HAL open science

Propriétés statistiques des réseaux des applications couplées et récurrence des applications des dendrites locales

Hamza Ghoudi

▶ To cite this version:

Hamza Ghoudi. Propriétés statistiques des réseaux des applications couplées et récurrence des applications des dendrites locales. Systèmes dynamiques [math.DS]. Université de Toulon; Université de Sfax (Tunisie), 2019. Français. NNT : 2019TOUL0019 . tel-03042633

HAL Id: tel-03042633

https://theses.hal.science/tel-03042633v1

Submitted on 7 Dec 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

ÉCOLES DOCTORALES :

MER ET SCIENCES (Toulon)
SCIENCES FONDAMENTALES (Sfax)

ÉQUIPES DE LA RECHERCHE :

SYSTÈMES DYNAMIQUES : THÉORIES ET APPLICATIONS (Toulon)
SYSTÈMES DYNAMIQUES ET COMBINATOIRES (Sfax)

présentée par

Hamza GHOUDI

Pour obtenir le grade de

Docteur en Mathématiques

Propriétés statistiques des réseaux des application couplées et récurrence des applications des dendrites locales.

Soutenue le 06 Décembre 2019 devant le jury composé de :

M. Xavier LEONCINI	*Président*	*Université d'Aix-Marseille*
M. Serge TROUBETZKOY	*Rapporteur*	*Université d'Aix-Marseille*
M. Walid ALOULOU	*Rapporteur*	*Université de Kairouan*
Mme. Ana Cristina Moreira FREITAS	*Examinateur*	*Université de Porto*
M. Laurent RAYMOND	*Examinateur*	*Université d'Aix-Marseille*
M. Glenn MERLET	*Examinateur*	*Université d'Aix-Marseille*
M. Sandro VAIENTI	*Directeur*	*Université de Toulon*
M. Hawete HATTAB	*Directeur*	*Université de Sfax*

Centre de Physique Théorique
Campus de Luminy
165, rue du Luminy
13009 Marseille

Faculté des Sciences de Sfax
3.5 km Route Soukra
3000 sfax

ED 548
École Doctorale Mer et Sciences
Avenue de l'Université
83957 La Garde

EDSF
École Doctorale des Sciences Fondamentales
3.5 km Route Soukra
3000 Sfax

Je dédie cette thèse à,

Mes chers parents ***Mhadhab*** *et* ***Baya*** *pour leurs sacrifices, conseils, confiance et leur soutien durant toutes les années passées grâce à qui j'ai pu atteindre mes objectifs. Puisse Dieu vous accorder santé, bonheur et longue vie et faire en sorte que jamais je ne vous déçoive.*

Mes chers soeurs et frères ***Fathia****,* ***Fathi****,* ***Bachir****,* ***karima*** *,* ***Ziyad****,* ***Akareya*** *et enfin* ***Mohamed*** *pour leurs encouragements et compréhension.*

À mes amis et à celui que j'aime beaucoup et qui m'a soutenu tout au long de ce projet.

Hamza.

Remerciements

Ce travail faisant l'objet de la présente thèse de doctorat s'inscrit dans le cadre d'une thèse en co-tutelle entre le laboratoire de recherche SDC (Laboratoire des systèmes dynamiques et combinatoire) de l'FSS (Faculté des Sciences de Sfax) et le Laboratoire CPT (Centre de Physique Théorique) de l'Université de Toulon et du CNRS (Centre National de Recherche Scientifique) de la France.

Je profite de l'occasion qui m'est offerte par le biais de la présentation de ce travail pour exprimer mes gratitudes et mes reconnaissances envers tous ceux qui, plus ou moins directement, ont contribué à le rendre possible.

D'abord, je voudrais remercier chaleureusement et sincèrement Monsieur **Sandro VAIENTI**, mon directeur de thèse, Professeur à l'Université de Toulon, et à mon directeur de thèse Monsieur **Hawete HATTAB**, Professeur à l'Université de Sfax, pour la confiance qu'ils m'ont accordée d'encadrer et diriger mes travaux. Leurs conseils judicieux m'ont permis de découvrir les fabuleux plaisirs de la recherche sous ses apparences les plus diverses. Je n'oublierai jamais leurs soutiens et leurs disponibilités en période de doute surtout pour le travail effectué durant mes années de thèse. Qu'ils trouvent ici un témoignage de mon attachement et de ma profonde reconnaissance.

J'ai le plaisir d'exprimer mon profond respect à Monsieur **Xavier LEONCINI**, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence de mon jury.

J'exprime ma gratitude à Monsieur **Serge TROUBETZKOY**, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille, et Monsieur **Walid ALOULOU**, Professeur à l'Université de kairouan, d'avoir accepté la lourde tâche de rapporteur et d'avoir consacré un temps précieux à l'examen de ce rapport. Pour la même occasion, j'adresse mes remerciements à Madame **Ana Cristina Moreira Freitas**, Professeur à l'Université de Porto, Monsieur **Laurent Raymond**, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille et Monsieur **Glenn MERLET** Maître

de Conférence à l'Université d'Aix-Marseille, d'avoir acceptées d'examiner et juger cette thèse.

Je voudrais également signifier ma gratitude à mes Co-auteurs qui ont beaucoup contribué à l'aboutissement de ce travail. Il s'agit des professeurs Davide FARANDA de l'Université Paris-Saclay et Pierre GUIRAUD de l'Université de Valparaíso.

Un remerciement particulier à l'équipe de recherche CPT ainsi qu'à tout le personnel de l'Université de Toulon, qui m'a acceuilli et dans laquelle j'ai pu travailler dans une ambillance très chaleureuse. Aussi je remercie particulièrement, tous les membres de notre laboratoire de recherche SDC ainsi que tout le personnel du département Mathématiques, pour leurs encouragements, leurs aides et leurs soutiens.

Sans oublier finalement d'exprimer mes reconnaissances à tous mes professeurs des Facultés des Sciences de (Gabés, Tunis, Sfax) ainsi qu'à mes enseignants au Lycée Secondaire de Ghannouch.

Enfin, merci à toutes les personnes que j'ai oubliées de remercier par inadvertance.

Propriétés statistiques des réseaux des application couplées et récurrence des applications des dendrites locales.

Résumé

Cette thèse est divisée en deux grandes parties : la première est consacrée aux propriétés statistiques des systèmes dynamiques et l'autre porte sur des propriétés des systèmes dynamiques topologiques.

Dans la première partie, d'abord nous rappelons quelques notions de base des systèmes dynamiques aléatoire et de la théorie des valeurs extrêmes. Ensuite, par l'application de cette théorie aux réseaux des applications couplées nous montrons que la probabilité de l'apparition de la synchronisation dans ces réseaux est liée à la distribution du maximum d'une certaine observable évaluée le long de presque toutes les orbites. De plus, nous montrons qu'une telle distribution appartient à la famille des lois des valeurs extrêmes, où le paramètre de cette distribution (indice extrémal) nous permet d'obtenir une description détaillée de la probabilité de synchronisation. Enfin, nous illustrerons les résultats théoriques par des calculs numériques robustes qui nous permettent d'aller au-delà du cadre théorique fourni.

Dans la seconde partie, nous commençons par introduire quelques notions de base des systèmes dynamiques topologiques. Ensuite, nous étudions la relation entre les ensembles des points récurrents et périodiques d'une application continue de dendrites locales dans lui-même dans lequel l'ensemble des points d'extrémité est dénombrable.

Mots-clefs

systèmes dynamiques aléatoires, réseaux des applications couplées, théorie des valeurs extrêmes, indice extrémal, opérateurs de transfert, synchronisation, ensemble minimal, ensemble ω-limite, dendrite locale, point périodique, récurrent, presque périodique, transitivité et chaotique.

Statistical properties of coupled map lattices and recurrence of local dendrite maps

Abstract

This thesis is divided into two parts the first is devoted to the study of the statistical properties of Dynamical systems and the other is about properties of topological dynamical systems.

In the first part, we recall the basic notions of random dynamical systems and the theory of extreme values. Then, by applying this theory to the coupled map lattices , we show that the probability of the appearance of synchronization is related to the distribution of the maximum of a certain observable evaluated along almost all orbits. Moreover, we show that such a distribution belongs to the family of extreme value laws, where the parameter of this distribution (extremal index) allows us to obtain a detailed description of the probability of synchronization. Finally, we support the theoretical results by robust numerical computations that allow us to go beyond the theoretical framework.

In a second part, we give some basic notions of topological dynamical systems. Next, we study the relations between the sets of recurrent points and periodic points of a continuous self mapping of a local dendrite whose the endpoints set is countable.

Keywords

random dynamical systems, coupled lattice maps, extreme value theory, extremal index, transfer operator, synchronization, minimal sets, ω-limit sets, local dendrite, periodic point, recurrent, almost periodic, transitivity and chaos.

Table des matières

Table des figures **11**

Introduction **13**

I Propriétés statistiques des systèmes dynamiques **19**

1 Préliminaires **21**
1.1 Systèmes dynamiques 21
1.2 Récurrence et ergodicité 22
1.3 Systèmes dynamiques aléatoires 26
1.4 Événements rares 32
1.5 Théorie des valeurs extrêmes classiques 34
1.6 Valeurs extrêmes et systèmes dynamiques 42
1.7 Distribution statistique des temps de retour et d'entrée 47
1.8 Relation entre les HTS et LVE 49

2 Réseaux Des Applications Couplées **51**
2.1 L'application et les opérateurs 51
2.2 Propriétés Spectrales 55
2.3 Les Espaces Quasi-Hölder 58
2.4 Vérification des hypothèses 60

3 Théorie Des Extrêmes Appliquée Aux Réseaux Des applications couplées **69**
3.1 Valeur extrême et localisations 69
3.2 Perturbations aléatoires 74
3.3 Valeurs extrêmes et synchronisation 74
3.4 Calcul de l'indice extrémal 77
3.5 Perturbations aléatoires 87
3.6 Distribution du nombre de visites successives 89

4 Extensions et calculs numériques **91**
4.1 Synchronisation locale 91
4.2 Blocs de la synchronisation 92
4.3 Simulations 93

II Systèmes Dynamiques Topologiques **101**

5 Préliminaries **103**
5.1 Systèmes Dynamiques 103
5.2 Ensembles ω-limites 104
5.3 Ensembles minimaux 106
5.4 Différents Types Des Récurrences 107
5.5 Graphes, Dendrites et Dendrites locales : 113
5.6 Récurrence dans les graphes, les dendrites et les dendrites locales 122

6 $\overline{R(f)} = R(f) \cup \overline{P(f)}$ pour les applications des dendrites locales **127**
6.1 Propriété-RPR 130

Références **135**

Table des figures

1.1 Densités pour les fonctions (a)Gumbel, (b)Fréchet et (c)Weibull. . 36
1.2 Block-Maxima (BM). 38
1.3 Excès au dessus d'un seuil u. 39
1.4 Fonction de distribution F et la loi conditionnelle F_u. 39

2.1 Densité invariante pour l'application (2.3) avec $n = 2$. 67
2.2 Densité invariante pour l'application (2.3) avec $n = 3$. 68

3.1 Pour $n = 2$, croisement des lignes de discontinuité (disc line) du voisinage de la diagonale Δ, pour la propriété **P01**. Pour $n = 3$, croisement des surfaces de discontinuité (disc plane) du voisinage de la diagonale Δ. c_1 et c_2 : régions triangulaires (à gauche) et pyramidales (à droite) appartenant respectivement à $F_{d,\varepsilon,2}$ et $F_{d,\varepsilon,3}$. Nous supprimons les régions ombrées à gauche et les régions pyramidales c_1 et c_2 à droite. 80
3.2 Pour $n = 2$, croisement de la ligne de discontinuité, n = 3 de la surface discontinuité, du voisinage de la diagonale Δ, pour la propriété **P02**. Nous supprimons les régions ombrées. 80

4.1 description de paramètre ξ de la distribution généralisée de Pareto en fonction de n et de γ dans les cas déterministe global et local . 94
4.2 description de paramètre ξ de la distribution généralisée de Pareto en fonction de n et de γ dans les cas global et local avec l'ajout d'un bruit additif. 95
4.3 L'indice extrémal θ de la distribution généralisée de Pareto en fonction de γ. 96
4.4 L'indice extrémal θ en fonction de n et γ dans le cas déterministe global. 97
4.5 L'indice extrémal θ en fonction de n et de γ dans les cas global et local avec l'ajout d'un bruit additif. 98

4.6 Séries chronologiques + dépassements + distribution de probabilité empirique (FDPE) du temps d'attente dans les clusters pour le cas global. 99
4.7 Séries chronologiques + dépassements + distribution de probabilité empirique (FDPE) du temps d'attente dans les clusters pour le cas local. 100

5.1 Graphe. 113
5.2 Arbre. 114
5.3 Dendrite. 115
5.4 Dendrite universelle de Wasewski's (D_w). 116
5.5 Dendrite locale. 119

Introduction

La théorie des systèmes dynamiques est une discipline mathématique intimement liée avec la plupart des principaux domaines des mathématiques (par exemple, la topologie, la géométrie, la théorie de la mesure et les probabilités). Elle est basée sur l'étude de la structure des orbites globales des applications et des flots en mettant l'accent sur les propriétés métriques et topologiques. Elle fournit également une description qualitative des phénomènes naturels qui ont évolué par une transformation de l'espace des états possibles du système. La théorie est dite déterministe quand la loi d'évolution est connue : lorsque l'on connaît son état initial, il sera possible de déterminer le futur du système. Ses concepts, méthodes et paradigmes, stimulant grandement la recherche dans des nombreuses domaines sciences, ont donné naissance à un nouveau domaine de la dynamique appliquée appelée chaotique. De nombreux chercheurs ont démontré que, par exemple, dans les réseaux de neurones, la physique de la matière condensée, turbulence, les réseaux de lasers à grande échelle, les équations de convection de propagation, les réseaux de transmission à phase couplée et la dynamique moléculaire, les propriétés asymptotiques du système dynamique présente souvent des phénomènes chaotiques et imprévisibles. Cependant, si nous étudions les systèmes dynamiques chaotiques du point de vue statistique, nous trouvons que le chaos dans le sens déterministe possède habituellement une certaine régularité dans le sens probabiliste. Dans plusieurs situations, les erreurs inévitables d'observation rendent plus réaliste la prise en compte de la dynamique aléatoire. On modifie alors le modèle mathématique par l'ajout d'un bruit aléatoire au processus itératif afin de tenir compte de ces imprécisions pratiques. Au cours des dernières décennies Yuri Kifer [1, 2] a étudié d'une manière approfondie le comportement des systèmes aléatoires pour différents types de transformations.

Les réseaux des applications couplées sont parmi les systèmes dynamiques spatio-temporels discrets. Ils ont été introduits au milieu des années 1980 par Kaneko et Kapral [3] [4] [5] [6]. Ces systèmes sont utilisés comme modèles appropriés pour l'étude qualitatif et la simulation numérique de la dynamique chaotique des systèmes spatialement étendus. Ce réseau est défini comme

une composition des deux applications, dynamique découplée (voir Définition 2.1.1) et opérateur de couplage (voir Définition 2.1.2). Dans plusieurs travaux, nous pouvons trouver beaucoup de choix possibles pour l'application locale et l'opérateur de couplage. Par exemple, la dynamique de ces réseaux qui est définie à partir des applications bistables, unimodales ou chaotiques a été étudiée pour différents types de couplage, révélant une phénoménologie riche incluant le chaos spatial, les points périodiques stables, le chaos spatio-temporel, les clusters, les ondes progressives et la synchronisation (voir [7] [8] [9]).

L'analyse des phénomènes de synchronisation dans l'évolution des systèmes dynamiques a fait l'objet d'une recherche active depuis les premiers jours de la physique. Elle a commencé au 17ème siècle avec la découverte de Huygens [10] que deux horloges à pendules accrochées côte à côte sur un mur, elles deviennent synchronisées en phase. Cette expérience suggére que la synchronisation exige un mouvement oscillant du système étudié. Elle indique également que les rythmes des oscillateurs doivent être ajustés. Cela implique que les systèmes ne doivent pas nécessairement avoir un mouvement identique en phase. Les oscillateurs qui ont des trajectoires déphasées avec une avance (ou un retard) de phase constante satisfont également aux exigences. La synchronisation peut être largement observée dans la nature, par exemple le clignotement synchrone des lucioles ou des grillons stridents [11]. La synchronisation est un phénomène caractéristique de nombreux processus dans les systèmes naturels et la science non linéaire. Ce mot a une racine grecque, syn est équivalant à commun et chronos c'est-à-dire temps, ce qui signifie partager le temps commun ou se produire en même temps. Autrement dit, corrélation ou accord des différents processus dans le temps [12].

Dans notre cas un réseau des applications couplées est synchronisé lorsqu'il approche d'une configuration homogène. En général, la synchronisation est destinée à une certaine durée de temps, une fois qu'elle a commencée. C'est ce qui se passe généralement pour certains types de chaînes d'oscillateurs synchronisés. Pour les réseaux des applications couplées chaotiques, ce n'est pas le cas, puisque, par le Théorème de Poincaré, presque toute orbite est récurrente.

Les propriétés chaotiques et de synchronisation de réseau définies par des applications locales logistiques et de couplage global du type moyen ont été observées et étudiées par Kaneko [13] et ensuite par Ashwin [14]. L'important travail de Bunimovich et Sinaï [15] représente la première contribution sur les réseaux des applications couplées dans le cadre et avec les outils de la théorie ergodique. Par l'utilisation du formalisme thermodynamique, ils ont prouvé l'existence de mesures SRB mélangeantès pour les réseaux des applications couplées infinies avec application locale chaotique et couplage faible (plus proche voisin). Depuis, les progrès dans l'étude des propriétés statistiques de ce réseaux chaotiques ont été énormes, avec la contribution de plusieurs chercheurs, et le développement d'une théorie spectrale [16] [17] [18]. Nous nous reportons au livre

[7] pour un large panorama sur les différentes approches de la théorie.

La théorie des valeurs extrêmes est apparue comme l'une des disciplines statistiques les plus importantes pour les sciences appliquées au cours des dernières années. Cette théorie est capable de modéliser et de décrire la survenue et l'intensité d'évènements dits rares, c'est-à-dire, qui présentent des variations de très grandes amplitudes. Les techniques des valeurs extrêmes sont également de plus en plus utilisées dans de nombreuses autres disciplines. Par exemple : les mathématiques, les géosciences, l'ingénierie et la finance [19] [20] [21] [22] [23] [24] [25]. La caractéristique distinctive d'une analyse de valeurs extrêmes est l'objectif de quantifier le comportement stochastique d'un processus à des niveaux inhabituellement grands ou petits. En particulier, les analyses des valeurs extrêmes nécessitent généralement l'estimation de la probabilité d'événements plus extrêmes que ceux qui ont déjà été observés.

Dans cette thèse

nous présentons une nouvelle application de la théorie des valeurs extrêmes aux réseaux des applications couplées fini (ou périodique). Notre objectif est de fournir une première approche en utilisant la théorie des valeurs extrêmes et de montrer comment obtenir un certain nombre de résultats rigoureux sur les statistiques de certains événements rares. Tels : la synchronisation dans le réseau des applications couplées. Ces applications sont définies par n applications locales chaotiques sur l'intervalle unité, c'est-à-dire pour tout $\bar{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [0,\, 1]^n$, on pose :

$$\left(\hat{T}(\bar{x})\right)_i := (1-\gamma)T(x_i) + \frac{\gamma}{n}\sum_{j=1}^{n} T(x_j), \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Ce que nous étudions est la probabilité d'une première synchronisation dans les réseaux des applications couplées chaotiques. Cette probabilité nous permet d'estimer le temps que nous devrions attendre pour obtenir la synchronisation avec une précision prescrite. La théorie des valeurs extrêmes fournit ce type d'information quantitative, puisque les processus de synchronisation peuvent être interprétés et quantifiés par le calcul de la distribution asymptotique du maximum d'un processus aléatoire approprié. Bien que nous n'ayons pas pu obtenir que la synchronisation globale qui persisté dans le temps, nous pouvons poser la question sur la distribution du nombre d'événements de synchronisation successives lorsque les systèmes évoluent jusqu'à un certain temps. Nous verrons qu'après un rééchelonnement approprié, la distribution du nombre de visite dans un ensemble petite est celui une statistique de Poisson composée. Il vaut la peine de mentionner que Coelho et Collet [26] ont montré ce résultat pour deux applications découplées dilatantes du cercle. En fait, un premier résultat dans notre direction a été donné par [27], mais pas explicitement lié à la théorie des valeurs extrêmes. Où les auteurs ont considéré deux applications de l'intervalle couplées et ils ont appliqué leur théorie spectrale pour des systèmes ouverts avec

trous pour étudier la première entrée de deux composants dans une petite bande le long de la diagonale. Ce qui est équivalent à la synchronisation du réseau à deux composants jusqu'à une certaine précision. Dans des situations plus générales, nous présenterons des arguments sur les propriétés spectrales de l'opérateur de transfert du système pour soutenir l'existence d'une distribution limite pour les maxima de certaines observables liées à la synchronisation. Ensuite, nous discuterons par une formule approximative, l'indice extrémal (un paramètre de la distribution) pour les réseaux avec un nombre arbitraire de composants. Nous allons estimer le comportement d'un tel indice lorsque le nombre des composants est important. Ensuite, nous généraliserons la théorie à des réseaux des applications couplées qui sont perturbées de façon aléatoire avec un bruit additif. Finalement, avec des preuves numériques, nous montrerons que l'indice extrémal est égale 1 pour n'importe quelle dimension du réseau.

Deuxièmement, l'étude des systèmes dynamiques dans les espaces compacts unidimensionnels devenu de plus en plus intensive en raison des riches propriétés dynamiques que peuvent présenter les applications unidimensionnelles. L'objectif principal de cette partie est est de trouver une façon de perturber des applications sur des espces unidimensionnels en particulier adapter des perturbations uniformément continu sur ses applications. Après des discussions avec Professeur Pierre Collet nous avons tout d'abord concentré à mieux comprendre la théorie topologique des systèmes dynamiques. Dans ce cadre nous établissons les propriétés topologiques générales des ensembles des points récurrents dans le cas où le système dynamique défini sur un espace spécial nommé dendrite locale (c'est-à-dire un continuum unidimensionnel qui est localement une dendrite) qui couvre les cas des graphes et des dendrites. Cette thèse est organisée comme suit :

Dans le premier chapitre, nous traiterons tout d'abord des concepts généraux de systèmes dynamiques et de théorie ergodique classiques. Nous présentons aussi les bases de la théorie des valeurs extrêmes, en nous concentrant sur les résultats qui sont utiles pour les systèmes dynamiques. Ensuite, nous introduisons un système dynamique en tant que générateur de processus aléatoires et présentons une description d'une variété de méthodes et d'approches pour dériver des lois des valeurs extrêmes pour les soi-disant observables à distance. Enfin, nous construisons la correspondance entre les lois des valeurs extrêmes et les statistiques de temps d'entrée et retour.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons une approche puissante et générale basée sur la perturbation de l'opérateur de transfert, et qui a l'avantage d'être applicable à une grande classe d'observables dans l'étude de la théorie des valeurs extrêmes. La première partie de ce chapitre est consacrée à la définition et aux propriétés de la classe des réseaux d'applications couplées. Dans la deuxième, nous introduisons six propriétés **P1** à **P6** pour lesquelles l'opérateur de transfert $\hat{P}$ possède un trou spectral sur un espace de Banach. Dans la dernière partie de

ce chapitre, nous introduisons un espace fonctionnel pour lequel notre système qui est défini par des applications dilatantes par morceaux, admet une mesure de probabilité invariante absolument continue. Ensuite, nous allons vérifier ces propriétés.

Dans le troisième chapitre, nous donnons un bref aperçu des notions de base de la théorie des valeurs extrêmes lorsqu'elle est appliquée à la récurrence dans les systèmes dynamiques. En particulier, nous définissons l'indice extrémal et montrons qu'il tend vers 1 lorsque la taille du réseau tend vers l'infini ou en présence de bruit. Ensuite, nous appliquons la théorie des valeurs extrêmes pour calculer la probabilité des événements de synchronisation. Puis nous calculons l'indice extrémal dans les cas déterministe et aléatoire. Ce calcul dépend du comportement de la densité invariante au voisinage de la diagonale, notre formule (3.27) peut-être prouvée sous l'hypothèse **P8** que nous croyons être inévitable. Enfin nous étudions la distribution du nombre d'événements de synchronisation successifs.

Ensuite, nous illustrons en quatrième chapitre nos résultats analytiques et nos estimations par des calculs numériques. Ce qui confirme l'existence d'une distribution des valeurs extrêmes pour un différent type de synchronisation, que nous avons appelé locale. De plus, nos calculs numérique valident les statistiques de Poisson composées attendues pour la distribution du nombre de visites successives. Le fait que l'indice extrémal pour la synchronisation locale ne semble pas dépendre de la taille du réseau.

Dans le cinquième chapitre, nous introduisons quelques notions de base des propriétés dynamiques topologiques utilisées tout au long de la deuxième partie de la thèse. Tout d'abord, nous commençons par les ensembles ω-limites et les ensembles minimaux. Ensuite, les différents types de récurrence : presque périodiques, récurrence non errance et transitivité. Puis, nous définissons les espaces concernés : les graphes, les arbres, les dendrites et les dendrites locales. Enfin, nous énonçons les résultats liés aux ensembles de ω-limites et à la récurrence des applications sur les graphes, les dendrites et dendrites locale (cas monotone).

Dans le sixièmement chapitre, nous étudions la relation entre l'ensemble des points périodiques $P(f)$ et l'ensemble des points récurrents $R(f)$ d'une application continue f de dendrite locale. Nous montrons que toute dendrite locale X avec son ensemble de points extrémités $E(X)$ dénombrable possède la propriété-RPR (Un espace métrique compact X possède la propriété-RPR si pour toute application continue $f : X \to X$, $\overline{R(f)} = \overline{P(f)} \cup R(f)$). sens de Devaney.

Publications concernant cette thèse :
[28] H. Ghoudi (with D. Faranda, P. Guiraud and S. Vaienti), Extreme value

theory for synchronization of coupled map lattices. Nonlinearity, 31 (2018) 3326-3358.

[2] H. Ghoudi (with H. Hattab), $\overline{R(f)} = \overline{P(f)} \cup R(f)$ for maps of local dendrites with countable set of endpoints. soumis in Qualitative Theory of Dynamical Systems, (2018).

Première partie

Propriétés statistiques des systèmes dynamiques

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Systèmes dynamiques

Nous pouvons considérer un système qui décrit les phénomènes qui évoluent au cours du temps, cela nécessite deux choses :

- Un ensemble de variables d'états possibles du système qui permet de construire un espace mathématique appelé espace de phase.
- Une transformation de l'espace des phases décrivant cette évolution temporelle.

Dans tout ce travail, l'espace de phase sera un espace de probabilité $(X, \mathcal{F}, \nu)$ où X sera une variété compacte, $\mathcal{F}$ est une σ-algèbre de X et la loi d'évolution sera une application mesurable $T : X \to X$. Les deux derniers étant liés par une relation appelée invariance.

Définition 1.1.1. Une mesure de probabilité ν sur X est dite invariante pour T ou T-invariante si : pour tout $A \in \mathcal{F}$,

$$\nu(T^{-1}A) = \nu(A).$$

Nous pouvons trouver plusieurs applications différentes pour lesquelles une mesure de probabilité ν sur X est invariante. Par exemple :

1) Pour $X = [0, 1]$, la mesure de Lebesgue est une mesure invariante pour l'application $T(x) = 2x \bmod 1$ et pour l'application $T(x) = x + \alpha \bmod 1$.
2) Pour $X = \mathbb{S}$ le cercle unité du plan complexe $\mathbb{C}$, la mesure de Haar sur $\mathbb{S}$ est une mesure invariante pour l'application rotation $R : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ définie par, pour tout $a \in \mathbb{S}$,
$$R(z) = az, \quad \forall\ z \in \mathbb{S}.$$

Proposition 1.1.2. *La mesure de probabilité ν est T-invariante si et seulement si, pour toute fonction $\phi \in L^\infty_\nu(X)$ ou $L^1_\nu(X)$*

$$\int_X \phi \circ T d\nu = \int_X \phi d\nu.$$

Théorème 1.1.3 (**Krylov-Bogoliubov**[29]). *Si X est un espace métrique compact et $T : X \to X$ une application continue, alors il existe une mesure de probabilité borélienne invariante.*

La condition de continuité dans le Théorème de **Krylov-Bogoliubov** est suffisante. **Katok-Hasselblatt**, ils ont montré que nous ne pouvons pas trouver une mesure de probabilité borélienne invariante si le système dynamique est défini sur un espace métrique par une application non continue, par exemple : $T : [0,1] \to [0,1]$ telle que

$$T(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0 \\ x/2, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Mais, lorsque l'application est continue par morceau, nous pouvons trouver la notion d'invariance par des conditions supplémentaires.

Définition 1.1.4. Un quadruplet $\Big(X, \mathcal{F}, T, \nu\Big)$ est appelé un système dynamique si ν est T-invariante.

1.2 Récurrence et ergodicité

Dans l'étude des systèmes dynamiques, nous sommes intéressés par les propriétés de l'orbite $\{T^n(x)\}_{n\geq 0}$ où T^n est la nième itération de la transformation T qui est définie par :

$$T^n(x) = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T(x)}_{n \text{ fois}}.$$

En 1890, l'un des fondateurs de la théorie des systèmes dynamiques Henri Poincaré a montré que, pour presque tout point appartenant à un ensemble spécifié, l'orbite de ce point revient dans le même ensemble après un temps fini.

Théorème 1.2.1 (**Théorème de récurrence de Poincaré**). *Soit $\Big(X, \mathcal{F}, T, \nu\Big)$ un système dynamique. Soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $\nu(A) > 0$. Alors ν-presque tout point $x \in A$, l'orbit $\{T^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ repasse dans A une infinité de fois, c'est-à-dire que pour presque tout $x \in A$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $T^n x \in A$.*

Démonstration. Notons $A_n = \bigcup_{k\geq n} T^{-k}(A)$ l'ensemble des points de X qui reviennent dans A lorsque nous itérons T au moins n fois. Notons $A_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} T^{-k}(A)$ l'ensemble des points qui passent une infinité de fois dans A. Alors $\nu(A_{n+1}) = \nu\Big(T^{-1}(A_n)\Big) = \nu(A_n)$ et $A \subset A_0$. Puisque la suite (A_n) est décroissante, nous avons $\nu(A_n \cap A) = \nu\Big(A_0 \cap A\Big) = \nu(A)$. Donc $\nu(A_\infty \cap A) = \nu(A)$. Alors, par les propriétés des mesures finies nous trouvons le résultat. □

En principe, le retour d'un point de $A \in \mathcal{F}$ à A prend un temps fini. Nous remarquons que le Théorème de Poincaré ne nous donne aucune information sur le temps nécessaire pour revenir dans A. Pour cela, nous allons nous intéresser au temps de retour ou d'entrée.

Définition 1.2.2. Soient $\big(X, \mathcal{F}, T, \nu\big)$ un système dynamique, A un sous-ensemble de X et $x \in A$. Le premier temps de retour de x dans A est défini par :

$$\tau_A(x) := \inf\{n > 0 : T^n x \in A\}. \tag{1.1}$$

Si $x \in X$, τ_A est appelé le premier temps d'entrée.

D'après le Théorème de récurrence de Poincaré, il est clair que plus la mesure de l'ensemble A est petite, plus il faudra attendre longtemps avant de revenir dans A. Le théorème qui suit précise comment varie la moyenne du temps de retour en fonction de $\nu(A) > 0$ dans le cas ergodique.

Définition 1.2.3. Soit $\big(X, \mathcal{F}, T, \nu\big)$ un système dynamique, ν est dite ergodique par rapport à T si pour tout ensemble invariant $A \in \mathcal{F}$ on a :

$$\nu(A) = 0 \quad \text{ou} \quad \nu(A) = 1.$$

L'ergodicité peut être vue comme la notion d'irréductibilité en théorie de mesure : c'est-à-dire pour toute partition d'un système dynamique ergodique en deux sous-systèmes invariants, alors ces deux sont distincts.

Exemple 1.2.4. Soit $X = [0, 1]$, la mesure de Lebesgue sur X est ergodique pour l'application $T(x) = 2x \bmod 1$ et pour l'application $T(x) = x + \alpha \bmod 1$ si α est irrationnelle.

Lemme 1.2.5. *Soit $\big(X, \mathcal{F}, T, \nu\big)$ un système dynamique ergodique. Pour tout $A \in \mathcal{F}$ de mesure strictement positive, alors*

$$\nu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-k} A\Big) = 1.$$

Théorème 1.2.6. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\big(X, \mathcal{F}, T, \nu\big)$ est ergodique.*
2. *Pour tout $A \in \mathcal{F}$, $\nu(A \Delta T^{-1} A) = 0, \Longrightarrow \nu(A) = 0$ ou 1.*
3. *Pour tout $A, B \in \mathcal{F}$ avec $\nu(A) > 0$ et $\nu(B) > 0$, il existe $n > 0$ tel que $\nu(A \cap T^{-n} B) > 0$.*

Proposition 1.2.7. *Le système dynamique $\big(X, \mathcal{F}, T, \nu\big)$ est ergodique si et seulement si les fonctions mesurables invariantes par T sont constantes ν-presque partout.*

Théorème 1.2.8 (**Théorème ergodique** [30]). *Soit* $\big(X, \mathcal{F}, T, \nu\big)$ *un système dynamique ergodique. Alors pour toute fonction* f *dans* $L^1(\nu)$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(T^k(x)\Big) = \int_X f(x)\,\mathrm{d}\nu(x)$$

pour ν*-presque tout* $x \in X$.

Corollaire 1.2.9. *Le système dynamique* $\big(X, \mathcal{F}, T, \nu\big)$ *est ergodique si et seulement si pour tout* $A, B \in \mathcal{F}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \nu(A \cap T^{-k}B) = \nu(A)\nu(B).$$

Maintenant, lorsque la transformation T est ergodique, nous obtenons la version plus forte du Théorème de récurrence de Poincaré, connu sous le nom de Lemme ou Théorème de Kač.

Théorème 1.2.10 (**Théorème de Kač**). *Soit* $\big(X, \mathcal{F}, T, \nu\big)$ *un système dynamique ergodique. Pour tout* $A \in \mathcal{F}$ *de mesure strictement positive, on a :*

$$\frac{1}{\nu(A)} \int_A \tau_A(x) d\nu(x) = \frac{1}{\nu(A)}.$$

La démonstration est présente dans plusieurs références, par exemple [31], [32], etc.... Nous avons choisi ici la preuve la plus simple.

Démonstration. Pour tout $A \in \mathcal{F}$, supposons

$$A_k = \{x \in A,\ \tau_A(x) = k\},$$

$$B_k = \Big\{x \in X,\ T^k(x) \in A \text{ et } T^j(x) \notin A, \text{ pour } j = 1, \ldots, k-1\Big\}$$

et

$$C_k = B_k \backslash A_k,\ \ k = 1, 2, \ldots.$$

Il est facile de voire que $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ sont des sous-ensembles disjoints de A , $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ sont aussi disjoints et $A_k \subset B_k$ pour tout $k = 1, 2, \ldots$. Alors

$$(X \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) \bigcap T^{-j}A = \emptyset \text{ , pour } j = 1, 2, \ldots.$$

Donc par le Lemme 1.2.5 nous avons

$$\nu(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = 1.$$

D'autre part, pour tout $k \geq 1$, $T^{-1}(C_k) = B_{k+1}$ et donc par la définition de C_k, nous avons $\nu(B_k) = \nu(A_k) + \nu(B_{k+1})$. Par la même stratégie nous obtenons que

$$\nu(B_k) = \sum_{i \geq k} \nu(A_i).$$

Alors,

$$\begin{aligned} 1 = \nu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i \geq k} \nu(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{i} \nu(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \nu(A_i) = \int_A \tau_A \, \mathrm{d}\nu. \end{aligned}$$

□

Ici nous pouvons poser une question concernant l'ergodicité. Lorsque la mesure n'est pas ergodique comment peut on estimer l'espérance du temps d'entrée ? La proposition suivante donne une réponse.

Proposition 1.2.11. *Soient $\big(X, \mathcal{F}, T, \nu\big)$ un système dynamique et A un sous-ensemble de X tel que $\nu(A) > 0$. Alors*

$$\begin{aligned} \int_A \tau_A(x) \, \mathrm{d}\nu(x) &= \nu\Big(\big\{x \in X, \tau_A(x) < \infty\big\}\Big) \\ &= \nu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} T^{-j} A\Big). \end{aligned}$$

Définition 1.2.12. La mesure ν du système dynamique $\big(X, \mathcal{F}, T, \nu\big)$ est mélangeante si quels que soient les événements A et B dans $\mathcal{F}$,

$$\lim_{n \to \infty} \nu\Big(A \cap T^{-n} B\Big) = \nu(A)\nu(B). \tag{1.2}$$

Proposition 1.2.13. *Toute mesure mélangeante est ergodique.*

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{F}$ un ensemble T-invariant donc nous avons $T^{-n}A = A$ de même aussi nous devons avoir $A \cap T^{-n}A = A$. Le mélangeante implique que $\nu(A) = \nu^2(A)$, ce qui donne $\nu(A) = 0$ ou 1. □

Proposition 1.2.14. *Soit $\big(X, \mathcal{F}, T, \nu\big)$ un système dynamique, la mesure ν est mélangeante si et seulement si pour toutes fonctions $\phi, \psi \in L^2(X, \mathbb{R})$,*

$$\lim_{n \to \infty} \int_X \phi(x)\psi(T^n x) d\nu = \int_X \phi(x) d\nu \int_X \psi(x) d\nu.$$

Dans la suite, la mesure ν pour le systèmes dynamique $(X, \mathcal{F}, T, \nu)$ a de très bonnes propriétés de mélange. Nous rappelons la notion de décroissance des corrélations du système par rapport à ν.

Définition 1.2.15. Soient $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ deux espaces de Banach. La corrélation entre deux fonctions non nulles $\phi : X \to \mathbb{R}$ appartenant à $\mathcal{C}_1$ et $\psi : X \to \mathbb{R}$ appartenant à $\mathcal{C}_2$ par rapport à la mesure de probabilité ν est définie par :

$$Cor_\nu(\phi, \psi, n) := \frac{1}{\|\phi\|_{\mathcal{C}_1} \|\psi\|_{\mathcal{C}_2}} \left| \int \psi \circ T^n \phi \mathrm{d}\nu - \int \psi \mathrm{d}\nu \int \phi \mathrm{d}\nu \right|. \tag{1.3}$$

Nous disons que le système dynamique $(X, \mathcal{F}, T, \nu)$ à une décroissance des corrélations par rapport de la mesure de probabilité ν pour les observables dans $\mathcal{C}_1$ contre les observables dans $\mathcal{C}_2$ si

$$Cor_\nu(\phi, \psi, n) \to 0, \qquad \text{quand } \ n \to \infty.$$

De plus, s'il existe une fonction $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $\Phi(n) \to 0$ quand $n \to \infty$ et

$$Cor_\nu(\phi, \psi, n) \leq \Phi(n),$$

alors nous disons que le système a une décroissance des corrélations de vitesse Φ par rapport aux observables des $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

La définition suivante donne un type très important de vitesse des décroissances des corrélations que nous appelons super-polynomiale.

Définition 1.2.16. Un système dynamique $\Big(X, \mathcal{F}, T, \nu\Big)$ a une décroissance des corrélations super-polynomiale pour les observables des espaces de Banach si la vitesse de la décroissance des corrélations Φ vérifie

$$\lim_{n\to\infty} n^p \Phi(n) = 0, \qquad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}.$$

Remarque 1.2.17. Si la vitesse Φ est de la forme exponentielle ($i.e.$, $\Phi(n) = e^{-n}$) donc nous parlons de la décroissance des corrélations exponentielles.

1.3 Systèmes dynamiques aléatoires

Le concept de systèmes dynamiques aléatoires est un développement relativement récent combinant des idées et des méthodes des domaines bien développés de la théorie des probabilités et des systèmes dynamiques. Dans cette partie, nous allons définir le système dynamique aléatoire et rappelons des propriétés de ce système.

Soit $\Big(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\Big)$ un espace de probabilité tel que Ω est un espace métrique muni de sa σ-algèbra de Borel $\mathcal{A}$. Soit ϑ une transformation qui préserve la mesure. Tout d'abord, nous construisons une application $\Big(\mathcal{B}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{F}\Big)$-mesurable

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{N} \times \Omega \times X &\longrightarrow X \\ (n, \omega, x) &\longmapsto \Phi(n, \omega)x, \end{aligned} \tag{1.4}$$

vérifiant la propriété de cocycle suivante $\begin{cases} \Phi(0,\omega) = Id_X \\ \Phi(n+m,\omega) = \Phi(n,\vartheta^m\omega) \circ \Phi(m,\omega). \end{cases}$.

Dans toute la suite nous notons $T_\omega := \Phi(1,\omega)$.

Définition 1.3.1. Un système dynamique aléatoire notera par $\mathcal{T}$ sur un espace $(X,\mathcal{F})$ de composante aléatoire $(\Omega,\mathcal{A},\vartheta,\mathbb{P})$ est généré par les applications T_ω.

Remarques 1.3.2. 1) Un système dynamique aléatoire $\mathcal{T}$ est dit de classe C^k si l'application $x \to T_\omega x$ est de classe C^k.
2) Lorsque nous choisissons $\Omega = \{\omega\}$ alors le système dynamique aléatoire $\mathcal{T}$ sera réduit à un système dynamique déterministe.

La dynamique du système dynamique aléatoire $\mathcal{T}$ est donné par l'application suivante

$$\begin{aligned} S : \Omega \times X &\longrightarrow \Omega \times X \\ (\omega, x) &\longmapsto (\vartheta\omega, T_\omega x). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Définition 1.3.3. L'application S est appelée produit oblique associé au système dynamique aléatoire.

Remarquons que le produit oblique permet d'étudier les propriétés du système dynamique aléatoire en considérant un système déterministe sur lequel nous pouvons appliquer les résultats classiques de la théorie ergodique.

Pour chaque réalisation $\omega \in \Omega$, l'évolution aléatoire d'un état initial $x \in X$ sera donnée par son orbit aléatoire définie par l'ensemble $\{x_\omega^n\}$ où pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$x_\omega^n := T_{\vartheta_\omega^{n-1}} \circ T_{\vartheta_\omega^{n-2}} \circ \cdots \circ T_\omega x := T_\omega^n x.$$

1.3.1 Notions d'invariances

Dans cette section, nous allons étudier les comportements à long terme d'un système dynamique aléatoire. Comme l'itération du produit oblique s'écrit sous la forme suivante, $S^n(\omega,x) = (\vartheta_\omega^n, T_\omega^n x)$, il est facile d'avoir directement que l'itération sur la seconde coordonnée est l'orbite aléatoire d'un point x associé à la réalisation ω. Cela amène à considérer les mesures invariantes du produit oblique.

Prenons μ une mesure de probabilité invariante pour $\Big(\Omega \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{F}, S\Big)$. Notons π_Ω la projection cannonique de $\Omega \times X$ sur Ω

$$\begin{aligned} \pi_\Omega : \Omega \times X &\longrightarrow \Omega \\ (\omega, x) &\longmapsto \omega. \end{aligned}$$

Il est trivial que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\pi_\Omega \circ S^n = \vartheta^n \circ \pi_\Omega. \tag{1.6}$$

Définition 1.3.4. Une mesure de probabilité μ est dite invariante pour le système dynamique aléatoire $\mathcal{T}$ si :

1. μ est invariante pour le produit oblique S (*i.e.* $S_*\mu = \mu$).
2. μ est de marginale $\mathbb{P}$ (*i.e.* $(\pi_\Omega)_*\mu = \mathbb{P}$).

Dans le cas général, une mesure de probabilité μ invariante pour le produit oblique ne s'écrit pas comme un produit. En particulier, l'invariance peut être décrit en matière de désintégrations par rapport à l'aléa.

Définition 1.3.5. Soit μ une mesure de probabilité sur $\Big(\Omega \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{F}\Big)$ de marginale $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$, l'application

$$\begin{array}{rcl} \mu_.(.) : \Omega \times \mathcal{F} & \longrightarrow & [0,1] \\ (\omega, B) & \longmapsto & \mu_\omega(B) \end{array} \tag{1.7}$$

est appelée désintégration de μ par rapport à $\mathbb{P}$ si :

1. Pour tout $B \in \mathcal{F}$, l'application $\omega \to \mu_\omega(B)$ est $\mathcal{A}$-mesurable.
2. Pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, l'application $B \to \mu_\omega(B)$ est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{F})$.
3. Pour tout $A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{F}$,

$$\mu(A) = \int_\Omega \int_X \mathbf{1}_A(\omega, x)\mu_\omega(\mathrm{d}x)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega). \tag{1.8}$$

Remarques 1.3.6.

