



**HAL**  
open science

# Modélisation au second ordre des transferts thermiques turbulents pour tous types de conditions aux limites thermiques à la paroi.

Gaëtan Mangeon

► **To cite this version:**

Gaëtan Mangeon. Modélisation au second ordre des transferts thermiques turbulents pour tous types de conditions aux limites thermiques à la paroi.. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2020. Français. NNT : 2020PAUU3018 . tel-03051634

**HAL Id: tel-03051634**

**<https://theses.hal.science/tel-03051634>**

Submitted on 10 Dec 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

## DOCTEUR

de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour

École doctorale SEA

Sciences Exactes et leurs Applications

**Mention : MÉCANIQUE DES FLUIDES**

par Gaëtan MANGEON

---

Modélisation au second ordre des transferts  
thermiques turbulents pour tous types de conditions  
aux limites thermiques à la paroi

---

Rapporteurs	Pr. Georges GEROLYMOS Dr. François CHEDEVERGNE	Université de la Sorbonne ONERA
Examineurs	Pr. Eric SERRE Dr. Timothy CRAFT Pr. Dominique LAURENCE	Université d'Aix-Marseille Université de Manchester Université de Manchester
Directeur	Pr. Rémi MANCEAU	Université de Pau et des Pays de l'Adour
Encadrants	Dr. Sofiane BENHAMADOUCHE Dr. Jean-François WALD	EDF R&D EDF R&D



# Table des matières

Table des figures	13
1 Introduction générale	15
2 Bibliographie - Modélisation RANS des écoulements	21
2.1 Les équations de conservation instantanées . . . . .	22
2.1.1 Les équations de Navier-Stokes . . . . .	22
2.1.2 Équation de transport de la température . . . . .	22
2.2 Opérateur de Reynolds et équations moyennées . . . . .	23
2.2.1 Décomposition de Reynolds . . . . .	23
2.2.2 Les équations de conservation moyennées . . . . .	24
2.3 Modélisation des tensions de Reynolds . . . . .	25
2.3.1 Fermeture du premier ordre . . . . .	25
2.3.2 Fermeture du second ordre . . . . .	29
2.4 Modélisation des flux thermiques turbulents . . . . .	34
2.4.1 Modèles à diffusivité turbulente : SGDH . . . . .	34
2.4.2 Generalized Gradient Diffusion Hypothesis (GGDH) . . . . .	36
2.4.3 Algebraic Flux Model (AFM) . . . . .	36
2.4.4 Fermeture du second ordre . . . . .	37
2.4.5 Extension de l'approche à relaxation elliptique aux modèles algébriques . . . . .	44
2.5 Modélisation de la variance de la température et de sa dissipation . . . . .	46
2.5.1 Modélisation de la variance de température . . . . .	46
2.5.2 Modélisation du taux de dissipation $\varepsilon_\theta$ . . . . .	47
2.6 Problèmes de condition aux limites sur la température . . . . .	53
2.6.1 Mise en évidence de l'impact de la condition aux limites sur la température . . . . .	53
2.6.2 Premiers travaux de modélisation RANS . . . . .	54
2.7 Base de données DNS de Flageul <i>et al.</i> (2015) : un appui pour le développement des modélisations RANS . . . . .	58
2.7.1 Équations de conservation de la masse, de la vitesse et de la température . . . . .	58
2.7.2 Gestion des conditions aux limites . . . . .	59
2.8 Conclusion du chapitre . . . . .	60
3 Généralisation du traitement des flux thermiques turbulents pour tous types de conditions aux limites sur la température	63
3.1 Analyse asymptotique des termes exacts de l'équation de transport des flux thermiques turbulents . . . . .	64
3.2 Analyse asymptotique du modèle EBDFM proposé par Dehoux <i>et al.</i> (2017) . . . . .	65
3.3 Comportement asymptotique des terme $\phi_{\theta i}^w$ et $\varepsilon_{\theta i}^w$ avec le ratio $R$ exact . . . . .	68
3.3.1 Analyse asymptotique pour un cas à température imposée à la paroi . . . . .	72
3.3.2 Analyse asymptotique pour des configurations de flux de chaleur imposé à la paroi et de transfert thermique conjugué . . . . .	73
3.4 Un modèle généralisé pour le traitement des flux thermiques turbulents . . . . .	75

3.4.1	Proposition d'une formulation pour $\phi_{\theta i}^w$ . . . . .	75
3.4.2	Validation <i>a priori</i> du nouveau modèle . . . . .	76
3.5	Conclusion du chapitre . . . . .	77
<b>4</b>	<b>Modélisation de la variance de la température et de sa dissipation</b>	<b>81</b>
4.1	Traitement de la variance de température . . . . .	82
4.2	Équation de transport de la variable $\varepsilon_\theta$ et comportement asymptotique . . . . .	82
4.3	Production par le gradient de température moyenne $P_{\varepsilon_\theta}^1$ . . . . .	83
4.4	Production par le gradient de vitesse moyenne $P_{\varepsilon_\theta}^2$ . . . . .	84
4.5	Production par la hessienne de température $P_{\varepsilon_\theta}^3$ . . . . .	86
4.6	Différence entre le terme de production turbulente $P_{\varepsilon_\theta}^4$ et le taux de dissipation $Y_{\varepsilon_\theta}$	87
4.6.1	Modélisation proche-paroi du terme de production . . . . .	89
4.6.2	Modélisation proche-paroi du terme de dissipation . . . . .	90
4.7	Modélisation dans la partie solide pour le transfert thermique conjugué . . . . .	95
4.8	Conclusion du chapitre . . . . .	97
<b>5</b>	<b>Validation des modélisations des flux thermiques turbulents, de la variance de la température et de sa dissipation</b>	<b>99</b>
5.1	Mise en place du cas test . . . . .	100
5.2	Modélisation de la variance de température $\overline{\theta'^2}$ et de sa dissipation $\varepsilon_\theta$ . . . . .	103
5.2.1	Prédictions des variables $\overline{\theta'^2}$ et $\varepsilon_\theta$ . . . . .	103
5.2.2	Prédictions des bilans des équations de transport de $\overline{\theta'^2}$ et de $\varepsilon_\theta$ . . . . .	106
5.3	Modélisation des flux thermiques turbulents $\overline{u'_i \theta'}$ . . . . .	106
5.3.1	Évaluation <i>a posteriori</i> de l'équilibre entre les termes de brouillage, de diffusion moléculaire et de dissipation et prédictions des bilans des équations de transport de $\overline{u' \theta'}$ et de $\overline{v' \theta'}$ . . . . .	108
5.3.2	Prédictions des variables $\overline{u' \theta'}$ et $\overline{v' \theta'}$ . . . . .	113
5.4	Champs de température et de vitesse <i>a posteriori</i> . . . . .	113
5.5	Conclusion du chapitre . . . . .	115
<b>6</b>	<b>Transfert thermique conjugué à propriétés différentes</b>	<b>119</b>
6.1	Bibliographie - variables thermiques turbulentes et interface fluide/solide . . . . .	119
6.1.1	Température moyenne $\bar{\theta}$ et variance $\overline{\theta'^2}$ à l'interface . . . . .	120
6.1.2	Discontinuité du taux de dissipation $\varepsilon_\theta$ . . . . .	122
6.2	Gestion de l'interface fluide/solide pour les variables thermiques . . . . .	124
6.2.1	Couplage de la température et de sa variance . . . . .	124
6.2.2	Condition aux limites pour $\varepsilon_\theta$ . . . . .	127
6.3	Tests et validité du modèle . . . . .	129
6.3.1	Résultats pour le taux de dissipation $\varepsilon_\theta$ . . . . .	129
6.3.2	Résultats pour la variance de température $\overline{\theta'^2}$ . . . . .	130
6.3.3	Résultats pour la température moyenne . . . . .	130
6.3.4	Les limitations du modèle . . . . .	130
6.4	Conclusion du chapitre . . . . .	131
<b>7</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>137</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>146</b>
	<b>Annexes</b>	

---

A	Récapitulatif des modèles utilisés dans le manuscrit	147
B	Simulation d'un écoulement dans un canal plan : EBRSM et variables dynamiques	153
C	Présentation du code de calcul CFD <i>Code_Saturne</i>	157
D	Comportement des modèles pour différents nombres de Reynolds pour un écoulement dans un canal plan	161
E	Comportements asymptotiques	165
F	Lois de paroi adaptatives	175
G	Publications	187



# Table des figures

1.1	Calcul LES d'un écoulement dans un té de mélange mettant en jeu des transferts thermiques. Représentation du $Q$ -criterion ( $Q = -1/2 (\partial u_i / \partial x_j) \cdot (\partial u_j / \partial x_i)$ ) coloré par la température. Image issue de l'article de Howard & Serre (2015). . . . .	16
1.2	Visualisation d'un écoulement dans un canal plan en convection forcée simulé par différentes méthodes : représentation DNS des fluctuations de températures pour un cas de transfert thermique conjugué à gauche (Flageul, 2015); image LES du champ de vitesse instantanée obtenu avec le logiciel <i>Code_Saturne</i> au centre; figure de la variance de la température RANS (avec fermetures du second ordre pour la dynamique et la thermique) pour une température imposée à la paroi à droite. . . . .	18
2.1	Comportement du nombre de Prandtl turbulent $Pr_\tau$ pour un écoulement dans un canal plan en convection forcée caractérisé par le nombre de Reynolds de frottement $Re_\tau = 640$ et le nombre de Prandtl $Pr = 0.71$ . Données DNS de Abe <i>et al.</i> (2004). . . . .	35
2.2	Évaluation de la composante tangentielle $\overline{u'\theta'}$ des flux thermiques turbulents pour un écoulement dans un canal plan en convection forcée caractérisé par le nombre de Reynolds de frottement $Re_\tau = 1020$ et le nombre de Prandtl $Pr = 0.71$ . Le modèle de turbulence utilisé pour la dynamique est l'EBRSM. Les simulations ont été réalisées avec le logiciel <i>Code_Saturne</i> et les données DNS sont de Abe <i>et al.</i> (2004). . . . .	38
2.3	Évaluation de la composante tangentielle $\overline{u'\theta'}$ des flux thermiques turbulents avec des modèles du second ordre pour un écoulement dans un canal plan en convection forcée caractérisé par le nombre de Reynolds de frottement $Re_\tau = 1020$ et le nombre de Prandtl $Pr = 0.71$ . Le modèle de turbulence utilisé pour la dynamique est l'EBRSM. Les simulations ont été réalisées avec le logiciel <i>Code_Saturne</i> et les données DNS sont de Abe <i>et al.</i> (2004). . . . .	44
2.4	Évaluation de la composante tangentielle $\overline{u'\theta'}$ des flux thermiques turbulents avec l'approche de relaxation elliptique pour un écoulement dans un canal plan en convection forcée caractérisé par le nombre de Reynolds de frottement $Re_\tau = 1020$ et le nombre de Prandtl $Pr = 0.71$ . Le modèle de turbulence utilisé pour la dynamique est l'EBRSM. Les simulations ont été réalisées avec le logiciel <i>Code_Saturne</i> et les données DNS sont de Abe <i>et al.</i> (2004). . . . .	45
2.5	Comportement du taux de dissipation $\varepsilon_\theta$ (gauche) et de la variance de température $\overline{\theta'^2}$ (droite) pour différentes conditions aux limites sur la température. Les données proviennent des DNS de Flageul <i>et al.</i> (2015, 2017). Le solide et le fluide possèdent les mêmes propriétés thermiques pour le cas transfert thermique conjugué (CHT). . . . .	54
2.6	Comportement du ratio des échelles de temps thermique et dynamique $R$ pour différentes conditions aux limites sur la température. Les données proviennent des DNS de Flageul <i>et al.</i> (2015, 2017). Le solide et le fluide possèdent les mêmes propriétés pour le cas transfert thermique conjugué (CHT). . . . .	55

2.7	Configuration d'un écoulement dans un canal plan . . . . .	59
3.1	Comportement du ratio des échelles de temps thermique et dynamique $R$ pour différentes conditions aux limites sur la température. Comparaison <i>a priori</i> du modèle proposé par Dehoux <i>et al.</i> (2017) avec les données DNS de Flageul <i>et al.</i> (2015, 2017). Le solide et le fluide possèdent les mêmes propriétés thermiques pour le cas transfert thermique conjugué (CHT). . . . .	67
3.2	Évaluation <i>a priori</i> du terme de brouillage $\phi_{\theta i}^*$ pour une <b>température imposée</b> à la paroi. Gauche : composante tangentielle à la paroi; Droite : composante normale à la paroi. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul <i>et al.</i> (2015, 2017). . . . .	69
3.3	Évaluation <i>a priori</i> du terme de brouillage $\phi_{\theta i}^*$ pour un <b>flux de chaleur imposé</b> à la paroi. Gauche : composante tangentielle à la paroi; Droite : composante normale à la paroi. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul <i>et al.</i> (2015, 2017). . . . .	69
3.4	Évaluation <i>a priori</i> du terme de brouillage $\phi_{\theta i}^*$ pour du <b>transfert thermique conjugué</b> . Gauche : composante tangentielle à la paroi; Droite : composante normale à la paroi. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul <i>et al.</i> (2015, 2017). . . . .	69
3.5	Évaluation <i>a priori</i> du terme de dissipation $\varepsilon_{\theta i}$ pour une <b>température imposée</b> à la paroi. Gauche : composante tangentielle à la paroi; Droite : composante normale à la paroi. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul <i>et al.</i> (2015, 2017). . . . .	70
3.6	Évaluation <i>a priori</i> du terme de dissipation $\varepsilon_{\theta i}$ pour un <b>flux de chaleur imposé</b> à la paroi. Gauche : composante tangentielle à la paroi; Droite : composante normale à la paroi. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul <i>et al.</i> (2015, 2017). . . . .	70
3.7	Évaluation <i>a priori</i> du terme de dissipation $\varepsilon_{\theta i}$ pour du <b>transfert thermique conjugué</b> . Gauche : composante tangentielle à la paroi; Droite : composante normale à la paroi. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul <i>et al.</i> (2015, 2017). . . . .	70
3.8	Somme des termes de dissipation $\varepsilon_{\theta i}$ , de brouillage $\phi_{\theta i}^*$ et de diffusion moléculaire $D_{\theta i}^{v+\kappa}$ pour une <b>température imposée</b> à la paroi. Gauche : composante tangentielle; Droite : composante normale à la paroi. . . . .	77
3.9	Somme des termes de dissipation $\varepsilon_{\theta i}$ , de brouillage $\phi_{\theta i}^*$ et de diffusion moléculaire $D_{\theta i}^{v+\kappa}$ pour un <b>flux de chaleur imposé</b> à la paroi. Gauche : composante tangentielle; Droite : composante normale à la paroi. . . . .	78
3.10	Somme des termes de dissipation $\varepsilon_{\theta i}$ , de brouillage $\phi_{\theta i}^*$ et de diffusion moléculaire $D_{\theta i}^{v+\kappa}$ pour du <b>transfert thermique conjugué</b> . Gauche : composante tangentielle; Droite : composante normale à la paroi. . . . .	78
4.1	Évaluation <i>a priori</i> des termes de production $P_{\varepsilon \theta}^1$ (gauche) et $P_{\varepsilon \theta}^2$ (droite) pour une <b>température imposée</b> à la paroi. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul <i>et al.</i> (2015, 2017). . . . .	85
4.2	Évaluation <i>a priori</i> des termes de production $P_{\varepsilon \theta}^1$ (gauche) et $P_{\varepsilon \theta}^2$ (droite) pour un <b>flux de chaleur imposé</b> à la paroi. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul <i>et al.</i> (2015, 2017). . . . .	85

4.3	Évaluation <i>a priori</i> des termes de production $P_{\varepsilon_\theta}^1$ (gauche) et $P_{\varepsilon_\theta}^2$ (droite) pour un cas de <b>transfert thermique conjugué</b> . Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul <i>et al.</i> (2015, 2017). . . . .	85
4.4	Évaluation <i>a priori</i> du terme de production par gradient de température moyenne $P_{\varepsilon_\theta}^1$ pour un cas à <b>température fixée</b> (haut), à <b>flux de chaleur imposé</b> (milieu) et de <b>transfert thermique conjugué</b> (bas). Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul <i>et al.</i> (2015, 2017). . . . .	88
4.5	Évaluation <i>a priori</i> de l'échelle de temps dynamique $\mathcal{T}$ (gauche) et de l'échelle de temps thermique $\mathcal{T}_\theta$ (droite) pour différents types de condition aux limites sur la température. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul <i>et al.</i> (2015, 2017). . . . .	89
4.6	Le terme de production turbulente $P_{\varepsilon_\theta}^4$ (gauche) et l'expression $P_\theta / \sqrt{\mathcal{T}\mathcal{T}_\theta}$ <i>a priori</i> (droite) pour toutes les conditions aux limites sur la température. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul <i>et al.</i> (2015, 2017). . . . .	89
4.7	Évaluation <i>a priori</i> du terme de production turbulente $P_{\varepsilon_\theta}^4$ pour une <b>température imposée</b> à la paroi (gauche) et pour un <b>flux de chaleur imposé</b> (droite). La courbe rouge désigne le modèle complet $P_{\varepsilon_\theta}^4 = (1 - \alpha_\theta) P_{\varepsilon_\theta}^w + \alpha_\theta P_{\varepsilon_\theta}^h$ . La courbe bleue représente le même modèle sans le terme $\left[1 - c_{\varepsilon_\theta}^{w2} (1 - \alpha_\theta) \frac{P_k}{\varepsilon}\right]$ dans l'expression de $P_{\varepsilon_\theta}^w$ . . . . .	91
4.8	Évaluation <i>a priori</i> du terme de production turbulente $P_{\varepsilon_\theta}^4$ pour un cas de <b>transfert thermique conjugué</b> . La courbe rouge désigne le modèle complet $P_{\varepsilon_\theta}^4 = (1 - \alpha_\theta) P_{\varepsilon_\theta}^w + \alpha_\theta P_{\varepsilon_\theta}^h$ . La courbe bleue représente le même modèle sans le terme $\left[1 - c_{\varepsilon_\theta}^{w2} (1 - \alpha_\theta) \frac{P_k}{\varepsilon}\right]$ dans l'expression de $P_{\varepsilon_\theta}^w$ . . . . .	91
4.9	Comportement du taux de dissipation $Y_{\varepsilon_\theta}$ pour différentes conditions aux limites sur la température. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul <i>et al.</i> (2015, 2017). . . . .	92
4.10	Évaluation <i>a priori</i> des paramètres $\sqrt{Pr}/\sqrt{R}$ (gauche) et $\sigma_\theta/\varepsilon_\theta$ (droite) pour différentes conditions aux limites sur la température. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul <i>et al.</i> (2015, 2017). . . . .	93
4.11	Évaluation <i>a priori</i> du modèle de la variable $C_T$ pour toutes les conditions aux limites sur la température. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul <i>et al.</i> (2015, 2017). . . . .	96
4.12	Évaluation <i>a priori</i> du taux de dissipation $Y_{\varepsilon_\theta}$ pour un cas à <b>température imposée</b> (gauche) à la paroi et à <b>flux de chaleur imposé</b> (droite). La courbe rouge désigne le modèle complet $Y_{\varepsilon_\theta} = (1 - \alpha_\theta) Y_{\varepsilon_\theta}^w + \alpha_\theta Y_{\varepsilon_\theta}^h$ . La courbe bleue représente le même modèle sans le terme $\left(1 - c_w (1 - \alpha_\theta) \frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta}\right)$ dans l'expression de $Y_{\varepsilon_\theta}^w$ . . . . .	96
4.13	Évaluation <i>a priori</i> du taux de dissipation $Y_{\varepsilon_\theta}$ pour un cas de <b>transfert thermique conjugué</b> . La courbe rouge désigne le modèle complet $Y_{\varepsilon_\theta} = (1 - \alpha_\theta) Y_{\varepsilon_\theta}^w + \alpha_\theta Y_{\varepsilon_\theta}^h$ . La courbe bleue représente le même modèle sans le terme $\left(1 - c_w (1 - \alpha_\theta) \frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta}\right)$ dans l'expression de $Y_{\varepsilon_\theta}^w$ . . . . .	97
4.14	Évaluation <i>a priori</i> de la constante $c_{\varepsilon_\theta}$ dans la partie solide réalisée par Bédidi (2016) avec les données DNS de Flageul <i>et al.</i> (2015) pour différentes configurations de transfert thermique conjugué. $G$ désigne le rapport entre les diffusivités thermiques du solide et du fluide et $G_2$ le rapport entre les conductivités thermiques (cf. chapitre 6). . . . .	98

5.1	Géométrie du domaine d'étude et annotations . . . . .	101
5.2	Évaluation <i>a posteriori</i> de la variance de température $\overline{\theta'^2}$ (gauche) et de son taux de dissipation $\varepsilon_\theta$ (droite) pour un cas à <b>température imposée</b> à la paroi. . . . .	104
5.3	Évaluation <i>a posteriori</i> de la variance de température $\overline{\theta'^2}$ (gauche) et de son taux de dissipation $\varepsilon_\theta$ (droite) pour un cas à <b>flux de chaleur imposé</b> à la paroi. . . . .	104
5.4	Évaluation <i>a posteriori</i> de la variance de température $\overline{\theta'^2}$ pour un cas de <b>transfert thermique conjugué</b> dans la partie solide (gauche) et dans la partie fluide (droite). . . . .	105
5.5	Évaluation <i>a posteriori</i> du taux de dissipation $\varepsilon_\theta$ pour un cas de <b>transfert thermique conjugué</b> dans la partie solide et dans la partie fluide. . . . .	105
5.6	Évaluation <i>a posteriori</i> du bilan de la variance de température $\overline{\theta'^2}$ (gauche) et du bilan du terme de dissipation $\varepsilon_\theta$ (droite) pour un cas à <b>température imposée</b> à la paroi. . . . .	107
5.7	Évaluation <i>a posteriori</i> du bilan de la variance de température $\overline{\theta'^2}$ (gauche) et du bilan du terme de dissipation $\varepsilon_\theta$ (droite) pour un cas à <b>flux de chaleur imposé</b> à la paroi. . . . .	107
5.8	Évaluation <i>a posteriori</i> du bilan de la variance de température $\overline{\theta'^2}$ (gauche) et du bilan du terme de dissipation $\varepsilon_\theta$ (droite) pour un cas de <b>transfert thermique conjugué</b> . . . . .	107
5.9	Évaluation <i>a posteriori</i> du ratio des échelles de temps thermique et dynamique pour une température imposée, un flux de chaleur imposé à la paroi et un cas de transfert thermique conjugué. . . . .	108
5.10	Évaluation <i>a posteriori</i> de la somme des termes de diffusion moléculaire, de brouillage et de dissipation des flux thermiques turbulents pour toutes les conditions aux limites sur la température. Gauche : Composante tangentielle; Droite : composante normale à la paroi. Haut : <b>Température imposée</b> ; Milieu : <b>Flux de chaleur imposé</b> ; Bas : <b>Transfert thermique conjugué</b> . . . . .	109
5.11	Évaluation <i>a posteriori</i> des termes de diffusion moléculaire, de brouillage et de dissipation de l'équation de transport de la composante tangentielle à la paroi $\overline{u'\theta'}$ des flux thermiques turbulents pour un <b>flux de chaleur imposé</b> . Symboles colorés : Modèle; Symboles noirs : DNS. Gauche : Nouveau modèle; Droite : Modèle de Dehoux <i>et al.</i> (2017). . . . .	110
5.12	Évaluation <i>a posteriori</i> des termes de diffusion moléculaire, de brouillage et de dissipation de l'équation de transport de la composante tangentielle à la paroi $\overline{u'\theta'}$ des flux thermiques turbulents pour un cas de <b>transfert thermique conjugué</b> . Symboles colorés : Modèle; Symboles noirs : DNS. Gauche : Nouveau modèle; Droite : Modèle de Dehoux <i>et al.</i> (2017). . . . .	111
5.13	Évaluation <i>a posteriori</i> du bilan de la composante tangentielle à la paroi des flux thermiques turbulents $\overline{u'\theta'}$ (gauche) et de la composante normale $\overline{v'\theta'}$ (droite) pour un cas à <b>température imposée</b> à la paroi. . . . .	111
5.14	Évaluation <i>a posteriori</i> du bilan de la composante tangentielle à la paroi des flux thermiques turbulents $\overline{u'\theta'}$ (gauche) et de la composante normale $\overline{v'\theta'}$ (droite) pour un cas à <b>flux de chaleur imposé</b> à la paroi. . . . .	112
5.15	Évaluation <i>a posteriori</i> du bilan de la composante tangentielle à la paroi des flux thermiques turbulents $\overline{u'\theta'}$ (gauche) et de la composante normale $\overline{v'\theta'}$ (droite) pour un cas de <b>transfert thermique turbulent</b> . . . . .	112
5.16	Évaluation <i>a posteriori</i> de la composante tangentielle à la paroi des flux thermiques turbulents $\overline{u'\theta'}$ (gauche) et de la composante normale $\overline{v'\theta'}$ (droite) pour un cas à <b>température imposée</b> à la paroi. . . . .	113

5.17	Évaluation <i>a posteriori</i> de la composante tangentielle à la paroi des flux thermiques turbulents $\overline{u'\theta'}$ (gauche) et de la composante normale $\overline{v'\theta'}$ (droite) pour un cas à <b>flux de chaleur imposé</b> à la paroi. . . . .	114
5.18	Évaluation <i>a posteriori</i> de la composante tangentielle à la paroi des flux thermiques turbulents $\overline{u'\theta'}$ (gauche) et de la composante normale $\overline{v'\theta'}$ (droite) pour un cas de <b>transfert thermique conjugué</b> . . . . .	114
5.19	Évaluation <i>a posteriori</i> de la vitesse moyenne pour tout type de condition aux limites sur la température (en régime de convection forcée, la température n'influence pas la dynamique de l'écoulement). . . . .	115
5.20	Évaluation <i>a posteriori</i> de la température moyenne pour un cas à <b>température imposée</b> à la paroi (gauche) and à <b>flux de chaleur imposé</b> (droite). . . . .	116
5.21	Évaluation <i>a posteriori</i> de la température moyenne pour un cas de <b>transfert thermique conjugué</b> (droite) dans la partie solide (gauche) et fluide (droite). . . . .	116
6.1	Température moyenne (gauche) et la variance de la température (droite) à l'interface entre le fluide et le solide. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul <i>et al.</i> (2015, 2017). . . . .	122
6.2	Taux de dissipation de la variance de température $\varepsilon_\theta$ à l'interface entre le fluide et le solide. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul <i>et al.</i> (2015, 2017). . . . .	124
6.3	Définition des quantités géométriques pour les faces internes (gauche) et de bord (droite). Guide théorique du logiciel <i>Code_Saturne</i> disponible sur le site internet <a href="http://www.code-saturne.org">www.code-saturne.org</a> . . . . .	125
6.4	Évaluation <i>a posteriori</i> du taux de dissipation de la variance de température $\varepsilon_\theta$ . Les symboles représentent les données DNS de Flageul <i>et al.</i> (2015, 2017); les lignes désignent les simulations <i>Code_Saturne</i> . . . . .	132
6.5	Évaluation <i>a posteriori</i> du taux de dissipation de la variance de température $\overline{\theta'^2}$ . Les symboles représentent les données DNS de Flageul <i>et al.</i> (2015, 2017); les lignes désignent les simulations <i>Code_Saturne</i> . . . . .	133
6.6	Évaluation <i>a posteriori</i> de la température moyenne. Les symboles représentent les données DNS de Flageul <i>et al.</i> (2015, 2017); les lignes désignent les simulations <i>Code_Saturne</i> . . . . .	134
6.7	Évaluation <i>a posteriori</i> du taux de dissipation $\varepsilon_\theta$ . Les symboles représentent les données DNS de Flageul <i>et al.</i> (2015, 2017); les lignes désignent les simulations <i>Code_Saturne</i> . . . . .	135
B.1	Évaluation <i>a posteriori</i> des tensions de Reynolds $\overline{u'u'}$ (gauche) et $\overline{v'v'}$ (droite) par le modèle EBRSM pour un écoulement dans un canal plan en convection forcée à $Re_\tau = 149$ et $Pr = 0.71$ . Données DNS de Flageul <i>et al.</i> (2015). . . . .	153
B.2	Évaluation <i>a posteriori</i> des tensions de Reynolds $\overline{w'w'}$ (gauche) et $\overline{u'v'}$ (droite) par le modèle EBRSM pour un écoulement dans un canal plan en convection forcée à $Re_\tau = 149$ et $Pr = 0.71$ . Données DNS de Flageul <i>et al.</i> (2015). . . . .	154
B.3	Évaluation <i>a posteriori</i> de l'énergie cinétique turbulente $k$ (gauche) et de son taux de dissipation $\varepsilon$ (droite) par le modèle EBRSM pour un écoulement dans un canal plan en convection forcée à $Re_\tau = 149$ et $Pr = 0.71$ . Données DNS de Flageul <i>et al.</i> (2015). . . . .	154
B.4	Évaluation <i>a posteriori</i> de la vitesse moyenne pour un écoulement dans un canal plan en convection forcée à $Re_\tau = 149$ et $Pr = 0.71$ . Données DNS de Flageul <i>et al.</i> (2015). . . . .	155

D.1	Évaluation <i>a posteriori</i> des composantes tangentielles $\overline{u'\theta'}$ (gauche) et normale à la paroi $\overline{v'\theta'}$ (droite) des flux thermiques turbulents. Écoulement à $Re_\tau = 149$ (DNS de Flageul <i>et al.</i> (2015)); $Re_\tau = 180$ ; $Re_\tau = 395$ ; $Re_\tau = 640$ ; $Re_\tau = 1020$ (DNS de Abe <i>et al.</i> (2004)). . . . .	161
D.2	Évaluation <i>a posteriori</i> de la variance de température $\overline{\theta'^2}$ (gauche) et de son taux de dissipation $\varepsilon_\theta$ (droite). Écoulement à $Re_\tau = 149$ (DNS de Flageul <i>et al.</i> (2015)); $Re_\tau = 180$ ; $Re_\tau = 395$ ; $Re_\tau = 640$ ; $Re_\tau = 1020$ (DNS de Abe <i>et al.</i> (2004)). . . . .	162
D.3	Évaluation <i>a posteriori</i> de la température moyenne $\overline{\theta}$ . Écoulement à $Re_\tau = 149$ (DNS de Flageul <i>et al.</i> (2015)); $Re_\tau = 180$ ; $Re_\tau = 395$ ; $Re_\tau = 640$ ; $Re_\tau = 1020$ (DNS de Abe <i>et al.</i> (2004)). . . . .	163
F.1	Tests des lois de paroi dynamiques sur différents raffinements de maillage pour le coefficient de pondération elliptique $\alpha$ (gauche), l'énergie cinétique turbulente $k$ (milieu) et la composante $\overline{u'v'}$ des tensions de Reynolds (droite). . . . .	178
F.2	Tests des lois de paroi dynamiques sur différents raffinements de maillage pour le taux de dissipation $\varepsilon$ (gauche) et les composantes $\overline{u'u'}$ (milieu) et $\overline{v'v'}$ (droite) des tensions de Reynolds. . . . .	179
F.3	Tests du modèle GGDH pour les flux thermiques turbulents et de la loi d'Howard (2012) pour la température moyenne avec le modèle EBRSM plus les lois de paroi adaptatives pour la dynamique sur différents raffinements de maillage pour la vitesse moyenne $\overline{u^+}$ (gauche) et la composante $\overline{u'\theta'}$ (milieu) des flux thermiques turbulents et le gradient de la température moyenne (droite). . . . .	179
F.4	Tests du modèle GGDH pour les flux thermiques turbulents et de la loi d'Howard (2012) pour la température moyenne avec le modèle EBRSM plus les lois de paroi adaptatives pour la dynamique sur différents raffinements de maillage pour la température moyenne $\overline{\theta^+}$ (gauche) et la composante $\overline{v'\theta'}$ (milieu) des flux thermiques turbulents et de la variance de la température $\overline{\theta'^2}$ (droite). . . . .	180
F.5	Tests du modèle AFM pour les flux thermiques turbulents et de la loi d'Howard (2012) pour la température moyenne avec le modèle EBRSM plus les lois de paroi adaptatives pour la dynamique sur différents raffinements de maillage pour la vitesse moyenne $\overline{u^+}$ (gauche) et la composante $\overline{u'\theta'}$ (milieu) des flux thermiques turbulents et le gradient de la température moyenne (droite). . . . .	180
F.6	Tests du modèle AFM pour les flux thermiques turbulents et de la loi d'Howard (2012) pour la température moyenne avec le modèle EBRSM plus les lois de paroi adaptatives pour la dynamique sur différents raffinements de maillage pour la température moyenne $\overline{\theta^+}$ (gauche) et la composante $\overline{v'\theta'}$ (milieu) des flux thermiques turbulents et de la variance de la température $\overline{\theta'^2}$ (droite). . . . .	181
F.7	Test de la loi de paroi adaptative pour la variable $\alpha_\theta$ sur différents raffinements de maillage. . . . .	182
F.8	Tests du modèle EBGGDH pour les flux thermiques turbulents, de la loi pour $\alpha_\theta$ et de la loi d'Howard (2012) pour la température moyenne avec le modèle EBRSM plus les lois de paroi adaptatives pour la dynamique sur différents raffinements de maillage pour la vitesse moyenne $\overline{u^+}$ (gauche) et la composante $\overline{u'\theta'}$ (milieu) des flux thermiques turbulents et le gradient de la température moyenne (droite). . . . .	182
F.9	Tests du modèle EBGGDH pour les flux thermiques turbulents, de la loi pour $\alpha_\theta$ et de la loi d'Howard (2012) pour la température moyenne avec le modèle EBRSM plus les lois de paroi adaptatives pour la dynamique sur différents raffinements de maillage pour la température moyenne $\overline{\theta^+}$ (gauche) et la composante $\overline{v'\theta'}$ (milieu) des flux thermiques turbulents et de la variance de la température $\overline{\theta'^2}$ (droite). . . . .	183

- F.10 Tests du modèle EBAFM pour les flux thermiques turbulents, de la loi pour  $\alpha_\theta$  et de la loi d'Howard (2012) pour la température moyenne avec le modèle EBRSM plus les lois de paroi adaptatives pour la dynamique sur différents raffinements de maillage pour la vitesse moyenne  $\overline{u}^+$  (gauche) et la composante  $\overline{u'\theta'}$  (milieu) des flux thermiques turbulents et le gradient de la température moyenne (droite). 183
- F.11 Tests du modèle EBAFM pour les flux thermiques turbulents, de la loi pour  $\alpha_\theta$  et de la loi d'Howard (2012) pour la température moyenne avec le modèle EBRSM plus les lois de paroi adaptatives pour la dynamique sur différents raffinements de maillage pour la température moyenne  $\overline{\theta}^+$  (gauche) et la composante  $\overline{v'\theta'}$  (milieu) des flux thermiques turbulents et de la variance de la température  $\overline{\theta'^2}$  (droite). . . 184
- F.12 Tests du modèle EBDFM pour les flux thermiques turbulents, de la loi pour  $\alpha_\theta$  et de la loi d'Howard (2012) pour la température moyenne avec le modèle EBRSM plus les lois de paroi adaptatives pour la dynamique sur différents raffinements de maillage pour la vitesse moyenne  $\overline{u}^+$  (gauche) et la composante  $\overline{u'\theta'}$  (milieu) des flux thermiques turbulents et le gradient de la température moyenne (droite). 184
- F.13 Tests du modèle EBDFM pour les flux thermiques turbulents, de la loi pour  $\alpha_\theta$  et de la loi d'Howard (2012) pour la température moyenne avec le modèle EBRSM plus les lois de paroi adaptatives pour la dynamique sur différents raffinements de maillage pour la température moyenne  $\overline{\theta}^+$  (gauche) et la composante  $\overline{v'\theta'}$  (milieu) des flux thermiques turbulents et de la variance de la température  $\overline{\theta'^2}$  (droite). . . 185



# Chapitre 1

---

## Introduction générale

La turbulence est un phénomène frustrant : elle est facilement observable mais difficilement compréhensible. Facilement observable car la vie quotidienne nous prouve constamment que la turbulence existe : la fumée d'une cigarette, l'écoulement torrentiel d'une rivière sous un pont... Elle est présente dans énormément de domaines : en biologie (le "bruit" généré par la turbulence en échographie permet de détecter les sténoses), en océanographie (les courants marins sont turbulents), en atmosphérique (les vents) et même en astronomie (gaz de la photosphère du soleil). En résumé, là où un fluide s'écoule, la turbulence est potentiellement présente. Les manifestations de la turbulence sont aisément observables si on se donne la peine de les regarder. Cependant, constater la turbulence ne permet pas de la comprendre. En effet, "travailler sur la turbulence, c'est tenter de prévoir l'imprévisible" (Lesieur, 1994a) puisqu'un écoulement turbulent est désordonné et chaotique.

L'industrie n'échappe pas aux phénomènes de turbulence comme les secteurs aéronautique, hydraulique, automobile... Par exemple, un rétroviseur de voiture mal profilé générant dans son sillage des allées de Von Karman (où lâché tourbillonnaire) peut représenter à lui seul 8% de la consommation en carburant du véhicule (Lesieur, 1994b). Bien évidemment, le secteur de l'énergie est également touché par la turbulence et en particulier les écoulements de fluides dans les tuyauteries des centrales nucléaires. La turbulence agit à la fois sur la dynamique mais aussi sur la thermique de l'écoulement : la turbulence fait partie intégrante des transferts thermiques dans les écoulements et les parties solides. C'est cet aspect de la turbulence qui va être étudié dans ce manuscrit.

### CONTEXTE INDUSTRIEL

Les transferts thermiques constituent un enjeu majeur dans les applications industrielles qui intéressent EDF. Ces phénomènes interviennent dans de nombreuses thématiques comme la thermohydraulique des cuves ou les accidents graves. Sous le prisme de la sûreté nucléaire, ils doivent être correctement appréhendés et modélisés pour pouvoir effectuer des études fiables. Ainsi, les simulations numériques impliquant le volet thermique nécessitent une bonne estimation des transferts thermiques pariétaux, de la température moyenne et parfois même de la variance de la température (dont la valeur peut être requise pour étudier les sollicitations thermiques d'un matériau en contact avec un écoulement).

Récemment, plusieurs applications réalisées en partie par des chercheurs d'EDF ont mis en évidence l'importance des transferts de chaleur comme l'étude sur la fatigue thermique dans les tés de mélange (Howard & Serre, 2015, 2017). Ce cas illustre parfaitement la nécessité de maîtriser ce phénomène puisqu'il met en évidence les chocs thermiques qui impactent le downcomer (conduite de descente) qui sont dus à la turbulence et qui posent des problèmes aussi bien pour la sûreté que pour la performance des tés de mélange (voir Fig. 1.1).

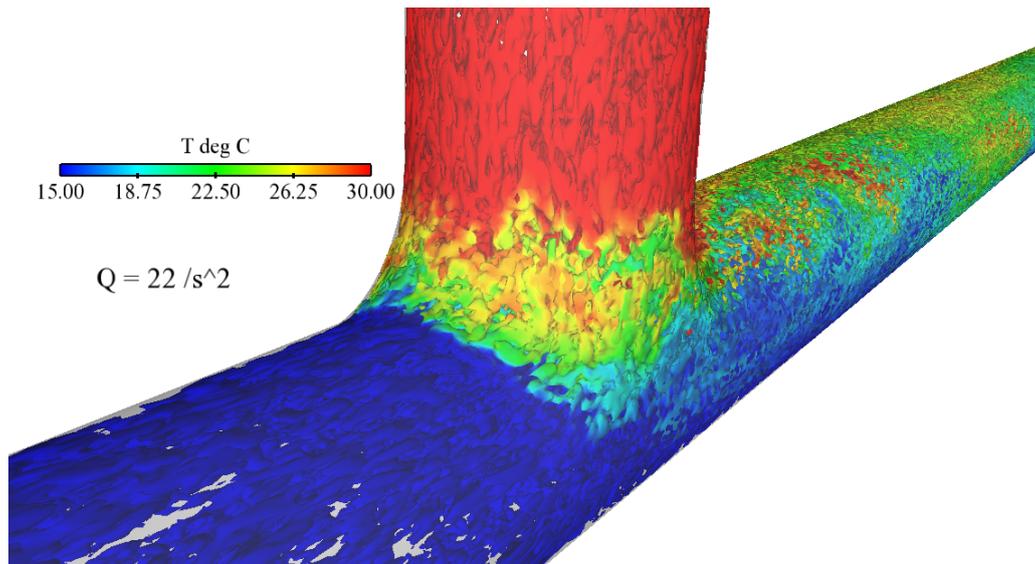


FIGURE 1.1. – Calcul LES d'un écoulement dans un té de mélange mettant en jeu des transferts thermiques. Représentation du  $Q$ -criterion ( $Q = -1/2 (\partial u_i / \partial x_j) \cdot (\partial u_j / \partial x_i)$ ) coloré par la température. Image issue de l'article de Howard & Serre (2015).

Les efforts de développement dédiés à la thermique ne parviennent toujours pas à saisir toute la complexité des transferts de chaleur (Benhamadouche, 2017). Ceci résulte de plusieurs facteurs : la difficulté de modélisation, le manque de données (expérimentales et issues de DNS ou de LES), ...

À ce jour, la majorité des études numériques CFD (*Computational Fluid Dynamics*) industrielles ne modélise pas correctement les phénomènes de transfert thermique et ne peuvent rendre compte de la réalité. Les modèles utilisés pour la thermique de l'écoulement dans le domaine industriel sont basiques et incapables de simuler des cas de physiques complexes comme la convection naturelle. Cette limite pourra être à l'avenir préjudiciable pour EDF au vu des exigences que pourrait fixer l'ASN (*Autorité de Sûreté Nucléaire*) concernant la validité des modèles utilisés.

## CONTEXTE SCIENTIFIQUE

La physique de l'écoulement d'un fluide est décrite par les équations différentielles de Navier-Stokes qui restituent fidèlement les phénomènes liés à la turbulence. Ces équations sont à la base des code de calcul CFD comme le logiciel *open-source Code\_Saturne*<sup>1</sup> développé par EDF R&D. La résolution et/ou la modélisation de ces équations dépende des codes de calcul et de la méthode utilisée pour aborder la turbulence. En effet, elle peut être traitée principalement à l'aide de quatre approches différentes dans les études numériques :

### – l'approche DNS (*Direct Numerical Simulation*)

Cette méthode consiste à résoudre les équations de Navier-Stokes et prend en compte toutes les échelles de la turbulence; elle résout toutes les structures tourbillonnaire de l'écoulement comme le souligne la Fig. 1.2 (gauche). En pratique, l'utilisation de cette méthode impose de lourdes contraintes au maillage de la géométrie étudiée : les cellules doivent être plus petites que la plus petite structure tourbillonnaire de l'écoulement. Ainsi,

1. [www.code-saturne.org](http://www.code-saturne.org)

les maillages sont volumineux et la résolution des équations est extrêmement coûteuse en temps de calcul. Cette approche appartient au domaine de la recherche et les calculs effectués avec cette méthode sont associés à de véritables "expériences numériques" qui servent de support pour le développement de modèles LES et RANS.

– **l'approche LES (*Large Eddy Simulation*)**

Les grandes échelles de la turbulence sont résolues et les petites échelles sont modélisées (Fig. 1.2 (milieu)). Cette méthode présente l'avantage d'être moins coûteuse en temps de calcul que l'approche DNS tout en capturant les grosses structures tourbillonnaires de l'écoulement. Les petites structures sont identifiées à l'aide d'un critère de "maille" : toutes les structures de taille inférieure à la dimension caractéristique de la maille sont modélisées. De part l'augmentation de la puissance des super-calculateurs, cette approche est en plein essor actuellement. Cependant, son coût en temps de calcul pour des configurations industrielles complexes restent rédhibitoire, à cause notamment de la zone de proche-paroi.

– **l'approche RANS (*Reynolds Average Navier-Stokes*)**

Toutes les échelles de la turbulence sont modélisées comme l'illustre la Fig. 1.2 (droite). Cette méthode est une méthode statistique qui s'attache à décrire les champs moyens des variables de l'écoulement en résolvant les équations de Navier-Stokes moyennées. La littérature sur les méthodes RANS est conséquente, ce type de modélisation pour la dynamique de l'écoulement a été largement éprouvé au fil des années. Cependant, concernant l'aspect thermique de l'écoulement, la bibliographie n'est pas aussi riche : il reste beaucoup de choses à accomplir. La modélisation RANS reste l'approche privilégiée de l'ingénieur car elle lui permet d'accéder aux champs locaux de paramètres statistiques dans toutes les configurations géométriques avec des coûts de calcul très inférieur aux approches LES et DNS.

– **l'approche Hybride RANS/LES**

Cette méthode consiste à mixer les approches LES et RANS. Le but est de combiner les points forts des deux méthodes : résoudre les grandes échelles de la turbulence là où l'écoulement s'y prête (ce qui permet d'accéder aux fluctuations : description précise de la turbulence) et utiliser l'approche RANS pour gérer correctement les couches limites. En effet, ces zones étant constituées de petites structures turbulentes, il n'est donc pas envisageable de les filtrer comme le préconise la méthode LES sans perdre toutes informations sur la turbulence. Ainsi, l'utilisation de modèles RANS permet de capter la turbulence. Cette approche permet également de réduire considérablement le temps de calcul par rapport à l'approche LES classique.

D'une manière générale, il ne s'agit pas de mettre en concurrence ces approches mais il faut plutôt parler de complémentarité comme le souligne Chassaing (2000). En pratique, l'utilisation d'une approche est déterminée par beaucoup de facteurs : facilité de mise en œuvre, coût de calcul, raffinement du maillage, complexité de la géométrie... Il faut alors être capable de sélectionner l'approche adéquate au type d'étude examiné.

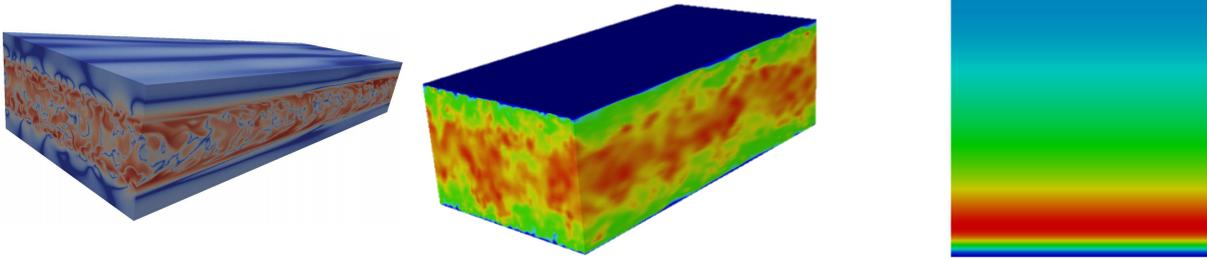


FIGURE 1.2. – Visualisation d'un écoulement dans un canal plan en convection forcée simulé par différentes méthodes : représentation DNS des fluctuations de températures pour un cas de transfert thermique conjugué à gauche (Flageul, 2015); image LES du champ de vitesse instantanée obtenu avec le logiciel *Code\_Saturne* au centre; figure de la variance de la température RANS (avec fermetures du second ordre pour la dynamique et la thermique) pour une température imposée à la paroi à droite.

## MOTIVATIONS ET OBJECTIFS

La modélisation des variables thermiques proche des parois solides n'est pas triviale et n'a été que peu examinée. La température peut fluctuer à la paroi et peut avoir une variance non nulle, contrairement à la vitesse, et ses échelles de temps et d'espace sont différentes de celles de la vitesse. Néanmoins, la majorité des modèles RANS développés pour la thermique a été calquée sur les modèles dynamiques et ne prend en compte qu'un seul type de condition aux limites sur la température, à savoir une température imposée à la paroi. De plus, l'étude de la zone fluide proche de la paroi est absolument essentielle dans certaines applications industrielles : elle permet notamment d'obtenir les données nécessaires pour estimer la sollicitation thermique du matériau qui compose la paroi, et ainsi étudier le risque de fissure par exemple.

Les phénomènes de transfert thermique constituent un secteur de recherche ouvert et novateur : il reste beaucoup de travail à fournir. On peut citer le projet ANR MONACO<sup>2</sup> regroupant acteurs industriels (EDF, PSA) et académiques (LMAP de Pau, Institut Pprime de Poitiers) autour de l'étude des écoulements à flottabilité en convection naturelle.

Les objectifs de cette thèse sont multiples :

- étendre les modèles avancés de traitement des flux thermiques turbulents à des conditions de flux de chaleur imposé et de transfert thermique conjugué,
- développer de nouveaux modèles pour le traitement de la variance de la température et de sa dissipation pouvant gérer des conditions aux limites de température fixée, de flux de chaleur imposé et de transfert thermique conjugué,
- implémenter et valider les modèles développés à l'aide du logiciel CFD *open-source Code\_Saturne* développé par EDF R&D.

2. <http://monaco2025.gforge.inria.fr/>

## PLAN DU MANUSCRIT

Ce manuscrit est divisé en cinq grandes parties.

La première partie traite de l'état de l'art des modélisations RANS pour la dynamique et la thermique de l'écoulement. Il a pour but de décrire rapidement la modélisation RANS dynamique, et en particulier le modèle avancé du second ordre *Elliptic Blending Reynolds Stress Model* (EBRSM) utilisé dans toutes les simulations exposée dans le manuscrit. Il fournira également une description précise des modélisations RANS pour les variables thermiques turbulentes disponibles dans la littérature.

La deuxième partie porte sur l'extension du modèle avancé du second ordre *Elliptic Blending Differential Flux Model* (EBDFM) développé par Dehoux *et al.* (2017) à des conditions aux limites de flux de chaleur imposé et de transfert thermique conjugué. Cette amélioration repose sur des analyses asymptotiques rigoureuses et s'attache à valider le nouveau modèle à l'aide de tests *a priori* utilisant les données DNS de Flageul *et al.* (2015).

La troisième partie décrit le développement d'un nouveau modèle pour la dissipation de la variance de température pouvant gérer les trois types de conditions aux limites sur la température : température fixée à la paroi, flux de chaleur imposé et transfert thermique conjugué. Des analyses asymptotiques et des tests *a priori* (données DNS de Flageul *et al.* (2015)) permettent de montrer la validité du nouveau modèle dans la zone proche de la paroi solide. Ce chapitre s'intéresse également à la modélisation de la variance de température dans les parties solide et fluide, et à son taux de dissipation dans le solide.

La quatrième partie s'attache à valider les modèles développés dans les deux parties précédentes en *a posteriori* avec le logiciel *Code\_Saturne*. Les simulations concernent des cas d'écoulements dans un canal plan en convection forcée avec différentes conditions aux limites sur la température (température fixée à la paroi, flux de chaleur imposé et transfert thermique conjugué mettant en jeu les mêmes propriétés dans le solide et le fluide), et les résultats sont comparés aux données DNS de Flageul *et al.* (2015).

La cinquième partie traite de cas de transfert thermique conjugué impliquant des propriétés différentes pour les parties solide et fluide. Un bref état de l'art sur le transfert thermique conjugué et sur les conséquences d'une telle configuration sur le taux de dissipation de la variance de température à l'interface entre le fluide et le solide est proposé. Les résultats de simulations numériques avec les nouveaux modèles sont présentés et comparés avec les données DNS de Flageul *et al.* (2015).

Enfin, ce manuscrit se termine par des éléments de conclusions, des axes de perspectives et des annexes.



# Chapitre 2

---

## Bibliographie - Modélisation RANS des écoulements

### Sommaire

---

2.1	Les équations de conservation instantanées . . . . .	22
2.1.1	Les équations de Navier-Stokes . . . . .	22
2.1.2	Équation de transport de la température . . . . .	22
2.2	Opérateur de Reynolds et équations moyennées . . . . .	23
2.2.1	Décomposition de Reynolds . . . . .	23
2.2.2	Les équations de conservation moyennées . . . . .	24
2.3	Modélisation des tensions de Reynolds . . . . .	25
2.3.1	Fermeture du premier ordre . . . . .	25
2.3.2	Fermeture du second ordre . . . . .	29
2.4	Modélisation des flux thermiques turbulents . . . . .	34
2.4.1	Modèles à diffusivité turbulente : SGDH . . . . .	34
2.4.2	Generalized Gradient Diffusion Hypothesis (GGDH) . . . . .	36
2.4.3	Algebraic Flux Model (AFM) . . . . .	36
2.4.4	Fermeture du second ordre . . . . .	37
2.4.5	Extension de l'approche à relaxation elliptique aux modèles algébriques . . . . .	44
2.5	Modélisation de la variance de la température et de sa dissipation . . . . .	46
2.5.1	Modélisation de la variance de température . . . . .	46
2.5.2	Modélisation du taux de dissipation $\varepsilon_\theta$ . . . . .	47
2.6	Problèmes de condition aux limites sur la température . . . . .	53
2.6.1	Mise en évidence de l'impact de la condition aux limites sur la température . . . . .	53
2.6.2	Premiers travaux de modélisation RANS . . . . .	54
2.7	Base de données DNS de Flageul <i>et al.</i> (2015) : un appui pour le développement des modélisations RANS . . . . .	58
2.7.1	Équations de conservation de la masse, de la vitesse et de la température . . . . .	58
2.7.2	Gestion des conditions aux limites . . . . .	59
2.8	Conclusion du chapitre . . . . .	60

---

Cette partie est dédiée à la présentation de la modélisation statistique de la turbulence. Dans un premier temps, elle a pour objectif de présenter succinctement la modélisation de la dynamique de l'écoulement. Puis, elle s'attachera à présenter de manière détaillée, la modélisation des flux thermiques turbulents, de la variance de la température et de sa dissipation.

Les fermetures du second ordre pour les tensions de Reynolds et pour les flux thermiques turbulents, qui permettent de prendre en compte des physiques plus complexes seront notamment approfondies. Une attention particulière sera portée sur l'influence de la condition aux limites sur la température et sur les problèmes de modélisation qui en découlent et qui sont au cœur de ce travail de thèse.

## 2.1. LES ÉQUATIONS DE CONSERVATION INSTANTANÉES

Les écoulements sont régis par des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

### 2.1.1. Les équations de Navier-Stokes

Les premières équations qui vont nous intéresser sont les équations de *Navier-Stokes*. Elles permettent de décrire le champ de vitesse instantanée en s'appuyant sur la conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Sous l'hypothèse d'un fluide newtonien incompressible, ces équations s'écrivent (forme non conservative)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \sum_n F_i^n. \quad (2.2)$$

Les vecteurs  $u_i$  et  $x_i$  désignent la vitesse et la position,  $\rho$  représente la masse volumique du fluide et  $p$  la pression.  $F_i$  indique les forces extérieures par unité de volume comme les forces de flottabilité. Enfin, le tenseur des contraintes visqueuses  $\tau_{ij}$  s'écrit :

$$\tau_{ij} = 2\mu S_{ij}, \quad (2.3)$$

où  $\mu$  représente la viscosité dynamique moléculaire du fluide, et  $S_{ij}$  est le tenseur de taux de déformation

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.4)$$

### 2.1.2. Équation de transport de la température

La température est un scalaire transporté par le champ de vitesse. Dans cette thèse, l'intérêt est porté sur la modélisation de l'équation de transport de la température. Cette équation de transport pour la température instantanée s'écrit

$$\rho C_p \frac{\partial \theta}{\partial t} + \rho C_p u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) + S_\theta. \quad (2.5)$$

$\theta$  désigne la température instantanée,  $C_p$  représente la capacité calorifique du fluide et  $\lambda$  sa conductivité thermique.  $S_\theta$  permet de prendre en considération d'éventuels termes sources. Dans la suite de ce travail, les valeurs  $C_p$  et  $\lambda$  seront considérées constantes et la diffusivité thermique du fluide  $\kappa$  s'écrit

$$\kappa = \frac{\lambda}{\rho C_p}. \quad (2.6)$$

## 2.2. OPÉRATEUR DE REYNOLDS ET ÉQUATIONS MOYENNÉES

La modélisation statistique de la turbulence est utilisée dans la majorité des études industrielles. En effet, elle est peu coûteuse en temps de calcul et a été largement étudiée dans la littérature. Elle repose sur l'approche RANS (*Reynolds Average Navier-Stokes*) et a pour principe de résoudre les équations de conservation moyennées. Dans cette approche, toutes les échelles de l'écoulement fluctuant sont modélisées. Cette approche est expliquée en détail par Pope (2000), Wilcox (2004) ou encore Hanjalić & Launder (2011).

### 2.2.1. Décomposition de Reynolds

Reynolds introduit en 1985 le concept de moyenne et de décomposition d'un champ instantané. Les variables instantanées sont décomposées en un champ moyen et une partie fluctuante tel que

$$a = \bar{a} + a' . \quad (2.7)$$

Au sein de cette approche, les variables sont alors considérées comme des variables aléatoires et la modélisation RANS produit des solutions numériques du mouvement moyen d'un fluide. Trois types de moyennes sont alors envisageables : la moyenne temporelle, la moyenne spatiale et la moyenne d'ensemble. La moyenne temporelle s'écrit

$$\bar{a}(x_i) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau a(x_i, t) dt . \quad (2.8)$$

Elle convient parfaitement à l'étude de la turbulence stationnaire. Cette moyenne est souvent utilisée dans l'industrie car la plupart des cas étudiés sont stationnaires et la turbulence est parfaitement établie (Wilcox, 2004). La deuxième moyenne qui peut s'envisager est la moyenne spatiale et s'écrit

$$\bar{a}(t) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int \int \int_V a(x_i, t) dV . \quad (2.9)$$

Cette moyenne est appropriée pour étudier la turbulence homogène qui est uniforme dans toutes les directions. Enfin, la moyenne d'ensemble est la méthode la plus générale. Elle permet notamment d'étudier les écoulements instationnaires. Une manière simple de la présenter est de considérer  $N$  expériences identiques avec des conditions initiales et aux limites légèrement différentes pour chaque expérience. Ces différences sont causées par des perturbations infinitésimales et impactent la résolution des équations de conservation. Ainsi, la moyenne d'ensemble désigne la moyenne de ces expériences sur un grand nombre de réalisation

$$\bar{a}(x_i, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n(x_i, t) . \quad (2.10)$$

Il est à noter que pour une turbulence qui est à la fois stationnaire et homogène, ces trois moyennes sont égales. Ce phénomène est connu sous le nom d'hypothèse d'ergodicité formulée par Boltzmann en 1871. Afin de rester le plus général possible, la moyenne d'ensemble sera la moyenne utilisée dans la suite.

## 2.2.2. Les équations de conservation moyennées

L'opérateur moyenne respecte quatre propriétés : la conservation des constantes, la linéarité, la commutation avec les dérivées partielles spatiales et temporelles, et l'idempotence. En prenant en compte ces éléments, on peut alors déterminer les équations de conservation des variables moyennées.

### 2.2.2.1. Les équations de Navier-Stokes

Dans la suite de ce chapitre, l'intérêt sera porté sur un écoulement incompressible soumis aux forces de gravité. On se place sous l'approximation de Boussinesq où la masse volumique  $\rho(\theta) = \rho$  sauf pour le terme de flottabilité où elle varie linéairement avec la température  $\theta$  :  $\rho(\theta) = \rho[1 - \beta(\bar{\theta} - \theta_0)]$ .  $\rho$  représente la masse volumique à la température de référence  $\theta_0$  et  $\beta$  désigne le coefficient de dilatation à pression constante. La décomposition de Reynolds (Eq. 2.7) est alors introduite dans les équations de conservation de la masse (Eq. 2.1) et de la quantité de mouvement (Eq. 2.2), puis les équations obtenues sont alors moyennées

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\tau}_{ji}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} - \beta(\bar{\theta} - \theta_0) g_i, \quad (2.12)$$

où  $g_i$  représente la  $i^{\text{ème}}$ -composante du vecteur gravité. Le tenseur des contraintes visqueuses moyennées s'exprime

$$\bar{\tau}_{ij} = 2\mu \bar{S}_{ij} \quad \text{où} \quad \bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.13)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement moyennée (Eq. 2.12) fait apparaître le terme  $\overline{u'_i u'_j}$  connu sous le nom de tenseur des contraintes de Reynolds. L'enjeu des modèles de turbulence pour la dynamique des écoulements va être de modéliser ce terme afin de pouvoir fermer l'équation de la quantité de mouvement (Eq. 2.12) et ainsi obtenir un champ de vitesse moyennée.

### 2.2.2.2. Équation de transport de la température

Le même raisonnement est appliqué à l'équation de transport de la température (Eq. 2.5) en émettant l'hypothèse qu'aucun terme source ne s'applique à l'écoulement étudié. L'équation de conservation de la température moyenne s'écrit

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \overline{u'_j \theta'}}{\partial x_j}. \quad (2.14)$$

A l'instar de la dynamique, l'équation de transport de la température moyenne (Eq. 2.14) met en évidence le produit de deux fluctuations moyenné  $\overline{u'_j \theta'}$ . Celui-ci porte le nom de vecteur des flux thermique turbulent et doit être modélisé afin de fermer l'équation Eq. (2.14).

### 2.3. MODÉLISATION DES TENSIONS DE REYNOLDS

Le but de cette section est de donner une vision globale et concise des différents types de modélisation du tenseur des contraintes de Reynolds proposés dans la littérature puisque l'essentiel du travail de cette thèse concerne la modélisation de la thermique fluide. Une attention particulière sera consacrée au modèle EBRSM (*Elliptic Blending Reynolds Stress Model*) puisqu'il sera considéré comme le modèle de référence pour la dynamique dans cette thèse. En pratique, il y a deux manières d'aborder la modélisation des tensions de Reynolds : soit on utilise une relation algébrique (fermeture du premier ordre), soit on résout une équation de transport sur les tensions (fermeture du second ordre). Au cours du temps, énormément de modèles de turbulence ont vu le jour.

#### 2.3.1. Fermeture du premier ordre

L'enjeu de cette approche est de trouver une relation de fermeture algébrique pour les tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$ . Dans cette partie, on s'intéressera aux modèles à viscosité turbulente (ou *Eddy Viscosity Models*). Une façon d'introduire ce concept est de faire l'analogie avec la loi de comportement qui lie contrainte et déformation en mécanique. L'idée est de penser le tenseur des contraintes de Reynolds comme le tenseur des taux de contraintes en mécanique. Boussinesq en 1877, proposa ainsi une loi de comportement linéaire faisant intervenir une viscosité turbulente et reliant contraintes de Reynolds et déformations du champs moyen :

$$\overline{u'_i u'_j} = -2\nu_t \overline{S_{ij}} + \frac{2}{3}k\delta_{ij}. \quad (2.15)$$

La variable  $k$  est l'énergie cinétique turbulente et s'exprime de la manière suivante :  $k = \overline{u'_i u'_i} / 2$ . La viscosité cinématique turbulente  $\nu_t$  n'est pas une grandeur physique, elle dépend de l'écoulement. Il est à noter que la relation de Boussinesq repose sur deux hypothèses fortes : l'instantanéité (pas d'effet de mémoire de la turbulence) et la localité (la turbulence n'est influencée que par son proche voisinage).

L'enjeu de ces fermetures du premier ordre utilisant la loi de comportement de Boussinesq est de définir une relation permettant de calculer la viscosité turbulente  $\nu_t$  et de modéliser l'énergie turbulente  $k$ .

##### 2.3.1.1. Les fermetures algébriques

Ce type de fermeture a été introduit par Prandtl en 1925. Afin de définir une relation algébrique pour  $\nu_t$ , Prandtl se plaça dans le cas très particulier d'un écoulement cisailé simple en fluide incompressible, et qui soit en moyenne permanent et bidimensionnel plan. Il considère ensuite que le fluide est composé de plusieurs "paquets" qui vont interagir entre eux. Le mélange résulte donc de la rencontre entre deux "paquets" impliquant des phénomènes de dissociation et de recombinaison de "paquets". Il exprime alors la viscosité turbulente en fonction d'une variable qu'il nomme *longueur de mélange*  $l_m$  :

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right|. \quad (2.16)$$

La longueur de mélange  $l_m$  n'est pas universelle, elle dépend de l'écoulement étudié, et est donc déterminée de façon empirique. De très nombreux travaux ont été menés sur cette fermeture algébrique afin de déterminer empiriquement des longueurs de mélange pour différent type

d'écoulement ou afin d'améliorer l'approche originelle proposée par Prandtl. Le lecteur intéressé pourra notamment se référer aux livres de Chassaing (2000) et Pope (2000) pour en apprendre davantage.

Les fermetures algébriques restent en pratique peu utilisées, excepté dans l'aéronautique. En effet, l'approche proposée est basée sur des hypothèses fortes et dépend de l'écoulement étudié. Ces fermetures nécessitent une connaissance *a priori* de l'écoulement pour savoir la longueur de mélange à utiliser, ce qui rend cette approche très empirique.

### 2.3.1.2. Modèles à deux équations

L'analyse dimensionnelle de la viscosité turbulente montre que  $\nu_t$  doit être déterminée par deux échelles de la turbulence  $[\nu_t] = L^2.T^{-1}$ . En général, on considère que  $\nu_t$  peut s'écrire comme le quotient d'une échelle de longueur  $l$  au carré avec une échelle de temps  $\tau$ . Deux équations de transport sont alors modélisées de sorte à déterminer ces échelles de longueur et de temps. L'idée de cette approche est de réduire l'empirisme des fermetures algébriques et de tenir compte des phénomènes de transport de la turbulence.

Une large panoplie de modèles à deux équations de transports ont été proposés dans la littérature. Les deux modèles les plus utilisés sont le modèle  $k-\varepsilon$  développé par Launder & Spalding (1974) et le modèle  $k-\omega$  proposé à l'origine par Wilcox (1988) et amélioré ensuite par Menter (1994). Il est à noter que le modèle  $k-\varepsilon$  a été modifié, utilisé et couplé avec des modèles de turbulence thermiques pour étudier des applications de transfert de chaleur (voir notamment Myong *et al.*, 1989; Nagano, 2002).

#### Le modèle $k-\varepsilon$

Le modèle  $k-\varepsilon$ , initialement proposé par Launder & Spalding (1974), est de loin le modèle à deux équations le plus connu dans la communauté CFD. Dans un premier temps, l'énergie turbulente  $k$  et son taux de dissipation  $\varepsilon$  sont utilisés afin de définir les échelles de longueur  $l = k^{3/2}/\varepsilon$  et de temps  $\tau = k/\varepsilon$ . La viscosité turbulente s'écrit alors

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (2.17)$$

Une fois la viscosité turbulente définie, il faut modéliser une équation de transport pour  $k$  et pour  $\varepsilon$  afin de fermer le système. L'équation de transport pour l'énergie turbulente s'écrit

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \varepsilon, \quad (2.18)$$

où  $P_k$  désigne le terme de production par gradient de vitesse moyenne

$$P_k = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = 2\nu_t \overline{S_{ij} S_{ij}}. \quad (2.19)$$

L'équation de transport exacte du taux de dissipation  $\varepsilon$  étant trop complexe pour être modélisée terme à terme, sa modélisation est calquée sur l'équation de transport de l'énergie turbulente  $k$ . Elle fait donc intervenir des termes de convection, de diffusions (visqueuse et turbulente), de production et de dissipation :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + P_\varepsilon - \varepsilon_\varepsilon \quad (2.20)$$

Les termes de production  $P_\varepsilon$  et de dissipation  $\varepsilon_\varepsilon$  de  $\varepsilon$  s'écrivent

$$P_\varepsilon = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \quad ; \quad \varepsilon_\varepsilon = C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2.21)$$

Les constantes du modèle standard sont résumées dans le tableau 2.1.

$$\begin{array}{ccccc} C_\mu & C_{\varepsilon 1} & C_{\varepsilon 2} & \sigma_k & \sigma_\varepsilon \\ \hline 0.09 & 1.44 & 1.92 & 1 & 1.3 \end{array}$$

Tableau 2.1. – Constantes du modèle  $k - \varepsilon$  standard.

Il est à noter que le modèle  $k - \varepsilon$  proposé par Launder & Spalding (1974) est un modèle dit "haut-Reynolds", c'est-à-dire que les hypothèses qui permettent de l'établir sont valables loin de la paroi. En effectuant une rapide analyse asymptotique de la viscosité turbulente, il est notamment facile de montrer que le comportement de  $\nu_t$  (Eq. 2.17) n'est pas correcte en proche-paroi (Myong & Kasagi, 1990; Nagano & Tagawa, 1990). Une des réponses apportées dans la littérature a été d'utiliser des fonctions d'amortissement (ou *damping functions*) afin de corriger le comportement asymptotique de la viscosité turbulente (Launder & Sharma, 1974; Chien, 1982; Myong & Kasagi, 1990; Nagano & Tagawa, 1990). Ces fonctions d'amortissement sont des fonctions empiriques qui dépendent de l'écoulement.

Par exemple, le modèle  $k - \varepsilon$  "bas-Reynolds" (modèle capable de résoudre entièrement la couche limite) proposé par Nagano & Tagawa (1990) a été développé pour des applications de transfert de chaleur. Celui-ci s'attache à modéliser finement la dynamique en zone de proche-paroi afin de pouvoir capter la turbulence qui va transporter la chaleur. Nagano & Tagawa (1990) propose alors d'utiliser une fonction d'amortissement  $f_\mu$  dans l'écriture de  $\nu_t$

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.22)$$

Ils procèdent de la même façon pour modifier le comportement de  $\varepsilon_\varepsilon$

$$\varepsilon_\varepsilon = C_{\varepsilon 2} f_\varepsilon \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2.23)$$

et ils modifient les constantes du modèle  $k - \varepsilon$  proposé par Launder & Spalding (1974). Le tableau 2.2 résume ces modifications ainsi que les fonctions d'amortissement introduites afin de respecter les différents comportements asymptotiques en proche paroi (le terme  $R_t$  intervenant dans les fonctions d'amortissement est le nombre de Reynolds turbulent  $R_t = k^2/\nu\varepsilon$ ).

$C_\mu$	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$	$f_\mu$	$f_\varepsilon$	$A_\mu$	$B_\mu$
0.09	1.45	1.9	1.4	1.3	$\left[1 - \exp\left(\frac{-y^+}{A_\mu}\right)\right]^2$ $\times \left(1 + \frac{B_\mu}{R_t^{\frac{3}{4}}}\right)$	$\left[1 - 0.3 \exp\left(-\frac{R_t}{6.5}\right)\right]$ $\times \left[1 - \exp\left(\frac{y^+}{6}\right)\right]$	26	4.1

Tableau 2.2. – Constantes et fonctions d'amortissement du modèle ( $k - \varepsilon$ ) de Nagano & Tagawa (1990).

### 2.3.1.3. Modèles à trois équations

#### Le modèle $\overline{v^2} - f$

Durbin (1991) proposa un modèle bas-Reynolds sans utiliser de fonctions d'amortissement. Afin de s'affranchir de ces fonctions arbitraires et empiriques, Durbin (1991) introduit une variable  $f$  qui est capable de repérer les zones fortement inhomogènes (notamment près de la paroi) et d'adapter le modèle de turbulence en conséquence. Cette variable  $f$  est solution de l'équation elliptique

$$L^2 \nabla^2 f - f = \frac{C_1 - 1}{\tau} \left( \frac{\overline{v^2}}{k} - \frac{2}{3} \right) - C_2 \frac{P_k}{\varepsilon}, \quad (2.24)$$

où les échelles de temps  $\tau$  et de longueur  $L$  sont

$$L = C_L \max \left[ \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \left( \frac{v^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \right], \quad (2.25)$$

$$\tau = \max \left[ \mathcal{T}, C_T \left( \frac{v}{\varepsilon} \right)^{1/2} \right] \quad \text{où} \quad \mathcal{T} = \frac{k}{\varepsilon}. \quad (2.26)$$

La seconde étape est de correctement modéliser la composante normale à la paroi  $\overline{v'^2}$  des tensions de Reynolds qui est prédominante dans la région proche-paroi. L'idée est de modéliser une équation de transport pour  $\overline{v'^2}$  en faisant intervenir la variable de relaxation elliptique  $f$

$$\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_{v'^2}} \right) \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial x_j} \right] + kf - \frac{\overline{v'^2}}{k} \varepsilon, \quad (2.27)$$

où les variables  $k$  et  $\varepsilon$  sont simplement modélisées par

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \varepsilon, \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + P_\varepsilon - \varepsilon. \quad (2.29)$$

Enfin, la dernière étape de ce modèle est d'introduire la variable  $\overline{v'^2}$  dans l'équation de la viscosité turbulente

$$\nu_t = C_\mu \overline{v'^2} \mathcal{T}. \quad (2.30)$$

L'introduction de  $\overline{v'^2}$  permet d'obtenir le bon comportement asymptotique de la viscosité turbulente à la paroi. Les coefficients utilisés pour ce modèle sont résumés dans le tableau 2.3.

$C_\mu$	$C_{\overline{v'^2}}$	$C_1$	$C_2$	$C_T$	$C_L$	$C_\eta$
0.22	1	1.4	0.45	6	0.25	85

Tableau 2.3. – Constantes du modèle  $\overline{v^2} - f$ .

Le principe de relaxation elliptique introduit par Durbin (1991) a donné naissance à beaucoup de modèles du premier ordre dits "bas-Reynolds" dont le  $\zeta - f$  de Hanjalić *et al.* (2004) ou encore le  $Bl-\overline{v^2}-k$  de Billard & Laurence (2012). Il a également été repris par Manceau & Hanjalić (2002) pour le développement du modèle du second ordre bas-Reynolds EBRSM présenté par la suite.

### 2.3.2. Fermeture du second ordre

L'idée des modèles de turbulence du second ordre est de modéliser plus finement la turbulence en réduisant l'empirisme. Peeters & Henkes (1992) déclarent notamment "pour une bonne prédiction de la structure détaillée de la turbulence on a besoin du RSM" (*Reynolds Stress Model*). En effet, une équation de transport est résolue pour chaque tension de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$ , ce qui permet notamment de s'affranchir de la loi de comportement de Boussinesq (Eq. 2.15) nécessaire aux fermetures du premier ordre. Dans cette partie, l'attention sera portée sur le modèle EBRSM développé par Manceau & Hanjalić (2002), qui sera considéré comme le modèle de référence pour la dynamique. Pour une revue plus complète des fermetures du second ordre, il est possible de se référer au livre écrit par Hanjalić & Launder (2011).

Les fermetures du second ordre reposent sur la modélisation des équations de transport des tensions de Reynolds. Afin d'obtenir ces équations, il faut tout d'abord écrire les équations de transport sur le champ de vitesses fluctuantes. Elles s'obtiennent en effectuant la différence entre l'équation de conservation de la quantité de mouvement instantanée (Eq. 2.2) et celle moyennée (Eq. 2.12)

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \overline{u'_j} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \overline{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j} - \beta g_i \theta', \quad (2.31)$$

où  $\nu$  représente la viscosité cinématique du fluide. Puis, en remarquant

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} = \overline{u'_i} \frac{\partial u'_j}{\partial t} + \overline{u'_j} \frac{\partial u'_i}{\partial t}, \quad (2.32)$$

on peut en déduire l'équation de transport sur les tensions de Reynolds

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \overline{u'_k} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} = P_{ij} + \phi_{ij}^* - \varepsilon_{ij} + D_{ij}^t + D_{ij}^v + G_{ij}. \quad (2.33)$$

$P_{ij}$ ,  $G_{ij}$ ,  $\phi_{ij}^*$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $D_{ij}^t$  et  $D_{ij}^v$  désignent respectivement les termes de production par gradient de vitesse moyenne, de production par flottabilité, de corrélation vitesse-gradient de pression, de dissipation, de diffusion turbulente et de diffusion moléculaire, et s'écrivent :

$$P_{ij} = -\left( \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} \right), \quad (2.34)$$

$$\phi_{ij}^* = -\frac{1}{\rho} \left( \overline{u'_i} \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \overline{u'_j} \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right), \quad (2.35)$$

$$\varepsilon_{ij} = 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}, \quad (2.36)$$

$$D_{ij}^t = -\frac{\overline{\partial u'_i u'_j u'_k}}{\partial x_k}, \quad (2.37)$$

$$D_{ij}^v = \nu \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k \partial x_k}, \quad (2.38)$$

$$G_{ij} = -\overline{\beta u'_i \theta'} g_j - \overline{\beta u'_j \theta'} g_i. \quad (2.39)$$

Par définition, les termes de production  $P_{ij}$  et  $G_{ij}$ , et de diffusion moléculaire  $D_{ij}^v$  ne nécessitent pas d'être modélisés. Le vecteur des flux thermiques turbulents  $\overline{u'_i \theta'}$  intervient dans l'expression de  $G_{ij}$  : il est donc essentiel de le modéliser pour prendre en compte des physiques faisant intervenir la flottabilité telles que la convection naturelle comme nous le verrons dans la partie 2.4. De plus, il est nécessaire de modéliser les termes de corrélation vitesse-gradient de pression  $\phi_{ij}^*$ , de dissipation  $\varepsilon_{ij}$  et diffusion turbulente  $D_{ij}^t$ .

### 2.3.2.1. Modélisation quasi-homogène des tensions de Reynolds

Dans un premier temps, l'attention sera portée sur la modélisation de ces grandeurs sous deux hypothèses :

- la quasi-homogénéité : les gradients de vitesse moyens varient faiblement,
- la localité : la turbulence n'est influencée que par son très proche voisinage.

#### A. TERME DE CORRÉLATION VITESSE-GRADIENT DE PRESSION $\phi_{ij}^*$

$\phi_{ij}^*$  peut être décomposé en deux termes : un terme à caractère diffusif et un terme redistributif

$$\phi_{ij}^* = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i p'} \delta_{jk} + \overline{u'_j p'} \delta_{ik})}_{D_{ij}^p} + \underbrace{\frac{1}{\rho} p' \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}_{\phi_{ij}}. \quad (2.40)$$

Le premier terme de la relation (2.40) symbolise la diffusion par la pression  $D_{ij}^p$  et le second terme représente la corrélation pression-déformation  $\phi_{ij}$ . Il est à noter que la trace du tenseur  $\phi_{ij}$  est nulle, ce qui prouve que ce terme a pour vocation de redistribuer l'énergie. De plus, il peut à son tour être décomposé en un terme dit "lent"  $\phi_{ij}^1$ , un terme dit "rapide"  $\phi_{ij}^2$  et un terme de flottabilité  $\phi_{ij}^3$  (Chou, 1945)

$$\phi_{ij} = \phi_{ij}^1 + \phi_{ij}^2 + \phi_{ij}^3. \quad (2.41)$$

#### – Modélisation du terme lent $\phi_{ij}^1$

Le modèle classique pour ce terme est celui de Rotta (1951)

$$\phi_{ij}^1 = -C_1 \varepsilon b_{ij} \quad (2.42)$$

avec  $b_{ij}$  le tenseur d'anisotropie

$$b_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{2k} - \frac{1}{3} \delta_{ij}. \quad (2.43)$$

$C_1$  est une constante qui vaut 3.4. Sa valeur est fixée de sorte que  $\phi_{ij}^1$  puisse correctement capter le retour à l'isotropie.

– **Modélisation du terme rapide  $\phi_{ij}^2$**

Speziale *et al.* (1991) ont développé un modèle appelé SSG afin de modéliser le terme rapide

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^2 = & -C_1^* P b_{ij} + (C_3 - C_3^* \sqrt{b_{kl} b_{kl}}) k \overline{S}_{ij} \\ & + C_4 k \left( b_{ik} \overline{S}_{jk} + b_{jk} \overline{S}_{ik} - \frac{2}{3} b_{lm} \overline{S}_{lm} \delta_{ij} \right) + C_5 k (b_{ik} \overline{W}_{jk} + b_{jk} \overline{W}_{ik}), \end{aligned} \quad (2.44)$$

avec  $\overline{W}_{ij}$  qui représente le tenseur du taux de rotation et  $P$  la demi-trace du tenseur de production (Eq. 2.34)

$$\overline{W}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{2} P_{ii} \quad (2.45)$$

Les constantes de ce modèles sont résumés dans le tableau 2.4.

$C_1^*$	$C_3$	$C_3^*$	$C_4$	$C_5$
1.8	0.8	1.3	1.25	0.4

Tableau 2.4. – Constantes du modèle SSG.

– **Modélisation du terme de flottabilité  $\phi_{ij}^3$**

Le terme  $\phi_{ij}^3$  représente la redistribution de la production due aux forces de flottabilité. Ce terme est couramment modélisé par un terme d'isotropisation

$$\phi_{ij}^3 = -C_6 \left( G_{ij} - \frac{1}{3} G_{kk} \right). \quad (2.46)$$

Lauder (1975) montra que la valeur exacte de la constante  $C_6$  était 0.33 pour une turbulence isotrope. Cependant, les valeurs les plus fréquemment rencontrées dans la littérature se situe entre 0.5 et 0.6 (Lauder, 1988; Dehoux *et al.*, 2017).

**B. TERME DE DISSIPATION  $\varepsilon_{ij}$**

Ce terme exprime la dissipation des tensions de Reynolds par les effets visqueux. Comme la dissipation est active aux petites échelles, qui peuvent être supposées isotropes, elle est généralement exprimée par un modèle isotrope du type

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (2.47)$$

où la dissipation  $\varepsilon$  représente la demi-trace du tenseur  $\varepsilon_{ij}$  et est calculée à l'aide d'une équation de transport similaire à l'Eq. (2.29).

### C. TERME DE DIFFUSION TURBULENTE $D_{ij}^t$

Il est à noter qu'une corrélation triple est mise en évidence dans le terme de diffusion turbulente  $\overline{u'_i u'_j u'_k}$  qu'il faut alors modéliser. Ainsi, lorsqu'on travaille sur les fermetures du premier-ordre, les corrélations doubles (ou tensions de Reynolds) doivent être modélisées, et lorsqu'on s'intéresse aux fermetures du second ordre, les corrélations triples doivent être modélisées. Par conséquent, il faudra toujours une relation de fermeture quel que soit l'ordre considéré. L'hypothèse la plus courante pour modéliser la corrélation triple dans le terme de diffusion turbulente  $D_{ij}^t$  a été proposée par Daly & Harlow (1970)

$$D_{ij}^t = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left( C_s \mathcal{T} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l} \right) \quad \text{où } C_s = 0.22, \quad (2.48)$$

avec  $\mathcal{T}$  : l'échelle de temps dynamique turbulente égale à  $k/\varepsilon$ .

#### 2.3.2.2. Modèle proche-paroi : pondération elliptique

La modélisation proche-paroi des équations de transport des tensions de Reynolds s'avère délicate puisque la paroi introduit deux phénomènes : le phénomène d'écho et l'effet de blocage. Ces phénomènes ont pour conséquence de perturber l'écoulement. Plusieurs travaux ont été menés afin de proposer des fermetures du second ordre capables de gérer la turbulence en proche-paroi (Manceau & Hanjalić, 2002; Gerolymos *et al.*, 2004). Dans cette partie, l'objectif est de décrire le modèle EBRSM développé initialement par Manceau & Hanjalić (2002) et amélioré par Manceau (2015). L'objectif est d'étendre la validité des modèles quasi-homogènes de  $\phi_{ij}^*$  et  $\varepsilon_{ij}$  présentés précédemment, dans les zones proches des parois solides où la turbulence devient fortement inhomogène. Les hypothèses de quasi-homogénéité et de localité ne s'applique plus et l'action de la paroi sur le fluide devient prépondérante. Afin de prendre en considération ces nouvelles hypothèses, Manceau & Hanjalić (2002) proposent un modèle bas-Reynolds du second ordre en reprenant l'idée de la relaxation elliptique introduite par Durbin (1991). Ils définissent alors leur propre coefficient de relaxation elliptique  $\alpha$ , solution de l'équation

$$\alpha - L^2 \nabla^2 \alpha = 1, \quad (2.49)$$

qui dépend uniquement de l'échelle de longueur turbulente  $L$

$$L = C_L \max \left[ \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \right]. \quad (2.50)$$

En pratique,  $\alpha$  est un coefficient qui vaut 0 à la paroi et 1 loin de la paroi. L'idée est d'utiliser le coefficient  $\alpha$  pour assurer une transition harmonieuse entre un premier modèle valide proche de la paroi et un deuxième conforme loin de la paroi. En clair, considérons une quantité  $A$ , sa modélisation proche-paroi  $A^w$  et son expression loin de la paroi  $A^h$ . Le principe de la relaxation elliptique est de lier  $A^w$  et  $A^h$  avec  $\alpha$

$$A = (1 - \alpha^p) A^w + \alpha^p A^h. \quad (2.51)$$

Ainsi, on obtient une quantité  $A$  correct asymptotiquement et conforme au modèle  $A^h$  loin de la paroi, et Manceau (2015) a montré que l'exposant  $p$  du coefficient de pondération elliptique  $\alpha$  devait être égal à 3 pour  $\phi_{ij}^*$  et  $\varepsilon_{ij}$ .

Ce principe est utilisé afin de modéliser la différence entre  $\phi_{ij}^*$  et  $\varepsilon_{ij}$  qui font partie des termes dominants dans la région proche-paroi

$$\phi_{ij}^* - \varepsilon_{ij} = (1 - \alpha^3)(\phi_{ij}^w - \varepsilon_{ij}^w) + \alpha^3(\phi_{ij}^h - \varepsilon_{ij}^h), \quad (2.52)$$

où  $\phi_{ij}^w - \varepsilon_{ij}^w$  désigne un modèle proche-paroi et  $\phi_{ij}^h - \varepsilon_{ij}^h$  un modèle quasi homogène.

### – Modèles quasi-homogènes utilisés par l'EBRSM

Loin de la paroi, il suffit de reprendre les modèles quasi-homogènes présentés précédemment. Ainsi, le modèle retenu pour le terme de corrélation vitesse-gradient de pression  $\phi_{ij}^h$  est le modèle SSG (Eq. 2.44) et le choix d'un modèle isotrope (Eq. 2.47) est appliqué au taux de dissipation  $\varepsilon_{ij}^h$ .

### – Modélisation proche-paroi de $\phi_{ij}^*$ et $\varepsilon_{ij}$

Le phénomène d'écho de la paroi conduit à une augmentation des fluctuations de pression et affecte le terme de corrélation vitesse-gradient de pression  $\phi_{ij}^*$ . Une explication détaillée de l'effet de la paroi sur le terme  $\phi_{ij}^*$  peut se retrouver dans les travaux de Manceau *et al.* (2001) et plus récemment dans ceux de Gerolymos *et al.* (2013). Dans leur modèle EBRSM, Manceau & Hanjalić (2002) proposèrent la formulation suivante pour  $\phi_{ij}^w$

$$\phi_{ij}^w = -5 \frac{1}{\mathcal{T}} \left[ \overline{u'_i u'_k n_j n_k} + \overline{u'_j u'_k n_i n_k} - \frac{1}{2} \overline{u'_k u'_l n_k n_l} (n_i n_j + \delta_{ij}) \right], \quad (2.53)$$

qui possède le bon comportement asymptotique, et reprennent la modélisation anisotrope proposée par Rotta (1951) pour définir  $\varepsilon_{ij}^w$

$$\varepsilon_{ij}^w = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} \varepsilon. \quad (2.54)$$

Le vecteur normal  $\underline{n}$  est défini par  $\underline{n} = \underline{\nabla} \alpha / \|\underline{\nabla} \alpha\|$  et le taux de dissipation  $\varepsilon$  est solution de l'équation de transport

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{C'_{\varepsilon_1} P - C_{\varepsilon_2} \varepsilon}{\tau} + C_{\varepsilon_3} \frac{\sqrt{Pr} G}{\sqrt{R} \tau} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{C_\mu \overline{u'_l u'_m} \tau}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_m} \right) + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_k \partial x_k}, \quad (2.55)$$

où  $Pr$  représente le nombre de Prandtl,  $G = G_{ii}/2$  la production par flottabilité,  $R$  le ratio des échelles de temps thermique et dynamique, et  $\tau$  l'échelle de temps introduite par (Durbin, 1991)

$$\tau = \max \left( \mathcal{T}, C_T \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} \right) ; \quad \mathcal{T} = \frac{k}{\varepsilon}, \quad (2.56)$$

et la variable  $C'_{\varepsilon_1}$  s'écrit

$$C'_{\varepsilon_1} = C_{\varepsilon_1} \left[ 1 + A_1 (1 - \alpha^3) \frac{P}{\varepsilon} \right]. \quad (2.57)$$

Enfin, la diffusion turbulente  $D_{ij}^t$  est simplement exprimée par le modèle proposé par Daly & Harlow (1970) avec l'échelle de temps de Durbin

$$D_{ij}^t = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left( C_s \tau \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l} \right). \quad (2.58)$$

Les différentes constantes utilisées dans ce paragraphe sont répertoriées dans le tableau 2.5.

$C_L$	$C_\eta$	$C_{\varepsilon_1}$	$A_1$	$C_{\varepsilon_2}$	$C_{\varepsilon_3}$	$\sigma_\varepsilon$	$C_T$
0.125	80.0	1.44	0.1	1.83	2.02	1.15	6.0

Tableau 2.5. – Constantes du modèle EBRSM.

De par sa capacité à modéliser correctement les tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  près de la paroi, le modèle EBRSM est particulièrement recommandé pour étudier les phénomènes de transferts de chaleur. Récemment, plusieurs travaux ont montré la supériorité de ce modèle pour les cas de transfert de chaleur (Dovizio *et al.*, 2019; Benhamadouche *et al.*, 2019; Angelino *et al.*, 2019).

L'ensemble des équations du modèle EBRSM est à retrouver en Annexe A.

## 2.4. MODÉLISATION DES FLUX THERMIQUES TURBULENTS

La plupart des applications industrielles s'appuient sur des modèles à viscosité turbulente (présentés dans la paragraphe 2.3.1) pour les tensions de Reynolds et sur des modèles à diffusivité turbulente pour les flux thermiques turbulents, appelés également SGDH (*Simple Gradient Diffusion Hypothesis*).

### 2.4.1. Modèles à diffusivité turbulente : SGDH

Le modèle le plus commun pour étudier les flux thermiques turbulents est le SGDH. L'idée est de lier les flux thermiques turbulents avec le gradient de température moyenne

$$\overline{u'_i \theta'} = -\kappa_t \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_i}, \quad (2.59)$$

avec

$$\kappa_t = \frac{\nu_t}{Pr_t}, \quad (2.60)$$

où  $\kappa_t$  est la diffusivité turbulente et  $Pr_t$  désigne le nombre de Prandtl turbulent, souvent considéré comme une valeur constante comprise entre 0.8 et 1.

Une des approches les plus satisfaisantes est l'association du modèle  $\overline{v^2}$ - $f$  développé par Durbin (1991) pour la dynamique de l'écoulement avec le modèle SGDH à nombre de Prandtl turbulent constant pour la thermique (Parneix *et al.*, 1998; Manceau *et al.*, 2000; Mompean, 1994). Cependant, une limitation majeure de ce modèle est la valeur constante du nombre de Prandtl turbulent. En effet, Kim & Moin (1989) et Mompean (1994) ont montré qu'il n'existait pas de valeur universelle de  $Pr_t$ . Cette variable dépend donc du type d'écoulement étudié et est fixée de manière empirique. La Fig. 2.1 montre que pour un écoulement dans un canal plan en

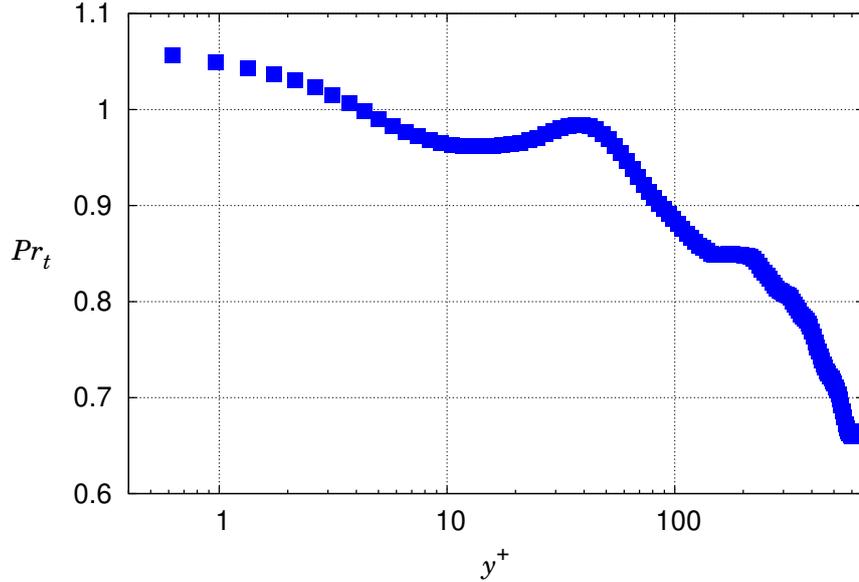


FIGURE 2.1. – Comportement du nombre de Prandtl turbulent  $Pr_t$  pour un écoulement dans un canal plan en convection forcée caractérisé par le nombre de Reynolds de frottement  $Re_\tau = 640$  et le nombre de Prandtl  $Pr = 0.71$ . Données DNS de Abe *et al.* (2004).

convection forcée, le nombre de Prandtl turbulent passe de 1.6 à la paroi à 0.65 au centre du canal.

Une autre limite de ce modèle provient de l'isotropie de la diffusivité turbulente : il ne peut pas convenir à des écoulements proche-paroi où la turbulence est fortement anisotrope car il est incapable de capter les composantes tangentielles des flux thermiques turbulents (Dehoux *et al.*, 2017). Par exemple, pour le cas d'un écoulement dans un canal plan en convection forcée, la Fig. 2.2 montre que le modèle SGDH prédit un comportement nul pour la composante  $\overline{u'\theta'}$  des flux thermiques turbulents contrairement aux données DNS de Abe *et al.* (2004).

#### MODÉLISATION PROCHE-PAROI

A l'instar de ce qui a été réalisé sur les modèles  $k-\varepsilon$  (voir paragraphe 2.3.1.2), la littérature compte beaucoup de travaux sur l'amélioration de la relation algébrique de  $\kappa_t$ . Ces travaux ont pour but d'améliorer la prédiction de la composante normale des flux thermiques turbulents  $\overline{v'\theta'}$  proche de la paroi. Ainsi, Nagano & Kim (1988) proposèrent une relation algébrique pour  $\kappa_t$  incluant une fonction d'amortissement empirique  $f_\lambda$  et une échelle de temps mixte  $\tau_m$  (i.e. combinaison des échelles de temps dynamique et thermique)

$$\kappa_t = C_\lambda f_\lambda k \tau_m. \quad (2.61)$$

Cette proposition a été reprise et adaptée dans différents travaux. On peut notamment citer Myong *et al.* (1989), Sommer *et al.* (1992) ou encore Abe *et al.* (1996). Le lecteur intéressé pourra se référer à l'article de Nagano (2002) dans lequel sont exposées les différentes propositions faites dans la littérature pour  $C_\lambda$ ,  $f_\lambda$  et  $\tau_m$ . La version la plus récente et utilisée dans l'article de Nagano (2002) décrit ces différentes valeurs de la manière suivante

$$f_\lambda = [1 - f_w(A_\mu)]^{1/2} [1 - f_w(A_\lambda)]^{1/2}, \quad (2.62)$$

où

$$f_w(\xi) = \exp\left[-\left(\frac{y^+}{\xi}\right)^2\right], \quad A_\mu = 14, \quad \text{et} \quad A_\lambda = \frac{A_\mu}{\sqrt{Pr}}, \quad (2.63)$$

et

$$\tau_m = \mathcal{T} \left[ \frac{2R}{0.5 + R} + \frac{\sqrt{2R}}{Pr} \frac{3}{R_t^{3/4}} \exp\left[-\left(\frac{R_t}{200}\right)^2\right] \right] \quad (2.64)$$

où  $R$  représente le ratio des échelles de temps thermique et dynamique

$$R = \frac{\mathcal{T}_\theta}{\mathcal{T}} \quad \text{avec} \quad \mathcal{T}_\theta = \frac{\overline{\theta'^2}}{2\varepsilon_\theta}. \quad (2.65)$$

Le traitement du ratio des échelles de temps thermique et dynamique  $R$  sera abordé dans la suite du manuscrit. Enfin, la constante  $C_\lambda$  est déduite de la relation :  $\nu_t = Pr_t \kappa_t$  avec  $Pr_t = 0.9$  (Nagano & Kim, 1988) et elle vaut 0.10.

