



HAL
open science

Etudes et modélisations du comportement d'un écran de filet pare-blocs à différentes échelles

Romain Boulaud

► **To cite this version:**

Romain Boulaud. Etudes et modélisations du comportement d'un écran de filet pare-blocs à différentes échelles. Matériaux et structures en mécanique [physics.class-ph]. Université Paris-Est, 2020. Français. NNT : 2020PESC2017 . tel-03043750

HAL Id: tel-03043750

<https://theses.hal.science/tel-03043750v1>

Submitted on 7 Dec 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-EST

Ecole doctorale sciences, ingénierie et environnements
Laboratoire Navier, IFSTTAR, Ecole des Ponts Paritech, CNRS,
UMR 8205

Thèse présentée pour obtenir le grade de Docteur de l'université
Paris-Est

Discipline : Génie civil
Spécialité : Structures et Matériaux

Romain BOULAUD

**Etudes et modélisations du comportement d'un
écran de filet pare-blocs à différentes échelles**

Soutenance le 07/01/2020 devant le jury composé de :

Philippe BOISSE	Rapporteur
François NICOT	Rapporteur
Julien AVERSENG	Examineur
Claude-Henri LAMARQUE	Examineur
Cyril DOUTHE	Examineur
Jean-Noël ROUX	Directeur de thèse

Remerciements

Ce manuscrit est le fruit de plus de trois années de travail au cours desquelles de nombreuses personnes m'ont accompagné. Je tenais à leur dédier ces premières lignes pour leur exprimer toute ma gratitude.

Mes remerciements vont tout d'abord à mes encadrants. A Cyril Douthe, mon conseiller d'étude, qui m'a introduit dans le monde de la recherche alors que j'étais encore élève ingénieur et m'a accordé sa confiance pour partager cette aventure. Ses conseils m'ont été précieux et de nombreuses idées ont émergé de nos discussions scientifiques. Sa très grande disponibilité m'a permis de réaliser ce travail dans les meilleures conditions qui soient et la qualité de ce mémoire doit beaucoup à la finesse de sa relecture. Je remercie également Jean-Noël Roux, mon directeur de thèse, pour la très grande confiance qu'il nous a accordée.

Je tenais ensuite à remercier l'ensemble des membres du jury : Claude-Henri Lamarque qui m'a fait l'honneur de présider le jury, François Nicot et Philippe Boisse, rapporteurs de ce travail, pour la richesse de leurs remarques et des échanges scientifiques auxquels elles ont abouties, et Julien Averseng pour avoir accepté de prendre part à ce jury et de partager son expertise sur les structures légères. De nombreux problèmes rencontrés dans cette thèse ont été résolus grâce à des méthodes utilisées dans ce champ disciplinaire.

Cette thèse doit également beaucoup au groupe de travail sur les écrans de protection souples du projet national C2ROP. Les discussions et travaux expérimentaux menés dans ce cadre ont été des contributions significatives de ce travail. Je remercie ainsi l'ensemble de membres du projet national de la région Auvergne-Rhône-Alpes.

J'ai eu la chance de réaliser cette thèse dans un environnement privilégié. Je remercie sincèrement l'ensemble du personnel de l'équipe MSA, notamment Marie-Françoise Kaspi pour son aide précieuse. Merci également à tous les doctorants et stagiaires que j'ai eu la chance de côtoyer, pour ces moments de convivialité que nous avons partagés autour d'un café, d'un verre ou sur un terrain de foot.

Je conclurais en remerciant mes proches, sur lesquels j'ai toujours pu compter et qui m'ont soutenu pendant ces trois années. Un grand merci à mes précieux amis du fond de la ligne B, aujourd'hui parisiens. A mes parents et ma soeur, leurs conseils m'ont grandement aidé lorsque parfois j'ai pu douter, ils m'ont toujours épaulé. Et à Corinne, pour son soutien quotidien et sans faille, sa patience et sa compréhension, sans oublier sa rigueur orthographique.

Ils auront véritablement tout mis en oeuvre pour que cette thèse se déroule dans les meilleures conditions possibles.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Positionnement du travail de recherche	3
2.1	La gestion du risque d'éboulement rocheux	3
2.1.1	Généralités sur la notion de risque	3
2.1.2	Les risques naturels et le cas particulier des éboulements rocheux	4
2.1.3	Mesures de réduction du risque	6
2.2	Les écrans de protection pare-blocs	8
2.2.1	Présentation de l'ouvrage	8
2.2.2	Le cadre réglementaire de l'ETAG27	9
2.2.3	Travaux récents et enjeux scientifiques actuels	12
2.3	Le projet national C2ROP	16
2.3.1	Genèse et positionnement scientifique	16
2.3.2	Présentation du prototype d'écran C2ROP	16
2.3.3	Bilan des travaux scientifiques	19
2.3.4	Quelques éléments de compréhension du fonctionnement d'un écran pare-blocs	25
2.4	Objectifs des travaux de thèse et problématiques	33
3	Modélisation discrète d'un écran pare-blocs et méthode de résolution quasi-statique	35
3.1	Modélisation discrète des composants d'un écran pare-blocs	35
3.1.1	Choix de la modélisation discrète	36
3.1.2	Le filet ASM4	36
3.1.3	Les câbles de rive et dissipateurs	44
3.1.4	Les autres éléments de structure	46
3.1.5	Le projectile	47
3.1.6	Les connexions entre éléments	47
3.2	La méthode de relaxation dynamique	48
3.2.1	Genèse de l'algorithme et principe de la méthode	48
3.2.2	L'algorithme de l'amortissement cinétique	49
3.3	Etude du schéma d'intégration et conditions de stabilité	50
3.3.1	Cas général	50
3.3.2	Remarques liées à l'implémentation de l'algorithme	53
3.4	Estimation des masses fictives pour les éléments de structure	54
3.4.1	Le câble simple	54

3.4.2	Le câble glissant	56
3.4.3	La poutre en flexion pure	67
3.5	Evaluation des maxima d'énergie cinétique	72
3.6	Présentation de l'algorithme	74
3.7	Extension à la dynamique réelle et limites de l'approche	74
3.8	Etudes de deux structures formées à partir de câbles glissants	76
3.8.1	Equilibre d'un chariot glissant le long d'un câble	76
3.8.2	Etude d'une structure symétrique formée de plusieurs câbles glissants	78
3.9	Conclusion	83
4	Etude de l'influence de la modélisation du filet sur le comportement du modèle complet	85
4.1	Identification des propriétés mécaniques intrinsèques des modèles de filet ASM4	85
4.1.1	Du discret au continu	85
4.1.2	Présentation de la méthode d'homogénéisation	86
4.1.3	Identification des matrices de rigidité	89
4.2	Evaluation des paramètres matériels	97
4.2.1	Estimation des raideurs	98
4.2.2	Seuils et déformation macroscopique	101
4.2.3	Comparaison des comportements homogénéisés	102
4.3	Transformation d'une membrane plane en un paraboloïde hyperbolique	104
4.3.1	Solutions analytiques de l'équilibre membranaire	105
4.3.2	Comportement analytique des modèles de filet	107
4.3.3	Comportements numériques des modèles de filet	108
4.3.4	Reconstruction d'un tenseur des contraintes moyennes	114
4.4	Comparaison du comportement des modèles d'écran associés pour une sollicitation quasi-statique	120
4.4.1	Modélisation de la barrière C2ROP	120
4.4.2	Comparaison des comportements globaux des trois modèles d'écran	122
4.5	Réponse de l'écran en fonction de la zone de chargement	126
4.5.1	Présentation de l'étude	126
4.5.2	Evolution des énergies de déformation	128
4.5.3	Evolution de la hauteur du filet à l'équilibre	136
4.5.4	Etude des chemins de diffusion des efforts au sein du filet	137
4.6	Conclusion	140
5	Développement d'une famille de modèles simplifiés d'écran pare-blocs	141
5.1	Objectifs de l'approche	141
5.2	Construction des modèles simplifiés	142
5.2.1	Modélisation des superstructures	142
5.2.2	Modélisation du filet	143
5.2.3	Construction d'une famille de modèles	145
5.3	Estimation des propriétés mécaniques de la nappe de filet et validation des modèles	149
5.3.1	Choix des propriétés mécaniques du filet	149
5.3.2	Comparaison avec les modèles traditionnels et caractérisation des performances mécaniques	157

5.4	Présentation du code de calcul pour la résolution de problèmes dynamiques .	165
5.4.1	Les efforts de rappel	165
5.4.2	Amortissement visqueux	168
5.5	Analyse du comportement dynamique de l'écran C2ROP lors d'un essai ETAG27	171
5.5.1	Influence des phénomènes dynamiques sur le comportement de la structure	172
5.5.2	Etude paramétrique d'un essai ETAG27	175
5.6	Vers la définition de coefficients de sécurité pour les écrans pare-blocs	190
5.6.1	Du calcul déterministe à une approche semi-probabiliste	190
5.6.2	Application à un essai normalisé selon l'ETAG27	190
5.7	Conclusion	198
6	Conclusions et perspectives	201

Table des figures

2.1	Eboulement rocheux en mars 2018 dans la région de Menton en raison de fortes intempéries (source : monacomatin)	5
2.2	Exemples de parades actives : (a) Mur de soutènement (source : BRGM) ; (b) Filet plaqué (source : GIA Ingénierie) ; (c) Reprofilage (source : BRGM) . . .	7
2.3	Exemples de parades passives : (a) Écran de protection pare-blocs (source : C2ROP) ; (b) Merlon (source : Wikipédia) ; (c) Filet déflecteur (source : Avaroc)	7
2.4	Schéma de principe d'un écran pare-blocs	8
2.5	Bloc normalisé pour l'essai ETAG (source : ETAG027 [45])	10
2.6	Schéma d'un écran testé selon les conditions ETAG (source : ETAG027 [45])	10
2.7	Classement des écrans d'après l'ETAG 027 (source : ETAG027 [45])	11
2.8	Loi de probabilité log-normale obtenue à partir des résultats d'une étude de trajectographie (source : [19])	13
2.9	Méthode de dimensionnement analytique à partir d'un chargement statique équivalent (source : [77])	15
2.10	Modèle d'écran 2D utilisé pour un calcul éléments finis en dynamique (source : [58])	15
2.11	Photos du prototype d'écran C2ROP : (a) vue de face, (b) vue de côté (source PN C2ROP)	17
2.12	Schéma technique de l'écran C2ROP : position des dissipateurs (source : C2ROP, NGE Fondations)	18
2.13	Détails du câblage entre la nappe de filet et les câbles de rive	18
2.14	Photographies d'un frein serpent utilisé sur l'écran C2ROP (source : C2ROP)	20
2.15	Comportement d'un frein serpent sous sollicitation de traction quasi-statique (source : C2ROP, NGE Fondations)	20
2.16	Test de traction plan sur une nappe d'anneaux : (a) photo du montage (source : C2ROP, NGE Fondations), (b) conditions aux limites	21
2.17	Résultats expérimentaux du test de traction plan (source : C2ROP). N_{a_1} : effort longitudinal, N_{a_4} : effort transversal	22
2.18	Equilibre sous poids propre de l'écran et du bloc avant application de l'effort du treuil (source : C2ROP)	23
2.19	Plan d'implantation des capteurs de force dans l'écran C2ROP (source : C2ROP, NGE Fondations)	23
2.20	Comparaison des cinématiques de déformation entre les comportements quasi-statique et dynamique. (a) : Définition des longueurs mesurées, (b) : Evolution de la distance de glissement (en rouge) et de l'allongement du filet (en bleu)	26

2.21	Evolution de la déformation du câble B_{bis}^{sup} . (a) : Déformations mesurées par analyse d'images pour l'essai QS et l'essai MEL1 et approximation des résultats expérimentaux par des lois bi-linéaires, (b) : Enfoncement du bloc en fonction du temps pour l'essai MEL1 et comparaison avec une chute libre . . .	27
2.22	Efforts mesurés par les capteurs installés sur les câbles de rive centraux. (a) : Données de l'essai QS, (b) : Données de l'essai MEL1	29
2.23	Comparaison des trajectoires des blocs et des efforts qui leur sont appliqués. (a) : Enfoncement des blocs pour les essais MEL1 et MEL2, (b) : Effort résultant appliqué au bloc pour l'essai QS et effort d'inertie pour les essais MEL1 et MEL2	32
3.1	Schéma du motif d'un filet ASM4	37
3.2	Comparaison du comportement d'un anneau sous chargement de traction uni-axiale : (a) déplacements transversaux autorisés, (b) déplacements transversaux bloqués	37
3.3	Modélisation discrète du filet ASM6 proposée par F. Nicot (source [71]) . . .	38
3.4	Modélisation discrète du filet ASM4 proposée par F. Grassl (source [97]) . .	38
3.5	Modélisation discrète du filet ASM4 proposée par A. Volkwein (source [97]) .	39
3.6	Motifs des trois modèles discrets d'anneau ASM4 : A. Modèle câbles, B. Modèle anneau, C. Modèle poutre	40
3.7	Interactions décrivant le comportement des modèles d'anneau discrets. (a) : Effort de traction, (b) : Effort d'anneau, (c) : Effort de flexion	40
3.8	Calcul de la courbure trois points et du moment fléchissant au lieu de la particule i	42
3.9	Modélisation discrète d'un filet à mailles hexagonales formées par torsion des câbles (source [90])	44
3.10	Filets formés par tressage d'un câble fléchi : (a) : Filet Omega (source [93]), (b) : Filet Elite (source [15]), (c) : Modélisation discrète du filet Elite (source [15])	44
3.11	"Effet rideau" provoqué par un impact centré. (a) : Ecran complet, (b) : Focus sur l'effet rideau (source : PN C2ROP).	45
3.12	Deux exemples de dissipateur : (a) frein serpent (source C2ROP), (b) dissipateur par flambement (source GTS)	46
3.13	Equilibre d'un câble simple formé par n particules	55
3.14	Equilibre d'un câble glissant soumis à n forces ponctuelles	57
3.15	Chargement ponctuel provoquant la disparition d'un segment de câble. . . .	63
3.16	Schéma du câble sous l'hypothèse de la courbure monotone	65
3.17	Efforts tranchants résultant des moment appliqués en trois points consécutifs	68
3.18	Modélisation du problème du chariot. (a) : Configuration au repos au repos, (b) : Configuration à l'équilibre	77
3.19	Comparaison entre les résultats analytiques et numériques obtenus à partir du problème du chariot résolu avec et sans pré-tension	78
3.20	Représentation d'un problème à plusieurs câbles glissants	79

3.21	Comparaison des résultats obtenus avec la méthode de relaxation dynamique et avec la méthode des régions de confiance. (a) : Comportement global de la structure en force déplacement, (b) : Déplacement du point A , (c) : Déplacement du point B	80
3.22	Evolution des déformations et des efforts intérieurs dans les câbles centraux calculés avec la méthode de relaxation dynamique. (a) : Déformations, (b) : Efforts intérieurs	81
3.23	Influence de la raideur des barres sur le comportement de la structure	82
3.24	Equilibre limite pour des faibles valeurs de k_b	83
4.1	Construction des filets discrets par propagation des cellules élémentaires	87
4.2	Géométrie de la cellule élémentaire du modèle C	93
4.3	Exemple de deux configurations différentes donnant la même énergie de déformation	95
4.4	Estimation des paramètres mécaniques du Modèle A	99
4.5	Estimation des paramètres mécaniques du Modèle B	100
4.6	Estimation des paramètres mécaniques du modèle C	101
4.7	Comparaison des comportements en traction plane des modèles de filet	103
4.8	Transformation d'une membrane plane en un paraboloïde hyperbolique	104
4.9	Conditions aux bords appliquées à la membrane plane	107
4.10	Comportement en traction du modèle B_{bis}	110
4.11	Etude de convergence	111
4.12	Comparaison des comportements calculés analytiquement et numériquement pour les trois modèles de filet	113
4.13	Etats d'équilibre des filets calculés numériquement pour une Transformation hyper : $\frac{H}{l} = 0,3$	113
4.14	Illustration du maillage de la surface pour le calcul des contraintes moyennes	117
4.15	Illustration de la méthode de construction du tenseur des contraintes moyennes sur une cellule élémentaire	118
4.16	Comparaison des contraintes principales calculées analytiquement et numériquement pour un facteur de forme $\frac{H}{l} = 10\%$	119
4.17	Comportement numérique des éléments câbles glissants	121
4.18	Conditions aux bords adaptées des modèles ASM4	122
4.19	Passage d'un anneau courant à un anneau de rive : Modèle B	123
4.20	Comparaison des comportements quasi-statiques des trois modèles de filet	124
4.21	Distributions des efforts appliqués à la rive par le filet obtenues lors des simulations de l'essai quasi-statique pour différents niveaux d'enfoncement du bloc	125
4.22	Position des chargements appliqués aux modèles de filet pour l'étude du comportement de la structure en fonction de la localisation de la sollicitation	127
4.23	Evolution de l'énergie de déformation totale en fonction de la position du chargement, pour les trois modèles de filet	129
4.24	Evolution de la la part d'énergie accumulée par les câbles en fonction de la position du chargement pour chacun des trois modèles de filet	130
4.25	Fraction de l'énergie plastique dissipée par chacune des rives en fonction de la position de l'impact. Modèle A	133

4.26	Fraction de l'énergie plastique dissipée par chacune des rives en fonction de la position de l'impact. Modèle <i>B</i>	134
4.27	Fraction de l'énergie plastique dissipée par chacune des rives en fonction de la position de l'impact. Modèle <i>C</i>	135
4.28	Evolution du rapport entre la hauteur du filet à l'équilibre et la hauteur nominale en fonction de la position du chargement pour chacun des trois modèles de filet	136
4.29	Tracés des chemins de diffusion des contraintes dans le filet en fonction de la position du bloc pour les trois modèles de filet	139
5.1	Détails du câblage entre les câbles de rive et le filet	142
5.2	Déformation des superstructures en fonction de la localisation du chargement. (a) : Géométrie au repos, (b) : Effet rideau en milieu de module, (c) : Chargement au voisinage d'un poteau	144
5.3	Modélisation d'un impact dans les conditions ETAG	146
5.4	Modélisation d'un impact centré sur un module latéral	147
5.5	Modélisation d'un impact décentré dans le module central	147
5.6	Modélisation d'un impact décentré dans un module latéral	147
5.7	Description des discontinuités dues aux changements de modèles	148
5.8	Evaluation des propriétés mécaniques d'un anneau dans les régions du filet éloignées de l'impact	150
5.9	Evaluation du seuil pour une sollicitation de traction deux points	152
5.10	Choix du seuil des éléments du filet dans la zone impactée en fonction de leur orientation	153
5.11	Prise en compte du glissement entre le filet et le bloc dans le calcul de la déformation limite	153
5.12	Identification des propriétés mécaniques du filet pour un impact situé au centre d'un module	154
5.13	Identification des propriétés mécaniques du filet pour un impact situé exactement à l'emplacement d'un poteau	155
5.14	Identification des propriétés mécaniques du filet pour un impact au voisinage d'un poteau	157
5.15	Comparaison des hauteurs à l'équilibre calculées avec les modèles de référence et les modèles simplifiés pour différentes positions du bloc	159
5.16	Comparaison des quantités d'énergie accumulées par les rives dans les modèles de référence et les modèles simplifiés pour différentes positions du bloc	161
5.17	Comparaison des énergies de déformation de différents câbles de rive calculées avec les modèles de référence et les modèles simplifiés	163
5.18	Comportement élasto-plastique écrouissant des câbles glissants	166
5.19	Comportement des éléments composant le filet	167
5.20	Comportement des câbles de rive pour un impact centré à l'énergie MEL. (a) : Evolutions des déformations en fonction du temps, (b) : Evolutions des efforts internes associés en fonction du temps	173
5.21	Bilan énergétique d'un impact à l'énergie MEL simulé dans les conditions de l'ETAG27	174

5.22	Comparaison des trajectoires mesurées expérimentalement et calculées numériquement pour un impact ETAG27 à l'énergie MEL	176
5.23	Distribution des précontraintes mesurées expérimentalement et répartition selon une loi log-normale approchée (source [57])	178
5.24	Évolutions des énergies dissipées dans les câbles de rive, comptées en fraction de l'énergie d'impact, en fonction de leurs niveaux de précontrainte	179
5.25	Evolution de la quantité d'énergie plastique dissipée en fonction de la précontrainte moyenne	180
5.26	Evolution de la profondeur maximale en fonction de la précontrainte moyenne	180
5.27	Evolution de la hauteur du filet, à l'instant où l'élongation de l'écran est maximale, en fonction de la précontrainte moyenne	181
5.28	Distribution des seuils mesurés expérimentalement et répartition selon une loi log-normale (source [57])	182
5.29	Évolutions des énergies dissipées dans les câbles de rive, comptées en fraction de l'énergie d'impact, en fonction de leurs seuils respectifs	183
5.30	Evolution de la quantité totale d'énergie plastique dissipée par les rives en fonction du seuil moyen	183
5.31	Evolution de la profondeur maximale atteinte par le bloc en fonction de la moyenne des seuils des câbles de rive	184
5.32	Evolution de la hauteur du filet, à l'instant où l'élongation de l'écran est maximale, en fonction de la moyenne des seuils	185
5.33	Schéma de la plage de variation de la position d'une tête de poteau en fonction des deux angles des coordonnées sphériques	185
5.34	Évolutions des énergies dissipées par les câbles de la rive supérieure, comptées en fraction de l'énergie d'impact, en fonction des accroissements de leurs longueurs au repos	186
5.35	Evolution de la quantité totale d'énergie plastique dissipée en fonction de l'écart moyen sur la position des têtes de poteaux	187
5.36	Evolution de la profondeur maximale atteinte par le bloc en fonction de l'écart moyen sur la position des têtes de poteaux	187
5.37	Evolution de la hauteur du filet, à l'instant où l'élongation de l'écran est maximale, en fonction de l'écart moyen de position des têtes de poteaux . . .	188
5.38	Répartition des erreurs des modèles théoriques $X_i h$. (a) : Erreur sur la profondeur maximale atteinte par le bloc, (b) : Erreur sur le défilement total des freins, (c) : Erreur sur la hauteur du filet, (d) : Erreur sur le défilement maximal atteint sur un câble, (e) : Erreur sur l'énergie plastique dissipée par les dissipateurs, (f) : Erreur sur la durée de l'impact, (g) : Erreur sur l'effort statique équivalent, (h) : Erreur sur l'effort maximal transmis à un ancrage .	195

Liste des tableaux

2.1	Caractéristiques géométriques des différents éléments de structure	19
2.2	Comparaison des courses et des énergies théoriques dissipées par les freins serpents, entre les essais QS, MEL1 et MEL2	31
3.1	Etude de convergence de l'algorithme de relaxation dynamique par comparaison avec celui des régions de confiance	81
5.1	Estimation des déformations limites des éléments du filet reliant deux particules pour les impacts (a) et (b) présentés sur la figure 5.14	156
5.2	Ecart relatifs entre les hauteurs à l'équilibre calculées avec les modèles simplifiés et les valeurs de références	159
5.3	Ecart relatifs entre les énergies de déformation des rives calculées avec les modèles simplifiés et leurs valeurs de références	162
5.4	Ecart moyens entre les énergies de déformation de différents câbles de rive, calculés avec les modèles simplifiés, et leurs valeurs de référence	164
5.5	Ecart mesurés entre les essais ETAG27 réalisés à l'énergie MEL dans le cadre du projet national C2ROP (source [57])	176
5.6	Propriétés statistiques de l'échantillon des précontraintes (source [57])	178
5.7	Propriétés statistiques de l'échantillon contenant les seuils des dissipateurs (source [57])	182
5.8	Paramètres de référence utilisés pour le modèle théorique	193
5.9	Comparaison des résultats obtenus avec le modèle théorique avec les comportements réellement observés lors des essais MEL1 et MEL2 du PN C2ROP	193
5.10	Propriétés statistiques des critères étudiés, évaluation des valeurs caractéristiques et de calcul et estimation des coefficients partiels de sécurité	196
5.11	Résultat du calcul mené avec les seuils dimensionnés pour garantir une hauteur du filet à l'instant où la vitesse du bloc s'annule inférieure à : $h_d = 0,4h_n$	198

Chapitre 1

Introduction

Dans un contexte climatique incertain où toujours plus de femmes et d'hommes sont exposés à des risques d'origine naturelle, il n'est plus envisageable de faire l'économie d'un effort de recherche conséquent et indispensable à la prévention de ces menaces qui sont en partie causées par l'activité humaine. Les enjeux sont multiples dans un monde où les dégâts engendrés par les désordres climatiques touchent durement les populations les plus démunies et ne font qu'aggraver les inégalités à toutes les échelles géographiques. Une conséquence du dérèglement climatique, observable sur le territoire français, est la multiplication des éboulements rocheux. Ces phénomènes peuvent en partie être expliqués par la fonte du permafrost, cette partie du sol dont la température reste inférieure à 0°C pendant au moins deux années consécutives, pour les événements qui se produisent en haute montagne ainsi que par l'augmentation de la fréquence des épisodes de fortes précipitations [85].

En France, dix millions d'habitants vivent dans les différents massifs montagneux qui occupent 30% de la superficie du territoire métropolitain. 15 % de la population est ainsi directement confrontée au risque d'éboulements rocheux et aux lourdes conséquences qu'ils peuvent avoir. Les terrains accidentés et les difficultés d'accessibilité rendent en effet les régions montagneuses particulièrement vulnérables aux aléas naturels. Outre la mise en péril de vies humaines, les préjudices économiques causés par les chutes de blocs peuvent être difficiles à soutenir pour les collectivités touchées. En particulier, les faibles niveaux de développement des réseaux de transports peuvent créer des situations critiques lorsque des infrastructures routières ou ferroviaires sont impactées.

Les écrans de filet souples pare-blocs sont des ouvrages de protection couramment utilisés pour préserver les zones urbanisées menacées par les chutes de roches. Ces structures, souvent installées à flanc de montagne sur les trajectoires suspectées des masses rocheuses menaçant de se détacher du massif, sont formées d'un filet métallique souple maintenu perpendiculairement au terrain par des éléments rigides comme des poteaux en acier. Leurs conceptions modulaires ainsi que la légèreté des filets d'interceptions facilitent leurs installations dans des zones très accidentées et difficiles d'accès. De plus, leurs niveaux de performance élevés et leurs faibles coûts de mise œuvre en font des ouvrages de protection économiquement très compétitifs.

A l'heure actuelle, aucun calcul normatif ne permet de dimensionner ces ouvrages de protection. Il existe cependant un document d'évaluation technique européen qui fixe les niveaux de performance à atteindre par les écrans de protection [46]. Des essais normalisés permettent ainsi de vérifier le respect de ces critères et de délivrer une certification

européenne à ce type d'ouvrage. Cette certification permet une certaine uniformisation des méthodes de conception mais le niveau de contrôle reste encore éloigné de ceux pratiqués pour les ouvrages courants du génie civil. Ce retard méthodologique s'explique en grande partie par la complexité du fonctionnement de ces structures et la difficulté qui en résulte pour évaluer leurs résistances par le calcul. L'objectif de ce travail de recherche est de proposer, à partir d'une étude fine de leurs comportements, des méthodes de dimensionnement simplifiées et pouvant facilement être appliquées par les ingénieurs.

Les écrans de protection souples sont solidement implantés dans le paysage français. Malgré la complexité de leur comportement, ces ouvrages sont étudiés depuis de longues années et leur efficacité n'est plus à prouver. Après une présentation du contexte économique et social de ce travail de thèse qui s'inscrit dans un domaine très spécifique du vaste champ d'expertise de la gestion du risque, les travaux scientifiques majeurs qui ont notamment permis la rédaction du guide européen et sur lesquels s'appuiera ce travail seront présentés dans le premier chapitre de ce manuscrit. Le chapitre sera conclu par quelques résultats scientifiques obtenus dans le cadre du projet national C2ROP qui rassemble actuellement une grande partie des experts français du risque rocheux.

L'étude de la bibliographie scientifique qui sera conduite dans ce premier chapitre révélera notamment que les développements scientifiques récents s'accordent à privilégier les méthodes numériques pour modéliser le comportement des écrans de protection. Les nombreuses non-linéarités qui interviennent lors de l'impact d'un bloc sur un écran souple justifient complètement cette approche qui sera également suivie au cours de cette thèse. Il est ainsi nécessaire de disposer d'outils numériques performants pour étudier le fonctionnement de ces ouvrages. Le deuxième chapitre de ce mémoire est consacré à la modélisation discrète d'une barrière pare-blocs ainsi qu'à la stabilité du schéma explicite utilisé pour la résolution du problème. Ces deux aspects, a priori distincts, doivent en réalité être conjointement traités dans la mesure où la stabilité du schéma numérique dépend directement de la manière dont les efforts sont calculés dans la structure.

Si la modélisation de certains composants d'un écran pare-blocs, comme les câbles ou les poteaux, ne présente pas de difficulté majeure, la description de la nappe de filet, en revanche, constitue un véritable enjeu scientifique. A l'aide de l'outil de calcul aux éléments discrets qui aura été préalablement présenté dans le deuxième chapitre, les influences de différentes modélisations d'un filet à anneaux sur le comportement global de l'ouvrage seront étudiées au cours du troisième chapitre de ce manuscrit. Trois modèles seront ainsi méthodiquement comparés à différentes échelles et sous plusieurs conditions de chargement.

Les résultats de cette comparaison permettront de proposer une nouvelle méthode de modélisation des écrans pare-blocs. Cette approche innovante, présentée dans le cinquième chapitre de ce travail, consiste à simplifier la description de la nappe de filet afin de résoudre numériquement un problème dont le nombre de degrés de liberté a été considérablement réduit. Une fois que ces nouveaux modèles auront été complètement décrits, quelques exemples d'application seront traités, illustrant ainsi le potentiel de la méthode et offrant de réelles perspectives pour tenir compte des variabilités matérielles et géométriques dans le dimensionnement des écrans de protection.

Ce manuscrit sera conclu par une synthèse des principaux résultats obtenus au cours de la thèse ainsi que par des pistes de développements et de valorisation pertinentes, dans la perspective où une suite serait donnée à ce travail de recherche.

Chapitre 2

Positionnement du travail de recherche

Ce chapitre introductif présente les contextes sociaux-économiques et scientifiques dans lesquels s’inscrivent ce travail de thèse, ainsi que les problématiques qui y sont soulevées et les démarches suivies pour y répondre. La prévention et la gestion des risques couvrent un vaste champ d’activité et il est nécessaire de définir au préalable le domaine d’expertise auquel se rapportent les travaux présentés dans ce manuscrit. Les spécificités de la gestion du risque d’éboulement rocheux, de l’identification de l’aléa à la proposition de parades efficaces, sont détaillées dans un premier temps. Le propos est ensuite recentré sur l’écran de protection souple pare-blocs, une des solutions les plus répandues. Après un rappel bibliographique sur les travaux de recherche majeurs de ce domaine, des problématiques plus actuelles, voire émergentes, comme le calcul prédictif pour des sollicitations non-standards, reproduisant des conditions réelles d’utilisation, sont présentées. Un paragraphe est ensuite consacré aux travaux menés par le groupe de travail sur les écrans souples du projet national C2ROP : Chute de Blocs, Risques Rocheux et Ouvrages de Protection. Ils auront nourri cette thèse, tant grâce à la quantité et la qualité des campagnes expérimentales réalisées que par la richesse des échanges scientifiques auxquels ils ont abouti. Ce chapitre est finalement conclu par la présentation de la problématique de ce travail de recherche ainsi que des différents axes suivis pour y répondre.

2.1 La gestion du risque d’éboulement rocheux

2.1.1 Généralités sur la notion de risque

Il existe plusieurs définitions pour la notion de risque. Une complète, qui n’écarte aucune partie du concept, est donnée dans le document *Living with Risk* publié par les Nations Unies [94] : « Le risque est la probabilité des conséquences néfastes ou des pertes prévues (humaines, matérielles, économiques, environnementales ...) résultant de l’interaction entre des aléas d’origine naturelle ou liés à l’activité humaine et des conditions de vulnérabilité ». D’après cette définition, la notion de risque doit être appréhendée comme une quantité probabiliste, dont le calcul résulte du produit de deux autres grandeurs, elles aussi probabilistes : l’aléa et la vulnérabilité. L’aléa est un phénomène physique, d’origine naturelle ou provoqué par l’activité humaine, pouvant potentiellement engendrer des dommages. La vulnérabilité, quant à elle, regroupe l’ensemble des conditions, déterminées par des facteurs socioéconomiques, environnementaux, ou technologiques augmentant ou diminuant la sensi-

bilité d'une communauté à l'impact de l'aléa. Cette définition peut également être résumée par la formule mathématique suivante :

$$\text{Risque} = \text{Aléa} \times \text{Vulnérabilité} \quad (2.1)$$

Si le risque semble être une grandeur difficile à évaluer, sa gestion est toutefois devenue une discipline à part entière, dont une large part des pratiques et concepts a été théorisée. M. Rausand dans son ouvrage *Risk Assessment : Theory, Methods, and Applications* propose une méthodologie unifiée pour réaliser une évaluation de risque exhaustive [84]. L'évaluation permet de définir le degré d'acceptabilité du risque au regard de critères de décision qui peuvent être de différentes natures (socioéconomiques, environnementaux ...). Cette étape succède ainsi à celle de l'analyse de risque qui, par la formule (2.1), intègre à la fois le calcul de l'aléa et de la vulnérabilité. Le risque, comme grandeur, peut être estimé de manière purement qualitative ou au contraire quantitative, par une valeur de probabilité. L'analyse de risque se déroule en trois étapes successives. Les deux premières permettent d'estimer l'aléa, la troisième la vulnérabilité :

- Etape 1 : identification de l'aléa ou de la menace,
- Etape 2 : estimation de la fréquence de l'aléa,
- Etape 3 : analyse de ses conséquences.

Si, à la suite de l'évaluation du risque, celui-ci n'est pas jugé acceptable, des mesures de contrôle et de réduction peuvent être mises en œuvre afin de le diminuer. La gestion du risque désigne l'ensemble du processus, de l'analyse au déploiement, si nécessaire, de solutions préventives adaptées. Cette démarche est aujourd'hui bien établie, notamment dans le monde de l'entreprise, et a donné lieu à la rédaction de la norme "ISO 31000" par l'organisation Internationale de la Normalisation [63].

2.1.2 Les risques naturels et le cas particulier des éboulements rocheux

Ce paragraphe, consacré exclusivement aux risques d'origine naturelle et plus spécifiquement aux éboulements rocheux, s'appuie sur la sémantique introduite au paragraphe 2.1.1. Il met notamment en lumière les difficultés inhérentes à la gestion des risques de cette nature. Son contenu reprend des éléments publiés dans différents rapports de l'UNISDR [94, 95].

Identification de l'aléa

Les risques naturels sont classés en trois catégories : hydrométéorologique, géologique et biologique. Les remarques réalisées dans ce paragraphe sont illustrées par le phénomène géologique des éboulements rocheux, directement en lien avec l'objet de ce travail de recherche. Les aléas d'origine naturelle se caractérisent, entre autres, par le fait qu'ils soient potentiellement inévitables. L'essentiel des actions menées pour réduire leur risque ont pour objectif de diminuer la vulnérabilité des populations, tandis que bien souvent, aucun moyen humain ne permet de réduire l'aléa, dont l'estimation est à elle seule une tâche compliquée à réaliser. Un aléa d'origine naturelle est en effet très difficile à caractériser, puisqu'il peut lui-même être causé par des phénomènes d'une ampleur plus importante. On parle alors d'évènements collatéraux ou secondaires. C'est presque systématiquement le cas pour les éboulements rocheux qui sont des conséquences de phénomènes géologiques ou climatiques,

comme un épisode sismique ou de fortes précipitations (voir Figure 2.1). Il est alors possible d'identifier les masses rocheuses susceptibles de se décrocher, mais il est autrement plus compliqué de prédire le moment de la rupture. La prévision des aléas naturels nécessite de comprendre la séquence des phénomènes qui les cause. Les rapports de l'UNISDR soulignent sur ce point le rôle fondamental de la science et de la recherche. Une partie seulement de notre connaissance est le résultat d'observations passées. Les phénomènes naturels évoluent dans le temps et l'activité humaine modifie durablement l'environnement au sein duquel ils se produisent. La prévision des aléas naturels reste ainsi un enjeu scientifique important pour les années à venir. Pour prendre un exemple en lien avec les éboulements rocheux, une étude comparant les prévisions de plusieurs logiciels de trajectographie a été réalisée dans le cadre du projet national C2ROP (voir paragraphe 2.3.1). Dans ce contexte, la propagation des masses rocheuses est un aléa à part entière dont la probabilité vient s'ajouter à celle des conditions de mise en mouvement des blocs. L'objectif de l'étude était de confronter les résultats obtenus par différents opérateurs utilisant différents logiciels, avec les données des trajectoires obtenues expérimentalement in-situ. Le bilan de l'exercice a révélé une très grande dispersion des résultats numériques, et l'incapacité des logiciels à reproduire certains phénomènes observés expérimentalement [24].



FIGURE 2.1 – Eboulement rocheux en mars 2018 dans la région de Menton en raison de fortes intempéries (source : monacomatin)

Evaluation de la vulnérabilité

La quantification de la vulnérabilité est, en règle générale, plus facile à réaliser. Elle est objectivée en monétisant les pertes susceptibles d'être occasionnées par l'aléa. Par exemple, pour un éboulement rocheux, les enjeux peuvent être la vie des riverains et l'intégrité de leurs biens lorsque les zones touchées par les masses sont résidentielles, ou des coupures sur les réseaux de communication et de transport dans des régions inhabitées. Dans tous les cas, ces préjudices potentiels peuvent être évalués quantitativement avec une précision satisfaisante. La mesure de la vulnérabilité à un aléa par le préjudice potentiel n'est toutefois pas le meilleur critère, puisqu'il ne rend pas directement compte de la résilience de la société touchée. Il peut être préférable de lier le préjudice au potentiel économique. Dans une grande majorité des cas, la vulnérabilité est étroitement corrélée avec la précarité socioéconomique des populations [94].

2.1.3 Mesures de réduction du risque

En dépit des nombreux verrous scientifiques qui complexifient la connaissance de l'aléa éboulement rocheux, l'évaluation du risque doit être menée jusqu'au bout en suivant la méthodologie présentée au paragraphe 2.1.1 afin de proposer, si nécessaire, des mesures de réduction pour rendre celui-ci acceptable. Comme évoqué précédemment, ces mesures peuvent agir, soit directement sur l'aléa, soit diminuer la vulnérabilité des enjeux exposés à la menace. Deux situations réelles, présentant chacune un des deux scénarios, sont discutées dans la suite du paragraphe.

Réduction de la menace

Le risque d'éboulement rocheux est l'un de ceux pour lesquels des moyens de réduction de la menace, efficaces et faciles à mettre en oeuvre, existent. La démarche, de l'évaluation du risque au déploiement de parades adaptées, est illustrée ici au travers d'une étude réalisée par le CETE de Lyon pour le compte de la SNCF [96]. Son objet est la protection d'un tronçon de la principale ligne de fret reliant la France à l'Italie. Le contexte économique du projet interdisait l'utilisation de mesure radicale, visant à réduire la vulnérabilité de la voie, comme une modification du tracé ou un passage en tunnel. L'étape d'analyse du risque s'est déroulée en deux temps. Il a fallu en premier lieu effectuer une reconnaissance du site, afin de déterminer ses données géologiques d'ensemble ainsi que ses principaux mécanismes d'évolutions. Cette première phase d'étude a permis d'identifier les causes d'instabilité et ainsi d'évaluer l'aléa primaire. Dans un second temps, une étude géomécanique a été conduite pour reconnaître les principales masses instables, ainsi que leurs conditions de stabilité et les paramètres des potentiels éboulements. Cette seconde phase a permis de quantifier les aléas secondaires de rupture et d'éboulement. L'évaluation du risque ayant par la suite révélé que celui-ci n'était pas acceptable, une parade adaptée a alors dû être choisie. Ce choix repose sur l'ensemble des données récoltées pendant la phase d'analyse de risque, comme le volume des masses instables, la nature des mécanismes de rupture ou la topographie du terrain. Les parades sont usuellement classées en deux familles [44, 96, 65].

Les parades actives. Le rôle de ces parades est de diminuer la menace de rupture, soit en stabilisant les masses instables, soit en les supprimant [96, 65]. Dans le premier cas des ouvrages de soutènement ou de renforcement sont utilisés. On peut notamment citer des solutions comme la construction de massifs en béton, ou le déploiement d'ancrages et de filets plaqués (Figure 2.2 (a) et (b)). Les solutions visant à supprimer des volumes importants de massif rocheux, comme le reprofilage ou les purges, doivent être utilisées avec une plus grande précaution afin de ne pas affaiblir d'avantage le site à sécuriser (Figure 2.2 (c)).

Les parades passives. Lorsque les masses instables ne peuvent pas être supprimées ou sécurisées, l'alternative, qualifiée de mesure passive, consiste à réduire l'aléa lié à leur propagation. Pour cela les masses peuvent être interceptées en un point donné de leur trajectoire initiale, ou alors, être déviées pour que leurs nouvelles trajectoires évitent les zones à protéger. Dans le premier cas, les ouvrages de protection peuvent être implantés dans la pente, comme les filets de protection pare-blocs, ou à son pied comme les merlons (Figure 2.3 (a) et (b)). Dans le second, l'ouvrage doit être installé sur une distance plus importante comme pour les filets déflecteurs (Figure 2.3 (c)). Pour avoir un meilleur aperçu du large éventail

des parades passives, il est possible de se référer aux ouvrages publiés par le LCPC [65, 44].

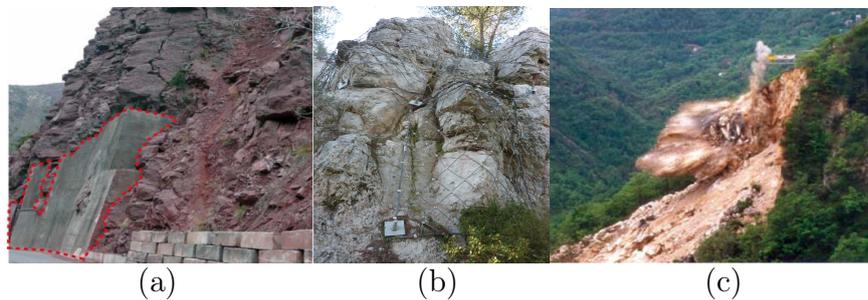


FIGURE 2.2 – Exemples de parades actives : (a) Mur de soutènement (source : BRGM) ; (b) Filet plaqué (source : GIA Ingénierie) ; (c) Reprofilage (source : BRGM)

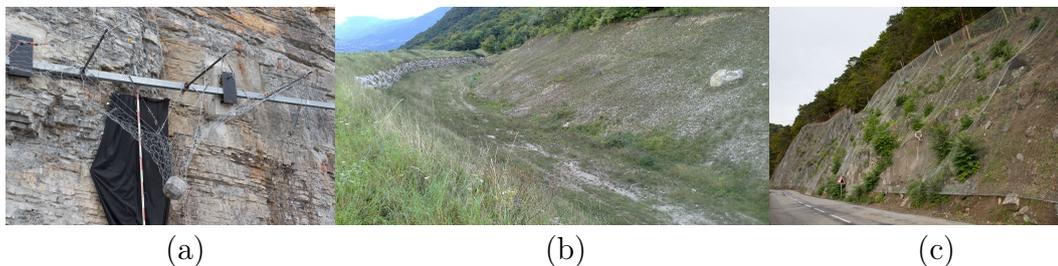


FIGURE 2.3 – Exemples de parades passives : (a) Ecran de protection pare-blocs (source : C2ROP) ; (b) Merlon (source : Wikipédia) ; (c) Filet déflecteur (source : Avaroc)

Réduction de la vulnérabilité

Les mesures réduisant la vulnérabilité sont utilisées dans les cas extrêmes où les parades, quelles soient actives ou passives, sont insuffisantes pour garantir la sécurité des populations. Les solutions employées peuvent être radicales et consistent souvent à dépeupler les zones menacées, grâce notamment à des expropriations et la fermeture d'infrastructures de transport. Un exemple d'actualité concerne la Route du Littoral (RN1) sur l'île de la Réunion. Le tronçon de 12 km, surplombé par une falaise, a été le lieu de nombreux travaux de protection au cours des trente dernières années. La quasi-totalité du tronçon a été équipée de filets plaqués et d'ouvrages déflecteurs pour recouvrir au final près de 44 % de la surface de la falaise. Par ailleurs, un gabion a également été installé le long du tracé [8]. Malgré l'ampleur des efforts déployés pour sécuriser la route, une déclaration d'utilité publique a été déposée en 2012 pour construire une nouvelle route à l'écart de la falaise.

La gestion du risque d'éboulements rocheux, de l'identification de l'aléa au dimensionnement de la parade, nécessite la collaboration de nombreux métiers. En plus d'être la structure de génie civil complexe présentée au prochain paragraphe (Paragraphe 2.2), l'écran de protection pare-blocs doit également être appréhendé comme l'aboutissement d'un processus de réflexion complet, dont l'objectif est de protéger les populations. Les travaux majeurs qui ont conduit à sa standardisation sont présentés dans le prochain paragraphe.

2.2 Les écrans de protection pare-blocs

2.2.1 Présentation de l'ouvrage

Les écrans de protection pare-blocs, ou écrans de filets, sont des ouvrages de protection passifs dont la fonction est d'intercepter les masses rocheuses en mouvement, pour une gamme d'énergie donnée (Figure 2.3 (a)). Ils sont économiquement très compétitifs, faciles à mettre en œuvre et, pour les ouvrages les plus sophistiqués, leurs performances sont quasiment comparables à celles des galeries en béton [44]. D'après la norme européenne [45], ils doivent être composés des groupes d'éléments suivants :

- Une structure d'interception, en charge de l'arrêt du bloc et de la transmission des efforts afin que ces derniers soient acheminés jusqu'aux ancrages ;
- Une structure de support, équivalente aux superstructures dans les ouvrages courants de génie civil, qui maintient la nappe d'interception grâce à des éléments assurant la liaison ;
- Les éléments de liaison, dont le rôle est de transmettre les efforts aux fondations.

Les ancrages ne sont pas considérés comme des composants à part entière de l'ouvrage, et même s'ils sont essentiels pour garantir le bon fonctionnement de l'écran sur le terrain, les concepteurs ne sont pas tenus de les justifier pour certifier leurs produits. Le parti est pris dans ce travail de ne pas étudier leur dimensionnement et de considérer qu'ils sont parfaits.

Les technologies et les architectures des écrans commercialisés peuvent légèrement varier selon les constructeurs, mais le fonctionnement global de l'ouvrage reste toujours le même. Un bloc impactant l'écran est intercepté par un filet métallique (*structure d'interception*) qui glisse le long de câbles de rive (*éléments de liaison*), eux-mêmes maintenus par des poteaux, ancrés à la paroi en pied (*structure de support*). Les têtes de poteaux peuvent être stabilisées par des câbles de haubannage (*structure de support*) qui remontent les efforts aux ancrages. Pour les écrans haute énergie, des composants chargés de dissiper l'énergie du projectile sont installés le long des câbles de rive ou des haubans (*éléments de liaison*). Un schéma d'écran reprenant les principaux composants est présenté sur la figure 2.4.

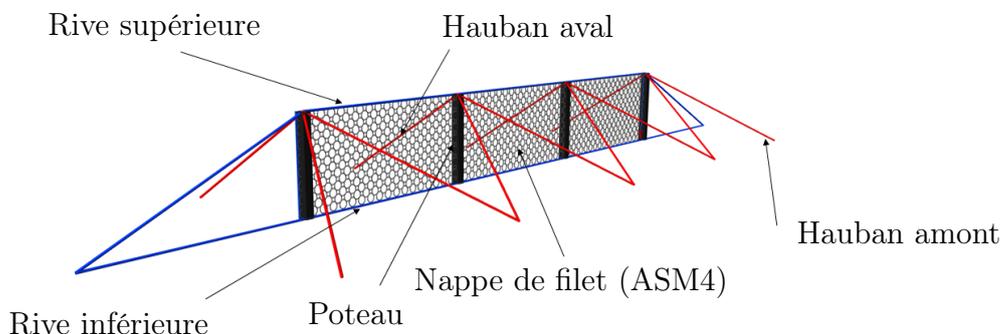


FIGURE 2.4 – Schéma de principe d'un écran pare-blocs

2.2.2 Le cadre réglementaire de l'ETAG27

Genèse de l'ETAG27

Depuis 2008, un agrément technique européen est délivré aux écrans pare-blocs afin d'harmoniser les pratiques de conception sur le marché européen. Ce marquage est accordé selon le respect des recommandations fournies par le guide technique de référence : l'ETAG27 [45]. La rédaction de ce guide est le fruit de plusieurs décennies d'expérimentation, dont les étapes marquantes ont été recensées dans un article de J.D. Duffy [41]. La parution des premiers travaux scientifiques, avec pour objet d'étude l'impact d'écrans de protection, remonte au début des années 1960. Les premières tables, construites empiriquement, et critères de dimensionnement apparaissent également durant cette période. Mais jusqu'à la fin des années 1980, la majorité des travaux est consacrée à la propagation des masses rocheuses, tandis que le sujet du dimensionnement des ouvrages de protection tarde à émerger. Les premiers projets de recherche, dont l'objectif est d'évaluer les capacités des écrans pare-blocs, voient le jour aux Etats-Unis à la fin des années 1980. Ces travaux précurseurs vont être suivis par de nombreuses campagnes expérimentales, amenant à maturité le champ disciplinaire pour finalement conduire, en Europe, à la rédaction de l'ETAG27. Les résultats de ces essais ont pour la plupart été documentés par des publications scientifiques. Une bibliographie est proposée dans la synthèse des recommandations de l'ETAG27 rédigée par D. Peila et C. Bronco [78].

La commission européenne en charge de la rédaction du document avait pour consigne de répondre aux problématiques suivantes [78] :

- Identifier les caractéristiques que doivent respecter les écrans de filets ;
- Etablir une méthode pour vérifier et évaluer ces caractéristiques ;
- Identifier les valeurs seuils que l'ouvrage doit respecter ;
- Définir des essais de caractérisation adaptés pour les composants de l'écran.

Comme évoqué précédemment, elle a notamment pu, pour soumettre ses recommandations, s'appuyer sur les pratiques de dimensionnement déjà en vigueur dans les différents pays européens, complétées par de nombreuses données scientifiques. Le critère utilisé jusqu'alors dans les pays de l'arc alpin était l'énergie maximale que pouvait dissiper un écran. La Suisse était par ailleurs le seul pays à disposer d'un guide formel pour dimensionner ses ouvrages, et il n'est pas étonnant que l'ETAG27 en soit fortement inspiré [55].

Essais de validation

Un essai normalisé, dont l'issue valide ou non les performances de l'écran vis-à-vis de la certification européenne, est né des réflexions menées par le groupe de travail. Les barrières testées doivent posséder au moins trois modules (un module étant limité par deux poteaux consécutifs) et l'énergie ainsi que la trajectoire du bloc impactant être contrôlées, ce qui contraint fortement la topologie du site d'essais. Le projectile est un bloc en béton, plein ou renforcé, de forme polyédrique (cf. Figure 2.5). Sa masse ainsi que sa taille sont variables en fonction de la barrière à tester, cette dernière ne pouvant cependant pas dépasser un tiers de la hauteur nominale de l'écran (h_N sur la figure 2.6). La vitesse d'impact doit, quant à elle, être au minimum de 25 m.s^{-1} . La procédure de certification prévoit trois impacts distincts à deux niveaux d'énergie différents.

Lors du premier essai, l'écran doit être capable d'arrêter un bloc dont l'énergie d'impact

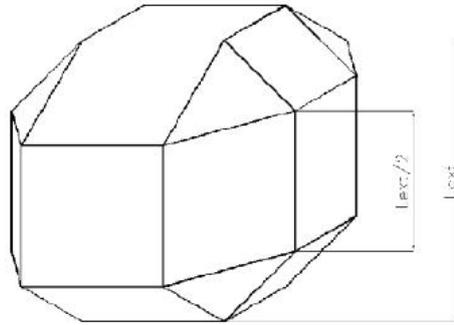


FIGURE 2.5 – Bloc normalisé pour l’essai ETAG (source : ETAG027 [45])

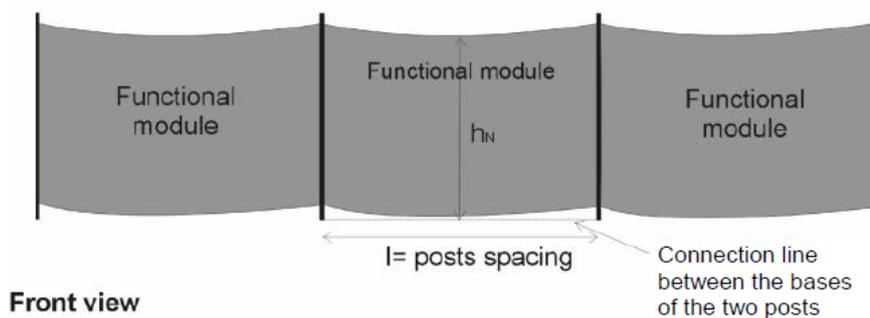


FIGURE 2.6 – Schéma d’un écran testé selon les conditions ETAG (source : ETAG027 [45])

définit sa capacité maximale. Ce niveau d'énergie est appelé MEL (Maximum Energy Level). L'essai est considéré comme réussi si :

- le bloc est arrêté;
- le bloc n'a pas touché le sol avant que l'élongation maximale de l'écran soit atteinte.

Les deux autres impacts sont réalisés à un niveau d'énergie appelé SEL (Service Energy Level) qui est trois fois inférieur à celui du MEL. Deux blocs sont lâchés dans la même barrière qui ne doit subir, entre les deux impacts aucune autre intervention que le retrait du premier bloc. Pour passer avec succès ce second test, l'écran doit remplir les exigences suivantes :

- pour chacun des deux impacts, le bloc ne doit pas être en contact avec la pente avant que l'élongation maximale de la barrière soit atteinte;
- aucun élément de connection ne doit rompre à la suite du premier impact, et la dimension des mailles du filet doit rester inférieure à deux fois leur dimension initiale. De plus, la hauteur résiduelle du filet doit rester supérieure à 70 % de sa hauteur nominale (h_N sur la figure 2.6). Cette grandeur correspond à la hauteur du filet, mesurée perpendiculairement à la pente après impact. Elle est considérée comme la limite, afin que la surface du module impacté reste suffisante pour arrêter un autre bloc.

Energy level classification	0	1	2	3	4	5	6	7	8
SEL	-	85	170	330	500	660	1 000	1 500	>1 500
MEL \geq	100	250	500	1 000	1 500	2 000	3 000	4 500	>4 500

FIGURE 2.7 – Classement des écrans d'après l'ETAG 027 (source : ETAG027 [45])

Les écrans sont donc certifiés pour un niveau d'énergie donné et défini au préalable par le constructeur. Les résultats de ces deux essais permettent de classer les ouvrages en fonction de leur niveau de performance. Les différentes classes d'écran, ainsi que le niveau d'énergie auquel elles correspondent sont regroupés dans le tableau 2.7. Il existe également un second classement, basé sur la hauteur résiduelle après l'essai au MEL. Les barrières sont cette fois répertoriées selon trois catégories :

- A : $\geq 50\%$ de la hauteur nominale,
- B : $\in [30\%, 50\%]$ de la hauteur nominale,
- C : $\leq 30\%$ de la hauteur nominale.

En 2018, l'ETAG27 a été remplacé par l'EAD (document d'évaluation européen en français) *Falling rock protection kits*. Si le contenu technique du guide reste sensiblement le même, les ouvrages sont maintenant certifiés pour une durée illimitée, alors qu'il ne l'était que pour cinq ans avec l'ETAG27. Au total, pas moins de 66 écrans ont été certifiés selon les critères de l'ETAG27 entre 2008 et 2018, pour une gamme d'énergie allant de 100 kJ à 10 MJ. Un bilan de l'ensemble de ces essais de certification a été réalisé par A. Volkwein [98]. L'ETAG27 a construit un cadre réglementaire pour évaluer les performances des écrans pare-blocs. Cependant, il ne fournit aucune information sur le comportement des ouvrages en dehors de ce cadre idéal, dans des conditions réelles d'utilisation. Une des pistes suivies, afin de répondre à cette question fondamentale pour les maîtres d'ouvrage, est la simulation numérique, qui permet de réaliser des calculs prédictifs à moindre coût. La plupart

des travaux scientifiques récents vont dans ce sens, même si des campagnes expérimentales originales tentent également de caractériser le comportement d'écrans soumis à des impacts non standards (voir Paragraphe 2.3.3). Le prochain paragraphe (Paragraphe 2.2.3) situe ce travail de thèse parmi les problématiques scientifiques actuelles.

2.2.3 Travaux récents et enjeux scientifiques actuels

L'exigence des critères de l'ETAG27 a renforcé le besoin d'outils fiables pour dimensionner les écrans de filets pare-blocs. De nombreux travaux de recherche mettent ainsi en œuvre des approches numériques pour prédire le comportement des écrans. Le plus souvent, l'intégralité de la structure est modélisée à l'échelle des composants, et le problème est ensuite résolu de manière déterministe avec une méthode convenablement choisie.

Modélisation numérique d'un écran de filets pare-blocs

Les approches par éléments discrets. Les approches par éléments discrets sont relativement simples d'utilisation pour modéliser les écrans pare-blocs. La topologie caractéristique du filet, avec des vides inclus dans un réseau filaire, légitime en effet une modélisation particulière. Elles ont notamment eu un succès important pour représenter les filets ASM, qui sont formés par un réseau d'anneaux assemblés à la manière d'une côte de maille, de telle sorte que le contact entre deux anneaux puisse être considéré ponctuel (cf. Paragraphe 3.1.2). Les anneaux sont traditionnellement représentés, soit par une unique particule en leur centre ([71, 72]), soit par les contacts avec leurs voisins ([59, 97, 27]). Que ce soit pour le filet, ou les autres composants de l'écran, la nature des interactions entre les particules du modèle discret doit être déterminée par des tests mécaniques sur les éléments isolés [15].

Les approches par éléments finis. Les modélisations par éléments finis, très populaires dans le génie civil, sont robustes et facilement implémentables grâce aux nombreux logiciels de calcul à la disposition de l'utilisateur. Elles permettent également de reproduire des phénomènes locaux complexes, comme l'endommagement ou la rupture, mais au prix d'une modélisation relativement lourde [47]. Un mode de rupture local du filet appelé le "*bullet effect*", dépendant de la vitesse et des dimensions du projectile, a pu être en partie caractérisé grâce à ce type d'approche [21, 89].

S'il existe deux écoles pour la modélisation de la structure, la démarche de l'étude reste la même. Un travail préliminaire important doit être réalisé pour modéliser la géométrie et le comportement mécanique de chacun des composants de l'écran. La précision et la simplicité du calcul sont déterminés par cette étape cruciale, au travers de laquelle l'utilisateur définit les performances attendues. La résolution du problème complet est ensuite une formalité avec des outils numériques adaptés. Ces approches de dimensionnement paraissent fiables, tant du point de vue de la réglementation ETAG27, que pour reproduire des conditions réelles d'utilisation. Elles ne nécessitent pas non plus de connaître le fonctionnement de l'ouvrage a priori, puisque celui-ci est complètement déterminé par le choix des propriétés géométriques et matérielles, affectées à chacun des composants. Leurs principales limites restent pour l'instant les temps de calcul parfois prohibitifs, qui restreignent leurs champs d'utilisation aux applications précédemment citées.

Approches intégrées et modèles de substitution

Les critères de dimensionnement fournis par l'ETAG27 font abstraction des sollicitations réellement appliquées à l'écran, avec l'hypothèse tacite que le cas de charge dimensionnant est celui de la plus haute énergie d'impact, prévue par les études de trajectographie. Cependant, la dispersion des résultats obtenus et les incertitudes qui les entourent complexifient l'estimation de cette énergie cible. Plutôt que de sélectionner une énergie critique, dont le choix peut sembler arbitraire d'un point de vue statistique, une alternative consiste à prendre en compte la variabilité des conditions d'impact pour le dimensionnement de l'ouvrage. F. Bourrier *et al.* ont proposé une méthodologie pour déterminer la hauteur d'un écran de protection à partir des données d'impacts in-situ [19]. A partir de nombreuses simulations de trajectographie 3D, des densités de probabilité ont été évaluées pour la vitesse et l'angle d'impact des masses rocheuses, afin de pertinemment sélectionner un nombre restreint de cas de charge dimensionnants à tester numériquement (cf. Figure 2.8). Si elle permet de réaliser un dimensionnement réaliste, cette méthode peut être toutefois coûteuse en temps de calcul, en fonction du nombre de tirages réalisés. Le travail complémentaire a été effectué par D. Toe *et al.* avec le développement de "méta-modèles", capables de déterminer si le bloc est arrêté ou non, et de calculer son énergie résiduelle en cas de rupture de l'ouvrage. Les "méta-modèles" sont construits par apprentissage et fournissent, à partir de données d'entrée, un jeu de paramètres identifié dans un temps très court. L'inconvénient de ces méthodes reste le temps d'apprentissage : pour cette étude, 280 simulations ont dû être réalisées par des calculs éléments finis, en faisant varier différents paramètres d'impact. La combinaison de l'étude de trajectographie et du "méta-modèle" a un potentiel évident, puisqu'elle pourrait permettre d'optimiser l'implantation de l'écran sur la pente, sans générer de coût supplémentaire en calcul.

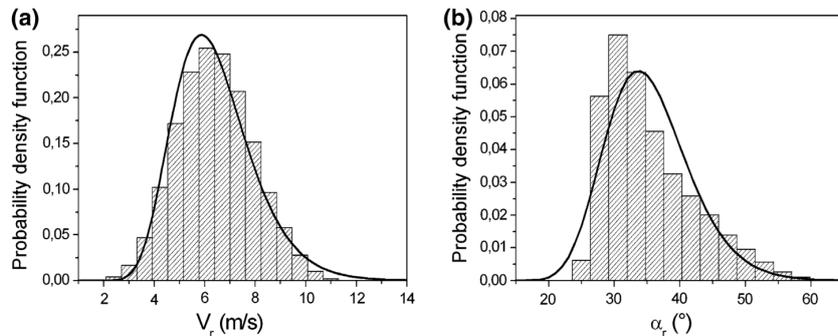


FIGURE 2.8 – Loi de probabilité log-normale obtenue à partir des résultats d'une étude de trajectographie (source : [19])

Si l'utilisation de ces modèles permet de dimensionner les ouvrages pour une large gamme de conditions d'impact, elle peut également optimiser leurs paramètres structuraux dans le cadre du test ETAG27. Cette application est actuellement approfondie par L. Dugelas dans le cadre de sa thèse de doctorat et a été appliquée par J. Coulibaly *et al.* au prototype d'écran C2ROP [28]. L'intérêt est indéniable pour les concepteurs dans le contexte législatif actuel. Le principe de la méthode reste le même, des simulations d'apprentissage sont réalisées avec un modèle complet de l'ouvrage, en faisant varier cette fois ses paramètres matériaux

et géométriques pour un impact donné [42]. Le modèle de substitution créé décrit ainsi le comportement de l'ouvrage en fonction des paramètres de conception choisis par l'utilisateur.

Les modèles construits par apprentissage suscitent actuellement un engouement important. En plus de leur potentiel en temps de calcul, ils bénéficient d'un contexte scientifique favorable, avec la popularisation du recours à l'intelligence artificielle pour résoudre des problèmes d'ingénierie. Leurs limites restent cependant celles des calculs numériques classiques, qui sont obligatoires pour les alimenter et demeurent ainsi la base de toutes modélisations. Du point de vue de la compréhension du fonctionnement de l'ouvrage, la démarche intellectuelle derrière ces modèles de substitution pourrait être interprétée de la manière suivante. La modélisation précise des composants de l'écran qui s'appuie, soit sur des observations récoltées lors d'essais mécaniques (comportement des dissipateurs et de la nappe de filet), soit sur des acquis d'expériences (modélisation de l'effet rideau, Paragraphe 3.1.3), permet de réaliser un calcul prédictif du comportement de l'ouvrage complet avec un outil numérique judicieusement choisi. Les résultats de ces calculs sont plus ou moins réalistes en fonction des phénomènes physiques intégrés à la modélisation, et dépendent des paramètres et des hypothèses retenus par l'utilisateur. Bien souvent, la difficulté pour interpréter les résultats des simulations augmente avec la complexité de la modélisation. Il peut être alors nécessaire d'étudier l'influence de chacun des paramètres du problème afin de développer une connaissance systémique de la structure, et les modèles de substitution paraissent alors incontournables.

Modèles simplifiés

L'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs de bureau a inévitablement orienté les développements numériques vers la conception de modèles complets de structure. Cependant pour simplifier l'interprétation des résultats et diminuer les temps de calcul, la stratégie intuitive de l'ingénieur consiste à simplifier au maximum le problème qui lui est posé. Pourtant, relativement peu d'études ont suivi cette piste de réflexion. Ce constat peut sans doute être expliqué par une connaissance incomplète du système étudié ainsi que l'apparente complexité des phénomènes physiques dont celui-ci est le siège. D. Peila *et al.* ont été les premiers à développer une méthode analytique pour dimensionner un ouvrage complet [77] (cf. Figure 2.9). Cette approche n'est possible qu'en considérant un chargement statique équivalent, qui est ici déterminé par retour d'expérience. Selon les auteurs, le chargement équivalent pertinent est la force d'inertie maximale appliquée au bloc au cours de l'essai. Comme cette grandeur n'a pas été mesurée expérimentalement, elle a été estimée égale à 2,5 fois la décélération moyenne du bloc, calculée en fonction de la distance d'arrêt et de l'énergie totale dissipée. Une des hypothèses fortes de ce modèle qui sera discutée dans ce manuscrit (cf. Chapitre 4) est de négliger l'influence des phénomènes dynamiques sur le comportement de la structure. Malgré son élégance, cette méthode a besoin de données expérimentales pour déterminer le chargement équivalent et ne se suffit ainsi pas à elle-même.

Toujours avec la volonté de proposer une modélisation simplifiée de l'écran, L. Govoni *et al.* ont utilisé une représentation 2D de la structure pour alléger leurs simulations numériques. Tous les éléments contenus dans la largeur de l'écran sont pour cela ramenés dans le plan de symétrie orthogonal à la falaise [58]. Cette simplification diminue significativement la dimension du problème, mais n'est possible que dans le cas d'un essai normalisé, où le bloc impacte le centre de la structure. La structure, présentée sur la figure 2.10, est décrite par des éléments finis de poutre. La génération de tels modèles nécessite une réflexion

sur le choix des propriétés mécaniques pertinentes à attribuer à chacun des éléments de la structure 2D. Les composants réels de l'écran ont, pour la plupart, des comportements fortement non-linéaires et les équivalences avec des modèles autant simplifiés peuvent s'avérer périlleuses.

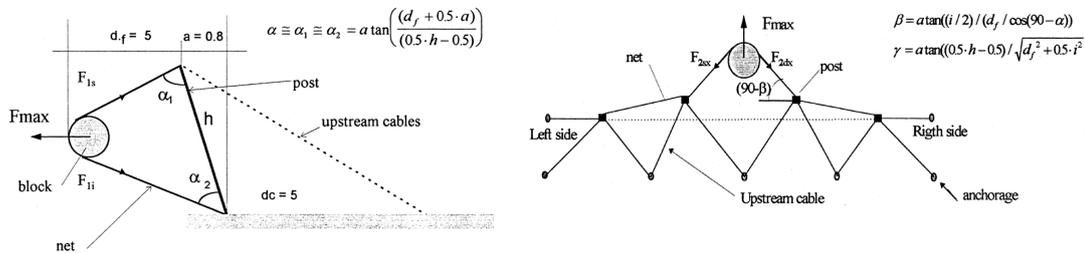


FIGURE 2.9 – Méthode de dimensionnement analytique à partir d'un chargement statique équivalent (source : [77])

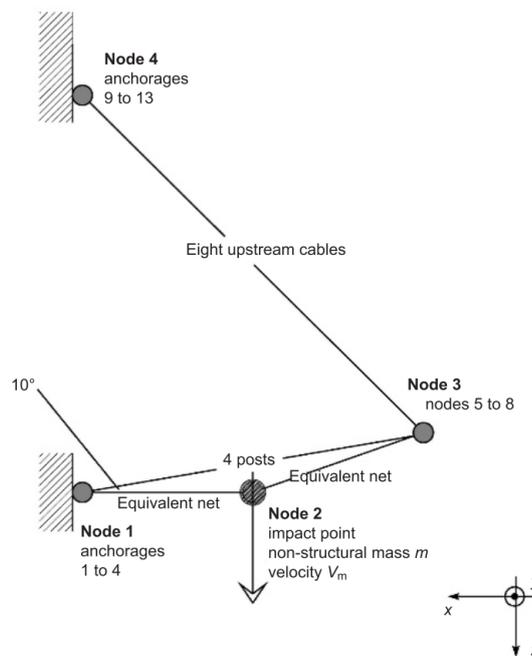


FIGURE 2.10 – Modèle d'écran 2D utilisé pour un calcul éléments finis en dynamique (source : [58])

Les modèles simplifiés présentent le double avantage de diminuer significativement les temps de calcul et de fournir des résultats interprétables. Ils sont le fruit d'un travail de modélisation conséquent qui consiste principalement à choisir les degrés de liberté et les phénomènes pertinents à modéliser, afin de reproduire au mieux la réalité physique du problème. Le prochain paragraphe est consacré au projet national C2ROP, au sein duquel ce travail de thèse s'est pleinement inscrit. Après une présentation générale du domaine d'expertise de ce projet d'une ampleur inédite en France, les problématiques scientifiques

remarquables, qui ont été soulevées grâce aux essais menés dans ce cadre de travail, seront notamment discutées.

2.3 Le projet national C2ROP

2.3.1 Genèse et positionnement scientifique

L'idée de rassembler l'ensemble des métiers du risque rocheux à l'échelle nationale a vu le jour en région Rhône-Alpes. Elle a rapidement conduit à la création du Projet National C2ROP qui a été labellisé et officiellement lancé en mars 2015. Il a pour raison d'être le risque rocheux et s'attaque de front aux problématiques liées aux aléas, à la vulnérabilité et aux parades, en structurant un réseau de professionnels, et en formalisant un cadre de travail et d'expertise transversal. Il compte pour cela sur la collaboration de nombreux partenaires, publics et privés, des secteurs de la recherche, de l'ingénierie et de la maîtrise d'ouvrage.

Le projet C2ROP est organisé autour de trois grands axes structurants : l'axe *aléa*, l'axe *parade* et l'axe *risque* qui pourrait également être appelé axe vulnérabilité (voir Paragraphe 2.1.3). Chacun de ces axes est partitionné en un ou plusieurs groupes, qui travaillent en autonomie sur des thématiques dédiées. Les travaux de cette thèse ont en partie été menés en collaboration avec le groupe *écran souple* de l'axe *Parade*, composé de huit membres partenaires :

- trois maîtres d'ouvrages : le département de la Savoie, le conseil général de l'Isère et la SNCF,
- deux entreprises spécialisées dans la conception et la pose des écrans souples : CAN et NGE Fondations,
- trois établissements d'expertise et/ou de recherche : l'INSA de Lyon, le CEREMA et l'IFSTTAR.

Les deux principaux objectifs de ce groupe de travail sont d'améliorer la compréhension du fonctionnement des écrans souples, ainsi que de proposer des modélisations numériques permettant de réaliser des calculs de dimensionnement. Pour y parvenir, différentes approches de modélisation ont été confrontées à de nombreux essais expérimentaux.

2.3.2 Présentation du prototype d'écran C2ROP

Un prototype d'écran, développé par le groupe de travail, a ainsi servi d'ouvrage de référence pour réaliser l'ensemble des campagnes expérimentales à l'échelle de la structure complète (voir photo sur la figure 2.11). Cet écran a été conçu collégalement par les membres du groupe, spécifiquement pour des activités de recherche et non à des fins commerciales. Il a été élaboré sur le modèle des écrans hautes énergies, en associant notamment une paire de dissipateurs à chacun des câbles des rives inférieure et supérieure. Il a cependant été dimensionné pour une énergie d'environ 300 kJ, qui le répertorie seulement dans la 2^{ème} catégorie de la classification officielle ETAG27, présentée sur la figure 2.7. Il est composé de trois modules de mêmes dimensions, respectivement égales à 5 m selon la direction de la paroi et 2,75 m selon celle des poteaux. La taille de l'écran est également deux fois plus petite que celles des ouvrages habituellement utilisés pour les hautes énergies. Son architecture reprend les éléments classiques présentés au paragraphe 2.2.1. Le filet est maintenu par dix câbles, quatre situés le long de chacune des rives inférieure et supérieure et un le long de chacune des

rives latérales, sur lesquelles sont montés les dissipateurs : un à chaque extrémité pour ceux des rives inférieure et supérieure et un unique pour ceux des rives latérales. Ces dernières sont formées par un câble bouclé passant par le pied et la tête d'un des poteaux latéraux. Le dissipateur est quant à lui installé sur le côté de la boucle qui n'est pas en contact avec le filet. Par ailleurs, les têtes des poteaux, qui sont ancrés en pied, sont stabilisées par des câbles de haubanage, deux sont situés en amont et un en aval. Un hauban latéral est également ajouté pour les deux poteaux d'extrémité. Un schéma technique de l'ouvrage est présenté sur la figure 2.12.



(a)



(b)

FIGURE 2.11 – Photos du prototype d'écran C2ROP : (a) vue de face, (b) vue de côté (source PN C2ROP)

La nappe de filet montée sur l'écran est formée d'anneaux ASM4, dont le comportement a été brièvement présenté au paragraphe 2.2.3 et sera étudié en détail au chapitre 4. Elle compte huit anneaux dans le sens de la hauteur et 36 dans celui de la largeur (12 pour chacun des modules). Comme elle est soutenue par de multiples câbles de rive, le câblage utilisé et illustré sur la figure 2.13, ne garantit pas des conditions aux bords identiques en tout point. Le filet est tenu par deux câbles au milieu de chaque module et un unique à l'aplomb des poteaux. La longueur des câbles appartenant aux rives inférieure et supérieure est environ égale à celle de deux modules. Ces derniers sont attachés à chacune de leurs extrémités, par l'intermédiaire d'un dissipateur, au niveau du pied ou de la tête de deux poteaux non consécutifs. Les quatre câbles représentés en bleu sur la figure 2.13 et respectivement nommés A^{inf} , A^{sup} , A_{bis}^{inf} et A_{bis}^{sup} , sont quant à eux ancrés de part et d'autre du filet, à une distance environ égale celle d'un module, le long de la ligne matérialisée par les pieds des poteaux.

Tous les composants de l'ouvrage sont en acier et les caractéristiques de leurs sections sont regroupées dans le tableau 2.1. Plusieurs campagnes d'essais, à l'échelle des composants

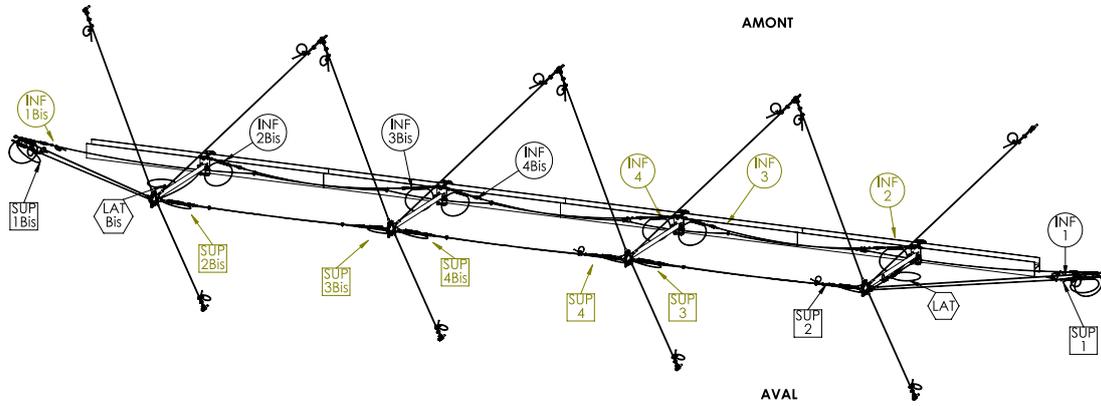


FIGURE 2.12 – Schéma technique de l'écran C2ROP : position des dissipateurs (source : C2ROP, NGE Fondations)

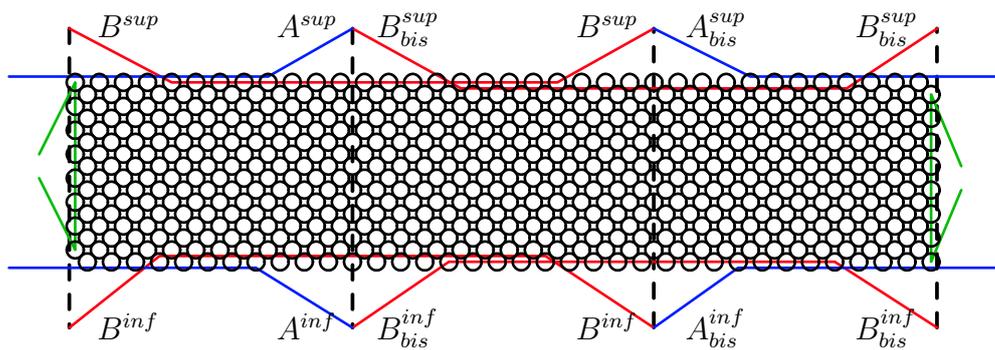


FIGURE 2.13 – Détails du câblage entre la nappe de filet et les câbles de rive

et de la structure complète, ont été menées pour comprendre et analyser le comportement de cet écran [43]. Leurs dispositifs expérimentaux sont brièvement présentés dans le prochain paragraphe (Paragraphe 2.3.3).

Composants	Caractéristiques
Anneaux ASM4	Diamètre intérieur : 27 mm Section : 9 mm
Câbles de rive	Section : 12 mm
Câbles de haubanage	Section : 16 mm
Poteaux	Section circulaire creuse Diamètre extérieur : 89 mm Epaisseur : 8 mm

TABLE 2.1 – Caractéristiques géométriques des différents éléments de structure

2.3.3 Bilan des travaux scientifiques

Pas moins de six campagnes d’essais ont été réalisées dans le cadre du groupe de travail sur les écrans souples depuis le lancement du Projet National. Une importante quantité de données expérimentales a ainsi pu être récoltée pour alimenter les modélisations numériques et améliorer la compréhension du fonctionnement de cette structure. Si toutes les expérimentations sont évoquées dans ce paragraphe, seulement celles exploitées dans la suite du manuscrit seront présentées en détail.

Essais sur les composants de l’écran

Les comportements des dissipateurs et des anneaux ASM4 qui forment la nappe de filet ont été caractérisés expérimentalement par des essais de traction en quasi-statique. Les premiers, dont une photographie est présentée sur la figure 2.14, sont des *freins serpents* qui doivent leur nom à la technologie utilisée pour leur fabrication. Ils sont formés par un câble qui coulisse le long d’un parcours sinueux, en frottant contre des boulons joignant deux plaques métalliques. Leur comportement en quasi-statique est présenté sur la figure 2.15. Une phase linéaire est identifiée en début de chargement, jusqu’à un effort limite dont la valeur est choisie par le concepteur. Cette limite, ici égale à 25 kN (en moyenne), dépend du nombre de boulons autour desquels frotte le câble. Après cette première partie du comportement, pendant laquelle le câble constitutif est mis en tension, l’effort dans le frein est déterminé par la force de frottement. Un léger écrouissage est toutefois observé pour cette sollicitation quasi-statique (voir Figure 2.15).

Les anneaux ASM4 ont, quant à eux, été soumis à deux types de tests mécaniques. Une première série d’essais de traction a été menée sur des anneaux isolés, en testant différentes conditions aux limites. Les influences de ces dernières sur le comportement des anneaux sont expliquées dans le paragraphe 3.1.2. L’objectif du second test était d’étudier le fonctionnement d’un ensemble d’anneaux. Pour cela, une nappe de filet ASM4 carrée et composée de neuf anneaux (trois situés le long de chacun des bords et un au centre) a été soumise à un test de traction uni-axial, dont le dispositif expérimental est présenté sur la figure 2.16 (a).

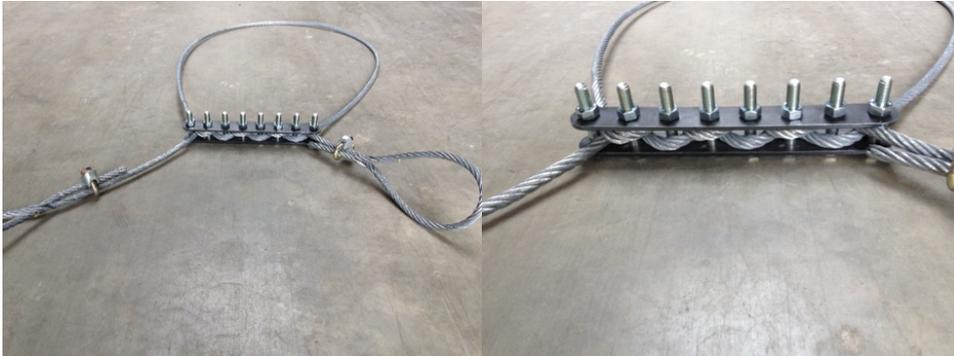


FIGURE 2.14 – Photographies d’un frein serpent utilisé sur l’écran C2ROP (source : C2ROP)

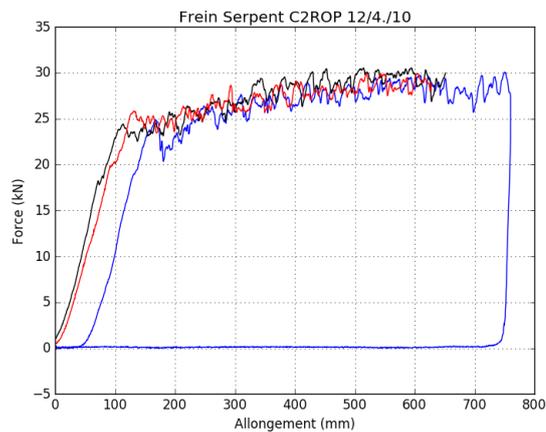


FIGURE 2.15 – Comportement d’un frein serpent sous sollicitation de traction quasi-statique (source : C2ROP, NGE Fondations)

Les quatre bords de la nappe sont maintenus à un cadre rigide par l'intermédiaire de rails, permettant de libérer les déplacements tangentiels (voir Figure 2.16). L'essai est réalisé en imposant le déplacement d'un des bords du cadre, tandis que les trois autres restent fixes. En reprenant les notations de la figure 2.16 (b) et en notant N les efforts aux bords associés, les conditions aux limites sont données par :

$$\begin{cases} u_{a1} = u_a & ; & N_{t1} = 0 & \text{sur le bord 1} \\ u_{a2} = 0 & ; & N_{t2} = 0 & \text{sur le bord 2} \\ u_{a3} = 0 & ; & N_{t3} = 0 & \text{sur le bord 3} \\ u_{a4} = 0 & ; & N_{t4} = 0 & \text{sur le bord 4} \end{cases} \quad (2.2)$$

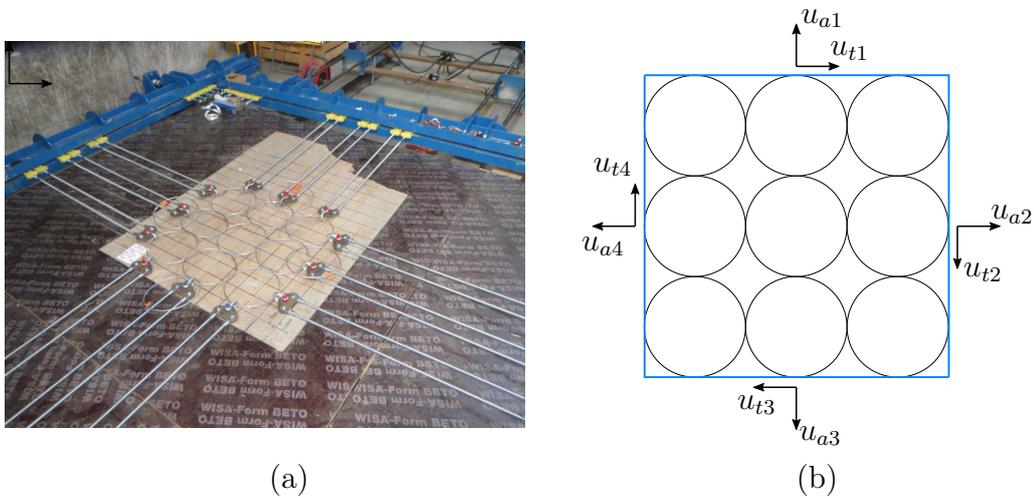


FIGURE 2.16 – Test de traction plan sur une nappe d'anneaux : (a) photo du montage (source : C2ROP, NGE Fondations), (b) conditions aux limites

Le chargement est ainsi imposé en déplacement, avec la grandeur u_a , et les efforts normaux, N_{a1} et N_{a4} , sont mesurés le long de deux bords orthogonaux. Plusieurs cycles de charge / décharge sont appliqués à la nappe, en augmentant à chaque fois le déplacement u_a . Les résultats de cet essai sont présentés sur la figure 2.17 et exploités dans le paragraphe 4.2.1 du chapitre 4. Ce comportement caractéristique des anneaux sera expliqué de manière plus approfondie lors du paragraphe 3.1.2 du chapitre 3. Pour des niveaux de chargement inférieurs à 150 mm, les anneaux se déforment en flexion et des rotules plastiques apparaissent à chaque point de contact entre deux anneaux voisins. Lorsque le déplacement u_a continue d'augmenter, les anneaux se tendent et prennent la forme d'une ligne brisée fermée. Par ailleurs, lorsque les déplacements restent petits, le coefficient de Poisson apparent de la nappe est proche de un.

Essais à l'échelle de l'écran complet

Après que les comportements des composants de l'écran ont été caractérisés, trois campagnes d'essais ont été conduites sur le prototype d'écran présenté au paragraphe 2.3.2.

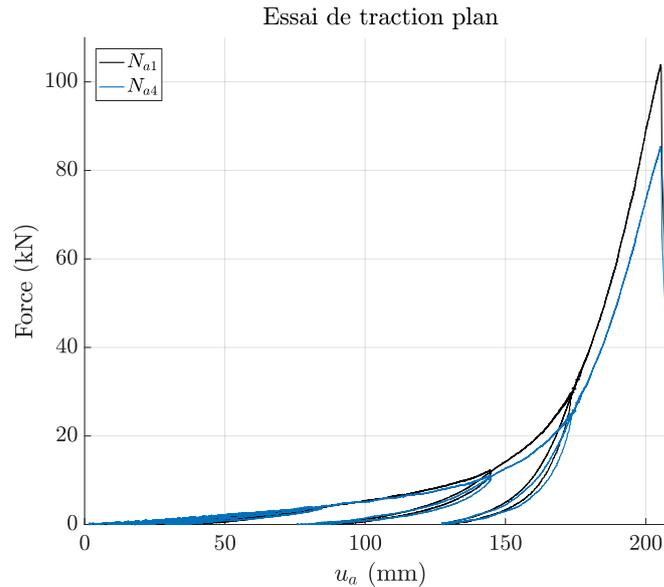


FIGURE 2.17 – Résultats expérimentaux du test de traction plan (source : C2ROP). N_{a1} : effort longitudinal, N_{a4} : effort transversal

Essai quasi-statique. La première campagne ne comprend qu'un unique essai réalisé sous sollicitation quasi-statique, mais reste originale pour une discipline qui plébiscite des sollicitations d'impacts dynamiques. Le chargement a été imposé en deux temps. Dans une première phase, un bloc normalisé ETAG27 de 740 kg a été déposé au milieu du filet, de façon à ce que sa vitesse au moment du contact puisse être considérée nulle. Une fois la structure et le bloc en équilibre, un treuil mécanique a été attaché à la face inférieure de ce-dernier pour lui appliquer un effort de traction selon la direction orthogonale au plan de l'écran au repos (situation illustrée sur la figure 2.18). Le chargement est ainsi imposé en déplacement grâce au contrôle de la vitesse d'enroulement du treuil. L'effort de traction appliqué à la structure, ainsi que les tensions des câbles de rive centraux et de certains haubans sont mesurées pendant toute la durée de l'essai. Le plan d'implantation des capteurs est présenté sur la figure 2.19. La nomenclature utilisée sur la figure 2.13 est reprise ici pour désigner les capteurs. Les tensions dans les câbles de rive sont mesurées à proximité des dissipateurs assurant la connection avec les poteaux extérieurs. En l'absence de frottement, ces valeurs de tension sont mesurables en tout point du câble. A l'inverse, si les anneaux frottent le long de la rive, les efforts remontés par les câbles à l'aplomb du bloc doivent être calculés à partir d'un modèle analytique de frottement ainsi que d'une analyse fine de l'évolution de leurs géométries. Comme ce travail d'exploitation des données est lourd et nécessite des images en haute résolution, il n'a pas été mené ici. Toutefois une discussion sur les efforts de frottement est proposée au paragraphe 2.3.4. Les résultats de cet essai sont notamment utilisés au paragraphe 4.4.2 du chapitre 4.

Essais dynamiques ETAG27. La seconde campagne a été conduite en respectant les directives de l'ETAG27 (voir Paragraphe 2.2.3). En tout, cinq impacts ont été réalisés aux niveaux d'énergie MEL et SEL de l'écran C2ROP, qui ont respectivement été évalués à 270 kJ et 90 kJ. Tout d'abord, deux écrans, montés dans des conditions a priori identiques



FIGURE 2.18 – Equilibre sous poids propre de l'écran et du bloc avant application de l'effort du treuil (source : C2ROP)

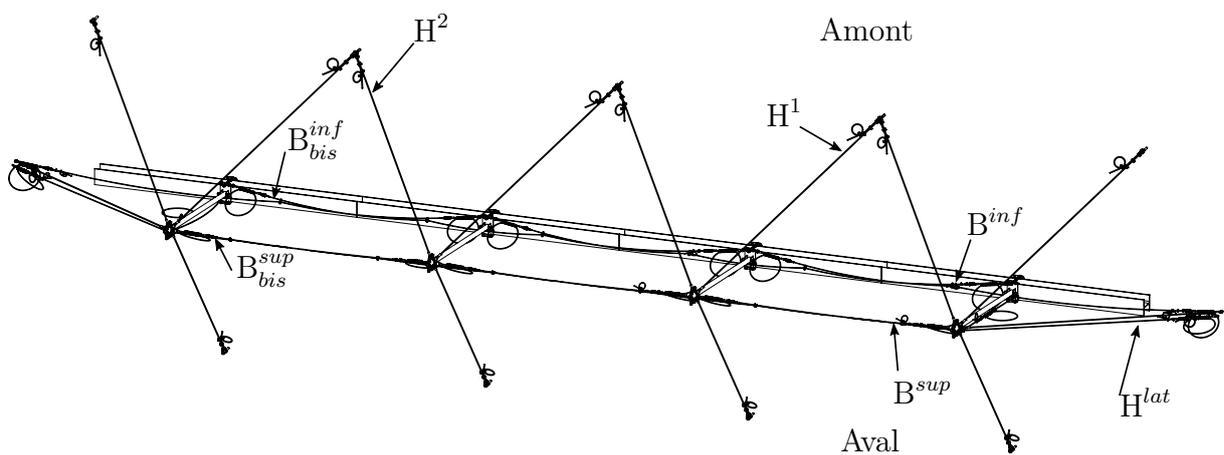


FIGURE 2.19 – Plan d'implantation des capteurs de force dans l'écran C2ROP (source : C2ROP, NGE Fondations)

et initialement non endommagés, ont chacun été impactés avec une énergie MEL. Un même écran, initialement non endommagé, a ensuite subi trois lâchers consécutifs à l'énergie SEL. Le bloc contenu dans le filet a été retiré entre chaque impact, mais aucune réparation n'a été en revanche effectuée. Ce chargement en trois étapes, inspiré de l'essai de validation de l'ETAG27, ne respecte toutefois pas le cadre réglementaire où seulement deux impacts sont préconisés. Le troisième impact permet ici d'appliquer à l'ouvrage une quantité d'énergie totale, comptée sur les trois lâchers, équivalente à celle des essais MEL. Les écrans ont été instrumentés en suivant le plan d'implantation des capteurs utilisés pour l'essai quasi-statique (voir Figure 2.19), l'accélération du bloc ainsi que sa trajectoire ont également été enregistrées grâce à un accéléromètre et une caméra rapide.