1. La formule (1.8) s'ecrit symboliquement

$$\mu(d\omega, dx) = \mu_\omega(\mathrm{d}x)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega).$$

2. Si en prenant $A = F \times B$ tel que $F \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{F}$ la formule (1.8) est équivalente à :

$$\mu(F \times B) = \int_\Omega \mathbf{1}_F(\omega)\mu_\omega(B)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega).$$

3. Pour tout $A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{F}$, en posant $A_\omega := \{x \in X, (\omega, x) \in A\}$, la formule (1.8) est équivalente à

$$\mu(A) = \int_\Omega \mu_\omega(A_\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega).$$

Propriété 1.3.7. *Soit μ une mesure de probabilité sur $\Big(\Omega \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{F}\Big)$ de marginale $\mathbb{P}$. Si ϑ est inversible alors la désintégration de $S_*\mu$ est donnée par,*

$$(S_*\mu)_\omega = (T_{\vartheta_\omega^{-1}})_*\mu_{\vartheta_\omega^{-1}}, \qquad \mathbb{P} - p.s.$$

Démonstration. Tout d'abord, pour simplifier les tâches, nous notons $\vartheta_\omega = \vartheta(\omega)$. Soient $F \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{F}$ nous avons

$$(S_*\mu)(F \times B) = \mu\Big(S^{-1}(F \times B)\Big).$$

Nous posons $A = S^{-1}(F \times B) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{F}$. Soit $(\omega, x) \in \Omega \times X$, alors nous avons :

$$(\omega, x) \in A \Leftrightarrow \begin{cases} \omega \in \vartheta^{-1}(F) \\ T_\omega x \in B \end{cases}$$

Soit maintenant :

$$A(\omega) = \Big\{x \in X, (\omega, x) \in A\Big\},$$

alors

$$A(\omega) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \omega \notin \vartheta^{-1}(F) \\ T_\omega^{-1}(B) & \text{si } \omega \in \vartheta^{-1}(F) \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \int_\Omega \mu_\omega(A(\omega))\mathbf{1}_{\vartheta^{-1}(F)}(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) \\ &= \int_{\vartheta^{-1}(F)} \mu_\omega\Big(T_\omega^{-1}(B)\Big)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega). \end{aligned}$$

Puisque μ_ω est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{B})$, alors

$$\mu(A) = \int_{\vartheta^{-1}(F)} \Big((T_\omega)_*\mu_\omega\Big)(B)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega);$$

en appliquant le changement de variable $\overline{\omega} = \vartheta(\omega)$ pour tout $F \in \mathcal{A}$:

$$\mu(A) = \int_\Omega (T_{\vartheta^{-1}(\overline{\omega})})_*\mu_{\vartheta^{-1}(\overline{\omega})}\mathbf{1}_F(\overline{\omega})\mathbb{P}(\mathrm{d}\overline{\omega}).$$

Alors, puisque ϑ est inversible, nous trouvons le résultat. □

Corollaire 1.3.8. *Sous les hypothèses de la proposition précedente, nous avons une mesure de probabilité μ invariante par le produit oblique si et seulement si :*

$$(T_\omega)_*\mu_\omega = \mu_{\vartheta_\omega}, \tag{1.9}$$

pour $\mathbb{P}$-presque-tout $\omega \in \Omega$.

Maintenant, nous nous intéressons aux systèmes dynamiques aléatoires générés par des transformations aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d). Plus précisément, soit $W_1, W_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires i.i.d à valeurs sur Λ avec une distribution commune donnée par $\mathcal{P}$. Soit $\Omega = \Lambda^{\mathbb{N}}$ l'espace de réalisation. D'autre part, nous pouvons voir que chaque transformation représente une perturbation de taille ϵ de la dynamique initiale. Dans ce cas, pour tous $\epsilon > 0$, $\Lambda = \Omega_\epsilon$ (où Ω_ϵ est un espace métrique), $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\epsilon$

et $n \geq 0$, l'orbite aléatoire d'un point initial $x \in X$ associée à une réalisation $\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega$ est donnée par la concatination suivante

$$T^n_{\underline{\omega}} := T_{\omega_n} \circ T_{\omega_{n-1}} \circ \dots \circ T_{\omega_1}(x). \tag{1.10}$$

Dans notre cadre, nous allons nous concentrer sur la classe des systèmes dynamiques aléatoires i.i.d tel que chaque système représente une perturbation dans laquelle il existe une mesure stationnaire. Cette classe a été traitée par exemple dans [33]

Définition 1.3.9. Soit $\epsilon > 0$, nous disons que la mesure de probabilité μ_ϵ sur les sous-ensembles Borel de X est stationnaire si

$$\int \int \phi\Big(T_\omega(x)\Big) \mathrm{d}\mu_\epsilon(x)\, \mathrm{d}\mathcal{P}_\epsilon(\omega) = \int \phi(x)\, \mathrm{d}\mu_\epsilon(x), \tag{1.11}$$

pour tout $\phi : X \to \mathbb{R}$ intégrable par rapport à μ_ϵ.

Nous notons par P_ω (resp $\mathcal{U}_\omega$) l'opérateur de Perron-Frobenius (**PF**) (resp l'opérateur d'évolution) associé à la dynamique. Donc l'égalité (1.11) pourrait être écrite comme :

$$\int \mathcal{U}_\epsilon \phi \, \mathrm{d}\mu_\epsilon \;=\; \int \phi \, \mathrm{d}\mu_\epsilon,$$

où $\mathcal{U}_\epsilon : L^\infty(\mathrm{Leb}) \to L^\infty(\mathrm{Leb})$ est l'opérateur d'évolution aléatoire défini par

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}_\epsilon \phi)(x) &= \int (\mathcal{U}_\omega \phi)(x)\, \mathrm{d}\mathcal{P}_\epsilon(\omega) \\ &= \int \phi \circ T_\omega(x)\, \mathrm{d}\mathcal{P}_\epsilon(\omega). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Pour toute fonction $\psi \in L^1$, l'adjoint de cet opérateur est appelé l'opérateur **PF** aléatoire $P_\epsilon : L^1(\mathrm{Leb}) \to L^1(\mathrm{Leb})$ défini par

$$(P_\epsilon \psi)(x) = \int (P_\omega \psi)(x)\, \mathrm{d}\mathcal{P}_\epsilon(\omega). \tag{1.13}$$

Les deux derniers opérateurs sont liés par une relation de dualité

$$\int P_\omega \psi \cdot \phi \, \mathrm{dLeb} \;=\; \int \mathcal{U}_\omega \phi \cdot \psi \, \mathrm{dLeb},$$

avec $\psi \in L^1$ et $\phi \in L^\infty$.

Définition 1.3.10. Une mesure stationnaire μ_ϵ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de densité h_ϵ si et seulement si h_ϵ est un point fixe de l'opérateur **PF**.

L'étude des systèmes dynamiques aléatoires nécessite de redéfinir les propriétés dynamiques classiques des systèmes en évolution, en particulier l'ergodicité et le mélange.

Définition 1.3.11. Un système dynamique aléatoire défini par une perturbation de taille ϵ est ergodique pour une mesure stationnaire μ_ϵ si le produit oblique associé est ergodique (au sens usuel).

Définition 1.3.12. Une mesure stationnaire μ_ϵ est dite mélangeante si pour toutes $\phi \in L^1(\text{Leb})$ et $\psi \in L^\infty(\text{Leb})$:

$$\lim_{n\to\infty} \int (\mathcal{U}_\epsilon^n \psi)\phi \, \mathrm{d}\mu_\epsilon = \int \phi \, \mathrm{d}\mu_\epsilon \int \psi \, \mathrm{d}\mu_\epsilon. \tag{1.14}$$

Maintenant, comme dans la Section 1.2, nous supposons que la mesure stationaire μ_ϵ a une bonne propriété de mélange.

Définition 1.3.13. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux espaces de Banach. Soient $\phi \in \mathcal{C}_1$ et $\psi \in \mathcal{C}_2$ deux fonctions non nulles et qui ne dépendent pas de $\underline{\omega} \in \Omega$. Un système dynamique aléatoire muni d'une mesure stationnaire μ_ϵ a une décroissance des corrélation par rapport à la mesure $\mu_\epsilon \times \mathcal{P}_\epsilon$ pour l'observable ϕ contre l'observable ψ si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la corrélation :

$$Cor_{\mu_\epsilon \times \mathcal{P}_\epsilon}(\phi, \psi, n) := \frac{1}{\|\phi\|_{\mathcal{C}_1} \|\psi\|_{\mathcal{C}_2}} \left| \int \Big(\int \psi \circ T_{\underline{\omega}}^n \, \mathrm{d}\mathcal{P}_\epsilon^{\mathbb{N}} \Big) \phi d\mu_\epsilon - \int \phi \, \mathrm{d}\mu_\epsilon \int \psi \, \mathrm{d}\mu_\epsilon \right| \tag{1.15}$$

converge vers zéro quand n tend vers l'infini.

Remarquons que par la définition de l'opérateur d'évolution aléatoire, la corrélation défini par (1.15) peut s'écrire commme suit :

$$Cor_{\mu_\epsilon \times \mathcal{P}_\epsilon}(\phi, \psi, n) := \frac{1}{\|\phi\|_{\mathcal{C}_1} \|\psi\|_{\mathcal{C}_2}} \left| \int (\mathcal{U}_\epsilon^n \psi)\phi \, \mathrm{d}\mu_\epsilon - \int \phi \, \mathrm{d}\mu_\epsilon \int \psi, \mathrm{d}\mu_\epsilon \right|, \tag{1.16}$$

avec

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}_\epsilon^n \psi)(x) &= \int \ldots \int \psi\Big(T_{\omega_n} \circ T_{\omega_{n-1}} \circ \cdots \circ T_{\omega_1}(x)\Big) \, \mathrm{d}\mathcal{P}_\epsilon(\omega_n) \ldots \mathrm{d}\mathcal{P}_\epsilon(\omega_1) \\ &= \int \psi \circ T_{\underline{\omega}}^n(x) \, \mathrm{d}\mathcal{P}_\epsilon^{\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

1.3.2 Récurrences aléatoires

Dans ce paragraphe, nous allons considérer un système dynamique aléatoire engendré par une famille des applications $\{T_{\underline{\omega}}\}_{\underline{\omega}\in\Omega}$ d'un espace X dans lui-même dans lequel il existe une mesure stationnaire μ_ϵ.

Définition 1.3.14. Pour un $\underline{\omega} \in \Omega$ fixé, le premier temps de retour aléatoire dans un sous-ensemble mesuerable $A \subset X$ de l'orbit aléatoire partant de $x \in A$ est donné par

$$\tau_A^{\underline{\omega}}(x) := \inf\{n > 0 : T_{\underline{\omega}}^n \in A\}. \tag{1.17}$$

Définition 1.3.15. Un système dynamique aléatoire sur X muni d'une mesure stationnaire μ_ϵ est dit aléatoirement apériodique si :

$$\mu_\epsilon \times \mathcal{P}_\epsilon^{\mathbb{N}}\Big\{(x, \underline{\omega}) \in X \times \Omega : \exists n \in \mathbb{N}, T_{\underline{\omega}}^n x = x\Big\} = 0.$$

Dans la première définition de ce pargraphe, nous avons défini la notion de temps de retour quenched (i.e. pour $\underline{\omega}$ fixé). Dans la suivante, nous allons définir la notion de temps de retour moyenné (ou annealed). Supposons que le système dynamique aléatoire est ergodique.

Définition 1.3.16. Soit A un sous-ensemble de X. Le premier temps de retour aléatoire moyenné (ou annealed) pour un point $x \in A$ est donné par

$$\Upsilon_A(x) = \int_\Omega \tau_A^\omega(x)\, \mathrm{d}\mathcal{P}_\epsilon^{\mathbb{N}}(\omega).$$

Cette définition nous permet de donner le Théorème de Kač aléatoire.

Théorème 1.3.17. *Si le système dynamique aléatoire est ergodique pour la mesure stationnaire μ_ϵ, alors*

$$\int_A \Upsilon_A(x)\, \mathrm{d}\mu_\epsilon(x) \;=\; 1.$$

La preuve est facile ; il suffit d'appliquer le Théorème de Kač déterministe au produit oblique voir [34].

1.4 Événements rares

Les événements rares sont presque toujours liés à des valeurs anormales des observations dans un échantillon fini $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$. Ce qui signifie que nous somme intéressés aux observations extrêmes généralement au-dessus (ou en dessous) des seuils. Par conséquent, un événement rare ou un événement extrême correspond à la survenance d'un dépassement du seuil $u \in \mathbb{R}$

$$U(u) = \{X_0 > u\}. \tag{1.18}$$

Dans ce travail, notons F la fonction de répartition de X_0, i.e

$$F(x) = \nu(X_0 \leq x), \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{1.19}$$

De plus, $\overline{F} = 1 - F$, qui s'appelle la queue de la fonction de distrubition F et u_F désigne le point terminal à droite (right-end point) de la distribution F, i.e

$$u_F = \sup\{x : F(x) < 1\}. \tag{1.20}$$

Ce point terminal peut être fini ou infini voir [20, Exemple 3.3.22]. La vitesse pour laquelle $F(u)$ tend vers zéro quand $u \to u_F$ établit le type de queue que nous

avons. En particulier, de façon informelle, nous disons que F a de grosses queues si $u_F = \infty$ et $\overline{F}(u)$ disparaît polynomailement en u. Contrairement, nous avons des queues légères si $u_F < \infty$ ou $\overline{F}(u)$ disparaît d'une mainère exponentielle en u.

L'étude des queues de la fonction de distribution est reliée au comportement des statistiques d'ordre extrémales de l'échantillon. Soit $X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \ldots \leq X_{n,n}$ la statistique d'ordre associée à ces n variables aléatoires. Pour tout $i = 1, \ldots, n$ la variable aléatoire $X_{i,n}$ s'appelle la $(n-i+1)$ ème statistique d'ordre de l'échantillon. Il existe deux statistiques d'ordre qui sont particulièrement intéressantes pour l'étude des événements rares.

- La plus grande statistique d'ordre $X_{n,n}$ ou statistique du maximum

$$M_n := X_{n,n} = \max\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}. \tag{1.21}$$

- La plus petite statistique d'ordre $X_{1,n}$ ou statistique du minimum

$$X_{1,n} = \min\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}. \tag{1.22}$$

Le comportement asymptotique du maximum M_n (respectivement $X_{1,n}$) permet de rendre compte de la fin de la distribution. Ces deux statistiques d'ordre sont liées l'une à l'autre à l'aide de la relation suivante

$$X_{1,n} = -\max\{-X_0, -X_1, \ldots, -X_{n-1}\}.$$

Remarque 1.4.1. Par définition, les statistiques d'ordre ne sont pas indépendantes, même si les variables X_i sont i.i.d.

Maintenant, puisque nous nous intéressons au comportement anormal décrit par la queue de F, nous sommes préoccupés par les statistiques d'ordre extrême de telles M_n. La connaissance de M_n permet de conclure si le dépassement se produit ou non entre les n premières observations. Si $\{M_n \leq u\}$ se produit, nous concluons qu'il n'y a pas de dépassement de u jusqu'au temps $n-1$. Dans le cas des événements indépendants, c'est-à-dire lorsque le processus stochastique $X_0, X_1, \cdots$ est une suite de variables aléatoires i.i.d., alors M_n converge presque sûrement vers u_F. Ce fait ne fournit pas assez des informations, d'où l'idée d'utiliser une transformation afin d'obtenir des résultats plus exploitables pour les lois limites des maxima. Par conséquent, nous nous intéressons à une loi non dégénérée pour le maximum ; la théorie des valeurs extrêmes permet de donner une réponse à cette problématique. Les premiers résultats concernant la caractérisation du comportement asymptotique des maxima M_n sont convenablement normalisés.

Définition 1.4.2. Nous disons que nous avons une loi des valeurs extrêmes (**LVE**) pour M_n s'il existe une fonction de distribution non dégénérée $H : \mathbb{R} \to$

[0, 1] avec $H(0) = 0$ et pour tout $\tau > 0$ il existe une suite de niveaux $u_n = u_n(\tau), n = 1, 2, \ldots$ telle que

$$n\nu(X_0 > u_n) \to \tau, \qquad \text{quand } n \to \infty \tag{1.23}$$

et pour lequel on a :

$$\nu(M_n \leq u_n) \to \bar{H}(\tau) := 1 - H(\tau) \qquad \text{quand } n \to \infty. \tag{1.24}$$

La motivation pour l'utilisation d'une suite de normalisation $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant (1.23) provient du cas où $X_0, X_1, \ldots$ sont i.i.d. Dans ce cas, il est clair que

$$\nu(M_n \leq u_n) = \Big(F(u)\Big)^n.$$

Par conséquent, la condition (1.23) donne :

$$\nu(M_n \leq u_n) = \Big(1 - \nu(X_0 > u_n)\Big)^n \simeq \Big(1 - \frac{\tau}{n}\Big)^n \to e^{-\tau}$$

quand $n \to \infty$. De plus, l'inverse est également vrai (voir [19]).

Théorème 1.4.3 ([19]). *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d avec une fonction de distribution commune F. Alors, si $0 < \tau < \infty$, il existe une suite $\{u_n\}$ satisfaisante* (1.23) *si et seulement si*

$$\frac{1 - F(x)}{1 - F(x-)} \to 1, \quad \text{quand } x \to u_F$$

ou de manière équivalente, si et seulement si

$$\frac{p(x)}{1 - F(x-)} \to 0$$

où $p(x) = F(x) - F(x-)$.

1.5 Théorie des valeurs extrêmes classiques

L'étude de valeur extrême est le point de départ d'une analyse plus approfondie des propriétés des événements rares. Dans cette partie, nous rappelons certains résultats classiques de la théorie des valeurs extrêmes (**TVE**). Premièrement, nous allons voir l'étude des propriétés distributives du maximum de n variables aléatoires i.i.d. Ensuite, nous rappelons certaines conditions introduites par Leadbtter [19] pour obtiner la **LVE** dans le cas de processus stochastiques stationnaires non indépendants. La stationnarité caractérise un processus pour lequel les propriétés stochastique sont homogènes à travers le temps. Nous pouvons définir la stationnarité comme la suivante.

Définition 1.5.1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires. Nous disons que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire si pour tout $t \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(X_1, X_2, \ldots, X_t)$ a même loi que $(X_{1+k}, X_{2+k}, \ldots, X_{t+k})$.

1.5.1 Block-Maxima et distribution des valeurs extrêmes généralisée

Dans cette sous-partie nous allons donner la caractérisation du comportement asymptotique des maxima, qui est développé par Fisher and Tippett [35]. Tout d'abord, nous avons :

Définition 1.5.2. Soient F^* et F deux fonctions de distribution. Nous disons que F^* et F sont du même type si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$, telles que

$$F^*(ax+b) = F(x).$$

Théorème 1.5.3 ([36, 35])**.** *Soit $X_0, X_1, \ldots$ une suite de variables aléatoires i.i.d. S'il existe deux suites normalisantes réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a_n > 0$ pour tout n, telle que*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \nu\Big(a_n(M_n - b_n) \leq y\Big) &= \lim_{n\to\infty} F^n(u_n) \\ &= G(y) \end{aligned} \tag{1.25}$$

avec

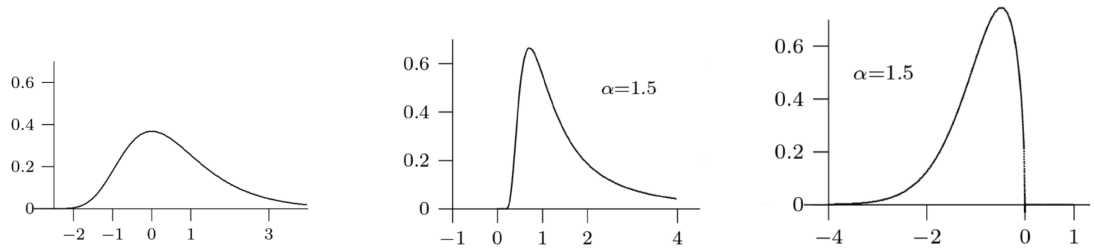
$$u_n = u_n(y) = \frac{y}{a_n} + b_n \tag{1.26}$$

où la convergence se produit aux points de continuité de G et G non dégénéré, alors G est l'une des trois lois limites suivantes :

1. $EV_1(y) = \exp\{-e^{-y}\}, y \in \mathbb{R}$: *ceci est également connu sous le nom de distribution des valeurs extrêmes de* ***Gumbel****.*
2. $EV_2(y) = \begin{cases} \exp\{-y^{-\alpha}\}, & si\ y > 0 \\ 0, & si\ y \leq 0 \end{cases}$
   où $\alpha > 0$ cette famille de fonctions de distributions est connue sous le nom de distribution des valeurs extrêmes de ***Fréchet****.*
3. $EV_3(y) = \begin{cases} \exp\{-y^{-\alpha}\}, & si\ y \leq 0 \\ 0, & si\ y > 0 \end{cases}$
   où $\alpha > 0$ cette famille de fonctions de distributions est connue sous le nom de distribution des valeurs extrêmes de ***Weibull****.*

Remarque 1.5.4. L'importance de ce théorème est de montrer que quelle que soit la loi de variable aléatoire originelle, la loi limite des extrêmes a toujours la même forme, bien que le comportement de ces lois soit complètement différent.

La figure 1.1 montre la forme de la loi limite de Gumbel, Fréchet et Weibull.



(a) (b) (c)

FIG. 1.1. Densités pour les fonctions (a)Gumbel, (b)Fréchet et (c)Weibull.

Définition 1.5.5. Les trois types peuvent être combinés dans un modèle unifié appelé distribution des valeurs extrêmes généralisée (Generalized Extreme Value) que nous noterons (GEV)

$$G(y) = \mathrm{GEV}_\xi(y) = \begin{cases} \exp\{-(1+\xi y)^{-\frac{1}{\xi}}\}, & \forall y \in \mathbb{R}, \quad 1+\xi y > 0, \quad \text{si } \xi \neq 0 \\ \exp\{-e^{-y}\}, & \forall y \in \mathbb{R}, \quad \text{si } \xi = 0. \end{cases} \tag{1.27}$$

Remarquons que le comportement de la queue de distribution dépend uniquement du paramètre ξ qui est appelé indice de queue ou indice des valeurs extrêmes. Donc, nous avons les cas suivantes :

♠ Le cas $\xi = 0$, la distribution correspond au type **Gumbel**.

♠ Le cas $\xi > 0$ correspond à la loi de **Fréchet** de paramètre $\alpha = \frac{1}{\xi}$.

♠ Le cas $\xi < 0$ correspond à la loi de **Weibull** de paramètre $\alpha = -\frac{1}{\xi}$.

Nous insistons sur le fait que, comme indiqué dans [36] pour la suite de variables aléatoires i.i.d, le type de distribution limite des maxima partiels est complètement déterminé par la queue de la fonction de distribution F. Comme nous pouvons également le trouver dans [19, Théorème 1.6.2], pour obtenir le domaine d'attraction respectif pour **TVE**. Nous avons les conditions nécessaires et suffisantes sur la fonction de distribution F.

1. **Type 1 :** $G(y) = EV_1(y)$ (Gumbel) si et seulement si $u_F = \infty$ et il existe une fonction strictement positive $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{s \to u_F} \frac{\overline{F}\big(s + yh(s)\big)}{\overline{F}(s)} = e^{-y}. \tag{1.28}$$

2. **Type 2 :** $G(y) = EV_2(y)$ (Fréchet) si et seulement si $u_F = \infty$ et il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $y > 0$,

$$\lim_{s \to u_F} \frac{\overline{F}(sy)}{\overline{F}(s)} = y^{-\beta}. \tag{1.29}$$

3. **Type 3 :** $G(y) = EV_3(y)$ (Weibull) si et seulement si $u_F < \infty$ et il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $y > 0$,

$$\lim_{s \to 0} \frac{\overline{F}(u_F - sy)}{\overline{F}(u_F - s)} = y^{\gamma}. \tag{1.30}$$

Remarque 1.5.6. Il est possible de prouver que $\int_0^{\infty} 1 - F(u)\mathrm{d}u < \infty$ lorsque la limite de **Type1** est réalisée avec un choix approprié de h qui est donné par

$$h(s) = \int_s^{u_F} \frac{1 - F(u)}{1 - F(s)} \mathrm{d}u. \tag{1.31}$$

Remarque 1.5.7. Comme dans [19, Corollaire 1.6.3], nous choisissons les constants de normalisation a_n et b_n pour obtenir les lois de valeurs extrêmes correspondantes :

$$\begin{array}{lll} \textbf{Type1 :} & a_n = \Big(h(\gamma_n)\Big)^{-1}, & b_n = \gamma_n, \\ \textbf{Type2 :} & a_n = \gamma_n^{-1}, & b_n = 0, \\ \textbf{Type3 :} & a_n = \Big(u_F - \gamma_n\Big)^{-1}, & b_n = u_F, \end{array}$$

avec $\gamma_n = F^{-1}(1 - \frac{1}{n}) = \inf\Big\{y : F(y \geq 1 - \frac{1}{n})\Big\}$.

Afin d'avoir une vision plus pratique du problème, nous pouvons reformuler le résultat principal du Théorème 1.5.3

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \nu\Big(M_n \leq y\Big) &= \lim_{n \to \infty} F^n(y) \\ &= GEV_{\xi}\Big(\frac{y - \mu}{\sigma}\Big), \end{aligned} \tag{1.32}$$

où μ est le paramètre de localisation (ou de position) et σ est le paramètre d'échelle (ou dispersion). Pour n grand, le constant de normalisation a_n converge vers σ^{-1} et b_n vers μ.

Ceci motive la méthode paramétrique proposée par Gumbel pour étudier la queue d'une série temporelle résultant d'un processus stochastique. C'est l'approche des Block-Maxima (BM), par lequel nous divisons la série de données enregistrées en n blocs de longueurs k (voir **FIG** 1.2). Ensuite, le maximum de chaque bloc est récupéré et la distribution empirique des k maxima est ensuite ajustée par le meilleur type de fonction de distribution de GEV correspondant. Cela implique, en particulier, l'estimation des paramètres ξ, μ et σ. La meilleure estimation obtenue de μ et σ donne le n-ième élément de la suite de normalisation b_n et l'inverse du n-ième élément de la suite de normalisation a_n.

Dans cette figure, les observations X_2, X_5, X_7 et X_{11} représentent les maximums des blocs pour quatre périodes de trois observations.

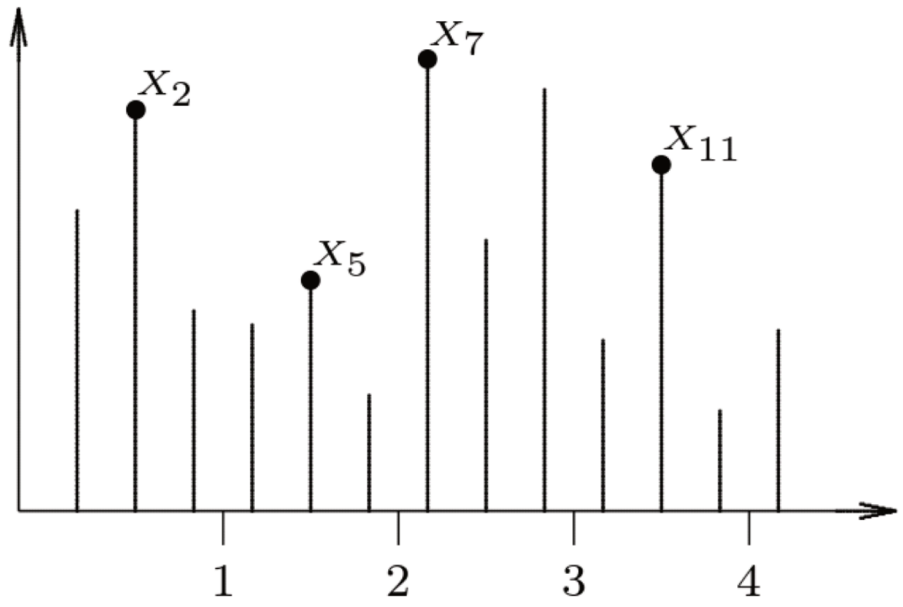


FIG. 1.2. Block-Maxima (BM).

L'un des problèmes de la méthode BM est le fait qu'en regardant uniquement les maximums dans chaque blocs, où est conduit à une perte des informations dans les autres grandes valeurs de l'échantillon. Pour ça nous présentons mainetenant, un nouvelle méthode des excès également connue sous le nom de Peaks Over Threshold (POT).

1.5.2 Excès au dessus d'un seuil et distribution de Pareto généralisée

La méthode de POT est une nouvelle approche de la théorie des valeurs extrêmes basée sur l'utilisation des observations qui dépassent un certain seuil note u. En d'autres termes, elle consiste à ne conserver que les observations dépassant un certain seuil. L'idée est basée sur le choix d'un seuil pas trop faible et sur l'étude des excès au-delà de ce seuil. Pour plus de détails voir Pickands [37]. La figure 1.3 donne une description simple de cette méthode

Définition 1.5.8. Soit $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un échantillon fini des variables aléatoires i.i.d et u un seuil fixe tel que $u < u_F$. Notons par $N_u = \Big\{ j \in$

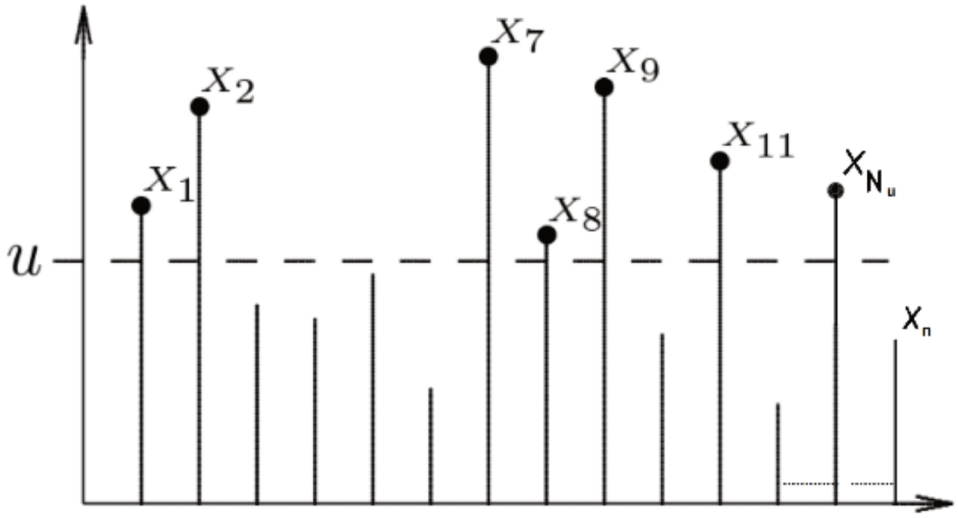


FIG. 1.3. Excès au dessus d'un seuil u.

$\{1, 2, \ldots, n\}; X_j > u\Big\}$, les excès au-delà du seuil u comme l'ensemble des variables aléatoires Y_i définies par :

$$Y_i := X_i - u, \qquad \text{où } \ i \in N_u.$$

Définition 1.5.9. Pour tout $y \in [0,\, u_F - u[$, la loi conditionnelle, F_u des excès au-delà du seuil u est définie par :

$$F_u(y) = \nu(Y \leq y | X > u) = \frac{F(y+u) - F(u)}{1 - F(u)}.$$

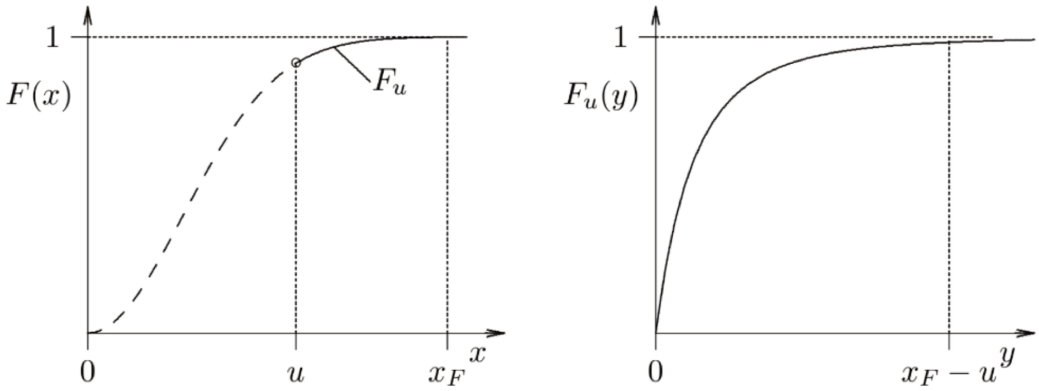


FIG. 1.4. Fonction de distribution F et la loi conditionnelle F_u.

Théorème 1.5.10 ([37, 38]). *Supposons que $X_1, X_2, \cdots$ une suite de variables aléatoires i.i.d. Alors, il existe des suites de normalisation linéaire $(a_n > 0)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \nu\Big(a_n(M_n - b_n) \leq y\Big) = GEV_\xi(y)$$

si et seulement s'il existe une fonction positive $\sigma = \sigma(u)$ telle que

$$\lim_{u\to u_F} \sup_{y\in[0,\, u_F-u[} \Big|F_u(y) - GPD_{\xi,\sigma}(y)\Big| = 0$$

où $GPD_{\xi,\sigma}$ est la distribution de Pareto généralisée (GPD) définie par

$$GPD_{\xi,\sigma}(y) = \begin{cases} 1-(1+\xi\frac{y}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}, & \forall y \geq 0, & si\ \xi \geq 0 \\ 1-(1+\xi\frac{y}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}, & \forall y \in [0,\, -\frac{\sigma}{\xi}], & si\ \xi < 0 \\ 1-e^{-y}, & \forall y \in \mathbb{R}, & si\ \xi = 0. \end{cases} \tag{1.33}$$

Remarquons, que plus le seuil u assez grand, plus la loi des excès est prochée au GPD. Aussi, il est crucial de noter que le paramètre ξ est le même pour les correspondantes distributions GEV et GPD. De plus, une relation fonctionnelle simple relie les deux distributions :

$$1 + \log\Big(GEV_\xi(\frac{y}{\sigma})\Big) = GPD_{\xi,\sigma}(y).$$

1.5.3 Extrêmes pour des suites d'observations dépendantes et stationnaires

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à l'étude de l'existence de la loi de valeurs extrêmes pour les processus stochastiques stationnaires dépendants. Dans [39] Loynes et al ont proposé deux conditions sur la structure de la dépendance des processus stochastiques. Ils sont appelés $D(u_n)$ et $D'(u_n)$ et ils nous garantissent l'existence des mêmes lois des valeurs extrêmes appliquées aux maxima partiels de suite de variables aléatoires satisfaisant ces conditions.

Nous appelons d'abord $F_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ la fonction de distribution conjointe de $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_n}$ et mettons

$$F_{i_1,i_2,\ldots,i_n}(u) = F_{i_1,i_2,\ldots,i_n}(u,\ldots,u).$$

<u>**Condition**</u> $D(u_n)$: Nous disons que $D(u_n)$ est valable pour la suite $X_0, X_1, \ldots,$ si pour tout entier $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ et $j_1 < j_2 <, \ldots < j_k$ pour lesquels $j_1 - i_p > t$ et $n \in \mathbb{N}$, assez grand

$$\Big|F_{i_1,i_2,\ldots,i_p,j_1,j_2,\ldots,j_k}(u_n) - F_{i_1,i_2,\ldots,i_p}(u_n)F_{j_1,j_2,\ldots,j_k}(u_n)\Big| \leq \gamma(n,t), \tag{1.34}$$

avec $\lim_{n\to\infty} \gamma(n, t_n) = 0$ tel que $t_n = o(n)$.

Maintenant, soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers telle que

$$k_n \to \infty \quad \text{et} \quad k_n t_n = o(n). \tag{1.35}$$

<u>**Condition**</u> $D'(u_n)$: Nous disons que $D'(u_n)$ est valable pour la suite $X_0, X_1, \ldots,$ s'il existe une suite d'entiers $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisante (1.35) telle que

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{j=1}^{\lfloor n/k_n \rfloor} \nu(X_0 > u_n, X_j > u_n) = 0. \tag{1.36}$$

Théorème 1.5.11. *Soient $X_0, X_1, \ldots$ un processus stationnaire et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite satsfaisante* (1.23)*, pour chaque $\tau > 0$. Si les conditions $D(u_n)$ et $D'(u_n)$ sont valablées, alors $H(\tau) = 1 - e^{-\tau}$.*

Remarque 1.5.12. La condition $D'(u_n)$ joue un double rôle, elle garantit l'existence d'une distribution limite pour M_n et assure également que la loi limite est de la forme $\bar{H}(\tau) = e^{-\tau}$. Par contre lorsque $D(u_n)$ est vérifiée et $D'(u_n)$ non, nous ne pouvons pas affirmer que cette distribution limite a existé ou non. Mais, si elle a existé, nous pouvons encore dire quelque chose du type de loi à laquelle devrait s'attendre dans la limite.

Le théorème suivant montre ce que nous avons observé précédemment.

Théorème 1.5.13 ([40])**.** *Soit $X_0, X_1, \ldots$ un processus stationnaire et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite satisfaisante* (1.23)*. Supposons que $D(u_n)$ est valable pour chaque choix de τ, si la limite définie par* (1.24) *existe, alors il existe une constant $0 \leq \theta \leq 1$ tel que $\bar{H}(\tau) = e^{-\theta\tau}$ pour tout $\tau > 0$.*

Définition 1.5.14. Nous disons que $X_0, X_1, \ldots$ admet un indice extrémal **(IE)** noté par $0 \leq \theta \leq 1$, si nous avons une **LVE** pour M_n telle que $\bar{H}(\tau) = e^{-\theta\tau}$, pour tout $\tau > 0$

La notion de **IE** était latente dans le travail de Loynes [41], mais elle a été officiellement établie par Leadbetter dans [40]. Le paramètre θ détermine la force de la dépendance du processus $X_0, X_1, \ldots$ de telle sorte que $\theta = 1$ indique que le processus pratiquement pas de mémoire , tandis que la valeur très faible de $\theta > 0$ révèlent une mémoire extrêmement longue. En particulier, lorsque $\theta > 0$, nous pouvons interpréter l'inverse de l' **IE** θ^{-1} comme le nombre moyenne de dépassements d'un niveau élévé dans un grand regroupement observé.

Dans [42] Freitas et al ont proposé une nouvelle condition qu'ils ont nommée $D_2(u_n)$ pour le processus stochastiques stationnaires généraux, ce qui impose une exigence d'uniformité beaucoup plus faible que $D(u_n)$. Cette condition avec $D'(u_n)$ admet une preuve de l'existance des lois de valeurs extrêmes en l'absence du clustering. L'intérêt de $D_2(u_n)$ par rapport à $D(u_n)$ est qu'on peut facilement établir la loi des valeurs extrêmes pour des systèmes dynamiques

avec une décroissance des corrélations suffisamment rapides.

Condition $D_2(u_n)$: Nous disons que $D_2(u_n)$ est valable pour la suite $X_0, X_1, \ldots$ pour tous l, t et n si

$$\begin{aligned}\Big|\nu\Big(\Big\{X_0 > u_n\Big\} \cap \Big\{\max\{X_t, X_{t+1}, \ldots, X_{t+l-1}\} \leq u_n\Big\}\Big) &- \nu\Big(X_0 > u_n\Big)\nu\Big(M_l \leq u_n\Big)\Big| \\ &\leq \alpha(n,t), \qquad (1.37)\end{aligned}$$

avec $\alpha(n,t)$ décroit par rapport à t pour chaque n, $n\alpha(n,t_n) \to 0$ quand $n \to \infty$ et $t_n = o(n)$.

Remarque 1.5.15. Si les conditions $D'(u_n)$ et $D_2(u_n)$ sont satisfaites pour une suite de variable aléatoire $X_0, X_1, \ldots$, alors il existe une **LVE** pour M_n et $\bar{H}(\tau) = e^{-\tau}$.

Dorénavant nous considérerons $X_0, X_1, \ldots$ comme un processus stochastiques stationnaires avec une fonction de distribution commune F. Alors, l'étude du comportement limite pour les maximum de ce processus peut-être réduite sous des conditions adéquates de mélange à la **TVE** classique pour la suite de variables aléatoires i.i.d. Par conséquent, au processus stationnaire nous associons une suite de variables aléatoires indépendante notée par $Z_0, Z_1, \ldots$ avec une fonction de distribution commune F. Notons aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\hat{M}_n = \max\{Z_0, Z_1, \ldots, Z_{n-1}\}. \qquad (1.38)$$

Le théorème suivant montre le lien entre la distribution asymptotique de M_n et $\hat{M}_n$ voir [42]

Théorème 1.5.16. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de niveaux telle que*

$$n\nu\Big(X_0 > u_n\Big) = n\Big(1 - F(u_n)\Big) \to \tau \qquad \textit{quand } n \to \infty.$$

Si nous supposons que les deux conditions $D_2(u_n)$ et $D'(u_n)$ sont valables alors,

$$\lim_{n\to\infty} \nu\Big(M_n \leq u_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \nu\Big(\hat{M}_n \leq u_n\Big). \qquad (1.39)$$

1.6 Valeurs extrêmes et systèmes dynamiques

Dans le contexte des systèmes dynamiques, l'étude des **LVE** est un sujet assez récent. Il est apparu pour la première fois dans l'article pionnier de Collet, [43], qui a été une source d'inspiration pour beaucoup de recherches sur cette question. Le sujet a ensuite été traité et développé dans de nombreuses contributions ultérieures, notamment ([42], [44], [45]). Dans cette Section, nous allons présenter l'étude des événements rares pour les systèmes dynamiques.

Rappelons que $(X, \mathcal{F}, T, \nu)$ est un système dynamique où X est une variété riemannienne, $\mathcal{F}$ est la σ-algebra de Borel, $T : X \to X$ est une application mesurable et ν une mesure de probabilité T-invariante.

Soit $X_0, X_1, \ldots$ une suite temporelles qui proviennent d'un tel système simplement en évaluant un observable donné $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ le long de l'orbite du système donné par

$$X_n = \varphi \circ T^n, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{1.40}$$

Lorsque nous considérons la dynamique aléatoire, le processus sera

$$X_n = \varphi \circ T^n_{\underline{\omega}}, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \tag{1.41}$$

qui peut être également écrit comme $X_n = \bar{\varphi} \circ S^n$ avec

$$\bar{\varphi} : X \times \Omega \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \tag{1.42}$$

$$(x, \omega) \to \varphi(x).$$

Il est clair que les séries $X_0, X_1, \ldots$ sont des variables non indépendante. De plus, la T-invariance de ν garantit la stationnarité de ce processus stochastique. Nous supposons que la variable aléatoire $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ réalise un maximum global en un point $z \in X$ (nous permettons $\varphi(z) = +\infty$).

1.6.1 Observables et valeurs extrêmes

Nous supposons que pour tout point $z \in X$, l'observable $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est de la forme suivante

$$\varphi(x) = g\Big(dist(x, z)\Big). \tag{1.43}$$

Lorsque nous considérons la dynamique aléatoire, l'observable sera définie pour tout $z \in X$,

$$\varphi(x, \omega) = g\Big(dist(f(x, \omega), z)\Big), \tag{1.44}$$

avec f une projection canonique sur X et la fonction $g : [0, \infty[\to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ admet zéro comme un maximum globale. En plus $g : V \to W$ est bijective et strectement décroissante dans un voisinage de zéro V et elle vérifie l'un des trois types de comportement suivants.

Type 1 : il existe une fonction strictement positive $h : W \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{s \to g_1(0)} \frac{g_1^{-1}\Big(s + yh(s)\Big)}{g_1^{-1}(s)} = e^{-y}. \tag{1.45}$$

Type 2 : $g_2(0) = \infty$ et il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $y > 0$,

$$\lim_{s \to \infty} \frac{g_2^{-1}(sy)}{g_2^{-1}(s)} = y^{-\beta}. \tag{1.46}$$

Type 3 : $g_3(0) = D < \infty$ et il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $y > 0$,

$$\lim_{s \to 0} \frac{g_3^{-1}(D - sy)}{g_3^{-1}(D - s)} = y^{\gamma}. \tag{1.47}$$

On peut montrer qu'aucune limite non dégénéré applique si g_1^{-1} n'est pas integrable sur $[0, g_1(0)]$. Par conséquent, un choix approprié de h dans le cas de **Type 1** est donné par

$$h(s) = \frac{1}{g_1^{-1}(s)} \int_s^{g_1(0)} g_1^{-1}(t)\, \mathrm{d}t, \qquad \text{pour tout} \quad s < g_1(0). \tag{1.48}$$

Dans ce qui suit, nous donnons un exemple de chacun des types précédents.

♣ $g_1(x) = -\log(x)$ dans ce cas, (1.45) est facilement vérifié avec $h \equiv 1$. Cela est utilisé pour étudier la convergence vers la loi Gumbel.

♣ $g_2(x) = x^{-1/\alpha}$ pour $\alpha > 0$, (1.46) est vérifié avec $\beta = \alpha$ pour la loi Fréchet.

♣ $g_3(x) = D - x^{1/\alpha}$ pour $D \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$, (1.47) est vérifié avec $\gamma = \alpha$ pour la loi Weibull.

Remarque 1.6.1. Le choix de l'observable qui a été définie dans (1.43), implique que la forme de la fonction g détermine le type de distribution extrémale que nous obtenons. En particulier, pour les observables de type g_i nous obtenons une loi d'extrême de type EV_i pour $i = 1, 2, 3$. Alors, le type de la distribution extrémale est essentiellement déterminé par la forme de l'observable.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que les observables φ et la mesure ν sont suffisamment réguliers. Nous ferons référence à cette hypothèse comme condition **(R1)**. Dans certaines des applications, nous considèrerons que le point z est un point périodique (répulsif), ce qui implique que la condition **(R2)** définie ci-dessous est vérifiée.

(R1) Pour u suffisamment proche de $u_F := \varphi(z)$, l'événement

$$U(u) \;=\; \{X_0 > u\} \;=\; \{x \in X,\, \varphi(x) > u\}$$

correspond à une boule topologique centrée sur z. De plus, la quantité $\nu\Big(U(u)\Big)$ varie d'une façon continue en fonction de u sur un voisinage de u_F.