Bien que cette relation ait l'avantage de proposer un modèle pour  $\kappa_t$  asymptotiquement correct, elle utilise des fonctions d'amortissement qui dépendent de l'écoulement et le modèle SGDH n'est toujours pas capable de capter les composantes tangentielles des flux thermiques turbulents proches de la paroi.

### 2.4.2. Generalized Gradient Diffusion Hypothesis (GGDH)

L'hypothèse de diffusion par le gradient généralisé (GGDH), connu également sous le nom d'hypothèse de Daly Harlow (Daly & Harlow, 1970), propose une amélioration du modèle SGDH en liant les flux thermiques turbulents, les tensions de Reynolds et le gradient de température moyenne par

$$\overline{u'_i \theta'} = -c_\theta \mathcal{T} \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j}, \quad (2.66)$$

où  $C_\theta$  est une constante fixée à 0.15 pour Launder (1988) ou encore 0.24 pour Dehoux *et al.* (2017).

Le principal avantage de ce modèle est qu'il utilise une diffusivité turbulente tensorielle. Si on considère un cas de canal plan en convection forcé, il est capable de restituer le bon comportement de la composante normale  $\overline{v' \theta'}$  et de capter la composante tangentielle  $\overline{u' \theta'}$  des flux thermiques turbulents contrairement au modèle SGDH (Dehoux *et al.*, 2017). En revanche, bien que  $\overline{u' \theta'}$  soit capté, sa valeur reste tout de même sous-estimée comme l'illustre la Fig. 2.2.

Pour utiliser ce modèle, il faut pouvoir estimer correctement les tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$ . Il est donc souhaitable d'utiliser un modèle de turbulence du second ordre pour la dynamique comme l'EBRSM qui est capable d'estimer correctement le tenseur de Reynolds (Dehoux *et al.*, 2017).

### 2.4.3. Algebraic Flux Model (AFM)

Dans un premier temps, Launder (1975) proposa une ébauche de l'AFM. Il décida de lier les flux thermiques turbulents avec les tensions de Reynolds, le gradient de température moyenne et le gradient de vitesse moyenne. Il introduit également un terme capable de gérer les effets de flottabilités et qui dépend de la variance de température. L'idée est donc de prendre en compte plusieurs types de physique, pouvant notamment gérer de la convection mixte et naturelle,

et ainsi d'élaborer un modèle plus complet que le GGDH. Ensuite, Dol *et al.* (1997) posèrent les fondements théoriques permettant de justifier l'utilisation de l'AFM. Enfin, Hanjalić (2002) apporta la formulation actuelle du modèle AFM, reprise par Dehoux *et al.* (2017)

$$\overline{u'_i \theta'} = -c_\theta \mathcal{T} \left[ \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + \xi \overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \eta \beta g_i \bar{\theta}'^2 \right], \quad (2.67)$$

où  $g_i$  représente la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur gravité,  $\bar{\theta}'^2$  la variance de température, et les constantes sont

$$c_\theta = \frac{c'_\theta}{c_{1\theta}}; \quad c'_\theta = 0.91; \quad C_{1\theta} = 4.15; \quad \xi = 1 - c_{2\theta}; \quad c_{2\theta} = 0.3; \quad \eta = 1 - c_{3\theta}; \quad c_{3\theta} = 0.6.$$

Ce modèle prend en compte l'anisotropie de la turbulence dans la zone proche-paroi et l'utilisation du gradient de vitesse moyenne (qui n'est pas présent dans le modèle GGDH) permet d'améliorer les estimations des composantes tangentielles à la paroi des flux thermiques turbulents (voir Fig. 2.2).

Kenjeres *et al.* (2005) proposèrent une variation de ce modèle dans lequel ils introduisent un terme dépendant du tenseur d'anisotropie  $a_{ij}$ , le *Non Linear Algebraic Flux Model* (NLAFM).

Le modèle AFM reste peu utilisé dans les applications industrielles alors qu'il offre une modélisation assez complète de la physique. Une des raisons expliquant cela est la nécessité de résoudre la variance de température  $\bar{\theta}'^2$  lorsque des écoulements avec flottabilité sont étudiés. En effet, cette résolution implique la modélisation d'une équation de transport pour  $\bar{\theta}'^2$  comme nous le verrons par la suite. On peut tout de même citer la communauté de NRG (*Nuclear Research and Consultancy Group*) qui a développé sa version du modèle AFM et qui l'a utilisée pour étudier des écoulements pour les réacteurs à métaux liquides (Shams *et al.*, 2019).

#### 2.4.4. Fermeture du second ordre

Les fermetures du premier ordre pour les flux thermiques turbulents présentées précédemment ne sont pas capables de gérer des écoulements complexes mettant en jeu des forces de flottabilité comme la convection naturelle. Hanjalić (2002) montra notamment que le modèle GGDH ne pouvait gérer de tels écoulements. Dehoux *et al.* (2017) prouve la supériorité des modèles du second ordre pour l'étude d'un cas de cavité entraînée (Trias *et al.*, 2007) dans lequel l'écoulement est piloté par les forces de flottabilité. Il est donc nécessaire de développer des modèles du second ordre pour une meilleure prise en compte de la physique. De ce fait, plusieurs travaux ont vu le jour ces vingt dernières années sur le développement de fermetures du second-ordre pour les flux thermiques turbulents  $\overline{u'_i \theta'}$  appelées *Differential Flux Model* (DFM) (Choi & Kim, 2008; Shin *et al.*, 2008; Dehoux *et al.*, 2017; Choi *et al.*, 2018). Dans la suite, on considérera qu'un modèle du second-ordre pour la dynamique est utilisé, ce qui permettra d'avoir accès aux tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$ .

Dans un premier temps, il faut déterminer l'équation de transport exacte des flux thermiques turbulents  $\overline{u'_i \theta'}$ . Pour ce faire, il faut écrire l'équation de transport sur le champ de température fluctuante. Elle s'obtient en effectuant la différence entre l'équation de conservation de la température instantanée (Eq. 2.5) et l'équation moyennée (Eq. 2.14)

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + u'_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u'_j \theta'}}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (2.68)$$

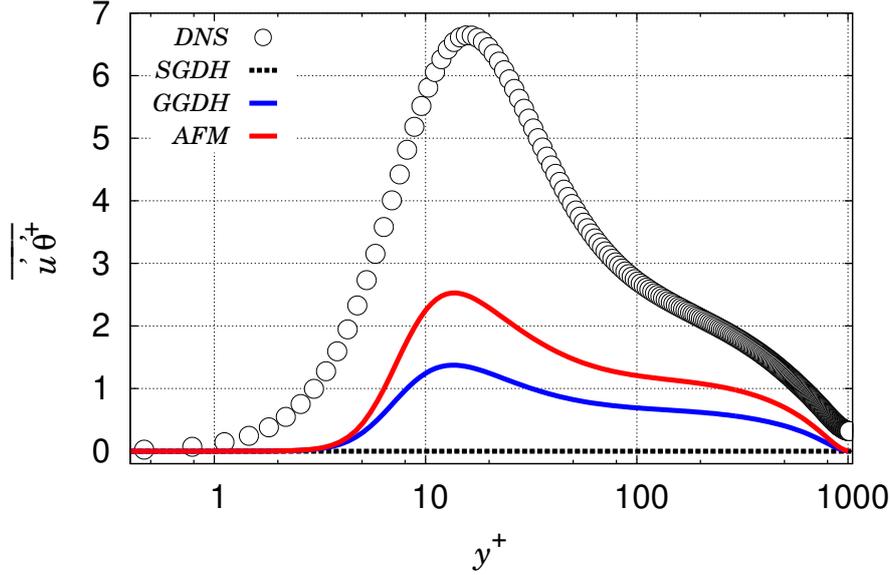


FIGURE 2.2. – Évaluation de la composante tangentielle  $\overline{u'\theta'}$  des flux thermiques turbulents pour un écoulement dans un canal plan en convection forcée caractérisé par le nombre de Reynolds de frottement  $Re_\tau = 1020$  et le nombre de Prandtl  $Pr = 0.71$ . Le modèle de turbulence utilisé pour la dynamique est l'EBRSM. Les simulations ont été réalisées avec le logiciel *Code\_Saturne* et les données DNS sont de Abe *et al.* (2004).

où  $\kappa$  désigne la diffusivité thermique. Puis, en observant

$$\frac{\partial \overline{u'_i \theta'}}{\partial t} = \overline{u'_i \frac{\partial \theta'}{\partial t}} + \overline{\theta' \frac{\partial u'_i}{\partial t}}, \quad (2.69)$$

on en déduit l'équation de transport des flux thermiques turbulents

$$\frac{\partial \overline{u'_i \theta'}}{\partial t} + \overline{U_j \frac{\partial u'_i \theta'}{\partial x_j}} = P_{\theta i}^U + P_{\theta i}^T + \phi_{\theta i}^* - \varepsilon_{\theta i} + D_{\theta i}^t + D_{\theta i}^{v+\kappa} + G_{\theta i}. \quad (2.70)$$

$P_{\theta i}^U$ ,  $P_{\theta i}^T$ ,  $G_{\theta i}$ ,  $\phi_{\theta i}^*$ ,  $\varepsilon_{\theta i}$ ,  $D_{\theta i}^t$  et  $D_{\theta i}^{v+\kappa}$  désignent respectivement les termes de production par gradient de vitesse moyenne, par gradient de température moyenne, et par flottabilité, le terme de brouillage, le taux de dissipation, la diffusion turbulente et la diffusion moléculaire. Ces termes s'écrivent

$$P_{\theta i}^U = -\overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}, \quad (2.71)$$

$$P_{\theta i}^T = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j}, \quad (2.72)$$

$$\phi_{\theta i}^* = -\frac{\overline{p'}}{\rho} \frac{\partial \theta'}{\partial x_i}, \quad (2.73)$$

$$\varepsilon_{\theta i} = (\nu + \kappa) \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}, \quad (2.74)$$

$$D_{\theta i}^t = -\frac{\overline{\partial u_i' \theta' u_j'}}{\partial x_j}, \quad (2.75)$$

$$D_{\theta i}^{v+\kappa} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{v \theta' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} + \overline{\kappa u_i' \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}} \right), \quad (2.76)$$

$$G_{\theta i} = -\beta g_i \overline{\theta'^2}. \quad (2.77)$$

Parmi tous ces termes, les seuls ne nécessitant pas de modélisation sont les termes de production. Dans un premier temps, l'attention sera portée sur la modélisation de ces grandeurs sous deux hypothèses : la quasi-homogénéité et la localité.

#### 2.4.4.1. Terme de brouillage $\phi_{\theta i}^*$

Comme pour le terme de corrélation vitesse-gradient de pression  $\phi_{ij}^*$  pour les tensions de Reynolds, le terme de brouillage  $\phi_{\theta i}^*$  peut se décomposer en plusieurs termes en suivant une méthode analogue à celle de Chou (1945)

$$\phi_{\theta i}^* = \phi_{\theta i}^1 + \phi_{\theta i}^2 + \phi_{\theta i}^3. \quad (2.78)$$

$\phi_{\theta i}^1$  représente le terme lent,  $\phi_{\theta i}^2$  le terme rapide et  $\phi_{\theta i}^3$  le terme de flottabilité.

##### — MODÉLISATION DU TERME LENT $\phi_{\theta i}^1$

En suivant le raisonnement de Rotta (1951) pour décrire le terme lent de  $\phi_{ij}^*$ , Monin (1965) proposa le modèle suivant pour  $\phi_{\theta i}^1$

$$\phi_{\theta i}^1 = -C_{1\theta} \frac{1}{\mathcal{T}} \overline{u_i' \theta'}. \quad (2.79)$$

Ce terme décrit le retour à l'isotropie de la turbulence anisotrope. La valeur de la constante  $C_{1\theta}$  est souvent prise autour de 3.5 dans la littérature (Hanjalić & Launder, 2011). Il est à noter que Monin (1965) utilise l'échelle de temps dynamique, ce qui est le plus commun. Cependant, d'autres auteurs décident de combiner les échelles de temps thermique et dynamique comme Elghobashi & Launder (1983) qui utilisent l'échelle de temps mixte :  $\sqrt{\mathcal{T} \mathcal{T}_\theta}$ .

##### — MODÉLISATION DU TERME RAPIDE $\phi_{\theta i}^2$

La voie la plus populaire pour modéliser ce terme provient de l'isotropisation de la production due au gradient de température moyenne

$$\phi_{\theta i}^2 = C_{2\theta} \overline{u_j' \theta' \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}} = -C_{2\theta} P_{\theta i}^U. \quad (2.80)$$

La valeur de la constante  $C_{2\theta}$  est comprise entre 0.4 et 0.55 (Hanjalić & Launder, 2011). De plus, il est à noter que la modélisation du terme  $\phi_{\theta i}^2$  ne fait intervenir que la production par gradient de vitesse moyenne  $P_{\theta i}^U$  et pas la production par gradient de température moyenne  $P_{\theta i}^T$ . Ceci s'explique par la manière dont est obtenue le terme de brouillage  $\phi_{\theta i}^*$  dans l'équation de

transport des flux thermiques turbulents (Eq. 2.70). En effet, ce terme provient de  $\overline{\theta' \frac{Du'_i}{Dt}}$  (voir Eq. (2.69)) lors de la construction de l'équation de transport (Eq. 2.70) (Launder, 1975). Cependant, même si par définition on ne devrait pas faire intervenir  $P_{\theta i}^T$ , certains auteurs comme Durbin (1993) l'introduisent dans leur modélisation du terme de brouillage.

#### – MODÉLISATION DU TERME DE FLOTTABILITÉ $\phi_{\theta i}^3$

Le terme  $\phi_{\theta i}^3$  est le plus souvent modélisé par un modèle d'isotropisation de la production par flottabilité

$$\phi_{\theta i}^3 = C_{3\theta} \beta g_i \overline{\theta'^2} = -C_{3\theta} G_{\theta i}. \quad (2.81)$$

Launder (1988) démontra que  $C_{3\theta} = 0.33$  était la valeur correcte en turbulence isotrope. Cependant, la valeur couramment rencontrée dans la littérature est 0.5 (Peeters & Henkes, 1992; Dol *et al.*, 1997; Dehoux *et al.*, 2017).

#### 2.4.4.2. Taux de dissipation $\varepsilon_{\theta i}$

Ici, l'attention est portée sur la modélisation quasi-homogène de la dissipation  $\varepsilon_{\theta i}$ . On considère alors un écoulement loin de la paroi, là où les petites échelles sont considérées comme isotrope. Or le taux de dissipation  $\varepsilon_{\theta i}$  étant lié aux petites échelles, il est donc considéré comme isotrope (un vecteur isotrope est toujours nul)

$$\varepsilon_{\theta i} = 0. \quad (2.82)$$

Bien évidemment, cette hypothèse ne tient plus pour l'étude d'un écoulement proche d'une paroi chauffée où la turbulence est fortement anisotrope.

#### 2.4.4.3. Diffusion turbulente $D_{\theta i}^t$

Le terme de diffusion turbulente fait intervenir la corrélation triple  $\overline{u'_i \theta' u'_j}$ . Il est donc impératif de modéliser ce terme pour pouvoir fermer le modèle sur les flux thermiques turbulents. A l'image de la diffusion turbulente  $D_{ij}^t$  pour les tensions de Reynolds,  $D_{\theta i}^t$  est modélisée grâce à l'hypothèse de Daly & Harlow (1970)

$$D_{\theta i}^t = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{\theta} \overline{u'_j u'_k} \mathcal{T} \frac{\overline{\partial u'_i \theta'}}{\partial x_k} \right), \quad (2.83)$$

où la constante  $c_{\theta}$  vaut 0.22. Une discussion à propos de l'utilisation de l'échelle de temps dynamique  $\mathcal{T}$  existe dans la littérature. Certains auteurs comme Shikazono & Kasagi (1996) préfèrent utiliser une combinaison des échelles de temps thermique et dynamique.

#### 2.4.4.4. Diffusion moléculaire $D_{\theta i}^{\nu+\kappa}$

Contrairement à la diffusion moléculaire  $D_{ij}^{\nu}$ , des tensions de Reynolds,  $D_{\theta i}^{\nu+\kappa}$  nécessite d'être modélisée. Peeters & Henkes (1992) et Dol *et al.* (1997) proposèrent des modèles compliqués à mettre en œuvre :

$$D_{\theta i}^{\nu+\kappa} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\kappa + \nu}{2} \frac{\overline{\partial u_i' \theta'}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\kappa - \nu}{2} \theta' \frac{\overline{\partial u_i'}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\kappa - \nu}{2} u_i' \frac{\overline{\partial \theta'}}{\partial x_j} \right). \quad (2.84)$$

car ils comportent des corrélations qu'on ne modélise pas (notamment dans l'expression des deux derniers termes de l'Eq. (2.84)). Cependant, la prise en compte du premier terme suffit à modéliser correctement la diffusion turbulente loin des parois (Dol *et al.*, 1997)

$$D_{\theta i}^{\nu+\kappa} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\kappa + \nu}{2} \frac{\overline{\partial u_i' \theta'}}{\partial x_j} \right). \quad (2.85)$$

Cette expression a l'avantage d'être exacte lorsque le nombre de Prandtl est égal à 1.

Pour rappel, la modélisation de tous ces termes est valable sous les hypothèses de quasi-homogénéité et de localité. Ce sont des modèles haut-Reynolds. Dans leur état actuel, ils ne sont pas capables de gérer la zone proche-paroi où la turbulence est inhomogène et les fluctuations de température sont importantes. Il faut donc étendre leur validité à la région de proche-paroi.

#### 2.4.4.5. Modélisation proche-paroi : le modèle EBDFM

Comme pour les tensions de Reynolds, deux grands courants de pensée s'affrontent pour rendre bas-Reynolds les modèles du second ordre : l'utilisation des fonctions d'amortissement (Shikazono & Kasagi, 1996) et plus récemment la relaxation elliptique (Shin *et al.*, 2008; Choi & Kim, 2008). Un des buts de cette thèse est d'éviter l'utilisation des fonctions d'amortissement qui sont empiriques. On s'intéresse donc au modèle *Elliptic Blending Differential Flux Model* (EBDFM). La genèse de ce modèle provient des publications de Shin *et al.* (2008) et de Choi & Kim (2008), lorsqu'ils décidèrent d'appliquer l'approche de la pondération elliptique de Manceau & Hanjalić (2002) utilisée pour l'EBRSM à la modélisation du terme de brouillage et du taux de dissipation des flux thermiques turbulents. L'idée était d'appliquer tel quel les développements effectués sur l'EBRSM. Par la suite, les travaux de Dehoux *et al.* (2017) ont contribué à améliorer le modèle EBDFM.

Dans un premier temps, il faut définir un coefficient de pondération elliptique. Dehoux *et al.* (2017) ont montré qu'il fallait introduire un nouveau coefficient  $\alpha_\theta$  différent du coefficient  $\alpha$  utilisé pour l'EBRSM. Ce nouveau coefficient nécessite la résolution d'une nouvelle équation elliptique

$$\alpha_\theta - L_\theta^2 \nabla^2 \alpha_\theta = 1, \quad (2.86)$$

où  $L_\theta$  désigne l'échelle de longueur thermique. Il a également été montré que cette échelle de longueur était simplement proportionnelle à l'échelle de longueur dynamique  $L$  (Dehoux *et al.*, 2017)

$$L_\theta = 2.5L \quad \text{où} \quad L = C_L \max \left[ \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \right]. \quad (2.87)$$

$\alpha_\theta$  vaut 0 à la paroi et 1 loin de la paroi, de sorte à assurer une transition harmonieuse entre les modèles proche paroi et quasi-homogènes. Le principe de la pondération elliptique (voir Eq. (2.51)) est alors appliqué aux termes de brouillage et de dissipation

$$\phi_{\theta i}^* - \varepsilon_{\theta i} = (1 - \alpha_\theta^n) (\phi_{\theta i}^w - \varepsilon_{\theta i}^w) + \alpha_\theta^n (\phi_{\theta i}^h - \varepsilon_{\theta i}^h). \quad (2.88)$$

Les termes  $\phi_{\theta i}^w$  et  $\varepsilon_{\theta i}^w$  désignent les modèles proche-paroi des termes de brouillage et de dissipation, et les termes  $\phi_{\theta i}^h$  et  $\varepsilon_{\theta i}^h$  représentent les modèles quasi-homogènes de  $\phi_{\theta i}^*$  et de  $\varepsilon_{\theta i}$ . Il a été prouvé par Dehoux *et al.* (2017) que l'exposant  $n$  devait être égal à 1.

– MODÈLES QUASI-HOMOGENÈS UTILISÉS DANS LE MODÈLE EBDFM

La modélisation en zone de turbulence homogène a été détaillée dans le paragraphe précédent. Il suffit alors de reprendre la modélisation du terme de brouillage proposée par Launder (1988) et de l'introduire dans le modèle EBDFM

$$\phi_{\theta i}^h = -\frac{1}{\mathcal{T}} C_{1\theta} \overline{u'_i \theta'} + C_{2\theta} \overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + C_{3\theta} \beta g_i \overline{\theta'^2}, \quad (2.89)$$

où

$$C_{1\theta} = 4.15 \quad ; \quad C_{2\theta} = 0.3 \quad \text{et} \quad C_{3\theta} = 0.5.$$

De plus, le modèle isotrope du taux de dissipation est utilisé

$$\varepsilon_{\theta i}^h = 0. \quad (2.90)$$

Dès lors les modèles quasi-homogènes fixés, il ne reste plus qu'à s'intéresser aux modèles de proche-paroi.

– MODÉLISATION PROCHE-PAROI DE  $\phi_{\theta i}^*$  ET  $\varepsilon_{\theta i}$

Dans le but de satisfaire le comportement asymptotique des flux thermiques turbulents, Dehoux *et al.* (2017) proposent les modèles proche-paroi suivants pour  $\phi_{\theta i}^w$  et  $\varepsilon_{\theta i}^w$

$$\phi_{\theta i}^w = -\beta \frac{1}{T} \left[ 1 + C_{w\theta}^\phi (1 - \alpha_\theta) \frac{P_k + G_k}{\varepsilon} \right] \overline{u'_j \theta' n_i n_j}, \quad (2.91)$$

$$\varepsilon_{\theta i}^w = C_\varepsilon \left[ 1 + C_{w\theta}^\varepsilon (1 - \alpha_\theta) \frac{P_k + G_k}{\varepsilon} \right] \left( \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{RT}} \overline{u'_i \theta'} + \gamma \frac{1}{T} \overline{u'_j \theta' n_i n_j} \right), \quad (2.92)$$

avec

$$\beta = \gamma = \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R}}. \quad (2.93)$$

et les termes de production  $P_k$  et  $G_k$  s'écrivent respectivement  $P_k = P_{ii}/2$  et  $G_k = G_{ii}/2$ . L'expression en  $(P_k + G_k)/\varepsilon$  permet d'améliorer la modélisation dans la zone tampon, et les expressions proposées font intervenir les échelles de temps dynamique et thermique, ce qui est important pour simuler notamment des cas de convection naturelle (Dehoux *et al.*, 2017). Le vecteur normal à la paroi  $\underline{n}$  est défini par  $\underline{n} = \underline{\nabla} \alpha_\theta / \|\underline{\nabla} \alpha_\theta\|$  et les constantes utilisées pour ces modèles sont

$$C_{w\theta}^\phi = 2.0 \quad ; \quad C_{w\theta}^\varepsilon = -0.3 \quad \text{et} \quad C_\varepsilon = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{Pr} \right).$$

L'expression de la diffusion turbulente reprend le modèle homogène (Eq. 2.83) en remplaçant l'échelle de temps dynamique  $\mathcal{T}$ , par l'échelle de temps de Durbin  $\tau$  (Eq. 2.56)

$$D_{\theta i}^t = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{\theta} \overline{u'_j u'_k} \tau \frac{\partial \overline{u'_i \theta'}}{\partial x_k} \right). \quad (2.94)$$

Enfin, la diffusion moléculaire est également adaptée à la zone proche-paroi. Le modèle EBDFM proposé par Dehoux *et al.* (2017) reprend l'expression développée par Shikazono & Kasagi (1996)

$$D_{\theta i}^{\nu+\kappa} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\kappa + \nu}{2} \frac{\partial \overline{u'_i \theta'}}{\partial x_j} + \gamma_2 n_i n_k \frac{\nu - \kappa}{6} \frac{\partial \overline{u'_k \theta'}}{\partial x_j} \right). \quad (2.95)$$

On remarque la présence d'un terme de diffusion à la paroi dépendant du vecteur normal  $\underline{n}$  qui permet de prendre en considération l'impact de la paroi sur le fluide. En pratique, ce terme est négligeable pour un écoulement dans un canal plan et  $\gamma_2 = 0$  dans le modèle EBDFM (Dehoux *et al.*, 2017).

Le dernier point à aborder est le traitement du ratio des échelles de temps thermique et dynamique intervenant dans la modélisation proche-paroi des termes de brouillage et de dissipation. Ce ratio occupe donc une part importante dans le modèle EBDFM proposé par Dehoux *et al.* (2017) et son expression dépend de l'énergie turbulente  $k$ , du taux de dissipation  $\varepsilon$ , de la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  et de son taux de dissipation  $\varepsilon_{\theta}$

$$R = \frac{\mathcal{T}_{\theta}}{\mathcal{T}} \quad \text{où} \quad \mathcal{T}_{\theta} = \frac{\overline{\theta'^2}}{2\varepsilon_{\theta}} \quad \text{et} \quad \mathcal{T} = \frac{k}{\varepsilon}. \quad (2.96)$$

La résolution de  $R$  présuppose donc la résolution de deux équations de transport sur  $\overline{\theta'^2}$  et  $\varepsilon_{\theta}$ . Afin d'éviter la résolution de deux équations de transport supplémentaires, la pratique est d'imposer un ratio  $R$  constant (Spalding, 1971). En effet, cette hypothèse est valable sous l'hypothèse de quasi-homogénéité, mais elle se révèle erronée dans la zone proche-paroi. Après une analyse asymptotique de  $R$ , Dehoux *et al.* (2017) ont montré que  $R$  tendait vers  $Pr$  à la paroi et vers une constante loin de la paroi, et proposèrent alors le modèle

$$R = (1 - \alpha_{\theta}) Pr + \alpha_{\theta} R^h \quad \text{avec} \quad R^h = 0.5. \quad (2.97)$$

Le principal écueil de cette proposition est que l'analyse asymptotique de  $R$  a été menée en considérant comme condition aux limites une température imposée à la paroi. Or, comme nous le verrons dans le paragraphe 2.6.1, le comportement de  $R$  à la paroi change radicalement lorsqu'on impose un flux de chaleur ou lorsqu'on a une condition de transfert thermique conjugué. Par conséquent, ce modèle (comme la majorité des modèles sur les flux thermiques turbulents dans la littérature) a été conçu pour un type spécifique de condition aux limites sur la température (température imposée à la paroi) et n'est plus valable lorsque la condition aux limites change.

Le modèle EBDFM améliore le comportement asymptotique des flux thermiques turbulents. Par exemple, la Fig. 2.3 montre de manière évidente la supériorité de ce modèle pour estimer la composante tangentielle  $\overline{u' \theta'}$  des flux thermiques turbulents pour un écoulement dans un canal plan.

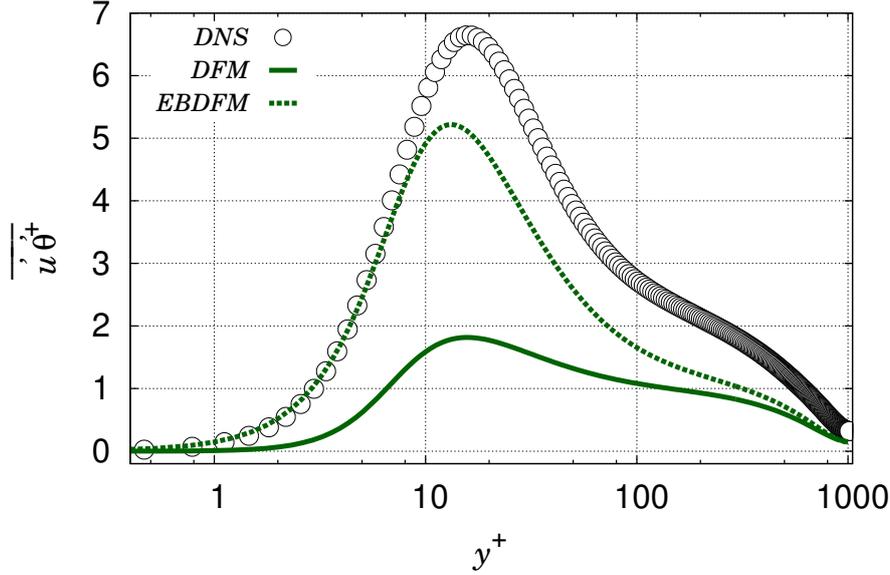


FIGURE 2.3. – Évaluation de la composante tangentielle  $\overline{u'\theta'}$  des flux thermiques turbulents avec des modèles du second ordre pour un écoulement dans un canal plan en convection forcée caractérisé par le nombre de Reynolds de frottement  $Re_\tau = 1020$  et le nombre de Prandtl  $Pr = 0.71$ . Le modèle de turbulence utilisé pour la dynamique est l'EBRSM. Les simulations ont été réalisées avec le logiciel *Code\_Saturne* et les données DNS sont de Abe *et al.* (2004).

#### 2.4.5. Extension de l'approche à relaxation elliptique aux modèles algébriques

Dehoux (2012) a étendu la méthode de relaxation elliptique aux modèles algébriques GGDH et AFM décrits dans le paragraphe 2.4. Ce travail permet de considérer les effets de paroi sur la modélisation des flux thermiques turbulents et de proposer une version bas-Reynolds des modèles GGDH et AFM.

##### 2.4.5.1. Le modèle Elliptic Blending Generalized Gradient Diffusion (EBGGDH)

Dehoux (2012) propose le modèle

$$\overline{u'_i\theta'} = -C_\theta \mathcal{T} \left[ \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + \chi \frac{1}{\mathcal{T}} \overline{u'_j \theta'} n_i n_j \right] \quad (2.98)$$

avec

$$C_\theta = \frac{C'_\theta \sqrt{R}}{\alpha_\theta c_{1\theta} \sqrt{R^h} + (1 - \alpha_\theta) \sqrt{Pr} [C_\varepsilon (1 + C'\theta' \sqrt{R}) + C'\theta' \sqrt{R}]} \quad \text{et} \quad \chi = (1 - \alpha_\theta) (1 + C_\varepsilon), \quad (2.99)$$

où

$$c'_\theta = 0.91 \quad ; \quad C_{1\theta} = 4.15 \quad ; \quad R^h = 0.5 \quad ; \quad C_\varepsilon = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{Pr} \right).$$

Dans ce modèle,  $\alpha_\theta$  est le coefficient de pondération elliptique thermique introduit dans le paragraphe précédent. Pour rappel,  $\alpha_\theta$  est nul à la paroi et vaut 1 loin de la paroi. Ce coefficient

n'intervient que dans l'expression de la constante  $C_\theta$ . De plus, l'introduction du terme en  $n_i n_j$  symbolise un terme de redistribution à la paroi qui prend en compte les effets de blocage. Le vecteur normal  $\underline{n}$  est défini par  $\underline{n} = \underline{\nabla}\alpha_\theta / \|\underline{\nabla}\alpha_\theta\|$ . Ces améliorations permettent une meilleure prédiction des flux thermiques turbulents tangentiels à la paroi (Dehoux *et al.*, 2017) comme le montre la Fig. 2.4) (gauche), mais ceux-ci restent sous-estimés.

Les explications détaillées de la démarche amenant la construction de l'EBGGDH se trouvent dans la thèse de Dehoux (2012). Bien que l'approche type GGDH permet de prendre en compte l'anisotropie, celle-ci ne permet pas de simuler des cas de physiques complexes comme des écoulements avec flottabilité.

### 2.4.5.2. Le modèle Elliptic Blending Algebraic Flux Model (EBAFM)

Le modèle EBAFM proposé par Dehoux (2012) s'écrit

$$\overline{u'_i \theta'} = -C_\theta \mathcal{T} \left[ \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + \xi \overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \eta \beta g_i \bar{\theta}'^2 + \chi \frac{1}{\mathcal{T}} \overline{u'_j \theta'} n_i n_j \right], \quad (2.100)$$

où  $\alpha_\theta$  est un coefficient de pondération elliptique et les constantes  $C_\theta$  et  $\chi$  sont les mêmes que pour le modèle EBGGDH (voir paragraphe 2.4.2). Les constantes  $\xi$  et  $\eta$  s'écrivent

$$\xi = 1 - \alpha_\theta C_{2\theta} \quad \text{et} \quad \eta = 1 - \alpha_\theta C_{3\theta}.$$

Comme pour le modèle EBGGDH, on remarque l'introduction d'un terme de redistribution à la paroi dépendant du vecteur normal  $\underline{n}$ . Cette approche permet d'augmenter significativement l'estimation des composantes tangentielle des flux thermiques turbulents comme le montre la Fig. 2.4 (droite), mais la variable  $\overline{u' \theta'}$  est sur-estimée pour un écoulement dans un canal plan.

Rhee & Sung (1997) proposèrent un modèle algébrique bas-Reynolds en utilisant des fonctions d'amortissement empiriques qui dépendent de l'écoulement. Plus récemment, Vanpouille *et al.* (2015) dérivèrent un modèle de type EAFM (*Explicit AFM*) en utilisant également l'approche de pondération elliptique introduite par Manceau & Hanjalic (2002) pour des écoulements en convection mixte et naturelle.

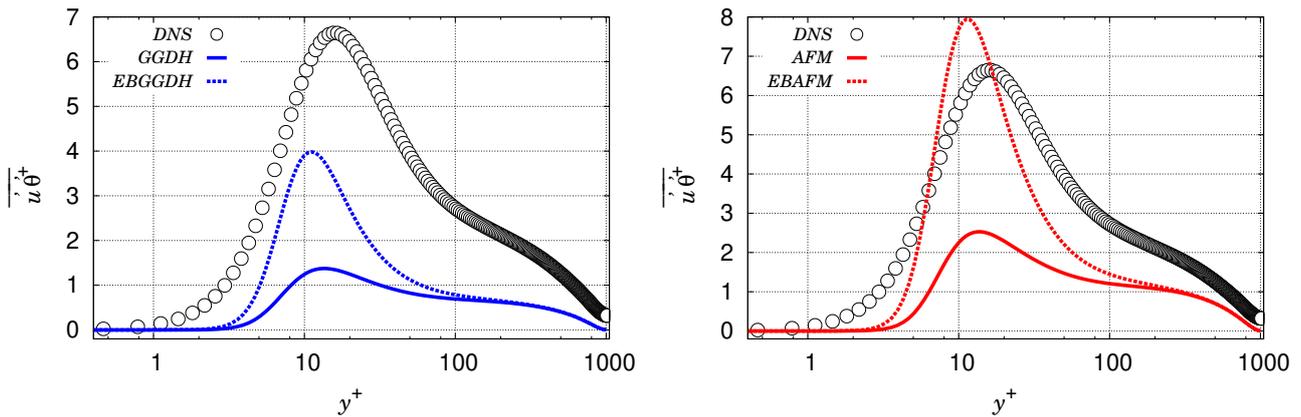


FIGURE 2.4. – Évaluation de la composante tangentielle  $\overline{u' \theta'}$  des flux thermiques turbulents avec l'approche de relaxation elliptique pour un écoulement dans un canal plan en convection forcée caractérisé par le nombre de Reynolds de frottement  $Re_\tau = 1020$  et le nombre de Prandtl  $Pr = 0.71$ . Le modèle de turbulence utilisé pour la dynamique est l'EBRSM. Les simulations ont été réalisées avec le logiciel *Code\_Saturne* et les données DNS sont de Abe *et al.* (2004).

## 2.5. MODÉLISATION DE LA VARIANCE DE LA TEMPÉRATURE ET DE SA DISSIPATION

La variance de la température  $\overline{\theta'^2}$  est une variable essentielle pour les études de transfert de chaleur. Son estimation est nécessaire pour calculer la fatigue thermique d'un matériau et pour donner une bonne estimation de l'échelle de temps thermique  $\mathcal{T}_\theta$ .  $\overline{\theta'^2}$  est également indispensable pour prendre en compte les forces de flottabilité et donc pour étudier des cas de convection naturelle. Dans le but d'estimer correctement la variance de température, il va s'avérer crucial de modéliser le taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$ .

### 2.5.1. Modélisation de la variance de température

L'équation de transport exacte de  $\overline{\theta'^2}$  s'obtient en remarquant que

$$\frac{\overline{\partial\theta'\theta'}}{\partial t} = \overline{\theta' \frac{\partial\theta'}{\partial t}} + \overline{\theta' \frac{\partial\theta'}{\partial t}}. \quad (2.101)$$

L'équation (2.101) indique que l'équation de transport de la variance de la température s'obtient en ne faisant intervenir que l'équation de conservation des fluctuations de température (Eq. 2.68). L'équation de transport de  $\overline{\theta'^2}$  est donc dépourvue de termes de pression et de flottabilité et s'écrit

$$\frac{\partial\overline{\theta'^2}}{\partial t} + \overline{u_j \frac{\partial\overline{\theta'^2}}{\partial x_j}} = 2P_\theta - 2\varepsilon_\theta + D_\theta^t + D_\theta^k. \quad (2.102)$$

$P_\theta$ ,  $\varepsilon_\theta$ ,  $D_\theta^t$  et  $D_\theta^k$  désignent respectivement la production par le gradient de température moyenne, le taux de dissipation, la diffusion turbulente et la diffusion moléculaire, et s'écrivent

$$P_\theta = -\overline{u'_j \theta' \frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x_j}}, \quad (2.103)$$

$$\varepsilon_\theta = \kappa \overline{\frac{\partial\theta'}{\partial x_j} \frac{\partial\theta'}{\partial x_j}}, \quad (2.104)$$

$$D_\theta^t = -\overline{\frac{\partial\theta' \theta' u'_j}{\partial x_j}}, \quad (2.105)$$

$$D_\theta^k = \kappa \overline{\frac{\partial^2 \theta'^2}{\partial x_j \partial x_j}}. \quad (2.106)$$

Les termes de production  $P_\theta$  et de diffusion moléculaire  $D_\theta^k$  ne nécessitent pas de modélisation contrairement aux termes de diffusion turbulente  $D_\theta^t$  et de dissipation  $\varepsilon_\theta$ . Le terme de diffusion turbulente fait intervenir la corrélation triple  $\overline{\theta' \theta' u'_j}$ . À l'image de la modélisation effectuée sur les termes de diffusion turbulente des tensions de Reynolds et des flux thermiques turbulents, la diffusion turbulente  $D_\theta^t$  est modélisée à l'aide de l'hypothèse de Daly & Harlow (1970)

$$D_\theta^t = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( C_{\theta^2} \mathcal{T} \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial\overline{\theta'^2}}{\partial x_j} \right). \quad (2.107)$$

L'échelle de temps utilisée dans le terme de diffusion turbulente diffère selon les travaux. Jones & Musonge (1988) utilisent l'échelle dynamique  $\mathcal{T}$ , Dehoux *et al.* (2017) préfèrent l'échelle de Durbin et Elghobashi & Launder (1983) proposent l'échelle de temps thermique  $\mathcal{T}_\theta$  et l'échelle

mixte  $\sqrt{\mathcal{T}\mathcal{T}_\theta}$ . Dans son article, Nagano (2002) propose une modélisation avec fonctions d'amortissement.

Le principal problème de modélisation dans l'équation de transport de  $\overline{\theta'^2}$  concerne le terme de dissipation  $\varepsilon_\theta$ . La modélisation de ce terme s'avère extrêmement compliquée et il est courant, dans la littérature, de le modéliser avec le ratio des échelles de temps thermique et dynamique  $R$  considéré comme constant (Spalding, 1971)

$$\varepsilon_\theta = \frac{\overline{\theta'^2} \varepsilon}{2Rk}. \quad (2.108)$$

Dehoux *et al.* (2017) utilise également le modèle (2.108), mais avec leur propre modélisation de  $R$  (Eq. 2.97). Craft *et al.* (1996) proposèrent leur propre modèle pour décrire  $R$  en combinant flux thermiques turbulents, variance de température et énergie turbulente

$$\frac{1}{R} = 1.5 \left( 1 + \frac{\overline{u'_i \theta'} \overline{u'_i \theta'}}{k \overline{\theta'^2}} \right). \quad (2.109)$$

Cette modélisation donne de bons résultats pour des écoulements avec flottabilité en turbulence homogène, mais n'est pas conçue pour gérer la zone proche-paroi. Les modèles utilisant la relation (2.108) sont par ailleurs incapables de gérer différents types de condition aux limites sur la température comme nous le verrons par la suite. Ainsi, pour estimer correctement la variance de température pour des cas complexes, il est nécessaire de résoudre une équation de transport sur la variable  $\varepsilon_\theta$ .

### 2.5.2. Modélisation du taux de dissipation $\varepsilon_\theta$

La première étape consiste en l'écriture de l'équation de transport du taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$  de la variance de température  $\overline{\theta'^2}$ . Ainsi, en remarquant

$$\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial t} = 2\kappa \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \right)}, \quad (2.110)$$

et en utilisant les dérivées spatiales de l'équation de conservation des fluctuations de température (Eq. (2.68)), il vient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x_j} &= -2\kappa \overline{\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}} & P_{\varepsilon_\theta}^1 \\
& - 2\kappa \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}} & P_{\varepsilon_\theta}^2 \\
& - 2\kappa \overline{\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_k \partial x_j} u'_j \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}} & P_{\varepsilon_\theta}^3 \\
& - 2\kappa \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} & P_{\varepsilon_\theta}^4 \\
& - \kappa \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{u'_j \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}} \right) & D_{\varepsilon_\theta}^t \\
& + \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left( \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}} \right) & D_{\varepsilon_\theta}^\kappa \\
& - 2\kappa^2 \overline{\frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j \partial x_k}} & Y_{\varepsilon_\theta}
\end{aligned} \tag{2.111}$$

$P_{\varepsilon_\theta}^1$ ,  $P_{\varepsilon_\theta}^2$ ,  $P_{\varepsilon_\theta}^3$ ,  $P_{\varepsilon_\theta}^4$ ,  $D_{\varepsilon_\theta}^t$ ,  $D_{\varepsilon_\theta}^\kappa$  et  $Y_{\varepsilon_\theta}$  représentent respectivement les termes de production par gradient de température moyenne, par gradient de vitesse moyenne, par la hessienne de température, de production turbulente, de diffusion turbulente et moléculaire, et de dissipation. Cette équation contient sept termes dont six sont à modéliser (la diffusion moléculaire étant l'unique exception). Cette complexité explique pourquoi la modélisation de  $\varepsilon_\theta$  est souvent mise de côté pour les études CFD de cas industriels.

### 2.5.2.1. Modélisation en zone quasi-homogène

Les premiers travaux visant à modéliser l'équation de transport de  $\varepsilon_\theta$  sont attribués à Lumley & Newman (1977). Plusieurs auteurs ont par la suite contribué à développer la modélisation de cette équation de transport (Newman *et al.*, 1981; Elghobashi & Launder, 1983; Jones & Musonge, 1988). La méthode classique consiste à reprendre ce qui a été réalisé pour la modélisation de la variable  $\varepsilon$ , c'est-à-dire de développer un terme de production  $\mathcal{P}_{\varepsilon_\theta}$ , un terme de dissipation  $\mathcal{Y}_{\varepsilon_\theta}$  et un terme de diffusion  $\mathcal{D}_{\varepsilon_\theta}$ . Cette méthode évite la modélisation terme-à-terme qui est compliquée à réaliser pour l'équation de transport de la variable  $\varepsilon_\theta$ . Ainsi, la modélisation classique s'écrit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x_j} = & -c_{\varepsilon\theta 1} \frac{\varepsilon_\theta \overline{u'_i u'_j}}{k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - c_{\varepsilon\theta 2} \frac{\varepsilon_\theta \overline{u'_j \theta'}}{\theta'^2} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j} - c'_{\varepsilon\theta 2} \frac{\varepsilon \overline{u'_j \theta'}}{k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j} \quad \mathcal{P}_{\varepsilon_\theta} \\
& - c_{\varepsilon\theta 3} \frac{\varepsilon_\theta^2}{\theta'^2} - c_{\varepsilon\theta 4} \frac{\varepsilon \varepsilon_\theta}{k} \quad \mathcal{Y}_{\varepsilon_\theta} \quad (2.112) \\
& + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{\varepsilon_\theta} \overline{u'_j u'_k} \mathcal{T}_* \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x_k} \right) + \gamma \kappa \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial x_j \partial x_j} \quad \mathcal{D}_{\varepsilon_\theta}
\end{aligned}$$

Dans cette modélisation, la diffusion turbulente est classiquement modélisée avec l'hypothèse de Daly & Harlow (1970) et le tableau 2.6 donne les différentes constantes utilisées dans la littérature

Article	$c_{\varepsilon\theta 1}$	$c_{\varepsilon\theta 2}$	$c'_{\varepsilon\theta 2}$	$c_{\varepsilon\theta 3}$	$c_{\varepsilon\theta 4}$	$c_{\varepsilon_\theta}$	$\gamma$	$\mathcal{T}_*$
Newman <i>et al.</i> (1981)	/	2.0	/	2.02	0.88	0.35	/	$\mathcal{T}_\theta$
Elghobashi & Launder (1983)	/	1.8	/	2.2	0.8	0.25	/	$\sqrt{\mathcal{T} \mathcal{T}_\theta}$
Jones & Musonge (1988)	1.4	/	1.7	2.0	1.8	0.22	/	$\mathcal{T}$
Shikazono & Kasagi (1996)	0.3	0.8	/	1.0	0.3	0.3	1	$\frac{2R}{(0.7 + R)} \mathcal{T}$
Nagano (2002)	0.77	1.8	/	2.0	0.9	0.11	1	$\frac{2R}{(0.5 + R)} \mathcal{T}$

Tableau 2.6. – Constantes du modèle Eq. (2.112) selon différents travaux (tableau non-exhaustif).

Le choix de l'échelle de temps dans l'expression de la diffusion turbulente n'est pas totalement établi (voir Tab. 2.6). De plus, dans la version haut-Reynolds de leur modèle de transport, Shikazono & Kasagi (1996) et Nagano (2002) introduisent un terme de diffusion moléculaire. Enfin, dans son article, Nagano (2002) montre que, même si le terme de production par la hessienne de température  $P_{\varepsilon_\theta}^3$  est petit devant les autres termes de production, celui-ci mérite d'être modélisé. En effet,  $P_{\varepsilon_\theta}^3$  est du même ordre de grandeur que  $P_{\varepsilon_\theta}^1 + P_{\varepsilon_\theta}^2 + P_{\varepsilon_\theta}^4 - Y_{\varepsilon_\theta}$  qui est modélisé par  $\mathcal{P}_{\varepsilon_\theta} - \mathcal{Y}_{\varepsilon_\theta}$  dans l'Eq. (2.112). Ainsi, il propose l'expression suivante :

$$P_{\varepsilon_\theta}^3 = \kappa \left( C p_4 \overline{u'_j u'_k} \frac{k}{\varepsilon} f_R \frac{\partial^2 \overline{\theta}}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial^2 \overline{\theta}}{\partial x_l \partial x_j} + C p_3 \frac{k}{\varepsilon} f_R \frac{\partial \overline{u'_j u'_l}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_l} \frac{\partial^2 \overline{\theta}}{\partial x_j \partial x_k} \right), \quad (2.113)$$

où

$$C p_4 = 0.25 \quad ; \quad C p_3 = 0.1 \quad \text{et} \quad f_R = \frac{2R}{0.5 + R} \quad (2.114)$$

De par la complexité de son expression, le modèle de  $P_{\varepsilon_\theta}^3$  reste peu utilisé en pratique.

Cependant, la modélisation de l'équation de transport de la variable  $\varepsilon_\theta$  présentée ci-dessus ne prend pas en considération les effets de la paroi. Or, dans cette zone, il est important d'estimer les variables thermiques pour des cas industriels mettant en jeu des transferts de chaleur. En effet, l'intérêt majeur de ces cas est de capter les fortes fluctuations de chaleurs qui peuvent engendrer de la fatigue thermique pour le matériau de la paroi (Howard & Serre, 2015, 2017). Sommer *et al.* (1992) montrent que les approches à Prandtl turbulent constant sont limitées lorsque la physique se complexifie, et qu'il est nécessaire de résoudre des équations de transport pour les variables thermiques. Ainsi, la modélisation bas-Reynolds de la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  et donc de sa dissipation  $\varepsilon_\theta$  est tout simplement essentielle.

### 2.5.2.2. Modélisation bas-Reynolds de l'équation de transport de la variable $\varepsilon_\theta$

Les premiers modèles à équation de transport pour résoudre  $\overline{\theta'^2}$  et  $\varepsilon_\theta$  dans la zone proche-paroi ont été réalisés par Nagano & Kim (1988). Ces modèles imposent les bons comportements asymptotiques en utilisant des fonctions d'amortissement. L'idée est de reprendre le travail effectué sur les versions bas-Reynolds du modèle  $k$ - $\varepsilon$  avec fonctions d'amortissement (voir paragraphe 2.3.1.2) et de l'appliquer aux variables thermiques  $\overline{\theta'^2}$  et  $\varepsilon_\theta$ . Nagano & Kim (1988) parlent notamment de modèle  $k_\theta$ - $\varepsilon_\theta$  bas-Reynolds où  $k_\theta = \overline{\theta'^2}/2$ . Par la suite, plusieurs articles visant à retravailler cette modélisation ont été publiés dans la littérature (Youssef *et al.*, 1992; Sommer *et al.*, 1992; Abe *et al.*, 1995; Hanjalić *et al.*, 1996; Hattori & Nagano, 1998; Hwang & Lin, 1999; Nagano, 2002; Deng *et al.*, 2001). Il est à noter qu'il y a peu d'article parlant de modélisation de  $\varepsilon_\theta$  bas-Reynolds avec des fermetures du second ordre pour les tensions de Reynolds et les flux thermiques turbulents, mis à part les travaux de Shikazono & Kasagi (1996) et Nagano (2002). Ainsi, cette partie proposera une description rapide du modèle bas-Reynolds développé par Nagano (2002) avec fermetures du second-ordre pour les tensions de Reynolds et les flux thermiques turbulents.

Dans son article, Nagano (2002) propose de construire un modèle pour  $\varepsilon_\theta$  "rigoureux". Il s'appuie sur des analyses asymptotiques des différents termes de l'équation de transport et sur la base DNS créée par Kasagi *et al.* (1992) pour calibrer les fonctions d'amortissement et les constantes. Le cas DNS utilisé est un canal plan en convection forcée caractérisé par un Reynolds turbulent  $Re_\tau = 150$  et un nombre de Prandtl  $Pr = 0.71$ . Ces simulations DNS imposent des fluctuations de température nulles à la paroi, ce qui correspond à une condition aux limites type température imposée à la paroi. Nagano (2002) propose alors le modèle bas-Reynolds très complet suivant

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x_j} = & -c_{\varepsilon\theta 1} f_{P1} \frac{\varepsilon_\theta \overline{u'_i u'_j}}{k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - c_{\varepsilon\theta 2} f_{P2} \frac{\varepsilon_\theta \overline{u'_j \theta'}}{\overline{\theta'^2}} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j} \\
& + \kappa \left( C_{P4} \overline{u'_j u'_k} \frac{k}{\varepsilon} f_R \frac{\partial^2 \overline{\theta}}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial^2 \overline{\theta}}{\partial x_l \partial x_j} + C_{P3} \frac{k}{\varepsilon} f_R \frac{\partial \overline{u'_j u'_l}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_l} \frac{\partial^2 \overline{\theta}}{\partial x_j \partial x_k} \right) \\
& - c_{\varepsilon\theta 3} f_{D3} \frac{\varepsilon_\theta^2}{\overline{\theta'^2}} - c_{\varepsilon\theta 4} f_{D4} \frac{\varepsilon \varepsilon_\theta}{k} \\
& + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{\varepsilon\theta} \overline{u'_j u'_k} \mathcal{T} f_R \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x_k} \right) + c_{\varepsilon\theta 5} \kappa \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (1 - f_w(3))^{3/2} \frac{1}{\mathcal{T}} \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_j} f_w(3) \right] \\
& + \kappa \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial x_j \partial x_j}.
\end{aligned} \tag{2.115}$$

Toutes les constantes et les fonctions d'amortissement sont détaillées dans le tableau 2.7.

A ce jour, le modèle développé par Nagano (2002) est un des modèles les plus élaborés pour la modélisation bas-Reynolds de la variable  $\varepsilon_\theta$ . Cependant, il compte beaucoup de fonctions d'amortissement et de constantes qui ont été calibrées à l'aide de la DNS de Kasagi *et al.* (1992). Ces variables ne sont pas universelles et sont donc fortement corrélées à un écoulement dans un canal plan en convection forcée.

Plus récemment, Karcz & Badur (2005) proposèrent un modèle pour  $\varepsilon_\theta$  sans fonctions d'amortissement. L'idée est de prendre exemple sur le modèle  $\overline{v^2}$ - $f$  développé par Durbin (1991) et d'appliquer cette philosophie au modèle proposé par Nagano & Kim (1988). Ils se servent alors de la variable  $\overline{v'^2}$  dans le but de remplacer les fonctions d'amortissement. Ils définissent ainsi un modèle  $\overline{v'^2}$ - $f$ - $k_\theta$ - $\varepsilon_\theta$  à diffusivité turbulente. Cependant, ce modèle n'est testé que pour des cas à fluctuations de température nulles à la paroi et le modèle de Nagano (2002) donne de meilleurs résultats sur un cas de canal plan.

Les modèles évoqués dans cette partie ont tous été développés et calibrés pour des cas où les fluctuations de température étaient nulles à la paroi. Or, ils existent d'autres types de conditions aux limites sur la température comme un flux de chaleur imposé à la paroi, et pour lesquelles ces modèles ne sont pas adaptés.

---

$c_{\varepsilon\theta 1}$	0.77
$c_{\varepsilon\theta 2}$	1.8
$c_{\varepsilon\theta 3}$	2.0
$c_{\varepsilon\theta 4}$	0.9
$c_{\varepsilon\theta 5}$	0.8
$c_{\varepsilon\theta}$	0.11
$f_w(\xi)$	$\exp\left[-(y^+/\xi)^2\right]$
$f_R$	$\frac{2R}{(0.5 + R)}$
$f_{P1}$	$(1 - f'_{P1})f_p$
$f_{P2}$	$(1 - f'_{P2})f_p [1 - f_w(12)]$
$f_{D3}$	$1 - f_w(12)$
$f_{D4}$	$(1/C_{D2})(C_{\varepsilon 2}f_\varepsilon - 1) [1 - f_w(12)]$
$C_{D2}$	0.9
$C_{\varepsilon 2}$	1.9
$f_\varepsilon$	$1 - 0.3\exp\left[-(R_t/6.5)^2\right]$
$f'_{P1}$	$\exp\left(-7.10^{-5}R_U^{10}\right)\left[1 - \exp\left(-1.1R_U^{1/2}\right)\right]$
$f'_{P2}$	$\exp\left(-7.10^{-5}R_T^{10}\right)\left[1 - \exp\left(-1.1R_T^{1/2}\right)\right]$
$R_U$	$\frac{u_\tau^2 + \overline{u'v'}}{\sqrt{\varepsilon\nu}}f_w(6)$
$R_T$	$\frac{u_\tau\theta_\tau + \overline{v'\theta'}}{\sqrt{\varepsilon_\theta\nu/Pr}}f_w(6)$

---

Tableau 2.7. – Constantes du modèle bas-Reynolds pour  $\varepsilon_\theta$  de Nagano (2002).

## 2.6. PROBLÈMES DE CONDITION AUX LIMITES SUR LA TEMPÉRATURE

Il existe un lien concret entre modélisation RANS et simulation DNS. En effet, les modélisateurs RANS utilisent les données générées par les DNS afin de calibrer les constantes de leur modèle. Les données DNS sont donc importantes pour comprendre le comportement des variables turbulentes et en particulier dans la zone proche-paroi où ces comportements sont parfois contre-intuitifs. Les modèles bas-Reynolds mettant en jeu des fonctions d'amortissement sont dépendants des données : ces fonctions empiriques sont confectionnées de sorte à reproduire les comportements DNS (Hattori & Nagano, 1998). Cependant, la majorité des DNS impliquant des transferts de chaleur ont été réalisés en imposant des fluctuations de température nulles à la paroi et par conséquent, la majorité des modèles RANS pour les variables thermiques ont été développés en ne tenant compte que de ce type de condition aux limites.

### 2.6.1. Mise en évidence de l'impact de la condition aux limites sur la température

Kasagi *et al.* (1989) furent les premiers à parler de l'importance de la prise en compte des fluctuations de températures et de leur propagation dans la paroi solide. Cependant, les simulations DNS réalisées par la suite par Kasagi *et al.* (1992) imposent des fluctuations de températures nulles à la paroi. Il faudra attendre les simulation DNS de Kong *et al.* (2000) pour avoir des données sur le comportement de variables thermiques turbulentes lorsqu'un flux de chaleur est imposé à la paroi (ce qui signifie que les fluctuations de températures ne sont pas négligeables). On constate alors que les comportements des variables telles que les flux thermiques turbulents  $\overline{u_i' \theta'}$  ou encore la variance de températures  $\overline{\theta'^2}$  sont différents. Cela implique que les modèles RANS bas-Reynolds développés et calibrés en s'appuyant sur des DNS à fluctuations de température nulles à la paroi ne peuvent simuler des cas à flux de chaleur imposé. Par la suite, Tiselj *et al.* (2001b) confirmèrent la différence de comportement pour les variables thermiques entre des cas à température imposée et à flux de chaleur imposé. Tiselj *et al.* (2001a) allèrent plus loin et proposèrent des DNS pour des canal plan soumis à du transfert thermique conjugué (couplage entre la partie fluide et la partie solide). Flageul *et al.* (2015) réalisèrent une base de données DNS complète d'un cas de canal plan en convection forcée à  $Re_\tau = 149$  et  $Pr = 0.71$  avec température imposée à la paroi, flux de chaleur imposé et transfert thermique conjugué. Ils calculèrent également les bilans des équations de transport des flux thermiques turbulents  $\overline{u_i' \theta'}$ , de la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  et de sa dissipation  $\varepsilon_\theta$ , ce qui constitue une véritable mine d'or pour la validation des modèles RANS.

Ces récents travaux (Kong *et al.*, 2000; Tiselj *et al.*, 2001a; Flageul *et al.*, 2015) ont permis de révéler que les comportements des variables thermiques dépendaient de la condition aux limites sur la température. En effet, la Fig. 2.5 extraite des simulation DNS réalisées par Flageul *et al.* (2015, 2017) montre clairement l'impact de la condition aux limites sur le comportement proche-paroi des variables  $\varepsilon_\theta$  et  $\overline{\theta'^2}$ .

Ces nouvelles données DNS montrent de manière incontestable la nécessité de développer des modèles capables de gérer différents types de condition aux limites sur la température. De plus, la modélisation de l'équation de transport de la variable  $\varepsilon_\theta$  devient essentielle pour estimer la variance de température  $\overline{\theta'^2}$ . En effet, il n'est plus possible de considérer le ratio des échelles de temps thermique et dynamique  $R$  constant ou encore de le prendre égal au nombre de Prandtl à la paroi et constant loin de la paroi (Dehoux *et al.*, 2017) pour estimer  $\varepsilon_\theta$  (voir Fig. 2.6). Ces modélisations ne tiennent plus lorsqu'un flux de chaleur est imposé à la paroi ou pour un cas de transfert thermique conjugué.

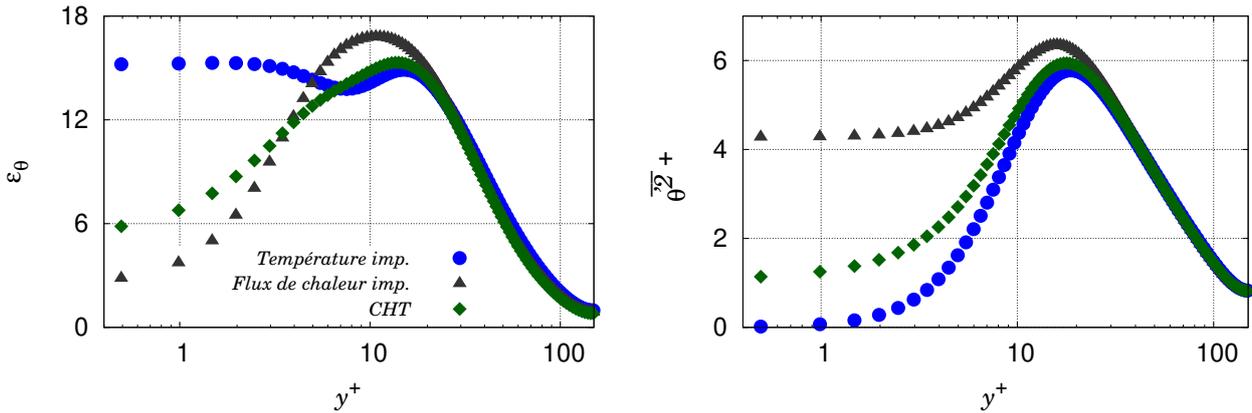


FIGURE 2.5. – Comportement du taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$  (gauche) et de la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  (droite) pour différentes conditions aux limites sur la température. Les données proviennent des DNS de Flageul *et al.* (2015, 2017). Le solide et le fluide possèdent les mêmes propriétés thermiques pour le cas transfert thermique conjugué (CHT).

Les travaux de Tiselj *et al.* (2001a) et de Flageul *et al.* (2015) ont également permis de mettre en évidence la discontinuité de la variable  $\varepsilon_\theta$  à l'interface fluide/solide (appelée "saut" de la variable  $\varepsilon_\theta$ ) qui est engendrée par la discontinuité des propriétés thermique d' $\varepsilon_\theta$ . Récemment, Flageul *et al.* (2017, 2018) proposèrent une corrélation afin d'estimer ce saut. Ces travaux seront décrit par la suite dans ce manuscrit. Par conséquent, ces récents travaux imposent une complexité supplémentaires aux modèles RANS souhaitant modéliser des cas de transfert thermique conjugué. Plus généralement, ces travaux mettent en évidence les failles de la plupart des modèles RANS actuels pour la prédiction des variables thermiques turbulentes. En effet, la majorité des modèles ont été conçu pour des fluctuations de température nulles à la paroi et ne peuvent prendre en compte d'autres types de condition aux limites.

## 2.6.2. Premiers travaux de modélisation RANS

On trouve peu de travaux sur la prise en compte de différentes condition aux limites sur la température dans la littérature. Sommer *et al.* (1994) sont parmi les premiers à proposer un modèle RANS bas-Reynolds pour les équations de transport de la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  et de sa dissipation  $\varepsilon_\theta$  pour des fluctuations de température nulles et non-nulles à la paroi. Leur but était de montrer que le champ de température moyenne n'était pas impacté par la condition aux limites et donc de valider l'approche à fluctuations de température nulles à la paroi. Cependant, ils mettent en évidence la dépendance de  $\overline{\theta'^2}$  et d' $\varepsilon_\theta$  à la condition aux limites.

Par la suite, la communauté scientifique de l'université de Manchester s'est intéressée aux problèmes de condition aux limites pour la modélisation RANS. Keshmiri (2006) propose un modèle bas-Reynolds pour le couple  $\overline{\theta'^2}$ - $\varepsilon_\theta$  pour des cas de transfert thermique conjugué. Craft *et al.* (2010) reprennent les développements de Keshmiri (2006) et propose quelques améliorations. Ils utilisent le modèle de Launder & Sharma (1974), pour décrire la dynamique, qu'ils enrichissent afin d'améliorer la prédiction de la variable  $\varepsilon$  en proche-paroi. En effet, le modèle  $k$ - $\varepsilon$  bas-Reynolds avec des fonctions d'amortissement proposé par Launder & Sharma (1974) à tendance à sous-estimer  $\varepsilon$  en proche-paroi. Ainsi, Craft *et al.* (2010) introduisent un terme correctif afin de corriger cet écueil. La modélisation des variables thermiques dans la partie fluide reprend celle proposée par Hanjalic *et al.* (1996) : les flux thermiques turbulents sont traités par une approche SGDH

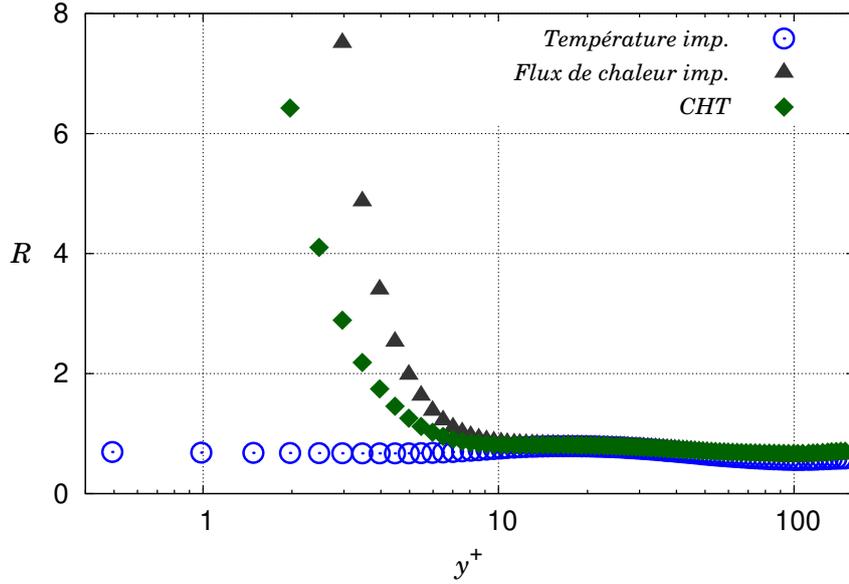


FIGURE 2.6. – Comportement du ratio des échelles de temps thermique et dynamique  $R$  pour différentes conditions aux limites sur la température. Les données proviennent des DNS de Flageul *et al.* (2015, 2017). Le solide et le fluide possèdent les mêmes propriétés pour le cas transfert thermique conjugué (CHT).

$$\overline{u'_i \theta'} = -\frac{\nu_t}{Pr_t} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_i}, \quad (2.116)$$

où la viscosité turbulente s'exprime par

$$\nu_t = c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\tilde{\varepsilon}} \quad \text{avec} \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu \left( \frac{\partial k^{1/2}}{\partial x_j} \right)^2. \quad (2.117)$$

$\tilde{\varepsilon}$  représente la variable  $\varepsilon$  moins sa valeur constante à la paroi. L'idée est de simplifier la résolution de  $\varepsilon$  en imposant  $\tilde{\varepsilon} = 0$  à la paroi. Ensuite, une équation de transport est modélisée pour  $\overline{\theta'^2}$

$$\frac{D(\rho C_p \overline{\theta'^2})}{Dt} = 2\rho C_p P_\theta - 2\rho C_p \varepsilon_\theta + d_\theta, \quad (2.118)$$

où  $C_p$  désigne la chaleur spécifique du fluide à pression constante et où la diffusion  $d_\theta$  s'écrit

$$d_\theta = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho C_p \left( \frac{\nu}{Pr} + f_g \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_j} \right]. \quad (2.119)$$

Enfin, Craft *et al.* (2010) décident de résoudre une équation de transport pour la variable  $\tilde{\varepsilon}_\theta$

$$\tilde{\varepsilon}_\theta = \varepsilon_\theta - \kappa \left( \frac{\partial \sqrt{\overline{\theta'^2}}}{\partial x_j} \right)^2, \quad (2.120)$$

qui est défini de manière similaire à  $\tilde{\varepsilon}$  (Eq. 2.117). L'objectif est d'imposer  $\tilde{\varepsilon}_\theta = 0$  à la paroi. Cette relation est effectivement vérifiée lorsqu'une température est imposée à la paroi car une simple analyse asymptotique montre que la variable  $\varepsilon_\theta$  tend vers la constante  $\varepsilon_{\theta|w}$

$$\varepsilon_{\theta}|_w = \kappa \left( \frac{\partial \sqrt{\theta'^2}}{\partial x_j} \right)^2, \quad (2.121)$$

à la paroi, mais elle devient fautive en transfert thermique conjugué et à flux de chaleur imposé puisque la variable  $\varepsilon_{\theta}$  tend vers une valeur non-nulle à la paroi contrairement à l'expression  $\frac{\partial \sqrt{\theta'^2}}{\partial x_j}$  qui tend vers 0 (donc  $\tilde{\varepsilon}_{\theta} \neq 0$  à la paroi).

L'équation de transport de  $\tilde{\varepsilon}_{\theta}$  s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{D(\rho C_p \tilde{\varepsilon}_{\theta})}{Dt} = & c_{\varepsilon_{\theta 1}} \rho C_p \frac{P_k \tilde{\varepsilon}_{\theta}}{k} + c_{\varepsilon_{\theta 3}} \rho C_p \frac{P_{\theta} \tilde{\varepsilon}_{\theta}}{\theta'^2} - c_{\varepsilon_{\theta 4}} \rho C_p \frac{\tilde{\varepsilon}_{\theta}^2}{\theta'^2} - c_{\varepsilon_{\theta 2}} \rho C_p \frac{\tilde{\varepsilon}_{\theta}}{k} \\ & + d_{\tilde{\varepsilon}_{\theta}} + \rho C_p E_{\theta} + \rho C_p S_{\tilde{\varepsilon}_{\theta}} + S_d, \end{aligned} \quad (2.122)$$

avec le terme  $E_{\theta}$  qui est le pendant thermique du terme  $E$  dans l'équation de transport de  $\tilde{\varepsilon}$  du modèle de Launder & Sharma (1974)

$$E_{\theta} = c_{E\theta} \kappa_t \left( \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2, \quad (2.123)$$

où  $\kappa_t$  désigne la diffusivité turbulente ( $\kappa_t = \nu_t / Pr_t$ ) et la diffusion  $d_{\tilde{\varepsilon}_{\theta}}$  est exprimée par

$$d_{\tilde{\varepsilon}_{\theta}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho C_p \left( \frac{\nu}{Pr} + f_g \frac{\nu_t}{Pr_t \sigma_{\varepsilon_{\theta}}} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{\theta}}{\partial x_j} \right]. \quad (2.124)$$

La fonction  $f_g$  intervenant dans les termes de diffusion  $d_{\theta}$  et  $d_{\tilde{\varepsilon}_{\theta}}$  permet d'augmenter la diffusion turbulente en proche-paroi

$$f_g = 5 \left( \frac{\varepsilon}{\tilde{\varepsilon}} \right)^{3/4} - 4. \quad (2.125)$$

Les termes additionnels  $S_{\tilde{\varepsilon}_{\theta}}$  et  $S_d$  sont des termes correctifs qui vont permettre aux modèles de s'adapter à la condition aux limites sur la température. Le premier terme  $S_{\tilde{\varepsilon}_{\theta}}$  va agir dans le but d'équilibrer la diffusion moléculaire en proche-paroi

$$S_{\tilde{\varepsilon}_{\theta}} = -c_{n1} (\varepsilon_{\theta} - \tilde{\varepsilon}_{\theta}) \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} \exp\left(-\frac{R_t^2}{10}\right). \quad (2.126)$$

Cette modification a pour principal objectif d'améliorer la prédiction de  $\varepsilon_{\theta}$  lorsqu'une température est imposée à la paroi. Cependant, pour un cas à flux de chaleur imposé ou un cas de transfert thermique conjugué, l'estimation de  $\varepsilon_{\theta}$  reste trop importante. En effet, la figure 2.5 (gauche) montre que la valeur de  $\varepsilon_{\theta}$  à la paroi, pour du transfert thermique conjugué et pour un flux de chaleur imposé, est moins importante que pour une température fixée à la paroi. Ainsi, dans le but de baisser la prédiction du taux de dissipation  $\varepsilon_{\theta}$  à la paroi, Craft *et al.* (2010) proposent le terme correctif  $S_d$

$$S_d = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ c_d C_p \frac{\mu}{Pr} \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_{\theta}} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{\theta}}{\partial x_j} \right]. \quad (2.127)$$

Ce terme s'apparente à un terme de diffusion. Craft *et al.* (2010) expliquent que les termes exacts de diffusion moléculaire et de dissipation de l'équation du taux de dissipation  $\varepsilon_{\theta}$  sont intimement liés et qu'ils peuvent se contracter en un seul terme

$$2\kappa^2 \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \left[ \frac{\partial^3 \theta'}{\partial x_k \partial x_j \partial x_j} \right] = \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left( \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \right) - 2\kappa^2 \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j \partial x_k}. \quad (2.128)$$

Ainsi, ils conçoivent un terme puits comme un terme de diffusion. De plus, le ratio  $\tilde{\varepsilon}_\theta / \varepsilon_\theta$  est proche de zero pour un cas à température imposée, ce qui rend le terme  $S_d$  inactif et ne perturbe pas le modèle. Pour un cas de transfert thermique conjugué ou de flux de chaleur imposé, le terme  $S_d$  s'active et contribue à baisser la valeur de la dissipation  $\varepsilon_\theta$  à la paroi.

En outre, comme Craft *et al.* (2010) cherchent à modéliser des cas de transfert thermique conjugué, ils présentent un modèle pour la variance de température et sa dissipation dans la partie solide. Ces variables sont les deux seules variables à être non-nulles dans le solide

$$\frac{D(\rho C_p \overline{\theta'^2})}{Dt} = -2\rho C_p \varepsilon_\theta + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho C_p \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_j} \right], \quad (2.129)$$

$$\frac{D(\rho C_p \tilde{\varepsilon}_\theta)}{Dt} = -c_{\varepsilon_{\theta A}} \rho C_p \frac{\tilde{\varepsilon}_\theta^2}{\theta'^2} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho C_p \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_\theta}{\partial x_j} \right] + S_d. \quad (2.130)$$

Il est à noter que le cas particulier du transfert thermique conjugué sera abordé dans la suite de la thèse. Les constantes de ces modèles sont répertoriées dans le tableau 2.8.

Dans leur article, Craft *et al.* (2010) comparent leur modèle avec les données DNS de Tiselj *et al.* (2001a) pour un cas d'un écoulement dans un canal plan en convection forcée à  $Re_\tau = 150$  et  $Pr = 7$  avec une température fixée à la paroi, un flux de chaleur imposé et de transfert thermique conjugué. Ils montrent ainsi que leur modèle se comporte bien et réussi à reproduire le comportement de  $\overline{\theta'^2}$  dans le fluide et le solide. Ils le comparent également avec un cas d'un écoulement dans un canal plan en convection forcée à  $Re_\tau = 150$  et  $Pr = 1$  (Tiselj *et al.*, 2001b) avec température fixée et flux de chaleur imposé. On observe alors une mauvaise estimation de  $\overline{\theta'^2}$  loin de la paroi. Cependant, Craft *et al.* (2010) ne donnent pas d'information sur la discontinuité de la variable  $\varepsilon_\theta$  à l'interface et ne tracent pas  $\varepsilon_\theta$  dans le solide. De plus, le modèle fait appel à des fonctions d'amortissement pour la dynamique et la thermique (notamment dans l'expression de  $S_{\varepsilon_\theta}$ ) et à un nombre de Prandtl turbulent  $Pr_t$  constant. Ils proposent également l'approche SGDH pour l'estimation des flux thermiques turbulents qui n'est pas capable de capter les composantes tangentielles à la paroi des flux thermiques turbulents.

Par conséquent, la démarche menée par Craft *et al.* (2010) est très intéressante car ils sont les premiers à proposer un modèle RANS pour la variance de température et sa dissipation pour différentes conditions aux limites sur la température. Cependant, ils utilisent des fermetures du premier-ordre qui restent limitées et qui ne pourront gérer des cas physiques complexes.

---

$c_{\varepsilon\theta 1}$	0.72
$c_{\varepsilon\theta 2}$	0.8
$c_{\varepsilon\theta 3}$	1.3
$c_{\varepsilon\theta 4}$	2.2
$\sigma_{\varepsilon\theta}$	1.3
$Pr_t$	0.9
$C_\mu$	0.09
$f_\mu$	$\exp\left[-3.4/(1 + R_t/50)^2\right]$
$f_g$	$5\left(\frac{\varepsilon}{\tilde{\varepsilon}}\right)^{3/4} - 4$
$c_{E\theta}$	2.0
$c_{n1}$	0.8
$c_d$	0.7

---

Tableau 2.8. – Constantes du modèle bas-Reynolds pour  $\varepsilon_\theta$  de Craft *et al.* (2010).

## 2.7. BASE DE DONNÉES DNS DE FLAGEUL *et al.* (2015) : UN APPUI POUR LE DÉVELOPPEMENT DES MODÉLISATIONS RANS

Afin de réaliser leurs DNS, Flageul *et al.* (2015) utilisèrent le logiciel *open-source* Incompact3d développé par l'université de Poitiers et l'Imperial College de Londres (Laizet & Lamballais, 2009; Laizet & Li, 2011). Leurs simulations portent sur l'étude d'un écoulement dans un canal plan en convection forcée pour différentes conditions aux limites sur la température : une température fixée à la paroi, un flux de chaleur imposé et du transfert thermique conjugué. Dans cette configuration, Fig. 2.7 la température est considérée comme un scalaire passif et l'écoulement est périodique dans les direction  $x$  et  $z$ . Le cas test est défini par deux nombres sans dimension : le nombre de Reynolds de frottement  $Re_\tau = \delta u_\tau / \nu = 149$  et le nombre de Prandtl  $Pr = 0.71$ .

### 2.7.1. Équations de conservation de la masse, de la vitesse et de la température

Les équations adimensionnées résolues par Flageul *et al.* (2015) s'écrivent

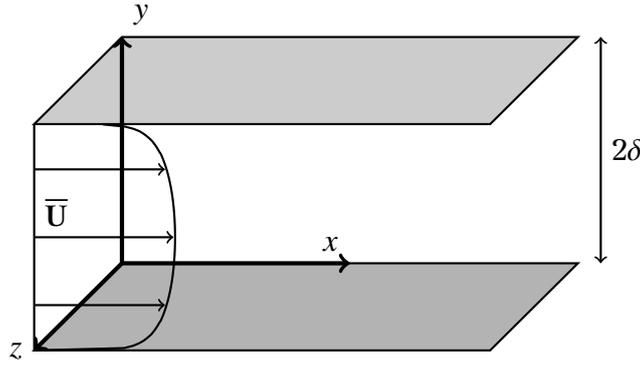


FIGURE 2.7. – Configuration d'un écoulement dans un canal plan

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.131)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial}{\partial x_i} p + \frac{1}{Re} \frac{\partial u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f \delta_{i,1}, \quad (2.132)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial \theta u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{RePr} \frac{\partial \theta}{\partial x_j \partial x_j} + f_T u_1, \quad (2.133)$$

où  $\delta_{i1}$  représente le symbole de Kronecker et l'indice  $1$  désigne la direction tangentielle à la paroi  $x$ . L'écoulement du fluide est piloté par le terme source  $f \delta_{i,1}$  et l'amplitude  $f$  de ce forçage est calée de manière à obtenir une vitesse débitante  $u_b$  unitaire. Le nombre de Reynolds utilisé pour l'adimensionnement est calculé sur la demi-hauteur  $\delta$  du canal ( $Re = u_b \delta / \nu$ ) et le nombre de Prandtl ( $Pr = \nu / \kappa$ ) est égal à 0.71. Enfin, le chauffage uniforme de la paroi provoque une augmentation de la température : la température augmentera linéairement avec  $x$ . Il a donc été nécessaire d'effectuer un changement de variable en suivant la méthode établie par Kasagi et al. (1992) afin de compenser l'augmentation de la température. Ce changement de variable a provoqué l'introduction du terme puits  $f_T u_1$ .

Pour les simulations DNS de transfert thermique conjugué, Flageul et al. (2015) propose la résolution de l'équation de conservation de la température suivante dans le milieu solide :

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} = \frac{1}{GRePr} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (2.134)$$

où  $\theta_s$  représente la température dans le solide et  $G$  désigne le ratio des diffusivités thermiques  $G = \kappa / \kappa_s$ .

## 2.7.2. Gestion des conditions aux limites

L'incontestable plus value de la base de données DNS de Flageul et al. (2015) réside dans la prise en compte de différentes conditions aux limites sur la température. Ils simulèrent tout d'abord des cas à température imposée à la paroi et validèrent leurs résultats avec les données DNS de Kasagi et al. (1992). Puis, ils s'intéressèrent à des cas de flux de chaleur imposé à la paroi et comparèrent leurs données avec celles de Tiselj et al. (2001b). Et enfin, ils simulèrent plusieurs configurations de transfert thermique conjugué et constituèrent une base de données

unique pour comprendre ces cas spécifiques et pour tenter de les modéliser. Ainsi, les conditions aux limites sur la température pour les parois haute et basse du cas test sont définies de manière générale par

$$a_0 T_{(y=0)} + b_0 \frac{\partial}{\partial y} T_{(y=0)} = c_0, \quad (2.135)$$

$$a_{L_y} T_{(y=L_y)} + b_{L_y} \frac{\partial}{\partial y} T_{(y=L_y)} = c_{L_y}, \quad (2.136)$$

où la hauteur  $L_y$  du canal est égale à  $2\delta$ . Le tableau 2.9 donne les valeurs des coefficients en fonction des conditions aux limites sur la température. Pour des cas de transfert thermique conjugué, la principale difficulté souligné par les données DNS concerne la discontinuité de la variable  $\varepsilon_\theta$  (Flageul *et al.*, 2017), comme abordé dans le paragraphe 2.6.1. Par la suite, ce sujet sera abordé plus en profondeur dans le paragraphe 6.1.2. Enfin, il est noter que Flageul *et al.* (2015) calculèrent les bilans des équations de transports des flux thermiques turbulents, de la variance de température et de son taux de dissipation, ce qui est très appréciable lorsqu'on souhaite développer de nouveaux modèles RANS.

	$a_0$	$b_0$	$c_0$	$a_{L_y}$	$b_{L_y}$	$c_{L_y}$
Température imposée	1	0	0	1	0	0
Flux de chaleur imposé	0	-1	-1	0	1	-1
Transfert thermique conjugué	1	0	$(T + T_s) / 2$	1	0	$(T + T_s) / 2$

Tableau 2.9. – Conditions aux limites sur la température.

En conclusion, la base de données DNS complète de Flageul *et al.* (2015) sera aussi bien utilisée dans ce manuscrit pour effectuer des tests *a priori* des modèles RANS développés pour les flux thermiques turbulents, la variance de température et son taux de dissipation que pour valider les résultats des simulations CFD.

## 2.8. CONCLUSION DU CHAPITRE

Le travail sur la modélisation RANS des tensions de Reynolds a été très approfondi, la littérature est conséquente sur ce sujet. Les modèles les plus avancés en terme de physique sont les fermetures du second ordre. Ces modèles ont longtemps été mis de côté car ils étaient jugé trop compliqués et trop coûteux en temps de calcul. Cependant, avec la puissance de calcul qui ne cesse d'augmenter, plus aucune raison ne s'oppose à l'utilisation des fermetures du second ordre. Le modèle EBRSM est le modèle le plus avancé et parvient à gérer des cas compliqué comme la convection naturelle. Par conséquent, ce modèle sera utilisé pour modéliser les tensions de Reynolds dans la suite de la thèse.

Contrairement aux modèles RANS dynamiques, les modèles RANS décrivant la thermique de l'écoulement ont longtemps été mis entre parenthèse. La plupart du temps, la solution était de mimer les modèles les plus populaires en dynamique comme le  $k$ - $\varepsilon$  pour estimer les variables

thermiques turbulentes. Il fallu attendre les travaux de Lumley & Newman (1977) et l'expertise apportée par Nagano pour voir le développement concret de modèle RANS thermique. Néanmoins, ces travaux ne prenaient en considération qu'un seul type de condition aux limites sur la température, à savoir une température imposée à la paroi (ou fluctuations de température nulles). L'apport des données DNS de Kong *et al.* (2000); Tiselj *et al.* (2001a); Flageul *et al.* (2015) est considérable et montre l'importance de la condition aux limites sur la température. Les variables thermiques comme la variance de température possèdent des comportements différents en proche-paroi pour des cas à température fixée, à flux de chaleur imposé et en transfert thermique conjugué. A ce jour, Craft *et al.* (2010) sont les seuls à avoir proposé une modélisation RANS capable de gérer différents types de conditions aux limites. Cependant, la modélisation proposée s'appuie sur des fonctions d'amortissement et des fermetures du premier ordre pour la dynamique et la thermique, ce qui limite l'efficacité du modèle pour des cas physiques complexes. L'objectif du chapitre suivant est de développer un tel modèle pour la modélisation du second ordre.



# Chapitre 3

---

## Généralisation du traitement des flux thermiques turbulents pour tous types de conditions aux limites sur la température

### Sommaire

---

3.1	Analyse asymptotique des termes exacts de l'équation de transport des flux thermiques turbulents . . . . .	64
3.2	Analyse asymptotique du modèle EBDFM proposé par Dehoux <i>et al.</i> (2017) . . .	65
3.3	Comportement asymptotique des terme $\phi_{\theta i}^w$ et $\varepsilon_{\theta i}^w$ avec le ratio $R$ exact . . . . .	68
3.3.1	Analyse asymptotique pour un cas à température imposée à la paroi . .	72
3.3.2	Analyse asymptotique pour des configurations de flux de chaleur imposé à la paroi et de transfert thermique conjugué . . . . .	73
3.4	Un modèle généralisé pour le traitement des flux thermiques turbulents . . . . .	75
3.4.1	Proposition d'une formulation pour $\phi_{\theta i}^w$ . . . . .	75
3.4.2	Validation <i>a priori</i> du nouveau modèle . . . . .	76
3.5	Conclusion du chapitre . . . . .	77

---

Dans la majorité des cas industriels, le traitement des flux thermiques turbulents est réalisé par des modèles algébriques. Ces modèles sont limités et ne peuvent modéliser correctement des cas de physique complexe comme la convection naturelle. Le modèle RANS du second-ordre le plus avancé dans la littérature est le modèle EBDFM proposé par Dehoux *et al.* (2017). Ce modèle est capable d'estimer correctement les flux thermiques turbulents proche d'une paroi, où la turbulence est fortement inhomogène et influencée par les effets de blocages et de redistribution induits par la paroi. Ce modèle a notamment été testé avec succès sur des cas de canal en convection naturelle ou de cavité entraînée. Cependant, ce modèle, comme la majorité des modèles RANS pour les flux thermiques turbulents, a été conçu sous réserve d'une hypothèse forte : les fluctuations de température sont nulles à la paroi. En clair, cette hypothèse signifie que ce modèle a été construit pour simuler des cas présentant une condition aux limites de type température imposée à la paroi. Cependant, cette condition aux limites n'est pas la seule possible pour des applications de transfert thermique. En effet, un flux de chaleur peut également être imposé à la paroi ou encore une condition de transfert thermique conjugué peut être appliquée. Le comportement des variables thermiques turbulentes en proche-paroi dépendent de la condition aux limites (voir paragraphe 2.6.1). L'objectif de ce chapitre est d'étendre la validité du modèle EBDFM proposé par Dehoux *et al.* (2017) à des cas de flux de chaleur imposé à la

paroi et des cas de transfert thermique conjugué. Ce travail présentera des analyses asymptotiques rigoureuses prenant en compte tous les types de condition aux limites sur la température et s'appuiera sur la base de données DNS très complète d'un canal plan en convection forcée réalisée par Flageul *et al.* (2015).

### 3.1. ANALYSE ASYMPTOTIQUE DES TERMES EXACTS DE L'ÉQUATION DE TRANSPORT DES FLUX THERMIQUES TURBULENTS

Dans un premier temps, il est nécessaire d'introduire les développements asymptotiques (ou développements de Taylor) des fluctuations de vitesse  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  et des fluctuations de température  $\theta'$ . La variable  $y$  désigne la distance à la paroi ( $y = 0$  à la paroi) et en tenant compte de l'hypothèse d'adhérence pour le champ de vitesse et d'incompressibilité du fluide ( $u'|_w = 0$ ,  $v'|_w = 0$ ,  $w'|_w = 0$  et  $\partial v/\partial y = 0$ ), il est alors possible d'écrire

$$\begin{aligned} u'(x, y, z, t) &= a_1(x, z, t)y + a_2(x, z, t)y^2 + \mathcal{O}(y^3), \\ v'(x, y, z, t) &= b_2(x, z, t)y^2 + b_3(x, z, t)y^3 + \mathcal{O}(y^4), \\ w'(x, y, z, t) &= c_1(x, z, t)y + c_2(x, z, t)y^2 + \mathcal{O}(y^3), \\ \theta'(x, y, z, t) &= t_0(x, z, t) + t_1(x, z, t)y + t_2(x, z, t)y^2 + \mathcal{O}(y^3). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Les variables aléatoires  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$  et  $t_k$  ne dépendent pas de la distance à la paroi  $y$ . Dans un souci de simplification des écritures, la dépendance de ces coefficients à  $(x, z, t)$  ne sera plus signalée dans la suite du manuscrit. En utilisant ces développements asymptotiques des fluctuations de température et de vitesse, il est alors possible d'en déduire les développements asymptotiques pour les flux thermiques turbulents  $\overline{u'_i \theta'}$

$$\begin{aligned} \overline{u'_i \theta'} &= \overline{a_1 t_0} y + (\overline{a_1 t_1} + \overline{a_2 t_0}) y^2 + \mathcal{O}(y^3), \\ \overline{v'_i \theta'} &= \overline{b_2 t_0} y^2 + (\overline{b_2 t_1} + \overline{b_3 t_0}) y^3 + \mathcal{O}(y^4), \\ \overline{w'_i \theta'} &= \overline{c_1 t_0} y + (\overline{c_1 t_1} + \overline{c_2 t_0}) y^2 + \mathcal{O}(y^3), \end{aligned} \quad (3.2)$$

pour l'énergie turbulente  $k$  et son taux de dissipation  $\varepsilon$

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} (\overline{a_1^2} + \overline{c_1^2}) y^2 + \mathcal{O}(y^3), \quad (3.3)$$

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} = \nu (\overline{a_1^2} + \overline{c_1^2}) + \mathcal{O}(y), \quad (3.4)$$

et pour la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  et son taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$

$$\overline{\theta'^2} = \overline{t_0^2} + 2\overline{t_0 t_1} y + (\overline{t_1^2} + 2\overline{t_0 t_2}) y^2 + \mathcal{O}(y^3), \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \kappa \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}} = \kappa \left[ \overline{\left( \frac{\partial t_0}{\partial x} \right)^2} + \overline{t_1^2} + \overline{\left( \frac{\partial t_0}{\partial z} \right)^2} \right] + \kappa \left[ 2 \frac{\overline{\partial t_0}}{\partial x} \frac{\overline{\partial t_1}}{\partial x} + 4\overline{t_1 t_2} + 2 \frac{\overline{\partial t_0}}{\partial z} \frac{\overline{\partial t_1}}{\partial z} \right] y \\ &\quad + \kappa \left[ \overline{\left( \frac{\partial t_1}{\partial x} \right)^2} + 2 \frac{\overline{\partial t_0}}{\partial x} \frac{\overline{\partial t_2}}{\partial x} + 4\overline{t_2^2} + 6\overline{t_1 t_3} + \overline{\left( \frac{\partial t_1}{\partial z} \right)^2} + 2 \frac{\overline{\partial t_0}}{\partial z} \frac{\overline{\partial t_2}}{\partial z} \right] y^2 + \mathcal{O}(y^3). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Contrairement au champ de vitesse (condition d'adhérence), plusieurs types de conditions aux limites peuvent s'appliquer à la thermique. Une température imposée signifie que les fluctuations de température sont nulles à la paroi :  $t_0 = 0$ . En revanche, lorsqu'un flux de chaleur constant est imposé les fluctuations de température ne sont pas nulles à la paroi, mais leur dérivée normale  $\partial\theta'/\partial y$  est nulle :  $t_1 = 0$ . Enfin, un cas de transfert thermique conjugué peut être considéré comme un cas général puisque ni les fluctuations ni leur dérivée normale ne sont nulles à la paroi :  $t_0 \neq t_1 \neq 0$ .

L'idée est d'utiliser les développements asymptotiques précédents pour analyser les termes exacts de l'équation de transport des flux thermiques turbulents. Pour rappel, cette équation s'écrit

$$\frac{\overline{Du'_i\theta'}}{Dt} = P_{\theta i}^U + P_{\theta i}^T + D_{\theta i}^{\nu+\kappa} + D_{\theta i}^t + \phi_{\theta i}^* - \varepsilon_{\theta i}, \quad (3.7)$$

et le détail des termes est à retrouver dans le paragraphe 2.4.4. Les comportements asymptotiques de ces termes sont détaillés dans le tableau 3.1 pour l'équation de transport des composantes tangentielle des flux thermiques turbulents  $\overline{u'\theta'}$  et  $\overline{w'\theta'}$ , et dans le tableau 3.2 pour l'équation de transport de la composante normale à la paroi  $\overline{v'\theta'}$ . Le développement asymptotique de chaque terme des équations de transport exactes des flux thermiques turbulents est également disponible en Annexe E. On peut déduire de ces tableaux trois informations importantes :

- Les comportements asymptotiques des termes de l'équation de transport de  $\overline{u'\theta'}$  et de  $\overline{w'\theta'}$  sont similaires. Ainsi, dans la suite du manuscrit, l'attention sera portée sur la composante tangentielle  $\overline{u'\theta'}$ .
- La condition aux limites sur la température influence le comportement asymptotique des termes exacts. Par exemple,  $\varepsilon_{\theta 2}$  (Tab. 3.2) fait partie des termes dominants lorsqu'une température est imposée à la paroi, alors qu'il devient négligeable pour un flux de chaleur imposé et en transfert thermique conjugué.
- Les termes de production  $P_{\theta i}^U$  et  $P_{\theta i}^T$ , et le terme de diffusion turbulente  $D_{\theta i}^t$ , sont toujours négligeables devant les termes de brouillage  $\phi_{\theta i}^*$ , de dissipation  $\varepsilon_{\theta i}$  et de diffusion moléculaire  $D_{\theta i}^{\nu+\kappa}$ .

Par conséquent, ces observations montrent que l'analyse asymptotique doit se concentrer sur l'équilibre des trois termes dominants dans la zone proche-paroi où la relation suivante est vérifiée

$$D_{\theta i}^{\nu+\kappa} + \phi_{\theta i} - \varepsilon_{\theta i} = 0 \quad \text{à l'ordre dominant.} \quad (3.8)$$

De par son importance dans le cas d'une température imposée à la paroi,  $\varepsilon_{\theta i}$  doit être pris en considération. L'équilibre (3.8) doit être vérifiée quel que soit la condition aux limites sur la température imposée à la paroi.

### 3.2. ANALYSE ASYMPTOTIQUE DU MODÈLE EBDFM PROPOSÉ PAR DEHOUX *et al.* (2017)

Le modèle proposé par Dehoux *et al.* (2017) a été conçu dans l'optique de satisfaire l'équilibre (3.8) lorsqu'une température est imposée à la paroi. Un des problèmes de ce modèle, présenté dans le paragraphe 2.4.4.5, concerne la modélisation algébrique du ratio des échelles de temps thermique et dynamique  $R$  (Eq. 2.97). Ce choix a été dicté par deux éléments :

	$P_{\theta i}^U + P_{\theta i}^T$	$\phi_{\theta i}^*$	$D_{\theta i}^{\nu+\kappa}$	$\varepsilon_{\theta i}$	$D_{\theta i}^t$
Température imposée	$O(y^3)$	$O(y)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(y^3)$
Flux de chaleur imposé	$O(y^2)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(y)$	$O(y^2)$
Transfert thermique conjugué	$O(y^2)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(y^2)$

Tableau 3.1. – Comportement asymptotique des termes de l'équation de transport des composantes tangentielles à la paroi des flux thermiques turbulents  $\overline{u'\theta'}$  and  $\overline{w'\theta'}$ .