Essais non standards. Les essais de cette dernière campagne ont la particularité de ne pas être couverts par le cadre réglementaire de l'ETAG27. Leurs objectifs étaient d'évaluer les performances de l'écran pour des impacts non standards et de déterminer ainsi si les critères de l'ETAG27 sont à eux seuls suffisants pour garantir un bon fonctionnement structurel dans des conditions réelles d'utilisation. Les cinq essais réalisés pendant cette campagne sont énumérés et décrit ci-dessous :

- **Essai sur un module isolé.** Le bloc normalisé est lâché au centre d'un écran, composé d'un unique module au câblage adapté, avec l'énergie MEL de 270 kJ. Cet essai permet de tester l'installation d'un nombre réduit de modules, lorsque le terrain est trop accidenté ou la végétation trop dense pour implanter l'ouvrage complet.
- **Essai sur un écran pré-chargé.** Cette impact est réalisé dans les mêmes conditions que l'essai à l'énergie MEL de la campagne dans les conditions ETAG27, à la différence que chaque module est ici pré-chargé par des masses d'environ 300 kg. Cet essai reproduit la situation réaliste dans laquelle l'ouvrage est encombré par une accumulation de matériaux de faibles volumes.
- **Essai d'impacts consécutifs.** Deux blocs, dont les énergies d'impact correspondent au SEL de l'écran (soit 90 kJ), sont ici lâchés consécutivement dans un des modules latéral et dans le module central. Le premier bloc n'est pas retiré avant le second impact qui est ainsi effectué sur un ouvrage fortement déformé et chargé par une masse concentrée de plus de 700 kg.
- **Essai sur module latéral.** Pour ce test, un des modules latéral de l'écran est impacté à l'énergie MEL, permettant ainsi de quantifier la sensibilité de l'ouvrage à la position de l'impact.
- **Essai d'impact décentré.** Cet essai répond aux mêmes objectifs et exigences que le précédent. Cette fois, plutôt que de viser le même point d'un autre module, le bloc est décentré au sein du module principal en direction d'un poteau et de la rive supérieure. Dans ces régions du filet situées à la frontière entre deux modules, la nature du câblage rend en théorie l'ouvrage plus raide (cette distinction entre le centre des modules et le voisinage des poteaux sera notamment discutée dans les paragraphes 4.5 et 5.2.2).

En plus de l'instrumentation déjà utilisée pour la campagne réalisée dans les conditions de l'ETAG27, une seconde caméra rapide enregistre la chute du bloc et un scanner laser relève la géométrie de l'ouvrage avant et après impact.

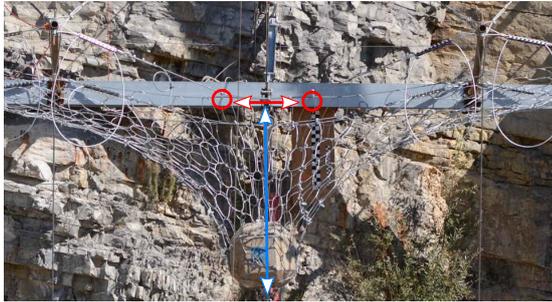
2.3.4 Quelques éléments de compréhension du fonctionnement d'un écran pare-blocs

L'objectif de ce paragraphe est de mettre en lumière certaines caractéristiques essentielles du comportement de l'écran C2ROP observées expérimentalement, afin de justifier la modélisation qui sera présentée au chapitre 3. Les résultats expérimentaux y sont décrits plutôt de manière qualitative que quantitative pour comparer avec le recul nécessaire une grande quantité de données. Parmi les résultats présentés, seules les données des capteurs et les images ont été récoltées collectivement par le groupe de travail. Les analyses ainsi que les divers recoupements qui ont été établis à partir des données brutes sont en revanche originaux et font partie intégrante de ce travail. Le discours est ici consacré à l'influence de la cinématique du bloc ainsi qu'à celles des différents mécanismes de dissipation, qui sont des aspects fondamentaux du fonctionnement de la barrière. Les conclusions de cette étude sont adressées à partir des données expérimentales de l'essai quasi-statique ainsi que de celles des deux essais réalisés à l'énergie MEL, de la campagne menée dans les conditions de l'ETAG27. Les cinématiques de déformation de l'écran sont comparées dans un premier temps à partir des enregistrements vidéo et photographique, tandis que les efforts de traction ou de décélération subis par le bloc lors de chacune de ces sollicitations sont, quant à eux, confrontés, dans un second temps.

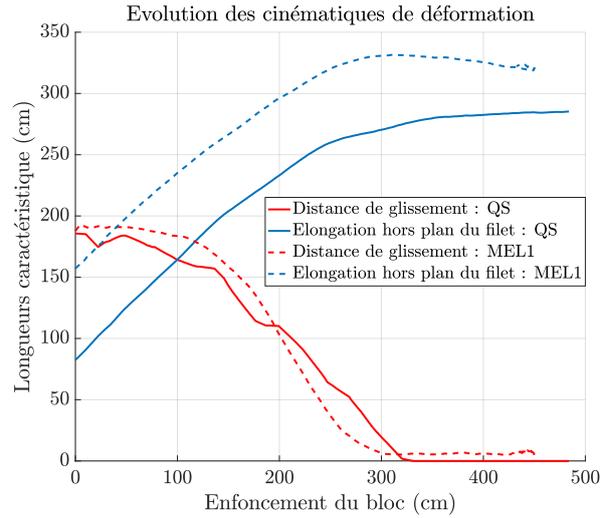
Influence de la cinématique du bloc sur le comportement global de l'écran et étude des régimes de comportement

Comme les vidéos et photographies ont été prises sous un unique angle de vue, depuis une position qui n'est pas précisément connue, il est impossible de reconstruire a posteriori les positions exactes des points du filet. Les grandeurs géométriques, présentées sur la figure 2.20, ont été mesurées à partir de la projection offerte par les caméras, et les rapports d'échelle ajustés grâce aux repères présents dans les images. Les évolutions de ces paramètres sont ainsi décrites de manière qualitative et seules les caractéristiques remarquables du comportement de l'écran sont commentées. Par ailleurs, seules les données récoltées lors du premier essai dynamique sont ici exploitées. Pour éviter toute ambiguïté dans la suite de ce paragraphe, cet essai sera à partir de maintenant appelé MEL1, tandis que celui qui n'est pas traité ici sera nommé MEL2.

Le premier critère géométrique retenu pour cette comparaison est la distance de glissement. Elle est matérialisée en rouge sur la figure 2.20 (a) et définie par la longueur séparant les premiers anneaux respectivement connectés à chacun des deux câbles de rive voisins, dont les plus proches extrémités sont maintenues aux poteaux délimitant le module impacté. Cette mesure permet de quantifier l'effet rideau, ou plus précisément, sa vitesse. La seconde distance est l'allongement du filet, mesurée orthogonalement à son plan de référence et illustrée en bleu sur la figure 2.20 (a). Afin de comparer les deux sollicitations, quasi-statique ou dynamique, les évolutions de toutes les grandeurs sont données en fonction du niveau d'enfoncement du bloc (voir Figure 2.20 (b)). Pour les deux chargements, la déformation hors plan du filet et l'effet rideau sont des événements concomitants qui s'achèvent en même temps, pour un enfoncement du bloc proche de 3,5 m. En restant prudent sur l'interprétation des données numériques issues des analyses d'images, les différences remarquables entre les comportements des deux régimes sont, d'une part la souplesse apparente du filet qui est plus élevée en dynamique (courbes bleues sur le graphique (b)), et d'autre part le



(a)



(b)

FIGURE 2.20 – Comparaison des cinématiques de déformation entre les comportements quasi-statique et dynamique. (a) : Définition des longueurs mesurées, (b) : Evolution de la distance de glissement (en rouge) et de l’allongement du filet (en bleu)

glissement du filet qui est régulier en dynamique tandis qu’il s’effectue par paliers successifs en quasi-statique (courbes rouges sur le graphique (b)). Ce second phénomène peut en partie être expliqué à partir de la loi de frottement de Coulomb qui indique que, lors d’un contact entre deux pièces en acier, la force entraînant la mise en mouvement est supérieure à celle nécessaire pour l’entretenir. Autrement dit, la force de frottement, appliquée par le câble de rive, est naturellement plus faible pour un anneau déjà en mouvement que pour un anneau initialement immobile. L’écart entre les deux mesures de l’allongement initial du filet (courbes bleues) est trop important pour être uniquement causé par un effet de paralaxe. La part qui n’est pas due à un biais de mesure, celui-ci diminuant par ailleurs avec l’enfoncement du bloc, peut vraisemblablement être imputée à la variation des pré-tensions dans les câbles de rive entre ces deux essais.

L’architecture choisie pour l’écran C2ROP, avec les dissipateurs montés aux extrémités des câbles de rive, conduit à des modes de déformation, pour lesquels les allongements des rives sont importants et les déplacements des têtes de poteaux limités. Par ailleurs, le comportement plastique des dissipateurs, présentés sur la figure 2.15 du paragraphe 2.3.3, permet de relier, au moins qualitativement, l’allongement d’un câble rive et de ses dissipateurs avec la quantité d’énergie qu’ils dissipent. A titre d’exemple, l’évolution de la déformation de la rive B_{bis}^{sup} (voir Figure 2.13) est présentée en fonction de l’enfoncement du bloc, pour chacune des sollicitations, sur le graphique (a) de la figure 2.21. Les comportements observés sont remarquablement similaires. Jusqu’à un enfoncement du bloc compris entre 2,5 m et 3 m, la rive B_{bis}^{sup} ne s’allonge que très peu. Puis, une fois cette profondeur dépassée, sa déformation évolue linéairement avec le déplacement vertical du bloc. Ces tendances ont été ici approchées par des lois bi-linéaires, dont les deux pentes sont calculées à partir d’une régression des moindres carrés, pour des enfoncements du bloc compris entre 0 et 2m pour la première et entre 2,5 et 5m pour la seconde. Cette régression permet de définir des niveaux d’enfon-

cement, respectivement égaux à 2,7 m pour l'essai QS et 2,85 pour l'essai MEL1, à partir desquels les dissipateurs du câbles sont activés. L'extrapolation de ce résultat aux autres câbles de rive centraux de l'écran C2ROP (en l'occurrence les câbles : B^{sup} , B^{inf} , B_{bis}^{inf}), permet de reporter cette distance d'activation sur la figure 2.21 (b), illustrant la trajectoire du bloc de l'essai MEL1 en fonction du temps. Sur ce graphique, le déplacement réel du bloc, observé lors de l'essai, est tracé en bleu, tandis que sa trajectoire théorique, dans des conditions de chute libre, est représentée en rouge. Tant que le bloc n'a pas atteint le niveau d'enfoncement précédemment établi, les deux trajectoires sont quasiment confondues, la décélération apparente du bloc ne débutant qu'une fois ce palier franchi. Par ailleurs, les enfoncements évalués sur le graphique (a) de la figure 2.21 coïncident avec ceux à partir desquels les distances de glissement et les élongations du filet, rapportées sur la figure 2.20, sont stationnaires. En définitive ceux ne sont pas deux, mais trois événements remarquables qui sembleraient être concomitants : la fin de l'effet rideau, l'élongation maximale du filet et le déclenchement des dissipateurs.

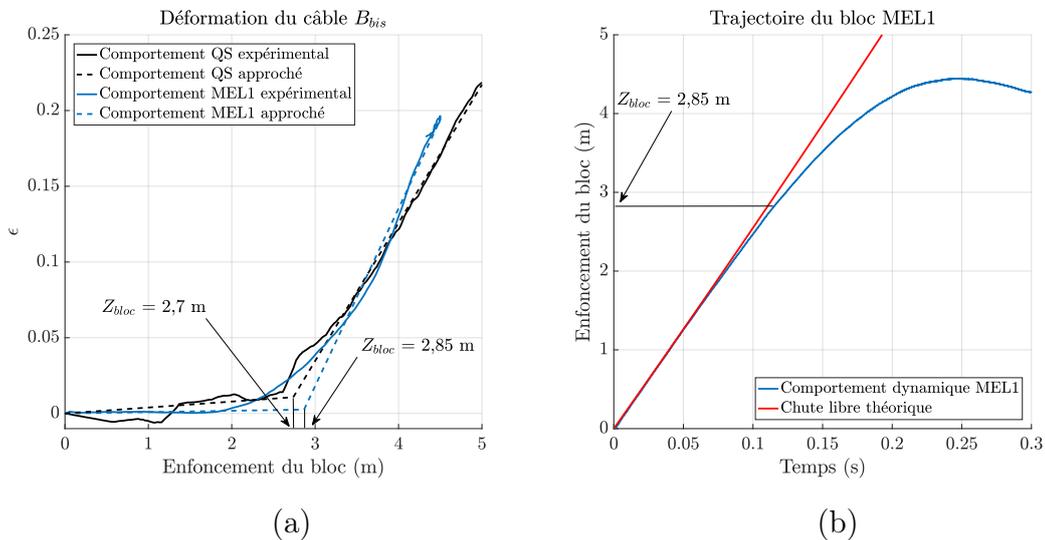


FIGURE 2.21 – Evolution de la déformation du câble B_{bis}^{sup} . (a) : Déformations mesurées par analyse d'images pour l'essai QS et l'essai MEL1 et approximation des résultats expérimentaux par des lois bi-linéaires, (b) : Enfoncement du bloc en fonction du temps pour l'essai MEL1 et comparaison avec une chute libre

Le recoupement des observations, relatives aux géométries du filet et des câbles de rive, permet de différencier deux phases du comportement de la structure, qui ne semblent pas dépendre de la vitesse de sollicitation. Dans un premier temps, la déformation hors plan du filet ainsi que l'effet rideau modifient l'organisation structurale de l'écran. Dans la géométrie initiale, les anneaux de bord du filet sont uniformément répartis le long des câbles de rive, dont les pré-tensions suffisent à garantir la planéité de la structure. Toutefois, l'absence intrinsèque de raideur en flexion des câbles constitutifs de la nappe d'interception et des rives contraint l'écran à se déformer orthogonalement à son plan pour reprendre des efforts appliqués selon cette même direction. Les transformations de cette première phase assurent le passage de la géométrie initiale à une configuration efficace pour transmettre des forces verticales aux ancrages. De plus, puisqu'elles conservent les longueurs des rives, elles sont a

priori réalisées avec des faibles niveaux d'efforts. D'après les informations regroupées sur les figures 2.20 et 2.21, cette première phase prend fin pour un enfoncement du bloc compris entre 2,5m et 3 m dans le cas de l'écran C2ROP. A la fin de celle-ci, la forme de la structure, au sens géométrique, est quasiment définitive. Les déformations du filet restent ensuite limitées et seuls les allongements des différentes rives, provoqués par le fonctionnement des dissipateurs, continuent d'augmenter. La seconde phase est ainsi caractérisée par le défilement des dissipateurs (dans le cas des freins *serpents*) et s'achève lorsque le bloc atteint son enfoncement maximal et que la quasi-totalité de l'énergie d'impact a été dissipée.

En introduction de ce paragraphe, il a été mentionné que le comportement de l'écran serait plus décrit de manière qualitative que quantitative. Si les mesures réalisées à partir des analyses d'images ont tout de même été récoltées avec attention, leur précision est difficilement quantifiable et aucun intervalle de confiance n'a pu leur être associé. Toutefois, le découpage "observable" du comportement de l'écran, a volontairement été déduit de ces mesures, qui malgré leur manque de précision, restent riches en information.

Les observations précédentes sont maintenant confrontées aux efforts mesurés dans les câbles de rive B^{inf} , B_{bis}^{inf} , B^{sup} et B_{bis}^{sup} , lors des essais QS et MEL1, par les capteurs dont les positions sont données sur la figure 2.19. Les données des capteurs sont regroupées sur la figure 2.22. On notera que celles enregistrées par le capteur B^{sup} sont indisponibles pour l'essai MEL1. Lors de l'essai QS, les quatre dissipateurs sont activés pour un déplacement vertical du bloc, proche de celui désigné précédemment comme étant la potentielle limite entre les deux régimes de comportement. En revanche, cette limite entre les deux phases est plus difficilement identifiable pour l'essai dynamique. En premier lieu, il est difficile de déterminer avec certitude le déclenchement des dissipateurs, à partir uniquement des mesures des efforts dans les câbles de rive. En regardant plus précisément les données fournies par le capteur situé sur la rive précédemment étudiée (B_{bis}^{sup}), et représentées en rouge sur la figure 2.22 (b), il est possible de conclure que le dissipateur est déclenché pour un déplacement du bloc de 1 m, mais aussi de 2,5 m, comme prédit par l'analyse d'images. Par ailleurs, un dissipateur peut très bien atteindre son seuil de déclenchement en effort sans pour autant commencer à défiler.

Si pour l'essai quasi-statique, les efforts dans les câbles de rive permettent de confirmer l'existence des deux régimes de comportement identifiés par analyse d'images, aucune tendance ne semble se dégager de ces données dans le cas de l'essai dynamique MEL1. Toutefois, une étroite ressemblance a été soulignée entre les comportements observés lors des essais quasi-statique et MEL1. Sur la base des observations rassemblées sur les figures 2.20 à 2.22, deux hypothèses peuvent être formulées quant au comportement de l'écran C2ROP. Premièrement, la réponse globale de la structure, à un chargement appliqué orthogonalement à son plan de référence et au milieu du module central, ne dépend pas de la vitesse avec laquelle ce chargement est appliqué. Deuxièmement, le comportement de la structure, lors de cette sollicitation, peut être décomposé en deux régimes distincts. Lors d'une première phase, la géométrie du filet et des câbles de rives est modifiée par l'effet rideau et la faible raideur des anneaux en flexion, afin que la structure puisse transmettre un effort vertical aux ancrages. Lors de la seconde phase, une fois que la forme du filet et l'orientation des câbles de rive ont été irréversiblement transformées, la plus grande part de l'énergie cinétique du bloc est dissipée grâce au défilement des dissipateurs.

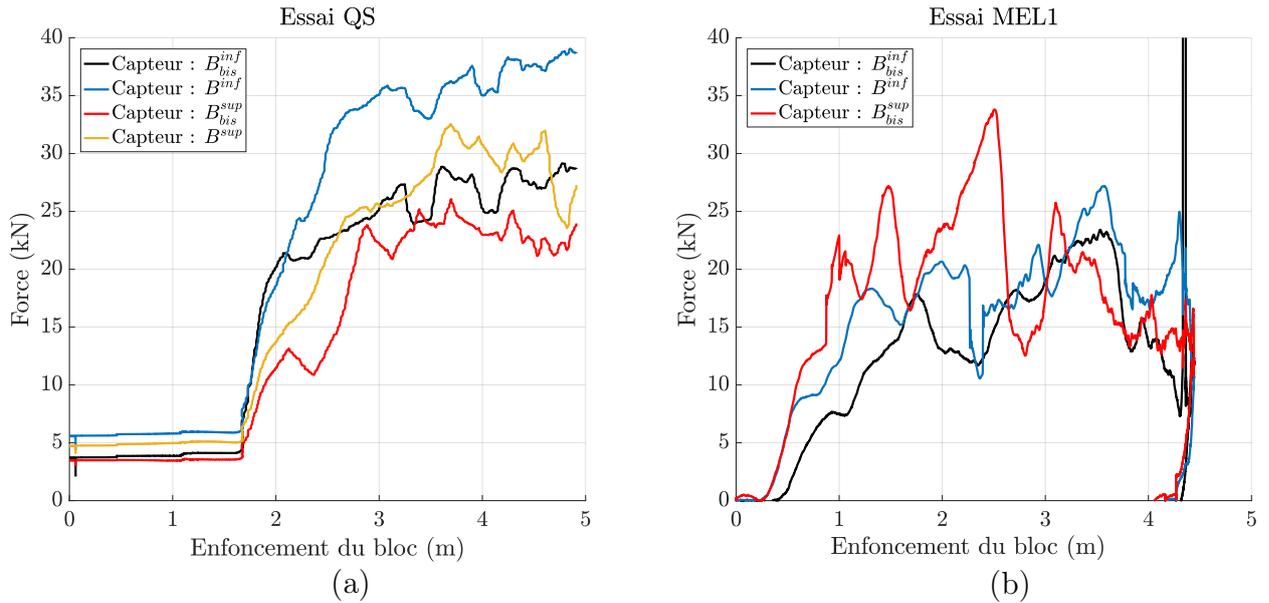


FIGURE 2.22 – Efforts mesurés par les capteurs installés sur les câbles de rive centraux. (a) : Données de l’essai QS, (b) : Données de l’essai MEL1

Les différents mécanismes de dissipation

L’unique enjeu d’un écran de protection pare-blocs est la dissipation de l’énergie cinétique du projectile. Pour remplir cet fonction avec succès, plusieurs phénomènes irréversibles contribuent à l’arrêt du bloc, en assurant chacun la dissipation d’une part, plus ou moins importante, de l’énergie d’impact. L’objectif de ce paragraphe est d’énumérer ces différents mécanismes et d’évaluer qualitativement, lorsque cela est possible, la quantité d’énergie dissipée par chacun d’entre eux. Les mécanismes de dissipation sont ici repartis en deux grandes familles, distinguant ainsi ceux qui agissent à l’échelle de la structure de ceux qui sont intrinsèques à des composants isolés de l’écran.

L’amortissement structurel. Cette famille rassemble les frottements pouvant se produire aux contacts entre différents composants de l’écran. L’énergie est ainsi dissipée par friction en des points diffus de la structure. Toutefois, pour que ces frottements contribuent significativement à l’arrêt du bloc, il est requis, que les déplacements relatifs et les efforts entre les éléments en contact soient élevés, ou alors, si la dissipation reste localement limitée, que les contacts soient nombreux. La première de ces deux conditions peut être remplie le long des câbles de rive, notamment par l’effet rideau, tandis que la seconde est vérifiée au sein de la nappe de filet qui compte autant de contacts que d’anneaux. Pour le reste, il est raisonnable de considérer que les autres contacts ne contribuent pas significativement à la dissipation de l’énergie cinétique du bloc.

Le comportement des câbles de rive au cours de l’impact a été décrit dans le précédent paragraphe. Il avait alors été mentionné que l’effet rideau se produit très peu de temps après le contact entre le filet et le bloc (voir Figure 2.20 (b)). Par ailleurs, l’énergie dissipée, par le frottement des anneaux ou des manilles le long des câbles, peut être approchée grâce à la formule d’Eytelwein, qui permet, quant à elle, d’exprimer la perte de tension entre deux

segments de câbles en fonction de l'angle de frottement.

$$T_1 - T_2 = T_1 (1 - e^{\mu\theta_{12}}) \quad (2.3)$$

Dans la relation (2.3), T_1 et T_2 sont respectivement les tensions dans les deux segments, μ représente le coefficient de frottement dépendant de la nature du contact et θ_{12} l'angle de frottement formé par les segments de part et d'autre de l'anneau. Les câbles étant initialement droits, les angles θ_{12} restent limités autour de la zone de glissement dans les premiers instants après l'impact, et l'énergie dissipée par l'effet rideau est sans doute négligeable à l'échelle de la structure. Cette hypothèse semble être appuyée par les résultats des simulations numériques, effectuées par J. Coulibaly, des impacts à l'énergie MEL réalisés dans les conditions de l'ETAG27 sur l'écran C2ROP, et pour lesquelles plusieurs modélisations de l'effet rideau sont comparées. Les résultats de cette étude révèlent que les comportements de la structure, ainsi que les efforts locaux, sont identiques lorsque l'effet rideau est modélisé avec ou sans friction [28]. En revanche, la situation est somme toute différente pour les deux câbles de rive latéraux. En effet, sur l'écran C2ROP, les deux dissipateurs latéraux sont montés du côté extérieur de la boucle de fermeture (cf. Paragraphe 2.3.2). Celle-ci forme ainsi des angles de frottement, en pied et tête de poteau, compris entre 90° et 180° pendant toute la durée de l'impact. D'après la relation (2.3), ces angles peuvent provoquer une perte de charge suffisante pour que l'effort dans la partie intérieure de la boucle dépasse largement le seuil des dissipateurs. L'énergie dissipée par le frottement de la rive peut, dans ces conditions, être de l'ordre de grandeur de celle dissipée par le frein qui lui est associé [57].

L'énergie dissipée par les frottements au sein de la nappe de filet est quant à elle plus difficile à quantifier. Toutefois, dans le cas de l'écran C2ROP, il est observé expérimentalement que les déformations des anneaux, et donc les efforts qui leur sont appliqués, restent limités dans les modules qui ne sont pas impactés. Ce constat peut, en partie, être expliqué par les glissements relatifs entre les différents câbles de la rive. En effet, si l'effet rideau concentre les déformations du filet au voisinage du bloc, les déplacements des anneaux, maintenus aux câbles qui ne glissent pas, sont naturellement contraints. Ce phénomène sera expliqué plus en détail dans le chapitre 5. Seule une région limitée de la nappe de filet, située au voisinage du bloc, peut ainsi dissiper de l'énergie grâce aux frottements entre anneaux mais, aussi et surtout, par le contact glissant entre la nappe et le bloc.

La dissipation interne aux composants. Ce groupe rassemble les mécanismes de dissipation qui se produisent à l'échelle des composants de l'écran. Les deux premiers, répertoriés ici, sont causés par la déformation des anneaux du filet. L'un d'entre eux a précédemment été évoqué lors de la présentation de l'essai de traction plan (voir les figures 2.16 et 2.17). En effet, l'apparition de rotules plastiques rend irréversible une partie de la déformation des anneaux en flexion. Cette caractéristique du comportement des anneaux est maintenant bien connue et est largement documentée dans la littérature scientifique (voir Paragraphe 3.1.2). La quantité d'énergie plastique, dissipée ainsi, peut être rapidement approchée en dénombrant les anneaux qui ont subi des déformations irréversibles. Ils sont, en général, nombreux à l'échelle du filet complet et localisés dans la région impactée par le bloc. Le nombre restreint d'anneaux sujets à ces déformations plastiques, dont le potentiel dissipatif est intrinsèquement lié à leur faible raideur en flexion, autorise à penser que l'influence de ce mécanisme de dissipation sur l'arrêt du bloc reste limitée sans pour autant être négligeable. La seconde partie de l'énergie dissipée dans la nappe est apportée par les frottements des

brins formant anneaux. Cette part est difficile à évaluer mais est d'autant plus grande que la cohésion entre les brins, appliquée lors du tressage, est importante. Or, les anneaux utilisés pour l'écran C2ROP ressemblent plus à un assemblage, un peu lâche, de brins qu'à un véritable câble, ce qui conduit à faire l'hypothèse que la quantité d'énergie dissipée par leurs frottements internes est négligeable. Il peut toutefois être noté que certains filets sont formés à partir de véritable câbles tressés et que ce phénomène, souvent négligé, peut alors expliquer une partie de la dissipation [91].

Pour les barrières hautes énergies, la part la plus importante de l'énergie cinétique du bloc est dissipée par des freins, grâce à des mécanismes variés qui dépendent des technologies choisies par les concepteurs. Par exemple, ceux montés sur l'écran C2ROP fonctionnent par frottement, mais d'autres phénomènes physiques peuvent également être utilisés (voir Paragraphe 3.1.3). Dans le cas de l'écran C2ROP, les longueurs de câble qui ont défilées dans les dissipateurs permettent, à partir du comportement caractéristique du frein serpent (voir Figure 2.15), de calculer l'énergie théorique dissipée. Ce calcul a posteriori est juste, à condition que le comportement des freins ne soient pas visqueux. Or, dans la modélisation usuelle du frottement par la loi de Coulomb (2.3), les coefficients de frottement statique et dynamique de l'acier sont différents. Malgré cette dernière remarque, cette hypothèse est retenue ici afin d'obtenir une première estimation de la quantité d'énergie dissipée par les freins. Leurs courses mesurées après l'essai sous chargement quasi-statique et les deux impacts à l'énergie MEL, ainsi que les énergies théoriquement dissipées associées, sont regroupées dans le tableau 2.2.

Câble	A^{inf}	A_{bis}^{inf}	B^{inf}	B_{bis}^{inf}	A^{sup}	A_{bis}^{sup}	B^{sup}	B_{bis}^{sup}	Total
Course QS (cm)	27	15	204	186	0	37	203	206	878
Course MEL1 (cm)	38	2	247	220	28	0	180	113	828
Course MEL2 (cm)	35	20	280	257	55	38	242	210	1137
Energie QS (kJ)	4,5	1,1	55,1	49,9	0	7,36	54,8	55,6	228,4
Energie MEL1(kJ)	9,3	0	67,4	59,7	4,8	0	48,2	29,1	218,5
Energie MEL2 (kJ)	6,8	2,5	76,8	70,2	12,5	7,6	65,9	56,8	299,1
Energie QS (%)	2	0	24	22	0	3	24	24	
Energie MEL1 (%)	4	0	31	27	2	0	22	13	
Energie MEL2 (%)	2	1	25,7	23	4	3	22	19	

TABLE 2.2 – Comparaison des courses et des énergies théoriques dissipées par les freins serpents, entre les essais QS, MEL1 et MEL2

Les résultats de la dernière colonne révèlent les limites du calcul de l'énergie dissipée à partir du comportement théorique des freins, puisque l'énergie MEL de l'écran C2ROP, égale à 270 kJ, est inférieure à l'énergie estimée pour l'essai MEL2. Un certain nombre d'enseignements peuvent tout de même être tirés du tableau 2.2. Tout d'abord, même si le comportement des freins reste incertain sous sollicitation dynamique, il est en principe connu en quasi-statique (cf. Figure 2.15) et il est raisonnable de penser que la quantité d'énergie approchée dans ce cas est proche de celle réellement dissipée. L'énergie emmagasinée par la structure pendant l'essai quasi-statique peut être ainsi estimée à 360 kJ, ce qui signifie que 63% de celle-ci a été dissipée par les freins. De plus, ce ratio tient compte de l'énergie

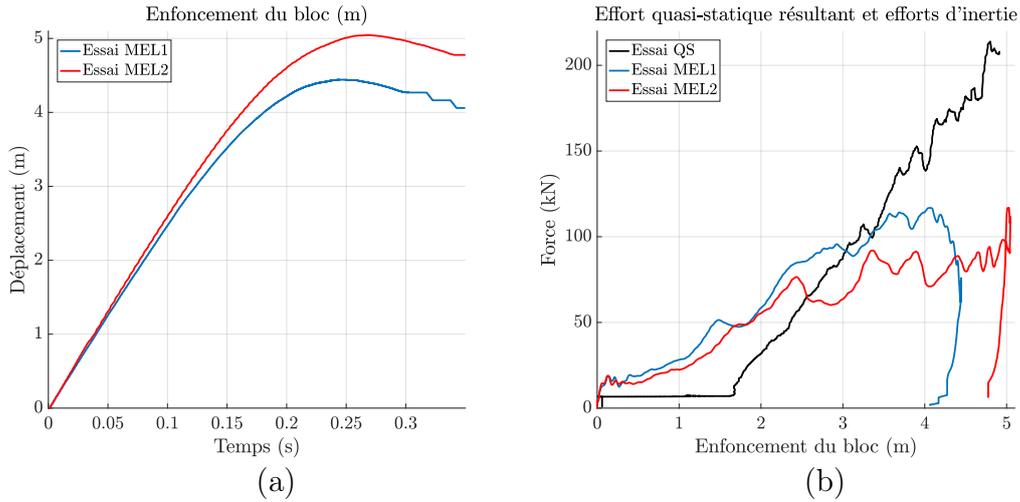


FIGURE 2.23 – Comparaison des trajectoires des blocs et des efforts qui leur sont appliqués. (a) : Enfoncement des blocs pour les essais MEL1 et MEL2, (b) : Effort résultant appliqué au bloc pour l’essai QS et effort d’inertie pour les essais MEL1 et MEL2

élastique, contenue dans la structure avant décharge, et est par construction inférieur aux pourcentages qui seraient estimées à partir de l’énergie d’impact pour des essais dynamiques. Ensuite, toutes choses a priori égales par ailleurs, l’écart des courses cumulées, avoisinant les 40% entre les deux essais dynamiques, révèle l’existence d’une réelle disparité entre les comportements des différents dissipateurs. En effet, si la variabilité des états de pré-tension peut, en partie, justifier une différence dans la répartition des courses entre les câbles, ce qui, par ailleurs, n’est pas observé ici (voir les trois dernière lignes du tableau 2.2), elle ne peut, en revanche, pas expliquer de tels écarts entre les défilements. De plus, le fait que l’énergie calculée pour l’essai MEL2 surestime l’énergie d’impact signifie que, en moyenne, les seuils de déclenchement des dissipateurs sont moins élevés pour l’essai MEL2 que pour l’essai MEL1. Ces écarts sur les courses des freins ont une incidence directe sur les distances d’arrêt du bloc, présentées sur la figure 2.23 (a). Le contraste est encore plus surprenant lorsque les efforts inertiels, appliqués aux blocs pendant les essais dynamiques et mesurés par les accéléromètres, sont comparés avec les données de l’essai QS (cf. Figure 2.23 (b)). La raideur apparente de la structure est nettement supérieure lors de l’essai QS que lors des deux impacts à l’énergie MEL. Cet écart peut vraisemblablement être attribué à la nature de la sollicitation ainsi qu’au comportement intrinsèque de la structure complète. En supposant dans un premier temps que la réponse globale de la structure soit complètement indépendante de la vitesse de la sollicitation, l’influence des phénomènes dynamiques peut être identifiée en appliquant les relations de la statique et de la dynamique au filet.

$$\begin{cases} \underline{F}_{treuil} = -\underline{F}_{rive} \\ M_{bloc} (\underline{a}_{bloc} + g\underline{e}_z) = -\underline{F}_{rive} + M_{filet} (\underline{a}_{filet} + g\underline{e}_z) + M_{rive} (\underline{a}_{rive} + g\underline{e}_z) \end{cases} \quad (2.4)$$

La première équation du système (2.4) relie directement le comportement des câbles de rive à la force appliquée au treuil lors de l’essai QS, tandis que la seconde relation explicite l’influence des forces dynamiques associées à chacun des éléments. Une rapide estimation montre que la somme des masses du filet et des câbles de rives est inférieure à 20% de

la masse du bloc, pour une force gravitaire totale de l'ordre du kN, négligeable devant les autres termes de la relation 2.4. L'accélération maximale mesurée par les accéléromètres, lors des deux essais dynamiques, est environ 16 fois supérieure à l'accélération de pesanteur g . Cette accélération correspond à un effort appliqué au bloc de 120 kN et a été atteinte pour un enfoncement du bloc de 4m au cours de l'impact MEL1. Il faut préciser ici que l'estimation fournie par l'accéléromètre peut sous-estimer légèrement l'effort réel. En effet, comme l'appareil n'est pas installé au centre du bloc, la mesure est sensible aux rotations, qui restent toutefois limitées pour un impact centré. D'après le système d'équations (2.4) et les données présentées sur la figure 2.23 (b), l'explication de l'écart, d'environ 30 kN, entre les efforts observés lors des essais QS et MEL1, à partir des effets dynamiques seulement, conduits à identifier une accélération totale du filet et des câbles de rive, $(\underline{a}_{\text{filet}} + \underline{a}_{\text{rive}})$, supérieure à celle du bloc. Cette hypothèse, qui n'est pas réaliste, amène inévitablement à attribuer la différence de comportement au terme $\underline{F}_{\text{rive}}$ du système (2.4). D'autre part, les similitudes des cinématiques de déformation du filet et des câbles de rive, lors des essais QS et MEL1, ont précédemment été montrées à partir de l'étude des figures 2.20 et 2.21. Ce dernier argument permet finalement de conclure que les écarts, entre les réponses de la structure sous chargements quasi-statique et dynamique, peuvent être majoritairement attribués à la variabilité du comportement des dissipateurs. Cette dernière hypothèse semble par ailleurs avoir été mise en évidence au travers des résultats obtenus par C. Girardon lors de son travail de fin d'étude [57].

La diversité et la complexité des mécanismes de dissipation, contribuant à l'arrêt du bloc dans un écran pare-blocs, ont été soulignées au travers de cette brève revue des phénomènes irréversibles. Si cette liste peut être transposée à des structures de divers architectures et niveaux d'énergie, l'estimation des quantités d'énergie dissipée par chacun des mécanismes est, quant à elle, propre à l'écran C2ROP. Au final, trois phénomènes, classés ici par ordre d'importance croissant, semblent susceptibles de contribuer significativement à l'arrêt du bloc : les déformations plastiques du filet, les frottements entre le bloc et le filet et dans une moindre mesure, entre les anneaux de la zone impactée et l'activation des dissipateurs d'énergie.

Ceci conclut ce paragraphe consacré à la compréhension globale du fonctionnement d'un écran pare-blocs. Les conclusions tirées de l'étude des cinématiques de déformation et des mécanismes de dissipation alimenteront les modèles de structure qui seront introduits dans les chapitres 3 et 5.

2.4 Objectifs des travaux de thèse et problématiques

Les travaux scientifiques récents expriment la volonté actuelle de prédire le comportement des écrans de protection dans leurs conditions réelles d'utilisation. Le passage de la situation idéalisée, répondant aux exigences réglementaire de l'ETAG27, à cette configuration, interroge sur la sensibilité des performances de ces structures à une variabilité qui est inhérente à leur fonction. Cette variabilité regroupe un vaste ensemble de paramètres, allant des conditions d'impact, aux modifications structurelles requises pour adapter l'ouvrage à son environnement (planéité du sol, présence de végétation, ...).

Ce travail a donc pour ambition de proposer des outils d'aide à la conception, permettant d'évaluer l'influence des différents paramètres structurels et de chargement en un temps de calcul raisonnable. Ce dernier critère est une des clés pour réaliser des études paramétriques

ou itérer les étapes de conception en suivant une démarche « essais-erreurs ». Il a été montré dans la partie 2.2.3 que pour répondre à cette problématique de manière pertinente, un outil de prédiction performant était indispensable. Le parti est pris dans ce travail, de développer des modèles simplifiés de structure plutôt que de recourir à des méthodes numériques modernes. La construction de ces modèles repose sur une bonne compréhension du fonctionnement de l'ouvrage, afin de s'assurer que les simplifications envisagées respectent la physique des phénomènes modélisés. La construction de ce socle de connaissance a débuté par l'analyse du comportement de l'écran C2ROP, au paragraphe 2.3.4, et sera poursuivie à travers les différentes parties de ce mémoire.

Dans le chapitre 3, le développement d'un modèle de calcul complet aux éléments discrets est présenté et les modélisations des composants clés d'un écran de protection pare-blocs sont décrites. La seconde partie de ce chapitre décrit la méthode de résolution utilisée dans ce travail pour étudier le comportement de l'ouvrage. Une attention particulière a été apportée aux conditions de stabilité du schéma d'intégration numérique. Le chapitre 4 propose une étude comparative de l'influence de différentes modélisations du filet ASM4 sur le comportement global de la structure. Les enseignements de cette étude sont ensuite utilisés dans le chapitre 5 pour construire, de manière systématique, une famille de modèles simplifiés permettant de reproduire une grande variété de conditions d'impact grâce à une diminution significative de la dimension du problème. Les résultats des premières études de sensibilité conduites avec ces modèles concluront ce manuscrit.

Chapitre 3

Modélisation discrète d'un écran pare-blocs et méthode de résolution quasi-statique

La première partie de ce chapitre est consacrée à la modélisation discrète d'un écran de filets pare-blocs (Paragraphe 3.1). La description géométrique de chaque composant de l'ouvrage, ainsi que les modèles mécaniques associés y sont présentés. Une méthode de calcul permettant de résoudre des problèmes d'équilibre mécanique est utilisée dans ce travail pour étudier le comportement de ces ouvrages sous chargement quasi-statique. Le principe de cette méthode, appelée relaxation dynamique, est décrit dans un second temps. Elle a pour particularité d'être formulée à partir d'un schéma d'intégration explicite à l'image des codes de calculs dynamiques traditionnels. Les conditions de stabilité de ce schéma ainsi que la méthode utilisée pour assurer la convergence du régime transitoire vers l'état d'équilibre sont notamment présentées. La précision de l'algorithme est étudiée dans un dernier paragraphe au travers de deux cas d'étude.

3.1 Modélisation discrète des composants d'un écran pare-blocs

L'approche de modélisation classique, composant par composant, introduite au paragraphe 2.2.3 est utilisée dans ce travail pour développer un modèle complet d'écran. Son étude servira par la suite à construire le cadre théorique pour la conception des modèles simplifiés. La structure générale d'un écran de filets a déjà été présentée au paragraphe 2.2.1. Dans le cadre de ce travail, une liste non-additive de composants nécessaires à la construction d'un écran standard est considérée. Un écran est ainsi formé d'un filet d'interception, de câbles de rive supportant le filet, de poteaux qui maintiennent l'ensemble filet et câbles de rive à la falaise, de haubans et de dissipateurs. La seule typologie de filet d'interception modélisée sera l'ASM4 (cf. paragraphe 3.1.2), toutefois il sera montré que la modélisation peut être étendue sans difficulté à d'autres filets à partir des éléments présentés dans ce paragraphe.

3.1.1 Choix de la modélisation discrète

Il a été établi au paragraphe 2.2.3 que les approches discrètes sont appropriées pour décrire un écran de filet, même si plusieurs auteurs leur ont préféré l'utilisation de méthodes FEM (élément finis) pour modéliser ce système. D'un point de vue théorique, la méthode FEM permet de résoudre une équation aux dérivées partielles sur un domaine continu de frontière connue sur laquelle des conditions aux limites sont définies, alors que les méthodes aux éléments discrets servent le plus souvent à décrire le mouvement de corps indépendants [16, 66]. Plus que la résolution d'un problème numérique, le choix entre ces deux modélisations est révélateur de la représentation que ce fait l'utilisateur du système *écran de filets*. Dans le premier cas, il le voit comme un réseau continu avec une frontière complexe, tandis que dans le second il le décrit par un ensemble de particules. La décision d'utiliser cette dernière description dans ce travail de thèse repose essentiellement sur la topologie de la structure, formée de vides inclus dans un réseau filaire (voir Paragraphe 2.2.3). De plus, dans le cas du filet ASM4, la trame est clairement discontinue : les anneaux interagissent entre eux mais sont formés par des câbles indépendants.

La particularité de la description discrète d'un écran de filets est que les particules restent ordonnées et interagissent toujours avec les mêmes voisins. Cette caractéristique est importante pour la résolution du problème numérique et définit également la configuration où le modèle FEM devient complètement équivalent, si celui-ci est décrit par des éléments iso-paramétriques à une dimension [66]. Les particules discrètes deviennent alors les nœuds du maillage et les interactions qui les relient les lois de comportement des éléments 1D.

Les particules utilisées dans ce travail pour décrire l'écran de filet ne possèdent pas de degré liberté en rotation. Les paragraphes suivants présentent les modélisations de chacun des composants de l'ouvrage.

3.1.2 Le filet ASM4

Présentation et revue des modélisations existantes

Comme son nom l'indique, le filet AMS4 était à l'origine, pendant la seconde guerre mondiale, utilisé comme moyen de protection contre les sous-marins. Grâce à son faible coût de fabrication et ses bonnes propriétés mécaniques, il est aujourd'hui très répandu en tant que parade contre les chutes de blocs. Le motif élémentaire de ce filet, présenté sur la figure 3.1, est formé par un anneau entre-lassé à la manière d'une côte de mailles avec ses quatre voisins. A cause de sa faible raideur en flexion, l'anneau est un objet très souple qui, une fois assemblé avec ses voisins, forme avec eux un milieu relativement complexe au sein duquel se produisent plusieurs phénomènes non-linéaires tels que des glissements, des grands déplacements et des déformations plastiques. Cette complexité fait du filet ASM4 l'un des plus étudiés, et de nombreuses publications scientifiques lui sont consacrées.

F. Nicot et H. Grassl ont étudié expérimentalement l'évolution de la raideur apparente d'un anneau isolé, lors d'un chargement de traction uni-axiale, en fonction des conditions aux limites qui lui sont appliquées [72, 59]. Des essais semblables, présentés par la figure 3.2, ont été réalisés dans le cadre du projet national C2ROP (voir Paragraphe 2.3.1). Ils illustrent le comportement non-linéaire caractéristique d'un anneau. Lors d'une première phase, celui-ci se déforme uniquement en flexion et sa raideur apparente dans la direction de traction reste faible. Puis, au fur et à mesure que la déformation axiale augmente, les câbles

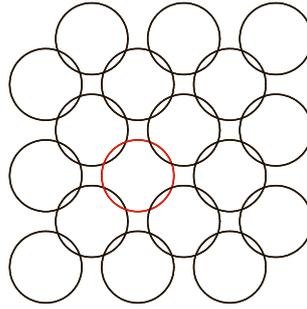


FIGURE 3.1 – Schéma du motif d'un filet ASM4

constitutifs de l'anneau se tendent et sa raideur augmente progressivement pour finalement tendre vers celle de ces derniers (cf. Figure 3.2).

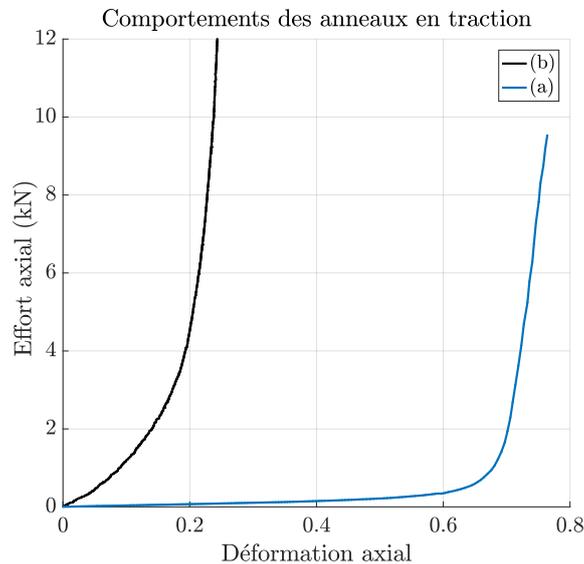
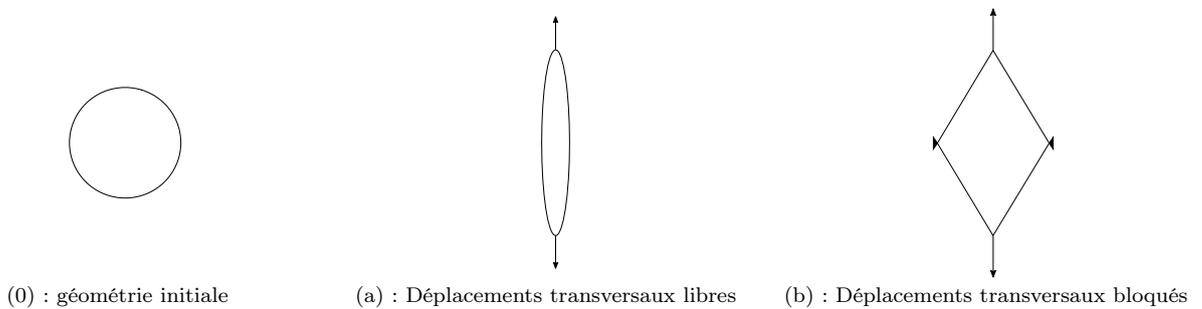


FIGURE 3.2 – Comparaison du comportement d'un anneau sous chargement de traction uni-axiale : (a) déplacements transversaux autorisés, (b) déplacements transversaux bloqués

De nombreux modèles ont été proposés pour reproduire ce comportement raidissant. Un des premiers a été développé par F. Nicot [71, 72] pour les filets ASM6, dans lesquels un anneau est entouré par six voisins. Il s'agit d'un modèle discret où les anneaux sont

représentés par une particule en leur centre et interagissent entre eux par des liaisons uniaxiales qui relient les centres de deux anneaux voisins (cf. Figure 3.3). Tout le comportement non-linéaire des anneaux est décrit dans cette loi d'interaction. Cette approche a l'avantage de faciliter la description géométrique du filet, mais la détermination des lois d'interaction est complexe : F. Nicot utilise une loi multi-linéaire pour approcher le comportement présenté sur la figure 3.2. De plus, lorsqu'elle est utilisée pour modéliser un filet ASM4, elle génère deux réseaux de liens orthogonaux qui empêchent la transmission des efforts de cisaillement selon leurs directions. Ce modèle a par la suite été repris par d'autres auteurs, notamment dans le cadre de représentations par éléments finis [54, 53].

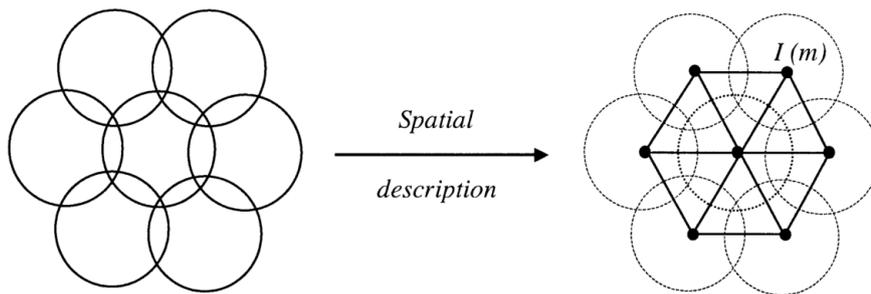


FIGURE 3.3 – Modélisation discrète du filet ASM6 proposée par F. Nicot (source [71])

Quelques années après les travaux de F. Nicot, H. Grassl développa un modèle discret de filet ASM4 où chaque anneau est représenté par un octogone régulier dont les sommets sont les particules du modèle. Le schéma de l'anneau discret présenté sur la figure 3.4, montre l'existence de deux types de particules. Les premières, dessinées en blanc, correspondent aux points de contact réels entre deux anneaux voisins. Les secondes, en noir, permettent une meilleure approximation de la géométrie. Un moment de flexion est calculé au niveau de chacune des particules en fonction de la variation locale de courbure. Les particules ne possédant pas de degré de liberté en rotation, des couples d'efforts équivalents sont ensuite appliqués au noeud courant ainsi qu'à ses deux voisins. Par ailleurs, des efforts selon les directions des segments sont également appliqués en fonction de leurs allongements respectifs.

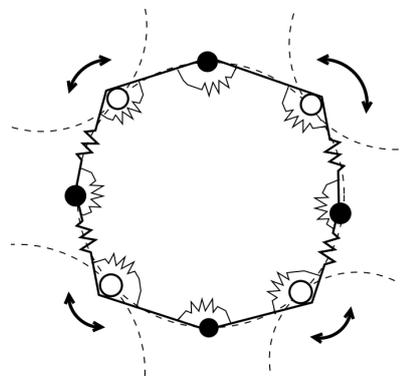


FIGURE 3.4 – Modélisation discrète du filet ASM4 proposée par F. Grassl (source [97])

Par la suite A. Volkwein proposa, à partir des résultats expérimentaux de H. Grassl, une simplification géométrique de ce modèle [97]. L'octogone est ainsi remplacé par un quadrilatère en supprimant les particules intermédiaires (celles qui n'appartiennent pas à deux anneaux). Les interactions de flexion sont également supprimées pour leur substituer des efforts le long des diagonales, dont la déformation donne effectivement une indication sur l'état de flexion de l'anneau (cf. Figure 3.5). Les quatre particules sont également reliées par une force d'interaction d'intensité uniforme qui dépend de la déformation du cadre de l'anneau (le quadrilatère sur la figure 3.5). En divisant par deux le nombre de degrés de liberté, cette simplification géométrique réduit significativement le temps de calcul. Cependant, la suppression du lien qui existait entre la nature de la non-linéarité et le comportement de l'anneau, complexifie l'identification des lois d'interactions des barres diagonales. A. Volkwein propose d'utiliser une loi linéaire dont la pente est égale à la raideur initiale de l'anneau réel lors d'un test de traction (voir Figure 3.2). Ce modèle autorise par ailleurs des états de déformations sans énergie, dans lesquels la longueur du périmètre de l'anneau ainsi que celles des diagonales sont conservées. Ces modes de déformations particuliers peuvent être reliés à l'effet Hourglass dans le cadre des modèles éléments finis [49]. En partant de ce constat, J. Coulibaly a récemment développé un modèle à partir de cette même géométrie, en associant une énergie de déformation supplémentaire à chacun des quatre côtés de l'anneau [27]. Cette modification empêche effectivement ces états de déformations indésirables, mais ajoute également de nouvelles interactions dont les lois sont à identifier.

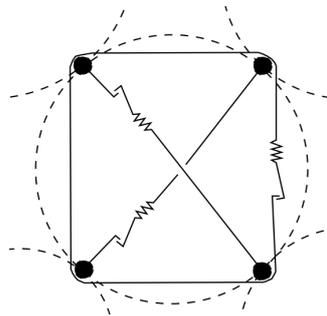


FIGURE 3.5 – Modélisation discrète du fillet ASM4 proposée par A. Volkwein (source [97])

Dans le cadre de ce travail de thèse, les trois types de modèle précédemment présentés ont été utilisés pour les modélisations discrètes d'écran de filets. Ils seront désignés dans la suite du manuscrit par la dénomination suivante : Modèle câbles (Modèle *A*), Modèle anneau (Modèle *B*), Modèle poutre (Modèle *C*). Le prochain paragraphe décrit les lois d'interactions ainsi que le calcul des efforts intérieurs pour chacun d'entre eux.

Calcul des efforts intérieurs

Les filets discrets utilisés pour construire le modèle d'écran complet sont ainsi formés par la propagation périodique d'une des trois cellules présentées sur la figure 3.6. La transmission des efforts intérieurs au sein de ces trois modèles d'anneau est déterminée par trois interactions présentées sur la figure 3.7. La première, notée (a) sur la figure 3.7 est un effort de traction uni-axiale reliant un couple de particules, la deuxième (b) est un lien iso-tension entre un ensemble ordonné de plusieurs particules, et la troisième (c) est un moment fléchissant qui génère des efforts appliqués à trois particules. On considère dans la suite les

notations introduites sur la figure 3.7. Les positions occupées par les particules au repos sont notées avec un X majuscule, et celles dans une situation déformée avec un x minuscule.

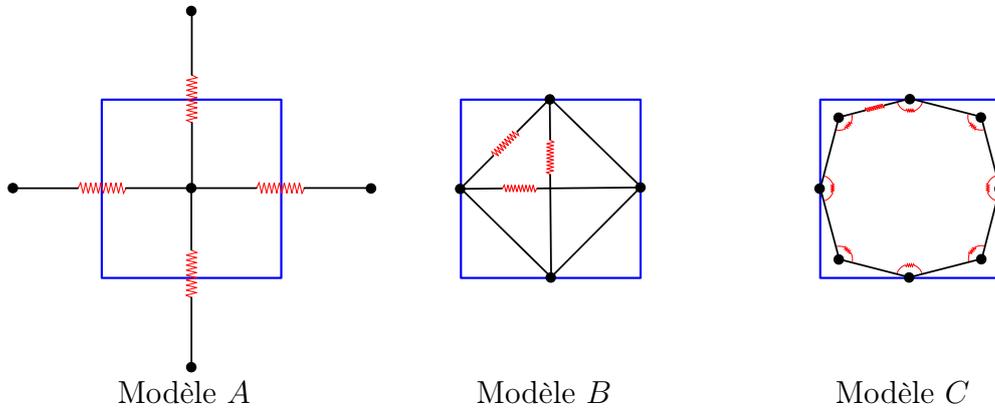


FIGURE 3.6 – Motifs des trois modèles discrets d’anneau ASM4 : A. Modèle câbles, B. Modèle anneau, C. Modèle poutre

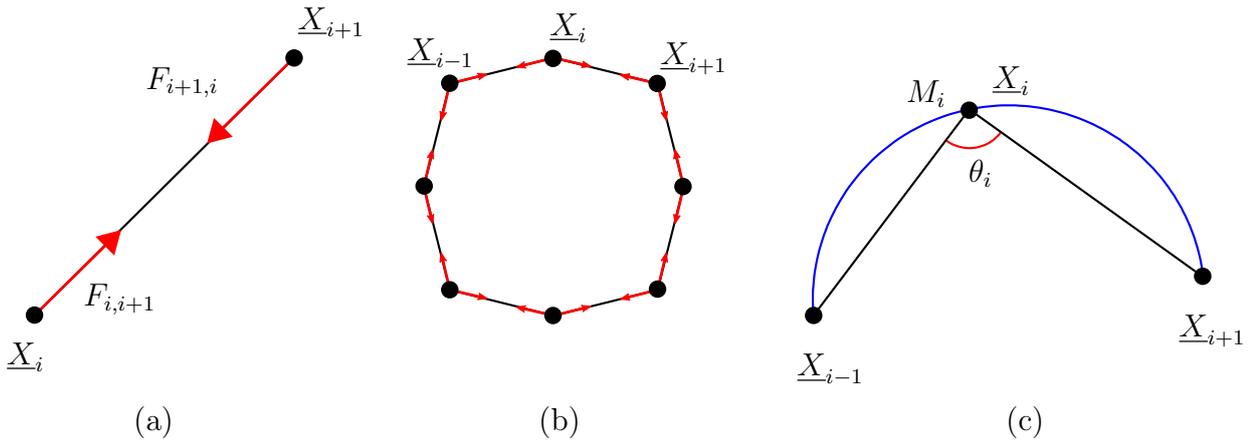


FIGURE 3.7 – Interactions décrivant le comportement des modèles d’anneau discrets. (a) : Effort de traction, (b) : Effort d’anneau, (c) : Effort de flexion

Effort de traction. A la manière d’un ressort, il génère un effort de rappel selon la direction du segment reliant le couple de particules. La nature réelle des anneaux, formés par enroulement d’un câble sans raideur en compression, contraint à introduire une non-linéarité. En notant ϵ_i la déformation du segment $(i, i + 1)$, ainsi que E et S le module d’Young et la section de l’élément à représenter, l’effort de traction, T_i , créé par l’élongation du segment est calculé grâce à la relation suivante :

$$\begin{cases} T_i = 0 & \text{if } \epsilon_i < 0 \\ T_i = ES\epsilon_i & \text{if } \epsilon_i \geq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

avec :

$$\epsilon_i = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\|\underline{x}_{i+1} - \underline{x}_i\|}{\|\underline{X}_{i+1} - \underline{X}_i\|} \right)^2 - 1 \right] \quad (3.2)$$

La force $\underline{F}_{i+1,i}$, appliquée par la particule i sur la particule $i + 1$, et $\underline{F}_{i,i+1}$, appliquée par la particule $i + 1$ sur la particule i sont colinéaires selon la direction du segment et orientées de la manière suivante :

$$\underline{F}_{i,i+1} = T_i \frac{\underline{x}_{i+1} - \underline{x}_i}{\|\underline{x}_{i+1} - \underline{x}_i\|} \quad \text{et} \quad \underline{F}_{i+1,i} = -\underline{F}_{i,i+1} \quad (3.3)$$

Effort d'anneau. Cette interaction relie un ensemble ordonné et fermé de n particules, chacune d'entre elles conservant les deux mêmes voisins (voir Figure 3.7 (b)). La déformation d'anneau est définie en fonction des longueurs après élongation et au repos de tous les segments qui la composent. La déformation de Green-Lagrange est ainsi calculée par la formule :

$$\epsilon_a = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sum \|\underline{x}_{i+1} - \underline{x}_i\|}{\sum \|\underline{X}_{i+1} - \underline{X}_i\|} \right)^2 - 1 \right] \quad (3.4)$$

L'effort de tension et les forces résultantes appliquées à chacune des particules de l'anneau sont ensuite calculés grâce aux relations (3.1) et (3.3).

Effort de flexion. Cette interaction, habituellement négligée par les hypothèses de la mécanique des câbles, est utile ici pour reproduire le raidissement apparent de l'anneau, dû à sa flexion, lors d'un essai de traction (voir Figure 3.2). La modélisation des efforts de flexion pour des éléments de poutre discrets est largement documentée dans la littérature [2, 39, 38, 40]. Ces approches, également utilisées dans le modèle d'anneau proposé par H. Grassl (voir Figure 3.4), permettent de calculer un moment de flexion à partir uniquement des trois degrés de liberté en translation des particules. Comme l'orientation des sections n'intervient pas dans le calcul du moment, elles ne peuvent être appliquées qu'à des profils axi-symétriques. Toujours en considérant les notations de la figure 3.7, le moment fléchissant associé à la particule i est donné par la formule suivante :

$$\|\underline{M}_i\| = \frac{EI}{r_i} \quad (3.5)$$

où E et I sont respectivement le module d'Young et le moment d'inertie du câble, et r_i est la courbure discrète et locale définie, à la position occupée par la particule i , par le cercle osculateur passant par les particules $(i - 1, i, i + 1)$ (voir Figure 3.8). Une étude comparant différentes définitions de la courbure discrète est proposée dans la thèse de doctorat de L. Du Peloux [40]. La pertinence et la robustesse des formulations sont évaluées par rapport à l'influence de la discrétisation et à l'approximation de l'énergie de flexion. La définition de la courbure reprise dans cette thèse semble particulièrement adaptée aux problèmes de mécanique des structures. Le rayon du cercle osculateur r_i , illustré sur la figure 3.8, est calculé en fonction de la longueur de la corde $(i - 1, i + 1)$ ainsi que l'angle θ_i formé par les segments $(i - 1, i)$ et $(i, i + 1)$:

$$r_i = \frac{\|\underline{x}_{i+1} - \underline{x}_{i-1}\|}{2 \sin \theta_i} \quad (3.6)$$

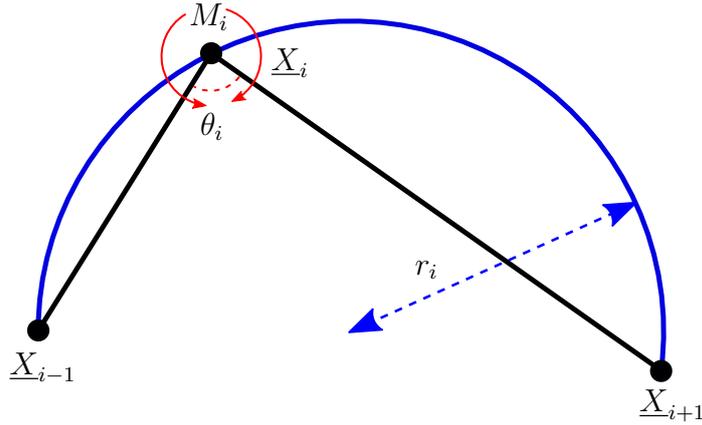


FIGURE 3.8 – Calcul de la courbure trois points et du moment fléchissant au lieu de la particule i

avec,

$$\sin \theta_i = \frac{\|(\underline{x}_i - \underline{x}_{i-1}) \wedge (\underline{x}_{i+1} - \underline{x}_i)\|}{\|\underline{x}_i - \underline{x}_{i-1}\| \|\underline{x}_{i+1} - \underline{x}_i\|} \quad (3.7)$$

L'expression du moment fléchissant en fonction des positions des particules est ensuite obtenue en utilisant les relations (3.6) et (3.7) :

$$\underline{M}_i = \frac{2EI}{\|\underline{x}_{i+1} - \underline{x}_{i-1}\|} \frac{(\underline{x}_i - \underline{x}_{i-1}) \wedge (\underline{x}_{i+1} - \underline{x}_i)}{\|\underline{x}_i - \underline{x}_{i-1}\| \|\underline{x}_{i+1} - \underline{x}_i\|} \quad (3.8)$$

Comme les particules n'ont pas de degré de liberté en rotation, le moment \underline{M}_i est remplacé par deux couples d'efforts tranchants appliqués respectivement aux segments $(i-1, i)$ et $(i, i+1)$. La direction de l'effort tranchant est par définition normale à celle du segment sur lequel il est appliqué. La direction de la normale au plan contenant ces deux vecteurs est ensuite donnée par celle du moment (3.8). Comme précédemment, la force provoquée par le moment en i et appliquée à la particule $i+1$ est notée $\underline{F}_{i+1,i}$. Elle est reliée au moment \underline{M}_i par la relation :

$$-\underline{M}_i = (\underline{x}_{i+1} - \underline{x}_i) \wedge \underline{F}_{i+1,i} \quad (3.9)$$

Le signe moins est ici volontairement laissé devant le moment \underline{M}_i . La résultante en i des moments dus aux efforts tranchants appliqués aux particules $i+1$ et $i-1$ doit être nulle. Le signe du moment dans l'équation (3.9) est ainsi choisi selon le critère fourni par le théorème de la coupure pour une poutre continue. Le moment appliqué par la particule en amont ($i+1$) est dit direct et est donné par son expression (3.8). A l'inverse celui appliqué par la particule en aval ($i-1$) est qualifié de réciproque et est orienté selon le sens opposé. La norme de la force $\underline{F}_{i+1,i}$ est ensuite directement déduite de l'égalité (3.9) et son orientation l'est par permutation circulaire de cette même équation :

$$\underline{F}_{i+1,i} = \frac{(\underline{x}_i - \underline{x}_{i+1}) \wedge (-\underline{M}_i)}{\|\underline{x}_i - \underline{x}_{i+1}\|^2} \quad (3.10)$$

La seconde force du couple permet de garantir l'équilibre en translation du segment $(i, i+1)$, elle est appliquée à la particule i et est définie comme l'opposée de $\underline{F}_{i+1,i}$. Cette force n'est

en revanche pas spécifiquement nommée, il est en effet important de ne pas la confondre avec la force $\underline{F}_{i,i+1}$, appliquée également à la particule i mais causée par \underline{M}_{i+1} , le moment en $i + 1$.

Description des modèles d'anneau

Les trois modèles d'anneau considérés dans ce manuscrit sont présentés sur la figure 3.1. Ils sont construits à partir des trois interactions introduites ci-dessus et illustrées sur la figure 3.7.

Modèle A. Il est adapté du modèle proposé par F. Nicot pour les filets ASM6. Les anneaux sont représentés par des particules en leurs centres et sont reliés entre eux par des efforts de traction. Le comportement raidissant de l'anneau est approché par une loi de comportement bi-linéaire, la raideur en compression reste nulle. Une déclinaison de ce modèle, dans laquelle la transition entre les phases fléchies et tendues est reproduite par une loi polynomiale, sera également introduite au chapitre 5.

Modèle B. C'est une adaptation du modèle proposé par A. Volkwein. Le comportement en flexion est introduit grâce à des éléments diagonaux, tandis que les quatre particules sont reliées par un effort d'anneau qui reproduit le comportement visible pendant la phase tendue (cf. Figure 3.2). Les diagonales ont un comportement bi-linéaire en traction avec une seconde raideur nulle. La discontinuité se produit lorsque l'anneau devient raide. A partir de cet instant, la raideur des diagonales de flexion reste nulle, tandis que celle de l'élément anneau est activée. La longueur non-chargée de ce dernier est donc plus petite que celle qui est la sienne dans la géométrie du modèle au repos. Comme pour le modèle A, des variantes de ce modèles seront utilisées dans les chapitre 4 et 5. Le comportement en flexion sera alors associé à l'interaction d'anneau grâce à des non-linéarités matérielles de nature polynomiale.

Modèle C. Il est composé de huit particules, reliées entre elles par un effort d'anneau, et soumises chacune à deux couples d'efforts tranchants, causés par les interactions de flexion. La géométrie au repos de la cellule est un octogone non régulier (les segments sont tous de même longueur, mais les angles ne sont pas égaux) de manière à ce que sa longueur initiale soit égale à la circonférence du câble constitutif réel. Aucune non-linéarité matérielle n'est ainsi nécessaire pour reproduire le comportement raidissant qui est naturellement produit par la variation de géométrie.

Extension aux autres modèles de filet

Si seul le filet ASM4 est modélisé dans le cadre de ce travail de thèse, les trois interactions introduites sur la figure 3.7 permettent de modéliser tout élément de structure dont l'énergie de déformation en torsion reste négligeable devant celles en traction et en flexion. Comme la totalité des nappes utilisées dans les ouvrages de protection sont formées de câbles, les seules dont la représentation se heurte à des restrictions théoriques sont les filets assemblés par simple ou double torsion d'un câble. En pratique ils sont souvent modélisés à l'aide d'interactions de traction uniquement, en utilisant une raideur adaptée pour les portions de câble déformées par torsion [90] (voir Figure 3.9). Dans les autres cas, la combinaison des

interactions de traction et de flexion, utilisée ici dans le modèle d'anneau C , permettrait de construire des modèles discrets sans recourir à des lois de comportement non-linéaires. Cette approche est particulièrement pertinente pour les filets à géométrie orthotrope, formée par tressage d'un câble préalablement fléchi. Deux exemples de nappe assemblés avec cette technique, les filets *Omega* et *Elite*, sont illustrés sur la figure 3.10. Le premier est simplement formé par le tressage du câble, tandis que dans le second, développé par la société française NGE Fondations, des agrafes sont ajoutées refermant ainsi les boucles dessinées par le parcours du câble et conférant aux mailles leur forme caractéristique de la goutte d'eau [91, 15].

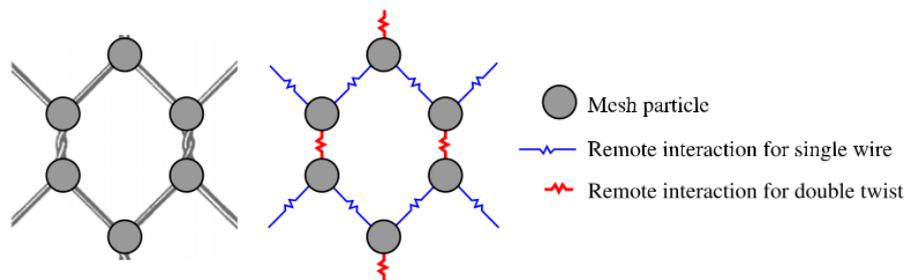


FIGURE 3.9 – Modélisation discrète d'un filet à mailles hexagonales formées par torsion des câbles (source [90])

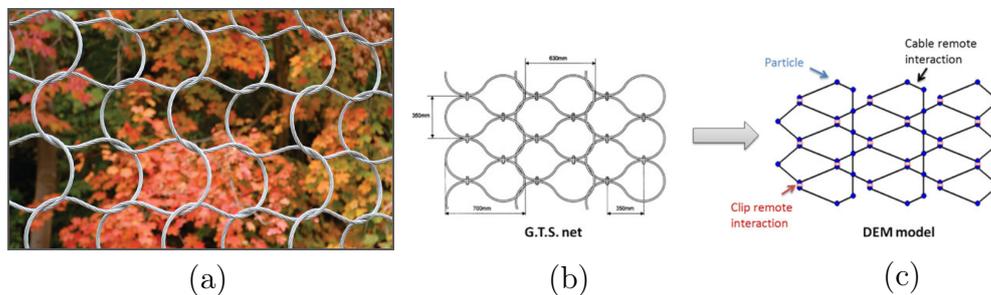


FIGURE 3.10 – Filets formés par tressage d'un câble fléchi : (a) : Filet Omega (source [93]), (b) : Filet Elite (source [15]), (c) : Modélisation discrète du filet Elite (source [15])

3.1.3 Les câbles de rive et dissipateurs

Revue des modélisations existantes du câble glissant

Lorsqu'un bloc entre en contact avec l'écran, la nature du câblage entre les éléments de connexion et le filet (cf. Partie 2.2.1) peut permettre à ce dernier de glisser le long des câbles de rive pour se concentrer autour de la zone impactée. La redistribution des anneaux provoquée par le glissement du filet tend à diminuer la raideur hors plan de la structure, minimisant ainsi les efforts internes dans la nappe. Ce phénomène caractéristique des écrans de filet est usuellement appelé "l'effet rideau", une illustration en est proposée sur la figure 3.11.



(a)



(b)

FIGURE 3.11 – "Effet rideau" provoqué par un impact centré. (a) : Ecran complet, (b) : Focus sur l'effet rideau (source : PN C2ROP).

Il est habituellement modélisé par un élément connu sous le nom de "câble glissant" qui autorise une redistribution des longueurs de ses segments, sans augmentation de ses efforts intérieurs. En l'absence de frottement, la tension reste ainsi uniforme le long du câble. Bien que le champ d'utilisation de cet élément soit vaste, l'ensemble des problèmes traités grâce à lui peuvent être ramenés à la modélisation d'un câble s'enroulant autour d'une ou plusieurs poulies. Un des premiers modèles éléments finis de câble, glissant sans frottement autour d'une poulie, a été proposé par M. Aaufaure pour décrire le comportement mécanique d'une ligne à haute tension [6, 7]. D'autres modèles éléments finis et sans frottement ont été développés par la suite. On retiendra le modèle à trois nœuds de B. Zhou qui a ainsi reproduit le comportement d'un parachute [101]. Ce modèle a ensuite été étendu à un câble à n nœuds par C. Chen et L. Ghoussoub pour leurs applications respectives à des dômes et des écrans de protection pare-blocs [22, 56].

Certains auteurs ont également choisi d'intégrer à leur modèle des efforts de frottements. K. Hincz a notamment réalisé une analyse non linéaire avec la méthode de relaxation dynamique afin de déterminer la géométrie d'une structure à câbles, suspendue à une arche par un système de poulies. Son modèle numérique intègre la variation de tension dans les câbles enroulés autour des poulies. Ce problème de perte de charge par frottement a également été traité avec des méthodes semblables par A. Bel Hadj et J. Coulibaly [14, 26]. Dans le cas non frottant, la redistribution des longueurs non-chargées entre les différents segments du câble n'a aucune influence sur le calcul de la tension uniforme et n'apparaît donc pas dans la formulation du modèle. En revanche, en cas de frottement autour d'une poulie, les tensions dans les segments situés de part et d'autre de celle-ci dépendent de ce transfert de longueur non chargée, qui peut être déterminé à partir de la résolution d'une équation non-linéaire. Une méthode alternative, développée en éléments discrets, consiste à dissocier les particules appartenant aux câbles et les poulies. Le problème de glissement est alors déterminé par les déplacements relatifs tangents de deux particules [4].

Les dissipateurs d'énergie

Les dissipateurs d'énergie sont, au même titre que les câbles de rive, des éléments de connexion (cf. Partie 2.2.1). Ils fonctionnent comme des fusibles qui, une fois déclenchés, dissipent l'énergie du bloc impactant et limitent l'augmentation des efforts dans la structure. Les mécanismes de dissipation dépendent de la technologie retenue par le concepteur. Les principes de fonctionnement des produits présentés sur la figure 3.12 reposent respectivement sur le frottement d'un câble au contact de deux plaques métalliques boulonnées (dissipateur (a)) et sur le flambement plastique d'un tube en acier (dissipateur (b)). Une description précise de ce dernier est notamment disponible dans la thèse de A. Trad. Même si ces phénomènes physiques réels sont complexes, le comportement d'un dissipateur soumis à une charge de traction peut souvent être modélisé par un comportement élasto-plastique équivalent. Le comportement du frein serpent présenté sur la figure 3.12 (a) a par exemple été précédemment donné sur la figure 2.15 du paragraphe 2.3.3.



FIGURE 3.12 – Deux exemples de dissipateur : (a) frein serpent (source C2ROP), (b) dissipateur par flambement (source GTS)

Présentation du modèle

Le modèle de câble considéré dans ce travail est parfaitement glissant. Sa tension est donc parfaitement uniforme sur la longueur et est calculée à partir de sa déformation totale. La représentation discrète du câble glissant est un ensemble ordonné de n particules. L'interaction d'anneau présentée dans la partie 3.1.2 en est en réalité un cas particulier, où les deux particules bornant l'ensemble interagissent entre elles. La déformation du câble glissant est ainsi également calculée à partir de la relation (3.4). Par ailleurs, comme la tension dans l'élément est uniforme, il n'y a aucune raison de différencier, dans la modélisation, les deux dissipateurs situés chacun à une extrémité du câble de rive (voir Paragraphe 2.3.2). L'ensemble formé par le câble de rive et les deux dissipateurs est ainsi modélisé par un unique élément "câble glissant". Pour reproduire son comportement élasto-plastique écrouissant (cf. Figure 2.15), une loi de comportement bi-linéaire en traction est utilisée.

3.1.4 Les autres éléments de structure

Pour disposer d'une représentation discrète complète de l'écran, il reste à modéliser les éléments supports (Cf Paragraphe 2.2.1). Ils regroupent les câbles de haubanage et les poteaux, modélisés avec un unique couple de particules liées respectivement par des efforts de traction et de traction/compression, qui sont calculés sur le modèle de la relation (3.1).

Les influences de la gravité sur la forme des câbles ainsi que la flexion dans les poteaux sont ainsi négligées devant les autres modes de déformation de la structure.

3.1.5 Le projectile

Le bloc normalisé utilisé lors de l'essai ETAG027 est présenté sur la figure 2.5. Il est ici remplacé par un projectile, de forme sphérique, modélisé par une particule en son centre. Le contact avec le filet est décrit par des interactions qui lient les particules de ce dernier avec le centre du bloc et ne transmettent que des efforts de compression. Ceux-ci sont linéairement dépendant des déformations des couples, dont les longueurs non chargées sont égales au rayon du bloc. Comme aucune composante orthoradiale n'est transmise par ces liaisons, le contact entre le bloc et le filet est réalisé sans frottement.

3.1.6 Les connexions entre éléments

Les modélisations discrètes utilisées pour représenter les composants d'un écran de filet ASM4 ont maintenant toutes été présentées. Pour finaliser la description du modèle complet, il reste tout de même à caractériser les assemblages ainsi que les appuis. Chaque élément de structure pris individuellement est construit à partir d'un ensemble de particules reliées par une ou plusieurs interactions. Une connexion est une interaction supplémentaire entre des particules appartenant à des éléments différents. Dans ce modèle, les connexions sont considérées comme parfaites, c'est-à-dire sans excentricité, ni raideur. Il a été évoqué, dans l'introduction de ce chapitre, que l'algorithme utilisé pour résoudre le problème discret est construit à partir d'une intégration explicite des équations de la dynamique (la description de l'algorithme est détaillée dans les paragraphes 3.2 à 3.6). Si les particules occupent une même position dans l'état initial, il suffit de s'assurer que leurs trajectoires soient identiques durant toute la durée de la phase transitoire pour garantir qu'elles atteignent la même position d'équilibre. La liaison est ainsi réalisée par un transfert des efforts et des masses à chaque étape du calcul.

Comme les particules ne possèdent que des degrés de liberté en translation, tous les ancrages sont en réalité des liaisons rotules et sont associés à une contrainte géométrique dans le calcul.

La présentation du modèle discret d'écran, menée tout au long de ce paragraphe, a essentiellement consisté à décrire, d'un point de vue mathématique, la nature des interactions et des conditions aux limites reliant les particules du problème. Il est entendu que la résolution numérique de ce dernier nécessite une identification préalable, conduite au cours du chapitre 5, des paramètres numériques régissant les lois de comportements des éléments discrets précédemment décrits.

La prochaine partie (Paragraphe 3.2) est consacrée à la présentation de la méthode de résolution sus-mentionnée.

3.2 La méthode de relaxation dynamique

3.2.1 Genèse de l'algorithme et principe de la méthode

La méthode de relaxation dynamique a été développée au Royaume-Uni dans les années 1960 pour résoudre des problèmes non-linéaires en mécanique des structures [33]. Les causes de non-linéarité dans ce domaine sont nombreuses, les plus fréquentes sont dues aux comportements de certains matériaux, à des grands déplacements ou encore des modifications de conditions aux limites [66]. La relaxation dynamique a été conçue pour traiter celles liées à la géométrie du problème. Elles apparaissent lorsque les configurations initiales et à l'équilibre du système considéré, ne peuvent plus être confondues. De tels problèmes sont aujourd'hui traités avec la méthode des éléments finis, en la combinant avec un algorithme de type Newton-Raphson. Mais à l'époque de la création de la relaxation dynamique, l'essor des éléments finis débute à peine et leur résolution demeure un défi scientifique [61].

L'originalité de cette méthode repose sur l'idée que l'état d'équilibre d'un système, purement élastique et amorti, ne dépend pas de la manière dont le chargement lui est appliqué. En effet si celui-ci est imposé en une fois, un phénomène d'amplification dynamique pourrait être observé dans un premier temps, mais le système oscillerait ensuite autour de sa position d'équilibre, en convergeant plus ou moins rapidement vers elle en fonction de son amortissement. L'état d'équilibre du système est ainsi considéré comme l'aboutissement de son comportement transitoire.

La relaxation dynamique peut être utilisée en combinaison avec différentes méthodes numériques, en fonction de la nature du problème à résoudre. Une partie importante des premières analyses a été dédiée à des problèmes continus, gouvernés par des équations aux dérivées partielles et résolus par différences finies ou éléments finis [33, 83, 82, 74]. Les premières applications de cette méthode, traitées par A. S. Day, sont en effet des problèmes de plaques et coques en élasticité linéaire [33]. Quelques années plus tard, K. R. Rushton réalise le premier calcul d'une plaque en grands déplacements [83]. Contrairement au cas continu, les problèmes discrets ne sont pas décrits par une équation aux dérivées partielles. Le calcul dynamique transitoire se suffit alors à lui-même et la méthode devient très proche de celles couramment utilisées pour résoudre des problèmes discrets à plusieurs corps. Elle a notamment été utilisée pour l'étude de matériaux granulaires par J. P. Bardet et J. Proudhet [9]. Cette version discrète a également été plébiscitée pour l'étude des structures légères, composées d'un réseau d'éléments en traction et/ou compression dont les noeuds sont souvent les particules du problème discret. Les premiers à avoir étudié cette typologie de structure avec la relaxation dynamique, en analysant le comportement d'une toiture tenue par des câbles, sont A. S. Day et J. Bunce [34]. Les développements de M. Barnes ont également contribué à étendre cette application de la méthode à l'étude des membranes et des gridshells élastiques (coque formée par une grille de poutre mise en forme par déformation élastique) [11], avec notamment la création d'un élément de membrane discret à trois noeuds [10]. Les travaux sur les gridshells élastiques ont quant à eux permis de développer l'élément discret de poutre avec une raideur en flexion, introduit au paragraphe 3.1.2 pour reproduire le comportement d'un anneau [1, 2, 39, 37, 38]. Cette application de la méthode de relaxation dynamique aux structures légères a déjà prouvé son efficacité et est reprise dans le cadre de ce travail de thèse pour l'étude des écrans de filet.

3.2.2 L'algorithme de l'amortissement cinétique

L'ingéniosité de la méthode de relaxation dynamique réside dans l'optimisation de la vitesse de convergence du problème transitoire vers la solution d'équilibre. Gardant à l'esprit que le problème à résoudre est non-linéaire mais quasi-statique, le calcul dynamique représente uniquement un moyen de déterminer la position d'équilibre et n'a aucunement l'ambition de reproduire un comportement réaliste. Pour appuyer ce propos, on considère un système amorti sous sa forme matricielle, avec $\underline{\underline{M}}$ la matrice de masse, $\underline{\underline{K}}$ la matrice de rigidité, $\underline{\underline{C}}$ la matrice d'amortissement, \underline{F} le vecteur des efforts extérieurs et \underline{U} le vecteur des inconnues cinématiques en déplacement. La dérivation temporelle est indiquée par un point, et les vecteurs $\underline{\dot{U}}$ et $\underline{\ddot{U}}$ réunissent respectivement les inconnues en vitesse et en accélération.

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\ddot{U}} + \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\dot{U}} + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{U} = \underline{F} \quad (3.11)$$

L'état d'équilibre du système dépend seulement de la matrice de rigidité, de la transformation à l'équilibre et des efforts extérieurs. Les paramètres dynamiques du problème, donnés par les matrices des masses et des amortissements, n'ont en revanche aucune influence sur celui-ci et peuvent être choisis astucieusement par l'utilisateur pour accélérer la convergence. Typiquement, en faisant l'hypothèse qu'il existe une base dans laquelle toutes les matrices sont diagonales, le système 3.11 converge le plus rapidement vers sa position d'équilibre si les termes de la matrice d'amortissements sont égaux aux amortissements critiques donnés par la formule :

$$c_{ii} = 2\sqrt{k_{ii}m_{ii}} \quad (3.12)$$

Les masses m_{ii} sont ensuite évaluées en fonction du pas d'intégration du calcul explicite afin de garantir la stabilité du schéma numérique (la stabilité du schéma est étudiée en détail au paragraphe 3.3).

En pratique les matrices de raideurs et de masses ne sont pas diagonalisables dans une base commune et le terme d'amortissement est souvent construit comme une combinaison linéaire de ces deux matrices (amortissement de Rayleigh) ; la détermination des paramètres optimaux peut alors devenir fastidieuse [75, 64]. Afin de simplifier le problème tout en améliorant la vitesse de convergence, P. Cundall a développé une alternative astucieuse dite de l'amortissement cinétique [30]. Comme son nom l'indique, cet amortissement dépend uniquement de la vitesse du système et non de ses propriétés physiques. En l'absence d'amortissement ($\underline{\underline{C}} = 0$ dans l'équation (3.11)) et pour des forces extérieures \underline{F} conservatrices, le système oscille librement autour de sa position d'équilibre tout en conservant son énergie mécanique. Au cours de ce mouvement, l'état d'équilibre statique théorique est atteint à chaque fois que l'énergie potentielle est minimale, et réciproquement l'énergie cinétique maximale. L'algorithme proposé par P. Cundall repose sur ce principe de conservation. Le système est ainsi libre d'osciller jusqu'à ce qu'il atteigne un maximum local d'énergie cinétique. L'algorithme est alors arrêté, le vecteur vitesse est artificiellement remplacé par le vecteur nul et la totalité de l'énergie cinétique est ainsi dissipée. Si la valeur du maximum est inférieure à une valeur seuil, en dessous de laquelle l'utilisateur considère que l'essentiel de l'énergie a été dissipé, le calcul est arrêté et l'état de la structure est défini comme celui de l'équilibre. En revanche si ce seuil n'est pas atteint, un nouveau calcul peut débuter avec des conditions initiales nulles en vitesse, à partir de l'état où le précédent a été arrêté. Le processus est ainsi itéré jusqu'à convergence de l'algorithme. Il a l'avantage de dissiper rapidement une grande quantité d'énergie. Cependant il ne garantit pas la convergence vers le

minimum absolu d'énergie potentielle. L'algorithme dépend ainsi fortement des conditions d'initialisation. Cette méthode d'amortissement facile à implémenter a largement été utilisée pour son efficacité [2, 10, 11, 39, 37, 38, 40], et est également reprise dans le cadre de ce travail.

3.3 Etude du schéma d'intégration et conditions de stabilité

3.3.1 Cas général

La stabilité du schéma d'intégration explicite, utilisé pour reproduire le comportement transitoire du système, a été étudiée en détail par M. Papadrakakis pour un système amorti [75]. Cette partie reprend les éléments de sa démonstration dans le cas particulier où l'énergie est dissipée par amortissement cinétique.

On considère un système dont le comportement dynamique est décrit par l'équation matricielle (3.11). Dans le cas particulier de l'amortissement cinétique, le système oscille librement entre deux mises à zéro des vitesses (voir Paragraphe 3.2.2) et l'équation (3.11) devient :

$$\underline{\underline{M}} \cdot \ddot{\underline{U}} + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{U} = \underline{F} \quad (3.13)$$

Pour obtenir la relation explicite liant les inconnues cinématiques à différentes étapes du calcul, l'équation (3.13) est ensuite intégrée par différences finies centrées. En notant h le pas d'intégration, la dérivée seconde à l'itération n est calculée en fonction des inconnues cinématiques aux itérations $n - 1$, n , $n + 1$ par la formule :

$$\ddot{\underline{U}}^n = \frac{1}{h^2} (\underline{U}^{n+1} + \underline{U}^{n-1} - 2\underline{U}^n) \quad (3.14)$$

En injectant l'expression de la dérivée seconde (3.14) dans la relation de la dynamique (3.13) et en faisant l'hypothèse que la matrice de masse est inversible, le vecteur des inconnues cinématiques à l'étape $n + 1$ s'exprime en fonction des résultats du calcul aux étapes n et $n - 1$.

$$\underline{U}^{n+1} = (2\underline{\underline{I}} - h^2 \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}}) \underline{U}^n - \underline{U}^{n-1} + h^2 \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{F} \quad (3.15)$$

Pour supprimer ensuite le terme constant de la relation de récurrence (3.15), on introduit la grandeur \underline{U}^* définie comme la solution du problème à l'équilibre. On considère alors comme nouvelle variable du problème, l'écart de la réponse dynamique à la configuration d'équilibre noté $\tilde{\underline{U}}$.

$$\tilde{\underline{U}}^n = \underline{U}^n - \underline{U}^* \quad (3.16)$$

La relation de récurrence (3.15) peut ainsi être écrite en fonction de cette nouvelle variable.

$$\tilde{\underline{U}}^{n+1} = (2\underline{\underline{I}} - h^2 \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}}) \tilde{\underline{U}}^n - \tilde{\underline{U}}^{n-1} \quad (3.17)$$

En l'absence d'amortissement, il est inutile d'essayer de prouver la convergence de la suite. Le schéma d'intégration est ainsi stable si la suite des $(\tilde{\underline{U}})_n$ reste bornée, c'est-à-dire si la norme du vecteur déplacement admet un majorant différent de $+\infty$. Une manière simple de vérifier le respect de ce critère est d'étudier le comportement de la plus grande composante

du vecteur \tilde{U}^n . Il est toutefois difficile de poursuivre l'analyse en conservant le couplage imposé par la matrice $\underline{M}^{-1}\underline{K}$, a priori quelconque. La solution usuelle pour contourner cette difficulté est de considérer que cette matrice est diagonalisable et d'écrire la relation (3.17) dans la base formée par ses vecteurs propres. Cependant sans autre hypothèse, l'information sur la contribution des matrices de masses et de raideurs à la stabilité du problème serait perdue à la suite de cette transformation. M. Papadrakakis propose ici de considérer que la matrice de masses est proportionnelle aux termes de la diagonale principale de \underline{K} . En notant \underline{D} cette matrice diagonale, on a dorénavant : $\underline{M} = m\underline{D}$. On introduit par ailleurs la matrice \underline{P} des vecteurs propres de $\underline{D}^{-1}\underline{K}$. On note avec une minuscule, le nouveau vecteur des inconnues cinématiques résultant du changement de base : $\tilde{u}^n = \underline{P}^{-1}\tilde{U}^n$. La relation (3.17) peut finalement être exprimée de manière découplée comme suit :

$$\tilde{u}_i^{n+1} = \left(2 - \frac{h^2\lambda_i}{m}\right)\tilde{u}_i^n - \tilde{u}_i^{n-1} \quad (3.18)$$

où λ_i est la i ème valeur propre de la matrice $\underline{D}^{-1}\underline{K}$.