(R2) Si $z \in X$ est un point périodique (répulsif) de première période $p \in \mathbb{N}$, alors pour u assez grand nous avons $\{X_0 > u\} \cap T^{-p}\Big(\{X_0 > u\}\Big) \neq \emptyset$ et $\{X_0 > u\} \cap T^{-j}\Big(\{X_0 > u\}\Big) = \emptyset$ pour tout $j = 1, 2, \ldots, p-1$. De plus,

le fait que z soit répulsif signifie que nous avons une contraction quand on prendra les images réciproque. Ce qui implique qu'il existe $0 < \theta < 1$ de telle sorte que $\bigcap_{j=0}^{i} T^{-jp}\Big(\{X_0 > u\}\Big)$ est une autre boule de rayon plus petit autour de z avec

$$\nu\Big(\bigcap_{j=0}^{i} T^{-jp}\Big(\{X_0 > u\}\Big)\Big) \sim (1-\theta)^i \nu\Big(\{X_0 > u\}\Big),$$

pour tout u suffisamment grand. A noter que pour les points périodiques répulsifs, si la mesure est absolument continue par rapport à Lebesgue, avec une densité positive et suffisamment régulière, alors l'**IE** peut être donné par :

$$\theta = 1 - \frac{1}{\Big|\det D(T^p)(z)\Big|}.$$

1.6.2 Approximation de Poisson pour le nombre de visites

Soient $(X, \mathcal{F}, T, \nu)$ un système dynamique ergodique où X est un espace compact et U un sous-ensemble de X. Dans cette partie, nous allons définir la distribution du nombre de visites. Pour cela, nous supposons que si la mesure $\nu(U) > 0$, l'ergodicité garantie que l'orbite de ν-presque tout point $x \in X$ visite U une infinité de fois. De plus, une fois qu'une orbite rentre dans U, alors le temps entre deux visites consécutives est d'ordre $\frac{1}{\nu(U)}$ (ceci est du au Théorème de kač). Plus précisément, nous nous intéressons au nombre de fois qu'une orbite visite l'ensemble U entre le temps 0 et $\lfloor \frac{t}{\nu(U)} \rfloor$. C'est-à-dire la variable aléatoire à valeurs entières sur l'espace de probabilité (X, ν)

$$N(t) := \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t}{\nu(U)} \rfloor} \mathbf{1}_U \circ T^j. \tag{1.49}$$

En 1838, Siméon Denis Poisson avait introduit une loi de probabilité nommée loi de Poisson qui permet de décrire le comportement du nombre d'évènements qui se produisent dans un laps de temps fixé.

Définition 1.6.2. Soit N un nombre des événements d'un intervalle donné (le laps de temps donné). Si λ est le nombre moyen d'évènements dans cet intervalle, alors la probabilité qu'il existe exactement k évènements est

$$P(t)\{k\} = \nu(N = k) := \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

Revenons à notre situation, nous prenons l'ensemble U comme une boule de rayon r autour d'un point générique x ou un ensemble de cylindres dynamiques

convergeant vers ce point. Plusieurs auteurs, par exemple ([46], [47], [48], [49] et [50]) ont prouvé que, lorsque le rayon de l'ensmble U décroît vers zéro, le nombre de visites jusqu'à un temps $\lfloor \frac{t}{\nu(U)} \rfloor$ suit une loi de Poisson.

Théorème 1.6.3. *Soit $(X, \mathcal{F}, T, \nu)$ un système dynamique à fortes propriétés de mélange, alors pour ν-presque tout $x \in X$*

$$\lim_{r \to 0} \nu\Big(\{y \in X, N(t) = k\}\Big) = \frac{t^k e^{-t}}{k!}, \tag{1.50}$$

pour tout $k \geq 0$ et tout $t \geq 0$.

Maintenant, nous prenons le point x comme un point périodique de période minimale q, dans ce cas, les auteurs des [51] et [52] ont montré que la limite distributionnelle du nombre des visites est la loi de Poisson composée. Cela a été montré pour certains systèmes dynamiques non uniformément hyperboliques, qui comprennent des applications dilatantes par morceaux d'intervalles. Kallenberg [53] a donné le détail sur la loi de Poisson composée.

Définition 1.6.4. Pour tout $p \in [0, 1[$, nous dénotons par $Ge(p)$ la distribution géométrique qui donnant la probabilité du première occurrence de succès nécessite k d'essais indépendants avec chacun une probabilité de succès p. Elle est définie par :

$$Ge(p)\{k\} := (1-p)p^{k-1}, \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}_+.$$

Définition 1.6.5. Soit $\mathcal{M}(\mathbb{N})$ la collection de toutes les mesures des probabilités sur $\mathbb{N}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_0^+$ et $\eta \in \mathcal{M}(\mathbb{N})$, la distribution de Poisson composée de paramètres t et η défini par :

$$PC(t, \eta)\{k\} := \sum_{j=1}^{\infty} P(t)\{j\} \cdot (\eta^*)^j\{k\}, \qquad \text{pour chaque } k \in \mathbb{N}$$

où $(\eta^*)^j$ est le j-éme produit de η.

Définition 1.6.6. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in [0, 1[$ la distribution de Pólya-Aeppli de paramètre t et p défini par :

$$PA(t, p)\{k\} := e^{-pt} \sum_{j=1}^{k} p^j (1-p)^{k-j} \frac{(pt)^j}{j!} \begin{pmatrix} k-1 \\ j-1 \end{pmatrix}, \tag{1.51}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $PA(t, p)\{0\} = e^{-t}$.

Propriété 1.6.7. *Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in [0, 1[$, nous avons les propriétés suivantes*

1. $PA(t, p) = PC\Big(t, Ge(p)\Big)$.
2. $PA(t, 0) = P(t)$.

1.7 Distribution statistique des temps de retour et d'entrée

Dans cette partie, nous allons nous concentrer sur l'autre approche dans l'étude des propriétés statistiques des événements rares, en ce qui concerne l'existence de la distribution statistique des temps de retour et d'entrée que nous notons respectivement RTS et HTS. La distribution des temps de retour et des temps d'entrée a été étudié dans plusieurs travaux (voir Coelho [54], Abadi et Galves [55]). Aussi l'un des premiers travaux sur cette question réalisé par Collet, Galves et Schmitt [56]. Nous considérons d'abord le cas déterministe ; prenons un ensemble $A \in \mathcal{F}$.

1.7.1 Existence de distribution statistique

Soient $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des ensemebles dans X et ν une mesure de probabilité T-invariante telle que $\nu(B_n) \to 0$ quand $n \to \infty$. Nous rappelons que la mesure conditionnelle sur B de l'ensemble $A \in \mathcal{B}$ s'écrit comme

$$\nu_B(A) = \frac{\nu(B \cap A)}{\nu(B)} \subset X. \tag{1.52}$$

Définition 1.7.1. Le système dynamique $(X, \mathcal{F}, T, \nu)$ admet une limite de distribution des temps de retour (RTS) $\widetilde{G}$ pour la suite $B_n \subset X$ si pour tout $t > 0$, si la limite suivante existe et elle est égale à $\widetilde{G}$

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \nu_{B_n}\Big(\Big\{x \in B_n : \tau_{B_n}(x) > \frac{t}{\nu(B_n)}\Big\}\Big) \\ =: &\lim_{n\to\infty} \widetilde{G}_{B_n}(t) = \widetilde{G}(t). \end{aligned} \tag{1.53}$$

où $\widetilde{G}$ est une fonction de distribution non dégénerée $\widetilde{G} : [0, +\infty] \to [0, 1]$.

Définition 1.7.2. Le système admet une limite de distribution des temps d'entrée (HTS) G pour la suite B_n si pour tout $t > 0$, la limite suivante existe et elle est égale à G

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \nu\Big(\Big\{x \in X : \tau_{B_n}(x) > \frac{t}{\nu(B_n)}\Big\}\Big) \\ =: &\lim_{n\to\infty} G_{B_n}(t) = G(t) \end{aligned} \tag{1.54}$$

où G est une fonction de distribution non dégénerée $G : [0, +\infty] \to [0, 1]$.

Dans le cas aléatoire, en remplacera

$$X = X \times \Omega \text{ et } T = S \text{ (produit oblique)}$$

$$\nu = \mu_\epsilon \times \mathcal{P}_\epsilon^{\mathbb{N}} \text{ et } B_n = B_n^* \times \Omega$$

où $B^* \subset X$ tel que $\mu_\epsilon\Big(B_n^*\Big) \to 0$, lorsque $n \to \infty$.

Alors G_{B_n} est défini par

$$G_{B_n}(t) := \mu_\epsilon \times \mathcal{P}_\epsilon^{\mathbb{N}}\Big(\Big\{(x,\omega) \in X \times \Omega : \tau_{B_n^*}^{\omega}(x) > \frac{t}{\mu_\epsilon(B_n^*)}\Big\}\Big).$$

1.7.2 Relation entre les HTS et RTS

Le résultat suivant concerne le lien entre HTS et RTS. Afin de décrire la relation entre HTS et RTS, nous devons d'abord clarifier certains des concepts de convergence des distributions et aussi préparer notre famille de distributions possibles.

Définition 1.7.3. Soit $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions des distributions. Nous disons que $(G_n)_n$ converge faiblement vers une fonction G si elle est décroissante, continue à droite et satisfait : $\lim_{n\to\infty} G_n(t) = G(t)$, pour tout t dans l'ensemble de continuité de G. On notera $G_n \Rightarrow G$.

Théorème 1.7.4 ([57])**.** *La* HTS (*resp* RTS) *appartient à la classe des fonctions* $\mathcal{G}$ (*resp* $\widetilde{\mathcal{G}}$) *où*

$$\begin{aligned}\mathcal{G} = \ & \Big\{G : \mathbb{R} \to [0,\,1],\, G \equiv 0\, sur\,]-\infty,\, 0],\, G\, est\, croissante,\\ & continue\, et\, concave\, sur\, [0,\,\infty[\, et\, G(t) \le t\, pour\, t \ge 0\Big\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{G}} = \ & \Big\{\widetilde{G} : \mathbb{R} \to [0,\,1],\, \widetilde{G} \equiv 0\, sur\,]-\infty,\, 0],\, \widetilde{G}\, est\, croissante\\ & continue\, \text{à}\, droite\ et \int_0^{+\infty} \Big(1 - \widetilde{G}(s)\Big)\, \mathrm{d}s \le 1\Big\}.\end{aligned}$$

Le théorème suivant montre que nous pouvons accéder à toutes les fonctions de ces ensembles par passage à la limite sur des fonctions de répartition des temps de retour et d'entrée, en choisissant une suite d'ensembles mesurables $(B_n)_n$ dont la mesure tend vers 0.

Théorème 1.7.5 ([57, 58])**.** *Soit* $(X, \mathcal{F}, T, \nu)$ *un système dynamique ergodique et apériodique. Alors :*

1. *Pour toute* $\widetilde{G} \in \widetilde{\mathcal{G}}$*, il existe une suite* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ *telle que* $\nu(B_n) \to 0$ *et* $\widetilde{G}_{B_n} \Rightarrow G$*.*
2. *Si* $\nu(B_n) \to 0$ *et* $\widetilde{G}_{B_n} \Rightarrow \widetilde{G}$*, alors* $\widetilde{G} \in \widetilde{\mathcal{G}}$*.*
3. *Pour toute* $G \in \mathcal{G}$*, il existe une suite* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ *telle que* $\nu(B_n) \to 0$ *et* $G_{B_n} \Rightarrow G$*.*
4. *Si* $\nu(B_n) \to 0$ *et* $G_{B_n} \Rightarrow G$*, alors* $G \in \mathcal{G}$*.*

Théorème 1.7.6 ([59]). *Soient $(X, \mathcal{F}, T, \nu)$ un système dynamique ergodique et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensemble de mesure positive $(\nu(B_n) > 0)$ de l'espace de phase X. Alors, G_{B_n} converge fabilement si et seulement si $\tilde{G}_{B_n}$ converge fabilement. En particulier, un système admet un* HTS *G si et seulement s'il admet* RTS *$\tilde{G}$ et nous avons la relation suivante*

$$G(t) = \int_0^t \Big(1 - \tilde{G}(s)\Big) ds. \tag{1.55}$$

1.8 Relation entre les HTS et LVE

Dans [60], les auteurs ont établi un lien entre HTS/RTS et les **LVE**s des processus donnés par (1.40). Cela a été fait pour des mesures invariantes qui sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. Essentiellement, il a été prouvé que si ces séries temporelles ont un **LVE** H alors le système a une HTS H pour les boules centrées sur z et vice versa. Rappelons que l'existence d'une HTS H est équivalente à dire que le système a RTS $\tilde{H}$, où H et $\tilde{H}$ sont liés par (1.55). Ceci était basé sur l'hypothèse **(R1)** ce qui est équivalente à dire

$$T^{-1}\Big(\{M_n \leq n\}\Big) = \{\tau_{U(u)} > n\}.$$

Théorème 1.8.1 ([60]). *Soit $(X, \mathcal{F}, T, \nu)$ un système dynamique avec ν absoulement continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit $z \in X$ tel que le théorème de différentiation de Lebesgue est valable. Alors,*

1. *Si nous avons une* HTS *pour des boules centrées sur z, alors nous avons une* **LVE** *pour M_n qui s'applique aux observables* (1.43) *atteignant un maximum à z.*
2. *Si nous avons une* HTS *de type exponentiel (i.e. $G(t) = e^{-t}$) pour des boules centrées sur z, alors nous avons une* **LVE** *pour M_n qui coïncide avec $\hat{M}_n$. En particulier, cette* **LVE** *doit être l'une des trois types classiques. De plus, si g est de type g_i, pour certains $i \in \{1, 2, 3\}$, alors nous avons un* **LVE** *pour M_n de type EV_i.*

Théorème 1.8.2 ([60]). *Soit $(X, \mathcal{F}, T, \nu)$ un système dynamique avec ν absoulement continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit $z \in X$ tel que le théorème de différentiation de Lebesgue est valable. Alors,*

1. *Si nous avons une* **LVE** *pour M_n qui s'applique aux observables* (1.43) *atteignant un maximum à z, alors nous avons une* HTS *pour des boules centrées sur z,*
2. *Si nous avons un* **LVE** *pour M_n qui coïncide avec $\hat{M}_n$, alors nous avons un* HTS *de type exponentiel (i.e. $G(t) = e^{-t}$) pour des boules centrées sur z.*

Dans [61], les auteurs ont prouvé l'équivalence entre l'existence de HTS et les **LVE**s dans le cas de systèmes dynamiques avec des mesures qui ne sont pas absolument continues par rapport à Lebesgue. De plus, ils ont prouvé avec des bonnes propriétés des mélange un résultat équivalent pour les retours aux cylindres définis dynamiquement.

Chapitre 2

Réseaux Des Applications Couplées

Dans ce chapitre, nous allons présenter une approche puissante et générale basée sur la perturbation de l'opérateur de transfert pour des réseaux d'applications couplées, et qui a l'avantage d'être applicable à une grande classe d'observables survenants dans l'étude de la théorie des valeurs extrêmes.

2.1 L'application et les opérateurs

Un réseau d'application couplée (coupled map lattice) est un système dynamique qui modélise le comportement de systèmes non linéaires. Ils sont principalement utilisés pour étudier qualitativement la dynamique chaotique de systèmes étendus spatialement. D'autres part, la dynamique des systèmes chaotiques couplés et mutuellement interactifs est extrêmement riche et peut afficher des propriétés qui ne sont pas détectables dans le comportement des éléments individuels. Parmi les plus simples de ces systèmes, les réseaux d'applications couplées, composés d'un ensemble d'applications à faible dimension dont l'évolution est déterminée à la fois par leur propre dynamique et par la dynamique des autres éléments de l'ensemble. Les schémas de couplage de réseau peuvent être locaux ou globaux. Pour le couplage local, chaque application interagit uniquement avec ses voisins les plus proches. Dans un schéma de couplage global, cependant, l'évolution de chaque application est affectée par la dynamique de toutes les autres applications. Il a été introduit pour la première fois par Kaneko dans [13] et a ete étudié successivement, entre autres, par P. Ashwin [14] (et ses références).

Dans toute cette thèse, nous notons (**CML**) pour le réseau de $n \in \mathbb{N}^*$ applications unidimensionnelles couplées.

2.1.1 Réseaux des applications couplées

Soit T une application dilatante par morceaux de l'intervalle unité I dans lui-même avec un nombre fini de branches q. Supposons que T est de classe C^2

sur les intérieurs des domaines d'injection $A_1, A_2, \ldots, A_q$ et étendu par continuité aux bords.

Les deux définitions suivantes sont nécessaires pour définir le réseau des applications couplées.

Définition 2.1.1. Soit $L = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^n$ ou $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Pour tout $\bar{x} \in I^L$, l'application $\hat{T}_0 : I^L \to I^L$ définie par :

$$\hat{T}_0(\bar{x})_i := T(x_i), \qquad \forall i \in L$$

est appelée dynamique découplée.

Définition 2.1.2. Pour $L = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et pour tout $\gamma \in [0, 1]$, l'application $\Phi_\gamma : I^L \to I^L$ définie par :

$$\Big(\Phi_\gamma(\bar{x})\Big)_i := \sum_{j \in L} c_{\gamma,j} x_{i-j}, \qquad \text{pour tout } i \in L \tag{2.1}$$

où $c_{\gamma,j} \geq 0$, $\sum\limits_{j \in L} c_{\gamma,j} = 1$ et $c_{0,0} = 1$, est appelée opérateur de couplage.

Remarque 2.1.3. L'indice $\gamma \in [0, 1]$ est appelé force de couplage ou force d'interaction. Remarquons que, dans le cas d'absence d'interaction ($\gamma = 0$), l'opérateur de couplage devient l'identité ($\Phi_0 = Id$).

Définition 2.1.4. Le réseau d'applications couplées est défini par l'application suivante

$$\hat{T} := \Phi_\gamma \circ \hat{T}_0. \tag{2.2}$$

Dans notre cadre, nous considérons un système de n applications couplées défini par : pour tout $\bar{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I^n$,

$$\Big(\hat{T}(\bar{x})\Big)_i := (1-\gamma)T(x_i) + \frac{\gamma}{n}\sum_{j=1}^{n} T(x_j), \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{2.3}$$

L'étude de ce système est équivalente à l'étude de **CML** sur un réseau périodique où l'opérateur de couplage défini par (2.1) avec $L = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et

$$c_{\gamma,j} := \begin{cases} \frac{\gamma}{n} & si \quad j \geq 1, \\ (1-\gamma) + \frac{\gamma}{n} & si \quad j = 0. \end{cases}$$

Dans ce cas, le système représente un couplage global où chaque composante est couplée à tous les autres.

Maintenant, nous considérons un certain nombre d'hypothèses qui seront exigées sur l'application $\hat{T}$.

Soit $U_k, k = 1, 2, \ldots, q^n$, les domaines d'injection locale de l'application $\hat{T}$. Les hypothèses précédentes posées sur l'application T assurent l'existance d'un

ensemble ouvert W_k qui contenant U_k. Dans cet ensemble nous pouvons définir une application notée par $\hat{T}_k$ qui est la restriction de $\hat{T}$ sur W_k telle que $\hat{T}_k$ est un C^2 difféomorphisme sur W_k. Donc pour tout $k \in \{1, \ldots, q^n\}$, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $B_{\epsilon_0}(\hat{T}U_k) \subset \hat{T}_k(W_k)$[1] .

De plus, nous supposons,

$$s_1 := \sup_k \sup_{\bar{x} \in \hat{T}(W_k)} \left\| D\hat{T}_k^{-1}(\bar{x}) \right\| < \lambda < 1, \tag{2.4}$$

où $\lambda = \sup_i \sup_{x \in T_i A_i} \left| DT_i^{-1}(x) \right|$ et $\|\cdot\|$ représente la norme euclidienne. Nous écrirons "$dist$" pour la distance par rapport à cette norme.

Nous aurons besoin dans ce qui suit de considérer les itérées de l'application $\hat{T}$ et de les gérer avec une distribution différente.

Soit $U_{m,k}$ le domaine d'injection locale de l'application $\hat{T}^m$ pour tout $m \geq 1$. Il existe un voisinage ouvert $W_{m,k}$ et un nombre positif $\epsilon_{0,m}$ tels que,

1. $W_{m,k} \supset U_{m,k}$.
2. $\hat{T}_k^m(W_{m,k}) \supset B_{\epsilon_{0,m}}(\hat{T}^m U_{m,k})$.
3. $\hat{T}_k^{-m}$ est de classe C^2 sur $\hat{T}_k^m(W_{m,k})$ où $\hat{T}_k^{-m}$ est l'inverse de $\hat{T}^m$ sur $U_{m,k}$.

Nous supposerons aussi :

$$s_m := \sup_k \sup_{\bar{x} \in \hat{T}^m(W_{m,k})} \left\| D\hat{T}_k^{-m}(\bar{x}) \right\| < 1, \qquad \forall m \geq 1. \tag{2.5}$$

2.1.2 Opérateurs

Un outil important et essentiel pour nos autres considérations est l'opérateur de transfert ou Perron-Frobenius (**PF**). Nous noterons cet opérateur pour l'application $\hat{T}$ par $\hat{P}$. Sous les hypothèses sur $\hat{T}$, il est facile de voir que $\hat{P}$ est bien défini sur L^1 et se lit comme :

$$\hat{P}f = \sum_l (gf) \circ \hat{T}_l^{-1} \mathbf{1}_{\hat{T}(U_l)},$$

où $g = \frac{1}{\left|\det(D\hat{T})\right|}$ et $\mathbf{1}_{\hat{T}(U_l)}$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble $\hat{T}(U_l)$.

Nous pouvons également définir cet opérateur par la propriété suivante

1. Pour être plus précis, $B_{\epsilon_0}(A)$ est le ϵ_0-voisinage de l'ensemble A, $B_{\epsilon_0}(A) := \{\bar{x} \in I^n, dist(\bar{x}, A) \leq \epsilon_0\}$. Nous allons l'utiliser dans le cadre de l'espace fonctionnel quasi-Hölder..

Proposition 2.1.5. *Soit $\hat{P} : L^1 \to L^1$ l'opérateur* **PF** *associé à notre application $\hat{T}$. Alors, pour toutes $f \in L^1$ et $g \in L^\infty$, $\hat{P}$ satisfait la relation de dualité*

$$\int g\,\hat{P}(f)\,\mathrm{dLeb} = \int g \circ \hat{T}\,f\,\mathrm{dLeb},$$

avec Leb *est la mesure de Lebesgue sur I^n.*

Démonstration. Prouvons d'abord pour la fonction simple, c'est-à-dire, pour tout $B \subset I^n$, prenons $g = \mathbf{1}_B$. Alors,

$$\begin{aligned}\int g \circ \hat{T}\,f\,\mathrm{dLeb} &= \int \mathbf{1}_B \circ \hat{T}\,f\,\mathrm{dLeb}\\ &= \int_{\hat{T}^{-1}B} f\,\mathrm{dLeb}\\ &= \int_B \hat{P}(f)\,\mathrm{dLeb} = \int g\,\hat{P}(f)\,\mathrm{dLeb}.\end{aligned}$$

En général, si $g \in L^\infty$ nous pouvons approximer g par une combinaison des fonctions simples $g_c = \sum_i b_i \mathbf{1}_{B_i}$ de telle sorte que, pour tout $\epsilon > 0$, $\|g - g_c\|_\infty \leq \epsilon$ et

$$\int g_c\,\hat{P}(f)\,\mathrm{dLeb} = \int g_c \circ \hat{T}\,f\,\mathrm{dLeb}. \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}\int g \circ \hat{T}\,f\,\mathrm{dLeb} &= \int (g - g_c + g_c) \circ \hat{T}\,f\,\mathrm{dLeb}\\ &= \int (g - g_c) \circ \hat{T}\,f\,\mathrm{dLeb} + \int g_c \circ \hat{T}\,f\,\mathrm{dLeb}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int g\,\hat{P}(f)\,\mathrm{dLeb} &= \int (g - g_c + g_c)\,\hat{P}(f)\,\mathrm{dLeb}\\ &= \int (g - g_c)\,\hat{P}(f)\,\mathrm{dLeb} + \int g_c\,\hat{P}(f)\,\mathrm{dLeb}.\end{aligned}$$

De plus, par le non singularité de $\hat{T}$, nous avons

$$\left|\int (g - g_c) \circ \hat{T}\,f\,\mathrm{dLeb}\right| \leq \|(g - g_c)\|_\infty \|f\|_1 \leq \epsilon \|f\|_1$$

et

$$\left|\int (g - g_c)\,\hat{P}(f)\,\mathrm{dLeb}\right| \leq \|(g - g_c)\|_\infty \left\|\hat{P}(f)\right\|_1 \leq \epsilon \|f\|_1 .$$

Ce qui donne le résultat. □

2.2 Propriétés Spectrales

Les propriétés spectrales de l'opérateur **PF** deviennent intéressantes lorsqu'il s'agit des espaces de Banach appropriés. Donc, nous supposons qu'il existe un espace de Banach $\mathcal{B}$ de norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ qui est injecté d'une façon compacte dans L^1 et il vérifie les propriétés suivantes.

- **P1**(Inégalité de Lasota-Yorke) pour toute $f \in \mathcal{B}$, il existe $\eta < 1$ et une constante $C > 0$ telle que

$$\left\|\hat{P}f\right\|_{\mathcal{B}} \leq \eta \|f\|_{\mathcal{B}} + C \|f\|_1 . \tag{2.7}$$

Cette inégalité garantie l'existence d'un trou spectrale pour l'opérateur $\hat{P}$ sur $\mathcal{B}$. C'est-à-dire, que l'opérateur $\hat{P}$ a une valeur propre isolée égale à 1 et qui est aussi le rayon spectral de $\hat{P}$. Nous appelons souvent η la facteur de contraction dans l'inégalité de Lasota-Yorke.

Remarque 2.2.1. Parfois, nous ne pouvons pas obtenir une telle inégalité pour l'application $\hat{T}$, dans ce cas, il suffit d'obtenir **P1** pour une itération de $\hat{T}$. Cette itération est donne

$$\left\|\hat{P}^k f\right\|_{\mathcal{B}} \leq \eta^k \|f\|_{\mathcal{B}} + \frac{C}{1-\eta} \|f\|_1 , \quad k > 1. \tag{2.8}$$

Cette dernière inégalité est réellement nécessaire dans la théorie de perturbation que nous utiliserons plus tard.

- **P2** Nous supposons que 1 est l'unique valeur propre simple sur le cercle unité pour l'opérateur $\hat{P}$. Cela implique que $\hat{P}$ préserve une mesure mélangeante $\hat{\mu}$, qui est l'unique mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. De plus, nous notons $\hat{h} \in L^\infty$ la densité de cette mesure.

Remarque 2.2.2. Il est bien connu qu'avec nos hypothèses sur T, la dynamique découplée $\hat{T}_0$ (c'est-à-dire $\gamma = 0$ dans (2.3)) satisfait **P1** sur tout espace fonctionnel raisonnable $\mathcal{B}$. Par conséquent, le Théorème de décomposition spectrale de Ionescu-Tulcea-Marinescu (voir [62]), garantit l'existence d'un nombre fini de composantes ergodiques absolument continus. Ils se réduisent à une unique mesure mélangeante absolument continue, ce qui est équivalent à **P2**, avec une condition de transitivité topologique sur l'application T, ce qui pourrait être obtenue en demandant, par exemple, que T soit Bernoulli, Markov, couvrant, etc...

Pour transférer les propriétés **P1** et **P2** à l'application $\hat{T}$ avec $\gamma > 0$, nous invoquons la théorie des perturbations de Keller et Liverani développée dans [63].

Selon cette théorie, il faudrait auparavant montrer la persistance de l'inégalité de Lasota-Yorke (2.7) pour l'application $\hat{T}$, puis vérifier que, pour toute $f \in \mathcal{B}$:

$$\left\|(\hat{P} - P_0)f\right\|_1 \leq p_\gamma \|f\|_{\mathcal{B}}, \tag{2.9}$$

où P_0 est l'opérateur **PF** pour le système découplé ($\gamma = 0$) et p_γ une fonction semi continue supérieurement monotone et qui converge vers zéro lorsque γ approche de zéro.

Cette théorie de la perturbative a été successivement améliorée par les mêmes auteurs dans [64] pour traiter des systèmes ouverts qui produisent un type différent de perturbation pour l'opérateur de transfert. Cette perturbation apparaît naturellement dans le contexte du **TVE** comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

Pour définir cette perturbation, nous considérons une collection croissante $\{D_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles imbriqués de I^n tels que $\mathrm{Leb}(D_l) \to 1$ quand $l \to \infty$. De plus, supposons que les ensembles D_l soient les fermetures de leurs intérieurs et aient des bords C^∞ par morceaux et de codimension-1. Ces ensembles D_l ont une définition spécifique selon l'observable utilisé pour l'application de **TVE**. Nous définissons l'opérateur de transfert perturbé $\widetilde{P}_l$ comme suit :

$$\widetilde{P}_l(h) := \hat{P}(h\mathbf{1}_{D_l}). \tag{2.10}$$

Dans la suite de cette partie, nous ajoutons des nouvelles hypothèses que cet opérateur doit satisfaire pour appliquer la théorie des perturbations aux systèmes ouverts. Le but est de comparer les opérateurs $\hat{P}$ et $\widetilde{P}_l$ et d'obtenir une expansion asymptotique pour le rayon spectral de $\widetilde{P}_l$ proche de 1 quand l est assez grand. Nous verrons qu'il donnera l'**IE** dans la distribution limite de la loi de Gumbel. Nous suivons en particulier le schéma proposé par Keller dans [64], qui est également résumé dans [65] et au chapitre VII du livre [66] auquel nous nous reportons pour plus de détails. Dans la deuxième partie de [64], il y a six hypothèses. Les trois premières demandent l'uniformité (dans le paramètre "bruit") et la quasi-compacité de l'opérateur $\widetilde{P}_l$. Nous les résumons dans la seule hypothèse suivante :

- **P3** L'opérateur $\widetilde{P}_l$ vérifie l'inégalité de Lasota-Yorke uniforme en l sur l'espace $\mathcal{B}$, les facteurs η et C seront les mêmes pour tout l assez grand.

Les deux propriétés suivantes **P4** et **P5** sont équivalentes à les hypothèses (5) et (6) dans [64].

- **P4** Pour toute $h \in \mathcal{B}$ la quantité suivante

$$r_l := \sup_{h, \|h\|_{\mathcal{B}} \leq 1} \left| \int (\hat{P}h - \widetilde{P}_l h)\, \mathrm{dLeb} \right|, \tag{2.11}$$

  doit converger vers zéro quand $l \to \infty$.

Remarquons que d'après [64, Remarque 3], **P4** avec **P2**, implique l'hypothèse (4) dans cette dernière référence.

- **P5** Soit $\hat{h}$ la densité de la mesure invariante $\hat{\mu}$ de $\hat{T}$. Cette densité doit vérifier :
$$r_l \left\|(\hat{P} - \widetilde{P}_l)\hat{h}\right\|_{\mathcal{B}} \leq C'\hat{\mu}(D_l^c), \tag{2.12}$$
où C' est une constante indépendante de l et D_l^c le complément de D_l. De plus, nous supposons que la densité $\hat{h}$ est strictement positive, c'est-à-dire la borne inférieure (l'infimum) de $\hat{h}$ plus grand que $\hat{h}^{(\inf)} > 0$ sur un ensemble de mesure 1.

Finalement, nous supposons que

- **P6** La limite suivante
$$q_k := \lim_{l\to\infty} q_{k,l} := \lim_{l\to\infty} \frac{\int \Big(\hat{P} - \widetilde{P}_l\Big)\widetilde{P}_l^k\Big(\hat{P} - \widetilde{P}_l\Big)(\hat{h})\,\mathrm{dLeb}}{\hat{\mu}(D_l^c)}, \tag{2.13}$$
existe pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Sous les hypothèses **P1-P6**, nous concluons, comme dans [27],que
$$\theta := 1 - \sum_{k=0}^{\infty} q_k, \tag{2.14}$$
existe et égal à
$$\lim_{l\to\infty} \frac{1-\rho_l}{\hat{\mu}(D_l^c)}$$
où ρ_l est le rayon spectral de $\widetilde{P}_l$. Nous avons donc l'expansion asymptotique suivante pour ρ_l :
$$1 - \rho_l = \hat{\mu}(D_l^c)\theta\Big(1 + o(1)\Big), \text{ quand } l \to \infty \tag{2.15}$$

Dans ce qui suit, nous soulignons que,

i) ρ_l est la plus grande valeur propre de l'opérateur perturbé $\widetilde{P}_l$.

ii) ρ_l est l'unique valeur propre sur le cercle de rayon ρ_l.

3i) Il existe une fonction $\hat{g}_l \in \mathcal{B}$ et une mesure $\hat{\mu}_l$ tels que, pour toute $h \in \mathcal{B}$, les opérateurs $\widetilde{P}_l$ satisfont
$$\widetilde{P}_l h = \rho_l \hat{g}_l \int h\,\mathrm{d}\hat{\mu}_l + Q_l h, \tag{2.16}$$
où $\int \hat{g}_l\,\mathrm{d}\hat{\mu} = 1$, $\int h\,\mathrm{d}\hat{\mu}_l$ converge vers $\int h\,\mathrm{d}\hat{\mu}$ quand $l \to \infty$ et Q_l est un opérateur linéaire avec un rayon spectral strictement inférieur à ρ_l et de norme satisfaisante $\|Q_l^n\|_{\mathcal{B}} \leq \varsigma_l^n$ pour un choix convenable de $0 < \varsigma_l < 1$.

Remarque 2.2.3. Par le lien entre la distribution du maximum et la distribution de temps d'entrée, nous remarquons que cette approche fournit automatiquement les bons exposants pour la distribution asymptotique du maximum. Donc, il donne une nouvelle preuve de l'existence de cette distribution. La quantité θ dans (2.14) s'appelle l'indice extrémal (**IE**) et jouera un rôle important dans ce qui suit. Nous verrons en particulier qu'il donnera une correction de la loi exponentielle pour la distribution du maximum. Dans cet égard, il coïncide avec l'indice extrémal qui est défini dans [66] et [67].

Dans la suite de ce chapitre, nous allons donner un espace de Banach que garantit l'existence de mesure invariante absolument continue pour les applications multidimensionnelles et vérifie les six propriétés précédentes **P1-P6**.

2.3 Les Espaces Quasi-Hölder

Dans cette partie, nous allons rappeler l'espace des fonctions quasi-Hölder qui a été introduit par Keller [63] pour des applications unidimensionnelles. Saussol a la suite généralisé à des applications dilatantes par morceaux multidimensionnelles. Dans le cas unidimensionnel, l'espace généralement utilisé est celui des fonctions à variations bornées.

Étant donné un ensemble de Borel A de I^n, nous définissons l'oscillation d'une fonction $h \in L^1(I^n)$ par :

$$osc(h, A) := \mathrm{Esup}_{\bar{x}\in A} h(\bar{x}) - \mathrm{Einf}_{\bar{x}\in A} h(\bar{x}).$$

Il est facile de vérifier que $\bar{x} \longmapsto osc\Big(h, B_\epsilon(\bar{x})\Big)$ définit une fonction mesurable où $B_\epsilon(\bar{x})$ est la boule de centre $\bar{x}$ et de rayon $\epsilon > 0$ (voir [68]).

Remarque 2.3.1. Les fonctions de L^1 sont définies presque partout, alors que l'oscillation est une fonction à valeurs réelles positives définie partout sur $\mathbb{R}^n$ et nous avons :

$$\mathrm{supp} osc\Big(f, B_\epsilon(.)\Big) \subset B_\epsilon(\mathrm{supp} f).$$

D'après ce qui précède, pour tout $0 < \alpha < 1$ et $\epsilon_0 > 0$ nous pouvons définir la α-semi norme

$$|h|_\alpha := \sup_{0<\epsilon\leq\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon^\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} osc\Big(h, B_\epsilon(\bar{x})\Big)\, \mathrm{dLeb}. \tag{2.17}$$

L'espace des fonctions avec α-semi norme bornée est défini par :

$$V_\alpha = \Big\{h \in L^1(I^n) : |h|_\alpha < \infty\Big\}.$$

Remarquons que $|\cdot|_\alpha$ dépend du choix de ϵ_0 par contre V_α non.

Dans la proposition suivante, nous offrons quelques propriétés de l'oscillation.

Proposition 2.3.2. *Soient $h, f \in L^\infty, g$ positive, $0 < a, b, c$ et A un borélien de I^n. Soit $h_i \in L^\infty$ pour tout $i = 1, 2, \ldots,$ l'oscillation possède les propriétés suivantes :*

(i) $osc\Big(\sum_i h_i, B_a(\cdot)\Big) \leq \sum_i osc\Big(h_i, B_a(\cdot)\Big)$.

(2i) $osc\Big(h\mathbf{1}_A, B_a(\cdot)\Big) \leq osc\Big(h, A \cap B_a(\cdot)\Big)\mathbf{1}_A(\cdot) + 2\Big[\mathrm{Esup}_{B_a(\cdot)\cap A}|h|\Big]\mathbf{1}_{B_a(A)\cap B_a(A^c)}(\cdot)$.

(3i) $osc(hg, A) \leq osc(h, A)\mathrm{Esup}_A g + osc(g, A)\mathrm{Einf}_A|h|$.

(4i) *Si $a + b \leq c$, alors pour tout $\bar{x} \in I^n$,nous avons :*

$$\mathrm{Esup}_{B_a(\bar{x})} h \leq \frac{1}{\mathrm{Leb}\Big(B_b(\bar{x})\Big)} \int_{B_b(\bar{x})} \Big(h(\bar{y}) + osc\Big(h, B_c(\bar{y})\Big)\Big)\, \mathrm{d}\bar{y}.$$

Pour la preuve voir [68].

Lemme 2.3.3. *Soit $\{h_m\}$ une suite des fonctions de L^1 qui converge dans L^1 vers h, alors*

$$|h|_\alpha \leq \liminf_{m\to\infty} |h_m|_\alpha. \tag{2.18}$$

Démonstration. Soit A un borélien de mesure positive. Par un raisonnement simple sur l'infimum et le supremum nous pouvons obtenir que :

$$osc(h, A) \leq \liminf_{m\to\infty} osc(h_m, A).$$

Le Lemme de Fatou permet alors de conclure que pour tout $\epsilon \leq \epsilon_0$,

$$\int osc\Big(h, B_\epsilon(\bar{x})\Big)\, \mathrm{dLeb} \leq \liminf_{m\to\infty} |h_m|_\alpha \epsilon^\alpha.$$

□

Maintenant, nous définissons la norme suivante :

$$\|\cdot\|_\alpha := |\cdot|_\alpha + \|\cdot\|_1. \tag{2.19}$$

Proposition 2.3.4. *L'espace de fonction V_α muni la norme $\|\cdot\|_\alpha$ est un espace de Banach note par $\mathcal{H}$.*

La preuve est basée sur le Lemme 2.3.3.

Proposition 2.3.5. *Soit Y_n le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{H}$ s'injecte continûment dans L^∞. En particulier, pour toute $h \in V_\alpha$,*

$$\|h\|_\infty \leq C_H \|h\|_\alpha,$$

où $C_H := \frac{\max(1,\epsilon_0^\alpha)}{Y_n \epsilon_0^n}$.

Lemme 2.3.6 ([68])**.** *Pour toute densité positive $h \in V_\alpha$, il existe une boule sur laquelle l'infimum de h est strictement positif. Le rayon de cette boule noté ϵ peut être pris comme :*

$$\epsilon := \min\Big\{\epsilon_0, \Big(\frac{\int h \mathrm{dLeb}}{|h|_\alpha}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big\}.$$

2.4 Vérification des hypothèses

Dans cette partie, nous allons montrer que les espaces quasi Hölder vérifier les six propriétés que nous avons supposées.

Les hypothèses que nous avons sont particulièrement adaptées à la nature et la régularité des bords des domaines U_k. Toutes ces hypothèses nous permettront de prouver que V_α est invariant par l'opérateur $\hat{P}$ quand $\alpha = 1$. De plus, l'inégalité de Lasota-Yorke sera vérifiée chaque fois que :

$$\eta := s_1 + \frac{4s_1}{1+s_1} Z + \frac{Y_{n-1}}{Y_n} < 1, \tag{2.20}$$

où Y_n est le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$ et Z est le nombre maximal des bords des domaines l'injectivité local qui peuvent se rencontrer en un point, c'est-à-dire :

$$Z = \sup_{x \in I^n} \sum_i \sharp\Big\{\text{morceau lisse contenant } \partial U_i \text{ qui contient } x\Big\}.$$

Pour m itération de l'application $\hat{T}$, le facteur de contraction défini par :

$$\eta_m := s_m + \frac{4s_m}{1+s_m} Z_m + \frac{Y_{n-1}}{Y_n} < 1, \tag{2.21}$$

où

$$Z_m = \sup_{x \in I^n} \sum_i \sharp\Big\{\text{morceau lisse contenant } \partial U_{m,i} \text{ qui contient } x\Big\}.$$

Proposition 2.4.1. *L'espace de Banach $\mathcal{H}$ est invariant par l'opérateur perturbé $\widetilde{P}_l$.*

Démonstration. D'après (2.17) pour toute $h \in V_\alpha(I^n)$, nous avons

$$|h\mathbf{1}_{D_l}|_\alpha := \sup_{0<\epsilon\leq\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon^\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} osc\Big(h\mathbf{1}_{D_l}, B_\epsilon(\bar{x})\Big)\, \mathrm{dLeb}.$$

Tout d'abord, par la Proposition 2.3.2, nous obtenons que

$$\begin{aligned} osc\Big(h\mathbf{1}_{D_l}, B_\epsilon(\bar{x})\Big) \;\leq\; & osc\Big(h, D_l \cap B_\epsilon(\bar{x})\Big)\mathbf{1}_{D_l} + \\ & 2\Big[\mathrm{Esup}_{D_l \cap B_\epsilon(\bar{x})} |h|\Big]\mathbf{1}_{B_\epsilon(D_l)\cap B_\epsilon(D_l^c)}(\bar{x}). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Donc lorsqu'en appliquant l'intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue puis en divisant par ϵ^α, nous trouvons

$$\begin{aligned} |h\mathbf{1}_{D_l}|_\alpha &\leq |h|_\alpha + \sup_{0<\epsilon\leq\epsilon_0} \frac{2}{\epsilon^\alpha} \int_{B_\epsilon(\bar{x})\cap D_l} \sup|h(\bar{x})|\, \mathbf{1}_{B_\epsilon(D_l)\cap B_\epsilon(D_l^c)}(\bar{x})\, \mathrm{dLeb} \\ &\leq |h|_\alpha + 2\,\|h\|_\infty \frac{\mathrm{Leb}\Big(B_\epsilon(D_l) \cap B_\epsilon(D_l^c)\Big)}{\epsilon^\alpha} \\ &\leq |h|_\alpha + 2C_H\,\|h\|_\alpha \frac{\mathrm{Leb}\Big(B_\epsilon(D_l) \cap B_\epsilon(D_l^c)\Big)}{\epsilon^\alpha}. \end{aligned}$$

Rappellons que D_l^c est le complementaire de l'ensemble D_l que nous allons définir plus tard, mais il est défini pour le moment par

$$D_l^c = \Big\{\bar{x} \in I^n, \max_{i\neq j} |x_i - x_j| \leq \nu_l\Big\},$$

où $\nu_l \to 0$ quand $l \to \infty$. Dans ce cas, nous pouvons voir que :

$$\mathrm{Leb}\Big(B_\epsilon(D_l) \cap B_\epsilon(D_l^c)\Big) \leq C_n \epsilon \nu_l. \tag{2.23}$$

En effet, la quantité qui nous intéresse est bornée par

$$\int_{I^n} \mathrm{d}\bar{x} \left| \prod_{i\neq j} \mathbf{1}_{\{|x_i - x_j| < \nu_l + \epsilon\}}(\bar{x}) - \prod_{i\neq j} \mathbf{1}_{\{|x_i - x_j| < \nu_l - \epsilon\}}(\bar{x}) \right|.$$

Remarquons que s'il y a au moins un facteur dans le premier produit égal à zéro, alors il est de même pour le deuxième produit. D'après ce raisonnement, nous supposons que tous les facteurs du premier produit sont 1. Par conséquent, la différence entre les deux produits sera maximale si au moins un facteur dans le deuxième produit est égal à zéro. De plus, il y aura au plus $\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{n}$ de telles possibilités. D'autre part, pour $1 \leq k \leq (n-1)$, chaque terme de $\binom{k}{n}$ contribue avec k mesures de valeurs $4^k \epsilon^k$ et avec $(n-k)$ mesures de valeurs $4^{n-k}\nu_l^{n-k}$, tant que nous choisissons $\epsilon < \nu_l$. Lorsque $k = n$ nous écrivons simplement $\epsilon^n < \epsilon^{n-1}\nu_l$.

Finalement, on conclut que la quantité qui nous intéresse est bornée par $\epsilon \nu_l C_n$ où $C_n = 4^n \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{n}$. Alors, par (2.23) nous obtenons

$$|h\mathbf{1}_{D_l}|_\alpha \leq \Big(1 + 2C_n C_H \epsilon^{1-\alpha}\nu_l\Big) |h|_\alpha + 2C_n C_H \epsilon^{1-\alpha}\nu_l \, \|h\|_1 .$$

Ce qui montre que l'espace V_α est invariant sous l'opérateur $\widetilde{P}_l$. □

Pour obtenir l'inégalite de Lasota-Yorke, nous devons multiplier le facteur η par $\Big(1 + 2C_n C_H \nu_l\Big)$ et demander que $\eta\Big(1 + 2C_n C_H \nu_l\Big) < 1$ ce qui sera sûrement satisfait quand l est assez grand.

Alternativement, nous pouvons prendre des itérations plus élevées de $\hat{T}$. Pour cela, tout d'abord, nous donnons l'opérateur perturbé dans ce cas pour tout $h \in V_\alpha$,

$$\widetilde{P}_l^m(h) := \hat{P}^m(h\mathbf{1}_{D_l}) = \sum_l h g_m(\hat{T}_l^{-m}\bar{x}) J_m(\hat{T}_l^{-m}\bar{x}) \mathbf{1}_{\hat{T}^m(U_{m,l})}(\bar{x}), \tag{2.24}$$

où

$$J_m(\bar{x}) := \frac{1}{\left|\det D\hat{T}^m(\bar{x})\right|},$$

et

$$g_m(\bar{x}) := \mathbf{1}_{\Omega_{m,l}}(\bar{x}),$$

avec

$$\Omega_{m,l} = D_l \cap \hat{T}^{-1} D_l \cap \cdots \cap \hat{T}^{-(m-1)} D_l.$$

Danc, il est claire que

$$g_m(\hat{T}_l^{-m}\bar{x})\mathbf{1}_{\hat{T}^m(U_{m,l})}(\bar{x}) = \mathbf{1}_{\Omega'_{m,l}}(\hat{T}_l^{-m}\bar{x})$$

où

$$\Omega'_{m,l} = \Omega_{m,l} \cap U_{m,l}.$$

Puisque toutes puissances de $\hat{T}^k$ sont clairement injectives sur $U_{m,k}$, $k \leq m$, donc chaque image inverse $\hat{T}^{-k} D_l$, $k = 1, \ldots, m-1$ de D_l donnera deux composantes connexes disjoints qui sont intersects avec $U_{m,l}$. Alors, il aura au plus $2m$ composantes connexes disjoints dans $\Omega'_{m,l}$ pour tout $l \geq 1$.