	$P_{\theta i}^U + P_{\theta i}^T$	$\phi_{\theta i}^*$	$D_{\theta i}^{\nu+\kappa}$	$\varepsilon_{\theta i}$	$D_{\theta i}^t$
Température imposée	$O(y^4)$	$O(y)$	$O(y)$	$O(y)$	$O(y^4)$
Flux de chaleur imposé	$O(y^3)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(y^2)$	$O(y^3)$
Transfert thermique conjugué	$O(y^3)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(y)$	$O(y^3)$

Tableau 3.2. – Comportement asymptotique des termes de l'équation de transport de la composante normale à la paroi du flux thermique turbulent  $\overline{v'\theta'}$ .

- une analyse asymptotique rapide montre que  $R$  tend vers le nombre de Prandtl  $Pr$  à la paroi lorsqu'une température est imposée,

$$R = \frac{\overline{\theta'^2} \varepsilon}{2\varepsilon_{\theta} k} = \frac{\overline{t_1^2} y^2 2\nu (\overline{a_1^2} + \overline{c_1^2})}{2\kappa \overline{t_1^2} (\overline{a_1^2} + \overline{c_1^2}) y^2} + O\left(\frac{1}{y}\right) = Pr + O\left(\frac{1}{y}\right), \quad (3.9)$$

- la volonté de ne pas résoudre une équation de transport supplémentaire sur  $\varepsilon_{\theta}$ .

	Température imposée	Flux de chaleur imposé	Transfert thermique conjugué
Exact $R$	$\nu/\kappa = Pr$	$O(1/y^2)$	$O(1/y^2)$
$R = (1 - \alpha_{\theta}) Pr + \alpha_{\theta} R^h$	$Pr$	$Pr$	$Pr$

Tableau 3.3. – Comportement asymptotique de l'expression exacte du ratio des échelles de temps thermique et dynamique  $R$  et de son modèle proposé par Dehoux *et al.* (2017) pour différentes conditions aux limites.

Cependant, le comportement asymptotique de  $R$  dépend fortement de la condition aux limites sur la température comme le signale le tableau 3.3. Ainsi,  $R$  tend vers le nombre de Prandtl à la paroi lorsqu'une température est fixée, alors qu'il tend vers l'infini pour un flux de chaleur imposé ( $t_1 = 0$ ) et en transfert thermique conjugué

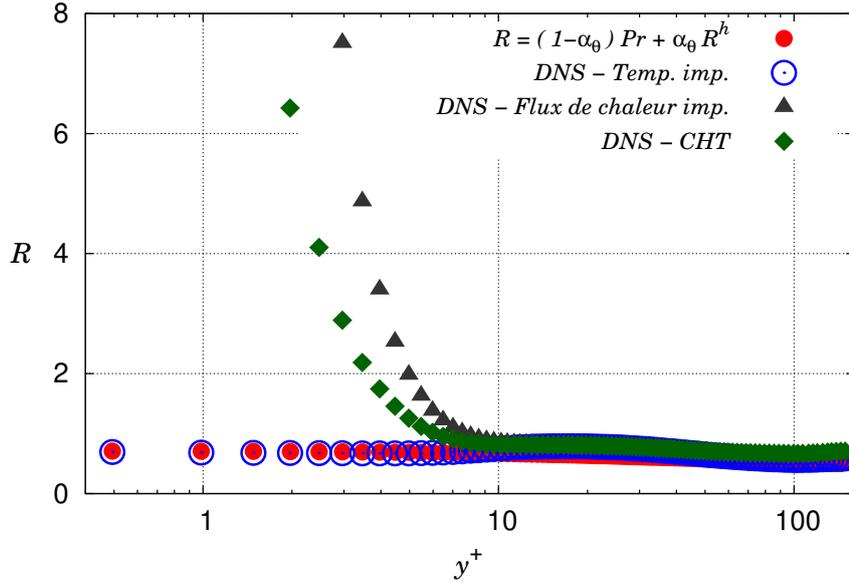


FIGURE 3.1. – Comportement du ratio des échelles de temps thermique et dynamique  $R$  pour différentes conditions aux limites sur la température. Comparaison *a priori* du modèle proposé par Dehoux et al. (2017) avec les données DNS de Flageul et al. (2015, 2017). Le solide et le fluide possèdent les mêmes propriétés thermiques pour le cas transfert thermique conjugué (CHT).

$$R = \frac{\overline{t_0^2}}{\left(\frac{\partial t_0}{\partial x}\right)^2 + \overline{t_1^2} + \left(\frac{\partial t_0}{\partial z}\right)^2} \frac{Pr}{y^2} + O\left(\frac{1}{y^3}\right). \quad (3.10)$$

Le modèle algébrique proposé par Dehoux et al. (2017) est tout simplement incapable de reproduire ces comportements : il tend toujours vers le nombre de Prandtl à la paroi quelle que soit la condition aux limites sur la température. La figure 3.1 compare le ratio  $R$  modélisé (Eq. 2.97) en *a priori* (i.e. reconstruit en utilisant la variable  $\alpha_\theta$  donnée par la DNS de Flageul et al. (2015, 2017)) avec la valeur exacte de  $R$  extraite directement des données DNS. Cette figure montre alors que la variable  $R$  modélisée n'est pas du tout sensible à la condition aux limites et ne peut estimer que la configuration avec une température imposée à la paroi.

La conséquence majeure de ce manque de généralité du modèle algébrique de  $R$  se retrouve dans l'expression des modèles de proche-paroi  $\phi_{\theta i}^w$  et  $\varepsilon_{\theta i}^w$ . Pour rappel, ces modèles s'écrivent :

$$\phi_{\theta i}^w = -\beta \frac{1}{T} \left[ 1 + C_{w\theta}^\phi (1 - \alpha_\theta) \frac{P_k}{\varepsilon} \right] \overline{u'_j \theta' n_i n_j}, \quad (3.11)$$

$$\varepsilon_{\theta i}^w = C_\varepsilon \left[ 1 + C_{w\theta}^\varepsilon (1 - \alpha_\theta) \frac{P_k}{\varepsilon} \right] \left( \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{RT}} \overline{u'_i \theta'} + \gamma \frac{1}{T} \overline{u'_j \theta' n_i n_j} \right), \quad (3.12)$$

avec

$$\beta = \gamma = \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R}}. \quad (3.13)$$

En effet, les tests *a priori* du modèle proposé par Dehoux et al. (2017) montrent qu'il est capable de reproduire les comportements asymptotiques de  $\phi_{\theta i}^*$  et de  $\varepsilon_{\theta i}$  pour un cas à température

imposée (Figs. 3.2 et 3.5), mais qu'il ne peut donner les bons comportements asymptotiques pour un cas à flux de chaleur imposé (Figs. 3.3 et 3.6) et pour un cas de transfert thermique conjugué (Figs. 3.4 et 3.7). En particulier, le modèle de la composante tangentielle  $\varepsilon_{\theta 1}$  tend vers l'infini à la paroi pour les cas à flux de chaleur imposé et de transfert thermique conjugué. Ce comportement erroné provient du modèle  $\varepsilon_{\theta 1}^w$  qui se comporte en  $1/y$  à la paroi contrairement au terme exact (Tab. 3.1). Le comportement du modèle de  $\phi_{\theta 1}^*$  tend vers une constante à la paroi alors qu'il devrait tendre vers 0 (Figs. 3.3 et 3.4). Cette fois-ci, le modèle proche-paroi  $\phi_{\theta i}^w$  possède le bon comportement asymptotique contrairement au modèle quasi-homogène  $\phi_{\theta i}^h$  (Eq. 2.89) qui est en  $1/y$  à la paroi. Ainsi, ce comportement particulier ne peut être corrigé par la pondération elliptique et perturbe le bon fonctionnement du modèle proche-paroi  $\phi_{\theta i}^w$ . Il est également à noter que le modèle ne parvient pas à reproduire le comportement asymptotique du terme exact  $\varepsilon_{\theta 2}$ , le modèle tend vers une constante alors qu'il devrait tendre vers 0. Par conséquent, dans le but d'étendre la validité du modèle EBDFM à des cas à flux de chaleur imposé et de transfert thermique conjugué, l'analyse asymptotique menée par Dehoux *et al.* (2017) pour construire leur modèle doit être étendue à tous les types de conditions aux limites sur la température.

### 3.3. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES TERMES $\phi_{\theta i}^w$ ET $\varepsilon_{\theta i}^w$ AVEC LE RATIO $R$ EXACT

Le paragraphe précédent a mis en lumière les limites du modèle proposé par Dehoux *et al.* (2017) pour simuler des cas à flux de chaleur imposé et de transfert thermique conjugué. Ces limites sont essentiellement dues à la modélisation algébrique du ratio  $R$  qui n'a pas de sens dans ces cas-là. La solution est alors de modéliser l'équation de transport de la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  et de sa dissipation  $\varepsilon_{\theta}$  afin de pouvoir reproduire le bon comportement asymptotique de  $R$  pour tous les types de conditions aux limites sur la température. Les modélisations de  $\overline{\theta'^2}$  et de  $\varepsilon_{\theta}$  seront abordées dans le chapitre 4.

	Température imposé	Flux de chaleur imposé	Transfert thermique conjugué
$\varepsilon_{\theta 1}^w$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$
$\varepsilon_{\theta 2}^w$	$O(y)$	$O(y)$	$O(y)$

Tableau 3.4. – Comportement asymptotique du modèle proche-paroi  $\varepsilon_{\theta i}^w$  proposé par Dehoux *et al.* (2017) avec l'expression exacte du ratio des échelles de temps thermique et dynamique  $R$  pour différentes conditions aux limites sur la température.

L'objectif de cette partie est de déterminer si la simple prise en compte de l'expression exacte du ratio  $R$  suffirait à étendre la validité du modèle de Dehoux *et al.* (2017) à des cas à flux de chaleur imposé et de transfert thermique conjugué. Pour y parvenir, on suppose que le ratio  $R$  est correctement modélisé et reproduit le comportement donné par la DNS (Fig. 3.1). Ensuite, une analyse asymptotique des modèles proche-paroi  $\varepsilon_{\theta i}^w$  et  $\phi_{\theta i}^w$  sera effectuée et comparée avec le comportement asymptotique des termes exacts. Enfin, on statuera sur les modifications à apporter aux modèles proche-paroi pour parvenir à gérer toutes les sortes de condition aux limites sur la température.

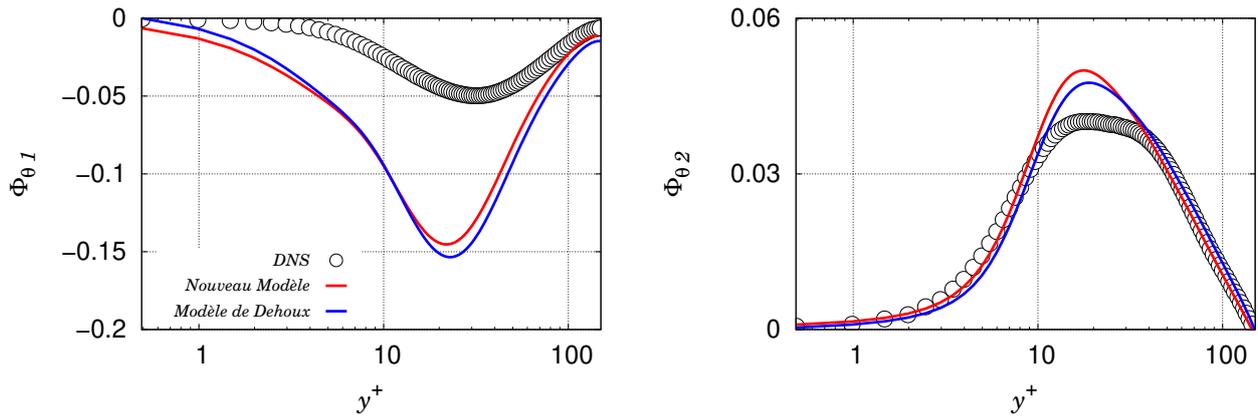


FIGURE 3.2. – Évaluation *a priori* du terme de brouillage  $\phi_{\theta i}^*$  pour une **température imposée** à la paroi. Gauche : composante tangentielle à la paroi; Droite : composante normale à la paroi. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul *et al.* (2015, 2017).

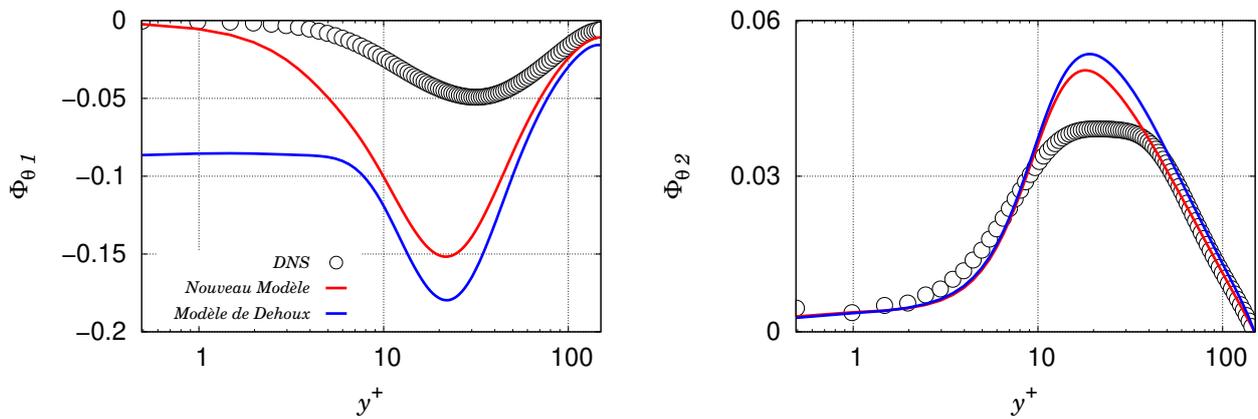


FIGURE 3.3. – Évaluation *a priori* du terme de brouillage  $\phi_{\theta i}^*$  pour un **flux de chaleur imposé** à la paroi. Gauche : composante tangentielle à la paroi; Droite : composante normale à la paroi. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul *et al.* (2015, 2017).

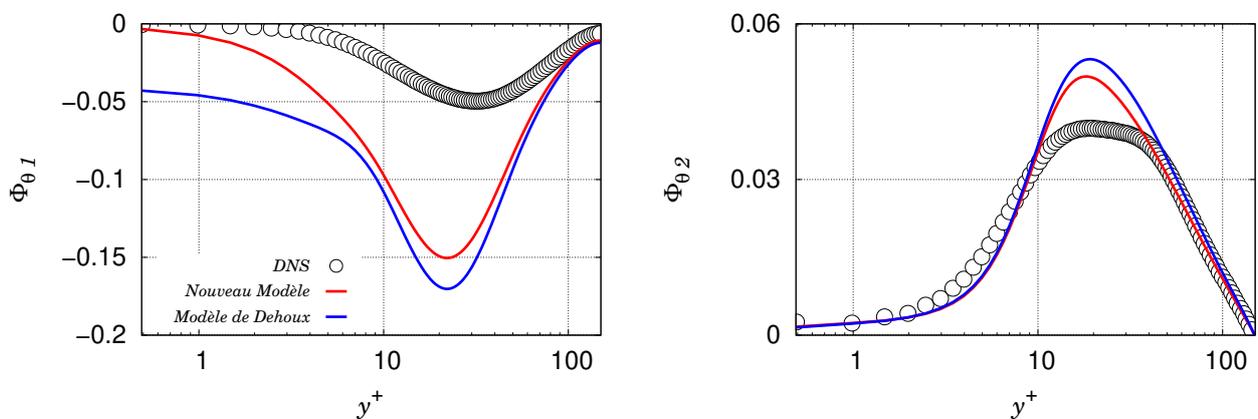


FIGURE 3.4. – Évaluation *a priori* du terme de brouillage  $\phi_{\theta i}^*$  pour du **transfert thermique conjugué**. Gauche : composante tangentielle à la paroi; Droite : composante normale à la paroi. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul *et al.* (2015, 2017).

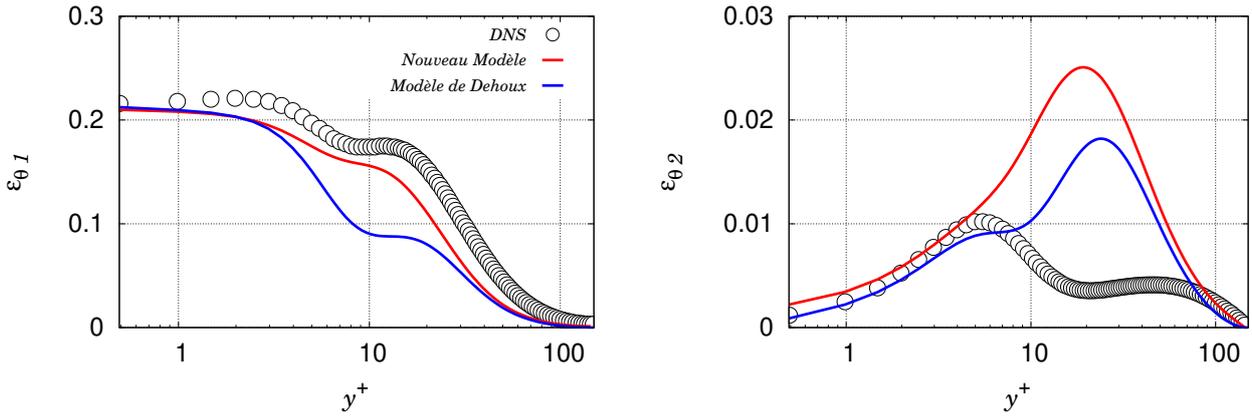


FIGURE 3.5. – Évaluation *a priori* du terme de dissipation  $\varepsilon_{\theta i}$  pour une **température imposée** à la paroi. Gauche : composante tangentielle à la paroi; Droite : composante normale à la paroi. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul *et al.* (2015, 2017).

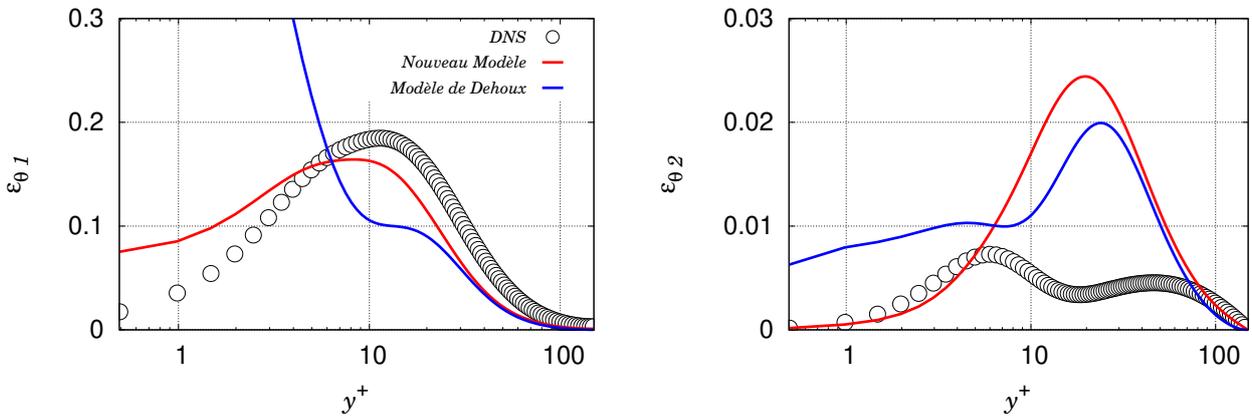


FIGURE 3.6. – Évaluation *a priori* du terme de dissipation  $\varepsilon_{\theta i}$  pour un **flux de chaleur imposé** à la paroi. Gauche : composante tangentielle à la paroi; Droite : composante normale à la paroi. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul *et al.* (2015, 2017).

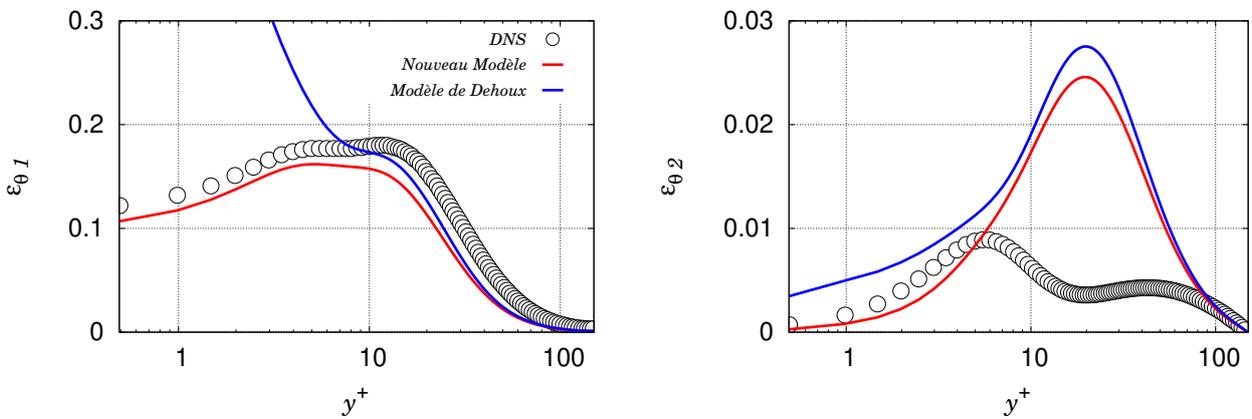


FIGURE 3.7. – Évaluation *a priori* du terme de dissipation  $\varepsilon_{\theta i}$  pour du **transfert thermique conjugué**. Gauche : composante tangentielle à la paroi; Droite : composante normale à la paroi. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul *et al.* (2015, 2017).

Le tableau 3.4 montre le comportement asymptotique du modèle  $\varepsilon_{\theta i}^w$  de Dehoux *et al.* (2017) en utilisant le comportement asymptotique exact du ratio  $R$ . En comparant ce tableau avec les tableaux 3.1 et 3.2 relatant les comportements asymptotiques des termes exacts des équations de transport des flux thermiques turbulents, on remarque que  $\varepsilon_{\theta i}^w$  possède le bon comportement asymptotique pour des cas à température imposé et de transfert thermique conjugué. Cependant, le comportement asymptotique du modèle proche-paroi  $\varepsilon_{\theta i}^w$  est un ordre en-dessous du comportement asymptotique du terme exacte  $\varepsilon_{\theta i}$  pour un cas à flux de chaleur imposé. Après avoir évalué plusieurs options, aucune ne permettait d'améliorer les résultats pour des cas à flux de chaleur imposé sans détériorer les bons comportements asymptotiques de  $\varepsilon_{\theta i}^w$  pour les autres cas. La stratégie adoptée est donc de garder l'expression du modèle proche-paroi  $\varepsilon_{\theta i}^w$  proposé par Dehoux *et al.* (2017) et de compenser l'erreur de comportement asymptotique pour un cas de flux de chaleur imposé à l'aide de la modélisation de  $\phi_{\theta i}^w$ . En effet, pour rappel, il suffit de satisfaire l'équilibre proche-paroi entre les termes de dissipation  $\varepsilon_{\theta i}$ , de brouillage  $\phi_{\theta i}^*$  et diffusion moléculaire  $D_{\theta i}^{\nu+\kappa}$  (Eq. 3.8) pour assurer le bon comportement asymptotique des flux thermiques turbulents.

Ainsi, le modèle proche-paroi  $\varepsilon_{\theta i}^w$  proposé par Dehoux *et al.* (2017) est sélectionné pour modéliser la dissipation, tout comme le modèle de diffusion moléculaire proposé par Shikazono & Kasagi (1996) (Eq. 2.95). L'expression du modèle proche-paroi pour le terme de brouillage  $\phi_{\theta i}^w$  sera déterminée à partir des analyses asymptotiques de l'équilibre proche-paroi (Eq. 2.95). Par la suite, on montrera qu'il suffira de modifier le terme  $\beta$  dans l'expression de  $\phi_{\theta i}^w$  (Eq. 3.11) pour satisfaire le comportement asymptotique des flux thermiques turbulents pour toutes les conditions aux limites thermiques.

Afin de déterminer la valeur de  $\beta$ , une analyse asymptotique sur les solutions des équations de transport pour les flux thermiques turbulents est menée en suivant la méthodologie proposé par Durbin (1991) pour le traitement des tensions de Reynolds. L'analyse se concentre sur l'équilibre proche-paroi Eq. (3.8) qui regroupe les termes dominants dans la zone proche-paroi. On va ainsi chercher les solutions sous la forme

$$\overline{u'\theta'} = A_1 y + B_1 y^2 + C_1 y^3 + \mathcal{O}(y^4), \quad (3.14)$$

et

$$\overline{v'\theta'} = A_2 y + B_2 y^2 + C_2 y^3 + \mathcal{O}(y^4). \quad (3.15)$$

Les développements asymptotiques Eq. (3.14) et Eq. (3.15) seront introduits dans l'équation de l'équilibre proche-paroi Eq. (3.8) entre  $\varepsilon_{\theta i}$ ,  $\phi_{\theta i}^*$  et  $D_{\theta i}^{\nu+\kappa}$ . Ainsi, les coefficients  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ , *etc.*, pourront alors être identifiés, ce qui permettra de déterminer le comportement asymptotique des solutions et de comparer ceux-ci avec les comportements théoriques attendus (Eq. 3.2). Le rôle du modèle  $\phi_{\theta i}^w$ , et en particulier de  $\beta$ , sera d'adapter le comportement asymptotique des solutions aux différentes conditions aux limites sur la température. En écrivant l'équilibre proche-paroi Eq. (3.8) à l'aide des modèle  $\varepsilon_{\theta i}^w$  (Eq. 3.12),  $\phi_{\theta i}^w$  (Eq. 3.11) et  $D_{\theta i}^{\nu+\kappa}$  (Eq. 2.95), il vient

$$\frac{\nu + \kappa}{2} \frac{\partial^2 \overline{u'\theta'}}{\partial y^2} + \frac{\nu + \kappa}{2} \left( \frac{\partial^2 \overline{u'\theta'}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{u'\theta'}}{\partial z^2} \right) = (\nu + \kappa) \psi \frac{\overline{u'\theta'}}{y} \quad (3.16)$$

et

$$\left( \frac{2}{3}\nu + \frac{1}{3}\kappa \right) \frac{\partial^2 \overline{v'\theta'}}{\partial y^2} + \frac{\nu + \kappa}{2} \left( \frac{\partial^2 \overline{v'\theta'}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{v'\theta'}}{\partial z^2} \right) = 2(\nu + \kappa) \psi \frac{\overline{v'\theta'}}{y} + 2\beta \nu \frac{\overline{v'\theta'}}{y^2}, \quad (3.17)$$

où

$$\psi = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\theta}}{\kappa \theta'^2}}. \quad (3.18)$$

Le développement asymptotique de  $\psi$  dépend de la condition aux limites sur la température. Il sera détaillé dans les paragraphes 3.3.1 et 3.3.2 en se plaçant sous différentes hypothèses sur la condition aux limites.

En introduisant les développements asymptotiques des solutions générales Eq. (3.14) et Eq. (3.15) dans les équations (3.16) et (3.17), on a

$$\begin{aligned} \frac{\nu + \kappa}{2} (2B_1 + 6C_1y) + \chi_{A_1}y + \mathcal{O}(y^2) = \\ (\nu + \kappa) \psi (A_1 + B_1y) + \mathcal{O}(y^2) \end{aligned} \quad (3.19)$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\nu + \frac{1}{3}\kappa\right)(2B_2 + 6C_2y) + \chi_{A_2}y + \mathcal{O}(y^2) = \\ 2(\nu + \kappa) \psi (A_2 + B_2y) + 2\beta\nu \left(\frac{A_2}{y} + B_2 + C_2y\right) + \mathcal{O}(y^2), \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\text{où } \chi_{A_1} = \frac{\nu + \kappa}{2} \left( \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} \right) \text{ and } \chi_{A_2} = \left( \frac{2}{3}\nu + \frac{1}{3}\kappa \right) \left( \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} \right).$$

Dans l'optique de déterminer le comportement asymptotique des solutions Eq. (3.14) et Eq. (3.15), deux cas doivent être traité séparément : d'une part, un cas à température fixée à la paroi et d'autre part, des cas à flux de chaleur imposé et de transfert thermique conjugué.

### 3.3.1. Analyse asymptotique pour un cas à température imposée à la paroi

Dans un premier temps, le cas à température imposée à la paroi est examiné. Pour rappel, cette condition aux limites impose des fluctuations de température nulles à la paroi, ce qui signifie  $t_0 = 0$ . En utilisant les développements asymptotiques de  $\overline{\theta'^2}$  (Eq. 3.5) et de  $\varepsilon_\theta$  (Eq. 3.6), la variable  $\psi$  s'écrit à l'ordre dominant

$$\psi = \sqrt{\frac{\kappa t_1^2}{\kappa t_1^2 y^2}} = \frac{1}{y}. \quad (3.21)$$

En prenant en compte cette expression de  $\psi$ , les équations (3.19) et (3.20) s'écrivent

$$(\nu + \kappa) B_1 + \mathcal{O}(y) = (\nu + \kappa) \left( \frac{A_1}{y} + B_1 \right) + \mathcal{O}(y), \quad (3.22)$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\nu + \frac{1}{3}\kappa\right)(2B_2 + 6C_2y) + \chi_{A_2}y + \mathcal{O}(y^2) = \\ 2(\nu + \kappa) \left( \frac{A_2}{y} + B_2 + C_2y \right) + 2\beta\nu \left( \frac{A_2}{y} + B_2 + C_2y \right) + \mathcal{O}(y^2). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Les deux membres des équations (3.22) et (3.23) doivent alors s'équilibrer à chaque ordre  $y^n$ . Il vient alors, pour la composante tangentielle des flux thermiques turbulents  $\overline{u'\theta'}$ , les relations suivantes provenant de l'identification des termes de l'Eq. (3.22) à l'ordre  $n = -1$  et  $n = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= (\nu + \kappa) A_1, \\ (\nu + \kappa) B_1 &= (\nu + \kappa) B_1. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ainsi, la première relation montre que pour toute solution générale de  $\overline{u'\theta'}$  (Eq. 3.14), le coefficient  $A_1$  doit être nul. Il est à noter qu'aucune contrainte particulière ne s'applique au coefficient  $B_1$  (toutes les valeurs de  $B_1$  satisfont l'Eq. (3.24)). Par conséquent, toutes les solutions de  $\overline{u'\theta'}$  sont de la forme  $\overline{u'\theta'} = B_1 y^2 + O(y^3)$ . Ce comportement est donc en adéquation avec le comportement théorique de  $\overline{u'\theta'}$  (Eq. 3.2) pour une température imposée à la paroi. Pour rappel, cette conclusion est également valable pour la deuxième composante tangentielle  $\overline{w'\theta'}$ .

Pour la composante normale à la paroi des flux thermiques turbulents  $\overline{v'\theta'}$ , il est nécessaire d'identifier les termes de l'Eq. (3.23) jusqu'à l'ordre  $n = 1$

$$\begin{aligned} 0 &= 2(\nu + \kappa) A_2 + 2\beta\nu A_2, \\ \left(\frac{4}{3}\nu + \frac{2}{3}\kappa\right) B_2 &= 2(\nu + \kappa) B_2 + 2\beta\nu B_2, \\ (4\nu + 2\kappa) C_2 + \chi_{A_2} &= 2(\nu + \kappa) C_2 + 2\beta\nu C_2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Dans le modèle proposé par Dehoux *et al.* (2017), la variable  $\beta$  est modélisée par  $\sqrt{Pr}/\sqrt{R}$  qui tend vers 1 à la paroi pour un cas à température imposée (voir Tab. 3.3). En considérant cette valeur, il est simple de déduire des relations de l'Eq. (3.25) les conclusions  $A_2 = B_2 = 0$  et donc, par voie de conséquence,  $\chi_{A_2} = 0$  car ce terme dépend du coefficient  $A_2$ . La troisième relation de l'Eq. (3.25) montre alors que toutes les valeurs de  $C_2$  vérifient l'équation. Par conséquent, toutes les solutions de  $\overline{v'\theta'}$  sont de la forme  $\overline{v'\theta'} = C_2 y^3 + O(y^4)$ . Ce comportement correspond au comportement théorique de  $\overline{v'\theta'}$  (Eq. 3.2) pour une température imposée à la paroi.

Cette analyse asymptotique souligne le fait que le modèle proposé par Dehoux *et al.* (2017) est bien valide pour un cas de température imposée. Ce modèle permet de reproduire les bons comportements asymptotiques des flux thermiques turbulents. Cette analyse menée initialement par Dehoux *et al.* (2017) pour un cas à température fixée à la paroi va être à présent étendue à des cas à flux de chaleur imposé et de transfert thermique conjugué.

### 3.3.2. Analyse asymptotique pour des configurations de flux de chaleur imposé à la paroi et de transfert thermique conjugué

Dans ce paragraphe, le travail présenté sera à la fois valable pour un cas à flux de chaleur imposé et de transfert thermique conjugué. En effet, pour un flux de chaleur constant imposé à la paroi, le gradient normal des fluctuations de température est nul à la paroi, ce qui signifie  $t_1 = 0$ . Ainsi, la variable  $\psi$  s'écrit à l'ordre dominant

$$\psi = \sqrt{\frac{\left[\left(\frac{\partial t_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t_0}{\partial z}\right)^2\right]}{t_0^2}} = O(1) \quad \text{et on a : } \overline{u'\theta'} = O(y) \quad ; \quad \overline{v'\theta'} = O(y^2). \quad (3.26)$$

Pour un cas de transfert thermique conjugué, aucune simplification n'est possible sur les fluctuations de température. Les variable  $t_0$  et  $t_1$  sont donc non-nulles et  $\psi$  s'écrit à l'ordre dominant

$$\psi = \sqrt{\frac{\left[\left(\frac{\partial t_0}{\partial x}\right)^2 + \bar{t}_1^2 + \left(\frac{\partial t_0}{\partial z}\right)^2\right]}{\bar{t}_0^2}} = \mathcal{O}(1) \quad \text{et on a : } \overline{u'\theta'} = \mathcal{O}(y) \quad ; \quad \overline{v'\theta'} = \mathcal{O}(y^2). \quad (3.27)$$

Dans les deux cas, l'objectif est d'imposer les comportements asymptotiques suivants pour les flux thermiques turbulents :

$$\begin{aligned} - \overline{u'\theta'} &= \mathcal{O}(y), \\ - \overline{v'\theta'} &= \mathcal{O}(y^2). \end{aligned}$$

De plus, la variable  $\psi$  tend vers une constante à la paroi pour les deux cas. Il est à noter que cette constante est différente pour un flux de chaleur imposé à la paroi et pour du transfert thermique conjugué comme le montre les Eq. (3.26) et (3.27).

Il suffit alors de reprendre le travail effectué précédemment pour une température imposée à la paroi. Pour la composante tangentielle  $\overline{u'\theta'}$ , l'équilibre des deux membres de l'Eq. (3.19) donne à l'ordre  $n = 0$

$$(\nu + \kappa) B_1 = (\nu + \kappa) \psi A_1. \quad (3.28)$$

Comme  $\psi \neq 0$  à la paroi, cette équation impose une relation entre les variables  $A_1$  et  $B_1$ , sans que le coefficient  $A_1$  soit contraint d'être nul. Ainsi, la solution générale  $\overline{u'\theta'}$  admet une valeur quelconque de  $A_1$ , ce qui implique que cette composante des flux thermiques turbulents s'écrit  $\overline{u'\theta'} = A_1 y + \mathcal{O}(y^2)$ , ce qui correspond au comportement théorique de  $\overline{u'\theta'}$  (Eq. 3.2) pour un flux de chaleur imposé et pour du transfert thermique conjugué. Cette analyse s'applique également à la deuxième composante tangentielle  $\overline{w'\theta'}$  des flux thermiques turbulents.

Pour la composante normale à la paroi  $\overline{v'\theta'}$  des flux thermiques turbulents, il suffit de considérer l'équation Eq (3.20) à l'ordre  $n = -1$  et  $n = 0$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= 2\beta\nu A_2 \\ \frac{1}{3}(4\nu + 2\kappa) B_2 &= 2\beta\nu B_2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

A présent, il va falloir déterminer l'expression de la variable  $\beta$  afin de pouvoir imposer le comportement  $\overline{v'\theta'} = \mathcal{O}(y^2)$ . Le choix de  $\beta$  est donc d'une importance capitale pour assurer le bon comportement asymptotique des flux thermiques turbulents à la paroi. D'après l'Eq. (3.29),  $\beta$  doit satisfaire deux conditions :

- $\beta$  doit être choisi de sorte que  $A_2 = 0$ ,
- la seconde relation de l'Eq. (3.29) doit être vérifiée pour toute valeur de  $B_2$ .

La première condition est simple à remplir, elle est vérifiée pour toute valeur non-nulle de  $\beta$ . Ainsi, on obtient  $A_2 = 0$ . Afin de satisfaire la seconde condition,  $\beta$  doit s'écrire à la paroi

$$\beta = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{1}{Pr}. \quad (3.30)$$

D'une manière plus générale,  $\beta$  doit tendre vers l'expression Eq. (3.30) à la paroi. Ainsi, la composante normale  $\overline{v'\theta'}$  pourra s'écrire sous la forme  $\overline{v'\theta'} = B_2 y^2 + O(y^3)$ , ce qui correspond au comportement théorique de  $\overline{u'\theta'}$  (Eq. 3.2) pour un flux de chaleur imposé et pour du transfert thermique conjugué.

En conclusion, le modèle proposé par Dehoux *et al.* (2017) avec  $\beta = \sqrt{Pr}/\sqrt{R}$  et qui a été construit pour un cas à température fixée à la paroi, n'est pas capable de traiter des cas à flux de chaleur imposé et des cas de transfert thermique conjugué, et cela même en prenant en compte le comportement asymptotique de l'expression exacte du ratio  $R$ . Dans le but d'étendre la validité du modèle pour toutes les conditions aux limites sur la température, il faut déterminer une expression pour  $\beta$  (qui intervient dans le modèle proche-paroi  $\phi_{\theta i}^w$ ) capable de tendre vers 1 à la paroi pour une température fixée, et vers l'Eq. (3.30) pour les autres cas. Le prochain paragraphe sera alors dédié au développement de cette expression et à la validation *a priori* du nouveau modèle.

### 3.4. UN MODÈLE GÉNÉRALISÉ POUR LE TRAITEMENT DES FLUX THERMIQUES TURBULENTS

Dans cette partie, le modèle EBDPM proposé par Dehoux *et al.* (2017) est généralisé à tout type de condition aux limites en suivant les enseignements tirés de la partie précédente. Une validation *a priori* sera par la suite effectuée.

#### 3.4.1. Proposition d'une formulation pour $\phi_{\theta i}^w$

Le modèle doit être capable de s'adapter par lui-même à la condition aux limites imposée sur la température en faisant tendre la variable  $\beta$  vers 1 pour une température imposée à la paroi et vers l'Eq. (3.30) dans les autres cas. Pour ce faire, l'idée est d'utiliser le comportement asymptotique particulier du ratio des échelles de temps thermique et dynamique  $R$ . En effet, le Tab. 3.3 et la Fig. 3.1 montrent que  $R$  tend vers  $Pr$  à la paroi pour une température imposée et vers l'infini dans les autres cas. Le ratio  $\sqrt{Pr}/\sqrt{R}$  est alors utilisé pour rendre la variable  $\beta$  sensible à la condition aux limites sur la température. Ainsi, l'expression suivante est proposée

$$\beta = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{1}{Pr} + \frac{1}{3} \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R}} \left(1 - \frac{1}{Pr}\right), \quad (3.31)$$

dans laquelle  $\beta$  tend vers 1 à la paroi pour une température imposée ( $R \rightarrow Pr$ ) et vers l'Eq. (3.30) dans les autres cas ( $R \rightarrow \infty$ ). Pour rappel, le terme  $\gamma$  utilisé dans le modèle proche-paroi  $\varepsilon_{\theta i}^w$  n'a pas été modifié, et l'expression déterminée par Dehoux *et al.* (2017)

$$\gamma = \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R}}, \quad (3.32)$$

reste utilisée. Par conséquent, avec la simple, mais nécessaire modification de l'expression de  $\beta$  et la prise en compte du comportement exact de  $R$ , l'équilibre proche-paroi Eq. (3.8) entre les termes de dissipation  $\varepsilon_{\theta i}$ , de brouillage  $\phi_{\theta i}^*$  et de diffusion moléculaire est assuré pour tout type de condition aux limites sur la température. Ainsi, le respect de cette équilibre proche-paroi permet d'assurer le bon comportement asymptotique des flux thermiques turbulents  $\overline{u_i'\theta'}$ .

Un des points essentiels de ce nouveau modèle concerne le comportement de  $R$ . En effet, l'analyse asymptotique repose sur son expression exacte, il faudra donc être capable de reproduire ce comportement. Cela signifie qu'il est nécessaire de développer des modèles pour les

équations de transport de la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  et de son taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$  capable de gérer les conditions aux limites sur la température. Le développement de ces modèles sera abordé dans le chapitre 4.

L'ensemble des équations et des constantes du modèle EBDFM utilisé dans la suite de cette thèse est à retrouver en Annexe A.

### 3.4.2. Validation *a priori* du nouveau modèle

Les tests *a priori* sont effectués à l'aide des données DNS de Flageul *et al.* (2015) sur le cas d'un écoulement dans un canal plan en convection forcée pour différentes conditions aux limites sur la température : une température fixée à la paroi, un flux de chaleur imposé et du transfert thermique conjugué. Le cas test est défini par deux nombres sans dimension : le nombre de Reynolds de frottement  $Re_\tau = \delta u_\tau / \nu = 149$  et le nombre de Prandtl  $Pr = 0.71$ . Pour rappel, une description de la base de données DNS de Flageul *et al.* (2015) est proposée dans le paragraphe 2.7.

#### 3.4.2.1. Température imposée à la paroi

La Fig. 3.8 compare la somme entre les termes de dissipation  $\varepsilon_{\theta i}$ , de brouillage  $\phi_{\theta i}^*$  et de diffusion moléculaire  $D_{\theta i}^{\nu+\kappa}$  donnée par le nouveau modèle et le modèle de Dehoux *et al.* (2017), avec les données DNS de Flageul *et al.* (2015). Pour rappel, ces trois termes sont dominants proche de la paroi et leur équilibre doit être assuré pour garantir les bons comportements asymptotiques des flux thermiques turbulents. Comme attendu, les deux modélisations donnent des résultats corrects asymptotiquement. Le nouveau modèle donne des résultats légèrement moins précis que ceux obtenus à partir du modèle de Dehoux dans la zone tampon, mais cela ne représente pas un problème, puisque comme le précise Dehoux *et al.* (2017), le bilan des équations de transport est dominé par la production contrairement à la zone proche-paroi. Ces légères différences dans la zone tampon s'expliquent par l'utilisation de l'expression exacte du ratio  $R$  et par l'expression de  $\beta$  qui diffère entre les deux modèles (même si les valeurs  $\beta$  des deux modèles tendent vers 1 à la paroi). En effet, les Fig. 3.5 et 3.2 comparent les modélisations de  $\varepsilon_{\theta i}$  et de  $\phi_{\theta i}^*$  proposées par Dehoux *et al.* (2017) (avec le ratio  $R$  modélisé Eq. (2.97)) et celles proposées dans le paragraphe 3.4.1 (avec le comportement exact de  $R$ ). On observe alors que les deux modèles donnent des résultats très proches dans l'estimation de  $\phi_{\theta i}^*$ . Les deux modèles respectent le comportement asymptotique donné par la DNS. Concernant la modélisation de  $\varepsilon_{\theta i}$ , il est à noter que la prise en compte du comportement exact du ratio  $R$  dans le nouveau modèle améliore l'estimation de  $\varepsilon_{\theta 1}$  dans la zone tampon, mais surestime un peu plus  $\varepsilon_{\theta 2}$  dans cette même zone. Enfin, le comportement asymptotique de  $\varepsilon_{\theta i}$  est bien respecté par les deux modèles.

#### 3.4.2.2. Flux de chaleur imposé à la paroi

La Fig. 3.9 compare également la somme entre les termes de dissipation  $\varepsilon_{\theta i}$ , de brouillage  $\phi_{\theta i}^*$  et de diffusion moléculaire  $D_{\theta i}^{\nu+\kappa}$  pour un flux de chaleur imposé à la paroi. Dans ce cas, une nette supériorité du nouveau modèle est observable pour les termes de la composante tangentielle  $\overline{u'\theta'}$ . En effet, la Fig. 3.9 (gauche) montre qu'avec le modèle de Dehoux *et al.* (2017), la somme des trois termes tend vers l'infini à la paroi. Ce problème provient de la modélisation de  $\varepsilon_{\theta 1}$  (Fig. 3.6) qui tend vers l'infini à la paroi, contrairement au nouveau modèle qui tend vers une constante comme cela avait été décrit dans le paragraphe 3.3. Le nouveau modèle donne le bon comportement asymptotique de  $\phi_{\theta 1}$  (Fig. 3.3) contrairement au modèle de Dehoux.

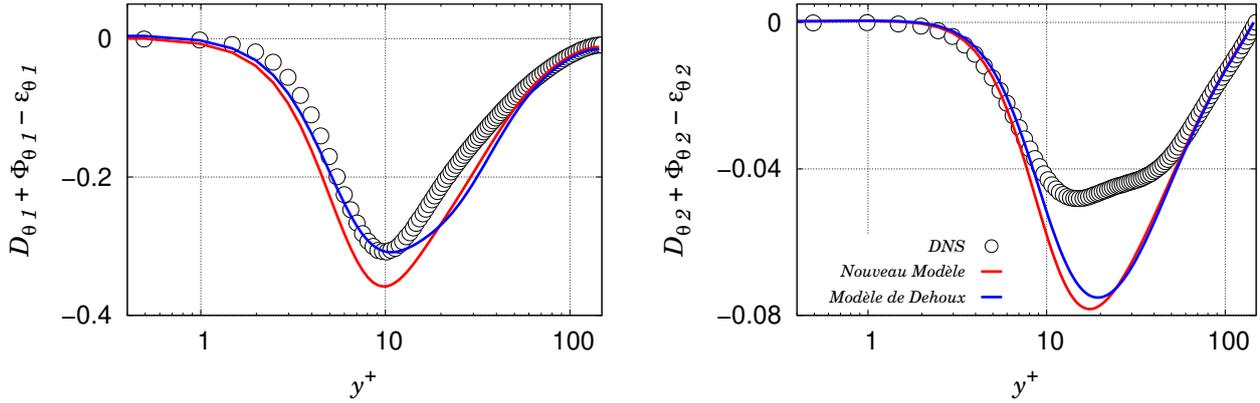


FIGURE 3.8. – Somme des termes de dissipation  $\varepsilon_{\theta i}$ , de brouillage  $\phi_{\theta i}^*$  et de diffusion moléculaire  $D_{\theta i}^{v+\kappa}$  pour une **température imposée** à la paroi. Gauche : composante tangentielle ; Droite : composante normale à la paroi.

En ce qui concerne la somme des termes de dissipation  $\varepsilon_{\theta i}$ , de brouillage  $\phi_{\theta i}^*$  et de diffusion moléculaire  $D_{\theta i}^{v+\kappa}$  de l'équation de transport de la composante normale  $\overline{v'\theta'}$ , la Fig. 3.9 (droite) montre que le nouveau modèle donne de meilleurs résultats à l'approche de la paroi que le modèle de Dehoux. En effet, bien que  $\phi_{\theta 2}$  soit estimé correctement par les deux modèles (Fig. 3.3), le comportement asymptotique de  $\varepsilon_{\theta 2}$  est uniquement respecté par le nouveau modèle (Fig. 3.6). Enfin, il est à noter que le nouveau modèle ne peut améliorer les résultats dans la zone tampon. En effet, cela est dû à une limitation intrinsèque de la méthode de relaxation elliptique qui permet d'étendre la validité des modèles quasi-homogènes vers la zone proche-paroi en satisfaisant les comportements asymptotiques dans la sous-couche visqueuse, mais ne peut imposer le bon comportement dans la zone tampon.

### 3.4.2.3. Transfert thermique conjugué

La Fig. 3.10 montre également la somme entre les termes de dissipation  $\varepsilon_{\theta i}$ , de brouillage  $\phi_{\theta i}^*$  et de diffusion moléculaire  $D_{\theta i}^{v+\kappa}$ , mais cette fois pour un cas de transfert thermique conjugué. Dans l'ensemble, les résultats sont similaires au cas à flux de chaleur imposé à la paroi. L'amélioration la plus marquante concerne la somme de ces trois termes de l'équation de transport de  $\overline{u'\theta'}$  qui tend vers l'infini à la paroi avec le modèle de Dehoux alors que le nouveau modèle reproduit le bon comportement asymptotique. Encore une fois, ce comportement erroné donné par le modèle de Dehoux provient de la modélisation de  $\varepsilon_{\theta 1}$  comme le montre la Fig. 3.7. La Fig. 3.4 (gauche) montre également que la modélisation du terme de brouillage  $\phi_{\theta 1}$  est améliorée. Enfin, la Fig. 3.10 (droite) montre que les deux modèles reproduisent le bon comportement asymptotique de la somme des termes dominants de l'équation de transport de  $\overline{v'\theta'}$ , mais surestiment tous les deux les données DNS dans la zone tampon. En regardant plus précisément le terme  $\varepsilon_{\theta 2}$  (Fig. 3.7) on observe que son comportement asymptotique est correctement modélisé par le nouveau modèle contrairement au modèle de Dehoux.

## 3.5. CONCLUSION DU CHAPITRE

Dans ce chapitre, il a été question d'étendre la validité du modèle EBDPM proposé par Dehoux *et al.* (2017) et développé initialement pour une condition aux limites de type température imposée à la paroi, à des cas à flux de chaleur imposé et de transfert thermique conjugué.

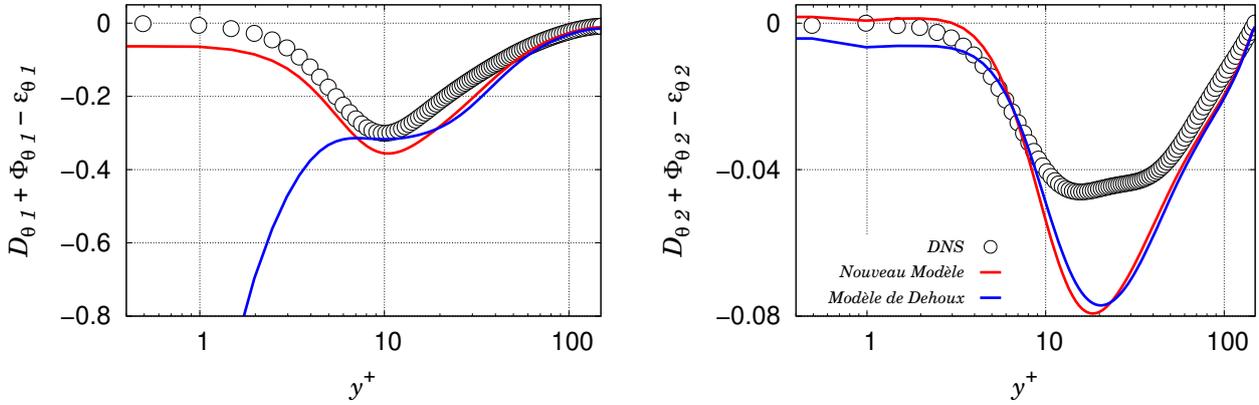


FIGURE 3.9. – Somme des termes de dissipation  $\varepsilon_{\theta i}$ , de brouillage  $\phi_{\theta i}^*$  et de diffusion moléculaire  $D_{\theta i}^{v+\kappa}$  pour un **flux de chaleur imposé** à la paroi. Gauche : composante tangentielle; Droite : composante normale à la paroi.

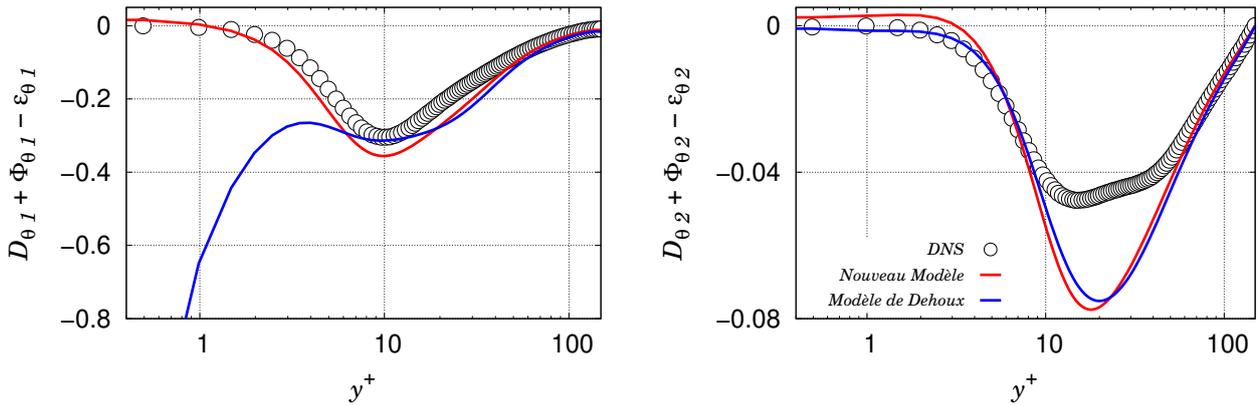


FIGURE 3.10. – Somme des termes de dissipation  $\varepsilon_{\theta i}$ , de brouillage  $\phi_{\theta i}^*$  et de diffusion moléculaire  $D_{\theta i}^{v+\kappa}$  pour du **transfert thermique conjugué**. Gauche : composante tangentielle; Droite : composante normale à la paroi.

A partir d'une analyse asymptotique rigoureuse sur les termes dominants des équations de transport des flux thermiques turbulents pour les trois types de conditions aux limites sur la température, deux enseignements ont été révélés : la nécessité de prendre en compte le comportement asymptotique de l'expression exacte du ratio  $R$  et de changer la formulation de  $\beta$  dans le modèle proche-paroi  $\phi_{\theta i}^w$  proposé par Dehoux *et al.* (2017). La première condition fera l'objet du chapitre suivant dans lequel on s'attachera à modéliser la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  et son taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$  en tenant compte des contraintes imposées par la condition aux limites sur la température. Le deuxième enseignement fut l'objet d'une nouvelle formulation de  $\beta$  basée sur des arguments asymptotiques et capable de s'adapter à différentes conditions aux limites sur la température. Ainsi, le nouveau modèle a été testé *a priori* et a donné des résultats très satisfaisants pour tous les types de conditions aux limites.



# Chapitre 4

---

## Modélisation de la variance de la température et de sa dissipation

### Sommaire

---

4.1	Traitement de la variance de température . . . . .	82
4.2	Équation de transport de la variable $\varepsilon_\theta$ et comportement asymptotique . . . . .	82
4.3	Production par le gradient de température moyenne $P_{\varepsilon_\theta}^1$ . . . . .	83
4.4	Production par le gradient de vitesse moyenne $P_{\varepsilon_\theta}^2$ . . . . .	84
4.5	Production par la hessienne de température $P_{\varepsilon_\theta}^3$ . . . . .	86
4.6	Différence entre le terme de production turbulente $P_{\varepsilon_\theta}^4$ et le taux de dissipation $Y_{\varepsilon_\theta}$ . . . . .	87
4.6.1	Modélisation proche-paroi du terme de production . . . . .	89
4.6.2	Modélisation proche-paroi du terme de dissipation . . . . .	90
4.7	Modélisation dans la partie solide pour le transfert thermique conjugué . . . . .	95
4.8	Conclusion du chapitre . . . . .	97

---

Le chapitre 3 a mis en évidence l'importance de la modélisation de la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  et de son taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$ . Ces variables thermiques turbulentes sont en effet essentielles pour la prédiction de l'échelle de temps thermiques  $\mathcal{T}_\theta$ , et constituent un des points clés de la nouvelles formulation de l'EBDFM proposée dans ce manuscrit. Cependant, comme cela a été précisé dans le chapitre 2, la modélisation de ces termes reste peu étudiée dans la littérature. Il est à noter l'apport de Nagano qui fut l'un des premiers à s'intéresser à la modélisation de  $\varepsilon_\theta$  en proche-paroi (Nagano & Kim, 1988) et celui de l'université de Manchester avec des travaux prenant en compte différentes conditions aux limites sur la température (Craft *et al.*, 2010). Cependant, en règle générale, les applications industrielles avec transfert de chaleur s'abstiennent de modéliser  $\varepsilon_\theta$  et détermine cette variable à l'aide d'une relation algébrique basée sur le ratio des échelles de temps thermique et dynamique  $R$  (voir chapitre 2). Le travail proposé ici a pour but de modéliser les équations de transport de  $\overline{\theta'^2}$  et de la variable  $\varepsilon_\theta$  en tenant compte des différentes conditions aux limites sur la température. Une attention particulière sera donc consacrée à la modélisation proche-paroi qui reprendra l'approche à pondération elliptique utilisée par Dehoux *et al.* (2017) pour le traitement des flux thermiques turbulents.

#### 4.1. TRAITEMENT DE LA VARIANCE DE TEMPÉRATURE

La variance de température est une variable importante pour les cas de transfert de chaleur : elle est essentielle pour étudier la fatigue thermique d'un matériau. Ainsi, dans l'optique d'estimer correctement cette variable en proche-paroi pour toutes les conditions aux limites thermiques, il est nécessaire de résoudre une équation de transport pour  $\overline{\theta'^2}$ . Pour rappel, l'équation de transport exacte de la variance de température s'écrit

$$\frac{D\overline{\theta'^2}}{Dt} = 2P_\theta - 2\varepsilon_\theta + D_\theta^\kappa + D_\theta^t. \quad (4.1)$$

Les seuls termes à modéliser sont la diffusion turbulente  $D_\theta^t$  et le taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$ . Le terme de diffusion turbulente est quant à lui modélisé à l'aide de l'hypothèse de Daly & Harlow (1970)

$$D_\theta^t = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( C_{\overline{\theta'^2}} \tau \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_j} \right) \quad \text{avec} \quad C_{\overline{\theta'^2}} = 0.21, \quad (4.2)$$

où  $\tau$  représente l'échelle de temps de Durbin

$$\tau = \max \left( \mathcal{T}, C_{T_{\overline{\theta'^2}}} \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} \right) \quad \text{avec} \quad C_{T_{\overline{\theta'^2}}} = 6.0. \quad (4.3)$$

Le taux de dissipation de la variance de température est complexe à modéliser puisque son comportement à la paroi dépend fortement de la condition aux limites sur la température. Une simple relation algébrique ne peut tenir compte de ce comportement complexe et il est donc nécessaire de résoudre une équation de transport pour la variable  $\varepsilon_\theta$ .

Le modèle de l'équation de transport de la variance de température ainsi que les différentes constantes utilisées sont à retrouver en Annexe A.

#### 4.2. ÉQUATION DE TRANSPORT DE LA VARIABLE $\varepsilon_\theta$ ET COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

L'équation de transport exacte du taux de dissipation de la variance de température  $\varepsilon_\theta = \kappa \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}$  s'écrit

$$\frac{D\varepsilon_\theta}{Dt} = P_{\varepsilon_\theta}^1 + P_{\varepsilon_\theta}^2 + P_{\varepsilon_\theta}^3 + P_{\varepsilon_\theta}^4 + D_{\varepsilon_\theta}^t + D_{\varepsilon_\theta}^\kappa - Y_{\varepsilon_\theta}. \quad (4.4)$$

Le détail des termes est à retrouver dans le paragraphe 2.5.2. L'objectif de ce chapitre est de proposer des nouveaux modèles pour les termes de production par gradient de température moyenne  $P_{\varepsilon_\theta}^1$ , de production par gradient de vitesse moyenne  $P_{\varepsilon_\theta}^2$ , de production turbulente  $P_{\varepsilon_\theta}^4$  et pour le taux de dissipation  $Y_{\varepsilon_\theta}$ . Concernant le terme de production par la hessienne de température  $P_{\varepsilon_\theta}^3$ , le modèle proposé par Nagano (2002) est repris.

Le comportement asymptotique des termes de l'équation de transport exacte dépend de la condition aux limites sur la température à la paroi comme le montrent le Tab. 4.1 et les développements asymptotiques des termes exactes en Annexe E. Ainsi, comme ce fut le cas pour le traitement des flux thermiques turbulents, la modélisation du taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$  devra reproduire le bon comportement asymptotique tout en prenant en compte l'influence de la condition aux limites sur la température. Une attention toute particulière sera réservée à la modélisation proche-paroi des termes  $P_{\varepsilon_\theta}^1$ ,  $P_{\varepsilon_\theta}^2$ ,  $P_{\varepsilon_\theta}^4$  et  $Y_{\varepsilon_\theta}$  qui sont les termes dominants de l'équation de transport pour le cas de transfert thermique conjugué. Le terme de diffusion

	$P_{\varepsilon\theta}^1$	$P_{\varepsilon\theta}^2$	$P_{\varepsilon\theta}^3$	$P_{\varepsilon\theta}^4$	$D_{\varepsilon\theta}^t$	$D_{\varepsilon\theta}^\kappa$	$Y_{\varepsilon\theta}$
Température imposée	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$
Flux de chaleur imposé	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$
Transfert thermique conjugué	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$

Tableau 4.1. – Comportement asymptotique des termes de l'équation de transport exact du taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$  de la variance de température.

turbulente  $D_{\varepsilon\theta}^t$  est toujours négligeable à la paroi devant les autres termes de l'équation de transport. Le modèle proposé par Jones & Musonge (1988) et qui est basé sur l'hypothèse de Daly & Harlow (1970) est alors choisi

$$D_{\varepsilon\theta}^t = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{\varepsilon\theta} \overline{u'_j u'_k} \mathcal{T} \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x_k} \right), \quad (4.5)$$

où l'échelle de temps  $\mathcal{T}$  est égal à  $k/\varepsilon$ .

### 4.3. PRODUCTION PAR LE GRADIENT DE TEMPÉRATURE MOYENNE $P_{\varepsilon\theta}^1$

Pour rappel, l'expression exacte de  $P_{\varepsilon\theta}^1$  s'écrit

$$P_{\varepsilon\theta}^1 = -2\kappa \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}, \quad (4.6)$$

et implique la corrélation entre le gradient des fluctuations de vitesse et le gradient des fluctuations de température. Cette corrélation se retrouve dans le taux de dissipation des flux thermiques turbulents

$$\varepsilon_{\theta j} = (\nu + \kappa) \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}. \quad (4.7)$$

Ainsi, en utilisant cette observation, le terme de production  $P_{\varepsilon\theta}^1$  est simplement modélisé par

$$P_{\varepsilon\theta}^1 = -\frac{2}{1 + Pr} \varepsilon_{\theta j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j}, \quad (4.8)$$

où le modèle de  $\varepsilon_{\theta j}$  est à retrouver dans le chapitre 3. Il est à noter que le modèle de la variable  $\varepsilon_{\theta j}$  fut l'objet d'une analyse asymptotique rigoureuse et a été soumis à des tests *a priori* satisfaisants pour toutes les conditions aux limites sur la température.

Les Figs. 4.1, 4.2 et 4.3 (gauche) comparent les tests *a priori* du modèle de  $P_{\varepsilon\theta}^1$  avec les données DNS de Flageul *et al.* (2015). Pour rappel, la validation *a priori* et les données DNS utilisées sont présentées dans le paragraphe 3.4.2. Le modèle donne le bon comportement asymptotique pour toutes les conditions aux limites sur la température. Cependant, loin de la paroi, on peut observer une surestimation de  $P_{\varepsilon\theta}^1$  par le modèle. Ce phénomène est imputable à la surestimation du taux de dissipation  $\varepsilon_{\theta 2}$  (qui est la seule composante intervenant dans le modèle de  $P_{\varepsilon\theta}^1$  dans le cas d'un canal plan) des flux thermiques turbulents dans la zone tampon observée dans le chapitre 3 (voir Figs. 3.5, 3.6 et 3.7). Cependant, de manière à rester cohérent

avec la modélisation des flux thermiques turbulents, il est important d'utiliser le modèle de la variable  $\varepsilon_{\theta j}$  dans l'expression de  $P_{\varepsilon_{\theta}}^1$ . Enfin, la méthode de relaxation elliptique utilisée pour modéliser  $\varepsilon_{\theta j}$  permet à  $P_{\varepsilon_{\theta}}^1$  de posséder les bons comportements asymptotiques à la paroi pour toutes les conditions aux limites thermiques ainsi qu'un bon comportement au centre du canal.

#### 4.4. PRODUCTION PAR LE GRADIENT DE VITESSE MOYENNE $P_{\varepsilon_{\theta}}^2$

Le terme de production exact  $P_{\varepsilon_{\theta}}^2$  s'écrit

$$P_{\varepsilon_{\theta}}^2 = -2\kappa \frac{\overline{\partial u_j}}{\partial x_k} \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}}. \quad (4.9)$$

On introduit le tenseur suivant :

$$\varepsilon_{ij}^{\theta} = 2\kappa \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_i} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}}. \quad (4.10)$$

Ce tenseur est similaire au tenseur de dissipation  $\varepsilon_{ij}$  des tensions de Reynolds : il exprime également un taux de dissipation par les effets visqueux et, est donc directement relié aux plus petites échelles de la turbulence à l'endroit où les gradients de fluctuations thermiques sont les plus importants. Ainsi, l'approche utilisée par le modèle EBRSM pour traiter  $\varepsilon_{ij}$  (voir paragraphe 2.3.2.2) est appliquée à la modélisation de  $\varepsilon_{ij}^{\theta}$ , i.e.,  $\varepsilon_{ij}^{\theta}$  est modélisé par un modèle isotrope  $\varepsilon_{ij}^{\theta h}$  dans la zone quasi-homogène, et par un modèle anisotrope  $\varepsilon_{ij}^{\theta w}$  proche de la paroi, et qui sont reliés à l'aide du coefficient de pondération elliptique  $\alpha_{\theta}$  (voir paragraphe 2.4.4.5)

$$\varepsilon_{ij}^{\theta} = (1 - \alpha_{\theta}) \varepsilon_{ij}^{\theta w} + \alpha_{\theta} \varepsilon_{ij}^{\theta h}, \quad (4.11)$$

avec

$$\varepsilon_{ij}^{\theta h} = \frac{1}{3} \varepsilon_{kk}^{\theta} \delta_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon_{\theta} \delta_{ij}, \quad (4.12)$$

et

$$\varepsilon_{ij}^{\theta w} = \frac{\overline{u_i' u_j'}}{k} \varepsilon_{\theta}. \quad (4.13)$$

Le modèle du terme de production  $P_{\varepsilon_{\theta}}^2$  s'écrit alors

$$P_{\varepsilon_{\theta}}^2 = -c_{\varepsilon_{\theta 1}} \varepsilon_{jk}^{\theta} \frac{\overline{\partial u_j}}{\partial x_k}. \quad (4.14)$$

où la constante  $c_{\varepsilon_{\theta 1}}$  est égale à 1.4.

Les Figs. 4.1, 4.2 et 4.3 (droite) comparent les tests *a priori* du modèle avec les données DNS de Flageul *et al.* (2015, 2017). Il est à noter que le modèle parvient à reproduire le bon comportement de  $P_{\varepsilon_{\theta}}^2$  loin de la paroi. Cependant, bien que le modèle tend vers 0 à la paroi pour des cas à température fixée et à flux de chaleur imposé tout comme la DNS, celui-ci ne parvient pas à restituer le comportement asymptotique de  $P_{\varepsilon_{\theta}}^2$ . Pour un cas de transfert thermique conjugué, le modèle est proche des données DNS dans la zone tampon, mais il tend vers 0 à la paroi contrairement au terme de production exact qui tend vers une faible constante. De manière générale, le modèle reste cohérent avec le terme de production  $P_{\varepsilon_{\theta}}^2$  donné par la DNS.

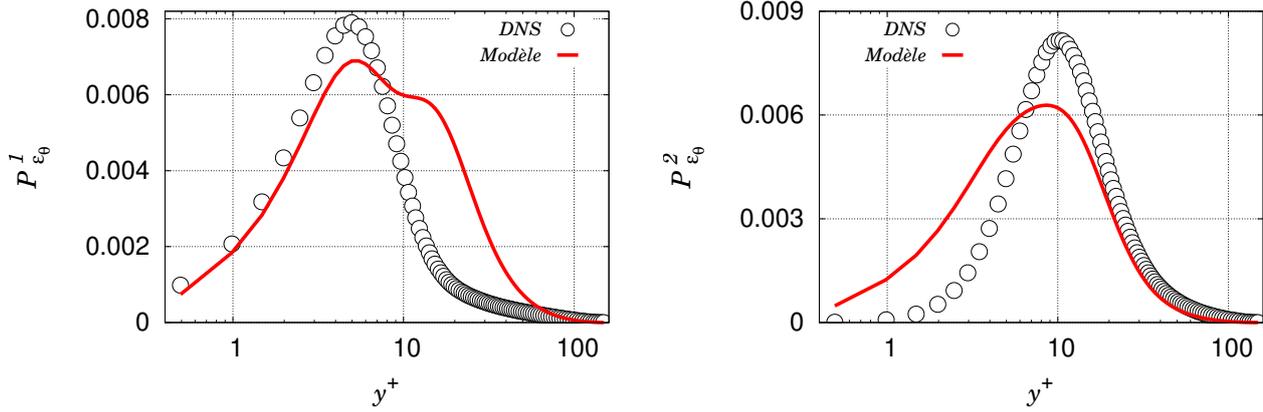


FIGURE 4.1. – Évaluation *a priori* des termes de production  $P_{\varepsilon_\theta}^1$  (gauche) et  $P_{\varepsilon_\theta}^2$  (droite) pour une **température imposée** à la paroi. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul *et al.* (2015, 2017).

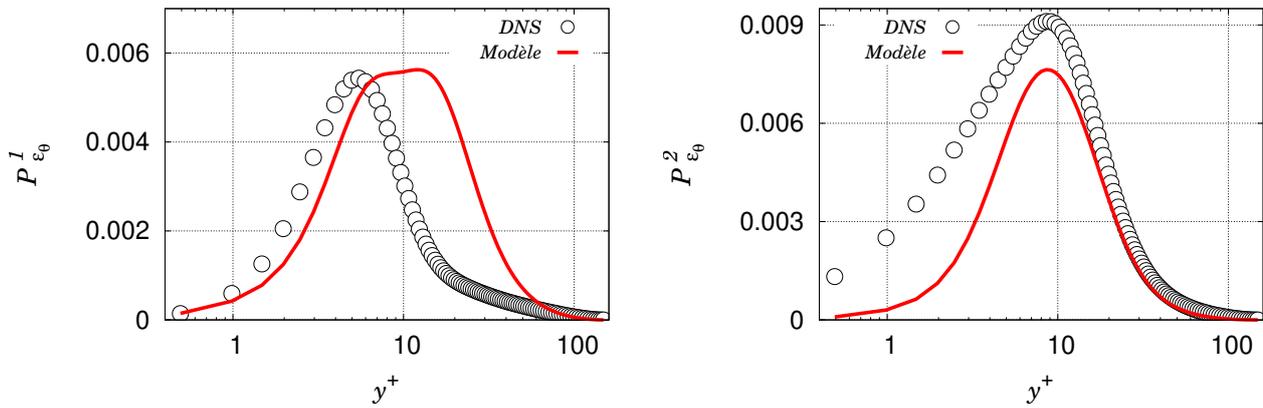


FIGURE 4.2. – Évaluation *a priori* des termes de production  $P_{\varepsilon_\theta}^1$  (gauche) et  $P_{\varepsilon_\theta}^2$  (droite) pour un **flux de chaleur imposé** à la paroi. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul *et al.* (2015, 2017).

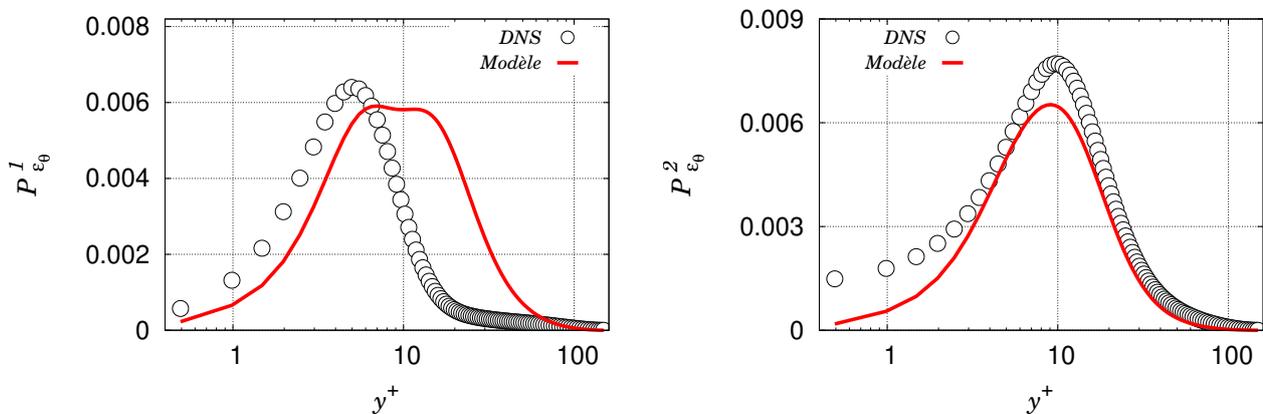


FIGURE 4.3. – Évaluation *a priori* des termes de production  $P_{\varepsilon_\theta}^1$  (gauche) et  $P_{\varepsilon_\theta}^2$  (droite) pour un cas de **transfert thermique conjugué**. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul *et al.* (2015, 2017).

4.5. PRODUCTION PAR LA HESSIENNE DE TEMPÉRATURE  $P_{\varepsilon\theta}^3$ 

L'écriture exacte du terme de production par la hessienne de température moyenne est :

$$P_{\varepsilon\theta}^3 = -2\kappa \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_k \partial x_j} \overline{u'_j \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}}. \quad (4.15)$$

Comme expliqué précédemment, le modèle proposé par Nagano (2002) a été retenu pour le terme  $P_{\varepsilon\theta}^3$ . Afin de construire son modèle, Nagano (2002) a repris la méthode utilisée par Rodi & Mansour (1993) dans leur article à propos d'une version bas-Reynolds du modèle  $k - \varepsilon$ . En effet, pour modéliser la production par la hessienne de la vitesse moyenne dans l'équation de transport de  $\varepsilon$ , Rodi & Mansour (1993) ont écrit une équation de transport pour ce terme de sorte à construire une relation algébrique. Ainsi, en suivant cette méthode, il est nécessaire d'écrire l'équation exacte de transport de la quantité :  $\overline{u'_j \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}}$  pour modéliser  $P_{\varepsilon\theta}^3$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \overline{u'_j \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}} \right) + \overline{u_l} \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \overline{u'_j \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}} \right) = & - \overline{u'_l \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l}} - \overline{u'_j \frac{\partial \theta'}{\partial x_l} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k}} \\ & - \overline{u'_j u'_l \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_k \partial x_l}} \\ & - \overline{u'_j \frac{\partial u'_l}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_l}} \\ & - \overline{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}} \\ & - \overline{u'_l \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{u'_j}{\partial x_l}} - \overline{u'_j \frac{\partial \theta'}{\partial x_l} \frac{u'_l}{\partial x_k}} \\ & - \overline{u'_j u'_l \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_k \partial x_l}} \\ & + \overline{v \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_l \partial x_l}} + \overline{u'_j \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \left( \kappa \frac{\partial \theta'}{\partial x_l} \right)}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Au vu de cette équation de transport, Nagano (2002) décide d'utiliser les termes de production  $\overline{u'_j u'_l \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_k \partial x_l}}$  et  $\overline{u'_j \frac{\partial u'_l}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_l}}$  pour écrire son modèle de  $P_{\varepsilon\theta}^3$  :

$$P_{\varepsilon\theta}^3 = \kappa \left( Cp_4 \overline{u'_j u'_k} \mathcal{T} fr \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_l \partial x_j} + Cp_3 \mathcal{T} fr \frac{\partial u'_j u'_l}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_l} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j \partial x_k} \right). \quad (4.17)$$

Les constantes proposées par Nagano (2002) sont  $Cp_4 = 0.25$  et  $Cp_3 = 0.1$ . Les tests *a priori* nous ont amené à considérer des constantes légèrement différentes :  $Cp_4 = 0.28$  et  $Cp_3 = 0.15$ . En effet, la Fig. 4.4 compare en *a priori* le modèle proposé par Nagano avec le même modèle utilisant les nouvelles constantes. Elle montre une nette amélioration pour le cas à température imposée à la paroi puisque les nouvelles constantes permettent de reproduire précisément le comportement de  $P_{\varepsilon\theta}^3$ . Cependant, pour un cas à flux de chaleur imposé, le modèle de Nagano reproduit correctement le pic négatif à  $y^+ = 8$  de  $P_{\varepsilon\theta}^3$  contrairement au nouveau modèle qui parvient quant à lui à reproduire précisément le pic positif à  $y^+ = 11$ . Enfin, le comportement de  $P_{\varepsilon\theta}^3$  est convenablement restitué avec les nouvelles constantes pour le cas de

transfert thermique conjugué, en particulier pour le pic positif à  $y^+ = 11$ . De façon générale, le comportement de  $P_{\varepsilon\theta}^3$  est peu influencé par la condition aux limites sur la température, et le modèle développé par Nagano avec les nouvelles constantes est capable de reproduire la production  $P_{\varepsilon\theta}^3$ .

#### 4.6. DIFFÉRENCE ENTRE LE TERME DE PRODUCTION TURBULENTE $P_{\varepsilon\theta}^4$ ET LE TAUX DE DISSIPATION $Y_{\varepsilon\theta}$

Les termes de production turbulente  $P_{\varepsilon\theta}^4$  et de dissipation  $Y_{\varepsilon\theta}$  sont indissociables loin de la paroi : Newman *et al.* (1981) montrèrent que ces deux termes sont dominants par rapport aux autres termes de l'équation de transport de la variable  $\varepsilon\theta$  loin de la paroi. En effet, si on considère une turbulence homogène sans gradient de vitesse et sans gradient de température, ces deux termes sont les seuls non-nuls et pilotent l'évolution du champ des fluctuations de température. Pour rappel, l'expression exacte de cette différence  $P_{\varepsilon\theta}^4 - Y_{\varepsilon\theta}$  s'écrit

$$P_{\varepsilon\theta}^4 - Y_{\varepsilon\theta} = -2\kappa \frac{\overline{\partial\theta' \partial\theta' \partial u'_j}}{\partial x_j \partial x_k \partial x_k} - 2\kappa^2 \frac{\overline{\partial^2\theta' \partial^2\theta'}}{\partial x_j \partial x_k \partial x_j \partial x_k}, \quad (4.18)$$

Ces deux termes ne pouvant être dissociés loin de la paroi, Jones & Musonge (1988) proposèrent la modélisation

$$P_{\varepsilon\theta}^4 - Y_{\varepsilon\theta} = c_{\varepsilon\theta}^{h1} \frac{\varepsilon\theta}{k} P_k + c_{\varepsilon\theta}^{h2} \frac{\varepsilon}{k} P_\theta - c_{\varepsilon\theta 3} \frac{\varepsilon\theta}{\mathcal{T}} - c_{\varepsilon\theta 4} \frac{\varepsilon\theta}{\mathcal{T}}, \quad (4.19)$$

qui est vérifiée en turbulence homogène. Cependant, elle ne peut être appliquée à la zone proche-paroi de par son utilisation des échelles de temps dynamique  $\mathcal{T}$  et thermique  $\mathcal{T}_\theta$ . En effet, l'échelle  $\mathcal{T}$  tend toujours vers 0 à la paroi tout comme l'échelle  $\mathcal{T}_\theta$  lorsqu'une température est imposée (voir Fig. 4.5). En se remémorant que le taux de dissipation  $\varepsilon\theta$  tend toujours vers une constante à la paroi (voir le développement asymptotique Eq. (3.6) de  $\varepsilon\theta$ ), cela signifie que le terme  $\varepsilon\theta/\mathcal{T}$  tend toujours vers l'infini à la paroi comme le terme  $\varepsilon\theta/\mathcal{T}_\theta$  pour une température imposée.

Ainsi, la stratégie adoptée dans ce paragraphe sera d'étendre la validité de ce modèle dans la zone proche-paroi pour toutes les conditions aux limites sur la température. L'idée est donc de reprendre l'approche à relaxation elliptique et de l'appliquer à la différence  $P_{\varepsilon\theta}^4 - Y_{\varepsilon\theta}$  tel que

$$P_{\varepsilon\theta}^4 - Y_{\varepsilon\theta} = (1 - \alpha_\theta) (P_{\varepsilon\theta}^w - Y_{\varepsilon\theta}^w) + \alpha_\theta (P_{\varepsilon\theta}^h - Y_{\varepsilon\theta}^h). \quad (4.20)$$

Le modèle homogène de production  $P_{\varepsilon\theta}^h$  correspond au modèle proposé par Jones & Musonge (1988) (Eq. 4.19)

$$P_{\varepsilon\theta}^h = c_{\varepsilon\theta}^{h1} \frac{\varepsilon\theta}{k} P_k + c_{\varepsilon\theta}^{h2} \frac{\varepsilon}{k} P_\theta \quad \text{avec} \quad c_{\varepsilon\theta}^{h1} = 2.52 \quad \text{et} \quad c_{\varepsilon\theta}^{h2} = 2.88. \quad (4.21)$$

Le modèle homogène de dissipation  $Y_{\varepsilon\theta}^h$  ne correspond pas exactement au modèle proposé par Jones & Musonge (1988) comme le montre l'équation :

$$Y_{\varepsilon\theta}^h = c_H \frac{\varepsilon\theta}{\mathcal{T}_\theta} \quad \text{avec} \quad c_H = 2.7. \quad (4.22)$$

En effet, le terme exact de dissipation  $Y_{\varepsilon\theta}$ , Eq. (4.18), dépend uniquement de variables thermiques. Par conséquent, le choix proposé dans ce paragraphe est de ne pas inclure de variable dynamique (comme une échelle de temps  $\mathcal{T}$ ) dans le modèle homogène  $Y_{\varepsilon\theta}^h$ . De plus, l'échelle

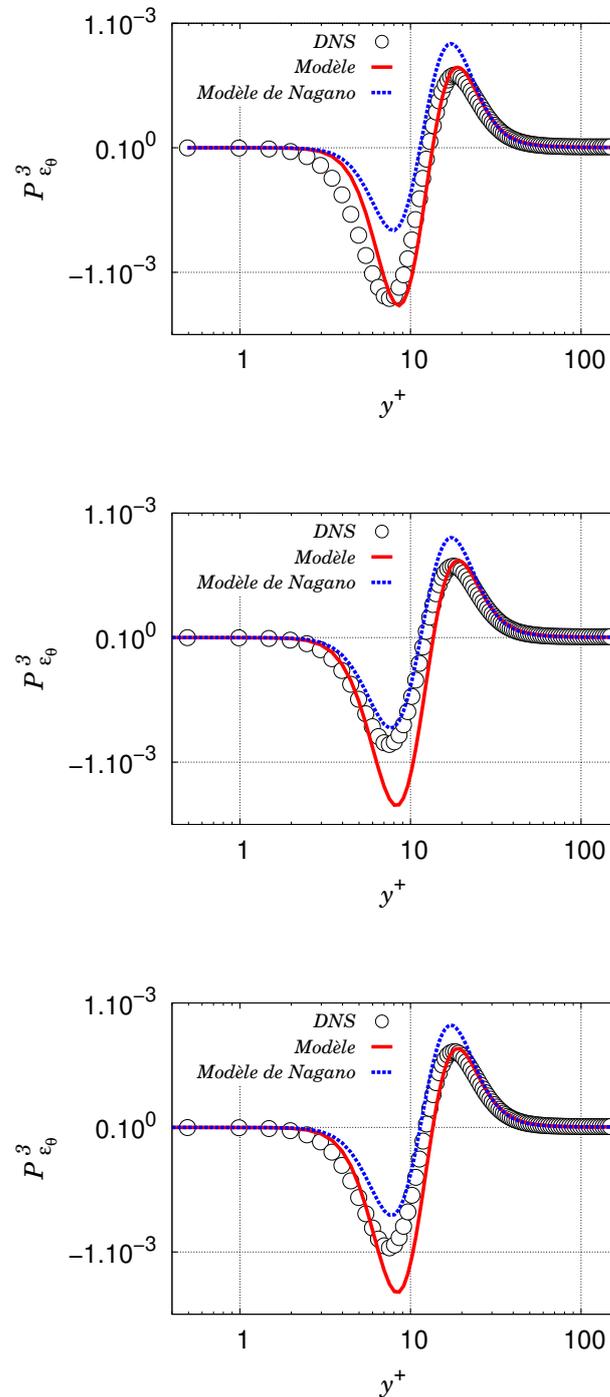


FIGURE 4.4. – Évaluation *a priori* du terme de production par gradient de température moyenne  $P_{\varepsilon_\theta}^1$  pour un cas à **température fixée** (haut), à **flux de chaleur imposé** (milieu) et de **transfert thermique conjugué** (bas). Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul *et al.* (2015, 2017).

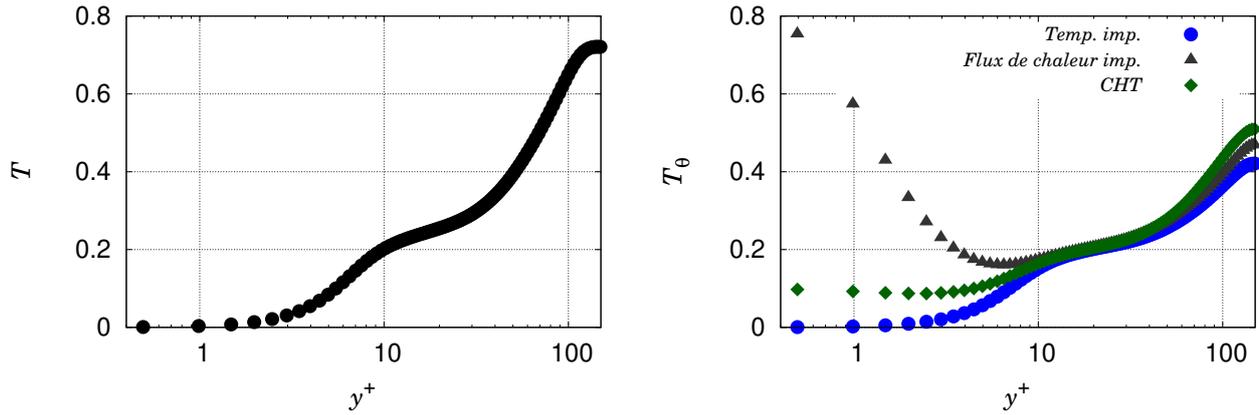


FIGURE 4.5. – Évaluation *a priori* de l'échelle de temps dynamique  $\mathcal{T}$  (gauche) et de l'échelle de temps thermique  $\mathcal{T}_\theta$  (droite) pour différents types de condition aux limites sur la température. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul *et al.* (2015, 2017).

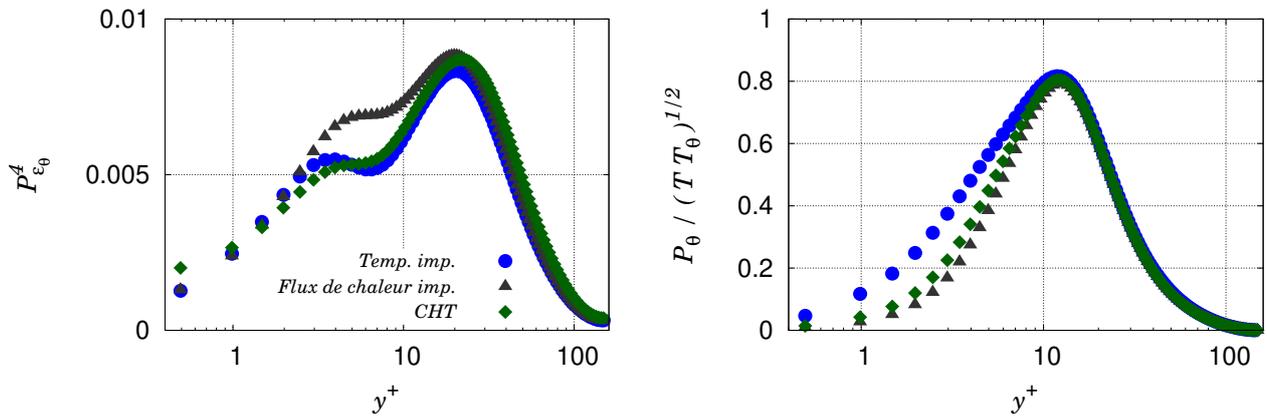


FIGURE 4.6. – Le terme de production turbulente  $P_{\varepsilon_\theta}^4$  (gauche) et l'expression  $P_\theta / \sqrt{\mathcal{T} \mathcal{T}_\theta}$  *a priori* (droite) pour toutes les conditions aux limites sur la température. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul *et al.* (2015, 2017).

de temps  $\tau_\theta$  intervenant dans l'Eq. (4.22) sera appelée l'échelle de temps thermique de Durbin et s'écrit

$$\tau_\theta = \max\left(\mathcal{T}_\theta, C_{T_\theta} \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon} \frac{1}{Pr}}\right) \quad \text{avec} \quad C_{T_\theta} = 5.13. \quad (4.23)$$

Il est à noter qu'il est important d'utiliser l'échelle de temps  $\tau_\theta$  à la place de l'échelle classique  $\mathcal{T}_\theta$  afin de ne pas perturber le modèle proche-paroi  $Y_{\varepsilon_\theta}^w$  développé dans le paragraphe 4.6.2. En effet, une simple analyse asymptotique de  $\tau_\theta$  montre que cette échelle tend toujours vers une constante à la paroi. Par conséquent, le produit entre le coefficient de pondération elliptique  $\alpha_\theta$  et le modèle homogène  $Y_{\varepsilon_\theta}^h$  tend vers 0 à la paroi et n'interfère pas avec  $Y_{\varepsilon_\theta}^w$ .

#### 4.6.1. Modélisation proche-paroi du terme de production

L'influence de la condition aux limites sur le comportement de la production turbulente  $P_{\varepsilon_\theta}^4$  n'est pas très marquée comme le montre la Fig. 4.6 (gauche). La principale différence réside

	$P_\theta$	$\sqrt{\mathcal{T}\mathcal{T}_\theta}$	$P_{\varepsilon_\theta}^w$
Température imposée	$O(y^3)$	$O(y^2)$	$O(y)$
Flux de chaleur imposé	$a_{1t_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} y + O(y^2)$	$O(y)$	$O(1)$
Transfert thermique conjugué	$a_{1t_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} y + O(y^2)$	$O(y)$	$O(1)$

Tableau 4.2. – Comportement asymptotique du terme de production  $P_\theta$ , de l'échelle de temps mixte  $\sqrt{\mathcal{T}\mathcal{T}_\theta}$  et du modèle proche-paroi  $P_{\varepsilon_\theta}^w$  pour tous les types de conditions aux limites.

dans la valeur de  $P_{\varepsilon_\theta}^4$  dans la zone tampon qui est plus importante lorsqu'un flux de chaleur est imposé. Il est à noter que  $P_{\varepsilon_\theta}^4$  tend vers une constante très faible à la paroi pour un cas de transfert thermique conjugué alors qu'il tend vers 0 dans les autres cas. L'idée est alors de proposer un modèle proche-paroi  $P_{\varepsilon_\theta}^w$  s'appuyant sur l'expression  $P_\theta / \sqrt{\mathcal{T}\mathcal{T}_\theta}$  qui à l'avantage d'être peu affectée par la condition aux limites sur la température comme l'indique la Fig. 4.6 (droite). Cependant, cette expression tend vers 0 à la paroi pour un cas de transfert thermique conjugué contrairement au terme exact  $P_{\varepsilon_\theta}^4$  comme le montre le Tab. 4.2, mais, après avoir étudié plusieurs autres pistes, ce choix s'est avéré être le meilleur pour décrire la production turbulente pour toutes les conditions aux limites. Le modèle proche paroi  $P_{\varepsilon_\theta}^w$  s'écrit alors

$$P_{\varepsilon_\theta}^w = c_{\varepsilon_\theta}^{w1} \left[ 1 - c_{\varepsilon_\theta}^{w2} (1 - \alpha_\theta) \frac{P_k}{\varepsilon} \right] \frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta} \frac{\varepsilon_\theta}{\sqrt{\mathcal{T}\mathcal{T}_\theta}} \quad \text{avec} \quad c_{\varepsilon_\theta}^{w1} = 2.0 \quad \text{et} \quad c_{\varepsilon_\theta}^{w2} = 0.75. \quad (4.24)$$

Le terme en  $P_k/\varepsilon$  à pour objectif d'améliorer la prédiction de  $P_{\varepsilon_\theta}^4$  dans la zone tampon. Les Figs. 4.7 et 4.8 comparent les évaluations *a priori* de la modélisation complète du terme de production turbulente  $P_{\varepsilon_\theta}^4 = (1 - \alpha_\theta) P_{\varepsilon_\theta}^w + \alpha_\theta P_{\varepsilon_\theta}^h$ , avec le même modèle sans l'expression  $\left[ 1 - c_{\varepsilon_\theta}^{w2} (1 - \alpha_\theta) \frac{P_k}{\varepsilon} \right]$  dans le modèle  $P_{\varepsilon_\theta}^w$ . Ces figures montrent clairement l'utilité de cette expression dans la zone tampon, elle permet au modèle de la production turbulente de ne pas surestimer le terme exact et de reproduire son comportement particulier.

Le modèle parvient à reproduire correctement le comportement asymptotique de  $P_{\varepsilon_\theta}^4$  pour un cas à température imposée à la paroi comme l'indique la Fig. 4.7 (gauche). Cependant, celui-ci éprouve des difficultés à restituer le comportement asymptotique de  $P_{\varepsilon_\theta}^4$  pour un cas à flux de chaleur imposé (Fig. 4.7 (droite)) et de transfert thermique conjugué (Fig. 4.8). Dans l'ensemble, le modèle parvient à restituer la tendance donnée par les données DNS pour le terme de production turbulente  $P_{\varepsilon_\theta}^4$ .

#### 4.6.2. Modélisation proche-paroi du terme de dissipation

La modélisation du taux de dissipation  $Y_{\varepsilon_\theta}$  est essentielle pour assurer un bon comportement asymptotique pour la variable  $\varepsilon_\theta$ . En effet,  $Y_{\varepsilon_\theta}$  est le terme dominant en proche-paroi avec la diffusion moléculaire  $D_{\varepsilon_\theta}^k$  pour un cas à température fixée à la paroi et à flux de chaleur imposé (voir Tab. 4.1). Pour un cas de transfert thermique conjugué, ce terme reste également le terme

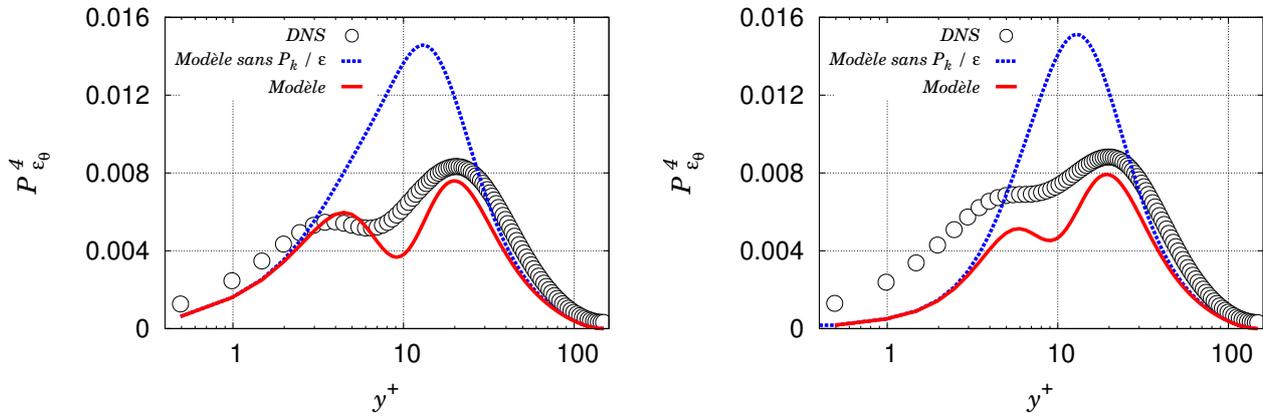


FIGURE 4.7. – Évaluation *a priori* du terme de production turbulente  $P_{\varepsilon\theta}^A$  pour une **température imposée** à la paroi (gauche) et pour un **flux de chaleur imposé** (droite). La courbe rouge désigne le modèle complet  $P_{\varepsilon\theta}^A = (1 - \alpha_\theta) P_{\varepsilon\theta}^w + \alpha_\theta P_{\varepsilon\theta}^h$ . La courbe bleue représente le même modèle sans le terme  $\left[1 - c_{\varepsilon\theta}^{w2} (1 - \alpha_\theta) \frac{P_k}{\varepsilon}\right]$  dans l'expression de  $P_{\varepsilon\theta}^w$ .