La suite (3.18) est linéaire récurrente d'ordre 2, elle peut donc être exprimée de manière analytique en fonction du paramètre de stabilité $S = \frac{h^2\lambda_i}{m}$. Pour cela il est nécessaire d'étudier son polynôme caractéristique $X^2 - (2 - S)X + 1 = 0$ ou plus exactement le signe de son discriminant :

$$\Delta = S(S - 4) \quad (3.19)$$

Trois cas sont à distinguer :

1. $\Delta > 0$.

On a alors $S > 4$. Le polynôme caractéristique admet deux racines réelles conjuguées que l'on notera r_1 et r_2 . Les termes de la suite $(\tilde{u}^n)_n$ sont donnés par la formule :

$$\tilde{u}^n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.20)$$

Comme $r_2 > r_1$, $(u_n)_n$ reste bornée si $r_1 \geq -1$ et $r_2 \leq 1$. La première de ces inégalités s'exprime sous la forme :

$$1 - \frac{S}{2} - \frac{\sqrt{S(S-4)}}{2} \geq -1 \quad \Rightarrow \quad S + \sqrt{S(S-4)} \leq 1 \quad (3.21)$$

Or, cette dernière inégalité est en contradiction avec le fait que $S > 4$. On en déduit donc que $(\tilde{u}^n)_n$ diverge et que le schéma numérique est potentiellement instable si $S > 4$.

2. $\Delta = 0$.

Dans ce cas $S = 4$. Le polynôme caractéristique admet une racine double notée r . Les termes de la suite $(\tilde{u}^n)_n$ s'expriment alors de la manière suivante :

$$\tilde{u}^n = (\lambda + \mu n)r^n \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.22)$$

Un rapide calcul permet de montrer que $r = 1$ et donc que la suite diverge.

3. $\Delta < 0$.

On a alors la condition $S < 4$. Le polynôme caractéristique admet deux racines

complexes conjuguées (r_1 et r_2) de module r et d'argument θ et les termes de la suite sont donnés par :

$$\tilde{u}^n = (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))r^n \quad (3.23)$$

On en déduit que la suite $(\tilde{u}^n)_n$ reste bornée si $r \leq 1$.

$$r^2 = \frac{1}{4} [(S - 2)^2 + S(4 - S)] = 1 \quad (3.24)$$

La suite est donc bornée pour $S < 4$ et on retrouve alors le comportement harmonique des oscillations libres.

On déduit de cette étude que la suite $(\tilde{u}^n)_n$ reste bornée si :

$$\frac{h^2}{m} < \frac{4}{\lambda_i} \quad (3.25)$$

Comme cette relation doit être vérifiée pour toutes les valeurs propres λ_i de la matrice $\underline{\underline{D}}^{-1}\underline{\underline{K}}$, la stabilité de l'algorithme est finalement assurée par la relation :

$$\left(\frac{h^2}{m}\right)_{opt} < \frac{4}{\lambda_{max}} \quad (3.26)$$

Dans sa démonstration M. Papadrakakis fait l'hypothèse que la suite des $(\tilde{u}^n)_n$ est de nature géométrique. Cette restriction ne change en rien les développements ultérieurs. Une fois l'expression de la suite injectée dans la relation de récurrence, le critère de stabilité est également recherché en étudiant un polynôme du second degré dont l'indéterminée est la raison de cette suite, et qui par construction est également son polynôme caractéristique. La relation de stabilité (3.26) présente l'avantage de ne dépendre que de la plus grande valeur propre de la matrice de rigidité. Des méthodes permettant d'évaluer un majorant des valeurs propres d'une matrice, sans la diagonaliser, existent et sont faciles à mettre en œuvre (voir Paragraphe 3.4).

La condition (3.26) est valide pour tout calcul explicite dont l'intégration est réalisée par différences finies centrées. Lorsque le comportement dynamique réel du système est recherché, les incréments de temps h sont évalués en fonction de la raideur du système et des masses associées à chacune des inconnues cinématiques. En revanche dans le cas particulier de la relaxation dynamique, la matrice de masses est cette fois déterminée en fonction du pas de temps (souvent unitaire) et de la raideur. Comme par ailleurs toutes les masses sont établies à partir du même critère de stabilité, la matrice associée est par construction proportionnelle à l'identité. Dans la suite de ce chapitre, la relation donnant la masse critique en fonction de la raideur du système sera considérée sous la forme suivante :

$$m_{opt} > \frac{h^2}{4} \lambda_{max} \quad (3.27)$$

où λ_{max} est maintenant définie comme la plus grande valeur propre de la matrice de rigidité $\underline{\underline{K}}$ également appelée rayon spectral et sera notée dans la suite $\rho(\underline{\underline{K}})$.

3.3.2 Remarques liées à l'implémentation de l'algorithme

Le schéma d'intégration implémenté pour la résolution du problème de relaxation dynamique est en réalité un peu différent de celui donné par l'expression (3.15). En effet, afin d'obtenir une relation de récurrence liant uniquement les inconnues cinématiques en déplacement, une intégration supplémentaire et non nécessaire a dû être réalisée. La méthode d'intégration réellement considérée est celle de Runge-Kutta à l'ordre 2, qui approche également les dérivées en milieu d'intervalle par différence finie centrée. Par ailleurs, dans la mesure où les conditions initiales du problème transitoire n'affectent pas l'état d'équilibre, les inconnues cinématiques sont à partir de maintenant données en position et regroupées dans le vecteur \underline{X} . En notant également \underline{V} les inconnues en vitesse, la résolution du problème numérique consiste à intégrer le couple d'équations :

$$\begin{cases} \dot{\underline{V}} = \underline{M}^{-1} \underline{R} \\ \dot{\underline{X}} = \underline{V} \end{cases} \quad (3.28)$$

où \underline{R} est le vecteur des résultantes appliquées aux particules, comprenant les efforts intérieurs et extérieurs. Les équations (3.28) sont usuellement intégrées séparément pour les applications aux structures [2, 10, 11, 37, 38]. En reprenant le formalisme utilisé au paragraphe 3.3.1, les approximations des vecteurs \underline{X} et \underline{V} sont fournies à partir des valeurs de leurs dérivées en milieu d'intervalle.

$$\begin{cases} \underline{V}^{n+1} = \underline{V}^n + h \underline{M}^{-1} \underline{R}^{n+\frac{1}{2}} \\ \underline{X}^{n+1} = \underline{X}^n + h \underline{V}^{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (3.29)$$

Le schéma d'intégration explicite est ensuite obtenu en utilisant, dans la seconde équation, l'expression de la vitesse à l'itération $n + \frac{1}{2}$ fournie par la première relation de récurrence du couple (3.29).

$$\underline{X}^{n+1} = \underline{X}^n + h \underline{V}^{n-\frac{1}{2}} + h^2 \underline{M}^{-1} \underline{R}^n \quad (3.30)$$

Ce schéma explicite ne peut pas être initialisé sous la forme (3.30), qui fait intervenir une vitesse non définie. Pour contourner cette difficulté, on introduit la vitesse moyenne à l'itération n par :

$$\underline{V}^n = \frac{1}{2} \left(\underline{V}^{n-\frac{1}{2}} + \underline{V}^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (3.31)$$

Cette expression de la vitesse à un pas entier sert uniquement à initialiser le calcul.

$$\begin{cases} \underline{V}^{\frac{1}{2}} = \underline{V}^0 + \frac{h}{2} \underline{M}^{-1} \underline{R}^0 \\ \underline{X}^1 = \underline{X}^0 + h \left(2 \underline{V}^0 - \underline{V}^{\frac{1}{2}} \right) + h^2 \underline{M}^{-1} \underline{R}^0 \end{cases} \quad (3.32)$$

Le passage du schéma implémenté (3.30) à la relation de récurrence (3.15) est immédiat en remplaçant la vitesse à l'étape $n - \frac{1}{2}$ par son expression, en fonction des déplacements au pas n et $n - 1$, donnée par la seconde relation d'intégration du couple (3.29).

Lorsque l'expression de la masse critique (3.27) a été donnée à la fin du paragraphe (3.3.1), il a été précisé dans le même temps que la matrice de masse était choisie proportionnelle à la matrice identité. Cependant, le schéma d'intégration (3.30) n'a pas été simplifié en conséquence. En effet, même si cela a été jusqu'ici masqué, les deux systèmes étudiés ne

sont pas les mêmes. Les efforts intérieurs ne sont pas définis à l'échelle de la structure complète, mais seulement sur des éléments indépendants formés par des groupes de particules (voir Paragraphe 3.1.6). Les masses fictives des particules appartenant à un même élément sont estimées avec le critère (3.27) et sont donc par construction identiques. Pour déterminer le déplacement des particules au pas courant, il est ensuite nécessaire de transmettre, à l'intérieur de chaque groupe de particules formant une liaison, les efforts intérieurs permettant de construire le vecteur force \underline{R} de l'équation (3.30) (cf. Paragraphe 3.1.6). Cette méthode de transfert est également utilisée dans [37, 40]. Par ailleurs après transfert des masses, la matrice \underline{M} est toujours diagonale, mais n'est plus proportionnelle à la matrice identité.

3.4 Estimation des masses fictives pour les éléments de structure

Le critère d'estimation des masses optimales a été donné de manière générique, en fonction du rayon spectral de la matrice de raideur par la relation (3.27). Même si elle n'intervient pas dans les calculs du schéma explicite, cette matrice doit donc a priori être construite pour chacun des éléments. Il existe des méthodes, parfois complexes, qui fournissent une évaluation du rayon spectral de la matrice de raideur sans nécessiter son assemblage [74]. Cette étape cruciale peut s'avérer complexe et coûteuse en temps de calcul, surtout lorsque les efforts internes sont des fonctions non-linéaires des déplacements [64]. Des méthodes ont ainsi été développées pour éviter de réaliser ce calcul à chaque itération. Pour un calcul dynamique réel, leur principe repose sur l'estimation d'une fréquence de résonance apparente du système, qui est calculée à partir de la variation de l'accélération à l'itération courante. Cette fréquence est ensuite comparée avec celle du calcul explicite pour déterminer si une mise à jour des paramètres d'intégration est nécessaire [76, 74]. Une alternative consiste à déterminer de manière analytique les formes des matrices de raideur ainsi que les majorations de leur rayon spectral. Cette approche permet de disposer d'un critère de stabilité prenant la forme d'une fonction analytique des déplacements des particules. L'identification des matrices de rigidité et la construction des critères sont proposées dans la suite de cette partie pour trois éléments dont la combinaison permet de reproduire l'ensemble des modèles discrets des composants de l'écran (précédemment présentés dans la partie 3.1). Ces trois éléments sont : le câble simple, le câble glissant et la poutre en flexion pure. La simplicité des critères a volontairement été recherchée, au détriment parfois de la vitesse de calcul. Pour cette raison, les masses ne sont pas actualisées à chaque itération, mais après chaque maximum d'énergie cinétique.

3.4.1 Le câble simple

Le câble simple peut être apparenté à une chaîne de ressorts. Il est formé par un ensemble ordonné de n particules pouvant chacune transmettre des efforts de traction à leurs deux voisines, selon la direction des segments qui les relient. Pour le calcul des efforts intérieurs, le câble doit plutôt être conçu comme une succession de $n - 1$ couples de particules, semblable à celui présenté sur la figure 3.7 (a). Par ailleurs, on considère que la tension le long de chacun des segments évolue linéairement en fonction de sa déformation. Les efforts intérieurs au câble sont ainsi calculés localement selon la relation (3.1). On fait également l'hypothèse que

les déformations des segments du câble restent petites de manière à pouvoir être linéarisées. La tension dans le segment i reliant les particules i et $i + 1$ est ainsi donnée par la relation :

$$T_i = ES \frac{\|\underline{u}_{i+1} - \underline{u}_i\|}{l_0^i} \quad (3.33)$$

où les vecteurs \underline{u}_i désignent le déplacement de la particule i . On considère par ailleurs que tous les segments de câble ont les mêmes propriétés mécaniques ainsi que les mêmes longueurs non chargées, et on introduit la raideur $k = \frac{ES}{l_0}$ avec l_0 cette longueur. La généralisation à des longueurs différentes ne pose aucune difficulté conceptuelle mais elle alourdit considérablement les notations et calculs. Une des méthodes pour construire la matrice de raideur de cet élément consiste à écrire ses équations d'équilibre pour un chargement extérieur donné. On considère que le câble est soumis à n efforts \underline{f}_i ponctuels, appliqués à chacune de ses particules. Un schéma du problème considéré est présenté sur la figure 3.13. En accord avec la relation (3.33) donnant l'effort intérieur en fonction des déplacements nodaux, l'équilibre des particules du câble est décrit par le système d'équations :

$$\begin{cases} k(\underline{u}_2 - \underline{u}_1) + \underline{f}_1 = 0 \\ k(\underline{u}_{i+1} + \underline{u}_{i-1} - 2\underline{u}_i) + \underline{f}_i = 0 \quad i \in [2, n-1] \\ k(\underline{u}_{n-1} - \underline{u}_n) + \underline{f}_n = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

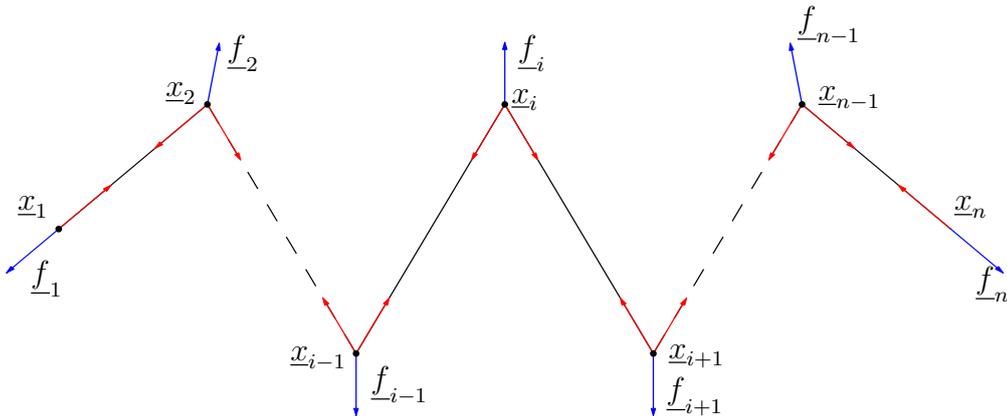


FIGURE 3.13 – Equilibre d'un câble simple formé par n particules

La matrice de rigidité est ensuite déduite en écrivant le système (3.34) sous forme matricielle. C'est une matrice carrée symétrique, de taille $3n$, dont l'expression est donnée sous la forme d'une matrice par blocs.

$$\underline{K} = k \begin{pmatrix} \underline{I} & -\underline{I} & 0 & \cdots & 0 \\ -\underline{I} & 2\underline{I} & -\underline{I} & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\underline{I} & -\underline{I} \\ 0 & \cdots & 0 & -\underline{I} & \underline{I} \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Pour ensuite obtenir une majoration de son rayon spectral, il suffit de tirer parti de la propriété qui fait de celui-ci un minorant naturel de l'ensemble des normes de matrice.

La norme infinie est sans aucun doute la plus judicieuse à utiliser et permet d'obtenir directement un majorant du rayon spectral de \underline{K} [100].

$$\rho(\underline{K}) \leq \|K\|_\infty = \max_{i \in [1, n]} \left(\sum_{j=1}^n |K_{ij}| \right) = 4k \quad (3.36)$$

On notera en outre que la majoration (3.36) est souvent justifiée de manière imprécise dans la littérature [75, 74]. Elle est en effet souvent attribuée au théorème de Gerschgorin, qui permet de définir, pour chacune des valeurs propres d'une matrice, un intervalle la contenant. Ce théorème fournit en réalité beaucoup plus d'informations sur les valeurs propres de la matrice qu'il n'en faut pour trouver un majorant de son rayon spectral.

Ce majorant doit ensuite être injecté dans la relation (3.27), afin d'évaluer les masses fictives optimales.

$$m_{opt} \geq h^2 k \quad (3.37)$$

Cette valeur sur-estime d'un facteur deux celle utilisée par M. Barnes dans son algorithme de relaxation dynamique [11]. On parvient cependant au même résultat en étudiant séparément la stabilité de chaque segment de câble. Dans la relation (3.37) le transfert des masses est naturellement assuré par la matrice de raideur construite à l'échelle du câble complet, alors qu'il doit être réalisé par des liaisons supplémentaires dans l'estimation proposée par M. Barnes. La contradiction n'est donc d'apparente.

Cas particulier d'un élément bouclé

Dans le cas particulier d'un élément bouclé, la bande centrale de la matrice est prolongée aux trois premières et trois dernières lignes. Cette modification de la géométrie n'a donc aucune influence sur la majoration du rayon spectral et sur l'évaluation des masses optimales.

3.4.2 Le câble glissant

Le câble glissant sans frottement est présenté en détail dans la partie 3.1.3. En apparence simple à manipuler, c'est un objet dont le comportement reste fortement non-linéaire. La construction de sa matrice de raideur par une méthode énergétique a déjà fait l'objet de plusieurs publications scientifiques [22, 56, 101]. Ce paragraphe propose une nouvelle estimation de cette matrice de raideur, à partir de la construction du vecteur des efforts intérieurs.

De la même manière que pour le câble simple, le vecteur des efforts intérieurs du câble glissant est déterminé grâce à la connaissance de son état à l'équilibre. Le câble glissant est par construction un objet discret qui représente un câble soumis à des chargements ponctuels et mobiles. Afin d'appréhender correctement les implications de la discrétisation du câble, le calcul de ses efforts intérieurs est mené en le considérant comme un milieu continu.

Identification du vecteur des efforts intérieurs

On considère ainsi un câble de longueur l , représenté comme un élément uni-dimensionnel paramétré par son abscisse curviligne notée s . $\forall s \in [0, l]$ la position d'un point du câble est donc donnée par l'application : $s \rightarrow \underline{x}(s)$. Le chargement imposé au câble est composé

de n forces \underline{f}_i appliquées aux points d'abscisse : $s_1 < \dots < s_n$ avec $s_1 = 0$ et $s_n = l$. Ces forces peuvent être apparentées aux anneaux du filet dans le cas d'un écran pare-blocs. Le problème ainsi que les notations associées sont présentés sur la figure 3.14.

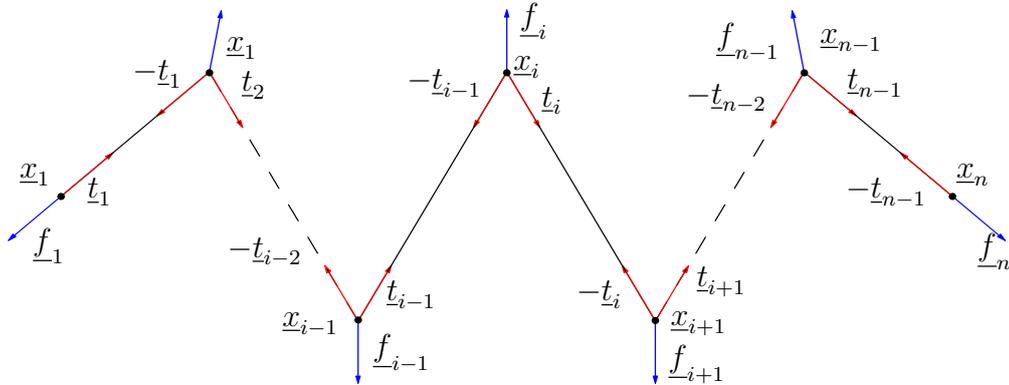


FIGURE 3.14 – Equilibre d'un câble glissant soumis à n forces ponctuelles

On considère également les hypothèses formulées ci-dessous dans la suite de l'étude :

- La fonction $s \rightarrow \underline{x}(s)$ est différentiable par morceau et le vecteur tangent est défini sur chacun des intervalles par l'application : $\underline{t} : s \rightarrow \frac{d\underline{x}(s)}{ds}$.
- Le câble n'a pas de raideur en compression et en flexion, son comportement élastique en traction est donné par une loi linéaire en fonction de sa déformation.
- Les phénomènes de frottement sont négligés de telle sorte que la tension reste uniforme le long du câble et peut être donnée par : $\underline{T}(s) = T\underline{t}(s)$ avec $s \in]0, l[$ partout où t est défini.
- Au regard des grandes transformations que peut subir le câble, toutes les équations d'équilibre sont données dans la configuration déformée.

On introduit l'élément de longueur ds , tel que :

$$ds \in \left] 0, \min \left(\frac{1}{2} \|\underline{x}(s_i) - \underline{x}(s_{i-1})\|, \frac{1}{2} \|\underline{x}(s_{i+1}) - \underline{x}(s_i)\| \right) \right[\quad (3.38)$$

L'équilibre d'un segment de câble délimité par deux forces ponctuelles consécutives est décrit dans un premier temps. Le segment $[s_i + ds, s_{i+1} - ds]$ n'est donc pas chargé et son état d'équilibre est simplement donné par la relation :

$$T\underline{t}(s_i + ds) = T\underline{t}(s_{i+1} - ds) \quad (3.39)$$

On en déduit que le câble est nécessairement rectiligne entre les points d'application de deux forces consécutives situés respectivement aux abscisses s_i et s_{i+1} . La direction des vecteurs tangents au segment est ainsi connue en fonction de la position de ces deux points.

$$\underline{t}(s_i^+) = \underline{t}(s_{i+1}^-) = \frac{\underline{x}(s_{i+1}) - \underline{x}(s_i)}{\|\underline{x}(s_{i+1}) - \underline{x}(s_i)\|} \quad (3.40)$$

Les discontinuités du vecteur tangent entre chaque segment sont ensuite déterminées par l'étude des portions de câble $[s_i - ds, s_i + ds]$ au milieu desquelles les forces \underline{f}_i sont appliquées :

$$T(\underline{t}(s_i^+) - \underline{t}(s_i^-)) + \underline{f}_i = 0 \quad (3.41)$$

Pour d'écrire complètement l'état d'équilibre du câble, il reste à étudier ses deux segments d'extrémité :

$$T\underline{t}(s_1^+) + \underline{f}_1 = 0 \quad \text{and} \quad -T\underline{t}(s_n^-) + \underline{f}_n = 0 \quad (3.42)$$

La géométrie déformée du câble, donnée par l'intégrale de son vecteur tangent, est linéaire par morceau et complètement déterminée par la position des points d'applications des forces (voir Figure 3.14). L'équilibre du câble complet est donné par une équation vectorielle de la forme $\underline{F}^{int} = \underline{F}^{ext}$ avec :

$$\underline{F}^{int} = -T \begin{bmatrix} \underline{t}(s_1^+) \\ \vdots \\ \underline{t}(s_i^+) - \underline{t}(s_i^-) \\ \vdots \\ -\underline{t}(s_n^-) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{F}^{ext} \begin{bmatrix} \underline{f}_1 \\ \vdots \\ \underline{f}_i \\ \vdots \\ \underline{f}_n \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

La géométrie déformée du câble sous un cas de charge ponctuel fournit ainsi une discrétisation naturelle du problème. Le vecteur des efforts intérieurs dans le modèle discret est complètement déterminé par les n positions des points d'applications des forces $[\underline{x}(s_1) \dots \underline{x}(s_i) \dots \underline{x}(s_n)]$, qui correspondent aux positions des particules et sont notés à partir de maintenant $[\underline{x}_1 \dots \underline{x}_i \dots \underline{x}_n]$. Les vecteurs tangents sont définis de la même manière que précédemment, en conservant uniquement les tangentes en aval des particules dans le sens de parcours du câble :

$$\underline{t}_i = \frac{\Delta \underline{x}_i}{l_i} \quad \text{avec} \quad \Delta \underline{x}_i = \underline{x}_{i+1} - \underline{x}_i \quad \text{et} \quad l_i = \|\underline{x}_{i+1} - \underline{x}_i\| \quad (3.44)$$

Les composantes du vecteur \underline{t}_i dans la base orthonormale directe $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ sont respectivement notées : $t_{1,i}, t_{2,i}, t_{3,i}$. En introduisant par ailleurs la loi de comportement élastique linéaire du câble dans l'expression continue du vecteur des efforts intérieurs (3.43), on parvient à exprimer ce dernier dans la base des déplacements nodaux :

$$\underline{F}^{int} = ES\epsilon \begin{bmatrix} -t_{1,1} \\ \vdots \\ t_{1,i-1} - t_{1,i} \\ t_{2,i-1} - t_{2,i} \\ t_{3,i-1} - t_{3,i} \\ \vdots \\ t_{3,n-1} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

où E et S sont respectivement le module d'Young et la section du câble et où ϵ est sa déformation totale, dont le calcul est donné par la relation (3.4). Pour alléger les notations, on introduit pour le reste des développements la longueur non chargée totale l_0 , ainsi que la longueur de chacun des segments l_i . La déformation ϵ est ainsi reformulée de la manière suivante :

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1} l_i}{l_0} \right)^2 - 1 \right) \quad \text{avec} \quad l_i = \|\underline{x}_{i+1} - \underline{x}_i\| \quad (3.46)$$

Contrairement au cas du câble simple, aucune hypothèse n'est formulée sur l'amplitude des déformations. Comme expliqué au paragraphe 3.1.3, les éléments de l'écran modélisés par des câbles glissants subissent des déformations pouvant atteindre plusieurs dizaines de pourcents.

Remarques sur la forme des efforts intérieurs

Avant de présenter le calcul de la matrice de raideur tangente, quelques remarques sur la forme du vecteur des efforts intérieurs sont formulées ci-après.

Unification des approches Comme expliqué dans l'introduction de cette partie (Paragraphe 3.4.2), plusieurs travaux ont déjà exhibé, par une approche énergétique, la forme de la matrice de raideur d'un câble glissant non frottant [22, 56, 101]. L'expression du vecteur des efforts intérieurs, obtenue en différenciant l'énergie de déformation, est la même dans chacune de ces démonstrations et diffère d'un facteur $\frac{t_i}{t_0}$ par rapport à celle déterminée dans ce travail (3.45). L'analyse des développements, menés dans ces trois travaux, révèle que la différence provient de l'écriture du champs de déformation associé à l'incrément de déplacement, qui n'est pas écrit à partir de la bonne configuration de référence. L'expression correcte a pu être déterminée dans ce travail en écrivant directement l'équilibre du câble dans sa configuration déformée. Elle a notamment permis de montrer que le modèle discret est complètement équivalent à la description continue lorsque le câble est uniquement soumis à des charges ponctuelles.

Vecteur normal discret L'hypothèse de glissement sans frottement implique que les forces extérieures restent orthogonales au vecteur tangent du câble dans sa géométrie déformée. La preuve a été fournie au paragraphe 3.4.2 pour un câble soumis à des efforts ponctuels et elle est relativement simple en cas de chargement réparti. Dans la première configuration, la géométrie du câble n'est pas continuellement différentiable et les vecteurs normaux ne peuvent pas être définis aux points d'application des forces ponctuelles. Il est en revanche tout à fait possible d'introduire une normale discrète, à condition de la construire de manière appropriée. Pour une ligne brisée, les concepts de normales et de courbure sont étroitement liés et, comme évoqué au paragraphe 3.1.2, plusieurs définitions en sont envisageables. Celle associée au cercle circonscrit avait alors été jugée la plus pertinente pour le calcul des efforts de flexion. Sans revenir sur ce précédent choix ni le contredire, cette-dernière est ici ponctuellement écartée au profit de celle construite à partir du cercle inscrit, dont la direction est donnée par la bissectrice de deux tangentes consécutives (voir figure 3.14). Ces deux normales partagent certaines propriétés et tendent notamment vers la normale continue lorsque l'angle devient plat et que la discontinuité disparaît. La normale au cercle inscrit est exprimée en fonction des vecteurs tangents introduits précédemment dans l'expression des efforts intérieurs (3.45), par la relation suivante :

$$\underline{n}_i = \frac{\underline{t}_{i-1} - \underline{t}_i}{\|\underline{t}_{i-1} - \underline{t}_i\|} \quad (3.47)$$

Elle apparaît ainsi naturellement dans l'expression (3.45), des efforts intérieurs aux câbles glissant. Même si les efforts le long des segments situés aux extrémités du câble ne sont pas dirigés selon cette normale, les notations sont simplifiées en introduisant le vecteur \underline{N} , défini

par la relation $\underline{F}^{int} = ES\epsilon\underline{N}$ et dont les composantes peuvent être déterminées à partir de l'expression (3.45).

$$\underline{N}^T = [-t_{1,1}, \dots, t_{1,i-1} - t_{1,i}, t_{2,i-1} - t_{2,i}, t_{3,i-1} - t_{3,i}, \dots, t_{3,n-1}] \quad (3.48)$$

Identification de la matrice de raideur tangente

L'étude de l'état d'équilibre du câble glissant a permis de définir son vecteur des efforts intérieurs par une fonction des déplacements nodaux, qui par extension est applicable à tout vecteur déplacement cinématiquement admissible. La matrice de raideur tangente peut maintenant être déduite des efforts intérieurs par différenciation :

$$\underline{K} = \text{grad}_{\underline{U}}(\underline{F}^{int}) \quad (3.49)$$

où \underline{U} est le vecteur eulérien des déplacements nodaux. \underline{F}^{int} et \underline{U} sont des vecteurs de taille $3n$ et afin d'éviter toute confusion, leurs composantes sont indexées avec l'indice $j \in [1, 3n]$, tandis que les particules du câble discret sont elles indexées avec l'indice $i \in [1, n]$. Par exemple, en considérant que $j = 3i$ et en utilisant l'expression (3.45) on note à partir de maintenant :

$$\begin{cases} F_j^{int} = ES\epsilon N_j = ES\epsilon(t_{1,i-1} - t_{1,i}) \\ F_{j-1}^{int} = ES\epsilon(t_{3,i-2} - t_{3,i-1}) \\ F_{j+1}^{int} = ES\epsilon(t_{2,i-1} - t_{2,i}) \end{cases} \quad (3.50)$$

Ces notations sont également utilisées pour les déplacements nodaux. Les termes de la matrice de raideur tangente sont ainsi donnés par :

$$K_{jk} = \frac{\partial F_j^{int}}{\partial U_k} = ES \left[N_j \frac{\partial \epsilon}{\partial U_k} + \epsilon \frac{\partial N_j}{\partial U_k} \right] \quad (3.51)$$

Pour simplifier la suite des développements, \underline{K} est décomposée en une somme de deux matrices carrées. On introduit ainsi les matrices \underline{K}_E et \underline{K}_G , qui correspondent respectivement à ses composantes de raideur élastique et géométrique.

$$K_{E,jk} = ES N_j \frac{\partial \epsilon}{\partial U_k} \quad \text{et} \quad K_{G,jk} = ES \epsilon \frac{\partial N_j}{\partial U_k} \quad (3.52)$$

Il ne reste plus qu'à calculer les dérivées partielles pour déterminer la forme de chacune de ces matrices. On se propose de commencer par celle de raideur élastique \underline{K}_E . La déformation du câble est déterminée à partir de la relation (3.46) qui fait intervenir l'élongation de chacun des segments. En reprenant les notations introduites dans la définition des tangentes discrètes (3.44), ces longueurs peuvent être exprimées en fonction de la position des particules.

$$l_i = \sqrt{\Delta x_{1,i}^2 + \Delta x_{2,i}^2 + \Delta x_{3,i}^2} \quad (3.53)$$

En injectant ensuite la relation (3.53) dans l'expression de la matrice de raideur élastique, on peut écrire :

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial U_k} = \frac{l}{l_0^2} \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{1}{2l_i} \left(\frac{\partial \Delta x_{1,i}^2}{\partial U_k} + \frac{\partial \Delta x_{2,i}^2}{\partial U_k} + \frac{\partial \Delta x_{3,i}^2}{\partial U_k} \right) \right] \quad (3.54)$$

Cette dernière formulation peut ensuite être développée en tirant parti de l'indexation sur les déplacements nodaux et de l'opérateur de Kronecker, défini par $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \epsilon}{\partial U_k} &= \frac{l}{l_0^2} \sum_{j=1}^{3n-3} \left[\frac{x_{j+3}-x_j}{l_j} \left(\frac{\partial x_{j+3}}{\partial U_k} - \frac{\partial x_j}{\partial U_k} \right) \right] \\ &= \frac{l}{l_0^2} \sum_{j=1}^{3n-3} \left[\frac{x_{j+3}-x_j}{l_j} (\delta_{(j+3)k} - \delta_{jk}) \right]\end{aligned}\quad (3.55)$$

Les coefficients de la matrice $\underline{\underline{K}}_E$ sont finalement définis de la manière suivante :

$$K_{E,jk} = \frac{ES}{l_0} N_j \begin{cases} -\frac{l}{l_0} \frac{x_{k+3}-x_k}{l_k} & \text{if } k \in [1, 3] \\ \frac{l}{l_0} \left(\frac{x_k-x_{k-3}}{l_{k-3}} - \frac{x_{k+3}-x_k}{l_k} \right) & \text{if } k \in [4, 3n-3] \\ \frac{l}{l_0} \frac{x_k-x_{k-3}}{l_{k-3}} & \text{if } k \in [3n-2, 3n] \end{cases} \quad (3.56)$$

On reconnaît ici l'expression de la normale discrète \underline{N} , qui fournit une formulation compacte de $\underline{\underline{K}}_E$.

$$\underline{\underline{K}}_E = \frac{ES}{l_0} \frac{l}{l_0} \underline{N} \otimes \underline{N} = K_0 \frac{l}{l_0} \underline{N} \otimes \underline{N} \quad (3.57)$$

La partie géométrique $\underline{\underline{K}}_G$ de la matrice de raideur dépend des coefficients aux dérivées partielles $\frac{\partial N_j}{\partial U_k}$. L'indexation globale est de nouveau utilisée et, pour clarifier la suite des développements, on se place dans le cas où j est un multiple de 3 et appartient à l'intervalle $[4, 3n-3]$. Les résultats seront ensuite étendus sans difficulté aux autres lignes de la matrice.

$$\frac{\partial N_j}{\partial U_k} = \frac{\partial}{\partial U_k} \left(\frac{x_j - x_{j-3}}{l_{j-3}} - \frac{x_{j+3} - x_j}{l_j} \right) \quad (3.58)$$

Ce qui donne après développement,

$$\frac{\partial N_j}{\partial U_k} = \frac{\delta_{jk} l_{j-3} - \frac{\partial l_{j-3}}{\partial U_k} x_j}{l_{j-3}^2} - \frac{\delta_{(j-3)k} l_{j-3} - \frac{\partial l_{j-3}}{\partial U_k} x_{j-3}}{l_{j-3}^2} - \frac{\delta_{(j+3)k} l_j - \frac{\partial l_j}{\partial U_k} x_{j+3}}{l_j^2} + \frac{\delta_{jk} l_j - \frac{\partial l_j}{\partial U_k} x_j}{l_j^2} \quad (3.59)$$

Plusieurs sous-cas doivent ensuite être étudiés en fonction des valeurs prises par k . D'après la relation (3.53), les coefficients sont donnés par les expressions ci-après :

— $k = j$:

$$\frac{\partial N_j}{\partial U_j} = \frac{l_{j-3}^2 - (x_j - x_{j-3})^2}{l_{j-3}^3} + \frac{l_j^2 - (x_{j+3} - x_j)^2}{l_j^3} \quad (3.60)$$

— $k = j - 3$:

$$\frac{\partial N_j}{\partial U_{j-3}} = \frac{(x_j - x_{j-3})^2 - l_{j-3}^2}{l_{j-3}^3} \quad (3.61)$$

— $k = j + 3$:

$$\frac{\partial N_j}{\partial U_{j+3}} = \frac{(x_{j+3} - x_j)^2 - l_j^2}{l_j^3} \quad (3.62)$$

— $k = j - 2$:

$$\frac{\partial N_j}{\partial U_{j-2}} = \frac{(x_j - x_{j-3})(x_{j+1} - x_{j-2})}{l_{j-3}^3} \quad (3.63)$$

3.4. ESTIMATION DES MASSES FICTIVES POUR LES ÉLÉMENTS DE STRUCTURE

— $k = j - 1$:

$$\frac{\partial N_j}{\partial U_{j-1}} = \frac{(x_j - x_{j-3})(x_{j+2} - x_{j-1})}{l_{j-3}^3} \quad (3.64)$$

— $k = j + 1$:

$$\frac{\partial N_j}{\partial U_{j+1}} = -\frac{(x_j - x_{j-3})(x_{j+1} - x_{j-2})}{l_{j-3}^3} - \frac{(x_{j+3} - x_j)(x_{j+4} - x_{j+1})}{l_j^3} \quad (3.65)$$

— $k = j + 2$:

$$\frac{\partial N_j}{\partial U_{j+2}} = -\frac{(x_j - x_{j-3})(x_{j+2} - x_{j-1})}{l_{j-3}^3} - \frac{(x_{j+3} - x_j)(x_{j+5} - x_{j+2})}{l_j^3} \quad (3.66)$$

— $k = j + 4$:

$$\frac{\partial N_j}{\partial U_{j+4}} = \frac{(x_{j+3} - x_j)(x_{j+4} - x_{j+1})}{l_j^3} \quad (3.67)$$

— $k = j + 5$:

$$\frac{\partial N_j}{\partial U_{j+5}} = \frac{(x_{j+3} - x_j)(x_{j+5} - x_{j+2})}{l_j^3} \quad (3.68)$$

— $k \notin [j - 3, j + 5]$

$$\frac{\partial N_j}{\partial U_k} = 0 \quad (3.69)$$

En étendant ces résultats aux lignes $k + 1$ et $k + 2$ de la matrice $\text{grad}_U(N)$, on parvient à construire une suite de matrices carrées de taille 3, dont les coefficients sont donnés en fonction de l'indice i (faisant référence à l'ordre des particules). $\forall i \in [1, n]$:

$$\underline{\underline{A}}_i = -\frac{1}{l_i^3} \begin{pmatrix} \Delta x_{1,i}^2 - l_i^2 & \Delta x_{1,i} \Delta x_{2,i} & \Delta x_{1,i} \Delta x_{3,i} \\ \text{sym} & \Delta x_{2,i}^2 - l_i^2 & \Delta x_{2,i} \Delta x_{3,i} \\ & & \Delta x_{3,i}^2 - l_i^2 \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

La matrice de raideur géométrique est ainsi exprimée en fonction de la suite des matrices $\underline{\underline{A}}_i$:

$$\underline{\underline{K}}_G = ES\epsilon \begin{pmatrix} \underline{\underline{A}}_1 & -\underline{\underline{A}}_1 & 0 & & \dots & 0 \\ & \underline{\underline{A}}_1 + \underline{\underline{A}}_2 & -\underline{\underline{A}}_2 & 0 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \underline{\underline{A}}_{i-1} + \underline{\underline{A}}_i & -\underline{\underline{A}}_i & 0 & \dots & 0 \\ \text{sym} & & & & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ & & & & & & \underline{\underline{A}}_{n-2} + \underline{\underline{A}}_{n-1} & -\underline{\underline{A}}_{n-1} \\ & & & & & & & \underline{\underline{A}}_{n-1} \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

En additionnant les termes de raideur élastique et géométrique donnés par les expressions (3.57) et (3.71), on obtient la forme pleine et symétrique, de la matrice de raideur tangente du câble glissant.

Remarque sur l'apparition d'un segment de longueur nulle. A l'état d'équilibre, les forces ponctuelles sont dirigées selon les normales discrètes données par le vecteur \underline{N} (3.48). Il se démontre alors facilement que si, dans la configuration d'équilibre, deux forces consécutives ont la même direction et le même sens, alors leurs points d'application coïncident. Cette situation est illustrée sur la figure 3.15. Les géométries d'équilibre situées dans un proche voisinage de ce cas limite ont une influence importante sur le déroulé du calcul explicite. En reprenant l'expression (3.70) des sous-matrices qui composent le terme de raideur géométrique, on remarque que cette dernière évolue linéairement en fonction de l'inverse des longueurs des segments. Par ailleurs, comme les valeurs des masses optimales dépendent elles-aussi linéairement du rayon spectral, elles tendent asymptotiquement vers $+\infty$ lorsque la longueur d'un des segments tend vers 0. L'analyse du schéma explicite (3.30) montre que cette singularité a pour effet d'empêcher la convergence du calcul. Afin d'éviter cette forme de divergence, des forces de répulsions supplémentaires, données par des fonctions barrières de la longueur des segments, sont ajoutées à chacun d'entre eux. La valeur de l'effort est ainsi nulle, lorsque la distance éloignant deux particules reste supérieure à une limite fixée par l'utilisateur, et augmente exponentiellement une fois cette limite franchie. Comme cette interaction est effective seulement dans des cas dégénérés, sa contribution à la raideur du câble n'est pas prise en compte dans l'estimation des masses fictives.

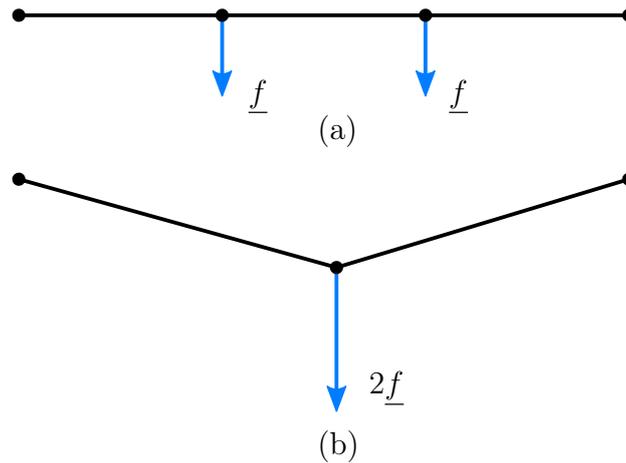


FIGURE 3.15 – Chargement ponctuel provoquant la disparition d'un segment de câble.

Estimation des masses fictives

Il a été montré précédemment que la matrice de raideur tangente \underline{K} est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont réelles. Tout comme pour la construction de \underline{K} , l'estimation d'un majorant de son rayon spectral est réalisée à partir de l'étude des matrices \underline{K}_E et \underline{K}_G . En effet pour une matrice symétrique réelle, le rayon spectral est équivalent à la norme-2. Soit \underline{A} une telle matrice, sa norme-2 est égale à $\|\underline{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\underline{A} \cdot \underline{A}^T)}$. En tirant ensuite parti de l'inégalité triangulaire, on obtient une première majoration du rayon spectral de \underline{K} .

$$\rho(\underline{K}) = \rho\left(\underline{K}_E + \underline{K}_G\right) \leq \rho\left(\underline{K}_E\right) + \rho\left(\underline{K}_G\right) \quad (3.72)$$

On cherche dans un premier temps une majoration du rayon spectral de la matrice de raideur élastique. Pour cela on utilise le fait que $\underline{\underline{K}}_E$ est définie positive. Cette propriété, issue du produit tensoriel du vecteur \underline{N} avec lui même, peut être prouvée simplement en considérant un vecteur \underline{X} de taille $3n$ et en calculant le produit scalaire de \underline{X} avec $[\underline{N} \otimes \underline{N}] \underline{X}$.

$$\underline{X}^T \cdot [\underline{N} \otimes \underline{N}] \cdot \underline{X} = [\underline{X} \cdot \underline{N}] [\underline{N} \cdot \underline{X}] = \langle \underline{N}, \underline{X} \rangle^2 \quad (3.73)$$

Comme \underline{N} est un vecteur non nul, on montre bien que $\underline{\underline{K}}_E$ est définie positive. Ses valeurs propres étant toutes positives, son rayon spectral est majoré par leur somme.

$$\rho(\underline{\underline{K}}_E) < \text{tr}(\underline{\underline{K}}_E) \quad (3.74)$$

La trace de la matrice $[\underline{N} \otimes \underline{N}]$ est ensuite calculée à partir de l'expression (3.48) du vecteur \underline{N} .

$$\text{tr}(\underline{N} \otimes \underline{N}) = 2 + \sum_{i=2}^{n-1} \left[\left(\frac{\Delta x_{1,i}}{l_i} - \frac{\Delta x_{1,i-1}}{l_{i-1}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta x_{2,i}}{l_i} - \frac{\Delta x_{2,i-1}}{l_{i-1}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta x_{3,i}}{l_i} - \frac{\Delta x_{3,i-1}}{l_{i-1}} \right)^2 \right] \quad (3.75)$$

Après développement de cette somme on obtient :

$$\text{tr}(\underline{N} \otimes \underline{N}) = 2 + 2 \sum_{i=2}^{n-1} \left(1 - \frac{\Delta x_{1,i-1}}{l_{i-1}} \frac{\Delta x_{1,i}}{l_i} + \frac{\Delta x_{2,i-1}}{l_{i-1}} \frac{\Delta x_{2,i}}{l_i} + \frac{\Delta x_{3,i-1}}{l_{i-1}} \frac{\Delta x_{3,i}}{l_i} \right) \quad (3.76)$$

Cette expression peut être arrangée en exprimant les produits scalaires en fonction de la série des angles (θ_i) introduite précédemment (voir Figure 3.16) et ainsi :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\underline{N} \otimes \underline{N}) &= 2 \left[n - 1 - \sum_{i=2}^{n-1} \cos(\theta_i) \right] \\ &= 2 \left[n - 1 - \sum_{i=2}^{n-1} \left(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\theta_i}{2} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.77)$$

Puisque les valeurs des sinus sont comprises dans l'intervalle $[-1, 1]$, leur carré peut être majoré par leur valeur absolue :

$$\text{tr}(\underline{N} \otimes \underline{N}) \leq 2 \left[1 + 2 \sum_{i=2}^{n-1} \left| \sin \left(\frac{\theta_i}{2} \right) \right| \right] \quad (3.78)$$

La majoration (3.78) est vérifiée dans le cas général, où les particules du câble ont trois degrés de liberté en translation et peut être implémentée sous cette forme dans l'algorithme. Toutefois, au vu de l'utilisation qui est faite de cet élément dans le modèle d'écran et pour diminuer les temps de calcul, des hypothèses supplémentaires sont formulées sur la géométrie du câble afin de poursuivre la simplification de l'expression (3.78). Le câble glissant permet en effet de reproduire le comportement des éléments de rive qui sont soumis à des efforts ponctuels, appliqués par le filet et répartis sur toute leur longueur (voir Paragraphe 3.1.3). La nature de cette sollicitation permet de considérer que la géométrie déformée du câble est contenue dans son plan moyen et que sa courbure évolue de manière monotone. La valeur de celle-ci reste donc inférieure à π (voir Figure 3.16). Ces hypothèses imposent à la fois que tous les θ_i soient contenus dans l'intervalle $[0, \pi]$ et que toutes les valeurs des $\sin(\theta_i)$

soient positives. Par ailleurs en utilisant la majoration usuelle du sinus par son argument, l'expression (3.78) peut être exprimée par :

$$\text{tr}(\underline{N} \otimes \underline{N}) \leq 2 \left[1 + \sum_{i=2}^{n-1} \theta_i \right] \quad (3.79)$$

En utilisant une nouvelle fois la monotonie de la courbure, on peut retirer la somme de la relation précédente et obtenir une majoration du rayon spectral de la matrice de raideur élastique, qui ne dépend plus de la dimension du problème.

$$\rho \left(\underline{\underline{K}}_E \right) \leq 2K_0 \frac{l}{l_0} (1 + \pi) \quad (3.80)$$

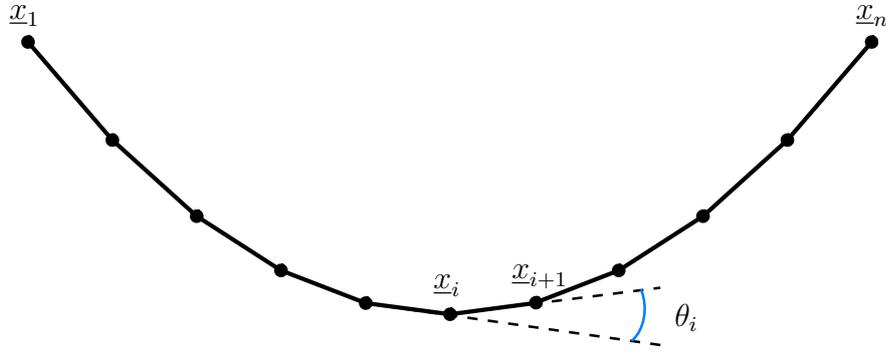


FIGURE 3.16 – Schéma du câble sous l'hypothèse de la courbure monotone

Il reste maintenant à déterminer un majorant du rayon spectral de la matrice de raideur géométrique $\underline{\underline{K}}_G$. Pour cela, on utilise la majoration fournie par la norme infinie et introduite par la formule (3.36).

$$\rho \left(\underline{\underline{K}}_G \right) \leq K_0 \epsilon l_0 \max_{i \in [1; N-1]} \left\{ \sum_{j=1}^n |A_{ij}| \right\} \quad (3.81)$$

Cette expression peut être ensuite développée en écrivant la somme des termes d'une même ligne de la matrice $\underline{\underline{K}}_G$ (3.71).

$$\rho \left(\underline{\underline{K}}_G \right) \leq K_0 \epsilon l_0 \max_i \left\{ \sum_{k=1}^3 (2 |A_{i,(jk)}| + 2 |A_{i-1,(jk)}|) \right\} \quad (3.82)$$

En injectant dans la relation précédente l'expression (3.70) des termes des matrices $\underline{\underline{A}}_i$, on obtient :

$$\rho \left(\underline{\underline{K}}_G \right) \leq K_0 \epsilon l_0 \max_i \left\{ 2 \left(\frac{2}{l_i} + \frac{2}{l_{i-1}} \right) \right\} \quad (3.83)$$

En introduisant l_{min} la longueur du plus court segment du câble, on détermine une majoration du rayon spectral qui dépend uniquement de ce paramètre et de sa longueur non chargée.

$$\rho \left(\underline{\underline{K}}_G \right) \leq 8K_0 \epsilon \frac{l_0}{l_{min}} \quad (3.84)$$

Finalement, en groupant les majorations des rayons spectraux des deux termes composant la matrice de raideur tangente $\underline{\underline{K}}$, on obtient le majorant de $\rho(\underline{\underline{K}})$ suivant :

$$\rho(\underline{\underline{K}}) \leq 2K_0 \left[4\epsilon \frac{l_0}{l_{min}} + (1 + \pi) \frac{l}{l_0} \right] \quad (3.85)$$

Grâce à l'hypothèse de monotonie formulée sur la géométrie déformée du câble, le majorant de $\rho(\underline{\underline{K}})$ (3.85) ne dépend pas de la dimension du câble (du nombre de particules le composant). Il ne reste plus qu'à l'injecter dans l'expression des masses optimales (3.27) pour achever la démonstration.

$$m_{opt} \geq \frac{h^2 K_0}{2} \left[4\epsilon \frac{l_0}{l_{min}} + (1 + \pi) \frac{l}{l_0} \right] \quad (3.86)$$

Cas particulier d'un élément bouclé

De la même manière que pour le câble simple, les formes du vecteur des efforts intérieurs et de la matrice de raideur restent quasiment inchangées pour un élément bouclé. Comme dans cette nouvelle configuration, toutes les particules du câble ont deux voisines, seules les expressions des trois premières et dernières composantes du vecteur contenant les normales discrètes sont modifiées (3.48).

$$\underline{N}^T = [t_{1,n} - t_{1,1}, \dots, t_{1,i-1} - t_{1,i}, t_{2,i-1} - t_{2,i}, t_{3,i-1} - t_{3,i}, \dots, t_{3,n-1} - t_{3,n}] \quad (3.87)$$

Le vecteur t_n est tangent au segment qui boucle le câble et est ainsi défini par :

$$t_n = \frac{x_1 - x_n}{\|x_1 - x_n\|} \quad (3.88)$$

La nouvelle expression de la matrice de raideur géométrique dépendant du terme $\text{grad}_U(\underline{N})$ doit donc être calculée en conséquence.

$$\underline{\underline{K}}_G = ES\epsilon \begin{pmatrix} \underline{\underline{A}}_n + \underline{\underline{A}}_1 & -\underline{\underline{A}}_1 & 0 & & \dots & & 0 \\ & \underline{\underline{A}}_1 + \underline{\underline{A}}_2 & -\underline{\underline{A}}_2 & 0 & & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ & & & \underline{\underline{A}}_{i-1} + \underline{\underline{A}}_i & -\underline{\underline{A}}_i & 0 & 0 \\ & & \text{sym} & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & \underline{\underline{A}}_{n-2} + \underline{\underline{A}}_{n-1} & -\underline{\underline{A}}_{n-1} \\ & & & & & & \underline{\underline{A}}_{n-1} + \underline{\underline{A}}_n \end{pmatrix} \quad (3.89)$$

où les matrices $\underline{\underline{A}}_i$ sont définies comme précédemment à partir de la formule (3.70).

La majoration du rayon spectral de $\underline{\underline{K}}_G$ n'est donc pas affectée par la modification du vecteur \underline{N} . En revanche les hypothèses de planéité et de courbure monotone ne peuvent plus être formulées pour un câble bouclé quelconque. En conservant les notations précédentes, la trace de la matrice $\underline{N} \otimes \underline{N}$ est exprimée cette fois par :

$$\text{tr}(\underline{N} \otimes \underline{N}) = 2 \sum_{i=2}^{n-1} (1 - \cos \theta_i) \quad (3.90)$$

La majoration de la trace de cette nouvelle matrice dépend cette fois du nombre de particules composant l'élément.

$$\text{tr}(\underline{N} \otimes \underline{N}) \leq 8n \quad (3.91)$$

Le majorant du rayon spectral de la matrice de raideur \underline{K} prend ainsi la forme :

$$\rho(\underline{K}) \leq 2K_0 \left[4\epsilon \frac{l_0}{l_{min}} + 4n \frac{l}{l_0} \right] \quad (3.92)$$

L'expression des masses optimales assurant la stabilité du schéma explicite est finalement donnée par :

$$m_{opt} \leq 2h^2 K_0 \left(\epsilon \frac{l_0}{l_{min}} + n \frac{l}{l_0} \right) \quad (3.93)$$

En pratique ces éléments bouclés permettent de modéliser les anneaux de la nappe de filet. On les retrouve en effet dans les modèles de filet B et C , introduits au paragraphe 3.1.2 par la figure 3.6, dans lesquels interagissent respectivement quatre et huit particules.

3.4.3 La poutre en flexion pure

La poutre en flexion est utilisée dans sa version bouclée pour représenter le modèle d'anneau C présenté dans la partie 3.1.2. Les efforts de flexion sont appliqués par des couples d'efforts tranchants calculés à partir des relations (3.8) et (3.10). Comme pour le câble glissant, les efforts sont donnés par une fonction fortement non-linéaire des déplacements des particules. La matrice de raideur tangente est donc également exprimée à partir du gradient des efforts intérieurs dont le vecteur est déterminé dans un premier temps.

Identification du vecteur des efforts intérieurs

On considère un élément de poutre, dans un premier temps non bouclé, reliant n particules et ne transmettant que des efforts de flexion. Il a été montré au paragraphe 3.1.2 que pour $i \in [2, n - 1]$ chaque particule i est soumise à quatre forces, dues aux moments calculés aux positions des particules $i - 1$, i et $i + 1$, comme indiqué sur la figure 3.17. Les forces considérées sont ainsi : $\underline{F}_{i,i-1}$ et $\underline{F}_{i,i+1}$ appliquées à la particule i et respectivement provoquées par les moments en $i - 1$ et $i + 1$, $-\underline{F}_{i-1,i}$ et $-\underline{F}_{i+1,i}$ qui sont causées par le moment en i et équilibrent les forces appliquées aux particules $i - 1$ et $i + 1$. En conservant la convention sur le signe du moment introduite au paragraphe 3.1.2, à savoir positif lorsque celui-ci est appliqué sur la partie aval de la poutre, définie par l'ordre des particules, la résultante des efforts intérieurs appliqués à la particule i est calculée à partir de l'expression (3.10) :

$$\underline{F}_i = \frac{(\underline{x}_i - \underline{x}_{i-1}) \wedge (\underline{M}_{i-1} - \underline{M}_i)}{\|\underline{x}_i - \underline{x}_{i-1}\|^2} + \frac{(\underline{x}_{i+1} - \underline{x}_i) \wedge (\underline{M}_{i+1} - \underline{M}_i)}{\|\underline{x}_{i+1} - \underline{x}_i\|^2} \quad (3.94)$$

En utilisant les notations introduites pour l'étude du câble glissant par la formule (3.53), l'expression précédente peut être écrite de manière plus condensée.

$$\underline{F}_i = \frac{\Delta \underline{x}_{i-1} \wedge (\underline{M}_{i-1} - \underline{M}_i)}{l_{i-1}^2} + \frac{\Delta \underline{x}_i \wedge (\underline{M}_{i+1} - \underline{M}_i)}{l_i^2} \quad (3.95)$$

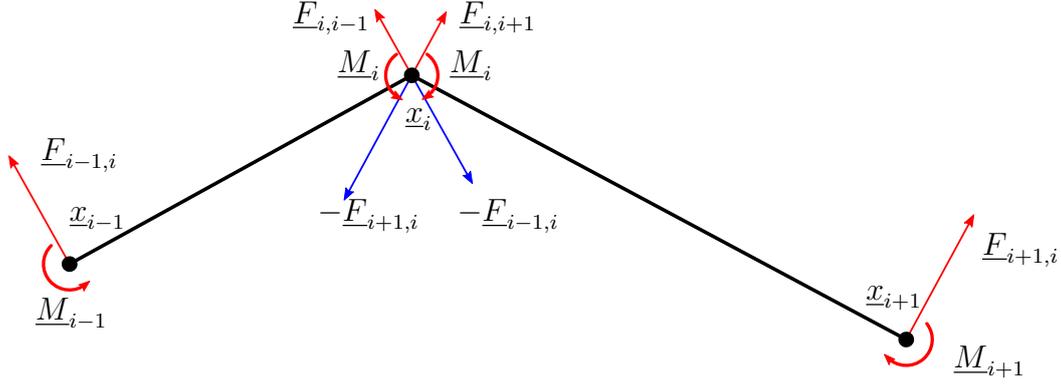


FIGURE 3.17 – Efforts tranchants résultant des moment appliqués en trois points consécutifs

Comme pour les autres éléments de structure, les particules 1 et n , situées aux deux extrémités de la poutre, sont soumises à seulement deux efforts. Aucune hypothèse sur les conditions d'appuis n'est formulée ici et on se place dans le cas général où les moments \underline{M}_1 et \underline{M}_n peuvent être non nuls. Les résultantes au nœud 1 et n sont donc données par :

$$\underline{F}_1 = \frac{-\Delta \underline{x}_1 \wedge \underline{M}_1}{l_1^2} \quad \text{et} \quad \underline{F}_n = \frac{-\Delta \underline{x}_{n-1} \wedge \underline{M}_{n-1}}{l_{n-1}^2} \quad (3.96)$$

Le vecteur des efforts intérieurs est ensuite construit dans la base des déplacements nodaux en assemblant les n résultantes.

$$\underline{F}^{int} = [F_{1,1}, F_{1,2}, F_{1,3}, \dots, F_{i,1}, F_{i,2}, F_{i,3}, \dots, F_{n,1}, F_{n,2}, F_{n,3}]^T \quad (3.97)$$

Identification de la matrice de raideur tangente

Comme pour le câble glissant, la matrice de raideur tangente de la poutre en flexion pure est déterminée à partir du vecteur des efforts intérieurs grâce à la relation (3.49). Le calcul des termes de la matrice est proposé dans la suite pour le cas où $i \in [2, n-1]$. Afin de préserver la concision des expressions, on introduit le tenseur d'orientation d'ordre trois ϵ dont les composantes sont données dans le repère cartésien par :

$$\forall (i, j, k) \in [1, 3]^3, \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation circulaire de } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation circulaire de } (3, 2, 1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.98)$$

Ce tenseur est utile ici pour développer l'expression des produits vectoriels. Soit \underline{u} et \underline{v} deux vecteurs de \mathbb{R}^3 , leur produit vectoriel est donné par la relation : $\underline{u} \wedge \underline{v} = \epsilon_{ijk} u_i v_j \underline{e}_k$. Par ailleurs, afin de limiter la longueur des développements, la double indexation $F_{i,k}$ avec $k \in [1, 3]$ est utilisée. Les termes de la ligne $3(i-1) + k$ sont donc calculés par la dérivée partielle $\frac{\partial F_{i,k}}{\partial x_{j,l}}$ où $(i, j) \in [2, n-1]^2$ et $(k, l) \in [1, 3]^2$. En tirant parti des notations introduites ci-dessus, le terme de la matrice $K_{3(i-1)+k, 3(j-1)+l}$ est donné en dérivant l'expression des efforts intérieurs

(3.95).

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_{i,k}}{\partial x_{j,l}} = \epsilon_{mnk} & \left[\frac{1}{l_{i-1}^4} \left(l_{i-1}^2 \frac{\partial \Delta x_{i-1,m}}{\partial U_{j,l}} - \Delta x_{i-1,m} \Delta x_{i-1,l} \frac{\partial \Delta x_{i-1,l}}{\partial U_{j,l}} \right) (M_{i-1,n} - M_{i,n}) \right. \\
 & + \frac{\Delta x_{i-1,m}}{l_{i-1}^2} \left(\frac{\partial M_{i-1,n}}{\partial U_{j,l}} - \frac{\partial M_{i,n}}{\partial U_{j,l}} \right) \\
 & + \frac{1}{l_i^4} \left(l_i^2 \frac{\partial \Delta x_{i,m}}{\partial U_{j,l}} - \Delta x_{i,m} \Delta x_{i,l} \frac{\partial \Delta x_{i,l}}{\partial U_{j,l}} \right) (M_{i+1,n} - M_{i,n}) \\
 & \left. + \frac{\Delta x_{i,m}}{l_i^2} \left(\frac{\partial M_{i+1,n}}{\partial U_{j,l}} - \frac{\partial M_{i,n}}{\partial U_{j,l}} \right) \right] \quad (3.99)
 \end{aligned}$$

Les termes de la ligne $3(i-1) + k$ dépendent, selon la relation (3.99), des moments aux particules $i-1$, i et $i+1$ qui sont eux-mêmes respectivement calculés en fonction des déplacements des particules $(i-2, i-1, i)$, $(i-1, i, i+1)$ et $(i, i+1, i+2)$ (voire relation 3.8). Les termes de la ligne sont ainsi nuls pour $j \notin [i-2, i+2]$ et la matrice de raideur tangente est une matrice bande de taille $3n$.

Il reste encore à exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial M_{i,k}}{\partial U_{j,l}}$. En reprenant l'écriture proposée pour les termes de la matrice de raideur tangente (3.99), les composantes du moment appliqué à la particule i (3.8) peuvent également être exprimées en fonction du tenseur d'orientation ϵ .

$$M_{i,k} = \frac{2EI}{l_i^c l_{i-1} l_i} \epsilon_{mnk} \Delta x_{i-1,m} \Delta x_{i,n} \quad (3.100)$$

où $l_i^c = \|\underline{x}_{i+1} - \underline{x}_{i-1}\|$ désigne la longueur de la corde formée par les particules $i-1$ et $i+1$. On introduit également le vecteur $\Delta \underline{x}_i^c$ associé à ce couple. Les dérivées partielles du moment sont calculées à partir de (3.100).

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial M_{i,k}}{\partial U_{j,l}} = \frac{2EI}{l_i^c l_{i-1} l_i} \epsilon_{mnk} & \left[-\Delta x_{i-1,m} \Delta x_{i,n} \left(\frac{\Delta x_{i,l}^c}{l_i^{c2}} \frac{\partial \Delta x_{i,l}^c}{\partial U_{j,l}} + \frac{\Delta x_{i-1,l}}{l_{i-1}^2} \frac{\partial \Delta x_{i-1,l}}{\partial U_{j,l}} + \frac{\Delta x_{i,l}}{l_i^2} \frac{\partial \Delta x_{i,l}}{\partial U_{j,l}} \right) \right. \\
 & \left. + \Delta x_{i,n} \frac{\partial \Delta x_{i-1,m}}{\partial U_{j,l}} + \Delta x_{i-1,m} \frac{\partial \Delta x_{i,n}}{\partial U_{j,l}} \right] \quad (3.101)
 \end{aligned}$$

Cette expression peut être simplifiée en étudiant séparément les différents cas lorsque j varie dans l'intervalle $[i-2, i+2]$. On introduit également les composantes du moment fléchissant \underline{M}_i afin d'alléger la relation (3.101).

— $j = i-2$

$$\frac{\partial M_{i,k}}{\partial U_{i-2,l}} = 0 \quad (3.102)$$

— $j = i-1$

$$\frac{\partial M_{i,k}}{\partial U_{i-1,l}} = M_{i,k} \left(\frac{\Delta x_{i-1,l}}{l_{i-1}^2} + \frac{\Delta x_{i,l}^c}{l_i^{c2}} \right) - \frac{2EI}{l_i^c l_{i-1} l_i} \epsilon_{klm} \Delta x_{i,m} \quad (3.103)$$

— $j = i$

$$\frac{\partial M_{i,k}}{\partial U_{i,l}} = M_{i,k} \left(\frac{\Delta x_{i,l}}{l_i^2} - \frac{\Delta x_{i-1,l}}{l_{i-1}^2} \right) + \frac{2EI}{l_i^c l_{i-1} l_i} \epsilon_{klm} \Delta x_{i,m}^c \quad (3.104)$$

— $j = i+1$

$$\frac{\partial M_{i,k}}{\partial U_{i+1,l}} = -M_{i,k} \left(\frac{\Delta x_{i,l}}{l_i^2} + \frac{\Delta x_{i,l}^c}{l_i^{c2}} \right) + \frac{2EI}{l_i^c l_{i-1} l_i} \epsilon_{klm} \Delta x_{i-1,m} \quad (3.105)$$

— $j = i+2$

$$\frac{\partial M_{i,k}}{\partial U_{i+2,l}} = 0 \quad (3.106)$$

Les termes de la ligne $3(i-1) + k$ peuvent maintenant être exprimés en fonction des composantes des moments appliqués aux particules $i-1$, i et $i+1$ en utilisant les expressions (3.102) à (3.106) dans la relation (3.99). Comme pour les dérivées partielles des moments, ils sont donnés en fonction des valeurs prises par j dans $[i-2, i+2]$.

— $j = i - 2$

$$\frac{\partial F_{i,k}}{\partial x_{i-2,l}} = \epsilon_{mnk} \left[M_{i-1,n} \frac{\Delta x_{i-1,m}}{l_{i-1}^2} \left(\frac{\Delta x_{i-2,l}}{l_{i-2}^2} + \frac{\Delta x_{i-1,l}^c}{l_{i-1}^c{}^2} \right) - \frac{2EI}{l_{i-1}^c l_{i-2} l_{i-1}} \epsilon_{nlp} \Delta x_{i-1,p} \Delta x_{i-1,m} \right] \quad (3.107)$$

— $j = i - 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{i,k}}{\partial x_{i-1,l}} = \epsilon_{mnk} & \left[M_{i,n} \left[\frac{\delta_{lm}}{l_i^2} - \frac{\Delta x_{i-1,m}}{l_{i-1}^2} \left(2 \frac{\Delta x_{i-1,l}}{l_{i-1}^2} + \frac{\Delta x_{i,l}^c}{l_i^c{}^2} \right) - \frac{\Delta x_{i,m}}{l_i^2} \left(\frac{\Delta x_{i-1,l}}{l_{i-1}^2} + \frac{\Delta x_{i,l}^c}{l_i^c{}^2} \right) \right] \right. \\ & + M_{i-1,n} \left[\frac{\Delta x_{i-1,m}}{l_{i-1}^2} \left(2 \frac{\Delta x_{i-1,l}}{l_{i-1}^2} - \frac{\Delta x_{i-2,l}}{l_{i-2}^2} \right) - \frac{\delta_{lm}}{l_{i-1}^2} \right] \\ & \left. + \frac{2EI}{l_{i-1}} \epsilon_{nlp} \left[\frac{\Delta x_{i-1,m} \Delta x_{i-1,p}^c}{l_{i-1}^c l_{i-2} l_{i-1}^2} + \frac{\Delta x_{i,p}}{l_i^c l_i} \left(\frac{\Delta x_{i,m}}{l_i^2} + \frac{\Delta x_{i-1,m}}{l_{i-1}^2} \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (3.108)$$

— $j = i$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{i,k}}{\partial x_{i,l}} = \epsilon_{mnk} & \left[M_{i,n} \left[\frac{\Delta x_{i-1,m}}{l_{i-1}^2} \left(2 \frac{\Delta x_{i-1,l}}{l_{i-1}^2} - \frac{\Delta x_{i,l}}{l_i^2} \right) - \frac{\Delta x_{i,m}}{l_i^2} \left(2 \frac{\Delta x_{i,l}}{l_i^2} - \frac{\Delta x_{i-1,l}}{l_{i-1}^2} \right) - \delta_{lm} \frac{l_i^2 - l_{i-1}^2}{l_{i-1}^2 l_i^2} \right] \right. \\ & + M_{i-1,n} \left[\frac{\delta_{lm}}{l_{i-1}^2} - \frac{\Delta x_{i-1,m}}{l_{i-1}^2} \left(2 \frac{\Delta x_{i-1,l}}{l_{i-1}^2} + \frac{\Delta x_{i-1,l}^c}{l_{i-1}^c{}^2} \right) \right] \\ & + M_{i+1,n} \left[\frac{\Delta x_{i,m}}{l_i^2} \left(2 \frac{\Delta x_{i,l}}{l_i^2} + \frac{\Delta x_{i+1,l}^c}{l_{i+1}^c{}^2} \right) - \frac{\delta_{lm}}{l_i^2} \right] \\ & \left. + 2EI \epsilon_{nlp} \left[\frac{\Delta x_{i-1,m} \Delta x_{i-2,p}}{l_{i-1}^c l_{i-2} l_{i-1}^3} - \frac{\Delta x_{i,m} \Delta x_{i+1,p}}{l_{i+1}^c l_{i+1} l_i^3} - \frac{\Delta x_{i,p}^c}{l_i^c l_{i-1} l_i} \left(\frac{\Delta x_{i-1,m}}{l_{i-1}^2} + \frac{\Delta x_{i,m}}{l_i^2} \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (3.109)$$

— $j = i + 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{i,k}}{\partial x_{i+1,l}} = \epsilon_{mnk} & \left[M_{i,n} \left[\frac{\Delta x_{i,m}}{l_i^2} \left(2 \frac{\Delta x_{i,l}}{l_i^2} + \frac{\Delta x_{i,l}^c}{l_i^c{}^2} \right) + \frac{\Delta x_{i-1,m}}{l_{i-1}^2} \left(\frac{\Delta x_{i,l}}{l_i^2} + \frac{\Delta x_{i,l}^c}{l_i^c{}^2} \right) - \frac{\delta_{lm}}{l_i^2} \right] \right. \\ & + M_{i+1,n} \left[\frac{\delta_{lm}}{l_i^2} + \frac{\Delta x_{i,m}}{l_i^2} \left(\frac{\Delta x_{i+1,l}}{l_{i+1}^2} - 2 \frac{\Delta x_{i,l}}{l_i^2} \right) \right] \\ & \left. + \frac{2EI}{l_i} \epsilon_{nlp} \left[\frac{\Delta x_{i,m} \Delta x_{i+1,p}^c}{l_{i+1}^c l_{i+1} l_i^2} - \frac{\Delta x_{i-1,p}}{l_i^c l_{i-1}} \left(\frac{\Delta x_{i-1,m}}{l_{i-1}^2} + \frac{\Delta x_{i,m}}{l_i^2} \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (3.110)$$

— $j = i + 2$

$$\frac{\partial F_{i,k}}{\partial x_{i+2,l}} = -\epsilon_{mnk} \left[M_{i+1,n} \frac{\Delta x_{i,m}}{l_i^2} \left(\frac{\Delta x_{i+1,l}}{l_{i+1}^2} + \frac{\Delta x_{i+1,l}^c}{l_{i+1}^c{}^2} \right) + \frac{2EI}{l_{i+1}^c l_{i+1} l_i^3} \epsilon_{nlp} \Delta x_{i,p} \Delta x_{i,m} \right] \quad (3.111)$$

Les termes situés sur la bande principale de la matrice de raideur tangente sont volontairement laissés sous cette forme pour faciliter l'évaluation d'un majorant du rayon spectral au prochain paragraphe.

Estimation des masses nodales

La forme de la matrice de raideur tangente, d'un élément de poutre en flexion pure, incite à utiliser à nouveau la norme infinie pour estimer un majorant du rayon spectral. Pour cela il est nécessaire d'étudier la somme des valeurs absolues des termes de la ligne $3(i-1) + k$

qui est calculée à partir des relations (3.107) à (3.111). Une première majoration de cette somme peut être obtenue en lui appliquant l'inégalité triangulaire.

$$\begin{aligned}
 \sum_{j,l} \left| \frac{\partial F_{i,k}}{\partial x_{j,l}} \right| \leq |\epsilon_{mnk}| & 2 \left[|M_{i-1,n}| \left[\frac{|\Delta x_{i-1,m}|}{l_{i-1}^2} \sum_l \left(\frac{|\Delta x_{i-2,l}|}{l_{i-2}^2} + \frac{|\Delta x_{i-1,l}^c|}{l_{i-1}^c} + 2 \frac{|\Delta x_{i-1,l}|}{l_{i-1}^2} \right) + \frac{2}{l_{i-1}^2} \right] \right. \\
 & + |M_{i,n}| \left[\left(\frac{|\Delta x_{i-1,m}|}{l_{i-1}^2} + \frac{|\Delta x_{i,m}|}{l_i^2} \right) \sum_l \left(\frac{|\Delta x_{i,l}|}{l_i^2} + \frac{|\Delta x_{i,l}^c|}{l_i^c} + 2 \frac{|\Delta x_{i-1,l}|}{l_{i-1}^2} \right) + 2 \frac{l_{i-1}^2 + l_i^2}{l_{i-1}^2 l_i^2} \right] \\
 & + |M_{i+1,n}| \left[\frac{|\Delta x_{i,m}|}{l_i^2} \sum_l \left(\frac{|\Delta x_{i,l}|}{l_i^2} + \frac{|\Delta x_{i+1,l}^c|}{l_{i+1}^c} + 2 \frac{|\Delta x_{i+1,l}|}{l_{i+1}^2} \right) + \frac{2}{l_i^2} \right] \\
 & \left. 2EI \left(\frac{|\Delta x_{i-1,m}|}{l_{i-1}^2} + \frac{|\Delta x_{i,m}|}{l_i^2} \right) \frac{\sum_{p=m,k} (|\Delta x_{i-1,p}| + |\Delta x_{i,p}^c| + |\Delta x_{i,p}|)}{l_i^c l_{i-1} l_i} \right]
 \end{aligned} \tag{3.112}$$

On se propose de majorer ensuite les quatre sommes de l'expression (3.112) en tirant parti de l'équivalence entre les normes 1 et 2. En effet, pour tout vecteur \underline{u} de \mathbb{R}^n , $\|\underline{u}\|_1 \leq \sqrt{n} \|\underline{u}\|_2$. On introduit également les longueurs l_i^{min} définies par $l_i^{min} = \min \{l_{i-1}, l_i, l_i^c\}$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{j,l} \left| \frac{\partial F_{i,k}}{\partial x_{j,l}} \right| \leq |\epsilon_{mnk}| & 4 \left[\frac{|M_{i-1,n}|}{l_{i-1}^{min^2}} \left(\frac{2\sqrt{3}|\Delta x_{i-1,m}|}{l_{i-1}} + 1 \right) + \frac{|M_{i+1,n}|}{l_{i+1}^{min^2}} \left(\frac{2\sqrt{3}|\Delta x_{i,m}|}{l_{i+1}} + 1 \right) \right. \\
 & \left. + \frac{|M_{i,n}|}{l_i^{min^2}} \left[2\sqrt{3} \left(\frac{|\Delta x_{i-1,m}|}{l_{i-1}} + \frac{|\Delta x_{i,m}|}{l_i} \right) + 2 \right] \right] \\
 & \frac{6\sqrt{2}EI}{l_i^{min^3}} \left(\frac{|\Delta x_{i-1,m}|}{l_{i-1}} + \frac{|\Delta x_{i,m}|}{l_i} \right)
 \end{aligned} \tag{3.113}$$

Afin de disposer d'un majorant facile à exprimer, le parti est pris ici d'utiliser la norme 2 plutôt que la norme infinie pour poursuivre les développements. La relation d'équivalence entre les normes 1 et 2 permet de retirer la somme sur les indices m et n dans l'inégalité (3.113). Cette majoration nécessite toutefois d'éliminer les termes croisés en m et n . A cette fin, les termes de la forme $\frac{\Delta x_{i,m}}{l_i}$ en facteur des moments sont majorés par 1. On parvient finalement à obtenir une majoration qui ne dépend plus de l'indice k et qui ne fait intervenir que les normes euclidiennes des paramètres du problème. Celles-ci seront notées sans ambiguïté $\|\bullet\|$ par la suite.

$$\sum_{j,l} \left| \frac{\partial F_{i,k}}{\partial x_{j,l}} \right| \leq 4 \left[\sqrt{2} \left(1 + 2\sqrt{3} \right) \left(\frac{\|M_{i-1}\|}{l_{i-1}^{min^2}} + \frac{\|M_{i+1}\|}{l_{i+1}^{min^2}} + 2 \frac{\|M_i\|}{l_i^{min^2}} \right) + \frac{3EI}{l_i^{min^3}} \right] \tag{3.114}$$

Un majorant du rayon spectral se déduit facilement de la relation (3.114), en introduisant la plus petite longueur des segments de la poutre $l_{min} = \min_{i \in [1,n]} l_i^{min}$ et la majoration du moment : $\|M_i\| \leq \frac{EI}{l_i^c}$.

$$\rho(\underline{K}) \leq 4 \left(4\sqrt{2} \left(1 + 2\sqrt{3} \right) + 3 \right) \frac{EI}{l_{min}^3} \tag{3.115}$$

En injectant ce majorant du rayon spectral dans l'expression des masses optimales (3.27), on obtient finalement le critère de stabilité suivant :

$$m_{opt} \geq \left(4\sqrt{2} \left(1 + 2\sqrt{3} \right) + 3 \right) h^2 \frac{EI}{l_{min}^3} \tag{3.116}$$

La valeur des masses optimales déterminée à partir de l'expression des termes de la matrice de raideur tangente est différente de celle proposée par M. Barnes et C. Douthe [11, 37].

Le premier détermine le critère de stabilité uniquement à partir des efforts de traction et compression, et propose l'ajout d'un terme en $\frac{EI}{l^3}$ pour prendre en compte la raideur des éléments fléchis. C. Douthe associe quant à lui une raideur à chacun des 4 efforts de flexion, appliqués sur une particule en l'estimant à partir de la formule $K_{flex} = \frac{F_{flex}}{l}$. La raideur totale associée et donc en $8\frac{EI}{l^3}$. Le terme déterminé dans ce manuscrit est plus de dix fois plus élevé que celui proposé par C. Douthe. Si la majoration analytique a priori, dont il résulte, conduit à une surestimation des masses fictives, il semble raisonnable de le retenir pour des applications où les effets de la flexion prennent le pas sur ceux dus à la traction et la compression. Certains problèmes de recherche de forme sont notamment résolus, avec la relaxation dynamique, en tirant parti de ce différentiel entre raideur axiale et raideur de flexion [38]. Les longueurs des éléments sont alors les paramètres à optimiser et plusieurs ordres de grandeur peuvent séparer ces deux raideurs.

En pratique, même si les raideurs de flexion sont en $\frac{1}{l^3}$ alors que celles de traction/compression sont en $\frac{1}{l}$, le rapport de l'inertie sur la section reste inférieur à 10^{-5} m^2 pour les éléments axi-symétriques modélisés dans ce travail (ratio correspondant à des diamètres inférieurs au centimètre). En l'absence d'une instabilité provoquée par la disparition d'un segment, comme celle évoquée lors de l'étude du câble glissant (voir Partie 3.4.2), la contribution des efforts de flexion à la masse optimale des particules reste donc négligeable devant celle des efforts de traction.

Cas particulier d'un élément bouclé

Pour un câble non bouclé, la norme infinie de la matrice de raideur n'est jamais atteinte sur les lignes correspondant à la première et à la dernière particule. Le passage à un élément bouclé n'a donc aucun effet sur le calcul des masses optimales.

Cela conclut l'étude de la stabilité de l'algorithme. La masse de chaque particule est calculée à partir d'une combinaison des relations (3.37), (3.86), (3.93) et (3.116) en fonction de la nature des efforts transmis par l'élément qui la contient. Pour terminer la description de l'algorithme, le prochain paragraphe est consacré à la détection des maxima d'énergie cinétique ainsi qu'à la condition d'arrêt du calcul.

3.5 Evaluation des maxima d'énergie cinétique

L'algorithme de l'amortissement cinétique a été précédemment présenté au paragraphe 3.2.2. Pour rappel, il permet d'amortir rapidement les oscillations de la phase transitoire d'un système dynamique, en dissipant l'intégralité de son énergie cinétique à chaque fois que celle-ci atteint un maximum. L'implémentation de cet algorithme nécessite donc de pouvoir localiser les instants où se produisent ces maxima d'énergie et d'identifier les géométries correspondantes, tout en sachant que la vision discrète du schéma explicite interdit la connaissance de l'état du système entre deux pas d'intégration.

On reprend ici les notations introduites au paragraphe (3.3). La donnée du vecteur vitesse $\underline{V}^{n+\frac{1}{2}}$ au pas de calcul $n + \frac{1}{2}$, permet de déterminer l'énergie cinétique du système au même instant.

$$E_c^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \underline{V}^{n+\frac{1}{2}T} \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{V}^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.117)$$

Cette énergie est ensuite comparée à celle calculée au pas précédent ($E_c^{n-\frac{1}{2}}$). Le calcul est

poursuivi à l'itération suivante si l'énergie a augmenté, en revanche si $E_c^{n-\frac{1}{2}} \geq E_c^{n+\frac{1}{2}}$, un maximum d'énergie a été atteint entre les instants $n - \frac{1}{2}$ et $n + \frac{1}{2}$ et celui-ci est arrêté. En première approximation l'état de la structure coïncidant avec ce maximum est atteint à l'instant n . Pour affiner cette prédiction, M. Barnes propose d'interpoler l'énergie entre les pas de temps $n - \frac{3}{2}$, $n - \frac{1}{2}$ et $n + \frac{1}{2}$, et de disposer ainsi d'une description continue de la variable d'intégration au voisinage du pic. Comme cette interpolation est effectuée sur un voisinage du maximum contenant trois pas d'intégration, elle est naturellement choisie quadratique. Le nouveau maximum d'énergie se produit au moment t^* où la dérivée de la fonction d'interpolation s'annule. Cet instant peut être déterminé à partir de la variable d'intégration discrète par la relation : $t^* = n + qh$, où la grandeur q est calculée à partir des trois valeurs d'énergie interpolées.

$$q = \frac{E_c^{n-\frac{1}{2}} - E_c^{n-\frac{3}{2}}}{E_c^{n-\frac{3}{2}} - 2E_c^{n-\frac{1}{2}} + E_c^{n+\frac{1}{2}}} \quad (3.118)$$

Le vecteur position est également calculé au moment du maximum d'énergie à partir des grandeurs discrètes.

$$\underline{X}^{t^*} = \underline{X}^{n+1} - h\underline{V}^{n+\frac{1}{2}} - q\underline{V}^{n-\frac{1}{2}} \quad (3.119)$$

Le calcul est ensuite initialisé avec la configuration \underline{X}^{t^*} et un vecteur vitesse égal au vecteur nul.

$$\begin{cases} \underline{X}^{n+1} = \underline{X}^{t^*} \\ \underline{V}^{n+1} = 0 \end{cases} \quad (3.120)$$

Cette méthode d'interpolation du maximum d'énergie cinétique permettant de déterminer avec une meilleure précision l'état d'équilibre de la structure est couramment utilisée [11, 37, 40].

Deux principaux critères de convergence sont à envisager pour résoudre numériquement un problème de mécanique. Ils sont théoriquement équivalents et reposent chacun sur une représentation de l'état d'équilibre du système. Celui-ci peut en effet être décrit du point de vue des efforts ou de l'énergie. Dans le premier cas, le critère est donné par une valeur de résidu limite en dessous de laquelle on considère que celui-ci est nul. Dans le second, on cherche à évaluer le minimum d'énergie potentielle du système. Comme cette grandeur est a priori inconnue, la plupart des codes de calcul de type éléments finis utilisent des critères en force. La spécificité de la relaxation dynamique est de rechercher un état d'équilibre à partir d'un comportement dynamique transitoire. De plus, son principe repose sur la conservation de l'énergie et favorise l'emploi d'un critère s'y référant. Si le minimum d'énergie potentielle est en effet inconnu, l'énergie cinétique est nulle lorsque le système a convergé vers son état d'équilibre. Un critère basé sur l'énergie cinétique du système est ainsi implémenté dans le code utilisé dans ce travail de thèse. Il est donné de manière absolue puisque, encore une fois, l'énergie potentielle emmagasinée par la structure à l'équilibre est a priori inconnue. Certains auteurs ont utilisé des critères relatifs, en considérant une fraction de l'extremum d'énergie le plus élevé détecté [38]. Bien que cette approche peut s'avérer très efficace, elle a pour inconvénient de fortement dépendre des conditions initiales imposées au système. Si celui-ci est laissé libre d'osciller à partir d'une configuration où son énergie potentielle est importante, les énergie cinétiques à dissiper lors des premiers pics seront également élevées et la fraction choisie pourra s'avérer insuffisante.

3.6 Présentation de l'algorithme

L'outil de calcul utilisé dans ce travail a été développé dans sa première version par C. Douthe dans le cadre de sa thèse de doctorat [39, 37, 38]. L'algorithme de relaxation dynamique avait alors été implémenté dans le logiciel de calcul libre *Scilab*[®]. Une version optimisée de ce code a ensuite été transposée dans le langage de programmation *C#* par L. Du Peloux, pour être ensuite compilée avec le logiciel de CAO *Rhinoceros3D*[®] et son plugin *Grasshopper*[®]. Cette version du code qui a servi de support à de nombreux travaux scientifiques, notamment pour l'étude de structures spatiales comme les gridshells élastiques (coque formée par une grille de poutres déformée de manière élastique) [12, 31, 81], est reprise dans cette thèse. On notera également que le développement de la dernière version de ce code, incluant un degré de liberté supplémentaire en rotation pour reproduire des effets de torsion, a récemment fait l'objet de la thèse de doctorat de L. Du Peloux [40].

Ce dernier paragraphe achève la présentation de l'algorithme de relaxation dynamique. Le prochain montre comment, et sous quelles hypothèses, cette méthode de résolution peut tout de même être étendue à des applications en dynamique réelle.

3.7 Extension à la dynamique réelle et limites de l'approche

L'objectif de ce court paragraphe est de montrer que, malgré des limitations, la méthode de relaxation dynamique peut être adaptée à la résolution de problèmes dynamiques. Il est important de souligner une nouvelle fois que l'algorithme présenté au paragraphe 3.6 est construit à partir d'un schéma d'intégration explicite qui est en tout point identique à ceux habituellement utilisés pour reproduire, par un calcul discret, le comportement d'un écran de protection [43]. Comme cela a été évoqué au moment d'établir les relations garantissant la stabilité du schéma explicite (3.26), les développements présentés dans ce chapitre ne sont pas propres à la méthode de relaxation dynamique. Théoriquement, il suffirait de supprimer l'amortissement cinétique, dans l'algorithme 1 (présenté ci-après), et d'attribuer ensuite des masses réalistes aux particules du problème pour reproduire le comportement transitoire réel de la structure modélisée. Cette approche présente cependant une limitation de taille. Pour simuler un impact sur une barrière, la cinématique réelle du bloc doit être correctement reproduite. Cela n'est cependant pas le cas du modèle de projectile présenté au paragraphe 3.1.5 et utilisé dans ce travail, avec lequel les effets du frottement et donc les rotations du bloc, en tant que solide rigide, ne peuvent pas être décrits.

Une alternative à cette première approche, permettant de bénéficier des avantages de l'algorithme 1 sous sa forme actuelle, a été développée par C. Girardon [57]. Son modèle dynamique s'appuie sur l'hypothèse mise en évidence au paragraphe 2.3.4 qui consiste à considérer que les efforts inertiels au sein de la structure sont négligeables devant ceux du bloc. Seul le comportement dynamique du bloc a ainsi besoin d'être étudié. L'intégration temporelle est menée en calculant la résultante appliquée par la structure, à chaque pas de temps, à l'aide d'un calcul d'équilibre conduit avec l'algorithme de relaxation dynamique. Autrement dit, tous les pas de temps du schéma d'intégration principal d'écrivant l'évolution du bloc, un calcul explicite secondaire et fortement amorti est lancé afin de déterminer le déplacement au pas de temps suivant. Le problème est ainsi ramené à un chargement

Algorithm 1 Algorithme de relaxation dynamique implémenté pour le calcul des écrans de filets

Require: *éléments*, une liste d'éléments / *liaisons*, une liste de liaisons / *appuis*, une liste d'appuis

```

1:
2: initialisation : Création des vecteurs  $\underline{X}^1$  et  $\underline{V}^1 = \underline{0}$ 
3:
4: while  $E_c^{n+\frac{1}{2}} > E_c^{lim}$  do           ▷ Itérations jusqu'à atteindre le seuil de convergence
5:   For each élément in éléments do
6:     Calcul des masses fictives           ▷ équations (3.37), (3.86), (3.93) et (3.116)
7:   end for
8:   For each liaison in liaisons do       ▷ sur les  $n$  particules formant la liaison
9:     Transfert des masses fictives
10:  end for
11:
12:  while  $E_c^{n+\frac{1}{2}} \geq E_c^{n-\frac{1}{2}}$  do       ▷ Itérations jusqu'à atteindre un max d'énergie
13:
14:    For each élément in éléments do
15:      Calcul des efforts intérieurs           ▷ équations (3.43) et (3.97)
16:    end for
17:    For each liaison in liaisons do
18:      Transfert des efforts
19:      Transfert des masses fictives
20:    end for
21:    Calcul des vitesses des particules  $\underline{V}^{n+\frac{1}{2}}$            ▷ équation (3.29)
22:    For each appui in appuis do
23:       $\underline{V}_i^{n+\frac{1}{2}} = 0$            ▷ la particule  $i$  appartient à appuis
24:    end for
25:    Calcul des positions des particules  $\underline{X}^{n+1}$            ▷ équation (3.30)
26:    Calcul de l'énergie cinétique  $E_c^{n+\frac{1}{2}}$            ▷ équation (3.117)
27:  end while
28:
29:  Interpolation du max d'énergie
30:  Estimation de  $t^*$  et  $\underline{X}^{t^*}$            ▷ équations (3.118) et (3.119)
31:  MAJ des vecteurs  $\underline{X}^{n+1}$  et  $\underline{V}^{n+1}$            ▷ équation (3.120)
32: end while
33: return  $\underline{X}^{t^*}$ 

```

quasi-statique équivalent dont l'incrément de charge est piloté par l'état du système. Cette méthode a cependant certaines limites imposées par la résolution du problème d'équilibre statique. Les comportements mécaniques qui dépendent du temps ou de l'histoire du chargement doivent être converti en comportement élastique équivalent, pour la résolution du problème à l'instant t . Cependant, cette difficulté peut être facilement contournée en considérant que les évolutions des déformations restent monotones jusqu'à l'instant où le bloc atteint son déplacement maximal. Cette hypothèse, qui sera vérifiée au paragraphe 5.5.1 permet de ne pas différencier les déformations élastiques des déformations plastiques. Le calcul de la trajectoire du bloc peut ainsi être arrêté à l'instant du rebond pour lequel l'état du système suffit à évaluer la quantité d'énergie plastique dissipée. L'équilibre final de la structure peut ensuite être déterminé, après avoir mis à jour les comportements élastiques en modifiant les longueurs au repos, par un calcul de l'état d'équilibre avec pour unique chargement le poids du bloc.

