$  dans le référentiel pour lequel l'écoulement est statistiquement stationnaire, pour, dans ce référentiel :

- retrouver la formule du spectre temporel eulérien :

$$\widetilde{U}_i(\mathbf{x}, t) = \langle U_i^* \rangle(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^t \mathcal{G}_{\Delta_T}(t, t') U_i^*(\mathbf{x}, t') dt'. \quad (2.131)$$

- assurer la consistance de l'opérateur de filtrage dans le cadre temporel,

$$U_i(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta_T \rightarrow +\infty} \widetilde{U}_i(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta_T \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^t \mathcal{G}_{\Delta_T}(t, t') U_i^*(\mathbf{x}, t') dt', \quad (2.132)$$

### 2.3.4.3 Développement d'un modèle hybride temporel : le TPITM

En utilisant le filtre temporel uniforme, Fadai-Ghotbi *et al.* [36] ont proposé une version temporelle du PITM [102], car le modèle repose sur l'un des formalismes les plus solides parmi les nombreuses approches hybrides existantes. La dérivation du modèle TPITM (*Temporal Partially Integarted Transport Model*) peut être conduite dans un cadre analogue, fondée sur une analyse dans le domaine fréquentiel pour une turbulence inhomogène statistiquement stationnaire (hypothèse moins contraignante que la turbulence homogène en PITM).

De manière similaire au cadre spatial, le spectre d'énergie temporel eulérien  $E_T$  est subdivisé en trois zones : résolue  $[0, \omega_c]$ , modélisée  $[\omega_c, \omega_d]$  et dissipative  $[\omega_d, \infty]$ , où  $\omega_c$  est la fréquence de coupure du filtre et  $\omega_d$  une fréquence suffisamment grande pour que l'énergie dans la zone dissipative soit négligeable comparée à l'énergie dans la zone modélisée. L'équation de transport de  $E_T$  est intégrée dans la zone  $[\omega_c, \omega_d]$ , pour obtenir le système d'équations du modèle. La même fonction d'hybridation  $C_{\varepsilon_2}^P$  est obtenue que dans le cadre spatial.

La viscosité turbulente est modélisée avec la même formulation qu'en PITM, ce qui, comme nous le montrerons dans la section 3.2.2.2, est justifié en utilisant l'hypothèse d'Heisenberg [51] dans un cadre temporel.

Pour des variables statistiquement moyennées, le modèle TPITM s'écrit :

$$\nu_m = C_\mu \frac{k_m^2}{\varepsilon_m}, \quad (2.133)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial k_m}{\partial t} + U_k \frac{\partial k_m}{\partial x_k} = P_m + D_{k_m} - \varepsilon_m, \\ \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial t} + U_k \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial x_k} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon_m}{k_m} P_m + D_{\varepsilon_m} - C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}} \frac{\varepsilon_m^2}{k_m}, \end{cases} \quad (2.134)$$

avec  $D_{k_m}$  et  $D_{\varepsilon_m}$  les termes de diffusion de  $k_m$  et  $\varepsilon_m$ . On note bien que  $\varepsilon = \varepsilon_m$  ( $\varepsilon_r$  est négligeable), en supposant que  $\omega_c$  se situe hors de la zone dissipative [75]. Le modèle est sensibilisé à la taille du filtre en utilisant la fonction d'hybridation  $C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}$  dans le terme de destruction de l'équation de transport de  $\varepsilon_m$ , pilotée par le ratio d'énergie  $r$ , de telle sorte que :

$$C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}} = C_{\varepsilon 1} + r(C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1}), \quad \text{avec} \quad r = \frac{k_m}{k}. \quad (2.135)$$

Le ratio d'énergie  $r$  est estimé sous des hypothèses similaires à celles de la PITM : fréquence de coupure  $\omega_c$  dans la zone inertielle d'un spectre de Kolmogorov. Une expression analogue à l'équation (2.123) est retrouvée (voir la section 3.2.4 pour les détails) en utilisant la relation de dispersion  $\omega = \kappa\sqrt{k}$  (Eq. 2.70, dans le cas où la vitesse est nulle) définie par Tennekes [119] :

$$r = \frac{3C_K}{2} \left( \kappa_c \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \right)^{-2/3} = \frac{3C_K}{2} \left( \omega_c \frac{k}{\varepsilon} \right)^{-2/3}. \quad (2.136)$$

En ce qui concerne l'analyse du modèle TPITM dans les branches RANS ( $r = 1$ ) et LES ( $r < 1$ ), une analyse similaire à celle de la PITM (section 2.3.3.3) peut être conduite pour vérifier que la fermeture  $k$ - $\varepsilon$  est bien retrouvée en mode RANS, et lorsque  $r < 1$ , la diminution du terme de destruction de l'équation de  $\varepsilon_m$  va réduire la part de l'énergie modélisée, ainsi que la viscosité modélisée, faisant basculer le modèle en mode LES.

Finalement, il est important de signaler que le modèle TPITM a également été appliqué à la fermeture RANS  $k$ - $\omega$  SST par Bentaléb *et al.* [8].

## 2.4 Conclusion

Ce chapitre bibliographique a permis de présenter les prérequis scientifiques de la thèse, et notamment les différentes méthodes de simulation et de modélisation de la turbulence (DNS, RANS, LES, hybride), en s'intéressant à la part du spectre d'énergie turbulente qui est résolue avec chaque méthodologie.

L'approche statistique et la modélisation RANS ont été présentées en portant une attention particulière à la formulation des équations de transport exactes des variables statistiquement moyennées, avant de s'intéresser plus spécifiquement aux modèles utilisés dans cette thèse :  $k$ - $\varepsilon$ ,  $k$ - $\omega$  SST et  $BL-v^2/k$ . Cela a permis de mettre en évidence les termes modélisés qui sont modifiés, ou non, lorsque la méthode d'hybridation HTLES est appliquée.

Dans le cadre de l'approche filtrée, les caractéristiques principales des spectres d'énergie turbulente spatial et temporel ont été rappelées, en définissant notamment les relations utilisées entre l'espace des nombres d'onde et celui des fréquences. Les opérateurs de filtrage les plus courants ont été présentés et illustrés. L'approche à filtrage généralisée de Germano a été utilisée pour définir les équations de transport des moments. Dans le cadre de l'invariance à la moyenne, il a été rappelé que ces équations de transport sont formellement identiques aux équations de transport statistiques. Les modèles LES de Smagorinsky et de Deardorff ont été présentés, en

rappelant les principales hypothèses effectuées lors du développement théorique des modèles, notamment : filtre à coupure spectrale dans la zone inertielle d'un spectre de Kolmogorov.

Les approches hybrides RANS-LES ont été exprimées via un formalisme de filtrage. Dans ce cadre, la consistance de l'opérateur de filtrage avec l'opérateur de moyenne statistique et la similarité de forme des équations en modes LES et RANS fournissent une base solide pour développer des approches hybrides globales, avec un unique système d'équations sensibilisé à la taille de filtre. Les formulations des méthodes DES (comparaison de l'échelle globale et de l'échelle locale) et PITM (dépendance au ratio d'énergie modélisée sur totale) ont été données.

Dans la dernière partie, l'intérêt du filtrage temporel dans le contexte hybride est rappelé, en soulignant que la propriété de consistance est alors vérifiée dans la plupart des situations rencontrées dans le contexte industriel, ce qui n'est pas le cas avec le filtrage spatial. La définition du filtre temporel uniforme est donnée, en soulignant les principaux avantages de cette définition, en particulier pour satisfaire l'invariance galiléenne. Le développement d'une version temporelle du PITM est finalement présenté. Le modèle TPITM est adopté comme l'approche hybride temporelle de référence, ce qui permet, dans le prochain chapitre, de développer le modèle HTLES, en garantissant un critère d'équivalence entre les approches hybrides.



# Chapitre 3

## Développement de la nouvelle formulation HTLES

### Sommaire

---

<b>3.1 Développement original de la HTLES</b> . . . . .	<b>56</b>
3.1.1 Problématique . . . . .	56
3.1.2 Transfert de la fonction d'hybridation . . . . .	57
3.1.3 Critère d'équivalence entre les approches hybrides . . . . .	57
3.1.4 Analyse des perturbations . . . . .	58
3.1.5 Développement d'un premier modèle H-Equivalent à la TPITM . . . . .	59
3.1.6 Développement original de la HTLES . . . . .	60
<b>3.2 Nouvelle formulation HTLES</b> . . . . .	<b>61</b>
3.2.1 Problématique . . . . .	61
3.2.2 Proposition d'un nouveau système d'équation . . . . .	62
3.2.3 H-Equivalence et analyse des perturbations . . . . .	64
3.2.4 Évaluation du ratio d'énergie lié à la fréquence de coupure . . . . .	66
3.2.5 Modèle $k-\varepsilon$ HTLES . . . . .	67
3.2.6 Application de la HTLES au modèle $k-\omega$ SST . . . . .	68
3.2.7 Application de la HTLES au modèle $BL-\overline{v^2}/k$ . . . . .	73
<b>3.3 Consistance entre les approches hybrides et LES</b> . . . . .	<b>76</b>
3.3.1 Problématique et démarche . . . . .	76
3.3.2 Formulation du modèle hybride . . . . .	77
3.3.3 Consistance avec des modèles RANS et LES standards . . . . .	79
3.3.4 Conclusion . . . . .	79
<b>3.4 Décroissance de turbulence isotrope</b> . . . . .	<b>80</b>
3.4.1 Introduction . . . . .	80
3.4.2 Description du cas test . . . . .	82
3.4.3 Initialisation et paramètres numériques . . . . .	83
3.4.4 Calibration et validation des modèles . . . . .	86
<b>3.5 Conclusion</b> . . . . .	<b>91</b>

---



Ce chapitre est consacré au développement théorique de la HTLES (*Hybrid Temporal Large Eddy Simulation*), en s'appuyant tout d'abord sur les travaux de Friess *et al.* [39] qui ont introduit le critère de *H-Equivalence*, puis en proposant une nouvelle formulation du modèle dans le cadre d'une fermeture au premier ordre, permettant d'obtenir un formalisme plus cohérent. Les développements sont effectués en associant la HTLES au modèle de fermeture standard  $k-\varepsilon$ , avant d'appliquer la méthode hybride à différents modèles RANS :  $k-\omega$  SST et  $BL-\overline{v^2}/k$ . Des développements analytiques similaires sont conduits dans le cadre spatial, permettant de proposer un modèle hybride, fondé sur une modification d'échelle, qui tend explicitement vers le modèle de Deardorff en mode LES. Enfin, le comportement dissipatif du modèle, en tenant compte de l'influence des schémas numériques, est caractérisé sur une décroissance de turbulence isotrope, ce qui permet de calibrer le principal coefficient du modèle.

## 3.1 Développement original de la HTLES

### 3.1.1 Problématique

Comme montré dans le Chapitre 2, l'utilisation du filtrage temporel est particulièrement intéressante pour développer des approches hybrides, assurant notamment la consistance entre les branches RANS et LES de la formulation dans les situations statistiquement stationnaires (section 2.3.4.1). Le modèle TPITM [36] (section 2.3.4.3), illustre le développement théorique d'une approche hybride dans le cadre temporel. La formulation TPITM transitionne continûment, en fonction du ratio d'énergie  $r = k_m/k$ , d'un modèle de fermeture RANS ( $r = 1$ ) à un comportement LES ( $r \ll 1$ ) grâce à la fonction d'hybridation  $C_{\varepsilon 2}^P$ .

Malgré ses fondements théoriques solides, l'utilisation du modèle TPITM souffre de certaines limitations. Notamment, le pilotage du niveau de résolution en fonction de la taille de filtre s'avère complexe, car il n'est pas directement contrôlé dans l'équation de transport de l'énergie modélisée  $k_m$ , mais seulement indirectement contrôlé via la fonction d'hybridation dans l'équation de transport du taux de dissipation modélisée  $\varepsilon_m$  (voir le système d'équations (H0) dans la section suivante). Comme montré dans les thèses de Carpy [15] et Fadai-Ghotbi [34], des macros-fluctuations, induites par les gradients de vitesse du terme production, influent sur le niveau d'énergie, ce qui ne permet pas de maintenir les fluctuations turbulentes résolues. Une pseudo-laminarisation des écoulements est prédite lors des calculs, en particulier lorsque l'écoulement n'est pas dominé par une instabilité de type Kelvin-Helmholtz.

Pour pallier ce problème, une première solution proposée par Schiestel et Dejoan [102] consiste à moyenner les termes sources dans la viscosité de sous-filtre, ou dans le terme de production (Carpy [15], Fadai-Ghotbi [34]). Malgré des résultats satisfaisants, le fait de moyenner le terme de production ne paraît pas approprié dans un cadre filtré. Dans sa thèse, Friess [38] propose d'utiliser une approche dynamique, qui vise à piloter le niveau d'énergie, en modifiant la fonction d'hybridation  $C_{\varepsilon 2}^P$ . Ces modifications sont fondées sur une comparaison du ratio d'énergie « observé » lors du calcul, et d'un ratio d'énergie « cible » imposé. Les résultats sont concluants [38], en ce qu'ils permettent de maintenir des simulations instationnaires, mais ils présentent un manque de généralité en raison de la nécessité d'effectuer un calcul précurseur pour estimer la valeur cible du ratio d'énergie, et de la dépendance à un coefficient empirique d'amortissement.

### 3.1.2 Transfert de la fonction d'hybridation

Friess *et al.* [39] ont proposé une méthode alternative dans le but de maintenir les fluctuations résolues. L'idée est de transférer la fonction d'hybridation  $C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}$  de l'équation de  $\varepsilon_m$  à l'équation de  $k_m$ , en définissant une nouvelle fonction d'hybridation  $\psi$ . Ce transfert est effectué en garantissant un critère d'équivalence entre les approches hybrides, expliqué dans la section 3.1.3. Le pilotage du niveau de résolution s'avère beaucoup plus robuste lorsque la fonction d'hybridation est présente dans l'équation de transport de l'énergie modélisée, comme en DES [108].

Dans le système TPITM (H0), les deux variables transportées sont l'énergie modélisée  $k_m$  et la dissipation modélisée  $\varepsilon_m$ . Dans le nouveau système d'équations (H1), dans lequel la fonction d'hybridation  $\psi$  est introduite, la première variable transportée est l'énergie modélisée  $k_m$  par définition. Dans un souci de clarté de l'écriture, nous proposons ici d'introduire une nouvelle variable  $\varepsilon_m^*$  dans la seconde équation de transport du système (H1) :

$$(H0) \begin{cases} \nu_m = C_\mu \frac{k_m^2}{\varepsilon_m} \\ \frac{Dk_m}{Dt} = P_m + D_{k_m} - \varepsilon_m, \\ \frac{D\varepsilon_m}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon_m}{k_m} P_m + D_{\varepsilon m} - C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}} \frac{\varepsilon_m^2}{k_m}, \end{cases} \quad (H1) \begin{cases} \nu_m = C_\mu \frac{k_m^2}{\varepsilon_m^*} \\ \frac{Dk_m}{Dt} = P_m + D_{k_m} - \psi \varepsilon_m^*, \\ \frac{D\varepsilon_m^*}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon_m^*}{k_m} P_m + D_{\varepsilon m}^* - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_m^{*2}}{k_m}, \end{cases}$$

où  $P_m$  est la production de  $k_m$ , et  $D_{k_m}$ ,  $D_{\varepsilon m}$  et  $D_{\varepsilon m}^*$  sont les termes de diffusion respectifs de  $k_m$ ,  $\varepsilon_m$  et  $\varepsilon_m^*$ . Ce choix d'introduire une nouvelle variable dans le système (H1) est justifié, car, lors de l'étape de transfert de la fonction d'hybridation, rien n'indique *a priori* que les variables transportées par les secondes équations des systèmes (H0) et (H1) sont les mêmes.

La question qui se pose alors est d'identifier la relation entre les fonctions d'hybridation  $C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}$  et  $\psi$ , et pour ce faire, un critère d'équivalence entre les approches hybrides est défini.

### 3.1.3 Critère d'équivalence entre les approches hybrides

Friess *et al.* [39] ont développé un critère d'équivalence entre deux approches hybrides partageant la même fermeture, mais utilisant différentes méthodes d'hybridation pour sensibiliser le modèle à la taille de filtre. Le principe repose sur une similarité statistique pour les moments et corrélation au premier et second ordre : si le niveau d'énergie modélisée donné par les deux méthodes est similaire, alors les champs résolus devraient être similaires également étant donné que les deux systèmes d'équations ne diffèrent que par le terme d'hybridation. Friess *et al.* [39] ont proposé le postulat suivant :

#### Postulat

Deux approches hybrides fondées sur le même modèle de fermeture mais utilisant différentes méthodes pour contrôler la répartition de l'énergie, vont conduire aux mêmes statistiques d'ordre bas pour le champ de vitesse résolu, à condition qu'elles conduisent au même niveau d'énergie de sous-filtre.

En se fondant sur ce postulat, Friess *et al.* [39] ont défini le critère de *H-Equivalence* ( $H$  pour hybride).

#### *H-Equivalence*

Deux approches hybrides avec la même fermeture mais différentes méthodes d'hybridation sont *H-Equivalentes* si elles conduisent à la même répartition de l'énergie pour la même taille de filtre, et tendent vers le même modèle RANS lorsque la taille de filtre tend vers l'infini.

Il est important de noter que toutes les analyses réalisées dans ce contexte se font dans un cadre statistiquement moyenné. La comparaison entre les variables instantanées ne permet pas de définir de propriétés d'équivalence.

### 3.1.4 Analyse des perturbations

En utilisant le postulat et le critère de *H-Equivalence*, il est maintenant possible de déterminer les relations entre les deux formulations hybrides définies précédemment avec les systèmes d'équations (H0) et (H1), pour lesquels la fermeture est identique (modèle  $k-\varepsilon$  ici car  $C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}} = C_{\varepsilon 2}$  et  $\psi = 1$  en mode RANS), mais la fonction d'hybridation apparaît respectivement dans l'équation de  $\varepsilon_m$  avec  $C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}$  et dans l'équation de  $k_m$  avec  $\psi$ . Pour garantir que les deux modèles soient *H-Equivalents*, l'objectif est d'identifier la relation entre les fonctions d'hybridation qui permet d'assurer le même niveau d'énergie modélisée pour les deux approches.

Pour effectuer cette analyse, une méthode des perturbations est utilisée. Des perturbations infinitésimales des fonctions d'hybridation  $\delta C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}$  et  $\delta\psi$  sont introduites dans les systèmes d'équations (H0) et (H1), ce qui induit des variations infinitésimales de l'énergie modélisée  $\delta k_m$ . De cette manière, une relation entre  $\delta C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}$  et  $\delta\psi$  peut être identifiée pour assurer que la variation  $\delta k_m$  soit exactement la même dans les deux systèmes d'équations. Cette relation est ensuite intégrée entre l'état RANS avec  $C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}} = C_{\varepsilon 2}$  et  $\psi = 1$  (même fermeture  $k-\varepsilon$ , pour laquelle la *H-Equivalence* est assurée étant donné que  $k_m = k$ ) et un état arbitraire en mode LES, afin de déterminer la relation entre  $C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}$  et  $\psi$ .

Dans un cadre général, l'analyse des perturbations s'avère difficile à réaliser en raison de la complexité des systèmes d'équations considérés. Cependant, Friess *et al.* [39] ont montré que l'analyse pouvait être effectuée analytiquement sous certaines hypothèses qui permettent de simplifier la formulation. Les détails de l'analyse en perturbation sont données à la section 3.2.3, où une nouvelle formulation est développée. Seuls les résultats de l'analyse de Friess *et al.* [39] sont résumés ici, permettant d'exprimer la fonction  $\psi$  en fonction du ratio d'énergie  $r = k_m/k$ .

- (i) Pour une turbulence homogène, en supposant que le taux de dissipation n'est pas affecté par la modification de la répartition d'énergie ( $\delta\varepsilon = 0$ ), l'analyse des perturbations donne :

$$\psi(r) = 1 + (C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1})(1 - r). \quad (3.1)$$

- (ii) Pour une turbulence inhomogène dans une conduite droite, en supposant que le taux de dissipation n'est pas affecté par la modification de la répartition d'énergie ( $\delta\varepsilon = 0$ ), l'analyse des perturbations donne :

$$\psi(r) = 1 + \left( \frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 1}} - 1 \right) (1 - r). \quad (3.2)$$

- (iii) Pour une turbulence inhomogène dans une conduite droite, en ne faisant plus d'hypothèses sur le taux de dissipation ( $\delta\varepsilon \neq 0$ ), mais en ne considérant que des modèles à viscosité turbulente, l'analyse des perturbations donne :

$$\psi(r) = 1 + \left( \frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 1}} - 1 \right) \left( 1 - r^{C_{\varepsilon 1}/C_{\varepsilon 2}} \right). \quad (3.3)$$

On remarque que, dans les trois configurations, des expressions différentes de  $\psi(r)$  sont obtenues, même si des similarités sont observées entre les formulations (entre 3.2 et 3.3, la seule différence réside dans la puissance de  $r$ , 1 au lieu de  $C_{\varepsilon 1}/C_{\varepsilon 2} = 0.75$ ). Comme attendu, dans la branche RANS, c'est-à-dire lorsque  $r = 1$ , la même valeur limite  $\psi(1) = 1$  est retrouvée.

*Remarque* : dans les trois configurations, pour conduire l'analyse, Friess *et al.* [39] ont supposé que la seconde variable  $\varepsilon_m^*$  désigne la même quantité qu'en PITM, c'est-à-dire la composante modélisée de la dissipation  $\varepsilon_m$ . De plus, comme on considère que la dissipation résolue est négligeable, on obtient alors  $\varepsilon = \varepsilon_m^*$ . Dans les configurations (i) et (ii), on suppose donc que cette variable n'est pas affectée par la modification de la répartition d'énergie ( $\delta\varepsilon = \delta\varepsilon_m^* = 0$ ).

### 3.1.5 Développement d'un premier modèle H-Equivalent à la TPITM

L'un des objectifs premiers de Friess *et al.* [39] est de montrer le lien entre la TPITM et les méthodes de type DES. La formulation (H1) correspond aux approches de type DES dans le sens où le modèle est hybridé en modifiant le terme de destruction de l'équation de transport de  $k_m$ . De manière analogue à la DES, Friess *et al.* [39] proposent donc d'écrire ce terme comme :

$$\psi(r)\varepsilon_m^* = \frac{k_m^{3/2}}{L}, \quad \text{et} \quad \frac{Dk_m}{Dt} = P_m + D_{k_m} - \frac{k_m^{3/2}}{L}, \quad (3.4)$$

en introduisant une échelle de longueur  $L$ . Il est supposé [39] que  $\varepsilon = \varepsilon_m^*$ , ce qui permet d'écrire :

$$L = \frac{1}{\psi(r)} \frac{k_m^{3/2}}{\varepsilon_m^*} = \frac{r^{3/2}}{\psi(r)} \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} = \frac{r^{3/2}}{\psi(r)} L_{\text{int}}, \quad (3.5)$$

avec l'échelle de longueur intégrale  $L_{\text{int}} = k^{3/2}/\varepsilon$ . Le ratio d'énergie  $r = k_m/k$  est estimé de la même manière qu'en TPITM (Eq. 2.136), en supposant que la fréquence de coupure se trouve dans la zone inertielle d'un spectre de Kolmogorov, et en utilisant la relation de dispersion  $\omega_c = \sqrt{k}\kappa_c$  (Tennekes [119]) avec  $\kappa_c = \pi/\Delta$ , tel que :

$$r = \frac{1}{\beta_0} \left( \frac{\pi}{\Delta} \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \right)^{-2/3} = \frac{1}{\beta_0 \pi^{2/3}} \left( \Delta \frac{\varepsilon}{k^{3/2}} \right)^{2/3}, \quad (3.6)$$

avec le coefficient  $\beta_0 = 2/(3C_K)$ . En introduisant cette expression dans l'équation (3.5), l'échelle de longueur s'exprime sous la forme suivante :

$$L = \frac{\Delta}{\beta_0^{3/2} \pi \psi(r)}. \quad (3.7)$$

Friess *et al.* [39] ont ainsi proposé une formulation équivalente à la TPITM, et dont le lien avec la DES est explicite. En effet, la branche LES de l'approche DES correspond pour sa part à  $L = C_{\text{DES}}\Delta$  (voir section 2.3.3.2), où l'on identifie grâce à l'équation (3.7) :

$$C_{\text{DES}} \sim \frac{1}{\beta_0^{3/2} \pi \psi(r)} = \frac{C_d}{\psi(r)}, \quad (3.8)$$

en rappelant que le coefficient du modèle de Deardorff est  $C_d = 1/(\beta_0^{3/2} \pi)$  d'après l'équation (2.102). On note cependant que le critère de *H-Equivalence* avec la TPITM conduit à un coefficient  $C_{\text{DES}}$  variable, et non plus constant comme en DES.

Friess *et al.* [39] ont ainsi proposé une formulation appelée *Equivalent-DES*, en l'appliquant à la fermeture au second-ordre EB-RSM [76], décrit dans la section 2.2.3.2. L'hybridation du modèle est effectuée en modifiant le taux de dissipation de sous-filtre dans l'équation de transport de  $\tau_{ij\text{sfs}}$ , définie avec (Eq. 2.63), en écrivant :

$$\varepsilon_{\text{sfs}}^{\text{Eq-DES}} = F_{\text{Eq-DES}} \varepsilon_{\text{sfs}}^*, \quad \text{avec} \quad F_{\text{Eq-DES}} = \max \left[ 1, \frac{k_{\text{sfs}}^{3/2}/\varepsilon_{\text{sfs}}^*}{L} \right]. \quad (3.9)$$

Cette hybridation est similaire à celle de la DES (Eq. 2.115) et (Eq. 2.116), mais en estimant l'échelle de longueur  $L$  avec la formule (3.5). La fonction d'hybridation  $\psi(r)$  est exprimée avec l'équation (3.3) qui a été obtenue dans le cadre le plus général à l'issue de l'analyse des perturbations. Le ratio d'énergie  $r$  est évalué en utilisant la formule (3.6).

### 3.1.6 Développement original de la HTLES

#### 3.1.6.1 Formulation originale de la HTLES

La formulation du modèle HTLES a été établie par Manceau [75], en conduisant un développement analytique similaire à celui défini par Friess *et al.* [39] : une analyse des perturbations infinitésimales est réalisée en préservant le critère de *H-Equivalence* avec la TPITM. En revanche, pour être en conformité avec l'analyse effectuée dans un cadre temporel, Manceau [75] propose d'introduire une échelle de temps  $T$  dans le terme de destruction de l'équation de  $k_m$  du système (H1), de telle sorte que :

$$\psi(r)\varepsilon_m^* = \frac{k_m}{T}, \quad \text{et} \quad \frac{Dk_m}{Dt} = P_m + D_{k_m} - \frac{k_m}{T}. \quad (3.10)$$

La formulation originale du modèle HTLES [75] s'écrit :

$$\nu_{\text{sfs}} = C_\mu \frac{k_{\text{sfs}}^2}{\varepsilon_{\text{sfs}}^*}, \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} \frac{Dk_{\text{sfs}}}{Dt} = P_{\text{sfs}} + D_{k_{\text{sfs}}} - \frac{k_{\text{sfs}}}{T}, \\ \frac{D\varepsilon_{\text{sfs}}^*}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon_{\text{sfs}}^*}{k_{\text{sfs}}} P_{\text{sfs}} + D_{\varepsilon_{\text{sfs}}^*} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_{\text{sfs}}^{*2}}{k_{\text{sfs}}}, \end{cases} \quad (3.12)$$

où l'échelle de temps  $T$  est définie comme :

$$T = \frac{k_m}{\psi(r)\varepsilon_m^*} = \frac{r}{\psi(r)} \frac{k}{\varepsilon}, \quad \text{avec} \quad \psi(r) = 1 + \left( \frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 1}} - 1 \right) \left( 1 - r^{C_{\varepsilon 1}/C_{\varepsilon 2}} \right), \quad (3.13)$$

en supposant que  $\overline{\varepsilon_{\text{sfs}}^*} = \varepsilon_m^* \stackrel{\text{hyp.}}{=} \varepsilon$  (comme pour le modèle développé dans le section 3.1.5).

De la même manière qu'en TPITM [36], le passage du système d'équations (H1), pour les variables statistiquement moyennées ( $k_m$ ,  $\varepsilon_m^*$ ), au système d'équations (3.12), pour les variables de sous-filtre ( $k_{\text{sfs}}$ ,  $\varepsilon_{\text{sfs}}^*$ ), est effectué en supposant que les variables de sous-filtre varient autour de leurs valeurs moyennes ( $\overline{k_{\text{sfs}}} = k_m$ ,  $\overline{\varepsilon_{\text{sfs}}^*} = \varepsilon_m^*$ ). Le pilotage de l'hybridation par l'échelle de temps  $T$  a donc le même effet pour les deux systèmes.

La formulation originale de la HTLES a été testée dans un premier temps par Tran *et al.* [121] en calibrant le modèle sur le cas test de la décroissance d'une turbulence isotrope et en étudiant l'écoulement autour d'un cylindre infini à section carrée. La validation de la méthode hybride, appliquée au  $k$ - $\omega$  SST, a été poursuivie par Afailal *et al.* [2] sur les cas tests académiques du canal plan et de la colline périodiques. De plus, Afailal *et al.* [2] ont testé le modèle sur une configuration industrielle, un écoulement autour d'une valve fixe dans un conduit cylindrique, montrant de bonnes prédictions de la HTLES comparées au RANS.

#### 3.1.6.2 Analyse du comportement dans les branches RANS et LES

On s'intéresse ici au terme de destruction  $k_{\text{sfs}}/T$  de l'équation de transport de  $k_{\text{sfs}}$  (Eq. 3.12), piloté par le ratio d'énergie  $r$ . Si  $r = 1$ , c'est-à-dire que toute l'énergie est modélisée, le modèle est en mode RANS. Au contraire, si  $r < 1$ , le modèle est en mode LES puisqu'une partie de l'énergie est résolue. On note que la fonction d'hybridation  $\psi(r)$  (Eq. 3.3) est continue décroissante sur l'intervalle de définition de  $r \in [0, 1]$  : son minimum est atteint en mode RANS quand  $r = 1$  ( $\psi(1) = 1$ ), et son maximum est atteint quand  $r \rightarrow 0$  ( $\psi(0) = C_{\varepsilon 2}/C_{\varepsilon 1}$ ). On peut effectuer l'analyse suivante :

$$T = \frac{r}{\psi(r)} \frac{k}{\varepsilon} = \frac{1}{\psi(r)} \frac{k_m}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{k_{\text{sfs}}}{T} = \frac{k_{\text{sfs}}}{k_m} \psi(r) \varepsilon \simeq \begin{cases} \varepsilon, & \text{si } r = 1 \quad (\text{RANS}) \\ \psi(r)\varepsilon, & \text{si } r < 1 \quad (\text{LES}) \end{cases}$$

où l'approximation  $k_{\text{sfs}}/k_m = k_{\text{sfs}}/\overline{k_{\text{sfs}}} \simeq 1$  est faite, ce qui est vrai en mode RANS puisque  $k_{\text{sfs}} = \overline{k_{\text{sfs}}} = k_m = k$  quand la taille de filtre tend vers l'infini en garantissant la consistance de l'opérateur de filtrage temporel, et donne un ordre de grandeur moyen en mode LES en considérant que l'énergie des fluctuations est centrée autour de la moyenne statistique.

Ainsi, dans la branche RANS, la formulation du modèle  $k$ - $\varepsilon$  est exactement retrouvée. Dans la branche LES, le terme de destruction de l'équation de  $k_{\text{sfs}}$  est augmenté (comme en DES), provoquant une diminution de l'énergie de sous-filtre et de la viscosité de sous-filtre, et ainsi une augmentation des fluctuations turbulentes résolues.

### 3.1.6.3 Principales différences entre les approches HTLES et DES

Comme le rappelle Manceau [75], il est important de souligner les différences entre la DES et la HTLES, car même si le principe général d'hybridation consistant à modifier le terme de destruction de l'équation de  $k_{\text{sfs}}$  est similaire (en augmentant ce terme en mode LES), les différences sont notables dans l'écriture des fonctions d'hybridations :

- la DES est fondée sur un ratio d'échelles de longueur, alors que la HTLES est fondée sur une échelle temporelle dépendante d'un ratio d'énergie calculé au moyen d'un filtre temporel ;
- dans le terme de dissipation de l'équation de transport de l'énergie de sous-filtre,  $k_{\text{sfs}}$  apparaît avec une puissance 3/2 en DES, et 1 en HTLES ;
- la transition RANS-LES est fondée sur des comparaisons de grandeurs instantanées ( $k_{\text{sfs}}, \varepsilon_{\text{sfs}}$ ) en DES, et de grandeurs moyennes ( $k_m, \varepsilon$ ) en HTLES ;
- la DES est fondée de manière empirique, sans formalisme sous-jacent explicite ; alors que la HTLES est développée en portant une attention particulière à la propriété de consistance de l'opérateur de filtrage et en préservant un critère d'équivalence avec la méthode hybride TPITM fondée sur un formalisme théorique solide ;
- la taille de filtre spatial  $\Delta$  apparaît explicitement en DES, alors que c'est le ratio d'énergie  $r$  qui apparaît en HTLES.

Ainsi, la méthode pourrait être appliquée de façon adaptative en estimant le ratio d'énergie  $r$  au cours du calcul en fonction de la résolution locale, sans référence explicite à la taille de filtre. Cependant, Manceau [75] propose tout de même d'exprimer  $r$  en fonction de  $\Delta$  (Eq. 2.136), de la même manière qu'en TPITM (plus de détails dans la section 3.2.4, dans le cadre de la nouvelle formulation HTLES).

## 3.2 Nouvelle formulation HTLES

### 3.2.1 Problématique

La méthode de dérivation (transfert de la fonction d'hybridation, *H-Equivalence* et analyse des perturbations) et la formulation originale HTLES présentée dans la section précédente, ont été développées en s'appuyant sur des fondations bien définies, et le modèle a été validé sur différents cas tests. Cependant, une des hypothèses fondamentales effectuées n'apparaît pas toujours pertinente dans le cadre de ces développements.

Dans le cadre de l'analyse des perturbations infinitésimales, pour effectuer les développements numériques, Friess *et al.* [39] ont fait l'hypothèse que (i) la seconde variable transportée est le taux de dissipation modélisée :  $\varepsilon_m^* = \varepsilon_m$ . En réalité, cette hypothèse n'est pas cohérente avec les autres hypothèses de développement du modèle. C'est le cas par exemple lorsque le mode LES du système d'équations (H1) est activé dans la zone logarithmique de la couche limite turbulente.



Dans ce cas, l'équilibre entre le terme de production et le terme de destruction de l'équation de transport de  $k_m$  impose :

$$P_m = \psi(r)\varepsilon_m^*. \quad (3.14)$$

En mode LES, en considérant que la fréquence de coupure est dans la zone inertielle du spectre d'énergie turbulente, on obtient que (ii) toute la dissipation est modélisée  $\varepsilon = \varepsilon_m$  (le taux de dissipation résolue  $\varepsilon_r$  est négligeable), et que (iii) l'équilibre entre la production et la dissipation  $P_m = \varepsilon$  est respecté. Sous l'hypothèse (i) précédente, les relations (ii) et (iii) impliquent alors que  $P_m = \varepsilon_m^*$ , ce qui entre en contradiction avec (Eq. 3.14) étant donné que  $\psi(r) > 1$  lorsque le mode LES est activé.

En conclusion, il n'est pas cohérent d'invoquer l'hypothèse  $\varepsilon_m = \varepsilon_m^*$  pour définir le système (H1). C'est donc à une analyse plus précise de la variable  $\varepsilon_m^*$  que la section suivante va être consacrée.

### 3.2.2 Proposition d'un nouveau système d'équation

#### 3.2.2.1 Identification du terme de dissipation

Nous proposons ici de reprendre l'analyse de Friess *et al.* [39], en transférant la fonction d'hybridation de l'équation de transport de  $\varepsilon$  en TPITM à l'équation de transport de  $k_m$  pour améliorer la robustesse numérique de la formulation. On rappelle ici les équations de transport de l'énergie modélisée dans le système (H0), en TPITM, et dans le nouveau système d'équations (H1), dans lequel la fonction d'hybridation  $\psi$  est introduite, ainsi que la nouvelle variable  $\varepsilon_m^*$  :

$$(H0) \quad \frac{Dk_m}{Dt} = P_m + D_{k_m} - \varepsilon_m, \quad (H1) \quad \frac{Dk_m}{Dt} = P_m + D_{k_m} - \psi\varepsilon_m^*. \quad (3.15)$$

Dans le système (H0), la variable  $\varepsilon_m$  transportée par la seconde équation est le taux de dissipation de  $k_m$  par définition (terme de destruction de son équation de transport), tandis que dans le système (H1), l'introduction de la fonction d'hybridation  $\psi$  implique que le taux de dissipation de  $k_m$  est :

$$\varepsilon_m = \psi\varepsilon_m^*. \quad (3.16)$$

Cela permet d'identifier la relation entre les secondes variables transportées  $\varepsilon_m$  et  $\varepsilon_m^*$ , dans le système TPITM (H0) et le nouveau système HTLES, nommé (H1').

#### 3.2.2.2 Évaluation de la viscosité turbulente modélisée

Que ce soit pour la TPITM (H0) ou la HTLES (H1'), la définition de la viscosité turbulente modélisée  $\nu_m$  mérite une attention particulière. De manière similaire au développement de la PITM par Chaouat et Schiestel [17], présenté dans la section 2.3.3.3, l'hypothèse d'Heisenberg [51] est invoquée pour définir  $\nu_m$ .

Cependant, l'expression étant originellement définie dans un cadre spatial, il est nécessaire de la reformuler dans le domaine fréquentiel. Pour ce faire, il est rappelé que la relation entre le spectre d'énergie spatial et le spectre d'énergie temporel eulérien est  $dk = E(\kappa)d\kappa = E_T(\omega)d\omega$  (Eq. 2.69) et Tennekes [119] a proposé la relation de dispersion suivante  $\omega = U_s \kappa$  (Eq. 2.70), où  $U_s$  est la vitesse de balayage (*sweeping velocity*, Eq. 2.71), c'est-à-dire la vitesse de convection des échelles de nombre d'onde  $\kappa$  par les plus grandes échelles turbulentes (de la taille de l'échelle intégrale). En effectuant les changements de variable, avec le nombre d'onde de coupure  $\kappa_c$  et la fréquence de coupure  $\omega_c$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
\nu_m &= C_\nu \int_{\kappa_c}^{\infty} \kappa^{-3/2} E(\kappa)^{1/2} d\kappa \\
&= C_\nu \int_{\omega_c}^{\infty} (U_s^{3/2} \omega^{-3/2}) (U_s^{1/2} E_T(\omega)^{1/2}) (U_s^{-1} d\omega) \\
&= C_\nu \int_{\omega_c}^{\infty} U_s \omega^{-3/2} E_T(\omega)^{1/2} d\omega.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Afin de simplifier cette expression, le cadre théorique utilisé par Schiestel et Dejoan [102] pour développer la PITM (voir section 2.3.3.3) est utilisé : le nombre d'onde de coupure  $\kappa_c$  est dans la zone inertielle d'un spectre de Kolmogorov  $E(\kappa) = C_K \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}$  (Eq. 2.72). De la même manière, en faisant l'hypothèse d'un spectre eulérien à l'équilibre [119], avec la fréquence de coupure  $\omega_c$  dans la zone inertielle du spectre d'énergie temporel eulérien, caractérisée par  $E_T(\omega) = C_K \varepsilon^{2/3} U_s^{2/3} \omega^{-5/3}$  (Eq. 2.73), on obtient :

$$\begin{cases} k_m = \int_{\omega_c}^{\infty} E_T(\kappa) d\omega & = \frac{3C_K}{2} \varepsilon^{2/3} U_s^{2/3} \omega_c^{-2/3} \\ \nu_m = C_\nu \int_{\omega_c}^{\infty} U_s \omega^{-3/2} E_T(\omega)^{1/2} d\omega & = \frac{3}{4} C_\nu C_K^{1/2} \varepsilon^{1/3} U_s^{4/3} \omega_c^{-4/3} \end{cases} \Rightarrow \nu_m = C_\mu \frac{k_m^2}{\varepsilon}, \tag{3.18}$$

avec  $C_\mu = 1/3 C_\nu C_K^{-3/2} \simeq 0.0907$ .

Il est intéressant de vérifier ici que cette formule théorique, dérivée dans un cadre spatial avec la PITM par Schiestel et Dejoan [102], est bien retrouvée dans un cadre temporel avec la TPITM et la HTLES.

- En TPITM (système H0), la viscosité modélisée a été définie comme  $\nu_m = C_\mu k_m^2 / \varepsilon_m$ . En notant que  $\varepsilon = \varepsilon_m$  [36] ( $\omega_c$  est dans la zone inertielle du spectre d'énergie turbulente), la définition de la viscosité modélisée est équivalente à celle donnée par (Eq. 3.18). De cette manière, la proposition faite par Fadai-Ghotbi *et al.* [36] de conserver la même définition de la viscosité modélisée en PITM et TPITM est théoriquement justifiée.
- Dans la première formulation de la HTLES [75], fondée sur le système (H1) développé par Friess *et al.* [39], la seconde variable transportée est directement utilisée dans la définition de la viscosité turbulente (de manière analogue à la DES), telle que  $\nu_m = C_\mu k_m^2 / \varepsilon_m^*$ . Cette expression est bien en accord avec (Eq. 3.18) si l'on considère l'hypothèse  $\varepsilon = \varepsilon_m^*$ , mais, comme expliqué dans la section 3.2.1, cela entre en contradiction avec la possibilité d'un champ modélisé à l'équilibre. Sinon, l'expression de la viscosité turbulente ne correspond pas à (Eq. 3.18).

- Dans la nouvelle formulation de la HTLES, on a identifié que le terme de dissipation de l'équation de  $k_m$  est  $\varepsilon_m = \psi \varepsilon_m^*$  (Eq. 3.16). En supposant toujours que la composante résolue de la dissipation est négligeable en mode LES, on obtient :

$$\varepsilon \stackrel{\text{hyp.}}{=} \varepsilon_m \stackrel{\text{déf.}}{=} \psi \varepsilon_m^*. \tag{3.19}$$

Dans ce cas, pour retrouver l'expression donnée par (Eq. 3.18), il est nécessaire d'introduire la fonction d'hybridation  $\psi$  dans la définition de la viscosité turbulente :

$$\nu_m = C_\mu \frac{k_m^2}{\psi \varepsilon_m^*}. \tag{3.20}$$



En conclusion, dans le cadre d'une fermeture au premier ordre à viscosité turbulente, le système d'équations (H0) en TPITM [36], et le système d'équations (H1'), pour la nouvelle formulation HTLES, s'écrivent de manière plus complète :

$$(H0) \begin{cases} \nu_m = C_\mu \frac{k_m^2}{\varepsilon_m}, \\ \frac{Dk_m}{Dt} = P_m + D_{k_m} - \varepsilon_m, \\ \frac{D\varepsilon_m}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon_m}{k_m} P_m + D_{\varepsilon_m} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_m^2}{k_m}, \end{cases} \quad (H1') \begin{cases} \nu_m = C_\mu \frac{k_m^2}{\psi \varepsilon_m^*}, \\ \frac{Dk_m}{Dt} = P_m + D_{k_m} - \psi \varepsilon_m^*, \\ \frac{D\varepsilon_m^*}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon_m^*}{k_m} P_m + D_{\varepsilon_m^*} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_m^{*2}}{k_m}. \end{cases}$$

Quel que soit le modèle, le terme de destruction de l'équation de transport de  $k_m$  et le terme de dissipation dans la définition de la viscosité turbulente modélisée sont exactement les mêmes,  $\psi \varepsilon_m^*$  correspondant au taux de dissipation modélisé  $\varepsilon_m$ .

### 3.2.3 H-Equivalence et analyse des perturbations

De la même manière que dans les développements originaux, la question qui se pose une fois les systèmes d'équations (H0) et (H1') définis est d'identifier la relation entre les fonctions d'hybridation  $C_{\varepsilon 2}^P$  et  $\psi$ . Dans ce contexte, le critère de *H-Equivalence* défini par Friess *et al.* [39], présenté dans la section 3.1.3, est utilisé, en considérant le même postulat.

La *H-Equivalence* entre les systèmes (H0) et (H1') est assurée si les deux méthodes tendent vers la même fermeture quand la taille de filtre tend vers l'infini, et renvoie la même répartition de l'énergie turbulente pour une taille de filtre donnée. Ainsi, en utilisant la fermeture  $k$ - $\varepsilon$ , l'objectif de l'analyse est d'identifier la relation entre les fonctions d'hybridation  $C_{\varepsilon 2}^P$  et  $\psi$ , de telle sorte que le modèle renvoie la même valeur pour l'énergie modélisée  $k_m$ .

L'analyse des perturbations est conduite en partant de la limite RANS pour laquelle la *H-Equivalence* est assurée ( $k = k_m$ ). Des perturbations infinitésimales des fonctions d'hybridation  $\delta C_{\varepsilon 2}^P$  et  $\delta \psi$  sont introduites dans les systèmes (H0) et (H1'), qui restent équivalents tant que la même variation infinitésimale de l'énergie modélisée  $\delta k_m$  est obtenue.

Comme expliqué dans la section 3.1.4, Friess *et al.* [39] ont montré que l'analyse des perturbations peut être réalisée dans trois situations particulières. Nous nous plaçons ici sous les hypothèses les moins restrictives pour assurer la meilleure généralité du développement : une turbulence inhomogène dans une conduite droite, sans hypothèses sur les variations du taux de dissipation ( $\delta \varepsilon \neq 0$  dans le cadre général), en ne considérant que des modèles à viscosité turbulente (ce qui est l'objectif de la thèse).

Dans cette situation, les deux équations de transport pour  $k_m$  et  $\varepsilon_m^*$  sont à l'équilibre le long des lignes de courant, ce qui permet de réécrire le système d'équation (H1') :

$$\begin{cases} 0 = P_m + D_{k_m} - \psi \varepsilon_m^*, \\ 0 = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon_m^*}{k_m} P_m + D_{\varepsilon_m^*} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_m^{*2}}{k_m}, \end{cases} \quad (3.21)$$

Des perturbations infinitésimales  $\delta \psi$  de  $\psi$  sont introduites dans le système d'équations, ce qui génère des variations infinitésimales de la solution. La relation suivante est obtenue :

$$\begin{cases} 0 = \delta P_m + \delta D_{k_m} - \left( \frac{\delta \psi}{\psi} + \frac{\delta \varepsilon_m^*}{\varepsilon_m^*} \right) \psi \varepsilon_m^*, \\ 0 = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon_m^*}{k_m} P_m \left( \frac{\delta P_m}{P_m} + \frac{\delta \varepsilon_m^*}{\varepsilon_m^*} - \frac{\delta k_m}{k_m} \right) + \delta D_{\varepsilon_m^*} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_m^{*2}}{k_m} \left( 2 \frac{\delta \varepsilon_m^*}{\varepsilon_m^*} - \frac{\delta k_m}{k_m} \right). \end{cases} \quad (3.22)$$

Pour traiter les termes de diffusion, la diffusivité scalaire usuelle est utilisée, avec les coefficients  $\sigma_k$  et  $\sigma_\varepsilon$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{km} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\nu_m}{\sigma_k} \frac{\partial k_m}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{C_\mu}{\sigma_k} \frac{k_m^2}{\psi \varepsilon_m^*} \frac{\partial k_m}{\partial x_k} \right), \\ D_{\varepsilon m}^* = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\nu_m}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon_m^*}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{k_m^2}{\psi \varepsilon_m^*} \frac{\partial \varepsilon_m^*}{\partial x_k} \right), \end{array} \right. \quad \text{tel que} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta D_{km}}{D_{km}} = 3 \frac{\delta k_m}{k_m} - \frac{\delta \varepsilon_m^*}{\varepsilon_m^*} - \frac{\delta \psi}{\psi}, \\ \frac{\delta D_{\varepsilon m}^*}{D_{\varepsilon m}^*} = 2 \frac{\delta k_m}{k_m} - \frac{\delta \psi}{\psi}. \end{array} \right. \quad (3.23)$$

De plus, pour les modèles à viscosité turbulente, le terme de production est donné par :

$$P_m = \overline{P_{\text{sfs}}} = 2C_\mu \frac{\overline{k_{\text{sfs}}^2}}{\psi \varepsilon_{\text{sfs}}^*} \tilde{S}^2 = 2\gamma C_\mu \frac{k_m^2}{\psi \varepsilon_m^*} S^2, \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{\overline{k_{\text{sfs}}^2} \tilde{S}^2}{\frac{\varepsilon_{\text{sfs}}^*}{k_m^2} S^2} \quad (3.24)$$

le coefficient de corrélation, et  $S = \sqrt{2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij}}$  la moyenne statistique du taux de déformations. L'analyse en perturbation permet d'obtenir :

$$\frac{\delta P_m}{P_m} = \frac{\delta \gamma}{\gamma} + 2 \frac{\delta S}{S} + 2 \frac{\delta k_m}{k_m} - \frac{\delta \varepsilon_m^*}{\varepsilon_m^*} - \frac{\delta \psi}{\psi}. \quad (3.25)$$

Finalement, en introduisant les relations (3.23) et (3.25) dans le système d'équations (3.22), il est possible d'isoler la perturbation  $\delta\psi$ , en écrivant :

$$\delta\psi = -\frac{(C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1}\psi)}{C_{\varepsilon 2}} \frac{\psi}{\psi \varepsilon_m^*} \frac{P_m}{\psi \varepsilon_m^*} \left( \frac{\delta k_m}{k_m} - \frac{\delta \gamma}{\gamma} - 2 \frac{\delta S}{S} \right). \quad (3.26)$$

En conduisant la même analyse pour la formulation TPITM, qui est inchangée par rapport aux développements de Friess *et al.* [39] étant donné que le système d'équations (H0) n'est pas modifié, la relation suivante peut être extraite (équation 41 de la référence [39]) :

$$\delta C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}} = (C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}} - C_{\varepsilon 1}) \frac{P_m}{\varepsilon_m} \left( \frac{\delta k_m}{k_m} - \frac{\delta \gamma}{\gamma} - 2 \frac{\delta S}{S} \right). \quad (3.27)$$

En appliquant le postulat de la *H-Equivalence*, c'est-à-dire que la même modification  $\delta k_m$  de l'énergie modélisée conduit aux mêmes variations infinitésimales des statistiques  $(\delta S, \delta \gamma)$ , et en rappelant l'égalité  $\varepsilon_m = \psi \varepsilon_m^*$  (Eq. 3.16), si les systèmes (H0) et (H1') sont *H-Equivalent* pour des valeurs initiales de  $C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}$  et  $\psi$ , alors ils restent équivalents si les perturbations infinitésimales  $\delta C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}$  (Eq. 3.27) et  $\delta\psi$  (Eq. 3.26) vérifient la relation :

$$\frac{\delta C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}}{(C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}} - C_{\varepsilon 1})} = -\frac{C_{\varepsilon 2} \delta\psi}{(C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1}\psi) \psi}. \quad (3.28)$$

Enfin, cette expression est intégrée entre l'état RANS ( $r = 1$ ,  $C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}} = C_{\varepsilon 2}$ ,  $\psi = 1$ ) et un état LES arbitraire, de telle sorte que :

$$\int_{C_{\varepsilon 2}}^{C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}} \frac{1}{x - C_{\varepsilon 1}} dx = - \int_1^\psi \frac{C_{\varepsilon 2}}{(C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1}y)y} dy, \quad (3.29)$$

ce qui, tous calculs faits, conduit à :

$$\psi(r) = \frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}(r)}. \quad (3.30)$$

L'analyse des perturbations a également été effectuée dans les autres situations considérées par Friess *et al.* [39] : turbulence homogène et inhomogène dans une conduite droite, en supposant que taux de dissipation n'est pas affecté par la modification de la répartition de l'énergie, tel que  $\delta\varepsilon = \delta\varepsilon_m = \delta(\psi\varepsilon_m^*)$  d'après (Eq. 3.19). Les calculs sont plus simples à réaliser dans ces situations, et il est montré (voir annexe B) que la même expression de  $\psi(r)$  est toujours obtenue.

Ainsi, dans le cadre de la nouvelle formulation de la HTLES (H1'), pour laquelle les principales différences par rapport à la formulation originale (H1) résident dans la définition de la seconde variable transportée et l'introduction de la fonction d'hybridation  $\psi$  dans l'expression de la viscosité modélisée, l'analyse des perturbations conduit à une même expression dans les trois situations considérées :

$$\psi(r) = \frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}(r)} = \frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 1} + r(C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1})}. \quad (3.31)$$

Le fait de trouver une expression unique pour  $\psi(r)$ , clairement reliée à la fonction d'hybridation  $C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}(r)$ , ce qui n'était pas vérifié dans les développements originaux [39] (voir les expressions obtenues 3.1, 3.2 et 3.3), confirme la meilleure généralité des développements présents, conduisant à la nouvelle formulation (H1').

*Remarque* : de manière plus simple (mais moins générale), on note que la relation  $\psi(r) = C_{\varepsilon 2}/C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}(r)$  permet de relier analytiquement les systèmes d'équations (H0) et (H1'). En effectuant le changement de variables  $\varepsilon_m = \psi(r)\varepsilon_m^* = C_{\varepsilon 2}/C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}(r)\varepsilon_m^*$  dans les systèmes d'équations, et en supposant que le ratio d'énergie  $r$  est constant de telle sorte que les fonctions d'hybridation commutent avec les opérateurs spatiaux et temporels, on obtient :

$$(H0) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu_m = C_\mu \frac{k_m^2}{\psi\varepsilon_m^*}, \quad \frac{Dk_m}{Dt} = P_m + D_{km} - \psi\varepsilon_m^*, \\ \frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}} \frac{D\varepsilon_m^*}{Dt} = \frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}} C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon_m^*}{k_m} P_m + \frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}} D_{\varepsilon m}^* - \frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}} \frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}} \frac{\varepsilon_m^{*2}}{k_m}, \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad (H1').$$

Étant donné que l'hypothèse d'un ratio d'énergie  $r$  constant en espace et en temps est rarement (jamais) vérifiée en pratique, cette remarque n'a pas force de preuve pour justifier l'expression (3.31), mais permet de mettre en évidence les relations entre (H0) et (H1').

### 3.2.4 Évaluation du ratio d'énergie lié à la fréquence de coupure

Le modèle HTLES peut être explicitement relié à la taille de filtre temporel, si le ratio d'énergie  $r$  est évalué analytiquement en fonction de la fréquence de coupure  $\omega_c$  du filtre, comme discuté par Manceau [75]. En faisant l'hypothèse que  $\omega_c$  est dans la zone inertielle d'un spectre d'énergie temporel eulérien à l'équilibre [119], avec un spectre de Kolmogorov (Eq. 2.73), le ratio d'énergie  $r_K$  ( $K$  pour Kolmogorov) est évalué comme :

$$r_K = \frac{k_m}{k} = \frac{1}{k} \int_{\omega_c}^{\infty} E_T(\omega) d\omega = \frac{1}{\beta_0} \left( \frac{U_s}{\sqrt{k}} \right)^{2/3} \left( \omega_c \frac{k}{\varepsilon} \right)^{-2/3}, \quad (3.32)$$

avec le coefficient  $\beta_0 = 2/(3C_K)$ . Cette relation inclut la vitesse de balayage  $U_s$  (Eq. 2.71), l'énergie totale  $k$ , et le taux de dissipation physique estimé par  $\varepsilon = \varepsilon_m = \psi\varepsilon_m^*$  (Eq. 3.19), en considérant que le taux de dissipation résolu est négligeable pour  $\omega_c$  dans la zone inertielle.

La fréquence de coupure du filtre temporel est liée à la fréquence de Nyquist  $\omega_c = 2\pi/\Delta_T$ , avec  $\Delta_T = 2dt$  imposé par le pas de temps  $dt$ . Cependant, la discrétisation spatiale caractérisée par le nombre d'onde de coupure  $\kappa_c = 2\pi/\Delta_L$ , avec  $\Delta_L = 2\Delta$  imposé par la taille de maille locale  $\Delta$ , influe également sur les échelles de temps résolues en filtrant les plus petits tourbillons. La fréquence de coupure peut ainsi être limitée, car la plus haute fréquence observable sur un

maillage donné est la fréquence Eulérienne des plus petits tourbillons résolus, correspondant à la convection des plus petits tourbillons par les plus grands. La relation entre  $\omega_c$  et  $\kappa_c$  peut être établie en utilisant la relation de dispersion  $\omega = U_s \kappa$  (Eq. 2.70) proposée par Tennekes [119]. Dans ce cas, la plus grande fréquence résolue est la combinaison des deux coupures temporelle et spatiale :

$$\omega_c = \min \left[ \frac{\pi}{dt}, \frac{U_s \pi}{\Delta} \right]. \quad (3.33)$$

Il est nécessaire de définir la taille de filtre  $\Delta$  en fonction de la taille caractéristique des mailles. Il a été choisi de définir  $\Delta$  comme la racine cubique du volume de la maille  $\Omega$ , ce qui correspond à la pratique usuelle en LES.

Le ratio d'énergie, associé au système d'équations (H1'), est finalement estimé avec la relation :

$$r_K = \frac{1}{\beta_0} \left( \frac{U_s}{\sqrt{k}} \right)^{2/3} \left( \omega_c \frac{k}{\psi \varepsilon_m^*} \right)^{-2/3} \quad \text{avec} \quad \omega_c = \min \left[ \frac{\pi}{dt}, \frac{U_s \pi}{\Delta} \right] \quad \text{et} \quad \Delta = \Omega^{1/3}. \quad (3.34)$$

### 3.2.5 Modèle $k$ - $\varepsilon$ HTLES

#### 3.2.5.1 Nouvelle formulation de la HTLES

En suivant le développement original de la HTLES par Manceau [75], il est choisi de sensibiliser le modèle à la taille de filtre en introduisant une échelle de temps dans le terme de destruction de l'équation de transport de  $k_m$  (H1'), exprimé par  $\psi \varepsilon_m^* = k_m / T_m$ . Il est noté que dans ce cas,  $T_m$  correspond explicitement à l'échelle de temps des échelles modélisées (ce qui n'était pas le cas dans la formulation HTLES originale) :

$$T_m = \frac{k_m}{\varepsilon_m} = \frac{r}{\psi(r)} \frac{k}{\varepsilon_m^*}, \quad (3.35)$$

et, en introduisant cette expression dans le système (H1'), on obtient :

$$\frac{Dk_m}{Dt} = P_m + D_{k_m} - \frac{k_m}{T_m}. \quad (3.36)$$

Les développements théoriques présentés dans les parties précédentes ont été conduits en considérant des variables statistiquement moyennées ( $k_m = \overline{k_{sfs}}$ ,  $\varepsilon_m^* = \overline{\varepsilon_{sfs}^*}$ ). Cependant, ce sont les équations pour les variables de sous-filtre ( $k_{sfs}$ ,  $\varepsilon_{sfs}^*$ ) qui doivent être résolues dans un modèle hybride RANS-LES. Pour traiter cette question, Chaouat et Schiestel [17] et Fadai-Ghotbi *et al.* [36] ont supposé que le contrôle du niveau d'énergie par les fonctions d'hybridation pouvait s'opérer de la même façon pour les équations moyennées (H1') et les équations de sous-filtre.

Ainsi, la nouvelle formulation du modèle  $k$ - $\varepsilon$  HTLES s'écrit :

$$\nu_{sfs} = C_\mu \frac{k_{sfs}^2}{\psi \varepsilon_{sfs}^*}, \quad (3.37)$$

$$\begin{cases} \frac{Dk_{sfs}}{Dt} = P_{sfs} + D_{k_{sfs}} - \frac{k_{sfs}}{T_m}, \\ \frac{D\varepsilon_{sfs}^*}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon_{sfs}^*}{k_{sfs}} P_{sfs} + D_{\varepsilon sfs}^* - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_{sfs}^{*2}}{k_{sfs}}. \end{cases} \quad (3.38)$$

où l'échelle de temps  $T_m$  est définie comme :

$$T_m = \frac{r}{\psi(r)} \frac{k}{\varepsilon_m^*}, \quad \text{avec} \quad \psi(r) = \frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 1} + r(C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1})}. \quad (3.39)$$

### 3.2.5.2 Analyse du comportement dans les branches RANS et LES

- En mode RANS, pour évaluer la forme limite que prend le modèle, il est noté que lorsque la taille de filtre tend vers l'infini ( $\omega_c = 0$ ), la consistance de l'opérateur de filtrage avec l'opérateur de moyenne statistique implique que les quantités de sous-filtre tendent vers leurs moyennes statistiques, c'est-à-dire que  $k_{\text{sfs}} = k_m = k$ , et donc  $r = 1$ . Étant donné que  $\psi(1) = 1$ , et avec la relation  $\varepsilon_m = \psi \varepsilon_m^*$  (Eq. 3.19), on obtient  $\varepsilon_{\text{sfs}}^* = \varepsilon_m^* = \varepsilon_m = \varepsilon$ . Ainsi, le système d'équations HTLES tend vers le modèle  $k$ - $\varepsilon$  standard :

$$\nu_m = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad \begin{cases} \frac{Dk}{Dt} = P + D_k - \varepsilon, \\ \frac{D\varepsilon}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P + D_\varepsilon - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}. \end{cases} \quad (3.40)$$

- En mode LES, la fréquence de coupure  $\omega_c$  est non nulle ( $\omega_c > 0$ ), ce qui signifie que le ratio d'énergie  $r$  est plus petit que l'unité ( $r < 1$ ). Il est noté que  $\psi(r)$  et le ratio  $r/\psi(r)$  sont respectivement des fonctions décroissantes et croissantes du ratio d'énergie  $r \in [0, 1]$ . De ce fait, quand le ratio d'énergie décroît, l'échelle de temps modélisée  $T_m$  (Eq. 3.35) diminue. En notant que  $T_m = rk/\varepsilon$  (Eq. 3.19), on observe d'autant mieux que, pour une turbulence avec  $k$  et  $\varepsilon$  donnés,  $T_m$  est une fonction croissante de  $r$ . Ainsi, le terme de destruction  $k_{\text{sfs}}/T_m$  de l'équation de  $k_{\text{sfs}}$  augmente lorsque  $r$  diminue, ce qui fait diminuer le niveau d'énergie de sous-filtre. En conséquence, la viscosité de sous-filtre  $\nu_{\text{sfs}}$  est réduite, ce qui est attendu pour que le mode LES soit activé. Le raisonnement peut être schématisé de la façon suivante :

$$r \searrow \Rightarrow \frac{r}{\psi(r)} \searrow \Rightarrow T_m \searrow \Rightarrow \frac{k_{\text{sfs}}}{T_m} \nearrow \Rightarrow k_{\text{sfs}} \searrow \Rightarrow \nu_{\text{sfs}} \searrow.$$

Il est important de remarquer que, en mode LES, le comportement des modèles HTLES et TPITM [36] diffère de celui de la première formulation HTLES [75] ou de la Equivalent-DES [39], bien que le même modèle de fermeture  $k$ - $\varepsilon$  soit retrouvé pour les trois méthodes hybrides en mode RANS. En effet, le terme de destruction de l'équation de transport de  $k_{\text{sfs}}$  se réécrit :

TPITM	Equivalent-DES	HTLES (1 <sup>ère</sup> form.)	HTLES (2 <sup>nde</sup> form.)
$\varepsilon_{\text{sfs}} \simeq \varepsilon$	$\frac{k_{\text{sfs}}^{3/2}}{L} = \frac{k_{\text{sfs}}^{3/2}}{k_m^{3/2}} \psi \varepsilon \simeq \psi \varepsilon$	$\frac{k_{\text{sfs}}}{T} = \frac{k_{\text{sfs}}}{k_m} \psi \varepsilon \simeq \psi \varepsilon$	$\frac{k_{\text{sfs}}}{T_m} = \frac{k_{\text{sfs}}}{k_m} \psi \varepsilon_m^* \simeq \varepsilon$

en supposant que  $k_{\text{sfs}}/k_m \simeq 1$  et  $\varepsilon_{\text{sfs}}/\varepsilon \simeq 1$ . Ainsi, pour la TPITM ou la nouvelle formulation de la HTLES, le terme de destruction de l'équation de  $k_{\text{sfs}}$  est bien le taux de dissipation physique. Pour la *Equivalent-DES* et la première formulation de la HTLES, étant donné que l'on suppose  $\varepsilon = \varepsilon_m^*$ , avec  $\psi(r) > 1$  en mode LES, le terme de destruction est augmenté par rapport au taux de dissipation physique.

## 3.2.6 Application de la HTLES au modèle $k$ - $\omega$ SST

### 3.2.6.1 Intérêt d'appliquer la HTLES au $k$ - $\omega$ SST

Dans les sections précédentes, la méthode hybride HTLES a été appliquée au  $k$ - $\varepsilon$  [58], car ce modèle est un bon candidat pour illustrer et détailler la dérivation des approches hybrides, en raison de la relative simplicité de sa formulation et des deux variables transportées  $k$  et  $\varepsilon$  qui sont fondamentales dans l'analyse (voir section 2.2.2.1). Cependant, l'utilisation du modèle  $k$ - $\varepsilon$  n'est pas toujours pertinente, en particulier lorsque l'étude se focalise sur les régions de proche-paroi, traitées avec des lois de paroi dans le cadre des modèles RANS haut-Reynolds.

La HTLES est donc appliquée à la fermeture  $k-\omega$  SST de Menter [82], un modèle au premier ordre à viscosité turbulente, dont l'utilisation est répandue pour les applications industrielles. Le modèle  $k-\omega$  SST (section 2.2.2.2) repose sur un couplage entre le  $k-\varepsilon$  [58] loin des parois et le  $k-\omega$  [124] en proche paroi pour profiter des avantages des modèles.

La formulation originale de la HTLES [75] a déjà été appliquée à la fermeture  $k-\omega$  SST par Tran *et al.* [121], puis Afailal *et al.* [2]. Dans ces deux études, l'expression de la fonction d'hybridation  $\psi$  (Eq. 3.3) définie avec une fermeture  $k-\varepsilon$  a été conservée en considérant la formulation indépendante du modèle de fermeture. Il n'était donc pas nécessaire d'effectuer de nouveau la dérivation théorique du modèle, qui est hybridé en introduisant  $\psi$  dans le terme de destruction de l'équation de  $k_{\text{sfS}}$ , de la même manière que pour le  $k-\varepsilon$ . Au contraire, nous proposons ici deux méthodes pour dériver analytiquement la formulation du  $k-\omega$  SST HTLES :

- **Première proposition** : en dérivant la formulation à partir du modèle hybride  $k-\varepsilon$  HTLES, de manière analogue à la dérivation du modèle RANS  $k-\omega$  SST à partir du modèle  $k-\varepsilon$  :

$$k-\varepsilon \text{ TPITM} \xrightarrow{H\text{-Equivalence}} k-\varepsilon \text{ HTLES} \xrightarrow[\text{de variable}]{\text{Changement}} k-\omega \text{ SST HTLES},$$

- **Seconde proposition** : en effectuant de nouveau l'analyse des perturbations, en garantissant la *H-Equivalence* avec le modèle hybride  $k-\omega$  SST TPITM proposée par Bentaleb *et al.* [8] :

$$k-\varepsilon \text{ TPITM} \xrightarrow[\text{de variable}]{\text{Changement}} k-\omega \text{ SST TPITM} \xrightarrow{H\text{-Equivalence}} k-\omega \text{ SST HTLES}.$$

### 3.2.6.2 Première méthode de dérivation du modèle $k-\omega$ SST HTLES

La première méthode de dérivation du modèle  $k-\omega$  SST HTLES consiste à introduire un changement de variable dans la formulation du modèle  $k-\varepsilon$  HTLES, définie par le système (H1'). Cette dérivation repose exactement sur la même méthode que celle de la branche  $k-\varepsilon$  du  $k-\omega$  SST (section 2.2.2.2). On introduit donc la nouvelle variable  $\omega_m^\bullet$ , définie par  $\varepsilon_m^* = C_\mu k_m \omega_m^\bullet$ . Cette formulation a une première implication, étant donné que  $\varepsilon_m = \psi \varepsilon_m^*$  (Eq. 3.16) et en introduisant la dissipation caractéristique modélisée  $\omega_m$  :

$$\varepsilon_m^* = C_\mu k_m \omega_m^\bullet \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\psi \varepsilon_m^*}_{\varepsilon_m} = C_\mu k_m \underbrace{\psi \omega_m^\bullet}_{\omega_m}, \quad \text{avec} \quad \omega_m = \psi \omega_m^\bullet. \quad (3.41)$$

L'équation de transport de  $\omega_m^\bullet$  est déterminée à partir de celles de  $k_m$  et  $\varepsilon_m^*$  (H1'), en effectuant le changement de variable  $\omega_m^\bullet = \varepsilon_m^*/(C_\mu k_m)$ , ce qui permet d'écrire :

$$\nu_m = \frac{k_m}{\psi \omega_m^\bullet}, \quad \begin{cases} \frac{Dk_m}{Dt} = P_m + D_{k_m} - C_\mu k_m \psi \omega_m^\bullet, \\ \frac{D\omega_m^\bullet}{Dt} = \gamma_\omega \frac{\omega_m^\bullet}{k_m} P_m + D_{\omega_m^\bullet} - \beta_\omega^\bullet \omega_m^{\bullet 2} + C_{\omega_m^\bullet}, \end{cases} \quad (3.42)$$

$$C_{\omega_m^\bullet} = (1 - F_1) 2 \frac{1}{\sigma_{\omega 2}} \frac{\nu_m}{k_m} \frac{\partial \omega_m^\bullet}{\partial x_j} \frac{\partial k_m}{\partial x_j}, \quad (3.43)$$

avec  $D_{\omega_m^\bullet}$  le terme de diffusion de  $\omega_m^\bullet$ ,  $C_{\omega_m^\bullet}$  le terme de corrélation croisée entre  $k_m$  et  $\omega_m^\bullet$ , et les coefficients  $\gamma_\omega$  et  $\beta_\omega^\bullet$  :

$$\gamma_\omega = (C_{\varepsilon 1} - 1) \quad \text{et} \quad \beta_\omega^\bullet = C_\mu (C_{\varepsilon 2} - \psi), \quad (3.44)$$

Il est noté que  $\beta_\omega^\bullet$  est un coefficient variable, fonction de  $\psi$  (pour le modèle RANS standard,  $\psi$  est remplacée par un coefficient égal à un).

Pour conclure sur cette première procédure de dérivation, il est souligné que :

- ✓ le principal avantage de cette procédure est de conserver la même fonction d'hybridation  $\psi$  (Eq. 3.31), quel que soit le modèle de fermeture considéré ;
- ✗ la principale limitation réside dans le fait que la fonction d'hybridation  $\psi$  apparaît explicitement dans la seconde équation de transport via le coefficient variable  $\beta_\omega^\bullet$ , ce qui augmente la complexité de la formulation du modèle. La forme globale du  $k$ - $\omega$  SST HTLES n'est plus exactement similaire à celle du  $k$ - $\varepsilon$  HTLES, pour laquelle la fonction d'hybridation  $\psi$  n'apparaît que dans la définition de  $\nu_m$  et le terme de destruction de l'équation de  $k_m$ .

En raison de la complexité de la formulation, une méthode de dérivation alternative est préférée.

### 3.2.6.3 Seconde méthode de dérivation du modèle $k$ - $\omega$ SST HTLES

La seconde manière de dériver la formulation du  $k$ - $\omega$  SST HTLES est de conduire la même analyse des perturbations que pour la dérivation du  $k$ - $\varepsilon$  HTLES, mais en partant du modèle  $k$ - $\omega$  SST TPITM développé par Bentaléb *et al.* [8]. Le critère de *H-Equivalence* est respecté avec le modèle  $k$ - $\omega$  SST TPITM en transférant la fonction d'hybridation  $\beta_\omega^P$  de l'équation de  $\omega_m$  en TPITM à l'équation de  $k_m$  en HTLES, et en introduisant la nouvelle fonction d'hybridation  $\psi_\omega$  et la nouvelle variable transportée  $\omega_m^*$  :

$k$ - $\omega$ SST TPITM	$k$ - $\omega$ SST HTLES
$\left\{ \begin{array}{l} \nu_m = \frac{k_m}{\omega_m}, \\ \frac{Dk_m}{Dt} = P_m + D_{k_m} - \overbrace{C_\mu k_m \omega_m}^{\varepsilon_m}, \\ \frac{D\omega_m}{Dt} = \gamma_\omega \frac{\omega_m}{k_m} P_m + D_{\omega_m} - \beta_\omega^P \omega_m^2 + C_{\omega_m}, \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \nu_m = \frac{k_m}{\psi_\omega \omega_m^*}, \\ \frac{Dk_m}{Dt} = P_m + D_{k_m} - \overbrace{C_\mu k_m \psi_\omega \omega_m^*}^{\psi \varepsilon_m^*}, \\ \frac{D\omega_m^*}{Dt} = \gamma_\omega \frac{\omega_m^*}{k_m} P_m + D_{\omega_m^*} - \beta_\omega \omega_m^{*2} + C_{\omega_m^*}. \end{array} \right.$

Les termes  $D_{\omega_m}$  et  $D_{\omega_m^*}$  sont les termes de diffusion de  $\omega_m$  et  $\omega_m^*$ ,  $\gamma_\omega$  et  $\beta_\omega$  sont les coefficients usuels :

$$\gamma_\omega = C_{\varepsilon 1} - 1 \quad \text{et} \quad \beta_\omega = C_\mu (C_{\varepsilon 2} - 1). \quad (3.45)$$

et les termes de corrélations croisées  $C_{\omega_m}$  et  $C_{\omega_m^*}$  sont définis par :

$$C_{\omega_m} = (1 - F_1) 2 \frac{1}{\sigma_{\omega 2}} \frac{1/\omega_m}{k_m} \overbrace{\frac{\nu_m}{k_m} \frac{\partial \omega_m}{\partial x_j} \frac{\partial k_m}{\partial x_j}}^{\varepsilon_m}, \quad \text{et} \quad C_{\omega_m^*} = (1 - F_1) 2 \frac{1}{\sigma_{\omega 2}} \frac{1/(\psi \omega_m^*)}{k_m} \overbrace{\frac{\nu_m}{k_m} \frac{\partial \omega_m^*}{\partial x_j} \frac{\partial k_m}{\partial x_j}}^{\psi \varepsilon_m^*}. \quad (3.46)$$

L'analyse du système d'équations du modèle  $k$ - $\omega$  SST TPITM [8] implique que la fréquence caractéristique modélisée  $\omega_m$  est définie avec la relation  $\varepsilon_m = C_\mu k_m \omega_m$ .

Pour la HTLES, de la même manière qu'avec la  $k$ - $\varepsilon$ , la fonction d'hybridation  $\psi_\omega$  est introduite dans la définition de la viscosité turbulente  $\nu_m$ . De cette manière, le terme de dissipation dans l'expression  $\nu_m$  est le même que le terme de dissipation de l'équation de transport de  $k_m$ , et correspond au taux de dissipation physique sous les hypothèses usuelles. En effet, par identification avec les équations du modèle  $k$ - $\varepsilon$  HTLES, on note que :

$$\varepsilon \stackrel{\text{hyp.}}{=} \underbrace{\psi \varepsilon_m^*}_{\varepsilon_m} \stackrel{\text{déf.}}{=} C_\mu k_m \underbrace{\psi_\omega \omega_m^*}_{\omega_m}, \quad \text{avec} \quad \omega_m = \psi_\omega \omega_m^*. \quad (3.47)$$

On souligne la similarité de cette expression avec l'équation (3.41) définie lors de la première dérivation (section 3.2.6.2). Cependant, ces deux expressions n'ont pas été définies en utilisant la même méthode, et les variables transportées  $\omega_m^\bullet$  et  $\omega_m^*$  ne sont pas les mêmes du fait que l'expression de la fonction d'hybridation  $\psi_\omega$  n'a aucune raison *a priori* d'être identique à celle de  $\psi$  (Eq. 3.31).



Pour définir l'expression de  $\psi_\omega$ , l'analyse des perturbations est conduite dans les mêmes situations que pour le  $k-\varepsilon$ , en respectant le critère de *H-Equivalence* avec le  $k-\omega$  SST TPITM [8]. Quelle que soit la situation considérée, la même fonction d'hybridation est obtenue :

$$\psi_\omega(r) = \frac{\beta_\omega}{\beta_\omega^P(r)} = \frac{\beta_\omega}{C_\mu \gamma_\omega + r(\beta_\omega - C_\mu \gamma_\omega)}. \quad (3.48)$$

Une similarité est observée entre les expressions des fonctions d'hybridation  $\psi(r) = C_{\varepsilon 2}/C_{\varepsilon 2}^P(r)$  (Eq. 3.31) et  $\psi_\omega(r) = \beta_\omega/\beta_\omega^P(r)$  (Eq. 3.48), obtenues avec les fermetures respectives  $k-\varepsilon$  et  $k-\omega$  SST. La valeur limite des fonctions d'hybridation lorsque  $r \rightarrow 0$  (limite DNS) est néanmoins très différente :

$k-\varepsilon$ HTLES		$k-\omega$ SST HTLES	
RANS	DNS	RANS	DNS
$r = 1$	$r \rightarrow 0$	$r = 1$	$r \rightarrow 0$
$\psi(1) = 1$	$\psi(0) = \frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 1}} \simeq 1.33$	$\psi_\omega(1) = 1$	$\psi_\omega(0) = \frac{\beta_\omega}{C_\mu \gamma_\omega} \simeq 2.09$

La suite du développement du modèle  $k-\omega$  SST HTLES est identique à celle du  $k-\varepsilon$  HTLES. L'échelle de temps modélisée  $T_m$  est introduite dans le terme de destruction de l'équation de  $k_m$ , telle que  $C_\mu k_m \psi_\omega \omega_m^* = k_m/T_m$  :

$$T_m = \frac{1}{C_\mu \omega_m} = \frac{r}{\psi_\omega(r)} \frac{k}{C_\mu k_m \omega_m^*}. \quad (3.49)$$

Puis, le système d'équations pour les variables de sous-filtre ( $k_{\text{sfs}}, \omega_{\text{sfs}}^*$ ) est dérivé du système pour les variables statistiquement moyennées ( $k_m, \omega_m^*$ ), en supposant que les relations trouvées pour contrôler le niveau d'énergie restent valables, comme cela a été fait avec la fermeture  $k-\varepsilon$ .

Finalement, le modèle  $k-\omega$  SST HTLES s'écrit :

$$\nu_{\text{sfs}} = \frac{k_{\text{sfs}}}{\psi_\omega \omega_{\text{sfs}}^*}, \quad (3.50)$$

$$\begin{cases} \frac{Dk_{\text{sfs}}}{Dt} = P_{k_{\text{sfs}}} + D_{k_{\text{sfs}}} - \frac{k_{\text{sfs}}}{T_m}, \\ \frac{D\omega_{\text{sfs}}^*}{Dt} = \underbrace{\gamma_\omega \frac{\omega_{\text{sfs}}^*}{k_{\text{sfs}}} P_{\text{sfs}}}_{P_{\omega_{\text{sfs}}^*}} + D_{\omega_{\text{sfs}}^*}^* - \beta_\omega \omega_{\text{sfs}}^{*2} + C_{\omega_{\text{sfs}}^*}^*, \end{cases} \quad (3.51)$$

où l'échelle de temps  $T_m$  est définie comme :

$$T_m = \frac{r}{\psi_\omega(r)} \frac{k}{C_\mu k_m \omega_m^*}, \quad \text{avec} \quad \psi_\omega(\omega) = \frac{\beta_\omega}{C_\mu \gamma_\omega + r(\beta_\omega - C_\mu \gamma_\omega)}. \quad (3.52)$$

La relation pour estimer  $r$  est dérivée de (Eq. 3.53), en notant que  $\varepsilon = \psi \varepsilon_m^* = C_\mu k_m \psi_\omega \omega_m^*$  :

$$r_K = \frac{1}{\beta_0} \left( \frac{U_s}{\sqrt{k}} \right)^{2/3} \left( \omega_c \frac{k}{C_\mu k_m \psi_\omega \omega_m^*} \right)^{-2/3} \quad \text{avec} \quad \omega_c = \min \left[ \frac{\pi}{dt}, \frac{U_s \pi}{\Delta} \right] \quad \text{et} \quad \Delta = \Omega_l^{1/3}. \quad (3.53)$$



Le comportement général du modèle dans les branches RANS et LES est similaire à celui du  $k-\varepsilon$  HTLES défini dans la section 3.2.5.2 : en mode LES,  $T_m$  diminue, donc  $k_{\text{sfs}}/T_m$  augmente, ce qui réduit le niveau de  $k_{\text{sfs}}$  et  $\nu_{\text{sfs}}$  ; en mode RANS,  $k_{\text{sfs}} \rightarrow k$  et  $\omega_{\text{sfs}}^* \rightarrow \omega = \varepsilon/(C_\mu k)$  (par consistance de l'opérateur de filtrage, et en notant que  $\psi_\omega(1) = 1$ ), et la formulation du modèle  $k-\omega$  SST est retrouvée.

### Traitement des termes correctifs

Menter [82] a introduit de nombreux termes correctifs dans la formulation du  $k-\omega$  SST (voir la section 2.2.2.2), qu'il est judicieux de maintenir lorsque le modèle est associé à la méthode HTLES.

- (i) Dans la formulation RANS, la viscosité turbulente est modifiée en utilisant l'hypothèse de Bradshaw. Dans le cadre hybride, pour conserver une cohérence avec le modèle de fermeture sous-jacent, la viscosité de sous-filtre est modifiée avec :

$$\nu_{\text{sfs}} = \frac{a_1 k_{\text{sfs}}}{\max[a_1 \psi_\omega \omega_{\text{sfs}}^*; \tilde{S} F_2]} \quad (3.54)$$

- (ii) Un limiteur de production  $P_{k_{\text{sfs}}}$  a été introduit dans l'équation de transport de l'énergie, borné par un terme proportionnel au taux de dissipation modélisé. Pour conserver ce limiteur, qui bloque la création de turbulence dans les régions de points d'arrêt, le terme de production est défini par :

$$P_{k_{\text{sfs}}} = \min[\underbrace{\nu_{\text{sfs}} \tilde{S}^2}_{P_{\text{sfs}}}; a_2 C_\mu k_{\text{sfs}} \psi_\omega \omega_{\text{sfs}}^*]. \quad (3.55)$$

- (iii) Pour le terme de production de la seconde équation  $P_{\omega_{\text{sfs}}}$ , Menter [82] a souligné qu'il est souhaitable de conserver la simplification entre le terme de dimensionnement  $\omega_{\text{sfs}}^*/k_{\text{sfs}}$  et la viscosité turbulente  $\nu_{\text{sfs}} = k_{\text{sfs}}/(\psi_\omega \omega_{\text{sfs}}^*)$  pour découpler les deux équations de transport :

$$P_{\omega_{\text{sfs}}} = \gamma_\omega \frac{1}{\psi_\omega} \tilde{S}^2. \quad (3.56)$$

On note que, en mode RANS, ces expressions sont bien équivalentes aux correctifs usuels (section 2.2.2.2), étant donné que  $\psi_\omega(1) = 1$  et que la propriété de consistance du filtre est vérifiée.