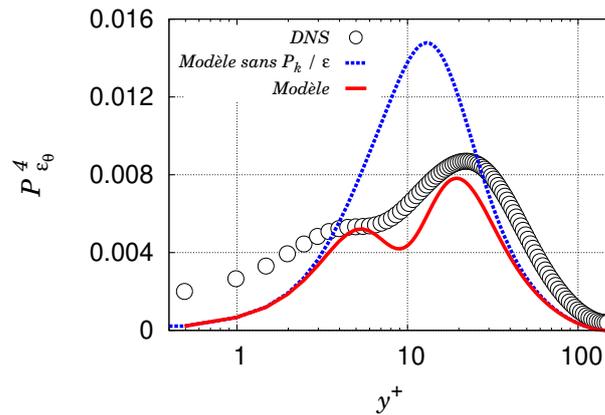


FIGURE 4.8. – Évaluation *a priori* du terme de production turbulente  $P_{\varepsilon\theta}^A$  pour un cas de **transfert thermique conjugué**. La courbe rouge désigne le modèle complet  $P_{\varepsilon\theta}^A = (1 - \alpha_\theta) P_{\varepsilon\theta}^w + \alpha_\theta P_{\varepsilon\theta}^h$ . La courbe bleue représente le même modèle sans le terme  $\left[1 - c_{\varepsilon\theta}^{w2} (1 - \alpha_\theta) \frac{P_k}{\varepsilon}\right]$  dans l'expression de  $P_{\varepsilon\theta}^w$ .

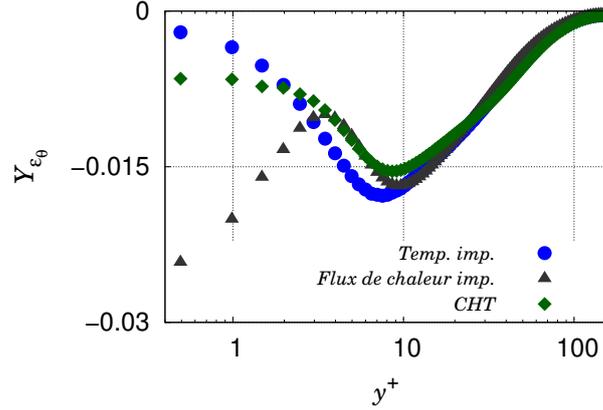


FIGURE 4.9. – Comportement du taux de dissipation  $Y_{\varepsilon_\theta}$  pour différentes conditions aux limites sur la température. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul *et al.* (2015, 2017).

dominant à la paroi avec le terme de diffusion moléculaire selon les données DNS de Flageul *et al.* (2015, 2017).

Le comportement à la paroi de  $Y_{\varepsilon_\theta}$  est fortement influencé par la condition aux limites sur la température (Fig. 4.9) et constitue un véritable challenge de modélisation RANS. La Fig. 4.9 montre alors qu'il faut construire un modèle capable de donner trois comportements asymptotiques différents pour les trois types de conditions aux limites sur la température.

Dans un premier temps, il est nécessaire de trouver des paramètres capable de prendre en considération l'influence du type de condition aux limites, i.e. des paramètres qui seront capables d'adapter le comportement du modèle en fonction du type de la condition aux limites sur la température. Le premier paramètre envisagé est

$$\frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R}} \quad \text{avec} \quad R = \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}_\theta}. \quad (4.25)$$

Pour rappel, ce paramètre a été utilisé dans la nouvelle modélisation du terme de brouillage  $\phi_{\theta_i}^*$  dans le chapitre 3 pour gérer la différence de comportement entre d'une part un cas à température fixée et d'autre part des cas à flux de chaleur imposé et de transfert thermique conjugué. Cependant, le principal écueil de ce paramètre est son incapacité à différencier des cas à flux imposé et de transfert thermique conjugué comme l'illustre la Fig. 4.10 (gauche). Dans le cas des flux thermiques turbulents, ce paramètre était suffisant car les cas à flux imposé et de transfert thermique conjugué possédaient les mêmes caractéristiques asymptotiques, contrairement au terme  $Y_{\varepsilon_\theta}$ .

La différence de comportement asymptotique de  $Y_{\varepsilon_\theta}$  entre un cas à flux imposé et de transfert thermique conjugué nécessite l'introduction du second paramètre

$$\frac{\sigma_\theta}{\varepsilon_\theta} \quad \text{avec} \quad \sigma_\theta = \kappa \left( \frac{\partial \sqrt{\theta'^2}}{\partial y} \right)^2. \quad (4.26)$$

Ce paramètre est utilisé par Yang *et al.* (2019) pour gérer les différents types de conditions aux limites sur la température. La Fig. 4.10 (droite) montre que le comportement asymptotique de ce paramètre prend en compte la condition aux limites sur la température. Ainsi, en utilisant ces deux paramètres, le modèle proche-paroi  $Y_{\varepsilon_\theta}^w$  proposé dans ce manuscrit s'écrit

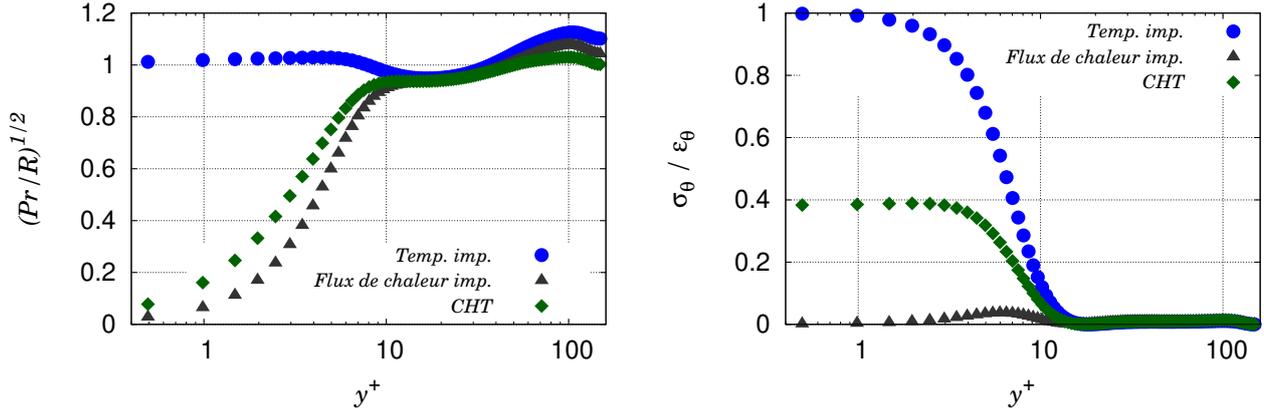


FIGURE 4.10. – Évaluation *a priori* des paramètres  $\sqrt{Pr}/\sqrt{R}$  (gauche) et  $\sigma_\theta/\varepsilon_\theta$  (droite) pour différentes conditions aux limites sur la température. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul *et al.* (2015, 2017).

$$Y_{\varepsilon_\theta}^w = \left[ \left( 1 - \sqrt{\frac{Pr}{R}} \right) \left( 1 - c_w (1 - \alpha_\theta) \frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta} \right) \left( c_N - \frac{\sigma_\theta}{\varepsilon_\theta} c_C \right) + c_D \sqrt{\frac{Pr}{R}} \right] \frac{\varepsilon_\theta}{\sqrt{\tau_Y \tau_\theta}} \sqrt{\frac{\mathcal{T}_\theta}{\tau_\theta}}, \quad (4.27)$$

où les différentes constantes sont

$$c_w = 1.8; \quad c_N = 7.08; \quad c_C = 15.96; \quad c_D = 4.8.$$

A la paroi, les échelles de temps  $\tau_Y$ ,  $\tau_\theta$  et la variable  $\varepsilon_\theta$  tendent toujours vers des constantes. Ainsi, le comportement asymptotique de  $Y_{\varepsilon_\theta}^w$  est piloté par le terme  $\sqrt{\mathcal{T}_\theta}$ , et tend vers 0 pour un cas à température imposée et vers une constante dans les autres cas (voir Tab. 4.3). Il est à noter le traitement particulier de l'échelle de temps  $\tau$

$$\tau_Y = \max \left( \mathcal{T}, C_T \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} \right), \quad (4.28)$$

et en particulier de la variable  $C_T$  modélisée par

$$C_T = \left( 1 - \sqrt{\frac{Pr}{R}} \right) \left( c_{T_N} + \frac{\sigma_\theta}{\varepsilon_\theta} c_{T_C} \right) + c_{T_D} \sqrt{\frac{Pr}{R}}, \quad (4.29)$$

où les différentes constantes sont

$$c_{T_N} = 0.025; \quad c_N = 7.08; \quad c_{T_C} = 26.25; \quad c_{T_D} = 5.4.$$

La variable  $C_T$  est nécessaire à la reproduction du comportement asymptotique de  $Y_{\varepsilon_\theta}$  pour des cas de transfert thermique conjugué et à flux de chaleur imposé à la paroi. Le comportement de cette variable dépend fortement de la condition aux limites sur la température comme l'illustre la Fig. 4.11. Une étude plus approfondie du modèle proche paroi est nécessaire pour comprendre le comportement du modèle pour les différentes conditions aux limites.

– TEMPÉRATURE IMPOSÉE :  $\sqrt{Pr}/\sqrt{R} = 1$

Le Tab. 4.3 indique une différence de comportement de  $Y_{\varepsilon_\theta}$  à la paroi entre le modèle et le terme exact qui tend vers une faible constante (voir Fig. 4.9). En effet, le modèle

proche-paroi  $Y_{\varepsilon_\theta}^w$  tend vers l'expression :  $Y_{\varepsilon_\theta}^w \rightarrow c_D \frac{\varepsilon_\theta}{\sqrt{\tau_Y \tau_\theta}} \sqrt{\frac{\mathcal{T}_\theta}{\tau_\theta}}$  à la paroi. Dans cette expression, le comportement de la variable  $\sqrt{\mathcal{T}_\theta}$  domine à la paroi et fait tendre  $Y_{\varepsilon_\theta}^w$  vers 0. L'évaluation *a priori* du modèle montre que malgré la divergence de comportement asymptotique entre le terme exact et le modèle de  $Y_{\varepsilon_\theta}$ , celui-ci parvient à restituer le comportement du terme exact loin et proche de la paroi comme l'indique la Fig. 4.12 (gauche). Cette figure met également en évidence deux ruptures de pente à  $y^+ = 5$  et  $y^+ = 8$  du modèle. Ces comportements particuliers sont causés par les échelles de temps dynamique  $\tau_Y$  et thermique  $\tau_\theta$  de Durbin. Il est à noter que la valeur de la variable  $C_T$ , qui tend vers la constante  $c_{T_D}$  dans la zone proche-paroi, reste toujours aux alentours de 5 (Fig. 4.11), ce qui permet au modèle de passer de l'échelle de temps dynamique  $\mathcal{T}$  loin de la paroi à l'échelle de temps de Kolmogorov  $\sqrt{\nu}/\sqrt{\varepsilon}$  dans la zone tampon, et qui permet de ne pas perturber le comportement proche-paroi de  $Y_{\varepsilon_\theta}^w$ .

– FLUX DE CHALEUR IMPOSÉ :  $\sqrt{Pr}/\sqrt{R} = 0$  et  $\sigma_\theta/\varepsilon_\theta = 0$

Le modèle proche-paroi  $Y_{\varepsilon_\theta}^w$  tend vers l'expression :  $Y_{\varepsilon_\theta}^w \rightarrow c_N \frac{\varepsilon_\theta}{\sqrt{\tau_Y \tau_\theta}} \sqrt{\frac{\mathcal{T}_\theta}{\tau_\theta}}$  à la paroi. Dans cette configuration, les variables  $\varepsilon_\theta$ ,  $\tau_\theta$ ,  $\tau_Y$  et  $\mathcal{T}_\theta$  tendent vers des valeurs constantes à la paroi. Ainsi, les comportements asymptotiques du modèle et du terme exact  $Y_{\varepsilon_\theta}$  tendent vers une constante à la paroi comme le montre le Tab. 4.3. Plusieurs éléments permettent d'ajuster la valeur de  $Y_{\varepsilon_\theta}^w$  à la paroi :

- le premier est la constante  $c_N$  calibrée à l'aide des données DNS de Flageul *et al.* (2015, 2017) du modèle  $Y_{\varepsilon_\theta}^w$  qui contribue à restituer le bon comportement asymptotique. Cependant, cette simple constante ne permet pas de reproduire la valeur importante du terme exact  $Y_{\varepsilon_\theta}$  à la paroi.
- Le deuxième point important est la valeur de la variable  $C_T$ , qui tend vers la constante  $C_{T_N}$  à la paroi, qui est faible en proche-paroi comme le montre la Fig. 4.11. La stratégie est d'utiliser le comportement de l'expression  $1/\mathcal{T}$  (qui tend vers l'infini à la paroi) afin d'augmenter la valeur de la constante de  $Y_{\varepsilon_\theta}^w$  à la paroi. En effet, comme la valeur de  $C_T$  est faible, le passage l'échelle de temps dynamique  $\mathcal{T}$  loin de la paroi à l'échelle de temps de Kolmogorov  $\sqrt{\nu}/\sqrt{\varepsilon}$  se fait dans la sous-couche visqueuse, ce qui a pour conséquence d'augmenter  $Y_{\varepsilon_\theta}^w$  à la paroi.

L'évaluation *a priori* du modèle de  $Y_{\varepsilon_\theta}$  montre que celui-ci tend vers une constante à la paroi légèrement inférieure à celle du terme exact comme l'indique la Fig. 4.12 (droite). Le comportement particulier du terme exact dans la zone tampon est très difficile à modéliser et n'est pas correctement restitué par le modèle. Loin de la paroi, le modèle parvient à reproduire le comportement donné par la DNS.

– TRANSFERT THERMIQUE CONJUGUÉ :  $\sqrt{Pr}/\sqrt{R} = 0$  et  $\sigma_\theta/\varepsilon_\theta \neq 0$

Le modèle proche-paroi  $Y_{\varepsilon_\theta}^w$  tend vers l'expression :  $Y_{\varepsilon_\theta}^w \rightarrow \left[ c_N - \frac{\sigma_\theta}{\varepsilon_\theta} c_C \right] \frac{\varepsilon_\theta}{\sqrt{\tau_Y \tau_\theta}} \sqrt{\frac{\mathcal{T}_\theta}{\tau_\theta}}$  à la paroi qui est non-nulle. Ainsi, à l'instar du cas à flux de chaleur imposé, le modèle et le terme exact  $Y_{\varepsilon_\theta}$  tendent vers une constante à la paroi (voir Tab. 4.3). Cependant, cette constante est plus faible que celle du cas à flux imposé (voir Fig 4.9) et le modèle doit alors s'adapter à la nouvelle condition aux limites. Cet ajustement se fait par l'intermédiaire du paramètre  $\sigma_\theta/\varepsilon_\theta$  et des constantes  $c_C$  et  $C_T$  : le but est de réduire la valeurs de

	Température imposée	Flux de chaleur imposé	Transfert thermique conjugué
$Y_{\varepsilon_\theta}^w$	$O(y)$	$O(1)$	$O(1)$
Terme exact $Y_{\varepsilon_\theta}$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$

Tableau 4.3. – Comparaison entre les comportements asymptotiques du modèle proche-paroi  $Y_{\varepsilon_\theta}^w$  et le comportement asymptotique du terme exact  $Y_{\varepsilon_\theta}$  pour différentes conditions aux limites sur la température.

$Y_{\varepsilon_\theta}^w$  à la paroi et d'augmenter la valeur de  $C_T$  de sorte que le passage de l'échelle de temps dynamique  $\mathcal{T}$  à l'échelle de temps de Kolmogorov  $\sqrt{\nu}/\sqrt{\varepsilon}$  s'effectue dans la zone tampon. Ainsi, dans cette configuration la variable  $C_T$ , dont l'expression tend vers  $C_T \rightarrow c_{T_N} + \frac{\sigma_\theta}{\varepsilon_\theta} c_{T_C}$  à la paroi, vaut environ 7 à la paroi comme l'indique la Fig. 4.11 et assure le changement d'échelle dans la zone tampon.

Les tests *a priori* montre que le modèle tend vers une constante à la paroi légèrement plus faible que celle donnée par la DNS comme l'illustre la Fig. 4.13. Le comportement de  $Y_{\varepsilon_\theta}$  loin de la paroi est correctement reproduit par le modèle, et, malgré une rupture de pente assez abrupt causée par  $\tau_Y$  et  $\tau_\theta$ , la tendance de la courbe DNS est restituée par le modèle proche de la paroi.

Le dernier point de cette partie concerne l'influence de l'expression  $\left(1 - c_w(1 - \alpha_\theta) \frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta}\right)$  dans le modèle proche-paroi  $Y_{\varepsilon_\theta}^w$ . Les Figs. 4.12 et 4.13 montrent l'évaluation *a priori* du modèle avec et sans cette expression. La principale observation concerne le cas à flux de chaleur imposé où le terme utilisant  $P_\theta/\varepsilon_\theta$  permet d'améliorer significativement le modèle dans la zone tampon. Ce terme permet également une estimation plus précise de  $Y_{\varepsilon_\theta}$  pour un cas de transfert thermique conjugué. Enfin, pour un cas à flux de chaleur imposé, ce terme dégrade quelque peu le modèle à  $10 \leq y^+ \leq 11$  sans être rédhibitoire.

Un résumé des équations et des constantes utilisées dans la modélisation de la variable  $\varepsilon_\theta$  se trouve en Annexe A.

#### 4.7. MODÉLISATION DANS LA PARTIE SOLIDE POUR LE TRANSFERT THERMIQUE CONJUGUÉ

Dans la partie solide, toutes les variables dynamiques sont nulles. Les équations de transport de la température moyenne et de la variance de température appliquées au solide s'écrivent

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa_s \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \right), \quad (4.30)$$

$$\frac{D \overline{\theta'^2}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa_s \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_j} \right) - 2\varepsilon_\theta, \quad (4.31)$$

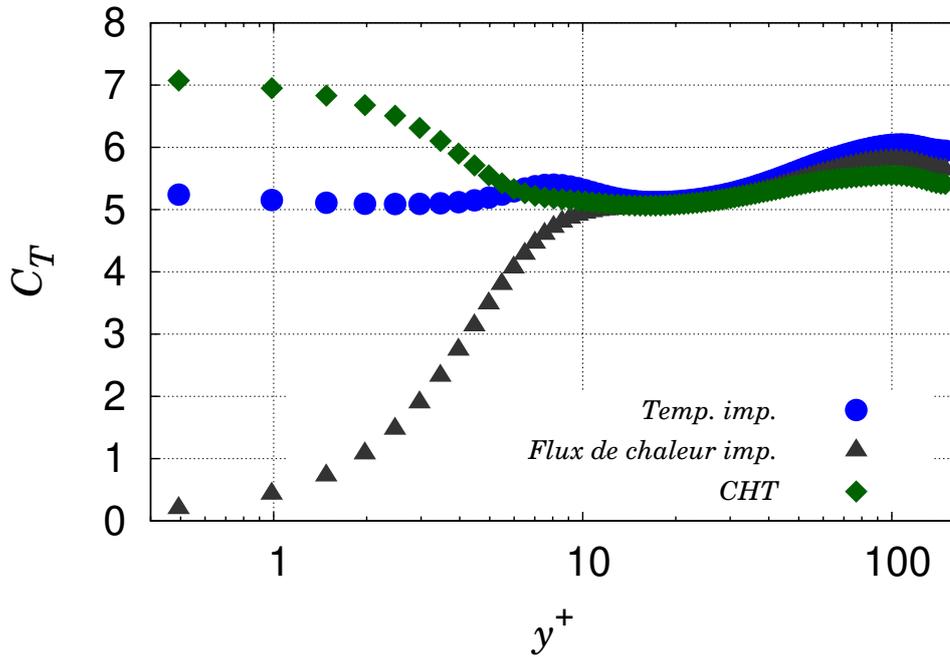


FIGURE 4.11. – Évaluation *a priori* du modèle de la variable  $C_T$  pour toutes les conditions aux limites sur la température. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul *et al.* (2015, 2017).

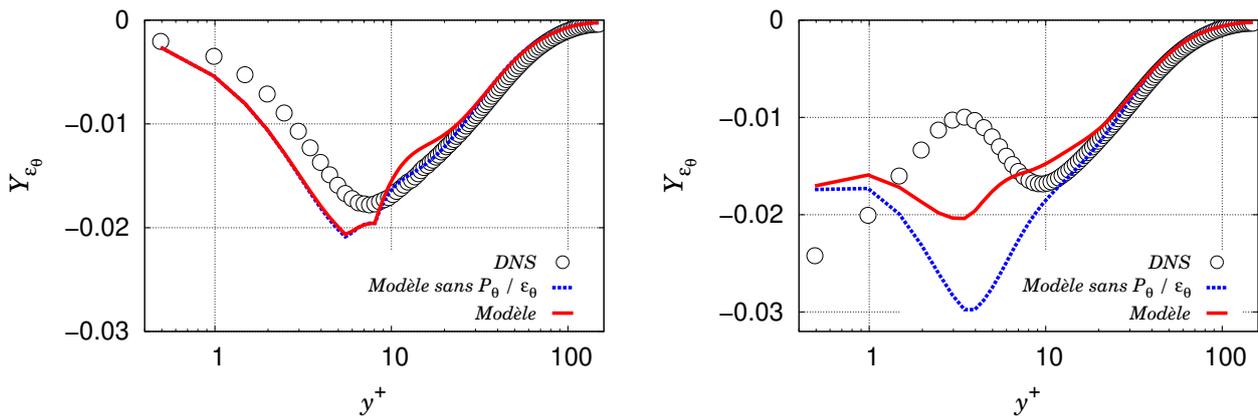


FIGURE 4.12. – Évaluation *a priori* du taux de dissipation  $Y_{\epsilon_\theta}$  pour un cas à **température imposée** (gauche) à la paroi et à **flux de chaleur imposé** (droite). La courbe rouge désigne le modèle complet  $Y_{\epsilon_\theta} = (1 - \alpha_\theta) Y_{\epsilon_\theta}^w + \alpha_\theta Y_{\epsilon_\theta}^h$ . La courbe bleue représente le même modèle sans le terme  $\left(1 - c_w (1 - \alpha_\theta) \frac{P_\theta}{\epsilon_\theta}\right)$  dans l'expression de  $Y_{\epsilon_\theta}^w$ .

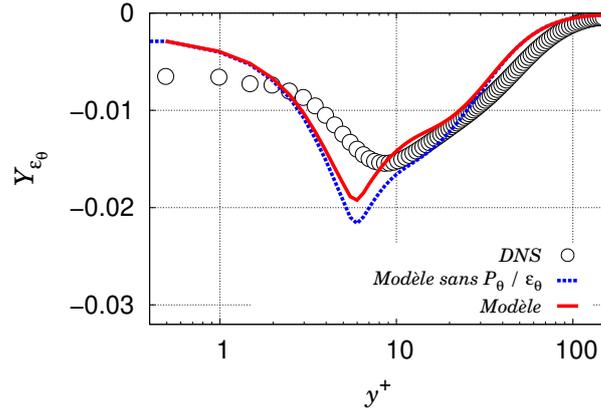


FIGURE 4.13. – Évaluation *a priori* du taux de dissipation  $Y_{\varepsilon_\theta}$  pour un cas de **transfert thermique conjugué**. La courbe rouge désigne le modèle complet  $Y_{\varepsilon_\theta} = (1 - \alpha_\theta) Y_{\varepsilon_\theta}^w + \alpha_\theta Y_{\varepsilon_\theta}^h$ . La courbe bleue représente le même modèle sans le terme  $\left(1 - c_w (1 - \alpha_\theta) \frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta}\right)$  dans l'expression de  $Y_{\varepsilon_\theta}^w$ .

où  $\kappa_s$  désigne la diffusivité thermique du solide. Ainsi, la seule variable à modéliser est le taux de dissipation  $\varepsilon_\theta = \kappa \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}$  de la partie solide.

L'équation de transport exacte de la variable  $\varepsilon_\theta$  indique que le terme de diffusion moléculaire et le taux de dissipation de  $\varepsilon_\theta$  sont les deux seules expressions non-nulles dans le solide. La modélisation suivante est alors proposée pour l'équation de transport de  $\varepsilon_\theta$

$$\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa_s \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x_j} \right) - c_{\varepsilon_\theta s} \frac{\varepsilon_\theta}{\mathcal{T}_\theta}. \quad (4.32)$$

où la constante  $c_{\varepsilon_\theta s}$  est prise égale à 3.0 d'après Bédidi (2016) et Surroop (2017) (voir Fig. 4.14). Il est à noter que le modèle du taux de dissipation de  $\varepsilon_\theta$  est similaire au modèle  $Y_{\varepsilon_\theta}^h$  utilisé dans le fluide pour modéliser la zone homogène.

Cependant, lorsque les propriétés des conductivité et diffusivité thermiques du solide et du fluide sont identiques, la continuité de  $Y_{\varepsilon_\theta}$  à l'interface fluide/solide n'est pas assurée par le modèle comme le voudrait la théorie. En effet, il n'a pas été possible d'utiliser le modèle proche-paroi  $Y_{\varepsilon_\theta}^w$  dans le solide car il faisait appel à des variables dynamiques telles que l'échelle de temps de Durbin  $\tau$  qui n'a pas de sens dans le solide.

Ainsi, la stratégie adoptée fut d'utiliser un modèle similaire au modèle  $Y_{\varepsilon_\theta}^h$  utilisé dans le fluide pour modéliser la zone homogène qui a du sens dans le solide.

## 4.8. CONCLUSION DU CHAPITRE

La modélisation de l'équation de transport du taux de dissipation de la variance de température  $\varepsilon_\theta$  est complexe car elle présuppose la modélisation de six termes dont les comportements asymptotiques dépendent de la condition aux limites sur la température. Ainsi, des nouveaux modèles pour les termes de production par gradient de température moyenne  $P_{\varepsilon_\theta}^1$ , par gradient de vitesse moyenne  $P_{\varepsilon_\theta}^2$ , de production turbulente  $P_{\varepsilon_\theta}^4$  et de dissipation  $Y_{\varepsilon_\theta}$  ont été développés durant ces trois ans de thèse. Dans l'ensemble, les modèles proposés parviennent à restituer les comportements asymptotiques et à gérer les différentes conditions aux limites sur la température. En particulier, la modélisation du terme  $Y_{\varepsilon_\theta}$  a nécessité l'introduction de différents

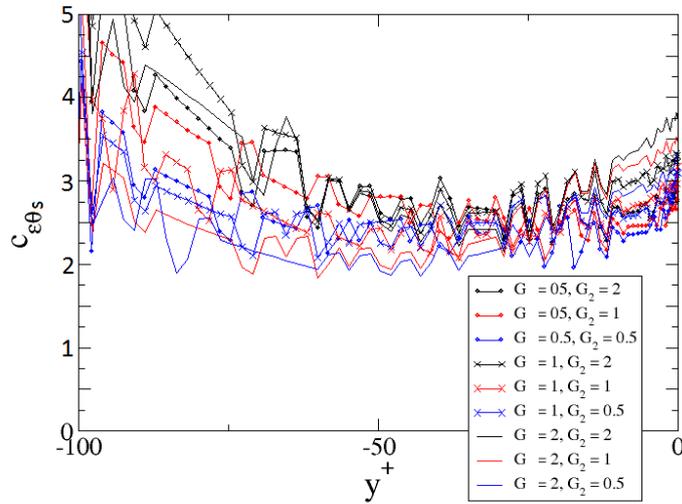


FIGURE 4.14. – Évaluation *a priori* de la constante  $c_{\epsilon_{\theta s}}$  dans la partie solide réalisée par Bédidi (2016) avec les données DNS de Flageul *et al.* (2015) pour différentes configurations de transfert thermique conjugué.  $G$  désigne le rapport entre les diffusivités thermiques du solide et du fluide et  $G_2$  le rapport entre les conductivités thermiques (cf. chapitre 6).

paramètres afin de pouvoir restituer le comportement asymptotique du terme exact qui dépend fortement de la condition aux limites. La modélisation du taux de dissipation  $\epsilon_{\theta}$  est essentielle puisqu'il constitue l'unique problème de modélisation de l'équation de transport de la variance de température  $\overline{\theta'^2}$ . Assurer le bon comportement asymptotique de la variable  $\epsilon_{\theta}$  pour toutes les conditions aux limites sur la température entraîne une bonne prédiction de  $\overline{\theta'^2}$ . Enfin, la modélisation de la température moyenne, de la variance de température et de sa dissipation dans le solide est nécessaire pour traiter les cas de transfert thermique.

Des modélisations bas-Reynolds pour les flux thermiques turbulents, pour la variance de température et pour son taux de dissipation capables de gérer différentes conditions aux limites sur la température ont été développés et testés en *a priori*. La suite du manuscrit va donc être consacrée à la validation *a posteriori* de tous ces développements.

# Chapitre 5

---

## Validation des modélisations des flux thermiques turbulents, de la variance de la température et de sa dissipation

### Sommaire

---

5.1	Mise en place du cas test . . . . .	100
5.2	Modélisation de la variance de température $\overline{\theta'^2}$ et de sa dissipation $\varepsilon_\theta$ . . . . .	103
5.2.1	Prédictions des variables $\overline{\theta'^2}$ et $\varepsilon_\theta$ . . . . .	103
5.2.2	Prédictions des bilans des équations de transport de $\overline{\theta'^2}$ et de $\varepsilon_\theta$ . . . . .	106
5.3	Modélisation des flux thermiques turbulents $\overline{u'_i\theta'}$ . . . . .	106
5.3.1	Évaluation <i>a posteriori</i> de l'équilibre entre les termes de brouillage, de diffusion moléculaire et de dissipation et prédictions des bilans des équations de transport de $\overline{u'\theta'}$ et de $\overline{v'\theta'}$ . . . . .	108
5.3.2	Prédictions des variables $\overline{u'\theta'}$ et $\overline{v'\theta'}$ . . . . .	113
5.4	Champs de température et de vitesse <i>a posteriori</i> . . . . .	113
5.5	Conclusion du chapitre . . . . .	115

---

L'objectif de cette partie est de valider les nouveaux modèles pour les flux thermiques turbulents  $\overline{u'_i\theta'}$ , la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  et sa dissipation  $\varepsilon_\theta$  proposés dans ce manuscrit en effectuant des simulations CFD complètes. Le code de CFD dans lequel les différents modèles sont implémentés et testés, est le logiciel *Code\_Saturne*<sup>1</sup>, créé et développé par EDF R&D. *Code\_Saturne* est un code de calcul *open-source* utilisant une méthode de type volumes finis colocalisés pour résoudre numériquement les équations de Navier-Stokes sur tout type de maillage. Il est basé sur une méthode de prédiction/correction se servant de l'interpolation de Rhie & Chow (1983) ainsi qu'un algorithme de forme SIMPLEC pour l'étape de correction de la pression. Plus de détails sur les schémas de discrétisation sont à retrouver dans l'article de Archambeau *et al.* (2004) et en annexe C. Ainsi, ce code de calcul permet la réalisation de calculs *a posteriori* avec les modèles développés dans cette thèse.

---

1. [www.code-saturne.org](http://www.code-saturne.org)

## 5.1. MISE EN PLACE DU CAS TEST

Le cas test étudié dans cette partie est l'écoulement dans un canal plan en convection forcée. La stratégie est de reproduire la configuration mise en place par Flageul *et al.* (2015) décrite dans le paragraphe 3.4.2 pour ses simulations DNS et de pouvoir ainsi comparer et valider les modèles de ce manuscrit avec les données DNS. L'écoulement est alors caractérisé par deux nombres sans dimension : le nombre de Reynolds de frottement  $Re_\tau = 149$  et le nombre de Prandtl  $Pr = 0.71$ . Pour pouvoir traiter le cas en périodique dans la direction tangentielle  $x$ , la pression  $p$  et la température  $T$  doivent être décomposées. La pression s'écrit alors

$$p = \bar{p} - \frac{\tau_w}{\delta} x, \quad (5.1)$$

où  $\tau_w = \mu \left. \frac{d\bar{u}}{dy} \right|_{y=0} = -\delta \frac{d\bar{P}}{dx}$  désigne la contrainte de frottement à la paroi avec  $\delta$  qui représente la demi-hauteur du canal. Le terme  $-\frac{\tau_w}{\delta} x$ , une fois introduit dans l'équation de quantité de mouvement, pilotera l'écoulement du fluide. Le chauffage au niveau de la paroi implique une augmentation progressive de la température. Ainsi, pour éviter que la température ne tende vers l'infini, il est nécessaire d'introduire un terme puits. On décompose alors la température de la manière suivante :

$$T = ax + b - \theta, \quad (5.2)$$

où  $\theta$  représente l'écart de température à la partie linéaire. Les nouvelles variables  $\bar{p}$  et  $\theta$  sont alors périodiques (Kasagi *et al.*, 1992). L'introduction de ce changement de variable dans l'équation de transport de la température :

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{u} T \right) = \underline{\nabla} \cdot (\lambda \underline{\nabla} T) \quad \text{où} \quad \underline{u} = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2 + u_3 \underline{e}_3, \quad (5.3)$$

donne alors :

$$\rho C_p \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \theta \right) = \underline{\nabla} \cdot (\lambda \underline{\nabla} \theta) + \rho C_p a u_1. \quad (5.4)$$

Le but est de déterminer l'expression du coefficient  $a$  pour le cas d'un écoulement dans un canal plan en convection forcée. Soit  $\Omega$  le domaine du canal plan représenté par la Fig. 5.1,  $\Sigma_{w1}$  et  $\Sigma_{w2}$  les surfaces des parois inférieure et supérieure du canal, et  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  les surfaces d'entrée et de sortie de l'écoulement. Le vecteur  $\underline{n}_*$  représente le vecteur normal sortant à la surface  $\Sigma_*$ . On suppose à présent que le champ de température est stationnaire et homogène dans les direction  $x$  et  $z$  et ainsi l'Eq. (5.3) se réécrit

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} T = \underline{\nabla} \cdot (\kappa \underline{\nabla} T). \quad (5.5)$$

En intégrant l'Eq. (5.5) sur  $\Omega$  puis en appliquant le théorème de Green-Ostrogradski, il vient

$$\int_{\Omega} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} T d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\nabla} \cdot (\kappa \underline{\nabla} T) d\Omega, \quad (5.6)$$

$$\int_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} \underline{u} \cdot T \underline{n} dS + \int_{\Sigma_{w1} \cup \Sigma_{w2}} \underline{u} \cdot T \underline{n} dS = \int_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} \kappa \underline{\nabla} T \cdot \underline{n} dS + \int_{\Sigma_{w1} \cup \Sigma_{w2}} \kappa \underline{\nabla} T \cdot \underline{n} dS. \quad (5.7)$$

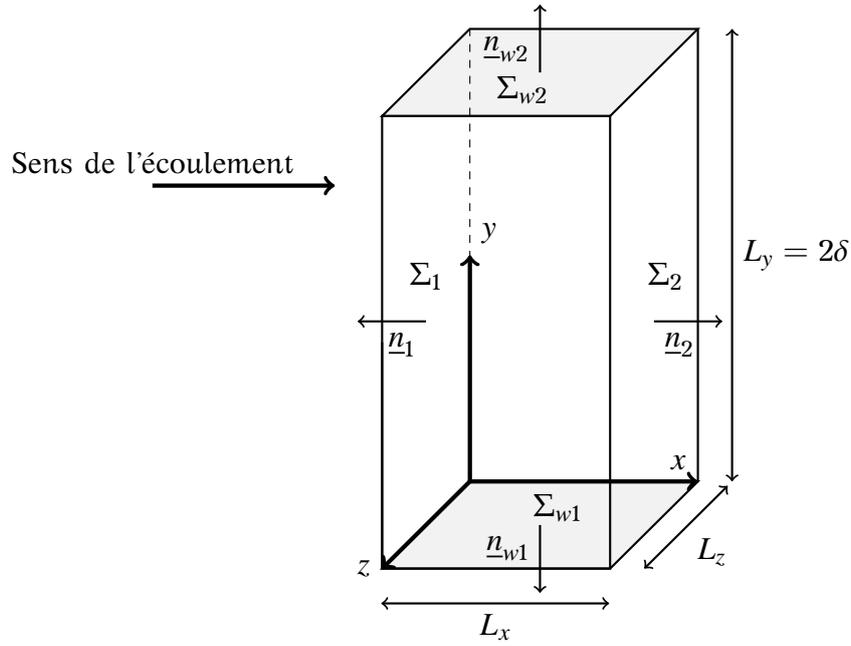


FIGURE 5.1. – Géométrie du domaine d'étude et annotations

En introduisant la décomposition de  $T$  (Eq. 5.2) dans l'Eq. (5.7) et en prenant en compte la condition d'adhérence en paroi (vitesse nulle à la paroi), le membre de gauche de l'Eq. (5.7) devient

$$\int_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} \underline{u} \cdot T \cdot \underline{n} dS = \int_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} a \underline{u} \cdot \underline{n} x dS - \int_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} \theta \underline{u} \cdot \underline{n} dS + \int_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} b \underline{u} \cdot \underline{n} dS. \quad (5.8)$$

Le terme  $\int_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} b \underline{u} \cdot \underline{n} dS = \int_{\partial\Omega} b \underline{u} \cdot \underline{n} dS$  s'écrit également sous la forme suivante (théorème de Green-Ostrogradski) :  $\int_{\Omega} b \nabla \cdot \underline{u} d\Omega$ . On peut alors conclure que ce terme est nul puisque l'équation de continuité s'écrit  $\nabla \cdot \underline{u} = 0$ . De plus, comme la vitesse et la variable  $\theta$  sont périodiques, le terme  $\int_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} \theta \underline{u} \cdot \underline{n} dS$  est également nul. Enfin, on définit les surfaces  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  placées respectivement à des distances  $x = 0$  et  $x = L_x$ . On peut alors écrire :

$$\int_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} a \underline{u} \cdot \underline{n} x dS = \int_{\Sigma_2} a \underline{u} \cdot \underline{n} L_x dS = a u_b L_x \Sigma_2 = a u_b L_x L_y L_z, \quad (5.9)$$

où  $u_b$  désigne la vitesse débitante, et  $L_y$  la hauteur du canal ( $L_y = 2\delta$  avec  $\delta$  la demi-hauteur du canal).

Intéressons-nous maintenant au membre de droite de l'Eq. (5.7). La périodicité de la variable  $\theta$  ainsi que l'égalité  $\Sigma_1 = \Sigma_2$  indique que le terme  $\int_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} \kappa \nabla T \cdot \underline{n} dS$  est nul. Le deuxième terme du membre de droite de l'Eq. (5.7) représente le flux de chaleur  $q_w$  (où  $q_w = \int_{\Sigma_w} \lambda \nabla T \cdot \underline{n} dS$ ) aux parois supérieur et inférieur du canal :

$$\int_{\Sigma_{w1} \cup \Sigma_{w2}} \kappa \nabla T \cdot \underline{n} dS = \frac{2}{\rho C_p} q_w. \quad (5.10)$$

Par conséquent, l'égalité entre les Eqs. (5.9) et (5.10) nous permet de déduire l'expression de la variable  $a$  en considérant  $L_x = L_z = 1$  et  $L_y = 2$  :

$$a = \frac{q_w}{\rho C_p u_b} \frac{1}{u_b}. \quad (5.11)$$

### Échelles caractéristiques et équations adimensionnées des grandeurs moyennes

Les échelles de longueur  $\delta$ , de masse  $\rho$ , de vitesse  $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$  (vitesse de frottement à la paroi) et de température  $T_\tau = q_w/\rho c_p u_\tau$  (température de frottement), où  $q_w$  désigne le flux de chaleur à la paroi, interviendront dans l'adimensionnement des différentes grandeurs. Les équations moyennées décrivant l'écoulement dans un canal plan en convection forcée s'écrivent

$$\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_i^*} = 0, \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial t^*} + \bar{u}_j^* \frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 \bar{u}_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} - \frac{\overline{\partial u'_i u'_j}}{\partial x_j^*} - \delta_{i1}, \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}^*}{\partial t^*} + \bar{u}_j^* \frac{\partial \bar{\theta}^*}{\partial x_j^*} = \frac{1}{Re_\tau Pr} \frac{\partial^2 \bar{\theta}^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} - \frac{\overline{\partial u'_j \theta'}}{\partial x_j^*} + \frac{\bar{u}_1^*}{u_b^*}, \quad (5.14)$$

où les termes sources  $\delta_{i1}$  (symbole de Kronecker) dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, et  $\bar{u}_1^+/u_b^*$  dans l'équation de conservation de l'énergie, proviennent de la décomposition de la pression et de la température Eqs. (5.1) et (5.2). La viscosité cinématique  $\nu$  adimensionnée est égale à  $1/Re_\tau$  et la diffusivité thermique  $\kappa$  adimensionnée vaut  $1/(Re_\tau Pr)$ .

Dans la suite de ce chapitre, les grandeurs physiques et inconnues du problème seront adimensionnées de la manière suivante :

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}; \quad \bar{\theta}^+ = -\frac{\bar{\theta} - \theta_w}{T_\tau}; \quad \bar{u}^+ = \frac{\bar{u}_1}{u_\tau}; \quad \overline{u'_i \theta'}^+ = \frac{\overline{u'_i \theta'}}{u_\tau T_\tau}.$$

### Conditions aux limites

Des conditions aux limites périodiques sont imposées à toutes les variables dans la direction de l'écoulement  $x$ , et des conditions de symétrie dans la direction tangentielle à la paroi  $z$  et au centre du canal ( $y = \delta$ ), de manière à réduire le domaine de calcul à un demi-canal. À la paroi ( $y = 0$ ), une condition de non-glisement est appliquée pour la dynamique, et plusieurs types de conditions aux limites sont envisagés pour la température :

- une température fixée avec  $T_w = 0$
- un flux de chaleur imposé où  $q_w^* = 1$
- une condition de transfert thermique conjugué pour laquelle le flux de chaleur à l'interface fluide/solide est conservé.

Pour une température imposée à la paroi, la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  est nulle et son taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$  tend vers  $\lim_{y \rightarrow 0} \kappa \overline{\theta'^2}/y^2$ . Pour un flux de chaleur imposé, une condition de

Neumann homogène est appliquée  $\overline{\theta'^2}$  et à  $\varepsilon_\theta$ . Dans un premier temps, un cas idéal de transfert thermique conjugué est considéré (le solide et le fluide possèdent les mêmes propriétés), ce qui implique la continuité de  $\overline{\theta'^2}$  et de  $\varepsilon_\theta$  à l'interface fluide/solide et la conservation de leur flux.

Les modèles développés dans ce manuscrit pour les flux thermiques turbulents  $\overline{u'_i \theta'}$ , la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  et sa dissipation  $\varepsilon_\theta$  seront comparés aux modèles proposés par Dehoux *et al.* (2017) et aux données DNS de Flageul *et al.* (2015).

## 5.2. MODÉLISATION DE LA VARIANCE DE TEMPÉRATURE $\overline{\theta'^2}$ ET DE SA DISSIPATION $\varepsilon_\theta$

Pour rappel, les estimations de la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  et de son taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$  sont essentielles pour calculer l'échelle de temps thermique  $\mathcal{T}_\theta$ . Le comportement de cette échelle est fortement influencé par la condition aux limites sur la température, et est utilisé par l'intermédiaire du ratio des échelles de temps thermique et dynamique  $R$  dans la modélisation des flux thermiques turbulents dans le but de prendre en compte l'influence de la condition aux limites sur la température. Des prédictions correctes de  $\overline{\theta'^2}$  et  $\varepsilon_\theta$  sont ainsi capitales pour le bon fonctionnement de la nouvelle modélisation des flux thermiques turbulents.

### 5.2.1. Prédictions des variables $\overline{\theta'^2}$ et $\varepsilon_\theta$

La modélisation de  $\overline{\theta'^2}$  et  $\varepsilon_\theta$  présentée dans le chapitre 4 donne d'excellents résultats pour toutes les conditions aux limites sur la température. Les Figs. 5.2, 5.3, 5.5 et 5.4 comparent  $\overline{\theta'^2}$  et  $\varepsilon_\theta$  prédits par le nouveau modèle et par le modèle de Dehoux *et al.* (2017) avec les données DNS de Flageul *et al.* (2015).

Le comportement de la variable  $\varepsilon_\theta$  prédit par le nouveau modèle reproduit celui donné par la DNS pour toutes les conditions aux limites sur la température. Contrairement à la corrélation proposée par Dehoux  $\varepsilon_\theta = \frac{\overline{\theta'^2}\varepsilon}{2Rk}$  (voir chapitre 2, Eq. (2.108), pour plus de précisions) qui ne parvient pas à capter l'influence de la condition aux limites sur  $\varepsilon_\theta$  et qui surestime sa valeur à la paroi, le nouveau modèle est capable de restituer le comportement asymptotique de  $\varepsilon_\theta$  dans les trois cas. Le comportement loin de la paroi est également mieux prédit par le nouveau modèle que par la corrélation de Dehoux. Il est à noter que le nouveau modèle surestime légèrement  $\varepsilon_\theta$  dans la zone tampon pour les trois types de conditions aux limites. Enfin, la Fig. 5.5 montre une bonne estimation de la variable  $\varepsilon_\theta$  dans la partie solide pour un cas de transfert thermique conjugué. Pour rappel, le cas étudié est un cas idéal où les propriétés thermiques du fluide et du solide sont les mêmes, ce qui assure la continuité de  $\varepsilon_\theta$  à l'interface.

Ainsi, comme la variable  $\varepsilon_\theta$  est convenablement estimée, le comportement asymptotique de  $\overline{\theta'^2}$  est correctement reproduit par le nouveau modèle pour tous les types de conditions aux limites sur la température, contrairement au modèle de Dehoux qui est seulement capable de prédire le comportement asymptotique pour un cas à température imposée. Le nouveau modèle donne également une meilleure estimation de  $\overline{\theta'^2}$  loin de la paroi par rapport au modèle de Dehoux. Cependant, il est à noter une légère sous-estimation de cette variable dans la zone tampon. En transfert thermique conjugué, la corrélation de Dehoux n'a plus de sens car  $k = \varepsilon = 0$  dans le domaine solide. Ainsi,  $\varepsilon_\theta$  est fixé à zéro dans le solide pour ne pas faire diverger le calcul. La Fig. 5.4 montre notamment une estimation correcte de  $\overline{\theta'^2}$  dans le solide pour un cas de transfert thermique conjugué et la continuité de la variable est bien reproduite à l'interface fluide/solide.

Par conséquent, les modèles bas-Reynolds pour la variance de  $\overline{\theta'^2}$  et pour son taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$  proposés dans ce manuscrit sont capables de gérer trois types de conditions aux limites sur la température tout en donnant des estimations très précises de ces variables, et en particulier dans la zone proche-paroi. Ces modèles sont supérieurs à l'approche proposée par Dehoux qui n'est pas capable de prendre en compte les différentes conditions aux limites. Une étude plus approfondie sur les résultats pour la modélisation des termes des équations de transport de  $\overline{\theta'^2}$  et de  $\varepsilon_\theta$  sera présentée dans le prochain paragraphe.

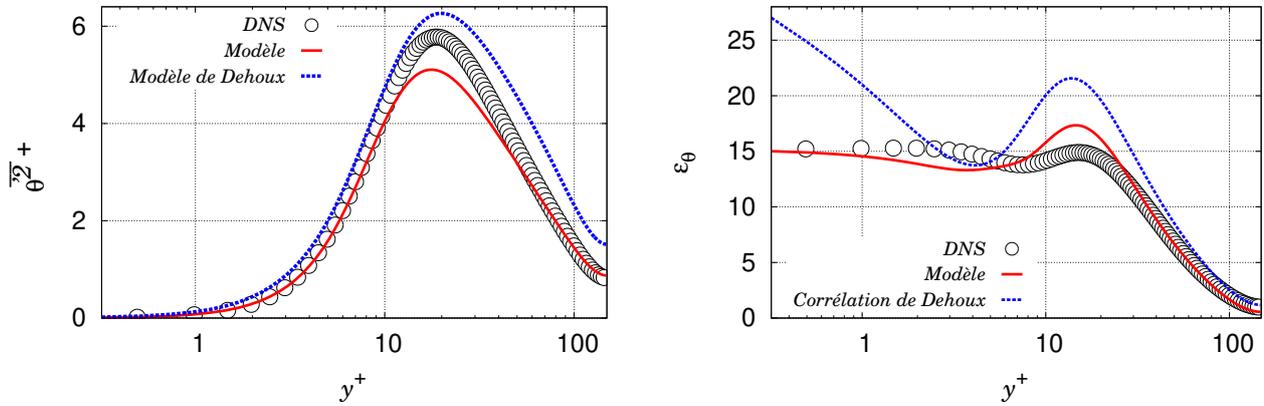


FIGURE 5.2. – Évaluation *a posteriori* de la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  (gauche) et de son taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$  (droite) pour un cas à **température imposée** à la paroi.

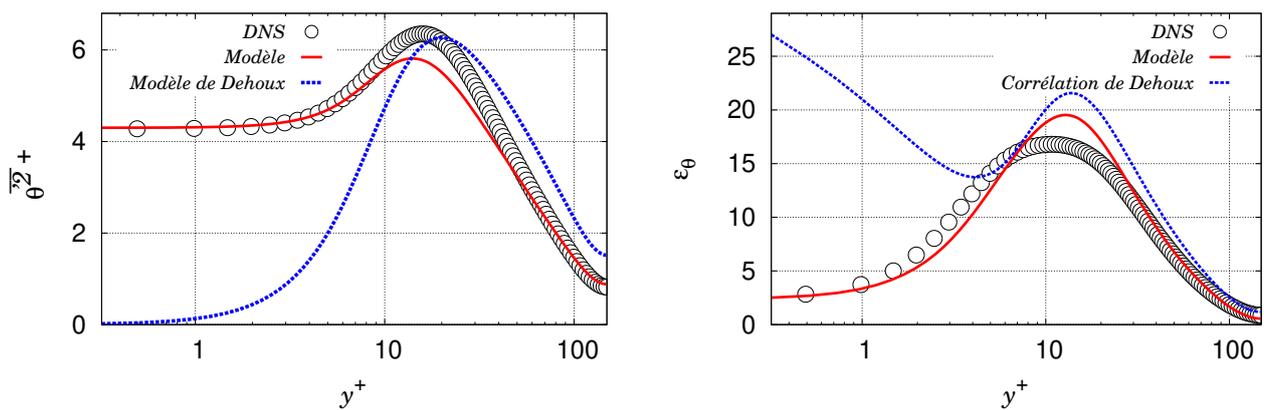


FIGURE 5.3. – Évaluation *a posteriori* de la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  (gauche) et de son taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$  (droite) pour un cas à **flux de chaleur imposé** à la paroi.

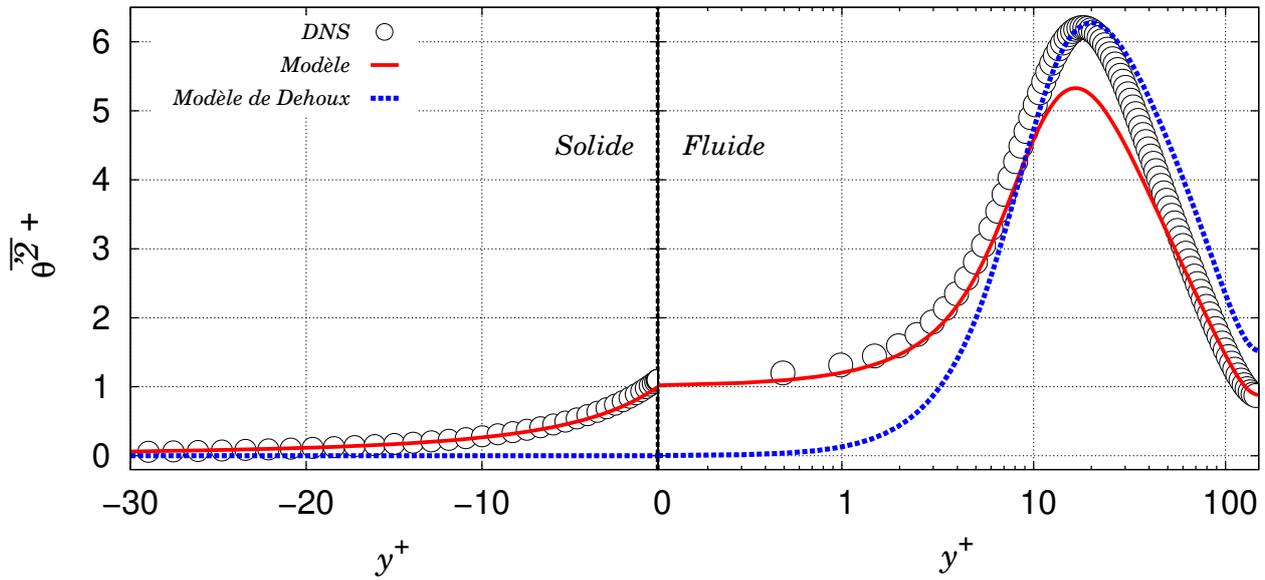


FIGURE 5.4. – Évaluation *a posteriori* de la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  pour un cas de **transfert thermique conjugué** dans la partie solide (gauche) et dans la partie fluide (droite).

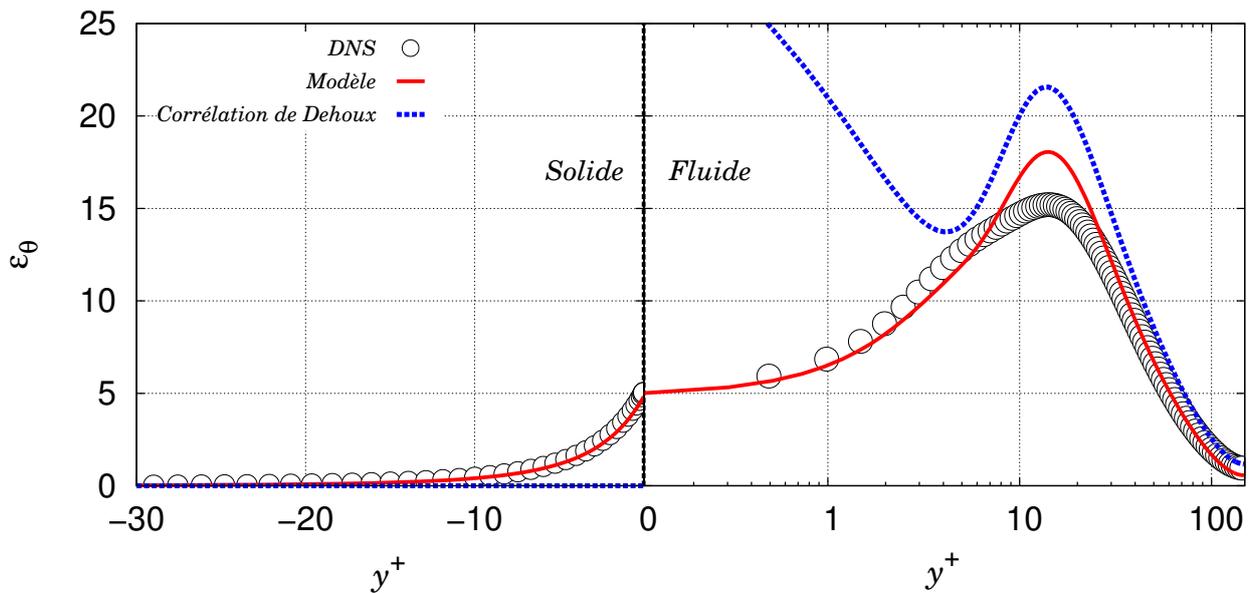


FIGURE 5.5. – Évaluation *a posteriori* du taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$  pour un cas de **transfert thermique conjugué** dans la partie solide et dans la partie fluide.

### 5.2.2. Prédiction des bilans des équations de transport de $\overline{\theta'^2}$ et de $\varepsilon_\theta$

Les Figs. 5.6, 5.7 et 5.8 comparent les termes des équations de transport de la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  et du taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$  prédits par le nouveau modèle avec les termes DNS de Flageul *et al.* (2015). Pour rappel, les termes de diffusion moléculaire  $D_\theta^k$  et de production  $P_\theta$  de l'équation de transport de  $\overline{\theta'^2}$  sont exacts, et le terme de diffusion turbulente  $D_\theta^t$ , qui n'est pas prépondérant dans ce cas test, est modélisé par l'hypothèse de Daly & Harlow (1970). Ainsi,  $\varepsilon_\theta$  est le terme majeur dans l'équation de transport de  $\overline{\theta'^2}$ . Or, l'excellente prédiction de  $\varepsilon_\theta$  pour les trois cas a été observée dans le paragraphe précédent. Par conséquent, le bilan de l'équation de transport de  $\overline{\theta'^2}$  est précisément reproduit par le nouveau modèle pour les trois conditions aux limites sur la température.

La prédiction du bilan de l'équation de transport du taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$  confirme les résultats *a priori* exposés dans le chapitre 4. En effet, le comportement asymptotique de la somme des termes de production par gradient de température moyenne et de vitesse moyenne  $P_{\varepsilon_\theta}^1 + P_{\varepsilon_\theta}^2$  reproduit convenablement le comportement DNS pour le cas à température imposée, mais sous-estime le cas à flux de chaleur imposé comme cela a été observé sur les tests *a priori*. De plus,  $P_{\varepsilon_\theta}^1 + P_{\varepsilon_\theta}^2$  prédit par le nouveau modèle tend vers 0 à la paroi contrairement à la DNS qui tend vers une faible constante. Ce comportement particulier a également été remarqué et commenté sur les tests *a priori* dans le chapitre 4. Le comportement de la production turbulente  $P_{\varepsilon_\theta}^4$  est correctement restitué par le nouveau modèle pour des cas à température imposée à la paroi et de transfert thermique conjugué, et est légèrement sous-estimé pour un cas à flux de chaleur imposé dans la zone proche-paroi. Enfin, le véritable point fort de la nouvelle modélisation concerne le modèle de  $Y_{\varepsilon_\theta}$  qui est le terme majeur en proche-paroi (avec le terme de diffusion turbulente  $D_{\varepsilon_\theta}^k$  qui est exact), capable de capter l'influence de la condition aux limites sur la température. Pour le cas à température imposée, le modèle reproduit la tendance de la courbe DNS pour le terme  $Y_{\varepsilon_\theta}$ . Les deux ruptures de pente à  $y^+ = 4$  et  $y^+ = 8$  sont dues aux échelles de temps thermique et dynamique de Durbin, ce qui avait été observé en *a priori*. De plus, bien que le modèle ne parvienne pas à prédire la même valeur de  $Y_{\varepsilon_\theta}$  à la paroi que la DNS, il est capable de reproduire la tendance de la courbe DNS dans la zone proche-paroi pour le cas à flux de chaleur imposé. Enfin, la tendance de la courbe de  $Y_{\varepsilon_\theta}$  donnée par la DNS pour le cas de transfert thermique conjugué est respectée par le modèle.

Par conséquent, le modèle du taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$  proposé dans ce manuscrit est capable de prendre en compte l'influence de trois conditions aux limites différentes sur la température. Les bilans de l'équation de transport de  $\varepsilon_\theta$  présentés dans ce paragraphe confirment les résultats *a priori* et sont de bonne facture au vu de la complexité des comportements asymptotiques induits par les différentes conditions aux limites. De plus, la variable  $\varepsilon_\theta$  étant correctement reproduite dans les trois cas, les bilans estimés de l'équation de transport de la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  sont en adéquation avec les données DNS de Flageul *et al.* (2015), et ainsi, la variable  $\overline{\theta'^2}$  est parfaitement estimée dans les trois cas tests considérés.

### 5.3. MODÉLISATION DES FLUX THERMIQUES TURBULENTS $\overline{u'_i \theta'}$

La modélisation des flux thermiques turbulents dans le chapitre 3 repose sur un point clé : l'utilisation du ratio des échelles de temps thermique et dynamique  $R$ , et en particulier sur son comportement asymptotique, qui dépend de la condition aux limites sur la température à la paroi. Pour rappel, le ratio  $R$  dépend de l'énergie turbulente  $k$ , du taux de dissipation  $\varepsilon$ , de la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  et de son taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$ , et tend vers le nombre de Prandtl à la paroi  $Pr$  pour un cas à température imposée, et vers l'infini sinon. Ainsi, les variables

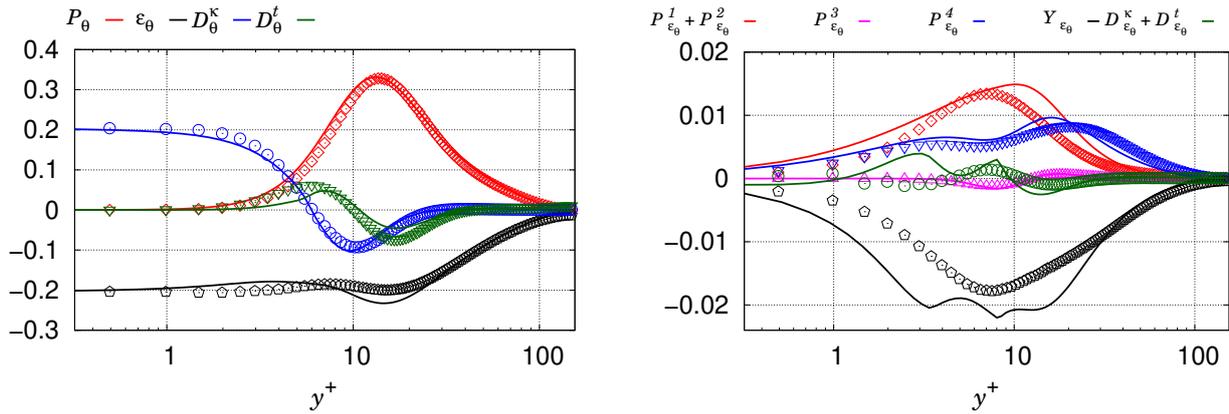


FIGURE 5.6. – Évaluation *a posteriori* du bilan de la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  (gauche) et du bilan du terme de dissipation  $\varepsilon_\theta$  (droite) pour un cas à **température imposée** à la paroi.

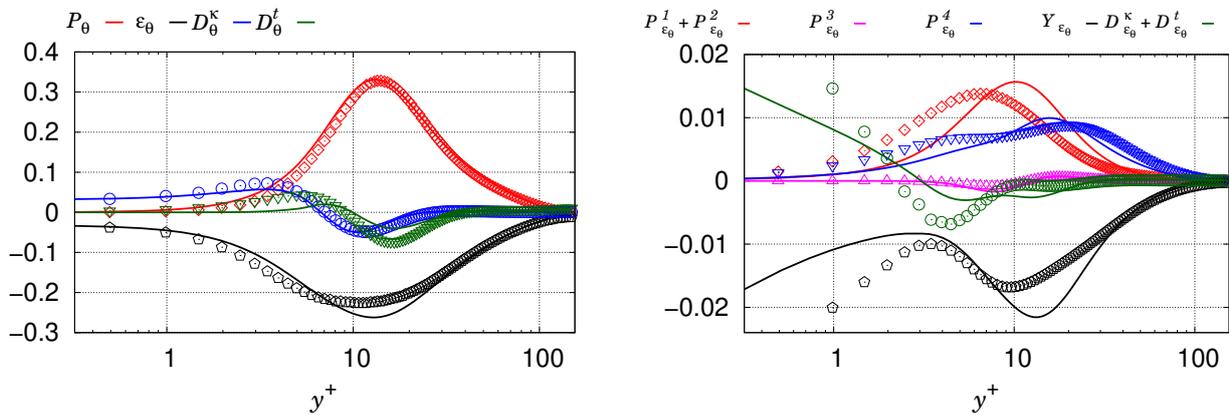


FIGURE 5.7. – Évaluation *a posteriori* du bilan de la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  (gauche) et du bilan du terme de dissipation  $\varepsilon_\theta$  (droite) pour un cas à **flux de chaleur imposé** à la paroi.

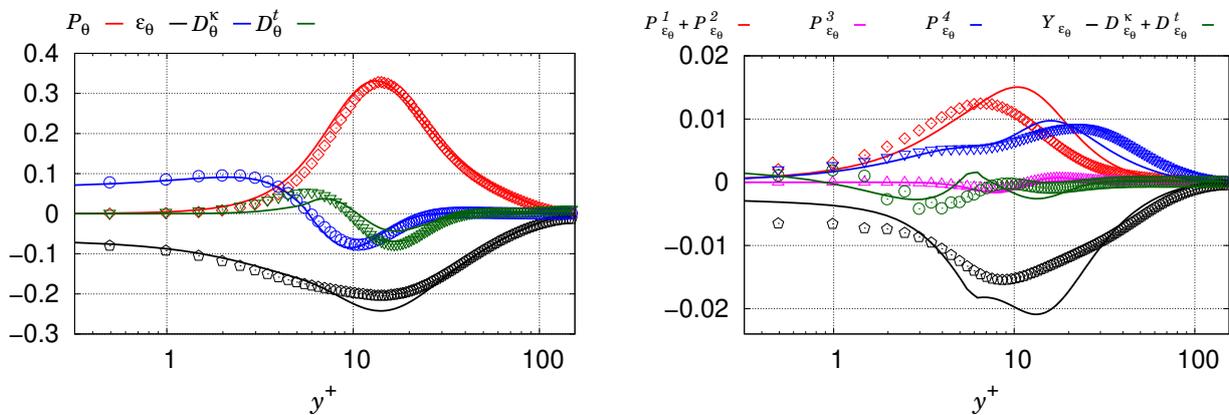


FIGURE 5.8. – Évaluation *a posteriori* du bilan de la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  (gauche) et du bilan du terme de dissipation  $\varepsilon_\theta$  (droite) pour un cas de **transfert thermique conjugué**.

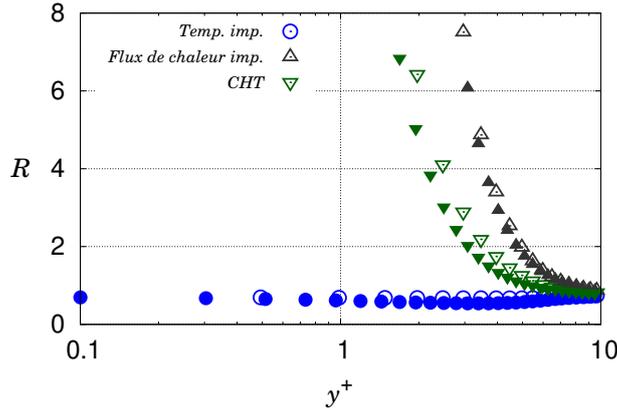


FIGURE 5.9. – Évaluation *a posteriori* du ratio des échelles de temps thermique et dynamique pour une température imposée, un flux de chaleur imposé à la paroi et un cas de transfert thermique conjugué.

turbulentes dynamiques étant correctement estimées par le modèle EBRSM (voir annexe B), et les variables  $\overline{\theta'^2}$  et  $\varepsilon_\theta$  par la nouvelle modélisation, le ratio  $R$  prédit reproduit correctement le comportement asymptotique donné par les DNS de Flageul *et al.* (2015) (Fig. 5.9).

### 5.3.1. Évaluation *a posteriori* de l'équilibre entre les termes de brouillage, de diffusion moléculaire et de dissipation et prédictions des bilans des équations de transport de $\overline{u'\theta'}$ et de $\overline{v'\theta'}$

Un des objectifs de cette partie est de confirmer les résultats *a priori* présentés dans le paragraphe 3.4.2. Pour rappel, l'équilibre entre les termes de brouillage  $\phi_{\theta i}^*$ , de dissipation  $\varepsilon_{\theta i}$  et de diffusion moléculaire  $D_{\theta i}^{v+\kappa}$  doit être respecté pour assurer le bon comportement asymptotique des flux thermiques turbulents. La Fig. 5.10 compare la somme de ces trois termes prédite par le nouveau modèle, par le modèle de Dehoux et fournie par les DNS de Flageul *et al.* (2015). Comme attendu, les deux modèles donnent de très bons résultats pour le cas à température imposée à la paroi. Il est à noter que le nouveau modèle donne une estimation légèrement plus précise de la somme des termes de la composante tangentielle  $\overline{u'\theta'}$  dans la zone tampon par rapport au modèle de Dehoux. Dans les trois cas, la somme est surestimée par les deux modèles dans la zone tampon pour la composante normale à la paroi  $\overline{v'\theta'}$  comme observé sur les tests *a priori*. D'une manière générale, les résultats des simulations pour la somme des termes de la composante  $\overline{v'\theta'}$  sont en accord avec les tests *a priori* : le comportement asymptotique de la somme est correctement reproduit par les deux modèles pour les trois cas.

Cependant, les simulations numériques des cas à flux de chaleur imposé et de transfert thermique conjugué donnent des résultats différents des tests *a priori* pour la somme des termes de l'équation de transport de  $\overline{u'\theta'}$ . En effet, ces simulations montrent que le comportement de la somme est correctement estimé par les deux modèles alors que d'après les tests *a priori*, la somme prédite par le modèle de Dehoux devrait tendre vers l'infini à la paroi. Ce mauvais comportement avait également été mis en évidence par les analyses asymptotiques du modèle de Dehoux, motivant le développement d'un nouveau modèle pour gérer les trois types de condition aux limites. Ainsi, pour comprendre pourquoi le modèle de Dehoux donne de bons résultats alors que, par définition, il ne devrait pas fonctionner, il faut tracer les termes de brouillage  $\phi_{\theta i}^*$ , de dissipation  $\varepsilon_{\theta i}$  et de diffusion moléculaire  $D_{\theta i}^{v+\kappa}$  séparément. En effet, les Fig. 5.11 et 5.12

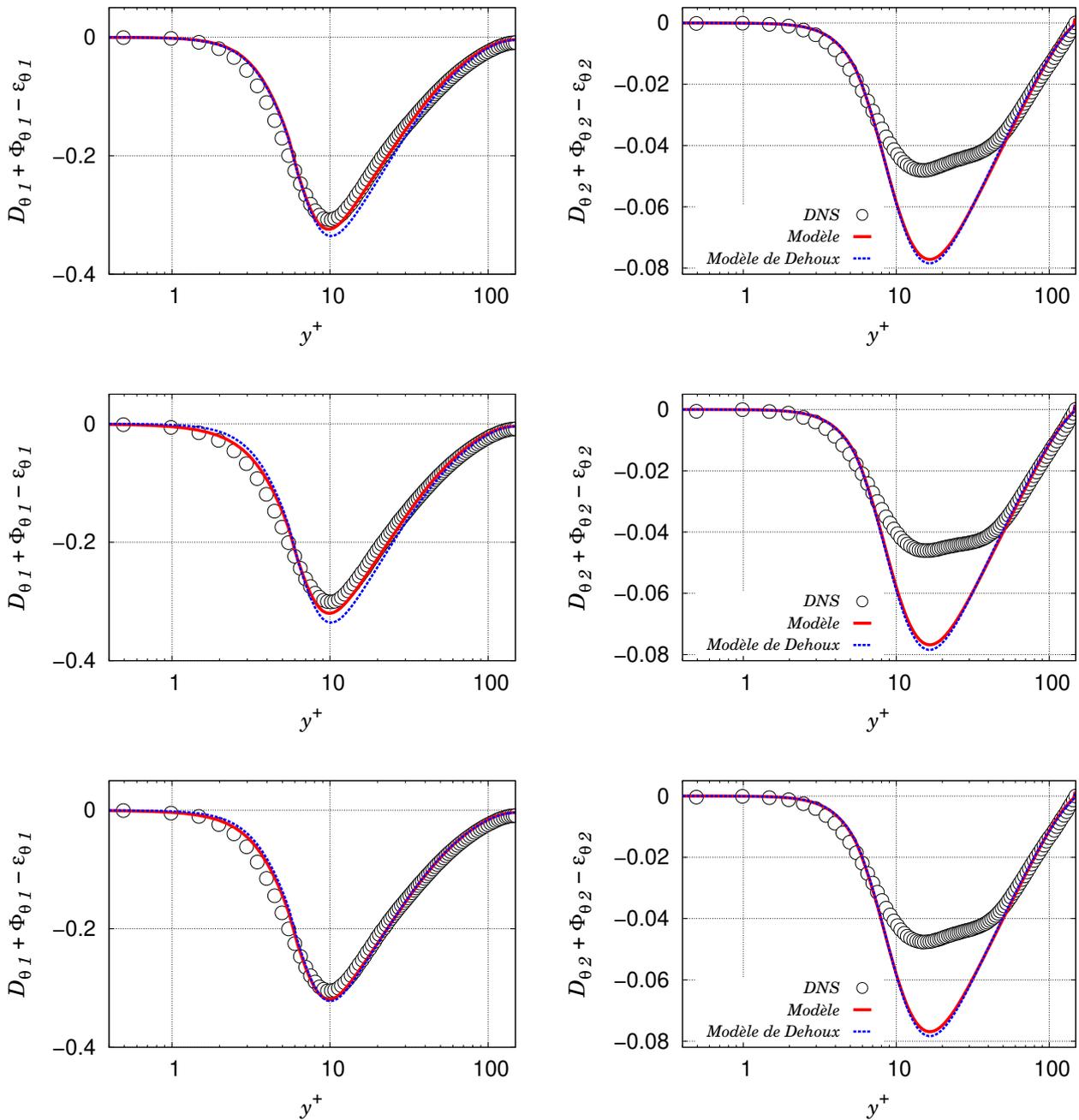


FIGURE 5.10. – Evaluation *a posteriori* de la somme des termes de diffusion moléculaire, de brouillage et de dissipation des flux thermiques turbulents pour toutes les conditions aux limites sur la température. Gauche : Composante tangentielle; Droite : composante normale à la paroi. Haut : **Température imposée**; Milieu : **Flux de chaleur imposé**; Bas : **Transfert thermique conjugué**.

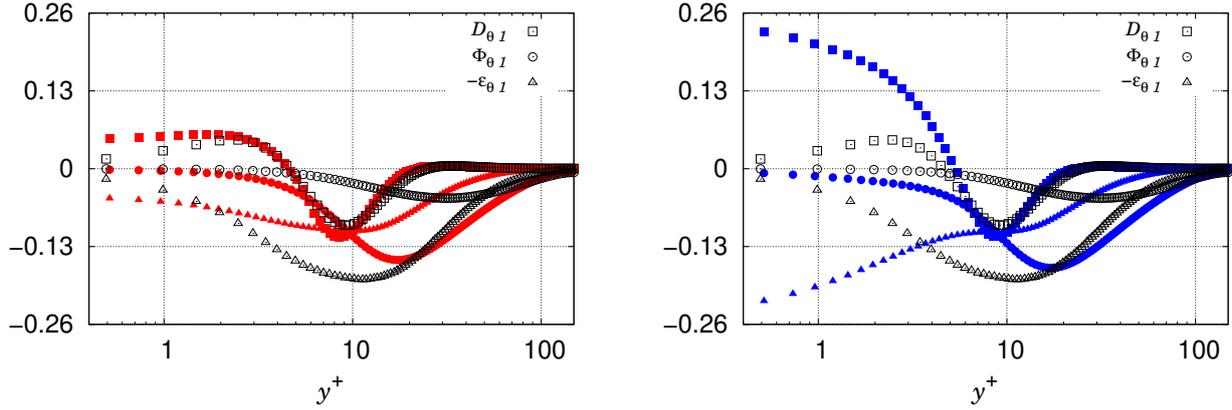


FIGURE 5.11. – Évaluation *a posteriori* des termes de diffusion moléculaire, de brouillage et de dissipation de l'équation de transport de la composante tangentielle à la paroi  $\overline{u'\theta'}$  des flux thermiques turbulents pour un **flux de chaleur imposé**. Symboles colorés : Modèle; Symboles noirs : DNS. Gauche : Nouveau modèle; Droite : Modèle de Dehoux *et al.* (2017).

(droite) comparent le modèle de Dehoux avec les termes DNS pour le cas à flux de chaleur imposé et pour le transfert thermique conjugué, et mettent en évidence des compensations d'erreurs. Dans les deux cas,  $\varepsilon_{\theta i}$  tend vers une grande valeur à la paroi et est tout simplement compensée par la diffusion moléculaire  $D_{\theta i}^{v+\kappa}$ . La deuxième observation est que le modèle de Dehoux se comporte de la même façon pour les deux conditions aux limites, il n'est pas capable de s'adapter, contrairement au nouveau modèle qui capte l'influence de la condition aux limites et restitue le comportement asymptotique des trois termes donné par la DNS. Par conséquent, le nouveau modèle permet de restituer correctement l'équilibre entre les termes de brouillage  $\phi_{\theta i}^*$ , de dissipation  $\varepsilon_{\theta i}$  et de diffusion moléculaire  $D_{\theta i}^{v+\kappa}$  en assurant le comportement asymptotique de chaque terme pour toutes les conditions aux limites sur la température.

Enfin, dans l'optique de conforter le bon comportement de la nouvelle formulation du modèle EBD FM proposée dans ce manuscrit, les bilans complets des équations de transport de  $\overline{u'\theta'}$  et de  $\overline{v'\theta'}$  ont été calculés. Ainsi, les Figs. 5.13, 5.14 et 5.15 comparent les bilans des équations de transport des flux thermiques turbulents prédits par le nouveau modèle avec les DNS de Flageul *et al.* (2015). Comme cela a été observé précédemment, les comportements asymptotiques des termes de brouillage  $\phi_{\theta 1}^*$ , de diffusion moléculaire  $D_{\theta 1}^{v+\kappa}$  et de dissipation  $\varepsilon_{\theta 1}$  sont correctement estimés pour les trois conditions aux limites sur la température. Cependant, le modèle éprouve des difficultés à prédire  $\phi_{\theta 1}^*$  et  $\varepsilon_{\theta 1}$  dans la zone tampon pour les trois cas. Ce phénomène a été observé dans les tests *a priori* et est une limite intrinsèque de la méthode à relaxation elliptique qui permet d'imposer le comportement proche et loin de la paroi, mais qui ne peut maîtriser la zone tampon.

Le modèle donne de très bons bilans pour la composante normale à la paroi  $\overline{v'\theta'}$  et respecte notamment les comportements asymptotiques des trois termes majeurs proche de la paroi  $D_{\theta 2}^{v+\kappa}$ ,  $\phi_{\theta 2}^*$  et  $\varepsilon_{\theta 2}$  pour les trois cas. Il est à noter une sur-estimation des termes de dissipation et de brouillage dans la zone tampon qui est également due à la méthode de relaxation elliptique. Une des conséquences de cette sur-estimation est la sous-estimation de la diffusion turbulente, qui s'adapte.

Dans l'ensemble, le nouveau modèle est capable d'estimer des bilans des équations de transport des flux thermiques turbulents très proches de la DNS et assure la bonne prédiction des flux thermiques turbulents.

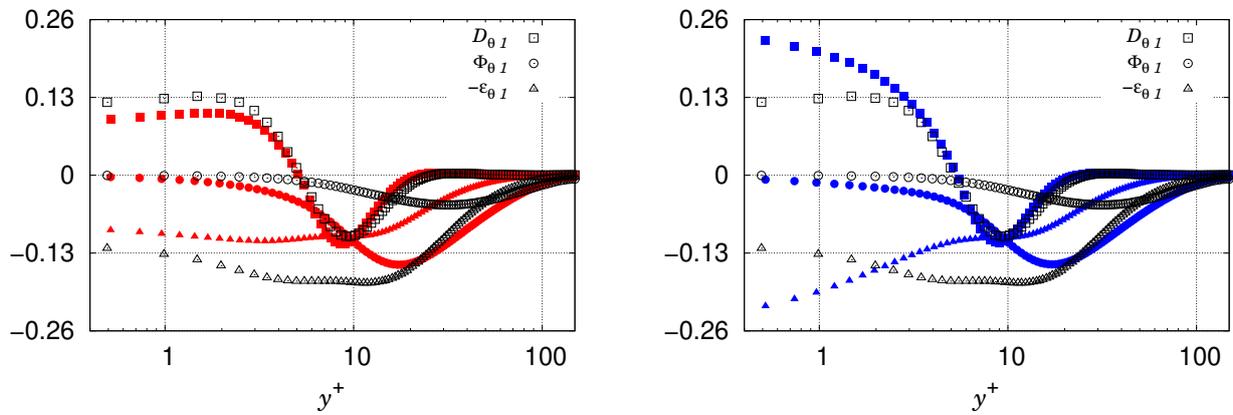


FIGURE 5.12. – Évaluation *a posteriori* des termes de diffusion moléculaire, de brouillage et de dissipation de l'équation de transport de la composante tangentielle à la paroi  $\overline{u'\theta'}$  des flux thermiques turbulents pour un cas de **transfert thermique conjugué**. Symboles colorés : Modèle; Symboles noirs : DNS. Gauche : Nouveau modèle; Droite : Modèle de Dehoux *et al.* (2017).

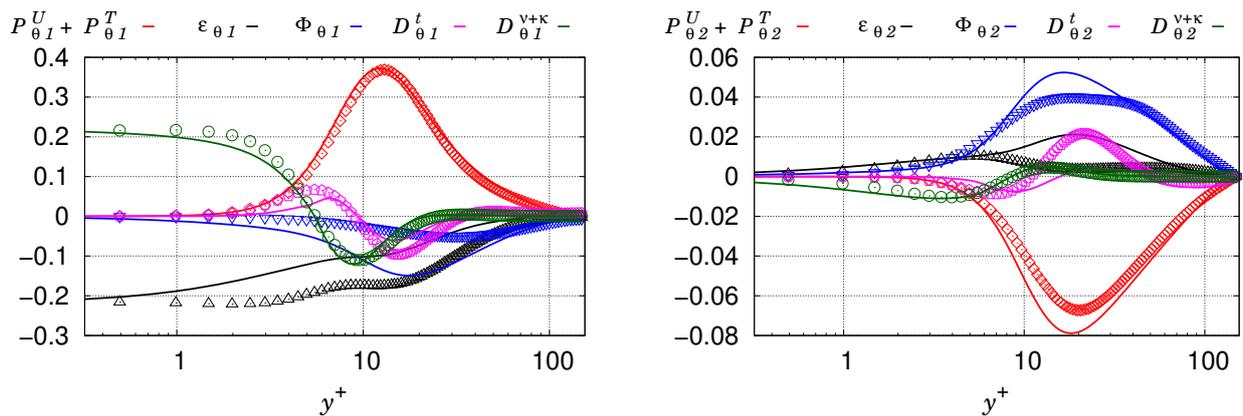


FIGURE 5.13. – Évaluation *a posteriori* du bilan de la composante tangentielle à la paroi des flux thermiques turbulents  $\overline{u'\theta'}$  (gauche) et de la composante normale  $\overline{v'\theta'}$  (droite) pour un cas à **température imposée** à la paroi.

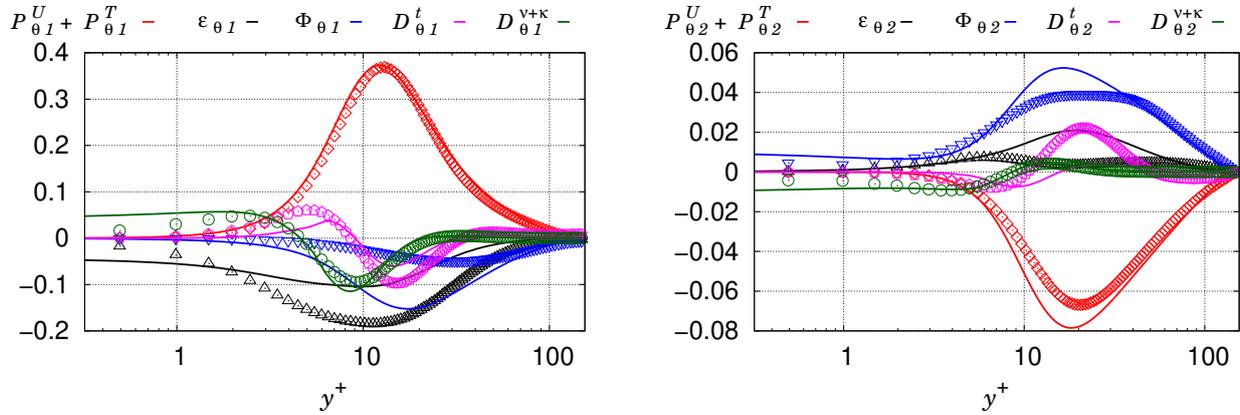


FIGURE 5.14. – Évaluation *a posteriori* du bilan de la composante tangentielle à la paroi des flux thermiques turbulents  $\overline{u'\theta'}$  (gauche) et de la composante normale  $\overline{v'\theta'}$  (droite) pour un cas à **flux de chaleur imposé** à la paroi.

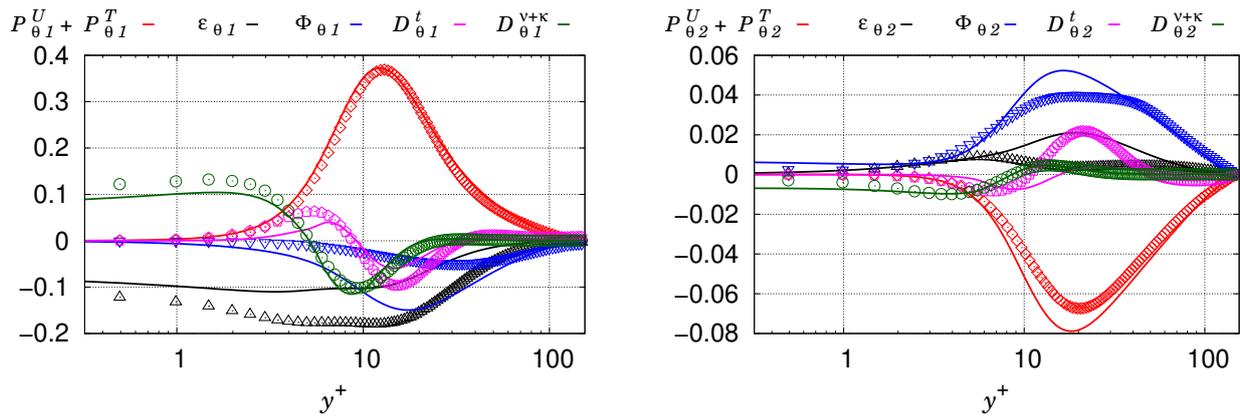


FIGURE 5.15. – Évaluation *a posteriori* du bilan de la composante tangentielle à la paroi des flux thermiques turbulents  $\overline{u'\theta'}$  (gauche) et de la composante normale  $\overline{v'\theta'}$  (droite) pour un cas de **transfert thermique turbulent**.

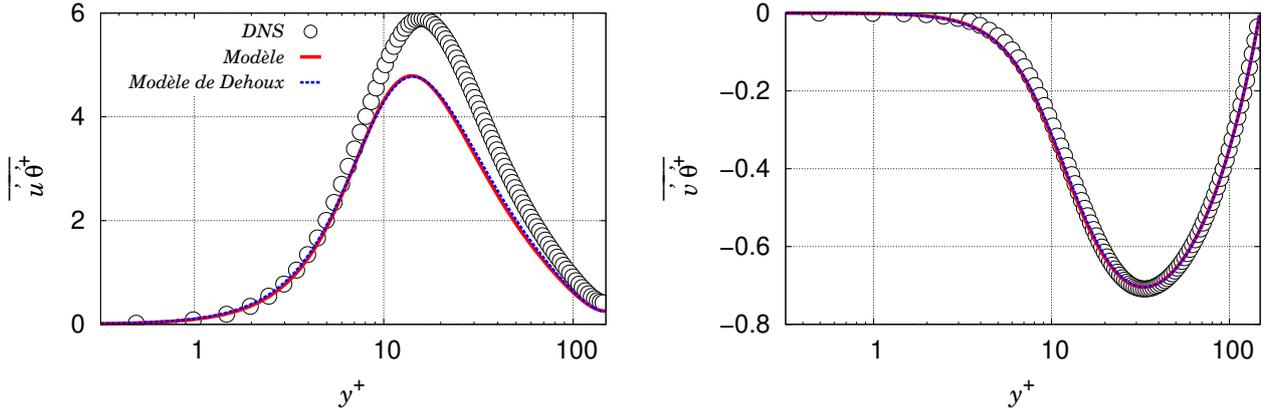


FIGURE 5.16. – Évaluation *a posteriori* de la composante tangentielle à la paroi des flux thermiques turbulents  $\overline{u'\theta'}$  (gauche) et de la composante normale  $\overline{v'\theta'}$  (droite) pour un cas à **température imposée** à la paroi.

### 5.3.2. Prédiction des variables $\overline{u'\theta'}$ et $\overline{v'\theta'}$

Les Figs. 5.16, 5.17 et 5.18 comparent les flux thermiques turbulents prédits par les deux modèles avec les données DNS de Flageul *et al.* (2015). Ainsi, la composante normale à la paroi des flux thermiques turbulents  $\overline{v'\theta'}$  est correctement estimée par les deux modèles pour les trois types de condition aux limites. Ce résultat répond aux observations effectuées sur les tests *a priori* et sur les résultats du paragraphe précédent, qui montraient la capacité des deux modèles à reproduire fidèlement le comportement asymptotique des termes du bilan de  $\overline{v'\theta'}$ .

Les deux modèles donnent les mêmes résultats pour la composante tangentielle à la paroi  $\overline{u'\theta'}$  des flux thermiques turbulents pour une température imposée à la paroi, ce qui confirme que le nouveau modèle dégénère correctement vers le modèle de Dehoux dans la zone proche-paroi qui avait été conçu pour gérer cette condition aux limites. De plus, même si l'équilibre entre les termes de brouillage  $\phi_{\theta i}^*$ , de dissipation  $\varepsilon_{\theta i}$  et de diffusion moléculaire  $D_{\theta i}^{v+\kappa}$  prédit par le modèle de Dehoux était admissible pour les cas à flux de chaleur imposé et de transfert thermique conjugué, on observe tout de même un effet délétère de la compensation d'erreurs entre  $\varepsilon_{\theta i}$  et  $D_{\theta i}^{v+\kappa}$  sur le comportement asymptotique de  $\overline{u'\theta'}$ . À l'inverse, le nouveau modèle estime correctement les termes  $\phi_{\theta i}^*$ ,  $\varepsilon_{\theta i}$  et  $D_{\theta i}^{v+\kappa}$  et prédit ainsi un excellent comportement asymptotique de  $\overline{u'\theta'}$  pour les cas à flux de chaleur imposé et de transfert thermique conjugué.

Il est également à noter que la prédiction de  $\overline{u'\theta'}$  par le nouveau modèle est très bonne au regard de ce qui est réalisé dans la plupart des applications industrielles, qui utilisent des modèles du premier ordre comme le SGDH, incapables de capter  $\overline{u'\theta'}$  (Dehoux *et al.*, 2017).

Par conséquent, le nouveau modèle est capable d'estimer les comportements asymptotiques de la composante tangentielle  $\overline{u'\theta'}$  et normale à la paroi  $\overline{v'\theta'}$  des flux thermiques turbulents pour les trois conditions aux limites sur la température. Il donne également une prédiction plus précise de  $\overline{u'\theta'}$  par rapport au modèle de Dehoux pour les cas à flux de chaleur imposée et de transfert thermique conjugué.

## 5.4. CHAMPS DE TEMPÉRATURE ET DE VITESSE *a posteriori*

La Fig. 5.19 montre la bonne prédiction de la vitesse moyenne  $\overline{u^+}$ . Ce résultat dépend de la modélisation de la dynamique de l'écoulement et sert à confirmer le bon comportement du

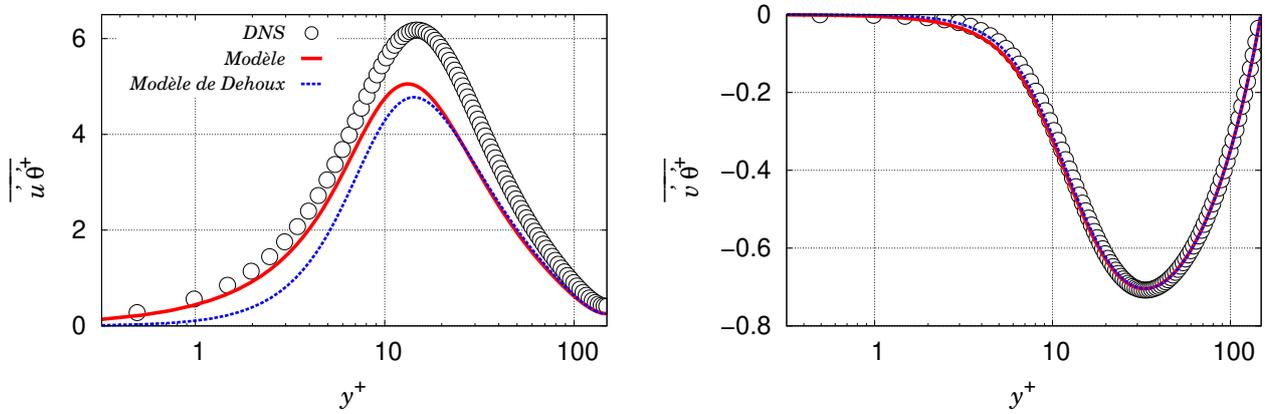


FIGURE 5.17. – Évaluation *a posteriori* de la composante tangentielle à la paroi des flux thermiques turbulents  $\overline{u'\theta'}$  (gauche) et de la composante normale  $\overline{v'\theta'}$  (droite) pour un cas à **flux de chaleur imposé** à la paroi.

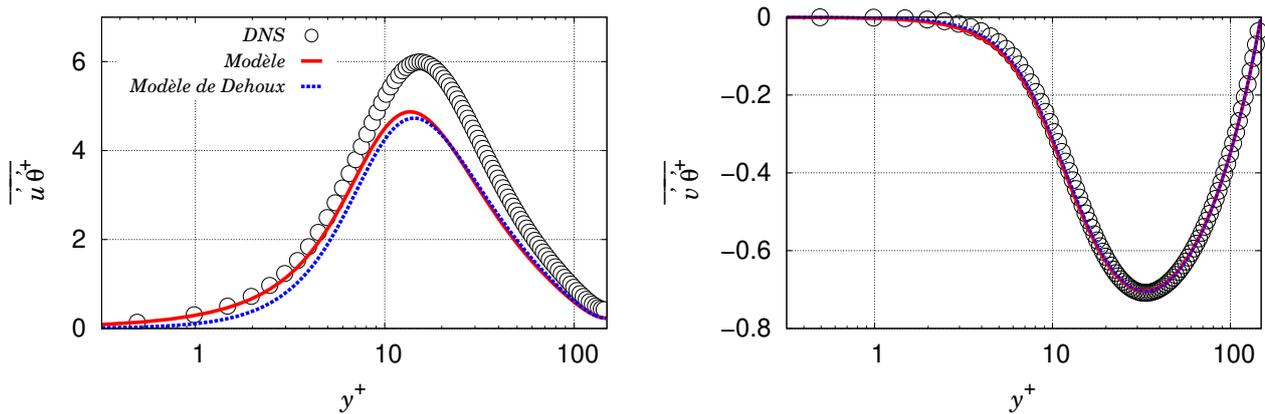


FIGURE 5.18. – Évaluation *a posteriori* de la composante tangentielle à la paroi des flux thermiques turbulents  $\overline{u'\theta'}$  (gauche) et de la composante normale  $\overline{v'\theta'}$  (droite) pour un cas de **transfert thermique conjugué**.