Cette approche ne permet cependant pas d'enrichir la cinématique du bloc. Son domaine de validité est ainsi restreint à des impacts normaux au plan de la nappe et pour lesquels la vitesse de rotation du bloc reste nulle. Pour des sollicitations plus complexes, il est ainsi préférable de mener un calcul explicite direct en utilisant un modèle de corps rigide mieux adapté à la trajectoire réelle du projectile. Ces développements ne seront toutefois pas abordés dans la suite du manuscrit. Des choix de modélisation différents, notamment avec des modèles simplifiés, seront présentés au cours du chapitre 5. Dans le prochain paragraphe (Paragraphe 3.8), deux cas d'études permettant de valider la précision ainsi que les performances de l'algorithme 1 de relaxation dynamique sont présentés.

3.8 Etudes de deux structures formées à partir de câbles glissants

Les deux cas d'étude présentés dans cette partie, traitent des problèmes élaborés à partir de câbles glissants. L'utilisation de ces éléments pour tester la précision de l'algorithme présente deux avantages. Tout d'abord, il a été montré précédemment que leur stabilité est plus difficile à assurer que celle des autres éléments implémentés (cf. Paragraphe 3.4). De plus, les principaux composants de l'écran, en l'occurrence les câbles de rive et les anneaux, sont modélisés à partir de cet élément (voire Paragraphe 3.1). La première structure étudiée est le désormais célèbre chariot glissant qui a permis notamment de valider des modèles de câble glissant dans plusieurs travaux [25, 26, 56, 97]. La seconde, quant à elle, est une structure plane reproduisant le câblage formé par les éléments de connexion de l'écran C2ROP le long d'une rive (voir Paragraphe 2.3.2).

3.8.1 Equilibre d'un chariot glissant le long d'un câble

Présentation du problème et résolution analytique

Comme expliqué en introduction, le problème du chariot a déjà été utilisé par A. Volkwein, L. Ghossoub et J. Coulibaly pour valider leur modèle de câble glissant [25, 26, 56, 97]. Sa structure est composée d'un câble, maintenu à ses deux extrémités, le long duquel glisse un chariot transportant une charge. Ce chargement peut être considéré comme une représentation simplifiée de celui exercé par le filet sur un câble de rive (cf. Paragraphe 3.1.3). Le

modèle discret, construit pour résoudre ce problème, est formé d'un câble glissant à quatre particules ainsi que de trois barres, reliées en U et connectant quatre particules, pour représenter le chariot. La connexion entre le câble et le chariot est assurée au niveau des deux particules centrales du câble glissant. Un schéma du modèle est présenté sur la figure 3.18. Les barres sont parfaitement articulées entre elles, et sont suffisamment raides pour pouvoir être considérées indéformables. En accord avec les notations introduites sur la figure 3.18, les deux barres reliées au câble sont de longueur h et celle fermant le U est de longueur d . On note également l_0 la longueur non chargée du câble.

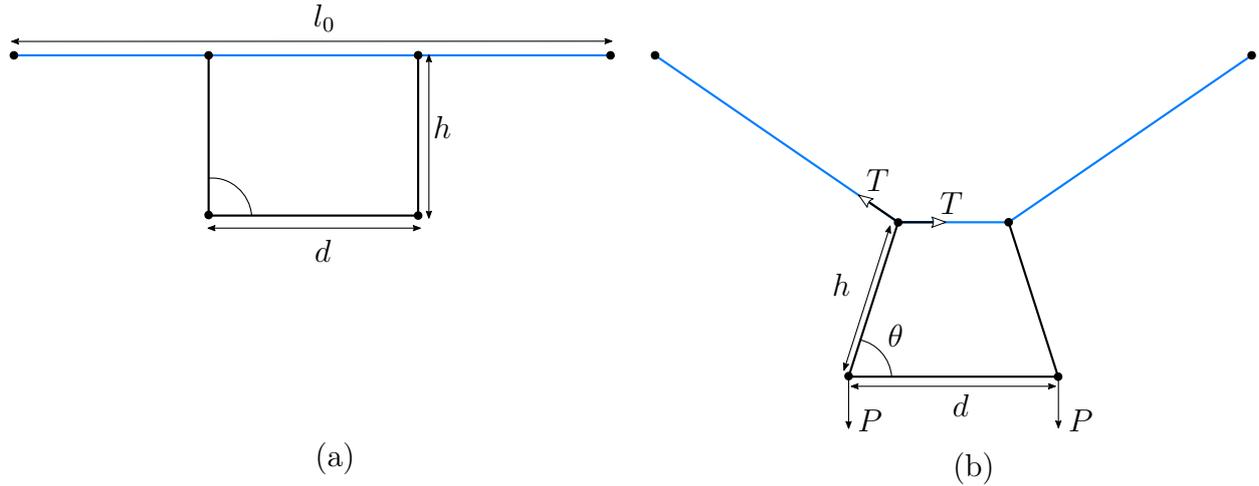


FIGURE 3.18 – Modélisation du problème du chariot. (a) : Configuration au repos au repos, (b) : Configuration à l'équilibre

L'état d'équilibre du système, soumis aux charges P , peut être déterminé analytiquement en introduisant un paramètre géométrique. L'angle θ , formé par deux barres à la base du chariot, est introduit à cet effet, ainsi que la tension T le long du câble à l'équilibre. L'équilibre de l'ensemble du système est ainsi complètement déterminé par celui d'un des deux noeuds glissants symétriques.

$$P = 2T \sin(\theta) \quad (3.121)$$

Il reste maintenant à exprimer la tension dans le câble en fonction de sa géométrie déformée. Pour simplifier le calcul, on considère ici le comportement élastique linéarisé décrit par la relation (3.122),

$$T = K\Delta l + T_0 \quad (3.122)$$

avec K la raideur du câble, Δl son élongation comptée à partir de la géométrie initiale et T_0 une éventuelle pré-tension. L'élongation est ensuite formulée en fonction du paramètre géométrique θ , et la nouvelle expression de la tension est injectée dans la relation (3.121). L'écriture de l'équilibre permet alors d'écrire la charge P comme une fonction de la géométrie du problème.

$$P = K \tan(2\theta) (1 + \cos(2\theta)) (d - 2h \cos(\theta) - l_0) + T_0 \sin(2\theta) \quad (3.123)$$

Comparaison avec les simulations numériques

Le modèle discret du chariot glissant est ensuite implémenté avec son chargement dans l'outil de relaxation dynamique. Les simulations sont réalisées pour des valeurs croissantes de la charge P afin de rendre compte de l'évolution du système. On prend arbitrairement comme dimensions du problème : $l_0 = 40$ m, $h = 11$ m, $d = 14$ m et $K = 1250$ N.m⁻¹. Deux séries de calculs sont effectuées. Dans la première, le câble n'est pas pré-chargé ($T_0 = 0$ N), tandis que, dans la seconde, une pré-tension $T_0 = 2000$ N est ajoutée. La figure 3.19 présente l'évolution de la charge P , évaluée analytiquement et numériquement, en fonction de celle de l'angle θ pour chacune des deux configurations.

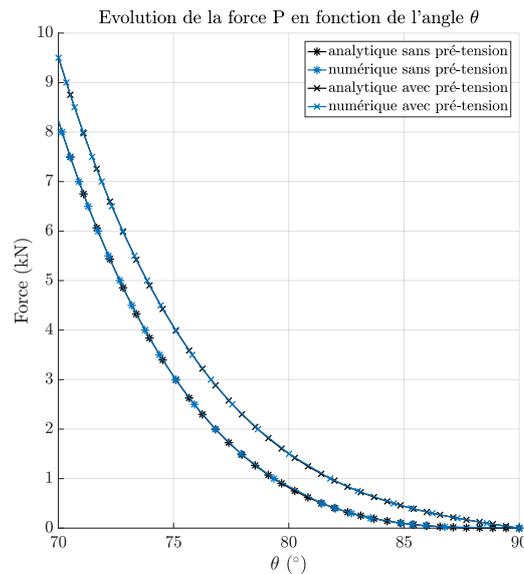


FIGURE 3.19 – Comparaison entre les résultats analytiques et numériques obtenus à partir du problème du chariot résolu avec et sans pré-tension

Dans les deux configuration, les résultats numériques correspondent parfaitement aux prédictions analytiques. Les écarts cumulés ont été calculés sur l'intégralité des chargements. Les simulations numériques fournissent des résultats très fiables, avec environ 0,3% d'erreur dans le cas non-chargé et moins de 0,1% dans la configuration pré-tendue. Elles permettent de reproduire avec succès les non-linéarités géométriques causées par les grands déplacements du câble.

3.8.2 Etude d'une structure symétrique formée de plusieurs câbles glissants

Définition du modèle

La précision de l'algorithme est maintenant testée avec un problème où plusieurs câbles sont connectés entre eux autorisant ainsi des glissements relatifs. Le modèle discret est présenté sur la figure 3.20, il est formé de deux paires symétriques de câbles glissants. Les plus longs, dessinés en bleu sur la figure 3.20 connectent chacun six particules : $(P_1, A, B, C, B_{bis}, P_{2bis})$ pour le côté gauche et $(P_2, B, C, B_{bis}, A_{bis}, P_{1bis})$ pour le droit, les

courts sont quant à eux dessinés en rouge et relient trois particules pour former respectivement les éléments (P_1, A, P_2) et $(P_{2bis}, A_{bis}, P_{1bis})$. En plus de ces quatre câbles glissants, deux barres symétriques qui fonctionnent en traction et compression sont ajoutées pour contrôler le glissement entre les câbles. Il s'agit des éléments reliant les particules (A, B) d'un côté et (B_{bis}, A_{bis}) de l'autre et dessinés en noir sur la figure 3.20. La structure est chargée au niveau de la particule C , en imposant un déplacement ou en appliquant une force. On remarquera que la géométrie du problème est très proche de celle formée par les câbles d'une rive du prototype d'écran C2ROP (voir Paragraphe 2.3.2) et préfigure celles des modèles simplifiés qui seront introduits dans le chapitre 5.

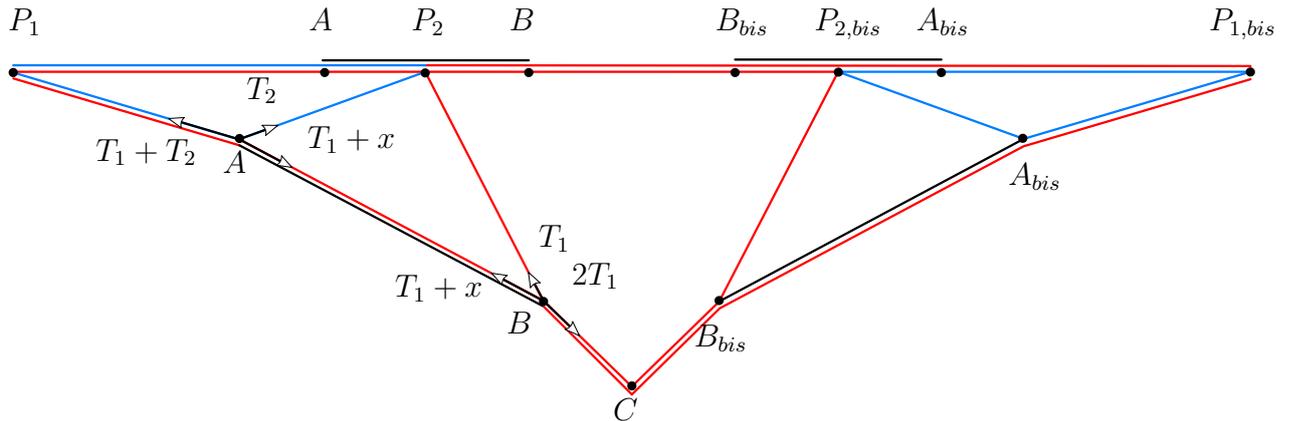


FIGURE 3.20 – Représentation d'un problème à plusieurs câbles glissants

Comme ce problème est trop complexe pour être résolu analytiquement, l'état d'équilibre du système déterminé par relaxation dynamique est comparé avec le résultat d'un calcul conduit avec un algorithme pré-implémenté dans le logiciel de calcul Matlab[®]. Cet algorithme permet de résoudre des équations non-linéaires grâce à une méthode de régions de confiance. Il consiste à approcher la relation non-linéaire à minimiser par une fonction plus simple, souvent quadratique, sur un sous-espace convexe appelé région de confiance. Le sous-problème associé est ensuite résolu sur cet espace de confiance, dont la forme définit les directions de recherche de la solution [70, 88]. La problème à résoudre avec cet algorithme est simplement réduit à un système non-linéaire de dimension quatre, construit à partir des équations d'équilibre des particules A et B (voir Figure 3.20).

Les longueurs non-chargées des éléments sont données par la géométrie initiale, décrite ci-dessous en tenant compte des symétries du problème :

$$P_1C = 7.5 \text{ m}, \quad P_2C = 2.5 \text{ m}, \quad AC = 4.25 \text{ m}, \quad BC = 1.75 \text{ m} \quad (3.124)$$

Les quatre câbles ont le même comportement bi-linéaire élastique en traction, avec deux raideurs égales à $k_{c1} = 1,06 \text{ kN.m}^{-1}$ et $k_{c2} = 3,6 \text{ kN.m}^{-1}$ qui sont respectivement efficaces avant et après atteinte d'une limite en déformation $\epsilon_{lim} = 2,3\%$. Le câble latéral qui est deux fois plus court que le central atteint ainsi sa limite élastique pour une tension deux fois plus faible. La nature bi-linéaire du comportement permet de reproduire celui du système couplé, formé des câbles de rive et des dissipateurs, de l'écran C2ROP (voir Paragraphe 3.1.3). Le comportement des deux barres est également élastique avec une raideur $k_b = 0,8 \text{ kN.m}^{-1}$ et introduit une contrainte sur le glissement pouvant être apparentée à celle imposée par le filet sur les câbles de rive.

Comparaison des résultats numériques

Il a déjà été noté que cette structure reproduit des mécanismes clés du fonctionnement de l'écran C2ROP, notamment grâce aux connexions entre les éléments de la rive. Le chargement est dans un premier temps imposé par le déplacement vertical de la particule C . Les réponses du modèle à des sollicitations d'amplitudes croissantes sont calculées avec les deux algorithmes susmentionnés (relaxation dynamique et régions de confiance) et les résultats, présentés sur la figure 3.21. On remarque en premier lieu que les cinématiques obtenues avec les deux méthodes de résolution sont exactement les mêmes avec un écart moyen entre les résultats inférieur à 0,1% (Graphique 2 et 3 de la figure 3.21). Pour de très faibles niveaux de chargement ($Y_c < 20$ cm), les déplacements des particules A et B sont plus importants que pendant le reste de l'essai. Il est également noté que la particule A s'éloigne de la zone de chargement dans un premier temps avant de s'en approcher par la suite.

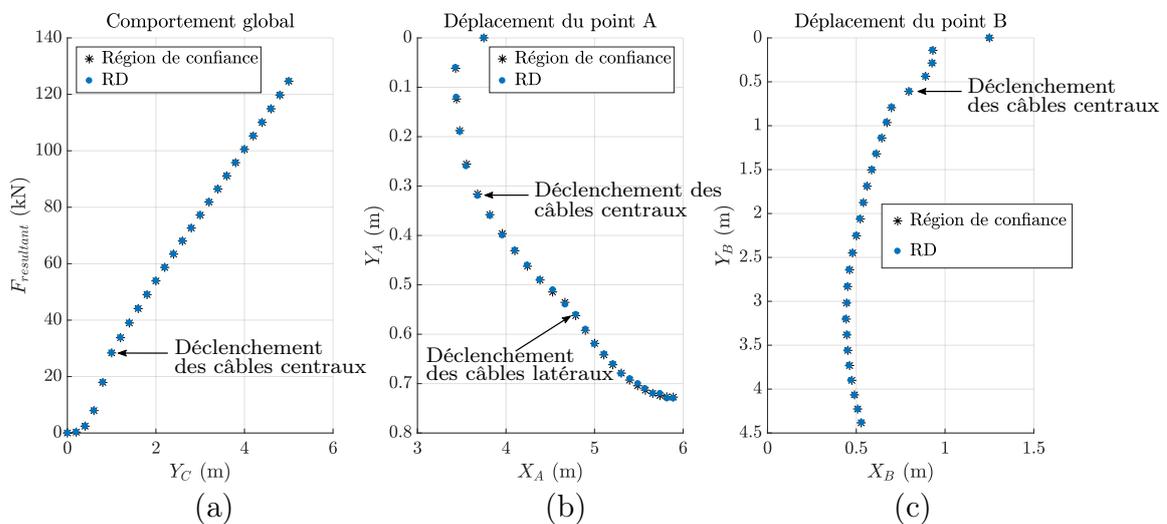


FIGURE 3.21 – Comparaison des résultats obtenus avec la méthode de relaxation dynamique et avec la méthode des régions de confiance. (a) : Comportement global de la structure en force déplacement, (b) : Déplacement du point A , (c) : Déplacement du point B

L'étude du comportement global de la structure (Graphique 1, Figure 3.21) fournit également un résultat intéressant. La seconde partie du comportement, après que les câbles de rive centraux aient atteint leur seuil de déformation, reste quasiment linéaire. Avant cette limite, le comportement est non-linéaire et raidissant comme attendu au vu de la géométrie du problème. Cependant, après celle-ci, la non-linéarité géométrique semble être compensée par la perte de raideur des câbles centraux. Ce phénomène, caractéristique du comportement de l'écran C2ROP a été précédemment évoqué au paragraphe 2.3.4. Par ailleurs, même si les efforts dans les câbles latéraux ne sont pas négligeables par rapport à ceux dans les câbles centraux (cf. Figure 3.22), leur influence sur le comportement global de la structure reste limitée.

Convergence de l'algorithme de relaxation dynamique

Ce paragraphe présente certains résultats sur la convergence de l'algorithme de relaxation dynamique. Les paramètres géométriques et mécaniques du problème, introduits précédem-

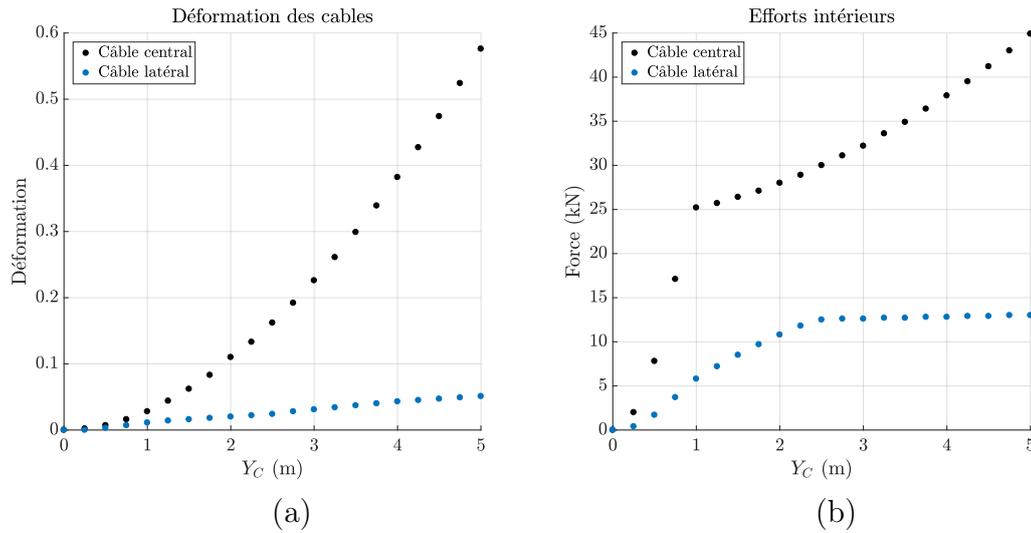


FIGURE 3.22 – Evolution des déformations et des efforts intérieurs dans les câbles centraux calculés avec la méthode de relaxation dynamique. (a) : Déformations, (b) : Efforts intérieurs

ment, restent inchangés. On étudie cette fois-ci les propriétés du calcul pour un déplacement vertical de la particule C de 5 m. Plusieurs simulations sont conduites avec l’algorithme de relaxation dynamique, en appliquant des chargements en déplacement et en force. La force équivalente, à appliquer afin d’obtenir le déplacement cible de la particule C , est déterminée a posteriori à partir d’une première série de simulations réalisée à déplacement imposé. Pour chaque mode de chargement, plusieurs calculs sont menés successivement. Une première série permet d’appliquer la charge totale de manière incrémentale. La géométrie déformée obtenue à l’issue du $n^{\text{ième}}$ calcul sert ensuite de condition initiale pour le calcul à l’étape $n + 1$. 25 incréments sont ici nécessaires pour appliquer la charge totale, ce qui correspond à des pas de 20 cm pour le chargement en déplacement et d’environ 5 kN pour celui en force. Dans un second temps, un calcul isolé est mené en appliquant cette fois l’intégralité de la charge dans la géométrie au repos. Les résultats de ces quatre séries de simulations sont regroupés dans le tableau 3.1 et comparés avec ceux obtenus par l’algorithme de régions de confiance, en appliquant le chargement en déplacement et de manière incrémentale. Pour l’ensemble des modes de chargement considérés, les calculs convergent vers la même solution avec une grande précision.

	F (kN)	Y_C (m)	X_A (m)	Y_A (m)	X_B (m)	Y_B (m)
régions de confiances	124.6	5.00	5.89	0.73	0.53	4.38
déplacements incrémentaux	124.6	5.00	5.89	0.73	0.53	4.38
déplacement une étape	124.6	5.00	5.89	0.73	0.53	4.38
forces incrémentales	124.6	5.00	5.89	0.73	0.53	4.38
force une étape	124.6	5.00	5.89	0.73	0.53	4.38

TABLE 3.1 – Etude de convergence de l’algorithme de relaxation dynamique par comparaison avec celui des régions de confiance

Etude paramétrique de la raideur des barres

Une dernière série de simulations a été réalisée afin d'étudier l'impact du paramètre k_b (la raideur des deux barres) sur le comportement de la structure. La raideur de ce paramètre mécanique varie dans l'intervalle $[10^3, 10^8]$ N et comme pour l'étude de convergence, l'altitude du bloc est fixée à $Y_C = 5$ m. Les résultats des calculs, à nouveau conduits avec les deux algorithmes, sont présentés sur la figure 3.23. On observe que l'augmentation de la raideur k_b influence significativement la géométrie de la structure à l'équilibre. Les particules A et B glissent l'une vers l'autre, ce qui provoque l'allongement des câbles latéraux. Cependant ces variations géométriques changent peu l'effort résultant à l'équilibre, renforçant ainsi l'idée que celui-ci est déterminé par la géométrie des câbles centraux.

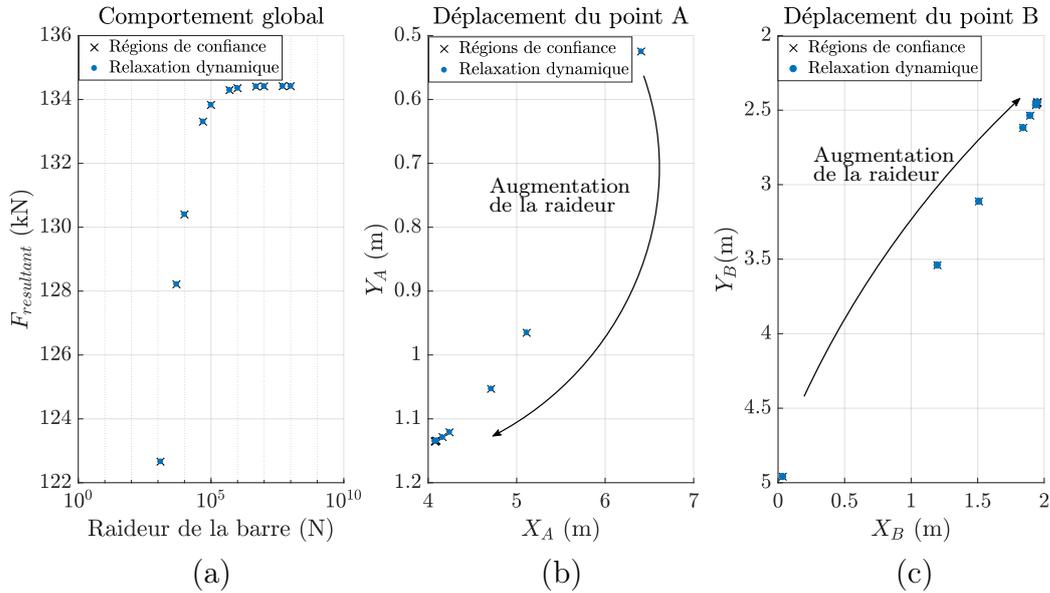


FIGURE 3.23 – Influence de la raideur des barres sur le comportement de la structure

On notera également, qu'avec ce choix de paramètres, les valeurs de raideur inférieures à 10 kN ne sont accessibles avec aucun des algorithmes. En effet, les positions des particules P_1 , P_2 et C forment un angle minimum de glissement, qui est atteint lorsque l'élongation de la barre est maximale et que les positions des particules A et P_1 ainsi que B et P_2 coïncident (voir Figure 3.24). A partir de cet angle minimum et de l'effort dans les câbles centraux, il est possible d'estimer la force minimale que la barre doit appliquer à la particule B afin de l'équilibrer. Pour cela, on écrit l'équilibre de la particule B , occupant maintenant la même position que la particule C . On reprend les notations de la figure 3.24, où la force x appliquée à la particule B par la barre, ainsi que l'angle α_3 sont les deux inconnues du problème.

$$\begin{cases} T_1 \cos(\alpha_1) + (T_1 + x) \cos(\alpha_2) = 2T_1 \cos(\alpha_3) \\ T_1 \sin(\alpha_1) + (T_1 + x) \sin(\alpha_2) = 2T_1 \sin(\alpha_3) \end{cases} \quad (3.125)$$

L'équilibre de la particule B est finalement garanti, dans cette géométrie finale, par une force $x = 3,09$ kN et un angle $\alpha_3 = 42^\circ$. Il est tout de même important de noter que la valeur de cet effort est purement indicative, puisqu'en pratique, les variations de k_b changent la géométrie d'équilibre présentée sur la figure 3.24. Par ailleurs, cette géométrie est la solution exacte

du problème limite où la raideur de la barre est nulle. Cette situation n'est en revanche pas atteignable numériquement, puisque la disparition d'un segment de câble est impossible. En mettant de côté les problèmes numériques évoqués au paragraphe 3.4, si les particules B et C devenaient infiniment proches, la nature du câble glissant imposerait que l'effort appliqué sur elles par le câble central ait la même intensité que celui appliqué au segment (P_1, B) , rendant ainsi l'équilibre de la particule B impossible.

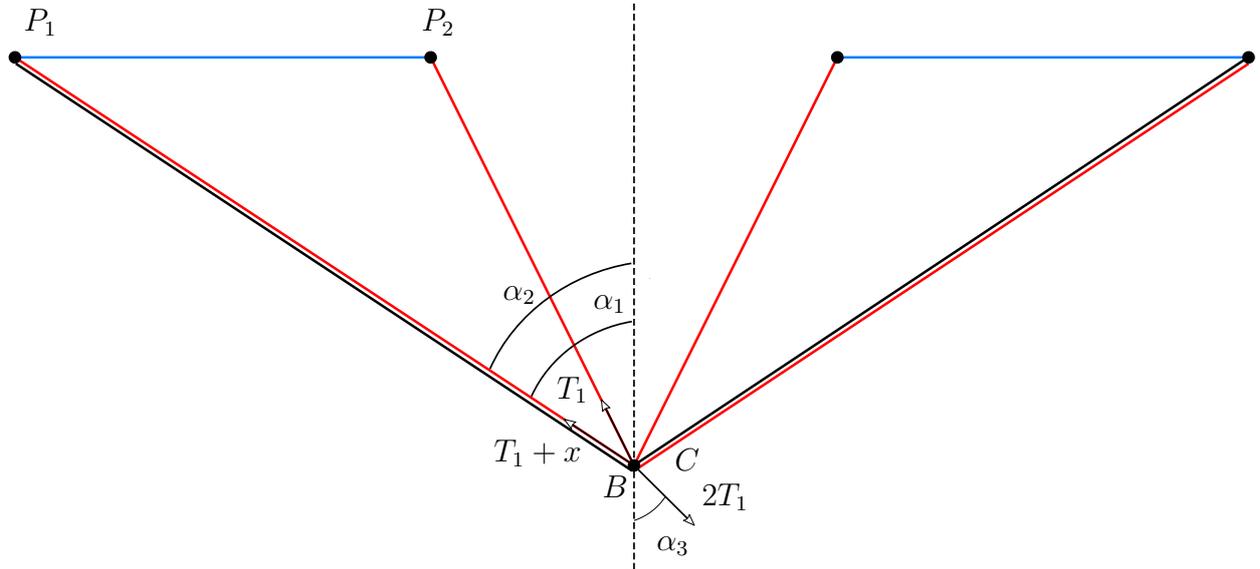


FIGURE 3.24 – Equilibre limite pour des faibles valeurs de k_b

3.9 Conclusion

Ces deux études, aux travers desquelles la précision et la stabilité de l'algorithme ont pu être vérifiées, achèvent ce chapitre. Les modélisations discrètes des composants de l'écran considérées dans ce travail ainsi que l'algorithme de calcul utilisé dans les chapitres 4 et 5 y ont été présentés. Une attention particulière a été apportée aux conditions de stabilité du schéma d'intégration numérique dans le cas de comportements élastiques non-linéaires (cf. Paragraphe 3.4.2 et 3.4.3). Le prochain chapitre est quant à lui dédié à l'étude de l'influence de la modélisation de la nappe de filet sur la solution du calcul numérique. Les simulations qui y seront présentées sont toutes réalisées avec l'algorithme de relaxation dynamique et utilisent les expressions des masses fictives établies par les relations (3.37), (3.86), (3.93) et (3.116).

3.9. CONCLUSION

Chapitre 4

Etude de l'influence de la modélisation du filet sur le comportement du modèle complet

Le revue bibliographique des modélisations discrètes des écrans ASM4 réalisée dans le précédent chapitre (cf. Paragraphe 3.1), a révélé que les auteurs s'accordent sur la représentation de tous les composants de l'écran, excepté le filet d'interception. Ce chapitre est ainsi dédié à une étude comparative des trois principaux modèles de filet ASM4 développés à ce jour, dont les mailles constitutives ont préalablement été introduites au paragraphe 3.1.2. Leurs propriétés mécaniques intrinsèques sont identifiées dans un premier temps, à l'échelle locale et sous les hypothèses des petites perturbations, grâce à une méthode d'homogénéisation (cf. Paragraphe 4.1). Les paramètres matériaux des trois modèles sont ensuite estimés à partir de l'essai de traction plan réalisé dans le cadre du projet national et présenté au paragraphe 2.3.3 (cf. Paragraphe 4.2). La pertinence des comportements homogénéisés, identifiés théoriquement, est ensuite évaluée grâce à la transformation d'une nappe carrée et initialement plate en un paraboloïde hyperbolique (cf. Paragraphe 4.3). La dernière partie de ce chapitre est finalement consacrée à l'étude du comportement des modèles complets d'écran associés (cf. Paragraphe 4.4). L'ensemble des simulations numériques présentées dans ce chapitre sont réalisées avec l'algorithme de relaxation dynamique présenté au paragraphe 3.6 du précédent chapitre.

4.1 Identification des propriétés mécaniques intrinsèques des modèles de filet ASM4

4.1.1 Du discret au continu

Une étude comparative des filets formés par propagation périodique de trois modèles discrets d'anneau ASM4 est ainsi proposée dans ce chapitre, afin d'étudier l'influence de la modélisation sur la description du comportement d'une nappe réelle. La comparaison de ces modèles à l'échelle du filet complet doit reposer sur des critères pertinents. Ces derniers peuvent prendre différentes formes mais il semble indispensable qu'ils soient construits à partir d'une description continue de la structure (comme par interpolation de grandeurs

discrètes ou en considérant une membrane continue équivalente). Plusieurs travaux scientifiques consacrés à l'étude de filets de protection ont déjà, par le passé, été réalisés à partir de ce type d'approches. N. Sasiharana and S. Dhakal ont chacun proposé un modèle élément fini d'une structure de protection, dans laquelle le filet est modélisé par un élément de coque, construit avec une formulation de membrane dédiée, et reproduisant un comportement élastoplastique isotrope [86, 35]. Récemment A. Mentani *et al.* ont utilisé une formulation similaire pour reproduire le comportement d'un filet à câbles. Le comportement plastique de la membrane équivalente a notamment été identifié avec une grande précision, grâce à une série d'essais expérimentaux, où différents chargements et conditions aux limites ont pu être testés [69]. Bien que ces méthodes fournissent de bons résultats, elles nécessitent une connaissance du comportement de la structure a priori pour définir les propriétés du milieu continu équivalent. Une alternative consiste à identifier, à partir des propriétés mécaniques à l'échelle locale, le comportement global par une méthode d'homogénéisation. Cette approche, usuelle pour l'étude des milieux granulaires ou hétérogènes, est en revanche novatrice pour celle des filets de protection. L. Ghossoub est la première à avoir utilisé une méthode analytique de changement d'échelle pour déterminer les propriétés de plusieurs typologies de filet [56]. La principale limite de ces méthodes reste leur domaine de validité, avec parfois des hypothèses trop fortes pour une application aux filets de protection. Lorsqu'elles ne peuvent plus être utilisées, il est toujours possible de calculer numériquement des grandeurs moyennées à l'échelle locale pour construire des champs continus dont l'analyse peut aider à la compréhension du comportement de la micro-structure. Ces deux méthodes de moyennisation sont utilisées dans ce chapitre, la méthode analytique est présentée dans le prochain paragraphe (cf. Paragraphe 4.1.2), tandis que la méthode numérique fait l'objet du paragraphe 4.3.3.

4.1.2 Présentation de la méthode d'homogénéisation

Relation d'homogénéisation

La discipline de l'homogénéisation, parfois appelée changement d'échelle, inclut un ensemble de méthodes permettant d'évaluer l'influence de la micro-structure sur le comportement du milieu à l'échelle macroscopique. Celle présentée dans ce paragraphe a été développée par C. Florence et K. Sab [50]. Elle permet d'évaluer les propriétés d'un milieu périodique discret, dont le comportement est élasto-plastique parfait, à partir de la résolution du problème mécanique à l'échelle d'une cellule élémentaire. Ce problème élémentaire est résolu en minimisant l'énergie de déformation de la cellule, après avoir imposé au milieu macroscopique, soit un champ de déformations cinématiquement admissibles, soit un champ de contraintes statiquement admissibles. Le champ solution du problème est celui qui minimise l'énergie de déformation locale, ce minimum correspondant à l'énergie du milieu homogène équivalent. Seule l'approche cinématique est présentée et appliquée aux écrans de filet dans le cadre de ce travail. Il peut cependant être prouvé que les deux méthodes sont duales et fournissent des résultats équivalents [50].

Afin de respecter le cadre théorique imposé par la méthode, on considère que le filet ASM4 est un milieu périodique et que la dimension des anneaux est suffisamment petite devant celle de la structure complète. La taille des anneaux n'est toutefois pas petite devant celle de la structure et les deux échelles ne peuvent rigoureusement pas être différenciées. Néanmoins, ils sera montré dans ce chapitre que l'étude des milieux homogénéisés permet

d'obtenir certaines informations pertinentes sur les comportements associés aux modélisations discrètes des filets ASM4. Cette dernière hypothèse est à formuler avec précaution et n'est plus applicable lorsque la solution du problème est gouvernée par les effets de bords, comme cela peut être le cas avec l'effet rideau (cf. Paragraphe 3.1.3). Les développements sont par ailleurs réalisés en élasticité linéaire.

La cellule élémentaire, dont la propagation périodique forme le milieu complet, est composée d'un ensemble de particules regroupées en différents types. Deux particules sont du même type, si leur voisinage est identique en tenant compte de la périodicité. La figure 4.1 illustre la formation des trois filets discrets, par propagation des cellules élémentaires dessinées en bleu, correspondant respectivement aux modèles d'anneau A , B et C présentés au paragraphe 3.1.2 : les particules dessinées dans une même couleur y sont du même type.

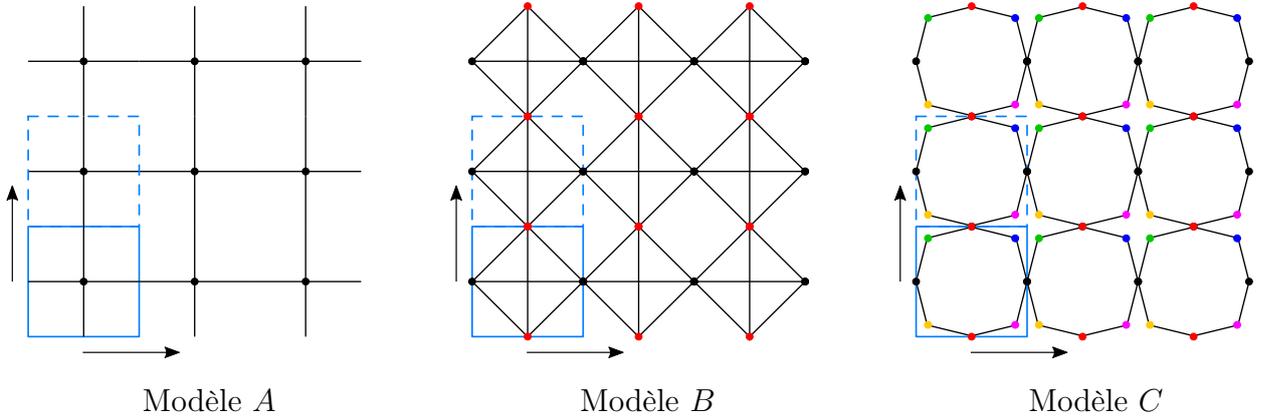


FIGURE 4.1 – Construction des filets discrets par propagation des cellules élémentaires

On introduit ainsi $\underline{\underline{E}}$ le tenseur symétrique du second ordre des déformations globales, i l'indice d'une particule appartenant à la cellule élémentaire et $\underline{\underline{X}}_i$ son vecteur position. Un déplacement cinématiquement admissible de cette particule est obtenu en superposant, son déplacement linéaire homogène $\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{X}}_i$ et son déplacement périodique $\underline{\underline{u}}_i^{per}$. Deux particules du même type ont par définition le même déplacement périodique (Figure 4.1).

$$\underline{\underline{u}}_i = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{X}}_i + \underline{\underline{u}}_i^{per} \quad (4.1)$$

Comme par ailleurs les particules n'ont pas de degré de liberté en rotation, l'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles est défini à partir de la relation (4.1).

$$C.A.(\underline{\underline{E}}) = \{\underline{\underline{u}}/\underline{\underline{u}}_i = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{X}}_i + \underline{\underline{u}}_i^{per} \quad \forall i \in \text{cellule élémentaire}\} \quad (4.2)$$

L'énergie de déformation élastique de la cellule élémentaire est ensuite donnée par la somme de chacune des énergies fournies par les interactions entre les particules lui appartenant. Ce lien, entre les énergies des particules et le champ de déformation global, définit la relation d'homogénéisation.

$$\psi^{hom}(\underline{\underline{E}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{E}} = \min_{\underline{\underline{u}} \in C.A.(\underline{\underline{E}})} \frac{1}{A_\Omega} \sum_i \psi_i(\underline{\underline{u}}) \quad (4.3)$$

Où $\underline{\underline{A}}$ est le tenseur d'élasticité du milieu homogène équivalent, où ψ_i sont les énergies dues aux interactions à l'intérieur de la cellule élémentaire et où A_Ω est l'aire de la cellule

élémentaire. Comme une partie du déplacement des particules, et donc des énergies locales, est déterminée par le champ de déformations global, le problème de minimisation consiste à résoudre une équation, quadratique en élasticité linéaire, en \underline{u}_i^{per} . D'après la figure 4.1, la cellule élémentaire du modèle C est la seule à contenir des particules dont le déplacement n'est pas complètement lié à celui de sa frontière (carré dessiné en bleu sur la figure 4.1), et pour lesquelles le déplacement périodique est donc non nul. Le calcul de l'énergie de déformation du milieu homogène équivalent est en revanche immédiat pour les modèles de filet A et B .

Energies d'interaction au sein de la cellule élémentaire

Les interactions liant les particules dans les trois modèles d'anneau ont été préalablement présentées au paragraphe 3.1.2 du chapitre 3. Elles sont au nombre de trois et ont été désignées par les appellations respectives : effort de traction, effort d'anneau et effort de flexion. Le calcul des énergies élastiques qui leur sont associées est présenté dans la suite de ce paragraphe. Au préalable, de nouvelles notations, faisant écho à celles utilisées au paragraphe 3.4 doivent être introduites. L'élongation du couple c_i , formé par les particules i et $i + 1$ est noté $\Delta \underline{u}_i = \underline{u}_{i+1} - \underline{u}_i$. Le terme couple est volontairement employé ici à la place de segment, utilisé au paragraphe 3.4. S'il semble désigner la même entité, le segment fait référence à un élément de structure discret comme un câble ou une poutre, tandis que la notion de couple est complètement indépendante de l'ordre et l'organisation des particules dans le modèle. La définition du vecteur associé au couple c_i reste inchangée : $\Delta \underline{X}_i = \underline{X}_{i+1} - \underline{X}_i$.

Energie de traction. L'énergie de déformation du couple c_i associée à l'interaction de traction, calculée par la relation 3.1, est donnée par la formule suivante :

$$\psi_t(\Delta \underline{u}_i) = \frac{1}{2} E_t S_t \|\Delta \underline{X}_i\| \epsilon_i^2 \quad (4.4)$$

Où $E_t S_t$ est la raideur en N associée à l'interaction et ϵ_i la déformation du couple c_i qui, sous l'hypothèse des petites transformations, est égale à la dilatation dans la direction $\frac{\Delta \underline{X}_i}{\|\Delta \underline{X}_i\|}$.

$$\epsilon_i = \frac{\|\Delta \underline{x}_i\| - \|\Delta \underline{X}_i\|}{\|\Delta \underline{X}_i\|} = \frac{\|\Delta \underline{X}_i + \Delta \underline{u}_i\| - \|\Delta \underline{X}_i\|}{\|\Delta \underline{X}_i\|} \quad (4.5)$$

Lorsque les particules du couple c_i n'admettent pas de déplacement périodique, la dilatation est liée au champs de déformation macroscopique par la relation suivante :

$$\epsilon_i + \frac{1}{2} \epsilon_i^2 = \frac{\Delta \underline{X}_i}{\|\Delta \underline{X}_i\|} \cdot \underline{E} \cdot \frac{\Delta \underline{X}_i}{\|\Delta \underline{X}_i\|} \quad (4.6)$$

La relation (4.6) peut ensuite être linéarisée en considérant uniquement des petites perturbations du milieu.

$$\epsilon_i = \frac{\Delta \underline{X}_i}{\|\Delta \underline{X}_i\|} \cdot \frac{\Delta \underline{u}_i}{\|\Delta \underline{X}_i\|} \quad (4.7)$$

On considère pour la suite que cette relation peut être étendue dans le cas où \underline{u}_i^{per} et/ou $\underline{u}_{i+1}^{per}$ sont non nuls.

Energie d'anneau. Comme expliqué au paragraphe 3.1.3, l'interaction d'anneau est calculée de la même manière que celle de traction, mais pour une déformation dépendant d'un plus grand nombre de particules 3.4. On introduit à cet effet, la déformation totale linéarisée des n couples c_i interagissant dans l'interaction d'anneau.

$$\epsilon_a = \frac{\sum_{k=1}^N \epsilon_i \|\Delta \underline{X}_i\|}{l_a} \quad (4.8)$$

où l_a est la longueur non chargée de l'interaction définie comme au paragraphe 3.4.2 et les ϵ_i sont les dilatations associées à chacun des couples, déterminées à partir de la relation (4.7). L'énergie d'anneau est ensuite calculée de la même manière que celle de traction.

$$\psi_t(d_a) = \frac{1}{2} E_a S_a l_a \epsilon_a^2 \quad (4.9)$$

Energie de flexion. L'énergie de flexion est calculée directement à partir du moment fléchissant, sans faire intervenir le couple d'efforts tranchants équivalents (cf. voir Paragraphe 3.1.2). L'expression introduite par la formule 3.8 au chapitre précédent correspond à la configuration où le moment est nul lorsque la courbure l'est également. On considère à partir de maintenant, que les anneaux ASM4 modélisés ne sont pas soumis à des efforts de flexion résiduels, et qu'ils sont non chargés dans leur géométrie initiale. L'expression du moment (3.8) est ainsi adaptée en conséquence.

$$\underline{M}_i = 2EI \left(\frac{(\Delta \underline{X}_{i-1} + \Delta \underline{u}_{i-1}) \wedge (\Delta \underline{X}_i + \Delta \underline{u}_i)}{\|\Delta \underline{X}_{i-1} + \Delta \underline{u}_{i-1}\| \|\Delta \underline{X}_i + \Delta \underline{u}_i\| \|\Delta \underline{X}_i^c + \Delta \underline{u}_i^c\|} - \frac{\Delta \underline{X}_{i-1} \wedge \Delta \underline{X}_i}{\|\Delta \underline{X}_{i-1}\| \|\Delta \underline{X}_i\| \|\Delta \underline{X}_i^c\|} \right) \quad (4.10)$$

La relation (4.10) est celle implémentée dans l'algorithme de relaxation dynamique, présenté au paragraphe 3.6, pour calculer le moment fléchissant. Toutefois, pour décrire l'énergie de flexion par une fonction quadratique des déplacements et appliquer la relation d'homogénéisation (4.3), il est au préalable nécessaire de linéariser cette expression en utilisant l'hypothèse des petites perturbations ($\Delta \underline{u} \ll \Delta \underline{X}$) et ainsi :

$$\underline{M}_i = \frac{2EI}{\|\Delta \underline{X}_{i-1}\| \|\Delta \underline{X}_i\| \|\Delta \underline{X}_i^c\|} \left[\Delta \underline{X}_{i-1} \wedge \Delta \underline{u}_i + \Delta \underline{u}_{i-1} \wedge \Delta \underline{X}_i + \Delta \underline{X}_i \wedge \Delta \underline{X}_{i-1} \left(\frac{\Delta \underline{X}_i^c \cdot \Delta \underline{u}_i^c}{\|\Delta \underline{X}_i^c\|^2} + \frac{\Delta \underline{X}_{i-1} \cdot \Delta \underline{u}_{i-1}}{\|l_{i-1}\|^2} + \frac{\Delta \underline{X}_i \cdot \Delta \underline{u}_i}{\|\Delta \underline{X}_i\|^2} \right) \right] \quad (4.11)$$

L'énergie de déformation élastique associée à la particule i est ensuite formulée à partir de la relation (4.11).

$$\psi_f^i = \frac{1}{2} \frac{M_i^2}{EI} \frac{\|\Delta \underline{X}_{i-1}\| + \|\Delta \underline{X}_i\|}{2} \quad (4.12)$$

L'expression quadratique finale de l'énergie de déformation est finalement déterminée en injectant la relation (4.11) dans la formule de l'énergie (4.12).

4.1.3 Identification des matrices de rigidité

Choix d'une base de tenseur

La méthode d'homogénéisation présentée au paragraphe 4.1.2 est maintenant appliquée aux trois modèles de filet illustrés sur les figures 3.6 et 4.1. Il a été indiqué au paragraphe 3.1.2, que les modèles d'anneau A et B reproduisent le comportement en flexion avec une

non-linéarité matérielle. Comme cette dernière est linéaire par morceaux, les tenseurs d'élasticité de ces modèles restent identifiés à partir de la relation (4.3) sans introduire de nouvelle difficulté. Comme suggéré par L. Ghossein dans sa thèse [56], la notation de Voigt est utilisée pour simplifier les opérations tensorielles.

$$\psi^{hom}(\underline{\underline{E}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E_{11} & E_{22} & 2E_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1112} \\ A_{2211} & A_{2222} & A_{2212} \\ A_{1211} & A_{1222} & A_{1212} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

On introduit les vecteurs $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ formant la base orthonormée \mathbf{B} de \mathbb{R}^3 , dans laquelle les vecteurs colonnes de la matrice représentative du champ de déformations $\underline{\underline{E}}$ sont exprimés. Par commodité on choisit ces vecteurs tels que $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ soit la base orthonormée directe du plan contenant le filet, définie par l'orientation de la figure 4.1, où \underline{e}_1 et \underline{e}_2 sont les directions de propagation du motif périodique. Les composantes du tenseur d'élasticité sont ainsi calculées, à partir de la relation (4.3), dans la base formée par les produits tensoriels d'ordre quatre des vecteurs de \mathbf{B} .

Afin de connaître la raideur du milieu équivalent selon toutes les directions de son plan, le tenseur d'élasticité est ensuite exprimé relativement à une seconde base $\mathbf{B}'(\alpha) = (\underline{e}'_1(\alpha), \underline{e}'_2(\alpha))$, déduite de \mathbf{B} par une rotation d'angle α autour de la direction \underline{e}_3 . On introduit ainsi la matrice de rotation $\underline{\underline{R}}(\alpha)$ dont les colonnes sont exprimées dans la base \mathbf{B} .

$$\underline{\underline{R}}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Les composantes a_{pqrs} , du tenseur d'élasticité exprimé dans la base $\mathbf{B}'(\alpha)$, sont déterminées par changement de base. On commence pour cela par écrire le tenseur $\underline{\underline{A}}$ dans la base canonique construite à partir des vecteurs de base de \mathbf{B} .

$$\underline{\underline{A}} = A_{ijkl} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \quad (4.15)$$

On applique ensuite le changement de base par rotation à chacun des vecteurs composant le produit tensoriel.

$$\underline{\underline{A}} = A_{ijkl} R_{ip} \underline{e}'_p(\alpha) \otimes R_{jq} \underline{e}'_q(\alpha) \otimes R_{kr} \underline{e}'_r(\alpha) \otimes R_{ls} \underline{e}'_s(\alpha) \quad (4.16)$$

La relation de changement de base est obtenue en tirant parti de la linéarité du produit tensoriel.

$$a_{pqrs} = A_{ijkl} R_{ip} R_{jq} R_{kr} R_{ls} \quad (4.17)$$

Pour un état de contraintes et de déformations planes, la notation de Voigt (4.13) permet de représenter uniquement les 6 composantes indépendantes du tenseur d'élasticité, ainsi que les termes correspondant à la "grande symétrie", donnée par la relation : $A_{ijkl} = A_{klij}$. Pour appliquer correctement la relation de changement de base (4.17), il est toutefois important de réaliser la sommation sur les 16 composantes du tenseurs d'élasticité en tenant compte des symétries respectives du tenseur de contraintes et de déformations.

Deux expressions du tenseur d'élasticité sont ainsi présentées pour chaque modèle de filet. La première, donnée dans la base $\mathbf{B} = \mathbf{B}'(0)$ résulte du calcul d'homogénéisation, tandis que

la seconde est obtenue en passant des bases \mathbf{B} à $\mathbf{B}'(\alpha)$. En pratique, une orientation autre que celle naturelle, donnée par les directions de propagation du motif, est particulièrement intéressante pour les trois milieux discrets considérés ici. Il s'agit de celle tournée de 45° , habituellement utilisée pour installer les nappes de filet au sein de l'écran complet (cf. Paragraphe 2.3.2).

Modèle A

Dans ce modèle, les cellules contiennent une unique particule en leur centre et quatre demi-interactions avec leurs voisines. L'identification du tenseur d'élasticité dans la base \mathbf{B} est directe en utilisant l'expression de l'énergie de traction (4.4) dans la relation (4.3). Le détail des calculs peut être retrouvé dans [56].

$$\underline{\underline{A}}^A = \begin{pmatrix} K_t^A & 0 & 0 \\ 0 & K_t^A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

avec,

$$K_t^A = \frac{E_t^A S_t^A}{2R} \quad (4.19)$$

R étant le rayon d'un anneau, la longueur $2R$ correspond à la dimension de la cellule. Le paramètre de raideur $E_t^A S_t^A$ est le même que celui intervenant dans le calcul de l'énergie de traction (4.4). Ces notations seront également utilisées pour les deux autres modèles. Le milieu homogène, équivalent au filet A, n'a donc pas de raideur en cisaillement et un coefficient de Poisson apparent nul, dans la base \mathbf{B} . Comme expliqué en introduction de ce paragraphe, le tenseur d'élasticité est ensuite exprimé dans la base $\mathbf{B}'(\alpha)$, tournée d'un angle α par rapport à \mathbf{B} .

$$\underline{\underline{A}}^A(\alpha) = K_t^A \begin{pmatrix} 1 - \frac{\sin^2(2\alpha)}{2} & \frac{\sin^2(2\alpha)}{2} & 0 \\ \frac{\sin^2(2\alpha)}{2} & 1 - \frac{\sin^2(2\alpha)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sin^2(2\alpha)}{2} \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Comme attendu, il est symétrique par rotation d'angle $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Par ailleurs, les propriétés mécaniques apparentes de ce modèle changent radicalement lorsque $\alpha = \frac{\pi}{4}$, avec le coefficient de Poisson apparent ainsi que la raideur en cisaillement qui deviennent tous deux égaux à 1. Cette valeur de coefficient de Poisson peut surprendre et est normalement inaccessible en élasticité linéaire isotrope. Elle peut être interprétée ici comme un équivalent du critère d'incompressibilité, dans le cas limite purement théorique, où l'épaisseur du matériau est nulle. Le comportement apparent de ce modèle dépend ainsi de l'orientation de la nappe par rapport à la direction de sollicitation.

Modèle B

La cellule élémentaire contient cette fois quatre particules, toutes situées sur sa frontière, interagissant par l'intermédiaire d'une interaction d'anneau. De plus, deux interactions de traction relient les couples de particules diamétralement opposés. Comme pour le modèle

A , la formulation du tenseur d'élasticité dans la base \mathbf{B} est directe et le détail des calculs peut être retrouvé dans la thèse de L. Ghossoub [56].

$$\underline{\underline{A}}^B = \begin{pmatrix} K_t^B + \frac{\sqrt{2}}{2}K_a^B & \frac{\sqrt{2}}{2}K_a^B & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}K_a^B & K_t^B + \frac{\sqrt{2}}{2}K_a^B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

avec K_a^B la raideur de l'interaction anneau et K_t^B la raideur de l'interaction de traction,

$$K_a^B = \frac{E_a^B S_a^B}{2R} \quad \text{et} \quad K_t^B = \frac{E_t^B S_t^B}{2R} \quad (4.22)$$

Exprimé dans la base \mathbf{B} , le modèle B n'a pas de raideur en cisaillement, mais son coefficient de Poisson apparent est égal à 1. Pour une orientation quelconque du repère matériel, ce tenseur est donné par la formule :

$$\underline{\underline{A}}^B(\alpha) = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\sin^2(2\alpha)}{2}\right) K_t^B + \frac{\sqrt{2}}{2}K_a^B & \frac{\sin^2(2\alpha)}{2}K_t^B + \frac{\sqrt{2}}{2}K_a^B & 0 \\ \frac{\sin^2(2\alpha)}{2}K_t^B + \frac{\sqrt{2}}{2}K_a^B & \left(1 - \frac{\sin^2(2\alpha)}{2}\right) K_t^B + \frac{\sqrt{2}}{2}K_a^B & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sin^2(2\alpha)}{2}K_t^B \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Le comportement du modèle B a été préalablement décrit au Paragraphe 3.1.2. La flexion de l'anneau réel est reproduite par les interactions de traction liant les couples de particules sur les diagonales, et les raideurs K_a^B et K_t^B ne sont pas effectives au même moment (voir Figures 3.6 et 4.1). Pendant la première partie du comportement, seul l'effet des diagonales se fait sentir et le modèle B est ainsi complètement équivalent au modèle A . Une fois la phase de flexion terminée, la raideur K_t^B reste nulle et, puisque la partie du tenseur liée à la raideur K_a^B reste inchangée pour tout changement de base, le comportement du modèle B devient isotrope sans raideur en cisaillement.

Modèle C

Contrairement aux cellules élémentaires des deux autres modèles, celle du modèle C comporte des particules dont les déplacements ne sont pas entièrement déterminés par le champ de déformations macroscopique (voir Figure 4.1). L'identification du tenseur d'élasticité dans la base \mathbf{B} est cette fois un peu plus complexe et nécessite de résoudre un problème auxiliaire de minimisation.

On commence par introduire \underline{u}^{per} , le champ des déplacements périodiques qui, pour chaque point \underline{X} appartenant à l'intérieur de la cellule (la cellule privée de sa frontière), associe un déplacement périodique $\underline{u}^{per}(\underline{X})$. Puisque le champ de déformations \underline{E} définit une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 , le champ de déplacements macroscopique associé est impair. Ainsi, pour tout point \underline{X} du milieu homogène, l'énergie de déformation (4.3) respecte la relation : $\psi^{hom}(-\underline{X}) = \psi^{hom}(\underline{X})$. Au regard des propriétés de symétrie de la cellule périodique, cette dernière condition amène à rechercher le champ \underline{U}^{per} sous la forme d'une fonction impaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 . Par ailleurs, une fonction de deux variables peut être décomposée de manière univoque en une somme de quatre fonctions qui ont respectivement les propriétés de parité suivantes : paire pour les deux variables, impaire pour les deux variables, paire pour la première et impaire pour la seconde, impaire pour la première et

paire pour la seconde. Comme le champ des déplacements périodiques est impair, il peut donc simplement être écrit par la somme de deux fonctions.

$$\underline{u}^{per} = \underline{u}_X^Y + \underline{u}_Y^X \quad (4.24)$$

où \underline{u}_X^Y est une fonction paire de la première variable et impaire de la seconde et \underline{u}_Y^X impaire de la première et paire de la seconde.

Pour garantir que la longueur non chargée de l'interaction anneau, liant les huit particules, soit égale au périmètre d'un anneau réel, la géométrie initiale du modèle C n'est pas celle d'un octogone régulier. On considère les notations introduites sur la figure 4.2 présentant la géométrie de la cellule élémentaire, où la fonction \underline{P} décrit la position des particules.

$$\underline{P} : \beta \rightarrow \begin{cases} R & (\cos \beta, \sin \beta)^T & \text{si } \beta = n\frac{\pi}{2} \\ R(1 + \eta) & (\cos \beta, \sin \beta)^T & \text{si } \beta = (2n + 1)\frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (4.25)$$

R désigne toujours le rayon de l'anneau et η est défini de manière à ce que la longueur non-chargée de l'interaction anneau soit égale à $2\pi R$.

$$\eta = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{\pi^2 - 8}}{4} - 1 \quad (4.26)$$

Comme η est inférieur à 5%, les termes d'ordre supérieur à η seront négligés dans la suite des développements. Cette transformation de l'octogone régulier conserve les symétries orthogonales selon les quatre diamètres.

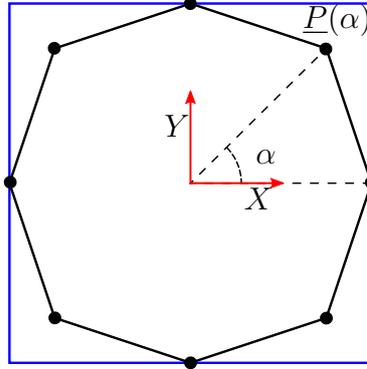


FIGURE 4.2 – Géométrie de la cellule élémentaire du modèle C

L'énergie de déformation de la cellule est composée de deux termes : celui qui provient de l'interaction d'anneau et celui dû aux moments en chaque particule. Le premier est calculé à partir de l'allongement du périmètre de l'anneau (4.9), donné par celui de chacun de ses huit couples de particules c_i .

$$\Delta \underline{u}_i = \underline{E} \cdot \left[\underline{P} \left(\frac{(i+1)\pi}{4} \right) - \underline{P} \left(\frac{i\pi}{4} \right) \right] + \left[\underline{u}^{per} \left(\frac{(i+1)\pi}{4} \right) - \underline{u}^{per} \left(\frac{i\pi}{4} \right) \right] \quad (4.27)$$

Pour appliquer sous cette forme la relation (4.27), la définition du champ \underline{u}^{per} est étendue à la frontière de la cellule.

$$\underline{u}^{per} \left(\frac{n\pi}{2} \right) = \underline{0} \quad \text{avec } n \text{ entier} \quad (4.28)$$

L'élongation du périmètre de l'anneau est ensuite déduite en sommant les contributions de chacun des couples c_i (4.27). Par ailleurs, les propriétés de symétrie de la cellule, ainsi que la parité des fonctions \underline{u}_X^Y et \underline{u}_Y^X , permettent de réduire le nombre d'inconnues du problème en considérant uniquement le déplacement périodique de la particule $P\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

$$\underline{u}^{per}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} u_{X1}^Y + u_{Y1}^X \\ u_{X2}^Y + u_{Y2}^X \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Toujours grâce aux arguments de parité et de symétrie, l'élongation de l'anneau peut être calculée sur une seule moitié de cellule.

$$d_a = \sum_{k=1}^3 \|\Delta \underline{u}_i\| \quad (4.30)$$

Une fois les calculs réalisés, et après avoir négligé les termes d'ordre supérieur à 1 en ϵ , l'élongation de l'anneau est exprimée par la relation ci-dessous.

$$d_a(u_{Y1}^X, u_{X2}^Y) = (2 - \sqrt{2})^{-\frac{3}{2}} \left[\left[4(3 - 2\sqrt{2})(2 + \eta) \right] R(E_{11} + E_{22}) + \left[4(3\sqrt{2} - 4) + 2\sqrt{2}\eta \right] (u_{Y1}^X + u_{X2}^Y) \right] \quad (4.31)$$

En injectant cette dernière relation (4.31), dans la formule de l'énergie d'anneau (4.9), le premier terme de l'énergie de déformation de la cellule peut finalement être exprimé en fonction des déplacements périodiques.

$$\psi_a(u_{Y1}^X, u_{X2}^Y) = \frac{1}{2} K_a^C d_a^2(u_{Y1}^X, u_{X2}^Y) \quad (4.32)$$

où K_a^C est la raideur associée avec cette énergie de déformation.

$$K_a^C = \frac{E^C S^C}{2\pi R} \quad (4.33)$$

L'énergie associée aux interactions de flexion est calculée à partir de la formule (4.12). Il a précédemment été montré que le moment fléchissant appliqué à la particule i dépend des élongations des couples c_{i-1} et c_i , ainsi que de celle de la corde, formée par les particules $i - 1$ et $i + 1$.

$$\Delta \underline{u}_i^c = \underline{E} \cdot \left[\underline{P} \left(\frac{(i+1)\pi}{4} \right) - \underline{P} \left(\frac{(i-1)\pi}{4} \right) \right] + \left[\underline{u}^{per} \left(\frac{(i+1)\pi}{4} \right) - \underline{u}^{per} \left(\frac{(i-1)\pi}{4} \right) \right] \quad (4.34)$$

L'énergie de flexion, associée à une particule, est calculée en injectant les expressions des élongations (4.27) et (4.34) dans la formule de l'énergie (4.12). Afin de simplifier les notations, on introduit une élongation de flexion, définie à partir de la forme linéarisée du moment (4.11).

$$\underline{d}_{f,i} = \frac{1}{R} \left[\Delta \underline{X}_{i-1} \wedge \Delta \underline{u}_i + \Delta \underline{u}_{i-1} \wedge \Delta \underline{X}_i + \Delta \underline{X}_i \wedge \Delta \underline{X}_{i-1} \left(\frac{\Delta \underline{X}_i^c \cdot \Delta \underline{u}_i^c}{\|\Delta \underline{X}_i^c\|^2} + \frac{\Delta \underline{X}_{i-1} \cdot \Delta \underline{u}_{i-1}}{\|\Delta \underline{X}_{i-1}\|^2} + \frac{\Delta \underline{X}_i \cdot \Delta \underline{u}_i}{\|\Delta \underline{X}_i\|^2} \right) \right] \quad (4.35)$$

Par souci de concision, les expressions des élongations de flexion (4.35) ne sont pas développées. Afin de disposer d'une expression similaire à celle utilisée pour le calcul de l'énergie d'anneau, on introduit la raideur équivalente de flexion K_f^C .

$$K_f^C = 2 \left(2 - \sqrt{2} \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{E^C I^C}{R^3} \quad (4.36)$$

Finalement, l'énergie de flexion est formulée sur le même modèle que les énergies de traction et d'anneau.

$$\psi_{f,i} = \begin{cases} \frac{1}{2}K_f^C(1+\eta)^{-\frac{3}{2}}d_{f,i}^2 & \text{si } \alpha = n\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}K_f^C(1+\eta)^{-\frac{7}{2}}d_{f,i}^2 & \text{si } \alpha = (2n+1)\frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (4.37)$$

En tirant une nouvelle fois parti de la parité des champs de déplacements macroscopiques et périodiques, l'énergie de déformation totale associée aux interactions de flexion peut également être calculée sur une demi cellule.

$$\psi_f(u_{X1}^Y, u_{Y1}^X, u_{X2}^Y, u_{Y2}^X) = 2 \sum_{i=0}^3 \psi_{f,i} \quad (4.38)$$

L'énergie de déformation totale de la cellule élémentaire est maintenant exprimée comme une fonction des quatre inconnues des déplacements périodiques.

$$\psi^C = \psi_a^C(u_{Y1}^X, u_{X2}^Y) + \psi_f^C(u_{X1}^Y, u_{Y1}^X, u_{X2}^Y, u_{Y2}^X) \quad (4.39)$$

La relation d'homogénéisation (4.3) permet finalement de formuler le problème de minimisation auxiliaire donnant l'énergie du milieu équivalent.

$$\psi^{C,hom} = \min_{(u_{X1}^Y, u_{Y2}^X, u_{X2}^Y, u_{Y2}^X)} \frac{1}{4R^2} \psi^C(u_{X1}^Y, u_{Y1}^X, u_{X2}^Y, u_{Y2}^X) \quad (4.40)$$

Si le problème de minimisation semble correctement posé, il n'admet cependant pas une unique solution sous sa forme actuelle. En effet, en considérant trois particules consécutives, dont les positions sont respectivement données à l'équilibre par les vecteurs $(\underline{x}_{i-1}, \underline{x}_i, \underline{x}_{i+1})$ et en faisant l'hypothèse que la particule i est la seule libre de se déplacer, plusieurs positions d'équilibre sont admissibles pour une énergie de flexion donnée. En particulier, lorsque la particule se déplace sur un arc de cercle, la courbure discrète reste inchangée et il existe au moins deux positions symétriques qui fournissent la même valeur de la quantité $\|\Delta \underline{u}_{i-1}\| + \|\Delta \underline{u}_i\|$ (cf. Figure 4.3). Pour lever cette indétermination, on impose à la particule i de se déplacer le long de la médiatrice de la corde $\Delta \underline{x}_i^c$.

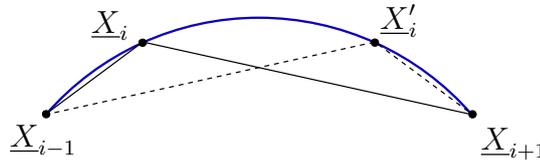


FIGURE 4.3 – Exemple de deux configurations différentes donnant la même énergie de déformation

Comme expliqué dans la conclusion du paragraphe (3.4.3), les câbles constitutifs des anneaux ont une raideur en flexion très petite devant leur raideur axiale : $K_f^C \ll K_r^C$. On simplifie ainsi le problème de minimisation, en cherchant les déplacements périodiques qui annulent l'énergie due à l'interaction d'anneau. Le problème étant par ailleurs élastique et linéaire, les déplacements périodiques doivent satisfaire au principe de superposition. On

décompose ainsi le problème actuel en deux sous-problèmes, en écrivant la déformation macroscopique comme la somme d'une dilatation $\underline{\underline{E}}^1$ et d'une distorsion $\underline{\underline{E}}^2$.

$$\underline{\underline{E}}^1 = \begin{pmatrix} E_{11} & 0 \\ 0 & E_{22} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \underline{\underline{E}}^2 = \begin{pmatrix} 0 & E_{12} \\ E_{12} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Le déplacement périodique minimisant l'énergie de la cellule pour un état de pure dilatation est identifié en premier. Cette transformation préserve les symétries selon les directions des vecteurs de base de \mathbf{B} , ce qui permet d'écrire directement la nullité des composantes u_{X1}^Y et u_{Y2}^X dans cette configuration. Ces conditions de symétrie simplifient ce premier sous-problème conduisant ainsi à la résolution d'un système de deux équations quadratiques à deux inconnues.

$$\begin{cases} \|\Delta \underline{u}_0\| (0, u_{Y1}^X, u_{X2}^Y, 0) = 0 \\ \|\Delta \underline{u}_1\| (0, u_{Y1}^X, u_{X2}^Y, 0) = 0 \end{cases} \quad (4.42)$$

où $\Delta \underline{u}_0$ et $\Delta \underline{u}_1$ sont calculés à partir de la relation (4.27). Après résolution, on montre que les déplacements solutions sont donnés par :

$$\begin{cases} u_{Y1}^X = R \frac{[3\sqrt{2}-5+3(\sqrt{2}-3)\eta]E_{11} + [1-\sqrt{2}+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\eta]E_{22}}{2(\sqrt{2}-1+\eta)} \\ u_{X2}^Y = R \frac{[1-\sqrt{2}+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\eta]E_{11} + [3\sqrt{2}-5+3(\sqrt{2}-3)\eta]E_{22}}{2(\sqrt{2}-1+\eta)} \end{cases} \quad (4.43)$$

La seconde partie du déplacement périodique est celle qui minimise l'énergie du système pour un état de pure distorsion ($\underline{\underline{E}}^2$). Ce champ de déformations préserve les symétries de la cellule selon les directions des vecteurs de base de $\mathbf{B}'(\frac{\pi}{4})$, et ceux sont cette fois les composantes u_{Y1}^X et u_{X2}^Y du déplacement périodique qui sont nulles. Puisque la particule, dont la position est décrite par le vecteur $\underline{P}(\frac{\pi}{4})$, se déplace le long d'un axe de symétrie, les deux autres inconnues sont calculées en résolvant le système :

$$\begin{cases} \|\Delta \underline{u}_0\| (u_{X1}^Y, 0, 0, u_{Y2}^X) = 0 \\ u_{X1}^Y = u_{Y2}^X \end{cases} \quad (4.44)$$

Une fois les calculs réalisés, on trouve que la seconde partie du déplacement périodique est donnée par :

$$u_{X1}^Y = u_{Y2}^X = \frac{(\sqrt{2}-1)(1-\sqrt{2}\eta)}{\sqrt{2}-1+\sqrt{2}\eta} RE_{12} \quad (4.45)$$

L'énergie du milieu équivalent peut maintenant être calculée en injectant les expressions des déplacements périodiques (4.43) et (4.45) dans la relation (4.39). L'énergie est ainsi obtenue sous la forme d'une fonction quadratique des termes du tenseur de déformation macroscopique, et le tenseur d'élasticité associé à cette énergie peut être évalué en utilisant la formulation de Voigt (4.13). Pour simplifier l'interprétation des résultats, les coefficients de la matrice dans la base \mathbf{B} sont exprimés numériquement.

$$\underline{\underline{A}} = 2.3K_f^C \begin{pmatrix} 1.0 & 0.8 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

Les interactions de flexion confèrent naturellement une raideur en cisaillement et un coefficient de Poisson apparent non nul au milieu équivalent. Pour obtenir les composantes du

tenseur dans une base, déduite de la base naturelle par rotation d'angle α , on applique une nouvelle fois la relation (4.17).

$$\underline{\underline{A}}(\alpha) = 2.3K_f^C \begin{pmatrix} 1.0 + 0.3 \sin^2(2\alpha) & 0.8 - 0.3 \sin^2(2\alpha) & 0.3 \cos(2\alpha) \sin(2\alpha) \\ 0.8 - 0.3 \sin^2(2\alpha) & 1.0 + 0.3 \sin^2(2\alpha) & -0.3 \cos(2\alpha) \sin(2\alpha) \\ 0.3 \cos(2\alpha) \sin(2\alpha) & -0.3 \cos(2\alpha) \sin(2\alpha) & 0.4 - 0.2 \sin^2(2\alpha) \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

Si les raideurs axiales sont maximales dans les directions des vecteurs de la base $\mathbf{B}'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, le coefficient de Poisson apparent ainsi que la raideur en cisaillement sont quant à eux minimaux. Les performances du modèle C sont donc optimales quand celui-ci est utilisé dans son orientation naturelle et se dégradent pour toute rotation du motif autour de l'axe \underline{e}_3 .

Comparaison des propriétés mécaniques intrinsèques des milieux équivalents

Les tenseurs d'élasticité des membranes équivalentes aux trois modèles discrets de filet ASM4, ont été identifiés pour une orientation quelconque de la base de \mathbb{R}^3 dont le troisième vecteur est orthogonal au plan de la nappe. Tout d'abord, les trois modèles présentés respectent les propriétés géométriques du filet ASM4 avec la symétrie de rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. L'anneau quatre points, présent dans le modèle B , apporte en plus une isotropie que l'on ne retrouve pas dans le filet réel. En pratique, à cause de la non-linéarité en flexion des anneaux ASM4, cette interaction n'intervient qu'à partir d'un certain niveau de déformation de la cellule élémentaire, pour laquelle les propriétés de la membrane continue équivalente ne sont plus obligatoirement représentatives de celles du système étudié. Ensuite, la qualité des modèles dépend de l'orientation dans laquelle ils sont utilisés. Le modèle A , qui découple complètement les directions de chargement dans l'orientation donnée par la base \mathbf{B} , a des propriétés très intéressantes une fois tournée de 45° , avec un coefficient de Poisson apparent et une raideur en cisaillement tous deux égaux à 1. Au contraire, les performances du modèle C se dégradent par rotation autour de l'axe \underline{e}_3 et sont optimisées dans l'orientation naturelle de la cellule. La comparaison des différents modèles révèle que, dès les premières perturbations du milieu, la manière dont transitent les efforts est différente.

Il sera montré dans la suite comment ces différences locales influencent le comportement global de la structure. Avant de poursuivre la comparaison, les paramètres de rigidité des trois modèles de filet sont estimés dans le prochain paragraphe (voir Paragraphe 2.3.2). Ces derniers seront ainsi implémentés avec des valeurs réalistes de raideur dans l'algorithme de relaxation dynamique, afin de tester leur comportement sous des cas de charges non triviaux.

4.2 Evaluation des paramètres matériels

Les raideurs estimées dans ce paragraphe sont celles des anneaux utilisés au sein de l'écran C2ROP. Elles sont identifiées à partir du test de caractérisation conduit dans le cadre du projet national, sur une nappe carrée composée de neuf anneaux et orientée comme sur la figure 4.1. Le dispositif expérimental a préalablement été présenté au paragraphe 2.3.3 du premier chapitre. Pour rappel, le déplacement de la nappe est imposé selon l'axe \underline{e}_2 et bloqué selon \underline{e}_1 . Les efforts aux bords sont mesurés dans ces deux directions. Par ailleurs, tous les anneaux sont identiques avec un rayon $R = 13,5$ cm. Conformément à la description

des modèles réalisée au paragraphe 3.1.2, trois paramètres sont au plus identifiés à chaque fois : deux raideurs et une limite en déformation si nécessaire (uniquement pour les modèles *A* et *B*). A l'image des travaux de J. Coulibaly [27], une approximation plus riche du comportement de l'anneau pourrait être effectuée mais l'utilisation de modèles non-linéaires ne serait alors plus compatible avec les hypothèses faites ici. Seul des modèles bi-linéaires sont ainsi retenus.

4.2.1 Estimation des raideurs

Modèle A

Dans ce modèle, le comportement de l'anneau en flexion est reproduit par une non-linéarité matérielle. On utilise pour cela une loi bi-linéaire en traction avec une raideur nulle en compression. La partie gauche de la figure 4.4 présente le motif du modèle ainsi que la place occupée par la cellule élémentaire et les anneaux réels. L'identification de la loi de comportement est présentée sur la partie droite de la figure. En reprenant les notations qui y sont introduites, le déplacement axial du bord mobile de la nappe est noté U_a et la force correspondante F_{axiale} . Le comportement est décrit en fonction de la déformation de Green-Lagrange ϵ_{axial} appliquée au filet pendant l'essai :

$$\epsilon_{axial} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{U_a + 6R_0}{6R_0} \right)^2 - 1 \right] \quad (4.48)$$

Les deux raideurs du comportement bi-linéaire sont estimées à partir des comportements limites expérimentaux par une méthode des moindres carrés. La plus faible raideur est évaluée pour des déformations inférieures à 4%, tandis que la seconde pour des déformations supérieures à 25%. Les valeurs des paramètres sont données ci-dessous, avec ϵ_{lim}^A la limite pour laquelle le changement de raideur se produit.

$$\begin{cases} K_t^A = 0 \text{ kN.m}^{-1} & \text{si } \epsilon \leq 0 \\ K_t^A = 31 \text{ kN.m}^{-1} & \text{si } \epsilon \leq \epsilon_{lim}^A = 23\% \\ K_t^A = 2160 \text{ kN.m}^{-1} & \text{si } \epsilon > \epsilon_{lim}^A = 23\% \end{cases} \quad (4.49)$$

Modèle B

Le comportement en flexion est modélisé de la même manière dans le modèle *B* que dans le modèle *A* et les valeurs de raideurs sont ainsi identiques pour $\epsilon < 23\%$. Une fois que la limite en déformation des interactions diagonales est atteinte, la partie tendue du comportement est assurée par l'interaction d'anneau. La raideur de cette dernière est nulle pendant toute la première phase du comportement, puis reste constante une fois son seuil d'activation dépassé. L'estimation de cette raideur est présentée sur la partie droite de la figure 4.5. On reprend les notations précédemment utilisées pour l'étude du modèle *A* et on introduit la déformation de l'anneau ϵ_a^B , en fonction de laquelle le comportement est caractérisé.

$$\epsilon_a^B = \frac{1}{2} \left(\frac{4R_0^2 + (2R_0 + \frac{U_a}{3})^2}{8R_0^2} - 1 \right) \quad (4.50)$$

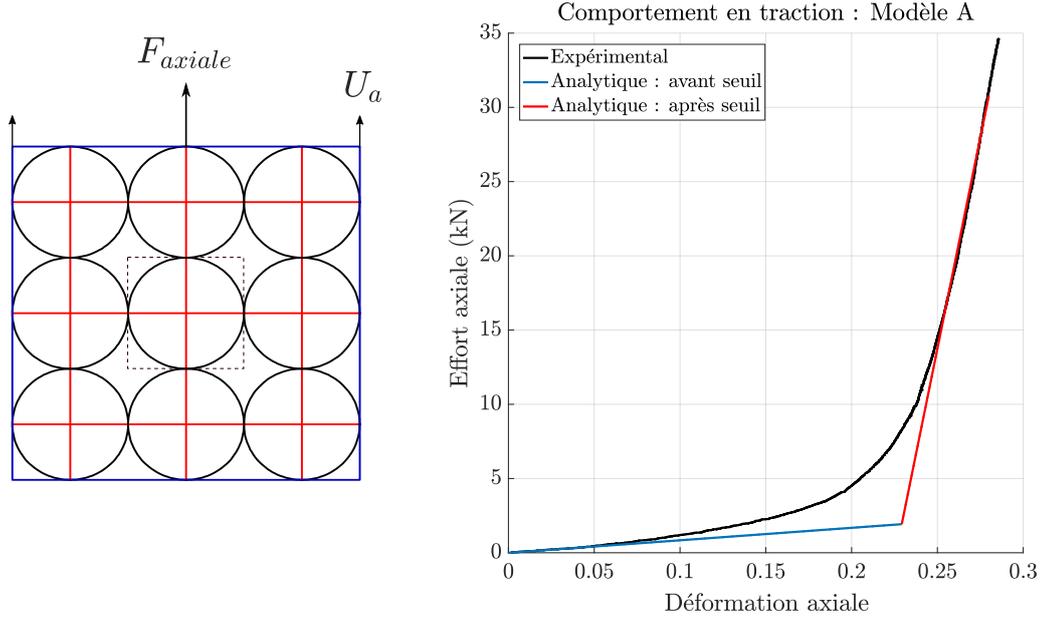


FIGURE 4.4 – Estimation des paramètres mécaniques du Modèle A

L'effort intérieur dans un anneau peut être calculé en écrivant l'équilibre d'une cellule dans sa géométrie déformée (voir le schéma de gauche de la figure 4.5).

$$N_a^B = \frac{1}{2} \frac{F_{axial}}{3} \frac{\sqrt{4R_0^2 + (2R_0 + \frac{U_a}{3})^2}}{2R_0 + \frac{U_a}{3}} \quad (4.51)$$

La raideur de l'anneau est estimée comme précédemment en approchant la partie asymptotique du comportement expérimental. Pour cela on considère toujours des déformations axiales $\epsilon_{axial}^B > 25\%$ équivalentes à des déformations d'anneau $\epsilon_a^B > 12.5\%$, le passage entre ces deux mesures de déformations étant déterminé par la relation (4.50).

$$\begin{cases} K_a^B = 0 \text{ kN.m}^{-1} & \text{si } \epsilon \leq \epsilon_{lim}^B = 11,5\% \\ K_a^B = 2750 \text{ kN.m}^{-1} & \text{si } \epsilon > \epsilon_{lim}^B = 11,5\% \end{cases} \quad (4.52)$$

Modèle C

Le comportement du modèle *C* étant plus complexe que celui des deux premiers, la caractérisation de ses propriétés mécaniques est réalisée à partir du tenseur d'élasticité de son milieu homogène équivalent (4.46). Pour des petits déplacements, l'effort appliqué au bord en mouvement peut être ainsi déduit de la dilatation axiale par :

$$\frac{F_{axial}}{2R} = A_{1111} \epsilon_{axial} = 2.3 K_f^C \epsilon_{axial} \quad (4.53)$$

La raideur K_f^C est également évaluée à partir du comportement asymptotique pour $\epsilon_{axial} < 4\%$. Il reste ensuite à déterminer la raideur de l'interaction d'anneau. D'après les hypothèses réalisées au paragraphe 4.1.3, cette raideur n'influe pas sur la première partie du

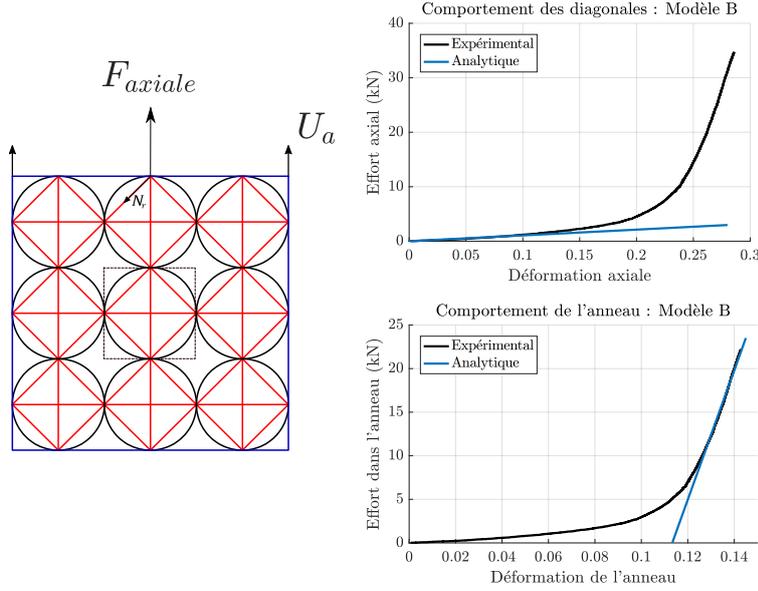


FIGURE 4.5 – Estimation des paramètres mécaniques du Modèle B

comportement, pendant laquelle l’anneau travaille en flexion pure. Une fois que celui-ci est complètement fléchi, sa géométrie déformée est la même dans les modèles *B* et *C*. Comme de plus $K_f^C \ll K_a^C$, la raideur apparente, lors de la phase tendue du comportement, est celle de l’interaction anneau, dont la déformation de Green-Lagrange est déterminée en fonction du déplacement axial \underline{U}_a par :

$$\epsilon_a^C = \frac{1}{2} \left(\frac{4R_0^2 + \left(2R_0 + \frac{U_a}{3}\right)^2}{\pi^2 R_0^2} - 1 \right) \quad (4.54)$$

L’identification de la raideur K_a^C , pour des déformations axiales supérieures à 25%, est présentée sur la partie droite de la figure 4.6.

$$K_a^C = 1140 \text{ kN.m}^{-1} \quad \text{and} \quad K_f^C = 13 \text{ kN.m}^{-1} \quad (4.55)$$

Contrairement aux deux précédents modèles, celui-ci ne dépend que de deux paramètres matériaux. Le raidissement progressif de l’anneau est assuré par les interactions de flexion et une meilleure approximation de la géométrie. Il doit par ailleurs être noté qu’une contrainte géométrique a été introduite au paragraphe 4.1.3 pour caractériser le tenseur d’élasticité de son milieu homogène équivalent. Les particules, n’appartenant pas à la frontière de la cellule périodique, se déplacent le long de la médiatrice de la corde formée par leurs deux voisines. Pour les calculs numériques, cette contrainte géométrique est remplacée par une contrainte mécanique en ajoutant une raideur à chacun des huit couples de particules formant l’anneau. Afin que les efforts causés par ces nouvelles interactions restent sans influence sur le comportement de l’anneau fléchi, cette raideur doit rester très petite devant K_a^C . On introduit ainsi une raideur égale à : $10^{-2}K_a^C$ dans l’algorithme de relaxation dynamique.

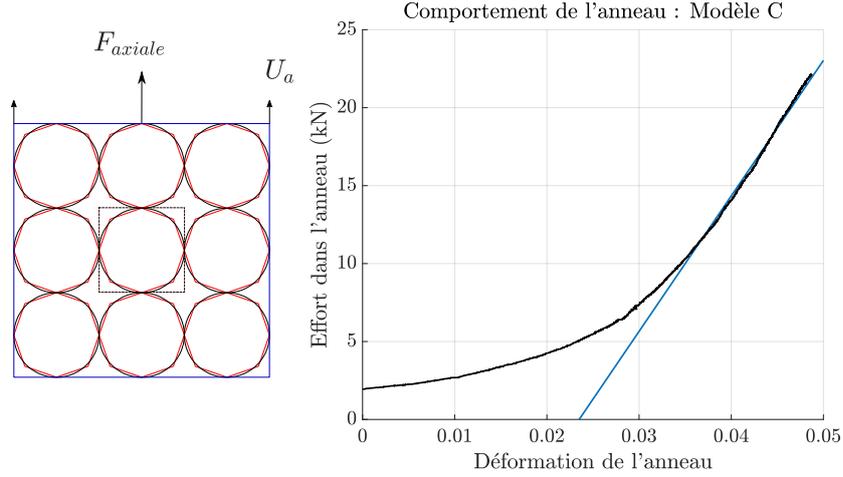


FIGURE 4.6 – Estimation des paramètres mécaniques du modèle C

4.2.2 Seuils et déformation macroscopique

Les limites en déformation pour les modèles d'anneau A et B sont déterminées, à l'échelle de la cellule périodique, en fonction des déformations axiales (dilatation) de chaque couple de particules. Pour déterminer la forme des tenseurs d'élasticité, les dilatations dans des directions quelconques ont été exprimées en fonction du champs de déformation macroscopique (4.7). L'objectif de ce paragraphe est de relier la déformation limite des éléments appartenant à la cellule élémentaire, au tenseur macroscopique $\underline{\underline{E}}$. L'étude du modèle B suffit ici à traiter l'ensemble des non-linéarités matérielles présentes dans les trois modèles de filet. On se réfère aux figures 4.1 et 4.5 qui fournissent un aperçu détaillé de la géométrie du problème. On introduit $\epsilon_{t,1}$ et $\epsilon_{t,2}$ les déformations des diagonales portées respectivement par les vecteurs \underline{e}_1 et \underline{e}_2 ainsi que ϵ_a^B la déformation de l'anneau. Les expressions de ces trois grandeurs, en fonction des composantes d'un champs de déformation macroscopique quelconque, exprimées dans la base \mathbf{B} , sont ensuite établies en utilisant les relations (4.7) et (4.8).

$$\begin{cases} \epsilon_{t,1} = E_{11} \\ \epsilon_{t,2} = E_{22} \\ \epsilon_a^B = \frac{1}{2} (E_{11} + E_{22}) \end{cases} \quad (4.56)$$

Puisqu'elle est proportionnelle à la trace de la matrice de déformation macroscopique, la déformation de l'anneau ϵ_a^B est isotrope. Les relations (4.56) permettent également de déterminer les seuils des éléments diagonaux a priori. En effet, ces paramètres sont fixés relativement à la déformation de l'anneau, pour que le changement de raideur se produise lorsque la longueur de celui-ci est égale au périmètre de l'anneau réel. Mais aucun argument empirique ne permet de déterminer, pour un chargement quelconque, la géométrie de l'élément anneau, et donc celles de ses diagonales, au moment du changement de raideur.

Pour illustrer ce phénomène, on considère l'ensemble des champs de dilatations uniaxiaux, dont les représentations matricielles dans les bases $\mathbf{B}'(\alpha)$ sont données par :

$$\underline{\underline{E}}^d(\alpha) = \begin{pmatrix} E_{e'_1(\alpha)e'_1(\alpha)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

On étudie ainsi la forme de ces champs macroscopiques pour une direction et une valeur de dilatation données, en l'occurrence l'orientation d'un couple de particules et sa déformation limite. L'objectif étant de distinguer les régimes de fonctionnement uniquement à partir de la déformation macroscopique. Comme les déformations des couples de particules sont calculées à partir des composantes du tenseur dans la base $\mathbf{B} = \mathbf{B}'(0)$, on effectue le changement de base de $\mathbf{B}'(\alpha)$ à \mathbf{B} .

$$\underline{\underline{E}}^d(\alpha) = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{E}}'^d(\alpha) \cdot \underline{\underline{R}}^t = E_{e'_1(\alpha)e'_1(\alpha)} \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

Où $\underline{\underline{R}}$ est la matrice de rotation définie dans la relation (4.14). Les déformations limites macroscopiques sont ensuite déterminées à partir du champ de déformations $\underline{\underline{E}}^d(\alpha)$, en inversant les relations (4.56). Par souci de concision, et en l'absence de toute ambiguïté, on note : $E_{e'_1(\alpha)e'_1(\alpha)} = E_\alpha$

$$\begin{cases} \epsilon_{lim,t1} = \cos^2(\alpha) E_\alpha^{lim} \\ \epsilon_{lim,t2} = \sin^2(\alpha) E_\alpha^{lim} \\ E_\alpha^{lim} = 2\epsilon_{lim,a}^B \end{cases} \quad (4.59)$$

La déformation macroscopique limite est ainsi exprimée en fonction de la déformation de l'anneau (troisième équation du système (4.59)). On retrouve bien, pour $\alpha = 0$, le rapport entre les seuils des diagonales et de l'anneau, évalués numériquement lors de l'identification des propriétés mécaniques du modèle B . Les seuils minimums des éléments diagonaux sont par ailleurs atteints lorsque $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (orientation de la nappe choisie pour l'écran C2ROP).