Ensuite, nous prendrons $U_{m,l}$ comme l'intervalle de monotonie de $\hat{T}^m$ pour un m donné. Le nombre $\epsilon_{0,m}$ que nous avons défini au début de ce chapitre reste la même pour tout l (puisque l'application originale a un nombre fini des branches). Plus précisement, pour vérifier l'invariance de l'opérateur, nous devons considérer le pré-image des points pris dans $W_{m,l} \setminus U_{m,l}$. En particulier, nous allons prendre des boules de rayon ϵ autour des points dans $W_{m,l}$, pour deux points donnés (x, y) dans une telle boule nous allons comparer la distortion de $J_m(\hat{T}_l^{-m}x)$ et $J_m(\hat{T}_l^{-m}y)$.

Par des arguments de distortion standard, en utilisant le fait que le déterminant de $J_m(\cdot)$ est supérieur à 1 qui est la condition de Hölder avec une constante C. De plus, le plus grand ensemble où le Jacobien est calculé selon la règle de la chaîne est la première pré-image de la boule dont le diamètre a été contracté par le facteur s_1. Donc, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{J_m(\hat{T}_l^{-m}x)}{J_m(\hat{T}_l^{-m}y)} &\leq \exp\left\{C(s_1\epsilon)^\alpha \frac{1}{1-s_1}\right\} \\ &\leq \exp\left\{\delta(s_1\epsilon)^\alpha\right\}, \end{aligned} \tag{2.25}$$

où $\delta = \frac{C}{1-s_1}$.

Puisque le déterminant est aussi borné, alors il est immédiat de vérifier que pour tout (x, y, z) dans une boule de rayon ϵ, il existe une autre constante $\delta' > \delta$ telle que

$$\left|J_m(\hat{T}_l^{-m}x) - J_m(\hat{T}_l^{-m}y)\right| \leq \delta'(s_1\epsilon)^\alpha J_m(\hat{T}_l^{-m}z). \tag{2.26}$$

Enfin, nous sommes maintenant prêts pour calculer l'inégalité de Lasota-Yorke pour $\widetilde{P}_l^m$.

$$\begin{aligned}
osc\Big(\widetilde{P}_l^m h, B_\epsilon(\bar{x})\Big) &= osc\Big(\sum_l (hg_m)\circ \hat{T}_l^{-m} J_m \circ \hat{T}_l^{-m} \mathbf{1}_{\hat{T}^m(U_{m,l})}, B_\epsilon(\bar{x})\Big) \\
&\leq \sum_l osc\Big((hg_m)\circ \hat{T}_l^{-m} J_m \circ \hat{T}_l^{-m} \mathbf{1}_{\hat{T}^m(U_{m,l})}, B_\epsilon(\bar{x})\Big) \\
&\leq \sum_l osc\Big((hg_m)\circ \hat{T}_l^{-m} J_m \circ \hat{T}_l^{-m},\ B_\epsilon(\bar{x}) \bigcap \hat{T}^m(U_{m,l})\Big) \mathbf{1}_{\hat{T}^m(U_{m,l})}(\bar{x}) \\
&+ 2\sum_l \Big(\mathrm{Esup}_{\hat{T}^m(U_{m,l})\cap B_\epsilon(\bar{x})} |hg_m| \circ \hat{T}_l^{-m} |J_m| \circ \hat{T}_l^{-m})\Big) \\
&\quad \mathbf{1}_{B_\epsilon\left(\hat{T}^m(U_{m,l})\right)\bigcap B_\epsilon\left(\left(\hat{T}^m(U_{(m,l)})\right)^c\right)}(\bar{x}). \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

Le premier terme dans (2.27) est inférieur ou égal à

$$\begin{aligned}
R_{m,l}^{(1)} &:= osc\Big((hg_m)\circ \hat{T}_l^{-m},\ B_\epsilon(\bar{x}) \bigcap \hat{T}^m(U_{m,l})\Big) \mathrm{Esup}_{\hat{T}^m(U_{m,l})\cap B_\epsilon(\bar{x})} J_m \circ \hat{T}_l^{-m} \\
&+ osc\Big(J_m \circ \hat{T}_l^{-m},\ B_\epsilon(\bar{x}) \bigcap \hat{T}^m(U_{m,l})\Big) \mathrm{Einf}_{\hat{T}^m(U_{m,l})\cap B_\epsilon(\bar{x})} |hg_m| \circ \hat{T}_l^{-m}.
\end{aligned}$$

Pour $\bar{x} \in \hat{T}^m U_{m,l}$, il existe $y_l = \hat{T}_l^{-m}(\bar{x})$, alors

$$\begin{aligned}
R_{m,l}^{(1)} &\leq osc\Big(hg_m,\ B_{\epsilon s_m}(y_l)\Big) \mathrm{Esup}_{U_{m,l}\cap B_{\epsilon s_m}(y_l)} J_m \\
&+ osc\Big(J_m,\ U_{m,l} \bigcap B_{\epsilon s_m}(y_l)\Big) \mathrm{Einf}_{B_{\epsilon s_m}(y_l)} |hg_m|. \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

De plus, nous pouvons remarquer que

$$\mathbf{1}_{B_\epsilon\left(\hat{T}^m(U_{m,l})\right)\bigcap B_\epsilon\left(\left(\hat{T}^m(U_{m,l})\right)^c\right)}(\bar{x}) = \mathbf{1}_{B_\epsilon\left(\partial \hat{T}^m U_{m,l}\right)}(\bar{x}). \qquad (2.29)$$

Alors, par (2.27), (2.28) et (2.29) nous obtenons

$$\begin{aligned}
osc\Big(\widetilde{P}_l^m h, B_\epsilon(\bar{x})\Big) &\leq \sum_l \Big\{osc\Big(hg_m, B_{\epsilon s_m}(y_l)\Big) \mathrm{Esup}_{U_{m,l}\cap B_{\epsilon s_m}(y_l)} J_m \\
&+ osc\Big(J_m, U_{m,l} \cap B_{\epsilon s_m}(y_l)\Big) \mathrm{Einf}_{B_{\epsilon s_m}(y_l)} |hg_m| \Big\} \mathbf{1}_{\hat{T}^m U_{m,l}}(\bar{x}) \\
&+ 2\sum_l \Big(\mathrm{Esup}_{U_{m,l}\cap \hat{T}_l^{-m} B_\epsilon(\bar{x})} |hg_m| \, |J_m|\Big) \mathbf{1}_{B_\epsilon\left(\partial \hat{T}^m U_{m,l}\right)}(\bar{x}) \\
&:= \sum_l R_{m,l}^{(1)} \mathbf{1}_{\hat{T}^m U_{m,l}}(\bar{x}) + 2\sum_l R_{m,l}^{(2)}(\bar{x}),
\end{aligned}$$

où $R_{m,l}^{(2)}(\bar{x}) := \Big[\mathrm{Esup}_{U_{m,l}\cap \hat{T}_l^{-m} B_\epsilon(x)} |hg_m| \, |J_m|\Big] \mathbf{1}_{B_\epsilon\left(\partial \hat{T}^m U_{m,l}\right)}(\bar{x})$

Par la distortion (2.26) nous obtenons

$$R^{(1)}_{m,l}(\bar{x}) \leq \Big(1+\delta'(s_1\epsilon)^\alpha\Big) osc\Big(hg_m, B_{\epsilon s_m}(y_l)\Big) J_m(y_l) + |hg_m(y_l)|\, J_m(y_l)\delta'(s_1\epsilon)^\alpha. \tag{2.30}$$

Puisque, g_m a été définie comme une fonction indicatrice sur $\Omega_{m,l}$, alors par la propriété (ii) dans la Proposition 2.3.2, nous avons

$$\begin{aligned} osc\Big(hg_m,\, B_{\epsilon s_m}(y_l)\Big) &\leq osc\Big(h,\, \Omega_{m,l}\cap B_{\epsilon s_m}(y_l)\Big) g_m \\ &+ 2\Big[\mathrm{Esup}_{B_{\epsilon s_m}(y_l)\cap\Omega_{m,l}} |h|\Big] \mathbf{1}_{B_{\epsilon s_m}(\Omega_{m,l})\cap B_{\epsilon s_m}(\Omega^c_{m,l})}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Maintenant, par le remplacement de (2.31) dans (2.30), nous avons l'estimation intégrale suivante du premier terme,

$$\begin{aligned} \int \sum_l R^{(1)}_{m,l} \mathbf{1}_{\hat{T}^m U_{m,l}} &\leq \Big(1+\delta'(s_1\epsilon)^\alpha\Big) |h|_\alpha (\epsilon s_m)^\alpha + \delta'(s_1\epsilon)^\alpha \|h\|_1 \\ &+ 2\Big(1+\delta'(s_1\epsilon)^\alpha\Big) C_H \|h\|_\alpha \mathrm{Leb}\Big(B_{\epsilon s_m}(\Omega_{m,l}) \bigcap B_{\epsilon s_m}(\Omega^c_{m,l})\Big). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Comme les bords de $\Omega_{m,l}$ sont lisses et ils contiennent au plus $2m$ composantes connexes disjoints dans $U_{m,l}$, donc il existe une constante positive C_Ω telle que

$$\mathrm{Leb}\Big(B_{\epsilon s_m}(\Omega_m) \cap B_{\epsilon s_m}(\Omega^c_m)\Big) \leq 2m(\epsilon s_m) C_\Omega.$$

Alors, nous obtenons que (2.32) est également estimé par :

$$\begin{aligned} \int \sum_l R^{(1)}_{m,l} \mathbf{1}_{\hat{T}^m U_{m,l}} &\leq \Big(1+\delta'(s_1\epsilon)^\alpha\Big)\Big[4m(\epsilon s_m) C_\Omega C_H + (\epsilon s_m)^\alpha\Big] |h|_\alpha \\ &+ \Big[\Big(1+\delta'(s_1\epsilon)^\alpha\Big) 4m(\epsilon s_m) C_\Omega C_H + \delta'(s_1\epsilon)^\alpha\Big] \|h\|_1 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Pour estimer le deuxième terme $R^{(2)}_{m,l}$ il suffit d'appliquer la même démarche qui existe dans [68] et changer ϵ_0 par $\epsilon_{0,m}$

$$\int \sum_l R^{(2)}_{m,l}(x)\,\mathrm{d}x \leq \Big(1+\delta'(s_1\epsilon)^\alpha\Big) G_m(\epsilon,\epsilon_{0,m}) |h|_\alpha \epsilon^\alpha_{0,m} + \Big(1+\delta'(s_1\epsilon)^\alpha\Big) G_m(\epsilon,\epsilon_{0,m}) \|h\|_1 . \tag{2.34}$$

Par (2.33) et (2.34) nous trouvons,

$$\begin{aligned} \Big|\widetilde{P}^m_l(h)\Big|_\alpha &\leq \Big(1+\delta'(s_1\epsilon)^\alpha\Big)\Big[4m(\epsilon^{1-\alpha}s_m) C_\Omega C_H + s^\alpha_m + 2\sup_{\epsilon\leq\epsilon_{0,m}} \frac{G_m(\epsilon,\epsilon_{0,m})}{\epsilon^\alpha}\epsilon^\alpha_{0,m}\Big] |h|_\alpha \\ &+ \Big[\delta' s_1^\alpha + \Big(1+\delta'(s_1\epsilon)^\alpha\Big)\Big(4m(\epsilon^{1-\alpha}s_m) C_\Omega C_H + 2\sup_{\epsilon\leq\epsilon_{0,m}} \frac{G_m(\epsilon,\epsilon_{0,m})}{\epsilon^\alpha}\Big)\Big] \|h\|_1 \\ &= \Big(1+\delta'(s_1\epsilon)^\alpha\Big)\Big[4m(\epsilon^{1-\alpha}s_m) C_\Omega C_H + z_m\Big] |h|_\alpha \\ &+ \Big[\delta' s_1^\alpha + \Big(1+\delta'(s_1\epsilon)^\alpha\Big)\Big(4m(\epsilon^{1-\alpha}s_m) C_\Omega C_H + (z_m - s^\alpha_m)\epsilon^{-\alpha}_{0,m}\Big)\Big] \|h\|_1 \end{aligned} \tag{2.35}$$

où

$$z_m := s_m^\alpha + 2 \sup_{\epsilon \le \epsilon_{0,m}} \frac{G_m(\epsilon, \epsilon_{0,m})}{\epsilon^\alpha} \epsilon_{0,m}^\alpha.$$

Il a été montré dans [68] que $z_m < 1$ quand $\eta_m < 1$ alors,

$$\left| \widetilde{P}_l^m(h) \right|_\alpha \le A \left| h \right|_\alpha + B \left\| h \right\|_1, \tag{2.36}$$

avec

$$A = \Big(1 + \delta'(s_1 \epsilon_{0,m})^\alpha\Big) \Big[4m(s_m \epsilon_{0,m}^{1-\alpha}) C_\Omega C_H + z_m \Big]$$

et

$$B = \Big[\delta' s_1^\alpha + \Big(1 + \delta'(s_1 \epsilon)^\alpha\Big) \Big(4m(\epsilon^{1-\alpha} s_m) C_\Omega C_H + z_m \epsilon_{0,m}^{-\alpha} \Big) \Big] < \infty.$$

Finalement, nous rappelons que $s_m < 1$ et il décroît exponentiellement avec m, de plus, lorsque $\epsilon_{0,m}$ très petit, alors nous obtenons $A < 1$.

Maintenant, nous continuons la vérification des propriétés que nous avons supposées. Puisque $h \in V_\alpha$, donc comme les fonctions quasi-Hölder sont essentiellement bornées, il est facile d'obtenir la propriété **P4**

$$\left| \int (\hat{P}h - \widetilde{P}_l h) \, \mathrm{dLeb} \right| \le \int \left| h \mathbf{1}_{D_l^c} \right| \mathrm{dLeb} \le \left\| h \right\|_\infty \mathrm{Leb}(D_l^c) \le C_H \left\| h \right\|_\alpha \mathrm{Leb}(D_l^c). \tag{2.37}$$

Par l'inégalité de Lasota-Yorke, nous savons que la norme de Banach $\left\| (\hat{P} - \widetilde{P}_l)\hat{h} \right\|_{\mathcal{H}}$ est bornée par une constante $\hat{C}$ dépendante de $\hat{h}$. Puisque la densité est bornée, nous avons immédiatement

$$r_l \left\| (\hat{P} - \widetilde{P}_l)\hat{h} \right\|_{\mathcal{H}} \le \frac{C_H \hat{C}}{\hat{h}^{(\inf)}} \hat{\mu}(D_l^c).$$

Maintenant, nous donnons un exemple simple qui satisfait **P1-P3** pour l'espace $\mathcal{H}$. Les propriétés **P4** et **P5** découlent des arguments ci-dessus. La propriété **P6** sera prouvée dans le chapitre suivant sous une hypothèse supplémentaire (que nous l'appellerons **P0**) et pour une classe des applications plus grande. Aussi, nous soulignons que notre exemple sera utilisé dans simulations numériques que nous aborderons dans le quatrième chapitre de cette thèse. De plus, les techniques que nous utilisons pourraient être étendus facilement à d'autres transformations qui ne sont pas nécessairement affines.

Exemple 2.4.2. Comme l'application T est unidimensionnelle, donc nous prenons $T(x) = 3x \bmod 1$. En couplant cette application n fois comme dans (2.3), nous obtiendrons une application uniformément linéaire par morceaux à dimension supérieure.

Tout d'abord, nous remarquons que cette application n'est pas nécessairement continue sur le n-tore, mais elle vérifie l'hypothèse **P0** de le chapitre suivant.

L'inégalité de Lasota-Yorke peut être prouvée pour l assez grand, disons pour $l > l_0$ si nous vérifions la condition (2.20). Si cette condition n'est pas vérifiée pour l'application $\hat{T}$, alors il suffira de l'obtenir pour une itération de $\hat{T}$. Cela est garanti par [69, Théorème 1] qui est valable pour les applications dilatantes linéaires par morceaux dont les domaines d'injectivité locale sont bornés par des polyèdres. Les constantes η et C dans (2.8) dépendent simplement du taux de contraction $s_n = 3^{-n}$ à la puissance l.

Ensuite, l'étape suivante consiste à prouver la borne dans (2.9). Ceci peut être facilement réalisé en adaptant la preuve de [65, Proposition 4.3] ou du [70, Lemme 7.5]. Les ingrédients de base de ces preuves sont :

(i) Contrôle de la distance entre les pré-images du même point $\bar{z} \in I^n$ avec $\hat{T}_0$ et $\hat{T}$ pour un γ donné.

(ii) contrôle de la distorsion des deux déterminants, $\left|\det(D\hat{T}_0)\right|$ et $\left|\det(D\hat{T})\right|$.

Par la structure de l'application (2.3), nous pouvons voir immédiatement que la distance au point (i) est d'ordre γ multiplié par une constante dépendante de la dimensionnalité de l'espace ambiant. Le rapport des déterminants au point (ii) est d'ordre $(1-\gamma)^n$ (pour le détail, voir la démonstration de la Proposition 3.1.4). Cela suffit pour obtenir la borne de (2.9).

Enfin, nous devons vérifier que la densité invariante pour l'application T est bornée au voisinage de zéro, Nous disposons au moins de deux critères pour cela. Le premier est pris de la Section 7.3.1 dans [70] et nécessite :

- L'existence d'un domaine d'injectivité locale U_k dont l'image est l'hypercube complet I^n.

La deuxième est décrité dans [71, Lemme 5.3] et nécessite ce que nous appelons "topological exactness" :

- Pour tous $\bar{x} \in I^n$ et $\epsilon > 0$, il existe un entier $N_\epsilon = N_\epsilon(\bar{x}, \epsilon) > 0$ tel que $\hat{T}^{N_\epsilon} B_\epsilon(\bar{x}) = I^n$.

Ces deux derniers sont basés sur une propriété intéressante des fonctions quasi-Hölder (voir Lemme 2.3.6). Nous croyons que de telles conditions de couverture sont satisfaites dans nos cas.

À titre d'exemple, dans les figures suivantes nous rapportons le calcul de la densité pour deux cas :

Premièrement pour $n = 2$, (**FIG** 2.1) nous avons fait la moyenne de la densité sur 300 réalisations constituées chacune de 10^7 itérations de la trajectoire. Dans cette figure, les panneaux ((a)-(c)) pour $\gamma = 0.3$, ((d)-(f)) $\gamma = 0.5$ et ((g)-(i)) pour $\gamma = 0.6$ tels que les panneaux ((a), (d), (g)) montrent la densité en couleurs avec une vue du haut et ((b), (e), (h)) pour une vue tridimensionnelle. ((c), (f), (i)) montrent le comportement de l'application sur la diagonale.

Deuxièmement pour $n = 3$, (**FIG** 2.2) nous avons fait la même chose mais pour 10^6 itérations. Dans cette figure, les panneaux ((a)-(d)) pour $\gamma = 0.3$, ((e)-(h)) $\gamma = 0.5$ et ((i)-(l)) pour $\gamma = 0.6$. les panneaux ((a)-(c), (e)-(g), (i)-(k))

montrent la densité en couleurs. ((d), (h), (l)) montrent le comportement de l'application sur la diagonale $x = y$.

Nous remarquons que dans les deux figures, la densité n'oscille pas trop au voisinage de la diagonale, (nous revenir sur ça dans le prochain chapitre).

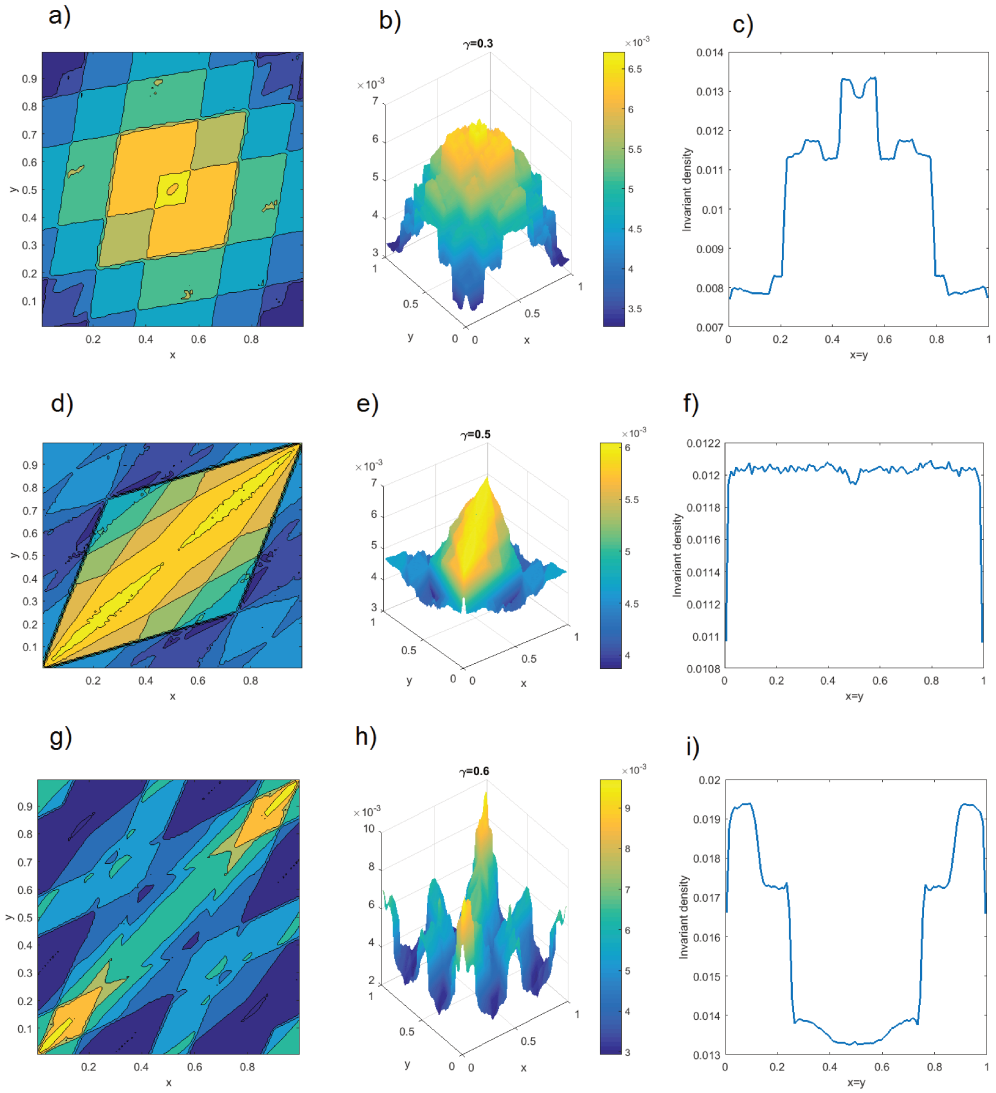


FIG. 2.1. Densité invariante pour l'application (2.3) avec $n = 2$.

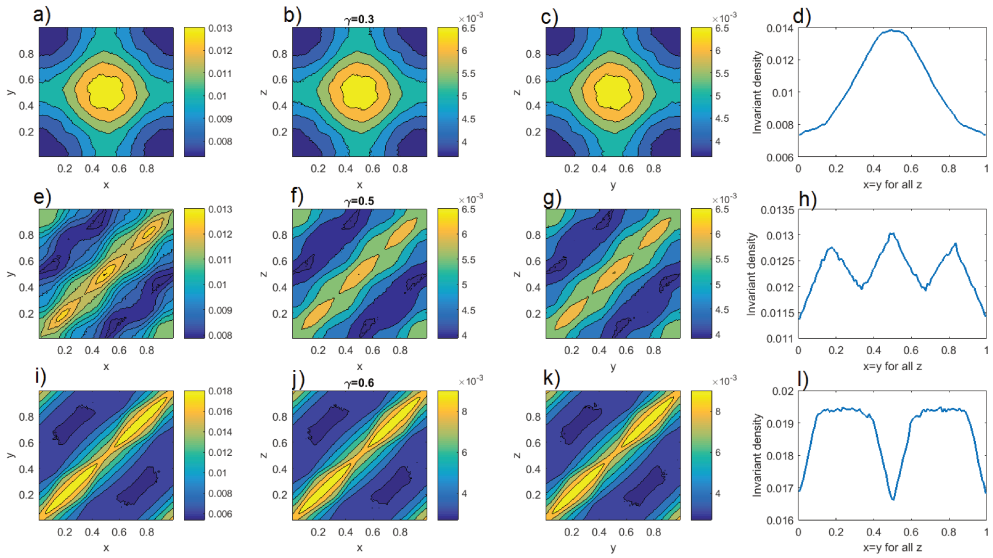


FIG. 2.2. Densité invariante pour l'application (2.3) avec $n = 3$.

Chapitre 3

Théorie Des Extrêmes Appliquée Aux Réseaux Des applications couplées

Dans ce chapitre, nous appliquons la théorie des valeurs extrêmes **(TVE)** aux réseaux d'application couplées. Rappelons qu'il y a au moins deux approches de **TVE**.

La première est probabiliste pure (nous l'appellerons **APP**) et elle est basée sur des propriétés fortes de mélange pour obtenir une décroissance rapide des corrélations et pour contrôler le temps de retour court autour d'un point donné. Il convient de mentionner que l'**APP** couvre les cas où il n'a y pas de trou spectrale, donc les corrélations ne décroissent pas exponentiellement voir [66].

La deuxième approche a été développée par Keller [64] et l'appellerons approche spectrale (notée**AS**). Cette approche est basée sur la technique perturbative traitée dans le chapitre précédent. Cette approche permet nous d'obtenir directement la loi de Gumbel par une perturbation régulière du rayon spectral de l'opérateur $\widetilde{P}_l$. Comme nous l'avons déjà souligné dans le chapitre précédent, le problème dans la **AS** est de vérifier les propriétés **P1-P6**.

3.1 Valeur extrême et localisations

Soit $\bar{z} \in I^n$ un vecteur donné tel que les composantes de ce vecteur soient proches l'une de l'autre c'est-à-dire leur distance mutuelle est inférieure à 1. Nous dirons qu'il y a une localisation de l'orbite autour du point $\bar{z}$ lorsque toutes les composantes de l'orbite d'un point sont respectivement proches de composantes correspondantes de $\bar{z}$.

Dans ce cas, pour étudier la **TVE**, nous considéron l'observable

$$\varphi(\bar{x}) := -\log\Big\{\sum_{i=1}^{n}|x_i - z_i|\Big\} \tag{3.1}$$

et nous considérons le maximum

$$M_m(\bar{x}) := \max\Big\{\varphi(\bar{x}), \varphi\Big(\hat{T}(\bar{x})\Big), \dots, \varphi\Big(\hat{T}^{m-1}(\bar{x})\Big)\Big\}. \tag{3.2}$$

Nous allons par la suite fixer un nombre positif τ et nous demanderons l'existence d'une suite u_m pour laquelle la limite suivante existe

$$\lim_{m\to\infty} m\hat{\mu}(\varphi > u_m) = \tau. \tag{3.3}$$

Nous dirons que la suite M_m admet une **LVE** s'il existe une fonction de distribution non dégénérée $H : \mathbb{R} \to [0,1]$ avec $H(0) = 0$ tel que

$$\lim_{m\to\infty} \hat{\mu}(M_m \le u_m) \to 1 - H(\tau) = \bar{H}(\tau). \tag{3.4}$$

Par la définition de l'observable φ, l'ensemble $\{\bar{x} \in I^n, \varphi(\bar{x}) > u_m\}$ peut être réécrit comme

$$U_m^{(n)} := \Big\{\bar{x} \in I^n, \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| \le \nu_m\Big\}; \quad \text{où } \nu_m =: e^{-u_m}.$$

Donc nous pouvons écrire (3.3) de la façon suivante

$$m\hat{\mu}(U_m^{(n)}) \to \tau, \quad m \to \infty \tag{3.5}$$

et par conséquent (3.4) peut être reformulé comme :

$$\hat{\mu}\Big(\Big\{\bar{x} \in I^n, \hat{T}^k(\bar{x}) \notin U_m^{(n)}, k = 0, \dots, m-1\Big\}\Big) \to \bar{H}(\tau). \tag{3.6}$$

Nous appelons ν_m la précision de la localisation. Dans toute la suite nous utilisons le symbole a_c pour dénoter cette précision.

Remarques 3.1.1. 1) La précision a_c dépend de m mais il est parfois pratique de fixer la valeur de a_c et de choisir m en conséquence.
2) Si nous voyons $\{\hat{T}^k\}_{k\ge1}$ comme un vecteur de variables aléatoires sur l'espace $(I^n, \hat{\mu})$ associé à l'orbite d'un point $\bar{x} \in I^n$, alors la limite (3.6) peut être interprétée comme la probabilité que chaque composante $\{\hat{T}_i^k\}_{k\ge1}$ soit localisée avec une précision $a_c = e^{-u_m}$ autour de z_i pour la première fois quand $k > m$.
3) Puisque nous choisissons les composantes de $\bar{z}$ qui sont proches l'un de l'autre alors il est logique de parler de la localisation dans notre cas.

Dans la suite, pour obtenir la probabilité d'un tel événement, nous devons assurer quelques hypothèses, déjà prévues dans le chapitre précédent, et qui nous permettront d'appliquer [65, Proposition 3.3].

Proposition 3.1.2. *Supposons que le système $(I^n, \hat{T}, \hat{\mu})$ admet une unique mesure invariante absolument continue et mélangeant $\hat{\mu}$ avec une densité bornée au voisinage de zéro et une décroissance des corrélations de type exponentielle sur un espace de Banach adapté. Soit $(X_0, X_1, \dots)$ un processus donné par $X_m = \varphi \circ \hat{T}^m$, $m \in \mathbb{N}$ avec φ qui réalise un maximum global à un point $\bar{z}$. Alors, nous avons une* **LVE** *pour le maximum M_m et*

1. *Si $\bar{z}$ est un point non pérodique, alors la* **LVE** *est de la forme $H(\tau) = 1 - e^{-\tau}$.*
2. *Si $\bar{z}$ est un point pérodique, alors la* **LVE** *est de la forme $H(\tau) = 1 - e^{-\theta\tau}$ avec l'***IE** *fourni par $\theta(\bar{z}) = 1 - \dfrac{1}{\left|\det D(\hat{T}^p)(\bar{z})\right|}$.*

Notre observable (3.1) satisfait les hypothèses de la Proposition. D'autre part, d'après le Théorème 1.4.3, pour tout $0 < \tau < \infty$ nous avons une condition suffisante pour garantir l'existence de la limite (3.3). Cette condition nécessite que $\dfrac{1 - F(x)}{1 - F(x^-)} \to 1$ quand $x \to u_F$. Nous rappelons que la fonction F est la fonction de distribution de X_0, le terme dans le dénominateur $F(x^-)$ dénote la limite à gauche de F et $u_F = \sup\{x, F(x) < 1\}$. Comme φ réalise un maximum global en $\bar{z}$, nous pouvons prendre $u_F = \infty$ et si la mesure de probabilité $\hat{\mu}$ est non atomique dans $\bar{z}$, il est facile de conclure que F est continue en $\bar{z}$ et que le rapport au dessus vaux 1.

Maintenant, nous supposons que la mesure invariante $\hat{\mu}$ se comporte comme une mesure de Lebesgue. Donc par (3.5), nous allons trouver $\hat{\mu}(U_m^{(n)}) = \mathcal{O}(\nu_m^n)$[2] , alors $e^{-u_m} \sim (\frac{\tau}{m})^{\frac{1}{n}}$ ou d'une manière équivalente

$$u_m \sim \frac{1}{n}\log(m) - \frac{1}{n}\log(\tau).$$

Donc la probabilité de la première localisation après m itérations avec m assez grand et avec une précision a_c d'ordre $(\frac{\tau}{m})^{\frac{1}{n}}$ est égale à $e^{-\tau}$.
Par (1.26), nous avons $e^{-\tau} \sim \exp\{-e^{-y}\}$, $y \in \mathbb{R}$ où $a_m = n$ et $b_m = \frac{1}{n}\log m$.

Remarque 3.1.3. Dans l'estimation de la mesure du parallélépipède $U_m^{(n)}$, nous avons utilisé une approximation très grossière, puisque la densité locale de la mesure au point $\bar{z}$ est oublié. Dans quelques cas, il est difficile d'obtenir une expression explicite des coefficients d'échelle a_m, b_m. Mais on peut y arriver dans d'autre cas, voir par exemple les Propositions 7.2.4, 7.4.1, 7.5.1. dans [66]. Par ailleurs, pour des raisons pratiques, la fonction de distribution $\hat{\mu}(M_m \leq y)$ est modélisée, pour m suffisamment grand, par la distribution des valeurs extrêmes dite généralisée (GEV). Rappelons que cette fonction est dépendante de trois paramètres $\xi \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

La preuve de la Proposition 3.1.2 peut être faite par l'approche spectral ou avec l'approche probabilisté. Ce dernier est basé sur l'approximation de notre processus par un processus i.i.d. et il est garanti par le taux exponentiel du mélange de la mesure $\hat{\mu}$ sur des fonctions dans l'espace $\mathcal{H}$. Il est intéressant de souligner la dichotomie dans le choix du point cible $\bar{z}$. Seulement deux expressions

2. En fait, nous avons $\hat{\mu}(U_m^{(n)}) = \mathcal{O}(2^n\nu_m^n)$, mais le facteur 2^n deviendra négligeable en prenant un grand m .

fonctionnelles sont possibles pour la distribution $H(\tau)$, la différence entre ces deux expressions est déterminée par la périodicité de ce point.

Maintenant, nous nous concentrons sur l'**IE** θ. Supposons que nous avons des entrées successives dans le voisinage de $\bar{z}$, c'est-à-dire des occurrences consécutives d'un dépassement de notre seuil u_m. Nous interprétons cela comme la mémoire du processus aléatoire sous-jacent et nous le quantifions avec le paramètre θ.

La proposition suivante montre que si le nombre des composantes de réseau converge vers l'infini, alors l'**IE** au voisinage des points périodiques converge vers 1. Donc, il n'y a plus de clusters dans la limite d'un réseau infiniment grand. Pour cela nous définissons C_γ une matrice $n \times n$ réelle dont les coefficients $(C_\gamma)_{i,j}$ sont définis par :

$$(C_\gamma)_{i,j} := \begin{cases} \frac{\gamma}{n} & si \quad i \neq j, \\ (1-\gamma) + \frac{\gamma}{n} & si \quad i = j. \end{cases}$$

De plus, nous rappelons que pour tout $\bar{x} \in I^n$,

1. la dynamique découplée $\hat{T}_0$ est définie par
$$\hat{T}_0(\bar{x}) = \Big(T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_n)\Big)$$
2. l'opérateur de couplage Φ_γ est une application linéaire associée à la matrice C_γ
$$\Phi_\gamma(\bar{x}) := C_\gamma \bar{x}.$$

Nous écrivons l'**IE** comme θ_n pour signifier la dépendance de n.

Proposition 3.1.4. *Soit $\hat{T}$ un **CML** avec n sites donnés par* (2.3) *tel que $\gamma < 1 - \lambda$. Fixons $p \geq 1$, si $\bar{z}_n^p \in I^n$ est un point périodique de première période p, alors l'**IE** $\theta_n(\bar{z}_n^p)$ satisfait*

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n(\bar{z}_n^p) = 1.$$

Démonstration. Soit $p \geq 1$ et $\bar{z} \in I^n$, pour montrer le résultat, il faut calculer le déterminant de la matrice Jacobienne de $\hat{T}^p$ évalué au point $\bar{z}$. Tout d'abord, nous avons

$$\det(D_{\bar{z}}\hat{T}^p) = \prod_{t=0}^{p-1} \det\Big(D_{\hat{T}^t(\bar{z})}\hat{T}\Big).$$

Alors, par (2.2) nous avons,

$$\begin{aligned} \det\Big(D_{\bar{z}}\hat{T}^p\Big) &= \prod_{t=0}^{p-1} \det\Big(D_{\hat{T}_0(\hat{T}^t(\bar{z}))}\Phi_\gamma D_{\hat{T}^t(\bar{z})}\hat{T}_0\Big) \\ &= \prod_{t=0}^{p-1} \det\Big(C_\gamma D_{\hat{T}^t(\bar{z})}\hat{T}_0\Big) \\ &= \det(C_\gamma)^p \prod_{t=0}^{p-1} \det\Big(D_{\hat{T}^t(\bar{z})}\hat{T}_0\Big). \end{aligned}$$

D'autre part, par la définition de la matrice C_γ nous pouvons montrer que

$$\det(C_\gamma) = (1-\gamma)^{n-1}.$$

Ensuite, comme $D_{\bar{z}}\hat{T}_0$ est une matrice diagonale de la forme suivante

$$\begin{pmatrix} T'(z_1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & T'(z_2) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T'(z_{n-1}) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & T'(z_n) \end{pmatrix}$$

Alors, le déterminant Jacobien de $\hat{T}_0$ dans $\bar{z}$ est donné par

$$\det\left(D_{\bar{z}}\hat{T}_0\right) = \prod_{k=1}^{n} T^{'}(z_k).$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \left|\det\left(D_{\bar{z}}\hat{T}^p\right)\right| &= (1-\gamma)^{p(n-1)} \prod_{t=0}^{p-1}\prod_{k=1}^{n} \left|T'\left(\left(\hat{T}^t(\bar{z})\right)_k\right)\right| \\ &= (1-\gamma)^{p(n-1)} \prod_{t=0}^{p-1}\prod_{k=1}^{n} \left|T'(z_k^t)\right|. \end{aligned}$$

Enfin, selon le deuxième point de la Proposition (3.1.2) l'**IE** satsfait

$$\theta_n(\bar{z}_n^p) = 1 - \frac{1}{\left|\det\left(D_{\bar{z}_n^p}\hat{T}^p\right)\right|}.$$

Comme nous avons

$$\left|\det\left(D_{\bar{z}_n^p}\hat{T}^p\right)\right| \geq (1-\gamma)^{p(n-1)}(\frac{1}{\lambda})^{np} = \left(\frac{(1-\gamma)^n(\frac{1}{\lambda})^n}{(1-\gamma)}\right)^p,$$

d'après l'hypothèse que nous avons supposé au début, alors

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n(\bar{z}_n^p) = 1.$$

□

3.2 Perturbations aléatoires

Dans cette partie, nous allons perturber l'application $\hat{T}$ avec un bruit additif et montrer la Proposition 3.1.4 dans ce cas. C'est-à-dire, nous définissons une famille d'applications $\hat{T}_{\underline{\omega}} := \hat{T} + \underline{\omega}$, avec chaque vecteur $\underline{\omega}$ appartenant à l'ensemble Ω_ϵ et choisi de telle sorte que l'application $\hat{T}_{\underline{\omega}}$ est définie de I^n dans lui-même. L'itération de $\hat{T}$ dans ce cas sera remplacée par une concatination définie par :

$$\hat{T}^m_{\overline{\omega}} := \hat{T}_{\underline{\omega}_m} \circ \hat{T}_{\underline{\omega}_{m-1}} \circ \cdots \circ \hat{T}_{\underline{\omega}_1}, \quad \text{où} \quad \overline{\omega} := (\underline{\omega}_1, \dots, \underline{\omega}_m, \dots) \in \Omega$$

avec les $\underline{\omega}_k$ indépendantes et identiquement distribuées dans Ω selon la distributions communes $\mathcal{P}_\epsilon$.

Maintenant, nous prenons tout observable mesurable à valeur réelle φ. Le processus $\varphi \circ \hat{T}^n_{\overline{\omega}}$ sera stationnaire par rapport à la mesure produit $\hat{\mu}_s \times \mathcal{P}_\epsilon^{\mathbb{N}}$, avec $\hat{\mu}_s$ une mesure de probabilité stationnaire dans le sens de la Définition 1.3.9. Le couple $\left(\hat{T}^m_{\overline{\omega}}, \hat{\mu}_s \times \mathcal{P}_\epsilon^{\mathbb{N}}\right)$ est appelé système dynamique aléatoire.

Comme dans le cas déterministe, nous étudions l'existence d'une **LVE** pour le maximum partiel d'observations faite au cours de l'évolution temporelle du système. Considérons le processus

$$X_{m,\overline{\omega}} := \varphi \circ \hat{T}^m_{\overline{\omega}} \qquad \text{pour chaque} \quad m \geq 1 \tag{3.7}$$

où φ est donné par (3.1) et en conséquence considérons la distribution du maximum (3.2) par rapport à $\hat{\mu}_s \times \mathcal{P}_\epsilon^{\mathbb{N}}$.

Proposition 3.2.1. *Sous les hypothèses de la Proposition* 3.1.2*, pour tout point* $\bar{z} \in I^n$*, le processus stochastique défini par* (3.7) *satisfait les conditions* $D_2(u_n)$ *et* $D'(u_n)$ *ce qui implique que nous avons une* **LVE** *pour* $M_m(\bar{x})$ *telle que* $H(\tau) = 1 - e^{-\tau}$.

Par l'adaptation de la preuve de la [65, Proposition 4.3], nous avons la décroissance des corrélations du type exponentiel des fonctions quasi-Hölder, en particulier pour les applications uniformément dilatantes sur I^n. De plus la Corollaire 4.4 dans la même référence donne le résultat pour tout choix du point cible $\bar{z}$.

3.3 Valeurs extrêmes et synchronisation

Dans cette partie, nous allons étudier la théorie des valeurs extrêmes quand nous avons la synchronisation de n composantes d'un état initial itéré par l'application $\hat{T}$.

Définition 3.3.1. Le réseau de n composantes est dit synchronisé si l'état initial de ses composantes itérés par l'application $\hat{T}$ entre dans une petite bande le long de la diagonale jusqu'à une certaine précision.

Précisément nous allons considérer deux types de synchronisation :

1. Synchronisation globale de toutes composantes de réseau, c'est-à-dire toutes les composantes de l'état évoluent pour sont devenir proches l'une de l'autre si
$$\lim_{m\to\infty} \max_{i\neq j, j=1,\cdots,n} \left|\hat{T}^m(\bar{x})_i - \hat{T}^m(\bar{x})_j\right| = 0.$$
2. Synchronisation locale, c'est-à-dire chaque composante ne se synchronise qu'avec les proches voisins si
$$\lim_{m\to\infty} \max_{i\neq j, j=i\pm 1} \left|\hat{T}^m(\bar{x})_i - \hat{T}^m(\bar{x})_j\right| = 0.$$

Maintenant, nous introduisons une nouvelle observable $\psi : I^n \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ qui permet de considérer la synchronisation des n composantes d'un état initial itéré par l'application $\hat{T}$. Cette observable défini par :

$$\psi(\bar{x}) := -\log\Big\{\max|x_i - x_j|\,; i\neq j,\ i,j = 1,\dots,n\Big\}. \tag{3.8}$$

Aussi, nous considérons le maximum,

$$M_m(\bar{x}) := \max\Big\{\psi(\bar{x}), \psi\Big(\hat{T}(\bar{x})\Big), \dots, \psi\Big(\hat{T}^{m-1}(\bar{x})\Big)\Big\}.$$

Par l'adaptation du point de vue de **TVE**, nous fixons encore un nombre positif τ et demandons l'existence d'une suite u_m pour laquelle la limite suivante existe

$$\lim_{m\to\infty} m\hat{\mu}(\psi > u_m) \to \tau. \tag{3.9}$$

De même nous rappelons que la suite M_m admet une **LVE** s'il existe une fonction de distribution non dégénérée $H : \mathbb{R} \to [0,1]$ avec $H(0) = 0$ telle que

$$\lim_{m\to\infty} \hat{\mu}(M_m \leq u_m) \to 1 - H(\tau) = \bar{H}(\tau). \tag{3.10}$$

Par l'expression de ψ, nous pouvons réécrire (3.9) comme

$$m\hat{\mu}(S_m^{(n)}) \to \tau \tag{3.11}$$

où

$$S_m^{(n)} := \Big\{\bar{x}\in I^n; \max_{i\neq j}|x_i - x_j| \leq \nu_m\Big\} \text{ avec } \nu_m := e^{-u_m}. \tag{3.12}$$

et par conséquent, nous pouvons réécrire (3.10) comme suit :

$$\hat{\mu}\Big(\Big\{\bar{x}\in I^n, \hat{T}^k(\bar{x}) \notin S_m^{(n)}, k = 0,\dots,m-1\Big\}\Big) \to \bar{H}(\tau). \tag{3.13}$$

Remarques 3.3.2. 1. La limite (3.13) peut être interprétée comme la probabilité de l'événement Σ qui est définie par :

$$\Sigma := \Big\{ n \text{ composantes sont synchronisées pour la première fois après } m \text{ itérations avec une précision } a_c \text{ d'ordre } e^{-u_m} \Big\}.$$

2. Comme nous l'avons dit dans la partie précédente, il y a deux approches pour étudier l'existence de la **LVE**, dans ce cadre nous ne pouvons pas utiliser l'**APP**. La raison est que notre nouvelle observable devient infinie sur une ligne (la diagonale).
3. L'**AS** contournera ce problème en utilisant l'espace de Banach quasi-Hölder $\mathcal{H}$, car nous avons vu dans le chapitre précédent que dans cet espace nous pouvons vérifier les propriétés **P1-P5**. Par contre, il y a toujours un problème, à savoir prouver l'existence des limites (2.13). Nous allons résoudre ce problème dans la prochaine partie.

Maintenant, nous montrons comment l'**AS** permet d'obtenir les fonctions des distributions asymptotiques de la **TVE**. L'idée est facile, tout d'abord nous commençons par réécrire le maximum donné en (3.13)

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}(M_m \leq u_m) &= \hat{\mu}\Big\{\bar{x} \in I^n, \hat{T}^k(\bar{x}) \in (S_m^{(n)})^c, k = 0, \dots, m-1\Big\} \\
&= \hat{\mu}\Big\{\bar{x} \in I^n, \{\bar{x} \in (S_m^{(n)})^c\}, \dots, \{\hat{T}^{m-1}(\bar{x}) \in (S_m^{(n)})^c\}\Big\} \\
&= \int \hat{h}(\bar{x}) \mathbf{1}_{(S_m^{(n)})^c}(\bar{x}) \cdot \mathbf{1}_{(S_m^{(n)})^c}(\hat{T}(\bar{x})) \dots \mathbf{1}_{(S_m^{(n)})^c}(\hat{T}^{m-1}(\bar{x}))\, \mathrm{dLeb} \\
&= \int \widetilde{P}_m^m(\hat{h})\, \mathrm{dLeb} \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

où

$$\widetilde{P}_m(\cdot) := \hat{P}\Big(\mathbf{1}_{(S_m^{(n)})^c} \cdot \Big).$$

Remarquez que $(S_m^{(n)})^c$ joue le rôle de l'ensemble D_l qui est défini dans le chapitre précédent.