### Traitement des fonctions de couplage

Les fonctions de couplage  $F_1$  et  $F_2$  entre les branches  $k-\varepsilon$  et  $k-\omega$  sont dépendantes des variables transportées :  $k$  et  $\omega$  pour le modèle RANS,  $k_{\text{sfs}}$  et  $\omega_{\text{sfs}}^*$  pour le modèle hybride. Étant donné que la signification physique de ces variables est différente, il serait souhaitable de modifier ces fonctions de couplage en mode LES ( $k$  est transformée en  $k_{\text{sfs}}/r$ ,  $\omega$  est transformé en  $\psi_\omega \omega_{\text{sfs}}^*$ , ...).

Cependant, dans la littérature, ces modifications ne sont dans la majorité des cas pas effectuées lorsque des méthodes hybrides sont appliquées à la fermeture  $k-\omega$  SST, que ce soit en DES [116, 122], en TPITM [8] ou avec la formulation originale de la HTLES [2, 121]. Il a donc été choisi, dans un souci de simplicité, de ne pas modifier les définitions de  $F_1$  et  $F_2$ .

*Remarque :* Les profils de  $F_1$  et  $F_2$  avec le modèle  $k-\omega$  SST HTLES sont tracés sur la Figure 4.34 pour l'écoulement en canal plan, ce qui permet d'observer que la transition du modèle de fermeture  $k-\omega$  au  $k-\varepsilon$  en s'éloignant des parois est en phase avec la transition de la méthode hybride du mode RANS au mode LES. Ce comportement correspond aux attentes, étant donné qu'il est souhaité de conserver la formulation  $k-\omega$  dans la zone de proche paroi traitée en mode RANS, et de garder la même formulation du modèle de fermeture ( $k-\varepsilon$  ici) dans toute la zone LES.

### 3.2.7 Application de la HTLES au modèle $BL-\overline{v^2}/k$

#### 3.2.7.1 Intérêt d'appliquer la HTLES au modèle $BL-\overline{v^2}/k$

La méthode hybride HTLES a été appliquée à la fermeture  $k-\varepsilon$ , pour effectuer les développements théoriques, et à la fermeture  $k-\omega$  SST. Il est cependant intéressant d'appliquer la HTLES à un autre modèle bas-Reynolds, afin de caractériser l'influence de la fermeture RANS.

Dans ce contexte, le modèle  $BL-\overline{v^2}/k$  développé par Billard et Laurence [9] semble tout indiqué. En effet, dans la plupart des situations rencontrées, le mode RANS est activé dans la région de proche paroi, or, le  $BL-\overline{v^2}/k$  bénéficie justement d'efforts de modélisation considérables pour améliorer le comportement du modèle dans la couche limite turbulente, en particulier pour représenter l'effet de blocage non-local en utilisant l'approche à pondération elliptique [76] (voir la section 2.2.2.3 pour les détails). C'est donc un modèle intéressant à hybrider, quelle que soit la méthode de sensibilisation à la taille de filtre. Dans la famille des modèles avec relaxation ou pondération elliptique, il est noté qu'Ashton *et al.* [4] ont déjà appliqué la méthode hybride DDES [110] à la fermeture  $\phi-f$  [68], et Fadaï-Gothbi *et al.* [35, 36] et Friess *et al.* [39] ont appliqué leurs méthodologies hybrides au modèle au second ordre EB-RSM [76].

#### 3.2.7.2 Dérivation du modèle $BL-\overline{v^2}/k$ HTLES

La définition du  $BL-\overline{v^2}/k$  HTLES ne nécessite pas de refaire l'analyse des perturbations. Étant donné que la formulation  $BL-\overline{v^2}/k$  est dérivée de celle du  $k-\varepsilon$ , en y adjoignant des équations supplémentaires et des modifications pour reproduire les principaux effets de proche paroi, il est plus aisé de se fonder sur le modèle hybride  $k-\varepsilon$  HTLES (Eq. 3.37 et 3.38), en conservant la même fonction d'hybridation  $\psi$  (Eq. 3.31).

Dans ce contexte, il est cependant nécessaire de revoir la définition des différents termes du  $BL-\overline{v^2}/k$  (voir section 2.2.2.3), pour déterminer les modifications à réaliser dans le cadre de l'hybridation du modèle.

- (i) La nouvelle variable  $\phi_{\text{sfs}}$  est transportée par une équation identique à celle définie dans le cadre RANS [68], en notant que c'est déjà ce qui a été fait par Ashton *et al.* [4] pour définir le  $\phi-f$  DDES. On obtient l'équation de transport suivante, avec le terme de production  $P_{\text{sfs}}$  et le terme source  $f_{\text{sfs}}$  :

$$\frac{\partial \phi_{\text{sfs}}}{\partial t} + \tilde{U}_j \frac{\partial \phi_{\text{sfs}}}{\partial x_j} = -\frac{\phi_{\text{sfs}}}{k_{\text{sfs}}} P_{\text{sfs}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\nu}{2} + \frac{\nu_{\text{sfs}}}{\sigma_\phi} \right) \frac{\partial \phi_{\text{sfs}}}{\partial x_j} \right] + \frac{2}{k_{\text{sfs}}} \frac{\nu_{\text{sfs}}}{\sigma_k} \frac{\partial \phi_{\text{sfs}}}{\partial x_j} \frac{\partial k_{\text{sfs}}}{\partial x_j} + f_{\text{sfs}}. \quad (3.57)$$

- (ii) La fonction d'hybridation  $\psi$  est introduite dans la définition de la viscosité de sous-filtre (voir (iv) pour les détails, et l'écriture de l'échelle de temps  $T_{\text{sfs}}^*$  notamment), avec le coefficient  $C_\mu^\phi = 0.22$  :

$$\nu_t = C_\mu^\phi \phi k T \quad \xrightarrow[\text{en HTLES}]{\text{devient}} \quad \nu_{\text{sfs}} = C_\mu^\phi \phi_{\text{sfs}} \frac{k_{\text{sfs}} T_{\text{sfs}}^*}{\psi}. \quad (3.58)$$

- (iii) Le coefficient  $\alpha$  défini dans le cadre de l'approche à pondération elliptique est utilisé pour pondérer les expressions homogène  $f_{h\text{sfs}}$  et de proche paroi  $f_{w\text{sfs}}$  du terme source  $f_{\text{sfs}}$ . L'équation elliptique est fonction de l'échelle de longueur  $L_{\text{sfs}}$  (définie dans (iv)), de telle sorte que :

$$\begin{aligned}
 \alpha - L^2 \nabla^2 \alpha = 1 & \xrightarrow[\text{en HTLES}]{\text{devient}} \alpha - L_{\text{sfs}}^2 \nabla^2 \alpha = 1, \\
 f = (1 - \alpha^3) f_w + \alpha^3 f_h & \longrightarrow f_{\text{sfs}} = (1 - \alpha^3) f_{w\text{sfs}} + \alpha^3 f_{h\text{sfs}}, \\
 f_w = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi}{k} & \longrightarrow f_{w\text{sfs}} = -\frac{\psi \varepsilon_{\text{sfs}}^*}{2} \frac{\phi_{\text{sfs}}}{k_{\text{sfs}}}, \\
 f_h = -\frac{1}{T} \left( C_{f1} - 1 + C_{f2} \frac{P}{\varepsilon} \right) \left( \phi - \frac{2}{3} \right) & \longrightarrow \\
 f_{h\text{sfs}} = -\frac{\psi \varepsilon_{\text{sfs}}^*}{k_{\text{sfs}}} \left( C_{f1} - 1 + C_{f2} \frac{P_{\text{sfs}}}{\psi \varepsilon_{\text{sfs}}^*} \right) \left( \phi_{\text{sfs}} - \frac{2}{3} \right). & \quad (3.59)
 \end{aligned}$$

Il est important de remarquer ici que lorsque le taux de dissipation physique  $\varepsilon$  intervient dans les expressions RANS, il est remplacé par  $\psi \varepsilon_{\text{sfs}}^*$  dans le modèle hybride, en se fondant sur la relation  $\varepsilon = \varepsilon_m = \psi \varepsilon_m^*$  (Eq. 3.19) établie avec un point de vue statistique. De plus, l'échelle de temps de Durbin  $T$  (Eq. 2.46) qui intervient dans la définition de  $f_h$  est remplacé par  $k_{\text{sfs}}/(\psi \varepsilon_{\text{sfs}}^*)$  au premier terme de  $f_{h\text{sfs}}$  pour simplifier l'écriture. Dans ce cas, le bénéfice du limiteur de Kolmogorov est perdu, mais cette simplification semble acceptable car l'échelle de Kolmogorov est *a priori* négligeable par rapport aux échelles intégrales loin des parois.

(iv) La définition des échelles  $L_{\text{sfs}}$  et  $T_{\text{sfs}}^*$ , originellement les échelles de Dubin (Eq. 2.45 et 2.46) :

$$L = C_L \max \left[ \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \right] \quad \text{et} \quad T = \max \left[ \frac{k}{\varepsilon}, C_T \left( \frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \right], \quad (3.60)$$

nécessite une attention particulière. L'échelle de temps  $T_{\text{sfs}}^*$  intervient dans la définition de la viscosité de sous-filtre et comme échelle de dimensionnement dans l'équation de  $\varepsilon_{\text{sfs}}^*$ . Il ne s'agit donc plus de l'échelle de temps intégrale mais d'une échelle de temps caractéristique des échelles de sous-filtre. On peut voir que ce n'est pas  $\varepsilon_{\text{sfs}}$  mais  $\varepsilon_{\text{sfs}}^*$  qui doit être imposé ( $T_{\text{sfs}}^* \simeq k_{\text{sfs}}/\varepsilon_{\text{sfs}}^*$ ) de manière à vérifier la relation :

$$\nu_{\text{sfs}} = \underbrace{C_\mu \phi_{\text{sfs}}}_{\sim C_\mu} \frac{k_{\text{sfs}} T_{\text{sfs}}^*}{\psi} \simeq C_\mu \frac{k_{\text{sfs}}^2}{\psi \varepsilon_{\text{sfs}}^*}. \quad (3.61)$$

Pour définir  $L_{\text{sfs}}$ , Fadai-Ghotbi *et al.* [35] ont souligné que cette échelle de longueur représente la distance à laquelle l'effet de blocage non-local est ressenti par les échelles modélisées. Pour les échelles résolues, cet effet est explicitement imposé via la résolution des équations filtrées. La part des structures modélisées étant réduite en mode LES,  $L_{\text{sfs}}$  doit être diminuée par rapport à l'échelle intégrale  $L$  utilisée en mode RANS. L'idée est de sensibiliser l'expression à la taille de filtre en notant que la taille maximale des structures modélisées est  $r^{3/2} k^{3/2} / \varepsilon = k_m^{3/2} / (\psi \varepsilon_m^*)$  (avec  $r = k_m/k$  et  $\varepsilon = \varepsilon_m = \psi \varepsilon_m^*$ ), d'où  $L_{\text{sfs}} \simeq k_{\text{sfs}}^{3/2} / (\psi \varepsilon_{\text{sfs}}^*)$  (loin des parois). De même, étant donné que l'échelle de longueur homogène est réduite d'un facteur  $r^{3/2}$ , ce facteur est également introduit devant l'échelle de Kolmogorov, utilisée comme borne en proche paroi.

Enfin, étant donné que le taux de dissipation physique  $\varepsilon$  intervient explicitement dans la définition des échelles de Kolmogorov, la fonction d'hybridation  $\psi$  doit être introduite dans ces expressions. En pratique cela n'a pas d'influence car les échelles de Kolmogorov ne sont *a priori* non négligeables que dans les zones de proche paroi traitées en mode RANS. On obtient finalement :

$$L_{\text{sfs}} = C_L \max \left[ \frac{k_{\text{sfs}}^{3/2}}{\psi \varepsilon_{\text{sfs}}^*}, C_\eta r^{3/2} \left( \frac{\nu^3}{\psi \varepsilon_{\text{sfs}}^*} \right)^{1/4} \right] \quad \text{ou} \quad C_L \sqrt{\frac{k_{\text{sfs}}^3}{(\psi \varepsilon_{\text{sfs}}^*)^2} + C_\eta^2 r^3 \left( \frac{\nu^3}{\psi \varepsilon_{\text{sfs}}^*} \right)^{1/2}}, \quad (3.62)$$

$$T_{\text{sfs}}^* = \max \left[ \frac{k_{\text{sfs}}}{\varepsilon_{\text{sfs}}^*}, C_T \left( \frac{\nu}{\psi \varepsilon_{\text{sfs}}^*} \right)^{1/2} \right] \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{k_{\text{sfs}}^2}{\varepsilon_{\text{sfs}}^{*2}} + C_T^2 \frac{\nu}{\psi \varepsilon_{\text{sfs}}^*}}. \quad (3.63)$$

- (v) Dans le cadre de l'hybridation du modèle  $\text{BL-}\overline{v^2}/k$ , la prise en compte du terme de dissipation  $E$  pose question, car le terme de dissipation de l'équation de  $k$  est défini par :

$$\varepsilon^{\text{BL}} = \varepsilon + E, \quad \text{avec} \quad E = C_{\varepsilon_3} (1 - \alpha)^3 \frac{k}{\varepsilon} 2\nu\nu_t \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_j}, \quad (3.64)$$

Pour la méthode HTLES, en introduisant l'échelle de temps modélisée  $T_m$ , le taux de dissipation de l'équation de  $k_{\text{sfs}}$  s'écrit :

$$\varepsilon_{\text{sfs}}^{\text{BL}} = \frac{k_{\text{sfs}}}{T_m} + E_{\text{sfs}}, \quad \text{ou, dans un cadre statistique,} \quad \overline{\varepsilon_{\text{sfs}}^{\text{BL}}} = \frac{k_m}{T_m} + \overline{E_{\text{sfs}}} = \psi \varepsilon_m^* + \overline{E_{\text{sfs}}}. \quad (3.65)$$

La question s'est posée d'appliquer ou non la fonction d'hybridation  $\psi$  au terme de dissipation  $E_{\text{sfs}}$ , dérivé de  $E$  (Eq. 2.48). Cependant, ce terme représente une correction bas-Reynolds [58], qui n'est active que dans la zone tampon de la couche limite turbulente, traitée en mode RANS ( $\psi(1) = 1$ ). De ce fait, et dans un souci de simplicité, il a été choisi de ne pas appliquer l'hybridation au terme  $E_{\text{sfs}}$ . L'expression de  $E_{\text{sfs}}$  est dérivée de  $E$ , en notant que le terme de dimensionnement  $k/\varepsilon$  devient  $k_{\text{sfs}}/\varepsilon_{\text{sfs}}^*$  avec le nouveau système d'équations, ce qui permet d'écrire :

$$E_{\text{sfs}} = C_{\varepsilon_3} (1 - \alpha)^3 \frac{k_{\text{sfs}}}{\varepsilon_{\text{sfs}}^*} 2\nu\nu_{\text{sfs}} \frac{\partial^2 \tilde{U}_i}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial^2 \tilde{U}_i}{\partial x_k \partial x_j}. \quad (3.66)$$

- (vi) Le coefficient modifié  $C_{\varepsilon_2}^T$  qui apparaît dans le terme de destruction de la seconde équation :

$$C_{\varepsilon_2}^T = C_{\varepsilon_2} + \alpha^3 (C_{\varepsilon_4} - C_{\varepsilon_2}) \tanh \left( \left| \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \right|^{3/2} \right), \quad (3.67)$$

sert à corriger la sous-estimation de  $\varepsilon$  au centre du canal dans la formulation RANS, mais il n'a pas vocation à être conservé en mode LES (correction difficilement généralisable pour des variables instantanées et non plus statistiques). C'est pourquoi le terme est défini de la même manière, mais la composante variable est supprimée en mode LES avec :

$$C_{\varepsilon_2}^T = C_{\varepsilon_2} + (1 - c_r) \alpha^3 (C_{\varepsilon_4} - C_{\varepsilon_2}) \tanh \left( \left| \frac{1}{\varepsilon_{\text{sfs}}^*} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_{\text{sfs}}}{\sigma_k} \frac{\partial k_{\text{sfs}}}{\partial x_j} \right) \right|^{3/2} \right), \quad (3.68)$$

avec  $c_r = 1$  si  $r < 1$  (LES), et  $c_r = 0$  si  $r = 1$  (RANS).

Il est noté que, comme pour le  $k$ - $\omega$  SST HTLES, les différents termes modifiés tendent bien vers leur formulation RANS respective, définies dans la section 2.2.2.3, lorsque le ratio d'énergie  $r$  tend vers l'unité et que la propriété de consistance du filtre est vérifiée ( $\psi \rightarrow 1$ ,  $k_{\text{sfs}} \rightarrow k$ , et  $\varepsilon_{\text{sfs}}^* \rightarrow \varepsilon$ ).

Le modèle BL- $\overline{\nu^2}/k$  HTLES s'écrit finalement :

$$\nu_{\text{sfs}} = C_\mu \phi_{\text{sfs}} \frac{k_{\text{sfs}} T_{\text{sfs}}^*}{\psi}, \quad (3.69)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial k_{\text{sfs}}}{\partial t} + \tilde{U}_j \frac{\partial k_{\text{sfs}}}{\partial x_j} = P_{\text{sfs}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\nu}{2} + \frac{\nu_{\text{sfs}}}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k_{\text{sfs}}}{\partial x_j} \right] - \frac{k_{\text{sfs}}}{T_m} - E_{\text{sfs}}, \\ \frac{\partial \varepsilon_{\text{sfs}}^*}{\partial t} + \tilde{U}_j \frac{\partial \varepsilon_{\text{sfs}}^*}{\partial x_j} = C_{\varepsilon_1} \frac{P_{\text{sfs}}}{T_{\text{sfs}}^*} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\nu}{2} + \frac{\nu_{\text{sfs}}}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_{\text{sfs}}^*}{\partial x_j} \right] - C_{\varepsilon_2}^T \frac{\varepsilon_{\text{sfs}}^*}{T_{\text{sfs}}^*}, \\ \frac{\partial \phi_{\text{sfs}}}{\partial t} + \tilde{U}_j \frac{\partial \phi_{\text{sfs}}}{\partial x_j} = -\frac{\phi_{\text{sfs}}}{k_{\text{sfs}}} P_{\text{sfs}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\nu}{2} + \frac{\nu_{\text{sfs}}}{\sigma_\phi} \right) \frac{\partial \phi_{\text{sfs}}}{\partial x_j} \right] + \frac{2}{k_{\text{sfs}}} \frac{\nu_{\text{sfs}}}{\sigma_k} \frac{\partial \phi_{\text{sfs}}}{\partial x_j} \frac{\partial k_{\text{sfs}}}{\partial x_j} + f_{\text{sfs}}, \end{cases} \quad (3.70)$$

$$P_{\text{sfs}} = \nu_{\text{sfs}} \tilde{S}^2 \quad \text{et} \quad E_{\text{sfs}} = C_{\varepsilon_3} (1 - \alpha)^3 \frac{k_{\text{sfs}}}{\varepsilon_{\text{sfs}}^*} 2\nu_{\text{sfs}} \frac{\partial^2 \tilde{U}_i}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial^2 \tilde{U}_i}{\partial x_k \partial x_j}, \quad (3.71)$$

$$C_{\varepsilon_2}^T = C_{\varepsilon_2} + (1 - c_r) \alpha^3 (C_{\varepsilon_4} - C_{\varepsilon_2}) \tanh \left( \left| \frac{1}{\varepsilon_{\text{sfs}}^*} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_{\text{sfs}}}{\sigma_k} \frac{\partial k_{\text{sfs}}}{\partial x_j} \right) \right|^{3/2} \right), \quad (3.72)$$

avec l'échelle de temps  $T_m$  et la fonction d'hybridation  $\psi$  :

$$T_m = \frac{r}{\psi(r)} \frac{k}{\varepsilon_m^*}, \quad \text{avec} \quad \psi(r) = \frac{C_{\varepsilon_2}}{C_{\varepsilon_1} + r(C_{\varepsilon_2} - C_{\varepsilon_1})}. \quad (3.73)$$

Le terme source pour modéliser la redistribution et l'équation elliptique pour  $\alpha$  s'écrivent :

$$f_{\text{sfs}} = (1 - \alpha^3) f_{w_{\text{sfs}}} + \alpha^3 f_{h_{\text{sfs}}}, \quad (3.74)$$

$$f_{w_{\text{sfs}}} = -\frac{\psi \varepsilon_{\text{sfs}}^*}{2} \frac{\phi_{\text{sfs}}}{k_{\text{sfs}}} \quad \text{et} \quad f_{h_{\text{sfs}}} = -\frac{\psi \varepsilon_{\text{sfs}}^*}{k_{\text{sfs}}} \left( C_{f1} - 1 + C_{f2} \frac{P_{\text{sfs}}}{\psi \varepsilon_{\text{sfs}}^*} \right) \left( \phi_{\text{sfs}} - \frac{2}{3} \right), \quad (3.75)$$

$$\alpha - L_{\text{sfs}}^2 \nabla^2 \alpha = 1, \quad (3.76)$$

et les échelles de longueur et de temps :

$$L_{\text{sfs}} = C_L \sqrt{\frac{k_{\text{sfs}}^3}{(\psi \varepsilon_{\text{sfs}}^*)^2} + C_\eta^2 r^3 \left( \frac{\nu^3}{\psi \varepsilon_{\text{sfs}}^*} \right)^{1/2}} \quad \text{et} \quad T_{\text{sfs}}^* = \sqrt{\frac{k_{\text{sfs}}^2}{\varepsilon_{\text{sfs}}^*} + C_T^2 \frac{\nu}{\psi \varepsilon_{\text{sfs}}^*}}, \quad (3.77)$$

et les constantes :

$C_\mu$	$C_{\varepsilon_1}$	$C_{\varepsilon_2}$	$C_{\varepsilon_3}$	$C_{\varepsilon_4}$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$	$\sigma_\phi$	$C_T$	$C_L$	$C_\eta$	$C_{f1}$	$C_{f2}$
0.22	1.44	1.83	2.3	0.4	1.0	1.5	1.0	4.0	0.164	0.75	1.7	0.9

## 3.3 Consistance entre les approches hybrides et LES

### 3.3.1 Problématique et démarche

Parmi les critiques fréquentes faites à l'encontre des approches hybrides RANS-LES, l'une des principales souligne que la formulation des modèles en mode LES ne correspond apparemment pas aux modèles de sous-maille classiques (modèles de Smagorinsky ou de Deardorff, par exemple). Sans évoquer les méthodes hybrides zonales ou fondées sur un couplage de deux modèles RANS et LES en utilisant des opérateurs de filtrages adéquats (voir la revue de l'état de l'art par Fröhlich et Von Terzi [41]), on s'intéresse ici aux méthodes hybrides qui, pour sensibiliser le modèle à la taille de filtre, introduisent une modification d'échelle au sein d'une formulation RANS. Ces modèles hybrides ne tendent généralement pas vers un modèle LES préexistant lorsque la coupure du filtre est dans la zone inertielle.

L'exemple du modèle DES développé par Spalart *et al.* [108] illustre bien ce propos. Il est en effet montré par Strelets [116] que dans une situation d'équilibre production-dissipation, le modèle est réduit à une formulation « équivalente » à celle du modèle de Smagorinsky. Cependant, le modèle ne tend pas explicitement vers un modèle de sous-maille préexistant en mode LES. De la même manière, en appliquant la DES à une fermeture au premier ordre à deux équations [116, 122], la similarité de la formulation avec le modèle de Deardorff [28] peut également être notée, mais les modèles ne sont pas exactement les mêmes : en DES, la seconde variable transportée est active en mode LES alors que le modèle de Deardorff ne dépend que de l'énergie de sous-filtre transportée. Le modèle XLES de Kok *et al.* [63] permet de retrouver une formulation très proche de celle de Deardorff en mode LES, comme expliqué dans la section 2.3.3.2, mais il est fondé sur des bases empiriques en « forçant » cette équivalence grâce à des comparaisons d'échelles de longueurs bien choisies. Bien évidemment, le même argumentaire peut être fait pour la plupart des modèles hybrides : SAS [80], PANS [46], PITM [102], ou la HTLES, dont la branche LES ne correspond pas à un modèle TLES existant (voir section 2.3.2.5).

L'objectif de cette section est de montrer, pour la première fois, qu'il est possible de **dériver analytiquement un modèle hybride**, fondé sur une modification d'échelle dans une formulation RANS, qui tend explicitement vers :

- ✓ un modèle RANS existant (modèle  $k-\varepsilon$ , servant de base aux développements) lorsque le nombre d'onde de coupure tend vers zéro,
- ✓ un modèle LES existant (modèle de Deardorff) lorsque le nombre d'onde de coupure est dans la zone inertielle du spectre d'énergie.

Cette analyse est effectuée dans un cadre spatial, malgré l'intérêt du filtrage temporel pour les méthodes hybrides (voir la section 2.3.4.1), car les modèles de sous-maille (sgs) classiques sont dérivés avec ce formalisme. Le modèle hybride analysé est néanmoins très proche de la formulation HTLES.

*Remarque :* cette section a été rédigée de manière relativement autoportante, en limitant les références aux éléments présentés dans les sections précédentes.

### 3.3.2 Formulation du modèle hybride

Pour rappel, l'opérateur de filtrage spatial décompose la vitesse instantanée  $U_i^*$  en une composante résolue et une composante modélisée,  $U_i^* = \tilde{U}_i + u_i''$ , avec  $\tilde{U}_i(\mathbf{x}, t) = \langle U_i^*(\mathbf{x}, t) \rangle$ , où l'on considère un filtre spatial à coupure spectrale. Pour une turbulence homogène, la propriété de consistance étant vérifiée, l'opérateur de filtrage spatial  $\langle \cdot \rangle$  tend vers l'opérateur de moyenne statistique  $\overline{\cdot}$  lorsque la taille de filtre  $\Delta$  tend vers l'infini (ou lorsque le nombre d'onde de coupure  $\kappa_c = \pi/\Delta$  tend vers zéro). Les équations pour la vitesse filtrée sont résolues (Eq. 2.85 et 2.86), en utilisant la relation de Boussinesq pour fermer le système d'équations (Eq. 2.94), fondée sur la viscosité de sous-maille  $\nu_{\text{sgs}}$ .

Pour évaluer  $\nu_{\text{m}} = \overline{\nu_{\text{sgs}}}$ , le modèle  $k-\varepsilon$  PITM développé par Schiestel et Dejoan [102] et Chaouat et Schiestel [17] est utilisé, car c'est un modèle hybride spatial fondé sur un formalisme théorique solide, analytiquement développé en se fondant sur des considérations spectrales (voir section 2.3.3.3) pour une turbulence homogène. Les équations de transports pour l'énergie modélisée  $k_{\text{m}} = \overline{k_{\text{sgs}}}$  et la dissipation modélisée  $\varepsilon_{\text{m}} = \overline{\varepsilon_{\text{sgs}}}$  s'écrivent dans ce contexte :

$$\nu_{\text{m}} = C_{\mu} \frac{k_{\text{m}}^2}{\varepsilon_{\text{m}}}, \quad \begin{cases} \frac{Dk_{\text{m}}}{Dt} = P_{\text{m}} - \varepsilon_{\text{m}}, \\ \frac{D\varepsilon_{\text{m}}}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon_{\text{m}}}{k_{\text{m}}} P_{\text{m}} - C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}} \frac{\varepsilon_{\text{m}}^2}{k_{\text{m}}}, \end{cases} \quad (3.78)$$

où  $P_{\text{m}}$  est le terme de production de  $k_{\text{m}}$ . Le contrôle de la transition RANS-LES est effectué grâce à la fonction d'hybridation  $C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}} = C_{\varepsilon 1} + r(C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1})$  qui dépend du ratio d'énergie  $r = k_{\text{m}}/k$ .

Lorsque  $r \rightarrow 1$ , ce modèle hybride tend bien vers la formulation RANS  $k-\varepsilon$  avec les coefficients usuels  $C_\mu$ ,  $C_{\varepsilon 1}$  and  $C_{\varepsilon 2}$ . Quand  $r < 1$ , la viscosité modélisée est réduite et le mode LES est graduellement activé, mais sans tendre vers un modèle LES préexistant.

Friess *et al.* [39] ont montré que, pour renforcer la robustesse de la formulation, il est favorable de transférer le terme d'hybridation dans l'équation de transport de  $k_m$ , en introduisant une nouvelle fonction  $\psi$ , de telle sorte que :

$$\begin{cases} \frac{Dk_m}{Dt} = P_m - \psi\varepsilon_m^*, \\ \frac{D\varepsilon_m^*}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon_m^*}{k_m} P_m - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_m^{*2}}{k_m}. \end{cases} \quad (3.79)$$

Contrairement aux développements originaux [39] qui considèrent que le taux de dissipation physique  $\varepsilon$  est conservé comme seconde variable transportée, une nouvelle variable  $\varepsilon_m^*$  est introduite, en notant que le taux de dissipation de l'équation de  $k_m$  est par définition  $\varepsilon_m = \psi\varepsilon_m^*$ . En considérant que le nombre d'onde de coupure est dans la zone inertielle d'un spectre turbulent, le taux de dissipation résolu est négligeable et on trouve la relation :

$$\varepsilon \stackrel{\text{hyp.}}{=} \varepsilon_m \stackrel{\text{déf.}}{=} \psi\varepsilon_m^*. \quad (3.80)$$

Pour évaluer la viscosité modélisée, il est possible de faire appel à l'hypothèse d'Heisenberg [51], qui permet d'estimer :

$$\nu_m = C_\nu \int_{\kappa_c}^{\infty} \kappa^{-3/2} E(\kappa)^{1/2} d\kappa = C_\mu \frac{k_m^2}{\varepsilon} = C_\mu \frac{k_m^2}{\psi\varepsilon_m^*}, \quad (3.81)$$

avec  $C_\mu \simeq 1/3C_\nu C_K^{-3/2}$ , et en faisant, comme pour les développements de la PITM [17], l'hypothèse d'un spectre de Kolmogorov  $E(\kappa) = C_K \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}$ . Comparé à l'analyse originale de Friess *et al.* [39], la fonction d'hybridation  $\psi$  est présente dans la définition de  $\nu_m$ , ce qui s'avère décisif afin d'assurer les propriétés souhaitées pour l'approche hybride.

L'expression de la fonction  $\psi$  est dérivée en utilisant la même méthodologie que Friess *et al.* [39]. Une analyse des perturbations infinitésimales est conduite en assurant un critère d'équivalence (*H-Equivalence*) entre les deux systèmes d'équations (3.78) et (3.79) (voir les sections 3.1.3 et 3.2.3 pour les détails), permettant de déterminer l'expression :

$$\psi(r) = \frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 2}^P(r)} = \frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 1} + r(C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1})}. \quad (3.82)$$

La formulation obtenue est unique, quelles que soient les situations considérées pour effectuer l'analyse (voir section 3.2.3).

Enfin, les relations trouvées pour les variables statistiquement moyennées  $\nu_m$ ,  $k_m$  et  $\varepsilon_m^*$  sont utilisées pour dériver le modèle pour les variables de sous-maille  $\nu_{sgs}$ ,  $k_{sgs}$  et  $\varepsilon_{sgs}^*$ , comme discuté par Fadai-Ghotbi *et al.* [35]. De façon similaire à l'analyse de Friess *et al.* [39] (modèle présenté dans la section 3.1.5), il a été décidé de ne pas contrôler directement le niveau d'énergie du modèle via la fonction d'hybridation  $\psi$ , mais d'introduire l'échelle de longueur :

$$L_m = \frac{k_m^{3/2}}{\psi\varepsilon_m^*} \quad (3.83)$$



de telle sorte que le modèle s'écrive :

$$\nu_{\text{sgs}} = C_\mu k_{\text{sgs}}^{1/2} L_m, \quad \begin{cases} \frac{Dk_{\text{sgs}}}{Dt} = P_{\text{sgs}} + D_{k_{\text{sgs}}} - \frac{k_{\text{sgs}}^{3/2}}{L_m}, \\ \frac{D\varepsilon_{\text{sgs}}^*}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon_{\text{sgs}}^*}{k_{\text{sgs}}} P_{\text{sgs}} + D_{\varepsilon_{\text{sgs}}^*} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_{\text{sgs}}^{*2}}{k_{\text{sgs}}}, \end{cases} \quad (3.84)$$

avec,  $D_{k_{\text{sgs}}}$  et  $D_{\varepsilon_{\text{sgs}}^*}$  les termes de diffusion de  $k_{\text{sgs}}$  et  $\varepsilon_{\text{sgs}}^*$ . L'échelle  $L_m$  est introduite dans le terme de destruction de l'équation de  $k_{\text{sfs}}$ , mais aussi dans la définition de  $\nu_{\text{sfs}}$  (ce qui est différent de la formulation HTLES, où  $T_m$  n'est introduit que dans le terme de destruction de  $k_{\text{sfs}}$ ). Le ratio d'énergie  $r$  est estimé de la même manière qu'en PITM, avec (Eq. 2.123).

### 3.3.3 Consistance avec des modèles RANS et LES standards

Il est intéressant d'étudier les formes limites que prend le modèle en mode RANS et LES.

- Lorsque  $\kappa_c \rightarrow 0$ , la propriété de consistance du filtre spatial pour une turbulence homogène implique que les quantités de sous-maille tendent vers leur moyenne statistique, c'est-à-dire  $k_{\text{sgs}} = k_m = k$ , donc  $r = 1$ . De ce fait,  $\psi(1) = 1$  et on obtient d'après (Eq. 3.80),  $\varepsilon_{\text{sgs}}^* = \varepsilon_m^* = \varepsilon_m = \varepsilon$ . Le système d'équations (3.84) tend donc vers la formulation  $k$ - $\varepsilon$  homogène (sans termes de diffusion) :

$$\nu_m = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad \begin{cases} \frac{Dk}{Dt} = P - \varepsilon, \\ \frac{D\varepsilon}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}. \end{cases} \quad (3.85)$$

- Lorsque le nombre d'onde de coupure  $\kappa_c$  du filtre à coupure spectrale est dans la zone inertielle du spectre d'énergie, en introduisant (Eq. 3.80) dans (Eq. 3.83), on obtient sous l'hypothèse d'un spectre de Kolmogorov :

$$L_m = \frac{k_m^{3/2}}{\varepsilon_m} = \frac{\left( \int_{\kappa_c}^{\infty} E(\kappa) d\kappa \right)^{3/2}}{\varepsilon} = \left( \frac{3C_K}{2} \right)^{3/2} \frac{\Delta}{\pi} = C_d \Delta, \quad (3.86)$$

avec  $C_d = (3C_K/2)^{3/2} / \pi = 1.07$ . Ainsi, le système d'équations (3.84) tend vers :

$$\nu_{\text{sgs}} = C_\mu C_d k_{\text{sgs}}^{1/2} \Delta, \quad \frac{Dk_{\text{sgs}}}{Dt} = P_{\text{sgs}} + D_{k_{\text{sgs}}} - \frac{k_{\text{sgs}}^{3/2}}{C_d \Delta}, \quad (3.87)$$

où l'on reconnaît la formulation exacte du modèle de Deardorff [28] (voir section 2.3.2.3). Il n'y a plus de dépendance apparente à la seconde variable transportée  $\varepsilon_{\text{sfs}}^*$  (même si en pratique  $\varepsilon_m^*$  est pris en compte).

### 3.3.4 Conclusion

Cette analyse montre pour la première fois qu'il est possible, en se fondant sur des considérations théoriques, de dériver un modèle hybride RANS-LES fondé sur une modification d'échelle dans une formulation RANS, qui tend explicitement en mode LES vers un modèle LES classique préexistant. Cette conclusion, bien qu'elle ne concerne qu'un unique modèle hybride et n'est pas aisément étendue à d'autres formulations LES, renforce l'idée que les modèles hybrides de type modification d'échelle peuvent se comporter comme des modèles LES standard quand le nombre de coupure du filtre est dans la zone inertielle du spectre d'énergie turbulente.



Concernant la HTLES, il est noté que la formulation du modèle est très proche de celle de (Eq. 3.84), avec la même fonction d'hybridation  $\psi$ , et exactement la même formulation dans le cadre statistique (excepté l'absence du terme de diffusion en spatial en raison de l'hypothèse d'homogénéité). Il a été montré dans ce cas (section 3.2.5.2) que le modèle HTLES tend vers le  $k$ - $\varepsilon$  dans la branche RANS, mais l'analyse de la branche LES est fondée sur un raisonnement « à la main ». Les résultats obtenus dans cette section renforcent l'idée que la HTLES se comporte bien comme un modèle de sous-filtre en mode LES, ce qui conforte la robustesse et la généralité des développements réalisés dans ce chapitre.

## 3.4 Décroissance de turbulence isotrope

### 3.4.1 Introduction

#### 3.4.1.1 Description et équations d'évolution

La turbulence est cinématiquement homogène si ses propriétés statistiques sont invariantes par translation spatiale, c'est-à-dire que les moyennes statistiques des quantités fluctuantes sont indépendantes de la position dans le domaine. En particulier, la fonction de corrélation en deux points des vitesses fluctuantes se réécrit  $R_{ij}(\underline{x}, \underline{r}, t) = \overline{u_i(\underline{x}, t)u_j(\underline{x} + \underline{r}, t)} = R_{ij}(r, t)$ . Le gradient de vitesse moyenne est lui aussi indépendant de la position ( $\partial U_i / \partial x_j = A$ ), assurant un découplage dynamique entre le mouvement moyen et le mouvement d'agitation si  $A = 0$ . De plus, la turbulence homogène est caractérisée par une absence de diffusion moyenne et une réduction des couplages implicites. Les configurations canoniques à étudier dans ce cadre sont le cisaillement constant, la déformation pure plane et la rotation pure (voir Chassaing [19] pour plus de précisions).

En turbulence homogène, le tenseur de Reynolds et l'énergie cinétique turbulente sont uniformes dans le domaine spatial considéré. Les hypothèses effectuées permettent de simplifier les termes de diffusion et de convection dans les équations de transport pour le tenseur de Reynolds (Eq. 2.16) et l'énergie cinétique turbulente (Eq. 2.18) :

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} = \underbrace{-\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}}_{P_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{\rho} p \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\Phi_{ij}} - \underbrace{2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}}_{\varepsilon_{ij}}, \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} = P - \varepsilon. \quad (3.89)$$

Les principaux mécanismes conservés sont la production, qui alimente localement l'énergie cinétique du mouvement d'agitation avec de l'énergie provenant du mouvement moyen, la dissipation de l'énergie par la viscosité moléculaire, et le terme de redistribution par la pression dans l'équation de transport du tenseur Reynolds (Eq. 3.88), qui tend à redistribuer les composantes du tenseur de Reynolds pour tendre vers l'isotropie.

La turbulence isotrope est caractérisée par une invariance par translation, rotation et symétrie plane de toutes les propriétés statistiques prises en au moins deux points. L'écoulement moyen est uniforme ou nul, sans gradient de vitesse moyenne. C'est donc une turbulence homogène par définition, et l'on parle souvent de Turbulence Homogène Isotrope (THI). Le tenseur de Reynolds est isotrope, tel que  $\overline{u_i u_j} = 2/3 k \delta_{ij}$ , avec  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker. En absence de gradient de vitesse moyenne, l'analyse se simplifie encore, notamment pour l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente qui n'est plus alimentée par l'énergie cinétique du mouvement moyen (plus de terme de production). L'énergie cinétique turbulente du mouvement d'agitation est progressivement dissipée et son équation de transport (Eq. 2.18) devient :

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\varepsilon. \quad (3.90)$$

### 3.4.1.2 Analyse des taux de décroissance des différentes variables

Dans cette section, une analyse théorique est proposée pour caractériser l'évolution de différentes variables et ratios d'intérêt dans le cas d'une décroissance de THI. Dans le cas d'une approche filtrée, il est considéré ici que la coupure du filtre est dans la zone inertielle du spectre d'énergie de Kolmogorov.

Dans le cadre temporel, on considère ici que le pas de temps a été défini suffisamment petit pour que la fréquence de coupure  $\omega_c$  soit déterminée par la discrétisation spatiale  $\Delta$  (la fréquence eulérienne des plus petits tourbillons résolus), de telle sorte que l'équation (3.33) devient :

$$\omega_c = \min \left[ \frac{\pi}{dt}, \frac{U_s \pi}{\Delta} \right] = \frac{U_s \pi}{\Delta}, \quad (3.91)$$

fonction de la vitesse de balayage  $U_s$  [75]. Dans ce cas, les expressions de l'énergie modélisée  $k_m$  (Eq. 3.18), du ratio d'énergie  $r_K$  (Eq. 3.32) et de la viscosité modélisée  $\nu_m$  (Eq. 3.18) deviennent :

$$k_m = \frac{1}{\beta_0} \varepsilon^{2/3} U_s^{2/3} \omega_c^{-2/3} \varepsilon^{2/3} = \frac{1}{\beta_0} \left( \frac{\Delta}{\pi} \right)^{2/3} \varepsilon^{2/3}, \quad (3.92)$$

$$r_K = \frac{k_m}{k} = \frac{1}{\beta_0} \left( \frac{U_s}{\sqrt{k}} \right)^{2/3} \left( \omega_c \frac{k}{\varepsilon} \right)^{-2/3} = \frac{1}{\beta_0} \left( \frac{\Delta}{\pi} \right)^{2/3} \left( \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \right)^{-2/3}, \quad (3.93)$$

$$\nu_m = C_\mu \frac{k_m^2}{\varepsilon}, \quad (3.94)$$

avec  $\beta_0 = 2/(3C_K)$ . Les expressions précédentes sont identiques aux expressions dans le cadre du filtrage spatial, ce qui permet de conduire une analyse indépendante de l'opérateur de filtrage dans les paragraphes suivants.

Pour une THI, le niveau d'énergie cinétique turbulente  $k$  décroît en fonction du temps  $t$ . En indiquant les termes à l'initialisation avec l'exposant 0, on obtient [89] :

$$k = k_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{-n}, \quad (3.95)$$

avec un coefficient  $n > 0$ . D'après l'équation (3.90), le taux de dissipation  $\varepsilon$  est décrit par :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{-(n+1)}. \quad (3.96)$$

En utilisant l'équation (3.92) dans (3.96) avec  $\Delta$  fixé, la loi suivante est obtenue pour l'énergie modélisée :

$$k_m = k_{0m} \left( \frac{t}{t_0} \right)^{-2(n+1)/3}. \quad (3.97)$$

De même, l'estimation du ratio d'énergie (Eq. 3.93) donne :

$$r_K = r_{0K} \left( \frac{t}{t_0} \right)^{-(2-n)/3}, \quad (3.98)$$

et la définition de la viscosité turbulente modélisée (Eq. 3.94) permet d'écrire :

$$\nu_m = \nu_{0m} \left( \frac{t}{t_0} \right)^{-(n+1)/3}. \quad (3.99)$$

	$k$	$k_m$	$r_K$	$\varepsilon$	$\nu_m$	$L$	$L_m$	$T$	$T_m$
$t^?$	$-n$	$-\frac{2(n+1)}{3}$	$-\frac{(2-n)}{3}$	$-(n+1)$	$-\frac{(n+1)}{3}$	$\frac{(2-n)}{2}$	0	1	$\frac{(n+1)}{3}$
$n$ = 1.25	-1.25	-1.5	-0.25	-2.25	-0.75	0.375	0	1	0.75

TABLEAU 3.1 – Évolution en temps des variables et grandeurs turbulentes caractéristiques, pour une turbulence homogène et isotrope, en fonction du coefficient  $n$ .

Enfin, il est intéressant de déterminer l'évolution des échelles intégrales  $L = k^{3/2}/\varepsilon$  et  $T = k/\varepsilon$  et modélisées  $L_m = k_m^{3/2}/\varepsilon_m$  et  $T_m = k_m/\varepsilon_m$ , en rappelant que l'on suppose  $\varepsilon = \varepsilon_m$  :

$$L = L_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{1-n/2}, \quad T = T_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^1, \quad (3.100)$$

$$L_m = L_{0m} \left( \frac{t}{t_0} \right)^0, \quad T_m = T_{0m} \left( \frac{t}{t_0} \right)^{(n+1)/3}. \quad (3.101)$$

Il est noté que  $L_m$  n'évolue pas en temps, ce qui est en accord avec son estimation usuelle, sous les hypothèses précédentes, en considérant que la taille caractéristique des mailles  $\Delta$  est constante :

$$L_m = \frac{k_m^{3/2}}{\varepsilon} = \left( \frac{3C_K}{2} \right)^{3/2} \frac{\Delta}{\pi}. \quad (3.102)$$

Finalement, les principales lois sont résumées dans le tableau 3.1, ce qui permet de mettre en évidence l'évolution en temps des variables et grandeurs turbulentes en fonction du coefficient  $n$ . Les études expérimentales indépendantes d'une décroissance de turbulence homogène et isotrope menées par Comte-Bellot et Corrsin [21] et Kang *et al.* [60] ont permis d'estimer  $n = 1.25$ .

Il est intéressant de noter que le taux de décroissance de  $k$  est inférieur à celui de  $k_m$  (le ratio d'énergie  $r_K$  est décroissant), ce qui signifie que le niveau d'énergie modélisée diminue plus rapidement que celui d'énergie résolue en fonction du temps. Ce résultat est en adéquation avec le fait que la séparation d'échelle diminue, étant donné que les petites échelles disparaissent (voir Comte-Bellot *et al.* [21]). Ce résultat est également en phase avec une analyse à un temps très grand, pour lequel le nombre de Reynolds est devenu suffisamment faible (en considérant une turbulence pleinement développée) pour que toutes les échelles turbulentes puissent être capturées par le maillage fixe (limite DNS), et donc que toute l'énergie soit résolue ( $r = 0$ ).

### 3.4.2 Description du cas test

Le cas test de référence sélectionné pour étudier la décroissance d'une turbulence homogène et isotrope (DIT : *Decaying Isotropic Turbulence*) est l'étude expérimentale de Kang *et al.* [60]. Parmi les nombreuses études fondamentales effectuées - citons en particulier celle de Comte-Bellot et Corrsin [21] - la DIT de Kang *et al.* est caractérisée par un nombre de Reynolds de turbulence relativement élevé  $Re_\lambda = u\lambda/\nu = 720$ , avec  $\lambda$  la micro-échelle de Taylor (voir Chassaing [19] ou Bailly et Comte-Bellot [5]).

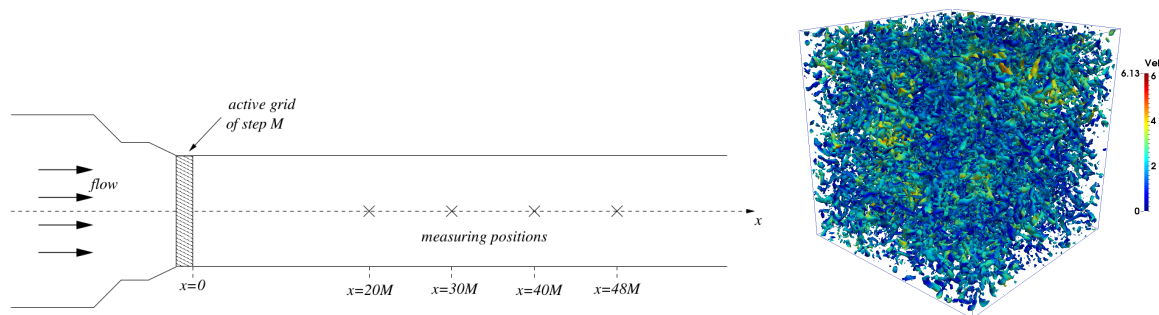


FIGURE 3.1 – Schéma de la configuration expérimentale pour générer une turbulence de grille - Source Kang *et al.* [60] & Isosurfaces de vorticité colorées par la vitesse dans le domaine cubique sur le maillage fin M128, critère  $Q = 200\text{s}^{-2}$ .

Le cas test expérimental est composé d'une grille avec un espacement  $M = 0.152\text{ m}$ , traversée par un écoulement de fluide. La traversée de cet « obstacle » permet de générer une turbulence de grille, ayant les caractéristiques d'une turbulence pleinement développée à partir d'une certaine distance. La vitesse du fluide et le spectre d'énergie turbulente ont été enregistrés au niveau de quatre positions en aval de la grille :  $x/M = 20, 30, 40$  et  $48$ , comme montré sur la Figure 3.1. Il a été vérifié que, malgré la direction privilégiée de l'écoulement, le mouvement d'agitation fournit une bonne approximation d'une turbulence isotrope, avec notamment une faible différence entre les valeurs des fluctuations de vitesses dans la direction de l'écoulement et celles dans les directions normales ( $I = u/v \simeq 1.15$ ).

On considère un repère mobile à la vitesse de l'écoulement moyen. Cela permet de considérer la décroissance énergétique en temps d'une turbulence homogène et isotrope, dans une cavité cubique fixe triplement périodique (Figure 3.1). Ce changement de référentiel est adapté pour implémenter le cas test d'un point de vue numérique.

La DIT est un cas test fondamental pour les approches filtrées, afin d'évaluer :

- (i) la capacité des modèles à prédire la cascade d'énergie,
- (ii) l'influence des schémas numériques sur le modèle (en ajoutant de la dissipation numérique),
- (iii) les constantes clés pour calibrer le modèle et assurer une bonne dissipation.

L'utilisation du modèle de Smagorinsky [106] (section 2.3.2.2) permet d'illustrer l'intérêt de la DIT car les propriétés du cas test correspondent aux hypothèses de développement du modèle. À condition que le nombre d'onde de coupure soit dans la zone inertielle du spectre turbulent, (i) de bonnes prédictions doivent être obtenues, (ii) dans le contexte des schémas numériques utilisés, (iii) en calibrant la constante  $C_S$  du modèle. Ce cas test a notamment été implémenté dans `code_saturne` pour tester et calibrer les modèles LES [7].

### 3.4.3 Initialisation et paramètres numériques

#### 3.4.3.1 Problématique de l'initialisation du calcul

Une difficulté du cas test DIT concerne la définition des champs turbulents à l'initialisation, et en particulier la vitesse instantanée, qui doivent présenter un comportement turbulent réaliste en accord avec le spectre d'énergie turbulente imposé. Dans leurs travaux, pour étudier numériquement différents modèles LES, Kang *et al.* [60] ont choisi d'initialiser leurs calculs en se fondant sur le champ de référence enregistré à  $x/M = 20$ . Lorsque l'on ne dispose pas de ce champ local, la procédure adoptée pour générer un champ de vitesse instantanée réaliste, en ne disposant que de la densité d'énergie spectrale  $E(\kappa)$  et du niveau d'énergie turbulente  $k$ , est résumée ci-dessous [60, 7].

- (i) Un champ de vitesse initial  $U_i$  est généré à partir d'un bruit blanc, avec l'énergie d'agitation qui correspond à  $k$  et le spectre d'énergie à  $E(\kappa)$ ,
- (ii) Un calcul code\_saturne initialisé avec ce champ de vitesse  $U_i$  est lancé, et évolue sur un temps suffisamment long pour que des corrélations réalistes se développent, mais en évitant que toute l'énergie ne soit dissipée. À la fin du calcul, en évaluant les propriétés du spectre d'énergie et les caractéristiques de la turbulence (corrélations, *skewness*, ... [89, 19]) du champ de vitesse final  $U_f$ , il est possible de déterminer si ce champ turbulent est réaliste ou non.
- (iii) La densité d'énergie spectrale  $E_f(\kappa)$  est calculée, ainsi que la transformée de Fourier  $\hat{U}_f$ , qui est renormalisée par  $\hat{U}_i = E(\kappa)/E_f(\kappa)\hat{U}_f$ , avant d'effectuer une transformée de Fourier inverse pour déterminer le nouveau champ d'initialisation  $U_i$  dans l'espace physique. Si ce champ présente des corrélations et structures cohérentes réalistes, la procédure s'arrête. Sinon, les étapes (ii) et (iii) sont répétées jusqu'à ce qu'un comportement turbulent caractéristique soit retrouvé.

Pour la plupart des modèles LES (Smagorinsky par exemple), la définition du champ de vitesse instantanée suffit pour initialiser le calcul. Au contraire, pour les modèles hybrides, et certains modèles LES comme celui de Deardorff, les variables transportées ( $k_{\text{sfs}}$ ,  $\varepsilon_{\text{sfs}}^*$ , ...) nécessitent également d'être initialisées correctement. Une procédure courante pour les méthodes hybrides consiste à réaliser un calcul avec champ de vitesse gelé (*Frozen field*), c'est-à-dire que le champ de vitesse instantanée est forcé pour empêcher son évolution, tandis que les équations de transport des variables turbulentes sont résolues pour que les quantités s'adaptent au champ de vitesse imposé. Cette méthodologie est par exemple utilisée par Ashton *et al.* [4] avec la DES, Menter et Egorov [81] avec la SAS, ou Tran *et al.* [121] avec la première formulation HTLES.

Bien que cette méthode soit la référence pour initialiser les variables turbulentes, il faut néanmoins noter qu'elle présente certains défauts, en particulier la convergence des calculs ( $\partial/\partial t = 0$ ) impose certains équilibres, avec le système HTLES (H1') qui devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial k_m}{\partial t} = 0 = P_m - \psi \varepsilon_m^* \\ \frac{\partial \varepsilon_m^*}{\partial t} = 0 = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon_m^*}{k_m} P_m - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_m^{*2}}{k_m} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_m = \psi \varepsilon_m^* \\ P_m = \frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 1}} \varepsilon_m^* \end{array} \right. \Rightarrow \psi(r) = \frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 1}}, \quad (3.103)$$

Or, la dernière égalité est vérifiée lorsque le ratio d'énergie  $r \rightarrow 0$ , mais n'est pas vérifiée de manière générale.

Il faut noter que les mêmes limitations sont rencontrées pour d'autres approches hybrides analogues, en imposant des équilibres entre les termes de production et de destruction des deux équations de transport :

$$\text{(PITM)} \left\{ \begin{array}{l} P_m = \varepsilon_m \\ P_m = \frac{C_{\varepsilon 2}^P}{C_{\varepsilon 1}} \varepsilon_m \end{array} \right. \Rightarrow C_{\varepsilon 2}^P = C_{\varepsilon 1}, \quad \text{ou} \quad \text{(DES)} \left\{ \begin{array}{l} P_m = \frac{k_m^{3/2}}{C_{\text{DES}} \Delta} \\ P_m = \frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 1}} \varepsilon_m \end{array} \right. \Rightarrow \frac{k_m^{3/2}}{\varepsilon_m} = \frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 1}} C_{\text{DES}} \Delta. \quad (3.104)$$

Malgré ses limitations, cette méthodologie a été retenue ici, car elle présente les avantages de la simplicité. Il est cependant observé que les quantités turbulentes s'adaptent lors des premiers pas de temps du calcul, de telle sorte que pour un temps suffisamment long, les équilibres imposés par l'initialisation sont « oubliés ». Dans cette étude, les résultats numériques sont comparés aux références à partir d'un temps donné qui correspond à  $x/M = 30$ , suffisamment éloigné de l'initialisation à  $x/M = 20$ .

### 3.4.3.2 Paramètres numériques

#### Code de calcul

Les approches hybrides sont implémentées et validées dans le logiciel de CFD code\_saturne [3], un code de calcul open-source développé par EDF (<https://www.code-saturne.org>) et distribué sous une licence Gnu GPL. La méthode des volumes finis co-localisés est utilisée pour résoudre les équations de la dynamique des fluides, pour des écoulements 3D instationnaires, incompressibles, isothermes, turbulents, sur des grilles structurées, dans le cadre de cette thèse.

Un algorithme SIMPLEC est utilisé pour résoudre le système vitesse-pression de manière découplée. C'est une méthode de prédiction-correction à pas fractionnaire (prédiction de la vitesse, correction de la pression, actualisation de la vitesse), avec une interpolation de Rhie&Chow dans l'étape de correction de la pression pour éviter les oscillations numériques. Les variables turbulentes et les scalaires sont résolus séparément, après l'étape d'actualisation de la vitesse.

#### Schémas numériques temporels

Dans le cadre des approches hybrides RANS-LES, il est important d'utiliser des schémas temporels au second ordre, comme le schéma de Crank-Nicolson (méthode implicite), pour résoudre les équations de transport. Les schémas au second ordre sont majoritairement utilisés en LES car ils permettent d'augmenter le pas de temps tout en conservant une précision équivalente aux schémas au premier ordre (voir Ferziger et Perić [37]). Ils sont donc pertinents quand la méthode hybride est en mode LES pour résoudre l'équation de Navier-Stokes filtrée et les équations de transport des quantités de sous-filtre, tout en réduisant le coût de calcul.

#### Schémas numériques spatiaux

Une attention particulière est également portée aux schémas spatiaux utilisés dans le cadre hybride. Un schéma spatial centré est en effet nécessaire en LES, parce qu'il n'est pas possible de découpler le raffinement du maillage de la taille de filtre. Donc, pour bien résoudre les structures jusqu'à la taille de maille, il est nécessaire d'utiliser des schémas non dissipatifs (les schémas centrés sont uniquement dispersifs).

Ainsi, pour résoudre l'équation de Navier-Stokes filtrée, un schéma centré au second ordre est utilisé pour discrétiser le terme de convection. Des schémas au premier ordre suffisent afin de capturer les variations des quantités de sous-filtre transportées [4, 35].

#### Estimation des quantités statistiquement moyennées

Dans le cadre de l'approche HTLES, les variables statistiquement moyennées ( $U_i = \overline{U_i^*} = 0$ ,  $k_m = \overline{k_{sfs}}$ ,  $\varepsilon_m^* = \overline{\varepsilon_{sfs}^*}$ , ...) sont estimées en effectuant des moyennes spatiales sur le domaine de calcul  $\mathcal{D}$ , en invoquant l'hypothèse d'ergodicité pour une turbulence homogène :

$$k_m = \int_{\mathcal{D}} k_{sfs} d\Omega, \quad \text{et} \quad \varepsilon_m^* = \int_{\mathcal{D}} \varepsilon_{sfs}^* d\Omega. \quad (3.105)$$

#### Discrétisations spatiale et temporelle

Afin d'évaluer l'influence de la discrétisation, et calibrer les coefficients de manière robuste, trois maillages isotropes structurés sont utilisés dans le domaine cubique, composés de  $32^3$  (M32),  $64^3$  (M64),  $128^3$  (M128) mailles cubiques. La taille du domaine est déterminée afin de contenir les plus grandes structures turbulentes, et il est vérifié que la coupure imposée par le filtrage spatial se trouve dans la zone inertielle du spectre d'énergie. Le pas de temps est proportionnel au raffinement spatial, avec  $dt/T = 0.04$  (M32),  $dt/T = 0.02$  (M64) et  $dt/T = 0.01$  (M128) (la taille de filtre est imposée par  $\Delta$  et non  $dt$ , donc  $dt$  est choisi suffisamment petit pour un raffinement de maillage fixé).

### 3.4.4 Calibration et validation des modèles

#### 3.4.4.1 Modèle HTLES

En HTLES, bien que le coefficient  $\beta_0$  ait une définition théorique fonction du coefficient de Kolmogorov, tel que  $\beta_0 = 2/(3C_K) \simeq 0.44$ , la calibration de ce coefficient sur un cas test DIT permet d'assurer que le manque de dissipation lié à la non-résolution des échelles dissipatives soit compensé par la dissipation de sous-filtre, compte tenu du modèle de fermeture et des schémas numériques utilisés.

Pour calibrer le coefficient, une étude paramétrique est réalisée avec les trois maillages, en faisant varier la valeur de  $\beta_0$  (autour de sa valeur théorique). Le calcul est initialisé pour correspondre au champ expérimental à  $x/M = 20$  et les spectres d'énergie turbulente sont comparés aux références à  $x/M = 30$  et  $x/M = 48$ .

On rappelle l'écriture du terme de dissipation de l'équation de  $k_m$  (système H1'), en supposant que, dans l'expression du ratio  $r_K$ , la fréquence de coupure  $\omega_c$  est liée à la discrétisation spatiale (Eq. 3.93). En choisissant un pas de temps suffisamment petit, on obtient :

$$\frac{k_m}{T_m} = \frac{\psi \varepsilon_m^*}{r_K k} k_m = \beta_0 \underbrace{\left(\frac{\pi}{\Delta}\right)^{2/3} \left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}\right)^{2/3}}_{r_K^{-1}} \frac{\varepsilon}{k} k_m = \beta_0 \underbrace{\left(\frac{\pi}{\Delta}\right)^{2/3}}_{\text{Cste}} \varepsilon^{1/3} k_m. \quad (3.106)$$

#### Fermeture $k-\varepsilon$ HTLES

La calibration du HTLES a d'abord été effectuée avec la fermeture  $k-\varepsilon$ , en testant différentes valeurs du coefficient  $\beta_0 \in [0.40, 0.50]$ . Sur la Figure 3.2, l'influence de la calibration de  $\beta_0$  est mise en évidence. Pour  $\beta_0 = 0.42$ , étant donné que  $\beta_0$  apparaît au numérateur du terme de destruction de l'équation  $k_m$  (Eq. 3.106), la dissipation de sous-filtre est sous-estimée. L'énergie modélisée est donc trop élevée, et il y a un manque d'énergie résolue. Avec  $\beta_0 = 0.46$ , le taux de dissipation de  $k_m$  se retrouve trop élevé et l'énergie résolue est donc surestimée.

Au contraire, pour  $\beta_0 = 0.44$ , de bonnes prédictions de la décroissance énergétique sont obtenues, comme montrées sur la Figure 3.3. Il est remarquable que les meilleurs résultats soient obtenus pour une calibration qui correspond à la valeur théorique.

De plus, sur la Figure 3.3, on observe bien la décroissance de l'énergie résolue au cours du temps. Comme attendu, plus le maillage est fin, plus le niveau d'énergie résolue est important (le temps d'intégration n'est pas le même ici car le nombre de pas de temps est gardé constant, même si  $dt$  est différent, pour éviter d'avoir un temps de calcul trop long sur les maillages les plus fins).

Enfin, on s'intéresse à l'évolution des échelles de longueur  $L_m = k_m^{3/2}/\varepsilon_m$  et de temps  $T_m = k_m/\varepsilon_m$ , présentée sur la Figure 3.4. Comme montré dans le tableau 3.1,  $L_m$  n'évolue pas en temps et reste constant autour de sa valeur théorique fixée par le maillage (l'écart observé pour M32 peut s'expliquer par le déraffinement très important du maillage). Au contraire,  $T_m$  augmente au cours du temps, comme attendu.



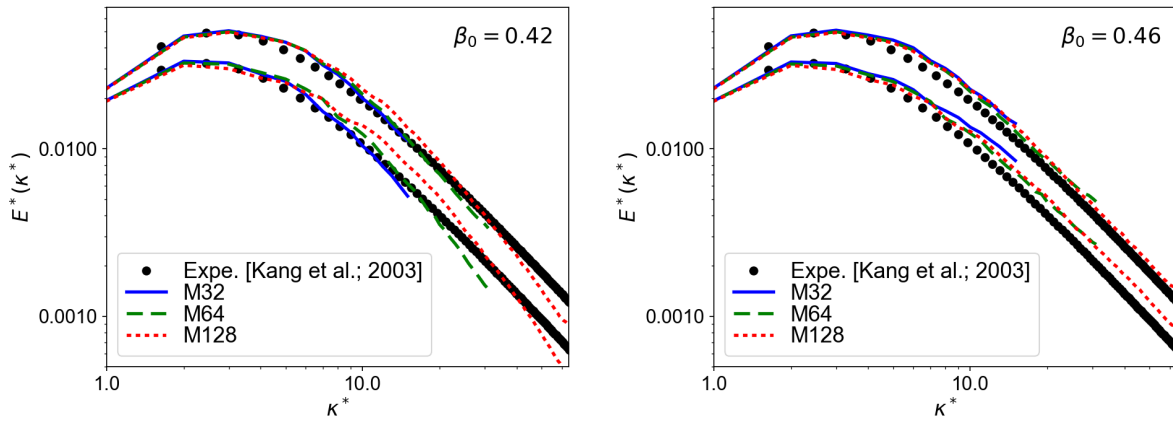


FIGURE 3.2 – Évolution temporelle ( $x/M = 30$  et  $48$ ) du spectre d'énergie turbulente résolue. Calculs  $k$ - $\varepsilon$  HTLES avec  $\beta_0 = 0.42$  (gauche) et  $\beta_0 = 0.46$  (droite).

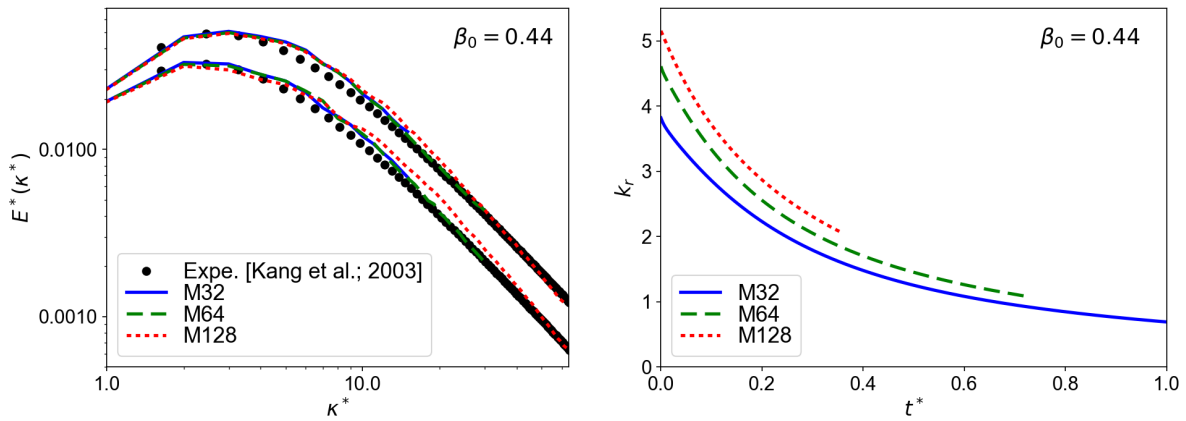


FIGURE 3.3 – Évolution temporelle ( $x/M = 30$  et  $48$ ) du spectre d'énergie turbulente résolue (gauche) et du niveau d'énergie résolu (droite). Calculs  $k$ - $\varepsilon$  HTLES avec  $\beta_0 = 0.44$ .

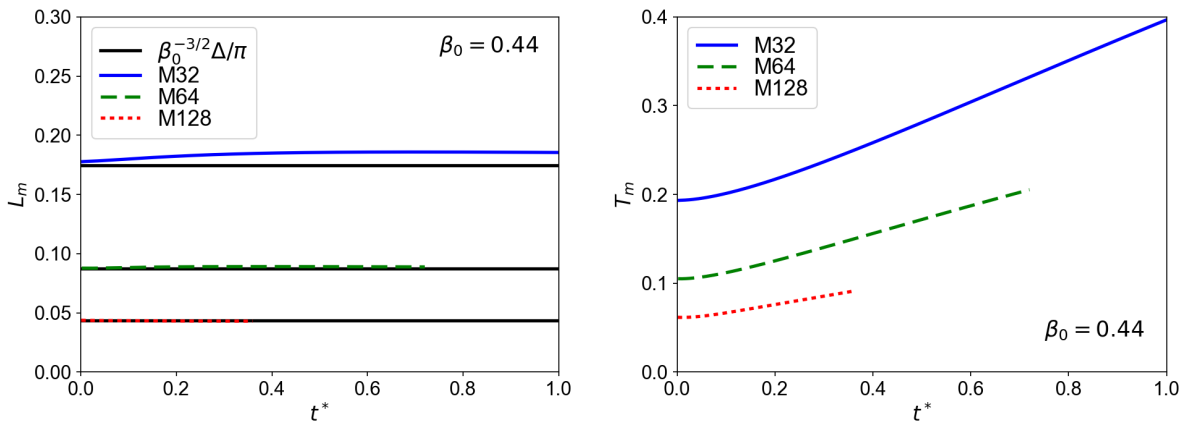


FIGURE 3.4 – Évolution temporelle de l'échelle de longueur modélisée (gauche) et de l'échelle de temps modélisée (droite). Calculs  $k$ - $\varepsilon$  HTLES avec  $\beta_0 = 0.44$ .



### Fermeture $k$ - $\omega$ SST HTLES

La procédure de calibration est effectuée avec la fermeture  $k$ - $\omega$  SST. Dans ce cas, la calibration théorique  $\beta_0 = 0.44$  ne permet pas de retrouver de bonnes prédictions de la cascade d'énergie, comme montré sur la Figure 3.5. Cela est certainement lié à l'influence des équations de fermeture (comprenant des corrections et limiteurs supplémentaires introduits dans le modèle  $k$ - $\omega$  SST). Il est donc nécessaire de modifier la valeur de  $\beta_0$ , pour retrouver un bon niveau de dissipation. Pour le modèle  $k$ - $\omega$  SST HTLES, la calibration donne  $\beta_0 = 0.48$ .

*Remarque :* on note le large écart avec la calibration de Tran *et al.* [121] qui avait trouvé  $\beta_0 = 0.67$  avec la formulation originale HTLES appliquée au  $k$ - $\omega$  SST. Cette différence est liée au fait que la fonction d'hybridation  $\psi$  définie avec la fermeture  $k$ - $\varepsilon$  avait été conservée, alors qu'on a montré théoriquement qu'une nouvelle fonction  $\psi_\omega$  est nécessaire. Cet écart peut être justifié théoriquement en notant que, pour retrouver la même valeur de  $T_m$ , c'est-à-dire de  $r_K/\psi(r_K) = r_{K\omega}/\psi_\omega(r_{K\omega})$ , avec les constantes associées  $\beta_0 = 0.67$  et  $\beta_{0\omega} = 0.44$ , il faut imposer :

$$\frac{r_K}{\psi(r_K)} = \frac{r_{K\omega}}{\psi(r_{K\omega})} \Rightarrow \frac{1/\beta_0}{\psi(r_K)} = \frac{1/\beta_{0\omega}}{\psi(r_{K\omega})} \Rightarrow \underbrace{\beta_0}_{0.67} = \frac{\psi(r_K)}{\psi(r_{K\omega})} \beta_{0\omega} \simeq \underbrace{\frac{\beta_\omega/(C_\mu\gamma_\omega)}{C_{\varepsilon 2}/C_{\varepsilon 1}}}_{\simeq 1.57} \underbrace{\beta_{0\omega}}_{0.44}. \quad (3.107)$$

### Fermeture $BL$ - $v^2/k$ HTLES

On procède de la même manière pour calibrer le modèle  $BL$ - $v^2/k$  HTLES. Pour le cas test DIT, la principale différence avec la formulation  $k$ - $\varepsilon$  réside dans la définition de la viscosité de sous-filtre, avec la nouvelle variable  $\phi_{sfs}$ , dont la résolution de l'équation de transport peut induire une dissipation supplémentaire. De ce fait, la calibration théorique qui fonctionne avec la fermeture  $k$ - $\varepsilon$  ne s'avère pas optimale pour le  $BL$ - $v^2/k$ . Comme montré sur la Figure 3.6, pour le modèle  $BL$ - $v^2/k$  HTLES, la calibration donne  $\beta_0 = 0.42$ .

La calibration du coefficient  $\beta_0$  en DIT, pour retrouver un niveau de dissipation correct, donne des valeurs très proches de la calibration théorique  $2/(3C_K) \simeq 0.44$ , et ce, quelle que soit la fermeture utilisée. Les écarts observés sont liés aux différences entre les formulations, qui, associées aux schémas numériques, peuvent générer une augmentation ou un déficit de dissipation.

Fermeture	$k - \varepsilon$	$k - \omega$ SST	$BL - v^2/k$
$\beta_0$	0.44	0.48	0.42

(3.108)

#### 3.4.4.2 Modèle LES de Deardorff

Dans le modèle de Deardorff (section 2.3.2.3) le terme de destruction de l'équation de transport de  $k_{sfs}$  s'écrit  $k_{sfs}^{3/2}/(C_d\Delta)$  (Eq. 2.102). La dissipation du modèle est donc explicitement dépendante du coefficient  $C_d$ , qui est estimé théoriquement avec  $(3C_K/2)^{3/2}/\pi \simeq 1.07$ . La procédure de calibration sur le cas test DIT est effectuée de la même manière que précédemment, et l'évolution temporelle de la cascade d'énergie est présentée sur la Figure 3.7. Les résultats s'avèrent plus complexes à analyser car, pour la calibration théorique  $C_d = 1.07$ , les prédictions sont correctes sur le maillage le plus fin M128, mais un manque de dissipation est noté pour le maillage grossier M32. Au contraire, en augmentant la valeur de  $C_d = 1.15$  (ce qui diminue le terme de destruction de  $k_m$ , augmente donc le niveau de  $k_m$  et diminue  $k_r$ ), on retrouve de bonnes prédictions pour M32, mais une sous-estimation de l'énergie résolue aux grands nombres d'onde pour M128.

Étant donné que pour les modèles LES, la coupure du filtre est censée être définie de telle sorte qu'une grande partie de l'énergie soit résolue [89], l'utilisation du maillage le plus fin M128 semble la plus appropriée afin de résoudre une large part de l'énergie turbulente, et que le modèle décrive uniquement les petites structures dissipatives. Dans ce cas, la calibration sur la DIT est équivalente à la valeur théorique  $C_d = 1.07$ . Cette dépendance au maillage plaide en faveur de l'hybride, la formulation LES classique n'étant plus valable lorsque le maillage est déraffiné.

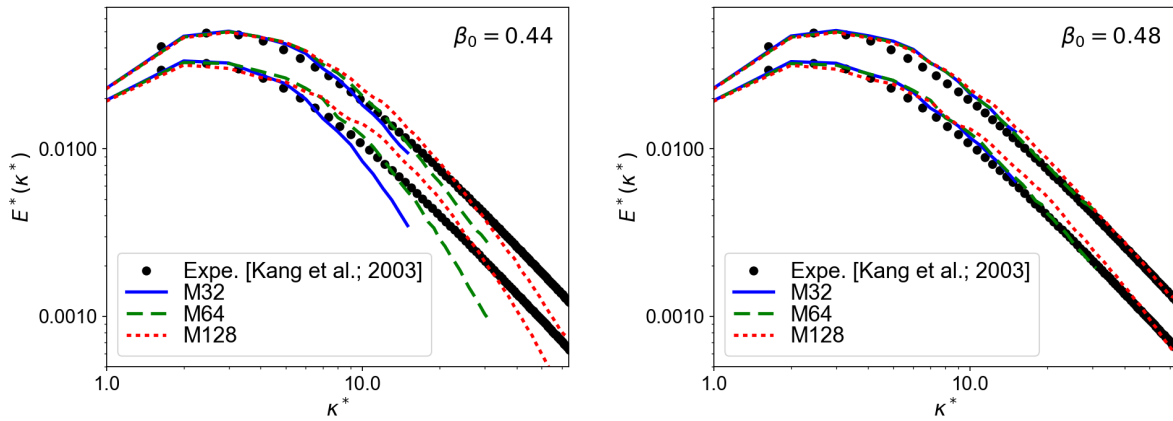


FIGURE 3.5 – Évolution temporelle ( $x/M = 30$  et  $48$ ) du spectre d'énergie turbulente résolue. Calculs  $k$ - $\omega$  SST HTLES avec  $\beta_0 = 0.44$  (gauche) et  $\beta_0 = 0.48$  (droite).

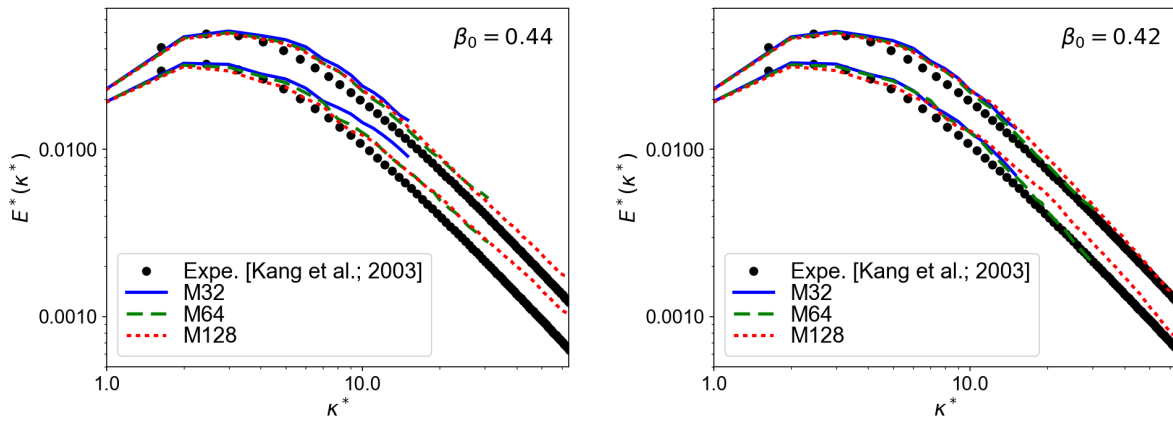


FIGURE 3.6 – Évolution temporelle ( $x/M = 30$  et  $48$ ) du spectre d'énergie turbulente résolue. Calculs  $BL-v^2/k$  HTLES avec  $\beta_0 = 0.44$  (gauche) et  $\beta_0 = 0.42$  (droite).

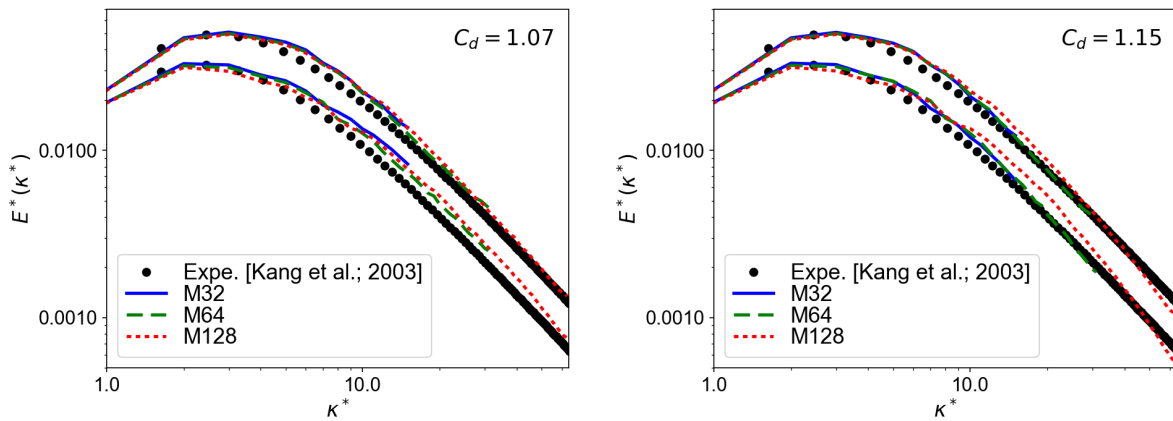


FIGURE 3.7 – Évolution temporelle ( $x/M = 30$  et  $48$ ) du spectre d'énergie turbulente résolue. Calculs avec le modèle de Deardorff,  $C_d = 1.07$  (gauche) et  $C_d = 1.15$  (droite).

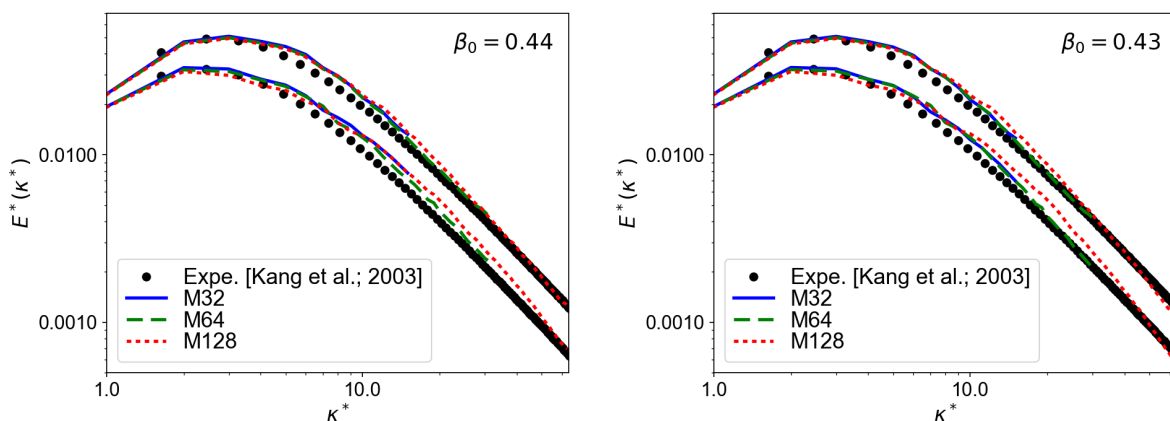


FIGURE 3.8 – Évolution temporelle ( $x/M = 30$  et  $48$ ) du spectre d'énergie turbulente résolue. Calculs avec le modèle à filtrage spatial (section 3.3),  $\beta_0 = 0.44$  (gauche) et  $\beta_0 = 0.43$  (droite).

### 3.4.4.3 Nouvelle formulation hybride spatiale

Le modèle hybride avec filtrage spatial (Eq. 3.83 et 3.84) développé dans la section 3.3, qui tend explicitement vers le modèle de Deardorff quand le nombre de coupure est dans la zone inertielle du spectre d'énergie, peut également être calibré sur le cas test DIT pour assurer une décroissance énergétique correcte. Dans un cadre statistique, le terme de destruction de l'équation de transport de  $k_m$  est identique à celui défini en HTLES (Eq. 3.106), mais pour les variables de sous-filtre, le terme  $k_{\text{sfs}}/T_m$  en HTLES devient  $k_{\text{sfs}}^{3/2}/L_m$  avec le modèle spatial. La différence entre les deux approches vient également de la définition de la viscosité de sous-filtre  $\nu_{\text{sfs}}$ , qui dépend de  $\psi$  en HTLES ( $\nu_{\text{sfs}} = C_\mu k_{\text{sfs}}^2 / (\psi \varepsilon_{\text{sfs}}^*)$ ) et de l'échelle de longueur  $L_m$  avec le modèle spatial ( $\nu_{\text{sfs}} = C_\mu k_{\text{sfs}}^{1/2} L_m$ ).

Comme montré sur la Figure 3.8, la calibration théorique  $\beta_0 = 0.44$  donne de bons résultats sur le maillage fin M128, tandis que le coefficient est diminué à  $\beta_0 = 0.43$  pour assurer une décroissance énergétique correcte sur le maillage grossier M32. Néanmoins, le fait de retrouver la calibration théorique ( $\beta_0 = 0.44$ ) sur le maillage fin, en phase avec le modèle de Deardorff ( $C_d = 1/(\pi\beta_0^{3/2}) = 1.07$ ), conforte l'idée que le modèle hybride se comporte comme le modèle de Deardorff dans la branche LES. On vérifie ainsi que  $L_m$  tend vers  $C_d\Delta$  (Eq. 3.86) lorsque  $\kappa_c$  est dans la zone inertielle du spectre d'énergie.

De plus, en se concentrant sur les résultats avec le maillage grossier M32, alors que la surestimation du spectre était importante pour le modèle de Deardorff avec  $C_d = 1.07$  (manque de dissipation), pour le modèle hybride avec  $\beta_0 = 0.44$ , les écarts sont diminués. Cela conforte le choix d'utiliser des modèles hybrides pour les maillages déraffinés.