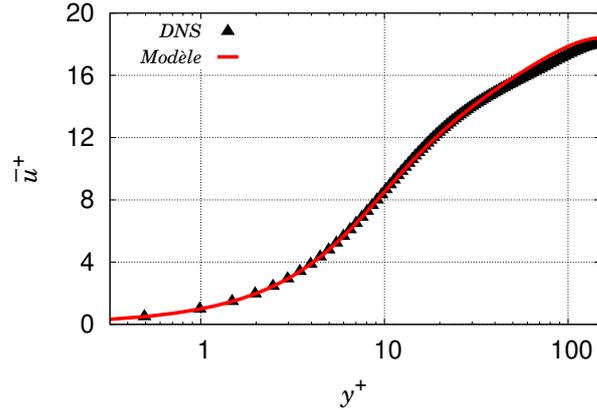


FIGURE 5.19. – Évaluation *a posteriori* de la vitesse moyenne pour tout type de condition aux limites sur la température (en régime de convection forcée, la température n'influence pas la dynamique de l'écoulement).

modèle EBRSM utilisé dans ce manuscrit et par Dehoux *et al.* (2017). Les Figs. 5.20 et 5.21 comparent la température moyenne  $\bar{\theta}^+$  prédite par les deux modèles avec les données DNS. Pour rappel, le seul terme nécessitant une modélisation dans l'équation de transport de la température moyenne est la composante normale des flux thermiques turbulents  $\overline{v'\theta'}$  dans le cas d'un écoulement dans un canal plan. Comme observé dans le paragraphe précédent, le nouveau modèle prédit correctement cette variable dans les trois cas. Ainsi, la température moyenne est très bien estimée quelle que soit la condition aux limites imposée à la paroi par le nouveau modèle. La Fig. 5.20 montre que la reproduction de la température moyenne est plus précise avec le nouveau modèle qu'avec le modèle de Dehoux lorsqu'un flux de chaleur est imposé à la paroi. Enfin, la Fig. 5.21 (gauche) illustre la capacité du logiciel *Code\_Saturne* à résoudre l'équation de la température dans la partie solide qui ne dépend que d'un terme de diffusion (on retrouve l'équation de la chaleur).

Par conséquent, les fermetures du second ordre pour la dynamique (EBRSM) et la thermique (EBDFM - nouvelle modélisation), et les nouvelles modélisations bas-Reynolds pour la variance de température et son taux de dissipation permettent d'estimer correctement la vitesse moyenne et la température moyenne pour tous les types de conditions aux limites sur la température imposée à la paroi.

## 5.5. CONCLUSION DU CHAPITRE

Ce chapitre a validé les modélisations des flux thermiques turbulents  $\overline{u'\theta'}$ , de la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  et de son taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$  dans le cadre d'un écoulement dans un canal plan en convection forcée, en considérant trois conditions aux limites différentes sur la température à la paroi. Ces simulations ont permis de montrer la capacité du nouveau modèle à s'adapter à la condition aux limites et donnent notamment une amélioration spectaculaire des résultats sur la variance de température et sur son taux de dissipation pour les cas à flux de chaleur imposé à la paroi et de transfert thermique conjugué. De plus, le nouveau modèle respecte l'équilibre entre les termes de brouillage  $\phi_{\theta i}^*$ , de dissipation  $\varepsilon_{\theta i}$  et de diffusion moléculaire  $D_{\theta i}^{v+k}$  ainsi que leurs propres comportements asymptotiques, et permet donc de déterminer rigoureusement le comportement des flux thermiques turbulents dans la zone proche-paroi pour toutes les conditions aux limites sur la température. L'estimation précise de la température

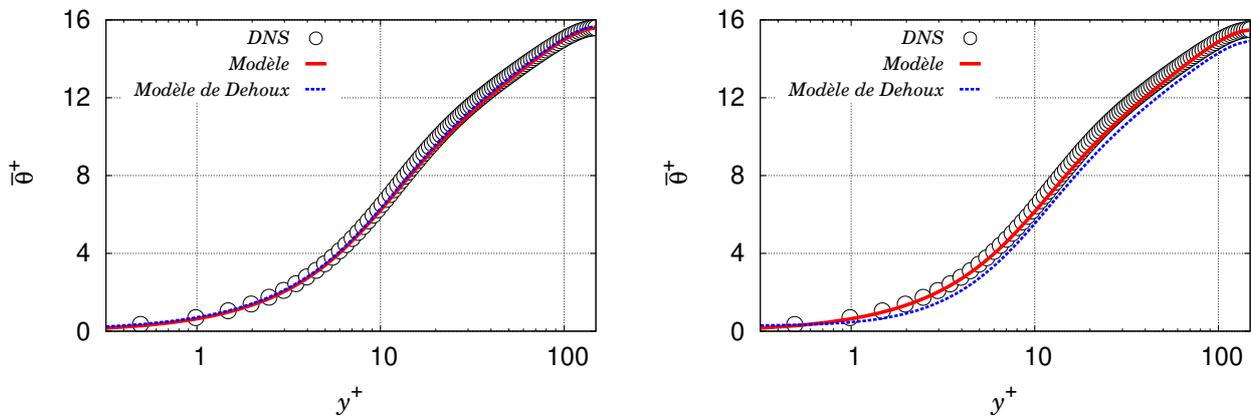


FIGURE 5.20. – Évaluation *a posteriori* de la température moyenne pour un cas à **température imposée** à la paroi (gauche) and à **flux de chaleur imposé** (droite).

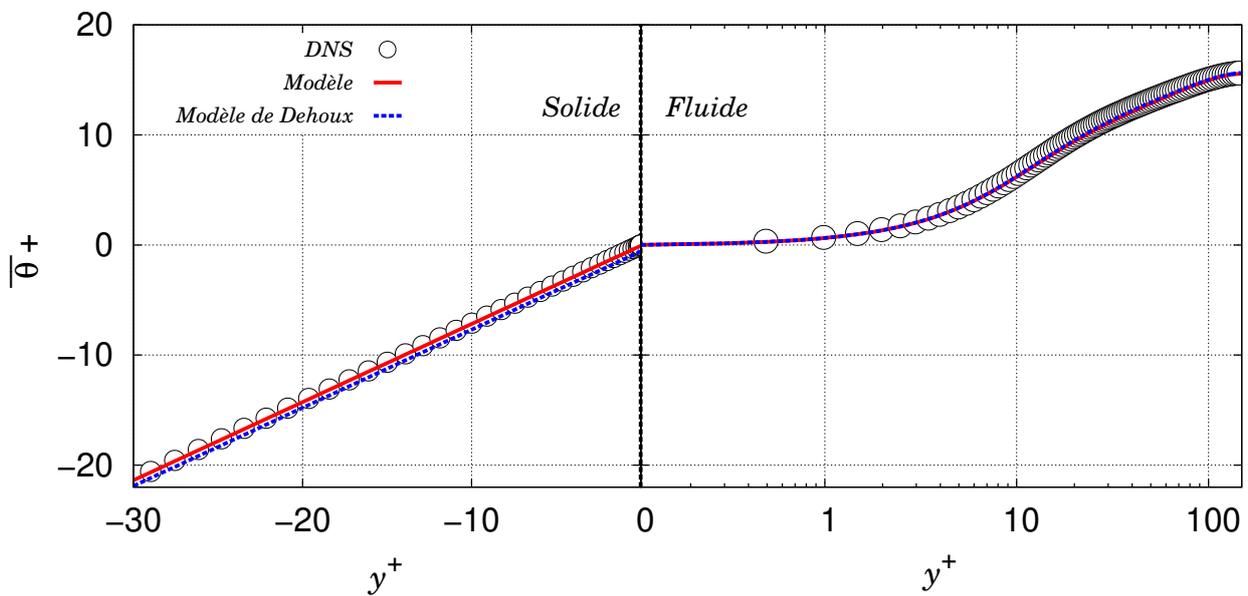


FIGURE 5.21. – Évaluation *a posteriori* de la température moyenne pour un cas de **transfert thermique conjugué** (droite) dans la partie solide (gauche) et fluide (droite).

---

moyenne dans les trois cas découle de ces excellents résultats. Les différents modèles ont également été validés pour des écoulements d'air dans un canal plan en convection forcée pour plusieurs nombres de Reynolds comme l'expose l'Annexe D.



# Chapitre 6

---

## Transfert thermique conjugué à propriétés différentes

### Sommaire

---

6.1	Bibliographie - variables thermiques turbulentes et interface fluide/solide . . . .	119
6.1.1	Température moyenne $\bar{\theta}$ et variance $\overline{\theta'^2}$ à l'interface . . . . .	120
6.1.2	Discontinuité du taux de dissipation $\varepsilon_\theta$ . . . . .	122
6.2	Gestion de l'interface fluide/solide pour les variables thermiques . . . . .	124
6.2.1	Couplage de la température et de sa variance . . . . .	124
6.2.2	Condition aux limites pour $\varepsilon_\theta$ . . . . .	127
6.3	Tests et validité du modèle . . . . .	129
6.3.1	Résultats pour le taux de dissipation $\varepsilon_\theta$ . . . . .	129
6.3.2	Résultats pour la variance de température $\overline{\theta'^2}$ . . . . .	130
6.3.3	Résultats pour la température moyenne . . . . .	130
6.3.4	Les limitations du modèle . . . . .	130
6.4	Conclusion du chapitre . . . . .	131

---

Jusqu'à présent, le cas de transfert thermique conjugué étudié était un cas idéal : les conductivités et diffusivités thermiques des parties solide et fluide étaient égales. Il était alors possible d'imposer une condition de conservation du flux de la variable  $\varepsilon_\theta$  à l'interface. Cependant, il est évident que cette configuration ne représente pas la réalité et qu'il est alors nécessaire de tester les modélisations proposées dans ce manuscrit sur des cas de transfert thermique conjugué faisant intervenir des propriétés différentes pour le solide et le fluide. Ce chapitre s'intéressera en particulier à l'équation de transport du taux de dissipation de la variance de température  $\varepsilon_\theta$  qui est l'élément clé pour la modélisation des flux thermiques turbulents dans le fluide et de la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  dans le solide et le fluide. En effet, cette variable demandera une attention toute particulière à l'interface fluide/solide puisqu'elle est discontinue. Dans la suite du chapitre, les indices  $f$  et  $s$  désigneront respectivement le fluide et le solide, et  $\Omega_f$  et  $\Omega_s$  les domaines fluide et solide.

### 6.1. BIBLIOGRAPHIE - VARIABLES THERMIQUES TURBULENTES ET INTERFACE FLUIDE/SOLIDE

La littérature à propos des variables thermiques turbulentes telles que la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  et son taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$  est restreinte. Les seules DNS disponibles pour des cas de

transfert thermique conjugué sont les DNS d'un écoulement dans un canal plan en convection forcée réalisées par Tiselj *et al.* (2001a) puis par Flageul *et al.* (2015). Ces DNS ont permis deux choses : améliorer la compréhension des comportements de la température, de sa variance et de son taux de dissipation dans les parties solide et fluide, et constituer une base de référence fiable afin de valider les modélisations RANS. A ce jour, les seuls travaux sur la modélisation RANS sur  $\bar{\theta}$ ,  $\overline{\theta^2}$  et  $\varepsilon_\theta$  pour des cas de transfert thermique conjugué proviennent de l'université de Manchester (Keshmiri, 2006; Craft *et al.*, 2010; Yang *et al.*, 2019) et utilisent les données DNS de Tiselj *et al.* (2001a) pour se comparer.

Dans la suite du chapitre, on s'appuiera sur les DNS de Flageul *et al.* (2015) d'un écoulement dans un canal plan en convection forcée, caractérisé par les nombres de Reynolds de frottement  $Re_\tau = 149$  et de Prandtl  $Pr = 0.71$  (voir paragraphe 3.4.2). Pour les cas de transfert thermique conjugué, il est nécessaire d'introduire d'autres nombres adimensionnels pour décrire le couplage thermique entre le solide et le fluide :

$$\begin{aligned} G &= \kappa_f / \kappa_s && \text{Ratio des diffusivités thermiques,} \\ G_2 &= \lambda_s / \lambda_f && \text{Ratio des conductivités thermiques,} \\ K &= 1 / (G_2 \sqrt{G}) && \text{Ratio de l'activité thermique.} \end{aligned}$$

Flageul *et al.* (2015) effectuèrent différentes simulations DNS pour plusieurs configurations résumées dans le tableau 6.1, dans lesquelles ils calculèrent notamment les bilans des équations de transport des flux thermiques turbulents, de la variance de température et de son taux de dissipation. Ces DNS constituent une base de données conséquente dans la perspective de validation du nouveau modèle pour des cas de transfert thermique conjugué.

Simulations DNS	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$G$	2	1	$\frac{1}{2}$	2	1	$\frac{1}{2}$	2	1	$\frac{1}{2}$
$G_2$	2	2	2	1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$K$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$

Tableau 6.1. – Configurations des 9 simulations DNS de Flageul *et al.* (2015) pour des cas de transfert thermique conjugué dans le cadre d'un écoulement dans un canal plan.

Une des questions majeures dans le cas de transfert thermique conjugué concerne la gestion de l'interface entre le fluide et le solide, et en particulier du comportement des variables thermiques turbulentes.

### 6.1.1. Température moyenne $\bar{\theta}$ et variance $\overline{\theta^2}$ à l'interface

A l'interface entre le fluide et le solide, la température et le flux thermique sont continus :

$$\theta_f = \theta_s \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta_f}{\partial y} = G_2 \frac{\partial \theta_s}{\partial y} \quad \text{sur} \quad \partial \Omega_s \cap \partial \Omega_f. \quad (6.1)$$

Ici, la direction  $y$  désigne la direction normale à la paroi. Ainsi, l'Eq. (6.1) indique alors que la température moyenne, les fluctuations de température  $\theta'$  et ses dérivés partielles tangentiels à la paroi sont continues tout comme le flux de  $\theta'$  :

$$\bar{\theta}_s = \bar{\theta}_f \quad \text{sur} \quad \partial \Omega_s \cap \partial \Omega_f, \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}_s}{\partial y} = \frac{1}{G_2} \frac{\partial \bar{\theta}_f}{\partial y} \quad \text{sur} \quad \partial \Omega_s \cap \partial \Omega_f, \quad (6.3)$$

$$\theta'_s = \theta'_f \quad \text{sur} \quad \partial \Omega_s \cap \partial \Omega_f, \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial \theta'_s}{\partial x} = \frac{\partial \theta'_f}{\partial x} \quad \text{sur} \quad \partial \Omega_s \cap \partial \Omega_f, \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial \theta'_s}{\partial y} = \frac{1}{G_2} \frac{\partial \theta'_f}{\partial y} \quad \text{sur} \quad \partial \Omega_s \cap \partial \Omega_f, \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial \theta'_s}{\partial z} = \frac{\partial \theta'_f}{\partial z} \quad \text{sur} \quad \partial \Omega_s \cap \partial \Omega_f. \quad (6.7)$$

Comme les fluctuations de température passent du domaine solide au domaine fluide de manière continue, alors la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  est continue à l'interface. La Fig. 6.1 montre le comportement de la température moyenne et de  $\overline{\theta'^2}$  à l'interface fluide/solide pour les cas DNS simulés par Flageul *et al.* (2015) (voir Tab. 6.1). Dans la partie fluide, la température est similaire pour l'ensemble des configurations contrairement à la partie solide où les différents comportements sont liés au ratio  $G_2$ . En effet, dans les DNS de Flageul *et al.* (2015), les équations de conservation de la température résolues dans le fluide et le solide s'écrivent (cf. paragraphe 2.7) :

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial t} = -\frac{\partial \theta_f u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{RePr} \frac{\partial \theta_f}{\partial x_j \partial x_j} + f_T u_1, \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} = \frac{1}{GRePr} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (6.9)$$

Pour fermer l'équation, des conditions aux limites sont imposées au flux à l'interface fluide/solide et aux bords extérieurs du solide :

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial y} = \frac{1}{G_2} \frac{\partial \theta_f}{\partial y} \quad \text{sur} \quad \partial \Omega_s \cap \partial \Omega_f, \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial y} = \frac{q_w}{G_2} \quad \text{aux bords extérieurs du fluide.} \quad (6.11)$$

Les écarts observés dans le domaine solide proviennent de l'absence de terme source dans l'équation de conservation de la température dans le solide, ce qui produit une température moyenne affine égale à  $\bar{\theta}_s = \frac{Pr}{G_2} y^+$  (Flageul, 2015).

Enfin, les données DNS ont montré que le ratio d'activité  $K$  pilotait le comportement de la variance de température dans le domaine fluide. En effet, plus le ratio  $K$  est grand, et plus la valeur de  $\overline{\theta'^2}$  se rapproche d'un cas à flux de chaleur imposé à la paroi.

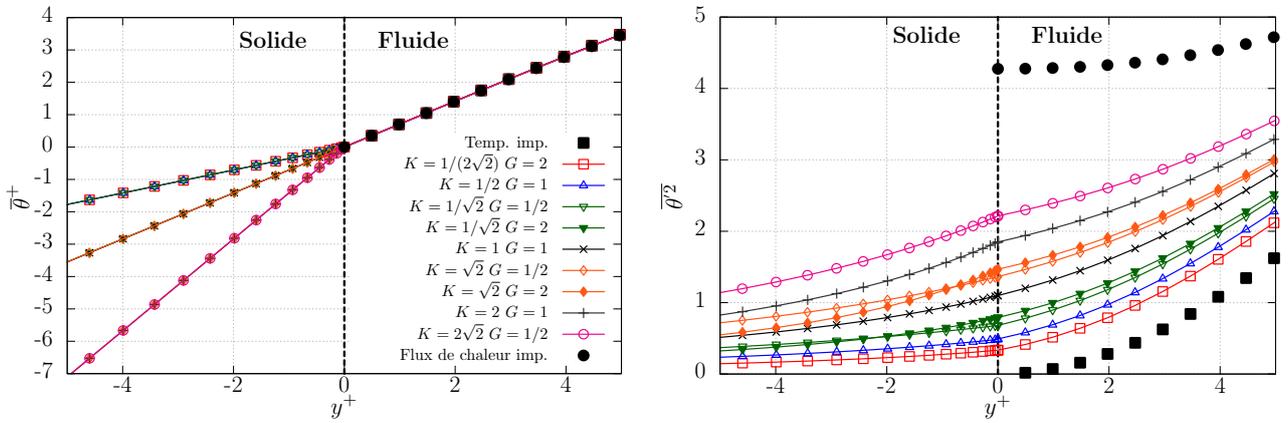


FIGURE 6.1. – Température moyenne (gauche) et la variance de la température (droite) à l'interface entre le fluide et le solide. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul *et al.* (2015, 2017).

### 6.1.2. Discontinuité du taux de dissipation $\varepsilon_\theta$

Pour rappel, l'expression exacte du taux de dissipation de la variance de température est  $\varepsilon_\theta = \kappa \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}$ . Les dérivées tangentielles de  $\theta'$  étant continues, la discontinuité de  $\varepsilon_\theta$  provient alors du terme orthogonal :

$$\frac{\varepsilon_{\theta,f}}{\kappa_f} - \frac{\varepsilon_{\theta,s}}{\kappa_s} = \overline{\frac{\partial \theta'_f}{\partial y} \frac{\partial \theta'_f}{\partial y}} - \overline{\frac{\partial \theta'_s}{\partial y} \frac{\partial \theta'_s}{\partial y}}. \quad (6.12)$$

En utilisant la relation Eq. (6.6), l'expression Eq. (6.12) peut alors se réécrire

$$\frac{\varepsilon_{\theta,f}}{\kappa_f} - \frac{\varepsilon_{\theta,s}}{\kappa_s} = \overline{\frac{\partial \theta'_f}{\partial y} \frac{\partial \theta'_f}{\partial y}} \left[ 1 - \left( \frac{1}{G_2} \right)^2 \right]. \quad (6.13)$$

Ainsi, le second membre de l'Eq. (6.13) est toujours différent de 0 lorsque les conductivités thermiques fluide  $\lambda_f$  et solide  $\lambda_s$  sont différentes, ce qui explique la discontinuité de la variable  $\varepsilon_\theta$  à l'interface. De plus, en divisant l'Eq. (6.13) par  $\varepsilon_{\theta,f}/\kappa_f$  il vient :

$$1 - G \frac{\varepsilon_{\theta,s}}{\varepsilon_{\theta,f}} = \frac{\overline{\partial_y \theta'_f \partial_y \theta'_f}}{\overline{\partial_j \theta'_f \partial_j \theta'_f}} \left[ 1 - \left( \frac{1}{G_2} \right)^2 \right]. \quad (6.14)$$

Ensuite, on divise l'équation obtenue par le ratio des diffusivités thermiques  $G$  :

$$\frac{1}{G} - \frac{\varepsilon_{\theta,s}}{\varepsilon_{\theta,f}} = \frac{\overline{\partial_y \theta'_f \partial_y \theta'_f}}{\overline{\partial_j \theta'_f \partial_j \theta'_f}} \left[ \frac{1}{G} - K^2 \right]. \quad (6.15)$$

Ainsi, en réorganisant l'Eq. (6.15), il vient (Flageul *et al.*, 2017) :

$$\frac{\varepsilon_{\theta,s}}{\varepsilon_{\theta,f}} = \frac{\overline{\partial_y \theta'_f \partial_y \theta'_f}}{\overline{\partial_j \theta'_f \partial_j \theta'_f}} K^2 + \left( 1 - \frac{\overline{\partial_y \theta'_f \partial_y \theta'_f}}{\overline{\partial_j \theta'_f \partial_j \theta'_f}} \right) \frac{1}{G}. \quad (6.16)$$

Lorsque le taux de dissipation fluide  $\varepsilon_{\theta,f}$  est dominé par la composante normale  $\overline{\partial_y \theta'_f \partial_y \theta'_f}$ , l'expression Eq. (6.16) se simplifie en

$$\varepsilon_{\theta,s} = K^2 \varepsilon_{\theta,f}. \quad (6.17)$$

Cependant, si la dissipation fluide est dominée par ses composantes tangentielles, l'expression Eq. (6.16) devient

$$\varepsilon_{\theta,s} = \frac{1}{G} \varepsilon_{\theta,f}. \quad (6.18)$$

La Fig. 6.2 montre le taux de dissipation de la variance de température  $\varepsilon_\theta$  des côtés fluide et solide dans les différentes configurations de transfert thermique conjugué proposées par Flageul *et al.* (2015) (voir Tab. 6.1). Cette figure met en évidence la discontinuité de la variable  $\varepsilon_\theta$  à l'interface lorsque les conductivités et diffusivités thermiques des parties solide et fluide sont différentes. De plus, comme pour la variance de température, la valeur de la variable  $\varepsilon_\theta$  à l'interface côté fluide est pilotée par le ratio de l'activité thermique  $K$ . En effet, plus le ratio  $K$  est élevé et plus on est proche du cas à flux de chaleur imposé. À l'inverse, plus le ratio  $K$  est faible et plus on tend vers le cas à température imposée à la paroi. En revanche, pour le côté solide, la variable  $\varepsilon_\theta$  croît avec le ratio  $K$ . Ainsi, les comportements de la variable  $\varepsilon_\theta$  côté fluide et côté solide s'opposent. En pratique, l'utilisation d'un ratio  $K$  élevé correspond à peu de cas réalistes : dans la plupart des configurations industrielles, le ratio  $K$  est inférieur à 1. Par exemple, pour le cas d'un réacteur à eau pressurisée, les ratios  $G$  et  $G_2$  valent respectivement environ  $10^{-3}$  et 40, le ratio  $K$  est égal à 0.79 pour un nombre de Prandtl  $Pr = 0.87$  (Flageul, 2015).

Par la suite, Flageul *et al.* (2017, 2018) ont travaillé sur une corrélation pour estimer le saut de la variable  $\varepsilon_\theta$  à l'interface entre le fluide et le solide. Les auteurs se sont appuyés sur les données DNS exposées dans ce chapitre et sur des calculs LES pour un écoulement dans un canal plan en convection forcée pour des nombres de Reynolds de frottement  $Re_\tau = 149, 395, 1020$  et des nombres de Prandtl  $Pr = 0.71, 1$ . Ainsi, ils proposent la corrélation suivante :

$$\frac{\varepsilon_{\theta,s}}{\varepsilon_{\theta,f}} = \frac{1}{G} + \left( K^2 - \frac{1}{G} \right) \frac{1}{1 + 0.0799 \cdot G^{0.225} \cdot K^{1.90}}, \quad (6.19)$$

qui s'appuie sur les ratios des diffusivités thermiques  $G$  et de l'activité thermique  $K$ . Cette corrélation est empirique et dépendante de la configuration de l'écoulement dans un canal plan.

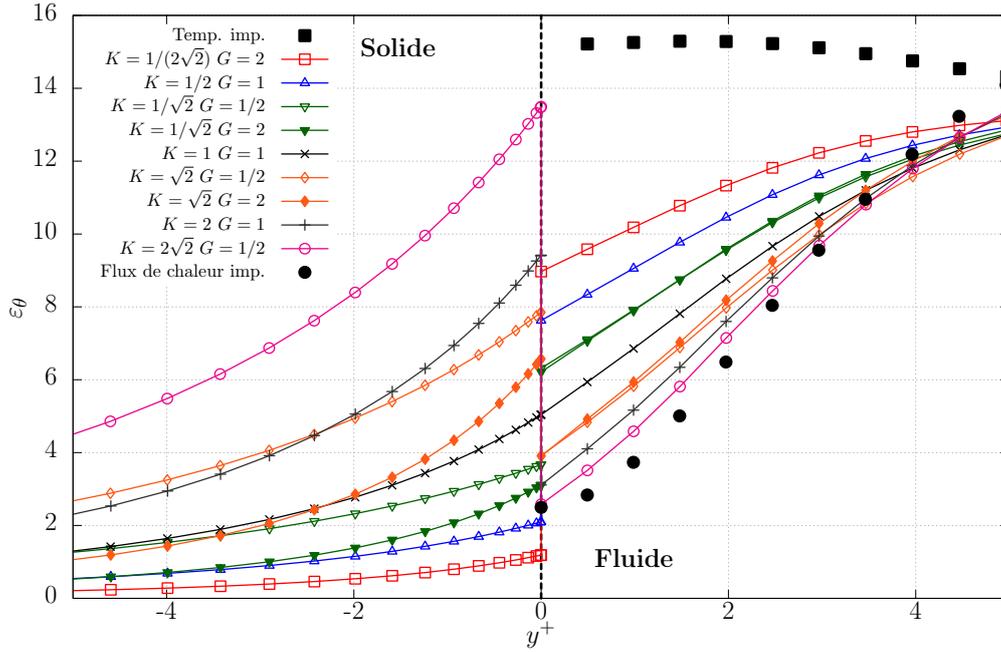


FIGURE 6.2. – Taux de dissipation de la variance de température  $\varepsilon_\theta$  à l'interface entre le fluide et le solide. Données DNS d'un cas de canal plan en convection forcée de Flageul *et al.* (2015, 2017).

## 6.2. GESTION DE L'INTERFACE FLUIDE/SOLIDE POUR LES VARIABLES THERMIQUES

Cette partie est consacrée à la gestion du couplage des variables thermiques actives dans le solide et dans le fluide. Pour rappel, les équations de transport permettant la modélisation de la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  et de son taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$  dans les parties fluide et solide sont exposées dans le chapitre 4. Ainsi, il reste à étudier la transition entre les deux parties, i.e., comment gérer l'interface fluide/solide pour les variables thermiques dans nos simulations avec le logiciel *Code\_Saturne*.

### 6.2.1. Couplage de la température et de sa variance

Le logiciel *Code\_Saturne* est capable de résoudre des équations de transport aussi bien dans le domaine solide que dans le domaine fluide. Il est également capable d'assurer la continuité de la température moyenne  $\bar{\theta}$  et de la variance de la température  $\overline{\theta'^2}$  à l'interface entre le solide et le fluide en conservant les flux de chaleur et de la variance de température à l'interface. La suite de ce paragraphe a donc pour objectif d'expliquer cette méthode de conservation des flux. Le traitement de la température moyenne sera abordé en premier, puis on s'intéressera à la variance de température.

#### DÉFINITIONS DES FLUX DE CHALEUR

Pour une face interne (voir Fig. 6.3), le flux de chaleur allant de la cellule  $\Omega_i$  vers la cellule  $\Omega_j$  par unité de surface s'écrit :

$$D_{ij} = \lambda_{ij} \frac{\bar{\theta}_{j'} - \bar{\theta}_{i'}}{\Gamma_{j'}}, \quad (6.20)$$

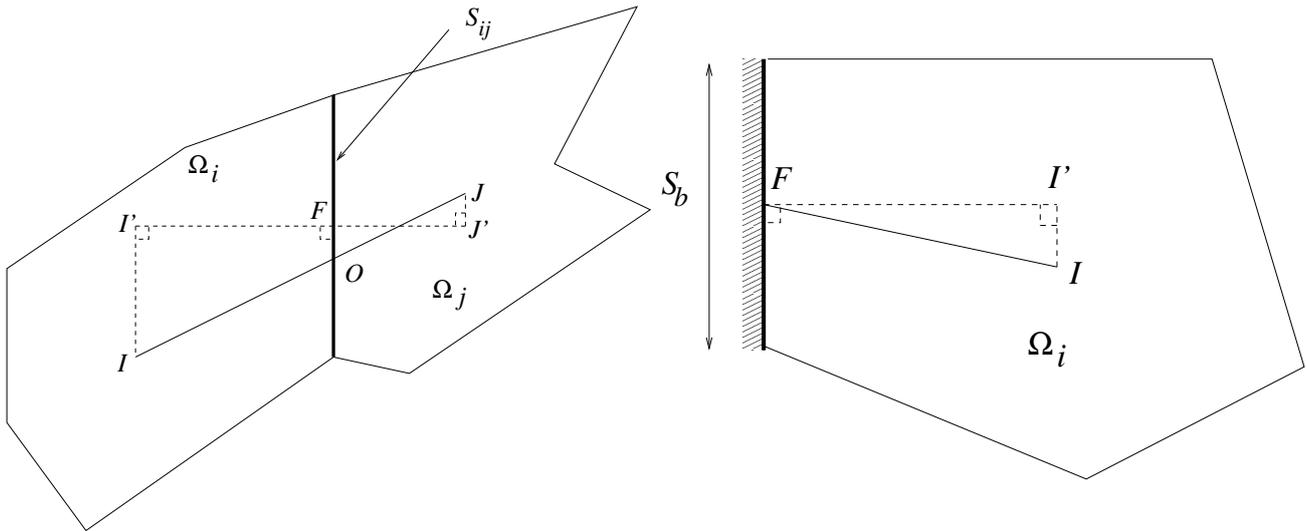


FIGURE 6.3. – Définition des quantités géométriques pour les faces internes (gauche) et de bord (droite). Guide théorique du logiciel *Code\_Saturne* disponible sur le site internet [www.code-saturne.org](http://www.code-saturne.org).

avec  $\lambda_{ij}$ , la conductivité thermique de la face interne  $S_{ij}$ .

Dans le cas d'une face de bord  $S_b$ , le flux de chaleur par unité de surface sortant de la cellule  $\Omega_i$  est :

$$D_{ib} = \lambda_i \frac{\bar{\theta}_F - \bar{\theta}_{I'}}{I'F}. \quad (6.21)$$

Considérons à présent une deuxième cellule de bord  $\Omega_j$  similaire à la cellule de bord  $\Omega_i$  ci-dessus. Le flux de chaleur entrant dans cette cellule  $\Omega_j$  s'écrit :

$$D_{bj} = \lambda_j \frac{\bar{\theta}_{J'} - \bar{\theta}_F}{FJ'}. \quad (6.22)$$

Dans la suite,  $\Omega_i$  sera assimilée à une cellule fluide et  $\Omega_j$  à une cellule solide.

#### TRAITEMENT DE L'INTERFACE FLUIDE/SOLIDE

Pour simuler un cas de transfert thermique conjugué, il faut indiquer au préalable à *Code\_Saturne* où se trouve la partie solide sur le maillage du cas en utilisant un critère géométrique. Ainsi, le code de calcul est capable de comprendre si une cellule appartient au milieu fluide ou au milieu solide. Il dédouble alors les faces internes du maillage qui sont situées à l'interface entre le fluide et le solide. Le but de cette manœuvre est d'obtenir une paroi mince avec une face de bord solide et une face de bord fluide. Enfin, comme la vitesse est nulle dans la partie solide, le couplage sera conservatif si le terme de diffusion est correctement estimé.

Les flux de chaleur  $D_{ib}$  et  $D_{bj}$  sont connus par le logiciel car les conductivités thermique solide  $\lambda_j$  et fluide  $\lambda_i$  ont été renseignées au préalable par l'utilisateur et la température moyenne est disponible dans tout le domaine. L'objectif est de déterminer le flux entre les deux cellules  $D_{ij}$ , et en particulier la conductivité  $\lambda_{ij}$  (inconnue pour le moment) qui permettra la conservation du flux de chaleur entre les parties fluide et solide. À l'interface fluide/solide, la température moyenne à la paroi fluide  $\bar{\theta}_{Fbi}$  et celle à la paroi solide  $\bar{\theta}_{Fbj}$  sont toutes les deux égales à une température moyenne  $\bar{\theta}_F$  (continuité de la température moyenne). De plus, les flux de chaleur

côté fluide  $D_{ib}$ , côté solide  $D_{bj}$  et celui traversant l'interface  $D_{ij}$  sont égaux, ce qui permet d'écrire

$$D_{ij} = \lambda_{ij} \frac{\bar{\theta}_{J'} - \bar{\theta}_{I'}}{I'J'}, \quad (6.23)$$

$$\Leftrightarrow \frac{D_{ij}I'J'}{\lambda_{ij}} = \bar{\theta}_{J'} - \bar{\theta}_F + \bar{\theta}_F - \bar{\theta}_{I'}, \quad (6.24)$$

$$\Leftrightarrow \frac{D_{ij}I'J'}{\lambda_{ij}} = \frac{D_{bj}FJ'}{\lambda_j} + \frac{D_{ib}I'F}{\lambda_i}, \quad (6.25)$$

$$\Leftrightarrow \frac{I'J'}{\lambda_{ij}} = \frac{FJ'}{\lambda_j} + \frac{I'F}{\lambda_i}. \quad (6.26)$$

Le logiciel *Code\_Saturne* définit les coefficients d'échange suivants :  $h_{int} = \frac{\lambda_i}{I'F}$ ,  $h_{ext} = \frac{\lambda_j}{FJ'}$  et  $h_{eq} = \frac{\lambda_{ij}}{I'J'}$  avec  $h_{int}$ ,  $h_{ext}$  et  $h_{eq}$  les coefficients d'échange des domaines  $\Omega_i$ ,  $\Omega_j$  et du flux entre ces deux domaines. Afin de pouvoir conserver le flux  $D_{ij}$  entre la cellule fluide  $\Omega_i$  et la cellule solide  $\Omega_j$ , il faut calculer le coefficient  $h_{eq}$ . Ainsi l'Eq. (6.26) donne la relation :

$$\frac{1}{h_{eq}} = \frac{1}{h_{int}} + \frac{1}{h_{ext}}. \quad (6.27)$$

Par conséquent, l'Eq. (6.27) définit la valeur du coefficient  $h_{eq}$  et il est alors possible d'imposer le flux  $D_{ij}$  à l'interface entre le fluide et le solide de manière à assurer la conservation du flux de chaleur.

#### COUPLAGE DE LA VARIANCE DE TEMPÉRATURE

La variance de température est continue à l'interface fluide/solide et va être diffusée de la même façon que la température. Ainsi, comme pour la température moyenne, la variance de la température à la paroi fluide  $\overline{\theta'^2}_{Fbi}$  et celle à la paroi solide  $\overline{\theta'^2}_{Fbj}$  sont toutes les deux égales à une variance de la température  $\overline{\theta'^2}_F$ . De plus, l'égalité entre les flux par unité de surface  $D_{ib}^\theta$ ,  $D_{ij}^\theta$  et  $D_{bj}^\theta$  de la variance de la température permet d'écrire

$$D_{ij}^\theta = \lambda_{ij} \frac{\overline{\theta'^2}_{J'} - \overline{\theta'^2}_{I'}}{I'J'}, \quad (6.28)$$

$$\Leftrightarrow \frac{D_{ij}^\theta I'J'}{\lambda_{ij}} = \overline{\theta'^2}_{J'} - \overline{\theta'^2}_F + \overline{\theta'^2}_F - \overline{\theta'^2}_{I'}, \quad (6.29)$$

$$\Leftrightarrow \frac{D_{ij}^\theta I'J'}{\lambda_{ij}} = \frac{D_{bj}^\theta FJ'}{\lambda_j} + \frac{D_{ib}^\theta I'F}{\lambda_i}, \quad (6.30)$$

$$\Leftrightarrow \frac{I'J'}{\lambda_{ij}} = \frac{FJ'}{\lambda_j} + \frac{I'F}{\lambda_i}. \quad (6.31)$$

On procède alors de la même façon que pour le flux de chaleur, c'est à dire que le coefficient  $h_{eq}$  calculé par l'Eq. (6.27) est utilisé pour conserver le flux de la variance de température à l'interface entre le fluide et le solide.

### 6.2.2. Condition aux limites pour $\varepsilon_\theta$

Le problème repose sur la discontinuité de  $\varepsilon_\theta$  à l'interface entre le fluide et le solide. En effet, la méthode utilisée dans le paragraphe précédent s'écrit pour le flux de la variable  $\varepsilon_\theta$  :

$$D_{ij}^\varepsilon = \lambda_{ij} \frac{\varepsilon_{\theta,J'} - \varepsilon_{\theta,I'}}{I'J'}, \quad (6.32)$$

$$\Leftrightarrow \frac{D_{ij}^\varepsilon I'J'}{\lambda_{ij}} = \varepsilon_{\theta,J'} - \varepsilon_{\theta,Fbi} + \varepsilon_{\theta,Fbi} + \varepsilon_{\theta,Fbj} - \varepsilon_{\theta,Fbj} - \varepsilon_{\theta,I'}, \quad (6.33)$$

$$\Leftrightarrow \frac{D_{ij}^\varepsilon I'J'}{\lambda_{ij}} = \frac{D_{ib}^\varepsilon I'F}{\lambda_i} + \frac{D_{bj}^\varepsilon FJ'}{\lambda_j} - \varepsilon_{\theta,Fbi} + \varepsilon_{\theta,Fbj}. \quad (6.34)$$

Cette méthode fonctionne si et seulement si les diffusivités et conductivités thermiques des parties solide et fluides sont égales (cas idéal :  $\varepsilon_\theta$  est continue à l'interface). C'est pourquoi celle-ci est utilisée dans les simulations de transfert thermique conjugué impliquant des propriétés identiques dans les parties fluide et solide du chapitre 5, pour gérer la variable  $\varepsilon_\theta$  à l'interface fluide/solide. Cependant, cette approche n'est plus valable lorsque les parties solide et fluide ont des propriétés différentes car l'égalité entre les variables à l'interface n'est pas vérifiée :  $\varepsilon_{\theta,Fbi} \neq \varepsilon_{\theta,Fbj} \neq \varepsilon_{\theta,F}$ .

Ainsi, une autre méthode va être adoptée pour gérer la discontinuité de la variable  $\varepsilon_\theta$ . Elle consistera à imposer deux conditions aux limites distinctes à l'interface : une condition sur la face interne de la cellule fluide  $\Omega_i$  et une deuxième sur la face interne de la cellule solide  $\Omega_j$ .

#### 6.2.2.1. Interface côté fluide

Une condition de type Dirichlet est imposée à la face fluide de l'interface. La corrélation de Flageul *et al.* (2017, 2018) est utilisée pour fixer la valeur  $\varepsilon_{\theta,f}$  à la paroi fluide de l'interface,

$$\varepsilon_{\theta,f} = \frac{1}{Co_F} \varepsilon_{\theta,s}, \quad (6.35)$$

où la variable  $Co_F$  désigne la corrélation (Eq. 6.19)

$$Co_F = \frac{1}{G} + \left( K^2 - \frac{1}{G} \right) \frac{1}{1 + 0.0799 \cdot G^{0.225} \cdot K^{1.90}}. \quad (6.36)$$

#### 6.2.2.2. Interface côté solide

Après plusieurs tentatives de condition aux limites sur  $\varepsilon_\theta$ , la stratégie conférant le plus de stabilité aux calculs (notamment à l'interface) fut d'imposer une condition de Neumann sur la variable  $\varepsilon_\theta$  à l'interface côté solide. Pour obtenir cette condition, il faut déterminer une relation entre le flux normal à la paroi de la variable  $\varepsilon_\theta$  côté solide  $\frac{\partial \varepsilon_{\theta,s}}{\partial y}$  et côté fluide  $\frac{\partial \varepsilon_{\theta,f}}{\partial y}$ . Pour rappel, on se place dans le cas d'un écoulement dans un canal plan et la direction  $y$  est la direction normale à l'interface entre le fluide et le solide. La première étape du raisonnement consiste à dériver l'expression de  $\varepsilon_\theta$  par rapport à  $y$

$$\frac{\partial \varepsilon_{\theta,*}}{\partial y} = 2\kappa_* \frac{\overline{\partial \theta'_*}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \theta'_*}{\partial x_j \partial y}, \quad (6.37)$$

où l'indice  $*$  peut désigner la partie solide ou la partie fluide. De plus, les seules relations connues sur les dérivés partielles des fluctuations de températures sont

$$\frac{\partial \theta'_s}{\partial x} = \frac{\partial \theta'_f}{\partial x} \quad ; \quad \lambda_s \frac{\partial \theta'_s}{\partial y} = \lambda_f \frac{\partial \theta'_f}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial \theta'_s}{\partial z} = \frac{\partial \theta'_f}{\partial z}. \quad (6.38)$$

On peut alors déduire des relations de l'Eq. (6.38) les égalités

$$\lambda_s \overline{\frac{\partial \theta'_s}{\partial x} \frac{\partial^2 \theta'_s}{\partial x \partial y}} = \lambda_f \overline{\frac{\partial \theta'_f}{\partial x} \frac{\partial^2 \theta'_f}{\partial x \partial y}} \quad ; \quad \lambda_s \overline{\frac{\partial \theta'_s}{\partial z} \frac{\partial^2 \theta'_s}{\partial z \partial y}} = \lambda_f \overline{\frac{\partial \theta'_f}{\partial z} \frac{\partial^2 \theta'_f}{\partial z \partial y}}. \quad (6.39)$$

À présent, il faut étudier la discontinuité à l'interface de la dérivée partielle par rapport à  $y$  de la variable  $\varepsilon_\theta : \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial y}$ . À l'instar de l'étude de la discontinuité de la variable  $\varepsilon_\theta$  (voir Eq. (6.12)), la différence de ces deux termes multipliés chacun par  $\lambda_*/(2\kappa_*)$  est effectuée

$$\frac{\lambda_s}{2\kappa_s} \frac{\partial \varepsilon_{\theta,s}}{\partial y} - \frac{\lambda_f}{2\kappa_f} \frac{\partial \varepsilon_{\theta,f}}{\partial y} = \lambda_s \overline{\frac{\partial \theta'_s}{\partial y} \frac{\partial^2 \theta'_s}{\partial y \partial y}} - \lambda_f \overline{\frac{\partial \theta'_f}{\partial y} \frac{\partial^2 \theta'_f}{\partial y \partial y}}. \quad (6.40)$$

Le second membre de l'Eq. (6.40) n'offre aucune observation triviale. Il est donc nécessaire d'approfondir son étude. Afin de tirer des conclusions sur la valeur de ce second membre, il est nécessaire de remarquer que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial \theta_*'^2}{\partial y}} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \overline{\theta_*' \frac{\partial \theta_*'}{\partial y}} \right) = \overline{\frac{\partial \theta_*'}{\partial y} \frac{\partial \theta_*'}{\partial y}} + \overline{\theta_*' \frac{\partial^2 \theta_*'}{\partial y^2}}, \quad (6.41)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \overline{\theta_*' \frac{\partial^2 \theta_*'}{\partial y^2}} \right) = \overline{\frac{\partial \theta_*'}{\partial y} \frac{\partial^2 \theta_*'}{\partial y \partial y}} + \overline{\theta_*' \frac{\partial^3 \theta_*'}{\partial y^3}}. \quad (6.42)$$

On retrouve alors l'expression  $\overline{\frac{\partial \theta_*'}{\partial y} \frac{\partial^2 \theta_*'}{\partial y \partial y}}$  intervenant dans l'Eq. (6.40), et en manipulant les équations Eq. (6.41) et Eq. (6.42), ce terme peut s'écrire

$$\overline{\frac{\partial \theta_*'}{\partial y} \frac{\partial^2 \theta_*'}{\partial y \partial y}} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial \theta_*'^2}{\partial y}} \right) - \overline{\frac{\partial \theta_*'}{\partial y} \frac{\partial \theta_*'}{\partial y}} \right] - \overline{\theta_*' \frac{\partial^3 \theta_*'}{\partial y^3}}. \quad (6.43)$$

Pour le cas d'un écoulement dans un canal plan en convection forcée, les termes dominants dans l'équation de transport de la variance de température  $\overline{\theta_*'^2}$  à la paroi sont le taux de dissipation  $\varepsilon_{\theta,*}$  et la diffusion moléculaire  $D_{\theta,*}^\kappa$ . Par conséquent, l'équilibre suivant doit être respecté :

$$2\varepsilon_\theta = D_\theta^\kappa \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_s \cap \partial\Omega_f. \quad (6.44)$$

En considérant les dérivés partielles par rapport à  $y$  prépondérantes dans le cas du canal plan, on peut alors émettre les hypothèses suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial \theta_*'^2}{\partial y}} \right) \right] = \frac{1}{2\kappa_*} \frac{\partial D_{\theta,*}^\kappa}{\partial y} \quad (6.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \overline{\frac{\partial \theta_*'}{\partial y} \frac{\partial \theta_*'}{\partial y}} \right] = \frac{1}{\kappa_*} \frac{\partial \varepsilon_{\theta,*}}{\partial y} \quad (6.46)$$

$$(6.47)$$

En injectant ces relations dans l'Eq. (6.43), il vient

$$\overline{\frac{\partial \theta'_*}{\partial y} \frac{\partial^2 \theta'_*}{\partial y \partial y}} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2\kappa_*} D_{\theta_*}^\kappa - \frac{1}{\kappa_*} \varepsilon_{\theta_*} \right] - \overline{\theta'_* \frac{\partial^3 \theta'_*}{\partial y^3}}. \quad (6.48)$$

En tenant compte de la relation Eq.(6.44) entre le taux de dissipation  $\varepsilon_{\theta_*}$  et la diffusion moléculaire  $D_{\theta_*}^\kappa$  à la paroi, il vient

$$\overline{\frac{\partial \theta'_*}{\partial y} \frac{\partial^2 \theta'_*}{\partial y \partial y}} = -\overline{\theta'_* \frac{\partial^3 \theta'_*}{\partial y^3}} \quad \text{sur } \partial\Omega_s \cap \partial\Omega_f. \quad (6.49)$$

En supposant le terme  $\overline{\theta'_* \frac{\partial^3 \theta'_*}{\partial y^3}}$  négligeable, la relation de saut Eq. (6.40) entre  $\frac{\partial \varepsilon_{\theta,f}}{\partial y}$  et  $\frac{\partial \varepsilon_{\theta,s}}{\partial y}$  s'écrit simplement

$$\frac{\partial \varepsilon_{\theta,s}}{\partial y} = \frac{1}{GG_2} \frac{\partial \varepsilon_{\theta,f}}{\partial y}. \quad (6.50)$$

En pratique, une condition de flux est imposée à la paroi solide de l'interface pour la variable  $\varepsilon_\theta$  dans le logiciel *Code\_Saturne*. L'écriture de ce flux reprend l'Eq. (6.50) et se met sous la forme

$$q_w = \lambda_s \underline{\nabla} \varepsilon_{\theta,s} \cdot \underline{n} = -\lambda_s \frac{1}{GG_2} \frac{\partial \varepsilon_{\theta,f}}{\partial y}. \quad (6.51)$$

### 6.3. TESTS ET VALIDITÉ DU MODÈLE

Les simulations sont réalisées avec le logiciel *Code\_Saturne* présenté dans le paragraphe 5.1. Le cas test étudié est un écoulement dans un canal plan en convection forcée avec une condition de transfert thermique conjugué. Les différentes configurations de transfert thermique conjugué correspondent aux configurations des simulations DNS réalisées par Flageul *et al.* (2015) et répertoriées dans le Tab. 6.1. Les modèles utilisés pour la variance de température et sa dissipation dans les parties solide et fluide sont décrits dans le chapitre 4 et la modélisation des flux thermiques turbulents dans le fluide est exposée dans le chapitre 3. Le modèle EBRSM reste le modèle utilisé pour modéliser les tensions de Reynolds dans le domaine fluide.

#### 6.3.1. Résultats pour le taux de dissipation $\varepsilon_\theta$

La Fig. 6.4 compare le taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$  prédit par les simulations avec les données DNS de Flageul *et al.* (2015) pour différentes configurations de transfert thermique conjugué. Cette figure montre que l'estimation de la variable  $\varepsilon_\theta$  est correcte dans le solide pour tous les cas de transfert thermique conjugué simulés. De plus, les conditions aux limites imposées à l'interface fluide/solide pour la variable  $\varepsilon_\theta$  parviennent à reproduire sa discontinuité. Par exemple, la discontinuité importante de la variable  $\varepsilon_\theta$  du cas DNS  $K = 2\sqrt{2}$ ,  $G = 1/2$  est correctement prédite par la simulation. Le modèle est également très proche de la DNS dans le domaine fluide et tend vers des valeurs cohérentes à la paroi : il est capable d'adapter le comportement proche paroi de la variable  $\varepsilon_\theta$  aux différentes configurations de transfert thermique conjugué. Loin de la paroi, le modèle se comporte de la même façon pour tous les cas alors qu'une différence de comportement entre les cas DNS dont le ratio  $G_2 = 1/2$  et les cas où  $G_2 > 1/2$  est visible (voir Tab. 6.1) : la variable  $\varepsilon_\theta$  des configurations où  $G_2 = 1/2$  est plus importante dans la zone tampon. Par conséquent, la modélisation de la variable  $\varepsilon_\theta$  proposée dans ce manuscrit est capable de prédire correctement sa discontinuité à l'interface entre le fluide et le solide et

s'adapte au comportement proche paroi imposée par les différentes configurations de transfert thermique conjugué testées.

### 6.3.2. Résultats pour la variance de température $\overline{\theta'^2}$

La Fig. 6.5 compare la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  prédite par le modèle avec les données DNS de Flageul *et al.* (2015) pour différentes configurations de transfert thermique conjugué. Ainsi, dans le domaine fluide loin de l'interface, le modèle donne une estimation correcte de la variance de température. A l'interface, le modèle tient compte des différentes configurations de transfert thermique conjugué et est capable de s'adapter à chaque cas. De plus, la condition aux limites imposée à la variable  $\overline{\theta'^2}$  assure la conservation de son flux et sa continuité à l'interface fluide/solide. Le nouveau modèle reproduit très bien trois cas DNS :  $K = \sqrt{2} G = 2$ ;  $K = 1 G = 1$ ;  $K = 2 G = 1$  aussi bien dans le domaine fluide que dans la partie solide. La variance de température des cas  $K = 1/\sqrt{2} G = 2$  et  $K = \sqrt{2} G = 2$  est légèrement surestimée par le nouveau modèle contrairement à celle des cas  $K = 1/\sqrt{2} G = 1/2$ ;  $K = \sqrt{2} G = 1/2$ ;  $K = 1/2 G = 1$  et  $K = 2\sqrt{2} G = 1/2$  qui est sous-estimée. Dans l'ensemble, les résultats obtenus sont corrects pour toutes les configurations de transfert thermique conjugué testées et montre la capacité du nouveau modèle à s'adapter à des cas de transfert thermique conjugué impliquant des propriétés différentes pour les parties solide et fluide.

### 6.3.3. Résultats pour la température moyenne

Le comportement de la température moyenne dans la partie fluide est similaire pour toutes les configurations de transfert thermique conjugué comme le montre la Fig. 6.6 qui compare la température moyenne prédite par les simulations avec les données DNS de Flageul *et al.* (2015). En effet, l'équation de transport de la température moyenne Eq. 5.14 dans le fluide fait intervenir la composante normale à la paroi  $\overline{v'\theta'}$  des flux thermiques turbulents qui possède le même comportement pour tous les cas de transfert thermique conjugué. En revanche, le profil de la température moyenne dans le solide est piloté par le ratio des conductivités thermiques  $G_2$  (voir Tab. 6.1 et Fig 6.6) : lorsque  $G_2 = 1/2$  (voir les cas  $K = \sqrt{2} G = 2$ ;  $K = 2 G = 1$ ;  $K = 2\sqrt{2} G = 1/2$ ) la température décroît fortement dans le solide contrairement aux configurations où  $G_2 = 2$  (voir les cas  $K = 1/2 G = 1$ ;  $K = 1/\sqrt{2} G = 1/2$ ) où la décroissance est plus faible. Dans les autres cas ( $G_2 = 1$ ), la pente de la courbe de la température moyenne dans le solide se situe entre les deux cas  $G_2 = 1/2$  et  $G_2 = 2$ . Dans toutes les simulations, la température moyenne prédite dans le solide correspond aux données DNS. Les simulations sont donc capables de gérer différentes configurations de transfert thermique conjugué.

### 6.3.4. Les limitations du modèle

Parmi tous les cas DNS réalisés par Flageul *et al.* (2015) (voir Tab. 6.1), un seul n'a pas pu être simulé : la configuration  $K = 1/(2\sqrt{2})$  et  $G = 2$ . En effet, le calcul de la variable  $\varepsilon_\theta$  divergeait à l'interface entre le fluide et le solide. Ce problème s'explique par les conditions aux limites imposées à l'interface sur  $\varepsilon_\theta$ . Cette configuration fait tendre  $\varepsilon_\theta$  vers la constante la plus importante à l'interface côté fluide parmi toutes les DNS de transfert thermique conjugué comme le montre la Fig. 6.2. Pour rappel, plus le ratio  $K$  est petit, est plus on se rapproche du cas à température imposée. La Fig. 6.7 montre le comportement DNS de la variable  $\varepsilon_\theta$  du cas  $K = 1/(2\sqrt{2})$  et  $G = 2$  entouré des cas DNS  $K = 1/2$  et  $G = 1$  et à température imposée, et de leur modélisation. Ainsi, le comportement de la variable  $\varepsilon_\theta$  prédit par la simulation devrait se situer entre la courbe noire et la courbe bleue dans la zone proche paroi côté fluide.

Cependant, très peu de temps avant que le calcul ne diverge, on peut observer un changement de signe de la variable  $q_w$  (Eq. 6.51). Ce changement de signe est dû au comportement de la variable  $\frac{\partial \varepsilon_{\theta, f}}{\partial y}$ . En effet, pour cette configuration en particulier, le comportement de cette variable calculé par le modèle tend à se rapprocher du cas à température imposée (voir Fig. 6.7 : on remarque que les dérivées selon  $y$  de la variable  $\varepsilon_{\theta}$  ont des signes différents pour le cas à température imposée et la configuration  $K = 1/2$   $G = 1$ ). Ainsi, la condition de flux imposée à l'interface solide ne prescrit plus le bon gradient de la variable  $\varepsilon_{\theta}$  côté solide et fait diverger le calcul. Par conséquent, la modélisation proposée dans ce manuscrit, et en particulier les conditions aux limites imposées à  $\varepsilon_{\theta}$  à l'interface fluide/solide, ne permettent pas de faire fonctionner la configuration  $K = 1/(2\sqrt{2})$  et  $G = 2$ .

#### 6.4. CONCLUSION DU CHAPITRE

Les modélisations de la variance de température, de sa dissipation et des flux thermiques turbulents développées dans ce manuscrit sont capables de gérer des configurations de transfert thermique conjugué où les propriétés thermiques des parties solide et fluide sont différentes. Bien que les chercheurs de l'université de Manchester se soient intéressés à la modélisation RANS de cas de transfert thermique conjugué, ils se sont appuyés sur une version bas-Reynolds du modèle  $k - \varepsilon$  utilisant des fonctions d'amortissement, un modèle SGDh pour modéliser les flux thermiques turbulents et ils ont utilisés à nouveau des fonctions d'amortissement dans leur modélisation de la variable  $\varepsilon_{\theta}$ . À contrario, les résultats présentés dans cette partie sont novateurs puisque les modélisations de la variance de la température et de sa dissipation s'appuient sur des fermetures du second ordre naturellement bas-Reynolds pour les tensions de Reynolds et pour les flux thermiques turbulents basées sur la méthode de relaxation elliptique. De plus, les simulations effectuées avec le logiciel *Code\_Saturne* montrent que la discontinuité de la variable  $\varepsilon_{\theta}$  est captée par le modèle et que son comportement est correctement estimé. Ainsi, la variance de température est convenablement prédite dans les parties solide et fluide pour tous les cas de transfert thermique conjugué testés, tout comme le profil de la température moyenne.

Cependant, il n'a pas été possible de simuler la configuration de transfert thermique conjugué présentant un ratio d'activité  $K = 1/(2\sqrt{2})$  et un ratio des diffusivités  $G = 2$ . En effet, dans de telles conditions, la condition de flux imposée à la partie solide de l'interface fait diverger le calcul. En outre, la condition aux limites imposée côté fluide dépend d'une corrélation empirique proposée par Flageul *et al.* (2017) construit pour le cas spécifique d'un écoulement dans un canal plan.

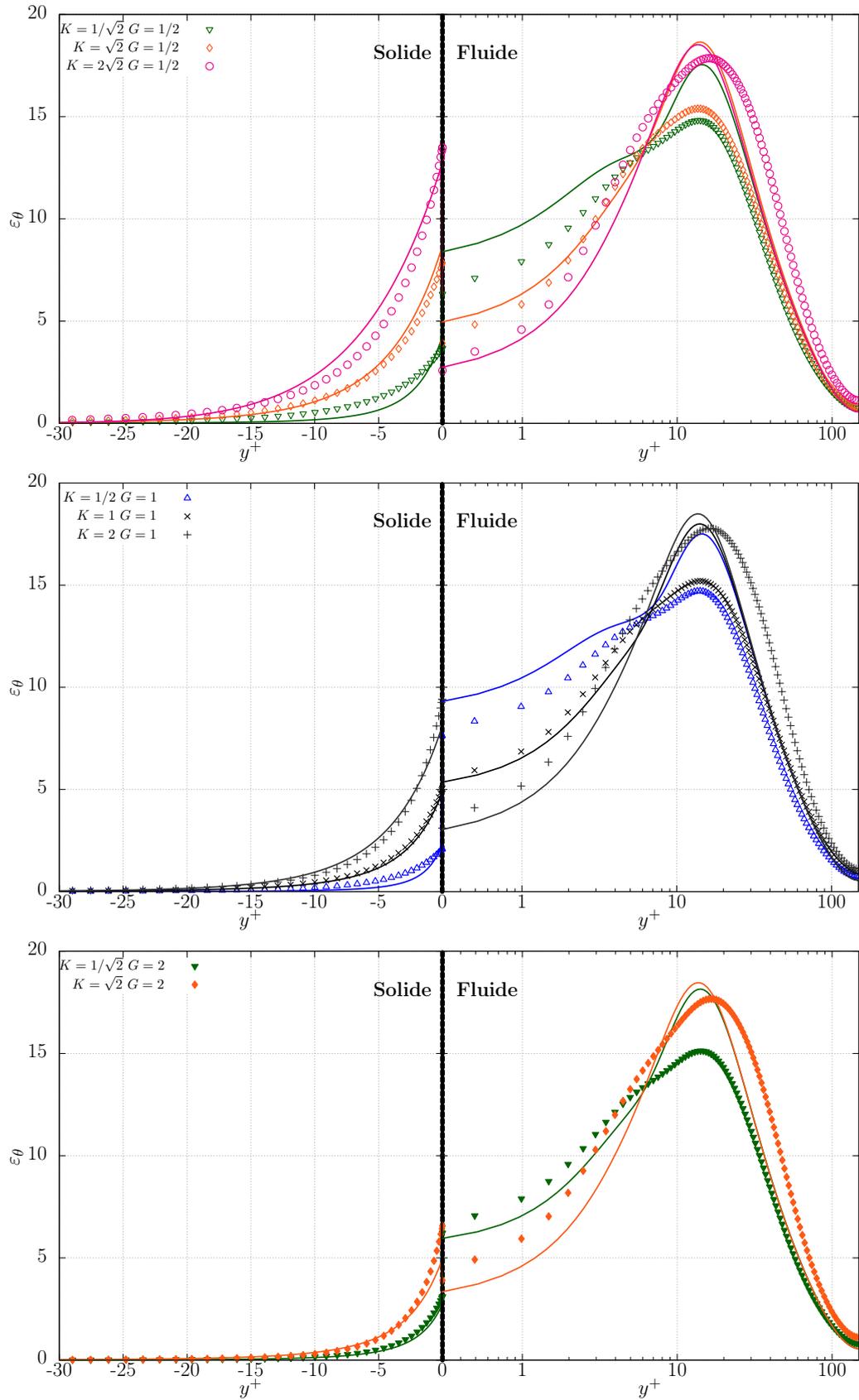


FIGURE 6.4. – Évaluation *a posteriori* du taux de dissipation de la variance de température  $\varepsilon_\theta$ . Les symboles représentent les données DNS de Flageul *et al.* (2015, 2017); les lignes désignent les simulations *Code\_Saturne*.

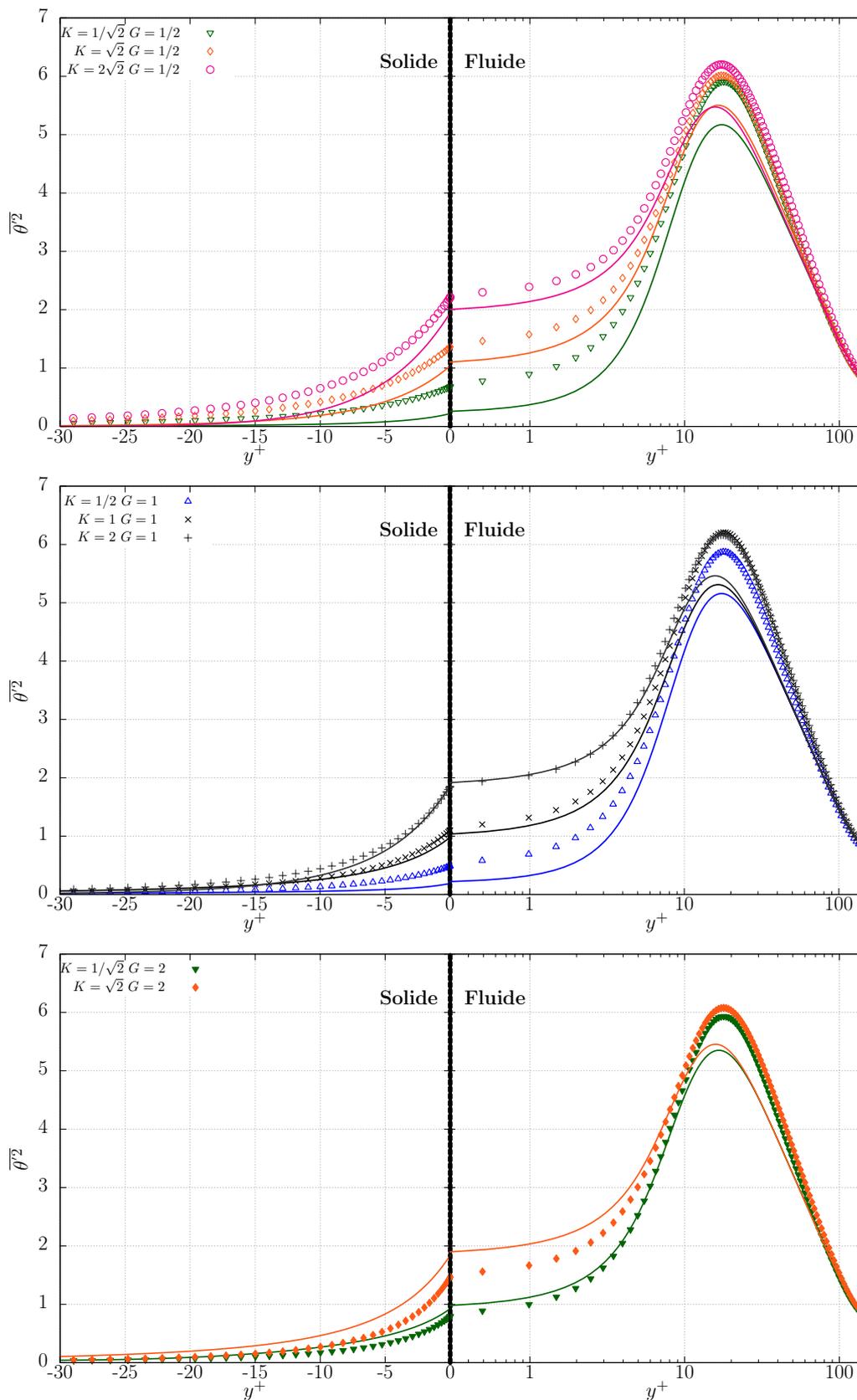


FIGURE 6.5. – Évaluation *a posteriori* du taux de dissipation de la variance de température  $\overline{\theta'^2}$ . Les symboles représentent les données DNS de Flageul *et al.* (2015, 2017); les lignes désignent les simulations *Code\_Saturne*.

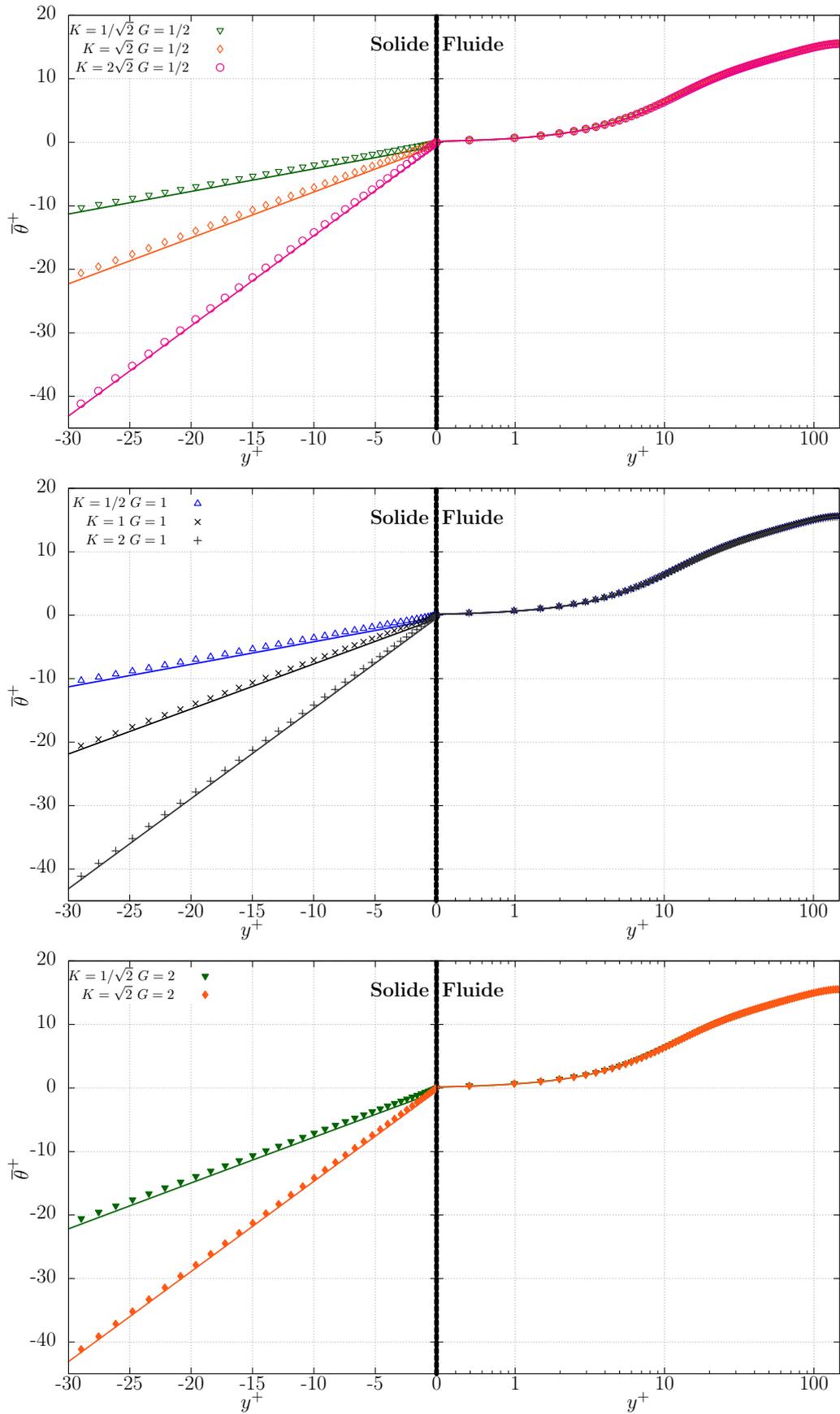


FIGURE 6.6. – Évaluation *a posteriori* de la température moyenne. Les symboles représentent les données DNS de Flageul *et al.* (2015, 2017); les lignes désignent les simulations Code\_Saturne.

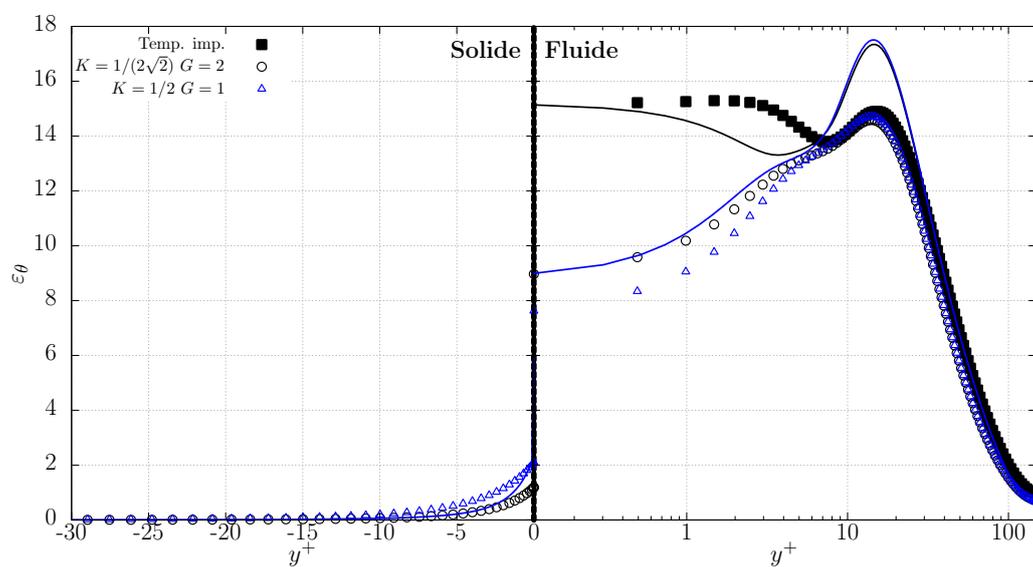


FIGURE 6.7. – Évaluation *a posteriori* du taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$ . Les symboles représentent les données DNS de Flageul *et al.* (2015, 2017); les lignes désignent les simulations *Code\_Saturne*.



# Chapitre 7

---

## Conclusions et perspectives

### CONCLUSIONS

Les objectifs de ce travail étaient de proposer des modélisations des flux thermiques turbulents, de la variance de la température et de sa dissipation capables de gérer différentes conditions aux limites sur la température. La modélisation de ces variables est compliquée dans la zone proche-paroi (milieu hautement anisotrope, effets de blocage...) et leur comportement dépend fortement de la condition aux limites sur la température. Dans le but de prendre en compte le plus de physique possible dans les modèles de turbulence et de réduire leur empirisme, l'idée était de développer un modèle du second ordre pour les flux thermiques turbulents et de proposer des équations de transport pour la variance et pour son taux de dissipation pour toutes les conditions aux limites possibles sur la température.

Ce manuscrit définit, dans un premier temps, une extension du modèle avancé du second ordre pour les flux thermiques turbulents proposé par Dehoux *et al.* (2017) à des conditions aux limites sur la température de flux de chaleur imposé et de transfert thermique conjugué. Les analyses asymptotiques utilisés par Dehoux *et al.* (2017) pour construire leur modèle pour une condition de température imposée à la paroi ont été étendues à tous les types de conditions aux limites sur la température, et une nouvelle formulation du modèle est proposée. Elle consiste en la modification du modèle proche-paroi du terme de brouillage de l'équation de transport des flux thermiques turbulents et s'appuie sur le paramètre  $\sqrt{Pr}/\sqrt{R}$  qui permet d'adapter le modèle à la condition aux limites. L'intérêt de ce paramètre repose sur le comportement asymptotique du ratio des échelles de temps thermique et dynamique  $R$  (qui tend vers le nombre de Prandtl à la paroi pour une température imposée et vers l'infini sinon) qui doit alors être correctement modélisé. Comme le ratio  $R$  fait appel à la variance de température  $\overline{\theta'^2}$  et à son taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$ , il devient crucial de modéliser précisément ces deux variables dans la zone proche-paroi.

Ainsi, un nouveau modèle pour le taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$  est ensuite proposé dans ce manuscrit. La méthode utilisée est de modéliser termes à termes l'équation de transport exacte de la variable  $\varepsilon_\theta$ . Cette équation compte sept termes dont six sont à modéliser. Le terme de diffusion turbulente est modélisé par l'approche classique de Daly & Harlow (1970) et le terme de production par la hessienne de la température moyenne par le modèle proposé par Nagano (2002). Deux nouveaux modèles utilisant l'approche de relaxation elliptique sont développés pour les termes de production par gradient de température moyenne et de vitesse moyenne. L'étape primordiale de ces travaux concerne la modélisation de la différence entre les termes de production turbulente et de dissipation. En effet, le comportement de la dissipation de la variable  $\varepsilon_\theta$  dépend fortement de la condition aux limites sur la température à la paroi. Sa modélisation a donc nécessité l'utilisation de deux paramètres pour reproduire les différents comportements asymptotiques pilotés par la condition aux limites : le paramètre  $\sqrt{Pr}/\sqrt{R}$  (déjà utilisé pour

la modélisation des flux thermiques turbulents) et le paramètre  $\sigma_\theta/\varepsilon_\theta$  où  $\sigma_\theta = \kappa \left( \frac{\sqrt{\overline{\partial\theta'^2}}}{\partial y} \right)^2$ . Le premier permet au modèle de distinguer la configuration température imposée avec les cas de flux de chaleur imposé et de transfert thermique conjugué. Le deuxième permet de différencier les cas de flux de chaleur imposé et de transfert thermique conjugué. Les tests *a priori* montrent alors des résultats corrects pour la modélisation de la variable  $\varepsilon_\theta$ . Enfin, la modélisation de la variance de température se fait aisément puisque le seul problème concernait la modélisation de son taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$ .

Les modélisations bas-Reynolds des flux thermiques turbulents, de la variance de température et de son taux de dissipation ont été validées pour un écoulement dans un canal plan en convection forcée en considérant différentes conditions aux limites sur la température. Les résultats de simulations effectuées avec le logiciel *Code\_Saturne* sont comparés avec les données DNS de Flageul *et al.* (2015). Les nouveaux modèles développés dans ce manuscrit sont capables de s'adapter au type de condition aux limites et donnent des estimations satisfaisantes des différentes variables. En particulier, les résultats les plus spectaculaires concernent les comportements asymptotiques de la variance de température et de sa dissipation qui dépendent fortement de la condition aux limites et qui sont correctement approchés par les nouvelles modélisations. De plus, les modèles ont également été testés pour des configurations de transfert thermique conjugué comprenant des propriétés thermiques différentes entre les parties solide et fluide. Le problème de ces cas concerne la discontinuité de la variable  $\varepsilon_\theta$  à l'interface entre le fluide et le solide. Ainsi, de nouvelles conditions aux limites pour la variable  $\varepsilon_\theta$  ont été développées pour gérer l'interface fluide/solide, i.e., une condition de flux est imposée à la paroi solide de l'interface, et une condition de type Dirichlet reprenant la corrélation de Flageul *et al.* (2017) entre les valeurs solide et fluide de la variable  $\varepsilon_\theta$  est fixée à la paroi fluide. Les résultats des simulations comparés aux données DNS de Flageul *et al.* (2015) montrent que la modélisation de la variable  $\varepsilon_\theta$  est capable de capter la discontinuité à l'interface et reproduit correctement son comportement dans les parties solide et fluide. Comme  $\varepsilon_\theta$  est la variable clé de ce manuscrit, sa bonne prédiction entraîne une bonne estimation de la variance de température et des flux thermiques turbulents pour toutes les configurations testées. Cependant, parmi tous les cas de transfert thermique conjugué étudiés, un seul a posé problème : la configuration présentant un ratio d'activité thermique  $K = 1/(2\sqrt{2})$ . En effet, les conditions aux limites imposées à la variable  $\varepsilon_\theta$  à l'interface entre le fluide et le solide ne sont pas adaptées et font diverger les simulations à l'interface.

## PERSPECTIVES

La suite logique de ce travail de thèse est la validation des modèles sur une panoplie de cas tests. Il serait notamment intéressant de les tester pour des écoulements soumis à des régimes de convections mixte et naturelle. En effet, l'utilisation des fermetures du second ordre pour la thermique est en partie justifiée par leur capacité à gérer les effets de flottabilité. Ainsi, des cas de cavité différentiellement chauffée seraient intéressants à simuler. Il est également nécessaire de tester ces modèles sur des cas industriels comme par exemple un écoulement dans un té de mélange.

Les cas de transfert thermique conjugué sont les cas qui reflètent le plus fidèlement possible la réalité. Cependant, ce manuscrit a mis en évidence la limite de la modélisation de la variable

$\varepsilon_\theta$  pour simuler les configurations dans lesquelles le ratio d'activité  $K = 1/(2\sqrt{2})$ . Il est donc primordial de retravailler la modélisation et en particulier les conditions aux limites imposées à la variable  $\varepsilon_\theta$  à l'interface entre les domaines fluide et solide.

Enfin, d'un point de vue industriel, le développement de lois de paroi pour les variables dynamiques et thermiques semble être essentiel. En effet, les applications industrielles peuvent mettre en jeu des géométries complexes ou encore des phénomènes de rugosité comme par exemple avec les études CFD atmosphériques où le sol peut être composé d'arbres ou de bâtiments. Ainsi, plusieurs travaux sur les lois de paroi ont été menés comme ceux de Craft *et al.* (2002) ou plus récemment Chedevergne (2018). Ce qu'il serait intéressant d'étudier dans le prolongement de ce travail de thèse, ce serait le développement de lois de paroi adaptatives pour les flux thermiques turbulents, la variance de la température et son taux de dissipation. Les modèles développés dans ce manuscrit sont des modèles bas-Reynolds et nécessitent un maillage assez fin en proche paroi de manière à pouvoir résoudre la couche limite. Cependant, dans le cas d'applications industrielles, il n'est pas toujours facile de raffiner un maillage dans la zone proche de la paroi (géométrie complexes, coût de calcul...). Or, si le maillage n'est pas conforme aux modèles de turbulence utilisés, des erreurs de modélisations apparaissent et biaisent les résultats du calcul CFD. Ainsi, une des solutions possibles est de développer des lois de paroi adaptatives qui vont s'activer et corriger les erreurs de modélisation là où le maillage n'est pas conforme à l'utilisation de modèles bas-Reynolds, à l'image des lois de paroi développées par Wald (2016). Une ébauche sur les lois de paroi adaptatives est à retrouver en Annexe F.



# Bibliographie

- Abe H., Kawamura H., Matsuo Y.* Surface heat-flux fluctuations in a turbulent channel flow up to  $Re_{\tau}=1020$  with  $Pr=0.025$  and  $0.71$  // *Int. J. Heat Fluid Fl.* 2004. 25, 3. 404–419. Turbulence and Shear Flow Phenomena (TSFP-3).
- Abe K., Kondoh T., Nagano Y.* A new turbulence model for predicting fluid flow and heat transfer in separating and reattaching flows—II. Thermal field calculations // *Int. J. Heat Mass Trans.* 1995. 38, 8. 1467–1481.
- Abe K., Kondoh T., Nagano Y.* A two-equation heat transfer model reflecting second-moment closures for wall and free turbulent flows // *Int. J. Heat Fluid Fl.* 1996. 17, 3. 228–237.
- Angelino M., Goldstein R.J., Gori F.* Lateral edge effects on heat/mass transfer on a finite width surface within a turbulent boundary layer // *Int. J. Heat Mass Tran.* 2019. 138. 32–40.
- Archambeau F., Méchitoua N., Sakiz M.* *Code\_Saturne* : a Finite Volume Code for the Computation of Turbulent Incompressible Flows // *Industrial Applications, International Journal on Finite Volumes.* 2004. 1.
- Benhamadouche S.* On the use of (U)RANS and LES approaches for turbulent incompressible single phase flows in nuclear engineering applications // *Nucl. Eng. Des.* 2017. 312. 2–11. 16th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics.
- Benhamadouche S., Afgan I., Manceau R.* Numerical simulations of flow and heat transfer in a wall bounded pin matrix // *Flow Turbul. Combust.* 2019. In press.
- Billard F., Laurence D.* A robust  $k - \varepsilon - v^2/k$  elliptic blending turbulence model applied to near-wall, separated and buoyant flows // *Int. J. Heat Fluid Fl.* 2012. 33, 1. 45–58.
- Bédidi L.* Modélisation de la variance de la température dans le code de calcul SYRTHES. 2016.
- Chassaing P.* Turbulence en mécanique des fluides. analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l'usage de l'ingénieur. 2000.
- Chedevergne F.* Analytical wall function including roughness corrections // *Int. J. Heat Fluid Fl.* 2018. 73. 258–269.
- Chien K.-Y.* Predictions of Channel and Boundary-Layer Flows with a Low-Reynolds-Number Turbulence Model // *AIAA J.* 1982. 20, 1. 33–38.
- Choi S.-K., Han J.-W., Choi H.-K.* Performance of second-moment differential stress and flux models for natural convection in an enclosure // *Int. Commun. Heat Mass Transfer.* 2018. 99. 54–61.
- Choi S. K., Kim S. O.* Treatment of turbulent heat fluxes with the elliptic-blending second-moment closure for turbulent natural convection flows // *Int. J. Heat Mass Tran.* 2008. 51, 9. 2377–2388.

- Chou P. Y.* On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation // *Q. Appl. Math.* 1945. 3, 1. 38–54.
- Craft T., Gerasimov A.V., Iacovides H., Launder B.E.* Progress in the generalization of wall-function treatments // *Int. J. Heat Fluid Fl.* 2002.
- Craft T., Iacovides H., Uapipatanakul S.* Towards the development of RANS models for conjugate heat transfer // *J. Turbul.* 2010. 11. N26.
- Craft T.J., Ince N.Z., Launder B.E.* Recent developments in second-moment closure for buoyancy-affected flows // *Dyn. Atmos. Oceans.* 1996. 23, 1. 99–114. Stratified flows.
- Daly B. J., Harlow F. H.* Transport Equations in Turbulence // *Phys. Fluids.* 1970. 13, 11. 2634–2649.
- Dehoux F.* Modélisation statistique des écoulements turbulents en convection forcée, mixte et naturelle. 2012.
- Dehoux F., Benhamadouche S., Manceau R.* An elliptic blending differential flux model for natural, mixed and forced convection // *Int. J. Heat Fluid Fl.* 2017. 63. 190–204.
- Deng B., Wu W., Xi S.* A near-wall two-equation heat transfer model for wall turbulent flows // *Int. J. Heat Mass Trans.* 2001. 44, 4. 691–698.
- Dol H. S., Hanjalić K., Kenjeres S.* A comparative assessment of the second-moment differential and algebraic models in turbulent natural convection // *Int. J. Heat Fluid Fl.* 1997. 18, 1. 4–14. Selected Papers from the Engineering Foundation Turbulent Heat Transfer Conference.
- Dovizio D., Shams A., Roelofs F.* Numerical prediction of flow and heat transfer in an infinite wire-wrapped fuel assembly // *Nucl. Eng. Des.* 2019. 349. 193–205.
- Durbin P. A.* Near-wall turbulence closure modeling without "damping functions" // *Theor. Comp. Fluid Dyn.* Sep 1991. 3, 1. 1–13.
- Durbin P. A.* A Reynolds stress model for near-wall turbulence // *J. Fluid Mech.* 1993. 249. 465–498.
- Elghobashi S. E., Launder B. E.* Turbulent time scales and the dissipation rate of temperature variance in the thermal mixing layer // *Phys. Fluids.* 1983. 26, 9. 2415–2419.
- Flageul C.* Création de bases de données fines par simulation directe pour les effets de la turbulence sur les transferts thermiques pariétaux. 2015. Thèse de doctorat dirigée par Lamballais, EricLaurence, Dominique et Benhamadouche, Sofiane Mécanique des milieux fluides Poitiers 2015.
- Flageul C., Benhamadouche S., Lamballais E., Laurence D.* DNS of turbulent channel flow with conjugate heat transfer : Effect of thermal boundary conditions on the second moments and budgets // *Int. J. Heat Fluid Fl.* 2015. 55. 34–44. Special Issue devoted to the 10th Int. Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements (ETMM10) held in Marbella, Spain on September 17-19, 2014.
- Flageul C., Benhamadouche S., Lamballais E., Laurence D.* On the discontinuity of the dissipation rate associated with the temperature variance at the fluid-solid interface for cases with conjugate heat transfer // *Int. J. Heat Mass Tran.* 2017. 111. 321–328.

- Flageul C., Tiselj I., Benhamadouche S., Ferrand M.* Wall-resolved LES of channel flow : A correlation for the discontinuity of  $\varepsilon_\theta$  at the fluid-solid interface // Proc. 9th Int. Symp. Turbulence, Heat and Mass Transfer, Rio de Janeiro, Brazil. 2018.
- Gerolymos G. A., Sénéchal D., Vallet I.* Wall effects on pressure fluctuations in turbulent channel flow // J. Fluid Mech. 2013. 720. 15–65.
- Gerolymos G.A., Sauret E., Vallet I.* Contribution to single-point closure Reynolds-stress modelling of inhomogeneous flow // Theor. Comp. Fluid Dyn. Sep 2004. 17, 5. 407–431.
- Hanjalić K.* One-point closure models for buoyancy-driven turbulent flows // Annu. Rev. Fluid Mech. 2002. 34. 321–347.
- Hanjalić K., Kenjeres S., Durst F.* Natural convection in partitioned two-dimensional enclosures at higher Rayleigh numbers // Int. J. Heat Mass Trans. 1996. 39, 7. 1407–1427.
- Hanjalić K., Launder B.* Modelling Turbulence in Engineering and the Environment : Second-Moment Routes to Closure. 2011.
- Hanjalić K., Popovac M., Hadziabdić M.* A robust near-wall elliptic-relaxation eddy-viscosity turbulence model for CFD // Int. J. Heat Fluid Fl. 2004. 25, 6. 1047–1051.
- Hattori H., Nagano Y.* Rigorous formulation of two-equation heat transfer model of turbulence using direct simulations // Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals. 1998. 33, 2. 153–180.
- Howard R., Serre E.* Large-eddy simulation in a mixing tee junction : High-order turbulent statistics analysis // Int. J. Heat Fluid Fl. 2015. 51. 65–77. Theme special issue celebrating the 75th birthdays of Brian Launder and Kemo Hanjalic.
- Howard R., Serre E.* Large eddy simulation in *Code\_Saturne* of thermal mixing in a T junction with brass walls // Int. J. Heat Fluid Fl. 2017. 63. 119–127.
- Howard R. J.* A wall heat transfer function for equilibrium flows - combination of Reichardt and Kader profiles with Wang type scaling // In Begel House, editeur, Proc. 7th Int. Cong. Turbulence, Heat and Mass Transfer (THMT). 2012.
- Hwang C.B., Lin C.A.* A low Reynolds number two-equation  $k_\theta$ - $\varepsilon_\theta$  model to predict thermal fields // Int. J. Heat Mass Trans. 1999. 42, 17. 3217–3230.
- Jones W.P., Musonge P.* Closure of the Reynolds stress and scalar flux equations // Phys. Fluids. 1988. 31. 3589–3604.
- Kader B.A., Yaglom A.M.* Heat and mass transfer laws for fully turbulent wall flows // Int. J. Heat Mass Trans. 1972. 15, 12. 2329–2351.
- Karcz M., Badur J.* An alternative two-equation turbulent heat diffusivity closure // Int. J. Heat Mass Trans. 2005. 48, 10. 2013–2022.
- Kasagi N., Kuroda A., Hirata M.* Numerical Investigation of Near-Wall Turbulent Heat Transfer Taking Into Account the Unsteady Heat Conduction in the Solid Wall // Journal of Heat Transfer. 1989. 111, 2. 385–392.
- Kasagi N., Tomita Y., Kuroda A.* Direct Numerical Simulation of Passive Scalar Field in a Turbulent Channel Flow // J. Heat Transf. 1992. 114. 598–606.

- Kenjeres S., Gunarjo S. B., Hanjalić K.* Contribution to elliptic relaxation modelling of turbulent natural and mixed convection // *Int. J. Heat Fluid Fl.* 2005. 26, 4. 569–586. CHT'04.
- Keshmiri A.* Modelling of conjugate heat transfer in near-wall turbulence // M.Sc. diss., School of Mechanical Aerospace and Civil Engineering, The University of Manchester. 2006.
- Kim J., Moin P.* Transport of Passive Scalars in a Turbulent Channel Flow // *Turbulent Shear Flows* 6. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1989. 85–96.
- Kong H., Choi H., Lee J. S.* Direct numerical simulation of turbulent thermal boundary layers // *Phys. Fluids*. 2000. 12, 10. 2555–2568.
- Laizet S., Lamballais E.* High-order compact schemes for incompressible flows : A simple and efficient method with quasi-spectral accuracy // *J. Comput. Phys.* 2009. 228, 16. 5989–6015.
- Laizet S., Li N.* Incompact3d : A powerful tool to tackle turbulence problems with up to  $o(10^5)$  computational cores // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. 2011. 67, 11. 1735–1757.
- Launder B. E.* On the effects of a gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum // *J. Fluid Mech.* 1975. 67, 3. 569–581.
- Launder B. E.* On the Computation of Convective Heat Transfer in Complex Turbulent Flows // *J. Heat Transf.* 1988. 110. 1112–1128.
- Launder B. E., Sharma B. I.* Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc // *Lett. Heat Mass Trans.* XII 1974. 1. 131–137.
- Launder B.E., Spalding D.B.* The Numerical Computation of Turbulent Flow // *Comput. Method. Appl. M.* 1974.
- Lesieur M.* La Turbulence. 1994a.
- Lesieur M.* La turbulence dans l'environnement et en aéronautique // *La Houille Blanche*. 1994b. 5-6. 100–109.
- Lumley J. L., Newman G. R.* The return to isotropy of homogeneous turbulence // *J. Fluid Mech.* 1977. 82, 1. 161–178.
- Manceau R.* Recent progress in the development of the Elliptic Blending Reynolds-stress model // *Int. J. Heat Fluid Fl.* 2015. 51. 195–220. Theme special issue celebrating the 75th birthdays of Brian Launder and Kemo Hanjalic.
- Manceau R., Hanjalić K.* Elliptic blending model : A new near-wall Reynolds-stress turbulence closure // *Phys. Fluids*. 2002.
- Manceau R., Parneix S., Laurence D.* Turbulent heat transfer predictions using the  $v^2 - f$  model on unstructured meshes // *Int. J. Heat Fluid Fl.* 2000. 21, 3. 320–328.
- Manceau R., Wang M., Laurence D.* Inhomogeneity and anisotropy effects on the redistribution term in Reynolds-averaged Navier–Stokes modelling // *J. Fluid Mech.* 2001. 438. 307–338.
- Menter F. R.* Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // *AIAA J.* 1994. 32, 8. 1598–1605.

- Mompean G.* Three-equation turbulence model for prediction of the mean square temperature variance in grid-generated flows and round jets // *Int. J. Heat Mass Trans.* 1994. 37, 7. 1165–1172.
- Monin A. S.* On the symmetry of turbulence in the surface layer of air // *Izv. Atm. Oceanic Phys.* 1965. 1. 45–54.
- Myong H. K., Kasagi N.* A new approach to the improvement of k-epsilon turbulence model for wall-bounded shear flows // *JSME Int. J.* 1990. 33. 63–72.
- Myong H. K., Kasagi N., HIRATA M.* Numerical Prediction of Turbulent Pipe Flow Heat Transfer for Various Prandtl Number Fluids with the Improved k-epsilon; Turbulence Model // *JSME Int. J. II-Fluid.* 1989. 32, 4. 613–622.
- Nagano Y.* Modelling Heat Transfer in Near-Wall Flows // *Closure Strategies for Turbulent and Transitional Flows.* 2002.
- Nagano Y., Kim C.* A Two-Equation Model for Heat Transport in Wall Turbulent Shear Flows // *J. Heat Trans.* 08 1988. 110, 3. 583–589.
- Nagano Y., Tagawa M.* An Improved k-epsilon Model for Boundary Layer Flows // *J. Fluid. Eng-T ASME.* 1990. 112. 33–39.
- Newman G. R., Launder B. E., Lumley J. L.* Modelling the behaviour of homogeneous scalar turbulence // *J. Fluid Mech.* 1981. 111. 217–232.
- Parneix S., Behnia M., Durbin P. A.* Predictions of turbulent heat transfer in an axisymmetric jet impinging on a heated pedestal // *J. Heat Transf.* 1998. 120. 1–7. Cited By :4.
- Peeters T.W.J., Henkes R.A.W.M.* The Reynolds-stress model of turbulence applied to the natural-convection boundary layer along a heated vertical plate // *Int. J. Heat Mass Trans.* 1992. 35, 2. 403–420.
- Pope S.B.* *Turbulent Flow.* 2000.
- Rhee G. H., Sung H. J.* A low-Reynolds-number, four-equation heat transfer model for turbulent separated and reattaching flows // *Int. J. Heat Fluid Fl.* 1997. 18, 1. 38–44. Selected Papers from the Engineering Foundation Turbulent Heat Transfer Conference.
- Rhie C. M., Chow W. L.* Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation // *AIAA J.* 1983. 21, 11. 1525–1532.
- Rodi W., Mansour N. N.* Low Reynolds number k- $\epsilon$  modelling with the aid of direct simulation data // *J. Fluid Mech.* 1993. 250. 509–529.
- Rotta J.* Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz // *Zeitschrift für Physik.* Nov 1951. 129, 6. 547–572.
- Shams A., De Santis A., Roelofs F.* An overview of the AHFM-NRG formulations for the accurate prediction of turbulent flow and heat transfer in low-Prandtl number flows // *Nucl. Eng. Des.* 2019. 355. 110342.
- Shikazono N., Kasagi N.* Second-moment closure for turbulent scalar transport at various Prandtl numbers // *Int. J. Heat Mass Tran.* 1996. 39, 14. 2977–2987.