Ensuite, par la représentation spectrale, (2.16), nous avons

$$\int \widetilde{P}_m^m(\hat{h})\, \mathrm{dLeb} = \rho_m^m \int \hat{h}\, \mathrm{d}\hat{\mu}_m + \rho_m^m \int Q_m^m \hat{h}\, \mathrm{dLeb},$$

avec $\int \hat{h}\, \mathrm{d}\hat{\mu}_m \to \int \hat{h}\, \mathrm{dLeb} = 1$ quand $m \to \infty$ et le rayon spectral de Q_m^m est strictement inférieur à ρ_m. Par (2.15) et avec l'adaptation évidente des notations, nous avons

$$1 - \rho_m = \hat{\mu}(S_m^{(n)}) \theta_\Delta \Big(1 + o(1)\Big), \quad m \to \infty.$$

Ce qui implique

$$\int \widetilde{P}_m^m(\hat{h})\, \mathrm{dLeb} = e^{-\Big\{\theta_\Delta m \hat{\mu}\Big(S_m^{(n)}\Big) + mo\Big(\hat{\mu}(S_m^{(n)})\Big)\Big\}} \int \hat{h}\, \mathrm{d}\hat{\mu}_m + \mathcal{O}\Big(\rho_m^m \, \|Q_m^m\|_{\mathcal{H}}\Big). \quad (3.15)$$

Sous la condition sur la mesure $\hat{\mu}_m$ et sur le rayon spectral de Q_m et par l'utilisation de (3.11) nous assurons que le terme à droite dans l'égalité (3.15) converge vers $e^{-\theta_\Delta \tau}$ quand $m \to \infty$. Alors nous obtenons que $\bar{H}(\tau) = e^{-\theta_\Delta \tau}$ où θ_Δ est l'**IE** le long de la diagonal $\Delta := \{\bar{x} \in I^n, x_1 = x_2 = \dots = x_n\}$.

Remarque 3.3.3. L'existence de cet indice est liée à l'existence des limites (2.13).

Dans la suite et pour simplifier, nous écrivons θ_n au lieu de θ_Δ, l'**IE** le long de la diagonal .

Maintenant, si nous supposons $\hat{\mu}(S_m^{(n)}) = \mathcal{O}(\nu_m^{n-1})^3$, alors $e^{-u_m} \sim (\frac{\tau}{m})^{\frac{1}{n-1}}$, donc, la probabilité de la première synchronisation après m itérations avec une précision $a_c \sim (\frac{\tau}{m})^{\frac{1}{n-1}}$ est égale à $e^{-\theta_n \tau}$. C'est-à-dire, si les composantes du vecteur $\hat{T}^k(\bar{x})$ sont vues comme les positions des différentes particules sur un réseau, alors nous donnons ainsi une estimation quantitative de la probabilité de la synchronisation du réseau après un temps spécifique et avec une précision donnée.

Pour bien comprendre ce phénomène nous allons introduire les exemples suivants.

Exemples 3.3.4.

(1) Nous considérons l'application unidimensionnelle $T(x) = 3x \bmod 1$. Nous prenons 3 particules vivant chacune sur l'inervalle unité avec un **IE** $\theta_3 = 0.86$ ayant choisi $\lambda = \frac{1}{3}$ et $\gamma = 0.1$. Si nous voulons synchroniser les particules avec une probabilité supérieure à $\frac{1}{2}$ et une précision $a_c = 0.01$ avant m itérations, alors nous devons itérer le réseau environs de $m = 8100$ fois.

(2) Par analogie avec l'exemple (1), si nous voulons synchroniser 100 particules vivant chacune sur l'inervalle unité avec une probabilité supérieure à $\frac{1}{2}$ et une précision $a_c = 0.01$ avant m itérations de **CML**, alors m doit être supérieure à 100^{100}.

Dans la partie suivante nous allons donner un calcul très rigoureux de l'indice extrémal pour notre réseau d'applications couplées à dimension très élevée.

3.4 Calcul de l'indice extrémal

L'indice extrémal était donné par la formule (2.14) dans le chapitre 2. En 2012 Keller [64] a montré que cette formule coïncide avec la formule que nous avons donnée dans la Proposition 3.1.2 pour l'observable définie par le processus (3.1). Le même auteur a présenté dans [27] un calcul rigoureux pour deux applications couplées, mais son application était légèrement différente de la notre dans le sens

3. En fait, c'est possible de prouver facilement une borne supérieure de la mesure de Lebesgue du domaine $\{x \in I^n, |x_i - x_j| < \nu_m : i \neq j\}$ qui est simplement $(2\nu_m)^{n-1}$. Nous esquissons l'argument pour $n = 3$. Dans ce cas, la mesure que nous cherchons est $\int \mathrm{d}x_1 \int \mathrm{d}x_2 \mathbf{1}_{\{|x_1-x_2|\leq\nu_m\}}(\bar{x}) \int \mathrm{d}x_3 \mathbf{1}_{\{|x_1-x_3|\leq\nu_m\}}(\bar{x}) \mathbf{1}_{\{|x_2-x_3|\leq\nu_m\}}(\bar{x})$. La dernière intégrale contribuera avec $2\nu_m$ et la même chose pour la deuxième.

que pour la i-ème composante, le terme moyenné $\frac{\gamma}{n}\sum_{j=1}^{n} T(x_j)$ ne contient pas la contribution de $T(x_i)$.

Dans ce paragraphe, nous donnons un bref aperçu du résultat montré par Keller et Liverani pour l'**IE** dans [27]. La formule (2.13) détermine tout les q_k mais le fait que la diagonale est invariante, implique que pour tout $k \geq 1$, les q_k sont nulles, mais q_0 non et il est défini par :

$$q_0 = \lim_{m\to\infty} q_{0,m} = \lim_{m\to\infty} \frac{\hat{\mu}\Big(S_m^{(2)} \cap \hat{T}^{-1} S_m^{(2)}\Big)}{\hat{\mu}\Big(S_m^{(2)}\Big)}. \tag{3.16}$$

Cette quantité permet de donner une formule explicite de l'indice extrémal

$$\theta_2 = 1 - \frac{1}{1-\gamma}\frac{1}{\int \hat{h}(x,x)dx}\int \frac{\hat{h}(x,x)}{|DT(x)|}dx,$$

où la densité $\hat{h}$ admet une variation bornée qui est régularisée le long de la diagonale de I^2. C'est-à-dire que pour presque tout $x \in I$ la valeur de $\hat{h}(x,x)$ est la moyenne des limites de $\hat{h}(x-u, x+u)$ et $\hat{h}(x+u, x-u)$ quand $u \to 0$.

Notre étude sera dans ce contexte mais pour des dimensions plus élevées ; il semble difficile d'étendre un tel résultat à des dimensions plus élevées sans des hypothèses beaucoup plus fortes.

D'abord, avant de commencer l'étude, nous allons explorer comment l'**IE** θ_n se comporte pour n grand dans un cadre très général avec l'objectif de montrer que pour un grand n tel indice rapproche 1 et donc la loi de Gumbel émergera comme la distribution des valeurs extrêmes. Pour cela, nous faisons les positions suivants :

1) Nous indexons avec n la densité invariante $\hat{h}_n$ qui sont définies comme une suite des fonctions à variation bornnée.
2) Nous continuons à utiliser le symbole $\hat{\mu}$ pour la mesure invariante, bien que cette dernière dépende aussi de n, via la densité $\hat{h}_n$.

Ensuite, rappelons que la quantité $q_{k,l}$ introduite en (2.13) est équivalente à

$$q_{k,l} := \frac{\int (\hat{P} - \tilde{P}_l)\tilde{P}_l^{\,k}(\hat{P} - \tilde{P}_l)(\hat{h})\mathrm{dLeb}}{\hat{\mu}(D_l^c)} = \hat{\mu}_{D_l^c}\Big\{x \in D_l^c; \mathbf{t}_{D_l^c}(x) = k+1\Big\}, \tag{3.17}$$

avec $\hat{\mu}_{D_l^c}$ la mesure conditionnelle de D_l^c et $\mathbf{t}_{D_l^c}(x)$ le premier temps de retour du point $x \in D_l^c$ à D_l^c.
Notre premier objectif est de montrer que en dimension quelconque, toutes les q_k sont zéro sauf q_0. Cet objectif demande quelques hypothèses supplémentaire. Pour cela, notons d'abord avec $V_\varepsilon(\Delta)$ un ε-voisinage de la diagonale Δ.

- **P01** Les bords des domaines d'injectivité locale $U_1, U_2, \cdots, U_{q^n}$ sont l'union de plusieurs surfaces de discontinuité $\mathcal{D}_j$, $j = 1, \cdots, p$ qui sont des sous-variétés de codimension-1. Nous notons par $\mathcal{D}$ l'union de ces ensembles de discontinuité et pour tout $\varepsilon > 0, k \in \mathbb{N}$, $F_{d,\varepsilon,k}$ l'ensemble des points $x \in V_\varepsilon(\Delta)$ pour lequel il existe un voisinage $\Re(x)$ tel que

$$\Re(x) \cap \Delta \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \Re(x) \cap \Big(\mathcal{D} \cup \hat{T}^{-1}(\mathcal{D}) \cup \cdots \cup \hat{T}^{-k}(\mathcal{D})\Big) = \emptyset.$$

  De plus, nous exigeons l'existence d'une constante C_k indépendante de ε telle que

$$\hat{\mu}(F^c_{d,\varepsilon,k}) \leq C_k \sigma(\varepsilon) \hat{\mu}\Big(V_\varepsilon(\Delta)\Big)$$

  où $\sigma(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0$.

- **P02** Nous notons par $G_{d,\varepsilon}$ l'ensemble des points dans $V_\varepsilon(\Delta)$, pour lequel le segment de longueur minimale qui relie un de ces points à la diagonale intersecte une composante de $\hat{T}(\mathcal{D}_j)$. Pour ε assez petit, nous supposons qu'il existe une constante C_d indépendante de ε telle que

$$\hat{\mu}(G_{d,\varepsilon}) \leq C_d\, \mathfrak{b}(\varepsilon) \hat{\mu}\Big(V_\varepsilon(\Delta)\Big)$$

  où $\mathfrak{b}(\varepsilon) \to 0, \quad$ quand $\varepsilon \to 0$.

Remarque 3.4.1. La condition **P01** signifie que pour une grande partie des points dans le voisinage $V_\varepsilon(\Delta)$, nous pouvons trouver un voisinage qui intersecte la diagonale mais ne traverse pas les lignes de discontinuité jusqu'à un certain ordre. La condition **P02** signifie que le morceau de $V_\varepsilon(\Delta)$ qui est traversé par un élément de $\hat{T}(\mathcal{D}_j)$ a une longueur dans la direction de Δ d'ordre $\mathfrak{b}(\varepsilon)$. Les deux situations se produisent lorsque le croisement des discontinuités est "transversal". Il est facile de construire des exemples en dimension $n = 2$ et $n = 3$ voir **FIG** 3.1 pour **P01** et la **FIG** 3.2 pour **P02**. Dans les deux cas, nous avons pris ε assez petit de telle sorte que la discontinuité se comporte localement, quand elle intersecte $V_\varepsilon(\Delta)$, comme une ligne pour $n = 2$ et comme un plan pour $n = 3$, en plus $\mathfrak{b}(\varepsilon) = \sigma(\varepsilon)$. Nous remarquons que la condition **P02** nécessite uniquement le contrôle des premières images de $\mathcal{D}$, mais si l'application $\hat{T}$ est surjective sur chaque U_l nous n'avons pas besoin de ce contrôle.

Maintenant, nous revenons à notre but. Nous esquissons l'argument pour $k = 1$. Les autres ($i.e$; $k > 1$) étant similaires par le remplacement de l avec m dans la formule (3.17).

Lemme 3.4.2. *La quantité*

$$\frac{\int (\hat{P} - \tilde{P}_m)\tilde{P}_m(\hat{P} - \tilde{P}_m)(\hat{h})\, \mathrm{dLeb}}{\hat{\mu}(S^{(n)}_m)} = \frac{\hat{\mu}\Big(S^{(n)}_m \cap \hat{T}^{-1}(S^{(n)}_m)^c \cap \hat{T}^{-2} S^{(n)}_m\Big)}{\hat{\mu}(S^{(n)}_m)} \tag{3.18}$$

tend vers zéro quand $m \to \infty$.

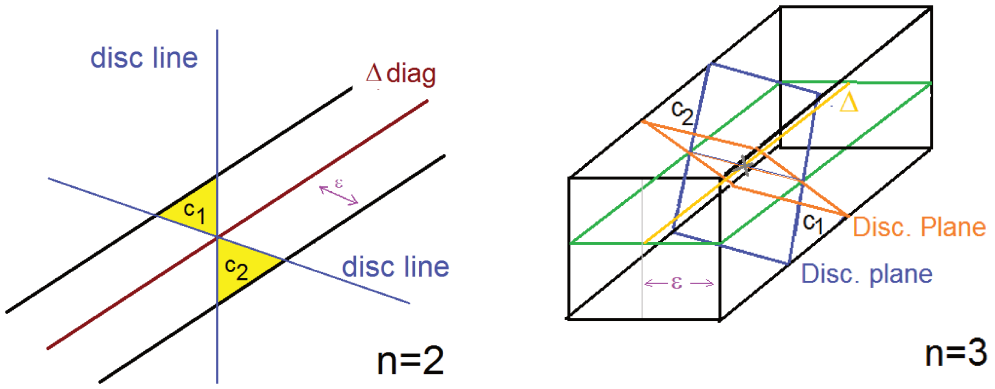


FIG. 3.1. Pour $n = 2$, croisement des lignes de discontinuité (disc line) du voisinage de la diagonale Δ, pour la propriété **P01**. Pour $n = 3$, croisement des surfaces de discontinuité (disc plane) du voisinage de la diagonale Δ. c_1 et c_2 : régions triangulaires (à gauche) et pyramidales (à droite) appartenant respectivement à $F_{d,\varepsilon,2}$ et $F_{d,\varepsilon,3}$. Nous supprimons les régions ombrées à gauche et les régions pyramidales c_1 et c_2 à droite.

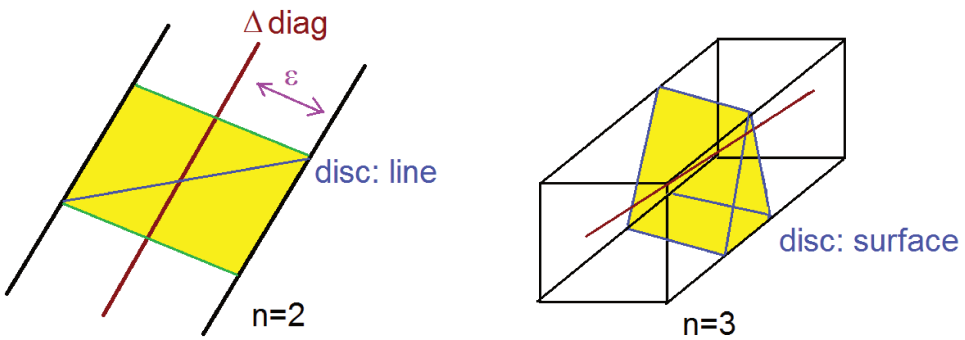


FIG. 3.2. Pour $n = 2$, croisement de la ligne de discontinuité, n $= 3$ de la surface discontinuité, du voisinage de la diagonale Δ, pour la propriété **P02**. Nous supprimons les régions ombrées.

Démonstration. Tout d'abord, prenons un point $\bar{x} \in F_{d,\varepsilon,2}$. Avec les hypothèses **P01** et **P02**, les applications $\hat{T}$ et $\hat{T}^2$ sont ouvertes sur $\Re(\bar{x})$. En particulier, $\hat{T}^2\big(\Re(\bar{x})\big)$ sera inclus à l'intérieur de l'un des U_l et il intersectera Δ par l'invariance directe de cette dernière $\Big(i.e.\ \hat{T}^2\big(\Re(\bar{x})\big) \subset \Re(\bar{x})\Big)$.

Ensuite, nous supposons que $\hat{T}^2(\bar{x})$ est dans $V_\varepsilon(\Delta)$. Nous essayons de prouver que $\hat{T}(\bar{x})$ doit être dans $V_\varepsilon(\Delta)$ aussi. Soit D_* le domaine de la fonction $\hat{T}_*^{-1}$ qui

est la branche inverse de l'application envoyant $\hat{T}(\bar{x})$ à $\hat{T}^2(\bar{x})$. Si la distance entre $\hat{T}^2(\bar{x})$ et tout point $\bar{z} \in \hat{T}^2\Big(\Re(\bar{x})\Big) \cap \Delta$, tel que le segment $[\hat{T}^2(\bar{x}),\, \bar{z}]$ est inclus dans D_*, est inférieure à ε, alors nous avons

$$dist(\hat{T}_*^{-1}(\bar{z}), \hat{T}_*^{-1}(\hat{T}^2(\bar{x}))) = dist(\tilde{z}, \hat{T}(\bar{x})) \leq \lambda\varepsilon,$$

où $\tilde{z} = \hat{T}_*^{-1}(\bar{z}) \in \Delta$. Or nous remarquons qu'un tel point $\bar{z} \in \Delta$ ne devrait pas nécessairement être dans $\hat{T}^2\Big(\Re(\bar{x})\Big)$, à condition que le segment $[\hat{T}^2(\bar{x}),\, \bar{z}] \in D_*$ et $dist(\bar{z}, \hat{T}^2(\bar{x})) \leq \varepsilon$. Ce qui peut empêcher ces dernières conditions, est l'existence des bords aux domaines de définition des pré-images de $\hat{T}$, qui sont les images de $\mathcal{D}$. Nous devrions donc éviter l'arrivée de $\hat{T}^2(\bar{x})$ dans l'ensemble $G_{d,\varepsilon}$. Ce qui signifie que nous devons ignorer les points $\bar{x} \in V_\varepsilon$, qui sont dans $\hat{T}^{-2}G_{d,\varepsilon}$. Par invariance de la diagonale, la mesure de ces points est majorée par $C_d\mathfrak{b}(\varepsilon)\hat{\mu}(V_\varepsilon(\Delta))$.

Enfin, nous choisissons $\nu_m < \varepsilon$ et travaillons directement avec les ensembles $S_m^{(n)}$. Les points qui ne sont pas dans $\hat{T}^{-2}G_{d,\nu_m} \cap S_m^{(n)} \cap F_{d,\nu_m,2}^c$ donnent une contribution nulle à la quantité $\hat{\mu}\Big(S_m^{(n)} \cap \hat{T}^{-1}(S_m^{(n)})^c \cap \hat{T}^{-2}S_m^{(n)}\Big)$, tandis que la mesure des points restants, divisés par $\hat{\mu}(S_m^{(n)})$, va à zéro lorsque m tend vers l'infini. □

Maintenant, notre objectif est de montrer que l'indice extrémal s'approche de 1 pour grand n.

Proposition 3.4.3. *Supposons que notre* **CML** *satisfait les propriétés* **P1-P5** *sur l'espace de Banach $\mathcal{H}$ avec $\lambda = \inf |DT|^{-1} < 1-\gamma$, la densité $\hat{h}_n \in L^\infty$ et $\hat{h}_n^{(\inf)} := \inf\limits_{I^n} \hat{h}_n > 0$. Alors,*

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{\hat{\mu}\Big(S_m^{(n)} \cap \hat{T}^{-1}S_m^{(n)}\Big)}{\hat{\mu}(S_m^{(n)})} \leq \frac{\lambda^{n-1}\left\|\hat{h}_n\right\|_\infty}{(1-\gamma)^{n-1}\hat{h}_n^{(\inf)}}.$$

Remarque 3.4.4. La limite supérieure a un sens lorsque la partie à droite de l'inégalité ci-dessus est inférieure ou égale à 1. De plus, sous l'hypothèse supplémentaire **P0**, si le rapport $\frac{\|\hat{h}_n\|_\infty}{\hat{h}_n^{(\inf)}}$ ne croît pas plus vite que ϑ^{n-1} quand $n \to \infty$ où $\vartheta > \left(\frac{\lambda}{1-\gamma}\right)^{-1}$, l'**IE** θ_n converge vers 1 .

Démonstration. Soit $\hat{\mu}$ la mesure invariante absolument continue par rapport à Lebesgue donc

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}\Big(S_m^{(n)} \cap \hat{T}^{-1}S_m^{(n)}\Big) &= \int_{I^n} \mathbf{1}_{S_m^{(n)}\cap\hat{T}^{-1}S_m^{(n)}}(\bar{x})\mathrm{d}\hat{\mu}(\bar{x}) \\
&= \int_{I^n} \hat{h}_n(\bar{x})\mathbf{1}_{S_m^{(n)}}(\bar{x})\mathbf{1}_{S_m^{(n)}}(\hat{T}\bar{x})\mathrm{d}\bar{x} \\
&= \int_I \mathrm{d}x_1 \int_{I^{n-1}} \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n \hat{h}_n(x_1,\ldots,x_n)\mathbf{1}_{S_m^{(n)}}(x)\cdot \\
&\quad \mathbf{1}_{S_m^{(n)}}\left((1-\gamma)T(x_1)+\tfrac{\gamma}{n}\textstyle\sum_{i=1}^n T(x_i),\ldots,(1-\gamma)T(x_n)+\tfrac{\gamma}{n}\sum\limits_{i=1}^n T(x_i)\right).
\end{aligned}$$

Pour simplifier les calculs, nous devons réduire le domaine d'intégration I en deux étapes. Premièrement, nous faisons un changement de I par $I_m^{'}$ qui consiste à supprimer des intervalles de longueur $2\nu_m$ à gauche et à droite de chaque point sur le bord de $A_l,\ l = 1, \cdots, q$. Puisque nous intégrons des fonctions bornées, alors la différence entre les intégrales sur I et $I_m^{'}$ qui le symbolise par $\mathbf{I}(I \backslash I_m^{'})$ est clairement convergente vers zéro quand $m \to \infty$.

En introduisant l'opérateur P_l, qu'agit sur la variable $x_l,\ l \geq 2$, nous pourrions continuer ainsi :

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}\Big(S_m^{(n)} \cap \hat{T}^{-1} S_m^{(n)}\Big) &= \mathbf{I}(I \backslash I_m^{'}) \\
&+ \int_{I_m^{'}} \mathrm{d}x_1 \int_{I^{n-1}} \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n P_n \circ \cdots \circ P_2 \Big[\hat{h}(x_1, \ldots, x_n) \mathbf{1}_{S_m^{(n)}}(\bar{x})\Big] \cdot \\
&\quad \mathbf{1}_{S_m^{(n)}}\Big((1-\gamma)T(x_1) + \tfrac{\gamma}{n}\Big(T(x_1) + x_2 + \cdots + x_n\Big), \ldots, (1-\gamma)x_n + \tfrac{\gamma}{n}\Big(T(x_1) + x_2 + \cdots + x_n\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Maintenant, par la définition de $S_m^{(n)}$, les conditions dans les fonctions caractéristiques imposent que :

$$\begin{cases} |T(x_1) - x_j| \leq \frac{\nu_m}{1-\gamma} & j = 2, \ldots, n \\ |x_i - x_j| \leq \frac{\nu_m}{1-\gamma} & i \neq j \neq 1. \end{cases} \tag{3.19}$$

Définissons maintenant les ensembles suivants

$$S_{m,\gamma}^{(n)}(Tx_1) := \Big\{(x_2, \ldots, x_n) \in I^n,\ |T(x_1) - x_j| \leq \tfrac{\nu_m}{1-\gamma}, j = 2, \ldots, n;\ |x_i - x_j| \leq \tfrac{\nu_m}{1-\gamma},\ i \neq j \neq 1\Big\}$$

et

$$S_m^{(n)}(x_1) := \Big\{(x_2, \ldots, x_n) \in I^n, |x_1 - x_j| \leq \nu_m, j = 2, \ldots, n; |x_i - x_j| \leq \nu_m, i \neq j \neq 1\Big\}.$$

De plus, nous pouvons réduire le domaine d'intégration de l'intégrale dans le dénominateur de I à $I_m^{'''}$. En effet, (nous prenons $n = 2$ pour la simplifier), il y a une dépendance des deux ensembles $S_{m,\gamma}^{(2)}(Tx_1)$ et $S_m^{(2)}(x_1)$ de x_1. Par conséquent, leurs mesures dépendront de la localisation de x_1. Il suffira donc d'évaluer les intégrales externes en x_1 sur un domaine encore plus petit noté par $I_m^{''} \subset I_m^{'}$ et par $I_m^{'''}$ pour la quantité en dénominateur, de telle sorte qu'ils ne contiendront pas de voisinages (disjoints) $\mathcal{U}$ de 0 et 1 et de ses pré-images $T^{-1}\mathcal{U}$. En conséquence, nous pouvons garder la totalité de l'aire des deux ensembles $S_{m,\gamma}^{(2)}(Tx_1)$ et $S_m^{(2)}(x_1)$. À partir de maintenant, nous écrivons cette aire comme $\mathrm{Leb}(S_{m,\gamma}^{(2)})$ et $\mathrm{Leb}(S_m^{(2)})$. Clairement la différence entre les intégrales sur I et $I_m^{''}, I_m^{'''}$ convergera vers zéro quand $m \to \infty$.

Alors nous obtenons,

$$\frac{\hat{\mu}\Big(S_m^{(n)} \cap \hat{T}^{-1} S_m^{(n)}\Big)}{\hat{\mu}(S_m^{(n)})} \leq$$

$$\frac{\int_{I'_m} dx_1 \int_{S^{(n)}_{m,\gamma}(Tx_1)} \mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n P_2 \circ \dots \circ P_n\Big[\hat{h}_n(x_1,\dots,x_n)\mathbf{1}_{S^{(n)}_m}(\bar{x})\Big] + \mathbf{I}(I\backslash I'_m)}{\int_{I'''_m} \mathrm{d}x_1 \int_{S^{(n)}_m(x_1)} \mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n \hat{h}_n(x_1,\dots,x_n)}.$$

Maintenant pour simplifier, nous considérons la structure des opérateurs lorsque n = 3 :

$$P_3 \circ P_2\Big[\hat{h}(x_1,x_2,x_3)\mathbf{1}_{S^{(3)}_m}(x_1,x_2,x_3)\Big]$$

$$= \sum_k \sum_j \frac{\hat{h}(x_1, T_j^{-1}x_2, T_k^{-1}x_3)\mathbf{1}_{S^{(3)}_m}(x_1, T_j^{-1}x_2, T_k^{-1}x_3)}{\Big|DT(T_j^{-1}x_2)\Big|\Big|DT(T_k^{-1}x_3)\Big|}\mathbf{1}_{TA_j}(x_2)\mathbf{1}_{TA_k}(x_3), \quad (3.20)$$

où $\{A_k\}$ désigne les intervalles de monotonie de l'application T. Par les bornes (3.19) et l'hypothèse $\gamma < 1-\lambda$ nous avons que

$$\begin{cases} \Big|T_j^{-1}(x_2) - x_1\Big| & < & \nu_m \\ \quad\text{et} & & \\ \Big|T_k^{-1}(x_3) - x_1\Big| & < & \nu_m. \end{cases}$$

Puisque la partition originale est finie, si nous prenons d'abord m assez grand et après on enlève des intervalles de longueur $2\nu_m$ autour du point sur le bord du domaine de monotonie de T, alors pour tout $x_1 \in I'_m$, il existe une seule pré-image à laquelle peut contribuer dans chaque somme. En généralisant à n composantes, nous pouvons borner le terme (3.20) par $\lambda^{n-1}\left\|\hat{h}_n\right\|_\infty$. Alors

$$\frac{\hat{\mu}\Big(S^{(n)}_m \cap \hat{T}^{-1}S^{(n)}_m\Big)}{\hat{\mu}(S^{(n)}_m)} \leq \frac{\lambda^{n-1}\left\|\hat{h}_n\right\|_\infty \int_{I'_m} \mathrm{d}x_1 \mathrm{Leb}(S^{(n)}_{m,\gamma}(Tx_1)) + \mathbf{I}(I\backslash I''_m)}{\int_{I'''_m} \mathrm{d}x_1 \mathrm{Leb}(S^{(n)}_m(x_1))\hat{h}^{(\inf)}_n}.$$

De plus, une simple inspection géométrique montre que les mesures de Lebesgue des ensembles $S^{(n)}_{m,\gamma}(Tx_1)$ et $S^{(n)}_m(x_1)$ sont indépendantes du point x_1. D'autre part, lorsque nous faisons un changement de variable $x'_k = (1-\gamma)x_k + \gamma T(x_1)$ nous concluons

$$\frac{\mathrm{Leb}\Big(S^{(n)}_{m,\gamma}(Tx_1)\Big)}{\mathrm{Leb}\Big(S^{(n)}_m(x_1)\Big)} = \frac{1}{(1-\gamma)^{n-1}}. \quad (3.21)$$

Nous obtenons donc

$$\frac{\hat{\mu}\Big(S^{(n)}_m \cap \hat{T}^{-1}S^{(n)}_m\Big)}{\hat{\mu}(S^{(n)}_m)} \leq \frac{\lambda^{n-1}\left\|\hat{h}_n\right\|_\infty \mathrm{Leb}\Big(S^{(n)}_{m,\gamma}(Tx_1)\Big) + \mathbf{I}(I\backslash I''_m)}{\mathrm{Leb}\Big(S^{(n)}_m(x_1)\Big)\hat{h}^{(\inf)}_n}. \quad (3.22)$$

Finalement, il est facile de remarquer que $\mathbf{I}(I\backslash I_m^{''})$ est borné par

$$||\hat{h}_n||_\infty \mathrm{Leb}\Big(S_{m,\gamma}^{(n)}\Big)\mathrm{Leb}\Big(I\backslash I_m^{''}\Big)$$

et comme le rapport (3.21) est indépendant de m, par le passage à lim sup nous obtenons notre résultat. □

Maintenant, nous renforçons le résultat précédent en ajoutant d'autres hypothèses. Nous commençons par une hypothèse plus forte sur la densité invariante que nous relâcherons plus tard.

- **P7** La densité $\hat{h}$ est continue sur I^n.

Cette condition est satisfaite par exemple dans le cas découplé pour les applications régulières et localement surjectives du cercle unité.

Proposition 3.4.5. *Suppousons que notre* **CML** *vérifie les propriétés* **P1-P5** *et* **P7** *sur l'espace de Banach* $\mathcal{H}$ *avec* $\lambda = \inf |DT|^{-1} < 1-\gamma$. *Alors,*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\hat{\mu}\Big(S_m^{(n)} \cap \hat{T}^{-1} S_m^{(n)}\Big)}{\hat{\mu}(S_m^{(n)})} = \frac{1}{(1-\gamma)^{n-1}} \frac{\displaystyle\int_I \frac{\hat{h}_n(x,\ldots,x)\,\mathrm{d}x}{|DT(x)|^{n-1}}}{\displaystyle\int_I \hat{h}_n(x,\ldots,x)\,\mathrm{d}x}.$$

Nous écrirons la preuve pour $n=3$, la généralisation étant immédiate. Cela nous permettra d'utiliser les formules simples de la démonstration précédente.

Démonstration. Par les mêmes arguments de la proposition 3.4.3 et si nous notons $T_{x_1}^{-1}$ la branche inverse de T telle que $T_{x_1}^{-1}\Big(T(x_1)\Big) = x_1$, alors nous avons,

$$\hat{\mu}\Big(S_m^{(n)} \cap \hat{T}^{-1} S_m^{(n)}\Big) = \mathbf{I}(I_m^{''}) + \mathbf{I}(I\backslash I_m^{''}) \tag{3.23}$$

où

$$\mathbf{I}(I_m^{''}) := \int_{I_m^{''}} \mathrm{d}x_1 \int_{S_{m,\gamma}^{(3)}(Tx_1)} \frac{\hat{h}_3(x_1, T_{x_1}^{-1}x_2, T_{x_1}^{-1}x_3)}{\Big|DT(T_{x_1}^{-1}x_2)\Big|\,\Big|DT(T_{x_1}^{-1}x_3)\Big|}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$$

qui est une borne inférieure pour $\hat{\mu}\Big(S_m^{(n)} \cap \hat{T}^{-1} S_m^{(n)}\Big)$.

Comme $\hat{h}_3$ est continue sur I^3 alors elle est uniformément continue. Donc pour un $\widetilde{\varepsilon} > 0$ fixé, choisissons ν_m assez petit et tel que $\Big|T_{x_1}^{-1}x_2 - x_1\Big| \leq \nu_m$ et $\Big|T_{x_1}^{-1}x_3 - x_1\Big| \leq \nu_m$; alors nous obtenons

$$\hat{h}_3\Big(x_1, T_{x_1}^{-1}x_2, T_{x_1}^{-1}x_3\Big) \;=\; \hat{h}_3\Big(x_1, x_1, x_1\Big) + \mathcal{O}(\widetilde{\varepsilon}).$$

Ensuite, puisque notre application est de classe C^2 dans l'intérieur de A_l, $l = 1,\ldots,q$ et prolongeable avec continuité sur les bords, alors par le Théorème de valeur moyenne, nous avons

$$\begin{cases} DT\Big(T_{x_1}^{-1}x_2\Big) &= DT(x_1) + D^2T(\hat{x}_2)\Big|T_{x_1}^{-1}x_2 - x_1\Big| \\ DT\Big(T_{x_1}^{-1}x_3\Big) &= DT(x_1) + D^2T(\hat{x}_3)\Big|T_{x_1}^{-1}x_3 - x_1\Big|. \end{cases}$$

avec $\hat{x}_2$ strictement compris entre $T_{x_1}^{-1}x_2$ et x_1, et $\hat{x}_3$ entre $T_{x_1}^{-1}x_3$ et x_1. Ces deux intervalles sont inclus dans le domaine d'injectivité locale de T.

Maintenant, en remplaçant ces dernières formules dans $\mathbf{I}(I_m^{''})$ nous obtenons

$$\begin{aligned} &\mathbf{I}(I_m^{''}) \\ &= \int_{I_m''} \mathrm{d}x_1 \frac{\hat{h}_3(x_1,x_1,x_1)}{|DT(x_1)|^2} \int_{S_{m,\gamma}^{(3)}} \frac{\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3}{\Big[1 + \frac{D^2T(\hat{x}_2)}{DT(x_1)}\Big|T_{x_1}^{-1}x_2 - x_1\Big|\Big]\Big[1 + \frac{D^2T(\hat{x}_3)}{DT(x_1)}\Big|T_{x_1}^{-1}x_3 - x_1\Big|\Big]} \\ &+ \int_{I_m''} \frac{\mathrm{d}x_1}{|DT(x_1)|^2} \int_{S_{m,\gamma}^{(3)}} \frac{\mathcal{O}(\widetilde{\varepsilon})\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3}{\Big[1 + \frac{D^2T(\hat{x}_2)}{DT(x_1)}\Big|T_{x_1}^{-1}x_2 - x_1\Big|\Big]\Big[1 + \frac{D^2T(\hat{x}_3)}{DT(x_1)}\Big|T_{x_1}^{-1}x_3 - x_1\Big|\Big]}. \end{aligned}$$

Nous avons supprimé la dépendance de Tx_1 dans la mesure de Lebesgue de l'externe de $S_{m,\gamma}^{(3)}$ qui sont indépendants de Tx_1 lorsque $x_1 \in I_m^{''}$, donc la formule précédente peut s'écrire comme :

$$\mathbf{I}(I_m^{''}) = \mathcal{I}_{1,m} + \mathcal{I}_{2,m}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{1,m} := \mathrm{Leb}(S_{m,\gamma}^{(3)}) \int_{I_m''} \mathrm{d}x_1 \frac{\hat{h}_3(x_1,x_1,x_1)}{|DT(x_1)|^2} \frac{1}{\mathrm{Leb}(S_{m,\gamma}^{(3)})} \\ \int_{S_{m,\gamma}^{(3)}(Tx_1)} \frac{\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3}{\Big[1 + \frac{D^2T(\hat{x}_2)}{DT(x_1)}\Big|T_{x_1}^{-1}x_2 - x_1\Big|\Big]\Big[1 + \frac{D^2T(\hat{x}_3)}{DT(x_1)}\Big|T_{x_1}^{-1}x_3 - x_1\Big|\Big]} \end{aligned} \tag{3.24}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{2,m} := \mathrm{Leb}(S_{m,\gamma}^{(3)}) \int_{I_m''} \frac{\mathrm{d}x_1}{|DT(x_1)|^2} \frac{1}{\mathrm{Leb}(S_{m,\gamma}^{(3)})} \\ \int_{S_{m,\gamma}^{(3)}(Tx_1)} \frac{\mathcal{O}(\widetilde{\varepsilon})\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3}{\Big[1 + \frac{D^2T(\hat{x}_2)}{DT(x_1)}\Big|T_{x_1}^{-1}x_2 - x_1\Big|\Big]\Big[1 + \frac{D^2T(\hat{x}_3)}{DT(x_1)}\Big|T_{x_1}^{-1}x_3 - x_1\Big|\Big]}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Utilisons le même raisonnement pour la mesure de $S_m^{(3)}$, alors

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(S_m^{(3)}) &= \mathrm{Leb}(S_m^{(3)}) \int_{I_m'''} \mathrm{d}x_1 \hat{h}_3(x_1,x_1,x_1) \frac{1}{\mathrm{Leb}(S_m^{(3)})} \int_{S_m^{(3)}(x_1)} \mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 \\ &+ \mathrm{Leb}(S_m^{(3)}) \int_{I_m'''} \mathrm{d}x_1 \frac{1}{\mathrm{Leb}(S_m^{(3)})} \int_{S_m^{(3)}(x_1)} \mathcal{O}(\widetilde{\varepsilon})\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + \mathbf{I}(I \backslash I_m^{'''}) \\ &= \mathcal{I}_{3,m} + \mathcal{I}_{4,m} + \mathbf{I}(I \backslash I_m^{'''}). \end{aligned} \tag{3.26}$$

nous observons que $\mu(S_m^{(3)})$ possède une borne inférieure sans $\mathbf{I}(I\backslash I_m^{'''})$, nous donner

$$\frac{\mathcal{I}_{1,m} + \mathcal{I}_{2,m}}{\mathcal{I}_{3,m} + \mathcal{I}_{4,m} + \mathbf{I}(I\backslash I_m^{'''})} \leq \frac{\hat{\mu}(S_m^{(3)} \cap \hat{T}^{-1} S_m^{(3)})}{\hat{\mu}(S_m^{(3)})} \leq \frac{\mathcal{I}_{1,m} + \mathcal{I}_{2,m} + \mathbf{I}(I\backslash I_m^{''})}{\mathcal{I}_{3,m} + \mathcal{I}_{4,m}}.$$

D'après la preuve de la proposition 3.4.3 nous avons

$$\mathbf{I}(I\backslash I_m^{''}) \leq \left\|\hat{h}\right\|_\infty \mathrm{Leb}(S_{m,\gamma}^{(3)})\mathrm{Leb}(I\backslash I_m^{''})$$

et

$$\mathbf{I}(I\backslash I_m^{'''}) \leq \left\|\hat{h}\right\|_\infty \mathrm{Leb}(S_m^{(3)})\mathrm{Leb}(I\backslash I_m^{'''}).$$

Donc nous pouvons factoriser dans le numérateur et dans le dénominateur la mesure de Lebesgue des ensembles $S_{m,\gamma}^{(3)}$ et $S_m^{(3)}$, d'où

$$\frac{1}{(1-\gamma)^2}\frac{\mathcal{I}_{1,m}^{'}+\mathcal{I}_{2,m}^{'}}{\mathcal{I}_{3,m}^{'}+\mathcal{I}_{4,m}^{'}+\left\|\hat{h}\right\|_\infty \mathrm{Leb}\left(I\backslash I_m^{'''}\right)} \leq \frac{\hat{\mu}\left(S_m^{(3)}\cap\hat{T}^{-1}S_m^{(3)}\right)}{\hat{\mu}(S_m^{(3)})} \leq \frac{1}{(1-\gamma)^2}\frac{\mathcal{I}_{1,m}^{'}+\mathcal{I}_{2,m}^{'}+\left\|\hat{h}\right\|_\infty \mathrm{Leb}\left(I\backslash I_m^{''}\right)}{\mathcal{I}_{3,m}^{'}+\mathcal{I}_{4,m}^{'}},$$

où $\mathcal{I}_{i,m}^{'}$, $i \in \{1,2,3,4\}$ est le reste de $\mathcal{I}_{i,m}$ après la factorisation.

Finalement, lorsque $m \to \infty$ d'après le Théorème de convergence dominée et le fait que $\left|T_{x_1}^{-1}x_j - x_1\right| \leq \nu_m$, $j = 2,3$, nous trouvons que $\mathcal{I}_{1,m}^{'}$ converge vers $\int_I \mathrm{d}x_1 \frac{\hat{h}_3(x_1,x_1,x_1)}{|DT(x_1)|^2}$, $\mathcal{I}_{3,m}^{'}$ converge vers $\int_I \mathrm{d}x_1 \hat{h}_3(x_1,x_1,x_1)$ et $\mathcal{I}_{i,m}^{'}$, $i = 2,4$, va au terme $\mathcal{O}(\widetilde{\varepsilon})$. La proposition est démontrée lorsque nous choisissons $\widetilde{\varepsilon}$ assez petit. □

Maintenant, comme nous l'avons dit au-dessus, il est possible de relâcher l'hypothèse **P7** en demandant une propriété beaucoup plus faible.

•**P8** Supposons que la densité $\hat{h}$ soit dans $V_1(I^n)$ et de plus

$$\hat{h}_D := \sup_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_0} \frac{1}{\varepsilon}\int \mathrm{d}x\, osc\Big(\hat{h},\, B_\varepsilon(x,\cdots,x)\Big) < \infty.$$

Il nous semble que cette condition est naturelle et probablement inévitable, dans le sens où elle contrôle les oscillations de la densité au voisinage de la diagonale.

Propriété 3.4.6. *Supposons que notre* **CML** *vérifie les propriétés* **P1-P5** *et* **P8** *sur l'espace de Banach* $\mathcal{H} = V_1(I^n)$ *avec* $\lambda = \inf |DT|^{-1} < 1-\gamma$. *Alors, le résultat dans la Proposition 3.4.5 est reste valable.*

Démonstration. La démonstration suit la même démarche de la Proposition 3.4.5 avec un changement essentiel quand nous comparons la densité au voisinage du point (x_1,x_1,x_1). En fait, nous pouvons maintenant écrire

$$\left|\hat{h}_3(x_1, T_{x_1}^{-1}x_2, T_{x_1}^{-1}x_3) - \hat{h}_3(x_1,x_1,x_1)\right| \leq osc\Big(\hat{h}_3, B_{\nu_m}(x_1,\cdots,x_1)\Big).$$

Donc, une inspection rapide de la preuve précédente montre immédiatement que l'intégrale $\int_I \mathrm{d}x_1 \mathcal{O}(\widetilde{\varepsilon})$ sera remplacée par $\int_I \mathrm{d}x_1\, osc\Big(\hat{h}_3, B_{\nu_m}(x_1, \cdots, x_1)\Big)$. Nous avons alors :

$$\int_I \mathrm{d}x_1\, osc\Big(\hat{h}_3, B_{\nu_m}(x_1, \cdots, x_1)\Big) \leq \hat{h}_D \nu_m,$$

ce qui donne le résultat quand m tend vers l'infini. □

Corollaire 3.4.7. *Comme conséquence des Propositions 3.4.5 et* 3.4.6*, l'indice extrémal θ_n pour les applications satisfaisant aussi* **P0***, est donné par*

$$\theta_n = 1 - \frac{1}{(1-\gamma)^{n-1}} \frac{\displaystyle\int_I \frac{\hat{h}_n(x, \ldots, x)}{|DT(x)|^{n-1}}\, \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_I \hat{h}(x, \ldots, x)\, \mathrm{d}x} \tag{3.27}$$

et converge vers 1 *lorsque $n \to \infty$.*

3.5 Perturbations aléatoires

Dans cette partie, nous faisons une perturbation à notre application initiale par un bruit additif comme dans le cas de la localisation. Nous voulons prouver nos résultats pour le cas stochastique en utilisant l'**AS**.

Soit $\hat{P}_\epsilon$ l'opérateur de Perron-Frobenius aléatoire, la perturbation de cet opérateur est définie par : pour toute $h \in \mathcal{H}$,

$$\widetilde{P}_{m,\epsilon}(h) := \hat{P}_\epsilon(\mathbf{1}_{(S_m^{(n)})^c} h), \tag{3.28}$$

où $S_m^{(n)}$ est donné par (3.12).

Nous évoquons les propriétés **P1-P6** pour l'application perturbée $\hat{T}_{\overline{\omega}}$ et notons $\rho_{m,\epsilon}$ le rayon spectral de $\widetilde{P}_{m,\epsilon}$. Sous toutes ces hypothèses $\rho_{m,\epsilon}$ vérifie :

$$1 - \rho_{m,\epsilon} = \hat{\mu}_s(S_m^{(n)})\theta(1 + o(1)), \qquad \text{quand } m \to \infty \tag{3.29}$$

où

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1 - \rho_{m,\epsilon}}{\hat{\mu}_s(S_m^{(n)})} = \theta := 1 - \sum_{k=0}^{\infty} q_k \tag{3.30}$$

tel que

$$q_k = \lim_{m\to\infty} q_{k,m} = \lim_{m\to\infty} \frac{\displaystyle\int (\hat{P}_\epsilon - \widetilde{P}_{m,\epsilon})\widetilde{P}_{m,\epsilon}^k(\hat{P}_\epsilon - \widetilde{P}_{m,\epsilon})(\hat{h}_s)\mathrm{dLeb}}{\hat{\mu}_s(S_m^{(n)})}, \tag{3.31}$$

avec $\hat{h}_s$ est la densité de la mesure stationnaire $\hat{\mu}_s$ absolument continue par rapport à la mesure Lebesgue.