### 3.4.4.4 Approche hybride DES

Enfin, il est intéressant d'évaluer la branche LES du modèle  $k-\varepsilon$  DES (Eq. 2.117 et 2.118, section 2.3.3.2) sur le cas test DIT, afin de calibrer le coefficient  $C_{\text{DES}}$  qui apparaît dans le terme de destruction  $\varepsilon_{\text{sfs}}^{\text{DES}} = k_{\text{sfs}}^{3/2}/(C_{\text{DES}}\Delta)$  de l'équation de  $k_{\text{sfs}}$ . De la même manière que pour le modèle de Deardorff et le nouveau modèle hybride spatial, il semble que la calibration de  $C_{\text{DES}}$  soit sensible au raffinement du maillage, avec  $C_{\text{DES}} = 0.90$  pour obtenir des prédictions correctes sur le maillage fin M128 et  $C_{\text{DES}} = 0.95$  pour le maillage grossier M32 (Figure 3.9).

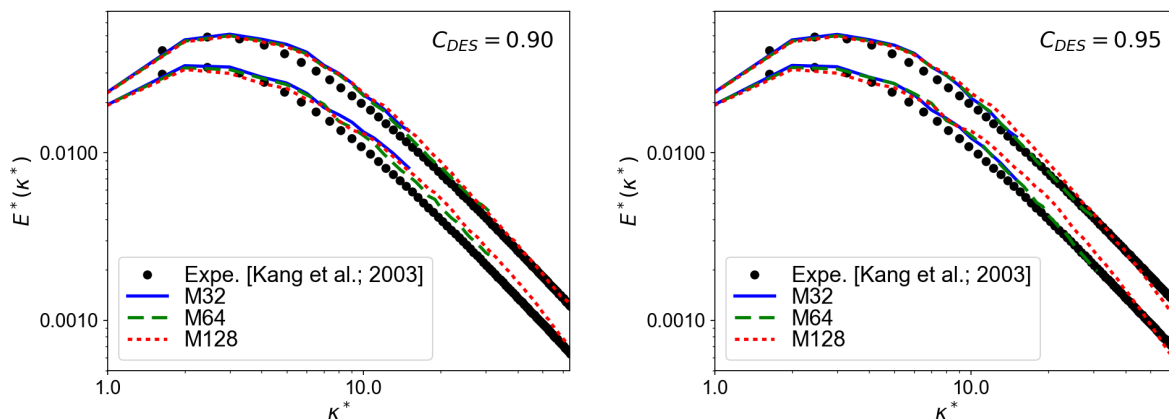


FIGURE 3.9 – Évolution temporelle ( $x/M = 30$  et  $48$ ) du spectre d'énergie turbulente résolue. Calculs avec le  $k$ - $\varepsilon$  DES avec  $C_{DES} = 0.90$  (gauche) et  $C_{DES} = 0.95$  (droite).

Ces observations sont en accord avec les travaux de Friess *et al.* [39], qui, en définissant le modèle *Equivalent-DES*, ont obtenu la relation suivante pour définir  $C_{DES}$  (Eq. 3.8) :

$$C_{DES} = \frac{1}{\pi \beta_0^{3/2} \psi(r)} = \frac{C_d}{\psi(r)}, \quad (3.109)$$

avec le ratio d'énergie  $r$ . Avec cette formulation,  $C_{DES}$  dépend de  $r$ , ce qui implique que la valeur de  $C_{DES}$  dépend du raffinement du maillage, comme observé.

### 3.5 Conclusion

La méthodologie développée par Friess *et al.* [39] pour transférer la fonction d'hybridation de la seconde équation de transport en TPITM à l'équation de l'énergie modélisée, en garantissant le critère de *H-Equivalence* entre les méthodes hybrides, est rappelée dans une première section, ainsi que la formulation originale du modèle HTLES établie par Manceau [75] et la variante développée par Friess *et al.* [39]

Dans la lignée de ces travaux, nous avons proposé de poursuivre les développements en s'affranchissant d'une des hypothèses principales : dans la nouvelle formulation hybride, la seconde variable transportée n'est plus considérée comme le taux de dissipation physique. L'analyse théorique a été effectuée, permettant de développer une nouvelle formulation du modèle HTLES. Ces développements ont souligné les avantages de la nouvelle dérivation :

- ✓ la formulation du modèle est plus générale (pas d'hypothèse sur la seconde variable),
- ✓ les termes de dissipation dans la définition de la viscosité modélisée et de l'équation de l'énergie modélisée sont identiques,
- ✓ l'expression de la fonction d'hybridation  $\psi(r)$  obtenue à l'issue de l'analyse des perturbations est unique,
- ✓ l'échelle  $T_m$  introduite est identifiée comme l'échelle de temps des échelles modélisées.
- ✗ La formulation s'avère néanmoins plus complexe, avec la fonction d'hybridation  $\psi$  qui apparaît dans de nombreux termes, y compris dans l'estimation du ratio d'énergie.

Après avoir effectué la dérivation analytique avec la fermeture  $k-\varepsilon$ , la méthode hybride est étendue aux modèles  $k-\omega$  SST [82] et  $BL-\overline{v^2}/k$  [9], des modèles RANS bas-Reynolds plus appropriés dans certaines études industrielles. L'influence du modèle de fermeture sur les résultats sera analysée dans les prochains chapitres. L'hybridation des différents termes est discutée en détail, en montrant notamment qu'une nouvelle expression de la fonction d'hybridation  $\psi_\omega$  doit être utilisée avec le  $k-\omega$  SST.

Dans un second temps, la méthodologie de développement proposée dans un cadre temporel a été appliquée dans un cadre spatial. De cette manière, il est possible de développer analytiquement un modèle hybride fondé sur une modification d'échelle dans une formulation RANS  $k-\varepsilon$ , qui tend explicitement vers le modèle LES de Deardorff lorsque le nombre d'onde de coupure est dans la zone inertielle. Ce résultat théorique permet d'effectuer la jonction entre deux modèles RANS et LES préexistants, ce qui conforte l'idée que les modèles hybrides peuvent se comporter comme des modèles de sous-maille en mode LES. Pour le modèle HTLES notamment, fondé sur un système d'équations similaire (identique dans un cadre statistique), cela permet de renforcer la confiance dans les hypothèses effectuées et les développements analytiques réalisés.

Enfin, le cas test de la décroissance énergétique d'une turbulence isotrope est étudié, d'abord théoriquement pour définir certaines lois d'évolutions pour des grandeurs d'intérêt, puis numériquement en comparant les résultats de calcul à la référence expérimentale de Kang *et al.* [60]. Pour la HTLES, il est noté que la calibration de  $\beta_0$  est influencée par la fermeture utilisée, mais reste en bon accord avec la valeur théorique et est robuste par rapport au raffinement du maillage. Pour la nouvelle approche hybride spatiale, les résultats sont en adéquation avec ceux du modèle de Deardorff, avec des calibrations de  $\beta_0$  et  $C_d$  qui correspondent aux valeurs théoriques pour des maillages relativement fins. Finalement, le fait de retrouver des valeurs de calibration proches de la théorie conforte les hypothèses réalisées lors des développements analytiques.

# Chapitre 4

## Amélioration de la HTLES en proche paroi

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Couche limite turbulente</b>	<b>94</b>
4.1.1	Description de l'écoulement dans un canal plan infini	94
4.1.2	Principales régions dans la couche limite turbulente	95
4.1.3	Principaux effets dans la couche limite turbulente	96
<b>4.2</b>	<b>Paramètres numériques</b>	<b>97</b>
<b>4.3</b>	<b>Comportement des principales approches</b>	<b>99</b>
4.3.1	RANS	99
4.3.2	LES	100
4.3.3	Hybride DES	101
<b>4.4</b>	<b>Amélioration de la HTLES</b>	<b>103</b>
4.4.1	Comportement de la HTLES	103
4.4.2	Consistance avec le modèle de fermeture RANS	103
4.4.3	Contrôle de la transition RANS-LES dans la région de proche paroi	105
<b>4.5</b>	<b>Validation de la formulation HTLES améliorée</b>	<b>117</b>
4.5.1	Sensibilité de la HTLES au nombre de Reynolds	117
4.5.2	Sensibilité de la HTLES au maillage	120
4.5.3	Sensibilité de la HTLES au modèle de fermeture	124
<b>4.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>128</b>

---

Dans ce chapitre, la nouvelle formulation du modèle hybride HTLES est évaluée dans le cadre d'un écoulement de proche paroi. Cela est particulièrement important pour les approches hybrides globales étant donné que la transition RANS-LES a lieu dans cette région. Le cas test standard du canal plan est étudié, à différents nombres de Reynolds et en utilisant différents maillages, pour caractériser le comportement du modèle, identifier les problèmes à corriger, développer des améliorations supplémentaires (contrainte de consistance interne, fonctions de protection) et enfin valider la formulation améliorée. Le modèle  $k-\omega$  SST HTLES est utilisé pour effectuer les développements, et les améliorations sont ensuite appliquées au  $BL-v^2/k$  HTLES, pour caractériser l'influence du modèle de fermeture.

## 4.1 Couche limite turbulente

Dans cette section, on s'intéresse aux caractéristiques de la couche limite turbulente, c'est-à-dire la région de l'écoulement dont la dynamique est influencée par la présence d'une paroi. L'étude de la couche limite turbulente a une grande importance, étant donné que les écoulements pariétaux sont souvent rencontrés dans les configurations industrielles. Il est donc primordial de s'intéresser aux deux points suivants :

- les principales régions de la couche limite et les lois physiques associées qui régissent les statistiques de l'écoulement turbulent,
- les principaux effets (viscosité, blocage, ...) qui influencent la dynamique de l'écoulement dans la couche limite.

Dans la suite du chapitre, une attention particulière sera portée sur le comportement des modèles RANS, LES et hybrides dans les régions de proche paroi. Cela est d'autant plus critique pour les modèles hybrides, étant donné que la délicate transition du mode RANS en proche paroi au mode LES plus loin des parois peut avoir lieu dans la couche limite turbulente.

### 4.1.1 Description de l'écoulement dans un canal plan infini

L'écoulement turbulent dans un canal plan infini (*channel flow*) est étudié pour servir de support à l'analyse des caractéristiques de la couche limite turbulente. Les résultats sont illustrés avec les DNS de Lee et Moser [70], présentés sur la Figure 4.1. Ce cas test « idéal » consiste en deux plaques infinies parallèles l'une à l'autre et espacées d'une distance  $2\delta$  entre lesquelles un fluide s'écoule, avec  $\delta$  la demi-hauteur du canal. L'écoulement moyen est orienté dans la direction  $x$ , les parois sont normales à  $y$ , et  $z$  est la direction transverse. En régime établi, le champ de vitesse est statistiquement 1D et stationnaire, ce qui signifie que ses propriétés statistiques sont indépendantes des coordonnées  $x$  et  $z$  (directions d'homogénéité statistique), et du temps  $t$ .

Le vecteur vitesse instantanée est décomposée entre les composantes  $U^*$ ,  $V^*$ ,  $W^*$ , dans les directions  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivement. L'écoulement moyen est décrit par la vitesse  $\overline{U^*} = U$ , tandis que l'incompressibilité de l'écoulement et l'hypothèse d'homogénéité dans la direction  $z$  se traduisent respectivement par  $\overline{V^*} = V = 0$  et  $\overline{W^*} = W = 0$ . Les fluctuations  $u$ ,  $v$ ,  $w$  varient localement de manière tridimensionnelle et instationnaire. L'élément moteur de l'écoulement en canal plan est le gradient de pression longitudinal  $\partial P/\partial x$ , constant dans le domaine. L'équation de Reynolds (Eq. 2.13) projetée sur l'axe  $x$  se simplifie en :

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{d^2 U}{dy^2} - \frac{d\overline{u\overline{v}}}{dy}. \quad (4.1)$$

Ainsi, la prédiction correcte des profils de vitesse  $U$  dépend en grande partie de la résolution des contraintes de cisaillement turbulent  $\overline{u\overline{v}}$ .

Les grandeurs sont adimensionnées (exposant  $+$ ) par la viscosité moléculaire  $\nu$ , dont l'effet est prépondérant dans la sous-couche visqueuse en proche paroi, et la vitesse de frottement définie par  $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho} = \sqrt{\nu dU/dy}$ , où  $\rho$  est la masse volumique et  $\tau_w$  est la contrainte de cisaillement à la paroi [89]. Dans ce cas, le nombre de Reynolds de frottement, ainsi que la vitesse, la distance à la paroi, l'énergie turbulente et la dissipation adimensionnées, sont définis respectivement comme :

$$Re_\tau = \frac{u_\tau \delta}{\nu}, \quad U^+ = \frac{U}{u_\tau}, \quad y^+ = y \frac{u_\tau}{\nu}, \quad k^+ = \frac{k}{u_\tau^2}, \quad \varepsilon^+ = \varepsilon \frac{\nu}{u_\tau^4}. \quad (4.2)$$



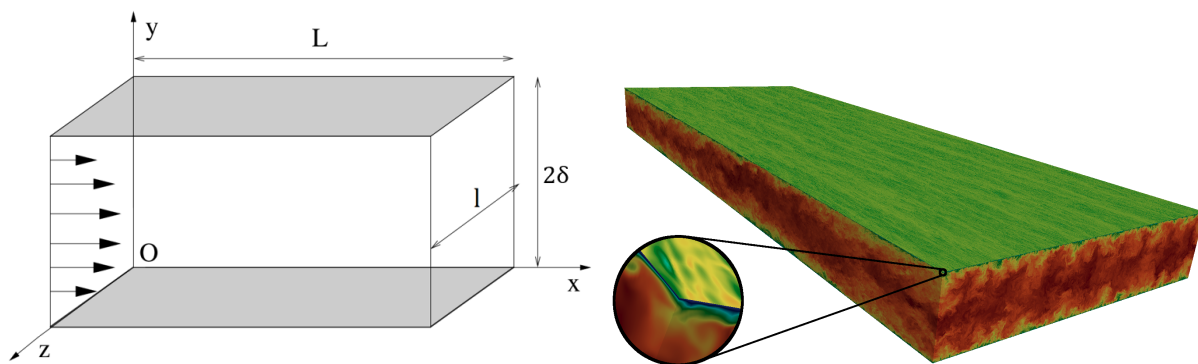


FIGURE 4.1 – Schéma de la configuration de l'écoulement en canal plan [1] & - Écoulement à  $Re_\tau = 5200$  - Calcul DNS de Lee et Moser [70]

#### 4.1.2 Principales régions dans la couche limite turbulente

Les résultats de la DNS réalisée par Lee et Moser [70] pour la vitesse  $U^+$ , l'échelle de longueur turbulente  $L^+ = k^{+3/2}/\varepsilon^+$  (Figure 4.2), l'énergie  $k^+$  et les composantes du tenseur de Reynolds  $R_{ii}^+ = R_{ii}/u_\tau^2$  (Figures 4.3), permettent d'identifier les caractéristiques principales des grandeurs statistiques. En se focalisant sur le profil de vitesse, la couche limite turbulente peut être décomposée entre plusieurs zones distinctes [89, 19].

- (i) **La sous-couche visqueuse** ( $0 < y^+ < 5$ ) est la région de proche paroi dans laquelle les effets visqueux sont dominants (la viscosité cinématique  $\nu$  est supérieure à la viscosité turbulente  $\nu_t$ ). Les limites de cette région sont exprimées en unités de paroi, c'est-à-dire qu'elle est indépendante de la taille  $\delta$  de la couche limite. Dans cette région, la vitesse suit une loi linéaire [89] :  $U^+ = y^+$ .
- (ii) **La zone tampon** ( $5 < y^+ < 30$ ) correspond à la région de transition entre la sous-couche visqueuse (dominée par des effets visqueux) et la zone logarithmique (dominée par des effets turbulents). Elle est indépendante de la taille  $\delta$ . Le pic de production d'énergie turbulente à  $y^+ \simeq 12$ , ainsi que les pics de  $\overline{u\bar{u}}$  et  $k$  observés sur la Figure 4.3, ont lieu dans cette zone (effets expliqués dans la section 4.1.3).
- (iii) **La zone logarithmique** ( $30 < y^+, y/\delta < 0.2$ ) correspond au recouvrement des zones interne et externe de la couche limite. La loi logarithmique pour la vitesse est définie dans le cadre d'un développement asymptotique raccordé [89] :

$$\frac{dU}{dy} = \frac{u_\tau}{C_\kappa y} \quad \Rightarrow \quad U^+ = \frac{1}{C_\kappa} \ln(y^+) + B, \quad (4.3)$$

avec  $C_\kappa$  la constante de von Kármán et  $B$ , les coefficients usuels. Dans cette région, la contrainte de cisaillement est constante  $-\overline{u\bar{v}} = u_\tau^2$  (Figure 4.3) et on note que  $-\overline{u\bar{v}}/k \simeq \sqrt{C_\mu} \simeq 0.3$ . C'est une zone en équilibre, c'est-à-dire que l'équation de transport de  $k$  (Eq. 2.18) se réduit à  $P = \varepsilon$  (absence de transport turbulent). Enfin, le tenseur de déformation se simplifie avec  $S = dU/dy$ . Ces relations impliquent les approximations usuelles :

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \varepsilon = -\overline{u\bar{v}}S = \sqrt{C_\mu}kS = \frac{u_\tau^3}{C_\kappa y}, \quad \nu_m = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} = u_\tau C_\kappa y, \quad C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} = C_\kappa y. \quad (4.4)$$

Cette dernière relation est visible sur la Figure 4.2, où le ratio entre l'échelle de longueur intégrale ( $k^{3/2}/\varepsilon$ ) et la distance à la paroi ( $y$ ) est constant dans la zone logarithmique.

- (iv) **La zone de sillage** ( $0.2 < y/\delta < 1$ ) correspond à la zone extérieure, indépendante de  $\nu$ , dans laquelle l'écoulement est décrit par la loi de déficit de vitesse [89]. Au centre du canal, la turbulence est maintenue par le terme de diffusion par l'agitation turbulente.

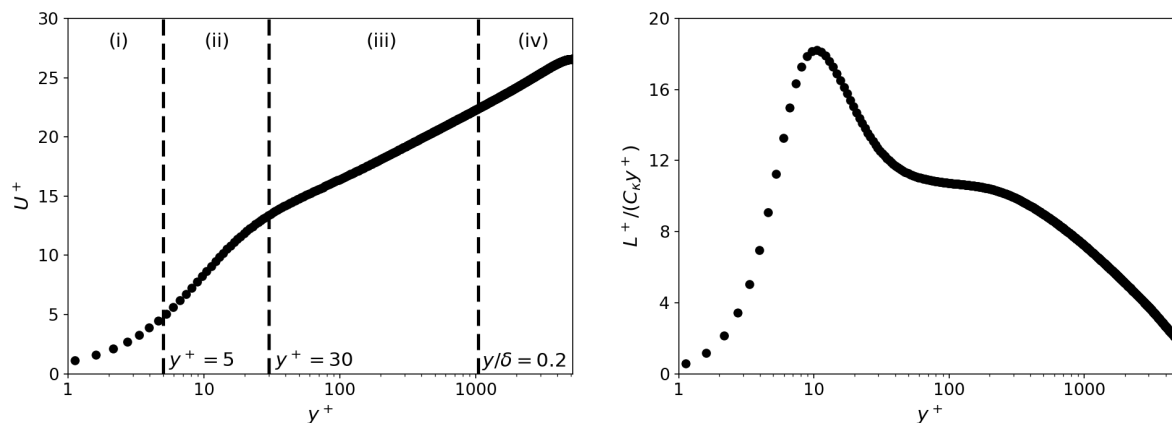


FIGURE 4.2 – Profil de vitesse (gauche) et échelle de longueur intégrale divisée par la distance à la paroi (droite), pour un écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 5200$  - DNS de Lee et Moser [70].

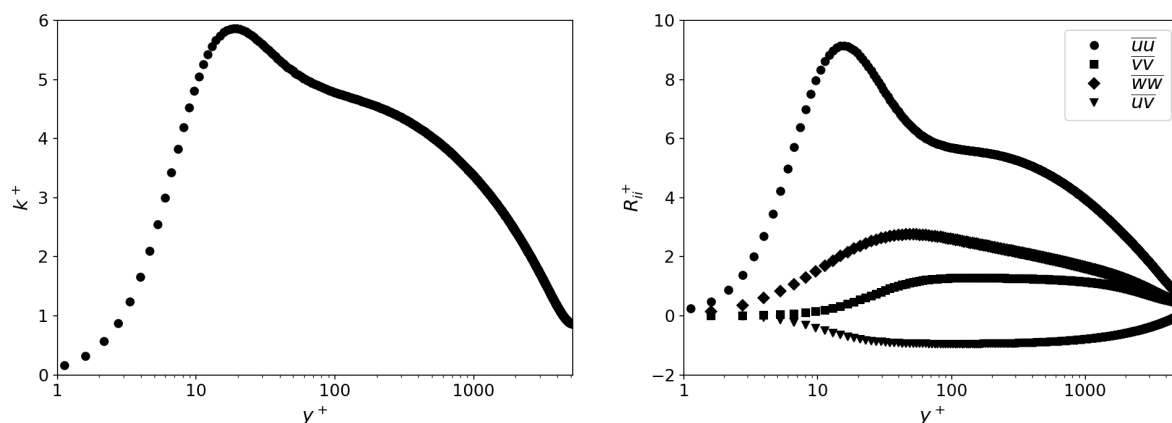


FIGURE 4.3 – Profil d'énergie turbulente (gauche) et tenseur de Reynolds (droite), pour un écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 5200$  - DNS de Lee et Moser [70].

Enfin, il est souligné que l'universalité de ces lois repose sur plusieurs hypothèses, dont la validité n'est pas toujours assurée, notamment dans les applications industrielles : nombre de Reynolds élevé (la zone logarithmique disparaît à bas-Reynolds), écoulement sur plaque plane (écoulement parallèle), pas d'effets de bord, de gradients de pression adverse, de flottabilité, ... Ces lois sont mises en défaut pour les écoulements décollés ou les jets impactants [120], par exemple. Cependant, la simplicité de ces lois de paroi « universelles » font qu'elles restent répandues dans les études et développements actuels, en y adjoignant des améliorations supplémentaires (corrections des gradients de pression par exemple).

### 4.1.3 Principaux effets dans la couche limite turbulente

Pour les écoulements turbulents pariétaux, les **effets visqueux** sont confinés dans la zone bas-Reynolds.

- En raison de l'adhérence  $\underline{U}^* = \underline{V}_{\text{paroi}}$  pour un fluide visqueux sur une paroi solide de vitesse  $\underline{V}_{\text{paroi}}$ , un fort gradient de vitesse moyenne est observé dans la région de proche paroi (Figure 4.2). Ce cisaillement pariétal est associé à une forte production turbulente.
- La condition d'adhérence visqueuse provoque un amortissement des tensions parallèles à la paroi  $\overline{uu}$ ,  $\overline{vv}$  et  $\overline{ww}$ .
- Un resserrement du spectre turbulent est observé dans cette zone, en raison de la diminution du nombre de Reynolds turbulent en paroi.

Il existe aussi des **effets non-locaux**, indépendants de la viscosité du fluide.

- **L'écho de paroi** correspond à une « réflexion » des fluctuations de pression, démontrée théoriquement en considérant un écoulement image par rapport à la paroi. L'effet tend à augmenter les fluctuations de pression, ainsi que la redistribution de la composante longitudinale  $\overline{uu}$  vers les composantes  $\overline{vv}$  et  $\overline{ww}$ , via la corrélation pression-déformation.
- **L'effet de blocage** est lié aux fluctuations normales à la paroi qui génèrent une zone de surpression, ce qui freine l'écoulement normal à la paroi. Ce blocage cinématique engendre une tendance locale à la bidimensionnalité en (i) amortissant la tension normale à la paroi  $\overline{vv}$ , et en (ii) renforçant les tensions parallèles à la paroi, (iii) ce qui se traduit par un transfert d'énergie de  $\overline{vv}$  vers  $\overline{uu}$  et  $\overline{ww}$  quand  $y^+ < 12$ . Au contraire, le transfert d'énergie de  $\overline{uu}$  vers  $\overline{vv}$  et  $\overline{ww}$  est bloqué par l'interaction non-locale des fluctuations de pression avec la paroi, ce qui augmente l'anisotropie de la turbulence. Le blocage cinématique se fait sentir via le terme de redistribution de l'équation de transport de  $R_{ij}$  (Eq. 2.16), et peut également être pris en compte grâce à la relaxation elliptique de Durbin [33], ou la pondération elliptique de Manceau et Hanjalic [76]. L'effet de blocage est dominant par rapport à l'écho de paroi et aux effets visqueux d'après l'analyse DNS réalisée par Manceau *et al.* [77].

Finalement, un pic de production est observé autour de  $y^+ = 12$ , ainsi qu'un pic d'énergie cinétique du mouvement d'agitation  $k$ . L'amortissement des tensions de Reynolds dans la sous-couche visqueuse en paroi est observés sur la Figure 4.3. Une analyse asymptotique des composantes à la paroi ( $y^+ \leq 5$ ) montre un état à deux composants :  $\overline{vv}(\sim y^4) \ll \overline{uu} \sim \overline{ww}(\sim y^2)$ .

Les différents effets présentés ci-dessus impliquent que certaines hypothèses ne sont plus valables en proche paroi.

- ✗ **La quasi-homogénéité est mise en défaut**, car le gradient de vitesse ne peut plus être considéré constant localement.
- ✗ **L'hypothèse de localité n'est pas respectée** en raison des effets non-locaux, qui s'exercent « à distance » de la paroi.
- ✗ **L'hypothèse d'un écoulement haut Reynolds n'est plus valable** en raison de la viscosité qui est non négligeable en proche paroi. La séparation entre les grandes échelles productives et les petites échelles dissipatives n'est plus observée, ce qui se traduit par **une disparition de la zone inertielle** [19].

## 4.2 Paramètres numériques

### Mise en oeuvre numérique

Le cas test numérique est mis en oeuvre en utilisant l'approche à vitesse de frottement imposée, comme dans les références DNS [84, 70]. Le mouvement, imposé par le gradient de pression longitudinal constant, est prescrit en ajustant un terme source dans les équations de Navier-Stokes, qui correspond à  $u_\tau^2/\delta$ . L'extension infinie du canal est prise en compte en utilisant des conditions aux limites périodiques dans la direction de l'écoulement  $x$ , ainsi que dans la direction d'homogénéité  $z$ , avec des distances  $L_x$  et  $L_z$  assez larges pour éviter des auto-corrélations des champs de vitesses. La taille du domaine correspond à  $L_x \times L_y \times L_z = 6.4\delta \times 2\delta \times 3.2\delta$ . Il a été vérifié que l'augmentation de  $L_x$  et  $L_z$  n'a pas d'influence sur les résultats présentés, notamment pour les écoulements avec un nombre de Reynolds élevé. Des parois lisses sont considérées dans le plan normal à la direction  $y$ , sur lesquelles la condition d'adhérence est imposée ( $V_{\text{paroi}} = 0$ ).

### Discrétisation spatiale et temporelle

Pour effectuer les études numériques, des maillages aux caractéristiques différentes sont utilisés, résumés dans le Tableau 4.1. La configuration géométrique simple du canal plan permet de réaliser des maillages structurés orthogonaux. Les paramètres ( $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$ ,  $\Delta_z$ ) représentent les tailles de mailles dans les directions longitudinale ( $x$ ), normale à la paroi ( $y$ ) et transverse ( $z$ ),

tandis que  $(N_x, N_y, N_z)$  sont les nombres de mailles dans chaque direction. Parmi les paramètres adimensionnés en unités de paroi,  $\Delta_{y_w}^+ = 1$  représente le raffinement en paroi et  $\Delta_{y_c}^+$  au centre du canal. Le déraffinement du maillage dans la direction  $y$  est réalisé en utilisant la loi de distribution suivante pour les cellules [57] :

$$y_i = 1 + \frac{\tanh[\gamma(2i/N_y - 1)]}{\tanh[\gamma]}. \quad (4.5)$$

avec  $\gamma \in [2.5, 4.5]$  à calibrer pour les maillages considérés.

Le pas de temps a été choisi suffisamment petit ( $dt = 0.001\delta/u_\tau$ ) pour que la condition CFL, nombre de courant inférieur à l'unité [37], soit respectée dans tout le domaine.

$Re_\tau$	Grid	$\Delta_x^+$	$\Delta_z^+$	$\Delta_{y_c}^+$	$\Delta_{y_w}^+$	$\Delta_x/\delta$	$\Delta_z/\delta$	$N_x$	$N_y$	$N_z$
590	<b>A1</b>	60	30	30	1	0.1	0.05	64	96	64
1000	<b>B0</b>	30	15	20	1	0.030	0.015	208	222	208
	<b>B1</b>	100	50	50	1	0.1	0.05	64	106	64
5200	<b>C0</b>	260	130	260	1	0.05	0.025	128	140	128
	<b>C1</b>	520	260	260	1	0.1	0.05	64	140	64
	<b>C2</b>	1040	520	260	1	0.2	0.1	32	140	32
	<b>C1X</b>	260	260	260	1	0.05	0.05	128	140	64
	<b>C2X</b>	520	520	260	1	0.1	0.1	64	140	32
20000	<b>D1</b>	2000	1000	1000	1	0.1	0.05	64	166	64

TABLEAU 4.1 – Paramètres numériques des maillages utilisés pour l'écoulement en canal plan dans un domaine  $L_x \times L_y \times L_z = 6.4\delta \times 2\delta \times 3.2\delta$ .

### Schémas numériques

Pour les calculs hybrides, comme expliqué dans la section 3.4.3.2 (cas test de la décroissance d'une turbulence isotrope), le schéma de Crank-Nicolson est utilisé en temps. L'utilisation d'un schéma à l'ordre deux en temps s'avère primordiale pour les calculs instationnaires, afin d'éviter une pseudo-relaminarisation de l'écoulement prédit.

Pour discrétiser le terme de convection, un schéma centré au second ordre est utilisé dans la zone traitée en mode LES. Cependant, quand le modèle hybride est en mode RANS, c'est-à-dire le plus souvent dans les régions de proche paroi, l'utilisation d'un schéma centré peut mener à des oscillations numériques importantes, notamment quand le maillage n'est pas assez raffiné, ou pour des nombres de Péclet trop élevés.

Ainsi, pour résoudre le terme de convection des équations de Navier-Stokes, il est intéressant de combiner un schéma centré en mode LES pour éviter la dissipation numérique et un schéma amont en mode RANS pour éviter les oscillations. Le schéma hybride (HYB) introduit par Travin *et al.* [122] correspond à une pondération entre un schéma amont au second ordre (SOLU), et un schéma centré (CDS) pour la branche LES, fonction d'un coefficient  $c_r$  pour être en phase avec la transition RANS-LES du modèle :

$$\phi_{\text{HYB}} = (1 - c_r)\phi_{\text{SOLU}} + c_r\phi_{\text{CDS}} \quad \text{avec} \quad c_r = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 1 \quad (\text{RANS}) \\ 1 & \text{si } r < 1 \quad (\text{LES}) \end{cases} \quad (4.6)$$

Pour les variables de sous-filtre, l'utilisation d'un schéma amont au premier ordre est suffisante pour discrétiser le terme de convection de leurs équations de transport [4, 36].

*Remarque* : pour l'écoulement en canal plan, il a été observé (non montré ici) que l'utilisation du schéma centré pour discrétiser le terme de convection de l'équation de Navier-Stokes, au lieu du schéma hybride (Eq. 4.6), ne fait pas apparaître d'oscillations numériques et n'a pas d'influence significative sur les résultats statistiques. Néanmoins, dans un souci de généralité, tous les calculs hybrides présentés dans ce chapitre ont utilisé le schéma hybride.

Pour les calculs RANS et LES, les schémas numériques standards sont utilisés [1].

### Estimation des quantités statistiquement moyennées de la formulation HTLES

Les quantités statistiquement moyennées ( $U_i = \overline{U}_i^*$ ,  $k_m = \overline{k}_{\text{sfs}}$ ,  $\varepsilon_m^* = \overline{\varepsilon}_{\text{sfs}}$ , ...) sont estimées au cours du calcul en utilisant un filtre temporel exponentiel [93] (Eq. 2.80, section 2.3.1.2), avec une taille de filtre  $\Delta_T$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\phi}(t, \Delta_T) = \frac{\tilde{\phi}(t) - \overline{\phi}(t, \Delta_T)}{\Delta_T} \Rightarrow \overline{\phi}^{n+1} = \overline{\phi}^n + \frac{dt}{\Delta_T} (\phi^{n+1} - \overline{\phi}^n). \quad (4.7)$$

La taille de filtre  $\Delta_T$  est choisie égale à plusieurs temps de parcours du domaine. Pour les écoulements avec un nombre de Reynolds peu élevé  $Re_\tau = 590$ , la fréquence caractéristique des fluctuations résolues étant relativement faible (échelle temporelle intégrale élevée), il est important d'utiliser une taille de filtre suffisamment grande pour tendre vers un estimateur statistique constant.

### Estimation des grandeurs statistiques

Pour les calculs RANS, les résultats sont sauvegardés lorsque les calculs statistiques sont convergés (après quelques temps de parcours du domaine). Pour les calculs instationnaires LES et hybrides, les calculs tournent sur plusieurs dizaines de temps de parcours pour passer la période transitoire (les fluctuations turbulentes peuvent mettre un certain temps à se développer après une initialisation sur un champ statistique), puis les champs instantanés sont moyennés sur (encore) plusieurs dizaines de temps de parcours. À la fin des calculs, ces champs moyens temporels sont moyennés spatialement dans les directions d'homogénéité, afin de déterminer les moyennes statistiques des variables.

Les données statistiques de référence pour valider les calculs proviennent des DNS<sup>1</sup> de Moser *et al.* [84] pour  $Re_\tau = 590$ , de Lee et Moser [70] pour  $Re_\tau = 1000$  et  $5200$ , et d'un calcul RANS  $k-\omega$  SST pour  $Re_\tau = 20000$ .

## 4.3 Comportement des principales approches

### 4.3.1 RANS

Pour les modèles RANS bas-Reynolds  $k-\omega$  SST [82] et  $BL-\overline{v^2}/k$  [9], intégrables dans toute la couche limite turbulente, un maillage résolu en paroi ( $y^+ = 1$ ) est utilisé. Les homogénéités statistiques dans la direction longitudinale  $x$  et la direction transverse  $z$  permettent de restreindre le maillage uniquement dans la direction normale à la paroi  $y$ . Le nombre de mailles correspond donc à  $N_y$  (qui peut encore être divisé de moitié en raison de la symétrie centrale).

Sur la Figure 4.4, les profils de vitesse et la contrainte de cisaillement sont en très bon accord avec les références DNS, pour  $Re_\tau = 1000$  et  $5200$ . Concernant l'énergie cinétique turbulente, représentée sur la Figure 4.5, des différences sont observées par rapport aux références, notamment une sous-estimation importante des profils. Les efforts de modélisations du  $BL-\overline{v^2}/k$  permettent tout de même d'améliorer les résultats, avec une meilleure forme globale du profil dans la zone interne de la couche limite, en particulier pour  $Re_\tau = 1000$ . Pour le  $BL-\overline{v^2}/k$ , les profils de  $\alpha$ ,  $\phi$ ,  $E$  et  $C_{\varepsilon_2}^T$  sont tracés sur la Figure 4.6, où il est montré notamment que :

- (i) le coefficient  $\alpha$  tend vers 0 à la paroi et 1 au centre du canal, avec une zone de transition qui s'étend de la sous-couche visqueuse jusqu'à  $y^+ = 100$  (peu de sensibilité à  $Re_\tau$ ),
- (ii) la variable  $\phi = \overline{v^2}/k$  tend vers 0 à la paroi (afin de diminuer la viscosité turbulente), reste stable autour d'un plateau  $\phi_{\log} = 0.41$  dans la zone logarithmique (tel que  $C_\mu^\phi \phi_{\log} = C_\mu$ ), et augmente légèrement au centre du canal,

1. <https://turbulence.odcn.utexas.edu/>

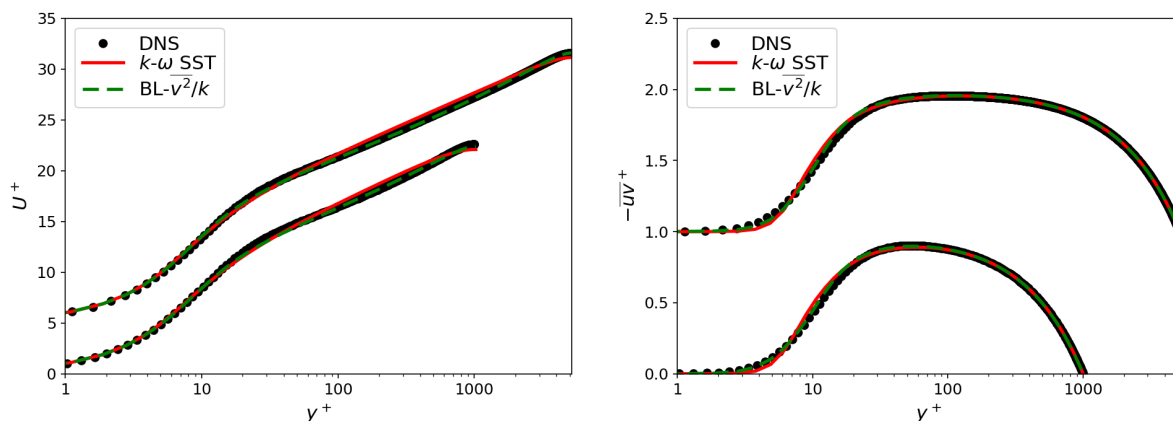


FIGURE 4.4 – Profils de vitesse (gauche) et de contrainte de cisaillement (droite) pour un écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 1000$  et  $5200$  ( $U + 5$ ,  $\overline{uv} + 1$ ). Calculs RANS  $k-\omega$  SST et  $BL-v^2/k$ .

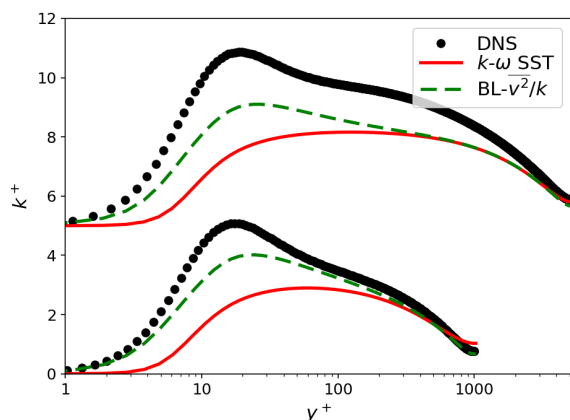


FIGURE 4.5 – Profils de l'énergie turbulente d'agitation pour un écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 1000$  et  $5200$  ( $k + 5$ ).

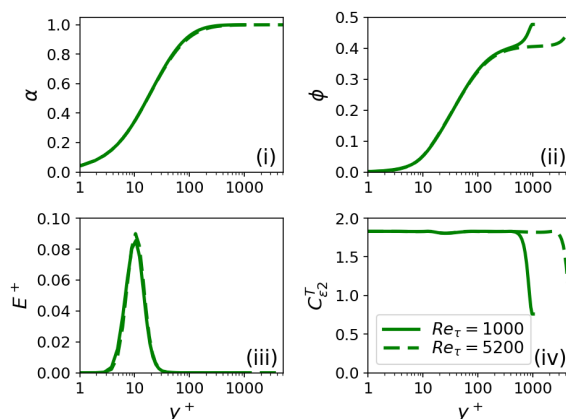


FIGURE 4.6 – Profils des principaux termes du  $BL-v^2/k$ , pour un écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 1000$  et  $5200$ .

- (iii) le terme de dissipation  $E$  n'est actif que dans la zone tampon de la couche limite, et sa valeur adimensionnée est indépendante du nombre de Reynolds,
- (iv) La constante modifiée  $C_{\varepsilon 2}^T$  reste égale à sa valeur limite  $C_{\varepsilon 2}$  de la paroi jusqu'à la fin de la zone logarithmique, et diminue de moitié dans la zone centrale du canal (afin d'augmenter  $\varepsilon$ ).

Ces remarques permettent de justifier les choix effectués dans la section 3.2.7 de développement du  $BL-v^2/k$  HTLES, pour hybrider certains termes ou non.

### 4.3.2 LES

La prédiction correcte des profils de vitesse avec des modèles LES résolus en paroi (WRLES pour *Wall-Resolved LES*) nécessite de considérablement raffiner le maillage dans la région de proche paroi afin de capturer toutes les structures turbulentes (Quasi-DNS). Cela est lié à l'absence de séparation entre les échelles (disparition de la zone inertielle). Les critères de raffinement du maillage dépendent donc du nombre de Reynolds de l'écoulement. Dans code\_saturne, une résolution LES correcte requiert  $(\Delta_x^+, \Delta_y^+, \Delta_z^+) = (30, 1, 15)$  en paroi [7], ce qui est un peu plus raffiné que les critères préconisés par Choi and Moin [20] ( $50 < \Delta_x^+/\delta < 130$  et  $15 < \Delta_z^+ < 30$ ).



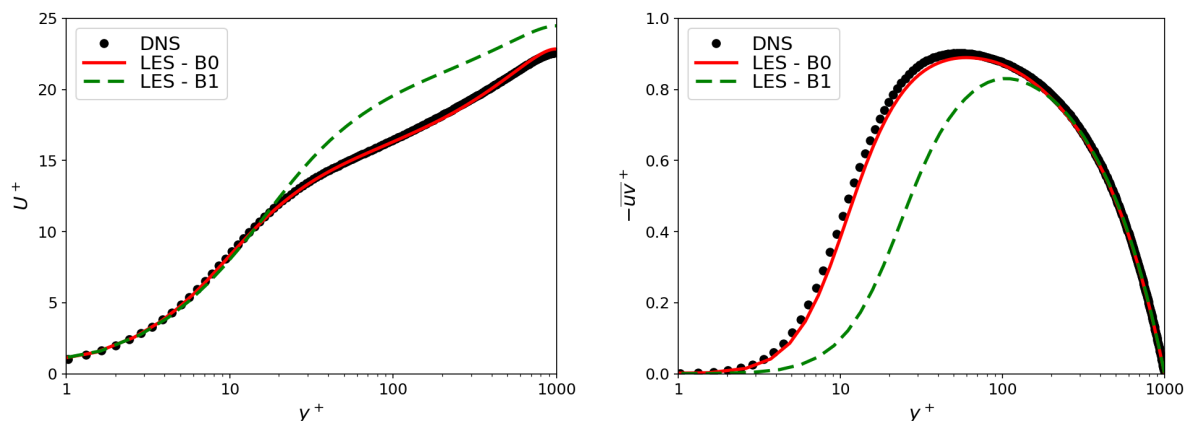


FIGURE 4.7 – Profils de vitesse (gauche) et de contrainte de cisaillement (droite) pour un écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 1000$ . Calculs LES avec les maillages B0 et B1.

En utilisant ce raffinement, l'écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 5200$  ne peut pas être étudié dans un temps acceptable avec les moyens informatiques disponibles. On s'intéresse donc à l'écoulement à  $Re_\tau = 1000$ , avec le maillage B0 ( $\sim 9.6$  millions de mailles) qui souscrit aux critères LES énoncés (dépendants du nombre de Reynolds), et le maillage B1 plus grossier ( $\sim 0.4$  millions de mailles) qui correspond à la résolution de référence pour les calculs hybrides dans cette thèse (dépendante de critères géométriques).

Comme montré sur la Figure 4.7, les résultats LES Smagorinsky [106] en utilisant le maillage B0 correspondent bien à la référence DNS, tandis qu'avec le maillage B1, la contrainte de cisaillement est mal reproduite dans la zone de proche paroi, et le profil de vitesse se retrouve largement surestimé par rapport à la référence à partir du début de la zone logarithmique.

### 4.3.3 Hybride DES

Le comportement des approches hybrides globales dans la zone de proche paroi est illustré en utilisant les modèles DES [108] et DDES [110], appliqués à la fermeture bas-Reynolds  $k-\omega$  SST. Comme mentionné dans la section 2.3.3.2, une fonction de protection  $f_d$  est adjointe au modèle DES pour définir la formulation DDES, permettant d'imposer le mode RANS dans la région de proche paroi. L'expression de  $f_d$  est donnée dans la section 4.4.3.3, mais il est rappelé que  $f_d = 0$  en paroi (mode RANS imposé) et  $f_d = 1$  au centre (formulation DES retrouvée), telle que son intégration est réalisée de la manière suivante :

$$F_{\text{DDES}} = \frac{L}{L - f_d \max[0, L - C_{\text{DES}}\Delta]} \Rightarrow \varepsilon_{\text{sfs}}^{\text{DDES}} = F_{\text{DDES}}\varepsilon_{\text{sfs}} = \begin{cases} \varepsilon_{\text{sfs}} & \text{si } f_d = 0, \\ F_{\text{DES}}\varepsilon_{\text{sfs}} & \text{si } f_d = 1, \end{cases} \quad (4.8)$$

avec  $L = k_{\text{sfs}}^{3/2}/\varepsilon_{\text{sfs}}$ ,  $F_{\text{DES}}$  définie par (Eq. 2.115) et  $\varepsilon_{\text{sfs}}^{\text{DDES}}$  la dissipation de l'équation de  $k_{\text{sfs}}$ .

La réduction du coût de calcul pour les modèles hybrides par rapport à la LES, notamment liée au déraffinement du maillage en proche paroi, permet d'étudier l'écoulement à  $Re_\tau = 5200$  avec le maillage C1 et le maillage plus grossier C2, conçus sur des critères géométriques.

Pour illustrer le fonctionnement de la DDES, les profils de  $F_{\text{DDES}}$  (Figure 4.8) sont analysés pour définir la zone traitée en mode RANS ( $F_{\text{DDES}} = 0$ ) et la zone où le mode LES est graduellement activé ( $F_{\text{DDES}} > 0$ ). On note que la fonction de protection en DDES permet d'imposer le mode RANS sur une zone plus large en proche paroi comparé à la DES, et ce d'autant plus que le maillage est déraffiné.



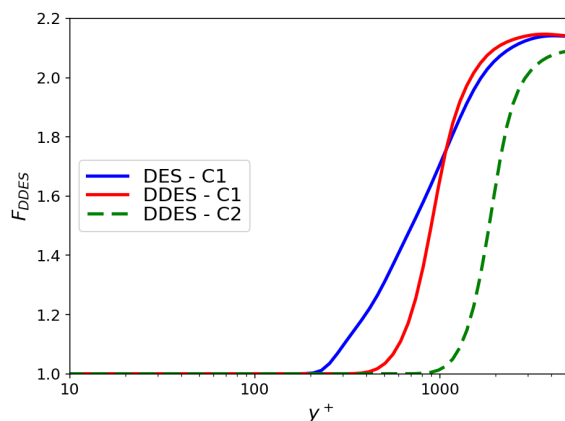


FIGURE 4.8 – Profil de  $F_{DDES}$  pour un écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 5200$ . Calculs DES et DDES avec les maillages C1 et C2.

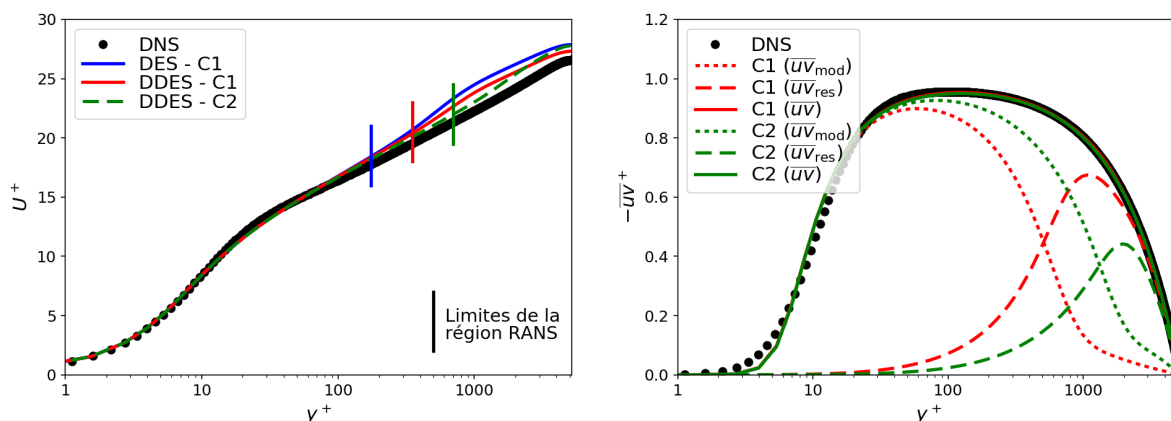


FIGURE 4.9 – Profils de vitesse (gauche) et de contrainte de cisaillement (droite) pour un écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 5200$ . Calculs DES et DDES avec les maillages C1 et C2.

Sur le maillage C1, les mêmes valeurs limites sont obtenues au centre du canal en DES et DDES, mais la transition est plus progressive avec la formulation DES. La valeur limite de  $F_{DDES}$  est plus faible sur le maillage C2 car, le raffinement étant plus grossier, il y a plus d'énergie de sous-filtre  $k_{sfs}$  et donc moins de dissipation dans l'équation de  $k_{sfs}$ .

Sur la Figure 4.9, des résultats satisfaisants sont observés dans la zone RANS, mais une surestimation des profils de vitesse est notée en mode LES, correspondant à l'apparition d'une seconde zone logarithmique artificielle, créant un décalage entre une zone logarithmique « modélisée » en mode RANS et une zone logarithmique « résolue » en mode LES. Ce *Log-Layer Mismatch* a été décrit par Nikitin *et al.* [87], et est lié notamment au raffinement du maillage, trop grossier dans la zone de transition RANS-LES, qui ne permet pas de résoudre correctement les fluctuations turbulentes de proche paroi. Cela explique pourquoi la surestimation est plus importante lorsque le maillage est déraffiné, ou que, pour un même maillage, la transition RANS-LES est approchée de la paroi, où les structures turbulentes à résoudre sont de plus petite taille.

En ce qui concerne la contrainte de cisaillement (Figure 4.9), les résultats sont en adéquation avec la référence. La position de la transition entre les composantes modélisée et résolue est plus proche de la paroi quand le maillage est raffiné, et la valeur de la composante résolue (resp. modélisée) est alors plus élevée (resp. faible).

## 4.4 Amélioration de la HTLES

### 4.4.1 Comportement de la HTLES

Il est intéressant dans un premier temps d'analyser le comportement de la formulation HTLES définie dans le Chapitre 3. La méthode hybride est appliquée au modèle  $k-\omega$  SST (section 3.2.6). Comme défini dans la section 3.2.4, le ratio d'énergie  $r$  est estimé avec une intégration d'un spectre de Kolmogorov (ratio  $r_K$ , Eq. 3.53). Les hypothèses utilisées ne sont cependant pas toujours valables, notamment en paroi, et l'estimation peut alors donner des valeurs irréalistes ( $r_K > 1$ ). Suite aux travaux de Tran *et al.* [121], le ratio d'énergie  $r \in [0, 1]$  est borné en définissant :

$$r = \min[1, r_K]. \quad (4.9)$$

Pour l'étude, les maillages A1, B1, C1 et D1 définis dans le Tableau 4.1 pour  $Re_\tau = 590, 1000, 5200$  et  $20000$ , sont utilisés. Ils respectent le même critère de raffinement géométrique  $(\Delta_x, \Delta_z) = (0.1\delta, 0.05\delta)$ . Cela implique que lorsque le nombre de Reynolds augmente, la taille des mailles en unités de paroi augmente également. Il est important d'utiliser un raffinement de ce type car cela permet d'atteindre l'objectif de diminution du nombre de mailles en paroi : il faut que, comme en RANS, le raffinement dans les directions tangentielles soit dicté uniquement par la configuration géométrique, et non pas par des critères dépendants du nombre de Reynolds, comme en LES.

La Figure 4.10 montre que  $r = 1$  (mode RANS) en proche paroi. En s'éloignant de la paroi, une diminution de  $r$  est observée, jusqu'à un plateau  $r < 1$  (mode LES) dans la zone de sillage ( $y/\delta > 0.2$ ). La zone de décroissance de  $r$  correspond globalement à la zone logarithmique, mais la position exacte de la transition RANS-LES dépend du raffinement du maillage. Dans le repère en unités de paroi, la transition a lieu plus proche de la paroi lorsque le maillage est raffiné, de  $y^+ \simeq 7$  avec A1 pour  $Re_\tau = 590$ , jusqu'à  $y^+ \simeq 50$  avec D1 pour  $Re_\tau = 20000$ . La valeur plateau du ratio d'énergie  $r$  dans la zone LES est plus élevée pour les grands nombres de Reynolds, ce qui est attendu étant donné qu'une plus grande part de l'énergie est modélisée. Concernant la fonction d'hybridation  $\psi(r)$ , on retrouve bien  $\psi(1) = 1$  en proche paroi, et la valeur de  $\psi(r)$  augmente avant de se stabiliser dans la zone LES.

En observant les profils de vitesse sur la Figure 4.11, on note cependant que les résultats HTLES ne sont pas en bon accord avec les références. Même si les estimations de la vitesse sont acceptables pour les écoulements à nombre de Reynolds modéré ( $Re_\tau = 590$  et  $1000$ ), les différences avec les références sont d'autant plus visibles que le nombre de Reynolds est élevé. En particulier, pour  $Re_\tau = 5200$  et  $20000$ , de larges écarts sont observés, y compris dans la zone RANS. Ces résultats dénotent d'un problème global, moins perceptible pour les petits nombres de Reynolds pour lesquelles la résolution du maillage en unités de paroi est relativement fine.

Ainsi, il est nécessaire d'introduire des termes correctifs et des améliorations dans la formulation HTLES pour traiter les écoulements en proche paroi.

### 4.4.2 Consistance avec le modèle de fermeture RANS

La première question abordée concerne les écarts observés entre les résultats HTLES et les références dans la zone RANS. Dans cette zone, la formulation exacte du modèle de fermeture RANS devrait être retrouvée en théorie, et les profils de vitesse prédits par le modèle RANS  $k-\omega$  SST sont corrects d'après les résultats de la section 4.3.1.

En analysant la répartition de l'énergie sur la Figure 4.12 (b), il est observé que l'énergie résolue  $k_r$  n'est pas nulle dans la zone RANS, où  $r = 1$  d'après la Figure 4.12 (a). Des fluctuations turbulentes venant de la région extérieure traitée en mode LES pénètrent dans la région de proche paroi traitée en mode RANS. Ces fluctuations résolues provoquent une inconsistance dans la formulation du modèle de fermeture, étant donné que l'approche hybride est développée en supposant que  $k_r = 0$  dans cette zone RANS.

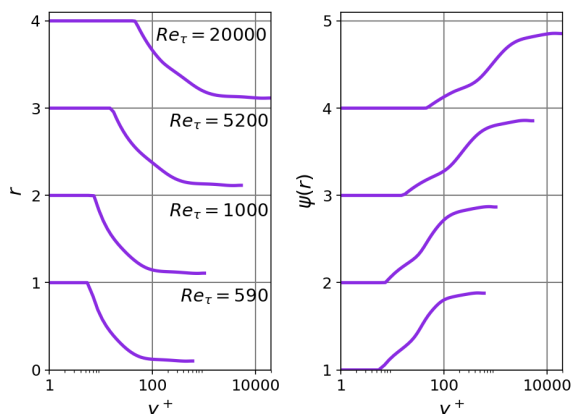


FIGURE 4.10 – Profils du ratio d'énergie  $r$  et de la fonction d'hybridation  $\psi$  pour  $Re_\tau \in [590, 20000]$ . Calculs HTLES avec les maillages A1, B1, C1 et D1.

Ainsi, l'énergie totale  $k = k_m + k_r$  est surestimée par rapport à la solution RANS  $k = k_m$ . On note que l'énergie totale obtenue correspond bien mieux à la DNS qu'avec le modèle RANS seul, mais l'objectif de la méthode hybride est de fonctionner en mode RANS près de la paroi, et non de corriger les défauts du modèle RANS. Surtout, la prise en compte de cette énergie résolue implique que l'échelle de temps modélisée  $T_m$  (Eq. 3.35) est également surestimée, et le terme de destruction  $k_{sfs}/T_m$  de l'équation de l'énergie se retrouve sous-estimé par rapport à la formulation RANS :

$$r = 1 \quad \Rightarrow \quad T_m = \frac{1}{\psi(1)} \frac{k}{\varepsilon_m^*} = \frac{k_m + k_r}{\varepsilon_m} > \frac{k_m}{\varepsilon_m} \quad \Rightarrow \quad \frac{k_{sfs}}{T_m} = \frac{k_m}{k_m + k_r} \varepsilon_m < \varepsilon_m, \quad (4.10)$$

avec  $k_{sfs} = k_m$  et  $\varepsilon_m^* = \varepsilon_m$  en mode RANS. De ce fait, comme observé sur la Figure 4.11, les profils de vitesses HTLES sont sous-estimés dans la zone RANS.

Pour corriger ces problèmes, une contrainte de consistance interne (ICC pour *internal consistency constraint*) est définie. Un coefficient  $c_r$  est introduit dans la définition de l'échelle de temps modélisée, dans le but de retrouver exactement la formulation RANS quand  $r = 1$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} k - \varepsilon : \text{ (Eq. 3.35) } \Rightarrow T_m = \frac{r}{\psi(r)} \frac{k_m + c_r k_r}{\varepsilon_m^*}, \\ k - \omega : \text{ (Eq. 3.49) } \Rightarrow T_m = \frac{r}{\psi_\omega(r)} \frac{k_m + c_r k_r}{C_\mu k_m \omega_m^*}, \end{array} \right. \quad \text{avec } c_r = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 1, \\ 1 & \text{si } r < 1. \end{cases} \quad (4.11)$$

Ainsi, dans la zone RANS, l'égalité  $T_m = k_m/\varepsilon_m = 1/(C_\mu \omega_m)$  est bien vérifiée.

L'introduction de l'ICC dans la formulation HTLES permet d'obtenir des profils de vitesse en accord avec les références dans la zone RANS, comme montré sur la Figure 4.13 (surtout visible à  $Re_\tau = 20000$ ). Cependant, cela ne corrige pas les écarts observés dans la zone LES, qui peuvent apparaître plus importants une fois les résultats RANS corrigés. Ces écarts sont notamment liés à une position non adaptée de la transition RANS-LES (voir la section 4.4.3).

*Remarque* : une autre solution envisagée aurait été de filtrer les fluctuations résolues dans la zone RANS, en utilisant un opérateur de restriction (filtre passe-bas), afin d'imposer  $k_r = 0$ . Cependant, l'un des objectifs de l'étude étant de mesurer les efforts instationnaires en paroi, c'est-à-dire en zone RANS, il est primordial de préserver l'information instationnaire qui provient de la zone LES. À ce titre, l'ICC permet de retrouver la formulation théorique du modèle HTLES tout en laissant les fluctuations turbulentes résolues pénétrer dans la zone RANS.

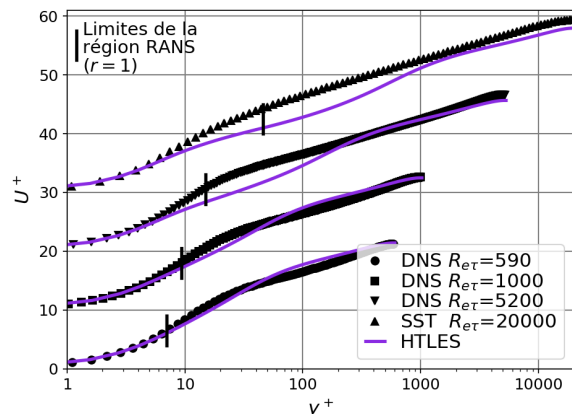


FIGURE 4.11 – Profils de vitesse pour l'écoulement en canal plan, avec  $Re_\tau \in [590, 20000]$ . Calculs HTLES avec les maillages A1, B1, C1 et D1.

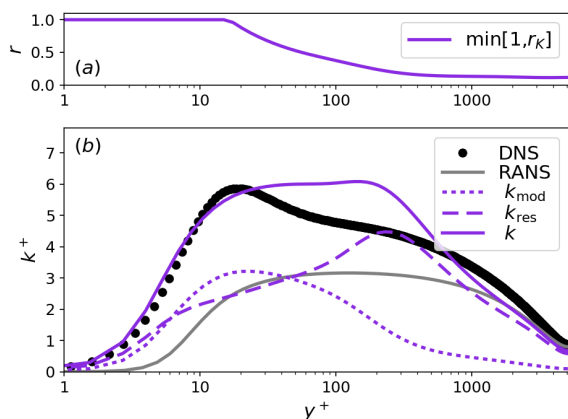


FIGURE 4.12 – (a) Ratio d'énergie  $r$  et (b) profils de l'énergie cinétique turbulente (composantes modélisée, résolue et totale) pour  $Re_\tau = 5200$ . Calcul HTLES avec le maillage C1.

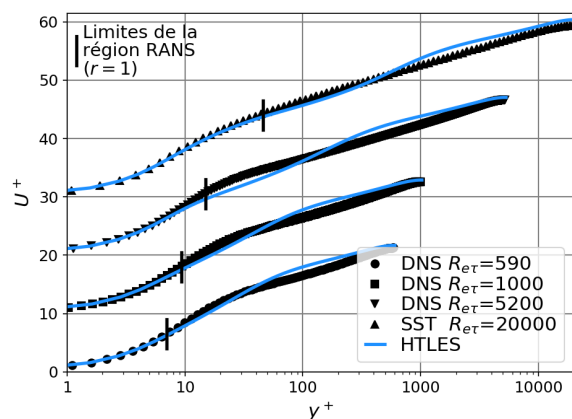


FIGURE 4.13 – Profils de vitesse pour l'écoulement en canal plan, avec  $Re_\tau \in [590, 20000]$ . Calculs HTLES (ICC) avec les maillages A1, B1, C1 et D1.

### 4.4.3 Contrôle de la transition RANS-LES dans la région de proche paroi

#### 4.4.3.1 Comportement du ratio d'énergie en proche paroi

L'objectif principal du contrôle de la transition RANS-LES est d'obtenir des prédictions HTLES correctes dans la couche limite turbulente, tout en réduisant la sensibilité du modèle au raffinement du maillage. Dans ce contexte, il est pertinent d'analyser le comportement du ratio d'énergie  $r$  qui pilote l'hybridation du modèle. En particulier, la majeure partie de la zone de transition est comprise dans la zone logarithmique d'après la Figure 4.10. Deux relations sont nécessaires pour effectuer cette analyse.

- On considère que le pas de temps est suffisamment petit pour que la fréquence de coupure soit liée à la discrétisation spatiale  $\Delta$ , de telle sorte que  $\omega_c = U_s \pi / \Delta$  (Eq. 3.33), et le ratio d'énergie  $r_K$  (Eq. 3.32) se réécrit :

$$r_K = \frac{1}{\beta_0} \left( \frac{U_s}{\sqrt{k}} \right)^{2/3} \left( \omega_c \frac{k}{\varepsilon} \right)^{-2/3} = \frac{1}{\beta_0} \left( \frac{\Delta}{\pi} \right)^{2/3} \left( \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \right)^{-2/3}, \quad (4.12)$$

- Dans la zone logarithmique, l'échelle de longueur intégrale peut être reliée à la distance à la paroi  $d_w$  (Eq. 4.4), tel que :

$$C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} = C_\kappa d_w. \quad (4.13)$$

En réunissant les deux précédentes équations, on obtient que dans la zone logarithmique, le ratio d'énergie  $r$  peut être évalué comme :

$$r_K = \frac{C_\mu^{1/2}}{\beta_0 \pi^{2/3} C_\kappa^{2/3}} \left( \frac{\Delta}{d_w} \right)^{2/3}. \quad (4.14)$$

On observe ainsi que le ratio d'énergie est seulement dépendant de la taille de grille, sans influence du nombre de Reynolds de l'écoulement. Ce résultat indique qu'il est possible de contrôler la transition au mode LES dans la zone logarithmique, car il suffit que  $\Delta$  croisse moins vite que  $d_w$ . Ainsi, à condition que le mode RANS soit activé jusqu'au début de la zone logarithmique, on peut choisir le maillage en fonction du ratio d'énergie  $r_K$  souhaité. On obtient alors une maîtrise de la transition RANS-LES en couche limite dès la construction du maillage.

Cependant, en utilisant la formulation actuelle du modèle HTLES, il est observé que pour certains maillages, la transition RANS-LES a lieu trop proche de la paroi. Pour les maillages A1, B1 et C1, la transition a lieu dans la zone tampon, d'après les profils de  $r$  sur la Figure 4.10.

Pour renforcer le contrôle de la transition RANS-LES, il est nécessaire d'étendre la zone traitée en mode RANS jusqu'au début de la zone logarithmique (limite fixée en  $y^+$ ). Les critères suivants sont alors remplis :

- (i) le mode RANS est imposé dans la sous-couche visqueuse et la zone tampon,
- (ii) la transition RANS-LES a lieu dans la zone logarithmique,
- (iii) la zone de sillage est traitée en mode LES.

#### 4.4.3.2 Fonction de protection pour imposer le mode RANS jusqu'au début de la zone logarithmique

La problématique d'extension de la zone RANS a déjà été rencontrée avec de nombreuses approches hybrides. En DES notamment, Spalart *et al.* [110] ont montré que sur certains types de maillages qualifiés d'« ambigus » (le raffinement n'est pas assez fin pour une résolution LES, mais pas non plus assez grossier pour imposer le mode RANS dans une région de proche paroi suffisamment large), la position et l'étendue de la zone de transition RANS-LES n'est pas adaptée. La transition du mode RANS au mode LES diminue fortement la contribution des échelles modélisées ( $\tau_{ij_{sfs}} = \langle u_i'' u_j'' \rangle$ ), et comme le maillage n'est pas assez fin pour résoudre les structures turbulentes ( $\langle u_i' u_j' \rangle$ ) en mode LES, une baisse non-physique des contraintes turbulentes totales ( $\overline{u_i u_j} = \overline{u_i' u_j'} + \overline{u_i'' u_j''}$ ) a lieu dans cette zone dite « grise ».

Cette réduction importante des contraintes turbulentes modélisée (MSD : *Modeled-Stress Depletion*), non compensée par les contraintes résolues, diminue le coefficient de frottement en paroi, et peut entraîner prématurément des phénomènes de séparation de la couche limite (GIS : *Grid-Induced Separation*). Pour étendre la zone RANS en proche paroi, indépendamment de l'échelle de longueur  $C_{DES}\Delta$ , Spalart *et al.* [110] ont développé la méthode DDES, en introduisant la fonction de protection  $f_d$  dans le terme d'hybridation  $F_{DDES}$  (Eq. 4.8).

Dans la même optique, une fonction de protection  $f_s$  ( $s$  pour *shielding*) est introduite dans la formulation HTLES pour imposer le mode RANS en proche paroi. Pour ce faire, le ratio d'énergie est défini comme une pondération entre sa définition usuelle (Eq. 4.9) et l'unité :

$$r = (1 - f_s) \times 1 + f_s \times \min[1, r_K], \quad (4.15)$$

où le mode RANS ( $r = 1$ ) est imposé pour  $f_s = 0$  en proche paroi, et la formulation HTLES est retrouvée pour  $f_s = 1$  loin des parois. La définition de  $f_s$  est un point clé étant donné que la position et la forme globale de sa zone de variation impactent directement le comportement du ratio d'énergie  $r$ .

#### 4.4.3.3 Protection indépendante du maillage pour la zone visqueuse

Une fonction de protection est développée pour fournir une protection de la région de proche paroi, en fonction des paramètres physiques de la couche limite. Le mode RANS est imposé dans la région visqueuse de paroi, où l'activation du mode LES requière des contraintes de maillage exigeantes et spécifiques, potentiellement insatisfaites. Les objectifs sont donc les suivants.

- ( $\alpha$ ) La fonction de protection doit dépendre de  $y^+$ , afin que la zone RANS soit étendue jusqu'au début de la zone logarithmique.
- ( $\beta$ ) La fonction de protection impose une zone de transition assez marquée au début de la zone logarithmique, afin de retrouver le comportement décroissant de  $r$  défini par (Eq. 4.14).
- ( $\gamma$ ) La fonction de protection est indépendante du raffinement du maillage.
- ( $\delta$ ) La fonction de protection est indépendante de la fermeture, afin de développer une formulation globale, pas spécifiquement reliée à un modèle RANS ou une méthode hybride.

Pour établir la formulation de la fonction de protection  $f_s$ , différentes méthodes ont été envisagées, résumées dans les points suivants.

### Utilisation du coefficient de pondération elliptique

Dans le cadre de l'approche à pondération elliptique [76], le coefficient  $\alpha$  varie continûment de 0 en paroi à 1 autour de  $y^+ = 100$ , comme montré sur la Figure 4.6. Son comportement est décrit par une équation elliptique (Eq. 2.42) dépendante de l'échelle de longueur  $L \simeq k^{3/2}/\varepsilon$  en RANS. Dans ce cas,  $\alpha$  est indépendant du raffinement du maillage en proche paroi (Figure 4.6). C'est donc un candidat prometteur pour satisfaire les critères précédents, en définissant  $f_s = \alpha^p$ .

Fadai-Ghotbi *et al.* [35] ont déjà proposé une protection de ce type, avec  $p = 2$ , en relation avec le modèle EB-RSM PITM (fermeture pour laquelle l'équation elliptique de  $\alpha$  est déjà résolue). De la même manière, Afailal *et al.* [2] ont appliqué cette protection au modèle  $k-\omega$  SST HTLES (dans ce cas-là, l'équation elliptique de  $\alpha$  n'étant pas intégrée au modèle de fermeture, elle doit être ajoutée dans le modèle hybride).

Ainsi, cette fonction de protection n'est pas indépendante de la fermeture (critère  $\delta$ ), et nécessite de rajouter une équation elliptique à la formulation lorsque le modèle de fermeture ne fait pas appel à l'approche à pondération elliptique. De plus, dans le cadre de l'hybridation du modèle  $BL-\overline{v^2}/k$  dans la section 3.2.7, l'échelle de longueur de l'équation elliptique est modifiée [35] afin de prendre en compte l'effet de blocage pour les échelles de sous-filtre, et correspond alors à  $L_m \simeq k_m^{3/2}/\varepsilon$ . Cette échelle est dépendante du maillage par définition ( $L_m \sim C_d \Delta$ ), donc le critère ( $\gamma$ ) n'est pas non plus respecté.

### Utilisation de la fonction de protection de la DDES

Dans le cadre de la DES, des fonctions de protection ont été développées. En DDES notamment, la fonction de protection  $f_d$  a été définie [110] de la manière suivante :

$$f_d = 1 - \tanh [(C_d r_d)^p] = \begin{cases} 1 & \text{si } r_d \ll 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{avec } r_d = \frac{\nu + \nu_{\text{sfs}}}{\sqrt{1/2 (\tilde{S}^2 + \tilde{\Omega}^2) C_\kappa^2 d_w^2}}, \quad (4.16)$$

avec  $\tilde{S} = (2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij})^{1/2}$ ,  $\tilde{\Omega} = (2\tilde{\Omega}_{ij}\tilde{\Omega}_{ij})^{1/2}$ ,  $d_w$  la distance à la paroi, et les coefficients  $C_d = 8$  et  $p = 3$ . L'expression de  $r_d$  peut être analysée en utilisant les relations définies dans la zone logarithmique (Eq. 4.4) :

$$\sqrt{1/2 (S^2 + \Omega^2)} \sim \frac{dU}{dy} = \frac{u_\tau}{C_\kappa y} = \frac{\nu_m}{C_\kappa^2 y^2}, \quad (4.17)$$

avec  $\nu_m = \overline{v_{\text{sfs}}}$ . Le ratio  $r_d$  est donc proche de l'unité dans la zone logarithmique, et le comportement souhaité en paroi et hors de la couche limite est garanti par le terme de distance à la paroi au dénominateur.

Cependant, en effectuant des calculs DDES sur les maillages C1 et C2 pour l'écoulement à  $Re_\tau = 5200$ , on remarque sur la Figure 4.14 (a) que  $f_d$  est dépendant du maillage (plus le maillage est raffiné, plus la transition de  $f_d$  a lieu proche de la paroi). Cette dépendance entre en contradiction avec le critère ( $\gamma$ ).

Dans le cadre de la IDDES [105], la formulation améliorée fait intervenir de nombreuses fonctions de protection supplémentaires :  $\tilde{f}_d$ ,  $f_{dt}$ ,  $f_b$ ,  $f_e$ ,  $f_{e1}$ ,  $f_{e2}$  et  $f_l$ . La définition et l'utilisation conjointe de ces fonctions de protection tendent à augmenter la complexité du modèle, et il s'avère difficile de calibrer les nombreux coefficients. Ainsi, même si l'utilisation de ces fonctions permet au modèle IDDES d'atteindre ses objectifs (réduction du *Log-Layer Mismatch* notamment), une formulation plus simple est souhaitée dans cette étude.



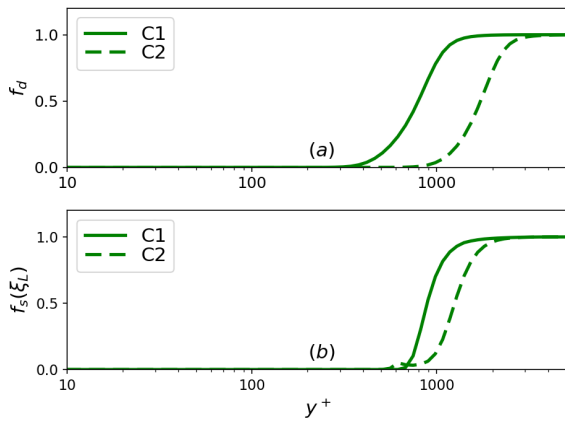


FIGURE 4.14 – (a) Fonctions de protection  $f_d$  en DDES et (b) fonction de protection  $f_s(\xi_L)$  en HTLES. Écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 5200$ . Calculs avec les maillages C1 et C2.

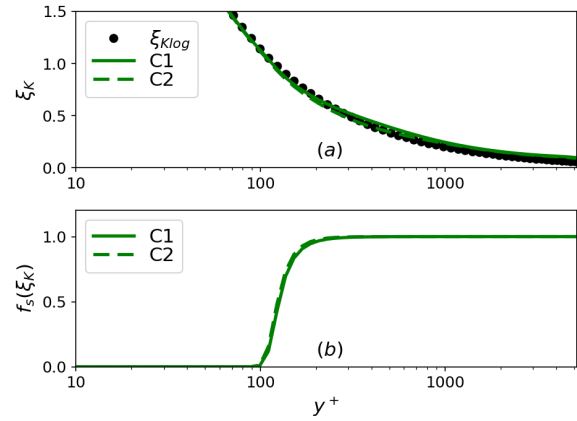


FIGURE 4.15 – (a) Ratio d'échelles de longueur  $\xi_K$  et (b) fonction de protection  $f_s(\xi_K)$ . Écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 5200$ . Calculs HTLES avec les maillages C1 et C2.

### Utilisation d'une échelle caractéristique rapportée à la distance à la paroi

L'utilisation de la fonction tangente hyperbolique apparaît pertinente pour définir une fonction de protection, car elle assure une transition continue entre 0 et 1. L'objectif est alors de définir un ratio adimensionné d'échelle de longueur  $\xi$ , à la puissance  $p_1$ , telle que la fonction de protection satisfasse les critères  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  :

$$f_s(\xi) = 1 - \tanh[\xi^{p_1}], \quad (4.18)$$

#### Échelle intégrale

En premier lieu, l'échelle de longueur intégrale  $k^{3/2}/\varepsilon$  semble être la plus appropriée pour définir un ratio d'échelle de longueur, de telle sorte que :

$$\xi_L = C_1 \frac{k^{3/2}/\varepsilon}{d_w}, \quad (4.19)$$

avec le coefficient  $C_1$ . En rappelant l'égalité  $C_\mu^{3/4} k^{3/2}/\varepsilon = C_\kappa y$  (Eq. 4.4), le ratio est *théoriquement* constant dans la zone logarithmique, ce qui permet d'envisager une transition au début ou à la fin de cette zone, indépendante du maillage. Un limiteur doit être ajouté dans la zone de proche paroi pour assurer que  $\xi_L \gg 1$ , car l'analyse asymptotique donne  $\xi_L \sim y^2$ . On peut utiliser une borne proportionnelle à l'échelle de Kolmogorov, comme dans l'échelle de Durbin  $L$  (Eq. 2.45) :  $\xi_L = C_1 L/d_w$ .

Sur la Figure 4.14 (b), les calculs HTLES effectués sur les maillages C1 et C2 ( $Re_\tau = 5200$ ) montrent que l'indépendance de  $f_s(\xi_L)$  au maillage n'est pas vérifiée. Malgré de nombreux tests et études paramétriques sur la calibration des coefficients (non montré ici), la formulation (Eq. 4.19) s'est toujours montrée sensible au raffinement du maillage. La raison est que l'énergie cinétique turbulente totale  $k = k_r + k_m$ , qui devrait toujours donner la même valeur en théorie, dépend un peu du maillage en pratique. Il s'avère alors difficile d'utiliser l'énergie turbulente totale  $k$  pour définir une fonction de protection indépendante du maillage.

#### Autres échelles de longueur

L'analyse des relations (Eq. 4.4) a permis d'envisager d'autres ratios, entre une échelle théoriquement constante dans la zone logarithmique et la distance à la paroi, tel que :

$$\xi_S \sim \frac{k^{1/2}/S}{C_\kappa y}, \quad \text{ou} \quad \xi_\tau \sim \frac{|\overline{uv}|^{3/2}/\varepsilon}{C_\kappa y}. \quad (4.20)$$



Cependant, les variables intervenants dans ces ratios peuvent être complexes à évaluer de manière générale (par rapport au cas simplifié du canal plan). De plus, ces ratios dépendent des contraintes totales (résolues et modélisées) et auront une sensibilité au maillage, comme pour l'échelle de longueur intégrale. Enfin, un bon comportement asymptotique n'est pas assuré.

En se fondant sur les variables du modèle de fermeture, le ratio fondé sur l'échelle de longueur modélisée  $k_m^{3/2}/\varepsilon_m$  s'est avéré facilement utilisable, avec un bon comportement asymptotique, mais ce ratio est par définition dépendant du maillage. Enfin, les fonctions de couplage  $F_1$  et  $F_2$  du  $k-\omega$  SST ont été testées, mais elles se sont révélées également dépendantes du maillage.

### Échelle de Kolmogorov

Finalement, on propose de définir un ratio, noté  $\xi_K$  ( $K$  pour Kolmogorov), qui compare l'échelle de Kolmogorov (Eq. 2.68) à la distance à la paroi :

$$\xi_K = C_1 \frac{(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}}{d_w}. \quad (4.21)$$

Puisque le taux de dissipation résolu est négligeable, le taux de dissipation modélisé est égal à la dissipation totale, et est donc indépendant du maillage. De ce fait, un ratio faisant seulement intervenir la variable turbulente  $\varepsilon = \varepsilon_m$  semble *a priori* remplir le critère ( $\gamma$ ).

Loin de la paroi, le ratio  $\xi_K$  tend vers 0 puisque le terme dominant de l'expression est la distance à la paroi au dénominateur (l'échelle de longueur de Kolmogorov ne dépend plus de la distance à la paroi loin de celle-ci). À la paroi, étant donné que  $\varepsilon$  tend vers une valeur finie non nulle [89], le ratio  $\xi_K$  tend vers l'infini. Dans la zone logarithmique, en utilisant la relation  $\varepsilon = u_\tau^3/(C_\kappa y)$  (Eq. 4.4), on obtient :

$$\xi_{K\log} = C_1 \frac{(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}}{y} = C_1 C_\kappa^{1/4} \left( \frac{\nu/u_\tau}{y} \right)^{3/4} = C_1 C_\kappa^{1/4} y^{+3/4}. \quad (4.22)$$

On note que  $\xi_K$  est indépendant du maillage, et sa décroissance est fixée en unités de paroi. Il est alors possible de calibrer le ratio  $\xi_K$ , en jouant sur le coefficient  $C_1$ , pour étendre la zone RANS jusqu'à la position souhaitée dans la zone logarithmique. On a choisi de fixer la limite de la zone protégée à  $y^+ = 100$  : cette position correspond bien au début de la zone logarithmique ( $30 < y^+$ ,  $y/\delta < 0.2$ ), sauf pour les écoulements à un nombre de Reynolds modéré, tout en conservant une marge de sécurité pour garantir la robustesse de la formulation.

Ainsi, ( $\alpha$ ) la zone RANS est étendue jusqu'à  $y^+ = 100$  (partie inférieure de la zone logarithmique), ( $\beta$ ) une transition relativement pentue de  $f_s$  est imposée entre  $y^+ = 100$  et 200 pour rester dans la zone inférieure de la couche limite, ( $\gamma$ ) de manière indépendante du maillage et ( $\delta$ ) indépendante du modèle hybride utilisé. La calibration théorique des coefficients  $C_1$  et  $p_1$ , qui influent respectivement sur la position et l'extension de la zone de transition, est facilitée par l'utilisation de la formule analytique (Eq. 4.22), et donne  $C_1 = 45$  et  $p_1 = 8$ .

La fonction de protection  $f_s(\xi_K)$  est finalement définie de la manière suivante :

$$f_s(\xi_K) = 1 - \tanh[\xi_K^{p_1}], \quad \text{avec} \quad \xi_K = C_1 \frac{(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}}{d_w}, \quad (4.23)$$

avec les coefficients  $C_1 = 45$  et  $p_1 = 8$ , et dans le cadre de la HTLES, le taux de dissipation physique est estimé avec  $\varepsilon = \psi \varepsilon_m^* = C_\mu k_m \psi_\omega \omega_m^*$  (Eq. 3.19 et 3.47).

Sur la Figure 4.15 (a), on observe que la relation théorique (Eq. 4.22) est retrouvée dans la zone logarithmique, garantissant que  $\xi_K$  est bien indépendant des maillages utilisés. Sur la Figure 4.15 (b), on vérifie que la fonction de protection  $f_s(\xi_K)$  présente le comportement souhaité, avec notamment une transition entre  $y^+ = 100$  et 200 indépendante des maillages C1 et C2.

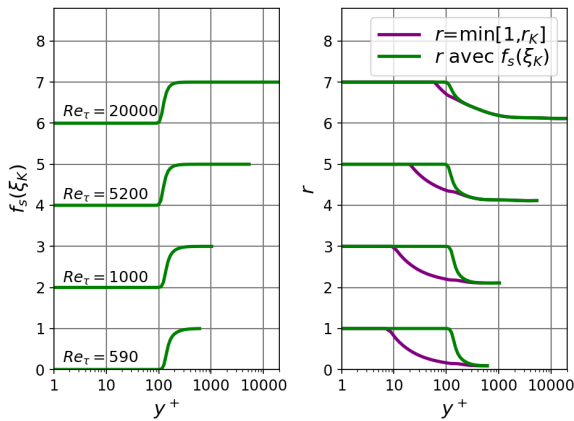


FIGURE 4.16 – Profils de la fonction de protection  $f_s$  et du ratio d'énergie  $r$ , avec  $Re_\tau \in [590, 20000]$ . Calculs HTLES (ICC +  $f_s(\xi_K)$ ) avec les maillages A1, B1, C1 et D1.