Il reste à évaluer la déformation limite de l'interaction d'anneau. Les valeurs données au paragraphe précédent ont été déterminées en calculant l'intersection des deux comportements asymptotiques, mais elles sont également facilement identifiables analytiquement. Pour cela, on applique la sollicitation du test de caractérisation au modèle B (voir Figure 4.5). Au moment du changement de régime, le diamètre de l'anneau quatre points est égal à celui de l'anneau réel. L'expression de sa déformation (4.50) est modifiée en conséquence en actualisant la longueur déformée.

$$\epsilon_{a,lim}^B = \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi^2 R^2}{16 (4\sqrt{2}R)^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{8} - 1 \right) \simeq 0,12 \quad (4.60)$$

On retrouve ainsi les valeurs de seuils évaluées au paragraphe (4.2.1).

4.2.3 Comparaison des comportements homogénéisés

L'étude présentée dans ce paragraphe a le double objectif de valider les comportements numériques des modèles de filet calculés avec l'outil numérique présenté au chapitre 3, ainsi que ceux de leur milieu équivalent. Pour cela l'expérience de traction plane est simulée deux fois avec chacun des modèles. Lors de la première série de calculs, les conditions expérimentales sont reproduites à l'identique, tandis que dans la seconde, la densité d'anneaux dans le filet est multipliée par cent. Afin de conserver des raideurs identiques entre les deux configurations, on introduit le rapport d'échelle $\frac{R}{R_0}$, où $2R$ est la taille caractéristique de la cellule élémentaire et R_0 le rayon d'un anneau réel. Les différentes raideurs introduites

précédemment sont donc décrites par la relation :

$$\begin{cases} K = \frac{R}{R_0} \tilde{K} \\ \text{sauf } K_f^C = \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 \tilde{K}_f^C \end{cases} \quad (4.61)$$

où \tilde{K} est la raideur identifiée par homogénéisation dans le paragraphe 4.2.1 qui dépend de la taille caractéristique de la cellule élémentaire, tandis que K est la raideur constante des nappes, dont la valeur a été évaluée pour chaque modèle au paragraphe 4.2.1. Les évolutions, des efforts axiaux et transversaux appliqués à la nappe, sont présentés en fonction du déplacement axial pour chacun des modèles 4.7.

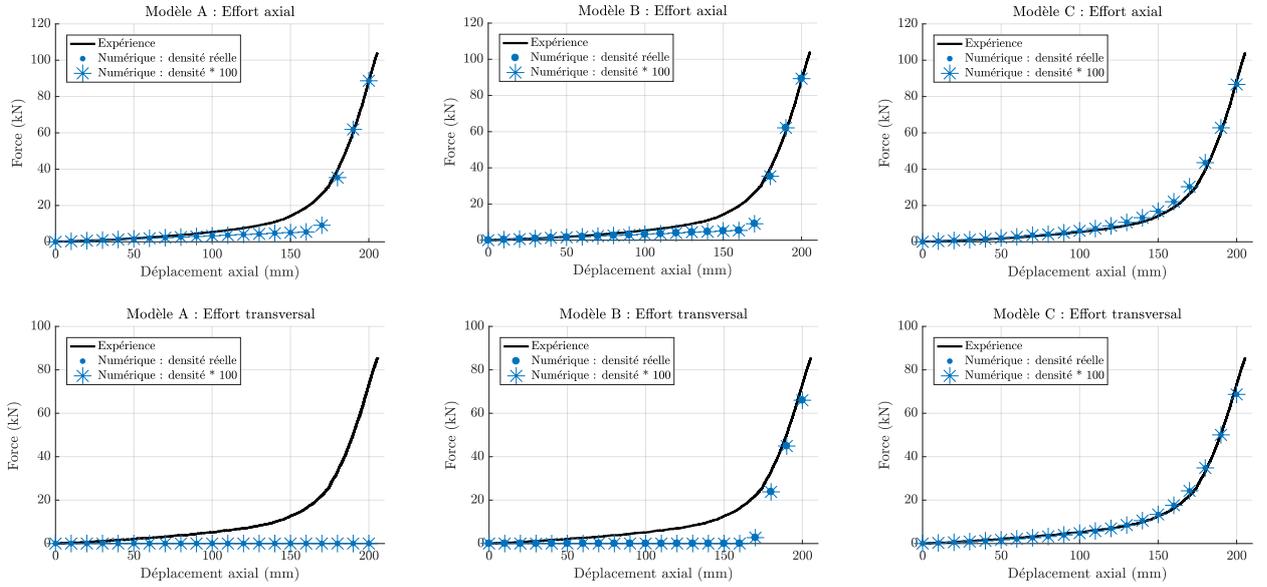


FIGURE 4.7 – Comparaison des comportements en traction plane des modèles de filet

Les résultats des deux séries de simulations se superposent parfaitement et les relations d'homogénéisation restent vérifiées pour des grands déplacements. Le champ de déformations est bien uniforme pour cette sollicitation et les tenseurs d'élasticité, évalués au paragraphe 4.1.3, décrivent correctement le comportement des modèles. On retrouve également certaines caractéristiques attendues, comme l'absence d'effet Poisson pour le modèle *A* et la phase de flexion du modèle *B*. Par ailleurs, le modèle *C* décrit avec précision le comportement du filet dans les deux directions du plan sans avoir recours à des non-linéarités matérielles, grâce notamment à sa micro-structure qui reproduit plus précisément la cinématique réelle de l'anneau. À l'inverse, l'écart entre le comportement réel et ceux fournis par des lois bilinéaires est relativement important au moment du changement de raideur. On notera tout de même que, dans son modèle ASM6, F. Nicot avait utilisé un comportement tri-linéaire de l'anneau pour mieux approcher cette phase de transition entre les comportements fléchis et tendus [71]. Des modèles plus complexes, inspirés par celui de A. Volkwein, ont également été développés depuis [27, 18]. Ces approches fournissent des simulations numériques de qualité [25], mais nécessitent d'identifier de nombreux paramètres qui n'ont pas ou peu d'interprétation physique.

Les comportements plans des trois modèles de filet sont maintenant complètement caractérisés et fournissent, dans différentes proportions, une bonne approximation du comportement réel. Les paramètres mécaniques identifiés au paragraphe 4.2 sont utilisés pour réaliser les simulations numériques présentées dans la suite de ce manuscrit. A ce stade de la comparaison, le modèle C semble être le plus pertinent pour reproduire avec précision le comportement du filet. Cependant lorsqu'un écran complet est impacté par un bloc, la nappe subit à la fois des grandes déformations et des déplacements orthogonaux à son plan. Avant d'étudier le comportement des modèles sous de telles conditions de sollicitation, un cas d'étude intermédiaire, pour lequel la forme de la solution peut être déterminée analytiquement, est traité dans le prochain paragraphe.

4.3 Transformation d'une membrane plane en un paraboloïde hyperbolique

La transformation d'une membrane initialement plane en un paraboloïde hyperbolique est étudiée dans ce paragraphe. La géométrie de la membrane au repos est le sous-espace de \mathbb{R}^2 $\Omega \in [-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]^2$. La position de chacune de ses particules est donnée dans la géométrie initiale par ses coordonnées $(X_1, X_2, 0)$ exprimées dans la base \mathbf{B} et on note $\underline{u}(X_1, X_2)$ le champs de déplacement lagrangien associé. La transformation imposée à la frontière de Ω , notée $\partial\Omega$, est présentée sur la figure 4.8. Elle consiste en un déplacement orthogonal au plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$, déterminé par l'équation 4.62.

$$u_3(X_1, X_2) = \frac{X_1 X_2}{c} \quad (4.62)$$

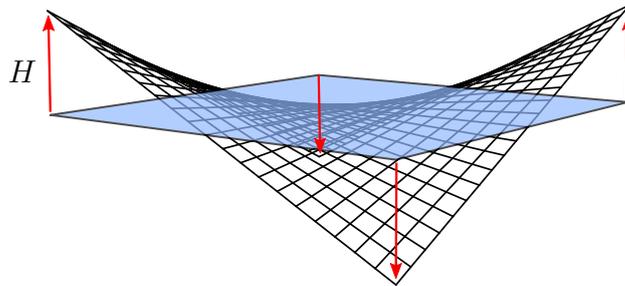


FIGURE 4.8 – Transformation d'une membrane plane en un paraboloïde hyperbolique

En notant comme sur la figure 4.8, H le déplacement vertical de chaque coin de la membrane Ω , le paramètre c de la transformation (4.62) est égal à : $c = \frac{l^2}{4H}$. Cette transformation sera désignée par l'appellation *transformation hypar* dans la suite de ce paragraphe. Le chargement est ainsi imposé à la frontière $\partial\Omega$ en déplacement et aucune force extérieure n'est appliquée en partie courante. Après avoir défini le problème dans cette introduction, ce cas d'étude sera traité en deux temps. L'état d'équilibre de la membrane sera d'abord établi, sous les hypothèses de résolution de Föppl-Von Karman [23, 99], avant d'appliquer la transformation hypar aux trois modèles de filet.

4.3.1 Solutions analytiques de l'équilibre membranaire

Le problème étudié ici est celui d'une membrane soumise à une déformation impliquant de grands déplacements hors de son plan. Une membrane est un objet théorique issu du passage à la limite d'un élément de plaque ou de coque lorsque l'épaisseur tend vers zéro. La plus simple théorie des plaques minces est celle de G. R. Kirchhoff dans laquelle les déformations de cisaillement dans l'épaisseur de la plaque sont négligées. Si elle semble parfaitement adaptée aux membranes, cette théorie ne permet cependant pas de traiter des grands déplacements. Une alternative aux théories de plaque d'ordre supérieur, comme celle de Mindlin–Reissner, où les déformations de cisaillement sont prises en compte, est de recourir aux équations de Föppl-Von Karman [67]. A l'origine, elles ne constituent pas véritablement une théorie des plaques minces dans la mesure où elles ne découlent mathématiquement pas d'une solution existante. Toutefois, P. G. Ciarlet a rigoureusement déterminé un système d'équations équivalent par analyse limite d'un problème d'élasticité linéaire [23]. On se contentera ici des équations classiques de Föppl-Von Karman, qui sont couramment utilisées pour les problèmes de membrane, comme la recherche de forme ou l'étude du plissement [13, 32, 62] et donnent des résultats satisfaisants.

Les composantes du tenseur de Green-Lagrange sont définies par la relation suivante :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (4.63)$$

Les hypothèses de Föppl-Von Karman, stipulant que les déformations planes restent petites, conduisent à considérer un tenseur des déformations hybrides dans lequel on néglige les termes du second ordre en u_1 et u_2 .

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)^2 \\ \epsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right)^2 \\ \epsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right] \end{aligned} \quad (4.64)$$

La loi de comportement de la membrane est linéaire élastique et on considère un tenseur d'élasticité de la forme de ceux des milieux équivalents aux modèles d'anneau (voir Paragraphe 4.1.3).

$$\begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1111} & A_{1122} & 0 \\ A_{1122} & A_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & A_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

Les équations de Föppl-Von Karman décrivent l'équilibre d'une plaque isotrope d'épaisseur h [62]. Elles se simplifient aisément en supposant que la raideur en flexion est nulle :

$$\begin{cases} \frac{\partial (N_{ij} \frac{\partial u_3}{\partial X_i})}{\partial X_j} = 0 \\ \frac{\partial N_{ij}}{\partial X_j} = 0 \end{cases} \quad (4.66)$$

On cherche donc les solutions du problème (4.66) qui remplissent la condition $u_3(X_1, X_2) = \frac{X_1 X_2}{c}$ partout sur Ω . Les équations (4.66) sont ainsi uniquement exprimées en fonction du

champ de déplacements en utilisant la loi de comportement (4.65).

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_1^2} + \frac{A_{1122}}{A_{1111}} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{X_1}{c^2} \right) + \frac{A_{1212}}{A_{1111}} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{X_1}{c^2} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial X_2^2} + \frac{A_{1122}}{A_{2222}} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{X_2}{c^2} \right) + \frac{A_{1212}}{A_{2222}} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial X_1^2} + \frac{X_2}{c^2} \right) = 0 \\ A_{1212} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{X_1 X_2}{c^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (4.67)$$

Les coefficients A_{1111} et A_{2222} sont égaux dans les trois tenseurs d'élasticité (4.18), (4.21) et (4.46) identifiés dans la base \mathbf{B} au paragraphe 4.1.3. On introduit également le coefficient de Poisson $\nu = \frac{A_{1122}}{A_{1111}}$ pour alléger les développements. Le problème (4.67) est alors résolu en distinguant les cas avec ou sans cisaillement, correspondant respectivement aux modèles A et B d'un côté et C de l'autre.

Premier cas : $A_{1212} = 0$. Les deux premières équations du système (4.67) peuvent alors être découplées en annulant les dérivées croisées. Les déplacements dans le plan u_1 et u_2 sont alors solutions d'une même équation et peuvent être chacun exprimé en fonction d'une unique variable. Les conditions aux limites imposent que les déplacements u_1 et u_2 soient nuls aux points : $(\frac{l}{2}, \frac{l}{2})$, $(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2})$, $(\frac{l}{2}, -\frac{l}{2})$, $(-\frac{l}{2}, -\frac{l}{2})$ et la symétrie du problème que $u_1(0, x_2) = u_2(x_1, 0) = 0$. On parvient après développement à établir que les solutions ont la forme suivante :

$$\begin{cases} u_1(X_1) = \frac{\nu}{6c^2} X_1 \left(\frac{l^2}{4} - X_1^2 \right) \\ u_2(X_2) = \frac{\nu}{6c^2} X_2 \left(\frac{l^2}{4} - X_2^2 \right) \\ u_3(X_1, X_2) = \frac{X_1 X_2}{c} \end{cases} \quad (4.68)$$

Sans raideur en cisaillement, la solution du problème (4.67) satisfait la condition $u_3(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{c}$ pour un déplacement nul de la frontière $\partial\Omega$ dans le plan. Par ailleurs dans le cas trivial où le coefficient de Poisson est également nul, les équations d'équilibre sont vérifiées pour un champ de déplacements nul dans le plan.

Second cas : $A_{1212} = 0$. Cette fois la dernière équation du système (4.67) impose la nullité de la déformation de cisaillement.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_1^2} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_2^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial X_2^2} = \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial X_1^2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} = -\frac{X_1 X_2}{c^2} \end{cases} \quad (4.69)$$

En s'appuyant une nouvelle fois sur les conditions de symétrie de la transformation hyper, les solutions sont cherchées avec $\frac{\partial u_1}{\partial X_2} = \frac{\partial u_2}{\partial X_1}$. Cette condition permet de réécrire les dérivées partielles d'ordre deux des déplacements dans le plan.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial^2 X_1} = -\frac{\nu X_1}{2c^2} \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial^2 X_2} = -\frac{X_1}{2c^2} \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_1 \partial X_2} = -\frac{X_2}{2c^2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u_2}{\partial^2 X_2} = -\frac{\nu X_2}{2c^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial^2 X_1} = -\frac{X_2}{2c^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial X_1 \partial X_2} = -\frac{X_1}{2c^2} \end{cases} \quad (4.70)$$

Les conditions de bord et de symétrie restent inchangées par rapport au cas où la raideur en cisaillement est nulle. Il peut être montré que le champ de déplacements solution a alors

pour expression :

$$\begin{cases} u_1(X_1, X_2) = \frac{X_1}{4c^2} \left[\frac{l^2}{4} - X_2^2 + \frac{\nu}{3} \left(\frac{l^2}{4} - X_1^2 \right) \right] \\ u_2(X_1, X_2) = \frac{X_2}{4c^2} \left[\frac{l^2}{4} - X_1^2 + \frac{\nu}{3} \left(\frac{l^2}{4} - X_2^2 \right) \right] \\ u_3(X_1, X_2) = \frac{X_1 X_2}{c} \end{cases} \quad (4.71)$$

Cette fois les déplacements dans le plan évoluent de manière quadratique le long de la frontière $\partial\Omega$ et sont maximaux au milieu de chacun des bords.

Le problème étudié depuis le début de ce paragraphe est en réalité posé de manière incomplète, avec deux conditions aux limites manquantes le long de $\partial\Omega$. La démarche suivie jusqu'à maintenant consistait à déterminer ces conditions pour satisfaire une contrainte sur la forme de la solution. Ce premier travail réalisé, on peut maintenant poser proprement le problème à résoudre numériquement en remplaçant la membrane par chacun des modèles de filet. En tirant parti des conditions de symétrie de la transformation hyperbolique, le domaine d'étude peut être réduit à un huitième de Ω (cf. Figure 4.9). Ce sous-domaine de Ω est appelé $\tilde{\Omega}$ et sa frontière $\partial\tilde{\Omega}$. En reprenant les notations introduites sur la figure 4.9, $\partial\tilde{\Omega}$ est divisée en trois parties : $\partial\tilde{\Omega}_1$, $\partial\tilde{\Omega}_2$ et $\partial\tilde{\Omega}_3$. Les conditions aux bords dans le plan, le long de $\partial\tilde{\Omega}_1$ et $\partial\tilde{\Omega}_2$, sont déterminées par les conditions de symétrie, tandis que le chargement en déplacement est imposé le long de $\partial\tilde{\Omega}_3$.

$$\begin{cases} u_1 = u_2 & \text{sur } \partial\tilde{\Omega}_1 \\ u_2 = 0 & \text{sur } \partial\tilde{\Omega}_2 \\ u_1 = \frac{l}{8c^2} \left(\frac{l^2}{4} - X_2^2 \right) & \text{sur } \partial\tilde{\Omega}_3 \end{cases} \quad (4.72)$$

On vérifie de manière évidente que le problème défini par les équations d'équilibre (4.67), les conditions aux limites (4.72) et la loi de comportement (4.65), a pour solution le champ de déplacements (4.71).

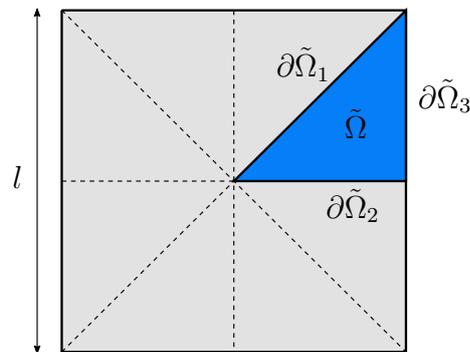


FIGURE 4.9 – Conditions aux bords appliquées à la membrane plane

4.3.2 Comportement analytique des modèles de filet

Ce court paragraphe détaille les comportements, déterminés analytiquement, des milieux continus équivalents aux trois modèles de filet soumis à la transformation hyperbolique, décrite par les équations d'équilibre (4.69) et les conditions aux limites (4.72). Comme montré au paragraphe 4.1.3, la loi de comportement des trois modèles est donnée par l'équation (4.65).

A partir de la solution de ce problème (4.71), déterminée au paragraphe précédent, le champ de déformations est calculé dans Ω grâce aux relations (4.64).

$$\begin{cases} \epsilon_{11}(X_1, X_2) = \frac{1}{4c^2} \left(\frac{l^2(3+\nu)}{12} + X_2^2 - \nu X_1^2 \right) \\ \epsilon_{22}(X_1, X_2) = \frac{1}{4c^2} \left(\frac{l^2(3+\nu)}{12} + X_1^2 - \nu X_2^2 \right) \\ \epsilon_{12}(X_1, X_2) = 0 \end{cases} \quad (4.73)$$

Le champ de contraintes est ensuite déterminé à partir de la loi de comportement du matériau équivalent (4.65). Pour simplifier son écriture, on introduit la fonction N dont l'expression est donnée ci-dessous.

$$\forall x \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2} \right], \quad N(x) = \frac{A_{1111}}{4c^2} \left(\frac{l^2(3+\nu)(1+\nu)}{12} + (1-\nu)^2 x^2 \right) \quad (4.74)$$

Le champ de contraintes dans Ω est ainsi exprimé ci-dessous grâce à la fonction N et avec la notation de Voigt.

$$\underline{N}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} N(x_2) \\ N(x_1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

Pour un coefficient de Poisson égal à 1, comme celui du modèle B , le champ de contraintes est uniforme et isotrope dans la membrane, dont la géométrie déformée est alors une surface minimale [5]; autrement il évolue de manière quadratique.

Afin de disposer d'un critère de comparaison simple entre les comportements analytiques et numériques, on introduit également l'effort résultant appliqué le long d'un bord de Ω .

$$F = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} N(x) dx = \frac{1+\nu}{3} A_{1111} \frac{4H^2}{l} \quad (4.76)$$

Cette transformation hyper illustre parfaitement l'importance du coefficient de Poisson dans les différents modèles de filet. Pour une nappe orientée selon les directions de propagation du motif périodique, l'effort résultant appliqué à un bord de la structure varie du simple au double en fonction du modèle retenu.

4.3.3 Comportements numériques des modèles de filet

Le domaine de validité théorique des comportements homogénéisés, déterminés au paragraphe 4.1.3, est limité aux déformations infinitésimales du milieu. Pour des petites valeurs du paramètre c , la transformation hyper respecte ce cadre théorique, mais l'intérêt des conclusions tirées de son étude, sur les comportements effectifs des modèles de filet, resterait alors limité. L'objectif de ce paragraphe est de déterminer si ces comportements homogénéisés restent valides lorsque l'amplitude des déplacements et des déformations du milieu augmente, et d'estimer, le cas échéant, à quel point ce domaine peut être étendu.

Proposition d'un modèle de substitution

L'amplitude de la transformation hyper est ici caractérisée par le rapport $\frac{H}{l}$. La première étape de cette étude consiste à déterminer la plage de variation pertinente pour ce paramètre

de forme. Les comportements des modèles A et B sont en effet identiques avant que le premier anneau atteigne sa limite en déformation. Si ce changement de régime est atteint pour des valeurs importantes de $\frac{H}{l}$ et que les comportements numériques et analytiques ne correspondent plus, il sera impossible de déterminer si l'écart est causé par la nature des interactions ou par les grandes transformations. Il a été montré au paragraphe 4.2.2 que la limite en déformation de l'anneau B suffit à décrire toutes les autres non-linéarité matérielles des modèles et que, par ailleurs, dans la base \mathbf{B} , cette limite est donnée par la déformation moyenne : $\epsilon_{lim,a}^B = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22})$, où $\underline{\epsilon}$ est le tenseur de déformation du milieu homogène. La grandeur $\epsilon_{lim,a}^B$ peut être calculée pour la transformation hypar en utilisant l'expression du champ de déformations (4.73).

$$\epsilon_a^B = \frac{1}{8c^2} \left[\frac{l^2(3 + \nu)}{6} + (1 - \nu)(X_1^2 + X_2^2) \right] \quad (4.77)$$

Pour une forme de PH (paraboloïde hyperbolique) donnée, cette limite est donc d'abord atteinte dans les coins de la membrane. Le paramètre de forme correspondant au changement de régime est ensuite déterminé en inversant la relation (4.77).

$$\left(\frac{H}{l} \right)_{lim}^B = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\epsilon_{lim,a}^B}{(3 - \nu)}} = \sqrt{\frac{\epsilon_{lim,a}^B}{2}} \simeq 0,24 \quad (4.78)$$

L'amorce du changement de régime apparaît donc pour des grands déplacements de la membrane.

Pour vérifier les prédictions de la méthode d'homogénéisation, on choisit ici de remplacer ponctuellement le modèle B par un modèle de substitution B_{bis} , dans lequel la non-linéarité du comportement en flexion est intégrée à l'anneau et les diagonales sont supprimées. Ce nouveau modèle a des limites évidentes en flexion, lorsque l'une des déformations principales devient négative. Elles n'ont toutefois aucune influence pour la transformation hypar qui garantit que $\epsilon_{11} \geq 0$ et $\epsilon_{22} \geq 0$ partout dans Ω . Le tenseur d'élasticité de ce nouveau modèle est déduit de celui du modèle B (4.21), avec $K_t^B = 0$ et son comportement reste donc isotrope pour tout niveau de chargement. La raideur d'anneau est identifiée durant la première phase de comportement à partir du test de traction utilisé au paragraphe 4.2.1 pour déterminer les paramètres matériaux des modèles A , B et C .

$$\begin{cases} K_a^{B_{bis}} = 0 \text{ kN.m}^{-1} & \text{si } \epsilon_a \leq 0 \\ K_a^{B_{bis}} = 43 \text{ kN.m}^{-1} & \text{si } \epsilon_a \leq \epsilon_{lim}^{B_{bis}} = 11,5\% \\ K_a^{B_{bis}} = 2750 \text{ kN.m}^{-1} & \text{si } \epsilon_a > \epsilon_{lim}^{B_{bis}} = 11,5\% \end{cases} \quad (4.79)$$

où ϵ_a est la déformation de l'élément anneau. La réponse du modèle B_{bis} au test de traction est présentée sur la figure 4.10. Contrairement au modèle B qu'il remplace pour le reste du cas d'étude sur la transformation hypar, son coefficient de Poisson est égal à 1 avant le changement de régime (cf. Paragraphes 4.3.3 et 4.3.4). La déformation des anneaux (4.77) est donc maintenant uniforme dans le filet et la déformation limite est atteinte dans le cas du modèle B_{bis} pour :

$$\left(\frac{H}{l} \right)_{lim}^{B_{bis}} = \sqrt{\frac{3}{4} \epsilon_{lim}^{B_{bis}}} \simeq 0,3 \quad (4.80)$$

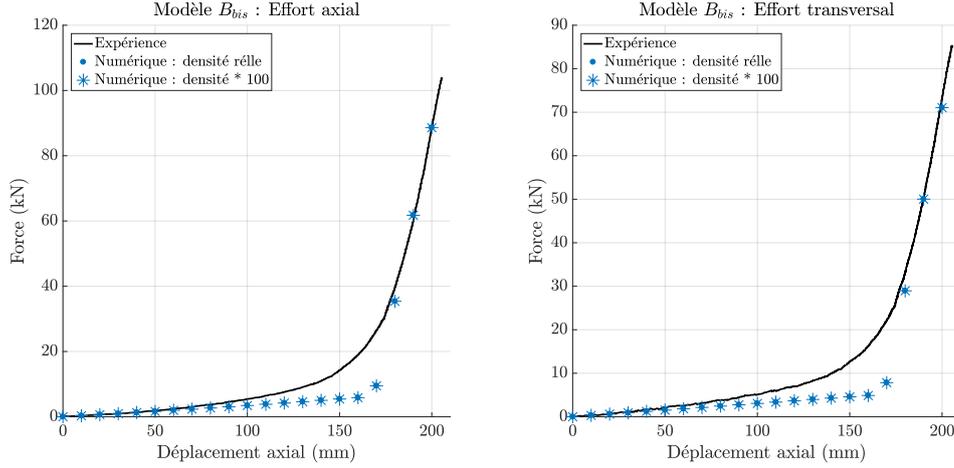


FIGURE 4.10 – Comportement en traction du modèle B_{bis}

Théoriquement, la précédente limite $\left(\frac{H}{l}\right)_{lim}$ calculée par la formule (4.78) devrait indiquer le changement de régime du modèle A . Mais pour le calcul numérique, les seuils en déformation sont fixés a priori, à partir d'un essai de caractérisation et ne sont plus modifiés par la suite. On utilise ainsi la limite $\epsilon_{lim,t}^A$, identifiée au paragraphe 4.2.1, pour déterminer le paramètre de forme correspondant au changement de régime. D'après les résultats du paragraphe 4.2.2, les déformations des éléments sont données par les dilatations dans les deux directions principales, qui sont calculées à l'aide de la relation (4.73) pour un coefficient de Poisson nul.

$$\begin{cases} \epsilon_{11}^A(X_2) = \frac{1}{4c^2} \left(\frac{l^2}{4} + X_2^2 \right) \\ \epsilon_{22}^A(X_1) = \frac{1}{4c^2} \left(\frac{l^2}{4} + X_1^2 \right) \end{cases} \quad (4.81)$$

La limite en déformation est donc atteinte simultanément le long des quatre bords du filet pour le modèle A avec un paramètre de forme $\frac{H}{l}$:

$$\left(\frac{H}{l}\right)_{lim}^A = \sqrt{\frac{\epsilon_{lim}^A}{2}} \simeq 0,34 \quad (4.82)$$

Etude de convergence

Les paramètres mécaniques utilisés pour réaliser les simulations numériques sont ceux identifiés au paragraphe 4.2.1 et la taille caractéristique de la membrane carrée est $l = 1$ m. Avant de comparer les résultats des simulations avec les prévisions analytiques, une étude de convergence numérique est réalisée pour optimiser la densité d'anneaux à utiliser dans le filet. Pour cela, la raideur de la membrane ainsi que le paramètre de forme sont fixés, et la taille caractéristique de la cellule périodique est diminuée progressivement jusqu'à obtention d'une réponse convergée. La raideur est celle du filet réel, évaluée au paragraphe 4.2.1, et la densité initiale est celle de la nappe utilisée pour le test de traction plane (3 anneaux par coté). Le paramètre de forme est quant à lui choisi égal à $\frac{1}{4}$ pour que le changement de raideur n'influence pas la convergence dont les résultats sont présentés sur la figure 4.11.

L'écart relatif entre les valeurs obtenues, pour un maillage du filet 121 fois plus dense que le maillage de référence et le maillage courant, est tracé en fonction de la densité du filet.

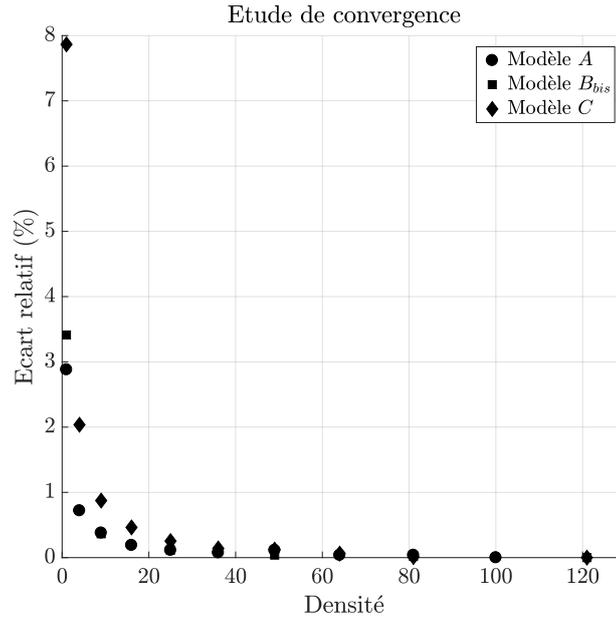


FIGURE 4.11 – Etude de convergence

Pour les trois modèles, cet écart est inférieur à 3% en multipliant le nombre de cellules par 9, valeur inférieure à la densité habituellement utilisée pour un écran de filet : par exemple pour l'écran C2ROP, qui est environ deux fois plus petit qu'un écran standard, 8 anneaux glissent le long des rives latérales. Cependant dans cette étude, les conditions aux bords sont très favorables, avec une frontière du filet qui a été conçue pour que la régularité de la solution y soit la même qu'en partie courante, tandis que dans un écran réel, l'effet rideau y localise des déplacements importants (cf. Paragraphe (3.1.3)). Pour revenir à l'étude de convergence, l'écart tombe sous les 1,5% pour les modèles A et B_{bis} et sous les 2,5% pour le modèle C, à partir d'une densité 25 fois supérieure à l'initiale. Cette densité sera ainsi retenue pour réaliser les simulations dans la suite de cette étude.

Comparaison avec les prévisions analytiques

Maintenant que la densité du maillage des simulations a été choisie, les comportements numériques des modèles de filet peuvent être comparés avec ceux déterminés analytiquement. Les calculs sont réalisés pour des paramètres de forme $\frac{H}{l}$ croissants, et les quantités comparées sont les efforts résultants appliqués sur un des bords du filet et déterminés analytiquement grâce à la relation (4.76), dans laquelle les paramètres matériaux dépendent du régime de comportement pour les modèles A et B_{bis}. Il a été montré précédemment que, pour le modèle B_{bis}, le changement de régime se produit partout dans le filet pour un même paramètre de forme $\left(\frac{H}{l}\right)_{lim}^{B_{bis}}$ (4.80). En revanche dans le cas du modèle A ce changement est progressif. Les premiers éléments touchés, pour un paramètre de forme $\left(\frac{H}{l}\right)_{lim}^A$, sont ceux localisés à proximité des bords. Le basculement de propriétés se propage ensuite sous forme de bandes, parallèles aux bords et convergeant vers le centre du filet.

Afin d'intégrer les contraintes généralisées le long d'un bord du filet, il est nécessaire de connaître la démarcation entre les zones fléchies et tendues en fonction de la valeur du

4.3. TRANSFORMATION D'UNE MEMBRANE PLANE EN UN PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE

paramètre de forme. D'après l'expression des déformations (4.81), cela revient à déterminer l'abscisse x_c , du front de propagation de changement de régime, dans l'intervalle $[0, \frac{l}{2}]$, tel que :

$$4 \frac{H^2}{l^4} \left(\frac{l^2}{4} + x_c^2 \right) = \epsilon_{lim}^A \quad (4.83)$$

Cette grandeur peut ensuite être exprimée en fonction du paramètre de forme.

$$x_c \left(\frac{H}{l} \right) = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_{lim}^A}{\left(\frac{H}{l}\right)^2} - 1} \quad (4.84)$$

Cette abscisse critique est bien strictement décroissante sur $]0, \sqrt{\epsilon_{lim,t}^A}[$. Elle peut également être définie pour des valeurs de $\frac{H}{l}$ inférieures à $\left(\frac{H}{l}\right)_{lim}^A$, mais se situe au-delà des limites du filet. Lorsque x_c est compris entre $[0, \frac{l}{2}]$, l'effort appliqué au bord est calculé analytiquement en séparant l'intégrale (4.76) en deux parties.

$$F_{ana}^A = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} N(x) dx = 2 \left(\int_0^{x_c} N(x) dx + \int_{x_c}^{\frac{l}{2}} N(x) dx \right) \quad (4.85)$$

L'expression de la contrainte généralisée (4.74) doit également être adaptée en fonction du régime pour les modèles A et B_{bis} . Les termes généraux du tenseur d'élasticité A_{ijkl} sont maintenant remplacés par les paramètres mécaniques identifiés au paragraphe 4.1.3.

— Modèle A

$$\begin{cases} N(x) = \frac{K_{t,1}^A}{4c^2} \left(\frac{l^2}{4} + x^2 \right) & \text{si } \frac{1}{4c^2} \left(\frac{l^2}{4} + x^2 \right) \leq \epsilon_{lim}^A \\ N(x) = \frac{K_{t,2}^A}{4c^2} \left(\frac{l^2}{4} + x^2 \right) + (K_{t,1}^A - K_{t,2}^A) \epsilon_{lim}^A & \text{si } \frac{1}{4c^2} \left(\frac{l^2}{4} + x^2 \right) > \epsilon_{lim}^A \end{cases} \quad (4.86)$$

avec $K_{t,1}^A$ et $K_{t,2}^A$ les raideurs avant et après seuil.

— Modèle B_{bis}

$$\begin{cases} N(x) = \frac{K_{a,1}^{B_{bis}}}{2c^2} \frac{l^2}{3} & \text{si } \frac{1}{2c^2} \frac{l^2}{3} \leq 2\epsilon_{lim}^{B_{bis}} \\ N(x) = \frac{K_{a,2}^{B_{bis}}}{2c^2} \frac{l^2}{3} + (K_{t,1}^A - K_{t,2}^A) \epsilon_{lim}^{B_{bis}} & \text{si } \frac{1}{2c^2} \frac{l^2}{3} > 2\epsilon_{lim}^{B_{bis}} \end{cases} \quad (4.87)$$

où les raideurs $K_{a,1}^{B_{bis}}$ et $K_{a,2}^{B_{bis}}$ sont celles introduites dans la relation (4.79).

Il est maintenant possible de calculer analytiquement, pour les trois modèles de filet, l'effort appliqué à un bord en fonction du paramètre de forme $\frac{H}{l}$ en tenant compte, les cas échéant, des non-linéarités matérielles. Pour le calcul numérique, cet effort est directement obtenu en sommant les résultantes appliquées par les anneaux le long du bord. Les résultats de l'étude, ainsi qu'une illustration de la transformation pour un facteur de forme $\frac{H}{l} = 0, 3$, sont respectivement présentés sur les figures 4.12 et 4.13.

Même pour des rapports $\frac{H}{l}$ qui restent limités, le comportement linéarisé du champ de déformations obtenu par homogénéisation ne permet pas de décrire le comportement du modèle C . Les coefficients du tenseur d'élasticité ont été évalués au paragraphe 4.2.1 pour des dilatations uni-axiales inférieures à 4%. La déformation $\epsilon_{11} + \nu\epsilon_{22}$ atteint cette valeur pour des facteurs de forme proches de 13 %. On observe sur le graphique de gauche

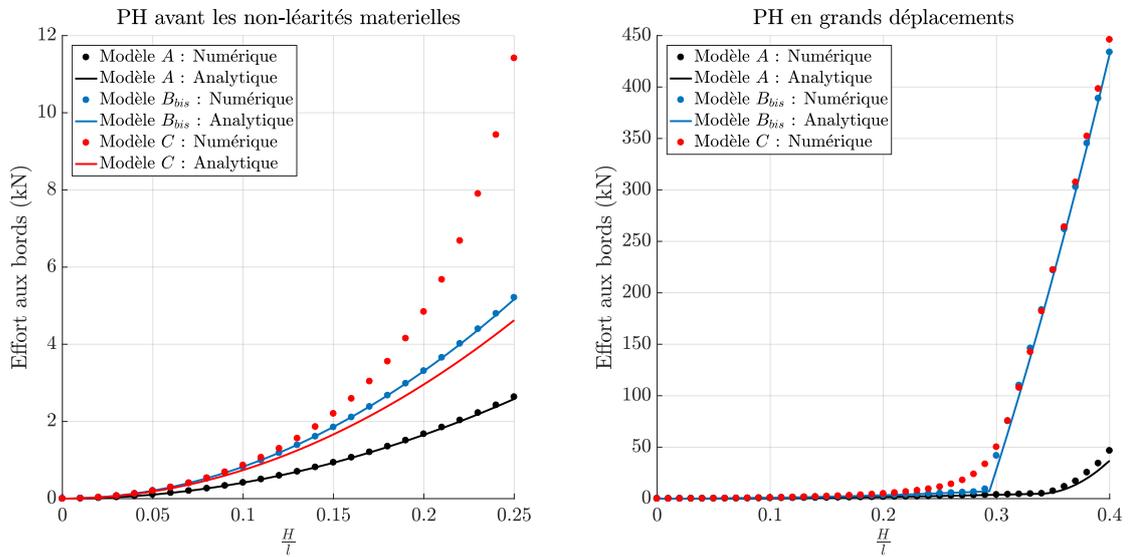


FIGURE 4.12 – Comparaison des comportements calculés analytiquement et numériquement pour les trois modèles de filet

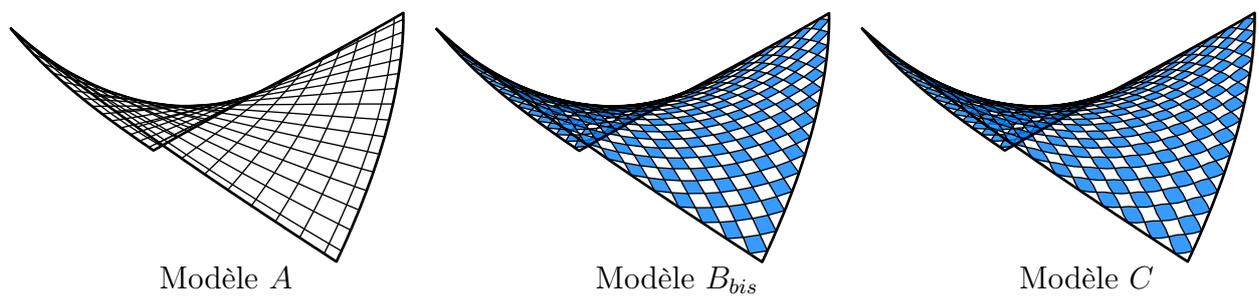


FIGURE 4.13 – Etats d'équilibre des filets calculés numériquement pour une Transformation hyper : $\frac{H}{l} = 0,3$

de la figure 4.12 que pour ce niveau de la transformation, le calcul numérique est déjà sensiblement éloigné du résultat analytique prévu, et cette tendance est renforcée ici par l'intégration des erreurs locales sur toute la longueur du filet. Le comportement analytique du modèle C n'est donc pas représenté pour des facteurs de forme $\frac{H}{l} > 25\%$. Une fois la phase de flexion terminée, la géométrie déformée de l'anneau C est très différente de celle non-chargée et devient similaire à celle de l'anneau B_{bis} , les deux comportements numériques restant d'ailleurs confondus pendant la phase tendue.

En revanche pour les modèles A et B_{bis} , dont la géométrie change peu au cours de la transformation, le calcul analytique fournit une prédiction précise du comportement réel de la nappe de filet jusqu'à des niveaux de chargement situés au-delà du changement de régime. Les points de basculement prédits respectivement par les relations (4.82) et (4.80) sont d'ailleurs respectés pour chacun des modèles. L'influence du coefficient de Poisson est ici clairement visible, avec la mise en tension progressive des éléments du modèle A , tandis que le changement de régime est brutal pour le modèle B .

Avec cette densité de maillage, pour laquelle la dimension caractéristique d'une cellule périodique est 15 fois inférieure à celle du filet, et en considérant un champ de déformations qui conserve localement la géométrie des cellules ($\epsilon_{12} = 0$), les comportements homogénéisés reproduisent avec une bonne précision ceux de leur milieu discret, même pour de hauts niveaux de déformation. La limite de la méthode est toutefois visible dans le cas du modèle C , pour lequel la géométrie de l'anneau discret évolue différemment et plus rapidement que celle de la cellule périodique qui le contient.

4.3.4 Reconstruction d'un tenseur des contraintes moyennes

Expression théorique

On se propose dans ce paragraphe de développer une méthode permettant d'étudier le cheminement des efforts à l'intérieur des modèles de filet discrets, et de la valider sur la transformation hypar, pour laquelle on a montré que les solutions analytiques reproduisent bien les comportements numériques observés. Toutefois, en grands déplacements, la méthode d'homogénéisation précédemment utilisée n'est plus valable et la relation liant les efforts aux déplacements ne reproduit plus le comportement de la micro-structure. Il est ainsi de nouveau nécessaire de décrire les efforts, dans les modèles calculés numériquement, avec un équivalent continu pour suivre leur propagation. Pour cela, un tenseur des contraintes moyennes est reconstruit localement par interpolation, à partir des configurations à l'équilibre obtenues avec les trois modèles. Ce champ est défini à partir des efforts et de la géométrie dans l'état déformé et est ainsi un équivalent naturel de la contrainte de Cauchy pour un milieu continu. De plus, comme il est construit a posteriori sans tenir compte de la relation de comportement du milieu, son domaine de validité ne dépend pas de l'amplitude des transformations considérées. De telles approches sont fréquemment utilisées pour l'étude des matériaux granulaires [20, 51, 72].

Une méthode naturelle pour définir ce tenseur des contraintes moyennes, dans le cas d'un milieu discret, est de raisonner à partir de l'étude d'un milieu continu. On considère toujours le milieu Ω , qui pour la démonstration peut être d'une forme quelconque, séparé du reste de l'espace cartésien \mathbf{R}^3 par sa frontière $\partial\Omega$. L'équilibre de Ω est décrit en chacun de ses points par les équations indéfinies de la statique, qui sont ici simplifiées par l'absence

de force volumique.

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\underline{0}} \quad (4.88)$$

où $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur de contrainte de Cauchy. On introduit ensuite la moyenne des contraintes sur Ω dont les composantes sont définies, selon l'usage, par la relation ci-dessous [20] :

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V_{\Omega}} \int_{\Omega} \sigma_{ij} dV \quad (4.89)$$

avec V_{Ω} le volume occupé par Ω , ce tenseur ne doit pas être confondu avec la contrainte moyenne qui est une quantité scalaire et dépend de la trace de $\underline{\underline{\sigma}}$. L'objectif est maintenant d'exprimer la contrainte moyenne (4.89) en fonction des efforts appliqués sur la frontière de $\partial\Omega$ uniquement. En effet comme pour le problème d'homogénéisation, il est relativement simple d'isoler une cellule élémentaire dans le filet discret, afin de regarder les efforts extérieurs qui l'équilibrent. Le passage de l'intégrale sur le volume à celle sur la frontière peut être déterminé de différentes manières [20, 73], et on choisit ici d'utiliser une méthode faisant intervenir le travail des efforts intérieurs.

On introduit pour cela le champ de vecteurs \underline{w} , quelconque mais non nul sur Ω et on effectue son produit scalaire avec les termes de part et d'autre de l'égalité (4.88).

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) \cdot \underline{w} = 0 \quad (4.90)$$

Cette dernière équation (4.90) est ensuite exprimée sous sa forme faible sur Ω puis intégrée par partie.

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) \cdot \underline{w} dV = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{w}) dV - \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \operatorname{div}(\underline{w}) dV = 0 \quad (4.91)$$

En appliquant le théorème flux-divergence d'Ostrogradski, au premier terme du membre de droite de l'égalité (4.91) et en notant \underline{n} le champ des normales sortantes à $\partial\Omega$, on peut obtenir une nouvelle relation qui, aux termes en \underline{w} près, est l'égalité à prouver.

$$\int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{w}) \cdot \underline{n} dS = \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{w} dS = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \operatorname{div}(\underline{w}) dV \quad (4.92)$$

On reconnaît, dans le second terme de la relation (4.92), l'expression du vecteur contrainte $\underline{\underline{\sigma}}_n$ appliqué sur la frontière de Ω . Par ailleurs, comme cette égalité est vraie pour tout champ de vecteurs \underline{w} , on peut la simplifier en choisissant \underline{w} comme l'application identité, tel que : $\underline{w}(\underline{x}) = \underline{x} = \underline{I} \cdot \underline{x}$. On achève ainsi la preuve, en introduisant ces dernières notations dans la relation (4.92).

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V_{\Omega}} \int_{\partial\Omega} \sigma_{ni} x_j dS \quad (4.93)$$

La principale différence pour un milieu discret comme la nappe de filet est que, l'ensemble des points appartenant à sa frontière et sur lesquels sont appliqués un effort, forment un ensemble discret. Le vecteur contrainte n'a d'ailleurs plus de signification physique et est remplacé par la force ponctuelle \underline{f} . Le tenseur des contraintes moyennes appliqué au milieu discret peut être sans ambiguïté noté $\underline{\underline{\sigma}}$ et défini par l'expression :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{V_{\Omega}} \sum_{p \in \partial\Omega} \underline{f}_p \otimes \underline{x}_p \quad \text{avec} \quad \sum_{p \in \partial\Omega} \underline{f}_p = \underline{\underline{0}} \quad (4.94)$$

Le comportement d'une nappe de filet étant naturellement proche de celui d'une membrane, les efforts \underline{f}_p sont localement contenus dans le plan tangent. En décrivant l'équilibre d'une cellule élémentaire suffisamment petite, il est possible de déterminer une contrainte moyenne également plane et ainsi d'exprimer le tenseur (4.94) en fonction des contraintes généralisées.

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{A_\Omega} \sum_{p \in \partial\Omega} \underline{f}_p \otimes \underline{x}_p \quad (4.95)$$

où A_Ω est l'aire du sous-espace de \mathbb{R}^2 occupé par Ω .

Comme l'opérateur de moyenne, introduit par la relation (4.89), conserve les propriétés de symétrie, le tenseur des contraintes moyennes est par construction symétrique sous sa forme continue (4.93). Le tenseur des contraintes discrètes déduit de la relation (4.94) est consistant vis-à-vis de ce critère, puisqu'il conserve également cette propriété [51]. Par analogie avec le cas continu, la preuve est fournie par l'équilibre des moments au sein de la cellule Ω .

$$\forall x \in \Omega \quad \sum_{p \in \partial\Omega} \underline{M}(\underline{x}) = \sum_{p \in \partial\Omega} (\underline{x}_p - \underline{x}) \wedge \underline{f}_p = \sum_{p \in \partial\Omega} \underline{x}_p \wedge \underline{f}_p = \underline{0} \quad (4.96)$$

Cette égalité des moments peut ensuite être projetée sur les axes du repère euclidien et écrite sous forme indicelle en utilisant l'opérateur d'orientation (3.98) présenté au paragraphe 3.4.3 du chapitre 3.

$$\sum_{p \in \partial\Omega} M_k = \sum_{p \in \partial\Omega} \epsilon_{ijk} x_{pi} f_{pj} = 0 \quad (4.97)$$

Par ailleurs, la symétrie d'un tenseur d'ordre 2 est également définie par l'égalité de sa représentation matricielle avec sa transposée.

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ji} = \frac{1}{A_\Omega} \sum_{p \in \partial\Omega} (f_{pi} x_{pj} - f_{pj} x_{pi}) = \frac{1}{A_\Omega} \sum_{p \in \partial\Omega} \epsilon_{ijk} f_{pi} x_{pj} \quad (4.98)$$

La preuve est ainsi achevée en reconnaissant l'expression de l'égalité des moments (4.97), à une permutation d'indices muets près, dans la relation (4.98).

Application aux modèles de filet

La construction d'un tenseur parfaitement plan fait intervenir l'équilibre de trois forces. Les cellules élémentaires considérées pour cette application sont ainsi des triangles dont chacun des côtés est soumis à une unique force. Elles sont donc différentes de celles présentées sur la figure 4.1 et utilisées pour homogénéiser les modèles de filet (cf. Paragraphe 4.1). Toutefois, le nouveau pavage du filet par les cellules triangulaires est directement déduit de celui construit à partir des quadrangles périodiques en les divisant le long de leurs diagonales. La figure 4.14 illustre ce découpage avec les cellules périodiques, dessinées avec un contour bleu, et celles permettant de construire les tenseurs de contraintes, coloriées en rouge.

L'équilibre d'une cellule élémentaire est complètement équivalent à celui de sa particule maîtresse à partir duquel elle est construite. Chaque cellule triangulaire peut être ainsi repérée par la donnée d'une particule, parmi celles interagissant avec quatre voisines, et d'une orientation. Le voisinage comprend également les particules n'appartenant pas à la même cellule périodique et est ici équivalent à la valence, qui dans un maillage, est définie

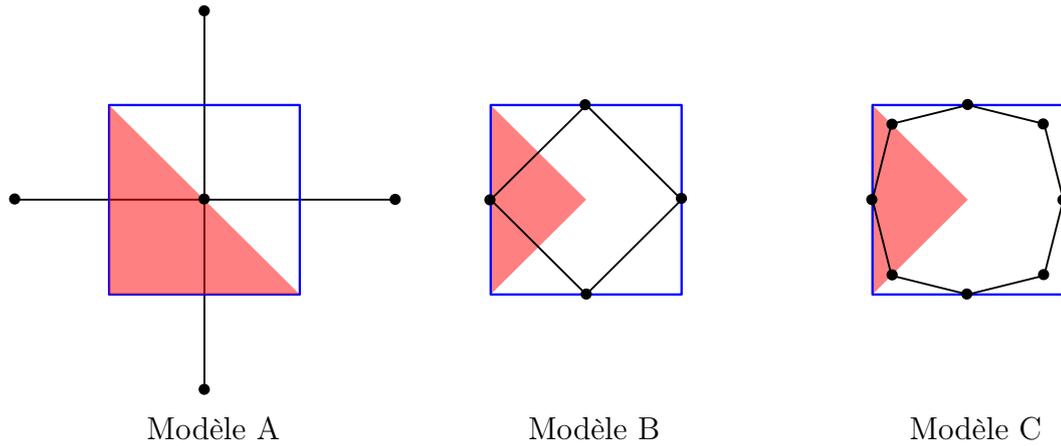


FIGURE 4.14 – Illustration du maillage de la surface pour le calcul des contraintes moyennes

par le nombre d'arêtes adjacentes à un même noeud. Il est évalué sur le maillage par lequel transitent les efforts, tandis que ceux permettant d'homogénéiser le filet ou de calculer les contraintes moyennes sont uniquement des artefacts de calcul. Ainsi, chaque cellule périodique est divisée en autant de cellules triangulaires qu'elle comporte de particules avec une valence de quatre : respectivement deux pour le modèle *A* et quatre pour les modèles *B/B_{bis}* et *C*, et réciproquement, chaque particule ayant une valence de quatre appartient à deux cellules triangulaires. La figure 4.15 illustre la construction du tenseur des contraintes moyennes dans le cas du modèles *A*. On y distingue les efforts résultant de l'équilibre d'une unique particule (\underline{f}_3) de ceux appliqués par une interaction en reliant deux distinctes (\underline{f}_1 et \underline{f}_2). Il a été expliqué précédemment que chaque tenseur est construit à partir de l'équilibre de seulement trois forces. En réalité il s'agit des résultantes en trois points, comme illustré avec la force \underline{f}_3 qui est composée des forces \underline{f}_{31} et \underline{f}_{32} , toutes deux appliquées au point \underline{x}_3 . Cette opération se justifie par la distributivité du produit tensoriel dans la relation (4.95) et il est en revanche impossible de rassembler deux forces ayant des points d'application différents, même si elles sont appliquées sur un même bord de la cellule.

Equivalence avec le tenseur des contraintes homogènes

D'un point de vue purement théorique, considérer un maillage plus fin que celui utilisé pour homogénéiser les nappes discrètes est discutable, puisque cela sous-entend que les perturbations locales, à l'intérieur des cellules élémentaires représentatives, ne peuvent pas être négligées à l'échelle du milieu complet. Ce choix est ici justifié par une remarque faite en introduction de ce paragraphe : la méthode proposée ci-dessus, pour évaluer un tenseur des contraintes discret, peut être utilisée lorsque les hypothèses de l'homogénéisation, en l'occurrence celles des petites perturbation du milieu, ne sont plus respectées. Toutefois, le tenseur des contraintes doit être déterminé de manière univoque sur une cellule périodique, afin que les résultats numériques puissent être comparés, si nécessaire, avec les comportements homogénéisés théoriques. Il suffit pour cela de calculer la moyenne des contributions apportées par chacune des cellules triangulaires appartenant à la cellule périodique. On se limite ici à des transformations infinitésimales et on note Ω la surface délimitée par la cellule périodique de frontière $\partial\Omega$, et Ω'_i celles respectivement occupées par les cellules triangulaires

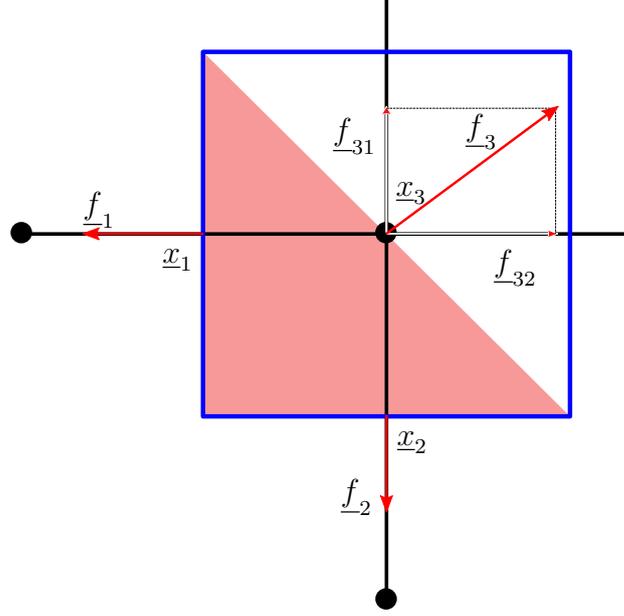


FIGURE 4.15 – Illustration de la méthode de construction du tenseur des contraintes moyennes sur une cellule élémentaire

incluses dans Ω de frontière $\partial\Omega'_i$, avec $i \in [1, 2]$ pour le modèle A et $i \in [1, 4]$ pour les modèles B/B_{bis} et C . On distingue également les efforts appliqués à des points de $\partial\Omega$ de ceux intérieurs à Ω et appliqués à des points appartenant à $\{\cup\delta\Omega'_i\} \setminus \partial\Omega$, la frontière des cellules triangulaires privée de celle de la cellule périodique. Avec ces notations, la moyenne des tenseurs discrets est donnée par la relation suivante :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{hom} = \frac{1}{n} \sum_{i \in [1, n]} \frac{1}{A_{\Omega'_i}} \left(\sum_{p \in \{\partial\Omega'_i \cap \partial\Omega\}} \underline{f}_p \otimes \underline{x}_p + \sum_{p \in \{\partial\Omega'_i \setminus \partial\Omega\}} \underline{f}_p \otimes \underline{x}_p \right) \quad (4.99)$$

Le pavage de la cellule périodique par les cellules triangulaires garantit que tous les $A_{\Omega'_i}$ sont égaux. Ce résultat reste vrai en grandes transformations si le champ de déformations peut être considéré homogène à l'échelle de la cellule périodique. De plus, comme ce pavage est supposé parfait, chaque point d'application $\underline{x}_p \in \{\partial\Omega'_i \setminus \partial\Omega\}$, d'une force \underline{f}_p , est équilibré par la force $-\underline{f}_p$ appliquée à la cellule triangulaire adjacente. L'expression (4.99) de la moyenne des tenseurs discrets peut ainsi être simplifiée en conséquence.

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{hom} = \frac{1}{nA_{\Omega'_i}} \sum_{i \in [1, n]} \left(\sum_{p \in \{\partial\Omega'_i \cap \partial\Omega\}} \underline{f}_p \otimes \underline{x}_p \right) = \frac{1}{A_{\Omega}} \sum_{p \in \partial\Omega} \underline{f}_p \otimes \underline{x}_p \quad (4.100)$$

Un champ de contraintes continu est ensuite obtenu par interpolation de chacun des tenseurs déterminés numériquement et explicités au barycentre des cellules triangulaires sur lesquelles ils sont calculés. L'interpolation de classe C^1 est réalisée à partir d'une triangulation de Delaunay des barycentres des cellules triangulaires. Le tenseur interpolé par défaut au barycentre d'une cellule périodique, défini également comme celui de quatre points du

maillage de Delaunay, n'est donc pas égal à la moyenne des contraintes en ce point. Le tenseur moyen, défini par la relation (4.99), sera par conséquent attribué, avant interpolation, à tous les barycentres des cellules triangulaires formant une même cellule périodique, lorsque les comportements analytiques et numériques seront comparés.

Application à la transformation hyper

Les conclusions de l'étude menée au paragraphe 4.3.3, incitent à considérer un facteur de forme $\frac{H}{l} < 10\%$ pour comparer les champs de contraintes calculés numériquement et analytiquement. Il a en effet été montré, qu'au-delà de cette valeur, les variations géométriques empêchent de reproduire correctement le comportement du modèle C . Comme évoqué précédemment, les comportements de modèles A et B sont identiques pour de faibles niveaux de déformations, et on substitue de nouveau le modèle B_{bis} au modèle B .

Pour un rendu lisible, un unique vecteur contrainte est représenté dans chacun des modèles. On choisit naturellement une des contraintes principales, donnée en l'absence de cisaillement, par les vecteurs \underline{e}_1 et \underline{e}_2 de la base naturelle \mathbf{B} . En utilisant les arguments de symétrie énoncés au paragraphe 4.3.1, les résultats sont présentés sur le domaine nommé $\tilde{\Omega}$ et défini par l'ensemble des points : $\{\underline{x} \in \Omega, x_1 x_2 \geq 0 \text{ et } x_1 - x_2 \geq 0\}$. Par commodité, les vecteurs sont représentés dans cette configuration selon la direction \underline{e}_1 , qui d'après l'expression du tenseur des contraintes généralisées (4.75), est la direction de contrainte faible. Le champ des contraintes moyennes, déterminé numériquement, étant également continûment connu grâce à l'interpolation, les vecteurs contraintes sont tracés en des points régulièrement répartis du plan de la membrane. Par ailleurs, le tenseur de contraintes discret est calculé dans une base a priori quelconque de \mathbb{R}^3 . Pour perfectionner le critère de comparaison, on choisit de représenter le vecteur contrainte selon la seconde direction principale, plutôt que selon le vecteur \underline{e}_1 . Ce choix nécessite cependant une étape de diagonalisation supplémentaire après la phase de reconstruction.

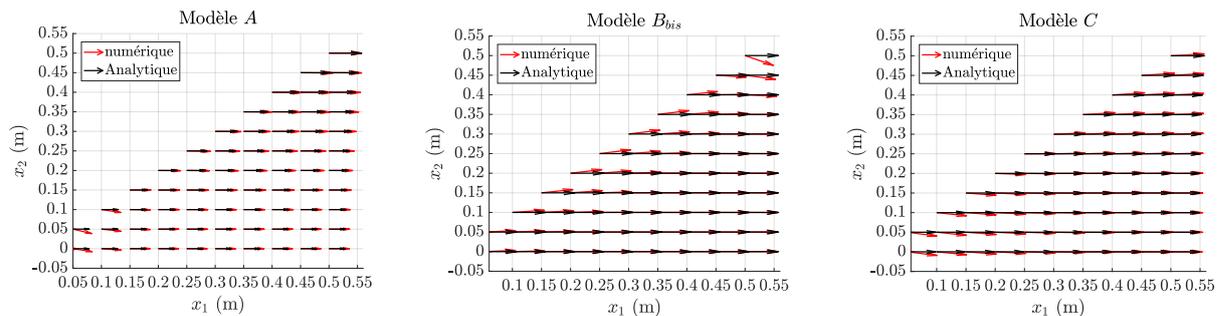


FIGURE 4.16 – Comparaison des contraintes principales calculées analytiquement et numériquement pour un facteur de forme $\frac{H}{l} = 10\%$

Les résultats de cette comparaison sont présentés sur la figure 4.16. Le champ de vecteurs contraintes calculé numériquement se superpose globalement bien à celui prévu par la solution analytique. On observe, pour les trois modèles, des écarts de direction au niveau du centre de la membrane, qui sont généralisés à l'ensemble de celle-ci dans le cas du modèle B_{bis} . Ces derniers peuvent être en partie expliqués par l'isotropie du champ de contraintes dans le modèle B_{bis} et le long de la diagonale des modèles A et C . Toutes les directions du

plan sont alors directions principales du tenseur des contraintes et les orientations établies numériquement peuvent être quelconques.

Les moyennes des écarts entre les contraintes principales analytiques et numériques sont calculées pour les trois modèles, en excluant toutefois les points appartenant à la frontière de $\tilde{\Omega}$. Les erreurs relatives s'élèvent respectivement à : 1,9 % pour le modèle A , 3,8 % pour le modèle B_{bis} et 14,1 % pour le modèle C . Ce dernier écart est conséquent, alors que les comportements numériques et analytiques semblaient pourtant correspondre après analyse de l'effort résultant appliqué à un bords du filet (cf. Figure 4.12). Les valeurs des contraintes, obtenues numériquement pour les modèles A et B_{bis} , sont en revanche en bon accord avec les résultats analytiques, révélant le potentiel de cette approche pour des applications plus complexes, comme l'étude d'un écran de filet complet.

4.4 Comparaison du comportement des modèles d'écran associés pour une sollicitation quasi-statique

On se propose d'étudier dans ce paragraphe le comportement de l'écran C2ROP, soumis à l'essai quasi-statique présenté au paragraphe 2.3.3, et modélisé avec chacun des trois modèles de filet A , B et C . Le modèle B_{bis} ne sera quant à lui plus utilisé d'ici la fin de ce chapitre.

4.4.1 Modélisation de la barrière C2ROP

Choix des paramètres mécaniques des composants

L'écran C2ROP, dont l'architecture est détaillée au paragraphe 2.3.2, est modélisé à partir des différents éléments de structure introduits au cours du paragraphe 3.1. Il reste ici à sélectionner les propriétés mécaniques de chacun d'entre eux avant de simuler le comportement de la barrière avec l'algorithme de relaxation dynamique. Ce paragraphe reprend ainsi en partie les éléments présentés au paragraphe 2.3.2. Comme expliqué au paragraphe 3.2, cette méthode numérique fournit uniquement un état d'équilibre du système. Dans ces conditions, considérer un historique ou une dépendance temporelle du chargement est un non-sens, et toutes les lois de comportement sont ainsi parfaitement élastiques. De même, en l'absence de phénomène dynamique, les masses des particules sont des paramètres du calcul permettant d'optimiser sa convergence (cf. Paragraphe 3.2.2).

Le filet ASM4. Les modèles de filet A , B et C sont utilisés à tour de rôle dans la modélisation de l'écran C2ROP. Leurs propriétés mécaniques sont évaluées dans le paragraphe 4.2.1.

Les câbles de rive et dissipateurs L'ensemble formé par un câble de rive et les deux dissipateurs, situés à chacune de ses extrémités, est modélisé à l'aide d'un câble glissant non-frottant, dont le comportement, illustré sur la figure 4.17, est de nature bi-linéaire, faisant ainsi intervenir deux raideurs k_1 et k_2 ainsi qu'un effort limite pour indiquer le changement de régime. Ce dernier est déterminé par les dissipateurs et est identique pour les 10 câbles glissants : $T_{lim} = 25$ kN. Les raideurs sont quant à elles légèrement différentes en fonction de la position du câble. Elles sont données par : $k_1 = 119$ kN.m⁻¹ et $k_2 = 3,5$ kN.m⁻¹

pour les câbles situés le long d'une rive inférieure ou supérieure et : $k_1 = 114 \text{ kN.m}^{-1}$ et $k_2 = 3,5 \text{ kN.m}^{-1}$ pour les deux rives latérales qui sont plus courtes.

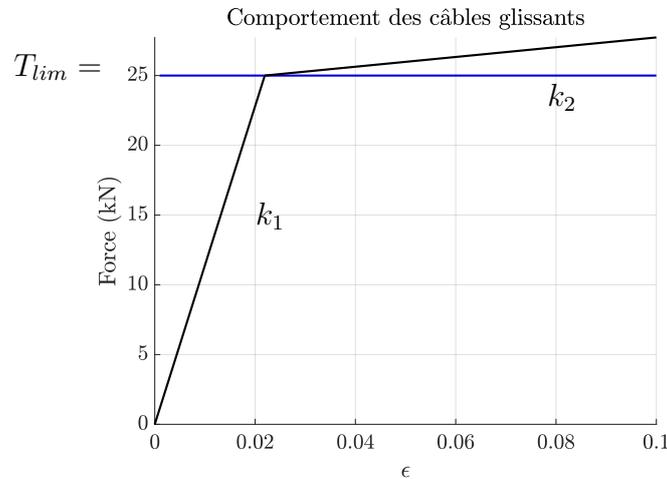


FIGURE 4.17 – Comportement numérique des éléments câbles glissants

Les haubans et poteaux La section et le module d'Young des haubans utilisés pour le calcul sont respectivement : $S = 1,3 \text{ cm}^2$ et $E = 100 \text{ GPa}$. Les poteaux sont en acier et leur module d'Young est pris par défaut égal à 210 GPa . Leur section est circulaire et creuse, avec un diamètre extérieur d'environ 9 cm et une épaisseur de 8 mm . Ils sont modélisés par seulement deux particules, dont les six degrés de liberté sont insuffisants pour calculer un moment fléchissant, et seul l'aire de leur section est donc implémentée : $S = 11 \text{ cm}^2$. Ce faisant on suppose que leur inertie est suffisante pour éviter tout phénomène de flambement.

Le bloc. Il est formé par un ensemble de barres qui ne travaillent qu'en compression. Leur raideur doit être suffisamment élevée pour que les déformations restent infinitésimales et que le bloc conserve sa forme sphérique tout au long du calcul. Cependant les masses des particules sont également proportionnelles à la raideur de l'élément de structure auquel elles appartiennent (cf. Paragraphe 3.4), qui ralentirait inutilement le calcul si elle était choisie trop élevée. Une estimation est ici déterminée grâce au retour d'expérience de l'essai quasi-statique. L'effort maximal appliqué au bloc pour une déflexion de la structure de 5 m est d'environ 210 kN (voir Figure 4.20). Compte tenu du diamètre intérieur du bloc normalisé utilisé pour l'essai, une élongation de 1 cm est autorisée pour les barres, ce qui correspond à une déformation d'environ 2% . Comme par ailleurs plusieurs d'entre elles sont sollicitées en même temps, une raideur $k = 1.10^7 \text{ kN.m}^{-1}$ suffit amplement au respect de ce critère empirique.

Conditions aux bords du filet

Contrairement à l'essai de traction plan considéré au paragraphe 4.2.1, les directions de propagation du motif du filet ne sont pas alignées avec les bords de l'écran dans le montage C2ROP. Cette configuration, qui est choisie par une très grande majorité des concepteurs, ne modifie en rien la structure du filet en partie courante. Une attention particulière doit

cependant être portée aux conditions d'attache le long des rives. Les bords des cellules périodiques ne sont dorénavant plus alignés avec ceux du filet, et le motif ne peut pas être propagé jusqu'aux rives. Pour le modèle C ce changement d'orientation ne pose pas de réelle difficulté, sa forme octogonale rendant sa géométrie peu sensible à des rotations d'angles multiples de $\frac{\pi}{4}$, il suffit de le connecter aux rives par l'intermédiaire d'une de ses particules initialement de valence 2, servant uniquement au calcul de flexion en partie courante. En revanche sans modification des conditions aux bords, les anneaux des modèles A et B ne possèdent pas de particule au point de tangence entre le périmètre de l'anneau réel et la ligne de rive. Deux solutions sont alors envisageables pour assurer la connexion entre le filet et les câbles de rive. La première, utilisée pour le modèle A , consiste à conserver le même modèle d'anneau et à déplacer artificiellement la rive, afin qu'elle coïncide avec la ligne des particules existantes [71]. A l'inverse, dans l'option choisie pour le modèle B , une géométrie spécifique d'anneau est développée pour les éléments appartenant à la rive [97]. Ces deux stratégies de modélisation, présentées sur la figure 4.18 sont empruntées aux concepteurs des modèles [71, 97]. Dans les deux cas les longueurs des éléments du filet sont ajustées afin de conserver une même longueur ainsi qu'une même raideur pour la nappe.

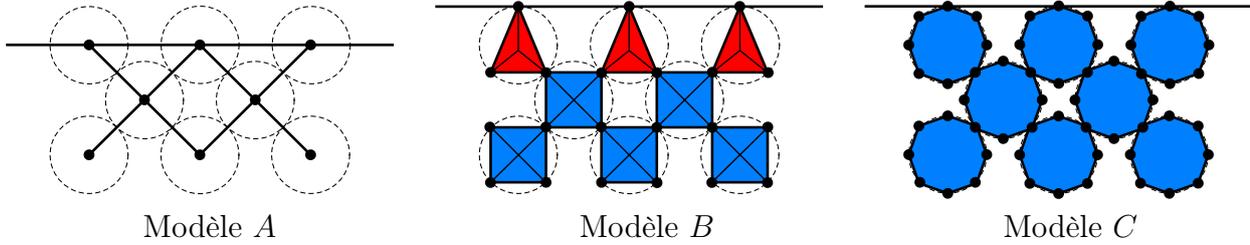


FIGURE 4.18 – Conditions aux bords adaptées des modèles ASM4

Le modèle d'anneau utilisé le long des rives de la nappe B est toutefois légèrement différent de celui initialement développé par A. Volkwein [97]. Il est formé de trois particules, au lieu de quatre en partie courante, reliées par une interaction d'anneau. Pour ne pas ajouter une particule supplémentaire au centre de la maille, le comportement en flexion n'est en revanche pas assuré par trois diagonales comme dans le modèle d'origine, mais par la déformation de chacun des côtés du triangle. Les dimensions de ce nouvel anneau sont explicitées sur la figure 4.19. Pour des raisons de simplicité, les raideurs identifiées au paragraphe 4.2.1 pour l'anneau à quatre particules sont conservées. En revanche le seuil en déformation doit être adapté au nouveau périmètre.

$$\epsilon_{lim}^B = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2\pi R}{(2\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}) R} \right)^2 - 1 \right] \simeq 0,26 \quad (4.101)$$

4.4.2 Comparaison des comportements globaux des trois modèles d'écran

L'essai quasi-statique présenté au paragraphe 2.3.3 est simulé pour chaque modèle de filet. Pour simplifier la comparaison, le maillage original du filet, présenté sur la figure 2.13

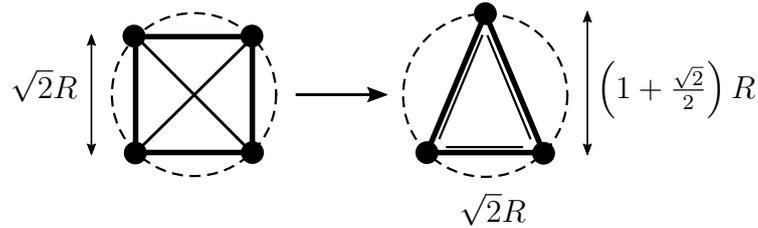


FIGURE 4.19 – Passage d'un anneau courant à un anneau de rive : Modèle B

du paragraphe 2.2.1, est légèrement modifié en supprimant les deux anneaux situés dans les coins et reliant une des rives inférieure ou supérieure avec un câble latéral. En effet, comme la connexion entre le filet et la rive est décalée pour le modèle A (voir Figure 4.18), un des éléments de la nappe appliquerait directement un effort, qui ne transite pas par les câbles de rive, sur la tête ou le pied d'un poteau, créant ainsi une configuration qui ne peut pas être reproduite par les deux autres modèles. Avec cette modification du câblage, le nombre d'anneaux dans la hauteur du filet n'est plus constant. Il y en a toujours huit le long des deux rives latérales, mais ensuite les rangées sont composées de huit ou neuf anneaux en fonction de leur position dans le filet. Pour confronter les résultats numériques à l'expérience, l'ajout d'un anneau dans les rangées de neuf est compensé par un raccourcissement de leur périmètre, la raideur de la nappe est également modifiée en conséquence à partir des relations d'homogénéisation (4.61).

Les calculs numériques sont toujours conduits avec l'algorithme de relaxation dynamique présenté au chapitre 3. Une série de simulations est réalisée pour chacun des trois modèles en augmentant progressivement la profondeur du bloc par des pas de 50 cm. La structure est relâchée à partir d'un état déformé du filet, a priori quelconque, permettant, d'une part de garantir que la position du centre de gravité du bloc reste fixe pendant toute la durée du calcul, et d'autre part que sa connectivité avec les éléments de la nappe soit respectée. Les différents comportements sont présentés sur la figure 4.20. Le premier résultat remarquable de cette étude est la forme singulière du comportement, obtenue lors de l'expérience et avec les trois modèles. Ce dernier est en effet quasiment linéaire et le résultat précédemment relevé sur la figure 3.21 du paragraphe 3.8.2, lors de l'étude d'une structure formée de plusieurs câbles de rive assemblés sur le modèle d'un écran pare-blocs, est également vérifié ici. La diminution de la raideur apparente du système, provoquée par les grands déplacements du bloc, est compensée par le comportement écrouissant des dissipateurs sous sollicitation quasi-statique (voir Figure 2.15).

Courbe de comportement

Malgré les simplifications géométriques retenues pour cette étude, les trois modèles reproduisent correctement le comportement global de l'écran. Comme attendu après les résultats des paragraphes 4.2.1 et 4.3.3, les comportements des modèles A et B sont identiques et moins raides que celui du modèle C pour des petits déplacements du bloc (< 3 m), avant que la zone tendue au voisinage de ce dernier ne devienne trop étendue. Pour des enfoncements supérieurs à 3,5 m, la raideur du modèle A augmente plus rapidement que celles des modèles B et C . Comme expliqué au paragraphe 2.3.4, l'effet rideau se produit en même temps que la déformation du filet par flexion des anneaux, si bien que ces derniers commencent à se

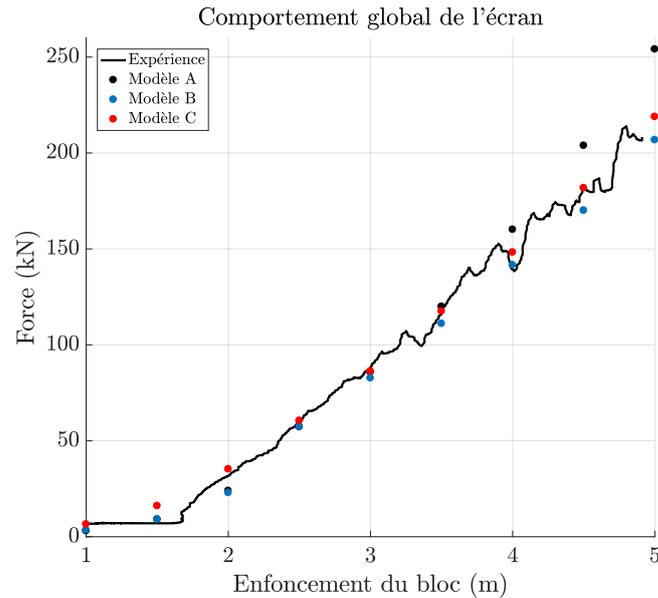


FIGURE 4.20 – Comparaison des comportements quasi-statiques des trois modèles de filet

tendre une fois le glissement du filet terminé. Dans le modèle *A* le changement de raideur est anticipé dans la zone de glissement, puisque le critère de changement de régime, évalué pour une dilatation uni-axiale au paragraphe 4.2.1, ne tient pas compte de la géométrie réelle des anneaux. Cette erreur aurait pu être minimisée en attribuant différents critères de changement de régime en fonction de la région du filet où se situe l'anneau modélisé, mais ce choix nécessite de connaître à l'avance, au moins qualitativement, la réponse du système. Le léger déficit de raideur du modèle *B* par rapport au modèle *C* est en revanche plus difficile à expliquer, et est sans doute causé par plusieurs facteurs concomitants comme la modélisation des efforts de flexion et la modification de la géométrie des anneaux de rives.

Efforts appliqués à la rive par le filet

Maintenant que le comportement caractéristique de l'écran en fonction de l'enfoncement du bloc a été décrit, la répartition des efforts appliqués par le filet sur les rives est à son tour étudiée dans ce paragraphe. Dans la mesure où, pour un chargement ponctuel dans le module central, les deux rives latérales sont peu sollicitées par rapport aux rives inférieure et supérieure, les distributions des efforts ne sont pas présentées le long de celles-ci. Par ailleurs, la symétrie du câblage et les faibles déplacements des têtes des poteaux amènent à des comportements numériques des rives inférieure et supérieure similaires. L'étude est donc ici restreinte à la rive supérieure uniquement. Les résultats sont exposés sur la figure 4.21 pour chacun des modèles. Les profils des efforts, donnés ici par leurs normes, sont tracés en fonction de l'abscisse des points de la rive, dans la géométrie déformée, pour cinq niveaux de chargement.

La symétrie quasi-parfaite des résultats est due à la modification du maillage évoquée précédemment et ne reflète pas la distribution exacte de la structure réelle. Toutefois, certaines remarques qualitatives concernant le comportement de cette dernière peuvent tout de même être formulées ici. Comme évoqué au moment de la description du comportement

4.4. COMPARAISON DU COMPORTEMENT DES MODÈLES D'ÉCRAN ASSOCIÉS POUR UNE SOLLICITATION QUASI-STATIQUE

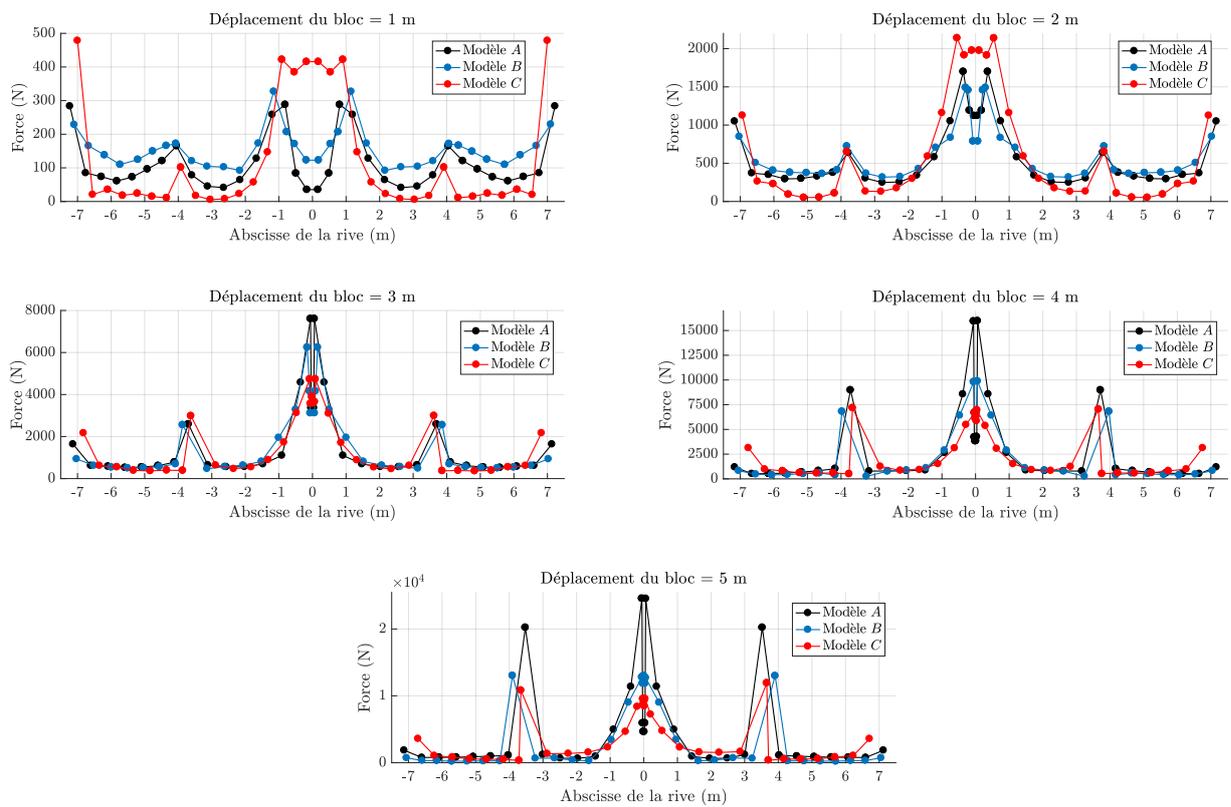


FIGURE 4.21 – Distributions des efforts appliqués à la rive par le filet obtenues lors des simulations de l'essai quasi-statique pour différents niveaux d'enfoncement du bloc

caractéristique de l'écran, présenté sur la figure 4.20, le réarrangement géométrique provoqué par l'effet rideau est terminé, pour les trois modèles, avant un enfoncement du bloc de 3 m. Par ailleurs, on identifie clairement les points de la rive où les câbles sont séparés du filet pour être dirigés vers les têtes de poteaux et où les efforts sont concentrés. Une fois le glissement terminé, les forces en partie courante deviennent très petites devant celles en ces quelques points.

Quelques différences entre les réponses des trois modèles sont tout de même à noter. Pendant la phase de glissement, les efforts sont plus importants dans le modèle *C* uniquement en partie centrale, alors qu'il est naturellement plus raide que les modèles *A* et *B*. Cette différence dans la diffusion des efforts est en accord avec les comportements homogènes déterminés au paragraphe 4.1.3. Avec cette orientation du filet, les coefficients de Poisson des modèles *A* et *B* sont tous deux égaux à 1 pendant la phase de flexion, alors que celui du modèle *C* est minimal. Les différences observées entre les modèles *A* et *B* sont également importantes pendant cette première phase à cause des anneaux de rive, alors que leurs efforts sont transmis de la même manière en partie courante. Une fois le glissement terminé, les écarts entre le modèle *A* et les deux autres, déjà mentionnés lors de l'étude du comportement global (voir Figure 4.20), et qui sont dues à un raidissement trop rapide du filet dans la zone chargée, sont également visibles. Cependant, c'est la seule différence significative qui subsiste entre les modèles, et elle peut facilement être corrigée en choisissant différents niveaux de déformations limites pour assurer les changements de raideurs des éléments dans le modèle *A*. Les singularités locales de chaque modèle sont ainsi effacées par la nouvelle configuration du filet à l'échelle globale.

4.5 Réponse de l'écran en fonction de la zone de chargement

4.5.1 Présentation de l'étude

Ce dernier paragraphe est consacré à l'exploration des états d'équilibre de la structure C2ROP lorsque la position du chargement évolue dans le plan de la nappe. Les calculs numériques sont toujours menés avec l'algorithme de relaxation dynamique et, comme pour les simulations de l'essai quasi-statique réalisées au paragraphe 4.4.2, le chargement est appliqué en imposant la position du centre du bloc. Il est également nécessaire de définir un paramètre constant du calcul qui servira de référence afin de comparer les réponses de la structure. La méthode de résolution et le mode de chargement contraignent ici à choisir un critère en déplacement. Il aurait été possible de mener les calculs en appliquant une même force en différentes position de la nappe, mais cette option a été écartée pour ne pas diminuer la vitesse de convergence des calculs numériques. En effet, la résolution du problème à déplacement imposé est plus stable et converge plus rapidement que celle de son dual en force. Par conséquent, le seul critère de comparaison pertinent pour cette étude est l'altitude du bloc. Au regard des résultats des simulations de l'essai quasi-statique, elle est choisie égale à 3m. Les graphes des efforts appliqués par le filet à la rive, présentés sur la figure 4.21, révèlent que l'effet rideau est complètement achevé pour cette valeur du déplacement vertical du bloc. Par ailleurs, les écarts entre les énergies de déformation des câbles de rive et du filet ne sont, a priori, pas encore trop prononcés à cette altitude.

L'étude sera menée avec chacun des modèles A , B et C , afin de distinguer les caractéristiques du comportement de la structure, des différences causées par le choix de la modélisation. Pour accentuer les écarts entre les résultats des simulations réalisées à des positions différentes, on choisit ici de ne pas laisser le filet glisser librement sur la surface du bloc. Pour rappel, le bloc est modélisé par un réseau de barres qui relie son centre aux particules du filet (cf. Paragraphe 3.1.5). Puisque par défaut ces barres ne transmettent que des efforts radiaux, elles ne peuvent pas reproduire les effets du frottement. Pour cette raison, les degrés de liberté des particules les plus proches du bloc sont soustraits du problème. Cette modélisation reproduit une configuration physique dans laquelle l'anneau directement situé sous le bloc frotte sans glissement, tandis que ceux en contact avec les faces latérales glissent parfaitement. Le point de la nappe qui coïncide avec la position du chargement dans la situation non chargée est ainsi celui dont l'altitude est la plus basse dans la configuration déformée. Les positions, dans le plan de la nappe, des chargements appliqués aux trois modèles de filet, sont présentées sur la figure 4.22, où les grandeurs h_n et d désignent respectivement la hauteur nominale du filet et la dimension d'un module. Les centres des modules sont ainsi situés aux abscisses $X = -d$, $X = 0$ et $X = d$ et les poteaux aux abscisses $X = -\frac{3d}{2}$, $X = -\frac{d}{2}$, $X = \frac{d}{2}$ et $X = \frac{3d}{2}$. L'objectif ici n'est pas de reproduire des sollicitations extrêmes, mais d'étudier le comportement de la structure lors d'un usage qu'on pourrait qualifier de "normal". Comme le rayon du bloc est compris entre $\frac{h_n}{8}$ et $\frac{3d}{20}$, les positions occupées par son centre de gravité sont restreintes à une bande de hauteur $\frac{h_n}{2}$ centrée sur l'axe de symétrie du filet. Cette précaution permet d'éviter qu'une des rives ait une influence trop importante sur le comportement global de la structure. Pour des raisons identiques, aucun chargement n'est appliqué à proximité de la rive latérale. Par ailleurs, au regard des fortes propriétés de symétrie de la structure modélisée (voir Figure 4.21), les positions du bloc varient uniquement sur la moitié droite de la nappe. D'autre part, pour obtenir une description continue de l'évolution des propriétés de la structure et ainsi faciliter l'interprétation des résultats, ces derniers sont ensuite interpolés à l'aide de la méthode du voisinage naturel sur l'ensemble de la bande contenant les points testés. Cette méthode d'interpolation de classe C^1 est construite à partir d'un pavage de Voronoi du domaine d'étude afin d'attribuer des poids convenablement choisis aux points de calcul [29].

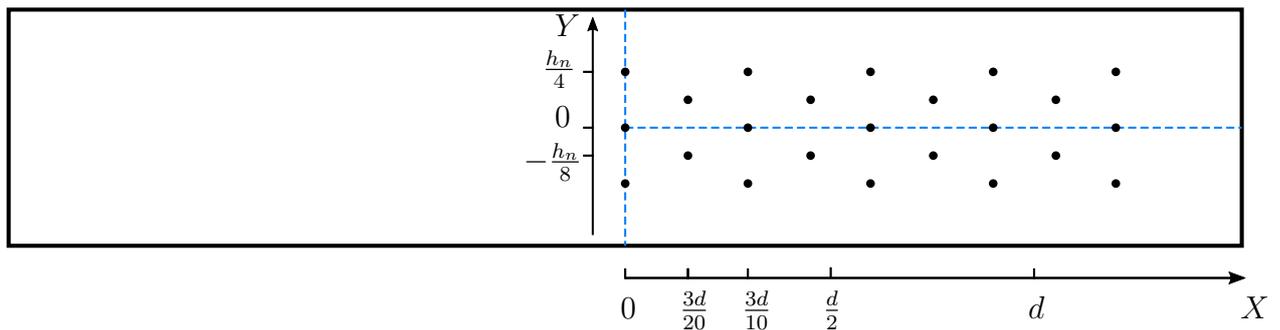


FIGURE 4.22 – Position des chargements appliqués aux modèles de filet pour l'étude du comportement de la structure en fonction de la localisation de la sollicitation

La comparaison entre les trois modèles, présentée dans la suite de cette partie, est conduite en trois temps. La première partie de l'étude est consacrée à l'évolution de l'énergie de déformation, emmagasinée ou dissipée par la structure, en fonction de la position du

chargement. Les géométries des filets sont ensuite comparées à travers l'étude de la hauteur du filet à l'équilibre. La troisième et dernière partie est dédiée, quant à elle, à la description du cheminement des efforts dans la nappe de filet.

4.5.2 Evolution des énergies de déformation

Les écrans de protection sont des ouvrages soumis à des sollicitations dynamiques et il est habituel de caractériser leurs comportements ainsi que leurs performances par l'énergie qu'ils dissipent. Toutefois, seuls des calculs d'équilibre sont conduits dans le cadre de cette étude et les modèles de comportement des éléments de structure sont, par ailleurs, parfaitement élastiques. Dans ces conditions, les notions d'énergie d'impact ou d'énergie dissipée ne semblent pas avoir leur place. Des parallèles peuvent toutefois être réalisés entre ces énergies et l'énergie de déformation calculée à l'équilibre. Une discussion des équivalences existantes entre les grandeurs statiques et dynamiques est proposée en introduction de ce paragraphe.