- Shin J. K., An J. S., Choi Y. D., Kim Y. C., Kim M. S.* Elliptic relaxation second moment closure for the turbulent heat fluxes // *J. Turbul.* 2008. 9. 1–29.
- Sommer T. P., So R. M. C., Zhang H. S.* Heat Transfer Modeling and the Assumption of Zero Wall Temperature Fluctuations // *J. Heat Transf.* 1994. 116, 4. 855–863.
- Sommer T.P., So R.M.C., Lai Y.G.* A near-wall two-equation model for turbulent heat fluxes // *Int. J. Heat Mass Trans.* 1992. 35, 12. 3375–3387.
- Spalding D.B.* Concentration fluctuations in a round turbulent free jet // *Chem. Eng. Sci.* 1971. 26, 1. 95–107.
- Speziale C. G., Sarkar S., Gatski T. B.* Modelling the pressure–strain correlation of turbulence : an invariant dynamical systems approach // *J. Fluid Mech.* 1991. 227. 245–272.
- Surroop D.* Modélisation de la dissipation de la variance de la température dans *Code\_Saturne*. Application au transfert thermique conjugué. 2017.
- Tiselj I., Bergant R., Mavko B., Bajsić I., Hetsroni G.* DNS of Turbulent Heat Transfer in Channel Flow With Heat Conduction in the Solid Wall // *J. Heat Transf.* 2001a. 123. 849–857.
- Tiselj I., Pogrebnyak E., Li C., Mosyak A., Hetsroni G.* Effect of wall boundary condition on scalar transfer in a fully developed turbulent flume // *Phys. Fluids.* 2001b. 13, 4. 1028–1039.
- Trias F.X., Soria M., OLIVA A., Perez-Segarra C.-D.* Direct numerical simulations of two- and three-dimensional turbulent natural convection flows in a differentially heated cavity of aspect ratio 4 // *J. Fluid Mech.* 09 2007. 586. 259–293.
- Vanpouille D., Aupoix B., Laroche E.* Development of an explicit algebraic turbulence model for buoyant flows – Part 2 : Model development and validation // *Int. J. Heat Fluid Fl.* 08 2015. 53.
- Versteeg H. K., Malalasekera W.* An introduction to computational fluid dynamics - the finite volume method. 1995.
- Wald J. F.* Lois de paroi adaptatives pour un modèle de fermeture du second ordre dans un contexte industriel. 2016. Thèse de doctorat dirigée par Manceau, Rémi Mécanique des Fluides Pau 2016.
- Wilcox D. C.* Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models // *AIAA J.* 1988. 26, 11. 1299–1310.
- Wilcox D.C.* Turbulence Modelling for CFD, 2nd Edition. 2004.
- Yang G., Iacovides H., Craft T., Apsley D.* RANS Modelling for Temperature Variance in Conjugate Heat Transfer // *Proc. 5th World congress on Mechanical, Chemical, and Material Engineering, Lisbon, Portugal.* 08 2019.
- Youssef M. S., Nagano Y., Tagawa M.* A two-equation heat transfer model for predicting turbulent thermal fields under arbitrary wall thermal conditions // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1992.

# Annexe A

---

## Récapitulatif des modèles utilisés dans le manuscrit

### A.1. Elliptic Blending Reynolds Stress Model (EBRSM)

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u'_i u'_j}}{Dt} = & -\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} - \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} - g_i \beta \overline{u'_j \theta'} - g_j \beta \overline{u'_i \theta'} + \phi_{ij}^* \\ & - \varepsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{C_\mu}{\sigma_k} \overline{u'_l u'_m} \tau \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_m} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\varepsilon_{ij} = (1 - \alpha^3) \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} \varepsilon + \frac{2}{3} \alpha^3 \varepsilon \delta_{ij} \quad (\text{A.2})$$

$$\phi_{ij}^* = (1 - \alpha^3) \phi_{ij}^w + \alpha^3 \phi_{ij}^h \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^w = & -5 \frac{\varepsilon}{k} \left[ \overline{u'_i u'_k n_j n_k} + \overline{u'_j u'_k n_i n_k} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \overline{u'_k u'_l n_k n_l} (n_i n_j + \delta_{ij}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \alpha}{\|\nabla \alpha\|} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^h = & - \left( g_1 + g_1^* \frac{P_k}{\varepsilon} \right) \varepsilon b_{ij} + (g_3 - g_3^* \sqrt{b_{kl} b_{kl}}) k S_{ij} \\ & + g_4 k \left( b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{lm} S_{lm} \delta_{ij} \right) \\ & + g_5 k (b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}) - g_6 \left( G_{ij} - \frac{2}{3} G_k \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$g_1 = 3.4; g_1^* = 1.8; g_3 = 0.8; g_3^* = 1.3;$$

$$g_4 = 1.25; g_5 = 0.4; g_6 = 0.5 \quad (\text{A.7})$$

$$b_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{2k} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (\text{A.8})$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right); \quad W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A.9})$$

$$\alpha - L^2 \nabla^2 \alpha = 1 \quad (\text{A.10})$$

$$L = C_L \max \left( \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}} \right) \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} = & C'_{\varepsilon 1} \frac{P_k}{\tau} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon}{\tau} + C_{\varepsilon 3} \frac{\sqrt{Pr} G_k}{\sqrt{R} \tau} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \overline{u'_l u'_m} \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_m} \right) + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_k \partial x_k} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\tau = \max \left( \frac{k}{\varepsilon}, C_T \left( \frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \right) \quad (\text{A.13})$$

$$C'_{\varepsilon 1} = C_{\varepsilon 1} \left[ 1 + A_1 (1 - \alpha^3) \frac{P_k}{\varepsilon} \right] \quad (\text{A.14})$$

$$P_k = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \quad (\text{A.15})$$

$$G_k = -\beta \overline{u'_i \theta'} g_i \quad (\text{A.16})$$

$$C_\mu = 0.21; \sigma_k = 1.0; C_T = 6.0; C_L = 0.125;$$

$$C_\eta = 80.0; C_{\varepsilon 1} = 1.44; C_{\varepsilon 2} = 1.83;$$

$$C_{\varepsilon 3} = 2.02; A_1 = 0.1; \sigma_\varepsilon = 1.15 \quad (\text{A.17})$$

## A.2. Elliptic Blending Heat Flux Model (EBDFM)

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u'_i \theta'}}{Dt} = & -\overline{u'_k \theta'} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} - \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} - \beta g_i \overline{\theta'^2} \\ & + \phi_{\theta i}^* - \varepsilon_{\theta i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( C_\theta \overline{u'_k u'_l} \tau \frac{\partial \overline{u'_i \theta'}}{\partial x_l} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\kappa + \nu}{2} \frac{\partial \overline{u'_i \theta'}}{\partial x_k} + n_i n_j \frac{\nu - \kappa}{6} \frac{\partial \overline{u'_j \theta'}}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$\varepsilon_{\theta i} = (1 - \alpha_\theta) \varepsilon_{\theta i}^w + \alpha_\theta \varepsilon_{\theta i}^h \quad (\text{A.19})$$

$$\varepsilon_{\theta i}^w = \gamma \frac{1}{\mathcal{T}} C_\varepsilon \left[ 1 + C_{w\theta}^\varepsilon (1 - \alpha_\theta) \frac{P_k + G_k}{\varepsilon} \right] \left( \overline{u'_i \theta'} + \overline{u'_j \theta'} n_i n_j \right) \quad (\text{A.20})$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R}} \quad (\text{A.21})$$

$$\varepsilon_{\theta i}^h = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$\phi_{\theta i}^* = (1 - \alpha_\theta) \phi_{\theta i}^w + \alpha_\theta \phi_{\theta i}^h \quad (\text{A.23})$$

$$\phi_{\theta i}^h = -\frac{\sqrt{R^h}}{\sqrt{R}\mathcal{T}} C_{1\theta} \overline{u'_i \theta'} + C_{2\theta} \overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + C_{3\theta} \beta g_i \overline{\theta'^2} \quad (\text{A.24})$$

$$\phi_{\theta i}^w = -\beta \frac{1}{\mathcal{T}} \left[ 1 + C_{w\theta}^\phi (1 - \alpha_\theta) \frac{P_k + G_k}{\varepsilon} \right] \overline{u'_j \theta'} n_i n_j \quad (\text{A.25})$$

$$\beta = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{1}{Pr} + \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R}} \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) \quad (\text{A.26})$$

$$C_\theta = 0.22; C_{w\theta}^\phi = 2; C_{w\theta}^\varepsilon = -0.3 \quad (\text{A.27})$$

$$\alpha_\theta - L_\theta^2 \nabla^2 \alpha_\theta = 1 \quad (\text{A.28})$$

$$L_\theta = 2.5L \quad (\text{A.29})$$

$$R = \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}_\theta}; \mathcal{T}_\theta = \frac{\overline{\theta'^2}}{2\varepsilon_\theta};$$

$$\mathcal{T} = \frac{k}{\varepsilon}; C_\varepsilon = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{Pr} \right); C_{1\theta} = 4.15;$$

$$C_{2\theta} = 0.3; C_{3\theta} = 0.5 \quad (\text{A.30})$$

### A.3. MODÈLE POUR LA VARIANCE DE TEMPÉRATURE $\overline{\theta'^2}$

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{\theta'^2}}{Dt} &= -2\overline{u'_k \theta'} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} - 2\varepsilon_\theta + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_k} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( C_{\theta\theta} \overline{u'_k u'_l \tau} \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_l} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

$$\tau = \max \left( \mathcal{T}, C_{T_{\theta'^2}} \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} \right) \quad (\text{A.32})$$

$$C_{\theta\theta} = 0.21; C_{T_{\theta'^2}} = 6.0 \quad (\text{A.33})$$

A.4. MODÈLE POUR LE TAUX DE DISSIPATION DE LA VARIANCE DE TEMPÉRATURE  $\varepsilon_\theta$ 

$$\begin{aligned}
\frac{D\varepsilon_\theta}{Dt} = & -\frac{2}{1+Pr}\varepsilon_{\theta j}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_j} \\
& -c_{\varepsilon\theta 1}\varepsilon_{\theta jk}^{\theta}\frac{\partial\bar{U}_j}{\partial x_k} \\
& +\kappa\left(Cp_4\overline{u'_j u'_k}\frac{f_R}{\varepsilon}\frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial x_k\partial x_l}\frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial x_l\partial x_j}+Cp_3\frac{k}{\varepsilon}f_R\frac{\partial\overline{u'_j u'_l}}{\partial x_k}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_l}\frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial x_j\partial x_k}\right)
\end{aligned} \tag{A.34}$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(c_s\overline{u'_j u'_k}\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial x_k}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\kappa\frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon_\theta\right)$$

$$+(1-\alpha_\theta)(P_{\varepsilon_\theta}^w - Y_{\varepsilon_\theta}^w) + \alpha_\theta(P_{\varepsilon_\theta}^h - Y_{\varepsilon_\theta}^h)$$

$$\varepsilon_{ij}^{\theta} = (1-\alpha_\theta)\varepsilon_{ij}^{\theta w} + \alpha_\theta\varepsilon_{ij}^{\theta h}, \tag{A.35}$$

$$\varepsilon_{ij}^{\theta h} = \frac{2}{3}\varepsilon_\theta\delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij}^{\theta w} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k}\varepsilon_\theta. \tag{A.36}$$

$$P_{\varepsilon_\theta}^h - Y_{\varepsilon_\theta}^h = (1-\alpha_\theta)(P_{\varepsilon_\theta}^w - Y_{\varepsilon_\theta}^w) + \alpha_\theta(P_{\varepsilon_\theta}^h - Y_{\varepsilon_\theta}^h), \tag{A.37}$$

$$P_{\varepsilon_\theta}^h = c_{\varepsilon_\theta}^{h1}\frac{\varepsilon_\theta}{k}P_k + c_{\varepsilon_\theta}^{h2}\frac{\varepsilon}{k}P_\theta, \tag{A.38}$$

$$Y_{\varepsilon_\theta}^h = c_H\frac{\varepsilon_\theta}{\tau_\theta}. \tag{A.39}$$

$$P_{\varepsilon_\theta}^w = c_{\varepsilon_\theta}^{w1}\left[1 - c_{\varepsilon_\theta}^{w2}(1-\alpha_\theta)\frac{P_k}{\varepsilon}\right]\frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta}\frac{\varepsilon_\theta}{\sqrt{\mathcal{T}\mathcal{T}_\theta}}. \tag{A.40}$$

$$\begin{aligned}
Y_{\varepsilon_\theta}^w = & \left[\left(1 - \sqrt{\frac{Pr}{R}}\right)\left(1 - c_w(1-\alpha_\theta)\frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta}\right)\left(c_N - \frac{\sigma_\theta}{\varepsilon_\theta}c_C\right)\right. \\
& \left.+ c_D\sqrt{\frac{Pr}{R}}\frac{\varepsilon_\theta}{\sqrt{\tau_{\varepsilon_\theta}\tau_\theta}}\sqrt{\frac{\mathcal{T}_\theta}{\tau_\theta}}\right]
\end{aligned} \tag{A.41}$$

$$\sigma_\theta = \kappa\left(\frac{\partial\sqrt{\theta'^2}}{\partial y}\right)^2, \tag{A.42}$$

$c_{\varepsilon\theta 1}$	$c_{\varepsilon\theta}^{h1}$	$c_{\varepsilon\theta}^{h2}$	$c_{\varepsilon\theta}^{w1}$	$c_{\varepsilon\theta}^{w2}$	$Cp_3$	$Cp_4$	$f_R$	$c_s$
1.4	2.52	2.88	2	0.75	0.15	0.28	$f_R = \frac{2R}{0.5+R}$	0.22

$c_N$	$c_C$	$c_D$	$c_w$	$c_H$	$c_{T_\theta}$	$c_{T_C}$	$c_{T_D}$	$c_{T_N}$
7.08	15.96	4.802	1.8	2.7	5.13	26.25	5.4	0.025

$$\tau_\theta = \max\left(\mathcal{T}_\theta, C_{T_\theta} \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} \frac{1}{Pr}\right), \quad (\text{A.43})$$

$$\tau_{\varepsilon_\theta} = \max\left(\mathcal{T}, C_{\mathcal{T}} \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}}\right), \quad (\text{A.44})$$

$$C_{\mathcal{T}} = \left(1 - \sqrt{\frac{Pr}{R}}\right) \left(c_{T_N} + \frac{\sigma_\theta}{\varepsilon_\theta} c_{T_C}\right) + c_{T_D} \sqrt{\frac{Pr}{R}}. \quad (\text{A.45})$$



# Annexe B

## Simulation d'un écoulement dans un canal plan : EBRSM et variables dynamiques

Cette partie a pour objectif de montrer les résultats des simulations du cas d'un écoulement dans un canal plan en convection forcée caractérisé par les nombres de Reynolds de frottement  $Re_\tau = 149$  et de Prandtl  $Pr = 0.71$ . L'attention sera portée sur le modèle EBRSM et les estimations des différentes variables dynamiques : tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$ , énergie cinétique turbulente  $k$  et son taux de dissipation  $\varepsilon$ , et sur le profil de la vitesse moyenne.

### B.1. TENSIONS DE REYNOLDS

Les Figs. B.1 et B.2 comparent les tensions de Reynolds estimées par la simulation *Code\_Saturne* avec les données DNS de Flageul *et al.* (2015). Ainsi, le modèle EBRSM prédit correctement les comportements en proche-paroi des tensions de Reynolds  $\overline{u'u'}$ ,  $\overline{v'v'}$ ,  $\overline{w'w'}$  et  $\overline{u'v'}$ . Mis à part la composante  $\overline{w'w'}$  qui est sur estimée dans la zone tampon et au centre du canal, les profils des trois autres tensions de Reynolds tracés reproduit fidèlement les profils DNS dans tout le canal.

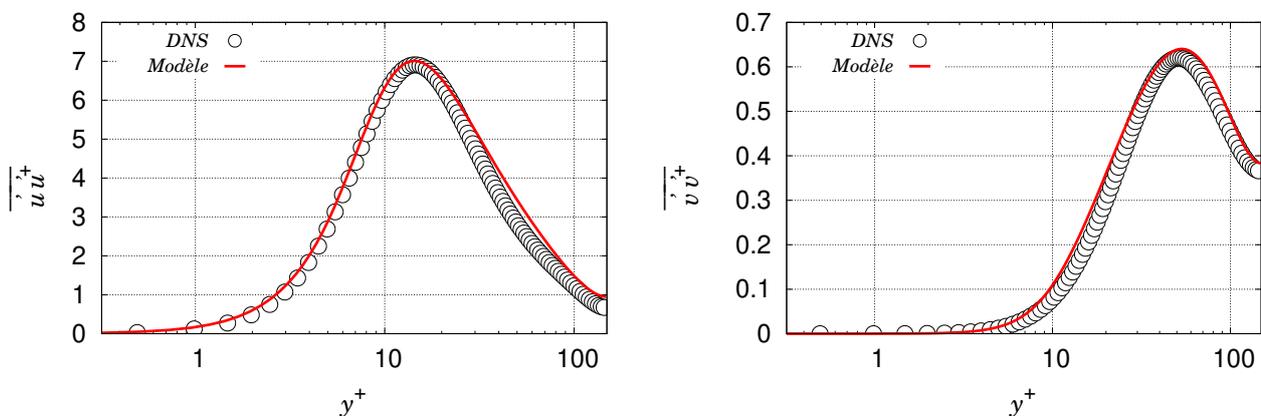


FIGURE B.1. – Évaluation *a posteriori* des tensions de Reynolds  $\overline{u'u'}$  (gauche) et  $\overline{v'v'}$  (droite) par le modèle EBRSM pour un écoulement dans un canal plan en convection forcée à  $Re_\tau = 149$  et  $Pr = 0.71$ . Données DNS de Flageul *et al.* (2015).

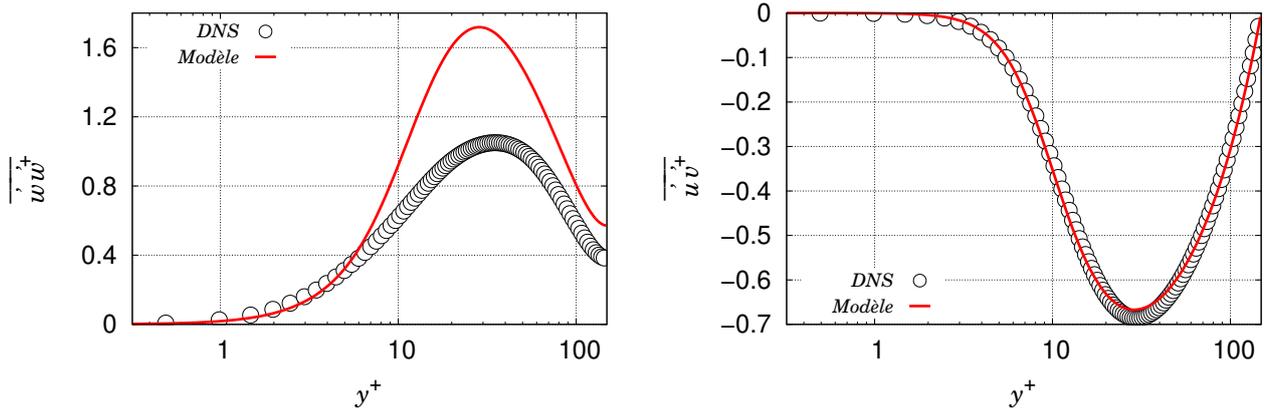


FIGURE B.2. – Évaluation *a posteriori* des tensions de Reynolds  $\overline{w'w'}$  (gauche) et  $\overline{u'v'}$  (droite) par le modèle EBRSM pour un écoulement dans un canal plan en convection forcée à  $Re_\tau = 149$  et  $Pr = 0.71$ . Données DNS de Flageul *et al.* (2015).

### B.2. ÉNERGIE CINÉTIQUE TURBULENTE $k$ ET SON TAUX DE DISSIPATION $\varepsilon$

L'énergie cinétique turbulente  $k$  est correctement prédit dans la zone de proche-paroi par la simulation effectuée par le logiciel *Code\_Saturne* comme le montre la Fig. B.3 (gauche). Cependant,  $k$  est légèrement sur-estimé dans la zone tampon et au centre du canal. Le modèle EBRSM donne un profil du taux de dissipation  $\varepsilon$  très proche de celui donné par la DNS comme l'illustre la Fig. B.3 (droite) : les comportements asymptotiques et au centre du canal s'accordent avec les données DNS.

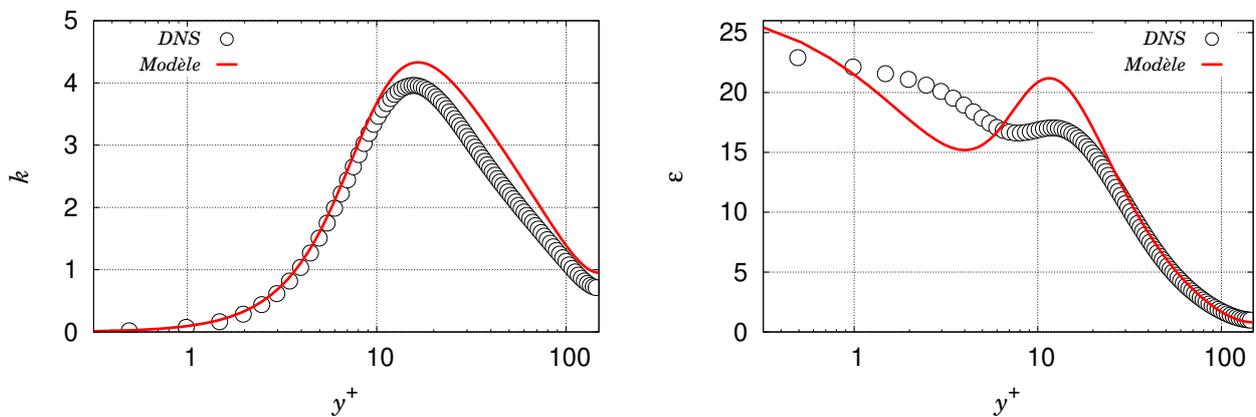


FIGURE B.3. – Évaluation *a posteriori* de l'énergie cinétique turbulente  $k$  (gauche) et de son taux de dissipation  $\varepsilon$  (droite) par le modèle EBRSM pour un écoulement dans un canal plan en convection forcée à  $Re_\tau = 149$  et  $Pr = 0.71$ . Données DNS de Flageul *et al.* (2015).

### B.3. PROFIL DE VITESSE MOYENNE

Comme le profil de la composante  $\overline{u'v'}$  des tensions de Reynolds est convenablement prédit par le modèle EBRSM, le profil de la vitesse moyenne estimé par la simulation reproduit fidèlement celui donné par la DNS comme le montre la Fig. B.4.

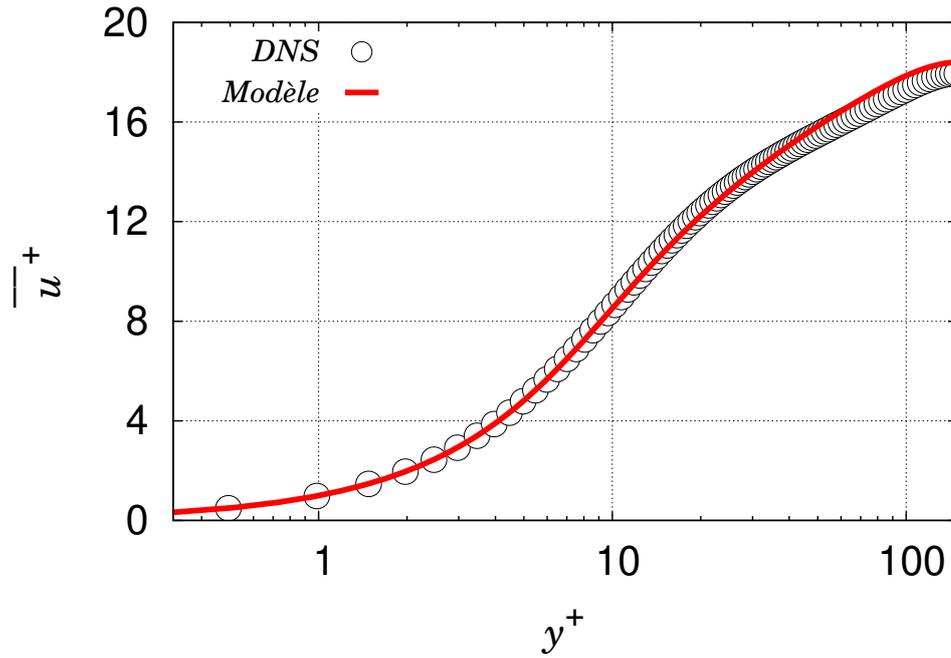


FIGURE B.4. – Évaluation *a posteriori* de la vitesse moyenne pour un écoulement dans un canal plan en convection forcée à  $Re_\tau = 149$  et  $Pr = 0.71$ . Données DNS de Flageul *et al.* (2015).

En conclusion, le modèle EBRSM est capable de prédire aussi bien le bon comportement asymptotique des variables dynamiques turbulentes que leur comportement au centre du canal. Ces résultats sont essentiels pour l'utilisation des modèles des flux thermiques turbulents, de la variance de température et de son taux de dissipation car ceux-ci impliquent ces variables dynamiques dans leur fonctionnement.



# Annexe C

---

## Présentation du code de calcul CFD *Code\_Saturne*

*Code\_Saturne* est un code de mécanique des fluides généraliste pouvant simuler des écoulements laminaires ou turbulents, incompressibles ou faiblement dilatables, sur des maillages structurés ou non structurés (Archambeau *et al.*, 2004), développé par EDF. Ce code, « *open source* », est disponible à l'adresse suivante <http://code-saturne.org/>. Le code est massivement parallèle et dispose de modules permettant la prise en compte de physiques particulières. On distingue ainsi, entre autres, un module atmosphérique, un module de magnétohydrodynamique, un module de turbomachines ou encore un module d'ALE pour l'interaction fluide structure, etc.

On se borne ici à une présentation brève du module de base de *Code\_Saturne* ainsi que de la discrétisation utilisée pour la résolution des équations. Le code résout les équations de Navier-Stokes avec les équations éventuelles des modèles de turbulence et permet également la résolution d'équations de transport de scalaires comme la température où la concentration d'une espèce.

Un  $\theta$ -schéma est utilisé pour l'intégration temporelle. Celle-ci est associée à une méthode de type prédiction/correction et la méthode des volumes finis colocalisés pour la discrétisation spatiale.

*Code\_Saturne* résout les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement d'un fluide Newtonien incompressible sous la forme :

$$\frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + \underline{\text{div}}(\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) = -\underline{\text{grad}} p + \underline{\text{div}}(\mu_e \underline{\text{grad}} \underline{u}) - \underline{\text{div}}(\rho \underline{R}) + \underline{S} \quad (\text{C.1})$$

$$\underline{\text{div}}(\underline{u}) = 0 \quad (\text{C.2})$$

On a dans ces équations :

- $\mu_e = \mu + \rho \nu_t$  pour les modèles à viscosité turbulente/viscosité de sous-maille et  $\mu_e = \mu$  dans le cas laminaire ou pour les modèles RANS du second ordre.
- $\underline{R} = 0$  dans le cas laminaire ou pour les modèles à viscosité turbulente/de sous-maille et  $\underline{R}$  est le tenseur de Reynolds dans le cas des modèles RANS du second ordre.
- $\underline{S}$  représente les termes sources éventuelles tels que terme de flottabilité, force de Coriolis, etc.

Sont également résolues les équations de transport des variables turbulentes ainsi que les éventuelles équations de transport d'un scalaire  $\phi$  :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \underline{\text{div}}(\phi \underline{u}) = \underline{\text{div}}(\kappa_e \underline{\text{grad}} \phi) + S_\phi \quad (\text{C.3})$$

où  $\kappa_e$  peut également contenir un terme turbulent pour la modélisation des flux turbulents et un terme moléculaire et  $S_\phi$  représente les éventuelles termes sources de l'équation.

## Intégration temporelle

La marche en temps de l'algorithme est basée sur une méthode de prédiction-corrrection (Versteeg & Malalasekera, 1995). A chaque itération, on réalise d'abord une étape de prédiction à l'aide d'un  $\theta$ -schéma. La prédiction de la vitesse, notée  $\underline{\tilde{u}}^{(n+1)}$ , est obtenue en résolvant le système suivant :

$$\rho \frac{\underline{\tilde{u}}^{(n+1)} - \underline{u}^{(n)}}{\Delta t} + \underline{\text{div}}(\underline{\tilde{u}}^{(n+\theta)} \otimes \rho \underline{u}^{(n)}) - \underline{\text{div}}(\underline{\mu_e \text{grad}} \underline{\tilde{u}}^{(n+\theta)}) = -\underline{\text{grad}} p^{(n+\theta-1)} + \underline{A}^{n+\theta_S} \quad (\text{C.4})$$

avec

$$\underline{A} = -\underline{\text{div}}(\rho \underline{R}) + \underline{S} \quad (\text{C.5})$$

$$\underline{\tilde{u}}^{(n+\theta)} = \theta \underline{\tilde{u}}^{(n+1)} + (1-\theta) \underline{u}^{(n)} \quad (\text{C.6})$$

et l'exposant  $n + \theta_S$  indiquant une procédure d'extrapolation des termes sources non détaillée ici. Le champ prédit n'est cependant pas à divergence nulle. La seconde étape consiste alors à calculer l'incrément  $(\delta \underline{u})^{(n+1)}$  tel que  $\underline{u} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\tilde{u}} + \delta \underline{u}$  satisfasse la contrainte de continuité (équation (C.2)). Le bilan de quantité de mouvement permet alors de voir qu'après l'étape de prédiction :

$$\rho (\delta \underline{u})^{(n+1)} \approx -\Delta t \underline{\text{grad}}(\delta p)^{(n+1)} \quad \text{avec} \quad (\delta p)^{(n+1)} = p^{(n+1)} - p^{(n)} \quad (\text{C.7})$$

En prenant la divergence de cette dernière équation, on résout finalement à l'étape de correction l'équation de Poisson suivante sur l'incrément de pression :

$$\underline{\text{div}}(\Delta t \underline{\text{grad}}(\delta p)^{(n+1)}) = \underline{\text{div}}(\rho \underline{\tilde{u}}^{(n+1)}) \quad (\text{C.8})$$

On peut ainsi par la suite déterminer  $p^{(n+1)}$  puis  $\underline{u}^{(n+1)}$  avec l'équation (C.7).

## Discrétisation spatiale

La discrétisation spatiale est de type volumes finis colocalisés (vitesse, pression ainsi que tous les scalaires résolus aux mêmes points). La valeur discrète  $\phi_i$  de la variable  $\phi$  au centre de gravité  $I$  d'une maille  $\Omega_i$  représente :

$$\phi_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \phi dV \quad (\text{C.9})$$

La face commune à deux cellules  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$  est notée  $F_{ij}$  et son centre de gravité  $F$ . La valeur discrète de  $\phi$  en  $F$ , notée  $\phi_{ij}$  représente une approximation de :

$$\phi_{ij} = \frac{1}{|F_{ij}|} \int_{F_{ij}} \phi dS \quad (\text{C.10})$$

On note également  $O$  l'intersection entre la droite  $(IJ)$  et la face  $F_{ij}$  ainsi que  $I'$  (resp.  $J'$ ) le projeté orthogonal de  $I$  (resp.  $J$ ) sur la normale à  $F_{ij}$ . Cette normale est dirigée par le vecteur unitaire  $\underline{n}_{ij}$  extérieur à  $\Omega_i$ .

### Phase de prédiction

Le théorème de la divergence permet d'écrire la discrétisation spatiale suivante pour l'équation de prédiction (C.4) :

$$\begin{aligned} \frac{\rho|\Omega_i|}{\Delta t} \left( \widetilde{\underline{u}}_i^{(n+1)} - \underline{u}_i^{(n)} \right) + \sum_{j \in V(i)} \widetilde{\underline{u}}_{ij}^{(n+\theta)} (\rho \underline{u} \cdot \underline{n})_{ij}^{(n)} |F_{ij}| - \sum_{j \in V(i)} \left( \mu_e \underline{\underline{\text{grad}}} \widetilde{\underline{u}} \cdot \underline{n} \right)_{ij}^{(n+\theta)} |F_{ij}| \\ = -|\Omega_i| \underline{G}_i(p)^{(n+\theta-1)} + |\Omega_i| \underline{A}_i^n \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

où  $V(i)$  représente l'ensemble des cellules voisines de la cellule  $i$ . L'opérateur gradient  $G$  au centre de la cellule  $i$  pour une variable quelconque  $\phi$  s'écrit :

$$\underline{G}_i(\phi) = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \underline{\text{grad}} \phi dV = \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{j \in V(i)} \int_{F_{ij}} \phi \underline{n} dS \quad (\text{C.12})$$

et peut également être discrétisé comme suit :

$$\underline{G}_i(\phi) = \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{j \in V(i)} \mathcal{I}_{ij}(\phi) |F_{ij}| \underline{n}_{ij} dS \quad (\text{C.13})$$

avec  $\mathcal{I}_{ij}(\phi)$  un opérateur d'interpolation pour la variable  $\phi$  au centre de gravité des faces. Cet opérateur est d'ordre deux et exprimé à l'aide de l'opérateur gradient lui-même, de manière à prendre en compte les maillages non orthogonaux dans lesquels  $I \neq I'$  :

$$\mathcal{I}_{ij}(\phi) = \alpha_{ij} \phi_i + (1 - \alpha_{ij}) \phi_j + \frac{1}{2} \underline{OF} \cdot (\underline{G}_i(\phi) + \underline{G}_j(\phi)) \quad (\text{C.14})$$

avec

$$\alpha_{ij} = \frac{\underline{FJ}' \cdot \underline{n}_{ij}}{\underline{I'J}' \cdot \underline{n}_{ij}} \quad (\text{C.15})$$

La discrétisation de l'équation (C.13) est donc implicite. En pratique un processus itératif est utilisé pour inverser cette équation.

Dans la partie convective de l'équation (C.11), le flux de masse  $(\rho \underline{u} \cdot \underline{n})_{ij}^{(n)}$  est connu de l'itération précédente. Le terme  $\widetilde{\underline{u}}_{ij}^{(n+\theta)}$  doit lui être évalué au centre de chaque face. Plusieurs possibilités sont offertes en terme de schéma pour l'évaluation d'une valeur discrète  $\phi_{ij}$  au centre des faces :

– Schéma « upwind » (ordre 1) :

$$\phi_{ij} = \phi_{ij}^u = \phi_{f_{ij}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \phi_{f_{ij}} = \phi_i & \text{si } (\rho \underline{u} \cdot \underline{n})_{ij}^{(n)} \geq 0 \\ \phi_{f_{ij}} = \phi_j & \text{si } (\rho \underline{u} \cdot \underline{n})_{ij}^{(n)} < 0 \end{cases} \quad (\text{C.16})$$

– Schéma « centré » (ordre 2)

$$\phi_{ij} = \phi_{ij}^c = \mathcal{I}_{ij}(\phi) \quad (\text{C.17})$$

– Schéma pondéré (pondération entre schémas d'ordre 1 et 2) :

$$\phi_{ij} = \beta \phi_{ij}^u + (1 - \beta) \phi_{ij}^c \quad \text{avec} \quad 0 < \beta < 1 \quad (\text{C.18})$$

Dans la partie diffusive de l'équation (C.11), les flux sont approchés aux faces par la relation :

$$\left( \underline{\nu_e} \underline{\text{grad}} \underline{\tilde{u}} \cdot \underline{n} \right)_{ij} = \mathcal{G}_{n,ij}(\underline{\tilde{u}}) \quad (\text{C.19})$$

avec  $\mathcal{G}_{n,ij}$  l'opérateur de gradient normal aux faces discrétisé par :

$$\mathcal{G}_{n,ij}(\phi) = \frac{\phi_{J'} - \phi_{I'}}{\underline{IJ} \cdot \underline{n}_{ij}} \quad (\text{C.20})$$

et  $\phi_{I'}$  (resp.  $\phi_{J'}$ ) l'interpolation d'ordre 1 de  $\phi_i$  (resp.  $\phi_j$ ) en  $I'$  (resp.  $J'$ ) suivant la formule :

$$\phi_{I'} = \phi_i + \underline{II'} \cdot \underline{G}_i(\phi) \quad (\text{C.21})$$

### **Phase de correction**

L'équation (C.8) peut se discrétiser de la façon suivante :

$$\Delta t \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \left( \underline{\text{grad}}(\delta p) \cdot \underline{n} \right)_{ij}^{(n+1)} |F_{ij}| = \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} (\underline{\rho u} \cdot \underline{n})_{ij}^{(n+1)} |F_{ij}| \quad (\text{C.22})$$

Le membre de gauche est exprimé à l'aide de l'opérateur  $\mathcal{G}_{n,ij}$ . Dans le membre de droite on a :

$$(\underline{\rho u} \cdot \underline{n})_{ij} = (\underline{\rho u} \cdot \underline{n})_{ij} + \mathcal{F}_{ij} \quad (\text{C.23})$$

où  $\mathcal{F}_{ij}$  est un terme appelé filtre de Rhie & Chow (1983) et permettant d'éviter le découplage de la vitesse et de la pression pouvant amener à des oscillations non physiques. Pour plus de détails sur ce filtre on pourra se référer à la documentation théorique de *Code\_Saturne*.

# Annexe D

## Comportement des modèles pour différents nombres de Reynolds pour un écoulement dans un canal plan

Les modèles pour la variance de température  $\overline{\theta'^2}$ , son taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$  et les flux thermiques turbulents  $\overline{u'_i\theta'}$  développés dans ce manuscrit ont été testés sur des écoulements dans un canal plan caractérisés par différents nombre de Reynolds de frottement  $Re_\tau$  :  $Re_\tau = 149$  (DNS de Flageul *et al.* (2015));  $Re_\tau = 180$ ;  $Re_\tau = 395$ ;  $Re_\tau = 640$ ;  $Re_\tau = 1020$  (DNS de Abe *et al.* (2004)). Dans toutes les configurations, l'écoulement est soumis à un régime de convection forcé (nombre de Prandtl  $Pr = 0.71$ ) et une température est imposée à la paroi.

### D.1. LES FLUX THERMIQUES TURBULENTS

Les comportements asymptotiques des composantes tangentielle  $\overline{u'\theta'}$  et normale à la paroi  $\overline{v'\theta'}$  des flux thermiques turbulents sont correctement reproduits par le nouveau modèle pour tous les cas étudiés comme le montre la Fig. D.1. Cependant, le modèle sous-estime la composante tangentielle  $\overline{u'\theta'}$  dans la zone tampon, ce qui a déjà été souligné pour le cas  $Re_\tau = 149$ . Enfin, la composante normale  $\overline{v'\theta'}$  est parfaitement estimée dans tout le domaine par le modèle.

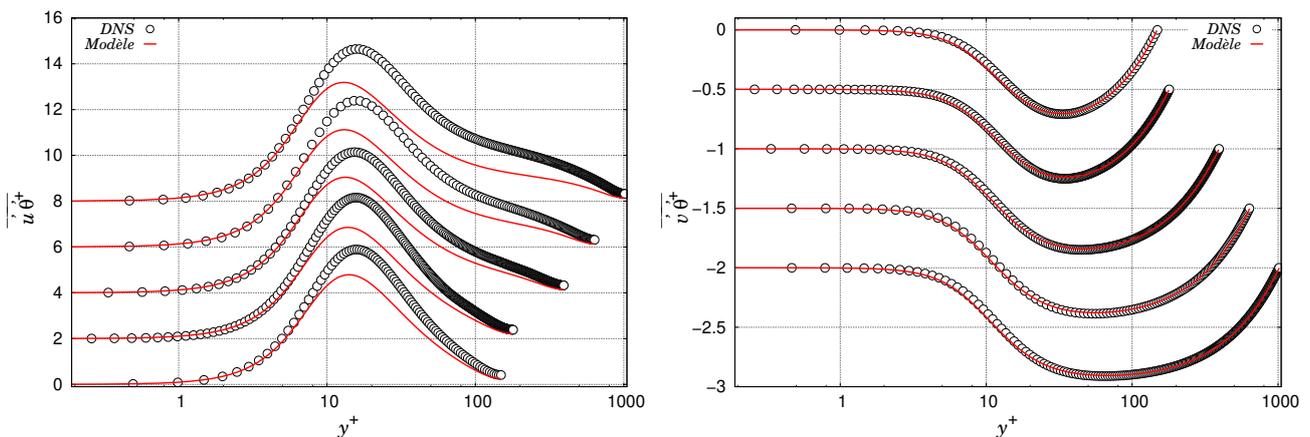


FIGURE D.1. – Évaluation *a posteriori* des composantes tangentielle  $\overline{u'\theta'}$  (gauche) et normale à la paroi  $\overline{v'\theta'}$  (droite) des flux thermiques turbulents. Écoulement à  $Re_\tau = 149$  (DNS de Flageul *et al.* (2015));  $Re_\tau = 180$ ;  $Re_\tau = 395$ ;  $Re_\tau = 640$ ;  $Re_\tau = 1020$  (DNS de Abe *et al.* (2004)).

## D.2. LA VARIANCE DE TEMPÉRATURE ET SON TAUX DE DISSIPATION

Le comportement asymptotique de la variance de température  $\overline{\theta^2}$  est correctement prédit pour toutes les configurations testées comme l'illustre la Fig. D.2 (gauche). Malgré une légère sous-estimation de  $\overline{\theta^2}$  dans la zone tampon, le modèle parvient à restituer le bon comportement au centre du canal. Il est à noter que la sous-estimation de  $\overline{\theta^2}$  dans la zone tampon grandit lorsque  $Re_\tau$  augmente. Il en va de même pour l'estimation de  $\varepsilon_\theta$  dans la zone proche de la paroi (Fig. D.2 (droite)), qui est correcte pour le cas à  $Re_\tau = 149$  et qui sous-estime  $\varepsilon_\theta$  de plus en plus lorsque  $Re_\tau$  augmente. Néanmoins, l'estimation de la variable  $\varepsilon_\theta$  reste très proche des données DNS pour toutes les configurations. Malheureusement, la base de données DNS de Abe *et al.* (2004) ne fournit pas la grandeur  $\varepsilon_\theta$ , ce qui explique qu'il soit impossible de comparer notre modèle sur la configuration  $Re_\tau = 1020$ .

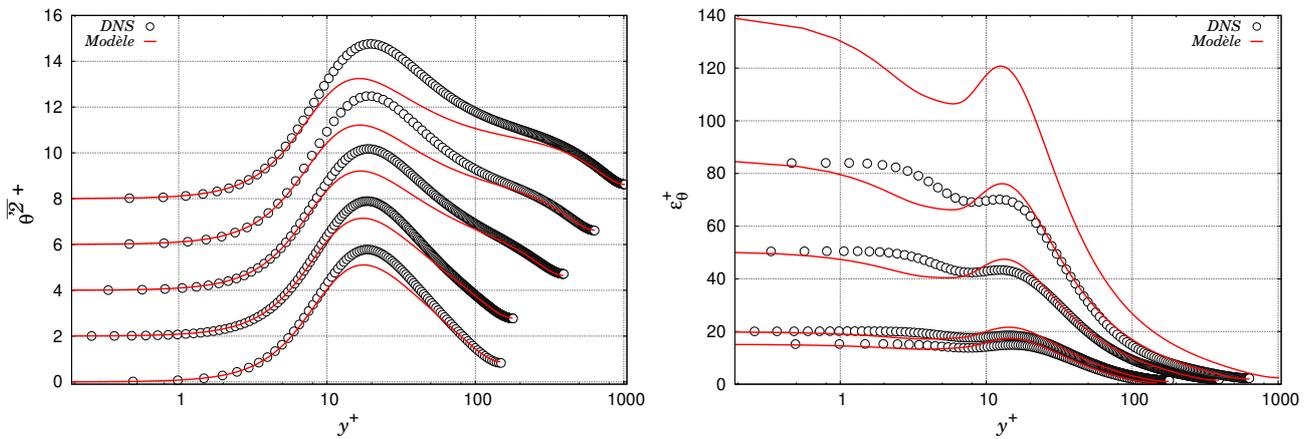


FIGURE D.2. – Évaluation *a posteriori* de la variance de température  $\overline{\theta^2}$  (gauche) et de son taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$  (droite). Écoulement à  $Re_\tau = 149$  (DNS de Flageul *et al.* (2015));  $Re_\tau = 180$ ;  $Re_\tau = 395$ ;  $Re_\tau = 640$ ;  $Re_\tau = 1020$  (DNS de Abe *et al.* (2004)).

## D.3. PROFIL DE LA TEMPÉRATURE MOYENNE

Enfin, la température moyenne prédite par les simulations reproduit le comportement donné par les cas DNS pour toutes les configurations comme le montre la Fig. D.3. En effet, les termes de l'équation de transport de la température moyenne pour un écoulement dans un canal plan en convection forcée sont la diffusion moléculaire (terme qui ne requiert aucune modélisation) et la dérivée partielle selon la direction  $y$  de la composante normale  $\overline{v'\theta'}$  des flux thermiques turbulents. Or, comme  $\overline{v'\theta'}$  est correctement estimé dans tout le canal (voir Fig. D.1), il en va de même pour l'estimation de la température moyenne.

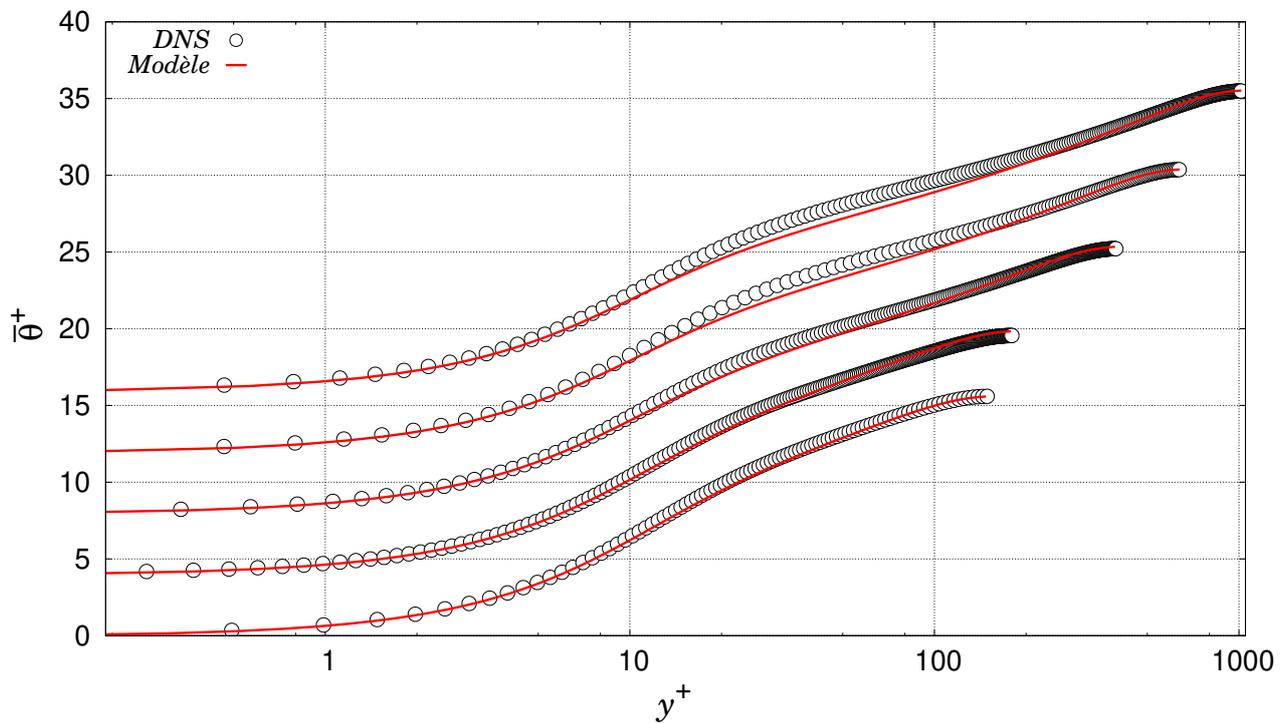


FIGURE D.3. – Évaluation *a posteriori* de la température moyenne  $\bar{\theta}$ . Écoulement à  $Re_\tau = 149$  (DNS de Flageul *et al.* (2015));  $Re_\tau = 180$ ;  $Re_\tau = 395$ ;  $Re_\tau = 640$ ;  $Re_\tau = 1020$  (DNS de Abe *et al.* (2004)).



# Annexe E

---

## Comportements asymptotiques

Cette partie montre des analyses asymptotiques détaillées des termes des équations de transport exactes des flux thermiques turbulents, de la variance de température et de son taux de dissipation pour différentes conditions aux limites sur la température : température imposée à la paroi, flux de chaleur imposé et transfert thermique conjugué.

### E.1. DÉFINITION

Dans un premier temps, les développements asymptotiques des variables primitives s'écrivent :

$$u'(x, y, z, t) = a_1(x, z, t)y + a_2(x, z, t)y^2 + \dots$$

$$v'(x, y, z, t) = b_2(x, z, t)y^2 + b_3(x, z, t)y^3 + \dots$$

$$w'(x, y, z, t) = c_1(x, z, t)y + c_2(x, z, t)y^2 + \dots$$

$$p'(x, y, z, t) = p_0(x, z, t) + p_1(x, z, t)y + p_2(x, z, t)y^2 + \dots$$

$$\theta'(x, y, z, t) = t_0(x, z, t) + t_1(x, z, t)y + t_2(x, z, t)y^2 + \dots$$

$$\bar{u}(x, y, z, t) = A_1(x, z, t)y + A_2(x, z, t)y^2 + \dots$$

$$\bar{v}(x, y, z, t) = V_2(x, z, t)y^2 + V_3(x, z, t)y^3 + \dots$$

$$\bar{w}(x, y, z, t) = W_1(x, z, t)y + W_2(x, z, t)y^2 + \dots$$

$$\bar{p}(x, y, z, t) = P_0 + P_1(x, z, t)y + P_2(x, z, t)y^2 + \dots$$

$$\bar{\theta}(x, y, z, t) = T_0 + T_1(x, z, t)y + T_2(x, z, t)y^2 + \dots$$

Avec

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = 2\mu a_2 - \rho\beta g_1 t_0 + \dots$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = 2\mu c_2 - \rho\beta g_3 t_0 + \dots$$

$$p_1 = 2\mu b_2 - \rho\beta g_2 t_0 + \dots$$

$$p_2 = 3\mu b_3 - \frac{\rho}{2}\beta g_2 t_1 + \dots$$

Contrairement au champ de vitesse (condition d'adhérence), plusieurs types de conditions aux limites peuvent s'appliquer à la thermique. Une température imposée signifie que les fluctuations de température sont nulles à la paroi :  $t_0 = 0$ . En revanche, lorsqu'un flux de chaleur constant est imposé les fluctuations de température ne sont pas nulles à la paroi, mais leur dérivée normale  $\partial\theta'/\partial y$  est nulle :  $t_1 = 0$ . Enfin, un cas de transfert thermique conjugué peut être considéré comme un cas général puisque ni les fluctuations ni leur dérivée normale ne sont nulles à la paroi :  $t_0 \neq t_1 \neq 0$ .

## E.2. LA VARIANCE DE TEMPÉRATURE $\overline{\theta'^2}$

### E.2.1. Équation de transport de $\overline{\theta'^2}$

$$\frac{D\overline{\theta'^2}}{Dt} = 2P_\theta - 2\varepsilon_\theta + D_\theta^t + D_\theta^k. \quad (\text{E.1})$$

### E.2.2. Production par gradient de température moyenne - $P_\theta$

EXPRESSION EXACTE DU TERME

$$P_\theta = -\overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j} \quad (\text{E.2})$$

ANALYSE ASYMPTOTIQUE DU TERME

$$\begin{aligned} P_\theta = & - \left[ (\overline{a_1 t_0}) \frac{\partial \overline{T_0}}{\partial x} + (\overline{c_1 t_0}) \frac{\partial \overline{T_0}}{\partial z} \right] y \\ & - \left[ \frac{\overline{a_1 t_0}}{a_1 t_0} \frac{\partial T_1}{\partial x} + (\overline{a_1 t_1} + \overline{a_2 t_0}) \frac{\partial T_0}{\partial x} + \overline{c_1 t_0} \frac{\partial T_1}{\partial z} + (\overline{c_1 t_1} + \overline{c_2 t_0}) \frac{\partial T_0}{\partial z} + \overline{b_2 t_0} T_1 \right] y^2 \\ & - \left[ (\overline{a_3 t_0} + \overline{a_2 t_1} + \overline{a_1 t_2}) \frac{\partial T_0}{\partial x} + (\overline{c_3 t_0} + \overline{c_2 t_1} + \overline{c_1 t_2}) \frac{\partial T_0}{\partial z} \right. \\ & + (\overline{a_1 t_1} + \overline{a_2 t_0}) \frac{\partial T_1}{\partial x} + (\overline{c_1 t_1} + \overline{c_2 t_0}) \frac{\partial T_1}{\partial z} + \overline{a_1 t_0} \frac{\partial T_2}{\partial x} + \overline{c_1 t_0} \frac{\partial T_2}{\partial z} \\ & \left. + \overline{b_3 t_0} T_1 + \overline{b_2 t_1} T_1 + 2\overline{b_2 t_0} T_2 \right] y^3 + \mathcal{O}(y^4) \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

### E.3. DIFFUSION TURBULENTE - $D_\theta^t$

EXPRESSION EXACTE DU TERME

$$D_\theta^t = -\overline{\frac{\partial \theta' \theta' u'_j}{\partial x_j}} \quad (\text{E.4})$$

ANALYSE ASYMPTOTIQUE DU TERME

$$D'_\theta = - \left[ \frac{\overline{\partial a_1 t_0^2}}{\partial x} + \frac{\overline{\partial c_1 t_0^2}}{\partial z} + \overline{2b_2 t_0^2} \right] y - \left[ \frac{\overline{\partial (a_2 t_0^2 + 2a_1 t_1 t_0)}}{\partial x} + \frac{\overline{\partial (c_2 t_0^2 + 2c_1 t_1 t_0)}}{\partial z} + \overline{3b_3 t_0^2 + 6b_2 t_1 t_0} \right] y^2 + O(y^3) \quad (\text{E.5})$$

E.3.1. Diffusion moléculaire -  $D^\kappa_\theta$ 

EXPRESSION EXACTE DU TERME

$$D^\kappa_\theta = \kappa \frac{\overline{\partial^2 \theta'^2}}{\partial x_j \partial x_j} \quad (\text{E.6})$$

ANALYSE ASYMPTOTIQUE DU TERME

$$D^\kappa_\theta = \kappa \left[ \overline{2t_0} \frac{\partial t_0}{\partial x} + \overline{2t_0} \frac{\partial t_0}{\partial z} + 2(\overline{t_1^2} + \overline{2t_0 t_2}) \right] + O(y) \quad (\text{E.7})$$

E.3.2. Dissipation -  $\varepsilon_\theta$ 

EXPRESSION EXACTE DU TERME

$$\varepsilon_\theta = \kappa \frac{\overline{\partial \theta' \partial \theta'}}{\partial x_j \partial x_j} \quad (\text{E.8})$$

ANALYSE ASYMPTOTIQUE DU TERME

$$\varepsilon_\theta = \kappa \left[ \overline{\left( \frac{\partial t_0}{\partial x} \right)^2} + \overline{t_1^2} + \overline{\left( \frac{\partial t_0}{\partial z} \right)^2} \right] + \kappa \left[ 2 \frac{\overline{\partial t_0 \partial t_1}}{\partial x \partial x} + 4 \overline{t_1 t_2} + 2 \frac{\overline{\partial t_0 \partial t_1}}{\partial z \partial z} \right] y + \kappa \left[ \overline{\left( \frac{\partial t_1}{\partial x} \right)^2} + 2 \frac{\overline{\partial t_0 \partial t_2}}{\partial x \partial x} + 4 \overline{t_2^2} + 6 \overline{t_1 t_3} + \overline{\left( \frac{\partial t_1}{\partial z} \right)^2} + 2 \frac{\overline{\partial t_0 \partial t_2}}{\partial z \partial z} \right] y^2 + O(y^3) \quad (\text{E.9})$$

	$P_\theta$	$\varepsilon_\theta$	$D'_\theta$	$D^\kappa_\theta$
Température imposée	$O(y^3)$	$O(1)$	$O(y^2)$	$O(1)$
Flux de chaleur imposé	$O(y)$	$O(1)$	$O(y)$	$O(1)$
Transfert thermique conjugué	$O(y)$	$O(1)$	$O(y)$	$O(1)$

Tableau E.1. – Résumé du comportement asymptotique des termes de l'équation de transport de la variance de température  $\theta'^2$ .

E.4. LE TAUX DE DISSIPATION DE LA VARIANCE DE TEMPÉRATURE  $\varepsilon_\theta$ E.4.1. Équation de transport de la variable  $\varepsilon_\theta$ 

$$\frac{D\varepsilon_\theta}{Dt} = P_{\varepsilon_\theta}^1 + P_{\varepsilon_\theta}^2 + P_{\varepsilon_\theta}^3 + P_{\varepsilon_\theta}^4 + D_{\varepsilon_\theta}^t + D_{\varepsilon_\theta}^k - Y_{\varepsilon_\theta} \quad (\text{E.10})$$

E.4.2. Production par le gradient de température moyenne -  $P_{\varepsilon_\theta}^1$ 

EXPRESSION EXACTE DU TERME :

$$P_{\varepsilon_\theta}^1 = -2\kappa \frac{\overline{\partial\theta}}{\partial x_j} \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial\theta'}{\partial x_k}} \quad (\text{E.11})$$

ANALYSE ASYMPTOTIQUE DU TERME

$$\begin{aligned} P_{\varepsilon_\theta}^1 = & -2\kappa \overline{ka_1 t_1} \frac{\partial T_0}{\partial x} - 2\kappa \overline{kc_1 t_1} \frac{\partial T_0}{\partial z} \\ & - \left[ 2\kappa (2\overline{c_1 t_2} + 2\overline{c_2 t_1}) \frac{\partial T_0}{\partial z} - 2\kappa (2\overline{a_1 t_2} + 2\overline{a_2 t_1}) \frac{\partial T_0}{\partial x} \right. \\ & - 2\kappa \overline{ka_1 t_1} \frac{\partial T_1}{\partial x} - 4\kappa \overline{kb_2 t_1} T_1 - 2\kappa \overline{kc_1 t_1} \frac{\partial T_1}{\partial z} \\ & \left. - 2\kappa \overline{\frac{\partial a_1}{\partial x} \frac{\partial t_0}{\partial x}} \frac{\partial T_0}{\partial x} - 2\kappa \overline{\frac{\partial a_1}{\partial z} \frac{\partial t_0}{\partial z}} \frac{\partial T_0}{\partial x} - 2\kappa \overline{\frac{\partial c_1}{\partial x} \frac{\partial t_0}{\partial x}} \frac{\partial T_0}{\partial z} - 2\kappa \overline{\frac{\partial c_1}{\partial z} \frac{\partial t_0}{\partial z}} \frac{\partial T_0}{\partial z} \right] y + O(y^2) \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

E.4.3. Production par le gradient de vitesse moyenne -  $P_{\varepsilon_\theta}^2$ 

EXPRESSION EXACTE DU TERME

$$P_{\varepsilon_\theta}^2 = -2\kappa \frac{\overline{\partial u_j}}{\partial x_k} \overline{\frac{\partial\theta'}{\partial x_k} \frac{\partial\theta'}{\partial x_j}} \quad (\text{E.13})$$

ANALYSE ASYMPTOTIQUE DU TERME

$$\begin{aligned} P_{\varepsilon_\theta}^2 = & -2\kappa \overline{\frac{\partial t_0}{\partial x} t_1} U_1 - 2\kappa \overline{\frac{\partial t_0}{\partial z} t_1} W_1 \\ & + \left[ -2\kappa t_1 \overline{\frac{\partial t_1}{\partial x}} U_1 - 4\kappa t_1^2 \overline{V_2} - 2\kappa t_1 \overline{\frac{\partial t_1}{\partial z}} W_1 \right. \\ & \left. - 2\kappa \left( \overline{\frac{\partial t_0}{\partial x}} \right)^2 \frac{\partial U_1}{\partial x} - 2\kappa \overline{\frac{\partial t_0}{\partial x} \frac{\partial t_0}{\partial z}} \frac{\partial U_1}{\partial x} - 2\kappa \left( \overline{\frac{\partial t_0}{\partial z}} \right)^2 \frac{\partial W_1}{\partial z} - 2\kappa \overline{\frac{\partial t_0}{\partial z} \frac{\partial t_0}{\partial x}} \frac{\partial W_1}{\partial z} \right] y + O(y^2) \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

E.4.4. Production par la hessienne de température -  $P_{\varepsilon_\theta}^3$ 

EXPRESSION EXACTE DU TERME

$$P_{\varepsilon_\theta}^3 = -2\kappa \frac{\overline{\partial^2\theta}}{\partial x_k \partial x_j} \overline{u'_j \frac{\partial\theta'}{\partial x_k}} \quad (\text{E.15})$$

ANALYSE ASYMPTOTIQUE DU TERME

$$P_{\varepsilon_\theta}^3 = \left[ -2\kappa a_1 t_1 \overline{\frac{\partial T_1}{\partial x}} - 2\kappa c_1 t_1 \overline{\frac{\partial T_1}{\partial x}} - 2\kappa a_1 \overline{\frac{\partial t_0}{\partial x} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2}} - 2\kappa a_1 \overline{\frac{\partial t_0}{\partial z} \frac{\partial^2 T_0}{\partial z \partial x}} - 2\kappa c_1 \overline{\frac{\partial t_0}{\partial x} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x \partial z}} - 2\kappa c_1 \overline{\frac{\partial t_0}{\partial z} \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2}} \right] y + O(y^2) \quad (\text{E.16})$$

E.4.5. Production turbulente -  $P_{\varepsilon_\theta}^4$ 

EXPRESSION EXACTE DU TERME

$$P_{\varepsilon_\theta}^4 = -2\kappa \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} \quad (\text{E.17})$$

ANALYSE ASYMPTOTIQUE DU TERME

$$P_{\varepsilon_\theta}^4 = -2\kappa a_1 t_1 \overline{\frac{\partial t_0}{\partial x}} - 2\kappa c_1 t_1 \overline{\frac{\partial t_0}{\partial z}} - 2\kappa a_1 t_1 \overline{\frac{\partial t_1}{\partial x}} - 4\kappa b_2 t_1^2 - 2\kappa c_1 t_1 \overline{\frac{\partial t_1}{\partial z}} - 2\kappa \overline{\left(\frac{\partial t_0}{\partial x}\right)^2} \frac{\partial a_1}{\partial x} - 4\kappa a_1 t_2 \overline{\frac{\partial t_0}{\partial x}} - 2\kappa \overline{\frac{\partial t_0}{\partial x} \frac{\partial t_0}{\partial z} \frac{\partial a_1}{\partial z}} - 2\kappa \overline{\frac{\partial t_0}{\partial z} \frac{\partial t_0}{\partial x} \frac{\partial c_1}{\partial x}} - 4\kappa c_1 t_2 \overline{\frac{\partial t_0}{\partial z}} - 2\kappa \overline{\left(\frac{\partial t_0}{\partial z}\right)^2} \frac{\partial c_1}{\partial z} \Big] y + O(y^2) \quad (\text{E.18})$$

E.4.6. Diffusion turbulente -  $D_{\varepsilon_\theta}^t$ 

EXPRESSION EXACTE DU TERME

$$D_{\varepsilon_\theta}^t = -\kappa \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\left( u'_j \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \right)} \quad (\text{E.19})$$

ANALYSE ASYMPTOTIQUE DU TERME

$$D_{\varepsilon_\theta}^t = \left[ -\kappa \overline{\frac{\partial}{\partial x} (a_1 t_1^2)} - 2\kappa b_2 t_1^2 - \kappa \overline{\frac{\partial}{\partial z} (c_1 t_1^2)} - \kappa \overline{\frac{\partial}{\partial x} \left\{ a_1 \left( \frac{\partial t_0}{\partial x} \right)^2 \right\}} - \kappa \overline{\frac{\partial}{\partial x} \left\{ a_1 \left( \frac{\partial t_0}{\partial z} \right)^2 \right\}} - \kappa \overline{\frac{\partial}{\partial z} \left\{ c_1 \left( \frac{\partial t_0}{\partial x} \right)^2 \right\}} - \kappa \overline{\frac{\partial}{\partial z} \left\{ c_1 \left( \frac{\partial t_0}{\partial z} \right)^2 \right\}} \right] y + O(y^2) \quad (\text{E.20})$$

E.4.7. Diffusion moléculaire -  $D_{\varepsilon_\theta}^\kappa$ 

EXPRESSION EXACTE DU TERME

$$D_{\varepsilon_\theta}^\kappa = \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \overline{\left( \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \right)} \quad (\text{E.21})$$

	$P_{\varepsilon\theta}^1$	$P_{\varepsilon\theta}^2$	$P_{\varepsilon\theta}^3$	$P_{\varepsilon\theta}^4$	$D_{\varepsilon\theta}^t$	$D_{\varepsilon\theta}^\kappa$	$Y_{\varepsilon\theta}$
Température imposée	$O(y)$	$O(y)$	$O(y)$	$O(y)$	$O(y)$	$O(1)$	$O(1)$
Flux de chaleur imposé	$O(y)$	$O(y)$	$O(y)$	$O(y)$	$O(y)$	$O(1)$	$O(1)$
Transfert thermique conjugué	$O(1)$	$O(1)$	$O(y)$	$O(1)$	$O(y)$	$O(1)$	$O(1)$

Tableau E.2. – Résumé du comportement asymptotique des termes de l'équation de transport exact du taux de dissipation  $\varepsilon_\theta$  de la variance de température.

#### ANALYSE ASYMPTOTIQUE DU TERME

$$\begin{aligned}
D_{\varepsilon\theta}^\kappa = & \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \overline{t_1^2} \right) + 2\kappa^2 \overline{\left( \frac{\partial t_1}{\partial x} \right)^2} + 8\kappa^2 \overline{t_2^2} + 12\kappa^2 \overline{t_1 t_3} + 2\kappa^2 \overline{\left( \frac{\partial t_1}{\partial z} \right)^2} + \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \overline{t_1^2} \right) \\
& \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \overline{\left( \frac{\partial t_0}{\partial x} \right)^2} \right] + \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \overline{\left( \frac{\partial t_0}{\partial z} \right)^2} \right] + 4\kappa^2 \overline{\frac{\partial t_0}{\partial x} \frac{\partial t_2}{\partial x}} + 8\kappa^2 \overline{t_2^2} + 4\kappa^2 \overline{\frac{\partial t_0}{\partial z} \frac{\partial t_2}{\partial z}} \\
& + \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ \overline{\left( \frac{\partial t_0}{\partial x} \right)^2} \right] + \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ \overline{\left( \frac{\partial t_0}{\partial z} \right)^2} \right] + O(y)
\end{aligned} \tag{E.22}$$

#### E.4.8. Dissipation - $Y_{\varepsilon\theta}$

##### EXPRESSION EXACTE DU TERME

$$Y_{\varepsilon\theta} = -2\kappa^2 \frac{\overline{\partial^2 \theta'}}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\overline{\partial^2 \theta'}}{\partial x_j \partial x_k} \tag{E.23}$$

##### ANALYSE ASYMPTOTIQUE DU TERME

$$\begin{aligned}
Y_{\varepsilon\theta} = & -4\kappa^2 \overline{\left( \frac{\partial t_1}{\partial x} \right)^2} - 8\kappa^2 \overline{t_2^2} - 4\kappa^2 \overline{\left( \frac{\partial t_1}{\partial z} \right)^2} \\
& - 2\kappa^2 \overline{\left( \frac{\partial^2 t_0}{\partial x^2} \right)^2} - 2\kappa^2 \overline{\left( \frac{\partial^2 t_0}{\partial x \partial z} \right)^2} - 8\kappa^2 \overline{t_2^2} - 2\kappa^2 \overline{\left( \frac{\partial^2 t_0}{\partial z^2} \right)^2} - 2\kappa^2 \overline{\left( \frac{\partial^2 t_0}{\partial z \partial x} \right)^2} + O(y)
\end{aligned} \tag{E.24}$$

#### E.5. LES FLUX THERMIQUES TURBULENTS $\overline{u_i' \theta'}$

##### E.5.1. Équation de transport des flux thermiques turbulents $\overline{u_i' \theta'}$

$$\frac{D \overline{u_i' \theta'}}{Dt} = P_{\theta i}^U + P_{\theta i}^T + \phi_{\theta i} + D_{\theta i}^{\nu+\kappa} + D_{\theta i}^t - \varepsilon_{\theta i} + G_{\theta i} \tag{E.25}$$

##### E.5.2. Somme des productions par gradient de vitesse moyenne et de température moyenne - $P_{\theta i}^U + P_{\theta i}^T$

##### EXPRESSION EXACTE DU TERME

$$P_{\theta i}^U + P_{\theta i}^T = -\overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j} \quad (\text{E.26})$$

ANALYSE ASYMPTOTIQUE DES DIFFÉRENTES COMPOSANTES

$$P_{\theta 1}^U + P_{\theta 1}^T = -\left( \overline{a_1^2} \frac{\partial T_0}{\partial x} + \overline{a_1 c_1} \frac{\partial T_0}{\partial z} + \overline{a_1 t_0} \frac{\partial A_1}{\partial x} + \overline{b_2 t_0} A_1 + \overline{c_1 t_0} \frac{\partial A_1}{\partial z} \right) y^2 + O(y^3) \quad (\text{E.27})$$

$$P_{\theta 2}^U + P_{\theta 2}^T = -\left( \overline{a_1 b_2} \frac{\partial T_0}{\partial x} + \overline{b_2 c_1} \frac{\partial T_0}{\partial z} + \overline{a_1 t_0} \frac{\partial B_2}{\partial x} + \overline{b_2 t_0} B_2 + \overline{c_1 t_0} \frac{\partial B_2}{\partial z} \right) y^3 + O(y^4) \quad (\text{E.28})$$

$$P_{\theta 3}^U + P_{\theta 3}^T = -\left( \overline{a_1 c_1} \frac{\partial T_0}{\partial x} + \overline{c_1^2} \frac{\partial T_0}{\partial z} + \overline{a_1 t_0} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \overline{b_2 t_0} C_1 + \overline{c_1 t_0} \frac{\partial C_1}{\partial z} \right) y^2 + O(y^3) \quad (\text{E.29})$$

### E.5.3. Production par flottabilité - $G_{\theta i}$

EXPRESSION EXACTE DU TERME

$$G_{\theta i} = -\beta g_i \overline{\theta'^2}. \quad (\text{E.30})$$

ANALYSE ASYMPTOTIQUE DES DIFFÉRENTES COMPOSANTES

$$G_{\theta 1} = -\beta g_1 \overline{t_0^2} - 2\beta g_1 \overline{t_0 t_1} y - \left( 2\beta g_1 \overline{t_0 t_2} + \beta g_1 \overline{t_1^2} \right) y^2 + O(y^3) \quad (\text{E.31})$$

$$G_{\theta 2} = -\beta g_2 \overline{t_0^2} - 2\beta g_2 \overline{t_0 t_1} y - \left( 2\beta g_2 \overline{t_0 t_2} + \beta g_2 \overline{t_1^2} \right) y^2 + O(y^3) \quad (\text{E.32})$$

$$G_{\theta 3} = -\beta g_3 \overline{t_0^2} - 2\beta g_3 \overline{t_0 t_1} y - \left( 2\beta g_3 \overline{t_0 t_2} + \beta g_3 \overline{t_1^2} \right) y^2 + O(y^3) \quad (\text{E.33})$$

### E.5.4. Terme de brouillage - $\phi_{\theta i}^*$

EXPRESSION EXACTE DU TERME

$$\phi_{\theta i}^* = -\frac{\overline{p'}}{\rho} \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} \quad (\text{E.34})$$

ANALYSE ASYMPTOTIQUE DES DIFFÉRENTES COMPOSANTES

$$\begin{aligned} \phi_{\theta 1}^* = & -2\overline{v a_2 t_0} + \beta g_1 \overline{t_0^2} \\ & + \left( -2\overline{v t_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} a_1 - 2\overline{v t_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} a_1 + \overline{t_0} \frac{\partial}{\partial t} c_1 + 2\beta g_1 \overline{t_0 t_1} - 2\overline{v a_2 t_1} - 6\overline{v a_3 t_0} \right) y + O(y^2) \end{aligned} \quad (\text{E.35})$$

$$\phi_{\theta 2}^* = -2\overline{v b_2 t_0} + \beta g_2 \overline{t_0^2} + \left( 2\beta g_2 \overline{t_0 t_1} - 2\overline{v b_2 t_1} - 6\overline{v b_3 t_0} \right) y + O(y^2) \quad (\text{E.36})$$

$$\begin{aligned} \phi_{\theta 3}^* = & -2\overline{v c_2 t_0} + \beta g_3 \overline{t_0^2} \\ & + \left( -2\overline{v t_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} c_1 - 2\overline{v t_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} c_1 + \overline{t_0} \frac{\partial}{\partial t} c_1 + 2\beta g_3 \overline{t_0 t_1} - 2\overline{v c_2 t_1} - 6\overline{v c_3 t_0} \right) y + O(y^2) \end{aligned} \quad (\text{E.37})$$

E.5.5. Taux de dissipation des flux thermiques turbulents -  $\varepsilon_{\theta i}$ 

EXPRESSION EXACTE DU TERME

$$\varepsilon_{\theta i} = (\nu + \kappa) \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \quad (\text{E.38})$$

ANALYSE ASYMPTOTIQUE DES DIFFÉRENTES COMPOSANTES

$$\varepsilon_{\theta 1} = (\kappa + \nu) \left[ \overline{a_1 t_1} + \left( \overline{\frac{\partial t_0}{\partial x} \frac{\partial a_1}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial t_0}{\partial z} \frac{\partial a_1}{\partial z}} + 2\overline{t_2 a_1} + 2\overline{t_1 a_2} \right) y \right] + \mathcal{O}(y^2) \quad (\text{E.39})$$

$$\varepsilon_{\theta 2} = (\kappa + \nu) \left[ 2\overline{b_2 t_1} y + \left( \overline{\frac{\partial t_0}{\partial x} \frac{\partial b_2}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial t_0}{\partial z} \frac{\partial b_2}{\partial z}} + 3\overline{t_1 b_3} + 4\overline{t_2 b_2} \right) y^2 \right] + \mathcal{O}(y^3) \quad (\text{E.40})$$

$$\varepsilon_{\theta 3} = (\kappa + \nu) \left[ \overline{c_1 t_1} + \left( \overline{\frac{\partial t_0}{\partial x} \frac{\partial c_1}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial t_0}{\partial z} \frac{\partial c_1}{\partial z}} + 2\overline{t_2 c_1} + 2\overline{t_1 c_2} \right) y \right] + \mathcal{O}(y^2) \quad (\text{E.41})$$

E.5.6. Diffusion turbulente -  $D_{\theta i}^t$ 

EXPRESSION EXACTE DU TERME

$$D_{\theta i}^t = - \overline{\frac{\partial u'_i \theta' u'_j}{\partial x_j}} \quad (\text{E.42})$$

ANALYSE ASYMPTOTIQUE DES DIFFÉRENTES COMPOSANTES

$$\begin{aligned} D_{\theta 1}^t = & - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\overline{a_1^2 t_0}) + 3\overline{t_0 a_1 b_2} + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{t_0 a_1 c_1}) \right] y^2 \\ & - \left[ 2 \frac{\partial}{\partial x} (\overline{t_0 a_1 a_2}) + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{t_1 a_1^2}) + 4\overline{t_1 a_1 b_2} + 4\overline{t_0 a_2 b_2} + 4\overline{t_0 a_1 b_3} \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{t_1 a_1 c_1}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{t_0 a_1 c_2}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{t_0 a_2 c_1}) \right] y^3 + \mathcal{O}(y^4) \end{aligned} \quad (\text{E.43})$$

$$\begin{aligned} D_{\theta 2}^t = & - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\overline{a_1 b_2 t_0}) + 4\overline{t_0 b_2^2} + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{t_0 b_2 c_1}) \right] y^3 \\ & - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\overline{t_0 a_2 b_2}) + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{t_1 a_1 b_2}) + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{t_0 a_1 b_3}) + 5\overline{t_1 b_2^2} + 10\overline{t_0 b_2 b_3} + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{t_0 c_2 b_2}) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{t_1 c_1 b_2}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{t_0 c_1 b_3}) \right] y^4 + \mathcal{O}(y^5) \end{aligned} \quad (\text{E.44})$$

$$\begin{aligned} D_{\theta 3}^t = & - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\overline{t_0 a_1 c_1}) + 3\overline{t_0 c_1 b_2} + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{c_1^2 t_0}) \right] y^2 \\ & - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\overline{t_1 a_1 c_1}) + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{t_0 a_1 c_2}) + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{t_0 a_2 c_1}) + 4\overline{t_1 c_1 b_2} + 4\overline{t_0 c_2 b_2} + 4\overline{t_0 c_1 b_3} \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial}{\partial z} (\overline{t_0 c_1 c_2}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{t_1 c_1^2}) \right] y^3 + \mathcal{O}(y^4) \end{aligned} \quad (\text{E.45})$$

E.5.7. Diffusion moléculaire  $D_{\theta i}^{\nu+\kappa}$ 

EXPRESSION EXACTE DU TERME

$$D_{\theta i}^{\nu+\kappa} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{\nu \theta' \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} + \overline{\kappa u'_i \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}} \right) \quad (\text{E.46})$$

ANALYSE ASYMPTOTIQUE DES DIFFÉRENTES COMPOSANTES

$$D_{\theta 1}^{\nu} = (\kappa + \nu) \overline{a_1 t_1} + 2\nu \overline{a_2 t_0} + \mathcal{O}(y) \quad (\text{E.47})$$

$$D_{\theta 2}^{\nu} = 2\nu \overline{b_2 t_0} + \left[ 2(\kappa + 2\nu) \overline{b_2 t_1} + 6\nu \overline{b_3 t_0} \right] y + \mathcal{O}(y^2) \quad (\text{E.48})$$

$$D_{\theta 3}^{\nu} = (\kappa + \nu) \overline{c_1 t_1} + 2\nu \overline{c_2 t_0} + \mathcal{O}(y) \quad (\text{E.49})$$

	$P_{\theta i}^U + P_{\theta i}^T$	$G_{\theta i}$	$\phi_{\theta i}^*$	$D_{\theta i}^{\nu+\kappa}$	$\varepsilon_{\theta i}$	$D_{\theta i}^t$
Température imposée	$\mathcal{O}(y^3)$	$\mathcal{O}(y^2)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(y^3)$
Flux de chaleur imposé	$\mathcal{O}(y^2)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y^2)$
Transfert thermique conjugué	$\mathcal{O}(y^2)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(y^2)$

Tableau E.3. – Résumé du comportement asymptotique des termes de l'équation de transport des composantes tangentielles à la paroi des flux thermiques turbulents  $\overline{u'_i \theta'}$  and  $\overline{w'_i \theta'}$ .

	$P_{\theta i}^U + P_{\theta i}^T$	$G_{\theta i}$	$\phi_{\theta i}^*$	$D_{\theta i}^{\nu+\kappa}$	$\varepsilon_{\theta i}$	$D_{\theta i}^t$
Température imposée	$\mathcal{O}(y^4)$	$\mathcal{O}(y^2)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y^4)$
Flux de chaleur imposé	$\mathcal{O}(y^3)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(y^2)$	$\mathcal{O}(y^3)$
Transfert thermique conjugué	$\mathcal{O}(y^3)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y^3)$

Tableau E.4. – Résumé du comportement asymptotique des termes de l'équation de transport de la composante normale à la paroi des flux thermiques turbulents  $\overline{v'_i \theta'}$ .



# Annexe F

---

## Lois de paroi adaptatives

### F.1. LOIS DE PAROI DYNAMIQUES

Les lois de paroi utilisées pour les variables dynamiques ont été développées par Wald (2016). Le modèle de turbulence utilisé est l'EBRSM, décrit en Annexe A.1.

#### F.1.1. Loi de paroi pour la vitesse

La loi de paroi proposée est une loi adaptative. Cette loi s'adapte à tout type de maillage. Elle est capable de repérer où on se trouve par rapport à la paroi et de corriger la vitesse en conséquence.

$$U^+ = f\Phi_w + (1-f)\Phi_{log}, \quad (\text{F.1})$$

où

$$\Phi_w(y^+) = y^+, \quad (\text{F.2})$$

$$\Phi_{log}(y^+) = d(y^+) \left[ \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B \right], \quad (\text{F.3})$$

avec

$$f(y^+) = \exp\left(-\frac{C_{\overline{w}}}{4}y^{+3}\right), \quad (\text{F.4})$$

$$d(y^+) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{y^+}{y_0}\right)^n\right). \quad (\text{F.5})$$

Les constantes utilisées ici sont :

$$n = 2.25 \quad ; \quad y_0 = 14.5 \quad ; \quad \kappa = 0.41 \quad ; \quad B = 5.2 \quad \text{et} \quad C_{\overline{w}} = 1.0674 \cdot 10^{-4} \quad (\text{F.6})$$

#### F.1.2. Loi de paroi pour $\alpha$

La loi de paroi de  $\alpha$  est déduite de son équation elliptique dans laquelle on considère que l'échelle de longueur est constante et que la direction normale à la paroi est la seule composante qui joue un rôle.

$$\alpha = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{16 + 0.04y^+}\right), \quad (\text{F.7})$$

F.1.3. Loi de paroi pour le taux de dissipation  $\varepsilon$  de l'énergie turbulente  $k$ 

$$\varepsilon = f_\varepsilon \left[ 2\nu \frac{k}{y^2} \right] + (1 - f_\varepsilon) d_\varepsilon \left[ \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \right] \quad (\text{F.8})$$

avec

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(y^+) &= \exp\left(-\left(\frac{y^+}{7}\right)^{3/2}\right), \\ d_\varepsilon(y^+) &= 1 - \exp\left(-\left(\frac{y^+}{10.5}\right)^{3/2}\right). \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

F.1.4. Loi de paroi pour l'énergie turbulente  $k$ 

Concernant  $k$ , l'hypothèse de viscosité turbulente est reprise

$$\nu_t = f_\mu k^2 / \varepsilon. \quad (\text{F.10})$$

$f_\mu$  est une variable qui a besoin d'être ajustée en proche paroi

$$f_\mu = f_1 \frac{C_w}{y^+} + (1 - f_1) C_\mu. \quad (\text{F.11})$$

avec

$$\begin{aligned} f_1 &= \exp\left[-\left(\frac{y^+}{39 + 0.2y^+}\right)^2\right], \\ C_w &= 0.016, \\ C_\mu &= 0.09. \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

Or, en insérant la loi de paroi pour  $\varepsilon$  dans l'équation de viscosité turbulente, il vient

$$k^2 - \underbrace{\left[ \frac{2\nu P f_\varepsilon}{f_\mu \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 y^2} \right]}_{A_k} k - \underbrace{\left[ P d_\varepsilon (1 - f_\varepsilon) \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \right]}_{B_k} = 0 \quad (\text{F.13})$$

On obtient alors :

$$k = \frac{A_k + \sqrt{A_k^2 + 4B_k}}{2} \quad (\text{F.14})$$

## F.1.5. Loi de paroi pour la production

$$P^+ = \frac{dU^+}{dy^+} \left( \frac{dU^+}{dy^+} - 1 \right). \quad (\text{F.15})$$

### F.1.6. Loi de paroi pour les tensions de Reynolds

Les tensions de Reynolds sont traitées de manière assez simple : une condition de Neumann homogène est imposée à tous les  $R_{ij}$ , mis à part  $R_{12}$  qui bénéficie d'un traitement particulier

$$R_{12} = c_\alpha \sqrt{R_{11}R_{22}} \quad \text{où} \quad c_\alpha = 0.47. \quad (\text{F.16})$$

## F.2. LOIS DE PAROI THERMIQUES

Les lois de paroi thermiques utilisées dans cette partie sont associées à des modèles de turbulence du premier et du second ordre pour les flux thermiques turbulents. Les travaux présentés dans ce document sont en cours de réalisation. De ce fait, le taux de dissipation de la variance de température  $\varepsilon_\theta$  n'est pour le moment pas résolu, et le modèle EBDFM testé est le modèle de Dehoux *et al.* (2017).

### F.2.1. Loi de paroi pour la température : la loi d'Howard (2012)

La loi de paroi implémentée pour résoudre la température moyenne  $\overline{\theta^+}$  a été développée par Howard (2012). Elle reprend l'approche utilisée par Kader & Yaglom (1972). Elle s'écrit

$$\overline{\theta^+} = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + Pr \cdot \kappa \cdot y^+) + \quad (\text{F.17})$$

$$\left[ (\sqrt{7.8} + 1.3) Pr^{0.3} - 1.3 \right]^2 \left[ 1 - \exp\left(-Pr^{0.5} \frac{y^+}{11}\right) - Pr^{0.3} \frac{y^+}{11} \exp\left(-Pr^{0.125} \frac{y^+}{3}\right) \right] \quad (\text{F.18})$$

### F.2.2. Loi de paroi pour $\alpha_\theta$

A l'instar de la loi de paroi développée par Wald (2016) pour  $\alpha$ , la loi implémentée pour résoudre  $\alpha_\theta$  suit la même approche. Le seul changement concerne les coefficients intervenant dans la fonction exponentielle.

$$\alpha_\theta = 1 - \exp\left(\frac{-y^+}{42.5 + 0.15 * y^+}\right) \quad (\text{F.19})$$

### F.2.3. Loi de paroi pour les flux thermiques turbulents

Pour les modèles du premier ordre, aucun traitement n'est *a priori* nécessaire (modèle algébrique). Le traitement des flux thermiques turbulents est assez élémentaire pour l'EBDFM. Il repose sur un Neumann homogène pour les composantes tangentielles et  $\rho \bar{u}^* T^*$  pour la composante normale lorsqu'on impose une température à la paroi, ou alors directement le flux lorsqu'on impose un flux de chaleur à la paroi.

La prochaine étape est de travailler sur des lois de paroi pour la variance de température et sa dissipation.

## F.3. RÉSULTATS

Les lois de paroi ont été testées sur un écoulement dans un cas canal plan en convection forcé à  $Re_\tau = 1020$  et  $Pr = 0.71$ . La condition aux limites imposée sur la température à

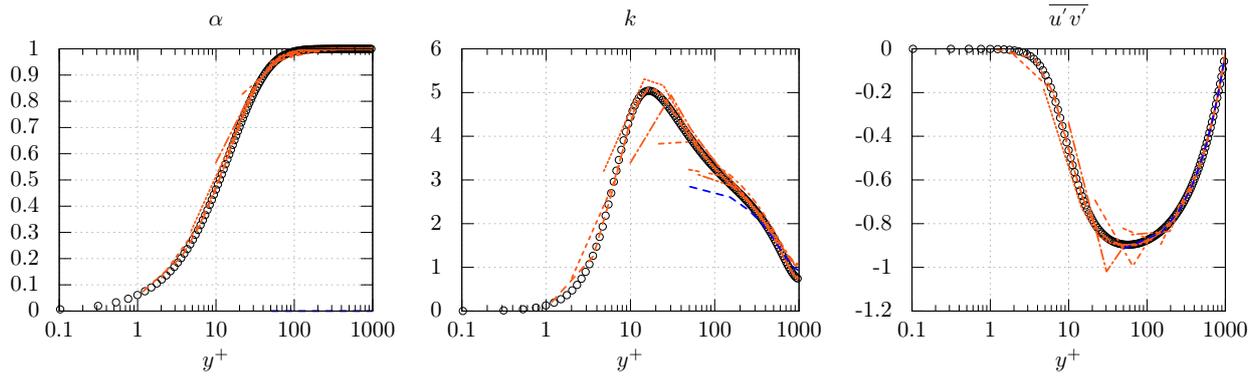


FIGURE F.1. – Tests des lois de paroi dynamiques sur différents raffinements de maillage pour le coefficient de pondération elliptique  $\alpha$  (gauche), l'énergie cinétique turbulente  $k$  (milieu) et la composante  $\overline{u'v'}$  des tensions de Reynolds (droite).

la paroi est une température fixée. Plusieurs raffinements de maillage ont été utilisés avec des  $y^+ = 0.1, 1, 2, 5, 10, 20, 46$  et  $60$ . Dans le paragraphe EBRSM, on s'intéressera aux grandeurs dynamiques puis on couplera ce modèle avec différents modèles de turbulence thermiques (GGDH, EBGGDH, AFM, EBAFM, EBDFM; pour plus de détail sur la formulation de ces modèles, voir Dehoux *et al.* (2017)) afin d'étudier les variables turbulentes thermiques. La courbe pointillée bleu représente une simulation faite avec le couple de modèle SSG/DFM à  $y^+ = 46$  qui sont deux modèles haut Reynolds. L'objectif des lois de paroi est de retrouver le comportement des variables turbulentes prédit par le modèle bas-Reynolds sur un maillage bas-reynolds ( $y^+ = 0.1$ ).

### F.3.1. EBRSM

Dans cette partie, la référence, tracée avec des cercles, est une simulation effectuée avec le modèle bas-Reynolds EBRSM avec un maillage à  $y^+ = 0.1$ . La Fig. F.1 montre que la loi de paroi adaptative pour le coefficient  $\alpha$  permet de retrouver le comportement de la simulation EBRSM de référence pour tous les maillages testés. Les lois pour les variables  $k$  et  $\overline{u'v'}$  permettent aux modèles de reproduire le comportement de référence malgré quelques imprécisions dans la zone tampon (zone très délicate à prendre en compte). La Fig. F.2 montre un bon comportement des lois de paroi adaptatives pour les variables  $\varepsilon$ ,  $\overline{u'u'}$  et  $\overline{v'v'}$  qui permettent au modèle de rester proche de la simulation de référence. Enfin, pour toutes les variables, la configuration lois de paroi adaptatives avec le modèle EBRSM donne des résultats proches du modèle SSG sur les maillages haut-Reynolds.

Dans la suite, le modèle EBRSM avec lois de paroi est conservé pour simuler la dynamique de l'écoulement. L'attention sera portée sur le comportement des différents modèles pour les flux thermiques turbulents.

### F.3.2. GGDH

La référence, tracée avec des cercles, est une simulation effectuée avec le modèle GGDH avec un maillage à  $y^+ = 0.1$ . La vitesse moyenne est proche de la référence pour les différents maillages mis à part pour le maillage  $y^+ = 100$  où elle est sous estimée au centre du canal comme le montre la Fig. F.3. De plus, les composantes  $\overline{u'\theta'}$  et  $\overline{v'\theta'}$  des flux thermiques turbulents et la variance de la température  $\overline{\theta'^2}$  sur estiment la référence pour les maillages à  $y^+ \geq 5$  dans la zone tampon (Figs. F.3 et F.4). La température moyenne est également légèrement sur estimée,

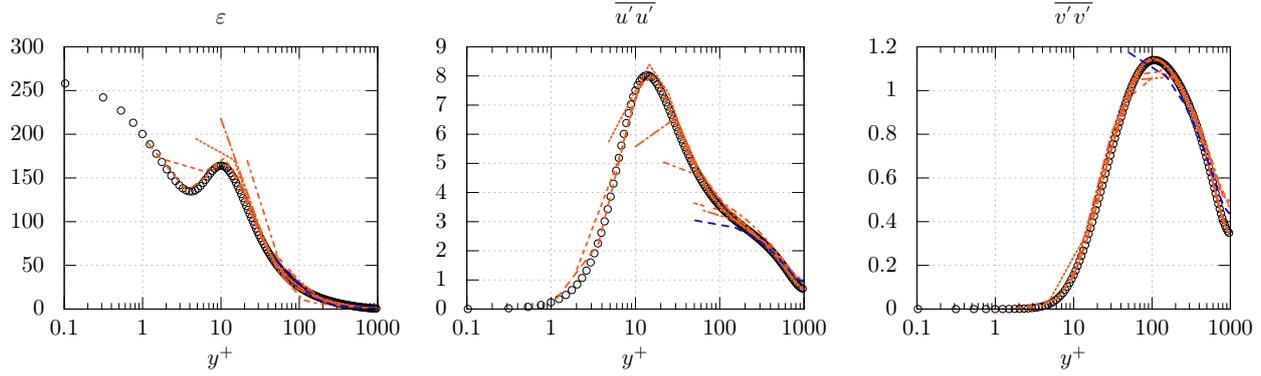


FIGURE F.2. – Tests des lois de paroi dynamiques sur différents raffinements de maillage pour le taux de dissipation  $\varepsilon$  (gauche) et les composantes  $\overline{u'u'}$  (milieu) et  $\overline{v'v'}$  (droite) des tensions de Reynolds.

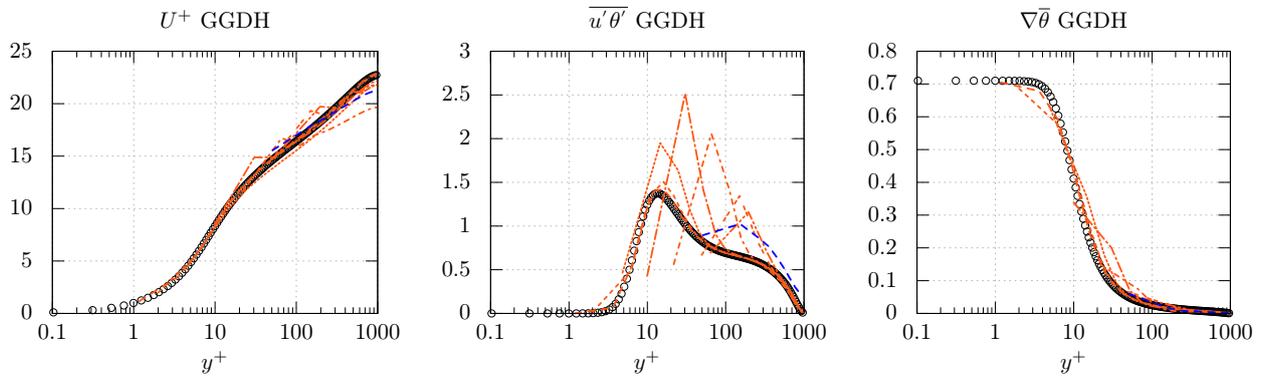


FIGURE F.3. – Tests du modèle GGDH pour les flux thermiques turbulents et de la loi d'Howard (2012) pour la température moyenne avec le modèle EBRSM plus les lois de paroi adaptatives pour la dynamique sur différents raffinements de maillage pour la vitesse moyenne  $\overline{u}^+$  (gauche) et la composante  $\overline{u'\theta'}$  (milieu) des flux thermiques turbulents et le gradient de la température moyenne (droite).

mais elle reste cohérente avec la référence. Enfin, le gradient de température prédit sur les différents maillages reste en accord avec la référence.

### F.3.3. AFM

La référence, tracée avec des cercles, est une simulation effectuée avec le modèle AFM avec un maillage à  $y^+ = 0.1$ . Les résultats présentés par les Figs. F.5 et F.6 sont similaires aux cas GGDH. En effet, pour les maillages à  $y^+ \geq 5$ , les variables  $\overline{u'\theta'}$ ,  $\overline{v'\theta'}$  et  $\overline{\theta'^2}$  sur estiment la référence dans la zone tampon. Cependant, d'une manière générale, les résultats restent cohérents avec la référence pour les variables thermiques.

### F.3.4. EBGGDH

Ici, on passe aux modèles à pondération elliptique. Il est donc venu le temps de s'intéresser à  $\alpha_\theta$ . Comme l'équation elliptique de  $\alpha_\theta$  ne dépend que de l'échelle de longueur dynamique, les

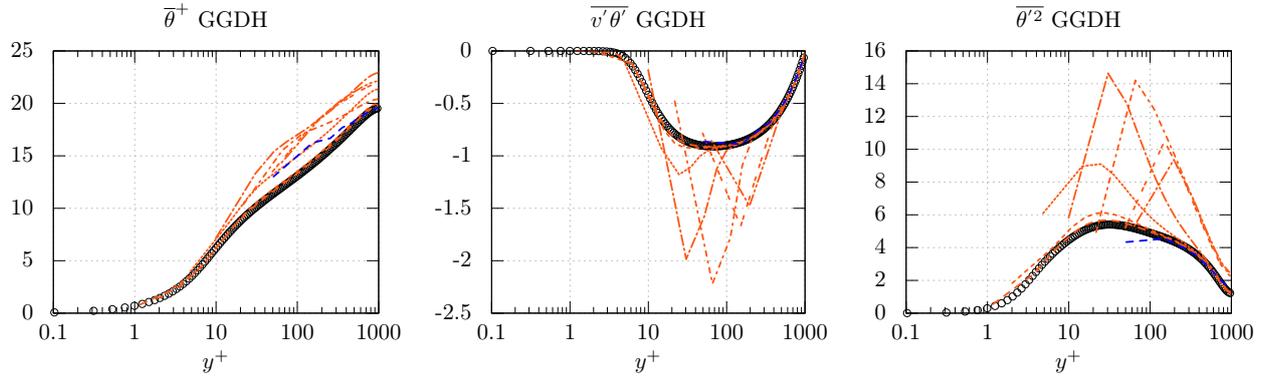


FIGURE F.4. – Tests du modèle GGDH pour les flux thermiques turbulents et de la loi d'Howard (2012) pour la température moyenne avec le modèle EBRSM plus les lois de paroi adaptatives pour la dynamique sur différents raffinements de maillage pour la température moyenne  $\bar{\theta}^+$  (gauche) et la composante  $\overline{v'\theta'}$  (milieu) des flux thermiques turbulents et de la variance de la température  $\bar{\theta'^2}$  (droite).