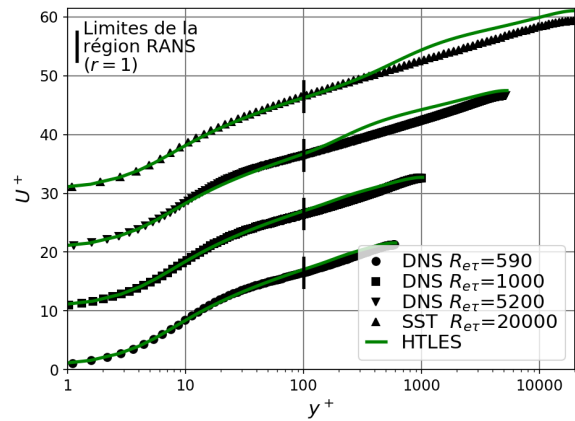


FIGURE 4.17 – Profils de vitesse pour l'écoulement en canal plan, avec  $Re_\tau \in [590, 20000]$ . Calculs HTLES (ICC +  $f_s(\xi_K)$ ) avec les maillages A1, B1, C1 et D1.

### Validation de la formulation HTLES (ICC + $f_s(\xi_K)$ )

Des calculs  $k-\omega$  SST HTLES sont réalisés en intégrant la fonction de protection  $f_s(\xi_K)$  et l'ICC. Pour tous les nombres de Reynolds considérés ( $Re_\tau = [590, 20000]$ ), en utilisant les maillages standards (A1, B1, C1, D1), la Figure 4.16 montre que le comportement de  $f_s(\xi_K)$  est identique.

En ce qui concerne le ratio d'énergie  $r$  (Figure 4.16), la fonction de protection  $f_s(\xi_K)$  permet d'étendre la zone RANS ( $r = 1$ ) jusqu'à  $y^+ = 100$ , imposant une protection plus large que la formulation originale  $r = \min[1, r_K]$  (Eq. 4.9). Cela est particulièrement prononcé pour les nombres de Reynolds modérés. Dans la zone de transition RANS-LES, la décroissance de  $r$  est guidée par  $f_s(\xi_K)$  jusqu'à  $y^+ = 200$ , avant de retrouver le comportement de  $r_K$ , comme attendu (critère  $\beta$ ). La valeur limite dans la zone LES est bien la même avec les deux formulations (Eq. 4.9) et (Eq. 4.15).

Sur la Figure 4.17, les profils de vitesse prédits par la formulation améliorée de la HTLES sont en bon accord avec les références dans la zone de proche paroi. Cela est lié à l'extension de la zone RANS, grâce à la fonction de protection  $f_s(\xi_K)$ , et au fait que le comportement du modèle de fermeture est bien retrouvé, grâce à l'ICC. Dans la zone LES, la qualité des prédictions dépend du nombre de Reynolds de l'écoulement.

- Pour des nombres de Reynolds modérés  $Re_\tau = 590$  et  $1000$ , des bons résultats sont obtenus. La zone RANS est suffisamment étendue pour que la transition RANS-LES ait lieu dans une zone où le raffinement du maillage est suffisant pour résoudre les structures turbulentes de proche paroi.
- Au contraire, pour des nombres de Reynolds relativement élevés  $Re_\tau = 5200$  et  $20000$ , le *Log-Layer Mismatch* [87] est observé (comme pour la DES dans la section 4.3.3). La principale limitation de  $f_s(\xi_K)$  est mise en évidence pour ces écoulements haut-Reynolds : le comportement de  $f_s(\xi_K)$  étant imposé en unités de paroi, la zone protégée est rétrécie lorsque le nombre de Reynolds augmente, alors que la discrétisation ( $\Delta_x, \Delta_z$ ) fondée sur des critères géométriques reste fixe. Ainsi, lorsque le mode LES est activé, le maillage est trop anisotrope pour décrire les fluctuations turbulentes résolues.

Pour conclure l'analyse de la fonction  $f_s(\xi_K)$  (Eq. 4.23), les points suivants sont soulignés.

- ✓ La fonction de protection  $f_s(\xi_K)$  satisfait les critères  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ , en étant notamment indépendante du raffinement du maillage.
- ✓ Le comportement asymptotique de  $f_s(\xi_K)$  est bien défini en paroi et loin des parois, et la forme du profil de  $\xi_K$  est caractérisée analytiquement dans la zone logarithmique (Eq. 4.22), permettant de paramétrer la fonction de protection pour retrouver le comportement désiré.
- ✓ La fonction  $f_s(\xi_K)$  fait uniquement appel à des moyennes statistiques des variables turbulentes, ce qui implique que  $f_s(\xi_K)$  est fixé pour un écoulement statistiquement stationnaire, alors que, par exemple, la fonction  $f_d$  varie à chaque pas de temps étant donné qu'elle dépend des grandeurs instantanées.
- ✓ La formulation de  $f_s(\xi_K)$  est suffisamment robuste pour retrouver en pratique le comportement prédit théoriquement, en ne faisant intervenir que le taux de dissipation physique  $\varepsilon$ .

Le fait que le comportement de  $\xi_K$  soit fixé en unités de paroi, indépendamment du nombre de Reynolds, présente néanmoins des inconvénients.

- ✗ Pour les nombres de Reynolds modérés, la zone protégée se retrouve relativement étendue (pour  $Re_\tau = 590$ ,  $y^+ = 100$  correspond à  $y = 0.17\delta$ ). Cependant, l'utilisation du mode LES n'est pas pour autant justifiée dans la région visqueuse de paroi. La fonction de protection  $f_s(\xi_K)$  reste donc nécessaire.

Pour modérer cette critique, notons que l'étude d'écoulements turbulents bas-Reynolds avec des modèles LES résolus en paroi est accessible avec les moyens informatiques actuels, et n'est donc pas le « coeur de cible » des méthodes hybrides. D'un autre côté, les applications industrielles sont caractérisées par une large gamme de nombre de Reynolds, pour lesquels l'approche hybride doit pouvoir être appliquée.

La résolution des maillages étant difficilement maîtrisable sur ces configurations, des maillages « ambigus » [110], c'est-à-dire localement fins mais pas non plus suffisamment pour une résolution LES, peuvent être rencontrés, notamment dans les régions bas-Reynolds. Dans ces situations, il est intéressant de conserver une zone RANS fixée en unités de paroi.

- ✗ Pour les grands nombres de Reynolds, la zone protégée se retrouve très peu étendue (pour  $Re_\tau = 20000$ ,  $y^+ = 100$  correspond à  $y = 0.005\delta$ ). Dans ce cas, même si  $f_s(\xi_K)$  est nécessaire pour empêcher que le mode LES soit activé avant le début de la zone logarithmique, le maillage dans la zone de transition est trop anisotrope, autrement dit pas assez fin dans les directions  $x$  et  $z$ , pour résoudre correctement les structures turbulentes en mode LES.

Pour pallier ce problème, il serait possible de raffiner le maillage dans ces directions tangentielles en fonction du nombre de Reynolds, mais l'intérêt des méthodes hybrides réside justement dans le fait de fixer  $\Delta_x$  et  $\Delta_z$  sur des critères géométriques pour diminuer le coût de calcul. Ainsi, il est nécessaire d'introduire une protection complémentaire pour les écoulements haut-Reynolds, permettant de prendre en compte l'anisotropie du maillage.

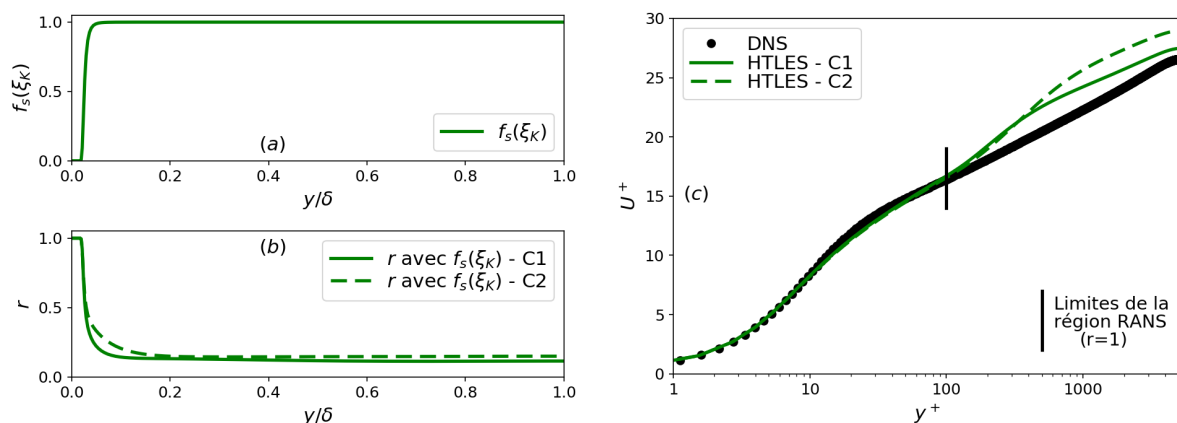


FIGURE 4.18 – (a) Fonction de protection, (b) ratio d’énergie et (c) profils de vitesse. Écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 5200$ . Calculs HTLES (ICC +  $f_s(\xi_K)$ ) avec les maillages C1 et C2.

#### 4.4.3.4 Fonction de protection dépendante de l’anisotropie du maillage pour contrer le *Log-Layer Mismatch*

Afin d’analyser plus spécifiquement le comportement du modèle HTLES amélioré (ICC +  $f_s(\xi_K)$ ), l’étude se concentre sur le cas test du canal plan à  $Re_\tau = 5200$  en utilisant le maillage standard C1 et le maillage C2 déraffiné dans les directions tangentielles  $x$  et  $z$ .

Sur les Figures 4.18 (a) et (b), la transition RANS-LES imposée par  $f_s(\xi_K)$  a lieu très proche de la paroi ( $y^+ = 100 \leftrightarrow y = 0.02\delta$ ). La décroissance du ratio d’énergie  $r$  est liée à la pente de  $f_s(\xi_K)$ , indépendante du maillage, dans la partie inférieure de la zone logarithmique, avant de retrouver le comportement de  $r_K$ , dépendant du maillage, à partir de  $y^+ = 200$  ( $y = 0.04\delta$ ).

Sur la Figure 4.18 (c), la surestimation des profils de vitesse dans la zone LES correspond au phénomène de *Log-Layer Mismatch* [87]. Au niveau de la transition RANS-LES, les cellules sont trop anisotropes pour résoudre correctement les fluctuations turbulentes, et ce d’autant plus que le maillage est déraffiné dans les directions tangentielles, c’est pourquoi la surestimation augmente avec C2.

Dans le cas du modèle HTLES, le problème vient du fait que la taille de filtre spatiale  $\Delta$ , qui intervient dans l’expression du ratio d’énergie  $r_K$  (Eq. 3.32), est évaluée comme la racine cubique du volume des cellules  $\Delta_\Omega = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{1/3}$ . Cette formule peut provoquer une transition prématurée au mode LES car  $\Delta_y$  est souvent très faible par rapport à  $\Delta_x$  ou  $\Delta_z$  dans la région de proche paroi. L’échelle pertinente afin d’assurer que le maillage soit adapté pour résoudre les structures turbulentes dans toutes les directions de l’écoulement est l’extension maximale de la maille  $\Delta_{\max} = \max[\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z]$ .

Différentes méthodes ont été explorées pour sensibiliser le modèle à cette échelle caractéristique du maillage, dans le but de réduire le *Log-Layer Mismatch*.

#### Utilisation de la taille maximale des mailles comme taille de filtre

Il a été envisagé de changer la définition de la taille de filtre dans la formulation HTLES, en utilisant  $\Delta = \Delta_{\max}$ . Cette définition permet de bénéficier d’une taille de filtre relativement constante ( $\Delta_{\max} = \Delta_x$  pour les maillages considérés, Figure 4.19 (a)) et d’étendre la zone RANS en proche paroi (ce qui clairement l’un des objectifs en DES [108]). L’évaluation théorique de  $r_K$  dans la zone logarithmique (Eq. 4.14) a notamment permis d’estimer :

$$r_K = \frac{C_\mu^{1/2}}{\beta_0 \pi^{2/3} C_\kappa^{2/3}} \left( \frac{\Delta}{y} \right)^{2/3} = 0.58 \left( \frac{\Delta}{y} \right)^{2/3} = \left( 0.44 \frac{\Delta}{y} \right)^{2/3}, \quad (4.24)$$

en prenant la valeur théorique du coefficient  $\beta_0 = 0.44$ .

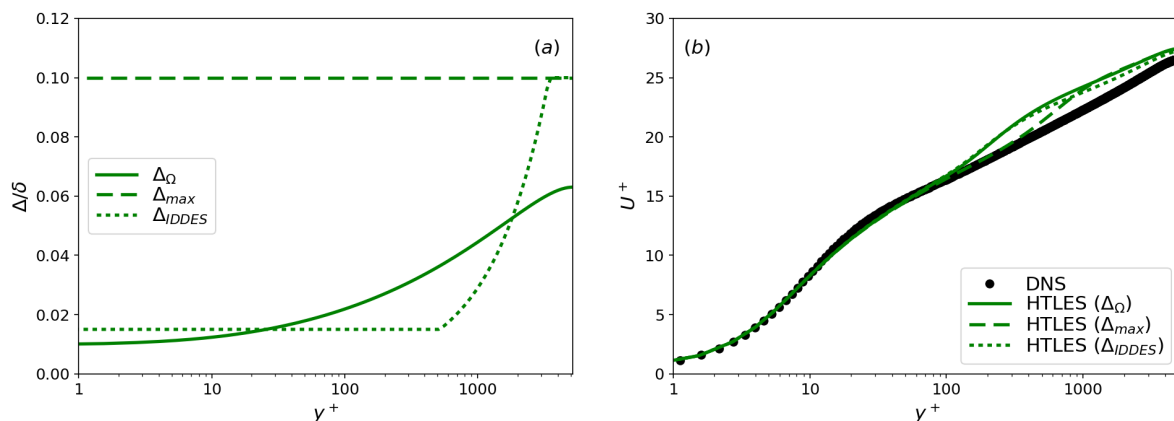


FIGURE 4.19 – (a) Taille de filtre  $\Delta$  et (c) profils de vitesse. Écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 5200$ . Calculs HTLES (ICC +  $f_s(\xi_K)$ ) avec le maillage C1.

Dans ce cas, la transition du mode RANS au mode LES ( $r_K$  devient inférieur à 1) a lieu lorsque  $y = 0.44\Delta_{max}$ . Or, on peut montrer que cette distance à la paroi n'est pas suffisante pour résoudre les fluctuations turbulentes en proche paroi. En effet, suivant le raisonnement de Larsson *et al.* [66] en WMLES ou de Han *et al.* [48] en IDDES, cette distance peut être évaluée en s'assurant que l'échelle intégrale  $L$  est correctement résolue, c'est-à-dire qu'elle dispose de l'échantillonnage minimal  $N_D$  par rapport à la taille de filtre  $\Delta_{max}$  :  $L \geq N_D\Delta_{max}$ .

Si l'on prend  $N_D = 2$  (théorème de Nyquist-Shannon), et que l'on considère  $L = k^{3/2}/\varepsilon = C_\kappa/C_\mu^{3/4}y = 2.5y$  (Eq. 4.4), cela donne  $2.5y \geq 2\Delta_{max}$ , c'est-à-dire  $y > 0.8\Delta_{max}$ . C'est la distance minimale au-delà de laquelle le maillage peut résoudre les structures porteuses d'énergie dans la zone logarithmique. Le raisonnement peut être schématisé de la façon suivante :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Loi physique} \\ \left. \begin{array}{l} L = \frac{C_\kappa}{C_\mu^{3/4}}y \\ L \geq 2\Delta_{max} \end{array} \right\} \\ \text{Loi de résolution} \end{array} \right\} \Rightarrow y \geq 2\frac{C_\mu^{3/4}}{C_\kappa}\Delta_{max} = 0.8\Delta_{max}. \quad (4.25)$$

Étant donné que la constante  $\beta_0$  est calibrée pour valider la décroissance énergétique en THI (section 3.4.4.1), avec des valeurs comprises dans l'intervalle  $[0.42, 0.48]$  suivant le modèle de fermeture, il n'est pas possible de modifier sa valeur pour imposer une transition RANS-LES lorsque  $y \geq 0.8\Delta_{max}$ . En particulier, le développement numérique de l'équation (4.24) montre qu'il faudrait imposer  $\beta_0 = 0.29$  pour que la transition ait lieu ( $r_K < 1$ ) à partir de  $y = 0.8\Delta_{max}$ .

Ainsi, l'utilisation de la taille de filtre  $\Delta_{max}$  au lieu de  $\Delta_\Omega$  ne présente pas l'intérêt escompté, car, même en prenant en compte l'anisotropie du maillage, la transition RANS-LES a toujours lieu trop proche des parois. Les prédictions des profils de vitesse sur la Figure 4.19 (b) montrent bien que même en utilisant  $\Delta_{max}$ , le *Log-Layer Mismatch* est toujours notable au centre du canal.

À l'issue de cette analyse, il est souligné que la calibration des constantes clés des méthodes hybrides, et notamment  $\beta_0$  en HTLES, présente une incompatibilité pour satisfaire à la fois la décroissance énergétique d'une turbulence isotrope et le positionnement adéquat de la transition RANS-LES en paroi.

### Utilisation de la taille de maille définie en IDDES comme taille de filtre

Pour réduire le *Log-Layer Mismatch*, Shur *et al.* [105] ont proposé de modifier la définition de la taille des mailles dans la formulation IDDES, en définissant :

$$\Delta = \min[C_w \max[d_w, \Delta_{\max}], \Delta_{\max}] = \begin{cases} C_w \Delta_{\max} \ll \Delta_{\max} & \text{zone de proche paroi,} \\ C_w d_w \leq \Delta_{\max} & \text{zone de transition } (d_w \geq \Delta_{\max}), \\ \Delta_{\max} & \text{zone LES,} \end{cases} \quad (4.26)$$

avec le coefficient  $C_w = 0.15$  (Figure 4.19 (a)). La définition des différentes zones est schématique, mais l'objectif de cette modification est de retrouver la formulation DES  $\Delta_{\max}$  dans la zone LES, d'imposer une petite taille de maille en paroi qui force le modèle dans sa branche RANS, et d'assurer une transition continue de la taille de maille entre les deux modes. Cependant, l'utilisation d'une taille de filtre spatial fondée sur cette définition en HTLES ne permet pas non plus de réduire significativement le *Log-Layer Mismatch*, comme montré sur la Figure 4.19 (b).

### Utilisation de la taille de maille définie en ZDES comme taille de filtre

En ZDES, Deck *et al.* [29, 30] ont proposé d'utiliser l'échelle  $\Delta_{\max}$  en proche paroi pour imposer le mode RANS, et l'échelle  $\Delta_{\Omega}$  sinon, afin d'assurer une transition rapide au mode LES. Ils utilisent la fonction de protection  $f_d$  (Eq. 4.16) de la DDES [107] pour coupler les différentes expressions de la taille de maille :

$$\Delta = \begin{cases} \Delta_{\max} & \text{si } f_d < f_{d0}, \\ \Delta_{\Omega} & \text{si } f_d > f_{d0}. \end{cases} \quad (4.27)$$

Le coefficient  $f_{d0} = 0.8$  est calibré afin de conserver la formulation DDES originale ( $\Delta_{\max}$ ) dans une majeure partie de la couche limite turbulente. Le bénéfice principal de l'échelle  $\Delta_{\Omega}$  réside dans le rétrécissement de la zone de transition, ce qui permet d'éviter le retard de développement des instabilités [30]. Cependant, avec cette définition, la position de la transition RANS-LES dépend *in fine* de la fonction de protection  $f_d$  dans la plupart des cas, qui, elle, ne dépend pas explicitement de l'anisotropie du maillage.

### Utilisation d'une fonction de protection supplémentaire

À partir du constat qu'une modification de la définition de la taille de filtre spatial ne permet d'assurer une maîtrise suffisante de la position de la transition RANS-LES, il est nécessaire d'introduire un paramètre supplémentaire dans le modèle, dépendant de la taille de maille  $\Delta_{\max}$ . La IDDES [105] fait appel à de nombreuses fonctions de protection, dont l'une propose une comparaison explicite de la taille de maille  $\Delta_{\max}$  et de la distance à la paroi  $d_w$  :

$$f_b = \min[2\exp(-9\alpha_b^2), 1], \quad \text{avec } \alpha_b = C_b - \frac{d_w}{\Delta_{\max}}, \quad (4.28)$$

avec le coefficient  $C_b = 0.25$  à l'origine [105]. Ce coefficient a été recalibré ( $C_b = 1.35$ ) par Han *et al.* [48] pour assurer que la transition RANS-LES n'ait pas lieu avant  $y \geq 1.6\Delta_{\max}$ , avec un raisonnement analogue à celui résumé dans (Eq. 4.25), en prenant  $N_D = 4$ .

Que ce soit avec  $f_b$  (Eq. 4.28) ou les autres fonctions de protection de la IDDES [105], des résultats probants ont été obtenus avec les modèles de type DES [29, 30, 48, 105]. Cependant, les formulations s'avèrent relativement complexes, avec de nombreux coefficients à paramétrer.



### Proposition d'une nouvelle fonction de protection dépendante de la taille maximale des mailles

L'objectif est de conserver la philosophie de l'approche ZDES [29], à savoir imposer la position de la transition RANS-LES en fonction de  $\Delta_{\max}$  et conserver une taille de filtre spatiale  $\Delta_{\Omega}$  en zone LES. Dans ce cadre, une nouvelle fonction de protection est proposée pour piloter la transition RANS-LES, comparant  $\Delta_{\max}$  et  $d_w$  à la manière de la fonction  $f_b$  (Eq. 4.28), mais avec une formulation simplifiée et plus en phase avec la fonction  $f_s(\xi_K)$  (Eq. 4.23) définie précédemment. En particulier, le ratio  $\xi_D \sim \Delta_{\max}/d_w$  est introduit dans la fonction tangente hyperbolique pour assurer une transition continue entre 0 et 1.

La fonction de protection  $f_s(\xi_D)$  est définie de la manière suivante :

$$f_s(\xi_D) = 1 - \tanh[\xi_D^{p_2}], \quad \text{avec} \quad \xi_D = C_2 \frac{\Delta_{\max}}{d_w}, \quad (4.29)$$

avec les coefficients  $C_2 = 1.2$  et  $p_2 = 6$ .

Le coefficient  $p_2$  est calibré dans le but de conserver une pente similaire dans la zone de transition pour  $f_s(\xi_D)$  et  $f_s(\xi_K)$ . Étant donné que  $\xi_K \sim d_w^{-3/4}$  (Eq. 4.22) dans la zone logarithmique, et que  $\xi_D \sim d_w^{-1}$  (Eq. 4.29) en considérant que  $\Delta_{\max}$  est constant dans la couche limite (ce qui est le cas pour les maillages structurés usuels), on peut vérifier  $\xi_K^{p_1} \sim \xi_D^{p_2}$  en imposant  $p_2 = 6$  (avec  $p_1 = 8$ ).

D'après l'analyse effectuée précédemment, la transition RANS-LES doit respecter le critère (Eq. 4.25),  $d_w > 0.8\Delta_{\max}$ . Afin de conserver une marge de sécurité, il est décidé d'imposer la transition pour  $d_w = \Delta_{\max}$ . Ainsi, en prenant en compte les variations de la fonction tangente hyperbolique et la valeur de la puissance  $p_2$ , on obtient qu'il faut utiliser  $C_2 = 1.2$ .

### Validation de la formulation HTLES (ICC + $f_s(\xi_K)$ + $f_s(\xi_D)$ )

En effectuant des calculs HTLES sur les maillages C1 et C2, on observe sur la Figure 4.20 (a) que la fonction  $f_s(\xi_D)$  est bien dépendante du maillage. La transition a lieu à  $d_w = \Delta_{\max}$ , c'est-à-dire à  $0.1\delta$  pour C1 et  $0.2\delta$  pour C2. La taille de la zone de transition, paramétrée avec le coefficient  $p_2$ , est équivalente à la taille de la zone RANS sous-jacente : transition de  $y = 0.1\delta$  à  $0.2\delta$  avec  $f_s(\xi_D)$  sur C1, et de  $y = 0.2\delta$  à  $0.4\delta$  avec  $f_s(\xi_D)$  sur C2.

Sur la Figure 4.20 (b), on vérifie que la fonction de protection  $f_s(\xi_D)$  permet bien d'étendre la zone RANS ( $r = 1$ ) par rapport à  $f_s(\xi_K)$ , en fonction du raffinement du maillage dans les directions tangentielles. Quelles que soient la position et la déclivité de la zone de transition RANS-LES, le ratio d'énergie  $r$  tend vers les mêmes valeurs dans la zone LES.

Enfin, sur la Figure 4.20 (c), des résultats très satisfaisants sont obtenus pour les profils de vitesse HTLES : dans la zone RANS grâce à l'ICC, et dans la zone LES grâce au contrôle de la transition qui permet d'activer le mode LES dans une région où les cellules sont adaptées pour résoudre les structures turbulentes. Ainsi, le *Log-Layer Mismatch* est réduit de manière substantielle par rapport aux résultats de la Figure 4.18 (c). En utilisant le maillage déraffiné C2, une faible surestimation reste perceptible au centre du canal, mais les résultats sont améliorés, y compris vis-à-vis de la DDES utilisant la fonction de protection  $f_d$  (Figure 4.9).

**Importance de la ICC :** les profils de vitesse sur la Figure 4.21 permettent de souligner l'importance de l'ICC (Eq. 4.11) dans la formulation HTLES. Les fonctions de protection  $f_s(\xi_K)$  (Eq. 4.23) et  $f_s(\xi_D)$  (Eq. 4.29) permettent d'étendre la zone traitée en mode RANS, et l'ICC s'avère alors indispensable pour retrouver la formulation et le comportement du modèle de fermeture RANS dans cette zone. Sinon, la prise en compte des fluctuations résolues dans la branche RANS du modèle HTLES induit une sous-estimation importante des profils de vitesse, qui dégrade également les prédictions dans la zone LES. **Lorsque des fonctions de protection sont utilisées, l'ICC est primordiale.**



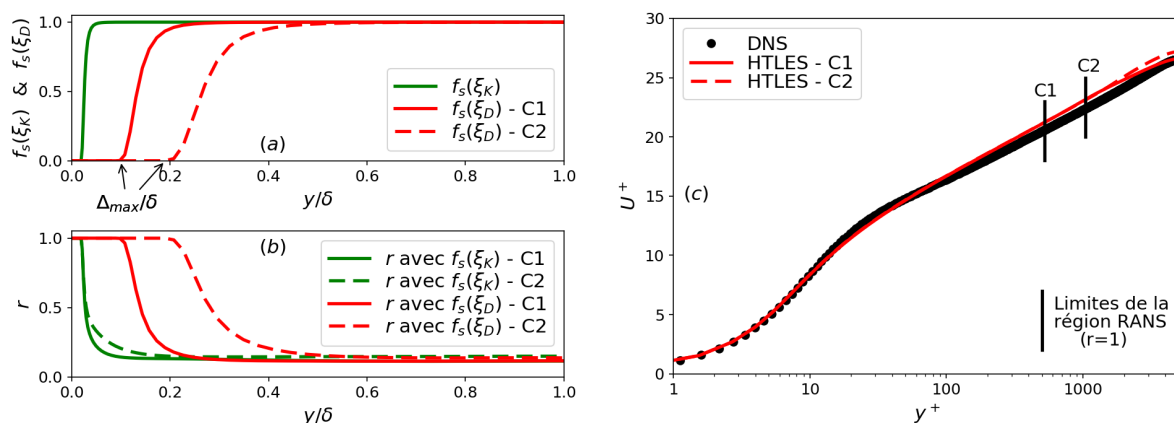


FIGURE 4.20 – (a) Fonctions de protection  $f_s(\xi_K)$  et  $f_s(\xi_L)$ , (b) ratio d'énergie  $r$  et (c) profils de vitesse. Écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 5200$ . Calculs HTLES (ICC +  $f_s(\xi_K)$  +  $f_s(\xi_L)$ ) avec les maillages C1 et C2.

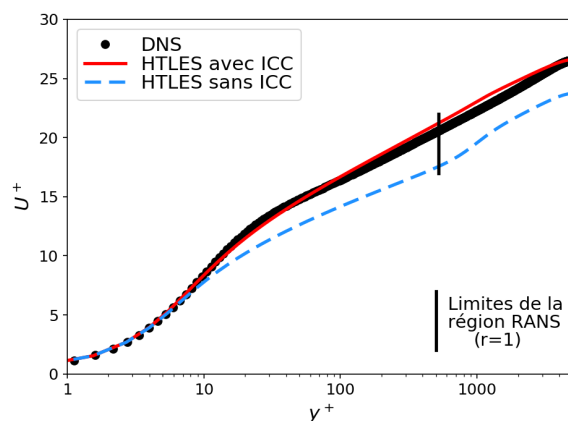


FIGURE 4.21 – Profils de vitesse pour un écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 5200$ . Calculs HTLES ( $f_s(\xi_K) + f_s(\xi_L)$ ) avec et sans ICC, sur le maillage C1.

Bien que la protection la plus étendue soit assurée par  $f_s(\xi_D)$  dans la configuration étudiée (Figure 4.20 (a)), il est important de souligner que l'utilisation de  $f_s(\xi_K)$  reste toujours appropriée afin d'imposer le mode RANS jusqu'à  $y^+ = 100$  dans toutes les situations rencontrées. À ce titre, **les fonctions de protection  $f_s(\xi_K)$  et  $f_s(\xi_D)$  sont complémentaires**, afin de garantir le comportement correct du modèle HTLES dans la couche limite turbulente :

- ✓ La fonction de protection  $f_s(\xi_K)$  (Eq. 4.23) assure une protection fixe en unités de paroi jusqu'au début de la zone logarithmique, indépendamment du maillage, ce qui garantit la robustesse de la formulation HTLES en empêchant que la transition RANS-LES advienne dans la région visqueuse de paroi.
- ✓ La fonction de protection  $f_s(\xi_D)$  (Eq. 4.29) dépendante du maillage permet d'adapter la position de la transition RANS-LES à la taille de grille, afin d'éviter que le mode LES ne soit activé dans une région où les cellules sont trop anisotropes pour résoudre correctement les fluctuations turbulentes. Cela permet de considérablement réduire le *Log-Layer Mismatch*.
- ✓ La formulation globale reste relativement simple, stable (fonction de grandeurs statistiquement moyennées), et robuste numériquement.

## 4.5 Validation de la formulation HTLES améliorée

La formulation améliorée de la HTLES est utilisée, avec la contrainte de consistance interne (ICC, Eq. 4.11) et les fonctions de protection  $f_s(\xi_K)$  (Eq. 4.23) et  $f_s(\xi_D)$  (Eq. 4.29). Les différentes améliorations sont associées en définissant la fonction de protection globale :

$$f_s(\xi_K, \xi_D) = 1 - \tanh [\max(\xi_K^{p1}, \xi_D^{p2})], \quad (4.30)$$

afin de fusionner les différentes définitions, et en modifiant le terme de pondération de l'ICC :

$$c_r = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 1, \\ f_s(\xi_K, \xi_D) & \text{si } r < 1, \end{cases} \quad (4.31)$$

ce qui permet d'assurer une correction continue de l'échelle de temps modélisée  $T_m$ . Le coefficient  $c_r$  intervient également pour supprimer des termes de modélisation du modèle  $BL-\overline{v^2}/k$  HTLES (Eq. 3.68) en mode LES, ou pour pondérer les deux branches du schéma numérique hybride (Eq. 4.6). La nouvelle définition de  $c_r$  permet d'assurer une transition continue de ces différents termes, en phase avec la transition RANS-LES.

### 4.5.1 Sensibilité de la HTLES au nombre de Reynolds

Les écoulements en canal plan, avec  $Re_\tau \in [590, 20000]$ , sont analysés pour valider le modèle  $k-\omega$  SST HTLES avec les améliorations de proche paroi (ICC +  $f_s(\xi_K)$  +  $f_s(\xi_D)$ ), en utilisant les maillages dont les caractéristiques sont rappelées dans le Tableau 4.2.

$Re_\tau$	Grid	$\Delta_x^+$	$\Delta_z^+$	$\Delta_{y_c}^+$	$\Delta_{y_w}^+$	$\Delta_x/\delta$	$\Delta_z/\delta$	$N_x$	$N_y$	$N_z$
590	<b>A1</b>	60	30	30	1	0.1	0.05	64	96	64
1000	<b>B1</b>	100	50	50	1	0.1	0.05	64	106	64
5200	<b>C1</b>	520	260	260	1	0.1	0.05	64	140	64
20000	<b>D1</b>	2000	1000	1000	1	0.1	0.05	64	166	64

TABLEAU 4.2 – Paramètres numériques des maillages utilisés pour l'écoulement en canal plan dans un domaine  $L_x \times L_y \times L_z = 6.4\delta \times 2\delta \times 3.2\delta$ .

La stratégie de maillage étant particulièrement importante pour les approches hybrides, on rappelle ici que les grilles A1, B1, C1 et D1 sont caractérisées par le même nombre de mailles dans les directions  $x$  et  $z$ . Les tailles de maille  $\Delta_x = 0.1\delta$  et  $\Delta_z = 0.05\delta$  sont fixées indépendamment du nombre de Reynolds. Dans la direction normale à la paroi,  $\Delta_{y_w}^+ = 1$  à la paroi, et la taille des mailles augmente jusqu'à  $\Delta_{y_c}^+ = 0.05\delta$  au centre du canal. Cette méthode de maillage est conforme aux attentes des approches hybrides RANS-LES, qui sont d'utiliser des maillages de type RANS dans la région de proche paroi, avec des mailles dimensionnées :

- en fonction du nombre de Reynolds dans la direction  $y$  normale à la paroi, compatible avec les modèles RANS de proche paroi,
- en fonction de la taille caractéristique de la géométrie ( $\delta$  ici) dans les directions  $x$  et  $z$  tangentielles, indépendamment du nombre de Reynolds.

L'utilisation de ces maillages est rendue possible grâce à l'introduction de la seconde fonction de protection  $f_s(\xi_D)$  (Eq. 4.29) qui permet de contrôler la transition RANS-LES en fonction de la taille maximale des cellules.

L'étude de sensibilité vis-à-vis du nombre de Reynolds est réalisée en utilisant ces grilles, ce qui correspond à une réduction drastique du coût des calculs par rapport à la LES, notamment lorsque le nombre de Reynolds augmente. Même si ces grilles sont élaborées dans un contexte particulier, en utilisant des modèles, des méthodes numériques et un logiciel CFD spécifiques, il est important de souligner que cette résolution correspond à celle utilisée dans beaucoup de

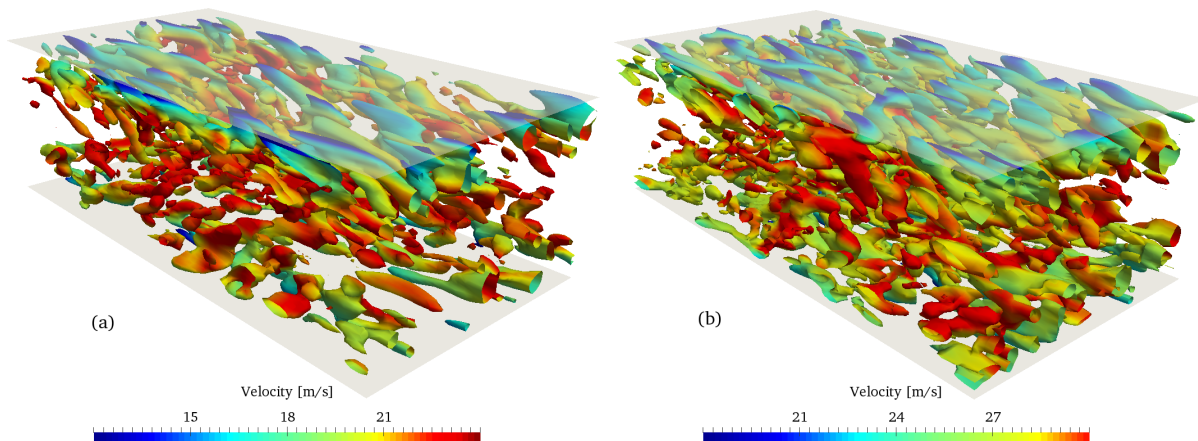


FIGURE 4.22 – Iso-surfaces de critère  $Q = 50u_\tau^2/\delta^2$ , coloré par la norme de la vitesse, pour l'écoulement en canal plan à (a)  $Re_\tau = 1000$  et (b)  $Re_\tau = 20000$ . Calculs HTLES avec les maillages B1 et D1.

calculs hybrides pour les écoulements en canal plan (voir par exemple la IDDES de Shur *et al.* [104], parmi d'autres), et à la résolution optimale en WMLES dans les directions  $x$  et  $z$  définie par Larrson *et al.* [66]. Le fait que le maillage soit raffiné dans la direction  $z$  ( $\Delta_x = 2\Delta_z$ ) est approprié pour résoudre les structures turbulentes de proche paroi [89].

Pour commencer, sur la Figure 4.22, les iso-surfaces du critère  $Q$  à  $Re_\tau = 1000$  et 20000 montrent que les structures turbulentes large échelle sont explicitement résolues dans la région centrale de l'écoulement. Dans cette région, l'activation du mode LES permet de préserver les fluctuations turbulentes résolues durant le calcul. Au contraire, dans la région de proche paroi traitée en mode RANS, les fluctuations turbulentes résolues ne sont pas visibles, notamment pour l'écoulement à un nombre de Reynolds modéré  $Re_\tau = 1000$ .

Sur la Figure 4.23, le comportement souhaité pour les fonctions de protection est bien retrouvé. La fonction  $f_s(\xi_K)$  est fixée en unités de paroi, indépendamment du maillage, tandis que  $f_s(\xi_D)$  impose la même transition de  $y = 0.1\delta$  à  $0.2\delta$  en utilisant les grilles standard, indépendamment du nombre de Reynolds. Pour  $Re_\tau = 1000$ , les deux fonctions de protection sont identiques ( $y^+ = 100 \leftrightarrow y = 0.1\delta$ ), ce qui montre que la calibration théorique des coefficients  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $p_1$  et  $p_2$  permet d'assurer la même forme globale de la zone de transition. Même si la fonction de protection  $f_s(\xi_K)$  est seulement active pour  $Re_\tau \leq 1000$  (ou plus spécifiquement pour  $\Delta_{\max}^+ \leq 100$ ), elle reste un paramètre important étant donné qu'une large gamme de grille et de nombre de Reynolds peut être rencontrée dans les applications industrielles.

Comme observé sur la Figure 4.24, les fonctions de protection permettent d'étendre la zone RANS ( $r = 1$ ) en paroi par rapport à la définition  $r = \min[1, r_K]$ , tout en conservant la même valeur limite dans la zone LES. Pour  $Re_\tau > 1000$ , la zone de transition RANS-LES est comprise dans la zone logarithmique ( $100 < y^+$  et  $y < 0.2\delta$ ) [89], ce qui est souhaité d'après l'analyse du comportement de  $r_K$  (Eq. 4.14). Pour  $Re_\tau = 590$ , la zone logarithmique étant restreinte ( $30 < y^+ < 120$ ), la zone de transition RANS-LES s'étend plus loin que la zone logarithmique.

La Figure 4.25 compare les profils de vitesse HTLES aux références. L'analyse de sensibilité au nombre de Reynolds est concluante, avec des bonnes prédictions dans la zone RANS, où le comportement du modèle de fermeture RANS est retrouvé grâce à l'ICC, et dans la zone LES, en imposant une transition appropriée vis-à-vis du raffinement du maillage pour capturer les structures turbulentes ( $y > 0.8\Delta_{\max}$ , Eq. 4.25). Une faible surestimation est observée dans la zone de transition, mais les résultats HTLES sont en très bon accord avec les références au centre du canal. Il est remarquable que le *Log-Layer Mismatch* est quasiment supprimé sur une large gamme de nombre de Reynolds, en utilisant la méthode de maillage usuelle du Tableau 4.2. L'extension de la zone RANS pour  $Re_\tau = 590$  n'est pas préjudiciable pour les prédictions.

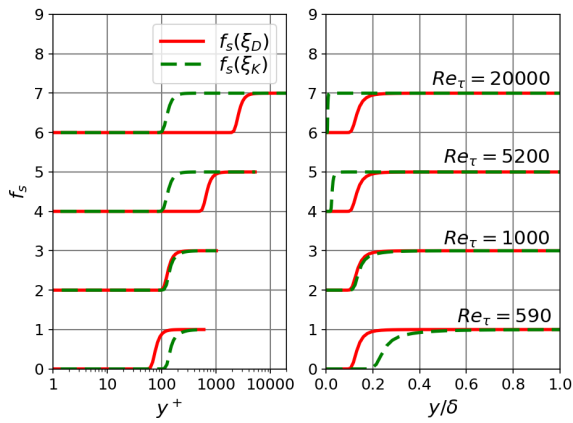


FIGURE 4.23 – Fonctions de protection pour l’écoulement en canal plan, avec  $Re_\tau \in [590, 20000]$ . À gauche en fonction de  $y^+$ , à droite en fonction de  $\delta$ . Calculs HTLES avec les maillages A1, B1, C1 et D1.

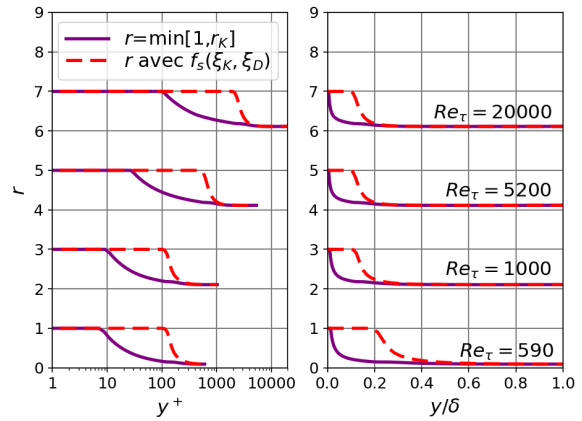


FIGURE 4.24 – Ratio d’énergie pour l’écoulement en canal plan, avec  $Re_\tau \in [590, 20000]$ . À gauche en fonction de  $y^+$ , à droite en fonction de  $\delta$ . Calculs HTLES avec les maillages A1, B1, C1 et D1.

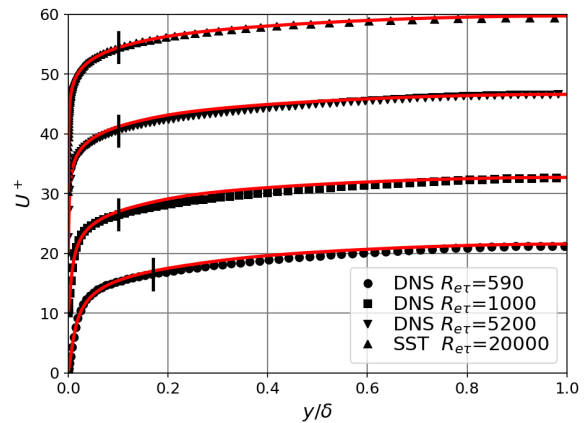
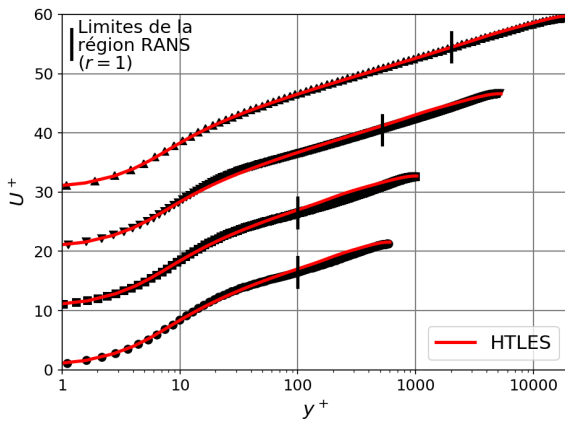


FIGURE 4.25 – Profils de vitesse pour l’écoulement en canal plan, avec  $Re_\tau \in [590, 20000]$ . À gauche en fonction de  $y^+$ , à droite en fonction de  $\delta$ . Calculs HTLES avec les maillages A1, B1, C1 et D1.

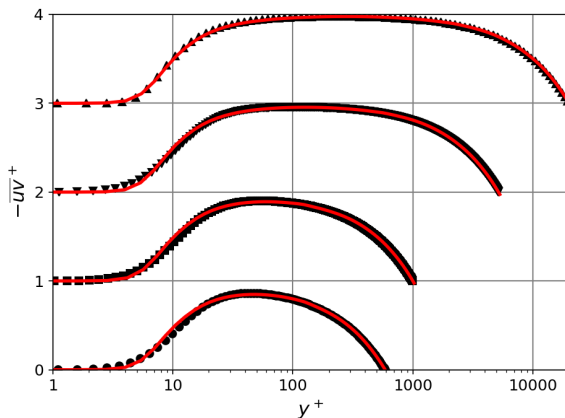


FIGURE 4.26 – Profils de la contrainte de cisaillement pour l’écoulement en canal plan, avec  $Re_\tau \in [590, 20000]$ . Calculs HTLES avec les maillages A1, B1, C1 et D1.

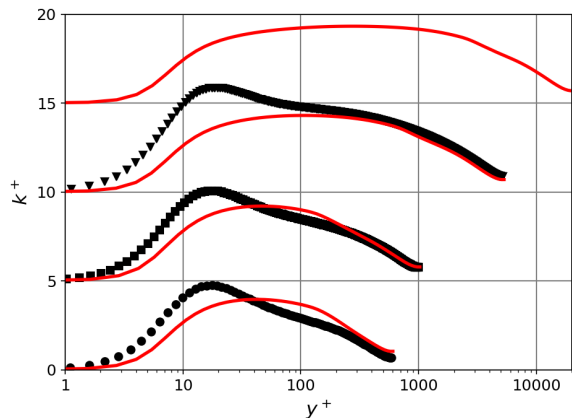


FIGURE 4.27 – Profils de l’énergie cinétique turbulente pour l’écoulement en canal plan, avec  $Re_\tau \in [590, 20000]$ . Calculs HTLES avec les maillages A1, B1, C1 et D1.

La contrainte de cisaillement totale est en bonne adéquation avec les références sur la Figure 4.26. Sur la Figure 4.27, les profils d'énergie cinétique turbulente  $k$  sont très bien reproduits dans la zone LES (on observe une petite surestimation à  $Re_\tau = 590$  en raison de la diminution de la taille de la zone LES), mais des différences notables sont observées dans la zone RANS. En effet, la formulation de la fermeture  $k-\omega$  SST est retrouvée, mais les profils de  $k$  ne sont pas bien prédits par le modèle RANS (voir Figure 4.5). Les différences observées peuvent donc être attribuées à la fermeture sélectionnée (voir aussi à l'influence de la fermeture  $BL-\overline{v^2}/k$  dans la section 4.5.3 suivante).

### 4.5.2 Sensibilité de la HTLES au maillage

Dans le cadre de la validation du modèle HTLES, il est important d'évaluer l'influence du raffinement et des caractéristiques (rapport d'aspect) des maillages utilisés. Pour ce faire, l'écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 5200$  est étudié (sélectionné car c'est un nombre de Reynolds relativement élevé avec des données de validation DNS [70]). Ce cas test permettra également d'analyser la répartition d'énergie entre les échelles résolues et modélisées selon la résolution.

Les paramètres des maillages utilisés sont résumés dans le tableau 4.3. Les maillages C0, C1 et C2 correspondent aux caractéristiques usuelles utilisées jusqu'à présent dans l'étude, avec  $\Delta_x = 2\Delta_z$ , où C0 est raffiné par rapport à C1, et C2 est déraffiné par rapport à C1. Pour les maillages C1X et C2X, un raffinement isotrope est utilisé dans le plan tangentiel à la paroi ( $\Delta_x = \Delta_z$ ). Le raffinement dans la direction  $z$  est le même pour C1 et C1X, ainsi que pour C2 et C2X, tandis que le raffinement selon  $x$  est le même pour C0 et C1X, ainsi que C1 et C2X.

$Re_\tau$	Grid	$\Delta_x^+$	$\Delta_z^+$	$\Delta_{y_c}^+$	$\Delta_{y_w}^+$	$\Delta_x/\delta$	$\Delta_z/\delta$	$N_x$	$N_y$	$N_z$
5200	C0	260	130	260	1	0.05	0.025	128	140	128
	C1	520	260	260	1	0.1	0.05	64	140	64
	C2	1040	520	260	1	0.2	0.1	32	140	32
	C1X	260	260	260	1	0.05	0.05	128	140	64
	C2X	520	520	260	1	0.1	0.1	64	140	32

TABLEAU 4.3 – Paramètres numériques des maillages utilisés pour l'écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 5200$  dans un domaine  $L_x \times L_y \times L_z = 6.4\delta \times 2\delta \times 3.2\delta$ .

Sur la Figure 4.28 (a), l'indépendance de  $f_s(\xi_K)$  (Eq. 4.23) vis-à-vis du raffinement du maillage est bien vérifiée, tandis que la transition de  $f_s(\xi_D)$  (Eq. 4.29) a bien lieu lorsque la distance à la paroi correspond au maximum de la taille de maille ( $\Delta_{\max}^+ = 260$  avec C0 et C1X, 520 avec C1 et C2X, 1040 avec C2). Ainsi, sur la Figure 4.28 (b), on observe que la transition RANS-LES est bien dirigée par le paramètre  $\xi_D$ . La valeur plateau du ratio d'énergie dans la zone LES décroît comme attendu lorsque le maillage est raffiné.

L'influence du maillage sur les résultats est mis en évidence par les profils de vitesse sur la Figure 4.29. Les prédictions HTLES en utilisant les maillages C1X et C2X montrent des écarts avec les références dans la zone LES. Le *Log-Layer Mismatch* n'est que partiellement réduit dans ce cas-là, car le raffinement isotrope  $\Delta_{\max} = \Delta_x = \Delta_z$  n'est pas optimal pour résoudre les fluctuations turbulentes dans la zone de proche paroi.

Au contraire, les maillages C0, C1 et C2, caractérisés par le rapport d'aspect  $\Delta_x = 2\Delta_z$ , permettent de réaliser des prédictions correctes, avec une réduction significative du *Log-Layer Mismatch* en zone LES quelle que soit la résolution du maillage. Il est notamment constaté que les résultats avec le maillage C1 sont bien meilleurs qu'avec C1X, alors que C1X est raffiné dans la direction de l'écoulement (même constat pour C2 et C2X). Ces résultats sont en phase avec les pratiques courantes pour les approches filtrées : que ce soit en LES ( $\Delta_x^+ = 30$  et  $\Delta_z^+ = 15$  [7]) ou en WMLES ( $\Delta_x \leq 0.6d_w$  et  $\Delta_z \leq 0.4d_w$  [66]), le raffinement du maillage dans la direction

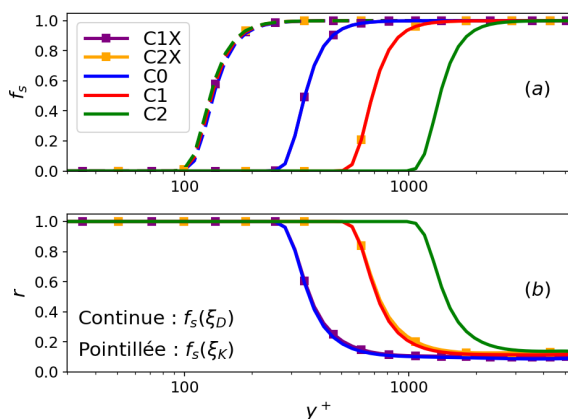


FIGURE 4.28 – (a) Fonctions de protection et (b) ratio d'énergie pour l'écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 5200$ . Calculs HTLES avec les maillages C0, C1, C2, C1X et C2X.

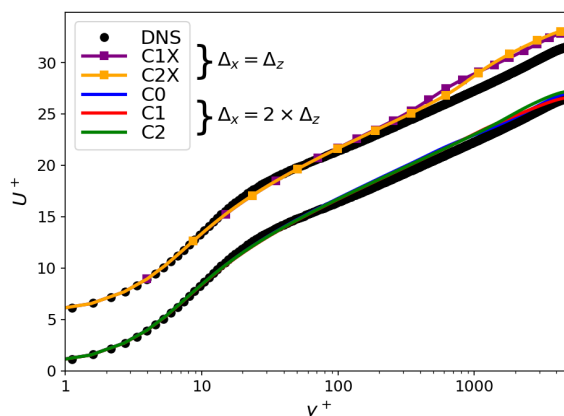


FIGURE 4.29 – Profils de vitesse pour l'écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 5200$ . Calculs HTLES avec les maillages C0, C1, C2, C1X et C2X.

transverse par rapport à la direction longitudinale est primordial afin de décrire les structures turbulentes de proche paroi [89].

La petite surestimation de la vitesse au centre avec le maillage C2 est liée au fait que la transition RANS-LES a lieu hors de la zone logarithmique ( $y = 0.2\delta$ ). À ce titre, le maillage C2 s'avère être trop déraffiné par rapport à la résolution optimale en HTLES. La sensibilité de la HTLES au maillage n'en reste pas moins bien inférieure à celle d'une LES, ce qui est très satisfaisant.

En conservant les maillages C0, C1 et C2, il est intéressant d'analyser la répartition des échelles résolues et modélisées. Pour la contrainte de cisaillement totale ( $\overline{uv} = \overline{uv}_{\text{res}} + \overline{\tau_{wvs}}_s$ ), sur la Figure 4.30, les résultats sont en parfaite adéquation avec les références par conservation de la quantité de mouvement. Concernant la décomposition de la contrainte de cisaillement entre échelles résolues et modélisées, le comportement attendu pour les méthodes hybrides est retrouvé :

- (i) la composante modélisée est dominante dans la région de proche paroi et est progressivement remplacée par la composante résolue en s'éloignant de la paroi,
- (ii) à une position donnée, la contribution de la composante résolue augmente lorsque le maillage est raffiné (et celle de la composante modélisée décroît),
- (iii) la position à partir de laquelle la composante résolue devient supérieure à la composante modélisée se rapproche de la paroi lorsque le maillage est raffiné.

Sur la Figure 4.31, la forme globale du profil d'énergie turbulente totale ( $k = k_r + k_m$ ) est retrouvée par rapport aux références dans la zone LES. En revanche, de larges différences sont observées dans la zone RANS, essentiellement liées à la fermeture  $k-\omega$  SST. Les mêmes conclusions que précédemment peuvent être tirées concernant la répartition de l'énergie entre les échelles résolue et modélisée. On remarque notamment que lorsque le maillage est raffiné (C0), le mode LES est activé plus proche de la paroi, ce qui permet de mieux reproduire la forme globale du pic d'énergie, alors qu'avec le maillage grossier (C2) le pic est lissé en raison du traitement en mode RANS ( $y^+ < 1040$ ). On note cependant que le niveau d'énergie total  $k$  n'est pas exactement le même selon le raffinement du maillage, dans la zone RANS ou la zone LES. De ce constat, il est justifié de ne pas avoir élaboré la fonction de protection indépendante du maillage (section 4.4.3.3) en se fondant sur l'échelle turbulente  $k$ , car l'insensibilité au maillage de cette grandeur n'est pas validée.



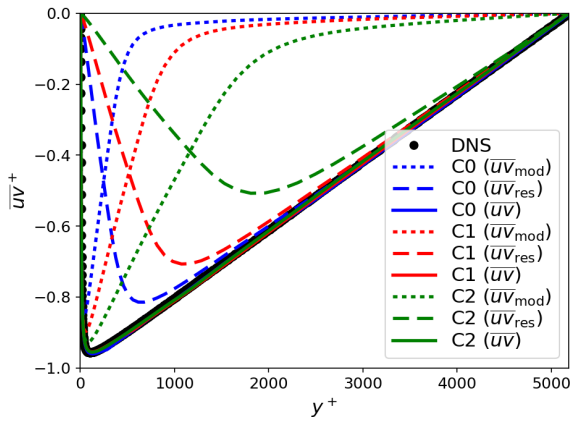


FIGURE 4.30 – Profils de la contrainte de cisailment (totale, résolue, modélisée) pour l’écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 5200$ . Calculs HTLES avec les maillages C0, C1 et C2.

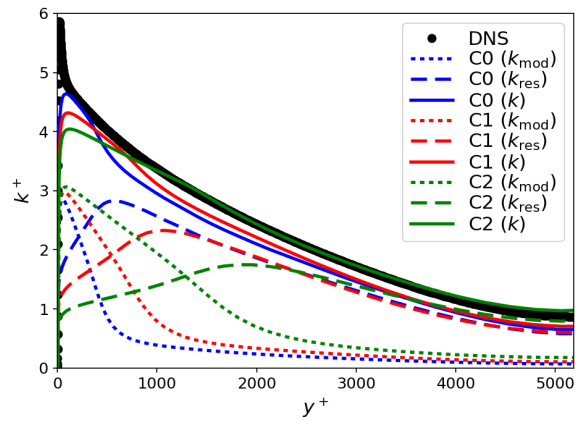


FIGURE 4.31 – Profils de l’énergie cinétique turbulente (totale, résolue, modélisée) pour l’écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 5200$ . Calculs HTLES avec les maillages C0, C1 et C2.

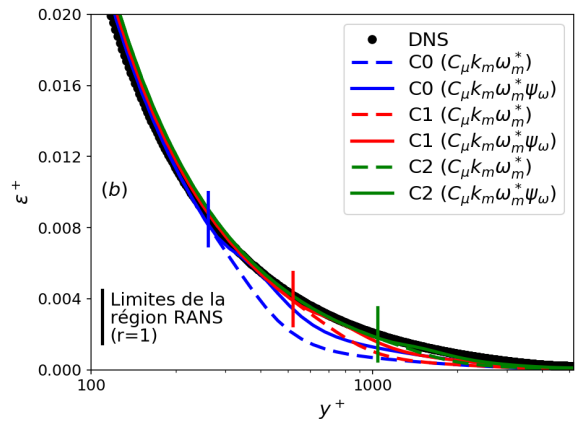
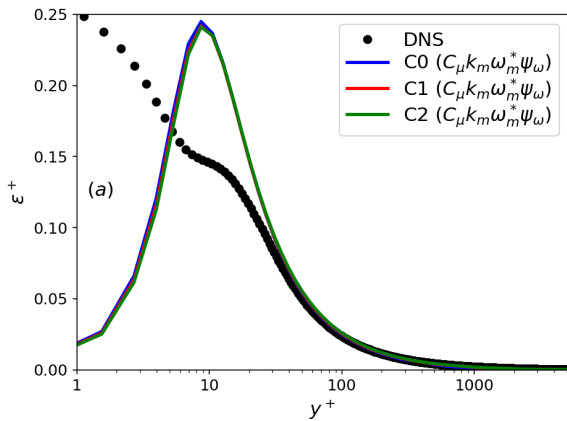


FIGURE 4.32 – (a) Profils du taux de dissipation et (b) détails sur la zone de transition RANS-LES pour l’écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 5200$ . Calculs HTLES avec les maillages C0, C1 et C2.

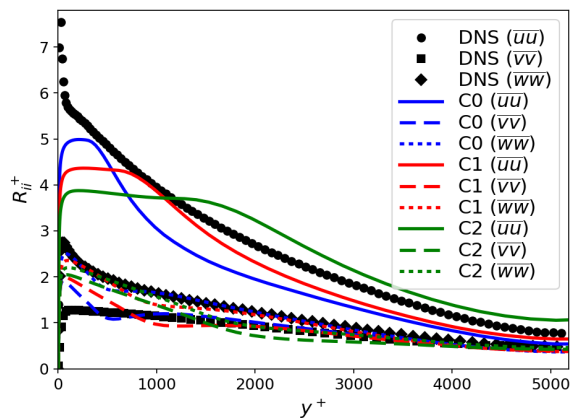


FIGURE 4.33 – Composantes diagonales du tenseur de Reynolds pour l’écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 5200$ . Calculs HTLES avec les maillages C0, C1 et C2.

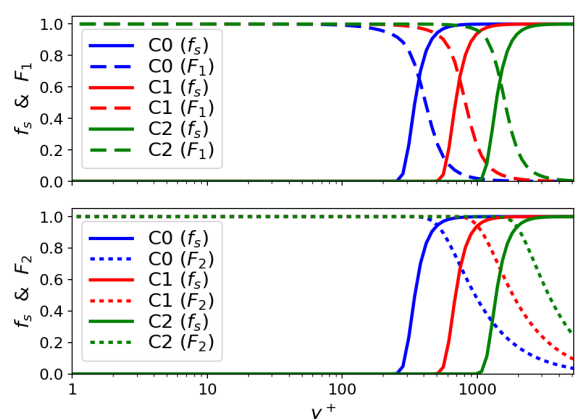


FIGURE 4.34 – Fonction de protection du modèle hybride et fonctions de couplage du modèle  $k-\omega$  SST. Calculs HTLES avec les maillages C0, C1 et C2.



Au contraire, sur la Figure 4.32, les profils du taux de dissipation  $\varepsilon$  montrent la robustesse des prédictions de la HTLES vis-à-vis du raffinement du maillage (on rappelle ici que l'on considère  $\varepsilon = \varepsilon_m = C_\mu k_m \psi_\omega \omega_m^*$  et  $\psi_\omega(1) = 1$  en mode RANS). L'élaboration d'une fonction de protection indépendante du maillage fondée sur  $\varepsilon$  est donc bien justifiée. De larges différences avec les références DNS sont observées dans la région visqueuse ( $y^+ < 50$ ) traitée en mode RANS, mais cela n'a pas d'impact sur la fonction de protection, car  $f_s(\xi_K) = 1$  dans cette région. Les prédictions sont en bonne adéquation avec les références à partir de  $y^+ > 50$ , quel que soit le raffinement du maillage, permettant de paramétrer précisément la transition de  $f_s(\xi_K)$ . Dans la zone LES, des faibles écarts sont observés, mais le taux de dissipation  $\varepsilon$  est bien reproduit par  $C_\mu k_m \psi_\omega \omega_m^*$ , comme attendu (au contraire, on vérifie que  $C_\mu k_m \omega_m^*$  est inférieur à  $\varepsilon$  en zone LES, car  $\psi_\omega > 1$ ).

Sur la Figure 4.33, l'anisotropie entre les composantes diagonales du tenseur de Reynolds  $R_{kk}$  (sans sommation) est reproduite de manière satisfaisante dans la zone LES. Cependant, il est noté qu'en utilisant le maillage grossier C2, les fluctuations  $\overline{uu}$  dans la direction de l'écoulement sont surestimées, car les cellules sont trop larges pour résoudre correctement les structures turbulentes. Dans la région RANS, des écarts importants sont observés, principalement liés au modèle de fermeture  $k-\omega$  SST qui n'est pas capable de reproduire correctement l'anisotropie de la turbulence à la paroi.

Sur la Figure 4.34, il est important d'analyser le comportement des fonctions de couplage  $F_1$  et  $F_2$  du modèle en utilisant la fermeture  $k-\omega$  SST. La zone de transition de  $F_1$  correspond exactement à celle de la fonction de protection  $f_s$  en HTLES. Ainsi, dans la région de proche paroi traitée en mode RANS, la branche  $k-\omega$  est activée, tandis que dans la région LES, la branche  $k-\varepsilon$  est activée. Ce comportement est en phase avec les attentes, étant donné que le  $k-\omega$  [124] est un modèle RANS qui donne de bonnes prédictions en proche paroi. De plus, c'est en utilisant la branche  $k-\varepsilon$  du  $k-\omega$  SST que la constante  $\beta_0 = 0.48$  a été calibrée en DIT, il est donc justifié d'utiliser cette fermeture dans la zone LES. De ce constat, il ne semble pas nécessaire d'effectuer une double calibration de la constante  $\beta_0$ , dans les branches  $k-\varepsilon$  et  $k-\omega$ , comme cela a été fait pour  $C_{DES}$  avec le  $k-\omega$  SST DES [116]. Concernant la fonction  $F_2$  qui pilote les corrections de la viscosité turbulente liées à l'hypothèse de Bradshaw [82], la transition commence au début de la zone traitée en mode LES, mais cela n'a pas d'influence sur les résultats car on vérifie que  $a_1 \psi_\omega \omega_m^* \leq F_2 S$  dans cette zone. Enfin, la raison pour laquelle la transition de  $F_1$  et  $F_2$  est en phase avec celle de  $f_s$  est liée au fait que l'expression des fonctions de couplage du  $k-\omega$  SST n'a pas été modifiée lors de l'hybridation du modèle. Étant donné que l'énergie de sous-filtre  $k_{sfs}$  est un terme dominant au numérateur de ces expressions, et que ce terme diminue à partir de la transition RANS-LES (Figure 4.31), cela force la transition des fonctions  $F_1$  et  $F_2$  en phase avec la transition RANS-LES.

En conclusion de cette partie, il ressort que, dans un contexte hybride, l'utilisation de maillages raffinés dans la direction transverse reste importante pour résoudre correctement les fluctuations turbulentes dans la zone LES de proche paroi, ce qui est conforme aux observations habituelles en LES. Les maillages C1X et C2X avec un raffinement isotrope ont conduit à des écarts dans la zone LES, même s'ils sont plus raffinés dans l'ensemble que leurs homologues C1 et C2. En utilisant des maillages avec le rapport d'aspect  $\Delta_x = 2\Delta_z$ , des résultats satisfaisants sont obtenus, pour prédire les profils de vitesse ou reproduire le comportement de l'énergie turbulente totale. On note, cependant, que l'utilisation d'un maillage déraffiné (C2 avec  $\Delta_x = 0.2\delta$ ) induit une zone RANS très étendue (transition RANS-LES hors de la zone logarithmique) et une augmentation des fluctuations turbulentes, tandis que l'utilisation d'un maillage raffiné (C0 avec  $\Delta_x = 0.05\delta$ ) n'améliore pas sensiblement les résultats par rapport au maillage « standard » C1.

Ainsi, l'optimal entre des prédictions correctes et un coût de calcul réduit correspond au maillage C1 (avec  $\Delta_x = 0.1\delta$ ). Le fait d'imposer la transition RANS-LES avec  $f_s(\xi_D)$  (Eq. 4.29) entre  $\Delta_{\max} = 0.1\delta$  et  $2\Delta_{\max} = 0.2\delta$ , c'est-à-dire dans la zone logarithmique, semble favorable pour les calculs hybrides. Ce sont bien des maillages de ce type qui ont été utilisés dans cette thèse

pour conduire les développements (section 4.4.3) et évaluer la sensibilité du modèle au nombre de Reynolds (section 4.5.1). Enfin, par rapport à un raffinement LES ( $\Delta_x^+ = 30$ ,  $\Delta_z^+ = 15$ ) qui aurait nécessité  $N_x \times N_y \times N_z \simeq 165 \times 10^6$  cellules dans le même domaine de calcul à  $Re_\tau = 5200$ , le calcul HTLES avec  $N_x \times N_y \times N_z \simeq 570 \times 10^3$  cellules permet de drastiquement réduire le coût de calcul (facteur environ 300). De manière plus générale, en gardant le même domaine de calcul, et en ne considérant que le raffinement dans la direction tangentielle (même raffinement dans la direction normale aux parois), le gain en nombre de cellules en HTLES par rapport à la LES peut être estimé en fonction du nombre de Reynolds selon la loi suivante :

$$\frac{(N_x \times N_z)^{\text{LES}}}{(N_x \times N_z)^{\text{HTLES}}} = \frac{Re_\tau^2}{0.91 \times 10^5}. \quad (4.32)$$

### 4.5.3 Sensibilité de la HTLES au modèle de fermeture

Le modèle de fermeture sur lequel les méthodes hybrides sont appliquées peut avoir une influence importante sur les résultats, notamment dans la zone RANS. Dans le cadre de l'approche HTLES, le mode RANS est appliqué dans la région de proche paroi. Il est donc pertinent d'utiliser un modèle de fermeture bénéficiant d'une modélisation avancée de la couche limite, ce qui est le cas du  $BL-\overline{v^2}/k$  [9] avec la pondération elliptique [76]. La formulation du modèle RANS est résumée dans la section 2.2.2.3, le modèle hybride est explicité dans la section 3.2.7 et les meilleures prédictions du  $BL-\overline{v^2}/k$  par rapport au  $k-\omega$  SST sont illustrées dans la section 4.3.1. Dans cette section, les prédictions de l'approche HTLES appliquée au  $k-\omega$  SST et au  $BL-\overline{v^2}/k$  sont systématiquement comparées, pour des écoulements en canal plan à différents nombres de Reynolds  $Re_\tau \in [590, 20000]$ , en utilisant les maillages A1, B1, C1 et D1 (voir Tableau 4.2).

Pour commencer, on note sur la Figure 4.35 que le comportement de la fonction de protection globale  $f_s(\xi_K, \xi_D)$  (Eq. 4.30) est exactement le même, quelle que soit la fermeture. Ainsi, le même comportement est retrouvé pour le ratio d'énergie  $r$ , assurant une transition RANS-LES à la même position ( $y = \Delta_{\max}$  pour  $Re_\tau = 1000, 5200$  et  $20000$ , et  $y^+ = 100$  pour  $Re_\tau = 590$ ). La valeur plateau de  $r$  en zone LES n'est cependant pas exactement la même.

Sur les Figures 4.36 et 4.37, les profils de vitesse et de la contrainte de cisaillement sont en bon accord avec les références, montrant peu de sensibilité au modèle de fermeture RANS utilisé. Au contraire, pour les profils de l'énergie cinétique turbulente totale ( $k = k_r + k_m$ ) sur la Figure 4.38, l'influence du modèle de fermeture est mise en évidence. Le modèle  $BL-\overline{v^2}/k$  permet d'améliorer considérablement les prédictions dans la zone RANS, en reproduisant mieux le profil de  $k$  dans la sous-couche visqueuse ( $y^+ < 5$ ) et dans la zone tampon ( $5 < y^+ < 30$ ) par rapport au modèle  $k-\omega$  SST. Comme pour le modèle RANS  $BL-\overline{v^2}/k$  (section 4.3.1, Figure 4.5), les prédictions HTLES sont meilleures à  $Re_\tau = 1000$  qu'à  $Re_\tau = 5200$ , où une sous-estimation du pic d'énergie est observée, mais la forme globale du profil est bien reproduite (ce qui n'est pas le cas avec le  $k-\omega$  SST). Dans la zone LES, un niveau d'énergie similaire, en accord avec les références DNS, est retrouvé avec le  $k-\omega$  SST et le  $BL-\overline{v^2}/k$  HTLES.

Pour analyser plus précisément l'influence (ou non) du modèle de fermeture, l'étude se focalise sur l'écoulement à  $Re_\tau = 5200$ , en utilisant le maillage C1. On rappelle que pour ce maillage, la transition RANS-LES a lieu à  $y = 0.1\delta \leftrightarrow y^+ = 520$ . Tout d'abord, la Figure 4.39 montre que :

- (i) la zone de variation du coefficient de pondération  $\alpha$  est contenue dans la zone RANS, permettant de modéliser l'effet de blocage, et  $\alpha = 1$  en zone LES,
- (ii) La variable  $\phi$  conserve son comportement propre dans la zone RANS, et tend vers la valeur théorique  $\phi_{\log} = 0.41$  en zone LES comme attendu,
- (iii) le terme de dissipation  $E$  n'est actif que dans la zone tampon traitée en mode RANS, ce qui justifie que ce terme n'ait pas été hybridé,
- (iv) la constante modifiée  $C_{\varepsilon_2}^T$  est égale à sa valeur limite  $C_{\varepsilon_2}$  dans les zones RANS et LES, avec une petite variation au niveau de la transition RANS-LES (dont l'influence est négligeable).

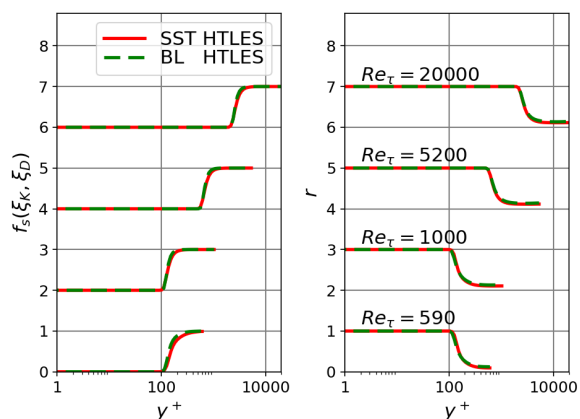


FIGURE 4.35 – Fonction de protection et ratio d'énergie pour l'écoulement en canal plan, avec  $Re_\tau \in [590, 20000]$ . Calculs HTLES avec les maillages A1, B1, C1 et D1.

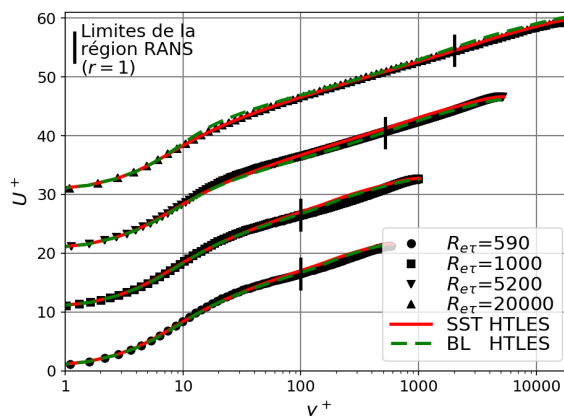


FIGURE 4.36 – Profils de vitesse pour l'écoulement en canal plan, avec  $Re_\tau \in [590, 20000]$ . Calculs HTLES avec les maillages A1, B1, C1 et D1.

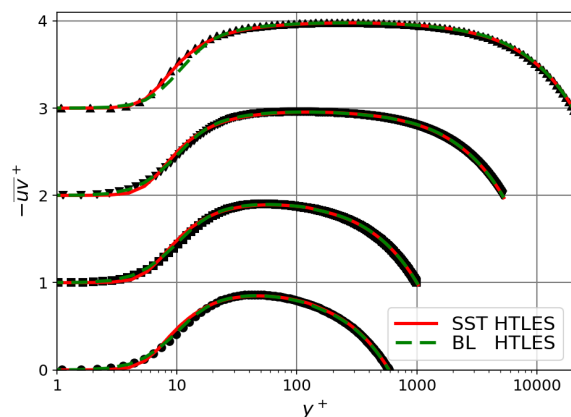


FIGURE 4.37 – Profils de la contrainte de cisaillement pour l'écoulement en canal plan, avec  $\tau \in [590, 20000]$ . Calculs HTLES avec les maillages A1, B1, C1 et D1.

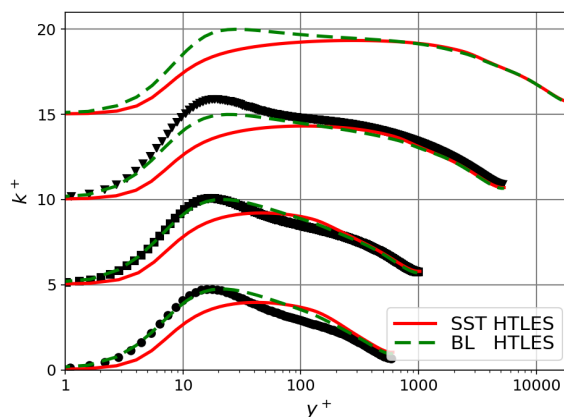


FIGURE 4.38 – Profils de l'énergie cinétique turbulente pour l'écoulement en canal plan, avec  $Re_\tau \in [590, 20000]$ . Calculs HTLES avec les maillages A1, B1, C1 et D1.

Un point important souligné lors de l'élaboration de la fonction de protection indépendante du maillage (section 4.4.3.3) est que cette dernière doit satisfaire le critère ( $\delta$ ), à savoir une indépendance vis-à-vis du modèle de fermeture. Sur la Figure 4.40, il est bien vérifié que le ratio d'échelle de longueur fondé sur l'échelle de Kolmogorov  $\xi_K$  (Eq. 4.23) est indépendant de la fermeture et toujours parfaitement en accord avec sa valeur théorique  $\xi_{K\log}$  (Eq. 4.22) dans la zone logarithmique. De ce fait, la fonction de protection  $f_s(\xi_K)$  (Eq. 4.23) satisfait le critère ( $\delta$ ), avec une zone de transition comprise entre  $y^+ = 100$  et 200 comme prescrit.

Sur la Figure 4.41, en détaillant plus précisément le ratio d'énergie  $r$ , on remarque que la transition RANS-LES a bien lieu à la même position (liée à la fonction de protection  $f_s(\xi_D)$ ), mais que la valeur plateau du ratio d'énergie n'est pas la même avec les deux fermetures. Pour la fonction d'hybridation, étant donné que les définitions ne sont pas les mêmes,  $\psi_\omega(0) = 2.09$  (Eq. 3.48) avec le  $k-\omega$  SST et  $\psi(0) = 1.27$  (Eq. 3.31) avec le  $BL-v^2/k$  ( $C_{\varepsilon_2} = 1.83$ ), on note le large écart entre les valeurs de la fonction d'hybridation en zone LES.

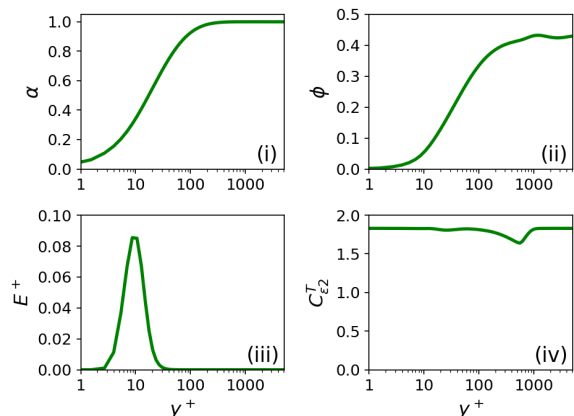


FIGURE 4.39 – Profil des différents termes du modèle  $BL-\overline{v^2}/k$  pour l'écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 5200$ . Calculs HTLES avec le maillage C1.

Sur la Figure 4.42, une observation fondamentale pour montrer les avantages de la fermeture  $BL-\overline{v^2}/k$  par rapport au  $k-\omega$  SST réside dans la comparaison du ratio d'énergie estimé  $r$ , relié analytiquement à la fréquence de coupure et utilisé dans la méthode hybride, et du ratio d'énergie effectif  $k_m/k$ , mesuré lors du calcul. On observe premièrement que ce ratio d'énergie effectif n'est pas égal à l'unité dans la zone RANS, car des fluctuations turbulentes pénètrent dans cette zone (d'où l'introduction de l'ICC). Dans la zone LES, avec le modèle  $k-\omega$  SST HTLES, on remarque que les valeurs des ratios d'énergie estimé et effectif ne sont pas exactement les mêmes. Au contraire, avec le modèle  $BL-\overline{v^2}/k$  HTLES, les ratios d'énergie sont équivalents,  $r_K = k_m/k$  dans la zone LES, ce qui valide l'assise théorique de la formulation et de ses hypothèses sous-jacentes.

Ces efforts de modélisation en proche paroi et ses résultats en phase avec la théorie permettent d'obtenir des prédictions sensiblement meilleures pour certaines grandeurs turbulentes. Pour la vitesse notamment sur la Figure 4.43, la faible surestimation du profil au niveau de la transition RANS-LES avec le  $k-\omega$  SST HTLES n'est plus observée avec le  $BL-\overline{v^2}/k$  HTLES. Sur la Figure 4.44, la meilleure reproduction du profil d'énergie totale  $k$  avec le  $BL-\overline{v^2}/k$  HTLES est essentiellement liée à la meilleure prédiction de l'énergie modélisée en paroi, le niveau d'énergie résolue étant peu influencé par la fermeture. Pour le taux de dissipation sur la Figure 4.45, même si les différences s'atténuent à partir de la zone logarithmique, des prédictions bien meilleures sont obtenues dans la zone tampon avec le  $BL-\overline{v^2}/k$  HTLES. Cela est notamment lié à l'introduction du terme de dissipation  $E$  qui est actif dans la zone tampon.

En conclusion de cette partie, notons que l'intérêt d'utiliser des modèles de fermeture RANS améliorés pour traiter les régions de proche paroi est démontré dans le cas du canal plan. Dans ce contexte, le modèle  $BL-\overline{v^2}/k$  est un candidat idéal pour ces développements : ses résultats proche paroi sont plus précis, tandis que, loin des parois, le ratio d'énergie effectif  $k_m/k$  correspond bien à la valeur prescrite par le maillage  $r_K$ . Les améliorations des prédictions pour l'énergie et la dissipation en paroi sont également notables.

Ces résultats semblent prometteurs dans la perspective de l'utilisation de modèle hybride pour des problématiques thermiques, notamment dans le cadre du projet ANR MONACO\_2025 (section 1.2.2). L'utilisation de la fermeture  $BL-\overline{v^2}/k$  semble particulièrement intéressante, grâce à la reproduction correcte du profil d'énergie cinétique turbulente en paroi, en particulier dans la sous-couche visqueuse et dans la zone tampon, indispensables pour modéliser les flux thermiques en paroi. L'objectif est alors d'associer le modèle de turbulence hybride  $BL-\overline{v^2}/k$  HTLES à des modèles de flux thermiques turbulents, ce qui est en cours d'avancement dans le cadre d'une thèse du projet MONACO\_2025.

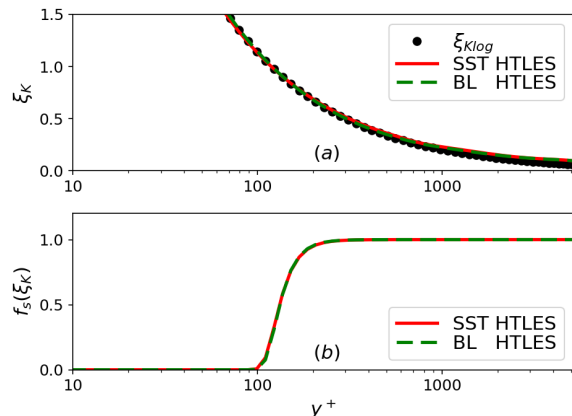


FIGURE 4.40 – Profils du ratio  $\xi_K$  et de la fonction de protection  $f_s(\xi_K)$ , pour l'écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 5200$ . Calculs HTLES avec le maillage C1.

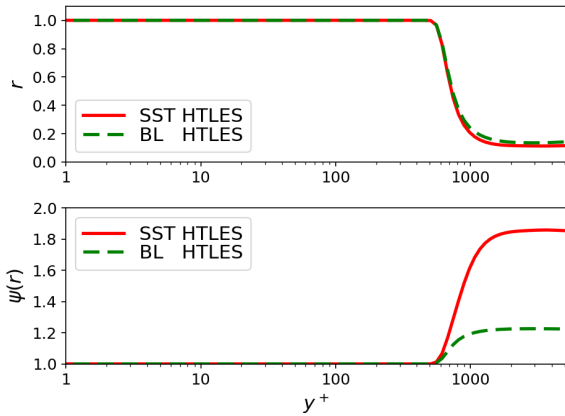


FIGURE 4.41 – Profil du ratio d’énergie  $r$  et de la fonction d’hybridation  $\psi(r)$  pour l’écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 5200$ . Calculs HTLES avec le maillage C1.

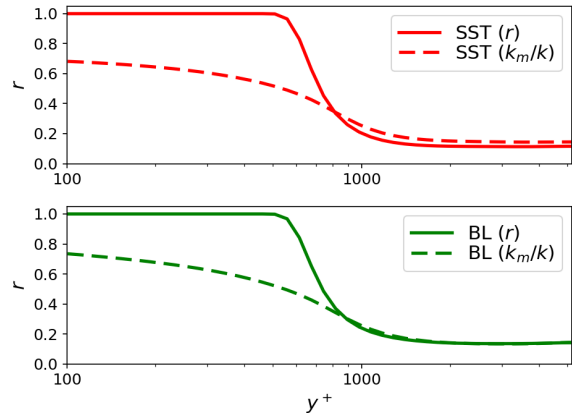


FIGURE 4.42 – Profils du ratio estimé  $r$  et du ratio d’énergie effectif  $k_m/k$ , pour l’écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 5200$ . Calculs HTLES avec le maillage C1.