Maintenant, soit ψ l'observable qui est définie par (3.8), nous considérons le maximum

$$M_{m,\overline{\omega}} = \max\left\{X_{0,\overline{\omega}}, \dots, X_{m-1,\overline{\omega}}\right\}$$

où

$$X_{m,\overline{\omega}} = \psi \circ \hat{T}^m_{\overline{\omega}}, \quad \text{pour chaque } m \geq 1. \tag{3.32}$$

Alors, la distribution annealed du maximum $M_{m,\overline{\omega}}$ est donnée par

$$\begin{aligned}
&(\hat{\mu}_s \times \mathcal{P}^{\mathbb{N}}_\epsilon)(M_{m,\overline{\omega}} \leq u_m) \\
&\quad = \iint \hat{h}_s(\bar{x})\mathbf{1}_{(S^{(n)}_m)^c}(\bar{x})\mathbf{1}_{(S^{(n)}_m)^c}(\hat{T}_{\underline{\omega}_1}\bar{x}) \dots \mathbf{1}_{(S^{(n)}_m)^c}(\hat{T}^{m-1}_{\overline{\omega}}\bar{x}) \,\mathrm{dLeb}\,\mathrm{d}\mathcal{P}^{\mathbb{N}}_\epsilon \\
&\quad = \int \widetilde{P}^m_{m,\epsilon}(\hat{h}_s)\,\mathrm{dLeb}. \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

D'après les formules (3.29) et (3.33) nous pouvons donc réécrire

$$\begin{aligned}
&(\hat{\mu}_s \times \mathcal{P}^{\mathbb{N}}_\epsilon)(M_{m,\overline{\omega}} \leq u_m) \\
&\quad = \int \widetilde{P}^m_{m,\epsilon}\hat{h}_s\,\mathrm{dLeb} \\
&\quad = \rho^m_{m,\epsilon}\int \hat{h}_s\,\mathrm{d}\hat{\mu}_{s,m} + \rho^m_{m,\epsilon}\int Q^m_{m,\epsilon}\hat{h}_s\,\mathrm{dLeb} \\
&\quad = e^{-\left\{\theta m\hat{\mu}_s(S^{(n)}_m)+mo(\hat{\mu}_s(S^{(n)}_m))\right\}}\int \hat{h}_s\,\mathrm{d}\hat{\mu}_{s,m} + \mathcal{O}\Big(\rho^m_{m,\epsilon}\left\|Q^m_{m,\epsilon}\right\|_{\mathcal{H}}\Big).
\end{aligned}$$

Rappelons que pour $m \to \infty$ nous avons $\int \hat{h}_s\,\mathrm{d}\hat{\mu}_{s,m} \to \int \hat{h}_s\,\mathrm{dLeb} = 1$ et $Q_{m,\epsilon}$ est un opérateur linéaire de rayon spectral strictement inférieur à $\rho_{m,\epsilon}$. De plus, nous sommes sous l'hypothèse

$$\lim_{m\to\infty} m(\hat{\mu}_s \times \mathcal{P}^{\mathbb{N}}_\epsilon)(\psi > u_m) = \lim_{m\to\infty} m\hat{\mu}_s(S^{(n)}_m) = \tau,$$

ce qui nous garantit que $(\hat{\mu}_s \times \mathcal{P}^{\mathbb{N}}_\epsilon)(M_{m,\overline{\omega}} \leq u_m)$ convergera vers $e^{-\tau\theta}$ où θ est l'indice extrémal.

Comme dans le cas localisation, nous nous attendons à ce que l'indice extrémal soit 1 quand nous gardons n fixe et nous ajoutons du bruit au système. Nous savons que dans le papier [65], l'**AS** étendu aux systèmes dynamiques perturbés de manière aléatoire, principalement avec un bruit additif. Même si nous supposons les propriétés **P1-P6** sur certains espaces de Banach $\mathcal{B}$, il y aura une nouvelle difficulté liée au calcul des quantités q_k dans (2.13) dans le cadre aléatoire. Un tel calcul a également été créé dans [65, Proposition 5.3], basé sur le fait que l'observable devient infinie en un seul point, le centre d'une boule. Jusqu'à maintenant, nous ne savons pas comment l'adapter dans un voisinage diagonal δ, cependant, nous fournirons des preuves numériques dans le chapitre suivant indiquant qu'en présence de bruit l'**IE** est égal à 1.

3.6 Distribution du nombre de visites successives

Dans cette partie, nous allons regarder la distribution du nombre de visites dans un voisinage de la diagonale.

Tout d'abord nous rappelons que, lorsque la synchronisation est activée pour la première fois, elle ne peut pas durer, puisque presque chaque orbite est récurrente. Pourtant, pour presque tout point $\bar{x}_0$, l'orbite $\hat{T}^n(\bar{x}_0)$ visitera le voisinage de la diagonale infiniment des fois. Par conséquent, nous pouvons attendre d'une façon raisonnable, que la loi exponentielle $e^{-\tau}$ décrit le temps qui s'écoule entre des événements successifs dans un processus de Poisson.

Pour formaliser ce dernier, nous prenons un voisinage de la diagonale Δ noté par $S_\varsigma^{(n)}$ avec la précision $a_c = \varsigma$ et introduisons la quantité suivante :

$$N_\varsigma^{(n)}(t) = \sum_{l=1}^{\left\lfloor \frac{t}{\hat{\mu}(S_\varsigma^{(n)})} \right\rfloor} \mathbf{1}_{S_\varsigma^{(n)}}\Big(\hat{T}^l(\bar{x})\Big). \tag{3.34}$$

La quantité $N_\varsigma^{(n)}$, mesure le nombre de fois que le point $\bar{x}$ retourne dans $S_\varsigma^{(n)}$ dans le temps normalisé (la normalisation est par rapport à la mesure $\hat{\mu}$). Puis, considérons la distribution suivante

$$\mathcal{N}(n, \varsigma, t, k) := \hat{\mu}\{N_\varsigma^{(n)}(t) = k\}. \tag{3.35}$$

N'oublions pas que l'application $\hat{T}$ et la mesure $\hat{\mu}$ dépendent de n.

Rappelons que, si l'ensemble cible était une boule de rayon ς autour d'un point générique $\hat{z}$ ou un ensemble de cylindres dynamiques convergent vers ce point, alors sous l'hypothèse du mélange, lorsque le rayon converge vers zéro ou la longueur du cylindre est infini, nous pouvons prouver que la distribution $\mathcal{N}(n, \varsigma, t, k)$ converge à la distribution de Poisson $\frac{t^k e^{-t}}{k!}$, pour les détails voir (e.g, [64], [27]). Par contre, si nous prenons le point cible $\bar{z}$ comme un point périodique de période minimale q, alors nous obtenons la distribution de Poisson composée, c'est-à-dire

$$\mathcal{N}(n, \varsigma, t, k) = e^{t(1-p)} \sum_{j=0}^{k} p^{k-j}(1-p)^{j+1} \frac{t^j(1-p)^j}{j!} \binom{k-1}{j-1}, \tag{3.36}$$

où

$$p := \frac{1}{\left|\det(D_{\bar{z}}\hat{T}^q)\right|} \tag{3.37}$$

pour plus de détails, visites [71] et [51].

Remarque 3.6.1. Pour le moment, nous ne disposons pas de formule analogue quand une boule est remplacée par une bande sur la diagonale Δ. À notre

connaissance, le seul résultat connu est en dimension 2 pour le système découplé donné par le produit direct des deux applications dilatantes et lisses par morceaux du cercle (voir [26]). Il est cohérent avec nos résultats. Cependant, certaines considérations préliminaires (que nous allons voir dans la dernière partie du chapitre suivant). Indiquent que la distribution composée donnée par (3.36) est toujours valable lorsque nous remplaçons p (3.37) par $1-\theta_n$ où θ_n a été définie dans (3.27). Plus généralement avec l'**IE** donné par les formules (2.14) et (2.15), la quantité $q_{k,l}$ est donnée par la partie droite de (3.17) lorsque l'opérateur de transfert est indisponible. En particulier, nous retrouvons une distribution de Poisson pure lorsque la taille n du réseau tend vers l'infini.

Exemple 3.6.2. Nous considérons l'exemple 2 dans 3.3.4, $n = 100$ particules dans l'intervalle unitaire et prenons la précision $\varsigma = 0.01$. Avec cette valeur de n et en prenant le couplage γ suffisamment petit, nous pourrions considérer que le nombre de visites précédent $N_{\varsigma}^{(n)}$ suit une distribution de Poisson. Puisque la probabilité d'entrer dans le voisinage de la diagonale est d'ordre 100^{-100}, la probabilité d'observer exactement 5 événements de synchronisation pendant les itérations du réseau est maximale pour $m = 5100^{100}$ et est d'ordre 18%.

Si nous considérons l'exemple 1 dans 3.3.4, $n = 3$ particules et la même précision, la probabilité pour observer 5 synchronisations est maximale après 50000 itérations et il est encore d'ordre 18%.

Commentaires 3.6.3. Dans le cas de grande dimension, nous avons besoin d'un nombre très élevé d'itérations pour obtenir une synchronisation ou un nombre donné des synchronisations successives. Une raison est certainement due au fait que nous avons considéré les réseaux qui sont globalement couplés et que nous avons regardé la synchronisation globale. Ce serait intéressant d'explorer la **CML** où seuls les voisins les plus proches d'un site donné contribuent au terme du couplage (couplage diffusif), ainsi que la synchronisation des voisins les plus proches. Dans le chapitre suivant nous allons donner quelques résultats numériques à propos de ce dernier.

Chapitre 4

Extensions et calculs numériques

Dans ce chapitre, nous utiliserons des calculs numériques pour corroborer les résultats et les estimations que nous avons discutés précédemment. Ces calculs confirment l'existence d'une distribution de valeurs extrêmes pour un type différent de synchronisation que nous avons appelé locale. De plus, nous verrons que l'indice extrémal satisfait le comportement que nous attendions théoriquement. Ils valident les statistiques de Poisson composées attendues pour la distribution du nombre de visites successives et ils montrent que l'indice extrémal de la **CML** perturbée de façon aléatoire avec un bruit additif sera 1 pour toute dimension de réseau. En particulier, nous nous intéresserons surtout à la synchronisation, car pour la localisation nous avons beaucoup de résultats analytiques. Mais, il y a un aspect où la comparaison avec la localisation est particulièrement utile. Pour expliquer cela, nous devons d'abord introduire une nouvelle observable pour représenter le différent type de synchronisation.

4.1 Synchronisation locale

Rappelons que la synchronisation a été définie en demandant que toutes les composantes de l'état évolutif deviennent proches l'une de l'autre avec une précision donnée a_c. Nous avons nommé ce phénomène synchronisation globale. Mais, pour discuter un différent type de synchronisation nous pourrions demander que chaque composante se synchronise uniquement avec les proches voisins. Ceci est fait en introduisant l'observable :

$$\Theta(\bar{x}) := -\log\Big\{\max|x_i - x_j|\,, i \neq j, j = i \pm 1\Big\} \tag{4.1}$$

Nous pourrions généraliser à plus d'un voisin $j = i \pm 2, \pm 3$, mais nous nous limitons ici au cas ± 1. Remarquons que ce n'est pas évident d'avoir une description géométrique de l'orbite d'un point qui visité pour la première fois le voisinage de la diagonale (et donc de donner des résultats analytiques en termes d'**IE**), bien que l'interprétation physique soit la même. C'est-à-dire, nous

obtenons la probabilité que tous les composantes du réseau seront synchronisées avec les voisins proches pour la première fois après un certain nombre d'itérations et avec une précision donnée a_c. Nous appelons cette synchronisation : locale, pour la distinguer de la synchronisation globale décrite dans les chapitres précédents.

Il semble intuitif d'un point de vue physique, que pour m assez grand et pour une précision donnée a_c, la probabilité d'obtenir une synchronisation locale pour la première fois notée par $\mathbb{P}_1(\text{loc})$, est plus grande que la probabilité d'obtenir une synchronisation globale, qui dénoté par $\mathbb{P}_1(\text{glo})$,i.e

$$\mathbb{P}_1(\text{glo}) \leq \mathbb{P}_1(\text{loc}). \tag{4.2}$$

Cela sera confirmé par des simulations numériques comme nous le verrons dans ce qui suit.

D'autre part, une fois que la synchronisation globale se produit, tous les composantes du réseau seront alignés dans une bande étroite autour de chacun d'entre eux, ce qui est proche de la localisation. Pour cela, nous attendons que la probabilité d'obtenir la localisation soit plus grande que la probabilité d'obtenir une synchronisation globale. Ceci est également confirmé par une application facile de la théorie. Supposons que nous fixons le nombre d'itérations m et la précision a_c, ainsi que la dimension n. En utilisant les formules d'échelle dans les chapitres précédents et en supposant une loi exponentielle pour la distribution asymptotique du maximum, nous avons :

• pour la localisation, rappelons que la précision a_c est d'ordre $(\frac{\tau}{m})^{\frac{1}{n}}$ ce qui implique $\tau \sim ma_c^n$, donc

$$\mathbb{P}_1(\text{loc}) \sim e^{-ma_c^n}. \tag{4.3}$$

• pour la synchronisation globale, rappelons que la précision a_c est d'ordre $(\frac{\tau}{m})^{\frac{1}{n-1}}$ ce qui implique $\tau \sim ma_c^{n-1}$, donc

$$\mathbb{P}_1(\text{glo}) \sim e^{-ma_c^{n-1}}. \tag{4.4}$$

Finalement, par (4.3) et (4.4) nous obtenons facilement (4.2).

4.2 Blocs de la synchronisation

L'observable (4.1) pourrait être modifié, pour définir cela, nous construisons d'abord N blocs de L indices entiers successifs,

$$B_q := \{i_q,\, i_{q+1}, \ldots,\, i_{q+L}\}.$$

Nous prenons ces blocs disjoints et éventuellement dispersés le long du réseau.

Ensuite, nous définissons

$$\Upsilon(\bar{x}) := -\log\{\max|x_i - x_j|\,, i \neq j; (i,j) \in B_q; q = 1, \ldots, N\}. \tag{4.5}$$

Remarque 4.2.1. 1. La distribution du maximum de l'observable (4.5) nous donnera la probabilité que les particules dans les N blocs se synchronisent pour la première fois avec une précision donnée. D'autre part, nous n'avons pas besoin d'une synchronisation des particules en dehors de ces blocs.

2. Si une telle distribution limite existait, elle pourrait être compatible avec l'apparition de chimères dans des chaînes de particules couplées. C'est-à-dire, ce sont des modèles des ensembles synchronisés qui émergent comme une conséquence de l'auto-organisation d'ensemble du réseau (voir par exemple [72]). Si notre prévision était confirmée, une telle auto-organisation serait une autre propriété statistique des systèmes chaotiques à plusieurs degrés de liberté.

4.3 Simulations

Dans cette partie, nous allons analyser les résultats de la simulation numérique. L'expérience réalisée est la suivante : nous considérons l'application unidimensionnelle T dans (2.3) comme

$$T(x) = 3x \bmod 1.$$

Une fois que nous avons construit le **CML** $\hat{T}$, nous allons le perturber avec un bruit additif :

$$\hat{T}_{\underline{\omega}}(\bar{x})_i = \hat{T}(\bar{x})_i + \varepsilon\omega_i \bmod 1$$

où ε est l'intensité du bruit et $\underline{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ une variable aléatoire triée d'une distribution uniforme entre -0.5 et $+0.5$. La mesure stationnaire d'une telle application sera L^1 proche de celle pour $\gamma = 0$ qui est le produit direct des mesures de Lebesgue uniformes sur le cercle unité pour chaque composante. De plus, ils sont indépendantes de la valeur ε. Notez que nous considérons maintenant une application unidimensionnelle sur le cercle. Ceci n'est pas une restriction des nos considérations précédentes, de plus elle nous permet de définir correctement le bruit additif.

Numériquement, pour n dans l'intervalle d'entier $]3, 53[$, nous produisons des trajectoires de 10^4 itérations pour $\gamma < 2/3$ et 0.02 incréments. Nous considérons deux observables ψ et Θ qui sont donnés respectivement par (3.8) et (4.1) correspondants aux cas de la synchronisation globale, respectivement locale (dans ce qui suit, nous les appellerons les cas globaux et locaux). Aussi dans cette partie nous analysons le rôle du petit bruit $\varepsilon = 10^{-4}$ et du bruit modéré $\varepsilon = 10^{-2}$.

Tout d'abord, nous évaluons la convergence du maximum des observables ψ et Θ à la loi Gumbel par l'analyse de l'indice de queue ξ. Nous avons choisi ici de considérer l'approche complémentaire de la sélection de block maxima, c'est-à-dire les excès au-dessus d'un seuil ou 'The Peak Over Threshold". Les deux

approches sont équivalentes dans les systèmes chaotiques comme il est montré dans [66]. Les maxima de l'observable sont définis comme les dépassements sur le 0.98-quantile des distributions ψ et Θ. Si une bonne convergence vers la loi de Gumbel est atteinte, alors nous allons trouver que $\xi \simeq 0$. Nous avons utilisé l'estimateur du maximum de vraisemblance pour le calculer.

Dans les **FIG**s 4.1 et 4.2 nous évaluons les valeurs de ξ en fonction de γ et n. Les panneaux à gauche dans les deux figures montrent le cas global ψ tandis que le cas local Θ est présenté sur les panneaux à droite. De surcroît, nous jouons sur le bruit du haut en bas dans la **FIG** 4.2. En général, la convergence vers la loi de Gumbel est satisfaisante, bien qu'il y ait quelques différences entre les deux cas globaux et locaux. De plus, nous remarquons que la convergence dans le cas global est plus lente que l'autre cas ; cela est compréhensible, car l'événement de synchronisation globale est plus rare de l'évenement local. Aussi nous remarquons que la qualité de "fits" est plus fiable lorsque γ et n sont grands et l'ajout du bruit accéleret la convergence vers la loi Gumbel.

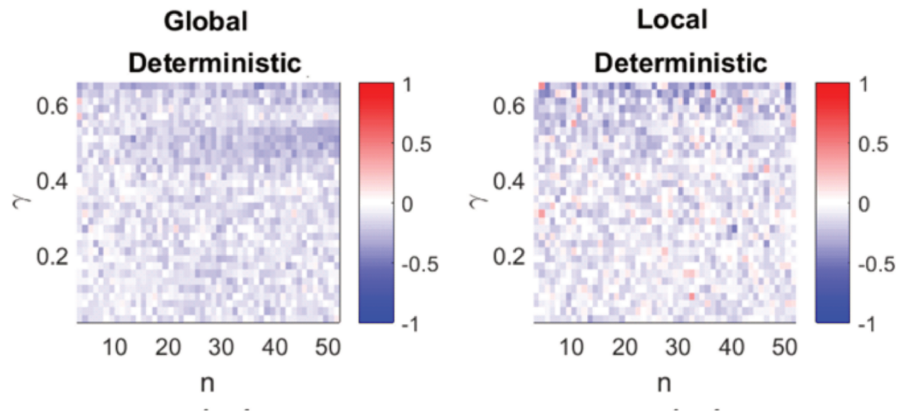


FIG. 4.1. description de paramètre ξ de la distribution généralisée de Pareto en fonction de n et de γ dans les cas déterministe global et local .

Nous étudions maintenant les implications de la synchronisation globale et locale sur l'indice extrémal θ. Nous avons utilisé la méthode proposée par Süveges : voir le livre [66] pour l'explication et pour récupérer les codes.

Pour un quantile q fixe l'estimateur de Süveges se lit comme suit :

$$\theta = \frac{\sum_i^{N_c}(1-q)S_i + N + N_c - \sqrt{\left(\sum_i^{N_c}(1-q)S_i + N + N_c\right)^2 - 8Nc\sum_i^{N_c}(1-q)S_i}}{2\sum_i^{N_c}(1-q)S_i},$$

avec N le nombre de récurrences au-dessus du quantile choisi, N_c le nombre d'observations qui forment un cluster d'au moins deux récurrences consécutives et S_i la longueur de chaque cluster i. Du point de vue numérique, cet estimateur

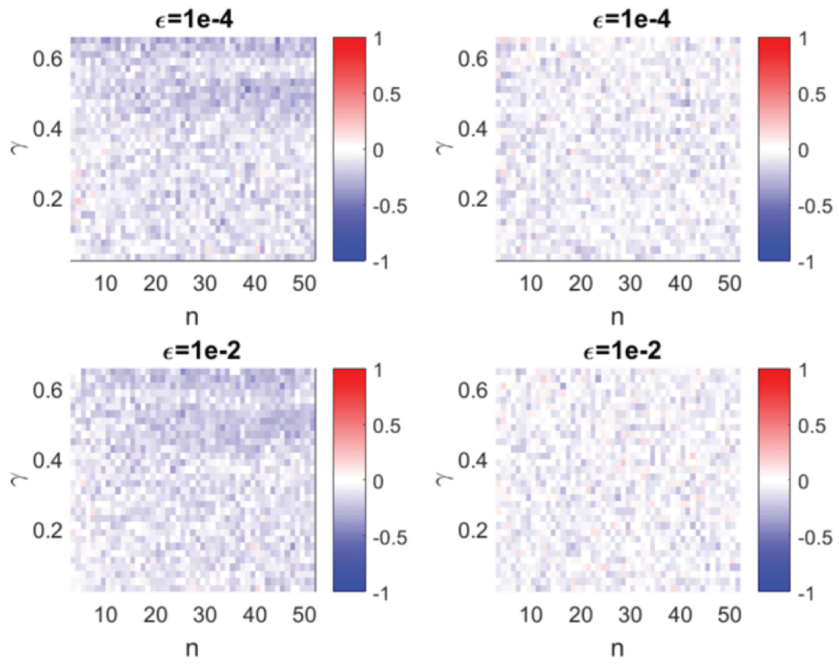


FIG. 4.2. description de paramètre ξ de la distribution généralisée de Pareto en fonction de n et de γ dans les cas global et local avec l'ajout d'un bruit additif.

est la valeur attendue de la distribution composée $\mathcal{N}(n, \varsigma, t, k)$ avec S_i étant l'équivalent empirique de la quantité $N_\varsigma^{(n)}(\bar{x})$.

Nous commençons par la vérification des résultats théoriques prévus dans la Remarque 3.4.4 pour l'application $T(x) = 3x \bmod 1$. Remarquons que nous pouvons estimer l'**IE** θ_n, en prenant la trace de la densité sur la diagonale raisonnablement d'ordre 1 dans (3.27) de telle sorte que en dimension 2

$$\theta_2 \sim 1 - \frac{1}{1-\gamma}\frac{1}{3}$$

et en dimension 3

$$\theta_3 \sim 1 - \frac{1}{(1-\gamma)^2}\frac{1}{9}.$$

Dans la **FIG** 4.3 nous illustrons la comparaison entre les courbes théoriques et les calculs numériques pour le cas $n = 2, 3$ et pour le paramétreur de couplage $\gamma < 2/3$. Dans cette figure, nous produisons 10 simulations de l'application définie par $T(x)$ iterée 10^4 fois et représentée par des lignes fines pour chaque cas et nous estimons l'**IE** en fonction de γ. Aussi, nous remarquons que les estimations numériques coïncident avec les courbes théoriques données par la ligne grossière (violette).

Maintenant, nous vérifions la formule asymptotique de l'indice extrémal pour grand n et toujours avec les mêmes hypothèses sur la trace de la densité c'est-à-

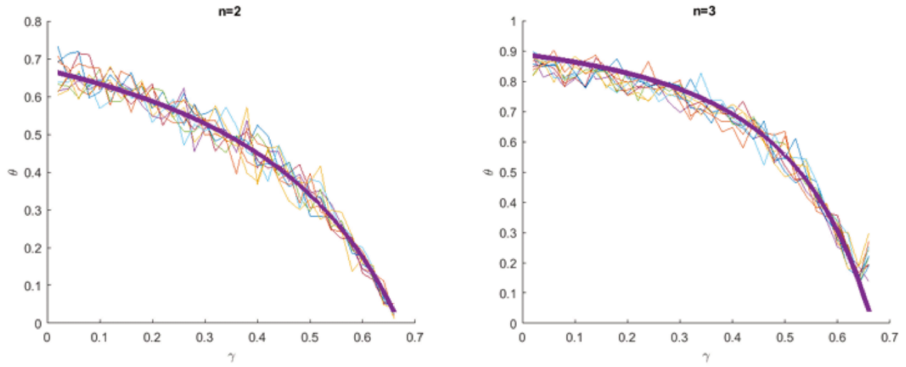


FIG. 4.3. L'indice extrémal θ de la distribution généralisée de Pareto en fonction de γ.

dire

$$\theta_n = 1 - \Big(\frac{\lambda}{1-\gamma}\Big)^{n-1}$$

où $\lambda = 1/3$. Pour chaque $3 < n < 53$ et $\gamma < 2/3$ nous effectons une simulation de l'application déterministe $T(x) = 3x \bmod 1$ et nous la comparons à l'indice extrémal obtenu avec la formule asymptotique précédente. Les résultats seront présentés dans la **FIG** 4.4. Dans cette dernière figure, nous avons vu un très bon accord entre les résultats asymptotiques et numériques. La plus grande divergence est obtenue pour $\gamma \simeq 2/3$ qui correspond à la valeur limite de l'application.

Ensuite, nous effectuons une analyse numérique de l'indice extrémal dans les cas non couverts par la théorie, c'est-à-dire pour l'observable Θ (cas local). Les résultats sont présentés à la Figure 4.5. Le panneau en haut à gauche est répété pour commodités et affiche les résultats de cas globaux (observable ψ). Cette figure montre que les cas globaux et locaux sont substantiellement différents. La synchronisation dans le cas global dépend à la fois des n et γ : en particulier, il est plus facile de synchroniser des systèmes avec n petit car la probabilité de trouver toutes les particules dans le même état diminue rapidement avec n. D'autre part, dans le cas local, l'indice extrémal θ_n est substantiellement indépendant de n. En fait, quel que soit n petit ou grand la particule ne voit que les plus proches voisins pour se synchroniser de sorte qu'elle est insensible à la taille du réseau. Alors, la seule dépendance restante est le paramètre de couplage γ. En particulier, pour tout n, nous voyons que la dépendance est compatible avec le cas $n = 2$ du couplage global, c'est-à-dire $\theta_2 \sim 1 - \frac{1}{1-\gamma}\frac{1}{3}$. De plus, l'ajout du bruit détruit les clusters (voir [65]).

Qualitativement, la structure de l'**IE** est assez robuste par rapport aux petites perturbations. Pour détruire complètement les clusters, nous avons besoin d'une grande intensité de bruit. Les résultats pour $\varepsilon = 10^{-4}$ démontrent également que nos résultats sont stochastiquement stables car on récupère la structure déterministe de l'indice extrémal pour les faibles valeurs du bruit.

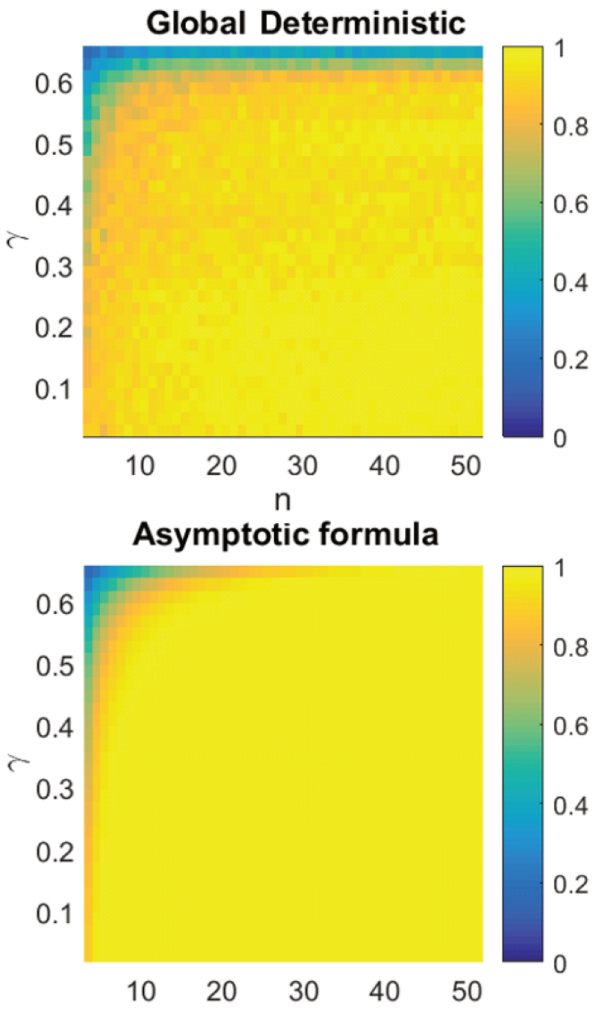


FIG. 4.4. L'indice extrémal θ en fonction de n et γ dans le cas déterministe global.

Bien que les estimations numériques de l'indice extrémal soient faites par le calcul des valeurs attendues de la distribution de Poisson composée (estimateur de Süveges), nous pouvons aussi vérifier que les temps d'attente $q_{k,\varsigma}$ "waiting times" définis dans (3.17)) entre des entrées consécutives au voisinage de la diagonale avec une précision ς, fournissent les mêmes informations. En fait, c'est ce qu'on obtient pour la récurrence dans les boules comme nous l'avons discuté dans la dernière partie du chapitre précédent (voir aussi [71] et [51]), cela devrait être également démontré dans notre cas.

Donc nous présentons dans les figures **FIG**s 4.6 et 4.7 quelques exemples des séries chronologiques avec leurs dépassements de ψ et Θ respectivement. Dans ces figures, nous augmentons le bruit additif de haut en bas. Nous voyons que les histogrammes des temps d'attente "waiting time" dans le cluster sont

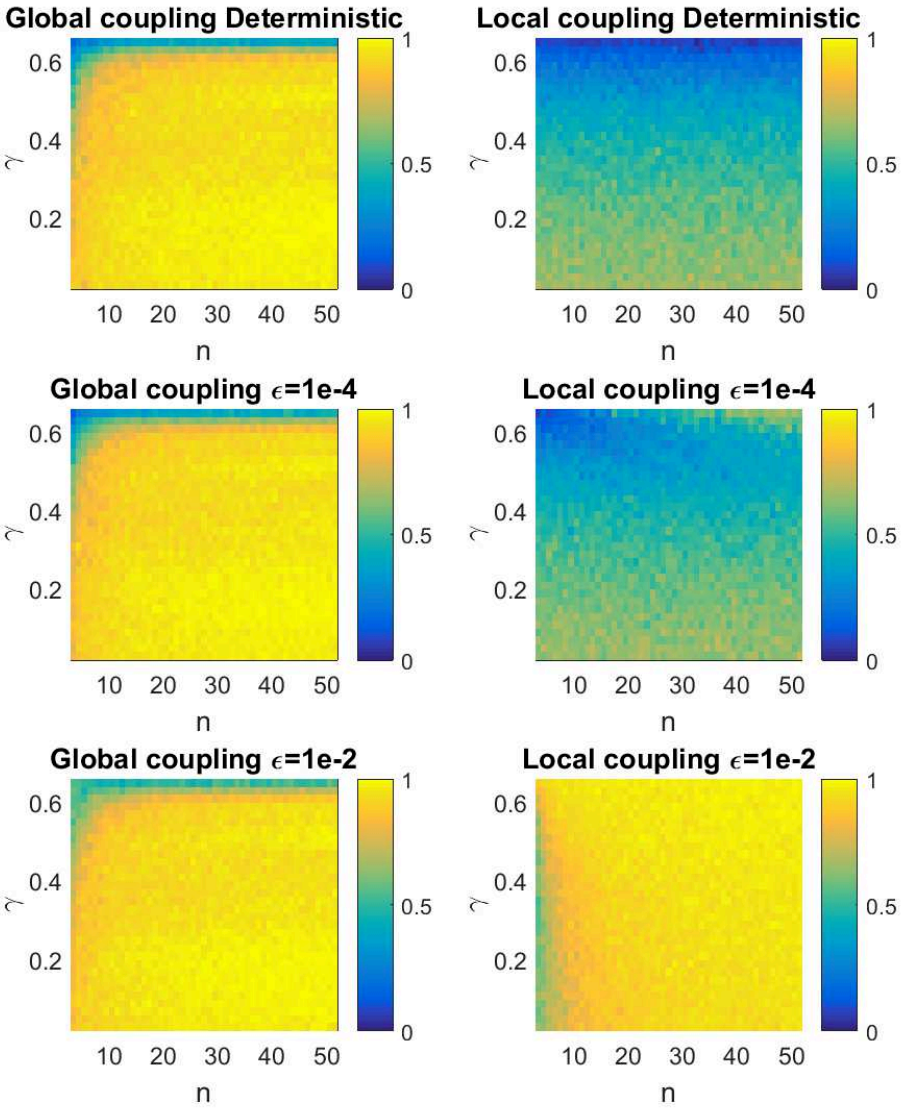


FIG. 4.5. L'indice extrémal θ en fonction de n et de γ dans les cas global et local avec l'ajout d'un bruit additif.

renormalisés jusqu'à 1 (fonction de densité de probabilité empirique dénotée par FDPE) et sont dans l'échelle y-log. Ce qui montre qu'aucun regroupement ne correspond à une loi exponentielle (suite de boîtes linéairement décroissantes en échelle logarithmique), tandis que le cas de regroupement est caractérisé par une FDPE plus élevée pour des temps d'attente plus courts. Comme nous pouvons voir dans les cas déterministes, plus l'FDPE est élevée pour des temps d'attente courts, plus θ est faible. Effectivement, la fraction de temps d'attente égale à

1 qui dépasse la loi exponentielle standard est exactement l'indice extrémal θ. Nous soulignons à nouveau que bien que nous ne puissions pas théoriquement démontrer cette identité, les preuves numériques suggèrent que nous pouvons utiliser directement $q_{k,\varsigma}$ comme spécifié dans (3.17), pour l'estimation de l'indice extrémal θ.

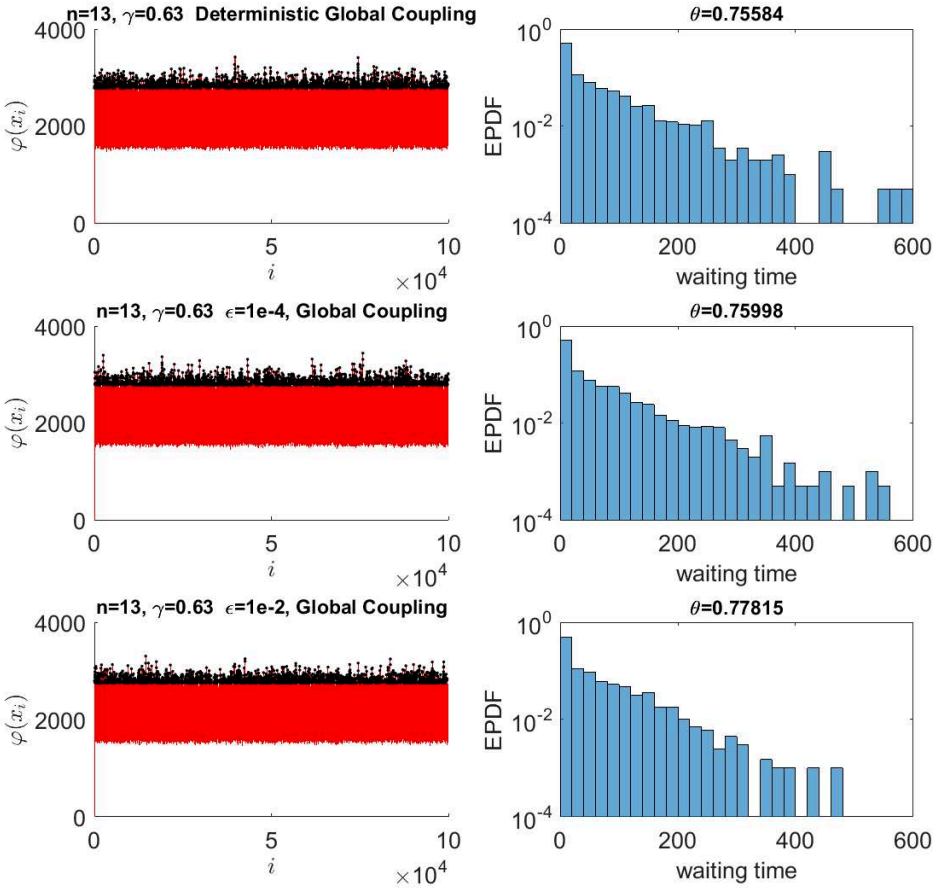


FIG. 4.6. Séries chronologiques + dépassements + distribution de probabilité empirique (FDPE) du temps d'attente dans les clusters pour le cas global.

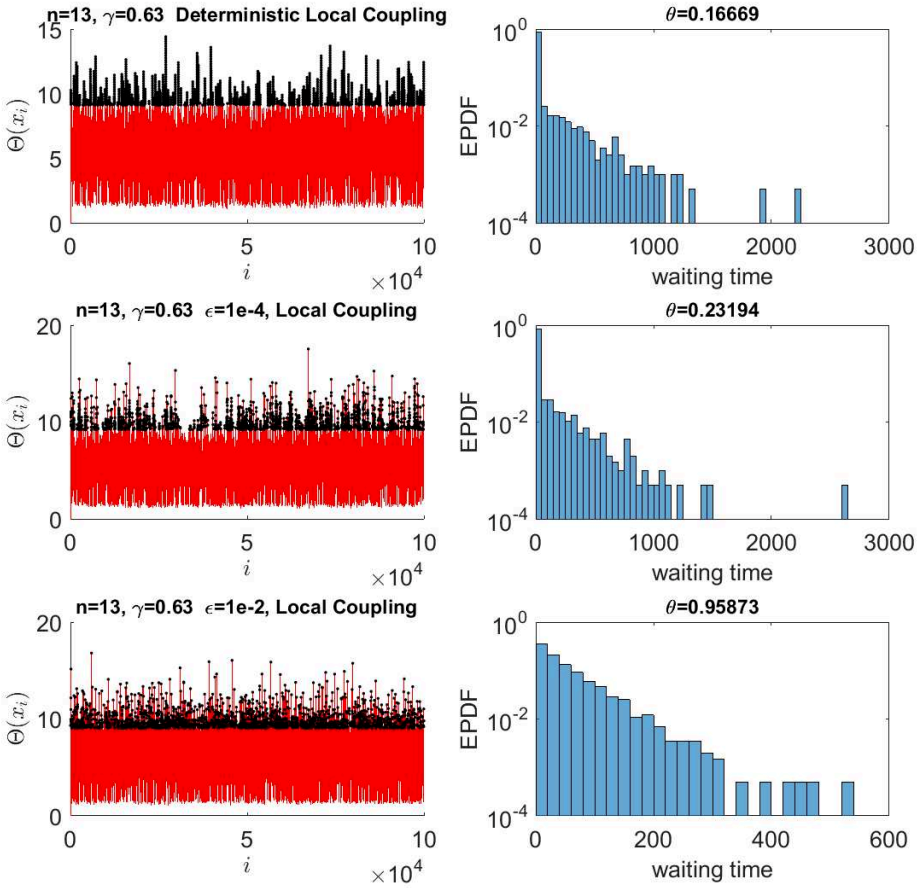


FIG. 4.7. Séries chronologiques + dépassements + distribution de probabilité empirique (FDPE) du temps d'attente dans les clusters pour le cas local.

Deuxième partie

Systèmes Dynamiques Topologiques

Chapitre 5

Préliminaries

Un système dynamique topologique est défini par un espace topologique X et une transformation $f : X \to X$. Nous nous concentrerons sur les cas où X est un espace métrique et f vérifie certaines conditions de compatibilité avec la topologie, par exemple f continue. Dans ce chapitre, nous introduisons quelques notions de base sur les systèmes dynamiques topologiques.

5.1 Systèmes Dynamiques

Définition 5.1.1. Soit X un espace métrique compact et f une application continue de X dans lui-même. Le couple (X, f) est dit système dynamique.

Définition 5.1.2. Soit (X, f) un système dynamique, pour tout $x \in X$, l'orbite de f au point x définie par

$$Orb_f(x) := \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}_+\}$$

où $f^n(x) = f \circ \cdots \circ f(x)$. Nous dison aussi f-orbit de x .

Définition 5.1.3. Un point $x \in X$ est dit périodique de période $n \in \mathbb{N}$ si $f^n(x) = x$ et $f^i(x) \neq x$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Si $n = 1$, le point x s'appelle un point fixe de f. L'orbite d'un point périodique est dit orbit périodique, Nous noterons par $P(f)$ (Resp. $Fix(f)$) l'ensemble de tous points périodiques (Resp. fixes).

Définition 5.1.4. Soit (X, f) un système dynamique et A un ensemble non vide de X.

1. A est dit f-invariant si $f(A) \subset A$.
2. A est dit fortement f-invariant si $f(A) = A$.

Dans la suite nous designons par :

1. $\mathring{A}$: l'intérieur de A dans X.
2. $\overline{A}$: la fermeture de A dans X.
3. $diam(A) = \sup_{(x,y)\in A\times A} d(x,y)$: le diamètre de A.

5.2 Ensembles ω-limites

Dans ce paragraphe nous introduisons la notion d'ensemble ω-limite qui permet de comprendre le comportement asympototique (à long terme) des systemes.

Définition 5.2.1. Soit (X, f) un système dynamique. Nous définissons l'ensemble ω-limite d'un point $x \in X$ par :

$$\begin{aligned}\omega_f(x) &:= \Big\{y \in X,\, \exists\, n_i \in \mathbb{N},\, n_i \to +\infty, \lim_{i\to\infty} d\Big(f^{n_i}(x), y\Big) = 0\Big\}\\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{f^k(x) : k \geq n\}}.\end{aligned}$$

Remarque 5.2.2. L'ensemble ω-limite d'un point périodique définit précisément la partie périodique de l'orbite.

Les ensembles ω-limites admettent les propriétés suivantes :

Proposition 5.2.3. *Soit (X, f) un système dynamique, pour tout $x \in X$, l'ensemble $\omega_f(x)$ est non vide, fermé et fortement f-invariant.*

Démonstration. Il est clair que pour tout $x \in X$, $\omega_f(x)$ est l'intersection d'un nombre dénombrable d'ensembles fermés non vides, donc il est fermé. Puisque ces ensembles sont imbriqués, par compacité, nous obtenons que $\omega_f(x)$ est non-vide. Donc, il reste à montrer qu'il est fortement f-invariant. En fait, par la continuité de f, nous avons

$$\begin{aligned}f\Big(\omega_f(x)\Big) &= f\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{f^k(x),\, k \geq n\}}\Big)\\ &\subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f\Big(\overline{\{f^k(x),\, k \geq n\}}\Big)\\ &\subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{f^{k+1}(x),\, k \geq n\}} \subset \omega_f(x).\end{aligned}$$

Réciproquement, soit $y \in \omega_f(x)$, donc par la définition, il existe une suite $n_i \to \infty$ telle que $\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = y$. N'oubliez pas que X est un espace métrique compact, alors la suite $\{f^{n_i-1}(x)\}_{i\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $\{f^{n_{i_l}-1}(x)\}_{l\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point $z \in \omega_f(x)$. Finalement, la continuité de l'application f permettra de conclure la résultat. $\square$

Proposition 5.2.4 ([82]). *Soit (X, f) un système dynamique. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble ω-limite vérifie*

1. $\omega_f(x) = \omega_f\Big(f^n(x)\Big)$.
2. $\omega_f(x) = \bigcup_{j=0}^{n-1} \omega_{f^n}\Big(f^j(x)\Big)$.
3. $f^j\Big(\omega_{f^n}(x)\Big) = \omega_{f^n}\Big(f^j(x)\Big)$, *pour tout* $0 \leq j \leq n-1$.

La propriété suivante a été observée pour la première fois par Šarkovs'kiĭ, qui a prouvé dans [73] que c'était une propriété inhérente des ensembles ω-limites

Définition 5.2.5 (**Incompressibilité faible**). Un sous-ensemble $A \subset X$ est dit avoir une incompressibilité faible si pour tout sous-ensemble ouvert non vide approprié U de A, vérifie

$$\overline{f(U)} \cap (A \backslash U) \neq \emptyset.$$

D'une manière équivalente, pour tout sous-ensemble fermé non vide $D \subsetneq A$, nous avons

$$D \cap \overline{f(A \backslash D)} \neq \emptyset.$$

Proposition 5.2.6. *Soit (X, f) un système dynamique. Pour tout $x \in X$, l'ensemble ω-limite $\omega_f(x)$ a une incompressibilité faible.*

Démonstration. Supposons que, pour certains ensembles fermés, $M \subset \omega_f(x)$, nous avons $M \cap \overline{f\Big(\omega_f(x) \backslash M\Big)} = \emptyset$. Rappelons que l'espace de phase X est compact alors, il existe deux ensembles U et V, tels que $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$, $M \subset U$ et $\overline{f\Big(\omega_f(x) \backslash M\Big)} \subset V$. Par conséquent, $\Big(\omega_f(x) \backslash M\Big) \subset f^{-1}(V) = W$, où W est un ensemble ouvert. La continuité de f implique que $f(\overline{W}) \cap \overline{U} = \emptyset$.