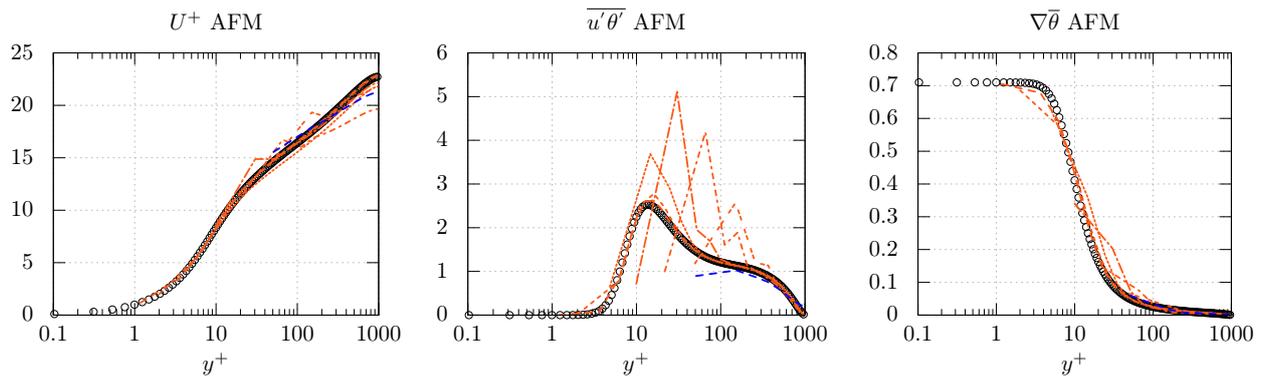


FIGURE F.5. – Tests du modèle AFM pour les flux thermiques turbulents et de la loi d'Howard (2012) pour la température moyenne avec le modèle EBRSM plus les lois de paroi adaptatives pour la dynamique sur différents raffinements de maillage pour la vitesse moyenne  $\bar{u}^+$  (gauche) et la composante  $\overline{u'\theta'}$  (milieu) des flux thermiques turbulents et le gradient de la température moyenne (droite).

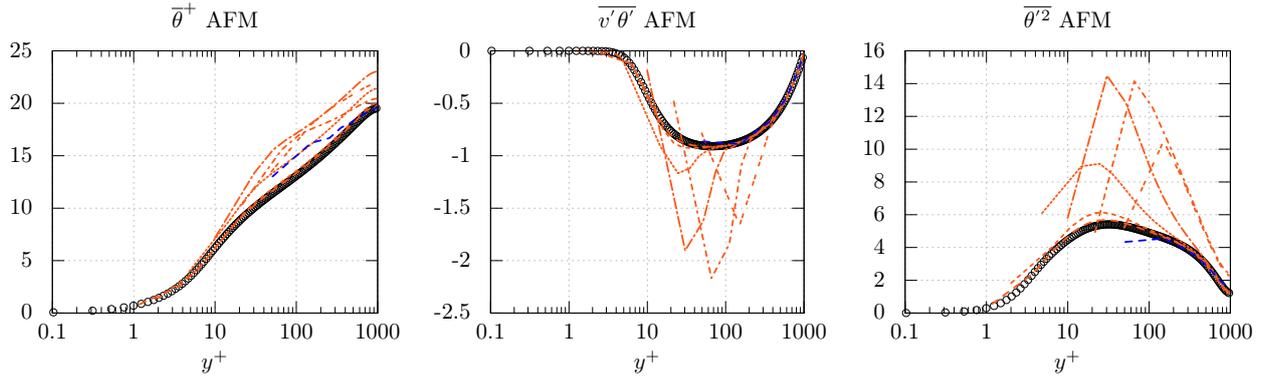


FIGURE F.6. – Tests du modèle AFM pour les flux thermiques turbulents et de la loi d'Howard (2012) pour la température moyenne avec le modèle EBRSM plus les lois de paroi adaptatives pour la dynamique sur différents raffinements de maillage pour la température moyenne  $\bar{\theta}^+$  (gauche) et la composante  $\overline{v'\theta'}$  (milieu) des flux thermiques turbulents et de la variance de la température  $\overline{\theta'^2}$  (droite).

résultats présentés ici seront les mêmes pour les modèles EBGGDH, EBAFM et EBDFM. La Fig. F.7 montre un bon comportement de  $\alpha_\theta$  sur tous les maillages à l'exception du maillage à  $y^+ = 20$  qui ne parvient pas à se rapprocher de la référence tout en gardant le bon ordre de grandeur.

Dans cette partie, la référence, tracée avec des cercles, est une simulation effectuée avec le modèle bas-Reynolds EBGGDH avec un maillage à  $y^+ = 0.1$ . Les simulations sur estiment toujours les variables  $\bar{\theta}^+$ ,  $\overline{u'\theta'}$ ,  $\overline{v'\theta'}$  et  $\overline{\theta'^2}$  dans la zone tampon pour des maillages à  $y^+ \geq 5$ , mais contrairement au cas GGDH, cette sur estimation est plus importante comme l'illustrent les Figs. F.8 et F.9. De plus, le gradient de température est en adéquation avec la référence pour tous les cas mis à part pour le maillage  $y^+ = 5$  ou il est largement sur estimé dans la zone tampon.

### F.3.5. EBAFM

La référence, tracée avec des cercles, est une simulation effectuée avec le modèle bas-Reynolds EBAFM avec un maillage à  $y^+ = 0.1$ . Les résultats du cas EBAFM sont en tous points similaires avec les résultats du cas EBGGDH comme le montrent les Figs. F.10 et F.11. L'observation que nous pouvons faire est que les valeurs des sur estimations sont plus importantes.

### F.3.6. EBDFM

La référence, tracée avec des cercles, est une simulation effectuée avec le modèle bas-Reynolds EBDFM avec un maillage à  $y^+ = 0.1$ . Dans cette partie, on s'intéresse au comportement du modèle EBDFM avec des lois de paroi adaptatives pour  $\alpha_\theta$  et pour la température moyenne couplé avec le modèle EBRSM et les lois de paroi adaptatives dynamiques. Les Figs. F.12 et F.13 présentent d'excellents résultats pour toutes les variables thermiques. De plus, en haut-Reynolds, cette configuration donne des résultats similaires au modèle haut-Reynolds DFM.

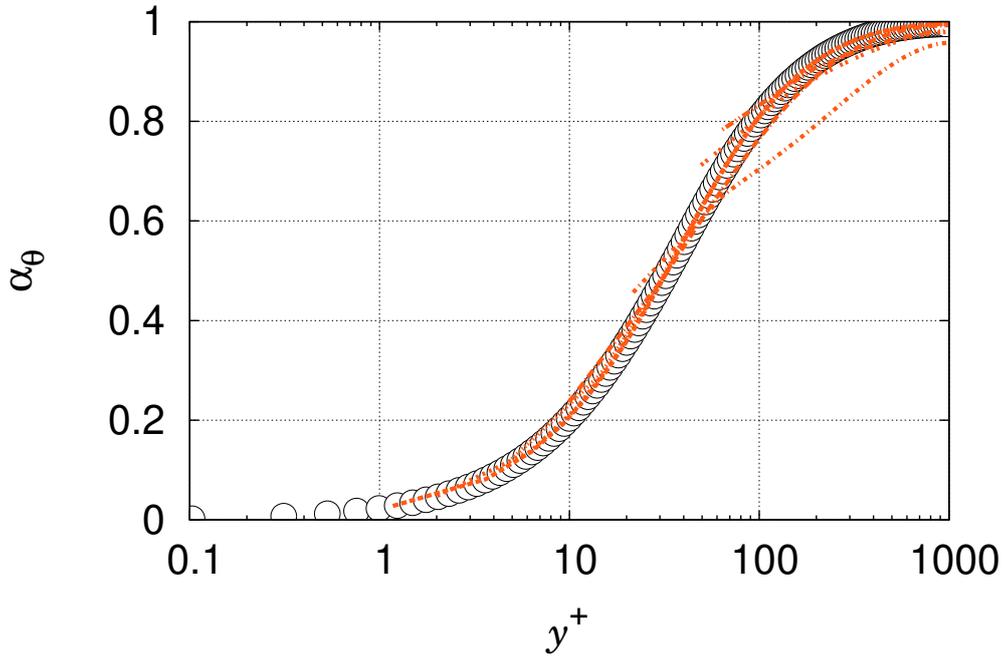


FIGURE F.7. – Test de la loi de paroi adaptative pour la variable  $\alpha_\theta$  sur différents raffinements de maillage.

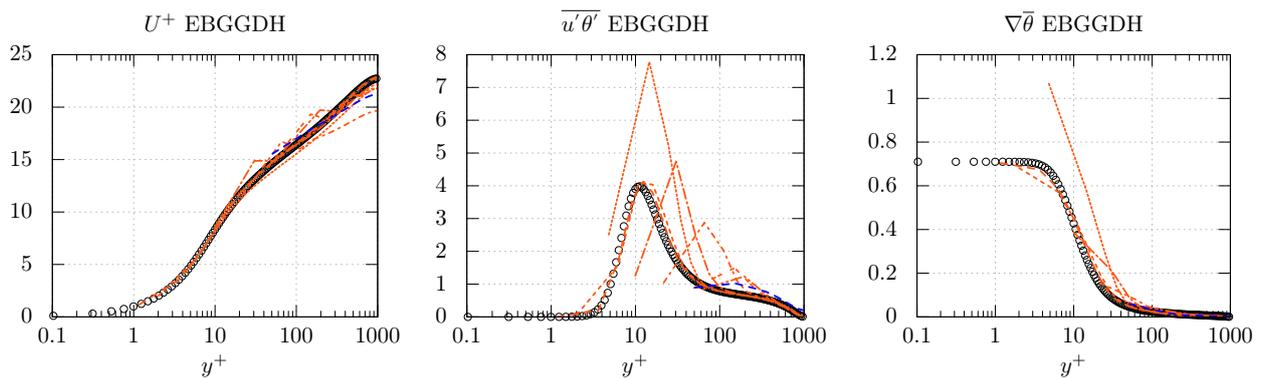


FIGURE F.8. – Tests du modèle EBGGDH pour les flux thermiques turbulents, de la loi pour  $\alpha_\theta$  et de la loi d'Howard (2012) pour la température moyenne avec le modèle EBRSM plus les lois de paroi adaptatives pour la dynamique sur différents raffinements de maillage pour la vitesse moyenne  $\bar{u}^+$  (gauche) et la composante  $\overline{u'\theta'}$  (milieu) des flux thermiques turbulents et le gradient de la température moyenne (droite).

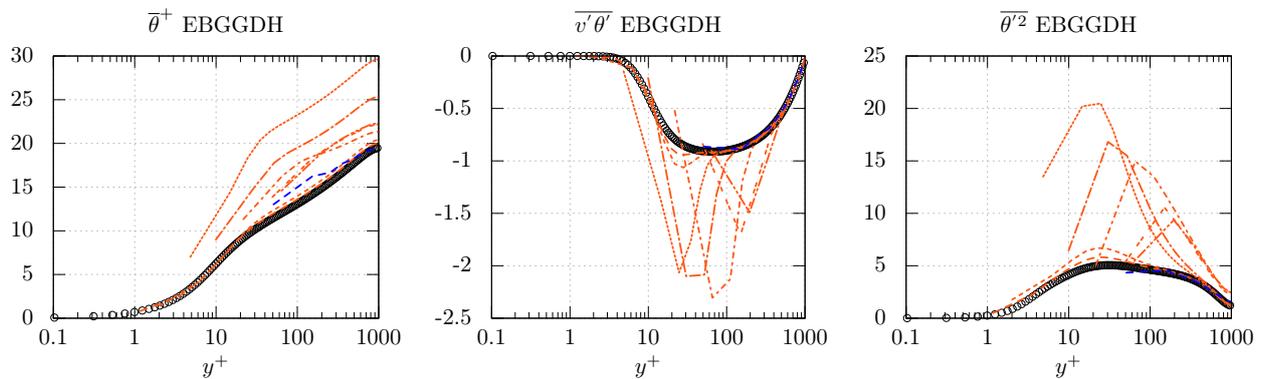


FIGURE F.9. – Tests du modèle EBGGDH pour les flux thermiques turbulents, de la loi pour  $\alpha_\theta$  et de la loi d'Howard (2012) pour la température moyenne avec le modèle EBRSM plus les lois de paroi adaptatives pour la dynamique sur différents raffinements de maillage pour la température moyenne  $\bar{\theta}^+$  (gauche) et la composante  $\overline{v'\theta'}$  (milieu) des flux thermiques turbulents et de la variance de la température  $\overline{\theta'^2}$  (droite).

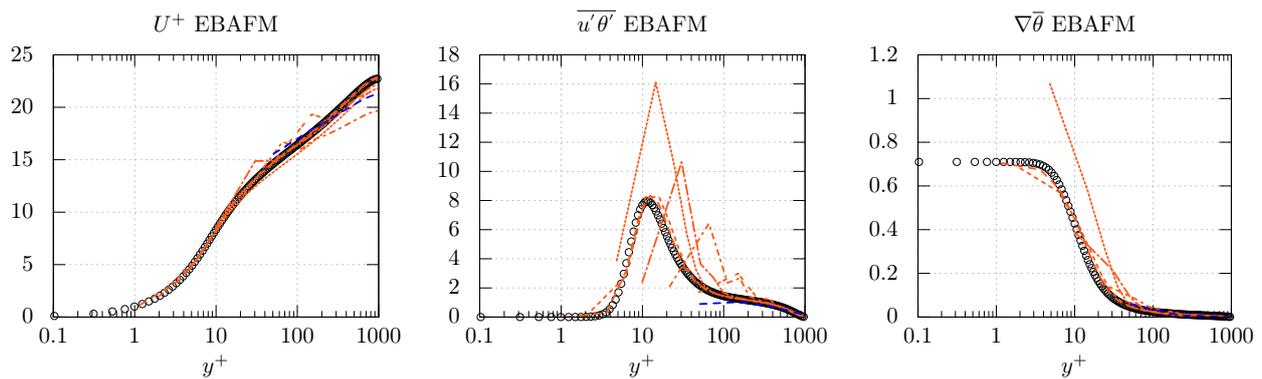


FIGURE F.10. – Tests du modèle EBAFM pour les flux thermiques turbulents, de la loi pour  $\alpha_\theta$  et de la loi d'Howard (2012) pour la température moyenne avec le modèle EBRSM plus les lois de paroi adaptatives pour la dynamique sur différents raffinements de maillage pour la vitesse moyenne  $\bar{u}^+$  (gauche) et la composante  $\overline{u'\theta'}$  (milieu) des flux thermiques turbulents et le gradient de la température moyenne (droite).

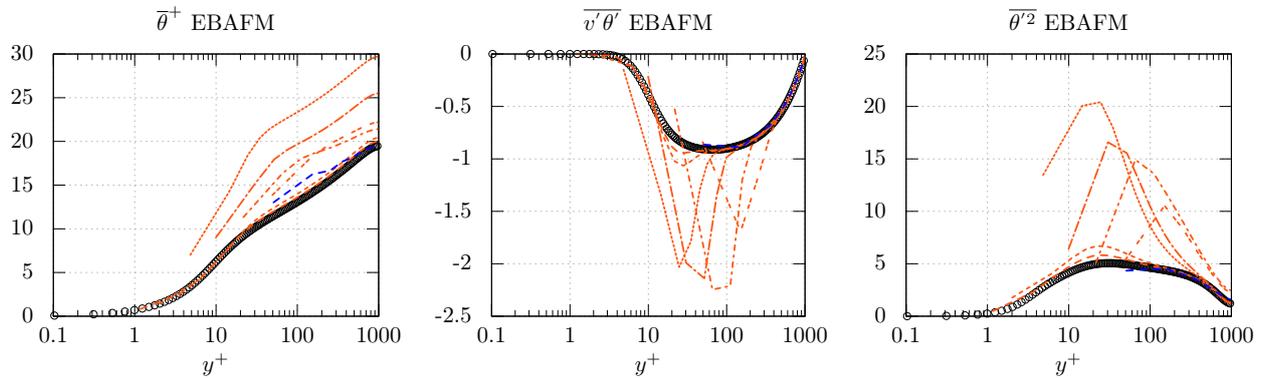


FIGURE F.11. – Tests du modèle EBAFM pour les flux thermiques turbulents, de la loi pour  $\alpha_\theta$  et de la loi d'Howard (2012) pour la température moyenne avec le modèle EBRSM plus les lois de paroi adaptatives pour la dynamique sur différents raffinements de maillage pour la température moyenne  $\bar{\theta}^+$  (gauche) et la composante  $\overline{v'\theta'}$  (milieu) des flux thermiques turbulents et de la variance de la température  $\overline{\theta'^2}$  (droite).

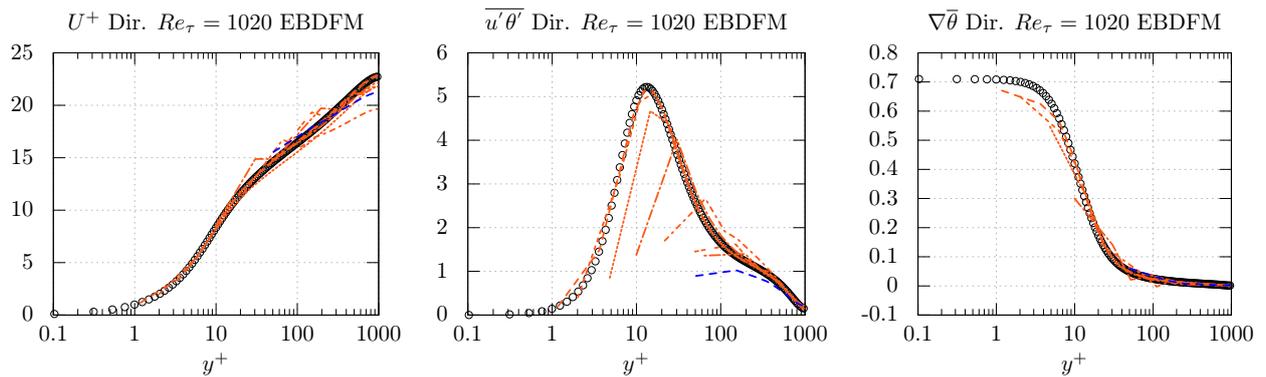


FIGURE F.12. – Tests du modèle EBDFM pour les flux thermiques turbulents, de la loi pour  $\alpha_\theta$  et de la loi d'Howard (2012) pour la température moyenne avec le modèle EBRSM plus les lois de paroi adaptatives pour la dynamique sur différents raffinements de maillage pour la vitesse moyenne  $\bar{u}^+$  (gauche) et la composante  $\overline{u'\theta'}$  (milieu) des flux thermiques turbulents et le gradient de la température moyenne (droite).

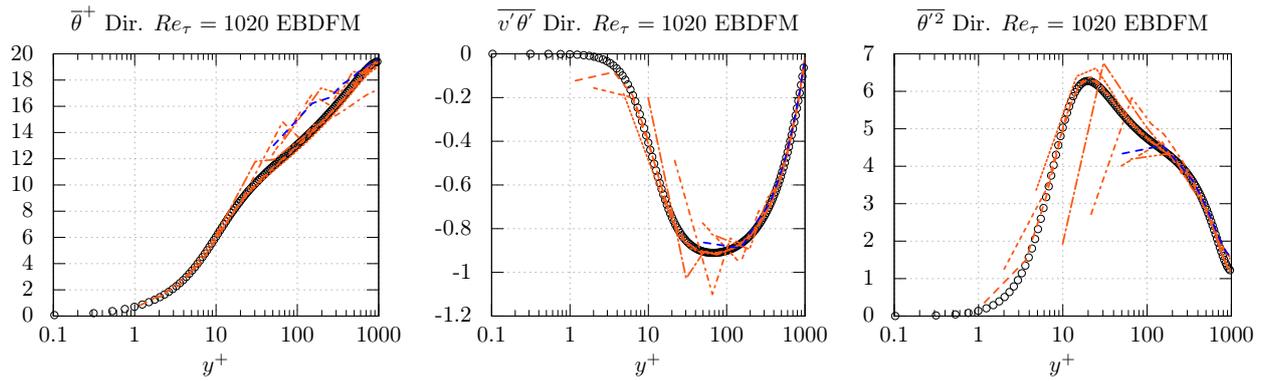


FIGURE F.13. – Tests du modèle EBDFM pour les flux thermiques turbulents, de la loi pour  $\alpha_\theta$  et de la loi d'Howard (2012) pour la température moyenne avec le modèle EBRSM plus les lois de paroi adaptatives pour la dynamique sur différents raffinements de maillage pour la température moyenne  $\bar{\theta}^+$  (gauche) et la composante  $\overline{v'\theta'}$  (milieu) des flux thermiques turbulents et de la variance de la température  $\overline{\theta'^2}$  (droite).

### F.3.7. Conclusions

Dans la majorité des cas, les lois de paroi se comportent correctement et permettent aux différents modèles de se rapprocher du comportement de référence sur les différents raffinements de maillage testés. On notera tout de même que les meilleurs résultats s'obtiennent avec le couple de modèle EBRSM/EBDFM couplé aux lois de paroi adaptatives pour la dynamique, pour la variable  $\alpha_\theta$  et pour la température (Howard, 2012).



# Annexe G

---

## Publications

### G.1. PROCEEDING 9TH INT. SYMP. TURBULENCE, HEAT AND MASS TRANSFER

#### ABSTRACT

New formulations of the near-wall scrambling and dissipation terms are proposed for modeling the turbulent heat-fluxes, in order to extend the Elliptic Blending approaches of Dehoux (2012); Dehoux *et al.* (2017) to all possible boundary conditions for the temperature : imposed wall-temperature, imposed heat flux or conjugate heat transfer. The new model satisfies the near-wall budget and, consequently, the asymptotic behavior of the turbulent heat fluxes. *A priori* comparisons with the recent DNS data of Flageul *et al.* (2015, 2017) are very encouraging. *A posteriori* tests on a forced convection flow are carried out in order to validate the new formulation.

#### CITATION

Mangeon G., Benhamadouche S., Wald J.-F., Manceau R. Unifying the near-wall treatment of the turbulent heat fluxes for all kinds of temperature boundary conditions with the Elliptic Blending approach // Proc. 9th Int. Symp. Turbulence, Heat and Mass Transfer, Rio de Janeiro, Brazil. 2018b

### G.2. PROCEEDING 12TH INT. ERCOFTAC SYMP. ON ENGINEERING TURBULENCE MODELLING AND MEASUREMENTS

#### ABSTRACT

A new low-Reynolds-number model for the dissipation rate of the temperature variance is proposed, in order to extend to different thermal boundary conditions the validity of the elliptic blending second moment closure of Dehoux *et al.* (2017). *A priori* and *a posteriori* tests are performed in forced convection channel flows with various thermal boundary conditions in comparison with the recent DNS data of Flageul *et al.* (2015, 2017), with very encouraging results.

#### CITATION

Mangeon G., Benhamadouche S., Wald J.-F., Manceau R. Second-Moment Closure for the dissipation rate of the temperature variance // Proc. 12th International ERCOFTAC Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements, Montpellier, France. 2018a.

**G.3. ARTICLE JOURNAL OF FLUID MECHANICS : SUBMITTED**

This draft was prepared using the LaTeX style file belonging to the Journal of Fluid Mechanics

1

# Extension to various thermal boundary conditions of the elliptic blending model for the turbulent heat flux and the temperature variance

Gaëtan Mangeon<sup>1,2</sup>, Sofiane Benhamadouche<sup>1,†</sup>, Jean-François Wald<sup>1</sup>  
and Rémi Manceau<sup>2‡</sup>,

<sup>1</sup>EDF R&D, MFEE Dept., 06 quai Watier, 78400 Chatou, France

<sup>2</sup>CNRS, Université de Pau et des Pays de l'Adour, E2S UPPA, INRIA, project-team CAGIRE, Laboratory of Mathematics and Applied Mathematics (LMAP), Pau, France

(Received xx; revised xx; accepted xx)

A new formulation of the model used in the near-wall region for the turbulent heat flux is developed, in order to extend the Elliptic Blending Differential Flux Model of Dehoux *et al.*, *Int. J. Heat Fluid Fl.* (2017), to various boundary conditions for the temperature: imposed wall-temperature, imposed heat flux or Conjugate Heat Transfer (CHT). The new model is developed on a theoretical basis in order to satisfy the near-wall budget of the turbulent heat flux and, consequently, its asymptotic behavior in the vicinity of the wall, which is crucial for the correct prediction of heat transfer between the fluid and the wall. The models of the different terms are derived using Taylor series expansions and comparisons with recent DNS data of channel flows with various boundary conditions. *A priori* tests show that this methodology makes it possible to drastically improve the physical representation of the wall/turbulence interaction. This new differential flux model relies on the thermal-to-mechanical time-scale ratio which depends on the thermal boundary condition at the wall. The key element entering this ratio is  $\varepsilon_\theta$ , the dissipation rate of the temperature variance  $\overline{\theta'^2}$ . Thus, a new near-wall model for this dissipation rate is proposed, in the framework of the second-moment closure based on the elliptic-blending strategy. The computations carried out in order to validate the new differential flux model demonstrate the very satisfactory prediction of heat transfer in the forced convection regime for all kinds of thermal boundary condition.

**Key words:** Turbulence modeling; Turbulent heat flux; Near-wall modeling; Second-moment closure; Differential Flux Model; Elliptic blending; Temperature variance; Variance dissipation rate

---

## 1. Introduction

In many industrial applications, the prediction of heat transfer between a fluid and solid walls plays an essential role in design, and in particular in the dimensioning and the selection of materials. On the one hand, a correct estimate of the mean heat transfer is necessary to improve system performances, and on the other hand, the levels of

† Email address for correspondence: sofiane.benhamadouche@edf.fr

‡ Email address for correspondence: remi.manceau@univ-pau.fr

temperature fluctuations in the solid parts are essential to anticipate problems related to thermal fatigue. These issues are particularly sensitive in the field of energy production, in which EDF is a major player, and particularly in nuclear engineering. A reliable estimate of the turbulent heat flux, the mean temperature and its variance is a key issue in order to improve the safety and efficiency of nuclear power plants. A typical example is the case of T-junctions in which hot water and cold water are mixed. Indeed, this situation can induce thermal fatigue and cause serious mechanical damages to the structure, and, in some extreme cases, lead to failure of the pipe walls and fluid leakage. This industrial issue is at the origin of few incidents, such as the case of Civaux nuclear power plant leak in France in 1998, which occurred in the elbow of a pipe, leading to a water leak at the rate of 30 cubic meters per hour. This issue has gradually gained importance in the literature (see for instance, Howard & Serre 2015, 2017), which highlights the importance of a detailed prediction of heat transfer, including information about the amplitude of fluctuations.

Most of the industrial applications using CFD (Computational Fluid Dynamics) are currently still treated with simple Eddy-Viscosity Models and the Simple Gradient Diffusion Hypothesis (SGDH) to take into account the turbulent heat flux. One of the most successful advanced approaches in forced convection flows is the elliptic relaxation concept and in particular the  $v^2$ - $f$  model, originally developed by Durbin (1991), combined with a SGDH approach with a constant turbulent Prandtl number (Parneix *et al.* 1998; Manceau *et al.* 2000; Billard & Laurence 2012).

For industrial applications, it is crucial to predict the turbulent heat flux in the wall-normal direction. Indeed, this flux dictates the heat exchanges between the fluid and the wall, and is intimately related to the intensity of the wall-normal velocity fluctuations. This makes Reynolds stress models promising approaches in order to improve the predictions in complex configurations (Hanjalić & Launder 2011). For a good representation of the near-wall region, the use of wall functions must be avoided (Durbin 1991). Among other models, the Elliptic Blending-Reynolds Stress Model (EB-RSM, Manceau & Hanjalić 2002; Manceau 2015) have been successfully applied to some heat transfer cases (see, e.g., Angelino *et al.* 2019; Benhamadouche *et al.* 2019; Dovizio *et al.* 2019 for very recent applications). Although the Generalized Gradient Diffusion Hypothesis (GGDH) can be sufficient to model the turbulent heat flux for some applications, it suffers from intrinsic limitations, particularly for complex flows and in the presence of buoyancy effects (Hanjalić 2002). Therefore, in the last decade, tremendous efforts have been devoted to the development of differential flux models (DFM) based on elliptic blending to account for the wall/turbulent heat flux interaction (Choi & Kim 2008; Shin *et al.* 2008; Dehoux *et al.* 2017; Choi *et al.* 2018).

Most of these differential flux models involve the thermal time-scale and thus the dissipation rate of the temperature variance. It is usual to estimate this variable based on an estimate of the thermal-to-mechanical time-scale ratio  $R$ . In the literature, this ratio is often set at a constant value (Spalding 1971), which constitutes a reasonable assumption far from the wall. Dehoux *et al.* (2017) used a variable ratio that tends to the Prandtl number at the wall and asymptotes to a constant value far from the wall. Craft *et al.* (1996) proposed an algebraic model for  $R$  which can deal with free shear flows, including flows influenced by buoyancy. However, these simplified approaches are not valid for all situations, such that it is desirable to solve a transport equation for the dissipation rate of the temperature variance. Newman *et al.* (1981) and Jones & Musonge (1988) were among the first to propose such a model. Nagano (2002) built on the other hand a low-Reynolds-number model based on *damping functions* in order to obtain the expected asymptotic behavior at the wall.

A strong limitation of almost all these models is that their near-wall asymptotic behavior is valid only for the idealized case of vanishing temperature fluctuations, i.e., imposed wall temperature, which corresponds to the boundary condition used in a large majority of the available databases (e.g., Kasagi *et al.* 1992; Abe *et al.* 2004). Recently, Tiselj *et al.* (2001) and Flageul *et al.* (2015) performed DNS of turbulent channel flows in the forced convection regime with either an imposed heat flux at the wall or Conjugate Heat Transfer (CHT). They highlighted the fact that the thermal boundary conditions have a major influence on the behavior of the turbulent quantities in the near-wall region. Configurations in which temperature fluctuations are non-zero at the wall have been rarely studied by the turbulence modeling community. Notable exceptions are the models developed by Sommer *et al.* (1994) and Craft *et al.* (2010), which are both based on the SGDH and wall functions to represent the influence of the wall on the turbulent heat flux.

The motivation for the present work is thus to extend the Differential Flux Model (DFM) based on elliptic blending (EB-DFM, Dehoux *et al.* 2017) to general thermal boundary conditions at the wall. Such an extension will also allow in the future deriving an elliptic-blending algebraic flux model (EB-AFM, Dehoux 2012), i.e., a simplified approach based on weak equilibrium assumptions for the turbulent heat flux (Hanjalić 2002) that will inherit the improved accounting of the various boundary conditions.

The aim of the present paper is threefold: (i) deriving an improved model for the terms appearing in the turbulent heat flux equation, based on asymptotic arguments, which accommodates all thermal boundary conditions at the wall; (ii) providing a new transport equation for  $\varepsilon_\theta$ , the dissipation rate of the temperature variance, which is a key variable in the temperature variance equation, the modeled equation must also be valid for all thermal boundary conditions at the wall; (iii) validating *a posteriori*, i.e., by full computations, the new model in the forced convection regime using the open-source solver *Code\_Saturne*.

In section 2, the models that are used as a starting point are presented, for both the Reynolds stress tensor and the turbulent heat flux, with a particular focus on wall modeling using the elliptic blending approach. In section 3, the near-wall behavior of the different terms involved in the transport equation for the turbulent heat flux is analyzed using Taylor series expansions, depending on the thermal boundary condition at the wall. The second part of this section is devoted to the development and *a priori* tests of a new turbulent heat flux model that satisfies the asymptotic behavior in the near wall region whatever the boundary conditions. Section 4 is dedicated to the development of a new transport equation for the dissipation rate of the temperature variance which is essential to obtain both an accurate thermal-to-mechanical time-scale ratio and an accurate temperature variance. Finally, in Section 5, the new model is validated using the CFD solver *Code\_Saturne* and the recent DNS database of Flageul *et al.* (2015) for the flow in a channel flow with three types of wall boundary conditions: an imposed temperature, an imposed heat flux and CHT.

## 2. Elliptic Blending Strategy

The models used in the present paper use the Elliptic Blending approach to take into account the non-local effects of the wall on turbulence. In the present section, the equations of the resolved turbulent quantities; the Reynolds stress tensor, the turbulent dissipation rate and the turbulent heat flux; are briefly recalled. For more details about the derivation of these equations, the reader is invited to refer to Manceau (2015)

4

G. Mangeon, S. Benhamadouche, J.-F. Wald, R. Manceau

and Dehoux *et al.* (2017). The full set of equations and coefficients is available in the appendices.

### 2.1. Reynolds-stress modeling: EB-RSM

Throughout the present article, the instantaneous variables  $\phi$  (velocity components  $u_i$ , pressure  $p$  or temperature  $T$ ) are decomposed into  $\phi = \bar{\phi} + \phi'$ , where  $\bar{\phi}$  denotes the Reynolds-averaged variable and  $\phi'$  its fluctuation. In the context of RANS modeling, the first quantity that requires attention is the Reynolds-stress tensor  $\overline{u'_i u'_j}$ . Its transport equation reads

$$\frac{D\overline{u'_i u'_j}}{Dt} = P_{ij} + D_{ij}^\nu + D_{ij}^t + \phi_{ij}^* - \varepsilon_{ij}, \quad (2.1)$$

where  $P_{ij}$ ,  $D_{ij}^\nu$ ,  $D_{ij}^t$ ,  $\phi_{ij}^*$  and  $\varepsilon_{ij}$  are the production, the molecular diffusion, the turbulent diffusion, the velocity-pressure gradient correlation and the dissipation tensors, respectively (Hanjalić & Launder 2011). The Elliptic-Blending Reynolds stress model (EB-RSM, Manceau & Hanjalić 2002) is a near-wall (or low-Reynolds number) model, i.e., a model able to represent the low-Reynolds number region close to the wall, which takes into account the effects of non-local wall blockage on turbulence by modeling the difference  $\phi_{ij}^* - \varepsilon_{ij}$  as

$$\phi_{ij}^* - \varepsilon_{ij} = (1 - \alpha^3) (\phi_{ij}^w - \varepsilon_{ij}^w) + \alpha^3 (\phi_{ij}^h - \varepsilon_{ij}^h), \quad (2.2)$$

where  $\phi_{ij}^h - \varepsilon_{ij}^h$  is given by a standard model (i.e., a model valid far from the wall, herein the SSG model of Speziale *et al.* 1991); and the near-wall models for  $\phi_{ij}^w$  and  $\varepsilon_{ij}^w$ ,

$$\phi_{ij}^w = -5 \frac{\varepsilon}{k} \left[ \overline{u'_i u'_k n_j n_k} + \overline{u'_j u'_k n_i n_k} - \frac{1}{2} \overline{u'_k u'_l n_k n_l} (n_i n_j + \delta_{ij}) \right], \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_{ij}^w = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} \varepsilon, \quad (2.4)$$

are derived from theoretical considerations in order to satisfy the asymptotic behavior of the variables in the vicinity of the wall (Manceau 2015). The normal vector at the wall  $(n_i)_{i \in \{1,2,3\}}$  is oriented towards the fluid domain and its components in the present case are  $(0, 1, 0)$ . The function  $\alpha$  is an indicator of the distance to the wall, which ranges from 0 at the wall to 1 far from the wall.  $\alpha$  is solution of the elliptic equation

$$\alpha - L^2 \nabla^2 \alpha = 1, \quad (2.5)$$

with the boundary condition  $\alpha = 0$  at the wall.  $L$  is the turbulent length scale  $L = C_L \max\left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}}\right)$ . The unit vector  $\underline{n} = \underline{\nabla} \alpha / \|\underline{\nabla} \alpha\|$  is a generalization of the notion of wall-normal vector.

The dissipation rate equation reads

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{C'_{\varepsilon_1} P - C_{\varepsilon_2} \varepsilon}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \overline{u'_l u'_m} \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_m} \right) + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_k \partial x_k}, \quad (2.6)$$

where  $\tau$  is Durbin's time scale (Durbin 1991)

$$\tau = \max\left(\mathcal{T}, C_T \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}}\right) \quad ; \quad \mathcal{T} = \frac{k}{\varepsilon}. \quad (2.7)$$

The full set of equations and coefficients is available in Appendix A.

## Extension of the elliptic blending model

5

## 2.2. Turbulent heat-flux modeling: EB-DFM

In the case of anisothermal turbulent flows, the turbulent heat flux  $\overline{u'_i \theta'}$  appears in the mean temperature equation. The baseline model used in the present article is briefly presented below. The transport equation for the turbulent heat flux reads

$$\frac{D\overline{u'_i \theta'}}{Dt} = P_{\theta i}^U + P_{\theta i}^T + D_{\theta i}^{\nu+\kappa} + D_{\theta i}^t + \phi_{\theta i}^* - \varepsilon_{\theta i}, \quad (2.8)$$

where  $P_{\theta i}^U$ ,  $P_{\theta i}^T$ ,  $D_{\theta i}^{\nu+\kappa}$ ,  $D_{\theta i}^t$ ,  $\phi_{\theta i}^*$  and  $\varepsilon_{\theta i}$  stand for the production by the mean velocity gradient, the production by the mean temperature gradient, the molecular diffusion, the turbulent diffusion, the scrambling term and the dissipation vector, respectively. The production terms do not require modeling with the present second-moment RANS closures. The turbulent diffusion term is modeled by the Generalized Gradient Diffusion Hypothesis (GGDH, see Daly & Harlow 1970) as

$$D_{\theta i}^t = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{\theta} \overline{u'_j u'_k \tau} \frac{\partial \overline{u'_i \theta'}}{\partial x_k} \right), \quad (2.9)$$

and the model for the molecular diffusion (Shikazono & Kasagi 1996) is given by

$$D_{\theta i}^{\nu+\kappa} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\kappa + \nu}{2} \frac{\partial \overline{u'_i \theta'}}{\partial x_j} + n_i n_k \frac{\nu - \kappa}{6} \frac{\partial \overline{u'_k \theta'}}{\partial x_j} \right). \quad (2.10)$$

In order for the model to be valid in near-wall regions, the elliptic blending approach is applied to the difference  $\phi_{\theta i}^* - \varepsilon_{\theta i}$  (Shin *et al.* 2008; Choi & Kim 2008),

$$\phi_{\theta i}^* - \varepsilon_{\theta i} = (1 - \alpha_{\theta}^n) (\phi_{\theta i}^w - \varepsilon_{\theta i}^w) + \alpha_{\theta}^n (\phi_{\theta i}^h - \varepsilon_{\theta i}^h). \quad (2.11)$$

Dehoux *et al.* (2017) have shown that  $\alpha_{\theta}$  must be distinct from  $\alpha$  and is obtained from the additional elliptic equation

$$\alpha_{\theta} - L_{\theta}^2 \nabla^2 \alpha_{\theta} = 1, \quad (2.12)$$

in which the thermal length scale  $L_{\theta}$  is simply related to the dynamic length scale by  $L_{\theta} = 2.5L$ . Asymptotic considerations show that  $n$  must be equal to 1 in Eq. (2.11). Far from the wall, a standard model is used for the scrambling term  $\phi_{\theta i}^*$  (Launder 1988)

$$\phi_{\theta i}^h = -C_{1\theta} \frac{1}{\tau} \overline{u'_i \theta'} + C_{2\theta} \overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} + C_{3\theta} \beta g_i \overline{\theta'^2} \quad (2.13)$$

and the dissipation tensor  $\varepsilon_{\theta i}^h = 0$  due to the assumed isotropy of the small scales. The near-wall models for  $\phi_{\theta i}^w$  and  $\varepsilon_{\theta i}^w$  are built in order to satisfy the near-wall asymptotic behavior of the turbulent heat flux. Dehoux *et al.* (2017) use

$$\phi_{\theta i}^w = -\beta \frac{1}{\mathcal{T}} \left[ 1 + C_{w\theta}^{\phi} (1 - \alpha_{\theta}) \frac{P_k}{\varepsilon} \right] \overline{u'_j \theta'} n_i n_j, \quad (2.14)$$

$$\varepsilon_{\theta i}^w = C_{\varepsilon} \left[ 1 + C_{w\theta}^{\varepsilon} (1 - \alpha_{\theta}) \frac{P_k}{\varepsilon} \right] \left( \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{RT}} \overline{u'_i \theta'} + \gamma \frac{1}{\mathcal{T}} \overline{u'_j \theta'} n_i n_j \right), \quad (2.15)$$

where

$$\beta = \gamma = \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R}}, \quad (2.16)$$

and

$$C_{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{Pr} \right). \quad (2.17)$$

6

G. Mangeon, S. Benhamadouche, J.-F. Wald, R. Manceau

$R$  is the thermal-to-mechanical time-scale ratio

$$R = \frac{\mathcal{T}_\theta}{\mathcal{T}}, \text{ where } \mathcal{T}_\theta = \frac{\overline{\theta'^2}}{2\varepsilon_\theta} \text{ and } \mathcal{T} = \frac{k}{\varepsilon}. \quad (2.18)$$

It is modeled by

$$R = (1 - \alpha_\theta) Pr + \alpha_\theta R^h, \quad (2.19)$$

where  $R^h = 0.5$  is the value recommended far from the wall for a Prandtl number  $Pr = \nu/\kappa$  around unity. Dehoux *et al.* (2017) showed that a differential model for the turbulent heat flux correctly reproduces mixed and natural convection cases. In particular, the Elliptic-Blending Differential Flux Model (EB-DFM) predicts the main characteristics of these flows in a very satisfactory manner compared to other algebraic approaches.

As indicated in the introduction, the resolution of  $\overline{\theta'^2}$  can be important not only for buoyant flows (see Eq. (2.13)) but also for industrial configurations where thermal fatigue is an issue. The transport equation for the temperature variance reads

$$\frac{D\overline{\theta'^2}}{Dt} = 2P_\theta - 2\varepsilon_\theta + D_\theta^\kappa + D_\theta^t, \quad (2.20)$$

where  $P_\theta = \overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j}$  is the production by the mean temperature gradient and  $D_\theta^\kappa = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_j} \right)$  is the molecular diffusion. For the turbulent diffusion  $D_\theta^t$ , the Daly & Harlow (1970) model is applied

$$D_\theta^t = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( C_{\theta\theta\tau} \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_j} \right), \quad (2.21)$$

where  $\tau$  is Durbin's time-scale (2.7).

In Dehoux's model, the dissipation rate of the temperature variance,  $\varepsilon_\theta$ , is evaluated using

$$\varepsilon_\theta = \frac{\overline{\theta'^2}}{2R\mathcal{T}}. \quad (2.22)$$

The full set of equations and coefficients is available in Appendix B.

It is important to note that the asymptotic analysis leading to the models for  $\phi_{\theta_i}^w$ ,  $\varepsilon_{\theta_i}^w$  and  $\varepsilon_\theta$  is based on the very common assumption that the fluctuations of the wall temperature are negligible due to the thermal inertia of the solid material, such that a constant temperature can be imposed at the wall. However, in some circumstances, it is crucial to take into account the temperature fluctuations and their propagation in the solid wall (Kasagi *et al.* 1989). For this reason, Flageul *et al.* (2015) have recently produced DNS databases in order to identify the different heat transfer characteristics for an imposed wall-temperature, an imposed heat flux and CHT. Since the model of Dehoux *et al.* (2017) presented above was derived using asymptotic analyses in the case of an imposed wall temperature only, the remainder of the present article is devoted to the theoretical analysis and the exploitation of these databases to extend the model to various thermal boundary conditions.

### 3. Modeling of the turbulent heat flux

As mentioned above, the main feature of the original model of Dehoux *et al.* (2017), simply denoted as *Dehoux's model* hereafter, is that it is consistent with the asymptotic

## Extension of the elliptic blending model

7

behavior of near-wall turbulence in the case of an imposed temperature. In order to extend the validity of the model, the asymptotic analysis is generalized to other thermal boundary conditions.

## 3.1. Asymptotic analysis of the source terms in the vicinity of the wall

In the vicinity of a wall located at  $y = 0$ , using the no-slip boundary condition and the divergence-free constraint, it is easy to show that the Taylor series expansions of the fluctuating velocities and temperature with respect to the small wall-distance  $y$  write

$$\begin{aligned} u'(x, y, z, t) &= a_1(x, z, t) y + a_2(x, z, t) y^2 + \mathcal{O}(y^3), \\ v'(x, y, z, t) &= b_2(x, z, t) y^2 + b_3(x, z, t) y^3 + \mathcal{O}(y^4), \\ w'(x, y, z, t) &= c_1(x, z, t) y + c_2(x, z, t) y^2 + \mathcal{O}(y^3), \\ \theta'(x, y, z, t) &= t_0(x, z, t) + t_1(x, z, t) y + t_2(x, z, t) y^2 + \mathcal{O}(y^3). \end{aligned} \quad (3.1)$$

The coefficients  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$  and  $t_k$  are random variables independent of  $y$ . In order to alleviate the writing of the expressions, we leave the dependency on  $(x, z, t)$ . The asymptotic behavior of  $\overline{u'_i \theta'}$ ,  $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $\overline{\theta'^2}$  and  $\varepsilon_\theta$  can be, respectively, written as

$$\begin{aligned} \overline{u' \theta'} &= \overline{a_1 t_0} y + \overline{a_1 t_1 + a_2 t_0} y^2 + \mathcal{O}(y^3), \\ \overline{v' \theta'} &= \overline{b_2 t_0} y^2 + \overline{b_2 t_1 + b_3 t_0} y^3 + \mathcal{O}(y^4), \\ \overline{w' \theta'} &= \overline{c_1 t_0} y + \overline{c_1 t_1 + c_2 t_0} y^2 + \mathcal{O}(y^3), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} \left( \overline{a_1^2} + \overline{c_1^2} \right) y^2 + \mathcal{O}(y^3), \quad (3.3)$$

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} = \nu \left( \overline{a_1^2} + \overline{c_1^2} \right) + \mathcal{O}(y), \quad (3.4)$$

$$\overline{\theta'^2} = \overline{t_0^2} + 2\overline{t_0 t_1} y + \left( \overline{t_1^2} + 2\overline{t_0 t_2} \right) y^2 + \mathcal{O}(y^3), \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \kappa \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}} = \kappa \left[ \overline{\left( \frac{\partial t_0}{\partial x} \right)^2} + \overline{t_1^2} + \overline{\left( \frac{\partial t_0}{\partial z} \right)^2} \right] + \kappa \left[ 2 \overline{\frac{\partial t_0}{\partial x} \frac{\partial t_1}{\partial x}} + 4\overline{t_1 t_2} + 2 \overline{\frac{\partial t_0}{\partial z} \frac{\partial t_1}{\partial z}} \right] y \\ &\quad + \kappa \left[ \overline{\left( \frac{\partial t_1}{\partial x} \right)^2} + 2 \overline{\frac{\partial t_0}{\partial x} \frac{\partial t_2}{\partial x}} + 4\overline{t_2^2} + 6\overline{t_1 t_3} + \overline{\left( \frac{\partial t_1}{\partial z} \right)^2} + 2 \overline{\frac{\partial t_0}{\partial z} \frac{\partial t_2}{\partial z}} \right] y^2 + \mathcal{O}(y^3). \end{aligned} \quad (3.6)$$

The leading order terms of the Taylor series expansions of the thermal variables depend on the temperature boundary condition. For an imposed temperature,  $\theta'$  goes to zero at the wall, such that  $t_0 = 0$ . For an imposed heat flux,  $t_0 \neq 0$ , but the derivative of  $\theta'$  in the wall normal direction is zero, such that  $t_1 = 0$ . Finally, for CHT, there is no specific simplification:  $t_0$  and  $t_1$  are not necessarily equal to 0.

The asymptotic behavior of the exact source terms of the turbulent heat flux transport equations can then be determined using the Taylor series expansion presented above. It is not necessary to detail the calculations here, and only the final results are presented in Table 1 for the stream-wise and span-wise components and in Table 2 for the wall-normal component. Three important observations can be made on the basis of these tables. (i) The behavior of the terms in the transport equations for  $\overline{u' \theta'}$  and  $\overline{w' \theta'}$  are the same, as well as their expansions in Eq. (3.2), such that it is not necessary to detail the behavior

8

*G. Mangeon, S. Benhamadouche, J.-F. Wald, R. Manceau*


---

	$P_{\theta_i}^U + P_{\theta_i}^T$	$\phi_{\theta_i}$	$D_{\theta_i}^{\nu+\kappa}$	$\varepsilon_{\theta_i}$	$D_{\theta_i}^t$
Imposed temperature	$\mathcal{O}(y^3)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(y^3)$
Imposed heat flux	$\mathcal{O}(y^2)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y^2)$
Conjugate Heat Transfer (CHT)	$\mathcal{O}(y^2)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(y^2)$

---

TABLE 1. Asymptotic behavior of the source terms appearing in the exact transport equations for  $\overline{u'\theta'}$  and  $\overline{w'\theta'}$ .

---

	$P_{\theta_i}^U + P_{\theta_i}^T$	$\phi_{\theta_i}$	$D_{\theta_i}^{\nu+\kappa}$	$\varepsilon_{\theta_i}$	$D_{\theta_i}^t$
Imposed temperature	$\mathcal{O}(y^4)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y^4)$
Imposed heat flux	$\mathcal{O}(y^3)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(y^2)$	$\mathcal{O}(y^3)$
Conjugate Heat Transfer (CHT)	$\mathcal{O}(y^3)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y^3)$

---

TABLE 2. Asymptotic behavior of the source terms appearing in the exact transport equation for  $\overline{v'\theta'}$ .

of both components: in the rest of this paper, only the component  $\overline{u'\theta'}$  is considered. (ii) The asymptotic behavior of these exact source terms depends on the thermal boundary condition to such an extent that the terms appearing at leading order are different. For instance, for the wall-normal component (Table 2), the dissipation term  $\varepsilon_{\theta_i}$  belongs to the dominant terms for an imposed temperature, whereas it is negligible in the other two cases. (iii) The production terms  $P_{\theta_i}^U$  and  $P_{\theta_i}^T$  and the turbulent diffusion term  $D_{\theta_i}^t$  are always negligible compared to the molecular diffusion  $D_{\theta_i}^{\nu+\kappa}$ , the scrambling  $\phi_{\theta_i}$  and the dissipation  $\varepsilon_{\theta_i}$  terms, such that it is sufficient to consider the last three terms in the asymptotic analysis of the transport equation for the turbulent heat flux. Therefore, the analysis focuses on the near-wall balance

$$D_{\theta_i}^{\nu+\kappa} + \phi_{\theta_i} - \varepsilon_{\theta_i} = 0. \quad (3.7)$$

that must be satisfied for all the cases.

	Imposed temperature	Imposed heat flux	Conjugate Heat Transfer (CHT)
Exact $R$	$\nu/\kappa = Pr$	$\mathcal{O}(1/y^2)$	$\mathcal{O}(1/y^2)$
$R = (1 - \alpha_\theta) Pr + \alpha_\theta R^h$	$Pr$	$Pr$	$Pr$

TABLE 3. Asymptotic behavior of the exact expression of the thermal-to-mechanical time-scale ratio  $R$  and of the algebraic model proposed by Dehoux *et al.* (2017) for different kinds of thermal boundary conditions.

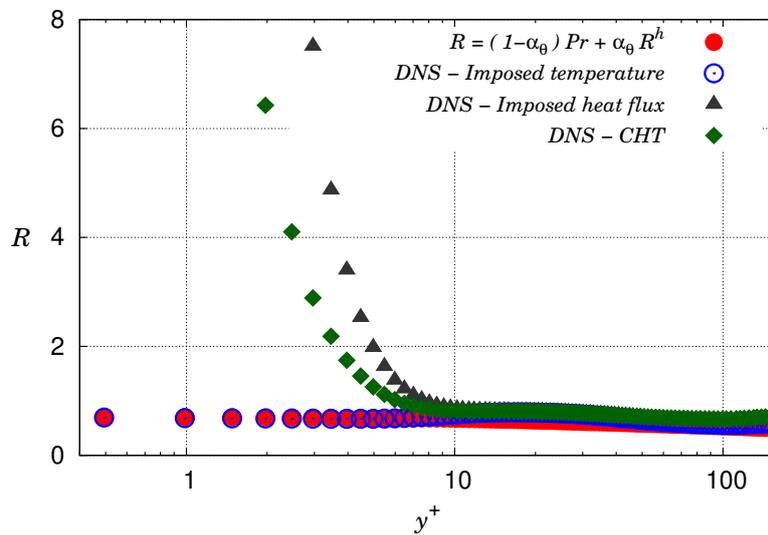


FIGURE 1. Thermal-to-mechanical time-scale ratio  $R$  for different temperature boundary conditions. Channel flow DNS data of Flageul *et al.* (2015).

### 3.2. Asymptotic analysis of Dehoux's model

Dehoux's model was derived in order to satisfy the near-wall balance (3.7) in the case of an imposed temperature at the wall. One of the limitations of this model is that it makes use of the algebraic expression (2.19) to represent the thermal-to-mechanical time-scale ratio  $R$ , in order to avoid the resolution of a transport equation for the dissipation rate of the variance,  $\varepsilon_\theta$ . As shown in Table 3, the wall limiting behavior of  $R$  strongly depends on the thermal boundary condition:  $R$  goes to the Prandtl number at the wall for an imposed temperature, while it tends to infinity in the other two cases. This situation is illustrated by Fig. 1, which shows an *a priori* evaluation of this algebraic model for  $R$ ; the elliptic equation (2.12) is solved by using the length scale computed from the DNS data, in order to evaluate the value of  $R$  given by the algebraic relation (2.19), which is independent of the thermal boundary condition. The comparison made in Fig. 1 with the exact value of  $R$  given by Eq. (2.18) extracted from the DNS databases shows that this model for  $R$  is not sufficiently general, since the near-wall behavior of the model is not sensitized to the thermal boundary condition.

10

G. Mangeon, S. Benhamadouche, J.-F. Wald, R. Manceau

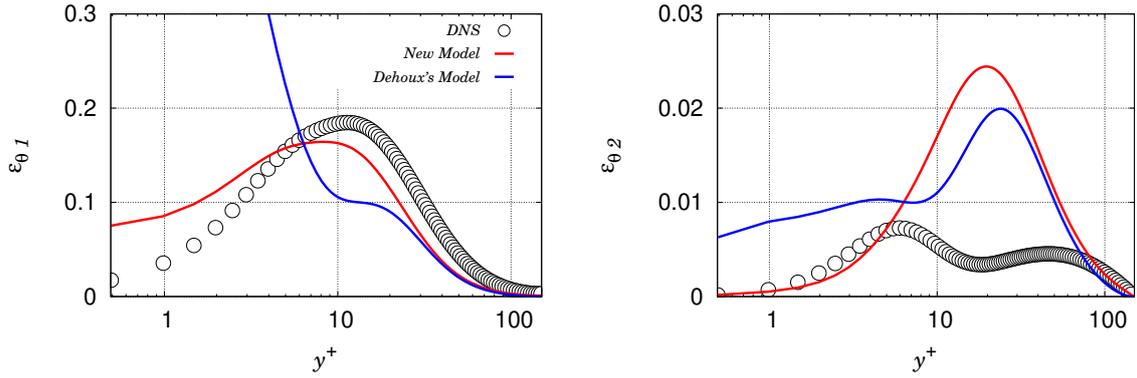


FIGURE 2. *A priori* evaluation of the variance dissipation term for an **imposed heat flux**. Left: stream-wise component; Right: wall-normal component. Channel flow DNS data of Flageul *et al.* (2015).

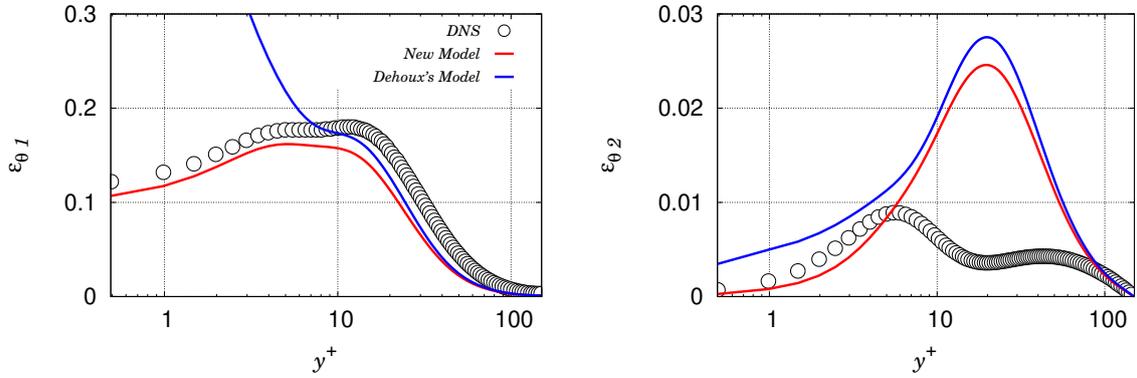


FIGURE 3. *A priori* evaluation of the variance dissipation term for **Conjugate Heat Transfer (CHT)**. Left: stream-wise component; Right: wall-normal component. Channel flow DNS data of Flageul *et al.* (2015).

The main consequence of this lack of generality of the model for  $R$  is that the model (2.11) for the difference between the scrambling term  $\phi_{\theta i}$  and the dissipation term  $\varepsilon_{\theta i}$  is not compatible with an imposed heat flux or CHT. This can be observed in Figs. 2 and 3 for  $\varepsilon_{\theta i}$ , and in Figs. 4 and 5 for  $\phi_{\theta i}$ , respectively. For the tangential component  $\varepsilon_{\theta 1}$  of the dissipation term, the problem comes from the near-wall contribution  $\varepsilon_{\theta 1}^w$  given by Eq. (2.15) that goes to infinity at the wall as  $1/y$ , while the asymptotic analysis of the exact term shows that it goes to zero as  $y$  for an imposed flux and to a constant for CHT (Table 1). In contrast, for  $\phi_{\theta 1}$ , the near-wall contribution  $\phi_{\theta 1}^w$  acts correctly, but its behavior is strongly perturbed by the component  $\phi_{\theta 1}^h$  given by Eq. (2.13) that goes to infinity at the wall and is not sufficiently damped by the factor  $\alpha_{\theta}$  in Eq. (2.11). Moreover, although the situation seems less critical for the normal component of the dissipation term, its behavior is also not correct as it tends towards a non-zero value at the wall rather than zero. Therefore, in order to derive a model valid for an imposed heat flux and CHT as well as for an imposed wall temperature, the asymptotic analysis of Dehoux *et al.* (2017) must be extended to various thermal boundary conditions, which is done in section 3.3.

## Extension of the elliptic blending model

11

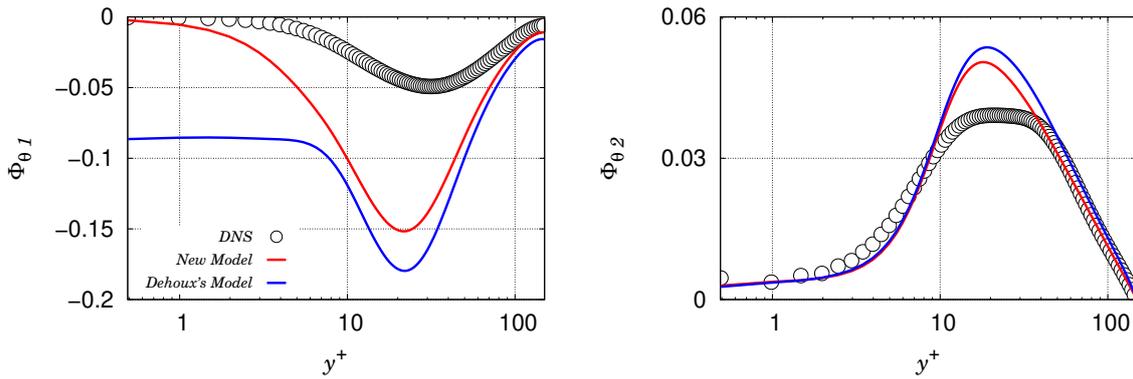


FIGURE 4. *A priori* evaluation of the scrambling term for an **imposed heat flux**. Left: stream-wise component; Right: wall-normal component. Channel flow DNS data of Flageul *et al.* (2015).

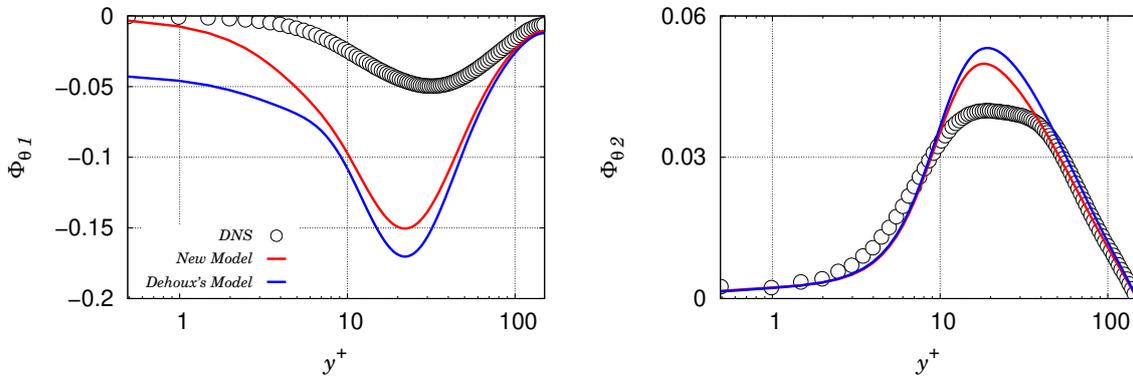


FIGURE 5. *A priori* evaluation of the scrambling term for **Conjugate Heat Transfer (CHT)**. Left: stream-wise component; Right: wall-normal component. Channel flow DNS data of Flageul *et al.* (2015).

---

	Imposed temperature	Imposed heat flux	Conjugate Heat Transfer (CHT)
$\varepsilon_{\theta 1}^w$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$
$\varepsilon_{\theta 2}^w$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$

---

TABLE 4. Asymptotic behavior of the near-wall models for  $\varepsilon_{\theta_i}^w$  proposed by Dehoux *et al.* (2017) with the exact asymptotic behavior of the thermal-to-mechanical time-scale ratio  $R$  for different kinds of thermal boundary conditions.

### 3.3. Heat flux asymptotic behavior with the right $R$ asymptotic behavior

In the previous section, it has been concluded that the validity of Dehoux's model is limited to the case of an imposed temperature, mainly due to the model utilized for  $R$  and given by Eq. (2.19). This means that the simple algebraic model for  $R$  used by Dehoux *et al.* (2017) and given by equation (2.19) cannot be used in a general configuration, and that an asymptotically correct model must be developed instead.

However, the following question must also be raised: would correcting the expression for  $R$  be sufficient for the model to give the right asymptotic behavior of turbulent heat flux? We will see in the present section that the answer is no.

The procedure is as follows: it is assumed that the exact asymptotic behavior of the thermal-to-mechanical time-scale ratio  $R$  is respected in all the cases; the near-wall behavior of the solution of the modeled transport equation for the turbulent heat flux is analyzed and compared with the exact behavior, in order to identify how the model can be made more general.

Table 4 shows the asymptotic behavior of the model for  $\varepsilon_{\theta_i}^w$  of Dehoux *et al.* (2017) *using now the exact asymptotic behavior* of  $R$ . By comparing with Tables 1 and 2, it can be seen that the model is correct for both an imposed temperature condition and CHT. However, for an imposed heat flux, the near-wall behavior of  $\varepsilon_{\theta_i}^w$  is one order below that of the exact term. After considering several options, we have not found any solution to modify the behavior in this case without spoiling the behavior in the other two cases. Therefore, our strategy consists in keeping the near-wall model  $\varepsilon_{\theta_i}^w$  proposed by Dehoux *et al.* (2017), and to account for the discrepancy with the exact behavior in the case of imposed heat flux in the derivation of the model  $\phi_{\theta_i}^w$ . Indeed, as mentioned above, as long as the near-wall balance between the molecular diffusion  $D_{\theta_i}^{\nu+\kappa}$ , the scrambling term  $\phi_{\theta_i}$  and the dissipation term  $\varepsilon_{\theta_i}$  is satisfied, the solution of the transport equation for the turbulent heat flux will have the correct asymptotic behavior.

Dehoux's model for  $\varepsilon_{\theta_i}^w$  is associated to the model of Shikazono & Kasagi (1996) for  $D_{\theta_i}^{\nu+\kappa}$  (Eq. 2.10). The model  $\phi_{\theta_i}^w$  must be derived in such a way that the correct near-wall balance is ensured. As demonstrated below, this can be achieved by just modifying the coefficient  $\beta$  in Eq. (2.14).

In order to determine the relevant value of  $\beta$ , it is necessary to analyse the asymptotic behavior of the transport equation solution for the turbulent heat-flux, following the same methodology as proposed by Durbin (1991) for the Reynolds stress tensor. Considering only the dominant terms in the near-wall region (Eq. 3.7), solutions are sought under the form of Taylor series

$$\overline{u'\theta'} = A_1 y + B_1 y^2 + C_1 y^3 + \mathcal{O}(y^4) \quad (3.8)$$

and

$$\overline{v'\theta'} = A_2 y + B_2 y^2 + C_2 y^3 + \mathcal{O}(y^4). \quad (3.9)$$

Introducing these Taylor series into Eq. (3.7) leads to constraints that the expansion coefficients  $A_i$ ,  $B_i$  and  $C_i$  must satisfy, and, consequently, the asymptotic behavior of the solutions can be determined. The model  $\phi_{\theta_i}^w$  must be formulated in order for these solutions to match the exact asymptotic behavior of the turbulent heat flux.

Using the models (2.10), (2.14) and (2.15) for  $D_{\theta_i}^{\nu+\kappa}$ ,  $\varepsilon_{\theta_i}^w$  and  $\phi_{\theta_i}^w$ , respectively, and by putting  $\varepsilon_{\theta_i}^w$  and  $\phi_{\theta_i}^w$  on the *r.h.s.* of the near-wall balance (3.7),

$$\frac{\nu + \kappa}{2} \frac{\partial^2 \overline{u'\theta'}}{\partial y^2} + \frac{\nu + \kappa}{2} \left( \frac{\partial^2 \overline{u'\theta'}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{u'\theta'}}{\partial z^2} \right) = (\nu + \kappa) \psi \sqrt{\frac{1}{2\nu\mathcal{T}}} \overline{u'\theta'}, \quad (3.10)$$

and

$$\begin{aligned} \left( \frac{2}{3}\nu + \frac{1}{3}\kappa \right) \frac{\partial^2 \overline{v'\theta'}}{\partial y^2} + \left( \frac{2}{3}\nu + \frac{1}{3}\kappa \right) \left( \frac{\partial^2 \overline{v'\theta'}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{v'\theta'}}{\partial z^2} \right) = \\ 2(\nu + \kappa) \psi \sqrt{\frac{1}{2\nu\mathcal{T}}} \overline{v'\theta'} + \beta \frac{1}{\mathcal{T}} \overline{v'\theta'}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

## Extension of the elliptic blending model

13

where

$$\psi = \sqrt{\frac{\varepsilon_\theta}{\kappa\theta'^2}}. \quad (3.12)$$

These equations can be simplified based on: the expression (2.17) for  $C_\varepsilon$ ; the Taylor series expansion  $1/\mathcal{T} = 2\nu/y^2 (1 + a_\mathcal{T}y + b_\mathcal{T}y^2 + \mathcal{O}(y^3))$  obtained thanks to the Taylor's series expansions of the turbulent kinetic energy  $k$  and its dissipation rate  $\varepsilon$  (Eqs. (3.3) and (3.4)); the fact that the term  $(1 - \alpha_\theta) \frac{P_k}{\varepsilon}$  which appears in the models  $\varepsilon_{\theta_i}^w$  and  $\phi_{\theta_i}^w$  behaves as  $y^3$  in the vicinity of the wall; and the general forms of the solutions (3.8) and (3.9). Eqs. (3.10) and (3.11) then become

$$\begin{aligned} (\nu + \kappa) B_1 + \left(3(\nu + \kappa) C_1 + \chi_{A_1}\right) y + \mathcal{O}(y^2) = \\ (\nu + \kappa) \psi \frac{\overline{u'\theta'}}{y} \left(1 + \frac{1}{2}a_\mathcal{T}y + \frac{1}{2}b_\mathcal{T}y^2 + \mathcal{O}(y^3)\right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

and

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{3}\nu + \frac{2}{3}\kappa\right) B_2 + \left((4\nu + 2\kappa) C_2 + \chi_{A_2}\right) y + \mathcal{O}(y^2) = \\ 2(\nu + \kappa) \psi \frac{\overline{v'\theta'}}{y} \left(1 + \frac{1}{2}a_\mathcal{T}y + \frac{1}{2}b_\mathcal{T}y^2 + \mathcal{O}(y^3)\right) + \\ 2\beta\nu \frac{\overline{v'\theta'}}{y^2} \left(1 + a_\mathcal{T}y + b_\mathcal{T}y^2 + \mathcal{O}(y^3)\right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

where  $\chi_{A_1} = \frac{\nu + \kappa}{2} \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2}\right)$  and  $\chi_{A_2} = \left(\frac{2}{3}\nu + \frac{1}{3}\kappa\right) \left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2}\right)$ .

In order to obtain a development up to order 1 and noticing that the lowest order of  $\overline{u'\theta'}$  and  $\overline{v'\theta'}$  is 1, the Taylor series expansion of  $1/\mathcal{T}$  had to be pushed up to order 2 as there is a potential division by  $y^2$  in the *r.h.s.* of Eqs. (3.13) and (3.14). The division by  $y^2$  in the *r.h.s.* of Eq. (3.13) occurs when the temperature is imposed at the wall such that, as it is shown in section 3.3.1,  $\psi$  behaves as  $1/y$ . The following developments will show that the additional coefficients in the expansion of  $\mathcal{T}$  and  $\psi$  have no effect on the final results.

The Taylor series expansion of  $\psi$  depends on the thermal boundary condition and is detailed in Sections 3.3.1 and 3.3.2 on a case-by-case basis.

Introducing an other time the general forms of the solutions (3.8) and (3.9) into the *r.h.s.* of Eqs. (3.13) and (3.13) and considering that  $\psi$  might introduce a term in  $1/y$ , yields

$$\begin{aligned} (\nu + \kappa) B_1 + \left(3(\nu + \kappa) C_1 + \chi_{A_1}\right) y + \mathcal{O}(y^2) = \\ (\nu + \kappa) \psi \left[ A_1 + \left(B_1 + \frac{1}{2}a_\mathcal{T}A_1\right) y + \right. \\ \left. \left(\frac{1}{2}b_\mathcal{T}A_1 + \frac{1}{2}a_\mathcal{T}B_1 + C_1\right) y^2 + \mathcal{O}(y^2)\right], \end{aligned} \quad (3.15)$$

14

*G. Mangeon, S. Benhamadouche, J.-F. Wald, R. Manceau*

and

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{4}{3}\nu + \frac{2}{3}\kappa \right) B_2 + \left( (4\nu + 2\kappa) C_2 + \chi_{A_2} \right) y + \mathcal{O}(y^2) = \\
& (\nu + \kappa) \psi \left[ A_2 + \left( B_2 + \frac{1}{2} a_{\mathcal{T}} A_2 \right) y + \right. \\
& \left. \left( \frac{1}{2} b_{\mathcal{T}} A_2 + \frac{1}{2} a_{\mathcal{T}} B_2 + C_2 \right) y^2 + \mathcal{O}(y^2) \right] \\
& 2\nu\beta \left[ \frac{A_2}{y} + (B_2 + a_{\mathcal{T}} A_2) + (b_{\mathcal{T}} A_2 + a_{\mathcal{T}} B_2 + C_2) y + \mathcal{O}(y) \right]. \quad (3.16)
\end{aligned}$$

In order to obtain relations or constraints on the coefficients  $A_i$ ,  $B_i$  and  $C_i$ , two cases need to be considered separately: one the one hand, an imposed temperature at the wall; on the other hand, an imposed heat flux or CHT.

### 3.3.1. Asymptotic analysis for an imposed wall temperature

The case of an imposed wall temperature is considered first. In this case, the temperature fluctuations vanish at the wall, such that  $t_0 = 0$ . Using the Taylor series expansions of  $\overline{\theta'^2}$  and  $\varepsilon_{\theta}$  given by Eqs. (3.5) and (3.6), respectively, with  $t_0 = 0$ , it is found that  $\psi = 1/y (1 + a_{\psi}y + b_{\psi}y^2 + \mathcal{O}(y^3))$ , such that Eqs. (3.15) and (3.16) write

$$\begin{aligned}
& (\nu + \kappa) B_1 + \left( 3(\nu + \kappa) C_1 + \chi_{A_1} \right) y + \mathcal{O}(y^2) = \\
& (\nu + \kappa) \frac{A_1}{y} + (\nu + \kappa) \left[ \left( \frac{1}{2} a_{\mathcal{T}} + a_{\psi} \right) A_1 + B_1 \right] + \\
& (\nu + \kappa) \left[ \left( \frac{1}{2} a_{\mathcal{T}} a_{\psi} + \frac{1}{2} b_{\mathcal{T}} + b_{\psi} \right) A_1 + \left( \frac{1}{2} a_{\mathcal{T}} + a_{\psi} \right) B_1 + C_1 \right] y + \mathcal{O}(y^2), \quad (3.17)
\end{aligned}$$

and as  $\beta$  tends to a constant at the wall,

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{4}{3}\nu + \frac{2}{3}\kappa \right) B_2 + \left( (4\nu + 2\kappa) C_2 + \chi_{A_2} \right) y + \mathcal{O}(y^2) = \\
& 2 \left( (1 + \beta) \nu + \kappa \right) \frac{A_2}{y} + \left[ 2(\nu + \kappa) \left( (0.5a_{\mathcal{T}} + a_{\psi}) A_2 + B_2 \right) + 2\nu\beta (a_{\mathcal{T}} A_2 + B_2) \right] + \\
& \left[ 2(\nu + \kappa) \left( (0.5a_{\mathcal{T}} a_{\psi} + 0.5b_{\mathcal{T}} + b_{\psi}) A_2 + (0.5a_{\mathcal{T}} + a_{\psi}) B_2 + C_1 \right) + \right. \\
& \left. 2\nu\beta (b_{\mathcal{T}} A_2 + a_{\mathcal{T}} B_2 + C_2) \right] y + \mathcal{O}(y^2). \quad (3.18)
\end{aligned}$$

With regard to the component  $\overline{u'\theta'}$ , for the function (3.8) to be solution of Eq. (3.17), the two sides of the equation must balance at each order  $y^n$ . Restricting the list of the relations to orders  $n = -1$  and  $n = 0$  yields

$$\begin{aligned}
& 0 = (\nu + \kappa) A_1, \\
& (\nu + \kappa) B_1 = (\nu + \kappa) \left[ \left( \frac{1}{2} a_{\mathcal{T}} + a_{\psi} \right) A_1 + B_1 \right]. \quad (3.19)
\end{aligned}$$

## Extension of the elliptic blending model

15

Thus, for any solution of Eq. (3.17), the first line of Eq. (3.19) leads to  $A_1 = 0$  as  $\nu + \kappa$  is strictly positive. The second line of Eq. (3.19) gives  $(\nu + \kappa) B_1 = (\nu + \kappa) B_1$ ; there is no particular constraint on  $B_1$  since any value satisfies this equation. In conclusion, any solution  $\overline{u'\theta'}$  of Eq. (3.10) is of the form  $\overline{u'\theta'} = B_1 y^2 + \mathcal{O}(y^3)$ , which is the expected behavior for an imposed temperature at the wall. As mentioned above, this conclusion holds for  $\overline{w'\theta'}$  as well, i.e.,  $A_3 = 0$  and no constraint on  $B_3$  being any real.

The last relation obtained from Eq. (3.17) for order 1 is  $3(\nu + \kappa)C_1 + \chi_{A_1} = (\nu + \kappa)((0.5a_{\mathcal{T}} + a_{\psi})B_1 + C_1)$ . It simply gives a relation between  $B_1$ ,  $C_1$  and  $\chi_{A_1}$ .

For the wall-normal component  $\overline{v'\theta'}$ , Eq. (3.18) leads to, from order  $n = -1$  up to order  $n = 1$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \left( (1 + \beta)\nu + \kappa \right) A_2, \\ \left( \frac{4}{3}\nu + \frac{2}{3}\kappa \right) B_2 &= \left[ 2(\nu + \kappa) \left( (0.5a_{\mathcal{T}} + a_{\psi}) A_2 + B_2 \right) + 2\nu\beta (a_{\mathcal{T}} A_2 + B_2) \right], \\ (4\nu + 2\kappa) C_2 + \chi_{A_2} &= \left[ 2(\nu + \kappa) \left( (0.5a_{\mathcal{T}}a_{\psi} + 0.5b_{\mathcal{T}} + b_{\psi}) A_2 + (0.5a_{\mathcal{T}} + a_{\psi}) B_2 + C_1 \right) + \right. \\ &\quad \left. 2\nu\beta (b_{\mathcal{T}} A_2 + a_{\mathcal{T}} B_2 + C_2) \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

In Dehoux's model, the coefficient  $\beta$  is equal to  $\sqrt{Pr}/\sqrt{R}$ , which goes to 1 at the wall in the case of an imposed wall temperature (see Table 3). Using this value, the first two Eqs. of (3.20) yield  $A_2 = B_2 = 0$ . Considering the third line of Eq. (3.20), we obtain  $(4\nu + 2\kappa)(C_2 + \chi_{A_2}) = (4\nu + 2\kappa)C_2$ . It is seen that any value of  $C_2$  satisfies the equation and  $\chi_{A_2} = 0$ . Therefore, any solution  $\overline{v'\theta'}$  of the equation is of the form  $\overline{v'\theta'} = C_2 y^3 + \mathcal{O}(y^4)$ , as expected for this component. In conclusion, as mentioned above, the solutions of Dehoux's model satisfy the exact asymptotic behavior of all the components for the particular case of an imposed temperature. Thus, we will keep this asymptotic behavior of  $\beta$  in the case of an imposed temperature, i.e.,  $\beta$  tends to 1 as  $y$  tends to 0.

This analysis, which was carried out by Dehoux *et al.* (2017) to derive their model, is now extended to the case where an imposed heat flux is imposed or in the case of CHT.

### 3.3.2. Asymptotic analysis for an imposed wall heat flux or Conjugate Heat Transfer (CHT)

The analysis performed in the present section is valid for both an imposed heat flux and CHT. The asymptotic behavior of  $\psi$  is obtained using the general expansions from Eqs. (3.5) and (3.6). Indeed, for an imposed heat flux, the wall normal gradient of the temperature fluctuations is zero, such that  $t_1 = 0$ . Therefore, we have

$$\psi = \sqrt{\frac{\left[ \left( \frac{\partial t_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial t_0}{\partial z} \right)^2 \right]}{t_0^2}} = \mathcal{O}(1). \quad (3.21)$$

16

*G. Mangeon, S. Benhamadouche, J.-F. Wald, R. Manceau*

For CHT, both  $t_0$  and  $t_1$  are non-zero, such that

$$\psi = \sqrt{\frac{\left[ \left( \frac{\partial t_0}{\partial x} \right)^2 + \overline{t_1^2} + \left( \frac{\partial t_0}{\partial z} \right)^2 \right]}{\overline{t_0^2}}} = \mathcal{O}(1). \quad (3.22)$$

The expected behavior for the turbulent heat flux is:  $\overline{u'\theta'} = \mathcal{O}(y)$  and  $\overline{v'\theta'} = \mathcal{O}(y^2)$ . In both cases, the objective is thus to impose the asymptotic behavior of  $\overline{u'\theta'}$  in  $y$  and of  $\overline{v'\theta'}$  in  $y^2$ . It is seen that  $\psi$  goes to a constant at the wall, which is however not the same constant in the two cases. It is enough in the present case to use the Taylor series expansion of  $\psi$  up to the order 1:  $\psi = \psi_0 + a'_\psi y + \mathcal{O}(y^2)$ .

For the stream-wise and span-wise components, Eqs. (3.10) and (3.11) give respectively

$$\begin{aligned} & (\nu + \kappa) B_1 + \left( 3(\nu + \kappa) C_1 + \chi_{A_1} \right) y + \mathcal{O}(y^2) = \\ & (\nu + \kappa) \psi_0 A_1 + (\nu + \kappa) \left( \psi_0 (0.5a_\tau A_1 + B_1) + a'_\psi A_1 \right) y + \mathcal{O}(y^2), \end{aligned} \quad (3.23)$$

and

$$\begin{aligned} & \left( \frac{4}{3}\nu + \frac{2}{3}\kappa \right) B_2 + \left( (4\nu + 2\kappa) C_2 + \chi_{A_2} \right) y + \mathcal{O}(y^2) = \\ & 2\nu\beta \frac{A_2}{y} + \left[ 2(\nu + \kappa) \psi_0 A_2 + 2\nu\beta \left( a_\tau A_2 + B_2 \right) \right] + \\ & \left[ 2(\nu + \kappa) \left( \psi_0 (0.5a_\tau A_2 + B_2) + a'_\psi A_2 \right) + \right. \\ & \left. 2\nu\beta \left( b_\tau A_2 + a_\tau B_2 + C_2 \right) \right] y + \mathcal{O}(y^2). \end{aligned} \quad (3.24)$$

For the component  $\overline{u'\theta'}$ , it is sufficient to consider Eq. (3.23) at order  $n = 0$ ,

$$(\nu + \kappa) B_1 = (\nu + \kappa) \psi_0 A_1. \quad (3.25)$$

Since  $\psi_0 \neq 0$ , this equation imposes a relation between  $A_1$  and  $B_1$ , but without constraining the value of  $A_1$  to be zero. Therefore, solutions  $\overline{u'\theta'}$  can have any value of  $A_1$ , such that  $\overline{u'\theta'} = \mathcal{O}(y)$ , which is the expected behavior. The analysis is valid for  $\overline{w'\theta'}$  as well, i.e.,  $A_3$  can have any value. The order 1 does not bring any useful information in this context; it gives a relation between  $A_1$ ,  $B_1$  and  $\chi_{A_1}$ .

For the wall-normal component  $\overline{v'\theta'}$ , Eq. (3.24) writes, at orders  $n = -1$  and  $n = 0$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= 2\beta\nu A_2, \\ \frac{1}{3} (4\nu + 2\kappa) B_2 &= 2(\nu + \kappa) \psi_0 A_2 + 2\nu\beta (a_\tau A_2 + B_2). \end{aligned} \quad (3.26)$$

The first equation of (3.26) gives  $A_2 = 0$  as far as  $\beta \neq 0$ . We have reached the point where we must make the right choice for  $\beta$  in order to impose  $\overline{v'\theta'} = \mathcal{O}(y^2)$ :  $\beta$  must be chosen such a way that the second line of Eq. (3.26) is satisfied for any non zero value of  $B_2$ . The equation that must be satisfied is

$$\beta = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{1}{Pr}, \quad (3.27)$$

or, more generally, as soon as  $\beta$  asymptotes to this value in the near-wall region in the case of an imposed heat flux or CHT.

This section illustrates the fact that Dehoux's model, with  $\beta = \sqrt{Pr}/\sqrt{R}$ , designed for an imposed wall temperature, is not valid for an imposed heat flux and CHT, even if a correct model for  $R$  is used, as  $\beta$  tends to 0 with this formulation. In order to extend the validity of the model, the  $\beta$  coefficient, which enters the near-wall model  $\phi_{\theta i}^w$ , must tend to 1 at the wall for an imposed temperature and to  $2/3 + 1/(3Pr)$  for other two cases. The next section is devoted to the derivation of such a model.

### 3.4. A New model for the scrambling term and a priori tests

In the present section, Dehoux's model is extended to various thermal boundary conditions, following the findings of the asymptotic analysis performed in the previous section. The model is first derived, then an *a priori* evaluation of the model using the DNS databases of Flageul *et al.* (2015) is performed.

As concluded in the previous section, the model must be able to naturally distinguish the type of the wall thermal boundary condition in order to adapt the limiting behavior of the  $\beta$  coefficient. For this purpose, a key parameter is the thermal-to-mechanical time-scale ratio  $R = \mathcal{T}_\theta/\mathcal{T}$ . Indeed, Fig. 1 and Table 3 show that  $R$  tends to the Prandtl number at the wall for an imposed temperature and to infinity in other cases. Consequently, the ratio  $\sqrt{Pr}/\sqrt{R}$  is used in the expression for  $\beta$  to sensitize the model to the type of wall thermal boundary condition. The proposed expression is

$$\beta = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{1}{Pr} + \frac{1}{3} \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R}} \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right), \quad (3.28)$$

such that  $\beta$  tends to 1 for an imposed temperature ( $R \rightarrow Pr$ ) and to  $2/3 + 1/(3Pr)$  for the two other kinds of thermal boundary conditions ( $R \rightarrow \infty$ ). In contrast, as mentioned above,  $\gamma$  in Eq. (2.15), does not need to be modified, and the expression of Dehoux *et al.* (2017),

$$\gamma = \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R}}, \quad (3.29)$$

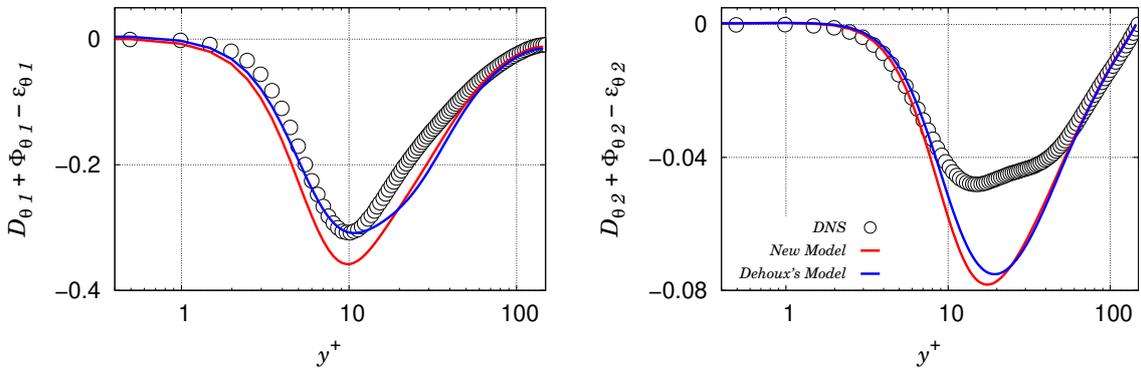
is used. With this simple but decisive modification of the model, the near-wall balance between the molecular diffusion  $D_{\theta i}^{\nu+\kappa}$ , the scrambling  $\phi_{\theta i}$  and the dissipation  $\varepsilon_{\theta i}$  terms, Eq. (3.7), is respected in the near-wall region, which is the necessary condition for reproducing the adequate asymptotic behavior of the turbulent heat flux components, as demonstrated in section 3.3.

It is worth noting again that, for this model to be valid for the three types of wall boundary conditions, it is necessary for the thermal-to-mechanical time-scale ratio  $R$  to have the right limiting behavior at the wall, which will require solving a transport equation for the temperature variance  $\overline{\theta'^2}$  and its dissipation  $\varepsilon_\theta$ , rather than using a simple algebraic relation such as Eq. (2.19). In particular, a model for  $\varepsilon_\theta$ , asymptotically correct for all types of thermal boundary conditions, is required. Therefore, a specific model has been developed, which is presented in section 4.

*A priori* tests are carried out using recent DNS data of Flageul *et al.* (2015) of a channel flow in the forced convection regime, for different boundary conditions: imposed temperature, imposed heat flux and CHT. The flow is driven by a pressure gradient in the stream-wise direction. The temperature is considered as a passive scalar and the flow is periodic in the stream-wise and span-wise directions. The test-case is defined by two non-dimensional numbers, the friction Reynolds number  $Re_\tau = \delta u_\tau/\nu = 149$  and the

	$a_0$	$b_0$	$c_0$	$a_{L_y}$	$b_{L_y}$	$c_{L_y}$
Imposed temperature	1	0	0	1	0	0
Imposed heat flux	0	-1	-1	0	1	-1
Conjugate Heat Transfer (CHT)	1	0	$(T + T_{solid})/2$	1	0	$(T + T_{solid})/2$

TABLE 5. Thermal boundary conditions.

FIGURE 6. Sum of the molecular diffusion, the scrambling and the dissipation terms for an **imposed temperature**. Left: stream-wise component; Right: wall-normal component.

Prandtl number  $Pr = 0.71$ . The fluid temperature boundary conditions for the top and bottom walls are defined in a general way as

$$a_0 T_{(y=0)} + b_0 \frac{\partial}{\partial y} T_{(y=0)} = c_0, \quad (3.30)$$

$$a_{L_y} T_{(y=L_y)} + b_{L_y} \frac{\partial}{\partial y} T_{(y=L_y)} = c_{L_y}. \quad (3.31)$$

Table 5 provides the values of the coefficients for the three different wall boundary conditions. When the solid part is resolved in the DNS computations, the continuity of the heat flux is imposed at the fluid-solid interface. Note that the CHT case considered herein is the case considered by (Flageul *et al.* 2015), where the solid and fluid have the same thermal conductivity and diffusivity. Reproducing this case is already a big challenge, and is sufficient to validate the new model for the turbulent heat flux since their asymptotic behavior is not affected by these physical properties. The additional difficulty when the thermal properties of the fluid and the solid are different consists in the appearance of a discontinuity of the temperature variance dissipation at the solid-fluid interface (Flageul *et al.* 2017). The treatment of this discontinuity is not considered herein.

One starts with the case of an imposed temperature at the wall. Figure 6 compares to DNS data the sum of the molecular diffusion, the scrambling and the dissipation terms obtained with Dehoux's model and the new model. As mentioned above, these terms are

## Extension of the elliptic blending model

19

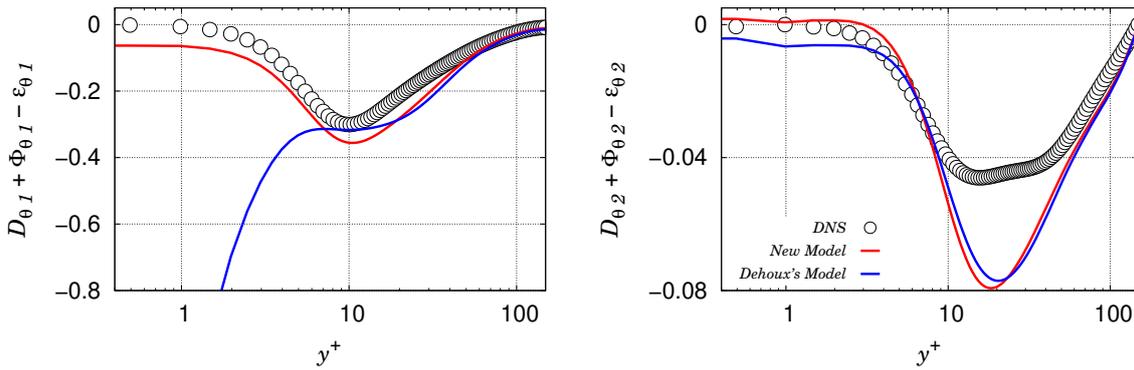


FIGURE 7. Sum of the molecular diffusion, the scrambling and the dissipation terms for an **imposed heat flux**. Left: stream-wise component; Right: wall-normal component.

dominant in the near-wall budget and determine the asymptotic behavior of the turbulent heat flux components. It can be seen that the new model correctly reproduces the balance of the three terms in the case of an imposed temperature at the wall. The results given by the new model are slightly less accurate than those given by Dehoux's model in the buffer layer, but this is not a significant problem since, in this region, the budgets of the turbulent heat flux components are dominated by the production terms, contrary to the very-near-wall balance (Flageul *et al.* 2015). The two models are asymptotically identical for this type of boundary conditions, but the coefficient  $\beta$  is modeled in a different way, since Eq. (3.28) is used for the new model.

The same comparisons are performed in Figs. 7 and 8 for the cases with an imposed heat flux and with CHT, respectively. Contrary to the previous case, a clear superiority of the new model to estimate the stream-wise component of the balance can be observed. Indeed, with Dehoux's model, this component goes to infinity in both cases. This problem is mainly due to the near-wall model for  $\varepsilon_{\theta 1}$  which goes to infinity at the wall as shown in Fig. 2 (left) for an imposed heat flux and in Fig. 3 (left) for CHT. In the new model, this term tends to a constant for both boundary conditions, which is the expected asymptotic behavior. Moreover, Figs. 4 (left) and 5 (left) show that  $\phi_{\theta 1}$  is better estimated with the new model, since it tends to zero at the wall like in the reference data.

Regarding the wall-normal component, Figs. 7 (right) and 8 (right) show a better estimate of the balance with the new model. Since Figs. 4 (right) and 5 (right) show that the two models give virtually identical results in the near-wall region for  $\phi_{\theta 2}$ , the improvement is only due to the better prediction of  $\varepsilon_{\theta 2}$  as it can be observed in Figs. 2 (right) and 3 (right), respectively. Indeed,  $\varepsilon_{\theta 2}$  tends to zero at the wall with the new model as DNS data does, whereas, with Dehoux's model, it goes to a constant. It is observed that the new model does not improve the results in the buffer layer: this is an intrinsic limitation of the elliptic blending approach which extends the validity of high-Reynolds number models, i.e., valid only far from the wall, to the near-wall region by satisfying the asymptotic behavior observed in the viscous sub-layer without imposing any constraint in the buffer layer.

To conclude, unlike Dehoux's model which is exclusively valid for an imposed temperature at the wall, the *a priori* tests confirm that the new model satisfies the asymptotic behavior of the dominant terms of the turbulent heat flux near-wall budget. It extends the validity of the standard models for the scrambling  $\phi_{\theta i}$  and the dissipation  $\varepsilon_{\theta i}$  terms (Launder 1988) to the near-wall region for the three types of wall thermal boundary conditions. However, in order to obtain such a model, the thermal-to-mechanical time-

20

G. Mangeon, S. Benhamadouche, J.-F. Wald, R. Manceau

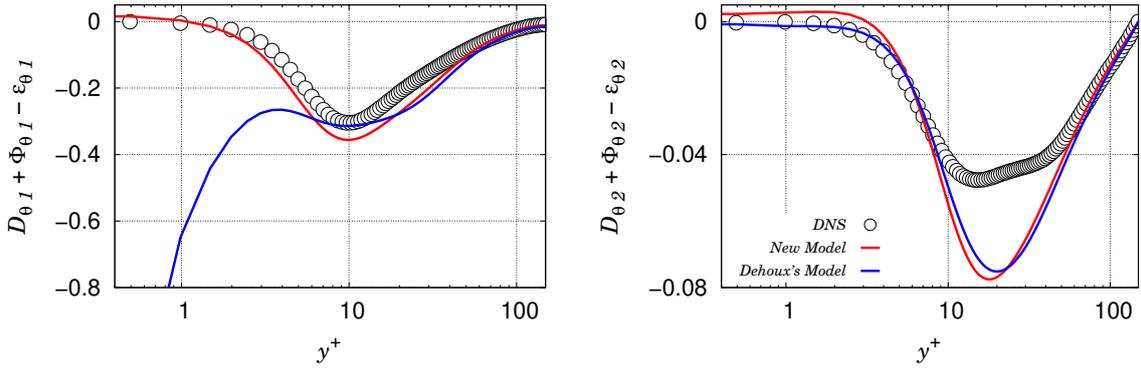


FIGURE 8. Sum of the molecular diffusion, the scrambling and the dissipation terms for **Conjugate Heat Transfer (CHT)**. Left: stream-wise component; Right: wall-normal component.

scale ratio  $R$  must have the correct asymptotic behavior whatever the temperature boundary condition. Modeling the dissipation rate of the temperature variance  $\varepsilon_\theta$  is then needed. The computation of  $\varepsilon_\theta$  will also make it possible to better predict the temperature variance, without the need for an algebraic formulation of  $R$ .