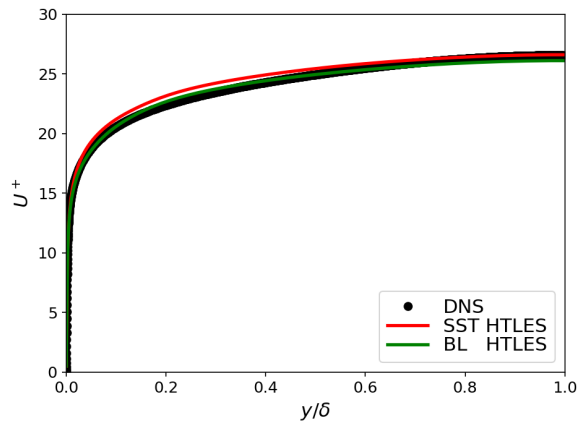
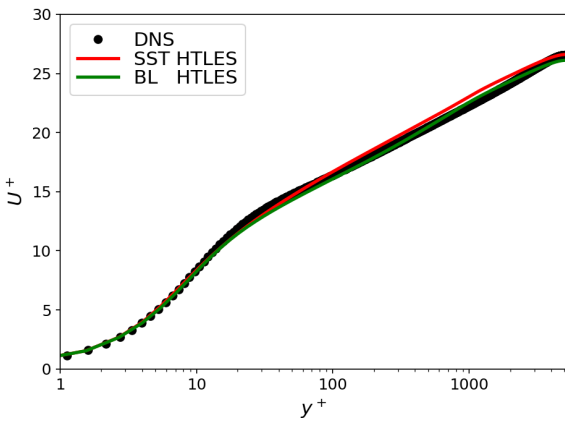


FIGURE 4.43 – Profils de vitesse pour l’écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 5200$ . Calculs HTLES avec le maillage C1.

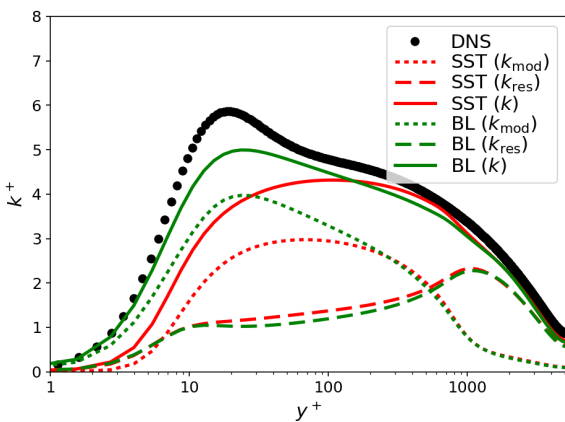


FIGURE 4.44 – Profil de l’énergie cinétique turbulente  $k = k_m + k_r$  pour l’écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 5200$ . Calculs HTLES avec le maillage C1.

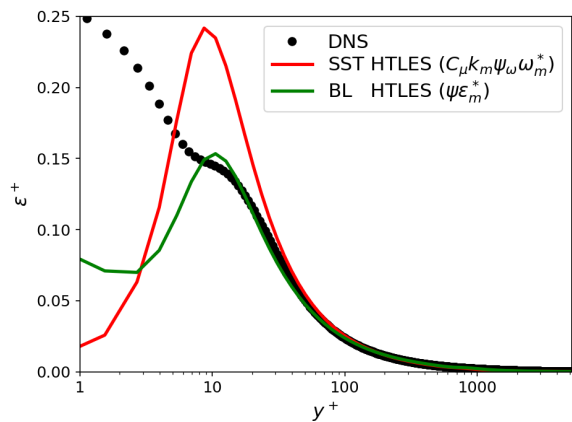


FIGURE 4.45 – Profils du taux de dissipation  $\varepsilon = \psi \varepsilon_m^* = C_\mu k_m \psi \omega_m^*$  pour l’écoulement en canal plan à  $Re_\tau = 5200$ . Calculs HTLES avec le maillage C1.

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, l'écoulement en canal plan a été étudié afin de caractériser et améliorer le comportement du modèle HTLES en proche paroi. Après un rappel des principaux résultats pour les modèles RANS et LES, il est observé que les prédictions données par la formulation HTLES, définie dans le chapitre 3, ne reproduisent pas correctement les résultats attendus dans la couche limite turbulente. En cause, un contrôle de la transition RANS-LES qui ne s'avère pas optimal et une inconsistance de la formulation du modèle dans sa branche RANS. Pour améliorer le comportement de la HTLES, une fonction de protection double et une contrainte de consistance interne ont été développées.

- (i) La fonction de protection  $f_s(\xi_K)$  (Eq. 4.23) garantit une protection de la couche limite en fonction de paramètres physiques. Elle impose le mode RANS dans la région de proche paroi où les effets visqueux sont non négligeables (résolution LES trop coûteuse). Cette protection s'étend jusqu'au début de la zone logarithmique ( $y^+ = 100$ ), de manière indépendante du maillage, du nombre de Reynolds et du modèle de fermeture. La fonction de protection permet aussi d'éviter l'activation du mode LES lorsque le maillage est plus fin qu'un maillage RANS, mais reste trop grossier pour une résolution LES.
- (ii) La fonction de protection  $f_s(\xi_D)$  (Eq. 4.29) dépend de l'extension maximale de la maille, dans le but d'adapter la position de la transition RANS-LES au maillage. Ainsi, le mode RANS est imposé lorsque les cellules sont trop anisotropes pour résoudre correctement les fluctuations turbulentes en mode LES, ce qui permet de réduire considérablement, voire de supprimer, le *Log-Layer Mismatch*.
- (iii) La contrainte de consistance interne (ICC, Eq. 4.11) est introduite afin d'assurer que la formulation du modèle de fermeture RANS est exactement retrouvée dans la zone RANS. En effet, des fluctuations turbulentes, résolues dans la zone LES, pénètrent dans la zone RANS, ce qui entre en contradiction avec les hypothèses théoriques supposant que l'énergie résolue est nulle dans cette zone. L'ICC permet de négliger l'énergie résolue dans l'écriture du terme de dissipation de  $k_{\text{sfS}}$ , sans pour autant filtrer les fluctuations résolues, ce qui s'avérera décisif pour estimer des efforts instationnaires en paroi.

La formulation améliorée du modèle permet de contrôler la répartition de l'énergie entre la composante résolue et la composante modélisée dans la couche limite turbulente. Les objectifs sont atteints, étant donné que dans la région de proche paroi où l'activation du mode LES n'est pas pertinente (région visqueuse, cellules trop déraffinées dans une direction), la position de la transition RANS-LES est ajustée, et le mode RANS est imposé en retrouvant le comportement du modèle de fermeture.

Le modèle HTLES est validé, en utilisant un large panel de nombre de Reynolds et de configurations de maillage. Des prédictions correctes sont obtenues, avec en particulier une disparition du *Log-Layer Mismatch* pour les profils de vitesse. L'anisotropie de la turbulence est correctement reproduite dans la zone LES. Les différentes améliorations introduites dans le modèle ont également montré en pratique un comportement en phase avec les développements et calibrations théoriques, soulignant la robustesse de la formulation.

En ce qui concerne la discrétisation spatiale, étant donné que la région de proche paroi est traitée en mode RANS, la résolution des maillages dans les directions longitudinale et transverse est déterminée en fonction de paramètres géométriques, indépendamment du nombre de Reynolds de l'écoulement. Le coût de calcul se trouve ainsi drastiquement réduit par rapport à une résolution LES (avec un gain du nombre de cellules dans le plan tangentiel qui évolue en fonction de  $Re_\tau^2$ ). L'analyse de sensibilité vis-à-vis du maillage a montré qu'il est tout de même préférable d'utiliser des cellules allongées dans la direction longitudinale par rapport à la direction transverse, ce qui souligne l'importance de ce raffinement ( $\Delta_z$ ) pour résoudre correctement



les structures de la couche limite turbulente lors de la transition au mode LES. Finalement, dans le cas de l'écoulement en canal plan, les maillages fondés sur le critère  $(\Delta_x/\delta, \Delta_z/\delta)=(0.1, 0.05)$  apparaissent particulièrement appropriés. Les fonctions de protection assurent alors la transition RANS-LES dans la zone logarithmique, comme désiré. La région visqueuse de paroi est traitée en mode RANS, et le mode LES est bien établi dans la zone de sillage.

Enfin, l'influence du modèle de fermeture a été analysée, en comparant le comportement du  $k-\omega$  SST HTLES et celui du  $BL-\overline{v^2}/k$  HTLES. Comme attendu, des résultats similaires sont obtenus dans la zone LES, avec une sensibilité réduite du niveau d'énergie résolue qui dépend essentiellement de la discrétisation spatiale. Néanmoins, le ratio d'énergie  $r_K$  évalué en fonction du maillage est plus consistant avec le ratio d'énergie effectif  $k_m/k$  avec le  $BL-\overline{v^2}/k$ . De plus, dans la zone RANS, l'intérêt d'utiliser des modèles RANS avec un bon comportement dans la couche limite turbulente a été mis en exergue. En effet, le  $BL-\overline{v^2}/k$  reproduit mieux le comportement de l'énergie cinétique turbulente dans la zone de proche paroi que le  $k-\omega$  SST (ce qui est favorable pour une extension du modèle à la thermique). Dans tous les cas, des prédictions satisfaisantes sont obtenues pour la vitesse et la contrainte de cisaillement.





## Chapitre 5

# Évaluation des efforts instationnaires sur le cas test des collines périodiques

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Écoulement sur les collines périodiques</b>	<b>132</b>
5.1.1	Présentation du cas test	132
5.1.2	Configuration de référence pour la validation des modèles de turbulence	133
<b>5.2</b>	<b>Paramètres numériques</b>	<b>134</b>
<b>5.3</b>	<b>Comportement des modèles RANS et LES</b>	<b>135</b>
5.3.1	LES	135
5.3.2	RANS	137
<b>5.4</b>	<b>Validation de la HTLES</b>	<b>138</b>
5.4.1	Comportement de la HTLES et influence des améliorations	138
5.4.2	Étude de sensibilité au maillage	140
5.4.3	Étude de sensibilité au modèle de fermeture	146
5.4.4	Étude de sensibilité au nombre de Reynolds	149
<b>5.5</b>	<b>Estimation des efforts instationnaires en paroi</b>	<b>151</b>
5.5.1	Estimations statistiques de la pression	151
5.5.2	Calcul LES de référence	153
5.5.3	Influence des paramètres de la HTLES	155
5.5.4	Estimation des spectres d'énergie en HTLES	158
5.5.5	Estimation des spectres de pression en HTLES	165
<b>5.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>167</b>

---

Suite au développement théorique de la nouvelle formulation de la HTLES et à son amélioration pour traiter les écoulements de proche paroi, le modèle est validé avec le cas test de référence pour les méthodes hybrides : l'écoulement sur les collines périodiques. L'objectif est de démontrer que la HTLES est capable de fournir des prédictions fiables, meilleures que les modèles RANS, tout en conservant un coût de calcul largement inférieur à celui de la LES. La validation statistique est réalisée dans un premier temps, à différents nombres de Reynolds et sur différents maillages. Dans un second temps, la validation s'intéresse à la capacité de la HTLES à prédire les spectres d'énergie et de pression, notamment dans la région de proche paroi, dans la perspective d'application du modèle à l'étude des efforts instationnaires sur des composants.

## 5.1 Écoulement sur les collines périodiques

### 5.1.1 Présentation du cas test

Le cas test de l'écoulement sur les collines périodiques consiste en un canal infini dont l'une des parois est composée d'une succession de collines à intervalles réguliers, comme montré sur la Figure 5.1. Suite aux premières études numériques LES réalisées par Mellen *et al.* [79] (suivies de nombreuses autres), le cas test a été étudié expérimentalement par Rapp et Manhart [94, 95], fournissant des données de référence pour valider les modèles de turbulence.

L'écoulement turbulent est statistiquement stationnaire et 2D, dirigé par un gradient de pression longitudinal  $\partial P/\partial x$ . Il est orienté dans la direction  $x$ , avec  $y$  la normale à la paroi supérieure et  $z$  la direction d'homogénéité. L'espacement entre les deux parois est  $L_y = 3.035h$ , où  $h$  est la hauteur de la colline. Les collines sont espacées de  $L_x = 9h$ , et leur extension est de  $2h$  en amont et en aval. L'écoulement statistique est décrit par les vitesses  $U = \bar{U}^*$  et  $V = \bar{V}^*$ , tandis que  $W = \bar{W}^* = 0$ . Le nombre de Reynolds caractéristique de l'écoulement est :

$$Re_b = \frac{U_b h}{\nu}, \quad \text{avec} \quad U_b = \frac{1}{2.035h} \int_h^{3.035h} U(y) dy, \quad (5.1)$$

où  $U_b$  est la vitesse débitante moyenne dans le canal (mesurée en haut de la colline ici).

L'écoulement sur les collines périodiques est caractérisé par des phénomènes instationnaires et grandes échelles. À  $Re_b = 10600$ , une séparation de la couche limite est observée au sommet de la colline. Bien que la position instantanée de la séparation varie en fonction du temps, avec  $x_s/h \in [0, 0.5]$ , la position moyenne est évaluée comme  $\bar{x}_s/h = 0.20 \pm 0.02$  d'après les LES de référence de Breuer et Jaffrézic [10], Fröhlich *et al.* [40], Mellen *et al.* [79] et Temmerman *et al.* [118]. Des structures turbulentes aux grandes échelles sont générées au sein de la couche de cisaillement détachée. L'écoulement réattache au centre de l'espace entre les deux collines, avec en moyenne  $\bar{x}_r/h = 4.64 \pm 0.08$  selon les prédictions LES [10, 40, 118], et  $\bar{x}_r/h = 4.24$  selon les mesures PIV de Rapp et Manhart [94]. Une recirculation secondaire est également constatée [11, 40] au sommet de la colline (et semble apparaître à l'amont de la colline), avec une alternance de gradients de pression favorables et adverses.

En aval du réattachement, sur la paroi inférieure, une forte variabilité de la vitesse dans la direction transverse ( $\overline{w\overline{w}}$ ) est observée, correspondant au *splatting effect* [40, 14]. Cette variabilité est liée aux structures turbulentes larges échelles qui impactent la paroi. Il y a donc une forte anisotropie du tenseur de Reynolds dans cette région. Un point important souligné par Fröhlich *et al.* [40] est que les caractéristiques usuelles de la couche limite turbulente attachée ne sont pas retrouvées dans une grande partie de l'écoulement. Des propriétés correspondant à la zone logarithmique sont uniquement identifiées dans la région en aval du réattachement.

Pour le cas test à  $Re_b = 37000$ , des caractéristiques de l'écoulement similaires sont observées. La principale différence réside dans la forme de la bulle de recirculation qui s'aplatit [96], et dans son extension spatiale qui est raccourcie, avec une position moyenne du réattachement mesurée à  $\bar{x}_r/h = 3.76$  par Rapp et Manhart [95].

L'écoulement sur les collines périodiques a également été étudié pour des nombres de Reynolds moins élevé ( $Re_b = 700, 400, 2800, 5600$ ), que ce soit expérimentalement ou numériquement avec des calculs DNS, comme dans les travaux de Breuer *et al.* [14]. Dans le cadre de cette thèse, l'analyse se focalise sur les nombres de Reynolds les plus élevés ( $Re_b = 10600$  et  $37000$ ), plus à même d'être représentatifs des conditions industrielles, et correspondant aux références du projet ATAAC [40].

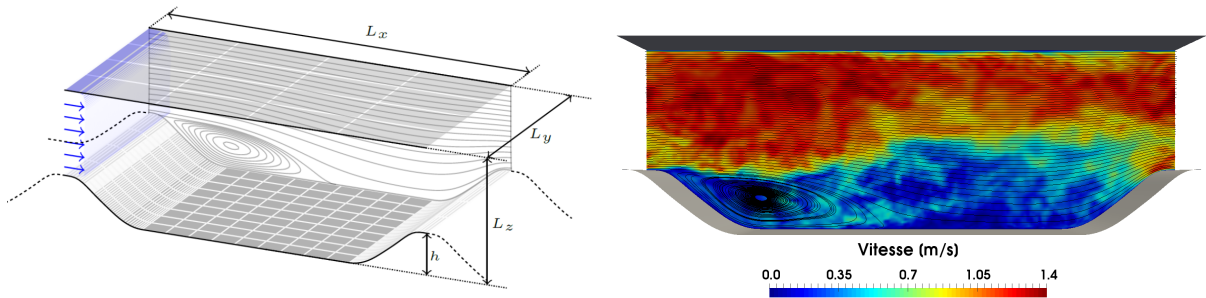


FIGURE 5.1 – Écoulement sur les collines périodiques, (gauche) schéma de la configuration [1], (droite) champ de vitesse instantané et lignes de champ moyennes (calcul LES avec le maillage raffiné Mr).

### 5.1.2 Configuration de référence pour la validation des modèles de turbulence

En raison des structures large échelle instationnaires qui gouvernent l'écoulement, la description statistique RANS rencontre des difficultés pour traiter le cas test des collines périodiques, et échoue à reproduire la zone de recirculation [53], comme nous le verrons dans la section 5.3.2. En particulier, les modèles de proche paroi « classiques », développés pour les écoulements attachés, ne permettent pas, dans ce cas, de décrire les mécanismes turbulents de proche paroi de manière satisfaisante. Le cas test est donc une référence pour développer des modèles de paroi améliorés (voir Breuer *et al.* [13] ou Manhart *et al.* [78]).

Au contraire, les modèles LES sont capables de décrire l'écoulement sur les collines périodiques de manière satisfaisante, mais pour un coût de calcul relativement élevé. Temmerman et Leschziner [117] ont montré que les prédictions sont néanmoins sensibles au modèle de sous-filtre et au modèle utilisé dans la région de proche paroi. Mellen *et al.* [79] ont analysé l'influence du raffinement du maillage sur les résultats LES, et ont recommandé d'utiliser une extension  $L_z = 4.5h$  en envergure. Dans ce cadre, Saric *et al.* [101] ont déterminé que le raffinement minimum pour réaliser un calcul LES avec une grille curviligne structurée est de  $10^6$  cellules, pour  $Re_b = 10600$ . Enfin, Breuer *et al.* [14] insistent sur l'importance du raffinement au sommet de la colline pour prédire correctement la position de la séparation. Temmerman *et al.* [118] ont notamment quantifié qu'une résolution  $\Delta_x > 0.08h$  peut produire des écarts de prédiction de la séparation de l'ordre de  $0.5h$ , or une prédiction précise de la séparation est déterminante pour retrouver celle du réattachement d'après Fröhlich *et al.* [40].

Ce cas test est donc un standard pour valider les méthodes hybrides, et en particulier la capacité à prédire la séparation et la recirculation sur une géométrie courbe [14]. La validation des modèles de turbulence avec l'écoulement sur les collines périodiques est au coeur du projet ATAAC (*Advanced Turbulence Simulation for Aerodynamic Applications*) [40] visant à proposer des méthodes hybrides RANS-LES standards, et à fournir des recommandations et bonnes pratiques pour leurs utilisations. Il fait également partie des cas test de référence du groupe de travail ERCOFTAC<sup>1</sup> (*European Research Community on Flow, Turbulence and Combustion*) [74].

De nombreux modèles de turbulence hybrides RANS-LES ont déjà été testés sur le cas test des collines périodiques afin d'évaluer leurs comportements et prédictions. La DES a été utilisée par Breuer *et al.* [12] et Saric *et al.* [101], et les études ont notamment montré que l'utilisation de la taille de filtre  $\Delta_{\max} = \max[\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z]$  au lieu de  $\Delta_\Omega = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{1/3}$  a une influence sur les résultats, notamment lorsque le maillage est déraffiné dans la direction transverse, ce qui entraîne une dégradation des résultats liée à la transition RANS-LES hors de la couche limite turbulente. La PITM a été validée sur l'écoulement à  $Re_b = 37000$  par Chaouat et Schiestel [18], qui ont également souligné l'influence du raffinement dans la direction transverse.

1. <http://cfd.mace.manchester.ac.uk/ercoftac/doku.php>

Finalement, l'importance de la position de l'interface RANS-LES a été mise en évidence, entraînant une dégradation des résultats suivant qu'elle soit trop proche de la paroi (maillage pas assez fin pour une résolution LES), ou trop éloignée (résultats trop influencés par les prédictions RANS dégradées en paroi). Néanmoins, les méthodes hybrides utilisées ont toutes montré des résultats globalement en accord avec les références, en utilisant des maillages déraffinés par rapport aux critères LES.

## 5.2 Paramètres numériques

### Mise en oeuvre numérique

Pour simuler l'écoulement, l'approche à débit imposé est utilisée (contrairement à la simulation en canal plan fondée sur l'approche à frottement imposé). Un terme source est ajusté à chaque pas de temps, correspondant au gradient longitudinal de pression moyenne  $\partial P/\partial x$ , afin de conserver le flux de masse constant, tel que :

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)^{n+1} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)^n + \beta \frac{U_b - 2U_s^n + U_s^{n-1}}{2dt} \quad (5.2)$$

avec  $dt$  le pas de temps,  $\beta = 0.1$  un coefficient de relaxation, la vitesse débitante  $U_b$  imposée et la vitesse débitante  $U_s$  estimée au cours du calcul. Des conditions aux limites périodiques sont utilisées dans la direction de l'écoulement, pour simuler l'extension infinie du canal et la périodicité des collines. Les dimensions du domaine sont  $L_x = 9h$  et  $L_z = 3.035h$  par définition. En envergure, on a conservé  $L_y = 4.5h$  en suivant les recommandations de Mellen *et al.* [79], avec une périodicité imposée dans cette direction d'homogénéité. Les parois sont considérées lisses.

### Discrétisation spatiale et temporelle

Les principales caractéristiques des maillages utilisés dans cette étude sont décrites dans le Tableau 5.1. Pour l'écoulement à  $Re_b = 10600$ , le maillage M0 ( $\sim 2.05$  millions de mailles) correspond au raffinement proposé dans le cadre du projet ATAAC, avec  $N_x \times N_y \times N_z = 160 \times 160 \times 60$  [53]. Le maillage est cependant légèrement raffiné dans la direction transverse ( $N_z = 80$ ) afin d'éviter que l'extension maximale de la maille ne corresponde à la direction d'homogénéité  $z$ . Ainsi, on obtient un raffinement quasiment isotrope dans les plans parallèles aux parois, avec  $\Delta_{\max} = \Delta_x \simeq \Delta_z$ . De plus, hors de la couche limite, les cellules sont globalement isotropes, comme montré sur la Figure 5.2. Le maillage grossier M1 ( $\sim 0.25$  millions de mailles) est construit en divisant le nombre de cellules par deux dans toutes les directions, tout en maintenant la contrainte  $\Delta_y^+ = 1$ . Enfin, on utilise le maillage Mr ( $\sim 5.83$  millions de mailles), raffiné dans les directions  $x$  et  $z$  pour correspondre à la référence LES de Fröhlich *et al.* [40].

Les maillages sont raffinés dans la direction normale aux parois, avec  $\Delta_y^+ \simeq 1$ . Sur la paroi inférieure, la Figure 5.3 montre l'espacement de grille en unités de paroi, où l'on note que le maillage M0 souscrit globalement aux critères de la LES résolue en paroi.

$Re_b$	Grid	$\Delta_{yw}^+$	$\Delta_x/h$	$\Delta_z/h$	$N_x$	$N_y$	$N_z$
10600	Mr	1	$\simeq 0.046$	$= 0.024$	196	160	186
	<b>M0</b>	1	$\simeq 0.056$	$= 0.056$	160	160	80
	<b>M1</b>	1	$\simeq 0.11$	$= 0.11$	80	80	40
37000	<b>N1</b>	1	$\simeq 0.56$	$= 0.56$	160	180	80

TABLEAU 5.1 – Paramètres numériques des maillages utilisés pour l'écoulement sur les collines périodiques dans un domaine  $L_x \times L_y \times L_z = 9h \times 3.035h \times 4.5h$ .

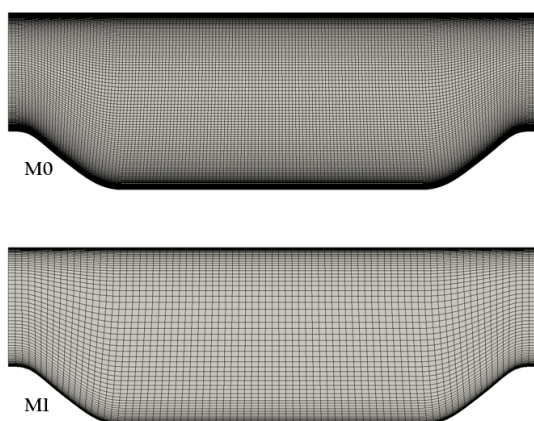


FIGURE 5.2 – Maillages M0 et M1 de la configuration des collines périodiques.

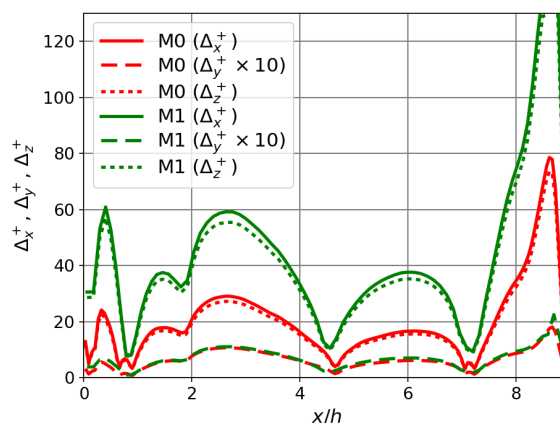


FIGURE 5.3 – Espacements de grille adimensionnés en unités de paroi sur la paroi inférieure, avec les maillages M0 et M1.

De la même manière, pour l'écoulement à  $Re_b = 37000$ , le maillage utilisé correspond à la référence du projet ATAAC [53], raffiné dans la direction  $z$  afin d'éviter que  $\Delta_z > \Delta_x$ .

Le pas de temps a été estimé à  $dt = 0.005h/U_b$  pour le maillage le plus raffiné Mr, afin que le nombre de courants soit inférieur à l'unité, et a été gardé constant afin de ne pas influencer sur les calculs, notamment lors de l'analyse des spectres (section 5.5).

### Schémas numériques

Pour les calculs hybrides, le schéma de Crank-Nicolson en temps et le schéma hybride (Eq. 4.6) pour le terme de convection des équations de Navier-Stokes, présenté dans la section 4.2, sont utilisés. Les études de sensibilité aux paramètres numériques ont montré que l'utilisation d'un schéma centré dans la branche RANS du modèle entraîne des oscillations numériques, qui peuvent conduire à une instabilité du calcul avec le maillage grossier M1. Ainsi, pour étudier l'écoulement sur les collines périodiques avec des modèles hybrides, l'utilisation du schéma hybride est primordiale et améliore sensiblement la robustesse numérique.

### Estimation des quantités statistiquement moyennées de la formulation HTLES

Dans le cadre de la HTLES, pour estimer les moyennes statistiques des variables turbulentes au cours du calcul, le filtre exponentiel (Eq. 4.7) est utilisé. Comme pour l'écoulement en canal plan, la taille de filtre  $\Delta_T$  correspond à plusieurs temps de passage ( $\sim 25T_p$ ) pour obtenir des estimations bien convergées.

### Estimation des grandeurs statistiques

Suite à l'initialisation du calcul, la période transitoire est estimée à près de  $150T_p$ , afin de laisser également le temps à la moyenne estimée avec le filtre exponentiel de se stabiliser. Des moyennes sont ensuite réalisées en temps ( $\sim 100T_p$ ), et dans la direction d'homogénéité  $z$ , afin d'évaluer les résultats statistiques présentés dans les sections suivantes.

Les résultats de référence sont la LES avec 13.1 millions de cellules de Breuer et Jaffrézic [10] et les mesures PIV réalisées par Rapp et Manhart [94] pour  $Re_b = 10600$ , et les mesures PIV de Rapp et Manhart [95] pour  $Re_b = 37000$ .

## 5.3 Comportement des modèles RANS et LES

### 5.3.1 LES

Les principaux résultats LES sont présentés dans un premier temps, étant donné que ce sont les références pour l'étude de l'écoulement sur les collines périodiques. Les calculs LES Smagorinsky sont réalisés sur la configuration à  $Re_b = 10600$ , avec les maillages Mr, M0 et M1.



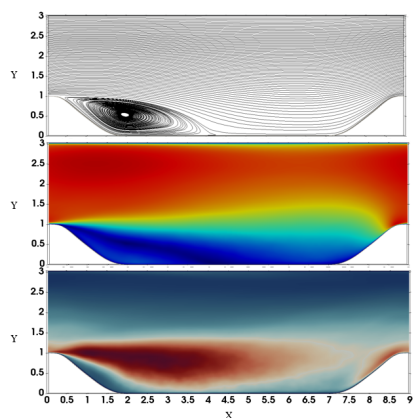


FIGURE 5.4 – Lignes de courant, vitesse et énergie turbulente moyennées, collines périodiques à  $Re_b = 10600$ . Calcul LES avec le maillage Mr.

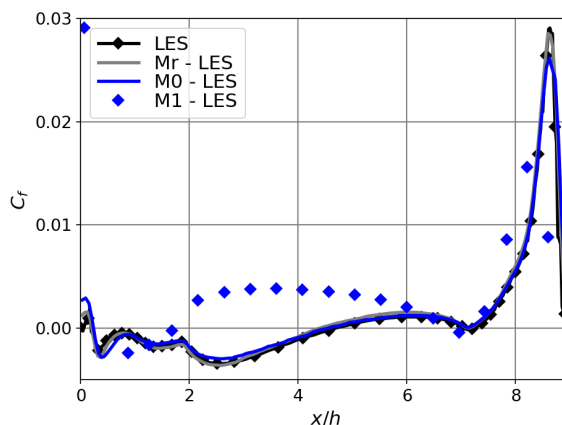


FIGURE 5.5 – Coefficient de frottement sur la paroi inférieure, collines périodiques à  $Re_b = 10600$ . Calculs LES avec les maillages Mr, M0 et M1.

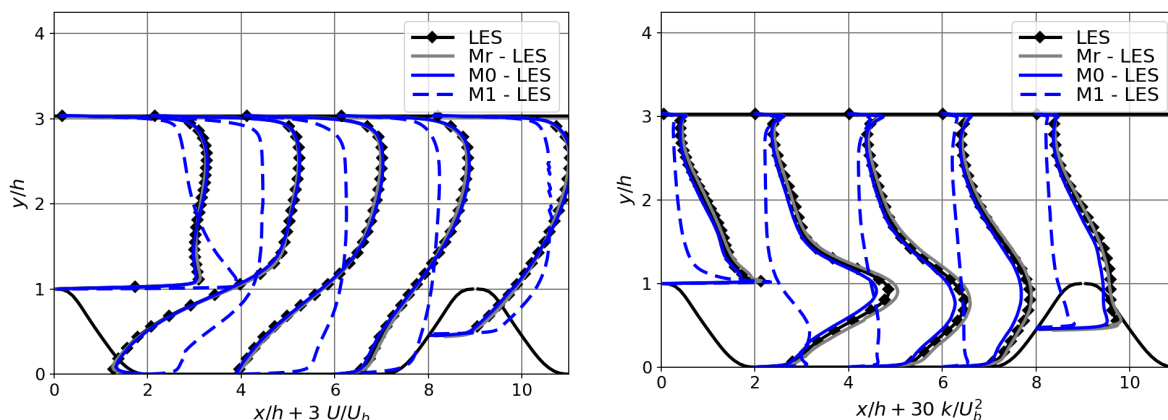


FIGURE 5.6 – Profils de vitesse (gauche) et d'énergie cinétique turbulente (droite), collines périodiques à  $Re_b = 10600$ . Calculs LES avec les maillages Mr, M0 et M1.

La Figure 5.4 montre les lignes de courants pour l'écoulement moyenné, permettant de visualiser la zone de recirculation comprise entre  $x_s/h \simeq 0.2$  et  $x_r/h \simeq 4.6$ . La norme de la vitesse moyenne montre que l'écoulement est décéléré dans la zone de recirculation et en aval du réattachement. Une forte augmentation de l'énergie cinétique turbulente est observée au niveau de la séparation, qui s'étend dans toute la couche de cisaillement décollée. Une augmentation de l'énergie turbulente est également notée à l'amont de la colline.

Sur la Figure 5.5, l'un des principaux éléments à valider est la capacité des modèles à prédire la distribution du coefficient de frottement  $C_f$  sur la paroi inférieure. Les résultats LES sont comparés à la référence LES de Breuer [10]. Ces prédictions sont déterminantes, et elles permettent notamment d'identifier les principales zones de recirculation de l'écoulement. Avec le maillage Mr, la zone de recirculation principale est bien prédite. De plus, la recirculation secondaire au sommet de la colline ( $x/h \simeq 0$ ) semble reproduite, avec  $C_f$  qui devient négatif (sans que la résolution permette de voir une recirculation), tandis qu'à l'amont de la colline ( $x/h \simeq 7$ ),  $C_f$  est très proche de zéro, comme spécifié par Fröhlich *et al.* [40]. Le maillage M0 permet de reproduire correctement la zone de recirculation principale, avec des prédictions satisfaisantes des positions de la séparation et du réattachement. Au sommet de la colline, la résolution du maillage n'est cependant pas suffisante retrouver des valeurs négatives de  $C_f$ , qui



dénoteraient d'une recirculation secondaire (pour Mr,  $\Delta_x/h \simeq 0.046$  et  $\Delta_z/h \simeq 0.024$ , tandis que pour M0,  $\Delta_x/h \simeq \Delta_z/h = 0.056$ ). Enfin, la résolution du maillage déraffiné M1 n'est pas suffisante pour décrire correctement les fluctuations larges échelles de l'écoulement, notamment en paroi, ce qui explique les écarts considérables observés, avec une prédiction erronée de la zone de recirculation principale.

Sur la Figure 5.6, les profils de vitesse moyenne et d'énergie cinétique turbulente, extraits aux positions  $x/h = 0, 2, 4, 6$  et  $8$ , sont présentés. Pour les maillages M0 et Mr, les profils de vitesse sont très bien prédits, ainsi que l'énergie turbulente malgré de petites sous-estimations observées avec le maillage M0. Le calcul LES associé au maillage grossier M1 donne des erreurs importantes, que ce soit pour la vitesse ou pour l'énergie cinétique turbulente, qui est largement sous-estimée.

Pour conclure, en utilisant le maillage Mr similaire à celui utilisé par Fröhlich *et al.* [40], les mêmes observations sont réalisées, avec une très bonne adéquation aux références. Avec le maillage M0, dont les critères de raffinement correspondent globalement à ceux d'une LES résolue en paroi, les principaux profils sont reproduits de manière satisfaisante. Au contraire, l'utilisation du maillage M1 conduit à des estimations très dégradées, ce qui est en accord avec Saric *et al.* [101] qui estiment qu'un maillage d'au moins  $10^6$  cellules est nécessaire pour effectuer un calcul LES sur cette configuration.

Les objectifs de validation de la HTLES (ou de toute autre méthode hybride) sont donc de conserver des prédictions proches de celles de la LES en utilisant le maillage fin M0, et d'être capable d'améliorer significativement les prédictions sur le maillage grossier M1, afin de s'assurer de la robustesse de la méthodologie hybride vis-à-vis du maillage.

### 5.3.2 RANS

Les modèles RANS  $k-\omega$  SST et  $BL-\overline{v^2}/k$  sont testés sur le cas de l'écoulement sur les collines périodiques, en utilisant un maillage correspondant à la résolution du M0 dans les directions de l'écoulement ( $N_x = 160$ ) et normale aux parois ( $N_y = 160$ ). Dans la direction transverse, une seule cellule est nécessaire ( $N_z = 1$ ) étant donné que l'écoulement est statistiquement 2D, ce qui permet de réduire considérablement le coût de calcul. La convergence en maillage a été vérifiée.

Sur la Figure 5.7, on observe que par rapport à la référence LES, l'extension de la zone de recirculation est largement surestimée avec les modèles RANS, notamment avec le  $k-\omega$  SST. Des prédictions erronées de la distribution de  $C_f$  sur la paroi inférieure sont également observées comme montré sur la Figure 5.8. On note néanmoins que les résultats du modèle  $BL-\overline{v^2}/k$  sont globalement plus en accord avec la référence que ceux du  $k-\omega$  SST.

Sur la Figure 5.9, en analysant les profils de vitesse et d'énergie cinétique turbulente, les tendances se confirment, avec de larges écarts entre les prédictions RANS et les références, y compris dans la zone centrale de l'écoulement et au niveau de la couche limite turbulente attachée sur la paroi supérieure. L'énergie cinétique turbulente, qui est entièrement modélisée, est largement sous-estimée.

Pour conclure, les modèles RANS ne permettent pas de reproduire correctement les principales caractéristiques de l'écoulement sur les collines périodiques, comme montré par Jakirlic [53] étant donné l'importance de la résolution des fluctuations larges échelles. L'utilisation du  $BL-\overline{v^2}/k$  qui repose sur un effort de modélisation important en proche paroi permet d'améliorer les tendances pour le coefficient de frottement sur la paroi inférieure par rapport au  $k-\omega$  SST, mais n'améliore pas sensiblement les profils de vitesse ou d'énergie.

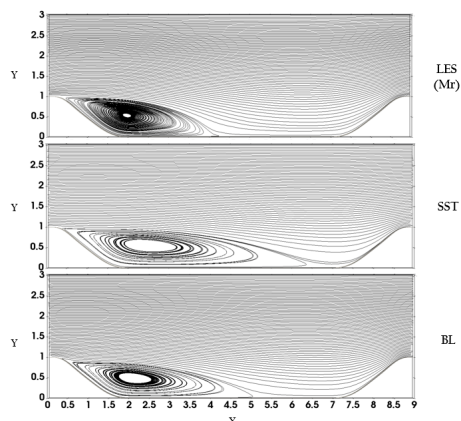


FIGURE 5.7 – Lignes de courant moyennées. Calcul LES avec le maillage Mr, et calculs RANS  $k-\omega$  SST et BL- $\overline{v^2}/k$ .

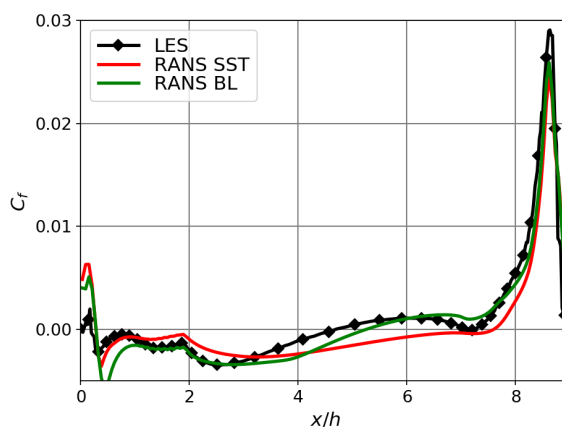


FIGURE 5.8 – Coefficient de frottement sur la paroi inférieure. Calculs RANS  $k-\omega$  SST et BL- $\overline{v^2}/k$  avec le maillage M0.

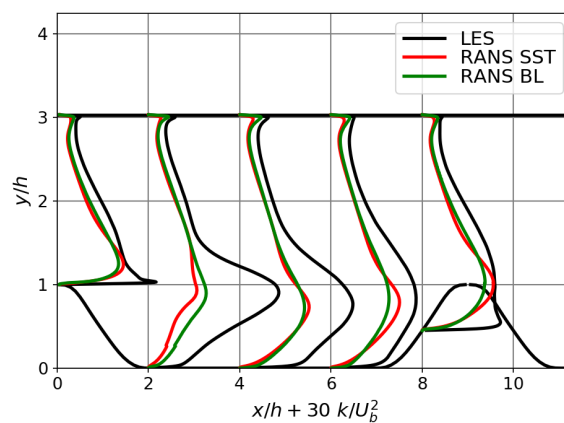
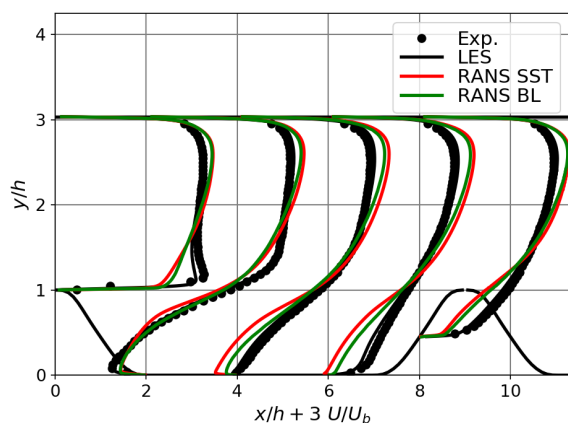


FIGURE 5.9 – Profils de vitesse (gauche) et d'énergie cinétique turbulente (droite), collines périodiques à  $Re_b = 10600$ . Calculs RANS  $k-\omega$  SST et BL- $\overline{v^2}/k$  avec le maillage M0.

## 5.4 Validation de la HTLES

### 5.4.1 Comportement de la HTLES et influence des améliorations

Dans un premier temps, l'objectif de l'étude est de tester la nouvelle formulation HTLES, associée au  $k-\omega$  SST ici, développée théoriquement dans le chapitre 3, sans les améliorations de parois du chapitre 4, pour analyser le comportement du modèle. Pour ce faire, les calculs sont réalisés avec le maillage M0, suffisamment raffiné en paroi pour une résolution LES, et le maillage M1 plus grossier, insuffisant pour une résolution LES comme montré dans la section 5.3.1.

Sur la Figure 5.10, les profils du ratio d'énergie estimé  $r_K$  (sans fonction de protection) montrent que la transition RANS-LES a lieu très proche des parois, quel que soit le maillage : le mode RANS est imposé pour  $d_w < 0.004h$  sur M0 (deux cellules dans la direction normale), et pour  $d_w < 0.008h$  sur M1 (trois cellules). Ainsi, le mode LES est activé très proche de la paroi. La forte décroissance du ratio  $r$  est concentrée dans la zone de paroi, avant que  $r$  se stabilise autour d'une valeur plateau dans la zone LES qui recouvre la majeure partie du canal. Comme attendu, cette valeur plateau est plus faible lorsque le maillage est raffiné. L'introduction de la fonction de protection permet d'étendre considérablement la zone RANS en paroi ( $d_w < 0.12h$ ).

Sur la Figure 5.11, que ce soit pour le coefficient de frottement sur la paroi inférieure ou les profils de vitesse, les résultats HTLES (sans amélioration de paroi) en utilisant le maillage M0

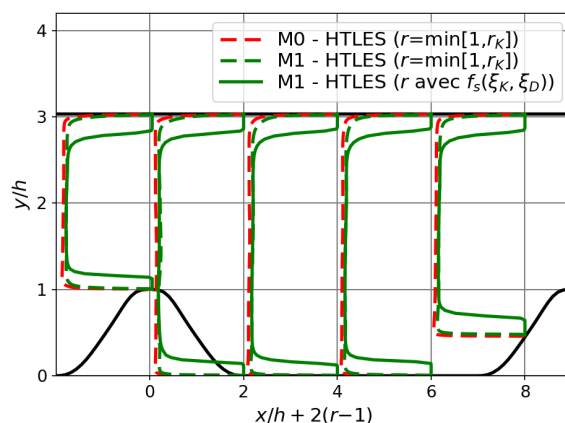


FIGURE 5.10 – Profils du ratio d'énergie, collines périodiques à  $Re_b = 10600$ . Calculs HTLES sans améliorations de proche paroi (sauf mentionné) avec les maillages M0 et M1.

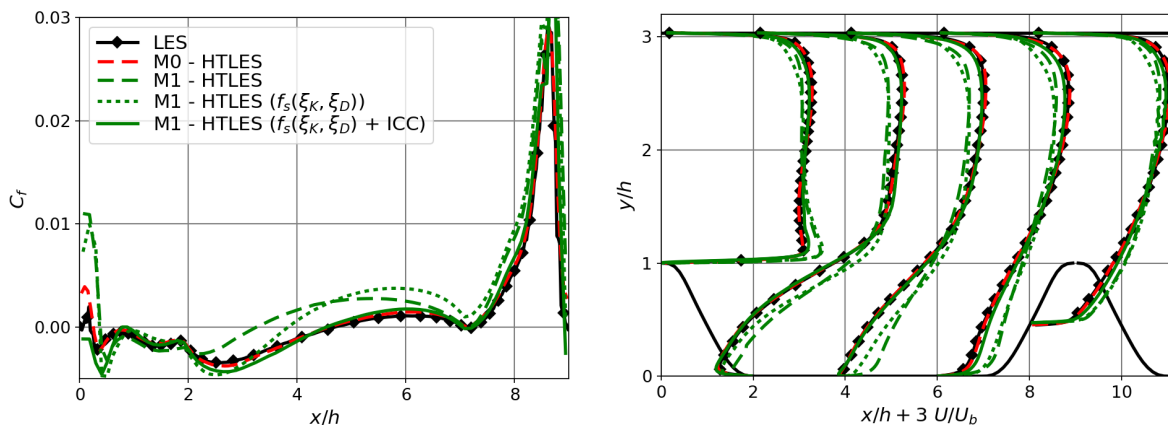


FIGURE 5.11 – Coefficient de frottement sur la paroi inférieure (gauche) et profils de vitesse (droite), collines périodiques à  $Re_b = 10600$ . Calculs HTLES sans amélioration de paroi (sauf mentionné) avec les maillages M0 et M1.

sont en très bon accord avec les références, équivalents à ceux de la LES (Figures 5.5 et 5.6). Ainsi, sur un maillage souscrivant aux critères de la LES résolue en paroi, la HTLES fonctionne comme un modèle LES standard, avec le mode LES activé très proche de la paroi.

Au contraire, en utilisant le maillage M1, les résultats HTLES montrent de larges différences avec les références. Dans cette configuration, la transition RANS-LES a également lieu très proche de la paroi, mais le raffinement du maillage n'est pas suffisant pour résoudre les structures turbulentes. Comme pour l'écoulement en canal plan, la fonction de protection  $f_s(\xi_K, \xi_D)$  (Eq. 4.30) est introduite dans le modèle, mais malgré l'extension de la zone de proche paroi traitée en mode RANS (Figure 5.10), des écarts importants sont toujours observés. Dans ce cas, les fluctuations résolues dans la zone LES pénètrent dans la zone RANS, ce qui entre en contradiction avec les développements théoriques du modèle, comme montré dans la section 4.4.2, et dégrade les résultats. Il est alors nécessaire d'introduire la contrainte de consistance interne (ICC, Eq. 4.11 et 4.31) pour retrouver la formulation exacte du modèle de fermeture RANS.

Finalement, l'introduction complémentaire de la fonction de protection, afin d'imposer le mode RANS dans la région de proche paroi, et de l'ICC, afin de retrouver la formulation RANS exacte, permet de considérablement améliorer les prédictions HTLES sur le maillage grossier M1, comme montré sur la Figure 5.11.

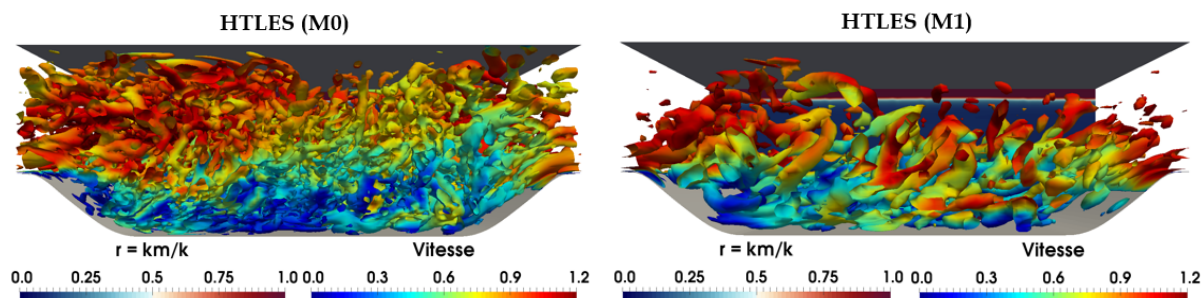


FIGURE 5.12 – Iso-surfaces de critère  $QU_b^2/h^2 = 0.5$ , colorées par la norme de la vitesse instantanée, et, sur le plan au fond, ratio d'énergie  $r$  estimé, pour l'écoulement sur les collines périodiques à  $Re_b = 10600$ . Calculs HTLES avec les maillages M0 et M1.

### 5.4.2 Étude de sensibilité au maillage

Le modèle  $k-\omega$  SST HTLES, avec les améliorations de paroi, est validé dans cette section, en utilisant les maillages M0 (fin) et M1 (grossier). Les iso-surfaces de critère- $Q$  sur la Figure 5.12 montrent que des fluctuations turbulentes sont résolues dans la zone LES, M0 permettant de décrire plus finement les structures, comme attendu. Sur la seconde figure (M1), on observe que le ratio d'énergie estimé  $r$  (Eq. 4.15) est bien égal à l'unité en proche paroi (zone RANS), avant de décroître au centre du canal (zone LES).

Sur la Figure 5.13, les lignes de courant pour la vitesse statistiquement moyennée sont en très bon accord avec les références LES sur le maillage Mr. Bien que le maillage M1 soit considérablement déraffiné (facteur  $\sim 20$  entre M1 et Mr), la forme globale de la zone de recirculation est bien reproduite.

Comme montré sur la Figure 5.14, le coefficient de frottement sur la paroi inférieure est correctement prédit par la HTLES. Avec le maillage M0, les résultats sont en très bon accord avec les références, que ce soit pour identifier la zone de recirculation principale avec des prédictions précises des points de séparation  $\bar{x}_s/h$  et de réattachement  $\bar{x}_r/h$  (Tableau 5.2), ou pour identifier les valeurs  $C_f \simeq 0$  au sommet ( $x/h = 0$ ) et à l'amont de la colline ( $x/h = 7$ ). Avec le maillage M1, les résultats sont globalement satisfaisants, avec une prédiction correcte du point de réattachement de la recirculation principale. Le déraffinement du maillage au sommet de la colline implique une perte de précision dans la prédiction du point de séparation : on a ici  $\Delta_x/h \simeq 0.11$  et Temmerman *et al.* [118] ont montré en LES qu'avec  $\Delta_x/h > 0.08$  au sommet de la colline, des écarts de l'ordre de  $0.5h$  peuvent être obtenus. On note néanmoins que le point  $x_s/h = -0.06$  correspond à la séparation de la recirculation secondaire au sommet de la colline, qui est surestimée et ne réattache pas étant donné que le maillage est trop déraffiné pour capturer cette petite bulle de recirculation. Finalement, le manque de précision sur la position de la séparation ne dégrade pas les prédictions du réattachement.

		LES [10]	LES [118]	LES [79]	HTLES (M0)	HTLES (M1)
Séparation	$\bar{x}_s/h$	0.19	0.22	0.20	0.19	-0.06
Réattachement	$\bar{x}_r/h$	4.69	4.72	4.56	4.65	4.55

TABLEAU 5.2 – Prédictions des positions de la séparation et du réattachement de la bulle de recirculation principale pour l'écoulement sur les collines périodiques à  $Re_b = 10600$ . LES de référence de Breur et Jaffrézic [10], Temmerman *et al.* [118] et Mellen *et al.* [79], et calculs HTLES sur les maillages M0 et M1.

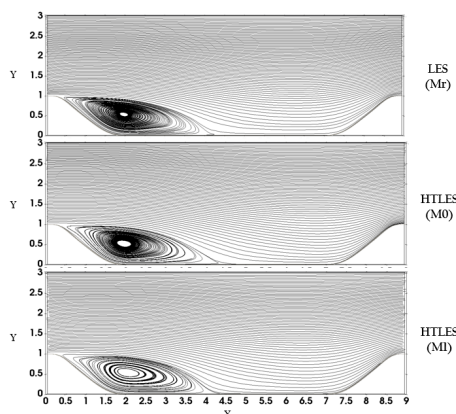


FIGURE 5.13 – Lignes de courant moyennées. Calcul LES avec le maillage Mr, et calculs HTLES avec M0 et M1.

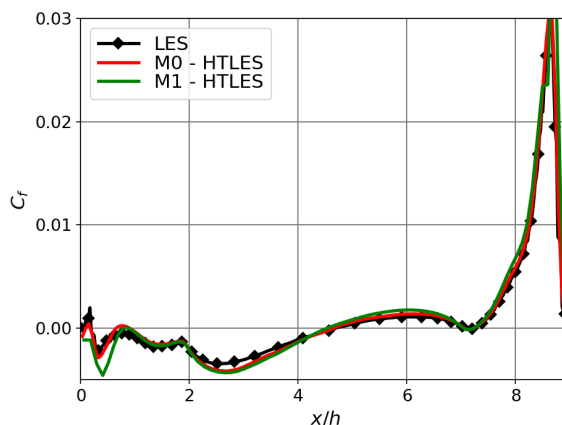


FIGURE 5.14 – Coefficient de frottement sur la paroi inférieure. Calculs HTLES avec les maillages M0 et M1.

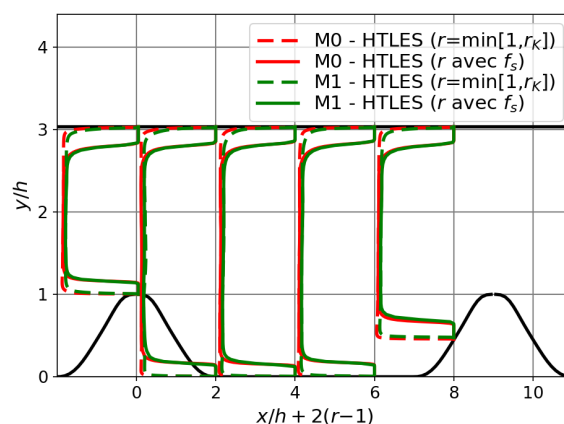
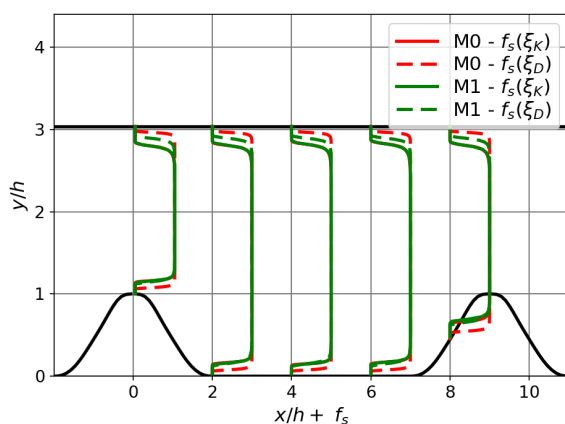


FIGURE 5.15 – Profils de la fonction de protection  $f_s(\xi_K, \xi_D)$  (gauche) et profils du ratio d'énergie  $r$  avec et sans la fonction de protection (droite). Calculs HTLES avec les maillages M0 et M1.

Sur la Figure 5.15 (gauche), en se focalisant sur les profils de la fonction de protection (extraits à  $x/h = 0, 2, 4, 6$  et  $8$ ), la fonction  $f_s(\xi_K)$  (Eq. 4.23) dépendante de l'échelle de Kolmogorov ne montre pas de sensibilité au maillage. Cette propriété, déjà validée pour l'écoulement en canal plan, est particulièrement importante à vérifier ici étant donné que l'écoulement en proche paroi pour les collines périodiques ne correspond pas à une couche limite turbulente attachée, or il est souhaité que  $f_s(\xi_K)$  soit indépendant du maillage quel que soit l'écoulement rencontré.

Pour la fonction  $f_s(\xi_D)$  (Eq. 4.29) dépendante de  $\Delta_{\max}$ , on vérifie que l'extension de la zone RANS est doublée avec M1 ( $\Delta_{\max}/h \simeq 0.11$ ) comparé à M0 ( $\Delta_{\max}/h \simeq 0.056$ ). Pour cet écoulement à un nombre de Reynolds modéré  $Re_b = 10600$ , l'extension maximale de la zone protégée est liée à  $f_s(\xi_K)$  pour les deux maillages. Avec M1, on remarque que la forme de la zone de transition est exactement la même pour  $f_s(\xi_K)$  et  $f_s(\xi_D)$  au niveau de la paroi inférieure, ce qui montre que la calibration des coefficients est robuste dans l'objectif d'assurer une pente similaire dans la région de transition. **Il est intéressant d'obtenir la même protection sur les deux maillages, afin d'analyser la sensibilité du modèle HTLES au raffinement tout en conservant la même position de la transition RANS-LES.**

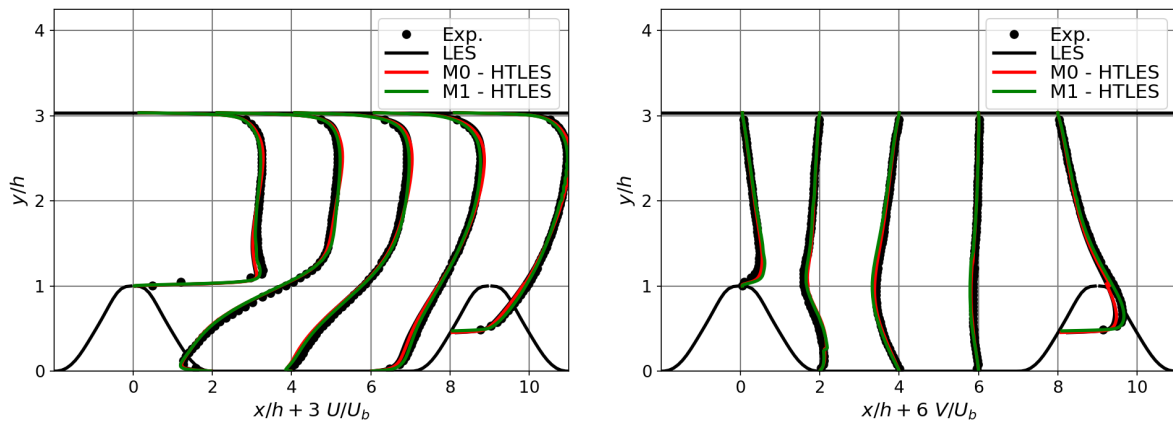


FIGURE 5.16 – Profils de vitesse moyennée dans la direction de l'écoulement (gauche) et dans la direction normale (droite). Calculs HTLES avec les maillages M0 et M1.

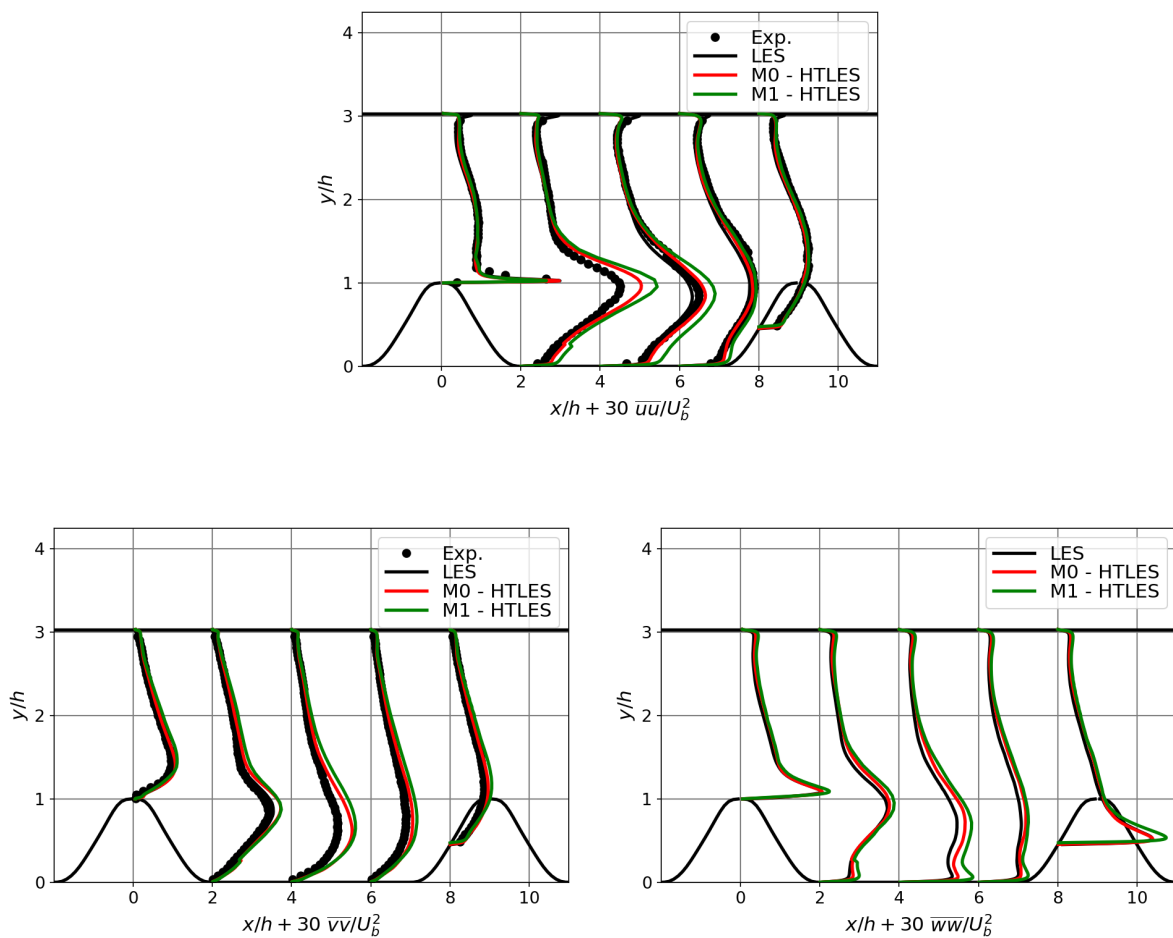


FIGURE 5.17 – Profils des composantes diagonales du tenseur de Reynolds. Collines périodiques à  $Re_b = 10600$ . Calculs HTLES avec les maillages M0 et M1.



Sur la Figure 5.15 (droite), il est vérifié que l'introduction de la fonction de protection permet d'étendre la zone RANS  $r = 1$  (le mode LES serait activé trop proche des parois sinon, ce qui dégraderait les résultats sur le maillage M1 comme montré dans la section 5.4.1). La transition RANS-LES a bien lieu à la même position pour les deux maillages, et la valeur plateau du ratio d'énergie en mode LES décroît lorsque le maillage est raffiné.

Le comportement de la méthode hybride étant validé, on s'intéresse aux prédictions du modèle. Les profils de vitesse sur la Figure 5.16 coïncident bien avec les références, et ce, même avec le maillage grossier M1 pour lequel les résultats LES sont très mauvais. Quelques différences minimales restent visibles selon la résolution du maillage, mais l'accord global est très satisfaisant.

Sur la Figure 5.17, pour les composantes diagonales du tenseur de Reynolds  $\overline{uu}$ ,  $\overline{vv}$  et  $\overline{ww}$ , la forme globale des profils est qualitativement bien reproduite, et en particulier l'anisotropie de la turbulence est capturée de manière satisfaisante (voir les profils à  $x/h = 4$  et  $x/h = 8$ ). En ce qui concerne l'écoulement sur les collines périodiques, il est important de reproduire le pic d'énergie dans la couche de cisaillement détachée, ainsi que le *splating effect* [40, 14], décrit dans la section 5.1.1, qui se traduit par un pic de  $\overline{ww}$  sur la paroi inférieure après le réattachement. Quantitativement, des prédictions correctes sont obtenues pour  $y/h > 1.5$ , y compris au niveau de la paroi supérieure. Une surestimation des profils est observée au niveau du pic d'énergie au centre du canal et de la paroi inférieure. La surestimation est plus prononcée avec le maillage déraffiné M1, mais les résultats restent satisfaisants étant donné la différence de résolution entre les maillages. Enfin, lorsque le maillage est raffiné, les résultats HTLES tendent vers les solutions LES, tout en conservant une région de proche paroi traitée en mode RANS.

### Analyse de la décomposition de l'énergie cinétique turbulente

L'analyse des profils d'énergie cinétique turbulente  $k$  sur la Figure 5.18 mène à des conclusions similaires aux précédentes : la forme globale des profils est bien reproduite qualitativement, mais une surestimation de l'énergie est observée dans la couche de cisaillement détachée.

Une description plus détaillée des profils, décomposés entre leurs composantes résolues ( $k_r$ ) et modélisées ( $k_m$ ) sur la Figure 5.19, permet de réaliser une analyse plus fine des résultats. Il est rappelé que la zone RANS est étendue jusqu'à une distance  $d_w \simeq 0.12h$  des deux parois, grâce à la fonction de protection.

Concernant  $k_m$ , les résultats sont identiques avec les deux maillages dans la zone RANS au niveau de la paroi supérieure, tandis que dans la zone LES, la quantité d'énergie modélisée est plus importante avec le maillage grossier M1, tout en restant bien inférieure à la quantité d'énergie résolue, comme attendu. Au niveau de la paroi inférieure, région traitée en mode RANS,  $k_m$  est sensible au raffinement du maillage.

Pour  $k_r$ , il est tout d'abord noté que des fluctuations résolues pénètrent dans la zone RANS jusqu'aux parois. Au niveau de la paroi supérieure, la prise en compte des composantes modélisée et résolue permet à l'énergie turbulente totale de retrouver le comportement attendu. Dans la zone LES, les profils d'énergie turbulente résolue correspondent à la solution LES de référence, et sont mêmes surestimés avec le maillage grossier M1. En ajoutant la composante modélisée, cela entraîne une surestimation de l'énergie turbulente totale. Le comportement souhaité aurait été que la composante résolue de l'énergie turbulente diminue lorsque le maillage est déraffiné, mais comme pour le canal plan (section 4.5.2), des cellules relativement grossières peuvent entraîner une surestimation des fluctuations résolues.

En conclusion, la surestimation de l'énergie turbulente totale est liée principalement à la surestimation de la composante résolue, dont les profils sont globalement en accord avec ceux des modèles LES standard. Dans la zone de proche paroi traitée en mode RANS, la complémentarité des composantes modélisée et résolue permet de retrouver le comportement des références.



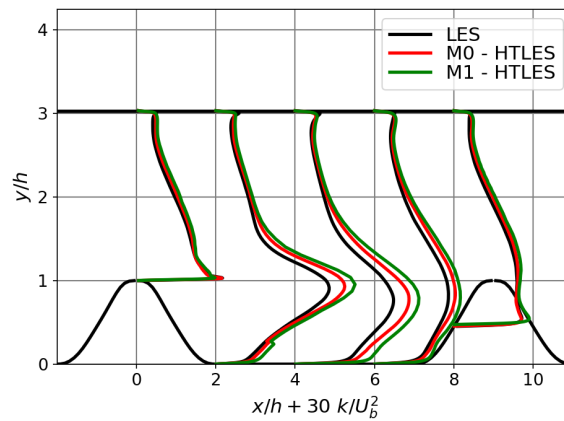


FIGURE 5.18 – Profils de l'énergie cinétique turbulente. Collines périodiques à  $Re_b = 10600$ . Calculs HTLES avec les maillages M0 et M1.

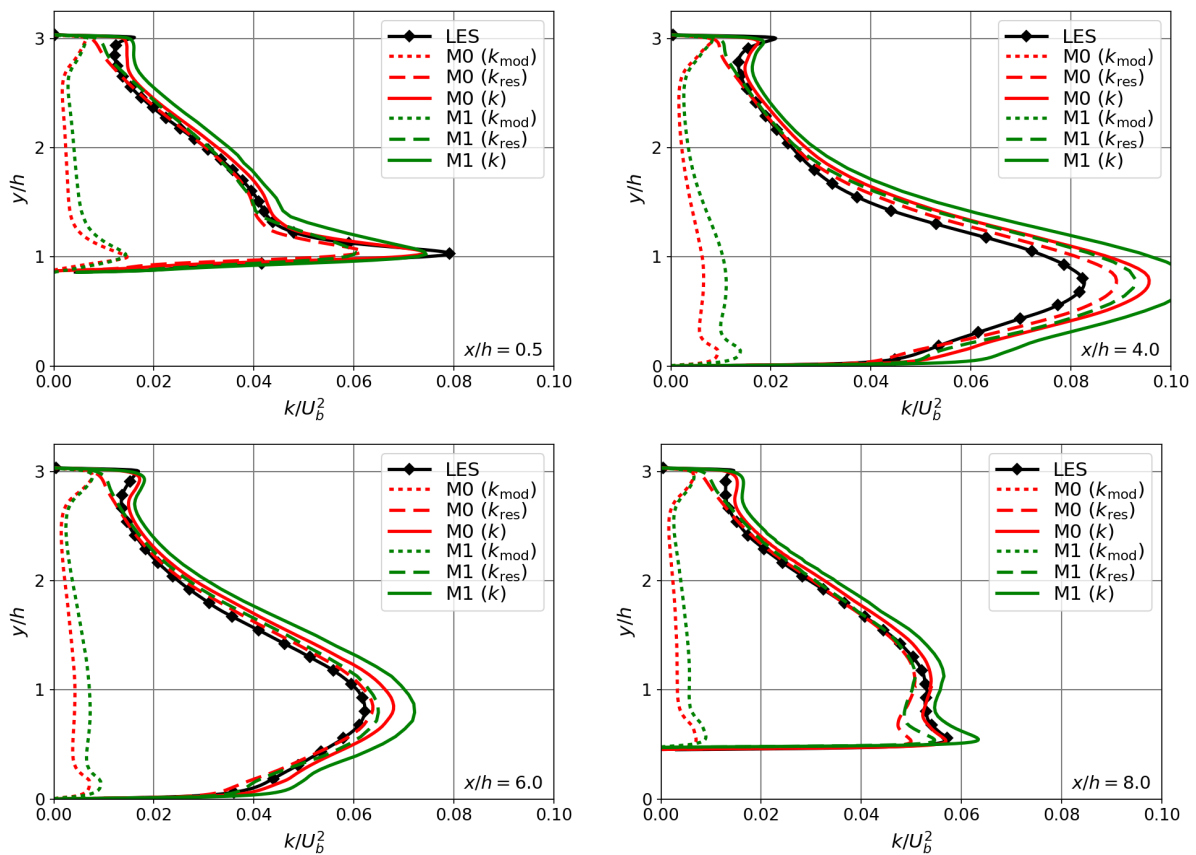


FIGURE 5.19 – Profils de l'énergie cinétique turbulente à  $x/h = 0.5, 4.0, 6.0$  et  $8.0$ . Collines périodiques à  $Re_b = 10600$ . Calculs HTLES avec les maillages M0 et M1.

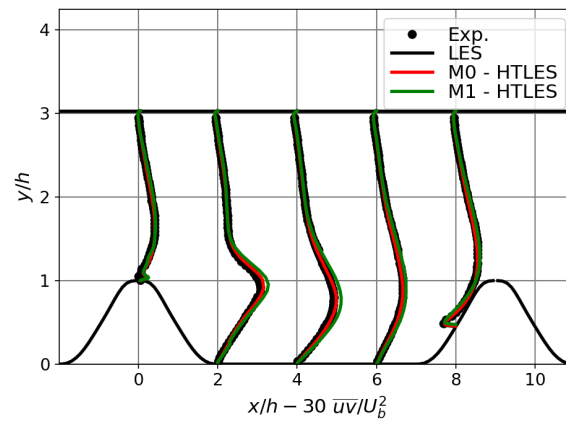


FIGURE 5.20 – Profils de la contrainte de cisaillement. Collines périodiques à  $Re_b = 10600$ . Calculs HTLES avec les maillages M0 et M1.

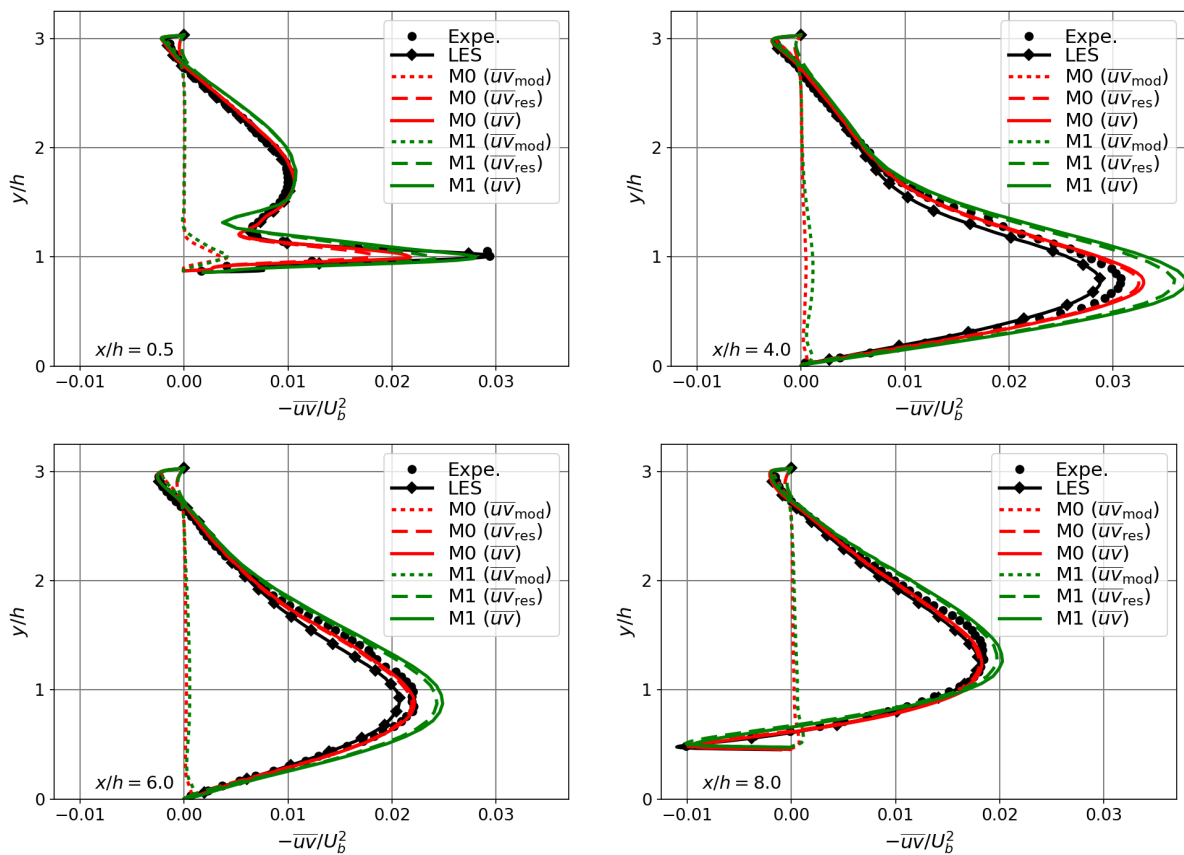


FIGURE 5.21 – Profils de la contrainte de cisaillement à  $x/h = 0.5, 4.0, 6.0$  et  $8.0$ . Collines périodiques à  $Re_b = 10600$ . Calculs HTLES avec les maillages M0 et M1.

### Analyse de la décomposition de la contrainte de cisaillement

Une analyse similaire peut être réalisée pour les profils de la contrainte de cisaillement, représentés sur la Figure 5.20. Les profils de  $\overline{uv}$  sont en très bon accord avec les références, notamment avec le maillage M0. Avec M1, une petite surestimation du pic au sein de la couche de cisaillement détachée est visible, mais les différences restent faibles.

En analysant la décomposition des profils entre leurs composantes résolues et modélisées, on note que ces dernières sont quasiment négligeables dans tout le domaine. Sur la paroi inférieure à  $x/h = 8.0$ , la composante résolue permet de reproduire le comportement des références, alors que le modèle de sous-filtre ne montre pas la même tendance. De la même manière que pour l'énergie cinétique turbulente, la composante résolue est déjà en bon accord avec la référence LES. La composante modélisée étant négligeable, la contrainte de cisaillement totale reproduit correctement les références. Avec le maillage grossier M1, la composante résolue surestime la solution LES au niveau du pic de la contrainte de cisaillement au centre de l'écoulement, notamment pour  $x/h = 4.0$ , mais les tendances principales des profils sont bien reproduites et restent en bon accord quantitatif avec les références.

Le modèle  $k-\omega$  SST HTLES a été validé sur les cas test des collines périodiques à  $Re_b = 10600$ , en introduisant les améliorations pour traiter les écoulements de proche paroi, comprenant la fonction de protection double et l'ICC. Les deux maillages de référence M0 et M1 sont utilisés.

- ✓ Le comportement souhaité pour le modèle hybride est vérifié : la zone de proche paroi traitée en mode RANS ( $r = 1$ ) est étendue grâce à la fonction de protection  $f_s(\xi_K)$ , de manière indépendante du maillage, garantissant la robustesse de la formulation. Le ratio d'énergie estimé se stabilise sur un plateau dans la zone LES, avec une valeur qui diminue lorsque le maillage est raffiné.
- ✓ Des prédictions satisfaisantes sont obtenues pour les quantités d'intérêt, dont les profils de vitesses et le coefficient de frottement sur la paroi inférieure, qui dénotent la bonne reproduction de la bulle de recirculation principale. L'importance du raffinement au sommet de la colline est mise en évidence pour estimer précisément le point de séparation.

Concernant les profils des grandeurs turbulentes (énergie cinétique turbulente, tenseur de Reynolds, contrainte de cisaillement), les tendances principales sont bien reproduites (pic d'énergie dans la couche de cisaillement détachée, *splating effect* en aval du réattachement), mais des écarts quantitatifs liés à la surestimation de la composante résolue sont visibles, notamment avec le maillage grossier M1. Néanmoins, en considérant le déraffinement de M1 par rapport à M0 (et Mr) et en rappelant que les prédictions des modèles LES standard sont largement erronées avec ce maillage, la reproduction des profils est très satisfaisante.

#### 5.4.3 Étude de sensibilité au modèle de fermeture

Dans le cadre de la validation de la méthode HTLES, il est intéressant d'analyser l'influence du modèle de fermeture utilisé. Les résultats des modèles  $k-\omega$  SST HTLES et  $BL-\overline{v^2}/k$  HTLES sont comparés sur le cas test des collines périodiques à  $Re_b = 10600$ . Le maillage M1 est utilisé car il est davantage en phase avec l'objectif des méthodes hybrides, avec un raffinement plus grossier que les critères LES.

Sur les Figures 5.22 et 5.23, en analysant le comportement de la méthode hybride, on note que la fonction de protection est indépendante de la fermeture utilisée (ce qui est important à vérifier pour  $f_s(\xi_K)$ , dominant ici). La zone RANS est ainsi étendue, et le mode LES est activé à la même position. La seule différence réside dans la valeur du ratio d'énergie  $r = r_K$  au niveau du plateau de la zone LES, qui est un peu plus élevée avec la fermeture  $BL-\overline{v^2}/k$  (le coefficient  $\beta_0$  a une valeur calibrée plus faible, et intervient au dénominateur de  $r_K$ ).

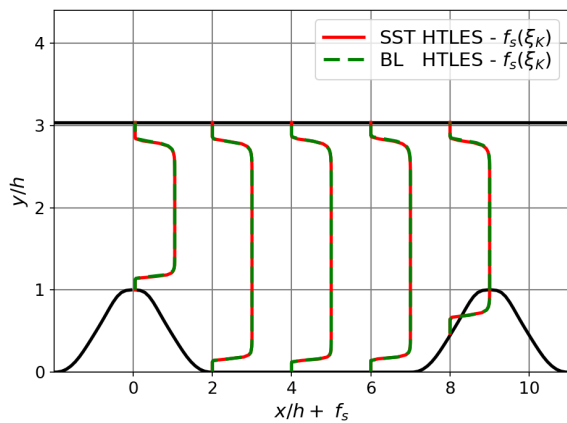


FIGURE 5.22 – Profils de la fonction de protection. Calculs  $k-\omega$  SST et  $BL-\overline{v^2}/k$  HTLES avec le maillage M1.

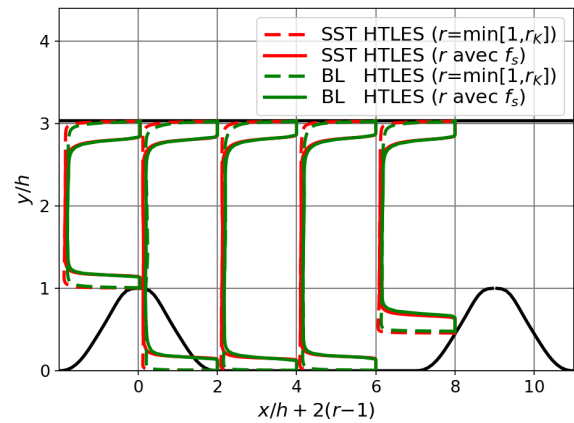


FIGURE 5.23 – Profils du ratio d'énergie, avec et sans la fonction de protection. Calculs  $k-\omega$  SST et  $BL-\overline{v^2}/k$  HTLES avec le maillage M1.

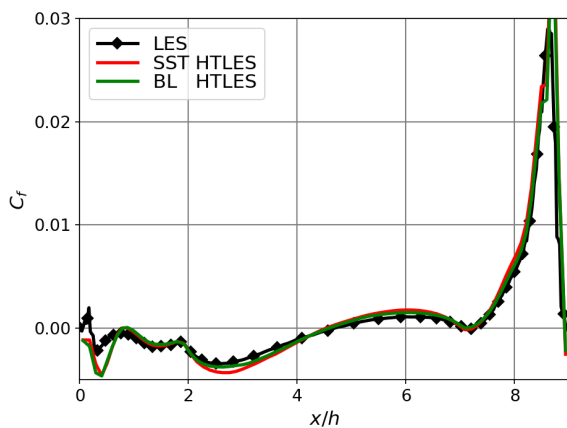


FIGURE 5.24 – Coefficient de frottement sur la paroi inférieure. Calculs  $k-\omega$  SST et  $BL-\overline{v^2}/k$  HTLES avec le maillage M1.

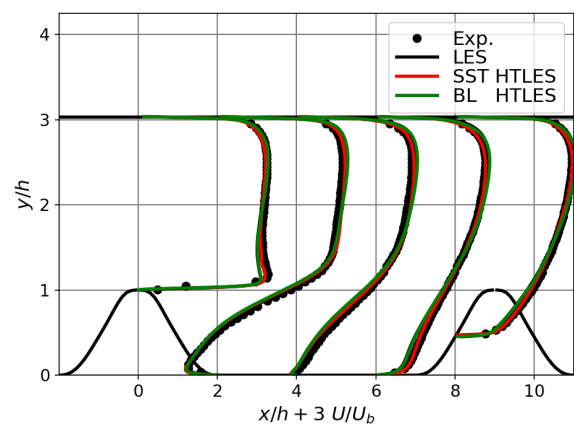


FIGURE 5.25 – Profils de vitesse moyennée dans la direction de l'écoulement. Calculs  $k-\omega$  SST et  $BL-\overline{v^2}/k$  HTLES avec le maillage M1.