Comme $\omega_f(x) \subset (W \cup U)$, alors il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(x) \in W \cup U$, pour tout $n \geq p$. De plus, $f^n(x) \in W$ pour infinité $n \geq p$ et $f^m(x) \in U$, pour infinité $m \geq p$. Donc pour infinité $k \geq p$, $f^k(x) \in W$ et $f^{k+1}(x) \in U$. Ce qui implique qu'il existe une sous-suite $\{k_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, telle que $f^{k_i}(x) \in W$, $f^{k_i+1}(x) \in U$ et $\lim_{i \to \infty} f^{k_i}(x) = y \in \overline{W}$. Alors, par continuité nous trouvons $f(y) \in f(\overline{W}) \cap \overline{U}$, une contradiction. D'où $M \cap \overline{f\Big(\omega_f(x) \backslash M\Big)} \neq \emptyset$. □

Proposition 5.2.7. *Soit (X, f) un système dynamique, pour tout $x \in X$, l'ensemble ω-limite $\omega_f(x)$ est fini si et seulement s'il s'agit d'une orbite périodique.*

Démonstration. Le deuxième sens est évident. Réciproquement. Soit $y \in \omega_f(x)$ un point périodique de f, supposons que l'ensemble $L := \omega_f(x) \backslash Orb_f(y)$ est non vide et fermé. Par la Proposition 5.2.6, nous avons $L \cap \overline{f\Big(\omega_f(x) \backslash L\Big)} \neq \emptyset$. Or

$$\overline{f\Big(\omega_f(x) \backslash L\Big)} = \overline{f\Big(Orb_f(y)\Big)} = \overline{Orb_f(y)} = Orb_f(y).$$

D'où, $L \cap Orb_f(y) \neq \emptyset$, une contradiction. □

Proposition 5.2.8. *Soit (X, f) un système dynamique, si l'ensemble ω-limite $\omega_f(x)$ est infini alors tout point isolé dans $\omega_f(x)$ est non périodique.*

Démonstration. Supposons que pour tout $x \in X$, $\omega_f(x)$ est infini et admet un point périodique isolé z de période $n \geq 1$. Comme $z \in \omega_f(x) = \bigcup_{j=0}^{n-1} \omega_g\Big(f^j(x)\Big)$ avec $g = f^n$ alors, il existe $j \in [0, n-1]$ tel que $z \in \omega_g\Big(f^j(x)\Big)$. Puisque $\omega_f(x)$ est infini alors les deux premières assertions de la Proposition 5.2.4, montrent nous que $\omega_g\Big(f^j(x)\Big)$ est aussi infini. De plus, le point z est isolé dans $\omega_g\Big(f^j(x)\Big)$, alors $D := \omega_g\Big(f^j(x)\Big)\backslash\{z\}$ est fermé dans $\omega_g\Big(f^j(x)\Big)$. Par la Proposition 5.2.6, nous avons $\overline{g\Big(\omega_g\Big(f^j(x)\Big)\backslash D\Big)} \cap D \neq \emptyset$, une contradiction car $\overline{g\Big(\omega_g\Big(f^j(x)\Big)\backslash D\Big)} = z$. □

5.3 Ensembles minimaux

L'un des objectifs de la théorie des systèmes dynamiques est de caracteriser topologiques des ensembles minimaux.

Définition 5.3.1. Soit (X, f) un système dynamique. Un ensemble $M \subset X$ est dit minimal de f s'il est invariant, fermé, non vide et ne contient aucun sous-ensemble prope f-invariant et fermé.

Théorème 5.3.2 ([74])**.** *Soient (X, f) un système dynamique et M un sous-ensemble de X. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *M est minimal.*
2. *Pour tout $x \in M$, $\overline{Orb_f(x)} = M$.*
3. *Pour tout $x \in M$, $\omega_f(x) = M$.*

Remarque 5.3.3. Si X est minimal, alors nous disons que f est une application minimale, équivalent à dire que chaque orbit est dense dans X.

Théorème 5.3.4. *Soit (X, f) un système dynamique, l'intersection de deux ensembles minimaux distincts est vide.*

Démonstration. Soit M et N deux ensembles minimaux distincts. Supposons que $A = M \cap N \neq \emptyset$, alors A est fermé et f-invariant. Par contre, A est un sous-ensemble propre de M et N qui est fermé, non vide et f-invariant. Le fait que M et N sont deux minimaux nous donner une contradiction. □

Remarque 5.3.5. La Proposition 5.2.6 montre que les ensembles ω-limites finis sont précisément les orbites périodiques de l'application f. Donc, ils doivent également être des ensembles minimaux. Équivalent à dire que, les ensembles minimaux finis d'un système dynamique coïncident avec les ensembles ω-limites finis.

Proposition 5.3.6. *Soit (X, f) un système dynamique, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est minimale.*
2. *Pour tout $x \in X$, $\overline{Orb_f(x)} = X$.*
3. *Le seul sous-ensemble de X fermé et f-invariant est X ou $\emptyset$.*
4. *Pour tout ensemble ouvert non vide U de X, $\bigcup_{i=0}^{\infty} f^{-i}(U) = X$.*
5. *Pour tout ensemble ouvert non vide $U \subseteq X$, il existe un nombre fini d'entiers, $i_1, i_2, \ldots, i_k$, tel que $\bigcup_{l=1}^{k} f^{-i_l}(U) = X$.*

Définition 5.3.7. Un sous-ensemble fermé C de X est dit totalement discontinu si les seules composantes connexes de C sont des singletons.

Définition 5.3.8. Un sous-ensemble fermé C de X est dit ensemble Cantor s'il n'admet pas de points isolés et totalement discontinu.

Proposition 5.3.9 ([?])**.** *Chaque ensemble minimal infini pour une application continue sur un intervalle compact est un ensemble Cantor.*

Théorème 5.3.10 ([75])**.** *S'il existe un homéomerphisme $\varphi : C \to C$ où C un ensemble Cantor, alors φ est minimale.*

5.4 Différents Types Des Récurrences

Dans cette partie, nous introduisons d'autres concepts pour les systèmes dynamiques. Soit $f : X \to X$ une application continue d'un espace compact dans lui-même.

5.4.1 Points Presque périodiques

Définition 5.4.1. Un point $x \in X$ est dit presque périodique si pour tout voisinage U de x, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\{f^{n+i}(x),\ i = 0, 1....., N\right\} \cap U \neq \emptyset, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Nous noterons $AP(f)$ l'ensemble des tous points presque périodiques.

Toujours, nous avons les inclusions suivantes :

$$Fix(f) \subset P(f) \subset AP(f).$$

Théorème 5.4.2. *Soient (X, f) un système dynamique et $x \in X$. Alors*

1. *$x \in AP(f)$ si et seulement si $\overline{Orb_f(x)}$ est un ensemble minimal.*

2. $x \in AP(f)$ si et seulement si $x \in \omega_f(x)$ et $\omega_f(x)$ est un ensemble minimal.

Démonstration. Pour la première assertion, nous commençons par le sens indirect. Soit $M = \overline{Orb_f(x)}$ un ensemble minimal et soit U un voisinage ouvert de x dans X. Puisque l'application $f_{/M} : M \to M$ est minimale, alors par la Proposition 5.3.6, il existe un nombre fini d'entiers $m_1, m_2, \ldots, m_k$ tel que $\bigcup_{l=1}^{k} f^{-m_l}(U \cap M) = M$. Par conséquent, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $l_n \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $f^n(x) \in f^{-m_{l_n}}(U)$. Maintenant, lorsque nous notons $N = \max\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $i \in \{0, 1, \ldots, N\}$ tel que $f^{n+i}(x) \in U$, donc x est presque périodique.

Réciproquement, soit x un point presque périodique et $y \in \overline{Orb_f(x)}$. Supposons que $x \in X \backslash \overline{Orb_f(y)}$, soit U un voisinage de x dans X tel que $\overline{U} \cap \overline{Orb_f(y)} = \emptyset$. Puisque $x \in AP(f)$ alors, il existe $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Orb_f(x) \subset \bigcup_{l=1}^{k} f^{-m_l}(U)$. De plus, nous avons $y \in \overline{Orb_f(x)}$, alors $y \in \bigcup_{l=1}^{k} f^{-m_l}(\overline{U})$. Il résulte que $f^{m_l}(y) \in \overline{U}$ pour certains $l \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Le fait que $\overline{U} \cap \overline{Orb_f(y)} = \emptyset$, alors nous avons une contradiction.

La deuxième assertion est montrée dans [74].

□

Théorème 5.4.3. *Soit (X, f) un système dynamique. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$AP(f^n) = AP(f).$$

Démonstration. Nous avons toujours $AP(f^n) \subset AP(f)$. Donc, il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $AP(f) \subset AP(f^n)$. Soit $x \in AP(f)$, par le Théorème 5.4.2 $\overline{Orb_f(x)}$ est un ensemble minimal pour f aussi elle est f^n-invariante et contient un ensemble minimal K pour f^n. Maintenant, soit $y \in K$, alors

$$\overline{Orb_f(y)} \subset K \cup f(K) \cup f^2(K) \cup \cdots \cup f^{n-1}(K) \subset \overline{Orb_f(x)}.$$

Comme $\overline{Orb_f(x)} = \overline{Orb_f(y)}$, donc nous trouvons que

$$\overline{Orb_f(x)} = K \cup f(K) \cup f^2(K) \cup \cdots \cup f^{n-1}(K).$$

La Proposition 5.2.4 et le Théorème 5.3.2 montrent que l'ensemble $f^k(K)$ est minimal pour f^n, de plus

$$f^k(K) = f^k\Big(\omega_{f^n}(z)\Big) = \omega_{f^n}\Big(f^k(z)\Big), \quad \text{pour tout } z \in K.$$

Comme $x \in f^k(K)$ pour tout $0 \leq k \leq n-1$, alors $\overline{Orb_{f^n}(x)}$ est un ensemble minimal pour f^n. Ce qui donne le résultat. □

Définition 5.4.4. Deux systèmes dynamiques topologiques (X, f) et (Y, g) sont conjugués s'il existe un homéomorphisme $h : X \to Y$ tel que $h \circ f = g \circ h$. De plus si h est uniquement continue, nous disons alors semi-conjugués ou f est h-semi-conjugué à g

Proposition 5.4.5. *Soient (X, f) un système dynamique, Y un sous espace métrique de X et $g : Y \to Y$ une application continue telle que f est h-semi-conjugué à g. Alors,*

1. $h\Big(P(f)\Big) \subset P(g)$.
2. $h\Big(AP(f)\Big) = AP(g)$.

Démonstration. (1) est evident.
(2) La continité de l'application h implique $h\Big(AP(f)\Big) \subset AP(g)$. Soit $y \in AP(g)$, par le Théorème 5.4.2, $\omega_g(y)$ est minimal et $y \in \omega_g(y)$. Ainsi, nous avons $h^{-1}\Big(\omega_g(y)\Big)$ est un sous-ensemble f-invariant et contient un ensemble minimal K de f. Comme $h(K)$ est g-invariant, alors $h(K) = \omega_g(y)$ ce qui implique qu'il existe un point $x \in K$ presque périodique de f, tel que $h(x) = y$. D'où $y \in h\Big(AP(f)\Big)$. □

5.4.2 Récurrence

Définition 5.4.6. Un point $x \in X$ est dit récurrent pour f s'il satisfait l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1. Si $x \in \omega_f(x)$.
2. Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $d(f^n(x), x) < \varepsilon$.
3. Pour tout sous-ensemble $U \subset X$ contenant le point x, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n(x) \in U$.

Définition 5.4.7. Un point $x \in X$ est dit régulièrement récurrent, si pour tout voisinage U de x, il existe un certain $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{nN}(x) \in U$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans toute la suite nous noterons $R(f)$ et $RR(f)$ l'ensemble des points récurrents et régulièrement récurrents respectivement.

De plus, par les définitions, nous avons toujours les inclusions suivantes :

$$Fix(f) \subset P(f) \subset RR(f) \subset AP(f) \subset R(f).$$

Proposition 5.4.8. *Soit (X, f) un système dynamique. Si $x \in X$ est un point récurrent non périodique, alors l'ensemble ω-limite $\omega_f(x)$ est non dénombrable et n'admet pas de point isolé.*

Démonstration. Supposons que $x \in \omega_f(x)$ et non périodique.

Si $\omega_f(x)$ est fini, alors il s'agit d'une orbite périodique, donc x est périodique, absurde.

Si $\omega_f(x)$ est dénomrable, alors il admet un point isolé dénoté par z. Donc il existe une suite d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que la suite $\Big(f^{n_k}(x)\Big)_{k\geq 1}$ converge vers z. Puisque z est isolé dans $\omega_f(x)$ et $\Big(f^{n_k}(x)\Big)_{k\geq 1} \subset \omega_f(x)$, alors

$$z = f^n(x) = f^{n+k}(x) \text{ pour } n \geq 0 \text{ et } k > 0.$$

Ce qui implique que $f^n(x) \in P(f)$. Puisque $\omega_f(x) = \omega_f\Big(f^n(x)\Big)$, donc $\omega_f(x)$ est fini, absurde. Nous concluons que $\omega_f(x)$ est non dénombrable. □

Théorème 5.4.9. *Soit (X, f) un système dynamique. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

1. $R(f^n) = R(f)$.
2. $RR(f^n) = RR(f)$.

Démonstration. L'assertion (1) découle de la Proposition 5.2.4 et l'assertion (2) par la définition. □

Théorème 5.4.10. *Soient (X, f) un système dynamique, Y un sous espace métrique de X et $g : Y \to Y$ une application continue telle que f est h-semi-conjugué à g. Alors,*

$$h\Big(R(f)\Big) = R(g).$$

Une preuve complete est dans [76].

Définition 5.4.11. Soit (X, f) un système dynamique. Nous disons que $f : X \to X$ est :

1. Périodique par point si $P(f) = X$.
2. Récurrent par point si $R(f) = X$.
3. Relativement récurrent si $\overline{R(f)} = X$.

5.4.3 Ensembles non errants

Le comportement du voisinage d'un point joue un rôle très important dans les systèmes dynamiques qui peut donner un aperçu de la dynamique à long terme. Voir [77] par exemple.

Définition 5.4.12. Soit (X, f) un système dynamique. Un point $x \in X$ est dit errance pour f s'il existe un voisinage U de x tel que $f^{-n}(U) \cap U = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si non, le point x est dit non-errant.

Dans toute la suite, nous allons noter par $\Omega(f)$ l'ensemble des points non errants pour f qui est défini par :

$$\Omega(f) := \Big\{y : \text{ pour tout } U \text{ voisinage de } y, \text{ il existe } n \in \mathbb{N}, \text{ tel que } f^{-n}(U) \cap U \neq \emptyset\Big\}.$$

Remarque 5.4.13. (1) Si f est un endomorphisme d'un intervalle, alors nous disons que le point x est errance s'il existe une suite $x_k \to x$ et une suite $n_k \to \infty$ telle que $f^{n_k}(x_k) \to x$.
(2) Par les définitions, il est claire que tout point récurrent est non-errant. Donc

$$Fix(f) \subset P(f) \subset RR(f) \subset AP(f) \subset R(f) \subset \Omega(f).$$

Proposition 5.4.14. *Soit (X, f) un système dynamique. Alors $\Omega(f)$ est non-vide, fermé et f-invariant $\Big(i.e; f\Big(\Omega(f)\Big) \subset \Omega(f)\Big)$.*

Démonstration. Si $x \in X \backslash \Omega(f)$, alors il existe un voisinage U de x tel que $f^{-n}(U) \cap U = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $U \cap \Omega(f) = \emptyset$ et donc $X \backslash \Omega(f)$ est un ensemble ouvert. D'où $\Omega(f)$ est un ensemble fermé non vide. □

Proposition 5.4.15. *Soit (X, f) un système dynamique. Alors $\Omega(f) = X$ si et seulement si $\overline{R(f)} = X$*

5.4.4 Transitivité

Dans cette sous-section, nous regardons la propriété de transitivité et introduisons une propriété inhérente aux ensembles de ω-limite

Définition 5.4.16. Un point $x \in X$ est dit transitif pour f si son orbite $Orb_f(x)$ est dense dans X.

Définition 5.4.17. Une application $f : X \to X$ est dite topologiquement transitive si pour tous ensembles ouverts non vides U et V de X, il existe un entier $k > 0$ pour lequel $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Définition 5.4.18. Une application $f : X \to X$ est dite topologiquement exacte si pour tout ensemble ouvert non vide $U \subset X$ il existe un entier $k > 0$ tel que $f^k(U) = X$.

Proposition 5.4.19. *Soit (X, f) un système dynamique. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est topologiquement transitive.*
2. *Pour tout ensemble ouvert non vide $D \subset X$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(D)$ est dense dans X.*
3. *Pour chaque paire d'ensembles ouverts non vides $U, V \subset X$, il existe un entier $k \geq 0$ pour lequel $f^{-k}(U) \cap V \neq \emptyset$.*
4. *Pour tout ensemble ouvert non vide $D \subset X$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(D)$ est dense dans X.*
5. *Tout sous-ensemble fermé, invariant et propre de X a un intérieur vide.*

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) Pour tous U, V deux ensembles ouverts non vides de X, il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Alors, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^k(U)$ est dense dans X.

(2) $\Rightarrow$ (3) Soit D un ensemble ouvert non vide de X tel que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(D)$ est dense dans X. Donc pour tout ensemble ouvert dans X, il existe un entier $k > 0$ tel que $f^k(D) \cap V \neq \emptyset$. Ce qui implique qu'il existe $x \in D$ tel que $f^k(x) \in V$. Alors, $f^{-k}(V) \cap D \neq \emptyset$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Analogue à (1) $\Rightarrow$ (2).

(4) $\Rightarrow$ (5) Supposons que pour tout D un ensemble ouvert non vide de X nous avons $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(D)$ est dense dans X. Soit C un ensemble non vide fermé et f-invariant de X et supposons que $\mathring{C} \neq \emptyset$. Alors il existe un ensemble ouvert $U \subset C$ et un $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $f^{-k}(X \backslash C) \cap U \neq \emptyset$. Le fait que C est invariant, donc nous avons une contradiction. Alors, C est un ensemble d'un intérieur vide.

(5) $\Rightarrow$ (1) Supposons que tout sous-ensemble non vide, invariant et fermé de X est d'un intérieur vide. Soient U et V deux sous-ensembles ouverts non vides de X tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k(U) \cap V = \emptyset$. Alors, $\overline{\bigcup_{k\mathbb{N}} f^k(U)}$ est un sous-ensemble propre non vide, fermé et invariant de X avec intérieur non vide, contradiction. Donc f est topologiquement transitif. □

Le lemme suivant est une conclusion directe de la deuxième assertion de la proposition précédente.

Lemme 5.4.20. *Soit (X, f) un système dynamique. Si f est topologiquement transitive, alors f est surjective.*

Démonstration. Par le deuxième point de la Proposition 5.4.19, pour tout $x \in X$, il existe une suite de points $\{f^{n_k}(w_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(w_k) = x$. Alors, il existe une sous-suite $\{w_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $f^{n_{k_j}-1}(w_{k_j})$ converge vers certains $y \in X$. Soit $x_j = f^{n_{k_j}-1}(w_{k_j})$, alors

$$x = \lim_{j\to\infty} f(x_j) = f\Big(\lim_{j\to\infty} x_j\Big) = f(y) \in f(X).$$

□

Théorème 5.4.21. *Soit (X, f) un système dynamique. f est topologiquement transitive si et seulement si $X = \omega_f(x)$, pour tout $x \in X$.*

Démonstration. Comme X est un espace métrique compact, donc nous pouvons trouver une base dénombrable $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de sous-ensemble ouvert de X. Alors, par la transitivité de f, pour tout $i \in \mathbb{N}$, nous avons $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(U_i)$ est dense dans X. Ce qui implique que $G := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(U_i)$ est dense dans X. Donc, lorsque $x \in G$ nous allons montrer que $\omega_f(x) = X$. Le Lemme 5.4.20 a montré que pour tout

U un sous-ensemble ouvert non vide de X, alors $f^{-1}(U)$ est ouvert non vide et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{-k}(U)$ l'est aussi. Comme $x \in G$, alors $\overline{Orb_f(x)} = X$. Donc, il existe une suite d'entiers $n_k \geq 0$ telle que $f^{n_k}(x) \in f^{-k}(U)$. D'où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{n_k+k}(x) \in U$. Comme $\{n_k + k, k \in \mathbb{N}\}$ est infini, alors $\omega_f(x) = X$.

Réciproquement, supposons que $X = \omega_f(x)$, alors pour tous U et V deux sous-ensembles ouverts de X, il existe $n > m > 0$ tel que $f^m(x) \in U$ et $f^n(x) \in V$. Donc, par la continuité de f, nous avons $f^n(x) \in f^{n-m}(U)$ et $f^n(x) \in V$. Si nous prenons $k = n - m > 0$, alors f est topologiquement transitive. $\square$

5.5 Graphes, Dendrites et Dendrites locales :

Dans cette section, nous fixons tout d'abord les notions suivantes :

- Un continuum est un espace métrique non vide, compact et connexe.
- Un arc est tout espace homéomorphe à l'intervalle fermé $[0, 1]$. De plus, est un continuum.
- Un cercle est tout espace homéomorphe au cercle unité $\mathbb{S}^1$.

5.5.1 Graphes

Un graphe est un continuum qui peut être écrit comme l'union d'un nombre fini d'arcs pour que deux d'entre eux soient disjoints ou croisés seulement dans l'un ou l'autre de leurs points des extrêmes (c'est-à-dire est un polyèdre connexe compact unidimensionnel). Un graphe sans des cercles est dit arbre. (voir les figures 5.1 et 5.2)

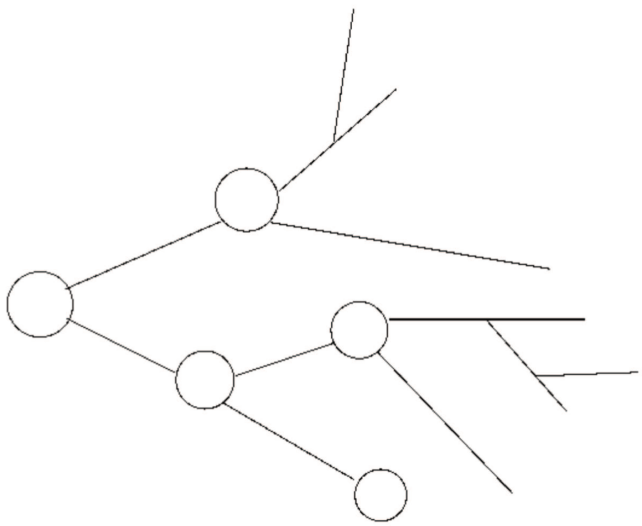


FIG. 5.1. Graphe.

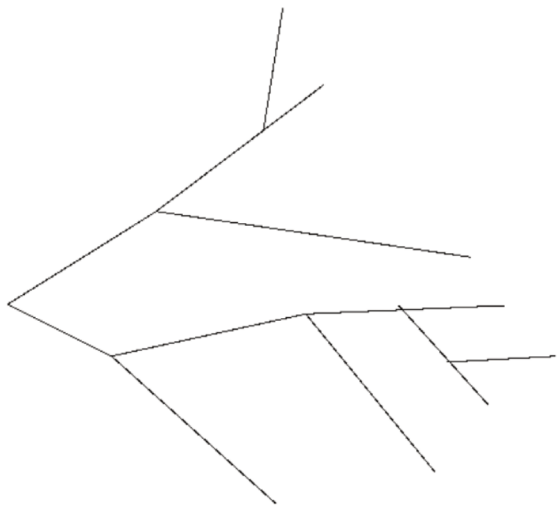


FIG. 5.2. Arbre.

Théorème 5.5.1 ([78]). *Soient G un graphe, f une application de G dans lui-même et $M \subseteq G$ un ensemble minimal de f. Alors, M est l'un des suivants :*

1. *Un ensemble fini.*
2. *Un ensemble Cantor.*
3. *Une union finie des cercles disjoints.*

5.5.2 Dendrites

Définition 5.5.2. Une dendrite est continuum localement connexe qui ne contient aucun cercle (voir la figure 5.3).

Notation 5.5.3. Soit X une dendrite et $x \in X$. Le nombre de composantes connexes de $X \backslash \{x\}$, désigné par $ord(x, X)$, est appelé l'ordre de x dans X.

1. Si $ord(x, X) = 1$, alors x est appelé un point d'extrémité de X.
2. Si $ord(x, X) = 2$, alors x est appelé un point de coupure de X.
3. Si $ord(x, X) \geq 3$, alors x est appelé un point de branchement de X.

Deux points distincts x et y dans une dendrite X sont réliés par l'unique arc que nous noterons $[x,\, y]$. Nous noterons aussi $[x,\, y) = [x,\, y] \backslash \{y\}, (x,\, y] = [x, y] \backslash \{x\}$ et $(x,\, y) = [x,\, y] \backslash \{x, y\}$.

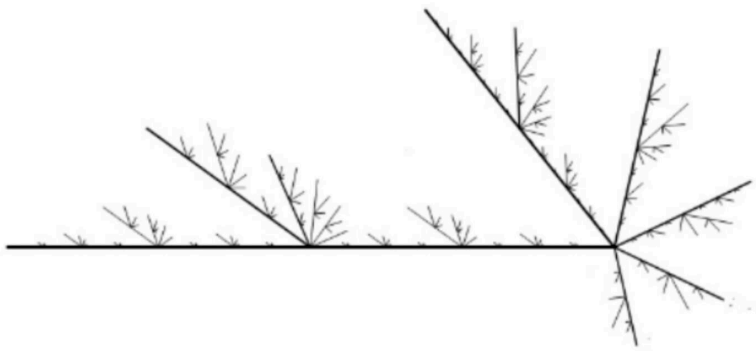


FIG. 5.3. Dendrite.

Dans toue la suite, nous l'indiquons par $ord(x)$ au lieu de $ord(x, X)$. Nous allons aussi noter par $E(X)$ l'ensemble des points des extrémités et par $B(X)$ l'ensemble des points de branchement de X.

Remarque 5.5.4. (1) L'union des deux dendrites ne peut pas être une dendrite. (2) L'arbre est une dendrite avec $E(X)$ est fini.

Proposition 5.5.5 ([79])**.** *Tout sous-ensemble connexe d'une dendrite est connexe par arc. En particulier, toute dendrite est connexe par arc.*

Lemme 5.5.6. *Soient X une dendrite, et Y un sous-ensemble non vide de X tel que $Y \cap E(X) = \emptyset$. Alors, $X \backslash Y$ est non connexe*

Démonstration. Par hypothèse, $E(X) \subset X \backslash Y$. Supposons que $X \backslash Y$ est connexe de X. Alors $X \backslash Y$ est connexe par arc et ainsi $[a, b] \subset X \backslash Y$ pour tout $a, b \in E(X)$. Comme $X = \bigcup_{a,b \in E(X)} [a, b]$, alors, $X \subset X \backslash Y$, contradiction. □

Théorème 5.5.7 ([79])**.** *Un continuum X est une dendrite si et seulement si l'intersection de tous deux sous-ensembles connexes de X est connexe.*

Corollaire 5.5.8. *Toute dendrite est uniquement connexe par arc : c'est-à-dire, tous deux points distincts x, y d'une dendrite X peuvent être joints par un unique arc dans X*

Démonstration. Soit X une dendrite et x, y deux points différents dans X. La Proposition 5.5.5 montre que nous pouvons relier les points x et y par un arc. Pour l'unicité, nous supposons qu'il existe deux arcs différents A et B dans X avec ses points d'extrémité x et y. Par le Théorème 5.5.7 nous avons $A \cap B$ est un connexe qui contient x et y. Comme $A \cap B \subset A$, donc $A \cap B$ est un arc contenant les extrémités de A. Alors, $A \cap B = A$. Similairement, nous trouvons que $A \cap B = B$. D'où $A = B$. □

Proposition 5.5.9 ([79])**.** *Tout sous continuum d'une dendrite est une dendrite.*

Démonstration. Soit Y un sous continuum non dégénéré d'une dendrite X. Par la définition d'une dendrite, il suffit de montrer que Y est localement connexe. Soient $x \in Y$ et U un ensemble ouvert dans Y contenant x défini par $U = V \cap Y$, où V est un ensemble ouvert dans X. Puisque X est localement connexe, alors il existe un voisinage connexe $V^{'}$ de x tel que $V^{'} \subset V$. D'après le Théorème 5.5.7, il existe un voisinage connexe $U^{'}$ de x dans Y tel que $U^{'} = V^{'} \cap Y \subset U$. D'où Y est localement connexe. □

Théorème 5.5.10 (**Dendrite universelle de Wasewski's** [79]). *Il existe une dendrite dénotée par D_w dans $\mathbb{R}^2$ qui contient une copie homéomorphe à n'importe quelle dendrite. En particulier, toute dendrite est dans $\mathbb{R}^2$.*

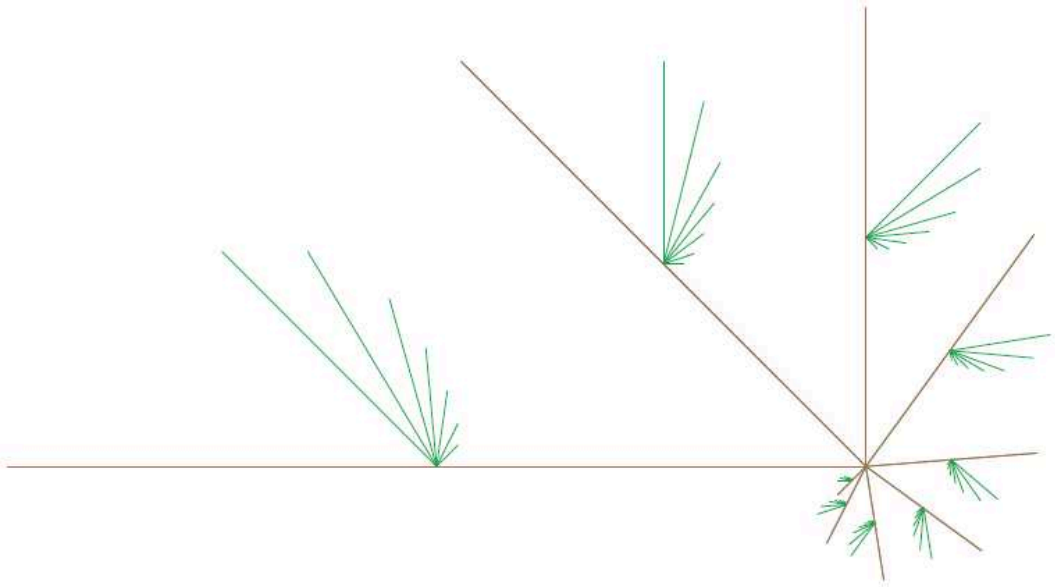


FIG. 5.4. Dendrite universelle de Wasewski's (D_w).

Théorème 5.5.11 ([79]). *Soit X une dendrite, alors $B(X)$ est dénembrable.*

Proposition 5.5.12 ([80]). *Si l'ensemble des points d'extrémité $E(X)$ d'une dendrite X est fermé, alors $B(X)$ est discret.*

Proposition 5.5.13 ([79]). *Soit X une dendrite non dégénérée (c'est-à-dire non réduite à un point). Alors X peut être écrit comme suit :*

$$X = \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \Big) \bigcup \Big(E(X) \Big)$$

où chaque A_n est un arc avec des extrémités p_n et q_n tel que $A_{j+1} \bigcap (\bigcup_{n=1}^{j} A_n) = \{p_{j+1}\}$ pour chaque $j = 1, 2, \ldots$ et $\lim_{n \to \infty} diam(A_n) = 0$.

Théorème 5.5.14 ([79]). *Toute application continue d'une dendrite dans elle-même admet un point fixe.*

Définition 5.5.15. Soit X une dendrite et Y une sous dendrite de X. Une application $r_Y : X \to Y$ est appelée une rétraction si la restriction à Y est égale à l'identité, c'est-à-dire pour tout $x \in Y$, $r_Y(y) = y$. De plus, dans ce cas, nous disons que Y est un retract de X.

Définition 5.5.16. Un espace métrique compact Y est dit retract absolu, si toute image homéomorphe de Y située dans un espace métrique séparable arbitraire X est un retract de X.

Théorème 5.5.17 ([81]). *Un espace métrique compact Y est un retract absolu si et seulement si, pour chaque sous-ensemble fermé A d'un espace métrique séparable X, chaque application de A dans Y a un prolongement continu sur X.*

Théorème 5.5.18 ([81]). *Chaque dendrite est un retract absolu.*

Proposition 5.5.19 ([79]). *Soient X et Y deux dendrites telles que $Y \subset X$. Alors, la rétraction $r_Y : X \to Y$ est continue et surjective.*

Corollaire 5.5.20. *Soit X une dendrite. Alors, pour tout $x \neq y \in X$, il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $K \subset (x,\, y)$ tel que pour tout $z_1 \in B(x, \varepsilon)$ et $z_2 \in B(y, \varepsilon)$ nous avons $K \subset [z_1,\, z_2]$.*

Proposition 5.5.21 ([79]). *Soient X une dendrite et Y un sous continuum de X. Alors, pour chaque point $x \in X \backslash Y$, il existe un unique point $r_Y(x) \in Y$ tel que $r_Y(x)$ est un point de n'importe quel arc dans X à partir de x à n'importe quel point de Y.*

Proposition 5.5.22. *Si $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de sous-ensembles connexes deux à deux disjoints dans une dendrite (X, d), alors*

$$\lim_{n\to\infty} diam(C_n) = 0.$$

Démonstration. Supposons qu'il existe une suite infinie de sous-ensembles connexes deux à deux disjoints $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, $diam(C_n) > \varepsilon$. Équivalent à dire que, pour tout $n \geq 1$, il existe deux points a_n et b_n dans C_n tel que $d(a_n,\, b_n) > \varepsilon$. Puisque X est compact nous pouvons supposer que a_n converge vers a et b_n converge vers b tel que $a \neq b$. Par le Corollaire 5.5.20, il existe $N > 0$ et un arc $K \subset (a, b)$ tel que pour tout $n \geq N$, nous avons $K \in [a_n,\, b_n]$. Comme $[a_n, b_n] \subset C_n$ pour tout $n \geq 1$, alors $K \subset C_n$ pour $n \geq N$, une contradiction. □

Lemme 5.5.23. *Soient X une dendrite et C_1, C_2 deux sous-ensembles connexes disjoints dans X. Alors, $\overline{C_1} \cap \overline{C_2}$ est au plus un point.*

Démonstration. Supposons que $\overline{C_1} \cap \overline{C_2}$ contient au moins deux points distincts x et y. D'après le Théorème 5.5.7, $\overline{C_1} \cap \overline{C_2}$ est un connexe par arc, donc nous pouvons obtenir que $[x, y] \subset \overline{C_1} \cap \overline{C_2}$. Alors, il existe quatre suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans C_1 et $(x_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}, (y_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ dans C_2 telles que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers x et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers y. Par le Corollaire 5.5.20, il existe un $\varepsilon > 0$ et un arc $K \subset [x, y]$ tel que pour tout $z_1 \in B(x, \varepsilon)$ et $z_2 \in B(y, \varepsilon)$, $K \subset [z_1, z_2]$. Maintenant, comme X est compact, donc il existe $n > 0$ tel que $x_n, x_n^{'} \in B(x, \varepsilon)$ et $y_n, y_n^{'} \in B(y, \varepsilon)$. Alors, nous avons $K \subset [x_n, y_n] \cap [x_n^{'}, y_n^{'}]$. Puisque C_1 et C_2 sont connexes par arc, donc $[x_n, y_n] \subset C_1$ et $[x_n^{'}, y_n^{'}] \subset C_2$, donc $K \subset C_1 \cap C_2$, absurde. □

Lemme 5.5.24. *Soient X une dendrite et C un sous-ensemble connexe non dégénéré de X. Alors,*

$$\overline{C} \backslash C \subset E(\overline{C}).$$

Proposition 5.5.25. *Soient X une dendrite et Y une sous dendrite de X. Si C est une composante connexe de $X \backslash Y$, alors $\overline{C} \cap Y$ est réduit à un point y, où $y \in E(\overline{C})$.*

Démonstration. Par le Lemme 5.5.23, il suffit de démontrer que $\overline{C} \cap Y$ est non vide. Supposons que $\overline{C} \cap Y = \emptyset$. Puisque C est un ensemble ouvert et par la connexité de l'espace X, nous avons $C \subsetneq \overline{C}$. Alors, il existe une composante connexe D de $X \backslash Y$ différent de C tel que $\overline{C} \cap D \neq \emptyset$. Donc $\overline{C} \cup D$ est un connexe et par suite connexe par arc, alors pour tout $a \in C$ et $b \in D$, $[a, b] \subset \overline{C} \cup D$. D'où $[a, b] \cap Y \neq \emptyset$. Ce qui implique que $(\overline{C} \cup D) \cap Y \neq \emptyset$, absurde.

Maintenant, d'après le Lemme 5.5.23, $\overline{C} \cap Y$ est réduit à un point dénoté par z. Puisque $z \in \overline{C} \backslash C$, alors par le Lemme 5.5.24, nous avons $z \in E(\overline{C})$. □

Proposition 5.5.26. *Soit Y une sous dendrite d'une dendrite X. Alors*

$$card^4\Big(E(Y)\Big) \leq card\Big(E(X)\Big).$$

De plus, si $E(X)$ est dénombrable, alors $E(Y)$ l'est aussi.

Démonstration. Il suffit de montrer que l'application suivante est injective

$$\begin{array}{rcl} f : E(Y) & \longrightarrow & E(X) \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in E(X), \\ y & \text{si} \quad x \notin E(X) \end{cases} \end{array}$$

où $y \in E(\overline{C_x}) \backslash \{x\}$ avec C_x une composante connexe de $X \backslash Y$ tel que $\overline{C_x} \cap Y = \{x\}$. □

4. Pour un sous-ensemble A de X, nous notons par la card(A) le nombre d'éléments de A.

5.5.3 Dendrite Locale

Définition 5.5.27. Un continuum X est appelé dendrite locale si pour tout point $x \in X$ il existe un voisinage U de x tel que $\overline{U} \cap X$ est une dendrite. D'un autre côté, une dendrite locale est un continuum localement connexe contenant un nombre fini de cercles.

Par définition, nous remarquons que chaque sous continuum d'une dendrite locale est une dendrite locale. Aussi chaque graphe et chaque dendrite est une dendrite locale.

locale.jpg

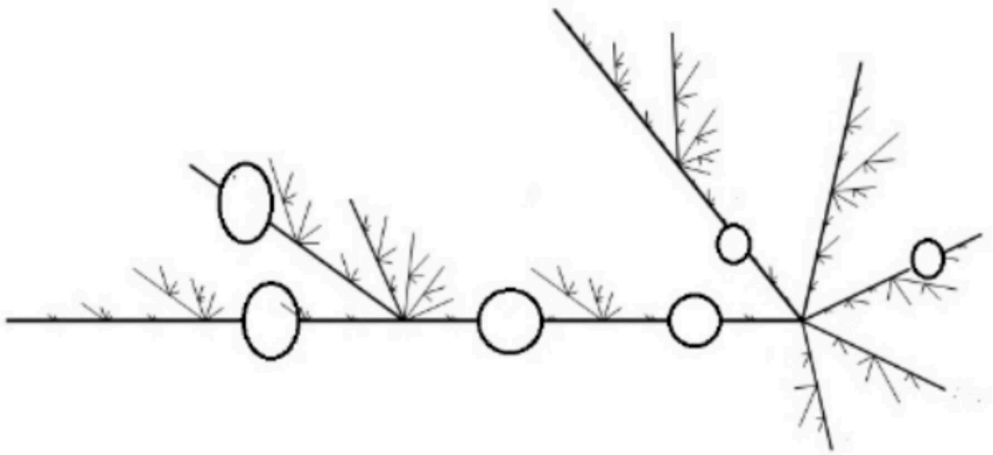


FIG. 5.5. Dendrite locale.

Notation 5.5.28. Soit X une dendrite locale et $x \in X$:

1. x est appelé un point d'extrémité de X s'il admet un voisinage U dans X tel que U est un arc et $U \backslash \{x\}$ est connexe.
2. x est appelé un point de branchement de X s'il existe une dendrite U qui est un voisinage fermé de x tel que x est un point de branchement de U.
3. x est appelé un point de coupure si $x \in X \backslash E(X)$.

Deux points distincts x et y dans X peuvent être joints par un nombre fini d'arcs que nous désignerons par $\gamma_i[x,\, y]$ pour tout $i \geq 1$. De plus, nous définissons

$$\begin{cases} \gamma_i(x,\, y] := \gamma_i[x, y] \backslash \{x\}, \\ \\ \gamma_i[x,\, y) := \gamma_i[x,\, y] \backslash \{y\}, \\ \\ \gamma_i(x,\, y) := \gamma_i[x,\, y] \backslash \{x,\, y\}. \end{cases}$$

Proposition 5.5.29 ([82]). *Soit (X, d) une dendrite locale. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, tel que pour tous $x, y \in X$ avec $d(x,\, y) < \eta$, il existe un arc K avec des extrémités x et y tel que $diam(K) < \varepsilon$.*

Proposition 5.5.30 ([83]). *Si $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de sous-ensembles connexes deux à deux disjoints dans une dendrite locale (X, d), alors*

$$\lim_{n\to\infty} diam(C_n) = 0.$$

Théorème 5.5.31 ([81]). *Si X est une dendrite locale, alors il existe un nombre ε >0 tel que tout sous continuum Y de diamètre inférieur à ε est une dendrite.*

Théorème 5.5.32. *Soit X un continuum localement connexe et soit ε la plus grande borne inférieure du diamètre des cercles contenus dans X. Alors, si $\varepsilon > 0$, X est une dendrite locale.*

Démonstration. Soient X un continuum localement connexe et U un sous continuum de X tel que si $x \in X$, U est un voisinage de x et $diam(U) < \varepsilon$. Alors X ne contient aucun cercle et donc X est une dendrite. □

Théorème 5.5.33. *Soit X une dendrite locale. Alors, il existe une suite de dendrites $(X_m)_{m\geq 1}$ telle que $X = \bigcup_{i=1}^{m} X_i$ et $X_i \cap X_j$ est fini pour tout $1 \leq i \neq j \leq m$.*

Démonstration. Soit $S_1, S_2, \ldots, S_n$ tous les cercles dans X et soit G un graphe de X défini par l'intersection de tout sous graphe de X contenant $\bigcup_{i=1}^{n} S_i$. Nous pouvons écrire $G := \bigcup_{i=1}^{N} A_i$, où chaque A_i est un arc et pour chaque $1 \leq i \neq j \leq N$, A_i et A_j sont disjoints ou recoupés dans un ou deux de leurs points des extrémités. Soit $(C_i)_{i\in D}$ une suite de composantes connexes de $X\backslash G$ où D est au plus dénombrable.

Maintenant, nous notons par :

$$D_1 = \left\{i \in D,\ \overline{C_i} \cap A_1 \neq \emptyset\right\}$$

et pour $2 \leq k \leq N$,

$$D_k = \left\{i \in D\backslash(D_2 \cup D_3 \cup \cdots \cup D_{k-1}),\ \overline{C_i} \cap A_k \neq \emptyset\right\}.$$

Il est facile de voire que, pour tout $1 \leq k \leq N$, $X_k := \bigcup_{i\in D_k} (\overline{C_i} \cup A_k)$ est une sous dendrite de X telle que $X = \bigcup_{k=1}^{N} X_k$ avec $X_i \cap X_j$ est fini, pour tout $1 \leq i \neq j \leq N$. □

Proposition 5.5.34. *L'ensemble des points de branchement $B(X)$ d'une dendrite locale X est au plus dénombrable.*

Proposition 5.5.35. *Soit X une dendrite locale. Si A et B deux sous continuums de X tel que $A \cap B$ soit infini, alors $A \cap B$ contient un arc de X.*

Démonstration. Soient A et B deux sous contiuums de X tel que $A \cap B$ est un sous-ensemble infini donc il est compact de X. Alors, il existe une suite infinie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \cap B$ qui converge vers un point $x \in A \cap B$. Soit U un voisinage de x dans X, tel que U est une dendrite. Le fait que A et B sont deux dendrites locales, alors il existe deux voisinages V, W pour le point x dans A respectivement B tels que V et W sont deux dendrites et $V \cup W \subset U$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie de $A \cap B$ et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $x_m \in V \cap W$ et $x \neq x_m$. Soit I et J deux arcs dans V respectivement W joignant x et x_m alors I et J sont deux arcs dans la dendrite U joignant x et x_m. Il en résulte que $I = J \subset A \cap B$. □

Proposition 5.5.36. *Soient X une dendrite locale, Y un sous continuum de X différent de tout cercle de X et Z une sous dendrite de Y. Si $Y\backslash Z$ est non connexe, alors $X\backslash Z$ l'est aussi.*

Démonstration. Par hypothèse, nous avons Y est une sous dendrite et $Y\backslash Z$ non connexe. Donc il existe deux points distincts a, $b \in Y\backslash Z$ et un arc I joignant a et b dans Y tel que $I \not\subset Y\backslash Z$. Nous prétendons que I est l'unique arc dans X joignant a et b. Supposons qu'il existe un arc $J \neq I$ dans X joignant a et b. Alors, l'union des arcs I et J contient nécessairement un cercle S. D'où $S \cap I \neq \emptyset$. Donc $S \cap Y \neq \emptyset$, contradiction. □

Proposition 5.5.37. *Soient X une dendrite locale et Y une sous dendrite locale de X contenant tous les cercles de X. Alors, tout arc dans X avec ses points des extrémités dans Y est inclu dans Y.*

Démonstration. Supposons que A un arc dans X avec $E(A) = \{x, y\} \subset Y$ tel que $A \not\subset Y$. Comme Y est une connexe par arc, alors il existe un arc B dans Y tel que $E(B) = \{x, y\}$. Puisque $A\backslash Y \neq \emptyset$, nous notons alors $A^{'}$ la fermeture de la composante connexe de $A\backslash Y$ avec $E(A^{'}) = \{a, b\}$ et $B^{'}$ un arc dans B avec $E(B^{'}) = \{a, b\}$. Remarquons que $A^{'}\backslash\{a, b\} \cap Y = \emptyset$ d'où $A^{'} \cup B^{'}$ est un cercle non inclu dans Y, une contradiction, le fait que Y contient tous les cercles. □

Proposition 5.5.38. *Soit X une dendrite locale et soient a, $b \in X$ tel que $a \neq b$. Soient V et W deux voisinages connexes disjoints des points a et b respectivement. Alors, pour tout point $c \in V$ et $d \in W$, et pour tout arc B joignant c et d, il existe un arc A joignant a et b tel que $A \cap B \neq \emptyset$.*

Démonstration. Par la définition d'une dendrite locale X, le nombre de cercles est fini. Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe des arcs finis $(A_i)_{1\leq i\leq p}$ avec $E(A_i) = \{a, b\}$. Supposons que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $A_i \cap B = \emptyset$. Soit L un arc en V joignant a et c et K un arc en W joignant d et b. Puisque, $K \cup L \cup B$ est connexe par arc

contenant a et b, alors il existe $i_0 \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $A_{i_0} \subset K \cup L \cup B$. Comme $A_{i_0} \cap B = \emptyset$, alors $A_{i_0} \subset K \cup L$, une contradiction, le fait que A_{i_0} est connexe et $K \cap L = \emptyset$. □

Proposition 5.5.39. *Soient X une dendrite locale et Y une sous dendrite locale de X distincte de X telle que tout arc de X joignant deux points distincts de Y est inclus dans Y. Alors pour toute composante connexe C de $X \backslash Y$, $\overline{C} \cap Y$ est réduit à un point.*

Démonstration. Supposons que $\overline{C} \cap Y$ contient au moins deux points distincts a et b. Donc il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} d(b_n, b) = 0$. Comme X est localement connexe, alors il existe deux voisinages connexes V et W des points a et b respectivement tel que $V \cap W = \emptyset$. D'où, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_N \in V$ et $b_N \in W$. Soit I un arc en C joignant a_N et b_N. Par la Proposition 5.5.38, il existe un arc J joignant a et b tel que $J \cap I \neq \emptyset$. Comme $J \subset Y$ et $I \subset C$, alors $C \cap Y \neq \emptyset$, une contradiction. □

Maintenant, soit $\Gamma(X)$ le plus petit graphe contenant tous les cercles de la dendrite locale X. Nous définissons $X \backslash \Gamma(X) := \bigsqcup\limits_{i\in\mathcal{A}} C_i$ où C_i sont les composantes connexes de $X \backslash \Gamma(X)$ et $\mathcal{A}$ est un ensemble au plus dénombrable. Comme $B(X)$ est au plus dénombrable, alors par la Propostion 5.5.39, pour tout $i \in \mathcal{A}, \overline{C_i} \cap \Gamma(X)$ est réduit à un point z_i. Soit $\mathcal{A}_k$ un sous-ensemble de $\mathcal{A}$ tel que, pour chaque $i \in \mathcal{A}_k, \overline{C_i} \cap \Gamma(X) = \{z_k\}$. Nous mettons $C^k = \bigsqcup\limits_{i\in\mathcal{A}_k} \overline{C_i}$.