Equivalence entre grandeurs statiques et dynamiques

L'énergie "statique équivalente" peut être établie à partir du résultat d'un calcul dynamique réel, en additionnant à l'énergie d'impact, le travail du poids du bloc, calculé entre l'altitude de la nappe au repos et sa position la plus basse atteinte au cours de l'impact. Cette analogie nécessite cependant de négliger les efforts d'inertie de la structure devant ceux du bloc, mais à ce terme près, l'équivalence est mathématiquement correcte. A l'inverse, il est également possible de définir une énergie d'impact à partir d'une énergie de déformation élastique en lui soustrayant le travail du poids du bloc. La même équivalence existe également avec les forces. La décélération maximale du bloc est atteinte, d'après la relation de la dynamique, au moment où la force de rappel appliquée par la structure est la plus élevée. Puisque cette force de rappel est d'origine élastique, son intensité est proportionnelle à la déformation du filet qui est, quant à elle, maximale lorsque le bloc atteint sa position la plus basse. Toutes ces relations sont vraies pour deux raisons. Premièrement, parmi toutes les particules mobiles du problème, le bloc est celle qui concentre la quasi-totalité des efforts inertiels. De plus, si les efforts de frottements sont négligés, le comportement de la structure est non visqueux et les trajets de chargements dynamiques restent monotones jusqu'à ce que le bloc atteigne son altitude minimale. Tant que le bloc n'a pas atteint cette position, il est formellement impossible de distinguer les comportements élastiques des comportements élasto-plastiques. Le problème est alors en tout point équivalent à celui d'un système masse-ressort à trois degrés de liberté, avec une raideur donnée par une fonction non-linéaire de l'élongation. Cette parenthèse sur les équivalences entre les comportements statiques et dynamiques est refermée ici. Elle a permis de souligner que la portée des enseignements qui seront tirés de cette étude dépasse le cadre qui semblait a priori imposé par la nature de la sollicitation.

Energie de déformation totale de la structure

Avant d'étudier comment l'énergie de déformation est répartie entre les différents composants de la structure, il est au préalable nécessaire de connaître l'influence de la position du bloc sur la réponse globale de l'écran. L'évolution de l'énergie de déformation élastique de la structure à l'équilibre est à cette effet représentée sur la figure 4.23. Les répartitions

de l'énergie de déformation totale, calculées avec chacun des modèles, sont semblables et confirment certaines caractéristiques de l'ouvrage C2ROP. Le premier élément remarquable est l'amplitude de la variation d'énergie, en fonction de la position du chargement. En effet, pour une même altitude du bloc, qui pour rappel est égale à trois mètres, l'énergie de déformation passe de 50 kJ pour un chargement au centre de l'écran, à presque 200 kJ lorsque celui-ci est appliqué dans le module latéral à proximité d'une rive. Par ailleurs, la raideur de la structure augmente lorsque la position du chargement est déplacée vers la rive latérale et vers les rives inférieure et supérieure. Un minimum local d'énergie est tout de même observé à proximité du centre du module latéral, à l'abscisse $X = 4,5\text{m}$. Il aurait pu être imaginé que ce minimum soit atteint au centre du module latéral ($X = 5\text{m}$), là où l'effet rideau offre une plus grande réserve en déformation à la nappe. Ce phénomène semble toutefois être compensé par la présence de la rive latérale dont l'influence sur la raideur de la structure commence à se manifester à partir d'une abscisse légèrement inférieure à cinq mètres.

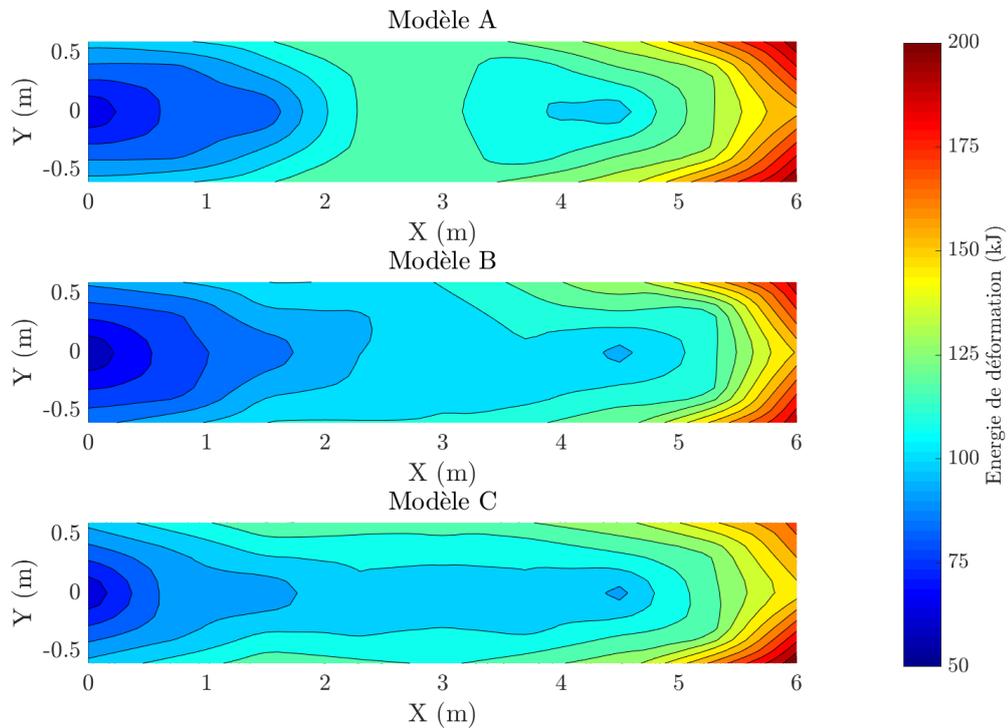


FIGURE 4.23 – Evolution de l'énergie de déformation totale en fonction de la position du chargement, pour les trois modèles de filet

Bien que les comportements des trois modèles soient qualitativement très proches, il existe tout de même une différence notable entre d'une part celui du modèle *A* et d'autre part ceux des modèles *B* et *C*. Si la raideur apparente augmente au passage de la région où se produit l'effet rideau dans le module central (voir Paragraphe 2.3.3) au voisinage du poteau, le modèle *A* est le seul pour lequel il est possible de délimiter clairement cette zone de plus forte raideur. Celle-ci est ainsi située entre les abscisses $X = 2\text{m}$ et $X = 3\text{m}$ et l'énergie de déformation, pour un enfoncement du bloc de 3m y est environ égale à 125 kJ. La description plus fine de la cinématique des anneaux du modèle *C* amène ainsi à penser le comportement de ce dernier est sans doute le plus proche de la réalité.

Evaluation de la part de l'énergie totale de la structure apportée par la déformation des rives

Maintenant que l'influence de la position du bloc sur l'énergie totale de la structure a été clairement identifiée, la part de cette énergie qui est due à la déformation de l'ensemble des câbles de rives peut être étudiée pour chacun des trois modèles. Les résultats de la comparaison sont présentés sur la figure 4.24.

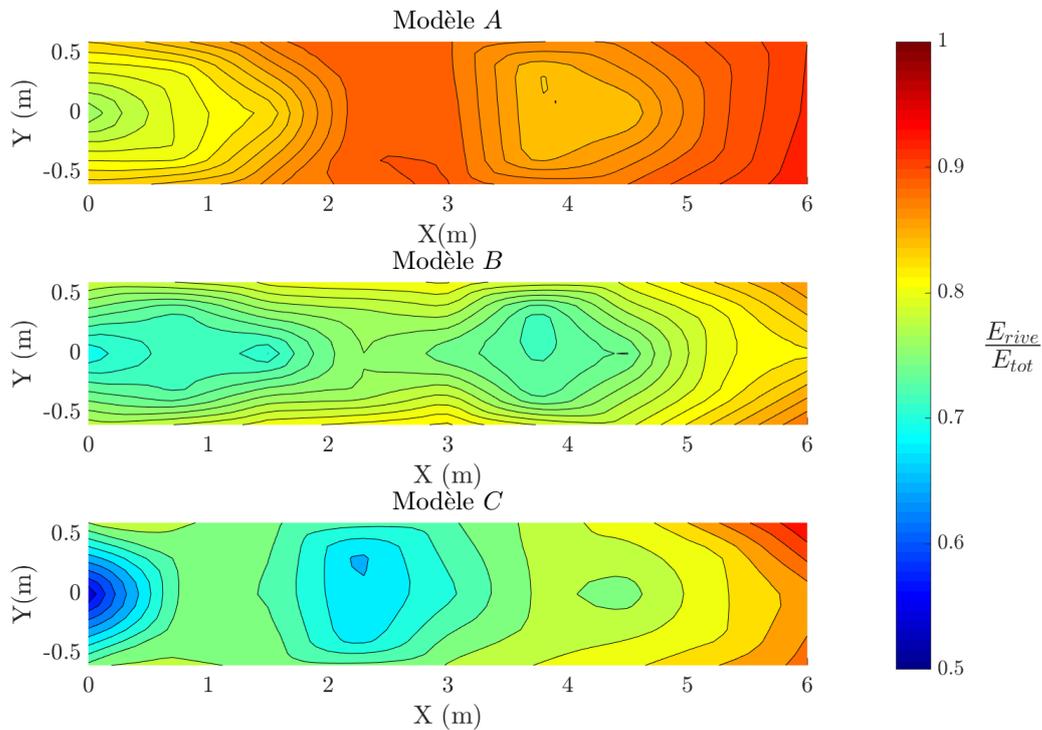


FIGURE 4.24 – Evolution de la la part d'énergie accumulée par les câbles en fonction de la position du chargement pour chacun des trois modèles de filet

Pour les trois modèles, au moins 75 % de l'énergie de la structure est fournie par la déformation des câbles de rive sur une grande partie du domaine étudié. Contrairement à ce qui pouvait être observé pour la distribution de l'énergie totale, aucune tendance globale ne semble se dégager ici de la comparaison des trois modèles. On remarque toutefois, en recoupant les cartes de la figure 4.23 avec celles de la figure 4.24, que la part de l'énergie uniquement due à la déformation des câbles de rive suit globalement l'évolution de l'énergie de déformation totale. Cette remarque est tout de même à nuancer par l'observation de certains phénomènes locaux, qui dérogent à cette règle. Par exemple, la région au voisinage du poteau est, pour le modèle *C*, un domaine sur lequel la part de l'énergie des rives atteint un minimum local, alors que l'énergie totale n'y est pas singulièrement faible. Paradoxalement, pour mieux comprendre les cartes de la figure 4.24, il peut être utile de les lire en inversant les ratios. En effet, les régions où la part de l'énergie des câbles de rive est faible correspondent également à celles où, au contraire, la part de l'énergie de déformation élastique de la nappe est élevée. De plus, les trois nappes ne peuvent intrinsèquement pas accumuler la même quantité d'énergie. Il suffit de se référer aux comportements des trois modèles d'anneaux, présentés au paragraphe 4.2.1, pour s'en convaincre. En tenant compte

de la géométrie réelle de l'anneau dans le calcul de l'énergie de flexion, le Modèle C conserve naturellement une part plus importante de l'énergie de déformation du système que les modèles A et B . À l'inverse, comme le seuil en déformation du modèle A n'est pas adapté en fonction de la position des anneaux au sein de la nappe, celle-ci devient rapidement raide dans les zones où l'effet rideau se produit et accumule ainsi moins d'énergie que le filet réel lors du régime de flexion. Cette dernière remarque explique en partie les contrastes observés entre les trois modèles. L'étude de la répartition de l'énergie entre câbles de rive et filet révèle en effet que les comportements des trois nappes sont véritablement différents. À la suite du commentaire de la figure 4.23, tout porte cependant à croire que ces différences ont un rôle très limité sur le comportement global de la structure. En effet, si elle peut varier entre les modèles, la quantité d'énergie que peut accumuler le filet, lorsque le chargement augmente, est limitée.

Répartition de l'énergie entre les câbles de rive

La dernière partie de cette comparaison est consacrée à la répartition de l'énergie entre les différents câbles de rive de l'écran. Les résultats des calculs menés avec les trois modèles sont respectivement présentés sur les figures 4.25, 4.26 et 4.27. On se réfère, pour leur interprétation, à la nomenclature introduite sur la figure 2.13 du paragraphe 2.3.2. Le principal enseignement de ces séries de cartes est que les répartitions des énergies, entre les différents câbles de rive, obtenues avec les trois modèles de filet sont identiques. Cette observation confirme que les variations locales des réponses des trois nappes, illustrées sur la figure 4.24 ont une influence limitée sur la distribution des efforts.

Par ailleurs, seuls les câbles de rive les plus proches du lieu du chargement sont sollicités. Ainsi, si les glissements relatifs des câbles facilitent localement la transmission des efforts vers les ancrages, ils contraignent également leurs diffusions vers les autres régions de la structure. En l'occurrence, les trois câbles situés les plus à gauche de l'écran ne sont jamais sollicités pour ce niveau d'enfoncement, lorsque la position du bloc évolue dans la moitié de structure opposée. Les modes de sollicitation des câbles en fonction de la position du chargement sont également parfaitement lisibles. Quand le chargement est appliqué dans le module central, seul les quatre câbles de rive centraux (B^{inf} , B_{bis}^{inf} , B^{sup} et B_{bis}^{sup}) sont sollicités.

Comme attendu, en raison des fortes propriétés de symétrie de la structure, leurs contributions sont quasiment identiques pour un chargement situé au centre du filet. Lorsque le bloc est ensuite déplacé le long du plan de symétrie, orienté selon l'axe e_X , les contributions des câbles B^{inf} et B^{sup} deviennent plus importantes que celles des câbles B_{bis}^{inf} et B_{bis}^{sup} . Dans la mesure où les câbles bis sont placés du côté de l'écran soumis aux sollicitations, ce constat peut sembler contre intuitif. Il s'explique en réalité très bien en confrontant les positions du blocs à celles des ancrages de chacun des câbles (tête ou pied de poteaux). En effet, pour un même déplacement vertical, la déformation d'un câble est maximale lorsque le bloc est situé à l'abscisse d'un de ses ancrages. Pour cette même raison, les influences des câbles A_{sup}^{inf} et A_{bis}^{sup} sont observées à partir de l'instant où le bloc atteint le poteau séparant le module central du module latéral. Elles continuent ensuite d'augmenter en même temps que celles des câbles A_{sup}^{inf} et A_{bis}^{sup} diminuent.

Si le chargement est continûment déplacé en direction du poteau extérieur, une diminution de la part de l'énergie accumulée par l'ensemble des câbles au profit de celle emmagasinée par la rive latérale peut être observée. L'évolution de la répartition de l'énergie de

déformation, lorsque le bloc est cette fois déplacé selon l'axe e_Y , s'interprète tout aussi simplement. L'énergie est équitablement répartie entre les rives inférieure et supérieure quant le bloc est situé en $Y = 0$. Lorsque que celui-ci est translaté en direction d'une des deux rives, cette dernière accumule une part de l'énergie de plus en plus importante, pour finalement être la seule à être mise à contribution.

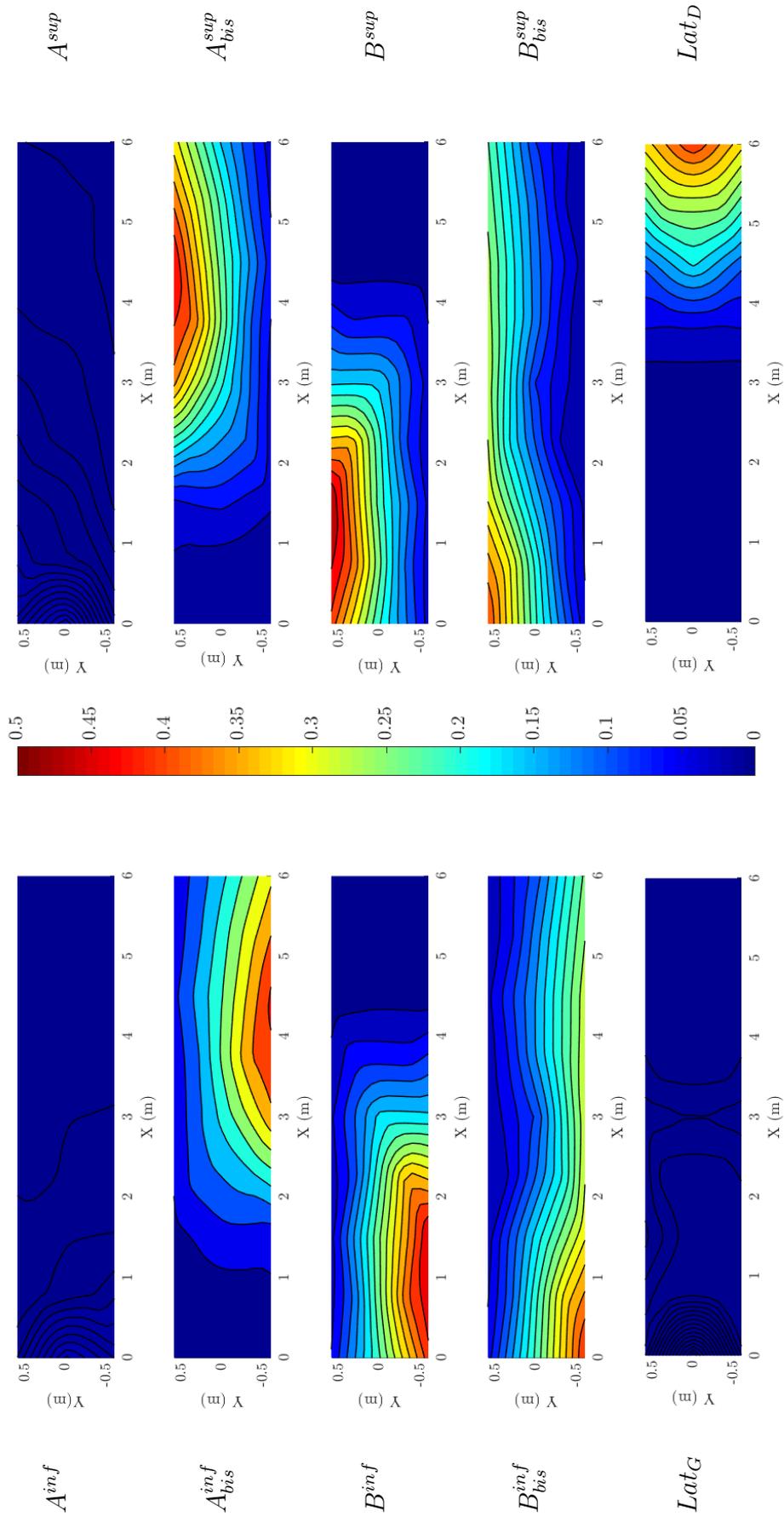


FIGURE 4.25 – Fraction de l'énergie plastique dissipée par chacune des rives en fonction de la position de l'impact. Modèle A

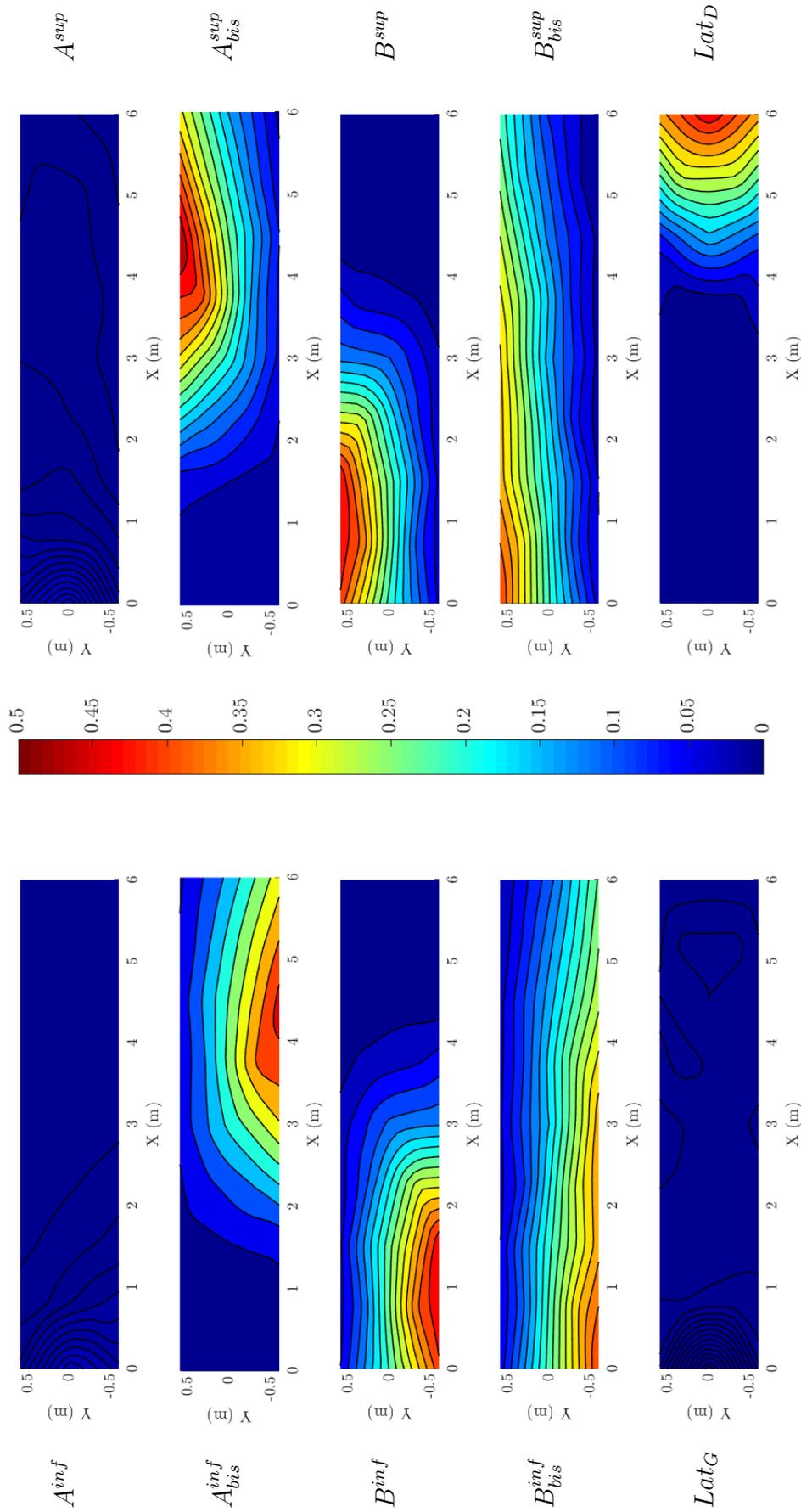


FIGURE 4.26 – Fraction de l'énergie plastique dissipée par chacune des rives en fonction de la position de l'impact. Modèle B

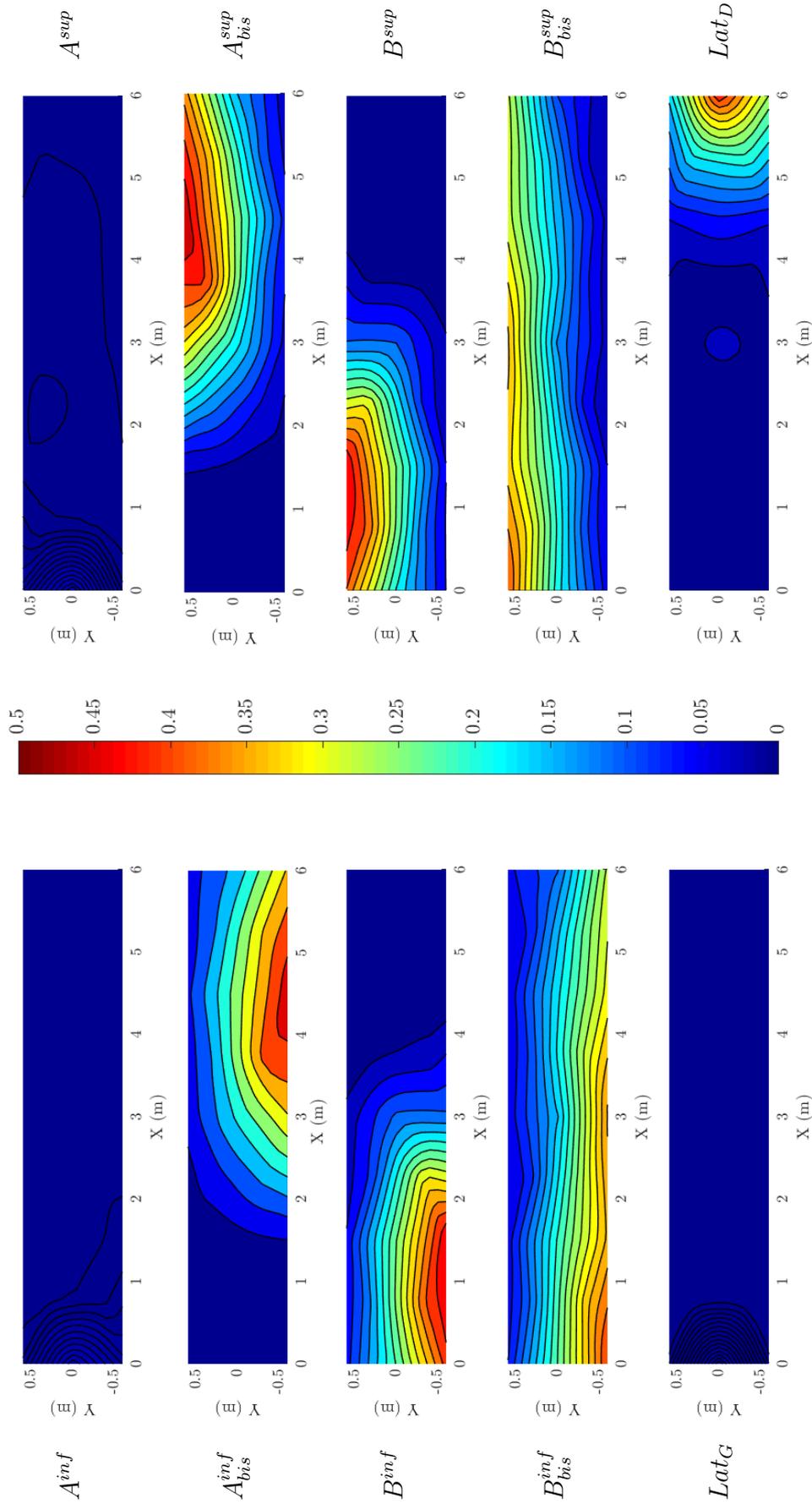


FIGURE 4.27 – Fraction de l'énergie plastique dissipée par chacune des rives en fonction de la position de l'impact. Modèle C

4.5.3 Evolution de la hauteur du filet à l'équilibre

Il est important de rappeler ici que l'un des critères de réussite de l'ETAG27 est géométrique (cf. Paragraphe 2.2.2). En effet, à la suite d'un impact d'une énergie modérée, l'écran doit être en état d'arrêter d'autres blocs. Pour cela, il est nécessaire que la hauteur du filet disponible à la suite du premier impact, mesurée perpendiculairement au terrain, reste suffisante. La limite fixée par l'ETAG27 est égale à 70% de la hauteur initiale, appelée également hauteur nominale (h_n). Comme cette grandeur est mesurée après l'impact, elle est impossible à évaluer avec un simple calcul de l'équilibre de la structure, qui ne tient pas compte des phénomènes irréversibles. Pour cette raison, la hauteur du filet calculée avant décharge, avec l'algorithme de relaxation dynamique, est ici notée h_r par abus de notation, mais ne correspond pas à la hauteur résiduelle tel qu'elle est définie dans l'ETAG27. Son évolution en fonction de la position du bloc est présentée, pour chacun des trois modèles, sur la figure 4.28.

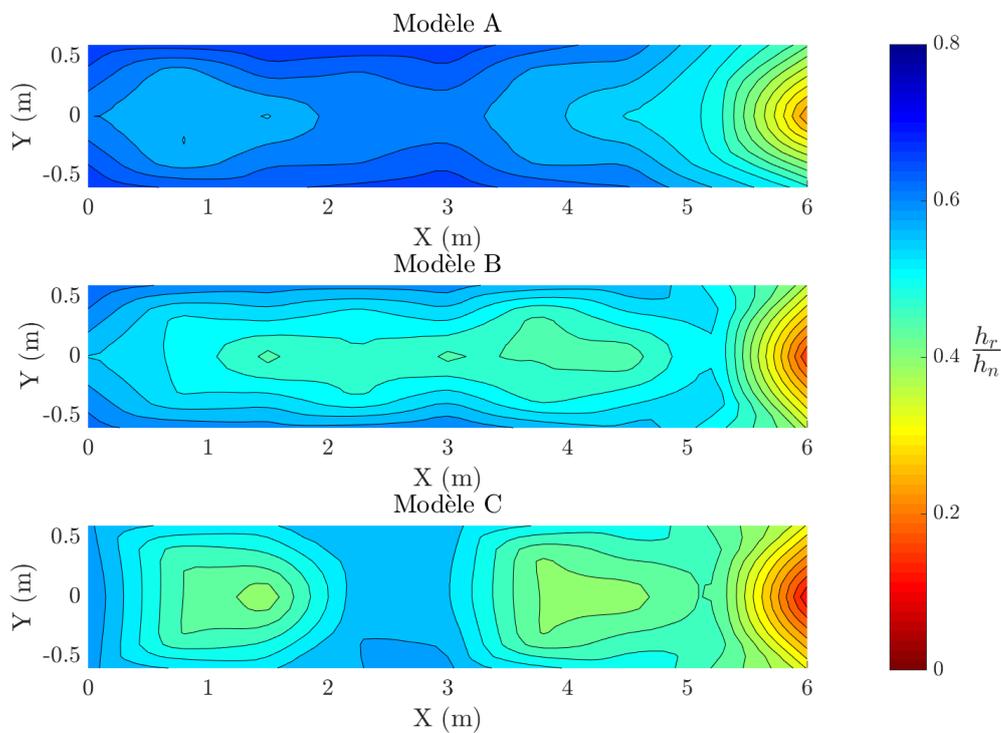


FIGURE 4.28 – Evolution du rapport entre la hauteur du filet à l'équilibre et la hauteur nominale en fonction de la position du chargement pour chacun des trois modèles de filet

A l'image de la cartographie de la part de l'énergie totale dissipée par les rives présentée sur la figure 4.24, ces cartes de la hauteur à l'équilibre attestent des différences de comportement entre les trois modèles de filet. Malgré tout, certaines tendances intéressantes peuvent être dégagées des réponses des trois modèles. Tout d'abord, contrairement à ce qui aurait pu être envisagé, la hauteur à l'équilibre n'est pas minimale au milieu des modules. En mettant de côté le cas singulier de la sollicitation à proximité de la rive latérale, on peut distinguer, pour chaque module, une région située à mi-chemin entre le poteau et le centre du module, dans laquelle la hauteur du filet est inférieure à environ $0,5h_n$. Par ailleurs,

les classements des modèles en fonction de la hauteur à l'équilibre et de la part d'énergie accumulée par les rives (cf. Figure 4.24) sont identiques. Autrement dit, les relations d'ordre entre ces trois modèles montrent que plus l'énergie de déformation du filet est élevée, plus sa hauteur à l'équilibre est faible. Cette remarque reste une propriété de ces trois modélisations et ne doit toutefois pas être érigée en règle. D'autre part, les faibles valeurs de hauteurs, calculées pour une sollicitation à proximité de la rive latérale, sont causées par l'effet rideau le long de cette rive. Malgré toutes les différences mentionnées précédemment, il est tout de même intéressant de noter que si les modèles de filets sont comparés dans le cadre de l'ETAG27, les écarts de hauteur à l'équilibre évalués sont ténus. En effet, lorsque le bloc est à la position $(0,0)$, les hauteurs des trois modèles de filets sont tous compris dans l'intervalle $[0.6h_n, 0.7h_n]$.

4.5.4 Etude des chemins de diffusion des efforts au sein du filet

L'étude de la fraction de l'énergie totale, de la structure à l'équilibre, causée par la déformation du filet ainsi que celle des hauteurs à l'équilibre, présentées respectivement sur les figures 4.24 et 4.28, ont révélé des différences de comportement entre les trois modèles. Cependant, au regard des résultats présentés sur les figures 4.25, 4.26 et 4.27, ces différences ne semblent pas avoir un impact significatif sur la diffusion des efforts vers les câbles de rive. Ces résultats conduisent à deux postulats distincts, qui semblent tous deux être vérifiés.

Le premier est qu'à la différence des câbles de rive, le filet ne peut qu'accumuler une quantité d'énergie limitée et les écarts entre les comportements globaux, des trois modélisations de la structure, sont déterminés par la géométrie du filet une fois que celui-ci est tendu. Ce dernier point est illustré par les résultats des simulations de l'essai quasi-statique, présentés sur la figure 4.20. Le modèle *A* est raide plus rapidement que les deux autres dans la région où l'effet rideau se produit. L'élongation du filet est ainsi plus faible, tandis que les déformations des rives sont quant à elles plus grandes pour une même altitude du bloc. Les écarts entre les comportements augmentent ensuite naturellement à cause des non-linéarités géométriques provoquées par les grands déplacements.

Le second postulat est que les variations locales du champ de déformations, dues aux propriétés mécaniques intrinsèques des modèles, ont une influence sur la géométrie du filet à l'équilibre, mais ne modifient pas les chemins de diffusion des efforts. Ce second postulat est vérifié dans ce paragraphe en comparant les chemins de diffusion des efforts au sein des trois filets à l'équilibre. Les cartographies, présentées sur la figure 4.29, sont établies à partir de la méthode de calcul des contraintes moyennes décrite et appliquée au problème du PH dans le paragraphe 4.3.4.

Les lignes des contraintes principales sont cette fois matérialisées et seule la direction de la contrainte la plus élevée est tracée. Par ailleurs, les lignes sont représentées à l'aide d'un gradient de couleur qui indique l'intensité de la contrainte. Cependant, celle-ci n'est pas évaluée de manière absolue, mais avec par un coefficient compris entre 0 et 1. Le poids de 0 indique que la zone du filet est au repos, tandis que celui de 1 est attribué à une région tendue. Pour obtenir une représentation de l'état de contrainte contrastée, les régions tendues ne sont donc pas différenciées, contrairement à celles restant dans le régime de flexion. D'autre part, seules les évolutions de l'état de contrainte selon la direction \underline{e}_X sont représentées sur la figure 4.29. En effet, les variations des grandeurs, étudiées depuis le début du paragraphe 4.4.2, présentent toute le même profil selon la hauteur du filet. En l'occurrence, on s'attend

ici à ce que les lignes de contrainte convergent toujours vers la position du bloc, mais avec des intensités de contrainte plus élevées à proximité de la rive vers laquelle le bloc a été déplacé.

Les lignes de contraintes principales convergent toutes vers le bloc, pour les trois modèles de filet et cela quelle que soit l'abscisse du chargement. Les motifs qu'elles dessinent pour chaque modèle partagent de nombreuses caractéristiques. La principale est l'existence de points attracteurs, appartenant aux rives inférieure et supérieure et vers lesquels convergent les lignes de diffusion des efforts. Ces points remarquables sont visibles grâce aux inflexions dues aux discontinuités de courbure de la rive, dessinée en noir sur la figure 4.29. Ils correspondent physiquement à la première connexion entre le filet et le câble de rive, dont l'extrémité la plus proche est ancrée au poteau voisin. Par ailleurs, pour une altitude du bloc égale à 3m, seuls les anneaux appartenant à une région limitée du filet, située autour de la zone chargée, sont tendus. Cette région peut être séparée en deux parties situées de part et d'autre du bloc. Chacune d'entre elles peut être représentée par un triangle dont les sommets sont le centre du bloc et les deux points attracteurs les plus proches. Pour les trois modèles, les anneaux les plus tendus sont distribués le long des deux grands côtés de ce triangle. En outre, comme évoqué lors du commentaire de la figure 4.24, présentant les évolutions de la part d'énergie accumulée par les rives, le modèle *A* est effectivement celui pour lequel le nombre d'anneaux tendus est le plus élevé.

En dehors de cette région où le filet est tendu, l'attraction de la rive est plus faible, mais toujours visible. En réalité si les points de connexion entre la rive et le filet, situés à proximité du chargement, concentrent une grande partie des efforts, ceux localisés à l'extérieur de la zone tendue attirent également une part des efforts. Les déviations exercées sur les lignes de contrainte, par ces points plus éloignés, sont cependant moins importantes et une partie des efforts transitent du bloc vers la rive latérale sans être déviée.

La description de la figure 4.29, a permis de confirmer que les différences, précédemment observées entre les comportements locaux des modèles de filet, n'ont pas de réelle influence sur la diffusion des efforts à l'échelle de l'ensemble de la nappe. Les chemins des contraintes principales semblent être, au contraire, déterminés par la géométrie des rives et leurs connexions avec le filet.

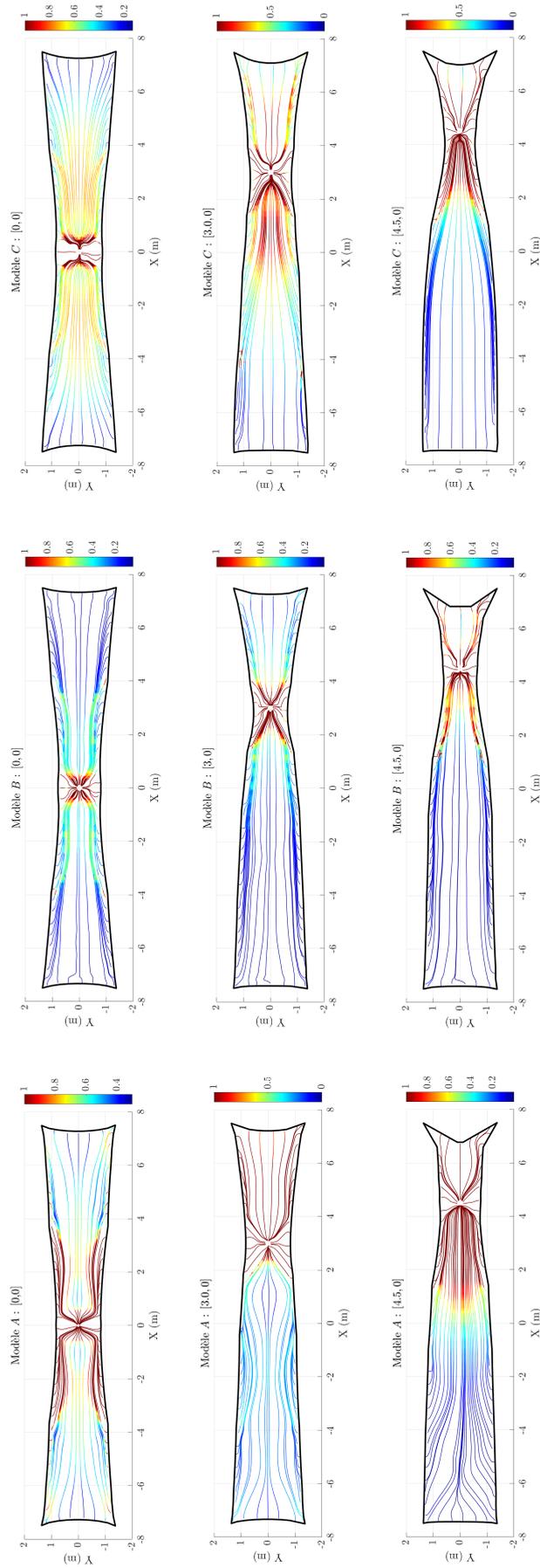


FIGURE 4.29 — Tracés des chemins de diffusion des contraintes dans le filet en fonction de la position du bloc pour les trois modèles de filet

4.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la comparaison de trois modèles discrets de filet ASM4, issus de la littérature scientifique. Les propriétés mécaniques intrinsèques des nappes d'interception, formées à partir de chacun de ces modèles, ont été rigoureusement identifiées, au paragraphe 4.1, grâce à une méthode d'homogénéisation. Il a alors pu être constaté, que leurs comportements macroscopiques dépendent autant du choix de la modélisation que de celui de l'orientation du motif périodique. Une fois les raideurs des nappes identifiées à l'aide des essais du projet national (cf. Paragraphe 4.2), les comportements des trois modèles ont été comparés, au paragraphe 4.3, en reproduisant numériquement la transformation d'une membrane plane en un parabolöide-hyperbolique. Cette étude a souligné, à raideur axiale équivalente, l'influence du coefficient de Poisson, qui est notamment nul pour le modèle *A* selon les directions de propagation de son motif périodique. La dernière partie de ce chapitre a, quant à elle, été dédiée à l'influence de la modélisation du filet sur le comportement de la structure complète. Avec l'orientation de la nappe utilisée pour l'écran C2ROP et en l'absence de cisaillement, les comportements de membrane des trois modèles sont similaires. L'absence de cisaillement est naturellement assurée par le glissement du filet le long des rives. Il a été montré dans un premier temps, au paragraphe 4.4, que les trois modèles reproduisent avec succès le comportement réel de la structure, observé lors de l'essai sous chargement quasi-statique conduit dans le cadre du projet national. L'évolution de la réponse de l'ouvrage en fonction de la position du chargement a été évaluée dans un second temps. Il a alors été observé que le choix du modèle influence la géométrie du filet à l'équilibre dans des proportions non négligeables (cf. Paragraphe 4.5.3). Malgré cela il a également été observé que ces différences n'ont qu'une influence limitée sur la distribution des efforts vers les câbles de rive. Il est ainsi possible de conclure que d'un point de vue global, la réponse de l'ouvrage (énergie dissipée, profondeur maximale) est pilotée par les structures supports (haubans, poteaux, câbles de rive et dissipateurs qui écrètent toutes les surtensions locales) et que la modélisation du filet influence principalement l'allure de la déformée et donc la hauteur résiduelle.

Chapitre 5

Développement d'une famille de modèles simplifiés d'écran pare-blocs

5.1 Objectifs de l'approche

Le rôle du filet dans une barrière de protection pare-blocs est double. Il permet d'intercepter le bloc impactant tout en transmettant ses efforts aux câbles de rive. Les câbles de rive ainsi que les câbles de haubanage dissipent, quant à eux, l'énergie du bloc. La classification des composants de l'écran en trois catégories, proposée par l'ETAG27, peut ainsi être naturellement simplifiée en distinguant la nappe de filet des autres composants qui seront regroupés sous l'appellation générique *superstructures*. Une grande majorité des modélisations d'écrans, qu'elles utilisent des descriptions discrètes ou continues de la structure, décrivent avec précision la géométrie et le comportement de chacun des composants (voir chapitre 3). La complexité des phénomènes physiques dont le filet est le siège au cours de l'impact, pourrait justifier ce choix de modélisation, afin de décrire correctement le comportement local de la structure d'interception. Cependant, les nombreuses variabilités qui rendent incertaine la réponse globale de la structure, remettent en cause la pertinence de ces approches face à la volonté de minimiser les temps de calcul. L'étude du comportement expérimental de l'écran C2ROP, menée au paragraphe 2.3.3, ainsi que les conclusions du chapitre 4 sur la comparaison des modèles de filet ASM4 illustrent bien le dilemme posé aux modélisateurs. Les écarts ténus, entre les réponses obtenues à l'aide des modèles *A*, *B* et *C* sont-ils significatifs en comparaison des écarts observés entre les deux essais dynamiques, réalisés dans les conditions de l'ETAG27? Si la réponse à cette question ne peut pas être donnée avec certitude, le choix d'utiliser un modèle comptant huit fois plus de degrés de liberté peut être difficile à justifier. Par ailleurs, dans la majorité des cas, seuls les modes de ruines sont recherchés et la nappe de filet est en principe préservée par le plafonnement des efforts dans les superstructures. Pour aller encore plus loin dans la simplification de la modélisation, il est proposé ici de représenter le filet par un nombre (très) limité de degrés de libertés en translation, rassemblés dans des *macros-éléments* qui n'auront plus de réalité physique.

La modélisation, ainsi que les hypothèses nécessaires à sa réalisation, seront présentées dans un premier temps pour les superstructures et la nappe de filet. Dans un second temps le modèle sera utilisé pour décrire le comportement de la barrière sous différentes conditions d'impact. Le potentiel de cette approche de modélisation sera exploré, à la fin de ce chapitre,

au travers de quelques exemples d'applications.

5.2 Construction des modèles simplifiés

5.2.1 Modélisation des superstructures

L'appellation superstructure regroupe l'ensemble des câbles de rive et de haubanage ainsi que les poteaux et les dissipateurs d'énergie. Dans le cas de l'écran C2ROP, tous les dissipateurs sont montés sur les différents câbles de rive (cf. 2.3.2). Les déplacements des têtes des poteaux restent donc limités face à ceux des rives. La géométrie de la structure peut ainsi être grandement simplifiée, en faisant l'hypothèse que les têtes des poteaux sont des points fixes. Les superstructures se réduisent alors simplement aux câbles de rive. Une seconde simplification peut ensuite être réalisée en considérant que la structure admet également deux plans de symétrie orthogonaux qui s'intersectent au milieu du filet. Cependant, ces deux symétries sont rompues, dès lors que les chargements appliqués à l'écran ne sont plus contenus dans leurs plans. Si elle ne doit pas être mise de côté pour autant, cette simplification doit être intégrée avec précaution dans une approche systématique de modélisation. La discrétisation des câbles de rive est ensuite réalisée en considérant les connections réelles qui les lient à la nappe de filet. Le câblage de l'écran C2ROP a préalablement été présenté au paragraphe 2.3.2 du chapitre 2. La figure 2.13 est tout de même reprise ici, en indiquant en noir la position des anneaux utilisés pour la représentation des différents câbles. Comme indiqué au paragraphe 3.1.3 du chapitre 3, chaque câble est modélisé par un câble glissant, dont le comportement est complètement déterminé par la connaissance de son chargement ponctuel. Afin de simplifier la description géométrique, seules les têtes et pieds de poteaux, dorénavant fixes, ainsi que les anneaux appartenant à plusieurs câbles de rive sont considérés. En reprenant les notations de la figure 5.1, les câbles B et B_{bis} sont ainsi modélisés par des éléments comportant six particules, les câbles A et A_{bis} par des éléments à cinq particules et les deux câbles latéraux par des éléments à quatre particules.

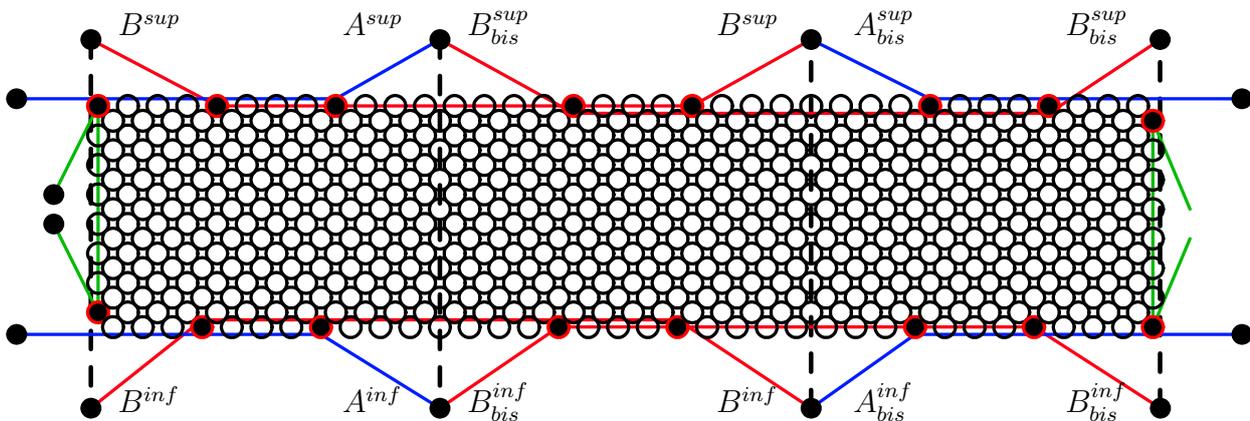


FIGURE 5.1 – Détails du câblage entre les câbles de rive et le filet

5.2.2 Modélisation du filet

Pour parvenir à des représentations "allégées" d'un écran de protection, il est indispensable de repenser complètement la description de la nappe d'interception. En effet, celle de l'écran C2ROP, qui est environ quatre fois (deux fois dans chaque direction) plus petite que les filets couramment installés sur les barrières hautes énergies, compte tout de même 576 anneaux. En outre, dans les représentations discrètes introduites au chapitre 4, chacun d'entre eux est décrit par un nombre de particules variant de un à huit en fonction de la modélisation retenue, pour un total atteignant le cas échéant 4608 particules à l'échelle du filet complet. Une approche intuitive, pour diminuer le nombre de degrés de liberté, consiste à représenter le filet à l'échelle de la structure et non plus à celle de la maille, conformément aux approches introduites au paragraphe 4.1.1 du chapitre 4. L'efficacité de l'homogénéisation a notamment été vérifiée au cours du chapitre précédent, pour des applications outrepassant les hypothèses délimitant son cadre de validité initiale. Cependant, les écueils posés par le comportement du filet lors d'un impact, confrontent ces méthodes à leurs limites. La séparation des échelles, en passant de l'anneau au filet complet, n'est plus vérifiée dans les régions où l'effet rideau se produit. Les conditions de bords singulières, provoquées par le glissement des anneaux, influencent alors significativement la réponse locale de la nappe. L'amplitude des déformations dans les zones de glissement transforme à tel point la géométrie des anneaux, que les propriétés mécaniques de la nappe sont localement modifiées et deviennent incompatibles avec celles identifiées dans la géométrie plane de référence.

Pour contourner ces difficultés, il est nécessaire de différencier les régions du filet en fonction des états de déformation qui y sont imposés. La nature du câblage utilisé pour l'écran C2ROP permet de classer facilement les zones du filet en deux familles. D'un côté, celles situées en milieu de module et dans lesquelles le filet est maintenu par deux câbles de rive (cf. Figure 5.1). Comme aucun obstacle n'y entrave l'effet rideau, le glissement du filet est total lorsqu'un impact se produit dans une de ces trois régions (une pour chacun des trois modules). De l'autre, les zones situées au voisinage des poteaux et où le filet est soutenu par un unique câble de rive. Lorsqu'un impact a lieu dans une de ces régions, le glissement du filet est limité par les deux câbles de rive ancrés au niveau du poteau voisin. Ces deux cinématiques antagonistes sont expliquées par la figure 5.2. Les câbles de rive étant tous équipés de dissipateurs, leur tension, notée ici T en accord avec les notations de la figure 5.2, n'évolue quasiment plus à partir d'un certain niveau de déformation.

Les conditions d'équilibre de deux couples de particules, délimitant respectivement une zone de glissement (situation illustrée sur la figure 5.2 (b)) et le voisinage d'un poteau (situation illustrée sur la figure 5.2 (c)) sont étudiées ici. Lorsqu'un effort vertical est appliqué aux deux noeuds du module central, les câbles de rive centraux (en rouge) se déforment jusqu'à ce que leurs tensions soient égales à la valeur limite T . A partir de cet instant, comme les câbles sont doublés en milieu de module, les noeuds centraux ne sont plus équilibrés horizontalement et glissent l'un vers l'autre. A l'inverse, si l'on effectue le même test avec deux noeuds encadrant un poteau et appartenant donc à deux modules distincts, ce même déséquilibre aura cette fois pour effet d'écarter les noeuds. Cette remarque sur le comportement de la rive a des implications fondamentales pour la représentation du filet. Dans les zones de faibles glissements, situées au voisinage des poteaux, la répartition des mailles le long de la rive change peu pendant un impact, que celui-ci soit localisé à proximité d'un poteau, comme explicité sur la figure 5.2 (b), ou au milieu d'un des modules voisins. Ces zones transitoires entre deux modules empêchent la propagation de l'effet rideau et

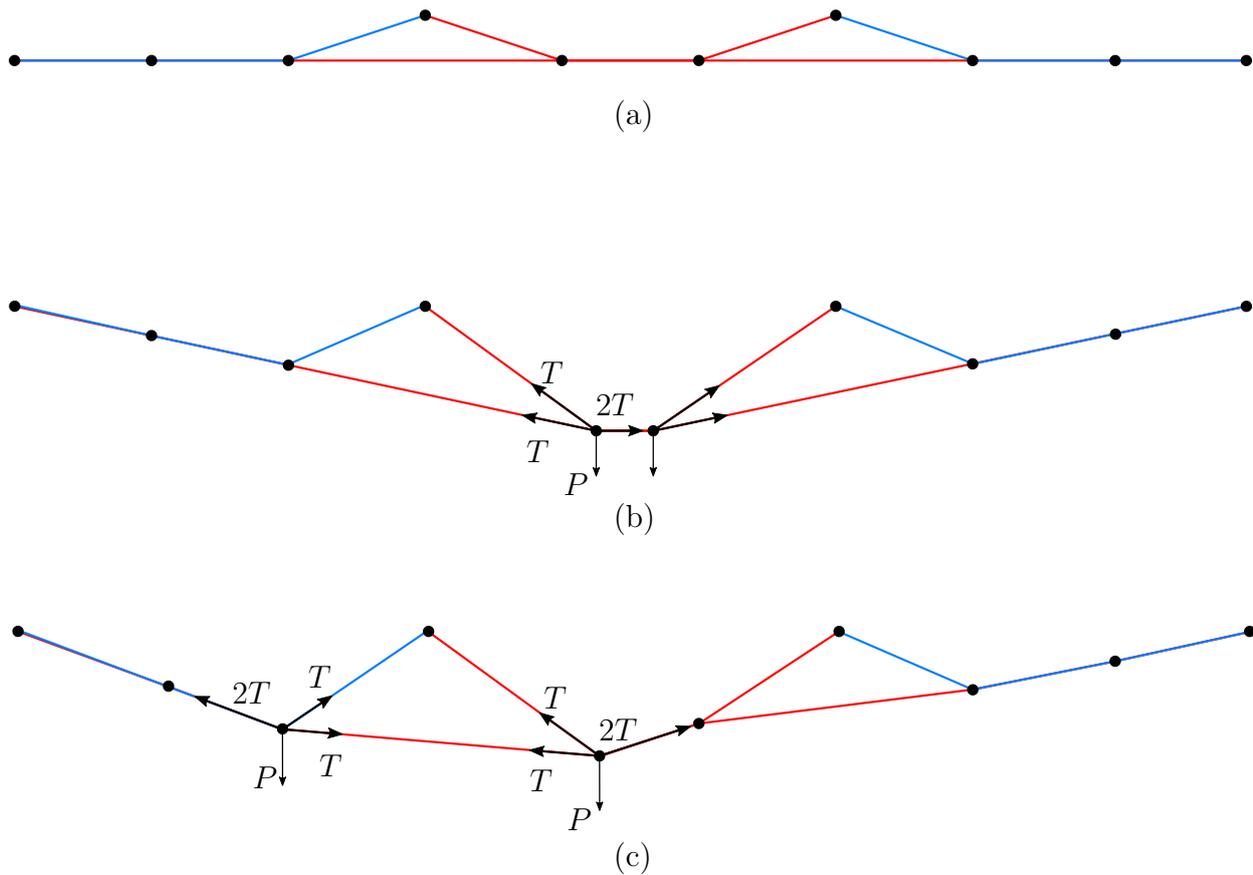


FIGURE 5.2 – Déformation des superstructures en fonction de la localisation du chargement. (a) : Géométrie au repos, (b) : Effet rideau en milieu de module, (c) : Chargement au voisinage d'un poteau

délimitent ainsi des régions où le filet est relativement préservé. Il est important de noter ici que même si ces zones de transition sont insensibles à l'effet rideau, les dilatations peuvent y être négatives lorsqu'un impact s'y produit. Dans ce cas de figure, les anneaux ne glissent pas le long de la rive, mais le chargement imposé par le bloc contraint tout de même certains d'entre eux à se contracter uniquement par effet Poisson.

Le premier découpage du filet, construit à partir de la géométrie initiale de la structure, peut maintenant être enrichi par les conclusions de cette étude dédiée au comportement de la rive. Les différentes régions du filet identifiées dépendent dorénavant autant de la position de l'impact que des connexions entre les superstructures. Deux nouvelles familles de région sont ainsi ajoutées à la classification primaire : les régions *impactées* et les régions *préservées*. Comme expliqué précédemment, cette classification n'est pas exclusive, dans le sens où toutes les combinaisons construites à partir, d'une part de la géométrie initiale et d'autre part de la position de l'impact, sont possibles. L'hypothèse est ici faite que, dans les régions préservées, le champ de déformation est suffisamment régulier pour que le comportement du filet puisse être approché par celui de sa membrane équivalente. En revanche, dans les zones impactées, le champ de déformation peut être très hétérogène dans la hauteur du filet, avec notamment la juxtaposition d'anneaux sollicités en traction deux points et quatre points (cf. Figure 3.2 du paragraphe 3.1.2). Ce contraste est particulièrement visible dans les régions situées en milieu de module, où la largeur du filet devient quasiment nulle le long de la rive à cause de l'effet rideau. Deux modélisations du filet seront ainsi considérées dans la suite en fonction de la position de la région à modéliser par rapport à celle de la zone impactée. Dans les régions où le filet est uniformément tendu, il sera représenté par un unique anneau modélisé par un câble iso-tension bouclé (voir Paragraphe 3.1.2), dont les propriétés mécaniques sont déterminées par les résultats du paragraphe 4.2.1 du chapitre 4. Afin de rendre compte d'un gradient de déformation dans ces zones, il seraient par ailleurs possible de subdiviser l'anneau en plusieurs éléments sans changer le découpage du filet. Cette subtilité ne sera toutefois pas implémentée dans ce chapitre. Dans les régions impactées par le bloc au sein desquelles les déformations sont localisées, le filet est représenté par plusieurs éléments indépendants, reliant des couples de particules. Cette modélisation est directement déduite du modèle *A* d'anneau ASM4 étudié dans les deux précédents chapitres.

5.2.3 Construction d'une famille de modèles

Présentation de la démarche

Les représentations des superstructures et de la nappe de filet proposées dans les paragraphes 5.2.1 et 5.2.2, permettent de modéliser des impacts localisés en quasiment tous les points du filet en ne considérant qu'un nombre très réduit de particules. En particulier, le découpage du filet est directement déduit de celui des câbles de rive. Chacune des régions géométriques correspond, soit au voisinage d'un poteau, soit au milieu d'un module, et est délimitée par deux particules consécutives de la rive. Comme indiqué à la fin du paragraphe 5.2.2, le choix du modèle de filet utilisé pour chacune des régions géométriques dépend quant à lui de la seconde classification, construite à partir de la position de l'impact. Des particules supplémentaires sont ensuite ajoutées le long du plan horizontal (le sens de la largeur), en regard des particules mobiles déjà présentes sur les câbles de rive. La nappe est ainsi découpée en bandes de largeur et de hauteur variables.

D'autres particules sont également ajoutées pour décrire la géométrie du bloc impactant.

Celui-ci est modélisé par un carré dont l'emprise correspond à celle de la face inférieure du bloc polyédrique normalisé décrit dans l'ETAG027 [45]. Afin de montrer le caractère systématique de ce type de représentation, les modélisations de quatre impacts, décrivant l'ensemble des modèles simplifiés, sont proposées dans cette partie. Le passage d'un modèle à un autre est également discuté en fonction de la position du bloc. Seulement une moitié des structures modélisées sera à chaque fois illustrée sur les figures décrites dans la suite. La seconde moitié pouvant être facilement reconstitué par effet miroir en adaptant la hauteur de la bande en fonction de la position du centre du bloc.

Impact centré

La configuration de cet impact est celle utilisée pour les essais normalisés. Le bloc impacte le centre du module central. Le schéma du modèle de structure retenu est présenté sur la figure 5.3. En plus du plan de symétrie horizontal, la structure admet également un plan de symétrie vertical. Les traits représentés en pointillés permettent de délimiter les différentes régions du filet, mais n'ont pas de réalité physique dans le modèle. De la même manière les bandes verticales hachurées montrent l'emplacement réel des poteaux qui ne sont cependant pas représentés dans cette modélisation. Les éléments du filet dans la zone impactée en milieu de module, où risque de se produire l'effet rideau, sont modélisés par des interactions à deux particules. Chacun de ces éléments relie un point du bloc avec une des quatre particules délimitant la zone de glissement. Le bloc est représenté par trois particules pour tenir compte de l'influence de son encombrement sur le calcul des déformations des éléments du filet. Le filet est considéré comme *préservé* en dehors de la zone de glissement et est donc représenté par des anneaux reliant chacun quatre particules, respectivement localisées dans les coins de chacune des régions du filet.

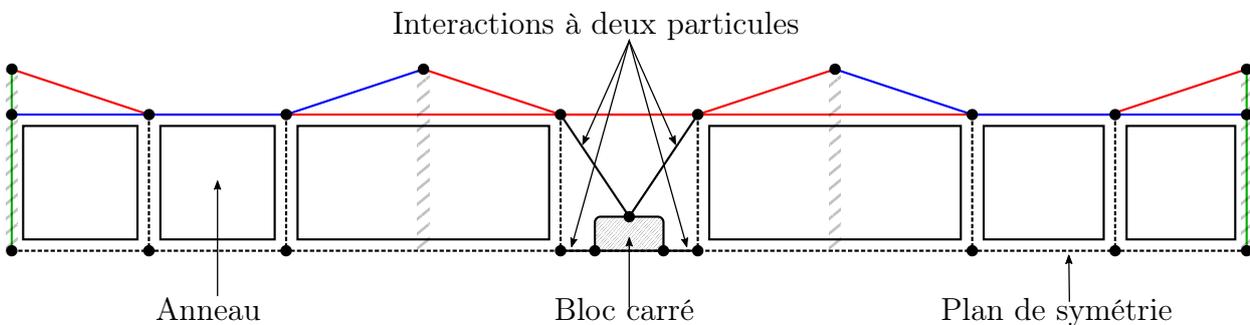


FIGURE 5.3 – Modélisation d'un impact dans les conditions ETAG

La même modélisation peut être utilisée pour simuler un impact au milieu d'un module latéral. Le schéma du modèle simplifié associé est représenté sur la figure 5.4. Le filet est modélisé dans la zone impactée, à l'intérieur de laquelle le glissement est susceptible de se produire, de la même manière que sur la figure 5.3. La portion de filet connectée à la rive latérale voisine, située à droite de la zone impactée sur la figure 5.4, est ici considérée comme préservée et est modélisée par un anneau. Une grande partie de la déformation dans la direction horizontale est, en effet, assurée par la rive latérale. Par ailleurs, l'effet rideau, le long de celle-ci, est contrarié par les connections entre le filet et les câbles A_{bis}^{sup} et A_{bis}^{inf} (voir Figure 5.1). Ces deux conditions permettent de justifier que les hétérogénéités du champ de déformations sont vraisemblablement limitées dans cette région de la nappe.

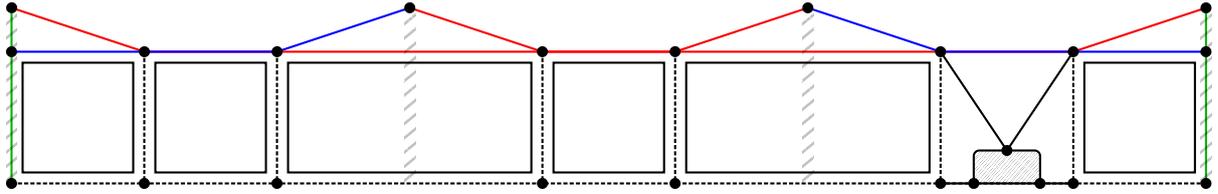


FIGURE 5.4 – Modélisation d'un impact centré sur un module latéral

Impact décentré

Lorsque l'impact est localisé entre une zone de glissement et un poteau, le modèle est adapté selon le schéma de la figure 5.5. Comme pour les impacts centrés, le fillet est toujours modélisé par des éléments anneaux dans les régions dites préservées. Cependant, la définition de la zone impactée est cette fois légèrement modifiée. Dans la mesure où un léger glissement est tout de même susceptible de se produire dans le module touché par le bloc, la zone impactée est ainsi étendue à la zone de glissement adjacente, appartenant au même module. Le fillet est représenté par des interactions à deux particules dans toute la région impactée, qui s'étend ici sur deux zones de la classification géométrique primaire. Le choix de ne pas utiliser un anneau dans cette zone, malgré la contrainte imposée par le câblage sur le glissement, permet, entre autre, de conserver la même connectivité entre le bloc et le fillet pour toute position d'impact. Il est également motivé par la répartition de l'énergie de déformation entre les différents câbles de rive, observées au paragraphe 4.5.2 lors de la comparaison des trois modèles de fillet (cf. figures 4.25, 4.26 et 4.27). Il existe en effet des régions du fillet, situées aux voisinages des poteaux, au sein desquelles trois câbles de chacune des rives sont sollicités simultanément.

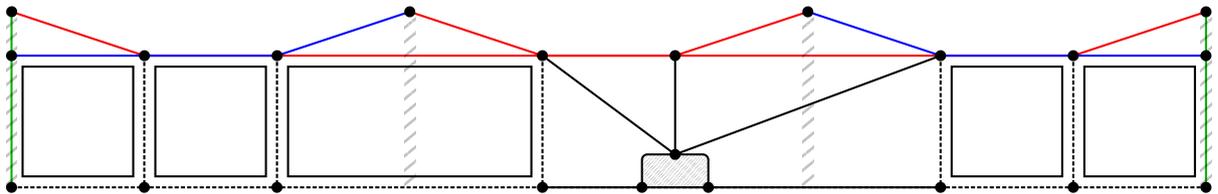


FIGURE 5.5 – Modélisation d'un impact décentré dans le module central

La figure 5.6 illustre le pendant du modèle d'impact décentré, représenté sur la figure 5.3, lorsque le bloc atteint le module latéral. La répartition des zones et le choix des modèles de fillet associés sont inchangés.

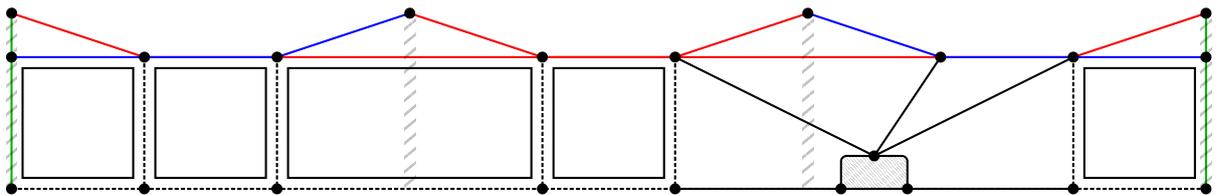


FIGURE 5.6 – Modélisation d'un impact décentré dans un module latéral

5.2. CONSTRUCTION DES MODÈLES SIMPLIFIÉS

Les modèles, présentés tout au long de ce paragraphe, permettent de reproduire des impacts localisés dans toute la largeur du filet, excepté au voisinage immédiat des rives latérales. Toutefois, en tenant compte de la sollicitation dans la conception du modèle de structure, on génère nécessairement des cas de charge limites, associés à des discontinuités de modélisation. La figure 5.7 recense ces points singuliers, situés à la transition de deux modélisations, et décrit la géométrie du filet dans leurs voisinages. La dimension d d'un module de l'écran, notée d sur la figure 5.7, est l'unité de longueur choisie pour parcourir la largeur du filet et les éléments masqués, éloignés de la zone impactée, sont toujours modélisés par des anneaux. Il est évident que ces discontinuités sont uniquement des artefacts de modélisation et n'ont aucune réalité physique. Afin de disposer de résultats interprétables, leur influence, sur le comportement de la structure, doit rester limitée devant les fluctuations de la réponse du modèle, observées lorsque le chargement est déplacé dans la largeur du filet. Ce point sera discuté plus en détails au paragraphe 5.3.1.

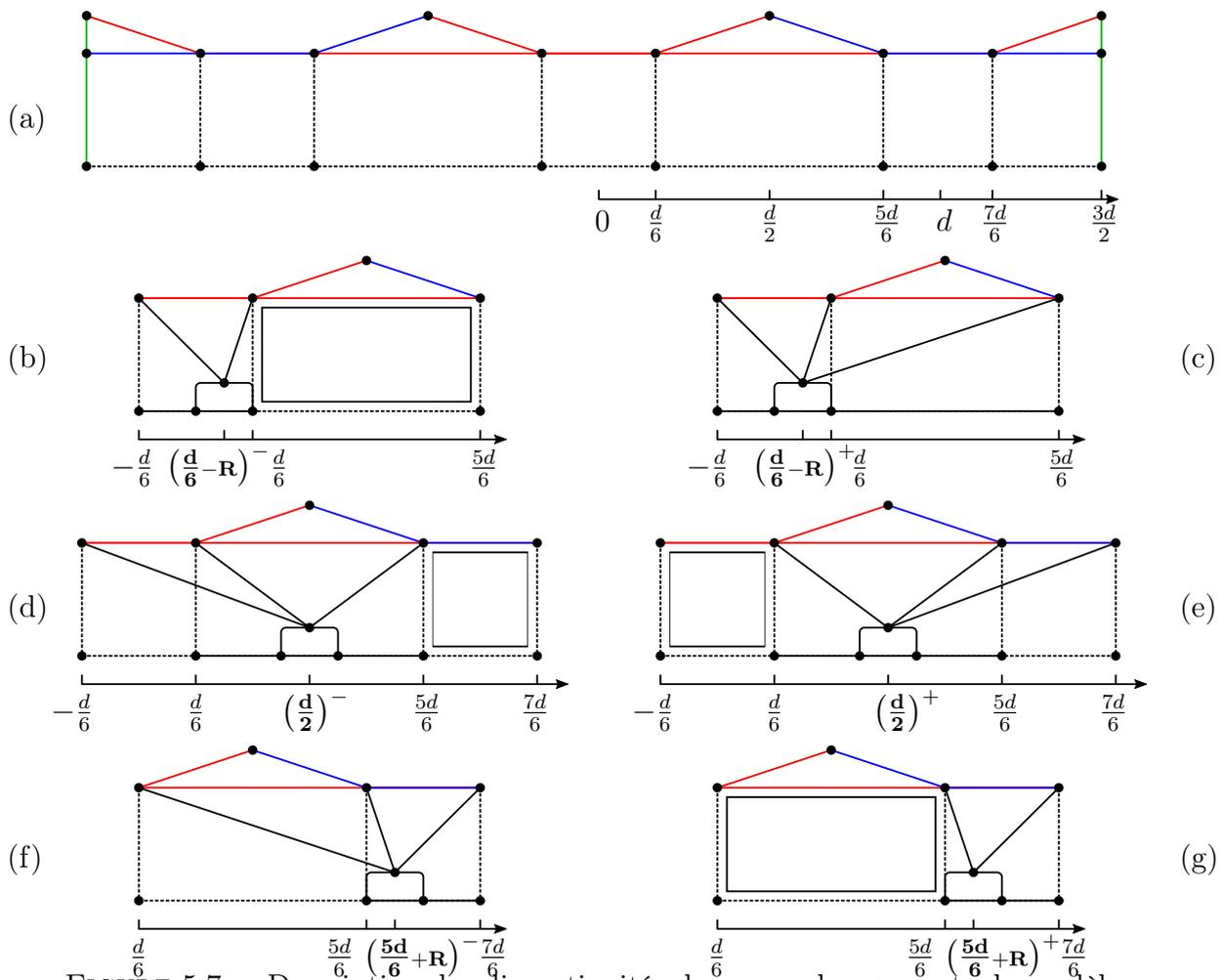


FIGURE 5.7 – Description des discontinuités dues aux changements de modèles

Dans le prochain paragraphe, les propriétés mécaniques des éléments de la nappe d'interception seront identifiées, en reprenant une partie des résultats établis au cours du chapitre 4. Une première étape de validation de la démarche de modélisation sera par ailleurs menée, en comparant les comportements des modèles simplifiés à ceux des modèles A , B , C

également introduits au chapitre 4.

5.3 Estimation des propriétés mécaniques de la nappe de filet et validation des modèles

5.3.1 Choix des propriétés mécaniques du filet

L'estimation des propriétés mécaniques du filet représente une réelle difficulté lorsque celui-ci est modélisé à une autre échelle que celle de la maille élémentaire. L'idée proposée dans ce paragraphe tire partie des résultats des calculs d'homogénéisation conduits pour les modèles A et B au cours du paragraphe 4.1.3. Toutefois, la démarche est ici inversée. Le problème n'est dorénavant plus d'estimer les propriétés mécaniques d'un milieu équivalent à partir de la connaissance du milieu discret, mais de retrouver les propriétés des quelques éléments discrets composant le milieu à partir d'un comportement de membrane a priori connu. En réalité, la plus grosse part de ce travail d'identification a été implicitement réalisée lors du choix des modèles associés aux différentes régions du filet. En effet, les conclusions du paragraphe 4.1.3 illustrent bien que le comportement du milieu continu équivalent est intimement lié à la représentation de la micro-structure discrète. Ainsi, puisque dans les régions impactées par le bloc le filet est représenté par des interactions à deux particules, il est contraint d'y reproduire le comportement d'une membrane dont le coefficient de Poisson est nul. La description des modèles discrets du filet, proposée au paragraphe 5.2.2, a été bâtie à partir d'arguments relatifs à la géométrie déformée de la structure. Ainsi, les enseignements du paragraphe 4.1.3 explicitent complètement le comportement implicitement attribué à la nappe de filet dans sa configuration déformée, ou plus exactement, pour reprendre les termes utilisés au paragraphe 2.3.3 du chapitre 2, une fois que la géométrie a été adaptée à une charge verticale. Le filet est donc modélisé sans raideur en cisaillement dans l'ensemble de la nappe. De plus, les efforts intérieurs, selon ses deux directions principales, sont couplés par un coefficient de Poisson égal à 1 dans les régions préservées, tandis qu'ils sont en revanche complètement découplés au voisinage de l'impact.

Les anneaux

Compte tenu des hypothèses faites dans le paragraphe 5.2.2, les propriétés mécaniques des éléments de type anneau s'identifient naturellement à celles de la membrane équivalente qui ont été estimées au paragraphe 4.2.1. La limite en déformation ϵ_{lim} , où le changement de raideur a lieu, est toujours égale à la constante permettant de passer du périmètre de l'anneau carré, à la circonférence du cercle dans lequel ce dernier est initialement inscrit (cf. Paragraphe 4.2.2). Les raideurs des *macros anneaux* se déduisent ensuite des raideurs de membrane données au paragraphe 4.2.1, en les multipliant par leur dimension caractéristique. Comme dans ces modèles, certains anneaux sont rectangulaires et non carrés, cette longueur est ici définie par la racine carrée de l'aire délimitée par l'anneau dans sa configuration au repos.

Les longueurs non chargées des anneaux, définie ici comme les longueurs maximales pour lesquelles les efforts intérieurs dans les éléments restent nuls, sont elles aussi calculées à partir de la géométrie initiale de la structure. Pour tenir compte des dimensions des anneaux réels qui composent la nappe de l'écran C2ROP, deux coefficients de forme sont également

introduits. D'après la figure 5.1, chacun des modules est composé de douze anneaux dans le sens de la largeur et de huit dans la hauteur. Les dimensions de la nappe peuvent ensuite être déterminées à partir de celles des anneaux, en utilisant les relations géométriques introduites sur la figure 4.19 du paragraphe 4.4.1. Les deux coefficients de forme sont ainsi calculés de la manière suivante :

$$\begin{cases} C_l = \frac{24\sqrt{2}R}{l_{module}} \simeq 0,92 & \text{Facteur d'échelle dans le sens de la largeur} \\ C_h = \frac{16\sqrt{2}R}{h_{module}} \simeq 1,11 & \text{Facteur d'échelle dans le sens de la hauteur} \end{cases} \quad (5.1)$$

Où l_{module} et h_{module} sont la largeur et la hauteur d'un module, respectivement égales à 5 m et 2,75 m. Toutes les longueurs non chargées sont donc calculées à partir des longueurs mesurées dans la configuration initiale du problème, en leur appliquant les facteurs d'échelle de la relation 5.1. On peut par ailleurs remarquer que, dans la mesure où les anneaux n'ont pas de raideur en cisaillement, leurs périmètres restent quasiment inchangés par cette adaptation de la géométrie de la nappe aux dimensions de l'écran. En effet on vérifie bien que : $\frac{1}{2}(C_l + C_h) \simeq 1$.

La construction d'un macro-anneau est ici illustrée au travers de l'exemple présenté sur la figure 5.8. On cherche à identifier les propriétés mécaniques d'un anneau rectangulaire dont les côtés sont respectivement égaux aux longueurs a et b . La disposition des anneaux réels à l'intérieur du macro-anneau est donnée à titre indicatif pour faciliter la compréhension du problème. En effet, le découpage du filet en macro-éléments repose uniquement sur les dimensions des superstructures et non sur la répartition des anneaux dans la nappe. Ce dernier paramètre est pris en compte dans un second temps grâce aux coefficients de forme C_l et C_h .

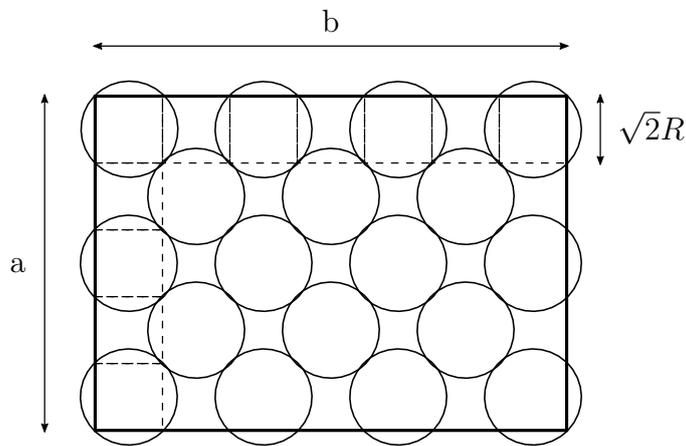


FIGURE 5.8 – Evaluation des propriétés mécaniques d'un anneau dans les régions du filet éloignées de l'impact

En reprenant les notations du chapitre 4, la raideur de membrane associée au modèle B de filet et exprimée en $N.m^{-1}$ est notée K_a^B . Comme expliqué ci-dessus, la raideur ES du macro-anneau, exprimée quant à elle en N , est calculée à partir de la longueur caractéristique de l'élément, définie par la racine carrée de la surface du filet qu'il occupe.

$$ES = \sqrt{ab}K_a^B \quad (5.2)$$

La longueur non-chargée de l'élément dépend du nombre d'anneaux qu'il contient réellement. A titre d'exemple, le filet complet comporte huit anneaux dans le sens de la hauteur. D'après les notations introduites sur la figure 5.8, la hauteur de la nappe comptée à partir de celles des anneaux est donc égale à $16\sqrt{2}R$, où R est le rayon d'un anneau. La hauteur et la largeur du macro-élément sont ainsi calculées de manière identique en considérant respectivement les facteurs d'échelle C_h et C_l donnés par la relation 5.1. La longueur non-chargée de l'anneau est finalement exprimée de la manière suivante :

$$l_0 = 2(aC_h + bC_l) \quad (5.3)$$

Les interactions à deux particules

Le filet est donc représenté par des interactions unidirectionnelles dans les zones impactées. Leur principal avantage est de dé-corréler les différentes directions de chargement lorsque le champ de déformation est fortement hétérogène. Leurs propriétés mécaniques sont identifiées de différente manière en fonction de la position de l'impact. On distingue pour cette raison trois sous-cas dans la suite de ce paragraphe : l'impact est situé en milieu de module, l'impact est situé exactement au niveau d'un poteau, l'impact est situé dans le voisinage d'un poteau.

Impact situé en milieu de module. A cause notamment de leur faible raideur en flexion, les anneaux se déforment selon une direction privilégiée le long de la rive et à la verticale du bloc. Lorsque l'impact se produit au milieu d'un module, cette déformation est par ailleurs amplifiée par l'effet rideau, qui applique une déformation négative dans la direction orthogonale à celle du chargement. En revanche, les anneaux, situés en partie courante du filet dans les régions impactées, sont soumis à des dilatations selon l'ensemble des directions du plan de la nappe. Ces hétérogénéités du champ de déformation dans les zones de glissement nécessitent un ajustement des seuils des éléments discrets de la nappe en fonction de leur orientation. Comme expliqué au cours du paragraphe 4.2.2, les seuils associés aux interactions reliant un couple de particules dépendent fortement du champ de déformations local. Ainsi, pour une dilatation surfacique égale, il a été montré, en petites déformations, que les seuils des éléments soumis à un champ de déformation isotrope (traction quatre points) doivent être plus faibles que ceux des éléments soumis à une dilatation uni-axiale ou, a fortiori, à une dilatation négative. Cette conclusion n'est autre que l'expression macroscopique du critère local de conservation de la circonférence des anneaux. Les deux configurations limites retenues dans les zones de glissement sont respectivement :

- La dilatation uni-axiale, illustrée par l'essai de traction sur nappe du PN C2ROP (cf. Paragraphe 2.3.3) pour les éléments situés le long de l'axe de symétrie ;
- La sollicitation deux points (dilatation égale à -1 dans la direction orthogonale au chargement) pour les interactions reliant les particules du bloc à celles de la rive.

Le seuil associé à la première sollicitation, noté ϵ_{lim}^{inf} , a été précédemment calculé au paragraphe 4.2.2. Le second, ϵ_{lim}^{sup} , est quant à lui donné par la déformation pour laquelle la diagonale d'un carré est égale au demi-périmètre du cercle au sein duquel celui-ci est initialement inscrit (voir Figure 5.9).

$$\begin{cases} \epsilon_{lim}^{inf} = 23\% \\ \epsilon_{lim}^{sup} = \frac{1}{2} \left(\frac{(\pi R)^2}{4R^2} - 1 \right) \simeq 73\% \end{cases} \quad (5.4)$$

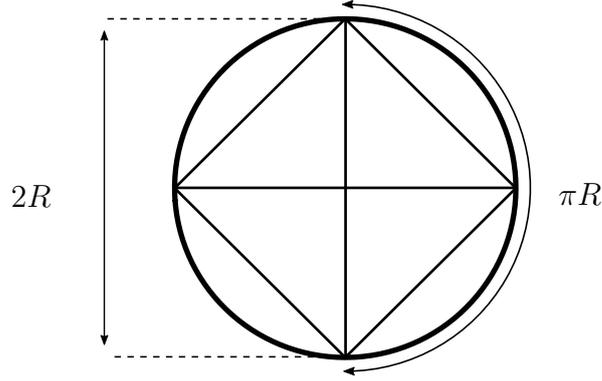


FIGURE 5.9 – Evaluation du seuil pour une sollicitation de traction deux points

Ces deux déformations limites sont ainsi respectivement attribuées aux éléments orientés selon les axes longitudinal et transversal du filet. Pour les autres orientations, une évolution linéaire des déformations limites, en fonction de l'angle θ que forme l'élément avec la direction longitudinale du filet, est proposée (voir Figure 5.10) :

$$\epsilon_{lim}(\theta) = \left(\frac{\epsilon_{lim}^{sup} - \epsilon_{lim}^{inf}}{\theta_{lim}^{sup} - \theta_{lim}^{inf}} \theta + \epsilon_{lim}^{inf} \right) \left(1 + \frac{R_{bloc}}{2l_0} \right) \quad (5.5)$$

où les termes θ_{lim}^{inf} et θ_{lim}^{sup} sont respectivement égaux à 0 et $\frac{\pi}{2}$. Par ailleurs, le terme correctif $\frac{R_{bloc}}{2l_0}$ permet de tenir compte de la déformation de la partie du filet sous le bloc dans le calcul du seuil. En accord avec les notations de la figure 5.11, les longueurs l_0 et l_t correspondent respectivement aux longueurs non-chargée et déformée de l'élément de filet. Il a également été mentionné au paragraphe 5.2.3 que l'emprise du bloc sur le filet est égale à la moitié de son rayon. Si le contact entre le filet et le bloc est frottant et que le glissement relatif entre ces deux éléments reste nul, la déformation du filet est simplement donnée par la relation suivante :

$$\epsilon_{\text{sans glissement}} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{l_t}{l_0} \right)^2 - 1 \right) \quad (5.6)$$

En revanche, si le glissement est parfait, l'échange de longueur entre la partie du filet sous le bloc et l'élément considéré doit cette fois intervenir dans le calcul de la déformation.

$$\epsilon_{\text{avec glissement}} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{l_t + \frac{R_{bloc}}{2}}{l_0 + \frac{R_{bloc}}{2}} \right)^2 - 1 \right) \quad (5.7)$$

En linéarisant la relation (5.7), il est possible d'exprimer la déformation avec glissement en fonction du terme correctif $\frac{R_{bloc}}{2l_0}$.

$$\epsilon_{\text{avec glissement}} = \frac{l_t - l_0}{l_0 + \frac{R_{bloc}}{2}} = \epsilon_{\text{sans glissement}} \left(1 + \frac{R_{bloc}}{2l_0} \right)^{-1} \quad (5.8)$$

Pour une valeur de l_t donnée, la limite en déformation est donc plus rapidement atteinte dans le calcul sans glissement. Le terme correctif $\left(1 + \frac{R_{bloc}}{2l_0} \right)$ a une influence importante

sur le seuil des éléments les plus courts, comme ceux situés sur le plan de symétrie de la structure lors des impacts centrés (cf Figure 5.3 et 5.4). Physiquement, il permet de rendre compte du glissement des points sous le bloc sans ajouter d'interaction supplémentaire. Avec cette modélisation, le glissement est ainsi considéré comme parfait ou nul, en fonction de la présence ou de l'absence du terme correctif dans la relation 5.5.

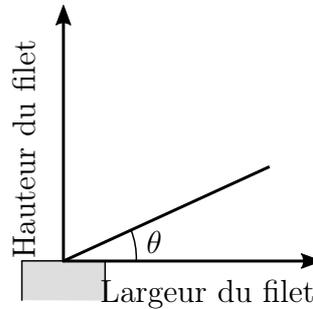


FIGURE 5.10 – Choix du seuil des éléments du filet dans la zone impactée en fonction de leur orientation

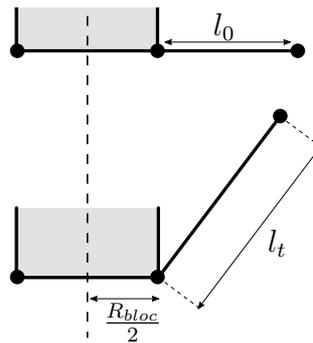


FIGURE 5.11 – Prise en compte du glissement entre le filet et le bloc dans le calcul de la déformation limite

On considère ici la configuration de l'impact centré, initialement présentée sur les figures 5.3 et 5.4, pour illustrer la démarche permettant d'identifier les propriétés mécaniques du filet lorsque la zone impactée est localisée au centre d'un module. L'ensemble des notations introduites sur la figure 5.12 est reprise et le filet est ainsi modélisé par les quatre éléments e_1 , e_2 et leurs symétriques e_1^{bis} et e_2^{bis} dans la région impactée. Les raideurs des éléments sont déterminées dans un premier temps à partir de celle de la membrane équivalente au modèle A , notée K_t^A et caractérisée au cours du précédent chapitre. La raideur de la nappe selon les deux directions principales de son plan est donnée par la relation :

$$ES = \sqrt{\frac{dh_n}{6}} K_t^A \quad (5.9)$$

Où h_n désigne la hauteur nominale du filet et d la longueur d'un module. Cette raideur est ensuite répartie entre les éléments orientés selon chacune de ces deux directions. Il est rappelé que les éléments connectés à la rive, ici e_2 et e_2^{bis} , sont orientés selon la direction

donnée par la hauteur du filet, tandis que les éléments e_1 et e_1^{bis} sont quand à eux orientés selon la direction orthogonale. Les raideurs des éléments sont donc données par la relation suivante :

$$ES(e_1) = ES(e_2) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{dh_n}{6}} K_t^A \quad (5.10)$$

La longueur non chargée d'un élément à deux particule est ensuite déterminée de la même manière que celle d'un anneau. On se contente ici d'identifier la longueur de l'élément e_2 dont le vecteur associé est noté $\underline{X}(e_2)$. Sa longueur non-chargée $l_0(e_2)$ est calculée en fonction de sa géométrie ainsi que des coefficients de forme fournis par la relation (5.1).

$$l_0(e_2)^2 = \sqrt{(C_l X_1(e_2))^2 + (C_h X_2(e_2))^2} \quad (5.11)$$

Après avoir évalué les longueurs non-chargées, les déformations limites peuvent elles aussi être calculées. En accord avec la méthode présentée dans ce paragraphe et sous l'hypothèse de glissement parfait, la déformation limite $\epsilon_{lim}(e_1)$ et $\epsilon_{lim}(e_2)$ sont déterminées à partir de la relation (5.5).

$$\begin{cases} \epsilon_{lim}(e_1) = \left(\frac{\epsilon_{lim}^{sup} - \epsilon_{lim}^{inf}}{\frac{\pi}{2}} 0 + \epsilon_{lim}^{inf} \right) \left(1 + \frac{R_{bloc}}{2l_0(e_1)} \right) = \epsilon_{lim}^{inf} \left(1 + \frac{R_{bloc}}{2l_0(e_1)} \right) \\ \epsilon_{lim}(e_2) = \left(\frac{\epsilon_{lim}^{sup} - \epsilon_{lim}^{inf}}{\frac{\pi}{2}} \theta_2 + \epsilon_{lim}^{inf} \right) \left(1 + \frac{R_{bloc}}{2l_0(e_2)} \right) \end{cases} \quad (5.12)$$

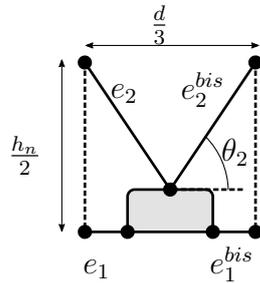


FIGURE 5.12 – Identification des propriétés mécaniques du filet pour un impact situé au centre d'un module

Impact situé au voisinage d'un poteau. Les conclusions de la discussion, sur la variation des déformations limites, ne peuvent être appliquées qu'aux régions situées en milieu de module dans des zones de glissement. En revanche, en cas d'impact à proximité d'un poteau, comme la nappe est naturellement préservée de l'effet rideau, les seuils des éléments restent a priori faibles et ne varient que modérément dans la hauteur du filet. On choisit ainsi d'appliquer le même seuil ϵ_{lim}^{inf} à tous les éléments du filet reliant deux particules, pour un impact théorique localisé à l'aplomb d'un poteau (configuration illustrée par les dessins (d) et (e) de la figure 5.7).