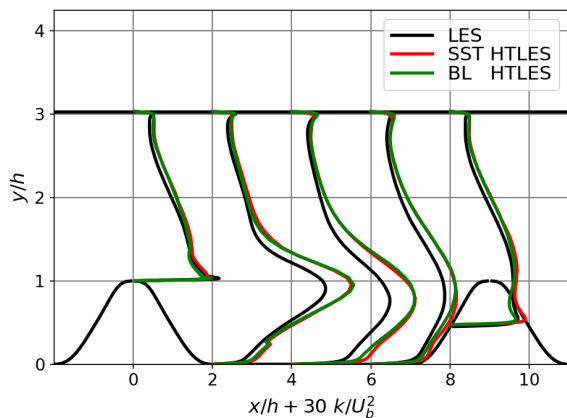


FIGURE 5.26 – Profils de l'énergie cinétique turbulente. Calculs  $k-\omega$  SST et  $BL-\overline{v^2}/k$  HTLES avec le maillage M1.

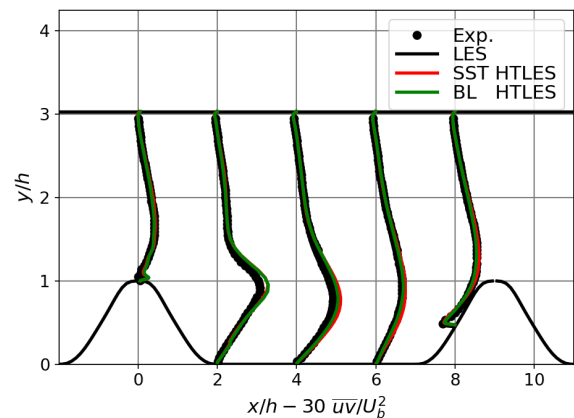


FIGURE 5.27 – Profils de la contrainte de cisaillement. Calculs  $k-\omega$  SST et  $BL-\overline{v^2}/k$  HTLES avec le maillage M1.

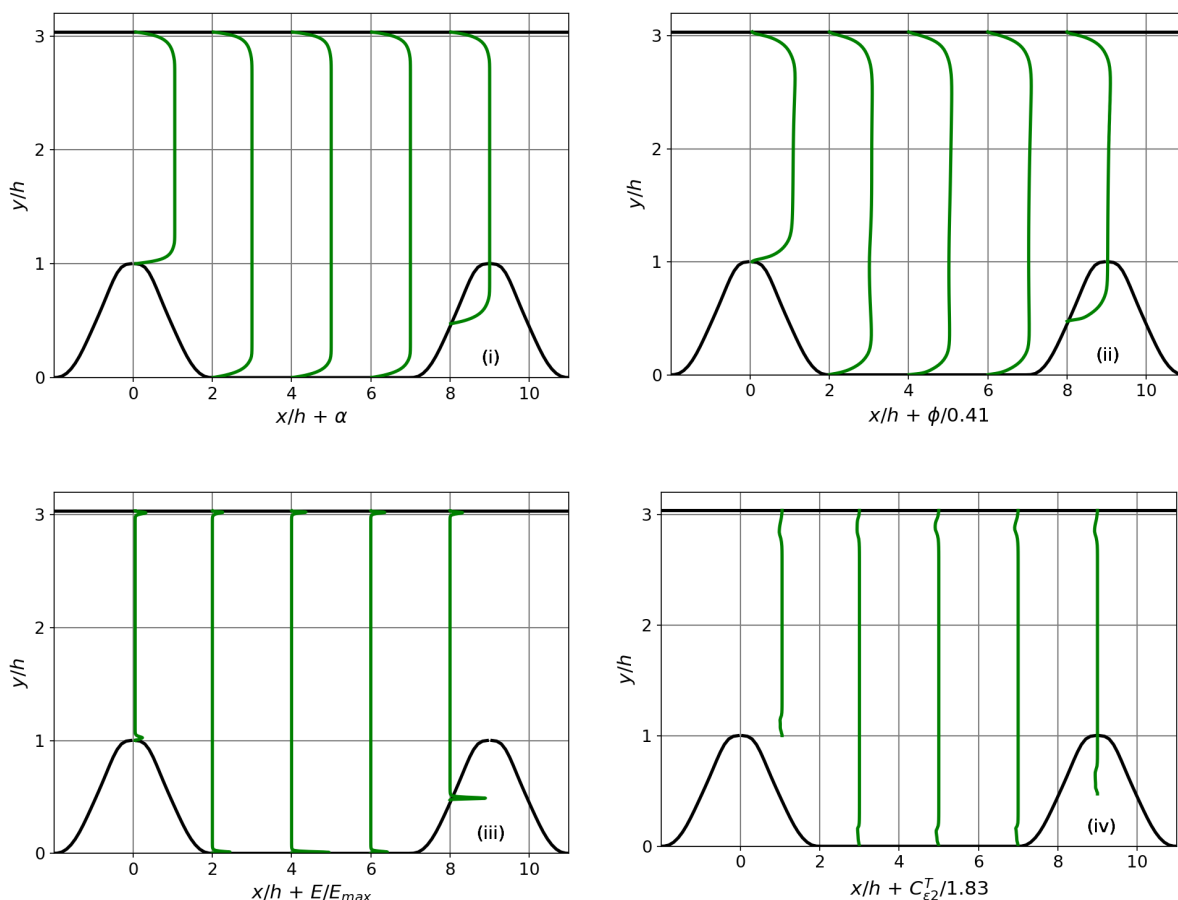


FIGURE 5.28 – Profils des termes  $\alpha$ ,  $\phi$ ,  $E$  et  $C_{\varepsilon_2}^T$  du  $\text{BL-}\overline{v^2}/k$ . Calcul  $\text{BL-}\overline{v^2}/k$  HTLES avec le maillage M1.

Pour les principales grandeurs d'intérêt, la Figure 5.24 montre que les prédictions du coefficient de frottement sur la paroi inférieure sont en meilleur accord avec les références (entre  $x/h = 4$  et  $7$ ) avec la fermeture  $\text{BL-}\overline{v^2}/k$  qu'avec le  $k-\omega$  SST, bénéficiant des efforts de modélisation de la zone de proche paroi comme pour le modèle RANS (Figure 5.8). La surestimation de la recirculation secondaire au sommet de la colline (commentée dans la section 5.4.2) est équivalente avec les deux fermetures. Les profils de vitesse sur la Figure 5.25 sont bien reproduits, même si une sensibilité des résultats à la fermeture est observée, le  $\text{BL-}\overline{v^2}/k$  HTLES entraînant une légère surestimation de la vitesse autour de  $y/h = 2.5$ .

Sur la Figure 5.26, les profils d'énergie cinétique turbulente sont qualitativement bien reproduits, mais la surestimation du pic d'énergie au centre du canal est prononcée avec le maillage déraffiné M1 (cf. section 5.4.2). Concernant la contrainte de cisaillement sur la Figure 5.27, les prédictions sont en bonne adéquation avec les références. L'utilisation du modèle de fermeture  $\text{BL-}\overline{v^2}/k$  n'a pas d'influence notable sur ces profils par rapport au  $k-\omega$  SST. Au niveau de la paroi inférieure, certaines surestimations sont diminuées, mais les différences entre les deux fermetures restent mineures.

Enfin, il est important de s'intéresser au comportement respectif des différents termes supplémentaires du modèle  $\text{BL-}\overline{v^2}/k$  (dont l'hybridation a été discutée dans la section 3.2.7), montrés sur la Figure 5.28.

- (i) Le coefficient  $\alpha$  tend vers zéro à la paroi, et l'unité au centre du canal, la transition ayant lieu dans la zone RANS où l'effet de blocage doit être modélisé.
- (ii) La variable  $\phi$  tend vers zéro à la paroi pour diminuer la viscosité turbulente, et la valeur limite  $\phi = 0.41$  est atteinte dans la zone centrale traitée en mode LES, permettant de vérifier  $C_{\mu}^{\phi}\phi = C_{\mu}$ .

- (iii) Le terme de dissipation  $E$  est seulement actif dans la zone de proche paroi traitée en mode RANS, ce qui justifie que le terme n'ait pas été hybridé.
- (iv) Finalement, le coefficient modifié  $C_{\varepsilon 2}^T$  reste constant, égal à sa valeur limite  $C_{\varepsilon 2} = 1.83$  dans l'ensemble du canal, excepté une variation minimale au niveau de la transition RANS-LES.

Dans le cadre de l'écoulement sur les collines périodiques, l'influence du modèle de fermeture n'est pas prononcée comme pour le cas test du canal plan où le modèle  $BL-\overline{v^2}/k$  permet d'améliorer considérablement les prédictions de l'énergie cinétique turbulente dans la région de proche paroi. Ainsi, les deux modèles  $k-\omega$  SST et  $BL-\overline{v^2}/k$  HTLES fournissent des prédictions similaires, et satisfaisantes en considérant le déraffinement du maillage. Cette validation a également permis de vérifier la pertinence des hypothèses faites pour l'hybridation du  $BL-\overline{v^2}/k$ , et de vérifier la robustesse de la formulation globale et des améliorations pour traiter les écoulements de proche paroi.

#### 5.4.4 Étude de sensibilité au nombre de Reynolds

Le processus de validation est aussi réalisé sur le cas test des collines périodiques à un nombre de Reynolds plus élevé  $Re_b = 37000$  (un peu plus en phase avec les valeurs rencontrées dans les applications industrielles). Pour cet écoulement à un nombre de Reynolds relativement élevé, pour lequel un calcul LES serait coûteux, les données PIV de Rapp et Manhart [95] sont les références. Les calculs HTLES sont réalisés avec les fermetures  $k-\omega$  SST et  $BL-\overline{v^2}/k$  sur le maillage N1 (Tableau 5.1), dont les caractéristiques géométriques correspondent à celles de M0, en conservant le même nombre de mailles dans les directions longitudinales et transverses ( $N_x = 160$ ,  $N_z = 80$ ), mais il est souligné que la résolution en unités de paroi est moins fine que celle de M0 et de M1.

Le comportement attendu pour la méthode hybride est bien retrouvé sur les Figures 5.29 et 5.30. La protection imposée par la fonction  $f_s(\xi_D)$ , dépendante du raffinement, est légèrement plus étendue que celle de fonction  $f_s(\xi_K)$ , pour cet écoulement. La mode RANS est imposé en paroi, avec la même position de la transition RANS-LES, et la valeur plateau de  $r = r_K$  en zone LES est un peu plus élevée avec la fermeture  $BL-\overline{v^2}/k$ , comme pour le cas test à  $Re_b = 10600$ .

Pour évaluer les prédictions, on note que la distribution du coefficient de frottement sur la paroi inférieure est identique pour les deux fermetures (absence de données de référence ici). Qualitativement, la bulle de recirculation principale est raccourcie par rapport au cas test à  $Re_b = 10600$ , ce qui correspond aux observations PIV de Rapp et Manhart [94, 95]. Une recirculation secondaire est détectée en haut de la colline, qui peut être capturée car le maillage est suffisamment raffiné ( $\Delta_x/h \simeq 0.056$ ). La position de la séparation est conforme aux observations [95].

Les profils de vitesse dans la direction de l'écoulement sont correctement reproduits sur la Figure 5.32. Pour les profils de la composante longitudinale du tenseur de Reynolds, sur la Figure 5.33, les mêmes commentaires sont faits que pour les profils de l'énergie cinétique turbulente à  $Re_b = 10600$  : la surestimation des profils au centre de l'écoulement est visible, mais le comportement est bien reproduit qualitativement, et quantitativement pour  $y/h > 1.5$ . Les profils de la contrainte de cisaillement montrés sur la Figure 5.34 sont en bon accord avec les mesures expérimentales.

Le modèle HTLES est validé sur le cas test des collines périodiques à un nombre de Reynolds relativement élevé, permettant de vérifier la robustesse de la formulation et de ses améliorations. L'utilisation de la fonction de protection  $f_s(\xi_D)$  (dominante par rapport à  $f_s(\xi_K)$ ) permet notamment de garantir des prédictions correctes des grandeurs d'intérêts. Finalement, pour  $Re_b = 10600$  ou  $37000$ , les caractéristiques principales de l'écoulement sont prédites de manière satisfaisante, en utilisant les maillages M0 et N1 fondés sur les mêmes critères géométriques.

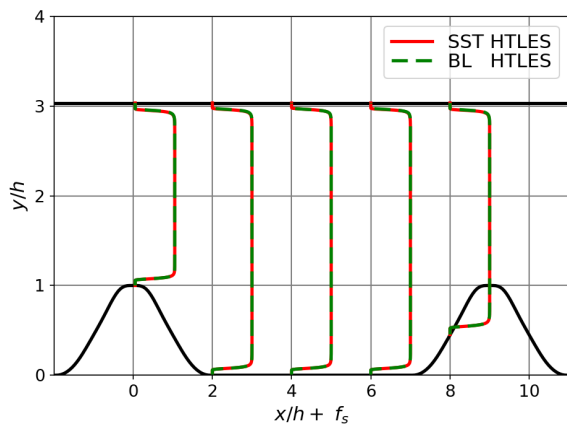


FIGURE 5.29 – Profils de la fonction de protection. Calculs  $k-\omega$  SST et  $BL-\bar{v}^2/k$  HTLES avec le maillage N1.

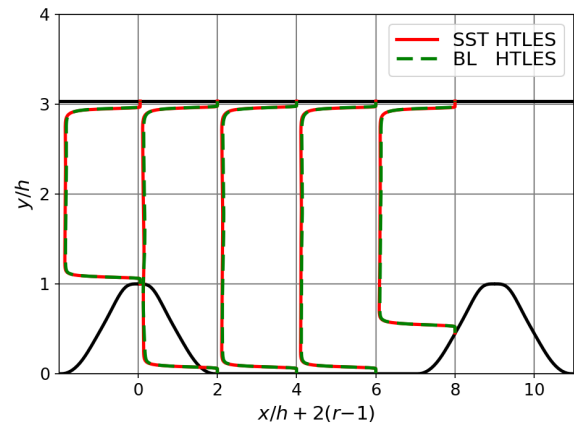


FIGURE 5.30 – Profils du ratio d'énergie, avec la fonction de protection. Calculs  $k-\omega$  SST et  $BL-\bar{v}^2/k$  HTLES avec le maillage N1.

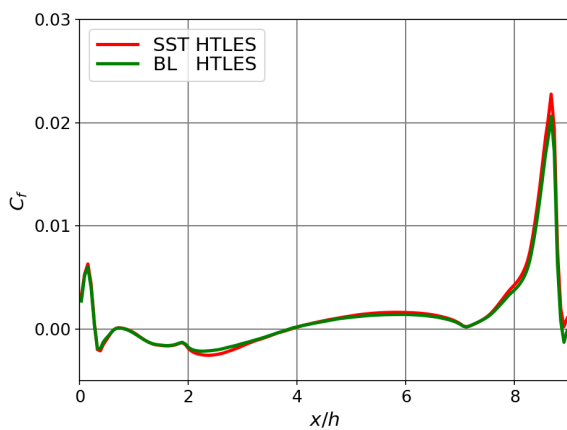


FIGURE 5.31 – Coefficient de frottement sur la paroi inférieure. Calculs  $k-\omega$  SST et  $BL-\bar{v}^2/k$  HTLES avec le maillage N1.

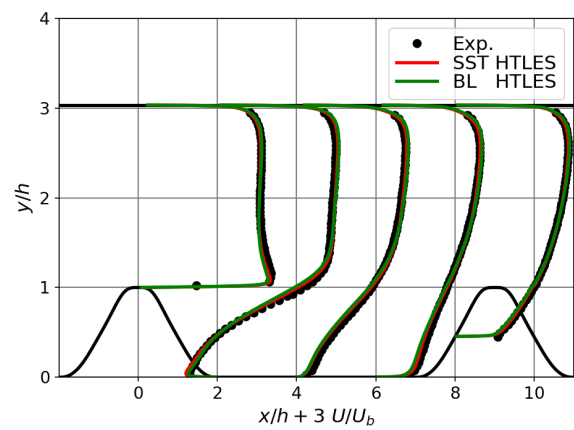


FIGURE 5.32 – Profils de vitesse moyennée dans la direction de l'écoulement. Calculs  $k-\omega$  SST et  $BL-\bar{v}^2/k$  HTLES avec le maillage N1.

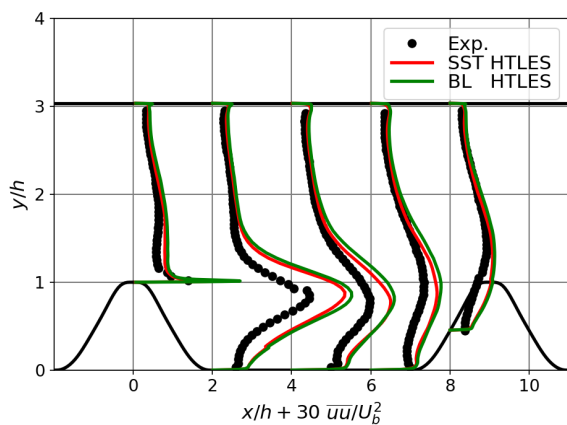


FIGURE 5.33 – Profils de la composante  $\overline{u'u'}$  du tenseur de Reynolds. Calculs  $k-\omega$  SST et  $BL-\bar{v}^2/k$  HTLES avec le maillage N1.

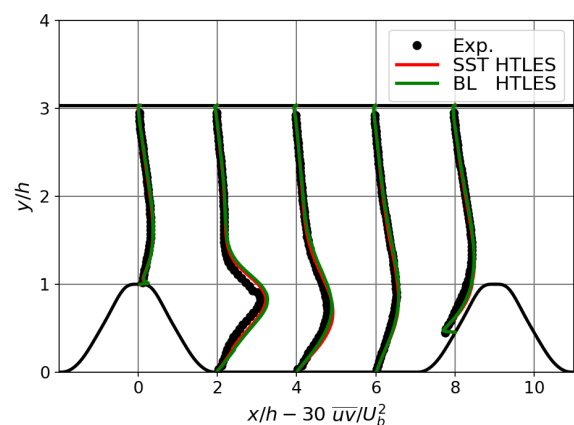


FIGURE 5.34 – Profils de la contrainte de cisaillement. Calculs  $k-\omega$  SST et  $BL-\bar{v}^2/k$  HTLES avec le maillage N1.



## 5.5 Estimation des efforts instationnaires en paroi

L'objectif de cette section est d'évaluer la capacité de la HTLES à fournir des informations instationnaires sur les fluctuations turbulentes et les variations de pression dans la zone de proche paroi, afin de prédire les chargements turbulents instationnaires malgré l'activation du mode RANS. Le cas test de l'écoulement sur les collines périodiques à  $Re_b = 10600$  est utilisé. Les spectres d'énergie calculés par Fröhlich *et al.* [40] servent de référence pour évaluer la méthodologie, et construire une base de validation.

### 5.5.1 Estimations statistiques de la pression

Dans cette section, les calculs LES réalisés sur les maillages Mr et M0 servent de référence, étant donné que les résultats statistiques sont très satisfaisants, comme montré dans la section 5.3.1. De plus, le maillage Mr correspond approximativement au maillage utilisé par Fröhlich *et al.* [40] pour calculer les spectres d'énergie en LES. Les statistiques prédites par le modèle HTLES sont validées avec les maillages M0 et M1, en ayant noté dans la section 5.4.3 que la fermeture,  $k-\omega$  SST et  $BL-v^2/k$ , a peu d'influence sur les résultats statistiques.

Dans un premier temps, la Figure 5.35 montre que le champ de pression statistiquement moyenné est bien reproduit par la HTLES, pour les maillages M0 et M1, par rapport aux résultats LES avec le maillage Mr. Au contraire, le modèle RANS  $k-\omega$  SST échoue à reproduire le champ de pression moyen. En se focalisant sur la paroi inférieure, la Figure 5.36 montre que la distribution de pression est bien reproduite en HTLES, malgré quelques surestimations des profils lorsque le maillage est déraffiné. Néanmoins, les positions des changements de signes pour les gradients de pression sont correctement prédites, ainsi que la dépression prononcée, juste avant le sommet de la colline.

### Positionnement des sondes pour enregistrer les signaux temporels

Les prédictions statistiques étant validées, l'objectif de l'étude est d'analyser les spectres d'énergie et de pression dans l'écoulement et à la paroi, pour évaluer l'information instationnaire accessible en HTLES. Pour ce faire, des spectres temporels sont réalisés, en enregistrant les signaux des variables instantanées aux mêmes positions que celles de Fröhlich *et al.* [40] lors de leur calcul de référence LES. Les positions des sondes sont explicitées dans le Tableau 5.3, et sont indiquées sur la Figure 5.37. Fröhlich *et al.* [40] soulignent que ces sondes sont représentatives des différentes formes des spectres d'énergie rencontrées dans le canal.

Grâce aux lignes de champ et à la projection du ratio d'énergie estimé, on observe que la sonde A1 est située au centre de la zone de recirculation, où la vitesse est faible ( $U/U_b \simeq 0.01$ , où  $U = (U^2 + V^2 + W^2)^{1/2}$ ), tandis que A2 est située dans la couche de cisaillement détachée, où des vitesses importantes sont mesurées ( $U/U_b \simeq 0.73$ ). Ces deux sondes sont dans la région traitée en mode LES lors des calculs HTLES (l'extension de la zone RANS est la même quel que soit le maillage grâce à la fonction de protection  $f_s(\xi_K)$ ).

Les sondes P1, P2, P3 et P4 sont situées dans la région de proche paroi, avec P1 au sommet de la colline, où l'accélération du fluide implique des vitesses élevées ( $U/U_b \simeq 1.0$ ), tandis que P2 est située au niveau du réattachement de la bulle de recirculation, P3 est à l'aval du réattachement et P4 est sur la face amont de la colline, où les vitesses sont plus faibles ( $U/U_b \in [0.1, 0.4]$ ). Ces quatre sondes sont dans la zone RANS lors des calculs HTLES utilisant la fonction de protection, et vont donc permettre d'évaluer le contenu instationnaire qui pénètre dans cette zone. Enfin, quatre sondes R1, R2, R3 et R4 sont définies, conservant les mêmes abscisses que les sondes  $P_i$ , mais situées dans les premières cellules contiguës à la paroi.

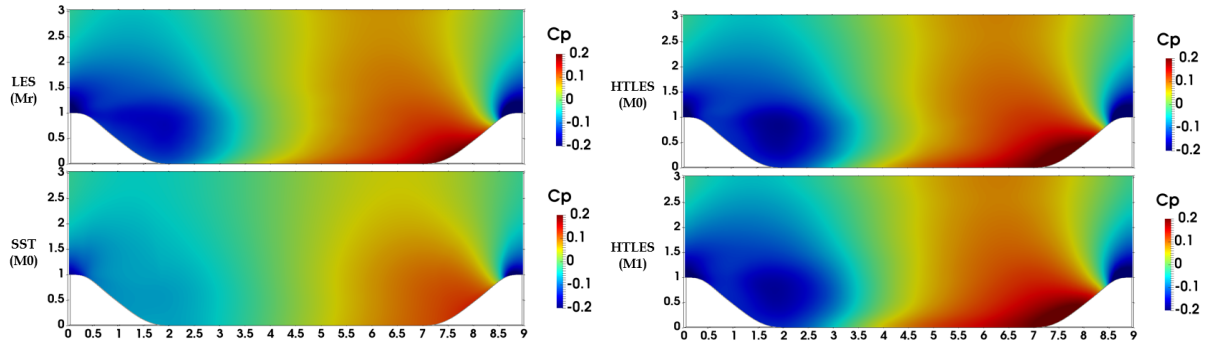


FIGURE 5.35 – Champs de pression statistiquement moyennée pour l’écoulement sur collines périodiques à  $Re_b = 10600$ . Calcul LES sur le maillage Mr, calcul RANS  $k-\omega$  SST sur M0 et calculs  $k-\omega$  SST HTLES sur M0 et M1.

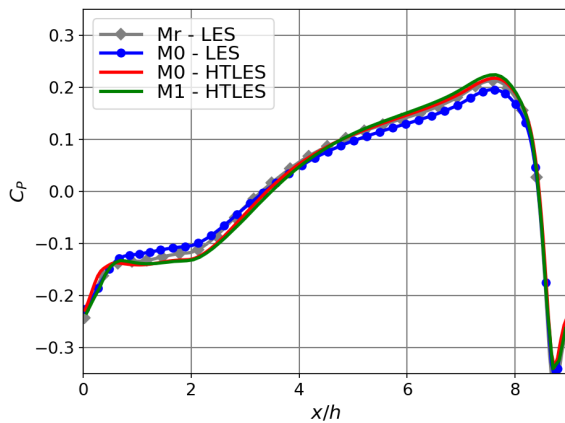


FIGURE 5.36 – Distribution du coefficient de pression sur la paroi inférieure. Calculs LES avec les maillages Mr et M0, et calculs HTLES avec les maillages M0 et M1.

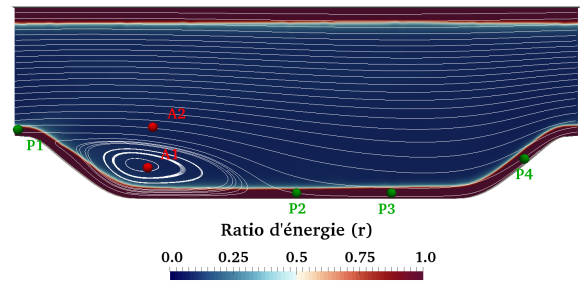


FIGURE 5.37 – Position des sondes utilisées pour capturer les spectres temporels, lignes de champs moyennées, et ratio d’énergie estimé en HTLES avec le maillage M1.

Sondes	A1	A2	P1	P2	P3	P4	R1	R2	R3	R4
$x/h$	2.15	2.23	0.0	4.5	6.0	8.1	0.0	4.5	6.0	8.1
$y/h$	0.49	1.13	1.09	0.09	0.09	0.59	1.0	0.0	0.0	0.53

TABLEAU 5.3 – Positions des sondes utilisées pour enregistrer les signaux servant à réaliser les spectres d’énergie et de pression. Les positions des sondes A1, A2, P1, P2, P3 et P4 correspondent à celles définies par Fröhlich *et al.* [40].

### 5.5.2 Calcul LES de référence

La première étape de l'étude consiste à réaliser un calcul LES, validé sur les données de Fröhlich *et al.* [40], afin d'avoir accès à des données de référence validées, et notamment les spectres de pression en paroi. Un calcul LES avec le modèle de Smagorinsky est réalisé en utilisant le maillage fin Mr, et les signaux temporels pour la vitesse et la pression sont enregistrés à la position des sondes définies dans le Tableau 5.3

De la même manière que dans Fröhlich *et al.* [40], la méthode des périodogrammes définie par Welch [123] est utilisée pour estimer la densité spectrale de puissance des spectres 1D pour la vitesse dans chaque direction. La méthode est explicitée dans l'annexe ??, et les principaux paramètres sont décrits ci-dessous.

- (i) Le signal est enregistré sur un temps  $T_N = 338h/U_b$  ( $N = 67584$  pas de temps), le pas de temps  $dt = 0.005h/U_b$  étant fixé dans l'étude quel que soit le maillage utilisé.
- (ii) Le signal est décomposé en  $K = 32$  segments de longueur  $L = 2^{12}$  pas de temps, ce qui correspond à  $T_L = 20.48h/U_b$ , c'est-à-dire à peu près deux temps de passage comme dans la mise en donnée de Fröhlich *et al.* [40].
- (iii) Les segments successifs se recouvrent de la moitié de leurs longueurs,  $D = 2^{11}$  pas de temps (permettant une réduction optimale de la variance), de telle sorte que :  $N = L + (K - 1)D$ .
- (iv) La densité spectrale de puissance (PSD : *Power Spectral Density*) des variables turbulentes est calculée sur chacun des  $K$  segments successifs de longueur  $L$ , en utilisant le fenêtrage de Hann [90].
- (v) La PSD globale est estimée en moyennant les PSD calculées précédemment pour chaque segment. Cela permet de diminuer la variance et de « lisser » la forme des spectres.
- (vi) L'opération est répétée en utilisant les signaux des  $K_S = 11$  sondes, espacées uniformément dans la direction transverse pour chaque position  $(x,y)$ , comme fait par Fröhlich *et al.* [40], ce qui permet de réaliser des moyennes supplémentaires.

La seule différence de cette mise en donnée par rapport à celle de Fröhlich *et al.* [40] réside dans le pas de temps qui est plus élevé dans notre étude (en lien avec les attentes des méthodes hybrides qui, en réduisant le raffinement spatial, cherchent également à réduire le raffinement temporel), mais le temps total d'enregistrement des différents signaux sur lesquels la PSD est effectuée est quasiment le même. L'augmentation de la puissance de calcul lors de ces dernières années a permis d'enregistrer de plus nombreux segments successifs que lors de l'étude originale [40] ( $K$  augmente), ce qui permet de diminuer encore plus la variance de la PSD finale.

Sur les Figures 5.38 et 5.39, les spectres temporels  $E_{uu}$ ,  $E_{vv}$  et  $E_{ww}$ , PSD pour la vitesse dans chaque direction de l'écoulement sont représentés, en comparant les références de Fröhlich *et al.* [40] au calcul LES sur le maillage Mr. Les PSD sont en bonne adéquation entre elles, la méthode des périodogrammes permettant de considérablement diminuer la variance et ainsi de comparer plus précisément les spectres. L'anisotropie de la turbulence est globalement reproduite pour les basses fréquences. Pour les hautes fréquences, la coupure du filtre intervient pour des fréquences un peu plus faibles avec le maillage Mr, notamment pour les sondes A2 et P1, ce qui pourrait être expliqué par un déraffinement local du maillage dans ces zones.

En se fondant sur l'analyse de Fröhlich *et al.* [40], il est souligné que pour A1 et A2, les basses fréquences correspondent à l'inverse du temps de passage ( $f \simeq 0.1U_b/h$ ). Pour A1, au centre de la zone de recirculation où les vitesses sont faibles, une zone inertielle est identifiée, avec une loi de décroissance en  $-5/3$  sur plus d'une décade. La décroissance est plus importante aux hautes fréquences, ce qui est lié au filtrage intrinsèque de l'approche LES. Les spectres estimés au point A2, situé dans la couche de cisaillement décollée, montrent les mêmes tendances. Une forte anisotropie de  $E_{uu}$  est observée aux basses fréquences, liée à la direction privilégiée de l'écoulement. Aux hautes fréquences, un changement de pente prononcé est observé. Par rapport au spectre en A1, cet effet peut être expliqué par la vitesse élevée de l'écoulement en A2 [40].

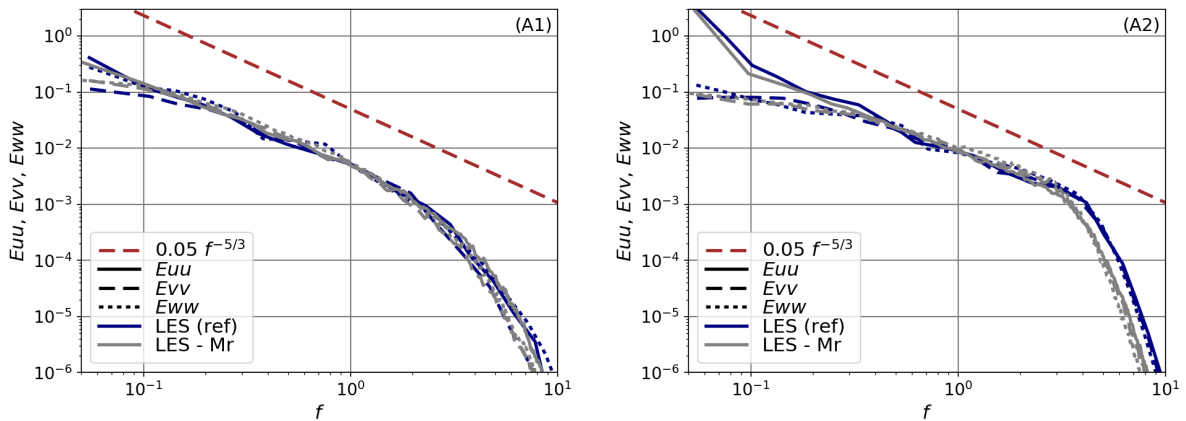


FIGURE 5.38 – PSD de la vitesse dans chaque direction, pour les sondes A1 et A2. Calcul LES sur le maillage Mr comparé à la LES de référence réalisée par Fröhlich *et al.* [40].

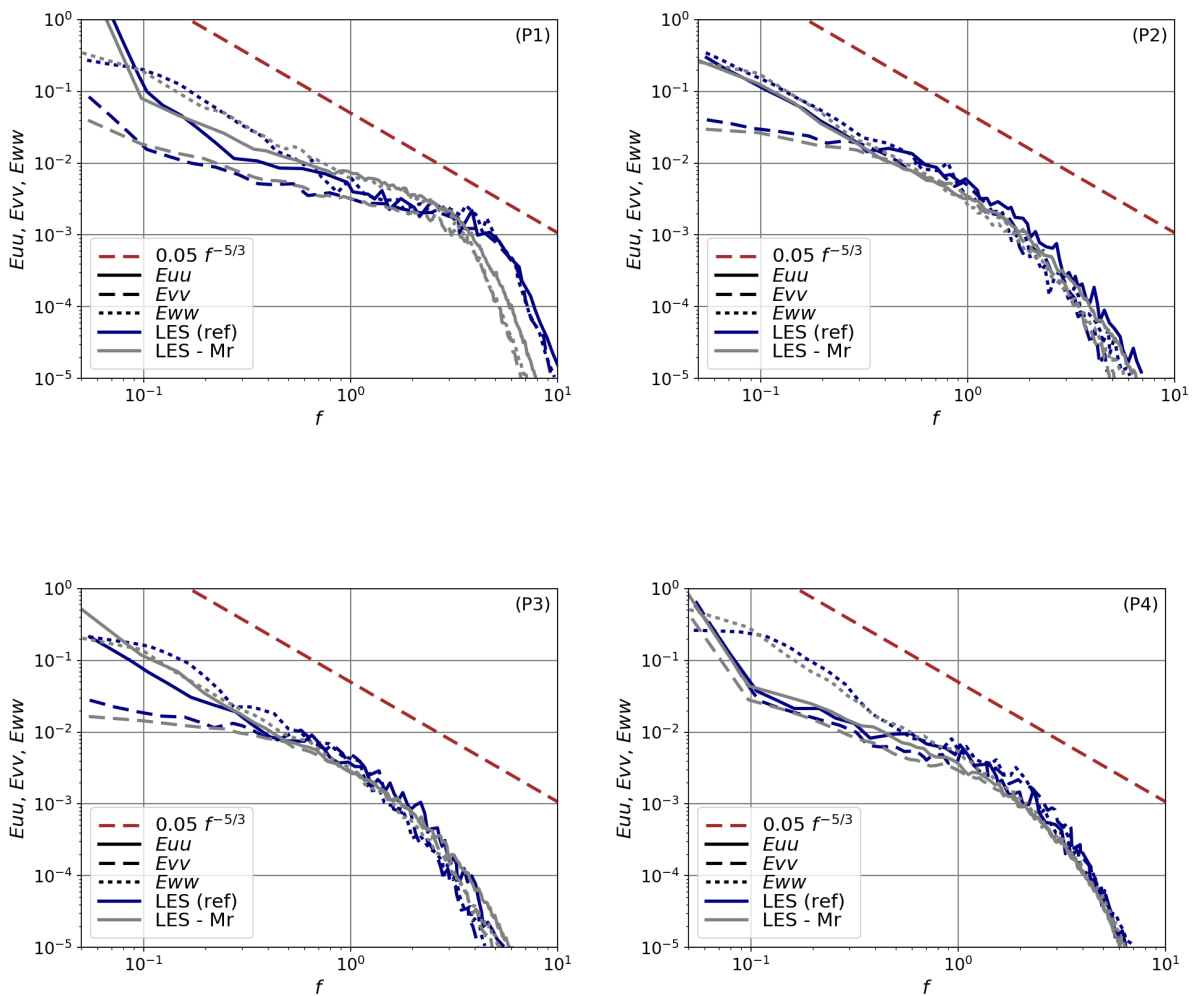


FIGURE 5.39 – PSD de la vitesse dans chaque direction, pour les sondes P1, P2, P3 et P4. Calcul LES sur le maillage Mr comparé à la LES de référence réalisée par Fröhlich *et al.* [40].

En considérant les PSD calculées dans la région de proche paroi, Fröhlich *et al.* [40] notent également un changement de pente marqué aux hautes fréquences pour P1, en raison de la vitesse élevée de l'écoulement dans la zone d'accélération au-dessus de la colline. Pour les autres sondes (P2, P3, P4), une décroissance isotrope est observée à partir de  $f > 1.0U_b/h$ .

L'intérêt principal de l'analyse réside cependant dans les basses fréquences ( $0.06 < f < 0.6$ ), pour lesquelles l'anisotropie est notable. Pour la sonde P2 ( $x/h = 4.5$ ), le niveau d'énergie est équivalent pour les composantes  $u$  et  $w$ , et supérieur au niveau d'énergie pour la composante  $v$ . L'anisotropie se développe dans la zone de réattachement, jusqu'au sommet de la colline. On note que l'énergie  $E_{ww}$  augmente progressivement à partir de P3 ( $x/h = 6.0$ ). L'augmentation est particulièrement visible pour P4 ( $x/h = 8.1$ ). Cela est lié au *splating effect* [40], expliqué dans la section 5.1. Au sommet de la colline (sonde P1,  $x/h = 0.0$ ), l'accélération de l'écoulement tend à augmenter  $E_{uu}$ , tandis que la composante  $E_{ww}$  diminue. La composante dans la direction normale à la paroi ( $E_{vv}$  pour P1, P2 et P3) est toujours inférieure aux composantes dans les directions longitudinale et transverse.

### 5.5.3 Influence des paramètres de la HTLES

L'objectif de cette section est d'identifier les différents paramètres de la HTLES qui peuvent avoir une influence sur la forme du filtrage des spectres d'énergie résolue, pour une résolution de maillage fixée. Dans la région de proche paroi notamment, qui peut être traitée en mode RANS, il est primordial de prendre en compte les paramètres suivants :

- (i) le modèle de fermeture utilisé pour l'approche HTLES,
- (ii) la position de la transition RANS-LES, telle que la sonde soit ou non dans la zone RANS,
- (iii) le schéma spatial pour le terme de convection, entraînant de la dissipation numérique.

Dans la suite, l'influence des paramètres est différenciée, sans se focaliser sur la validation du modèle en lui-même. Le maillage M0 est utilisé, pour lequel les prédictions statistiques de la LES et de la HTLES (avec et sans la fonction de protection) sont satisfaisantes. Cinq calculs sont réalisés et comparés.

- Le calcul LES avec le modèle de Smagorinsky sert de référence lors de l'analyse.
- Un calcul  $k-\omega$  SST HTLES est réalisé, sans la fonction de protection, ce qui implique que le mode LES est activé quasiment partout (les sondes  $A_i$  et  $P_i$  sont dans la zone LES), la zone RANS étant confiné au niveau de la paroi avec  $d_w < 0.004h$ .
- Un calcul  $k-\omega$  SST HTLES avec la fonction de protection est réalisé. Dans ce cas, les sondes  $P_i$  sont situées dans la zone RANS (Figure 5.37). Avec le maillage fin M0, l'utilisation du schéma centré n'entraîne pas d'oscillations numériques dans la zone RANS. Le calcul est donc réalisé en utilisant le schéma centré dans les branches RANS et LES du modèle. Il est ainsi possible d'analyser le filtrage des fluctuations turbulentes qui pénètrent dans la zone RANS, en conservant le même schéma numérique centré.
- Un calcul est réalisé avec la formulation  $k-\omega$  SST HTLES définitive, c'est-à-dire avec la fonction de protection et le schéma de convection hybride. Dans ce cas, le schéma amont au second ordre est appliqué dans la zone RANS, induisant une dissipation numérique supplémentaire.
- Enfin, un calcul est réalisé avec le modèle  $BL-\overline{v^2}/k$  HTLES, en incluant la fonction de protection et le schéma hybride.

*Remarque :* même s'il n'est pas souhaitable d'utiliser un schéma amont lors de cette analyse, en raison de la dissipation numérique supplémentaire induite, l'utilisation du schéma hybride est nécessaire pour les calculs réalisés avec le maillage grossier M1, afin d'éviter l'apparition d'oscillations numériques.

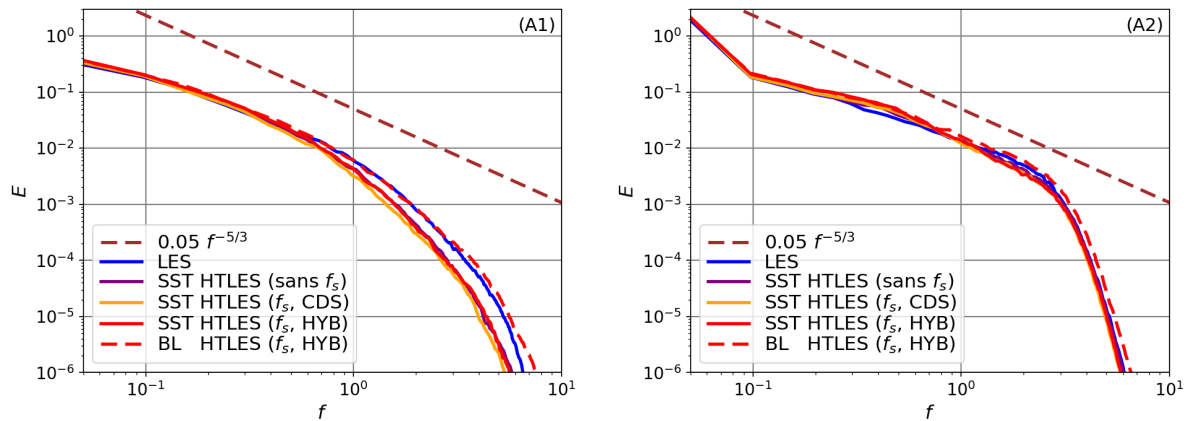


FIGURE 5.40 – Spectre de l'énergie résolue, pour les sondes A1 et A2. Calcul LES et calculs  $k-\omega$  SST et  $BL-v^2/k$  HTLES, avec ou sans la fonction de protection  $f_s$ , et avec le schéma centré (CDS) ou le schéma hybride (HYB).

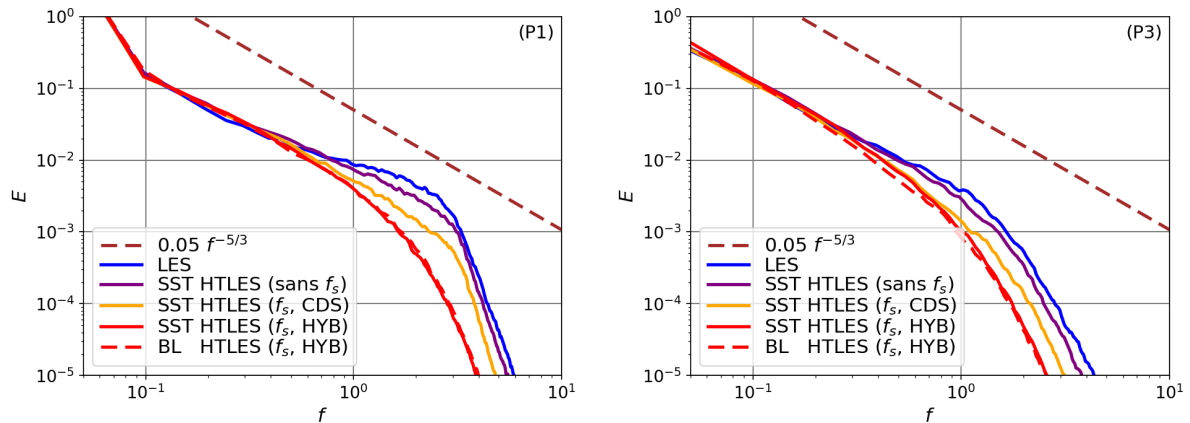


FIGURE 5.41 – Spectre de l'énergie résolue, pour les sondes P1 et P3. Calcul LES et calculs  $k-\omega$  SST et  $BL-v^2/k$  HTLES, avec ou sans la fonction de protection  $f_s$ , et avec le schéma centré (CDS) ou le schéma hybride (HYB).

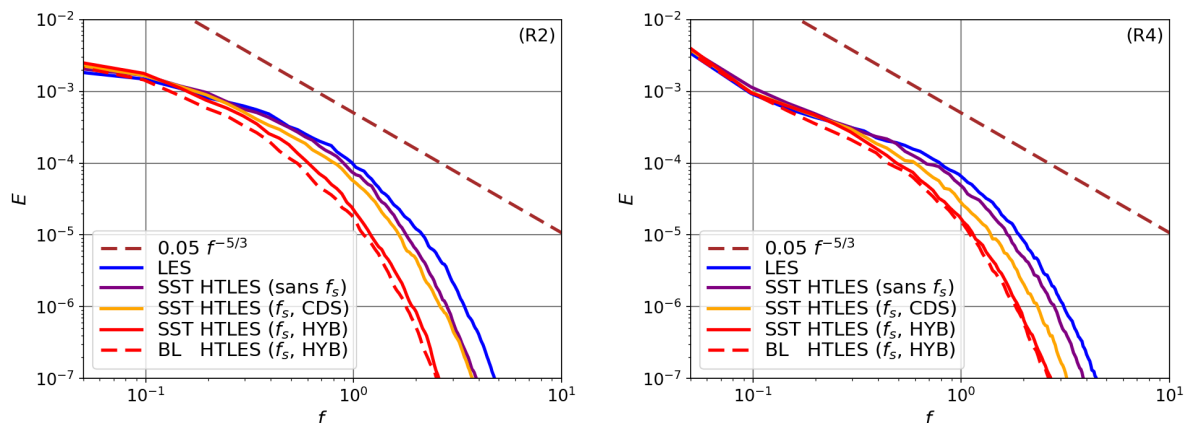


FIGURE 5.42 – Spectre de l'énergie résolue, pour les sondes R2 et R4. Calcul LES et calculs  $k-\omega$  SST et  $BL-v^2/k$  HTLES, avec ou sans la fonction de protection  $f_s$ , et avec le schéma centré (CDS) ou le schéma hybride (HYB).



Sur la Figure 5.40, les spectres d'énergie résolue estimés au niveau des sondes A1 et A2 sont présentés. Ces sondes étant dans la zone LES, il n'y a aucune différence entre les résultats des trois calculs  $k-\omega$  SST HTLES. Pour la sonde A1, les basses fréquences sont résolues de façon identique en LES et HTLES, mais pour les hautes fréquences, alors que les résultats  $BL-\overline{v^2}/k$  HTLES correspondent aux références LES, le  $k-\omega$  SST HTLES induit un filtrage plus important. Pour la sonde A2, les basses fréquences sont résolues de manière équivalente en LES et HTLES. La vitesse étant élevée à cette position, et le même schéma de convection centré étant utilisé, le filtrage des hautes fréquences est similaire en LES et en HTLES, caractérisé par un changement de pente prononcé.

La Figure 5.41 montre les spectres d'énergie résolue estimés dans la région de proche paroi.

- Pour la HTLES sans la fonction de protection, ce qui signifie que les sondes sont toujours dans la zone LES, les hautes fréquences sont un peu filtrées par rapport aux références LES.
- En utilisant la fonction de protection, ce qui implique que les sondes sont dans une zone traitée en mode RANS, un filtrage plus important des hautes fréquences est observé. Ce résultat est escompté, étant donné que les fluctuations turbulentes résolues ne sont pas générées dans la zone RANS, et proviennent donc uniquement de la zone LES.
- L'utilisation du schéma amont au second-ordre dans la zone RANS induit une dissipation numérique et un filtrage encore plus important des hautes fréquences. L'effet du schéma numérique est particulièrement visible pour la sonde P1 : pour les calculs avec le schéma centré, un changement de pente marqué est visible autour de la même position, alors qu'avec le schéma amont, la décroissance est plus progressive.
- Une sensibilité au modèle de fermeture  $k-\omega$  SST ou  $BL-\overline{v^2}/k$  est observée, mais celle-ci reste faible par rapport aux autres effets.

Sur la Figure 5.42, en se plaçant à proximité immédiate de la paroi avec les sondes R2 et R4, les mêmes comportements globaux que pour P1 et P3 sont identifiés. Le fait que le mode RANS soit seulement activé à cette position (calcul sans la fonction de protection), ou que la zone RANS soit largement étendue (calcul avec la fonction de protection), a une influence uniquement sur les hautes fréquences. De plus, pour la sonde R2 située au niveau du point de réattachement, une différence minimale est observée entre les spectres d'énergie hautes fréquences pour les calculs HTLES sans et avec la fonction de protection, en conservant le schéma centré. Dans ce cas, les fluctuations turbulentes générées dans la couche de cisaillement décollée viennent impacter la paroi, et le fait qu'elles « traversent » une zone RANS large ou étroite ne modifie pas sensiblement les résultats. Au contraire, l'utilisation du schéma amont dans la zone RANS induit un filtrage plus important des hautes fréquences.

Les différents paramètres qui influent sur la résolution du spectre d'énergie (pour un maillage fixé) sont identifiés.

- (i) L'approche HTLES induit un filtrage légèrement différent de celui du modèle Smagorinsky, et une sensibilité au modèle de fermeture est détectée.
- (ii) La position de la transition RANS-LES, liée à la fonction de protection, entraîne un filtrage plus important des hautes fréquences pour les sondes situées dans la zone RANS, et cet effet est augmenté lorsque la transition au mode LES a lieu loin des parois.
- (iii) Le schéma de convection hybride impose un filtrage supplémentaire, en utilisant notamment un schéma amont dans la zone RANS.

Néanmoins, on note qualitativement que les différences par rapport aux références LES sur le même maillage résident essentiellement dans les hautes fréquences. Même pour les sondes situées dans la zone RANS, le spectre d'énergie pour les basses fréquences reste relativement bien préservé.



### 5.5.4 Estimation des spectres d'énergie en HTLES

Dans la section précédente, on a identifié différents paramètres qui influent sur le filtrage des spectres d'énergie résolue, lors d'un calcul HTLES. De plus, l'objectif des méthodes hybrides étant de réduire le coût numérique par rapport à un calcul LES résolu en paroi, cela se traduit par l'utilisation de maillages plus grossiers, ce qui augmente encore plus la taille de filtre (le pas de temps est gardé constant et suffisamment petit).

Les résultats HTLES sur les maillages M0 et M1, avec le modèle de fermeture  $BL-\overline{v^2}/k$  (pas de différence qualitative avec le  $k-\omega$  SST dans les zones d'intérêt), la fonction de protection et le schéma numérique hybride, sont comparés aux données de référence LES sur le maillage Mr.

#### 5.5.4.1 Estimation du taux de filtrage loin des parois

##### Analyse qualitative

Sur la Figure 5.43, les PSD de la vitesse  $E_{uu}$ ,  $E_{vv}$  et  $E_{ww}$  estimés au niveau des sondes A1 et A2 sont représentées. On rappelle que ces sondes sont dans la zone traitée en mode LES.

Pour la sonde A1, on observe qualitativement que les hautes fréquences du spectre sont filtrées, et ce d'autant plus que le maillage est déraffiné. Comparé aux différents paramètres, présentés dans la section 5.5.3 qui influent sur la résolution du spectre, le déraffinement du maillage a une influence prépondérante sur le filtrage des hautes fréquences. Il est également noté que  $E_{vv}$  est plus filtré que  $E_{uu}$  et  $E_{ww}$ . Néanmoins, le comportement des basses fréquences est bien reproduit, avec notamment une zone de décroissance isotrope entre  $f \simeq 0.15h/U_b$  et  $f \simeq 0.40h/U_b$  pour M1, ou  $f \simeq 0.80h/U_b$  pour M0. On retrouve également l'augmentation de  $E_{uu}$  par rapport à  $E_{vv}$  et  $E_{ww}$  lorsque  $f \rightarrow 0$ .

Au niveau de la sonde A2, l'anisotropie des basses fréquences, et la décroissance isotrope à partir de  $f \simeq 0.4U_b/h$ , sont prédites correctement par la HTLES, pour les deux maillages. Le changement de pente au niveau des hautes fréquences est prononcé dans les zones de forte vitesse. Cet effet est bien retrouvé, quels que soient le modèle ou le maillage utilisé.

##### Analyse quantitative

Dans cette partie, l'objectif est de caractériser le filtre de résolution dans les zones de faible vitesse, en montrant qu'il satisfait une hypothèse gaussienne. Cela permettra par la suite de proposer une analyse quantitative des spectres d'énergie dans la zone de proche paroi.

Pour la sonde A1, située dans une zone de faible vitesse, il semblerait que le filtre de résolution (en zone LES loin des parois, avec un schéma de convection centré) agisse davantage comme un filtre gaussien. Pour vérifier cela, les spectres d'énergie turbulente résolue calculés sur différentes discrétisations spatiales sont analysés. Les spectres d'énergie étant estimés en calculant la densité spectrale de puissance sur des signaux temporels, la fréquence de coupure du filtre est définie par :

$$f_c = \max \left[ \frac{1}{2dt}, \frac{U_s}{2\Delta} \right], \quad (5.3)$$

où  $dt$  est le pas de temps,  $U_s$  est la vitesse de balayage (*sweeping velocity*, Eq.2.71) et  $\Delta$  est une taille caractéristique des cellules (dans la suite, on vérifie que  $f_c = U_s/(2\Delta)$ , le pas de temps étant fixé suffisamment petit,  $dt = 0.005h/U_b$ ).

Pour un filtre gaussien, la fonction de transfert utilisée pour définir le spectre d'énergie turbulente résolue s'exprime comme :

$$\hat{\mathcal{G}}_k(f; \Delta_S) = \exp \left( -\frac{(2\pi f)^2 \Delta_S^2}{24} \right)^2 = \exp \left( -\frac{(2\pi f)^2 \Delta_S^2}{12} \right), \quad (5.4)$$

où la taille de filtre temporel est définie par  $\Delta_S = \Delta/U_s = 1/(2f_c)$  (tel que  $\hat{\mathcal{G}}_k(f_c; \Delta_S) = \exp(-\pi^2/12)$ ). Pour la sonde A1, la fonction de transfert qui permet de passer des résultats

sur M0 aux résultats sur M1 (division du nombre de cellules par deux dans toutes les directions) est définie de la façon suivante :

$$\hat{\mathcal{G}}_k(f; \Delta_{S, M0 \rightarrow M1}) = \hat{\mathcal{G}}_k(f; \Delta_{S, M1}) \hat{\mathcal{G}}_k(f; \Delta_{S, M0})^{-1} = \exp\left(-\frac{(2\pi f)^2 \Delta_{S, M0 \rightarrow M1}^2}{12}\right), \quad (5.5)$$

avec la taille de filtre définie par  $\Delta_{S, M0 \rightarrow M1}^2 = (\Delta_{S, M1}^2 - \Delta_{S, M0}^2)$ . On considère que la taille caractéristique des cellules est évaluée avec  $\Delta = \Delta_{\max} \simeq \Delta_{\Omega}$  (les cellules étant quasi-isotropes dans cette zone). En utilisant les valeurs de  $U_s \simeq 0.26$  mesurées au niveau de la sonde A1, on estime finalement que  $\Delta_{S, M0 \rightarrow M1} = 0.39h$ . En appliquant la fonction de transfert (Eq. 5.5) au spectre d'énergie turbulente calculé avec le maillage M0, on obtient le spectre filtré indiqué sur la Figure 5.44, et on observe qu'il correspond globalement au spectre d'énergie turbulente calculé avec le maillage M1. Ainsi, cela indiquerait que le filtre de résolution, dans une région de faible vitesse, correspond globalement à un filtre gaussien.

Au contraire, au niveau de la sonde A2 (Figure 5.43), l'hypothèse gaussienne est mise en défaut. Comme commenté dans les sections précédentes, cela est sûrement lié à la vitesse élevée de l'écoulement en ce point.

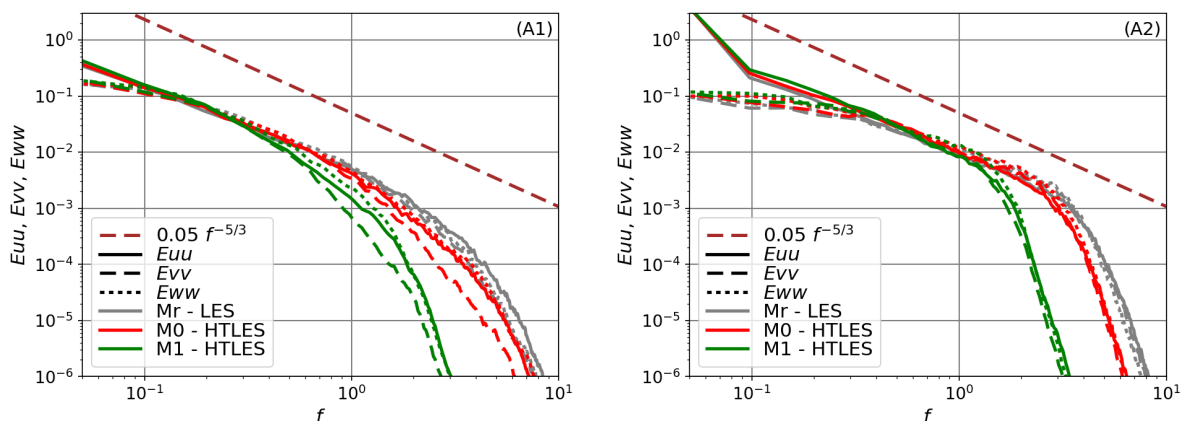


FIGURE 5.43 – PSD de la vitesse dans chaque direction pour les sondes A1 et A2. Calcul LES sur le maillage Mr et calculs  $BL-\overline{v^2}/k$  HTLES sur les maillages M0 et M1.

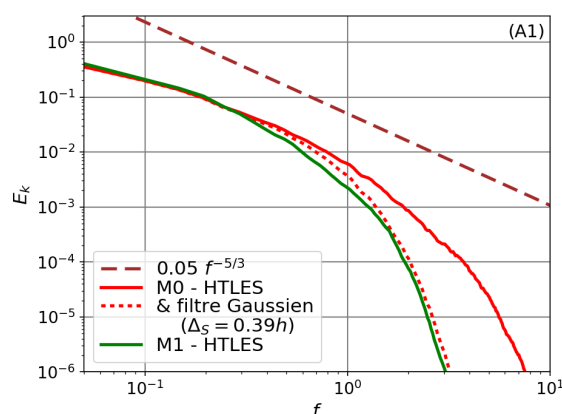


FIGURE 5.44 – Spectre d'énergie turbulente pour la sonde A1. Calcul LES sur le maillage Mr et calculs  $BL-\overline{v^2}/k$  HTLES sur les maillages M0 et M1 (avec application d'un filtre gaussien sur les résultats HTLES avec M0).

### 5.5.4.2 Estimation de la plage de validité basse fréquence des spectres calculés en proche paroi

#### Analyse qualitative

Pour les sondes  $P_i$ , les spectres d'énergie résolue sont présentés sur la Figure 5.45. Toutes les sondes sont dans la zone RANS, avec un schéma de convection amont au second ordre (SOLU). On observe dans un premier temps les écarts importants pour les hautes fréquences, en raison principalement du filtrage lié au déraffinement du maillage, mais aussi à la pénétration des structures résolues dans la zone RANS et à l'utilisation du schéma SOLU (comme expliqué dans la section 5.5.3). Cependant, le résultat d'intérêt réside dans le domaine basse fréquence, dans lequel l'anisotropie du spectre d'énergie résolue est qualitativement bien reproduite. En particulier, le *splatting effect* qui se traduit par une augmentation de  $E_{ww}$  est correctement prédit pour P4, et reste visible au niveau de P1. Le spectre  $E_{vv}$  est parfois sous-estimé, notamment pour P2 et P3, mais son contenu énergétique est alors négligeable par rapport à celui de  $E_{uu}$  et  $E_{ww}$ .

Il est important de noter au sujet de ces résultats que les fréquences limites à partir desquelles les écarts entre les résultats HTLES et la LES de référence commencent à être significatifs sont quasiment les mêmes avec les deux maillages pour les sondes  $P_i$ , même si l'énergie est plus dissipée avec le maillage grossier M1 pour les hautes fréquences. Si le filtrage ressenti était uniquement lié au raffinement du maillage, ces fréquences limites devraient être sensiblement différentes étant donné les écarts de résolution entre M0 et M1. Cela signifie que l'activation du mode RANS et l'utilisation du schéma hybride ont une influence importante sur le filtrage des hautes fréquences, du moins avec le maillage M0.

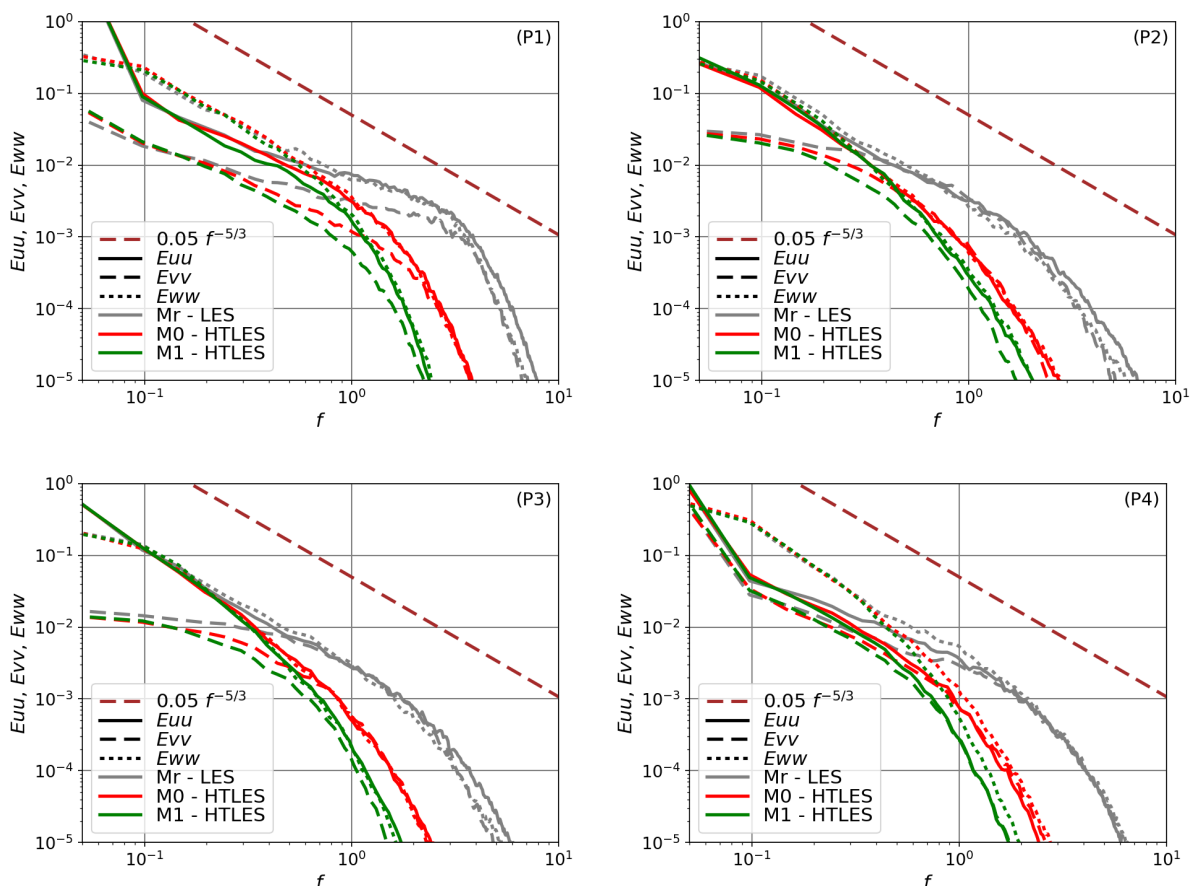


FIGURE 5.45 – PSD de la vitesse dans chaque direction, pour les sondes P1, P2, P3 et P4. Calcul LES sur le maillage Mr et calculs  $BL-\overline{v^2}/k$  HTLES sur les maillages M0 et M1.

Cette première validation qualitative a permis de vérifier que, malgré le déraffinement du maillage et le traitement des zones de proche paroi en mode RANS, avec le schéma amont, l'anisotropie et le contenu énergétique des basses fréquences sont bien reproduits par le modèle HTLES. Le fait que les hautes fréquences soient largement filtrées était attendu. Ce premier résultat est prometteur, arguant que les modèles hybrides sont capables de prédire l'information instationnaire basse fréquence, y compris dans la région de proche paroi, à condition que les fluctuations turbulentes résolues dans la zone LES pénètrent dans la zone RANS.

### Analyse quantitative

On cherche maintenant à identifier et caractériser la fréquence limite  $f_{\text{lim}}$  au-delà de laquelle le spectre résolu en HTLES s'écarte sensiblement du spectre LES bien résolu. Il est rappelé que cette analyse est faite dans le cas des collines périodiques, pour lequel des fluctuations turbulentes générées dans la zone LES pénètrent depuis l'extérieur dans la zone RANS.

#### Évaluation de la fréquence de coupure $f_c$ du filtre de résolution

Pour estimer la fréquence de coupure  $f_c = U_s/(2\Delta)$  du filtre dans la région de proche paroi traitée en mode RANS, on a choisi ici de définir  $\Delta = \Delta_{\text{max}}$ . Pour justifier ce choix, on note que, dans la majorité des configurations, le maillage dans la zone LES conserve un raffinement  $\Delta_x/h$  similaire à celui de la zone RANS sous-jacente. L'échelle caractéristique des tourbillons en zone LES étant  $2\Delta_\Omega \simeq 2\Delta_{\text{max}} \simeq 2\Delta_x$ , ce sont des fluctuations de taille  $2\Delta_{\text{max}}$  qui pénètrent et sont résolues dans la zone RANS. De plus, on note que le mode RANS est imposé sur une distance à la paroi  $d_w = \Delta_{\text{max}}$  avec la fonction de protection  $f_s(\xi_D)$  (Eq. 4.29). Étant donné que les fluctuations turbulentes ne sont pas générées dans la zone RANS, l'échelle caractéristique des tourbillons dans cette zone est au moins  $2\Delta_{\text{max}}$ .

#### Caractérisation de la forme globale du filtre

L'analyse se concentre sur les résultats HTLES avec le maillage M1 (le plus déraffiné). En effet, suite à l'analyse qualitative des spectres calculés au niveau des sondes  $P_i$ , il est noté qu'en utilisant le maillage fin M0, il est difficile de caractériser la forme du filtrage pour les structures qui pénètrent dans la zone RANS. Au contraire, étant donné que le maillage M1 est très déraffiné par rapport au maillage LES résolu en paroi Mr, on suppose que les effets liés à l'activation du mode RANS sont moins notables sur la forme globale du filtre. On a montré dans la section 5.5.4.1 que le filtre de résolution est gaussien dans les zones LES caractérisées par des vitesses faibles. On suppose donc que pour l'écoulement en proche paroi, zone de faible vitesse *a priori*, la même forme de filtre est retrouvée aux basses fréquences.

#### Évaluation de la fréquence limite $f_{\text{lim}}$ au-delà de laquelle le filtrage est sensible

Une méthodologie est alors proposée pour définir les plages fréquentielles d'intérêt. Un seuil  $F_G \in [0, 1]$  est défini, tel que l'écart entre le spectre de référence et le spectre filtré à la position  $f_{\text{lim}}$  soit  $\hat{G}_k(f_{\text{lim}}; \Delta_S) = F_G$ . En reprenant l'expression (5.4), et en rappelant que  $\Delta_S = 1/(2f_c)$  (c'est-à-dire  $\Delta_S = \Delta_{\text{max}}/U_s$  ici), on vérifie alors la relation suivante entre la fréquence limite et la fréquence de coupure :

$$f_{\text{lim}} = \frac{\sqrt{-12 \ln[F_G]}}{\pi} f_c. \quad (5.6)$$

Cela permet de définir la valeur de  $f_{\text{lim}}$  en fonction de  $f_c$ , pour une valeur seuil  $F_G$  donnée :

$$\begin{array}{c|ccc} F_G & 0.99 & 0.95 & 0.80 \\ \hline f_{\text{lim}} & f_c/8 & f_c/4 & f_c/2 \end{array}, \quad (5.7)$$

et ensuite de calculer l'erreur relative du contenu énergétique dans l'intervalle  $[0, f_{\text{lim}}]$ . Les spectres d'énergie turbulente résolue, obtenus avec la LES sur le maillage Mr et la HTLES

sur le maillage grossier M1, sont comparés sur la Figure 5.46, en indiquant les positions des fréquences  $f_{\text{lim}}$ . Pour les sondes  $P_i$ , les fréquences de coupure  $f_c = U_s/(2\Delta_{\text{max}})$  sont évaluées comme suit :

$$\frac{f_c (h/U_b)}{\quad} \left| \begin{array}{cccc} \text{P1} & \text{P2} & \text{P3} & \text{P4} \\ \hline 5.34 & 1.23 & 1.76 & 2.96 \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Pour les sondes P2, P3 et P4, les résultats HTLES sur le maillage M1 sont en bon accord qualitatif avec les références LES jusqu'à la fréquence limite  $f_{\text{lim}} = f_c/8$ , comme attendu. En comparant les résultats à  $f_{\text{lim}} = f_c/4$ , une erreur supérieure à 5% est notée, du fait que le filtre de résolution s'écarte du filtre gaussien en ces points. Les écarts globaux sur l'intervalle  $[0, f_c/4]$  restent néanmoins acceptables en considérant que le contenu énergétique dans l'intervalle  $[f_c/8, f_c/4]$  est faible comparé à celui dans l'intervalle  $[0, f_c/8]$ . À  $f_{\text{lim}} = f_c/2$ , les écarts deviennent relativement importants.

Pour la sonde P1, des écarts sont observés dès  $f_{\text{lim}} = f_c/8$ , en raison certainement de la vitesse élevée de l'écoulement en ce point ( $P_1$  se trouve au-dessus du sommet de la colline, à  $y/h = 1.09$ , dans une zone d'accélération).

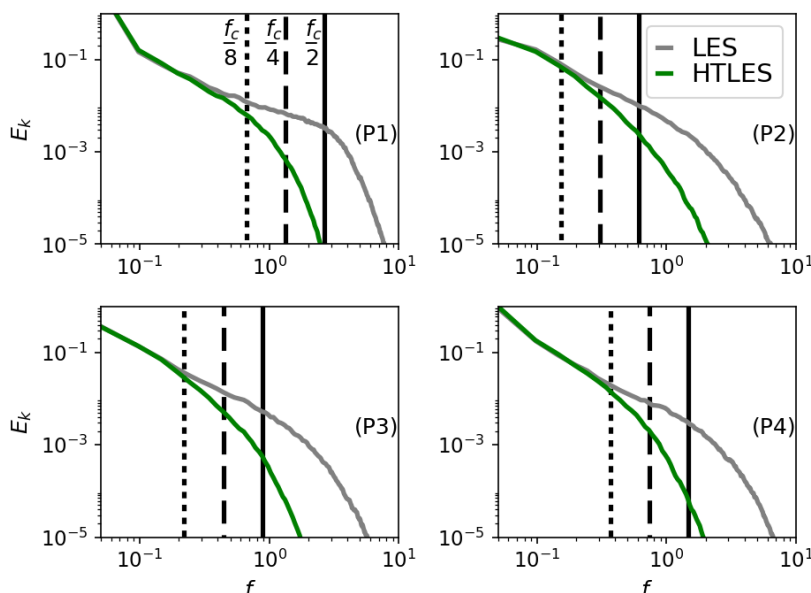


FIGURE 5.46 – Spectre de l'énergie turbulente résolue pour les sondes  $P_i$ , avec les fréquences limites  $f_{\text{lim}}$ . Calcul LES avec le maillage Mr et calcul  $BL-\bar{v}^2/k$  HTLES avec le maillages M1.

#### Évaluation du contenu énergétique dans le domaine $[0, f_{\text{lim}}]$

Maintenant que les plages fréquentielles d'intérêt  $[0, f_{\text{lim}}]$  ont été caractérisées, il est possible d'évaluer le contenu énergétique basse fréquence. Le Tableau 5.4 permet de visualiser les écarts entre la LES et la HTLES sur différents domaines d'intégration. On note tout d'abord que l'énergie turbulente résolue est sous-estimée sur l'intervalle  $[0, f_c]$ , ce qui est attendu étant donné le filtrage des hautes fréquences. Les résultats sont améliorés sur l'intervalle  $[0, f_c/2]$ , mais des écarts supérieurs à 10% sont mesurés.

Au contraire, sur les intervalles  $[0, f_c/4]$  ou  $[0, f_c/8]$ , des prédictions correctes sont obtenues, avec des écarts inférieurs à 10%, sauf pour P1, mais on a souligné que la formulation de  $f_{\text{lim}}$  était moins robuste pour cette sonde. On remarque que l'énergie résolue aux basses fréquences est souvent surestimée, notamment pour P2, ce qui avait déjà été observé pour les profils statistiques.

	P1	P2	P3	P4
$[0, f_c]$	0.73	0.90	0.85	0.86
$[0, f_c/2]$	0.77	0.96	0.90	0.88
$[0, f_c/4]$	0.85	1.02	0.97	0.94
$[0, f_c/8]$	0.93	1.07	1.04	0.98

TABLEAU 5.4 – Intégrale dans le domaine  $[0, f_{\text{lim}}]$  du spectre d'énergie turbulente résolue en HTLES avec le maillage M1, normalisé par l'intégrale dans le même domaine du spectre LES sur Mr.

Pour un calcul HTLES avec le maillage raffiné M0, le contenu énergétique dans les domaines d'intérêt  $[0, f_c/4]$  ou  $[0, f_c/8]$  est estimé dans le Tableau 5.5, comme on vient de le faire pour le maillage M1. Sur l'intervalle  $[0, f_c/4]$ , la sous-estimation de l'énergie turbulente varie autour de 10%. Au contraire, sur l'intervalle  $[0, f_c/8]$ , des prédictions correctes sont obtenues, avec des écarts relativement faibles. Dans ces configurations, on note que l'énergie turbulente résolue est toujours légèrement sous-estimée par rapport à la référence LES, ce qui est en accord avec les prévisions pour un spectre filtré.

	P1	P2	P3	P4
$[0, f_c/4]$	0.88	0.92	0.89	0.94
$[0, f_c/8]$	0.97	0.98	0.94	0.98

TABLEAU 5.5 – Intégrale dans le domaine  $[0, f_{\text{lim}}]$  du spectre d'énergie turbulente résolue en HTLES avec le maillage M0, normalisé par l'intégrale dans le même domaine du spectre LES sur Mr.

Enfin, on s'intéresse aux prédictions de  $E_{uu}$ ,  $E_{vv}$  et  $E_{ww}$  pour obtenir une mesure plus quantitative de l'anisotropie de la turbulence. Dans le Tableau 5.6, le contenu énergétique intégré dans le domaine  $[0, f_c/4]$  est comparé à l'énergie turbulente totale dans le même domaine, afin d'évaluer l'anisotropie, et à la valeur de référence, afin d'évaluer les écarts.

On note tout d'abord que  $E_{uu}$  est dominant aux basses fréquences, sauf au niveau des sondes P4 et P1, pour lesquelles le *splating effet* est ressenti et  $E_{ww}$  augmente. Au contraire,  $E_{vv}$  est négligeable par rapport à  $E_{uu}$  et  $E_{ww}$ , lorsque la normale à la paroi est dans la direction  $y$ . Pour P4, les composantes  $E_{uu}$  et  $E_{vv}$  sont similaires. Cette anisotropie correspond bien à celle observée qualitativement sur la Figure 5.45.

En s'intéressant aux écarts par rapport aux références, on note tout d'abord que  $E_{vv}$  est largement sous-estimé pour P1, P2 et P3. Cela a cependant peu d'influence sur l'énergie totale étant donné que la composante  $E_{vv}$  est négligeable. Dans les directions longitudinale et transverse,  $E_{uu}$  est globalement surestimé, alors que  $E_{ww}$  est légèrement sous-estimé. La surestimation importante de  $E_{uu}$  aux basses fréquences au niveau de la sonde P2 ( $x/h = 4.5$ ) est reflétée dans les résultats statistiques (Figure 5.26). On note néanmoins que, pour les sondes P3 et P4, les résultats sont en relative adéquation avec les références, ce qui est satisfaisant étant donné que le maillage grossier M1 est utilisé.

Avec le maillage plus fin M0 (Tableau 5.6), les prédictions de l'anisotropie basse fréquence sont similaires à celles obtenues avec le maillage M1. Les mêmes tendances sont observées concernant les écarts avec les références LES, excepté pour  $E_{uu}$ , dont la surestimation est largement diminuée en raffinant le maillage.





- (v) L'anisotropie de la turbulence à la paroi est bien reproduite qualitativement, mais des écarts quantitatifs sont relevés en considérant le contenu énergétique basse fréquence :
- dans la direction longitudinale,  $E_{uu}$  est globalement surestimé avec un maillage grossier,
  - dans la direction normale à la paroi,  $E_{vv}$  est largement sous-estimé, mais cela n'a pas d'influence sur l'énergie totale étant donné que  $E_{vv} \ll E_{uu}$ ,
  - dans la direction transverse,  $E_{ww}$  est bien reproduit, avec une légère sous-estimation dans la plupart des cas.

### 5.5.5 Estimation des spectres de pression en HTLES

Après avoir validé la capacité de la HTLES à résoudre les fluctuations turbulentes basses fréquences, on s'intéresse dans cette section à la pression à la paroi, qui est une variable d'intérêt immédiat dans un calcul d'efforts hydrauliques.

Dans un premier temps, les caractéristiques principales du champ de pression sont notées au niveau des sondes  $Ri$ , dans les cellules contiguës à la paroi. Dans le Tableau 5.7, on note que la valeur moyenne de la pression est bien prédite pour les deux maillages, par rapport à un calcul LES bien résolu (maillage Mr). Concernant les écarts types des signaux temporels enregistrés, les prédictions HTLES sont en bon accord avec la LES sur le maillage M0. Des différences apparaissent avec le maillage M1, notamment pour R1 au sommet de la colline où la discrétisation spatiale n'est pas suffisante pour capturer correctement les structures turbulentes. L'écart type est en adéquation avec les références pour R3 et R4.

Si on s'intéresse aux valeurs maximales que peut atteindre la pression (grandeurs d'intérêt pour le dimensionnement), on note dans un premier temps que la différence entre la valeur extrême et la valeur moyenne peut être largement sous-estimée avec la HTLES, par rapport à la LES. Néanmoins, les différences entre le 99<sup>ème</sup> centile (ou 95<sup>ème</sup>, 90<sup>ème</sup>) et la moyenne sont correctement prédites en HTLES avec les deux maillages. Pour R1, une sous-estimation plus importante est observée. Finalement, ces résultats montrent que seules les valeurs extrêmes sont filtrées. Une méthodologie est ainsi esquissée pour analyser les valeurs maximales.

	Maillage M0					Maillage M1			
	R1	R2	R3	R4		R1	R2	R3	R4
$P_{\text{moy}}$	0.94	1.00	1.03	1.05	$P_{\text{moy}}$	0.96	1.00	1.06	1.03
$P_{\sigma}$	1.03	0.98	0.99	0.96	$P_{\sigma}$	1.18	1.12	1.06	0.96
$P_{\text{max}} - P_{\text{moy}}$	0.64	0.56	0.72	0.86	$P_{\text{max}} - P_{\text{moy}}$	0.63	0.91	0.65	0.86
$P_{\text{max},1\%} - P_{\text{moy}}$	0.84	0.90	0.99	1.00	$P_{\text{max},1\%} - P_{\text{moy}}$	0.76	1.03	1.04	1.00
$P_{\text{max},5\%} - P_{\text{moy}}$	0.86	0.95	0.99	1.00	$P_{\text{max},5\%} - P_{\text{moy}}$	0.81	1.04	1.05	0.99
$P_{\text{max},10\%} - P_{\text{moy}}$	0.87	0.96	1.00	1.00	$P_{\text{max},10\%} - P_{\text{moy}}$	0.83	1.05	1.06	0.99

TABLEAU 5.7 – Valeur moyenne, écart type, et différence entre le maximum (absolu ou moyenné sur les centiles supérieurs 1%, 5% ou 10%) et la moyenne, pour la pression en HTLES avec les maillages M0 et M1, normalisés par la valeur correspondante du calcul LES de référence.

Sur la Figure 5.47, les PSD de la pression au niveau des sondes  $Pi$  sont présentées. La méthode de calcul de la PSD est la même que celle pour la vitesse (voir la section 5.5.2). Les résultats HTLES sur les maillages M0 et M1 sont comparés à la LES de référence sur le maillage Mr. Comme pour les spectres d'énergie résolue, les hautes fréquences du spectre de pression sont filtrées, et ce d'autant plus que le maillage est déraffiné. Au contraire, pour les basses fréquences, le même comportement est observé en LES et en HTLES, malgré le déraffinement du maillage et l'activation du mode RANS au niveau des sondes  $Pi$ , validant qualitativement que le modèle HTLES est capable de reproduire les variations basses fréquences de la pression dans la région de proche paroi.

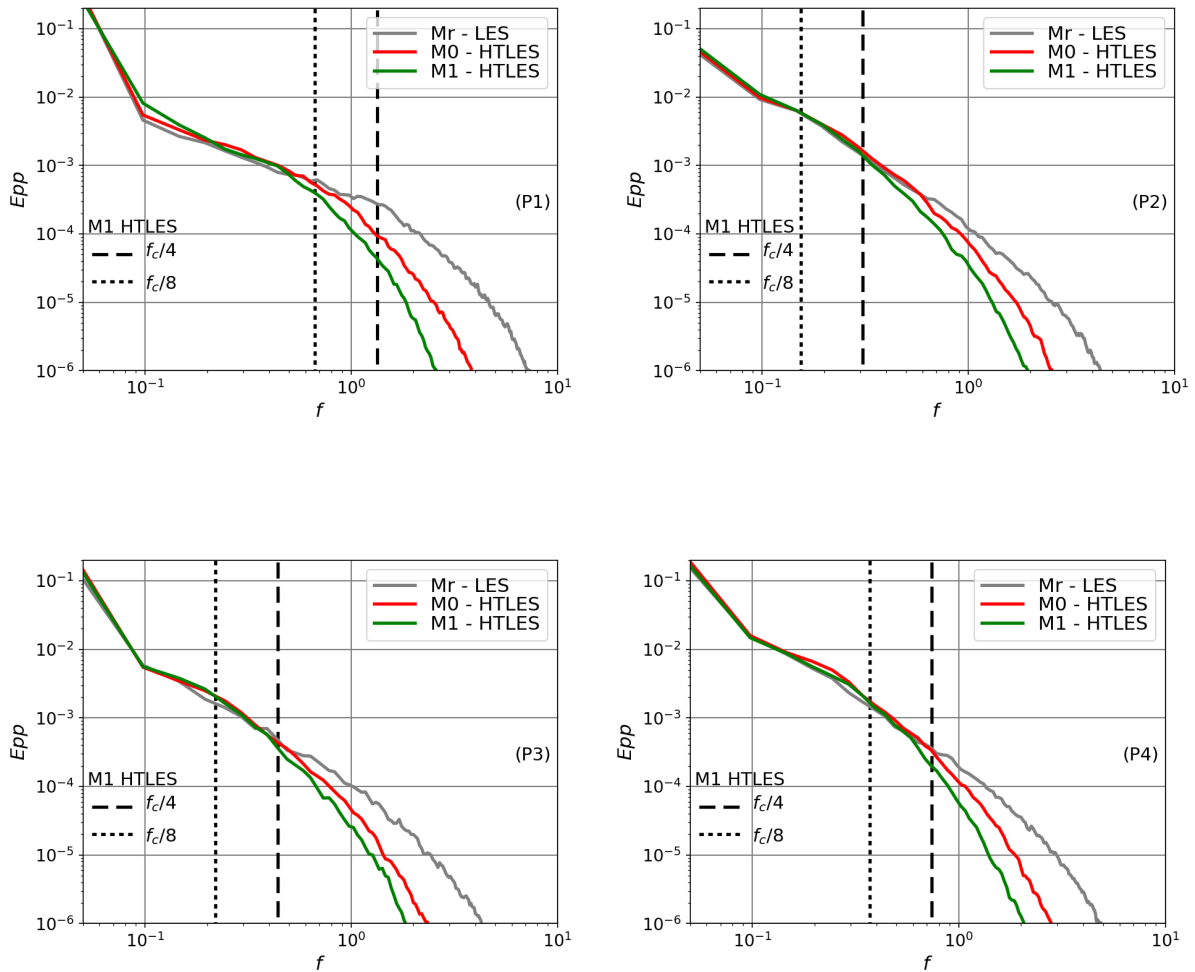


FIGURE 5.47 – PSD de la pression, pour les sondes P1, P2, P3 et P4, avec les fréquences limites pour le maillage M1. Calcul LES sur le maillage Mr et calculs  $BL-\bar{v}^2/k$  HTLES sur les maillages M0 et M1.