#### 4. Modeling of the dissipation rate of the temperature variance

The dissipation rate  $\varepsilon_\theta$  is a key element in order to compute the temperature variance  $\overline{\theta'^2}$  and significant modeling challenges have to be tackled as its asymptotic behavior strongly depends on the temperature boundary condition. In particular, predicting  $\overline{\theta'^2}$  and  $\varepsilon_\theta$  is crucial to obtain an accurate thermal time scale and as a consequence an accurate thermal-to-mechanical time-scale ratio  $R$ , which is essential in the differential flux model presented above; see Eqs. (2.15), (2.14) and (3.28). The transport equation for the temperature variance writes

$$\frac{D\overline{\theta'^2}}{Dt} = 2P_\theta - 2\varepsilon_\theta + D_\theta^\kappa + D_\theta^t, \quad (4.1)$$

where  $P_\theta = \overline{u'_j \theta' \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j}}$  is the production by the mean temperature gradient and  $D_\theta^\kappa = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_j} \right)$  is the molecular diffusion.

Since a transport equation will be solved for  $\varepsilon_\theta$ , only the turbulent diffusion in Eq. (4.1) requires modeling. A Daly-Harlow model is applied

$$D_\theta^t = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( C_{\theta^2} \tau \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_j} \right), \quad (4.2)$$

where  $\tau$  is Durbin's time-scale. The full set of equations and coefficients are available in Appendix C.

The exact transport equation for the dissipation rate of the temperature variance  $\varepsilon_\theta = \kappa \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}$  reads

$$\frac{D\varepsilon_\theta}{Dt} = P_{\varepsilon_\theta}^1 + P_{\varepsilon_\theta}^2 + P_{\varepsilon_\theta}^3 + P_{\varepsilon_\theta}^4 + D_{\varepsilon_\theta}^t + D_{\varepsilon_\theta}^\kappa - Y_{\varepsilon_\theta}, \quad (4.3)$$

## Extension of the elliptic blending model

21

	$P_{\varepsilon_\theta}^1$	$P_{\varepsilon_\theta}^2$	$P_{\varepsilon_\theta}^3$	$P_{\varepsilon_\theta}^4$	$D_{\varepsilon_\theta}^t$	$D_{\varepsilon_\theta}^\kappa$	$Y_{\varepsilon_\theta}$
Imposed temperature	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$
Imposed heat flux	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$
Conjugate Heat Transfer (CHT)	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$

TABLE 6. Asymptotic behavior of the source terms appearing in the exact transport equation for  $\varepsilon_\theta$ .

where  $P_{\varepsilon_\theta}^1$ ,  $P_{\varepsilon_\theta}^2$ ,  $P_{\varepsilon_\theta}^3$  and  $P_{\varepsilon_\theta}^4$  denote the production terms by the mean temperature gradient, the mean velocity gradient, the temperature Hessian and by turbulent interactions, respectively;  $D_{\varepsilon_\theta}^t$  and  $D_{\varepsilon_\theta}^\kappa$  are the turbulent and the molecular diffusion terms, and  $Y_{\varepsilon_\theta}$  is the dissipation rate of  $\varepsilon_\theta$ . The asymptotic behavior of these terms depends on the temperature boundary conditions as shown in Table 6. As a consequence, the asymptotic behavior of  $\varepsilon_\theta$ , and, in turn,  $\overline{\theta'^2}$ , also strongly depends on the temperature boundary condition as illustrated by Figure 9. Table 6 shows that  $P_{\varepsilon_\theta}^1$ ,  $P_{\varepsilon_\theta}^2$ ,  $P_{\varepsilon_\theta}^4$  and  $Y_{\varepsilon_\theta}$  deserve a careful attention in the near-wall region, since they are dominant in the budget, at least for the CHT case. For the two extreme cases, an imposed temperature and an imposed heat flux, only  $Y_{\varepsilon_\theta}$  balances the molecular diffusion at the leading order. Note that the molecular diffusion  $D_{\varepsilon_\theta}^\kappa$  naturally does not need modeling.

New models are thus derived in the following for the four terms  $P_{\varepsilon_\theta}^1$ ,  $P_{\varepsilon_\theta}^2$ ,  $P_{\varepsilon_\theta}^4$  and  $Y_{\varepsilon_\theta}$ . The models found in the literature for the remaining terms  $P_{\varepsilon_\theta}^3$  and  $D_{\varepsilon_\theta}^t$  are satisfactory, such that they are used without modification. The production by temperature Hessian is modeled following Nagano (2002),

$$P_{\varepsilon_\theta}^3 = \kappa \left( C_{P4} \overline{u'_j u'_k} \mathcal{T} f_R \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_l \partial x_j} + C_{P3} \mathcal{T} f_R \frac{\partial \overline{u'_j u'_l}}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_l} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j \partial x_k} \right), \quad (4.4)$$

where  $f_R = 2R/(0.5 + R)$ . The turbulent diffusion term is modeled following Jones & Musonge (1988)

$$D_{\varepsilon_\theta}^t = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{\varepsilon_\theta} \overline{u'_j u'_k} \mathcal{T} \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x_k} \right). \quad (4.5)$$

#### 4.1. Production by the mean temperature gradient $P_{\varepsilon_\theta}^1$

The production term by the mean temperature gradient reads

$$P_{\varepsilon_\theta}^1 = -2\kappa \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}. \quad (4.6)$$

Modeling this term is straightforward since it is directly related to the dissipation tensor involved in the turbulent heat flux transport equation,  $\varepsilon_{\theta j} = (\nu + \kappa) \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}$ . Therefore,

22

G. Mangeon, S. Benhamadouche, J.-F. Wald, R. Manceau

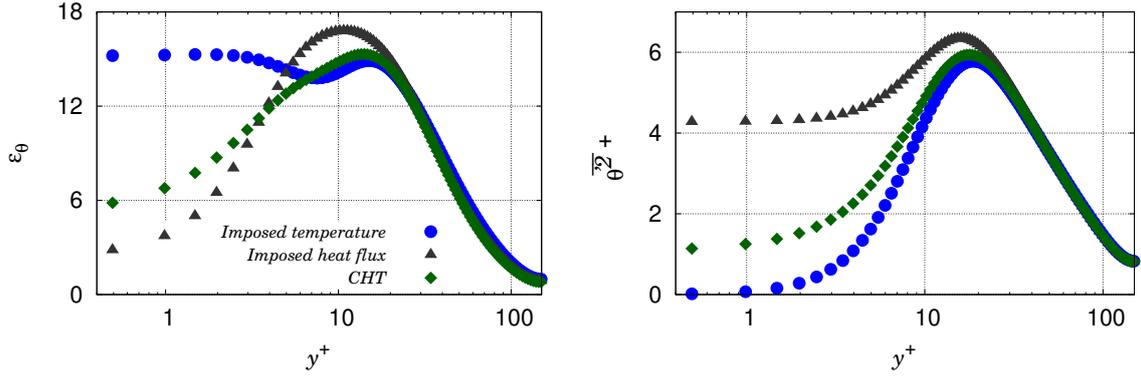


FIGURE 9. The dissipation rate  $\varepsilon_\theta$  (left) of the temperature variance  $\overline{\theta'^2}$  (right) from DNS Data of Flageul *et al.* (2015, 2017) for different kinds of temperature boundary conditions.

it is simply modeled as

$$P_{\varepsilon_\theta}^1 = -\frac{2}{1 + Pr} \varepsilon_{\theta j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j}, \quad (4.7)$$

where the model  $\varepsilon_{\theta j} = (1 - \alpha_\theta) \varepsilon_{\theta j}^w$  is presented in section 2, through Eq. (2.15).

The left parts of Figs. 10, 11 and 12 show the *a priori* estimate of  $P_{\varepsilon_\theta}^1$  using Eq. (4.6) for an imposed wall temperature, an imposed wall heat flux and CHT, respectively. The DNS asymptotic behavior is recovered for all thermal boundary conditions. One can observe a relatively weak prediction in the buffer layer which is due to an overestimated dissipation rate  $\varepsilon_{\theta 2}$  in this region.

#### 4.2. Production by the mean velocity gradient $P_{\varepsilon_\theta}^2$

The production term by the mean velocity gradient reads

$$P_{\varepsilon_\theta}^2 = -2\kappa \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \quad (4.8)$$

The tensor  $\varepsilon_{ij}^\theta = 2\kappa \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}$  is involved, which is very similar to the dissipation tensor  $\varepsilon_{ij}$  in the Reynolds-stress tensor equation, and, in particular, is due to the smallest scales of the turbulent thermal field. Therefore, the same modeling strategy as for  $\varepsilon_{ij}$  is adopted: it is assumed that  $\varepsilon_{ij}^\theta$  is isotropic far from the wall and exhibits the same anisotropy as the Reynolds-stress tensor in the near-wall region, such that it is formulated as

$$\varepsilon_{ij}^\theta = (1 - \alpha_\theta) \varepsilon_{ij}^{\theta w} + \alpha_\theta \varepsilon_{ij}^{\theta h}, \quad (4.9)$$

where

$$\varepsilon_{ij}^{\theta h} = \frac{2}{3} \varepsilon_\theta \delta_{ij} \quad \text{and} \quad \varepsilon_{ij}^{\theta w} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} \varepsilon_\theta. \quad (4.10)$$

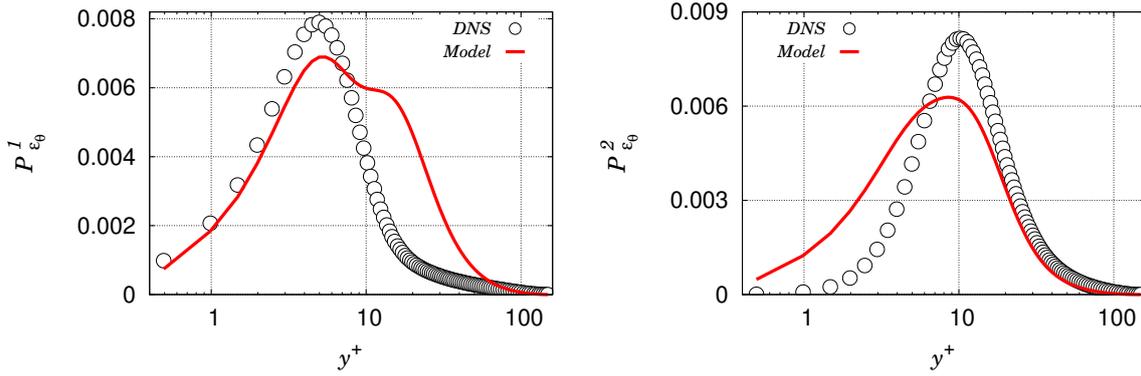
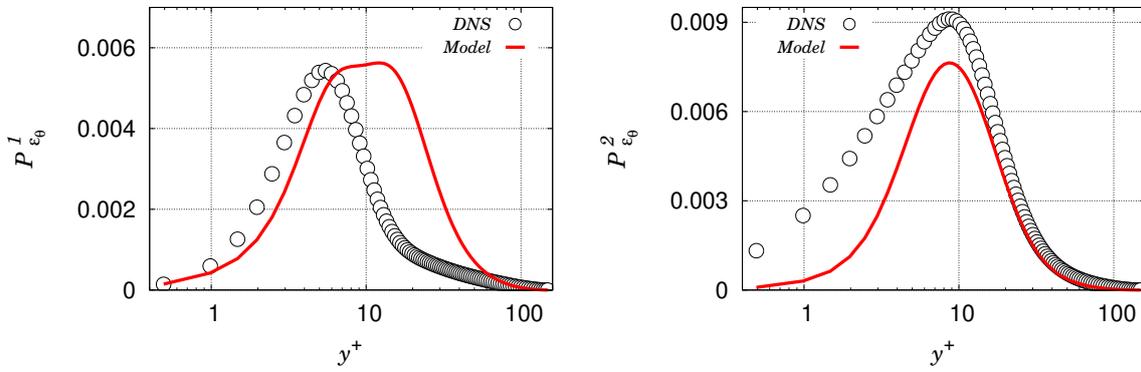
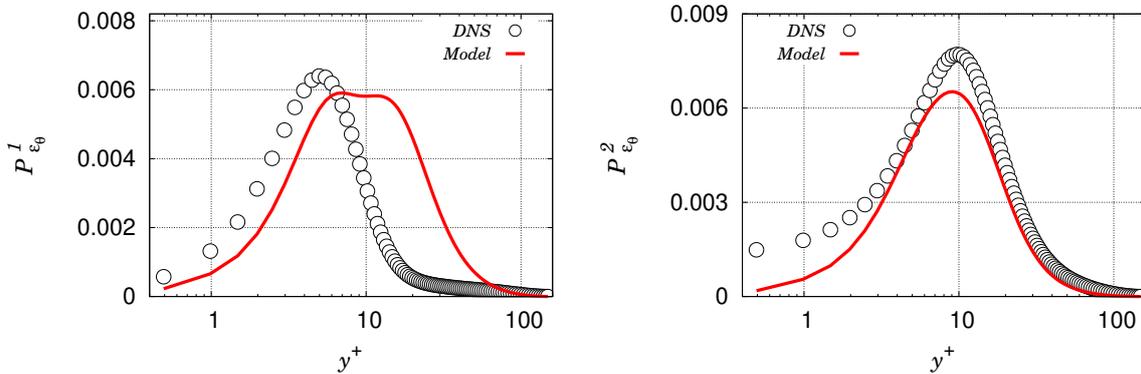
Hence, the production by the mean velocity gradient is modeled as

$$P_{\varepsilon_\theta}^2 = -c_{\varepsilon_\theta 1} \varepsilon_{jk}^\theta \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}. \quad (4.11)$$

The right parts of Figs. 10, 11 and 12 illustrate the *a priori* estimates of  $P_{\varepsilon_\theta}^2$  for an imposed wall temperature, an imposed heat flux and CHT, respectively. The predictions are satisfactory far from the wall. The modeled production  $P_{\varepsilon_\theta}^2$  goes to zero at the wall for all the thermal boundary conditions which is not the case according to DNS data

## Extension of the elliptic blending model

23

FIGURE 10. *A priori* tests:  $P_{\epsilon_\theta}^1$  (left) and  $P_{\epsilon_\theta}^2$  (right) for an **imposed wall temperature**.FIGURE 11. *A priori* tests:  $P_{\epsilon_\theta}^1$  (left) and  $P_{\epsilon_\theta}^2$  (right) for an **imposed heat flux**.FIGURE 12. *A priori* tests:  $P_{\epsilon_\theta}^1$  (left) and  $P_{\epsilon_\theta}^2$  (right) for **Conjugate Heat Transfer (CHT)**.

in the case of CHT. However, in the latter case, the production by the mean velocity gradient tends towards a small non-zero value at the wall.

4.3. Difference between the turbulent production and the dissipation  $P_{\epsilon_\theta}^4 - Y_{\epsilon_\theta}$ 

The difference between the turbulent production,  $P_{\epsilon_\theta}^4$ , and the dissipation rate of  $\epsilon_\theta$ ,  $Y_{\epsilon_\theta}$ , reads

$$P_{\epsilon_\theta}^4 - Y_{\epsilon_\theta} = -2\kappa \frac{\overline{\partial\theta' \partial\theta' \partial u_j'}}{\partial x_j \partial x_k \partial x_k} - 2\kappa^2 \frac{\overline{\partial^2\theta' \partial^2\theta'}}{\partial x_j \partial x_k \partial x_j \partial x_k}. \quad (4.12)$$

24

G. Mangeon, S. Benhamadouche, J.-F. Wald, R. Manceau

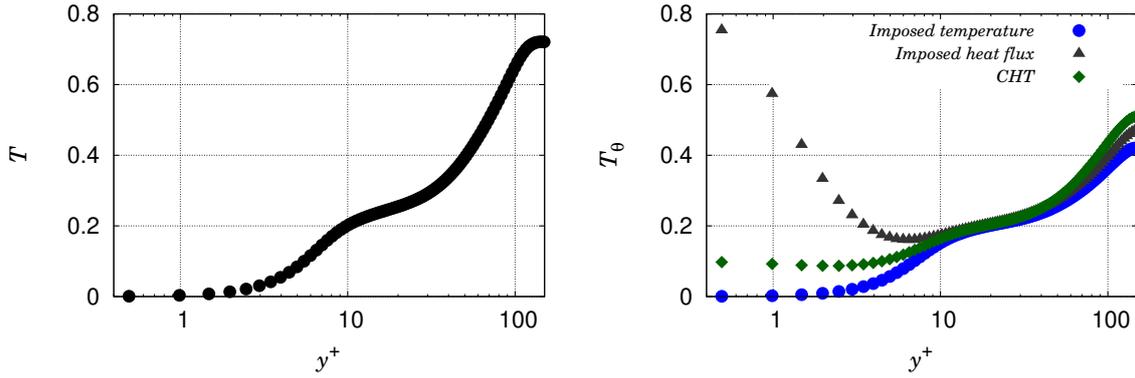


FIGURE 13. The dynamic time scale ratio  $\mathcal{T}$  (left) and the thermal time-scale ratio  $\mathcal{T}_\theta$  (right) from DNS Data of Flageul *et al.* (2015, 2017) for different kinds of temperature boundary conditions.

Newman *et al.* (1981) showed that these two terms are dominant. In particular, for homogeneous turbulence without mean velocity and temperature gradients, these two terms are the only non-zero terms and drive the time evolution of the fluctuating thermal field. Since there is no theoretical case in which these two terms can be distinguished, Jones & Musonge (1988) modeled these two terms as a whole

$$P_{\varepsilon_\theta}^4 - Y_{\varepsilon_\theta} = c_{\varepsilon_\theta}^{h1} \frac{\varepsilon_\theta}{k} P_k + c_{\varepsilon_\theta}^{h2} \frac{\varepsilon}{k} P_\theta - c_{\varepsilon_\theta 3} \frac{\varepsilon_\theta}{\mathcal{T}} - c_{\varepsilon_\theta 4} \frac{\varepsilon_\theta}{\mathcal{T}}. \quad (4.13)$$

This model does not satisfy the theoretical asymptotic behavior of  $P_{\varepsilon_\theta}^4 - Y_{\varepsilon_\theta}$  in the near-wall region which is constant (not detailed in the present article). Indeed,  $\varepsilon_\theta$  goes to a non-zero value at the wall for all the thermal boundary conditions as shown in Fig. 9 (left). Fig. 13 (left) indicates that the mechanical time-scale  $\mathcal{T} = k/\varepsilon$  goes to zero regardless of the thermal boundary conditions as it strictly depends only on the dynamic field. In contrast, Fig. 13 (right) shows that the thermal time scale  $\mathcal{T}_\theta = \overline{\theta'^2}/2\varepsilon_\theta$  goes to zero for an imposed wall temperature and to a non-zero value for an imposed heat flux or in the case of CHT. As a consequence,  $\varepsilon_\theta/\mathcal{T}$  always goes to infinity at the wall whereas  $\varepsilon_\theta/\mathcal{T}_\theta$  goes to infinity in the case of an imposed temperature and to a constant value otherwise. In all the cases, the model given by Eq. (4.13) goes to infinity at the wall whereas it should go to a constant value.

In order to extend the validity of the model of Jones & Musonge (1988) down to the wall, the elliptic bending approach for the turbulent heat flux proposed by Dehoux *et al.* (2017) is used

$$P_{\varepsilon_\theta}^4 - Y_{\varepsilon_\theta} = (1 - \alpha_\theta) (P_{\varepsilon_\theta}^w - Y_{\varepsilon_\theta}^w) + \alpha_\theta (P_{\varepsilon_\theta}^h - Y_{\varepsilon_\theta}^h). \quad (4.14)$$

The quasi-homogeneous production  $P_{\varepsilon_\theta}^h$  is the model of Jones & Musonge (1988) given by Eq. (4.13)

$$P_{\varepsilon_\theta}^h = c_{\varepsilon_\theta}^{h1} \frac{\varepsilon_\theta}{k} P_k + c_{\varepsilon_\theta}^{h2} \frac{\varepsilon}{k} P_\theta. \quad (4.15)$$

As the exact dissipation term in Eq. (4.12) only involves thermal fluctuations,  $Y_{\varepsilon_\theta}^h$  should not depend on the dynamic time-scale. Thus, contrary to the dissipation model proposed by Jones & Musonge (1988), our model for  $Y_{\varepsilon_\theta}^h$  only involves the thermal time-scale

$$Y_{\varepsilon_\theta}^h = c_H \frac{\varepsilon_\theta}{\mathcal{T}_\theta}. \quad (4.16)$$

Since  $1/\mathcal{T}_\theta$  goes to infinity at the wall for an imposed wall temperature,  $\mathcal{T}_\theta$  is bounded

## Extension of the elliptic blending model

25

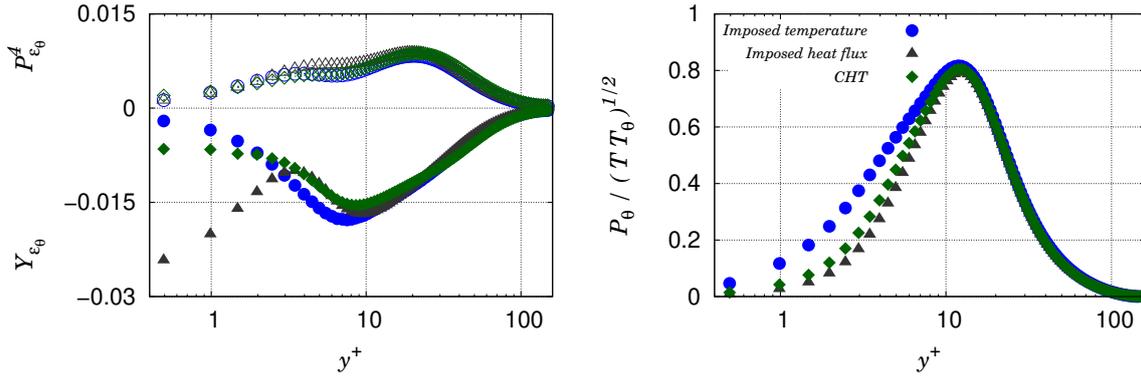


FIGURE 14. The turbulent production  $P_{\epsilon_\theta}^4$  and the dissipation rate  $Y_{\epsilon_\theta}$  (left) and the thermal production  $P_\theta$  divided by the mixed time-scale  $\sqrt{\mathcal{T}\mathcal{T}_\theta}$  from the DNS Data of Flageul *et al.* (2015, 2017) for different kinds of temperature boundary conditions.

by the Kolmogorov time scale in a way similar to the case of the mechanical time-scale in Eq. (2.7),

$$\tau_\theta = \max \left( \mathcal{T}_\theta, C_{T_\theta} \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} \frac{1}{Pr} \right). \quad (4.17)$$

Regarding the near-wall models  $P_{\epsilon_\theta}^w$  and  $Y_{\epsilon_\theta}^w$ , they have to reproduce the asymptotic behavior of  $P_{\epsilon_\theta}^4$  and  $Y_{\epsilon_\theta}$  at the wall. The DNS data from Flageul *et al.* (2015, 2017) show that the asymptotic behavior of  $P_{\epsilon_\theta}^4$  is virtually unaffected by the thermal boundary condition, as shown in Fig. 14 (left). The near-wall part  $P_{\epsilon_\theta}^w$  is modeled using the ratio of the thermal production  $P_\theta$  and the mixed time-scale  $\sqrt{\mathcal{T}\mathcal{T}_\theta}$ , which is barely affected by the thermal boundary condition, Fig. 14 (right):

$$P_{\epsilon_\theta}^w = c_{\epsilon_\theta}^{w1} \left[ 1 - c_{\epsilon_\theta}^{w2} (1 - \alpha_\theta) \frac{P_k}{\varepsilon} \right] \frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta} \frac{\varepsilon_\theta}{\sqrt{\mathcal{T}\mathcal{T}_\theta}}. \quad (4.18)$$

The term in square brackets is introduced to improve the predictions in the buffer layer, in a way similar to Eqs. (2.14) and (2.15) in Dehoux's model. Tab. 7 gives the asymptotic behavior of  $P_\theta$ ,  $\sqrt{\mathcal{T}\mathcal{T}_\theta}$  and  $P_{\epsilon_\theta}^4$  for the different thermal boundary conditions. The right asymptotic behavior is obtained for  $P_{\epsilon_\theta}^w$  and, consequently, for  $P_{\epsilon_\theta}^4$ , in the cases of an imposed temperature and CHT. For an imposed heat flux,  $P_{\epsilon_\theta}^w$  goes to a non-zero value at the wall while  $P_{\epsilon_\theta}^4$  tends to zero, as shown in Tab. 6. However, the *a priori* tests shown in Fig. 15 (right) indicate that the limiting value is very small and the model gives satisfactory results when compared to the DNS. As a consequence, the model  $P_{\epsilon_\theta}^w$  given by Eq. (4.18) is also used in the case of an imposed heat flux. Finally, the *a priori* tests show that the present model for  $P_{\epsilon_\theta}^4$  correctly reproduces the near-wall and the far-from-the-wall regions for all the thermal boundary conditions, as illustrated by Figs. 15 and 16.

With regard to  $Y_{\epsilon_\theta}$ , its asymptotic behavior strongly depends on the thermal boundary condition at the wall, as seen in Fig. 14. Indeed,  $Y_{\epsilon_\theta}$  tends to radically different non-zero values at the wall: for an imposed temperature, the value is very small; for an imposed heat flux,  $Y_{\epsilon_\theta}^w$  reaches its maximum at the wall and exhibits a secondary peak in the buffer layer; for CHT, an intermediate value is reached. Reproducing this particular behavior is crucial, since  $Y_{\epsilon_\theta}$  is dominant in the budget of  $\varepsilon_\theta$ , and is very challenging.

To this end, two key parameters are used to sensitize the model to the thermal

26

G. Mangeon, S. Benhamadouche, J.-F. Wald, R. Manceau

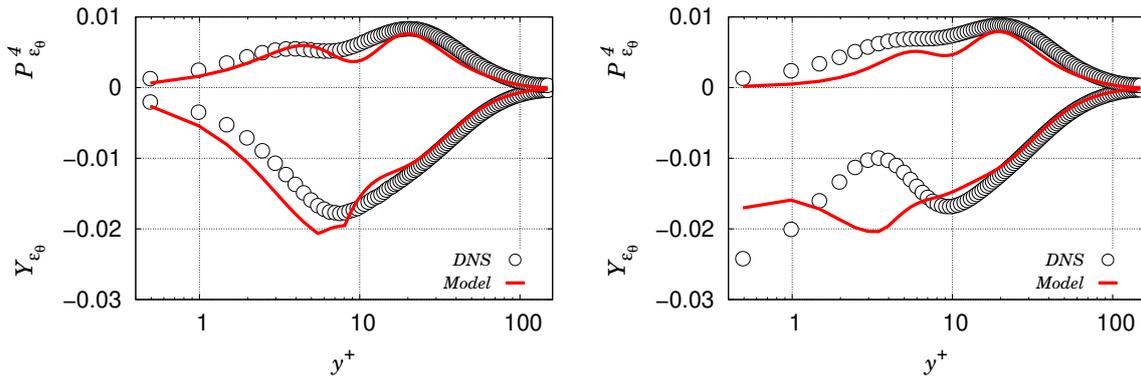


FIGURE 15. *A priori* tests:  $P_{\varepsilon_\theta}^4$  and  $Y_{\varepsilon_\theta}$  for an **imposed temperature** at the wall (left) and for an **imposed heat flux** (right).

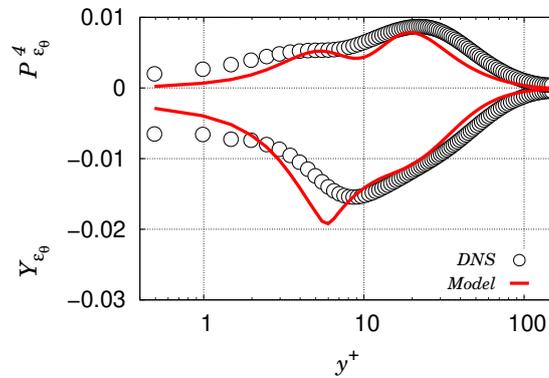


FIGURE 16. *A priori* tests:  $P_{\varepsilon_\theta}^4$  and  $Y_{\varepsilon_\theta}$  for **Conjugate Heat Transfer (CHT)**.

	$P_\theta$	$\sqrt{TT_\theta}$	$P_{\varepsilon_\theta}^w$
Imposed temperature	$\mathcal{O}(y^3)$	$\mathcal{O}(y^2)$	$\mathcal{O}(y)$
Imposed heat flux	$a_1 t_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} y + \mathcal{O}(y^2)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(1)$
Conjugate Heat Transfer (CHT)	$a_1 t_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} y + \mathcal{O}(y^2)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(1)$

TABLE 7. Asymptotic behavior of the thermal production  $P_\theta$ , the mixed time-scale  $\sqrt{TT_\theta}$  and the near-wall model  $P_{\varepsilon_\theta}^w$  for all types of temperature boundary conditions.

## Extension of the elliptic blending model

27

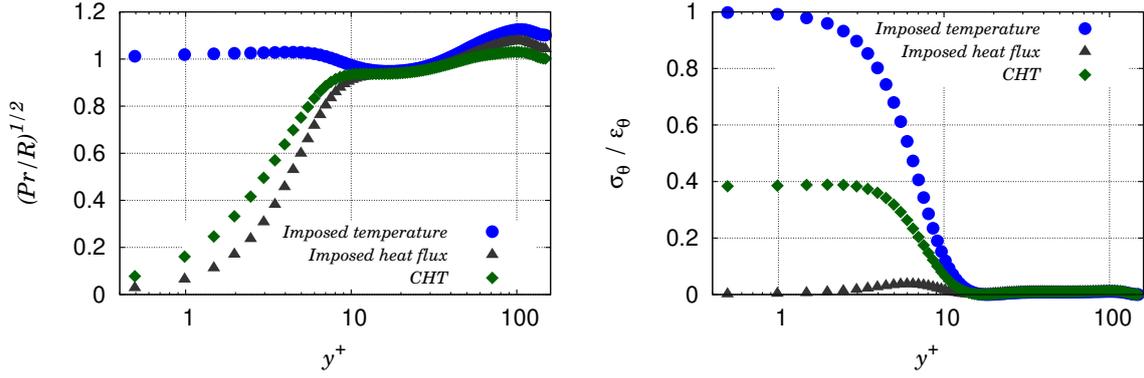


FIGURE 17. The two parameters  $\sqrt{Pr/R}$  (left) and  $\sigma_\theta/\epsilon_\theta$  used to distinguish between the different kinds of temperature boundary condition, from DNS Data of Flageul *et al.* (2015, 2017).

boundary condition,

$$\sqrt{\frac{Pr}{R}} \quad \text{with} \quad R = \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}_\theta}, \quad (4.19)$$

and

$$\frac{\sigma_\theta}{\epsilon_\theta} \quad \text{with} \quad \sigma_\theta = \kappa \left( \frac{\partial \sqrt{\theta'^2}}{\partial y} \right)^2. \quad (4.20)$$

The first parameter  $\sqrt{Pr}/\sqrt{R}$ , which was already introduced in the near-wall models  $\phi_{\theta_i}^w$  and  $\varepsilon_{\theta_i}^w$  presented in section 3, distinguishes an imposed wall temperature from the other two cases, as illustrated by Fig. 17 (left). However, in order to reproduce the particular behaviour of  $Y_{\varepsilon_\theta}$  described above, a distinction must be made between the case of an imposed heat flux case and the case of CHT, hence the introduction of the second parameter  $\sigma_\theta/\epsilon_\theta$ . This parameter, proposed by Yang *et al.* (2019), indeed goes to very different values at the wall in the three cases, as shown in Fig. 17 (right).

Combining these two key parameters, the following expression for the near-wall model  $Y_{\varepsilon_\theta}^w$  is proposed

$$Y_{\varepsilon_\theta}^w = \left[ \left( 1 - \sqrt{\frac{Pr}{R}} \right) \left( 1 - c_w (1 - \alpha_\theta) \frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta} \right) \left( c_N - \frac{\sigma_\theta}{\varepsilon_\theta} c_C \right) + c_D \sqrt{\frac{Pr}{R}} \right] \frac{\varepsilon_\theta}{\sqrt{\tau_{\varepsilon_\theta} \tau_\theta}} \sqrt{\frac{\mathcal{T}_\theta}{\tau_\theta}}. \quad (4.21)$$

where

$$\tau_{\varepsilon_\theta} = \max \left( \mathcal{T}, C_{\mathcal{T}} \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} \right) \quad (4.22)$$

is similar to Durbin's mechanical time scale (2.7), but with the variable coefficient

$$C_{\mathcal{T}} = \left( 1 - \sqrt{\frac{Pr}{R}} \right) \left( c_{T_N} + \frac{\sigma_\theta}{\varepsilon_\theta} c_{T_C} \right) + c_{T_D} \sqrt{\frac{Pr}{R}}. \quad (4.23)$$

As illustrated by Fig. 18, the purpose of this expression for  $C_{\mathcal{T}}$  is to impose different

	Imposed temperature	Imposed heat flux	Conjugate Heat Transfer (CHT)
Modeled $Y_{\varepsilon_\theta}^w$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$
Exact $Y_{\varepsilon_\theta}$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$

TABLE 8. Asymptotic behavior of the near-wall model for  $Y_{\varepsilon_\theta}^w$  and the exact  $Y_{\varepsilon_\theta}$  for different kinds of thermal boundary conditions.

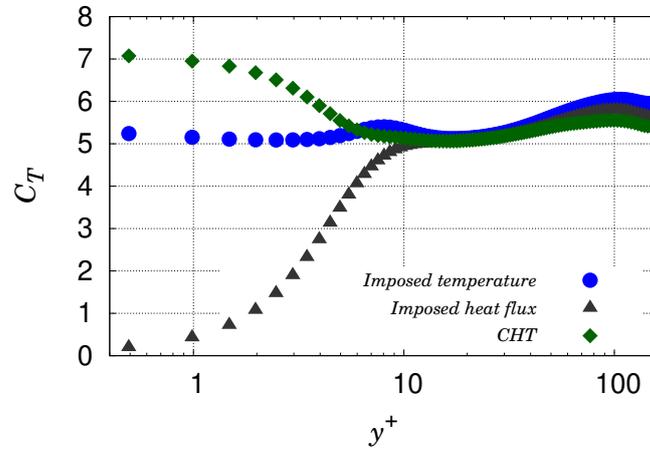


FIGURE 18.  $C_T$  coefficient profile for different temperature boundary conditions from DNS Data of Flageul *et al.* (2015, 2017).

values of the coefficient for the different thermal boundary conditions, and the constants  $c_{TD}$ ,  $c_{TN}$ , and  $c_{TC}$ , where  $D$ ,  $N$  and  $C$  stand for *Dirichlet*, *Neuman* and *Conjugate*, respectively, are calibrated in order to reproduce at best the behavior of  $Y_{\varepsilon_\theta}$  in the near-wall region. Indeed, since  $\mathcal{T}$  goes to zero at the wall regardless of the thermal boundary condition, the wall-limiting value of  $\tau_{\varepsilon_\theta}$  is given by the second term in Eq. (4.22), and modifying the coefficient  $C_T$  makes it possible to adjust the near-wall behavior of  $Y_{\varepsilon_\theta}^w$ . The particular values reached at the wall by the two parameters  $\sqrt{Pr/R}$  and  $\sigma_\theta/\varepsilon_\theta$  are such that the coefficients  $c_{TD}$ ,  $c_{TN}$ , and  $c_{TC}$  are active for an imposed temperature, an imposed heat flux and CHT, respectively.

At the wall,  $\tau_{\varepsilon_\theta}$ ,  $\tau_\theta$  and  $\varepsilon_\theta$  always tend to non-zero values. Therefore, the asymptotic behavior of  $Y_{\varepsilon_\theta}^w$  is driven by  $\sqrt{\mathcal{T}_\theta}$ . As a consequence, the modeled  $Y_{\varepsilon_\theta}^w$  correctly goes to a non-zero value at the wall for an imposed heat flux and CHT, but not for an imposed temperature, as summarized in Tab. 8. However, since Fig. 14 (left) shows that, for an imposed temperature, the exact  $Y_{\varepsilon_\theta}$  goes to a very small non-zero value, the fact that the modeled  $Y_{\varepsilon_\theta}^w$  tends to zero is considered acceptable.

*A priori* tests are shown in Figs. 15 and 16. These tests confirm that, in the case of an imposed temperature, although the wall asymptotic behavior in  $\mathcal{O}(1)$  is not reproduced by the model, the profile of  $Y_{\varepsilon_\theta}$  is correctly predicted. In the two other cases, the values at the wall are underestimated, but it is to be noted that the coefficient  $C_T$  is calibrated

based on the full computations shown in the next section, not on the *a priori* tests. One can observe slope discontinuities for the modeled  $Y_{\varepsilon_\theta}$  that are due to the max functions used in the time-scales  $\tau_\theta$  and  $\tau_{\varepsilon_\theta}$ . Far from the wall, the model tends to the quasi-homogeneous model (4.16), which is close to the DNS data for all the thermal boundary conditions.

The full set of equations and coefficients is available in Appendix D.

## 5. Model validation based on full computations

Full computations are carried out with EDF in-house open-source CFD solver *Code\_Saturne*†, which is a co-located finite volume code that accepts all kinds of meshes. It is based on a predictor/corrector method with the Rhie and Chow interpolation and a SIMPLEC algorithm for the pressure correction step. Details about the finite volume discretization scheme can be found in Archambeau *et al.* (2004).

### 5.1. Governing equations

The channel flow configurations in the forced convection regime of Flageul *et al.* (2015) are used for validation. The friction Reynolds number  $Re_\tau = \frac{\rho u_\tau \delta}{\mu}$  and the Prandtl number  $Pr$  are equal to 149 and 0.71, respectively. In the following, the variables are made non-dimensional using the fluid density  $\rho$ , the friction velocity  $u_\tau$ , the channel half-width  $\delta$  and the friction temperature  $T_\tau = q_w / \rho C_p u_\tau$ .  $q_w$  is the wall heat flux. The non-dimensional kinematic viscosity and thermal diffusivity are then equal to  $\frac{1}{Re_\tau}$  and  $\frac{1}{Re_\tau Pr}$ , respectively.

The non-dimensional conservation equations then read (Kasagi *et al.* 1992)

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} - \delta_{i1}, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} = \frac{1}{Re_\tau Pr} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \overline{u'_j \theta'}}{\partial x_j} + \frac{\bar{u}_1}{u_b}, \quad (5.3)$$

where  $\delta_{ij}$  is the Kronecker symbol and  $u_b$  the bulk velocity. The bulk velocity is evaluated during the computation.

In order to impose periodicity in the stream-wise direction, the mean pressure and the mean temperature are decomposed into a periodic part and a linearly variable part. As a consequence, the imposed pressure gradient  $\delta_{11} = 1$  appears in the stream-wise momentum equation, as well as the source term  $\frac{\bar{u}_1}{u_b}$  in the mean temperature equation.

Periodic boundary conditions are imposed in the stream-wise ( $x$ ) direction and symmetries in the span-wise ( $z$ ) direction and at the central plane ( $y = \delta$ ), for all the variables. At the wall ( $y = 0$ ), standard no-slip boundary conditions are imposed for the velocity and the turbulent variables: the Reynolds stresses, the turbulent dissipation and the turbulent heat flux.

Three types of thermal wall boundary conditions are imposed: (i) an imposed wall

† [www.code-saturne.org](http://www.code-saturne.org)

30

*G. Mangeon, S. Benhamadouche, J.-F. Wald, R. Manceau*

temperature with  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\overline{\theta'^2} = 0$  and  $\varepsilon_\theta = \lim_{y \rightarrow 0} (\kappa \overline{\theta'^2} / y^2)$ ; (ii) an imposed heat flux, which reads  $\partial \bar{\theta} / \partial y = -Pr Re_\tau$ ,  $\frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial y} = 0$  and  $\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial y} = 0$ ; (iii) CHT for which a solid part having a thickness equal to the channel half-width is added, and the boundary condition heat flux  $\partial \bar{\theta} / \partial y = -Pr Re_\tau$ , is imposed at the outer boundary of the solid part.

In this latter case, the solid has the same properties as the fluid; all the thermal variables which make sense in the solid are thus continuous at the fluid/solid interface: the temperature, its variance and the dissipation of the variance. The resolved equations in the solid part read

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa_s \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \right), \quad (5.4)$$

$$\frac{D \overline{\theta'^2}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa_s \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_j} \right) - 2\varepsilon_\theta, \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa_s \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x_j} \right) - c_{\varepsilon_{\theta_s}} \frac{\varepsilon_\theta}{T_\theta}, \quad (5.6)$$

where  $\kappa_s = \frac{1}{Re_\tau Pr}$  stands for the non-dimensional thermal diffusivity of the solid.  $\varepsilon_\theta = \frac{\overline{\partial \theta' / \partial x_k} \partial \theta' / \partial x_k}{\kappa_s}$  is the dissipation of the variance. Its equation is easily obtained and the dissipation term is modeled, mimicking the homogeneous model in the fluid, using  $c_{\varepsilon_{\theta_s}} \frac{\varepsilon_\theta}{T_\theta}$ . The constant  $c_{\varepsilon_{\theta_s}}$  has been estimated *a priori* using the DNS data from Flageul *et al.* (2015) and is taken equal to 3.

The results are plotted in wall units, i.e., units based on the friction velocity  $u_\tau$ , the friction temperature  $T_\tau = q_w / \rho C_p u_\tau$ , the density  $\rho$  and the molecular viscosity  $\nu$ .

### 5.2. The temperature variance $\overline{\theta'^2}$ and its dissipation rate $\varepsilon_\theta$

Figs. 19, 20 and 21 compare the temperature variance (left) and its dissipation rate (right) obtained with the new model to the DNS data from Flageul *et al.* (2015) and to the results obtained with the model of Dehoux *et al.* (2017). The prediction of these two quantities are clearly improved with the new model even in the case of an imposed temperature, for which Dehoux's model is asymptotically correct. Dehoux's model is virtually insensitive to the thermal boundary condition, as  $\varepsilon_\theta$  always goes to the same large value at the wall, such that the temperature variance tends to zero in all the cases. In addition to sensitizing the model to the thermal boundary condition, a favorable side effect of solving the  $\varepsilon_\theta$ -equation is a significant improvement of the predictions of  $\varepsilon_\theta$  and  $\overline{\theta'^2}$  far from the wall.

Figs. 22, 23 and 24 compare the budgets of  $\overline{\theta'^2}$  and  $\varepsilon_\theta$  with the DNS data of Flageul *et al.* (2015) for an imposed temperature, an imposed heat flux and a CHT condition, respectively. Although the prediction of the different terms of the budget of  $\varepsilon_\theta$  is not perfect, these figures globally suggest that the satisfactory prediction of  $\overline{\theta'^2}$  and  $\varepsilon_\theta$  shown above is due to a correct reproduction of all the physical mechanisms playing a role in the dynamics of these variables. The left parts of these figures show an excellent prediction of the budget of the temperature variance for all the thermal boundary conditions, which is due to the good prediction of  $\varepsilon_\theta$  using the new modelled equation, but also to the good

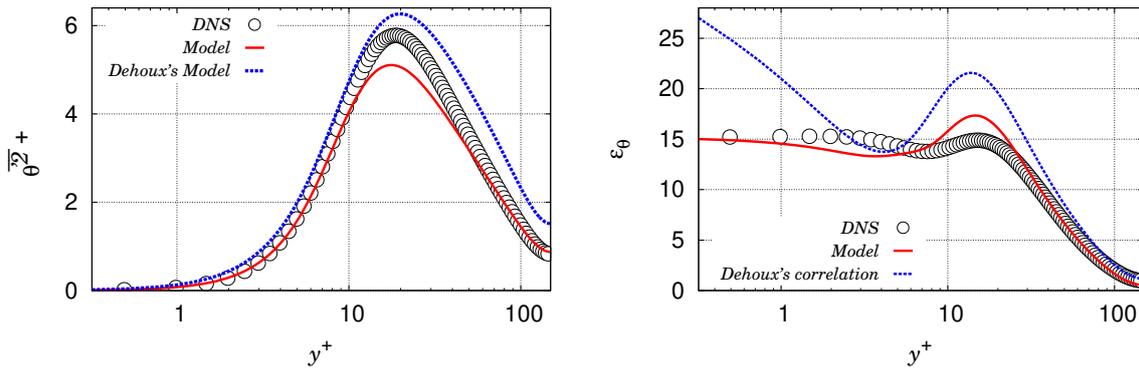


FIGURE 19. *A posteriori* temperature variance  $\overline{\theta'^2}$  (left) and its dissipation  $\varepsilon_\theta$  (right) for an **imposed temperature** at the wall.

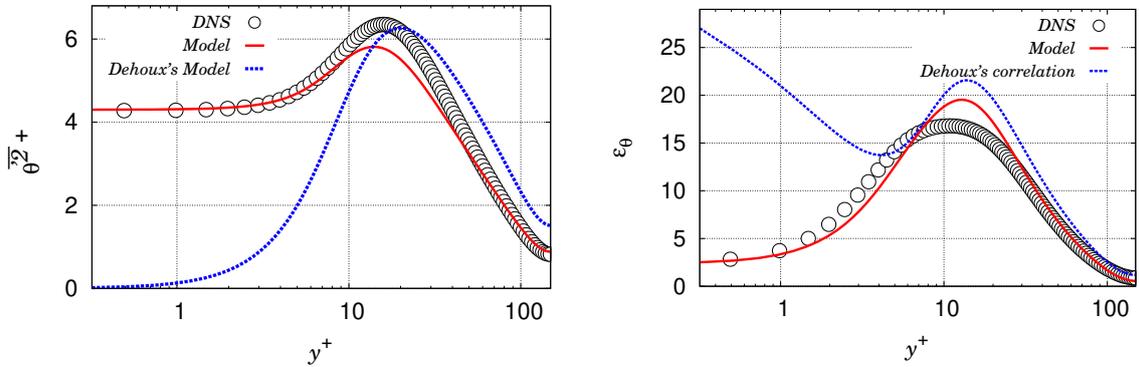


FIGURE 20. *A posteriori* temperature variance  $\overline{\theta'^2}$  (left) and its dissipation  $\varepsilon_\theta$  (right) for an **imposed heat flux** at the wall.

prediction of the turbulent heat flux that enters production, as will be shown in section 5.3.

In particular, these computations confirm that the new model for  $Y_{\varepsilon_\theta}$  is successful in reproducing the dramatic modification of the near-wall behavior of this quantity when boundary conditions are varied. This is the cornerstone of the present differential flux model, since this term is always a leading-order term, as shown in Table 6.

Finally, Fig. 25 shows the temperature variance and its dissipation rate in the solid part in the case of CHT.  $G = 1$  and  $G_2 = 1$  are the fluid-to-solid ratios of the thermal diffusivity and the thermal conductivity, respectively. A virtually perfect agreement with the DNS is obtained for  $\overline{\theta'^2}$  and  $\varepsilon_\theta$ . Since these two quantities are continuous across the interface, this good prediction is linked to the performance of the model on the fluid side. Moreover, the choice of the constant  $c_{\varepsilon_{\theta_s}}$  in Eq. 5.6 appears adequate as it drives the decrease with the distance to the interface of the dissipation in the solid, which in turn leads to the decrease of the temperature variance.

### 5.3. Turbulent heat flux

In Fig. 26, in order to confirm the favorable results obtained by *a priori* tests in section 3.4, the near-wall balance of transport equation for the turbulent heat-flux,  $D_{\theta_i}^{\nu+\kappa} + \phi_{\theta_i} - \varepsilon_{\theta_i}$ , i.e., the sum of the molecular diffusion, the scrambling and the dissipation terms, is compared with the DNS data of Flageul *et al.* (2015). As expected from the asymptotic analysis shown in section 3.3 and the *a priori* tests, the new model accurately reproduces

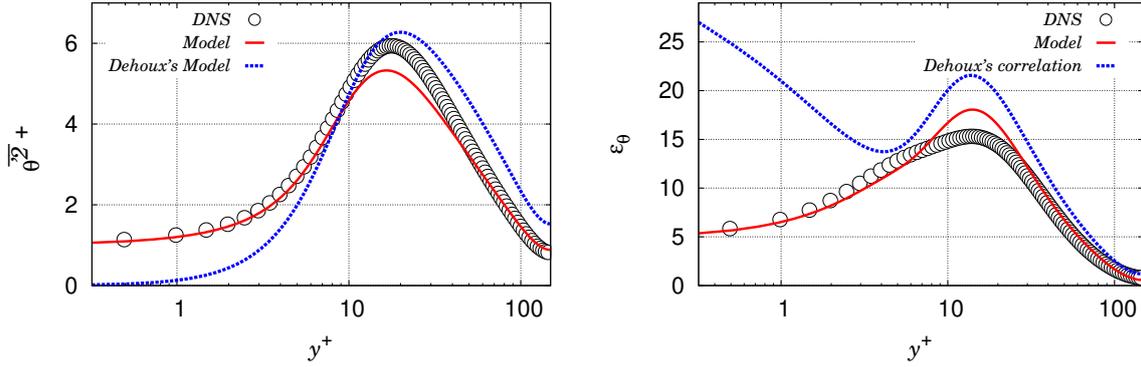


FIGURE 21. *A posteriori* temperature variance  $\overline{\theta'^2}$  (left) and its dissipation  $\varepsilon_\theta$  (right) for the **Conjugate Heat Transfer (CHT)** case.

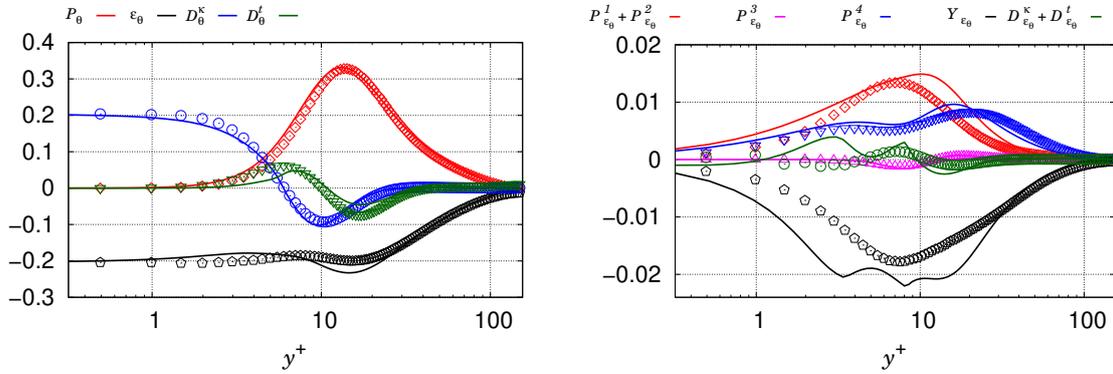


FIGURE 22. Temperature variance  $\overline{\theta'^2}$  budgets (left) and the dissipation rate  $\varepsilon_\theta$  budgets (right) for an **imposed temperature** at the wall. The symbols stand for DNS data and the solid lines represent the present model.

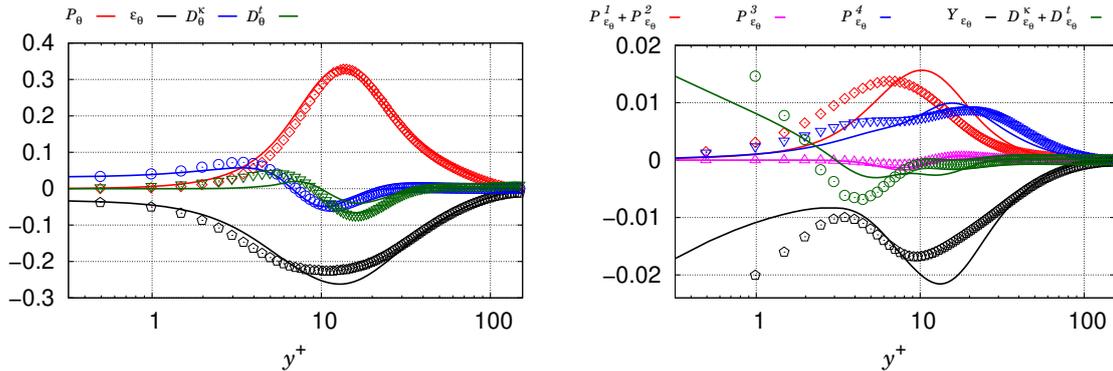


FIGURE 23. Temperature variance  $\overline{\theta'^2}$  budgets (left) and the dissipation rate  $\varepsilon_\theta$  budgets (right) for an **imposed heat flux**. The symbols stand for DNS data and the solid lines represent the present model.

the near-wall behavior of these terms, which remain dominant up to  $y^+ \simeq 5$ . These results form a solid basis for the correct reproduction of the turbulent heat flux components in the near-wall region. Surprisingly, Dehoux's model also provides good predictions in the near-wall region for an imposed heat flux and for CHT. These results seem in contradiction with the asymptotic analysis and the *a priori* tests performed in section 3.4, since the

## Extension of the elliptic blending model

33

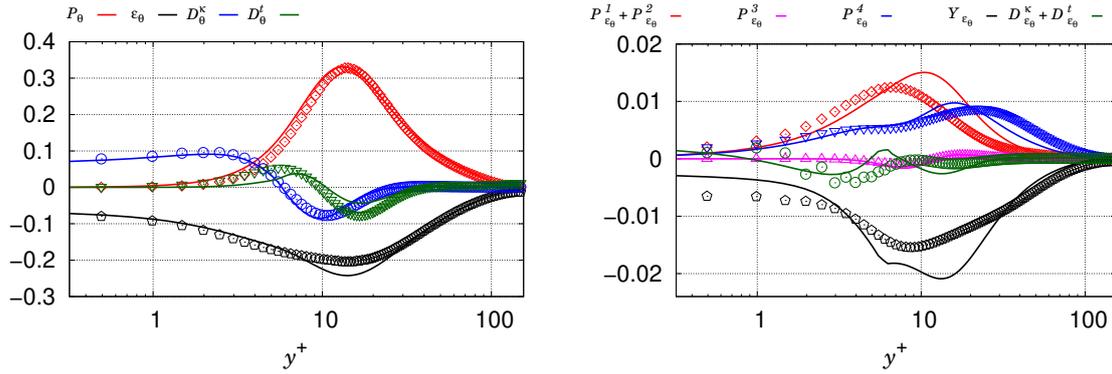


FIGURE 24. Temperature variance  $\overline{\theta'^2}$  budgets (left) and the dissipation rate  $\varepsilon_\theta$  budgets (right) for **Conjugate Heat Transfer (CHT)**. The symbols stand for DNS data and the solid lines represent the present model.

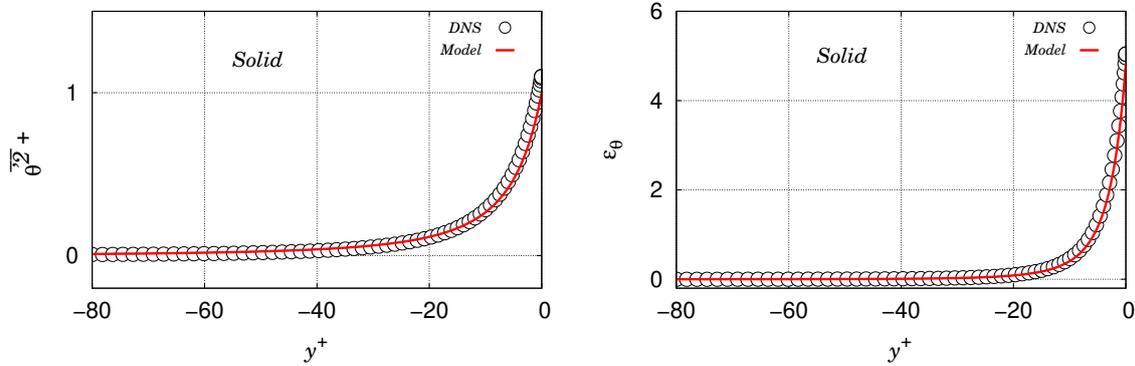


FIGURE 25. *A posteriori* temperature variance  $\overline{\theta'^2}$  (left) and its dissipation rate  $\varepsilon_\theta$  (right) in the solid part for **Conjugate Heat Transfer (CHT)**.

stream-wise component of the sum of the three terms was shown to tend to infinity at the wall. However, considering the different terms appearing in this balance separately for the stream-wise direction, Figs. 27 and 28 show that, in contrast with the new model, Dehoux's model exhibits a wrong asymptotic behavior for the dissipation term and this is compensated by a strong overestimation of molecular diffusion in the near-wall region, leading to compensation of errors.

Finally, Figs. 29, 30 and 31 show the predicted turbulent heat flux obtained with the new model and Dehoux's model against the DNS data of Flageul *et al.* (2015), which dictates the behavior of the mean temperature. Both the wall-normal and the stream-wise components of the heat flux are correctly predicted by the new model for all the thermal boundary conditions in the regions near the wall and far from the wall. In the buffer layer, the peak of  $\overline{u'\theta'}$  is underestimated in all the cases: as mentioned above, the elliptic blending strategy is designed to impose the correct behavior in the viscous sublayer, but is not sufficient to fully account for the complex evolution of the different terms in the buffer layer. The aforementioned error compensation in Dehoux's model makes it possible to obtain acceptable results, although the discrepancies are significant for the stream-wise component in the case of an imposed heat flux, and, to a lesser extent, for CHT. This appears as a minor issue in the present channel flow case, since the stream-wise heat flux  $\overline{u'\theta'}$  does not affect the mean temperature profile. However, the accurate prediction of this component will gain in importance in more complex flows.

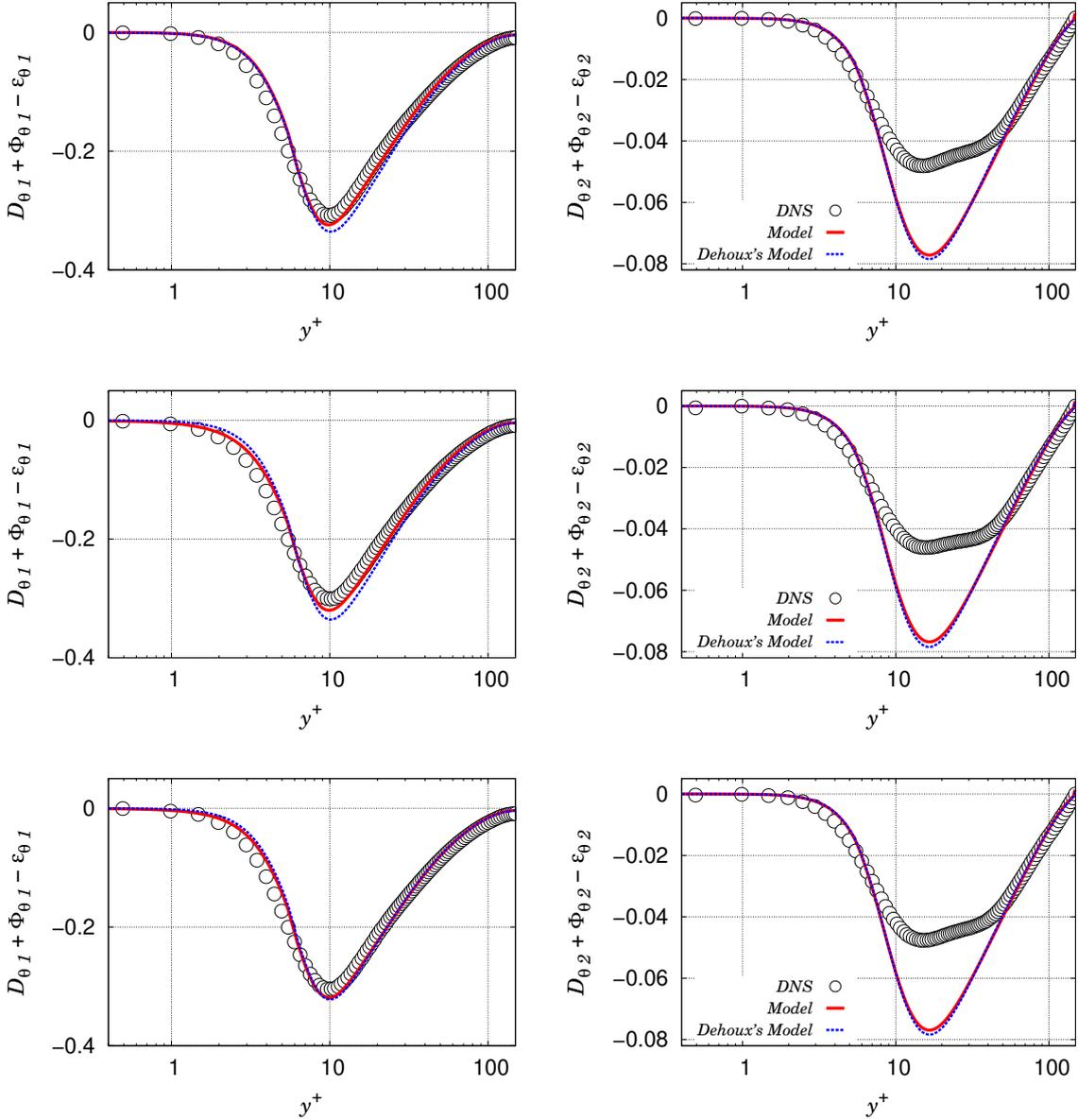


FIGURE 26. The near-wall balance  $D_{\theta_i}^{\nu+\kappa} + \phi_{\theta_i} - \varepsilon_{\theta_i}$  obtained in full computations for the three types of boundary conditions compared to DNS results from Flageul *et al.* (2015). Left: stream-wise component; Right: wall-normal component. Top: Imposed temperature; Middle: Imposed heat flux; Bottom: Conjugate Heat Transfer (CHT).

#### 5.4. Mean velocity and temperature

Figs. 32 (left) shows the non-dimensional velocity profile, which is the same for all the thermal boundary conditions in this forced convection case. It can be observed that the EB-RSM correctly reproduces the mean velocity profile, as well as the Reynolds stresses and the dissipation rate of turbulence are also correctly predicted (not shown here, see Manceau 2015 for details).

Figs. 32 (right) and 33 show the profiles of the non-dimensional temperature

$$\bar{\theta}^+ = \frac{\bar{\theta} - \bar{\theta}_w}{T_\tau} \quad (5.7)$$

for the three thermal boundary conditions. As a consequence of the accurate prediction

Extension of the elliptic blending model

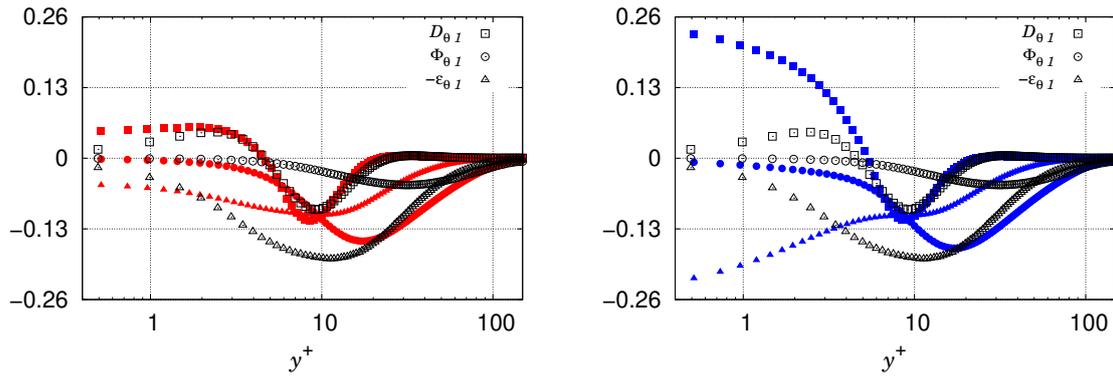


FIGURE 27. The dominant terms in the budgets of the stream-wise heat flux component for an **imposed heat flux**. Filled symbols stand for the model; empty symbols represent the DNS data. Left: New model; Right: Dehoux's model

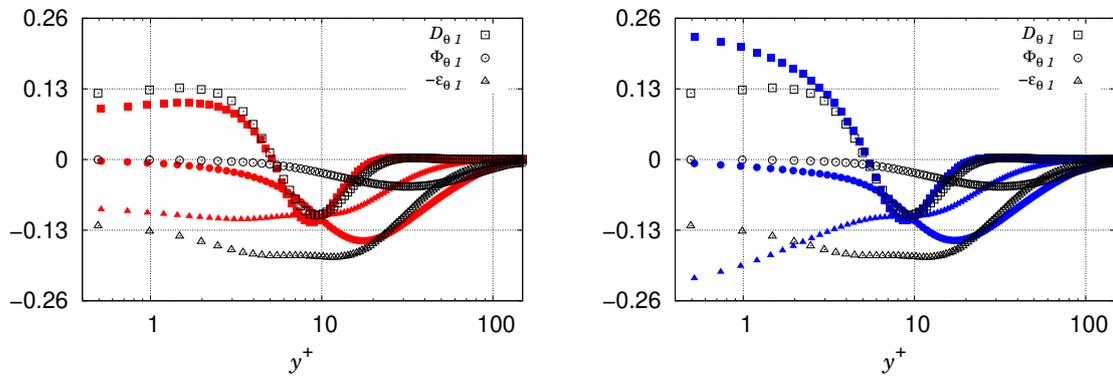


FIGURE 28. The dominant terms in the budgets of the stream-wise heat flux component for an **Conjugate Heat Transfer (CHT)**. Filled symbols stand for the model; empty symbols represent the DNS data. Left: New model; Right: Dehoux's model

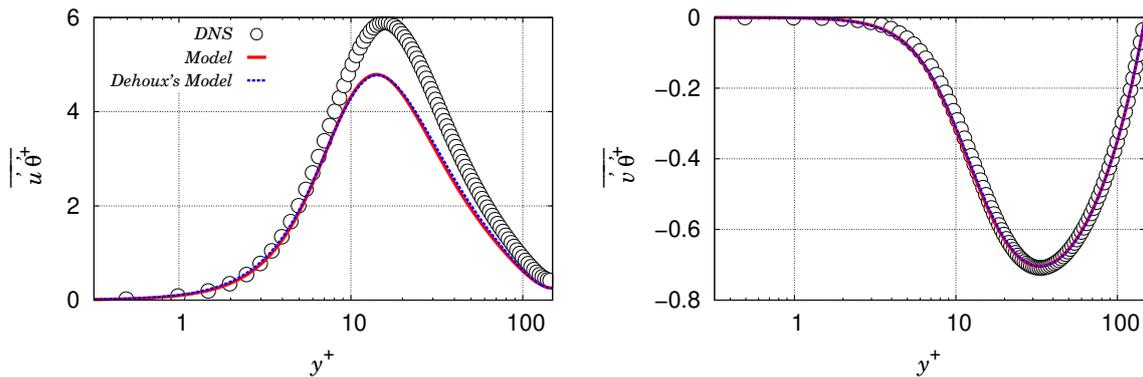


FIGURE 29. Predicted turbulent heat flux with an **imposed temperature** at the wall. Left: tangential component; Right: wall-normal component.

of the wall-normal turbulent heat flux (see Figs. 29, 30 and 31), the temperature profile is correctly reproduced for the three cases with the new model. It can be observed that the temperature profile is only marginally affected by the thermal boundary condition at the wall. Dehoux's model also gives correct results for an imposed wall temperature and CHT, but the mean temperature predicted by this model is less accurate than with the new model for an imposed heat flux. This result shows the sensitivity of the

36

G. Mangeon, S. Benhamadouche, J.-F. Wald, R. Manceau

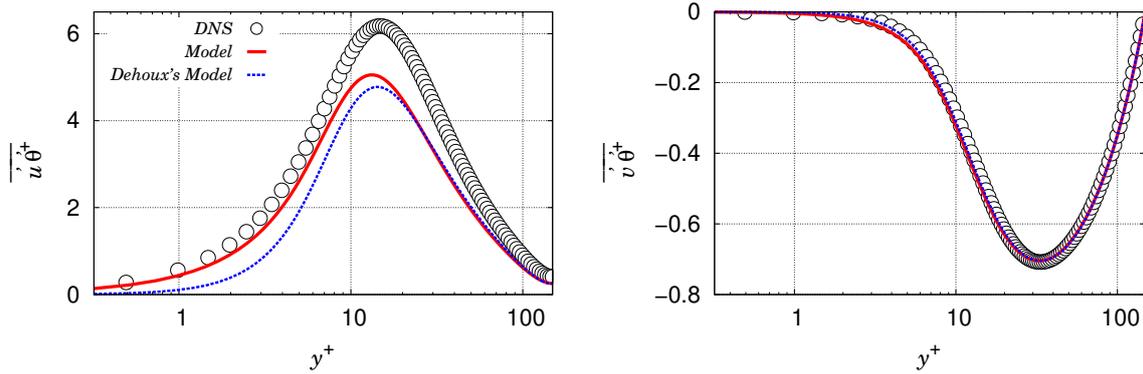


FIGURE 30. Predicted turbulent heat flux with an **imposed heat flux** at the wall. Left: tangential component; Right: wall-normal component.

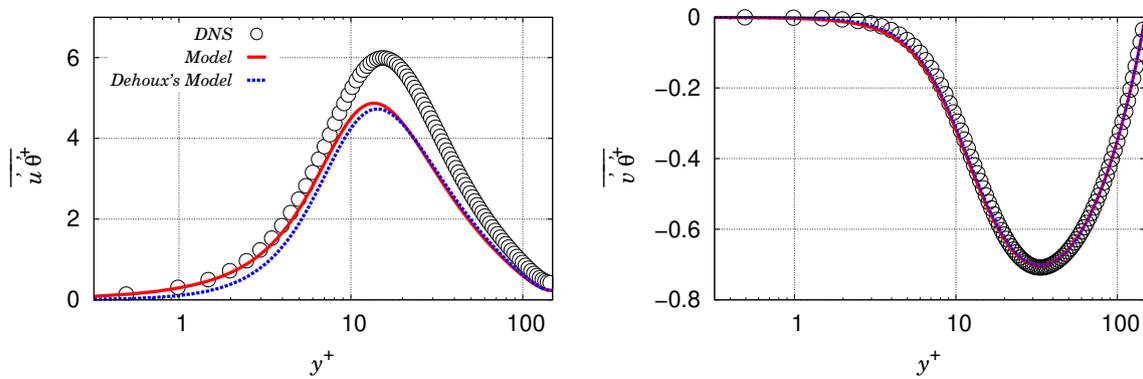


FIGURE 31. Predicted turbulent heat flux for **Conjugate Heat Transfer (CHT)**. Left: tangential component; Right: wall-normal component.

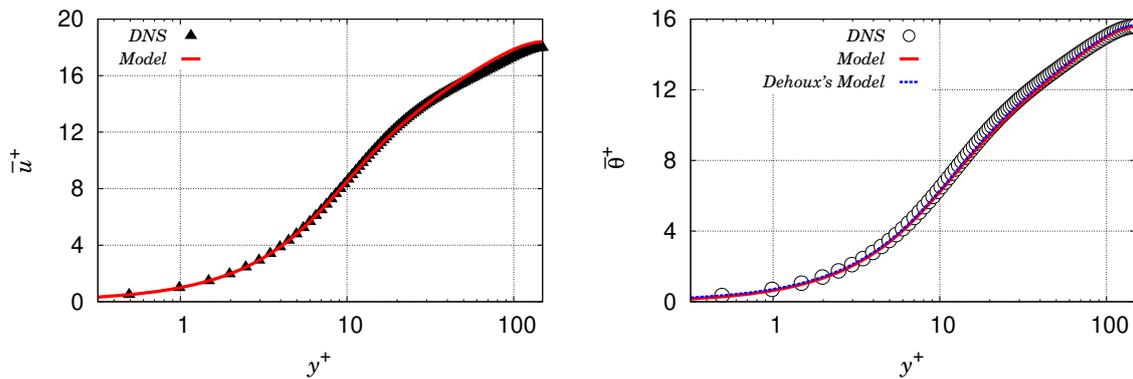


FIGURE 32. Predicted mean velocity (left) and mean temperature (right) with an **imposed temperature** at the wall.

temperature profile to small discrepancies in the near-wall prediction of the normal heat flux as observed in Fig. 30.

## 6. Conclusion

An extended version of the Differential Flux Model (DFM) of Dehoux *et al.* (2017) is proposed in order to account for any type of thermal boundary condition at the wall.

## Extension of the elliptic blending model

37

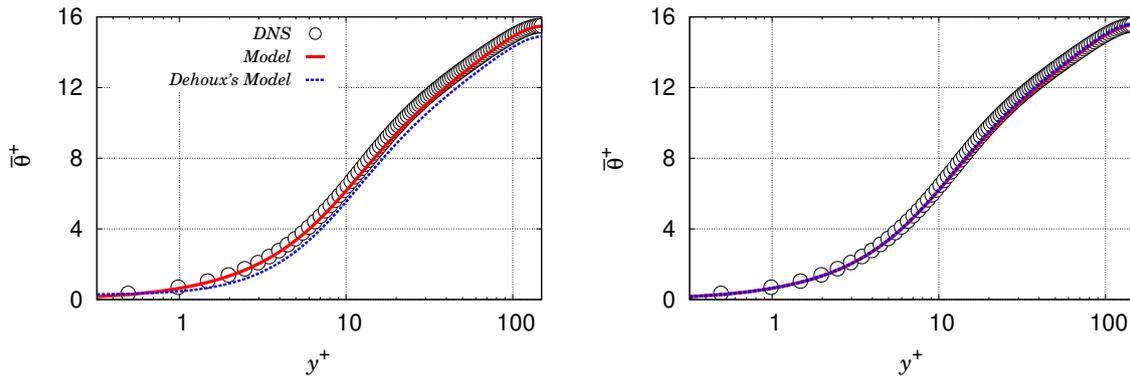


FIGURE 33. Predicted mean temperature with an **imposed heat flux** (left) and **Conjugate Heat Transfer (CHT)** (right) at the wall.

Indeed, the vanishing (imposed wall temperature) or not (imposed heat flux or CHT) of the temperature fluctuations at the wall leads to a completely different behavior of the terms of the budget of the turbulent heat flux. In order for the model to be able to adapt to the variety of boundary conditions, the key point is the use of the variable  $Pr/R$ , i.e., the ratio of the Prandtl number to the thermal-to-mechanical time-scale ratio, which goes to unity at the wall for an imposed wall temperature and to zero otherwise. As a corollary,  $R$  cannot be computed from a simple algebraic relation as in Dehoux's model, but must rather be obtained from transport equations for the temperature variance  $\overline{\theta'^2}$  and its dissipation rate  $\varepsilon_\theta$ , in such a way that the near-wall behavior of  $R$  is dependent on the boundary conditions for  $\overline{\theta'^2}$  and  $\varepsilon_\theta$ .

The extended differential flux model is then developed based on asymptotic arguments. The function  $Pr/R$  is used to sensitize the scrambling term  $\phi_{\theta_i}$  in the transport equation for the turbulent heat flux to the thermal boundary condition, by analyzing the Taylor series expansion of the solutions of the equation. It is shown that the model for the heat flux requires an asymptotically correct behavior of the predicted thermal-to-mechanical time-scale ratio, which is highly dependant on the thermal boundary condition.

Therefore, a new model for the dissipation rate  $\varepsilon_\theta$  is proposed. The major term in this model is the dissipation rate  $Y_{\varepsilon_\theta}$ : its modeling is crucial to deal with various thermal boundary conditions. To take up this challenge, in addition to  $Pr/R$ , another key parameter is used,  $\sigma_\theta/\varepsilon_\theta$ , where  $\sigma_\theta = \kappa \left( \frac{\partial \sqrt{\overline{\theta'^2}}}{\partial y} \right)^2$ . Indeed,  $Pr/R$  is not able to distinguish imposed heat flux and Conjugate Heat Transfer (CHT) conditions. Based on these two parameters, the dissipation term  $Y_{\varepsilon_\theta}$  can be sensitized to the various thermal boundary conditions. *A priori* tests show that  $\varepsilon_\theta$  is correctly modeled, which, in turn, leads to correct predictions of the temperature variance  $\overline{\theta'^2}$  and the thermal-to-mechanical time-scale ratio  $R$ .

Full computations performed with the open-source solver *Code\_Saturne* show very satisfactory results for  $\varepsilon_\theta$  and  $\overline{\theta'^2}$  for all the thermal boundary conditions. As a consequence, satisfactory predictions are obtained for the turbulent heat flux components and, in turn, the mean temperature in all the cases.

### Acknowledgements

The PhD thesis of G. Mangeon was partially supported by the ANRT (CIFRE 2017/0079) and the ANR through the project MONACO.2025 (ANR-17-CE06-0005-01 ACT). The authors are indebted to C. Flageul for providing the DNS database.

### Appendix A. Model for the Reynolds-stress (EB-RSM)

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u'_i u'_j}}{Dt} = & -\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} - \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} - g_i \beta \overline{u'_j \theta'} - g_j \beta \overline{u'_i \theta'} + \phi_{ij}^* \\ & - \varepsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{C_\mu}{\sigma_k} \overline{u'_l u'_m} \tau \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_m} \right) \end{aligned} \quad (\text{A } 1)$$

$$\varepsilon_{ij} = (1 - \alpha^3) \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} \varepsilon + \frac{2}{3} \alpha^3 \varepsilon \delta_{ij} \quad (\text{A } 2)$$

$$\phi_{ij}^* = (1 - \alpha^3) \phi_{ij}^w + \alpha^3 \phi_{ij}^h \quad (\text{A } 3)$$

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^w = & -5 \frac{\varepsilon}{k} \left[ \overline{u'_i u'_k n_j n_k} + \overline{u'_j u'_k n_i n_k} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \overline{u'_k u'_l n_k n_l} (n_i n_j + \delta_{ij}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A } 4)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \alpha}{\|\nabla \alpha\|} \quad (\text{A } 5)$$

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^h = & - \left( g_1 + g_1^* \frac{P_k}{\varepsilon} \right) \varepsilon b_{ij} + \left( g_3 - g_3^* \sqrt{b_{kl} b_{kl}} \right) k S_{ij} \\ & + g_4 k \left( b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{lm} S_{lm} \delta_{ij} \right) \\ & + g_5 k (b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}) - g_6 \left( G_{ij} - \frac{2}{3} G_k \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (\text{A } 6)$$

$$g_1 = 3.4; g_1^* = 1.8; g_3 = 0.8; g_3^* = 1.3;$$

$$g_4 = 1.25; g_5 = 0.4; g_6 = 0.5 \quad (\text{A } 7)$$

$$b_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{2k} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (\text{A } 8)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right); \quad W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A } 9)$$

$$\alpha - L^2 \nabla^2 \alpha = 1 \quad (\text{A } 10)$$

## Extension of the elliptic blending model

39

$$L = C_L \max \left( \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}} \right) \quad (\text{A } 11)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} = & C'_{\varepsilon_1} \frac{P_k}{\tau} - C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon}{\tau} + C_{\varepsilon_3} \frac{\sqrt{Pr} G_k}{\sqrt{R} \tau} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \overline{u_l u_m} \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_m} \right) + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_k \partial x_k} \end{aligned} \quad (\text{A } 12)$$

$$\tau = \max \left( \frac{k}{\varepsilon}, C_T \left( \frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \right) \quad (\text{A } 13)$$

$$C'_{\varepsilon_1} = C_{\varepsilon_1} \left[ 1 + A_1 (1 - \alpha^3) \frac{P_k}{\varepsilon} \right] \quad (\text{A } 14)$$

$$P_k = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \quad (\text{A } 15)$$

$$G_k = -\beta \overline{u'_i \theta'} g_i \quad (\text{A } 16)$$

$$C_\mu = 0.21; \sigma_k = 1.0; C_T = 6.0; C_L = 0.125;$$

$$C_\eta = 80.0; C_{\varepsilon_1} = 1.44; C_{\varepsilon_2} = 1.83;$$

$$C_{\varepsilon_3} = 2.02; A_1 = 0.1; \sigma_\varepsilon = 1.15 \quad (\text{A } 17)$$

## Appendix B. Model for the turbulent heat flux (EB-DFM)

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u'_i \theta'}}{Dt} = & -\overline{u'_k \theta'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} - \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} - \beta g_i \overline{\theta'^2} \\ & + \phi_{\theta i}^* - \varepsilon_{\theta i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( C_\theta \overline{u'_k u'_l} \tau \frac{\partial \overline{u'_i \theta'}}{\partial x_l} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\kappa + \nu}{2} \frac{\partial \overline{u'_i \theta'}}{\partial x_k} + n_i n_j \frac{\nu - \kappa}{6} \frac{\partial \overline{u'_j \theta'}}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (\text{B } 1)$$

$$\varepsilon_{\theta i} = (1 - \alpha_\theta) \varepsilon_{\theta i}^w + \alpha_\theta \varepsilon_{\theta i}^h \quad (\text{B } 2)$$

$$\varepsilon_{\theta i}^w = \gamma \frac{1}{\mathcal{T}} C_\varepsilon \left[ 1 + C_{w\theta}^\varepsilon (1 - \alpha_\theta) \frac{P_k + G_k}{\varepsilon} \right] \left( \overline{u'_i \theta'} + \overline{u'_j \theta'} n_i n_j \right) \quad (\text{B } 3)$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R}} \quad (\text{B } 4)$$

$$\varepsilon_{\theta i}^h = 0 \quad (\text{B } 5)$$

$$\phi_{\theta i}^* = (1 - \alpha_\theta) \phi_{\theta i}^w + \alpha_\theta \phi_{\theta i}^h \quad (\text{B6})$$

$$\phi_{\theta i}^h = -\frac{\sqrt{R^h}}{\sqrt{R}\mathcal{T}} C_{1\theta} \overline{u'_i \theta'} + C_{2\theta} \overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + C_{3\theta} \beta g_i \overline{\theta'^2} \quad (\text{B7})$$

$$\phi_{\theta i}^w = -\beta \frac{1}{\mathcal{T}} \left[ 1 + C_{w\theta}^\phi (1 - \alpha_\theta) \frac{P_k + G_k}{\varepsilon} \right] \overline{u'_j \theta'} n_i n_j \quad (\text{B8})$$

$$\beta = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{1}{Pr} + \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R}} \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) \quad (\text{B9})$$

$$C_\theta = 0.22; C_{w\theta}^\phi = 2; C_{w\theta}^\varepsilon = -0.3 \quad (\text{B10})$$

$$\alpha_\theta - L_\theta^2 \nabla^2 \alpha_\theta = 1 \quad (\text{B11})$$

$$L_\theta = 2.5L \quad (\text{B12})$$

$$R = \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}_\theta}; \mathcal{T}_\theta = \frac{\overline{\theta'^2}}{2\varepsilon_\theta};$$

$$\mathcal{T} = \frac{k}{\varepsilon}; C_\varepsilon = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{Pr} \right); C_{1\theta} = 4.15;$$

$$C_{2\theta} = 0.3; C_{3\theta} = 0.5 \quad (\text{B13})$$

### Appendix C. Model for the temperature variance

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{\theta'^2}}{Dt} &= -2\overline{u'_k \theta'} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} - 2\varepsilon_\theta + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_k} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_k} \left( C_{\theta\theta} \overline{u'_k u'_l \tau} \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_l} \right) \end{aligned} \quad (\text{C1})$$

$$\tau = \max \left( \mathcal{T}, C_{T_{\theta'^2}} \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} \right) \quad (\text{C2})$$

$$C_{\theta\theta} = 0.21; C_{T_{\theta'^2}} = 6.0 \quad (\text{C3})$$

### Appendix D. Model for the dissipation rate of the temperature variance

$$\begin{aligned}
\frac{D\varepsilon_\theta}{Dt} = & -\frac{2}{1+Pr}\varepsilon_{\theta j}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_j} \\
& -c_{\varepsilon\theta 1}\varepsilon_{\theta j}K\frac{\partial\bar{U}_j}{\partial x_k} \\
& +\kappa\left(Cp_4\overline{u'_j u'_k}\frac{k}{\varepsilon}f_R\frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial x_k\partial x_l}\frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial x_l\partial x_j}+Cp_3\frac{k}{\varepsilon}f_R\frac{\partial\overline{u'_j u'_l}}{\partial x_k}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_l}\frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial x_j\partial x_k}\right) \\
& +\frac{\partial}{\partial x_j}\left(c_s\overline{u'_j u'_k}\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial x_k}\right) \\
& +\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\kappa\frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon_\theta\right) \\
& + (1-\alpha_\theta)(P_{\varepsilon_\theta}^w - Y_{\varepsilon_\theta}^w) + \alpha_\theta(P_{\varepsilon_\theta}^h - Y_{\varepsilon_\theta}^h)
\end{aligned} \tag{D1}$$

$$\varepsilon_{ij}^\theta = (1-\alpha_\theta)\varepsilon_{ij}^{\theta w} + \alpha_\theta\varepsilon_{ij}^{\theta h}, \tag{D2}$$

where

$$\varepsilon_{ij}^{\theta h} = \frac{2}{3}\varepsilon_\theta\delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij}^{\theta w} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k}\varepsilon_\theta. \tag{D3}$$

$$P_{\varepsilon_\theta}^4 - Y_{\varepsilon_\theta} = (1-\alpha_\theta)(P_{\varepsilon_\theta}^w - Y_{\varepsilon_\theta}^w) + \alpha_\theta(P_{\varepsilon_\theta}^h - Y_{\varepsilon_\theta}^h), \tag{D4}$$

$$P_{\varepsilon_\theta}^h = c_{\varepsilon_\theta}^{h1}\frac{\varepsilon_\theta}{k}P_k + c_{\varepsilon_\theta}^{h2}\frac{\varepsilon}{k}P_\theta, \tag{D5}$$

$$Y_{\varepsilon_\theta}^h = c_H\frac{\varepsilon_\theta}{\tau_\theta}. \tag{D6}$$

$$P_{\varepsilon_\theta}^w = c_{\varepsilon_\theta}^{w1}\left[1 - c_{\varepsilon_\theta}^{w2}(1-\alpha_\theta)\frac{P_k}{\varepsilon}\right]\frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta}\frac{\varepsilon_\theta}{\sqrt{\mathcal{T}}\mathcal{T}_\theta}. \tag{D7}$$

$$\begin{aligned}
Y_{\varepsilon_\theta}^w = & \left[\left(1 - \sqrt{\frac{Pr}{R}}\right)\left(1 - c_w(1-\alpha_\theta)\frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta}\right)\left(c_N - \frac{\sigma_\theta}{\varepsilon_\theta}c_C\right)\right. \\
& \left.+ c_D\sqrt{\frac{Pr}{R}}\right]\frac{\varepsilon_\theta}{\sqrt{\tau_{\varepsilon_\theta}}\tau_\theta}\sqrt{\frac{\mathcal{T}_\theta}{\tau_\theta}}.
\end{aligned} \tag{D8}$$

$$\sigma_\theta = \kappa\left(\frac{\partial\sqrt{\theta'^2}}{\partial y}\right)^2, \tag{D9}$$

$$\tau_\theta = \max\left(\mathcal{T}_\theta, C_{T_\theta}\sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}}\frac{1}{Pr}\right), \tag{D10}$$

$$\tau_{\varepsilon_\theta} = \max\left(\mathcal{T}, C_{\mathcal{T}}\sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}}\right), \tag{D11}$$

---

$c_{\varepsilon\theta 1}$	$c_{\varepsilon\theta}^{h1}$	$c_{\varepsilon\theta}^{h2}$	$c_{\varepsilon\theta}^{w1}$	$c_{\varepsilon\theta}^{w2}$	$Cp_3$	$Cp_4$	$f_R$	$c_s$
1.4	2.52	2.88	2	0.75	0.15	0.28	$f_R = \frac{2R}{0.5+R}$	0.22

---



---

$c_N$	$c_C$	$c_D$	$c_w$	$c_H$	$c_{T\theta}$	$c_{T_C}$	$c_{T_D}$	$c_{T_N}$
7.08	15.96	4.802	1.8	2.7	5.13	26.25	5.4	0.025

---

$$C_T = \left(1 - \sqrt{\frac{Pr}{R}}\right) \left(c_{T_N} + \frac{\sigma_\theta}{\varepsilon_\theta} c_{T_C}\right) + c_{T_D} \sqrt{\frac{Pr}{R}}. \quad (\text{D } 12)$$

## REFERENCES

- ABE, H., KAWAMURA, H. & MATSUO, Y. 2004 Surface heat-flux fluctuations in a turbulent channel flow up to  $re=1020$  with  $pr=0.025$  and  $0.71$ . *Int. J. Heat Fluid Fl.* **25** (3), 404–419, turbulence and Shear Flow Phenomena (TSFP-3).
- ANGELINO, M., GOLDSTEIN, R.J. & GORI, F. 2019 Lateral edge effects on heat/mass transfer on a finite width surface within a turbulent boundary layer. *Int. J. Heat Mass Tran.* **138**, 32–40.
- ARCHAMBEAU, F., MÉCHITOUA, N. & SAKIZ, M. 2004 *code\_saturne*: a finite volume code for the computation of turbulent incompressible flows. *Industrial Applications, International Journal on Finite Volumes* **1**.
- BENHAMADOUCHE, S., AFGAN, I. & MANCEAU, R. 2019 Numerical simulations of flow and heat transfer in a wall bounded pin matrix. *Flow Turbul. Combust.* In press.
- BILLARD, F. & LAURENCE, D. 2012 A robust  $k - \varepsilon - v^2/k$  elliptic blending turbulence model applied to near-wall, separated and buoyant flows. *Int. J. Heat Fluid Fl.* **33** (1), 45–58.
- CHOI, S.-K., HAN, J.-W. & CHOI, H.-K. 2018 Performance of second-moment differential stress and flux models for natural convection in an enclosure. *Int. Commun. Heat Mass Transfer* **99**, 54–61.
- CHOI, S. K. & KIM, S. O. 2008 Treatment of turbulent heat fluxes with the elliptic-blending second-moment closure for turbulent natural convection flows. *Int. J. Heat Mass Tran.* **51** (9), 2377–2388.
- CRAFT, T., IACOVIDES, H. & UAPIPATANAKUL, S. 2010 Towards the development of rans models for conjugate heat transfer. *J. Turbul.* **11**, N26, arXiv: <https://doi.org/10.1080/14685248.2010.494608>.
- CRAFT, T.J., INCE, N.Z. & LAUNDER, B.E. 1996 Recent developments in second-moment closure for buoyancy-affected flows. *Dyn. Atmos. Oceans* **23** (1), 99–114, stratified flows.
- DALY, B. J. & HARLOW, F. H. 1970 Transport equations in turbulence. *Physics of Fluids* **13**, 2634–2649.
- DEHOUX, F. 2012 Modélisation statistique des écoulements turbulents en convection forcée, mixte et naturelle. PhD thesis, Université de Poitiers.
- DEHOUX, F., BENHAMADOUCHE, S. & MANCEAU, R. 2017 An elliptic blending differential flux model for natural, mixed and forced convection. *Int. J. Heat Fluid Fl.* **63**, 190–204.

## Extension of the elliptic blending model

43

- DOVIZIO, D., SHAMS, A. & ROELOFS, F. 2019 Numerical prediction of flow and heat transfer in an infinite wire-wrapped fuel assembly. *Nucl. Eng. Des.* **349**, 193–205.
- DURBIN, P. A. 1991 Near-wall turbulence closure modeling without “damping functions”. *Theor. Comp. Fluid Dyn.* **3** (1), 1–13.
- FLAGEUL, C., BENHAMADOUCHE, S., LAMBALLAIS, E. & LAURENCE, D. 2015 Dns of turbulent channel flow with conjugate heat transfer: Effect of thermal boundary conditions on the second moments and budgets. *Int. J. Heat Fluid Fl.* **55**, 34–44, special Issue devoted to the 10th Int. Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements (ETMM10) held in Marbella, Spain on September 17-19, 2014.
- FLAGEUL, C., BENHAMADOUCHE, S., LAMBALLAIS, E. & LAURENCE, D. 2017 On the discontinuity of the dissipation rate associated with the temperature variance at the fluid-solid interface for cases with conjugate heat transfer. *Int. J. Heat Mass Tran.* **111**, 321–328.
- HANJALIĆ, K. 2002 One-point closure models for buoyancy-driven turbulent flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **34**, 321–347.
- HANJALIĆ, K. & LAUNDER, B.E. 2011 *Modelling Turbulence in Engineering and the Environment. Second-Moment Routes to Closure*. Cambridge University Press.
- HOWARD, R. & SERRE, E. 2015 Large-eddy simulation in a mixing tee junction: High-order turbulent statistics analysis. *Int. J. Heat Fluid Fl.* **51**, 65–77, theme special issue celebrating the 75th birthdays of Brian Launder and Kemo Hanjalic.
- HOWARD, R. & SERRE, E. 2017 Large eddy simulation in *code\_saturne* of thermal mixing in a T junction with brass walls. *Int. J. Heat Fluid Fl.* **63**, 119–127.
- JONES, W.P. & MUSONGE, P. 1988 Closure of the reynolds stress and scalar flux equations. *Phys. Fluids* **31**, 3589–3604.
- KASAGI, N., KASAGI, N. & KURODA, A. 1992 Direct numerical simulation of passive scalar field in a turbulent channel flow. *J. Heat Transf.* **114**, 598–606.
- KASAGI, N., KURODA, A. & HIRATA, M. 1989 Numerical investigation of near-wall turbulent heat transfer taking into account the unsteady heat conduction in the solid wall. *J. Heat Transf.* **111**, 385–392.
- LAUNDER, B. E. 1988 On the computation of convective heat transfer in complex turbulent flows. *J. Heat Transf.* **110**, 1112–1128.
- MANCEAU, R. 2015 Recent progress in the development of the elliptic blending reynolds-stress model. *Int. J. Heat Fluid Fl.* **51**, 195–220, theme special issue celebrating the 75th birthdays of Brian Launder and Kemo Hanjalic.
- MANCEAU, R. & HANJALIĆ, K. 2002 Elliptic blending model: A new near-wall reynolds-stress turbulence closure. *Phys. Fluids* .
- MANCEAU, R., PARNEIX, S. & LAURENCE, D. 2000 Turbulent heat transfer predictions using the  $v^2 - f$  model on unstructured meshes. *Int. J. Heat Fluid Fl.* **21** (3), 320–328.
- NAGANO, Y. 2002 Modelling heat transfer in near-wall flows. *Closure Strategies for Turbulent and Transitional Flows* .
- NEWMAN, G. R., LAUNDER, B. E. & LUMLEY, J. L. 1981 Modelling the behaviour of homogeneous scalar turbulence. *J. Fluid Mech.* **111**, 217–232.
- PARNEIX, S., BEHNIA, M. & DURBIN, P. A. 1998 Predictions of turbulent heat transfer in an axisymmetric jet impinging on a heated pedestal. *J. Heat Transf.* **120**, 1–7, cited By :4.
- SHIKAZONO, N. & KASAGI, N. 1996 Second-moment closure for turbulent scalar transport at various prandtl numbers. *Int. J. Heat Mass Tran.* **39** (14), 2977–2987.
- SHIN, J. K., AN, J. S., CHOI, Y. D., KIM, Y. C. & KIM, M. S. 2008 Elliptic relaxation second moment closure for the turbulent heat fluxes. *J. Turbul.* **9**, 1–29.
- SOMMER, T. P., SO, R. M. C. & ZHANG, H. S. 1994 Heat Transfer Modeling and the Assumption of Zero Wall Temperature Fluctuations. *J. Heat Transf.* **116** (4), 855–863.
- SPALDING, D.B. 1971 Concentration fluctuations in a round turbulent free jet. *Chem. Eng. Sci.* **26** (1), 95–107.
- SPEZIALE, C. G., SARKAR, S. & GATSKI, T. B. 1991 Modelling the pressurestrain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach. *J. Fluid Mech.* **227**, 245–272.
- TISELJ, I., BERGANT, R., MAVKO, B., BAJSIĆ, I. & HETSRONI, G. 2001 Dns of turbulent heat transfer in channel flow with heat conduction in the solid wall. *J. Heat Transf.* **123**, 849–857.

44 *G. Mangeon, S. Benhamadouche, J.-F. Wald, R. Manceau*

YANG, G., IACOVIDES, H., CRAFT, T. & APSLEY, D. 2019 RANS modelling for temperature variance in conjugate heat transfer. In *Proc. 5th World congress on Mechanical, Chemical, and Material Engineering, Lisbon, Portugal*.