Cette configuration est notamment reproduite sur le dessin (d) de la figure 5.7, qui est ici reprise de manière plus détaillée (voir figure 5.13). La nappe est modélisée par cinq interactions reliant chacune deux particules lorsque l'impact se produit au voisinage d'un poteau. Par ailleurs, la région du filet impactée couvre une largeur d , égale à la dimension

d'un module. La raideur de la nappe, selon chacune de ses directions principales, est toujours déterminée en fonction de la raideur de membrane K_t^A par la relation suivante :

$$ES = \sqrt{\frac{dh_n}{2}} K_t^A \quad (5.13)$$

Cette raideur est ensuite répartie entre les éléments orientés selon une même direction.

$$\begin{cases} ES(e_1) = ES(e_2) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{dh_n}{2}} K_t^A \\ ES(e_3) = ES(e_4) = ES(e_5) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{dh_n}{2}} K_t^A \end{cases} \quad (5.14)$$

Les longueurs non-chargées des différents éléments sont également calculées en fonction des coefficients de forme, à partir de la relation 5.11. Jusqu'ici, l'évaluation des propriétés mécaniques reste inchangée. La seule modification à prendre en compte concerne ainsi l'identification des déformations limites des cinq interactions. Il a été précisé ci-dessus que, lorsqu'un impact se produit au voisinage d'un poteau, l'absence de l'effet rideau amène à considérer un champ de déformation isotrope (traction quatre points) au sein de la région du filet touchée par le bloc. Dans le cas limite théorique où l'impact est localisé à la position exacte d'un poteau, les seuils en déformations des éléments e_1 , e_2 , e_3 , e_4 et e_5 sont donc tous donnés par la valeur limite ϵ_{lim}^{inf} .

$$\epsilon_{lim}(e_1) = \epsilon_{lim}(e_2) = \epsilon_{lim}(e_3) = \epsilon_{lim}(e_4) = \epsilon_{lim}(e_5) = \epsilon_{lim}^{inf} \quad (5.15)$$

Il est important de rappeler ici que, dans le cadre des modèles simplifiés, les poteaux sont de simples indications géométriques. La nature des interactions entre le bloc et la structure d'interception reste ainsi la même pour toutes les positions d'impact et aucune modification de la cinématique du bloc n'est introduite pour reproduire un contact avec un poteau.

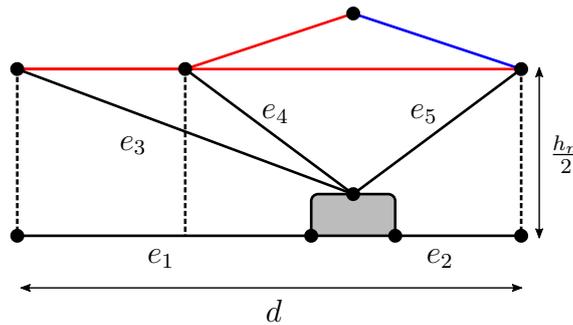


FIGURE 5.13 – Identification des propriétés mécaniques du filet pour un impact situé exactement à l'emplacement d'un poteau

Les discontinuités entre modèles

Les utilisations de deux critères distincts (celui présenté ci-dessus et celui donné par la relation (5.5)), pour établir la limite en déformation des éléments, soulèvent inévitablement le problème des discontinuités entre les différents modèles simplifiés. Une partie de ces

discontinuités est intrinsèquement liée aux découpages du filet, proposés au paragraphe 5.2.2 et constitue la principale limite de cette approche de modélisation. Les configurations (b) et (c) de la figure 5.7 sont de parfaites illustrations de cette première nature de discontinuité. Le remplacement d’une interaction anneau par une interaction reliant seulement deux particules implique inévitablement un nouveau schéma de diffusion des efforts. Les autres discontinuités peuvent, quant à elles, être liées à l’évolution des propriétés mécaniques d’un même élément en fonction du déplacement du point d’impact. Toujours d’après la figure 5.7, les modèles des configurations (c) et (d) sont a priori identiques. Cependant, suite aux précédentes discussions concernant les choix des seuils en fonction de la position du bloc dans le filet, les déformations limites des deux interactions, reliant les particules du bloc à celles de la rive dans le module central, sont attribuées selon des critères différents dans les configuration (c) et (d). Pour éviter de créer de nouvelles discontinuités au sein d’un même modèle, il est nécessaire que les seuils des éléments changent en fonction de l’abscisse du bloc lorsque celui-ci est situé au voisinage d’un poteau (situations (c), (d), (e), (f) de la figure 5.7). Les déformations limites évoluent ainsi linéairement dans ces régions, entre leurs valeurs calculées à la frontière de la région de glissement voisine et la limite ϵ_{lim}^{inf} lorsque l’abscisse du bloc progresse entre les configurations (c) et (d) ou (f) et (e).

Le calcul des seuils pour un impact localisé au voisinage d’un poteau est illustré par les configurations présentées sur la figure 5.14. Celles illustrées par le dessin (c) a d’ores et déjà été traitée au cours du paragraphe précédent (cf. Figure 5.13). Dans la mesure où l’identification des paramètres mécaniques des éléments du filet a déjà fait l’objet de deux exemples d’application, seuls les calculs des déformations limites, pour lesquels des nouvelles spécificités doivent être considérées, sont ici explicités. Dans la configuration (a), le bloc est situé exactement sur la frontière entre la zone de glissement et le voisinage du poteau. Les déformations limites des éléments e_3 et e_4 sont ainsi calculées à partir du critère (5.5). En revanche la déformation $\epsilon_{lim}(e_5)$ de l’élément e_5 , reliant le bloc à un point de la rive qui n’est pas affecté par l’effet rideau, est égale à la valeur limite ϵ_{lim}^{inf} . On notera au passage que cette question ne se pose pas jamais pour les éléments e_1 et e_2 , dont les valeurs de déformation limite données par le critère (5.5) sont toujours égales à ϵ_{lim}^{inf} . Les déformations limites des éléments e_3 et e_4 dans les configurations (a) et (c), présentées sur la figure 5.14, sont donc déterminées selon deux méthodes différentes.

	Figure 5.14, (a)	Figure 5.14, (b)
e_3	$\epsilon_{lim}(e_3) = \left(\frac{\epsilon_{lim}^{sup} - \epsilon_{lim}^{inf}}{\theta_{lim}^{sup} - \theta_{lim}^{inf}} \theta_3 + \epsilon_{lim}^{inf} \right)$	$\epsilon_{lim}(e_3) = \epsilon_{lim}^{inf}$
e_4	$\epsilon_{lim}(e_4) = \epsilon_{lim}^{sup}$	$\epsilon_{lim}(e_4) = \epsilon_{lim}^{inf}$

TABLE 5.1 – Estimation des déformations limites des éléments du filet reliant deux particules pour les impacts (a) et (b) présentés sur la figure 5.14

Les résultats obtenus dans chacune des situations sont regroupés dans le tableau 5.1. Les déformations limites de ces deux éléments varient ensuite linéairement en fonction de l’abscisse du bloc, entre les valeurs obtenues lors des impacts (a) et (c), pour l’ensemble des configurations intermédiaires (illustré ici par la figure 5.14, (b)). On introduit ainsi X_b^a , X_b^b et X_b^c , les abscisses des positions occupées par le centre du bloc dans les trois configurations de la figure 5.14. Pour alléger les notations, on note également ϵ_{lim}^{sup3} la limite en déformation de l’élément e_3 dans la géométrie (a), dont l’expression est donnée dans le tableau 5.1. Les

déformations limites $\epsilon_{lim}(e_3)$ et $\epsilon_{lim}(e_4)$ sont donc déterminées de la manière suivante dans la configuration (b) :

$$\begin{cases} \epsilon_{lim}(e_3) = \frac{X_b^b - X_b^a}{X_c^c - X_b^a} (\epsilon_{lim}^{inf} - \epsilon_{lim}^{sup3}) + \epsilon_{lim}^{sup3} \\ \epsilon_{lim}(e_4) = \frac{X_b^b - X_b^a}{X_c^c - X_b^a} (\epsilon_{lim}^{inf} - \epsilon_{lim}^{sup3}) + \epsilon_{lim}^{sup} \end{cases} \quad (5.16)$$

Il peut au passage être noté que, contrairement aux apparences, l'angle θ_3 n'est pas une constante du problème, dans la mesure où le bloc peut également être déplacé selon la hauteur du filet et n'est donc pas nécessairement situé sur le plan de symétrie horizontal de la structure.

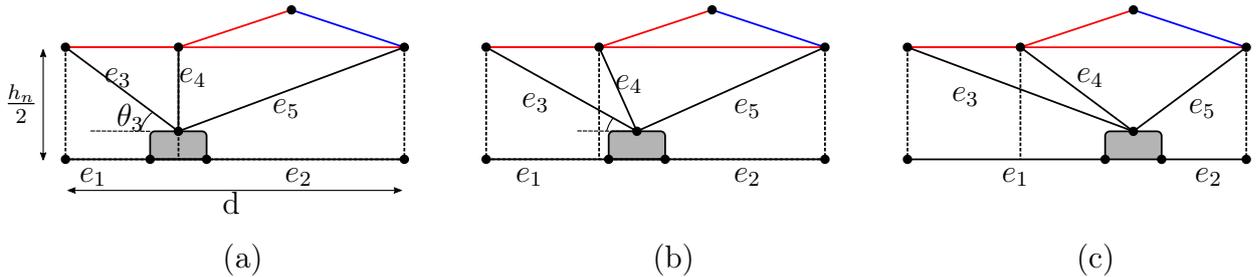


FIGURE 5.14 – Identification des propriétés mécaniques du filet pour un impact au voisinage d'un poteau

Cette discussion sur le choix des paramètres des lois d'interaction achève la présentation de cette famille de modèles simplifiés, qui, en l'état, permet de reproduire une large gamme de conditions d'impacts. Si la géométrie de l'écran a pu être décrite avec une légèreté appréciable pour les performances numériques de cette approche de modélisation, certains doutes ont tout de même été émis, quant à la robustesse des transitions entre deux modèles. Afin d'apporter une réponse à ces réserves, le comportement de cette famille de modèles est confronté, au cours du prochain paragraphe, à ceux des modèles *A*, *B*, *C* explicités au paragraphe 4.4.2.

5.3.2 Comparaison avec les modèles traditionnels et caractérisation des performances mécaniques

L'objectif de ce paragraphe est d'évaluer les performances mécaniques des modèles simplifiés. Il est au préalable nécessaire de définir un comportement de référence de la structure modélisée, qui permettra de construire l'écart de la réponse du modèle à ce comportement étalon. Il a précédemment été montré au cours du paragraphe 2.3.3 qu'un trop grand nombre de paramètres restaient indéterminés dans les essais du PN C2ROP pour les utiliser comme comportement de référence. À l'inverse, plusieurs représentations discrètes de cette écran ont été longuement étudiées et caractérisées avec précision au cours du précédent chapitre. Les réponses des modèles *A*, *B* et *C*, à un chargement quasi-statique de position variable, ont notamment été confrontées dans le paragraphe 4.5. Il semble naturel d'utiliser ici les résultats de cette étude pour définir le comportement de référence de la structure discrète.

Cette approche qui regroupe des résultats obtenus à partir de trois représentations discrètes du filet ASM4, est particulièrement adaptée pour évaluer les comportements des

modèles simplifiés, dont les principales hypothèses de modélisation ont porté sur la nappe d'interception. Le comportement de référence sera ainsi défini par la moyenne des réponses des modèles A , B et C à la sollicitation introduite au paragraphe 4.5. Trois critères de comparaison seront considérés dans la suite de ce paragraphe. Il s'agit respectivement de la hauteur du filet à l'équilibre, précédemment définie au paragraphe 4.5, de la quantité d'énergie totale emmagasinée par les câbles de rive et de la quantité d'énergie accumulée par câbles de rive pris cette fois individuellement. Pour évaluer objectivement les réponses des modèles simplifiés, ces différentes propriétés seront ici évaluées de manière absolue. Par ailleurs un écart type sera systématiquement associé à chacune des valeurs fournies par la moyenne des réponses des modèles A , B et C .

Pour rappel, le chargement utilisé pour l'étude du paragraphe 4.5 est appliqué en imposant la position du centre du bloc. L'altitude de ce dernier étant fixé à 3m, deux paramètres, correspondant aux coordonnées du bloc dans le plan, sont ainsi associés au chargement. De plus, aucun glissement relatif entre la nappe de filet et le bloc n'est autorisé. Ces conditions de chargement sont transposables sans aucune difficulté aux modèles simplifiés. Il peut tout de même être noté qu'en l'absence de glissement entre le bloc et le filet, le terme correctif $\frac{R_{bloc}}{2l_0}$, permettant de tenir compte de la déformation du filet sous le bloc dans le calcul de la déformation limite (5.5), n'est donc pas considéré ici.

Comme pour les trois modèles "traditionnels", l'état d'équilibre des modèles simplifiés est évalué grâce à l'algorithme de relaxation dynamique présenté au paragraphe 3.6. Comme précédemment, les calculs sont effectués pour certaines positions du bloc définies sur la figure 4.22 et les résultats sont ensuite interpolés sur l'ensemble du domaine d'étude. Comme par ailleurs les conditions aux limites des modèles simplifiés sont parfaitement symétriques, les réponses de la structure à des chargements quelconques peuvent être déduites de celles obtenues lorsque le bloc est déplacé à l'intérieur d'un unique quart du filet. Pour cette raison, seules les positions du bloc dont les ordonnées sont positives seront considérées parmi celles présentées sur la figure 4.22.

Evolution de la hauteur à l'équilibre

Comme expliqué au paragraphe 4.5, la hauteur à l'équilibre est le critère qui se substitue à la hauteur résiduelle pour une sollicitation quasi-statique. L'évolution de cette grandeur en fonction de la position du chargement est donnée sur la figures 4.28 pour les modèles d'écran A , B et C . Pour comparer quantitativement les réponses des modèles simplifiés aux calculs de référence, les résultats ne sont pas présentés ici sous la forme de cartographies, bien que l'interpolation permettent d'évaluer la réponse des modèles en tout point du filet. Seulement certaines coupes selon la direction e_Y , définie sur la figure 4.22, sont ainsi utilisées pour plus de clarté. Les réponses des modèles en fonction de l'abscisse du bloc sont ainsi comparées aux comportements de référence sur la figure 5.15 pour des coupes réalisées aux ordonnées $Y_{bloc} = 0$ cm, $Y_{bloc} = 30$ cm et $Y_{bloc} = 60$ cm. En plus du comportement de référence, les hauteurs obtenus avec les modèles A , B et C sont données à titre indicatif. Les évolutions des réponses des modèles simplifiés sont relativement uniformes et suivent ainsi les mêmes tendances que celles du comportement de référence lorsque le bloc est déplacé dans le plan de la nappe. Il peut tout de même être noté, que les variations locales observées dans le premier module ($X < 2,5$ m) avec le modèle de référence ne sont pas reproduites. En réalité les modèles simplifiés reproduisent les mêmes tendances que le modèle A pour lequel la hauteur à l'équilibre est relativement uniforme. Les hauteurs calculées avec les modèles

B et C sont quant à elles légèrement inférieures et varient de manière plus significative avec la position du bloc. Cependant, même en tenant compte de l'intervalle de confiance fourni par l'écart type des réponses des modèles A , B et C à leur moyenne, les valeurs de hauteurs résiduelles estimées avec les modèles simplifiés sur-estiment celles déterminées par les modèles traditionnels. Les écarts relatifs entre les hauteurs à l'équilibre, calculées avec les modèles simplifiés, et les valeurs de références (définies par la moyenne des trois modèles) sont données dans le tableau 5.2.

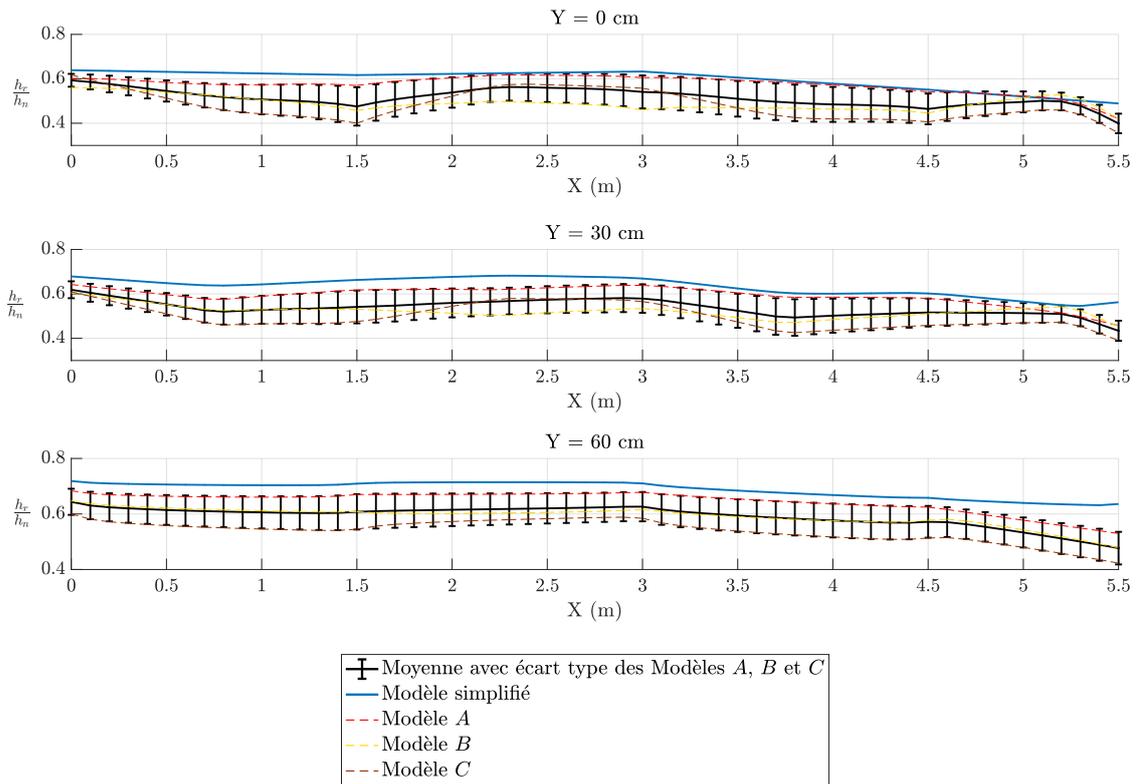


FIGURE 5.15 – Comparaison des hauteurs à l'équilibre calculées avec les modèles de référence et les modèles simplifiés pour différentes positions du bloc

Y_{bloc} (cm)	0	30	60
Ecart relatif moyen (%)	16	18	17
Ecart type des écarts relatifs moyens (%)	7	4	4

TABLE 5.2 – Ecart relatif entre les hauteurs à l'équilibre calculées avec les modèles simplifiés et les valeurs de références

La hauteur à l'équilibre est ainsi sur-estimée de 15% à 20% en fonction de la position du chargement par rapport à la référence. Malgré tout, les tendances sont respectées et les écarts entre les réponses du modèle simplifié et le comportement de référence restent fixés. Ce résultat n'est toutefois pas si surprenant, au regard des nombreuses simplifications qui ont été réalisées pour décrire la géométrie de la nappe filet. En effet, une diminution du nombre de degré de liberté dans le modèle de structure est en contre-partie associée à une augmentation de sa raideur apparente. Les résultats de l'étude, menés au paragraphe 4.5.3

avec les trois modèles traditionnels seulement, ont révélés que la géométrie de la nappe à l'équilibre dépendait fortement de la modélisation retenue. Cette conclusion est attestée ici par les amplitudes importantes des intervalles de confiances fournis avec le comportement de référence, dont les variations en fonction de la position du bloc, notamment au sein du premier module, restent quant à elles limitées (voir Figure 5.15). Il est important de garder à l'esprit que la hauteur résiduelle du filet est un des critères de réussites de l'essai SEL préconisé par l'ETAG27. Il est a priori difficile de prévoir si les écarts entre les hauteurs à l'équilibre observés sur la figure 5.15, augmenteraient ou diminueraient si ceux évalués sur la hauteur résiduelle après un test d'impact dynamique leur étaient substitués. Il n'en est pas moins évident que les prédictions des modèles simplifiés ne sont pas conservatrices et qu'il est indispensable de les ré-évaluer à la baisse avant d'effectuer toute recommandation quant aux performances d'une structure réelle.

Un facteur de correction peut être naturellement construit à partir des écarts relatifs, calculés entre les réponses des modèles simplifiés et le comportement de référence et évalués aux différents points de la nappe où les réponses de ces modèles ont été interpolés. Un échantillon d'environ 400 points est ainsi considéré sur l'ensemble du quart supérieur droit de la nappe. Le coefficient correctif est arbitrairement choisi égal au quantile à 95%, défini statistiquement comme la limite en deçà de laquelle 95 % des écarts types sont mesurés. Ce facteur de correction théorique est ici évalué numériquement grâce à la formule : $F_c = [1 - e_r(95\%)]$ où la grandeur $e_r(95\%)$ est donnée par la valeur du quantile à 95%. Ce coefficient correcteur est égal à $F_c = 76\%$ et la hauteur corrigée est donnée par la relation :

$$h_{\text{théorique}} = F_c h_{\text{calculée}} \quad (5.17)$$

Le calcul de F_c est ici donné à titre indicatif et permet d'introduire les idées qui seront ultérieurement développées au paragraphe 5.6. Des coefficients partiels de sécurité seront alors rigoureusement calculés à partir des méthodes fournies par l'Eurocode 0 [3]. Un coefficient partiel sera notamment donné pour la hauteur du filet.

Evolution de l'énergie accumulée dans les câbles de rive

Ce deuxième volet de la comparaison est consacré à l'évolution de l'énergie de déformation accumulée dans l'ensemble des câbles de rive. A la différence de l'étude présentée au paragraphe 4.5.2 et conformément à ce qui a été indiqué en introduction de ce paragraphe, les valeurs d'énergies sont ici données de manière absolue. Les énergies élastiques et plastiques ne sont pas différenciées ici puisque seul l'équilibre du système est étudié. L'évolution de la géométrie de la structure, depuis la position au repos jusqu'à la configuration à l'équilibre, est ainsi considérée monotone. Le comportement de référence, les réponses des modèles simplifiés ainsi que celles des modèles *A*, *B* et *C* sont fournis pour les trois coupes introduites lors de l'étude des hauteurs à l'équilibre. L'ensemble des résultats numériques est présenté sur les trois graphiques de la figure 5.16.

Les modèles simplifiés reproduisent bien les variations suivies par le comportement de référence et les énergies calculées restent incluses dans les intervalles de confiance sur une large partie du domaine d'étude. Cette observation est notamment vérifiée sur les trois coupes pour des abscisses du bloc inférieures à $X = 3, 5\text{m}$. Au-dessus de cette limite, située légèrement en retrait de la frontière séparant la zone de glissement du module latéral et le voisinage du poteau, et avant le milieu du module latéral, les énergies évaluées avec les

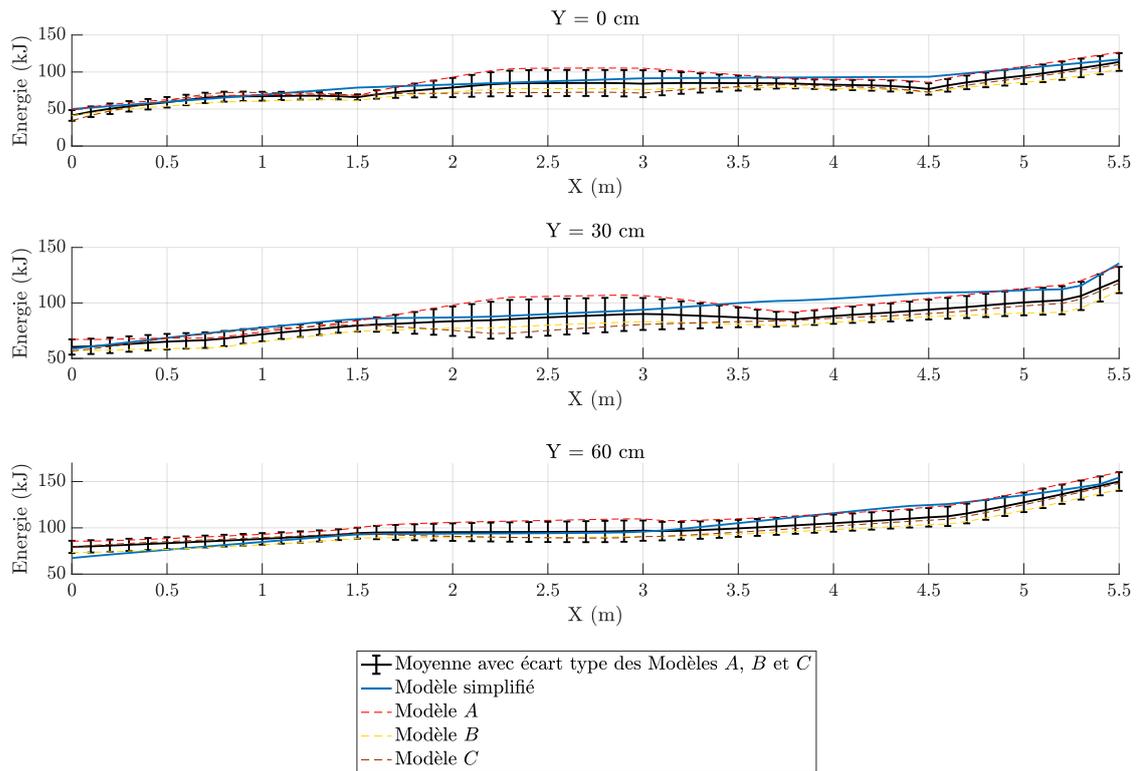


FIGURE 5.16 – Comparaison des quantités d’énergie accumulées par les rives dans les modèles de référence et les modèles simplifiés pour différentes positions du bloc

modèles simplifiés sur-estiment légèrement celles prédites par les modèles traditionnels. Les écarts les plus importants sont notamment atteints le long de la coupe réalisée à l’ordonnée $Y = 30$ cm. Comme pour la hauteur à l’équilibre (voir Figure 5.15), les énergies de déformation calculées avec le modèle A sont plus élevées que celles calculées avec les modèles B et C .

Par ailleurs, la dispersion des données issues des modèles A , B et C est nettement plus faible dans les zones de glissement qu’au voisinage du poteau situé à l’abscisse $X = 2,5$ m. Il est également assez surprenant de constater que dans cette région du filet les réponses des modèles simplifiés sont très proches du comportement de référence. Les impacts ont en effet été modélisés dans cette zone sans l’appui d’observations expérimentales et avec une description cinématique du filet plus pauvre que celle mise en œuvre pour les chargements en milieu de module. Ce serait toutefois prématuré d’affirmer que la distribution des efforts du filet vers les rives est la meilleure, pour des chargements localisés dans cette région de la nappe, avant d’étudier individuellement le comportement de chacun des câbles de rive.

Le tableau 5.3 présente les écarts relatifs moyens mesurés entre le comportement de référence et les réponses des modèles simplifiés. Les écarts relatifs moyens calculés pour chacune des coupes sont inférieurs à 10% avec des écarts types associés inférieurs à 5%. Ces écarts peuvent paraître importants dans l’absolu, au regard de la similitude des comportements observés sur la figure 5.16. Ils sont en réalité relativement faibles en comparaison des écarts types évalués entre les réponses des trois modèles de référence. Ces derniers sont, en moyenne, respectivement égaux à 12%, 11% et 9% de la moyenne de l’énergie de déformation des rives pour chacune des coupes étudiées. Malgré la simplicité de leur description géométrique, les

modèles simplifiés permettent donc finalement de reproduire avec une bonne précision la quantité d'énergie accumulée par la structure complète.

Y_{bloc} (cm)	0	30	60
Ecart relatif moyen (%)	8	9	6
Ecart type des écarts relatifs moyens (%)	5	5	4

TABLE 5.3 – Ecart relatif entre les énergies de déformation des rives calculées avec les modèles simplifiés et leurs valeurs de références

Répartition de l'énergie de déformation entre les différents câbles de rive

Il a été montré au précédent paragraphe que l'énergie totale de déformation des câbles de rive était correctement estimée par les modèles simplifiés. Cette mesure de l'énergie est cependant intégrée sur l'ensemble de la structure et ne permet donc pas de garantir le niveau de déformation de chaque câble de rive, considéré individuellement. Les énergies de déformation de certains câbles, calculées avec les modèles de référence et les modèles simplifiés, sont pour cela comparées dans ce paragraphe. Les câbles A_{bis}^{inf} , A_{bis}^{sup} , B^{inf} , B^{sup} et Lat_D sont retenus pour cette étude 5.1. Ils sont sélectionnés à partir des résultats des figures 4.25, 4.26 et 4.27, qui rassemblent les répartitions de l'énergie de déformation des superstructures pour les modèles A , B et C . Hormis le câble Lat_D , ces câbles sont tous reliés au poteau séparant le module central et le module latéral droit. Par souci de concision, les réponses des modèles de référence et simplifiés sont comparées pour la coupe réalisée en $Y_{bloc} = 30$ cm. Les résultats sont regroupés sur la figure 5.17.

Les modèles simplifiés reproduisent correctement les évolutions des comportements des câbles obtenues avec les modèles de références lorsque le bloc est déplacé dans la largeur du filet. La répartition de l'énergie entre les rives inférieure et supérieure est également bien reproduite. Dans l'ensemble, les modèles simplifiés sur-estiment les énergies accumulées dans les câbles. Les observations réalisées précédemment sur l'énergie de déformation totale des rives (cf. Figure 5.16) sont par ailleurs facilement expliquées avec les comportements de ces cinq câbles. Il avait alors été montré que, pour la coupe considérée, l'énergie totale calculée avec le modèle de référence était bien approchée dans le module central mais sur-estimée dans le module latéral. Cette tendance est contrôlée par le comportement du câble le plus sollicité pour chaque position du chargement. Lorsque le bloc se déplace dans le module central le long de la coupe $Y_{bloc} = 30$ cm, le câble B^{sup} accumule entre un tiers et la moitié de l'énergie de déformation de toutes les rives (voir Figure 5.16). L'énergie calculée, pour ce câble, avec les modèles simplifiés est par ailleurs très proche de celle évaluée avec le modèle de référence. La configuration inverse est observée pour un chargement localisé dans le module latéral. Un peu moins de la moitié de l'énergie de déformation totale des rives est alors accumulée par le câble A_{bis}^{sup} . Or, les modèles simplifiés sur-estiment l'énergie de déformation de ce câble. Comme pour la hauteur à l'équilibre dont les évolutions ont précédemment été présentées sur la figure 5.15, ces écarts s'expliquent par la diminution du nombre de degrés de liberté de la structure qui augmente ainsi naturellement sa raideur apparente.

Les comportements des câbles centraux B^{inf} et B^{sup} sont dans l'ensemble mieux approchés que ceux des câbles A_{bis}^{inf} et A_{bis}^{sup} , même si ce constat doit être nuancé par les écarts

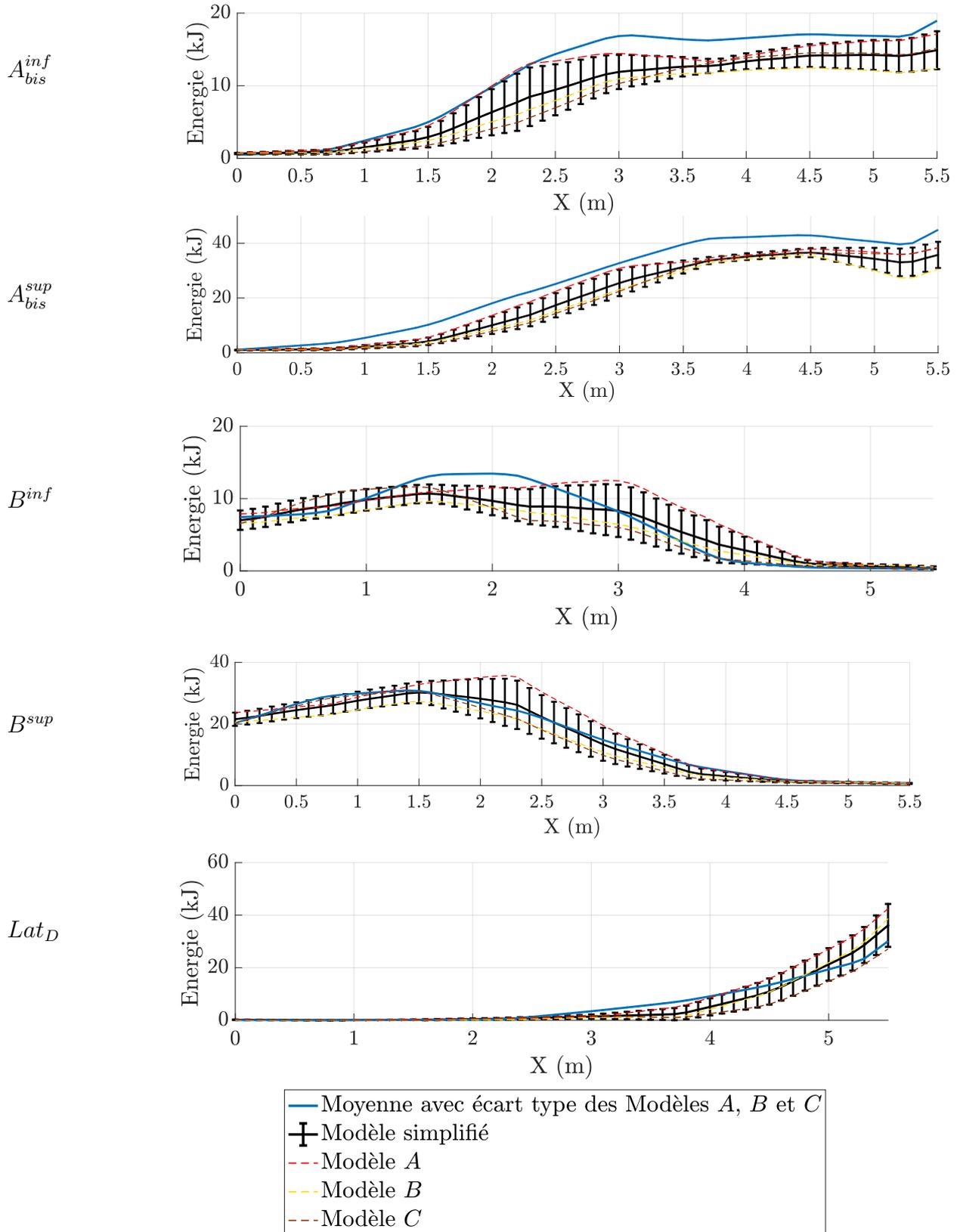


FIGURE 5.17 – Comparaison des énergies de déformation de différents câbles de rive calculées avec les modèles de référence et les modèles simplifiés

d'énergie observés pour le câble B^{inf} . L'influence croissante du câble Lat_D sur le comportement de l'ouvrage, lorsque les chargements sont déplacés en direction de la rive latérale, est également bien reproduite. Cette répartition des énergies de déformation valide également le choix d'étendre la zone du filet représentée par des interactions à deux particules, lorsque le chargement est localisé au voisinage d'un poteau. En effet, les câbles A_{bis}^{sup} et B^{sup} d'une part et A_{bis}^{inf} et B^{inf} d'autre part partagent un ancrage commun (voir Figure 5.1) et bien qu'ils appartiennent à des modules distincts, ils sont sollicités simultanément lorsque le bloc est situé dans un intervalle d'environ deux mètres, centré sur la position du poteau ($X = 2,5\text{m}$).

Les écarts moyens entre les comportements de référence et ceux des modèles simplifiés sont présentés dans le tableau 5.4. Dans la mesure où les variations d'amplitude des énergies calculées sont importantes, il est préférable de considérer une erreur absolue plutôt que relative pour estimer les écarts de comportement entre les deux modèles. En effet, si l'écart relatif est la meilleure caractérisation de l'erreur locale, notamment pour les faibles niveaux d'énergie, il donne également trop de poids à ces petites énergies lorsque la moyenne est réalisée sur toute la gamme des énergies atteintes par un câble.

Câble	A_{bis}^{inf}	A_{bis}^{sup}	B^{inf}	B^{sup}	Lat_D
Ecart absolu moyen (kJ)	2,8	6,0	1,3	1,2	1,6
Ecart type des écarts absolus moyens (kJ)	1,6	2,5	1,2	0,9	1,8

TABLE 5.4 – Ecart moyen entre les énergies de déformation de différents câbles de rive, calculés avec les modèles simplifiés, et leurs valeurs de référence

Ces écarts de plusieurs kJ sont acceptables pour reproduire qualitativement le comportement de l'ouvrage avec les modèles simplifiés. La répartition de l'énergie est dans l'ensemble correctement reproduite pour un chargement localisé à une position quelconque de la nappe. Ce dernier point est essentiel pour valider les performances des modèles simplifiés. Il avait en effet été souligné au paragraphe 5.2.3 que les discontinuités de modélisations entraîneraient inévitablement des discontinuités de comportement. Force est de constater que cela n'est pas le cas et si, malgré tout, des écarts avec les comportements de référence subsistent, ils ne permettent pas de discriminer une modélisation particulière.

Cette étude consacrée à la comparaison des modélisations discrètes et traditionnelles avec l'approche par modèles simplifiés permet de pleinement justifier l'utilisation d'une descriptions réduites d'un écran pare-bloc pour reproduire l'essentiel de son comportement.

En outre, toutes les sollicitations qui ont permis de caractériser le comportement d'un écran pare-bloc depuis le début de ce manuscrit sont de nature quasi-statique. Ce choix a été justifié à plusieurs reprises, notamment aux paragraphes 2.3.3 et 4.5, et conforté par l'efficacité de la méthode de relaxation dynamique qui a permis d'analyser finement les comportements des différents systèmes étudiés. La suite de ce chapitre sera consacrée à l'étude des comportements des modèles simplifiés sous des sollicitations d'impacts dynamiques. La méthode de relaxation dynamique ne sera ainsi plus utilisée pour la résolution des futurs problèmes numériques. L'ensemble des développements présentés dans le reste de ce manuscrit, ont été menés avec un outil de calcul dédié qui sera présenté dans le prochain paragraphe 5.4.

5.4 Présentation du code de calcul pour la résolution de problèmes dynamiques

Le code de calcul utilisé pour étudier le comportement sous chargement dynamique des modèles simplifiés est développé dans l'environnement du logiciel de calcul scientifique Matlab[®]. En particulier, le schéma d'intégration explicite n'a pas été ré-implémenté dans le cadre de ce travail de thèse. Il est construit sur le modèle du schéma de Runge-Kutta pour les ordres 4 ou 5 [36, 87] et permet de résoudre des problèmes de Cauchy explicités par la formulation suivante :

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (5.18)$$

avec pour condition initiale $y(t_0) = y_0$ sur un intervalle de temps donné. L'équation à résoudre est toujours celle de la mécanique, précédemment introduite au paragraphe 3.3 du chapitre 3.

$$\underline{\underline{M}} \cdot \ddot{\underline{U}}_i + \underline{F}_i^{int} = \underline{F}_i^{ext} \quad (5.19)$$

où $\underline{\underline{M}}$ et $\underline{\underline{U}}_i$ désignent respectivement la matrice de masse et le vecteur contenant les accélérations des particules. Quant à eux, les termes \underline{F}_i^{int} et \underline{F}_i^{ext} regroupent respectivement les actions intérieures à la structure et les actions extérieures qui peuvent être de contact ou exercées à distance. Pour les applications présentées dans ce chapitre, ce second terme sera réduit dans une majorité des cas aux poids des particules. La résolution du problème numérique étant très proche de celle proposée par la méthode de la relaxation dynamique, introduite au chapitre 3, seules les quelques modifications apportées au calcul du terme \underline{F}_i^{int} sont présentées dans ce paragraphe.

5.4.1 Les efforts de rappel

Les modèles simplifiés sont composés de seulement trois types d'élément : les câbles glissants, les anneaux et les éléments du filet reliant deux particules. Les lois matériaux théoriques utilisées pour décrire le lien entre les déplacements nodaux et les efforts intérieurs sont décrites au paragraphe 3.1. Les spécificités décrites dans ce paragraphe doivent, pour l'essentiel, contribuer à améliorer la régularité des comportements bi-linéaires utilisés précédemment pour les calculs de relaxation dynamique.

Le système câble glissant-dissipateur

Contrairement aux applications de la relaxation dynamique présentées dans les chapitres 3 et 4, les calculs numériques conduits dans ce paragraphe reproduisent la cinématique réelle de la structure pendant l'impact. Le comportement élastique bi-linéaire utilisé pour le calcul de relaxation de dynamique, doit ainsi être complexifié pour tenir compte de l'irréversibilité du comportement plastique des dissipateurs. Les propriétés mécaniques (seuil et raideurs) restent quant à elles inchangées, mais un raccord de classe C^1 est également ajouté afin d'assurer le changement de raideur. Ce raccord est inspiré de celui utilisé dans la loi proposée par M. Menegotto et P. Pinto pour modéliser le comportement élasto-plastique de l'acier [68]. En notant ϵ_{lim} , la déformation pour laquelle le changement de raideur se produit, la nouvelle loi de comportement est écrite pendant la phase de chargement de la manière

suivante :

$$N = \left[K_2 + \frac{K_1 - K_2}{\left(1 + \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_{lim}}\right)^R\right)^{\frac{1}{R}}} \right] \epsilon \quad (5.20)$$

où K_1 et K_2 correspondent respectivement aux raideurs avant et après seuil exprimées en Newton et où R est un paramètre de forme dont le choix est laissé à l'utilisateur. La courbe de comportement d'un câble glissant élasto-plastique, tracée au cours d'un cycle charge, décharge et recharge, est présentée sur la figure 5.18 pour un paramètre $R = 20$ (valeur qui sera conservée par la suite).

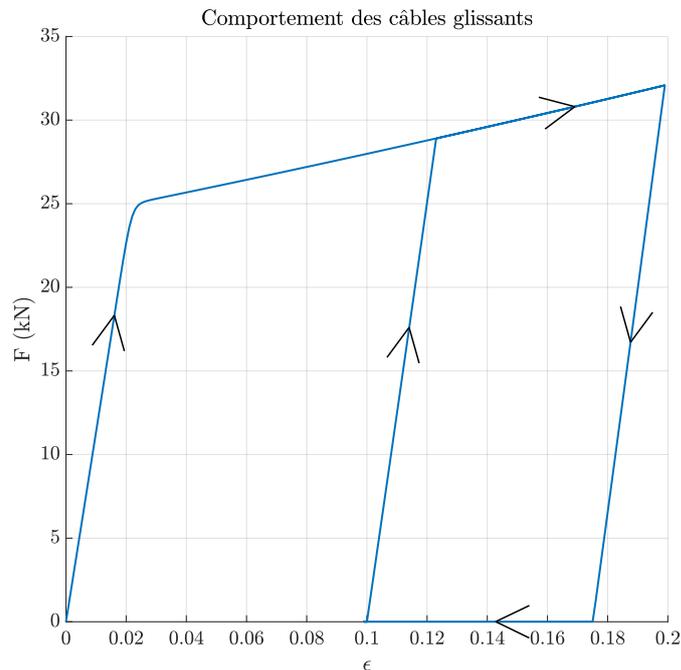


FIGURE 5.18 – Comportement élasto-plastique écrouissant des câbles glissants

Les éléments du filet

Les deux interactions reliant les particules du filet, les anneaux et les interactions à deux particules, sont traitées de manière équivalente dans le code de calcul. Les lois décrivant leurs comportements très proches de celles utilisées pour les calculs de relaxation dynamique. Une fois encore, la seule différence est l'ajout d'un raccord de classe C^2 pour assurer le changement de raideur. Le comportement plastique des anneaux réels du filet n'est en revanche pas reproduit. Il a en effet été expliqué au cours du paragraphe 2.3.3 que la plasticité des anneaux n'est pas un mécanisme de dissipation majeur de l'écran C2ROP et, au regard des nombreuses approximations géométriques effectuées pour le développement de ces modèles, ce choix se justifie aisément. Le raccord C^2 entre les deux comportements asymptotiques est réalisé par interpolation polynomiale en utilisant les polynômes d'Hermite. Cette suite de polynômes permet de construire une fonction d'interpolation qui, pour un ensemble de

n points $(x_0, \dots, x_i, \dots, x_n)$, donne les valeurs de la fonction en ces points : $(f_0, \dots, f_i, \dots, f_n)$, ainsi que celles de sa dérivée première : $(f'_0, \dots, f'_i, \dots, f'_n)$. L'ordre du polynôme augmentant à chaque nouveau paramètre à interpoler, un polynôme d'ordre 3 doit être utilisé pour le raccord de la loi de comportement. On considère ainsi la fonction d'interpolation dans le cas $n = 1$. On définit ensuite la variable t , tel que $\forall x \in [x_0, x_1]$, $t = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$. Ce changement de variable permet de construire les polynômes sur l'intervalle $[0, 1]$. On définit ainsi les quatre polynômes suivant :

$$\begin{cases} P_1(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1 \\ P_2(X) = X^3 - 2X^2 + X \\ P_3(X) = -2X^3 + 3X^2 \\ P_4(X) = X^3 - X^2 \end{cases} \quad (5.21)$$

qui permettent de construire la fonction d'interpolation :

$$Q(X) = f_0 P_1(X) + f'_0(x_1 - x_0) P_2(X) + f_1 P_3(X) + f'_1(x_1 - x_0) P_4(X) \quad (5.22)$$

Pour l'ensemble des éléments anneaux, on choisit d'utiliser la fonction d'interpolation entre les points : $\epsilon_1 = 0.8\epsilon_{lim}$ et $\epsilon_2 = 1.1\epsilon_{lim}$, où ϵ_{lim} est la déformation limite pour laquelle le changement de raideur se produit lorsque la loi de comportement est bi-linéaire. Les efforts dans les éléments du filet sont finalement calculés de la manière suivante :

$$\begin{cases} N(\epsilon) = 0 & \text{if } \epsilon < 0 \\ N(\epsilon) = K_1 \epsilon & \text{if } 0 < \epsilon < \epsilon_1 \\ N(\epsilon) = Q(t(\epsilon)) & \text{if } \epsilon \in [\epsilon_1, \epsilon_2] \\ N(\epsilon) = K_1 \epsilon_{lim} + K_2 (\epsilon - \epsilon_{lim}) & \text{if } \epsilon > \epsilon_2 \end{cases} \quad (5.23)$$

Cette loi de comportement est tracée sur la figure 5.19 pour un élément de type anneau dont les propriétés mécaniques ont précédemment été établies au paragraphe 4.2.1.

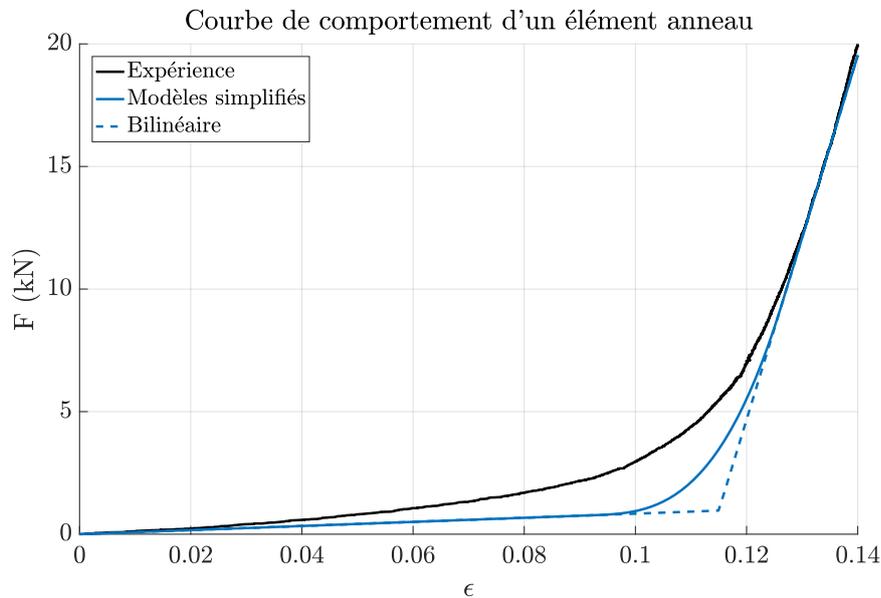


FIGURE 5.19 – Comportement des éléments composant le filet

Les efforts de rappel au sein du filet sont ainsi calculés à partir des relations (5.20) et (5.23) en fonction de la nature, et donc de la position, de l'élément considéré. Le paragraphe

suivant est dédié au calcul des efforts d'amortissement, dernières composantes du vecteur des efforts intérieurs \underline{F}_{int} de l'équation de la dynamique (5.19).

5.4.2 Amortissement visqueux

Dans les modèles de calcul dynamique appliqués aux structures, une partie de l'énergie du système est généralement dissipée par un amortissement visqueux. Les termes d'amortissement sont difficiles à évaluer et sont souvent estimés en fonction des matrices de raideurs et de masse. Toutefois, ils limitent la complexité des équations à intégrer. En omettant ici les comportements plastiques des dissipateurs qui sont déjà pris en compte dans le calcul (cf. Paragraphe 5.4.1), il a été mentionné au paragraphe 2.3.3, que différents mécanismes physiques pouvaient contribuer à la dissipation de l'énergie cinétique du bloc, dans des proportions difficilement quantifiables. L'amortissement visqueux permet de rassembler l'ensemble des contributions de ces phénomènes dans un unique terme de l'équation de la dynamique. L'objectif de ce paragraphe est de discuter l'influence de ce terme afin d'en proposer par la suite une calibration adaptée. Les développements présentés sont détaillés par ailleurs dans l'ouvrage de P. Bisch [17].

Etude des modes propre d'un système non-amorti

Afin de simplifier les développements, les systèmes dynamiques étudiés dans ce paragraphe seront considérés comme parfaitement élastiques. Cette première étape de la démarche qui amènera par la suite à choisir un terme d'amortissement adapté est dédiée à l'étude d'un système non-amorti en oscillations libres. Elle est nécessaire à l'identification des modes propres du système, qui permettront de caractériser les paramètres d'amortissement. Le comportement du système est déterminé par la relation de la dynamique, précédemment introduite sous sa forme générale (3.13) au paragraphe 3.2.2.

$$\underline{M} \cdot \ddot{\underline{U}} + \underline{C} \cdot \dot{\underline{U}} + \underline{K} \cdot \underline{U} = \underline{F} \quad (5.24)$$

Il peut être noté que cette expression est également identique à la relation 5.19 présentée plus haut, dans le cas particulier où les forces d'amortissement ainsi que les efforts internes peuvent être exprimés par des fonctions linéaires des déplacements nodaux. Puisque le système est en oscillations libres et qu'il n'est pas amorti par ailleurs, la matrice \underline{C} ainsi que le vecteur \underline{F} sont tous deux nuls. Le comportement harmonique du système est ainsi décrit par l'équation suivante :

$$\underline{M} \cdot \ddot{\underline{U}} + \underline{K} \cdot \underline{U} = \underline{0} \quad (5.25)$$

Les solutions de cette équation sont connues et facilement identifiables en les cherchant sous la forme de fonctions à variables séparées. On vérifie ainsi que les fonctions de la forme $\underline{U}(t) = \underline{C}\underline{X}e^{zt}$ sont bien solutions de l'équation 5.25. Comme les variables \underline{C} , \underline{X} et z sont a priori complexes, un déplacement solution est ensuite obtenu en considérant la partie réelle de la fonction $\underline{U}(t)$.

L'équation de l'oscillateur harmonique (5.25) peut ainsi être interprétée comme un problème aux valeurs propres en y introduisant la solution $\underline{U}(t)$. Les hypothèses réalisées au paragraphe 3.3.1 sur la forme des matrices de masse et de raideur sont reprises ici. \underline{K} est ainsi symétrique définie positive et \underline{M} est diagonale. Ces hypothèses sont en pratique vérifiées pour les applications présentées dans ce manuscrit en remplaçant, si nécessaire, la matrice

\underline{K} par une matrice de raideur tangente. Le problème aux valeurs propres est explicité par l'équation (5.26).

$$(\underline{M}^{-1} \cdot \underline{K}) \cdot \underline{X} = -z^2 \underline{X} \quad (5.26)$$

$-z^2$ est ainsi une valeur propre de la matrice $\underline{M}^{-1} \cdot \underline{K}$ et \underline{X} est son vecteur propre associé. De plus, cette matrice est par construction symétrique et définie positive. Elle est donc diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont strictement positives. Par conséquent, le nombre complexe z est imaginaire pur et il est possible d'introduire le nombre réel ω , appelé pulsation propre du système, défini par la relation : $z = i\omega$. En considérant que les inconnues en déplacement du système soient au nombre de n , il existe n pulsations propres positives ω_i qui peuvent être ordonnées de manière croissante et qui sont chacune associées à un vecteur propre \underline{X}_i .

Il peut ensuite être prouvé que les n vecteurs propres sont orthogonaux par rapport aux matrices \underline{M} et \underline{K} . Autrement dit, si deux vecteurs propres \underline{X}_i et \underline{X}_j sont distincts, alors ils vérifient les relations :

$$\begin{cases} \underline{X}_i^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{X}_j = 0 \\ \underline{X}_i^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{X}_j = 0 \end{cases} \quad (5.27)$$

La preuve est simplement obtenue en écrivant le problème aux valeurs propres (5.26) pour les deux modes propres $(\omega_i, \underline{X}_i)$ et $(\omega_j, \underline{X}_j)$. Il suffit ensuite de multiplier chacune des deux égalités par le vecteur propre de l'autre mode, de sorte que les deux équations fassent intervenir les produits scalaires des vecteurs \underline{X}_i et \underline{X}_j par rapport aux matrices de masse et de raideur. La preuve est ensuite achevée en écrivant la différence terme à terme des deux relations ainsi obtenues.

Calibration des paramètres d'amortissement

Le système dynamique étudié est maintenant amorti et soumis à une force extérieure \underline{F} . L'équation de la dynamique est ainsi considérée sous sa forme générale (3.13). La solution de cette équation est comme précédemment recherchée sous la forme d'une fonction à variables séparées. Par ailleurs, l'étude du système non-amorti a permis d'exhiber une base orthogonale de l'espace des déplacements nodaux. Un déplacement solution de l'équation non-amortie peut ainsi être exprimé par la formule suivante :

$$\underline{U}(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) \underline{X}_i \quad (5.28)$$

Le déplacement (5.28) est ensuite substitué au vecteur des inconnues nodales dans la relation de la dynamique (3.13). Toutefois, le système ne peut pas être exprimé de manière totalement découplée. En effet, la matrice d'amortissement \underline{C} n'est a priori pas diagonalisable dans la même base que la matrice $\underline{M}^{-1} \cdot \underline{K}$. Une solution usuelle pour passer outre cette difficulté est de considérer que les vecteurs propres du système non amorti sont également orthogonaux par rapport à la matrice d'amortissement. Cette hypothèse autorise ainsi à exprimer formellement l'équation vectorielle de la dynamique dans la base orthogonale formée par les vecteurs propres du système non-amorti.

$$\forall i \in [1, n] \quad \ddot{f}_i(t) (\underline{X}_i^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{X}_i) + \dot{f}_i(t) (\underline{X}_i^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{X}_i) + f_i(t) (\underline{X}_i^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{X}_i) = \underline{X}_i^T \underline{F} \quad (5.29)$$

Cette hypothèse sur la matrice d'amortissement permet de préserver les fréquences propres du système non-amorti. Il est ensuite possible d'introduire la pulsation propre ω_i , dans l'équation (5.29). Il suffit pour cela d'exprimer les pulsations propres du système en fonction des matrices de masse et de raideur à l'aide de la relation (5.26).

$$\omega_i^2 = \frac{\underline{X}_i^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{X}_i}{\underline{X}_i^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{X}_i} = \frac{k_i}{m_i} \quad (5.30)$$

Où m_i et k_i sont respectivement la masse et la raideur généralisées associées au mode propre $(\omega_i, \underline{X}_i)$. La formulation (5.29) peut ainsi être exprimée sous la forme classique de l'équation d'un oscillateur amorti.

$$\ddot{f}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{f}_i(t) + \omega_i^2 f_i(t) = \frac{\underline{X}_i^T \underline{F}}{m_i} \quad (5.31)$$

où ξ_i est le pourcentage d'amortissement critique, associé au mode $(\omega_i, \underline{X}_i)$, défini par la relation :

$$\xi_i = \frac{\underline{X}_i^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{X}_i}{2m_i\omega_i} \quad (5.32)$$

L'équation (5.31) est pour le moment formelle, dans la mesure où l'expression de l'amortissement est purement théorique. En pratique, il est nécessaire d'exhiber une expression de la matrice \underline{C} qui respecte l'orthogonalité des vecteurs propres. Un choix classique consiste à utiliser une matrice d'amortissement dit de Rayleigh. \underline{C} est alors exprimée comme une fonction linéaire des matrices \underline{M} et \underline{K} à l'aide de deux paramètres, α et β , à identifier :

$$\underline{C} = \alpha\underline{M} + \beta\underline{K} \quad (5.33)$$

Le pourcentage d'amortissement critique du mode i peut ainsi être exprimé en fonction des paramètres α et β en utilisant la nouvelle formulation de la matrice d'amortissement (5.33) dans la relation (5.32).

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_i} + \beta\omega_i \right) \quad (5.34)$$

Les coefficients peuvent ainsi être estimés en fixant, pour deux modes distincts $(\omega_i, \underline{X}_i)$ et $(\omega_j, \underline{X}_j)$, les valeurs des pourcentages d'amortissement critique ξ_i et ξ_j . Une méthode alternative et efficace, proposée par [60], permet de conserver un pourcentage d'amortissement critique constant sur une plage fréquentielle dont l'amplitude est choisie par l'utilisateur. L'expression du pourcentage d'amortissement critique (5.34) illustre bien le principal avantage de l'amortissement de Rayleigh. Celui-ci permet en effet d'amortir à la fois les basses fréquences, grâce à la linéarité par rapport à la matrice de masse, et les hautes fréquences avec la linéarité par rapport à la matrice de raideur.

Il est à présent intéressant de revenir au problème que l'on souhaite modéliser afin d'estimer de manière pertinente les paramètres α et β . Les résultats expérimentaux obtenus dans le cadre du PN C2ROP et présentés au paragraphe 2.3.3 ont montré que les élongations maximales de l'ouvrage pour les essais à l'énergie MEL ont été atteintes en un temps compris entre 0,25s et 0,3s. La période caractéristique associée au mouvement de l'ouvrage complet est donc de l'ordre de la seconde. En effet, par analogie avec un système masse-ressort non-amorti, on considère que le déplacement périodique maximal est atteint au bout d'un quart de période. De plus, ce premier mode de fonctionnement de l'ouvrage est déjà

considérablement amorti dans les modèles simplifiés par les comportements hystérétiques des dissipateurs (cf. Figure 5.18). La vocation de l'amortissement visqueux est ici de reproduire les mécanismes de dissipation secondaires activés par les différents éléments constitutifs de l'ouvrage. Les périodes caractéristiques associées à ces phénomènes sont a priori supérieures à celle de la trajectoire du bloc. Il est choisi, pour cette raison, de considérer que le coefficient α est égal à zéro, afin de privilégier un amortissement dans les hautes fréquences. Le facteur β est ainsi simplement donné par la relation :

$$\beta = 2 \frac{\xi_i}{\omega_i} \quad (5.35)$$

Le pourcentage d'amortissement critique utilisé pour le dimensionnement de structures en acier est habituellement compris entre 2% et 7%. Afin de ne pas sur-estimer l'amortissement de la structure, le pourcentage d'amortissement critique est ici limité à 1% pour une fréquence de 1Hz (mode du bloc). On retiendra ainsi, pour l'ensemble des simulations numériques présentées dans la suite, une matrice d'amortissement donnée par la formule :

$$\underline{\underline{C}} = 3.10^{-3} \underline{\underline{K}} \quad (5.36)$$

Il a par ailleurs été montré au paragraphe 3.4 que les comportements matériels de certains éléments de structure nécessaires à la modélisation d'un écran de protection, étaient fortement non-linéaires. Les matrices de raideur sont, le cas échéant, remplacées par les matrices de raideur tangentes, dont les expressions ont également été déterminées au paragraphe 3.4. Dans les deux cas et contrairement aux applications précédemment présentées avec la méthode de relaxation dynamique 3.4, ces dernières doivent cette fois être assemblées pour résoudre numériquement le problème dynamique amorti.

Les spécificités de l'algorithme utilisé dans ce chapitre pour résoudre des problèmes d'impacts dynamiques ont maintenant toutes été présentées. Les modèles simplifiés seront exploités dans le prochain paragraphe pour analyser le comportement de l'écran modèle lors d'une sollicitation d'impact. L'influence de la cinématique de déformation sur la réponse globale de l'ouvrage sera étudiée dans un premier temps. Une partie des différences observées au paragraphe 2.3.3, lors de l'étude des deux essais dynamiques réalisés au niveau d'énergie MEL dans le cadre du PN C2ROP, sera ensuite expliquée, par l'influence probable de certains paramètres géométriques et matériels.

5.5 Analyse du comportement dynamique de l'écran C2ROP lors d'un essai ETAG27

La volonté de caractériser le comportement d'un écran de protection pare-blocs, par l'analyse de son état d'équilibre, a été jusqu'à présent motivée par des hypothèses formulées à partir d'observations expérimentales (cf. Paragraphe 2.3.4). Une première analyse du comportement dynamique du modèle simplifié, utilisé pour un impact centré, permettra dans un premier temps de qualifier la pertinence de ces hypothèses. La réponse du modèle sera ensuite confrontée aux comportements expérimentaux observés lors des deux essais MEL du PN C2ROP. Certaines variabilités ou paramètres de fiabilité seront alors introduits pour tenter d'expliquer, par le calcul, les écarts très significatifs constatés entre les résultats des deux expériences, en principe réalisées dans des conditions identiques.

L'impact étudié est donc modélisé en respectant les recommandations de l'ETAG27. Le bloc impacte le centre du module central et son vecteur vitesse est normal au plan de référence du filet au moment du contact. La structure est ainsi décrite par le modèle simplifié présenté sur la figure 5.3 et les paramètres dynamiques du bloc sont ceux utilisés pour les essais MEL du projet national : $M_{bloc} = 740 \text{ kg}$ et $V_{bloc}^0 = 27 \text{ m.s}^{-1}$.

5.5.1 Influence des phénomènes dynamiques sur le comportement de la structure

Les interprétations du comportement de la structure réalisées à partir de sa géométrie à l'équilibre reposent sur deux hypothèses fondamentales qui sont vérifiées dans ce paragraphe. La première est que les déformations des éléments constitutifs de l'écran, dont le comportement est élasto-plastique, évoluent de manière monotone jusqu'à ce que le vitesse du bloc change de signe. Cette hypothèse permet, à partir d'une loi de comportement donnée, d'associer une énergie dissipée théorique aux déformations des câbles de rive, mesurées dans la configuration d'équilibre. La seconde hypothèse consiste à négliger les forces d'inertie au sein de la nappe devant celle appliquée au bloc. En supposant par ailleurs que le comportement de l'ouvrage ne soit pas visqueux, il est alors impossible de distinguer formellement une sollicitation dynamique d'une sollicitation quasi-statique en observant, dans chacune des deux configurations, une même position du bloc.

Afin d'éviter toute ambiguïté méthodologique, il est utile de préciser que les comportements décrits dans ce paragraphe sont ceux de modèles de calcul et non celui de la structure réelle. Il serait en effet discutable de valider les hypothèses formulées au travers d'observations expérimentales grâce à un modèle de calcul développer lui même, directement et indirectement, à partir de ces mêmes hypothèses. Autrement dit, si une hypothèse de modélisation est invalidée par le calcul, elle peut remettre en cause la compréhension du modèle mais ne permet pas de tirer des conclusions sur le comportement réel du système modélisé. Mais cette évaluation de la robustesse de la modélisation reste cependant essentielle pour vérifier qu'aucun phénomène induit par le modèle n'ait été négligé au moment de l'interprétation des résultats fournis par le calcul. De plus, si les hypothèses de modélisation qui ne sont pas vérifiées par le calcul sont nécessairement fausses, celles qui au contraire sont effectivement observées ont de grandes chances de retranscrire le comportement réel de la structure.

Etude des cinématiques de déformation

La première hypothèse vérifiée est la monotonie des déformations des câbles de rive dont le comportement n'est pas purement élastique. Puisque l'impact est ici parfaitement centré, les propriétés de symétrie du modèle présenté sur la figure 5.3 autorisent à considérer le comportement de seulement trois câbles. En accord avec la nomenclature introduite sur la figure 5.1, seuls les comportements des câbles du quart supérieur droit de l'écran, A^{sup} , B^{sup} et Lat_G sont étudiés. Les évolutions de leurs déformations ainsi que de leurs efforts intérieurs sont présentées sur la figure 5.20. Les traits verticaux dessinés en pointillés sur les graphiques (a) et (b) marquent l'instant où la vitesse du bloc s'annule. Avant cet instant on observe bien, exception faite de certaines variations très localisées, que les déformations des rives A^{sup} et B^{sup} augmentent de manière monotone jusqu'à ce que le bloc atteigne son

altitude minimale. On remarque également sur ce même graphique que les déformations de la rive latérale ne croissent, en revanche, pas continûment. Cette analyse doit maintenant être complétée par l'étude des efforts intérieurs dans les éléments de structure considérés.

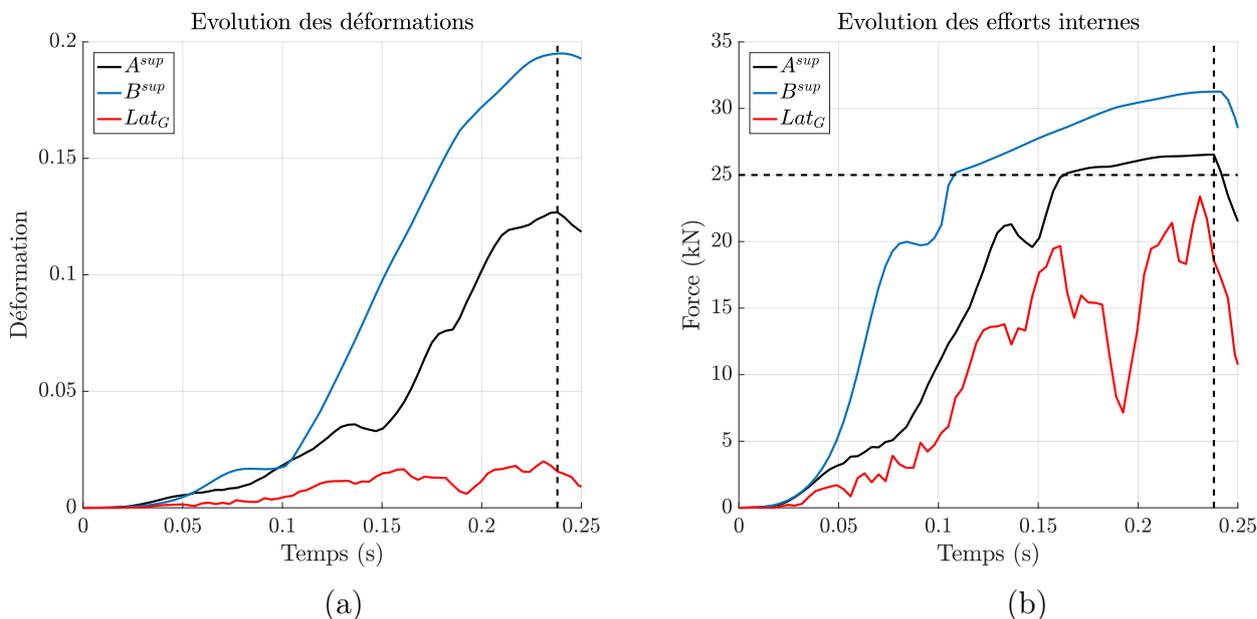


FIGURE 5.20 – Comportement des câbles de rive pour un impact centré à l'énergie MEL. (a) : Evolutions des déformations en fonction du temps, (b) : Evolutions des efforts internes associés en fonction du temps

Afin de statuer sur la validité de cette première hypothèse, il est important de distinguer les phases élastiques et plastiques des comportements. Le trait horizontal, dessiné en pointillés sur le graphique (b) uniquement, indique la limite élastique de ces trois câbles. Seuls les câbles A^{bis} et B^{bis} entrent dans leur régime plastique au cours de l'impact. L'étude du graphique (b) indique également clairement que ces derniers ne se déchargent plus une fois cette limite d'élasticité dépassée. L'hypothèse de monotonie des déformations plastiques est bien vérifiée pour un impact simulé dans les conditions préconisées par l'ETAG27. Une petite précision peut être apportée ici quant au comportement des câbles de rive A^{bis} et B^{bis} . Une lecture simultanée des graphiques (a) et (b) de la figure 5.20 révèle que ces deux rives n'atteignent pas la limite élastique pour un même niveau de déformation. Dans les modèles simplifiés illustrés sur les figures 5.3 à 5.6, Les câbles A^{sup} , A^{inf} , A_{bis}^{sup} et A_{bis}^{inf} ne couvrent qu'un unique module et sont ancrés à un des poteaux extérieurs. Leurs longueurs au repos implémentées dans le modèle de calcul sont donc égales à la moitié de celles mesurées sur l'ouvrage réel. Dans la modélisation, le câble A^{bis} atteint la limite élastique pour une déformation limite qui est égale au double de celle du câble B^{bis} , mais pour un allongement qui reste quant à lui identique.

Bilan énergétique pour un impact ETAG27

Depuis le début de ce travail, il a été considéré que la majeure partie de l'énergie cinétique du bloc est dissipée par les freins présents sur les câbles de rive. Une discussion menée au paragraphe 2.3.4 avait permis, au moins qualitativement, de justifier cette hypothèse. Il a

de plus était supposé qu'une faible part de l'énergie d'impact est transférée à la structure sous la forme d'énergie cinétique. Pour vérifier ces affirmations, un bilan énergétique a été effectué à partir des résultats de la simulation numérique de l'impact modélisé dans les conditions de l'ETAG27. Ce dernier peut être présenté sous la forme suivante :

$$\Delta E_{\text{cinétique}}(t) + \Delta E_{\text{potentielle}}(t) + \Delta E_{\text{élastique}}(t) = - (E_{\text{plastique}}(t) + E_{\text{Visqueux}}(t)) \quad (5.37)$$

Les énergies cinétiques et potentielles sont calculées directement en fonction des déplacements et des vitesses des particules, tandis que celles de déformations, élastiques et plastiques, sont intégrées numériquement à partir des efforts intérieurs et des allongements. Pour éviter de conserver les matrices de raideur tangentes à chaque itération du calcul ou de les reconstruire a posteriori, l'énergie dissipée par l'amortissement visqueux est directement évaluée à partir du bilan (5.37) dans la mesure où tous les autres termes sont calculés par ailleurs. Les évolutions des différentes énergies intervenant dans le bilan (5.37) sont présentées sur la figure 5.21 et ordonnées en fonction de leur influence sur le système.

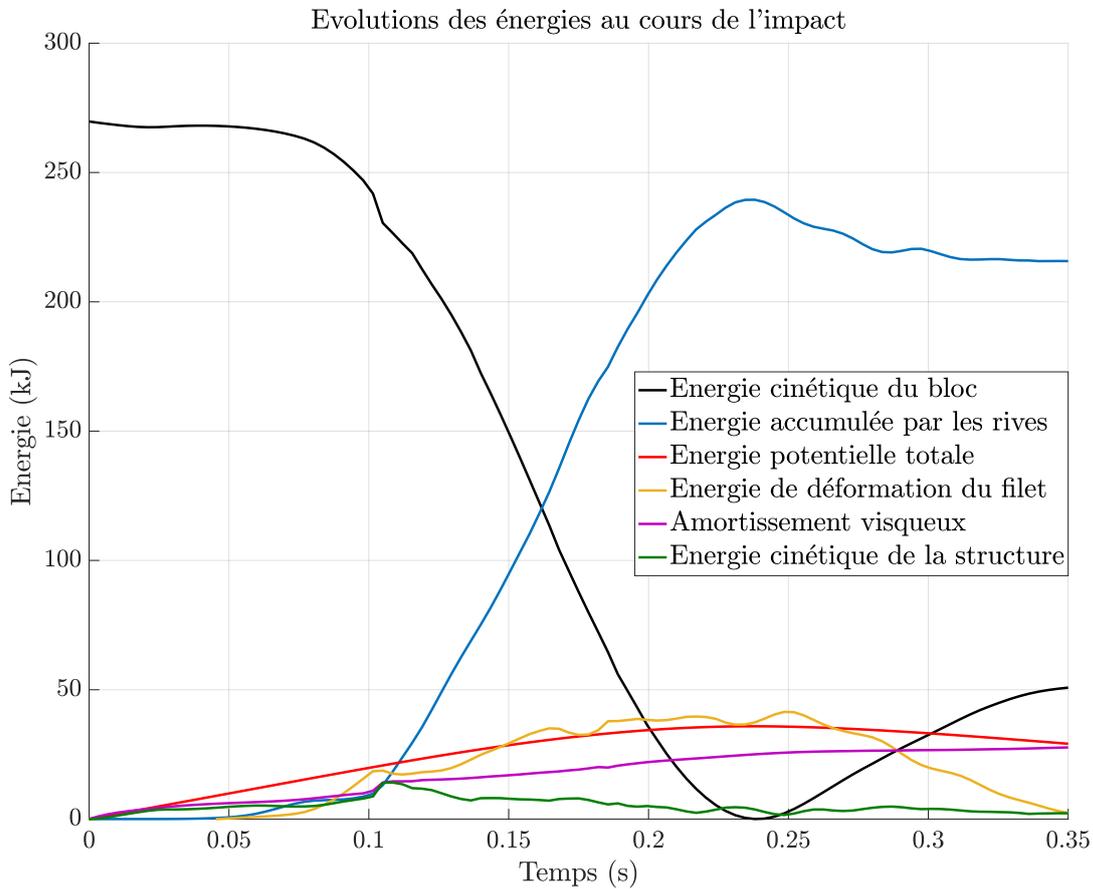


FIGURE 5.21 – Bilan énergétique d'un impact à l'énergie MEL simulé dans les conditions de l'ETAG27

L'énergie cinétique du bloc, représentée en noir sur la figure 5.21, est différenciée de l'énergie cinétique de l'écran, tracée en vert, pour vérifier que cette dernière reste petite devant les autres termes du bilan (5.37). Cette hypothèse ne semble pas être mise en défaut, même si la présence d'un amortissement visqueux tend également à diminuer l'influence

de ce terme. En adoptant une vision synthétique, il est possible de classer ces énergies en fonction de leur contribution respective au système et d'identifier trois catégories :

- La première est composée par l'énergie cinétique du bloc et les énergies de déformation des rives. La dissipation plastique de l'énergie d'impact, illustrée par les évolutions opposées des courbes noire et bleue sur la figure 5.21, suffit en effet à expliquer l'essentiel du comportement du modèle. L'énergie plastique dissipée n'est pas directement représentée dans la mesure où l'énergie de déformation des rives intègre également une part d'énergie élastique. La quantité d'énergie dissipée est tout de même indiquée par l'asymptote horizontale de la courbe bleue, représentant l'énergie totale de déformation des rives. Cette valeur asymptotique est atteinte une fois que l'énergie élastique est complètement restituée au système. Il est également possible de comparer la quantité d'énergie accumulée dans les rives lors de cette simulation à celle calculée au paragraphe 5.3.2 lorsque l'état d'équilibre de la structure avait été déterminé pour un enfoncement du bloc de trois mètres. Le bloc atteint ici ce niveau d'enfoncement au bout de 0,13 s. L'énergie de déformation totale des rives à cet instant est de 56 kJ, et correspond ainsi avec celle présentée sur la première coupe de la figure 5.16 à l'abscisse $X = 0$ cm.
- L'énergie potentielle du bloc et l'énergie de déformation élastique du filet sont du même ordre de grandeur et forment la seconde catégorie. La première est représentée en valeur absolue sur la figure 5.21 par la courbe rouge, mais décroît bien linéairement avec l'altitude du bloc. On classe également dans cette catégorie l'énergie dissipée par amortissement visqueux.
- La dernière catégorie regroupe les énergies associées aux déplacements des particules du filet. Seule la somme de leurs énergies cinétiques est représentée en vert sur la figure 5.21, mais leurs énergies potentielles, elles aussi négligeables devant les autres termes du bilan (5.37), pourraient également figurer dans cette catégorie.

Le comportement du modèle simplifié respecte, pour un impact centré, les différentes hypothèses formulées au paragraphe 2.3.4. D'un point de vue énergétique, le système peut donc être appréhendé dans sa globalité comme un oscillateur amorti composé d'une unique masse.

5.5.2 Etude paramétrique d'un essai ETAG27

Introduction de la notion de variabilité et méthodologie

L'objectif du précédent paragraphe était plus de valider la robustesse des modèles simplifiés que de confronter leurs comportements à ceux expérimentalement observés dans le cadre du projet national. Cela n'empêche pas que la finalité de toute modélisation est de reproduire un phénomène réellement observable. Si la description géométrique de la structure, utilisée dans le modèle de calcul peut sembler originale, les comportements des différents composants de l'écran ont tout de même été déterminés rationnellement à partir d'une part des résultats des différents essais de caractérisation et d'autre part des conclusions de l'étude sur les comportement homogénéisés des filets ASM4 conduite au paragraphe 4.1. Le schéma d'intégration numérique utilisé pour le calcul est par ailleurs complètement déterministe. Ainsi pour un ensemble de paramètres d'entrée, qui sont ici les propriétés géométriques et matérielles de la structure, une unique réponse est estimée par le modèle. Les trajectoires du bloc obtenues lors des essais à l'énergie MEL sont confrontées sur la figure 5.22, à celle

calculée par le modèle pour les paramètres mécaniques présentés au paragraphe 4.4.1.

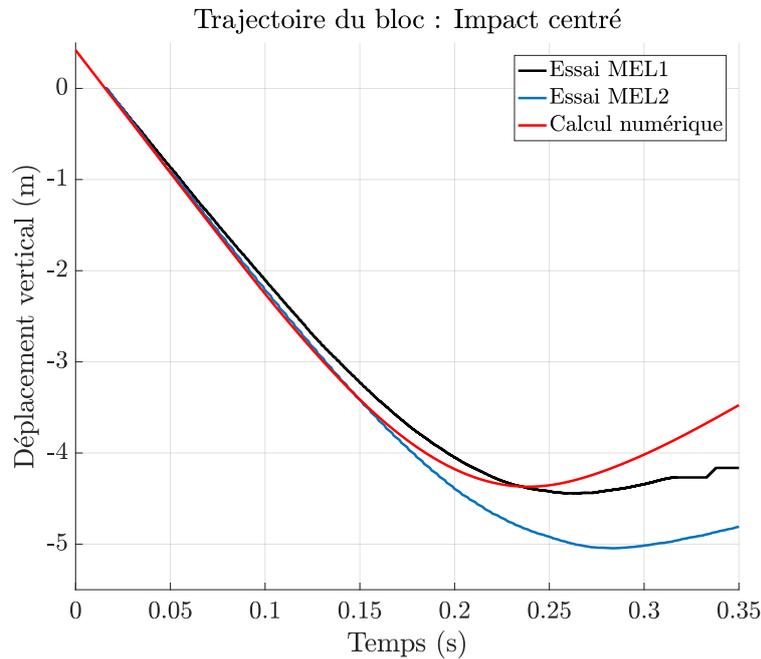


FIGURE 5.22 – Comparaison des trajectoires mesurées expérimentalement et calculées numériquement pour un impact ETAG27 à l'énergie MEL

Force est de constater que le modèle simplifié ne reproduit aucune des trajectoires observées expérimentalement. La question de l'évaluation de l'écart est également posée au regard de l'ampleur des différences entre les deux comportements obtenus en principe pour une même configuration expérimentale. C. Girardon a évalué dans son projet de fin d'étude les écarts entre ces deux essais [57] (cf Tableau 5.5). Il est raisonnable de penser que de tels écarts ne peuvent pas être attribués aux conditions d'impact. Les deux expériences ont été réalisées à l'aide du même bloc et la hauteur de largage est un paramètre relativement facile à mesurer. Leurs causes les plus probables ont déjà été évoquées au paragraphe 2.3.4 lors de l'analyse des données expérimentales de ces essais. Selon toute vraisemblance, les variabilités des propriétés mécaniques de l'écran peuvent expliquer ces différences de comportement. La suite de ce paragraphe est dédiée à l'étude paramétrique du comportement de l'écran C2ROP soumis à l'impact à l'énergie MEL.

Critères	Ecarts relatifs
Profondeur maximale	13 %
Hauteur résiduelle	16 %
Course des freins	29 %

TABLE 5.5 – Ecarts mesurés entre les essais ETAG27 réalisés à l'énergie MEL dans le cadre du projet national C2ROP (source [57])

Les paramètres étudiés ainsi que leurs domaines de variations sont sélectionnés en accord avec les résultats expérimentaux présentés dans le travail de fin d'étude de C. Girardon. Le

comportement après seuil des dissipateurs serait un paramètre légitime de cette étude mais il est trop difficile de le caractériser expérimentalement à partir d'une simple analyse d'images. Les mesures des tensions en fonction du temps, révèlent cependant que les écrouissements après seuil sont dans l'ensemble moins prononcés que celui initialement identifié par le test de caractérisation en quasi-statique. En accord avec les modélisations proposées par J. Coulibaly [25], la raideur du dissipateur après seuil est maintenant nulle dans la loi de comportement (5.20). L'approche de calcul par modèle simplifié permet de réaliser une simulation d'impact en un temps raisonnable. Les paramètres seront donc sélectionnés aléatoirement pour chaque simulation, grâce à des fonctions de répartition convenablement identifiées sur un grand nombre de tirages. Dans la mesure où l'objectif de cette étude est d'évaluer l'influence des différents paramètres de manière indépendante, et non de caractériser rigoureusement le comportement réel de l'écran d'un point de vue statistique, le nombre de tirages est ici limité à 100. Par ailleurs, les densités de probabilités utilisées dans la suite ont été évaluées pour chacun des paramètres à partir des données récoltées lors des huit essais d'impact réalisés sur le prototype d'écran C2ROP (cf. Paragraphe 2.3.3). Il est évident que la quantité de données recueillies n'est pas suffisante pour être statiquement représentative. Toutefois, le travail de collecte réalisé est d'une ampleur sans doute inédite et constitue tout de même une base solide pour estimer des valeurs pertinentes de paramètres [57].

Les influences de trois paramètres seront étudiées de manière indépendante. Les variables aléatoires retenues sont ici les niveaux de précontrainte des câbles de rive, les seuils des dissipateurs en effort et les positions des têtes de poteau. Les évolutions de la trajectoire du bloc, de la quantité d'énergie dissipée et de la hauteur de l'écran au moment où le bloc atteint sa profondeur maximale sont les trois propriétés considérées lors de chacune des études. Il peut être noté que les influences des deux premiers paramètres ont également été évaluées par C. Girardon dans le cadre de son travail de fin d'études. Le modèle A d'écran, décrit en détail dans les deux précédents chapitres, avait alors été retenu pour réaliser les calculs sur un plus petit nombre de tirages [57]. Bien que le calcul reproduise le comportement dynamique réel de la structure, la hauteur de l'écran à l'instant où la décélération du bloc est maximale est tout de même préférée à la hauteur résiduelle qui reste pourtant un des critères officiels de l'ETAG27. Un tel choix a également été proposé par J. Coulibaly [28] et se justifie par la diminution des temps de calcul.

Influence de la précontrainte

Au total, 47 valeurs de précontrainte ont été recueillies sur l'ensemble des campagnes menées dans le cadre du projet national [57]. C. Girardon fait justement remarquer que les variables de cet échantillonnage ne sont pas indépendantes. Les têtes des poteaux de l'écran réel sont chacune maintenues par trois câbles de haubanage et deux câbles de rive, qui les équilibrent de manière hyperstatique. En revanche, les précontraintes mesurées sur un même câble sont complètement indépendantes entre deux essais différents. Le nombre exact de variables indépendantes pourrait être déterminé précisément en caractérisant les états d'auto-contrainte du système [80, 79]. La méthode reste toutefois complexe à mettre en œuvre et son résultat serait sans conséquence sur l'étude paramétrique dans la mesure où le nombre de données disponibles est intrinsèquement limité. L'échantillon des précontraintes ainsi que les propriétés statistiques de ce dernier sont respectivement présentés sur la figure 5.23 et le tableau 5.6.

Comme illustré sur la figure 5.23, la distribution des précontraintes est approchée par

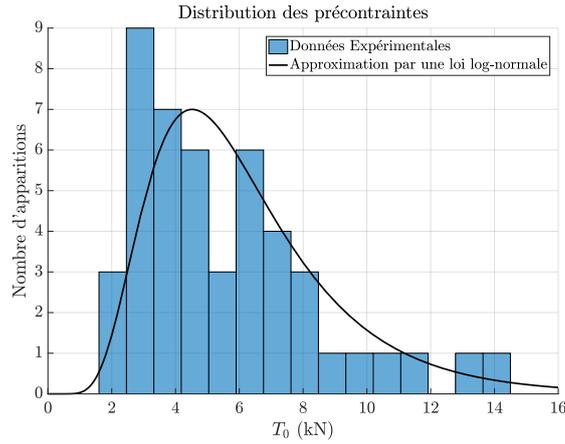


FIGURE 5.23 – Distribution des précontraintes mesurées expérimentalement et répartition selon une loi log-normale approchée (source [57])

Moyenne (kN)	Variance : $Var(T_0)$ (kN)	Espérance : $E(T_0)$ (kN)
6,2	9,0	5,6

TABLE 5.6 – Propriétés statistiques de l'échantillon des précontraintes (source [57])

une loi log-normale, dont la densité de probabilité est donnée par la formule suivante :

$$f(x, \mu(T_0), \sigma(T_0)) = \frac{1}{x\sigma(T_0)\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu(T_0))^2}{2\sigma(T_0)^2}\right) \quad (5.38)$$

Où $\mu(T_0)$ et $\sigma(T_0)$ sont respectivement l'espérance et l'écart type du logarithme de la variable aléatoire, définis par les relations :

$$\begin{cases} \mu(T_0) = \ln(E(T_0)) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{Var(T_0)}{(E(T_0))^2}\right) \\ \sigma(T_0)^2 = \ln\left(1 + \frac{Var(T_0)}{(E(T_0))^2}\right) \end{cases} \quad (5.39)$$

Les précontraintes sont appliquées aux différents câbles en réduisant leurs longueurs non-chargées. Il a été expliqué que les précontraintes de la structure réelle étaient naturellement liées par l'équilibre hyperstatique des poteaux. Cela n'est en revanche plus le cas avec les modèles simplifiés, puisque les deux extrémités des poteaux sont devenues des points fixes qui empêchent toute redistribution des tensions. Les précontraintes appliquées à chacun des câbles sont donc réellement observées à la première itération du calcul dynamique.

Dans la mesure où les variations de précontrainte peuvent perturber localement la répartition des efforts, il est important de distinguer leurs effets à l'échelle des câbles de leurs effets à l'échelle de la structure complète. Les évolutions des énergies dissipées par chacun des câbles de rive sont ainsi présentées dans un premier temps sur la figure 5.24. Ces dernières sont données sous la forme de fractions de l'énergie d'impact calculées en fonction de la part dissipée par chaque câble. La quantité d'énergie dissipée par câble augmente très légèrement avec la précontrainte. Les modes de dissipation reste cependant inchangés. Les quatre câbles centraux B^{sup} , B_{bis}^{sup} , B^{inf} et B_{bis}^{inf} assurent l'essentiel de la dissipation et cela,

quelle que soit la distribution des précontraintes. Ce constat était attendu dans la mesure où, une fois déclenché, les dissipateurs égalisent les efforts dans l'ensemble des câbles de rive. Une précontrainte élevée peut précipiter le début du régime plastique, mais les modes de déformation de la structure sont fortement contraints par la nature du câblage (voir paragraphe 5.2.2). Les différences d'élongation entre les câbles restent ainsi limitées et les énergies plastiques dissipées comparables.

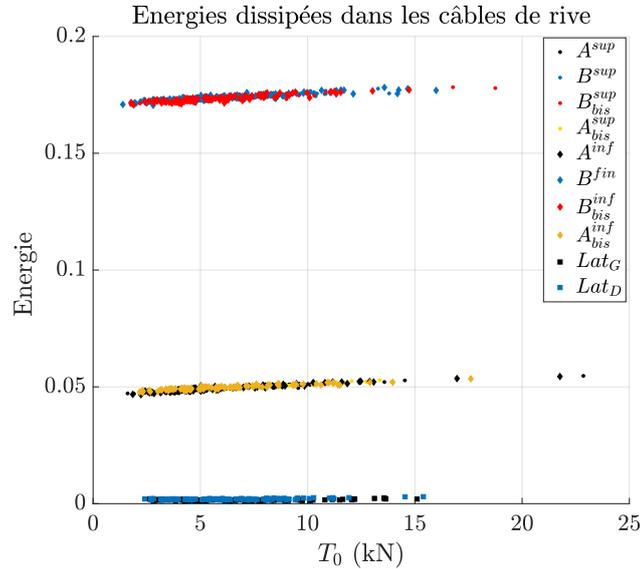


FIGURE 5.24 – Évolutions des énergies dissipées dans les câbles de rive, comptées en fraction de l'énergie d'impact, en fonction de leurs niveaux de précontrainte

Ce raisonnement semble être confirmé par l'évolution de l'énergie totale dissipée par les rives en fonction de la précontrainte moyenne imposée (voir Figure 5.25). Les variations de l'énergie totale dissipée sont inférieures à 1%. Il est également possible de vérifier que ces deux grandeurs sont tout de même corrélées, même si l'influence de la précontrainte sur l'énergie totale dissipée semble très limitée. On propose d'introduire ici le coefficient de corrélation linéaire de Bravais-Pearson qui prend la forme d'un nombre réel compris entre 0 et 1. Ce coefficient est égal à 1, en valeur absolue, si deux variables aléatoires sont liées par une relation affine. En revanche un coefficient égal à 0 n'implique pas nécessairement que deux variables soient indépendantes. Le coefficient de corrélation reliant l'énergie dissipée au niveau de précontrainte est ici égal à 0,39.

La variation de précontrainte a ainsi une influence négligeable sur la quantité d'énergie plastique dissipée par les câbles de rive. Le même constat est attendu quant à son influence sur la profondeur maximale atteinte par le bloc. En effet, si des différences significatives étaient observées entre les altitudes atteintes par le bloc, elles impliqueraient des variations des allongements des câbles de rive et une dispersion des quantités d'énergie dissipées serait observée. Afin de vérifier la cohérence de cette interprétation, les altitudes minimales atteintes par le bloc lors de chaque essai sont présentées sur la figure 5.26. Le lien évident reliant ces deux grandeurs est objectivé par un coefficient de corrélation égal à - 0,87. L'élongation de l'ouvrage diminue ainsi linéairement avec son raidissement apparent causé par l'augmentation, en moyenne, de la précontrainte. Toutefois, pour la gamme de précontrainte testée, les écarts mesurés restent inférieurs à 1%.