En s'inspirant des résultats de la section 5.5.4.2, les fréquences limites  $f_c/8$  et  $f_c/4$  déterminées dans le cadre d'un calcul HTLES avec le maillage grossier M1 sont tracées sur la Figure 5.47. Pour les sondes P2, P3 et P4, les résultats HTLES sont en bon accord avec les références LES jusqu'à  $f_{\text{lim}}^P = f_c/4$ . Pour la sonde P1, des différences sont notées dès la fréquence limite  $f_c/8$ , ce qui est similaire aux observations faites sur le spectre d'énergie.

Sur le maillage M0, les premiers écarts significatifs avec le spectre de référence sont observés à peu près à la même position que pour le maillage M1. En définissant comme précédemment  $f_c = U_s/(2\Delta_{\text{max}})$ , la valeur de la fréquence limite  $f_{\text{lim}}^P$  devrait être doublée avec le maillage M0 par rapport à M1. Néanmoins, en considérant que le contenu énergétique est réduit dans cette zone, l'intégration sur le domaine ne devrait pas engendrer d'erreur significative.

On note cependant que, malgré l'accord qualitatif pour les basses fréquences observé sur la Figure 5.47, des écarts quantitatifs notables peuvent être obtenus pour des fréquences données.

Enfin, les statistiques de la pression à la paroi sont correctement prédites en HTLES, malgré l'activation du mode RANS. Cela permet de valider que la moyenne et la dispersion du signal temporel pour la pression sont bien reproduites. Les valeurs maximales sont sous-estimées par rapport à celles de la LES, mais des prédictions correctes sont retrouvées à partir du 99<sup>ème</sup> centile, ce qui indique que le filtrage dans la zone RANS n'impacte que les valeurs extrêmes (qui doivent donc être analysées avec précaution).

En analysant les PSD de la pression, on note que le domaine basse fréquence pour lequel les résultats HTLES sont en adéquation avec ceux de la LES de référence est étendu jusqu'à la fréquence limite  $f_{\text{lim}}^P = f_c/4$ . Cette limite est moins contraignante que celle pour les spectres d'énergie  $f_{\text{lim}} = f_c/8$ . Cependant, les écarts quantitatifs peuvent être relativement importants pour certaines fréquences données.

## 5.6 Conclusion

En conclusion de ce chapitre, la méthode hybride HTLES a été validée avec succès sur l'écoulement sur les collines périodiques à  $Re_b = 10600$ , mais aussi à  $Re_b = 37000$ . En utilisant un maillage raffiné permettant de réaliser un calcul LES résolu en paroi, et un maillage plus grossier ne respectant pas les critères LES, il est montré que l'approche HTLES associée aux modèles de fermeture  $k-\omega$  SST ou  $BL-\overline{v^2}/k$  fournit des prédictions très satisfaisantes.

- Les caractéristiques principales de l'écoulement sont bien reproduites, ainsi que leurs évolutions en fonction du nombre de Reynolds : recirculations principale et secondaire, pic d'énergie dans la couche de cisaillement décollée, *splating effect*.
- Le comportement de la méthode hybride est validé en imposant le mode RANS en paroi grâce à la fonction de protection  $f_s(\xi_K)$  pour  $Re_b = 10600$  (ce qui permet de conserver la même position de la transition RANS-LES pour les deux maillages), et grâce à la fonction  $f_s(\xi_D)$  pour  $Re_b = 37000$ . L'introduction complémentaire de la fonction de protection double et de la ICC est nécessaire pour garantir la robustesse de la formulation vis-à-vis du raffinement du maillage.
- Les principales grandeurs d'intérêt que sont le champ de vitesse et le coefficient de frottement sur la paroi inférieure sont prédits avec une bonne précision. Avec le maillage grossier M1, le déraffinement au sommet de la colline entraîne une surestimation de la recirculation secondaire, mais cela n'a pas d'influence sur le reste de l'écoulement. Cela souligne l'importance du raffinement du maillage dans les régions relevant d'une importance particulière.
- Les profils d'énergie cinétique turbulente, des composantes diagonales du tenseur de Reynolds et de la contrainte de cisaillement sont qualitativement bien reproduits, avec une bonne position du pic d'énergie au niveau de la couche de cisaillement détachée, mais des surestimations sont observées. Contrairement aux attentes, lorsque le maillage est très grossier, la composante résolue a tendance à être surestimée, ce qui entraîne une surestimation globale en ajoutant la composante modélisée.

Dans un second temps, l'analyse s'est focalisée sur la capacité de la HTLES à résoudre les fluctuations turbulentes, y compris dans la région de proche paroi traitée en mode RANS. Des structures turbulentes résolues en mode LES pénètrent en effet dans la zone RANS dans la configuration de l'écoulement sur les collines périodiques, caractérisée par un détachement-réattachement. Les PSD temporelles de l'énergie résolue et de la pression en HTLES sont comparées aux résultats d'une LES de référence sur un maillage fin.

Les différents paramètres qui ont une influence sur la forme du filtre ont été identifiés : le modèle de fermeture, la position de la transition RANS-LES (si la sonde est dans la zone RANS), et le schéma numérique amont au second ordre, qui est actif dans la zone RANS.

Cependant, il est noté que le filtrage agit essentiellement sur les hautes fréquences. Les basses fréquences sont préservées, y compris dans la zone RANS, dans la mesure où l'énergie résolue y est prépondérante.

En supposant que le filtre de résolution est gaussien, une relation est identifiée entre la fréquence limite  $f_{\text{lim}}$  de validité du domaine basse fréquence et la fréquence de coupure  $f_c$ . On a notamment observé que le contenu énergétique est bien reproduit jusqu'à  $f_{\text{lim}} = f_c/8$  dans les régions de proche paroi, à condition que la vitesse ne soit pas trop élevée. Le domaine d'intégration basse fréquence peut être étendu jusqu'à  $f_c/4$  si besoin, en conservant des estimations convenables. Finalement, l'anisotropie de la turbulence aux basses fréquences est bien reproduite.

Enfin, l'analyse des statistiques de pression a permis de valider que, malgré l'activation du mode RANS en paroi avec un maillage globalement déraffiné, des résultats corrects sont obtenus : la moyenne du signal temporel, son écart type et les valeurs maximales évaluées dans les centiles supérieurs, sont correctement prédits. En considérant les PSD de la pression dans la région de proche paroi, le domaine basse fréquence pour lequel les résultats HTLES sont en bonne adéquation avec les références s'étend jusqu'à  $f_{\text{lim}}^P = f_c/4$  pour un maillage déraffiné.

Finalement, la capacité de la HTLES à prédire correctement les grandeurs d'intérêt, de manière robuste vis-à-vis du raffinement du maillage, et à fournir une information basse fréquence fiable dans la région de proche paroi lorsque ces instationnarités proviennent de l'extérieur de la couche limite, est validée. Dans la volonté d'estimer les efforts instationnaires sur des composants, le fait que la variabilité basse fréquence de la vitesse et de la pression soit correctement reproduite en paroi est prometteur, et ouvre la voie à des études industrielles de ce type avec le modèle HTLES.

## Chapitre 6

# Vers une version zonale de la HTLES à l'aide du Forçage Linéaire Anisotrope

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Intérêt et principe du forçage aux interfaces RANS-LES</b>	<b>170</b>
<b>6.2</b>	<b>Forçage Linéaire Anisotrope</b>	<b>171</b>
6.2.1	Effet statistique du forçage volumique	171
6.2.2	Formulation du ALF	171
6.2.3	Intérêt d'une utilisation zonale de la HTLES avec le ALF	173
<b>6.3</b>	<b>Configuration étudiée</b>	<b>173</b>
6.3.1	Présentation de la configuration	173
6.3.2	Développement spatial de la HTLES	175
<b>6.4</b>	<b>Développement spatial de la HTLES avec le ALF</b>	<b>178</b>
6.4.1	Application du ALF	178
6.4.2	Étude de sensibilité au coefficient de l'approche de forçage	178
6.4.3	Étude de sensibilité à l'extension de la zone de forçage	181
6.4.4	Étude de sensibilité à la position de la zone de forçage	183
6.4.5	Étude de sensibilité à l'application du ALF dans la zone RANS de proche paroi	184
6.4.6	Comparaison des résultats HTLES avec et sans le ALF	186
<b>6.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>189</b>

---

Dans ce chapitre, une étude de faisabilité est réalisée, avec l'objectif d'utiliser le modèle HTLES de façon zonale. Pour promouvoir l'apparition de fluctuations turbulentes résolues au niveau des interfaces RANS-LES, le Forçage Linéaire Anisotrope (ALF) est appliqué. La configuration étudiée correspond au cas test des collines périodiques, avec des conditions aux limites d'entrées-sorties dans la direction de l'écoulement. Le ALF est appliqué dans la zone en aval de l'entrée du domaine. Différentes études de sensibilité sont effectuées afin de déterminer sous quelles conditions l'utilisation du ALF s'avère efficace, dans le but de retrouver des prédictions correctes des grandeurs d'intérêts.

## 6.1 Intérêt et principe du forçage aux interfaces RANS-LES

Comme spécifié dans l'introduction de cette thèse, le principal objectif des méthodes hybrides RANS-LES est de résoudre les fluctuations turbulentes en mode LES dans les régions d'intérêt de l'écoulement, et, dans l'optique d'une réduction du coût de calcul, d'activer le mode RANS lorsque :

- (i) la résolution LES est trop coûteuse,
- (ii) la résolution LES n'est pas nécessaire.

Jusqu'à présent, le développement de la HTLES s'est fait dans le cadre des approches hybrides globales (voir la section 2.1.3.4), qui tendent à répondre à la problématique (i). Dans la majorité des cas, le mode RANS est activé dans la région de proche paroi où la résolution LES, assimilable à une Quasi-DNS, implique un coût de calcul très élevé.

Dans ce chapitre, nous nous plaçons dans le cadre de la problématique (ii). Dans les applications industrielles, la nécessité d'imposer des conditions aux limites au calcul ne permet pas, dans de nombreux cas, de réduire le domaine de calcul en simulant uniquement la zone d'intérêt. Il est alors nécessaire de considérer un domaine bien plus large : par exemple, pour étudier une configuration de pompe, il peut être nécessaire de simuler l'écoulement dans les conduites en amont du composant. En dehors de la zone d'intérêt, la modélisation fine de l'écoulement (résolution des grandes échelles de la turbulence) n'est pas nécessaire. L'utilisation d'une approche filtrée dans tout le domaine de calcul alourdit alors considérablement le coût numérique, sans bénéfice notable pour améliorer les prédictions. Ainsi, dans une optique de réduction du coût de calcul, il est favorable d'utiliser une modélisation RANS dans les régions pour lesquelles la résolution LES n'est pas nécessaire (ii). La région d'intérêt, traitée avec un modèle LES ou hybride, se retrouve « embarquée » dans un domaine global, traité avec une modélisation RANS.

La question qui se pose alors concerne le traitement des interfaces RANS-LES, étant donné que la description fournie par leurs opérateurs de moyenne statistique et de filtrage respectifs est très différente. Pour les transitions d'un domaine RANS vers un domaine LES, cela nécessite d'enrichir les variables statistiques par des fluctuations. Le couplage des différents domaines peut être réalisé par l'intermédiaire de conditions aux limites. Il est sinon possible d'utiliser une zone de recouvrement entre les domaines RANS-LES, en imposant un forçage volumique par termes sources. Dans ce contexte, on peut citer les méthodologies et les études de Jarrin *et al.* [55], Pamiès *et al.* [88], Deck *et al.* [31] ou Laraufie *et al.* [65]. Dans ce chapitre, les développements sont effectués dans le cadre suivant.

- Au niveau des interfaces RANS-LES, le couplage repose sur un forçage volumique appliqué dans une zone de recouvrement, en utilisant plus spécifiquement le Forçage Linéaire Anisotrope développé par de Laage de Meux *et al.* [25].
- On se limite à la configuration de couplage RANS-LES suivante : dans la direction de l'écoulement, le domaine traité en RANS est en amont de l'interface, tandis que le domaine traité en hybride RANS-LES est en aval (première configuration d'intérêt). La configuration inverse, hybride RANS-LES en amont de l'interface et RANS en aval, n'est pas évoquée. On ne considère pas non plus la configuration avec une interface tangentielle à l'écoulement (le couplage tangentiel à la paroi est intégrée aux améliorations HTLES faisant l'objet du Chapitre 4).
- On s'intéresse ici au cas où un unique modèle hybride est utilisé dans l'ensemble du domaine de calcul. La formulation hybride « standard » est appliquée dans les régions d'intérêt (résolution des grandes échelles de l'écoulement en mode LES et protection de proche paroi en mode RANS), tandis que le mode RANS est imposé dans le reste du domaine. Cette méthodologie se rapproche de celle de la ZDES (*Zonal Detached Eddy Simulation*) développée par Deck *et al.* [29]. Dans ce cadre, l'approche globale DES [108], présentée dans la section 2.3.3.2, est modifiée afin de pouvoir imposer le mode RANS dans certaines régions prédéfinies de l'écoulement, tout en conservant une formulation de type DES dans les régions d'intérêt. De façon similaire, l'objectif est de parvenir à utiliser l'approche HTLES de manière zonale.

## 6.2 Forçage Linéaire Anisotrope

### 6.2.1 Effet statistique du forçage volumique

*Rappel des notations* : la vitesse instantanée  $U_i^*$  peut être décomposée dans le cadre statistique et dans le cadre filtré comme :

$$U_i^* = \overline{U}_i + u_i \quad \text{et} \quad U_i^* = \tilde{U}_i + u_i'', \quad (6.1)$$

respectivement, avec la vitesse statistiquement moyennée  $\overline{U}_i$ , la vitesse filtrée  $\tilde{U}_i$ , les fluctuations statistiques  $u_i$ , et les fluctuations de sous-filtre  $u_i''$ . On définit les fluctuations à grande échelle  $u_i'$  :

$$u_i' = u_i - u_i'' = \tilde{U}_i - \overline{U}_i. \quad (6.2)$$

Dans le cadre du forçage volumique, on suppose que la zone de recouvrement est traitée avec une approche filtrée. Un terme source, qui s'exprime comme une force volumique virtuelle  $\tilde{f}_i$ , est introduit dans l'équation de quantité de mouvement filtrée (Eq. 2.86) :

$$\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial t} + \tilde{U}_j \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij\text{sfs}}}{\partial x_j} + \tilde{f}_i \quad (6.3)$$

La force volumique  $\tilde{f}_i$  peut être décomposée entre sa moyenne de Reynolds  $\overline{f}_i$  et une composante fluctuante  $f_i'$ , telle que :

$$\tilde{f}_i = \overline{f}_i + f_i'. \quad (6.4)$$

Du fait de l'application du forçage volumique, des termes additionnels sont introduits dans le bilan de quantité de mouvement filtrée moyenne et dans l'équation de transport des contraintes résolues :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{\tau_{ij\text{sfs}}}}{\partial x_j} + \overline{f}_i, \\ \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} = P_{ij}^r + \phi_{ij}^r + \chi_{ij} + D_{ij}^{Tr} + D_{ij}^r + D_{ij}^{\nu,r} - \varepsilon_{ij}^r + P_{ij}^f, \end{array} \right. \quad (6.5)$$

dont les différents termes ne seront pas explicités ici (l'analyse peut être faite en comparant les équations à celles définies dans le cadre statistique, Eq. 2.13 et Eq. 2.16). Deux points principaux ressortent de cette analyse :

- Seule la composante moyenne  $\overline{f}_i$  de la force volumique a une influence sur le mouvement moyen.
- Dans l'équation de transport des contraintes résolues, le terme additionnel  $P_{ij}^f$  qui apparaît dépend uniquement de la composante fluctuante de la force volumique :

$$P_{ij}^f = \overline{f_i' u_j'} + \overline{f_j' u_i'}, \quad (6.6)$$

et, selon son signe, va avoir tendance à augmenter ou amortir les fluctuations turbulentes.

### 6.2.2 Formulation du ALF

Le Forçage Linéaire Anisotrope (ALF : *Anisotropic Linear Forcing*) a été développé par de Laage de Meux *et al.* [25], suite à une analyse des forçages volumiques existants dans la littérature : en particulier, les méthodes de forçage de Schlüter *et al.* [103], Spille-Kohoff et Kaltenbach [113], et Laraufie *et al.* [65]. À ce titre, le ALF est une généralisation des forçages volumiques existant. L'un des objectifs est de rendre consistant la vitesse moyenne, ainsi que les



contraintes de Reynolds, entre les domaines RANS amont et LES, ou hybride RANS-LES, aval. Pour ce faire, le ALF prend la forme d'une fonction linéaire tensorielle, avec une force fluctuante définie sous la forme suivante :

$$\boxed{\tilde{f}_i = A_{ij}\tilde{U}_j + B_i}, \quad (6.7)$$

avec  $A_{ij}$  un tenseur d'ordre deux symétrique et  $B_i$  un vecteur, qui sont, lorsque l'état permanent est atteint, indépendants du temps. La force volumique est décomposée (Eq. 6.4) entre :

$$\bar{f}_i = A_{ij}\bar{U}_j + B_i \quad \text{et} \quad f'_i = A_{ij}u'_j, \quad (6.8)$$

et le terme additionnel (Eq. 6.6) dans l'équation de transport des contraintes résolues devient :

$$P_{ij}^f = A_{ik}\bar{u}'_j\bar{u}'_k + A_{jk}\bar{u}'_i\bar{u}'_k. \quad (6.9)$$

Pour faire tendre la vitesse filtrée moyenne  $\bar{U}_i$  et les contraintes résolues  $\bar{u}'_i\bar{u}'_j$  vers des valeurs cibles  $\bar{U}_i^\dagger$  et  $\bar{u}'_i\bar{u}'_j^\dagger$ , le modèle utilisé est le suivant :

$$\begin{cases} \bar{f}_i &= \frac{1}{\tau_v} (\bar{U}_i^\dagger - \bar{U}_i), \\ P_{ij}^f &= \frac{1}{\tau_r} (\bar{u}'_i\bar{u}'_j^\dagger - \bar{u}'_i\bar{u}'_j), \end{cases} \quad (6.10)$$

avec les échelles de temps de forçage  $\tau_v$  et  $\tau_r$ . Finalement, le système d'équations à résoudre pour déterminer  $A_{ij}$  et  $B_i$  s'écrit :

$$\begin{aligned} A_{ij}\bar{U}_j + B_i &= \frac{1}{\tau_v} (\bar{U}_i^\dagger - \bar{U}_i), \\ A_{ik}\bar{u}'_j\bar{u}'_k + A_{jk}\bar{u}'_i\bar{u}'_k &= \frac{1}{\tau_r} (\bar{u}'_i\bar{u}'_j^\dagger - \bar{u}'_i\bar{u}'_j). \end{aligned} \quad (6.11)$$

C'est un système linéaire à neuf équations, qui peut être inversé avec une méthode directe. Au cours du calcul, il est nécessaire d'estimer la vitesse filtrée moyenne  $\bar{U}_i$  et les contraintes résolues  $\bar{u}'_i\bar{u}'_j$ , ce qui peut se faire au moyen d'un filtre spatial dans une direction d'homogénéité ou d'un filtre temporel pour un écoulement statistiquement stationnaire (filtre exponentiel par exemple, voir Eq. 4.7). Dans la plupart des cas, les valeurs cibles proviennent soit d'un calcul précurseur (en ayant déjà effectué un calcul sur la configuration étudiée avec une modélisation RANS, par exemple), soit du domaine RANS situé juste en amont de l'interface (à condition que l'on puisse considérer que les valeurs moyennes sont inchangées sur une certaine distance). Le ALF permet donc à la fois de prescrire le mouvement moyen, et le niveau des contraintes résolues.

Finalement, en étudiant le comportement du ALF sur l'écoulement en canal plan (caractérisé par une demi-hauteur  $h$  et une vitesse débitante  $U_b$ ), de Laage de Meux *et al.* [25] ont défini les échelles de temps de forçage :

$$\tau_v = C_v \frac{h}{U_b} \quad \text{et} \quad \tau_r = \max \left[ 2dt, C_r \frac{\hat{k}^\dagger}{\hat{\varepsilon}^\dagger} \right], \quad (6.12)$$

où  $\hat{k}^\dagger$  est l'énergie turbulente totale cible et  $\hat{\varepsilon}^\dagger$  est le taux de dissipation cible. Dans cette expression, le symbole  $\hat{\phantom{x}}$  indique que ces grandeurs sont normalisées par  $U_b$  et  $h$ . Les constantes ont été calibrées avec les valeurs suivantes :  $C_v = 5$  et  $C_r = 0.01$ .

### 6.2.3 Intérêt d'une utilisation zonale de la HTLES avec le ALF

Dans un premier temps, il est souligné que l'utilisation zonale du modèle HTLES peut être réalisée en imposant, hors des zones d'intérêt, la valeur du ratio d'énergie  $r = 1$  pour forcer le modèle dans sa branche RANS. Grâce à l'ICC définie dans la section 4.4.2, le comportement exact du modèle de fermeture RANS est alors retrouvé, sans prendre en compte l'énergie résolue qui peut pénétrer depuis les domaines voisins traités en mode LES. Ainsi, un unique modèle (avec un unique système d'équations) est utilisé dans tout le domaine de calcul. L'utilisation d'opérateurs d'enrichissement (RANS→LES) ou de restriction (LES→RANS) est néanmoins nécessaire au niveau des interfaces RANS-LES.

L'estimation des moyennes statistiques effectives  $\overline{U_i}$  et  $\overline{u'_i u'_j}$ , qu'il est nécessaire d'évaluer au cours du calcul dans la formulation du ALF, est facilitée dans le cadre d'une utilisation conjointe avec la HTLES. En effet, la HTLES fait déjà appel à un filtre pour estimer les grandeurs statistiquement moyennées au cours du calcul (filtre temporel exponentiel dans le cadre des écoulements statistiquement moyennés étudiés dans cette thèse, Eq. 4.7). L'intégration du ALF ne nécessite donc pas d'introduire des opérateurs supplémentaires.

Enfin, la question principale qui se pose est la définition des statistiques cibles du forçage :  $\overline{U_i}^\dagger$  et  $\overline{u'_i u'_j}^\dagger$ . Avec l'approche HTLES, étant donné que l'hybridation du modèle est pilotée par le ratio d'énergie  $r_K$  (évalué avec une hypothèse de Kolmogorov, Eq. 3.32), on pourrait chercher à estimer les grandeurs résolues cibles à partir des variables modélisées en cours de calcul, par exemple :

$$k = k_r + k_m \quad \text{et} \quad r_K \simeq \frac{k_m}{k} \quad \Rightarrow \quad k_r^\dagger \simeq k_m \frac{1 - r_K}{r_K}. \quad (6.13)$$

avec  $k$  l'énergie turbulente totale, et les composantes résolue  $k_r$  et modélisée  $k_m$ . Néanmoins, un tel ratio n'est pas défini de manière anisotrope pour reconstruire les contraintes résolues cibles à partir des contraintes modélisées.

Si on utilise la variante isotrope du ALF, le ILF (*Isotropic Linear Forcing*) [25], qui s'écrit de la manière suivante :

$$\tilde{f}_i = \frac{1}{2\tau_r} \left( \frac{k_r^\dagger}{k_r} - 1 \right) u'_i, \quad (6.14)$$

l'utilisation du ratio d'énergie  $r_K$  serait suffisante, afin d'estimer l'énergie résolue cible  $k_r^\dagger$  (Eq. 6.13). Les quelques tests réalisés avec le ILF en ce sens n'ont cependant pas donné des résultats satisfaisants. En particulier, les contraintes normales résolues cibles ainsi reconstruites n'étaient pas toujours pertinentes, et l'absence de forçage du cisaillement turbulent fait défaut.

Par conséquent, il a été choisi de se limiter pour le moment à imposer les statistiques cibles du ALF à partir d'un calcul extérieur précurseur ou d'une zone RANS distante, et non pas d'évaluer localement les statistiques cibles au sein du même calcul.

## 6.3 Configuration étudiée

### 6.3.1 Présentation de la configuration

Pour appliquer et étudier le ALF, conjointement avec l'approche HTLES, l'écoulement sur les collines périodiques est utilisé. Les caractéristiques de l'écoulement et de la configuration géométrique ont été présentées dans la section 5.1.1. Ce cas test a déjà fait l'objet d'une étude approfondie dans le Chapitre 5, ce qui a notamment permis de valider la nouvelle formulation HTLES, et ses améliorations de proche paroi. Pour les calculs, une condition de périodicité était imposée dans la direction longitudinale  $x$ .

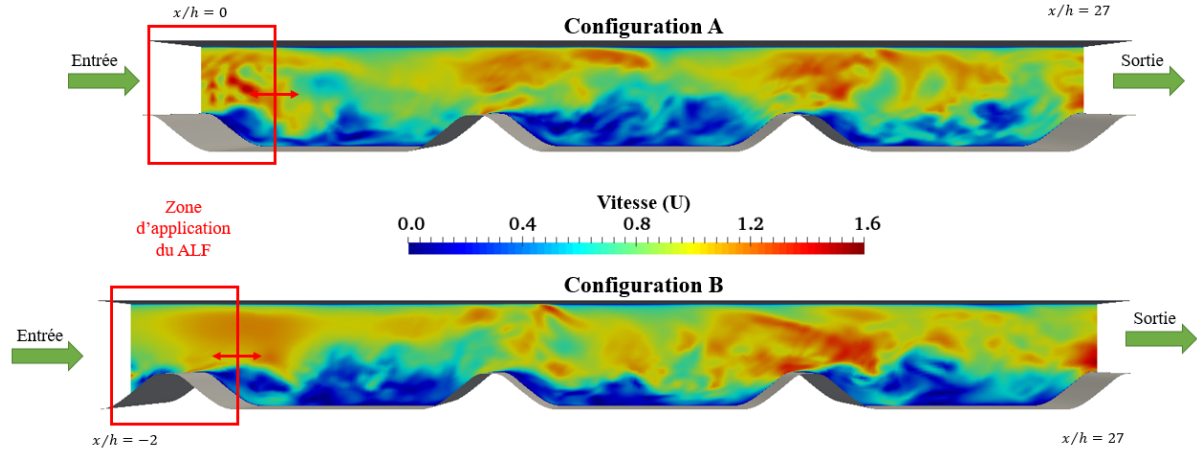


FIGURE 6.1 – Champs de vitesse de l’écoulement sur les collines périodiques. Configurations A et B étudiées dans ce chapitre. Domaine traité avec le modèle HTLES, et zone de forçage (avec la méthode ALF) en aval de l’entrée.

Au contraire, dans ce chapitre, l’écoulement est simulé dans un domaine représentant trois collines successives, avec une condition d’entrée au niveau de la première colline, et une condition de sortie pour la dernière (voir la Figure 6.1). Le domaine est entièrement traité avec le modèle  $k-\omega$  SST HTLES, en utilisant les améliorations de paroi décrites au Chapitre 4.

Dans cette configuration, on suppose que l’entrée du domaine correspond à l’interface entre une région amont traitée en mode RANS (non simulée), et une région avalée traitée avec le modèle hybride HTLES (simulée). En entrée, des champs statistiques sont donc imposés pour la vitesse, la pression et les variables turbulentes (conditions aux limites de Dirichlet). Il aurait été souhaitable d’utiliser des champs provenant d’un calcul RANS  $k-\omega$  SST. Cependant, les modèles RANS échouent à reproduire correctement l’écoulement sur les collines périodiques (comme montré dans la section 5.3.2). Ces conditions limites d’entrée sont donc calculées à partir d’un calcul HTLES périodique précurseur. Concernant la vitesse, il s’agit de la vitesse moyenne du calcul précurseur. Concernant les variables turbulentes  $k$  et  $\omega$ , celles-ci sont également imposées à partir du calcul HTLES précurseur :  $k = k_m + k_r$  et  $\omega = \psi\omega_m^*$ .

Le maillage déraffiné M1 (voir le tableau 5.1) est utilisé tout au long de ce chapitre, ayant validé dans le Chapitre 5 précédent que la HTLES donne des résultats satisfaisants avec cette résolution. Cela permet notamment de diminuer le coût de calcul, étant donné que le maillage est utilisé sur trois collines successives. Le calcul est initialisé avec un champ provenant d’un calcul précurseur RANS sur la même configuration. Les mêmes schémas numériques sont utilisés que ceux présentés dans la section 5.2.

Pour caractériser le comportement de la HTLES et l’influence du ALF, deux configurations sont utilisées par la suite, illustrée sur la Figure 6.1.

- **La configuration A** est la principale, avec un domaine global qui s’étend sur trois sous-domaines de collines périodiques ( $L_x = 27h$ ,  $x/h \in [0, 27]$ ). La condition d’entrée est appliquée au sommet de la première colline.
- **La configuration B** permet d’évaluer l’influence de la zone de forçage, en ne positionnant pas l’entrée du domaine de calcul au même endroit. L’entrée du domaine est positionnée à l’amont de la colline, de telle sorte que l’extension du domaine est  $L_x = 29h$ , avec  $x/h \in [-2, 27]$ .

### 6.3.2 Développement spatial de la HTLES

Dans un premier temps, afin d'être capable de caractériser l'influence du ALF, il est nécessaire d'évaluer le comportement du modèle HTLES sur la configuration principale A, sans bénéficier d'un quelconque forçage volumique. L'objectif est de déterminer si des fluctuations turbulentes résolues sont générées (malgré la condition d'entrée stationnaire, sans fluctuations), d'observer si les prédictions sont en accord avec les références, et dans ce cas, d'identifier la position à partir de laquelle des résultats corrects sont retrouvés.

Les références sont les résultats du calcul HTLES périodique validé sur le maillage M1 (résultats présentés dans le Chapitre 5). L'objectif est alors de comparer les résultats HTLES sur la nouvelle configuration (sans périodicité) par rapport aux références (avec périodicité). On rappelle que dans les deux configurations, les mêmes paramètres numériques sont utilisés, ainsi que le même maillage. Seules les conditions aux limites dans la direction longitudinale sont modifiées.

La Figure 6.2 montre que quasiment aucune fluctuation turbulente n'est résolue dans le premier sous-domaine ( $x/h \in [0, 9]$ ). Seules quelques structures turbulentes résolues apparaissent à l'amont de la deuxième colline ( $x/h = 8$ ). Dans le deuxième sous-domaine ( $x/h \in [9, 18]$ ), des fluctuations résolues sont générées au sein de la couche de cisaillement détachée et en aval du réattachement. Néanmoins, aucune structure turbulente n'est visible dans la moitié supérieure du domaine ( $y/h > 2$ ). Au niveau du troisième sous-domaine ( $x/h \in [18, 27]$ ), les fluctuations résolues se répandent progressivement dans tout le domaine, et le niveau d'énergie de référence est retrouvé à l'amont de la troisième colline ( $x/h = 26$ ).

Sur la Figure 6.3, on s'intéresse au ratio d'énergie estimé (Eq. 3.32) (en utilisant la fonction de protection  $f_s$ , Eq. 4.15), car c'est ce terme qui pilote l'hybridation du modèle. On observe que le ratio est largement surestimé jusqu'à la première moitié du deuxième sous-domaine ( $x/h < 13$ ), avec une zone RANS ( $r = 1$ ) plus étendue au niveau de la paroi inférieure. À partir de la seconde moitié du deuxième sous-domaine, le niveau de référence est retrouvé dans la partie inférieure du domaine, ce qui correspond à la zone où les fluctuations turbulentes sont progressivement générées. Un bon accord avec les références est retrouvé au niveau du troisième sous-domaine ( $x/h = 22$ ).

Sur la Figure 6.4, on observe que les prédictions du coefficient de frottement sur la paroi inférieure sont très dégradées par rapport aux références, dans le premier et le deuxième sous-domaine des collines périodiques. Des résultats corrects sont retrouvés à partir du troisième sous-domaine.

Concernant les profils de la vitesse moyennée sur la Figure 6.5, des observations similaires sont faites : les résultats sont très dégradés sur les deux premiers sous-domaines, et des profils en bon accord avec les références sont uniquement retrouvés sur la seconde moitié du troisième sous-domaine. On vérifie que, à l'entrée du domaine ( $x/h = 0$ ), le champ de vitesse imposé correspond bien aux références.

En conclusion, en utilisant le modèle HTLES de manière zonale pour traiter la configuration A de l'écoulement sur les collines périodiques, on note que le mode LES est progressivement activé en s'éloignant de l'entrée du domaine. Des fluctuations turbulentes résolues sont générées, sans nécessité de forçage supplémentaire, mais le niveau de référence n'est alors retrouvé qu'après avoir parcouru une distance correspondant à trois sous-domaines. Ainsi, les prédictions pour la vitesse et le coefficient de frottement sont très dégradées sur les deux premiers sous-domaines, ce à quoi il faudrait pouvoir remédier.

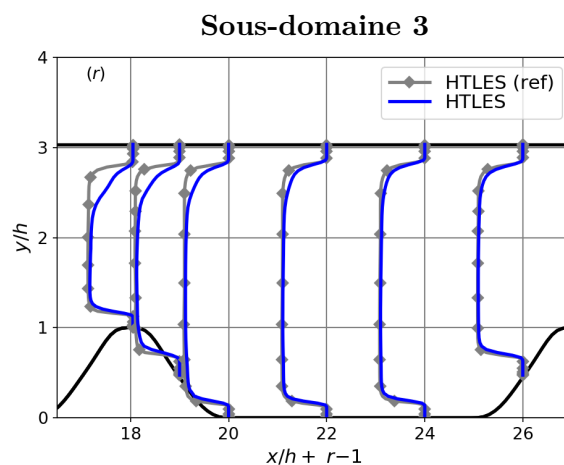
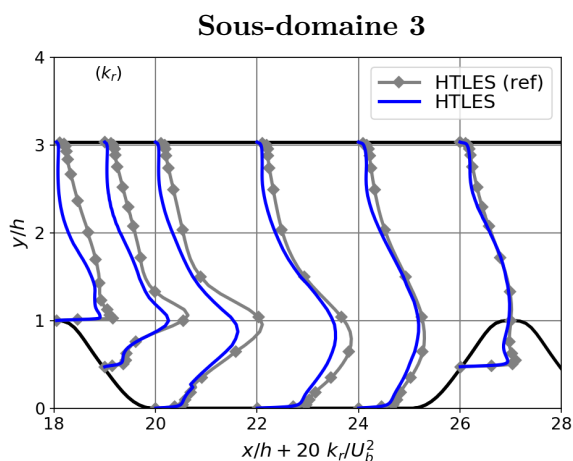
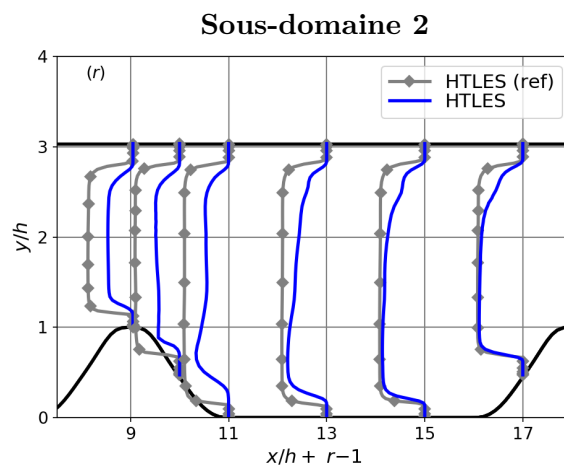
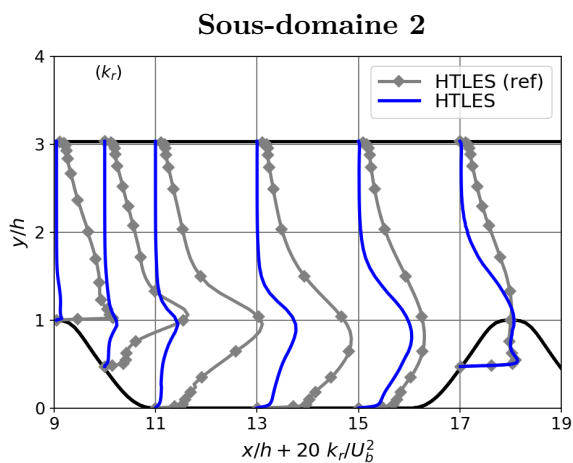
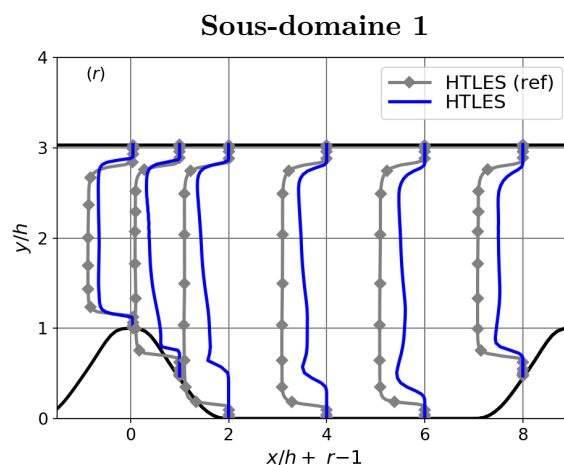
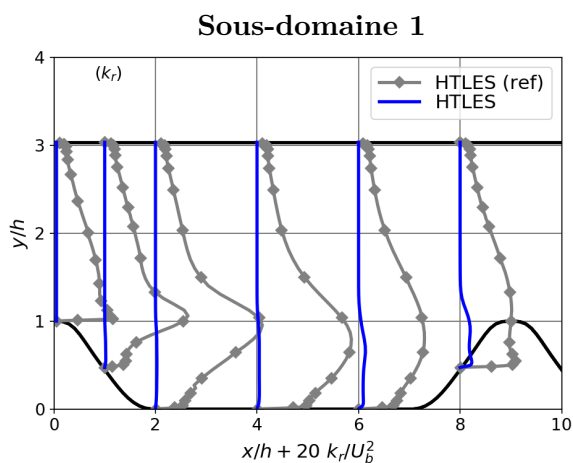


FIGURE 6.2 – Profils de l'énergie cinétique turbulente résolue, dans les différents sous-domaines de la configuration A. Référence HTLES, et calcul HTLES sans forçage.

FIGURE 6.3 – Profils du ratio d'énergie  $r$  estimé, dans les différents sous-domaines de la configuration A. Référence HTLES, et calcul HTLES sans forçage.

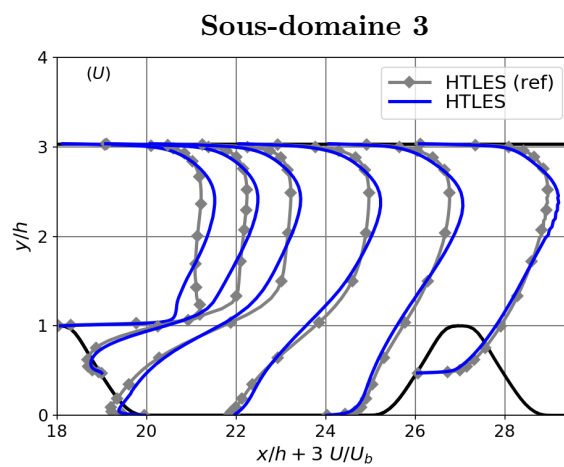
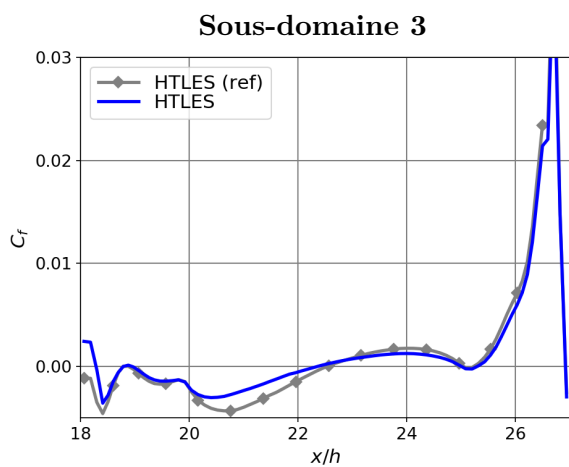
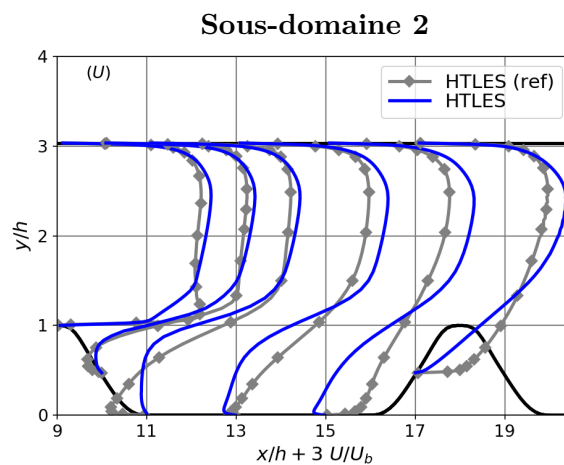
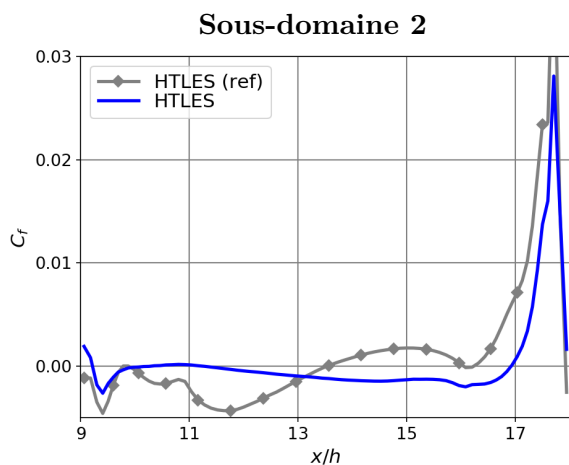
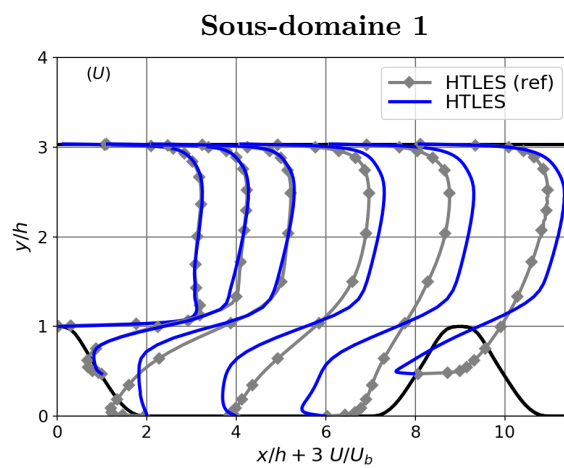
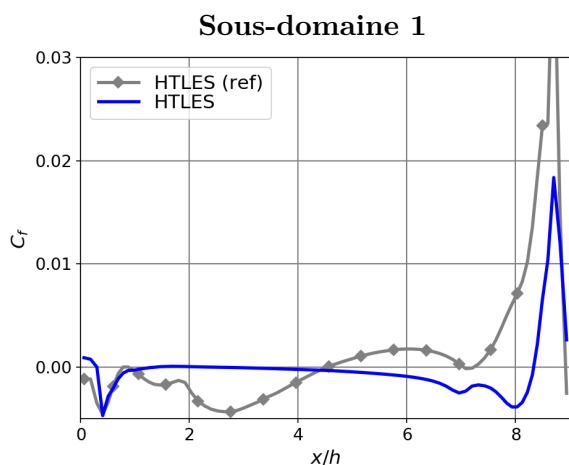


FIGURE 6.4 – Coefficient de frottement sur la paroi inférieure, dans les différents sous-domaines de la configuration A. Référence HTLES, et calcul HTLES sans forçage.

FIGURE 6.5 – Profils de la vitesse moyennée, dans les différents sous-domaines de la configuration A. Référence HTLES, et calcul HTLES sans forçage.

## 6.4 Développement spatial de la HTLES avec le ALF

### 6.4.1 Application du ALF

Les calculs HTLES sont effectués sur les configurations A et B de l'écoulement sur les collines, en utilisant le ALF [25] pour promouvoir l'apparition de fluctuations turbulentes résolues. La zone de forçage se trouve à l'entrée du domaine. Des études paramétriques sont réalisées, afin d'évaluer l'influence du coefficient  $C_r$  (Eq. 6.12) de la formulation du ALF, ainsi que l'influence de l'extension et de la position de la zone de forçage.

L'utilisation du ALF nécessite de définir des valeurs cibles pour la vitesse  $U_i^\dagger$  et les contraintes résolues  $u_i' u_j'^\dagger$ , ainsi que pour l'énergie totale  $k^\dagger$  et le taux de dissipation  $\varepsilon^\dagger$  qui interviennent dans la définition de l'échelle de temps de forçage  $\tau_r$  (Eq. 6.12). De la même manière que pour définir les conditions aux limites d'entrée (section 6.3.1), ces grandeurs sont estimées à partir du calcul HTLES périodique de référence (maillage M1).

Par ailleurs, une estimation de la vitesse filtrée moyenne  $\widetilde{U}_i$  et des contraintes résolues  $\overline{u_i' u_j'}$  est requise pour résoudre le système d'équations du ALF (Eq. 6.11), afin de calculer  $A_{ij}$  et  $B_i$ . Ces termes sont évalués au cours du calcul en utilisant le même filtre temporel exponentiel que celui de l'approche HTLES (Eq. 4.7, section 4.2), pour ce cas test statistiquement stationnaire (la taille de filtre temporel correspond à peu près à quinze temps de passage).

Dans la zone de forçage, le ALF est appliqué dans les régions traitées en mode LES, mais on souligne qu'il peut également être appliqué dans les régions de proche paroi traitées en mode RANS. En effet, l'utilisation de l'ICC, développée dans le Chapitre 4 (Eq. 4.11), permet de ne pas modifier le comportement RANS du modèle de fermeture en proche paroi, malgré l'apparition de structures résolues avec le ALF. Une étude de sensibilité est réalisée afin d'évaluer l'intérêt d'appliquer le ALF dans la zone RANS.

### 6.4.2 Étude de sensibilité au coefficient de l'approche de forçage

Dans cette section, les calculs HTLES sont réalisés en adoptant la mise en donnée suivante.

- (i) **Dans la formulation du ALF, différentes calibrations de l'échelle de temps de forçage  $\tau_r$  sont testées, avec le coefficient  $C_r \in \{0.01, 0.05, 0.1\}$ .**
- (ii) La zone forcée est étendue sur une distance de  $2h$  en aval de l'entrée, ce qui correspond à l'extension de la colline.
- (iii) La configuration A est utilisée (ce qui implique que le ALF est appliqué dans l'intervalle  $x_f/h = [0, 2]$ ).
- (iv) Le ALF est appliqué, y compris dans la région de proche paroi traitée en mode RANS.

La calibration  $C_r = 0.01$  correspond à celle définie par de Laage de Meux *et al.* [25] sur des applications en canal plan avec un modèle LES (Smagorinsky). D'autres calibrations sont testées afin de déterminer l'influence de ce coefficient. Cela est important ici car une méthode hybride est utilisée, ce qui signifie que la composante modélisée de l'énergie est prise en compte, et pas uniquement l'énergie résolue comme en LES.

L'influence du coefficient dans la définition de l'échelle  $\tau_v = C_v h / U_b$  n'est pas discutée ici. Dans leurs travaux, de Laage de Meux *et al.* [25] ont montré que ce coefficient n'a pas une influence sensible sur les résultats si la valeur de  $C_v$  reste dans un intervalle proche de la valeur calibrée  $C_v = 5$ .

D'un point de vue qualitatif, on observe sur la Figure 6.6 grâce au critère  $Q$  que, sans appliquer le ALF, des structures turbulentes résolues apparaissent dans le domaine, mais de façon très progressive (comme commenté dans la section 6.3.2). De plus, le niveau du ratio d'énergie varie sensiblement dans le premier et le deuxième sous-domaine (on retrouve bien les résultats de la Figure 6.3). Au contraire, l'utilisation du ALF à l'entrée du domaine permet de



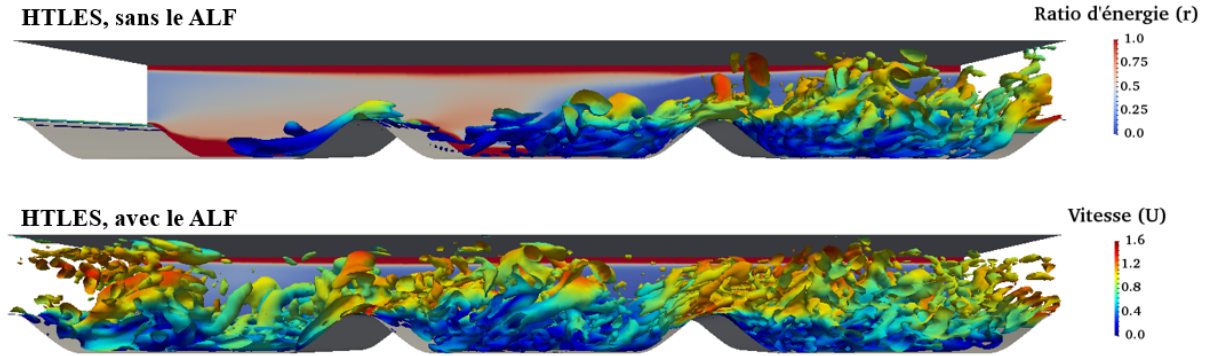


FIGURE 6.6 – Critère  $Q = 0.2U_b^2/h^2$  pour l'écoulement sur les collines périodiques dans la configuration A, et, sur le plan du fond, le ratio d'énergie estimé. Calculs HTLES sans forçage (haut), en appliquant le ALF dans l'intervalle  $x_f/h \in [0, 2]$  (bas).

générer des fluctuations turbulentes dès le premier sous-domaine des collines périodiques. En particulier, dans la zone de forçage ( $x_f/h \in [0, 2]$ ), des fluctuations turbulentes sont observées. Cependant, en aval de cette zone, les structures résolues ne sont plus visibles au niveau de la paroi supérieure (elles restent visibles au niveau de la paroi inférieure). Ces observations indiquent que, pour la configuration étudiée, il y a une réduction de l'énergie résolue en aval de la zone de forçage.

En analysant les profils de l'énergie résolue et de l'énergie totale dans le premier sous-domaine des collines périodiques (Figures 6.7 et 6.8), on note tout d'abord que l'énergie résolue est drastiquement augmentée grâce au ALF par rapport aux résultats HTLES sans forçage (section 6.3.2), et correspond globalement au niveau de référence. Dans la zone de forçage (profils dans l'intervalle  $x_f/h \in [0, 2]$ ), la coefficient  $C_r$  a une influence importante sur les résultats. Avec le coefficient  $C_r = 0.01$ , l'énergie turbulente résolue est relativement bien évaluée ( $x/h = 1$  et  $2$ ), mais l'énergie totale est surestimée, en raison de la prise en compte de la composante modélisée. Au contraire, avec le coefficient  $C_r = 0.05$ , des bons résultats sont obtenus pour l'énergie turbulente totale, tandis que l'énergie résolue est sous-estimée. Le coefficient  $C_r = 0.1$  introduit une sous-estimation globale. En aval de la zone de forçage, l'influence du coefficient n'est plus ressentie. Quelle qu'ait été la valeur de l'énergie résolue dans la zone de forçage, celle-ci se retrouve sous-estimée (à  $x/h = 6$  et  $8$ ). Cela traduit une perte d'énergie résolue en aval de la zone de forçage, qui est ensuite progressivement comblée. Au niveau de l'entrée ( $x/h = 0$ ), l'énergie résolue est sous-estimée, comme attendu, mais on souligne que l'énergie totale correspond bien à la référence car le niveau d'énergie modélisée imposé a été choisi égale à l'énergie totale de référence (comme si un calcul RANS était effectué dans la région en amont de la colline, voir la section 6.3.1).

Sur la Figure 6.9, on observe qu'à l'entrée, l'anisotropie de la turbulence n'est pas correctement reproduite, ce qui est attendu. Pour le reste, les mêmes conclusions sont obtenues lors de l'analyse des profils du tenseur de Reynolds. Les résultats sont plus en accord avec les références en utilisant le coefficient  $C_r = 0.05$ . La calibration  $C_r = 0.01$  entraîne une surestimation du tenseur de Reynolds, en raison de la sommation des composantes résolues et modélisées.

Ces résultats indiquent que, dans la zone de forçage, l'énergie et les contraintes modélisées sont surestimées par rapport aux références HTLES périodiques. Cela peut être lié au fait que toute l'énergie est modélisée à l'entrée du domaine, ce qui modifie la valeur du ratio d'énergie estimé  $r$ , ou au fait que l'utilisation du ALF dans le champ résolu devrait avoir une influence sur les équations de transport des variables de sous-filtre (l'analyse théorique n'a pas été effectuée ici).

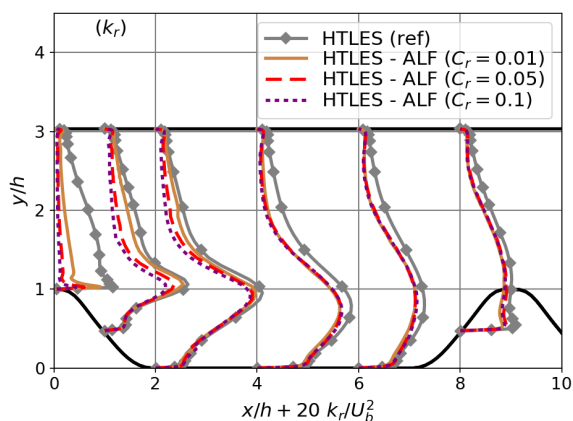


FIGURE 6.7 – Profils de l'énergie cinétique turbulente résolue, dans le premier sous-domaine de la configuration A. Référence HTLES, et calculs HTLES avec le ALF ( $x_f/h \in [0, 2]$ ).

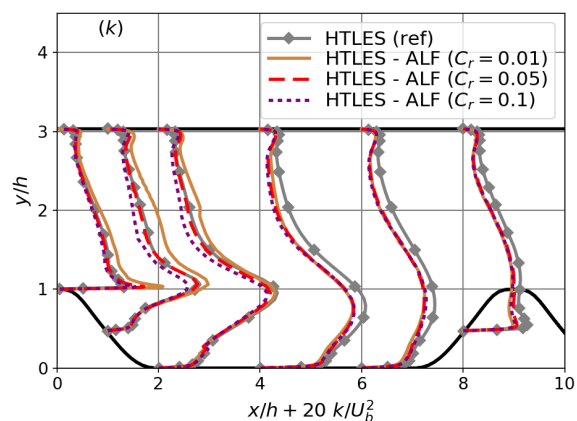


FIGURE 6.8 – Profils de l'énergie cinétique turbulente totale, dans le premier sous-domaine de la configuration A. Référence HTLES, et calculs HTLES avec le ALF ( $x_f/h \in [0, 2]$ ).

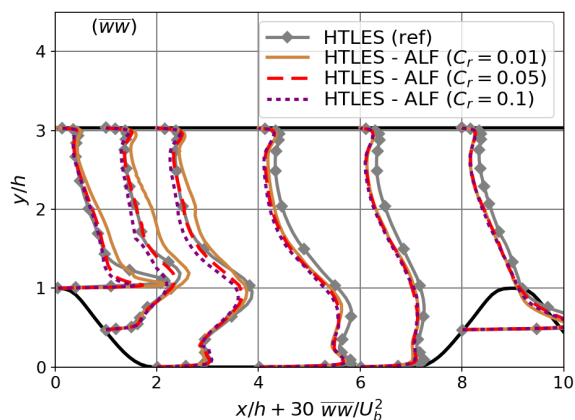
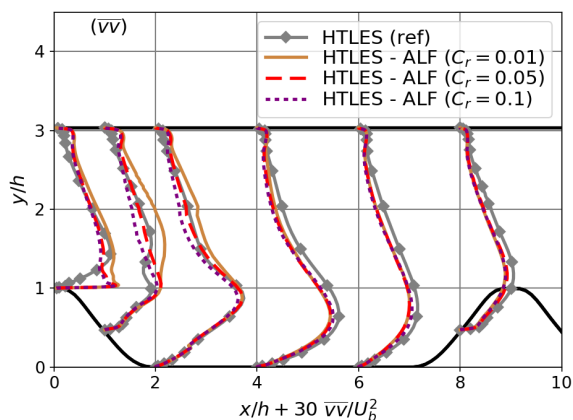
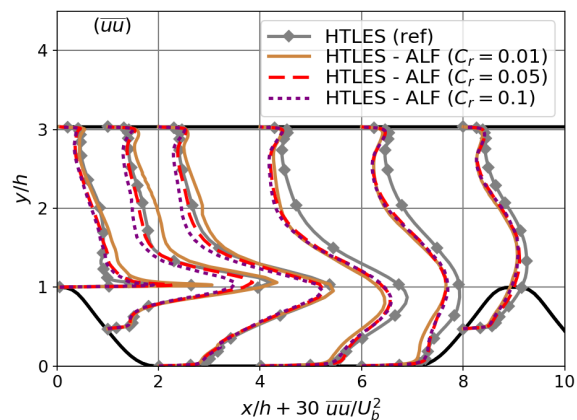
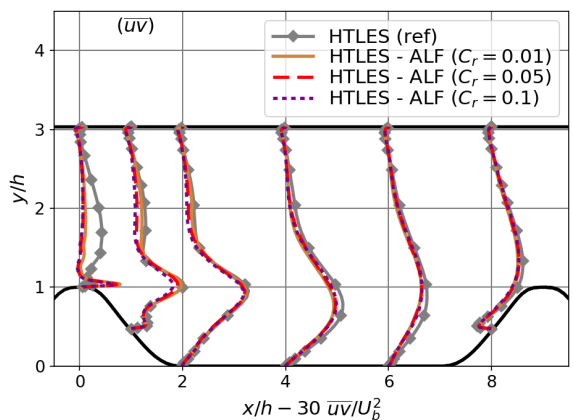


FIGURE 6.9 – Profils des composants du tenseur de Reynolds, dans le premier sous-domaine de la configuration A. Référence HTLES, et calculs HTLES avec le ALF ( $x_f/h \in [0, 2]$ ).

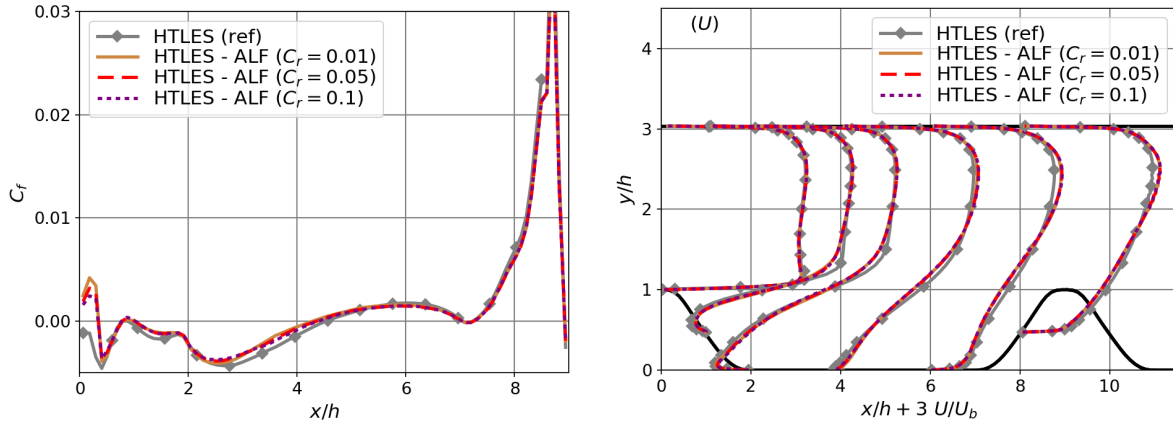


FIGURE 6.10 – Coefficient de frottement sur la paroi inférieure (gauche) et profils de la vitesse moyennée (droite), dans le premier sous-domaine de la configuration A. Référence HTLES, et calculs HTLES avec le ALF ( $x_f/h \in [0, 2]$ ).

En ce qui concerne la distribution du coefficient de frottement  $C_f$  sur la paroi inférieure et les profils de la vitesse moyennée (Figure 6.10), les résultats sont en bon accord avec les références, quelle que soit la calibration de  $C_r \in [0.01, 0.1]$ . On note quelques écarts sur les profils de vitesse, et à l'entrée du domaine pour  $C_f$ , mais le comportement global est très bien reproduit, en dedans et en dehors de la zone de forçage.

Finalement, l'utilisation du ALF à l'entrée du domaine de calcul permet de générer des fluctuations résolues, et ainsi de retrouver un bon niveau d'énergie turbulente. Cela se traduit par de bien meilleures prédictions pour le coefficient de frottement et les profils de vitesses par rapport au cas sans forçage (section 6.3.2). On choisit de conserver la calibration  $C_r = 0.05$  pour les études ultérieures, car c'est le coefficient qui permet de reproduire au mieux les profils de l'énergie turbulente totale et du tenseur de Reynolds dans la zone de forçage. On souligne néanmoins que cette calibration est possiblement dépendante du raffinement du maillage, et son universalité n'est donc pas assurée pour d'autres raffinements et d'autres cas tests. La calibration originale  $C_r = 0.01$  [25] remplit bien son office, en permettant à l'énergie résolue d'atteindre son niveau cible, mais cela ne paraît pas optimal dans le cadre hybride étant donné que la prise en compte de l'énergie modélisée implique alors une surestimation de l'énergie totale.

### 6.4.3 Étude de sensibilité à l'extension de la zone de forçage

Dans cette section, on cherche à étudier l'influence de l'extension de la zone de forçage. Les calculs HTLES sont réalisés en adoptant la mise en donnée suivante.

- (i) Dans la formulation du ALF, l'échelle  $\tau_r$  est calibrée avec le coefficient  $C_r = 0.05$ .
- (ii) **La zone forcée est étendue sur une distance variant de  $2h$  à  $9h$  (un sous-domaine entier) en aval de l'entrée ( $x_f/h = [0, 2]$ ,  $x_f/h = [0, 4]$ ,  $x_f/h = [0, 9]$ ).**
- (iii) La configuration A est utilisée.
- (iv) Le ALF est appliqué, y compris dans la région de proche paroi traitée en mode RANS.

En faisant varier l'extension de la zone de forçage en aval de l'entrée, on cherche à déterminer l'influence de ce paramètre. Cela permet notamment de vérifier si une extension trop restreinte ou trop large de la zone de forçage est préjudiciable.

Dans un premier temps, on s'intéresse aux profils d'énergie turbulente résolue et totale sur les Figures 6.11 et 6.12. Dans l'intervalle  $x/h \in [0, 2]$ , aucune différence n'est notée entre les profils, comme attendu. À  $x/h = 4$ , les profils d'énergie sont sous-estimés dans la configuration  $x_f/h = [0, 2]$ . Au contraire, avec un forçage s'exerçant au moins jusqu'à  $x_f/h = 4$ , des bons résultats sont obtenus. Pour les profils à  $x/h = 6$  et  $8$ , les mêmes résultats, en accord avec les références, sont obtenus pour la configuration  $x_f/h = [0, 4]$  et la configuration  $x_f/h = [0, 9]$ .

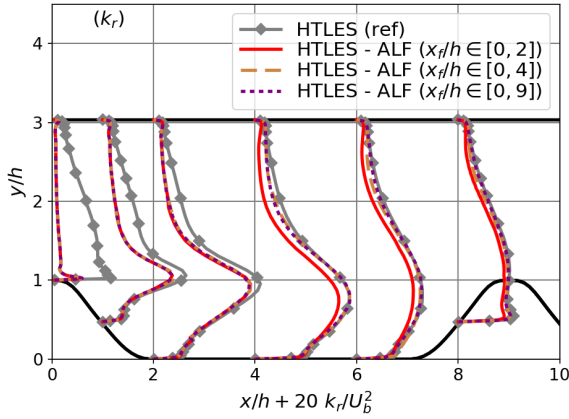


FIGURE 6.11 – Profils de l'énergie cinétique turbulente résolue, dans le premier sous-domaine de la configuration A. Référence HTLES, et calculs HTLES avec le ALF (différentes zones de forçage).

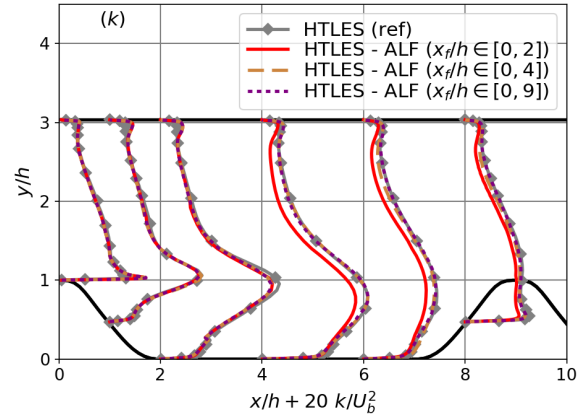


FIGURE 6.12 – Profils de l'énergie cinétique turbulente totale, dans le premier sous-domaine de la configuration A. Référence HTLES, et calculs HTLES avec le ALF (différentes zones de forçage).

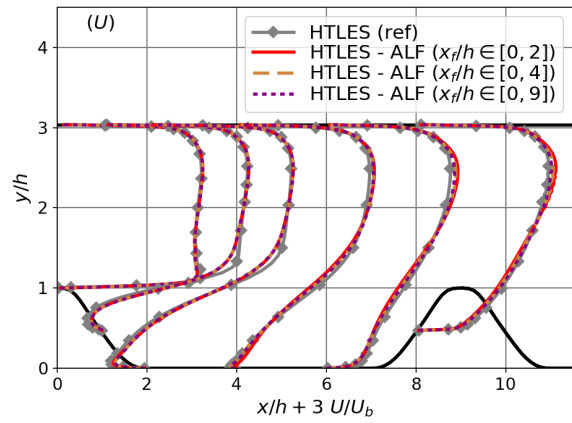
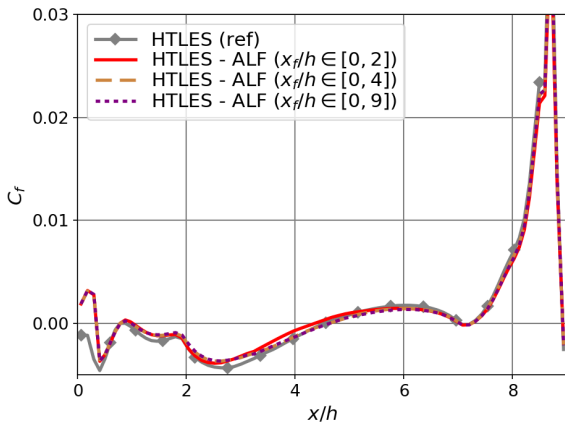


FIGURE 6.13 – Coefficient de frottement sur la paroi inférieure (gauche) et profils de la vitesse moyennée (droite), dans le premier sous-domaine de la configuration A. Référence HTLES, et calculs HTLES avec le ALF (différentes zones de forçage).

Ces résultats semblent indiquer que, si la zone de forçage n'est pas assez étendue, l'énergie résolue n'atteint pas la valeur cible, ce qui se traduit par une sous-estimation des profils d'énergie turbulente dans la zone en aval du forçage. Au contraire, si la zone de forçage est assez étendue, les valeurs cibles sont atteintes, et le niveau d'énergie reste stable. Le fait d'étendre la zone d'application du ALF ne paraît donc pas préjudiciable (on note ici l'intérêt d'avoir choisi  $C_r = 0.05$  dans la section précédente, car avec  $C_r = 0.01$ , des surestimations de l'énergie turbulente totale auraient été observées dans toute la zone de forçage).

Enfin, en ce qui concerne les grandeurs d'intérêts pour l'écoulement sur les collines périodiques, c'est-à-dire la distribution du coefficient de frottement sur la paroi inférieure et les profils de vitesse (Figure 6.13), des résultats en bon accord avec les références sont observés. Dans l'intervalle  $x/h \in [3, 7]$ , la distribution du coefficient de frottement sur la paroi inférieure est un peu mieux prédite lorsque la zone de forçage est étendue, mais les différences sur les profils de vitesse ne sont pas significatives.

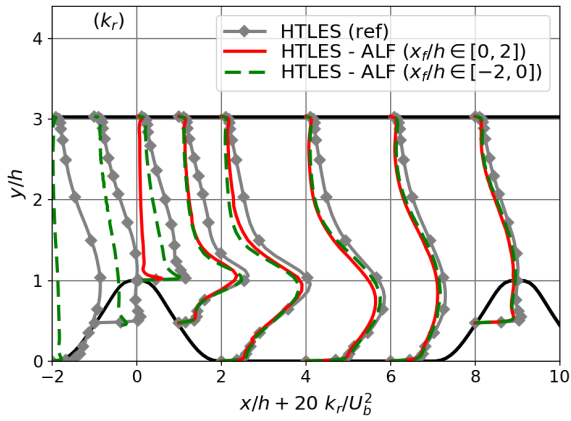


FIGURE 6.14 – Profils de l'énergie cinétique turbulente résolue, dans le premier sous-domaine des configurations A et B. Référence HTLES, et calculs HTLES avec le ALF (forçage sur  $x_f/h \in [0, 2]$  sur la configuration A et sur  $x_f/h \in [-2, 0]$  sur la configuration B).

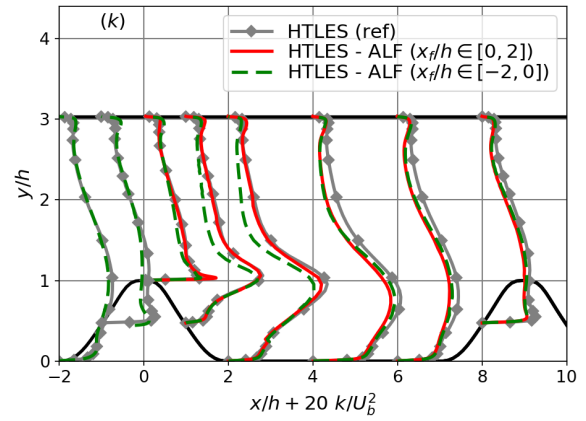


FIGURE 6.15 – Profils de l'énergie cinétique turbulente totale, dans le premier sous-domaine des configurations A et B. Référence HTLES, et calculs HTLES avec le ALF (forçage sur  $x_f/h \in [0, 2]$  sur la configuration A et sur  $x_f/h \in [-2, 0]$  sur la configuration B).

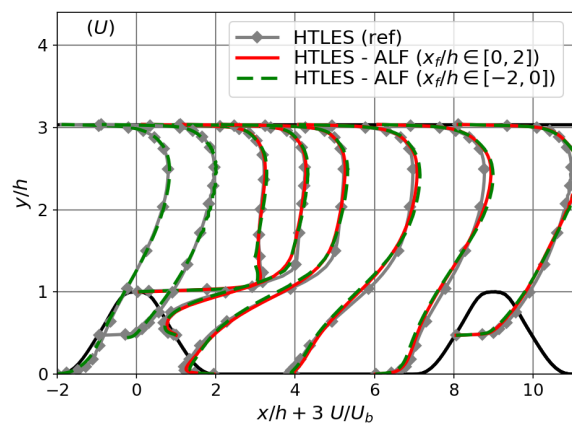
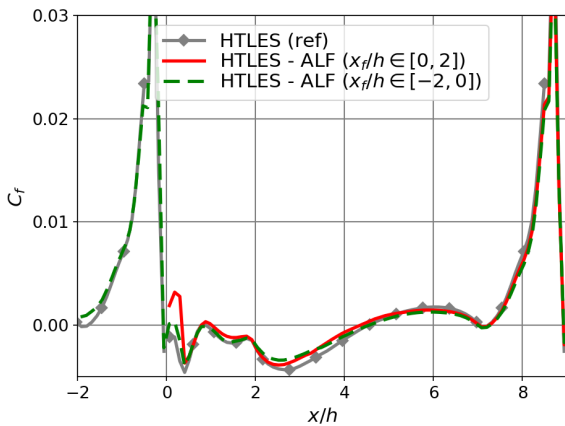


FIGURE 6.16 – Coefficient de frottement sur la paroi inférieure (gauche) et profils de la vitesse moyennée (droite), dans le premier sous-domaine des configurations A et B. Référence HTLES, et calculs HTLES avec le ALF (forçage sur  $x_f/h \in [0, 2]$  sur la configuration A et sur  $x_f/h \in [-2, 0]$  sur la configuration B).

#### 6.4.4 Étude de sensibilité à la position de la zone de forçage

Dans cette section, on étudie maintenant l'effet de la position de la zone de forçage. Les calculs HTLES sont réalisés en adoptant la mise en donnée suivante.

- (i) Dans la formulation du ALF, l'échelle  $\tau_r$  est calibrée avec le coefficient  $C_r = 0.05$ .
- (ii) La zone forcée est étendue sur une distance de  $2h$  en aval de l'entrée.
- (iii) **Les configurations A et B (voir la Figure 6.1) sont utilisées** ( $x_f/h = [0, 2]$  pour la configuration A, et  $x_f/h = [-2, 0]$  pour la configuration B).
- (iv) Le ALF est appliqué, y compris dans la région de proche paroi traitée en mode RANS.

L'utilisation de la configuration B permet d'évaluer l'influence de la position de la zone de forçage (en amont ou en aval de la colline ici). La calibration  $C_r = 0.05$  est utilisée pour retrouver



le bon niveau d'énergie turbulente totale, avec une zone de forçage étendue sur une distance  $2h$  en aval de l'entrée du domaine.

Sur les profils d'énergie turbulente (Figures 6.14 et 6.15), on observe que la composante résolue est sous-estimée dans la zone de forçage, mais l'énergie totale est qualitativement et quantitativement bien reproduite. Dans les deux configurations, le niveau d'énergie résolue diminue en aval de la zone de forçage. Cependant, pour les profils à partir de  $x/h = 4$  (hors des zones de forçage), des résultats similaires sont obtenus.

En s'intéressant à la distribution du coefficient de frottement sur la paroi inférieure et les profils de la vitesse moyennée (Figure 6.16), on ne remarque quasiment aucun écart sensible entre les résultats HTLES, pour les deux configurations. La seule différence réside au sommet de la colline, où le fait d'appliquer le ALF en amont de la colline permet de mieux reproduire les caractéristiques de l'écoulement dans la zone de séparation.

Finalement, les prédictions HTLES se montrent robustes vis-à-vis du choix de la position de la zone de forçage. Les mêmes observations sont faites concernant la calibration  $C_r = 0.05$  (bonne reproduction de l'énergie turbulente totale, mais pas de la composante résolue). L'extension réduite de la zone de forçage ne permet pas d'atteindre le niveau d'énergie résolue cible, et provoque une diminution de l'énergie résolue en aval. Cependant, les prédictions des grandeurs d'intérêts sont en bon accord avec les références.

#### 6.4.5 Étude de sensibilité à l'application du ALF dans la zone RANS de proche paroi

Dans cette section, les calculs HTLES sont réalisés en adoptant la mise en donnée suivante.

- (i) Dans la formulation du ALF, l'échelle  $\tau_r$  est calibrée avec le coefficient  $C_r = 0.05$ .
- (ii) La zone forcée est étendue sur une distance de  $2h$  en aval de l'entrée ( $x_f/h = [0, 2]$  pour la configuration A, et  $x_f/h = [-2, 0]$  pour la configuration B).
- (iii) Les configurations A et B (voir la Figure 6.1) sont utilisées.
- (iv) **Dans la zone de forçage, le ALF est appliqué dans tout le domaine, ou uniquement dans la région traitée en mode LES.** On utilise dans ce second cas le facteur  $c_r$  (Eq. 4.31) du modèle HTLES pour supprimer le forçage dans la zone RANS.

On se place tout d'abord dans la configuration B. Sur la Figure 6.17, dans la zone de forçage, on observe que le même niveau d'énergie turbulente résolue est retrouvé dans la région traitée en mode LES, pour les deux calculs. Au contraire, dans la région de proche paroi traitée en mode RANS, le niveau d'énergie résolue décroît lorsque le forçage n'est pas appliqué. Cet effet est notamment visible sur la face amont (profil à  $x/h = -1$ ) et au sommet de la colline ( $x/h = 0$ ). En aval de la zone de forçage, le pic d'énergie résolue au centre du canal se retrouve alors largement réduit par rapport au cas où le forçage est appliqué dans la zone RANS : la sous-estimation de l'énergie résolue au niveau du point de détachement entraîne une sous-estimation de l'énergie résolue au sein de la couche de cisaillement détachée. Les mêmes conclusions sont faites lors de l'analyse des profils d'énergie turbulente totale (Figure 6.18), ce qui montre que le niveau d'énergie modélisée n'est pas modifié.

Cette sous-estimation de l'énergie résolue lorsque le ALF n'est pas appliqué dans la zone RANS se traduit par une importante dégradation des prédictions pour le coefficient de frottement et pour les profils de vitesse (Figure 6.19), en aval de la première colline.

Si on se place maintenant dans la configuration A, l'étude des profils d'énergie turbulente résolue (Figure 6.20) ne montre pas de sensibilité à l'application du ALF dans la zone RANS au niveau de la paroi inférieure (une légère sensibilité est tout de même observée sur la paroi supérieure, et sur le profil  $x/h = 0$  à l'entrée du domaine). Cela est peut-être lié au fait que la recirculation du fluide dans cette région permet la pénétration de structures résolues en mode LES dans la zone RANS, mais une analyse plus poussée serait nécessaire pour étayer ces propos.

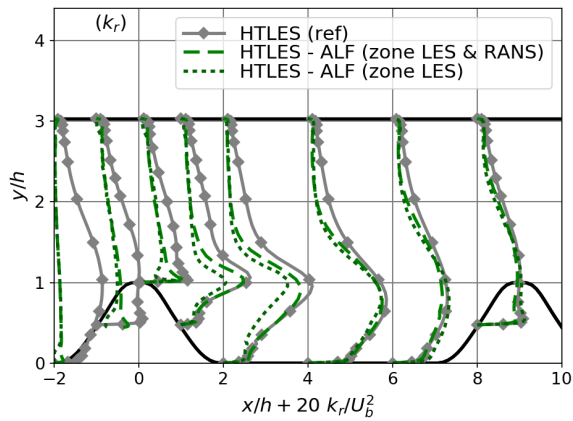


FIGURE 6.17 – Profils de l'énergie cinétique turbulente résolue, dans le premier sous-domaine de configuration B. Référence HTLES, et calculs HTLES avec le ALF ( $x_f/h = [-2, 0]$ ).

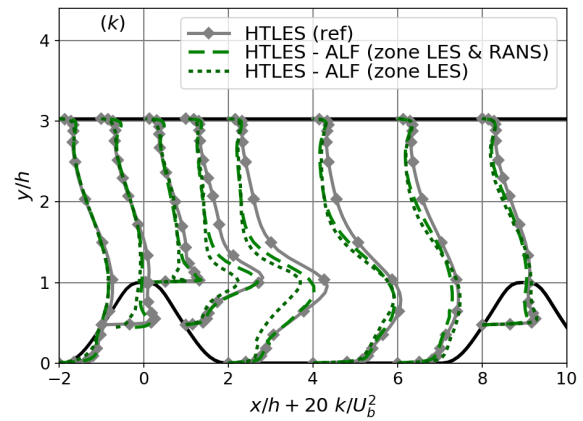


FIGURE 6.18 – Profils de l'énergie cinétique turbulente totale, dans le premier sous-domaine de la configuration B. Référence HTLES, et calculs HTLES avec le ALF ( $x_f/h = [-2, 0]$ ).

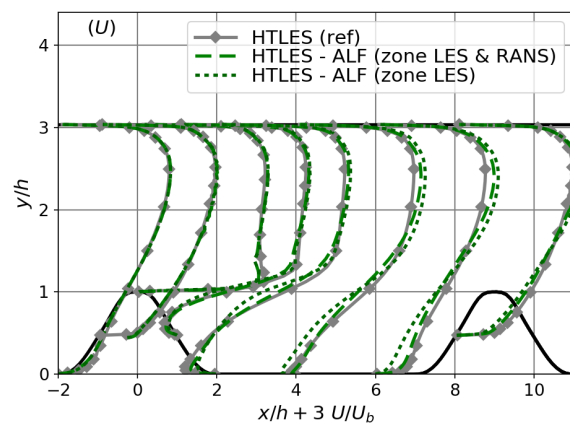
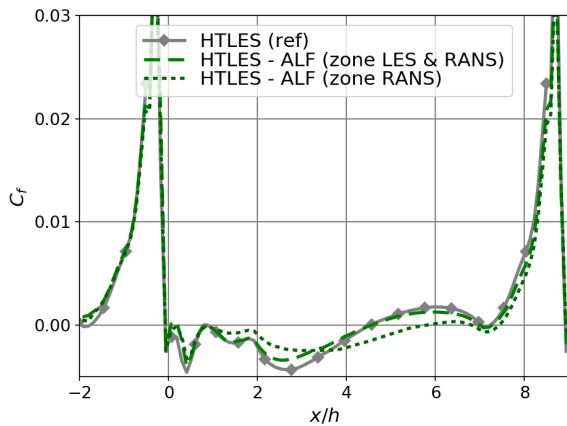


FIGURE 6.19 – Coefficient de frottement sur la paroi inférieure (gauche) et profils de la vitesse moyennée (droite), dans le premier sous-domaine de la configuration B. Référence HTLES, et calculs HTLES avec le ALF ( $x_f/h = [-2, 0]$ ).

Les bonnes prédictions des profils d'énergie turbulente impliquent que les grandeurs d'intérêts, le coefficient de frottement notamment, sont également reproduites de manière satisfaisante (Figure 6.21).

En conclusion, on note que, selon la configuration géométrique étudiée, le fait d'appliquer le ALF dans les zones RANS de proche paroi peut avoir une influence significative sur les prédictions. Cela est d'autant plus critique dans le cas d'une séparation de la couche limite turbulente, car la sous-estimation de l'énergie, initialement limitée à la zone de proche paroi, se retrouve alors dans la région LES éloignée des parois (par exemple, on peut penser que ce serait le cas pour l'écoulement décollé sur une marche descendante [59, 69] si la zone de forçage se trouve juste à l'amont de la marche). Étant donné qu'aucune dégradation des résultats n'est observée lorsque le ALF est appliqué de la même façon dans les zones RANS de proche paroi et les zones LES, il est conseillé de manière générale d'appliquer le forçage dans la zone de proche paroi traitée en mode RANS (ce qui, on le rappelle, est possible grâce à l'introduction de l'ICC dans le modèle).