Lemme 5.5.40. *Avec la même notation ci-dessus, $(C^k)_k$ sont des sous dendrites de X deux à deux disjoints.*

5.6 Récurrence dans les graphes, les dendrites et les dendrites locales

Dans cette partie, nous allons donner certaines propriétés pour différents types de récurrences d'une application de graphe G, dendrite et dendrite locale X dans lui-même.

5.6.1 Récurrent par point d'application graphe, dendrite et dendrite locale

- **Cas graphe**

Théorème 5.6.1 ([89]). *Soit f une application continue de graphe G dans lui-même. Alors f est récurrente par point si et seulement si l'une des affirmations suivantes est valable :*

1. *G est un cercle et f est un homéomorphisme topologiquement conjugué à une rotation irrationnelle du cercle unitaire $\mathbb{S}^1$.*
2. *f est un homéomorphisme périodique (c'est-à-dire, f^m = l'application d'identité, pour certains $m \in \mathbb{N}$).*

Théorème 5.6.2 ([90]). *Soit f une application continue de graphe G dans lui-même. Alors, f est relativement récurrente par point si et seulement si l'une des déclarations suivantes est valable :*

1. *G est un cercle et f est topologiquement conjuguée à une rotation irrationnelle du cercle unitaire $\mathbb{S}^1$.*
2. *$\overline{P(f)} = G$.*

• **Cas dendrite**

Théorème 5.6.3 ([91]). *Soit $f : X \to X$ une application de dendrite. Si $B(X)$ est discret, alors f est récurrente par point si et seulement si f est un homéomorphisme et chaque point de coupure est périodique.*

Remarquons que, par la Proposition 5.5.12, le Théorème 5.6.3 est reste valable si $E(X)$ est fermé.

Corollaire 5.6.4 ([91]). *Soit $f : X \to X$ une application de dendrite. Si f est récurrente par point et $B(X)$ est discret, alors chaque point d'extrémité de dendrite X est régulièrement récurrent.*

Théorème 5.6.5 ([91]). *Soit $f : X \to X$ une application de dendrite. Si $E(X)$ est dénombrable, alors f est récurrente par point si et seulement si f est un homéomorphisme périodique par point.*

Définition 5.6.6. Soient X, Y deux espaces topologiques. Une application $f : X \to Y$ est dite monotone si, pour tout sous-ensemble connexe C de Y, $f^{-1}(C)$ est connexe.

Théorème 5.6.7 ([87]). *Soit $f : X \to X$ une application monotone de dendrite. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *f est récurrente par point.*
2. *f est relativement récurrente.*
3. *Chaque point de coupure est un point périodique.*

• **Cas dendrite locale**

Théorème 5.6.8 ([82]). *Soit $f : X \to X$ une application monotone de dendrite locale. Supposons que $P(f) \neq \emptyset$. Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *f est récurrente par point.*
2. *f est relativement récurrente.*
3. *Chaque point de coupure est périodique.*

Remarque 5.6.9. Remarquons que par le troisième point du Théorème 5.6.8 nous avons $\overline{P(f)} = X$, le fait que tous points de coupure est dense.

Théorème 5.6.10 ([82])**.** *Soit $f : X \to X$ une application monotone de dendrite locale . Supposons que $P(f) = \emptyset$. Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *f est récurrente par point.*
2. *f est relativement récurrente.*
3. *X est un cercle et f est topologiquement conjuguée à une rotation irrationnelle du cercle unitaire $\mathbb{S}^1$.*

Corollaire 5.6.11. *Soit $f : X \to X$ une application monotone de dendrite locale. f est relativement récurrente si et seulement si exactement l'une des propriétés suivantes est vérifiée :*

1. *X est un cercle et f est topologiquement conjuguée à une rotation irrationnelle du cercle unitaire $\mathbb{S}^1$.*
2. *Chaque point de coupure est périodique.*

5.6.2 Récurrence et périodicité sur les graphes, dendrites et dendrites locales

Définition 5.6.12. Soient X un espace métrique compact et f une application continue de X dans lui-même. Nous disons que X admet la propriété périodique récurrente (Propriété-PR), si

$$\overline{P(f)} = \overline{R(f)}.$$

Proposition 5.6.13 ([92])**.** *Soit G un graphe. G admet la propriété-PR si et seulement s'il est un arbre.*

Théorème 5.6.14 ([93])**.** *Soit X une dendrite. Alors, X admet la propriété-PR si et seulement si l'ensemble de points des extrémités $E(X)$ dénombrables.*

Lemme 5.6.15. *Soient X une dendrite et Y un sous continuum de X. Si $r_Y : X \to Y$ est une rétraction et $f = g \circ r_Y : X \to Y$ avec $g : Y \to Y$ alors :*

1. *$f^n = g^n \circ r_Y$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$.*
2. *$P(f) = P(g)$.*
3. *$AP(f) = AP(g)$.*

4. $R(f) = R(g)$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la définition de la rétraction. □

Proposition 5.6.16. *La rétraction préserve la propriété-PR : si X un continuum ayant la propriété-PR contient un sous continuum Y qui est retract de X, alors Y ayant la propriété-PR.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Lemme précédent. □

Théorème 5.6.17 ([82])**.** *Soit X une dendrite locale. Alors, X admet la propriété-PR si et seulement s'il est une dendrite avec son ensemble de points des extrémités dénombrable.*

En général, les applications des dendrites locales ne satisfont pas l'égalité de la propriété-PR $\left(\overline{P(f)} = \overline{R(f)}\right)$. En effet, Soit $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ une rotation irrationnelle d'angle α et soit x un point de $\mathbb{S}^1$. Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille des arcs deux à deux disjoints dans le plan défini comme suit : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $I_n = [xe^{2ni\pi\alpha}, a_n]$ tel que $I_n \cap \mathbb{S}^1 = \{xe^{2ni\pi\alpha}\}$ et $\lim\limits_{|n|\to\infty} diam(I_n) = 0$. L'union $X = \mathbb{S}^1 \bigcup (\bigcup\limits_n I_n)$ définit une dendrite locale ayant un ensemble de points des extrémités dénombrables et différent d'un cercle. Soit $f : X \to X$ une application définie comme suit : $f_{/\mathbb{S}^1} = R_\alpha$, $f_{/I_n}$ est l'identité et $f(I_n) = I_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Il est facile de vérifier que l'application f est continue et que $R(f) = \mathbb{S}^1$ mais $P(f) = \emptyset$. Donc $\overline{R(f)} \neq \overline{P(f)}$.

Chapitre 6

$\overline{R(f)} = R(f) \cup \overline{P(f)}$ pour les applications des dendrites locales

Dans ce chapitre, nous allons montrer que dans toute dendrite locale avec l'ensemble des points des extrémités dénombrables, nous avons $\overline{R(f)} = R(f) \cup \overline{P(f)}$. Dans tout ce chapitre nous allons nommer cette propriété par la propriété-RPR.

Tout d'abord, nous rappelons que $\Gamma(X)$ est le plus petit graphe contenant tous les cercles de la dendrite locale X. Aussi C_i est la composante connexe de $X \backslash \Gamma(X)$. De plus, pour tout $i \in \mathcal{A}, \overline{C_i} \bigcap \Gamma(X)$ est réduit à un point z_i. Soit $\mathcal{A}_k$ un sous-ensemble de $\mathcal{A}$ tel que, pour chaque $i \in \mathcal{A}_k, \overline{C_i} \bigcap \Gamma(X) = \{z_k\}$. Nous mettons $C^k = \bigsqcup_{i \in \mathcal{A}_k} \overline{C_i}$.

Lemme 6.0.1. *Soit X une dendrite locale. Alors, pour tout $i \in \mathcal{A}$, la sous dendrite $\overline{C_i}$ est un retract de X.*

Démonstration. Pour tout $i \in \mathcal{A}$, nous prenons $r_{\overline{C_i}} : X \to \overline{C_i}$ telle que la restriction de $r_{\overline{C_i}}$ à $\overline{C_i}$ est l'identité et $r_{\overline{C_i}}(X \backslash \overline{C_i}) = \{z_i\}$. □

Lemme 6.0.2. *Soient X une dendrite locale, C une composante connexe de $X \backslash \Gamma(X)$ et B un arc de $\overline{C}$. L'application $r_B : X \to B$ définie par :*

$$r_B(p) = \text{le seul point } a \in B \text{ avec } [a, p] \cap B = \{a\}.$$

est une rétraction continue de X sur B.

Démonstration. Par [79, Lemme 10.25], il existe une rétraction $r' : \overline{C} \to B$ telle que pour tout $p \in \overline{C}$,

$$r'(p) = \text{le seul point } a \in B \text{ avec } [a, p] \cap B = \{a\}.$$

Ainsi, pour tout $p \in X$, $r_B(p) = r' \circ r_{\overline{C}}(p)$ est une rétraction continue de X sur B. □

Maintenant, Notez que tout arc B est totalement ordonné par un ordre totalement standard $<$. En conséquent, nous obtenons un pré-ordre dans X défini par : $p \prec q$ si et seulement si $r_B(p) < r_B(q)$.

Lemme 6.0.3. *Soient X une dendrite locale, C une composante connexe de $X \backslash \Gamma(X)$ et B un arc de $\overline{C}$. Soit $\varepsilon > 0$, si nous choisissons un point $p \in B$, alors il existe $\delta > 0$ satisfaisant*

$$r_B^{-1}\Big(B \cap (B(p,\, \delta) - \{p\}\Big) \subset B(p,\, \varepsilon).$$

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $p \in B$. Mettons $\{z\} = \overline{C} \cap \Gamma(X)$.

Si $p \neq r_B(z)$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que $r_B(z) \notin B(p, \alpha)$. Soit r la restriction de r_B à $\overline{C}$. Par [94, Lemme 2], il existe $\delta \in]0,\, \alpha[$ tel que $r^{-1}\Big(B \cap B(p,\, \alpha) - \{p\}\Big)$ est contenu dans $B(p,\, \varepsilon)$.

Si $p = r_B(z)$, alors

$$r_B^{-1}\Big(B \cap B(r_B(z),\, \alpha) - \{r_B(z)\}\Big) = r^{-1}\Big(B \cap B(r_B(z),\, \delta) - \{r_B(z)\}\Big) \subset B(r_B(z),\, \varepsilon)$$

□

Proposition 6.0.4. *Soient X une dendrite locale et C une composante connexe de $X \backslash \Gamma(X)$. Soient $\{z\} = \overline{C} \cap \Gamma(X)$ et B un arc de $\overline{C}$ tel que, $r_B(z) \in \partial B$. Soit f une application continue de X dans lui-même. Si $p_0 < q_0$ deux points de B tels que $p_0 < r_B\Big(f(p_0)\Big)$ et $r_B\Big(f(q_0)\Big) < q_0$, alors il existe un point fixe $w \in \overline{C}$ de f satisfaisant*

$$p_0 < r_B(w) < q_0.$$

Démonstration. Soit g la restriction de $r_{\overline{C}} \circ f$ à $\overline{C}$. Comme dans la démonstration du Lemme 6.0.2, nous mettons $r_B = r^{'} \circ r_{\overline{C}}$. Puisque

$$r^{'}\Big(g(p_0)\Big) = r^{'}\Big(r_{\overline{C}} \circ f(p_0)\Big) = r_B\Big(f(p_0)\Big) > p_0$$

et

$$r^{'}\Big(g(q_0)\Big) = r^{'}\Big(r_{\overline{C}} \circ f(q_0)\Big) = r_B\Big(f(q_0)\Big) < q_0.$$

Alors, par [94, Lemme 3], il existe un point fixe $w \in \overline{C}$ de g avec $p_0 < r^{'}(w) < q_0$. Anssi $p_0 < r_B(w) < q_0$.

Si $f(w) = w^{'} \in \overline{C}$, alors $w^{'} = r_{\overline{C}}(w^{'}) = r_{\overline{C}}(f(w)) = g(w) = w$, ce qui implique que $w = w^{'}$ et donc w est un point fixe de f.

Si $f(w) = w^{'} \notin \overline{C}$, alors $z = r_{\overline{C}}(w^{'}) = r_{\overline{C}}(f(w)) = g(w) = w$, ce qui implique que $w = z$. Mais $r_B(z) \in \partial B$, qui est contredit avec $p_0 < r_B(w) < q_0$. □

Dans la suit nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 6.0.5. Un sous-ensemble d'espace topologique est dit dense dans lui-même s'il ne contient pas de points isolés.

Proposition 6.0.6. *Soient X une dendrite locale et C une composante connexe de $X\backslash\Gamma(X)$. S'il existe un sous-ensemble non vide $S \subset \overline{C}$ dense dans-lui-même tel que pour tout arc $B \subset \overline{C}$, l'ensemble $B \cap S$ est discret, alors $E(X)$ est non dénombrable.*

Démonstration. Soit $\{z\} = \overline{C} \cap \Gamma(X)$. Par [94, Lemme 4], $E(\overline{C})$ est non dénombrable. Puisque $E(\overline{C})\backslash\{z\} \subset E(X)$. Alors, $E(X)$ est non dénombrable. □

Théorème 6.0.7. *Soient X une dendrite locale et f une application continue de X dans lui-même. S'il existe $p \in R(f)\backslash\overline{P(f)}$ tel que $Orb_f(p) \cap (X\backslash\Gamma(X)) \neq \emptyset$, alors $E(X)$ est non dénombrable.*

Démonstration. Soient C une composante connexe de $X\backslash\Gamma(X)$ tel que $Orb_f(p) \cap C \neq \emptyset$ et $\{z\} = \overline{C} \cap \Gamma(X)$. Nous introduisons l'ensemble $S = \{f^n(p) : n \in A\}$ où $A = \{n : f^n(p) \in C\}$. Selon [95], $R(f)$ est invariant, ce qui implique que $S \subset Orb_f(p) \subset R(f)$. Il est bien connu aussi que $P(f)$ est invariant et sa fermeture $\overline{P(f)}$ est également invariante. Soient $n \in A$ et $\varepsilon > 0$, puisque $S \subset R(f), S \cap \overline{P(f)} = \emptyset$ et $p \notin \overline{P(f)}$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f^m\Big(f^n(p)\Big) \in B\Big(f^n(p), \varepsilon\Big) \cap C$ (C est un ensemble ouvert). Par conséquent, $f^{m+n}(p) \in S$. Comme $S \cap \overline{P(f)} = \emptyset$, $f^n(p) \notin P(f)$. Alors, $f^{m+n}(p) \neq f^n(p)$. Donc, S est dense dans lui-même.

Maintenant, nous considérons un arc $B = [a, b] \subset \overline{C}$. Supposons qu'il existe un point non isolé $x = f^n(p)$ de $B \cap S$.

Cas1 : Nous supposons que, $r_B(z) \in \partial B$.

Le fait que $S \cap \overline{P(f)} = \emptyset$ implique qu'il existe $\varepsilon > 0$ avec $B(x, \varepsilon) \cap P(f) = \emptyset$. Par le Lemme 6.0.3, il existe $0 < \alpha < \inf\left\{\frac{d(x,a)}{3}, \frac{d(x,b)}{3}\right\}$ satisfaisant

$$r_B^{-1}\Big(B \cap B(x, \alpha)\backslash\{x\}\Big) \subset B(x, \varepsilon).$$

Puisque $f^n(p)$ est un point non isolé de $B \cap S$, nous pouvons choisir $m > n$ dans A vérifiant $f^m(p) \in \Big(B \cap B(x, \alpha)\backslash\{x\}\Big)$ et l'arc $[x, f^m(p)] \subset B(x, \alpha)$. Supposons, par exemple, que $x < f^m(p)$ et g une application de X dans lui-même telle que $g = f^{m-n}$. Alors $x < g(x)$.

En utilisant un argument inductif, nous allons montrer que

$$y < r_B(g^k(y)) \text{ pour chaque } y \in [x, g(x)] \text{ et pour tout } k \in \mathbb{N}. \tag{6.1}$$

Pour prouver l'initialisation de (6.1), nous argumentons par contradiction. Nous supposons qu'il existe $y \in [x, g(x)]$ satisfaisant $r_B(g(y)) < y$. Le fait que $x < g(x) = r_B(g(x))$ et $r_B(g(y)) < y$, par la Proposition 6.0.4, il existe un point fixe w de g qui satisfait $x < r_B(w) < y < g(x)$. D'où, nous trouvons que

$$w \in r_B^{-1}\Big(B \cap B(x, \alpha)\backslash\{x\}\Big) \subset B(x, \varepsilon).$$

Cependant, $w = f^{m-n}(w)$ implique que $w \in P(g)$. Cela conduit à une contradiction avec la sélection de ε et complète la premiére étape de (6.1).

Maintenant, supposons que $y < r_B(g^k(y))$, pour tout $y \in [x, g(x)]$, en particulier $g(x) < r_B(g^{k+1}(x))$. Puisque $x < g(x)$ et $x < r_B(g^{k+1}(x))$, donc s'il existe $y \in [x, g(x)]$ tel que $y > r_B(g^{k+1}(y))$ alors, par la Proposition 6.0.4, il existe un point fixe w de g^{k+1} qui satisfait $x < r_B(w) < y < g(x)$. Comme $g^{k+1}(w) = w$, donc $f^{(k+1)(m-n)}(w) = w$ et par conséquence, nous trouvons que $w \in P(f)$, contradiction. Ceci termine la preuve de (6.1).

En particulier, $g(x) < r_B(g^k(x))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par suite, $r_B^{-1}(\{u \in B : u < g(x)\})$ est un voisinage ouvert de x disjoint du sous-ensemble $\{g^k(x) : k \in \mathbb{N}\}$. Donc, $x \notin R(g) = R(f^{m-n})$. D'autre part [96, Théorème I], montre que pour tout $m > n$, $R(f) = R(f^{m-n})$. D'où, $x \notin R(f)$. Cela conduit à une contradiction : le fait que $S \subset R(f)$. Donc, pour tout arc B dans C, tel que, pour tout $r_B(z) \in \partial B$, l'ensemble $B \cap S$ est discret.

Cas2 : Nous supposons que, $r_B(z) = c \in \mathring{B}$. Puisque $B \cap S$ contient un point non isolé, alors $\mathring{B} \cap S$ est infini. Par conséquent, nous pouvons fixer $x = f^n(p)$ dans les arcs ouverts (a, c) ou (c, b) et nous procédons comme dans le **Cas 1**, ce qui conduit à une contradiction. Ainsi, pour tout arc $B \subset \overline{C}$, l'ensemble $B \cap S$ est discret.

Finalement, une application directe de la Proposition (6.0.6) nous implique que $E(X)$ est non dénombrable.

□

6.1 Propriété-RPR

Définition 6.1.1. Soit X espace métrique compact. Nous disons que X possède la propriété-RPR, si pour toute application continue $f : X \to X$, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\overline{R(f)} = R(f) \cup \overline{P(f)}.$$

Remarque 6.1.2. Tout espace métrique compact X qui possède la propriété-PR, posséde également la propriété-RPR, mais la réciproque est fausse. En effet, Mai et Shao [97] ont prouvé que le cercle unitaire possède la propriété-RPR mais il ne possède pas la propriété-PR.

Théorème 6.1.3 ([97])**.** *Soit $f : G \to G$, une application de graphe. Alors,*

$$\overline{R(f)} = R(f) \cup \overline{P(f)}.$$

Lemme 6.1.4. *La rétraction préserve la propriété-RPR : c'est-à-dire, lorsque Y désigne un sous continuum d'un continuum X qui est un retract de X. Si X possède la propriété-RPR, alors Y possède également la propriété-RPR.*

Démonstration. Soit g une application continue de Y dans lui-même, $r : X \to Y$ étant une rétraction et f la composition de r et g. Alors, $P(f) = P(g)$ et

$R(f) = R(g)$. Par conséquent, si le continuum X possède la propriété-RPR, donc $\overline{R(f)} = \overline{P(f)} \cup R(f)$ ce qui implique que $\overline{R(g)} = \overline{P(g)} \cup R(g)$. Alors, Y possède la propriété-RPR. □

6.1.1 La propriété-RPR pour les applications de dendrite locale

Dans cette partie, nous allons donner la condition nécessaire pour que la dendrite locale possède la propriété-RPR.

Théorème 6.1.5. *Soit X une dendrite locale. X possède la propriété-RPR si et seulement si $E(X)$ est dénombrable.*

Démonstration. Soit X une dendrite locale. Supposons que $E(X)$ est non dénombrable. Puisque $E(X) = \bigcup_{i\in\mathcal{A}} E(\overline{C_i})\backslash\{z_i\}$ et $\mathcal{A}$ est au plus dénombrable alors, il existe $i \in \mathcal{A}$ tel que $E(\overline{C_i})$ est non dénombrable. Par Théorème 5.6.14, $\overline{C_i}$ ne possède pas la propriété-PR. De plus, par [**?**, Théorème 8] $\overline{C_i}$ contient une copie topologique de dendrite de Gehman G_3, alors il existe une rétraction $r' : \overline{C_i} \to G_3$. Soit $g : G_3 \to G_3$, une application continue définie par pour tout $p \in G_3\backslash E(G_3)$, $g(p) = p$, $R(g) = E(G_3) \cup \{p\}$ et $P(g) = \{p\}$. Si $f = g \circ r'$, alors $R(f) = R(g)$ et $P(f) = P(g)$. D'où, $\overline{R(f)} = E(G_3) \cup \{p\}$ et puisque $R(f) \neq E(G_3)$, alors $\overline{C_i}$ ne possède pas la propriété-RPR. D'autre part, $\overline{C_i}$ est un retract de X : en effet, $r : X \to \overline{C_i}$ telle que

$$\begin{cases} r(x) = x & \text{si } x \in \overline{C_i}, \\ r(x) = z_i & \text{si non.} \end{cases}$$

Il est facile de voir que r est une rétraction. Donc par le Lemme 6.1.4, X ne possède pas la propriété-RPR, ce qui conduit à une contradiction.

Inversement, nous supposons que $E(X)$ est dénombrable. Soit f une application continue de X dans lui-même. Il est clair que nous pouvons obtenir $\overline{R(f)} \supset \overline{P(f)} \cup R(f)$. Soit w un point de $\overline{R(f)}\backslash\overline{P(f)}$ et U un voisinage connexe de w dans X avec $U \cap \overline{P(f)} = \emptyset$. Soit (w_n) une suite dans $R(f) \cap U$ qui converge vers w. Ainsi, $w_n \in R(f)\backslash\overline{P(f)}$ pour chaque n. Puisque $E(X)$ est dénombrable alors, par le Théorème 6.0.7, pour chaque n, $Orb_f(w_n) \subset \Gamma(X)$. Par conséquent, $w \in \Gamma(X)$ et donc $Orb_f(w) \subset \Gamma(X)$.

Maintenant, nous construisons l'ensemble $F = \overline{\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} Orb_f(w_n)}$ qui est un sous-ensemble fermé invariant de $\Gamma(X)$ contenant w. Par [78, Lemme 4], chaque graphe est un retract absolu, donc il existe une application continue $g : \Gamma(X) \to \Gamma(X)$ telle que g est une prolongement de $f : F \to \Gamma(X)$. Il est facile de voir que $R(f) \subset R(g)$ et $P(f) \subset P(g)$. Puisque $w \in \overline{R(f)}$, alors $w \in \overline{R(g)}$ et puisque $w \notin P(f)$, alors $w \notin P(g)$. Nous allons montrer maintenant que $w \notin \overline{P(g)}$. Pour

ce faire, nous rappelons la construction de l'application g donnée dans la preuve de [78, Lemme 4]. Soit h une fonction défine par :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } \quad x \in F, \\ \\ x \quad \text{ si } \quad x \in BE(\Gamma(X))\backslash F \end{cases}$$

où $BE(\Gamma(X))$ est l'ensemble des points de branchement et d'extrémité de $\Gamma(X)$. Il est facile de voir que h est continue. L'ensemble $\Gamma(X)\backslash F \cup BE(\Gamma(X))$ est une union dénombrable des arcs ouverts $(I_n)_n$ dans $\Gamma(X)$ avec le bord ∂I_n appartient à $F \cup BE(\Gamma(X))$. Dans notre cadre, ∂I_n correspond aux extrémités de $\overline{I_n}$. Maintenant, nous sommes capable de définir l'application $g : \Gamma(X) \to \Gamma(X)$ comme la suivante. Si $x \in F \cup BE(\Gamma(X))$, nous mettons $g(x) = h(x)$. Si $x \in A$ avec A un arc ouvert de $\Gamma(x)$ où son points d'extrémité $a, b \in F \cup BE(\Gamma(X))$. Considérons tous les arcs de X dont les extrémités sont $g(a), g(b)$. Il y a seulement un nombre fini de ces arcs. Soit B l'un des ces arcs avec un diamètre minimal. Notons $r : A \to B$ un homéomorphisme qui envoie a à $g(a)$ et b à $g(b)$. Finalement, nous mettons $g(x) = r(x)$ sur A.

Si $w \in \overline{P(g)}$, puisque $w \in \Gamma(X)\backslash F \cup BE(\Gamma(X))$, alors l'une des deux composantes connexes de $\Gamma(X)\backslash F \cup BE(\Gamma(X))$, disons A, contient un point p de $P(g)$ et a w comme extrémité, l'autre point d'extrémité dénoté par $w^{'} \in F \cup BE(\Gamma(X))$. Par conséquent, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $g^n(p) = p$. D'autre part, puisque $F \cup BE(\Gamma(X))$ est g-invariant, alors $g^n(A)$ est une composante connexe de $\Gamma(X)\backslash F \cup BE(\Gamma(X))$ contenant p. De plus, puisque $g^n(A) \subset A$ et $A \cap F \cup BE(\Gamma(X) = \emptyset$, donc $g^n(A) = A$ et $g^n(\overline{A}) = \overline{A}$ (par continuité de g). Alors, nous pouvons trouver que $g^n(\{w, w^{'}\}) \subset \overline{A} \cap (F \cup BE(\Gamma(X))) = \{w, w^{'}\}$ et donc $g^n(\{w, w^{'}\}) \subset \{w, w^{'}\}$.

Si $g^n(\{w, w^{'}\}) = \{w\}$, alors $g^n(w) = w$, ce qui conduit à une contradiction le fait que $w \notin P(g)$. Nous supposons maintenant que $g^n(\{w, w^{'}\}) = \{w^{'}\}$. Soit (v_p) une suite de A qui converge vers w. Comme $g^n(A) = A$, il existe alors une suite (u_p) de A telle que, pour tout $p, g^n(u_p) = v_p$. Rappelons que $\overline{A}$ est un compact, alors (u_p) admet au moins un point accumulation $u \in \overline{A}$. La continuité de g montre que $g^n(u) = w$. Comme $F \cup BE(\Gamma(X))$ et $\Gamma(X)\backslash F \cup BE(\Gamma(X))$ sont g-invariants, $u \in (F \cup BE(\Gamma(X))) \cap \overline{A}$ qui implique que $u \in \{w, w^{'}\}$. Le fait que $g^n(\{w, w^{'}\}) = \{w^{'}\}$ implique que $g^n(u) = w^{'}$, ce qui conduit à une contradiction le fait que $w \neq w^{'}$. Par conséquent, $g^n(\{w, w^{'}\}) = \{w, w^{'}\}$. Ainsi, $g^n(w) = w$ et $g^n(w^{'}) = w^{'}$ ou $g^n(w) = w^{'}$ et $g^n(w^{'}) = w$ ce qui implique que $g^{2n}(w) = g^n(g^n(w)) = g^n(w^{'}) = w$, ce qui contredit le fait que $w \notin P(g)$. Donc $w \notin \overline{P(g)}$, ce qui implique que $w \in \overline{R(g)}\backslash\overline{P(g)}$. Par [97, Théorème 2.1], nous avons $w \in R(g)$ et puisque $Orb_f(w) = Orb_g(w)$ alors $w \in R(f)$. Finalement, $\overline{R(f)} = \overline{P(f)} \cup R(f)$.

□

Corollaire 6.1.6. *Soit f une application continue de dendrite locale. Si $P(f)$ est fermé, alors $R(f)$ est aussi.*

La réciproque du Corollaire 6.1.6 n'est pas vrai (voir [81] pour les applications des graphes)

Références

[1] Yuri Kifer. *Ergodic theory of random transformations*, volume 10. Springer Science & Business Media, 2012.

[2] Kifer and Pei-Dong Liu. Random dynamics. *Handbook of dynamical systems*, 1 :379–499, 2006.

[3] Kunihiko Kaneko. Period-doubling of kink-antikink patterns, quasiperiodicity in antiferro-like structures and spatial intermittency in coupled logistic lattice : Towards a prelude of a field theory of chaos. *Progress of Theoretical Physics*, 72(3) :480–486, 1984.

[4] Irene Waller and Raymond Kapral. Spatial and temporal structure in systems of coupled nonlinear oscillators. *Physical Review A*, 30(4) :2047, 1984.

[5] James P Crutchfield. Space-time dynamics in video feedback. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 10(1-2) :229–245, 1984.

[6] SP Kuznetsov and AS Pikovskii. Universality of period-doubling bifurcations in one-dimensional dissipative media. *Radiofizika*, 28 :308–319, 1985.

[7] J.-R. Chazottes and B. Fernandez. *The CML2004 Project*, pages 1–8. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2005.

[8] J. P. Crutchfield and K. Kaneko. *Phenomenology of Spatio-Temporal Chaos*, pages 272–353. World Scientific Publishing Co, 1987.

[9] Kunihiko Kaneko, editor. *Theory and applications of coupled map lattices.* Chichester : John Wiley & Sons, 1993.

[10] Ziggelaar SJ August. Les premières démonstrations du tautochronisme de la cycloïde, et une conséquence pour la théorie de la vibration harmonique. etudes sur ignace gaston pardies, ii. *Centaurus*, 12(1) :21–37, 1968.

[11] Alexey Victorovich Pavlov, Nathan van de Wouw, and Henk Nijmeijer. *Uniform output regulation of nonlinear systems : a convergent dynamics approach.* Springer Science & Business Media, 2006.

[12] Nathalie Corson and MA Aziz-Alaoui. Dynamics and complexity of hindmarsh-rose neuronal systems. *Encyclopedia of Mathematical Physics : Elsevier*, 5 :213–226, 2006.

[13] Kunihiko Kaneko. On the strength of attractors in a high-dimensional system : Milnor attractor network, robust global attraction, and noise-induced selection. *Phys. D*, 124(4) :322–344, December 1998.

[14] Peter Ashwin. Riddled basins and coupled dynamical systems. In *Dynamics of Coupled Map Lattices and of Related Spatially Extended Systems*, pages 181–207. Springer, 2005.

[15] L A Bunimovich and Ya G Sinai. Space time chaos in coupled map lattices. *Nonlinearity*, 1(4) :491, 1988.

[16] G. Keller and C. Liverani. *A Spectral Gap for a One-dimensional Lattice of Coupled Piecewise Expanding Interval Maps*, pages 115–151. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2005.

[17] Gerhard Keller and Carlangelo Liverani. Uniqueness of the srb measure for piecewise expanding weakly coupled map lattices in any dimension. 2005.

[18] Gerhard Keller and Carlangelo Liverani. Coupled map lattices without cluster expansion. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 11 :325–336, 2004.

[19] M.R. Leadbetter, G. Lindgren, and H. Rootzen. *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes.* 3Island Press, 1983.

[20] P. Embrechts, C. Klüppelberg, and T. Mikosch. *Modelling Extremal Events : for Insurance and Finance.* Springer-Verlag, New York, 1999.

[21] Stuart Coles, Joanna Bawa, Lesley Trenner, and Pat Dorazio. *An introduction to statistical modeling of extreme values*, volume 208. Springer, 2001.

[22] M Ghil, P Yiou, Stéphane Hallegatte, BD Malamud, P Naveau, A Soloviev, P Friederichs, V Keilis-Borok, D Kondrashov, V Kossobokov, et al. Extreme events : dynamics, statistics and prediction. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 18(3) :295–350, 2011.

[23] Richard W Katz, Marc B Parlange, and Philippe Naveau. Statistics of extremes in hydrology. *Advances in water resources*, 25(8-12) :1287–1304, 2002.

[24] VF Pisarenko and D Sornette. Characterization of the frequency of extreme earthquake events by the generalized pareto distribution. *pure and applied geophysics*, 160(12) :2343–2364, 2003.

[25] Yannick Malevergne, Vladilen Pisarenko, and Didier Sornette. On the power of generalized extreme value (gev) and generalized pareto distribution (gpd) estimators for empirical distributions of stock returns. *Applied Financial Economics*, 16(3) :271–289, 2006.

[26] Zaqueu Coelho and Pierre Collet. Asymptotic limit law for the close approach of two trajectories in expanding maps of the circle. *Probability Theory and Related Fields*, 99(2) :237–250, Jun 1994.

[27] Gerhard Keller and Carlangelo Liverani. Rare events, escape rates and quasistationarity : Some exact formulae. *Journal of Statistical Physics*, 135(3) :519–534, May 2009.

[28] D Faranda, H Ghoudi, P Guiraud, and Sandro Vaienti. Extreme value theory for synchronization of coupled map lattices. *Nonlinearity*, 31(7) :3326, 2018.

[29] Nicolas Kryloff and Nicolas Bogoliouboff. La theorie generale de la mesure dans son application a l'etude des systemes dynamiques de la mecanique non lineaire. *Annals of Mathematics*, 38(1) :65–113, 1937.

[30] Peter Walters. *An introduction to ergodic theory*, volume 79. Springer Science & Business Media, 2000.

[31] Geon Ho Choe. *Computational ergodic theory*, volume 13. Springer Science & Business Media, 2006.

[32] Benoît Saussol. *Etude statistique de systemes dynamiques dilatants*. PhD thesis, 1998. Thése de doctorat dirigée par VAIENTI, SANDRO Sciences et techniques communes. Physique Toulon 1998.

[33] V. Baladi and L.-S. Young. On the spectra of randomly perturbed expanding maps. *Comm. Math. Phys.*, 156(2) :355–385, 1993.

[34] Mark Kac. On the notion of recurrence in discrete stochastic processes. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 53(10) :1002–1010, 1947.

[35] Ronald Aylmer Fisher and Leonard Henry Caleb Tippett. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 24, pages 180–190. Cambridge University Press, 1928.

[36] B. Gnedenko. Sur La Distribution Limite Du Terme Maximum D'Une Serie Aleatoire. *The Annals of Mathematics*, 44(3) :423+, July 1943.

[37] James Pickands III. Statistical inference using extreme order statistics. 3, 01 1975.

[38] A. A. Balkema and L. de Haan. Residual life time at great age. *Ann. Probab.*, 2(5) :792–804, 10 1974.

[39] M Ross Leadbetter. On extreme values in stationary sequences. *Probability theory and related fields*, 28(4) :289–303, 1974.

[40] M Ross Leadbetter. Extremes and local dependence in stationary sequences. *Probability Theory and Related Fields*, 65(2) :291–306, 1983.

[41] R. M. Loynes. Extreme values in uniformly mixing stationary stochastic processes. *Ann. Math. Statist.*, 36(3) :993–999, 06 1965.

[42] Ana Cristina Moreira Freitas and Jorge Milhazes Freitas. On the link between dependence and independence in extreme value theory for dynamical systems. *Statistics & Probability Letters*, 78(9) :1088–1093, 2008.

[43] P Collet. Statistics of closest return for some non-uniformly hyperbolic systems. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 21(2) :401–420, 2001.

[44] Ana Cristina Moreira Freitas and Jorge Milhazes Freitas. Extreme values for benedicks–carleson quadratic maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 28(4) :1117–1133, 2008.

[45] Renato Vitolo, Mark P Holland, and Christopher AT Ferro. Robust extremes in chaotic deterministic systems. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 19(4) :043127, 2009.

[46] J.-R. CHAZOTTES and P. COLLET. Poisson approximation for the number of visits to balls in non-uniformly hyperbolic dynamical systems. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 33(1) :49–80, 2013.

[47] Françoise Pene and Benoit Saussol. Poisson law for some non-uniformly hyperbolic dynamical systems with polynomial rate of mixing. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 36(8) :2602–2626, 2016.

[48] The limiting distribution and error terms for return times of dynamical systems.

[49] B. Pitskel. Poisson limit law for markov chains. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 11(3) :501–513, 1991.

[50] Masaki Hirata. Poisson law for axiom a diffeomorphisms. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 13(3) :533–556, 1993.

[51] Ana Cristina Moreira Freitas, Jorge Milhazes Freitas, and Mike Todd. The compound poisson limit ruling periodic extreme behaviour of non-uniformly hyperbolic dynamics. *Communications in Mathematical Physics*, 321(2) :483–527, Jul 2013.

[52] Nicolai Haydn and Sandro Vaienti. The compound poisson distribution and return times in dynamical systems. *Probability Theory and Related Fields*, 144(3) :517–542, Jul 2009.

[53] O. Kallenberg. *Random measures*. Akademie-Verlag, 1983.

[54]

[55] Miguel Abadi and Antonio Galves. Inequalities for the occurrence times of rare events in mixing processes. the state of the art. In *MARKOV PROC. RELAT. FIELDS*, page 2001, 2000.

[56] P. Collet, A. Galves, and B. Schmitt. Unpredictability of the occurrence time of a long laminar period in a model of temporal intermittency. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor.*, 57(3) :319–331, 1992.

[57] M Kupsa, Y Lacroix, et al. Asymptotics for hitting times. *The annals of probability*, 33(2) :610–619, 2005.

[58] Yves Lacroix. Possible limit laws for entrance times of an ergodic aperiodic dynamical system. *Israel Journal of Mathematics*, 132(1) :253–263, 2002.

[59] N. Haydn, Y. Lacroix, and S. Vaienti. Hitting and return times in ergodic dynamical systems. *Ann. Probab.*, 33(5) :2043–2050, 09 2005.

[60] Ana Cristina Moreira Freitas, Jorge Milhazes Freitas, and Mike Todd. Hitting time statistics and extreme value theory. *Probability Theory and Related Fields*, 147(3) :675–710, Jul 2010.

[61] Ana Cristina Moreira Freitas, Jorge Milhazes Freitas, and Mike Todd. Extreme value laws in dynamical systems for non-smooth observations. *Journal of Statistical Physics*, 142(1) :108–126, Jan 2011.

[62] Hubert Hennion and Loïc Hervé. Limit theorems for markov chains and stochastic properties of dynamical systems by quasi-compactness. 1766, 01 2001.

[63] Gerhard Keller. Generalized bounded variation and applications to piecewise monotonic transformations. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 69(3) :461–478, Sep 1985.

[64] Gerhard Keller. Rare events, exponential hitting times and extremal indices via spectral perturbation. *Dynamical Systems*, 27(1) :11–27, 2012.

[65] H. Aytaç, J. M. Freitas, and S. Vaienti. Laws of Rare Events for Deterministic and Random Dynamical Systems. *Transactions of the American Mathematical Society*, 367 :8229–8278, 2015.

[66] V. Lucarini, D. Faranda, A.C.G.M.M. de Freitas, J.M. Freitas, M. Holland, T. Kuna, M. Nicol, M. Todd, and S. Vaienti. *Extremes and Recurrence in Dynamical Systems*. Pure and Applied Mathematics : A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2016.

[67] Ana Cristina Moreira Freitas, Jorge Milhazes Freitas, and Mike Todd. The extremal index, hitting time statistics and periodicity. *Advances in Mathematics*, 231(5) :2626 – 2665, 2012.

[68] Benoît Saussol. Absolutely continuous invariant measures for multidimensional expanding maps. *Israel Journal of Mathematics*, 116(1) :223–248, Dec 2000.

[69] Masato Tsujii. Absolutely continuous invariant measures for expanding piecewise linear maps. *Inventiones mathematicae*, 143(2) :349–373, Feb 2001.

[70] Nicolai Haydn, Matthew Nicol, Andrew Török, and Sandro Vaienti. Almost sure invariance principle for sequential and non-stationary dynamical systems. *Transactions of the American Mathematical Society*, 369(8) :5293–5316, August 2017.

[71] Huyi Hu and Sandro Vaienti. Lower bounds for the decay of correlations in non-uniformly expanding maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, pages 1–35, 2017.

[72] Young Sul Cho, Takashi Nishikawa, and Adilson E. Motter. Stable chimeras and independently synchronizable clusters. *Phys. Rev. Lett.*, 119 :084101, Aug 2017.

[73] AN Šarkovskiı. Continuous mapping on the limit points of an iteration sequence. *Ukrain. Mat. Z*, 18(5) :127–130, 1966.

[74] L.S. Block and W.A. Coppel. *Dynamics in one dimension.* Lecture notes in mathematics. Springer-Verlag, 1992.

[75] Alexandre I Danilenko. Strong orbit equivalence of locally compact cantor minimal systems. *International Journal of Mathematics*, 12(01) :113–123, 2001.

[76] Xiong Jincheng. Set of almost periodic points of a continuous self-map of an interval. *Acta Mathematica Sinica*, 2(1) :73–77, 1986.

[77] Alexander M Blokh. On the limit behaviour of one-dimensional dynamical systems. *Russian Mathematical Surveys*, 37(1) :157–158, 1982.

[78] Francisco Balibrea, Roman Hric, and L'ubomír Snoha. Minimal sets on graphs and dendrites. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 13(07) :1721–1725, 2003.

[79] Sam Nadler. *Continuum theory : an introduction.* CRC Press, 1992.

[80] Daniel Arévalo, Włodzimierz J Charatonik, Patricia Pellicer Covarrubias, and Likin Simón. Dendrites with a closed set of end points. *Topology and its Applications*, 115(1) :1–17, 2001.

[81] Kazimierz Kuratowski. *Topology*, volume 1. Elsevier, 2014.

[82] Hafedh Abdelli and Habib Marzougui. Invariant sets for monotone local dendrite maps. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 26(09) :1650150, 2016.

[83] Ghassen ASKRI. *Dynamics of dendrite maps.* PhD thesis, Umm Al-Qura University, Saudi Arabia, 2015.

[84] Roman Hric and Michal Málek. Omega limit sets and distributional chaos on graphs. *Topology and its Applications*, 153(14) :2469–2475, 2006.

[85] Jiehua Mai and Taixiang Sun. The ω-limit set of a graph map. *Topology and its Applications*, 154(11) :2306–2311, 2007.

[86] Issam Naghmouchi. Dynamics of monotone graph, dendrite and dendroid maps. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(11) :3205–3215, 2011.

[87] Issam Naghmouchi. Dynamical properties of monotone dendrite maps. 2010.

[88] Hafedh Abdelli. ω-limit sets for monotone local dendrite maps. *Chaos, Solitons & Fractals*, 71 :66–72, 2015.

[89] Jie-Hua Mai. Pointwise-recurrent graph maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 25(2) :629–637, 2005.

[90] Hattab Hawete. Relatively pointwise recurrent graph map. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 139(6) :2087–2092, 2011.

[91] Issam Naghmouchi. Pointwise-recurrent dendrite maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 33(4) :1115–1123, 2013.

[92] Janusz J Charatonik and Alejandro Illanes. Mappings on dendrites. *Topology and its Applications*, 144(1-3) :109–132, 2004.

[93] Jiehua Mai and Enhui Shi. $\overline{R} = \overline{P}$ for maps of dendrites x with card (end (x))< c. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 19(04) :1391–1396, 2009.

[94] Alejandro Illanes. A characterization of dendrites with the periodic-recurrent property. In *Topology Proc*, volume 23, pages 221–235, 1998.

[95] Walter Helbig Gottschalk. Powers of homeomorphisms with almost periodic properties. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 50(4) :222–227, 1944.

[96] P Erdos and AH Stone. Some remarks on almost periodic transformations. *Bull. Amer. Math. Soc*, 51 :126–130, 1945.

[97] Jie-Hua Mai and Song Shao. $\overline{R} = r \cup \overline{P}$ for graph maps. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 350(1) :9–11, 2009.

[98] Hisao Kato. A note on periodic points and recurrent points of maps of dendrites. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 51(3) :459–461, 1995.