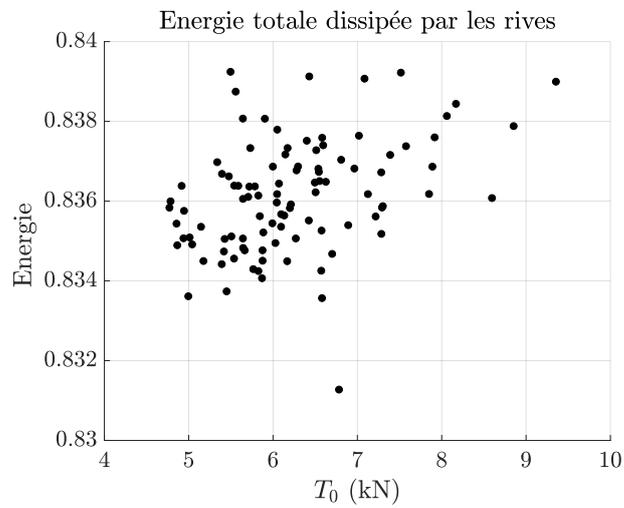


FIGURE 5.25 – Evolution de la quantité d'énergie plastique dissipée en fonction de la précontrainte moyenne

Evolution de la profondeur maximale en fonction de la précontrainte

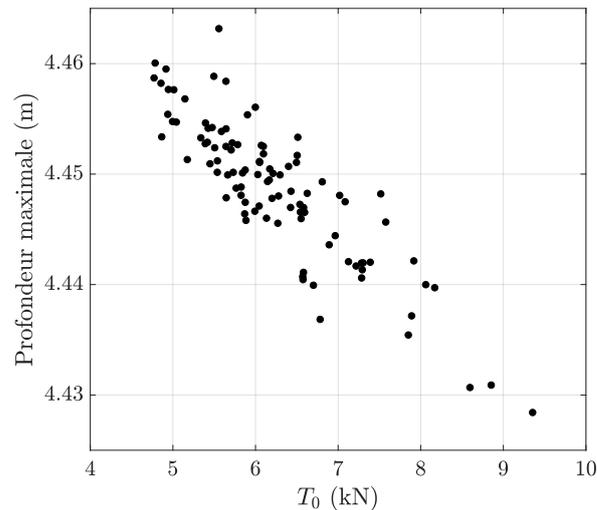


FIGURE 5.26 – Evolution de la profondeur maximale en fonction de la précontrainte moyenne

Le dernier critère testé est la hauteur du filet à l'instant où l'élongation de la structure est maximale. Cette grandeur sera notée h_{min} dans la suite de ce chapitre. Les hauteurs sont ici présentées relativement à la hauteur nominale du filet et pour les différentes valeurs de précontraintes moyennes, sur la figure 5.27. La hauteur h_{min} augmente très légèrement avec la précontrainte moyenne. Cette évolution est en accord avec la tendance révélée lors de l'étude de la profondeur maximale atteinte par le bloc (cf. Figure 5.26) : les déformations de l'écran diminuent avec l'augmentation de sa raideur apparente. La corrélation, estimée ici à 0,57, est cependant moins forte pour la hauteur h_{min} . L'amplitude de la variation de hauteur est ici aussi inférieure à 1% de la hauteur nominale.

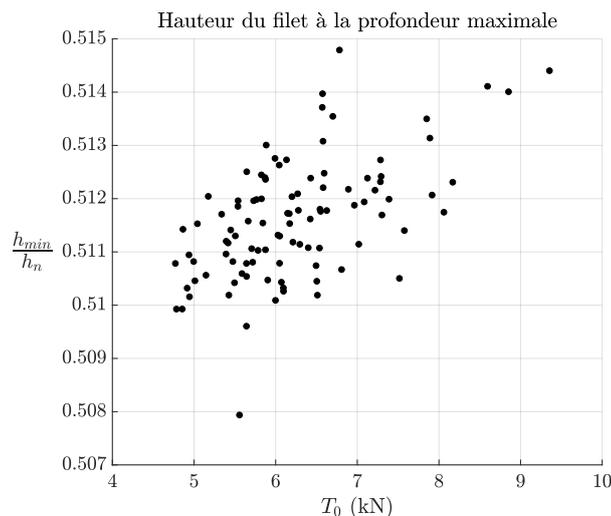


FIGURE 5.27 – Evolution de la hauteur du filet, à l'instant où l'élongation de l'écran est maximale, en fonction de la précontrainte moyenne

La synthèse de cette première étude témoigne de la très faible influence de la précontrainte sur le comportement global de l'écran. Pour tous les critères d'observation retenus, qu'ils soient locaux ou à l'échelle de l'ouvrage, géométriques ou mécaniques, les variations de la réponse causées par la précontrainte restent toujours inférieures à 1%.

Influence du seuil des dissipateurs

Toujours dans le cadre de son projet de fin d'études, C. Girardon a répertorié 27 valeurs de seuils à partir des données expérimentales recueillies sur l'ensemble des essais d'impact dynamique du projet national. Le seuil en effort est une propriété intrinsèque de chaque dissipateur et la dispersion des valeurs de ce paramètre observée expérimentalement, peut être attribuée à la technologie associée aux freins serpents (cf. Paragraphe 2.3.3). Les seuils peuvent ainsi être considérés comme des variables indépendantes. L'échantillon retenu est présenté sur la figure 5.28 et ses propriétés statistiques sont regroupées dans le tableau 5.7. La répartition des seuils est une nouvelle fois approchée par une loi log-normale (5.38), dont les paramètres μ et σ sont calculés à partir de la relation (5.39) (cf. Figure 5.28). Conformément au modèle de câble glissant présenté au paragraphe 3.1.3, aucun effort de frottement n'est introduit dans les calculs menés avec les modèles simplifiés. Une unique valeur de seuil sera ainsi considérée pour chacun des câbles.

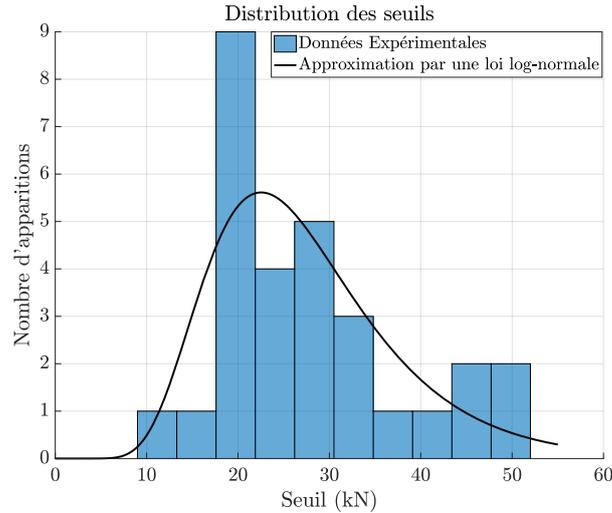


FIGURE 5.28 – Distribution des seuils mesurés expérimentalement et répartition selon une loi log-normale (source [57])

Moyenne (kN)	Variance : $Var(T_0)$ (kN)	Espérance : $E(T_0)$ (kN)
27,0	10,8	27,0

TABLE 5.7 – Propriétés statistiques de l'échantillon contenant les seuils des dissipateurs (source [57])

Les évolutions des énergies plastiques dissipées par chaque câble de rive sont d'abord présentées en fonction de leur seuil respectif sur la figure 5.29. Pour chacun des quatre câbles centraux (B^{sup} , B_{bis}^{sup} , B^{inf} et B_{bis}^{inf}), l'énergie plastique dissipée augmente significativement avec la valeur du seuil. En revanche, pour les câbles A ainsi que les deux latéraux, la tendance semble être inversée. A elongation constante, l'augmentation du seuil d'un câble lui permet de dissiper une plus grande quantité d'énergie. Ce phénomène est notamment observé sur la figure 5.29 pour les câbles centraux.

Toutefois à l'échelle de la structure complète, l'augmentation des seuils induit également un accroissement de la raideur hors plan apparente de l'ouvrage qui tend à diminuer la profondeur maximale atteinte par le bloc. Cette double influence du seuil est observable sur la figure 5.30, présentant la quantité d'énergie totale dissipée par les rives en fonction du seuil moyen des 10 câbles. Paradoxalement, tandis que les dissipations des quatre câbles les plus sollicités augmentent avec leurs seuils respectifs, la quantité d'énergie totale dissipée par les rives diminue significativement avec l'augmentation de la moyenne des seuils. Le coefficient de corrélation, égal à $-0,87$, qui relie ces deux grandeurs atteste par ailleurs que cette évolution est quasiment linéaire. Ce comportement global peut en partie être expliqué par le bilan énergétique (5.37) introduit au paragraphe 5.5.1. L'énergie de déformation élastique accumulée par un câble avant déclenchement du dissipateur augmente en fonction du carré de la valeur du seuil. L'énergie potentielle du bloc évolue, quant à elle linéairement, avec l'enfoncement du bloc et est ainsi moins sensible aux variations des propriétés mécaniques de la structure. Ainsi, au moment où le bloc atteint sa position la plus basse, l'énergie totale dissipée par les rives est d'autant plus faible que l'énergie élastique accumulée par ces

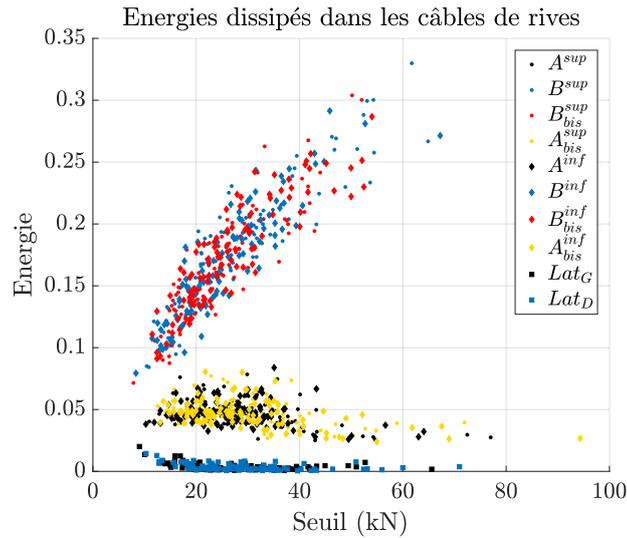


FIGURE 5.29 – Évolutions des énergies dissipées dans les câbles de rive, comptées en fraction de l'énergie d'impact, en fonction de leurs seuils respectifs

dernières est importante.

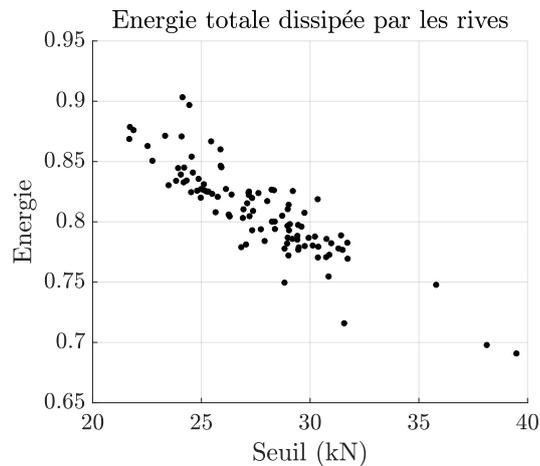


FIGURE 5.30 – Evolution de la quantité totale d'énergie plastique dissipée par les rives en fonction du seuil moyen

Au regard des variations de l'énergie plastique dissipée par l'ensemble de la structure, il apparaît évident que la moyenne des seuils a une influence importante sur la distance d'arrêt du bloc. Cette hypothèse est corroborée par les résultats présentés sur la figure 5.31. Les elongations maximales de la structure sont dispersées dans un intervalle dont la taille est supérieure à 20% de la profondeur atteinte par le bloc lorsque la moyenne des seuils du modèle est égale à 27 kN (la moyenne observée expérimentalement). Comme attendu, le déplacement maximal du bloc augmente lorsque la raideur apparente de l'ouvrage diminue. Une fois encore, le coefficient de corrélation, égal ici à $-0,68$, objective l'influence du seuil sur ce paramètre.

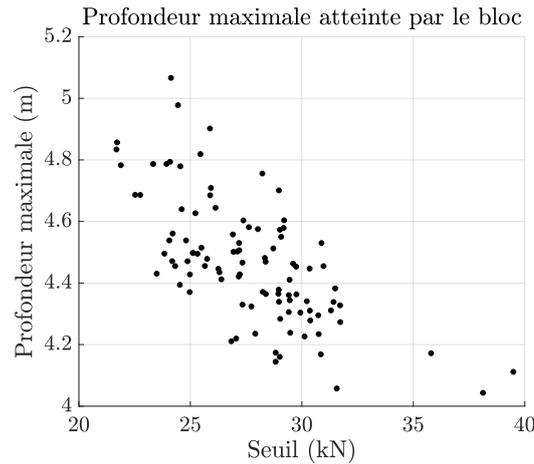


FIGURE 5.31 – Evolution de la profondeur maximale atteinte par le bloc en fonction de la moyenne des seuils des câbles de rive

Le choix du seuil conditionne ainsi l'amplitude des déformations de la structure au cours de l'impact. Afin de compléter cette analyse, les évolutions de la hauteur du filet à l'instant où le bloc atteint sa position la plus basse sont données en fonction du seuil moyen, sur la figure 5.32. La tendance est également très claire pour cette dernière propriété. La hauteur du filet diminue avec la moyenne des seuils. Là encore les variations sont très significatives, surtout compte tenu de l'importance de ce critère pour une justification à l'ETAG27. En outre, pour un seuil moyen qui varie de 25 kN à 30 kN, le rapport de la hauteur à l'instant où la décélération est minimale sur la hauteur nominale passe de 40% à 55%. La nature de la relation liant ces deux grandeurs est plus difficilement identifiable que pour les deux propriétés précédentes, mais le coefficient de corrélation linéaire est tout de même évalué à 0,60. Une limite supérieure, environ égale à $0,55h_n$ semble par ailleurs apparaître lorsque les seuils moyens dépassent les 30 kN. Il est cependant possible de vérifier que ces quelques essais numériques ne reproduisent pas un comportement asymptotique en effectuant un calcul témoin sans dissipateur ; la hauteur du filet à l'instant où le bloc atteint le point plus bas étant alors égale à $0,6h_n$.

Influence de la position des têtes de poteau

Les positions des têtes de poteaux sont des paramètres difficiles à évaluer expérimentalement. En pratique, leurs effets sur la configuration initiale de la structure sont impossibles à distinguer de ceux de la pré-tension une fois que les câbles de rive ont été mis en tension. On suppose ici que les poteaux de 2,75 m de hauteur peuvent être installés avec un léger biais et ainsi ne plus être orthogonaux à la ligne formées par leurs appuis. Toute chose égale par ailleurs, ce défaut de parallélisme introduit une redistribution des longueurs au repos des câbles de rive, à laquelle viennent ensuite s'ajouter les effets de la pré-tension. On notera que, contrairement aux conditions d'appuis de l'ouvrage réel, les têtes de poteaux sont ici des points fixes. Les effets de la pré-tension ayant plutôt tendance à corriger les défauts géométriques initiaux, les variations conjointes et indépendantes de ces deux paramètres donneraient lieu à des hypothèses de calcul très sécuritaires. Dans le cadre de cette dernière étude, l'influence de la position des têtes de poteaux est évaluée de manière indépendante.

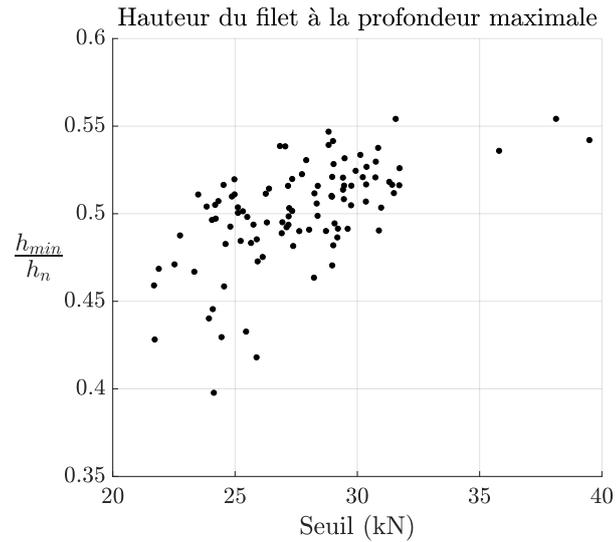


FIGURE 5.32 – Evolution de la hauteur du filet, à l’instant où l’élongation de l’écran est maximale, en fonction de la moyenne des seuils

Pour définir la densité de probabilité qui a trait à cette variable, on considère que l’écart type sur les positions des têtes de poteau est égal à 15 cm. Les têtes de poteaux peuvent ainsi chacune se déplacer sur une portion d’une sphère dont le centre est le pied du poteau et le rayon sa longueur. Les deux angles des coordonnées sphériques, θ et ϕ , introduits sur la figure 5.33 et permettant de décrire la position de la tête d’un poteau sont répartis chacun selon une même loi normale, dont la moyenne correspond à la position de la tête du poteaux dans la configuration sans défaut ($\theta = \phi = \frac{\pi}{2}$) et dont l’écart type est donné par la relation :

$$\sigma(\theta) = \sigma(\phi) = \arctan\left(\frac{0,15}{l_{poteau}}\right) \quad (5.40)$$

où σ et l_{poteau} sont respectivement l’écart type et la longueur du poteau.

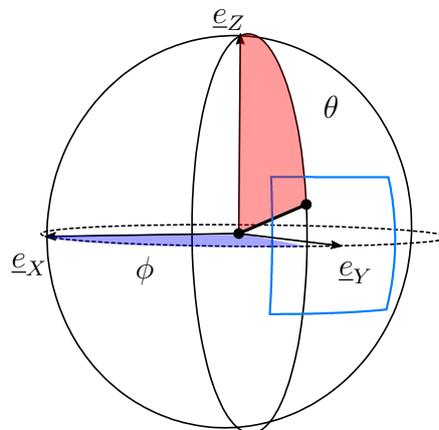


FIGURE 5.33 – Schéma de la plage de variation de la position d’une tête de poteau en fonction des deux angles des coordonnées sphériques

Localement, les positions des têtes de poteaux modifient les longueurs au repos des différents câbles des rives supérieure et latérales. La figure 5.34 présente les évolutions des énergies dissipées par chacun des câbles de rive de la structure en fonction des accroissements de leurs longueurs au repos respectives. Même pour des raccourcissements des câbles, ces résultats sont nettement différents de ceux obtenus lors de l'étude de l'influence de la précontrainte et présentés sur la figure 5.24. Bien que, les énergies dissipées par chacun des câbles de la rive supérieure semble diminuées à mesure que leurs longueurs au repos respectives augmentent, les effets locaux de la position des têtes de poteaux sont moins influents sur le comportement des différents câbles que la redistribution globale des efforts qu'ils engendrent. Ce dernier point peut être vérifié par les différents coefficients de corrélation liant les énergies dissipées par les différents câbles aux modifications de leurs longueur au repos. Mis à part pour celui associé câble B_{bis}^{sup} égal à -0,53, les coefficients de corrélation sont tous compris en -0,45 et - 0,3. Il est rappelé ici, que la valeur absolue du coefficient de corrélation linéaire est comprise entre 0 et 1 et indique la part pouvant être approchée par un comportement affine, de la relation liant deux variables aléatoires. Ainsi, des coefficients inférieurs à 0,5 (en valeur absolue) signifient que plus de la moitié des variations observées ne peuvent pas être attribuées à une interaction entre ces deux variables. Il peut être par ailleurs noté que les amplitudes des accroissements des longueurs au repos, causées par les déplacements des têtes de poteaux, sont relativement importantes en comparaison de l'allongement d'environ 21 cm pour lequel les câbles atteignent leurs limites élastiques.

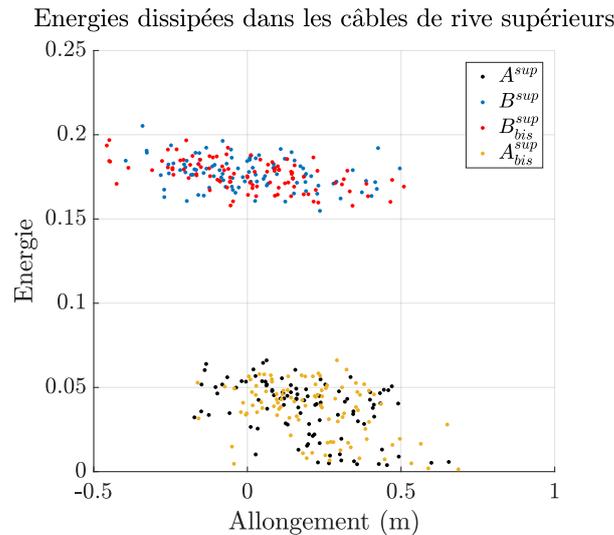


FIGURE 5.34 – Évolutions des énergies dissipées par les câbles de la rive supérieure, comptées en fraction de l'énergie d'impact, en fonction des accroissements de leurs longueurs au repos

Les évolutions de l'énergie totale dissipée par les câbles de rive lors de chacune des simulations sont maintenant étudiées en fonction de l'erreur moyenne sur la position des têtes des poteaux. On observe sur la figure 5.35 que les écarts de position moyens n'ont qu'une influence limitée sur la quantité d'énergie dissipée par la structure. De plus, comme en atteste le coefficient de corrélation de 0,29 reliant ces deux variable, les variations de cette propriété sont peu influencées par la moyenne des défauts de position.

Contrairement à l'énergie dissipée, la profondeur maximale atteinte par le bloc au cours

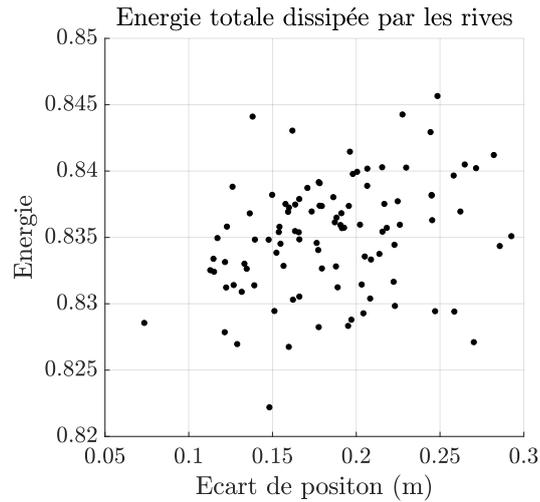


FIGURE 5.35 – Evolution de la quantité totale d'énergie plastique dissipée en fonction de l'écart moyen sur la position des têtes de poteaux

de l'impact est sensible aux variations des positions des têtes de poteaux (cf. Figure 5.36). Les résultats obtenus sont une nouvelle fois très dispersés (le coefficient de corrélation est ici égal à 0,15) et aucune tendance ne peut véritablement est déduite du graphique 5.36. Les écarts sur la position des têtes de poteaux ne sont pas orientés, et si un déplacement vers le haut aura pour effet de diminuer la profondeur maximale atteinte par le bloc, le même déplacement orienté cette fois vers le bas aura quant à lui l'effet inverse. Le principal enseignement de cette étude reste que la géométrie déformée de la structure dépend fortement de ses conditions d'appuis.

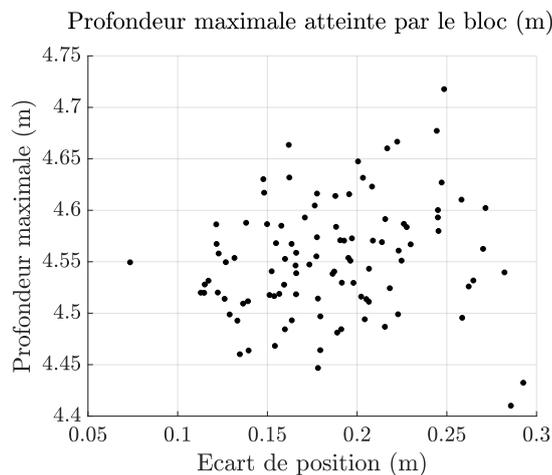


FIGURE 5.36 – Evolution de la profondeur maximale atteinte par le bloc en fonction de l'écart moyen sur la position des têtes de poteaux

Afin de compléter ce dernier point les évolutions de la hauteur à l'instant où le bloc atteint son altitude minimale en fonction de l'écart moyen sur la position des têtes de poteaux sont présentées sur la figure 5.37. Force est de constater que ce paramètre a une très

faible influence sur la hauteur du filet à l'instant où la vitesse du bloc s'annule. Quasiment toutes les variations de la hauteur sont inférieures à 1,5% de la hauteur nominale, pour des écarts moyens des positions des têtes de poteaux qui vont jusqu'à atteindre 30 cm. Les données relatives à ce critère sont par ailleurs tant dispersées qu'il est tentant de conclure que la hauteur à l'instant du rebond et les positions des têtes de poteaux sont deux variables indépendantes. Ce résultat peut être conforté ici par le test statistique de la valeur-p. Ce test consiste à déterminer la probabilité d'obtenir la distribution de la figure 5.37 en faisant l'hypothèse que les deux variables étudiées soient parfaitement indépendantes. Ce raisonnement par l'absurde permet ainsi de valider, ou non, l'hypothèse d'indépendance en fonction de la probabilité obtenue. Pour le problème considéré ici, une valeur-p égale à 6,9 % est obtenue. Cette probabilité est supérieure à la limite de 5% proposée par R. Fisher, dans son ouvrage *Statistical Methods for Research Workers*, en deçà de laquelle il juge qu'un résultat est statistiquement significatif [48]. Il peut ainsi être conclu en suivant cette règle que la hauteur à l'instant où la vitesse du bloc est nulle ainsi que la position des têtes de poteaux sont deux variables indépendantes.

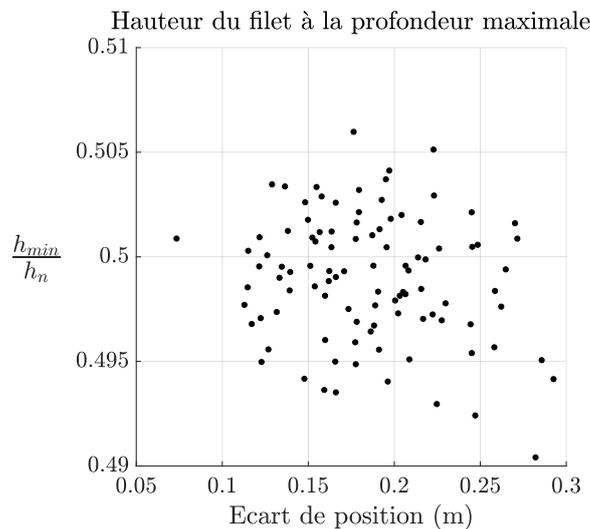


FIGURE 5.37 – Evolution de la hauteur du filet, à l'instant où l'élongation de l'écran est maximale, en fonction de l'écart moyen de position des têtes de poteaux

Synthèse des études paramétriques

Parmi les différents paramètres étudiés, tous n'ont pas la même influence sur le comportement de l'écran. Les principaux résultats obtenus lors de ces trois études paramétriques sont rappelés dans ce court paragraphe, tandis que leurs implications pour le comportement d'un écran réel dont le principe de fonctionnement reproduit celui de l'ouvrage C2ROP y sont également discutées.

Il a d'abord été montré que, pour cette typologie d'écran, l'influence de la précontrainte sur l'énergie dissipée par la structure ainsi que sur sa géométrie déformée était négligeable. Une telle conclusion a une importance capitale en pratique, dans la mesure où ce paramètre est le plus difficile à contrôler à cause de l'équilibre hyperstatique de la structure et la nécessité de conférer à l'ouvrage une certaine raideur initiale.

L'influence des positions des têtes de poteaux sur la quantité d'énergie dissipée ainsi que sur la hauteur du filet à l'instant où l'élongation de la structure est maximale est relativement faible. Les critères de performances proposés dans l'ETAG27 sont ainsi insensibles à des défauts de parallélisme des poteaux. Il a également été prouvé que, pour le modèle de calcul utilisé ici, des variations de la position des têtes de poteaux influent sur la profondeur maximale atteinte par le bloc. Il est cependant difficile de tirer de cette observation des conclusions sur le comportement de l'ouvrage réel. En effet, les deux extrémités des poteaux restent fixes dans le modèle, tandis que les déplacements des têtes de poteaux au cours de l'impact pourraient potentiellement compenser le défaut géométrique initial. Ce résultat numérique reste tout de même important pour le comportement des écrans dans leurs conditions réelles d'utilisation, en dehors du cadre réglementaire de l'ETAG27. Puisque dans le modèle simplifié la structure est symétrique selon l'axe longitudinal de l'ouvrage (défini par sa plus grande direction), les défauts de position des têtes de poteaux peuvent également être interprétés comme des modifications des conditions d'appuis pour un ouvrage réel. La rupture de l'alignement des ancrages en pied de poteau a donc une vraie influence sur l'allongement maximal de l'ouvrage. Par ailleurs, il n'est que rarement possible de préserver l'alignement des poteaux sur des terrains naturels et il peut alors être utile de prendre en compte ces dernières considérations.

Toutefois, les paramètres dont les variations sont les plus critiques pour le comportement de l'écran C2ROP sont sans aucun doute les seuils de déclenchement des dissipateurs. La dispersion des réponses observée au cours de cette étude suffirait à expliquer les écarts entre les essais MEL1 et MEL2 présentés dans le tableau 5.5. La manière dont les seuils modifient le comportement de l'ouvrage est par ailleurs parfaitement identifiable. La diminution des limites d'élasticité des câbles de rive entraînent une chute de la raideur hors plan apparente de l'ouvrage. Cette perte de raideur s'accompagne d'une diminution de la quantité d'énergie de déformation élastique accumulée par les câbles de rive au profit de celle dissipée par les dissipateurs. Cette chute de la raideur hors plan engendre également une augmentation des déformations de l'ouvrage, qui se traduit concrètement par un allongement de la course du bloc et une diminution de la hauteur du filet à l'instant où la vitesse de ce dernier s'annule. Si les graphiques et courbes de tendances présentés dans ce paragraphe ont permis de caractériser les évolutions du comportement du modèle simplifié en fonction de celles des différents seuils des dissipateurs, ils peuvent également servir d'outils de conception. En effet, ces éléments permettent d'ajuster le niveau du seuil moyen pour obtenir un certain niveau d'une des propriétés choisie parmi l'enfoncement maximal, l'énergie dissipée et la hauteur à l'instant où la vitesse du bloc s'annule.

L'utilisation des modèles simplifiés a ainsi permis de caractériser efficacement l'influence de différents paramètres matériels et géométriques pour lesquels une incertitude subsistait quant à la valeur à sélectionner pour la réalisation d'un calcul déterministe. Il peut être noté que les résultats obtenus sont en accords avec l'étude de variabilité menée par C. Girardon avec le modèle A [57]. Ainsi, en plus de reproduire correctement le comportement des modèles complets lorsque la position du chargement varie (voir Paragraphe 5.3.2), les modèles simplifiés présentent les mêmes sensibilités aux paramètres matériels et géométriques. Le prochain paragraphe propose une méthode pour intégrer l'ensemble de ces variabilités à un calcul de justification d'un écran pare-blocs.

5.6 Vers la définition de coefficients de sécurité pour les écrans pare-blocs

5.6.1 Du calcul déterministe à une approche semi-probabiliste

Avant l'utilisation des normes européennes, également appelées eurocodes, les ouvrages étaient dimensionnés selon une approche déterministe qui consistait à vérifier que la contrainte maximale qui leur était appliquée restait inférieure à une contrainte, dite admissible, estimée en fonction de la contrainte d'une ruine et d'un coefficient de sécurité [52].

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{adm} \quad \text{avec} \quad \sigma_{adm} = \frac{\sigma_r}{K} \quad (5.41)$$

où σ_{max} est la sollicitation maximale appliquée à l'ouvrage, σ_{adm} la contrainte admissible, σ_r la limite de ruine et K un coefficient de sécurité. Le calcul déterministe fait ainsi intervenir un unique coefficient de sécurité, tandis que le calcul de résistance d'une structure est difficilement réductible à une unique variable. Une approche probabiliste consisterait à évaluer la probabilité croisée que la structure soit à la fois soumise à une sollicitation supérieure ou égale à σ_{max} et que sa contrainte de ruine soit également inférieure ou égale à σ_r . La sollicitation et la ruine sont cependant des propriétés difficiles à associer à une unique variable aléatoire et le calcul de probabilité, dans l'hypothèse où de nombreuses variables aléatoires sont à considérer, peut vite devenir compliqué à réaliser.

En partie pour ces raisons de mise en œuvre pratique, la norme européenne EN 1990 a imposée une méthode de justification semi-probabiliste [3]. Il est considéré dans cette approche que les calculs de la sollicitation et de la résistance dépendent tous deux d'un nombre réduit de variables aléatoires, dont les densités de probabilités sont des fonctions normales de moyenne et d'écart type connus. Le calcul semi-probabiliste consiste à introduire, pour chacune des variables aléatoires à considérer, un coefficient partiel de sécurité de manière à ce que le calcul de ruine puisse être ramené à une inégalité prenant la forme de celle utilisée pour le calcul déterministe 5.41. La grande différence entre les approches déterministe et semi-probabiliste est donc que dans le second cas les grandeurs σ_{max} et σ_{adm} sont des fonctions de plusieurs coefficients partiels. Plus précisément, σ_{max} dépend de deux coefficients partiels relatifs aux actions : γ_f et γ_{sd} . Le premier décrit l'incertitude sur les actions tandis que le second caractérise celle sur les effets de ces mêmes actions. Par commodité ces deux coefficients partiels peuvent regrouperés sous un même terme qui est noté γ_F . Le terme σ_{adm} dépend quant à lui des coefficients partiels γ_m et η , qui caractérisent respectivement la variabilité des propriétés matériels et l'influence de l'environnement, ainsi que du paramètre γ_{Rd} qui permet de tenir compte de l'incertitude sur le modèle de calcul [3]. Ces trois coefficients partiels peuvent être rassemblés dans un unique terme, noté γ_M , qui caractérise complètement l'ensemble des incertitudes et des variabilités qui ont trait à la valeur de résistance nominale σ_{adm} .

5.6.2 Application à un essai normalisé selon l'ETAG27

Principe de l'étude

On se propose dans ce paragraphe d'adapter aux essais de l'ETAG27 la démarche introduite dans l'EN 1990 et ses annexes. Le choix de considérer uniquement des essais de

normalisation permet de simplifier grandement la méthode. Il est en effet raisonnable de considérer que le coefficient partiel γ_F , relatif aux actions, peut être pris égal à 1, dans la mesure où les stations d'essais agréées présentent des garanties suffisantes pour certifier que les conditions de largage soient maîtrisées avec une précision adaptée. Sous ces conditions de sollicitation, il suffit ainsi de proposer une évaluation pertinente du coefficient partiel γ_M , qui caractérise l'ensemble des incertitudes ayant trait aux propriétés mécaniques de la structure ainsi qu'à la méthode de calcul de sa résistance théorique.

La méthodologie permettant d'évaluer ce coefficient γ_M est détaillé dans les différentes annexes de l'EN 1990. En outre, K. L. Tran en a également proposé un résumé efficace dans sa thèse de doctorat au cours de laquelle il a estimé la résistance ultime de panneaux courbes cylindriques [92]. Les différentes étapes permettant d'obtenir une valeur de γ_M sont ainsi directement appliquées aux problèmes de l'essai ETAG27 et ne sont pas rappelées pour un contexte général. Les grands principes de la méthode peuvent toutefois être résumés de la manière suivante. Une fonction de résistance théorique est comparée à un grand nombre de données issues d'expériences ou, comme c'est le cas ici, de simulations numériques qui intègrent les variabilités du problème. Le coefficient partiel est ensuite évalué à partir des erreurs obtenues entre la prédiction du modèle et les données de l'échantillon.

Dans le problème proposé ici, le comportement théorique de la structure est fourni par le calcul d'un impact dans les conditions ETAG27 lorsque les valeurs de tous les paramètres, ou variables aléatoires, dont les influences respectives ont été étudiées au paragraphe 5.5.2, sont égales à leurs valeurs caractéristiques. On choisit ici de prendre ces valeurs caractéristiques égales aux valeurs moyennes. Comme la certification d'un écran pare-blocs est construite sur différents critères relatifs soit à l'énergie dissipée soit à la géométrie déformée, une fonction de résistance théorique devra être définie pour chacune des propriétés étudiées. L'échantillon des données est ensuite formé par les résultats de n simulations numériques toujours menées avec le modèle simplifié. En accord avec l'EN 1990, on choisit ici de considérer $n = 1000$ de manière à pouvoir utiliser les propriétés statistiques correspondant à un nombre infini de tirages. Pour chaque calcul, les valeurs des paramètres d'entrée sont tirés aléatoirement en fonction des densités de probabilité introduites au paragraphe 5.5.2.

Pour illustrer la démarche, on introduit ici X_{th} , la valeur théorique d'une propriété du système, pouvant ici être un des critères étudiés au paragraphe 5.5.2. On note également X_i , la $i^{\text{ème}}$ valeur de cette propriété, calculée pour une certaine combinaison des paramètres d'entrée. Le paramètre d'erreur δ_i associé à la valeur X_i est ensuite défini par la relation : $X_i = X_{th}\delta_i$. Il est alors possible d'associer au modèle théorique X_{th} un modèle probabiliste X_p qui tient compte des fluctuations de la réponse causées par la variabilité des paramètres du problème lors des calculs.

$$X_p = X_{th}\delta \quad (5.42)$$

où δ est la variable aléatoire des erreurs du modèle théorique. On fait de plus l'hypothèse que la densité de probabilité de δ est une loi normale de moyenne m_X et d'écart type σ_X . La valeur caractéristique du modèle probabiliste est ensuite égale au fractile à 5 % ou 95 % de la loi normale, en fonction de la propriété considérée. Pour les calculs de résistance l'EN 1990 propose, dans l'annexe D, d'utiliser le fractile à 5 % pour la valeur de résistance caractéristique [3]. Dans le cas de l'écran de protection l'approche sécuritaire peut amener à considérer le fractile à 95 %, comme pour l'étude de l'enfoncement maximal du bloc. Les

valeurs caractéristiques sont ainsi données par l'une des deux relations (5.43).

$$\begin{cases} X_k = m_X - 1,64\sigma_X & \text{Fractile à 5 \%} \\ X_k = m_X + 1,64\sigma_X & \text{Fractile à 95 \%} \end{cases} \quad (5.43)$$

De manière similaire, l'annexe D de l'EN 1990 permet de déterminer la valeur de calcul du modèle probabiliste X_{th} , à partir du coefficient $k_{d,\infty}$, dont la valeur est donnée dans la norme.

$$\begin{cases} X_d = m_X - k_{d,\infty}\sigma_X & \text{Fractile à 5 \%} \\ X_d = m_X + k_{d,\infty}\sigma_X & \text{Fractile à 95 \%} \end{cases} \quad (5.44)$$

avec $k_{d,\infty} = 3,04$. Le coefficient partiel de sécurité γ_M^{Ed} , associé à la propriété X , est ensuite défini par le rapport de ces deux grandeurs.

$$\gamma_M^X = \frac{X^k}{X^d} \quad (5.45)$$

Il reste cependant un dernier paramètre qui n'a pas été directement caractérisé dans l'étude proposée ci-dessus. L'échantillon de données permettant de construire le modèle statistique X_p donnée par la formule (5.42) a en effet été établi à partir d'un modèle de calcul qui, pour des paramètres d'entrée donnés, peut également s'écarter des résultats obtenus par des méthodes de résolution différentes. Pour tenir compte des incertitudes liées au calcul, il est possible de sur-estimer la valeur de l'écart type σ_X du modèle probabiliste. Cette correction ne sera toutefois pas apportée à la valeur des coefficients γ_M qui seront obtenus par la suite. Il peut être noté que les performances du modèle simplifiés ont tout de même été partiellement évaluées au cours du paragraphe 5.3.2, au moyen d'une comparaison avec les trois modèles de structure étudiés dans le chapitre 4. Au regard des résultats obtenus, à la fois au cours de cette étude comparative et lors de l'étude paramétrique du paragraphe 5.5.2, on se permet de négliger l'influence de la méthode de calcul devant l'influence de certains paramètres matériels et géométriques du problème. Par ailleurs, l'objectif est ici de caractériser les variations de la réponse de la structure et non de la justifier rigoureusement pour le test de l'ETAG27. Il n'y aura ainsi pas d'incidence pour les conclusions de cette étude, si le modèle simplifié sur-estime légèrement une quelconque grandeur par rapport au modèle traditionnel, tout du moins si les variations qu'il exprime restent fidèles au comportement réel de la structure. De plus, pour prendre en compte des variations de la sollicitation sans pour autant estimer un coefficient partiel γ_F^X , il est également proposé d'intégrer une certaine variabilité sur la position d'impact du bloc. On considère pour cela que l'écart type sur la position du bloc au moment de l'impact, selon les deux directions du plan du filet, est égal à un quart de son diamètre. Les conditions initiales en position, utilisées comme variables des calculs dynamiques menés avec les modèles simplifiés, sont également distribuées selon une loi normale.

Identification des coefficients partiels

Comme expliqué au paragraphe précédent, un coefficient partiel doit être associé à chacune des grandeurs permettant d'estimer la résistance de l'écran. Ces propriétés ont été présentées au paragraphe 2.2.2 pour l'essai de certification ETAG27. Certaines d'entre elles ne peuvent pas être caractérisées par la méthode de résolution décrite dans ce chapitre. En effet, les modèles simplifiés ne peuvent pas reproduire les modes de ruines de l'ouvrage

qui sont dus à la rupture d'un des composants de l'écran. Il a par ailleurs été expliqué que pour raccourcir les temps de calcul, notamment lorsque le nombre de simulations à réaliser devient élevé, la hauteur résiduelle du filet n'était pas recherchée. Dans ce contexte et puisque la portée de ce paragraphe et avant tout méthodologique, les coefficients partiels seront établis pour les propriétés précédemment exploitées au cours de l'étude paramétrique présentée au paragraphe 5.5.2. Quatre autres critères seront de plus considérés, il s'agit :

- du défilement maximal atteint sur un câble,
- de la durée de l'impact, mesurée entre l'instant où le bloc entre en contact avec la nappe et celui où sa vitesse s'annule,
- l'effort statique équivalent, ici égal à la force de rappel maximale appliquée au bloc,
- l'effort maximal calculé au niveau d'une tête de poteau.

Les résultats obtenus avec le modèle théorique, pour lequel les valeurs de tous les paramètres sont égales à leurs valeurs moyennes, sont comparés, au travers du tableau 5.9, aux comportements de l'écran C2ROP obtenus lors des deux essais au niveau d'énergie MEL menés dans le cadre du Projet National et dont les caractéristiques ont préalablement été rassemblées dans le tableau 2.2 (cf. Paragraphe 2.3.4). Avant cela, les paramètres d'entrée du modèle théorique sont rappelés au sein du tableau 5.8.

Position de l'impact	(0,0) m
Précontrainte uniforme	6,2 kN
Seuil des dissipateurs	27,6 kN
Excentricité d'une tête de poteau	0 m

TABLE 5.8 – Paramètres de référence utilisés pour le modèle théorique

Critère	Modèle théorique	MEL1	MEL2
Profondeur maximale (m)	4,22	4,44	5,05
Défilement des freins (cm)	696	828	1137
$\frac{h_r}{h_n}$ (%)	44 %	43 %	51%
Défilement max sur un câble (cm)	144	247	280
Durée de l'impact (s)	0,23	0,25	0,27
Effort statique équivalent (kN)	186	117	117
Effort maximal en tête de poteau (kN)	37	-	-

TABLE 5.9 – Comparaison des résultats obtenus avec le modèle théorique avec les comportements réellement observés lors des essais MEL1 et MEL2 du PN C2ROP

Le comportement du modèle théorique sous-estime la profondeur maximale atteinte par le bloc ainsi que le défilement des dissipateurs. En revanche, la hauteur résiduelle calculée est proche de celles observées expérimentalement. Une fois n'est pas coutume, en l'absence de mesures des hauteurs du filet au moment où le bloc atteint son déplacement maximal, ceux sont bien les valeurs des hauteurs résiduelles qui sont données dans le tableau 5.9. Les écarts entre le comportement du modèle théorique et celui de l'essai MEL1, pour les trois premiers critères considérés, sont nettement inférieurs à ceux constatés entre les deux expériences. De ce point de vue, la légitimité du modèle théorique proposé comme référence pour le calcul

du coefficient partiel de sécurité n'est pas remise en cause. Il peut être par ailleurs noté que, dans la mesure où les comportements des freins sont modélisés sans écrouissage plastique, la donnée du défilement est complètement équivalente à celle de l'énergie dissipée. Puisque les câbles du modèle théorique ont tous le même seuil d'activation, la dissipation de l'énergie est équitablement répartie et le défilement maximal est logiquement inférieur à ceux mesurés à la suite des deux essais expérimentaux. Le coefficient de sécurité qui a trait à cette grandeur permettra ainsi de quantifier la longueur de câble à allouer à chacun des dissipateurs pour qu'aucun frein n'arrive en butée lors du fonctionnement de l'écran.

Pareillement à la profondeur maximale atteinte par le bloc, la durée de l'impact et l'effort statique équivalent donnent eux aussi une indication sur la raideur géométrique de l'écran. Comme attendu, le temps d'impact calculé avec le modèle simplifié est plus court que ceux observés expérimentalement et, à l'inverse, l'effort statique équivalent obtenu avec le modèle est quant à lui plus élevé que ceux calculés à partir des données recueillies par les accéléromètres. Toutefois, l'amplitude des écarts en effort est nettement plus importante que celles des erreurs en temps et en position. L'effort maximal mesuré au niveau de la tête d'un poteau du modèle simplifié est la dernière propriété introduite dans le tableau 5.9 pour laquelle un coefficient partiel sera évalué. Elle ne peut cependant pas être directement comparée avec les données issues des expériences puisque, contrairement aux conditions d'appuis des modèles simplifiés, les têtes des poteaux de la structure réelle ont chacune trois degrés de liberté et sont donc équilibrées par des efforts transitant par d'autres éléments de l'ouvrage (deux haubans et deux câbles de rive). Dans la mesure où l'impact étudié est centré, seule la partie verticale de l'effort maximal transmis à la tête d'un poteau sera considérée. En effet, dans cette situation l'effort résultant total appliqué aux ancrages n'a pas de composante horizontale. Par ailleurs, l'inclinaison importante des haubans qui maintiennent les têtes des poteaux dans l'ouvrage réel assure d'une part, que la majeure partie de l'effort horizontal est équilibrée par les câbles de rive, et d'autre part que la quasi-totalité des efforts verticaux est transmise aux ancrages. Seule la connaissance de ces dernières composantes est donc nécessaire au dimensionnement des ancrages.

Les écarts δ_i donnés par le rapport entre les valeurs des propriétés, introduites dans le tableau 5.9 et observées lors des différentes simulations, et la réponse du modèle théorique sont présentés sur la figure 5.38. Les lois normales identifiées pour chaque propriété sont également représentées. Les distributions sont dans l'ensemble correctement approchées par des lois normales. Par ailleurs, les grandeurs statistiques permettant d'identifier ces lois ainsi que les coefficients partiels γ_M qui leur sont associés, calculés grâce aux relations (5.42) à (5.45), sont rassemblés dans le tableau 5.10. Les moyennes et écarts types fournis sont bien ceux des modèles probabilistes (5.42) qui sont déduits des termes d'erreur en les multipliant par les valeurs des propriétés calculées avec les modèles théoriques. Les valeurs caractéristiques du défilement total des freins, de la hauteur du filet, de l'énergie plastique dissipée et de la durée de l'impact sont estimées avec le fractile à 5 %, tandis que celles de l'élongation maximale, du défilement maximal atteint sur un câble, de l'effort statique équivalent et de l'effort maximal appliqué en tête d'un poteau, sont quant à elles données par le fractile à 95 % (cf. relations (5.43) et 5.44).

Il est tout d'abord intéressant de noter que les valeurs moyennes des propriétés calculées sur l'ensemble des simulations sont très différentes de celles données par le modèle théorique qui a quant à lui été construit à partir des valeurs moyennes de chaque paramètre d'entrée. Autrement dit, le modèle théorique fourni une mauvaise approximation des réponses

5.6. VERS LA DÉFINITION DE COEFFICIENTS DE SÉCURITÉ POUR LES ÉCRANS PARE-BLOCS

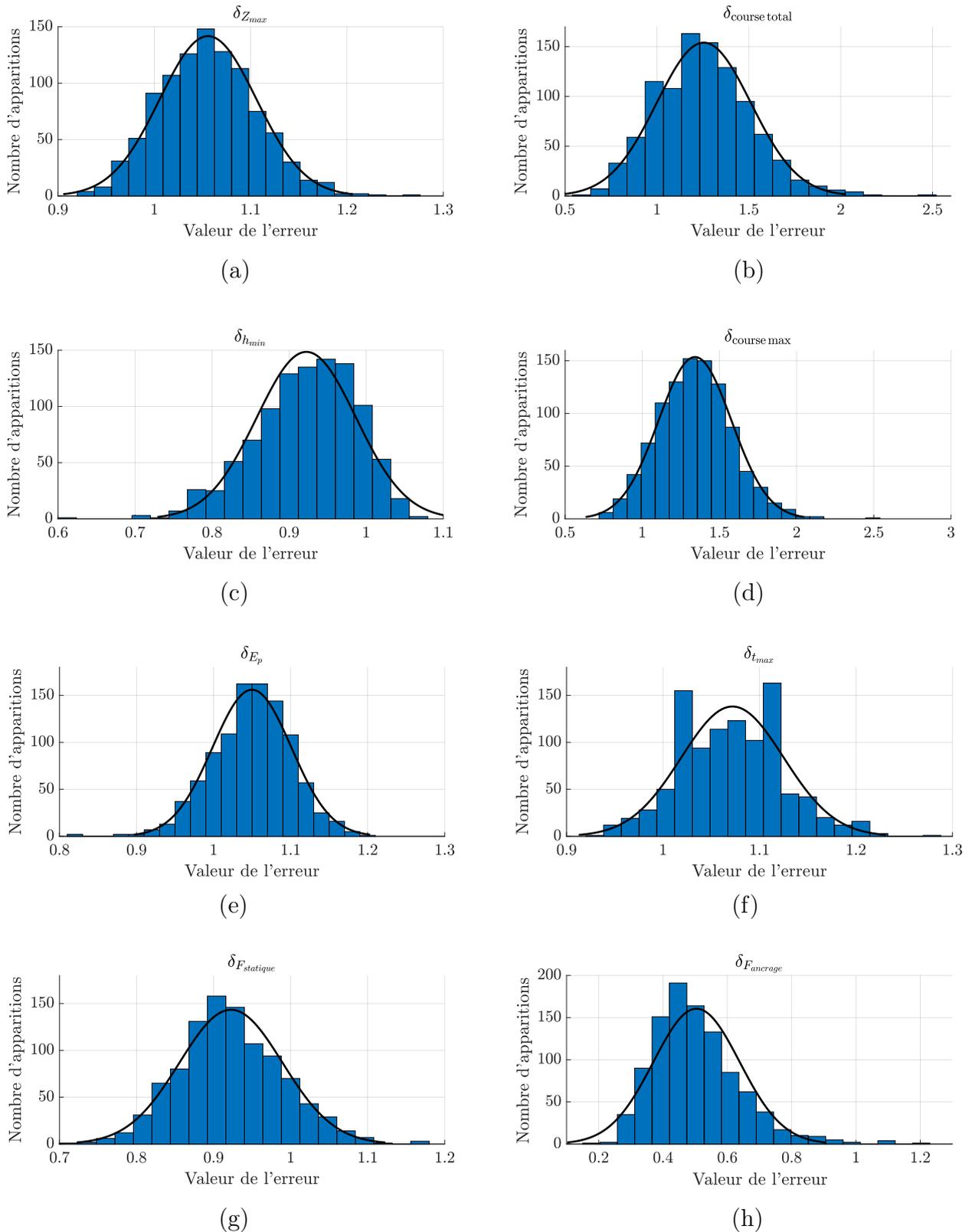


FIGURE 5.38 – Répartition des erreurs des modèles théoriques $X_i h$. (a) : Erreur sur la profondeur maximale atteinte par le bloc, (b) : Erreur sur le défilement total des freins, (c) : Erreur sur la hauteur du filet, (d) : Erreur sur le défilement maximal atteint sur un câble, (e) : Erreur sur l'énergie plastique dissipée par les dissipateurs, (f) : Erreur sur la durée de l'impact, (g) : Erreur sur l'effort statique équivalent, (h) : Erreur sur l'effort maximal transmis à un ancrage

5.6. VERS LA DÉFINITION DE COEFFICIENTS DE SÉCURITÉ POUR LES ÉCRANS PARE-BLOCS

Propriété X	m_X	σ_X	X_k	$\frac{X_k}{X_{th}}$	X_d	γ_M^X
Profondeur maximale	4,45 m	0,21 m	4,80 m	1,11	5,08 m	0,94
Défilement des freins	873 cm	178 cm	580 cm	0,73	332 cm	1,57
Energie dissipée par les freins	220 kJ	11 kJ	203 kJ	0,93	188 kJ	1,08
$\frac{h_{min}}{h_n}$	50 %	3 %	44 %	0,84	39 %	1,12
Défilement max sur un câble	192 cm	34 cm	249 cm	1,51	296 cm	0,84
Temps d'impact	0,25 s	0,01 s	0,23 s	0,95	0,21 s	1,08
Effort statique équivalent	171 kN	12 kN	192 kN	1,15	209 kN	0,92
Effort maximal en tête de poteau	19 kN	5 kN	27 kN	0,9	34 kN	0,79

TABLE 5.10 – Propriétés statistiques des critères étudiés, évaluation des valeurs caractéristiques et de calcul et estimation des coefficients partiels de sécurité

moyennes réellement observées. Cette observation ne remet pour autant pas en question le choix du modèle théorique, dans la mesure où aucun comportement moyen peut être associé à la structure sachant que les valeurs moyennes obtenues pour chacune des propriétés observées sont a priori obtenues pour des jeux de paramètres différents. Les écart types, contenus dans la seconde colonne du tableau 5.10 révèlent également que toutes les propriétés observées ne sont pas identiquement sensibles aux variations des paramètres d'entrée. Elles sont dans l'ensemble peut disperser, sauf le défilement total des freins et l'effort maximal appliqué en tête de poteau. Le contraste des écarts types entre l'énergie dissipée par les freins et leurs défilements totaux doit être mis en perspective avec les écarts préalablement observés dans le tableau 5.9, entre les essais MEL1 et MEL2 sur ce second critère. Les variations de seuil permettent ainsi d'expliquer les écarts de défilement en continuant de privilégier le mode de dissipation par les dissipateurs. Les faibles écarts types observés sur les propriétés globales (propriétés géométriques, temps d'impact, énergie et effort statique équivalent) montrent par ailleurs que la disparité des défilements n'a pas non plus d'incidence directe sur la raideur géométrique apparente de la structure. Cette observation peut en partie être expliquée par les modes de glissement introduit au paragraphe 5.2.2. Il avait alors été expliqué que la raideur de la structure est uniquement déterminée par les câbles sujets à l'effet rideau lorsque le bloc impacte le milieu d'un module, en l'occurrence les quatre câbles centraux pour un impact centré.

Du point de la méthodologie, les valeurs de calcul des propriétés, rassemblées dans la colonne X_d du tableau 5.10, permettent un dimensionnement sécuritaire, et cela malgré l'ampleur des écarts initialement observés entre les réponses données, d'une part par le modèle théorique, et d'autre part par les comportements expérimentaux (voir Tableau 5.9). La pertinence de l'approche est en outre justifiée par la possibilité d'intégrer, en accord avec les recommandations de l'EN 1990 [3], l'incertitude sur le modèle de calcul ainsi que des données relatives à d'autres essais, réalisés dans des conditions expérimentales similaires, dans le calcul des coefficients partiels γ_M . Le principal objectif de cette étude était de montrer le potentiel des modèles simplifiés pour proposer un dimensionnement réaliste, tenant compte de variabilités diverses et respectant les standards adoptés pour les autres structures du génie civil. Pour autant, les coefficients partiels estimés dans le tableau 5.10 sont ici donnés à titre d'exemples et ne doivent en aucun cas être appliqués en l'espèce pour dimensionner une structure réelle. Le problème reste celui de l'incertitude sur le modèle

de calcul. En effet, bien qu'elles aient été déterminées en respectant les recommandation de l'annexe D de l'EN 1990, les valeurs caractéristiques retenues ici pour calculer les coefficients partiels, restent intimement liées aux modèles simplifiés.

Exemple d'application

On se propose dans ce paragraphe d'associer les résultats obtenus lors de l'étude menée au paragraphe 5.5.2, qui avait permis de caractériser l'influence des seuils des dissipateurs, aux coefficients partiels déterminés dans le tableau 5.10 afin de proposer un dimensionnement sécuritaire des freins pour l'impact à l'énergie MEL de 270 kJ étudié dans de ce paragraphe. Une fois encore, l'objectif de ce cas d'étude est avant tout méthodologique et ne consiste pas à satisfaire le critère de ruine de l'ETAG27 qui reste à l'heure actuelle difficile à modéliser avec les modèles simplifiés.

On propose ici de dimensionner les dissipateurs de manière à ce que la hauteur de calcul du filet à l'instant où le bloc atteint son point bas soit supérieure à 40 % de la hauteur nominale. Cette valeur a été présentée précédemment dans le tableau 5.10 comme étant égale à la hauteur de calcul h_d tenant compte des variabilités des paramètres du problème. L'objectif de l'étude est de suivre le raisonnement inverse afin d'identifier la valeur de hauteur qui doit être obtenue par le calcul numérique pour satisfaire ce critère majoré. En accord avec la relation (5.45), la hauteur h_d est donnée en fonction du coefficient partiel γ_M^h et de la valeur caractéristique h_k :

$$h_d = \frac{h_k}{\gamma_M^h} \quad (5.46)$$

Ainsi, pour obtenir la valeur de calcul sécuritaire h_d , il est nécessaire que la valeur caractéristique de la hauteur estimée par le modèle de calcul soit égale à :

$$h_k = \gamma_M^h h_d \quad (5.47)$$

Il est important de rappeler ici que la grandeur h_k intègre déjà les variabilités des paramètres d'entrée du problème. Les valeurs de ces paramètres doivent donc chacune être logiquement corrigée par un coefficient partiel dans le cadre d'un dimensionnement semi-probabiliste. Ces coefficients n'ont toutefois pas été identifiés individuellement au cours de l'étude paramétrique proposée au paragraphe 5.5.2. Il est en revanche possible d'utiliser le coefficient $\left(\frac{h_k}{h_t h}\right)$ qui relie la hauteur calculée avec le modèle simplifié à la hauteur caractéristique et retranscrit lui aussi la variabilité des différents paramètres. On obtient finalement l'expression suivante de la valeur cible à atteindre avec le modèle de calcul :

$$h_t h = \frac{\gamma_M^h h_d}{\left(\frac{h_k}{h_t h}\right)} \quad (5.48)$$

On montre ainsi en appliquant les valeurs des coefficients regroupées dans le tableau 5.10 que la hauteur à estimer avec le modèle doit au moins être égale à 55% de la hauteur nominale de l'écran pour respecter le critère de dimensionnement ramené à 40 % après application des coefficients partiels de sécurité.

Le graphique 5.32, présentant l'influence du seuil moyen sur la hauteur de l'écran à l'instant où la vitesse du bloc s'annule, peut alors être utilisé comme un outil de dimensionnement. On choisit ainsi de retenir une valeur de seuil égale à 30 kN pour l'ensemble des

câbles de la structure, les autres paramètres du calcul étant toujours égaux à leurs valeurs moyennes identifiées dans le travail de C. Girardon [57]. Pour ce seuil on obtient une valeur de hauteur $h_t h = 0,53h_n$ qui ne satisfait pas au niveau de performance exigé. Le même calcul en considérant cette fois des seuils égaux à 30 kN donne les résultats regroupés dans le tableau 5.11.

Profondeur maximale (m)	Energie dissipée par les freins (kJ)	$\frac{h_{min}}{h_n}$ (%)
4,06 m	197 m	55

TABLE 5.11 – Résultat du calcul mené avec les seuils dimensionnés pour garantir une hauteur du filet à l’instant où la vitesse du bloc s’annule inférieure à : $h_d = 0,4h_n$

L’utilisation des résultats de l’étude paramétrique a ainsi permis de proposer un dimensionnement des seuils en seulement deux étapes de calcul. La même démarche peut très facilement être appliquée aux autres propriétés pour lesquelles l’influence des seuils a été caractérisée au cours du paragraphe 5.5.2. Les valeurs de seuil peuvent être déterminées pour optimiser une unique propriété, comme cela vient d’être réalisé avec la hauteur du filet, ou alors identifiées pour répondre à différents critères. En effet, on notera que dans le cas d’étude traité ci-dessus, l’accroissement du niveau des seuils a augmenté la hauteur du filet mais a en contre-partie diminué la quantité d’énergie plastique dissipée.

Toutefois, la résolution de ce problème de dimensionnement illustre bien l’utilité que peuvent avoir ces modèles simplifiés pour la conception des écrans de protection pare-blocs. On peut en effet très bien imaginer construire des outils graphiques de pré-dimensionnement en étendant simplement les études menées au paragraphe 5.5.2 à d’autres paramètres de la structure, notamment géométriques. En intégrant en plus l’analyse semi-probabiliste à la définition des niveaux de propriétés souhaités, il est possible de construire une méthode de dimensionnement efficace et particulièrement robuste.

5.7 Conclusion

Ce dernier chapitre a permis de démontrer que le recours à des modélisations simplifiées d’un écran pare-blocs pouvait être une alternative crédible aux *macro-modèles* construits par apprentissage, pour l’étude probabiliste du comportement de l’ouvrage. La première partie du chapitre a été consacrée à la présentation d’une famille de modèles, permettant de reproduire une grande variété d’impacts. Les performances de ces modèles, contenant un nombre limité de degrés de liberté, ont ensuite été estimées au travers d’une comparaison poussée avec les comportements des trois modèles de structure *A*, *B*, *C*, étudiées en détail au cours du précédent chapitre. La suite et fin du chapitre a été, quant à elle, dédiée exclusivement au comportement de l’écran lors d’un essai ETAG27. Dans un premier temps, les deux hypothèses fondamentales (monotonie du chargement dynamique et concentration des efforts inertielles dans le bloc) qui ont permis de tirer des conclusions de l’étude des comportements des écrans sous des sollicitations quasi-statiques ont été validées. Dans un deuxième temps, les influences de divers paramètres sur le comportement de l’ouvrage ont été caractérisées. Il a alors été montré que la disparité des résultats observés était pilotée par la variabilité des seuils des dissipateurs qui déterminent la raideur géométrique de l’ouvrage.

Cette étude a servi de référence pour proposer ensuite une méthode, tirée de l'eurocode 0, permettant d'estimer des coefficients partiels de sécurité à partir d'un grand nombre de simulations numériques.

Cependant, la nature des sollicitations envisagées avec ce modèle est pour l'instant fortement contrainte par la modélisation. Pour parvenir à une méthode de dimensionnement complète et pertinente de l'ouvrage, qui tiendrait notamment compte de conditions d'impact réalistes, il est nécessaire de développer le modèle de projectile. Pour l'instant le bloc est représentée par sa face inférieure qui se déplace uniquement selon des translations de corps rigide. Pour élargir le champ d'application des modèles simplifiés, il sera nécessaire de prendre en compte les mouvements de rotations du projectile, en essayant de préserver la légèreté de la modélisation.

Chapitre 6

Conclusions et perspectives

Les écrans de filet pare-blocs sont des ouvrages aujourd'hui largement répandus pour protéger les régions urbanisées exposées aux dangers des chutes de pierres. Leurs comportements sont ainsi étudiés depuis plus d'un demi siècle et les activités de recherche se sont intensifiées dans les années 1990 avec le développement des premiers outils numériques permettant de reproduire le comportement dynamique de ces structures. Leur modélisation et la compréhension de leur fonctionnement global restent malgré tout un enjeu scientifique d'actualité. Les nombreuses non-linéarités, à la fois géométriques et matérielles, qui interviennent lors de l'impact d'un bloc sur une barrière sont en effet complexes à modéliser et le cheminement des efforts au sein de la structure est encore aujourd'hui mal connu. En particulier, une réelle inconnue existe sur le domaine de validité des résultats des essais de l'ETAG27, qui se déroulent dans des conditions idéales et contrôlées, pour caractériser le comportement de l'ouvrage une fois que celui-ci est sollicité en conditions réelles. Par ailleurs, contrairement à ce qui a été mis en place pour d'autres structures de génie civil, aucune norme de dimensionnement n'a à l'heure actuelle été développée pour faciliter et uniformiser la conception des écrans de protection souples. Les travaux présentés dans ce manuscrit ont apportés des éléments de réponses à ces problématiques à la fois scientifiques et réglementaires.

Il est important de rappeler que seul le comportement du prototype d'écran développé dans le cadre du projet national C2ROP a été étudié en détail dans ce travail de thèse. Toutefois, les architectures proposées par les différents concepteurs de barrières hautes énergies sont peu nombreuses. Les écrans hautes énergies peuvent en effet être classés en deux grandes catégories en fonction de la position des dissipateurs dans la structure globale de l'ouvrage :

- La première famille de barrière est celle à laquelle appartient l'écran C2ROP. Les dissipateurs sont dans ce cas disposés le long des différents câbles de rive de l'ouvrage.
- Pour les écrans appartenant à la seconde famille, les dissipateurs sont situés sur les câbles de haubanage maintenant les têtes de poteaux. Contrairement aux cinématiques de déformation évoquées dans ce manuscrit, celles des ouvrages appartenant à cette famille d'écran présentent des déplacements importants des têtes de poteaux et des allongements des rive relativement faibles.

Les remarques formulées dans ce manuscrit sur le comportement de l'ouvrage C2ROP peuvent ainsi raisonnablement être étendues à l'ensemble des écrans appartenant au premier groupe.

Avant qu'il soit modélisé, le comportement de cet ouvrage a tout d'abord été étudié au travers des résultats des essais conduits dans le cadre du projet national C2ROP. La comparaison des réponses de la structure soumise à des sollicitations quasi-statique et dynamiques a notamment permis de distinguer deux phases du comportement de l'ouvrage. Lors de la première, les transformations géométriques, notamment causées par l'effet rideau, permettent à l'ouvrage initialement plan de transmettre des efforts verticaux à ses ancrages. La forme de l'ouvrage n'évolue ensuite quasiment plus durant la seconde phase au cours de laquelle l'essentiel de l'énergie d'impact est dissipée grâce au fonctionnement des dissipateurs. Par ailleurs, les similitudes entre les comportements quasi-statique et dynamiques ont conduit à faire l'hypothèse que la réponse de l'ouvrage ne dépendait que très peu de la vitesse de la sollicitation.

Cette observation a ainsi incité à étudier, dans un premier temps, le comportement quasi-statique de l'écran à l'aide de la relaxation dynamique. Cette méthode numérique permet, à partir d'un calcul dynamique fortement amorti, de déterminer l'état d'équilibre d'un système. Le calcul dynamique, qui est simulé à l'aide d'un schéma d'intégration explicite, est ainsi uniquement un moyen de déterminer l'équilibre d'une structure en grands déplacements et ne reproduit pas son comportement transitoire réel. Il est connu que la stabilité des méthodes explicites est donnée par une relation liant les masses et les raideurs du système au pas d'intégration du schéma numérique. Afin de déterminer les conditions garantissant la stabilité du calcul, il a donc été nécessaire au préalable de définir les modélisations discrètes de chaque composant d'un écran pare-blocs et d'évaluer les expressions de leurs matrices de raideur tangentes. Les matrices d'un câble glissant et d'un élément fléchi, ainsi que les relations de stabilité associées, ont notamment été rigoureusement établies.

Cet outil de calcul a ensuite permis de comparer trois modèles discrets de filet ASM4. Cette étude menée en plusieurs étapes a débuté par l'identification des propriétés mécaniques homogènes des trois filets considérés. Les influences des micro-structures des différentes nappes sur leurs comportements globaux ont alors été caractérisées. La comparaison a été poursuivie en étudiant dans un premier temps le comportement des filets isolés, puis dans un second temps les influences des trois modélisations sur le comportement d'un écran complet. De cette dernière partie de l'étude, il a pu être conclu que les différentes modélisations du filet ont localement une influence sur leurs géométries déformées. Ce constat a des conséquences importantes sur le calcul de la hauteur résiduelle d'un écran qui, pour rappel, est un des critères de validation de l'ETAG27. On s'est également aperçu que la description du filet n'influence en revanche que très peu le cheminement des efforts dans la structure qui est complètement déterminé par la nature du câblage utilisé le long des rives.

Ce dernier point a été déterminant dans la conception des modèles simplifiés qui ont été présentés dans la dernière partie de ce travail. Comme leur nom l'indique, ces modèles sont construits à partir d'une description très allégée de la nappe de filet. Puisque la modélisation locale des anneaux de la nappe influence peu la distribution des efforts, le parti a été pris de remplacer l'intégralité du filet par seulement quelques éléments permettant de conserver le cheminement des efforts imposé par les conditions de rive. La réduction de la dimension du problème à résoudre numériquement permet ainsi une diminution significative du temps de calcul. On notera que, contrairement aux développements menés avec la méthode de relaxation dynamique, les simulations numériques reproduisent le comportement dynamique réel de l'ouvrage. Un premier calcul réalisé avec ces modèles simplifiés a permis de confirmer la pertinence des études menées sous sollicitation quasi-statique au cours des précédents

chapitres en validant deux hypothèses fondamentales formulées au début de ce travail : au cours d'un impact les évolutions des déformations des câbles de rive restent monotones et les efforts d'inertie sont concentrés dans le bloc. Deux exemples d'application de cette nouvelle approche de modélisation tirant toutes deux parti de cet avantage ont ensuite été présentées. L'une comme l'autre sont construites en multipliant les simulations d'impact dynamiques. La première étude a permis de déterminer les influences de différents paramètres à la fois matériels et géométriques sur le comportement de l'écran. La seconde a quant à elle permis de présenter une approche semi-probabiliste, inspirée de l'eurocode 0 et reposant sur l'estimation de coefficients partiels de sécurité, pour dimensionner des écrans de protection.

Dans le cadre de ce travail, seuls les coefficients partiels γ_M qui quantifient les incertitudes relatives aux propriétés intrinsèques de la structure ont été estimés pour une sollicitation équivalente à celles préconisées par l'ETAG27. Toutefois, en considérant les résultats de mille calculs, les expressions des coefficients partiels de sécurité obtenus sont statistiquement représentatifs. Pour étendre cette méthode à des sollicitations de nature quelconque, les modèles simplifiés présentés dans ce manuscrit doivent être enrichis. En effet, seuls des mouvements de translation peuvent pour l'instant être imposés au projectile impactant. Pour reproduire véritablement tout type d'impact en modélisant les rotations du bloc, il est cependant nécessaire de repenser les interactions entre le bloc et l'ouvrage. Ce travail de modélisation permettrait alors d'estimer des coefficients γ_M plus généraux. Il faudrait ensuite quantifier correctement l'incertitude de la méthode de résolution en confrontant les résultats obtenus grâce aux modèles simplifiés à ceux déterminés avec d'autres outils de calculs. En intégrant ensuite à cette approche des études de trajectographie qui permettraient d'évaluer les coefficients partiels sur les actions, il serait possible de mettre en œuvre une méthode de dimensionnement semi-probabiliste complète.

La conception des écrans de protection est un aspect qui n'a pas été traité dans ce travail de thèse. Pourtant, il semble que les modèles simplifiés ont un véritable potentiel pour définir l'architecture d'un ouvrage. Les dimensions réduites du problème à résoudre et les faibles temps de calcul résultants permettent en effet à l'utilisateur de développer son modèle en même temps que de réaliser les simulations. Il serait également possible d'intégrer les calculs menés avec les modèles simplifiés à une méthode d'optimisation, afin de rechercher plus efficacement l'architecture optimale.

Bibliographie

- [1] S. Adriaenssens, M. R. Barnes, and C. J. K. Williams. A new Analytic and numerical basis for the form-finding and analysis of spline and grid-shell structures. *Computing Developments in Civil and Structural Engineering.*, (1) :83–90, 1999.
- [2] S. M. Adriaenssens and M. R. Barnes. Tensegrity spline beam and grid shell structures. *Engineering Structures*, 23(1) :29–36, 2001.
- [3] AFNOR. NF EN 1990 : Bases de calcul des structures, 2003.
- [4] A. Albaba, S. Lambert, F. Kneib, B. Chareyre, and F. Nicot. DEM Modeling of a Flexible Barrier Impacted by a Dry Granular Flow. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 50 :3029–3048, 2017.
- [5] F. J. Almgren and J. E. Taylor. The geometry of soap films and soap bubbles. *Scientific American*, 235(1) :82–93, 1976.
- [6] M. Aaufaure. A finite element of cable passing through a pulley. *Computers and Structures*, 46(5) :807–812, 1993.
- [7] M. Aaufaure. Three-node cable element ensuring the continuity of the horizontal tension ; A clamp-cable element. *Computers and Structures*, 74(2) :243–251, 2000.
- [8] P. Azémard. The RN1 in Réunion Island : Rock Hazard Management : circulation management, protections works and new route. In *4th International Symposium Rock Slope Stability*, Chambéry, 2018.
- [9] J. P. Bardet and J. Proubet. Adaptive dynamic relaxation for statics of granular materials. *Computers and Structures*, 39(3-4) :221–229, 1991.
- [10] M. R. Barnes. Form-finding and analysis of prestressed nets and membranes. *Computers and Structures*, 30(3) :685–695, 1988.
- [11] M. R. Barnes. Form Finding and Analysis of Tension Structures by Dynamic Relaxation. *International Journal of Space Structures*, 14(2) :89–104, 1999.
- [12] O. Baverel, J. Caron, F. Tayeb, and L. D. Peloux. Gridshells in composite materials : Construction of a 300 m² forum for the solidays’ festival in Paris. *Structural Engineering International : Journal of the International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE)*, 22(3) :408–414, 2012.
- [13] V. Beatini and G. Royer Carfagni. Large transformations with moderate strains of tensile membrane structures. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 22(8) :1717–1737, 2017.
- [14] N. Bel Hadj Ali, A. C. Sychterz, and I. F. Smith. A dynamic-relaxation formulation for analysis of cable structures with sliding-induced friction. *International Journal of Solids and Structures*, 126-127 :240–251, 2017.

- [15] D. Bertrand, A. Trad, A. Limam, and C. Silvani. Full-scale dynamic analysis of an innovative rockfall fence under impact using the discrete element method : From the local scale to the structure scale. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 45(5) :885–900, 2012.
- [16] N. Bicanic. Discrete Element Methods. In *Encyclopedia of Computational Mechanics*, chapter 11. 2004.
- [17] P. Bisch. *Dynamique et stabilité dans l'industrie*. Ecole des ponts ParisTech, Paris, 2018.
- [18] R. Boulaud, C. Douthe, and K. Sab. Modeling of curtain effect in ASM4 rockfall barrier with the dynamic relaxation. *Submitted to International Journal of Solids and Structures*, 2019.
- [19] F. Bourrier, S. Lambert, and J. Baroth. A Reliability-Based Approach for the Design of Rockfall Protection Fences. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 48(1) :247–259, 2014.
- [20] B. Cambou and M. Jean. *Micromécanique des matériaux granulaires*. Hermes Science Publications, 2001.
- [21] A. Cazzani, L. Mongiovi, and T. Frenez. Dynamic finite element analysis of interceptive devices for falling rocks. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 39 :303–321, 2002.
- [22] Z. H. Chen, Y. J. Wu, Y. Yin, and C. Shan. Formulation and application of multi-node sliding cable element for the analysis of Suspen-Dome structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, 46(9) :743–750, 2010.
- [23] P. G. Ciarlet. A Justification of the von Karman Equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 37(1) :79–92, 1980.
- [24] . Consortium of task A3 "Benchmark analyse trajectographique" of C2ROP project. Benchmark of trajectory analysis models. In *International symposium rock slope stability*, Chambery, 2018.
- [25] J. Coulibaly. *Modélisation numérique discrète du comportement mécanique sous impact des structures d ' écrans de filets pare-pierres*. PhD thesis, Université Grenoble Alpes, 2017.
- [26] J. Coulibaly, M.-A. Chanut, S. Lambert, and F. Nicot. Sliding cable modeling : An attempt at a unified formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 130-131 :1–10, 2018.
- [27] J. B. Coulibaly, M.-A. Chanut, S. Lambert, and F. Nicot. Nonlinear Discrete Mechanical Model of Steel Rings. *Journal of Engineering Mechanics*, 143(9) :04017087, 2017.
- [28] J. B. Coulibaly, M.-A. Chanut, S. Lambert, and F. Nicot. Toward a Generic Computational Approach for Flexible Rockfall Barrier Modeling. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 2019.
- [29] E. Cueto, N. Sukumar, B. Calvo, M. A. Martínez, J. Cegoñino, and M. Doblaré. Overview and recent advances in natural neighbour galerkin methods. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 10(4) :307–384, Dec 2003.

- [30] P. Cundall. Explicit-finite difference methods in geomechanics. pages 132–150. Proceedings of E.F. Conference on numerical methods in geomechanics, 1976.
- [31] P. Cuvilliers, C. Douthe, L. D. Peloux, and R. Le Roy. Hybrid structural skin : Prototype of a gfrp elastic gridshell braced by a fiber-reinforced concrete envelope. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, 58(1) :65–78, 2017.
- [32] N. Damil, M. Potier-Ferry, and H. Hu. Membrane wrinkling revisited from a multi-scale point of view. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 1(1) :1–35, 2014.
- [33] A. Day. An Introduction to Dynamic Relaxation. *the engineer*, pages 218–221, 1965.
- [34] A. Day and J. Bunce. The Analysis of hanging roofs. *The Arup Journal*, Septembre(1) :1–64, 1969.
- [35] S. Dhakal, N. P. Bhandary, R. Yatabe, and N. Kinoshita. Experimental, numerical and analytical modelling of a newly developed rockfall protective cable-net structure. *Natural Hazards and Earth System Science*, 11(12) :3197–3212, 2011.
- [36] J. R. Dormand and P. J. Prince. A family of embedded Runge-Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 6(1) :19–26, 1980.
- [37] C. Douthe. *Etude de structures élancées précontraintes en matériaux composites*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2007.
- [38] C. Douthe and O. Baverel. Design of nexorades or reciprocal frame systems with the dynamic relaxation method. *Computers and Structures*, 87(21-22) :1296–1307, 2009.
- [39] C. Douthe, O. Baverel, and J. Caron. Form-finding of a grid shell in composite materials. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, 47(150) :53–62, 2006.
- [40] L. Du Peloux. *Modeling of bending-torsion couplings in active-bending structures. Application to the design of elastic gridshells*. PhD thesis, Paris-Est, 2018.
- [41] J. D. Duffy. Summary of World Wide Rockfall Tests. Technical report, A.A. Balkema Publishers, Rotterdam, The Netherlands, 2012.
- [42] L. Dugelas, F. Bourrier, I. Olmedo, and F. Nicot. An advanced method for the designing rockfall fences by surrogate modelling. In *4th International Symposium Rock Slope Stability*, pages 91–92, Chambery, 2018.
- [43] L. Dugelas, J. B. Coulibaly, F. Bourrier, S. Lambert, M.-A. Chanut, I. Olmedo, and F. Nicot. Assessment of the predictive capabilities of discrete element models for flexible rockfall barriers. *International Journal of Impact Engineering*, 133(August) :103365, 2019.
- [44] J.-L. Durville, P. Guillemin, P. Berthet-Rambaud, and D. Subrin. Etat de l’art sur le dimensionnement des dispositifs de protection contre les chutes de blocs. Technical report, Laboratoire central des ponts et chaussées, 2010.
- [45] EOTA. Etag 027. Technical Report April 2013, European Organisation for Technical Approvals, 2013.
- [46] EOTA. EAD 340059-00-0106 Falling Rock Protection kits, 2018.
- [47] J. P. Escallón, V. Boetticher, C. Wendeler, E. Chatzi, and P. Bartelt. Mechanics of chain-link wire nets with loose connections. *Engineering Structures*, 101 :68–87, 2015.

- [48] R. A. Fisher. *Statistical Methods for Research Workers*, volume 13. Oliver and Boyd, Edinburgh, fifth edit edition, 1934.
- [49] D. P. Flanagan and T. Belystrschiko. A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17(1) :679–706, 1981.
- [50] C. Florence and K. Sab. A rigorous homogenization method for the determination of the overall ultimate strength of periodic discrete media and an application to general hexagonal lattices of beams. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 25(1) :72–97, 2006.
- [51] J. Fortin, O. Millet, and G. De Saxcé. Construction of an averaged stress tensor for a granular medium. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 22(4) :567–582, 2003.
- [52] O. Gagliardini. *Principes Généraux du Dimensionnement des Ouvrages Eurocodes EN 1990 et EN 1991*. UJF-Grenoble I, Grenoble, 2008.
- [53] C. Gentilini, G. Gottardi, L. Govoni, A. Mentani, and F. Ubertini. Design of falling rock protection barriers using numerical models. *Engineering Structures*, 50 :96–106, 2013.
- [54] C. Gentilini, L. Govoni, S. de Miranda, G. Gottardi, and F. Ubertini. Three-dimensional numerical modelling of falling rock protection barriers. *Computers and Geotechnics*, 44 :58–72, 2012.
- [55] W. Gerber. Guideline for the approval of rockfall protection kits. Technical report, Swiss Ferdeal Research Institute, 2001.
- [56] L. Ghoussoub. *Analyse de quelques éléments du comportement des écrans de filets pare-blocs*. PhD thesis, Université Paris Est, 2015.
- [57] C. Girardon. Sensitivity Analysis of Soft Rockfall Barrier Block-related and Net-related Parameters. Technical report, Ecole des Ponts ParisTech, Champs-sur-Marne, 2019.
- [58] L. Govoni, S. de Miranda, C. Gentilini, G. Gottardi, and F. Ubertini. Modelling of falling rock protection barriers. *International Journal of Physical Modelling in Geotechnics*, 11(4) :126–137, 2011.
- [59] H. Grassl, A. Volkwein, E. Anderheggen, and W. J. Ammann. Steel-net rockfall protection : Experimental and numerical simulation. *Structures under Shock and Impact VII*, pages 143–153, 2002.
- [60] J. F. Hall. Problems encountered from the use (or misuse) of Rayleigh damping. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 35(5) :525–545, 2006.
- [61] H. D. Hibbitt, P. V. Marcal, and J. R. Rice. A finite element formulation for problems of large strain and large displacement. *International Journal of Solids and Structures*, 6(8) :1069–1086, 1970.
- [62] Q. Huang, H. Hu, K. Yu, M. Potier-Ferry, S. Belouettar, and N. Damiel. Macroscopic simulation of membrane wrinkling for various loading cases. *International Journal of Solids and Structures*, 64 :246–258, 2015.
- [63] ISO. ISO/IEC 31010 :2009 – Risk Management – Risk Assessment Techniques. Technical report, International Organization for Standardization, 2009.

- [64] G. R. Joldes, A. Wittek, and K. Miller. An adaptive dynamic relaxation method for solving nonlinear finite element problems. Application to brain shift estimation. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 27(1) :173–185, 2011.
- [65] LCPC. Parades contre les instabilités rocheuses : chutes de pierres, chutes de blocs, éboulements. Technical report, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris, 2001.
- [66] V. Manet. Méthode des éléments finis. 2013.
- [67] J. Meenen and H. Altenbach. A consistent deduction of von Kármán-type plate theories from three-dimensional nonlinear continuum mechanics. *Acta Mechanica*, 147(1-4) :1–17, 2001.
- [68] M. Menegotto and P. E. Pinto. Methods of Analysis of Cyclically Loaded R.C. Plane Frames Including Changes and Non-Elastic Behavior of Elements under Combined Normal Force and Bending. *Proc., IABSE Symp. of Resistance and Ultimate Deformability of Structures Acted on by Well- Defined Repeated Loads*, pages 15–22, 1973.
- [69] A. Mentani, L. Govoni, A. Giacomini, G. Gottardi, and O. Buzzi. An equivalent continuum approach to efficiently model the response of steel wire meshes to rockfall impacts. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 0(0) :0, 2018.
- [70] J. More and D. Sorensen. COMPUTING A TRUSTREGION STEP. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 4(3) :553–572, 1983.
- [71] F. Nicot. *Etude du comportement mécanique des ouvrages souples fr protection contre les éboulements rocheux*. PhD thesis, Centrale Lyon, 1999.
- [72] F. Nicot, B. Cambou, and G. Mazzoleni. Design of rockfall restraining nets from a discrete element modelling. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 34(2) :99–118, 2001.
- [73] F. Nicot, N. Hadda, M. Guessasma, J. Fortin, and O. Millet. On the definition of the stress tensor in granular media. *International Journal of Solids and Structures*, 50(14-15) :2508–2517, 2013.
- [74] D. R. Oakley and N. F. Knight. Adaptive dynamic relaxation algorithm for non-linear hyperelastic structures Part I. Formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 126(1-2) :67–89, 1995.
- [75] M. Papadrakakis. A method for the automatic evaluation of the dynamic relaxation parameters. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pages 35–48, 1981.
- [76] K. Park and P. Underwood. A variable-step, central difference method for structural dynamics analysis - Part1. Theoretical aspects. *Computational Methods in Applied Mechanics*, 22 :241–258, 1980.
- [77] D. Peila, S. Pelizza, and F. Sassudelli. Evaluation of Behaviour of Rockfall Restraining Nets by Full Scale Tests. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 31 :1–24, 1998.
- [78] D. Peila and C. Ronco. Technical Note : Design of rockfall net fences and the new ETAG 027 European guideline. *Natural Hazards and Earth System Science*, 9(4) :1291–1298, 2009.

- [79] S. Pellegrino. Structural computations with the singular value decomposition of the equilibrium matrix. *International Journal of Solids and Structures*, 30(21) :3025–3035, 1993.
- [80] S. Pellegrino and C. R. Calladine. Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks. *International Journal of Solids and Structures*, 22(4) :409–428, 1986.
- [81] L. D. Peloux, F. Tayeb, O. Baverel, and J. Caron. Construction of a large composite gridshell structure : A lightweight structure made with pultruded glass fibre reinforced polymer tubes. *Structural Engineering International : Journal of the International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE)*, 26(2) :160–167, 2016.
- [82] A. Pica and E. Hinton. Further developments in transient and pseudo-transient analysis of Mindlin plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17(12) :1749–1761, 1981.
- [83] K. R. RUSHTON. Dr solution for the large deflection of plates with specified boundary stresses. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design - J STRAIN ANAL ENG DESIGN*, 4 :75–80, 04 1969.
- [84] M. Rausand. *Risk Assessment : Theory, Methods, and Applications*. Statistics in Practice. Wiley, 2013.
- [85] L. Ravanel, F. Magnin, and P. Deline. Impacts of the 2003 and 2015 summer heatwaves on permafrost-affected rock-walls in the Mont Blanc massif. *Science of the Total Environment*, 609 :132–143, 2017.
- [86] N. Sasiharan, B. Muhunthan, T. C. Badger, S. Shu, and D. M. Carradine. Numerical analysis of the performance of wire mesh and cable net rockfall protection systems. *Engineering Geology*, 88(1-2) :121–132, 2006.
- [87] L. F. Shampine, I. Gladwell, and S. Thompson. *Solving ODEs with MATLAB*, volume 1. 2003.
- [88] D. C. Sorensen. Newton’s Method with a Model Trust Region Modification. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 19(2) :409–426, 1982.
- [89] M. Spadari, A. Giacomini, O. Buzzi, and J. P. Hambleton. Prediction of the bullet effect for rockfall barriers : A scaling approach. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 45(2) :131–134, 2012.
- [90] K. Thoeni, C. Lambert, A. Giacomini, and S. W. Sloan. Discrete modelling of hexagonal wire meshes with a stochastically distorted contact model. *Computers and Geotechnics*, 49 :158–169, 2013.
- [91] A. Trad. *Analyse du Comportement et Modélisation de Structures Souples de Protection : le cas des Ecrans de Filets Pare- Pierres sous Sollicitations Statique et Dynamique Présentée devant L ’ Institut National des Sciences Appliquées de Lyon*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2011.
- [92] L. K. Tran. *Étude de la Résistance et de la Stabilité des Tôles Courbes Cylindriques en Acier. Application aus OUvrages d’Art*. PhD thesis, Université Paris-Est, 2012.
- [93] Trumer Schutzbauten. Slope retention system. 2014.
- [94] UNISDR. Living with Risk A global review of disaster reduction initiatives. Technical Report 2, United Nations International Strategy for Disaster Reduction, 2004.

- [95] UNISDR. Rapport de synthèse Consultations sur le Cadre d'action post-2015 pour la réduction des risques de catastrophe (CAH2). Technical report, United Nations International Strategy for Disaster Reduction, 2013.
- [96] G. Verrier. Protection contre les éboulements rocheux Méthodologie des études spécifiques Application à l'étude de la zone de La Praz. 1980.
- [97] A. Volkwein. *Numerische Simulation von flexiblen Steinschlagschutzsystemen*. PhD thesis, ETH, 2004.
- [98] A. Volkwein, W. Gerber, J. Klette, and G. Spescha. Review of Approval of Flexible Rockfall Protection Systems According to ETAG 027. *Geosciences*, 9(1) :49, 2019.
- [99] T. von Kármán. Festigkeitsproblem im Maschinenbau, 1910.
- [100] B. Zheng and L. Wang. Spectral radius and infinity norm of matrices. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 346(1) :243–250, 2008.
- [101] B. Zhou, M. L. Accorsi, and J. W. Leonard. Finite element formulation for modeling sliding cable elements. *Computers and Structures*, 82(2-3) :271–280, 2004.

Résumé

Les écrans de filet pare-blocs sont des ouvrages de protection souples utilisés pour protéger les habitants ainsi que leurs biens du danger des éboulements rocheux dans les régions à risques. Ces structures placées sur la trajectoire des masses en mouvement sont formées d'un filet métallique maintenu au terrain naturel par des poteaux rigides. Lorsqu'elles sont impactées par un bloc, elles subissent des grandes déformations qui nécessitent de modéliser leur comportement en tenant compte de non-linéarités à la fois géométriques et matérielles. Leurs composants sont ainsi représentés dans ce travail par des éléments discrets et le problème mécanique est résolu quant à lui avec un outil de calcul numérique adapté aux grandes transformations, la relaxation dynamique. Cet algorithme est ensuite utilisé pour évaluer l'influence de différentes stratégies de modélisation de la nappe de filet, toutes tirées de la littérature scientifique, sur le comportement global d'un écran de protection pare-blocs. Les conclusions de cette étude ainsi que des observations expérimentales ouvrent la voie vers de nouvelles stratégies de modélisation discrète, pour lesquelles le filet est représenté par un nombre restreint de degrés de liberté. La famille de modèles simplifiés développée dans ce travail permet de simuler le comportement d'un ouvrage avec des faibles coûts en temps de calcul, offrant ainsi l'opportunité de mettre en œuvre des études paramétriques complexes et des méthodes de dimensionnements (semi-)probabilistes.

Mots clés : écran de protection pare-blocs, méthode aux éléments discrets, relaxation dynamique, stabilité numérique, membrane équivalente, modèles simplifiés

Abstract

Rockfall barriers are flexible structures that mitigate the risk of rockfall and thus protect people living in risk areas, as well as their property. These structures, placed on the trajectories of the moving blocks, are made of a steel net held on the natural ground by rigid posts. When they are impacted, they undergo large deformations that require modelling their behaviour by taking into account both geometric and material non-linearities. Their components are therefore represented in this work with discrete elements and the mechanical problem is thus solved with a calculation tool adapted to the large deformations problem and called the relaxation dynamic. This algorithm is also used to assess the influence of different net modelling strategies, from the scientific literature, on the overall behaviour of a rockfall barrier. The conclusions of this study as well as experimental observations pave the way to new discrete modelling strategies, for which the net is represented by a limited number of degrees of freedom. The family of simplified models developed in this work makes it possible to simulate the behaviour of a structure with a low computation time costs, thus offering the opportunity of implementing complex parametric studies or probabilistic dimensioning methods.

Keywords : rockfall barrier, discrete element methods, dynamic relaxation, numerical stability, equivalent membrane, simplified models