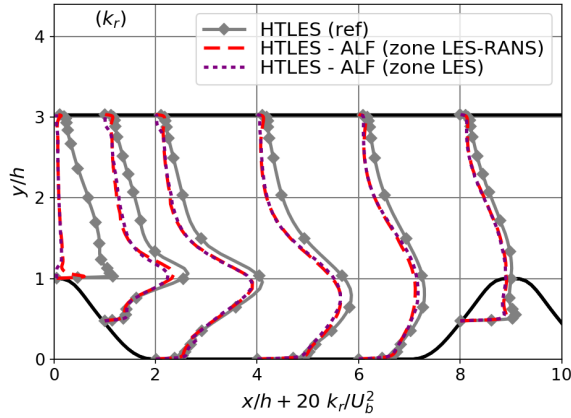


FIGURE 6.20 – Profils de l'énergie cinétique turbulente résolue, dans le premier sous-domaine de configuration A. Référence HTLES, et calculs HTLES avec le ALF ( $x_f/h = [-2, 0]$ ).

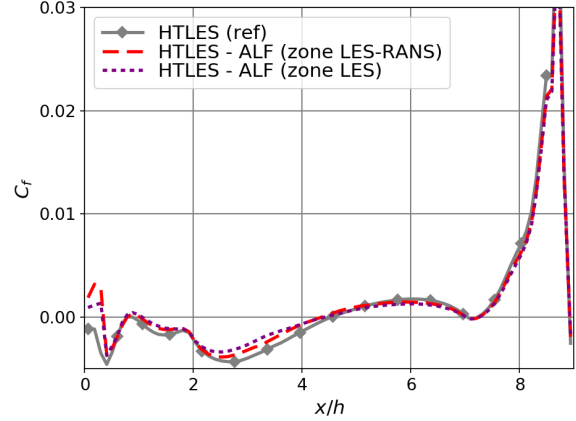


FIGURE 6.21 – Coefficient de frottement sur la paroi inférieure, dans le premier sous-domaine de la configuration A. Référence HTLES, et calculs HTLES avec le ALF ( $x_f/h = [-2, 0]$ ).

#### 6.4.6 Comparaison des résultats HTLES avec et sans le ALF

Pour finir, on compare les résultats HTLES à développement spatial, avec et sans le ALF. Pour le cas avec forçage, la mise en donnée est la suivante.

- (i) Dans la formulation du ALF, l'échelle  $\tau_r$  est calibrée avec le coefficient  $C_r = 0.05$ .
- (ii) La zone forcée est étendue sur une distance de  $2h$  en aval de l'entrée ( $x_f/h = [0, 2]$ ).
- (iii) La configuration A (Figure 6.1) est utilisée.
- (iv) Le ALF est appliqué, y compris dans la région de proche paroi traitée en mode RANS.

*Remarque* : bien que l'extension de la zone de forçage ( $x_f/h = [0, 2]$ ) ne soit pas optimale d'après les résultats présentés dans la section 6.4.3 (par rapport à  $x_f/h = [0, 4]$ , par exemple), on choisit ici de conserver cette mise en donnée, car elle correspondrait plus à une utilisation industrielle du ALF, pour laquelle l'extension de la zone de forçage serait potentiellement réduite.

Sur la Figure 6.22, alors que la distribution du coefficient de frottement sur la paroi inférieure est très mal reproduite dans les deux premiers sous-domaines en l'absence de forçage, l'utilisation du ALF permet de retrouver les résultats de référence dès l'entrée du domaine.

Concernant les profils de vitesse sur la Figure 6.23, les résultats sont en bon accord avec les références lorsque le ALF est utilisé. Des petits écarts sont tout de même observés en aval de la première colline, ainsi qu'au niveau du maximum de vitesse sur les profils ( $y/h = 2.5$ ). Ces différences restent cependant faibles comparées aux résultats sans forçage (qui montrent des écarts sensibles même au niveau du troisième sous-domaine).

Sur la Figure 6.24, un bon niveau d'énergie turbulente totale est retrouvé grâce au ALF. Même si les prédictions sont un peu sous-estimées en aval du forçage, les résultats restent acceptables et un accord parfait avec les références est retrouvé dès le deuxième sous-domaine.

Enfin, le comportement global du modèle HTLES est validé sur la Figure 6.25, en notant que le ratio d'énergie  $r$  est en bon accord avec les références à partir de  $x/h = 6$  ( $x/h = 2$  au niveau de la paroi inférieure). Même si le ratio d'énergie ne correspond pas exactement aux références en aval de l'entrée du domaine, on note que la taille de la zone RANS en paroi ( $r = 1$ ) est en bon accord avec les références, alors que sans forçage, la zone RANS est plus étendue, et la turbulence au coeur de l'écoulement n'est pas bien développée.

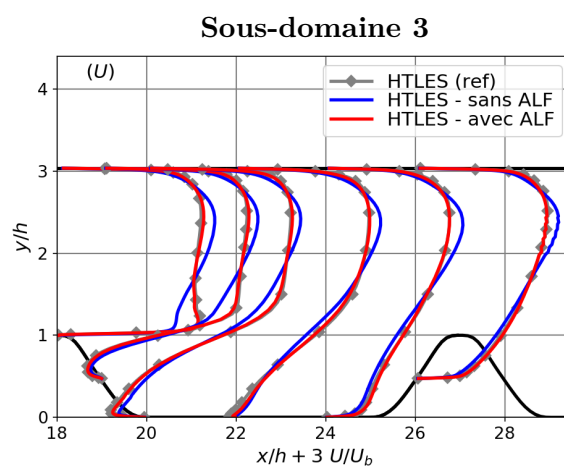
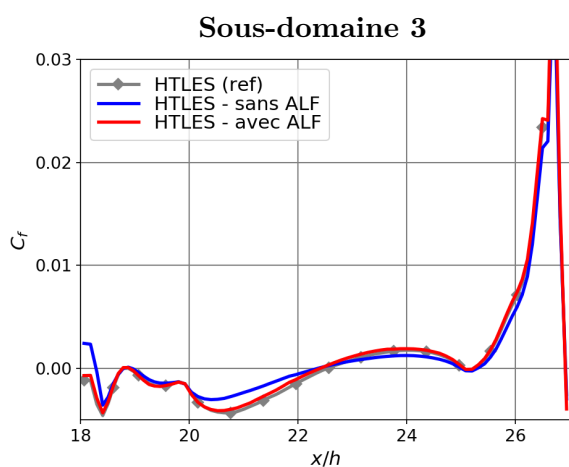
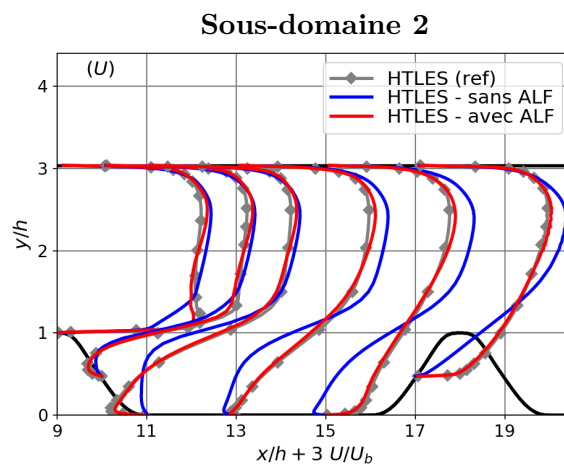
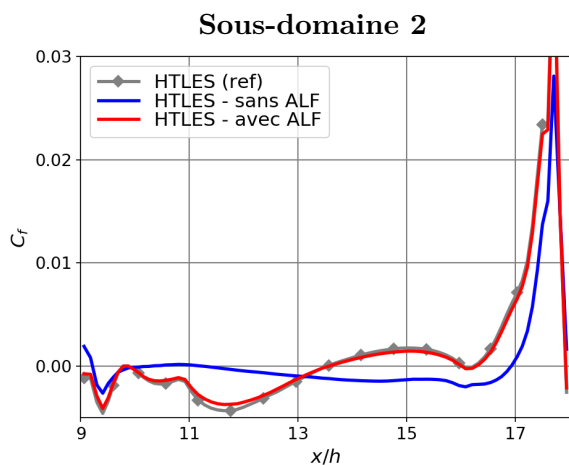
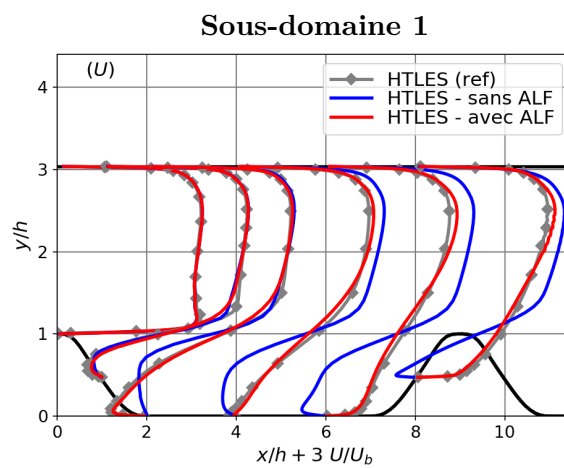
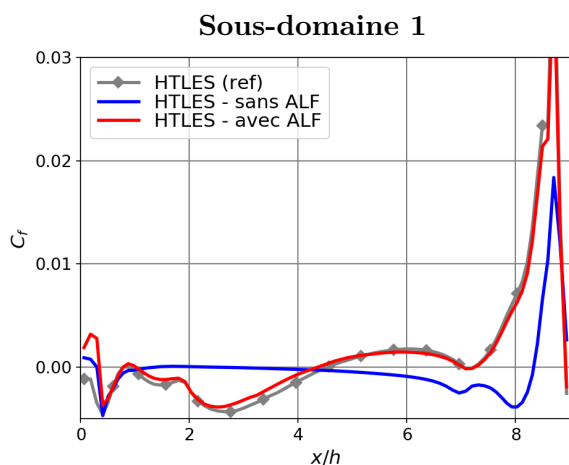


FIGURE 6.22 – Coefficient de frottement sur la paroi, dans les différents sous-domaines de la configuration A. Référence HTLES, et calculs HTLES avec et sans forçage.

FIGURE 6.23 – Profils de la vitesse moyennée, dans les différents sous-domaines de la configuration A. Référence HTLES, et calculs HTLES avec et sans forçage.

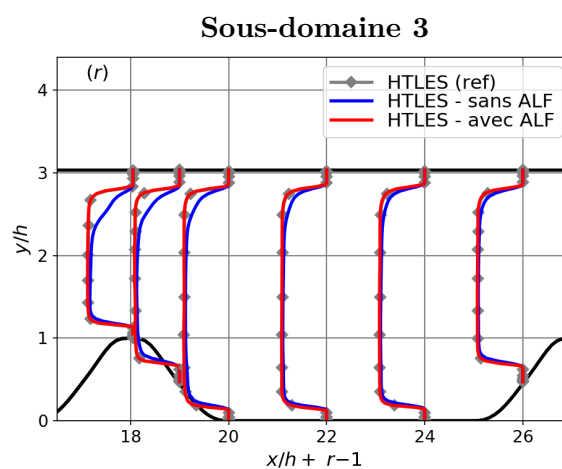
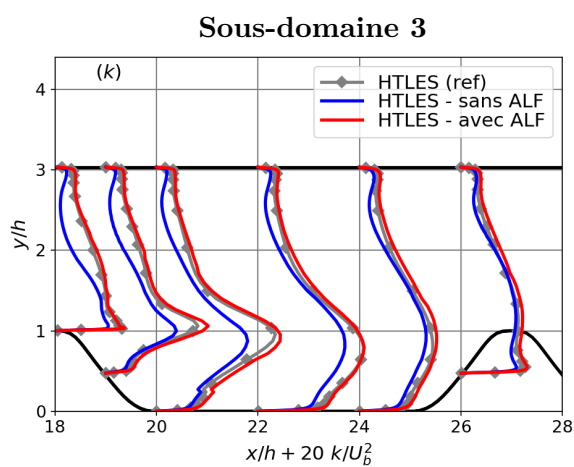
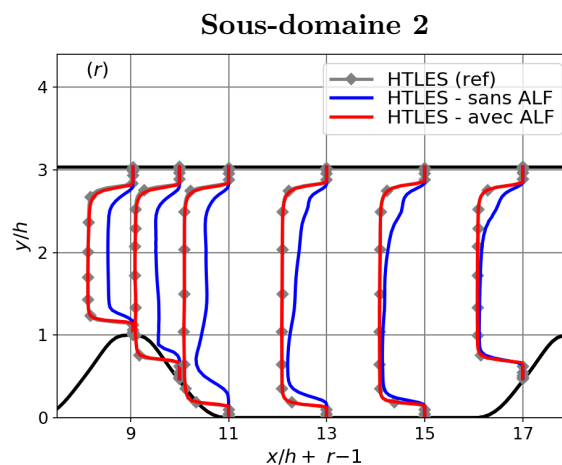
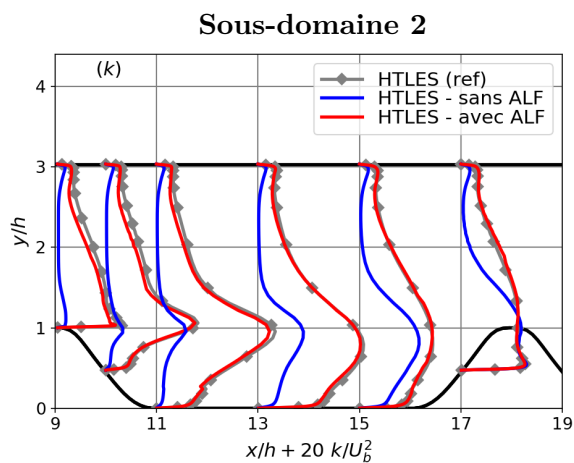
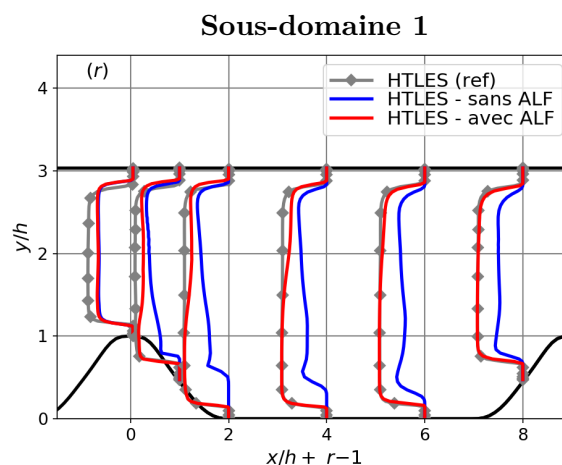
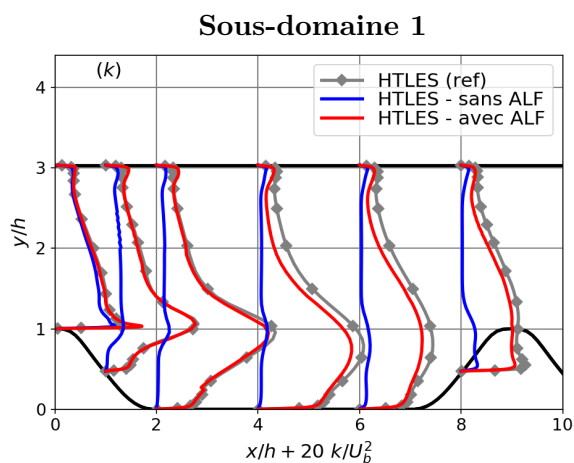


FIGURE 6.24 – Profils de l'énergie cinétique turbulente totale, dans les différents sous-domaines de la configuration A. Référence HTLES, et calculs HTLES avec et sans forçage.

FIGURE 6.25 – Profils du ratio d'énergie  $r$  estimé, dans les différents sous-domaines de la configuration A. Référence HTLES, et calculs HTLES avec et sans forçage.

## 6.5 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à une étude de faisabilité, afin d'évaluer l'intérêt du Forçage Linéaire Anisotrope dans le cadre d'une utilisation zonale du modèle HTLES. En prenant la configuration des collines périodiques comme référence, des études de sensibilité ont été effectuées afin de caractériser l'influence du ALF, avec différentes mises en données.

En conclusion de cette étude, on souligne que l'application du ALF s'avère très favorable pour utiliser le modèle HTLES de façon zonale. En aval de l'entrée du domaine, le ALF permet de promouvoir l'apparition de structures résolues, malgré le fait que les champs imposés soient statistiquement moyennés. Les conclusions à l'issue des études de sensibilité sont les suivantes.

- (i) La calibration  $C_r = 0.05$  diffère de la calibration originale  $C_r = 0.01$  [25], mais cela peut être attribué au fait qu'un modèle hybride, pour lequel la référence est l'énergie totale et pas seulement l'énergie résolue, est utilisé. La prise en compte de l'énergie modélisée (qui était négligée avec le modèle LES dans l'étude originale) implique qu'il faut changer la valeur de la constante pour retrouver un bon niveau d'énergie totale. Cette analyse mériterait d'être poursuivie afin de s'assurer que cette calibration est bien indépendante du maillage utilisé, et de la configuration étudiée. D'un point de vue théorique, l'influence du ALF sur les équations de transport des variables de sous-filtre reste à caractériser.
- (ii) Il est bénéfique d'étendre la zone de forçage tant que l'énergie résolue n'a pas atteint son niveau de référence. Ainsi, des prédictions correctes de l'énergie turbulente totale sont obtenues dans toute la zone de forçage (avec  $C_r = 0.05$ ). De plus, en aval cette zone, la diminution non physique de l'énergie résolue est alors atténuée.
- (iii) Quelle que soit la zone d'application du ALF, en amont ou en aval de la colline ici, des résultats similaires sont obtenus en aval de la zone de forçage.
- (iv) Dans le cadre hybride, il semble favorable d'appliquer le ALF dans la zone de proche paroi traitée en mode RANS. Pour le modèle HTLES, c'est l'utilisation de l'ICC qui permet de forcer l'apparition de structures résolues dans la zone RANS sans dégrader les prédictions du modèle de fermeture.

Dans la plupart des configurations considérées, les prédictions des grandeurs d'intérêts sont en bon accord avec les références, et ce dès l'entrée du domaine, améliorant significativement les résultats par rapport au calcul sans forçage. Ces résultats témoignent de la robustesse de la formulation du ALF, qui, sans nécessiter aucune modification (si ce n'est la calibration des constantes), a pu être appliqué conjointement avec le modèle HTLES.

Finalement, ces premiers résultats sont très prometteurs. L'utilisation zonale du modèle HTLES est envisageable, en appliquant le ALF pour générer des fluctuations résolues au niveau de l'interface d'un domaine amont traité en mode RANS vers un domaine aval traité avec la HTLES. Dans un cadre industriel, pour lequel la résolution des grandes échelles de l'écoulement n'est pas nécessaire en dehors de la zone d'intérêt, une version zonale de la HTLES permettrait de réduire encore considérablement le coût de calcul.



# Chapitre 7

## Conclusion

Les travaux menés dans cette thèse ont été motivés par des enjeux industriels pour le groupe EDF : dans certains gros composants des réacteurs à eau pressurisée, les pompes en particulier, des efforts hydrauliques instationnaires en paroi peuvent induire une fatigue mécanique. Ces efforts instationnaires sont liés à la turbulence des écoulements dans les circuits des réacteurs. L'ingénierie d'EDF souhaite donc disposer de moyens de calcul CFD afin d'estimer ces chargements.

Dans le cadre de la modélisation de la turbulence, les principaux critères à respecter pour répondre à la problématique industrielle sont, d'une part, que le modèle soit capable de capturer les structures cohérentes instantanées de l'écoulement, et, d'autre part, que le modèle conserve un coût de calcul en phase avec les attentes de l'ingénierie. Le formalisme statistique RANS, mature industriellement, ne permet pas de répondre au premier critère, tandis que la LES présente toujours un coût de calcul prohibitif.

La thèse présentée dans ce manuscrit s'intéresse donc aux approches hybrides RANS-LES, qui combinent les avantages des formalismes RANS et LES afin d'obtenir le meilleur compromis entre la capacité à capturer les structures instationnaires dans les régions d'intérêt de l'écoulement et un coût de calcul abordable. La démarche de cette thèse s'articule selon les étapes suivantes, qui correspondent globalement aux différents chapitres du manuscrit :

- (i) revue de l'état de l'art en modélisation de la turbulence,
- (ii) développement théorique d'une nouvelle formulation du modèle HTLES,
- (iii) analyse et amélioration du comportement de la HTLES dans les régions de proche paroi,
- (iv) validation de la formulation améliorée du modèle HTLES sur différents cas tests classiques,
- (v) évaluation de la capacité du modèle à prédire les efforts instationnaires en paroi,
- (vi) travaux préliminaires à une version zonale de la HTLES, en appliquant le terme de forçage ALF aux interfaces RANS-HTLES.

Les principaux résultats sont résumés ci-après.

(i) La revue de l'état de l'art en modélisation de la turbulence a tout d'abord permis d'identifier les modèles RANS les plus pertinents pour être associés à la méthode hybride HTLES. Dans le cadre des approches filtrées, les expressions des modèles LES de Smagorinsky et de Deardorff sont rappelées, servant par la suite de références pour comparer les formulations des approches hybrides considérées dans leur branche LES. Ces dernières sont également exprimées via un formalisme de filtrage, qui a notamment été utilisé lors du développement du modèle PITM.

À la suite des travaux de Fadai-Ghotbi *et al.* [36], l'intérêt d'utiliser un filtrage temporel est souligné, permettant de garantir la consistance entre les opérateurs RANS et LES dans un cadre plus général que le filtrage spatial. Cette analyse a abouti au développement du modèle TPITM. Cependant, le pilotage du niveau d'énergie résolue s'avère complexe avec cette formulation. Friess *et al.* [39] ont proposé une analyse théorique afin de transférer la fonction d'hybridation dans le terme de destruction de l'énergie modélisée, renforçant la robustesse de la formulation, tout en garantissant un critère d'équivalence entre les approches hybrides. Manceau [75] a alors

développé le modèle HTLES, qui a été choisi comme modèle de référence dans cette thèse en raison de ses fondations théoriques solides et de premiers résultats prometteurs [121].

(ii) À la suite des travaux de Friess *et al.* [39] et Manceau [75], le cadre théorique de développement de la HTLES (H-Equivalence, analyse des perturbations) a été repris, en considérant des hypothèses de développement plus cohérentes. Cela a permis de définir une nouvelle formulation de la HTLES dans le cadre d'une fermeture au premier ordre  $k-\varepsilon$ . L'approche hybride est ensuite dérivée, pour être appliquée aux modèles  $k-\omega$  SST et  $BL-\overline{v^2}/k$ . Des développements analytiques similaires ont été conduits dans le cadre spatial, permettant de proposer un modèle hybride fondé sur une modification d'échelle dans une formulation RANS  $k-\varepsilon$ , qui tend explicitement vers le modèle de Deardorff en mode LES. Ce résultat permet d'effectuer la jonction entre des modèles RANS et LES préexistants, et conforte par la même occasion la validité et la généralité des développements réalisés pour définir la nouvelle formulation HTLES.

(iii) L'analyse de la HTLES s'est tout d'abord focalisée sur son comportement dans la région de proche paroi, où a lieu la délicate transition du mode RANS au mode LES. Lors des tests préliminaires cependant, le comportement du modèle HTLES ne s'est pas avéré satisfaisant : en cause premièrement, un problème de consistance lié à la pénétration de fluctuations turbulentes résolues dans la région de proche paroi traitée en mode RANS. Le modèle a donc été amélioré en introduisant la contrainte de consistance interne (ICC), afin de retrouver le comportement exact du modèle de fermeture RANS dans la région de proche paroi (sans pour autant filtrer les structures turbulentes, indispensables à l'estimation des efforts instationnaires en paroi). Ensuite, l'importance de disposer d'un mécanisme de protection de la zone RANS en proche paroi pour réduire la sensibilité du modèle au maillage est également apparue. Une fonction de protection double a donc été développée, permettant de contrôler la position de la transition RANS-LES en fonction de paramètres physiques (le mode RANS est préservé jusqu'au début de la zone logarithmique) et de critères liés aux maillages (afin d'éviter que le mode LES ne soit activé lorsque les mailles sont trop anisotropes). L'utilisation conjointe de ses différentes améliorations permet d'obtenir de très bonnes prédictions en proche paroi, en réduisant notamment le phénomène de « zone grise » conduisant au *Log-Layer Mismatch*.

(iv) La validation du modèle HTLES a été effectuée sur trois cas tests ; configurations classiques pour les approches hybrides. La décroissance d'une turbulence homogène isotrope a permis de calibrer le principal coefficient de la HTLES, en retrouvant des valeurs en phase avec la théorie, et de valider que le spectre d'énergie est bien reproduit en mode LES. Ensuite, avec la formulation améliorée de la HTLES, des résultats très satisfaisants ont été obtenus sur l'écoulement en canal plan. Le raffinement des maillages dans les directions tangentielles est déterminé en fonction de paramètres géométriques, et non pas en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement comme en LES, ce qui permet de réduire drastiquement le coût de calcul. De plus, l'intérêt de disposer d'un bon modèle RANS en proche paroi est souligné. En ce qui concerne l'énergie turbulente en proche paroi, la qualité des prédictions du  $BL-\overline{v^2}/k$  est préservée. Enfin, l'écoulement sur les collines périodiques a permis de valider la robustesse de la formulation HTLES améliorée vis-à-vis du raffinement du maillage : les principales caractéristiques de l'écoulement ont été correctement reproduites en utilisant un maillage déraffiné par rapport aux critères LES.

(v) En se fondant sur la méthodologie et les références de Fröhlich *et al.* [40], qui ont estimé des spectres d'énergie sur le cas test des collines périodiques, une étude HTLES a été conduite dans le but de caractériser la part des fluctuations turbulentes résolues qui pénètrent dans la zone RANS de proche paroi. Il a notamment été montré que les basses fréquences des spectres d'énergie et de pression sont préservées. Dans le cadre d'une analyse plus quantitative des résultats, un critère a été proposé afin de déterminer la limite de ce domaine basse fréquence, dans lequel le contenu énergétique est correctement reproduit. En considérant des signaux temporels de pression au niveau de la paroi inférieure, dans la zone RANS, il a été montré que non seulement la moyenne, mais aussi la dispersion et les centiles supérieurs sont bien estimés. Il



est souligné que ces résultats sont conditionnés au fait que des fluctuations turbulentes résolues dans la zone LES pénètrent dans la zone RANS, et que la généralité de ces critères n'a pas été démontrée en dehors de la configuration étudiée. Cela renforce néanmoins l'intérêt pour les méthodes hybrides, dans le but d'estimer les efforts instationnaires sur des composants.

(vi) Dans le cadre d'une étude de faisabilité, la thèse s'est enfin intéressée à une utilisation zonale du modèle HTLES, dans le but d'imposer le mode RANS dans les régions où la résolution LES n'est pas nécessaire, permettant de diminuer le coût de calcul. Au niveau des interfaces RANS-LES, l'utilisation de méthode de couplage est nécessaire, en particulier pour promouvoir l'apparition de structures turbulentes résolues dans la zone LES. Le Forçage Linéaire Anisotrope (ALF) développé par de Laage de Meux *et al.* [24] a été appliqué sur le cas test des collines périodiques, pour lequel des conditions d'entrée statistiques stationnaires ont été imposées. Les résultats sont concluants : l'application du ALF permet de générer des fluctuations turbulentes résolues dès l'entrée du domaine, en bonne adéquation avec les références. Les prédictions des grandeurs d'intérêt sont alors considérablement améliorées par rapport à un calcul sans forçage. Les études de sensibilité ont permis d'identifier les paramètres les plus pertinents pour le forçage, dans un contexte hybride. Finalement, cette première étude de faisabilité est encourageante, permettant d'envisager une version zonale de la HTLES, associée au ALF, pour des applications industrielles.

En conclusion, un panel de résultats a été présenté dans le cadre du développement d'une nouvelle formulation de la HTLES, partant de l'analyse théorique de la formulation jusqu'à la validation du modèle, en passant par des améliorations de l'approche pour traiter les écoulements de proche paroi. Les travaux de cette thèse se sont efforcés de conserver un cadre théorique sous-jacent tout au long des développements, permettant de bien caractériser le comportement du modèle (identification claire des différentes variables transportées, contrôle de la transition RANS-LES, ...). Ce dernier point peut s'avérer décisif pour l'utilisation rationnelle de ce modèle dans un cadre industriel. Concernant les prédictions des efforts instationnaires en paroi, ainsi que l'utilisation zonale de la HTLES associée au ALF, même si les travaux effectués mériteraient d'être poursuivis et approfondis, les résultats présentés sont prometteurs.

## Perspectives

### Application industrielle de la HTLES

Suite aux travaux réalisés dans cette thèse, le premier objectif industriel serait d'effectuer des études avec la formulation améliorée de la HTLES. Des calculs sur des configurations de pompes sont notamment envisageables, ainsi que sur les assemblages combustibles ou les guides de grappes. Cela permettrait dans un premier temps de vérifier que la formulation finale du modèle est bien applicable (robustesse numérique, contrôle optimal de la transition RANS-LES, coût de calcul diminué) en dehors des configurations étudiées dans la thèse.

### Poursuite de la validation de la HTLES

L'étude bibliographique en début de thèse avait permis d'identifier de nombreux cas tests pour valider la formulation de la HTLES. La configuration du tandem de cylindres alignés dans la direction de l'écoulement [56, 85] a notamment été envisagée, en raison des spectres caractéristiques pour l'énergie et la pression sur le second cylindre. Ces données de référence auraient permis d'évaluer la capacité de la HTLES à prédire le détachement périodique en aval du premier cylindre et les efforts instationnaires en paroi du second. L'écoulement sur la marche descendante [59, 69] pourrait également être étudié, de manière similaire à la configuration des collines périodiques. En particulier, l'utilisation zonale de la HTLES associée au ALF sur ce cas test serait intéressante, en imposant la branche RANS du modèle en amont de la marche. Dans tous les cas, une validation plus extensive de la formulation HTLES permettrait de renforcer la capacité d'analyse des résultats dans un cadre plus général, ce qui est primordial pour justifier d'une application industrielle de la méthode.

### Études de configurations statistiquement instationnaires

Les principaux cas tests ayant servi à valider le modèle HTLES sont tous caractérisés par un écoulement statistiquement stationnaire, ce qui simplifie l'estimation des variables statistiquement moyennées au cours du calcul, avec une taille de filtre exponentiel définie aussi grande que possible. La problématique de la définition de la taille de filtre temporel adéquate dans un cadre statistiquement instationnaire (ou périodique) n'a pas été abordée dans cette thèse. Cependant, on note qu'une part des travaux de thèse de H. Afailal (thèse en cours au LMAP) est consacrée à la détermination des tailles de filtre optimales en HTLES, afin d'étudier des configurations de moteurs. À ce titre, il serait intéressant de tester leurs conclusions dans le cadre de la nouvelle formulation de la HTLES.

### Extension de la formulation HTLES à la thermique

Dans le cadre du projet MONACO\_2025 (section 1.2.2), la définition d'un modèle hybride RANS-LES au cours de cette thèse est l'un des premiers jalons du projet. Puis, des travaux de thèse sont poursuivis au LMAP, cherchant à étendre la validité de la méthode à des écoulements pour lesquels la prise en compte des effets thermiques et de la flottabilité est essentielle. Il a été montré dans le Chapitre 4 que l'utilisation du  $BL-\overline{v^2}/k$  comme modèle de fermeture pour la HTLES est bénéfique, en permettant notamment de mieux prédire les profils d'énergie cinétique turbulente en paroi. La modélisation correcte des flux thermiques turbulents en paroi étant sensible à la bonne prédiction de ce terme, il est pertinent de poursuivre l'extension à la thermique du modèle en utilisant la formulation  $BL-\overline{v^2}/k$  HTLES.

### Utilisation d'une fermeture au second ordre pour la HTLES

L'utilisation de modèle de fermeture au second ordre s'avérerait bénéfique dans de nombreuses situations, l'intérêt de ces modèles par rapport aux modèles au premier ordre ayant été souligné dans la section 2.2.3. Cependant, les quelques tests préliminaires réalisés en ce sens n'ont pas permis d'obtenir des résultats satisfaisants, notamment dans le cas de la décroissance d'une turbulence isotrope, pour lequel une remontée du spectre d'énergie aux petites échelles a été observée. La caractérisation de cette erreur, et sa correction, nécessitent une analyse approfondie. De plus, l'analyse théorique permettant de développer la nouvelle formulation de la HTLES s'est fondée sur une fermeture au premier ordre. Les développements analytiques devront donc être repris dans le cadre d'une fermeture au second ordre. On souligne néanmoins l'intérêt d'hybrider un modèle comme l'EB-RSM, afin d'améliorer les prédictions dans les zones de proche paroi traitées en mode RANS. De plus, l'hybridation de modèles au second ordre est également bénéfique dans le cadre d'études atmosphériques, et pourrait s'avérer particulièrement intéressante dans le cadre d'une application autoportante du ALF.

### Application autoportante du ALF dans une version zonale de la HTLES

Dans un contexte d'application du ALF au niveau d'une interface RANS-HTLES, il serait possible d'évaluer localement les statistiques cibles du forçage au cours de la simulation (section 6.2.3). Cela permettrait de s'affranchir du calcul précurseur ou du recyclage d'un profil cible. Pour ce faire, on pourrait chercher à évaluer les contraintes résolues cibles à partir des contraintes modélisées, en utilisant le ratio d'énergie estimé en HTLES. Même si ce ratio n'est pas défini de manière anisotrope, son utilisation pourrait s'avérer suffisante afin de promouvoir l'apparition de fluctuations turbulentes. Deux conditions semblent cependant importantes à respecter : le ratio d'énergie estimé à partir du maillage doit être en phase avec le ratio d'énergie effectif (ce qui est le cas avec le modèle  $BL-\overline{v^2}/k$  HTLES), et l'anisotropie des contraintes modélisées doit être bien évaluée par le modèle (ce qui nécessiterait plutôt une fermeture au second ordre).



La formulation améliorée de la HTLES, avec la ICC et la fonction de protection, s'écrit avec l'échelle de temps des échelles modélisées :

$$T_m = \frac{r}{\psi_\omega(r)} \frac{k_m + c_r k_r}{C_\mu k_m \omega_m^*}, \quad \text{avec } c_r = \begin{cases} 0 & \text{if } r = 1, \\ f_s & \text{if } r < 1, \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

la fonction d'hybridation :

$$\psi_\omega(r) = \frac{\beta_\omega}{C_\mu \gamma_\omega + r(\beta_\omega - C_\mu \gamma_\omega)}, \quad (\text{A.6})$$

le ratio d'énergie :

$$r = (1 - f_s) \times 1 + f_s \times \min[1, r_K], \quad (\text{A.7})$$

$$r_K = \frac{1}{\beta_0} \left( \frac{U_s}{\sqrt{k}} \right)^{2/3} \left( \omega_c \frac{k}{\varepsilon} \right)^{-2/3}, \quad (\text{A.8})$$

$$\omega_c = \min \left[ \frac{\pi}{dt}, \frac{U_s \pi}{\Delta} \right], \quad U_S = \mathcal{U} + \gamma \sqrt{k} \quad \text{et} \quad \Delta = \Omega_{\text{vol}}^{1/3}, \quad (\text{A.9})$$

et la fonction de protection double :

$$f_s = 1 - \tanh \left[ \max(\xi_K^{p_1}, \xi_D^{p_2}) \right], \quad (\text{A.10})$$

$$\xi_K = C_1 \frac{(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}}{d_w} \quad \text{et} \quad \xi_D = C_2 \frac{\Delta_{\max}}{d_w}, \quad \text{avec} \quad \Delta_{\max} = \max[\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z]. \quad (\text{A.11})$$

Les variables statistiquement moyennées qui interviennent dans le modèle ou dans la fonction de protection sont définies comme :

$$k = k_r + k_m, \quad (\text{A.12})$$

$$\varepsilon \stackrel{\text{hyp.}}{=} \varepsilon_m = C_\mu k_m \psi_\omega \omega_m^*, \quad (\text{A.13})$$

$$\mathcal{U} = \left( \sum_{i=1}^3 \widetilde{U}_i \right)^{1/2}, \quad (\text{A.14})$$

$$k_r = \frac{1}{2} \left( \widetilde{U}_i \widetilde{U}_i - \widetilde{U}_i \widetilde{U}_i \right), \quad k_m = \overline{k_{\text{sfs}}}, \quad \omega_m^* = \overline{\omega_{\text{sfs}}^*}, \quad (\text{A.15})$$

et elles sont estimées au cours du calcul avec un filtre temporel exponentiel (dont la taille de filtre correspond à plusieurs dizaines de temps de parcours pour les configurations statistiquement stationnaires étudiées dans cette thèse).

Les constantes du  $k-\omega$  SST sont définies par :

$$C = F_1 C_1 + (1 - F_1) C_2,$$

$$\begin{array}{cccccccccc} C_\mu & C_\kappa & a_1 & a_2 & \sigma_{k_1} & \sigma_{k_2} & \sigma_{\omega_1} & \sigma_{\omega_2} & \beta_{\omega_1} & \beta_{\omega_2} \\ 0.09 & 0.41 & 0.31 & 10 & 1/0.85 & 1 & 2 & 1/0.856 & 0.075 & 0.0828 \end{array} \quad (\text{A.16})$$

$$\gamma_{\omega_1} = \frac{\beta_{\omega_1}}{C_\mu} - \frac{C_\kappa^2}{\sigma_{\omega_1} \sqrt{C_\mu}}, \quad \gamma_{\omega_2} = \frac{\beta_{\omega_2}}{C_\mu} - \frac{C_\kappa^2}{\sigma_{\omega_2} \sqrt{C_\mu}}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma_{\omega_1}}{0.55} \quad \frac{\gamma_{\omega_2}}{0.44},$$

et les constantes de la méthode HTLES et de ses améliorations sont :

$$\begin{array}{cc|cc} \beta_0 & \gamma & C_1 & C_2 \\ 0.48 & 2/3 & 45 & 1.2 \end{array} \quad \begin{array}{cc} p_1 & p_2 \\ 8 & 6 \end{array}. \quad (\text{A.17})$$

## A.2 Modèle $BL-\overline{v^2}/k$ HTLES

Le modèle  $BL-\overline{v^2}/k$  HTLES (développé dans la section 3.2.7) s'écrit :

$$\nu_{\text{sfs}} = C_{\mu}^{\phi} \phi_{\text{sfs}} \frac{k_{\text{sfs}} T_{\text{sfs}}^*}{\psi}, \quad (\text{A.18})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial k_{\text{sfs}}}{\partial t} + \tilde{U}_j \frac{\partial k_{\text{sfs}}}{\partial x_j} = P_{\text{sfs}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\nu}{2} + \frac{\nu_{\text{sfs}}}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k_{\text{sfs}}}{\partial x_j} \right] - \frac{k_{\text{sfs}}}{T_m} - E_{\text{sfs}}, \\ \frac{\partial \varepsilon_{\text{sfs}}^*}{\partial t} + \tilde{U}_j \frac{\partial \varepsilon_{\text{sfs}}^*}{\partial x_j} = C_{\varepsilon_1} \frac{P_{\text{sfs}}}{T_{\text{sfs}}^*} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\nu}{2} + \frac{\nu_{\text{sfs}}}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial \varepsilon_{\text{sfs}}^*}{\partial x_j} \right] - C_{\varepsilon_2}^T \frac{\varepsilon_{\text{sfs}}^*}{T_{\text{sfs}}^*}, \\ \frac{\partial \phi_{\text{sfs}}}{\partial t} + \tilde{U}_j \frac{\partial \phi_{\text{sfs}}}{\partial x_j} = -\frac{\phi_{\text{sfs}}}{k_{\text{sfs}}} P_{\text{sfs}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\nu}{2} + \frac{\nu_{\text{sfs}}}{\sigma_{\phi}} \right) \frac{\partial \phi_{\text{sfs}}}{\partial x_j} \right] + \frac{2}{k_{\text{sfs}}} \frac{\nu_{\text{sfs}}}{\sigma_k} \frac{\partial \phi_{\text{sfs}}}{\partial x_j} \frac{\partial k_{\text{sfs}}}{\partial x_j} + f_{\text{sfs}}, \end{array} \right. \quad (\text{A.19})$$

$$P_{\text{sfs}} = \nu_{\text{sfs}} \tilde{S}^2 \quad \text{et} \quad E_{\text{sfs}} = C_{\varepsilon_3} (1 - \alpha)^3 \frac{k_{\text{sfs}}}{\varepsilon_{\text{sfs}}^*} 2\nu \nu_{\text{sfs}} \frac{\partial^2 \tilde{U}_i}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial^2 \tilde{U}_i}{\partial x_k \partial x_j}, \quad (\text{A.20})$$

$$C_{\varepsilon_2}^T = C_{\varepsilon_2} + (1 - c_r) \alpha^3 (C_{\varepsilon_4} - C_{\varepsilon_2}) \tanh \left( \left| \frac{1}{\varepsilon_{\text{sfs}}^*} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_{\text{sfs}}}{\sigma_k} \frac{\partial k_{\text{sfs}}}{\partial x_j} \right) \right|^{3/2} \right). \quad (\text{A.21})$$

Le terme source pour modéliser la redistribution et l'équation elliptique pour  $\alpha$  s'écrivent :

$$f_{\text{sfs}} = (1 - \alpha^3) f_{w\text{sfs}} + \alpha^3 f_{h\text{sfs}}, \quad (\text{A.22})$$

$$f_{w\text{sfs}} = -\frac{\psi \varepsilon_{\text{sfs}}^*}{2} \frac{\phi_{\text{sfs}}}{k_{\text{sfs}}} \quad \text{et} \quad f_{h\text{sfs}} = -\frac{\psi \varepsilon_{\text{sfs}}^*}{k_{\text{sfs}}} \left( C_{f1} - 1 + C_{f2} \frac{P_{\text{sfs}}}{\psi \varepsilon_{\text{sfs}}^*} \right) \left( \phi_{\text{sfs}} - \frac{2}{3} \right), \quad (\text{A.23})$$

$$\alpha - L_{\text{sfs}}^2 \nabla^2 \alpha = 1, \quad (\text{A.24})$$

et les échelles de longueur et de temps :

$$L_{\text{sfs}} = C_L \sqrt{\frac{k_{\text{sfs}}^3}{(\psi \varepsilon_{\text{sfs}}^*)^2} + C_{\eta}^2 r^3 \left( \frac{\nu^3}{\psi \varepsilon_{\text{sfs}}^*} \right)^{1/2}} \quad \text{et} \quad T_{\text{sfs}}^* = \sqrt{\frac{k_{\text{sfs}}^2}{\varepsilon_{\text{sfs}}^*} + C_T^2 \frac{\nu}{\psi \varepsilon_{\text{sfs}}^*}}. \quad (\text{A.25})$$

La formulation améliorée de la HTLES, avec la ICC et la fonction de protection, s'écrit avec l'échelle de temps des échelles modélisées :

$$T_m = \frac{r}{\psi(r)} \frac{k_m + c_r k_r}{\varepsilon_m}, \quad \text{avec} \quad c_r = \begin{cases} 0 & \text{if } r = 1, \\ f_s & \text{if } r < 1, \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

la fonction d'hybridation :

$$\psi(r) = \frac{C_{\varepsilon_2}}{C_{\varepsilon_1} + r(C_{\varepsilon_2} - C_{\varepsilon_1})}, \quad (\text{A.27})$$

le ratio d'énergie :

$$r = (1 - f_s) \times 1 + f_s \times \min[1, r_K], \quad (\text{A.28})$$

$$r_K = \frac{1}{\beta_0} \left( \frac{U_s}{\sqrt{k}} \right)^{2/3} \left( \omega_c \frac{k}{\varepsilon} \right)^{-2/3}, \quad (\text{A.29})$$

$$\omega_c = \min \left[ \frac{\pi}{dt}, \frac{U_s \pi}{\Delta} \right], \quad U_s = \mathcal{U} + \gamma \sqrt{k} \quad \text{et} \quad \Delta = \Omega_{\text{vol}}^{1/3}, \quad (\text{A.30})$$

et la fonction de protection double :

$$f_s = 1 - \tanh \left[ \max(\xi_K^{p1}, \xi_D^{p2}) \right], \quad (\text{A.31})$$

$$\xi_K = C_1 \frac{(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}}{d_w} \quad \text{et} \quad \xi_D = C_2 \frac{\Delta_{\max}}{d_w}, \quad \text{avec} \quad \Delta_{\max} = \max[\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z]. \quad (\text{A.32})$$

Les variables statistiquement moyennées qui interviennent dans le modèle ou dans la fonction de protection sont définies comme :

$$k = k_r + k_m, \quad (\text{A.33})$$

$$\varepsilon \stackrel{\text{hyp.}}{=} \varepsilon_m = \psi \varepsilon_m^*, \quad (\text{A.34})$$

$$u = \left( \sum_{i=1}^3 \overline{\tilde{U}_i} \right)^{1/2}, \quad (\text{A.35})$$

$$k_r = \frac{1}{2} \left( \overline{\tilde{U}_i \tilde{U}_i} - \overline{\tilde{U}_i} \overline{\tilde{U}_i} \right), \quad k_m = \overline{k_{\text{sfs}}}, \quad \varepsilon_m^* = \overline{\varepsilon_{\text{sfs}}^*}, \quad (\text{A.36})$$

et elles sont estimées au cours du calcul avec un filtre temporel exponentiel (dont la taille de filtre correspond à plusieurs dizaines de temps de parcours pour les configurations statistiquement stationnaires étudiées dans cette thèse).

Les constantes du  $BL-\overline{v^2}/k$  sont définies par :

$$\frac{C_\mu \quad C_{\varepsilon 1} \quad C_{\varepsilon 2} \quad C_{\varepsilon 3} \quad C_{\varepsilon 4} \quad \sigma_k \quad \sigma_\varepsilon \quad \sigma_\phi \quad C_T \quad C_L \quad C_\eta \quad C_{f1} \quad C_{f2}}{0.22 \quad 1.44 \quad 1.83 \quad 2.3 \quad 0.4 \quad 1.0 \quad 1.5 \quad 1.0 \quad 4.0 \quad 0.164 \quad 0.75 \quad 1.7 \quad 0.9}, \quad (\text{A.37})$$

et les constantes de la méthode HTLES et de ses améliorations sont :

$$\frac{\beta_0 \quad \gamma}{0.42 \quad 2/3} \left| \frac{C_1 \quad C_2 \quad p_1 \quad p_2}{45 \quad 1.2 \quad 8 \quad 6} \right. \quad (\text{A.38})$$

## Annexe B

# Analyse des perturbations pour la formulation $k-\varepsilon$ HTLES

### Sommaire

---

<b>B.1</b> Turbulence homogène . . . . .	<b>200</b>
<b>B.2</b> Turbulence inhomogène . . . . .	<b>201</b>

---

Dans le cadre de la nouvelle formulation HTLES définie dans le chapitre 3, l'analyse des perturbations est effectuée dans le contexte d'une turbulence homogène ou inhomogène, en faisant l'hypothèse  $\delta\varepsilon = 0$ , comme expliqué dans la section (3.1.4). Les systèmes d'équations pour la TPITM (H0) et la HTLES (H1') sont les suivants :

$$(H0) \begin{cases} \nu_m = C_\mu \frac{k_m^2}{\varepsilon_m}, \\ \frac{Dk_m}{Dt} = P_m + D_{km} - \varepsilon_m, \\ \frac{D\varepsilon_m}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon_m}{k_m} P_m + D_{\varepsilon m} - C_{\varepsilon 2}^P \frac{\varepsilon_m^2}{k_m}, \end{cases} \quad (H1') \begin{cases} \nu_m = C_\mu \frac{k_m^2}{\psi \varepsilon_m^*}, \\ \frac{Dk_m}{Dt} = P_m + D_{km} - \psi \varepsilon_m^*, \\ \frac{D\varepsilon_m^*}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon_m^*}{k_m} P_m + D_{\varepsilon m}^* - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_m^{*2}}{k_m}, \end{cases}$$

et on rappelle la relation entre les termes de destruction pour les deux systèmes d'équations, en considérant également que le taux de dissipation résolue est négligeable :

$$\varepsilon \stackrel{\text{hyp.}}{=} \varepsilon_m = \psi \varepsilon_m^*. \quad (B.1)$$

De la même manière que lors des développements originaux (section 3.1.4), la question qui se pose une fois les systèmes d'équations (H0) et (H1') définis est d'identifier la relation entre les fonctions d'hybridation  $C_{\varepsilon 2}^P$  et  $\psi$ . Dans ce contexte, le critère de *H-Equivalence* défini par Friess *et al.* [39], présenté dans la section 3.1.3, est utilisé, en considérant le même postulat.

La *H-Equivalence* entre les systèmes (H0) et (H1') est assurée si les deux méthodes tendent vers la même fermeture quand la taille de filtre tend vers l'infini, et renvoient la même répartition de l'énergie turbulente pour une taille de filtre donnée. Ainsi, en utilisant la fermeture  $k-\varepsilon$ , l'objectif de l'analyse est d'identifier la relation entre les fonctions d'hybridation  $C_{\varepsilon 2}^P$  et  $\psi$ , de telle sorte que le modèle renvoie la même valeur pour l'énergie modélisée  $k_m$ .

L'analyse des perturbations est conduite en partant de la limite RANS pour laquelle la *H-Equivalence* est assurée ( $k = k_m$ ). Des perturbations infinitésimales des fonctions d'hybridation  $\delta C_{\varepsilon 2}^P$  et  $\delta\psi$  sont introduites dans les systèmes (H0) et (H1'), qui restent équivalents tant que la même variation infinitésimale de l'énergie modélisée  $\delta k_m$  est obtenue.



Comme expliqué dans la section 3.1.4, Friess *et al.* [39] ont montré que l'analyse des perturbations peut être réalisée dans trois situations particulières. Nous nous plaçons ici dans le cadre des deux situations les plus restrictives, la plus générale ayant été traitée dans la section 3.2.3.

*Remarque* : l'analyse n'est effectuée ici que pour le système d'équations (H1') de la nouvelle formulation HTLES. L'analyse pour le système (H0) de la TPITM est la même que lors des développements originaux de Friess *et al.* [39]. Les principaux résultats seront donc seulement rappelés pour la TPITM.

## B.1 Turbulence homogène

Nous nous plaçons ici sous les hypothèses les plus restrictives : une turbulence homogène, en supposant que le taux de dissipation n'est pas affecté par la modification de la répartition d'énergie ( $\delta\varepsilon = 0$ ). Dans cette configuration, l'échelle  $k_m/\varepsilon_m^*$  tend asymptotiquement vers un équilibre, de telle sorte qu'en repartant du système (H1'), on peut écrire :

$$\frac{Dk_m/\varepsilon_m^*}{Dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad (C_{\varepsilon 1} - 1) \frac{P_m}{\varepsilon_m^*} + \frac{k_m}{\varepsilon_m^{*2}} D_{\varepsilon m}^* + \left( \psi - C_{\varepsilon 2} - \frac{D_{km}}{\varepsilon_m^*} \right) = 0. \quad (\text{B.2})$$

Pour une turbulence homogène, on obtient  $D_{km} = D_{\varepsilon m}^* = 0$ , et avec un coefficient de corrélation généralisé  $\gamma$  [39], on peut réécrire le terme de production comme :

$$\gamma = \frac{P_m}{k_m S}, \quad (\text{B.3})$$

où  $S = \sqrt{\tilde{S}^2} = \sqrt{2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij}}$ . L'équation (B.2) devient alors :

$$\frac{\gamma(C_{\varepsilon 1} - 1) S k_m}{C_{\varepsilon 2} - \psi} \frac{1}{\varepsilon_m^*} = 1, \quad (\text{B.4})$$

En HTLES, on fait apparaître la fonction d'hybridation  $\psi$  au dénominateur dans l'expression précédente :

$$\frac{\gamma(C_{\varepsilon 1} - 1) S k_m}{C_{\varepsilon 2} - \psi} \psi = 1,$$

et en différenciant l'équation, on obtient (en rappelant que  $\delta\varepsilon = \delta(\psi\varepsilon_m^*) = 0$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{\delta\gamma}{\gamma} + \frac{\delta\psi}{C_{\varepsilon 2} - \psi} + \frac{\delta S}{S} + \frac{\delta k_m}{k_m} - \frac{\delta(\psi\varepsilon_m^*)}{\psi\varepsilon_m^*} + \frac{\delta\psi}{\psi} &= 0 \\ \Rightarrow \delta\psi &= -\frac{\psi}{C_{\varepsilon 2}} (C_{\varepsilon 2} - \psi) \left( \frac{\delta\gamma}{\gamma} + \frac{\delta S}{S} + \frac{\delta k_m}{k_m} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

En TPITM, Friess *et al.* [39] ont obtenu :

$$\delta C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}} = (C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}} - 1) \left( \frac{\delta\gamma}{\gamma} + \frac{\delta S}{S} + \frac{\delta k_m}{k_m} \right), \quad (\text{B.6})$$

En appliquant le postulat de la *H-Equivalence*, c'est-à-dire que la même modification  $\delta k_m$  de l'énergie modélisée conduit aux mêmes variations infinitésimales des statistiques ( $\delta S$ ,  $\delta\gamma$ ), si les systèmes (H0) et (H1') sont *H-Equivalent* pour des valeurs initiales de  $C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}$  et  $\psi$ , alors ils restent équivalents si les perturbations infinitésimales  $\delta C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}$  et  $\delta\psi$  vérifient la relation :

$$\frac{\delta C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}}{C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}} - 1} = -\frac{\delta\psi}{(C_{\varepsilon 2} - \psi)\psi/C_{\varepsilon 2}}, \quad (\text{B.7})$$

Enfin, cette expression est intégrée entre l'état RANS ( $r = 1$ ,  $C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}} = C_{\varepsilon 2}$ ,  $\psi = 1$ ) et un état LES arbitraire, de telle sorte que :

$$\begin{aligned}
& \int_{C_{\varepsilon 2}}^{C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}} \frac{1}{x-1} dx = - \int_1^{\psi} \frac{1}{(C_{\varepsilon 2} - y)y/C_{\varepsilon 2}} dy \\
\Rightarrow & \int_{C_{\varepsilon 2}}^{C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}} \frac{1}{x-1} dx = - \int_1^{\psi} \left( \frac{1}{C_{\varepsilon 2} - y} + \frac{1}{y} \right) dy \\
\Rightarrow & \ln(C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}} - 1) = \ln\left(\frac{C_{\varepsilon 2} - \psi}{\psi}\right) \\
\Rightarrow & \psi = \frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}}.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Ainsi, on retrouve bien la même expression que celle obtenue à l'issue de l'analyse des perturbations dans le cadre le plus général, présentée dans la section 3.2.3.

## B.2 Turbulence inhomogène

Nous nous plaçons ici sous des hypothèses un peu plus restrictives que celles traitées dans la section 3.2.3 : une turbulence inhomogène dans une conduite droite, en supposant que le taux de dissipation n'est pas affecté par la modification de la répartition d'énergie ( $\delta\varepsilon = 0$ ). Dans cette situation, les deux équations de transport pour  $k_m$  et  $\varepsilon_m^*$  sont à l'équilibre le long des lignes de courant, ce qui permet de réécrire le système d'équations (H1') comme :

$$\begin{cases} 0 = P_m - D_{k_m} - \psi\varepsilon_m, \\ 0 = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon_m^*}{k_m} P_m + D_{\varepsilon_m^*} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_m^{*2}}{k_m}, \end{cases} \tag{B.9}$$

Des perturbations infinitésimales  $\delta\psi$  de  $\psi$  sont introduites dans le système d'équations, ce qui génère des variations infinitésimales de la solution. La relation suivante est obtenue :

$$\begin{cases} 0 = \delta P_m + \delta D_{k_m} - \delta(\psi\varepsilon_m^*), \\ 0 = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon_m^*}{k_m} P_m \left( \frac{\delta P_m}{P_m} + \frac{\delta\varepsilon_m^*}{\varepsilon_m^*} - \frac{\delta k_m}{k_m} \right) + \delta D_{\varepsilon_m^*} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_m^{*2}}{k_m} \left( 2 \frac{\delta\varepsilon_m^*}{\varepsilon_m^*} - \frac{\delta k_m}{k_m} \right). \end{cases} \tag{B.10}$$

Pour traiter les termes de diffusion, la diffusivité scalaire usuelle est utilisée, avec les coefficients  $\sigma_k$  et  $\sigma_\varepsilon$  :

$$\begin{cases} D_{k_m} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\nu_m}{\sigma_k} \frac{\partial k_m}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{C_\mu}{\sigma_k} \frac{k_m^2}{\psi\varepsilon_m^*} \frac{\partial k_m}{\partial x_k} \right), \\ D_{\varepsilon_m^*} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\nu_m}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon_m^*}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{k_m^2}{\psi\varepsilon_m^*} \frac{\partial \varepsilon_m^*}{\partial x_k} \right), \end{cases} \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} \frac{\delta D_{k_m}}{D_{k_m}} = 3 \frac{\delta k_m}{k_m}, \\ \frac{\delta D_{\varepsilon_m^*}}{D_{\varepsilon_m^*}} = 2 \frac{\delta k_m}{k_m} + \frac{\delta\varepsilon_m^*}{\varepsilon_m^*}, \end{cases} \tag{B.11}$$

En remplaçant ensuite  $\delta P_m$  dans la seconde équation par son expression dans la première équation, et en notant que :

$$\delta(\psi\varepsilon_m) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta\psi}{\psi} = - \frac{\delta\varepsilon_m}{\varepsilon_m}, \tag{B.12}$$

il est possible d'isoler  $\delta\psi$  pour obtenir :

$$\delta\psi = -3 \left( \frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 1}} - \psi \right) \frac{C_{\varepsilon 1}}{C_{\varepsilon 2}} \psi \frac{\delta k_m}{k_m}. \tag{B.13}$$

En TPITM, Friess *et al.* [39] ont obtenu :

$$\delta C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}} = 3 \left( \frac{C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}}{C_{\varepsilon 1}} - 1 \right) C_{\varepsilon 1} \frac{\delta k_m}{k_m}. \quad (\text{B.14})$$

En supposant une même modification de  $\delta k_m$ , on obtient alors :

$$\frac{\delta C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}}{3(C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}} - C_{\varepsilon 1})} = - \frac{\delta \psi}{3 \left( \frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 1}} - \psi \right) \frac{C_{\varepsilon 1}}{C_{\varepsilon 2}} \psi}. \quad (\text{B.15})$$

Enfin, cette expression est intégrée entre l'état RANS ( $r = 1$ ,  $C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}} = C_{\varepsilon 2}$ ,  $\psi = 1$ ) et un état LES arbitraire, de telle sorte que :

$$\begin{aligned} \int_{C_{\varepsilon 2}}^{C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}} \frac{1}{x - C_{\varepsilon 1}} dx &= - \int_1^{\psi} \frac{1}{\left( \frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 1}} - y \right) \frac{C_{\varepsilon 1}}{C_{\varepsilon 2}} y} dy \\ \Rightarrow \int_{C_{\varepsilon 2}}^{C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}} \frac{1}{x - C_{\varepsilon 1}} dx &= - \int_1^{\psi} \left( \frac{1}{\frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 1}} - y} + \frac{1}{y} \right) dy \\ \Rightarrow \ln \left[ \frac{C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}}{C_{\varepsilon 1}} - 1 \right] &= \ln \left[ \left( \frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 1}} - \psi \right) \frac{1}{\psi} \right] \\ \Rightarrow \psi &= \frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Ainsi, on retrouve bien la même relation entre  $\psi$  et  $C_{\varepsilon 2}^{\mathcal{P}}$  que celle obtenue à l'issue de l'analyse des perturbations dans le cadre le plus général, présentée dans la section 3.2.3, et que celle obtenue dans la section précédente pour une turbulence homogène.

*Remarque* : les principales différences entre l'analyse de perturbation effectuée dans cette section et celle effectuée dans le manuscrit (section 3.2.3), réside dans le fait que l'on suppose ici  $\delta\varepsilon = \delta(\psi\varepsilon_m^*) = 0$ , ce qui permet de simplifier le terme de production dans l'équation (B.10). Au contraire, dans la configuration la plus générale, il est nécessaire de faire une hypothèse de viscosité turbulente pour être capable d'écrire le terme de production (Eq. 3.25). De plus, les expressions des variations infinitésimales des termes de diffusion (Eq. B.11) sont simplifiées par rapport à celles définies dans la configuration la plus générale (Eq. 3.24).

# Bibliographie

- [1] Cahier de validation de code\_saturne, 2020.
- [2] H. Afailal, J. Galpin, A. Velghe, and R. Manceau. Development and validation of a hybrid temporal LES model in the perspective of applications to internal combustion engines. *Oil Gas Sci. Technol.*, 74, 2019.
- [3] F. Archambeau, N. Méchitoua, and M. Sakiz. Code Saturne : A finite volume code for the computation of turbulent incompressible flows-Industrial applications. *International Journal on Finite Volumes*, 1(1) :<http-www>, 2004.
- [4] N. Ashton, R. Prosser, and A. Revell. A hybrid numerical scheme for a new formulation of delayed detached-eddy simulation (DDES) based on elliptic relaxation. In *Journal of Physics : Conference Series*, volume 318, page 042043. IOP Publishing, 2011.
- [5] C. Bailly and G. Comte-Bellot. Turbulence (cnrs éditions). *Sciences et techniques de l'ingénieur*, 2003.
- [6] J. Bardina, J. Ferziger, and W. Reynolds. Improved subgrid-scale models for large-eddy simulation. In *13th fluid and plasmadynamics conference*, page 1357, 1980.
- [7] S. Benhamadouche. *Large eddy simulation with the unstructured collocated arrangement*. The University of Manchester (United Kingdom), 2007.
- [8] Y. Bentaleb and R. Manceau. A hybrid temporal LES/RANS formulation based on a two-equation subfilter model. In *Seventh International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena*. Begel House Inc., 2011.
- [9] F. Billard and D. Laurence. A robust  $k-\varepsilon-\overline{v^2}/k$  elliptic blending turbulence model applied to near-wall, separated and buoyant flows. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 33(1) :45–58, 2012.
- [10] M. Breuer and B. Jaffrézic. New reference data for the hill flow test case. *ERCOFTAC QNET-CFD Knowledge Base Wiki* : [http://www.ercoftac.org/products\\_and\\_services/wiki](http://www.ercoftac.org/products_and_services/wiki), 2005.
- [11] M. Breuer, B. Jaffrézic, N. Peller, M. Manhart, J. Fröhlich, C. Hinterberger, W. Rodi, G. Deng, O. Chikhaoui, S. uSarić, et al. A comparative study of the turbulent flow over a periodic arrangement of smoothly contoured hills. *Direct and Large-Eddy Simulation VI*, pages 635–642, 2006.
- [12] M. Breuer, B. Jaffrézic, S. Šaric, S. Jakirlic, G. Deng, O. Chikhaoui, J. Fröhlich, D. von Terzi, M. Manhart, and N. Peller. Issues in hybrid LES–RANS and coarse grid LES of separated flows. In *EUROMECH colloquium*, volume 469, pages 6–8, 2005.
- [13] M. Breuer, B. Kniazev, and M. Abel. Development of wall models for LES of separated flows using statistical evaluations. *Computers & fluids*, 36(5) :817–837, 2007.

- [14] M. Breuer, N. Peller, C. Rapp, and M. Manhart. Flow over periodic hills—numerical and experimental study in a wide range of Reynolds numbers. *Computers & Fluids*, 38(2) :433–457, 2009.
- [15] S. Carpy. *Contribution à la modélisation instationnaire de la turbulence : modélisations URANS et hybride RANS/LES*. PhD thesis, Poitiers, 2006.
- [16] B. Chaouat. The state of the art of hybrid RANS/LES modeling for the simulation of turbulent flows. *Flow, turbulence and combustion*, 99(2) :279–327, 2017.
- [17] B. Chaouat and R. Schiestel. A new partially integrated transport model for subgrid-scale stresses and dissipation rate for turbulent developing flows. *Physics of Fluids*, 17(6) :065106, 2005.
- [18] B. Chaouat and R. Schiestel. Hybrid RANS/LES simulations of the turbulent flow over periodic hills at high reynolds number using the PITM method. *Computers & Fluids*, 84 :279–300, 2013.
- [19] P. Chassaing. *Turbulence en mécanique des fluides*. Cépaduès-éditions, 2000.
- [20] H. Choi and P. Moin. Grid-point requirements for large eddy simulation : Chapman’s estimates revisited. *Physics of fluids*, 24(1) :011702, 2012.
- [21] G. Comte-Bellot and S. Corrsin. The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence. *Journal of fluid mechanics*, 25(4) :657–682, 1966.
- [22] B. J. Daly and F. H. Harlow. Transport equations in turbulence. *The Physics of Fluids*, 13(11) :2634–2649, 1970.
- [23] L. Davidson and C. Friess. A new formulation of  $f_k$  for the PANS model. *Journal of Turbulence*, 20(5) :322–336, 2019.
- [24] B. de Laage De Meux. *Modélisation des écoulements turbulents en rotation et en présence de transferts thermiques par approche hybride RANS/LES zonale*. PhD thesis, 2012.
- [25] B. de Laage de Meux, B. Audebert, R. Manceau, and R. Perrin. Anisotropic linear forcing for synthetic turbulence generation in large eddy simulation and hybrid RANS/LES modeling. *Physics of Fluids*, 27(3) :035115, 2015.
- [26] J. Deardorff. The use of subgrid transport equations in a three-dimensional model of atmospheric turbulence. *J. Fluids Eng.*, 95 :429–438, 1973.
- [27] J. W. Deardorff. Three-dimensional numerical study of the height and mean structure of a heated planetary boundary layer. *Boundary-Layer Meteorology*, 7(1) :81–106, 1974.
- [28] J. W. Deardorff. Stratocumulus-capped mixed layers derived from a three-dimensional model. *Boundary-Layer Meteorology*, 18(4) :495–527, 1980.
- [29] S. Deck. Zonal-detached-eddy simulation of the flow around a high-lift configuration. *AIAA journal*, 43(11) :2372–2384, 2005.
- [30] S. Deck. Recent improvements in the zonal detached eddy simulation (ZDES) formulation. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 26(6) :523–550, 2012.
- [31] S. Deck, P.-É. Weiss, M. Pamies, and E. Garnier. Zonal detached eddy simulation of a spatially developing flat plate turbulent boundary layer. *Computers & Fluids*, 48(1) :1–15, 2011.

- [32] E. Dick. *Fundamentals of turbomachines*, volume 109. Springer, 2015.
- [33] P. A. Durbin. Near-wall turbulence closure modeling without “damping functions”. *Theoretical and computational fluid dynamics*, 3(1) :1–13, 1991.
- [34] A. Fadai-Ghotbi. *Modélisation de la turbulence en situation instationnaire par approches URANS et hybride RANS-LES. Prise en compte des effets de paroi par pondération elliptique*. PhD thesis, PhD thesis, Université de Poitiers, 2007.
- [35] A. Fadai-Ghotbi, C. Friess, R. Manceau, T. Gatski, and J. Borée. A Hybrid RANS–LES model based on temporal filtering. In *Progress in hybrid RANS-LES modelling*, pages 225–234. Springer, 2010.
- [36] A. Fadai-Ghotbi, C. Friess, R. Manceau, T. B. Gatski, and J. Borée. Temporal filtering : A consistent formalism for seamless hybrid RANS–LES modeling in inhomogeneous turbulence. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 31(3) :378–389, 2010.
- [37] J. H. Ferziger and M. Peric. *Computational methods for fluid dynamics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [38] C. Friess. *Modélisation hybride RANS/LES temporelle des écoulements turbulents*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2010.
- [39] C. Friess, R. Manceau, and T. Gatski. Toward an equivalence criterion for hybrid RANS/LES methods. *Computers & Fluids*, 122 :233–246, 2015.
- [40] J. Fröhlich, C. P. Mellen, W. Rodi, L. Temmerman, and M. A. Leschziner. Highly resolved large-eddy simulation of separated flow in a channel with streamwise periodic constrictions. *Journal of Fluid Mechanics*, 526 :19, 2005.
- [41] J. Fröhlich and D. Von Terzi. Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows. *Progress in Aerospace Sciences*, 44(5) :349–377, 2008.
- [42] M.-C. Gauffre, S. Benhamadouche, and P.-B. Badel. Wall-Modeled Large Eddy Simulation of the Flow Through PWR Fuel Assemblies at  $Re_h = 66000$  - Validation on CALIFS Experimental Setup. *Nuclear Technology*, 206(2) :255–265, 2020.
- [43] M. Germano. Turbulence : the filtering approach. *Journal of Fluid Mechanics*, 238 :325–336, 1992.
- [44] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, and W. H. Cabot. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, 3(7) :1760–1765, 1991.
- [45] S. Ghosal. An analysis of numerical errors in large-eddy simulations of turbulence. *Journal of Computational Physics*, 125(1) :187–206, 1996.
- [46] S. S. Girimaji. Partially-averaged Navier-Stokes model for turbulence : A Reynolds-averaged Navier-Stokes to direct numerical simulation bridging method. *Journal of applied mechanics*, 73(3) :413–421, 2006.
- [47] S. S. Girimaji, R. Srinivasan, and E. Jeong. PANS turbulence model for seamless transition between rans and les : fixed-point analysis and preliminary results. In *Fluids Engineering Division Summer Meeting*, volume 36975, pages 1901–1909, 2003.
- [48] Y. Han, Y. He, and J. Le. Modification to improved delayed detached-eddy simulation regarding the log-layer mismatch. *AIAA Journal*, 58(2) :712–721, 2020.

- [49] K. Hanjalić, M. Popovac, and M. Hadžiabdić. A robust near-wall elliptic-relaxation eddy-viscosity turbulence model for cfd. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 25(6) :1047–1051, 2004.
- [50] S. Heinz. A review of hybrid RANS–LES methods for turbulent flows : Concepts and applications. *Progress in Aerospace Sciences*, page 100597, 2020.
- [51] J. Hinze. Turbulence, 2<sup>nd</sup> edition. *MacGraw Hill, New-York*, 1975.
- [52] K. Horiuti. Large eddy simulation of turbulent channel flow by one-equation modeling. *Journal of the Physical Society of Japan*, 54(8) :2855–2865, 1985.
- [53] S. Jakirlic. Assessment of the RSM, URANS and hybrid models with respect to the different roadmaps including the industrial application challenges. *Deliverable*, 3 :2–36, 2012.
- [54] S. Jakirlic and K. Hanjalic. A new approach to modelling near-wall turbulence energy and stress dissipation. *Journal of fluid mechanics*, 459 :139, 2002.
- [55] N. Jarrin, S. Benhamadouche, D. Laurence, and R. Prosser. A synthetic-eddy-method for generating inflow conditions for large-eddy simulations. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 27(4) :585–593, 2006.
- [56] L. Jenkins, M. Khorrami, M. Choudhari, and C. McGinley. Characterization of unsteady flow structures around tandem cylinders for component interaction studies in airframe noise. In *11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, page 2812, 2005.
- [57] V. John and M. Roland. Simulations of the turbulent channel flow at  $Re_\tau=180$  with projection-based finite element variational multiscale methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 55(5) :407–429, 2007.
- [58] W. Jones and B. E. Launder. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *International journal of heat and mass transfer*, 15(2) :301–314, 1972.
- [59] S. Jovic and D. M. Driver. Backward-facing step measurements at low reynolds number,  $Re_h = 5000$ . *STIN*, 94 :33290, 1994.
- [60] H. S. Kang, S. Chester, and C. Meneveau. Decaying turbulence in an active-grid-generated flow and comparisons with large-eddy simulation. *Journal of Fluid Mechanics*, 480 :129–160, 2003.
- [61] A. Keating and U. Piomelli. A dynamic stochastic forcing method as a wall-layer model for large-eddy simulation. *Journal of Turbulence*, (7) :N12, 2006.
- [62] J. Kim, P. Moin, and R. Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low reynolds number. *Journal of fluid mechanics*, 177 :133–166, 1987.
- [63] J. Kok, H. Dol, B. Oskam, and H. van der Ven. Extra-large eddy simulation of massively separated flows. In *42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, page 264, 2004.
- [64] A. Kolmogorov. Local turbulence structure in an incompressible viscous liquid for very high Reynolds numbers. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 30(4) :229–232, 1941.
- [65] R. Laraufie, S. Deck, and P. Sagaut. A dynamic forcing method for unsteady turbulent inflow conditions. *Journal of Computational Physics*, 230(23) :8647–8663, 2011.



- [66] J. Larsson, S. Kawai, J. Bodart, and I. Bermejo-Moreno. Large eddy simulation with modeled wall-stress : recent progress and future directions. *Mechanical Engineering Reviews*, 3(1) :15–00418, 2016.
- [67] B. E. Launder, G. J. Reece, and W. Rodi. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *Journal of fluid mechanics*, 68(3) :537–566, 1975.
- [68] D. Laurence, J. Uribe, and S. Utyuzhnikov. A robust formulation of the  $v^2-f$  model. *Flow, Turbulence and Combustion*, 73(3-4) :169–185, 2005.
- [69] H. Le, P. Moin, and J. Kim. Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step. *Journal of fluid mechanics*, 330 :349–374, 1997.
- [70] M. Lee and R. D. Moser. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re_\tau \approx 5200$ . *Journal of Fluid Mechanics*, 774 :395–415, 2015.
- [71] A. Leonard. Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows, 1974.
- [72] F. Lien and P. Durbin. Non-linear  $k-v^2$  modelling with application to high-lift. *Proceedings of the Summer Program Centre for Turbulence Research. Stanford University*, pages 5–22, 1996.
- [73] D. Lilly. The representation of small-scale turbulence in numerical simulation experiments. *Proc. IBM Scientific Computing Symposium on Environmental Sciences, Yorktown Heights, New-York, USA*, pages 195–210, 1967.
- [74] R. Manceau. Report on the 10th joint ERCOFTAC (SIG-15)/IAHR/QNET-CFD Workshop on Refined Turbulence Modelling, Poitiers. 2002.
- [75] R. Manceau. Progress in Hybrid Temporal LES. In *the 6th Symp. Hybrid RANS-LES Methods, 26–28 September 2016, Strasbourg, France*, volume 137 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, pages 9–25. Springer, 2018.
- [76] R. Manceau and K. Hanjalić. Elliptic blending model : A new near-wall Reynolds-stress turbulence closure. *Physics of Fluids*, 14(2) :744–754, 2002.
- [77] R. Manceau, M. Wang, and D. Laurence. Inhomogeneity and anisotropy effects on the redistribution term in Reynolds-averaged Navier-Stokes modelling. *Journal of Fluid Mechanics*, 438 :307, 2001.
- [78] M. Manhart, N. Peller, and C. Brun. Near-wall scaling for turbulent boundary layers with adverse pressure gradient. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 22(3-4) :243–260, 2008.
- [79] C. Mellen, J. Fröhlich, and W. Rodi. Large eddy simulation of the flow over periodic hills. In *16th IMACS world congress*, pages 21–25, 2000.
- [80] F. Menter and Y. Egorov. A scale adaptive simulation model using two-equation models. In *43rd AIAA aerospace sciences meeting and exhibit*, page 1095, 2005.
- [81] F. Menter and Y. Egorov. The scale-adaptive simulation method for unsteady turbulent flow predictions. Part 1 : theory and model description. *Flow, Turbulence and Combustion*, 85(1) :113–138, 2010.
- [82] F. R. Menter. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA journal*, 32(8) :1598–1605, 1994.

- [83] F. R. Menter, M. Kuntz, and R. Langtry. Ten years of industrial experience with the sst turbulence model. *Turbulence, heat and mass transfer*, 4(1) :625–632, 2003.
- [84] R. D. Moser, J. Kim, and N. N. Mansour. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re_{\tau} = 590$ . *Physics of fluids*, 11(4) :943–945, 1999.
- [85] D. Neuhart, L. Jenkins, M. Choudhari, and M. Khorrami. Measurements of the flowfield interaction between tandem cylinders. In *15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (30th AIAA Aeroacoustics Conference)*, page 3275, 2009.
- [86] F. Nicoud and F. Ducros. Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor. *Flow, turbulence and Combustion*, 62(3) :183–200, 1999.
- [87] N. Nikitin, F. Nicoud, B. Wasistho, K. Squires, and P. R. Spalart. An approach to wall modeling in large-eddy simulations. *Physics of fluids*, 12(7) :1629–1632, 2000.
- [88] M. Pamiès, P.-E. Weiss, E. Garnier, S. Deck, and P. Sagaut. Generation of synthetic turbulent inflow data for large eddy simulation of spatially evolving wall-bounded flows. *Physics of Fluids*, 21(4) :045103, 2009.
- [89] S. B. Pope. *Turbulent flows*. IOP Publishing, 2001.
- [90] W. H. Press, S. A. Teukolsky, B. P. Flannery, and W. T. Vetterling. *Numerical recipes : the art of scientific computing*. Cambridge university press, 1992.
- [91] C. Pruet, T. Gatski, C. E. Grosch, and W. Thacker. The temporally filtered Navier–Stokes equations : properties of the residual stress. *Physics of Fluids*, 15(8) :2127–2140, 2003.
- [92] C. Pruet, B. Thomas, C. Grosch, and T. Gatski. A temporal approximate deconvolution model for large-eddy simulation. *Physics of Fluids*, 18(2) :028104, 2006.
- [93] C. D. Pruet. Eulerian time-domain filtering for spatial large-eddy simulation. *AIAA journal*, 38(9) :1634–1642, 2000.
- [94] C. Rapp and M. Manhart. Experimental investigations on the turbulent flow over a periodic hill geometry. In *TSFP Digital Library Online*. Begel House Inc., 2007.
- [95] C. Rapp and M. Manhart. Flow over periodic hills : an experimental study. *Experiments in fluids*, 51(1) :247–269, 2011.
- [96] C. Rapp, F. Pfeleger, and M. Manhart. New experimental results for a LES benchmark case. In *Direct and Large-Eddy Simulation VII*, pages 69–74. Springer, 2010.
- [97] O. Reynolds. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Philosophical Transactions of the Royal society of London*, (174) :935–982, 1883.
- [98] O. Reynolds. On the dynamical theory of in-compressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philosophical Transactions of the Royal society of London*, 1894.
- [99] L. F. Richardson. *Weather prediction by numerical process*. Cambridge university press, 1922.
- [100] P. Sagaut, S. Deck, and M. Terracol. Multiscale and multiresolution approaches in turbulence. 2006.

- [101] S. Šarić, S. Jakirlić, M. Breuer, B. Jaffrézic, G. Deng, O. Chikhaoui, J. Fröhlich, D. Von Terzi, M. Manhart, and N. Peller. Evaluation of detached eddy simulations for predicting the flow over periodic hills. In *ESAIM : proceedings*, volume 16, pages 133–145. EDP Sciences, 2007.
- [102] R. Schiestel and A. Dejoan. Towards a new partially integrated transport model for coarse grid and unsteady turbulent flow simulations. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 18(6) :443–468, 2005.
- [103] J. Schlüter, H. Pitsch, and P. Moin. Outflow conditions for integrated large eddy simulation/Reynolds-averaged Navier-Stokes simulations. *AIAA journal*, 43(1) :156–164, 2005.
- [104] M. Shur, P. Spalart, M. Strelets, and A. Travin. Detached-eddy simulation of an airfoil at high angle of attack. In *Engineering Turbulence Modelling and Experiments 4*, pages 669–678. Elsevier, 1999.
- [105] M. L. Shur, P. R. Spalart, M. K. Strelets, and A. K. Travin. A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modelled LES capabilities. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 29(6) :1638–1649, 2008.
- [106] J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations : I. the basic experiment. *Monthly weather review*, 91(3) :99–164, 1963.
- [107] P. Spalart and S. Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. In *30th aerospace sciences meeting and exhibit*, page 439, 1992.
- [108] P. Spalart, W. Jou, M. Strelets, and S. Allmaras. Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach. 1st AFOSR int. In *Symp. Eng. Turb. Modelling and Measurements, May*, pages 24–26, 1997.
- [109] P. R. Spalart. Strategies for turbulence modelling and simulations. *International journal of heat and fluid flow*, 21(3) :252–263, 2000.
- [110] P. R. Spalart, S. Deck, M. L. Shur, K. D. Squires, M. K. Strelets, and A. Travin. A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities. *Theoretical and computational fluid dynamics*, 20(3) :181, 2006.
- [111] C. Speziale. On the decomposition of turbulent flow fields for the analysis of coherent structures. *Acta Mechanica*, 70(1-4) :243–250, 1987.
- [112] C. G. Speziale, S. Sarkar, and T. B. Gatski. Modelling the pressure–strain correlation of turbulence : an invariant dynamical systems approach. *Journal of fluid mechanics*, 227 :245–272, 1991.
- [113] A. Spille-Kohoff and H.-J. Kaltenbach. Generation of turbulent inflow data with a prescribed shear-stress profile. In *DNS/LES Progress and Challenges*, pages pp–319, 2001.
- [114] S. Stolz and N. A. Adams. An approximate deconvolution procedure for large-eddy simulation. *Physics of Fluids*, 11(7) :1699–1701, 1999.
- [115] S. Stolz, N. A. Adams, and L. Kleiser. An approximate deconvolution model for large-eddy simulation with application to incompressible wall-bounded flows. *Physics of fluids*, 13(4) :997–1015, 2001.
- [116] M. Strelets. Detached eddy simulation of massively separated flows. In *39th Aerospace sciences meeting and exhibit*, page 879, 2001.

- [117] L. Temmerman and M. A. Leschziner. Large eddy simulation of separated flow in a streamwise periodic channel constriction. In *Second Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena*. Begel House Inc., 2001.
- [118] L. Temmerman, M. A. Leschziner, C. P. Mellen, and J. Fröhlich. Investigation of wall-function approximations and subgrid-scale models in large eddy simulation of separated flow in a channel with streamwise periodic constrictions. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 24(2) :157–180, 2003.
- [119] H. Tennekes. Eulerian and Lagrangian time microscales in isotropic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 67(3) :561–567, 1975.
- [120] H. Tennekes, J. L. Lumley, J. L. Lumley, et al. *A first course in turbulence*. MIT press, 1972.
- [121] T. Tran, R. Manceau, R. Perrin, J. Borée, and A. Nguyen. A hybrid temporal LES approach. Application to flows around rectangular cylinders. In *Proceedings of 9th ERCOFTAC International Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements, Thessaloniki, Greece, 2012*.
- [122] A. Travin, M. Shur, M. Strelets, and P. Spalart. Physical and numerical upgrades in the detached-eddy simulation of complex turbulent flows. In *Advances in LES of complex flows*, pages 239–254. Springer, 2002.
- [123] P. Welch. The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra : a method based on time averaging over short, modified periodograms. *IEEE Transactions on audio and electroacoustics*, 15(2) :70–73, 1967.
- [124] D. C. Wilcox. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA journal*, 26(11) :1299–1310, 1988.
- [125] A. Yoshizawa and K. Horiuti. A statistically-derived subgrid-scale kinetic energy model for the large-eddy simulation of turbulent flows. *Journal of the Physical Society of Japan*, 54(8) :2834–2839, 1985.